



HAL
open science

Modélisation de la dégradation, maintenance conditionnelle et pronostic : usage des processus de diffusion

Houda Ghamlouch

► **To cite this version:**

Houda Ghamlouch. Modélisation de la dégradation, maintenance conditionnelle et pronostic : usage des processus de diffusion. Recherche opérationnelle [math.OA]. Université de Technologie de Troyes, 2016. Français. NNT : 2016TROY0019 . tel-03361886

HAL Id: tel-03361886

<https://theses.hal.science/tel-03361886v1>

Submitted on 1 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse
de doctorat
de l'UTT

Houda GHAMLOUCH

**Modélisation de la dégradation,
maintenance conditionnelle
et pronostic :
usage des processus de diffusion**

Spécialité :
Optimisation et Sécurité des Systèmes

2016TROY0019

Année 2016

THESE

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR de l'UNIVERSITE
DE TECHNOLOGIE DE TROYES**
Spécialité : OPTIMISATION ET SURETE DES SYSTEMES

présentée et soutenue par

Houda GHAMLOUCH

le 21 juin 2016

**Modélisation de la dégradation, maintenance conditionnelle
et pronostic : usage des processus de diffusion**

JURY

M. A. SEN	PROFESSOR	Président
M. B. CASTANIER	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Rapporteur
M. S. ERYILMAZ	PROFESSOR	Examineur
Mme M. FOULADIRAD	MAITRE DE CONFERENCES - HDR	Directeur de thèse
Mme A. GEGOUT-PETIT	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Rapporteur
M. A. GRALL	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Directeur de thèse
M. W. Q. MEEKER	DISTINGUISHED PROFESSOR	Examineur

Remerciement

Ce mémoire est le résultat d'un travail de recherche de près de trois ans. En préambule, je veux adresser tous mes remerciements aux personnes avec lesquelles j'ai pu échanger et qui m'ont aidé pour la rédaction de ce mémoire.

En commençant par remercier tout d'abord Mme. Mitra Fouladirad et M. Antoine Grall, mes directeurs de thèse, pour leurs aides précieuses et le temps qu'ils m'ont consacré. Leur encouragement et leur assistance aussi bien matérielle que morale m'ont permis d'accomplir cette thèse dans les meilleures conditions.

Je voudrais également remercier Mme. Anne Gégout-Petit et M. Bruno Castanier d'avoir accepté de relire cette thèse et d'en être rapporteurs. La version finale de ce mémoire a bénéficié de leur lecture très attentive et de leurs remarques précieuses. Je tiens à remercier M. Ananda Sen d'avoir accepté d'être président du jury. Je remercie également M. William Q. Meeker et M. Serkan Erylimaz d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce travail.

Je tiens à remercier Mme. Pascale Denis, Mme. Isabelle Leclercq, Mme. Thérèse Kazarian, Mme. Marie-José Rousselet, Mme. Véronique Banse et Mme. Bernadette André pour leur accueil et leur soutien pendant mon travail à l'UTT et mon séjour en France.

J'adresse également mes remerciements à Danh Nogh Nguyen, Kim Anh Nguyen, Yingjun Deng, Dinh Tuan Nguyen, Tuan Huynh, Elias Khoury, Khanh Le Son, mes collègues au Labo LM2S, pour la qualité de leur travail et leur bonne humeur à toute épreuve.

Je voudrais remercier aussi toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à mes recherches et à l'élaboration de ce mémoire.

Ce travail n'aurait jamais été réalisé sans le financement du Conseil Régional de Champagne-Ardenne (CRAC) et le Fonds européen de développement régional (FEDER) dans le cadre du projet RISK PERFORM. Dans ce cadre j'aimerais les remercier pour leur contribution à la réussite de ce projet.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille : Mes parents, mes sœurs, mon frère, mon cousin et mon cher mari ainsi que tous mes proches et amis, qui m'ont accompagné, aidé, soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Résumé

Aujourd'hui la prédiction des défaillances de certains systèmes industriels est devenue indispensable pour l'amélioration de la fiabilité et de la rentabilité de ces derniers. Cette prédiction s'appuie principalement sur l'analyse d'évolution du niveau de dégradation du système. Pour les systèmes dont l'état de détérioration n'est pas directement observable, la définition d'indicateurs de santé mesurables est nécessaire. Une modélisation du processus de dégradation à partir de ces données peut être ensuite effectuée.

Dans cette thèse, nous considérons un ensemble d'indicateurs non-monotones pour un système opérant dans un environnement dynamique. Compte tenu des principales caractéristiques des données ainsi que de l'impact des conditions environnementales et de leur instabilité, une modélisation stochastique de l'évolution de ces indicateurs est proposée. Les modèles proposés se basent principalement sur une combinaison d'un processus de Wiener et de processus de sauts. Les motivations, les méthodes de calibration, l'utilité et les limites de chaque modèle sont discutées. Nous proposons ensuite une approche pour l'aide à la décision concernant les actions de maintenance préventive. Cette approche consiste à évaluer la valeur d'une option réelle qui présente la possibilité d'«Attendre avant d'Agir» suite à un signal d'avertissement sur une défaillance probable. Une application de cette approche pour le cas d'une éolienne équipée d'un système de surveillance et de gestion est traitée.

Mots clés : Processus stochastiques, Maintenance conditionnelle, Mouvement brownien, Processus de Poisson, Prise de décision, Processus de Lévy, Processus de diffusion.

Abstract

A major concern for engineers and managers nowadays is to make high quality products and highly reliable systems. In this context, reliability analysis and failure prediction, besides of efficient maintenance decision-making are strongly required. Deterioration modeling and analysis is a fundamental step for the understanding and the anticipation of system behavior. Consider a functional system operating in unstable conditions or environment where the deterioration level is not observable and could not be determined by direct measures. For this system a set of measurable health indicator that indirectly reflects the system working conditions and deterioration level can be defined and examined. Considering these indicators, the development of a mathematical model describing the system behavior is required.

In this thesis, we consider a set of non-monotone indicators evolving in a dynamic environment. Taking into account the major features of the data evolution as well as the impact of dynamic environment consequences and potential shocks, stochastic models based on Wiener and jump processes are proposed for these indicators. Each model is calibrated and tested, and their limits are discussed. A decision-making approach for preventive maintenance strategies is then proposed. In this approach, knowing the RUL of the system, a simulation-based real options analysis is used in order to determine the best date to maintain. Considering a case study of a wind turbine with PHM structure, the decision optimization approach is described.

Keywords :Stochastic processes, Condition-Based Maintenance, Brownian movements, Poisson processes, Decision making, Levy processes, Diffusion processes.

”Ce que nous appelons hasard n’est et ne peut être que la cause ignorée d’un effet connu. .”

” Voltaire ”

Table des matières

Introduction	1
1 Modélisation et gestion des phénomènes aléatoires	5
1.1 Quelques définitions utiles	6
1.1.1 Processus stochastique	6
1.1.2 Processus de Markov	7
1.1.3 Processus de Lévy	7
1.2 Généralités sur les modèles avec mémoires	8
1.2.1 Modèles Linéaires	9
1.2.2 Modèles Non-Linéaires	11
1.2.3 Exemples sur les modèles autorégressifs	13
1.3 Généralité sur les modèles sans Mémoires	15
1.3.1 Chaîne de Markov	15
1.3.2 Processus de Poisson	17
1.3.3 Processus Gamma	19
1.3.4 Processus de Wiener (Mouvement Brownien)	21
1.3.5 Exemples sur les processus stochastiques markoviens	25
1.4 Modèles Dérivés des Processus de Lévy	25
1.4.1 Mouvement Brownien Géométrique	26
1.4.2 Modèle de diffusion avec sauts	28
1.4.3 Modèle à volatilité stochastique	38
1.4.4 Modèle à volatilité stochastique avec sauts	42
1.5 Analyse proactive et gestion de risque	43
1.5.1 La valeur en jeu : VaR	44
1.5.2 Les "Options" et leur évaluation	45
1.5.3 Pronostic et maintenance	47
1.6 Conclusion	53
2 Caractérisation des données	55
2.1 Représentation des données	55
2.2 Traitement préliminaire	58
2.3 Hypothèse de normalité	62
2.4 Distributions des log-incréments	70

2.5	Étude de la volatilité	78
2.6	Tests d'autocorrélation et de Hinich	85
2.7	Conclusion	92
3	Modélisation du processus	93
3.1	Pourquoi les modèles de diffusion avec sauts ?	94
3.2	Modèle de diffusion avec sauts à paramètres constants	94
3.2.1	Méthode de calibration	97
3.2.2	Résultats de la calibration	100
3.3	Modèle de diffusion avec sauts à changement de régime	105
3.3.1	Covariable environnementale	106
3.3.2	Modèle JDU à trois régimes d'évolution : 3RS-JDU	108
3.3.3	Tests d'adéquation et d'utilité des modèles RS-JDU	114
3.4	Modèle de diffusion avec sauts à volatilité stochastique : SV-JD	122
3.4.1	Méthodes de Calibration	124
3.4.2	Tests des méthodes de calibration	132
3.4.3	Résultats empiriques	134
3.5	Conclusion	138
4	Options réelles et aide à la décision pour la maintenance des turbines éoliennes	139
4.1	Position du problème	140
4.2	Stratégies de maintenance traditionnelles	143
4.2.1	Maintenance corrective	144
4.2.2	Maintenance périodique	144
4.2.3	Maintenance conditionnelle et prédictive	146
4.3	Approche pour l'optimisation de la décision	146
4.3.1	Modèles et hypothèses	147
4.3.2	Option réelle : "Attendre avant d'Agir"	152
4.3.3	Évaluation de l'option	153
4.4	Application de l'approche sur un cas test	157
4.5	Conclusion	163
	Bibliographie	169

Introduction

Dans les activités industrielles, la confiance de l'utilisateur dans le service assuré par un système donné dépend principalement de la capacité de ce système à remplir une ou plusieurs fonctions. Malgré une conception de plus en plus développée des systèmes industriels, parfois associée à une nécessité de réglages pointus, les risques d'accidents, de pannes ou de dysfonctionnements perdurent. Les accidents dus à des défaillances matérielles ou à des erreurs humaines peuvent avoir de graves conséquences au niveau de la qualité de service, de la production, de la sûreté ou de la sécurité. D'une façon globale, la mesure de performance d'un système donné peut être liée aux différents critères de sûreté de fonctionnement. D'après [Zwingelstein \(2009\)](#) "la sûreté de fonctionnement consiste à connaître, évaluer, prévoir, mesurer et maîtriser les défaillances des systèmes technologiques et les défaillances humaines pour éviter des conséquences sur la santé et la sécurité des personnes, les pertes de productivité, les atteintes à l'environnement et pour les générations futures, la préservation des ressources de la planète". Pour [Villemeur \(1988\)](#), la sûreté de fonctionnement d'un système est fondée sur quatre composants principaux, désignés par FMDS (*RAMS* en anglais) : la fiabilité (*reliability*), la maintenabilité (*maintainability*), la disponibilité (*availability*) et la sécurité (*safety*). Par extension, "la sûreté de fonctionnement est considérée comme la science des défaillances et des pannes" [Villemeur \(1988\)](#).

La fiabilité et la disponibilité sont aujourd'hui des éléments importants dans l'étude des systèmes complexes et constituent des sujets d'étude aussi bien d'un point de vue académique qu'industriel. Dans ce cadre, plusieurs outils et méthodes scientifiques ont été développés pour évaluer les dangers potentiels associés à un système en fonctionnement. Des stratégies de maintenance variées, correspondant à différents types de systèmes et modes de fonctionnement, sont mises en place. S'appuyant sur des méthodes de diagnostic et de pronostic, ces stratégies sont développées pour tenter de minimiser les conséquences des éventuelles défaillances et de maximiser la rentabilité du système. Les outils de prédiction des défaillances pour les systèmes industriels sont devenus indispensables. Ils s'appuient principalement sur l'analyse de la dégradation du système. Une modélisation du processus de dégradation est donc nécessaire. Pour les systèmes dont le phénomène physique de dégradation est bien connu, une modélisation déterministe est possible. Pour d'autres, la dégradation physique n'est pas connue, et l'état de santé du système n'est parfois pas observable d'une manière directe, ou seulement partiellement observable. Des indicateurs de dégradation mesurables et reflétant indirectement l'état de santé observé

du système doivent être construits à partir des informations fournies par les capteurs des systèmes de surveillance. Une modélisation du processus de dégradation représenté par l'évolution des indicateurs est ensuite nécessaire. Le modèle de dégradation résultant est par suite utilisé pour le pronostic et l'évaluation quantitative du risque et de la fiabilité.

Les stratégies de maintenance mises en place doivent prendre en compte le contexte d'évolution du système étudié et en particulier les caractéristiques du soutien logistique associé ainsi que de la gravité des conséquences des défaillances. Lorsque la défaillance n'induit pas des risques financiers importants ou lorsque l'indisponibilité ne provoque pas de grave conséquence sur la production et la sécurité, des stratégies de maintenance corrective peuvent être adaptées. Pour les systèmes dont le processus de dégradation est physiquement bien connu et peut être modélisé par un processus déterministe, des actions de maintenance préventive basées sur l'âge ou le temps (maintenance systématique) peuvent être programmées longtemps à l'avance. Lorsque des conséquences financières ou opérationnelles graves risquent de survenir suite à des défaillances soudaines, des stratégies de maintenance conditionnelle ou prédictives sont nécessaires.

Pour la maintenance conditionnelle ou prédictive, une prise de décision de maintenance est évaluée à chaque instant de mesure du niveau de dégradation du système en fonction de la valeur obtenue. Un seuil de sécurité est fixé sur le niveau de dégradation pour caractériser la valeur à partir de laquelle le système est considéré dans l'incapacité de remplir sa mission. La décision de maintenance est prise de manière à contrôler la probabilité de panne et à réaliser un bon compromis avec la durée maximale de fonctionnement. La prévision de temps de passage du seuil par l'indicateur de dégradation constitue donc une tâche indispensable pour la prise de décision concernant la maintenance ou le remplacement du système. Sachant que les indicateurs de dégradation présentent souvent des trajectoires aléatoires qui dépendent de l'état et du fonctionnement du système ainsi que d'éventuels facteurs extérieurs et d'environnement, la modélisation de ses indicateurs par des outils mathématiques relativement puissants constitue un thème de recherche d'actualité.

Pour étudier le processus de dégradation non déterministe sur un système donné, un recours aux modèles probabilistes est nécessaire. Parmi ces modèles, les processus stochastiques constituent des outils puissants et bien appropriés qui permettent de tenir compte de l'évolution dynamique et des éventuelles influences des phénomènes aléatoires exogènes. Différents modèles, à espaces d'états et de temps continus ou discrets, avec ou sans mémoire, sont proposés. Parmi ces modèles on trouve en particulier la chaîne de Markov, les processus de renouvellement, les processus de sauts, le processus Gamma et le processus de Wiener. Le processus Gamma est principalement utilisé pour la modélisation

d'un processus de dégradation monotone ou d'un processus à accumulation strictement croissante des dommages. Les processus de diffusion à base du processus de Wiener sont considérés lorsque le comportement du système présente des trajectoires de dégradation non-monotones.

Différents modèles et outils mathématiques sont utilisés et combinés dans cette thèse pour proposer des modèles de description de la dynamique d'évolution complexe d'indicateurs particuliers. Une nouvelle approche d'aide à la décision pour la planification de la maintenance conditionnelle est proposée.

Dans le premier chapitre, les principaux outils probabilistes utilisés pour la modélisation des phénomènes aléatoires sont présentés. Les phénomènes envisagés sont liés aux indicateurs de dégradation des systèmes industriels et aux indicateurs financiers. Quelques modèles stochastiques et leurs applications dans le domaine de la modélisation des phénomènes physiques ou économiques sont détaillés. Différentes méthodes pour les analyses proactives, l'identification et la prévention des risques potentiels sont évoquées.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des données réelles à disposition. Il s'agit de séries d'indicateurs issus du domaine financier. La première étape dans l'analyse des données collectées est de choisir un modèle mathématique approprié. Il doit être capable de décrire d'une manière fiable les caractéristiques des données et de reproduire ou estimer la dynamique d'évolution des séries. Sachant que les indicateurs disponibles évoluent d'une manière aléatoire et non-monotone, une analyse préliminaire des données est effectuée et les propriétés statistiques de ces séries sont analysées. La distribution des incréments, la volatilité et les fluctuations extrêmes sont étudiées et des tests de normalité et de dépendance linéaire et non linéaire sont effectués. Nous discutons dans ce chapitre des implications des résultats de ces tests sur le choix d'un modèle probabiliste correspondant.

La modélisation des séries de données par différents modèles stochastiques, basés sur le mouvement Brownien, est effectuée dans le chapitre 3. En respectant les principales caractéristiques et propriétés déduites de l'étude statistique des incréments et de la volatilité des données, le modèle de diffusion avec sauts est adopté suivant trois versions différentes. Dans ces trois versions, le modèle est principalement basé sur la combinaison d'un processus de Wiener et d'un processus de Poisson composé. Dans une première version les paramètres du modèle sont considérés comme des constantes. Une extension de ce modèle est ensuite proposée en associant le processus de diffusion avec sauts à un processus de changement de régime suivant une chaîne de Markov. Les paramètres du modèle varient ainsi sur des espaces d'états discrets. Ces variations sont supposés liées à une covariable environnementale suivant trois ou six états. La troisième version considère une évolution

de la volatilité à espaces de temps et d'état continus. Après avoir choisi un modèle ou une famille de modèles, l'estimation des paramètres est effectuée. Il est ensuite possible de vérifier la qualité de l'ajustement du modèle obtenu aux données et éventuellement d'utiliser ce modèle pour améliorer la compréhension du mécanisme de génération de la série des données en considération. Une fois que le modèle développé est démontré satisfaisant, il peut être utilisé de plusieurs façons selon le domaine d'application envisagé. Pour chacune des trois versions du modèle avec sauts les méthodes et les résultats de la calibration sont présentés et les tests d'adéquation et d'utilité sont discutés.

Se basant sur les modèles de diffusion avec sauts proposés au chapitre précédent pour représenter un processus de dégradation et de production, le chapitre 4 porte sur la proposition d'une nouvelle approche pour l'aide à la décision concernant la planification des actions de maintenance conditionnelle. Cette approche se base sur la notion d'options réelles issue de la finance et sur les méthodes d'évaluation de ces dernières. Nous traitons particulièrement le cas de turbines d'éoliennes. Les modèles de diffusion avec sauts proposés et testés dans le chapitre 3 sont utilisés pour la modélisation des différents phénomènes non-monotones associés aux indicateurs de dégradation et de production de la turbine. Les différentes hypothèses et définitions concernant l'option réelle et son évaluation sont présentées. Un exemple empirique illustratif est enfin détaillé.

Pour finir, en guise de conclusion, un récapitulatif de l'ensemble des travaux conduits dans cette thèse sera donné. Les principaux résultats ainsi que les différentes perspectives liées à notre travail seront présentées.

Modélisation et gestion des phénomènes aléatoires

Sommaire

1.1	Quelques définitions utiles	6
1.1.1	Processus stochastique	6
1.1.2	Processus de Markov	7
1.1.3	Processus de Lévy	7
1.2	Généralités sur les modèles avec mémoires	8
1.2.1	Modèles Linéaires	9
1.2.2	Modèles Non-Linéaires	11
1.2.3	Exemples sur les modèles autorégressifs	13
1.3	Généralité sur les modèles sans Mémoires	15
1.3.1	Chaîne de Markov	15
1.3.2	Processus de Poisson	17
1.3.3	Processus Gamma	19
1.3.4	Processus de Wiener (Mouvement Brownien)	21
1.3.5	Exemples sur les processus stochastiques markoviens	25
1.4	Modèles Dérivés des Processus de Lévy	25
1.4.1	Mouvement Brownien Géométrique	26
1.4.2	Modèle de diffusion avec sauts	28
1.4.3	Modèle à volatilité stochastique	38
1.4.4	Modèle à volatilité stochastique avec sauts	42
1.5	Analyse proactive et gestion de risque	43
1.5.1	La valeur en jeu : VaR	44
1.5.2	Les "Options" et leur évaluation	45
1.5.3	Pronostic et maintenance	47
1.6	Conclusion	53

Objectif : Le but de ce chapitre est de donner une vue générale sur les outils probabilistes utilisés pour la modélisation des phénomènes aléatoires, notamment la modélisation des indices de dégradation des systèmes industriels et des indices financiers. Suite à la présentation des modèles stochastiques et de leurs applications dans le domaine de la modélisation des phénomènes physiques et économiques, différentes méthodes pour les analyses proactives de risque et pour l'identification et prévention des problèmes potentiels sont présentées.

1.1 Quelques définitions utiles

Des modèles stochastiques de base, avec et sans mémoire sont présentés dans ce chapitre. Dans cette première section nous introduisons quelques notations que nous utilisons tout au long de ce document. Dans ce chapitre ainsi que dans les chapitres suivants un vecteur $Y_{1,N} = \{Y_{t_0} \dots Y_{t_n}, n \in \mathbb{N}\}$ indique un vecteur de N réalisations d'un phénomène aléatoire représenté par le processus aléatoire Y_t (ou $Y(t)$) aux instants t_0, \dots, t_n . Sauf indication contraire, nous considérons dans la suite que les instants t_i de réalisation ou de collection des données sont discrets et également séparés (collection périodique des données). L'instant de départ t_0 est égal à 0. La notation $X_{1,N}$ est réservée au vecteur des observations d'un phénomène donné (données réelles collectées aux instants t_i).

1.1.1 Processus stochastique

Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires Y_t à valeur dans l'espace d'état \mathcal{D}_Y . La totalité de ses fonctions de distribution de dimension finie

$$F_{Y_{t_0}, Y_{t_1}, \dots, Y_{t_i}}(y_0, y_1, \dots, y_i) = \mathbb{P}(Y_{t_0} \leq y_0, Y_{t_1} \leq y_1, \dots, Y_{t_i} \leq y_i) \quad (1.1)$$

pour $i \in \{0, 1, \dots\}$, et $y_j \in \mathcal{D}_Y$ détermine sa loi de probabilité [Platen and Heath \(2010\)](#).

Un processus stochastique est indexé par la variable t souvent considérée comme le paramètre du temps avec $t \in \mathcal{T}$. L'ensemble \mathcal{T} sur lequel le processus Y_t est défini peut être égale à la droite réelle ou l'un de ses sous-ensemble. Si \mathcal{T} est un espace fini ou dénombrable le processus stochastique est un processus à temps discret. Dans le cas contraire le processus est à temps continu et il sera désigné dans la suite par $Y(t)$ à la place de Y_t .

Les processus stochastiques sont des concepts utiles pour la modélisation des phénomènes évoluant d'une manière aléatoire (non-déterministe) avec le temps.

Dans ce document, nous nous intéressons particulièrement mais pas uniquement à deux familles de processus : les processus de Markov et les processus de Lévy. Les particularités

1.1. Quelques définitions utiles

de chacune de ces familles sont présentées dans la suite.

1.1.2 Processus de Markov

Soit $Y(t)$ un processus stochastique à temps continu (ou discret) défini sur un espace d'état \mathcal{D}_Y . $Y(t)$ est un processus de Markov (ou processus markovien) si la propriété de Markov suivante :

$$\mathbb{P}(Y(t + \Delta t) = x | Y(s), 0 \leq s \leq t) = \mathbb{P}(Y(t + \Delta t) = x | Y(t))$$

est vérifiée pour tout $t \geq 0$, $\Delta t \geq 0$ et $x \in \mathcal{D}_Y$ [Hanson \(2007a\)](#). Si de plus cette probabilité ne dépend que de l'incrément du temps Δt , et pas de t , le processus de Markov est appelé homogène. Pour un processus de Markov homogène, la fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}_Y \times \mathcal{D}_Y \rightarrow [0; 1]$ définie par :

$$f(\Delta t; x, y) = \mathbb{P}[Y(t + \Delta t) = y | Y(t) = x]$$

est appelée la fonction de transition stochastique. Ses valeurs $f(\Delta t; x, y)$ sont les probabilités conditionnelles de transition de $Y(t)$ d'un état x à un état y dans un délai de temps égal à Δt .

1.1.3 Processus de Lévy

Soit $Y(t)$ un processus stochastique à temps continu (ou discret) défini sur un espace d'état \mathcal{D}_Y .

Processus à accroissements indépendants On dit que $Y(t)$ est un processus à accroissements indépendants si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n < +\infty$, les variables aléatoires $Y(t_{j+1}) - Y(t_j)$ pour $0 \leq j \leq n - 1$ sont indépendantes. Autrement dit, les incréments calculés sur des intervalles de temps sans chevauchement sont des variables aléatoires indépendantes.

Processus à accroissements stationnaires On dit que $Y(t)$ est à accroissements stationnaires si, pour tous $t_i, t_j > 0$, la variable aléatoire $Y(t_i + t_j) - Y(t_i)$ suit la même loi que $Y(t_j) - Y(0)$. Autrement dit, la loi de chaque incrément ne dépend que de l'intervalle du temps écoulé.

Processus de Lévy On dit que $Y(t)$ est un processus de Lévy (issu de 0) si [Rémi \(2010\)](#) :

1. $Y(0) = 0$ presque sûrement,

2. $Y(t)$ est à accroissements indépendants et stationnaires,
3. $Y(t)$ est stochastiquement continu c.à.d pour tout $\varepsilon > 0$, $\Delta t > 0$ et $t \geq 0$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{P}[|Y(t + \Delta t) - Y(t)| > \varepsilon] = 0$$

Dans la suite de ce chapitre différents modèles stochastiques sont détaillés. Les modèles avec mémoires, particulièrement les modèles autorégressifs sont présentés dans la section 1.2. Des processus à propriété de Markov et des processus de Lévy sont présentés dans la section 1.3. Nous présentons ensuite dans la section 1.4 des modèles à combinaison des processus de Lévy. Finalement, des méthodes pour les analyses proactives de risque et pour l'identification et prévention des problèmes potentiels sont présentées dans la section 1.5.

1.2 Généralités sur les modèles avec mémoires

Parmi les nombreux phénomènes physiques étudiés, il en existe qui sont des phénomènes à temps continu, mais pour lesquels les données et les informations sur l'évolution ne sont disponibles qu'à des instants discrets. C'est par exemple souvent le cas dans la détérioration des structures ou des systèmes industriels. Considérant les données discrètes collectées, l'analyse de séries temporelles et la prédiction basée sur ces séries sont des outils communs et souvent pertinents pour prédire les valeurs futures de la série en se basant sur les valeurs observées précédemment.

Une série temporelle est un ensemble de données, habituellement collectées à des intervalles réguliers. Ces modèles non continus reposent uniquement sur des données observées et négligent le possible aspect continu du phénomène étudié. Il existe un grand nombre de modèles de séries temporelles qui peuvent avoir de nombreuses formes et qui peuvent présenter différents processus stochastiques à temps discret.

Dans une série temporelle, une façon classique et simple pour l'estimation de la valeur actuelle en se basant sur les informations historiques est de considérer que la valeur actuelle de la série est égale à la moyenne des valeurs précédentes ajustées par un bruit blanc. Ce modèle se traduit par l'équation de l'espérance conditionnelle :

$$Y_{t_i} = \mathbb{E}[Y_t | \Psi_{t_i}] + \varepsilon_{t_i} \tag{1.2}$$

Dans cette équation $\mathbb{E}[Y_t | \Psi_{t_i}]$ est l'espérance de Y_t conditionnellement aux informations collectés jusqu'à t_i (Ψ_{t_i}). ε_t représente le terme d'erreur considéré comme un bruit blanc ; $\forall t_i \neq t_j$, ε_{t_i} et ε_{t_j} sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne nulle et de variance $\sigma_\varepsilon^2 \neq 0$.

1.2. Généralités sur les modèles avec mémoires

Les premiers modèles statistiques utilisés pour la prévision sont apparus en 1927 avec les deux articles de Yule et Slusky qui ont introduit dans la littérature les modèles autorégressifs en définissant respectivement le modèle autorégressif simple AR et le modèle à moyenne mobile MA [Fiordaliso \(1999\)](#).

Des combinaisons de ces modèles conduisent à un modèle autorégressif à dépendance linéaire comme les modèles autorégressifs à moyenne mobile (ARMA) et autorégressif intégré de moyennes mobiles (ARIMA).

Dans [Kantz and Schreiber \(1997\)](#), les auteurs proposent et détaillent un grand nombre des méthodes d'analyse sur les séries temporelles en envisageant la dépendance non-linéaire entre des réalisations successives de la série. Dans ces modèles, les variations de la variance du modèles sont prises en compte et supposées liées aux dernières valeurs observées de la série. Parmi les différents modèles non-linéaire, le modèle autorégressif à hétéroscédasticité conditionnelle (ARCH) [Engle \(1982\)](#) ainsi que sa forme généralisée (GARCH) [Bollerslev \(1986\)](#) sont des candidats prometteurs pour la modélisation de la dépendance non-linéaire et des changements de la variance du modèle au fil le temps [Engle \(2001\)](#). Néanmoins, ces modèles ne peuvent pas exprimer tout type de variabilité de la variance comme par exemple les cas où les changements de la variance sont entraînés par l'évolution d'un processus tiers ou d'une covariable. Dans cette section, nous revenons plus en détails sur différents modèles autorégressifs linéaires et non-linéaires.

1.2.1 Modèles Linéaires

En 1927, Yule [Udny Yule \(1927\)](#) a proposé un modèle autorégressif linéaire (AR) en partant de la forme suivante :

$$Y_{t_i} = \alpha_1 Y_{t_{i-1}} + \alpha_2 Y_{t_{i-2}} + \varepsilon_{t_i} \quad (1.3)$$

où ε_t est un bruit blanc de variance σ_ε^2 . Le modèle AR(p) est une généralisation de ce modèle en étendant la dépendance de Y_{t_i} sur les p réalisations précédentes de la série :

$$Y_{t_i} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j Y_{t_{i-j}} + \varepsilon_{t_i} \quad (1.4)$$

où $\bar{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \sigma_\varepsilon^2\}$ est le vecteur des paramètres du modèles, supposés tous constants.

Dans ce modèle la valeur de la v.a Y_t à un moment donné est considérée linéairement dépendante des p valeurs précédentes de la série des réalisations. Ce modèle est un modèle stationnaire (à moyenne et variance constantes) si toutes les solutions de son équation caractéristique définie par :

$$1 - \alpha_1 z^1 - \alpha_2 z^2 \dots - \alpha_p z^p = 0 \quad (1.5)$$

se retrouvent en dehors du cercle unité dans le plan complexe [Zhou \(2009\)](#).

Dans la même année, le modèle à moyenne mobile MA(q), décrit dans l'équation suivante, est proposé par Slutsky [Slutzky \(1937\)](#) :

$$Y_{t_i} = \beta_0 + \varepsilon_{t_i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t_i-j} \quad (1.6)$$

où ε_t est un bruit blanc de variance σ_ε^2 . Les paramètres $\{\beta_j\}$ pour $\{0 \leq j \leq q\}$ sont les coefficients de la moyenne mobile du modèle. Le nom du modèle "moyenne mobile d'ordre q" revient au fait que Y_t correspond à une moyenne mobile de q réalisations précédentes (non-corrélées et d'espérance nulle) de la variable ε_t . Cette variable est considérée comme un terme d'innovation influençant le phénomène aléatoire Y_t non seulement à la date à laquelle il se produit mais aussi à des dates ultérieures. La somme des coefficients β_j n'étant pas forcément égale à zéro, le terme "moyenne" dans le nom de ce modèle doit être pris au sens large.

Tandis que le modèle autorégressif AR(p) considère une régression linéaire des p réalisations précédentes de Y_t , le modèle MA(q) considère l'influence de l'innovation ε_{t_i} à l'instant t_i se manifeste également aux q instants suivants à travers une fonction linéaire.

Comme dans le cas du modèle AR(p) les paramètres $\{\beta_j\}$ ainsi que la variance σ_ε^2 de la variable du bruit ε_t sont constants.

Une combinaison des processus AR(p) et MA(q) permet de définir un processus autorégressif mixte à moyenne mobile ARMA(p,q). Ce processus peut être décrit par l'équation suivante :

$$Y_{t_i} = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j Y_{t_i-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t_i-j} + \varepsilon_{t_i} \quad (1.7)$$

Ce modèle est un modèle stationnaire si la partie correspondante au processus AR(p) du modèle vérifie la condition de stationnarité.

Un modèle ARMA(p,q) prédit la valeur actuelle d'une série temporelle à partir d'une combinaison linéaire des valeurs passées (la partie autorégressive) et des fluctuations aléatoires passées (la partie moyenne mobile). Ce modèle nécessite la stationnarité de la série temporelle, à savoir que les réalisations de la série fluctuent autour d'une moyenne constante avec une variance constante. Pourtant il existe des phénomènes aléatoires qui évoluent avec une tendance (croissante ou décroissante) visible. Dans ce cas la série temporelle étudiée n'est pas originalement stationnaire. Il est donc utile de procéder à une différentiation de la série originale dans le but d'obtenir une nouvelle série stationnaire (moyenne et variance constante). La série originale est considérée comme une série intégrée de la série stationnaire, et le modèle ARMA(p,q) se transforme en modèle ARIMA(p,d,q)

1.2. Généralités sur les modèles avec mémoires

(Autoregressive Integrated Moving Average) où d est l'ordre de différenciation effectuée sur la série des données originales. Ce modèle est par exemple utilisé pour estimer le temps de vie des équipements électroniques [Gorlov and Stroganov \(2007\)](#), étudier les données de rayonnement solaires [Glasbey and Allcroft \(2008\)](#) ou optimiser la production d'énergie photovoltaïque [Dunea et al. \(2001\)](#); [Jordan and Kurtz \(2010\)](#), mais aussi pour décrire l'évolution des prix d'électricité [Contreras et al. \(2003\)](#) et des prix de stock [Ariyo et al. \(2014\)](#).

1.2.2 Modèles Non-Linéaires

Dans certains phénomènes physiques et économiques la série de réalisations peut présenter des dépendances non-linéaires entre ses valeurs successives. Ces dépendances non-linéaires se présentent souvent sous-forme d'une autocorrélation entre les valeurs au carré de la série. Dans ce cas on s'intéresse particulièrement au terme d'erreur ε_t et sa variance σ_ε^2 . Dans les différents modèles illustrés précédemment la variance σ_ε^2 du terme d'erreur est considérée comme une constante. Les modèles des séries temporelles ou chronologiques à dépendance non-linéaire peuvent être utilisés lorsque les carrés des valeurs de la série ou du terme résiduel du modèle à dépendance linéaire présentent une autocorrélation importante qui justifie la modélisation de la variance σ_ε^2 par un modèle linéaire, fonction des observations et des estimations précédentes.

Les modèles Autorégressifs à Hétéroscédastisité Conditionnelle (ARCH) et (GARCH) sont des modèles non-linéaires introduits par [Engle \(1982\)](#) et [Bollerslev \(1986\)](#) dans les années 80. Dans ces deux modèles la variance du terme ε_t est considérée comme un variable aléatoire qui change avec le temps. On parle d'une variance stochastique.

En addition à la variance inconditionnelle non-nulle, le modèle ARCH(q) permet à la variance σ_ε^2 de dépendre des q réalisations passées de la série. Dans ce modèle, la variance σ_ε^2 est une fonction linéaire de la valeur au carré des termes d'erreur calculés à partir les réalisations passées :

$$\sigma_{\varepsilon t_i}^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t_i-j}^2 \quad (1.8)$$

D'après la structure de ce modèle on remarque que quand la variance σ_ε^2 subit une augmentation soudaine ou importante, cette augmentation apparaîtra dans l'espérance de la variance pour les q unités de temps suivantes. Ceci donne au modèle une capacité de représenter le regroupement ou l'agrégation (*clustering*) de la variance et le rend très utile pour certaines applications.

Le modèle GARCH(p,q) est une généralisation du modèle ARCH(q). Ce modèle considère à la fois les valeurs historiques du terme d'erreur ε_t (comme dans le modèle

ARCH) et les valeurs de la variance prédites précédemment $\sigma_{\varepsilon t}^2$. Le modèle de prédiction de la variance est alors représenté par l'équation suivante :

$$\sigma_{\varepsilon t_i}^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t_i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{\varepsilon t_i-j}^2 \quad (1.9)$$

Il a été prouvé que le modèle de GARCH peut être considéré comme une approximation discrète d'un processus stochastique à temps continu [Nelson \(1990\)](#). Par conséquent, l'utilisation de ce modèle pour modéliser des phénomènes aléatoires continus observés de manière discrète est justifiée (voir [Chan and Meeker \(2008\)](#); [Wang and Zhang \(2008\)](#)).

Calibration Plusieurs méthodes d'estimation des paramètres des modèles non-linéaires existent dans la littérature. [Francq et al. \(2004\)](#) proposent une méthode basée sur la maximisation de vraisemblance et quasi-vraisemblance Gaussienne (GMLE) pour la calibration des modèles GARCH et ARMA-GARCH. [Huang et al. \(2008\)](#) donnent une comparaison entre la méthode GMLE et la méthode d'estimateur du moindre écart en valeur absolue. Un test d'adéquation et d'ajustement du modèle (goodness of fit test) basé sur la somme pondérée des autocorrélations des résidus au carré du modèle GARCH(1,1) est développé par [Berkes et al. \(2004\)](#).

Même si le modèle GARCH(1,1) est souvent considéré comme le modèle le plus simple et le plus robuste parmi les processus qui modélisent la dispersion dans l'évolution d'une série temporelle, ce modèle a été étendu dans plusieurs directions depuis son introduction. Tandis que le modèle GARCH standard suppose que les termes d'erreur positifs et négatifs agissent d'une manière symétrique sur la variance (σ_t^2), plusieurs extensions du modèle visent à permettre l'asymétrie dans la réponse de cette dernière vis à vis du signe du terme d'erreur (ε_t). Ces extensions comprennent le modèle GJR-GARCH [Glosten et al. \(1993\)](#), le modèle GARCH asymétrique [Engle and Ng \(1993\)](#) et le GARCH quadratique [Sentana \(1995\)](#). D'autres auteurs ont suggéré la modélisation de l'écart-type conditionnel σ_ε à la place de la variance conditionnelle σ_ε^2 [Schwert \(1990\)](#) [Zakoian \(1994\)](#).

Applications Les modèles de séries temporelles à temps discrets trouvent des applications diverses dans presque tous les domaines. Pour suggérer une nouvelle méthode de détection d'un trouble neurologique chronique (l'épilepsie) [Mihandoust and Amirani \(2011\)](#) proposent une méthode de classification des signaux électroencéphalographiques (EEG) en démontrant la capacité du modèle GARCH à décrire les coefficients des ondes EEG. Le modèle combiné AR-GARCH est utilisé par [Rasool et al. \(2012\)](#) pour la modélisation de l'électromyogramme EMG (signaux contenant des informations temporelles sur l'activation du muscle) dans le but de mieux comprendre et détecter les troubles

1.2. Généralités sur les modèles avec mémoires

neuromusculaires. Dans le cadre de l'amélioration de la production d'énergie une combinaison du modèle GARCH avec un modèle à commutation des régimes est proposée par [Chen et al. \(2011\)](#) pour la prévision à court terme de la charge en puissance exigée pour la ville de Nanjing en Chine. D'autre part, [Chen et al. \(2013\)](#) utilisent des modèles autorégressifs linéaires et non-linéaires pour enquêter sur les caractéristiques intrinsèques du vent dans le but d'améliorer les performances de prévision de la production d'énergie éolienne.

En économie, les modèles ARMA, ARCH et GARCH sont utilisés par [Zhou \(2009\)](#) pour la modélisation de l'indice boursier S&P500. Particulièrement les modèles non-linéaires ARCH-GARCH sont souvent utilisés pour la modélisation des marchés boursiers [Podobnik et al. \(2004\)](#). [Predescu and Stancu \(2011\)](#) utilisent également les modèles non-linéaires ARCH et GARCH pour modéliser l'évolution de la volatilité d'un portefeuille et effectuer l'analyse de risque sur différents types de portefeuilles.

Malgré sa popularité surtout dans le domaine économique, la robustesse du modèle GARCH a été l'objet de questionnement de plusieurs auteurs. Les tests de bicorrelation de Hinich ont été utilisés par [Bonilla et al. \(2007\)](#); [Bonilla and Sepulveda \(2011\)](#), [Hinich and Patterson \(1996\)](#) et [Lim \(2005\)](#); [Lim et al. \(2008\)](#) dans le but d'étudier l'adéquation du modèle GARCH pour la caractérisation des séquences de données boursières. Les résultats suggèrent que le modèle GARCH n'est pas toujours adapté pour la modélisation de la dépendance non-linéaire. Une estimation incorrecte des valeurs futures entraîne de mauvaises décisions. Par conséquent, le modèle GARCH doit être utilisé avec grande précaution.

1.2.3 Exemples sur les modèles autorégressifs

Des exemples sur différents modèles autorégressifs sont donnés dans la Figure 1.1. Pour chacun de ces modèles une série de données $Y_{1,1000} = \{y_0, y_1, \dots, y_{1000}\}$ est simulée. Les séries $Y_{1,T}$ correspondant à chaque modèle sont présentées sur les deux graphiques de gauche pour $T = 100$ et $T = 1000$. Considérons le cas où $Y_{1,1000}$ est une série d'incrémentes d'un processus donné, nous représentons sur le graphique du milieu la trajectoire de la somme cumulée de cette série. Les deux fonctions d'autocorrélation partielle et totale de différents ordres de cette dernière sont également présentés.

D'après les deux premières lignes de cette figure on remarque qu'une série $Y_{1,T}$ simulée à partir du modèle AR(2) présente des trajectoires plus lisses que celles du modèle MA(2). La trajectoire de la série produite par un modèle MA(2) présente plus des fluctuations autour de sa moyenne fixe (ici égale à zéro) alors que la dépendance linéaire de la série $Y_{1,T}$ associé au modèle AR(2) mène à des changements moins brusques dans sa valeur.

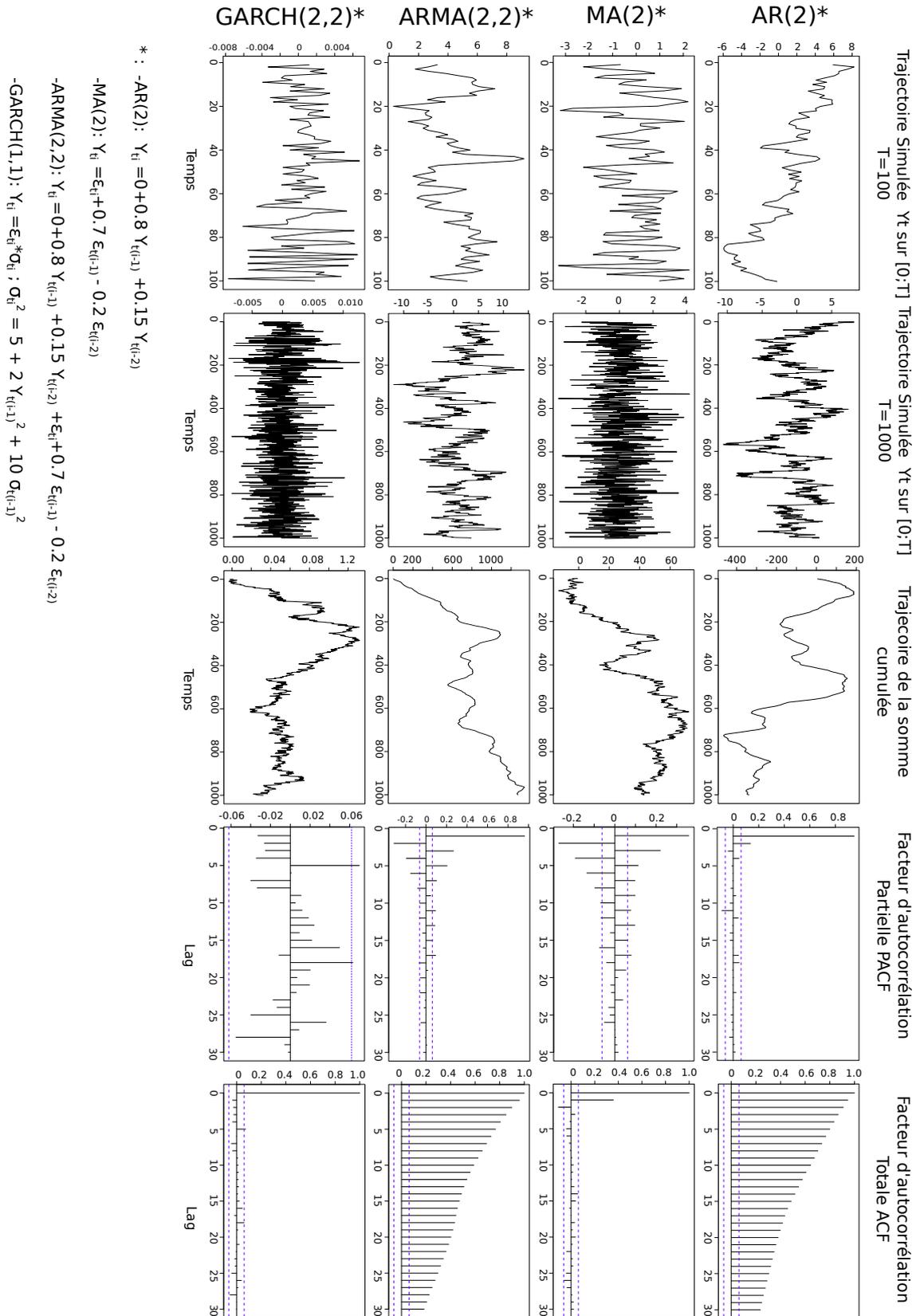


FIGURE 1.1 – Exemples sur les modèles autorégressives.

1.3. Généralité sur les modèles sans Mémoires

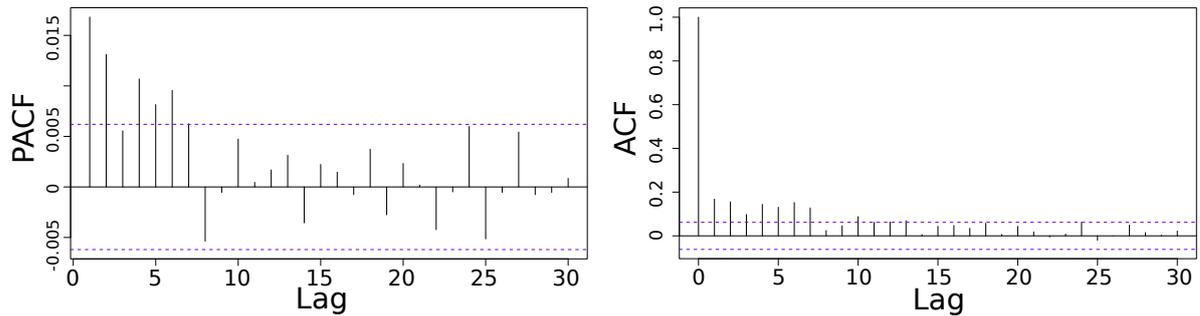


FIGURE 1.2 – Facteurs d'autocorrélations partielle (gauche) et totale (droite) pour la série $\{Y_t^2\}$ simulée à partir du modèle GARCH(1,1).

Les facteurs d'autocorrélations partielles dans le modèle AR (2) correspondent comme prévu aux paramètres du modèle (les paramètres de la dépendance linéaire) alors que les facteurs d'autocorrélations pour le modèle MA (2) sont beaucoup moins importants. Ceci est dû au fait que le modèle AR(2) prédit la valeur actuelle d'une série temporelle à partir d'une combinaison linéaire des deux réalisations passées de la série (autoregressivité) alors que le modèle MA (2) prédit la valeur actuelle à partir des fluctuations aléatoires passées (moyenne mobile). Le modèle ARMA(2,2) présente une combinaison entre ces deux modèles, les facteurs d'autocorrélations sont presque aussi importants que dans le modèle AR(2). D'autre part le modèle GARCH présente une dépendance non-linéaire entre les valeurs de Y_t , cette dépendance, non visible dans les facteurs d'autocorrélations de Y_t peut être clairement détectée lorsque ces facteurs sont calculés pour les valeurs de Y_t^2 (voir Figure 1.2).

1.3 Généralité sur les modèles sans Mémoires

On appelle processus stochastique sans mémoires, ou processus de Markov, un processus stochastique possédant la propriété de Markov (voir section 1.1.2). Dans cette section nous revenons plus en détails sur différents processus de Markov parmi les plus connus et les plus faciles à mettre en œuvre.

1.3.1 Chaîne de Markov

Une chaîne de Markov est généralement définie par un processus markovien à temps discret et espace d'états fini ou dénombrable. Ce processus est utilisé pour la représentation de la dynamique d'un phénomène aléatoire permutant sur un nombre fini d'états possibles.

En désignant par $Y_{t_i} = y_i$ l'état d'un système à l'instant t_i avec $y_i \in \mathcal{D}_Y$ où \mathcal{D}_Y

est l'espace d'états. Soit $t_0 = 0$ et $\{t_i, i \in \mathbb{N}\}$ la série des instants d'observation discrets et également séparés. On dit que $\{Y_{t_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ssi $\forall i \in \mathbb{N}$ et $\forall y_0, y_1, \dots, y_{i+1} \in \mathcal{D}_Y$:

$$\mathbb{P}(Y_{t_{i+1}} = y_{i+1} | Y_{t_0} = y_0, \dots, Y_{t_i} = y_i) = \mathbb{P}(Y_{t_{i+1}} = y_{i+1} | Y_{t_i} = y_i) \quad (1.10)$$

La chaîne de Markov est dite homogène si et seulement si la loi de transition entre Y_{t_i} et $Y_{t_{i+1}}$ est indépendante de t_i , c.à.d. $\forall i \in \mathbb{N}$ et $x, w \in \mathcal{D}_Y$:

$$\mathbb{P}(Y_{t_{i+1}} = w | Y_{t_i} = x) = \mathbb{P}(Y_{t_1} = w | Y_{t_0} = x) = P_Y(x, w) \quad (1.11)$$

La fonction $P_Y : [\mathcal{D}_Y \times \mathcal{D}_Y] \rightarrow [0, 1]$ est appelée la matrice de transition de la chaîne de Markov et la loi de distribution de Y_{t_0} noté $\pi_Y(0)$ est appelée loi initiale de la chaîne.

La distribution de l'état de la chaîne à un instant t_i se déduit à partir de la matrice de transition et la loi initiale comme suit :

$$\pi_Y(t_i) = \pi_Y(0) * (P_Y)^i \quad (1.12)$$

Le temps de séjour moyen (par unité de temps) dans chaque état x de la chaîne, noté T_x est égale à l'inverse de la somme des probabilités que le système quitte cet état (vers un autre état y) après une seule unité de temps :

$$\mathbb{E}[T_x] = \frac{1}{\sum_{w \neq x} P_Y(x, w)} \quad (1.13)$$

Une distribution limite $\pi_Y(\infty)$ pour $t \rightarrow \infty$ existe pour ce système ssi au moins une des puissances de la matrice de transition P_Y ne possède que des composantes strictement positives [Petitot \(2008\)](#). Dans ce cas la distribution limite $\pi_Y(\infty)$ est stationnaire et indépendante de $\pi_Y(0)$.

Une chaîne de Markov peut être aussi définie en temps continu. Lorsque le processus aléatoires prend des valeurs dans un espace d'état fini et que le temps passé dans chaque état prend une valeur réelle non-négative et exponentiellement distribuée, la chaîne de Markov à temps continu (CTMC) peut être utilisée. Considérons le vecteur stochastique $\pi_Y(t)$ dont l'élément $\pi_{Y_i}(t)$ représente la probabilité que le processus étudié soit dans l'état Y_i à l'instant t . La chaîne de Markov à temps continu sera caractérisée par :

$$\frac{d}{dt} \pi_Y(t) = \pi_Y(t) \mathcal{A}(t) \quad (1.14)$$

où la matrice \mathcal{A} présente le générateur stochastique infinitésimal du processus (la somme des éléments d'une ligne quelconque est égale à zéro, les éléments de la diagonales sont négatifs ou nuls et les autres sont positifs ou nuls) [Petitot \(2008\)](#).

1.3. Généralité sur les modèles sans Mémoires

Applications Les applications des chaînes de Markov sont très nombreuses (réseaux, mathématiques financières, algorithmes stochastiques d'optimisation, simulation, ...).

Dans la modélisation de dégradation, on trouve deux façons différentes d'utiliser les chaînes de Markov. La première est de supposer que les états du système à modéliser sont discrets et finis. Par exemple, pour certaines applications on considère qu'un système fonctionne sous deux ou plusieurs niveaux de dégradation, impliquant différents taux de rendement répartis d'une façon discrète entre plusieurs états. Ces états modélisent tous les niveaux possibles de fonctionnement allant du fonctionnement parfait du système jusqu'à l'échec total. Ce type de modèles est souvent utilisé pour la modélisation de la maintenance préventive comme par exemple dans [Chan and Asgarpoor \(2006\)](#), [Amari et al. \(2006\)](#), [Soro et al. \(2010\)](#), [Haider et al. \(2012\)](#), [Yin et al. \(2013\)](#) et [Zhong and Jin \(2014\)](#). La deuxième façon d'introduire les chaînes de Markov dans la modélisation des phénomènes aléatoires, particulièrement la dégradation, est de supposer que l'environnement où fonctionne le système présente une structure markovienne. [Kharoufeh \(2003\)](#); [Kharoufeh and Cox \(2005\)](#) supposent que le taux de dégradation d'un système dépend totalement de l'environnement. Il considère aussi que, à son tour, cet environnement peut être caractérisé par une chaîne de Markov à temps continu.

1.3.2 Processus de Poisson

Un processus de Poisson est un processus de Lévy défini sur un espace de temps continu. Ce processus est largement utilisé dans la modélisation des phénomènes aléatoires pour décrire les instants d'occurrence d'un événement récurrent. Le processus de Poisson est un cas particulier des processus ponctuels.

On appelle processus ponctuel sur \mathbb{R}^+ la trace de la suite croissante $(T_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires positives signalant les instants où se produit un événement [Coccozza-Thivent \(1997\)](#). Associé à ce processus on définit :

1. La fonction aléatoire appelée fonction de comptage $N(t)$ et définie sur l'espace des entiers naturels pour $t \geq 0$ par :

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}}. \quad (1.15)$$

Cette fonction décrit le nombre d'événements se produisant jusqu'à l'instant t . La loi du processus $(T_n)_{n \geq 1}$ et celle du processus $(N(t))_{t \geq 0}$ sont liées par la relation suivante :

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n) = \mathbb{P}(N(t_1) \geq 1, N(t_2) \geq 2, \dots, N(t_n) \geq n) \quad (1.16)$$

2. La variable aléatoire de temps d'attente, également nommée temps d'inter-occurrence $\Delta T_i = (T_{i+1} - T_i)$ décrit le délai entre deux événements successifs.

Le processus ponctuel $(T_n)_{n \geq 1}$ est dit un processus de Poisson homogène de taux λ si les variables de temps inter-occurrence $(\Delta T_i)_{i \geq 1}$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivent la même loi exponentielle de paramètre λ . Dans ce cas, la variable aléatoire $N(t)$ pour tout $t \geq 0$ est de loi de Poisson de paramètre λt d'où le nom du "processus de Poisson".

Un processus de Poisson homogène de taux λ et de fonction de comptage $N(t)$ vérifie les propriétés suivantes [Coccozza-Thivent \(1997\)](#) :

1. $N(0) = 0$ presque sûrement.
2. le processus $N(t)$ est un processus markovien, continu à droite, et à accroissements indépendants.
3. pour $0 \leq s < t$ la variable aléatoire $N(t) - N(s)$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(t - s)$:

$$\mathbb{P}(N(t) - N(s) = n) = \frac{(\lambda(t - s))^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)} \quad (1.17)$$

Une forme plus compliquée de processus de Poisson est le processus de Poisson non homogène. Le taux d'un processus de Poisson non-homogène est défini comme une fonction de temps. On dit que le processus de Poisson est non-homogène d'intensité $d\Lambda$ s'il existe une mesure positive $d\Lambda$ sur \mathbb{R}^+ tel que :

$$\Lambda(t) = \int_{[0,t]} d\Lambda(s), \quad (1.18)$$

et la variable aléatoire $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\Lambda(t)$ pour tout $t \geq 0$ [Coccozza-Thivent \(1997\)](#). Généralement pour ce processus, les variables de temps inter-occurrence $(\Delta T_i)_{i \geq 1}$ ne sont plus indépendantes ni identiquement distribuées.

Le processus de Poisson est considéré comme le prototype des processus markoviens de saut. Ayant un espace d'état discret, ce processus est utilisé particulièrement pour la modélisation des systèmes aléatoires dont la dégradation évolue par chocs. Dans le cas de processus de Poisson simple, l'effet des chocs est considéré constant. Un processus de Poisson composé $Y(t)$ est utilisé lorsqu'on considère que les variations causés par les chocs sur l'état du système étudié sont également aléatoires et que le niveau d'évolution global du processus à instant t correspond à la somme des incréments cumulée jusqu'à cet instant :

$$Y(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} \xi_i \quad (1.19)$$

où ξ_i représente l'amplitude du i -ème incréments ou l'intensité de choc.

1.3. Généralité sur les modèles sans Mémoires

Dans le cas d'un processus homogène, et afin de conserver la stationnarité des incréments et donc les propriétés d'un processus de Lévy, l'intensité de chocs doit être modélisée par une variable aléatoire qui suit une loi fixée indépendamment de l'instant de chocs et de l' "âge" du système.

Application En pratique le processus de Poisson est utilisé dans des nombreuses applications surtout pour la modélisation du phénomène de dégradation par chocs. Par exemple, le processus de Poisson est utilisé pour la modélisation de la génération des défauts [Hong \(1999\)](#) et de l'évolution de fissures de fatigue [Sobczyk and Trebicki \(1989\)](#) ou de la profondeur de corrosion sur des métaux [Valor et al. \(2007\)](#). [Satow et al. \(2000\)](#) se base sur un modèle de Poisson non-homogène pour modéliser la dégradation des composants du système afin de proposer une optimisation de la stratégie de remplacement. [Hsieh and Jeng \(2007\)](#) choisit le processus de Poisson non-homogène composé comme un modèle de dégradation discrète pour établir une procédure d'évaluation de fiabilité.

On note que l'utilisation du processus de Poisson tout seul est limitée à la modélisation des phénomènes monotones et uniquement évoluant par chocs. En revanche, lorsqu'il est employé en association avec d'autres processus à temps continu, le processus de Poisson (simple ou composé) peut apporter des grands avantages dans la modélisation des événements rares ou extrêmes.

1.3.3 Processus Gamma

Le processus Gamma est un processus de chocs approprié pour la modélisation des dommages s'accumulant d'une façon monotone au fil du temps. Ce processus de Lévy est caractérisé par des accroissements indépendants et positifs et diffère du processus de Poisson par son espace d'état continu.

Le processus gamma doit son nom à loi Gamma dont densité sous probabilité s'écrit de la forme suivante :

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.20)$$

où α et β sont respectivement les deux paramètres de forme et d'échelle de la loi Gamma. $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (1.21)$$

Dans sa forme la plus simple un processus gamma homogène de paramètre (α, β) est défini comme un processus stochastique $\{Y(t), t \geq 0\}$ ayant les propriétés suivantes :

- $Y(0) = 0,$

- les incréments de ce processus sont indépendants, positifs ou nuls,
- pour tout $0 < s < t$, la variable aléatoire d'incrément $(Y(t) - Y(s))$ suit une loi gamma $f_{\alpha(t-s),\beta}$.

Dans le cas homogène, ce processus présente une tendance moyenne linéaire avec une espérance d'accroissement $\mathbb{E}[Y(t) - Y(s)] = \frac{\alpha(t-s)}{\beta}$.

Un processus gamma non-homogène est caractérisé par une distribution non-homogène des incréments. Dans ce cas, la loi de la distribution de la variable aléatoire $(Y(t) - Y(s))$ est définie à partir d'une fonction $\varphi(t)$ non-négative, monotone et croissante qui s'introduit dans le paramètre de forme de la manière suivante :

$$(Y(t) - Y(s)) \sim f_{\alpha(\varphi(t)-\varphi(s)),\beta} \quad (1.22)$$

Le processus Gamma a une trajectoire de développement monotone, ce qui le rend largement utile dans les cas où le phénomène aléatoire considéré présente une monotonie d'évolution comme par exemple un mécanisme de vieillissement progressif et continu, la croissance des fissures de corrosion, l'érosion, la consommation et l'accroissement de la quantité de matière perdue etc....

Comme le processus de Poisson, le processus gamma et un processus de sauts. Selon [Singpurwalla and Wilson \(1998\)](#), la principale différence entre ces deux processus de sauts se présente comme suit : dans un intervalle de temps fini, le processus de Poisson composé présente un nombre fini de sauts tandis que les processus gamma y ont un nombre infini. [Van Noortwijk \(2009\)](#) montre que le processus gamma peut être considéré comme un processus de Poisson composé avec des incréments distribués selon la loi gamma et un taux de Poisson qui tend vers l'infini. Cette propriété est tout à fait significative dans la modélisation de la dégradation que de nombreux ingénieurs fiabilistes proposent et suivant laquelle que de la plupart des phénomènes de dégradation sont causés par des chocs consécutifs et que l'amplitude de chacun de ces chocs est aléatoire et relativement faible. Dans ce sens, le processus Gamma est considéré comme un fort candidat pour la modélisation des phénomènes de dégradation lorsque cette dernière est considérée comme une forme d'accumulation continue de dommages ou d'usures cumulatifs et monotones [Singpurwalla \(1997\)](#).

Applications [Abdel-Hameed \(1975\)](#) fut le premier à implémenter le processus gamma comme un modèle approprié pour la modélisation des phénomènes de détériorations aléatoires. Un avantage capital de la modélisation de dégradation par les processus gamma est que les calculs mathématiques nécessaires pour l'analyse et la prise de décision de maintenance sont relativement simples et explicites [Van Noortwijk et al. \(2007\)](#).

1.3. Généralité sur les modèles sans Mémoires

Les processus gamma sont utilisés pour la modélisation des processus de dégradation à accroissements indépendants et positifs aboutissant à un large domaine d'applications comme par exemple le calcul de la vie restante utile (RUL) des systèmes [Wei and Xu \(2014\)](#), la planification de la maintenance préventive basée sur le temps ou l'état du système [Tan et al. \(2010\)](#) et l'évaluation de la fiabilité des équipement en temps réel [Wang et al. \(2011\)](#). [Van Noortwijk \(2009\)](#) présente une étude détaillée sur l'historique, la définition, la calibration et les différentes applications des processus gamma. Dans son enquête l'auteur présente une liste détaillée sur des applications de processus gamma pour la maintenance préventive des systèmes suivant différentes politiques de maintenance.

1.3.4 Processus de Wiener (Mouvement Brownien)

Les processus de Poisson et gamma offrent un trajet d'évolution monotone et croissant. Dans ces deux modèles, l'augmentation du phénomène aléatoire est strictement positive. Pourtant certains phénomènes aléatoires nécessitent une modélisation non-monotone.

D'un point de vue physique et pour des nombreux produits, l'évolution de la dégradation dans un intervalle de temps infinitésimal peut être considérée comme une superposition additive d'un grand nombre de petits effets divers et indépendants. L'augmentation de la dégradation est vue comme un effort combiné de ces effets et d'après le théorème de la limite centrale, cette augmentation aura approximativement une distribution normale. Cette proposition justifie l'emploi des processus non-monotone, notamment le processus de Wiener [Ye and Xie \(2015\)](#). D'autre part, des phénomènes aléatoires à évolution non-monotone sont aussi observés dans le domaine économique (comme les indices financiers, les prix des actions, d'options et des dérivés, les taux d'intérêt).

Ainsi, les séries de données à évolution non-monotone forment un objet pour la modélisation dans plusieurs domaines. Ces séries résultent généralement des phénomènes aléatoires susceptibles de subir alternativement des éventuelles hausses et baisses. Lorsqu'ils sont considérés comme des phénomènes dépendant du passé ils sont modélisés par les séries temporelles autorégressives. Négligeant toute dépendance possible entre les réalisations de la série, d'autres modèles sans mémoires comme les arbres binomiaux, les modèles additifs et multiplicatifs et la marche aléatoire sont aussi proposés pour la modélisation [Luenberger \(1998\)](#) [Shreve \(2004\)](#).

Historique Parmi les modèles sans mémoire, Louis Bachelier a proposé en 1900 un modèle pour le mouvement des prix des actions à temps continu dans lequel il était probablement le premier à impliquer l'objet mathématique qui est aujourd'hui connu sous le nom de processus de Wiener ou de mouvement brownien. Cet objet, le mouvement

brownien, porte le nom de Robert Brown, un botaniste écossais qui a découvert en 1882 un mouvement erratique des particules micrométriques dans le fluide interne des grains de pollen. Quelques années plus tard, Einstein, Wiener et d'autres chercheurs font des études poussées sur ce sujet. Einstein établit ainsi l'équation de diffusion des particules micrométriques qui fut le clou de sa thèse présentée à l'Université de Zurich en 1905. En 1923, Norbert Wiener réalisa une modélisation efficace du mouvement brownien ainsi qu'une étude mathématique sur la continuité et la non-dérivabilité de ses trajectoires. Aujourd'hui, le mouvement brownien (ou le processus de Wiener) est largement utilisé comme un objet mathématique pour la modélisation de différents phénomènes aléatoires continus et fortement fluctuants [Platen and Heath \(2010\)](#).

Définition Le processus de Wiener standard $(W(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ est défini comme un processus stochastique markovien à accroissements indépendants, stationnaires, et gaussiens aboutissant à une trajectoire d'évolution aléatoire non-monotone sur tout intervalle, continu mais non-différentiable en tout t et pour lequel :

- $W(0) = 0$,
- $\mathbb{E}[W(t)] = 0$,
- $\text{Var}[W(t) - W(s)] = (t - s)$ pour tout $0 \leq s < t$.

La distribution gaussienne caractérisant les incréments de ce modèle lui offre aussi des nombreuses propriétés intéressantes.

Le processus de Wiener standard, noté souvent dans la littérature par $W(t)$, est l'un des processus de Lévy les mieux connus. Il constitue un bloc fondamental de construction pour toute une collection de processus plus généraux. Dans la section 1.4, des modèles stochastiques dont le processus de Wiener est le processus de base sont présentés. Le processus de Wiener généralisé ou le mouvement Brownien avec dérive est définie comme suit :

$$Y(t) = \mu_d t + \sigma_d W(t) \tag{1.23}$$

où μ_d et σ_d sont respectivement les deux paramètres de dérive et de volatilité du modèle. On note que la volatilité est définie comme une mesure de variation standard de la diffusion du modèle ou en d'autres termes du degré de fluctuation du processus.

Comme dans le cas du processus de Wiener standard, le processus de Wiener avec dérive est aussi caractérisé par des accroissements indépendants, stationnaires et qui suivent la loi de Gauss :

$$\Delta Y(t) \sim \mathcal{N}(\mu_d \Delta t, \sigma_d^2 \Delta t), \tag{1.24}$$

pour $\Delta Y(t) = Y(t + \Delta t) - Y(t)$ et $\Delta t \geq 0$.

1.3. Généralité sur les modèles sans Mémoires

Le processus de Wiener évolue en temps continu et à trajectoires continues. Comme il possède des accroissements indépendants, il est également un processus de Markov.

Dans certaines applications la prévision de l'évolution future est de grande importance. Une mesure particulièrement intéressante pour la prise des décisions est le premier temps de passage T_S d'un certain seuil ou limite S_p . Une estimation de la distribution du premier temps de passage et des quantités correspondantes (moyenne, médian, écart-type) à partir du modèle choisi paraît donc indispensable. Pour un processus de Wiener généralisé et une valeur de seuil S_p prédéfinie, la variable T_S suit une loi inverse-gaussienne $IG(S_p/\mu_d, S_p^2/\sigma_d^2)$. La densité de probabilité de T_S est donnée par la fonction suivante :

$$IG(t; a, b) = \left(\frac{b}{2\pi t^3}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{b(t-a)^2}{2a^2t}\right], \quad (1.25)$$

pour $t > 0$, $a = S_p/\mu_d$ et $b = S_p^2/\sigma_d^2$.

Applications Les processus de Wiener font l'objet de larges applications dans l'analyse des données de dégradation ainsi que des données financières. Par exemple, [Park and Padgett \(2005a\)](#) ont utilisé ce processus pour définir un modèle de base qui décrit l'évolution de dommages cumulatifs des matériaux. [Yu Wang et al. \(2014\)](#) utilisent le modèle pour étudier l'usure de la tête magnétique des disques durs. Pour cette application le paramètre de temps t dans l'équation (1.23) est substitué par une fonction $\Lambda(t)$ continue et monotone en fonction de t .

