



HAL
open science

Analysis of flows around an obstacle and thermal instabilities in a elastoviscoplastic fluid: numerical modelling using FEM-LIP and experimental comparison

Moctar Gueye

► **To cite this version:**

Moctar Gueye. Analysis of flows around an obstacle and thermal instabilities in a elastoviscoplastic fluid: numerical modelling using FEM-LIP and experimental comparison. Materials Science [cond-mat.mtrl-sci]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2020. English. NNT: 2020GRALI057. tel-03363090

HAL Id: tel-03363090

<https://theses.hal.science/tel-03363090v1>

Submitted on 3 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Spécialité : MEP : Mécanique des fluides Energétique,
Procédés

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Moctar GUEYE

Thèse dirigée par **Albert MAGNIN**, Directeur de recherches,
CNRS et codirigée par **Frédéric DUFOUR**, Professeur,
Grenoble INP

Préparée au sein du **Laboratoire Rhéologie et Procédés**
dans l'**École Doctorale I-MEP2 - Ingénierie - Matériaux,**
Mécanique, Environnement, Energétique, Procédés,
Production

**Analyse des écoulements autour d'un obstacle
et des instabilités thermiques dans un fluide
élasto-viscoplastique : modélisation numérique
par la MEFPII et comparaison expérimentale**

**Analysis of flows around an obstacle and
thermal instabilities in a elasto-viscoplastic
fluid: numerical modelling using FEMPII and
experimental comparison**

Thèse soutenue publiquement le **28 septembre 2020**
devant le jury composé de :

Monsieur, Valéry, BOTTON

Professeur, INSA-Lyon, (Président)

Monsieur, Amine, AMMAR

Professeur et Arts et Métiers ParisTech, (Rapporteur)

Monsieur, Gilmar, MOMPEAN

Professeur, Université de Lille, Polytech 'Lille, (Rapporteur)

Monsieur, El Hadji Bamba, DIAW

Professeur, Ecole Polytechnique de Thiès, (Examineur)

Monsieur, Laurent, JOSSIC

Maître de Conférences, Grenoble-INP, (Examineur)

Madame, Christel, METIVIER

Maître de Conférences, Université de Lorraine, (Examinatrice)

Monsieur, Frédéric, DUFOUR

Professeur, Grenoble-INP, (Co-directeur de thèse)

Monsieur, Albert, MAGNIN

Directeur de recherche, CNRS, (Directeur de thèse)



*À mes parents
À Aicha et Zeyna.*

REMERCIEMENTS

Ces années de recherches ont été parcourues de moments passionnants et riche en émotions, mais aussi de doutes et d'inquiétude. Cette thèse n'aurait jamais pu s'achever sans les contributions multiformes de nombreuses personnes, rencontrées au cours du chemin. S'aventurer à les désigner, de façon la plus exhaustive possible constitue une très complexe et périlleuse mission, tant les risques d'oubli sont grands.

Qu'il me soit permis de citer ci-dessous quelques-unes de ces personnes qui ont joué sans aucun doute un rôle décisif à la réalisation de cette thèse.

Mes remerciements vont prioritairement à mon directeur, Monsieur Albert Magnin pour avoir accepté d'encadrer cette thèse. Ses conseils, sa patience, sa rigueur scientifique et la confiance placée en moi m'ont permis de garder le cap dans les moments plus difficiles. Son expertise dans le domaine de la rhéologie a rendu mon expérience de doctorat productive et stimulante. J'ai beaucoup appris à son contact et je reste profondément marqué par les qualités humaines qu'il m'a toujours témoignées. Je remercie également mon co directeur, Monsieur Frédéric Dufour pour avoir accepté de co encadrer cette thèse. La collaboration entre les laboratoires LRP et 3SR a été précieuse et son implication a été déterminante dans la mise à œuvre de la MEFIL et le bon déroulement des études de modélisation. Sa disponibilité, son appui, ses critiques relectures toujours avisées m'ont permis de progresser dans mes recherches. Je veux dire toute la satisfaction que j'ai eue d'avoir pu évoluer sous sa direction.

Ce projet n'aurait certainement pas vu le jour si je n'avais pas bénéficié d'un soutien financier. Je tiens absolument à remercier le CNRS de m'avoir octroyé une allocation doctorale. Je remercie également M. Valéry Botton d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. Je mesure l'honneur que me font les Professeurs Amine Ammar et Gilmar Mompean en acceptant de siéger dans ce jury en qualité de rapporteurs. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance respectueuse.

J'adresse également mes vifs remerciements au Professeur El Hadji Bamba Diaw de l'EPT de Thiès Sénégal d'avoir accepté d'examiner cette thèse. Avec lui, j'ai découvert la mécanique des fluides durant mon passage à l'EPT. Son enseignement m'a transmis le virus de la recherche et la passion que je porte à cette discipline.

J'exprime aussi toute ma reconnaissance à Madame Christelle Métivier et Monsieur Laurent Jossic d'avoir accepté d'examiner ces travaux et également pour leurs conseils, leurs disponibilités, leurs contributions et pour les enrichissants échanges durant ces longues années de recherche.

Cette thèse a pu se faire grâce à la confiance qui nous a été accordée par l'école doctorale I-MEP2 et le Laboratoire Rhéologie et Procédés (LRP). Je voudrais exprimer ma déférente gratitude à Mme Nadia El Kissi, directrice du LRP pour m'avoir accueilli au sein de cette structure qui a été pour moi un cadre agréable pour mener à bien mes recherches. Je la remercie particulièrement pour ses encouragements et exhortations qui ne m'ont jamais fait défaut. Je remercie tout le personnel administratif : M. François Bergerot, Mmes Louise Infuso, et Sylvie Garofalo, pour leur disponibilité, leur gentillesse et leur bonne humeur. J'exprime également ma reconnaissance et mes remerciements à tout le personnel technique : Messieurs. Didier Blésès, Eric Faivre, Frédéric Hugennell, Mohamed Karrouch et Vincent Verdoot, pour leur grande disponibilité, leur conseil et surtout nos discussions intéressantes de l'actualité durant les heures de pause, Fred, merci pour ton soutien indéfectible, ta bonne humeur. Eric, je garde précieusement les podcasts de France culture que tu m'avais partagée. Didier merci pour ton aide précieuse quand j'avais besoin d'astuces pour optimiser le temps de mes simulations. Merci, Mohamed, pour ta générosité.

Je voudrais particulièrement remercier mes collègues du bureau de l'ambiance 369 où la rencontre de super stars animées d'une grande générosité a fait de ce lieu un endroit unique. Je témoigne de mon estime à Djo Mondesert comme j'ai l'habitude de l'appeler, merci Djo pour tes conseils et ta constance et sache que j'ai beaucoup apprécié nos échanges, moments de foot, repas et délires, mais surtout ta personnalité. Merci Ouattara le nouveau marié (clin d'œil à Meriem), tu as été d'une gentillesse incommensurable, toujours prêt à se sacrifier pour les autres, j'ai appris auprès de toi, persévérance et abnégation parmi tes nombreuses qualités. Merci Diégo « djiguito », ton premier jour au labo, tu as été accueilli par les ambianceurs du bureau, ta réaction positive reste toujours marquante, synonyme d'une personne ouverte d'esprit et sociable. Pour autant, tu me piquais toujours mon riz bien épicé et j'étais toujours content de partager avec toi. Merci Mohammed, pour ta gentillesse et ta bonne humeur qui tu nous transmets chaque matinée. Je te souhaite une bonne fin de thèse. Merci Louis, notre star finaliste MT180 2018, mais n'oublies pas le droit d'auteur « un bobo, un pansement », merci de m'avoir transmis ta niaque.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit des autres doctorants et postdoctorants que j'ai côtoyés au LRP : Amélie, Alice, Adriana, Mathilde, William, Candice, Fiacre, Essa, Hanna, Clément, Martinien, Héloïse, Antoine, Ayoub (le distributeur de jeton), Mehdi, Ali, Adja, Youness, Xavier et Béatrice notre attaquante de classe lors des tournois de foot, toujours souriante.

Je témoigne ma reconnaissance aux amis qui m'ont diversement soutenu depuis mon arrivée à Grenoble jusqu'à ce jour. Je pense particulièrement à mes amis et frères Alou, Junior, Pipa, Cheikh Bâ, Mbaye, phonse, Jérémie, Mister babs, Grand Moussa, Youssouf et ma sœur Cindy. Merci pour les moments de soutien et de convivialité. J'adresse mes sincères remerciements à mon mentor Gilles, ainsi qu'à tous mes nombreux amis et connaissances dont le soutien a été précieux. Je pense aussi à tous les amis avec qui j'ai dirigé l'Association Etudiants Sénégalais et Africaines de l'Isère. Merci à Alpha Bâ, Ika, Laye Ly, Cheikhna et Ngagne (courage pour ta soutenance) pour ces moments de bénévolat au service de la communauté et de vos encouragements.

Ces remerciements seraient incomplets si je ne mentionnais pas deux personnes qui ont su créer autour de moi un cadre familial agréable. Je pense particulièrement à mon frère Cheikh et ma belle-sœur Mama Sow. Merci à vous pour votre accueil depuis Clermont-Ferrand, vos encouragements, vos conseils et votre accompagnement. Merci aussi pour votre gentillesse et bonne humeur, je m'en souviendrai toujours.

J'exprime enfin mes remerciements les plus profonds à ma famille et belle famille. J'adresse ici un message tout particulier à mes parents et mon oncle adoptif qui m'ont soutenu comme jamais durant mes années d'études. Je n'aurais pas pu arriver aussi loin sans leur accompagnement, leur encouragement et leur affection. Cette thèse est dédiée à vous.

Enfin, mes derniers remerciements sont pour celle qui a participé à sa manière à la réussite de cette thèse. Merci Aicha pour ton amour inconditionnel, ton réconfort et tes encouragements.

Cette thèse est à toi.

Que toutes les personnes ayant, d'une façon ou d'une autre, contribué à cette œuvre trouvent ici toute ma gratitude.

RÉSUMÉ

Dans les procédés industriels mettant en jeu des fluides à seuil, la transition entre des états solide - fluide en fonction du chargement appliqué représente une problématique importante dans de nombreuses applications.

Ces fluides à seuil présentent aussi d'autres caractéristiques telles que leurs capacités à glisser aux interfaces et l'existence d'une déformation élastique sous le seuil de contrainte. Cette thèse se propose de comprendre la structure des écoulements de fluides élasto-viscoplastiques et, en particulier, les paramètres influant sur la morphologie de l'écoulement et sur les efforts appliqués.

Elle analyse deux situations : (1) les écoulements autour d'une plaque plane perpendiculaire à l'écoulement et, (2) les instabilités thermiques de Rayleigh-Bénard en s'appuyant sur une modélisation numérique mise en œuvre avec la Méthode des Éléments Finis avec Points d'Intégration Lagrangiens (MEFPIL).

D'une part, l'objectif est d'identifier les effets respectifs de la plasticité et de l'élasticité en utilisant la loi de comportement élasto-viscoplastique qui est une association du modèle de Herschel-Bulkley et du modèle de Maxwell. D'autre part, les résultats obtenus avec la MEFPIIL sont comparés avec ceux d'études expérimentales disponibles avec un fluide modèle (gel aqueux de Carbopol). Dans cette comparaison, d'autres effets (rhéofluidification, glissement aux parois, état initial des contraintes) ont été également pris en compte.

Les résultats mettent en évidence une diminution du coefficient de traînée de la plaque lorsque le nombre d'Oldroyd (ratio entre les effets plastiques et les effets visqueux) devient prépondérant. Pour les nombres d'Oldroyd suffisamment grands, le coefficient de traînée tend vers une valeur asymptotique qui dépend uniquement de la contrainte seuil et de la géométrie de l'obstacle.

La force de traînée augmente avec l'élasticité. De plus, les effets élastiques sont responsables de la dyssymétrie amont/aval de l'écoulement. L'analyse du champ de la composante de cisaillement ($\tau_{x_1x_2}$) permet de conclure que la traînée totale est gouvernée par la pression. Expérimentalement et numériquement, on observe une influence significative de l'état initial des contraintes du matériau dans le domaine des effets de seuil prépondérants devant les effets visqueux. Les résultats obtenus avec la MPEFPIL sont dans les mêmes ordres de grandeur que ceux fournis par les expériences.

Pour un fluide purement viscoplastique donc sans élasticité dans la convection de Rayleigh-Bénard, le nombre de Nusselt et la norme de la vitesse diminuent lorsque les effets plastiques donc le nombre de Bingham (Bn) augmentent. Au-dessus d'une valeur critique du nombre de Bingham Bnc , ($Bnc=1,7$), le transfert de chaleur est purement conductif $\overline{Nu}_1 = 1$.

Quant aux effets élastiques, les résultats montrent qu'ils favorisent la convection. L'élasticité joue alors un rôle déstabilisateur et induit une augmentation de l'intensité de la convection ainsi que du transfert de chaleur via le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu}_1 . Par conséquent, la taille des zones seuillées augmente avec l'élasticité. De plus, on observe un accroissement du champ du deuxième invariant du tenseur des contraintes au centre de la cavité avec l'augmentation de Wi . La première différence des contraintes normales $N1 = (\tau_{X_1X_1} - \tau_{X_2X_2})$ est principalement responsable de la forme des zones non seuillées. Les valeurs maximales des contraintes normales $(\tau_{X_1X_1})$ et $(\tau_{X_2X_2})$ sont obtenues là où le fluide recircule (vortex), indiquant des effets élastiques significatifs.

En outre, l'analyse des champs cinématique, de température et de contrainte ainsi que la forme et la taille des zones seuillées et non seuillées a permis de comprendre les phénomènes locaux pour un même rapport des effets de seuil de contrainte aux effets de flottabilité qui induisent, dans le cas glissant, un transfert nettement convectif et, dans le cas adhérent, un transfert conductif. Les critères d'apparitions de la convection sont dans les mêmes ordres de grandeur, aussi bien dans des conditions glissantes et d'adhérence, comparés aux expériences.

Mots clés : fluide à seuil, élasto-viscoplastique, convection de Rayleigh-Bénard, écoulement de fluide, état initial de contrainte, glissement, force de traînée, MEFPII

ABSTRACT

In industrial processes in which yield stress fluids are involved, the sudden transition between solid and fluid states based on the applied load have a wide range of applications. Additionally, yield stress fluids exhibit other characteristics including their slippage and the existence of elastic deformation below the yield stress.

This thesis aims to understand the structure of elasto-viscoplastic fluid flows and, in particular, the parameters affecting flow morphology and applied forces. This research analyses two situations: (1) fluid flows around a plate perpendicular to the flow and (2) Rayleigh Bénard's instabilities based on numerical modelling with FEM-LIP.

The first aim of the study focused on identifying the effects of plasticity and elasticity using the law of elasto-viscoplastic model, which associated with Herschel-Bulkley's and Maxwell's models. Moreover, the effects of plasticity and elasticity are compared with available experimental results obtained with a fluid model (Carbopol gel). In this comparison, more complex effects (Shear-thinning, wall slip, the initial state of stress) have been taken into account.

The results show a decrease in drag coefficient of the plate when the Oldroyd number (ratio between plastic and viscous effects) becomes predominant. Drag force is also reduced when the Oldroyd number (ratio between plastic and viscous effects) is predominant. The drag coefficient tends towards an asymptotic value which indicates that beyond a certain Oldroyd number, this drag coefficient is not governed by velocity but depends only on yield stress. Drag force increases with elasticity. Besides, the elastic effects are responsible for the dissymmetry that is observed between upstream and downstream the obstacle. The analysis of stress fields allows us to conclude that total drag force is dominated by pressure. Both experimentally and numerically, the influence of an initial state of stress of the material is observed significantly in the area of plastic effect predominant compared to viscous effects. The results obtained with FEM-LIP are in the same orders of magnitude that the ones provided by the experiments. In Rayleigh Bénard's case of convection, for a purely viscoplastic fluid thus no elastic effect, the Nusselt number and the velocity norm decrease with an increasing plastic effect therefore the Bingham number (Bn). Beyond a critical value of the Bingham number ($Bn_c = 1.7$), the heat transfer is purely conductive one ($\overline{Nu}_1 = 1$). Regarding the elastic effects, the results show how they promote convection. Therefore, elasticity plays a destabilizing role and leads to an enhancement of the convection strength as well as heat transfer via the mean Nusselt number ($\overline{Nu}_1 = 1$).

Consequently, the size of the yielded regions increases with elasticity. In addition, an increase in the field of the second invariant of the stress tensor in the center of the cavity is shown with increasing Wi . Furthermore, we notice that the first difference of the normal components $N1 = (\tau_{X_1X_1} - \tau_{X_2X_2})$ is the main responsible for the shape of the unyielded regions. The highest values of normal stresses $(\tau_{X_1X_1})$ and $(\tau_{X_2X_2})$ are obtained in the area of recirculation of the fluid (vortex), indicating significant elastic effects. Kinematic, temperature and stress field, shape and size of yielded and unyielded zones investigations allowed to better understand the local phenomena for the same ratio of yield stress effects to buoyancy effects, leading for the slippage case to a distinct convective transfer and for the adherent case to a conductive transfer. The convective onset criteria are in the same orders of magnitude both in sliding and adherent conditions in comparison with experiments.

Keywords: yield stress fluids, elasto-viscoelasticity, Rayleigh-Bénard's convection, fluid flow, state of initial stress, slippage, drag force, FEMPLIP

TABLE DES MATIERES

Notations.....	13
Chapitre 1 : Introduction générale	15
1.1. Contexte et problématique de la thèse	16
1.1.1. Méthodes numériques pour les fluides viscoplastiques	19
1.1.2. Méthodes numériques pour les fluides élasto-viscoplastiques.....	21
1.2. Objectifs et contribution de la thèse.....	23
1.3. Plan de la thèse.....	23
Chapitre 2: Elastic effects on Rayleigh Bénard convection in an elasto-viscoplastic fluid.....	26
2.1. Introduction	28
2.2. Governing equations	32
2.3. Numerical method.....	35
2.3.1. Description of the FEM-LIP.....	35
2.4. Validation of the numerical simulations.....	37
2.5. Results and discussion.....	39
2.5.1. The elasto-viscoplastic model with neglected elasticity	39
2.5.2. The general elasto-viscoplastic model.....	43
2.6. Conclusion.....	55
Chapitre 3 : Convection de Rayleigh Bénard pour un fluide élasto-viscoplastique : comparaison modélisation numérique et expérience	56
3.1. Introduction	58
3.2. Théorie des instabilités de RB	61
3.2.1. Equations gouvernant le problème.....	62
3.2.2. Loi de comportement	62
3.2.3. Nombres adimensionnels caractéristiques.....	63
3.3. Méthode numérique	65
3.4. Conditions expérimentales	66
3.5. Résultats et discussions.....	69
3.5.1. Critère d'apparition et intensité de la convection	69
3.5.2. Analyse des champs.....	70
3.5.2.1. Champs de vitesse et de déformation	70
3.5.2.2. Champs de lignes de courant et isothermes	72
3.5.2.3. Champs de contrainte et zones non seuillées.....	73
3.6. Conclusion.....	77
Chapitre 4: Flow of an élasto-viscoplastic fluid around a plate perpendicular to the flow direction.....	78

4.1.	Introduction	80
4.2.	Problem formulation and numerical method.....	82
4.2.1.	Computational domain, boundary and initial conditions	82
4.2.2.	Governing equations	83
4.2.3.	Numerical method.....	85
4.3.	Results and discussions	89
4.3.1.	Kinematic fields	89
4.3.2.	Stress fields	95
4.3.3.	Strain.....	100
4.3.4.	Drag force.....	101
4.3.4.1.	Stress distribution along the plate	101
4.3.4.2.	Drag coefficient	103
4.4.	Conclusion	107
Chapitre 5 : Etude expérimentale et numérique de l'écoulement d'un fluide élasto-viscoplastique autour d'une plaque perpendiculaire à l'écoulement		108
5.1.	Introduction	110
5.2.	Approche expérimentale.....	115
5.2.1.	Matériaux et rhéométrie.....	115
5.2.2.	Banc expérimental de mesure de forces de traînée.....	120
5.3.	Formulation du problème et méthode numérique	122
5.3.1.	Domaine d'étude, conditions initiales et aux limites	122
5.3.2.	Equations gouvernantes	123
5.3.3.	Méthode numérique	125
5.4.	Résultats et discussions.....	125
5.4.1.	Coefficient de traînée en régime permanent	125
5.4.2.	Régime de relaxation.....	128
5.4.3.	Champs de contraintes et champs cinématiques	133
5.5.	Conclusion.....	143
Chapitre 6 : Conclusions générales et perspectives		144
6.1.	Conclusion générale	145
6.2.	Perspectives	150
Références.....		152

NOTATIONS

a:	half-height of the plate (m)
D_{II} :	second invariant of the strain rates tensor (s^{-1})
D_{vij} :	viscous strain rates tensor
D_{vII} :	second invariant of the viscous strain rates tensor (s^{-1})
D_{eij} :	elastic strain rates tensor
D_{eII} :	second invariant of the elastic strain rates tensor (s^{-1})
G:	shear elasticity modulus (Pa)
H:	width (m)
K:	consistency ($Pa\ s^n$)
L:	length (m)
m:	coefficient (-)
n:	shear-thinning index (-)
P:	pressure (Pa)
U:	velocity ($m.s^{-1}$)
U_0 :	inlet velocity ($m.s^{-1}$)
U_{X_1} :	transverse velocity ($m.s^{-1}$)
U_{X_2} :	axial velocity ($m.s^{-1}$)
X_1 :	transverse unitary vector (m)
X_2 :	axial unitary vector (m)
Fd:	drag force (N)
N1:	first difference of normal stress

Greek symbols

β :	coefficient of thermal expansion ($1/K$)
ΔT :	difference between hot and cold wall temperature (K)
Ψ :	stream function (m^2/s)
θ :	dimensionless temperature $\theta = (T - T_c) / (T_H - T_c)$ (-)
α :	thermal diffusivity (m^2/s)
λ :	thermal conductivity (W/mK)
$\dot{\gamma}$:	shear rate (s^{-1})
τ :	shear stress (Pa)

- τ_{ij} : shear stress tensor
 τ_{II} : second invariant of the deviatoric stress tensor (Pa)
 τ_0 : yield stress (Pa)
 τ_n : normal stress (Pa)

Non-dimensional numbers

- C_d^* : drag coefficient
Od: Oldroyd number
Wi: Weissenberg number
 τ_n^* : non-dimensional normal stress
 P^* : non-dimensional pressure
 \overline{Nu}_1 : Mean Nusselt
Bn: Bingham
Pr: Prandtl
Ra: Rayleigh
Wi: Weissenberg

CHAPITRE 1 : Introduction générale

1.1. Contexte et problématique de la thèse

La modélisation de la transition solide-liquide et son impact sur les écoulements est actuellement au cœur d'une intense activité scientifique à la fois expérimentale, théorique et numérique. Deux revues de l'état de l'art ont été publiées, l'une par Balmforth et al [1] et l'autre par Coussot [2]. Les enjeux sociétaux sont nombreux et cruciaux dans divers secteurs industriels et phénomènes naturels. Divers matériaux appelés génériquement « fluides à seuil » peuvent soutenir des contraintes importantes comme un solide ou bien s'écouler comme un liquide en fonction du chargement appliqué. La soudaine transition entre des états solide et fluide représente une problématique importante dans les procédés industriels. Par ailleurs, les fluides à seuil présentent d'autres spécificités telles que leurs capacités à glisser aux interfaces [1] ou l'existence d'une déformation élastique sous contrainte [2]. Les fluides à seuil sont rencontrés dans de nombreuses applications [3] telles que les produits alimentaires, pharmaceutiques, les batteries, la peinture, les revêtements de surface, les biomatériaux, le béton frais et d'autres scénarii illustrés sur la Figure 1 [4].

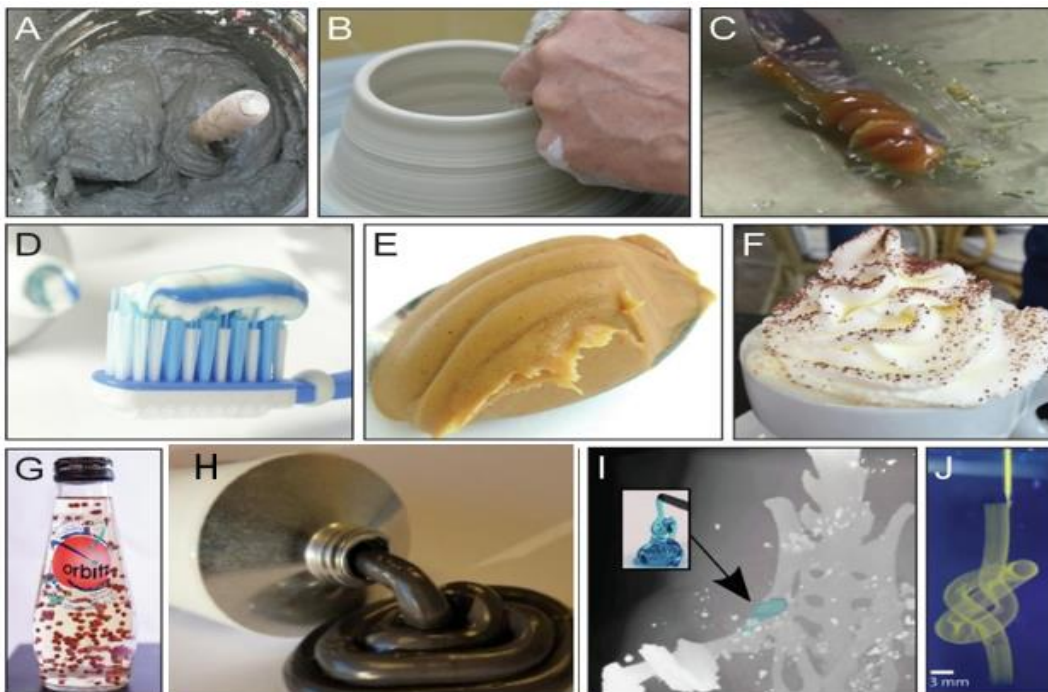


Figure 1: Exemples d'applications d'ingénieries des fluides à seuil. (A) mortier de construction avec une truelle immobilisée, (B) pâte à poterie, (C) médium à peinture flamande [1], (D) dentifrice, (E) beurre d'arachide, (F) crème fouettée, (G) boisson Orbitz avec particules en suspension [4], (H) graisse lubrifiante, (I) biomatériau [4]), (J) impression 3D [4].

De plus, sur le plan expérimental, des phénomènes importants avec une influence significative sur la dynamique d'un écoulement d'un fluide à seuil ont été mis en évidence tels que la présence d'un sillage négatif et une perte de symétrie amont/aval de l'écoulement liée à l'influence de l'élasticité, la présence de zones seuillées et non seuillées qui est principalement liée au comportement plastique. Quelques exemples d'écoulements de fluides à seuil autour d'un obstacle sont illustrés sur la figure 2 [5].



Figure 2: Exemples d'écoulement d'un fluide à seuil autour d'un obstacle, (K) système de prévention contre les avalanches, (L) barrière de protection contre les laves torrentielles, (M) mélange du béton, tirés de [5].

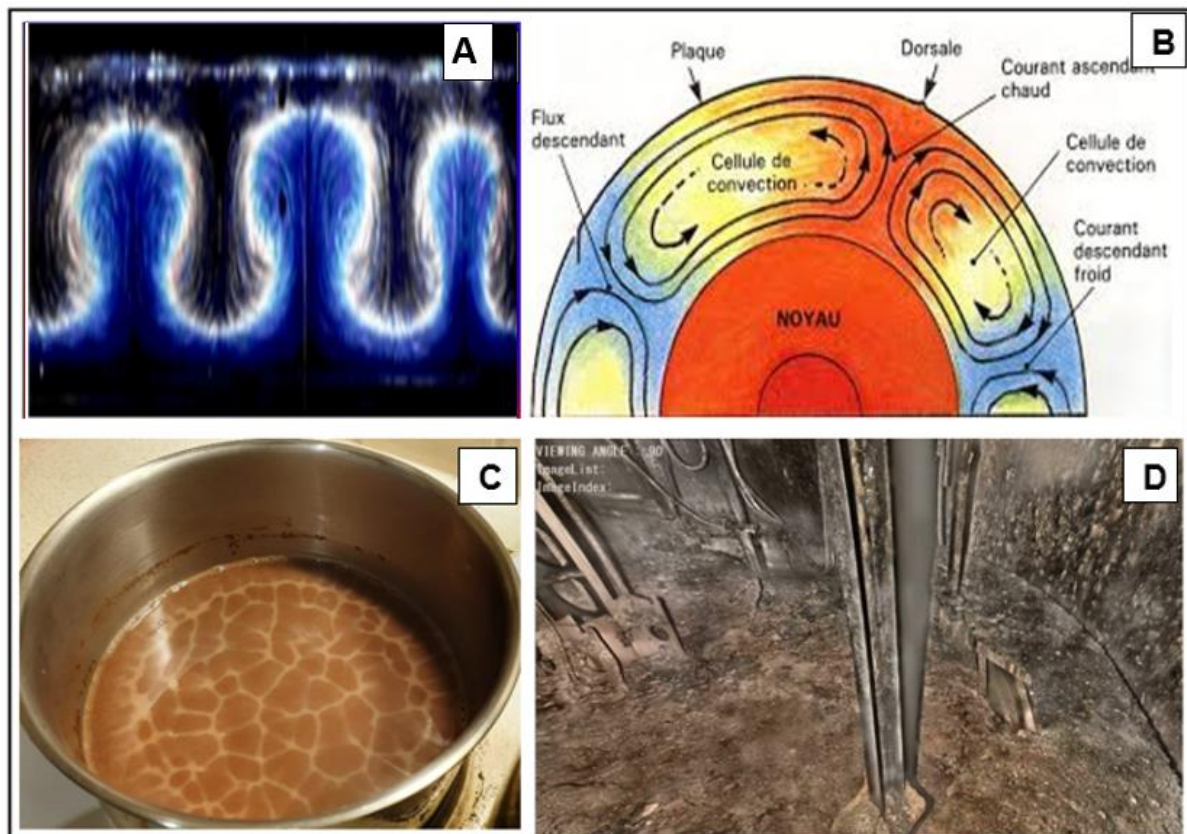


Figure 3: (A) convection de Rayleigh-Bénard dans une cavité fermée, (B) convection, dans le magma terrestre, (C), Cuisson de fluide alimentaire, (D) cuve remplie de corium (unité 2 Fukushima Daiichi)

Par ailleurs, d'autres écoulements engendrés par un gradient de température sont également un sujet majeur pour les applications industrielles. Ces écoulements de convection de type Rayleigh-Bénard se réfèrent à un transfert thermique par convection entre deux plaques parallèles, la plaque inférieure est chauffée, la plaque supérieure est refroidie. Dans ce système, la convection du fluide est induite par la poussée d'Archimède et freinée par les effets de dissipation visqueuse et thermique [6]. Si le seuil d'écoulement est prépondérant, on n'observe pas d'écoulement et les transferts thermiques sont conductifs. Si les forces d'Archimède sont prépondérantes, un écoulement se met en place sous la forme de cellules de convection. La figure 3 illustre quelques exemples pratiques où les instabilités de Rayleigh-Bénard dans un fluide à seuil entre en jeu. Concernant les lois de comportement, des techniques numériques et de la modélisation des écoulements complexes, l'histoire scientifique s'étale sur plusieurs décennies. Depuis l'article de référence de Bingham [7], d'autres études ont été menées pour mieux caractériser le comportement des fluides à seuil. A cet effet, Herschel et Bulkley [8] ont étendu le modèle de Bingham en prenant en compte la rhéofluidification que présente la plupart de ces matériaux. A titre illustratif, le modèle de Bingham suppose un fluide viscoplastique, avec une viscosité plastique constante, alors que pour le modèle Herschel-Bulkley, la viscosité est fonction du taux de cisaillement à travers une loi puissance [9]. Ces modèles simples ont été proposés sous forme scalaire, à partir d'essais au rhéomètre en cisaillement simple, avant d'être étendus sous forme tensorielle à l'aide du critère de Von Mises [9]. C'est le cas des gels de Carbopol considérés comme modèles des fluides à seuil dans les expériences et souvent décrits par le modèle viscoplastique anélastique d'Herschel-Bulkley (HB). Piau [10], Dimitriou et al [11] ont révélé le comportement élasto-viscoplastique de ces gels. La loi viscoplastique d'Herschel-Bulkley a été utilisée de façon approfondie dans les simulations numériques des écoulements. En revanche, dans les analyses au cours des dernières décennies, des phénoménologies telles que l'asymétrie amont-aval autour d'obstacles [12] [13] [14] [15] ainsi que la détermination des zones seuillées et des zones non seuillées, ne peuvent pas être capturées par de simples modèles viscoplastiques. De plus, les hypothèse selon lesquelles la phase solide parfaitement rigide (inélastique) et de la phase fluide purement visqueuse sont physiquement irréalistes [9] et méritent d'être éclairées. Les études rhéométriques sur les fluides à seuil montrent que leurs comportements sont plus complexes que ceux représentés par les modèles de Bingham ou d'Herschel-Bulkley [16].

Ces modèles ne peuvent pas prendre en compte les phénomènes viscoélastiques tels que la relaxation des contraintes et la dissymétrie amont/aval de l'écoulement. Ils ne fournissent aucune information sur l'étendue et la forme des zones seuillées et des zones non seuillées qui sont mises en évidence dans de nombreux types d'écoulement. Ces différents paramètres du comportement des fluides peuvent être clarifiés en prenant en compte l'élasticité dans les équations constitutives du modèle. Un modèle élasto-viscoplastique combinant les modèles Oldroyd-B et Bingham a été développé par Saramito [16].

Signalons que des études ont mis l'accent sur l'utilisation de modèles rhéologiques plus complexes combinant la thixotropie, l'élasticité et la viscoplasticité. Récemment, Dimitriou et McKinley [17] ont développé un modèle basé sur le durcissement isotrope cinématique (appelé modèle IKH) dont le principe repose sur une décomposition de la déformation du matériau en deux composantes (plastique et élastique).

Dans ce qui suit, les approches et méthodes numériques pour simuler les écoulements de fluides à seuil seront abordées. Ainsi, dans un premier temps, la simulation des écoulements de fluides viscoplastiques, puis celle des fluides élasto-viscoplastiques seront examinées, respectivement.

1.1.1. Méthodes numériques pour les fluides viscoplastiques

Diverses méthodes utilisées jusqu'à présent pour simuler les écoulements de fluides viscoplastiques entrent dans certaines catégories principales dont l'examen détaillé a été rapporté par Saramito et Wachs [18].

Méthodes Eulériennes par éléments finis : Elle nécessite la régularisation de la loi de comportement. Cela permet d'éliminer la discontinuité dans les équations constitutives viscoplastiques des modèles tels que Bingham, HB ou Casson en remplaçant leur comportement viscoplastique par un fluide visqueux fortement non linéaire [9].

Parmi les approches régularisées, la plus couramment employée est la régularisation de Papanastasiou [19]. Ce dernier a proposé une formulation basée sur une régularisation exponentielle comprenant un paramètre (m) dont la dimension est celle d'un temps. Ce paramètre permet de contrôler la croissance exponentielle de la contrainte (τ). Vikhansky [20] a proposé une approche utilisant la méthode de Lattice Boltzmann (LBM) [21] [22] pour simuler le modèle de Bingham. Dans cette nouvelle version de la méthode Lattice-Boltzmann (LB), à la place des équations de Navier-

Stokes, l'équation discrète de Boltzmann est résolue pour simuler le comportement du matériau à l'aide d'un schéma de collision-propagation. En revanche, le traitement implicite des collisions revient à une régularisation de l'équation de Boltzmann. De plus, la principale difficulté de cette approche réside sur la nécessité d'avoir une solution d'une équation algébrique non linéaire (unidimensionnelle) à chaque point et à chaque pas de temps [20].

Si la régularisation de la loi de comportement a pour avantage de faciliter les calculs, elle ne rend pas compte du comportement élasto-viscoplastique du matériau et conduit à des solutions numériques inexactes du champ de contraintes [23]. Elle ralentit le taux de convergence et provoque des instabilités numériques. Parfois, un choix inapproprié du paramètre de régularisation peut conduire à des résultats erronés [24]

Méthode lagrangienne augmentée : Mise en œuvre par Glowinski et Wachs [25], la méthode Lagrangienne augmentée permet de modéliser les écoulements de fluide [9]. Elle a été largement utilisée dans des domaines tels que les écoulements internes [24] [26] [27] [28], les écoulements dans des géométries complexes [29] [30] et les instabilités thermiques [31] [32] [33] [31] [32]. C'est une méthode basée sur l'optimisation convexe [33]. Cependant, l'inconvénient de l'approche du Lagrangien augmenté est qu'elle exige une puissance de calcul élevée et la convergence des algorithmes est lente [18].

Une méthode alternative récente est alors proposée par Treskatis et al [34] [35] avec un algorithme basé sur la formulation double en termes de contrainte au problème d'écoulement viscoplastique. Cette méthode améliore la vitesse de convergence et constitue une alternative avec un algorithme d'optimisation de premier ordre accéléré issu de la méthode de gradient proximal. Saramito [36] a introduit une nouvelle méthode qu'il a appliquée aux fluides viscoplastiques en écoulement, en conduit et autour d'obstacle [24] [29]. Cette approche est basée sur la méthode de Newton qui permet de résoudre des problèmes non linéaires, tout en évitant une matrice Jacobienne singulière, conséquence de modèles viscoplastiques non régularisés [9].

1.1.2. Méthodes numériques pour les fluides élasto-viscoplastiques

Du point de vue des méthodes numériques, les fluides élasto-viscoplastiques ont été très peu étudiés comparés aux fluides viscoplastiques. Toutefois, quelques techniques numériques récentes existent dans la littérature.

Cheddadi et Saramito [37] ont proposé un schéma numérique dépendant du temps pour résoudre les écoulements de fluides (EVP) autour d'obstacles. C'est une méthode qui résout un algorithme à point fixe pour les termes non linéaires dus à la viscoplasticité, couplé à un sous problème de transport de contraintes [9].

On notera que les travaux de Cheddadi et al. [38] et Cheddadi et Saramito [37] sont limités à de faibles effets élastiques. Un nouveau modèle couplant à la fois les modèles viscoplastiques Bingham et viscoélastique Oldroyd pour écoulements de fluides élasto-viscoplastiques a été présenté par Saramito. Bien que ce modèle soit simple, néanmoins, il n'introduit pas explicitement la rhéofluidification et n'a été utilisé que pour simuler des écoulements viscosimétriques simples [39]. Fraggedakis et al [40] ont introduit le durcissement isotopique cinématique (IKH) de Dimitriou et al [17]. En couplant le modèle SHR HB et IKH, les auteurs ont conclu que la vitesse prédite et le champ vitesse d'écoulement sont très proches des valeurs expérimentales. En revanche la difficulté est que les zones seuillées et non seuillées prédites à partir du critère de Von Mises, s'écartent de celles déterminées expérimentalement [40].

En résumé, il convient de mentionner que deux familles de méthodes : (i) l'approche dite de régularisation et (ii) la méthode du Lagrangien augmenté ont été principalement suggérées par la littérature au cours des 40 dernières années [18].

Les manquements et les limites de ces méthodes, positionnent la Méthode des éléments Finis aux Points d'Intégration Lagrangiennes comme étant une approche originale capable de modéliser le comportement réel des fluides EVP sans recours à la régularisation.

Dans l'objectif d'une compréhension approfondie et significative de ces écoulements, il est essentiel d'introduire la transition solide liquide des fluides élasto-viscoplastiques dans la modélisation numérique en particulier dans les écoulements complexes.

Pour ce faire, la Méthode des Éléments Finis avec Points d'Intégration Lagrangiens (MEFPIL) est mise en œuvre. La MEFPIIL [41] [42] [43],[44] est issue de la méthode Particle In Cell [41].

Elle est basée sur une dissociation cinématique entre les points matériels et les nœuds de calcul du maillage eulérien en éléments finis. Pour une configuration matérielle donnée, les points matériels sont utilisés comme points d'intégration sur un élément. La résolution de l'équation d'équilibre aux nœuds donne le champ de vitesse. Les points matériels sont alors déplacés à travers le maillage fixe jusqu'à une nouvelle configuration. A la fin de chaque étape de calcul, la position des points matériels et les variables d'histoires (pression, contraintes, déformation, etc.) sont mises à jour sur la base du champ de vitesse et au moyen de fonctions de forme. Ainsi, toutes les propriétés du matériau, y compris les variables internes, sont stockées et sont suivies avec précision pendant le processus d'advection des particules. En effet, grâce à la dissociation entre les nœuds du maillage et les points de matériau, cette approche bénéficie d'un double avantage : (1) capacité d'une MEF eulérienne (le maillage est maintenu fixe) pour supporter les grandes transformations, et (2) d'une MEF lagrangienne pour suivre les variables d'histoires. De plus, toutes les variations des contraintes et déformations élastiques utiles pour mieux appréhender le comportement des fluides EVP sont capturées au moyen d'une discrétisation temporelle effectuée avec un pas de temps élastique noté ΔT_e , différent du pas de temps d'advection ΔT associé la position des particules.

La MEFPIL a déjà été appliquée à l'écoulement de fluide EVP autour d'une plaque plane [45], à la géophysique [42], à l'écoulement de béton frais [46] et aux glissements de terrain [44] [47]. Elle est capable d'analyser les phénomènes d'interfaces matérielles, à surface libre et de déterminer la taille et la forme des zones seuillées et non seuillées.

Dans cette thèse, le modèle élasto-viscoplastique implémenté est du type d'Herschel-Bulkley élastique en 2D. Dans celui-ci, la limite du seuil d'écoulement est détectée au moyen du deuxième invariant du tenseur déviateur de contraintes. Ainsi, le matériau se comporte comme un solide élastique en dessous du seuil de contrainte et viscoplastique au-dessus du seuil. Ces spécificités confèrent à la MEFPIL d'être une nouvelle approche originale. Elle intègre la modélisation de la transition solide liquide tout en permettant, d'une part, de modéliser les grandes déformations utiles pour les fluides et, d'autre part, de suivre les variables d'histoire du fluide, démarche essentielle pour les fluides élasto-viscoplastiques.

1.2. Objectifs et contribution de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans la problématique de transition solide/fluide dans les fluides à seuil. En plus d'une contribution significative à la compréhension de la structure des écoulements, elle analyse les paramètres influant la morphologie de l'écoulement.

Deux situations mettant en œuvre chacune un fluide élasto-viscoplastique ont été étudiées à travers :

- ☞ Les écoulements de fluide à seuil interagissant avec un obstacle : une plaque plane perpendiculaire à l'écoulement ;
- ☞ Les écoulements créés par des gradients de température (convection de Rayleigh-Bénard).

Dans ces deux situations, une volonté de mener des simulations numériques avec la méthode MEPFIL est ciblée pour :

- Identifier les effets de la plasticité et de l'élasticité en utilisant la loi EVPHB ;
- Comparer les effets de plasticité et d'élasticité avec des résultats expérimentaux disponibles obtenus avec un fluide modèle (gel aqueux de Carbopol) pour lesquels des effets plus complexes (rhéofluidification, glissement aux parois, état initial des contraintes) ont été pris en compte.

On note que les effets inertiels sont toujours considérés comme négligeables.

1.3. Plan de la thèse

Le manuscrit est organisé en six chapitres qui rendent compte des travaux numériques (chap. 2 et 3), comparaisons expérimentales/numériques (chap. 4 et 5) et conclusions générales et perspectives (chap. 6) menés.

Le chapitre 1 aborde l'état de l'art et introduit le contexte général ainsi que les objectifs des travaux de la thèse. Dans cette partie, les différentes techniques numériques et les verrous scientifiques ont été discutés. Le choix de la MEPFIL a été justifié et son principe de fonctionnement finement décrit.

Le chapitre 2 a pour objectif d'identifier les paramètres qui jouent un rôle significatif dans la convection de Rayleigh-Bénard des fluides élasto-viscoplastiques dans une enceinte carrée bidimensionnelle. On s'intéresse ici à déterminer les critères d'apparition des instabilités de Rayleigh-Bénard, c'est-à-dire la transition du transfert thermique d'un régime conductif à un régime convectif. L'étude sera axée sur les

principaux paramètres sans dimension de la convection de Rayleigh-Bénard. La rhéofluidification ne sera pas prise en compte. Les rôles respectifs du nombre de Bingham (Bn) et du nombre de Weissenberg (Wi) caractérisant les effets élastiques seront considérés. Les nombres sans dimension caractérisant les effets thermiques tels que les nombres de Prandtl et de Rayleigh seront gardés constants. Les champs de contrainte, cinématique et de température seront discutés, ainsi que la relation liant les valeurs critiques de Bn et Wi vis-à-vis de l'apparition des instabilités de Rayleigh-Bénard.

Le chapitre 3 porte sur une comparaison de la simulation numérique avec les résultats expérimentaux obtenus par Darboui et *al.* [48]. Ces derniers ont travaillé avec des conditions contrôlées de glissement ou de non-glissement aux parois et avec un fluide modèle élasto-viscoplastique rhéofluidifiant. Tous ces phénomènes ont été intégrés dans la modélisation numérique. La transition du mode conductif à convectif a été particulièrement étudiée avec les cartes des champs de contrainte, cinématique et de température. Aussi, l'intensité des transferts thermiques a été quantifiée. Les critères d'apparition des instabilités de Rayleigh-Bénard expérimentaux et numériques ont été analysés.

Le chapitre 4 est consacré à la détermination des champs cinématique, de contrainte et de déformation générés par l'écoulement en 2D d'un fluide élasto-viscoplastique sans rhéofluidification autour d'une plaque perpendiculaire dans un milieu confiné. Les résultats sont analysés et discutés en fonction, d'une part, du nombre d'Oldroyd (Od) qui traduit le rapport des effets de plasticité et de viscosité, et d'autre part, du nombre de Weissenberg (Wi) défini comme le rapport entre le temps de relaxation du fluide et le temps caractéristique de l'écoulement. Les zones seuillées et non seuillées, ainsi que les coefficients de traînée en fonction de Od et Wi ont été analysés.

Le chapitre 5 s'intéresse à une étude comparative des simulations numériques avec les données expérimentales obtenues par Ouattara [5] sur les écoulements d'un fluide à seuil modèle autour d'une plaque perpendiculaire à l'écoulement. Cette comparaison porte sur l'évolution des coefficients de traînée en régime permanent et en relaxation, ainsi que l'influence de l'état de contrainte initiale. Les champs de contrainte, déformation et cinématique associés ont été analysés.

Le caractère rhéofluidifiant du fluide expérimental a été pris en compte dans nos simulations.

Le chapitre 6 clôt le manuscrit avec une conclusion et des perspectives de développements et d'études à partir de ce travail.

**CHAPITRE 2: Elastic effects on Rayleigh Bénard
convection in an elasto-viscoplastic fluid**

Abstract

The present numerical work aims to study the Rayleigh–Bénard convection of elasto-viscoplastic fluids in a two-dimensional square enclosure. The elastic behavior of a viscoplastic fluid is accounted for since it may have some consequences on the transition from conductive to convective regime. Finite Element Method with Lagrangian Integration Points (FEM-LIP) is used to investigate the complex deformation behavior of the fluid subjected to a vertical thermal gradient. This numerical method can simulate large deformations within a complex material which is indicated in the case of elasto-viscoplastic fluids. The material is described as a viscoelastic Maxwell fluid with an apparent viscosity given by the Herschel-Bulkley model. In this model, the yield stress is evaluated using the second invariant of the stress tensor and the fluid presents mainly an elastic behavior below the yield stress.

The critical conditions when convection occurs are determined in terms of the Rayleigh number Ra , defined as the ratio between the buoyancy effects and the thermal as well as the viscous diffusion effects, the Bingham number Bn , defined by the ratio between plastic and viscous effects, and the Weissenberg number Wi defined as the ratio between fluid relaxation time and a characteristic time of the flow.

For $Wi = 0$, numerical results confirm that an increase in Bn involves a decrease in the convection intensity. When Bn reaches the critical value Bn_c , the convection stops and only the conductive regime remains.

For a fixed Bn , the increase in Wi involves an increase in the Nusselt number characterizing an increase in heat transfer. Moreover, the critical value Bn_c increases with increasing Wi . Also, the unyielded zones decrease in size and the yielded zones tend to spread with elasticity.

Keywords: Rayleigh–Bénard convection, elasto-viscoplastic materials, yield stress fluids, numerical simulations

2.1. Introduction

The modelling of the solid-liquid transition in viscoplastic fluids is at the heart of an intense current scientific activity [1]. Many materials commonly called " yield stress fluids " can withstand high stresses like an elastic solid or flow like a liquid depending on the applied load. Understanding the solid-liquid transition is still an active research topic. This transition may have a strong influence on both mass and heat transfers in industrial processes. In particular, this elasto-viscoplastic behavior is likely to have a strong influence on convective heat transfer.

Natural convection is one of the most studied thermal convection topics. In this case, convection occurs when a fluid layer contained between two parallel plates is heated from below allowing the occurrence of buoyancy-driven convection.

The first studies that dealt with convection in yield stress fluids in the early 2000s were theoretical and numerical. In particular, Zhang *et al.* [49] studied Rayleigh-Bénard Convection (RBC) in an inelastic Bingham fluid. The authors show that the conductive regime is linearly stable, i.e. that convection does not occur when an inelastic Bingham fluid is subjected to weak perturbations. Computations are also proposed by using the Augmented Lagrangian method. Their numerical study highlights the stabilizing effect of the yield stress since when the flow is asymptotically stable, results show that velocity perturbation decays to zero in a finite time. These results were confirmed by works of Vikhansky [50] [51] by using Lattice Boltzmann method. However, experimental studies [48] [52] [53] have observed convection in viscoplastic fluids (Carbopol gels) even under small perturbations.

