



HAL
open science

Interaction fluide-structure dans un dispositif vasculaire actif

Antoine Fondanèche

► **To cite this version:**

Antoine Fondanèche. Interaction fluide-structure dans un dispositif vasculaire actif. Analyse numérique [cs.NA]. Université de Bordeaux, 2021. Français. NNT : 2021BORD0201 . tel-03374762

HAL Id: tel-03374762

<https://theses.hal.science/tel-03374762v1>

Submitted on 12 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET
D'INFORMATIQUE

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET CALCUL SCIENTIFIQUE

Par **Antoine FONDANÈCHE**

**Interaction Fluide-Structure
dans un dispositif vasculaire actif**

Sous la direction de : **Michel BERGMANN**

Co-directeur : **Angelo IOLLO**

Soutenue le 3 Septembre 2021

Membres du jury :

M. Michel BERGMANN	Chargé de Recherche, Inria BSO	Directeur
M. Cédric GALUSINSKI	Professeur, Université de Toulon	Rapporteur
M. Frédéric GIBOU	Professeur, University of California	Président
M. Angelo IOLLO	Professeur, Université de Bordeaux	Co-directeur
M. Christophe PRUD'HOMME	Professeur, Université de Strasbourg	Rapporteur
Mme. Gabriella PUPPO	Professeure, La Sapienza Università di Roma	Examinatrice

Interaction Fluide-Structure dans un dispositif vasculaire actif.

Résumé :

Le recours à la simulation numérique de problèmes d'interaction fluide-structure est de plus en plus utilisée dans la plupart des secteurs d'activité. Pour résoudre ce type de problème, la majorité des études se concentre sur des approches lagrangiennes réputées très précises. Leur mise en oeuvre peut néanmoins devenir difficile pour certaines applications, notamment lorsque les déformations de la structure deviennent importantes ou que des variations topologiques se manifestent.

Pour simuler de manière très versatile une grande diversité de problèmes d'interaction fluide-structure en deux dimensions impliquant des matériaux hyper-élastiques rigides, une méthode purement eulérienne a été favorisée. Dans le contexte des méthodes de domaines fictifs, la géométrie d'une structure est suivie de manière implicite via le formalisme *level set*, qui permet de définir une interface fluide-structure diffuse. Un modèle unifié à "un seul milieu" est résolu de manière monolithique à l'aide d'une méthode Volume Fini sur maillages cartésiens hiérarchiques de type *quadtree*. Cette approche offre un bon compromis entre précision du schéma numérique et faisabilité de la simulation du problème multi-physiques, notamment grâce au processus d'adaptation de maillage *AMR* dynamique. La construction des schémas de discrétisation en espace repose sur l'utilisation de stencils compacts, de sorte à garantir une efficacité optimale du parallélisme.

La méthode numérique est validée conformément à la littérature et le bénéfice obtenu, en termes de temps de calcul, via l'utilisation de maillages adaptatifs dynamiques est mise en évidence. En s'appuyant sur une analyse asymptotique en une dimension du schéma de discrétisation, une stabilisation de la méthode Volume Fini est effectuée afin d'améliorer sa robustesse, en particulier pour une meilleure prise en compte de matériaux très rigides. La simulation d'un écoulement axi-symétrique bidimensionnel dans un dispositif d'assistance cardiaque (géométrie *LVAD*) est proposée comme application bio-médicale.

Mots-clés : Interaction Fluide-Structure, approche Volume Fini, maillages AMR de type *quadtree*, méthode d'interface diffuse, membranes hyper-élastiques, application bio-médicale.

Fluid-Structure Interaction in an active vascular device

Abstract :

The numerical simulation of fluid-structure interaction problems is increasingly used in most fields of activity. To solve this kind of problem, most studies are based on Lagrangian approaches which are known to be very accurate. However, their implementation can become difficult for specific applications, especially when the deformations of the structure become important or when topological variations occur.

In order to simulate in a very versatile way a wide range of two-dimensional fluid-structure interaction problems involving rigid hyper-elastic materials, a fully Eulerian method has been adopted. In the context of Fictitious Domain methods, the geometry of the structure is followed implicitly through the *level-set* formalism, which allows defining a diffuse fluid-structure interface. A unified "single-continuum" model is solved monolithically using a Finite Volume method on *quadtree*-kind hierarchical Cartesian meshes. This approach provides a good trade-off between the numerical accuracy and the feasibility of the simulation of the multi-physics problem, especially thanks to the dynamic mesh adaptation *AMR* process. The construction of the discretization schemes in space is based on the use of compact stencils, which guarantees an optimal efficiency of the parallelism.

The numerical method has been validated with respect to the literature and the benefit obtained in terms of computational costs through the use of dynamic adaptive meshes is highlighted. Using the one-dimensional asymptotic analysis of the discretization scheme, a stabilization of the Finite Volume method is performed in order to improve its robustness, in particular for a better consideration of very stiff materials. The simulation of a two-dimensional axi-symmetric flow in a cardiac assist device (*LVAD* geometry) is proposed as a bio-medical application.

Keywords : Fluid-Structure Interaction, Finite Volume approach, quadtree-based AMR meshes, diffuse interface method, hyperelastic membranes, application bio-médicale.

Unité de recherche

IMB, CNRS UMR 5251, Université de Bordeaux, Bordeaux INP, 33400 Talence.

Les simulations numériques présentées dans cette thèse ont été réalisées en utilisant à la fois le cluster de calcul PlaFRIM, soutenu par l'INRIA, le CNRS (LABRI et IMB), l'Université de Bordeaux, Bordeaux INP et le Conseil Régional Aquitaine (voir <https://www.plafrim.fr/>), et la plateforme CURTA, fournie par le Mésocentre de Calcul Intensif Aquatique (MCIA) (voir <https://redmine.mcia.fr/>).

Cette thèse a été financée par l'université de Bordeaux et partiellement soutenue par le programme de recherche et d'innovation Horizon 2020 de l'Union européenne dans le cadre des actions Marie Skłodowska-Curie, convention de subvention 872442 (ARIA).

*"I am looking for someone to share in an adventure that I am arranging,
and it's very difficult to find anyone.*

*I should think so — in these parts! We are plain quiet folk and have no use for
adventures. Nasty disturbing uncomfortable things! Make you late for dinner!"*

– J.R.R. Tolkien, *The Hobbit, or There and Back Again* –

Remerciements

Je souhaite dans un premier temps remercier mes encadrants de thèse, à savoir le chargé de recherche *Michel Bergmann* et le professeur *Angelo Iollo*. Je pense pouvoir affirmer que cette thèse restera graver dans nos mémoires, tant le contexte fut si particulier. Malgré la mise en route laborieuse, qui n'est certainement pas due à notre manque d'investissement, et les multiples embuches, je peux enfin confirmer que cette thèse a pu aller à son terme. Je les remercie de ce fait pour leur investissement pendant cette période incertaine et décourageante, pour m'avoir donné ma chance et avoir cru en moi jusqu'au bout. Michel, j'espère que tu ne m'en veux pas pour les nombreuses heures passées dans ton bureau. Ton aide a été primordiale pour pouvoir avancer jour après jour, que ce soit par tes idées de développement ou tes conseils. Merci Angelo pour ton expertise technique et pour les nombreuses opportunités que tu m'as offertes. Tu es force de proposition et tu as toujours été disponible quand j'en ai eu le plus besoin.

Je remercie à présent *Cédric Galusinski* et *Christophe Prud'homme* pour avoir accepté de rapporter mon manuscrit, pour l'intérêt qu'ils portent à mes travaux de recherche et pour le temps qu'ils ont pu y consacrer. Je remercie également *Frédéric Gibou* et *Gabriella Puppo* pour leur participation à mon jury de thèse. Un petit *flashback* me ramène à la conférence de l'ICIAM 2019 durant laquelle j'ai pu rencontrer *Frédéric*. Merci enfin à *François Clautiaux* et *Rodolphe Turpault*, qui ont accepté d'être les membres de mon comité de suivi de thèse, pour leur disponibilité et leurs conseils.

Je voudrais également dédier quelques lignes à mes collègues, notamment les membres de mon équipe MEMPHIS, qui ont bien voulu échanger avec moi au cours de cette thèse. Merci également à *Anne-Laure Gautier* pour toutes les tâches administratives, on peut dire que je t'ai donné du fil à retordre! L'ambiance dans les couloirs n'aurait certainement pas été la même sans la présence de l'équipe MONC. Je garde un lien privilégié avec beaucoup d'entre-eux, qui sont devenus mes ami.e.s, de part les nombreuses expériences que nous avons partagées. Enfin, une petite dédicace à mes nombreux co-bureaux qui ont dû me supporter pendant tant d'années : *Alice*, *Vivien*, *Boris*, *Stefano*, *Baptiste*, *Floriane*, *Guillaume* et *Giuliano*.