[Doksum et al. \(1992\)](#) ont supposé que la dégradation dans la matière d'isolation des câbles électriques suit un processus de Wiener et que les taux de défaillance peuvent être analysés en utilisant la distribution IG . En outre, les auteurs considèrent que cette dégradation est accélérée lorsque la tension est plus élevée. Le facteur de stress, autrement appelé covariable environnementale, est alors introduit.

Dans de nombreuses applications, les facteurs de stress environnementaux comme la température, l'humidité, les vibrations, le taux d'utilisation... peuvent influencer le processus étudié. La plupart des approches existantes permettent à certains paramètres des processus stochastiques de varier en fonctions du temps ou des covariables. Pour choisir un moyen approprié pour incorporer les covariables environnementales dans le modèle mathématique, une bonne compréhension de la façon dont les facteurs d'accélération affectent les paramètres du modèle est indispensable. Une liste des fonctions liant les éventuelles covariables aux différents paramètres des modèles de Wiener avec dérive et qui ont été utilisées dans la littérature est donnée par [Ye and Xie \(2015\)](#). On peut citer : la fonction linéaire, la relation d'Arrhenius et la relation exponentielle.

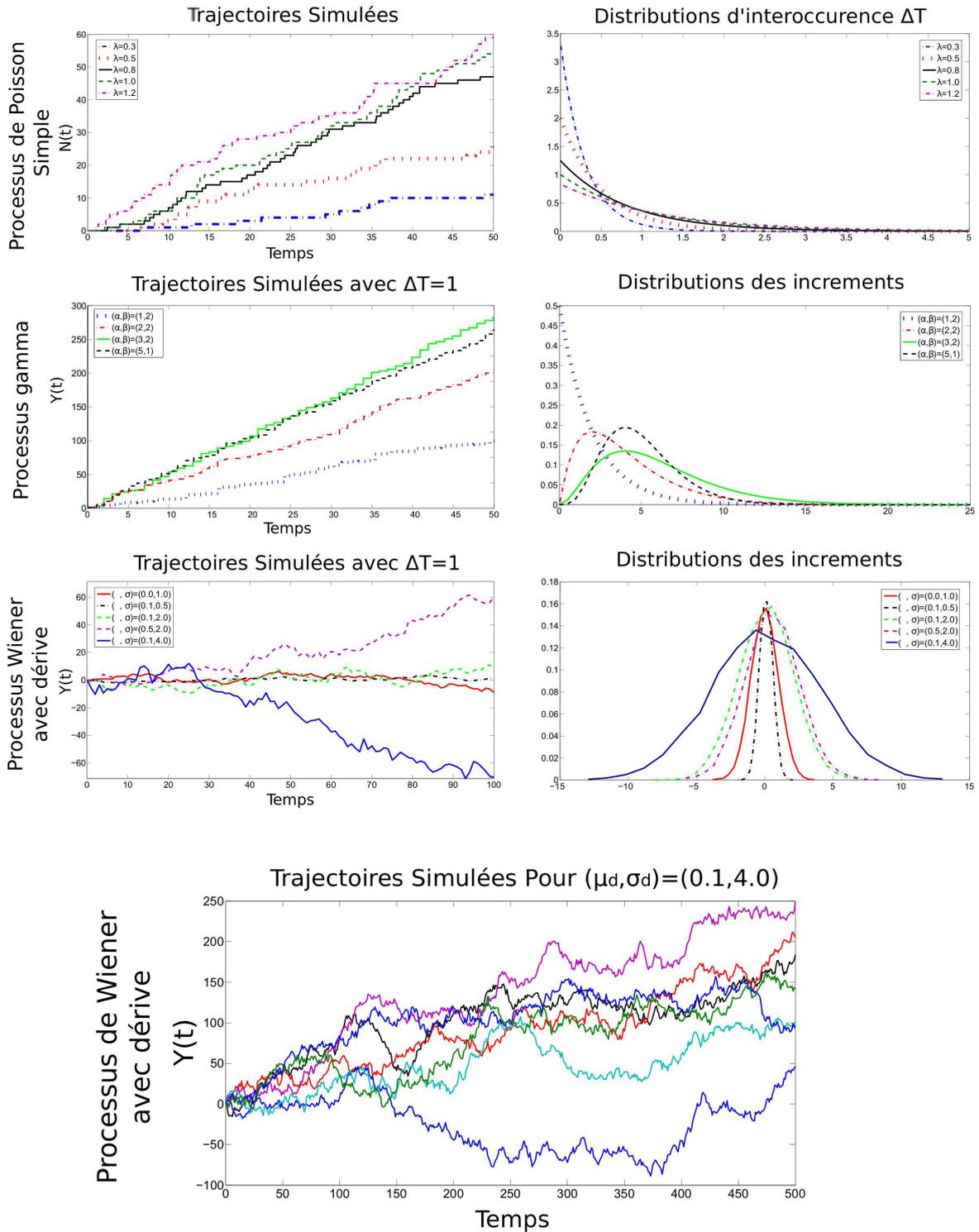


FIGURE 1.3 – Exemples sur les modèles stochastiques markoviens : Processus de Poisson Simple, Processus gamma, Processus de Wiener.

1.4. Modèles Dérivés des Processus de Lévy

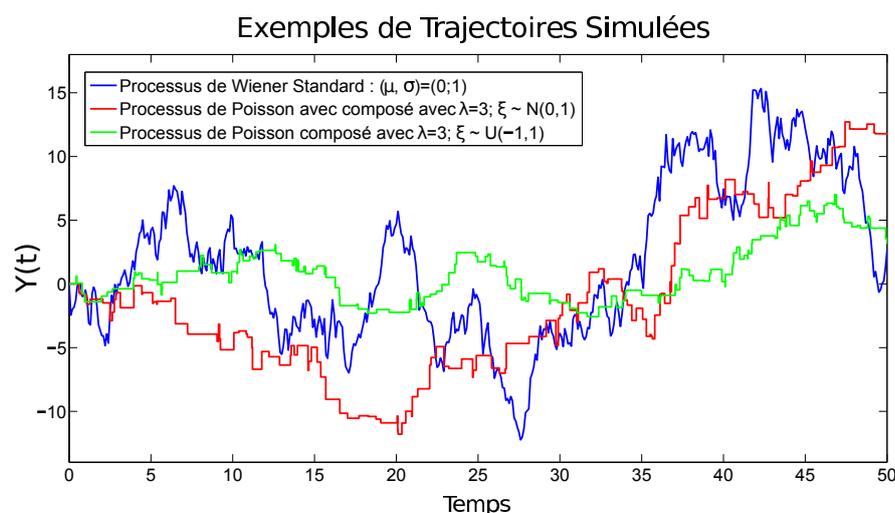


FIGURE 1.4 – Comparaison entre le processus de Poisson composé et le processus de Wiener.

1.3.5 Exemples sur les processus stochastiques markoviens

Dans la Figure 1.3 nous présentons des exemples de simulation pour les trois processus stochastiques markoviens de Poisson, gamma et de Wiener. Des trajectoires simulées avec différents paramètres des modèles sont présentées ainsi que les distributions associées des instants d'inter-occurrence pour le processus de Poisson simple et des incréments pour le processus gamma et le processus de Wiener. Des trajectoires de Wiener avec dérive simulées pour $T = 500$ et $(\mu_d, \sigma_d) = (0.1, 0.4)$ sont aussi présentées. La Figure 1.4 présente une comparaison entre un processus de Poisson composé avec incréments uniformément distribués, un processus de Poisson composé avec des incréments normalement distribués et un processus de Wiener sans dérive. La différence majeure entre le processus de Poisson à incréments gaussiens et le processus de Wiener est la discontinuité de sa trajectoire. Alors que le processus de Wiener standard présente une trajectoire continue avec des incréments distribués suivant la loi de Gauss ; c.à.d. pour tout $\Delta t \geq 0$, $\Delta Y(t) \sim N(0, \Delta t)$; le processus de Poisson ne subit des accroissements qu'aux instants précis de sauts définis par le processus ponctuel du taux λ .

1.4 Modèles Dérivés des Processus de Lévy

Le modèle de mouvement brownien avec dérive (1.23), vérifiant les propriétés d'un processus de Lévy (voir section 1.1.3), fournit une base très utile pour l'analyse des phénomènes aléatoires non-monotone. D'une façon plus générale, les processus de Lévy

et processus dérivés des processus de Lévy présentent des outils mathématiques pour la modélisation de toute une variété des phénomènes aléatoires dans le monde réel. Cela peut aller de la modélisation des mouvements des particules, des animaux et des yeux humains, jusqu'à la modélisation des phénomènes de dégradation des systèmes industriels et de l'évolution des prix et des indices financiers. Les processus de Lévy constituent une grande classe des processus caractérisés par des trajectoires continues à droite avec indépendance et stationnarité des incréments. Cette classe comprend entre autres le processus de Wiener, le processus de Poisson et de Poisson composé, le processus gaussien inverse, le processus gamma homogène, la variance gamma et le processus de Cauchy.

Dans notre document, nous nous intéressons particulièrement aux phénomènes aléatoires non-monotones. Ainsi, des processus dérivés des processus de Wiener et des processus de Poisson composé sont présentés dans la suite, en s'appuyant principalement sur le modèle de base du mouvement brownien (1.23).

Afin d'être adapté aux différents problèmes et d'être utilisé dans des différentes applications, certaines modifications sont souvent apportées à ce modèle. D'une manière globale, et à part l'influence des covariables qu'on a déjà évoquée, on présente trois variations de ce modèle de base : (1) le modèle de mouvement Brownien géométrique se représentant sous une forme exponentielle du mouvement Brownien, (2) les modèles combinant un processus de Wiener (standard ou modifié) avec d'autres processus de Lévy, notamment un processus de sauts, (3) le modèle de diffusion à volatilité variable dans lequel le terme de volatilité σ est à son tour modélisée par un processus stochastique. Dans cette section, ces trois modifications et leurs combinaisons sont présentées.

1.4.1 Mouvement Brownien Géométrique

Le processus de Wiener standard et ses dérivés sont largement utilisés pour modéliser des phénomènes non-monotones. Le processus de Wiener se base sur l'hypothèse forte concernant la distribution normale des incréments. Cette hypothèse offre au modèle des propriétés intéressantes qui facilitent l'emploi, la calibration et les différents calculs mathématiques sur les différents caractéristiques et fonctions d'utilité du modèle. Pourtant cette hypothèse présente aussi le point faible suivant : la distribution normale des accroissements aboutit à une probabilité non-nulle d'avoir une valeur négative de l'accumulation des incréments. En pratique, on se trouve souvent dans un cas où le processus étudié devrait être toujours positif. C'est par exemple le cas dans la modélisation des phénomènes de dégradations où l'état neuf système correspond à une dégradation nulle, ainsi que pour la modélisation de certaines mesures naturellement non-négatives (vitesse de vent, intensité de lumière, mesures de puissance ou de production...) et la modélisation

1.4. Modèles Dérivés des Processus de Lévy

des indices financières (prix des actifs, valeurs de stock, indices boursiers...). En plus des valeurs négatives non-tolérées, d'autres caractéristiques détectables sur l'évolution du phénomène aléatoire ainsi que la propriété de ses incréments peuvent aussi imposer certaines modifications du mouvement brownien.

Pour la modélisation des phénomènes à valeurs non-négative une modification du modèle de Wiener en utilisant la transformée logarithmique est suggérée. La solution de ce modèle, se représentant sous une forme exponentielle du mouvement Brownien. Elle est connue sous le nom du mouvement Brownien géométrique. Le mouvement brownien géométrique a été proposé pour modéliser les prix des actifs par [Samuelson \(1965\)](#). Plus tard, il a été utilisé par [Merton \(1973\)](#) et [Black and Scholes \(1973\)](#) comme un modèle de prix des actions pour la valorisation des options. Ce travail a mérité le prix Nobel d'économie en 1997. Ce modèle devient ensuite connu en finance sous le nom du modèle de Black-Scholes et il peut être défini comme étant la solution de l'équation différentielle stochastique (SDE) suivante :

$$dY(t) = \mu_d Y(t) dt + \sigma_d Y(t) dW(t) \quad (1.26)$$

où μ_d et σ_d représentent respectivement les paramètres de dérive et de volatilité du processus de diffusion. Dans ce modèle le changement de la valeur de $Y(t)$ est proportionnel à sa valeur actuelle. En appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées (chaine rule) correspondante au processus d'Itô, l'équation différentielle stochastique pour la fonction $f(Y(t)) = \ln Y(t)$ peut être déduite de l'équation (1.26) comme suit :

$$d \ln Y(t) = \left(\mu_d - \frac{\sigma_d^2}{2} \right) dt + \sigma_d dW(t) \quad (1.27)$$

Prenons $\mu_{ld} = \mu_d - \frac{\sigma_d^2}{2}$, la solution explicite de cette SDE s'écrit comme une fonction exponentielle d'un processus de Wiener avec dérive comme suit :

$$Y(t) = Y(0) \exp[(\mu_{ld})t + \sigma_d W(t)] \quad (1.28)$$

D'après cette equation le processus $Y(t)$ ne peut plus atteindre de valeurs négatives. Les accroissements calculés sur la transformée logarithmique du processus $Y(t)$ correspondent au changement relatif de sa valeur :

$$d \ln Y(t) = \ln Y(t + dt) - \ln Y(t) = \ln \frac{Y(t + dt)}{Y(t)} \quad (1.29)$$

La distribution de transition de ce processus de l'état $Y(s) = x$ à l'état $Y(t) = y$ est définie comme suit [Platen and Heath \(2010\)](#) :

$$f(s, x; t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}\sigma_d y} \exp\left[-\frac{(\ln(y) - \ln(x) - (\mu_d - \frac{\sigma_d^2}{2})(t-s))^2}{2\sigma_d^2(t-s)}\right] \quad (1.30)$$

Applications Ce processus présente de multiples avantages :

- estimation facile des paramètres à partir de la série des accroissements relatifs réels,
- calcul mathématique explicite du premier temps de passage,
- meilleure représentation de la distribution non-normale des incréments,
- processus à valeurs non-négatives.

Pour toutes ces raisons, le modèle de Black& Scholes est largement utilisé en finance. C'est le modèle le plus simple et le plus connu pour des applications diverses : évaluation des prix des options et des dérivés [Coelen \(2002\)](#); [Turner \(2010\)](#), optimisation des portefeuilles [Lindberg \(2009\)](#); [Sarol et al. \(2007\)](#), calcul d'utilité [Delong and Klüppelberg \(2008\)](#). [Postali and Picchetti \(2006\)](#) profitent également de ce modèle pour effectuer une analyse quantitative de la trajectoire de prix du pétrole. Les auteurs montrent que malgré sa parcimonie et sa simplicité, le mouvement brownien géométrique peut offrir une bonne modélisation de l'indice d'évolution des prix du pétrole et de la variable d'état décrivant les gisements de pétrole.

Le mouvement brownien géométrique trouve également des vastes applications dans le domaine de l'ingénierie et les études de dégradation et de fiabilité. [Park and Padgett \(2005b\)](#) and [Park and Padgett \(2006\)](#) étudient les processus de dégradation accélérée suivant différents modèles de dégradation, y compris le modèle gamma et le mouvement brownien géométrique. Considérant que le processus de dégradation suit un mouvement brownien géométrique, les auteurs dérivent les deux fonctions de densité de probabilité correspondantes au niveau de dégradation et au premier temps de passage. [Chiang et al. \(2014\)](#) trouvent que le mouvement brownien géométrique offre une modélisation des mesures de dégradation plus appropriée que le mouvement brownien simple. Ce modèle est alors implémenté dans le cadre d'un test de dégradation accélérée sur l'intensité de la lumière pour des produits LED haute puissance.

Dans cette thèse nous serons uniquement intéressés par des phénomènes non-monotone à valeurs positives, il est donc justifiable de choisir le processus brownien géométrique comme un processus de base sur lequel différentes modifications et améliorations sont apportées.

1.4.2 Modèle de diffusion avec sauts

Dans plusieurs applications, notamment dans l'analyse des systèmes de détérioration ou des indices financiers, le phénomène étudié est soumis à des changements d'environnement. Selon la nature du système en question, ces changements peuvent marquer d'une façon ou d'une autre l'évolution et l'état du phénomène étudié. Prenant ces facteurs en considération, des améliorations dans la précision de la prédiction ou encore dans la struc-

1.4. Modèles Dérivés des Processus de Lévy

ture et la compréhension du processus sous-jacent (underlying process) sont envisageables.

Dans les systèmes industriels où la dégradation est considérée comme une superposition d'un grand nombre de petits chocs de sources diverses et indépendantes, il se peut que certains chocs arrivent occasionnellement et impactent fortement le système. Ces chocs occasionnels peuvent être considérés comme des événements rares qui causent une augmentation (ou une diminution) brusque et improbable du niveau de dégradation. Lorsque celle-ci est considérée comme un processus continu, l'addition d'un processus de sauts pouvant modéliser l'effet de ces événements rares peut apporter des améliorations importantes dans la description du modèle ainsi que dans ses utilisations.

La dégradation des systèmes industriels et mécaniques est vue souvent comme un processus continu de perte de fonctionnalité du au vieillissement, à la fatigue ou l'usure du matériel, etc. Ce processus de détérioration continue éprouve parfois d'importantes fluctuations occasionnelles dues à des dommages discrets causés par exemple par des chocs externes aléatoires, des fissures ou des pertes de masse due à une collision... En finance comme en physique, certains événements politiques, économiques ou simplement naturels peuvent causer des changements particulièrement importants sur le phénomène étudié (indices boursiers, prix des actifs, prix de pétrole, taux d'échange, valeur des biens et des stocks...). Ces changements nommés "sauts" causés par des accroissements positifs ou négatifs relativement large par rapport à la moyenne des incréments dans une période donnée apparaissent dans la trajectoire d'évolution du phénomène sous forme de discontinuités.

Sachant que le mouvement brownien et le mouvement brownien géométrique évoluent tous les deux en temps continu et à trajectoires continues, ces deux modèles sont incapables de représenter les discontinuités occasionnelles dans la trajectoire des phénomènes physiques ou économiques. Ces discontinuités sont traduites par d'éventuelles fluctuations dont les valeurs et la fréquence sont supérieures à celles prévues d'après la distribution normale des accroissements du mouvement brownien. Pour cela, une modification du mouvement brownien en ajoutant un processus de sauts est proposée.

Le processus de diffusion avec sauts est un processus stochastique qui décrit à la fois le comportement aléatoire gaussien et les grandes fluctuations dans l'évolution des données. [Cont and Tankov \(2004\)](#) donnent une étude détaillée des processus dérivés de Lévy à combinaisons de processus continus et de sauts. Les auteurs présentent les outils mathématiques correspondant à ces processus ainsi que leurs applications dans le domaine de la modélisation financière.

Dans les modèles de diffusion avec sauts à base de Wiener, un processus de Poisson composé est ajouté au mouvement brownien géométrique habituel afin de permettre les

éventuelles discontinuités occasionnelles caractérisées par des fluctuations importantes. Le modèle de diffusion avec sauts est introduit en 1997 par [Merton \(1976\)](#) pour décrire les cracks boursiers dans la modélisation financière. Dans ce modèle [Merton \(1976\)](#) a utilisé une variable aléatoire ayant une distribution log-normale pour modéliser les amplitudes des sauts et un processus de Poisson pour signaler leurs instants d'arrivées. [Jarrow and Rosenfeld \(1984\)](#) et [Jorion \(1988\)](#) démontrent que les sauts sont empiriquement importants pour la modélisation des plusieurs marchés financiers. Plus tard, [Kou \(2002\)](#) a proposé un modèle de diffusion avec sauts en considérant que l'intensité des sauts suit une distribution double exponentielle. [Hanson and Zhu \(2004\)](#) donnent une comparaison de la performance des trois modèles de diffusion avec sauts dont les amplitudes sont distribués selon les lois normale, uniforme et double exponentielle. Les auteurs présentent une analyse théorique et empirique pour montrer que le modèle avec des sauts uniformément distribués présente une meilleure approximation de la propriété de queue dense (*fat tail*) et de l'asymétrie empirique dans la distribution des incréments tout en gardant un taux de saut raisonnable.

En général, un processus de diffusion avec sauts est défini comme étant la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dY(t) = Y(t)[\mu_d dt + \sigma_d dW(t) + \xi_J dN(t)] \quad (1.31)$$

avec μ_d est le taux moyen d'accroissement du processus, σ_d est la volatilité du processus, ξ_J est une variable aléatoire qui marque l'effet d'un saut sur l'accroissement du processus et $N(t)$ est un processus de Poisson de taux λ_J marquant l'arrivée des sauts. Tous les paramètres du modèle $\{\mu_d, \sigma_d, \lambda_J\}$ ainsi que les paramètres de la fonction de distribution de la variables ξ_J sont supposés constants et les deux processus $W(t)$ et $N(t)$ sont supposés indépendants.

Comme dans le cas du processus brownien géométrique, le modèle de diffusion avec sauts peut être défini d'une manière positive en appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées sur la fonction $\ln Y(t)$. Le modèle de diffusion avec sauts s'écrit alors sous la forme logarithmique suivante :

$$d \ln Y(t) = \mu_{ld} dt + \sigma_d dW(t) + J dN(t) \quad (1.32)$$

μ_{ld} et σ_d sont respectivement le taux moyen et la volatilité d'accroissement de $\ln Y(t)$. $J = \ln(\xi_J + 1)$ une la variable aléatoire caractérisant les amplitudes des sauts dans le modèle logarithmique. Les $d \ln Y(t)$ sont appelés les log-incréments du processus $Y(t)$.

La distribution des log-incréments de ce modèle présente généralement des queues plus épaisses et des pics plus importants par rapport à la distribution normale. Cette

1.4. Modèles Dérivés des Processus de Lévy

distribution varie en fonction des caractéristiques de sauts, notamment en fonction du taux d'arrivée et de la loi de distribution de l'intensité de sauts (voir figure 1.5).

L'amplitude de sauts modélisée dans l'équation (1.32) par la variable aléatoire J est supposée suivre une distribution fixe notée $\phi_J(q)$. Dans ce qui suit, trois distributions possibles pour la modélisation des amplitudes de sauts sont citées. Pour chacune, nous représentons les trois lois de probabilité couramment utilisées pour la description des intensités des sauts dans ce type de modèle. La densité de probabilité des log-incréments du modèle $d \ln Y(t)$ pour un intervalle d'échantillonnage fixe $dt \rightarrow 0^+$ ainsi que les principaux moments des incréments sont présentés.

Loi normale Considérons que la densité des amplitudes de sauts dans le modèle de l'équation (1.32) notée ϕ_J est gaussienne :

$$\phi_J^{jdn}(q) = \phi_n(q; \mu_J, \sigma_J^2) \quad (1.33)$$

où $\phi_n(q; \mu_J, \sigma_J^2)$ est la densité de la loi de Gauss de moyenne μ_J et de variance σ_J^2 . Puisque le logarithme d'amplitude de sauts dans le processus $Y(t)$ suit la loi de Gauss ce modèle est appelé modèle de diffusion avec saut log-normal.

Hanson and Westman (2002a) montrent que pour ce modèle, la densité de probabilité correspondant aux incréments du processus $\Delta \ln Y(t)$ et notée $\phi_{\Delta \ln Y(t)}^{jdn}$ s'écrit de la manière suivante :

$$\phi_{\Delta \ln Y(t)}^{jdn}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda_J \Delta t) \cdot \phi_n(x; \mu_{ld} \Delta t + k\mu_J, \sigma_d^2 \Delta t + k^2 \sigma_J^2) \quad (1.34)$$

pour $-\infty < x < \infty$, où $p_k(\Lambda)$ est la distribution de Poisson de taux Λ : $p_k(\Lambda) = e^{-\Lambda} \Lambda^k / k!$ et Δt est la période d'échantillonnage.

Une approximation du second ordre de la distribution de probabilité de $\Delta \ln Y(t)$ sur un intervalle $[x_1, x_2]$ peut être écrite comme suit :

$$\Phi_{\Delta \ln Y(t)}^{jdn}(x_1, x_2) \simeq \frac{\sum_{k=0}^2 p_k(\lambda_J \Delta t) \Phi_n(x_1, x_2; \mu_{ld} \Delta t + k\mu_J, \sigma_d^2 \Delta t + k^2 \sigma_J^2)}{\sum_{j=0}^2 p_j(\lambda_J \Delta t)} \quad (1.35)$$

pour tout $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$, où $\Phi_n(x_1, x_2; a, b)$ désigne la distribution gaussienne de moyenne a et de variance b^2 sur $[x_1, x_2]$.

Les différents moments des incréments de ce modèle sont déduits de la manière sui-

vante :

$$M_{jdn}^1 = E[\Delta \ln Y(t)] = [\mu_{ld} + \lambda_J \mu_J] \Delta t \quad (1.36)$$

$$M_2^{jdn} = \text{Var}[\Delta \ln Y(t)] = [\sigma_d^2 + \lambda_J(\sigma_J^2 + \mu_J^2)] \Delta t \quad (1.37)$$

$$M_3^{jdn} = E[(\Delta \ln Y(t) - M_{(njd)}^1)^3] = [3\sigma_J^2 + \mu_J^2] \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} M_4^{jdn} &= E[(\Delta \ln Y(t) - M_{njd}^1)^4] \\ &= [\mu_J^4 + 3\sigma_J^4 + 6\mu_J^2\sigma_J^2]\lambda_J\Delta t + 3[\sigma_d^2 + \lambda_J(\sigma_J^2 + \mu_J^2)]^2(\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (1.39)$$

Ces moments sont particulièrement utiles pour la calibration et l'analyse de la qualité de l'ajustement du modèle.

Loi uniforme Considérons que la variable aléatoire d'amplitude de saut est uniformément distribuée entre Q_a et Q_b :

$$\phi_J^{ujd}(q) = U(q; Q_a, Q_b) \quad (1.40)$$

L'amplitude des sauts J sur le modèle (1.32) a une moyenne $\mu_J = E[J] = (Q_a + Q_b)/2$ et une variance $\sigma_J^2 = \text{Var}[J] = (Q_b - Q_a)^2/12$.

Hanson (2002) dérive la densité de probabilité correspondant aux incréments du processus $\Delta \ln Y(t)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \phi_{\Delta \ln Y(t)}^{jdu}(x) &= p_0(\lambda_J \Delta t) \phi_n(x; \mu_{ld} \Delta t, \sigma_d^2 \Delta t) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\lambda_J \Delta t) \cdot \frac{\Phi_n(x - kQ_b, x - kQ_a; \mu_{ld} \Delta t, \sigma_d^2 \Delta t)}{k(Q_b - Q_a)} \end{aligned} \quad (1.41)$$

pour tout $-\infty < x < \infty$.

Pour ce modèle, et en négligeant $p_k(\lambda_J \Delta t)$ pour $k > 1$, une approximation de premier ordre de la distribution de probabilité de $d \ln Y(t)$ sur un intervalle $[x_1, x_2]$ s'écrit comme suit **Hanson and Zhu (2004)** :

$$\Phi_{\Delta \ln Y(t)}^{jdu}(x_1, x_2) \simeq \frac{\sum_{k=0}^1 p_k(\lambda_J \Delta t) \cdot \Phi_{jdu}^{(k)}(x_1, x_2)}{\sum_{j=0}^1 p_j(\lambda_J \Delta t)} \quad (1.42)$$

pour tout $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$ et avec :

$$\Phi_{jdu}^{(0)}(x_1, x_2) = \Phi_n(x_1, x_2; \mu_{ld} \Delta t, \sigma_d^2 \Delta t) \quad (1.43)$$

1.4. Modèles Dérivés des Processus de Lévy

$$\begin{aligned}
\Phi_{jdu}^{(1)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{(Q_b - Q_a)} \\
&\cdot [(x_2 - x_1) \cdot \Phi_n(x_2 - Q_b, x_2 - Q_a; \mu_{ld}\Delta t, \sigma_d^2\Delta t) \\
&\quad - (x_1 - Q_b - \mu_{ld}\Delta t) \cdot \Phi_n(x_1 - Q_b, x_2 - Q_b; \mu_{ld}\Delta t, \sigma_d^2\Delta t) \\
&\quad + (x_1 - Q_a - \mu_{ld}\Delta t) \cdot \Phi_n(x_1 - Q_a, x_2 - Q_a; \mu_{ld}\Delta t, \sigma_d^2\Delta t) \\
&\quad + \frac{\sigma_d\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(e^{-\frac{x_{1b}^2}{2}} - e^{-\frac{x_{2b}^2}{2}} - e^{-\frac{x_{1a}^2}{2}} + e^{-\frac{x_{2a}^2}{2}} \right)]
\end{aligned} \tag{1.44}$$

où : $x_{1a} = (x_1 - Q_a - \mu_{ld}\Delta t)/(\sqrt{\sigma_d^2\Delta t})$,

$x_{1b} = (x_1 - Q_b - \mu_{ld}\Delta t)/(\sqrt{\sigma_d^2\Delta t})$,

$x_{2a} = (x_2 - Q_a - \mu_{ld}\Delta t)/(\sqrt{\sigma_d^2\Delta t})$

et $x_{2b} = (x_2 - Q_b - \mu_{ld}\Delta t)/(\sqrt{\sigma_d^2\Delta t})$.

Les moments de premier, second et troisième ordre de $d \ln Y(t)$ sont identiques à ceux du modèle de diffusion avec saut gaussien. Le moment d'ordre 4 est le suivant :

$$M_{jdu}^4 = (\mu_J^4 + 1.8\sigma_J^4 + 6\mu_J^2\sigma_J^2)\lambda_J\Delta t + 3(\sigma_d^2 + \lambda_J(\sigma_J^2 + \mu_J^2))(\Delta t)^2 \tag{1.45}$$

Loi double exponentielle Considérons que l'amplitude de sauts J suit une loi double exponentielle comme suit :

$$\phi_J(q)^{jdde} = \frac{p_1}{\mu_1} \exp\left[\frac{q}{\mu_1}\right] \mathbb{1}_{q < 0} + \frac{p_2}{\mu_2} \exp\left[\frac{-q}{\mu_2}\right] \mathbb{1}_{q \geq 0} \tag{1.46}$$

où $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$ sont les moyennes des deux distributions exponentielles, $0 < p_1 < 1$ représente la probabilité d'avoir des sauts négatifs et $p_2 = 1 - p_1$ est la probabilité que le saut ait une amplitude positive. La moyenne et la variance de la variable aléatoire J sont les suivantes :

$$\mu_J = -p_1\mu_1 + p_2\mu_2 \tag{1.47}$$

$$\sigma_J = p_1((\mu_J + \mu_1)^2 + \mu_1^2) + p_2((\mu_J - \mu_2)^2 + \mu_2^2) \tag{1.48}$$

La densité de probabilité pour l'accroissement $d \ln Y(t)$ est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\phi_{\Delta \ln Y(t)}^{jdde}(x) &= p_0(\lambda_J\Delta t) \cdot \phi_n(x; \mu_{ld}\Delta t, \sigma_d^2\Delta t) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(\lambda_J\Delta t)}{k} \\
&\cdot \left[\frac{p_1}{\mu_1} \exp\left(\frac{x - \mu_{ld}\Delta t + 0.5\sigma_d^2\Delta t/(k \cdot \mu_1)}{k\mu_1}\right) \cdot \Phi_n(-x; \bar{\mu}_1, \sigma_d^2\Delta t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{p_2}{\mu_2} \exp\left(\frac{-x + \mu_{ld}\Delta t + 0.5\sigma_d^2\Delta t/(k \cdot \mu_2)}{k\mu_2}\right) \cdot (1 - \Phi_n(-x; \bar{\mu}_2, \sigma_d^2\Delta t)) \right]
\end{aligned} \tag{1.49}$$

pour $-\infty < x < \infty$, avec $\bar{\mu}_1 = \sigma_d^2 \Delta t / (k\mu_1) - \mu_{ld} \Delta t$ et $\bar{\mu}_2 = -\sigma_d^2 \Delta t / (k\mu_2) - \mu_{ld} \Delta t$.

Pour ce modèle, et en négligeant $p_k(\lambda_J \Delta t)$ pour $k > 1$, une approximation de premier ordre de la distribution de probabilité de $\Delta \ln Y(t)$ sur un intervalle $[x_1, x_2]$ s'écrit comme suit [Hanson and Zhu \(2004\)](#) :

$$\Phi_{\Delta \ln Y(t)}^{jdde}(x_1, x_2) \simeq \frac{\sum_{k=0}^1 p_k(\lambda_J \Delta t) \Phi_{jdde}^{(k)}(x_1, x_2)}{\sum_{j=0}^1 p_j(\lambda_J \Delta t)} \quad (1.50)$$

pour $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$, avec :

$$\Phi_{jdde}^{(0)}(x_1, x_2) = \Phi_n(x_1, x_2; \mu_{ld} \Delta t; \sigma_d^2 \Delta t) \quad (1.51)$$

$$\Phi_{jdde}^{(1)}(x_1, x_2) = \Phi_n(x_1, x_2; \mu_{ld} \Delta t; \sigma_d^2 \Delta t) + p_1(\rho_{x_2, \nu_1} - \rho_{x_1, \nu_1}) + p_2(\rho_{x_1, \nu_2} - \rho_{x_2, \nu_2}) \quad (1.52)$$

et :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \mu_{ld} \Delta t - 0.5 \sigma_d^2 \Delta t / \mu_1 \\ \nu_2 &= \mu_{ld} \Delta t + 0.5 \sigma_d^2 \Delta t / \mu_2 \\ \rho_{x_1, \nu_1} &= e^{+(x_1 - \nu_1) / \mu_1} \Phi_n(-x_1; -\mu_{ld} \Delta t + \sigma_d^2 \Delta t / \mu_1, \sigma_d^2) \\ \rho_{x_2, \nu_1} &= e^{+(x_2 - \nu_1) / \mu_1} \Phi_n(-x_2; -\mu_{ld} \Delta t + \sigma_d^2 \Delta t / \mu_1, \sigma_d^2) \\ \rho_{x_1, \nu_2} &= e^{-(x_1 - \nu_2) / \mu_2} \Phi_n(x_1; \mu_{ld} \Delta t + \sigma_d^2 \Delta t / \mu_2, \sigma_d^2) \\ \rho_{x_2, \nu_2} &= e^{-(x_2 - \nu_2) / \mu_2} \Phi_n(x_2; \mu_{ld} \Delta t + \sigma_d^2 \Delta t / \mu_2, \sigma_d^2) \end{aligned}$$

Les deux premiers moments correspondant aux accroissements $\Delta \ln Y(t)$ sont identiques à ceux du modèles de diffusion avec sauts gaussiens. Les troisième et quatrième moments sont donnés comme suit :

$$M_3^{jdde} = 6(p_2 \mu_2^3 - p_1 \mu_1^3) \lambda_J \Delta t \quad (1.53)$$

$$M_4^{jdde} = 24(p_2 \mu_2^4 + p_1 \mu_1^4) \lambda_J \Delta t + 3(\sigma_d^2 + \lambda_J(\sigma_J^2 + \mu_J^2))^2 (\Delta t)^2 \quad (1.54)$$

Le modèle avec saut double exponentielles est particulièrement intéressant pour plusieurs raisons. D'un point de vue théorique, l'étude du premier temps de passage d'un seuil S_p est réalisable. La discontinuité causée par les sauts sur la trajectoire de $Y(t)$ peut entraîner un dépassement du seuil (overshoot) à l'instant même du franchissement de S_p . En général, la distribution du dépassement ne peut pas être calculée analytiquement, ce qui rend impossible d'obtenir une solution explicite de la répartition du premier temps de passage. Toutefois, si les amplitudes de sauts J ont une distribution double exponentielle, alors le problème de dépassement peut être résolu analytiquement grâce à la propriété de perte de mémoire de la distribution exponentielle : $\mathbb{P}(J > a + b | J > b) = \mathbb{P}(J > a)$. Du point de vue pratique, les résultats obtenus sur le premier temps de passage et le

1.4. Modèles Dérivés des Processus de Lévy

”dépassement” sont particulièrement utiles dans des applications financières comme pour la valorisation des options et le calcul de risque.

La densité de probabilité du premier temps de passage pour un seuil fixe S_p , $\mathbb{P}(\tau_{S_p} \leq t)$, ainsi que la distribution conjointe entre le premier temps de passage et la valeur finale du processus $\mathbb{P}(\tau_{S_p} \leq t, Y_{\tau_{S_p}} \geq a)$ sont déterminés dans [Kou \(2007\)](#).

Le premier temps de passage τ_{S_p} par S_p est défini comme suit :

$$\tau_{S_p} := \inf\{t \geq 0; Y(t) \geq S_p\} \quad (1.55)$$

Le principal problème étudié par [Kou \(2007\)](#) est la distribution de τ_{S_p} :

$$\mathbb{P}(\tau_{S_p} \leq t) = \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq s \leq t} Y(s) \geq S_p\right) \quad (1.56)$$

En prenant $Y_L(t) = \ln Y(t)$ et $S_{Lp} = \ln(S_p)$, une façon d’écrire la solution de la SDE du modèle (1.32) est :

$$Y_L(t) = \mu_{ld}t + \sigma_d W(t) + \sum_{i=0}^{N(t)} J_i \quad (1.57)$$

Rappelons que la variable aléatoire J suit la loi double exponentielle définie par (1.46) et considérons que $\eta_1 = 1/\mu_1$ et $\eta_2 = 1/\mu_2$. Le générateur infinitésimal de ce modèle est donné par [Kou and Wang \(2004\)](#) :

$$\mathcal{L}u(x) = \frac{1}{2}\sigma_d^2 u''(x) + \mu_{ld}u'(x) + \lambda_J \int_{-\infty}^{\infty} [u(x+y) - u(x)] \phi_J^{jdde}(y) dy \quad (1.58)$$

pour toute fonction u continue et deux fois dérivable. En plus pour tout $\theta \in (-\eta_1; \eta_2)$, la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire J est donnée par :

$$\mathbb{E}[e^{\theta J}] = \frac{p_1}{1 + \theta \cdot \mu_1} + \frac{p_2}{1 - \theta \cdot \mu_2} \quad (1.59)$$

d’où la fonction génératrice des moments de $Y_L(t)$:

$$\mathbb{E}[e^{\theta Y_L(t)}] = \exp[G(\theta)t] \quad (1.60)$$

avec $G(\cdot)$ une fonction définie par :

$$G(x) = x\mu_{ld} + \frac{1}{2}x^2\sigma_d^2 + \lambda_J \left(\frac{p_1}{1 + x \cdot \mu_1} + \frac{p_2}{1 - x \cdot \mu_2} - 1 \right) \quad (1.61)$$

L’équation $G(x) = \alpha$ pour tout $\alpha > 0$ possède exactement quatre solutions $-\beta_{1,\alpha}, -\beta_{2,\alpha}, \beta_{3,\alpha}, \beta_{4,\alpha}$ sachant que :

$$0 < \beta_{1,\alpha} < \eta_1 < \beta_{2,\alpha} < \infty, \quad 0 < \beta_{3,\alpha} < \eta_2 < \beta_{4,\alpha} < \infty$$

On définit également le taux de croissance globale du modèle comme étant la moyenne de l'évolution du modèle :

$$\bar{\mu} = M_{jdde}^{(1)} = \mu_{ld} + \mu_J \cdot \lambda_J = \mu_{ld} + \lambda_J (-p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2) \quad (1.62)$$

On a :

- l'espérance du premier temps de passage est finie, c.à.d. $\mathbb{P}(\tau_{S_p} < \infty) = 1$ si et seulement si $\bar{\mu} \geq 0$.

- les résultats concernant la transformée de Laplace de τ_{S_p} sont les suivants :

Pour tout $\alpha \in [0; \infty[$, soit $\beta_{3,\alpha}, \beta_{4,\alpha}$ les deux solutions positives de $\alpha = G(x)$, alors, d'après [Kou and Wang \(2003\)](#) :

$$\mathbb{E}[e^{-\alpha \tau_{S_p}}] = \frac{\eta_2 - \beta_{3,\alpha}}{\eta_2} \cdot \frac{\beta_{4,\alpha}}{\beta_{4,\alpha} - \beta_{3,\alpha}} e^{-S_{Lp} \beta_{3,\alpha}} + \frac{\beta_{4,\alpha} - \eta_2}{\eta_2} \cdot \frac{\beta_{3,\alpha}}{\beta_{4,\alpha} - \beta_{3,\alpha}} e^{-S_{Lp} \beta_{4,\alpha}} \quad (1.63)$$

Coefficient d'asymétrie et d'aplatissement Les troisième et quatrième moments trouvés pour ce modèle avec les différentes distributions possibles pour l'amplitude de sauts sont particulièrement intéressants. Ces deux moments servent à calculer les deux coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de ce modèle. Rappelons que ces deux facteurs caractérisent respectivement le degré de symétrie et d'aplatissement de la distribution des incréments. Pour une distribution normale, comme par exemple dans le cas du mouvement brownien géométrique non-modifié, les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement sont respectivement égaux à 0 et 3. Pour les incréments $\Delta \ln Y(t)$ du modèle de diffusion avec sauts décrit par (1.32), les deux coefficients d'asymétrie et d'aplatissement sont déduit à partir des moments du modèles donnés dans les paragraphes précédents comme suit :

$$\beta_3 \equiv M_3 / (M_2)^{1.5} \quad (1.64)$$

$$\beta_3 \equiv M_4 / (M_2)^2 \quad (1.65)$$

On note pour un modèle de diffusion avec sauts ces facteurs peuvent être différents que ceux qui correspondent à une distribution normale.

Calibration Numériquement, l'estimation des paramètres pour ce modèle peut être réalisée par une optimisation non linéaire à grande échelle. Des techniques pour réduire les exigences de calcul de recherche multidimensionnelle peuvent être utilisées. Une méthode d'estimation des paramètres basée sur le maximum de vraisemblance est donnée dans le Chapitre 3.

Applications En finance, l'addition d'un processus de Poisson a été initialement proposée par [Merton \(1976\)](#) pour rapprocher le modèle de mouvement brownien géométrique

1.4. Modèles Dérivés des Processus de Lévy

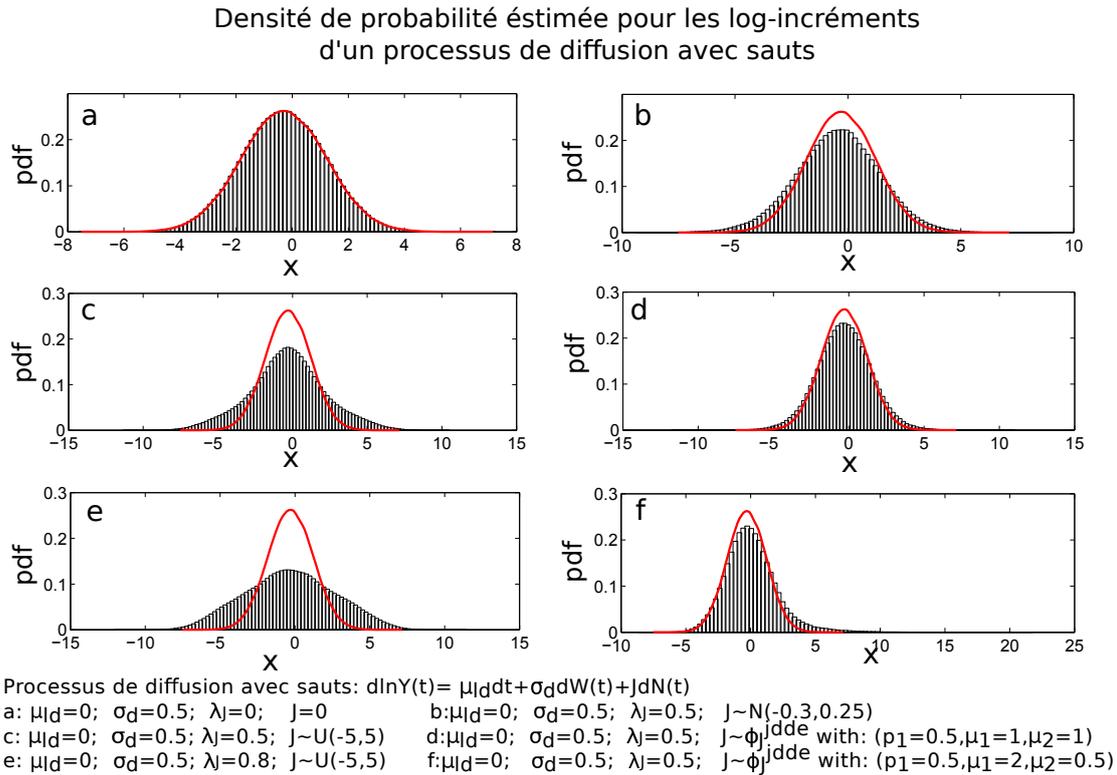


FIGURE 1.5 – Densité de probabilité estimée pour les log-incréments des différents modèles de diffusion avec sauts en comparaison avec la distribution normale du processus sans sauts (en rouge).

du processus d'évolution des prix des actions soumis à certaines discontinuités occasionnelles. Le modèle de diffusion avec saut gaussien est ensuite utilisé par [Andersen et al. \(2002\)](#) et [Hanson and Westman \(2002a\)](#) pour proposer des modèles d'évaluation du prix des options et des valeurs des portefeuilles ainsi que pour de nombreuses applications d'économétrie et de mathématique financière [Feng and Linetsky \(2008\)](#); [Tankov and Voltchkova \(2009\)](#). Le modèle de diffusion avec sauts uniformes est également utilisé dans ce domaine. La distribution uniforme des amplitudes de sauts introduit une limitation de l'effet (positif ou négatif) d'un choc sur l'évolution du phénomène étudié [Chiarella et al. \(2009\)](#); [Hanson \(2007b\)](#). D'autre part, la propriété de perte de mémoire de la distribution exponentielle rend le modèle de diffusion avec sauts double-exponentielle plus populaires pour les applications qui nécessitent l'étude des premiers temps de passage et de la valeur terminale du processus [Kou and Wang \(2003\)](#); [Nadratowska and Prochna \(2010\)](#).

Les modèles de diffusion avec sauts sont généralement reconnus dans le domaine financier pour l'évaluation des prix des options. Toutefois ces modèles ont été utilisés par [Miyaoka et al. \(2013\)](#); [Tamura and Yamada \(2015\)](#) pour étudier la stabilité des logiciels de

stockage en ligne (*cloud*) tout en examinant les aspects du trafic de réseau et des données sur les serveurs informatiques distant. Le problème de la maintenance optimale basée sur le processus de diffusion avec sauts proposé est ensuite discuté.

1.4.3 Modèle à volatilité stochastique

Les effets de changements dans l'environnement du système ainsi que son exposition à divers facteurs internes peuvent entraîner des changements dans les caractéristiques du développement du processus. Ceci se traduit parfois par des changements dans la mesure (où l'importance) des fluctuations de ce dernier.

On appelle volatilité une mesure qui reflète le caractère aléatoire de l'évolution d'un processus ou autrement dit l'amplitude de ses fluctuations. Pour certains phénomènes, cette volatilité n'est pas constante. Pour enrichir les processus stochastiques de diffusion afin qu'ils puissent représenter des phénomènes à volatilité variante des modèles de diffusion à volatilité stochastique sont proposés.

Dans ces modèles, la volatilité du phénomène étudié est considérée à son tour comme un phénomène aléatoire indépendant. Dans ce sens, ces modèles autorisent le terme de volatilité σ_d à varier d'une façon aléatoire en fonction d'une ou plusieurs variables d'état. La volatilité évolue donc suivant son propre processus stochastique. Le terme de volatilité, maintenant écrit comme une fonction de temps $\sigma_d(t)$, peut être modélisé par un processus stochastique à temps continu ou discret.

Dans de nombreuses applications, il est justifié et parfois nécessaire de considérer une évolution aléatoire de la volatilité. C'est par exemple le cas lorsque le modèle doit considérer une incertitude dans la variance des incréments ou des accroissements avec une distribution à queue plus lourde que la loi de Gauss. Ainsi, les modèles à volatilités stochastiques sont très adaptés dans la représentation des dynamiques complexes.

Différents types de processus à volatilité stochastique ont été proposés et utilisés au fil de ces dernières années. On cite : le processus de Hull White [Hull and White \(1987\)](#), le processus CIR [Cox et al. \(1985\)](#) et le processus d'Ornstein-Uhlenbeck [Heston \(1993\)](#); [Stein and Stein \(1991\)](#). Une forme générale et populaire du modèle à volatilité stochastique est le modèle de Heston [Heston \(1993\)](#). Le modèle à volatilité stochastique de Heston peut être représenté comme une solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dY(t) = Y(t)[\mu_d t + \sigma_d(t)dW_1(t)] \quad (1.66)$$

$$\sigma_d(t) = f(V(t)) \quad (1.67)$$

où μ_d est une constante représentant le taux moyen d'évolution du processus, $\sigma_d(t)$ est une fonction représentant la volatilité du processus. $\sigma_d(t)$ est supposée égale à une fonc-

1.4. Modèles Dérivés des Processus de Lévy

tion dépendante d'une nouvelle variable aléatoire d'état appelée $V(t)$. Il est commode de considérer que $V(t)$ est un processus stochastique de diffusion. Le processus à volatilité stochastique présente au moins deux sources de d'aléa : celle introduite par le modèle de diffusion sous forme d'un processus de Wiener et celle introduit par le modèle de la volatilité. La distribution des accroissements dans un modèle a volatilité stochastique présente une flexibilité d'adaptation plus importante dans le cas des distributions à queue lourde et avec de l'asymétrie.

Dans cette section, trois modèles différents de volatilité stochastique (1.67) sont présentés : le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck (LOU), le modèle de Hull-White et le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR).

Modèle de Ornstein-Uhlenbeck (Log OU) Dans le modèle de Ornstein-Uhlenbeck, $Y(t)$ évolue suivant l'équation (1.66) et l'équation différentielle décrivent l'évolution du processus $V(t)$ est la suivante :

$$dV(t) = (a + bV(t))dt + cdW_2(t) \quad (1.68)$$

avec a, b et c des constantes et $W_2(t)$ un processus de Wiener standard reliés au processus $W_1(t)$ par un facteur de corrélation ρ_V . La fonction $f(\cdot)$ de l'équation (1.67), est définie pour ce modèle par :

$$\sigma_d(t) = f(V(t)) = e^{V(t)} \quad (1.69)$$

En d'autre terme le processus $V(t)$ représente le logarithme de la volatilité $\sigma_d(t)$, d'où le nom du modèle "Log-Ornstein-Uhlenbeck".

Dans ce modèle, la variable $V(t)$ suit une distribution normale avec la moyenne et la variance suivante :

$$\mathbb{E}[V(t)|V(0) = v_0] = -\frac{a}{b} + (v_0 + \frac{a}{b}) e^{-|b|t} \quad (1.70)$$

$$\text{Var}[V(t)|V(0) = v_0] = \frac{c^2}{2|b|} + (1 - e^{-2|b|t}) \quad (1.71)$$

Modèle de Hull and White Le modèle de Hull-White est définie dans [Hull and White \(1987\)](#) en considérant les équations (1.66) et (1.67) avec $\sigma_d(t) = f(V(t)) = \sqrt{V(t)}$, et en réduisant l'équation du processus de diffusion de $V(t)$ comme qui suit :

$$dV(t) = aV(t)dt + bV(t)dW_2(t) \quad (1.72)$$

où a et b sont les deux paramètres du processus de volatilité supposés constants et les processus $W_1(t)$ et $W_2(t)$ sont deux processus de Wiener standard reliés par un facteur de corrélation ρ_V .

Modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Comme dans le modèle de Hull-White, [Cox et al. \(1985\)](#) définissent la fonction $f(V(t))$ comme étant la racine carré de $V(t)$. Ce modèle diffère de celui de Hull-White par son equation différentielle stochastique liée à $V(t)$:

$$dV(t) = \kappa_V(\theta_V - V(t))dt + \sigma_V V(t)dW_2(t) \quad (1.73)$$

κ_V, θ_V et σ_V sont les trois paramètres de la volatilité stochastique et $W_2(t)$ est un processus de Wiener standard ayant un facteur de corrélation ρ_V avec processus $W_1(t)$. Ce modèle est appelé un processus de retour à la valeur moyenne de long terme θ_V avec un taux de retour κ_V ssi ces deux paramètres sont positifs. L'effet de chacun de ces paramètres sur l'évolution du processus et surtout sur la distribution des log-incréments d'un processus à volatilité stochastique est étudié par [Moodley \(2005\)](#) :

ρ_V peut être interprété comme la corrélation entre les log-incréments et la volatilité du processus. La valeur de ρ_V affecte ainsi la symétrie de la distribution des incréments. Intuitivement, si $\rho_V > 0$, alors la volatilité du modèle augmente avec l'augmentation des valeurs des incréments (accroissement positif). Une queue droite plus lourde va donc apparaître dans la distribution des incréments. Inversement, si $\rho_V < 0$, alors la volatilité augmente lorsque les valeurs des incréments diminuent (accroissement négatif). La distribution des incréments présente dans ce cas une asymétrie vers la gauche avec une queue gauche plus lourde.

Le paramètre σ_V affecte directement le coefficient d'aplatissement de la distribution des incréments. Lorsque σ_V est égal à 0 la volatilité devient déterministe et donc les incréments du processus sont normalement distribués. L'augmentation de σ_V augmente uniquement l'aplatissement de cette distribution, aboutissant à la création de queues lourdes des deux côtés.

Le paramètre κ_V de retour à la moyenne, peut être interprété comme un représentant du degré de "regroupement de la volatilité" (*clustering*). Ce phénomène, observé dans différents processus financiers, se manifeste par le fait que les grandes variations dans la valeur du processus sont plus susceptibles d'être suivies par de grandes fluctuations.

D'autre part, dans ce modèle la variable aléatoire $V(t)$ est caractérisée par une distribution chi-2 non-centrée avec la moyenne et la variance suivantes :

$$\mathbb{E}[V(t)|V(0) = v] = \theta_V + (v - \theta_V)e^{-|\kappa_V|t} \quad (1.74)$$

$$\text{Var}[V(t)|V(0) = v] = \frac{\theta_V \sigma_V^2}{2\kappa_V} + \frac{\sigma_V^2}{\kappa_V}(v - \theta_V)e^{-|\kappa_V|t} - \frac{\sigma_V^2}{\kappa_V}(v - \frac{\theta_V}{2})e^{-2|\kappa_V|t} \quad (1.75)$$

Calibration La calibration des modèles de diffusion à volatilité stochastique fut l'objet d'études des chercheurs pendant plusieurs années et suivant différents points de vue (survey [Broto and Ruiz \(2004\)](#)). Plusieurs méthodes de calibration sont proposées : la méthode

1.4. Modèles Dérivés des Processus de Lévy

de maximum de vraisemblance [Kladivko \(2007b\)](#), la méthode des moments généralisés (GMM) [Chernov and Ghysels \(2000\)](#); [Hansen \(1982\)](#), la méthode des moments efficaces (EMM) [Andersen et al. \(1999\)](#); [Gallant et al. \(1997\)](#), la méthode d'inférence indirecte [Gourieroux et al. \(1993\)](#) et les méthodes bayésiennes [Rachev et al. \(2008\)](#). Les méthodes d'estimation des paramètres sont détaillées dans le chapitre 4.

On note que dans la plupart des cas le processus de volatilité n'est pas observable. L'observation d'un processus associé décrit comme un processus des incréments sans dérive (par soustraction du terme $\mu_d dt$) est toutefois possible si le paramètre de taux moyen d'évolution μ_d est connu [Fouque et al. \(2000\)](#) :

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} - \mu_d dt = \sigma_d(t) dW_1(t) \quad (1.76)$$

La calibration de l'équation différentielle associée à la volatilité toute seule lorsque cette dernière est observable, peut être effectuée par la méthode GMM. Voir [Kladivko \(2007a\)](#) pour un résumé pratique sur l'application de cette méthode.

Application Plusieurs raisons économiques, empiriques et mathématiques justifient le choix d'un modèle de diffusion avec volatilité stochastique pour la modélisation financière. Dans son analyse statistique et empirique des données financières [Cont \(2001\)](#) montre que la distribution des incréments relatifs (log-incréments) des prix des stocks n'est pas gaussienne. D'autre part, une corrélation négative entre ces incréments et leurs volatilités a été trouvée, ce qui justifie l'introduction du paramètre de corrélation ρ_V . Les variations dans la valeur de la volatilité des indices financiers sont prononcées et la corrélation entre la volatilité et l'évolution de ces indices est remarquée depuis la crise économique de l'année 1987. Les modèles à volatilité stochastique sont ainsi devenus populaires pour l'évaluation des prix des dérivés et des options [Fouque et al. \(2000\)](#).

Extensions Toutefois, les modèles à volatilité stochastique peuvent aussi présenter une certaine faiblesse dans la représentation des incréments de processus aléatoires. En effet, ces modèles peuvent ne pas répondre correctement à l'aplatissement de la distribution des incréments [Chernov et al. \(2003\)](#). Pour rendre le modèle plus puissant, certains auteurs suggèrent d'ajouter un processus de saut (comme par exemple un processus de Poisson composé) au processus à volatilité stochastique. D'autres suggèrent que le processus $W_2(t)$ source d'incertitude dans l'équation de la volatilité peut être modélisé par un Processus de Lévy autre que le processus de Wiener [Zhang and Zhang \(2008\)](#). En outre, [Pan \(2002\)](#) suggère que la volatilité de la volatilité, notée σ_V pourrait elle aussi être représentée par un terme stochastique. Dans [Chernov et al. \(2003\)](#), les auteurs évaluent l'intérêt de diverses

modifications du modèles à volatilité stochastique (SV), tels que la considération de la volatilité stochastique multiple (MSV) et l'ajout des composants de saut. En conclusion, les auteurs suggèrent une introduction simultanée d'un processus de sauts $JdN(t)$ dans les deux équations de $Y(t)$ et de $V(t)$ (équations (1.66) et (1.73) respectivement).

1.4.4 Modèle à volatilité stochastique avec sauts

Des études empiriques sur la modélisation des phénomènes non-monotones indiquent que la volatilité stochastique et le processus de sauts discrets sont tous les deux des composants essentiels du mécanisme de génération des données. La volatilité stochastique est nécessaire pour calibrer les variations durables de la mesure de fluctuation alors que les sauts sont indispensables pour refléter les effets des chocs instantanés, de grandes ampleurs et occasionnels.

Les modèles à volatilité stochastique avec sauts sont formés par l'addition d'un processus de sauts, représenté par un processus de Poisson composé ($JdN(t)$), au modèle SV décrit dans la section précédente par les équations (1.73) et (1.67). Cette combinaison permet la modélisation de la tendance moyenne et de l'évolution aléatoire du phénomène, la considération de la variation de la volatilité et l'introduction de discontinuités occasionnelles et de fluctuations brusques.

Le processus de diffusion à volatilité stochastique et avec sauts est défini comme la solution des équations différentielles stochastiques suivantes :

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = \mu_d dt + \sqrt{V(t)} dW_1(t) + (e^J - 1) dN(t) \quad (1.77)$$

$$dV(t) = \kappa_V(\theta_V - V(t))dt + \sigma_V \sqrt{V(t)} dW_2(t) \quad (1.78)$$

où μ_d est la dérive du processus et $\sqrt{V(t)}$ son terme de volatilité. Dans ce modèle, le processus CIR est utilisé pour modéliser les variations de la volatilité. κ_V, θ_V et σ_V représentent les trois paramètres du processus de volatilité. $W_1(t)$ et $W_2(t)$ sont deux processus de Wiener standards ayant un facteur de corrélation ρ_V . La modélisation du terme de volatilité peut être également effectuée par d'autres processus stochastiques comme le processus LOU ou Hull-White. Le processus de sauts est décrit par un processus de Poisson composé $(e^J - 1)dN(t)$ comme dans le cas d'un processus de diffusion avec sauts. λ_J est le taux du processus de Poisson $N(t)$ (supposé indépendant de $W_1(t)$ et $W_2(t)$). J est une variable aléatoire qui modélise l'intensité des sauts suivant la loi de Gauss, uniforme ou double exponentielle.

Calibration Par rapport aux autres modèles tel que le modèle de mouvement brownien géométrique (modèle BS) ou les modèles autorégressifs, la calibration du modèle de

1.5. Analyse proactive et gestion de risque

diffusion à volatilité stochastique et avec sauts est considérée comme une tâche difficile. Aucune fonction de vraisemblance explicite correspondant à ce modèle n'est donnée dans la littérature. Pour cette raison, un certain nombre de méthodes économétriques basées sur la simulation ont été proposées et utilisées pour résoudre le problème d'estimation des paramètres.

Comme dans le cas du modèle SV, les méthodes les plus communes pour la calibration des modèles SV avec sauts sont les suivantes : les méthodes bayésiennes, les méthodes à moments simulés [Duffie and Singleton \(1993\)](#) et les deux méthodes d'inférence indirecte [Gourieroux et al. \(1993\)](#) et de la EMM [Gallant et al. \(1997\)](#) qui sont basées sur la considération d'un modèle auxiliaire pour l'estimation.

Applications Le modèle de diffusion avec volatilité stochastique et processus de sauts additionnel compense les points faibles des modèles BS et SV sans sauts du point de vue des trois phénomènes empiriques ignorés par ces derniers : (1) les caractéristiques leptokurtique (queue lourde) et asymétrique de la distribution des incréments relatifs (log-incréments); (2) le fait que la volatilité du processus sous-jacent n'est pas une constante; et (3) les grandes fluctuations aléatoires et occasionnelles qui apparaissent dans les trajectoires des phénomènes aléatoires à trajectoires généralement continues.

[Andersen et al. \(2002\)](#) montre que le modèle le plus raisonnable pour la représentation des prix des actions doit inclure à la fois une modélisation stochastique de la volatilité stochastique et un processus de sauts discret et indépendant. Ainsi, Le modèle de diffusion avec volatilité stochastique et processus de sauts devient de plus en plus reconnu dans les applications financières, telle que l'évaluation des prix des options [Hanson and Yan \(2007\)](#); [Yan and Hanson \(2006\)](#) et l'optimisation des composants des portefeuilles.

1.5 Analyse proactive et gestion de risque

Dans l'industrie, comme dans la finance, la modélisation des phénomènes aléatoires est devenue un outil mathématique et analytique indispensable pour la compréhension du fonctionnement des systèmes complexes, l'analyse des risques et la prise des décisions. Dans cette section, l'importance de la modélisation des phénomènes aléatoires est présentée à partir des différentes applications financières et industrielles. L'analyse et la compréhension de ces phénomènes et de leurs dynamiques permettent d'améliorer leur maîtrise.

1.5.1 La valeur en jeu : VaR

La "valeur en jeu" (VaR), ou *value at risk* en anglais, est une notion originaire du secteur des assurances. Largement utilisée en finance, elle peut s'étendre à d'autres domaines. Désormais cette notion représente un outil de gestion des risques dans les différents domaines. La VaR correspond à un "montant de perte" qui, sur un horizon temporel fixe, ne devrait être dépassé qu'avec une certaine probabilité de risque donnée.

En finance la VaR répond, avec une borne de confiance raisonnable, à une question habituellement posée par les investisseurs : "Combien de plus puisse-je perdre dans cet investissement?". Ce risque de perte est dû aux variations des marchés financiers. D'une façon générale, la VaR mesure la perte potentielle dans la valeur d'un actif risqué ou d'un portefeuille sur une période définie et pour un intervalle de confiance donné. Par exemple, si la VaR sur un actif est de 10 millions de dollars, pour une semaine et avec un niveau de confiance de 98%, il y a un seulement 2% de chance que la valeur de l'actif soit inférieure à 10 millions de dollars sur la période donnée. Ainsi, il y a trois éléments clés de la VaR : (1) un niveau déterminé de perte, (2) une période de temps fixe pendant laquelle le risque est évalué et (3) un intervalle de confiance. La VaR peut être spécifiée pour un actif individuel, un portefeuille d'actifs ou pour une société entière. Pour mieux appréhender ce risque et pouvoir développer des outils de couverture il est donc nécessaire que le calcul de la VaR ce fasse d'une manière précise.

Trois approches sont généralement utilisées pour le calcul de la VaR pour un actif donné ou un portefeuille. La méthode paramétrique basée sur des hypothèses prédéfinies concernant la distribution des incréments de la valeur de l'actif, la méthode non-paramétrique basée sur la distribution réelle des données historiques, et la méthode de simulations de Monte Carlo basée sur la simulation des trajectoires aléatoires à partir d'un modèle mathématique correspondant au processus sous-jacent de la valeur de l'actif.

Même si la VaR est une méthode appropriée au monde financier pour l'évaluation et la gestion des risques financiers, la simplicité et l'objectivité de cette mesure ont poussé les chercheurs à appliquer cette méthode pour évaluer les différents types de risques dans des systèmes non-financiers. Pour un système de production d'énergie, [Schreiner et al. \(2008\)](#) applique la méthode de VaR pour effectuer une évaluation des risques de panne ainsi que de la gravité de leurs conséquences dans le système de distribution. [Schreiner et al. \(2008\)](#) utilisent la méthode de simulation Monte Carlo pour appliquer le concept de la VaR à un système de distribution d'énergie fonctionnent en conditions réelles. [Xiao-mei et al. \(2011\)](#) introduisent la théorie de la valeur à risque pour étudier les problèmes de fiabilité des logiciels sous conditions extrêmes. Les auteurs montrent, à partir d'une application réelle, le rôle important apporté par cette méthode dans l'étude de la fiabilité des logiciels.

1.5.2 Les "Options" et leur évaluation

Le terme "option" comprend dans sa définition le concept de "choix". Dans le Larousse français, plusieurs définitions du terme "option" correspondant aux différents emplois du mot sont données. Parmi ces définitions on cite :

- "Fait d'opter, choix à faire, parti à prendre ; choix fait, parti pris."
- "Ce qui est offert au choix et qui vient s'ajouter à quelque chose d'imposé, en particulier dans une épreuve".
- En droit : "Faculté de choisir entre plusieurs situations juridiques".
- Dans la bourse : "Contrat par lequel un opérateur à la Bourse des valeurs acquiert le droit (mais non l'obligation) d'acheter (option d'achat ou **Call option**) ou de vendre (option de vente ou **Put option**) une certaine quantité de titres à un prix donné et jusqu'à une date fixée dans le contrat. (Il existe aussi des marchés d'options sur matières premières, devises et indices.)"

La dernière définition présentée correspond à une application financière très commune. Il existe deux types des options : Les options américaines et les options Européennes. Pour les options américaines l'action de vente (ou d'achat) peut être appliquée à tout moment avant la date d'échéance précisée. Par contre, les options Européennes sont uniquement exerçable à la date exacte d'échéance.

L'option est un contrat qui, contre le paiement immédiat d'une prime, confère à son propriétaire le choix (sous forme d'un droit mais pas une obligation) d'exercer une certaine action pendant une durée précise de temps. A l'instant d'échéance, la valeur d'une option (Call ou Put) peut être facilement calculée. Si on prend par exemple le cas de Call option permettant l'achat d'une marchandise x pour un prix fixé K à la date d'échéance T , la valeur de l'option à cette instant est simplement représentée par la formule suivante :

$$C_{val} = \max(0, Y(t) - K) = (Y(t) - K)^+ \quad (1.79)$$

avec $Y(t)$ le prix réel de la marchandise à l'instant T . Cette formule reflète simplement le gain maximal possible suite à l'exercice de cette option. La valeur d'une Put option peut être calculée d'une manière similaire :

$$P_{val} = \max(0, K - Y(t)) = (K - Y(t))^+ \quad (1.80)$$

La valeur de l'option peut également être calculée à un instant quelconque t par un procédé d'évaluation (ou de valorisation) basé sur des prévisions effectuées sur l'évolution du prix de l'actif sous-jacent conditionné au prix actuel à l'instant t . Ce calcul, connu aussi sous le nom de la théorie des options, dépend, en méthode et en résultat, du modèle choisi pour la représentation du prix de l'actif sous-jacent. Les modèles autorégressifs et

stochastiques présentés dans ce chapitre, notamment le modèles de Black&Scholes [Black and Scholes \(1973\)](#) et les modèles de diffusion avec volatilité stochastique [van der Sluis \(1999\)](#) sans ou avec un processus de sauts additionnel [Kou and Wang \(2004\)](#), sont le plus souvent utilisés dans les études d'évaluation des prix des options (voir [Kou and Wang \(2004\)](#); [Longstaff and Schwartz \(2001\)](#); [Yan and Hanson \(2006\)](#); [Zhu and Hanson \(2005\)](#)) pour plus les détails sur les calculs mathématiques et les différents méthodes numériques utilisées pour l'évaluation des options : simulations Monte-Carlo, utilisation des transformées de Fourier rapide et discrète ou de la transformation Laplace, simulations par l'approche de moindres carrés de Monte Carlo-LSM.