Darbouli *et al.* [48] carried out experiments to study the Rayleigh-Bénard Convection (RBC) in Carbopol gels within a cylindrical cavity. Their results highlight the onset of convection using Schmidt-Milverton principle, shadowgraphy and PIV technics. Their study confirms that convection can take place in gels when subjected to weak thermal disturbances. Darbouli and co-workers explain the difference with the theory by the fact that the gels show a dominant elastic behavior below the yield stress as opposed to an inelastic Bingham fluid commonly used in theoretical studies. Besides, they show that the inverse of the yield number Y which represents the ratio between the yield stress effect and the buoyancy effect is the dominant controlled parameter characterizing the influence of plasticity on the onset of convection. Their results are

in close agreement with that of Davaille *et al.* [52] in the case of localized heating of Carbopol gels. Finally, Darbouli *et al.* [48] have highlighted the influence of boundary conditions at the walls such as no-slip and slip conditions on the onset of convection.

Another experimental study has been proposed by Kebiche *et al.* [53] which considers the experimental investigation of the RBC in a rectangular configuration for yield stress fluid. The study shows that the control parameter $1/Y$ at criticality is smaller than that obtained by Darbouli *et al.* [48] and Davaille *et al.* [52]. This difference seems to be due to uncontrolled boundary conditions in [4] such as slippage at walls and insulated walls in the entire cavity.

A more recent study was conducted by Métivier *et al.* [54] to experimentally investigate the origin of convection in gels by focusing on the liquid-solid transition as well as the elasto-viscoplastic behavior of gels.

Further theoretical and numerical studies of Rayleigh-Bénard Convection in yield stress fluids have been carried out. Among them, Karimfazli *et al.* [32] numerically studied thermal plumes of an inelastic viscoplastic Bingham fluid in a square cavity in order to compare with experimental results obtained by Davaille *et al.* [52]. Changing the way, the fluid layer is heated with a localized heater on the bottom wall, Karimfazli and co-workers show that the onset of flow occurs after a waiting time which increases with the ratio between the yield stress and the buoyancy stresses. Huilgol *et al.* [55] use the operator-splitting method to simulate an inelastic Bingham fluid in the particular case of convection. The results show that when Ra increases, the heat transfer increases and the unyielded zone decreases. Inversely, the increase in Bingham number results in a decrease in of the heat transfer as well as an increase in of the unyielded zone. Moreover, by increasing Pr with fixed Ra and Bn , the authors show a constant unyielded zone.

However, modelling inelastic Bingham or Herschel-Bulkley fluids is not fully satisfactory so far since the stress tensor is not defined below the yield stress as well as the viscosity tends to infinity. One way to get around these difficulties is to regularize the constitutive models. This is the technique used by many studies such as Lyubimova [56] and Turan *et al.* [57] for instance. In these articles, natural convection is examined. The fluid used is an inelastic Bingham model regularized by either the Papanastatiou's law [19] or the biviscosity model or the Williamson's model. The regularization consists

in defining a very large viscosity below the yield stress, allowing to know the stress tensor. It is shown that heat transfer or the mean Nusselt number \overline{Nu}_1 decreases with increasing Bn until a critical Bingham number above which any convection does not occur. Then, thermal conduction becomes the dominating mode of heat transfer and $(\overline{Nu}_1) = 1$. More recently, other viscoplastic models have been numerically investigated in Aghighi *et al.* [58] and Li *et al.* [6]. They have studied inelastic Casson, respectively Herschel-Bulkley models by using the Papanastasiou regularization. They show the influence of the regularized parameters on results while they handle non-physical parameters highlighting limits when using regularized models.

On the other hand, Rayleigh-Bénard Convection for viscoelastic fluids has been studied theoretically, see Larson for a review [59]. The onset of convection in a viscoelastic fluid such as a Maxwell fluid, in particular, is similar to the case of a Newtonian fluid. Indeed, the critical conditions are similar to the Newtonian case except under extreme conditions. In this latter case, it has been theoretically shown possible to obtain oscillatory convection below the critical Rayleigh number [60], [61].

Demir [62] has studied numerically the RBC in viscoelastic fluids in a square enclosure. The Criminal-Erickson-Filbey (CEF) model is used and both shear-thinning and elastic behaviors are considered. The effect of the Weissenberg number is investigated in the range $0 \leq Wi \leq 0.01$. It is mentioned that performing computations with higher values of Wi remains a challenge. Their results show that heat transfer is relatively unaffected by elasticity in the range of tested Wi numbers.

The development of more sophisticated models and algorithms to better understand the behavior of elasto-viscoplastic fluids has recently emerged as an essential tool in numerical simulation. In addition to the viscoplastic behavior, elastic behavior has to be added to the model. In particular, Saramito [16] has proposed elasto-viscoplastic laws. Fraggedakis *et al* [63] have applied a tensor constitutive law to simulate the flow of elasto-viscoplastic fluids (EVP) in a cavity with a lid. Dinkgreve *et al* [64] have studied the response of a well-known yield stress material (Carbopol gel), whose elastic limit remains the same, whether the shear rate increases or decreases over different cycles [1], [65], [66]. The authors show that the material mainly exhibits elastic deformation below the yield stress. Elastic effects are also observed in the viscous phase (above yield stress). De Souza *et al* [67] study the elastic effects of EVP fluids flowing in a

cavity by numerical means. They show that elasticity affects the material in both unyielded and yielded regions. A review on numerical methods and viscoplastic models is proposed by Saramito & Wachs [68].

The present paper aims at investigating a novel numerical method to model the Rayleigh-Bénard Convection (RBC) for elasto-viscoplastic (EVP) fluid. The Finite Element Method with Lagrangian Integration Points (FEM-LIP) is capable of solving problems exhibiting small and large-deformation behaviors, elasto-viscoplastic fluids with complex rheology, notably history dependent variables and conditions with controlled limits [42]. It combines the advantages of an Eulerian formulation for large deformations and a Lagrangian formulation for the tracking of material points. Indeed, the idea is to retain the generality and robustness of mesh based FEM and capture the geometrical flexibility of a fully-Lagrangian set of particles for tracking material deformation and properties dependent on its history [44]. In section 3, the mathematical and numerical formulation are detailed. Unlike the inelastic viscoplastic models, the EVP model is characterized by both elastic and viscous components. Besides, it was observed in EVP models that deformation rates could occur in the unyielded zone, which is defined by the Von Mises criterion, i.e. by comparing the yield stress to the second invariant of the deviatoric stress tensor. Investigating the natural convection of an elasto-viscoplastic fluid in the Rayleigh-Bénard configuration is the main objective of this study. To our knowledge, the elastic behavior has never been taken into account in the onset of Rayleigh-Bénard convection while it should have a real influence.

For this purpose, natural convection of an elasto-viscoplastic fluid in a bi-dimensional square enclosure is considered. In Section 2.2, the theoretical background is presented. Problem configuration, initial and boundary conditions, governing equations and the rheological model, as well as the characteristic dimensionless numbers, are introduced. Then, our numerical methods (FEM-LIP) are detailed in Section 2.3. Validation of the numerical simulations is presented in section 2.4.

Results are presented and discussed in Section 2.5. Our paper ends with concluding remarks.

2.2. Governing equations

A fluid subjected to the gravity field g in a 2D square cavity of size H is considered (Figure 4). The temperatures of lower and upper walls are maintained constant respectively to T_H and T_C , such as $T_C < T_H$. Sidewalls are considered insulated. No-slip conditions are considered at walls, leading to vanishing velocity components u_1 and u_2 in the horizontal and vertical directions respectively. Initial conditions consist in considering a fluid at rest ($u_1(t = 0) = u_2(t = 0) = 0$) as well as a stress-free and a strain-free conditions in the whole fluid.

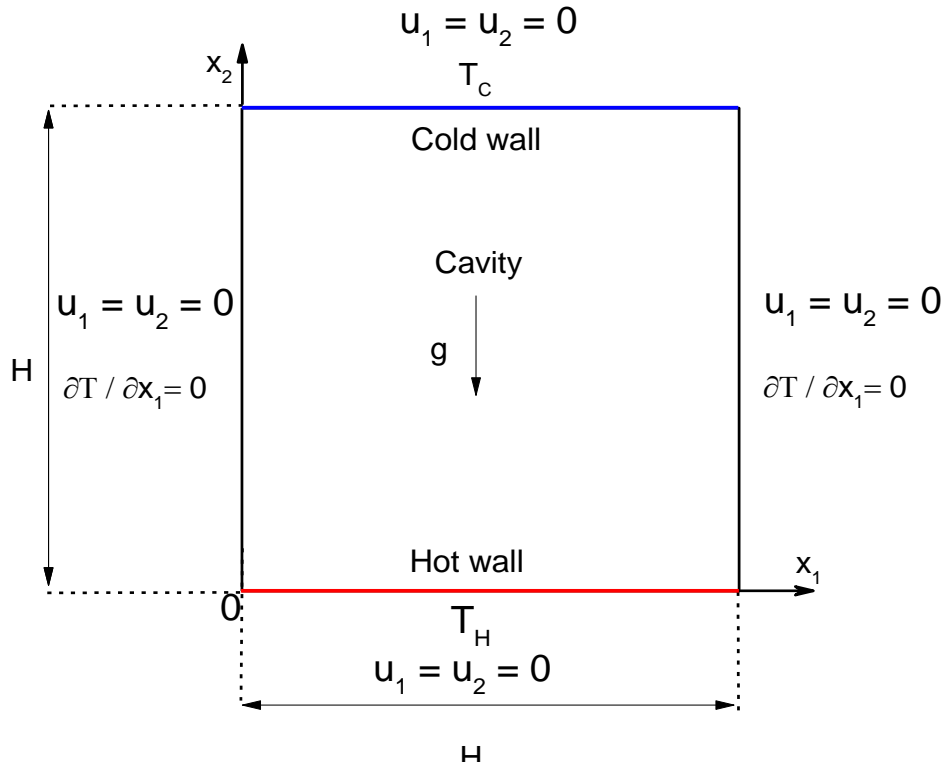


Figure 4: Geometry and boundary conditions of the boundary value problem

As a first approximation, we look for a steady state and low inertial solution, meaning that the particle derivative of velocity is considered equal to zero in our study. Under these assumptions, the continuity, the momentum including the Boussinesq approximation, and the energy equations write as follows:

$$u_{i,i} = 0 \tag{1}$$

$$\tau_{ij,j} - p_{,i} + \rho g \beta (T - T_{ref}) \delta_{i2} = 0 \tag{2}$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{x_j} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \quad (3)$$

Where τ_{ij} , p and u_i represent the deviatoric stress tensor components, the pressure and the i th velocity vector component ($i = 1,2$). λ is the thermal conductivity, C_p is the specific heat capacity, ρ is the density, β is the coefficient of thermal expansion, T_{ref} is a reference temperature set equal to the average of the temperature of the horizontal wall and δ_{ij} is the Kronecker symbol.

The EVP fluid is described by the Maxwell model associating an elastic and a viscous behaviors, i.e. represented by a viscous damper and a purely elastic spring associated in series. However, in the present case, the viscosity is described by the Herschel-Bulkley model which considers both the yield stress and the shear-thinning behavior. In this model, the strain rate tensor D , defined by the particle derivative of the strain tensor, is the sum of the viscous and the elastic contributions, respectively D_v and D_e :

$$\frac{\dot{\tau}_{ij}}{2G} + \frac{\tau_{ij}}{2\eta'} = D_{ij} = D_{vij} + D_{eij} \quad (4)$$

where G is the elastic shear modulus. In this model, the stress tensor is such as $\tau = \tau_v = \tau_e$. As above mentioned, the apparent viscosity η' is described by the Herschel-Bulkley constitutive model given by:

$$\tau_{ij} = \left[\frac{\tau_0}{2D_{vII}} + K(2D_{vII})^{n-1} \right] D_{vij} = 2\eta' D_{vij} \quad (5)$$

where τ_0 , K and n represent respectively the yield stress, the consistency and the shear thinning index. $D_{vII} = -\sqrt{\frac{1}{2} tr (D_v^2)}$ is the second invariant of the strain rate tensor. It is worth noting that when $D_{vII} = 0$, then the viscosity η' tends to infinity. In this case, the main contribution is due to elastic behavior after Equation (4). For a non-zero strain rate tensor, the material is both characterized by elastic and viscous contributions. As a remark, a viscoplastic model can be obtained by setting G to a very large value, then the elasticity in terms of deformation would be negligible in this case.

In the following, we consider the case $n = 1$ which corresponds to the Bingham model (a particular case of the Herschel-Bulkley model).

In the present study, the dimensionless numbers of interest are:

- the Bingham number defined by the ratio between plastic and viscous effects:

$$Bn = \frac{\tau_0}{K} \sqrt{\frac{H}{g\beta\Delta T}} \quad (6)$$

- the yield number Y defined by $Y^{-1} = \frac{\rho g \beta \Delta T H}{\tau_0}$ is the control parameter which characterizes the onset of convection in gels especially as underlined by experimental works [5,6,7]

- the Weissenberg number defined as the ratio between the fluid relaxation time, $\frac{K}{G}$ and a characteristic time scale of the flow:

$$Wi = \frac{K}{G} \sqrt{\frac{g\beta\Delta T}{H}} \quad (7)$$

- the Rayleigh number Ra is defined as the ratio between the buoyancy effects and the thermal as well as the viscous diffusion effects:

$$Ra = \frac{\rho^2 g \Delta T \beta H^3 C_p}{K \lambda} \quad (8)$$

- The Prandtl number Pr depicts the ratio between the kinematic plastic viscosity and thermal conduction:

$$Pr = \frac{K C_p}{\lambda} \quad (9)$$

Remarks:

- It is worth noting that dimensionless numbers are related by the following relationship:

$$Ra = \left(\frac{Bn}{Y}\right)^2 Pr \quad (10)$$

- The Deborah number De , the ratio between the relaxation time and the thermal

diffusive time, can be deduced from Wi by the following relation:

$$De = Wi \cdot \frac{Y}{Pr \cdot Bn} = \frac{Wi}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \quad (11)$$

Heat transfer can be evaluated via the Nusselt number which represents the ratio of the total heat transfer and the conductive heat transfer over the hot wall. It is given by:

$$Nu = \frac{\varphi H}{\lambda}, \quad (12)$$

where the heat transfer coefficient φ is defined as:

$$\varphi = \int_{x_1=0}^{x_1=H} \left| -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \right| \times \left| \frac{1}{(T - T_{ref})} \right| dx_1 \quad (13)$$

2.3. Numerical method

2.3.1. Description of the FEMLIP

The Finite Element Method with Lagrangian Integration Points (FEMLIP) was first introduced by Moresi and Solomatov [43]. Its originality relies on the possibility to solve large deformation flows on an Eulerian grid and to follow the material properties during the flow. For a given material configuration, the material points are used as integration points on one element. The iterative resolution (convergence criteria are set to 10^{-5} for all the relative residuals) of the equilibrium equations (Eqs. 2 and 3) at the nodes provides a velocity field. This velocity field is interpolated at the end of each step from the nodes to the material points which move accordingly throughout the fixed mesh up to a new configuration. Besides, it is important to emphasize in our method, the distinction between the advection time step Δt , and the elastic time step Δte [42]. On a side, Δt is used to discretize the effective movement of the matter. For example, it must be set such as the maximum displacement $u\Delta t$ of each particle on a timestep is always smaller than the element size L so that the particles cross each element.

On another side, Δte is used to write differentiation of the material behavior corresponding to viscoelastic relaxation. Equation (14) provides the time discretization of the convective Jaumann derivative \dot{t}_{ij} with the elastic time step Δte . This time step is chosen to capture the elastic stresses variations.

$$\dot{\tau}_{ij}^{t+\Delta te} = \frac{\tau_{ij}^{t+\Delta te} - \tau_{ij}^t}{\Delta te} + \tau_{ij}^t * W_{ij}^t - W_{ij}^t * \tau_{ij}^t \quad (14)$$

W_{ij} represents the rotation tensor which corresponds to the antisymmetric part of the strain tensor in order to write the Jaumann derivative of the stress tensor and to model its rotation in the flow. At the end of the increment, all the variables (stress, strain, history variables) at the time $t + \Delta t$ are calculated. In practice, in all the results presented in this article, we consider $\Delta t = \Delta te$ at the beginning of the simulation to reach both stability and accuracy as recommended [69].

The coupling of equations (5) and (14) leads to the discretized elastic Herschel-Bulkley model used in the simulation.

$$\tau_{ij}^{t+\Delta te} = \eta_{eff} \left[2 * D_{ij}^{t+\Delta te} + \frac{\tau_{ij}^t}{G \Delta te} + * \tau_{ij,j}^{t+\Delta te} + \frac{\tau_{ij,j}^t * W_{ij,j}^t - * W_{ij,j}^t * \tau_{ij,j}^t}{G} \right] \quad (15)$$

$$\eta_{eff} = \eta' \frac{G * \Delta te}{G * \Delta te + \eta'} \quad (16)$$

η_{eff} represents the effective viscosity of the gel. Equations (4) and (15) lead to equations (17) and (18).

$$\rho g \beta (T - T_{ref}) + 2 \eta_{eff} (D^{t+\Delta te})_{ij,j} + (f_e)_i - p_{,i} = 0 \quad (17)$$

$$(f_e)_i = \eta_{eff} \left[\frac{\tau_{ij,j}^t}{G \Delta te} + \frac{\tau_{ij,j}^t * W_{ij,j}^t - W_{ij,j}^t * \tau_{ij,j}^t}{G} \right] \quad (18)$$

Equations (17) and (18) are solved iteratively at each time step until a residual criterion is reached. At iteration $k + 1$, the residual criterion chosen for the velocity is as follows:

$$\frac{\sum_i (v_i^{(k+1)} - v_i^{(k)})^2}{\sum_i (v_i^{(k+1)})^2} \leq \epsilon \quad (19)$$

with ϵ representing the required accuracy for the calculations.

For details on the resolution of equations with FEM-LIP, the reader can refer to Moresi et al. [42] and Moresi and Solomatov [43].

However, some calculation limitations will be noted when Wi increases. These limitations often raise a question in modelling viscoelastic fluids. Indeed, they could be due to values of viscosity contrast greater than 4 orders of magnitude. The numerical resolution of the problem becomes poorly conditioned and the major disadvantage of the iterative solver Gauss-Seidel is that the convergence process becomes very slow [44]. The method of Gauss-Seidel thus raises velocity convergence problems for studies involving fluids with dominant elastic effect.

2.4. Validation of the numerical simulations

Results obtained in the Newtonian case have been compared with studies of Turan et al. [57], Ouertatani et al. [70], Selamat et al. [71] and Davis et al. [72] for $10^3 < Ra < 10^6$ and $Pr = 0.1$ and 100 . The Newtonian case is obtained by fixing a constant apparent viscosity value and a large value of $G = 10^{+10}$ (Pa), i.e. $Wi = 10^{-12}$. Four different regular grids have been tested, corresponding to 32×32 , 64×64 , 80×80 and 128×128 elements.

Initial conditions correspond to a fluid at rest. Then a vertical temperature gradient is applied. A small periodic perturbation, which is 0.1% of the difference temperature between the bottom and top wall is suddenly applied at the lower wall leading to the onset of convection above the critical Rayleigh number. A similar procedure has been used in [57] and [59] for instance. Several values of perturbation amplitude have been tested, results converge to a similar solution independently to the perturbation intensity as long as it is small enough as expected for a stability problem.

Results in terms of dimensionless velocity values U_{\max} and V_{\max} with $U = u_1 H / \alpha$ and $V = u_2 H / \alpha$, α being the thermal diffusivity and the mean Nusselt numbers \overline{Nu} for the Newtonian case are displayed in Table 1.

To avoid numerical instability, the elastic time step Δte is set equal to Δt . In the present study, its value corresponds to 0.1% of the material relaxation time, i.e. $\Delta te = \Delta t = 0.1s$. The influence of the grid size is illustrated in Table 1. In the Newtonian case, results converge for all tested grids. The maximal relative difference in results is 0.35%. Nusselt numbers are also compared with the ones found in literature (Table 2), [57] [70] and [71]. A good agreement is obtained since the relative error is around 0.25%.

Table 1: Simulation results for different element sizes for $Ra=10^4$ at $Pr = 0.71$

Element size	Number of elements	U_{\max}	V_{\max}	Nu_{\max}	\overline{Nu}
0.031	33x33	0.2739	0.2827	2.4625	2.1236
0.015	65x65	0.2746	0.2837	2.4643	2.1392
0.012	81x81	0.2753	0.2846	2.4654	2.1493
0.0078	128x128	0.2759	0.2857	2.4671	2.1534

Table 2: Comparison of \overline{Nu} of present simulation results for a Newtonian fluid with the published ones for $Pr = 0.71$ and $Ra = 10^4$

Present study	Turan et al. [57]	Ouertatani et al. [70]	Selamat et al. [71]
2.149	2.154	2.158	2.154

Finally, our numerical results lead to small differences compared to the results in the literature in the Newtonian case. The mesh grid containing 81x81 number of elements is chosen for all the simulations to ensure convergence.

2.5. Results and discussion

This section aims at studying the effect of rheological features of an elasto-viscoplastic fluid on the Rayleigh-Bénard convection, that is to say, the elastic effect as well as the viscoplastic effect. In this section, the Rayleigh and Prandtl numbers are maintained constant $Ra = 10^5$, $Pr = 10$, in order to compare our results with those of Turan *et al.* [57] as well as most of the results of the literature, in the case of a Bingham fluid ($n = 1$).

2.5.1. The elasto-viscoplastic model with neglected elasticity

As a first step, the case with negligible elasticity is presented, *i.e.* $Wi \rightarrow 0$, which means that $Wi = 10^{-12}$ is imposed in our simulations. This case tends to the Bingham model which is characterized only by a viscoplastic behavior. However, because the EVPHB model considers also elasticity, even weak, it leads to a continuous model for which the stress tensor is defined everywhere in the material. It means that there is no need to regularize the model or to introduce unphysical regularization parameters which could influence results as highlighted by Frigaard and Nouar [23] and Li *et al.* [6]. Heat transfer is displayed in terms of Nusselt number in figure 5. Our results are compared with those of Turan *et al.* [57] who have considered a Bingham fluid regularized by a Papanastasiou law. Both studies lead to very close results highlighting that the Bingham model may be represented by an EVPHB model with $n = 1$ and $Wi \rightarrow 0$. As already shown in previous studies, the Bingham number has a stabilizing effect since the Nusselt number decreases when Bn increases. Above a critical value of the Bingham number Bn_c , in this case, $Bn_c = 1.7$, the convection does not occur and the heat transfer is only conductive since $\overline{Nu} = 1$. The transition from the conductive regime ($Bn \geq Bn_c$) to the convective one ($Bn < Bn_c$) is subcritical as already highlighted by Li *et al.* [6].

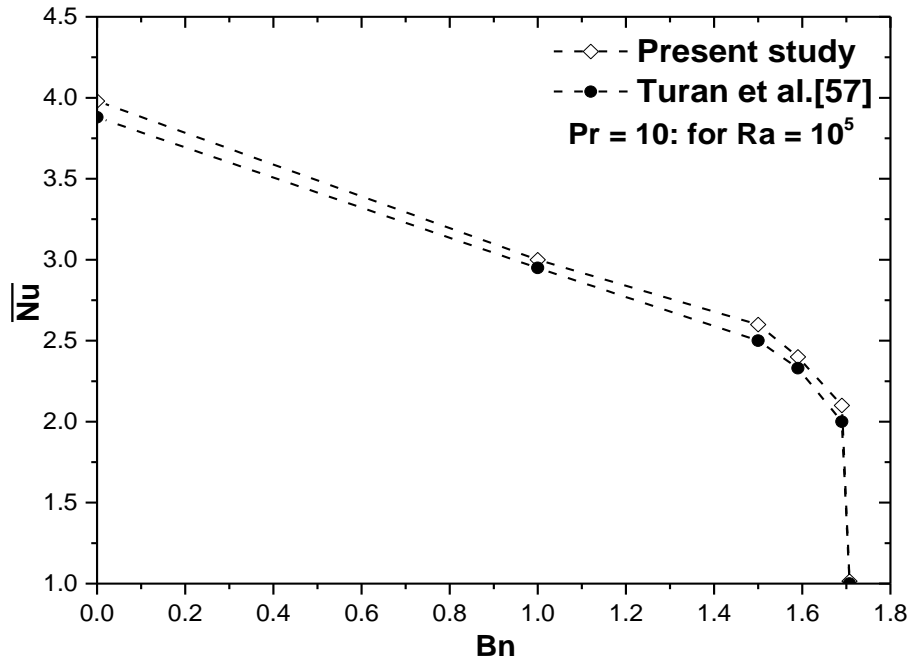


Figure 5: Mean Nusselt number \overline{Nu} as a function of the Bingham number Bn comparison with Turan et al [57]

Figure 6 presents the dimensionless horizontal velocity component $U = u_1 H / \alpha$ along the vertical mid-profile (i.e. along $X_1 / H = 0.5$) for different Bn values.

Close to the walls, the velocity gradient remains constant whatever the value of Bn in the range $[0, Bn_c]$, including the Newtonian case ($Bn = 0$). A decrease in the maximal value of the velocity is observed when the value of Bn increases, it leads to a decrease in the convection intensity. These results show the stabilizing effect of yield stress. Furthermore, in the middle of the cavity, the velocity gradient decreases also with increasing values of Bn . This is the result of the emergence of unyielded regions as shown later in the case. These tendencies follow the decrease in heat transfer for increasing Bn . When $Bn_c \geq 1.7$, we recover a motionless state in the whole cavity.

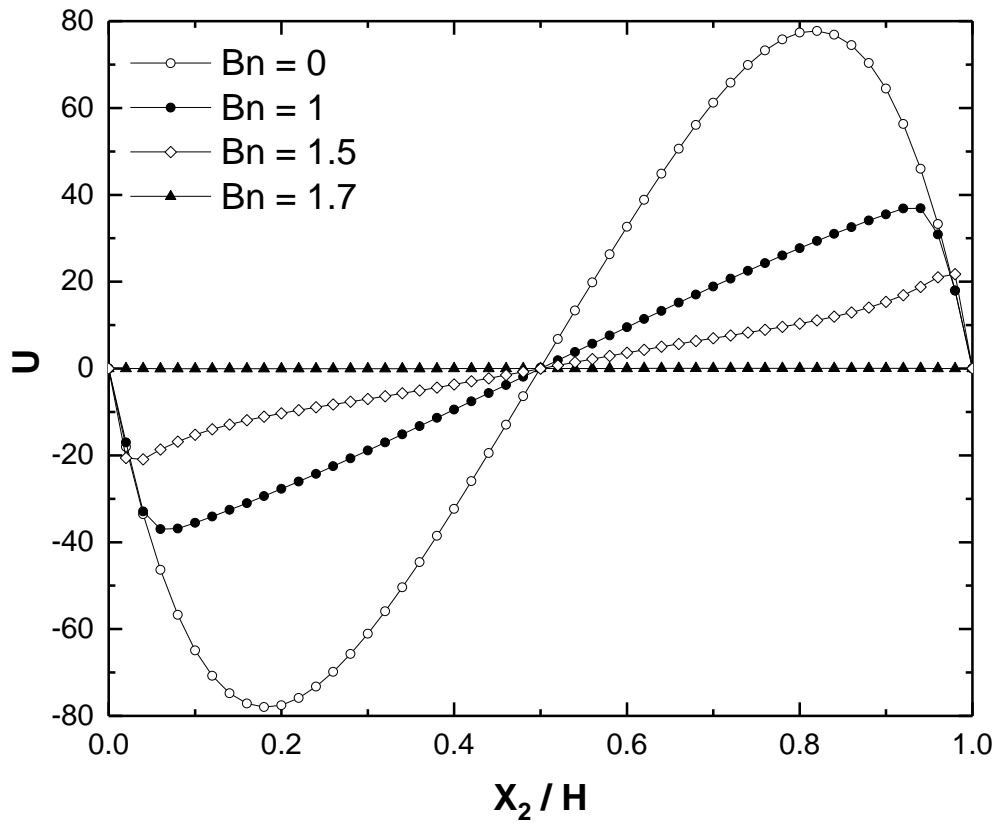


Figure 6: Variations of dimensionless horizontal velocity component U along the vertical mid profile.

Dimensionless temperature profiles $\theta = \frac{T}{T_H - T_C}$ are presented along the vertical mid-profile in Figure 7. Results show that when Bn increases, the deviations from the solution in the conductive regime ($Bn_c = 1.7$) decrease. Furthermore, the increase in Bn leads to a decrease in the thermal boundary layer as well as the temperature gradients within this layer. This is a signature of a decrease in the convective intensity as already underlined. A constant temperature gradient is recovered for $Bn \geq Bn_c$, meaning that convection stops and the regime is only conductive.

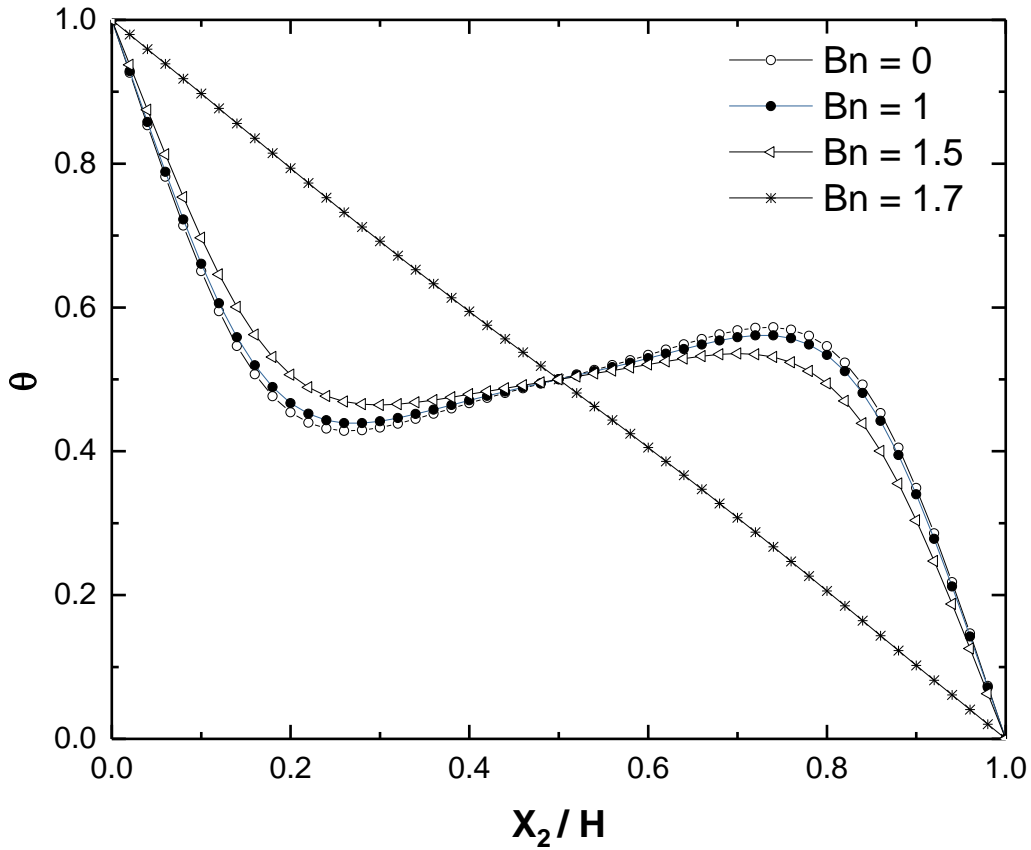


Figure 7: Variations of non-dimensional temperature for different Bn along the vertical mid profile.

Another result of interest concerns the determination of yielded and unyielded regions. In this study, unyielded regions are defined in regions where the dimensionless second invariant of the deviatoric stress tensor J_{2SiG} is such as $J_{2SiG} = \frac{\tau_{II}}{\tau_0} \leq 1$, τ_{II} is defined

as $\tau_{II} = \left[\frac{1}{2} (\tau_{X_1X_1}^2 + \tau_{X_2X_2}^2 + 2\tau_{X_1X_2}^2) \right]^{\frac{1}{2}}$. If $J_{2SiG} > 1$, the zone is considered as yielded.

In Figure 8 , the yielded zones are represented in white while unyielded regions are displayed in colour for $Bn = 1$ and $Bn = Bn_c = 1.7$.

For $Bn = 1$, unyielded regions are located in the corners of the square cavity and the middle of the cavity as already observed in literature [57], [55], [6], [58]. In addition, the size of the unyielded regions increases with the increase in Bn .

By using the EVPHB model, a quite large unyielded region is obtained in the center of the cavity. Obviously, J_{2SiG} reaches the value 1 at the limit between unyielded and yielded regions since the yield stress is reached there. However, in the case $Bn = 1$, we observe that J_{2SiG} values are around 70% of the yield stress value at the middle of

the unyielded region (red region around the first diagonal). For $Bn = Bn_c = 1.7.$, we observe that the unyielded region invades the whole cavity since there is no white region. This also confirms that the regime is purely conductive in this case. The second invariant of the deviatoric stress tensor is not constant in the cavity and maximal values are obtained close to horizontal walls where J_{2SiG} reaches 40% of the yield stress (green and blue light regions). As previously, we observe that minimal values of J_{2SiG} are obtained at the center and corners of the square cavity.

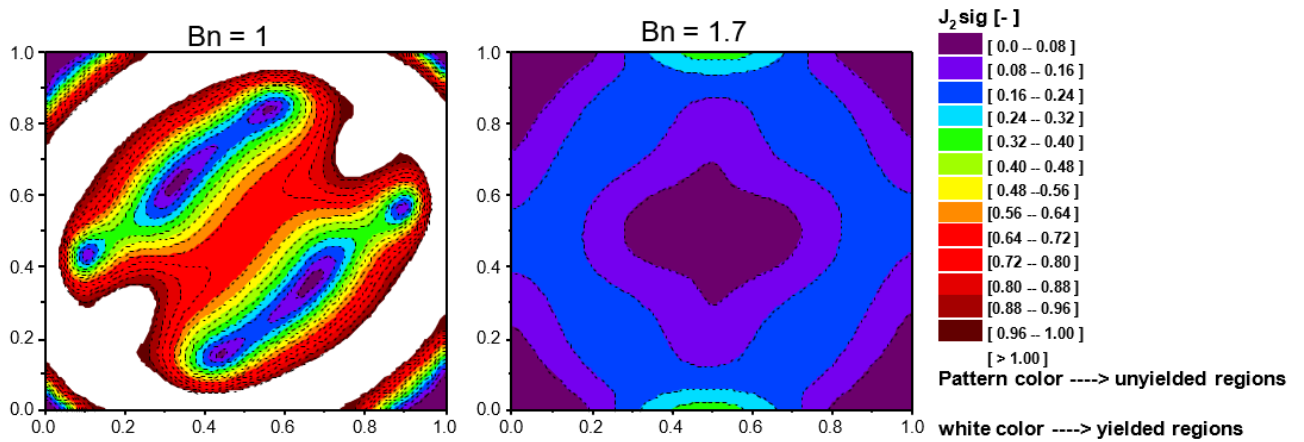


Figure 8: Fields of the second invariants of the deviatoric stress tensor J_{2SiG}

Although the effect of elasticity is negligible in this section, the modified Maxwell model allows us to determine the stress level via J_{2SiG} throughout the cavity. We thus observe that the yield stress is first reached at horizontal walls, where the buoyancy effects are the largest. Furthermore, the no-slip conditions result in increasing shear stress at walls.

2.5.2. The general elasto-viscoplastic model

In this section, the elastic effect added to the viscoplastic behavior is investigated. For this purpose, we vary the Weissenberg number. The mean Nusselt number \overline{Nu} as a function of Bn (Figure 9) and the inverse of the yield number $1/Y$ (Figure 10) are presented. In these figures, one observes an increase in the Nusselt number with increasing Wi . It means that elasticity favors significantly heat transfer as already shown by Park & Lee [73] for instance. Furthermore, the increase in Wi has a destabilizing effect since Bn_c increases as represented in Figure 11. On the other hand, the increase in Wi leads to a transition from subcritical to supercritical

bifurcation. For weak values of Weissenberg number, *i.e.* $0 < Wi \leq 0.4$, the bifurcation is subcritical as observed in the inelastic Bingham case. When $0.8 \leq Wi \leq 1$, the transition from convective ($\overline{Nu} = 1$) to conductive regimes ($\overline{Nu} > 1$) is no longer abrupt. This continuous behavior highlights a supercritical bifurcation. According to Park & Lee [73], the classical Maxwell model (with a Newtonian viscosity) leads to a supercritical bifurcation for low values of Deborah number De , ratio between the stress relaxation time and the diffusion time. Above a critical value De_c , the bifurcation becomes subcritical. Typically, the authors obtain $De_c \approx 0.015$ for a classical Maxwell fluid. In the range of our calculations, we obtain a critical Weissenberg number close to 0.5 ($0.4 < Wi_c < 0.6$) leading to a Deborah number around $De \approx 5 \cdot 10^{-4}$ which is far from the value given by Park & Lee [73]. The difference can be attributed to the model since in our case, we use the Maxwell model with a viscosity which follows a Bingham. Furthermore, Park & Lee considered an infinite layer of visco-elastic fluids.

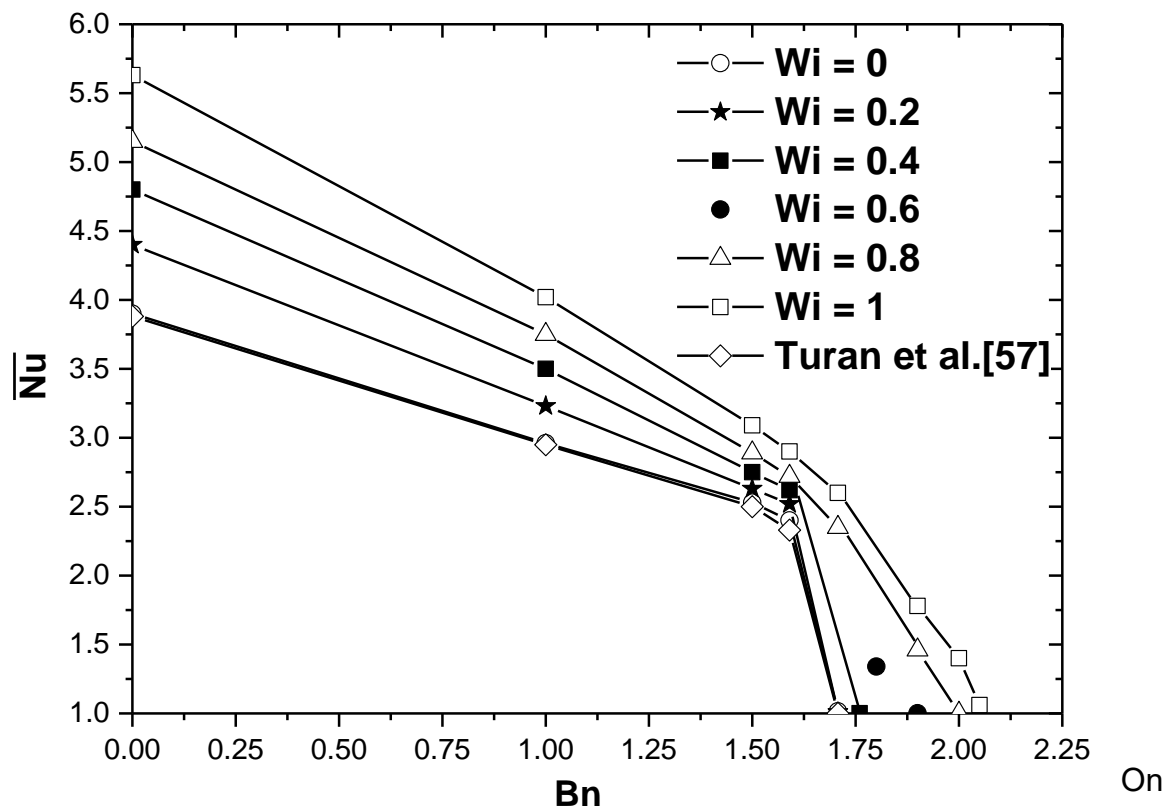


Figure 9: The mean Nusselt number (Nu) as a function of Bn for different values of Wi and $Ra=10^5$

the other hand, our numerical results can be compared with some experimental results obtained for an elasto-viscoplastic gel, namely the Carbopol gel used in our previous works [51] [52]. In these latter papers, the aspect ratio of the experimental cavity is around 18 and Carbopol gels fit well with the Herschel-Bulkley model ($n < 1$) in the steady state flow curves, *i.e.* above the yield stress. Under these conditions, experimental results show an onset of convection at the threshold $1/Y_c \approx 80$. In the present computations, the aspect ratio is 1 and an elastic Bingham model (or modified Maxwell model) is consider. As indicated in Fig. 7, we observe that $1/Y_c$ varies with the Weissenberg number. From FEMLIP simulations for the tested range of Wi numbers, one gets $50 < \frac{1}{Y_c} < 60$, values which are in a quite good agreement with the experimental values given their differences.

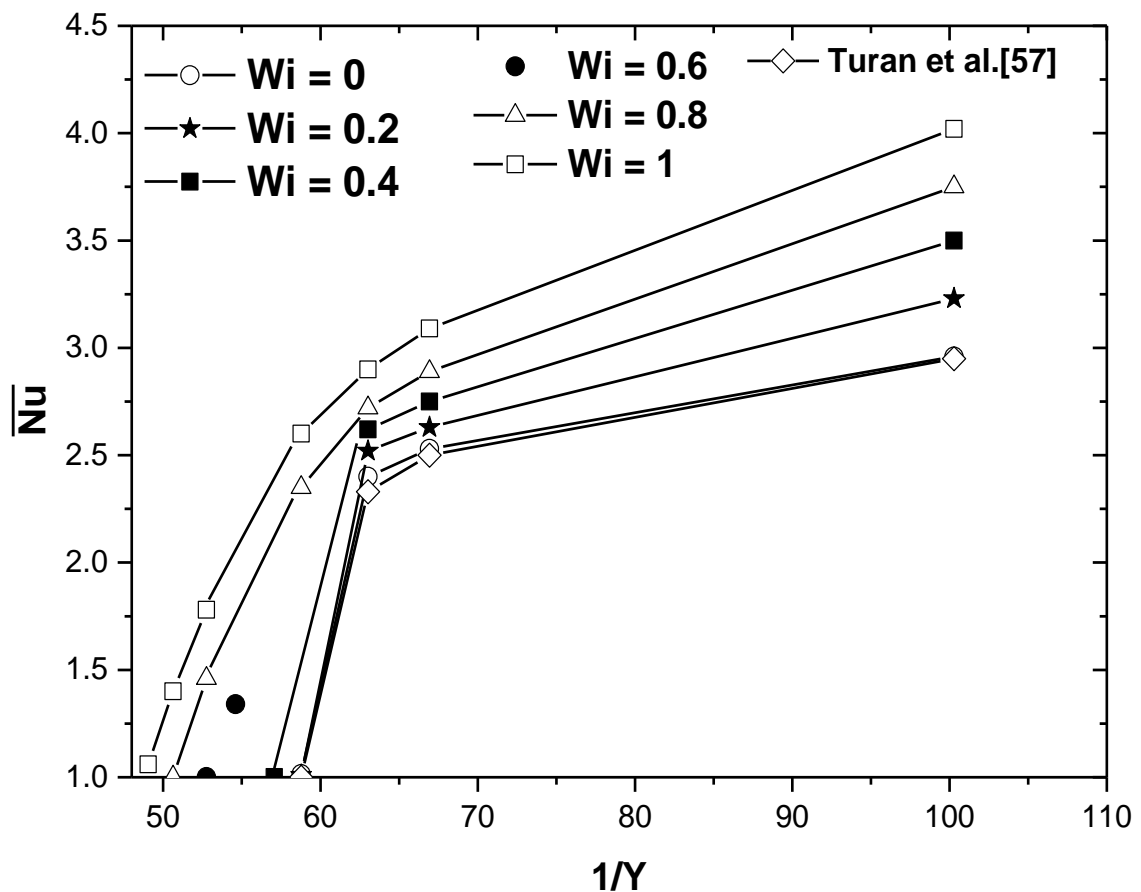


Figure 10: Mean Nusselt numbers \overline{Nu} as a function of $1/Y$ for different values of Wi and $Ra = 10^5$

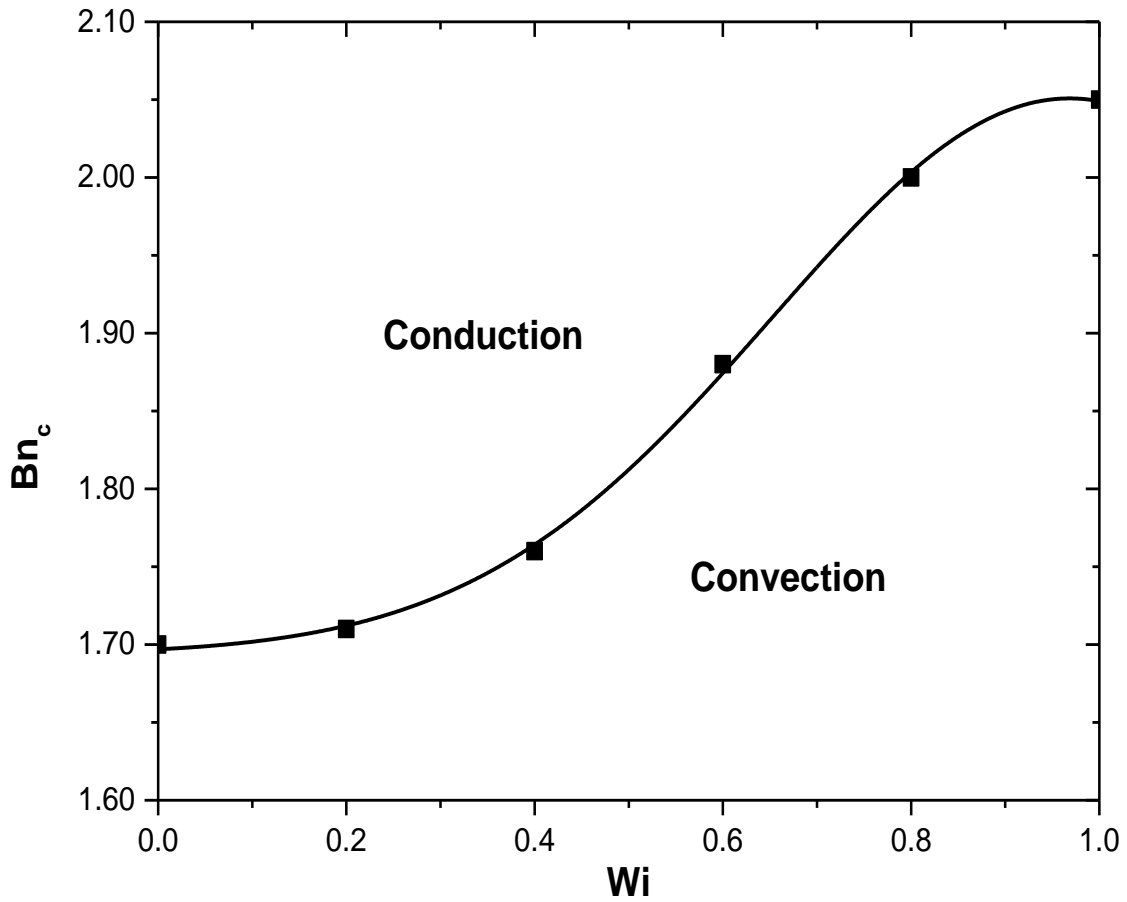


Figure 11: Bn_c as a function of Wi

Variations of the horizontal velocity U along the vertical mid-profile are shown in Figure 12 for different Wi values and $Bn = 1$. This figure shows that velocity gradients are slightly increased at walls ($\frac{x_2}{H} = 0$ and 1) for increasing Wi . It means that the maximum value of the shear rate D_{v12} , located at the horizontal walls, increases with Wi . Furthermore, we observe an increase in the maximal value of U when Wi is increased which is in agreement with the increase in the convective intensity via the Nusselt number for instance. Another consequence is the increase of the shear rate in the whole cavity, leading to a decrease in unyielded regions.

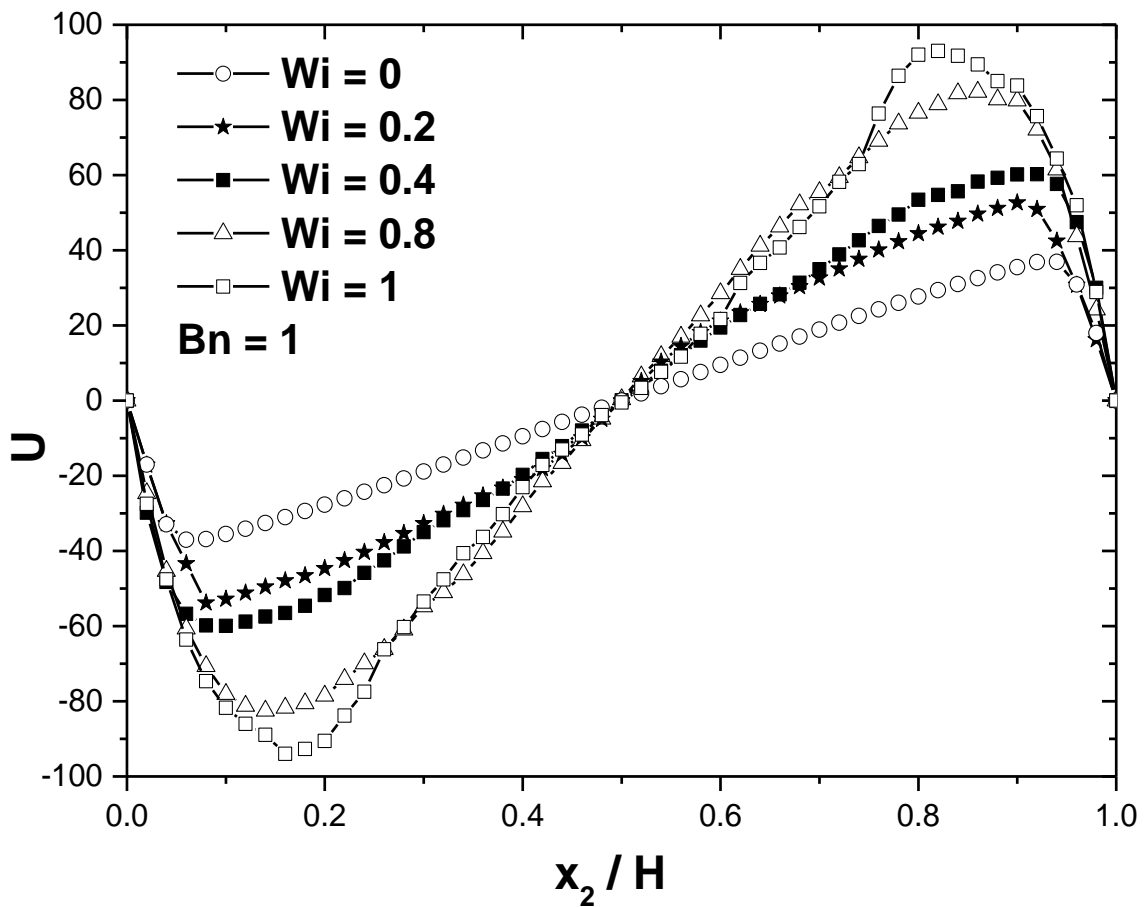


Figure 12: Horizontal velocity component U along the vertical mid-profile for different Wi

Similar observations can be done by considering the contours of the stream function in Fig. 13. The amplitude of the stream function increases as well as its gradient for increasing Wi , which is in agreement with an increase in velocity and thus in the convective intensity.