Enfin, je prête une attention toute particulière à mes proches. Je ne remercierai jamais assez ma famille pour avoir toujours été à mes côtés, pour le meilleur et pour le pire.

L'entourage reste le meilleur moyen pour se ressourcer, afin de pouvoir tenir le cap jour après jour. Un remerciement tout spécial à ma complice de vie Mélissa, avec qui tout est toujours plus simple. Tu as réussi à me supporter quand tout allait mal et tu m'as donné la force de croire, de ne rien lâcher. *"Je ne sais pas où va mon chemin mais je marche mieux quand ma main serre la tienne"* (Alfred de Musset).

Et pour toutes les personnes merveilleuses que j'ai pu rencontrer, de loin comme de près, un grand merci à tous !

Table des matières

Introduction	13
1 Modèle eulérien d'interaction fluide-structure	17
1 Modélisation du comportement fluide	19
2 Modélisation du comportement élastique	20
2.1 Lois de déformation d'une structure	20
2.2 Déformations et contraintes	24
2.3 Elasticité linéaire	27
2.4 Matériaux hyper-élastiques	32
3 Méthode de couplage fluide/structure	38
3.1 Suivi implicite de l'interface Γ_e	39
3.2 Approche monolithique : couplage fort	41
3.3 Méthode de pénalisation volumique	44
4 Modèle complet à un seul milieu	45
2 Méthode numérique	49
1 Intégration en temps	50
1.1 Transport des caractéristiques rétrogrades et de la fonction level set	51
1.2 Méthode à pas fractionnaire	51
2 Schémas Volumes Finis sur maillages cartésiens hiérarchiques	52
2.1 Maillage de type quadtree	53
2.2 Interpolations et reconstructions polynomiales	56
2.3 Discrétisation des opérateurs différentiels	59
2.4 Algorithme d'adaptation de maillage	66
3 Contraintes numériques liées au modèle	69
3.1 Ré-initialisation de la fonction level set	71
3.2 Extrapolation des caractéristiques rétrogrades	80
3.3 Stabilisation de la méthode numérique	82
4 Quelques exemples de problèmes de transport	85
4.1 Advection d'une fonction indicatrice	85
4.2 Problème d'instabilité atmosphérique	85

TABLE DES MATIÈRES

4.3	Advection d'un cercle	89
4.4	Le serpent	90
5	Implémentation du code de calcul	93
3	Stabilité de la méthode numérique	95
1	Analyse de stabilité du modèle simplifié 1D	97
1.1	Linéarisation	98
1.2	Comportement asymptotique des schémas numériques	99
2	Analyse de stabilité pour l'intégration en temps du modèle	102
2.1	Schémas préservant la linéarité de manière exacte (ELP)	103
2.2	Schémas ne préservant pas exactement la linéarité (non ELP)	107
2.3	Test numérique 1D	109
2.4	Stabilisation en une dimension d'espace	109
3	Généralisation en deux dimensions	111
3.1	Schéma FV2 stabilisé pour le transport des caractéristiques rétro-grades	111
3.2	Condition de stabilité	113
4	Validation et simulations numériques	115
1	Etude de convergence : le vortex de Taylor-Green	116
2	Écoulements autour de corps rigides	117
2.1	Le cylindre	118
2.2	La sphère en régime 2D axi-symétrique	122
2.3	Le cylindre à vitesse constante	124
2.4	Sédimentation d'un cylindre	126
3	Problèmes d'interaction fluide-structure (FSI)	128
3.1	Validation : structure élastique immergée dans une cavité entraînée	129
3.2	Déformation induite par un corps immergé tournant autour d'un axe	134
3.3	Membranes oscillantes	137
4	Application : simulation d'un écoulement dans une pompe cardiaque	139
	Conclusion et perspectives	147
	Annexes	151
A.	Etude de stabilité pour une équation d'advection 1D : influence de l'intégration en temps	151
B.	Types de maillage considérés pour les validations	153
C.	Erreur de troncature pour l'opérateur divergence sur maillage quadtree	154

Introduction

Contexte et environnement de recherche

Depuis quelques décennies, le recours à la simulation numérique est en plein essor. Tout d'abord employée dans les domaines aéronautique et automobile, elle est maintenant utilisée dans la plupart des secteurs d'activité, tels que la finance ou la médecine. Cette expansion est due en grosse partie au développement de la modélisation et aux progrès techniques réalisés en termes de structures informatiques, notamment par le biais de processeurs toujours plus performants, de plus grandes capacités dans la gestion des données mais aussi via l'apparition du calcul parallèle. Dans le cadre de l'ingénierie, la simulation numérique offre de multiples possibilités notamment pour une meilleure compréhension des phénomènes physiques. Sa fonction est devenue majeure dans le cadre de l'innovation, puisque les outils numériques permettent, d'un côté la réduction des délais de conception d'une technologie, et d'un autre côté l'amélioration de sa qualité et sa fiabilité. Associée aux tests expérimentaux, elle offre une aide à la décision, à l'optimisation et au développement de technologies innovantes.

Le projet de thèse est né d'une collaboration recherche/industrie entre le laboratoire Inria Bordeaux Sud-Ouest et la société CorWave SA¹. Cette dernière est à l'origine d'un nouveau dispositif d'assistance cardiaque (LVAD), reposant sur une technologie de membrane ondulante de type élastomère. Une fois activée, cette membrane permet de reproduire un débit sanguin pulsatile en sortie de pompe. D'un point de vue physique, l'interaction entre cette membrane et le sang est un phénomène très complexe à appréhender. Dans un contexte d'optimisation de la géométrie de pompe, l'utilisation d'un outil de simulation performant est primordiale pour deux raisons principales. Premièrement, un tel dispositif possède une géométrie complexe, il est extrêmement coûteux à produire et difficile à usiner. Le recours à une série de tests expérimentaux présente par conséquent une certaine limite. Deuxièmement, le diamètre de cette géométrie de pompe quasi-cylindrique est de l'ordre de 4 cm, les phénomènes se manifestant à l'intérieur sont donc difficilement observables par des moyens humains. L'outil numérique offre ainsi l'opportunité de mieux comprendre et mieux visualiser l'interaction à l'échelle microscopique.

1. <https://www.corwave.com/>

D'un point de vue modélisation, cette thèse est dédiée à la résolution de problèmes d'interaction fluide-structure (FSI). Les problèmes FSI apparaissent dans un grand nombre d'applications industrielles. Leur simulation est un vrai challenge et les méthodes numériques pré-existantes sont généralement développées pour répondre à des applications spécifiques. Au sein de l'équipe Inria BSO Memphis de Bordeaux, ce type de problèmes est résolu historiquement par des méthodes de frontières immergées (IBM). On pourra notamment faire référence à la méthode de pénalisation introduite par C.H. Bruneau [2] pour la simulation d'écoulements visqueux incompressibles autour de corps immergés. Dans cette équipe, deux codes de calculs ont été notamment développés pour résoudre des problèmes FSI, ou plus généralement CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Le premier d'entre eux, le code *NaSCar* conçu par Bergmann, repose sur une méthode de résolution Différence Finie sur maillage cartésien uniforme. Cette méthode est décrite plus en détails dans [10]. En guise de preuve du concept, une simulation préliminaire d'un écoulement dans une géométrie de pompe a été effectuée à partir de ce code, comme l'illustre la Figure 1. Le second code de calcul *HiWind*, développé par Taymans [107], est basé sur l'utilisation de maillages cartésiens hiérarchiques de type Quadtree/Octree. Il est dédié à la simulation de l'écoulement fluide autour d'une pale d'éolienne. D'abord implémenté en 2D puis généralisé en 3D pour des écoulements turbulents via un modèle LES, ce code est construit autour d'une librairie de génération de maillage Quadtree/Octree, appelée Bitpit/PABLO². Cette librairie *open source* est développée et maintenue par la société Optimad Engineering, entreprise composée en partie d'anciens doctorants de l'équipe de recherche. En utilisant les recherches réalisées au sein de l'équipe et en s'appuyant sur les codes pré-existants, l'objectif de cette thèse est de proposer une méthode numérique basée sur la librairie Bitpit/PABLO pour la résolution de problèmes FSI, faisant intervenir des matériaux hyper-élastiques de type élastomère.