Même si le terme "option" est souvent employé pour identifier un type des contrats dans le domaine financier, ce terme peut être largement utilisé pour des autres applications d'ingénierie ou même de la vie quotidienne. Il existe parfois des actions facultatives qui sont associées à des opportunités d'investissements non liés aux instruments financiers. Par exemple, un gestionnaire d'usine peut avoir la possibilité d'embaucher des employés supplémentaires ou d'acheter de nouveaux équipements. En fait, plusieurs processus de contrôle peuvent être vus comme des processus formés avec une série d'options opérationnelles. Impliquant des activités réelles ou des équipements réels, ces options opérationnelles sont souvent appelées "les options réelles". La théorie des options ainsi que les différentes méthodes d'analyse et d'évaluation des options valables dans le domaine financier peuvent être aussi utilisées pour analyser le problème des options réelles.

Récemment le concept de "real option" ou option réelle commence à être de plus en plus utilisé dans des différents domaines non-financiers. Entre autres, l'évaluation des options réelles est devenue un moyen reconnu pour l'aide à la décision concernant le rendement et les risques d'un projet, l'efficacité d'une action ou d'une politique de maintenance ou de renouvellement des systèmes de production [Rogers \(2002\)](#). Par exemple [Davis \(2006\)](#) introduit le concept des options réelles pour évaluer la valeur des activités et de terrains d'exploration d'or et gérer les politiques d'exploration. Ils considèrent les sources d'incertitude économique et géologique. [Jin et al. \(2009\)](#) utilise la théorie des options afin de remplacer la politique de maintenance périodique d'un système de production par une politique de maintenance préventive en considérant en même temps le processus de production et la demande. Les auteurs considèrent que l'incertitude à introduire dans l'évaluation de l'option réelle provient uniquement du processus de demande supposée stochastique. Cette hypothèse peut facilement être modifiée pour étudier les options réelles de maintenance dont la valeur est liée à d'autres incertitudes provenant du système de fabrication et du processus de dégradation.

1.5. Analyse proactive et gestion de risque

Un chemin d'équivalence entre les options financières, les options réelles et les options réelles spécifiques aux décisions pour de maintenance est donné par [Haddad et al. \(2011\)](#). Les différents points de ressemblance et de différence des options réelles par rapport aux options financière sont donnés par [Haahtela \(2012\)](#). S'appuyant sur ces équivalences [Haddad et al. \(2011\)](#) utilisent la théorie des options pour proposer une nouvelle approche économique pour la prise de décision concernant la maintenance préventive conditionnelle dans le cas des systèmes incorporant des systèmes de pronostics et de gestion de la santé (PHM). Lorsqu'un le PHM détecte une anomalie dans fonctionnement du système, une indiction provisoire de panne est envoyée au gestionnaire. La durée de vie utile résiduelle du système est ensuite estimée. Pendant cette durée le gestionnaire ou autre entité de maintenance doivent réagir et prendre des mesures préventives avant que le système ne tombe en panne. Plusieurs et différents types de mesures préventives peuvent être prises par le gestionnaire pour gérer le fonctionnement et l'entretien du système. Par exemple, un arrêt complet de la machine pour effectuer une maintenance préventive, la modification de la charge, ou alors le maintien du fonctionnement normal du système. Les décisions sur les actions préventives doivent être prises en fonction d'un critère prédéfini comme par exemple le critère de la disponibilité ou du coût. Les différentes mesures peuvent être considérées comme des "options réelles". La valorisation de chacune de ces options, en lui attribuant par exemple une estimation du risque ou d'un rapport de gain/risque, sera alors indispensable pour la prise de décision. Connaissant le processus suivant lequel le système se dégrade, la valorisation des différentes "options", peut être effectuée et, par conséquent, une décision convenable concernant les actions préventives à suivre peut être prise.

1.5.3 Pronostic et maintenance

Selon la norme française FD X 60-010, la maintenance se définit comme étant "l'ensemble de toutes les actions techniques, administratives et de management durant le cycle de vie d'un bien, destinées à le maintenir ou à le rétablir dans un état dans lequel il peut accomplir la fonction requise." D'après cette définition les actions de maintenance sont classifiées en deux grands types : les actions destinées à rétablir le bien dans un état "sain" (maintenance corrective) et celles destinées à le maintenir dans cet état (maintenance préventive). Le coût, la disponibilité et la fiabilité et maintenabilité du bien forment les quatre critères de décisions qui déterminent quatre grandes orientations de choix et d'optimisation des politiques de maintenance [Alhouaij \(2010\)](#). La Figure 1.6 présente, à titre d'exemple, un diagramme de décision donné par [Mazzuchi et al. \(2007\)](#) sur les différents types de maintenance.

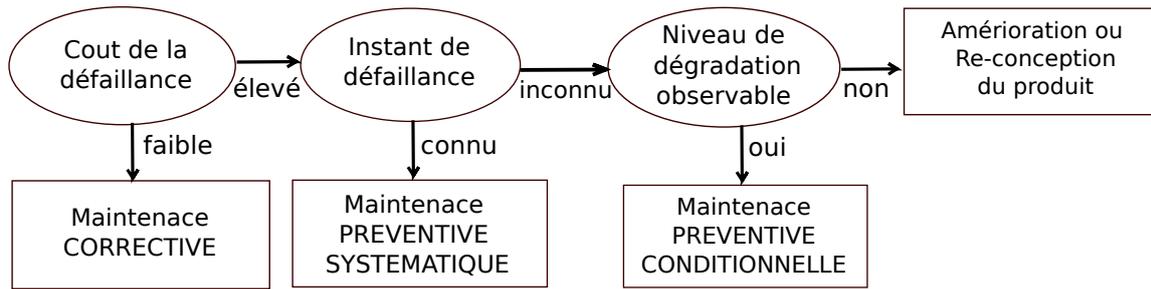


FIGURE 1.6 – Diagramme de décision sur les différents types de maintenance.

1.5.3.1 Politique de maintenance corrective

D’après la norme FD X 60-000, une maintenance corrective correspond à ”une maintenance exécutée après la détection d’une panne et destinée à remettre un bien dans un état dans lequel il est capable d’accomplir une fonction requise”. Cette intervention peut être palliative (sous forme d’un dépannage prévisionnel qui permet au système d’accomplir toute ou une partie de sa fonction requise) ou curative (sous forme d’une réparation du fond du problème et en apportant au système des améliorations à caractère permanent). Qu’elle soit palliative ou curative, la maintenance corrective peut être exécutée d’une façon différée avec un certain délai en accord avec des règles de maintenance données ou immédiatement après la détection de la défaillance afin d’éviter des conséquences inacceptables de l’arrêt de système.

1.5.3.2 Politique de maintenance préventive

La norme FD X 60-000 définit la maintenance préventive comme étant ”la maintenance exécutée à des intervalles prédéterminés ou selon des critères prescrits et destinés à réduire la probabilité de défaillance ou la dégradation du fonctionnement d’un bien, elle est subdivisée en : maintenance systématique, conditionnelle et prévisionnelle.” La maintenance préventive sert à éviter les coûts élevés de la défaillance en anticipant la panne et en effectuant les actions de maintenance nécessaires pour maintenir le système dans un état de fonctionnement acceptable. Ce type de maintenance forme le cadre de notre application proposée dans le chapitre 5. Les différentes politiques de maintenance préventive, notamment les politiques de maintenance conventionnelle basées sur le pronostic sont représentées dans cette section.

Parmi les trois catégories de la maintenance préventive, la maintenance systématique ne nécessite aucune observation sur le niveau de dégradation du bien ou autre indice de fiabilité. Cette politique consiste à effectuer une action d’entretien ou de remplacement du bien ou de l’un ou plusieurs de ses composants d’une manière périodique. La périodicité

1.5. Analyse proactive et gestion de risque

peut être définie par rapport à l'âge du bien, aux heures de fonctionnement effectives, à l'usage ou aussi au nombre de défaillances déjà produites. La maintenance systématique néglige la possibilité que le système tombe en panne avant l'instant de maintenance ou que le composant soit dans un état sain lorsqu'il est remplacé. Cette politique est souvent utilisée pour les systèmes dont le mécanisme de dégradation est connue ou quand le coût de la défaillance (y compris le coût de la maintenance corrective et toute charge éventuelle résultante de l'arrêt du système) est faible. Dans le cas de la maintenance systématique, une optimisation de la période et l'effet des actions de maintenance est nécessaire afin d'éviter les actions d'entretien ou de remplacement abusif et par suite des coûts de maintenance élevées et inutiles.

Par contre, la maintenance conditionnelle se base sur la surveillance de l'état de santé du bien. Une surveillance des paramètres significatifs du fonctionnement système est donc indispensable. Cette surveillance peut être exécutée d'une façon continue ou discrète (périodique ou à la demande). La maintenance prévisionnelle nécessite aussi la collection des informations et des paramètres significatifs de l'état de santé durant le fonctionnement du bien. D'après la norme FD X 60-000 la maintenance prévisionnelle est considérée comme une forme de maintenance conditionnelle "exécutée en suivant les prévisions extrapolées de l'analyse et de l'évaluation de paramètres significatifs de la dégradation du bien". Dans ces deux types de maintenance un seuil limite appelé seuil de sécurité est fixé pour un ou plusieurs indices de fiabilité. Lorsque l'indice surveillé dépasse son seuil de sécurité, l'action de maintenance est lancée. La dégradation d'un système est souvent considérée comme un processus de dommages cumulatifs au cours du temps. Elle être déduite à partir des indices de fiabilité définis par le système de surveillance et de gestion de santé. Plusieurs indices et critères de fiabilité peuvent être définis, tels que le taux de défaillance [Zhou et al. \(2007\)](#) ou le niveau de dégradation [Grall et al. \(2002\)](#) du système. Le seuil de sécurité ainsi que le seuil de défaillance de chaque indice de fiabilité sont fixés selon les normes correspondantes ou suivant les résultats d'études statistiques sur les défaillances et la durée de vie du système considéré. La Figure 1.7 présente un schéma d'évolution de la dégradation (ou d'un indice de fiabilité) suivant un processus stochastique pour un système soumis à la politique de maintenance conditionnelle.

Les politiques de maintenance conditionnelle se basent en première étape sur la collection des informations et des données reliées au fonctionnement et à l'état de la santé du système. L'analyse des données est effectuée et la prise de décision concernant la politique et les actions de maintenance sont ensuite établies en fonction de l'interprétation des données disponibles. La collections des informations et des paramètres de systèmes peut être effectuée d'une manière continue, on parle donc des systèmes à surveillance continue,

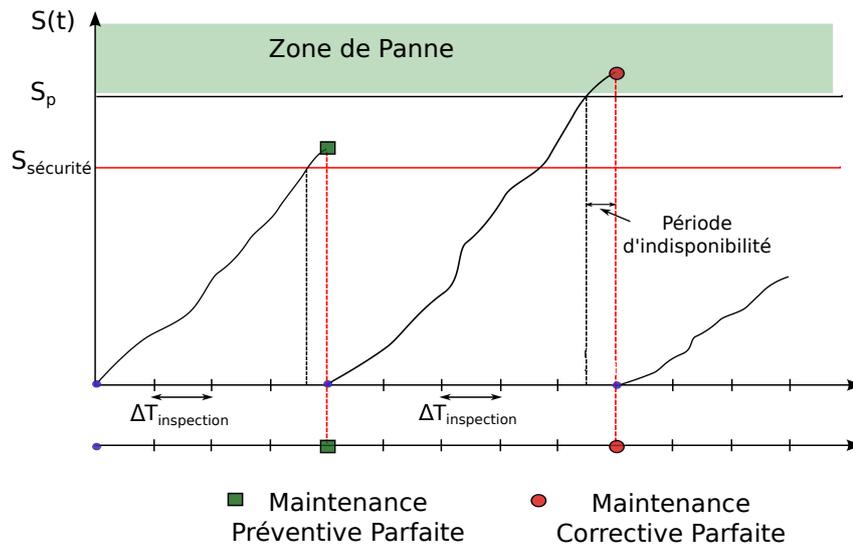


FIGURE 1.7 – Évolution de niveau de dégradation pour un système soumis à une politique de maintenance conditionnelle sous surveillance périodique.

ou à temps discret par des inspections périodiques ou non-périodiques.

Surveillance continue Pour la surveillance continue, les ingénieurs font usage à des systèmes de surveillance formés par un ou plusieurs capteurs. Les différents signaux et mesures de dégradation définis par ces systèmes de surveillance reflètent l'état de santé du système et sont par suite utilisés pour l'analyse de la fiabilité. On trouve par exemple les techniques de surveillance basée sur l'analyse des signaux acoustiques, de vibration, la thermographie et le mesure de niveau d'usure des matériels [Hameed et al. \(2009\)](#). Les auteurs dans [Liao et al. \(2006\)](#); [Zhou et al. \(2007\)](#) considèrent que l'état de santé du système est continuellement et parfaitement observable directement ou par une variable de vieillissement. Deux seuils critiques sont fixés pour cette variable, le seuil de sécurité à partir duquel l'action de maintenance est lancée et le seuil de panne à partir duquel le système tombe en panne. [Liao et al. \(2006\)](#) considèrent que la durée de répartition dépend de l'état du système au moment de la défaillance.

Surveillance discrète La surveillance discrète d'un système correspond à des actions d'inspections périodiques ou non-périodiques. Dans les deux cas (périodique ou non) la planification des instants d'inspection doit être optimisée d'une manière à ce que la maintenance préventive soit plus avantageuse que la stratégie de maintenance corrective. Considérons par exemple un critère économique. Le coût total des actions d'inspections et de maintenance préventive doit être inférieur à la somme des coûts de défaillances et de

1.5. Analyse proactive et gestion de risque

maintenances correctives en l'absence de politique de maintenance préventive [Mazzuchi et al. \(2007\)](#). L'inspection périodique a pour avantage de réduire le nombre de paramètres à optimiser à un seul paramètre de durée d'inter-inspections. Ainsi, la fréquence des inspections reste constante tout le long du cycle de vie du bien, ce qui peut introduire des coûts supplémentaires d'inspections inutiles lorsque le système est encore neuf et présente donc un faible risque de défaillance. Pour cela, [Grall et al. \(2002\)](#) propose que la durée d'inter-inspection soit calculé à partir d'une fonction décroissante dépendante de l'état du système observé à l'inspection précédente. Ainsi, plus le système est dégradé, plus la période entre deux inspections est petite. [Newby and Dagg \(2004\)](#) propose que les instants des inspections soit définis en fonction du risque de panne déduit d'un modèle stochastique décrivant l'état du système multi-composant.

Pronostic Dans le cadre de la maintenance préventive conditionnelle le "pronostic" est défini comme un processus s'appuyant sur l'historique de fonctionnement d'un système et de son état de santé afin de prévoir la durée de fonctionnement restant avant l'apparition d'une défaillance [Jardine et al. \(2006\)](#). Dans ce sens le pronostic est assimilé au calcul de la durée de vie résiduelle (RUL pour *Remaining Useful Life*) du bien. La vie utile d'un bien est définie comme "l'intervalle de temps qui, dans des conditions données, commence à un instant donné et se termine lorsque le taux de défaillance devient inacceptable ou lorsque le bien est considéré comme irréparable à la suite d'une panne ou pour d'autres raisons pertinentes" [Mechin \(2007\)](#). D'après cette définition, l'estimation du RUL se repose sur la prévision de l'instant à partir duquel un système (ou l'un de ses composants) passe d'un état opérationnel (fonctionnement acceptable) à un état de panne (défaillance ou fonctionnement inacceptable). Selon les installations et les politiques de surveillance appliquées sur le système, des indices de fonctionnement ou de fiabilité (production, taux de défaillance, niveau de dégradation...) ainsi que le seuil de panne correspondant à chaque indice sont définis. La panne du système est signalée par le passage de l'indice de fiabilité par son seuil de panne prédéfini. Le premier temps de passage défini dans l'équation (1.55) sert à donner une définition plus analytique du RUL. Sachant que dans ce cas le calcul du premier temps de passage se fait conditionnellement à l'état du système à l'instant présent (instant de la dernière l'inspection T_i), une façon de représenter le RUL comme le premier temps de passage τ_{S_p} (pour un indicateur $Y(t)$ et un seuil de panne S_p) se fait comme suit :

$$\tau_{S_p} := \inf\{h \geq 0; Y(T_i + h) \geq S_p | Y(t) < S_p, \Psi_{T_i}\} \quad (1.81)$$

où Ψ_{T_i} présente l'ensemble des informations disponibles à l'instant T_i .

Cet indicateur de vie résiduelle est aujourd'hui introduit de différentes manières dans

la prise de décision de maintenance. Par exemple, dans [Jardine et al. \(2006\)](#) les auteurs considèrent la durée de vie résiduelle comme une information très utile pour la prise de décision en maintenance conditionnelle afin de réduire le coût total de maintenance. Dans [Castro et al. \(2012\)](#); [Huynh et al. \(2012\)](#), les auteurs considèrent l'espérance de la variable de durée de vie résiduelle MRL (*Mean Residual Lifetime*) comme un indicateur de pronostic sur lequel une politique de maintenance prévisionnelle est basée. L'efficacité de cette politique de maintenance basée sur le pronostic et notamment sur le MRL est ensuite comparée à celle d'une politique de maintenance conditionnelle classique basée sur le niveau de dégradation observé. Un critère de coût de maintenance préventive optimisé est utilisé. Les résultats permettent de montrer des avantages apportées par de l'intégration de la MRL dans la prise de décisions sur la maintenance. [Gebraeel et al. \(2005\)](#) propose une politique de maintenance préventive basée sur la distribution de la vie résiduelle (DRL) des composant partiellement dégradés. S'appuyant sur cette proposition [Kaiser and Gebraeel \(2009\)](#) présente une politique de maintenance appelée *sensory-updated degradation-based maintenance*(SUDM). Tout abord, un modèle de RUL est initialisé et un calendrier de maintenance initial est élaboré suivant la DRL initiales. Les DRLs sont ensuite mises à jour en temps réel à l'aide des signaux de dégradation observable. Le calendrier des actions de maintenance est, à son tour, révisé sur la base les nouvelles DRLs récemment mises à jour. Le critère de changement de calendrier de maintenance considéré dans ce travail étant le quantile de DRL estimé. Dans [Le Son \(2012\)](#); [Le Son et al. \(2012\)](#), les auteurs définissent des critères de remplacement basés la DRL comme la moyenne, la médiane, et le quantile de la fonction de distribution de RUL estimée pour un modèle de dégradation gamma bruité.

Les techniques d'évaluation de RUL ainsi que de la DRL font le sujet d'étude de plusieurs chercheurs [Gebraeel et al. \(2005\)](#); [Heimes \(2008\)](#); [Lorton et al. \(2013\)](#); [van Noortwijk and Klatter \(2004\)](#); [Wang et al. \(2008\)](#). Ces techniques changent en fonction du processus de dégradation du bien, des informations disponibles et du modèle choisi pour la représentation de ce processus ou des indices de fiabilité observés. Une fois le modèle d'évolution de l'indice de fiabilité fixé, le calcul sur les différents indicateurs de pronostic basé sur le RUL peut être effectué. Dans sa mémoire de thèse [Le Son \(2012\)](#) propose une classification des méthodes de pronostic suivant les techniques "probabilistes" et "non-probabilistes" (ou "déterministes"). Les techniques non-probabilistes sont utilisées lorsque le processus de dégradation est considéré comme intrinsèquement déterministe et que les seules sources d'aléa admis dans le modèle proviennent des erreurs de mesure ou de bruit. Parmi les techniques déterministes nous citons les techniques de l'intelligence artificielle et les modèles de régression avec bruit. Les techniques probabilistes quant à

1.6. Conclusion

elles sont celles qui utilisent des outils et des calculs probabilistes pour la modélisation du processus de dégradation. Dans cette catégorie on trouve notamment les modèles stochastiques de diffusion et de sauts présentés précédemment dans ce chapitre. Les processus de saut monotones (i.e. processus gamma) sont particulièrement adaptés pour la représentation du processus de dégradation lorsque la méthode de surveillance par inspections discrètes est impliquée et que le niveau de dégradation est considéré monotone [Grall et al. \(2002\)](#); [Van Noortwijk \(2009\)](#). [Gebraeel et al. \(2005\)](#) présentent des modèles de dégradation à base de capteur des signaux de vibrations pour estimer la DRLs de composants partiellement dégradées. L'auteur propose une approche bayésienne pour le calcul de la distribution de RUL pour un modèle de dégradation double-exponentielle avec multiples erreurs browniens.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté des outils probabilistes de modélisation des phénomènes aléatoires physiques et économiques. Deux grands types de modèles sont présentés : (1) Les modèles autorégressifs à temps discret et à dépendance linéaire et non-linéaire ; (2) Les modèles stochastiques à la propriété de Markov et à trajectoires monotone et non-monotone. Différents concepts et politiques d'analyse proactive et de contrôle du risque utilisés dans le domaine financier comme dans le domaine industriel sont ensuite présentés. Les différentes politiques de maintenance notamment les politiques de maintenance préventive basées sur la surveillance, la modélisation et/ou le pronostic sont ensuite détaillées. Dans la suite de notre thèse un cas d'étude sur la modélisation des phénomènes aléatoires par des modèles stochastiques à trajectoires continues et non-monotones est effectué. En se basant sur le pronostic, une sur l'optimisation de la politique de maintenance préventive est ensuite présentée.

Caractérisation des données

Sommaire

2.1	Représentation des données	55
2.2	Traitement préliminaire	58
2.3	Hypothèse de normalité	62
2.4	Distributions des log-incréments	70
2.5	Étude de la volatilité	78
2.6	Tests d'autocorrélation et de Hinich	85
2.7	Conclusion	92

Objectif : Dans ce chapitre nous présentons les différentes séries de données financières disponibles et étudiées dans notre projet. Une analyse préliminaire des données est effectuée. Nous présentons ainsi les propriétés statistiques des séries. La distribution des incréments, la volatilité et les fluctuations extrêmes sont étudiées et des tests de normalité et de dépendance linéaire et non linéaire des incréments sont appliqués. Nous discutons ensuite comment ces propriétés et les tests statistiques privilégient ou rejettent un certain nombre d'approches et des modèles statistiques couramment utilisés pour étudier les séries de données chronologiques.

2.1 Représentation des données

Dans le cadre du projet Emergence Risk-perform, nous disposons de plusieurs séries des données financières correspondant à 15 indices boursiers provenant de plusieurs pays.

Une série financière est généralement constituée d'un enregistrement des taux de change, des taux d'intérêt cotés ou des listes de transactions sur des actifs (actions, options ou obligations en cours d'échange). La collection des données financières peut être effectuée d'une façon intra-journalière, c.à.d. les données sont collectées pour chaque opération commerciale effectuée. Les données intra-journalière forment ainsi un ensemble de données à haute fréquence encapsulant les différents types d'informations (l'instant

de la transaction, le montant négocié, le prix de décauntation ...). Toutefois, lorsque l'ensemble des données est constitué seulement des données journalières, comme dans le cas de notre projet, les informations à disposition sont souvent limitées aux prix d'ouverture et de clôture, aux prix le plus élevé et le plus bas et au volume (ou à la quantité) des actifs échangés. En général, et comme dans notre cas d'étude, les ensembles de données financières quotidiennes analysées dans la littérature ne contiennent que les prix de clôture de l'actif en question.

Pour un actif donné, les valeurs de la variable "prix de clôture" enregistrées à la fin de chaque jour ouvrable tracent une série chronologique. Dans ce projet nous disposons de ce type de séries chronologiques financières. La modélisation de ces dernières vise à trouver un modèle mathématique qui décrit, d'une manière fiable, l'évolution de ces données. Notons que le but de la modélisation financière ne se limite pas à la prévision des prix futurs de l'actif en question, mais elle sert plutôt à fournir une description du comportement stochastique du prix et à offrir un modèle mathématique utile pour des nombreuses applications financières (l'évaluation des prix des options, la construction optimale de portefeuilles, le calcul des valeurs en jeu d'un investissement...). Ainsi une étude préliminaire visant à extraire les principales caractéristiques de ces séries est effectuée dans ce chapitre.

Notre base des données est initialement formée par les séries chronologiques des prix de clôture quotidiens de 15 indices boursiers de différents pays enregistrés pendant au moins 20 ans chacun. Un traitement préliminaire de ces séries ainsi qu'une analyse des différentes caractéristiques sont tout d'abord effectuées. Toutes les séries seront ensuite considérées comme des séries chronologiques "anonymes" et analysées indépendamment de tout éventuel événement financière observable. L'utilité des différents types des modèles stochastiques n'étant pas limitée à des applications financières, les modèles considérés dans le chapitre 3 sont ainsi des modèles généraux proposés pour la modélisation des phénomènes variés dont certaines caractéristiques sont similaires à celles rencontrées dans la suite de ce document et qui peuvent être rencontrées dans des domaines d'applications divers.

Notons que la fluctuation de la valeur d'un actif dépend généralement de nombreuses variables qui correspondent non seulement à l'actif lui-même, mais aussi à sa classe (taux, action, obligation, actif physique : immobilier ou matière première, ...), à son secteur industriel ainsi qu'aux conditions économiques locales et mondiales. Ainsi, l'influence de chacune de ces variables doit être prise en compte lors de la modélisation.

La liste des indices boursiers disponibles pour cette étude est la suivante : 1) SPX : basé sur 500 grandes sociétés cotées sur les bourses américaines. L'indice est possédé et géré par la société de nation financière Standard & Poor's. Cet indice est largement utilisé

2.1. Représentation des données

dans la littérature pour étudier les caractéristiques des indices boursiers. 2) IBOV : l'indice phare (benchmark index) de la Bourse de São Paulo du Brésil ; 3) SPTSX Index ; 4) UKX : l'indice boursier des cent entreprises britanniques les mieux capitalisées cotées à la bourse de Londres ; 5) CAC : le principal indice boursier de la bourse de Paris ; 6) DAX : le principal indice boursier allemand ou Deutscher Aktienindex ; 7) IBEX : l'indice boursier de référence de la bourse de Madrid ; 8) SMI : l'indice boursier le plus important du marché financier suisse ; 9) FTSEMIB : l'indice boursier incontournable de la bourse nationale italienne. 10) ISEQ Index ; 11) ICEXI Index ; 12) NKY Index ; 13) SHCOMP Index ; 14) AS51 Index ; 15) SENSEX : l'indice incontournable de la Bourse indienne.

Les valeurs de ces indices sont directement observables et facilement accessibles dans les différents marchés. Ces valeurs sont collectées à la fin de chaque journée du travail ; ce qui forme une série chronologique des valeurs de clôtures quotidiennes de chaque indice. Cependant, pour modéliser un processus d'évolution d'un prix on considère habituellement une série dérivée de la série chronologique originale, [Gentle and Härdle \(2012\)](#). Le type le plus commun de données dérivées est une mesure de changement du premier ordre du prix ; on considère donc le taux de rendement du prix au lieu du prix lui-même. Ce taux est calculé comme étant la variation relative du prix dans un intervalle du temps prédéfini Δt .

Intervalle du temps L'intervalle de temps Δt qui représente la période entre deux valeurs successives de la série considérée, est définie implicitement dans de nombreuses études économétriques comme égale à un en unité de temps appropriée (jour/semaine/mois...) [Cont \(2001\)](#). Dans notre étude nous traitons des séries des données quotidiennes, pour cela, l'intervalle de temps Δt est considérée égale à un jour ouvrable. En considérant qu'une unité de temps correspond à une année de transaction et sachant qu'une année comprend en moyenne 252 jours de travail, l'intervalle de temps Δt utilisé dans la suite de cette étude sera fixé à $1/252$.

Taux de rendement Le changement relatif du prix d'un actif est appelé le taux de rendement ou simplement le rendement de l'actif. Dans sa forme la plus simple ce rendement n'est que la différence du prix entre deux instants précis divisée par le prix au premier instant.

$$\Delta_{rel}S(t) = \frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} \quad (2.1)$$

Afin de garantir que la valeur du prix $S(t)$ reste toujours positive quel que soit le modèle choisi, ce taux est le plus souvent calculé à partir des valeurs logarithmiques du prix.

$$r(t) = \Delta \ln S(t) = \ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) \quad (2.2)$$

L'intervalle du temps Δt est d'une grande importance et doit être noté et pris en considération lors de l'étude statistique des données et de la modélisation. Dans la suite, lorsque nous nous référons au "rendement", cela signifie généralement le rendement quotidien calculé à partir de la différence des logarithmes des valeurs collectées pour chaque indice. La série des rendements, est le premier élément à analyser avant la modélisation.

2.2 Traitement préliminaire

Avant de procéder au calcul des séries des rendements, un traitement préliminaire des données est nécessaire.

Comme pour tout type des données, la collection et l'archivage des données financières fait objet de plusieurs erreurs d'observation et d'enregistrement. Les séries des données disponibles pour notre étude présentent un certain nombre d'anomalies. Par exemple :

- l'intervalle d'échantillonnage variable : pour certaines séries, l'intervalle de collection et d'enregistrement des données n'est pas fixe. Particulièrement, les données sont tout d'abord collectées d'une façon mensuelle. Les prix de clôtures quotidiennes ne sont disponibles qu'à partir d'une certaine date. Pour ces séries, nous considérons seulement la période de collection quotidienne et régulière ;
- manques de données : l'absence de données pour certains jours ou périodes peut être dû à un manque d'information, une erreur d'enregistrement, ou tout simplement à un jour férié dans le pays auquel l'indice appartient. Dans ce dernier cas, la date du jour férié peut être simplement éliminée ou ignorée puisque l'intervalle du temps $\Delta t = 1/252$ fixé dans notre étude ne considère que les jours ouvrables de l'année. Dans le cas d'une erreur d'enregistrement ou de collection pour un jour donné, les deux rendements et ne sont donc pas pris en compte lors de l'étude statistique des séries des données dérivées. On note que le pourcentage des données erronées est en moyenne de 1.5% pour les différentes séries considérées.

Les séries chronologiques disponibles démarrent à partir des différentes dates. Après l'élimination des périodes de collection mensuelle et des périodes à haut pourcentage d'erreur d'enregistrement, on trouve que la période du 01-janvier-1993 au 31-décembre-2012 présente la période idéale pour l'étude des données. Pour quelques séries, les données disponibles permettent une étude sur des périodes plus étendues. Nous présentons dans les

2.2. Traitement préliminaire

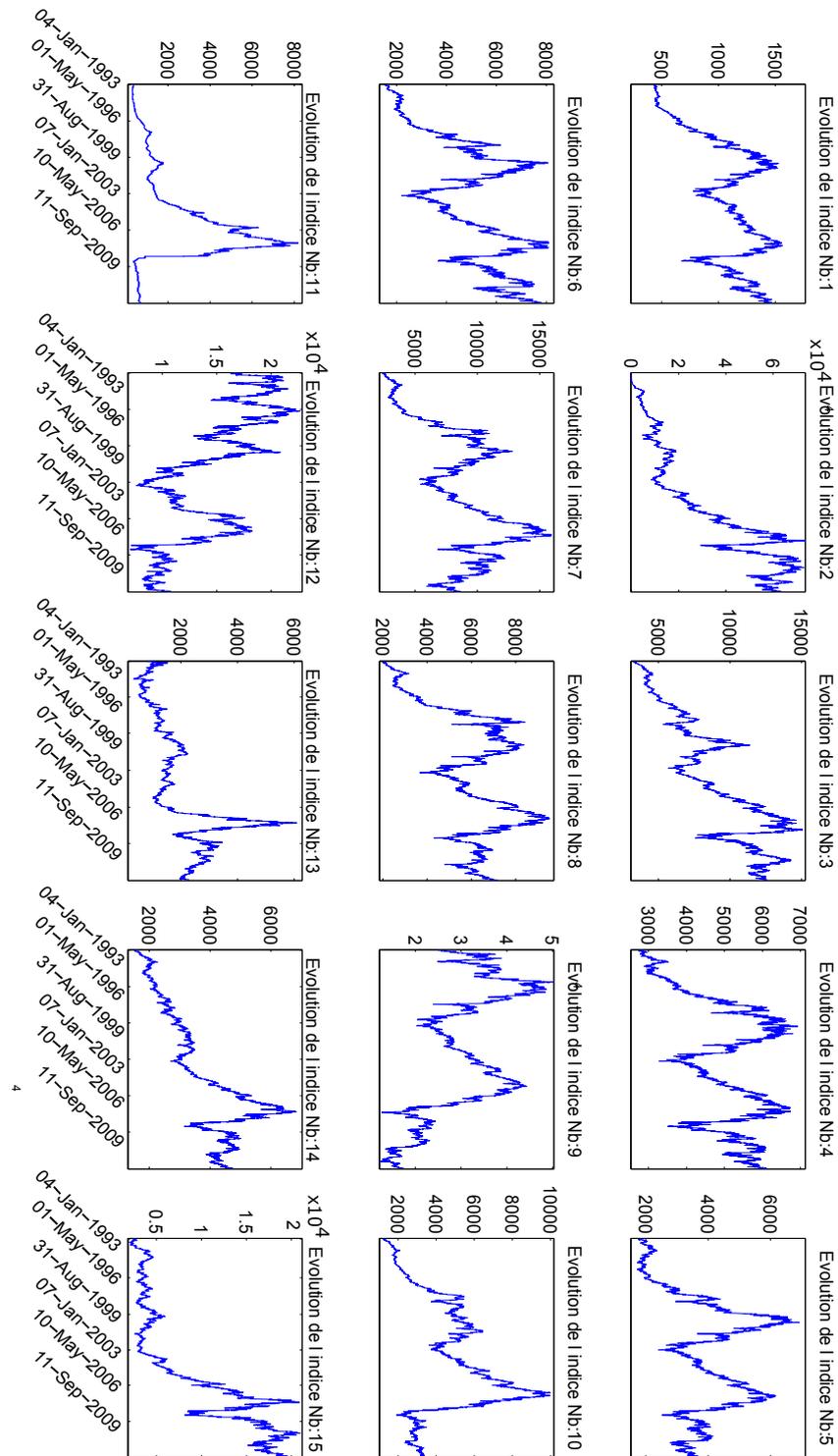


FIGURE 2.1 – Évolution quotidienne des indices boursiers à partir du 01-janvier-1993 au 31-décembre-2012.

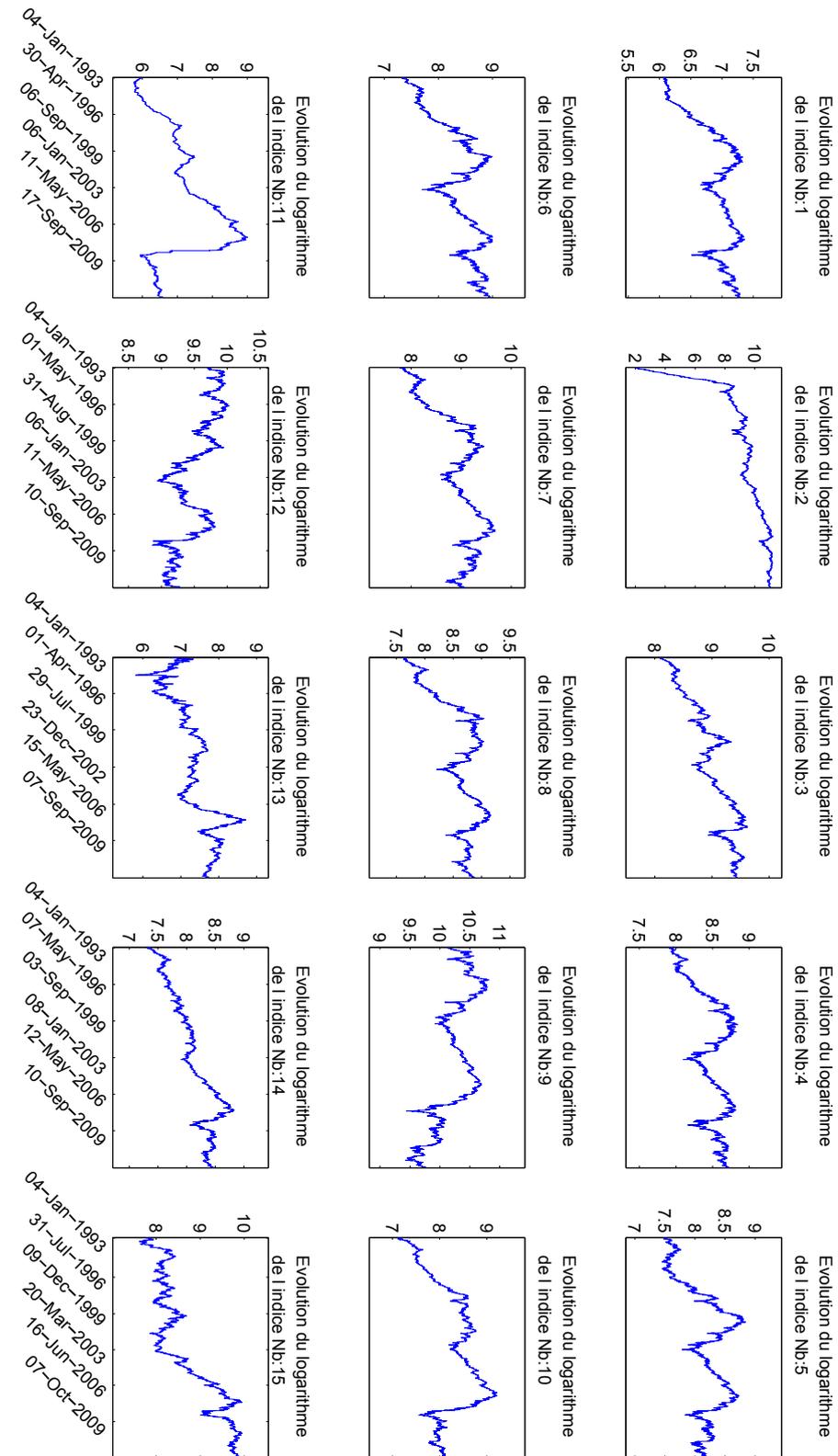


FIGURE 2.2 – Log-évolution quotidienne des indices boursiers à partir du 01-janvier-1993 au 31-décembre-2012.

2.2. Traitement préliminaire

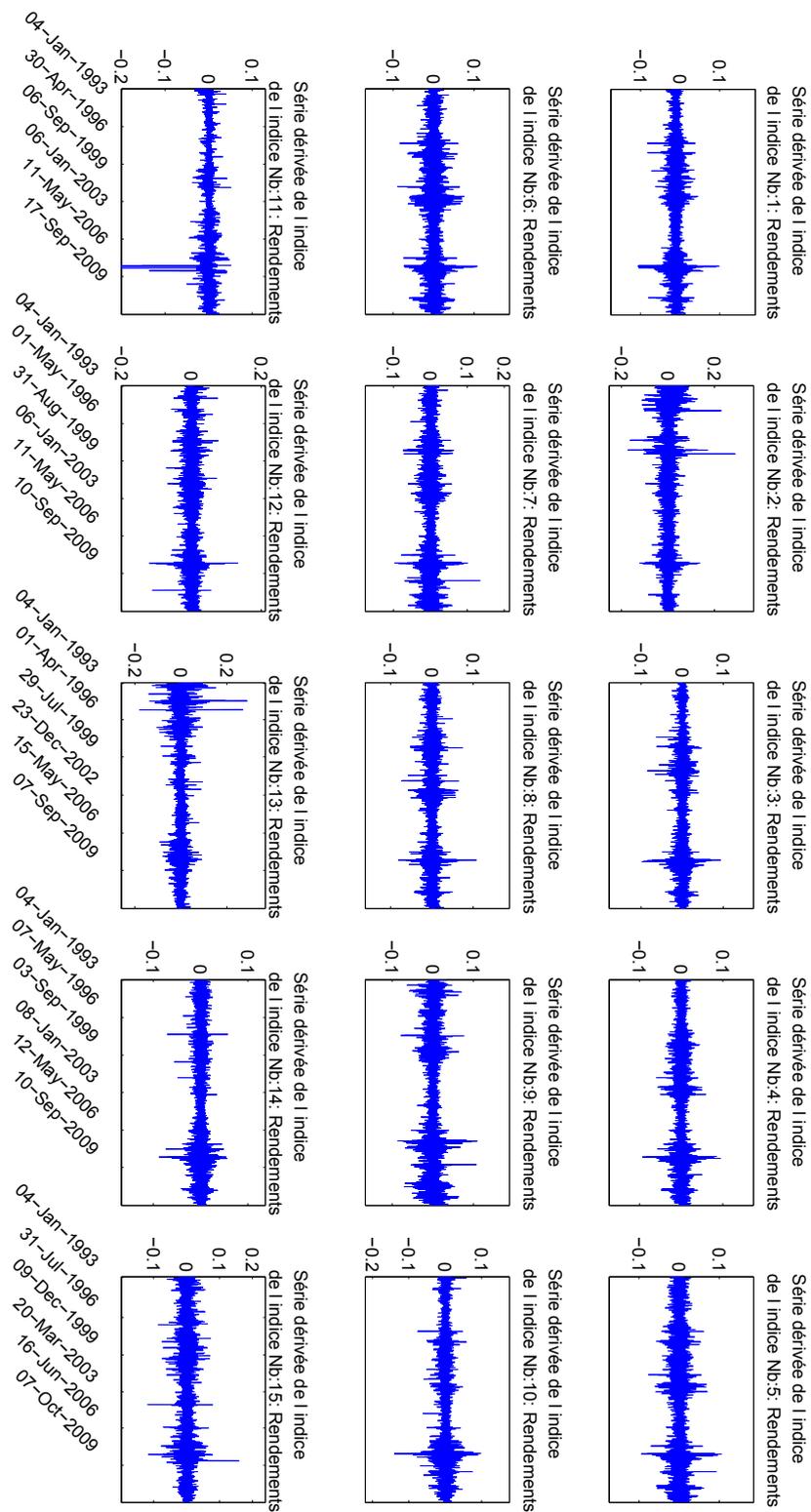


FIGURE 2.3 – Rendements quotidiens des indices boursiers à partir du 01-janvier-1993 au 31-décembre-2012.

Figures 2.1 et 2.2 les graphiques d'évolution temporelle des différents indices ainsi que leur logarithme. La Figure 2.3 présente les rendements calculés à partir de l'équation (2.2). C'est sur cette série que nous allons effectuer les différents tests et calculs statistiques présentés dans la suite de ce chapitre.

2.3 Hypothèse de normalité

La normalité des incréments forme une hypothèse commune à la plupart des modèles de base utilisés couramment dans le domaine financière. Les modèles autorégressifs à dépendance linéaire considèrent généralement que le terme d'erreur ε_t est un bruit blanc distribué suivant la loi de Gauss. Les processus stochastiques de Wiener (mouvement brownien et mouvement brownien géométrique) quant à eux considèrent une densité Gaussienne pour des incréments ou des log-incréments pour modéliser la dynamique d'un processus financier.

Dans le but de tester l'adéquation de cette hypothèse par rapport à nos données, nous examinons tout d'abord la loi des incréments en appliquant des tests de normalité graphiques et statistiques. Pour commencer nous présentons dans la Figure 2.4 la densité de probabilité empirique calculée pour les séries des rendements correspondant à nos indices. Le Tableau 2.1 présente les principaux indicateurs statistiques pour chacune de ces séries.

Approches graphiques En statistique, il existe plusieurs outils graphiques qui permettent de tester la pertinence d'ajustement d'une distribution donnée à un modèle ou une loi théorique. Parmi ces outils on cite l'histogramme de fréquence, la Boîte à moustache, le Q-Q Plot et la droite de Henry. Nous utilisons tout d'abord la comparaison des histogrammes et le Q-Q plot pour comparer la loi empirique déduite de l'ensemble des rendements à la densité Gaussienne correspondante aux mêmes moyenne et écart-type. Nous comparons donc les histogrammes de fréquences normalisés de la Figure 2.3 avec les fonctions de densité théorique de la loi de Gauss associée. Dans la Figure 2.4 nous présentons des exemples de cette comparaison pour les indices numéro 1, 3, 6 et 14. À gauche de cette figure une transformé logarithmique de l'axe des ordonnées est appliquée dans le but de souligner la déviation entre ces deux lois au niveau des queues des distributions. Cette figure montre que les distributions déduites pour les rendements de nos données empiriques présentent des pics plus importants et des queues plus lourdes que celles de la loi normale.

Le Q-Q plot, ou diagramme Quantile-Quantile, représenté dans la Figure 2.5 pour

2.3. Hypothèse de normalité

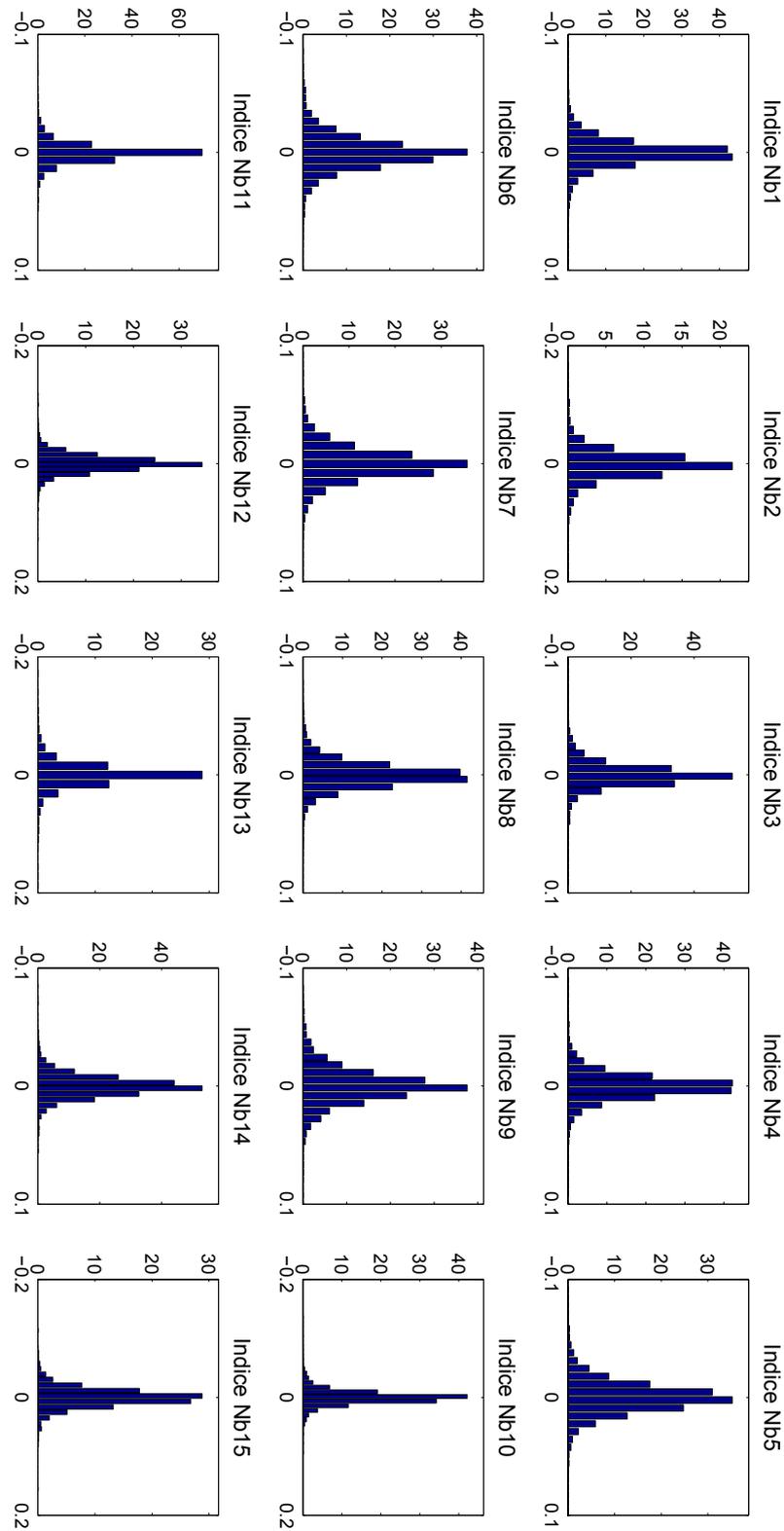


FIGURE 2.4 – Histogrammes normalisés des séries de rendements correspondantes aux différents indices.

Chapitre 2. Caractérisation des données

Indice n°	moyenne (e^{-4})	variance (e^{-4})	écart- type	écart absolu moyen	coefficient d'asymétrie	coefficient d'aplatis.	min.	max.
1	2,415	1,471	0,0121	0,0081	-0,234	11,33	-0,095	0,110
2	18,295	6,094	0,0247	0,0171	0,481	12,01	-0,172	0,288
3	2,630	1,198	0,0110	0,0074	-0,724	12,66	-0,098	0,094
4	1,503	1,385	0,0118	0,0082	-0,156	8,98	-0,093	0,094
5	1,374	2,112	0,0145	0,0104	-0,007	7,45	-0,095	0,106
6	3,187	2,257	0,0150	0,0106	-0,125	7,38	-0,089	0,108
7	2,578	2,165	0,0147	0,0105	-0,008	7,97	-0,096	0,135
8	2,424	1,453	0,0121	0,0084	-0,095	8,65	-0,081	0,108
9	-0,926	2,526	0,0159	0,0112	-0,062	7,10	-0,086	0,109
10	2,015	1,739	0,0132	0,0089	-0,589	11,61	-0,140	0,097
11	4,081	0,781	0,0088	0,0056	-2,049	35,80	-0,152	0,051
12	-0,920	2,272	0,0151	0,0108	-0,240	8,79	-0,121	0,132
13	2,076	4,797	0,0219	0,0139	1,047	22,20	-0,179	0,289
14	2,159	0,966	0,0098	0,0070	-0,470	8,89	-0,087	0,057
15	4,172	2,726	0,0165	0,0119	-0,090	7,84	-0,118	0,160

Tableau 2.1 – Grandeurs statistiques sur les séries de rendements correspondantes à chaque indice.

ces même indices est une technique graphique qui permet de comparer les lois de deux ensembles de données ou de tester le degré d'ajustement de la distribution d'un ensemble des données à un modèle ou à une loi théorique. Dans ce digramme la position de certains quantiles dans la population observée est comparée avec leur position théorique suivant la loi de Gauss. En abscisse de ce graphique se trouvent les quantiles théoriques et en ordonnée les quantiles observés sur notre espace de données (les rendements). Si la loi de Gauss est pertinente pour la représentation de nos données, les points doivent se positionner suivant la première diagonale du graphique. Pourtant une déviation entre les distributions des rendements et la loi de Gauss se manifeste sur ces graphiques surtout au niveau des queues de distribution. Les deux approches graphiques (histogrammes et Q-Q plot) utilisées dans cette première étape montrent que la densité de probabilité des rendements des différents indices n'est pas une loi de Gauss. Des tests statistiques sont appliqués dans la suite dans le but de confirmer et de décrire quantitativement cette déviation. Les tests de normalités appliqués dans la suite servent à confirmer le rejet de l'hypothèse de normalité des incréments et l'hypothèse d'une loi moins aplatie et avec une queue plus épaisse.

2.3. Hypothèse de normalité

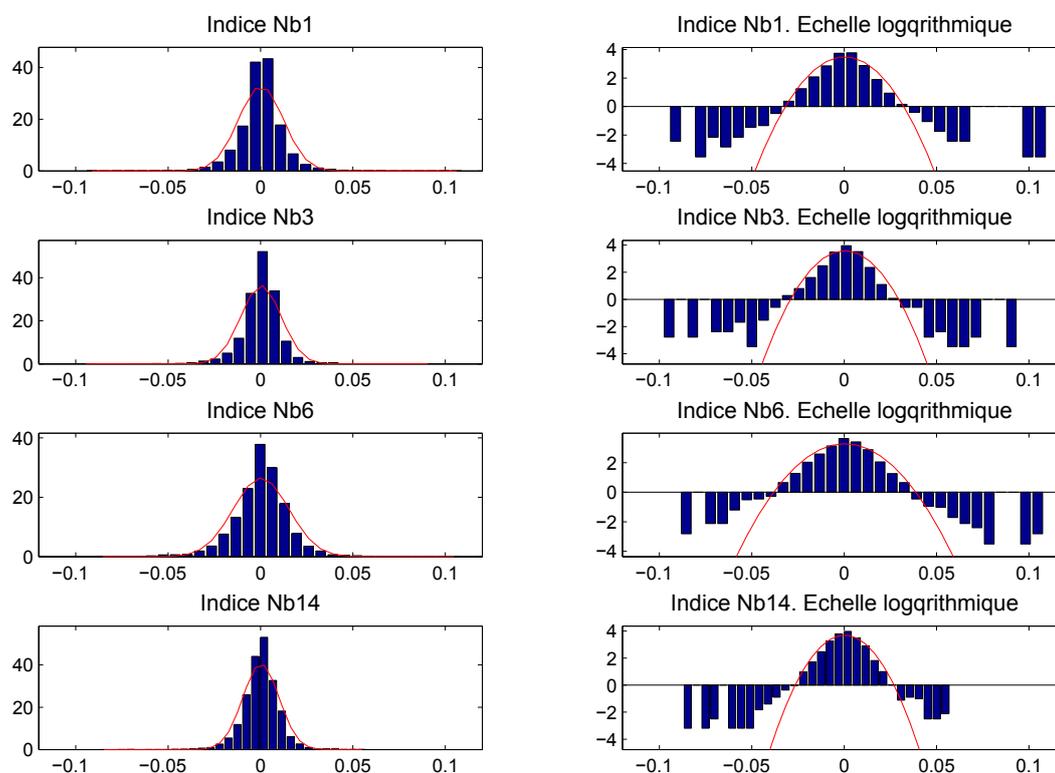


FIGURE 2.5 – Comparaison des histogrammes normalisés des rendements et de la fonction de densité normale associée (en trait plein rouge). L'échelle est logarithmique pour les axes des ordonnées des graphiques de la colonne gauche.

Coefficients d'asymétrie et d'aplatissement et Quantile Les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement représentés dans le Tableau 2.1 représentent deux paramètres de forme essentiels dans l'étude de l'asymétrie et de l'aplatissement d'une distribution donnée.

Le coefficient d'asymétrie est le premier facteur de forme d'une loi. Une loi normale est caractérisée par une symétrie nulle (coefficient d'asymétrie égal à zéro). Le Tableau 2.1 montre que les distributions des incréments de nos indices présentent, dans la plupart des cas, une dissymétrie négative, c.à.d. que la distribution admet plus des valeurs extrêmes négatives que positives. La queue de gauche de la distribution, correspondant aux valeurs faibles, est plus lourde que la queue droite. Dans ce cas, nous disons que la probabilité d'avoir un rendement extrême négatif est plus grande que la probabilité d'avoir un rendement extrême positif.

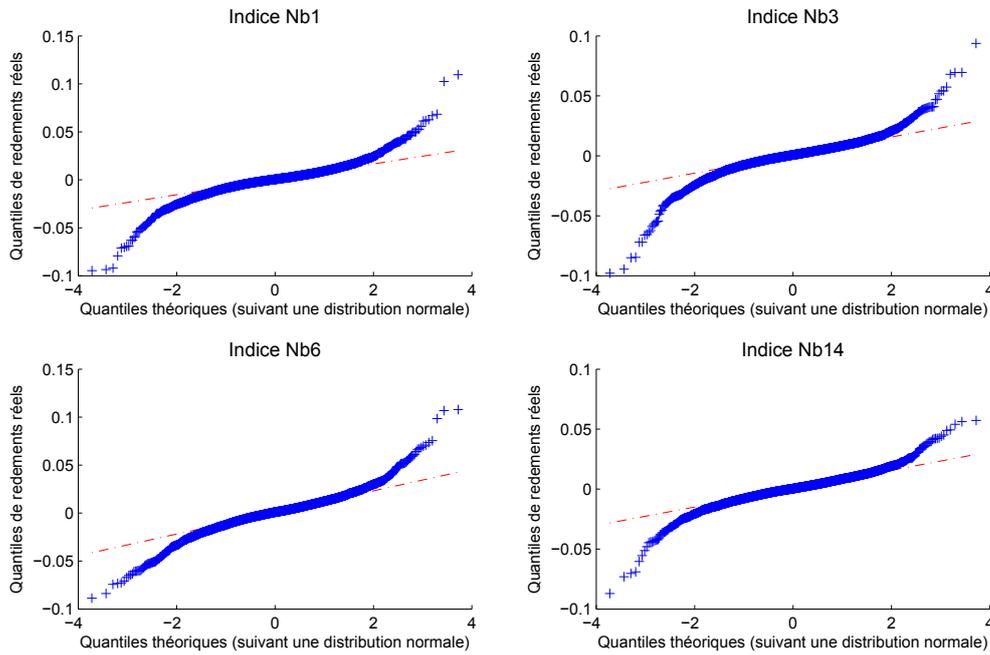


FIGURE 2.6 – Q-Q plot entre les rendements des différents indices et la distribution normale théorique associée.

Le coefficient d’aplatissement mesure la concentration ou le regroupement des valeurs de l’espace de données autour du centre de probabilité. Pour une loi normale ce facteur est égal à 3. Une loi ayant un coefficient d’aplatissement plus petit que 3 est caractérisée par un milieu plus concentré ou par des valeurs extrêmes moins fréquentes par rapport à la loi normale ; on parle d’une loi platikurtique. Les lois leptokurtiques c.à.d ayant un coefficient d’aplatissement plus grand que 3, comme dans le cas de nos séries des rendements, ont des queues plus lourdes ou plus de valeurs extrêmes que celles prévues par une loi normale.

Des exemples sur les quantiles (représentés dans les Q-Q plots de la Figure 2.6) sont donnés dans le Tableau 2.2. Les quantiles de la distribution des incréments sont mis en comparaison avec les quantiles d’une loi normale (avec même moyenne et variance que l’ensemble des données empiriques). La dissymétrie ainsi que la caractéristique leptokurtique de la distribution sont détectées à partir de ce tableau. Les valeurs extrêmes de nos données sont plus nombreuses que celles prévues pour une loi de Gauss.

Test de Kolmogorov-Smirnov Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test statistique non-paramétrique utilisé pour tester une hypothèse H_0 sur la distribution des données observées. Selon l’hypothèse H_0 les données observées sont engendrées par une loi de probabilité théorique F^{test} considérée comme étant un modèle convenable. On souhaite

2.3. Hypothèse de normalité

Indice/Pourcentage	10	25	50	75	90
n°1 (0,00024; 0,0121)	-0,01283	-0,00495	0,00056	0,00588	0,01248
N(0,00024; 0,0121)	-0,01520	-0,00792	0,00033	0,00848	0,01547
n°3 (0,00026; 0,0109)	-0,01101	-0,00445	0,00080	0,00573	0,01085
N(0,00026; 0,0109)	-0,01379	-0,00717	0,00018	0,00759	0,01429
n°6 (0,00032; 0,0150)	-0,01696	-0,00695	0,00102	0,00828	0,01609
N(0,00032; 0,0150)	-0,01890	-0,00963	0,00038	0,01045	0,01918
n°14 (0,00022; 0,0098)	-0,01079	-0,00476	0,00043	0,00558	0,01082
N(0,00022; 0,0098)	-0,01263	-0,00665	0,00010	0,00671	0,01274

Tableau 2.2 – Comparaison des quantiles entre la distribution des incréments et une loi de Gauss.

donc déterminer si la distribution réelle des données F^{emp} est identique à F^{test} (fonction de répartition d'une loi normale dans notre cas). L'hypothèse alternative H_1 est que les deux distributions sont différentes.

Le test de Kolmogorov-Smirnov s'appuie sur le calcul de l'écart entre les deux fonctions de répartitions théorique et empirique et consiste à déterminer ensuite, avec un certain seuil de confiance, si cet écart est assez significatif pour rejeter l'hypothèse nulle H_0 et considérer que $F^{emp} \neq F^{test}$. Le test de Kolmogorov-Smirnov pour l'hypothèse de la loi normale standard s'applique suivant l'algorithme suivant :

1. Tri des données en ordre croissant.
2. Centrage et normalisation des données suivant leur moyenne et écart-type.
3. Calcul des fréquences empiriques F_i^{emp} pour $i \in \{1, 2, \dots, N^{bin}\}$ sur les intervalles prédéfinis couvrant tout le domaine des valeurs observées (N^{bin} est le nombre des intervalles considérés) .
4. Calcul de la variable statistique du test suivant l'équation :

$$Dkstat = \max_i (|F_i^{emp} - F_i^{test}|) \quad (2.3)$$

Cette variable représente l'écart vertical absolu maximal entre la distribution empirique et la distribution théorique.

5. Calcul de la valeur critique du test ($CriV$) suivant le seuil de signification ($\alpha_{sig}=0.05$ en valeur standard) et la taille de l'échantillon N^{samp} . Les valeurs critiques sont déduit à partir du tableau spécifique ou suivant l'équation $CriV = \frac{\sqrt{(-0.5 \ln(\frac{\alpha_{sig}}{2}))}}{\sqrt{N^{samp}}}$ pour $N^{samp} > 35$.

Indice n°	1	2	3	4	5	6	7	8
Décision	H_1							
$Dkstat$	0,085	0,0676	0,0871	0,0672	0,0576	0,0684	0,0604	0,0671
$CriV$	0,0191	0,0193	0,0191	0,0191	0,019	0,019	0,0191	0,0191
$p - value$	$3,54e^{-32}$	$3,96e^{-20}$	$1,01e^{-33}$	$2,63e^{-20}$	$4,04e^{-15}$	$4,17e^{-21}$	$1,85e^{-16}$	$3,30e^{-20}$
Indice n°	9	10	11	12	13	14	15	–
Décision	H_1	–						
$Dkstat$	0,071	0,0878	0,111	0,0531	0,1008	0,0583	0,05	–
$CriV$	0,0219	0,0191	0,0192	0,0193	0,0194	0,019	0,0194	–
$p - value$	$3,55e^{-17}$	$2,85e^{-34}$	$5,80e^{-54}$	$1,64e^{-12}$	$1,26e^{-43}$	$1,90e^{-15}$	$3,99e^{-11}$	–

Tableau 2.3 – Résultats du test de Kolmogorov-Smirnov sur l’hypothèse de normalité de la distribution des incréments pour les différents indices.

6. Comparaison la variable statistique du test à la valeur critique et adoption de l’hypothèse H_0 si $Dkstat < CriV$ et H_1 si non.

Les résultats du test de Kolmogorov-Smirnov appliqué sur les séries des incréments des différents indices sont présentés dans le Tableau 2.3. Ces résultats montrent que l’hypothèse sur la normalité des incréments ne peut être adoptée pour aucun indice. Les valeurs de la variable statistique du test sont largement plus grandes que les valeurs critiques. Les valeurs de $p - value$ données dans ce tableau présentent la réponse à la question suivante : ”Si l’échantillon est une réalisation au hasard à partir de la distribution théorique, quelle est la probabilité que les deux distributions de fréquences cumulées soient aussi éloignées qu’observé ($Dkstat$) ? ”

Les résultats du test de Kolmogorov-Smirnov rejettent fortement l’hypothèse de la normalité de la distribution des incréments pour tous les indices. Ces résultats impliquent que les modèles stochastiques basés sur cette hypothèse, comme les modèles de mouvements brownien géométrique avec ou sans dérive ne sont pas adaptés pour la représentation de nos indices. Des modifications sur le modèle de mouvement brownien géométrique et notamment sur la considération des valeurs extrêmes plus importantes et plus fréquentes peuvent toutefois introduire des améliorations remarquables sur la capacité du modèle à représenter les indices en question.

Valeurs extrêmes : les sauts Les queues lourdes remarquées dans la distribution des incréments reflètent un excès des valeurs extrêmes (valeurs absolues relativement importantes par rapport à la moyenne et à l’écart-type de l’ensemble des incréments) par rapport à celles prévues pour une variable normale. L’évolution des indices est donc

2.3. Hypothèse de normalité

caractérisée par la présence de "sauts". Le saut (en anglais *jump*) est un terme courant et bien connu dans le domaine de la modélisation des phénomènes aléatoires. En considérant l'évolution "ordinaire" de données comme un phénomène à espaces de temps et d'état continus qui peut être représenté par un processus de diffusion, la présence du phénomène de sauts est marquée par des discontinuités occasionnelles dans la trajectoire des données.

Le phénomène de saut peut être le résultat de plusieurs facteurs internes ou externes causant un changement brusque dans l'état du système. Dans le cadre des systèmes sujets à dégradation, l'état de santé du système peut être influencé par plusieurs éléments. Les conditions de travail extrêmes, le stress, les chocs extérieurs ainsi que les dommages collatéraux cumulés sont tous des facteurs pouvant dégrader d'une façon soudaine et significative l'état de santé d'un système.

En économie, les grandes fluctuations dans le prix d'une action ou la valeur d'un indice boursier peuvent être causées par plusieurs facteurs économiques ou politiques. Par exemple, le 17 septembre 2001, l'indice "Dow Jones Industrial Average" (DJIA) a subi l'une des plus grandes pertes journalières jamais reconnue : une baisse de 7,1%. Ce grand mouvement du marché était une réaction aux attaques terroristes ayant lieu une semaine plus tôt contre les États-Unis. L'indice DJIA était en baisse à cause de l'augmentation de l'incertitude par rapport l'avenir, considérant la possibilité d'autres attaques terroristes, ou même une guerre. Des changements significatifs, positifs ou négatifs, dans la valeur d'un indice financier peuvent être aussi dus à des facteurs économiques et géopolitiques divers (dépenses du gouvernement, taxes, situations économiques locales et mondiales, situations politiques et de sécurité, profits de l'entreprise, perspectives macroéconomiques, ...) [Baker et al. \(2013\)](#). Des études empiriques et théoriques récentes confirment l'existence des sauts et de leur impact considérable sur la gestion financière (voir [Duffie et al. \(2000\)](#); [Johannes \(2004\)](#)). Ces études montrent également que, malgré le progrès dans les modèles destinés à la représentation des phénomènes financiers et les méthodes mathématiques associées, les sauts restent empiriquement difficiles à identifier [Lee and Mykland \(2008\)](#); Dans le cas d'une collection discrète (périodique) de données d'un processus continue, la détection des sauts reste une tâche difficile.

Revenant aux différents indices étudiés dans notre thèse, les distributions à queues lourdes des rendements favorisent la proposition de sauts. Visuellement, des fluctuations relativement importantes par rapport à la moyenne générale et la variance des incréments peuvent être détectées dans la Figure 2.3. A titre d'exemples, la Figure 2.7 présente une vue rapprochée des trajectoires tracées par les valeurs historiques des indices numéro 3 et 14. Dans cette figure, l'apparition des sauts peut être encore une fois remarquée.

En outre des propriétés identifiées les discontinuités de trajectoire d'évolution doivent

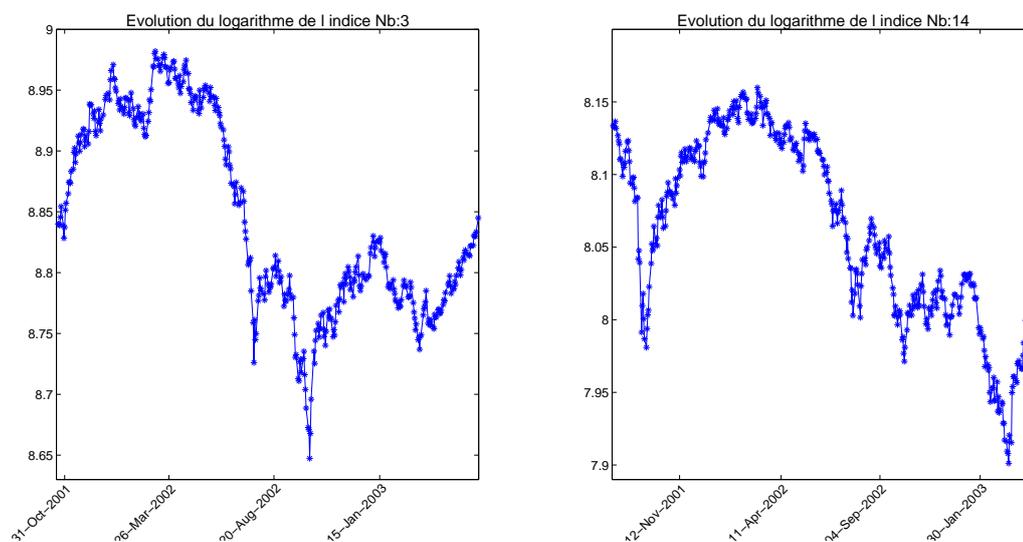


FIGURE 2.7 – Évolution logarithmique des indices numéro 3 et 14 vu sur un intervalle de 18 mois.