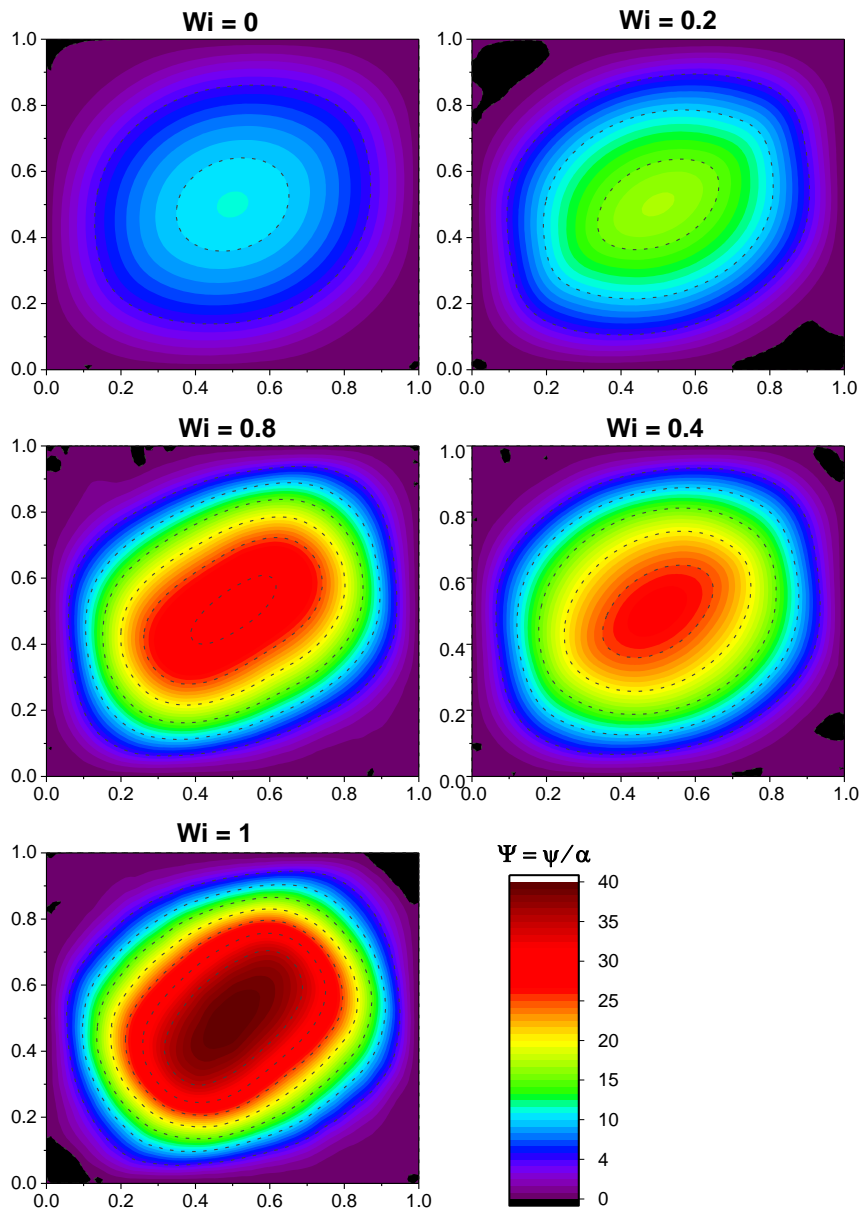


Figure 13: Contours of non-dimensional stream function at $Bn = 1$ for different Wi

Dimensionless temperature profiles and temperature fields are shown respectively in Figs.14 and 15. For increasing Wi numbers, the thermal boundary layer decreases resulting in an increase in the temperature gradient within the boundary layer. This is due to an increase in heat transfer, thus to an increase in the convective intensity.

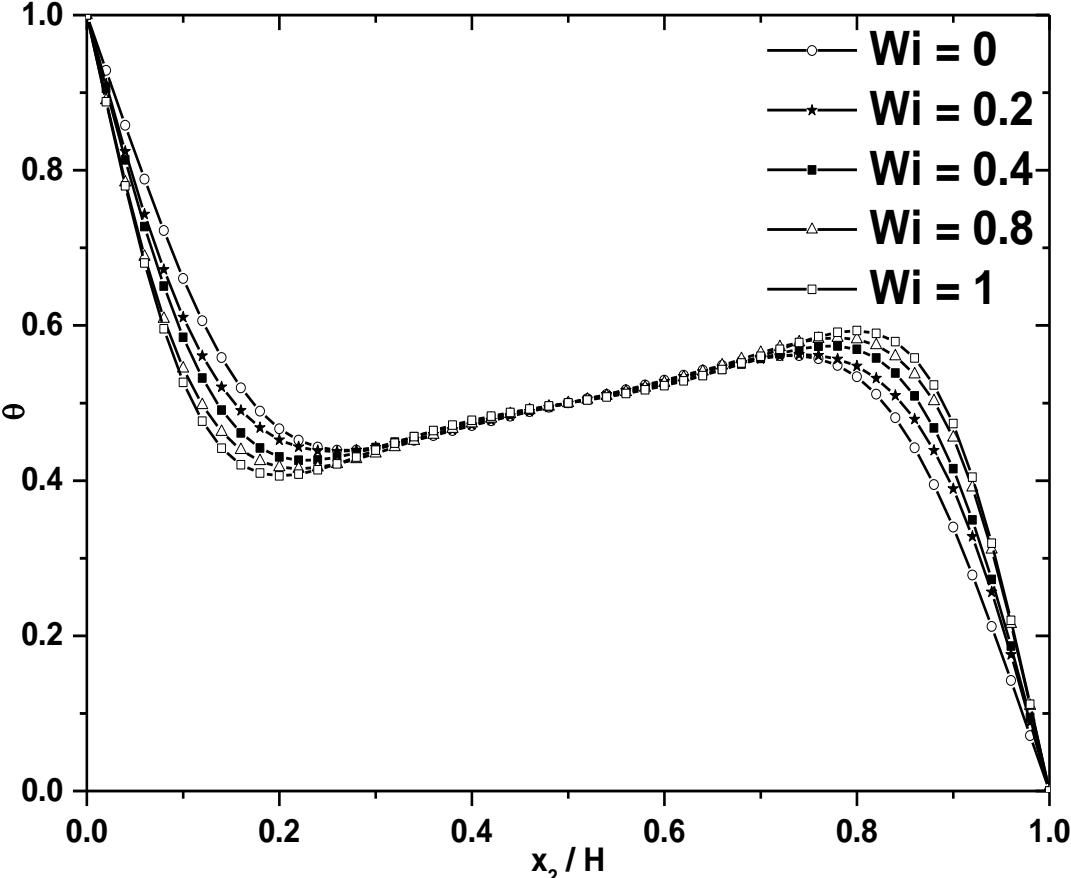


Figure 14: Temperature along the vertical mid-plane for different Wi at $Bn = 1$

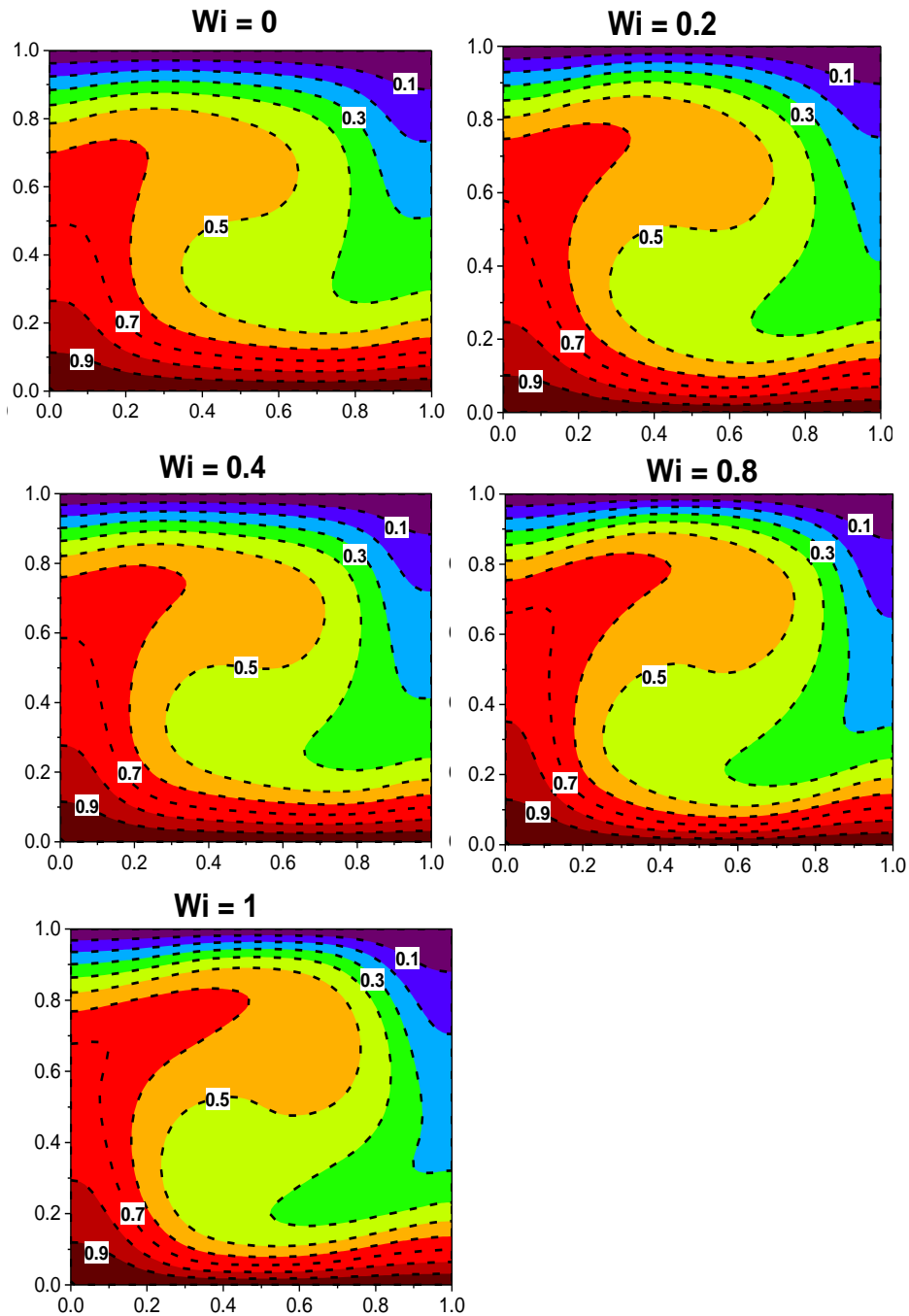


Figure 15: Temperature fields in the whole cavity for $Bn = 1$ and different Wi

Finally, yielded and unyielded regions are presented in Figure 16. As above mentioned, these regions are determined via the Von Mises criterion, *i.e.* based on the comparison of the second invariant of the deviatoric stress tensor with the yield stress. In Figure 16 the yielded regions are given in white and the unyielded regions are depicted in

colour. Unyielded zones are recovered at the cavity corners. These latter unyielded zones are almost unaffected by a variation in Wi , they correspond to stagnant regions where the strain (rate) is very low as displayed in Figs 17 and 18 due to the proximity with the boundaries.

More interestingly, an additional unyielded region is obtained at the center of the cavity. When Wi increases, as expected, the unyielded region decreases since J_{2SiG} increases. A consequence is that the shear rate values as well as the convective intensity increase as underlined previously.

This result is in agreement with the numerical works published by Martins *et al.* [74] and Furtado *et al.* [75], in which the authors study the elastic effect on flow pattern of an elasto-viscoplastic fluid in a cavity. Their results indicate clearly that an increase in elasticity has an effect on the unyielded regions' size. They show that the increase in elasticity level increases the whole stress level. Indeed, the increase in elasticity is accompanied by a greater ability of the material to deform. Thus, the increase in strain induces an increase in the stress level. It finally leads to decrease the unyielded regions' size.

Concerning the topology of the pattern, we observe that unyielded regions are invariant under point reflection through its center (central symmetry).

For $Wi \geq 0.8$, the central unyielded region breaks into two centrally symmetric regions. Numerical simulations [74] have shown that viscoelastic deformations developing in the yielded regions contribute to the shape changes and symmetry modifications in the unyielded regions.

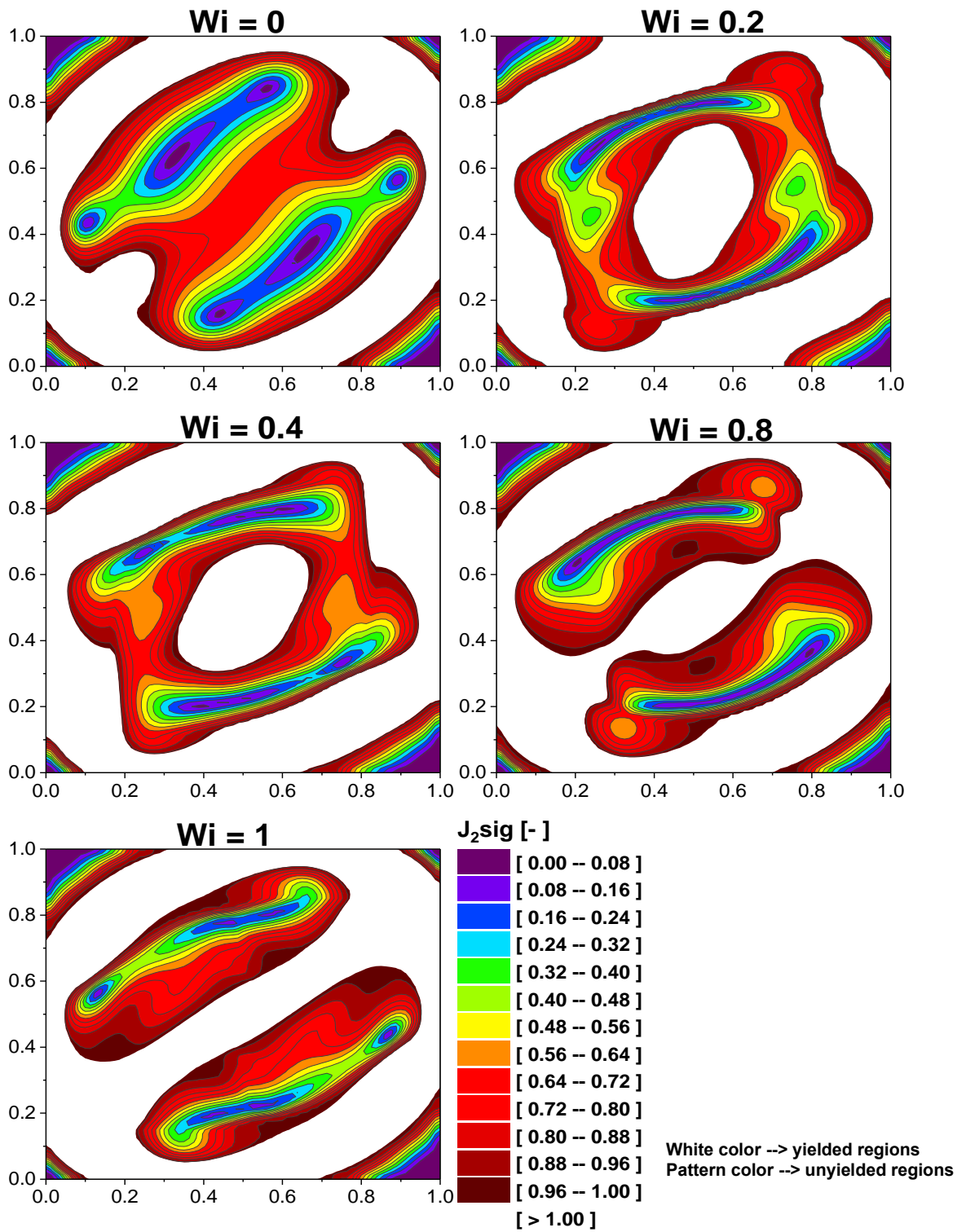


Figure 16: Contours of the second invariant of the deviatoric stress tensor J_{2sig} at $Bn = 1$ for different Wi . Coloured regions correspond to $J_{2sig} < 1$.

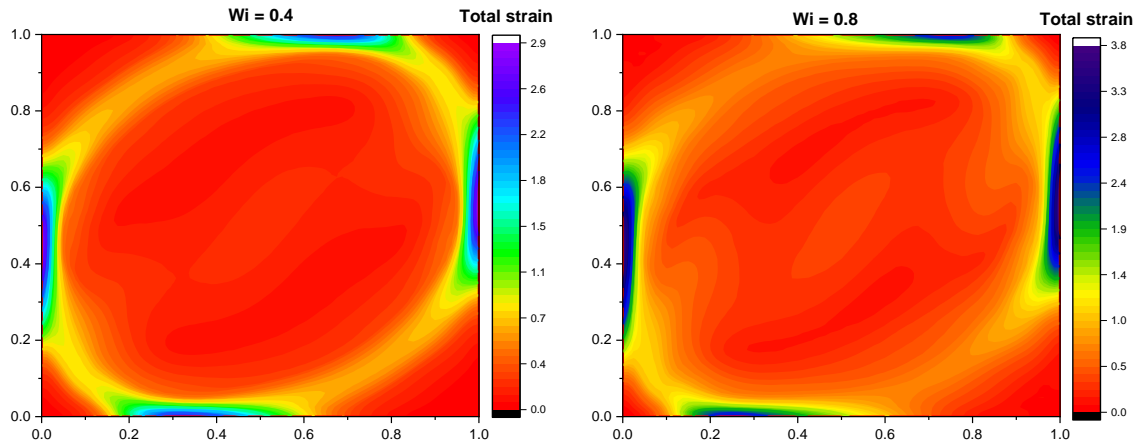


Figure 17: Isovalues of total strain at $Bn=1$ for $Wi=0.4$ and 0.8

Figure 17 displays the total strain, i.e. the sum of the elastic and viscous strain tensors for $Wi = 0.4, 0.8$ and $Bn = 1$. We recover unyielded zones in areas of low strain values (orange areas in Fig.16. In these regions, the strain corresponds mainly to an elastic contribution. The areas of maximum strain are mainly located at the walls, corresponding mostly to shear as also underlined in Fig.18 via shear stress $\tau_{X_1X_2}$. The largest strain values are obtained in an annular region which increases in size with Wi , as already mentioned. Concomitantly, we observe an increase of the shear stress the shear component in the center of the cavity with increasing Wi which underlines the effect of shear in obtaining two central unyielded zones (Fig.18, $Wi = 0.8$). However, the first adimensionnel normal stress difference $N1^* = \frac{\tau_{X_1X_1} - \tau_{X_2X_2}}{\tau_0}$ are mainly responsible for the occurrence of two unyielded zones in the center of the cavity as can be seen in Fig.19. Indeed, we observe in this figure that $N1^*$ is large on the first diagonal of the square cavity. The maximum values of the normal stresses components $\tau_{X_1X_1}$ and $\tau_{X_2X_2}$ are obtained where the fluid recirculates (vortex), thus indicating significant elongational elastic effects.

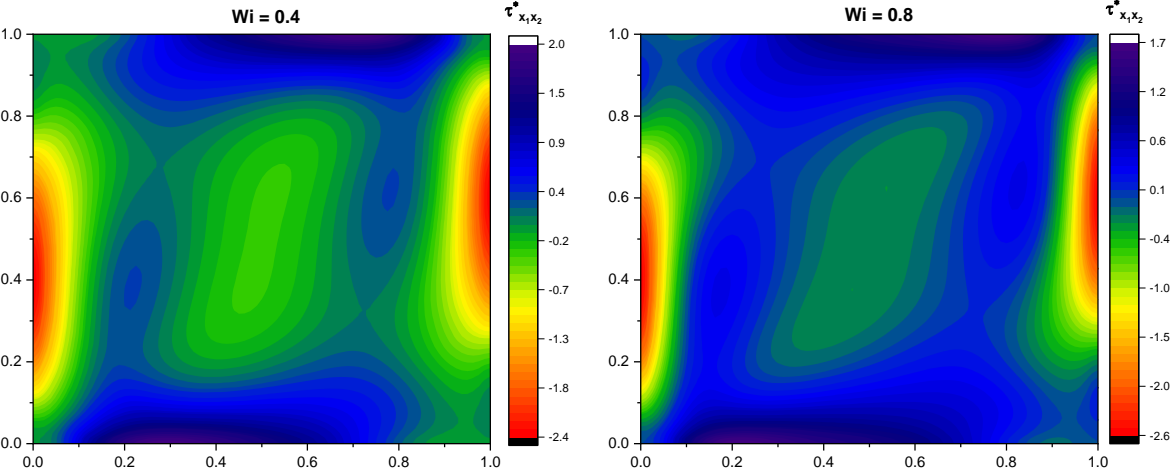


Figure 18: adimensionless isovalues of the shear stress $\tau_{X_1 X_2}$ component for $Bn = 1$, $Wi=0.4$ (left) and $Wi=0.8$ (right)

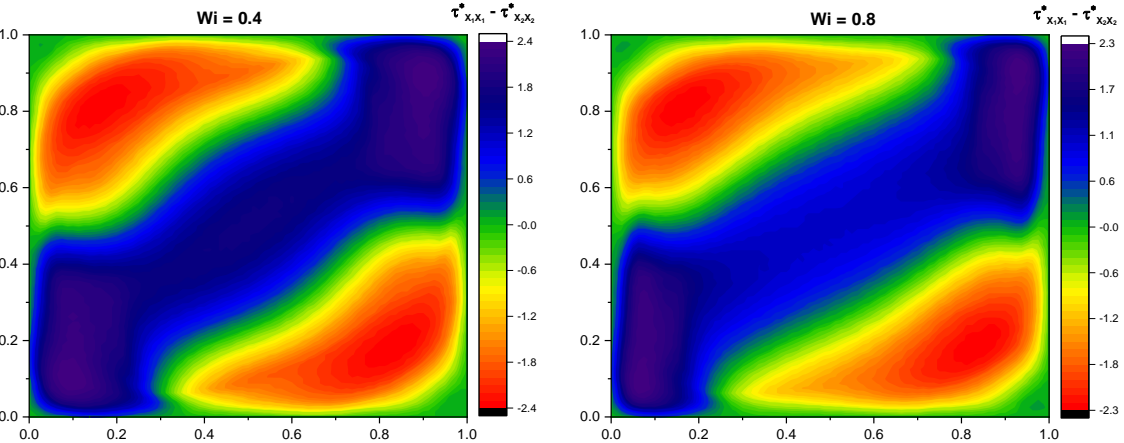


Figure 19: Isovalues of the first normal stress difference (N1) for $Bn = 1$, $Wi=0.4$ (left) and $Wi=0.8$ (right)

2.6. Conclusion

Natural convection of an elasto-viscoplastic fluid is studied using the Finite Element Method with Lagrangian Integration Points (FEM-LIP). The rheological model can be characterized according to Maxwell viscoelastic constitutive relationship which assumes that the total strain is the sum of viscous and elastic strains. The effects of plasticity and elasticity on the Rayleigh-Bénard convection are explored.

Concerning a viscoplastic fluid with negligible elasticity, the increase in Bn leads to a decrease in the non-dimensional horizontal velocity component U , accompanied by a decrease in shear rate. Then, when Bn increases, a higher level of stress within the material is needed to trigger the convection. This increase in Bn leads to a decrease in the variation of temperature along the wall - via the coupling between the momentum and energy equations - which involves a decrease of the mean Nusselt number \overline{Nu}_1 . Our results are found to be in excellent agreement with the previous works of Turan et al. [57].

An elasto-viscoplastic material is considered and the influence of the Weissenberg number is investigated. Our results show that for increasing Wi values, the convection domain enlarges highlighting a destabilizing effect of elasticity in the range of our study. This is the consequence of an increase in the elastic strain and thus in the level of stress within the material. The increase in Wi induces an increase in the convection intensity as well as the heat transfer via the mean Nusselt number \overline{Nu}_1 . The unyielded zones decrease in size since stresses can reach the yield stress, thus favouring the increase of yielded regions. Finally, our results indicate both significant elongational and shear effects of the same order of magnitude.

Ce chapitre a fait l'objet d'une soumission dans le Journal. Non-Newtonian Fluid Mechanics

**CHAPITRE 3 : Convection de Rayleigh Bénard pour
un fluide élasto-viscoplastique : comparaison
modélisation numérique et expérience**

Résumé :

Cette étude confronte les observations expérimentales sur la convection de Rayleigh-Bénard obtenues avec un fluide à seuil modèle, à savoir un gel élasto-viscoplastique, avec des résultats obtenus par simulation numérique. Du point de vue numérique, les équations fondamentales incluant une loi de comportement élasto-viscoplastique, ont été résolues par la Méthode des Eléments Finis avec Points d'Intégrations Lagrangiennes (MEFPIL).

L'influence des conditions aux limites d'adhérence et de glissement aux parois sur la convection de Rayleigh-Bénard a été modélisée avec la MEFPIIL. L'analyse montre un bon accord entre les simulations et les résultats expérimentaux sur l'intensité des transferts et le critère d'apparition de la convection. Le glissement promeut l'apparition de la convection. Les champs cinématiques, thermiques et dynamiques ainsi que les régions seuillées et non seuillées dans la cavité, sont présentés et discutés pour les cas d'adhérence et de glissement étudiés.

Mots-clés : Convection de Rayleigh-Bénard, Comportement élasto-viscoplastique, simulation numérique, glissement

3.1. Introduction

La convection de Rayleigh-Bénard (RBC) due à l'action d'un fluide soumis à une différence de température entre deux plaques horizontales a fait l'objet de très nombreuses études dans le cas des fluides newtoniens [76] [77] [78] [79] [80]. Toutefois, l'analyse de la littérature montre que relativement peu d'études ont été consacrées aux fluides non newtoniens. Or, parmi ces derniers, les fluides à seuil d'écoulement représentent une classe de grand intérêt d'un point de vue fondamental et applicatif. Ainsi, au cours des dernières décennies, la convection de Rayleigh-Bénard et ses critères d'apparition sur les fluides à seuil d'écoulement commence à susciter l'intérêt. Comme nous l'avons montré au chapitre précédent, une grande majorité des études sont numériques et théoriques. En outre, elles ne considèrent que des fluides à seuil inélastiques, alors que la plupart des matériaux présentent un comportement élasto-viscoplastique.

Dans ce chapitre, la prise en compte du comportement élastique est proposée dans le cas de la Convection de Rayleigh-Bénard. Pour ce faire, un fluide élasto-viscoplastique soumis à un gradient de température vertical est étudié numériquement. Cette étude a pour objet d'évaluer l'influence de la contrainte seuil et de l'élasticité sur le démarrage de la convection, ainsi que sur les transferts thermiques. Au-delà de cet objectif, ce chapitre a pour but de confronter les prédictions numériques mettant en œuvre un fluide élasto-viscoplastique avec les observations expérimentales obtenues avec un fluide à seuil modèle.

Les rares études expérimentales publiées ont été menées avec des fluides à seuil considérés comme les gels aqueux de Carbopol. Leurs caractéristiques font que ces fluides sont reconnus comme étant des fluides élasto-viscoplastiques non thixotropes [10], [11]. Ces matériaux sont connus pour présenter un glissement au niveau de parois lisses non traitées chimiquement [81], ceci étant dû au caractère plastique du fluide et de sa microstructure. Le glissement prend une intensité variable selon les conditions qui règnent à l'interface [82], [83]. Darbouli et *al.* [48] et Métivier et *al.* [54] ont effectué des expériences pour étudier l'apparition de la convection de Rayleigh-Bénard dans des gels de Carbopol dans une cavité cylindrique avec des conditions aux parois contrôlées. Leurs expériences ont permis, d'une part, de détecter le début de la convection dans la cellule et, d'autre part, de démontrer l'effet des conditions aux

limites sur les transferts convectifs. Les auteurs de ces études ont mis en relation l'apparition de la convection avec l'intensité du seuil d'écoulement ou du seuil de glissement et la différence de température avant d'en fournir une interprétation physique. Ainsi, ils montrent que le paramètre déterminant du démarrage de la convection est le nombre critique Y_c qui représente le rapport entre les effets de contrainte seuil et les effets de poussée d'Archimède. Par ailleurs, l'étude des panaches thermiques dans des gels de Carbopol réalisée par Davaille et *al.* [52] a permis de montrer des valeurs de Y_c proches des études [48] et [54]. L'étude proposée par Kébiche et *al.* [53] met en évidence des valeurs de Y_c significativement différentes des études [48] [52]. Ceci peut s'expliquer par des conditions aux limites très différentes, à savoir que dans [53], toutes les parois sont isolantes et que la présence de glissement aux parois n'a pas été mesurée. En effet, Darbouli et *al.* [48] ont montré que l'apparition de la convection dépend de l'adhérence ou du glissement du fluide à seuil à la paroi. Métivier et Magnin, [84] ont montré théoriquement l'influence du glissement dans le cas de l'écoulement de Rayleigh Bénard Poiseuille d'un fluide de Bingham. Le glissement ou l'adhérence du matériau sur une surface peut être identifié par rhéométrie. Différents niveaux de glissement existent. Le glissement peut être très intense sur des surfaces très lisses souvent hydrophobes telles que celles en PMMA fréquemment utilisées pour les visualisations. Un moyen de rendre adhérent les gels de Carbopol sur le PMMA est proposé par Métivier et *al.* [85].

En ce qui concerne la comparaison numérique et expérimentale de la convection de Rayleigh-Bénard avec des gels de Carbopol dans une cavité carrée, à l'heure actuelle, seuls Hassan et *al.* [86] ont proposé un cadre d'analyse. Du point de vue numérique, les auteurs ont utilisé une modélisation classique avec le logiciel Fluent qui travaille en volumes finis et un modèle purement viscoplastique d'Herschel-Bulkley régularisé par la méthode de Papanastasiou [19]. Toutefois, les courbes de rhéométrie sont questionnables sur plusieurs points. D'abord, elles montrent des ruptures de pente typiques de la présence du glissement [83]. Ensuite, les rugosités utilisées par les auteurs (environ 10 micromètres) sont trop faibles pour éliminer totalement le glissement [83]. Du point de vue expérimental, dans la cellule de Rayleigh-Bénard, les conditions aux interfaces telles que le glissement aux parois n'est pas renseigné.

Les paramètres rhéologiques sont calculés sans tenir compte de ce glissement et les calculs sont faits en supposant l'adhérence à la paroi.

Dans ce chapitre, nous proposons de modéliser la convection de Rayleigh-Bénard dans une cavité carrée d'un fluide élasto-viscoplastique comme les gels Carbopol et de comparer les résultats obtenus aux données expérimentales disponibles et contrôlées telles que celles établies par Darbouli et *al.* [48] et Métivier et *al.* [54]. L'influence des conditions d'adhérence et de glissement sur la convection et notamment sur le critère d'apparition sera étudiée. Les équations fondamentales seront résolues par la Méthode des Eléments Finis avec Points d'Intégration Lagrangiens (MEFPIL), méthode plus adaptée au traitement des écoulements de fluides élasto-viscoplastiques. Le chapitre est construit comme suit :

- Premièrement, succinctement la configuration modélisée est présentée.
Le support théorique des équations fondamentales et la loi de comportement élasto-viscoplastique sont décrits, ainsi que la méthode de résolution numérique MEFPIIL [42].
- Deuxièmement, les conditions expérimentales ainsi que les résultats obtenus dans [48] et [54] sont résumés
- La dernière partie est dédiée à la comparaison des résultats expérimentaux et numériques, à travers notamment les variations des transferts thermiques, via le nombre de Nusselt, en fonction de l'inverse du nombre seuil $1/Y$. Les valeurs critiques de $1/Y$ qui caractérisent le passage du régime conductif au régime convectif sont présentées et discutées à la fois dans le cas adhérent et le cas de glissement parfait. Les champs cinématiques, de contrainte, de déformation et thermiques ont été finement analysés.

3.2. Théorie des instabilités de RB

Le problème considéré est schématisé dans la Figure 20. Une cavité carrée de dimension H et bidimensionnelle est étudiée. Les parois inférieures et supérieures sont à températures constantes T_H et T_C respectivement de telle sorte que T_C soit inférieure à T_H . Les parois latérales sont considérées comme étant adiabatiques, c'est-à-dire que le flux thermique à travers ces parois est nul. La vitesse normale aux parois est nulle dans tous les cas étudiés.

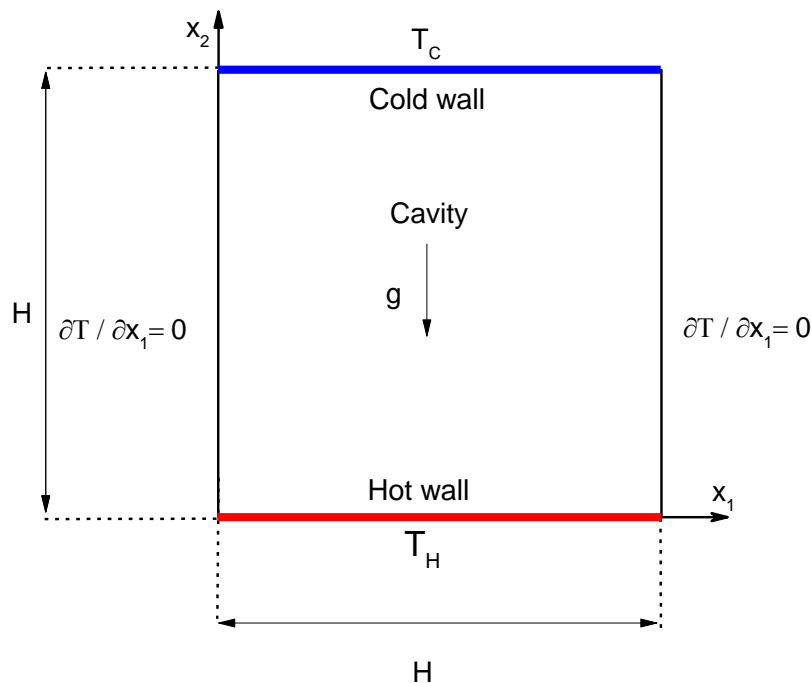


Figure 20: Configuration du domaine d'étude

Pour les conditions aux limites, nous avons considéré deux cas :

- L'adhérence aux parois avec $u_1 = u_2 = 0$,
- Le glissement parfait aux parois avec $\sigma_{12} = 0$.

A l'état initial, le fluide est considéré comme étant au repos de sorte que $u_1 = u_2 = 0$ et les champs de contrainte et de déformation sont nuls dans tout le domaine de calcul.

3.2.1. Equations gouvernant le problème

La convection de Rayleigh-Bénard pour le problème considéré est gouvernée par les équations de continuité, de quantité de mouvement prenant en compte l'approximation de Boussinesq et de l'énergie. Elles s'écrivent comme suit :

$$u_{i,i} = 0 \quad (1)$$

$$\tau_{ij,j} - p_{,i} + \rho g \beta (T - T_{ref}) \delta_{i2} = 0 \quad (2)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \quad (3)$$

Avec τ_{ij} , p et u qui représentent respectivement la composante i, j du tenseur déviateur des contraintes, la pression et le vecteur de vitesse. Les termes $u_j \frac{\partial T}{\partial x_j}$ et $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}$ correspondent respectivement aux termes de convection et de diffusion thermique. λ est la conductivité thermique, C_p est la capacité thermique massique, ρ la masse volumique, β le coefficient d'expansion thermique, δ_{ij} le symbole de Kronecker et g l'accélération due à la gravité.

$\Delta T = T_{ref} - T_c$, avec T_{ref} la température de référence qui est égale à la température moyenne des parois horizontales.

3.2.2. Loi de comportement

Le modèle élasto-viscoplastique utilisé dans cette étude a été présenté en détail dans le chapitre précédent.

Le modèle de Maxwell est choisi pour rendre compte du comportement élastique et visqueux du fluide. Il consiste en une association d'un solide élastique et d'un fluide visqueux. Dans ce modèle, la viscosité est décrite par le modèle Herschel-Bulkley qui tient compte à la fois de la contrainte seuil et du comportement rhéofluidifiant. Le modèle s'écrit :

$$\frac{\dot{\tau}_{ij}}{2G} + \frac{\tau_{ij}}{2\eta'} = D_{ij} = D_{vij} + D_{eij} \quad (4)$$

$$\tau_{ij} = \left[\frac{\tau_0}{2D_{vII}} + K(2D_{vII})^{n-1} \right] D_{vij} = 2\eta' D_{vij} \quad (5)$$

où τ_{II} est le second invariant du tenseur déviateur des contraintes

$$\tau_{II} = \left[\frac{1}{2} (\tau_{X_1X_1}^2 + \tau_{X_2X_2}^2 + 2\tau_{X_1X_2}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Pour plus de détails sur la formulation mathématique, se référer aux chapitres 2 et 4. Sous forme tensorielle, le tenseur déviateur des contraintes noté τ , avec les composantes τ_{ij} , peut être exprimé en fonction de η' , le module élastique noté G et le tenseur des taux de déformation noté D . Dans le cas d'un fluide de Maxwell, D est la somme d'une contribution visqueuse et élastique D_v et D_e , respectivement.

Selon la loi Herschel-Bulkley, la viscosité apparente peut être exprimée en fonction des éléments suivants : l'indice de rhéofluidification n , la consistance K , la contrainte seuil τ_0 et le second invariant du tenseur des taux de déformation visqueux $D_{vII} =$

$$-\sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(D_v^2)}.$$

3.2.3. Nombres adimensionnels caractéristiques

Dans cette étude, les longueurs sont rendues sans dimension en considérant H comme longueur caractéristique, l'échelle de vitesse est $U = \sqrt{g\beta\Delta TH}$, la température est adimensionnalisée par $(T_H - T_C)$ et les contraintes par la contrainte seuil τ_0 . L'introduction de ces échelles caractéristiques dans les équations gouvernant le problème permet d'obtenir plusieurs nombres sans dimension comme paramètres de contrôle :

- Le nombre de Bingham est défini par le rapport entre les effets plastiques et visqueux [20] [21].

$$\text{Bn} = \frac{\tau_0}{K} \left(\sqrt{\frac{H}{g\beta\Delta T}} \right)^n \quad (7)$$

- Le nombre de Weissenberg est défini comme étant le rapport entre le temps de relaxation du fluide, $(K/G)^{1/n}$ et le temps caractéristique de l'écoulement $\frac{H}{\sqrt{g\beta\Delta TH}}$

$$Wi = (K/G)^{1/n} \frac{H}{\sqrt{g\beta\Delta TH}} \quad (8)$$

- Le nombre de Rayleigh Ra est défini comme étant le rapport entre les effets de flottabilité et les effets de diffusion visqueuse et thermique. Il s'écrit

$$Ra = \frac{\rho^2 c_p}{K\lambda} \sqrt{(g\Delta T\beta H)^{3-n} H^{5+n}} \quad (9)$$

- L'apparition de la convection est principalement gouvernée par l'équilibre entre les effets de flottabilité et les effets liés au seuil d'écoulement. Elle peut être quantifiée par l'inverse du nombre seuil

$$Y^{-1} = \frac{g\beta H\Delta T}{\tau_0} \quad (10)$$

- Le nombre de Prandtl Pr représente le rapport entre la diffusion visqueuse et la diffusion thermique

$$Pr = \frac{Kc_p}{\lambda} \left(\frac{g\beta\Delta T}{H} \right)^{\frac{(n-1)}{2}} \quad (11)$$

- Le nombre de Nusselt est défini comme le rapport entre le flux de chaleur total et le flux de chaleur conductif

$$Nu = \frac{\varphi H}{\lambda} \quad (12)$$

Le coefficient de transfert thermique vertical φ est défini comme suit :

$$\varphi = \left| -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right| \times \left| \frac{1}{(T-T_{ref})} \right| \quad (13)$$

L'indice de rhéofluidification n est également un paramètre caractéristique du problème.

3.3. Méthode numérique

La MEFPIL est basée sur la méthode des éléments finis dans laquelle nous avons une approche continue et une discrétisation de l'ensemble du domaine. Elle est issue de la méthode Particle-In-Cell (PIC) [87] [41]. Cette méthode a pour spécificité la double discrétisation du domaine contrairement à la MEF où nous avons une répartition spatiale unique des éléments. Dans la MEFPIL, le domaine est divisé en éléments afin d'obtenir les équations nodales avec un maillage fixe. Ceci permet de garder un processus d'intégration pour la convergence du calcul, point essentiel pour tenir compte des grandes déformations du matériau. De plus, le matériau est discrétisé en points matériels. Il faut également noter que dans la MEFPIL, il n'y a pas d'interaction fixe entre les points de calculs aux nœuds et les points matériels. Ces derniers ne représentent que des supports numériques transportant l'information matérielle lors de l'advection. Ce processus permet d'évaluer les différentes variables telles que la déformation, les contraintes, la vitesse, etc.

L'équation (14) fournit la discrétisation temporelle de la dérivée convective $\dot{\tau}_{ij}$ avec Δt_e le pas de temps élastique. Ce pas de temps est choisi pour capturer les variations de contraintes élastiques.

$$\dot{\tau}_{ij}^{t+\Delta t_e} = \frac{\tau_{ij}^{t+\Delta t_e} - \tau_{ij}^t}{\Delta t_e} + \tau_{ij}^t * W_{ij}^t - W_{ij}^t * \tau_{ij}^t \quad (14)$$

W_{ij} représente le tenseur rotationnel qui correspond à la partie antisymétrique du tenseur des taux de déformation. A la fin de l'incrément, toutes les variables (contrainte, déformation, pression...) avec le pas de temps $t+\Delta t$ sont calculées. En pratique, dans tous les résultats présentés dans ce chapitre, nous avons $\Delta t = \Delta t_e$ afin d'avoir à la fois une stabilité numérique et une bonne précision [42]. L'incrément Δt_e est lui choisi comme étant égal au plus à $1/10^{\text{ème}}$ du temps de relaxation viscoélastique du matériau pour des raisons de précision dans les résultats [42].

3.4. Conditions expérimentales

Les données expérimentales sont celles établies par Darboui dans sa thèse ainsi que dans les articles de Darboui et al. [48] et Métivier et al. [54]. Les aspects les plus importants sont résumés ci-après. La cavité de Rayleigh-Bénard est une cellule cylindrique de diamètre 179 mm . La distance entre la paroi inférieure et la paroi supérieure vaut $d = 17 \text{ mm}$. Le flux de chaleur total Q_t de la paroi inférieure est contrôlé au moyen d'une plaque chauffante. La température de la paroi supérieure est contrôlée par une circulation d'eau froide. Le début de la convection est déterminé à l'aide de la méthode de Schmid-Milverton qui considère que, dans le régime conductif, le flux de chaleur, Q_t , est proportionnel à la différence de température ΔT (voir Figure 21).

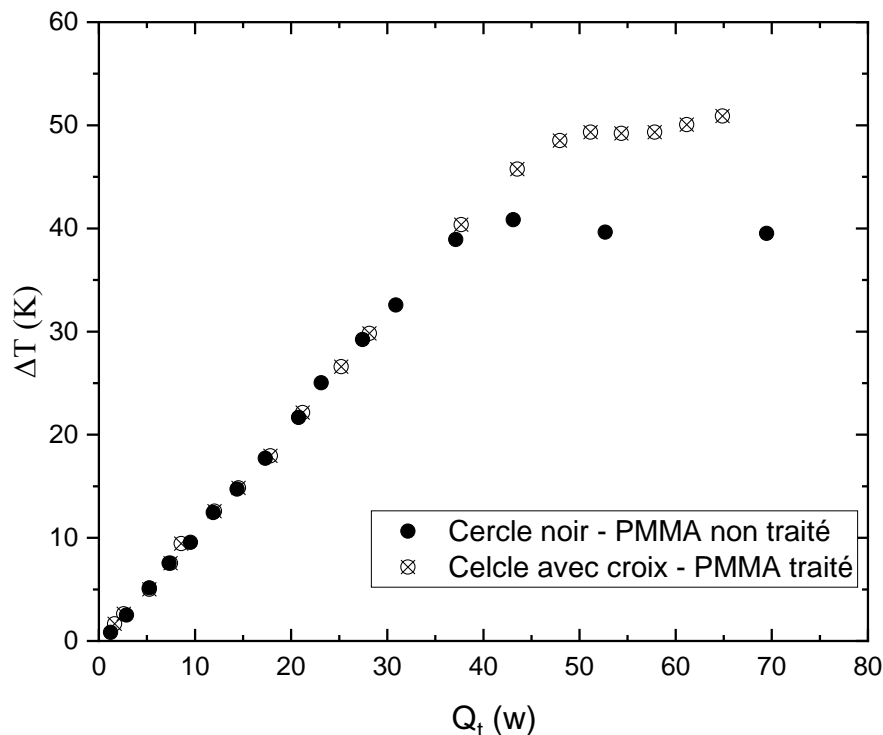


Figure 21: Évolution de la différence de température en fonction de la puissance de chauffage. Ce flux de chaleur évolue considérablement avec l'apparition de la convection. La convection a tendance à homogénéiser la température dans la cavité. Cela entraîne une diminution de la pente de la courbe ΔT vs. Q_t (Figure 21). Au niveau du changement de pente, la différence de température ΔT correspond à la différence de température critique d'apparition de la convection [48]. Chaque point de la Figure 21 est obtenu après un temps d'attente allant de 2 heures (en régime conductif) jusqu'à

10 heures (en régime convectif). Afin de contrôler les conditions de surface de la cavité de Rayleigh-Bénard en contact avec le gel, des feuilles de PMMA d'une épaisseur de $50 \mu\text{m}$ ont été collées sur la surface inférieure en cuivre de la cavité de Rayleigh-Bénard [48]. Les feuilles de PMMA non traitées entraînent des conditions de glissement du fluide à leur interface, car elles sont hydrophobes (non mouillantes) et très lisses, i.e. la rugosité de la surface est très inférieure à la taille des microgels. Il est bien documenté que les gels de Carbopol glissent sur des surfaces lisses et non mouillantes comme le PMMA [10], [82], [83]. Des conditions de non-glissement sont obtenues en traitant les surfaces de PMMA comme proposé par Métivier et *al.* [85]. Les autres surfaces, surface latérale en PMMA et surface supérieure en verre, ont aussi été traitées.

Les gels aqueux de Carbopol sont fabriqués à partir de résines réticulées d'acide polyacrylique C 940, fabriquées par B.F. Goodrich. Le polymère est dispersé dans de l'eau distillée, la solution est neutralisée avec NaOH , à $\text{pH} = 7$. La solution devient un gel transparent. La structure du gel correspond à une dispersion concentrée de microgels dans l'eau. Les gels de Carbopol sont très souvent utilisés comme fluides modèles, car outre leur transparence, ils ne sont pas thixotropes [10], [11]. Les propriétés rhéologiques globales des gels de Carbopol ont été mesurées à l'aide d'un rhéomètre AR-G2 (TA Instruments). Les géométries de mesure cône-plan sont rendues rugueuses pour éviter le glissement aux parois [83]. Les gels ont un comportement élasto-viscoplastique. Les valeurs des paramètres rhéologiques en volume du gel de Carbopol utilisé sont $\tau_0 = 0.031 \text{ Pa}$, $K = 0.26 \text{ Pa.s}$, $n = 0.46$, $G = 0.77 \text{ Pa}$. Afin d'évaluer le glissement à la paroi, la méthodologie proposée par Piau [10] a été mise en œuvre. La rhéométrie en cisaillement à l'état stationnaire a été réalisée en utilisant des surfaces de la cellule de mesure dans le même matériau que celui dans la cavité de Rayleigh-Bénard, c'est-à-dire les surfaces de PMMA lisse, non traité et PMMA traité. Les résultats connus et théorisés [82], [83] ont montré que la contrainte en fonction de la vitesse de cisaillement apparente est plus faible avec les surfaces en PMMA lisse non traité que pour les surfaces en PMMA traité.