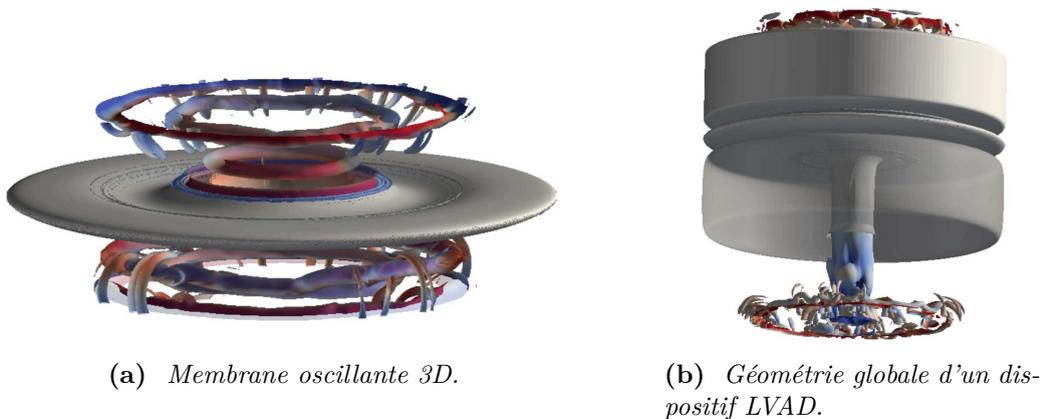


Figure 1 – *Simulation préliminaire en trois dimensions, inspirée du dispositif LVAD de CorWave, réalisée au sein de l'équipe [10].*

2. <https://optimad.github.io/bitpit/>

Originalité de l’approche

Pour résoudre un problème fluide-structure, le modèle eulérien initialement introduit par [Cottet et al.](#) [24] est considéré. Ce modèle a très récemment été étudié par [Deborde et al.](#) [28] dans le cadre de maillages cartésiens uniformes, pour la simulation de l’interaction entre une vague solitaire et une série de structures élastiques immergées. Dans notre approche, on propose une nouvelle méthode numérique Volume Finie pour la résolution de ce modèle eulérien sur maillages cartésiens hiérarchiques. De par l’utilisation de la librairie Bitpit/PABLO, le maillage peut être généré et adapté de manière simplifiée et optimale. Cette librairie donne la possibilité d’effectuer des calculs massivement parallèles, tout en préservant une bonne scalabilité du parallélisme. En outre, le niveau de raffinement du maillage peut être choisi maximal de sorte à assurer une bonne précision dans les zones à fort intérêt, autrement dit là où la solution varie beaucoup, et minimal dans les zones où la solution est suffisamment régulière. Une adaptation dynamique du maillage est d’autant plus intéressante dans le cas de problèmes multi-échelles. Cependant, l’utilisation de la structure de données quadtree impose certaines contraintes au développement de la méthode. La première contrainte fondamentale est relative au parallélisme. Pour assurer l’efficacité du parallélisme, les communications inter-processeurs sont limitées à la première couche de voisins. En d’autres termes, chaque cellule du maillage quadtree ne peut accéder qu’à ses voisins adjacents. Cette limitation est assez restrictive dans le sens où elle contraint la construction des schémas de discrétisation à des stencils compacts uniquement. Cette contrainte remet en question par conséquent l’ordre de précision de la méthode. De plus, la numérotation en *Z-order* employée pour la construction du maillage rend plus complexe l’implémentation de la méthode.

Organisation de la thèse

Le premier chapitre est dédié à la présentation du modèle FSI étudié au cours de cette thèse. Le modèle repose sur une formulation complètement eulérienne du problème. Le modèle unifié, c’est-à-dire à un seul milieu, propose la résolution des différents sous-problèmes physiques de manière monolithique, permettant un couplage fluide-structure fort. En d’autres termes, la solution du problème d’interaction est donnée sur l’ensemble du domaine de calcul, sans faire de distinction entre les différents milieux considérés pour la simulation. L’évolution en temps de l’interface est suivie implicitement par une fonction level set. Cette méthode d’interface diffuse s’inscrit parmi les méthodes de domaine fictif et permet l’imposition naturelle des conditions aux bords, par continuité. Cette formulation est favorisée car elle offre une certaine polyvalence comparée aux formulations lagrangiennes classiquement adoptées dans la littérature.

Ensuite, la méthode numérique développée au cours de cette thèse est détaillée dans un deuxième chapitre. Les équations du modèle sont résolues de manière découplée, soit en deux temps. Le choix de l’intégration explicite en temps ainsi que la méthode à pas frac-

tionnaire sont détaillés. Concernant la discrétisation en espace des opérateurs différentiels, les schémas Volumes Finis sur maillage cartésien hiérarchique de type quadtree sont également présentés. Une validation numérique est proposée pour chaque opérateur et les possibles avantages / inconvénients liés à ces discrétisations sont argumentés. Quelques exemples numériques pour des problèmes de transport sont par ailleurs étudiés afin de comparer les différents schémas Volumes Finis implémentés pour la discrétisation de l'opérateur d'advection. Enfin, on évoque les différentes contraintes numériques relatives à la méthode, notamment la nécessité de (re)mettre à jour fréquemment certaines quantités. Une stratégie est alors proposée pour outrepasser ces difficultés.

Dans le troisième chapitre, les questions relatives à la stabilité de la méthode sont soulevées. Par l'analyse asymptotique d'un modèle simplifié en une dimension d'espace, l'importance du schéma d'intégration en temps et de la stratégie de couplage est mise en avant. On verra également qu'une conservation exacte de l'asymptotique doit être satisfaite par le schéma de transport pour garantir la robustesse de la méthode, en particulier pour la prise en compte de matériaux très rigides. De par le caractère explicite de cette méthode, le choix du pas de temps est finalement motivé, conformément à la contrainte Courant-Lax-Friedrichs (CFL).

Le dernier chapitre est consacré à la validation de la méthode, ainsi qu'aux simulations numériques. Différents cas tests sont présentés, classés par ordre croissant de complexité. L'ordre de convergence en espace est tout d'abord vérifié dans un cas purement analytique. Différents écoulements autour de corps immergés, immobiles et mobiles, sont ensuite étudiés. Une comparaison des résultats CFD obtenus sur maillages cartésiens uniformes et non uniformes est dressée, mettant en évidence d'une part le ratio précision / temps de calcul, et d'autre part l'efficacité de l'adaptation dynamique de maillage. La méthode numérique sera aussi validée pour des problèmes FSI, à la fois dans le cas de matériaux rigides et peu rigides. Enfin, la méthode numérique sera mise en valeur à travers une application bio-médicale, inspirée du dispositif LVAD de CorWave.

Chapitre 1

Modèle eulérien d'interaction fluide-structure

Sommaire

1	Modélisation du comportement fluide	19
2	Modélisation du comportement élastique	20
2.1	Lois de déformation d'une structure	20
2.2	Déformations et contraintes	24
2.3	Elasticité linéaire	27
2.4	Matériaux hyper-élastiques	32
3	Méthode de couplage fluide/structure	38
3.1	Suivi implicite de l'interface Γ_e	39
3.2	Approche monolithique : couplage fort	41
3.3	Méthode de pénalisation volumique	44
4	Modèle complet à un seul milieu	45

Ce chapitre est dédié à la présentation du modèle eulérien considéré pour la résolution de problèmes d'interaction fluide-structure (FSI). Ce modèle eulérien a été initialement introduit par Cottet et Maitre [22], et utilisé par la suite pour simuler la déformation de membranes pressurisées [23]. Ces travaux ont été repris par ailleurs pour des applications bio-physiques par Maitre et al. [67] afin de calculer la forme d'équilibre de vaisseaux et simuler la contraction d'un cardiomyocyte isolé. Plus récemment, ce modèle a été employé pour la simulation de l'interaction entre une vague solitaire et une série de structures élastiques immergées [28].

On s'intéressera en particulier à l'interaction entre un fluide visqueux et un matériau hyper-élastique de type élastomère, tous les deux incompressibles. On distinguera les solides déformables, gouvernés par une loi de comportement élastique, des solides non-déformables ou rigides, pour lesquels le mouvement et la position du centre de masse

sont connus au cours du temps. La configuration de mise en oeuvre d'une simulation FSI est schématisée par la Figure 1.1. Le domaine de calcul $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est divisé en trois sous-domaines distincts associés à chaque milieu de telle sorte que $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_e \cup \Omega_s$. Le domaine fluide est noté Ω_f , le domaine relatif au matériau élastique est Ω_e , et les domaines rigides sont couverts par Ω_s . De manière générale, on identifiera une quantité relative aux milieux fluide, solide élastique, et solide rigide respectivement via les indices f , e et s . Dans ce qui suit, les domaines solides peuvent être inclus soit dans le matériau élastique, soit dans le fluide. Dans le premier cas, le matériau rigide représente un support permettant de mettre en mouvement et engendrer une certaine déformation de la structure élastique. Dans le second cas, il désigne un obstacle immergé dans le fluide, donnant lieu à des écoulements complexes. Excepté le domaine tout entier Ω , tous les sous-domaines évoluent dans le temps.