être prises en considération pour la représentation de ces indices.

2.4 Distributions des log-incréments

La distribution des rendements présente un élément essentiel dans le choix du modèle. La densité de transition du modèle choisi, pour un intervalle de temps donné, doit correspondre à la densité des incréments observés à partir des données collectées périodiquement avec cet intervalle. Les tests de normalité ont confirmé que la distribution réelle des incréments présente des queues plus lourdes et un coefficient d'aplatissement plus élevé qu'une loi normale, ainsi qu'un coefficient d'asymétrie non nul. Visuellement, la loi réelle des incréments semble être plus proche de la loi de Laplace que de la loi normale. Dans la littérature, la distribution des incréments des indices boursiers ont fait l'objet de plusieurs études statistiques. Récemment, [Kozubowski and Podgorsko \(2001\)](#) et [Yu and Zhang \(2005\)](#) proposent respectivement des lois de Laplace asymétriques (à deux paramètres) et asymétrique décalée (à trois paramètres) pour la représentation de la distribution des incréments financiers. Ces deux lois prennent en compte à la fois l'aplatissement et l'asymétrie des données.

Dans ce qui suit nous allons tester la pertinence de ces deux lois de probabilités pour la représentation de nos données. Nous présentons tout d'abord les deux densités de probabilité ainsi que leurs méthodes de calibration et les résultats obtenus pour les tests

2.4. Distributions des log-incréments

sur nos données. Les résultats des tests n'étant pas satisfaisants, une troisième fonction basée sur la combinaison de la loi normale et de la loi de Laplace est ensuite proposée et testée.

Fonction de Laplace asymétrique à deux paramètres Dans [Kozubowski and Podgorsko \(2001\)](#), les auteurs introduisent la loi de Laplace asymétrique (*AL*) comme une sous-classe des distributions géométriques stables (un type de loi de probabilité leptokurtique). Les auteurs affirment que cette loi est particulièrement adaptée à la modélisation des phénomènes aux caractéristiques suivantes : la variable d'intérêt résulte d'un grand nombre de réalisations aléatoires et indépendantes et la distribution empirique des réalisations est asymétrique, avec un pic au centre et des queues plus lourdes que celles autorisées par une loi normale. La loi *AL* proposée dans ce papier est caractérisée par les fonctions de densité de probabilité et de répartition suivantes :

$$f_{AL}(x; \mu, \sigma) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \begin{cases} \exp(-\frac{\sqrt{2}\kappa}{\sigma}x), & \text{si } x \geq 0, \\ \exp(\frac{\sqrt{2}}{\sigma\kappa}x), & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

$$F_{AL}(x; \mu, \sigma) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+\kappa^2} \exp(-\frac{\sqrt{2}\kappa}{\sigma}x), & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{\kappa^2}{1+\kappa^2} \exp(\frac{\sqrt{2}}{\sigma\kappa}x), & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

avec : $\kappa = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2}}$.

Dans la suite nous exprimons la loi de Laplace asymétrique par $AL(\mu, \sigma)$ ou simplement AL .

La Figure 2.8 représente la forme de la densité $AL(\mu, \sigma)$ pour différents couples de paramètres. On remarque que quels que soient les paramètres μ et σ cette densité est toujours centrée avec un pic à zéro. Comme la densité de la loi *AL* est formée à partir d'une fonction exponentielle simple, le calcul analytique des moments et des facteurs statistiques correspondants à cette distribution est simple. Ces facteurs sont résumés dans le Tableau 2.4.

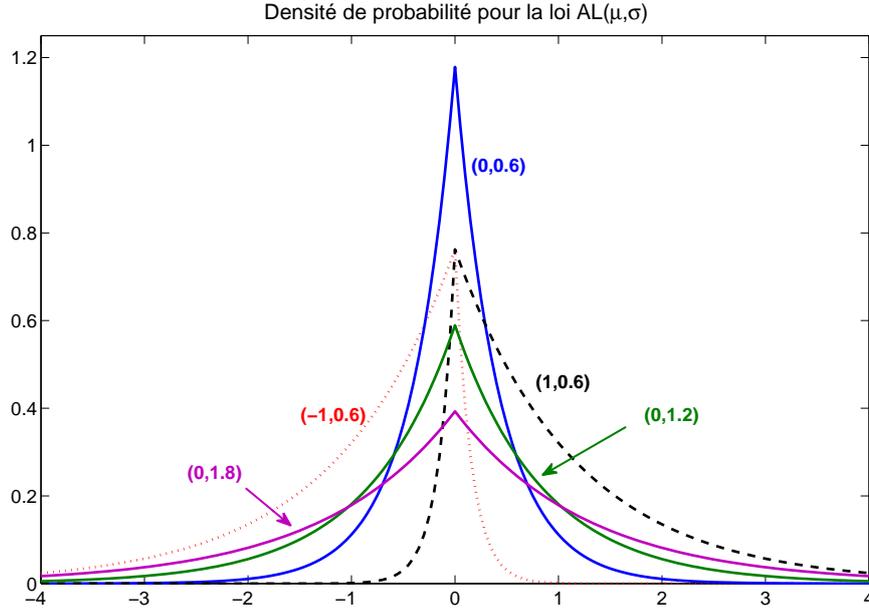


FIGURE 2.8 – Fonction de densité de probabilité de la loi $AL(\mu, \sigma)$

Moment	$AL(\mu, \sigma)$	$ALD(\mu, \sigma, p)$
Moyenne	μ	$\mu + \frac{\sigma(1-2p)}{p(1-p)}$
Variance	$\mu^2 + \sigma^2$	$\frac{\sigma^2(1-2p+2p^2)}{(1-p)^2 p^2}$
Coef. d'asymétrie	$2 \frac{1/\kappa^3 - \kappa^3}{(1/\kappa^2 + \kappa^2)^{3/2}}^*$	$\frac{2[p^3 - (1-p)^3]}{[(1-p)^2 + p^2]^{3/2}}$
Coef. d'aplatissement	$6 - \frac{12}{(1/\kappa^2 + \kappa^2)^2}^*$	$\frac{9p^4 + 6p^2(1-p)^2 + 9(1-p)^4}{(1-2p+2p^2)^2}$
Médiane	$\mu \frac{\log(2/(1+\kappa^2))}{1-\kappa^2}^*$	$\mu + \frac{\sigma}{1-p} \log\left[\frac{1}{2p}\right]$

$$* \kappa = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2}}$$

Tableau 2.4 – Moments et facteurs statistiques pour les lois $AL(\mu, \sigma)$ et $ALD(\mu, \sigma, p)$.

Des estimateurs du maximum de vraisemblance pour les paramètres de cette distribution à partir d'un ensemble des réalisations $X_{1,N} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ sont établis par [Kozubowski and Podgorsko \(2001\)](#). Supposant que $X \sim AL(\mu, \sigma)$, les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres μ et σ s'écrivent sous la forme suivante :

$$\hat{\mu} = \mathbb{E}[X] \tag{2.6}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{2} \sqrt[4]{\mathbb{E}[X^-]} \sqrt[4]{\mathbb{E}[X^+]}. (\sqrt{\mathbb{E}[X^-]} + \sqrt{\mathbb{E}[X^+]}) \tag{2.7}$$

avec $\mathbb{E}[X^\pm] = \frac{1}{N} \sum_i^N X_i^\pm$, $X_i^\pm = \max(0, \pm x_i)$ et $X^\pm = \{X_i^\pm\}_{i=1:N}$.

2.4. Distributions des log-incréments

Indice n°	AL		Test AL		ALD			Test ALD	
	$\mu(.e^{-2})$	$\sigma(.e^{-2})$	<i>Dkstet</i>	Décision	$\mu(.e^{-2})$	$\sigma(.e^{-2})$	<i>p</i>	<i>Dkstet</i>	Décision
1	0,024	1,152	0,02803	<i>H1</i>	0,092	0,406	0,521	0,01193	<i>H0</i>
2	0,183	2,415	0,02482	<i>H1</i>	0,148	0,854	0,495	0,01829	<i>H1</i>
3	0,026	1,043	0,04464	<i>H1</i>	0,15	0,363	0,542	0,01893	<i>H1</i>
4	0,015	1,165	0,0302	<i>H1</i>	0,09	0,411	0,523	0,01649	<i>H0</i>
5	0,014	1,471	0,03359	<i>H1</i>	0,092	0,519	0,519	0,02402	<i>H1</i>
6	0,032	1,5	0,03865	<i>H1</i>	0,178	0,525	0,535	0,01092	<i>H0</i>
7	0,026	1,482	0,03884	<i>H1</i>	0,156	0,52	0,531	0,01713	<i>H0</i>
8	0,024	1,194	0,0344	<i>H1</i>	0,13	0,419	0,531	0,01465	<i>H0</i>
9	-0,009	1,578	0,02976	<i>H1</i>	0,127	0,554	0,531	0,00954	<i>H0</i>
10	0,02	1,253	0,03603	<i>H1</i>	0,142	0,439	0,535	0,01733	<i>H1</i>
11	0,041	0,797	0,04855	<i>H1</i>	0,05	0,281	0,504	0,03011	<i>H1</i>
12	-0,009	1,53	0,02559	<i>H1</i>	0,044	0,541	0,512	0,02228	<i>H1</i>
13	0,021	1,964	0,02058	<i>H1</i>	0,055	0,694	0,506	0,02056	<i>H1</i>
14	0,022	0,988	0,03287	<i>H1</i>	0,083	0,348	0,522	0,0201	<i>H1</i>
15	0,042	1,688	0,03523	<i>H1</i>	0,16	0,594	0,525	0,02243	<i>H1</i>

Tableau 2.5 – Résultats de calibration et de test de Kolmogorov-Smirnov pour les deux lois *AL* et *ALD* pour les différents indices.

Ces estimateurs sont utilisés pour la calibration de la loi *AL* pour chacune de nos séries de rendement. Les résultats de cette calibration sont présentés dans le Tableau 2.5. Le test de Kolmogorov-Smirnov est ensuite utilisé pour tester l'adaptation de nos séries de données aux distributions *AL* correspondantes. Les résultats de ce test sont donnés par le Tableau 2.5. Le test de Kolmogorov-Smirnov rejette l'hypothèse H_0 pour tous les indices. Ce qui signifie que la distribution *AL* n'est pas adaptée pour la représentation des séries des incréments, et par conséquent pas adaptée pour la représentation de la distribution de transition du modèle cherché.

Fonction de Laplace asymétrique décalée à trois paramètres Le principal avantage d'une loi Laplace asymétrique décalée ($ALD(\mu, \sigma, p)$) par rapport à la loi $AL(\mu, \sigma)$ est qu'elle permet une distribution non-centrée à zéro. Cette loi respecte aussi l'asymétrie de la distribution et la particularité des queues lourdes. [Yu and Zhang \(2005\)](#) introduisent la fonction de densité de probabilité de la loi *ALD* comme suit :

$$f_{ALD}(x; \mu, \sigma, p) = \frac{p(1-p)}{\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma}[p - \mathbb{1}(x \leq \mu)]\right) \quad (2.8)$$

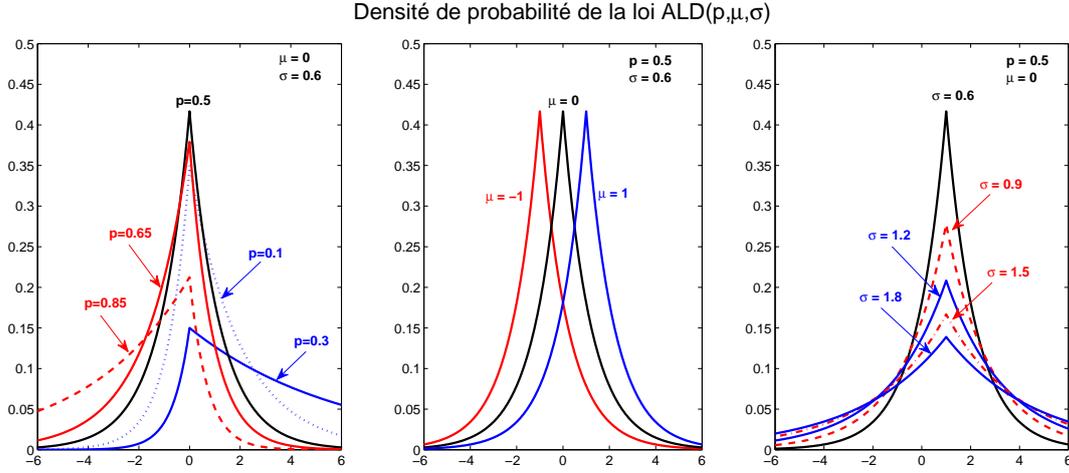


FIGURE 2.9 – Densité de probabilité de la loi *ALD* en fonction des différents paramètres.

avec $0 < p < 1$ le paramètre de "skew" (ou d'asymétrie), $\sigma > 0$ le paramètre d'échelle, $-\infty < \mu < \infty$ le paramètre de localisation, et $\mathbb{1}(\cdot)$ la fonction indicatrice. La distribution $ALD(\mu, \sigma, p)$ présente une forme asymétrie, décalée vers la gauche lorsque $p > \frac{1}{2}$, et vers la droite lorsque $p < \frac{1}{2}$. La Figure 2.9 illustre la fonction de densité de probabilité *ALD* pour des différentes combinaisons de paramètres (μ, σ, p) . On note que pour $p = \frac{1}{2}$ la distribution *ALD* se réduit à une distribution double exponentielle symétrique.

Soit $X \sim ALD(\mu, \sigma, p)$, la fonction de répartition et la fonction quantile de X sont données respectivement comme suit :

$$F_{ALD}(x; \mu, \sigma, p) = \begin{cases} p \exp\left[\frac{1-p}{\sigma}(x - \mu)\right], & \text{si } x \leq \mu, \\ 1 - (1-p) \exp\left[-\frac{p}{\sigma}(x - \mu)\right], & \text{si } x > \mu. \end{cases} \quad (2.9)$$

$$F_{ALD}^{-1}(x; \mu, \sigma, p) = \begin{cases} \mu + \frac{\sigma}{1-p} \log\left[\frac{x}{p}\right] & \text{si } 0 \leq x \leq p, \\ \mu - \frac{\sigma}{p} \log\left[\frac{1-x}{1-p}\right], & \text{si } p < x \leq 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Comme dans le cas de la loi *AL*, le calcul des moments centrés d'ordre k de la variable aléatoire X peut être déduit facilement d'une manière analytique. Le Tableau 2.4 représente les principaux moments et facteurs statistiques de la variable X . On remarque que le paramètre d'échelle σ n'affecte pas les valeurs des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement. Pourtant ce paramètre contrôle le support de la distribution. La Figure 2.9 montre l'effet de chacun des paramètres μ, σ et p sur la forme de la fonction de densité de probabilité de la loi *ALD*.

Des estimateurs du maximum de vraisemblance sont donnés par Yu and Zhang (2005) pour la calibration de la distribution *ALD* à un ensemble de réalisations $X_{1,N}$ de la

2.4. Distributions des log-incréments

variable X . Dans cet étude nous allons utiliser la fonction prédéfinie "mle" du logiciel MATLAB pour l'estimation des paramètres (μ, σ, p) pour chacune dans nos séries des rendements. Cette fonction qui appartient au *Statistics and Machine Learning Toolbox* est une interface pratique pour le calcul des estimateurs du maximum de vraisemblance pour les différentes distributions prédéfinies dans le logiciel ou par l'utilisateur.

Le test de Kolmogorov-Smirnov est ensuite utilisé pour tester l'adaptation de nos séries de données aux distributions *ALD* correspondantes. Les résultats de la calibration ainsi que les résultats du test de de Kolmogorov-Smirnov sont représentés dans le Tableau 2.5. Ces résultats montrent que la loi *ALD* peut être convenable pour la représentation de la distribution de certaines séries de rendements mais pas pour toutes (6 séries sur 15 présentent une bonne adaptation à la loi *ALD*). Par la suite la distribution *ALD* est considérée n'est pas adaptée aux données que l'on dispose.

Mélange de lois Laplace et Gauss D'après les tests effectués dans les deux paragraphes précédents, nous pouvons conclure que la loi de Laplace asymétrique non centrée à zéro (*ALD*) peut être partiellement adaptée à la représentation de certains séries des rendements mais pas pour toutes. Dans cette section nous essayons de trouver une autre loi qui peut convenir à la majorité des séries financières à disposition. Gardant à l'esprit que les différents types des modèles stochastiques couramment utilisés dans la finance, et représentés dans le Chapitre 1, se basent d'une manière ou d'autre sur une ou plusieurs variables Gaussiennes. Notant aussi la présence d'une asymétrie, du pic au centre (pas forcément nul) et des queues lourdes dans la forme de la densité de probabilité des données réelles. Nous proposons ainsi de tester une fonction de distribution formée à partir d'une combinaison linéaire de la loi de Gauss et de la loi de Laplace. La densité de probabilité proposée, désignée dans la suite par le terme (*CNL*), est décrite par la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f_{CNL}(x; p_N, \mu_N, \sigma_N, \mu_L, \sigma_L) &= p_N \phi_N(x; \mu_N, \sigma_N) + (1 - p_N) \phi_L(x; \mu_L, \sigma_L) \\ &= \frac{p_N}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_N)^2}{2\sigma_N^2}\right) + \frac{1 - p_N}{2\sigma_L} \exp\left(-\frac{|x - \mu_N|}{\sigma_L}\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

ϕ_N et ϕ_L représentent respectivement les deux densités de probabilité de la loi normale et la loi de Laplace. Les paramètres μ_N et μ_L représentent ainsi les deux paramètres de position de ces distributions alors que σ_N et σ_L sont les deux paramètres d'échelle. Le facteur p_N , $0 \leq p_N \leq 1$ est le poids de la distribution normale dans cette combinaison. La Figure 2.10 présente la forme de la densité de probabilité de la loi *CNL* pour plusieurs combinaisons de paramètres.

La moyenne et la variance de la distribution représentées par l'équation (2.11) sont

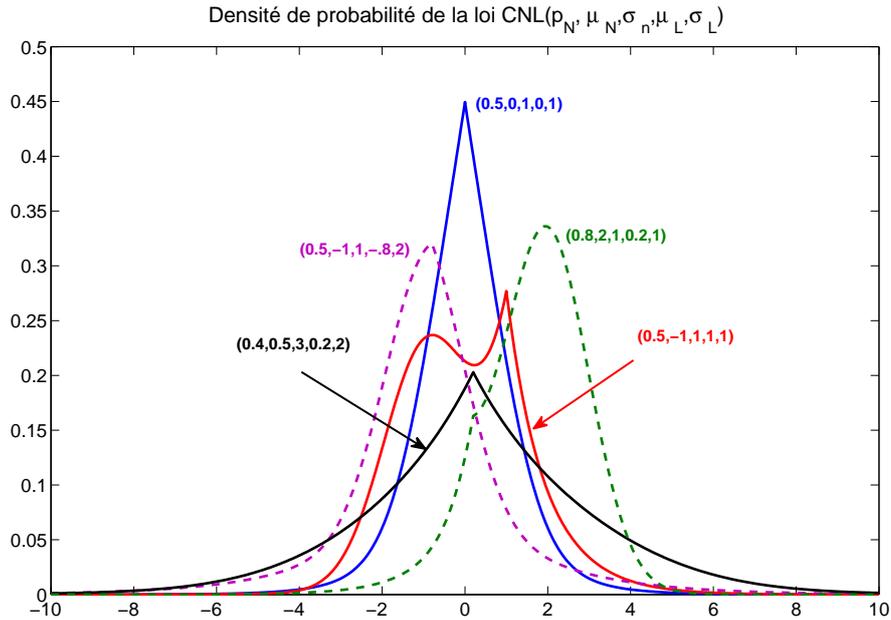


FIGURE 2.10 – Densité de probabilité de la loi CNL pour des différentes combinaisons de paramètres.

données comme suit :

$$\mathbb{E}[X] = p_N \cdot \mu_N + (1 - p_N) \mu_L \quad (2.12)$$

$$Var[X] = p_N \cdot [\sigma_N^2 - (p_N - 1) \cdot (\mu_N - \mu_L)^2] - 2 \cdot (p_N - 1) \cdot \sigma_L^2 \quad (2.13)$$

Afin d'estimer les cinq paramètres de cette distribution $(p_n, \mu_N, \sigma_N, \mu_L, \sigma_L)$, nous commençons par effectuer une recherche par quadrillage en utilisant la distance de Kolmogorov-Smirnov comme critère à minimiser. Les paramètres solutions de la recherche par quadrillage sont ensuite utilisés comme des paramètres de départ de la fonction "mle" de MATLAB, qui effectue à son tour une estimation des paramètres suivant le critère de maximum de vraisemblance. Les résultats de l'estimation ainsi que ceux du test de Kolmogorov-Smirnov sont donnés dans le Tableau 2.6. Nous remarquons que le test de Kolmogorov-Smirnov confirme une bonne adaptation de la distribution proposée aux différentes séries des données. L'hypothèse H_0 est acceptée pour toutes les séries en dispositions.

2.4. Distributions des log-incrément

Indice n°	CNL					Test CNL	
	p	μ_N	σ_N	μ_L	σ_L	$Dkstet$	Décision
1	0,303		0,006	-0,036	0,01	0,00954	H_0
2	0,531	0,147	0,016	0,191	0,022	0,00748	H_0
3	0,568	0,206	0,006	-0,187	0,01	0,00853	H_0
4	0,464	0,115	0,007	-0,044	0,01	0,00977	H_0
5	0,533	0,15	0,01	-0,11	0,013	0,00766	H_0
6	0,352	0,113	0,01	0,075	0,012	0,01681	H_0
7	0,374	0,012	0,01	0,099	0,012	0,01569	H_0
8	0,554	0,158	0,008	-0,101	0,011	0,01001	H_0
9	0,145	0,534	0,006	-0,091	0,012	0,01187	H_0
10	0,519	0,174	0,007	-0,115	0,012	0,00986	H_0
11	0,101	0,251	0,011	0,053	0,005	0,01531	H_0
12	0,527	0,049	0,012	-0,042	0,012	0,00932	H_0
13	0,52	0,049	0,011	0,007	0,02	0,01535	H_0
14	0,563	0,099	0,007	-0,036	0,009	0,00969	H_0
15	0,499	0,037	0,012	0,111	0,014	0,01004	H_0

Tableau 2.6 – Résultats de calibration et du test de Kolmogorov-Smirnov pour la loi CNL et pour les différents indices.

Pdf des rendements réels en comparaison avec les trois distributions AL, ALD et CNL

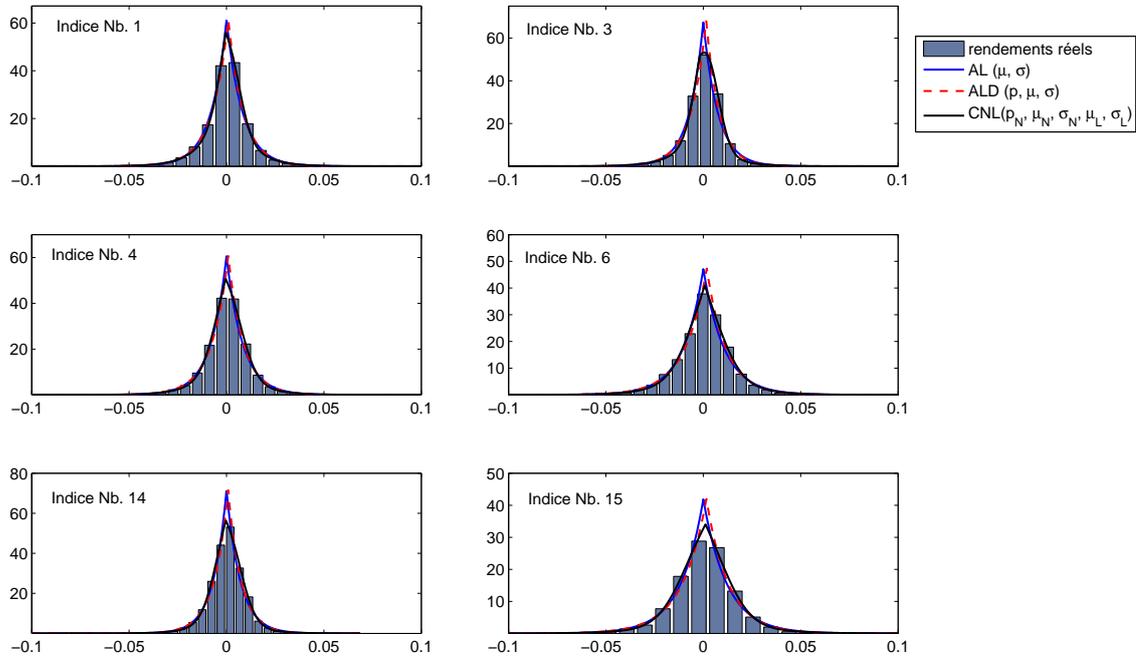


FIGURE 2.11 – Densité de probabilité des trois lois proposées en comparaison avec la distribution réelle des rendements pour des différents indices.

Indice n°	Empirique		<i>AL</i>		<i>ALD</i>		<i>CNL</i>	
	$\mathbb{E}[X]$	$Var[X]$	$\mathbb{E}[X]$	$Var[X]$	$\mathbb{E}[X]$	$Var[X]$	$\mathbb{E}[X]$	$Var[X]$
1	2,415	1,471	2,415	1,329	2,414	1,323	3,53	1,402
2	18,295	6,094	18,295	5,868	18,296	5,834	16,725	5,965
3	2,63	1,198	2,63	1,089	2,63	1,079	3,619	1,159
4	1,503	1,385	1,503	1,358	1,503	1,357	2,993	1,372
5	1,374	2,112	1,374	2,165	1,374	2,164	2,841	2,11
6	3,187	2,257	3,187	2,251	3,187	2,236	8,837	2,217
7	2,578	2,165	2,578	2,198	2,579	2,189	6,664	2,136
8	2,424	1,453	2,424	1,425	2,424	1,418	4,25	1,441
9	-0,926	2,526	-0,926	2,489	-0,925	2,484	-0,035	2,523
10	2,015	1,739	2,015	1,57	2,015	1,563	3,471	1,706
11	4,081	0,781	4,081	0,637	4,082	0,634	7,268	0,58
12	-0,92	2,272	-0,92	2,341	-0,919	2,341	0,588	2,198
13	2,076	4,797	2,076	3,856	2,077	3,854	2,893	4,384
14	2,159	0,966	2,159	0,976	2,16	0,974	3,984	0,942
15	4,172	2,726	4,172	2,85	4,172	2,841	7,407	2,72

Tableau 2.7 – Moyennes et variances empiriques et théoriques correspondants aux trois lois proposées.

La Figures 2.11 présentent les fonctions de densité de probabilité des trois lois (*Al*, *ALD* et *CNL*) calibrées, en comparaison avec celles de la probabilité empirique déduite à partir de chacune des séries de rendements. Le Tableau 2.7 présente la moyenne et la déviation standard théoriques de chacune des trois distributions en comparaison avec la moyenne et la variance empirique calculées à partir des incréments. A partir de ces figures et ce tableau, et considérant les résultats précédents des tests de Kolmogorov-Smirnov, nous pouvons déduire que, malgré la déviation en moyenne, parmi les lois envisagées la densité *CNL* est la plus adaptée pour décrire la densité de probabilité de nos incréments financiers.

2.5 Étude de la volatilité

La volatilité est un terme désignant une mesure sur le degré des fluctuations d'un processus aléatoire. Lors de la modélisation des phénomènes aléatoires l'étude de la volatilité peut s'avérer d'une grande importance. En général, la volatilité est considérée comme une variable aléatoire inobservable. Elle peut toutefois être déduite à partir des données collectées et des incréments calculés pour ces données. Dans ce qui suit nous allons ex-

2.5. Étude de la volatilité

traire et étudier la volatilité historique des différents indices et de déduire ses principales caractéristiques.

La volatilité historique Si l'on considère la volatilité comme une variable aléatoire inobservable, il est nécessaire de définir un moyen qui permet de mesurer la volatilité historique à partir d'un échantillon de données. En finance, la volatilité historique d'un actif est techniquement égale à l'écart-type des valeurs de rendement, calculé sur une fenêtre de temps glissante. Il existe bien sûr d'autres définitions pour le calcul de la volatilité, mais l'utilisation de l'écart-type est le moyen communément admis en finance "académique". La longueur de la fenêtre de calcul n'étant pas fixe dans la littérature, la question sur la taille d'échantillonnage à utiliser pour le calcul de la volatilité historique demeure un sujet encore débattu [Grouard et al. \(2003\)](#) : en particulier, il n'existe toujours pas de critère permettant de déterminer la taille optimale de cette fenêtre. Le calcul est le plus souvent effectué sur un échantillon de 21 jours (1 mois), 63 jours (trois mois), 126 jours (six mois) ou même 252 jours (1 an). Comme les rendements utilisés pour le calcul de l'écart-type sont des rendements quotidiens, la valeur obtenue correspond alors à une volatilité pour 1 jour, quel que soit la taille de l'échantillon choisi. La volatilité est souvent utilisée comme un facteur de risque de l'actif. La valeur de l'écart-type obtenue est donc multipliée par une constante de 252 (pour 252 jours/an) et affichée sous forme d'un pourcentage. Dans notre étude nous nous intéressons à la volatilité en tant que variable (ou un phénomène) aléatoire. Nous cherchons à détecter les changements ou caractériser la stabilité de la valeur de la volatilité d'un actif au cours du temps. Ainsi la valeur de la volatilité pour 1 jour est calculée sur des fenêtres glissantes de différentes tailles. Les résultats de calcul de la volatilité des différents indices étudiés sur une fenêtre glissante de 21 jours sont données par la [Figure 2.12](#). La [Figure 2.13](#) montre la volatilité historique de l'indice numéro 3 calculée sur des fenêtres de différentes tailles.

La première remarque tirée de ces deux figures est que la volatilité d'un indice n'est pas constante par rapport au temps. Des grandes fluctuations apparaissent dans la valeur de la volatilité historique des différents indices. La [Figure 2.13](#) montre que ces fluctuations sont toujours détectables même pour un calcul sur une fenêtre de 252 jours. Le modèle choisi pour la représentation de ces données doit donc tenir compte de ces variations. Les modèles impliquant une volatilité constante ne semblent pas être adaptés pour notre étude.

Volatility clustering et covariable La [Figure 2.12](#) met en évidence une seconde remarque sur la volatilité des indices boursiers dont nous disposons. Les hausses et les

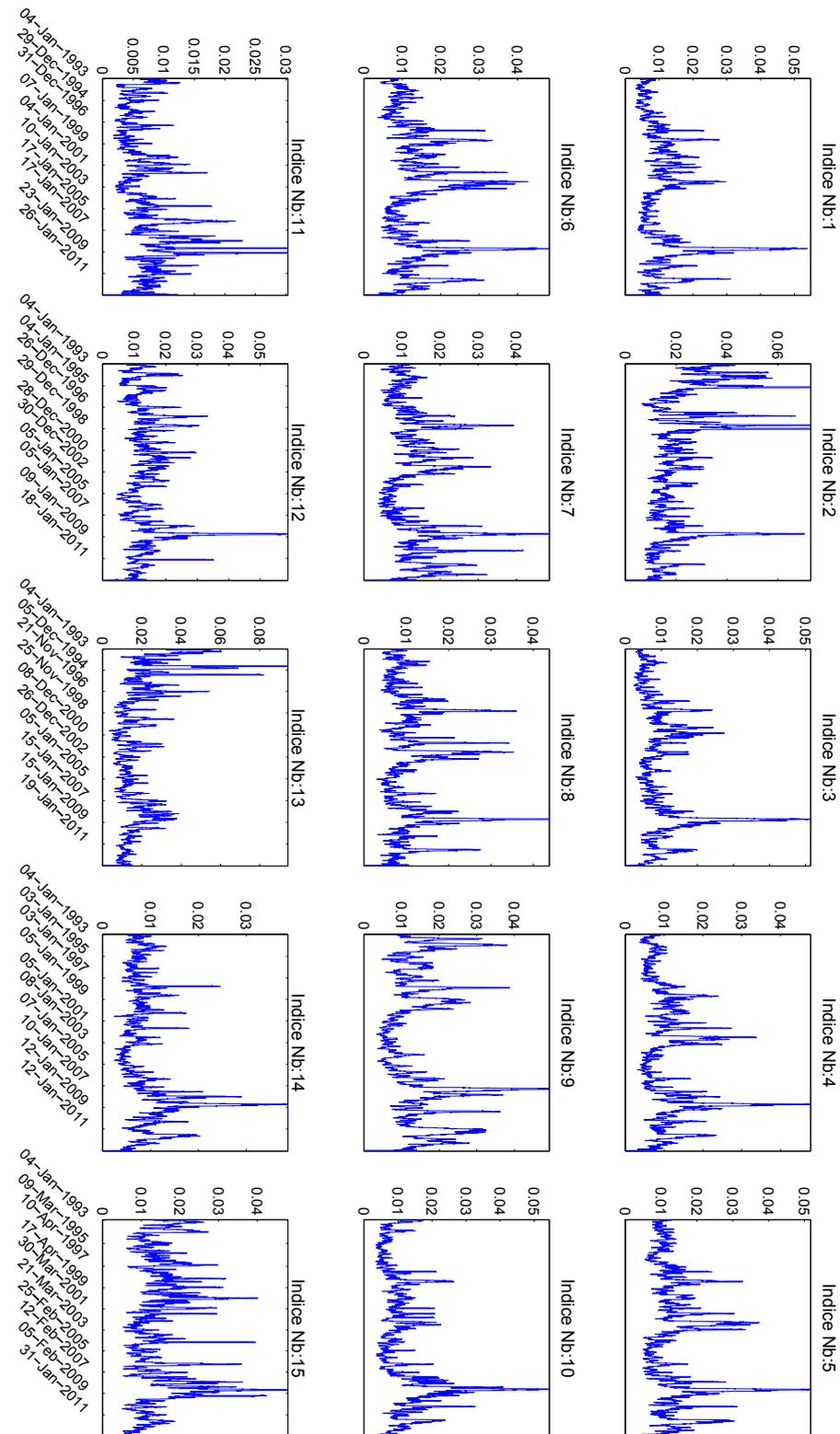


FIGURE 2.12 – Volatilité historique des différents indices calculée sur une fenêtre glissante de 1 mois.

2.5. Étude de la volatilité

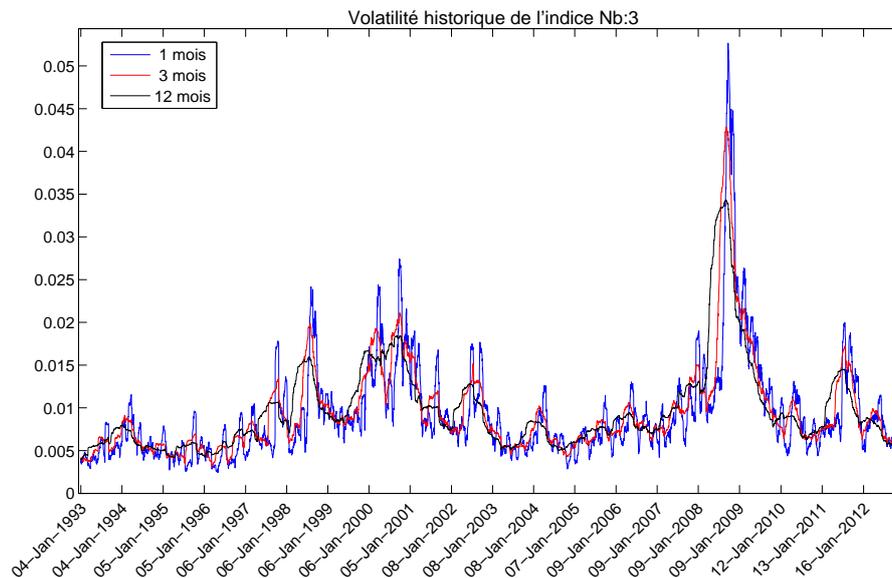


FIGURE 2.13 – Volatilité historique des indices numéro 3 calculée sur des fenêtres glissantes de 1, 6 et 12 mois.

baisses de volatilité semblent avoir un effet durable ; lorsque la volatilité subit une hausse ou une baisse importante, ce changement l'affecte pour une période non négligeable. Ce phénomène, appelé "*volatilité clustering*", se présente sous forme d'un regroupement des volatilités (hautes ou basses) suivant l'axe du temps. De plus, en examinant les degrés de fluctuations des différents indices par rapport au temps nous remarquons une certaine harmonie entre les volatilités de ces derniers. Par exemple une période de volatilité remarquablement élevée de deux ans entre janvier 2007 et janvier 2009 peut être détectée à partir de la Figure 2.12 pour la plupart des indices (regarder par exemple les indices numéro 3, 4, 5). Dans ce qui suit nous présentons les différents tests de corrélation et d'autocorrélation sur les séries des volatilités dans le but de détecter, d'une manière quantitative, le phénomène de "*clustering*", ainsi qu'une éventuelle dépendance entre la volatilité des différents indices.

Test d'autocorrélation de la volatilité Pour effectuer le test d'autocorrélation de volatilité pour chaque indice, la volatilité historique de ce dernier est calculée périodiquement sur des fenêtres de 5 jours ouvrables (une semaine). Ce test a pour but de détecter la dépendance entre les valeurs successives de la volatilité hebdomadaire de l'indice. Les Figures 2.14 et 2.15 représentent respectivement les fonctions d'autocorrélation totale et

partielle correspondant à la volatilité historique de chaque indice. Ces fonctions confirment la présence du phénomène de "volatilité clustering". La volatilité hebdomadaire des indices présente une autocorrélation partielle significative pour plusieurs semaines avec un niveau de confiance de 5%. Ces tests d'autocorrélation confirment le fait que les événements de haute (ou de basse) volatilité ont tendance à se regrouper par rapport au temps. Le "volatilité clustering" représente donc une particularité intéressante à considérer lors du choix du modèle.

Test de corrélation Les différentes séries de volatilité présentent une certaine corrélation qui se traduit par une quasi-simultanéité des hausses et de baisses (voir Figure 2.12). Dans la Figure 2.16 nous présentons les nuages de points des volatilités historiques de différents couples d'indices. Ces graphiques permettent de visualiser la relation (corrélation) entre ces variables. Nous remarquons dans cette figure que les nuages des données sont distribués autour de la diagonale (ligne qui relie le centre du repère au point de rencontre des moyennes des deux ensembles de volatilité). Cela signifie que les changements de volatilité des différents indices peuvent être liés entre eux ou dépendent d'un facteur commun. Par exemple, lorsque la valeur de la volatilité de l'indice numéro 1 est élevée, les valeurs des volatilités des indices numéros 3, 4, 6 et 14 sont aussi élevées et vice-versa. Cette observation nous pousse à considérer que les changements subits par la volatilité au cours du temps peuvent être provoqués par une source extérieure commune aux différents indices. Pour confirmer cette hypothèse, la matrice des facteurs de corrélation entre les séries des volatilités est calculée et donnée comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,019 & 0,46 & 0,611 & 0,446 & 0,528 & 0,436 & 0,537 & -0,238 & 0,313 & -0,025 & 0,197 & -0,191 & 0,211 & 0,04 \\ -0,019 & 1 & 0,034 & 0,013 & 0,095 & 0,035 & 0,122 & 0,097 & 0,027 & 0,099 & -0,062 & 0,167 & 0,11 & 0,123 & 0,013 \\ 0,46 & 0,034 & 1 & 0,36 & 0,291 & 0,416 & 0,414 & 0,414 & -0,215 & 0,285 & 0,122 & 0,185 & -0,214 & 0,173 & 0,096 \\ 0,611 & 0,013 & 0,36 & 1 & 0,533 & 0,59 & 0,442 & 0,544 & -0,207 & 0,332 & -0,089 & 0,188 & -0,115 & 0,295 & 0,033 \\ 0,446 & 0,095 & 0,291 & 0,533 & 1 & 0,609 & 0,577 & 0,517 & -0,189 & 0,277 & -0,104 & 0,235 & -0,097 & 0,213 & -0,057 \\ 0,528 & 0,035 & 0,416 & 0,59 & 0,609 & 1 & 0,579 & 0,638 & -0,151 & 0,244 & -0,132 & 0,206 & -0,183 & 0,151 & -0,039 \\ 0,436 & 0,122 & 0,414 & 0,442 & 0,577 & 0,579 & 1 & 0,58 & -0,179 & 0,322 & -0,05 & 0,173 & -0,125 & 0,144 & 0,019 \\ 0,537 & 0,097 & 0,414 & 0,544 & 0,517 & 0,638 & 0,58 & 1 & -0,112 & 0,291 & -0,076 & 0,158 & -0,135 & 0,16 & -0,002 \\ -0,238 & 0,027 & -0,215 & -0,207 & -0,189 & -0,151 & -0,179 & -0,112 & 1 & -0,118 & 0,013 & -0,088 & 0,045 & -0,027 & 0,02 \\ 0,313 & 0,099 & 0,285 & 0,332 & 0,277 & 0,244 & 0,322 & 0,291 & -0,118 & 1 & 0,111 & 0,197 & -0,021 & 0,156 & 0,088 \\ -0,025 & -0,062 & 0,122 & -0,089 & -0,104 & -0,132 & -0,05 & -0,076 & 0,013 & 0,111 & 1 & 0,025 & 0,025 & 0,049 & 0,092 \\ 0,197 & 0,167 & 0,185 & 0,188 & 0,235 & 0,206 & 0,173 & 0,158 & -0,088 & 0,197 & 0,025 & 1 & -0,086 & 0,105 & 0,056 \\ -0,191 & 0,11 & -0,214 & -0,115 & -0,097 & -0,183 & -0,125 & -0,135 & 0,045 & -0,021 & 0,025 & -0,086 & 1 & 0,048 & 0,03 \\ 0,211 & 0,123 & 0,173 & 0,295 & 0,213 & 0,151 & 0,144 & 0,16 & -0,027 & 0,156 & 0,049 & 0,105 & 0,048 & 1 & 0,111 \\ 0,04 & 0,013 & 0,096 & 0,033 & -0,057 & -0,039 & 0,019 & -0,002 & 0,02 & 0,088 & 0,092 & 0,056 & 0,03 & 0,111 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons dans cette matrice des facteurs de corrélation significatifs entre la volatilité des différents indices, notamment les indices numéro 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10 et 14. Cette corrélation confirme l'hypothèse d'une covariable agissant d'une manière similaire sur la volatilité des différents indices. La considération de cette covariable ainsi que ce son effet sur la volatilité de nos indices présente une motivation pour notre choix de modèle (voir Chapitre 3, section 3.3).

2.5. Étude de la volatilité

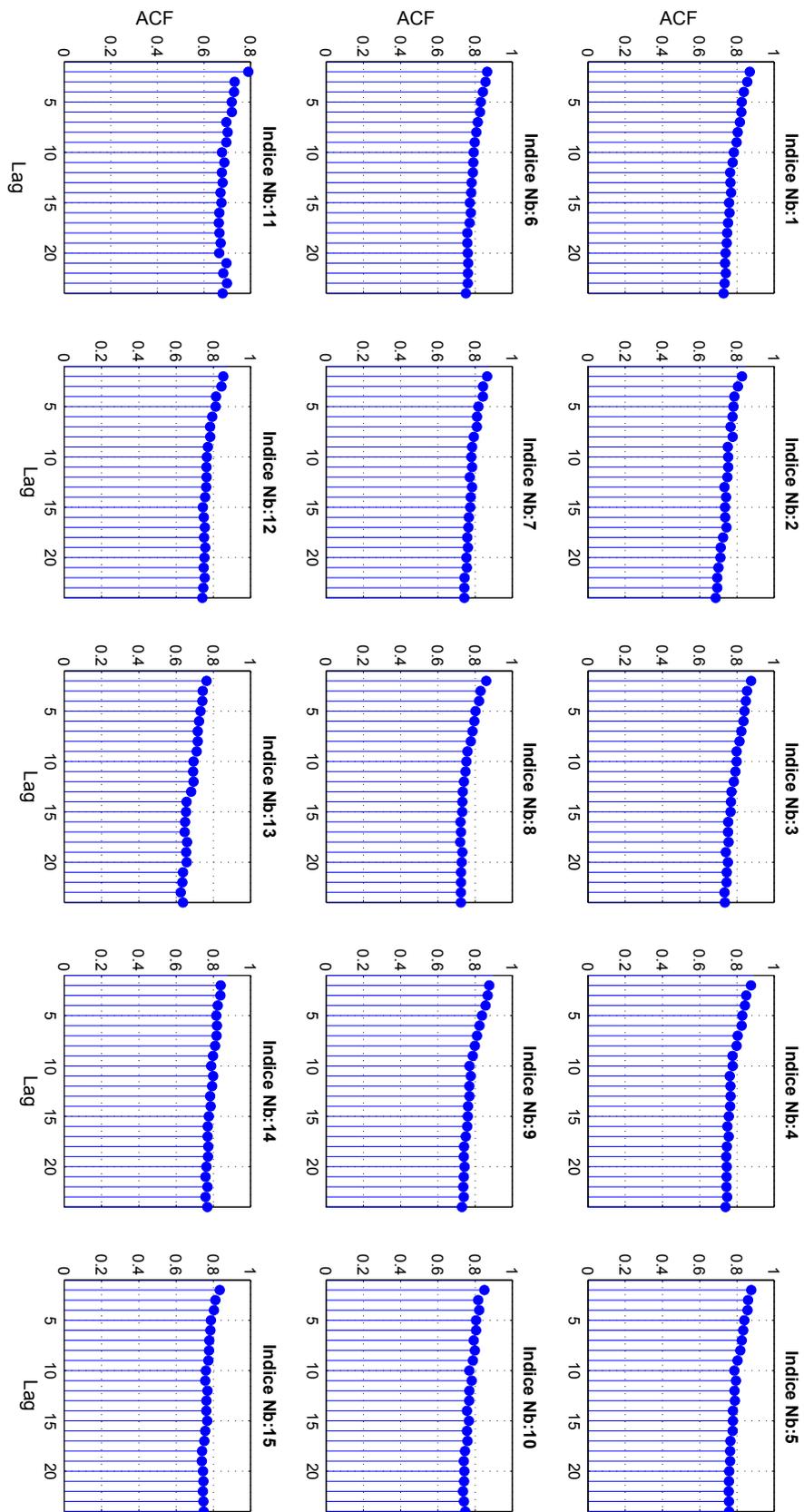


FIGURE 2.14 – Autocorrélation totale de la volatilité historique des différents indices.

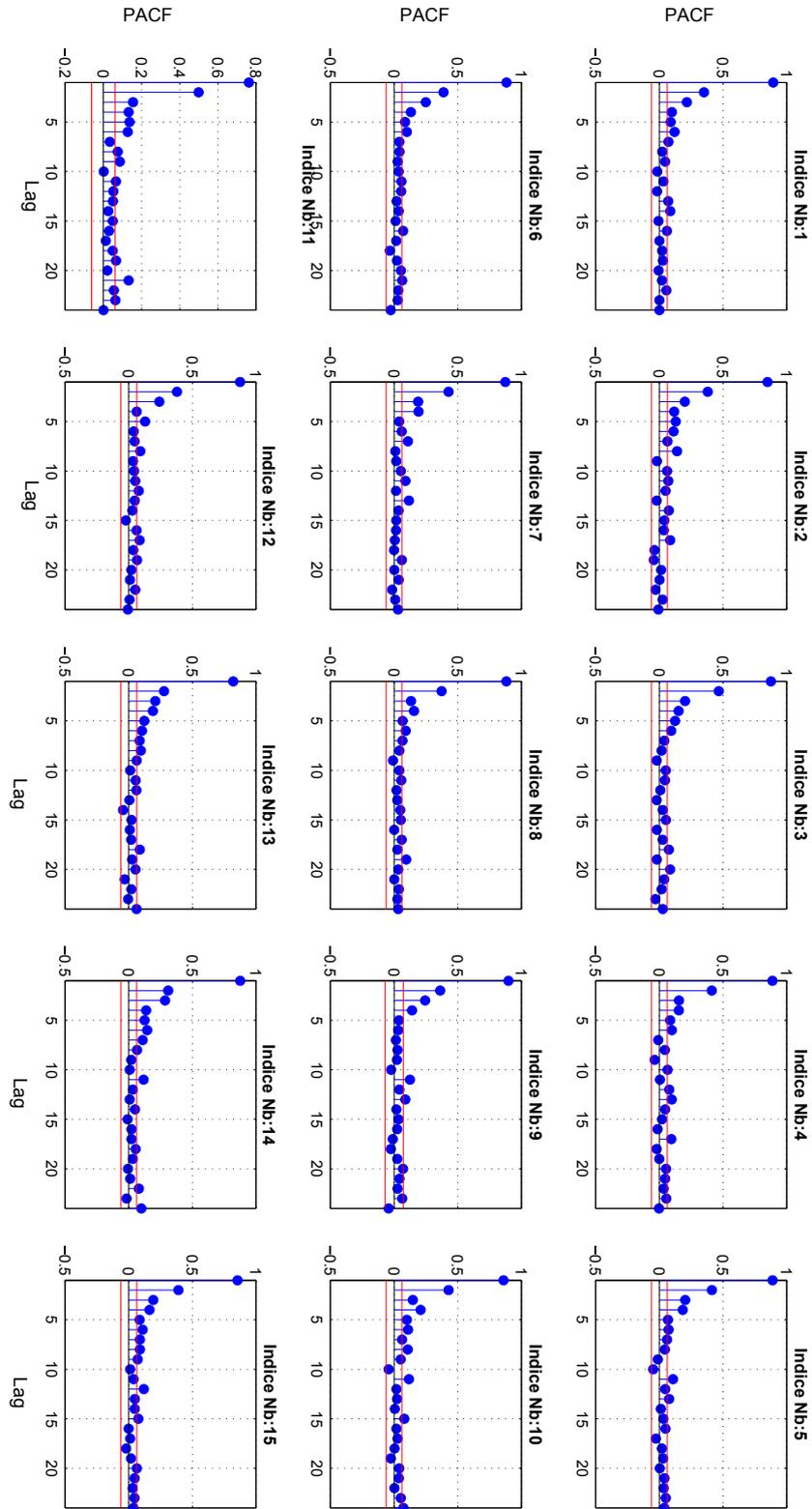


FIGURE 2.15 – Autocorrélation partielle de la volatilité historique des différents indices.

2.6. Tests d'autocorrélation et de Hinich

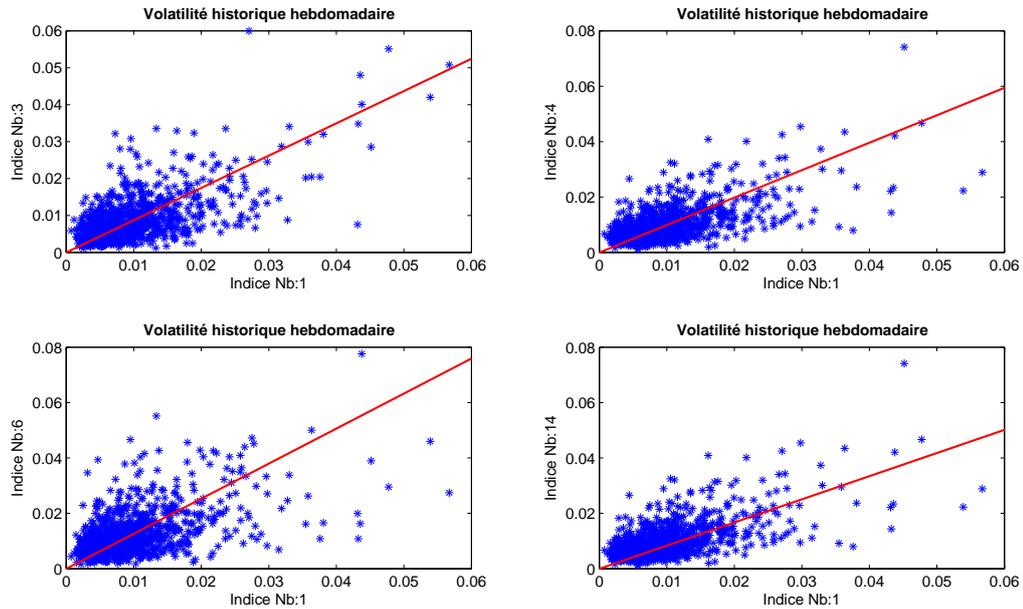


FIGURE 2.16 – Nuages de points des valeurs de volatilité hebdomadaire pour des différents couples des indices.

2.6 Tests d'autocorrélation et de Hinich

Dans cette dernière étape d'étude préliminaire des données, le test d'autocorrélation est appliqué sur les différentes séries des rendements $\{r(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ ainsi que sur les séries des rendements au carré $\{r^2(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Ces tests ont pour but de favoriser ou de rejeter l'utilisation des modèles autorégressifs linéaires et non-linéaires (AR, ARCH et GARCH) pour la représentation de nos données. Le test de Hinich quant à lui est un outil de diagnostic supplémentaire qui sert à déterminer l'adéquation des modèles ARCH / GARCH pour la caractérisation d'une séquence de données.

Les modèles AR et ARCH/GARCH sont des modèles des séries temporelles à temps discret et à dépendance respectivement linéaire (autocorrélation entre les valeurs de $r(t)$) et non-linéaire (autocorrélation entre les valeurs de $r^2(t)$). Ainsi le test d'autocorrélation appliqué sur la série des valeurs $\{r(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ et la série des valeurs de $\{r^2(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ présentent des bonnes indicateurs sur l'adéquation des modèles avec mémoire (AR et ARCH/GARCH) à nos séries des données. Les facteurs d'autocorrélation partielle pour la série $\{r(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ correspondant aux différents indices sont donnés dans la Figure 2.17. Nous remarquons que les facteurs d'autocorrélation ne sont pas significatifs pour ces séries. Ce qui élimine les modèles à dépendance linéaire (modèle AR et ces dérivés) de la liste des modèles susceptibles de bien représenter la dynamique de nos indices.

Le modèle ARCH/GARCH considère une dépendance linéaire entre les carrés des valeurs de $r(t)$. Les facteurs d'autocorrélation partielle pour la série $\{r^2(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ sont donnés dans la Figure 2.18 pour les différents indices. Des facteurs d'autocorrélation significatifs sont observés pour des décalages allant jusqu'à 10 jours pour certains indices. Ceci implique que le modèle ARCH/GARCH peut être un bon candidat pour la représentation de nos données.

Test de bicorrelation de Hinich Certains auteurs proposent que malgré la dépendance linéaire entre les valeurs des rendements au carré, le modèle ARCH/GARCH n'est pas toujours adapté pour la représentation des données financières [Bonilla et al. \(2006\)](#); [Bonilla and Sepulveda \(2011\)](#); [Liew et al. \(2003\)](#). Afin de déterminer si le modèle ARCH/GARCH est effectivement efficace pour caractériser le comportement de nos indices, nous appliquons dans cette étape un deuxième test de bicorrelation appelé le test de Hinich. Ce test, introduit par [Hinich \(1996\)](#); [Hinich and Patterson \(1996\)](#), a été conçu pour détecter les épisodes de dépendances dans une série de données. Il a été utilisé comme une technique alternative pour vérifier la pertinence d'un modèle GARCH pour la description des séries financières. En utilisant ce test, [Bonilla and Sepulveda \(2011\)](#); [Lim \(2005\)](#); [Lim et al. \(2003\)](#) contestent la validité de l'emploi du modèle ARCH/GARCH dans la modélisation des prix des stocks asiatiques et américains. Les rendements des stocks étudiés par ces auteurs partagent les différentes caractéristiques observées sur nos données, ayant notamment une distribution asymétrique et leptokurtique et une variance non constante.

Le test de Hinich consiste à calculer les statistiques de corrélation et de bicorrelation pour un échantillon donné dans le but de détecter la dépendance linéaire et non linéaire de la série. Ces statistiques, notées respectivement $Cstat$ et $Hstat$, sont ultérieurement présentées dans cette section par les équations (2.16) et (2.17). Considérant une séquence $\{x_t\}$ avec t un entier désignant le paramètre du temps, le test de Hinich peut être appliqué sur l'ensemble des données, ou sur les données découpées en fenêtres disjointes. Les statistiques sont alors calculées d'une façon itérative sur des fenêtres successives, de même taille et sans chevauchement. Si n est la longueur de chaque fenêtre et $t_{k+1} = t_k + n$, la k -ième fenêtre est donc formée par l'ensemble $\{x_{t_k}, x_{t_k+1}, \dots, x_{t_k+n-1}\}$. La fenêtre suivante ($k + 1$ -ième) sera formée de l'ensemble $\{x_{t_{k+1}}, x_{t_{k+1}+1}, \dots, x_{t_{k+1}+n-1}\}$. L'hypothèse nulle H_0 pour une fenêtre est que l'ensemble des données observées dans cette fenêtre sont des réalisations d'un processus de bruit pur, stationnaire et de covariance égale zéro. L'hypothèse alternative H_1 est que le processus dans la fenêtre est un processus aléatoire avec des facteurs de corrélation $C_{xx}(v)$ ou de bicorrelation $C_{xxx}(v, s)$ (voir les équations

2.6. Tests d'autocorrélation et de Hinich

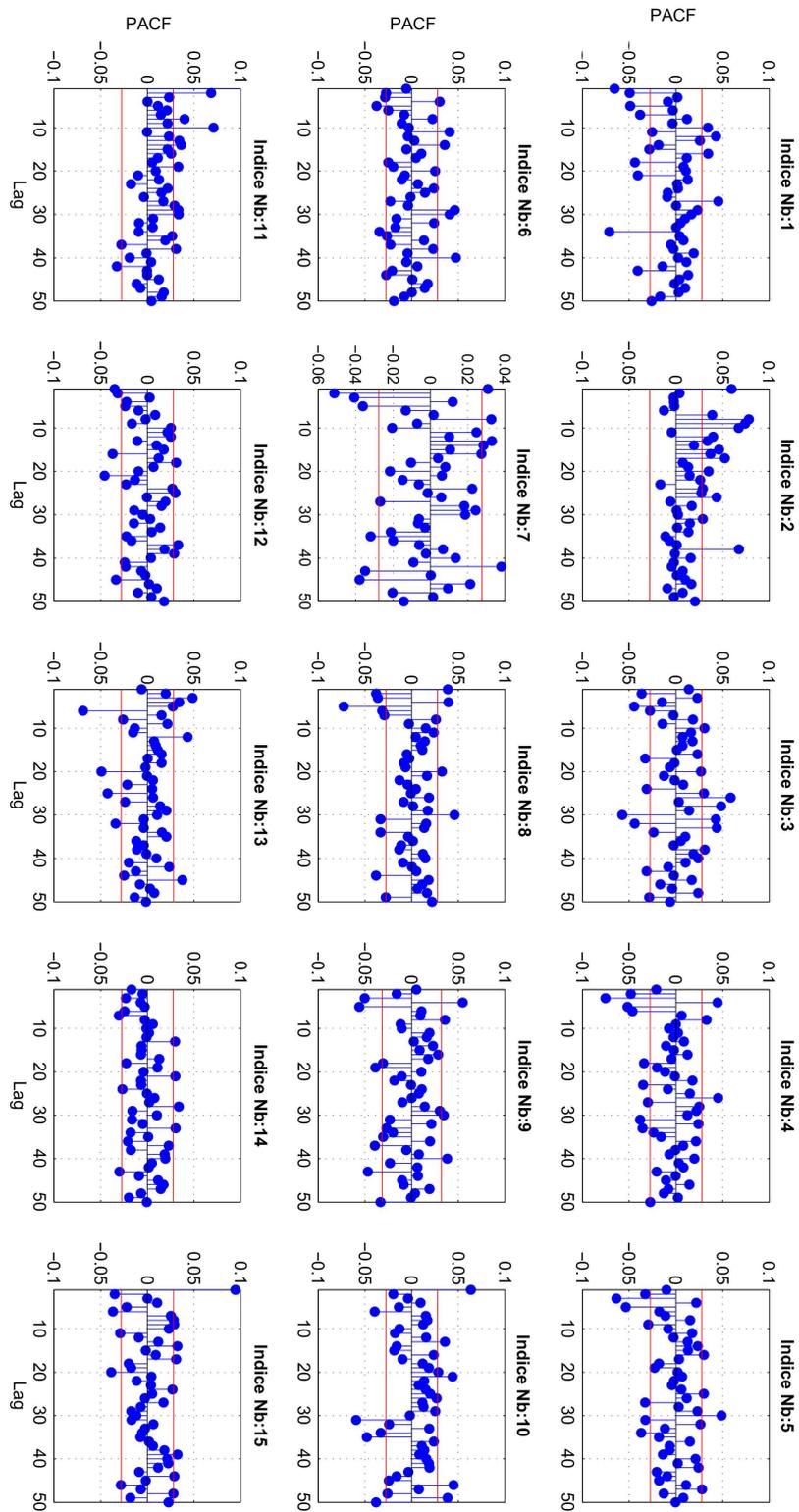


FIGURE 2.17 – Autocorrélation partielle des différents séries de rendements $r(t)$.

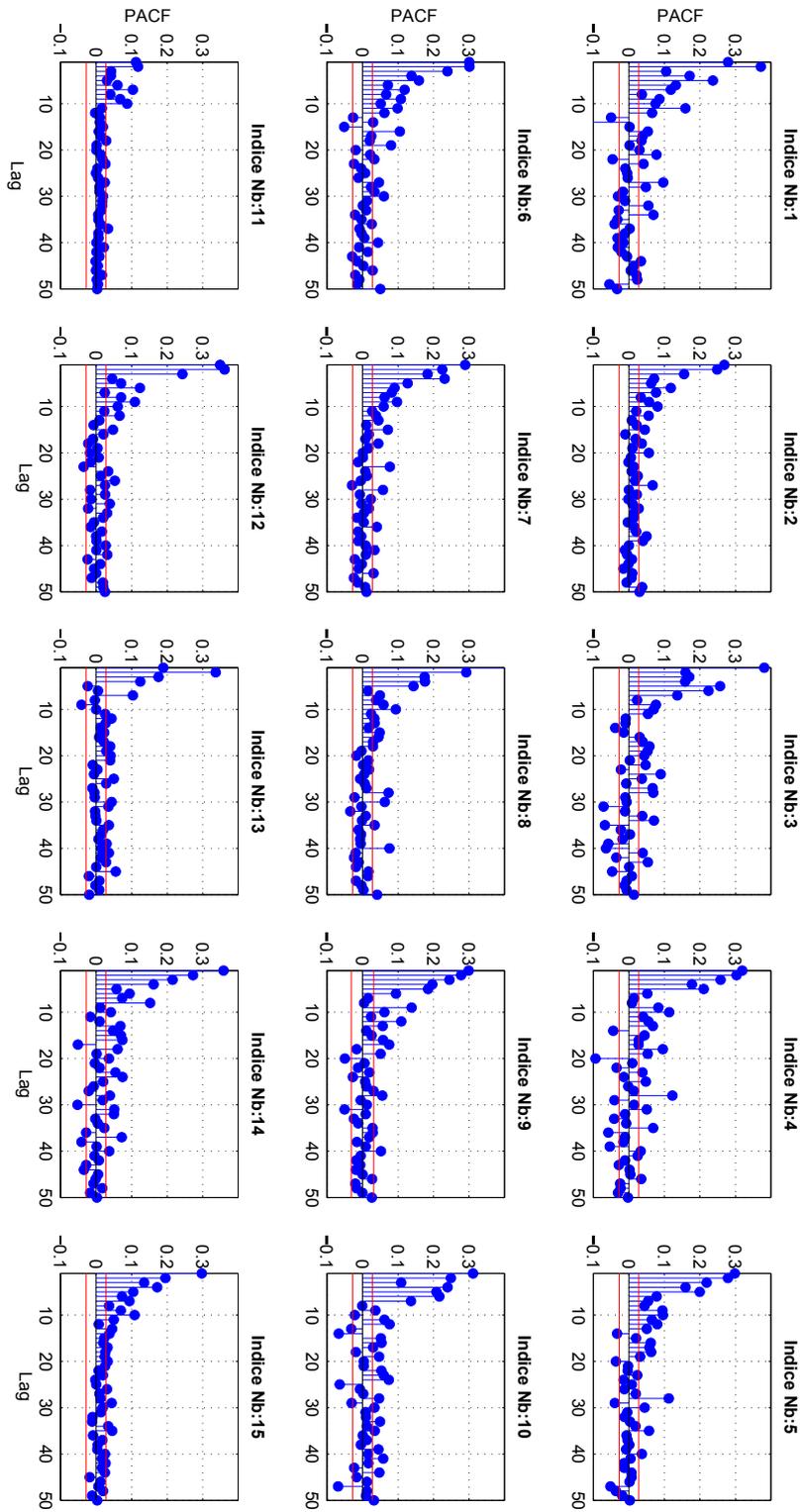


FIGURE 2.18 – Autocorrélation partielle des séries de rendements au carrés $r^2(t)$.

2.6. Tests d'autocorrélation et de Hinich

(2.18) et (2.19)) non nuls sur l'ensemble $0 < v < s < L$, où L est le nombre de décalages (lags). Dans le test de Hinich, le choix de L n'est pas aléatoire ou laissé à l'utilisateur. Ce nombre dépend du nombre des observations dans la fenêtre suivant la relation $L = n^b$ avec $0 < b < 0.5$. On note que [Hinich and Patterson \(1996\)](#) recommandent que b soit égal à 0.4 pour augmenter la puissance du test.

La méthode suivant laquelle un test de Hinich peut être utilisé pour déterminer si une série des données est susceptible d'être une réalisation d'un modèle ARCH/GARCH est donnée par [Lim \(2005\)](#) et [Wild et al. \(2010\)](#). Tout d'abord, le test nécessite une normalisation et une transformation binaire des données échantillonnées. L'axe de temps est divisé en plusieurs fenêtres disjointes et de taille n chacune. Pour chaque fenêtre k , les transformations de données commencent par une normalisation des rendements $r(t)$:

$$R(t) = \frac{r(t) - m_{r,k}}{\sigma_{r,k}}, \text{ pour } t = t_k + 1, t_k + 2, \dots, t_k + n - 1 \quad (2.14)$$

où $m_{r,k}$ et $\sigma_{r,k}$ sont respectivement la moyenne et l'écart type de l'échantillon sur la k -ième fenêtre. Ensuite, l'ensemble des données normalisées $\{R(t)\}_{t_k \leq t < t_k + n}$ doit être transformé en un ensemble de données binaires comme suit :

$$I(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } R(t) > 0 \\ -1 & \text{si } R(t) < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

pour $t = t_k + 1, t_k + 2, \dots, t_k + n - 1$. Cette transformation en données binaires permet une transformation des réalisations d'un processus GARCH en un processus de bruit pur et stationnaire. Autrement dit, si les valeurs de la variable $R(t)$ sont générés par un processus GARCH avec un terme d'erreur symétriquement distribué par rapport à zéro, les valeurs de $I(t)$ doivent former une séquence de bruit stationnaire de Bernoulli.

Le test Hinich est ensuite effectué en se basant sur le calcul des statistiques suivantes :

$$Cstat = \sum_{v=1}^L [C_{II}(v)]^2 \sim \chi_{(L)}^2 \quad (2.16)$$

$$Hstat = \sum_{s=2}^L \sum_{v=1}^{s-1} G^2(v, s) \sim \chi_{(L-1)(L/2)}^2 \quad (2.17)$$

où sur l'ensemble des $0 < v < s < L$:

$$C_{II}(v) = \mathbb{E}[I(t)I(t+v)], \quad (2.18)$$

$$C_{III}(v, s) = \mathbb{E}[I(t)I(t+v)I(t+s)]. \quad (2.19)$$

$$\text{et } G(v, s) = \sqrt{(n-s)}C_{III}(v, s), \quad (2.20)$$

$$(2.21)$$

Les fonctions $C_{II}(v)$ and $C_{III}(v, s)$ peuvent être approchées par :

$$C_{II}(v) = (n - v)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n-v} I(t_i)I(t_i + v), \quad (2.22)$$

$$C_{III}(v, s) = (n - s)^{-1} \sum_{i=1}^{n-s} I(t_i)I(t_i + v)I(t_i + s) \quad (2.23)$$

Les $Cstat$ et $Hstat$ définis dans les équations (2.16) et (2.17) donnent, respectivement, des indications sur les dépendances linéaires et non-linéaires de la série dans cette fenêtre. Une fenêtre est dite "significative" si au moins une des deux statistiques $Cstat$ et $Hstat$ rejette l'hypothèse H_0 avec un seuil de confiance prédéfini. Dans notre étude nous allons utiliser un seuil de confiance de 98% ($\alpha = 0,02$), c.à.d la probabilité de considérer qu'une fenêtre donnée est significative alors qu'elle ne l'est pas est de 0,02.