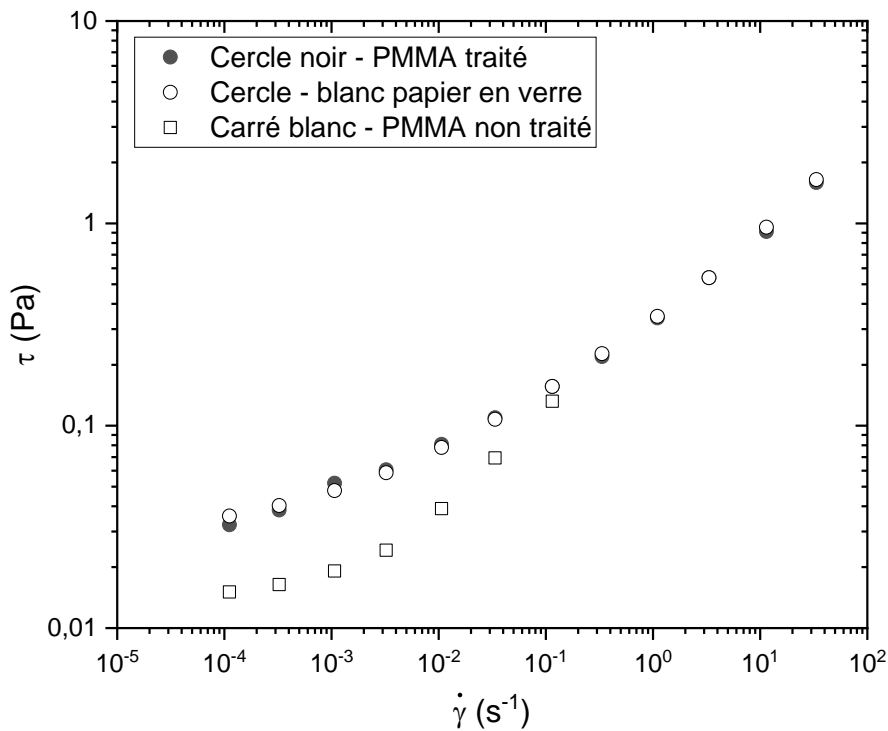


Figure 22: Evolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de cisaillement en régime permanent pour un gel de Carbopol

Le glissement avec les surfaces de PMMA lisse, non traité est relativement important. Typiquement, pour un gradient de cisaillement apparent de 10^{-4} s^{-1} , la contrainte est 3 fois plus faible qu'avec une surface en PMMA traité. Notons que dans le cas du PMMA traité, on trouve les mêmes résultats qu'avec des surfaces rugueuses pour éliminer le glissement (cercles blancs) (Figure 22). Ces évolutions de la contrainte dans le cas du glissement et les vitesses de glissement ont été théorisées par Seth *et al.* [88]. Ce glissement important observé expérimentalement est modélisé par un glissement parfait dans la simulation numérique. Pour les paramètres thermo-physiques du gel de Carbopol ($\beta, \lambda, \rho, C_p, \alpha$), ils sont essentiellement ceux du solvant, c'est-à-dire de l'eau pure car la concentration en Carbopol est très faible 0,043 %wt. Leurs variations en fonction de la température ont été prises en compte. Dans le cas du glissement, la gamme de ΔT étudiée s'étend de 17.3 à 39.4 K. La gamme des nombres adimensionnels associés est $0.135 < Od < 0.195$, $1037 < Pr < 1740$, $4145 < Ra < 29705$, $0.12 < Wi < 0.27$ et $n = 0.46$. Dans le cas adhérent, la gamme de ΔT étudiée s'étend de 16.2 à 53.2 K. La gamme des nombres sans dimension associés est $0,12 < Od < 0,21$, $937 < Pr < 1977$, $2559 < Ra < 45973$, $0.10 < Wi < 0.32$. et $n = 0,46$.

3.5. Résultats et discussions

Dans un premier temps, nous comparons les résultats numériques et expérimentaux sur les transferts thermiques avec notamment l'évaluation du nombre de Nusselt, Nu , en fonction du nombre de seuil, Y , dans le cas d'adhérence aux parois et dans le cas de glissement aux parois. La valeur critique Y_c correspondant au passage du mode de transfert par conduction au mode de transfert par convection sera ainsi déterminée. Dans une deuxième étape, l'influence des conditions aux limites sur les champs cinématiques et thermiques est examinée, ainsi que le champ de contrainte et les zones seuillées et non seuillées.

3.5.1. Critère d'apparition et intensité de la convection

La Figure 23 montre les résultats obtenus dans les deux cas de conditions aux limites d'adhérence et de glissement aux parois. Pour chaque situation, les résultats numériques sont présentés. Le mode de transfert thermique par conduction est caractérisé par $Nu=1$. Le passage au mode de transfert thermique convectif est caractérisé par l'élévation du nombre de Nu . Le passage de la conduction à la convection est caractérisé par une valeur critique $1/Y_c$ correspondant au changement de pente. On observe que le glissement aux parois favorise la convection. Pour une même valeur de $1/Y$, le nombre de Nusselt est plus élevé pour le cas avec glissement aux parois et la convection apparaît pour des valeurs de $1/Y$ plus faible. Pour un même seuil, il faut des forces de flottabilités plus petites pour déclencher la convection. Les valeurs critiques du paramètre de contrôle $1/Y$ numériques sont proches de celles de Darbouli et al [48]. Expérimentalement, les valeurs critiques pour le cas avec glissement et sans glissement sont estimées à $1/Y_c = 40$ et $1/Y_c = 80$ respectivement. L'effet du glissement peut être relativement important avec 100% sur le critère d'apparition. Ceci va dans le sens de l'étude théorique faite par Métivier et Magnin [84] dans le cas de l'écoulement de Rayleigh-Bénard Poiseuille. On constate que la prévision numérique est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Dans le cas du glissement, les prévisions numériques donnent des valeurs un peu plus élevées. Cela provient du fait que le glissement parfait supposé dans les calculs surestime les effets du glissement en favorisant davantage la convection. De plus, les effets 3D, la différence de géométrie, une cavité carrée pour la simulation numérique et une cavité

circulaire pour les expériences peuvent expliquer les écarts de résultats entre la simulation et l'expérience.

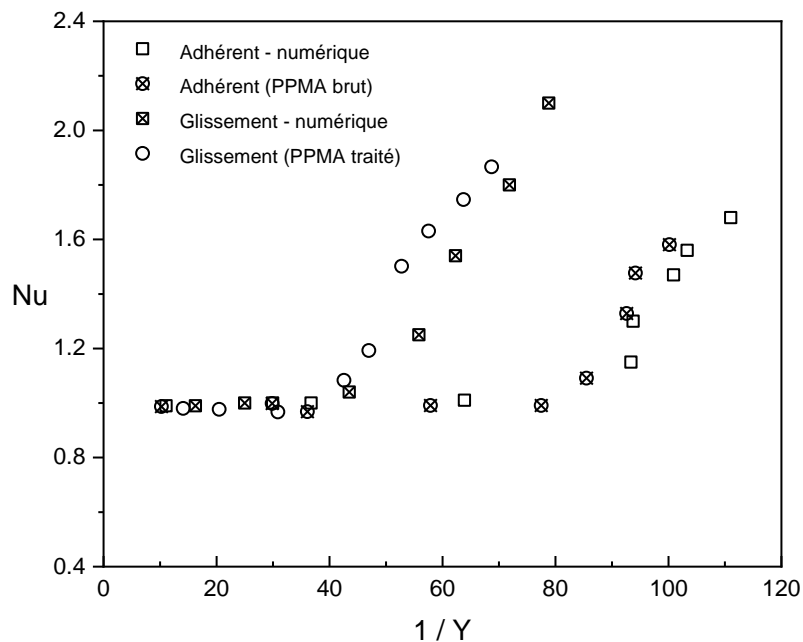


Figure 23: Evolution du nombre de Nusselt en fonction de $1/Y$ pour des conditions limites d'adhérence et de glissement à la paroi ; Gel de Carbopol avec $\tau_0 = 0.031 \text{ Pa}$, $d = 0.017 \text{ m}$

3.5.2. Analyse des champs

Après avoir comparé les valeurs globales du transfert de chaleur, nous allons étudier les prévisions numériques pour les différents champs associés. Nous travaillons ici sur une même valeur de $1/Y = 62.7$ correspondants à un nombre de Rayleigh $Ra = 2.3 \cdot 10^5$. Respectivement pour cette valeur, numériquement, $Nu = 1.0$ dans le cas sans glissement et $Nu = 1.54$ dans le cas glissant (Figure 23). Les valeurs obtenues expérimentalement par Darbouli et al [48], approximativement $1/Y = 63$ correspondent à $Nu = 1$ et $Nu = 1.69$ pour les cas adhérents et glissant respectivement. Dans le cas glissant, le régime de transfert thermique est nettement convectif, alors que dans le cas adhérent, le régime est conductif.

3.5.2.1. Champs de vitesse et de déformation

On constate dans le cas adhérent, un transfert thermique principalement conductif ($Nu = 1$). Bien que les vitesses soient très faibles, elles ne sont pas nulles pour un fluide élasto-viscoplastique, comme le montre la figure 24, contrairement aux prévisions obtenues avec un modèle purement viscoplastique. Pour une même valeur de seuil, c'est-à-dire $1/Y = 63$, la convection s'est développée dans le cas du

glissement, pour lequel $Nu = 1.69$. On observe que les vitesses sont maximales aux parois et restent importantes près des parois, là où le glissement est considéré comme parfait donc où la contrainte de cisaillement est nulle (Figure 27).

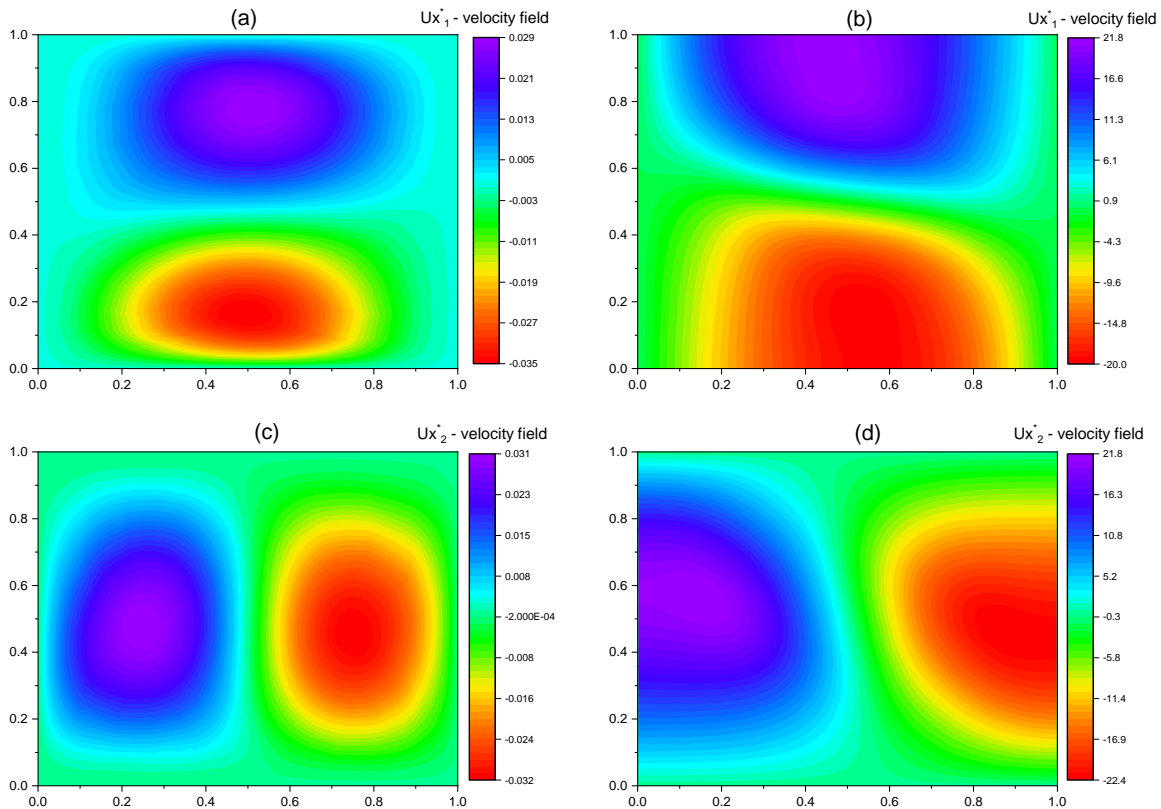


Figure 24: Composantes adimensionnelles de la vitesse selon X_1 (en haut) et selon X_2 (en bas) et pour le cas adhérent (à gauche) et cas glissant (à droite)

La Figure 25 montre la répartition de la déformation totale dans toute la cavité. On remarque que la position des zones de fortes déformations est différente dans les cas d'adhérence et de glissement. En effet, dans le cas d'adhérence aux parois, les déformations sont plus importantes au niveau des parois et principalement au niveau de la paroi chauffée (paroi inférieure). Dans le cas de glissement parfait, les zones de déformations maximales se situent aux quatre parois de la cavité. En effet, les déformations restent faibles au niveau du centre des parois dans la mesure où la contrainte de cisaillement est annulée par définition. De par cette condition limite, on peut s'attendre à obtenir des contraintes normales importantes au niveau des parois de la cavité. Par ailleurs, la zone de faibles déformations est représentée en rouge et se trouve principalement au centre de la cavité pour les deux types de conditions limites (croix rouge centrale pour le cas adhérent et cercle rouge le cas glissant).

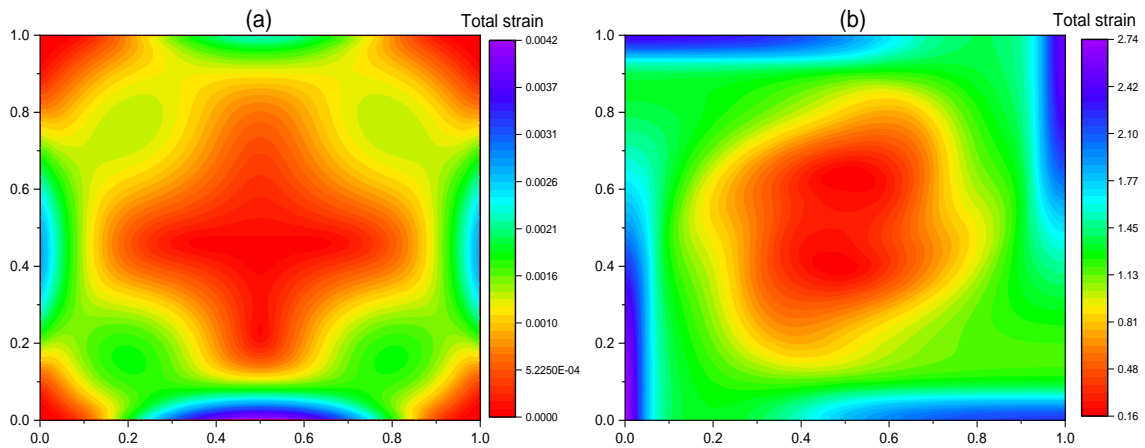


Figure 25: Champ de déformation totale pour le cas (a) adhérent (à gauche) et (b) glissant (à droite)

3.5.2.2. Champs de lignes de courant et isothermes

La Figure 26 montre la structure de l'écoulement représentée par les isothermes et les lignes de courant sans dimension pour les conditions d'adhérence et de glissement. Les isothermes obtenues dans le cas d'adhérence (Figure 26a) indiquent une faible distorsion par rapport au cas purement conductif représenté par des isothermes parallèles aux parois horizontales.

Cette observation confirme que le transfert thermique est principalement conductif, comme cela a été précédemment indiqué via la valeur du nombre de Nusselt, ainsi que les faibles valeurs de vitesse et de déformation.

Dans le cas du glissement parfait, on constate sur la Figure 26b que les isothermes sont plus perturbées indiquant que les transferts thermiques se font à la fois par conduction et convection.

L'examen des fonctions de courant sur les Figure 26c et 26d montre des évolutions différentes. Dans le cas d'adhérence où le régime est conductif, les valeurs des fonctions de courant sont faibles. Pour le cas glissant, les fonctions de courant sont supérieures au cas d'adhérence d'environ un ordre de grandeur, ce qui traduit bien un mouvement convectif. De plus, on remarque qu'en situation de glissement, les lignes de courant sont plus proches de la paroi.

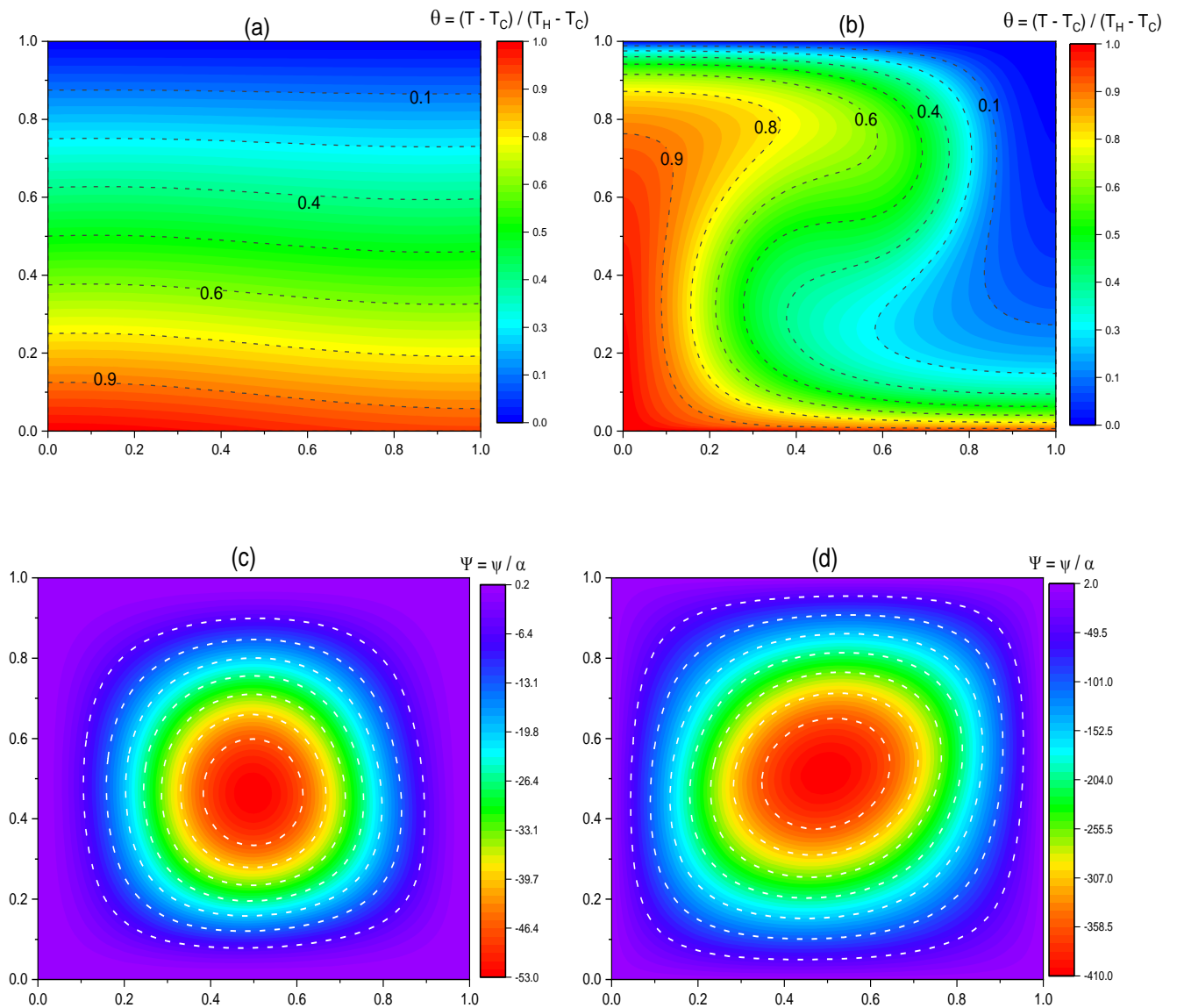


Figure 26: Représentation des isothermes (a et b) pour les cas d'adhérence et de glissement respectivement et des lignes de courant (c et d) pour les cas d'adhérence et de glissement respectivement

3.5.2.3. Champs des contraintes

Les champs de la 1^{ère} différence des contraintes normales notées $N1^* = \frac{\tau_{X_1 X_1} - \tau_{X_2 X_2}}{\tau_0}$

adimensionnalisées par la contrainte seuil pour les cas d'adhérence et de glissement est présentée dans la Figure 27. On remarque que les champs présentent une symétrie centrale par rapport au centre de la cavité et que les contraintes normales atteignent des valeurs maximales au niveau des parois de la cavité. Les valeurs maximales sont d'autant plus proches des parois que le frottement diminue. On constate, de plus, que les valeurs de contraintes normales sont bien supérieures à la

contrainte seuil dans le cas du glissement, indiquant une forte influence des contraintes normales dans le démarrage de la convection. Dans le cas d'adhérence, les valeurs des contraintes normales restent inférieures à la contrainte seuil.

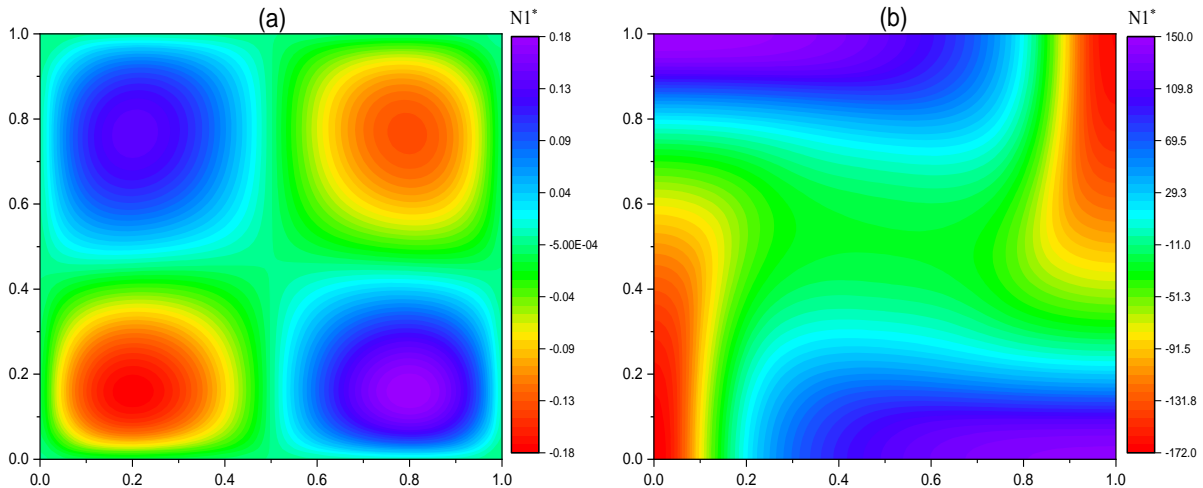


Figure 27: Champs de différence de contrainte normale adimensionnée pour les cas adhérent (a) et glissant (b).

La Figure 28 montre la répartition des contraintes de cisaillement pour les deux conditions aux limites étudiées. On retrouve, pour le cas glissant, une contrainte de cisaillement nulle sur toutes les parois de la cavité puisque le glissement est supposé parfait. Comme on pouvait s'y attendre, les zones de cisaillement important sont obtenues au niveau des parois dans le cas d'adhérence. Néanmoins, comme la convection n'est pas développée dans ce cas, le déplacement de la matière est moindre que dans le cas de glissement parfait. Ainsi, le cisaillement est plus faible dans le cas adhérent. Par ailleurs, on remarque que la structure de l'écoulement est très différente pour les deux types de conditions aux limites. En outre, on remarque que pour les deux conditions aux limites, ce sont les contraintes normales qui sont dominantes sur les contraintes de cisaillement. On pouvait s'attendre à ce résultat dans le cas d'adhérence aux parois puisque le régime est principalement conductif et les amplitudes de vitesse sont très faibles. Par contre, cela est plus surprenant dans le cas du glissement parfait puisque la convection s'est développée avec $Nu = 1.69$. Cette valeur du nombre de Nusselt indique que le transfert par conduction est toujours dominant par rapport au transfert par convection. Ainsi, l'annulation des contraintes de cisaillement aux parois avec un régime conductif dominant engendrent des contraintes normales plus importantes dans tout le volume.

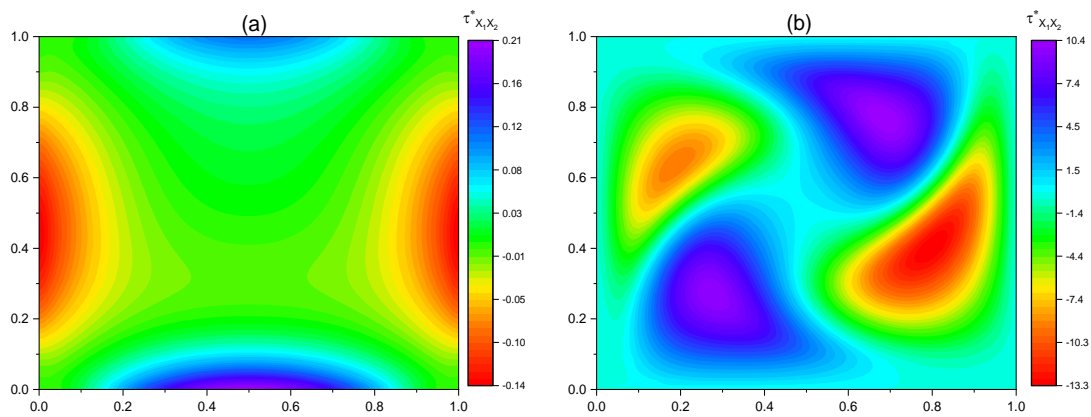


Figure 28: Champs des contraintes de cisaillements adimensionnalisées pour le cas adhérent (a) et le cas glissant(b)

La figure 29 montre l'effet des conditions aux limites sur l'évolution des zones seuillées et non seuillées. Les limites entre les zones seuillées et non seuillées sont calculées à partir du rapport : $J_{2sig} = \tau_{II}/\tau_0$ avec τ_{II} le second invariant du tenseur des contraintes. Sur la Figure 29, les zones dites non seuillées sont représentées en nuances de gris et les zones seuillées sont en couleur.

Dans le cas adhérent (Figure 29a), les zones non seuillées (nuances de gris) occupent toute la cavité. Les déformations sont principalement dans le domaine élastique. On retrouve une structure similaire à celle obtenue à la Figure 25 qui représente la répartition de la déformation totale.

Dans le cas glissant (Figure 29b), avec des transferts convectifs avérés induisant des vitesses et des gradients de vitesse plus élevés, des zones seuillées (en couleur) sont obtenues dans toute la cavité. Les zones seuillées sont plus importantes au niveau des parois de la cavité. Bien que le matériau soit cisailé, les résultats montrent que c'est principalement la première différence des composantes normales $N1^*$ qui dominent sur les contraintes de cisaillement. Néanmoins, le résultat final est bien une composition entre les différentes composantes de contrainte, à savoir contraintes normales et contraintes de cisaillement.

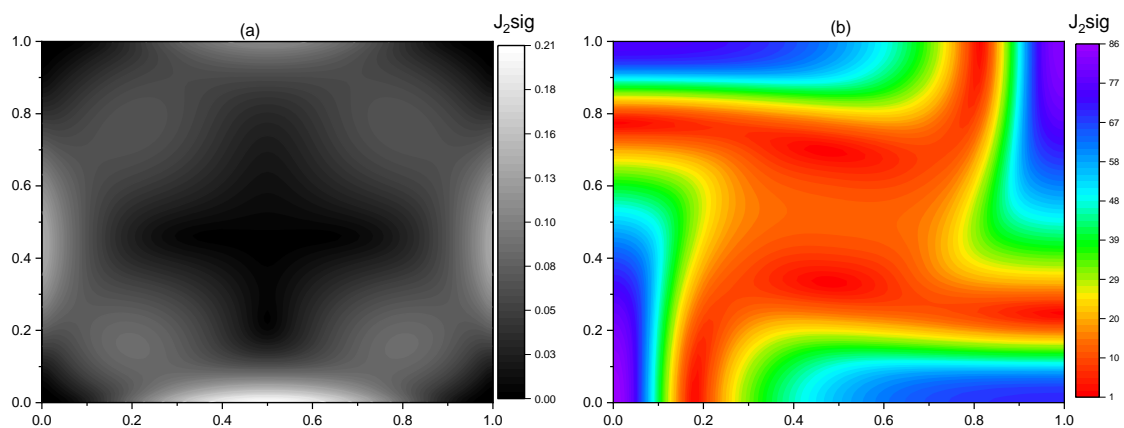


Figure 29: Champs adimensionnel du deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes. Zones non seuillées (en niveau de gris) et seuillées (en couleur) dans les cas d'adhérence (a) et de glissement (b)

3.6. Conclusion

La comparaison des résultats expérimentaux sur la convection de Rayleigh-Bénard d'un fluide à seuil modèle au comportement élasto-viscoplastique, à savoir un gel aqueux de Carbopol, avec les prévisions numériques obtenues en utilisant la méthode des éléments finis avec points d'intégration lagrangiens (MEFPIL) a été menée. Les simulations numériques ont montré que les conditions de glissement aux parois promeuvent et accentuent les transferts thermiques par convection. Les critères d'apparition de la convection, évalués par le rapport entre les effets de flottabilité et les effets de contrainte seuil ($1/Yc$), sont représentés. Dans le cas des surfaces glissantes, $(1/Yc)$ est de l'ordre de 40, tandis que pour des surfaces non glissantes, $(1/Yc)$ est de l'ordre de 80. La modélisation numérique et les expériences donnent le même ordre de grandeur.

L'analyse des champs cinématiques, thermiques, de contraintes et de déformations ainsi que l'analyse de la structure de l'écoulement via la forme et la taille des zones seuillées et non seuillées permettent de mieux comprendre les phénomènes locaux. La prise en compte de l'élasto-viscoplasticité induit un champ de vitesse non nulle que le transfert soit conductif ou convectif. Cependant les vitesses sont de très faible amplitude dans le cas conductif.

**CHAPITRE 4: Flow of an élasto-viscoplastic fluid
around a plate perpendicular to the flow direction**

Abstract:

The implementation of realistic solid-liquid transition in the numerical modelling of yield stress fluid mechanics is a current scientific issue. This numerical study investigates the creeping flow of an elasto-viscoplastic fluid around a plate perpendicular to the flow direction. The analysis is performed with a Finite Element Method with Lagrangian Integration Points (FEM-LIP). This numerical method is able to simulate large strains problems and also to describe yielded and unyielded regions. An elasto-viscoplastic model coupling the Bingham and the Maxwell constitutive equations has been implemented. The influences of plasticity and elasticity on kinematic and stress fields are discussed. The influence of elasticity on the fore-aft asymmetry of the flow morphology is shown and quantified. The size and shape of the yielded and unyielded regions around the obstacle are quantified. Far and local stress fields as well as the drag coefficient are also quantified as a function of the plastic and elastic contributions.

Keywords: elasto-viscoplasticity, plate, yielded and unyielded regions, drag, Finite Element Method with Lagrangian Integration Points (FEM-LIP).

4.1. Introduction

Most fluids used in industrial applications exhibit a solid-liquid transition. At rest, they behave as an elastic solid. Above a certain stress level, called yield stress, they flow as a viscous fluid with a viscosity that may vary with the shear rate. This specific behavior has a strong impact on the flow of such fluids around obstacles. It plays an important role in terms of efficiency and performance in many industrial process operations such as mixing. Because of their interest in industrial applications, viscoplastic fluids flows around obstacles have been extensively studied these last few years [1] [2].

The goal of the present study is to simulate the bi-dimensional flow of an elasto-viscoplastic fluid perpendicular to a flat plate. This flow configuration is well documented in the case of a Newtonian fluid. Analytical, experimental and numerical approaches have been developed in the literature [89] [90]. In the case of yield stress fluids, data from the literature are much more scarce. Brooks and Whitmore [91] [92] were the first to consider this flow configuration but the experimental data they provide are not detailed enough to be usable.

However, points of comparison can be found in the field of geotechnics where circular foundations are often used to resist to vertical forces. The uplift factor evaluated both experimentally and numerically [93] [94] can be compared to the plastic drag coefficient used in the field of yield stress fluid mechanics.

Savreux et al [95] numerically studied the flow with negligible inertia of a Bingham fluid around a plate. The flow morphology has been analyzed as a function of the Oldroyd number representing the ratio between plastic and viscous forces. Empirical correlations of the drag coefficient have been proposed for Reynolds number ranging from 0.01 to 3. The drag coefficient, as well as the shape and size of the yielded and unyielded regions in the vicinity of the plate, have been computed. Ouattara et al [96] [15] [14] observed good agreement between experimental measurements of drag coefficient with a yield stress fluid (Carbopol gel) and numerical simulations. However, they used the Papanastasiou regularization method [19] to model the solid-liquid transition. This method approximates the fluid rheological behavior below the yield stress as highly viscous. It does not take into account elastic effects responsible for the fore-aft flow field asymmetry observed experimentally by Jossic et al [12] in the flow around a plate. This asymmetry has also been observed around other symmetrical

geometries such as spheres [97] [98]. Despite the influence of elasticity on the flows of yield stress fluids, most of the computational studies mentioned above didn't take elastic effects into account. In order to consider the influence of elasticity on the rheological behavior of yield stress fluids, elasto-viscoplastic (EVP) models have been developed over the last years. Flow modeling of such fluids is in the core of an intense current scientific activity [63]. The development of new numerical methods [68] and EVP models allows a more detailed analysis of the influence of elasticity on flows around obstacles. Considering the flows of EVP fluids around obstacles, only the simplest geometries such as the flow along a flat plate [13] [99] or around a sphere [40] have been considered so far. Experimental and numerical data are still needed to understand more thoroughly the influence of elasticity in the yield stress fluid flows around obstacles.

In the present study, the bi-dimensional flow of an EVP fluid around a plate is considered. Computations have been performed in the domain where inertia effects are negligible compared to viscous, plastic and elastic effects. Section 1 presents the flow configuration as well as the boundary conditions. Then, the governing equations and the EVP model used are presented. The constitutive equation is based on the coupling of the Bingham model for the viscous contribution with the Maxwell model for the elastic contribution. The resulting characteristic dimensionless numbers of the flow are then introduced. Section 2 is concluded with the problem formulation and the numerical methods used. The influence of elasticity and plasticity on the kinematic fields are discussed in section 3. The shape and size of the yielded and unyielded regions have been analyzed into details first. The drag coefficient has also been computed as a function of the rheological properties of the fluid in steady-state.

4.2. Problem formulation and numerical method

4.2.1. Computational domain, boundary and initial conditions

The flow configuration considered in the present study is represented in Figure 30. The flow is bi-dimensional. For symmetry reasons, only one half of the flow domain is considered. Its length is L and its width H . A plate with no thickness and half-width a is placed perpendicularly to the flow direction at a fixed position $X_1 = 0$ and $X_2 = 0$ corresponding to the center of the flow domain. Geometrical effects will not be discussed as $L/a = 30$ and $H/a = 10$ are kept constant.

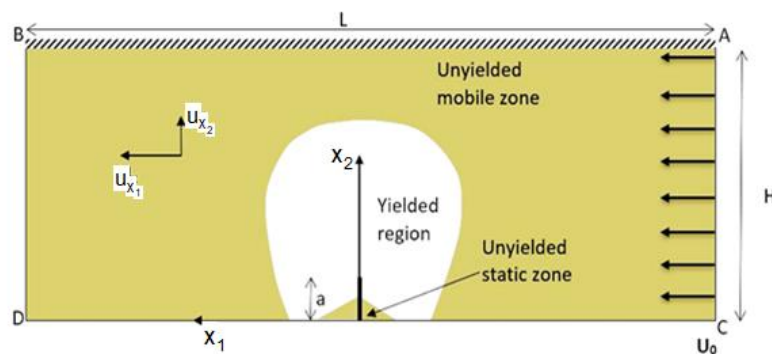


Figure 30: Flow configuration and boundary conditions

Boundary conditions are described below:

- $U_{X_2} = 0$ and $U_{X_1} = U_0$ are constant in the inlet section AC, $X_1 = -L/2$.
- In the outlet section, $X_1 = L/2$, periodic boundary conditions are adopted, so that U_0 is also found in this section. This ensures a homogeneous outlet flow.
- The fluid adheres to the wall so that the velocity is equal to zero on the plate surface.
- Free slip is imposed along wall AB as well as $U_{X_2} = 0$.
- For symmetry reasons, $U_{X_2} = 0$ along CD, $X_2 = 0$.

Initial conditions have been chosen such that at $t = 0$, all components of the stress tensor are set equal to 0 in the whole computational domain.

4.2.2. Governing and constitutive equations

The governing and constitutive equations have already been presented into more details by Ahonguio et al [45] where additional information regarding, among other, the time discretization can be found. For the sake of brevity, these equations are briefly recalled hereafter.

The Stokes and continuity equations solved in the simulations can be written as follow:

$$\begin{cases} (f_{\text{ext}})_i + \tau_{ij,j} - p_{,i} = 0 \\ u_{i,i} = 0 \end{cases} \quad (1, 2)$$

in which f_{ext} , τ_{ij} , p and u represent the external body forces, the deviatoric stress tensor components, the pressure and the velocity vector respectively. X_i and $X_{,i}$ correspond to the component and spatial derivative along the i direction of the field X . The elasto-viscoplastic fluid behaviour is described by the Maxwell model. This latter consists in an association of an elastic solid and a viscous fluid. Usually, the viscous fluid is characterized by a Newtonian viscosity. However, in the present case, the viscosity is described by the Herschel-Bulkley model which takes into account both the yield stress and the shear-thinning behaviour. In this model, the strain rate tensor D is the sum of the viscous and the elastic contributions, respectively D_v and D_e as follows:

$$\frac{\dot{\tau}_{ij}}{2G} + \frac{\tau_{ij}}{2\eta'} = D_{ij} = D_{vij} + D_{eij} \quad (3)$$

where G is the shear elastic modulus, $\dot{\tau}_{ij}$ is the Jaumann derivative in order to keep the objectivity of the derivative in large transformation.

As above mentioned, the apparent viscosity η' is described by the Herschel-Bulkley model given by:

$$\tau_{ij} = \left[\frac{\tau_0}{2D_{vII}} + K(2D_{vII})^{n-1} \right] D_{vij} = 2\eta' D_{vij} \quad (4)$$

where τ_0 , K and n respectively represent the yield stress, the consistency and the shear thinning index. $D_{vII} = -\sqrt{\frac{1}{2} \text{tr} D_{vij}^2}$ is the second invariant of the rate of strain tensor. It is worth noting that when stress is below yield stress, the apparent viscosity (η') tends to be infinite, and the model returns to pure elasticity. In the numerical implementation, a numerical viscosity (η_∞) with a large value greater than 10^{10} Pa·s is used in this solid regime. When stress is greater than yield stress, the apparent viscosity is a function of τ_0 , k , and n , the specific form of which stemming from the Herschel-Bulkley model (Eq. (4)).

. For a non-zero strain rate tensor, the material is both characterized by elastic and viscous contributions.

As a remark, a viscoplastic model can be obtained by setting G to a very high value, then the elasticity, in the sense of its deformation would be negligible in this case. Considering the flow configuration and the rheological behavior of the fluid, the flow considered in the present study can be characterized by the following non-dimensional numbers. The Weissenberg number is defined as the ratio between elastic and viscous effects:

$$Wi = \frac{K}{G} \left(\frac{U_0}{a} \right)^n \quad (5)$$

This number can be considered as the ratio, to the power n , between the fluid relaxation time $(K/G)^{1/n}$, and a characteristic time scale of the flow a/U_0 . It is used to describe the influence of elasticity on the flow. Flows with Wi from 0 to 0.6 have been considered. Throughout the rest of the study, n has been set equal to 1 (Bingham model).

The Oldroyd number often called the Bingham number in the literature, is defined as the ratio between plastic and viscous effects [100] [101].

$$Od = \frac{\tau_0}{K \left(\frac{U_0}{a} \right)^n} \quad (6)$$

4.2.3. Numerical method

The Finite Element Method with Lagrangian Integration Points (FEM-LIP) has been proposed by Moresi and al [43]. This method originates from the Particle-In-Cell method for which the numerical integration weight is recomputed in each configuration in order to keep the finite element properties of the Gaussian integration scheme. It is a hybrid method coupling the Eulerian and Lagrangian approaches. The former approach is used for the mesh points which are spatially fixed nodes while the latter is used for the integration points which are an ensemble of material points moving in a fixed mesh towards a new configuration. The fixed mesh enables to avoid numerical diffusion problems which can especially appear in the modeling of material interactions. The material points carrying the constitutive and history variables are used in a given configuration as integration points to compute the nodal velocity field. They are formally separated from the calculation points. To couple them, a quadrature of non-standard elements in which the particles in each element serve as integration points can be used. At the end of each calculation step, the new location of particles is updated based on the velocity field using Finite Elements shape functions. The FEM-LIP has already been used in geomechanics for analyzing concrete flows and landslides [43] [42]. It can be used for studying numerous phenomena such as large strains phenomena and free surface flows. It can also be used to predict the extent of sheared zones. In the present study, an elasto-viscoplastic model has been implemented in a numerical tool based on the FEM-LIP. It is worth underlining that two-time steps are used in the FEM-LIP method. One is the elastic time step Δt_e which is used to discretize the constitutive equation and is chosen such that it is one hundredth the material relaxation time. The other one is the advection time step Δt which is used to discretize the lagrangian particles advection. This time step is chosen such that the displacement increment of every particle is lower than the width of the finest mesh. From a practical point of view, all the results of the present study have been obtained with $\Delta t = \Delta t_e$ to reach both stability and accuracy. One of its main interest in the case of the present study is that no regularization method such as Papanastasiou's regularization method [19] is needed to compute the solid-liquid transition during the flow.

Furthermore, it is necessary to underline that two-time steps are used in the FEM-LIP method. One is the elastic time step Δt_e which is used to discretize the constitutive equation. To avoid numerical instability, Δt_e is chosen independently of Δt . In the present case, it is fixed at one tenth of the relaxation time of the materials. The other one is the advection time step Δt which is used to discretize the lagrangian particles advection. This time step is chosen for accuracy reasons such that the displacement increment of every particle is lower than the width of the finest element. As introduced by Moresi et al. [42] the stress is updated at time $t + \Delta t$. For more details about the time discretization of the convective derivative $\dot{\tau}_{ij}$ with the elastic time step Δt_e , please see the chapter 2. Therefore, in the following simulations the particle convection timestep and elastic timestep are set to be equal. Three meshes have been used: M1 = 64X32, M2 = 128X64 and M3 = 240X80 elements along the X_1 and X_2 axes respectively and the solution accuracy is 10^{-5} . Their influence on the numerical results has been tested through the computation of the non-dimensional velocity profile $U^*_{X_1} = U_{X_1}/U_0$ along the symmetry-axis. Figure 31 shows that there is no significant influence of the refinement on the velocity profiles. The differences between M1, M2 and M3 were calculated, and did not exceed 2%. However, in order to obtain more spatial refinement, particularly in the vicinity of the plate, the finest mesh has been selected.

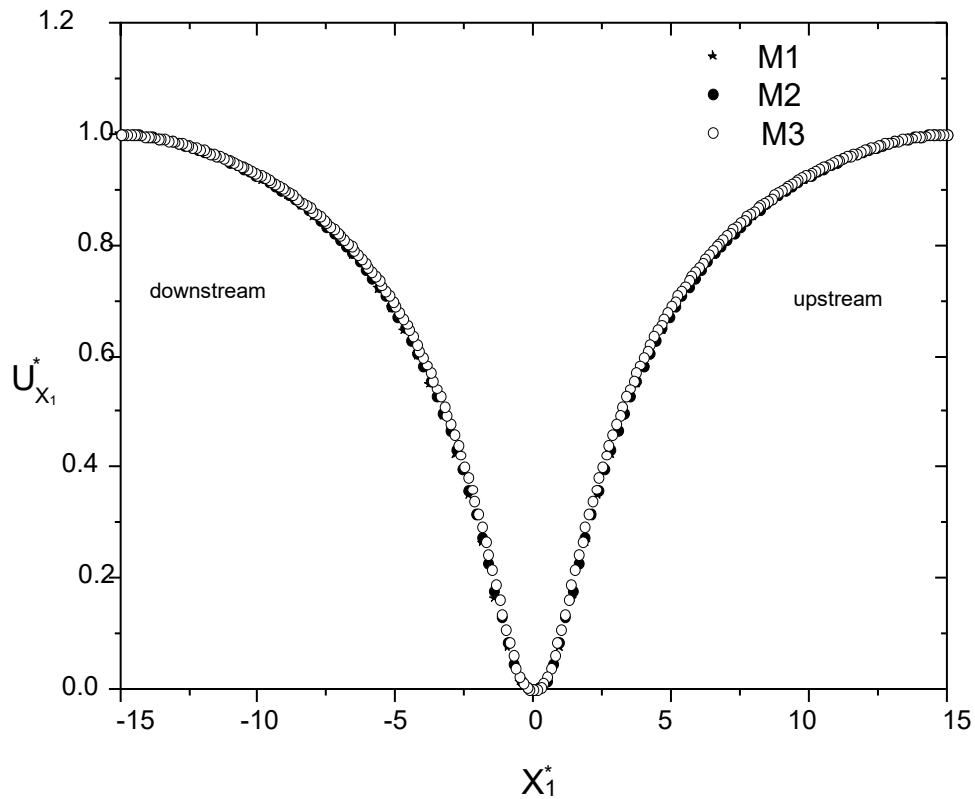


Figure 31: Non-dimensional axial velocity profile $U_{X_1}^*$ as a function of X_1^* when $Od = 0$

In the case of low Oldroyd numbers flows (here 0.01), special attention must be paid to the size of the domain because flows take a large extension. Figure 32 represents the non-dimensional axial velocity profile $U_{X_1}^*$, for $Od = 0.01$ obtained in the case of two different lengths (L) of the computation domain. It appears that the size of the domain must be large enough to allow the axial velocity to be established and it also allows the size of unyielded zones to be shown in figure 40. This result confirms that the value $L / a = 30$ is correct for simulations carried when $Od > 0.01$.

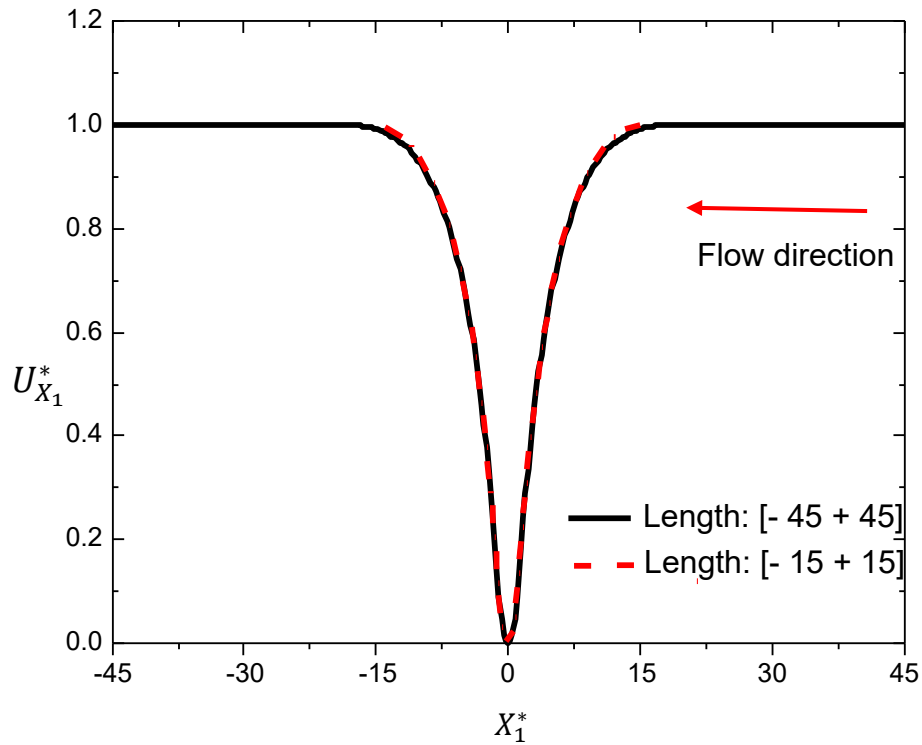


Figure 32: Non-dimensional axial velocity profile $U_{X_1}^*$ as a function of X_1^* for two different lengths of the computation domain when $Od = 0.01$.

In simulations using the EVP model, instabilities appear after a while at high Oldroyd or high Weissenberg numbers. Moreover, the finer is the mesh, the shorter is the time before numerical instabilities appear. Indeed, as in Particle-In-Cell method, when the material is highly elastic, particles carry a high level of elastic stress. When the particles cross an element, it may enter a domain with lower applied stresses yielding instability by stress relaxation. Results presented here are within a domain of Od and Wi where there are no numerical instabilities.

4.3. Results and discussions

The influence of plasticity and elasticity on the axial velocity profile, stream function and velocity field will be described hereafter in section 3.1. Section 3.2 is dedicated to the influence of the Oldroyd and Weissenberg numbers on the flow morphology, the fields of shear stress, first normal stress difference and yielded and unyielded regions. The plate's drag coefficient is presented in section 3.3.

4.3.1. Kinematic fields

The influence of the Oldroyd and Weissenberg numbers on the kinematics can be first quantified by representing the axial velocity profiles. We first consider the case of a viscoplastic fluid without elastic contribution represented by $Wi = 0$. Figure 33 represents the velocity evolution along the symmetry axis $U_{X_1}^*$ as a function of X_1^* for different Oldroyd numbers at $Wi = 0$.

It appears that the axial velocity profile is strongly influenced by the Oldroyd number. At high Oldroyd numbers, i.e. high plastic effects, the axial velocity is modified in the close vicinity of the plate. When the Oldroyd number decreases, the axial velocity deviates from U_0 at a greater distance from the plate. Also, we note that in the absence of inertial and elastic effects this distance is the same upstream and downstream, the velocity profile is symmetrical. The following section shows how the flow becomes di-symmetrical when elastic effects are considered.