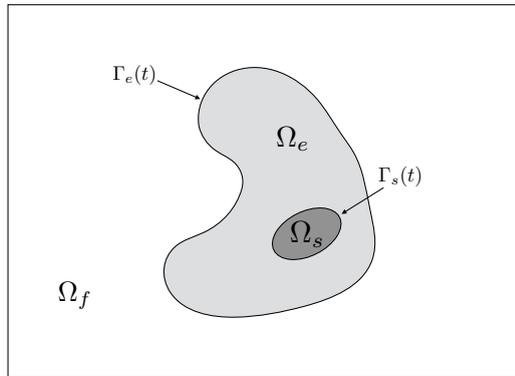


Figure 1.1 – Notations utilisées dans le cadre d'un problème d'interaction fluide-structure.

L'interface entre le matériau élastique et le fluide est notée Γ_e , et les interfaces entre le solide non-déformable et un autre milieu (élastique ou fluide) sont notées Γ_s . Comme tout problème d'interaction, le système est fermé en imposant des conditions aux limites, sur chacune des interfaces. En ce qui concerne l'interface élastique Γ_e , des conditions de transmission doivent être satisfaites pour coupler fluide et structures élastiques. En particulier, la vitesse \mathbf{u} et les composantes normales du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ sont continues à l'interface Γ_e . En d'autres termes, les sauts à l'interface $[\cdot]_{\Gamma_e}$ sont nuls :

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]_{\Gamma_e} &= 0, \\ [\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_e} \cdot \mathbf{n}_e &= 0, \end{aligned} \quad (0.1)$$

où \mathbf{n}_e est le vecteur normal à l'interface Γ_e , pointant de manière arbitraire vers le fluide. Les expressions du tenseur des contraintes seront explicitées par la suite.

De même, une condition de continuité doit être imposée sur l'interface Γ_s :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s(t) \quad \text{sur } \Gamma_s(t), \quad (0.2)$$

où \mathbf{u}_s désigne la vitesse de l'interface Γ_s . Cette vitesse correspond en général à une donnée du problème, définie pour caractériser un objet immobile ($\mathbf{u}_s = \mathbf{0}$) ou effectuant un mouvement prédéfini relatif à la simulation.

Deux types de systèmes de coordonnées ont été examinés au cours de cette thèse. D'une part, la simulation en deux dimensions (2D) est effectuée de manière classique dans le système de coordonnées cartésien $\mathbf{x} = (x, y)$. Un champ de vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ est alors décomposé dans la base orthonormée comme $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{v}_y \mathbf{e}_y$, où \mathbf{v}_x et \mathbf{v}_y désignent les composantes du vecteur. D'autre part, la simulation de phénomènes 3D sous hypothèse d'axi-symétrie (2D axi-symétrique) est réalisée dans le système de coordonnées cylindriques $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$. Sous cette hypothèse, la composante azimutale \mathbf{v}_θ d'un vecteur \mathbf{v} et la variation azimutale $\partial/\partial\theta$ sont nulles. Par conséquent, le domaine de calcul Ω est inclus dans le demi-plan (O, r, z) avec $r \geq 0$. Le vecteur \mathbf{v} est alors identifié à partir de ses composantes radiale \mathbf{v}_r et axiale \mathbf{v}_z .

1 Modélisation du comportement fluide

La dynamique du fluide est décrite par le modèle de Navier-Stokes en régime incompressible. Ce système de lois de conservation s'écrit sous la forme d'un couple d'Equations aux Dérivées Partielles (EDPs) :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f + \rho \mathbf{S}, \quad (1.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.1b)$$

$$+ \text{conditions aux limites} \quad (1.1c)$$

où ρ fait référence à la densité, et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ et p représentent le champ de vitesse et la pression. Le terme source \mathbf{S} désigne les éventuelles forces extérieures exercées sur le fluide (la gravité ou autres). Les deux équations représentent respectivement la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de masse. Le fluide visqueux est supposé Newtonien, autrement dit, sa viscosité μ reste constante au cours du temps, et en tout point de Ω_f . Le tenseur des contraintes visqueuses est par conséquent défini par :

$$\boldsymbol{\sigma}_f = \mu_f ([\nabla \mathbf{u}] + [\nabla \mathbf{u}]^T). \quad (1.2)$$

Sous l'hypothèse de conservation de masse (1.1b), l'équation de la conservation de la quantité de mouvement peut être réécrite sous forme conservative comme :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) = \nabla \cdot (-p \mathbf{I} + \mu_f \nabla \mathbf{u}) + \rho \mathbf{S}. \quad (1.3)$$

Pour résoudre ce problème, le système est muni de conditions aux limites pour la vitesse. Dans le cadre de cette thèse, des conditions de type Dirichlet ou Neumann homogènes sont considérées au bord du domaine Ω . Selon la configuration du cas test de simulation mis en œuvre, on pourra notamment imposer :

- des conditions d'entrée $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{inlet}$ si la vitesse d'écoulement en entrée est connue au préalable,
- des conditions de sortie $\partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{n} = \mathbf{0}$ si un bord du domaine est situé suffisamment loin de toute perturbation importante,
- des conditions de non-glissement sur un mur pour lesquelles les composantes normale et tangentielle de la vitesse sont respectivement fixées à zéro et à la vitesse du mur,
- une condition d'axi-symétrie en $r = 0$ pour des simulations 2D axi-symétriques. Sur le bord de gauche, on impose alors $\mathbf{u}_r = 0$ et $\partial\mathbf{u}_z/\partial r = 0$.

Pour chacune des simulations effectuées dans le Chapitre 4, les conditions aux bords seront plus précisément argumentées.

2 Modélisation du comportement élastique

Cette thèse vise à étudier l'interaction entre un fluide visqueux incompressible et des matériaux hyper-élastiques. En particulier, les membranes de type élastomère sont naturellement susceptibles de subir de larges déformations lorsqu'elles sont excitées, pouvant traduire un comportement non-linéaire. On verra par la suite dans la Section 2.4 que le comportement des élastomères a été étudié par de multiples auteurs, proposant différents modèles d'hyper-élasticité. Une analyse comparative des modèles est par ailleurs dressée par Marckmann et Verron [68]. En raison du type de déformations envisagées lors de nos simulations, le modèle de Mooney-Rivlin [72, 94] à deux paramètres sera privilégié.

Dans cette section, on décrira tout d'abord les lois de déformations d'une structure, plus spécifiquement pour le formalisme de représentation eulérien. Par la suite, on s'intéressera aux notions de déformations et contraintes, ainsi qu'à leur relation dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire. On argumentera finalement le choix du modèle hyper-élastique en introduisant les lois de comportement de matériaux hyper-élastiques isotropes et incompressibles. Cette section s'appuie sur la théorie de l'élasticité non-linéaire élaborée par Ogden [78, 79].

2.1 Lois de déformation d'une structure

Dans cette partie, on se focalise sur la cinématique de la structure élastique Ω_e au cours du temps. La déformation et le mouvement de ce matériau peuvent s'exprimer aux sens des formalismes lagrangien et eulérien. En guise de notations, on note Ω_0 la configuration initiale ou de référence du matériau (à $t = 0$) et Ω_t sa configuration déformée au temps t . On se placera dans la suite de ce chapitre dans une configuration de représentation 3D pour mieux détailler les lois de comportement élastique.

Formalisme lagrangien.

Dans un contexte lagrangien, un observateur situé dans la configuration de référence Ω_0 suit le comportement et la position en espace des particules de la structure au fil du temps. Autrement dit, cette formulation se focalise sur les particules, de façon individuelle. La déformation de la structure est décrite à partir de la configuration de référence par le biais de fonctions dites de *mapping*, appelées caractéristiques directes :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : [0, T_{max}] \times \Omega_0 &\longrightarrow \Omega_t, \\ (t, \boldsymbol{\xi}) &\longmapsto \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

A un instant $t > 0$, une particule lagrangienne, initialement positionnée en :

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{X}(t = 0, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.1)$$

s'est déplacée jusqu'à un point $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\xi})$ de la configuration Ω_t , comme l'illustre la Figure 1.2. Dans ce système de représentation, la vitesse au temps t de cette particule est alors donnée par :

$$\mathbf{u}_{lag}(t, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (2.2)$$

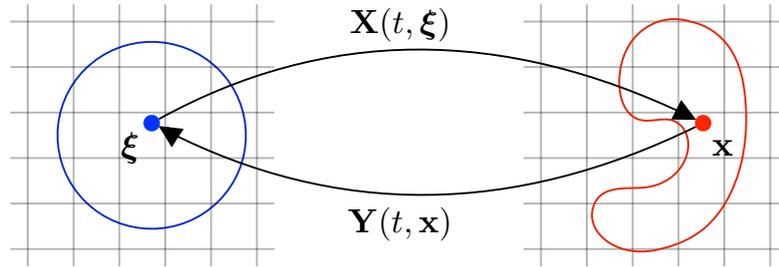


Figure 1.2 – Les caractéristiques directes \mathbf{X} et rétrogrades \mathbf{Y} sont utilisées pour décrire la déformation d'une structure.