Dans ce qui suit nous allons appliquer le test de Hinich en deux étapes :

Premièrement, aucune division des données n'est appliquée. Le test Hinich est alors effectué sur tout l'ensemble des rendements de chaque indice. Le Tableau 2.8 présente les résultats de ce test. Les valeurs des statistiques $Cstat$ et $Hstat$ sont représentées ainsi que les valeurs $pValue$ correspondantes à la probabilité de chacune des statistiques conformément à la loi χ^2 associée. Une corrélation significative dans une série des données est détectée si la valeur $pValue$ est plus grande que le seuil α (égale à 0.02) pour l'une des deux statistiques. Ceci implique que la série des rendements ne peut pas être modélisée par un processus ARCH/GARCH. Le Tableau 2.8 présente une idée générale sur l'insuffisance du modèle ARCH/GARCH dans la représentation de nos données.

Dans l'étape suivante une division des séries de rendements sur des fenêtres disjointes de 35 éléments chacune est effectuée. Le choix de la taille de la fenêtre dans littérature étant entre 25 et 36 (voir Bonilla and Sepulveda (2011); Lim (2005); Lim et al. (2003)). Dans le Tableau 2.9 les résultats du test sur les séries fenêtrées des différents indices sont présentés. Les colonnes deux et trois représentent respectivement le nombre et le pourcentage des fenêtres où l'hypothèse H_0 est rejetée pour le $Cstat$. Les colonnes quatre et cinq montrent respectivement le nombre et le pourcentage des fenêtres significatives suivant $Hstat$. Enfin les colonnes six et sept montrent respectivement le nombre total et le pourcentage des fenêtres significatives pour au moins une des deux statistiques du test.

Les résultats montrent clairement que le pourcentage de fenêtres significatives pour tous les indices testés est supérieur à 2%. Ainsi, les données ne sont pas susceptibles d'être générées par un modèle d'ARCH/GARCH stationnaire. Ce qui est conforme aux précédentes études effectuées sur l'insuffisance de ces modèles pour la représentation des certaines données des marchés asiatiques Lim (2005), d'Amérique latine Bonilla et al. (2006) et des pays européens Hinich and Patterson (1996).

2.6. Tests d'autocorrélation et de Hinich

Indice n°	<i>CStat</i>	<i>pValue</i>	<i>HStat</i>	<i>pValue</i>
1	41,58	$1,59E-02$	429,05	0,0123
2	52,878	$1,57E-03$	430,51	0,0134
3	67,393	$4,00E-05$	378,65	0,0012
4	30,466	$5,07E-02$	438,02	0,0133
5	41,068	$1,75E-02$	471,88	0,0088
6	36,444	$3,24E-02$	450,63	0,013
7	50,264	$3,04E-03$	436,03	0,0132
8	39,547	$2,16E-02$	444,18	0,0134
9	39,219	$1,30E-02$	329,1	0,0105
10	66,725	$4,00E-05$	463,15	0,0102
11	389,379	$0,00E+00$	410,81	0,0089
12	34,063	$3,97E-02$	434,49	0,0135
13	87,69	$0,00E+00$	436,93	0,0132
14	27,749	$5,25E-02$	484,12	0,0055
15	68,82	$2,00E-05$	403,91	0,0086

Tableau 2.8 – Résultats du test de Hinich sur l'ensemble des séquences des rendements sans fenêtrage avec une bonde de confiance de 2%.

Indice n°	n^{bre} fen. Sig. Cstat	% fenêtres Sig. Cstat	n^{bre} fen. Sig. Hstat	% fenêtres Sig. Hstat	n^{bre} fen. Sig. Total	% fenêtres Sig. Total	n^{bre} fen. Total
1	6	4,2%	11	7,69%	17	11,89%	143
2	6	4,26%	3	2,13%	9	6,38%	141
3	2	1,4%	5	3,5%	7	4,9%	143
4	9	6,34%	7	4,93%	14	9,86%	142
5	9	6,29%	8	5,59%	17	11,89%	143
6	9	6,29%	10	6,99%	19	13,29%	143
7	7	4,9%	6	4,2%	13	9,09%	143
8	6	4,23%	9	6,34%	14	9,86%	142
9	1	0,92%	5	4,59%	5	4,59%	109
10	10	7,04%	5	3,52%	13	9,15%	142
11	12	8,39%	7	4,9%	19	13,29%	143
12	6	4,29%	7	5%	13	9,29%	140
13	4	2,88%	7	5,04%	8	5,76%	139
14	5	3,52%	2	1,41%	7	4,93%	142
15	7	5%	5	3,57%	12	8,57%	140

Tableau 2.9 – Résultats du test de Hinich sur l'ensemble des séquences des rendements avec fenêtrage avec une bonde de confiance de 2%.

2.7 Conclusion

Dans cette étude nous disposons de 15 séquences de données financières, constituées principalement des enregistrements des prix de clôtures des indices boursiers provenant de différents pays. Des séries des rendements quotidiens, calculées à partir des valeurs logarithmiques des données, sont extraites pour les 15 indices. L'analyse de ces séries est une tâche importante pour la modélisation des données. Des études statistiques sur les séries des rendements ainsi que sur la volatilité de nos indices ont été présentées. Plusieurs caractéristiques de la distribution des rendements sont identifiées :

1. Pour la plupart des indices, les rendements fluctuent autour d'une moyenne légèrement positive.
2. L'écart-type calculé sur l'ensemble des rendements est beaucoup plus importante que la moyenne.
3. La distribution d'une série de rendements présente des facteurs d'aplatissement et d'asymétrie différents de ceux qui correspondent à une loi normale. Les queues de la distribution empirique sont plus lourdes ce qui indique qu'il y a plus de valeurs extrêmes que celles prévues par la loi normale. L'asymétrie de la distribution montre que les proportions de rendements extrêmes négatifs et positifs ne sont pas égales .
4. Le test de Kolmogorov-Smirnov rejette l'hypothèse des rendements normalement distribués.
5. Une fonction de distribution formée d'un mélange de la fonction normale et Laplace semble être bien adaptée pour la représentation des données.

En plus de ces caractéristiques, les tests d'autocorrélation montrent que les rendements sont peu corrélés entre eux. Ainsi, les séries temporelles à dépendance linéaires ne sont pas valables pour la représentation de nos données. Les valeurs au carré des rendements présentent une autocorrélation plus importante. Pourtant le test de Hinich appliqué sur les séquences des rendements rejette la validité des modèles autorégressifs à hétérosidicité ARCH/GARCH pour la représentation des données.

L'examen de la volatilité historique des indices boursiers montre que le degré de fluctuation de ces derniers n'est pas constant dans le temps. La volatilité change continuellement et elle présente une certaine forme de regroupement. Ce phénomène appelé "*volatilité clustering*" est détecté pour les différents indices. Des variations simultanées de la volatilité des plusieurs indices sont remarquées, ce qui justifie la considération d'une covariable.

Toutes les caractéristiques déduites dans ce chapitre sur l'ensemble des rendements et de la volatilité doivent être prises en compte lors du choix du modèle.

Modélisation du processus

Sommaire

3.1	Pourquoi les modèles de diffusion avec sauts ?	94
3.2	Modèle de diffusion avec sauts à paramètres constants	94
3.2.1	Méthode de calibration	97
3.2.2	Résultats de la calibration	100
3.3	Modèle de diffusion avec sauts à changement de régime	105
3.3.1	Covariable environnementale	106
3.3.2	Modèle JDU à trois régimes d'évolution : 3RS-JDU	108
3.3.3	Tests d'adéquation et d'utilité des modèles RS-JDU	114
3.4	Modèle de diffusion avec sauts à volatilité stochastique : SV-JD	122
3.4.1	Méthodes de Calibration	124
3.4.2	Tests des méthodes de calibration	132
3.4.3	Résultats empiriques	134
3.5	Conclusion	138

Objectif : Ce chapitre est consacré à la modélisation des données présentées dans le chapitre 2. En considérant les principales caractéristiques et propriétés déduites à partir de l'étude des incréments et de la volatilité des données, le modèle de diffusion avec sauts est adopté sous trois versions différentes. Tout d'abord nous testons des modèles de diffusion avec sauts en considérant que les paramètres du modèle sont constants. Une extension de ce modèle est ensuite proposée en considérant les fluctuations de la volatilité. Dans un premier lieu, l'ensemble des paramètres du modèle, y compris notamment le terme de la volatilité, sont considérés variables avec le temps sur un espace d'état discret et fini. Le modèle de diffusion avec sauts est enrichi par un modèle de changement de régime contrôlé par une covariable qui varie suivant une chaîne de Markov à temps discret. Dans la troisième version du modèle, on considère que la volatilité varie de manière continue avec le temps : des modèles à volatilité stochastique avec sauts sont alors calibrés et testés. Dans ce chapitre, les méthodes de calibration de chacun de ces modèles sont présentées et les résultats de la calibration ainsi que les tests d'adéquation et d'utilité des modèles estimés sont discutés.

3.1 Pourquoi les modèles de diffusion avec sauts ?

Le choix des modèles de diffusion avec sauts repose principalement sur les différentes déductions tirées de l'étude statistique effectuée sur nos données et leurs incréments, ainsi que sur l'importance et le vaste domaine d'application de ces modèles déduits de la littérature.

Dans notre cas d'étude, les tests de normalité sur les ensembles des incréments montrent clairement que les modèles simples de Black& Scholes et le mouvement Brownien géométrique ne sont pas suffisants pour la description de la dynamique de nos indicateurs. Les études effectuées sur la distribution des incréments ainsi que sur la volatilité et la discontinuité des trajectoires nous poussent à privilégier les modèles de diffusion avec sauts. Plusieurs critères entrent en jeu pour notre choix de modèle :

1. Le modèle choisi doit être en mesure de capturer les principales propriétés empiriques détectées dans l'historique des données. En particulier, après l'examen des facteurs statistiques considérés (aplatissement, asymétrie, quantiles..) ainsi que des queues de la distribution des incréments, l'introduction d'un processus de saut semble être raisonnable et justifiée ;
2. Le modèle doit être assez simple pour la définition, la calibration et le calcul. Comme le modèle Black-Scholes, les modèles de diffusion avec sauts sont définis par la solution d'une équation différentielle stochastique ;
3. Le modèle doit faciliter une certaine interprétation (économique, physique, psychologique, etc.) et doit donc être utile pour offrir une meilleure compréhension du phénomène étudié et de ses caractéristiques réelles.

Pour toutes ces raisons, des modèles de diffusion avec sauts, à paramètres et volatilité constants ou variables, sont adoptés dans la suite de notre étude.

3.2 Modèle de diffusion avec sauts à paramètres constants

Les modèles de diffusion avec sauts ont été présentés précédemment dans la section 1.4.2. L'équation différentielle stochastique correspondant à la dynamique de ce type de modèles s'écrit sous l'une des deux formes suivantes :

$$dY(t) = Y(t)[\mu_d dt + \sigma_d dW(t) + \xi_J dN(t)] \quad (1.31 \text{ rappel})$$

$$d \ln Y(t) = \mu_{ld} dt + \sigma_d dW(t) + J dN(t) \quad (1.32 \text{ rappel})$$

Rappelons que ces modèles sont principalement construits à partir de deux parties : la partie de diffusion décrite par les deux premiers termes de l'équation ($\mu_{ld} dt$ et $\sigma_d dW(t)$),

3.2. Modèle de diffusion avec sauts à paramètres constants

qui correspondent respectivement à la dérive et à la volatilité du processus ; et la partie discontinue correspondant au processus de sauts et décrite par le processus de Poisson composé $\xi_J dN(t)$ ou $JdN(t)$. Cette partie comprend à son tour la variable aléatoire correspondant à l'amplitude des sauts (ξ_J ou J) et leur fréquence décrite par un processus de Poisson $(N(t))_{t \geq 0}$ ayant une intensité de Poisson λ_J .

Dans la suite, pour respecter le caractère non-négatif de nos données, l'équation (1.32) est adoptée.

Dans cette section nous considérons que tous les paramètres du modèle sont constants, à savoir, la dérive μ_{ld} , la volatilité σ_d , l'intensité de processus de Poisson signalant les arrivées des sauts λ_J ainsi que les paramètres de la loi de probabilité associée à la taille des sauts. Plusieurs lois de probabilité sont proposées pour la modélisation de la variable J . Le choix de cette loi dépend en premier lieu de la nature du phénomène étudié. En se basant d'une part sur les connaissances acquises sur les données collectées à l'aide des tests statistiques sur les incréments, et d'autre part sur les connaissances a priori concernant le phénomène étudié, nous proposons dans cette étape de tester deux lois différentes : les lois double-exponentielle et uniforme.

Loi double-exponentielle Une motivation pour le choix du modèle avec des sauts double-exponentiels provient de la finance comportementale¹ootnoteLa finance comportementale est une branche de la finance qui cherche, de manière empirique (via des questionnaires, des relevés de transactions, des expériences en laboratoire...), à évaluer les comportements individuels et collectifs des financiers.. Des nombreuses études empiriques ont suggéré que les marchés ont tendance à avoir à la fois une réaction excessive et modérée aux diverses nouvelles, bonnes ou mauvaises (voir, par exemple, Barberis et al. (1998); Fama (1998)). Ces réactions excessives ou modérées se traduisent dans la distribution des incréments respectivement par des queues lourdes et un pic élevé Kou (2007). Ces deux caractéristiques ont été détectées lors de l'analyse statistique de nos incréments. Rappelons que parmi les différentes lois testées, les résultats ont montré que la distribution la plus adaptée est une combinaison d'une loi de Gauss et d'une loi de Laplace (voir section 2.4). Considérant la loi de Laplace comme un cas particulier de la loi double-exponentielle, le choix de la distribution double-exponentielle pour la représentation des intensités des sauts peut être justifié.

Dans ce modèle, la variable aléatoire J suit une loi double-exponentielle décrite par la fonction de densité de probabilité (1.46) :

$$\phi_J(q)^{(jde)} = \frac{p_1}{\mu_1} \exp\left[\frac{q}{\mu_1}\right] \mathbb{1}_{q < 0} + \frac{p_2}{\mu_2} \exp\left[\frac{-q}{\mu_2}\right] \mathbb{1}_{q \geq 0} \quad (1.46 \text{ rappel})$$

1. f

pour $p_1, p_2, \mu_1, \mu_2 > 0$ et $p_2 = 1 - p_1$.

Ainsi, l'ensemble des paramètres du modèle de diffusion avec sauts double-exponentiels (JDDE) est formé de 6 éléments : $\{\mu_{ld}, \sigma_d, \lambda_J, \mu_1, \mu_2, p_1\}$.

Supposons que ces paramètres sont constants dans le temps, la calibration du modèle JDDE consiste à estimer, pour chaque série des données, les valeurs des paramètres pour lesquelles le processus calibré présente la meilleure adéquation à cette série. La calibration du modèle JDDE se base tout d'abord sur la fonction de répartition des incréments. La fonction de densité de probabilité correspondant à ce modèle est donnée par l'équation (1.49) :

$$\begin{aligned} \phi_{\Delta \ln Y(t)}^{jdde}(x) = & p_0(\lambda_J \Delta t) \cdot \phi_n(x; \mu_{ld} \Delta t, \sigma_d^2 \Delta t) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(\lambda_J \Delta t)}{k} \\ & \cdot \left[\frac{p_1}{\mu_1} \exp\left(\frac{x - \mu_{ld} \Delta t + 0.5 \sigma_d^2 \Delta t / (k \cdot \mu_1)}{k \mu_1}\right) \cdot \Phi_n(-x; \bar{\mu}_1, \sigma_d^2 \Delta t) \right. \\ & \left. + \frac{p_2}{\mu_2} \exp\left(\frac{-x + \mu_{ld} \Delta t + 0.5 \sigma_d^2 \Delta t / (k \cdot \mu_2)}{k \mu_2}\right) \cdot (1 - \Phi_n(-x, \bar{\mu}_2, \sigma_d^2 \Delta t)) \right] \end{aligned} \quad (1.49 \text{ rappel})$$

pour $x \in \mathbb{R}$. Avec $\bar{\mu}_1 = \sigma_d^2 \Delta t / (k \mu_1) - \mu_{ld} \Delta t$ et $\bar{\mu}_2 = -\sigma_d^2 \Delta t / (k \mu_2) - \mu_{ld} \Delta t$.

A partir de la fonction de densité de probabilité théorique des incréments de ce modèle, la méthode de calibration de ce dernier sera présentée ultérieurement dans la section 3.2.1.

Loi uniforme Le choix de la loi uniforme pour la description de la distribution des intensités de sauts se base principalement sur l'étude comparative effectuée par [Hanson and Zhu \(2004\)](#) en 2004. La plupart des études effectuées jusqu'à cette date considéraient la loi normale ou la loi double exponentielle pour modéliser la variable J . Dans leur étude, [Hanson and Zhu \(2004\)](#) comparent la performance des modèles de diffusion avec sauts en considérant que l'intensité des sauts peut suivre, en plus de ces deux lois, une loi uniforme. Les résultats de cette comparaison confirment que les modèles à sauts uniformes présentent une meilleure adéquation aux séries des données financières testées selon les caractéristiques suivantes : la propriété des queues lourdes, l'aplatissement et l'asymétrie. Considérant ce résultat, nous proposons d'utiliser la loi uniforme suivante :

$$\phi_J^{ujd}(q) = U(q, Q_a, Q_b)$$

pour $Q_a < 0 < Q_b$.

Les paramètres $\{\mu_{ld}, \sigma_d, \lambda_J, Q_a, Q_b\}$ sont ainsi associés au modèle de diffusion avec sauts uniformes (JDU). Supposons, comme pour le modèle JDDE, que ces paramètres sont constants dans le temps, la calibration du modèle JDU se base initialement sur la

3.2. Modèle de diffusion avec sauts à paramètres constants

répartition des valeurs des incréments. La fonction de densité de probabilité correspondant au modèle JDU est donnée par l'équation (1.41) :

$$\begin{aligned} \phi_{\Delta \ln Y(t)}^{jdu}(x) = & p_0(\lambda_J \Delta t) \phi_n(x; \mu_{ld} \Delta t, \sigma_d^2 \Delta t) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\lambda_J \Delta t) \cdot \frac{\Phi_n(x - kQ_b, x - kQ_a; \mu_{ld} \Delta t, \sigma_d^2 \Delta t)}{k(Q_b - Q_a)} \end{aligned} \quad (1.41 \text{ rappel})$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

3.2.1 Méthode de calibration

La densité de probabilité théorique des incréments des processus de diffusion avec saut joue un rôle majeur dans la calibration de ces derniers. Les méthodes de calibration proposées dans la littérature consistent essentiellement à trouver les paramètres du modèle qui permettent une meilleure adéquation de la distribution théorique des incréments à la distribution empirique calculée à partir des données collectées avec une période d'échantillonnage Δt fixe.

Pour ce problème, on trouve principalement dans la littérature deux types de méthode de calibration : la méthode de maximum de vraisemblance multinomiale et la méthode des moindres carrés pondérés.

3.2.1.1 Maximum de vraisemblance multinomiale MML

Hanson and Zhu (2004) et Hanson et al. (2004) proposent l'utilisation de la méthode de maximisation de la vraisemblance multinomiale pour résoudre le problème de calibration des modèles de diffusion avec sauts. Cette méthode peut être appliquée lorsqu'une approximation de la distribution théorique des incréments peut être écrite sous une forme analytique ϕ^{th} .

Divisons le domaine de réalisation des incréments en N^{bin} intervalles centrés. Le b -ième intervalle, noté B_b , correspond dans ce cas à $[\zeta_b - 0.5\Delta\zeta, \zeta_b + 0.5\Delta\zeta)$ pour $b = 1, \dots, N^{bin}$, $\Delta\zeta$ est une taille fixe pour tous les intervalles et ζ_b le centre de l'intervalle B_b .

Soit N^{sp} la taille de l'échantillon des incréments obtenus à partir de l'ensemble des données réelles. Nous définissons pour chaque intervalle B_b :

- f_b^{sp} : la fréquence empirique des incréments réels appartenant à l'intervalle B_b .
- f_b^{th} : la fréquence théorique calculée pour l'intervalle B_b comme suit :

$$f_b^{th} = N^{sp} \int_{B_b} \phi^{th}(x) dx \quad (3.1)$$

où $\phi^{th}(x)$ est la distribution théorique correspondant aux incréments du modèle choisi.

- $f_b^{sim} = \sum_{s=1}^{N^{sp}} \mathbb{1}_{\Delta(\ln S^{sim}) \in B_b}$: la fréquence des incréments simulés pour l'intervalle B_b , où $\mathbb{1}$ est la fonction indicatrice et $\Delta(\ln S^{sim})$ une série des incréments simulée à partir du modèle théorique.

Le calcul et la fonction d'optimisation présentés dans la suite sont applicables pour tout modèle ayant une fonction de distribution connue ϕ^{th} , leur utilisation n'est donc pas limitée à la calibration des modèles de diffusion avec sauts. Notons que pour ce dernier la fréquence théorique f_b^{th} est équivalente à la fréquence $f_b^{jd}(\omega)$ calculée à partir de la distribution ϕ^{jd} (ϕ^{jdn} (1.35), ϕ^{jdu} (1.41) ou ϕ^{jde} (1.49)) où ω est le vecteur des paramètres du modèle.

Considérant l'hypothèse que les données collectées présentent une réalisation du modèle théorique choisi, la représentation $f_b^{sim} = f_b^{sp}$ est assumée en théorie, mais n'est qu'une approximation en pratique.

Considérons, pour ω un vecteur des paramètres fixés, une trajectoire simulée aboutissant à N^{sp} valeurs des incréments $\Delta(\ln S^{sim})$. Les fréquences des incréments simulés f^{sim} , sur les différents intervalles B_b , peuvent être considérées comme des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La distribution de ces variables est multinomiale et elle peut être exprimée en fonction de la fréquence théorique du modèle f^{th} comme suit [Hanson et al. \(2004\)](#) :

$$\varpi^{sp}(\bar{k}) = \mathbb{P}[\bar{f}^{sim} = \bar{k}] = N^{sp} \cdot \prod_{b=1}^{N^{bin}} \frac{(f_b^{th}/N^{sp})^{k_b}}{k_b!} \quad (3.2)$$

avec :

- $\bar{k} = \{k_b\}_{b=1:N^{bin}}$ et $\sum_{b=1}^{N^{bin}} k_b = N^{sp}$,
- $\bar{f} = \{f_b\}_{b=1:N^{bin}}$ et $\sum_{b=1}^{N^{bin}} f_b = N^{sp}$.

. Et nous avons :

$$\mu_{f_b}^{sim} = \mathbb{E}[f_b^{sim}] = f_b^{th} \quad (3.3)$$

$$(\sigma_{f_b}^{sim})^2 = Var[f_b^{sim}] = f_b^{th} \cdot (1 - f_b^{th}/N^{sp}) \quad (3.4)$$

Estimateur de l'ensemble des paramètres Sachant que $\bar{\Phi}^{th}(\bar{k}) = \bar{\Phi}^{jd}(\bar{k})$ et $f_b^{th} = f_b^{jd}(\omega)$, la fonction de log-vraisemblance multinomiale peut être écrite sous la forme suivante [Hanson et al. \(2004\)](#) :

$$\ln(\varpi^{sp}(\bar{k})) = \sum_{b=1}^{N^{bin}} \left[k_b \ln(f_b^{jd}(\omega)) - \ln(k_b!) - k_b \ln(N^{sp}) \right] + \ln(N^{sp}), \quad (3.5)$$

où $k_b = f_b^{sp}$ sont calculés à partir des données collectées de taille N^{sp} fixe, et sous la contrainte : $\sum_{b=1}^{N^{bin}} f_b^{jd} = N^{sp} = \sum_{b=1}^{N^{bin}} k_b$.

3.2. Modèle de diffusion avec sauts à paramètres constants

En négligeant les termes constants de la fonction (3.5), et en inversant le signe du terme restant, le problème d'optimisation peut être donc transformé en un problème de minimisation de la fonction objectif suivante par rapport à l'ensemble des paramètres ω :

$$\Upsilon^{MML}(\omega) = - \sum_{b=1}^{N^{bin}} \left[f_b^{sp} \ln(f_b^{jd}(\omega)) \right] \quad (3.6)$$

3.2.1.2 Moindres carrés pondérés MCP

Dans [Hanson and Westman \(2002a,b\)](#), les auteurs utilisent une fonction de moindres carrés non pondérés (MC) pour la calibration des modèles de diffusion avec sauts gaussiens ou uniformes. La fonction de moindres carrés consiste à minimiser l'écart entre les fréquences empiriques f_b^{sp} observées à partir de l'ensemble des données réels de taille N^{sp} et celles déduites à partir du modèle théorique (f_b^{th}) pour le même nombre de réalisations (N^{sp}). Les auteurs déduisent une domination de l'effet des valeurs extrêmes négatives sur les résultats de la calibration. Pour résoudre ce problème, les auteurs dans [Hanson \(2002\)](#) proposent l'utilisation de la fonction des moindres carrés pondérés ($\chi^2 fit$) :

$$\Upsilon^{MCP}(\omega) = \chi^2(\omega) = \sum_{b=1}^{N^{bin}} w_b \cdot \left(f_b^{sp} - f_b^{th}(\omega) \right)^2 \quad (3.7)$$

où w_b est le coefficient de pondération du b -ème intervalle. Pour une estimation à moindre carré non pondérée, $w_b = 1$ pour tout $b = 1, \dots, N^{bin}$. Une estimation des coefficients de pondération pour l'estimation par MCP n'est pas facile à obtenir. Les auteurs proposent d'utiliser les résultats théoriques sur l'espérance et la variance de f_b^{sim} (3.3) et (3.4). Les coefficients de pondération proposés correspondent aux quantités théoriques suivantes :

$$w_b = \frac{\left(1/(\sigma_{f_b}^{sim})^2 \right)}{\left(\sum_{b=1}^{N^{bin}} 1/(\sigma_{f_b}^{sim})^2 \right)}, \quad (3.8)$$

pour $b = 1, \dots, N^{bin}$.

3.2.1.3 Paramètres et contraintes

Le vecteur des paramètres ω varie avec le modèle choisi. Pour le modèle de diffusion avec sauts double-exponentiel $\omega = (\mu_{ld}, \sigma_d, \lambda_J, \mu_1, \mu_2, p_1)$ est donc formé de 6 éléments. Pour le modèle de diffusion avec sauts uniforme $\omega = (\mu_{ld}, \sigma_d, \lambda_J, Q_a, Q_b)$ est donc formé de 5 éléments.

Afin de minimiser le nombre des paramètres à estimer lors de l'optimisation et de déduire la complexité et le temps de calculs, plusieurs contraintes peuvent être imposées.

Rappelons que les deux premiers moments théoriques calculés pour les incréments des modèles de diffusion avec sauts s'écrivent sous les formes (1.36) et (1.37) en fonction des paramètres du modèle :

$$M_1^{jd} = \mathbb{E}[\Delta \ln Y(t)] = [\mu_{ld} + \lambda_J \mu_J] \Delta \quad (1.36 \text{ rappel})$$

$$M_2^{jd} = \text{Var}[\Delta \ln Y(t)] = [\sigma_d^2 + \lambda_J(\sigma_J^2 + \mu_J^2)] \Delta t \quad (1.37 \text{ rappel})$$

Deux contraintes, associées respectivement à la moyenne et à la variance des incréments, peuvent ainsi être imposées dans le but de minimiser le nombre de paramètres à estimer. Ces contraintes sont construites d'une façon à garantir que les deux premiers moments théoriques (M_1^{jd} et M_2^{jd}) soient égaux à ceux calculés sur l'ensemble des incréments observés (M_1^{sp} et M_2^{sp}). Cela implique :

$$M_1^{jd} = M_1^{sp} \Rightarrow \mu_{ld} = (M_1^{sp} - \mu_J \lambda_J) / \Delta t \quad (3.9)$$

$$M_2^{jd} = M_2^{sp} \Rightarrow \sigma_d^2 = (M_2^{sp} - \lambda_J \Delta t (\sigma_J^2 + \mu_J^2)) / \Delta t \quad (3.10)$$

Considérant ces deux relations, seuls les paramètres de sauts doivent être estimés. Une fois ces paramètres sont connus, les deux paramètres de diffusion μ_{ld} et σ_d peuvent être directement déduits à partir de $\{\lambda_J, \mu_J, \sigma_J^2\}$ et des deux premiers moments empiriques M_1^{sp} et M_2^{sp} . Ainsi le nombre des paramètres à estimer est réduit à 4 pour un modèle avec sauts double-exponentiels (soit $\{\lambda_J, \mu_1, \mu_2, p_1\}$), et à 3 pour un modèle avec sauts uniformes (soit $\{\lambda_J, Q_a, Q_b\}$).

3.2.2 Résultats de la calibration

Dans cette section nous appliquons les différentes méthodes de calibration présentées ci-dessus sur nos ensembles des données. Nous étudions ensuite l'adéquation du modèle proposés pour la représentation de nos indicateurs.

Contraintes et domaines d'appartenance Dans la suite, et quelle que soit la méthode de calibration du modèle; MC, MCP ou MLL; les deux contraintes (3.9) et (3.10) sont adoptées. Ces deux contraintes réduisent le nombre de paramètres à estimer et par la suite la complexité et le temps de compilation de l'algorithme d'optimisation. Ces contraintes garantissent également que la moyenne et la variance des incréments du modèle théorique soient égales à celles calculées sur les incréments des données en considération. Sachant que suite à ces contraintes la valeur de σ_d^2 doit être calculée à partir de la relation (3.10). Le terme gauche de cette relation doit donc être soumis à une contrainte de signe (positivité) qui doit être prise en compte lors de l'estimation.

3.2. Modèle de diffusion avec sauts à paramètres constants

Pour procéder à l'optimisation une définition des domaines de variation des différents paramètres est nécessaire :

- Sachant que le nombre des chocs subits pendant un an, pour un indicateur donné, n'excède pas le nombre des jours de transactions, soit 252 jours par an, la valeur maximale du paramètre λ_J correspondant à l'intensité des sauts par unité de temps (un an dans notre cas) est donc fixée à 252.
- Pour un modèle de diffusion avec sauts uniformes, supposons qu'un indicateur peut subir un gain quotidien maximal de 100% de sa valeur actuelle ou une perte quotidienne maximale de 50% de valeur actuelle, les intervalles de Q_a et Q_b sont donc fixés à $[-0.6931, 0]$ et $[0, 0.6931]$ respectivement. Ce qui correspond à un saut négatif maximal de $J_{pm} = -0.6931$ ou $\xi_{pm} = -0.5$, et un saut positif maximal de $J_{gm} = 0.6931$ ou $\xi_{gm} = 1$, voir équations (1.31) et (1.31).
- Pour un modèle de diffusion avec sauts double exponentiels on a $0 \leq p_1 \leq 1$ par définition. Les domaines de définitions des deux paramètres positifs μ_1 et μ_2 sont plus difficiles à fixer. Toutefois, la condition $\mu_2 < 1$ est nécessaire pour assurer que $\mathbb{E}[J] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y(t)] < \infty$ Kou (2007). Cela signifie essentiellement qu'un saut positif moyen ne peut pas dépasser 100% de la valeur de l'indicateur, ce qui est tout à fait raisonnable, vue l'historique des observations.

Afin de pouvoir tenir compte des différentes contraintes sur les domaines d'appartenance des paramètres, les deux contraintes de moments et la contraintes de positivité du terme gauche de l'équation (3.10), une version modifiée de la fonction "fminsearch" du MATLAB est utilisée pour l'optimisation, appelée "fminsearchcon²".

Cette fonction a été modifiée pour correspondre à nos trois fonctions d'optimisation. Elle implémente l'algorithme de Nelder-Mead classique pour l'optimisation, en considérant les domaines d'appartenance prédéfinis pour les différents paramètres et en imposant une fonction de pénalisation pour les ensembles des paramètres ne vérifiant pas les contraintes linéaires et non-linéaires imposées.

Quelle méthode de calibration choisir ? Après la définition des contraintes convenables et des domaines d'appartenance des différents paramètres, les trois méthodes de calibration, MC, MCP et MML, sont testées en utilisant la méthode d'optimisation de Nelder-Mead. Le choix de la méthode d'estimation la plus convenable pour nos données et nos modèles est basé principalement sur deux critères : (1) la convergence de l'algorithme d'optimisation pour différents jeux de paramètres initiaux, (2) l'adéquation de la

2. *fminsearchcon* : Copyright (c) 2006, John D'Errico. Disponible en version originale sur : <http://mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8277-fminsearchbnd-fminsearchcon>

densité de probabilité théorique du modèle calibré, à celle empirique déduite à partir de la série des incréments considérée. Le but de cette étape se limite au choix de la fonction d'optimisation convenable pour nos modèles et nos données et ne s'étend pas à une étude de convergence des méthodes de calibration.

Modèle avec sauts double-exponentiels Pour tester les méthodes d'estimation ainsi que l'adéquation des modèles de diffusions avec sauts, nous procédons à une calibration du modèle de diffusion avec sauts double exponentiels suivant les trois méthodes MC, MCP et MML.

Les résultats de la calibration du modèle, pour l'indicateur numéro 6, partant de 5 différents jeux de paramètres initiaux et suivant les différentes méthodes de calibration, sont donnés dans le Tableau 3.1. Le Tableau 3.2 présente la valeur de la fonction d'optimisation pour chaque méthode de calibration et chaque jeu des paramètres initiaux ainsi que l'erreur quadratique moyenne (*MSE*) et la distance de Kolmogorov (*Dkstat*) calculées entre la distribution empirique et la distribution théorique des incréments.

Dans l'Annexe A, nous présentons, de la même façon, les résultats de calibration du modèle JDDE pour les indices numéro 3 et 14 (voir les Tableaux ??, ??, ?? et ??).

Méthode de Calibration	Jeu de Paramètres	Jeu des Paramètres Initiaux				Paramètres Estimés			
		λ_J	μ_1	μ_2	p_1	λ_J^*	μ_1^*	μ_2^*	p_1^*
MC	1	120	0,0032	0,0016	0,5	189,09	0,0104	0,0101	0,5992
	2	60	0,0064	0,0096	0,35	189,01	0,0095	0,0101	0,5991
	3	80	0,0127	0,0127	0,8	189,09	0,0104	0,0101	0,5992
	4	200	0,0086	0,0076	0,65	189,09	0,0104	0,0101	0,5992
	5	35	0,0102	0,015	0,7	189,09	0,0104	0,0101	0,5992
MCP	1	120	0,0032	0,0016	0,5	125	0,0003	0,0214	0,5202
	2	60	0,0064	0,0096	0,35	177,26	0,0122	0,0079	0,4447
	3	80	0,0127	0,0127	0,8	111,45	0,0003	0,0351	0,8034
	4	200	0,0086	0,0076	0,65	204,38	0,0004	0,0244	0,7686
	5	35	0,0102	0,015	0,7	74,65	0,0003	0,0331	0,6753
MML	1	120	0,0032	0,0016	0,5	0	0,0196	0,0033	0,097
	2	60	0,0064	0,0096	0,35	0	0,0008	0,0293	0,9698
	3	80	0,0127	0,0127	0,8	0	0,0008	0,0293	0,9698
	4	200	0,0086	0,0076	0,65	0	0,0008	0,0292	0,9698
	5	35	0,0102	0,015	0,7	0	0,0008	0,0293	0,9698

Tableau 3.1 – Paramètres estimés pour le modèle JDDE correspondant à l'indicateur numéro 6.

3.2. Modèle de diffusion avec sauts à paramètres constants

Les résultats obtenus montrent que l'algorithme d'optimisation présente légèrement une meilleure convergence lorsque la fonction de moindre carré non pondérés (MC) est utilisée comme fonction d'optimisation. Les résultats des tests de Kolmogorov (Dkstat) ainsi que l'erreur quadratique moyenne (MSE) calculée entre les fréquences théoriques des incréments du modèle calibré (F^{th}) et celle empiriquement calculée à partir des données observées (F^{sp}) montrent que la calibration par la fonction MML n'est pas adaptée au modèle choisi. Le modèle calibré par la fonction MML présente des valeurs de MSE et Dkstat égales à 528.5 et 0.068 respectivement par rapport à 3.4 et 0.028 pour la fonction MC. Ces résultats suggèrent que l'optimisation par la fonction MC non pondérée présente la meilleure performance pour notre problème de calibration.

Méthode de Calibration	Jeu de Paramètres	Fonction objectif : Υ^{MC} , Υ^{MCP} ou Υ^{MML}	MSE distributions	Dkstat
MC	1	17739	3,4239	0,029
	2	17737	3,4239	0,0282
	3	17739	3,4239	0,0281
	4	17739	3,4239	0,0286
	5	17739	3,4239	0,0288
MCP	1	∞^3	1209,4715	0,3073
	2	2	5,3227	0,0318
	3	∞^3	1576,143	0,3031
	4	1	1091,3274	0,4046
	5	∞^3	1593,5971	0,2773
MML	1	-34927	498,7908	0,0686
	2	-34924	528,4695	0,0691
	3	-34924	528,4702	0,0688
	4	-34924	528,4731	0,0678
	5	-34924	528,4682	0,0682

Tableau 3.2 – Résultats de calibration du modèle JDDE pour l'indicateur numéro 6.

Modèle avec sauts uniformes Pour le modèle de diffusion avec sauts uniformes les mêmes méthodes de calibration sont utilisées. Les résultats de la calibration du modèle JDU pour l'indice numéro 6 sont présentés dans le Tableau 3.3. Le Tableau 3.4 présente la valeur de la fonction d'optimisation pour chaque méthode de calibration et chaque jeu de paramètres initiaux ainsi que l'erreur quadratique moyenne et la distance de Kolmogorov entre la distribution empirique et théorique des incréments. Nous présentons dans

3. Algorithme d'optimisation non convergent.

l'Annexe A les résultats de la calibration du modèle JDU pour les indices numéro 3 et 14 (voir les Tableaux ??, ??, ?? et ??).

Comme dans le cas du modèle JDDE, nous remarquons que la calibration par la fonction MC non pondérée présente une meilleure performance par rapport aux deux autres méthodes. Notamment en termes de convergence, la calibration par la fonction MC présente une bonne stabilité des résultats quel que soit le jeu de paramètres initiaux. L'erreur quadratique moyenne ainsi que la distance de Kolmogorov calculées entre la distribution théorique et la distribution réelle des incréments montrent que la calibration par MC est plus avantageuse par rapport aux deux autres fonctions.

Méthode de Calibration	Jeu de Paramètres	Jeu des Paramètres Initiaux			Paramètres Estimés		
		λ_J	Q_a	Q_b	λ_J^*	Q_a^*	Q_b^*
MC	1	3,54	-0,0976	0,1188	17,17	-0,0644	0,0602
	2	78,69	-0,0239	0,0226	17,16	-0,0644	0,0602
	3	155,87	-0,017	0,0161	17,16	-0,0644	0,0602
	4	7,08	-0,0976	0,1188	17,16	-0,0644	0,0602
	5	157,39	-0,0239	0,0226	17,16	-0,0644	0,0602
MCP	1	3,54	-0,0976	0,1188	6,85	-0,0031	0,1503
	2	78,69	-0,0239	0,0226	17,6	0	0,0918
	3	155,87	-0,017	0,0161	252	-0,0013	0
	4	7,08	-0,0976	0,1188	13,73	-0,0032	0,1089
	5	157,39	-0,0239	0,0226	252	-0,0013	0
MML	1	3,54	-0,0976	0,1188	99	-0,0368	0,0312
	2	78,69	-0,0239	0,0226	98,99	-0,0368	0,0312
	3	155,87	-0,017	0,0161	99	-0,0368	0,0312
	4	7,08	-0,0976	0,1188	98,99	-0,0368	0,0312
	5	157,39	-0,0239	0,0226	99	-0,0368	0,0312

Tableau 3.3 – Paramètres estimés pour le modèle JDU correspondant à l'indice numéro 6.

Comparant les deux modèles JDDE et JDU, nous pouvons déduire que l'adéquation des deux modèles pour la présentation des dynamiques réelles est acceptable. Toutefois, le modèle JDU présente meilleure capacité de reproduction de la distribution des incréments.

3.3. Modèle de diffusion avec sauts à changement de régime

Méthode de Calibration	Jeu de Paramètres	Fonction Objectif, Υ^{MC} , Υ^{MCP} ou Υ^{MML}	MSE distributions	Dkstat
MC	1	16694	3,22	0,03271
	2	16694	3,22	0,03271
	3	16694	3,22	0,03271
	4	16694	3,22	0,03271
	5	16694	3,22	0,03271
MCP	1	∞^3	438,03	0,2535
	2	∞^3	370,48	0,2761
	3	3,7187	96,38	0,0673
	4	∞^3	694,67	0,3300
	5	3,7187	96,38	0,0673
MML	1	-31468	24,61	0,05780
	2	-31468	24,61	0,05780
	3	-31468	24,61	0,05780
	4	-31468	24,61	0,05780
	5	-31468	24,61	0,05780

Tableau 3.4 – Résultats de calibration du modèle JDU pour l'indice numéro 6.

3.3 Modèle de diffusion avec sauts à changement de régime

Des modèles de diffusion avec sauts sont testés dans la section précédente avec des paramètres constants. La calibration de ces modèles est effectuée suivant trois différentes fonctions d'optimisation (MC, MCP et MML). Les résultats de test de Kolmogorov montrent un rapprochement entre la distribution théorique des incréments du modèle calibré par rapport à la distribution empiriques des incréments réels. Toutefois, les résultats de ce test rejettent, pour les deux modèles JDDE et JDU et pour tous les indices étudiées, l'hypothèse nulle H_0 . Ce qui implique que les deux distributions théoriques des incréments, correspondant aux modèles JDDE et JDU, ne présente pas des bonnes approximations de la distribution réelle des incréments. Nous déduisons par la suite que les modèles testés ne sont pas adaptés à la dynamique étudiée. Rappelons qu'un phénomène de *volatilité clustering* a été détecté lors de l'examen des incréments de nos données. Ce phénomène, non représenté dans les modèles de diffusion avec sauts à paramètres constants, peut être une des raisons potentielles pour laquelle ces modèles ne sont pas bien adaptés à la représentation des dynamiques étudiées.

Pour rappeler le phénomène de *volatilité clustering* nous présentons dans la Figure 3.1

3. Algorithme d'optimisation non convergent.

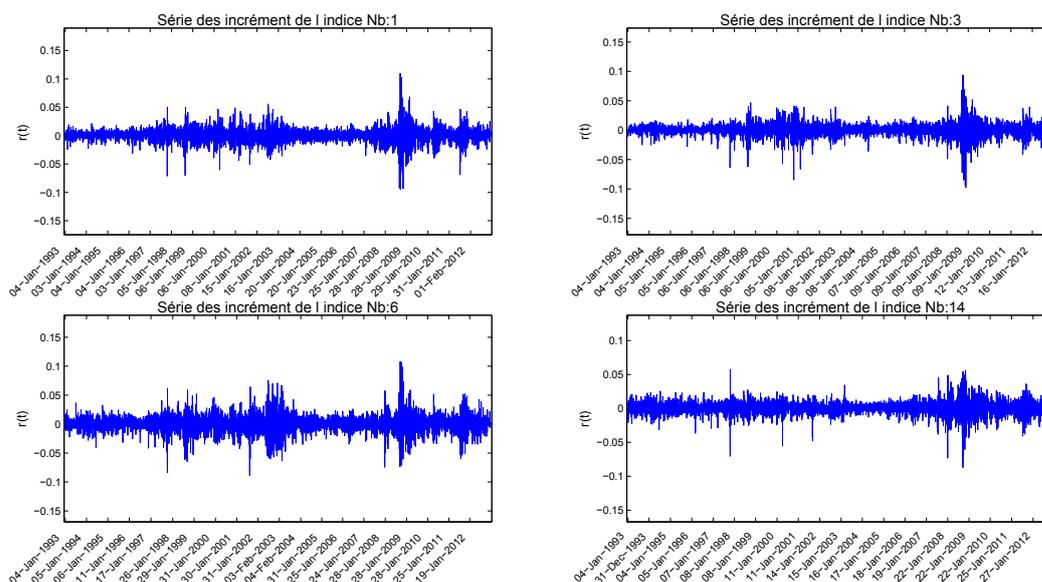


FIGURE 3.1 – Séries des incréments des indicateurs numéros 1, 3, 6 et 14.

les incréments de 4 différents indices. Nous remarquons dans cette figure que la variance des incréments des différents indices présente des changements importants au cours du temps. En plus, une quasi-simultanéité des hausses et des baisses de la volatilité des différents indices peut être remarquée.

Tenant compte notamment du phénomène de *volatilité clustering*, nous proposons dans cette section une amélioration dans la construction de notre modèle de diffusion avec saut. Nous proposons une décomposition discrète des régimes de fonctionnement suivant lesquels la volatilité de l'indicateur, ainsi que les autres paramètres, peuvent évoluer. Ces régimes présentent les différents modes de fonctionnement ou les différents états de l'environnement de fonctionnement pouvant influencer, particulièrement mais pas exclusivement la volatilité de l'évolution étudiée. Compte tenu de la quasi-simultanéité des variations de la volatilité des différents indicateurs (voir Figure 3.1), nous pouvons proposer que le passage entre ces différents régimes de fonctionnement soit contrôlé par un ou plusieurs facteurs exogènes et communs à la plupart des indicateurs. Ces facteurs qui déterminent les différents régimes seront donc présentés par une seule covariable que nous appelons dans la suite la covariable d'environnement " E_S ".

3.3.1 Covariable environnementale

En générale, une covariable est définie comme une quantité qui n'a pas d'intérêt direct en tant que telle mais dont dépend une autre variable d'intérêt. Pour un système donné,

3.3. Modèle de diffusion avec sauts à changement de régime

une covariable peut être définie comme un élément ayant une influence éventuelle sur le comportement de ce système ou de ses paramètres principaux. La prise en compte des covariables dans la modélisation des phénomènes aléatoires de différentes natures a trouvé sa place dans de multiples références de la littérature (voir par exemple [Duffie et al. \(2007\)](#); [Jiang \(2009\)](#); [Lehmann \(2009\)](#); [Newby and Barker \(2006\)](#); [Partington and Kim \(2008\)](#)).

Notamment, la modélisation des phénomènes de dégradation par des processus stochastiques intégrant des covariables semble être bien adaptée pour les systèmes opérant dans un environnement dynamique [Singpurwalla \(1995\)](#). Ces covariables, modélisant par exemple une charge opérationnelle variable, la température ou le taux d'humidité, peuvent affecter les différents paramètres de dégradation ainsi que le taux de défaillance du système. Dans [Deloux et al. \(2009\)](#); [Ponchet et al. \(2008, 2009\)](#), les auteurs considèrent qu'une évolution soudaine de la dégradation peut être entraînée par une évolution brusque de facteurs environnementaux .

Dans notre étude, les indicateurs provenant de différents pays semblent subir le même type de variation de comportement suite à des changements dans le régime d'évolution. Les causes de ces changements peuvent être liées à des événements politiques, économiques ou des conditions de sécurité mondiales. Ces événements, non contrôlables, affectent d'une manière globale mais différée, les comportements et les caractéristiques des marchés dans les différents pays. Nous proposons dans la suite une modélisation de tous les facteurs exogènes affectant ces marchés par une seule covariable environnementale appelée " E_s ". Nous considérons également que cette covariable suit des variations en temps discret sur un espace d'état discret et fini. Le modèle d'évolution correspondant à la variable " E_S " peut être donc adapté à une chaîne de Markov à temps discret.

Nous divisons dans un premier lieu les états de " E_s " en trois états désignant respectivement un environnement calme, normal, et agité. Une classification des données d'entrée est ensuite effectuée pour séparer les données correspondant à chacun de ces états. Une calibration du modèle d'évolution est ensuite effectuée pour chaque état en considérant uniquement les incréments correspondant à cet état. Le modèle final obtenu provient donc d'une combinaison de la chaîne de Markov, définissant l'état environnemental dans lequel se trouve le système, et des modèles de diffusion avec sauts calibrés et correspondant à l'évolution de l'indicateur dans chacun de ces états.

Conformément aux résultats des modèles de diffusion avec sauts à paramètres constants, nous choisissons le modèle JDU comme bon candidat pour la modélisation de l'évolution des indicateurs dans les différents régimes.

Dans ce qui suit, la chaîne de Markov obtenue à partir de nos données est présentée

et les résultats de la calibration de l'indicateur numéro 6 dans chacun des trois états sont exposés. Des tests sur l'adéquation du modèle obtenu sont ensuite présentés.

Nous procédons ensuite à la calibration d'un modèle JDU et à changement de régime, en considérant cette fois une division de l'état environnemental en six états différents. La chaîne de Markov, les résultats de la calibration, ainsi que ceux des tests d'adéquation du modèle obtenu et une comparaison entre les modèles à trois à six régime sont ensuite discutés.

3.3.2 Modèle JDU à trois régimes d'évolution : 3RS-JDU

Pour effectuer une représentation globale de l'évolution d'état " E_S ", nous calculons la volatilité périodique des différents indicateurs pour une période fixe de 3 mois. Une division de l'axe de temps en des fenêtres disjointes de dates fixes et de taille égale à 63 points chacune (pour 63 jours de travail en 3 mois) est effectuée. Pour chaque indicateur, la volatilité historique périodique $V_P[r(t)]$ est calculée comme étant la racine carré de la variance des incréments sur chacune de ces fenêtres. La volatilité globale $V_G[r(t)]$ est définie comme étant la volatilité historique calculée sur l'échantillon des données complètes (sans division). Appelons $RV_P = V_P[r(t)]/V_G[r(t)]$ la volatilité périodique relative correspondant à une fenêtre donnée, un état " E_S " est attribuée à chaque fenêtre selon la règle suivante :

- Si $RV_P < 1$ la fenêtre est attribuée à un état calme ou $E_S = Z_1$.
- Si $1 \leq RV_P < 2$ la fenêtre est attribuée à un état normale ou $E_S = Z_2$.
- Si $2 \leq RV_P$ la fenêtre est attribuée à un état agité ou $E_S = Z_3$.

Z_1, Z_2 et Z_3 sont les trois états possibles de la covariable E_S .

Nous obtenons ainsi, pour chaque indicateur, une trajectoire d'évolution de la variable E_S sur un espace à trois états différents. La Figure 3.2 présente l'évolution de la volatilité périodique relative RV_P pour tous les indicateurs. Les lignes vertes et rouges dans cette figure représentent respectivement les limites entre les états Z_1 et Z_2 , et entre les états Z_2 et Z_3 .

Chaîne de Markov Considérons uniquement les indicateurs qui présentent des trajectoires de E_S similaires (indicateurs numéros 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12 et 14), les lois de transition et la répartition initiale de la chaîne de Markov correspondant à l'évolution des états de E_S peuvent être estimées. La chaîne de Markov modélisant la covariable E_S à trois états est présentée dans le graphique suivant :

3.3. Modèle de diffusion avec sauts à changement de régime

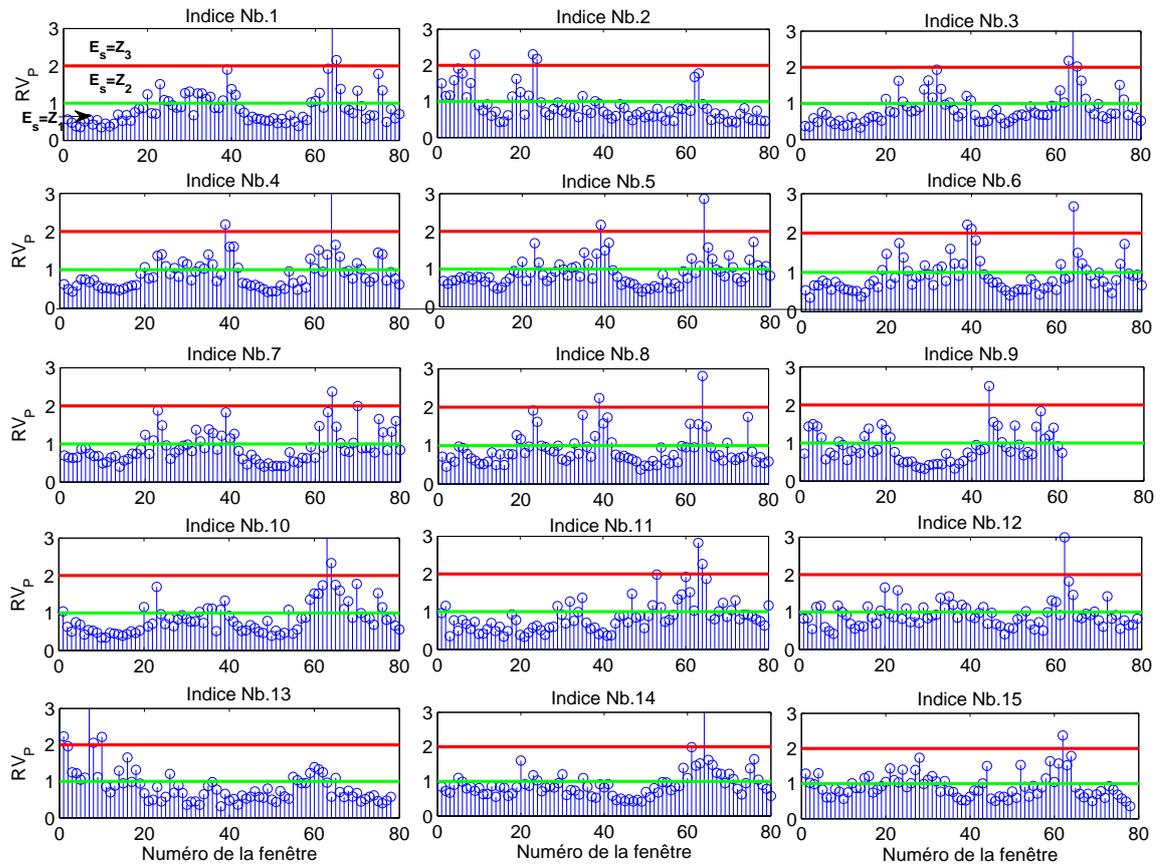
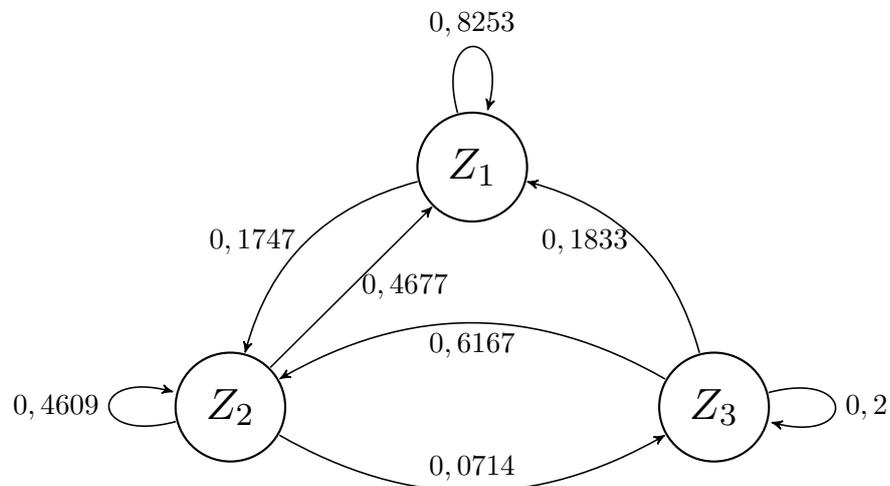


FIGURE 3.2 – Évolution de la volatilité périodique relative pour les différents indicateurs sur des fenêtres de 63 jours.



La probabilité de transition d'un état Z_i à un état Z_j peut être estimée à partir de la série d'observations par l'équation suivante :

$$p_{(i,j)} = \hat{P}_{E_S}(Z_i, Z_j) = \frac{n_{ij}}{\sum_{k=1}^3 n_{ik}} \quad (3.11)$$

où n_{ik} est le nombre de fois où le processus passe de l'état Z_i à l'état Z_k . Cette estimation correspond à un estimateur de maximum de vraisemblance de la probabilité $P_{E_S}(Z_i, Z_j)$ de l'équation (1.11). Le temps de séjour moyen (par période de 3 mois) dans chaque état Z_i , noté T_{Z_i} peut être estimé à partir de l'équation (1.13). La matrice de transition ainsi que le vecteur de répartition initiale des états et celui de temps de séjour moyen dans chaque état (en période de 3 mois) sont donnés comme suit :

$$P_{E_S} = \begin{pmatrix} 0,8253 & 0,1747 & 0 \\ 0,4677 & 0,4609 & 0,0714 \\ 0,1833 & 0,6167 & 0,2000 \end{pmatrix};$$

$$\pi_{E_S}(0) = (1 \ 0 \ 0).$$

$$\text{et } \mathbb{E}[T_{E_S}] = (5.724 \ 1.854 \ 1.25).$$

JDU pour chaque régime Pour nos indicateurs, des différents régimes d'évolution peuvent être associés aux différents états de la covariable E_S . Pour un indicateur donné, une calibration du modèle stochastique suivant chaque régime doit être effectuée.

Considérons un indicateur donné, les incréments de cet indicateur sont classés suivant les différents régimes. Pour chaque régime, la méthode de calibration présentée dans la section 3.2.1 est utilisée pour estimer les paramètres du modèle JDU correspondant à cet indicateur dans ce régime. Les contraintes et les domaines d'appartenance des différents paramètres sont les mêmes que dans la calibration du modèle à paramètres constants. La fonction d'optimisation utilisée est la fonction MC.

Nous présentons tout d'abord les résultats de la calibration du modèle de diffusion avec sauts à trois régimes (3RS-JDU) pour les indicateurs numéros 3, 6 et 14. Le Tableau 3.5 présente les résultats de l'estimation des paramètres pour les indicateurs 3, 6 et 14 et pour les trois régimes d'évolution précédemment définis.

La Figure 3.3 présente, pour chaque état de " E_S ", une comparaison entre les fréquences et la fonction de répartition théoriques des incréments par rapport à celles calculées à partir des incréments réels correspondant à cet état. Cette figure, ainsi que les résultats du test de Kolmogorov présentés dans le Tableau 3.5 montrent la possibilité que le modèle 3RS-JDU soit mieux adapté pour la représentation de nos indicateurs que le modèle de diffusion avec sauts à paramètres constants. D'autres tests d'adéquation et d'utilité du modèle seront présentés ultérieurement dans le paragraphe 3.3.3.

3.3. Modèle de diffusion avec sauts à changement de régime

indicateur n°	E_S	μ_{ld}^*	σ_d^{2*}	λ_J^*	Q_a^*	Q_b^*	Dkstat	Décision
3	Z_1	0,289	0,011	12,25	-0,0255	0	0,0339	H_0
	Z_2	0,0452	0,0463	7,01	-0,07	0,0396	0,0307	H_0
	Z_3	-0,2243	0,153	24,49	-0,1017	0,0773	0,0575	H_0
6	Z_1	0,2288	0,0229	14,84	-0,0362	0,0323	0,0278	H_1
	Z_2	-0,0131	0,0821	15,43	-0,0714	0,0528	0,0254	H_0
	Z_3	-1,2594	0,276	10,94	-0,0337	0,1113	0,0506	H_0
14	Z_1	0,1517	0,0116	11,7	-0,026	0,019	0,0184	H_0
	Z_2	0,0908	0,0345	2,62	-0,1064	0	0,0269	H_0
	Z_3	-4,2587	0,1189	78,7	0	0,0715	0,2232	H_1

Tableau 3.5 – Résultats de calibration du modèle JDU pour chacun des régimes du modèle 3RS-JDU.

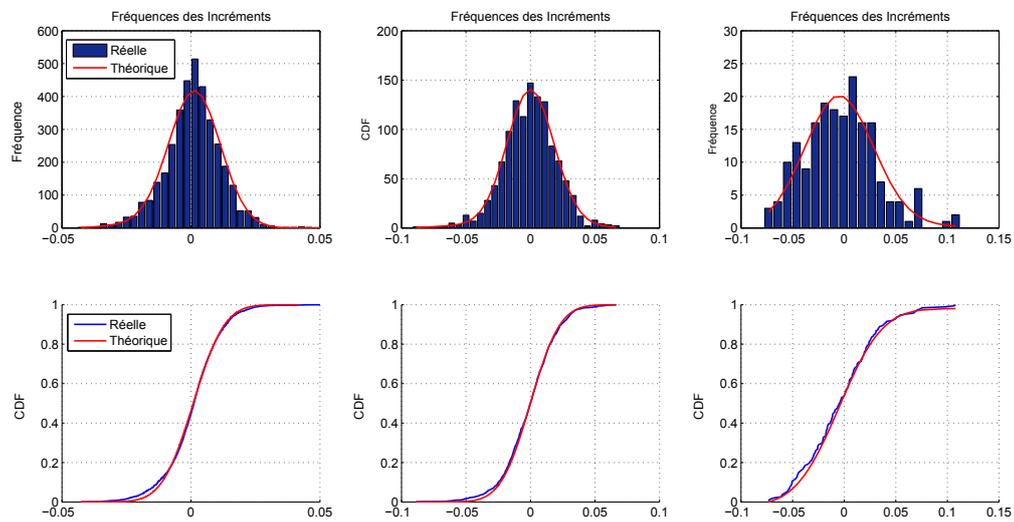


FIGURE 3.3 – Comparaison des fréquences et CDF théoriques du modèle JDU correspondant à chaque régime du modèle 3RS-JDU avec celles des incréments de l'indicateur numéro 6.

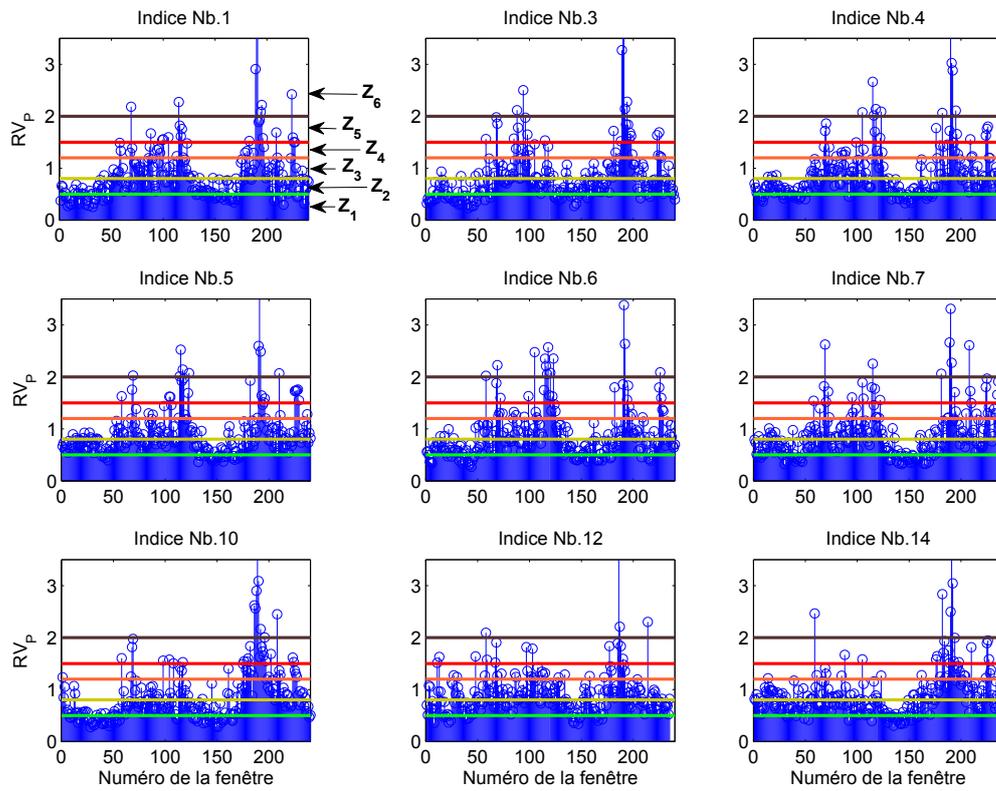


FIGURE 3.4 – Évolution de la volatilité périodique relative pour les différents indicateurs sur des fenêtres de 21 jours.

3.3. Modèle de diffusion avec sauts à changement de régime

3.3.2.1 Modèle JDU à six régimes d'évolution : 6RS-JDU

Dans cette section, une division plus fine des régimes d'évolution du processus est proposée. On considère maintenant que l'espace d'état de la covariable " E_S " est formé de 6 états $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6\}$. La classification des données de chaque indicateur est effectuée de la même façon que pour le modèle à trois régimes mais en considérons des fenêtres d'échantillonnage plus fines (1 mois). Les règles de classification sont maintenant fixées comme suit :

- Si $RV_P < 0.5$ la fenêtre est attribuée à un état $E_S = Z_1$.
- Si $0.5 \leq RV_P < 0.8$ la fenêtre est attribuée à un état $E_S = Z_2$.
- Si $0.8 \leq RV_P < 1.2$ la fenêtre est attribuée à un état $E_S = Z_3$.
- Si $1.2 \leq RV_P < 1.6$ la fenêtre est attribuée à un état $E_S = Z_3$.
- Si $1.6 \leq RV_P < 2$ la fenêtre est attribuée à un état $E_S = Z_4$.
- Si $2 \leq RV_P$ la fenêtre est attribuée à un état agité ou $E_S = Z_6$.

La Figure 3.4 présente l'évolution de la volatilité périodique relative RV_P pour 4 différents indicateurs et pour une période de 1 mois (soit 21 jours de travail).

Chaîne de Markov Considérons uniquement les indicateurs qui présentent des trajectoires de E_S similaires (indicateurs numéros 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12 et 14), les lois de transition et la répartition initiale de la chaîne de Markov correspondant à l'évolution des états de E_S peuvent être estimées.

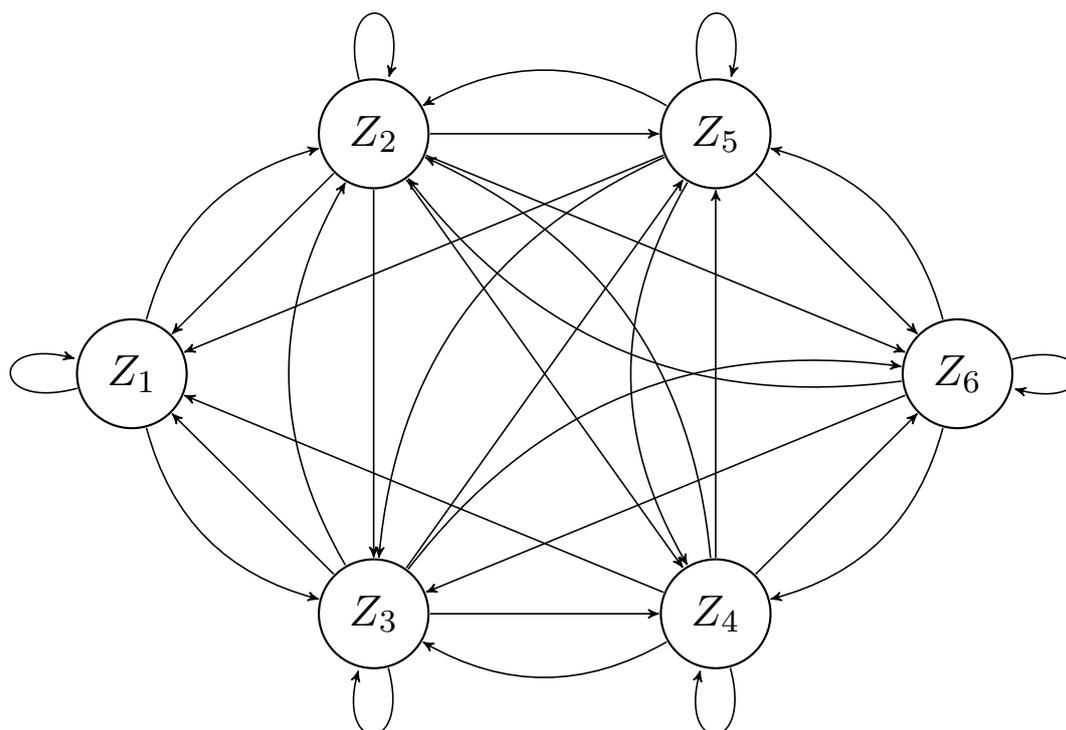
La matrice de transition, ainsi que le vecteur de répartition initiale des états et celui de durée moyenne de séjour (en période de 3 mois) sont donnés comme suit :

$$P_{E_S} = \begin{pmatrix} 0,5006 & 0,4459 & 0,0534 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1697 & 0,5199 & 0,2866 & 0,0166 & 0,0058 & 0,0012 \\ 0,0519 & 0,3069 & 0,4343 & 0,1260 & 0,0655 & 0,0154 \\ 0,0259 & 0,1313 & 0,3512 & 0,1824 & 0,2244 & 0,0848 \\ 0,0059 & 0,1445 & 0,2971 & 0,1330 & 0,2400 & 0,1795 \\ 0 & 0,05357 & 0,1700 & 0,1473 & 0,2863 & 0,3427 \end{pmatrix};$$

$$\pi_{E_S}(0) = (0,2 \quad 0,5 \quad 0,2 \quad 0,1 \quad 0 \quad 0);$$

$$\text{et } \mathbb{E}[T_{E_S}] = (2,002 \quad 2,083 \quad 1,76771,223 \quad 1,315 \quad 1,521).$$

La chaîne de Markov modélisant la covariable E_S à six états est présentée dans le graphique ci-dessous. On note que les probabilités de transition entre les différents états ne sont pas représentées sur le graphique pour des raisons de visibilité.