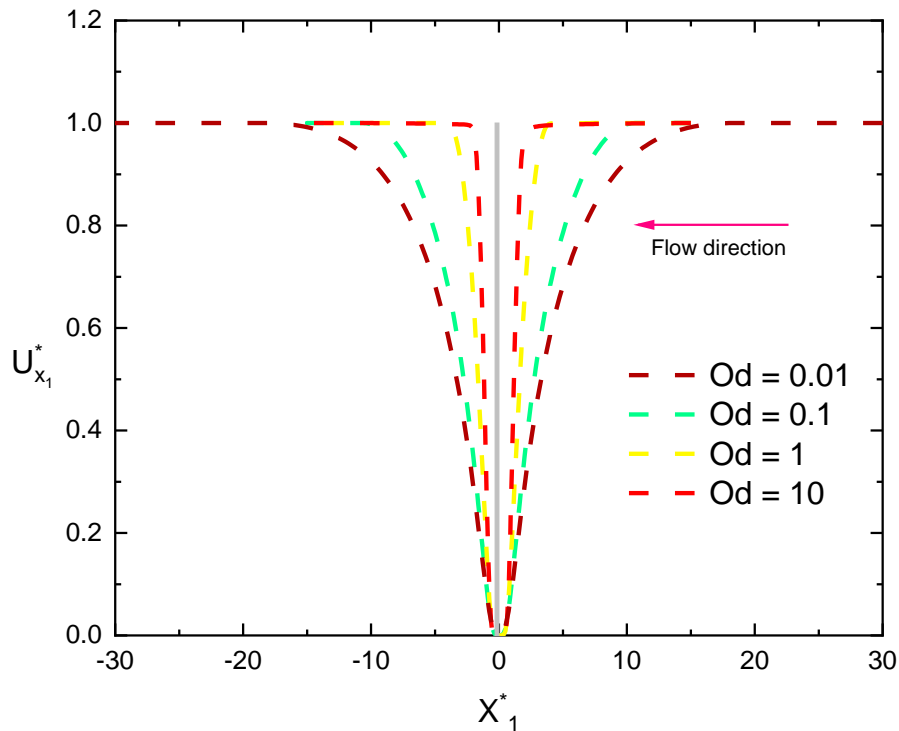


Figure 33: Non-dimensional axial velocity profiles as a function of X_1^* when $Wi = 0$ for a given Od value

Figure 34 represents the upstream and downstream axial velocity profiles as a function of X_1^* for different values of Od when $Wi = 0.4$. The axial velocity profiles are asymmetrical. The asymmetry is more accentuated when $Od = 1$ and a velocity peak appears in the wake of the plate. This velocity peak increases with Od . Such an evolution has also been observed through a study on the influence of surface properties on the flow of a yield stress fluid around spheres [98]. An asymmetric flow field was also observed by Tokpavi et al [102], for flow around a cylinder. They suggest that this asymmetry could be due to the gel elasticity. The comparison between 33 and 34 confirms that this asymmetry is due to elasticity. The velocity overshoot observed in the wake of the plate can be explained by the stresses applied to the fluid in the upstream and downstream regions. Upstream the fluid is submitted to compression, the stresses generated in this region of the flow relax in the downstream region.

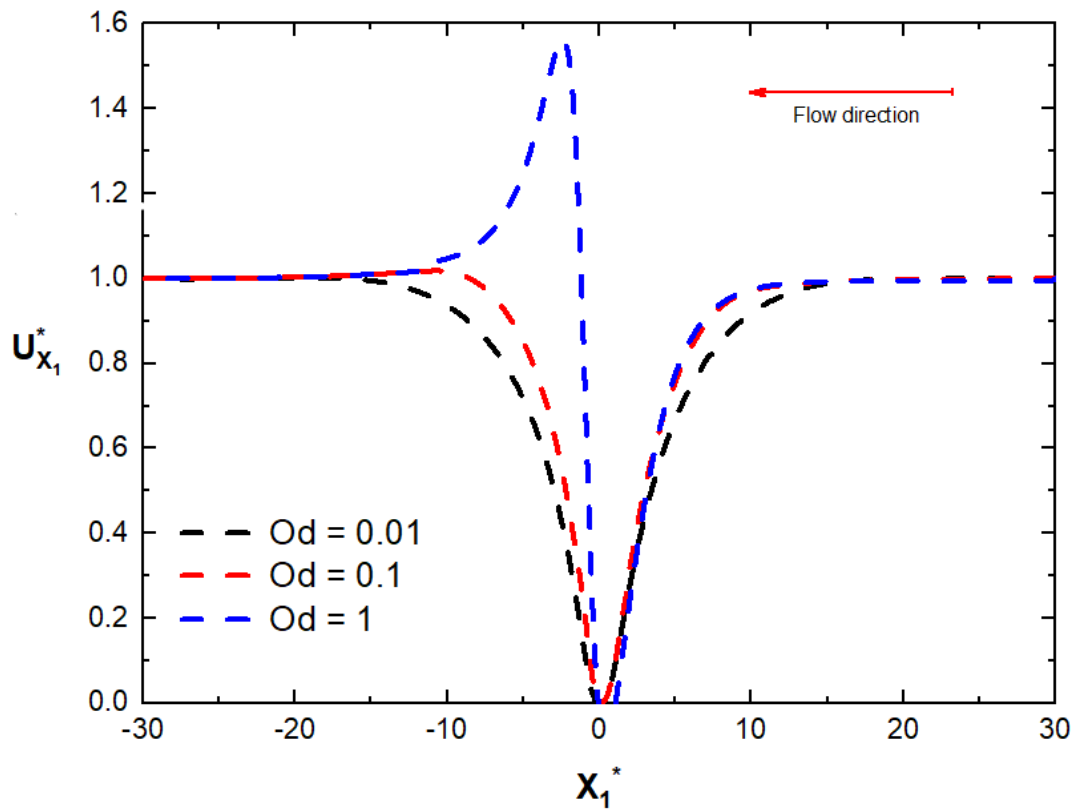


Figure 34: Non-dimensional axial velocity profiles $U_{X_1}^*$ as a function of X_1^* when $Wi = 0.4$ for a given value of Od .

The influence of elasticity on the axial velocity profile is now analysed. On Figure 35 various Wi have been considered for $Od = 0.1$. The range of Wi considered here extends from 0.002 to 0.6. It is observed that, as elastic effects increase, the asymmetry between upstream and downstream flows increases. This observation is in agreement with the experimental study of Arigo and McKinley [103] on the flow of a viscoelastic fluid around a sphere. They have shown that the fore aft asymmetry would be related to the elasticity of the material. Our results are quantitatively in agreement with the experimental results published by Holenberg *et al.* [104] on the loss of symmetry in a flow of Carbopol. A numerical study of the flow of an elasto-viscoplastic fluid around a sphere by Fraggedakis *et al* [40] has also shown that the fore aft asymmetry is due to elastic effects. Ferreira *et al* [99] have shown the same phenomena in the numerical study of the flow around an infinitely thin plate.

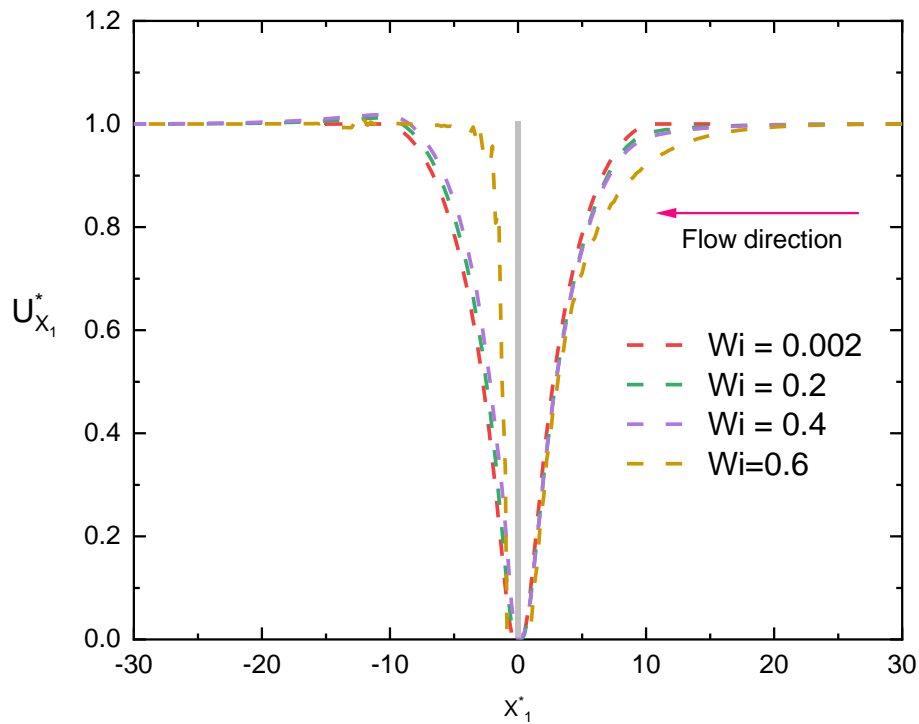


Figure 35: Non-dimensional axial velocity profile $U_{X_1}^*$ as a function of X_1^* when $Od= 0.1$, for given values of Wi

Figure 36, represents the non-dimensional stream function ($\Psi = \frac{\psi}{U_0 a}$) for different values of Od and Wi . Figure 36-a, Figure 36-b and Figure 36-c show that in the absence of elastic effects $Wi=0$, the stream function field remains symmetric whatever the values of Od . This symmetry extends over the whole flow domain (Fig. Figure 36c). One can also mention that as the Oldroyd number increases, i.e. as the yield stress effects increase and viscous effects decrease, the influence of the plate on the flow remains located in a narrower region in the vicinity of the plate. However, when elastic effects are taken into account, for example for $Wi=0.6$, in Figure 36d', a loss of symmetry is observed. As discussed in the previous section this asymmetry is due to elasticity. This fore aft asymmetry will be discussed into more details in chapter 5 dedicated to the comparison between experimental and numerical results.

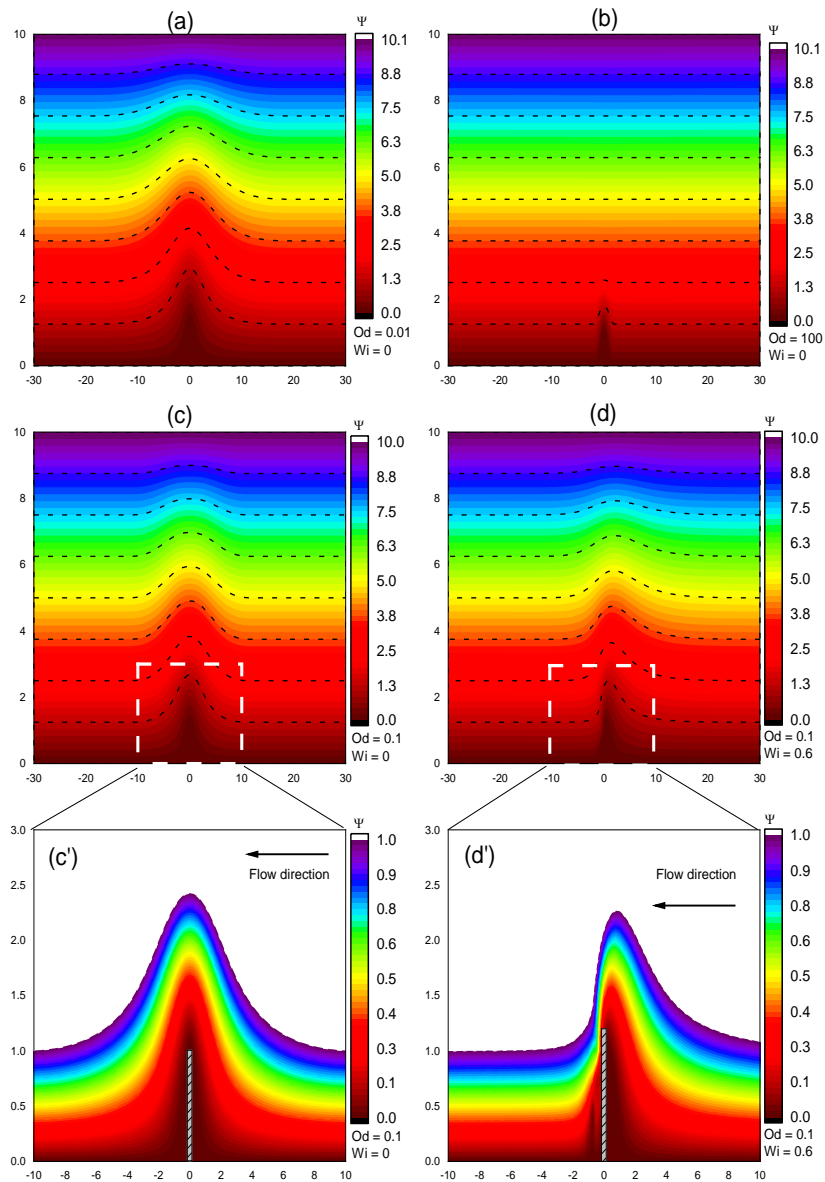


Figure 36: Non-dimensional stream function for different values of Od and Wi in far-field (a), (b), (c) and (d) and near field (c') and (d')

Figure 37 represents the non-dimensional axial velocity field $U_{X_1}^*$ computed when $Od = 0.1$, with and without elastic effects: $Wi = 0$ and $Wi = 0.6$ in the whole domain (Figures 37a and 37b) and in the close vicinity of the plate (Figures 37a' and 37b'). The far fields are similar. On the one hand, the farther away from the obstacle, the more the velocity fields increase until they reach the upper wall regardless of the value of Wi . On the other hand, with elastic effect ($Wi = 0.6$), the increase of fluid velocity in contact with the obstacle is stronger, highlighting a greater overshoot zone as shown in Figure 37b.

In the case of low plastic effects as considered here, the velocity overshoot reaches the wall. The velocity overshoot is due to the mass conservation. As the flow section is reduced because of the plate, the fluid velocity has to be higher to ensure the mass conservation. Figures 37a' and 8b' show the fields close to the obstacle zone, demarcated with a dotted line. For the case without elasticity (Fig. 37a'), the field is symmetrical upstream-downstream of the obstacle. However, with elasticity ($Wi = 0.6$) the flow becomes asymmetrical as reflected by the velocity fields (Fig. 37b'). This asymmetry is consistent with the velocity profiles represented on Figure 36 and the stream function (Fig. 37d').

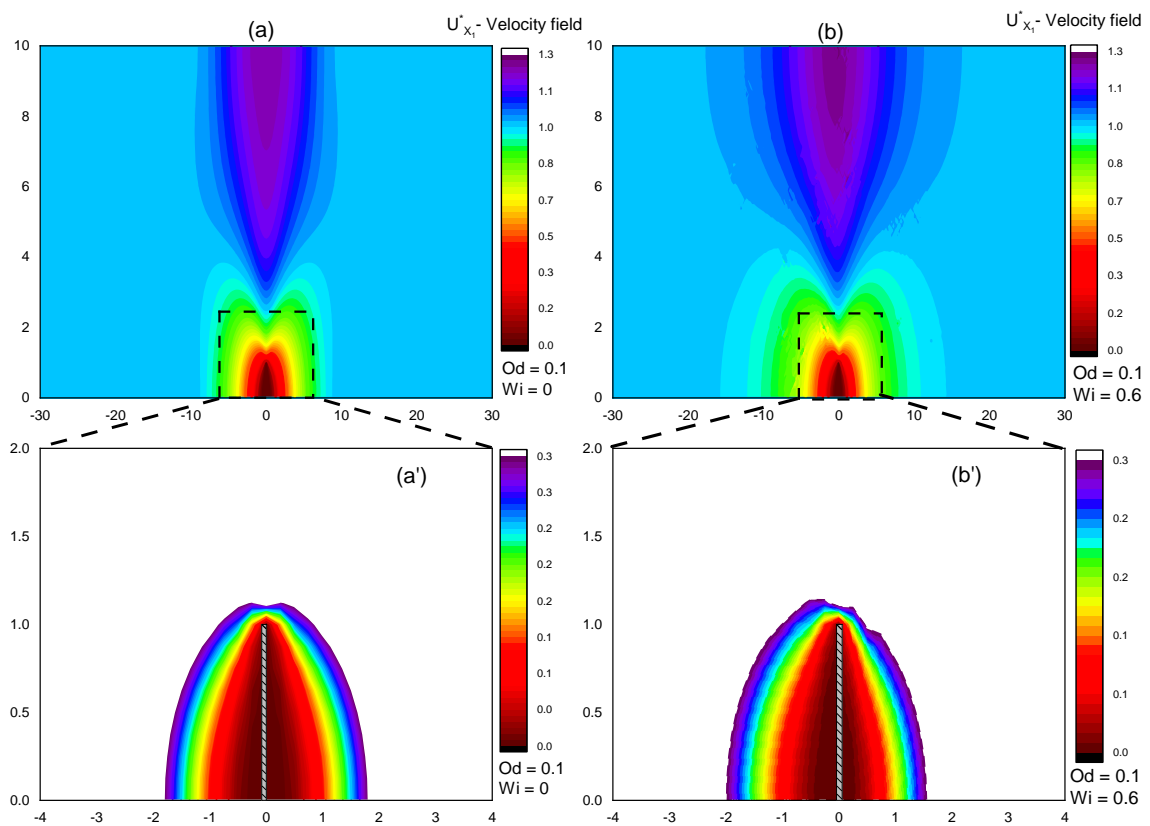


Figure 37: far (a, b) and near (a', b') adimensional velocity field for $Od = 0.1$ and $Wi = 0$ and 0.6

4.3.2. Stress fields

To analyze the influence of the Oldroyd and Weissenberg numbers on the flow morphology, the fields of shear stress, first normal stress difference and the second invariant of the deviatoric stress tensor have been computed.

4.3.2.1. Shear Stress

Figure 38 represents the non-dimensional shear stress: $\tau_{X_1X_2}^* = \frac{\tau_{X_1X_2}}{\tau_0}$ as a function of the Oldroyd number and no elasticity, Figure 38-a, 38-b, 38-c and with elastic effects figure 38-d.

In the inlet and outlet sections far from the plate the shear stress is always uniformly equal to zero. The shear stress intensity increases when one gets closer to the plate. Local maximums can be observed in the close vicinity of the plate. Their intensity and position depend on the Oldroyd and Weissenberg numbers. In the absence of elasticity, the shear stress field is symmetric while it is asymmetric when elasticity is taken into account.

At low Oldroyd number, Figure 38-a, the average shear stress is one order of magnitude higher than the yield stress. At high Oldroyd numbers on the opposite, Figure 38-c, the absolute value of the shear stresses remains close to the yield stress level. As Od increases the viscous contributions decreases in comparison to plastic effects. Comparing Figure 38-b and d, it appears that the influence of elasticity is to decrease the average value of the shear stress field. The average absolute value of the shear stress on the whole flow domain is equal to 6.1 when elasticity is taken into account and 6.9 when it is not. No significant influence of elasticity is observed on the shear stress distribution along the plate wall. However, it would be too hasty to draw conclusion on the drag coefficient from this simple observation. As discussed in section 4.3.7 the drag coefficient is not only governed by shear stresses at the wall but pressure and normal stresses also.

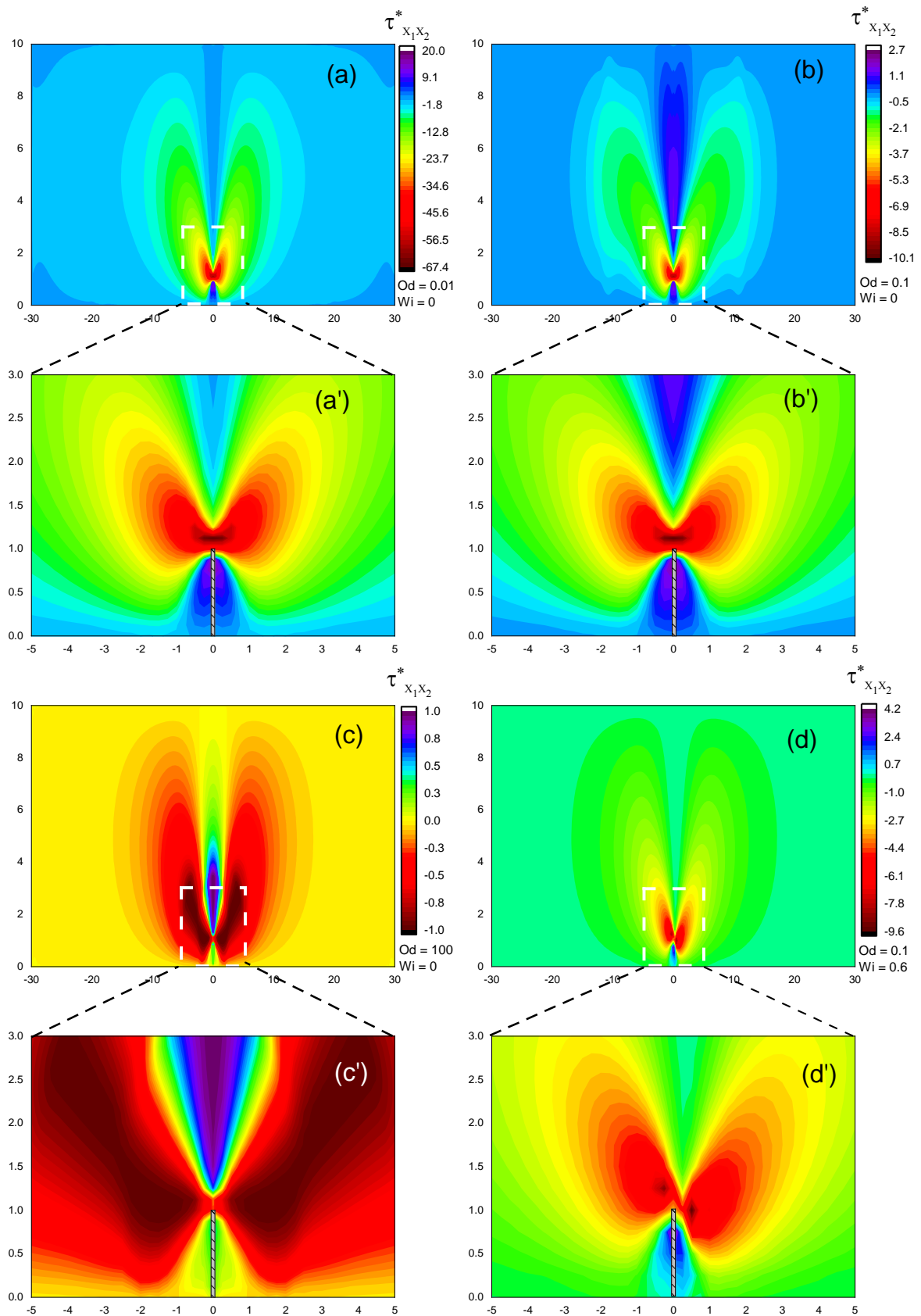


Figure 38: Evolution of shear stress field in the horizontal plane, far [(a), (b), (c) et d] and near [(a') (b'), (c') et (d')] materialized in hatched lines

4.3.2.2. First normal stresses difference

Figure 39 represents the field of the first normal stress difference $N1^* = \frac{\tau_{X_1X_1} - \tau_{X_2X_2}}{\tau_0}$

In the absence of elastic effects ($Wi = 0$), as the Oldroyd number increases, plastic effects increase and the first normal stress difference decreases. This indicates that $\tau_{X_1X_1}$ tends towards $\tau_{X_2X_2}$ when plastic effects become predominant. On the opposite, at low Oldroyd numbers, when the viscous contribution is much higher than the plastic contribution, normal stresses in the flow direction i.e. $\tau_{X_1X_1}$ become significantly higher than $\tau_{X_2X_2}$. It is also worth mentioning that the absolute value of $N1^*$ is symmetrical when $Wi = 0$. As already observed previously this symmetry is lost when elasticity is introduced. Comparing figure 39c and 39d show that the average value of $N1^*$ in the computation domain is lower when elasticity is taken into account. In fact, as shear rate increases, the shear stress increases. Here, shear stresses (figure 39c) are higher for the case $Wi = 0$ and $Od = 0.01$.

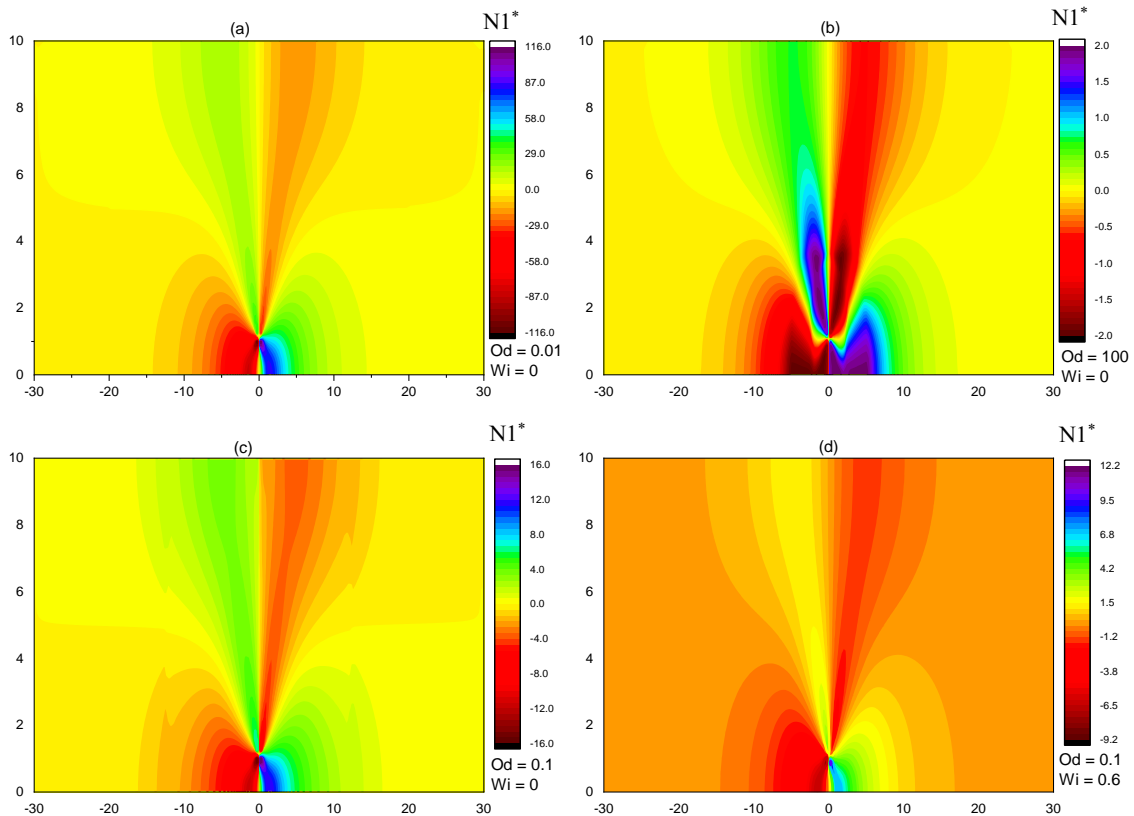


Figure 39: Evolution of the first normal stress difference for different values of Wi and Od

4.3.2.3. Yielded and unyielded regions

The yielded and unyielded regions are determined via the Von Mises criterion, i.e. based on the comparison of the second invariant of the deviatoric stress tensor with the yield stress. They are presented in Figure 40 as a function of the Oldroyd number in the case without elastic effects, i.e. $Wi = 0$ and on Figure 41 for $Od = 0.1$ as a function of the Weissenberg number. In order to ease comparisons, the second invariant of the deviatoric stress tensor τ_{II} has been normalized with the yield stress value: $J_2sig = \frac{\tau_{II}}{\tau_0}$. Rappelons que $\tau_{II} = \left[\frac{1}{2} (\tau_{X_1X_1}^2 + \tau_{X_2X_2}^2 + 2\tau_{X_1X_2}^2) \right]^{\frac{1}{2}}$. Then, values of J_2sig higher than 1 represent the sheared or yielded zones. This zone is located in the vicinity of the plate. The stress level generated in this region is higher than the yield stress. Values of J_2sig lower or equal than 1 represents the unyielded zones. One must distinguish mobile and static unyielded zones. The mobile unyielded zone also named plug flow is located far from the plate. In this region, the fluid is moving in the X_1 direction but is not yielded. Static unyielded zones are located in the vicinity of the upstream and downstream stagnation points. In these regions where velocities and shear rates are very low, the second invariant of the deviatoric stress tensor remains below the yield stress level. Figure 40 illustrates how increased plastic effects imply more extended unyielded regions and smaller yielded regions. When Od is increased from 0.1 to 100, the extent of the yielded regions is approximately divided by six. Similarly, the unyielded mobile regions enlarge when Od goes from 0.1 to 100. The enlarged part of unyielded static zones in Figure 40 illustrates the increase of the static unyielded zones when Od increases.

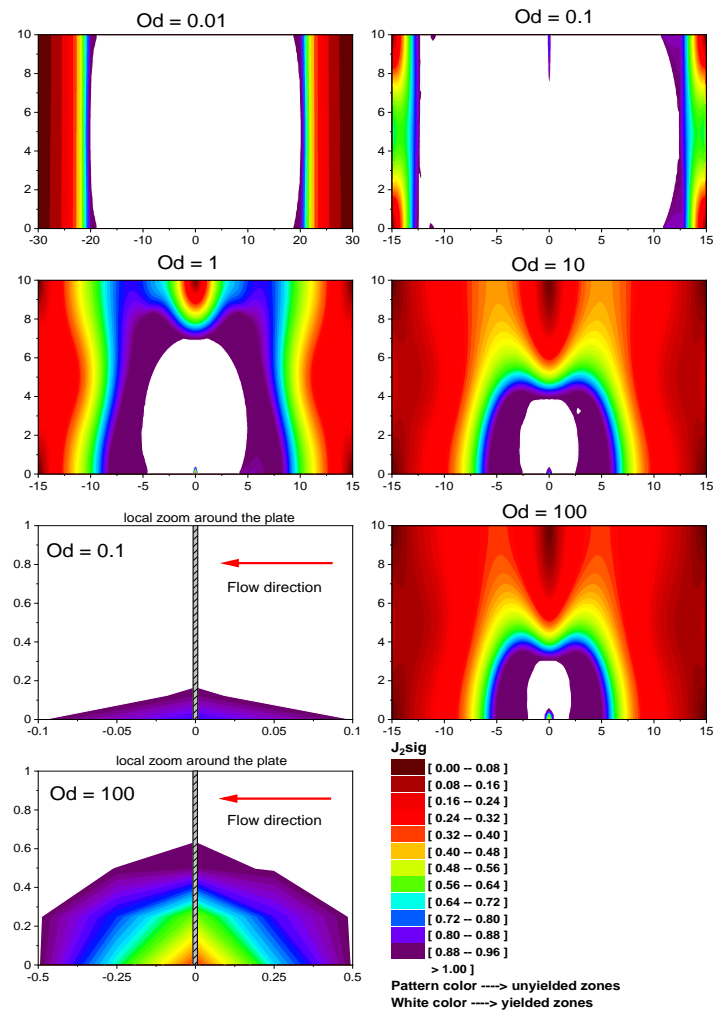


Figure 40: Field of the non-dimensional second invariant of the deviatoric stress tensor when $Wi = 0$ for a given value of Od (*local zoom around the plate for $Od = 100$ and $Od = 0.1$).

Figure 41 represents the influence of elasticity on the fields of the second invariant of the deviatoric stress tensor for an Oldroyd number set equal to 0.1. In far-field, this figure shows that elasticity expands unyielded regions and reduces yielded regions. As an example, the decrease of the region is more pronounced when $Wi = 0.6$ than when $Wi = 0$.

Besides, this figure illustrates how increasing fluid elasticity has an impact on the fore-aft asymmetry. Also, it is worth mentioning the existence of a small unyielded zone located in the yielded zone whose size increases when Wi increases.

Otherwise, when focusing on the close vicinity of the plate (near fields for the Wi cases $= 0$ and $Wi = 0.6$), one can observe that yielded regions increase with elasticity.

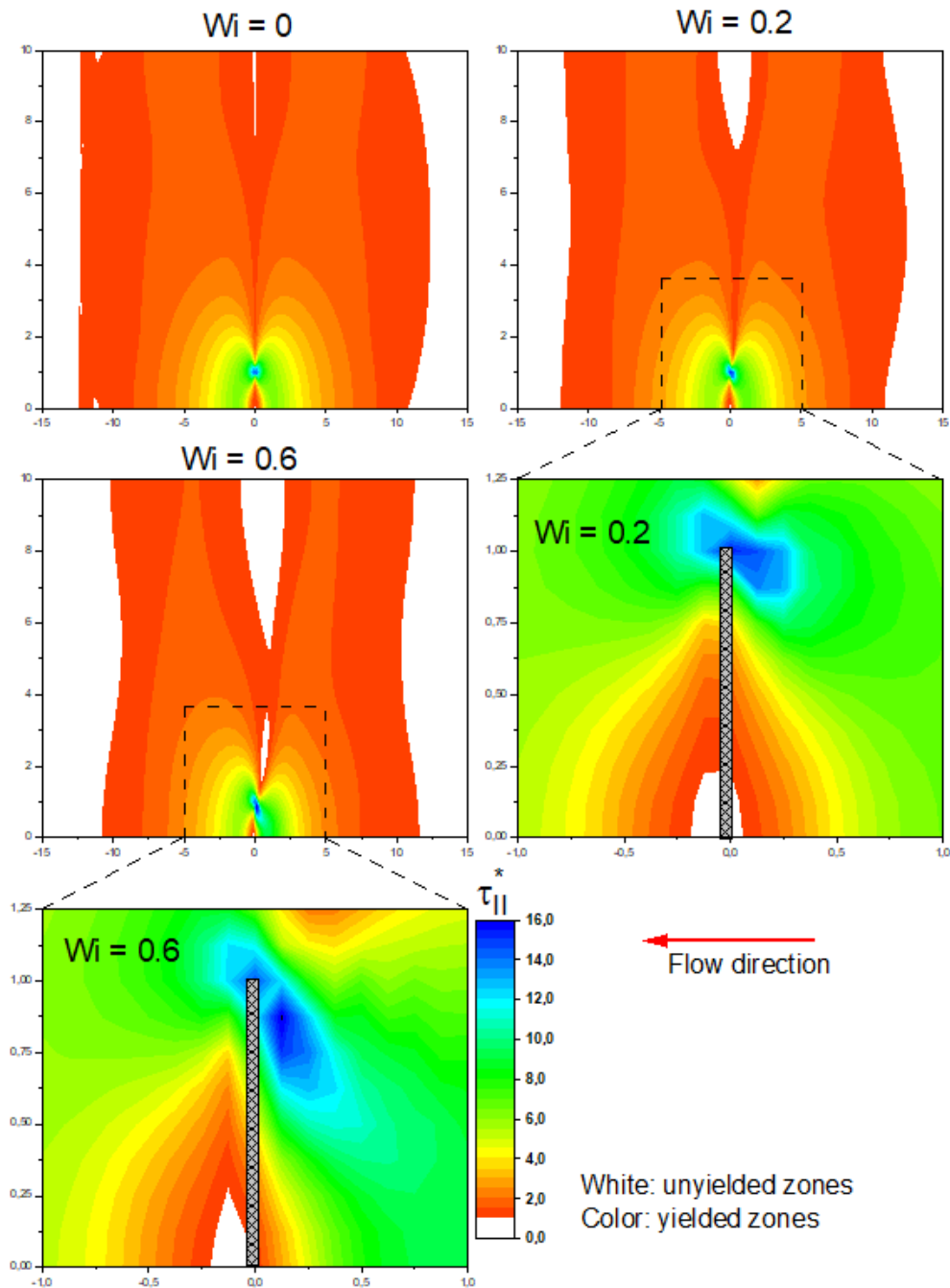


Figure 41: Contours of the second invariant of the deviatoric stress tensor at $Od = 0.1$ for different Wi . (*local zoom around the plate for $Wi = 0.2$ and $Wi = 0.6$).

4.3.3. Strain

Fields of the total strain are presented on Figure 42. In the absence of elastic effects ($Wi = 0$), a symmetrical field can be observed far and in the vicinity of the plate (figure 42c'). The total strain increases with Od . In the elastic case ($Wi = 0.6$), the strain field becomes asymmetric and the overall strain is slightly higher than in the case with no elasticity. In all cases, high values of strain are mainly located in the close vicinity

of the plate. The local maximum strain is significantly higher when elasticity is taken into account since the elastic part of strain is added.

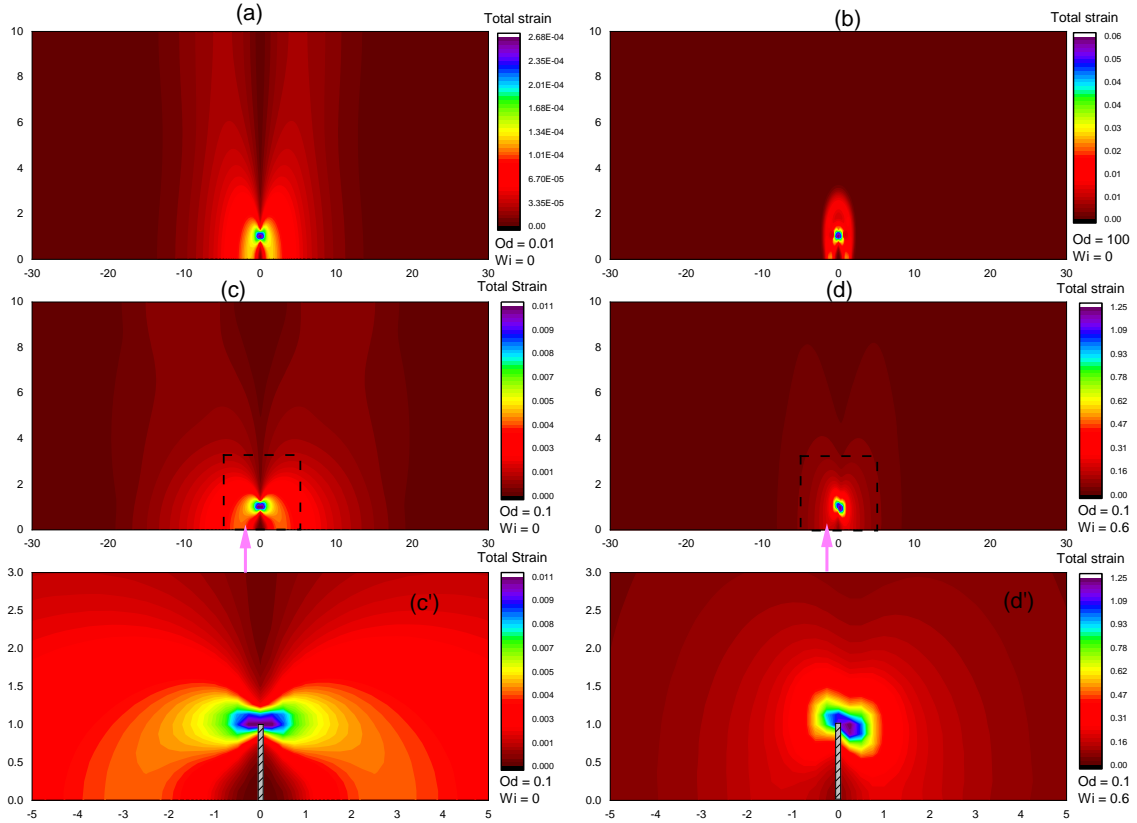


Figure 42: Evolution of total strain field for different values of Wi and Od

4.3.4. Drag force

4.3.4.1. Stress distribution along the plate

Figure 43 represents the evolution of the non-dimensional pressure $p^* = \frac{p}{\tau_0}$, normal stresses $\tau_{X_1X_1}^* = \frac{\tau_{X_1X_1}}{\tau_0}$ and the non-dimensional second invariant of the deviatoric stress tensor τ_{II}^* along both sides of the plate. The X_2 position along the plate has been normalized by the length of the plate: $X_2^* = \frac{X_2}{a}$. Positive and negative values of X_2^* correspond to the up and down-stream faces respectively. $X_2^* = 0$ and ± 1 correspond to the stagnation point and the edge of the plate respectively. τ_{II}^* represents the magnitude of the deviatoric stress tensor and takes the plastic, viscous and elastic effects into account while $\tau_{X_1X_1}^*$ is more representative of the elastic contribution alone.

In all three cases, $\tau_{X_1X_1}^*$ remains approximately constant along the plate and is always lower than p^* and τ_{II}^* . However, a significant increase in $\tau_{X_1X_1}^*$ can be observed when comparing Figure 43-a and c. The average value goes from 25 to 75 when Wi is increased from 0 to 0.6. Taking the elastic contribution into account has an impact on the stress distribution along the plate and explains why the drag coefficient of the plate is higher when elastic effects are taken into account as presented in the next section on Figure 45. If we now focus on the comparison between p^* and τ_{II}^* it appears that τ_{II}^* is always much lower than the pressure level. As a consequence, the overall drag force exerted by the fluid on the plate is mainly governed by the pressure difference on the upstream and downstream sides of the plate. The drag is mainly a pressure drag with minor contributions of viscous and elastic drag. Once again, as already observed on the kinematic fields, Figure 43-c illustrates how elasticity induces a dissymmetry when elastic effects become more important.

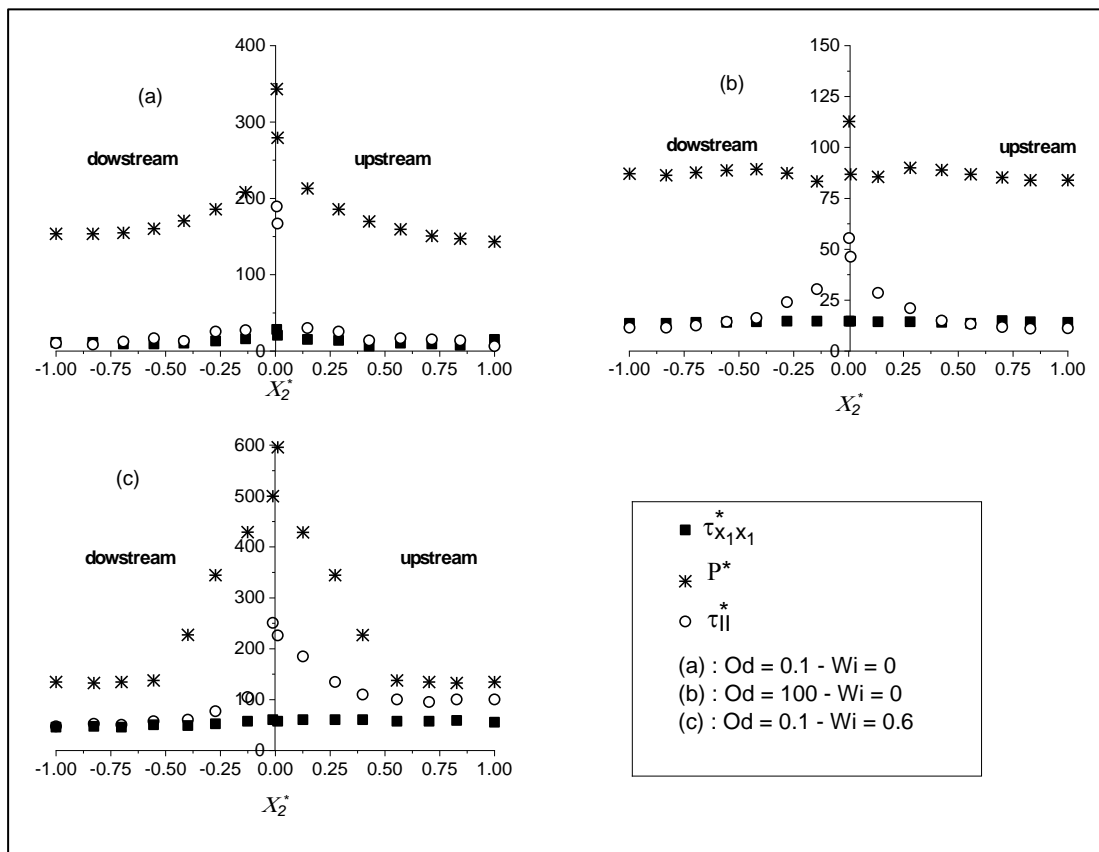


Figure 43: Evolution of non-dimensional pressure, normal stress and second invariant of the deviatoric stress tensor along both sides of the plate

4.3.4.2. Drag coefficient

The drag coefficient of the plate has been computed as a function of the characteristic dimensionless numbers. When plastic effects are predominant, a plastic drag coefficient can be introduced. It is defined as the drag force F_d per unit of width, normalized by the yield stress times the plate height:

$$C_d^* = \frac{F_d}{\tau_{0,a}}$$

Let's examine first the yield stress effect on the drag force without elasticity. Figure 44 represents the evolution of the steady state values of C_d^* as a function of the Oldroyd number. When the Oldroyd number increases, i.e. when the plastic effects become more important, C_d^* decreases toward an asymptotic value called $C_{d,\infty}^*$, corresponding to a zero velocity. This means that, in the range of high Oldroyd numbers, the drag force exerted by the fluid on the plate becomes independent of the fluid velocity. The drag force is then only governed by the yield stress and the frontal area of the plate. The evolution of C_d^* as a function of the Oldroyd number can be modeled with the following relation of Merkak et al [105] :

$$C_d^* = C_{d,\infty}^* + \frac{\beta}{Od^m} \quad (8)$$

where β and $m = 1/(1+n)$ are numerical coefficients, here $m=0.5$. The second term of equation 8 represents the viscous contribution in the drag coefficient.

As a consequence, it has been fitted in the range of Od between 1 and 100 as follow

$$C_d^* = 10.74 + \frac{9,64}{Od^{0.5}} \quad (9)$$

with a coefficient of correlation equal to 0.98.

The value of $C_{d,\infty}^*$ has been studied extensively to calculate the stability of a flat anchor. Different approaches of plasticity have been implemented and a few of them are hereafter mentioned. For a perfectly plastic yield stress fluid, Raghavendra [106] and Anderson et al. [107] have shown that $C_{d,\infty}^* = 3\pi + 2 \approx 11.34$. Merrifield et al [108] [94] using two numerical procedures based on finite element formulations of the upper and lower bound theorems of limit analysis and by assuming a perfectly rigid plastic clay model with a Tresca yield criterion established that $C_{d,\infty}^* = 11.16$ and $11,86$. Rowe [109] assumed a kinematically admissible upper bound solution and a statically admissible lower bound solution to obtain $C_{d,\infty}^* = 11.42$ and $C_{d,\infty}^* = 10.28$ respectively.

These values are close to the numerical value obtained in the present study: $C_{d,\infty}^* = 10.74$ (Eq. 9). Patel and Chhabra [103] carried out a numerical study of the flow of a Bingham fluid around an elliptical cylinder. When the aspect ratio of the elliptical cylinder tends towards zero, the geometry becomes similar to that of a perpendicular plate. Using the correlation given by Patel and Chhabra in the case of their smallest aspect ratio and negligible inertia, one obtains $C_d^* = 10.41 + \frac{14}{Od^{0.58}}$. This expression provides a value of $C_{d,\infty}^*$ in good agreement with the numerical value of the present study, equation 9. The different expressions of the viscous contribution can be explained by the fact that Patel and Chhabra studies an elliptical cylinder, thus a slightly higher surface than the plate. In addition, they used a Bingham constitutive equation regularized by the Papanastasiou model. Finally, a certain imprecision is induced by their correlation including multiple parameters. In conclusion, the determination of drag coefficient obtained by the FEMLIP method in the absence of elasticity provides correct values in agreement with the literature data.

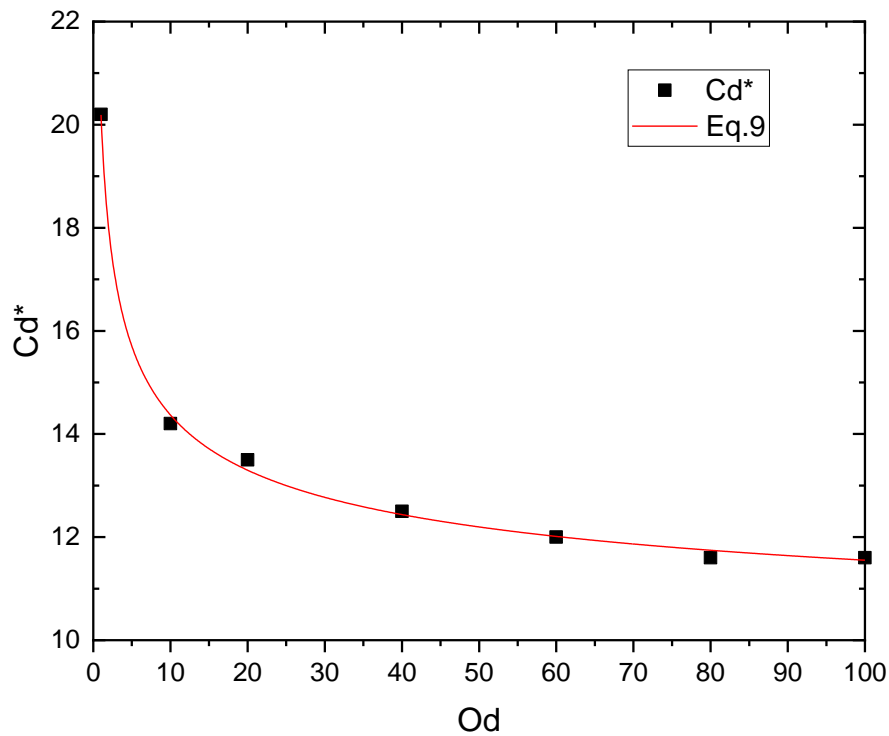


Figure 44: Evolution of the drag coefficient Cd^* as a function of the Od for $Wi = 0$

Let's now consider the influence of elastic effects on the drag coefficient. Figure 45 represents the effects of Weissenberg numbers on the drag coefficient. As explained in section 4.3.1 on the numerical method, high Weissenberg numbers cannot be considered when plastic effects are important because of numerical instabilities. Figure 45 illustrates the influence of elasticity on the drag coefficient when $Od = 0.1$. It represents the gap between the drag coefficient computed for a given value of Wi and the drag coefficient computed when $Wi=0$ normalized by the drag coefficient computed without elasticity, $\Delta C_d^* = \left[\frac{C_d^*(Wi) - C_d^*(Wi=0)}{C_d^*(Wi=0)} \right]$. This allows to evaluate the influence of elasticity on the drag. The increase in elasticity leads to an increase in drag force. This result is confirmed by the numerical study by Huang and Feng [110] who simulated the flow of viscoelastic fluids around a circular cylinder using a finite element method with the elastic-viscous stress split scheme. They have studied the influence of elasticity on the drag coefficient at three different Reynolds numbers. When $Re = 0.1$, the closest configuration of the present study, they computed a slight increase in Cd^* as Wi increases from 0 to 2. Fraggedakis et al. [40] simulated the flow of an elasto-viscoplastic fluid around a sphere. They also conclude that elasticity increases the drag coefficient. The increase of the drag force due to elasticity, observed in the case of the flat plate, as well as for the cylinder and sphere for the two studies recently cited, is rather moderate in the range of Wi considered. This can be explained by the fact that the drag force is mainly governed by the pressure contribution related to the cross section and symmetry of the obstacle.