La dérivée particulière (ou dérivée matérielle) d'une fonction φ est alors simplement la dérivée partielle de φ par rapport à t , i.e.

$$\frac{D\varphi}{Dt}(t, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \boldsymbol{\xi}).$$

La déformation d'un matériau est ainsi décrite par l'intermédiaire de l'EDO (2.2), munie de la condition initiale (2.1).

Le tenseur des déformations (ou gradient de déformation), défini par :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\boldsymbol{\xi}} = [\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{X}] \quad (2.3)$$

permet de caractériser la variation de la longueur d'un segment après déformation. Par développement limité au voisinage de $\boldsymbol{\xi}$, on peut en effet obtenir la relation :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} + \mathcal{O}(d\boldsymbol{\xi}^2).$$

De la même manière, il est également possible d'exprimer la variation d'une surface ou d'un volume en fonction de ce gradient des déformations \mathbf{F} . Via le changement de variable $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\xi})$, on peut en effet exprimer une intégrale volumique sur Ω_t (ou surfacique sur $\partial\Omega_t$ par exemple) à partir de l'intégrale volumique sur la configuration de référence Ω_0 (ou surfacique sur $\partial\Omega_0$). Des éléments de volume dV_t et de surface dS_t sont alors reliés respectivement aux éléments de référence dV_0 et dS_0 par :

$$\begin{aligned} dV_t &= \det(\mathbf{F}) dV_0, \\ dS_t &= \text{Cof}(\mathbf{F}) dS_0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le déterminant de \mathbf{F} représente la dilatation volumique locale de la structure. Pour des matériaux incompressibles, le volume de la structure reste inchangé après déformation, de ce fait, on peut ainsi extraire de la relation (2.4) que :

$$J := \det(\mathbf{F}) = 1. \tag{2.5}$$

Formalisme eulérien.

A contrario, la représentation eulérienne se focalise sur la configuration déformée Ω_t , en regardant plus particulièrement ce qui se passe en un point matériel en mouvement au cours du temps. Autrement dit, ce système de coordonnées est mobile puisqu'il est relatif aux mouvements des particules situées dans le corps en mouvement.

Suivre de manière eulérienne la déformation d'une structure revient à trouver la position initiale $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$ d'un point $x \in \Omega_t$ en utilisant des fonctions de *mapping*, appelées caractéristiques rétrogrades :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} : [0, T_{max}] \times \Omega_t &\longrightarrow \Omega_0, \\ (t, \mathbf{x}) &\longmapsto \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Par définition, les caractéristiques rétrogrades représentent l'application inverse des caractéristiques directes, i.e. $\mathbf{X} = \mathbf{Y}^{-1}$ (voir la Figure 1.2) car on peut facilement remarquer les relations :

$$\mathbf{X}(t, \mathbf{Y}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}(t, \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{\xi}. \tag{2.6}$$

A un instant t , la vitesse d'un point \mathbf{x} et la dérivée matérielle d'une fonction φ dans le système de représentation eulérien sont alors données respectivement par :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_{lag}(t, \mathbf{Y}(t, \mathbf{x})), \tag{2.7a}$$

$$\frac{D}{Dt}\varphi(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla\varphi(t, \mathbf{x}). \tag{2.7b}$$

Au temps initial $t = 0$, les caractéristiques rétrogrades sont simplement définies comme l'identité \mathbf{I} , ou en d'autres termes : $\mathbf{Y}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$. En dérivant la seconde équation de (2.6) par rapport au temps, on obtient une équation d'advection à vitesse \mathbf{u} portant sur les caractéristiques rétrogrades :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla_x \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}) = 0, \\ \mathbf{Y}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Cette équation de transport est généralement employée par les méthodes eulériennes pour décrire la déformation d'une structure au cours du temps. La relation (2.8) est totalement équivalente à la formulation lagrangienne (2.1)-(2.2).

Il est également possible d'exprimer le gradient des déformations \mathbf{F} au sens du formalisme eulérien. En effet, en dérivant l'une des équations de (2.6) par rapport à $\boldsymbol{\xi}$ ou \mathbf{x} , on obtient naturellement que :

$$\mathbf{F} = [\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{X}] = [\nabla_x \mathbf{Y}]^{-1}. \quad (2.9)$$

Par la relation d'incompressibilité (2.5), à savoir $\det(\mathbf{F}) = 1$, on peut aussi en déduire que

$$\det[\nabla \mathbf{Y}] = 1.$$

En s'appuyant sur ces deux formalismes, on peut répertorier trois classes de méthodes, à savoir purement lagrangiennes, lagrangiennes-eulériennes, et purement eulériennes. Pour la première classe, les équations fluides et solides sont écrites conformément au formalisme lagrangien. Parmi ce type de méthodes, on peut faire référence entre autres aux méthodes SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*, voir [71, 90]) ou encore PFEM (*Particle Finite Element Method*, voir [50, 97]). Dans la seconde classe, la méthode ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*, voir par exemple les travaux de Nitikitpaiboon et Bathe [76], Turek et Hron [113] ou encore Chabannes et al. [19]) est classiquement employée. Cette méthode consiste à faire évoluer le maillage afin de suivre l'interface fluide-solide. Le comportement fluide est décrit de manière eulérienne tandis que la déformation des structures est suivie de manière lagrangienne. Au cours de cette thèse, on se place dans le contexte d'une approche totalement eulérienne pour décrire la déformation de la structure hyper-élastique. Cette stratégie a notamment été privilégiée par Dunne et Rannacher [36], Rannacher et Richter [91], Valkov et al. [114], Sugiyama et al. [103] ou encore Deborde et al. [28]. A cette fin, les caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} seront considérées par la suite, notamment pour calculer le gradient de déformation \mathbf{F} via la relation (2.9). On verra dans la prochaine section qu'il sera alors utilisé pour évaluer le tenseur des contraintes élastiques $\boldsymbol{\sigma}_e$. L'évolution en temps de ces caractéristiques sera alors décrite par la résolution numérique du problème de transport (2.8).

2.2 Déformations et contraintes

Dans cette partie, \mathbf{x}_i désignera la i -ème composante d'un vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Ce vecteur pourra également être écrit sous la forme cartésienne classique $\mathbf{x} = (x, y, z)$ par commodité.

Tenseurs des déformations

On considère un point P de coordonnées $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$ situé en un point $\overrightarrow{PP'}$ de coordonnées $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}) \in \Omega_t$ après déformation. Via le vecteur de déplacement $\overrightarrow{PP'}$, le déplacement (lagrangien) de la particule P est alors défini par :

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} = \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\xi} \quad (2.10)$$

ou par $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{Y}(\mathbf{x})$ pour un déplacement eulérien.

Afin de mettre en relation déformation et contrainte, la variation de distance (due à la déformation) entre deux points arbitrairement choisis est étudiée. Soit un point $Q = (\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$ situé à une distance $|d\boldsymbol{\xi}| = (d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2)^{1/2}$ du point P . Son image $Q' = X(Q) = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ est alors située à une distance $|d\mathbf{x}| = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)^{1/2}$ de l'image P' . Comme nous avons pu le voir dans la section précédente (cf équation (2.3)), le gradient des déformations \mathbf{F} permet de mesurer cette variation de distance de par la relation $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\boldsymbol{\xi}$.

Dans une configuration lagrangienne, on peut en effet écrire :

$$\begin{aligned} |d\mathbf{x}|^2 - |d\boldsymbol{\xi}|^2 &= (d\mathbf{x})^T d\mathbf{x} - (d\boldsymbol{\xi})^T d\boldsymbol{\xi} \\ &= (d\boldsymbol{\xi})^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) (d\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le tenseur lagrangien symétrique

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.12)$$

qui se dégage de cette formulation est appelé *tenseur des déformations de Green-Lagrange*, introduit par Green et Saint-Venant. Il permet d'évaluer la variation du produit scalaire entre deux vecteurs. Si la configuration déformée Ω_t satisfait $\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$, la structure n'est pas déformée, elle a alors simplement effectué un mouvement rigide (de translation ou rotation par exemple).

En utilisant le tenseur gradient \mathbf{F} et le déplacement lagrangien (2.10), on peut également définir le "vrai" gradient des déformations :

$$\nabla \mathbf{U} = [\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{U}] = \mathbf{F} - \mathbf{I}. \quad (2.13)$$

Il est alors possible d'exprimer le tenseur des déformations de Green-Lagrange \mathbf{E} en fonction du déplacement \mathbf{U} par la relation :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left([\nabla \mathbf{U}] + [\nabla \mathbf{U}]^T + [\nabla \mathbf{U}]^T [\nabla \mathbf{U}] \right). \quad (2.14)$$

Sous cette forme, ce tenseur des déformations est composé d'une partie linéaire et d'une partie non-linéaire. Sa partie linéaire

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}([\nabla \mathbf{U}] + [\nabla \mathbf{U}]^T) \quad (2.15)$$

est appelée *tenseur des déformations linéarisé de Green-Lagrange*, il est fréquemment employé dans les modèles d'élasticité linéaire. En effet, les deux tenseurs (2.14) et (2.15) coïncident dans la limite de petites déformations. Au contraire, le tenseur de Green-Lagrange complet (2.14) est notamment utilisé pour le modèle non-linéaire de Saint-Venant-Kirchhoff.