Calibration du modèle JDU pour chaque régime Comme dans le cas du modèle 3RS-JDU, une calibration du modèle JDU correspondant à la dynamique du phénomène étudié conditionnellement à chacun de six régimes d'évolution doit être effectuée. Nous utilisons dans cette étape les mêmes méthodes et contraintes d'optimisation que dans les sections précédentes. Le Tableau 3.6 présente les paramètres du modèle JDU estimés pour chacun des indicateurs (3, 6 et 14) et pour chaque état de " E_S ". La Figure 3.5 présente, pour chaque état de " E_S ", une comparaison entre les fréquences et la fonction de répartition théoriques des incréments par rapport à celle calculées à partir des incréments réels de l'indicateur numéro 6, correspondant à cet état. Cette figure, ainsi que les résultats de test de Kolmogorov présentés dans le Tableau 3.5 montrent que le modèle 6RS-JDU est un candidat très pertinent pour la représentation de nos données. Les tests d'adéquation et d'utilité, comparant le modèle 3RS-JDU avec le modèle 6RS-JDU sont présentés dans la section suivante.

3.3.3 Tests d'adéquation et d'utilité des modèles RS-JDU

Deux modèles de diffusion avec sauts à changement de régime sont définis et calibrés dans l'étape précédente. Des tests d'adéquation et d'utilité basés sur des simulations Monte Carlo des modèles 3RS-JDU et 6RS-JDU sont présentés dans la suite.

3.3. Modèle de diffusion avec sauts à changement de régime

indicateur n°	E_S	μ_{id}^*	σ_d^{2*}	λ_J^*	Q_a^*	Q_b^*	Dkstat	Décision
3	Z_1	0,3399	0,0043	33,56	-0,0083	0,0058	0,0316	H_0
	Z_2	0,1614	0,0121	7,11	-0,0189	0	0,0241	H_0
	Z_3	0,677	0,0194	61,34	-0,0209	0	0,1053	H_1
	Z_4	0,5009	0,0413	34,87	-0,0315	0	0,0763	H_0
	Z_5	0,4261	0,0612	65,13	-0,0408	0,02	0,0873	H_1
	Z_6	0,6286	0,1979	31,22	-0,091	0	0,0963	H_0
6	Z_1	0,2948	0,0093	1,59	-0,041	0,0002	0,0199	H_0
	Z_2	0,3696	0,023	7,75	-0,0248	0	0,0242	H_0
	Z_3	0,4688	0,0466	45,58	-0,0215	0	0,0721	H_1
	Z_4	0,1347	0,0983	13,94	0	0,0022	0,0349	H_0
	Z_5	-1,8958	0,1256	42,45	0	0,0537	0,0958	H_1
	Z_6	-1,1742	0,3134	33,01	0	0,0212	0,0392	H_0
14	Z_1	0,2801	0,004	38,43	-0,008	0,0066	0,0389	H_0
	Z_2	0,2131	0,0095	23,17	-0,0135	0,0077	0,0273	H_0
	Z_3	0,1634	0,0207	15,48	-0,0183	0	0,0267	H_0
	Z_4	-0,1215	0,0413	40,43	0	0,004	0,0331	H_0
	Z_5	0,2072	0,0526	42,71	-0,0411	0,022	0,0737	H_1
	Z_6	-1,948	0,0549	136,78	-0,0531	0,0647	0,1102	H_0

Tableau 3.6 – Résultats de calibration du modèle JDU pour chacun des régimes du modèle 6RS-JDU.

Tout d'abord, une comparaison entre les différents facteurs et grandeurs statistiques des incréments réelles par rapport aux séries des incréments simulées à partir des modèles calibrés est effectuée. Cette comparaison, ainsi que les résultats de test de Kolmogorov entre les distributions des incréments simulés et celles des incréments réels sont présentés dans le Tableau 3.7 pour l'indicateur numéro 6. Pour montrer l'intérêt des modèles RS-JDU par rapport au modèle de mouvement Brownien géométrique (ou Black&Scholes BS), couramment utilisé pour les données financières à évolution non-monotone. Nous présentons également dans cette section les résultats correspondant aux incréments du modèle BS calibré. Les Figures 3.6 et 3.7 montrent une comparaison entre la fonction de densité de probabilité et la fonction de répartition des incréments de l'indicateur numéro 6, par rapport à celles des incréments simulés à partir des modèles 3RS-JDU et 6RS-JDU calibrés. Les Q-Q plots entre les deux ensembles d'incréments, réel et simulé, sont aussi présentés dans ces figures. La figure en bas à droite présente une vue agrandie sur les fonctions de répartition, dans le but de mieux visualiser leurs différences.

Dans la Figure 3.8 des comparaisons des fonctions de densité de probabilité et de

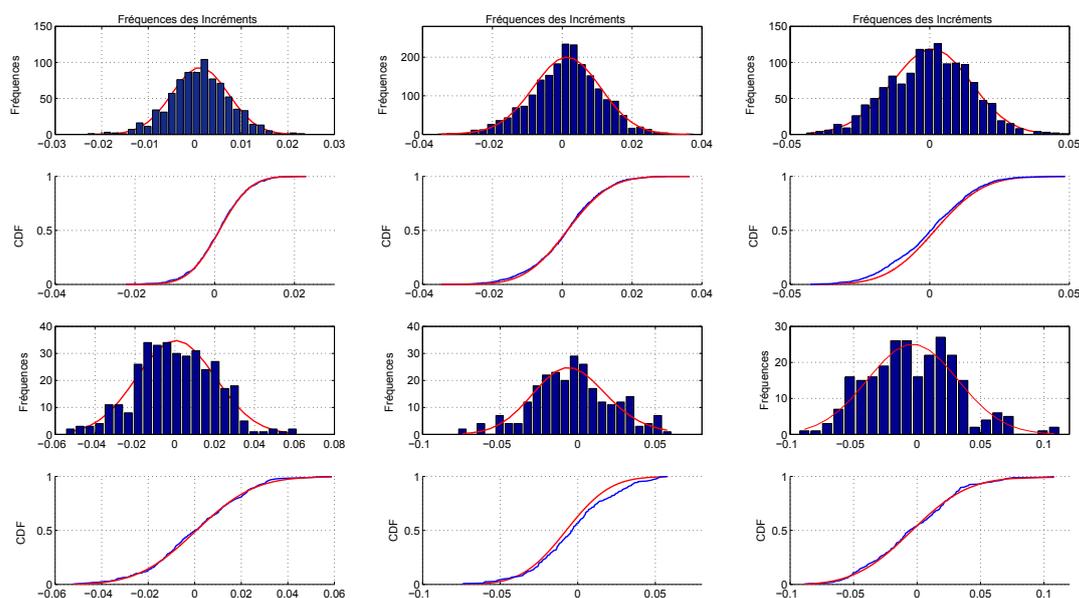


FIGURE 3.5 – Comparaison des fréquences et CDF théoriques du modèle JDU correspondant à chaque régime du modèle 6RS-JDU avec celles des incréments de l'indicateur numéro 6.

répartition des incréments réels par rapport à celles des incréments simulés à partir de trois modèles BS, 3RS-JDU et 6RS-JDU sont données. Dans l'Annexe A, nous présentons les tableaux et les figures correspondant aux résultats obtenus pour les indicateurs numéro 3 et 14. Les résultats de la comparaison statistique, présentés dans les tableaux et les figures ci-dessus, montrent une amélioration de représentation de la dynamique étudiée rapportée par les modèles RS-JDU par rapport au modèle BS. Les résultats du test de Kolmogorov confirment l'hypothèse H_0 pour le modèle 6RS-JDU. Ceci implique que la distribution des incréments réels des indicateurs peut être reproduite par les incréments du modèle 6RS-JDU. Une distinction est donc remarquée pour le modèle 6RS-JDU par rapport au modèle 3RS-JDU. Ces résultats suggèrent qu'un modèle à changement de régimes avec une division plus fine et des variations plus rapides de la volatilité peut être plus avantageux pour la représentation des données. Dans la section 3.4 une variation continue du terme de la volatilité est considérée. Le modèle de diffusion avec sauts à volatilité stochastique est testé.

Pour les modèles RS-JDU, des simulations Monte Carlo peuvent être utiles pour le calcul des différentes valeurs d'intérêt indispensables pour le pronostic et la prise de décision.

3.3. Modèle de diffusion avec sauts à changement de régime

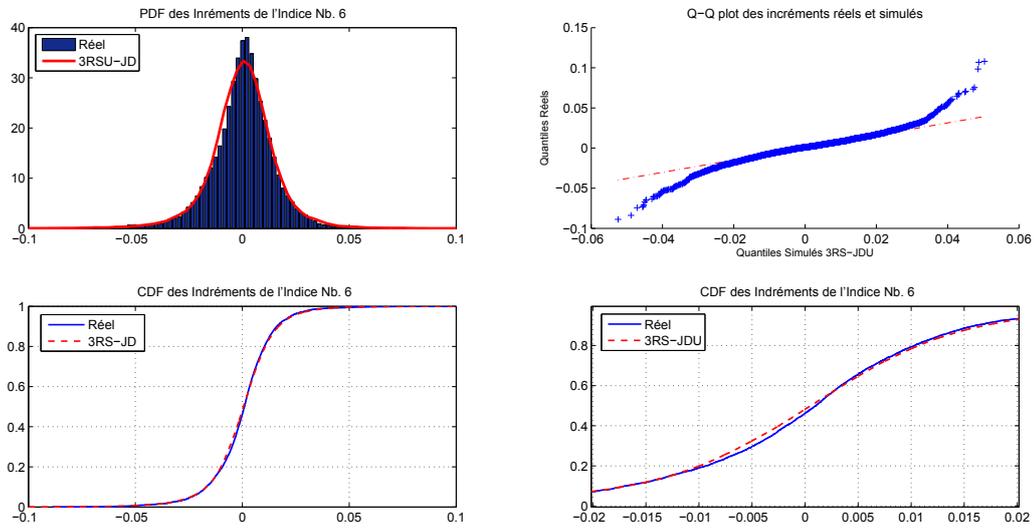


FIGURE 3.6 – Comparaison des fréquences et CDF des incréments simulés par le modèle 3RS-JDU avec celles des incréments de l'indicateur numéro 6.

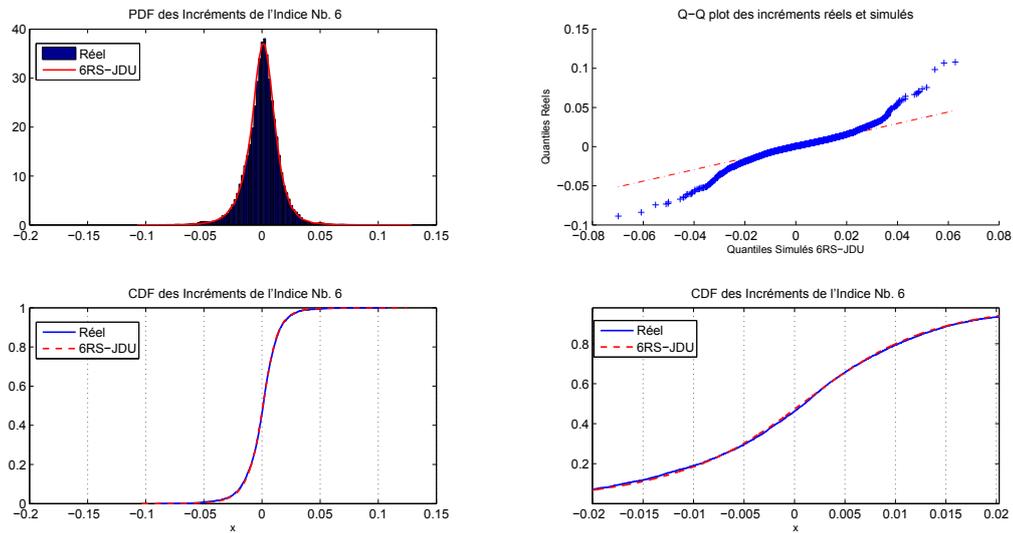


FIGURE 3.7 – Comparaison des fréquences et CDF des incréments simulés par le modèle 6RS-JDU avec celles des incréments de l'indicateur numéro 6.

Incréments	Moyenne (*E ⁻⁴)	Var (*E ⁻⁴)	Std	Médian	Coef. d'asymétrie	Coef. d'aplatis.	Dkstat	Décision
Réel	3,187	2,256	0,015	0,0106	-0,1246	7,380	–	–
BS	3,116	2,249	0,015	0,012	-0,0063	3,003	0,0699	H ₁
3RS-JDU	3,019	2,144	0,0146	0,0105	-0,222	7,092	0,0350	H ₁
6RSJDU	2,741	2,319	0,0152	0,0109	-0,2738	7,246	0,0218	H ₀

Tableau 3.7 – Comparaison des différents facteurs statistiques correspondant aux incréments de l'indicateur numéro 6 par rapport aux incréments simulés à partir des différents modèles.

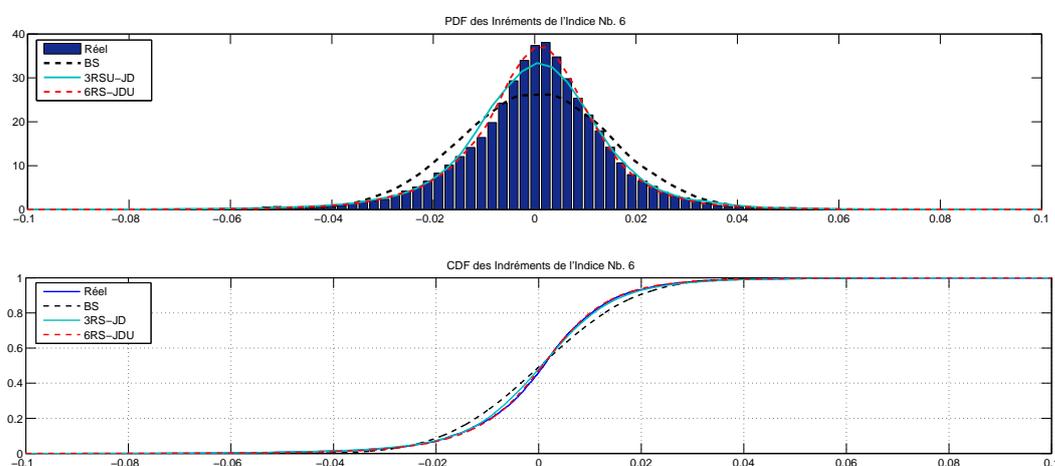


FIGURE 3.8 – Comparaison des fréquences et CDF des incréments simulés par des modèles BS, 3RS-JDU et 6RS-JDU avec celles des incréments de l'indicateur numéro 6.

Domaine d'évolution La Figure 3.9 présente les intervalles de confiance à [10 – 90]% de l'évolution de l'indicateur numéro 6, calculés à partir des 50000 trajectoires simulées suivant les trois modèles BS, 3RS-JDU et 6RS-JDU. Nous remarquons que les modèles RS-JDU présentent une meilleure estimation du domaine d'évolution de l'indicateur au cours du temps. Des déductions similaires peuvent être tirés des Figures ?? et ?? de l'Annexe A, représentant les intervalles de confiance de l'évolution des indicateurs numéro 3 et 14.

Valeur à l'échéance Nous nous intéressons également dans cette étape à tester la capacité des modèles RS-JDU dans l'estimation de la valeur à l'échéance Y_F d'un indicateur donnée. Considérant une date d'échéance fixe T_f , nous pouvons calculer, à partir des simulations Monte Carlo des différents modèles, la fonction de distribution de la valeur de l'indicateur 6 à T_f , conditionnellement à sa valeur à l'instant T_e . Les Figures 3.10 et 3.11

3.3. Modèle de diffusion avec sauts à changement de régime

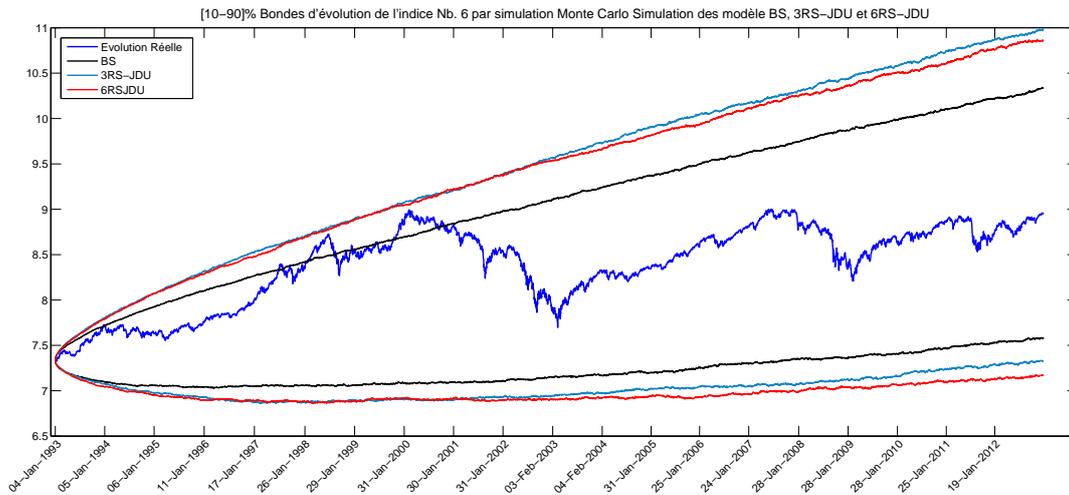


FIGURE 3.9 – Intervalles de confiance de $[10, 90]\%$ calculées pour l'indicateur numéro 6 à partir des simulations Monte Carlo des modèles BS, 3RS-JDU et 6RS-JDU.

représentent les fonctions de distribution de la valeur finale Y_F pour plusieurs intervalle de temps $\Delta T_e = T_f - T_e$ et à partir du modèle 3RS-JDU et 6-RS-JDU respectivement. Dans ces figures, la ligne noire correspond à la valeur réelle de l'indicateur observée à l'instant T_f , notée Y_f .

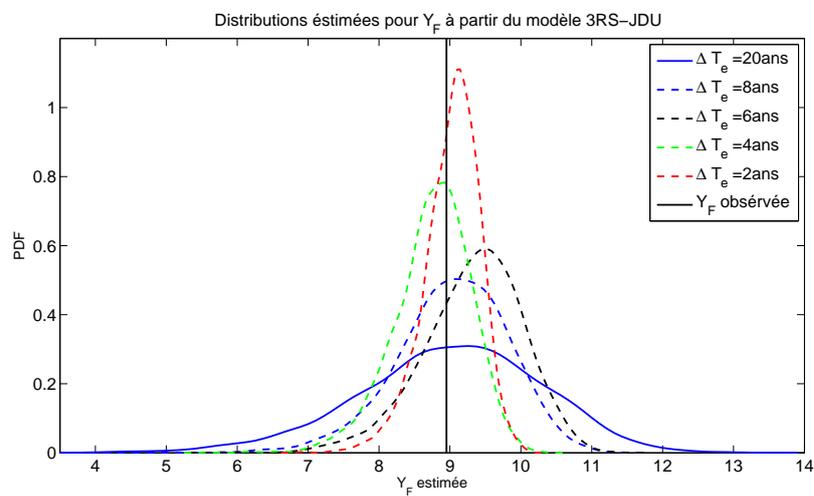


FIGURE 3.10 – Fonctions de distribution estimées pour la valeur $Y_f = Y(T_f)$ de l'indicateur numéro 6 à partir du modèles 3RS-JDU.

Valeurs en jeu Les valeurs en jeu VaR , dont la définition est donnée dans le Chapitre 1, section 1.5.1, pour des probabilités de risque α_r fixées respectivement à 0.01, 0.05 et

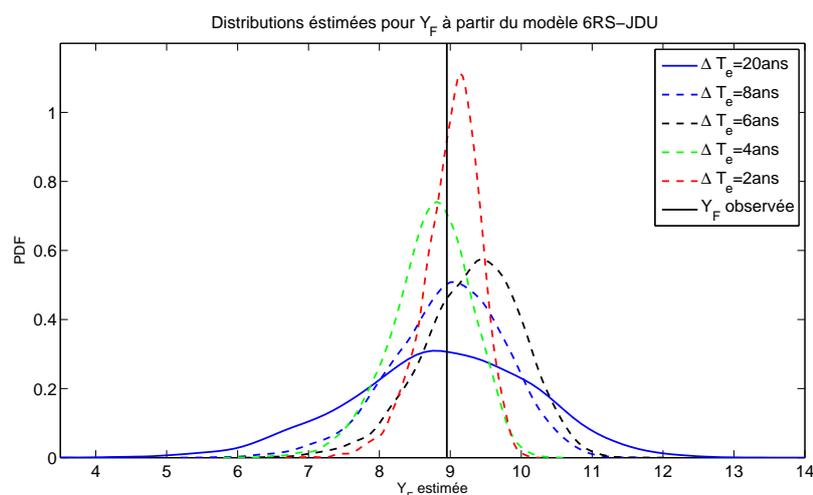


FIGURE 3.11 – Fonctions de distribution estimées pour la valeur Y_f de l'indicateur numéro 6 à partir du modèles 6RS-JDU.

0.1 et des intervalles de temps de 1, 2 et 5 ans peuvent être calculées pour chacun de nos indicateurs. Le Tableau 3.8 présente les résultats de l'estimation des VaR pour l'indicateur numéro 6, en comparaison avec la valeur réellement atteinte par l'indicateur à chacune des dates d'échéance. On note que les valeurs en jeu calculées dans cette étape correspondent aux valeurs d'augmentation maximale que l'indicateur est susceptible de subir pendant un intervalle de temps fixe et avec une probabilité de risque (α_r) précise. En finance, cette valeur s'avère d'une grande importance pour la prise des décisions concernant la vente ou l'achat des stocks ou d'autres objets financiers. Pour l'étude de dégradation, cette valeur peut présenter un risque de dégradation maximale à prévoir pour un système donnée avant la date de la prochaine intervention.

Modèle		$\alpha_r = 0,01$	$\alpha_r = 0,05$	$\alpha_r = 0,1$	$\ln Y(t_0 + \Delta T)$
3RS-JDU	$\Delta T = 1ans$	8,2928	8,0686	7,9583	7,6528
	$\Delta T = 2ans$	8,7971	8,5222	8,3483	7,966
	$\Delta T = 5ans$	9,6435	9,1957	8,9741	8,7613
6RS-JDU	$\Delta T = 1ans$	8,2617	8,0705	7,9561	7,6528
	$\Delta T = 2ans$	8,8205	8,4759	8,3218	7,966
	$\Delta T = 5ans$	9,6227	9,219	8,9772	8,7613

Tableau 3.8 – VaR de l'indicateur numéro 6 calculé à partir des modèles 3RS-JDU et 6RS-JDU pour plusieurs probabilités de risque et intervalle d'échéance.

3.3. Modèle de diffusion avec sauts à changement de régime

Premier temps de passage La valeur en jeu VaR est un facteur indispensable pour de nombreuses applications dans le domaine financier. Notamment cette valeur joue un rôle primordial pour le calcul des prix des options ou de la rentabilité d'un investissement. Cependant, dans le domaine de la maintenance et de la modélisation des phénomènes de dégradation, la prise de décision est le plus souvent reliée à l'estimation du premier temps de passage du modèle. Une maintenance prévisionnelle ou corrective doit être effectuée lorsque l'indicateur de dégradation dépasse pour la première fois un seuil de défaillance prédéfini. L'estimation du premier temps du passage ou de sa densité de probabilité est indispensable pour la planification des tâches de maintenance prévisionnelle.

Les modèles RS-JDU testés dans cette section permettent d'estimer, par simulation, le premier temps de passage τ_{S_p} d'un seuil de défaillance prédéfini S_p par un indicateur donnée . Le Tableau 3.9 présente la moyenne et l'écart-type estimés pour le premier temps de passage de l'indicateur numéro 6 pour trois seuils S_p différents. L'estimation est effectuée suivant les modèles 3RS-JDU et 6RS-JDU. Les fonctions de densité de probabilité et de répartition correspondant au temps de passage estimé sont donnée dans les Figures 3.12 et 3.13 pour le modèle 3RS-JDU et 6RS-JDU respectivement. Des études approfondies sur la loi de distribution de cette variable (τ_{S_p}) peuvent être effectuées dans le futur en se basant sur les distributions empiriques trouvées par simulation. Les résultats correspondant aux indicateurs numéros 3 et 14 sont présentés dans l'Annexe A.

Modèle	Seuil	$\mathbb{E}[\tau_{S_p}]$	$\sigma[\tau_{S_p}]$	τ_{S_p} observé
3RS-JDU	$S_p = 7.8$	1379	1033	958
	$S_p = 8.3$	2427	1250	1786
	$S_p = 8.8$	3051	1326	3872
6RS-JDU	$S_p = 7.8$	1381	1152	958
	$S_p = 8.3$	2275	1405	1786
	$S_p = 8.8$	2742	1525	3872

Tableau 3.9 – Premier temps de passage estimé pour l'indicateur numéro 6

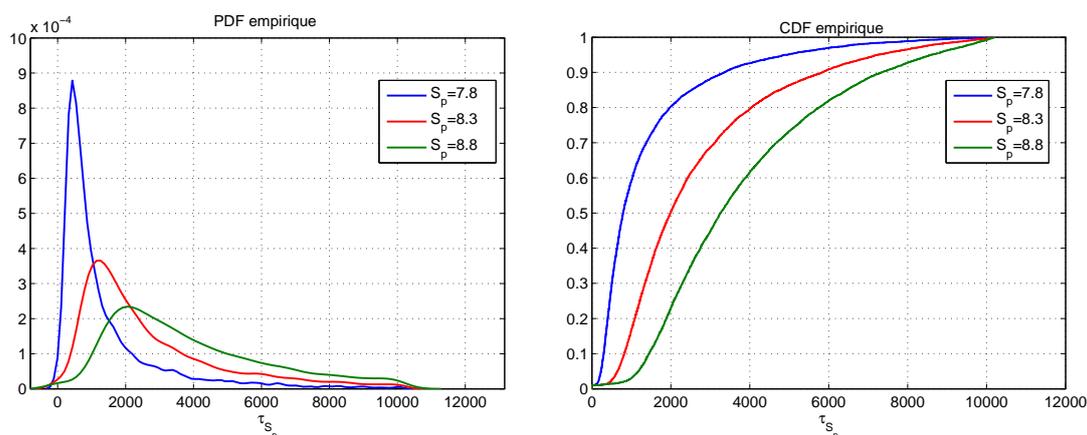


FIGURE 3.12 – Fonctions de densité de probabilité et de répartition du premier temps de passage estimée pour l’indicateur numéro 6 à partir du modèle 3RS-JDU.

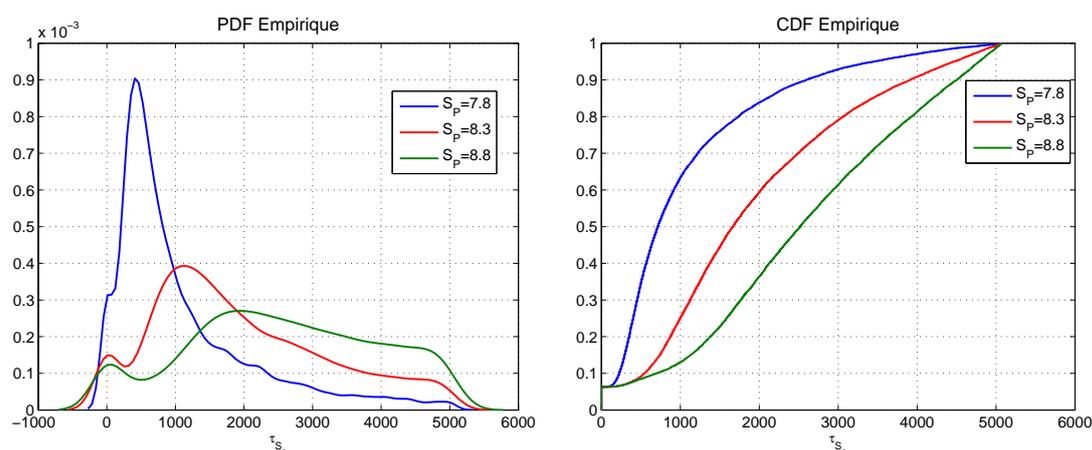


FIGURE 3.13 – Fonctions de densité de probabilité et de répartition du premier temps de passage estimée pour l’indicateur numéro 6 à partir du modèle 6RS-JDU.

3.4 Modèle de diffusion avec sauts à volatilité stochastique : SV-JD

Des modèles de diffusion avec sauts et à changements de régime sont testés dans l’étape précédente. Se basant particulièrement sur les variations de la volatilité historique déduite à partir de nos séries des incréments, nous avons proposé précédemment que les paramètres du modèle de JDU soient tous variables et changent suivant une covariable environnementale sur un espace d’état discret. Deux modèles sont principalement comparés : Le modèle à trois régimes basé sur une division de temps avec une période de

3.4. Modèle de diffusion avec sauts à volatilité stochastique : SV-JD

séjour de 3 mois dans chaque régime et le modèle à six régimes basé sur une division de période de séjour de 6 mois dans chaque régime. Les résultats obtenus pour la calibration et les tests d'adéquation de ces modèles privilégient le modèle 6RS-JDU. Ces résultats suggèrent que la division la plus fine de la période de séjour dans chaque état ainsi que la considération des variations plus fréquentes des paramètres du modèle, notamment de sa volatilité, mène à une meilleure représentation des données réelles. Par la suite, nous proposons de considérer une variation continue de la volatilité du processus, tout en conservant le terme correspondant au processus de sauts. Nous considérons également que les paramètres du processus de sauts ainsi que la dérive du modèle (μ_d) sont constants. Seul le terme de volatilité (σ_d) subit une variation continue avec le temps, suivant son propre modèle d'évolution. Ceci nous ramène au modèle à volatilité stochastique avec sauts présenté précédemment dans la section 1.4.4. Le modèle considéré dans cette étape est donc représenté par les dynamiques (1.77) et (1.77) :

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = \mu_d dt + \sqrt{V(t)} dW_1(t) + (e^J - 1) dN(t) \quad (1.77 \text{ rappel})$$

$$dV(t) = \kappa_V (\theta_V - V(t)) dt + \sigma_V \sqrt{V(t)} dW_2(t) \quad (1.78 \text{ rappel})$$

Le processus de sauts, $(e^J - 1)dN(t)$, additionnel au modèle SV normal sert à modéliser les éventuelles discontinuités et les larges fluctuations occasionnellement subies par le processus étudié. L'intensité des sauts est modélisée par la variable aléatoire J . Nous considérons, conformément aux résultats de la partie précédente, que cette variable suit une loi uniforme.

Le vecteur ω des paramètres du modèle SV-JD est donc formé de huit éléments :

- μ_d : la dérive du processus $Y(t)$,
- κ_V : le taux de retour κ_V de la variable $V(t)$ à sa valeur moyenne,
- θ_V : la valeur moyenne de long terme de la variable $V(t)$,
- σ_V : la volatilité du processus $V(t)$,
- ρ_V : facteur de corrélation des deux processus de Wiener standards $W_1(t)$ et $W_2(t)$,
- λ_J le taux du processus de Poisson $N(t)$,
- Q_a et Q_b : les deux paramètres de la loi uniforme correspondante à l'intensité des sauts J .

Afin d'adapter le modèle SV-JD aux données observées, le vecteur des paramètres $\omega = (\mu_d, \kappa_V, \theta_V, \sigma_V, \rho_V, \lambda_J, Q_a, Q_b)$ doit être estimé. Nous notons que la densité de transition pour ce modèle ne peut pas être écrite sous une forme explicite. Ainsi, des méthodes d'estimation basées sur la simulation sont nécessaires pour la calibration du modèle.

3.4.1 Méthodes de Calibration

Par rapport aux autres modèles couramment utilisés pour la modélisation des phénomènes aléatoires non-monotones, tels que les modèles autorégressifs et le mouvement Brownien géométrique (modèle BS), la calibration du modèle SV-JD s'avère plus difficile en raison de l'indisponibilité d'une fonction de vraisemblance analytique associée. Pour cette raison, des méthodes d'estimation basées sur la simulation ont été proposées et utilisées pour la calibration de ce modèle.

Dans cette section, la procédure d'inférence indirecte développée par [Gourieroux et al. \(1993\)](#) et la méthode efficace des moments (*Efficient Methods of Moments* EMM) proposée par [Gallant et al. \(1997\)](#) sont détaillées. Ces méthodes de calibration à deux étapes se basent sur la simulation ainsi que sur la mise en œuvre d'un critère auxiliaire. Selon ces deux procédures, les paramètres d'un modèle auxiliaire sont d'abord estimés pour la séquence des données réelles en utilisant un critère auxiliaire. Ensuite, en se référant aux paramètres estimés pour le modèle auxiliaire, un estimateur cohérent du vecteur des paramètres ω est obtenu suite à une deuxième étape d'optimisation basée sur la simulation. Une autre méthode d'estimation basée sur la simulation avec des critères directs, et ne dépendant donc pas d'un modèle auxiliaire, est également proposée dans cette section.

Définissons $\Omega \subset \mathbb{R}^8$, l'ensemble des valeurs possibles de ω et $X_{1,N} = \{X_{t_1}, X_{t_2}..X_{t_N}\}$ pour $t_1 = 0$ et $t_N = T$, le vecteur des observations périodiques collectées pour un phénomène donné. Supposons que le phénomène observé correspond réellement à une réalisation d'un processus SV-JD, nous appelons ω_0 le vecteur des paramètres réels de ce processus. Le but de la calibration est de trouver une bonne approximation du vecteur ω_0 .

3.4.1.1 Inférence indirecte

La méthode de calibration par inférence indirecte consiste à introduire un modèle auxiliaire dans la procédure de l'estimation [Gourieroux et al. \(1993\)](#). Les paramètres du modèle auxiliaire forment un vecteur $\beta \in B \subset \mathbb{R}^n$. Un critère auxiliaire $C_t(Y_{1,N}, \beta)$ est ensuite défini. La maximisation de ce critère doit conduire à une estimation cohérente du vecteur β correspondant au modèle auxiliaire prédéfini et à un ensemble des réalisations $Y_{1,N}$. Rappelons que $Y_{1,N} = \{Y_{t_1}, Y_{t_2}..Y_{t_N}\}$ est un ensemble de N réalisations à partir d'un modèle donné avec un vecteur des paramètres *omega* et que $X_{1,N} = \{X_{t_1}, X_{t_2}..X_{t_N}\}$ pour $t_1 = 0$ et $t_N = T$ représente l'ensemble de N observations périodiques du phénomène étudié. ω_0 étant le vecteur des paramètres du modèle théorique correspondant à la série $X_{1,N}$.

3.4. Modèle de diffusion avec sauts à volatilité stochastique : SV-JD

Supposant que le critère $C_t(Y_{1,N}, \beta)$ converge, pour $t \rightarrow \infty$, vers une fonction $C_\infty(Y_{1,N}, \beta)$ et que la valeur β_∞ maximisant C_∞ dépend à son tour du vecteur ω des paramètres du modèle, nous pouvons écrire :

$$\beta_\infty(\omega) = \operatorname{argmax}_\beta (C_\infty(Y_{1,N}, \beta)). \quad (3.12)$$

Supposant également que la fonction $\beta_\infty(\omega)$ est injective, une valeur unique (β_0) de $\beta_\infty(\omega)$ est obtenue pour ω_0 et par suite pour la série d'observations $X_{1,N}$:

$$\beta_0 = \beta_\infty(\omega_0) = \operatorname{argmax}_\beta (C_\infty(X_{1,N}, \beta)). \quad (3.13)$$

Dans cette première étape de la calibration par inférence indirecte, une estimation de l'ensemble des paramètres β_0 du modèle auxiliaire correspondant à la série des données originales $X_{1,N}$ est effectuée. Cette estimation est notée β_T

$$\hat{\beta}_T = \operatorname{argmax}_\beta (C_T(X_{1,N}, \beta)) \quad (3.14)$$

La deuxième étape de la procédure consiste à trouver une estimation ω^* du vecteur ω_0 correspondant au processus SV-JD produisant la série d'observation $X_{1,N}$. Tout d'abord, un nombre $H > 0$ de trajectoires simulées nécessaires pour chaque itération doit être fixé. Ensuite, pour chacune des valeurs possibles de $\omega \in \Omega$, H trajectoires aléatoires $(D(t))_{0 < t < T}$, de longueur T chacune et correspondant au processus SV-JD de paramètres ω , sont simulées. Pour chaque $h \in \{1, 2, \dots, H\}$ la série de données résultant de la trajectoire simulée est notée $D_{1,N}^h = \{D_{t_1}^h, \dots, D_{t_N=T}^h\}$. L'estimation de l'ensemble des paramètres auxiliaires noté $\tilde{\beta}_T^h$ pour chaque trajectoire simulée est ensuite déduite. $\tilde{\beta}_T^h$ est obtenu par la maximisation de $C_T(D_{1,N}^h, \beta)$ pour $h = \{1, 2, \dots, H\}$.

L'idée est simplement d'étalonner les valeurs possibles des paramètres du modèle ω pour avoir $\frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \tilde{\beta}_T^h$ le plus proche possible de $\hat{\beta}_T$. Avec les notations ci-dessus, l'estimateur à inférence indirecte de ω est défini comme suit :

$$\hat{\omega}_T^H = \operatorname{argmin}_{\omega \in \Omega} (\hat{\beta}_T - \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \tilde{\beta}_T^h)^T \hat{\Gamma}_T (\hat{\beta}_T - \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \tilde{\beta}_T^h), \quad (3.15)$$

avec $\hat{\Gamma}_T$ une matrice de pondération définie positive. [Gourieroux et al. \(1993\)](#) a proposé que la matrice de pondération $\hat{\Gamma}_T$ soit estimée par une matrice déterministe définie positive Γ^* avec :

$$\Gamma^* = J_0 I_0^{-1} J_0 \quad (3.16)$$

et

$$I_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{V}_0 [\sqrt{T} \frac{\partial C_T}{\partial \beta} \{X_{1,N}, \hat{\beta}_T\}], J_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 C_T}{\partial \beta \partial \beta'} \{X_{1,N}, \hat{\beta}_T\}, \quad (3.17)$$

où \mathbf{V}_0 est la variance par rapport à la distribution réelle de $X_{1,N}$.

3.4.1.2 Méthode efficace des moments EMM

D'autre part, [Gallant et al. \(1997\)](#) proposent un estimateur à minimum de chi-2 pour le cas de l'expression analytique inconnue de la distribution de probabilité conditionnelle de données. La méthode efficace des moments EMM peut être considérée comme une version modifiée de l'inférence indirecte. Comme la méthode de l'inférence indirecte, la procédure EMM est implémentée en deux étapes fondamentales. Dans cette version la fonction objectif devant être minimisée dans la deuxième étape est obtenue à partir du vecteur de partition $\frac{\partial C_{TH}}{\partial \beta}(Y_{1,NH}, \hat{\beta}_T)$.

La première étape consiste, comme dans l'inférence indirecte, à choisir et à calibrer le modèle auxiliaire en considérant l'ensemble de données observées $X_{1,N}$. Le vecteur $\hat{\beta}_T$ des paramètres du modèle auxiliaire, correspondant au données réelles est ainsi obtenu.

Dans la deuxième étape, et pour chaque valeur spécifique de ω , une trajectoire $D(t)$ est simulée pour $\{0 < t < T.H\}$. La série de données résultante de la trajectoire simulée est maintenant notée $D_{1,NH} = \{D_{t_1}, D_{t_2}, \dots, D_{t_{NH}}\}$, avec $t_1 = 0$ et $t_{NH} = T.H$. Ensuite, une estimation de ω_0 , notée $\tilde{\omega}_{TH}$, peut être obtenue en minimisant la fonction objectif suivante :

$$\tilde{\omega}_{TH} = \underset{\omega \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \frac{\partial C_{TH}}{\partial \beta'}(D_{1,NH}, \hat{\beta}_T) \hat{\Sigma}_T \frac{\partial C_{TH}}{\partial \beta}(D_{1,NH}, \hat{\beta}_T) \quad (3.18)$$

avec $\hat{\Sigma}_T$ une matrice de pondération définie positive, estimée par la matrice Σ^* ([Gourieroux et al. \(1993\)](#)) :

$$\Sigma^* = J_0^{-1} \Gamma^* J_0^{-1} = I_0 \quad (3.19)$$

Pour les deux méthodes de calibration, inférence indirecte et EMM, la minimisation de la fonction objectif finale (équation (3.15) et (3.18)) est effectuée par la méthode d'optimisation par essaim particulière (*global Particle Swam Optimization* PSO) décrite dans la section 3.4.1.5 à venir.

3.4.1.3 Modèle auxiliaire

Le modèle auxiliaire doit être choisi en respectant les caractéristiques les plus importantes des données. Plusieurs modèles auxiliaires ont été proposés et utilisés dans la littérature, comme par exemple les modèles ARMA (1,1) et AR (10) (voir [Monfardini \(1998\)](#)), un modèle à combinaison de fonctions de distribution Normale (voir [Craine et al. \(2000\)](#)) et les modèles SNP (voir [Gallant and Tauchen \(1996\)](#)). [Monfardini \(1998\)](#) montre que le modèle auxiliaire AR(10) présente une bonne efficacité lorsque le modèle à calibrer est un modèle de diffusion à volatilité stochastique sans sauts. Ce modèle est déjà présenté

3.4. Modèle de diffusion avec sauts à volatilité stochastique : SV-JD

dans le Chapitre 1 par l'équation (1.3).

$$y_{t_i} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j y_{t_{i-j}} + \varepsilon_{t_i} \quad (1.3 \text{ rappel})$$

avec $\bar{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \sigma_\varepsilon^2\} = \{\alpha^*, \sigma_\varepsilon^2\}$ est le vecteur des paramètres du modèles. Dans le cas d'une calibration d'un modèle SV, y_t correspondent aux incréments au carré du processus (r_t^2) .

Le modèle AR(10) présente l'avantage d'avoir une fonction de maximum de vraisemblance explicite et qui peut être écrite sous la forme suivante :

$$C_T(\mathbf{y}, \bar{\alpha}) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma_\varepsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2(T-m)} (\mathbf{y} - \mathbf{Y}_{-m}(\bar{\alpha}^*))^T (\mathbf{y} - \mathbf{Y}_{-m}(\bar{\alpha}^*)) \quad (3.20)$$

avec :

$$\mathbf{y} = y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_T \quad (3.21)$$

$$\mathbf{y}_{-l} = (y_{m+1-l}, y_{m+2-l}, \dots, y_{T-l})^T \quad (3.22)$$

$$\mathbf{Y}_{-m} = (\mathbf{1}, \mathbf{y}_{-1}, \dots, \mathbf{y}_{-m})$$

Ce modèle auxiliaire est facile à introduire dans les méthodes de calibration à critère auxiliaire et présente une bonne efficacité pour la calibration des modèles SV. Cependant, les tests de calibration effectués ultérieurement dans ce chapitre montrent que ce modèle est insuffisant pour la calibration des modèles SV-JD. Le choix d'un modèle auxiliaire approprié reste un défi difficile lors de l'implémentation de la méthode d'inférence indirecte et de l'EMM.

3.4.1.4 Estimation par critères directs

Les méthodes de calibration à modèle auxiliaire dépendent en grande partie du choix du modèle auxiliaire. Des résultats non pertinents peuvent dériver d'un modèle auxiliaire mal choisi ou trop simplifié. En revanche, un modèle auxiliaire mieux adapté aux données réelles mais trop compliquée peut entraîner plus de complexité dans l'algorithme d'optimisation. L'estimation des paramètres du modèle auxiliaires à chaque étape de l'optimisation par simulation peut demander beaucoup de mémoire physique et de temps de calcul. Lorsque le choix d'un modèle auxiliaire simple et adapté aux donnés n'est pas trivial, nous proposons dans cette section des méthodes de calibration basées sur la simulation directe. Comme dans le cas de l'estimation indirecte, les méthodes d'estimation par simulations directes nécessitent la minimisation, par rapport au vecteur des paramètres du modèle ω , d'un certain critère d'adéquation.

Nous suggérons dans cette étape deux fonctions de minimisation à utiliser. Elles sont testées séparément : (1) la distance Kolmogorov calculée entre la fonction de répartition des incréments réels et celle des incréments simulés, (2) l'erreur quadratique moyenne calculée entre ces deux distributions. Un algorithme d'optimisation globale (PSO) est ensuite utilisée pour trouver la solution optimale $\hat{\omega}$ parmi toutes les valeurs possibles de $\omega \in \Omega$.

Distance de Kolmogorov $Dkstat$ La distance de Kolmogorov $Dkstat$ est un critère statistique utilisé pour tester la similitude des deux distributions de probabilité. Son calcul de cette est présenté dans la section 2.3.

Considérons l'ensemble de incréments relatifs $\Delta_{rel}S(t)$, de taille N , calculés pour les données réelles à partir de l'équation (2.1).

$$\Delta_{rel}X(t) = \frac{\Delta X(t)}{X(t)} = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X(t)} \quad (2.1 \text{ rappel})$$

La calibration par simulation directe avec le critère $Dkstat$ est effectuée par itérations suivant l'algorithme d'optimisation globale PSO (voir section 3.4.1.5). A chaque itération, et pour chaque vecteur des paramètres ω_i , une série d'incréments simulés de taille $N * H$ est créée à partir du modèle SV-JD correspondant à ω_i . La distance $Dkstat$ est ensuite calculée à partir de l'équation (2.3) :

$$Dkstat = \max_x (|F_{\omega_i}^{sim}(x) - F(x)^{\Delta_{rel}X(t)}|) \quad (2.3 \text{ rappel})$$

avec $F_{\omega_i}^{sim}$ la fonction de distribution cumulée des incréments simulés pour ω_i et $F(x)^{\Delta_{rel}X(t)}$ la fonction de distribution cumulée des incréments originaux. Notons que le nombre H doit être suffisamment grand afin d'assurer une estimation fiable de la distribution des incréments simulés $F_{\omega_i}^{emp}$ et la convergence de la fonction objectif pour chaque ω_i . Les changements des valeurs de ω_i sont ensuite effectuées suivant les règles de l'algorithme PSO. Les itérations se poursuivent ainsi jusqu'à l'obtention d'une valeur optimale de $Dkstat$.

Erreur quadratique moyenne MSECDF Une deuxième fonction objectif liée à la distribution des incréments est proposée. L'erreur quadratique entre les fonctions de distribution cumulative des incréments simulés et originaux est défini dans l'équation (3.23) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F_{\omega_i}^{sim}(x) - F^{\Delta_{rel}X(t)}(x)]^2 dx \quad (3.23)$$

3.4. Modèle de diffusion avec sauts à volatilité stochastique : SV-JD

En pratique, et pour le calcul numérique de ce critère, une approximation de la fonction objectif est écrite sous la forme suivante :

$$MSECDF = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M ([F_{\omega_i}^{sim}(x_i) - F^{\Delta_{rel}X(t)}(x_i)]^2) \quad (3.24)$$

où $x_{1,M} = x_1, x_2, \dots, x_M$ est un vecteur de M valeurs discrètes, successives, également séparées et couvrant l'intervalle $[x_{min}, x_{max}]$. Ce dernier est choisi d'une manière à couvrir tout le domaine d'appartenance des incréments originaux. L'optimisation de la fonction objectif (3.24) par rapport à $\omega \in \Omega$ est effectuée suivant l'algorithme PSO.

3.4.1.5 Algorithme d'optimisation PSO

L'optimisation par essaim particulaire (PSO en anglais) est une métaheuristique d'optimisation, inventée par [Eberhart et al. \(1995\)](#) (ingénieur en électricité) et [Kennedy and Eberhart \(1995\)](#) (socio-psychologue). Inspirée du monde vivant, et notamment du comportement et de déplacement des groupes des animaux vivant en essaims ou en troupeaux, cet algorithme d'optimisation itératif est fondé sur la notion de coopération entre des "individus" aux capacités assez limitées (peu de mémoires, connaissances locales, facultés de raisonnement limités...). Cette collaboration doit aboutir, globalement, à la résolution d'un problème difficile, comme par exemple, l'exploitation de sources de nourriture, construction de rayons, etc. Par ailleurs, ce modèle trop simple pour la simulation d'un comportement social, s'est révélé très efficace en tant qu'outil d'optimisation.

Description informelle Une description informelle de cette métaheuristique itérative est donnée par [Clerc and Siarry \(2004\)](#). A chaque itération, chaque "individu", représenté par une particule à situation variable dans le domaine de recherche, tend à améliorer sa situation en se déplaçant partiellement au hasard et partiellement selon des règles prédéfinies. Un essaim (troupe) de particules réparti aléatoirement sur l'espace de recherche (voir Figure 3.15) avec une vitesse initiale spécifique à chaque particule de l'essaim est tout d'abord défini. Nous pouvons décrire la suite de cet algorithme en se plaçant du point de vue d'une particule. A chaque itération la particule doit effectuer les démarches suivantes [Clerc and Siarry \(2004\)](#) :

1. évaluer la qualité de sa position, c.à.d. la valeur en cette position de la fonction à optimiser,
2. garder en mémoire sa meilleure performance, c.à.d. la meilleure position qu'elle a atteinte jusqu'ici (y inclus la position actuelle) et la qualité correspondant à cette position.

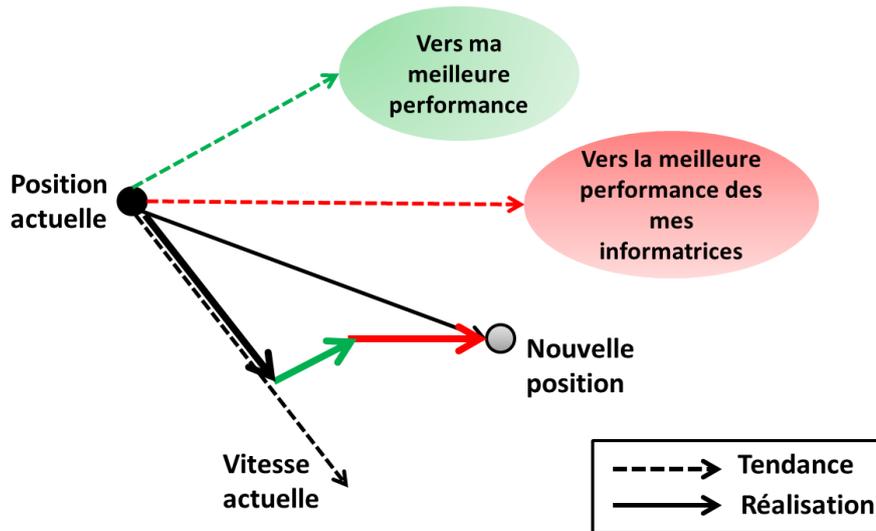


FIGURE 3.14 – Vitesse d’une particule et sa nouvelle position, adaptées après une itération PSO.

- interroger son ensemble d’informatrices et obtenir de chacune d’entre elles sa propre meilleure performance (et la qualité afférente). L’ensemble des informatrices d’une particule peut être constitué d’un certain nombre, ou de tout l’ensemble de ses congénères.
- choisir la meilleure des meilleures performances dont elle a connaissance, modifier sa vitesse en fonction de cette information et de ses propres données et se déplacer en conséquence.

La Figure 3.14 présente, pour un espace de recherche à deux dimensions, l’état d’une particule donnée suite à chaque itération. Un exemple de l’évolution des positions de plusieurs particules suivant l’algorithme PSO jusqu’à la convergence vers un optimum globale est présenté dans la Figure 3.15.

Formalisation Considérons un problème d’optimisation difficile, pour lequel la fonction d’optimisation est une fonction non-linéaire de ω constituée d éléments. Définissons ainsi l’espace de recherche ω de dimension d .

La première étape de PSO consiste à choisir aléatoirement une population de N_p particules (Par_i) à valeurs $\omega_i \in \Omega$, avec $i = 1 : N_p$. A chaque particule on associe une position $Pos_i = (Pos_{i1}, Pos_{i2}, \dots, Pos_{id})$ et une vitesse $Vit_i = (Vit_{i1}, Vit_{i2}, \dots, Vit_{id})$ propres et variables à chaque itération. La position et la vitesse initiales associées à la i -ème particule à la k -ième itération sont respectivement nommées Pos_i^k et Vit_i^k . Sachant que la position et la vitesse initiales d’une particule donnée, Pos_i^0 et Vit_i^0 , sont choisies

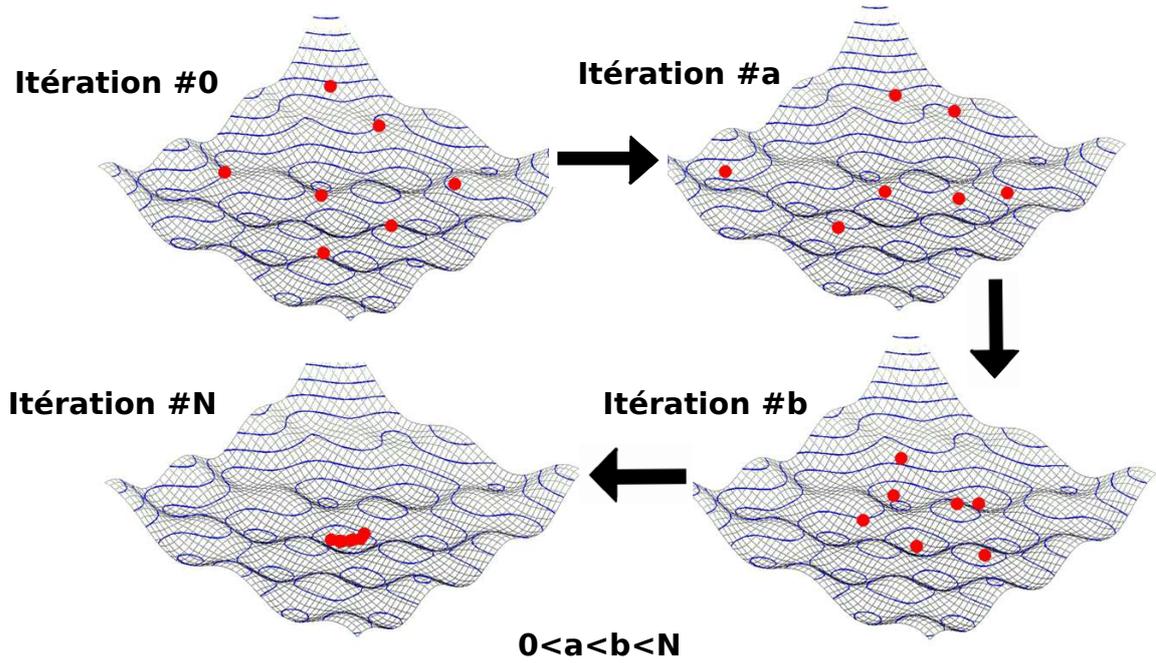


FIGURE 3.15 – Exemple de changement de positions des particules suivant l'algorithme PSO.

aléatoirement par le programme ou par l'utilisateur.

L'algorithme PSO explore ensuite un hyperespace d -dimensionnel à la recherche d'un optimum global. A l'itération k la fonction objectif est évaluée pour toutes les particules de la population. La meilleure performance personnelle de chaque particule (Par_i) est enregistrée. A savoir, la valeur maximale (ou minimale) de la fonction objectif dans l'historique de la particule Par_i jusqu'à l'instant actuel (itération k), ainsi que la position associée à cette valeur, sont toutes les deux enregistrées, respectivement sous les variables $fpbest_i$ et $pbest_i$ associée à la particule Par_i . D'ailleurs, la meilleure performance globale représentant la valeur maximale de la fonction objectif ainsi que la position associée est enregistrée dans les variables $fgbest$ et $gbest$. A l'itération $k + 1$, les vitesses Vit_i^{k+1} et les positions Pos_i^{k+1} des particules sont mises à jour en utilisant les équations suivantes :

$$Vit_{iq}^{k+1} = c_1 \cdot Vit_{iq}^k + u_1 \cdot (pbest_{iq} - Pos_{iq}^k) + u_2 \cdot (gbest_q - Pos_{iq}^k) \quad (3.25)$$

$$Pos_{iq}^{k+1} = Pos_{iq}^k + Vit_{iq}^{k+1} \quad (3.26)$$

pour $q = 1 : d$, u_1, u_2 deux variables aléatoires simulées à chaque itération suivant une loi uniforme $U(0, c_{max})$ et c_1 et c_{max} deux paramètres constants. Pour une bonne convergence, les valeurs de c_1 et c_{max} ne doivent pas être choisies indépendamment [Clerc and Kennedy](#)

(2002); Trelea (2003). En pratique, c_1 doit être un peu inférieur à 1 et c_{max} peut être calculé par la formule $c_{max} = (2/0.97725) * c_1$ Clerc and Siarry (2004). L'exploration de l'espace de recherche peut être améliorée pour c_1 plus proche de 1, au détriment, de la vitesse de convergence.

Le PSO est aujourd'hui considéré comme un algorithme d'optimisation simple à comprendre, à programmer et à utiliser. Grâce à ses propriétés intéressantes, cet algorithme se révèle particulièrement efficace pour la résolution des problèmes d'optimisation non linéaires, à variables continues, entières ou mixtes (certaines variables étant réelles et d'autres entières). D'où notre choix du PSO pour l'optimisation des différentes fonctions objectifs servant à l'estimation de huit paramètres du modèles SV-JD. Dans notre cas, et pour les différentes fonctions objectif nous avons : $N_p = 24$ et $d = 8$.

3.4.2 Tests des méthodes de calibration

Afin de valider et de choisir une des méthodes et des critères de calibration du modèle SV-JD, les méthodes de calibration basées sur la simulation directe et celles sur un modèle et un critère auxiliaires sont testées dans cette section. La série des données de test est formée d'une trajectoire $Y(t)$ simulée à partir d'un processus SV-JD et pour un vecteur des paramètres $\omega = (350; 1; 10; -0, 25; 0, 1; 100; -0, 04; 0, 06)$.

La calibration du modèle SV-JD est alors effectuée pour cette trajectoire selon les méthodes d'estimation proposées dans les paragraphes précédents. Notons que pour la calibration basée sur un auxiliaire, nous choisissons le modèle AR(10), proposé par Monfardini (1998) comme un modèle auxiliaire convenable pour la calibration des modèles SV.

Les résultats de la calibration du modèle SV-JD en utilisant les différentes méthodes et critères, sont donnés dans le Tableau 3.10. D'après ce tableau, les résultats de la calibration par inférence indirecte et EMM ne sont pas pertinents. Ce qui peut être principalement dû à un mauvais choix du modèle auxiliaire et au grand nombre de paramètres primaires et auxiliaires à estimer. Ainsi nous remarquons que le modèle AR(10), prouvant une bonne performance pour la calibration des modèles SV sans sauts, semble être un choix non convenable lorsque le modèle SV à calibrer est associé à un processus de sauts additionnel. D'autres modèles auxiliaires ayant des propriétés similaires aux données réelles peuvent être suggérés et utilisés. Toutefois, il est important de noter que l'utilisation d'un modèle auxiliaire plus compliqué, avec un grand nombre des paramètres, introduit plus de complexité dans la fonction objectif et par la suite dans la procédure d'estimation. Le processus de calibration peut donc devenir plus lent et perdre son intérêt.

Quant à la calibration à base de simulation directe et des critères *Dkstat* et

3.4. Modèle de diffusion avec sauts à volatilité stochastique : SV-JD

Paramètre	Réel	Inf. Indirecte	EMM	Dkstat	MSECDF
μ_d	0,1	0,02525	-1	0,32463	0,80298
κ_V	350	618,26699	292,57664	371,66104	323,07679
θ_V	1	2,42881	0,22926	0,40331	0,45519
σ_V	10	7,28716	6,18433	14,7512	13,29064
ρ_V	-0,25	0,6	1	0,43404	0,23502
λ_J	100	143,51389	236,36662	179,53571	120
Q_a	-0,04	-0,36027	-0,05459	-0,0618	-0,11659
Q_b	0,06	0,44778	0,01185	0,06828	0,11434

Tableau 3.10 – Calibration du modèle SV-JD pour les données de test.

MSECDF, nous remarquons que les paramètres du modèle SV-JD semblent être mieux estimés. De manière générale, aucune des quatre méthodes de calibration n'aboutit à une estimation suffisamment fiable des paramètres du modèle.

Statistique	Réel	Inf. Indirecte	EMM	Dkstat	MSECDF
Moyenne	0,0046	0,03975	-0,02275	0,00411	0,00247
Variance	0,0044	0,04913	0,00141	0,00432	0,00483
Std	0,0666	0,22166	0,03749	0,06572	0,06951
Max	0,3192	0,80593	0,12431	0,33379	0,29263
Min	-0,2567	-0,59211	-0,18965	-0,44419	-0,27166
Médian	0,0513	0,1694	0,02954	0,04966	0,05314
Coef. d'asymétrie	0,0774	0,56496	-0,02765	-0,05523	0,03184
Coef. d'aplatissement	3,9279	3,26076	3,34619	4,66509	3,52834
Dkstat	--	0,2412	0,278	0,0172	0,0216
Décision	--	H_1	H_1	H_0	H_0

Tableau 3.11 – Comparaison statistique entre les incréments relatifs $\Delta_{rel}X(t)$ des données test et ceux des données simulés à partir des modèles SV-JD calibrés.

Toutefois, les résultats de la comparaison statistique entre les incréments relatifs de la trajectoire test, et ceux des trajectoires simulées à partir des différents modèles calibrés, montrent que les modèles calibrés par la méthode de simulation directe présentent une capacité acceptable à reproduire les premières caractéristiques statistiques des données test. Ces résultats sont présentés dans le Tableau 3.13 ainsi que la distance de Kolmogorov et la décision associée. Nous remarquons que le test de Kolmogorov confirme que, malgré la différence relativement remarquable dans les valeurs des paramètres du modèle, le modèle

Paramètre	Dkstat	MSECDF
μ_d	-0,36921	0,33054
κ_V	129,16189	350,40451
θ_V	0	0
σ_V	4,42088	2,96653
ρ_V	-0,33034	0,43614
λ_J	228,30827	100
Q_a	-0,0052	-0,02947
Q_b	0,01131	0,02892

Tableau 3.12 – Calibration du modèle SV-JD pour l'indicateur numéro 6.

SV-JD calibré par la méthode de simulation directe (avec le critère *Dkstat* ou *MSECDF*) est capable de bien représenter la distribution réelle des incréments du modèle test. En effet, la validation du modèle calibré par le test de Kolmogorov malgré la différence entre les paramètres réels et estimés, montre que des modèles SV-JD de paramètres différents, peuvent aboutir à des dynamiques similaires. Ceci peut être dû à un chevauchement de l'effet de la volatilité stochastique et continuellement fluctuante avec celui des chocs aléatoires pouvant affecter la dynamique du système étudié. La difficulté de séparation des incréments causés par des sauts, de ceux causés par une évolution continue à volatilité variable, semble apporter plus de complexité dans la procédure de calibration et peut être à l'origine d'une mauvaise estimation des paramètres.

Dans la suite, nous procédons donc à la calibration du modèle SV-JD pour l'indicateur numéro 6 en utilisant les méthodes de calibration par simulation directe à base des deux critères, *Dkstat* et *MSECDF*.

3.4.3 Résultats empiriques

Les résultats de la calibration du modèle SV-JD pour l'indicateur numéro 6 ainsi que la comparaison statistique correspondante sont représentés, respectivement dans les Tableaux 3.12 et 3.13. Ces résultats montrent un rapprochement des caractéristiques du modèle calibré à celle des données réelles. Pourtant, ce modèle reste inadapté pour la représentation de la dynamique de nos indicateurs. Ce qui peut être déduit par le test de Kolmogorov présenté dans le Tableau 3.13. Dans la suite nous testons la capacité du modèle SV-JD pour la représentation de l'évolution de l'indicateur numéro 6, en comparant la performance de ce dernier avec celle des modèles 3RS-JDU et 6RS-JDU.

La Figure 3.16 montre une comparaison de la distribution des incréments de l'indica-

3.4. Modèle de diffusion avec sauts à volatilité stochastique : SV-JD

Statistique	Réel	Dkstat	MSECDF
Moyenne	0,00043	0,00124	0,00132
Variance	0,00023	0,0002	0,00019
Std	0,015	0,01422	0,01367
Max	0,114	0,08842	0,067
Min	-0,0849	-0,11106	-0,0651
Médian	0,0106	0,01036	0,01
Coef. d'asymétrie	0,0208	0,09364	0,03304
Coef. d'aplatissement	7,5978	6,08873	4,03291
Dkstat	0	0,02473	0,04233
Décision	0	H_1	H_1

Tableau 3.13 – Comparaison statistique entre les incréments relatifs $\Delta_{rel}X(t)$ de l'indicateur numéro 6 et ceux des données simulés à partir des modèles SV-JD calibrés.

teur numéro 6 par rapport à celles des 4 modèles en considération. Nous remarquons que le modèle 6RS-JDU présente la meilleure représentation de la distribution des incréments. La considération d'une variation continue de la volatilité n'apporte pas d'amélioration au modèle de diffusion avec sauts déjà défini. Cette déduction est encore une fois confirmée par la Figure 3.17. Dans cette figure, la moyenne des incréments du modèle calibré, plus élevée que dans la réalité, et remarquée dans le Tableau 3.13, se traduit par des intervalles d'évolution plus élevée que la trajectoire de l'indicateur.

S'intéressant également à ce que le modèle choisi soit capable de reproduire les caractéristiques de la volatilité de l'indicateur et non seulement celles de ses incréments et de sa trajectoire initiale, une comparaison de la dynamique de la volatilité historique tirée à partir des différents modèles est effectuée. La Figure 3.18 présente un exemple de la trajectoire de la volatilité historique périodique pour chacun des modèles calibrés. Dans cette figure l'évolution de la volatilité périodique réelle est également représentée. Nous présentons la Figure 3.19 une comparaison entre la distribution de la volatilité périodique réelle et celles simulées à partir des différents modèles. Tous ces résultats montrent que le modèle SV-JD est mieux adapté aux données réelles que le modèle 3RS-JDU. Pourtant, ce modèle n'apporte pas d'amélioration aux modèles JD à changement de régime. Le modèle 6RS-JDU, considérant des changements des paramètres sur un ensemble d'état discret avec une décomposition plus fine de l'axe de temps, semble être le modèle le plus adapté pour nos données parmi ces trois modèles testés.