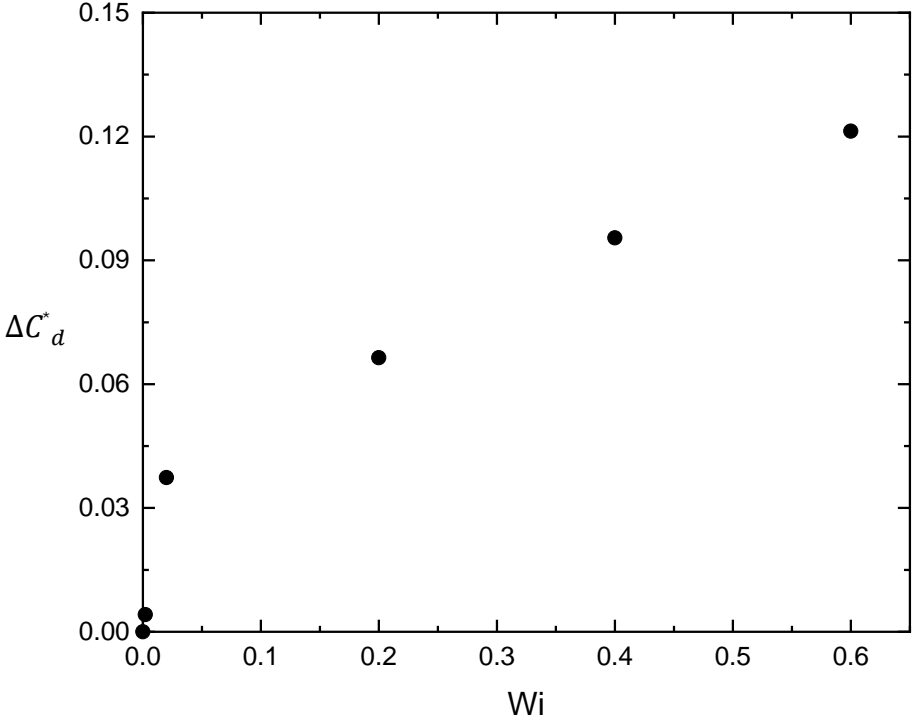


Figure 45: Evolution of the drag coefficient ΔC^*_d as a function of Wi for Oldroyd number ($Od=0.1$)

4.4. Conclusion

The finite element method with Lagrangian integration point has been used to model the fluid of an EVP Bingham fluid around a plate perpendicular to the flow direction. The rheological model couples the Maxwell and Bingham constitutive equations to take into account the elasticity and yield stress contributions in the fluid behaviour. Flows with very low velocities have been considered so that inertia has not been taken into account in the governing equations. Inertia effects are neglected in comparison with elastic, viscous and plastic effects. The numerical data obtained made it possible to quantify the influence of elasticity and plasticity on the kinematic and stress fields as well as the drag force. The shape and size of yielded and unyielded regions in the vicinity of the plate have been computed and quantified. Unyielded regions are favoured by increasing plastic effects. For given plastic effects, unyielded regions increase with increasing elasticity. The present results also illustrate how elasticity introduces a fore-aft asymmetry in the kinematic and stresses fields, as frequently observed in the flow of yield stress fluids around obstacles. The drag coefficient has been computed and the increase due to elasticity has been quantified.

Ce chapitre a fait l'objet d'une soumission dans le Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics

CHAPITRE 5 : Etude expérimentale et numérique de l'écoulement d'un fluide élasto-viscoplastique autour d'une plaque perpendiculaire à l'écoulement

Résumé :

Ce chapitre s'intéresse à l'écoulement sans inertie d'un fluide élasto-viscoplastique autour d'une plaque perpendiculaire à la direction de l'écoulement. L'écoulement est analysé à la fois expérimentalement et numériquement.

Les expériences ont été réalisées avec un gel Carbopol. Ce fluide à seuil modèle non-thixotrope a été finement caractérisé d'un point de vue rhéométrique en régime permanent et de relaxation.

Pour l'approche numérique, le comportement rhéologique du gel est basé sur le modèle de Maxwell dans lequel la viscosité apparente η' est régie par la loi de Herschel-Bulkley. Toutes les équations sont résolues avec la méthode MEFPIL.

Le fluide se comporte comme un solide élastique en dessous de la contrainte seuil. Au-delà de cette contrainte, le fluide s'écoule suivant une loi visqueuse non linéaire. La transition solide-liquide est définie par le critère de Von Mises.

Après une présentation de l'approche expérimentale et de la méthode numérique, les résultats expérimentaux et numériques sont comparés en termes d'influence de la plasticité, de l'élasticité et de la condition initiale sur la traînée à la fois en régime permanent et en régime de relaxation. L'influence de l'état de contrainte initial a été clairement identifiée. La rhéofluidification du fluide a été prise en compte. De plus, l'évolution des zones seuillées et non seuillées, des champs de vitesse, de contrainte et de déformation du gel ont été analysées.

Mots-clés : élasto-viscoplasticité, modélisation numérique, expérience, plaque, zones seuillées, traînée,

5.1. Introduction

Dans les procédés industriels où interviennent les écoulements de fluides à seuil, la maîtrise et le contrôle de la cinématique de ces écoulements sont cruciaux pour des besoins de compréhension physique et d'optimisation. La présence du seuil d'écoulement rend le comportement de ces matériaux très particulier. Le critère le plus couramment utilisé pour représenter cette transition dans les écoulements plastiques est le critère de Von Mises [66]. Lorsque la contrainte appliquée est inférieure à la contrainte seuil, ces matériaux se comportent comme un solide élastique qui peut en première approximation être représenté par le modèle de Hooke. Lorsque la contrainte appliquée est supérieure à la contrainte seuil, ces matériaux s'écoulent.

La présence d'un seuil d'écoulement associé à un comportement élastique affecte fondamentalement les transferts et la structure des écoulements dans les procédés. La compréhension du rôle de l'élasto-viscoplasticité est rendue nécessaire dans l'objectif d'optimiser les procédés de traitement de ces fluides. Ici, nous avons choisi de focaliser nos efforts sur l'écoulement de ces fluides élasto-viscoplastiques autour d'une plaque. Cet obstacle a été choisi car, d'une part, c'est un cas classique de la mécanique des fluides et, d'autre part, il correspond à des applications pratiques. Le but de la présente étude est de confronter les résultats expérimentaux obtenus avec un fluide modèle aux prédictions numériques fournies par la modélisation numérique. Dans le cas des fluides newtoniens, cette configuration a fait l'objet de nombreuses études analytiques, numériques et expérimentales. Parmi celles-ci, nous pouvons citer Tomotika et Aoi [111] qui ont étudié numériquement l'écoulement autour d'une plaque plane parallèle et perpendiculaire à la direction de l'écoulement à inertie négligeable. Les auteurs ont déterminé analytiquement les expressions du coefficient de traînée, des lignes de courants et de la distribution de pression sur la plaque. Le coefficient de traînée d'une plaque plane parallèle à la direction de l'écoulement a été calculé numériquement par Tamada et al [112] en utilisant cette fois-ci les équations de Navier-Stokes appliquées à de petits nombres de Reynolds variant entre 0.1 et 10. L'écoulement autour d'une plaque perpendiculaire à la direction de l'écoulement a été étudié numériquement par Dennis et al [113]. Plus précisément, ces derniers ont étudié le comportement de l'écoulement, les lignes de courant, et mis en évidence la formation d'un vortex autour de la plaque. Pour leur part, In et al [114], ont étudié l'écoulement bidimensionnel autour d'une plaque plane avec un angle d'incidence

variable et, à cet effet, ils ont déterminé les coefficients de traînée et de portance pour des Reynolds compris entre 1 et 30.

Concernant les fluides non-newtoniens rhéofluidifiants, Wu et Thompson [115] ont étudié, numériquement et expérimentalement, l'écoulement autour d'une plaque plane avec un angle d'incidence variable. Les auteurs ont déterminé l'influence de l'inertie, de l'indice de rhéofluidification et de l'angle d'attaque sur les coefficients de traînée et de portance. Cependant, à notre connaissance, peu d'études sur l'écoulement de fluide élasto-viscoplastique perpendiculaire à la plaque sont disponibles. Brookes et Whitmore [91] ont étudié expérimentalement la force de traînée statique d'une plaque immergée dans un fluide plastique considéré comme un fluide de Bingham. Les auteurs ont, d'une part, montré que cette force est proportionnelle à la surface immergée de la plaque et, d'autre part, proposé une expression analytique reliant la force de traînée statique, le maître couple et la contrainte seuil. D'autres auteurs tels que Savreux et al [95] ont étudié numériquement en 2D l'écoulement d'un fluide de Bingham perpendiculaire à une plaque plane. Ils ont abordé en détail la morphologie de l'écoulement à inertie négligeable en fonction du nombre d'Oldroyd défini comme le rapport entre les effets de la contrainte seuil et les effets visqueux- avant de calculer le coefficient de traînée et de proposer des solutions analytiques dans le domaine des contraintes seuils élevés. Patel et Chhabra [116] ont utilisé la méthode des éléments finis pour simuler l'écoulement autour d'un cylindre elliptique. Le coefficient de traînée ainsi que la forme et la taille des régions cisailées et non cisailées au voisinage de l'obstacle ont été calculés. Pour leur part, Ouattara et al [96] ont étudié expérimentalement et numériquement l'écoulement de gel de Carbopol autour d'une plaque avec des incidences comprises entre 0° et 90° . Les auteurs ont déterminé les forces de traînées et de portance sur la plaque et quantifié les effets de la contrainte seuil. Les forces mesurées ont été comparées aux résultats numériques et aux données de la littérature. Des différences significatives entre les résultats expérimentaux et numériques ont été observées. Le gel de Carbopol est un fluide à seuil modèle non-thixotrope. Leurs simulations ont été effectués à l'aide du logiciel fluent avec une loi viscoplastique d'Herschel-Bulkley régularisée avec la loi de Papanastasiou ne prenant pas en compte la contribution élastique. Cela révèle que le logiciel commercial Fluent utilisé n'intègre pas la modélisation jugée plus réaliste du comportement élasto-viscoplastique du gel de Carbopol.

A priori, il n'existe pas d'étude expérimentale qui porte sur la morphologie des écoulements de fluide à seuil autour d'une plaque infinie. Toutefois, citons l'étude de Jossic et al [12] sur la morphologie des écoulements de gel de Carbopol autour d'une plaque circulaire perpendiculaire à l'écoulement.

Dans le domaine de la géotechnique, l'étude de la stabilité de l'ancrage de plaques dans des sols plastiques a fait l'objet de nombreuses études [94],[117], [118] mettant en évidence l'évolution de la force de traînée. Leurs résultats permettent d'évaluer les solutions pour des effets de plasticité prépondérants. Ces études, avec différentes approches de la théorie de la plasticité, cherchent à déterminer la force que l'on peut appliquer à la plaque avant la rupture du sol. Les travaux expérimentaux et numériques prenant en compte l'élasto-viscoplasticité sont plus éparses et relativement récents. Peu d'études concernent la configuration de notre présente étude. Ferreira et al [119] ont uniquement étudié le champ cinématique de l'écoulement autour d'une plaque sans pour autant calculer la force de traînée. Ils ont, d'une part, mis en évidence que l'élasticité modifie la forme des zones cisillées et non-cisillées dans le voisinage de la lame. Ahonguio et al [45] ont étudié expérimentalement et numériquement l'écoulement rampant d'un fluide élasto-viscoplastique autour d'une plaque mais parallèle à la direction de l'écoulement. La loi de comportement élasto-viscoplastique utilisée couple le modèle de Herschel-Bulkley au modèle de Maxwell. La MEFPIL a été utilisée par ces auteurs et donc par rapport à cette étude notre apport original est d'étudier une nouvelle configuration avec de nouveaux effets physiques. De plus, Ahonguio et al [45] ont analysé l'influence de l'élasticité et de la contrainte seuil sur la force de traînée et le champ cinématique dans le voisinage de la plaque. De récentes études numériques de l'écoulement d'un fluide élasto-viscoplastique avec des obstacles de formes différents ont été également étudiées comme dans le cas d'un cylindre [120] et d'une sphère [40] particulièrement en couplant le modèle Saramito [121] avec le modèle de durcissement cinématique isotrope (IKH) introduit par Dimitriou et al [11].

Dans la présente étude, nous avons tenu à examiner l'influence de l'état initial en contrainte, c'est-à-dire l'état de contrainte résiduel qui existe dans le matériau laissé par son histoire mécanique. Ce phénomène n'est pas dû à la thixotropie mais, à la plasticité du fluide. Cet aspect est d'autant plus important que dans la présente étude, nous allons travailler dans le domaine où les effets de seuil sont

importants par rapport aux effets de viscosité. Mougine et al. [122] ont montré l'influence significative qu'exerce l'état de contrainte résiduelle sur la dynamique des bulles possédant des vitesses très lentes dans un fluide à seuil comme les gels de Carbopol. Dans ce domaine, la forme et la trajectoire des bulles sont principalement contrôlées par l'état de contrainte résiduelle présent dans le fluide. A notre connaissance, l'écoulement d'un fluide élasto-viscoplastique autour d'une plaque perpendiculaire à l'écoulement n'a pas été étudié numériquement et les résultats comparés avec les données expérimentales. C'est l'objectif de cette étude de combler ce manque de connaissance.

Ainsi, nous proposons de réaliser une modélisation numérique originale avec la MEFPIL intégrant un modèle constitutif élasto-viscoplastique dans la configuration d'un écoulement perpendiculaire à une plaque. Nous étudierons les paramètres adimensionnels clés influant sur la morphologie de l'écoulement et sur les efforts appliqués. Cette approche originale permet de mieux comprendre et de prédire un écoulement complexe afin d'en optimiser certaines mesurables d'ingénieries dans un contexte applicatif ou industriel.

Cette méthode MEFPIL a la particularité et l'avantage majeur de dissocier les points matériels des points de calculs, ce qui lui permet d'être un candidat idéal pour intégrer la modélisation solide-liquide. Cela permet de modéliser le comportement élastique en dessous du seuil d'écoulement sans avoir recours à la régularisation et par conséquent, d'intégrer une loi de comportement élasto-viscoplastique plus représentative du comportement réel du Carbopol utilisé dans les expériences.

La section 5.2 présente l'approche expérimentale (la caractérisation rhéologique du matériau, le dispositif expérimental de mesure de force de traînée et des résultats expérimentaux). Par ailleurs, une partie des méthodes expérimentales est détaillée dans les études de Ouattara et al. [23] [96] [15]. Par conséquent, seules les informations nouvelles non publiées seront présentées ici.

La section 5.3, consacrée à la modélisation numérique, présente tout d'abord la configuration du domaine de calcul et les conditions limites et initiales associées. Les équations gouvernantes et la loi de comportement élasto-viscoplastique sont ensuite présentées. La modélisation tiendra compte du caractère rhéofluidifiant du fluide expérimental. Les nombres adimensionnels caractéristiques de l'écoulement seront

introduits. La méthode numérique MEFPIIL, précédemment détaillée dans le chapitre 3, fera l'objet d'un bref rappel.

La section 5.4 compare les résultats numériques avec les données expérimentales obtenues par Ouattara et al [5] complétées par des données non encore publiées. Les comparaisons portent essentiellement sur la force de traînée à la fois en régime permanent et de relaxation ainsi que sur l'influence de l'état initial de contrainte. Les champs de contraintes et cinématiques associés et déterminés numériquement sont également présentés et discutés.

5.2. Approche expérimentale

5.2.1. Matériaux et rhéométrie

Les gels aqueux de Carbopol ont été choisis comme fluide à seuil modèle dont les propriétés élasto-viscoplastique ont largement été étudiées. Ils ont l'avantage d'être transparents et non thixotropes [123] [83] [124] [125] avec une microstructure favorable à un comportement élongationnel très peu prononcé [126] [127] [128]. En écoulement, ces gels possèdent des contraintes normales [129] [98] [130].

Plusieurs études sur sa transition solide-liquide ont été menées. Dimitriou et al. [11] fournissent une revue de la littérature assez complète sur la caractérisation de cette transition pour les gels Carbopol. Dans notre étude, les propriétés rhéologiques du gel ont été déterminées à contrainte imposée par des essais en cisaillement simple à l'aide du rhéomètre DHR3 (TA instruments) en régime permanent. En régime de relaxation, les mesures ont été réalisées à l'aide du rhéomètre ARES-G2 (TA instruments) travaillant en déformation contrôlée. Les surfaces de la cellule de mesure cône-plan sont rugueuses pour éviter le glissement aux parois [123]. Les mesures ont été réalisées en contrôlant l'évaporation selon des techniques développées par Magnin et Piau [123]. Une température de $22^{\circ}\text{C} \pm 1^{\circ}\text{C}$ a été imposée au cours des expériences. Les incertitudes de mesure sont estimées environ à 7% pour les paramètres rhéologiques. Il est connu que le comportement en cisaillement permanent des gels aqueux de Carbopol suit le modèle d'Herschel Bulkley décrit par l'équation (7). Dans la présente étude (Figure 46) et pour le gel utilisé, on obtient un seuil de contrainte $\tau_0 = 115 \text{ Pa}$, une viscosité plastique $k = 40.4 \text{ Pa.s}$ et un indice de consistance $n = 0.4$.

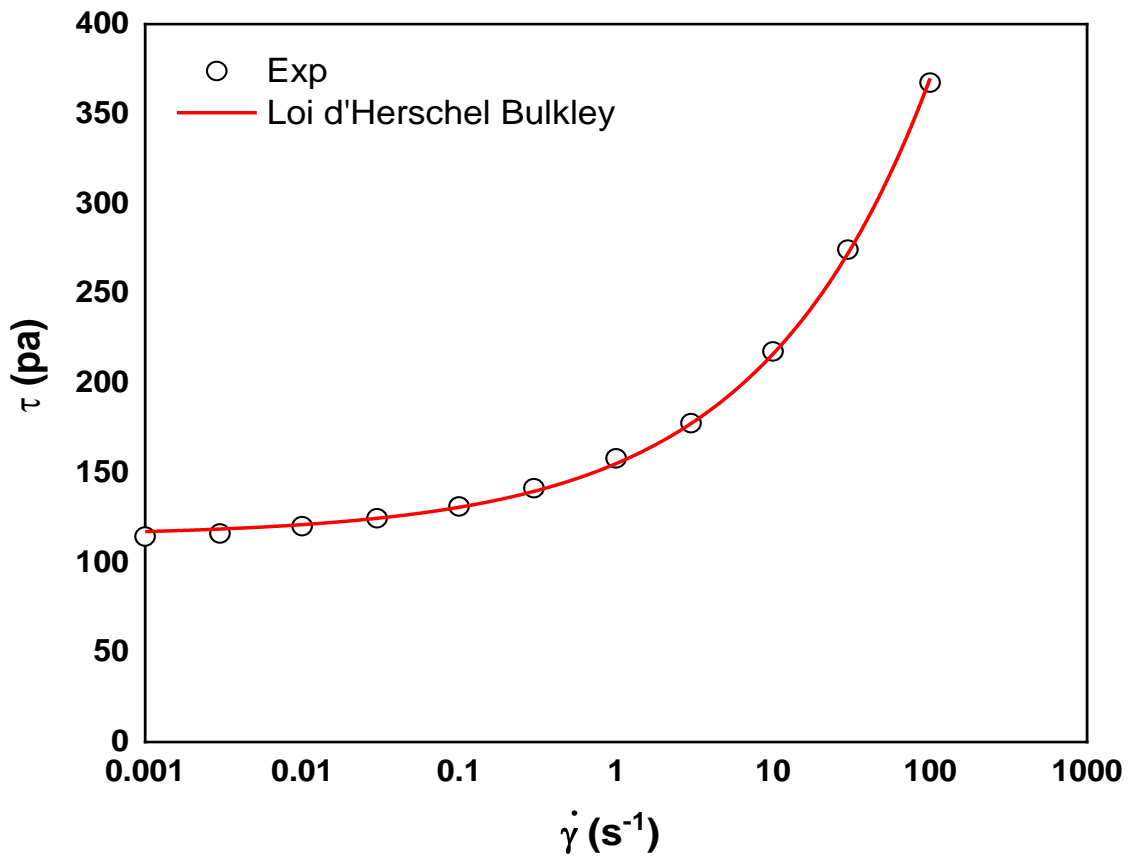


Figure 46: Evolution de la contrainte de cisaillement en fonction du gradient de cisaillement en régime permanent

La Figure 47 montre l'évolution des modules élastiques G et visqueux G' en fonction de la déformation. Dans le domaine linéaire $G = 561 \text{ Pa}$ soit 19 fois plus que le module visqueux G' .

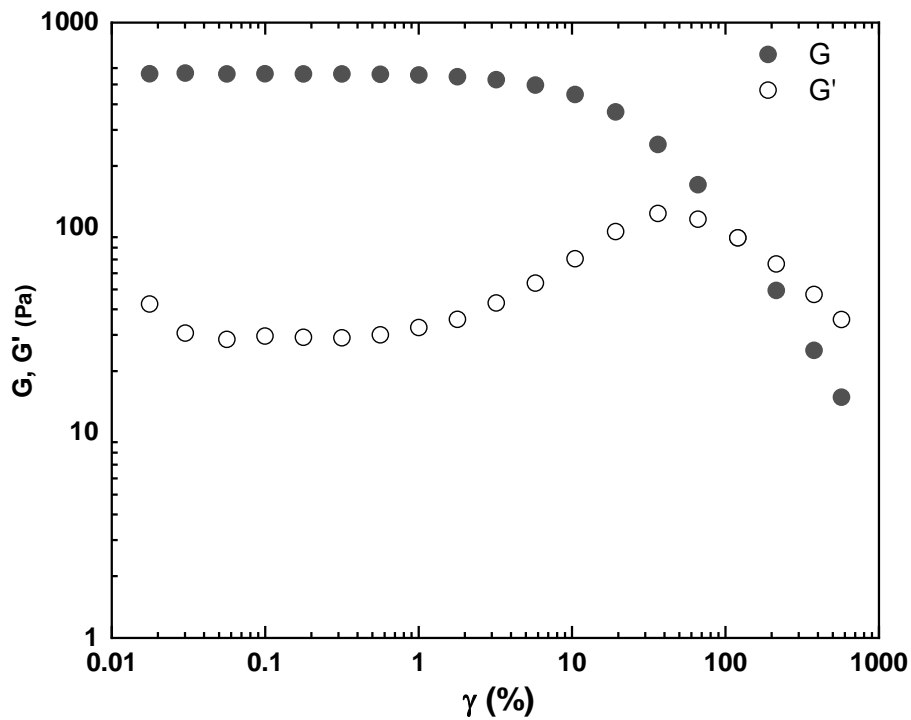


Figure 47: Évolution du module élastique G et du module visqueux G' en fonction de la déformation

Par ailleurs des essais transitoires en cisaillement simple ont été menés pour caractériser le comportement du gel en relaxation. Un créneau de vitesse de cisaillement est appliqué au fluide et la contrainte de cisaillement est mesurée en fonction du temps.

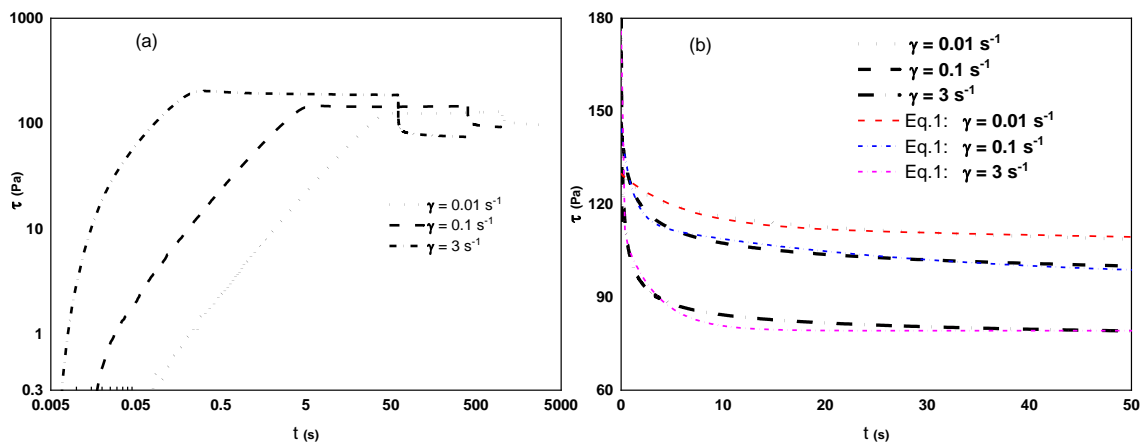


Figure 48: Évolution de la contrainte de cisaillement en fonction du temps pour différents gradients de cisaillement : (a) en régime permanent et de relaxation et (b) en régime de relaxation

La figure 48 montre l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction du temps durant un créneau de taux de cisaillement. On observe différentes phases : (i) le démarrage, (ii) les régimes permanent et (iii) la relaxation des contraintes après arrêt du cisaillement. Les comportements obtenus sont similaires à ceux observés par Magnin et Piau [123]. La Figure 48b montre que lorsque le cisaillement redevient nul, la contrainte relaxe vers une contrainte résiduelle non nulle. Ceci caractérise l'existence d'un seuil de contrainte au sein du fluide. Ces courbes de relaxation peuvent être modélisées par une série de deux exponentielles :

$$\tau = \alpha_1 \cdot e^{-\frac{t}{t_1}} + \alpha_2 \cdot e^{-\frac{t}{t_2}} + Y_0 = \alpha_1 \cdot e^{-K_1 t} + \alpha_2 \cdot e^{-K_2 t} + Y_0 \quad (1)$$

Avec Y_0 la contrainte résiduelle en fin de relaxation. Les paramètres de la loi de relaxation de la contrainte de cisaillement sont donnés dans le tableau 1 ci-après pour différents gradients de cisaillement. La Figure 48b montre une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et les calages avec l'équation 1.

Tableau 1: Valeurs des coefficients de l'équation (1) de la contrainte résiduelle de cisaillement en régime de relaxation pour différents gradients de cisaillement

$\dot{\gamma}$ (s ⁻¹)	α_1	α_2	t_1 (s)	t_2 (s)	Y_0 (Pa)
3	64,4	36,3	0,089	1,88	82,5
1	44,2	30,1	0,185	3,26	86,7
0,3	39,18	22,9	0,57	14,7	90,6
0,1	27,2	19,6	0,89	15,7	98,1
0,03	22,1	15,6	2,46	66	100
0,01	15,6	13,4	5,08	113	100

La figure 49 représente l'évolution de la contrainte résiduelle en fonction du taux de cisaillement appliqué. Cette figure 49 illustre l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la contrainte résiduelle en fin de relaxation Y_0 .

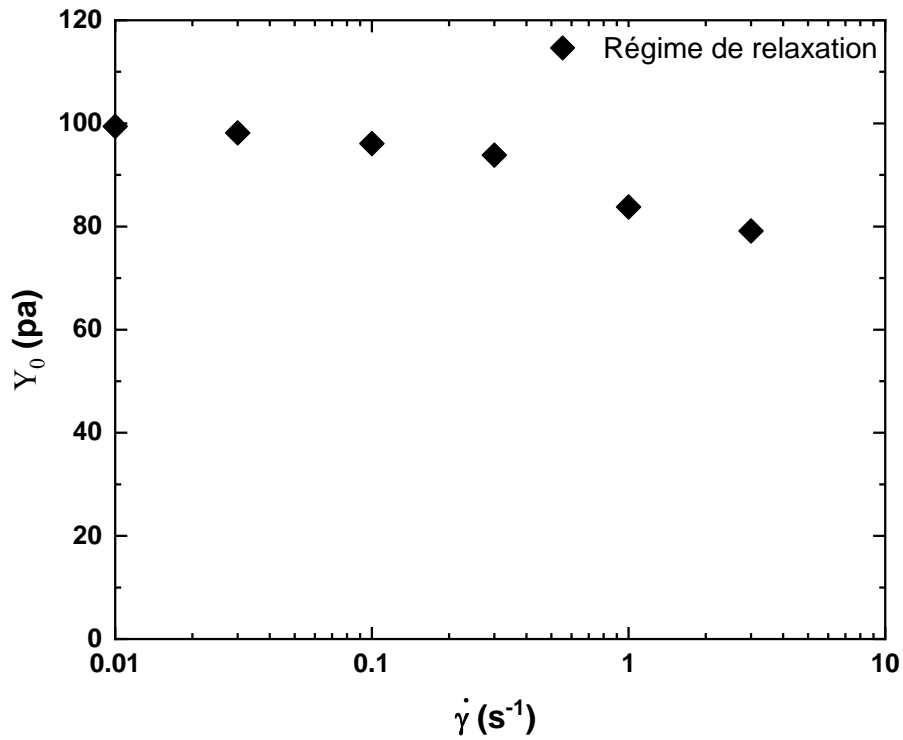


Figure 49: Evolution de la contrainte résiduelle Y_0 (Pa) en fonction du taux de cisaillement appliquée en régime de relaxation

Les équations (2) et (3) proposent des relations empiriques reliant l'inverse des temps de relaxation des matériaux K_1 et K_2 (s⁻¹) aux gradients de cisaillement $\dot{\gamma}$. Ces évolutions sont montrées sur la Figure 50.

$$K_1 = \frac{1}{t_1} \approx 0.2 \dot{\gamma}^{-0.71} \quad (2)$$

$$K_2 = \frac{1}{t_2} \approx 4.06 \dot{\gamma}^{-0.74} \quad (3)$$

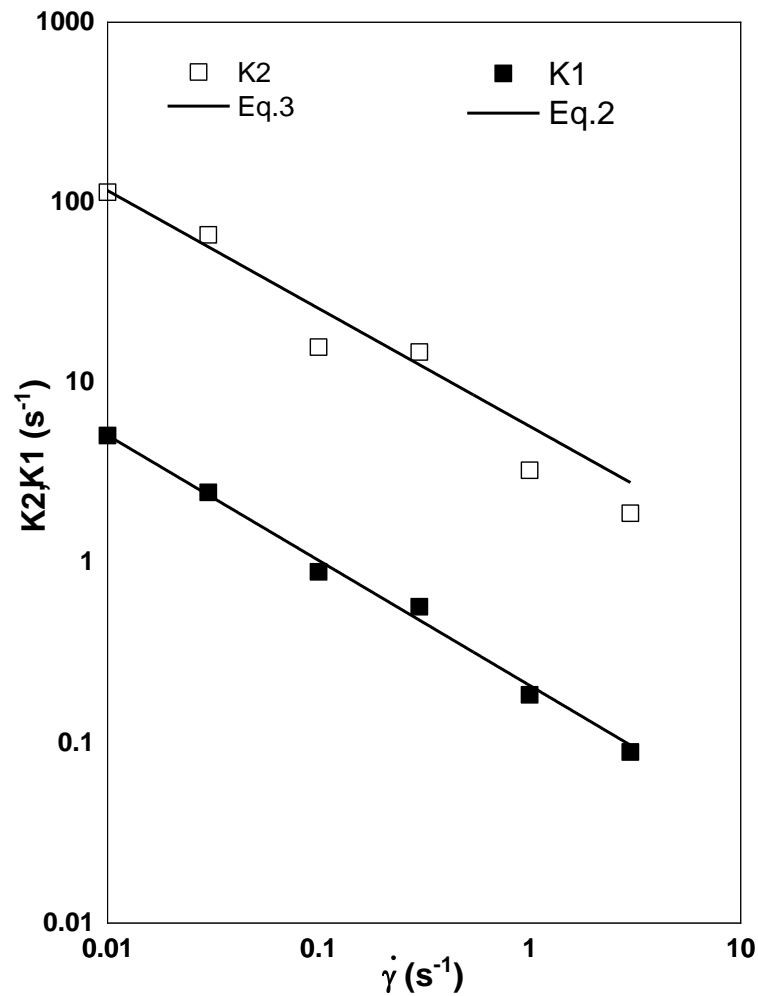


Figure 50: Evolution du temps de relaxation du gel en fonction du gradient de cisaillement

5.2.2. Banc expérimental de mesure de forces de traînée

Le dispositif expérimental de mesure de la force de traînée est représenté par la Figure 51. La plaque est déplacée, dans un canal à surface libre contenant le fluide à seuil, par un charriot mobile piloté en vitesse. La plaque est instrumentée avec des capteurs de mesure de force de traînée et de portance. Les détails techniques ont été présentés dans les articles de Ouattara et al. [15] [14] [96].

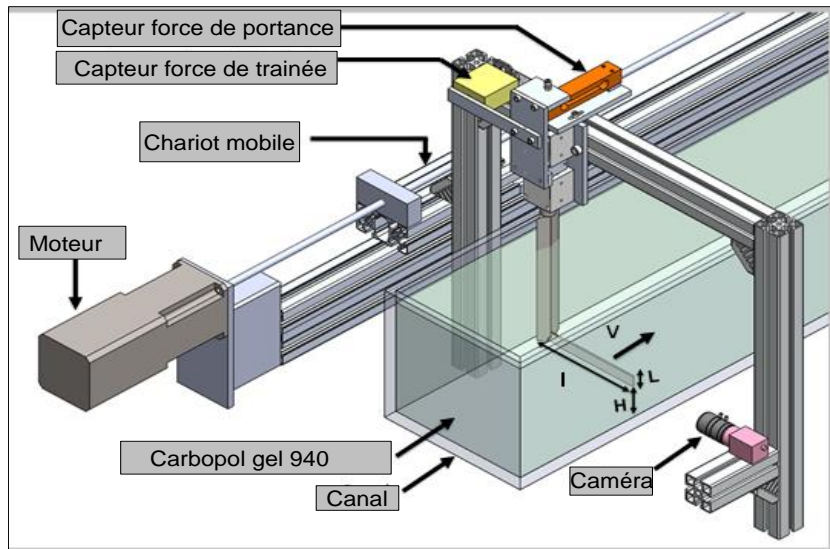


Figure 51: Dispositif expérimental pour un écoulement perpendiculaire à une plaque

La Figure 52 représente l'évolution de la force de traînée mesurée en fonction du temps lorsqu'un créneau de vitesse est imposé. Trois phases d'écoulements sont observées : le démarrage, le régime permanent et le régime de relaxation de la force de traînée lorsque la vitesse de déplacement est ramenée à zéro. Lors de cette dernière phase, la force de traînée diminue progressivement pour tendre vers une force résiduelle non nulle.

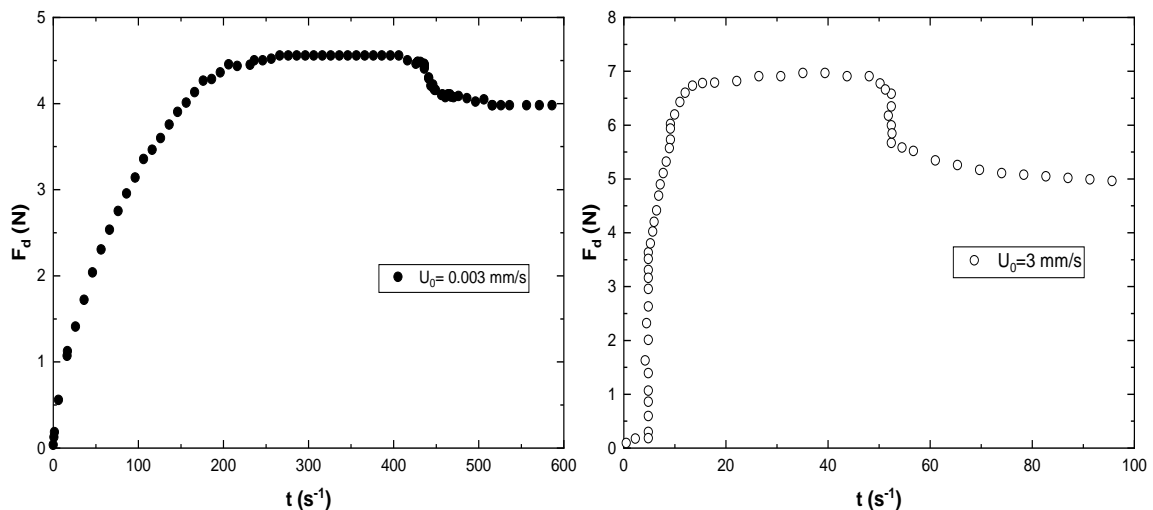


Figure 52: Evolution de la force de traînée en fonction du temps pour différentes vitesses de déplacement

Comme évoqué précédemment, les contraintes ou forces ne relaxent pas vers un niveau nul après qu'une sollicitation mécanique ait été appliquée au fluide. Le comportement élasto-viscoplastique du matériau est ainsi mis en évidence. La présence d'un état de contrainte résiduel dans le matériau pose la question de l'influence de l'état initial du matériau sur la force de traînée. Pour répondre cette question, deux états initiaux ont été définis. Le premier état initial, nommé « état non homogène », est celui créé par le passage de la plaque dans le canal. Nous le nommerons « état non homogène ». Le second état nommé « état homogénéisé », est généré en homogénéisant le fluide à l'aide d'une grille introduite dans le canal. Ce procédé est appliqué sur toute la longueur du canal utilisé. L'homogénéité du gel dans le canal se fait en déplaçant la grille depuis le fond du canal vers la surface libre. Ce processus a été renouvelé à chaque mesure de la force de traînée pour différentes vitesses.

5.3. Formulation du problème et méthode numérique

5.3.1. Domaine d'étude, conditions initiales et aux limites

L'écoulement considéré dans cette étude a été modélisé en deux dimensions. Le domaine de calcul a pour dimensions L en longueur et H en hauteur. Avec $L/a = 6,6$ et $H/a = 5$ et $H/b = 3$. La plaque a une longueur a , une épaisseur considérée comme nulle et des parois adhérentes. Le profil de vitesse est supposé uniforme en entrée et en sortie avec une vitesse notée U_0 .

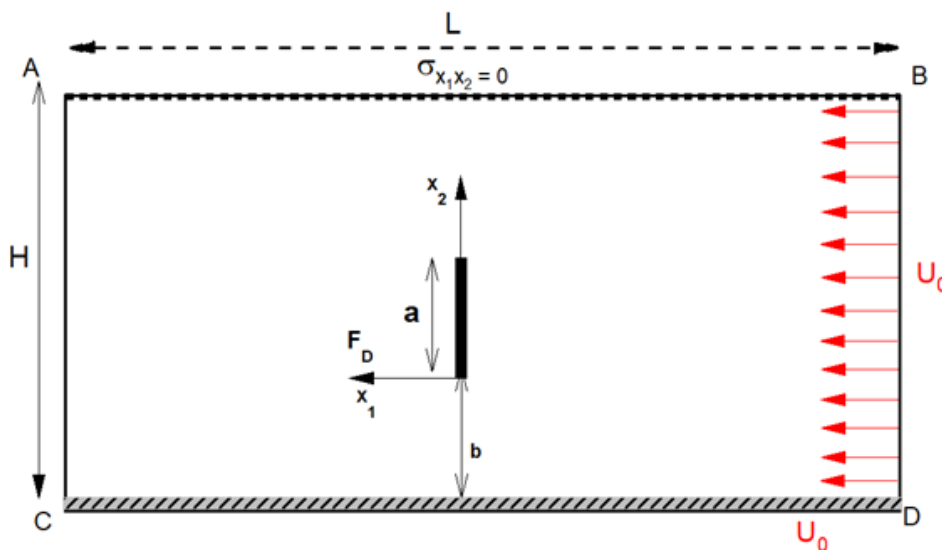


Figure 53: Domaine d'étude et conditions aux limites

Les conditions aux limites utilisées sont les suivantes :

- Le modèle étant périodique, par conséquent les conditions sur AC et BD sont identiques : $U_{X_1} = U_0$ et $U_{X_2} = 0$
- Le fluide adhère aux parois de sorte que la vitesse soit nulle sur la surface
- La section (AB) est une surface libre pour se rapprocher des conditions expérimentales, la condition de cisaillement nulle est adoptée : $\sigma_{X_1X_2} = 0$

En général, les conditions initiales ont été choisies de telle sorte que les champs de contraintes et de vitesses soient nuls dans l'ensemble du domaine de calcul. Cet état se rapproche de l'état initial nommé « état homogène » défini dans la partie expérimentale. Pour certaines simulations, nous avons imposé un second créneau de vitesse à la suite du premier tel que montré à la figure 52. Dans ce créneau de vitesse, l'état initial est celui laissé par la plaque après la relaxation du premier créneau. Ce second état initial se rapproche de celui nommé « état non homogène » dans la partie expérimentale.

5.3.2. Equations gouvernantes

Les écoulements considérés étant isothermes, ils sont uniquement gouvernés par les principes de conservation de la quantité de mouvement et de conservation de la masse. Les écoulements étant sans inertie, la conservation de la quantité de mouvement s'exprime avec l'équation de Stokes (équation 4). L'équation de continuité (équation 5) traduit la conservation de la masse. :

$$(f_{ext})_i + \tau_{ij,j} - p_{,i} = 0 \quad (4)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (5)$$

Où f_{ext} , τ_{ij} , p et u représentent le vecteur des forces extérieures, les composantes déviatoires du tenseur des contraintes, la pression et le vecteur de vitesses respectivement. X_i et $X_{,i}$ désignent respectivement la composante et la dérivée spatiale suivant la direction i du champ X . La loi de comportement EVP utilisée dans cette étude a déjà été présentée en détail dans le chapitre précédent. Elle est sommairement rappelée ici. Il est à noter que ce modèle ne nécessite pas de régularisation du seuil de contrainte et prend en compte les effets élastiques à la fois en dessous et au-dessus du seuil de contrainte. La loi de comportement est basée sur le modèle de

Maxwell, équation 6, dans lequel la viscosité apparente η' est régie par la loi de Herschel-Bulkley, équation 7.

$$\frac{\dot{\tau}_{ij}}{2G} + \frac{\tau_{ij}}{2\eta'} = D_{ij} = D_{vij} + D_{eij} \quad (6)$$

$$\tau_{ij} = \left[\frac{\tau_0}{2D_{vII}} + K(2D_{vII})^{n-1} \right] D_{vij} = 2\eta' D_{vij} \quad (7)$$

$$D_{vII} = \left[\frac{1}{2}(D_{11}^2 + D_{22}^2 + 2D_{12}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

Sous forme tensorielle, le déviateur du tenseur des contraintes τ avec composantes τ_{ij} peut-être exprimé en fonction de η' , du module élastique G et du tenseur des taux de déformation D , ayant pour composantes D_{ij} . Dans ce modèle, D est la résultante d'une contribution visqueuse D_v et d'une contribution élastique D_e . Lorsque les contraintes de cisaillement sont supérieures à la contrainte seuil, elles s'expriment à l'aide du produit de la viscosité apparente η' avec le tenseur du taux de déformation visqueuse D_v . D'après le modèle d'Herschel-Bulkley, la viscosité apparente s'exprime à l'aide de l'indice de rhéofluidification n , de la consistance K , de la contrainte seuil τ_0 et du second invariant du tenseur des taux de déformation D_{vII} . La discrétisation des équations 4 à 6 a été présentée dans le chapitre 2.

L'adimensionalisation de l'équation de Stokes, de la loi de comportement et des conditions aux limites montre que l'écoulement considéré peut-être décrit à l'aide de plusieurs nombres sans dimension. Ils permettent d'évaluer l'influence des différents paramètres physiques mis en jeu.

Le nombre d'Oldroyd (équation 9), appelé aussi nombre de Bingham dans la littérature, est défini comme le rapport entre les effets plastiques et visqueux [100] :

$$Od = \frac{\tau_0}{K\left(\frac{U_0}{a}\right)^n} \quad (9)$$

Le nombre de Weissenberg, (équation 10) est défini comme le rapport entre les effets élastiques et visqueux comme suit :

$$Wi = \frac{K}{G}\left(\frac{U_0}{a}\right)^n \quad (10)$$

Dans cette étude, les nombres d'Oldroyd varient de 5,5 à 178. Les nombres de Weissenberg sont compris entre 10^{-8} et 10^{-4} . L'indice de rhéofluidification a été maintenu constant et fixé à $n=0,4$, valeur identique à celle du fluide utilisé dans les expériences. En somme, l'étude se situe dans le domaine de forts effets plastiques, de faibles effets élastiques avec une rhéofluidification relativement importante.

5.3.3. Méthode numérique

La méthode des éléments finis avec points d'intégration lagrangiens (MEFPIL) [42] est une approche numérique qui permet de simuler tout type de comportements de matériau dans un contexte de grande transformation. L'originalité de cette méthode se trouve dans ses capacités à modéliser les matériaux à grande transformation tout en suivant dans l'espace les propriétés du matériau, ainsi que les éventuelles variables internes. C'est une méthode hybride qui couple à la fois une approche eulérienne pour la grille de calcul aux éléments finis décrite par un ensemble de nœuds fixes dans l'espace et d'une approche lagrangienne pour un ensemble de particules mobiles dans la grille de calcul pour la discrétisation matérielle du domaine d'intérêt. Pour une description complète, se référer au chapitre 2.

Les calculs ont été menés avec un maillage régulier selon la procédure décrite dans le chapitre précédent. Un pas de temps $\Delta t_e = \Delta t = 10^{-3} s$ et un critère de convergence sur le résidu relatif 10^{-5} ont été fixés.

5.4. Résultats et discussions

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au coefficient de traînée en régime permanent puis à son évolution au cours de la relaxation. Dans un second temps, l'influence de l'état initial du fluide sur la force de traînée et sur les champs de vitesse, de contrainte et de déformation sera examinée.

5.4.1. Coefficient de traînée en régime permanent

Cette section traite de l'évolution du coefficient de traînée en régime permanent en fonction du nombre d'Oldroyd. Le coefficient de traînée calculé est comparé aux valeurs expérimentales. Le coefficient de traînée de la plaque est défini par :

$$C_d^* = \frac{F_d}{\tau_{0,a}} \quad (11)$$

Où F_d est la force de traînée exercée par le fluide sur la plaque.

La Figure 54 représente l'évolution des coefficients de traînée numériques en cercles vides et expérimentaux en disques noirs en fonction du nombre d'Oldroyd.

On observe que le coefficient de traînée diminue pour tendre vers un plateau lorsque Od tend vers les grandes valeurs. La force de traînée est alors gouvernée uniquement par la valeur du seuil d'écoulement et la géométrie de la plaque. Lorsque Od tend vers les faibles valeurs, les forces de frottement visqueuse augmentent entraînant une augmentation de la force de traînée.

Merkak et al. [105] ont montré que l'évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre d'Oldroyd peut être décrite par l'équation suivante.

$$C_d^* = C_{d,\infty}^* + \frac{\beta}{Od^m} \quad (12)$$

$C_{d,\infty}^*$ représente le coefficient de traînée lorsque les vitesses deviennent petites et s'annulent ne dépendant alors que la contrainte seuil et de la géométrie de l'obstacle.

Le terme $\frac{\beta}{Od^m}$ représente la contribution visqueuse sur le coefficient de traînée.

Les valeurs expérimentales ont été calées en fixant $m = \frac{1}{1+n} = 0,71$. Les valeurs numériques ont été calées en laissant libre la valeur de m . Les valeurs expérimentales et numériques de $C_{d,\infty}^*$ de β et de m sont regroupées dans le tableau 2.

Tableau 2: Valeurs des coefficients de l'équation 12

METHODE	$C_{d,\infty}^*$	β	m
MEFPIL	10,88	12,97	0,72
EXPERIMENTALE	9,48	14,77	0,71

Comme mentionné dans l'introduction, des chercheurs en géotechnique ont proposé plusieurs valeurs pour la résistance à l'arrachement de plaque dans un milieu parfaitement plastique avec différentes approches. Merifield et al [94] a établi un encadrement entre 11,16 et 11,86 et pour Rowe (1978) entre 11,42 et 10,28. Ces valeurs sont proches de la valeur obtenue avec la MEFPIIL (Figure 54). Notons qu'une valeur de $C_{d,\infty}^* = 10,41$ a été obtenue (Chapitre 4) avec la MEFPIIL pour un fluide de Bingham ($n=1$) et ici 10,88 (tableau 2) pour $n=0,4$. L'indice de consistance (n) a une très faible influence sur la force de traînée quand les effets plastiques deviennent

dominants devant les effets visqueux.

Le tableau 2 montre un bon accord entre les valeurs numériques et expérimentales avec des écarts inférieurs à 14% compte tenu des incertitudes de mesures expérimentales chiffrées environs à 17 %. L'approche numérique ayant tendance à surévaluer les valeurs de la traînée pour les grands Od . On note que l'écart expérimental/numérique est faible lorsque les effets visqueux sont les plus élevés. On peut penser que les champs de contrainte et cinématique sont principalement gouvernés par les effets visqueux et donc loin de ceux imposés près de la transition solide/liquide. L'écart devient plus important lorsque les effets de seuils deviennent prépondérants (Figure 54). Cet écart peut également provenir de la modélisation de la transition solide/liquide utilisée car la précision de la modélisation de ce changement de phase prend ici toute son importance. Celle utilisée dans la présente modélisation est peut-être encore « trop rigide ».