En examinant désormais la variation de l'angle entre les deux configurations Ω_0 et Ω_t , on introduit le *tenseur de Cauchy-Green à droite* $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$. Ce tenseur fait le lien entre le produit scalaire de deux vecteurs ($d\boldsymbol{\xi}$ et $d\boldsymbol{\xi}'$) de la configuration de référence et le produit scalaire de l'image des deux vecteurs ($d\mathbf{x}$ et $d\mathbf{x}'$) dans la configuration déformée :

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}' = (\mathbf{F}d\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{F}d\boldsymbol{\xi}') = \mathbf{C}(d\boldsymbol{\xi} \cdot d\boldsymbol{\xi}').$$

Lorsque le matériau est sujet à un mouvement rigide (translation et rotation uniquement), on obtient $\mathbf{C} = \mathbf{I}$. On peut notamment faire l'analogie avec le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ dans le cas où le solide ne subit aucune déformation.

Le tenseur de Cauchy-Green à droite \mathbf{C} est naturellement symétrique, il est donc diagonalisable. Ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont appelées les déformations principales. Dans le repère principal (= base composée des vecteurs propres ou directions principales), le tenseur est dit diagonal, i.e. $\mathbf{C}_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ où δ désigne le symbole de Kronecker. Les déformations principales λ_i sont obtenues par résolution de l'équation caractéristique :

$$\mathcal{P}_{\mathbf{C}}(\lambda) := \det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0, \quad (2.16)$$

où I_1, I_2 , et I_3 désignent les invariants du tenseur \mathbf{C} , définis par :

$$I_1 = \text{Tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad (2.17a)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[\text{Tr}(\mathbf{C})^2 - \text{Tr}(\mathbf{C}^2)] = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3, \quad (2.17b)$$

$$I_3 = \det(\mathbf{C}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (2.17c)$$

Ces invariants sont notamment utilisés pour exprimer les fonctions de densité d'énergie de déformation, comme on pourra le voir dans la Section 2.4.

Jusqu'ici, on s'est placé dans le cadre de déformations lagrangiennes. Pour une description eulérienne des déformations, la variation des distances (2.11) peut être réécrite de manière analogue en utilisant la relation $d\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}$:

$$|d\mathbf{x}|^2 - |d\boldsymbol{\xi}|^2 = (d\mathbf{x})^T (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) (d\mathbf{x}). \quad (2.18)$$

Cette formulation permet de mettre en évidence le tenseur eulérien des déformations \mathbf{e} , qui s'exprime à partir du *tenseur de Cauchy-Green à gauche* noté $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ comme :

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}). \quad (2.19)$$

Le tenseur eulérien des déformations est également appelé *tenseur d'Almansi* dans la littérature. A partir de la relation eulérienne existant entre déplacement et déformation de la structure, à savoir $\nabla\mathbf{u} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1}$, le tenseur eulérien \mathbf{e} s'écrit de manière similaire au tenseur lagrangien \mathbf{E} sous la forme :

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}([\nabla\mathbf{u}] + [\nabla\mathbf{u}]^T - [\nabla\mathbf{u}]^T[\nabla\mathbf{u}]). \quad (2.20)$$

Enfin, les invariants du tenseur de Cauchy-Green à gauche \mathbf{B} sont également ceux de \mathbf{C} (équations (2.17)) puisque $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{C}) = J^2$.

Tenseurs des contraintes

Une contrainte est homogène à une pression puisqu'elle quantifie la force exercée par unité de surface. Son unité est le Pascal Pa (ou N/m^2), mais elle est habituellement exprimée en $MPa = 10^6 Pa$ lorsqu'on s'intéresse à l'étude de matériaux élastiques. La notion de contrainte a été initialement introduite par Cauchy. On définit le vecteur contrainte par :

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \lim_{|dS^{(\mathbf{n})}| \rightarrow 0} \frac{d\vec{\mathbf{F}}}{dS^{(\mathbf{n})}}, \quad (2.21)$$

dans le cas où une force $\vec{\mathbf{F}}$ est appliquée sur une surface $dS^{(\mathbf{n})}$ de vecteur normal extérieur $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, comme l'illustre la Figure 1.3a. Pour connaître les contraintes en un point donné de la surface du matériau, la formule de Cauchy exprime le vecteur contrainte $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$ comme fonction des vecteurs contraintes associés aux trois vecteurs de la base orthonormée $\{e_x, e_y, e_z\}$:

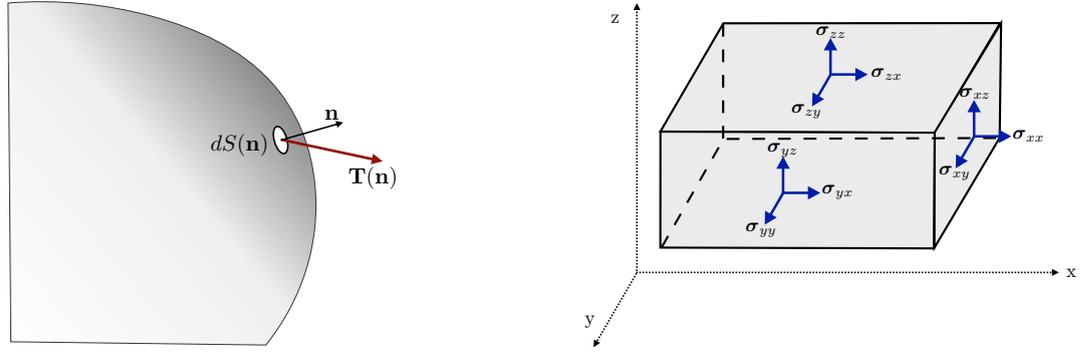
$$\begin{aligned} \mathbf{T}_x^{(\mathbf{n})} &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y + \sigma_{zx}n_z \\ \mathbf{T}_y^{(\mathbf{n})} &= \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{zy}n_z \\ \mathbf{T}_z^{(\mathbf{n})} &= \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{aligned}$$

ou écrite de manière plus compacte :

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}. \quad (2.22)$$

Le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ ainsi défini est le *tenseur des contraintes de Cauchy*. Comme le montre la Figure 1.3b, les composantes diagonales σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} correspondent aux contraintes normales à la surface, tandis que les composantes extra-diagonales σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yx} , σ_{yz} , σ_{zx} , σ_{zy} représentent les contraintes tangentielles ou de cisaillement. La symétrie du tenseur des contraintes exprime l'égalité des contraintes de cisaillement associées respectivement

à deux plans orthogonaux. Le tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ relie les forces exercées sur la configuration actuelle Ω_t à partir de cette même configuration Ω_t . Ce tenseur de Cauchy désigne par conséquent le tenseur eulérien des contraintes.



(a) Vecteur des contraintes agissant sur une surface $dS(\mathbf{n})$ du matériau.

(b) Composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$.

Figure 1.3 – Illustration géométrique des contraintes exercées sur un matériau.

De manière analogue, le *premier tenseur de Piola-Kirchhoff*, noté \mathcal{P} , est appelé tenseur lagrangien des contraintes, puisqu'il relie les forces exercées sur la configuration actuelle Ω_t à partir de la configuration initiale Ω_0 : $d\vec{\mathbf{F}} = \mathcal{P}\mathbf{n}_0 dS_0$. La relation entre le tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et le premier tenseur de Piola-Kirchhoff est donnée par :

$$\mathcal{P} = \det(\mathbf{F})\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma} = \det(\mathbf{F})^{-1}\mathcal{P}\mathbf{F}^T. \quad (2.23)$$

On remarque que \mathcal{P} n'est en général pas symétrique puisque \mathbf{F} ne l'est pas.

De plus, le *second tenseur de Piola-Kirchhoff*, noté \mathcal{S} relie les forces exercées sur la configuration de référence Ω_0 à partir de cette même configuration initiale Ω_0 . Ce tenseur lagrangien est défini comme :

$$\mathcal{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathcal{P} = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}. \quad (2.24)$$

Sous cette forme, on peut voir que ce second tenseur \mathcal{S} est symétrique alors que le premier \mathcal{P} ne l'est pas. De ce fait, le tenseur \mathcal{S} peut être plus facilement utilisé pour définir des lois de comportement déformation/contrainte. Dans la limite de petites déformations, ces trois tenseurs des contraintes sont identiques.