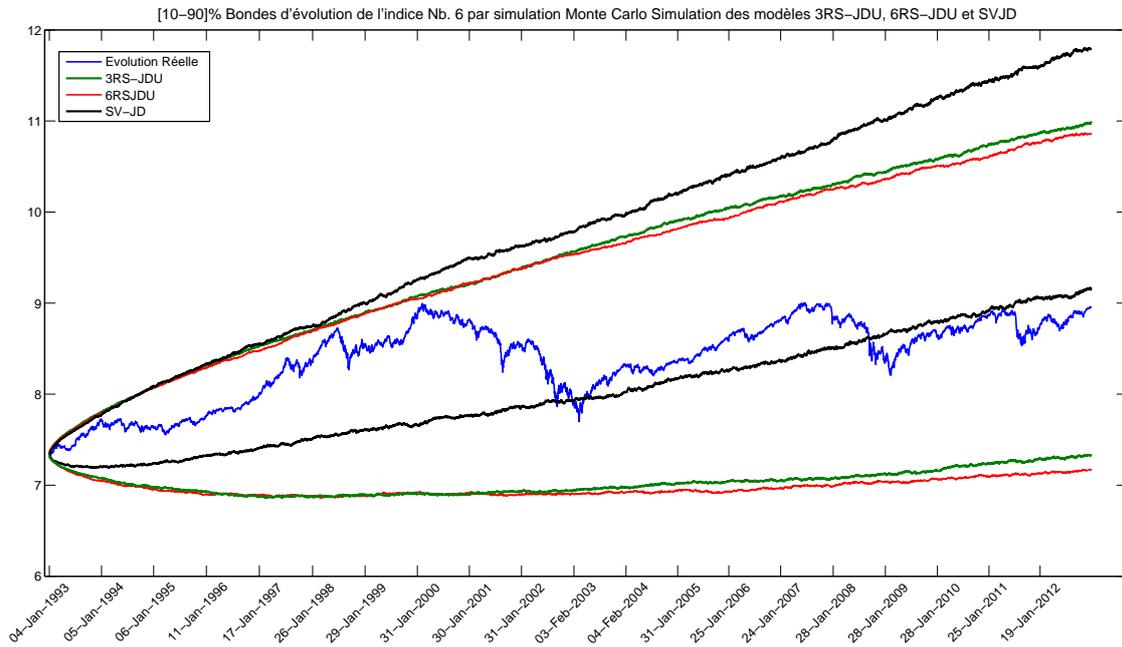


FIGURE 3.16 – Comparaison des fonctions de distribution des incréments simulés à partir des modèles 3RS-JDU, 6RS-JDU et SV-JD par rapport à celle de l'indicateur numéro 6.

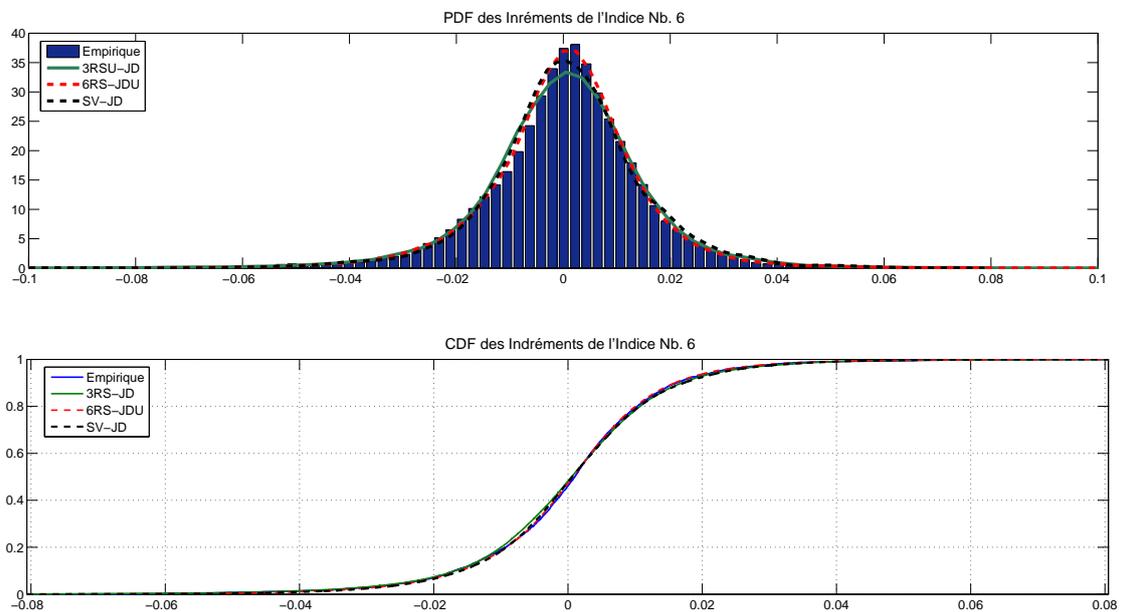


FIGURE 3.17 – Intervalles de confiance de $[10, 90]\%$ calculées pour l'indicateur numéro 6 à partir des simulations Monte Carlo des modèles 3RS-JDU, 6RS-JDU et SV-JD.

3.4. Modèle de diffusion avec sauts à volatilité stochastique : SV-JD

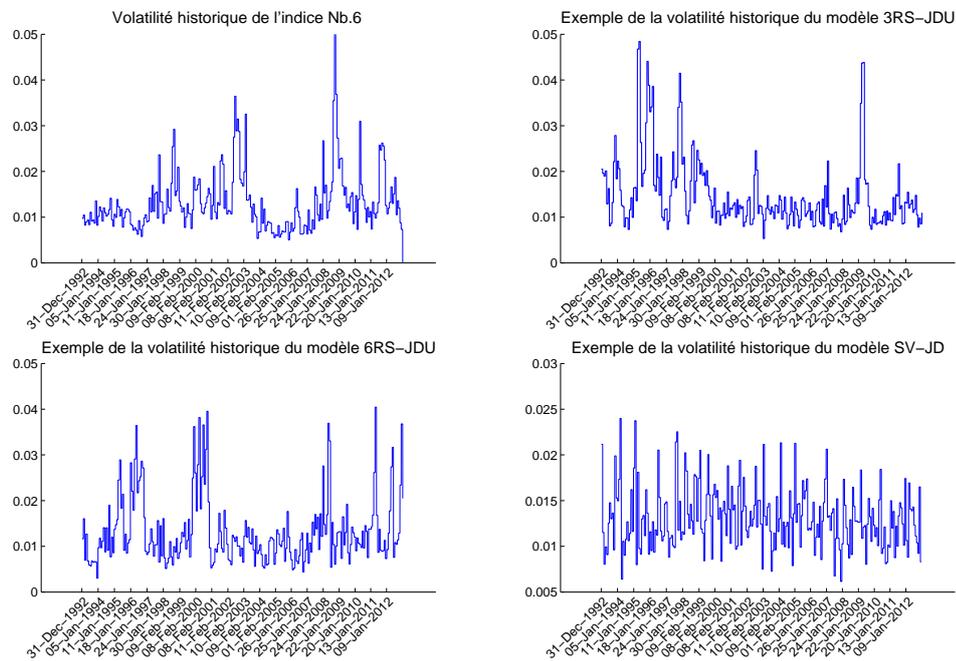


FIGURE 3.18 – Exemples l'évolution de la volatilité périodique des modèles 3RS-JDU, 6RS-JDU et SV-JDU ainsi que celle de l'indicateur numéro 6.

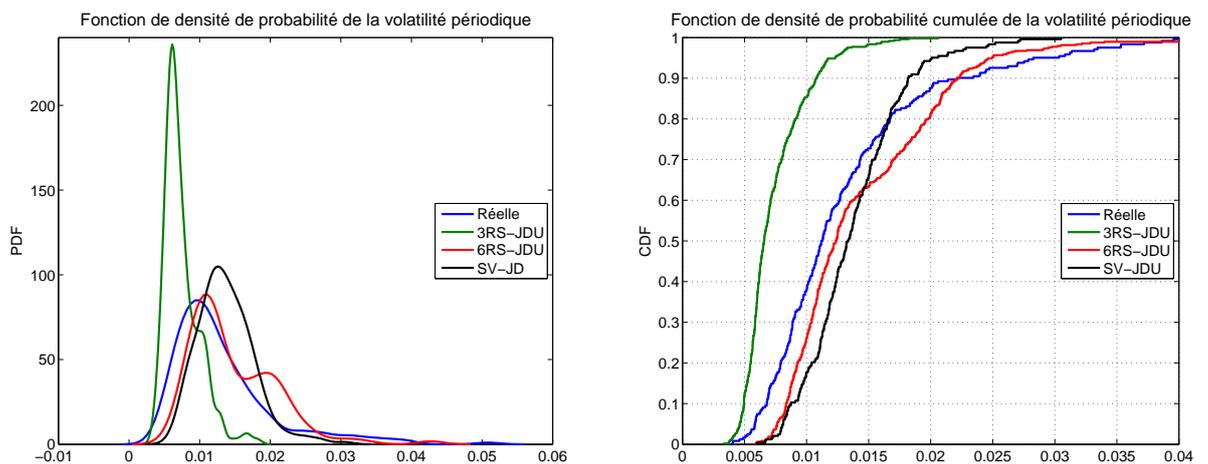


FIGURE 3.19 – PDF et CDF de la volatilité périodique simulée par des modèles 3RS-JDU, 6RS-JDU et SV-JDU ainsi que celle de l'indicateur numéro 6.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons testé la modélisation de nos indicateurs par trois modèles différents. Ces trois modèles, JD, RS-JD et SV-JD, sont tous basés sur un processus de Wiener. Ils représentent conjointement une évolution continue de la dynamique, additionnée à un processus de Poisson composé et des sauts discontinus et occasionnels. Les différentes méthodes de calibration pour chaque modèle sont présentées. Un exemple de la calibration de chacun de ces trois modèles pour l'indicateur numéro 6 est donné. Des tests d'adéquation et d'utilité des modèles calibrés sont effectués.

Le premier modèle considère une évolution à paramètres constants avec le temps. Notamment, la volatilité du processus est représentée par le paramètre σ_d constant. Pour tenir compte de la variation de la volatilité avec le temps, ainsi que du phénomène de "volatilité clustering", des modèles JD à changement de régimes RS-JDU sont testés. La volatilité σ_d , ainsi que les autres paramètres du modèle sont considérés variables. Ces paramètres, contrôlés par une covariable environnementale, évoluent sur un espace d'état discret. Deux versions du modèle RS-JDU sont proposées. Un modèle à trois régimes (3RS-JDU) est tout d'abord défini. Le modèle à 6RS-JDU, considérant une division plus fine de l'axe de temps, et par suite des variations plus rapides des paramètres, est ensuite testé. La comparaison entre les résultats de ces deux versions montre qu'une variation plus rapide des paramètres peut présenter une meilleure adéquation à la dynamique de nos indicateurs. Ainsi, un modèle à volatilité stochastique SV-JD est considéré. Les méthodes de calibration de ce dernier se basent principalement sur la simulation. Plusieurs méthodes de calibration sont présentées et testées. Les résultats de la calibration du modèle SV-JD pour notre indicateur sont ensuite exposés.

Les tests d'adéquation et d'utilité, ainsi que la comparaison effectuée entre les résultats des différents modèles, montrent que le modèle 6RS-JDU présente la meilleure adéquation par rapport à nos données. Ce modèle se montre à la fois générale pour capturer les principales caractéristiques de nos données et de leur volatilité, et assez simple pour la calibration, le calcul stochastique et la simulation. En revanche, plusieurs problèmes de calibration et de capacité de manipulation sont remarqués pour les modèles SV-JD.

Options réelles et aide à la décision pour la maintenance des turbines éoliennes

Sommaire

4.1	Position du problème	140
4.2	Stratégies de maintenance traditionnelles	143
4.2.1	Maintenance corrective	144
4.2.2	Maintenance périodique	144
4.2.3	Maintenance conditionnelle et prédictive	146
4.3	Approche pour l'optimisation de la décision	146
4.3.1	Modèles et hypothèses	147
4.3.2	Option réelle : "Attendre avant d'Agir"	152
4.3.3	Évaluation de l'option	153
4.4	Application de l'approche sur un cas test	157
4.5	Conclusion	163

Objectif : Dans la première étape de cette thèse nous avons exploré des processus stochastiques basés sur le mouvement brownien géométrique et un processus de sauts. Ces processus ont servi à modéliser nos séries de données à évolution non-monotone, exposée à des variations environnementales ou à des impulsions brusques. Dans cette étape, nous exploitons ces modèles de diffusion avec sauts comme base de modélisation de différents phénomènes non-monotones que l'on peut notamment retrouver dans les comportements de certains processus et indices de dégradation ou de production des systèmes industriels. Ainsi, une stratégie pour l'aide à la décision concernant la maintenance conditionnelle de ces systèmes est proposée. Nous traitons particulièrement le cas des turbines éoliennes. Notre stratégie de décision s'appuie principalement sur la théorie des options réelles et sur l'évaluation de ces dernières par des simulations Monte Carlo.

4.1 Position du problème

En 1997, le protocole de Kyoto visant à la réduction des émissions de gaz à effet de serre vient s'ajouter à la Convention-cadre des Nations Unies sur les changements climatiques. Depuis, et notamment au cours de la dernière décennie, l'industrie de l'énergie renouvelable a reconnu une forte croissance. Particulièrement, l'énergie éolienne est aujourd'hui à la pointe des sources d'énergie renouvelable utilisées dans le monde entier. Aux États-Unis, par exemple, la contribution de l'énergie éolienne dans la production de l'électricité doit atteindre, en 2030, une proportion de 20% de la totalité de consommation d'énergie [Lindenberg \(2009\)](#). En Europe, et d'après le rapport de l'association européenne de l'énergie éolienne (*European Wind Energy Association*), l'énergie éolienne représentait 6,3% de l'électricité produite en 2012, et 21,4% de la capacité de production installée en 2011⁴. L'objectif de l'association est d'atteindre 230 GW de puissance éolienne installée en Europe à la fin de 2020, dont 40 GW produite par des parcs éoliens offshore (en mer)⁵. Grâce aux ressources éoliennes plus élevées, à la disponibilité de l'espace et à leur faible impact visuel et sonore, les parcs éoliens offshore trouvent de plus en plus leur place dans la production d'énergie éolienne en Europe⁶.

Cependant, les parcs éoliens, onshore et offshore, font face à de nombreux défis qui pourraient entraver leur compétitivité dans le marché de la production d'énergie. Les turbines éoliennes sont exposées à des conditions climatiques très variables et difficiles, y compris des vents violents, la chaleur tropicale, la foudre, le froid arctique, la grêle et la neige. A cause de ces variations externes les turbines subissent en permanence une évolution des charges, qui se traduisent par des conditions de fonctionnement très variables entraînant des contraintes mécaniques intenses et des risques de panne élevés [Ribrant \(2006\)](#). La gestion de la disponibilité des turbines, en fonction de la fiabilité et de la maintenabilité, est une question importante à aborder. La disponibilité des turbines ainsi que le coût d'entretien et de maintenance des parcs éoliens, ont un impact direct sur la rentabilité économique des parcs éoliens et par suite sur la tendance d'investissements dans ce domaine.

Même si la disponibilité est typiquement de l'ordre 95% pour une centrale éolienne terrestre (onshore), elle peut être aussi faible que 60% pour des parcs éoliens offshore en raison de défaillances en série et des conditions météorologiques difficiles [Tavner et al.](#)

4. "Wind in Power – 2011 European Statistics", Technical report, European Wind Energy Association, February 2012.

5. "Annual Report 2010 – Powering the energy debate", Technical Report, European Wind Energy Association, 2011

6. "Offshore Wind in Europe – 2010 Market Report", Technical Report, KPMG/ German Offshore Wind Energy Foundation, 2010.

4.1. Position du problème

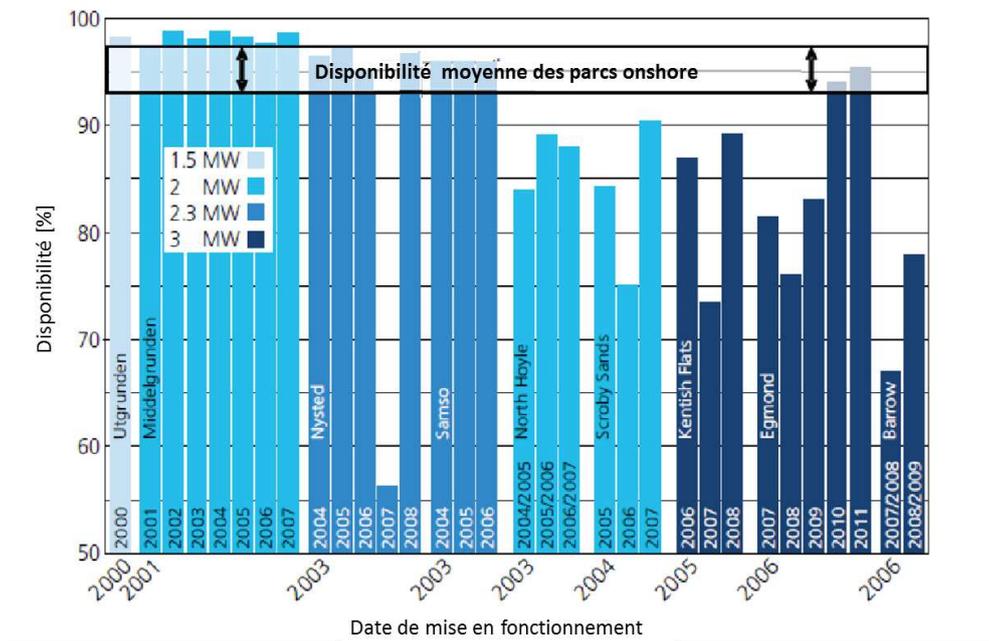


FIGURE 4.1 – Pourcentage de disponibilité - par an - de certains parcs éoliens offshore [Faulstich et al. \(2010\)](#).

(2010). Ceci peut être également remarqué par le diagramme de disponibilité pour les centrales éoliennes offshore présenté dans la Figure 4.1.

En outre, le coût d'exploitation et de maintenance des parcs éoliens présente généralement une somme importante et forme une partie non négligeable du coût moyen de la production. Pour les parcs offshore, ce coût peut atteindre jusqu'à 30% du coût de la production de l'énergie [Engels et al. \(2009\)](#). Un exemple de l'estimation des coûts de maintenance, pour le parc éolien offshore de Horns Rev au Danemark, est donné par [Besnard \(2013\)](#). Pour ce parc, et à cause de certaines séries de défaillances précoces, le coût de maintenance s'élève à presque 40% du coût du cycle de vie des turbines (life-cycle-cost). La répartition du coût de maintenance du parc est présentée par les auteurs dans le diagramme de la Figure 4.2. Ce coût est effectivement réparti entre les différentes tâches indispensables pour un fonctionnement correct du système. Nous remarquons que parmi ces tâches, les opérations de maintenance corrective, de remplacement des composants et de rénovations majeures sont les principaux facteurs contribuant à l'augmentation du coût de maintenance. En plus du coût de maintenance corrective, la défaillance précoce d'une turbine éolienne, due à une panne dans l'un ou plusieurs de ses sous-systèmes principaux (systèmes d'électroniques et de puissance, boîte de vitesses, système hydraulique et système de contrôle...), entraîne généralement une période d'indisponibilité non

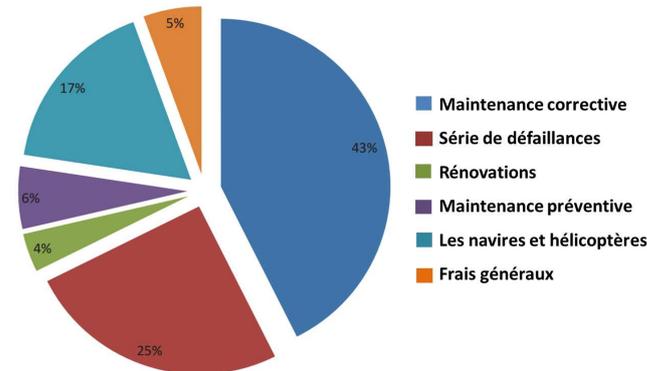


FIGURE 4.2 – Répartition du coût d'entretien d'un parc éolien entre les différentes tâches [Besnard \(2013\)](#).

négligeable et d'éventuelles pénalités financières. Ces pénalités peuvent être sous forme de frais supplémentaires dus à l'obligation d'acheter ou produire par d'autres moyens, l'énergie nécessaire pour compléter la puissance exigée par la charge de la centrale éolienne [Sandborn et al. \(2014\)](#). La durée d'arrêt de la turbine suite à une défaillance correspond principalement au temps nécessaire pour la détection du défaut, la planification de la maintenance, la commande des pièces pour le remplacement etc. Cette durée peut être encore plus importante pour les centrales offshore, pour lesquelles la logistique présente des contraintes additionnelles. Pour ces parcs, la logistique doit être planifiée en fonction de la distance du rivage et des conditions météorologiques sur le site. Le transport des techniciens et des matériels doit être effectué par des navires spécifiques. Les contraintes liées à la hauteur des vagues peuvent conduire à une mauvaise accessibilité et par la suite à un temps d'arrêt plus élevé. Le cas échéant le transport sera fait pas des hélicoptères. Les deux alternatives sont coûteuses. L'organisation du soutien logistique et de la maintenance pour les parcs éoliens offshore deviendra encore plus cruciale pour les nouveaux projets en cours d'installation, à des distances plus éloignées des côtes, avec une profondeur d'eau plus importante et des conditions environnementales plus sévères [Besnard \(2013\)](#).

La stratégie de maintenance est donc l'un des facteurs qui a le plus d'impact sur la performance des turbines et des parcs éoliens (disponibilité, temps d'arrêt, productivité, coût de production et du cycle de vie...). Ainsi, l'amélioration de la productivité des parcs éoliens et du retour sur investissement dans ces derniers, nécessitent la mise en place d'une stratégie de maintenance bien appropriée, techniquement réalisable et économiquement viable. A signaler que "le revenu net d'un parc éolien est calculé comme étant le chiffre d'affaires généré par la vente de l'électricité produite par ce parc, moins les dépenses sur toutes les actions d'exploitation et de maintenance" [Leaney et al. \(1999\)](#).

4.2. Stratégies de maintenance traditionnelles

On note qu'une estimation du coût d'énergie (COE) produite par une turbine éolienne peut être donnée par la formule (4.1) de Oliveira and Fernandes (2012), où CII est le coût initial de l'investissement, TAC le taux annuel de remboursement du coût d'investissement (fixe), EN la production annuelle d'énergie en kWh et OM le coût annuel des opérations d'exploitation et de maintenance :

$$COE = \frac{CII.TAC + OM}{EN} \quad (4.1)$$

Sachant que CII et TAC sont fixes, la valeur de OM constitue le seul facteur variable dans le coût de production. La valeur de ce facteur dépend à son tour de la stratégie de maintenance adoptée par l'opérateur.

Dans ce qui suit nous présentons les différentes stratégies adoptées couramment pour la maintenance des parcs éoliens. Nous supposons ensuite, une approche de prise de décision pour la maintenance conditionnelle prédictive. Pour notre cas d'étude, nous proposons que la dégradation du système, ainsi que la production associée, peuvent être représentées par des processus stochastiques non-monotones. S'appuyant sur le concept des "options réelles" et sur l'évaluation du prix de ces dernières, une méthode d'aide à la décision concernant la planification des actions de maintenance est proposée.

4.2 Stratégies de maintenance traditionnelles

Les turbines éoliennes sont souvent achetées avec 2 à 5 ans de service après-vente. Ces services comprennent entre autres les garanties et les stratégies de maintenance correctives et préventives. Ces stratégies de maintenance (correctives et/ou préventives) sont le plus souvent adoptées par les opérateurs des parcs éoliens à l'expiration de la durée du contrat afin de conserver un bon fonctionnement des éoliennes Verbruggen et al. (2002).

Dans leur rapport final pour "Concerted Action on offshore Wind Energy in Europe" Garrad et al. (2002) proposent quatre stratégies de maintenance à appliquer pour les parcs éoliens offshore en Europe :

- *Sans-maintenance* : aucune maintenance corrective ni préventive n'est effectuée à part les révisions majeures des turbines. Néanmoins, ces révisions doivent être effectuées une fois tous les cinq ans.
- *Maintenance uniquement corrective* : les réparations sont effectuées après qu'un certain nombre (fixé au préalable) des turbines éoliennes soient tombées en panne.
- *Maintenance opportuniste* : des activités de maintenance corrective sont exécutées sur demande, tout en profitant de cette opportunité pour effectuer une éventuelle maintenance préventive en même temps.

- *Maintenance périodique* : consiste à effectuer des visites périodiques, qui servent à la fois pour la planification et l'application des activités de maintenance préventive ainsi que des mesures correctives. Une équipe permanente dédiée à la maintenance est nécessaire.

En général, et comme pour la plupart des domaines industriels, les stratégies traditionnelles de maintenance des turbines éoliennes peuvent être classées en trois groupes principaux : la maintenance corrective et réactive (*run-to-failure*), la maintenance périodique ou basé sur l'âge et la maintenance préventive conditionnelle et prédictive (basée sur la surveillance et le pronostic).

4.2.1 Maintenance corrective

Les deux premières stratégies de Garrad et al. (2002) (sans-maintenance ou maintenance uniquement corrective) font, toutes les deux, partie des stratégies de maintenance corrective basées sur la défaillance (*run-to-failure*). Ces stratégies consistent à appliquer les tâches de maintenance suite à la détection d'un problème de fonctionnement ou d'un état de défaillance de la machine. On cite par exemple, l'usure des matériaux et des composants, les défauts de conception, les défauts des facteurs opérationnels tels que la vitesse, les vibrations et la pression d'huile dans la boîte de vitesses, une activation prématurée des freins, un échec de la synchronisation, etc. Hameed et al. (2009). La détection de ces problèmes est possible lors d'une inspection de routine ou lorsque le système de surveillance et protection arrête le fonctionnement de la turbine suite à l'apparition d'un défaut Andrawus (2008).

Ainsi, les stratégies de maintenance sont généralement adoptées lorsque les conséquences de la défaillance n'entraînent ni des pertes importantes de revenus, ni de non-satisfaction des clients, ni des impacts sur la sécurité Andrawus (2008)... Cependant, les défaillances des composants critiques d'une turbine éolienne peuvent être catastrophiques et avoir des conséquences aussi graves au niveau de la sécurité et de l'environnement qu'au niveau de la production, de la fiabilité du réseau électrique et du revenu. Les stratégies de maintenance uniquement corrective sont ainsi évitées dans la plupart des parcs éoliens, notamment les parcs offshore.

4.2.2 Maintenance périodique

La stratégie de maintenance préventive périodique consiste à effectuer des tâches de maintenance à des intervalles de temps (ou de cycles/heures de fonctionnement) réguliers et prédéterminés. Cette stratégie suppose que le comportement et les défaillances des turbines pendant cette période sont prévisibles. Elle est souvent mise en œuvre pour éviter

4.2. Stratégies de maintenance traditionnelles

la panne d'une turbine, et par conséquent pour réduire considérablement le temps d'arrêt du système ainsi que les coûts de pénalité et de maintenance résultant de sa défaillance. Cependant, le choix d'un intervalle d'inter-maintenance correct reste à optimiser. Trop excessive, la maintenance préventive peut entraîner des coûts supplémentaires des remplacements non nécessaires des composants en bon états. Par contre, si l'intervalle entre les activités de maintenance est trop long, des défaillances inattendues peuvent se reproduire fréquemment. On note que les turbines éoliennes sont généralement conçues pour une durée de vie opérationnelle de 20 ans [Hahn et al. \(2007\)](#). Le service de maintenance périodique pour une turbine est souvent réalisé deux fois par an [Conover et al. \(2000\)](#); [Verbruggen et al. \(2002\)](#).

Pour illustrer la différence entre les deux stratégies de maintenance traditionnelles (corrective et préventive périodique), nous représentons dans la Figure 4.3 le coût total de maintenance associé à ces dernières. Pour la maintenance préventive, le coût des actions de maintenance prévisionnelle est assez élevé, alors que le coût de la réparation est faible parce le système est remis à neuf avant que des défaillances potentielles ne se produisent. Dans une stratégie de maintenance corrective, un plus grand nombre de défauts est susceptible de se produire. Ceci conduit à un coût de réparation élevé et un faible coût pour les actions de maintenance prévisionnelle. Comme le montre le graphique, une combinaison de stratégies préventives et correctives peut améliorer la fiabilité, la disponibilité et la maintenabilité des turbines, tout en réduisant simultanément les coûts de maintenance [Byon et al. \(2010\)](#); [Orsagh et al. \(2006\)](#); [Ribrant \(2006\)](#).

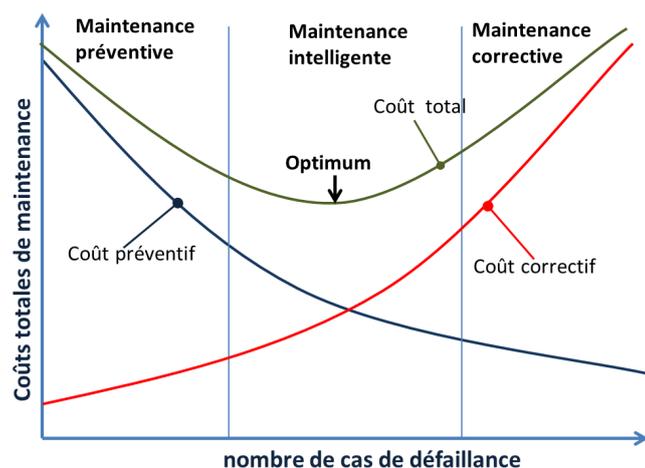


FIGURE 4.3 – Coûts de maintenance associés aux différentes stratégies de maintenance traditionnelles [Orsagh et al. \(2006\)](#).

4.2.3 Maintenance conditionnelle et prédictive

La maintenance périodique s'avère être utile lorsque les turbines et leurs composants principaux fonctionnent dans un environnement stable où la dégradation future est plus facilement prévisible [Carroll et al. \(2015\)](#). Pourtant, lorsque ces équipements fonctionnent dans des conditions variables, comme par exemple dans le cas des parcs offshore, la maintenance périodique peut être trop coûteuse en terme de temps et de ressources, ou insuffisante pour éviter les défaillances précoces et les longues périodes d'indisponibilité.

La mise en place d'un système de surveillance et d'inspection peut potentiellement aider à l'amélioration de la maintenance en fonction de l'état réel du système. Ceci est indispensable pour éviter les pannes et augmenter les rendements énergétiques et économiques du parc éolien, tout en diminuant les dépenses excessives et inutiles.

Aujourd'hui, de nombreuses industries ont mis en place des systèmes de pronostics et de surveillance (*Prognostics and System Health Management* PHM). Ces derniers ont pour rôle de surveiller le fonctionnement de la machine et de signaler toute anomalie ou possibilité de défaillance avant que cette dernière ne survienne. Le système de surveillance des éoliennes peut comprendre des analyses vibratoires de la boîte de vitesses, l'analyse de l'huile généralement effectué hors ligne, l'analyse des débris d'usure, l'analyse des lames généralement effectué hors ligne en examinant les conditions physiques des matériaux, l'analyse des composantes de la boîte de puissance et celle du contrôle électronique [Hameed et al. \(2009\)](#). Le rôle important du PHM sera de fournir des informations sur l'état de dégradation du système ou de l'un de ses composants ainsi que sur sa durée de vie résiduelle (RUL). Ces informations permettent à l'opérateur de gérer en avance les interventions et de mettre en œuvre des stratégies de maintenance et de prendre des décisions concernant les tâches de maintenance préventive et corrective. Si la défaillance peut être détectée à l'avance d'une manière fiable, la commande des pièces de rechange nécessaires, ainsi que la planification des autres tâches logistiques peuvent être gérées efficacement en réduisant le temps d'arrêt global. Pour ces raisons, les auteurs [Andrawus et al. \(2006a,b\)](#); [BWE \(2007\)](#); [Feldman et al. \(2009\)](#); [Sandborn et al. \(2014\)](#); [Tian and Jin \(2011\)](#) ont adopté une stratégie de maintenance conditionnelle.

4.3 Approche pour l'optimisation de la décision

Considérons la situation d'un parc éolien offshore, pour lequel la logistique et les activités de maintenance sont soumises à des contraintes de transport dépendant de la disponibilité des pièces pour le remplacement et des conditions météorologiques et environnementales. Pour ce type de centrales, une maintenance ne peut être effectuée qu'à

4.3. Approche pour l'optimisation de la décision

des dates bien précises avec une planification préalable. C'est pourquoi une stratégie de maintenance préventive avec mise en place d'une stratégie d'inspection ainsi qu'une implémentation du système de surveillance sont les plus souvent utilisées pour ces parcs. C'est dans ce cadre que nous proposons dans cette étape un procédé pour l'aide à la décision, concernant la planification de la maintenance.

Dans cette section, nous définissons tout d'abord les différentes hypothèses et modèles associés à notre problème. Ensuite, l'intégration de la notion des options réelles dans le procédé de l'optimisation de la politique de maintenance est expliquée. Les formules nécessaires pour l'évaluation du prix de l'option réelle sont dérivées et des tests empiriques, basés sur la simulation, sont enfin présentés.

4.3.1 Modèles et hypothèses

Dans un parc offshore, les turbines éoliennes peuvent présenter chacune un fonctionnement différent et des réponses variées aux conditions météorologiques, à la variation de charges et au stress mécanique. Ainsi, les processus de dégradation des différentes turbines ne sont pas identiques. Dans tout ce qui suit, nous limitons notre étude à une seule turbine considérée comme un système unique. Le procédé peut être étendu dans le futur à un problème de planification conjointe de la maintenance pour un ensemble de machines ou pour un parc entier.

4.3.1.1 Hypothèses générales

Considérons, du point de vue de la maintenance, que la turbine est un système entier unique, formé de 1 composant ou 1 groupe des composants associés dans une seule unité. Une stratégie de maintenance conditionnelle est attribuée à ce système en respectant les hypothèses suivantes :

1. La turbine est équipée d'un système de surveillance PHM. Lorsque ce dernier détecte une anomalie de fonctionnement, ou une possibilité de défaillance, un signal d'avertissement est envoyé à l'opérateur. Ce signal comprend notamment une estimation sur la durée de fonctionnement de la machine avant défaillance (*remaining useful life* RUL). Cette durée représente effectivement le délai permettant à l'opérateur ou à l'unité de maintenance de prendre des mesures préventives avant la panne. Une estimation du RUL peut être effectuée en considérant la moyenne, la médiane ou une quantile de la durée de vie résiduelle du système calculée à partir du modèle de dégradation, des données de surveillance ou des simulations. Dans la suite de ce document nous désignons par T_{RUL} une estimation de la moyenne de RUL.

2. La maintenance prédictive ne peut être effectuée qu'à des dates précises et prédéfinies. Nous supposons dans cette étude que les intervalles de temps séparant ces dates sont identiques. En pratique, ces intervalles peuvent varier suivant la saison, les conditions logistiques et l'estimation de la demande de charge actuelle et future.
3. Les conditions opérationnelles et environnementales ont un grand impact sur la dégradation du système.
4. La dégradation du système entier est représentée par une variable $D(t)$ continue. Cette variable peut être modélisée par un processus stochastique approprié.
5. Lorsque le processus de dégradation $D(t)$ atteint pour la première fois un seuil de défaillance prédéfini, la turbine tombe en panne et aucune activité rentable du système ne sera possible avant la maintenance corrective. La date effective de panne est notée T_{Fail} .
6. Le système PHM, ainsi que des inspections régulières sur le site, permettent au décideur d'obtenir, à l'instant t_i , une estimation du niveau de dégradation actuel $D(t_i)$.
7. La maintenance préventive est imparfaite : après une maintenance préventive, la dégradation du système s'améliore d'un facteur fixe $p_r \in [0, 100]\%$. Une remise à neuf du système n'est pourtant pas possible.

Les modèles associés à la production et à la dégradation du système sont définis ci-dessous.

4.3.1.2 Processus de production

La production d'électricité par une turbine éolienne est affectée par plusieurs facteurs dont des facteurs naturels incontrôlables, comme par exemple, la vitesse du vent et sa direction. Ces facteurs sont à l'origine des fluctuations stochastiques dans la valeur de l'énergie électrique produite par la turbine [Zarate-Minano et al. \(2013\)](#). Une relation entre la puissance éolienne capturée par la turbine et la vitesse de vent est donnée par l'équation suivante [Niknam \(2014\)](#) :

$$P_{in} = 0.5\pi d_V R^2 \nu_V^3 \quad (4.2)$$

avec d_v la densité du vent, R rayon du rotor et ν_V la vitesse du vent. Un exemple sur les variations de la vitesse de vent est donné dans la Figure 4.4. [Calif and Emilion \(2012\)](#) proposent une modélisation stochastique de la vitesse de vent par un processus de diffusion à base de mouvement brownien. Un exemple de l'influence de la vitesse du vent sur la production de la puissance électrique est présenté dans les Figures 4.5.

4.3. Approche pour l'optimisation de la décision

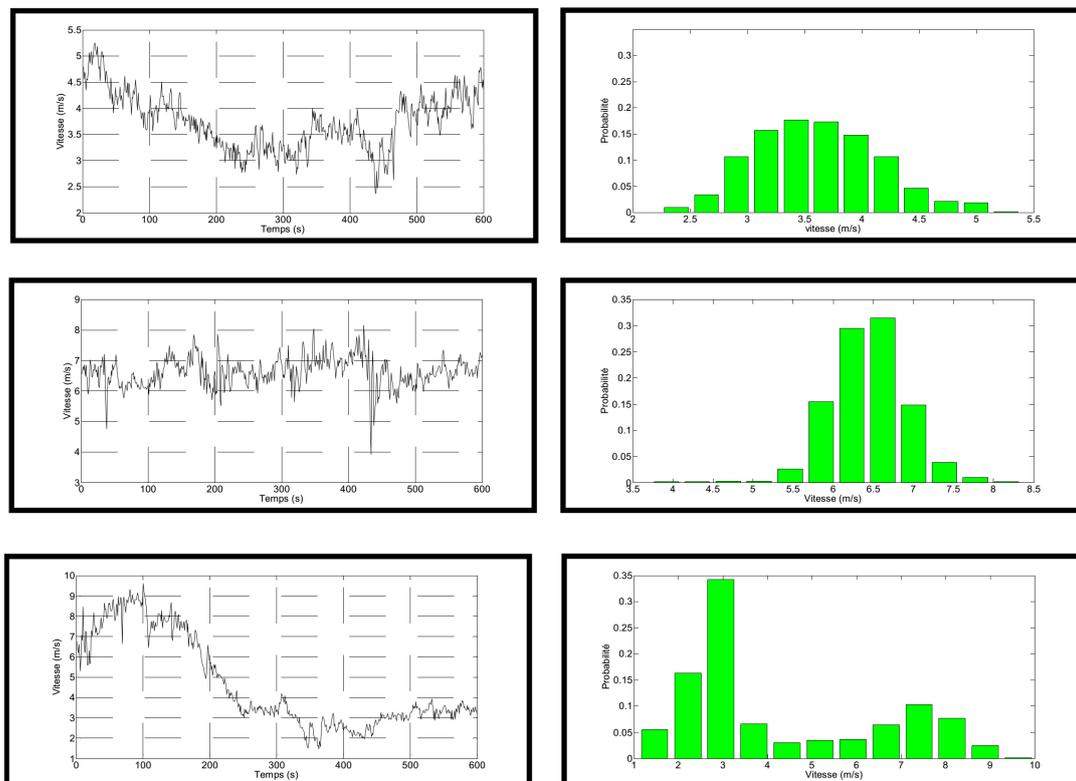


FIGURE 4.4 – Trois exemples des régimes différents de vitesse de vent et leurs histogrammes associés Calif et al. (2005).

En plus de la vitesse du vent, la puissance produite par une turbine dépend aussi de son coefficient de puissance, noté C_p . Il représente le rapport entre la puissance de vent, capturée par la turbine, et la puissance électrique produite par cette dernière :

$$P_{out} = C_p \cdot P_{in} \quad (4.3)$$

Ce coefficient n'est pas constant et il dépend aussi, entre autres, de la vitesse du vent, celle des lames, et du rapport entre les deux Busawon et al. (2005).

Un troisième facteur qui joue un rôle important dans la puissance électrique produite est le facteur de capacité de la turbine C_{cap} . Ce facteur présente le rapport entre la puissance nominale de la turbine et la puissance produite. Une valeur nominale de ce facteur est de 33% pour une machine neuve. Des études montrent que ce facteur dépend aussi de la vitesse du vent ainsi que de l'âge de la turbine Staffell and Green (2014). Considérant des fluctuations continues, ces études suggèrent également que le facteur de capacité d'une turbine diminue d'une moyenne de $1.6 \pm 0.2\%$ chaque année Staffell and Green (2014). Pourtant, Hughes (2012) montre que pour certains parcs, le facteur de capacité peut diminuer jusqu'à 3 à 15% par an.

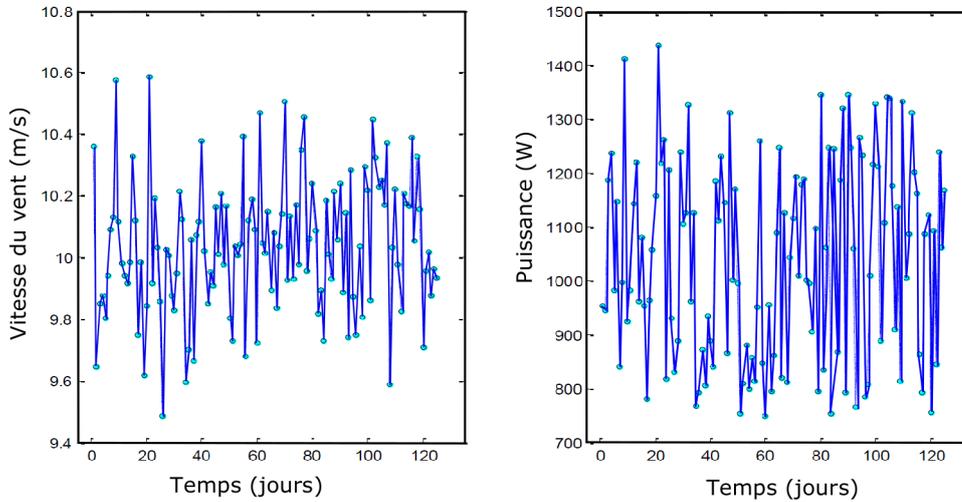


FIGURE 4.5 – Evolution stochastique de la vitesse du vent et la puissance éolienne associée [Niknam \(2014\)](#).

Considérant tous ces facteurs, nous supposons dans la suite que la production de l'énergie électrique, par une turbine éolienne, n'est pas constante par rapport au temps. Un modèle stochastique considérant l'influence des fluctuations de la vitesse de vent ainsi que la dégradation des deux facteurs de puissance et de capacité de la turbine sera donc utilisé pour la représentation de la puissance électrique produite à chaque instant.

Supposons que la puissance nominale de la turbine est égale à P_0 , et que les facteurs de puissance et de capacité sont liés à la dégradation globale de l'état de la turbine. Nous proposons que la production instantanée de l'énergie peut être écrite en fonction de P_0 et des deux processus stochastiques liés aux changements de la vitesse de vent et de la dégradation :

$$P(t) = \begin{cases} P_0 + V_v(t) + g(D(t)), & \text{si } t < T_{fail} \\ 0, & \text{si } t \geq T_{fail} \end{cases} \quad (4.4)$$

où T_{fail} est la date effective du panne (absence de toute production rentable), $V_v(t)$ est un processus de mouvement brownien à dérive nulle, représentant les fluctuations de la production dues à la variation de la vitesse de vente et $g(D(t))$ est une fonction de dégradation représentant les fluctuations de la production dues à la dégradation du système. Notre but n'étant pas d'étudier l'effet exact de la détérioration sur la production instantanée, et ne disposant pas des données statistiques et historiques nécessaires pour ce genre d'étude, nous choisissons, pour des raisons de simplification, $g(D(t)) = I_{d/p}D(t)$,

4.3. Approche pour l'optimisation de la décision

une fonction linéaire où $I_{d/p} < 0$ est un coefficient décrivant l'influence de la dégradation sur la production.

4.3.1.3 Processus de dégradation

Dans le domaine industriel, les processus de dégradation sont le plus souvent considérés comme des processus monotones. Ils sont généralement modélisés par des modèles à évolution monotone, comme les modèles Gamma [Tan et al. \(2010\)](#); [Van Noortwijk et al. \(2007\)](#); [Wang et al. \(2011\)](#). Toutefois, des processus de dégradation non-monotones ont été observés et évoqués dans la littérature. [Bea and Kvam \(2004\)](#) remarquent un comportement non monotone de la dégradation des afficheurs lumineux fluorescent. [Gebraeel and Jing Pan \(2008\)](#) et [Ardsonang et al. \(2013\)](#) présentent des signaux de dégradation non-monotones, correspondant respectivement aux roulements de moteurs (voir Figure 4.6) et échangeurs des chaleurs.

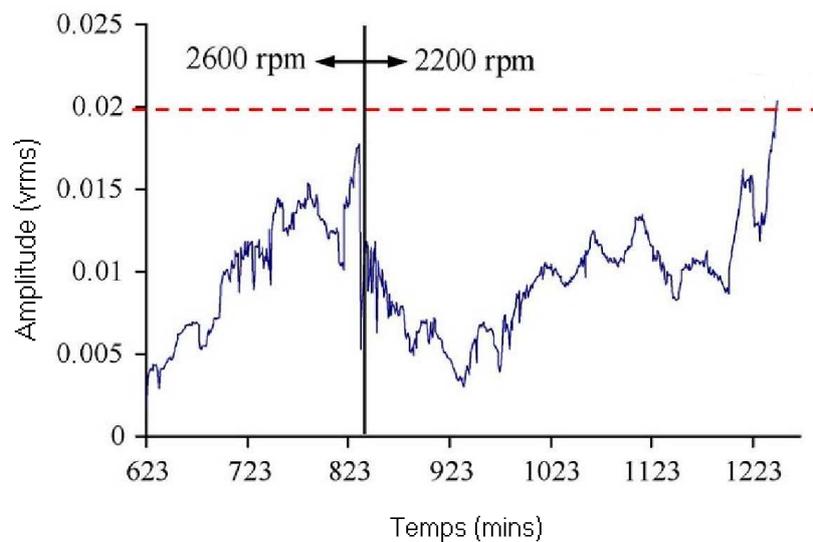


FIGURE 4.6 – Exemple des signaux de dégradation (vibrations) des roulements lors d'un changement de vitesse de rotation [Gebraeel and Jing Pan \(2008\)](#).

Dans cette étape, nous considérons que la dégradation globale d'une turbine, fonction de plusieurs composants internes et conditions externes, suit un processus de dégradation non-monotone mais de tendance générale croissante. Ce processus peut donc être représenté par un modèle de diffusion à base de Wiener. Des dommages collatéraux sont susceptibles de se produire dans le système, suite à un fonctionnement avec un problème dans l'un des composants, à un facteur de stress additionnel ou à des conditions externes lors du fonctionnement. Compte tenu de ces facteurs et de leur impact sur

l'état de santé de la turbine, un processus de diffusion avec sauts est donc adopté pour la modélisation de la dégradation. La variation des conditions environnementales pour les parcs éoliens offshore, justifie l'emploi des modèles à changement de régimes. Toutefois, pour les tests empiriques présentés ultérieurement dans ce chapitre, nous limitons le modèle de dégradation ($D(t)$) à un modèle de diffusion avec sauts double-exponentiels et paramètres constants. Ce choix est principalement adopté grâce à l'existence des méthodes de calcul pour le premier temps de passage correspondant, ainsi qu'à la simplicité et la rapidité de la simulation de ce modèle.

$$d \ln D(t) = \mu_d dt + \sigma_d dW(t) + J dN(t) \quad (4.5)$$

$$D_L(t) = \ln D(t) = \mu_d t + \sigma_d W(t) + \sum_{i=0}^{N(t)} J_i \quad (4.6)$$

$$D(t) = e^{[D_L(t)]} = e^{\left(\mu_d t + \sigma_d W(t) + \sum_{i=0}^{N(t)} J_i\right)} \quad (4.7)$$

où J est un variable aléatoire qui suit une loi double exponentielle.

4.3.2 Option réelle : "Attendre avant d'Agir"

Récemment, la notion d'options réelles a été introduite dans la recherche des solutions optimales pour les projets d'investissement et de la maintenance [Rogers \(2002\)](#). Aujourd'hui, cette notion, présentée dans le Chapitre 1 section 1.5.2, commence à être introduite dans les procédés d'aide à la décision, concernant la maintenance préventive des parcs éoliens équipés de systèmes PHM [Sandborn et al. \(2014\)](#) [Haddad et al. \(2014\)](#) [Santa-Cruz and Heredia-Zavoni \(2011\)](#). Pour définir un tel procédé nous allons tout d'abord formuler le problème de décision de maintenance comme un problème d'option réelle.

Lorsque le système de surveillance détecte une possibilité de défaillance future, un signal d'avertissement contenant une estimation du RUL, est envoyée à l'opérateur. Ce dernier est donc dans la possibilité de planifier une action de maintenance préventive lors de la plus proche opportunité de maintenance ou de retarder cette maintenance pour une certaine période, ou même de ne pas agir et attendre la défaillance, et effectuer ensuite une action de maintenance corrective. Ainsi, l'opérateur a plusieurs options pour la prise de décision de maintenance. Le choix entre ces différentes options dépend principalement des conséquences de la panne et de la perte de production. Par exemple, le prix de l'électricité peut être considéré comme un risque du marché. Ce prix influence d'une manière directe le revenu de la production d'énergie électrique par la turbine en fonctionnement ainsi que le prix à payer pour le rattrapage de la production perdue en cas d'indisponibilité de la turbine suite à une panne.

4.3. Approche pour l'optimisation de la décision

Le parallèle entre les options financières et celles de maintenance est donné par [Haddad et al. \(2014\)](#); [Sandborn et al. \(2014\)](#) et [Lei et al. \(2015\)](#). Dans [Haddad et al. \(2014\)](#), la maintenance est permise à tout instant, ce qui correspond en finance à des options Américaines. Dans [Lei et al. \(2015\)](#), les actions de maintenance sont permises uniquement à des dates précises et discrètes, ce qui correspond à certains types d'options européennes. Dans les deux cas, l'investissement pour la mise en œuvre du système PHM est considéré comme le prix d'achat de l'option. Si une activité de maintenance préventive est effectuée avant la date d'expiration du RUL, l'option est exercée; si le fonctionnement normal de la machine est maintenu jusqu'à la défaillance l'option expire.

Un compromis idéal pour le problème de la maintenance serait de trouver l'instant convenable pour la maintenance en considérant la minimisation des coûts de maintenance corrective et de pénalité et la maximisation du temps de fonctionnement utile de la machine. Une option réelle, représentant le choix d'"Attendre avant d'Agir", est donc évaluée pour les différents intervalles de temps. Une optimisation de la valeur de l'option doit ensuite être effectuée. La date optimale pour effectuer une maintenance est ainsi obtenue et elle peut correspondre à l'une des possibilités suivantes :

- l'instant actuel t_0 ; une maintenance préventive immédiate (ou à la plus proche opportunité) est donc effectuée,
- l'instant $t_f = t_0 + T_{RUL}$; une maintenance préventive après la fin de la vie résiduelle estimée est donc adoptée,
- la date de l'une des opportunités de maintenance entre t_0 et t_f ; une maintenance préventive est donc planifiée pour cette date.

4.3.3 Évaluation de l'option

L'intérêt de l'option "Attendre avant d'Agir" réside dans le revenu supplémentaire qu'elle peut rapporter à l'opérateur, par rapport à la maintenance préventive immédiate suite à l'information fournie par le PHM.

Pour évaluer cette option pour chaque délai d'attente possible, il est donc indispensable d'estimer deux quantités essentielles : (1) le revenu supplémentaire R_{cum} apporté par le fonctionnement de la machine durant ce délai ; (2) l'augmentation du coût de maintenance C_{sup} comprenant l'augmentation du coût de maintenance préventive suite à la dégradation du système ainsi que l'augmentation du risque de panne et des éventuels coûts de maintenance corrective et de pénalité.

Supposons qu'un signal d'avertissement est déclenché à l'instant t_0 avec une estimation de RUL égale à T_{RUL} . Soit $\Delta_i T$ l'intervalle de temps séparant deux dates successives d'opportunités de maintenance. La valeur de l'option pour un délai d'attente de $t_k =$

$t_0 + k.\Delta_i T$ est donc égale à :

$$V_{AaA}(t_k) = \max(0, R_{cum}(t_k, t_0) + C_M(t_0) - C_M(t_k)) \quad (4.8)$$

où $R_{cum}(t_k, t_0)$ est le revenu cumulé de la production de la turbine pendant l'intervalle $[t_0, t_k]$ et $C_M(t)$ est le coût de maintenance (préventive ou corrective) à la date t . Désignons par $C_{sup}(t_k, t_0) = C_M(t_k) - C_M(t_0)$ l'augmentation du coût de maintenance pendant l'intervalle $[t_0, t_k]$, nous pouvons définir la valeur de l'option à un instant t_k comme suit :

$$V_{AaA}(t_k) = \max(0, R_{cum}(t_k, t_0) - C_{sup}(t_k, t_0)) = (R_{cum}(t_k, t_0) - C_{sup}(t_k, t_0))^+ \quad (4.9)$$

Pour assurer un gain maximal, l'opérateur doit exercer l'option, c.à.d. effectuer la maintenance, à l'instant T_{op} qui assure une différence positive maximale entre le revenu cumulé et l'augmentation du coût de maintenance.

Rappelons que le processus de dégradation est supposé suivre un modèle de diffusion avec sauts, représenté par l'équation (4.7) et que lorsque ce processus dépasse pour la première fois le seuil de panne aucune production rentable du système ne sera possible. Le coût de la maintenance après cette défaillance sera formé du coût de remplacement et de réparation du système additionné à un coût de pénalité qui augmente proportionnellement avec la durée d'indisponibilité.

Dans la suite $R_{cum}(t_k, t_0)$ et $C_{sup}(t_k, t_0)$ seront simplement notés $R_{cum}(t_k)$ et $C_{sup}(t_k)$. Afin de trouver la date optimale pour exercer la maintenance, nous nous intéressant particulièrement à calculer l'espérance $\mathbb{E}[R_{cum}(t_k) - C_{sup}(t_k) | \Psi_0]$, où Ψ_0 est l'ensemble des informations disponible à l'instant t_0 , comprenant le T_{RUL} estimé et le niveau de dégradation du système $D(t_0) = d_0$.

Revenu cumulé : $R_{cum}(t_k)$ Un exemple du revenu quotidien d'une turbine éolienne pendant la période de dégradation finale avant la défaillance est donné dans la Figure 4.7.

Le rendement cumulé de la production entre $t_0 = 0$ et $t_k = t_0 + k.\Delta_k T$ est défini comme étant l'intégrale de la production instantanée du système, multipliée par le prix de vente par unité d'énergie C_{prix} :

$$R_{cum}(t_k) = C_{prix} \cdot \int_{t_0}^{t_k} P(t) dt \quad (4.10)$$

C_{prix} est supposé constant alors que $P(t)$ est aléatoire et suit l'équation (4.4). L'espérance du revenu cumulé entre les dates t_0 et t_k peut être calculé comme suit :

$$\mathbb{E}[R_{cum}(t_k) | \Psi_0] = C_{prix} \cdot \mathbb{E}[\int_{t_0}^{t_k} P(t) dt | \Psi_0] \quad (4.11)$$

Pour trouver cette espérance deux cas différents doivent être considérés :

4.3. Approche pour l'optimisation de la décision

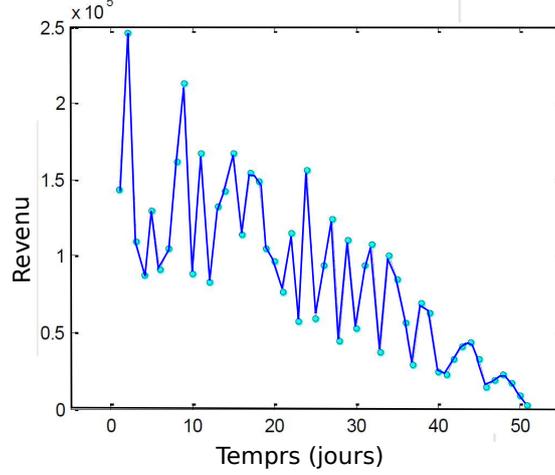


FIGURE 4.7 – Exemple de revenu quotidien d'une turbine éolienne durant la période de dégradation [Niknam \(2014\)](#).

- $T_{fail} > t_k$: aucune panne ne se produit entre t_0 et t_k . La turbine fonctionne normalement et la production instantanée $P(t)$ est représentée par l'équation (4.4) avec $t < T_{fail}$ sur tout l'intervalle $[t_0, t_k]$.
- $T_{fail} \leq t_k$: une panne se produit à l'instant T_{fail} entre t_0 et t_k . Sur l'intervalle $[t_0, T_{fail}[$ la turbine fonctionne normalement et la production instantanée est représentée par l'équation (4.4) avec $t < T_{fail}$. Pour le reste du temps, c.à.d. pour l'intervalle $[T_{fail}, t_k]$ le système est en panne et aucune production n'est possible. Dans ce cas $P(t) = 0$.

Considérant ces deux possibilités, l'espérance du revenu cumulé pour la période $[t_0, t_k]$ peut être développée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 E\left[\int_{t_0}^{t_k} P(t)dt|\Psi_0\right] &= E\left[\int_{t_0}^{t_k \wedge T_{Fail}} (P_0 + V_v(t) + I_{d/p} \cdot D(t))dt|\Psi_0\right] \\
 &= E[(t_k \wedge T_{Fail} - t_0)]P_0 + E\left[\int_{t_0}^{t_k \wedge T_{Fail}} V_v(t)dt|\Psi_0\right] + I_{d/p} \cdot E\left[\int_{t_0}^{t_k \wedge T_{Fail}} D(t)dt|\Psi_0\right] \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Rappelons que dans cette équation $D(t)$ est un processus de diffusion avec saut, et que T_{Fail} est une variable aléatoire représentant le premier temps du passage de $D(t)$ par un seuil de panne S_p donné. La densité de distribution de T_{Fail} peut être déduites analytiquement à partir de la transformée de Laplace donnée par [Kou \(2007\)](#) (voir Chapitre 1 section 1.4.2).

Dans la littérature, l'intégrale d'un mouvement brownien géométrique sans saut de la forme $A_t^{(v)} = \int_{t_0}^{t_k} \exp(\mu_d t + \sigma_d W(t))dt$ est étudié dans le cadre des applications financières [Carr and Schroder \(2004\)](#); [Dufresne \(2004\)](#); [Matsumoto \(2005\)](#); [Nualart \(2006\)](#). Ces études

proposent un développement analytique de la distribution de cette intégrale. Toutefois, l'intégrale d'un processus de diffusion avec sauts reste un sujet d'étude récemment évoqué [Hudde and Rüschendorf \(2016\)](#). Aucun calcul analytique sur l'espérance ou la distribution de cette intégrale n'a été trouvé dans la littérature. Sachant que dans l'équation (4.12) la borne supérieure de cette intégrale dépend de la variable aléatoire T_{Fail} , le calcul de l'espérance $E[\int_{t_0}^{t_k} D(t)dt|\Psi_0]$ est non trivial, et nécessite des développements complémentaires.

Augmentation des coûts : $C_{sup}(t_k)$ L'augmentation totale des coûts se divise en deux parties principales : augmentation du coût de maintenance préventive C_{sup}^{pr} due à la dégradation du système ; et augmentation du coût de maintenance corrective C_{sup}^{cr} due à une défaillance précoce. La moyenne de $C_{sup}(t_k)$ peut être donc calculée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_{sup}(t_k)|\Psi_0] &= \mathbb{P}(T_{fail} > t_k)\mathbb{E}[C_{sup}^{pr}(t_k)|\Psi_0, T_{fail} > t_k] \\ &\quad + \mathbb{P}(T_{fail} \leq t_k)\mathbb{E}[C_{sup}^{cr}(t_k)|\Psi_0, T_{fail} \leq t_k] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Nous considérons que le coût de maintenance préventive augmente proportionnellement à la dégradation de la turbine avec un facteur $C_{d/m}$. Nous considérons également que l'influence de la dégradation sur les différents composants ainsi que les dommages dus aux différents facteurs intérieurs et extérieurs au système sont déjà considérés et représentés dans le modèle stochastique de $D(t)$. Soit $C_{d/m}$ une constante représentant le rapport entre coût de maintenance préventive et le niveau de dégradation, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_{sup}^{pr}(t_k)|\Psi_0, T_{fail} > t_k] &= C_{d/m}.\mathbb{E}[D(t_k) - D(t_0)|\Psi_0, T_{fail} > t_k] \\ &= C_{d/m}.\mathbb{E}[D(t_k)|\Psi_0, T_{fail} > t_k] - C_{d/m}.D(t_0) \\ &= C_{d/m}.\mathbb{E}[D(t_0) + \int_{t_0}^{t_k} dD(t)|\Psi_0, T_{fail} > t_k] - C_{d/m}.D(t_0) \\ &= C_{d/m}.\mathbb{E}[\int_{t_0}^{t_k} dD(t)|\Psi_0, T_{fail} > t_k] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dans cette équation la condition $T_{fail} > t_k$ correspond à $\forall t \in [t_0, t_k], D(t) < S_p$. Soit $a_{max} = S_p - d_0$, nous pouvons déduire :

$$\mathbb{E}[C_{sup}^{pr}(t_k)|\Psi_0, T_{fail} > t_k] = C_{d/m}.\mathbb{E}[\int_{t_0}^{t_k} dD(t)|\forall t \in [t_0, t_k], \int_{t_0}^t dD(s) < a_{max}] \quad (4.15)$$

$\mathbb{E}[C_{sup}^{cr}(t_k)]$ représente l'espérance du coût à payer en cas d'une panne précoce. Lorsqu'une défaillance de système survient avant la date prévue de maintenance préventive, plusieurs dépenses correctives sont imposées. Le coût supplémentaire correctif comprend

4.4. Application de l'approche sur un cas test

le coût de toutes les opérations de réparation du système ainsi que la pénalité due à l'indisponibilité de la turbine et de la perte de production. La pénalité est calculée en fonction de la durée d'indisponibilité du système, soit $t_k - T_{fail}$. Par contre, le coût de réparation C_{rep} est supposé constant quel que soit la date de la défaillance.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_{sup}^{cr}(t_k)] &= C_{rep} + I_{pen} \cdot \mathbb{E}[(t_k) - T_{fail} | \Psi_0, T_{fail} \leq t_k] \\ &= C_{rep} + I_{pen} \cdot (t_k) - \mathbb{E}[T_{fail} | \Psi_0, T_{fail} \leq t_k]\end{aligned}\quad (4.16)$$

où I_{pen} est un facteur de pénalité par unité de temps (ici jour), supposé constant. La distribution de T_{fail} pour notre processus de dégradation peut être déduite à partir de la transformée de Laplace donnée par [Kou and Wang \(2003\)](#). Nous revenons plus en détails sur cette distribution pour l'exemple présenté dans la prochaine section.

Optimisation de la date de maintenance La planification d'une maintenance préventive doit être effectuée à la date t_0 ; date de la réception du signal d'avertissement. Une date T_{op}^{mp} optimale, d'un point de vue économique, peut être choisie en maximisant la valeur de l'option "Attendre avant d'Agir". Le problème de la planification de maintenance revient donc au problème d'optimisation suivant :

$$T_{op}^{mp} = \underset{t_k = t_0 : \Delta_i T : t_0 + T_{RUL}}{\operatorname{argmax}} \mathbb{E}(V_{AaA}(t_k)) = \underset{t_k = t_0 : \Delta_i T : t_0 + T_{RUL}}{\operatorname{argmax}} (\mathbb{E}[R_{cum}(t_k) - C_{sup}(t_k) | \Psi_0])^+ \quad (4.17)$$

Les expressions analytiques des différentes espérances sont difficiles à obtenir et nécessitent des recherches complémentaires. Nous procéderons donc dans la suite à une résolution numérique par simulation stochastique du problème posé.

4.4 Application de l'approche sur un cas test

Considérons les différentes hypothèses et modèles de dégradation et de production présentés précédemment. Nous illustrons dans cette section l'approche proposée par un exemple.

Choix des paramètres Le choix de différents paramètres pour notre étude empirique est effectué à partir de nos observations sur les données réelles et simulées présentées dans la littérature.

Le modèle $V_v(t)$ est considéré comme un mouvement brownien à dérive nulle et volatilité égale à 0.5. Le modèle de dégradation est considéré comme un modèle de diffusion avec sauts double-exponentiels dont les paramètres sont présentés dans le [Tableau 4.1](#). Ce

Chapitre 4. Options réelles et aide à la décision pour la maintenance des turbines éoliennes

Tableau présente également la valeur des différents facteurs et paramètres utilisés dans notre simulations.

P_0	C_{prix}	C_{rep}	$I_{d/p}$	$C_{d/m}$	Paramètres de $D(t)$						$V_v(t_0)$
MWh	€/MWh	10^3 €	MW	10^3 €	μ_{ld}	σ_d	λ_J	μ_1	μ_2	p_1	-
60	13.5	600	-0.12	3	0.05	0.1	20	0.05	0.1	0.2	10

Tableau 4.1 – Paramètres utilisés pour la simulation Monte Carlo.

Pour le choix de ces paramètres nous notons les remarques suivantes :

- Le prix de l'énergie électrique produite par des turbines éoliennes est de 13.5 euros/MWh⁶.
- Le modèle de dégradation est choisi de sorte à fournir une valeur entre 0 et 100, correspondant au pourcentage de dégradation de la machine, 100% de dégradation étant le seuil de panne. Le signal d'avertissement est déclenché par le système de surveillance à $t_0 = T_{Alarm}$ pour une dégradation estimée à $S_{Alarm} = 65\%$.
- En moyenne, si aucune maintenance n'est effectuée, la dégradation de la turbine atteint son seuil de panne 8 ans après sa mise en fonction.
- Une maintenance corrective coûte beaucoup plus chère que la maintenance préventive.
- Une fois le seuil de panne atteint, aucune production rentable de la machine n'est possible. Une maintenance corrective est nécessaire.
- La pénalité sur un jour d'indisponibilité d'une turbine est supérieure ou égale au prix de vente de l'électricité normalement produite par cette turbine pendant un jour.
- Le coût de réparation de la machine présente 30% de son prix (le coût d'une grande éolienne, sans installation, est de l'ordre de 1.5 millions d'euros⁷).
- La production nominale d'une turbine offshore avec un rotor de diamètre 64 mètres, est de 2500MW⁸.

Résultats empiriques Nous présentons tout d'abord quelques exemples de trajectoires simulées de dégradation, de production quotidienne et de revenu cumulé.

La Figure 4.8 présente des exemples de la trajectoire de dégradation simulée à partir de notre modèle de diffusion avec sauts double-exponentiels. La Figure 4.9 présente

6. Le coût réel de l'éolien pour le consommateur français, disponible sur <http://fee.asso.fr/centre-infos/tout-savoir-eolien/combien-coute-lelectricite-eolienne/>

7. <http://www.deco-travaux.com/eoliennes/prix-eolienne.html>

8. <http://science.howstuffworks.com/environmental/green-science/wind-power4.htm>

4.4. Application de l'approche sur un cas test

les histogrammes du premier temps de passage par S_{Alarm} et S_p , soient respectivement t_0 (ou T_{Alarm}) et T_{Fail} , calculés à partir de la date de la première mise en marche de la turbine $t = 0$. Nous remarquons un décalage d'environ 340 jours entre les deux histogrammes. Cela signifie qu'en moyenne, la turbine peut fonctionner 340 jours après le signal d'avertissement, avant qu'elle ne tombe en panne.

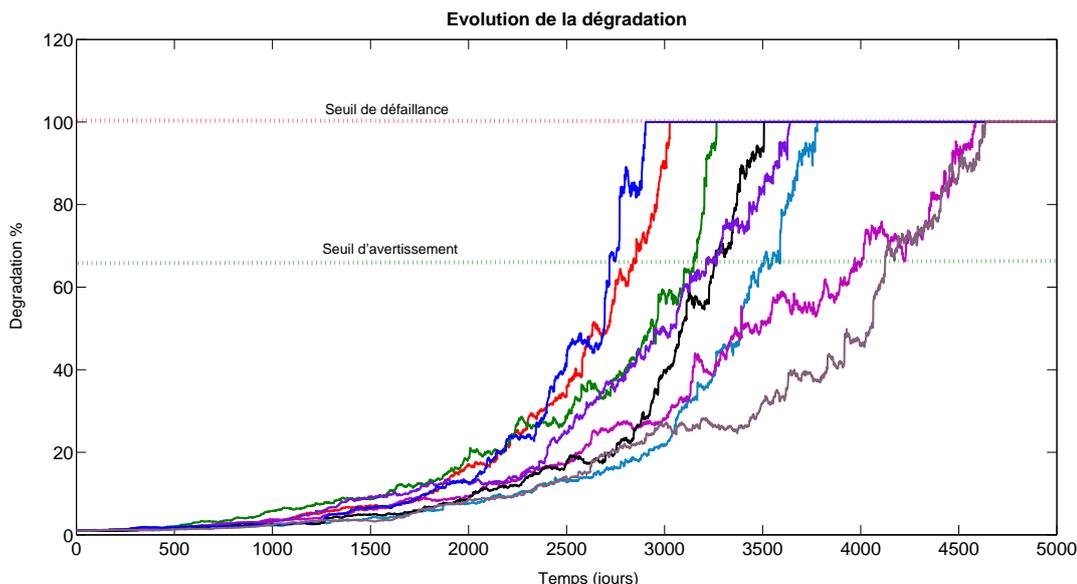


FIGURE 4.8 – Trajectoires simulées de dégradation.