Du fait de leur statut de fluide à seuil modèle, depuis une date récente, le comportement des gels de Carbopol en dessous du seuil fait l'objet d'un grand intérêt. Des études approfondies ont montré que la transition solide liquide dans les gels de Carbopol était sophistiquée [124],[131],[132],[11],[133],[134].

On notera, comme présenté dans le chapitre 4, que la force de traînée est presque entièrement gouvernée par les forces de pression à l'avant et à l'arrière de la plaque. La composante de la force de traînée créée par les composantes des contraintes normales à la plaque $\tau_{x_1x_1}$ et $\tau_{x_2x_2}$ est d'intensité mineure.

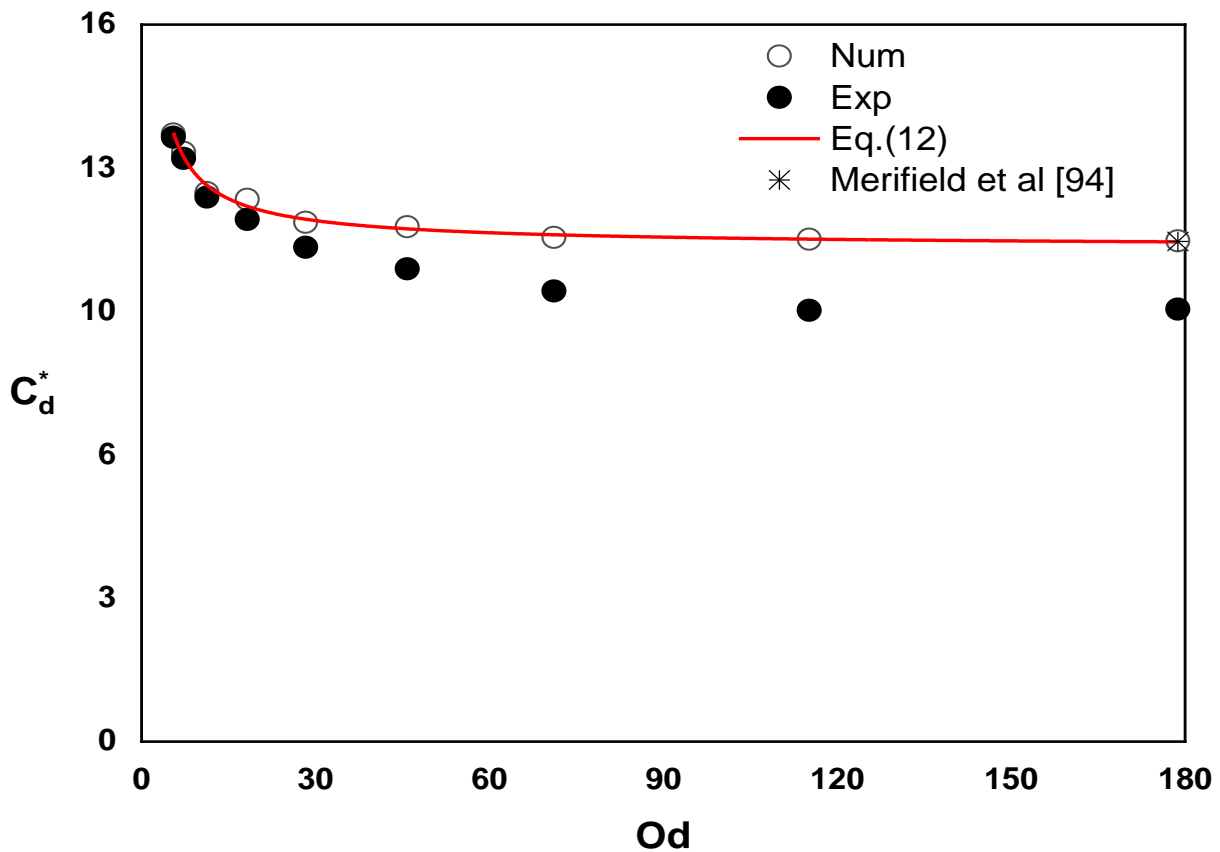


Figure 54: Evolution du coefficient de traînée en régime permanent en fonction du nombre d'Oldroyd

5.4.2. Régime de relaxation

Dans un premier temps, le régime de relaxation des gels est examiné. Dans un second temps, l'influence de l'état initial sur le coefficient de traînée est analysée. Expérimentalement comme montré sur la Figure 52, un créneau de vitesse a été imposé. Numériquement, il a été fait de même avec deux créneaux de vitesse successifs comme montré sur Figure 55. La Figure 55 représente l'évolution du coefficient de traînée calculé numériquement en fonction d'un temps adimensionnel $t^* = t/\lambda$, où λ désigne le temps de relaxation du matériau défini par $\lambda = (k/G)^{1/n}$. Le matériau utilisé dans les mesures de forces de traînée possède un temps de relaxation $\lambda = 1,4 \cdot 10^{-3}$ s.

Cette courbe a été obtenue en imposant une vitesse d'écoulement constante jusqu'à ce que le régime permanent soit atteint. Pour ce calcul, l'état de contrainte initial est uniformément nul dans tout le domaine de calcul. L'écoulement est ensuite stoppé et on observe alors une première relaxation des contraintes vers une contrainte résiduelle qui se traduit par un plateau pour la force de traînée et donc pour C_d^* .

Pour le premier créneau de vitesse, l'état de contrainte initial est uniformément nul dans tout le domaine de calcul. La force de traînée part de zéro. Quand l'écoulement est stoppé après le régime permanent on observe alors une relaxation de la force de traînée vers un niveau résiduel traduisant une relaxation du champ de contrainte vers des niveaux non nuls.

A la fin de cette première relaxation, on impose alors un nouveau créneau de vitesse identique au premier. L'état de contrainte initial n'est alors plus uniformément nul, mais correspond à celui obtenu à l'issue de la première relaxation. De nouveau, lorsque on stoppe la vitesse une seconde relaxation de la force de traînée est observée. On notera que le 1^{er} régime permanent et 1^{er} régime de relaxation correspond à « l'état initial homogénéisé du gel ». Le 2nd régime permanent et 2nd régime de relaxation correspond à « l'état initial non homogénéisé du gel » (Figure 55). Ce protocole permet de mettre en évidence l'influence de l'état de contrainte initiale sur la force de traînée mesurée en régime permanent. Numériquement, deux cas ont été considérés. Le premier correspond à $Od = 11,5$ et $Wi = 1,84 \cdot 10^{-2}$ et le dans le second cas, $Od = 115,2$ et $Wi = 1,84 \cdot 10^{-3}$.

Les valeurs successives de Cd^* calculées en régime permanent et en relaxation sont reportées dans le tableau 3.

Tableau 3 : Valeurs de Cd^* calculées en régime permanent et de relaxation successifs.

	1 ^{er} régime permanent	1 ^{er} régime de relaxation	2 nd régime permanent	2 nd régime de relaxation
Cas 1 : $Od=11,5$ $Wi= 0,018$	12,31	11,25	12,52	11,35
Cas 2 : $Od=115,2$ $Wi=0,0018$	11,51	11,3	11,93	11,73

La Figure 56 montre l'évolution du coefficient de traînée en régime permanent (Fig. 56b) et de relaxation (Fig. 56a) en fonction de Od . Les mesures expérimentales sont comparées avec les résultats numériques. L'analyse de l'ensemble de ces résultats fait apparaître les points suivants. Comme on a un fluide EVP, il n'y a pas de relaxation sous le seuil, donc les points de matière en-dessous du seuil de contrainte restent dans leur état de contrainte et ceux au-dessus du seuil se relaxent pour revenir vers le seuil. Les résultats montrent que l'écart entre le niveau de force entre le régime

permanent et celui après relaxation diminue lorsque la vitesse de cisaillement diminue. En diminuant la vitesse de cisaillement, on diminue la composante visqueuse de la déformation, on a donc un état de contrainte au-delà du seuil qui diminue. A cause de l'effet du seuil, la contrainte se fait uniquement sur la partie au-delà du seuil, puisqu'après le matériau devient élastique, i.e. sans relaxation, par conséquent l'écart entre le niveau de contrainte sous cisaillement et après relaxation diminue lorsque la vitesse de cisaillement diminue. La Figure 56 montre que le niveau de relaxation est indépendant de Od et donc de la vitesse U_0 qui a été imposée. Ceci est aussi une marque que les effets thixotropes sont négligeables. En considérant une évaluation du taux de cisaillement autour de la plaque comme U_0/a , pour les essais montrés le taux de cisaillement imposé s'étale entre 10^{-4} et 10^{-1} s^{-1} environ. Comme le montre la courbe d'écoulement en cisaillement simple obtenue en rhéométrie (Figure 46) les niveaux des contraintes de cisaillement sont proches du seuil d'écoulement pour ce domaine de taux de cisaillement. Numériquement, on note une différence entre le régime 1 et 2 pour $Od=115$ qui n'est pas observée pour $Od=11,5$. L'effet de l'état initial est observé plus fortement lorsque l'état de contrainte est proche de celui défini par le critère de Von Mises. Expérimentalement, on enregistre un effet de l'état initial plus accentué par rapport aux résultats numériques. Les écarts entre le régime 1 et 2 sont plus grands expérimentalement. Ces écarts sont plus importants pour les Od grands.

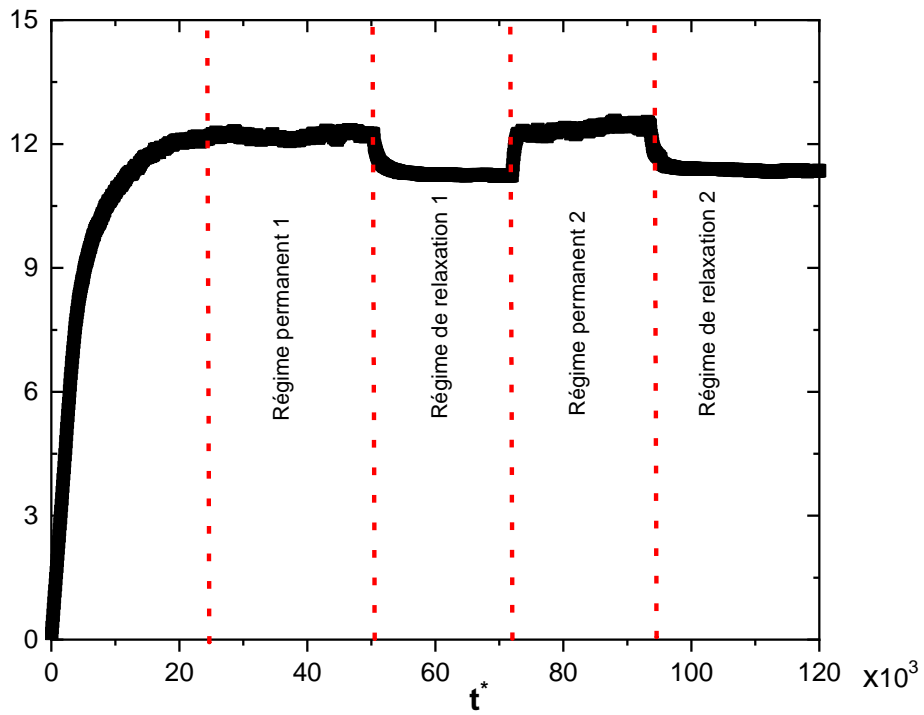


Figure 55: Evolution du coefficient de traînée aux différents régimes permanents et de relaxations en fonction du temps adimensionnel t^* à $Od = 11,5$

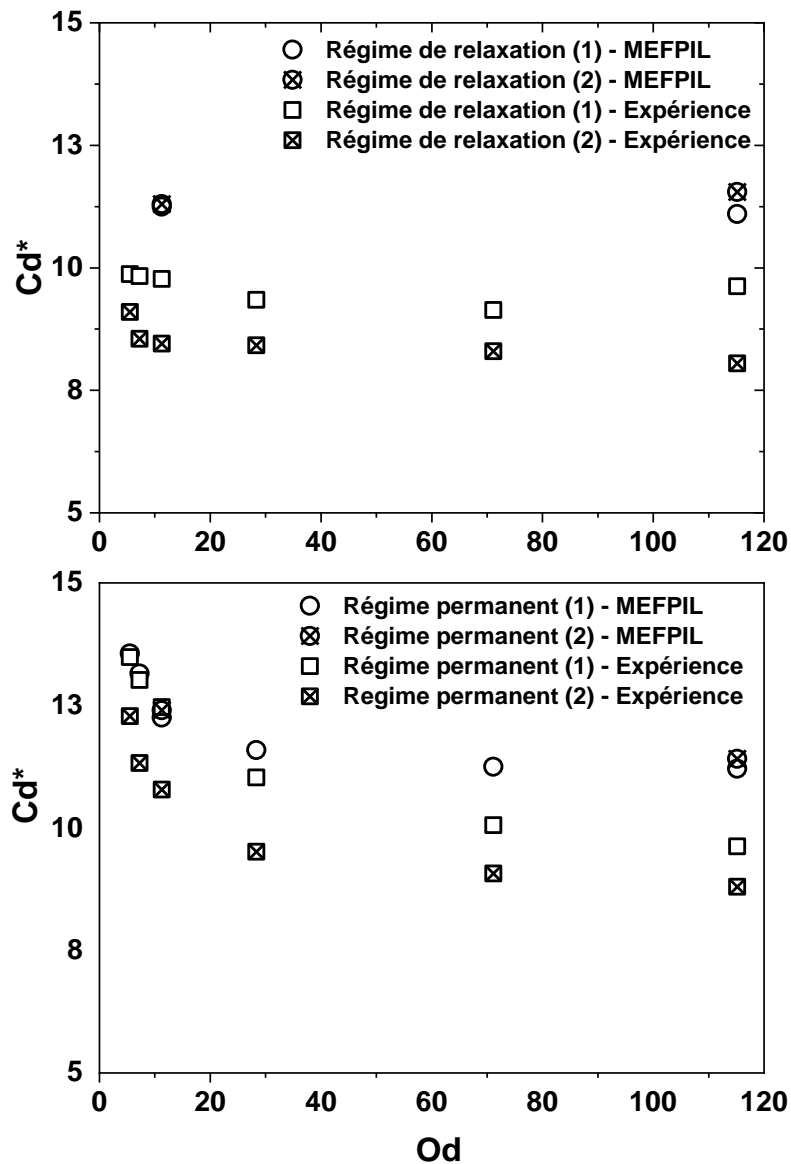


Figure 56: Evolution du coefficient de traînée en fonction de Od pour le régime de relaxation (a) et pour le régime permanent (b)

Il apparait donc en résumé que l'état de contrainte initial aurait une certaine influence sur le coefficient de traînée en particulier lorsque la vitesse devient de plus en plus faible. Dans ce domaine, les niveaux de contrainte sont proches du début de l'écoulement plastique défini par le critère de Von Mises et par conséquent sont donc plus sensibles à toute variation imposée par les conditions initiales dont l'état de contrainte à la limite de l'écoulement plastique.

5.4.3. Champs de contraintes et champs cinématiques

Ce paragraphe analyse les champs de contrainte et les champs cinématiques de l'écoulement obtenus numériquement correspondant à l'étude des coefficients de traînée. Tout d'abord, examinons un des effets importants du seuil d'écoulement sur l'évolution de zones non seuillées et seuillées. Le deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoires adimensionnalisées par la contrainte seuil : $J_{2SiG} = \frac{\tau_{II}}{\tau_0}$ permet de définir la limite entre ces deux zones. Rappelons que $\tau_{II} = \left[\frac{1}{2} (\tau_{X_1X_1}^2 + \tau_{X_2X_2}^2 + 2\tau_{X_1X_2}^2) \right]^{\frac{1}{2}}$. Les zones seuillées correspondent à $J_{2SiG} > 1$. Dans ces zones, on observe un écoulement avec des déformations visqueuses et plastiques. Les zones seuillées apparaissent en blanc sur les cartes présentées sur la figure 57. Les zones où $J_{2SiG} < 1$ sont nommées zones non seuillées. Dans ces zones l'état de contrainte correspond à un état élastique sans écoulement plastique.

La Figure 57 fait apparaître deux types de zones non seuillées. Tout d'abord des zones non seuillées à l'amont et à l'aval collées à la plaque et qui sont détaillées sur la Figure 58. Le second type est la zone non seuillée en mouvement. Elles sont situées loin de la plaque, autour d'une zone seuillée en écoulement plastique avec les déformations visqueuses (en blanc sur la Figure 57). Dans ces zones non seuillées, les déformations sont élastiques.

Plusieurs constatations peuvent être faites. Tout d'abord quand les vitesses diminuent et que donc Od augmente l'écoulement se resserre autour de la plaque.

Pour les deux Od considérés, on note une dissymétrie des zones non seuillées en amont et en aval de la plaque provoqués par l'histoire des déformations élastiques différentes entre l'amont et l'aval. Une modélisation numérique purement viscoplastique prédit une symétrie entre l'amont et l'aval. Cette dissymétrie a été observée expérimentalement pour l'écoulement de gel de Carbopol autour de divers obstacles. Par exemple, la Figure 59 montre les zones seuillées à l'amont et à l'aval d'une plaque circulaire perpendiculaire à l'écoulement d'un gel de Carbopol [12]. On constate également que la zone seuillée à l'amont est plus étendue que celle à l'aval. Cette dissymétrie sera discutée également lors de l'étude des champs de vitesse.

L'état de contrainte initial apparaît comme ayant une influence sur la morphologie des zones seuillées. Comme discuté plus haut à propos du coefficient de traînée, cette

influence est plus sensible pour les Od grands. Cette influence peut se voir notamment sur les zones seuillées collées à la plaque (Figure 58). L'état initial non « homogénéisé » du gel tend à augmenter les zones seuillées qui par ailleurs deviennent plus étendues.

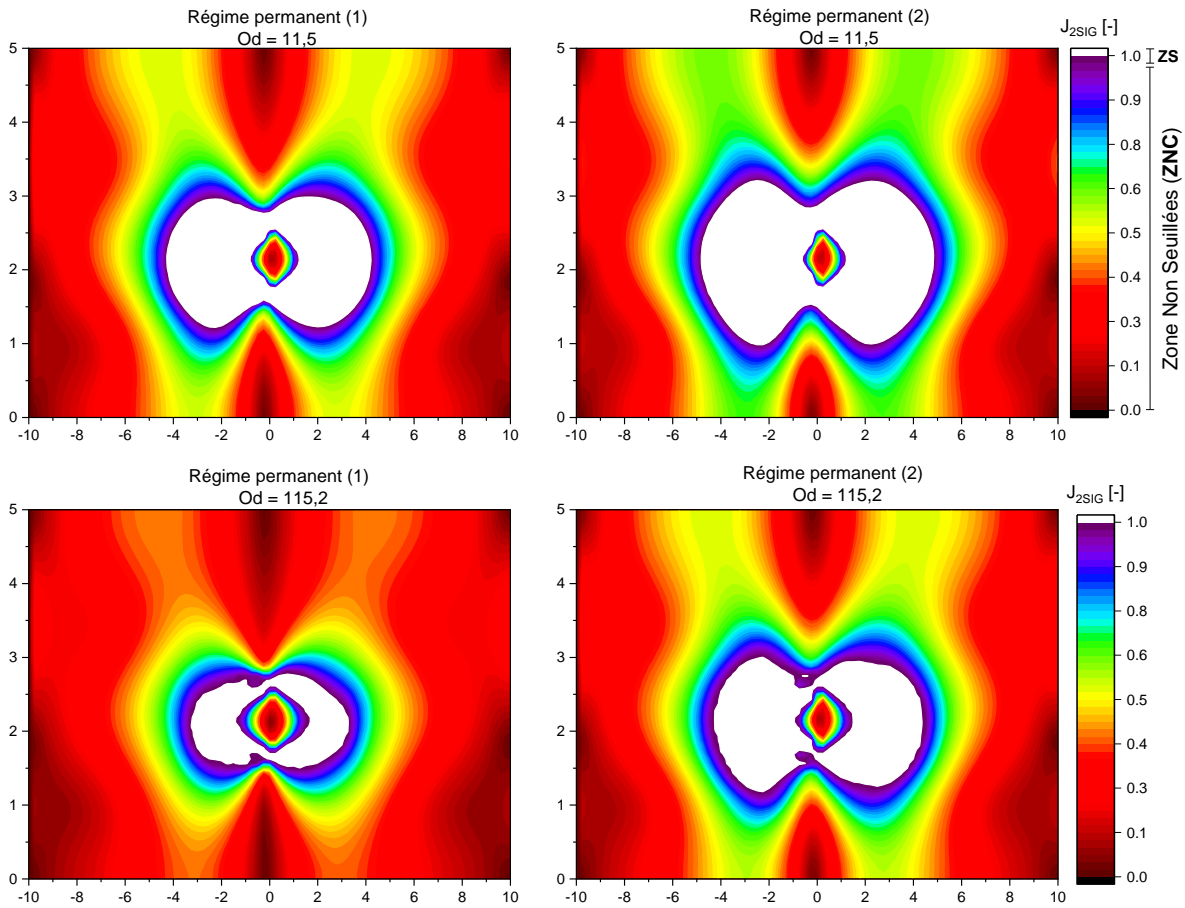


Figure 57: Champs du deuxième invariant du tenseur déviatoire des contraintes, les zones en blanc sont les zones seuillées et en couleurs les zones non seuillées.

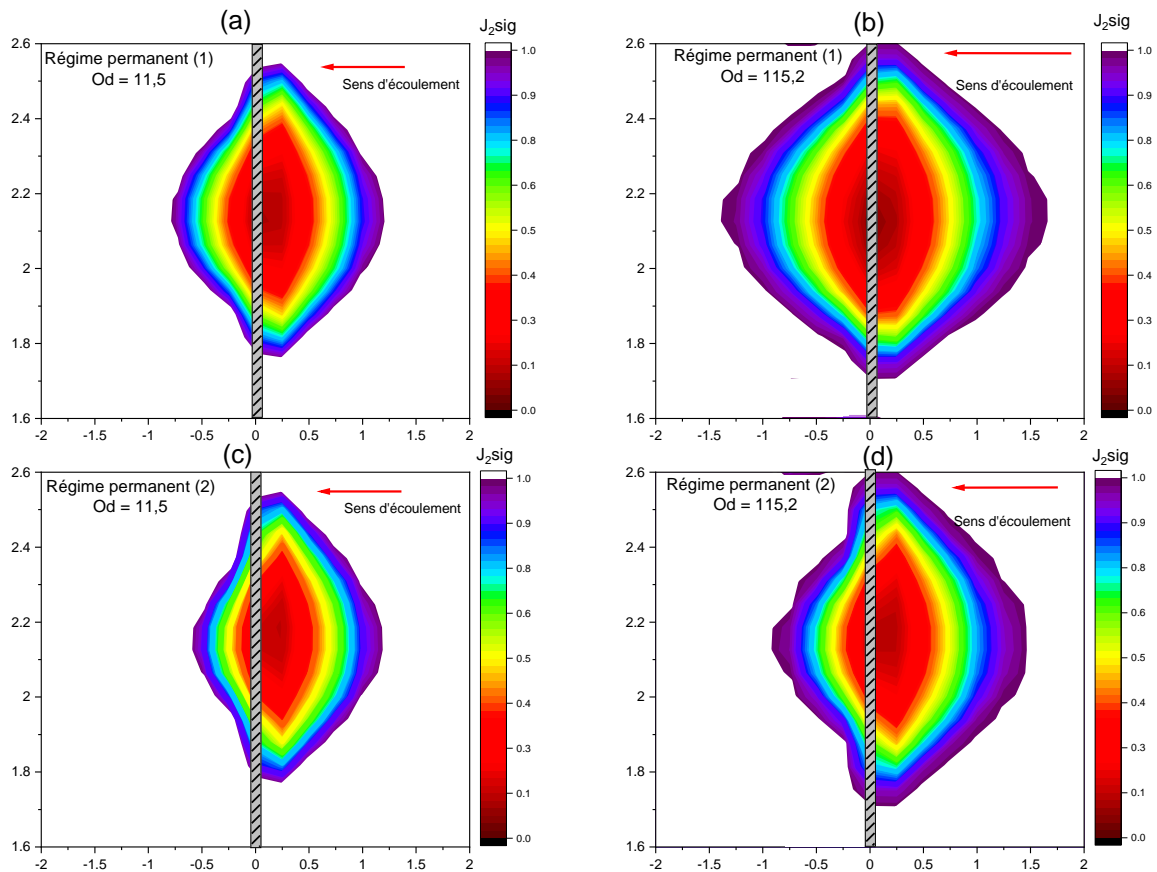


Figure 58: Champs du deuxième invariant du tenseur déviatoire des contraintes au voisinage de la plaque

Cette dissymétrie des zones non seuillées collées à la plaque est confirmée par l'étude de la répartition du champ de vitesse adimensionnelle montrée sur la Figure 60 pour $Od = 11,5$. On remarque que près de la face amont, il y a une zone plus étendue de faible vitesse comparativement à la face aval. Ces zones correspondent aux régions non seuillées collées à la plaque. Les vitesses sont maximales au niveau des extrémités de l'obstacle dans la zone de contournement. Rappelons qu'une prévision numérique purement viscoplastique aurait prévu une totale symétrie du champ de vitesse.

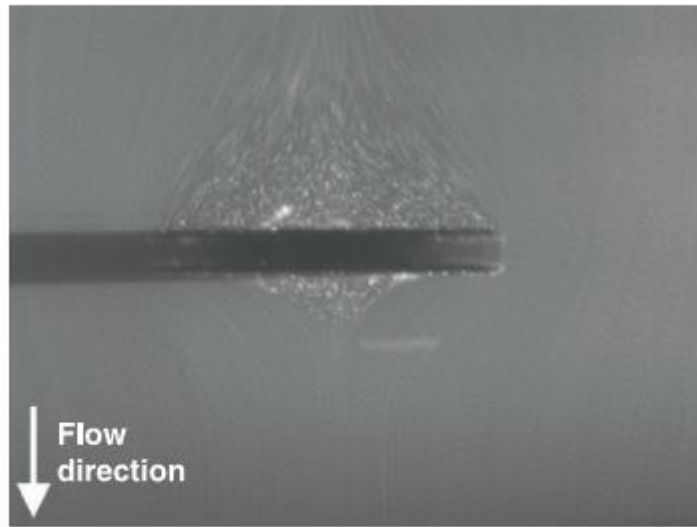


Figure 59: Zones seuillées à l'amont et à l'aval d'une plaque circulaire. $Od=11$ calculé sur le diamètre de la plaque. Fluide : gel de Carbopol [12]

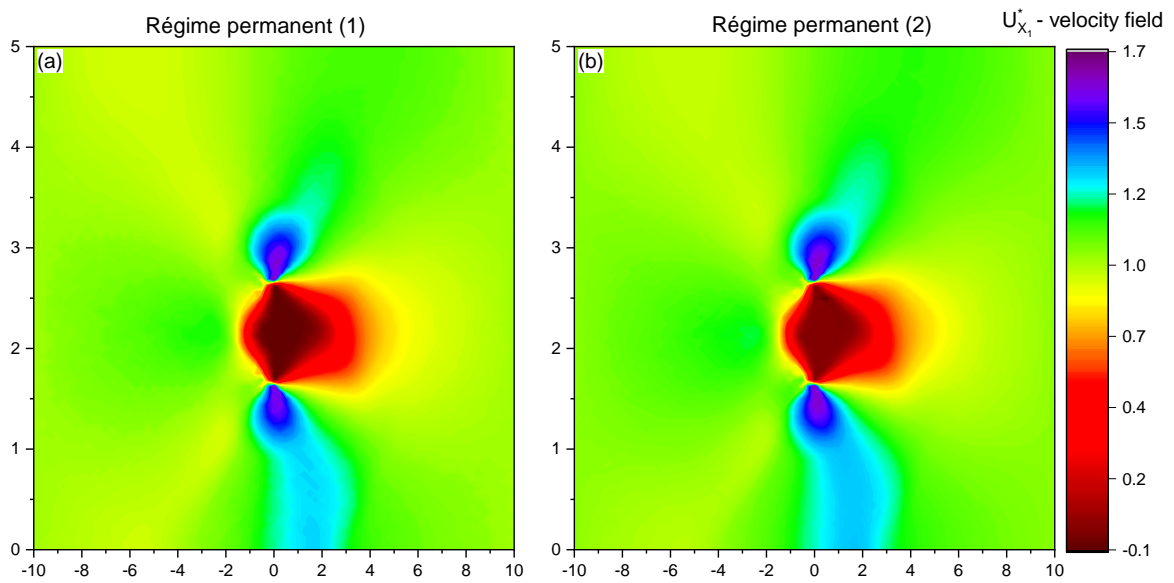


Figure 60: Champs de la norme de la vitesse adimensionnée pour $Od = 11,5$, en régime permanent 1 (a) et régime permanent 2 (b)

L'analyse du profil de vitesse sur l'axe confirme ces observations. La Figure 60b confirme que le champ de vitesse est influencé par la présence de la plaque sur une distance plus grande à l'amont qu'à l'aval de la plaque. A l'aval, une région de flux inversé, souvent appelé phénomène de sillage négatif [135] est observée. L'influence plus forte de l'élasticité pour $Od=11,5$ forte fait apparaître un profil de vitesse avec une survitesse à l'aval. Ces phénomènes ont été observés expérimentalement dans le cas des écoulements de gels de Carbopol autour de plaque circulaire [12] sphère [98] et cylindre [136]. Par exemple, la Figure 61 montre la vitesse axiale à l'amont et à l'aval d'une plaque circulaire [12] pour deux nombres d'Oldroyd (calculés sur le diamètre de la plaque). La Figure 62 montre une similitude de comportement entre les prédictions numériques et les résultats expérimentaux.

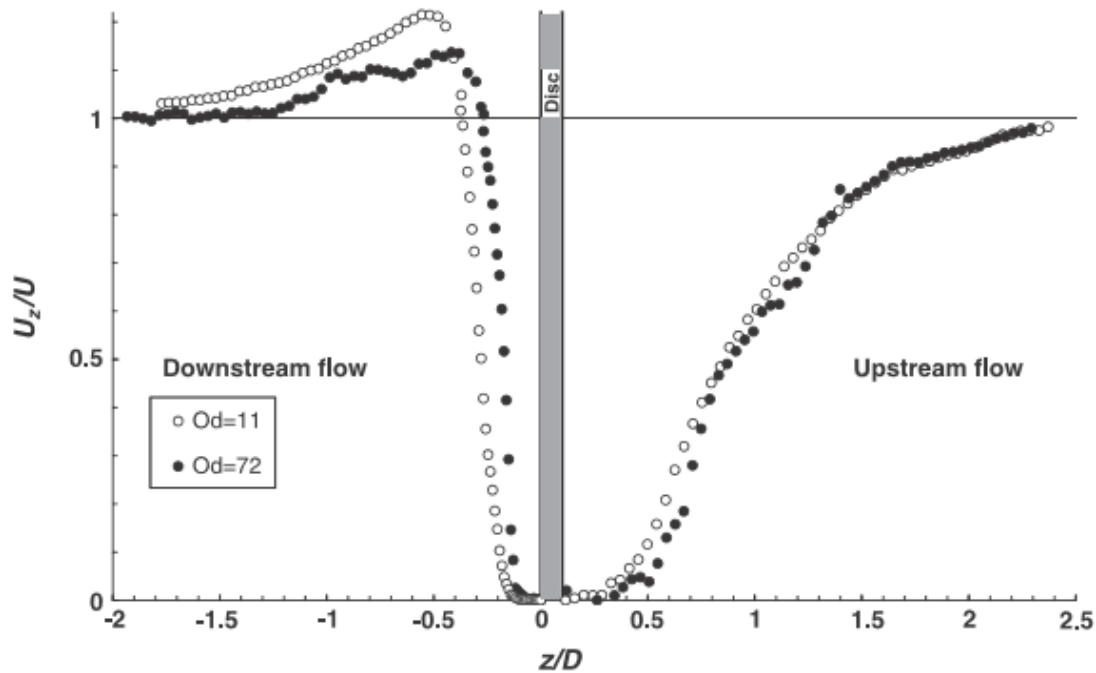


Figure 61: Vitesse axiale adimensionnée pour une plaque circulaire perpendiculaire à l'écoulement d'un fluide à seuil à deux nombres d'Oldroyd [47]. Fluide : gel de Carbopol [12]

L'influence de l'état initial est perceptible sur le profil de vitesse axiale Figure 62. Comme pour les zones non seuillées et le coefficient de traînée, pour $Od=11.5$. On note peu de différence entre le 1^{er} régime et le 2nd régime permanent lorsque les effets visqueux sont particulièrement importants. Par contre, lorsque on se rapproche de la limite d'écoulement et que donc la composante visqueuse diminue ($Od=115$) l'influence de l'état initial devient significative. On constate que l'influence de l'état

initial est plus visible sur les champs cinématique et les zones seuillées/non seuillées que sur le coefficient de traînée. Ceci n'est pas surprenant car la force de traînée est principalement gouvernée par la pression.

La contribution des contraintes ($\tau_{X_1X_2}$) issues de la partie déviatoire du tenseur des contraintes joue un rôle secondaire sur la traînée.

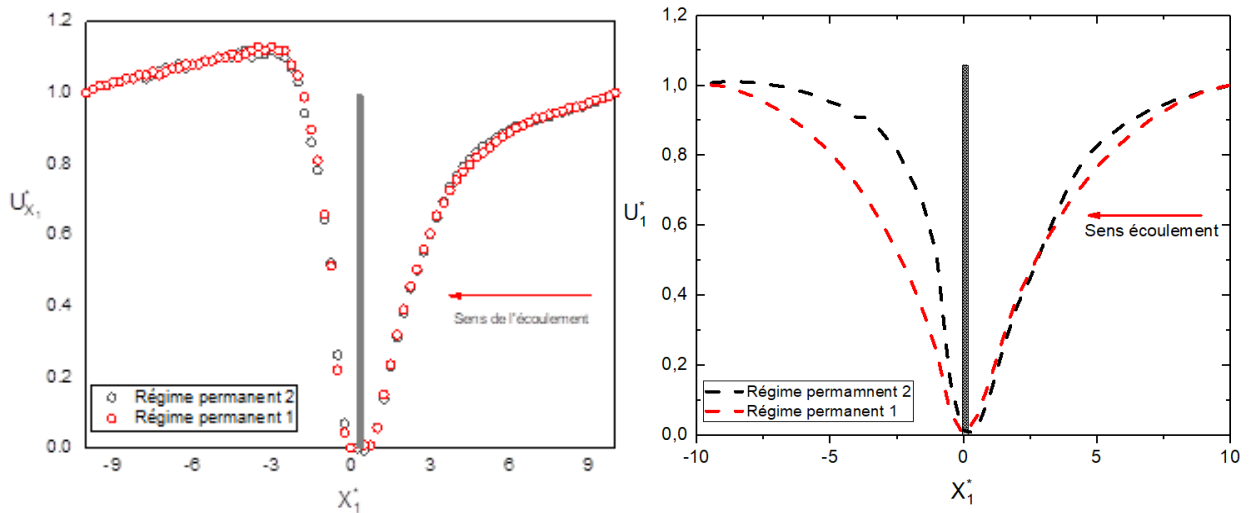


Figure 62: Vitesse axiale adimensionnée, $Od = 11,5$ (à gauche) et $Od=115$ (à droite)

La Figure 63 montre la répartition de la déformation totale. Rappelons que dans les zones non seuillées montrées sur la Figure 57, la déformation est élastique. Et dans les zones seuillées la déformation est la somme de déformations élastiques et visqueuses. La déformation dans le fluide augmente au fur et à mesure qu'il contourne l'obstacle. En régime permanent, la longueur du sillage en déformation correspond environ à la distance parcourue par la plaque. On notera que les déformations ne sont pas nulles à la fin de la phase de relaxation correspondant au fait que le coefficient de traînée (et donc les contraintes) ne relaxent pas entièrement, mais tendent vers des valeurs constantes non nulles. Dans l'état relaxé, la déformation totale correspond à la déformation élastique.

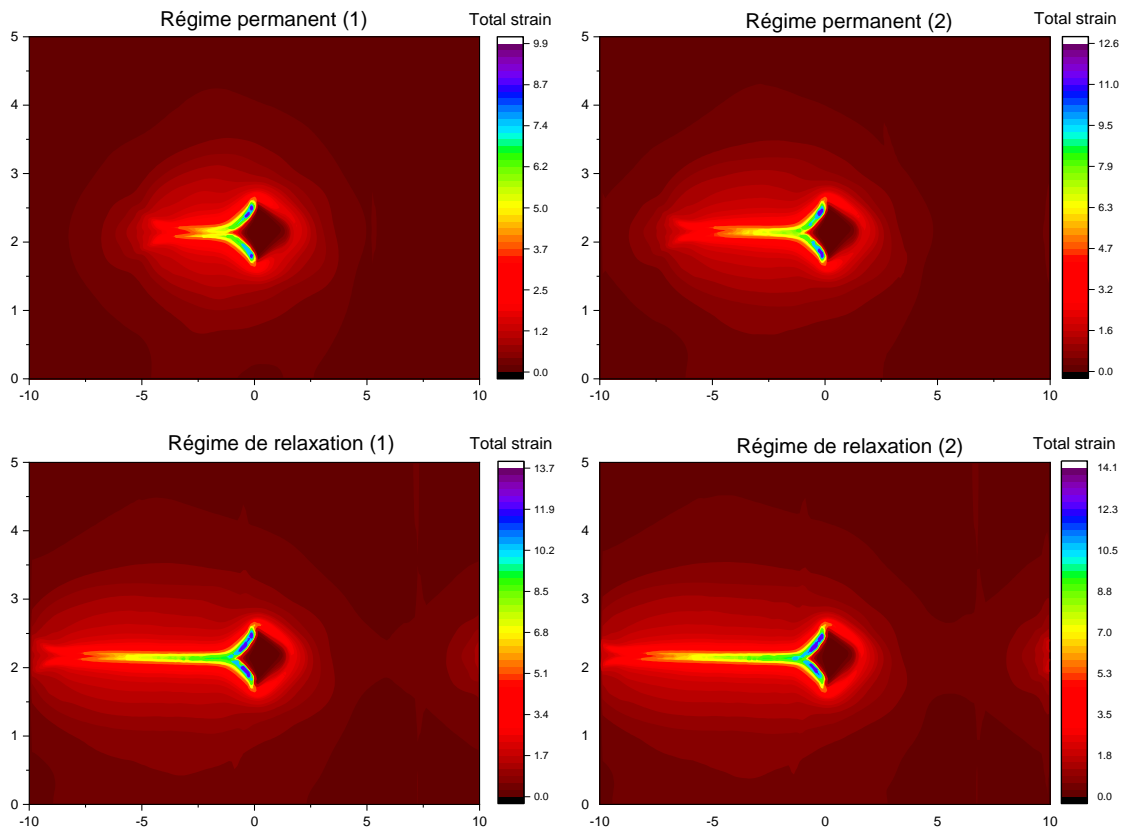


Figure 63: Champs de déformation totale pour $Od = 11,5$

Pour approfondir l'analyse des champs de contraintes, la figure 64 fournit les champs des contraintes de cisaillement en régime permanent pour $Od=11,5$. Ces figures confirment que globalement les contraintes de cisaillements sont dans les mêmes ordres de grandeur pour les cas en régime permanent 1 (Figure 64a) et en régime permanent 2 (Figure 64b), montrant ainsi que l'état initial n'a guère d'influence. Les plus fortes valeurs sont au voisinage des arêtes de la plaque comme pour les déformations totales (Figure 63). Ces valeurs de la contrainte de cisaillement sont d'autant plus faibles qu'on s'éloigne davantage de l'obstacle (Figure 64).

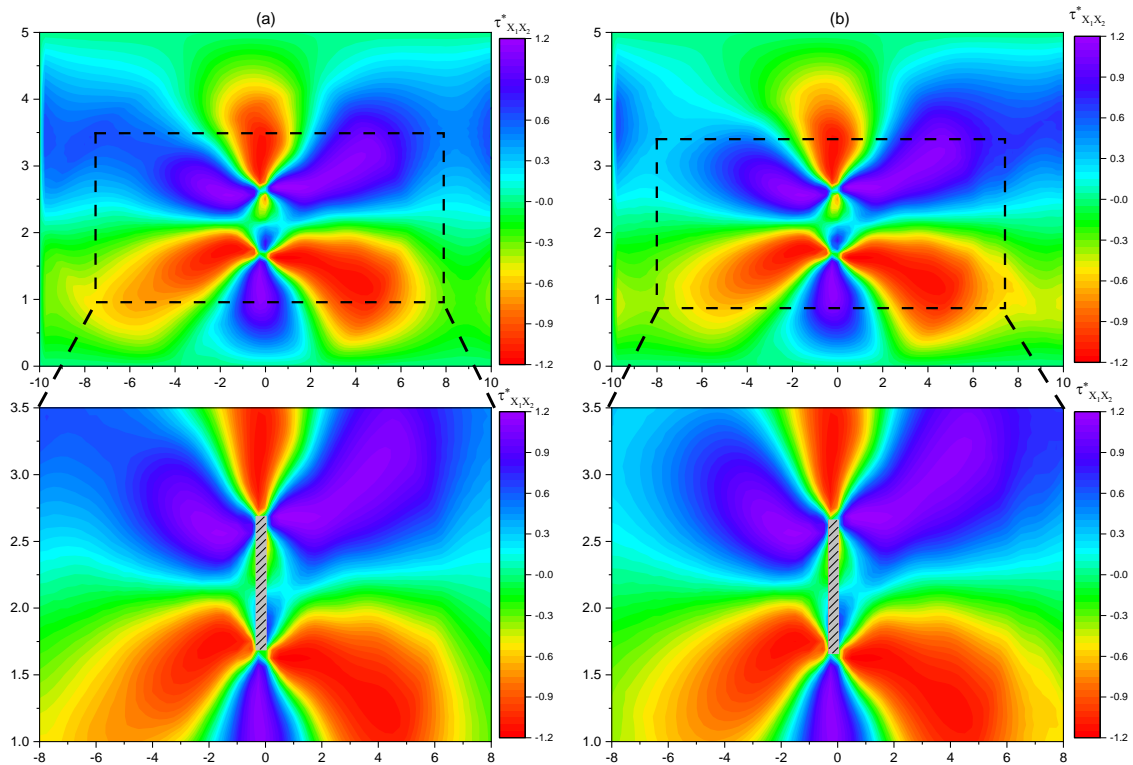


Figure 64 : champs des contraintes de cisaillement en régime permanent 1 : (a) et en régime permanent 2 (b) pour $Od=11,5$

La figure 65 montre les répartitions des deux composantes des contraintes normales ($\tau^*_{X_1 X_1}$ et $\tau^*_{X_2 X_2}$) en régime permanent et en fin de relaxation pour $Od=11,5$. On constate que les deux composantes des contraintes normales ($\tau^*_{X_1 X_1}$ et $\tau^*_{X_2 X_2}$) sont en valeurs absolues maximales sur la face avant et arrière de la plaque. La contrainte $\tau^*_{X_1 X_1}$ a un niveau plus élevé que $\tau^*_{X_2 X_2}$. Lorsque la vitesse est annulée, le matériau relaxe vers un état de contrainte résiduel d'intensité légèrement inférieure à celui du régime permanent.

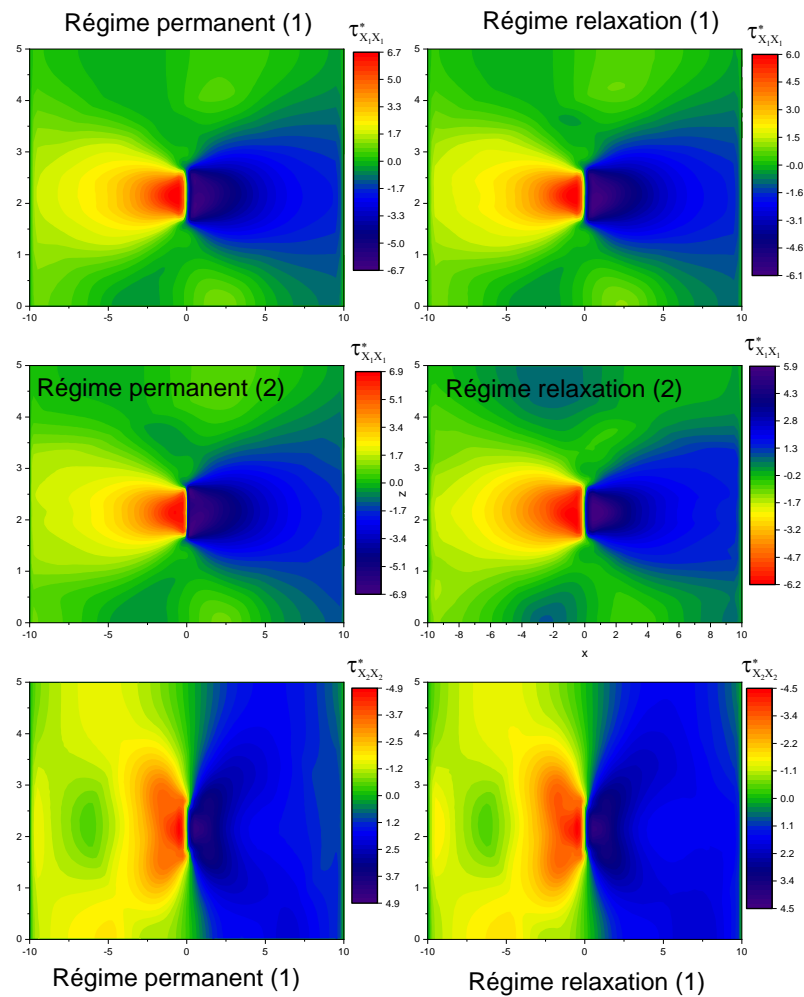


Figure 65: Champs adimensionnel de la composante des contraintes normales ($\tau^*_{X_1X_1}$ et $\tau^*_{X_2X_2}$) en régime permanent et en fin de relaxation pour $Od=11,5$

La figure 66 montre que le comportement élongationnel des gels de Carbopol est défini à partir de la première différence de contrainte normale $N1^* = \frac{\tau_{X_1X_1} - \tau_{X_2X_2}}{\tau_0}$ à $Od=11,5$.

On peut distinguer deux zones qui apparaissent avec $N1^*$ positif et négatif respectivement en amont où il y a compression du fluide et à l'aval où le fluide est étiré.

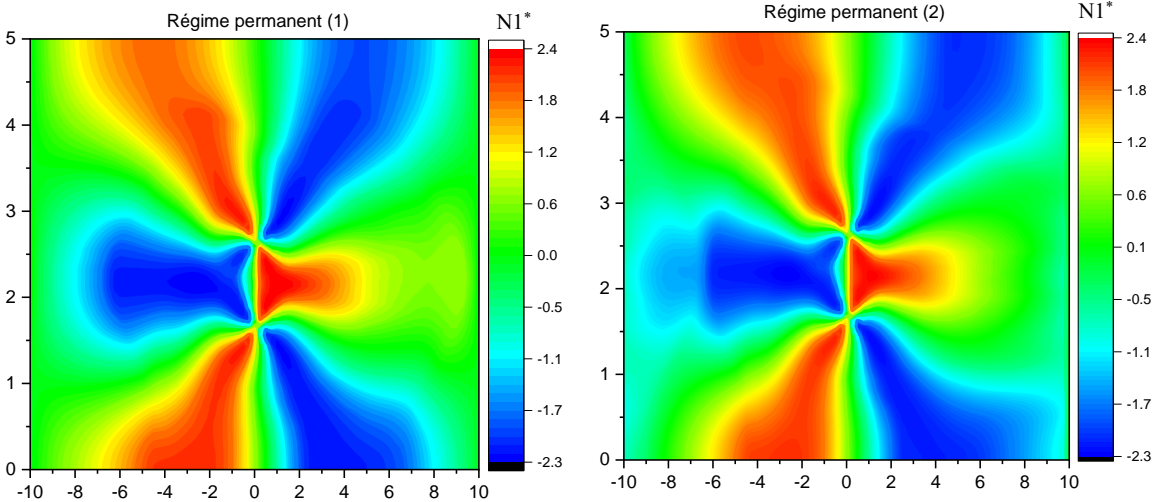


Figure 66: champs adimensionnels de la première différence de contrainte normale $N1^*$ à $Od = 11,5$

5.5. Conclusion

L'écoulement d'un fluide élasto-viscoplastique autour d'une plaque perpendiculaire à l'écoulement a été étudié numériquement et expérimentalement en mettant en œuvre un modèle élasto-viscoplastique. Les gels élasto-viscoplastique de Carbopol gel 940 ont été choisis expérimentalement comme fluide modèle.

Dans la partie expérimentale, l'évolution du coefficient de traînée en régime permanent et en relaxation en fonction du rapport entre les effets de seuil et les effets visqueuse a été analysée avec un état initial différent du matériau.

L'évaluation du coefficient de traînée en régime permanent et de relaxation, avec et sans modification de l'état initial en fonction de Od , montre un bon accord entre les résultats expérimentaux et numériques.

L'étude numérique des champs cinématique, de déformation et contrainte viennent à l'appui des constatations expérimentales pour les écoulements autour de la plaque mais aussi pour d'autres formes d'obstacles.