2.3 Elasticité linéaire

Lorsqu'un matériau solide est soumis à une force extérieure, il se déforme. Pendant cette phase dite "de charge", le matériau est déformé conformément à ses propriétés physiques,

suivant une certaine loi de comportement. Si on décide d'arrêter subitement d'appliquer cette force extérieure, le matériau chargé passe alors en phase de "décharge". Un matériau est dit élastique s'il tend à revenir à sa forme initiale (non déformée), en d'autres termes si sa déformation est réversible. Dans le cas contraire, si l'arrêt de la sollicitation entraîne une déformation définitive (ou irréversible), le comportement est dit plastique.

Diagramme Contrainte-Déformation.

L'élasticité des matériaux peut être décrite par un diagramme contrainte-déformation, défini pour une déformation élémentaire (traction, compression, etc.). Si on analyse l'allure de ces courbes, on peut remarquer que trois comportements matériels se dégagent, à savoir les comportements fragile, ductile et élastique non-linéaire. Un exemple de ces courbes obtenues pour un essai de traction est illustré par la Figure 1.4. Un matériau **fragile** ne possède pas de comportement plastique, il se déforme de manière totalement élastique jusqu'à un certain point de rupture. Les céramiques ou le verre font notamment partie de cette catégorie. Pour un matériau **ductile**, la déformation élastique est suivie d'une déformation plastique à partir d'un certain seuil de contraintes appelé limite d'élasticité. La déformation totale se décompose alors comme la somme de déformations élastique et plastique. Ce type de comportement peut être observé pour une majorité de métaux et certains alliages. Un comportement **élastique non-linéaire** se distingue des deux autres car la déformation élastique n'est pas proportionnelle à la contrainte de sollicitation. Entre autres, les élastomères et certains polymères thermo-plastiques possèdent un comportement non-linéaire, ils peuvent être radicalement différents selon la nature même du matériau.

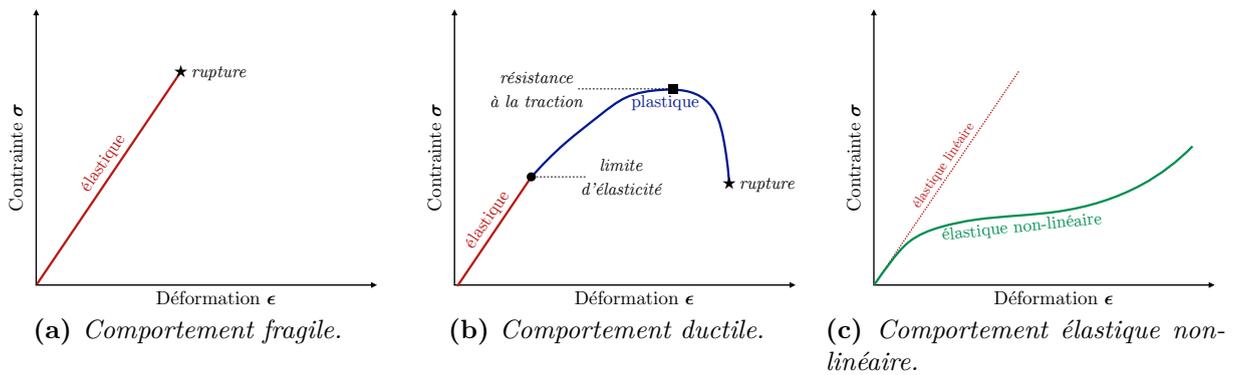


Figure 1.4 – *Diagramme contrainte-déformation en traction de différents types de matériaux.*

Durant cette thèse, on s'est plus particulièrement intéressé à cette troisième catégorie de matériaux non-linéaires pour lesquels les déformations demeurent relatives au domaine élastique. En effet, les contraintes mises en jeu lors de nos simulations se trouvent net-

tement inférieures à la limite d'élasticité, les effets élasto-plastiques sont par conséquent négligeables.

Solide Hookéen.

La loi de comportement énoncée par Hooke en 1676 est fréquemment utilisée dans différents domaines de la physique pour modéliser les petites déformations élastiques. Sous la loi de Hooke, la déformation élastique est considérée proportionnelle à la contrainte exercée sur le matériau. Dans la limite de faibles déformations, la plupart des métaux par exemple vérifie une relation de quasi-linéarité. Cependant, on a pu voir précédemment que pour certains matériaux notamment ductiles, cette loi ne convient pas à partir d'un certain seuil de contraintes puisque la déformation devient irréversible.

En dimension un, le matériau peut être assimilé à un ressort de rigidité k . Pour un léger étirement ou une faible compression, la variation de longueur δl est proportionnelle à la force de traction/compression f , i.e. $f = -k\delta l$. De manière plus générale, la loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.25)$$

où E est appelé **module de Young** ou module d'élasticité. Il est homogène à une pression (exprimée en Pa) et caractérise la rigidité du matériau.

En plusieurs dimensions, il est possible de généraliser la loi de Hooke en exprimant la relation déformation-contrainte sous forme matricielle ou tensorielle. Le comportement élastique est alors modélisé via un tenseur de rigidité d'ordre 4 noté $[\mathbf{c}]$ de coefficients \mathbf{c}_{ijkl} :

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{c}]\boldsymbol{\epsilon}. \quad (2.26)$$

ou de manière équivalente, $\sigma_{ij} = \sum_{k,l} \mathbf{c}_{ijkl} \epsilon_{kl}$ pour chaque élément ij de la matrice. Ici, les tenseurs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et des déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ sont respectivement le tenseur de Cauchy et le tenseur des déformations de Green-Lagrange linéarisé $\boldsymbol{\epsilon} = ([\nabla \mathbf{u}] + [\nabla \mathbf{u}]^T)/2$ (voir Equation (2.15)). Dans la limite de petites déformations, les formalismes lagrangien et eulérien sont totalement équivalents.

Dans le cas où le matériau est isotrope, autrement dit que toutes les propriétés physiques du milieu sont invariantes dans toutes les directions, le tenseur de rigidité $[\mathbf{c}]$ est également isotrope, la relation de Hooke s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.27)$$

où λ et μ désignent ici les coefficients de Lamé relatifs au matériau. Le deuxième coefficient de Lamé, également appelé module de cisaillement, sera introduit dans le prochain paragraphe.

Exemples de déformations élémentaires et modules élastiques

On propose l'étude de trois déformations sous contraintes, à savoir la traction uni-axiale,

la compression isostatique (ou uniforme) et le cisaillement. Pour les deux premières déformations, la force est exercée dans la direction normale alors que la troisième est due à une contrainte tangentielle. Ces trois déformations sont représentées sur la Figure 1.5. On cherche à écrire le tenseur des déformations linéarisé $\boldsymbol{\epsilon} = ([\nabla \mathbf{u}] + [\nabla \mathbf{u}]^T)/2$ à partir du vecteur déplacement $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$, ainsi que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. On suppose que le matériau est isotrope et que les déformations sont petites.

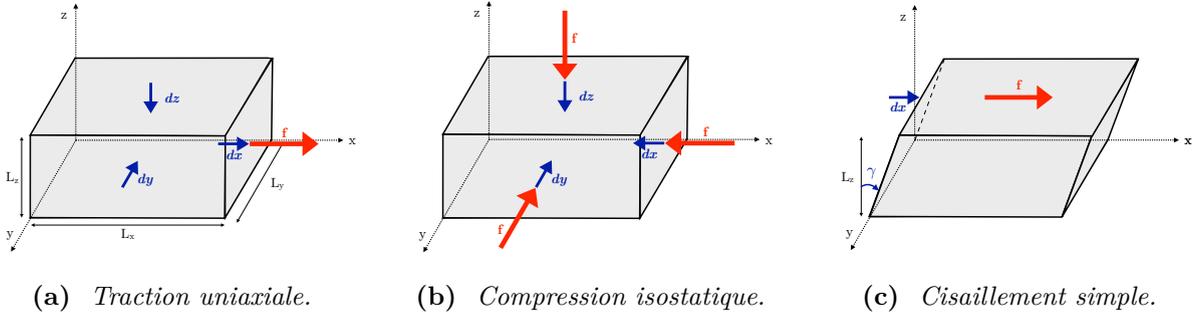


Figure 1.5 – Exemples de déformations élémentaires.

— Traction uni-axiale.