Considérons le cas de la trajectoire rouge de la Figure 4.8 comme étant la trajectoire de dégradation réelle de la turbine en considération. Après 2844 jours de la mise en marche, la dégradation de la machine atteint le seuil de 65%, un signal d'avertissement est envoyé à l'opérateur avec une estimation de la moyenne de T_{RUL} égale à 340 jours. La distribution du premier temps de passage du seuil de panne T_{fail} peut être déduite empiriquement à partir des simulations Monte Carlo ou analytiquement à partir de la transformée de Laplace donnée par [Kou and Wang \(2003\)](#). Sur la Figure 4.10 nous présentons la densité de probabilité de T_{fail} calculée à l'instant t_0 de deux manières différentes. Après plusieurs tests d'adéquation sur la distribution obtenue par rapport aux différentes lois de probabilité (Burr, gamma, log-normal, inverse Gaussienne...), nous remarquons que cette distribution peut correspondre à la loi Inverse-Gaussienne IG . La loi IG est également représentée dans la Figure 4.10. Nous avons $\mathbb{E}[T_{fail}] = 3184$ jours.

Revenons maintenant à l'évaluation de l'option réelle permettant à l'opérateur de ne pas agir directement suite au signal d'avertissement envoyé par le PHM.

Supposons que l'opérateur dispose de certaines dates précises pendant lesquelles une

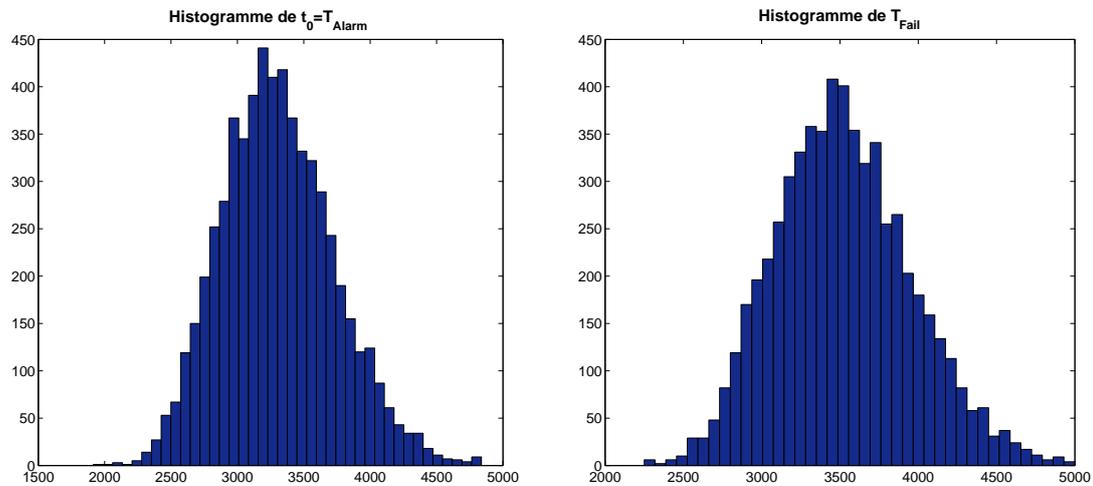


FIGURE 4.9 – Histogrammes de T_{Alarm} et T_{Fail} simulés.

maintenance préventive peut être effectuée. Pour planifier la maintenance à une date optimale, l'opérateur a recourt à une évaluation de l'option "Attendre avant d'Agir" pour ces différentes dates jusqu'à la date $t_f = t_0 + T_{RUL}$.

Des simulations des trajectoires de $D(t)$, $V_v(t)$ et $P(t)$ entre t_0 et t_f sont effectuées. La Figure 4.11 présente des exemples sur les trajectoires simulées pour ces trois processus, ainsi que la trajectoire du revenu cumulé correspondant.

La valeur V_{AA} est estimée pour toutes les dates $t_k = t_0 + k \cdot \Delta_i T$. Nous testons dans cette étude plusieurs intervalles inter-maintenance différents. La Figure 4.12 présente la moyenne du coût supplémentaire sur la maintenance préventive, le risque de panne et la pénalité, ainsi que le revenu cumulé jusqu'à chaque nouvelle opportunité de maintenance, avec $\Delta_i T = 10$ jours.

4.4. Application de l'approche sur un cas test

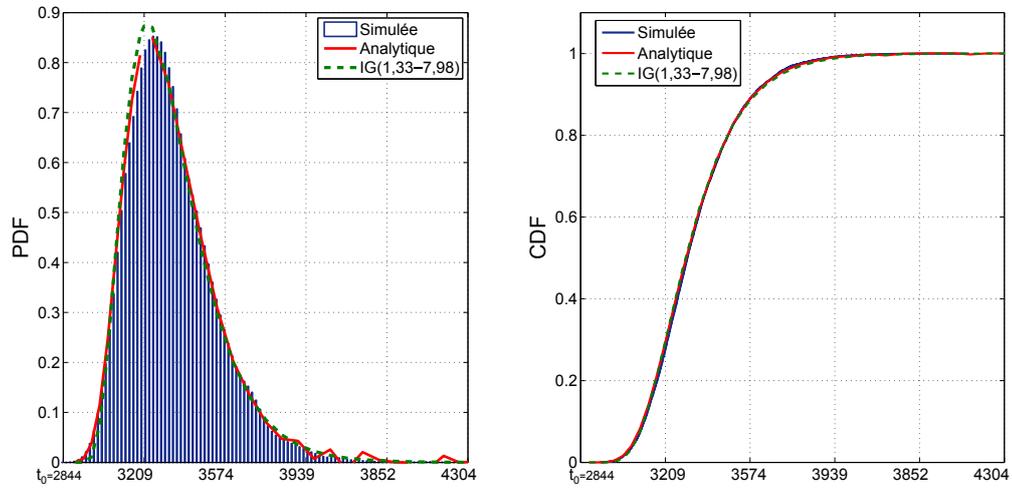


FIGURE 4.10 – PDF et CDF de T_{fail} .

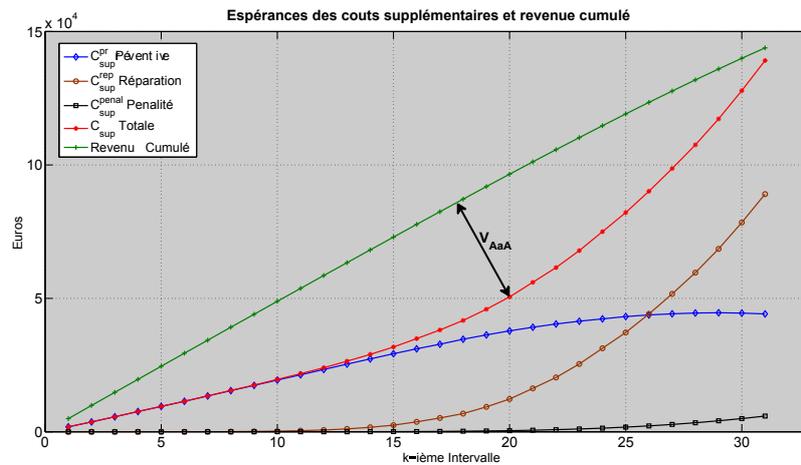


FIGURE 4.12 – Moyennes des coûts et du revenu cumulé sur l'intervalle $[t_0, t_f]$, calculées avec $\Delta_i T = 10$ jours.

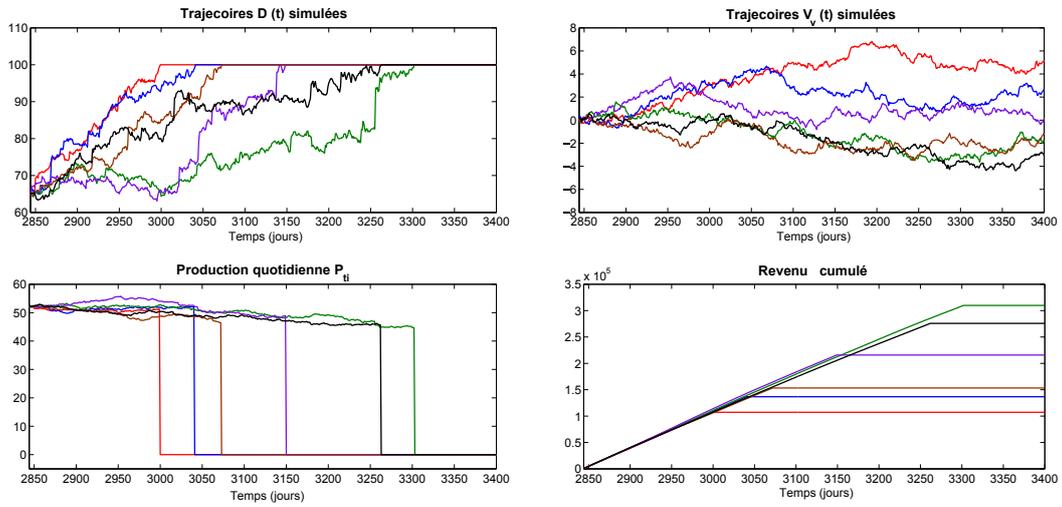


FIGURE 4.11 – Trajectoires simulées des différents processus à partir de la date $t_0 = 2844$.

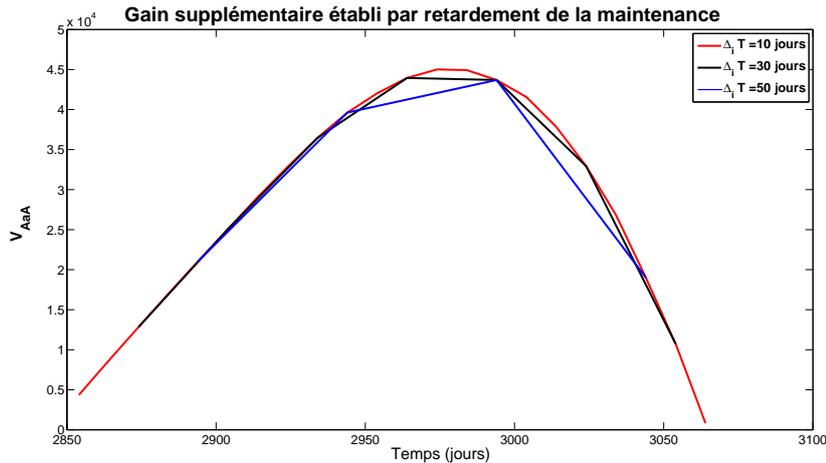


FIGURE 4.13 – V_{AaA} : Gain supplémentaire total entre t_0 et t_f .

Les estimations de valeur V_{AaA} de l'option, correspondant à la différence entre l'espérance du revenu cumulé et celle du coût total supplémentaire sont donnés dans la Figure 4.13, pour des dates de maintenance entre t_0 et t_f , avec $\Delta_i T = 10, 30$ ou 50 jours. Ces valeurs présentent les espérances du gain supplémentaire total jusqu'aux dates $t_k = t_0 + k\Delta_i T$. Nous pouvons déduire de cette figure que la date optimale pour effectuer une maintenance préventive correspond à $T_{Op} = 2984$ ou $k = 14$ (avec $\Delta_i T = 10$). Si la maintenance préventive est planifiée pour cette date, elle peut rapporter, en moyenne, un gain supplémentaire de 49930 euros, soit 40580 euros de plus par rapport à une maintenance préventive effectuée à la plus proche opportunité, et 49100 euros de plus par rapport

4.5. Conclusion

au faible gain estimé si on décide de garder la machine sans maintenance pendant une durée égale à son RUL.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous sommes intéressé à un problème d'aide à la décision de maintenance. L'approche considérée s'appuie sur la notion des options réelles inspirée du domaine financier. L'objectif principal de cette approche est de trouver la meilleure date pour effectuer la maintenance préventive d'une machine donnée. Notre cas d'étude se centralise autour des turbines éoliennes. Équipée d'un système de surveillance permettant une estimation de son RUL, une turbine est susceptible de subir les actions de maintenance préventive à des dates précises. Pour choisir la meilleure date entre différentes opportunités, le décideur fait appel à une option réelle caractérisant la possibilité d'attendre avant d'agir (pour faire la maintenance). L'évaluation de la valeur de cette option V_{AaA} peut être effectuée pour chaque date à l'aide des simulations Monte Carlo. Cette valeur représente le gain supplémentaire rapporté par le fonctionnement de la machine jusqu'à la date donnée. L'optimisation de la décision sur la planification de la maintenance peut être effectuée en cherchant le maximum de ce gain. Un exemple empirique sur cette approche est présenté.

Conclusion et perspectives

Pour certains systèmes industriels, des défaillances soudaines ou imprévues risquent d'impliquer des conséquences significatives aux niveaux opérationnels et financiers. Pour les systèmes complexes, ou ceux qui fonctionnent dans un environnement instable, ces défaillances sont susceptibles de se produire d'une façon aléatoire. La surveillance et le pronostic du processus de dégradation sont devenus indispensables pour assurer le bon fonctionnement d'un système tout en évitant les risques potentiels des pannes et de leurs conséquences. Dans ce but les analyses de fiabilité et les outils de pronostic pour les systèmes industriels sont donc développés. Ces outils s'appuient souvent sur des modèles mathématiques peu adaptés à la représentation du phénomène de dégradation et aux différents facteurs qui les influencent. Les processus de dégradation réels sont souvent trop complexes et rassemblent des multiples facteurs endogènes et exogènes, tandis que les modèles mathématiques existants sont souvent trop simplifiés. D'avantage de recherche est ainsi nécessaire pour rendre les modèles plus réalistes, tout en les gardant simples pour le calcul et la programmation. Bien que certains d'entre eux aient une interprétation physique claire, les modèles actuels sont principalement guidés par des données observées et des études statistiques sur la durée de vie et les défaillances. Néanmoins, un bon modèle de dégradation doit être en mesure d'intégrer les caractéristiques du phénomène physique de dégradation ainsi que les observations tirées des données de dégradation disponibles. Des extensions des modèles existants peuvent apporter des considérables améliorations dans le développement des outils plus puissants pour l'analyse de la dégradation et de la fiabilité et pour la planification de la maintenance. Aujourd'hui, l'utilisation des processus stochastiques non monotones, bien que riche et flexible, est encore limitée dans les études de la dégradation. Le développement de ces modèles pour la modélisation de la fiabilité et la prise de décision peut être un sujet de recherche prometteur.

Dans cette thèse nous avons présenté tout d'abord des différents outils probabilistes pour la modélisation des phénomènes aléatoires, physiques et économiques. Deux grands types de modèles sont présentés : (1) Les modèles autorégressifs à temps discret et à dépendance linéaire et non-linéaire. (2) Les modèles stochastiques à la propriété de Markov et à trajectoires monotone et non-monotone. Des différents concepts et politiques d'analyse proactive et de contrôle du risque utilisés dans le domaine financier comme dans le domaine industriel sont présentés. Les différentes politiques de maintenance notamment les politiques de maintenance préventive basées sur la surveillance, la modélisation et/ou le pronostic sont détaillées.

Le premier volet de cette thèse a porté sur la modélisation des indicateurs non-monotones. Disposant de 15 séquences de données financières, nous avons présenté tout d'abord une analyse détaillée des propriétés de ces séries. Ces données sont considérées comme des indicateurs de risques évoluant d'une façon non-monotone mais à tendance générale croissante. Ils sont principalement caractérisés par une volatilité variable et des éventuels discontinuités ou événements rares ou extrêmes. Les tests de normalité montrent que l'hypothèse des incréments gaussiens est beaucoup trop simplifiée pour ce type d'évolution. Des études statistiques sur les incréments ainsi que sur la volatilité de nos indicateurs sont menées. Les principales caractéristiques de la distribution des incréments sont mises en exergue. En plus de ces caractéristiques, les tests d'autocorrélation ont montré que les incréments sont peu corrélés entre eux. Ainsi, les séries temporelles à dépendance linéaires sont considérées inadaptées pour la représentation de nos données. Le test de Hinich appliqué sur les séquences des incréments a rejeté également la validité des modèles autorégressifs à hétérosidécité ARCH/GARCH pour la représentation des données. L'examen de la volatilité historique des indicateurs montre que la fluctuation de ces derniers n'est pas constante avec le temps. La volatilité change continuellement et ses différentes valeurs peuvent constituer des classes dont on étudiera les propriétés. Ce phénomène de "*volatilité clustering*" est détecté pour les différents indicateurs. La simultanéité des variations de la volatilité des plusieurs indicateurs pousse à considérer qu'une covariable exogène influence sur l'ensemble des indicateurs. Les principales caractéristiques déduites sur l'ensemble des incréments et de la volatilité sont ensuite prises en compte lors du choix du modèle.

La modélisation de ces indicateurs est effectuée par trois modèles différents. Ces trois modèles, JD, RS-JD et SV-JD, sont tous des modèles stochastiques non-monotones, basés sur un processus de Wiener ; représentant une évolution continue de la dynamique, additionnée à un processus de Poisson composé ; représentant des sauts discontinus et occasionnels. Les différentes méthodes de calibration pour chaque modèle sont présentées. Un exemple de la calibration pour chacun d'entre eux est montré et des tests d'adéquation et d'utilité des modèles calibrés sont mis en place. Le premier modèle considère une évolution à paramètres constants avec le temps. Notamment, la volatilité du processus est représentée par un paramètre σ_d constant. Pour tenir compte de la variation de la volatilité avec le temps, ainsi que du phénomène de "*volatilité clustering*", des modèles JD à changement de régimes RS-JDU sont testés. La volatilité σ_d , ainsi que les autres paramètres du modèles sont considérés variables. Ces paramètres, contrôlés par une covariable environnementale, évoluent sur un espace d'état discret. Deux versions du modèle RS-JDU sont proposées. Un modèle à trois régimes (3RS-JDU) est tout d'abord défini.

Conclusion et perspectives

Le modèle à six régimes, 6RS-JDU, considérant une division plus fine de l'axe de temps, et par conséquent des variations plus rapides des paramètres, est ensuite testé. La comparaison entre les résultats de ces deux versions montre qu'une variation plus rapide des paramètres peut donner une meilleure représentation de nos indicateurs. Par la suite, un modèle à volatilité stochastique SV-JD est considéré. Les méthodes de calibration de ce dernier se basent principalement sur la simulation. Plusieurs méthodes de calibration sont présentées et testées. Les résultats de la calibration du modèle SV-JD pour nos indicateurs sont ensuite exposés.

Les tests d'adéquation et d'utilité, ainsi que la comparaison effectuée entre les résultats des différents modèles, montrent que le modèle 6RS-JDU présente la meilleure adéquation à nos données. Ce modèle se montre à la fois générale pour capturer les principales caractéristiques de nos données et de leur volatilité, et assez simple pour la calibration, le calcul stochastique et la simulation. Une optimisation de nombre des états de la chaîne de Markov peut être envisagée dans un prochain temps dans le but de rapporter une meilleure adéquation du modèle aux données réelles. Les critères et les méthodes d'optimisation pour le choix des régimes doivent être étudiés. Nous pouvons envisager des extensions de ces modèles en tenant compte de plusieurs covariables indépendantes. Dans ce but nous devons mener des études plus détaillées sur les différents facteurs, observables et non observables, influençant l'évolution des indicateurs. Suite à ces études, plusieurs solutions peuvent être proposées pour l'intégration de ces facteurs : modèle à double processus de Wiener ou double processus de sauts, chaîne de Markov à temps continu... Nous devons chercher des explications physiques au sujet du phénomène de dégradation principale et celle des covariables afin de suggérer des extensions convenables du modèle.

Pour les modèles SV-JD, plusieurs problèmes de calibration et de capacité de manipulation sont présentés dans notre étude. Des méthodes de calibration plus adéquates pour ce type de modèle doivent être recherchées et implémentées pour tester à nouveau la validité et l'utilité de ce modèle. Des extensions de ces modèles sont également envisageables. Nous pouvons considérer un deuxième processus de sauts contribuant à la dynamique de la volatilité, d'une manière dépendante ou non de la dynamique du processus principale.

Dans le deuxième volet de cette thèse, et en se basant sur la modélisation des phénomènes aléatoires par des processus de diffusion déjà étudiés, nous avons proposé une approche pour l'aide à la décision pour la maintenance conditionnelle. Cette approche s'appuie sur la notion des options réelles inspirée du domaine financier. L'objectif principal de cette approche est de trouver la meilleure date pour effectuer la maintenance préventive conditionnelle d'une machine donnée. Notre cas d'étude concerne les turbines éoliennes. Équipée d'un système de surveillance permettant une estimation de son RUL,

une turbine est susceptible de subir des actions de maintenance préventive à des dates précises. Pour choisir la meilleure date entre les différentes opportunités de maintenance, le décideur fait appel à une option réelle caractérisant la possibilité d'attendre avant d'agir (exercer les tâches de maintenance). L'évaluation de la valeur de cette option peut être effectuée pour chaque date à l'aide d'une simulation Monte Carlo des différents scénarios possibles. Cette valeur présente le gain supplémentaire rapporté par le fonctionnement de la machine jusqu'à la date donnée. L'optimisation de la décision pour la planification de la maintenance peut être effectuée en cherchant le maximum de ce gain. Un exemple empirique sur cette approche est présenté. Sachant que cette approche est présentée pour le cas d'un système entier et unique (une turbine), l'efficacité réelle de cette approche réside dans la possibilité d'une extension future. Cette extension aura pour but d'adapter les méthodes proposées à un système multi-composant, où à chaque composant des modèles propres pour la production, la détérioration et le risque sont associés. Cette extension peut être envisageable pour un parc éolien composé de plusieurs turbines ayant chacune sa propre estimation de RUL et des paramètres de dégradation et de production. Une analyse de l'influence de cette approche sur le coût moyen de cycle de vie d'une turbine, ou le coût d'exploitation d'un parc éolien, doit être menée.

Bibliographie

- Abdel-Hameed, M. (1975). A Gamma Wear process. *IEEE Transaction on Reliability*, 24(2) :152–153. (Cité page [20](#).)
- Alhouaij, A. A. (2010). *Contribution à l'optimisation de la maintenance dans un contexte distribué*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG. (Cité page [47](#).)
- Amari, S. V., McLaughlin, L., and Pham, H. (2006). Cost-effective condition-based maintenance using Markov decision processes. In *Annual Reliability and Maintainability Symposium, 2006. RAMS'06*, pages 464–469. IEEE. (Cité page [17](#).)
- Andersen, T. G., Benzoni, L., and Lund, J. (2002). An empirical investigation of continuous time equity returns. *Journal of Finance*, 57(3) :1239–1284. (Cité pages [37](#) and [43](#).)
- Andersen, T. G., Chung, H.-J., and Sorensen, B. E. (1999). Efficient Method of Moments Estimation of a Stochastic Volatility Model : A Monte Carlo Study. *Journal of Econometrics*, 91(1) :61–87. (Cité page [41](#).)
- Andrawus, J., Watson, J., Kishk, M., and Adam, A. (2006a). Determining an appropriate Condition-Based Maintenance strategy for wind turbines. In *Proceedings of the 2nd Joint International Conference on "Sustainable Energy and Environment" Bangkok*, pages 275–280. (Cité page [146](#).)
- Andrawus, J. A. (2008). *Maintenance optimisation for wind turbines*. PhD thesis, The Robert Gordon University. (Cité page [144](#).)
- Andrawus, J. A., Watson, J., Kishk, M., and Adam, A. (2006b). The selection of a suitable maintenance strategy for wind turbines. *Wind Engineering*, 30(6) :471–486. (Cité page [146](#).)
- Ardsomang, T., Hines, J. W., and Upadhyaya, B. R. (2013). Heat exchanger fouling and estimation of remaining useful life. In *Annual Conference of Prognostics and Health Management Society*. (Cité page [151](#).)
- Ariyo, A. A., Adewumi, A. O., and Ayo, C. K. (2014). Stock price prediction using the ARIMA model. pages 106–112. IEEE. (Cité page [11](#).)

- Baker, S., Bloom, N., and Davis, S. J. (2013). What triggers stock market jumps? In *Work in progress presented at the January 2013 ASSA meetings*. (Cité page 69.)
- Barberis, N., Shleifer, A., and Vishny, R. (1998). A model of investor sentiment. *Journal of financial economics*, 49(3) :307–343. (Cité page 95.)
- Bea, S. and Kvam, P. (2004). A nonlinear random-coefficients model for degradation testing. *Technometrics*, 46(4) :460–469. (Cité page 151.)
- Berkes, I., Horváth, L., and Kokoszka, P. (2004). A weighted goodness-of-fit test for GARCH (1, 1) specification. *Lithuanian Mathematical Journal*, 44(1) :1–17. (Cité page 12.)
- Besnard, F. (2013). *On maintenance optimization for offshore wind farms*. Number N.S., 3503 in *Doktorsavhandlingar vid Chalmers Tekniska Högskola*. Chalmers Univ. of Technology, Göteborg. (Cité pages 141 and 142.)
- Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 :637–654. (Cité pages 27 and 46.)
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31 :307–327. (Cité pages 9 and 11.)
- Bonilla, C. A., Romero-Meza, R., and Hinich, M. J. (2006). Episodic nonlinearity in Latin American stock market indices. *Applied Economics Letters*, 13(3) :195–199. (Cité pages 86 and 90.)
- Bonilla, C. A., Romero-Meza, R., and Hinich, M. J. (2007). GARCH inadequacy for modelling exchange rates : empirical evidence from Latin America. *Applied Economics*, 39(19) :2529–2533. (Cité page 13.)
- Bonilla, C. A. and Sepulveda, J. (2011). Stock returns in emerging markets and the use of GARCH models. *Applied Economics Letters*, 18(14) :1321–1325. (Cité pages 13, 86 and 90.)
- Broto, C. and Ruiz, E. (2004). Estimation methods for stochastic volatility models : a survey. *Journal of Economic Survey*, 18(5) :613–649. (Cité page 40.)
- Busawon, K., Dodson, L., and Jovanovic, M. (2005). Estimation of the power coefficient in a wind conversion system. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, pages 3450–3455. IEEE. (Cité page 149.)

Bibliographie

- BWE, e. (2007). Principles for condition-based maintenance of wind turbines. Technical report. (Cité page [146](#).)
- Byon, E., Ntaimo, L., and Ding, Y. (2010). Optimal maintenance strategies for wind turbine systems under stochastic weather conditions. *IEEE Transaction on Reliability*, 59(2) :393–404. (Cité page [145](#).)
- Calif, R. and Emilion, R. (2012). Characterization and Stochastic Modeling of Wind Speed Sequences. In *Progress in Turbulence and Wind Energy IV*, volume 141 of *Springer Proceedings in Physics*. Martin Oberlack , Joachim Peinke , Alessandro Talamelli , Luciano Castillo, Michael Hölling. (Cité page [148](#).)
- Calif, R., Emilion, R., Soubdhan, T., and Blonbou, R. (2005). *Wind speed PDF classification using Dirichlet mixtures*. Université des Antilles et de la. (Cité page [149](#).)
- Carr, P. and Schroder, M. (2004). Bessel processes, the integral of geometric Brownian motion, and Asian options. *Theory of Probability & Its Applications*, 48(3) :400–425. (Cité page [155](#).)
- Carroll, J., May, A., McDonald, A., and McMillan, D. (2015). Availability improvements from condition monitoring systems and performance based maintenance contracts. *Submitted to EWEA Offshore*. (Cité page [146](#).)
- Castro, I., Huynh, K. T., Barros, A., and Berenguer, C. (2012). A predictive maintenance strategy based on mean residual life for systems subject to competing failures due to degradation and shocks. In *11th International Probabilistic Safety Assessment and Management Conference & the Annual European Safety and Reliability Conference-PSAM 11/ESREL 2012*, pages 375–384. (Cité page [52](#).)
- Chan, G. and Asgarpoor, S. (2006). Optimum maintenance policy with Markov processes. *Electric Power Systems Research*, 76(6-7) :452–456. (Cité page [17](#).)
- Chan, V. and Meeker, W. (2008). Time series modeling of degradation due to outdoor weathering. *Communication in Statistics - Theory and Methods*, 37 :408–424. (Cité page [12](#).)
- Chen, H., Li, F., Wan, Q., and Wang, Y. (2011). Short term load forecasting using regime-switching GARCH models. In *Power and Energy Society General Meeting, 2011 IEEE*, pages 1–6. IEEE. (Cité page [13](#).)

- Chen, H., Wan, Q., Li, F., and Wang, Y. (2013). GARCH in mean type models for wind power forecasting. In *Power and Energy Society General Meeting (PES), 2013 IEEE*, pages 1–5. IEEE. (Cité page [13](#).)
- Chernov, M., Gallant, A., Ghysels, E., and Tauchen, G. (2003). Alternative models for stock price dynamics. *Journal of Econometrics*, 116(1-2) :225–257. (Cité page [41](#).)
- Chernov, M. and Ghysels, E. (2000). A study towards a unified approach to the joint estimation of objective and risk neutral measures for the purpose of options valuation. *Journal of Financial Economics*, 56 :407–458. (Cité page [41](#).)
- Chiang, J.-Y., Lio, Y., and Tsai, T.-R. (2014). Degradation tests using geometric Brownian motion process for Lumen degradation data. *Quality and Reliability Engineering International*, pages 1797–1806. (Cité page [28](#).)
- Chiarella, C., kang, B., Meyer, G. H., and Ziogas, A. (2009). The evaluation of american option Prices Under stochastic volatility and jump-diffusion dynamics using the method of lines. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*,, 12(3). (Cité page [37](#).)
- Clerc, M. and Kennedy, J. (2002). The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 6(1) :58–73. (Cité page [131](#).)
- Clerc, M. and Siarry, P. (2004). Une nouvelle métaheuristique pour l’optimisation difficile : la méthode des essais particuliers. *J3eA*, 3. (Cité pages [129](#) and [132](#).)
- Cocozza-Thivent, C. (1997). *Processus stochastique et fiabilité des systèmes*, volume 28 of *Mathématiques et Applications*. Springer Verlag. (Cité pages [17](#) and [18](#).)
- Coelen, N. (2002). Black-Scholes option pricing model. *USA : Trinity University*. (Cité page [28](#).)
- Conover, K., VandenBosche, J., Rhoads, H., and Smith, B. (2000). Review of operation and maintenance experience in the DOE-EPRI wind turbine verification program. *Proceedings of American Wind Energy Association’s WindPower*. (Cité page [145](#).)
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns : stylized facts and Statistical issues. *Institut of Physics Publications*, 1 :223–236. (Cité pages [41](#) and [57](#).)
- Cont, R. and Tankov, P. (2004). *Financial modelling with jump processes*. Chapman and hall/crc financial mathematics series edition. (Cité page [29](#).)

Bibliographie

- Contreras, J., Espinola, R., Nogales, F., and Conejo, A. (2003). ARIMA models to predict next-day electricity prices. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(3) :1014–1020. (Cité page [11](#).)
- Cox, S. M., Ingersoll, J. E., and Roll, J. a. S. A. (1985). An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*, 53(2) :363–384. (Cité pages [38](#) and [40](#).)
- Craine, R., Lochstoer, L. A., and Syrtveit, K. (2000). Estimation of a stochastic-volatility jump-diffusion model. *Revista de Analisis Economico*, 15 :61–87. (Cité page [126](#).)
- Davis, G. A. (2006). Using real option to value and manage exploration. *Society of Economic Geologists, Special Publication*, pages 273–294. (Cité page [46](#).)
- de Oliveira, W. S. and Fernandes, A. J. (2012). Cost-effectiveness analysis for wind energy projects. *International Journal of Energy Science*, 2(1). (Cité page [143](#).)
- Delong, u. and Klüppelberg, C. (2008). Optimal investment and consumption in a Black–Scholes market with Lévy-driven stochastic coefficients. *The Annals of Applied Probability*, 18(3) :879–908. (Cité page [28](#).)
- Deloux, E., Castanier, B., and Bérenguer, C. (2009). Predictive maintenance policy for a gradually deteriorating system subject to stress. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(2) :418–431. (Cité page [107](#).)
- Doksum, K. A., Hóyland, A., and Hoyland, A. (1992). Models for variable-stress accelerated life testing experiments based on Wiener processes and the Inverse Gaussian distribution. *Technometrics*, 34(1) :74. (Cité page [23](#).)
- Duffie, D., Pan, J., and Singleton, K. (2000). Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68 :1343–1376. (Cité page [69](#).)
- Duffie, D., Saita, L., and Wang, K. (2007). Multi-period corporate default prediction with stochastic covariates. *Journal of Financial Economics*, 83(3) :635–665. (Cité page [107](#).)
- Duffie, D. and Singleton, K. (1993). Simulated momemts estimation of Markov models of asset price.pdf. *Econometrica*, 61 :929–952. (Cité page [43](#).)
- Dufresne, D. (2004). *Bessel processes and a functional of Brownian motion*. University of Melbourne ePrints Repository. (Cité page [155](#).)
- Dunea, A. N., Dunea, D. N., Moise, V. I., and Olariu, M. F. (2001). Forecasting methods used for performance’s simulation and optimization of photovoltaic grids. In *Power Tech Proceedings, 2001 IEEE Porto*, volume 4, pages 5–pp. (Cité page [11](#).)

- Eberhart, R. C., Kennedy, J., and others (1995). A new optimizer using particle swarm theory. In *Proceedings of the sixth international symposium on micro machine and human science*, volume 1, pages 39–43. New York, NY. (Cité page [129](#).)
- Engels, W., Obdam, T., and Savenije, F. (2009). Current developments in wind-2009. *ECN Report, ECNE-09-96*. (Cité page [141](#).)
- Engle, R. (2001). GARCH 101 : The use of ARCH/GARCH models in applied econometrics. *Journal of Economic Perspectives*, pages 157–168. (Cité page [9](#).)
- Engle, R. and Ng, V. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance*, 48(5). (Cité page [12](#).)
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4) :987–1008. (Cité pages [9](#) and [11](#).)
- Fama, E. F. (1998). Market efficiency, long-term returns, and behavioral finance. *Journal of financial economics*, 49(3) :283–306. (Cité page [95](#).)
- Faulstich, S., Lyding, B., Hahn, B., Callies, D., and Rothkegel, R. (2010). Wind energy report Germany Offshore. Technical Report, Fraunhofer IWES. (Cité page [141](#).)
- Feldman, K., Jazouli, T., Sandborn, P., and others (2009). A methodology for determining the return on investment associated with prognostics and health management. *IEEE Transactions on Reliability*, 58(2) :305–316. (Cité page [146](#).)
- Feng, L. and Linetsky, V. (2008). pricing options in jump-diffusion models : an extrapolation approach. *Operations Research*, 56(2) :304–325. (Cité page [37](#).)
- Fiordaliso, A. (1999). *Systèmes flous et prévision de séries temporelles*. Hermes Science Publication, Paris. (Cité page [9](#).)
- Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., and Sircar, K. R. (2000). Stochastic volatility correction to Black-Scholes. *Risk*, 13(2) :89–92. (Cité page [41](#).)
- Francq, C., Zakoian, J.-M., and others (2004). Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes. *Bernoulli*, 10(4) :605–637. (Cité page [12](#).)
- Gallant, A., Hsieh, D., and Tauchen, G. (1997). Estimation of stochastic volatility models with diagnostics. *Journal of Econometrics*, 81(1) :159–192. (Cité pages [41](#), [43](#), [124](#) and [126](#).)

Bibliographie

- Gallant, A. and Tauchen, G. (1996). Which moments to match. *Econometric Theory*, 12. (Cité page [126](#).)
- Garrad, H., Laboratory, R. N., Energi and Miljoe Undersoegelser EMU, R., and Engineering, T. E. (2002). Concerted Action on offshore Wind Energy in Europe : Offshore Wind Energy Ready to Power a Sustainable Europe. Technical report, Delft University Wind Energy Research Institue, the Netherlands. (Cité pages [143](#) and [144](#).)
- Gebraeel, N. and Jing Pan (2008). Prognostic degradation models for computing and updating residual life distributions in a time-varying environment. *IEEE Transactions on Reliability*, 57(4) :539–550. (Cité page [151](#).)
- Gebraeel, N. Z., Lawley, M. A., Li, R., and Ryan, J. K. (2005). Residual-life distributions from component degradation signals : A Bayesian approach. *IIE Transactions*, 37(6) :543–557. (Cité pages [52](#) and [53](#).)
- Gentle, J. E. and Härdle, W. K. (2012). Modeling asset prices. In *Handbook of Computational Finance*, pages 15–33. Springer. (Cité page [57](#).)
- Glasbey, C. A. and Allcroft, D. J. (2008). A spatiotemporal auto-regressive moving average model for solar radiation. *Journal of the Royal Statistical Society : Series C (Applied Statistics)*, 57(3) :343–355. (Cité page [11](#).)
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., and Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance*, 48(5) :1779. (Cité page [12](#).)
- Gorlov, M. I. and Stroganov, A. V. (2007). ARIMA models used to predict the time to degradation failure of TTL ICs. *Russian Microelectronics*, 36(4) :261–270. (Cité page [11](#).)
- Gourieroux, C., Monfort, A., and Renault, E. (1993). Indirect inference. *Journal of applied econometrics*, 8 :S85–S118. (Cité pages [41](#), [43](#), [124](#), [125](#) and [126](#).)
- Grall, A., Dieulle, L., Bérenguer, C., and Roussignol, M. (2002). Continuous-time predictive-maintenance scheduling for a deteriorating system. *Reliability, IEEE Transactions on*, 51(2) :141–150. (Cité pages [49](#), [51](#) and [53](#).)
- Grouard, M.-H., LÉVY, S., and Lubochinsky, C. (2003). La volatilité boursière : des constats empiriques aux difficultés d’interprétation. *Banque de France*. (Cité page [79](#).)

- Haahtela, T. (2012). Differences between financial options and real options. *4th International Conference on Applied Operational Research, Proceedings*, 4 :169–178. (Cité page 47.)
- Haddad, G., Sandborn, P., and Pecht, M. (2011). Using real options to manage condition-based maintenance enabled by PHM. In *IEEE Conference on Prognostics and Health Management (PHM), 2011*, pages 1–7. IEEE. (Cité page 47.)
- Haddad, G., Sandborn, P. A., and Pecht, M. G. (2014). Using maintenance options to maximize the benefits of prognostics for wind farms. *Wind Energy*, 17(5) :775–791. (Cité pages 152 and 153.)
- Hahn, B., Durstewitz, M., and Rohrig, K. (2007). Reliability of wind turbines. In *Wind energy*, pages 329–332. Springer. (Cité page 145.)
- Haider, S. W., Chatti, K., and Baladi, G. Y. (2012). Long-term pavement performance effectiveness of preventive maintenance treatments using Markov Chain algorithm. *Engineering Journal*, 16(4) :149–158. (Cité page 17.)
- Hameed, Z., Hong, Y., Cho, Y., Ahn, S., and Song, C. (2009). Condition monitoring and fault detection of wind turbines and related algorithms : A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 13(1) :1–39. (Cité pages 50, 144 and 146.)
- Hansen, L. P. (1982). Large sample of generalized methods of moments estimator. *Econometrica*, 50(4) :1029–1054. (Cité page 41.)
- Hanson, F. B. (2002). Jump diffusion stock return models in finance stochastic process density with uniform-jump amplitude. *Proceedings of the 15th International Sympos. Mathematical Theory of Networks and Systems*, pages 1–7. (Cité pages 32 and 99.)
- Hanson, F. B. (2007a). *Applied stochastic processes and control for jump-diffusions : modeling, analysis and computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics., University of Illinois Chicago, Illinois, USA. (Cité page 7.)
- Hanson, F. B. (2007b). Stochastic processes and control for jump-diffusions. *Modeling, Analysis and Computation. SIAM, 2007*. (Cité page 37.)
- Hanson, F. B. and Westman, J. J. (2002a). Optimal consumption and portfolio control for jump-diffusion stock process with log-normal jumps. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 4256–4261. (Cité pages 31, 37 and 99.)

Bibliographie

- Hanson, F. B. and Westman, J. J. (2002b). Portfolio optimization with jump-diffusions : estimation of time-dependent parameters and application. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 377–382. IEEE. (Cité page 99.)
- Hanson, F. B., Westman, J. J., and Zhu, Z. (2004). Multinomial maximum likelihood estimation of market parameters for stock jump-diffusion models. *Mathematics of Finance : Proc. 2003 AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference on Mathematics of Finance, AMS Contemporary Mathematics*, page 351. G. Yin and Q. Zhang (Editors). (Cité pages 97 and 98.)
- Hanson, F. B. and Yan, G. (2007). American put option pricing for stochastic-volatility, jump-diffusion models. In *American Control Conference*, pages 384–389. IEEE. (Cité page 43.)
- Hanson, F. B. and Zhu, Z. (2004). Comparison of market parameters for jump-diffusion distributions using multinomial maximum likelihood estimation. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3919–3924. IEEE. (Cité pages 30, 32, 34, 96 and 97.)
- Heimes, F. O. (2008). Recurrent neural networks for remaining useful life estimation. In *International Conference on Prognostics and Health Management, 2008. PHM 2008*, pages 1–6. IEEE. (Cité page 52.)
- Heston, S. L. (1993). A closed form solution for option with stochastic volatility. *The Review of Financial Studies*, 6(2) :327–343. (Cité page 38.)
- Hinich, M. J. (1996). Testing for dependence in the input to a linear time series model. *Journal of Nonparametric Statistics*, 6(2-3) :205–221. (Cité page 86.)
- Hinich, M. J. and Patterson, D. M. (1996). Detecting epochs of transient dependence in white noise. *Journal of Nonparametric Statistics*, 3. (Cité pages 13, 86, 89 and 90.)
- Hong, H. P. (1999). Inspection and maintenance planning of pipeline under external corrosion considering generation of new defects. *Structural Safety*, 21(3) :203–222. (Cité page 19.)
- Hsieh, M.-H. and Jeng, S.-L. (2007). Accelerated discrete degradation models for leakage current of ultra-thin gate oxides. *IEEE Transactions on Reliability*, 56(3) :369–380. (Cité page 19.)

- Huang, D., Wang, H., and Yao, Q. (2008). Estimating GARCH models : when to use what? *The Econometrics Journal*, 11(1) :27–38. (Cité page [12](#).)
- Hudde, A. and Rüschendorf, L. (2016). European and asian malliavin Monte Carlo greeks for general jump diffusions with nonvanishing Brownian motion part. *arXiv preprint arXiv :1603.00920*. (Cité page [156](#).)
- Hughes, G. (2012). The performance of wind farms in the United Kingdom and Denmark. *Renewable Energy Foundation*, page 48. (Cité page [149](#).)
- Hull, J. and White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The journal of Finance*, 42(2) :281–300. (Cité pages [38](#) and [39](#).)
- Huynh, K. T., Castro, I., Barros, A., and Berenguer, C. (2012). On the construction of mean residual life for maintenance decision-making. In *8th IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety of Technical Processes (Safeprocess 2012)*, pages 654–659. (Cité page [52](#).)
- Jardine, A. K., Lin, D., and Banjevic, D. (2006). A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(7) :1483–1510. (Cité pages [51](#) and [52](#).)
- Jarrow, R. A. and Rosenfeld, E. (1984). Jump risks and the intertemporal capital asset pricing model. *Journal of Buisness*, 57(3) :337–351. (Cité page [30](#).)
- Jiang, R. (2009). An accurate approximate solution of optimal sequential age replacement policy for a finite-time horizon. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(8) :1245–1250. (Cité page [107](#).)
- Jin, X., Li, L., and Ni, J. (2009). Option model for joint production and preventive maintenance system. *International Journal of Production Economics*, 119(2) :347–353. (Cité page [46](#).)
- Johannes, M. (2004). The statistical and economic role of jumps in continuous-time interest rate models. *The Journal of Finance*, 59(1) :227–260. (Cité page [69](#).)
- Jordan, D. C. and Kurtz, S. R. (2010). Analytical improvements in PV degradation rate determination. In *Photovoltaic Specialists Conference (PVSC), 2010 35th IEEE*, pages 002688–002693. IEEE. (Cité page [11](#).)
- Jorion, P. (1988). On jump processes in the foreign exchange and in the stock markets. *The Review of Financial Studies*, pages 427–445. (Cité page [30](#).)

Bibliographie

- Kaiser, K. and Gebraeel, N. (2009). Predictive maintenance management using sensor-based degradation models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A : Systems and Humans*, 39(4) :840–849. (Cité page 52.)
- Kantz, H. and Schreiber, T. (1997). *Nonlinear time series analysis*. Cambridge University Press. (Cité page 9.)
- Kennedy, J. and Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, 4 :1942 – 1948. (Cité page 129.)
- Kharoufeh, J. P. (2003). Explicit results for wear processes in a markovian environment. *Operations Research Letters*, 31(3) :237–244. (Cité page 17.)
- Kharoufeh, J. P. and Cox, S. M. (2005). Stochastic models for degradation-based reliability. *IIE Transactions*, 37(6) :533–542. (Cité page 17.)
- Kladivko, K. (2007a). *The General Method of Moments (GMM) using MATLAB : the practical guide based on the CKLS interest rate model*. PhD thesis, Department of Statistics and Probability Calculus, University of Economics, Prague. (Cité page 41.)
- Kladivko, K. (2007b). Maximum likelihood estimation of the Cox-Ingersoll-Ross process : the Matlab implementation. *Technical Computing Prague*. (Cité page 41.)
- Kou, S. (2007). Chapter 2 : Jump-diffusion models for asset pricing in financial engineering. In *Handbooks in Operations Research and Management Science*, volume 15, pages 73–116. Elsevier. (Cité pages 35, 95, 101 and 155.)
- Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*, 48(8) :1086–1101. (Cité page 30.)
- Kou, S. G. and Wang, H. (2003). First passage times of a jump diffusion process. *Advances in Applied Probability*, 35(2) :504–531. (Cité pages 36, 37, 157 and 159.)
- Kou, S. G. and Wang, H. (2004). Option pricing under a double exponential jump diffusion model. *Management Science*, 50(9) :1178–1192. (Cité pages 35 and 46.)
- Kozubowski, T. J. and Podgorsko, K. (2001). Asymmetric laplace laws and modeling financial data. *Mathematical and Computer Modelling*, 34 :1003–1021. (Cité pages 70, 71 and 72.)
- Le Son, K. (2012). *Modélisation probabiliste du pronostic*. PhD thesis. (Cité page 52.)

- Le Son, K., Fouladirad, M., and Barros, A. (2012). Remaining useful life estimation on the non-homogenous Gamma with noise deterioration based on Gibbs filtering : A case study. *2012 IEEE Conference on Prognostics and Health Management (PHM)*, pages 1–6. (Cité page [52](#).)
- Leaney, V., Sharpe, D., and Infield, D. (1999). Condition monitoring technique for optimization of wind farm performance. *International Journal of COMADEM*, 2(1) :5–13. (Cité page [142](#).)
- Lee, S. S. and Mykland, P. A. (2008). Jumps in financial markets : a new nonparametric test and jump dynamics. *Review of Financial Studies*, 21(6) :2535–2563. (Cité page [69](#).)
- Lehmann, A. (2009). Joint modeling of degradation and failure time data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(5) :1693–1706. (Cité page [107](#).)
- Lei, X., Sandborn, P., and Kashani-Pour, A. (2015). Development of a maintenance option model to optimize offshore wind farm O&M. Copenhagen. (Cité page [153](#).)
- Liao, H., Zhao, W., and Guo, H. (2006). Predicting remaining useful life of an individual unit using proportional hazards model and logistic regression model. In *Annual Reliability and Maintainability Symposium, 2006. RAMS'06*, pages 127–132. IEEE. (Cité page [50](#).)
- Liew, V. K.-S., Chong, T. T.-L., and Lim, K.-P. (2003). The inadequacy of linear autoregressive model for real exchange rates : empirical evidence from asian economies. *Applied Economics*, 35(12) :1387–1392. (Cité page [86](#).)
- Lim, K.-P. (2005). Statistical inadequacy of GARCH models for asian stock markets : evidence and implications. *Journal of Emerging Market Finance*, 4(3) :263–279. (Cité pages [13](#), [86](#), [89](#) and [90](#).)
- Lim, K.-P., Brooks, R. D., and Hinich, M. J. (2008). Nonlinear serial dependence and the weak-form efficiency of asian emerging stockmarkets. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 18(5) :527–544. (Cité page [13](#).)
- Lim, K.-P., Hinich, M. J., Liew, K. S., and others (2003). GARCH diagnosis with portmanteau bivariate correlation test an application on the Malaysia's stock market. Technical report, EconWPA. (Cité pages [86](#) and [90](#).)
- Lindberg, C. (2009). Portfolio optimization when expected stock returns are determined by exposure to risk. *Bernoulli*, 15(2) :464–474. (Cité page [28](#).)

Bibliographie

- Lindenberg, S. (2009). *20% Wind energy by 2030 : increasing wind energy's contribution to US electricity supply*. DIANE Publishing. (Cité page 140.)
- Longstaff, F. A. and Schwartz, E. S. (2001). Valuing american options by simulation : a simple least-squares approach. *Review of Financial studies*, 14(1) :113–147. (Cité page 46.)
- Lorton, A., Fouladirad, M., and Grall, A. (2013). Computation of remaining useful life on a physic-based model and impact of a prognosis on the maintenance process. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O : Journal of Risk and Reliability*, 227(4) :434–449. (Cité page 52.)
- Luenberger, D. G. (1998). *Investment science*. Oxford Univ. Press, New York. (Cité page 21.)
- Matsumoto, H. (2005). Exponential functionals of Brownian motion, I : Probability laws at fixed time. *Probability Surveys*, 2 :312–347. (Cité page 155.)
- Mazzuchi, T. A., Noortwijk, J. M., and Kallen, M.-J. (2007). Maintenance optimization. *Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability*. (Cité pages 47 and 51.)
- Mechin, B. (2007). *Maintenance : concepts et définitions*. Ed. Techniques Ingénieur. (Cité page 51.)
- Merton, R. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3 :125–144. (Cité pages 30 and 36.)
- Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1) :141. (Cité page 27.)
- Mihandoust, S. and Amirani, M. C. (2011). Epileptic seizure detection using GARCH model on EEG signals. In *1st International Conference on Computer and Knowledge Engineering (ICCKE)*, pages 100–104. IEEE. (Cité page 12.)
- Miyaoka, K., Tamura, Y., and Yamada, S. (2013). Optimal maintenance problems based on jump diffusion Models considering the Operating phase of cloud OSS. *Proceedings of the 19th ISSAT International Conference on Reliability and Quality in Design*. (Cité page 37.)
- Monfardini, C. (1998). Estimating stochastic volatility models through indirect inference. *Econometrics Journal*, 1 :113–128. (Cité pages 126 and 132.)

- Moodley, N. (2005). *The Heston model : a practical approach*. PhD thesis, University of the Witwatersrand. (Cité page [40](#).)
- Nadratowska, N. B. and Prochna, D. (2010). *Option pricing under the double exponential jump-diffusion model by using the Laplace transform*. Master's Thesis in Financial Mathematics, School of Information Science, Computer and Electrical Engineering Halmstad University. (Cité page [37](#).)
- Nelson, D. B. (1990). Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) Model. *Econometric Theory*, 6(3) :318–334. (Cité page [12](#).)
- Newby, M. and Barker, C. (2006). A bivariate process model for maintenance and inspection planning. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 83(4) :270–275. (Cité page [107](#).)
- Newby, M. and Dagg, R. (2004). Optimal inspection and perfect repair. *Journal of Management Mathematics*, 15(2) :175–192. (Cité page [51](#).)
- Niknam, S. A. (2014). *Prognostic-based life extension methodology with application to power generation systems*. PhD thesis, University of Tennessee - Knoxville. (Cité pages [148](#), [150](#) and [155](#).)
- Nualart, D. (2006). *The Malliavin calculus and related topics*. Probability and its applications. Springer, Berlin, 2. ed edition. (Cité page [155](#).)
- Orsagh, R., Lee, H., Waston, M., and Byington, C. (2006). Advanced vibration monitoring for wind turbine health management. NY, USA. (Cité page [145](#).)
- Pan, J. (2002). The jump-risk premia implicit in options : Evidence from an integrated time-series study. *Journal of financial economics*, 63(1) :3–50. (Cité page [41](#).)
- Park, C. and Padgett, W. (2005a). New cumulative damage models for failure using stochastic processes as initial damage. *IEEE Transactions on Reliability*, 54(3) :530–540. (Cité page [23](#).)
- Park, C. and Padgett, W. (2006). Stochastic degradation models with several accelerating variables. *IEEE Transactions on Reliability*, 55(2) :379–390. (Cité page [28](#).)
- Park, C. and Padgett, W. J. (2005b). Accelerated degradation models for failure based on geometric Brownian motion and Gamma processes. *Lifetime Data Analysis*, 11(4) :511–527. (Cité page [28](#).)

Bibliographie

- Partington, G. and Kim, M. H. (2008). Modeling bankruptcy prediction using Cox regression model with time-varying covariates. Working paper, University of Sydney, Australia. (Cité page 107.)
- Petitot, C. (2008). *Modélisation des Systèmes Complexes*. Univeristé de Lille. (Cité page 16.)
- Platen, E. and Heath, D. (2010). *A benchmark approach to quantitative finance*. Springer Finance. Springer, Berlin, corr., 2. print edition. (Cité pages 6, 22 and 27.)
- Podobnik, B., Ivanov, P. C., Grosse, I., Matia, K., and Eugene Stanley, H. (2004). ARCH–GARCH approaches to modeling high-frequency financial data. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 344(1-2) :216–220. (Cité page 13.)
- Ponchet, A., Fouladirad, M., and Grall, A. (2008). Online conditionbased maintenance for system with several modes of degradation. In *European Safety and Reliability Conference (ESREL)*. (Cité page 107.)
- Ponchet, A., Fouladirad, M., and Grall, A. (2009). Assessment of a control limit maintenance decision rule for a multi deteriorating mode system. In *European Safety and Reliability Conference (ESREL)*. (Cité page 107.)
- Postali, F. A. and Picchetti, P. (2006). Geometric Brownian motion and structural beaks in Oil prices : a quantitative analysis. *Energy Economics*, 28(4) :506–522. (Cité page 28.)
- Predescu, O. M. and Stancu, S. (2011). Portfolio risk analysis using ARCH and GARCH models in the context of the global financial crisis. *Theoretical and Applied Economics*, 2(2) :75. (Cité page 13.)
- Rachev, S. T., Hsu, J. S., Bagasheva, B. S., and Fabozzi, F. J., editors (2008). *Bayesian methods in finance*. The Frank J. Fabozzi series. Hoboken, NJ Wiley. (Cité page 41.)
- Rasool, G., Bouaynaya, N., and Iqbal, K. (2012). Muscle activity detection from myoelectric signals based on the AR-GARCH model. In *Statistical Signal Processing Workshop (SSP), 2012 IEEE*, pages 420–423. IEEE. (Cité page 12.)
- Ribrant, J. (2006). Reliability performance and maintenance - a survey of failures in wind power systems. *Sweden : KTH School of Electrical Engineering*. (Cité pages 140 and 145.)
- Rémi, R. (2010). Processus de Lévy et calcul stochastique. *Document de travail, Université Paris-Dauphine*. (Cité page 7.)

- Rogers, J. (2002). *Strategy, value and risk : the real options approach ; reconciling innovation, strategy and value management*. Finance and capital markets. Palgrave, Basingstroke, Hampshire. (Cité pages 46 and 152.)
- Samuelson, P. A. (1965). Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Revue*, 6 :41–50. (Cité page 27.)
- Sandborn, P., Haddad, G., Kashani-Pour, A., and Lei, X. (2014). Development of a Maintenance Option Model to Optimize Offshore Wind Farm Sustainment. In *32nd ASME Wind Energy Symposium*, page 0362. (Cité pages 142, 146, 152 and 153.)
- Santa-Cruz, S. and Heredia-Zavoni, E. (2011). Maintenance and decommissioning real options models for life-cycle cost-benefit analysis of offshore platforms. *Structure and Infrastructure Engineering*, 7(10) :733–745. (Cité page 152.)
- Sarol, Y., Viens, F. G., and Zhang, T. (2007). Portfolio optimization with consumption in a fractional Black-Scholes market. *Commun. Stoch. Anal*, 1 :357–379. (Cité page 28.)
- Satow, T., Teramoto, K., and Nakagawa, T. (2000). Optimal replacement policy for a cumulative damage model with time deterioration. *Mathematical and Computer Modelling*, 31(10) :313–319. (Cité page 19.)
- Schreiner, A., Balzer, G., and Precht, A. (2008). Risk analysis of distribution systems using value at risk methodology. In *Proceedings of the 10th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems, 2008. PMAPS'08.*, pages 1–8. IEEE. (Cité page 44.)
- Schwert, G. W. (1990). Stock volatility and the crash of 87. *Review of Financial Studies*, 3 :77–102. (Cité page 12.)
- Sentana, E. (1995). Quadratic ARCH models. *Review of Economic Studies*, Wiley Blackwell, 62(4) :639–661. (Cité page 12.)
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance I*. Springer Finance Series, Verlag, New York. (Cité page 21.)
- Singpurwalla, N. (1995). Survival in dynamic environments. *The Institute of Mathematical Statistics*, 10 :86–103. (Cité page 107.)
- Singpurwalla, N. (1997). Gamma processes and their generalizations : an overview. In *Engineering Probabilistic Design and Maintenance for Flood Protection*, pages 67–75. Springer. (Cité page 20.)

Bibliographie

- Singpurwalla, N. D. and Wilson, S. P. (1998). Failure models indexed by two scales. *Advances in Applied Probability*, 30(4) :1058–1071. (Cité page 20.)
- Slutzky, E. (1937). The summation of random causes as the source of cyclic processes. *Econometrica*, 5(2) :105. (Cité page 10.)
- Sobczyk, K. and Trebicki, J. (1989). Modelling of random fatigue by cumulative jump processes. *Engineering Fracture Mechanics*, 34(2) :477 – 493. (Cité page 19.)
- Soro, I. W., Nourelfath, M., and Aït-Kadi, D. (2010). Performance evaluation of multi-state degraded systems with minimal repairs and imperfect preventive maintenance. *Reliability Engineering & System Safety*, 95(2) :65–69. (Cité page 17.)
- Staffell, I. and Green, R. (2014). How does wind farm performance decline with age? *Renewable Energy*, 66 :775–786. (Cité page 149.)
- Stein, E. and Stein, J. (1991). Stock price distributions with stochastic volatility : an analytic approach. *Review of Financial Studies*, 4. (Cité page 38.)
- Tamura, Y. and Yamada, S. (2015). Reliability analysis based on a jump diffusion model with two Wiener processes for cloud computing with big data. *Entropy*, 17(7) :4533–4546. (Cité page 37.)
- Tan, L., Cheng, Z., Guo, B., and Gong, S. (2010). Condition-based maintenance policy for Gamma deteriorating systems. *Systems Engineering and Electronics Journal*, 21(1) :57–61. (Cité pages 21 and 151.)
- Tankov, P. and Voltchkova, E. (2009). Jump-diffusion models : a practitioner’s guide. *Banque et Marchés*, 99 :1–24. (Cité page 37.)
- Tavner, P. J., Long, H., and Feng, Y. (2010). Early experiences with UK round 1 offshore wind farms. *Proceedings of the ICE - Energy*, 163(4) :167–181. (Cité page 140.)
- Tian, Z. and Jin, T. (2011). Maintenance of wind turbine systems under continuous monitoring. In *Proceedings Annual on Reliability and Maintainability Symposium (RAMS), 2011*, pages 1–6. IEEE. (Cité page 146.)
- Trelea, I. C. (2003). The particle swarm optimization algorithm : convergence analysis and parameter selection. *Information processing letters*, 85(6) :317–325. (Cité page 132.)
- Turner, E. (2010). The Black-Scholes model and extensions. Technical report, Research Report, Chicago. (Cité page 28.)

- Udny Yule, G. (1927). On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 226 :267–298. (Cité page 9.)
- Valor, A., Caleyó, F., Alfonso, L., Rivas, D., and Hallen, J. (2007). Stochastic modeling of pitting corrosion : a new model for initiation and growth of multiple corrosion pits. *Corrosion Science*, 49(2) :559–579. (Cité page 19.)
- van der Sluis, P. J. (1999). *Estimation and inference with the Efficient Method of Moments : with applications to stochastic volatility models and option pricing*. PhD thesis, Faculty of Economics and Business Institute-Amsterdam School of Economics Research Institute (ASE-RI). (Cité page 46.)
- Van Noortwijk, J. (2009). A survey of the application of Gamma processes in maintenance. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(1) :2–21. (Cité pages 20, 21 and 53.)
- van Noortwijk, J. and Klatter, H. (2004). The use of lifetime distributions in bridge maintenance and replacement modelling. *Computers & Structures*, 82(13-14) :1091–1099. (Cité page 52.)
- Van Noortwijk, J., Van der Weide, J., Kallen, M., and Pandey, M. (2007). Gamma processes and peaks-over-threshold distributions for time-dependent reliability. *Reliability Engineering & System Safety*, 92(12) :1651–1658. (Cité pages 20 and 151.)
- Verbruggen, T., Rademakers, L., Roost, P., and Dersjant, G. (2002). Maintenance manager to control operation and maintenance of offshore wind farms. *International Journal of Environment and Sustainable Development*, 1(4). (Cité pages 143 and 145.)
- Villemeur, A. (1988). *Sûreté de fonctionnement des systèmes industriels*. Collection de la direction des études et recherches d'Électricité de France. Eyrolles, coll., Paris. (Cité page 1.)
- Wang, J. and Zhang, T. (2008). Degradation prediction method by use of autoregressive algorithm. In *IEEE International Conference on Industrial Technology, 2008. ICIT 2008*, pages 1–6. IEEE. (Cité page 12.)
- Wang, T., Yu, J., Siegel, D., and Lee, J. (2008). A similarity-based prognostics approach for remaining useful life estimation of engineered systems. In *International Conference on Prognostics and Health Management, 2008. PHM 2008*, pages 1–6. IEEE. (Cité page 52.)

Bibliographie

- Wang, X., Guo, B., and Cheng, Z. (2011). Real-time reliability evaluation of equipment based on separated-phase Gamma process. In *9th International Conference on Reliability, Maintainability and Safety (ICRMS), 2011*, pages 248–254. IEEE. (Cité pages [21](#) and [151](#).)
- Wei, Q. and Xu, D. (2014). Remaining useful Life estimation based on Gamma process considered with measurement error. In *International Conference on Reliability, Maintainability and Safety (ICRMS), 2014*, pages 645–649. IEEE. (Cité page [21](#).)
- Wild, P., Foster, J., and Hinich, M. J. (2010). Identifying nonlinear serial dependence in volatile, high-frequency time series and its implications for volatility modeling. *Macroeconomic Dynamics*, 14(S1) :88–110. (Cité page [89](#).)
- Xiao-mei, Z., Qun-yan, Z., and Xin, R. (2011). The research of software reliability measure based on conditional value at risk. In *International Conference on Electronic and Mechanical Engineering and Information Technology (EMEIT), 2011*, volume 6, pages 3092–3094. IEEE. (Cité page [44](#).)
- Yan, G. and Hanson, F. B. (2006). Option pricing for a stochastic-volatility jump-diffusion model with log-uniform jump-amplitudes. In *American Control Conference, 2006*, pages 6–pp. IEEE. (Cité pages [43](#) and [46](#).)
- Ye, Z.-S. and Xie, M. (2015). Stochastic modelling and analysis of degradation for highly reliable products. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 31(1) :16–32. (Cité pages [21](#) and [23](#).)
- Yin, M.-L., Angus, J. E., and Trivedi, K. S. (2013). Optimal preventive maintenance rate for best availability with hypo-exponential failure distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, 62(2) :351–361. (Cité page [17](#).)
- Yu, K. and Zhang, J. (2005). A three-parameter asymmetric Laplace distribution and its extension. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 34(9-10) :1867–1879. (Cité pages [70](#), [73](#) and [74](#).)
- Yu Wang, Zhi-Sheng Ye, and Kwok-Leung Tsui (2014). Stochastic evaluation of magnetic head wears in hard disk drives. *IEEE Transactions on Magnetics*, 50(5) :1–7. (Cité page [23](#).)
- Zakoian, J. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18 :931–955. (Cité page [12](#).)

- Zarate-Minano, R., Anghel, M., and Milano, F. (2013). Continuous wind speed models based on stochastic differential equations. *Applied Energy*, 104 :42–49. (Cité page 148.)
- Zhang, S. and Zhang, X. (2008). Exact simulation of IG-OU processes. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 10(3) :337–355. (Cité page 41.)
- Zhong, C. and Jin, H. (2014). A novel optimal preventive maintenance policy for a cold standby system based on Semi-Markov theory. *European Journal of Operational Research*, 232(2) :405–411. (Cité page 17.)
- Zhou, J. (2009). *Modeling S&P 500 stock index using ARMA-asymmetric power ARCH models*. PhD thesis, Master Thesis in statistics. School of economics and social science. Hogskolan Dalarna, Sweden. (Cité pages 10 and 13.)
- Zhou, X., Xi, L., and Lee, J. (2007). Reliability-centered predictive maintenance scheduling for a continuously monitored system subject to degradation. *Reliability Engineering & System Safety*, 92(4) :530–534. (Cité pages 49 and 50.)
- Zhu, Z. and Hanson, F. B. (2005). A Monte-Carlo option-pricing algorithm for log-uniform jump-diffusion model. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005, Seville*, pages 5221–5226. (Cité page 46.)
- Zwingelstein, G. (2009). Sureté de fonctionnement des systèmes industriels complexes. Réf. : S8250. (Cité page 1.)

Bibliographie

Houda GHAMLOUCH

Doctorat : Optimisation et Sûreté des Systèmes

Année 2016

Modélisation de la dégradation, maintenance conditionnelle et pronostic : usage des processus de diffusion

Aujourd'hui la prédiction des défaillances de certains systèmes industriels est devenue indispensable pour l'amélioration de la fiabilité et de la rentabilité de ces derniers. Cette prédiction s'appuie principalement sur l'analyse d'évolution du niveau de dégradation du système. Pour les systèmes dont l'état de détérioration n'est pas directement observable, la définition d'indicateurs de santé mesurables est nécessaire. Une modélisation du processus de dégradation à partir de ces données peut être ensuite effectuée.

Dans cette thèse, nous considérons un ensemble d'indicateurs non-monotones pour un système opérant dans un environnement dynamique. Compte tenu des principales caractéristiques des données ainsi que de l'impact des conditions environnementales et de leur instabilité, une modélisation stochastique de l'évolution de ces indicateurs est proposée. Les modèles proposés se basent principalement sur une combinaison d'un processus de Wiener et de processus de sauts. Les motivations, les méthodes de calibration, l'utilité et les limites de chaque modèle sont discutées.

Nous proposons ensuite une approche pour l'aide à la décision concernant les actions de maintenance préventive. Cette approche consiste à évaluer la valeur d'une option réelle qui présente la possibilité d'«Attendre avant d'Agir» suite à un signal d'avertissement sur une défaillance probable. Une application de cette approche pour le cas d'une éolienne équipée d'un système de surveillance et de gestion est traitée.

Mots clés : processus stochastiques - maintenance conditionnelle - mouvement brownien - poisson, processus de - prise de décision - Lévy, processus de - processus de diffusion.

The Use of Diffusion Process for Deterioration Modeling, Condition-based Maintenance and Prognosis

A major concern for engineers and managers nowadays is to make high quality products and highly reliable systems. In this context, reliability analysis and failure prediction, besides of efficient maintenance decision-making are strongly required. Deterioration modeling and analysis is a fundamental step for the understanding and the anticipation of system behavior. Consider a functional system operating in unstable conditions or environment where the deterioration level is not observable and could not be determined by direct measures. For this system a set of measurable health indicator that indirectly reflects the system working conditions and deterioration level can be defined and examined. Considering these indicators, the development of a mathematical model describing the system behavior is required.

In this thesis, we consider a set of non-monotone indicators evolving in a dynamic environment. Taking into account the major features of the data evolution as well as the impact of dynamic environment consequences and potential shocks, stochastic models based on Wiener and jump processes are proposed for these indicators. Each model is calibrated and tested, and their limits are discussed. A decision-making approach for preventive maintenance strategies is then proposed. In this approach, knowing the RUL of the system, a simulation-based real options analysis is used in order to determine the best date to maintain. Considering a case study of a wind turbine with PHM structure, the decision optimization approach is described.

Keywords: stochastic processes - condition-based maintenance - brownian movements - poisson processes - decision making - Levy processes - diffusion processes.

Thèse réalisée en partenariat entre :