CHAPITRE 6 : Conclusions générales et perspectives

6.1. Conclusion générale

Ces travaux de recherche ont été menés dans le cadre d'une collaboration scientifique entre le Laboratoire Sol, Solides, Structures et Risques (Laboratoire 3SR) et le Laboratoire Rhéologie et Procédés (LRP). Le Laboratoire 3SR y a apporté compétences en modélisation numérique des écoulements des matériaux élasto-viscoplastiques par la méthode MEFPIL via le code Ellipsis et le LRP ses compétences sur la rhéologie des fluides à seuil et sur la mécanique des fluides expérimentales sur ces fluides. Ce projet a été soutenu par le CNRS en attribuant une bourse de thèse. Les échanges entre les chercheurs concernés ont en effet montré qu'une synergie pouvait naître de la collaboration entre l'approche « mécanique des solides » (3SR) des matériaux élasto-plastiques et l'approche « mécanique des fluides » (LRP) des fluides visco-plastiques. Cette collaboration a permis de faire dialoguer des numériciens et des expérimentateurs, ainsi qu'établir un langage commun. Les ambitions de cette collaboration sont de mieux comprendre la structure des écoulements de fluides élasto-viscoplastiques et, en particulier, les paramètres influant sur la morphologie de l'écoulement et sur les efforts appliqués, afin de démontrer que cette approche originale (MEFPIL) permet de mieux comprendre et de prévoir un écoulement complexe, pour optimiser les paramètres dans un contexte applicatif/industriel.

Nous avons choisi deux configurations classiques de la mécanique des fluides pour confronter approche numérique et comparaison expérimentale des écoulements de fluides élasto-viscoplastiques : la convection de Rayleigh-Bénard, d'une part, et les écoulements autour d'un obstacle, d'autre part.

La modélisation numérique mise en œuvre, dans cette thèse, repose sur la méthode des éléments finis avec points d'intégration lagrangiens (MEFPIL). Elle est basée sur la méthode des éléments finis qui permet de résoudre les équations de la mécanique des milieux continus après une discrétisation spatiale du domaine d'étude. Elle permet de simuler tout type de comportements de matériau dans un contexte de grande transformation. La loi de comportement élasto-viscoplastique utilisée est une association du modèle de Herschel-Bulkley et du modèle de Maxwell.

Dans un premier temps, les techniques et approches numériques de modélisation existantes pour traiter la transition solide - liquide dans les fluides à seuil ont été analysées. Elle concerne leurs applications, leurs développements récents et leurs

limites pour situer l'intérêt de la MEPFIL mise en œuvre dans cette thèse. Cela a permis de distinguer les modèles viscoplastiques régularisés aux modèles EVP. Parmi elles, la plus couramment employée est la régularisation de Papanastasiou.

Ce dernier a proposé une formulation basée sur une régularisation exponentielle comprenant un paramètre m dont la dimension est celle d'un temps.

Cette régularisation de la loi de comportement a pour avantage de faciliter les calculs, mais ne rend pas compte du comportement élasto-viscoplastique et peut conduire à des solutions numériques inexactes du champ de contraintes. D'autres approches récentes telles que la méthode du lagrangien augmenté, de Lattice Boltzmann ou d'autres techniques numériques ont vu le jour. Le but commun de ces méthodes numériques est de résoudre un problème singulier. Ainsi, toutes ces méthodes font recours à la régularisation. Cette dernière peut se faire à plusieurs étapes et de différente manière. Soit c'est le modèle constitutif qui est régularisé si c'est lui qui est singulier (c'est le cas lorsque la condition du seuil est écrite avec une condition « si » sur un indicateur de contrainte, par exemple). La physique des matériaux n'étant pas modifiable, on cherche au mieux à la modéliser. En observant les données expérimentales, les chercheurs ont eu l'idée d'écrire le modèle constitutif avec un seuil « fort » et une condition « si ». Cette écriture singulière doit être régularisée dans la plupart des codes. Avec la MEPFIL, on peut traiter la singularité proprement mais la comparaison avec l'expérimental nous fait dire que le modèle singulier est peut-être trop strict et qu'en vérité (la physique) le seuil n'est peut-être pas aussi strict. Donc, on pourrait réécrire un modèle constitutif avec une certaine continuité et il pourrait alors être traité « classiquement ».

Les effets de la plasticité et de l'élasticité sur la convection Rayleigh-Bénard d'un fluide élasto-viscoplastique en utilisant la MEPFIL ont été analysés et discutés.

Pour un fluide purement viscoplastique, donc sans élasticité, nos résultats révèlent que le nombre de Bingham a un effet stabilisateur puisque le nombre de Nusselt diminue lorsque le Bn augmente. Au-dessus d'une valeur critique du nombre de Bingham ($Bn_c=1,7$), la convection ne se déclenche pas et le transfert de chaleur est purement conductif ($Nu = 1$). Par ailleurs, près des parois, le gradient de vitesse reste constant, quelle que soit la valeur de Bn dans l'intervalle $[0, Bn_c]$, y compris dans le cas newtonien ($Bn=0$). Une diminution de la valeur maximale de la norme de la vitesse est observée lorsque la valeur de Bn augmente en-deçà de sa valeur critique, cela se traduit par une diminution de l'intensité de la convection. De plus, au milieu de la cavité,

le gradient de vitesse diminue également lorsque la valeur de Bn augmente. Ceci est le résultat de la formation de zones non cisillées. Ces tendances suivent la diminution de la convection pour des valeurs de Bn croissantes. Lorsque $Bn_c \geq 1.7$, nous retrouvons un état stationnaire dans l'ensemble de la cavité. Nos résultats sont en accord avec les travaux précédents de Turan et al. [57] et montre la capacité de notre approche numérique à traiter un tel problème.

Quant aux effets élastiques quantifiés par le nombre de Weissenberg (Wi), les résultats montrent que lorsque la valeur Wi augmente à Bn fixé, le domaine de convection s'agrandit et met en évidence un effet déstabilisateur de l'élasticité dans la gamme de notre étude. C'est la conséquence d'une augmentation de la déformation élastique, et donc du niveau de contrainte dans le matériau. L'augmentation de Wi induit une augmentation de l'intensité de la convection ainsi que du transfert de chaleur via le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu}_1 . La taille des zones non cisillées diminue puisque les contraintes peuvent atteindre la contrainte seuil plus facilement, favorisant ainsi l'augmentation des régions cisillées. De plus, on observe une augmentation du deuxième invariant du tenseur des contraintes au centre de la cavité avec l'augmentation de Wi . Cependant, on remarque que la première différence de contrainte normale $N1^*$ est principalement responsable de la forme des zones non cisillées. On notera que les valeurs maximales des contraintes normales sont obtenues là où le fluide recircule (vortex), indiquant des effets élastiques élongationnelles significatifs. Pour approfondir notre analyse, une étude avec des conditions de glissement et adhérence aux parois a été menée. Cela nous a amené à une comparaison des résultats numériques obtenus avec la méthode des éléments finis avec points d'intégration lagrangiens (MEFPIL) aux expériences de Darbouli et al [48] correspondant à l'étude de l'apparition de la convection de Rayleigh-Bénard avec un gel de Carbopol dans une cavité cylindrique. Les simulations numériques ont montré que les conditions de glissement aux parois promeuvent et accentuent les transferts thermiques par convection. Les critères d'apparition évalués par le rapport des effets de flottabilité sur les effets de seuil ($1/Y_c$) de la convection sont bien représentés. Dans le cas des surfaces glissantes, le critère d'apparition de la convection ($1/Y_c$) est de l'ordre de 40, tandis que pour des surfaces non glissantes $1/Y_c$ est de l'ordre de 80. Ces résultats sur les critères d'apparition de la convection sont dans les mêmes ordres de grandeur aussi bien dans des conditions glissantes que d'adhérence comparés aux expériences de Darbouli et al [48]. En outre, l'évolution

du nombre de Nusselt dans la convection est correctement estimée. L'analyse des champs cinématique, de température et de contrainte, ainsi que la forme et la taille des zones seuillées et non seuillées a permis de comprendre les phénomènes locaux pour un même rapport des effets de seuil de contrainte aux effets de flottabilité qui induisent, dans le cas glissant, un transfert nettement convectif et dans le cas adhérent un transfert conductif. Les zones seuillées sont nettement plus importantes dans le cas glissant et très faible pour le cas adhérent. La répartition des champs du deuxième invariant du tenseur des contraintes a montré que pour le cas glissant, le niveau des contraintes est plus faible puisqu'aucune contrainte n'est transmise aux parois. Dans le cas adhérent, les contraintes de cisaillement sont maximales sur les parois de la cavité. La prise en compte de l'élasto-viscoplasticité induit un champ de vitesse non nulle, mais de très faible amplitude dans le cas conductif.

Dans une autre situation, la MEFPIIL a été mise en œuvre pour analyser l'écoulement non inertiel d'un fluide EVP autour d'une plaque perpendiculaire à l'écoulement.

Les résultats quantitatifs obtenus montrent que le profil de la vitesse axiale est fortement influencé par la contrainte seuil. Quand Od est élevé, c'est-à-dire avec des effets plastiques importants, la vitesse axiale est modifiée à proximité immédiate de la plaque dans une zone que la MEFPIIL permet de déterminer. Cependant, lorsque Od diminue, la vitesse axiale s'écarte de U_0 à une plus grande distance de la plaque. De plus, on note qu'en l'absence d'effets inertiels et élastiques, cette distance est la même en amont et en aval, le profil de vitesse est symétrique, comme dans le cas d'une approche régularisée. On a aussi pu montrer que l'intensité du deuxième invariant du tenseur des contraintes augmente lorsqu'on se rapproche de l'obstacle avec des valeurs maximales observées à proximité de la plaque. L'intensité et la position des champs de contraintes dépendent à la fois de Od et Wi . En l'absence d'élasticité ($Wi = 0$), le champ du deuxième invariant du tenseur des contraintes est symétrique, alors qu'il est asymétrique lorsque l'élasticité est prise en compte.

Aux faibles nombres d'Oldroyd, le deuxième invariant du tenseur des contraintes est supérieur d'un ordre de grandeur par rapport au seuil de contrainte. Pour les nombres d'Oldroyd élevés, le deuxième invariant du tenseur des contraintes sont égales aux contraintes seuil. Dans le champ proche de l'obstacle, il apparaît que l'influence de l'élasticité est de diminuer légèrement la valeur moyenne du champ de contrainte de cisaillement. Avec des conditions aux limites, vitesses imposées ici, c'est-à-dire qu'en ajoutant l'élasticité, on diminue les contraintes. Par ailleurs, le chargement en

température avec couplage thermomécanique (cas de la convection de Rayleigh Bénard). est plus en analogie avec un chargement en contrainte. Et donc, à vitesse égale, une contrainte plus faible

En l'absence d'effets élastiques ($Wi = 0$) et avec des valeurs de Od croissantes, les effets plastiques augmentent et la première différence de contrainte normale ($N1^*$) diminue. À l'inverse, lorsque Oldroyd est faible, associé à une contribution visqueuse beaucoup plus élevée que la contribution plastique, les contraintes normales dans la direction de l'écoulement ($\tau_{x_1x_1}$) deviennent nettement plus élevées que ($\tau_{x_2x_2}$). Il convient également de mentionner que la valeur absolue de $N1^*$ est symétrique lorsque $Wi=0$, et est asymétrique lorsque l'élasticité est introduite. On note aussi que l'élasticité accroît les zones non seuillées, ce qui réduit les zones seuillées. Les champs de déformation totale augmentent avec Od .

Le chapitre 5 a fait l'objet d'une étude comparative des expériences de Ouattara et al [6] avec les simulations numériques de l'écoulement d'un fluide élasto-viscoplastique autour d'une plaque perpendiculaire. En raison de ses propriétés élasto-viscoplastiques, le Carbopol gel 940 a été choisi comme fluide modèle.

Les résultats montrent que l'écoulement du matériau après avoir atteint le régime permanent, tend vers une contrainte résiduelle en régime de relaxation.

Pour l'approche numérique, le comportement rhéologique du gel est basé sur le modèle de Maxwell dans lequel la viscosité apparente η' est régie par la loi de Herschel-Bulkley. Toutes les équations ont été résolues avec la MEFPII.

Selon l'état de contrainte du gel (avec homogénéisation et sans homogénéisation), les valeurs du coefficient de traînée aux régimes permanents et de relaxation en fonction de Od montrent un bon accord entre les résultats expérimentaux et numériques.

Les résultats ont aussi montré que la contrainte initiale a peu d'influence sur le coefficient de traînée et la force de traînée est principalement gouvernée par la pression. Cela peut s'expliquer par l'état de contrainte initiale que nous avons mis et qui est identique à celui du régime permanent. Toutefois, il faut noter qu'en introduisant un état de contrainte quelconque, issu de la mise en place du matériau, un effet plus grand dans les premiers instants pourrait être obtenu. Ensuite, si la traînée est mesurée après un temps suffisamment long, l'effet des contraintes initiales est perdu par relaxation

Les contraintes normales et du deuxième invariant du tenseur des contraintes, liées à l'état de contrainte initial, jouent un rôle secondaire. De plus, on remarque que les

champs de vitesse diminuent progressivement et s'annulent au contact de l'obstacle. Cette diminution engendre un développement d'une zone à très faibles vitesses au voisinage immédiat de l'obstacle. Cette zone correspond à la région non cisailée collée à la plaque. Dans le cas de « l'état non homogénéisé » du gel, la zone cisailée tend à augmenter et est légèrement plus étendue quand les effets de seuil deviennent plus importants.

En conclusion, les résultats numériques obtenus avec la MEFPIL en comparaison avec l'expérience ont permis de montrer la capacité d'une approche originale (MEFPIL) à modéliser les écoulements autour d'obstacles et les transferts thermiques dans les fluides élasto-viscoplastiques. Ces premiers résultats sont prometteurs et permettent d'envisager de nombreuses perspectives.

6.2. Perspectives

Les perspectives de ce travail de recherche sont nombreuses pour étendre l'utilisation du code Ellipsis, nous pouvons proposer :

- Intégrer des forces inertielles dans la modélisation, notamment pour étendre le domaine d'application et se rapprocher des situations industrielles :
- Implanter d'autres lois de comportement pour élargir encore le spectre des applications de la MEFPIL, en particulier des lois de comportement mimant plus précisément les gels de Carbopol en-dessous du seuil en introduisant le concept de durcissement cinématique [11] ou en introduisant plusieurs temps de relaxation.
- Implanter d'autres lois de transition solide-liquide en particulier des lois thixotropes qui recouvrent un large domaine des fluides à seuil.
- Implanter des lois de frottement plus réalistes aux interfaces, soit des lois plus phénoménologiques, en imposant une condition de glissement et en définissant un critère seuil de glissement au-dessous duquel l'adhérence a lieu [98] [137] ou une loi d'origine microscopique bien adaptée pour les suspensions de microgels de Carbopol [98]. Une loi de frottement sec (Coulomb) est déjà implantée dans le code.
- Dans le cas d'écoulement de milieux granulaires, par exemple pour modéliser une avalanche de neige sur un obstacle, des travaux antérieurs ont été menés par Kneib et al [138] [139]. Ces derniers ont mis en œuvre une approche par éléments discrets très coûteuse en temps de calcul. Lorsque la quantité de matière mis en œuvre devient très grande, il n'est plus possible de modéliser les grains de

l'écoulement. Une loi de type fluide à seuil pourrait être utilisée avec la MEFPIL et la comparaison entre les 2 approches serait très pertinente en fonction de la granularité, des vitesses d'écoulement mises en œuvre et des variables d'intérêt.

- Il serait également enrichissant pour la recherche applicative d'optimisation de forme pour améliorer les procédés de mélange, de mener une confrontation des résultats expérimentaux sur les écoulements de fluides à seuil dans des cas de base de la mécanique des fluides établis au Laboratoire Rhéologie et Procédés. Leurs intérêts sont d'être bien contrôlés du point de vue comportement en volume et aux interfaces :
- écoulement non inertiel d'un fluide à seuil autour d'une sphère présentant des propriétés interfaciales différentes : adhérence ou glissement [98]
- écoulements autour d'obstacle de base cylindres interaction entre cylindre ou cônes, écoulement au travers de convergent, divergent, remplissage de cavité par un jet.

A court terme, la caractérisation et l'analyse de l'influence de divers états de contrainte initiale dans le matériau sur le critère d'apparition de la convection est une piste intéressante à examiner avec la MEFPIL.

Références

- [1] N. J. Balmforth, I. A. Frigaard, and G. Ovarlez, 'Yielding to Stress: Recent Developments in Viscoplastic Fluid Mechanics', *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 46, no. 1, pp. 121–146, Jan. 2014, doi: 10.1146/annurev-fluid-010313-141424.
- [2] P. Coussot, 'Yield stress fluid flows: a review of experimental data', *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 2014.
- [3] E. Mitsoulis, 'Flows of viscoplastic materials: models and computations', *Rheol. Rev.*, vol. 2007, pp. 135–178, 2007.
- [4] A. Z. Nelson, K. S. Schweizer, B. M. Rauzan, R. G. Nuzzo, J. Vermant, and R. H. Ewoldt, 'Designing and transforming yield-stress fluids', *Curr. Opin. Solid State Mater. Sci.*, vol. 23, no. 5, p. 100758, Oct. 2019, doi: 10.1016/j.cossms.2019.06.002.
- [5] Z. Ouattara, 'Traînée et portance dans les fluides newtoniens et les fluides à seuil', p. 164.
- [6] C. Li, C. Métivier, and A. Magnin, 'Natural convection in shear-thinning yield stress fluids in a square enclosure', *AIChE J.*, vol. 62, no. 4, pp. 1347–1355, Apr. 2016, doi: 10.1002/aic.15112.
- [7] E. C. Bingham, *An investigation of the laws of plastic flow*. US Government Printing Office, 1917.
- [8] 'Hershel et Bulkley W. H. Herschel and T. Bulkley. Measurement of consistency as applied to rubber-benzene solutions. *Am. Soc. Test Proc.*, 26(2):621–633, 1926.
- [9] E. Chaparian and O. Tammisola, 'An adaptive finite element method for elastoviscoplastic fluid flows', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 271, p. 104148, Sep. 2019, doi: 10.1016/j.jnnfm.2019.104148.
- [10] J. M. Piau, 'Carbopol gels: Elastoviscoplastic and slippery glasses made of individual swollen sponges', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 144, no. 1, pp. 1–29, Jun. 2007, doi: 10.1016/j.jnnfm.2007.02.011.
- [11] C. J. Dimitriou, R. H. Ewoldt, and G. H. McKinley, 'Describing and prescribing the constitutive response of yield stress fluids using large amplitude oscillatory shear stress (LAOStress)', *J. Rheol.*, vol. 57, no. 1, pp. 27–70, 2013.
- [12] L. Jossic, F. Ahonguio, and A. Magnin, 'Flow of a yield stress fluid perpendicular to a disc', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 191, pp. 14–24, Jan. 2013, doi: 10.1016/j.jnnfm.2012.10.006.
- [13] F. Ahonguio, L. Jossic, A. Magnin, and F. Dufour, 'Flow of an elasto-viscoplastic fluid around a flat plate: Experimental and numerical data', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 238, pp. 131–139, Dec. 2016, doi: 10.1016/j.jnnfm.2016.07.010.
- [14] Z. Ouattara, P. Jay, and A. Magnin, 'Flow of a Newtonian fluid and a yield stress fluid around a plate inclined at 45° in interaction with a wall', *AIChE J.*, vol. 65, no. 5, p. e16562, 2019, doi: 10.1002/aic.16562.
- [15] Z. Ouattara, P. Jay, D. Blésès, and A. Magnin, 'Drag of a cylinder moving near a wall in a yield stress fluid', *AIChE J.*, vol. 64, no. 11, pp. 4118–4130, Nov. 2018, doi: 10.1002/aic.16220.

- [16] P. Saramito, 'A new constitutive equation for elastoviscoplastic fluid flows', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 145, no. 1, pp. 1–14, Aug. 2007, doi: 10.1016/j.jnnfm.2007.04.004.
- [17] C. J. Dimitriou and G. H. McKinley, 'A comprehensive constitutive law for waxy crude oil: a thixotropic yield stress fluid', *Soft Matter*, vol. 10, no. 35, pp. 6619–6644, Aug. 2014, doi: 10.1039/C4SM00578C.
- [18] P. Saramito and A. Wachs, 'Progress in numerical simulation of yield stress fluid flows', *Rheol. Acta*, vol. 56, no. 3, pp. 211–230, Mar. 2017, doi: 10.1007/s00397-016-0985-9.
- [19] T. C. Papanastasiou, 'Flows of Materials with Yield', *J. Rheol.*, vol. 31, no. 5, pp. 385–404, Jul. 1987, doi: 10.1122/1.549926.
- [20] A. Vikhansky, 'Lattice-Boltzmann method for yield-stress liquids', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 155, no. 3, pp. 95–100, Dec. 2008, doi: 10.1016/j.jnnfm.2007.09.001.
- [21] 'Sankaranarayanan, K. ; Shan, X. ; Kevrekidis, I. G. ; Sundaresan, S. Analysis of drag and virtual mass forces in bubbly suspensions using an implicit formulation of the lattice Boltzmann method. *Journal of Fluid Mechanics* 2002, 452, 61-96
- [22] Shiyi Chen and Gary D. Doolen, Lattice Boltzmann Method for Fluid Flow | Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 30: 329-364 (Volume publication date January 1998)
- [23] I. A. Frigaard and C. Nouar, 'On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 127, no. 1, pp. 1–26, Apr. 2005, doi: 10.1016/j.jnnfm.2005.01.003.
- [24] P. Saramito and N. Roquet, 'An adaptive finite element method for viscoplastic fluid flows in pipes', *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 190, no. 40, pp. 5391–5412, Jul. 2001, doi: 10.1016/S0045-7825(01)00175-X.
- [25] R. Glowinski and A. Wachs, 'On the Numerical Simulation of Viscoplastic Fluid Flow', in *Handbook of Numerical Analysis*, vol. 16, R. Glowinski and J. Xu, Eds. Elsevier, 2011, pp. 483–717.
- [26] M. A. Moyers-Gonzalez and I. A. Frigaard, 'Numerical solution of duct flows of multiple visco-plastic fluids', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 122, no. 1, pp. 227–241, Sep. 2004, doi: 10.1016/j.jnnfm.2003.12.010.
- [27] A. Wachs, 'Numerical simulation of steady Bingham flow through an eccentric annular cross-section by distributed Lagrange multiplier/fictitious domain and augmented Lagrangian methods', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 142, no. 1, pp. 183–198, Mar. 2007, doi: 10.1016/j.jnnfm.2006.08.009.
- [28] A. Putz, I. A. Frigaard, and D. M. Martinez, 'On the lubrication paradox and the use of regularisation methods for lubrication flows', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 163, no. 1, pp. 62–77, Nov. 2009, doi: 10.1016/j.jnnfm.2009.06.006.
- [29] N. Roquet and P. Saramito, 'An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder', *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 192, no. 31, pp. 3317–3341, Aug. 2003, doi: 10.1016/S0045-7825(03)00262-7.

- [30] A. Putz and I. A. Frigaard, 'Creeping flow around particles in a Bingham fluid', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 165, no. 5–6, pp. 263–280, Mar. 2010, doi: 10.1016/j.jnnfm.2010.01.001.
- [31] I. Karimfazli, I. A. Frigaard, and A. Wachs, 'A novel heat transfer switch using the yield stress', *J. Fluid Mech.*, vol. 783, pp. 526–566, Nov. 2015, doi: 10.1017/jfm.2015.511.
- [32] I. Karimfazli, I. A. Frigaard, and A. Wachs, 'Thermal plumes in viscoplastic fluids: flow onset and development', *J. Fluid Mech.*, vol. 787, pp. 474–507, Jan. 2016, doi: 10.1017/jfm.2015.639.
- [33] R. R. Huilgol, 'Fundamental Equations', in *Fluid Mechanics of Viscoplasticity*, R. R. Huilgol, Ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2015, pp. 35–46.
- [34] T. Treskatis, M. A. Moyers-González, and C. J. Price, 'An accelerated dual proximal gradient method for applications in viscoplasticity', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 238, pp. 115–130, Dec. 2016, doi: 10.1016/j.jnnfm.2016.09.004.
- [35] T. Treskatis, A. Roustaei, I. Frigaard, and A. Wachs, 'Practical guidelines for fast, efficient and robust simulations of yield-stress flows without regularisation: A study of accelerated proximal gradient and augmented Lagrangian methods', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 262, pp. 149–164, Dec. 2018, doi: 10.1016/j.jnnfm.2018.05.002.
- [36] P. Saramito, 'A damped Newton algorithm for computing viscoplastic fluid flows', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 238, pp. 6–15, Dec. 2016, doi: 10.1016/j.jnnfm.2016.05.007.
- [37] I. Cheddadi and P. Saramito, 'A new operator splitting algorithm for elastoviscoplastic flow problems', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 202, pp. 13–21, Dec. 2013, doi: 10.1016/j.jnnfm.2013.09.004.
- [38] I. Cheddadi, P. Saramito, B. Dollet, C. Raufaste, and F. Graner, 'Understanding and predicting viscous, elastic, plastic flows', *Eur. Phys. J. E*, vol. 34, no. 1, p. 1, Jan. 2011, doi: 10.1140/epje/i2011-11001-4.
- [39] E. Mitsoulis and J. Tsamopoulos, 'Numerical simulations of complex yield-stress fluid flows', *Rheol. Acta*, vol. 56, no. 3, pp. 231–258, Mar. 2017, doi: 10.1007/s00397-016-0981-0.
- [40] D. Fraggedakis, Y. Dimakopoulos, and J. Tsamopoulos, 'Yielding the yield-stress analysis: a study focused on the effects of elasticity on the settling of a single spherical particle in simple yield-stress fluids', *Soft Matter*, vol. 12, no. 24, pp. 5378–5401, Jun. 2016, doi: 10.1039/C6SM00480F.
- [41] C. O'Neill, L. Moresi, D. Müller, R. Albert, and F. Dufour, 'Ellipsis 3D: A particle-in-cell finite-element hybrid code for modelling mantle convection and lithospheric deformation', *Comput. Geosci.*, vol. 32, no. 10, pp. 1769–1779, Dec. 2006, doi: 10.1016/j.cageo.2006.04.006.
- [42] L. Moresi, F. Dufour, and H.-B. Mühlhaus, 'A Lagrangian integration point finite element method for large deformation modeling of viscoelastic geomaterials', *J. Comput. Phys.*, vol. 184, no. 2, pp. 476–497, 2003.
- [43] L. -N. Moresi and V. S. Solomatov, 'Numerical investigation of 2D convection with extremely large viscosity variations', *Phys. Fluids*, vol. 7, no. 9, pp. 2154–2162, Sep. 1995, doi: 10.1063/1.868465.

- [44] F. Dufour and G. Pijaudier-Cabot, 'Numerical modelling of concrete flow: homogeneous approach', *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, vol. 29, no. 4, pp. 395–416, Apr. 2005, doi: 10.1002/nag.419.
- [45] F. Ahonguio, L. Jossic, A. Magnin, and F. Dufour, 'Flow of an elasto-viscoplastic fluid around a flat plate: Experimental and numerical data', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 238, pp. 131–139, Dec. 2016, doi: 10.1016/j.jnnfm.2016.07.010.
- [46] H. Muhlhaus, F. Dufour, L. Moresi, and B. Hobbs, 'A director theory for viscoelastic folding instabilities in multilayered rock', *Int. J. Solids Struct.*, vol. 39, no. 13–14, pp. 3675–3691, 2002, doi: 10.1016/S0020-7683(02)00175-0.
- [47] Z. Li, Z. Tao, Y. Jiang, Q. Lv, F. Darve, and M. He, 'Real-time monitoring and FEM-LIP simulation of a rainfall-induced rockslide', *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, vol. 19, no. 1, pp. 153–168, Jan. 2019, doi: <https://doi.org/10.5194/nhess-19-153-2019>.
- [48] M. Darbouli, C. Métivier, J.-M. Piau, A. Magnin, and A. Abdelali, 'Rayleigh-Bénard convection for viscoplastic fluids', *Phys. Fluids*, vol. 25, no. 2, p. 023101, Feb. 2013, doi: 10.1063/1.4790521.
- [49] J. Zhang, D. Vola, and I. A. Frigaard, 'Yield stress effects on Rayleigh-Bénard convection', *J. Fluid Mech.*, vol. 566, p. 389, Nov. 2006, doi: 10.1017/S002211200600200X.
- [50] A. Vikhansky, 'On the onset of natural convection of Bingham liquid in rectangular enclosures', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 165, no. 23–24, pp. 1713–1716, Dec. 2010, doi: 10.1016/j.jnnfm.2010.09.003.
- [51] A. Vikhansky, 'On the stopping of thermal convection in viscoplastic liquid', *Rheol. Acta*, vol. 50, no. 4, pp. 423–428, Apr. 2011, doi: 10.1007/s00397-010-0488-z.
- [52] A. Davaille, B. Gueslin, A. Massmeyer, and E. D. Giuseppe, 'Thermal instabilities in a yield stress fluid: Existence and morphology', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 193, pp. 144–153, Mar. 2013, doi: 10.1016/j.jnnfm.2012.10.008.
- [53] Z. Kebiche, C. Castelain, and T. Burghelea, 'Experimental investigation of the Rayleigh-Bénard convection in a yield stress fluid', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 203, pp. 9–23, Jan. 2014, doi: 10.1016/j.jnnfm.2013.10.005.
- [54] C. Métivier, C. Li, and A. Magnin, 'Origin of the onset of Rayleigh-Bénard convection in a concentrated suspension of microgels with a yield stress behavior', 2017, doi: 10.1063/1.4995699.
- [55] R. R. Huilgol and G. H. R. Kefayati, 'Natural convection problem in a Bingham fluid using the operator-splitting method', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 220, pp. 22–32, Jun. 2015, doi: 10.1016/j.jnnfm.2014.06.005.
- [56] T. P. Lyubimova, 'Numerical investigation of convection in a viscoplastic liquid in a closed region', *Fluid Dyn.*, vol. 12, no. 1, pp. 1–5, Jan. 1977, doi: 10.1007/BF01074616.
- [57] O. Turan, N. Chakraborty, and R. J. Poole, 'Laminar Rayleigh-Bénard convection of yield stress fluids in a square enclosure', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 171–172, pp. 83–96, Mar. 2012, doi: 10.1016/j.jnnfm.2012.01.006.

- [58] M. S. Aghighi, A. Ammar, C. Metivier, and M. Gharagozlu, 'Rayleigh-Bénard convection of Casson fluids', *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 127, pp. 79–90, May 2018, doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.01.016.
- [59] R. G. Larson, 'Larson, R.G. Rheola Acta (1992)'. .
- [60] M. Sokolov and R. I. Tanner, 'Convective Stability of a General Viscoelastic Fluid Heated from Below', *Phys. Fluids*, vol. 15, no. 4, pp. 534–539, Apr. 1972, doi: 10.1063/1.1693945.
- [61] C. M. Vest and V. S. Arpaci, 'Overstability of a viscoelastic fluid layer heated from below', *J. Fluid Mech.*, vol. 36, no. 3, pp. 613–623, May 1969, doi: 10.1017/S0022112069001881.
- [62] H. Demir, 'Rayleigh–Benard convection of viscoelastic fluid', *Appl. Math. Comput.*, vol. 136, no. 2, Art. no. 2, Mar. 2003, doi: 10.1016/S0096-3003(02)00036-X.
- [63] D. Fraggedakis, Y. Dimakopoulos, and J. Tsamopoulos, 'Yielding the yield stress analysis: A thorough comparison of recently proposed elasto-visco-plastic (EVP) fluid models', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 236, pp. 104–122, Oct. 2016, doi: 10.1016/j.jnnfm.2016.09.001.
- [64] M. Dinkgreve, M. M. Denn, and D. Bonn, "“Everything flows?”: elastic effects on startup flows of yield-stress fluids', *Rheol. Acta*, vol. 56, no. 3, pp. 189–194, Mar. 2017, doi: 10.1007/s00397-017-0998-z.
- [65] G. Ovarlez, S. Cohen-Addad, K. Krishan, J. Goyon, and P. Coussot, 'On the existence of a simple yield stress fluid behavior', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 193, pp. 68–79, Mar. 2013, doi: 10.1016/j.jnnfm.2012.06.009.
- [66] P. Coussot, 'Yield stress fluid flows: A review of experimental data', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 211, pp. 31–49, Sep. 2014, doi: 10.1016/j.jnnfm.2014.05.006.
- [67] P. R. de Souza Mendes and R. L. Thompson, 'A critical overview of elasto-viscoplastic thixotropic modeling', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 187–188, pp. 8–15, Nov. 2012, doi: 10.1016/j.jnnfm.2012.08.006.
- [68] P. Saramito and A. Wachs, 'Progress in numerical simulation of yield stress fluid flows', *Rheol. Acta*, vol. 56, no. 3, pp. 211–230, Mar. 2017, doi: 10.1007/s00397-016-0985-9.
- [69] L. Moresi, F. Dufour, and H.-B. Mühlhaus, 'Mantle Convection Modeling with Viscoelastic/Brittle Lithosphere: Numerical Methodology and Plate Tectonic Modeling', *Pure Appl. Geophys.*, vol. 159, no. 10, pp. 2335–2356, Apr. 2002, doi: 10.1007/s00024-002-8738-3.
- [70] N. Ouertatani, N. Ben Cheikh, B. Ben Beya, and T. Lili, 'Numerical simulation of two-dimensional Rayleigh–Bénard convection in an enclosure', *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 336, no. 5, pp. 464–470, May 2008, doi: 10.1016/j.crme.2008.02.004.
- [71] E. Evren-Selamet and A. Selamet, 'Simulation of Rayleigh-Benard convection in a flipped L-shaped enclosure', *Journal of Energy and Power Engineering* 12 (2018) 545-552, doi: 10.17265/1934-8975/2018.11.004

- [72] G. de Vahl Davis and I. P. Jones, 'Natural convection in a square cavity: a comparison exercise', *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 3, no. 3, pp. 227–248, 1983.
- [73] H. M. Park and H. S. Lee, 'Nonlinear hydrodynamic stability of viscoelastic fluids heated from below', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 60, no. 1, pp. 1–26, Oct. 1995, doi: 10.1016/0377-0257(95)01371-2.
- [74] R. da R. Martins, G. M. Furtado, D. D. dos Santos, S. Frey, M. F. Naccache, and P. R. de Souza Mendes, 'Elastic and viscous effects on flow pattern of elasto-viscoplastic fluids in a cavity', *Mech. Res. Commun.*, vol. 53, pp. 36–42, Oct. 2013, doi: 10.1016/j.mechrescom.2013.07.012.
- [75] G. M. Furtado, S. Frey, M. F. Naccache, and P. R. de S. Mendes, 'Numerical simulation of a elasto-viscoplastic fluid flow inside a cavity', *Rev. Eng. Térmica*, vol. 17, no. 1, pp. 73–79, Jun. 2018, doi: 10.5380/reterm.v17i1.62262.
- [76] M. Webber, 'The destabilizing effect of boundary slip on Bénard convection', *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 29, no. 7, Art. no. 7, 2006, doi: 10.1002/mma.711.
- [77] L.-S. Kuo and P.-H. Chen, 'Effects of Slip Boundary Conditions on Rayleigh-Bénard Convection', *J. Mech.*, vol. 25, no. 2, Art. no. 2, Jun. 2009, doi: 10.1017/S1727719100002665.
- [78] K. C. Stengel, D. S. Oliver, and J. R. Booker, 'Onset of convection in a variable-viscosity fluid', *J. Fluid Mech.*, vol. 120, pp. 411–431, Jul. 1982, doi: 10.1017/S0022112082002821.
- [79] F. H. Busse, 'The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle', *J. Fluid Mech.*, vol. 30, no. 4, Art. no. 4, Dec. 1967, doi: 10.1017/S0022112067001661.
- [80] E. Palm, T. Ellingsen, and B. Gjevik, 'On the occurrence of cellular motion in Bénard convection', *J. Fluid Mech.*, vol. 30, no. 4, Art. no. 4, Dec. 1967, doi: 10.1017/S0022112067001673.
- [81] H. A. Barnes, 'A review of the slip (wall depletion) of polymer solutions, emulsions and particle suspensions in viscometers: its cause, character, and cure', p. 31.
- [82] M. Cloitre and R. T. Bonnecaze, 'A review on wall slip in high solid dispersions', *Rheol. Acta*, vol. 56, no. 3, Art. no. 3, Mar. 2017, doi: 10.1007/s00397-017-1002-7.
- [83] A. Magnin and J. M. Piau, 'Cone-and-plate rheometry of yield stress fluids. Study of an aqueous gel', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 36, pp. 85–108, 1990.
- [84] C. Métivier and A. Magnin, 'The effect of wall slip on the stability of the Rayleigh-Bénard Poiseuille flow of viscoplastic fluids', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 166, no. 14, Art. no. 14, Aug. 2011, doi: 10.1016/j.jnnfm.2011.04.017.
- [85] M. Christel, R. Yahya, M. Albert, and B. A. Antoine, 'Stick-slip control of the Carbopol gels on Polymethyl methacrylate transparent smooth walls', p. 4.
- [86] M. A. Hassan, M. Pathak, and Mohd. K. Khan, 'Rayleigh-Bénard convection in Herschel-Bulkley fluid', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 226, pp. 32–45, Dec. 2015, doi: 10.1016/j.jnnfm.2015.10.003.

- [87] N. Prime, F. Dufour, and F. Darve, 'Unified Model for Geomaterial Solid/Fluid States and the Transition in Between', *J. Eng. Mech.*, vol. 140, no. 6, Art. no. 6, Jun. 2014, doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000742.
- [88] J. R. Seth, M. Cloitre, and R. T. Bonnecaze, 'Influence of short-range forces on wall-slip in microgel pastes', *J. Rheol.*, vol. 52, no. 5, Art. no. 5, Aug. 2008, doi: 10.1122/1.2963135.
- [89] S. Tomotika and T. Aoi, 'The steady flow of a viscous fluid past an elliptic cylinder and a flat plate at small Reynolds numbers', *Q. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 6, no. 3, pp. 290–312, 1953.
- [90] J. S. Happel and H. Brenner, 'Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media', 1973.
- [91] G. F. Brookes and R. L. Whitmore, 'Drag forces in Bingham plastics', *Rheol. Acta*, vol. 8, no. 4, pp. 472–480, Oct. 1969, doi: 10.1007/BF01976231.
- [92] G. F. Brookes and R. L. Whitmore, 'The static drag on bodies in Bingham plastics', *Rheol. Acta*, vol. 7, no. 2, pp. 188–193, May 1968, doi: 10.1007/BF01982381.
- [93] K. M., 'The Vertical Holding Capacity of Marine Anchors in Clay Subjected to Static and Cyclic Loading', *University of Massachusetts, Amherst, Mass, MSc thesis*, 1965.
- [94] R. S. Merifield, A. V. Lyamin, S. W. Sloan, and H. S. Yu, 'Three-dimensional lower bound solutions for stability of plate anchors in clay', *J. Geotech. Geoenvironmental Eng.*, vol. 129, no. 3, pp. 243–253, 2003.
- [95] F. Savreux, P. Jay, and A. Magnin, 'Flow normal to a flat plate of a viscoplastic fluid with inertia effects', *AIChE J.*, vol. 51, no. 3, pp. 750–758, Mar. 2005, doi: 10.1002/aic.10488.
- [96] Z. Ouattara, A. Magnin, D. Blésès, and P. Jay, 'Influence of the inclination of a plate on forces generated in flows of Newtonian and yield stress fluids', *Chem. Eng. Sci.*, vol. 197, pp. 246–257, Apr. 2019, doi: 10.1016/j.ces.2018.12.026.
- [97] A. M. V. Putz, T. I. Burghelea, I. A. Frigaard, and D. M. Martinez, 'Settling of an isolated spherical particle in a yield stress shear thinning fluid', *Phys. Fluids*, vol. 20, no. 3, p. 033102, Mar. 2008, doi: 10.1063/1.2883937.
- [98] F. Ahonguio, L. Jossic, and A. Magnin, 'Influence of surface properties on the flow of a yield stress fluid around spheres', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 206, pp. 57–70, Apr. 2014, doi: 10.1016/j.jnnfm.2014.03.002.
- [99] M. R. S. Ferreira, G. M. Furtado, L. Hermany, S. Frey, and M. F. Naccache, 'External Flows Of Elasto-Viscoplastic Materials Over A Blade', p. 8, 2014.
- [100] J. G. Oldroyd, 'A rational formulation of the equations of plastic flow for a Bingham solid', in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1947, vol. 43, pp. 100–105.
- [101] J. G. Oldroyd, 'Two-dimensional plastic flow of a Bingham solid: A plastic boundary-layer theory for slow motion', *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, vol. 43, no. 3, pp. 383–395, Jul. 1947, doi: 10.1017/S0305004100023616.

- [102] D. L. Tokpavi, P. Jay, A. Magnin, and L. Jossic, 'Experimental study of the very slow flow of a yield stress fluid around a circular cylinder', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 164, no. 1–3, Art. no. 1–3, Dec. 2009,
- [103] M. T. Arigo and G. H. McKinley, 'An experimental investigation of negative wakes behind spheres settling in a shear-thinning viscoelastic fluid', *Rheol. Acta*, vol. 37, no. 4, pp. 307–327, Aug. 1998, doi: 10.1007/s003970050118.
- [104] Y. Holenberg, O. M. Lavrenteva, U. Shavit, and A. Nir, 'Particle tracking velocimetry and particle image velocimetry study of the slow motion of rough and smooth solid spheres in a yield-stress fluid', *Phys. Rev. E*, vol. 86, no. 6, Art. no. 6, Dec. 2012, doi: 10.1103/PhysRevE.86.066301.
- [105] O. Merkak, L. Jossic, and A. Magnin, 'Spheres and interactions between spheres moving at very low velocities in a yield stress fluid', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 133, no. 2–3, pp. 99–108, Feb. 2006, doi: 10.1016/j.jnnfm.2005.10.012.
- [106] Raghavendra, Dhanvi Vengre (2016). Performance of Plate Anchors. Master's thesis, Texas A & M University.
- [107] 'Deepwater Anchor Design Practice Phase I and II (Report to API/Deepstar)'. Knut Anderson, NGI, J. Don Murff, Texas A&M University, Mark Randolph, 2003
- [108] R. S. Merifield, S. W. Sloan, and H. S. Yu, 'Stability of plate anchors in undrained clay', *Géotechnique*, vol. 51, no. 2, pp. 141–153, Mar. 2001, doi: 10.1680/geot.2001.51.2.141.
- [109] R. K. Rowe and E. H. Davis, 'The behaviour of anchor plates in clay', *Géotechnique*, vol. 32, no. 1, pp. 9–23, Mar. 1982, doi:10.1680/geot.1982.32.1.9.
- [110] P. Y. Huang and J. Feng, 'Wall effects on the flow of viscoelastic fluids around a circular cylinder', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 60, no. 2–3, pp. 179–198, 1995.
- [111] S. Tomotika and T. Aoi, 'The steady flow of a viscous fluid past an elliptic cylinder and a flat plate at small Reynolds numbers', *Q. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 6, no. 3, pp. 290–312, Mar. 1953, doi: 10.1093/qjmam/6.3.290.
- [112] K. Tamada, H. Miura, and T. Miyagi, 'Low-Reynolds-number flow past a cylindrical body', *J. Fluid Mech.*, vol. 132, pp. 445–455, Jul. 1983, doi: 10.1017/S0022112083001718.
- [113] S. C. R. Dennis, W. Qiang, M. Coutanceau, and J.-L. Launay, 'Viscous flow normal to a flat plate at moderate Reynolds numbers', *J. Fluid Mech.*, vol. 248, pp. 605–635, Mar. 1993, doi: 10.1017/S002211209300093X.
- [114] K. M. In, D. H. Choi, and M.-U. Kim, 'Two-dimensional viscous flow past a flat plate', *Fluid Dyn. Res.*, vol. 15, no. 1, p. 13, Jan. 1995, doi: 10.1016/0169-5983(95)90438-8.
- [115] J. W. A and M. C. T. B, *Non-Newtonian shear-thinning flows past a flat plate*. 1996.
- [116] S. A. Patel and R. P. Chhabra, 'Steady flow of Bingham plastic fluids past an elliptical cylinder', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 202, pp. 32–53, Dec. 2013, doi: 10.1016/j.jnnfm.2013.09.006.

- [117] R. S. Merifield, S. W. Sloan, and H. S. Yu, 'Stability of plate anchors in undrained clay', *Géotechnique*, vol. 51, no. 2, pp. 141–153, Mar. 2001, doi: 10.1680/geot.2001.51.2.141.
- [118] R. K. Rowe and E. H. Davis, 'The behaviour of anchor plates in clay', *Géotechnique*, vol. 32, no. 1, pp. 9–23, Mar. 1982, doi: 10.1680/geot.1982.32.1.9.
- [119] A. A. Soares, J. M. Ferreira, and R. P. Chhabra, 'Flow and Forced Convection Heat Transfer in Crossflow of Non-Newtonian Fluids over a Circular Cylinder', *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 44, no. 15, pp. 5815–5827, Jul. 2005, doi: 10.1021/ie0500669.
- [120] C. Fonseca, S. Frey, M. F. Naccache, and P. R. de Souza Mendes, 'Flow of elasto-viscoplastic thixotropic liquids past a confined cylinder', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 193, pp. 80–88, Mar. 2013, doi: 10.1016/j.jnnfm.2012.08.007.
- [121] P. Saramito, 'A new constitutive equation for elastoviscoplastic fluid flows', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 145, no. 1, pp. 1–14, Aug. 2007, doi: 10.1016/j.jnnfm.2007.04.004.
- [122] N. Mougín, A. Magnin, and J.-M. Piau, 'The significant influence of internal stresses on the dynamics of bubbles in a yield stress fluid', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 171–172, pp. 42–55, Mar. 2012, doi: 10.1016/j.jnnfm.2012.01.003.
- [123] A. Magnin and J. M. Piau, 'Shear rheometry of fluids with a yield stress', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 23, pp. 91–106, 1987.
- [124] P. C. F. Møller, A. Fall, and D. Bonn, 'Origin of apparent viscosity in yield stress fluids below yielding', *EPL Europhys. Lett.*, vol. 87, no. 3, p. 38004, Aug. 2009, doi: 10.1209/0295-5075/87/38004.
- [125] P. C. F. Møller, J. Mewis, and D. Bonn, 'Yield stress and thixotropy: on the difficulty of measuring yield stresses in practice', *Soft Matter*, vol. 2, no. 4, p. 274, 2006, doi: 10.1039/b517840a.
- [126] A. L. Yarin, E. Zussman, A. Theron, S. Rahimi, Z. Sobe, and D. Hasan, 'Elongational behavior of gelled propellant simulants', *J. Rheol.*, vol. 48, no. 1, pp. 101–116, Jan. 2004, doi: 10.1122/1.1631423.
- [127] N. J. Balmforth, N. Dubash, and A. C. Slim, 'Extensional dynamics of viscoplastic filaments: I. Long-wave approximation and the Rayleigh instability', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 165, no. 19–20, pp. 1139–1146, Oct. 2010, doi: 10.1016/j.jnnfm.2010.05.012.
- [128] N. J. Balmforth, N. Dubash, and A. C. Slim, 'Extensional dynamics of viscoplastic filaments: II. Drips and bridges', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 165, no. 19–20, pp. 1147–1160, Oct. 2010, doi: 10.1016/j.jnnfm.2010.06.004.
- [129] J. M. Piau, 'Carbopol gels: Elastoviscoplastic and slippery glasses made of individual swollen sponges', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 144, no. 1, pp. 1–29, Jun. 2007, doi: 10.1016/j.jnnfm.2007.02.011.
- [130] G. Ovarlez, F. Mahaut, S. Deboeuf, N. Lenoir, S. Hormozi, and X. Chateau, 'Flows of suspensions of particles in yield stress fluids', *J. Rheol.*, vol. 59, no. 6, pp. 1449–1486, Nov. 2015, doi: 10.1122/1.4934363.

- [131] T. Divoux, D. Tamarit, C. Barentin, and S. Manneville, 'Transient Shear Banding in a Simple Yield Stress Fluid', *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, no. 20, p. 208301, May 2010, doi: 10.1103/PhysRevLett.104.208301.
- [132] T. Divoux, C. Barentin, and S. Manneville, 'From stress-induced fluidization processes to Herschel-Bulkley behaviour in simple yield stress fluids', *Soft Matter*, vol. 7, no. 18, pp. 8409–8418, Sep. 2011, doi: 10.1039/C1SM05607G.
- [133] P. Lidon, L. Villa, and S. Manneville, 'Power-law creep and residual stresses in a carbopol gel', *Rheol. Acta*, vol. 56, no. 3, pp. 307–323, Mar. 2017, doi: 10.1007/s00397-016-0961-4.
- [134] E. Younes, M. Himl, Z. Stary, V. Bertola, and T. Burghelca, 'On the elusive nature of Carbopol gels: "model", weakly thixotropic, or time-dependent viscoplastic materials?', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 281, p. 104315, Jul. 2020, doi: 10.1016/j.jnnfm.2020.104315.
- [135] O. Hassager, 'Negative wake behind bubbles in non-newtonian liquids', *Nature*, vol. 279, no. 5712, Art. no. 5712, May 1979, doi: 10.1038/279402a0.
- [136] D. L. Tokpavi, P. Jay, A. Magnin, and L. Jossic, 'Experimental study of the very slow flow of a yield stress fluid around a circular cylinder', *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 164, no. 1–3, pp. 35–44, Dec. 2009, doi: 10.1016/j.jnnfm.2009.08.002.
- [137] N. Roquet, "Résolution numérique d'écoulements de fluides à effet de seuil par éléments finis mixtes et adaptation de maillage. Thèse de l'Université Joseph Fourier, soutenue en 2000.",
- [138] F. Kneib, T. Faug, F. Dufour, and M. Naaim, 'Mean force and fluctuations on a wall immersed in a sheared granular flow', *Phys. Rev. E*, vol. 99, no. 5, p. 052901, May 2019, doi: 10.1103/PhysRevE.99.052901.
- [139] F. Kneib, T. Faug, G. Nicolet, N. Eckert, M. Naaim, and F. Dufour, 'Force fluctuations on a wall in interaction with a granular lid-driven cavity flow', *Phys. Rev. E*, vol. 96, no. 4, p. 042906, Oct. 2017, doi: 10.1103/PhysRevE.96.042906.