Le matériau est étiré dans une direction (ici \mathbf{e}_x) via une force extérieure $\mathbf{f} = f_x \mathbf{e}_x$ (Figure 1.5a). Dans ce cas, la seule contrainte non nulle est donc $\sigma_{xx} = f_x/A$, où A désigne l'aire de la surface sur laquelle la force est appliquée. Ici, la surface correspond au rectangle de taille $A = L_y \times L_z$. L'allongement relatif du matériau $\epsilon_x = dx/L_x$ est relié à cette contrainte par le **module de Young** E conformément à la loi de Hooke (2.25) :

$$\frac{f_x}{A} = E \frac{dx}{L_x}.$$

La relation précédente est évidemment très approximative et reste vraie uniquement pour de petites déformations. Si la contrainte est uni-directionnelle, le matériau se déforme néanmoins dans les trois directions. En effet, si l'objet s'allonge dans la direction (Ox) :

$$\mathbf{u}_x = \epsilon_x x,$$

il subit également une contraction transverse :

$$\mathbf{u}_y = -\nu \epsilon_x y \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_z = -\nu \epsilon_x z,$$

où le coefficient de proportionnalité ν est appelé **coefficient de Poisson**. Ce coefficient sans unité représente le ratio entre le rétrécissement transversal relatif et l'allongement longitudinal relatif. On peut remarquer de plus que la variation relative de volume s'écrit :

$$\frac{dV}{V_0} = \frac{dx}{L_x} + \frac{dy}{L_y} + \frac{dz}{L_z} \approx (1 - 2\nu)\epsilon_x,$$

on peut donc conclure que pour $\nu \rightarrow 1/2$, le matériau est alors incompressible. Les tenseurs des déformations et des contraintes s'écrivent alors :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\epsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\epsilon_x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'essai de traction expérimental est notamment effectué en laboratoire afin d'estimer le comportement élastique du matériau, à savoir son module de Young et son coefficient de Poisson. Pour des contraintes plus élevées, il permet également de déterminer sa résistance à la rupture (via la limite d'élasticité, la ductilité, etc.) qui traduit son comportement élasto-plastique.

— Compression isostatique ou uniforme.

La déformation du matériau est provoquée par une force de pression isotrope, i.e. de même intensité dans toutes les directions (Figure 1.5b). La force est appliquée sur chaque surface dS dans la direction normale $\mathbf{f} = -p\mathbf{n}$ avec une intensité p . La variation de volume dV/V_0 du matériau est alors proportionnelle à cette variation de pression :

$$p = -K \frac{dV}{V_0}$$

où K désigne le module d'élasticité à la compression isostatique (ou **bulk modulus** en anglais). Il s'exprime en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν par la relation $3K = E/(1 - 2\nu)$. Cette quantité mesure la résistance du matériau face aux effets de compression. Dans la limite d'incompressibilité $\nu \rightarrow 1/2$, ce coefficient $K \sim (1 - 2\nu)^{-1}$ tend à l'infini.

De manière équivalente, la variation relative de la longueur est la même dans chaque direction :

$$\frac{dx}{Lx} = \frac{dy}{Ly} = \frac{dz}{Lz} = -\frac{p}{3K} \implies \mathbf{u}_i = -\frac{p}{3K}x_i.$$

Les tenseurs des déformations et des contraintes sont par conséquent diagonaux :

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{p}{3K}\mathbf{I} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}.$$

— Cisaillement simple.

Comme le présente la Figure 1.5c, une force tangentielle $\mathbf{f} = \mathbf{f}_x\mathbf{e}_x$ est appliquée dans la direction (Ox) sur la face supérieure de normale $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$. La seule composante non-nulle du tenseur des contraintes est donc $\sigma_{xz} = \mathbf{f}_x/A$ ($= \sigma_{zx}$ par symétrie), où A désigne l'aire de la face supérieure. La déformation est caractérisée par la variation de l'angle γ . Pour de petites déformations, cet angle peut être approché par $\gamma \approx \tan(\gamma) = dx/L_z$, et le déplacement dans la direction (Ox) est alors :

$$\mathbf{u}_x = \gamma z.$$

Classiquement, le cisaillement est exprimé à partir du **module de cisaillement** (ou de glissement) G défini comme le ratio contrainte / déplacement relatif :

$$G = \frac{\sigma_{xz}}{\gamma} = \frac{\mathbf{f}_x L_z}{A dx} = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Cette contrainte, exprimée en Pa , est également appelée module de rigidité et est proportionnelle au module de Young E . Les tenseurs des déformations et contraintes sont :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & G\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ G\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4 Matériaux hyper-élastiques

On se place dans le contexte de l'étude du comportement hyper-élastique d'élastomères (de type caoutchouc). Dans ce cas de figure, les propriétés des matériaux sont classiquement caractérisées en termes de *densité d'énergie volumique* notée $W = W(\mathbf{F}, \boldsymbol{\xi})$, qui dépend du gradient des déformations \mathbf{F} . Dans le cas de matériaux homogènes, cette quantité ne dépend pas de la position $\boldsymbol{\xi}$ puisque les propriétés restent invariantes en espace. L'énergie élastique \mathcal{E} associée au matériau est définie à partir de cette densité d'énergie par la formule :

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} W(\mathbf{F}(t, \boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi}. \quad (2.28)$$

Pour un matériau hyper-élastique, le premier tenseur de Piola-Kirchhoff \mathcal{P} est donné par :

$$\mathcal{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad (2.29)$$

et dans le cas incompressible ($\det(\mathbf{F}) = 1$) par :

$$\mathcal{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p^* \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.30)$$

où p^* est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité, également appelée *pression hydrostatique arbitraire*. Ces relations nous permettent de calculer les contraintes en fonction de l'énergie. De manière naturelle, la densité d'énergie et le tenseur \mathcal{P} sont nuls pour la configuration non-contrainte Ω_0 i.e.

$$W(\mathbf{I}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

Axiome d'indifférence matérielle (AIM).

Face à une transformation rigide, une loi de comportement matériel doit respecter l'invariance des formes. Ceci peut se traduire par une densité d'énergie W qui reste indépendante de l'orientation et de la position du matériau. Autrement dit, pour une transformation rigide $\mathbf{X} : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ définie comme composée d'une rotation \mathbf{Q} et d'une translation \mathbf{c} , i.e. $\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{c}(t)$, la densité d'énergie est identique avant et après transformation :

$$W(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = W(\mathbf{F}). \quad (2.32)$$

Si la densité d'énergie W satisfait la relation (2.32) pour toute rotation orthogonale \mathbf{Q} , elle satisfait alors le principe d'indifférence matérielle. On peut montrer que l'énergie élastique associée à un matériau vérifiant l'AIM s'écrit en fonction du tenseur de Cauchy-Green à droite $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$:

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} \tilde{W}(\mathbf{C}(t, \boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi}. \quad (2.33)$$

où $W(\mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{C})$. L'énergie ne dépend ainsi que du tenseur de Cauchy-Green à droite \mathbf{C} , dans un contexte purement lagrangien.

Par la formulation (2.29), le premier tenseur de Piola-Kirchhoff \mathcal{P} dérive de W , on peut ainsi l'exprimer en fonction du tenseur \mathbf{C} . En effet, par un développement de Taylor à l'ordre 1 de W , on obtient :

$$\begin{aligned} W(\mathbf{F} + \mathbf{H}) &= \tilde{W}((\mathbf{F} + \mathbf{H})^T (\mathbf{F} + \mathbf{H})) \\ &= \tilde{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{F}^T \mathbf{F}}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) : (\mathbf{F}^T \mathbf{H} + (\mathbf{F}^T \mathbf{H})^T) + \mathcal{O}(\|\mathbf{H}\|^2) \\ &= W(\mathbf{F}) + 2\mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}) : \mathbf{H} + \mathcal{O}(\|\mathbf{H}\|^2) \end{aligned}$$

Cette décomposition repose notamment sur la symétrie de tenseur \mathbf{C} et donc de $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}}$. Par identification avec la formule (2.29), les tenseurs de Piola-Kirchhoff \mathcal{P} et \mathcal{S} s'écrivent respectivement :

$$\mathcal{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}), \quad (2.34)$$

et

$$\mathcal{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathcal{P} = 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}). \quad (2.35)$$

La formulation eulérienne correspondante est simplement obtenue via le changement de variable $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{Y}(t, \mathbf{x})$. A partir de sa formulation lagrangienne (2.33), l'énergie élastique eulérienne est donnée de manière équivalente en fonction du tenseur de Cauchy-Green à gauche $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ par :

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_t} \tilde{W}(\mathbf{B}(t, \mathbf{x})) J^{-1} d\mathbf{x}. \quad (2.36)$$

Par analogie, le développement limité à l'ordre 1 de $W(\mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{B})$ en fonction de \mathbf{B} s'écrit :

$$W(\mathbf{F} + \mathbf{H}) = \tilde{W}(\mathbf{B}) + 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{B}}(\mathbf{B}) \mathbf{F} : \mathbf{H} + \mathcal{O}(\|\mathbf{H}\|^2)$$

ce qui permet de déduire une nouvelle expression du premier tenseur de Piola-Kirchhoff :

$$\mathcal{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}) = 2\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{B}}(\mathbf{B})\mathbf{F}. \quad (2.37)$$

Isotropie.

D'autres restrictions sur la forme de la densité d'énergie W proviennent des éventuelles symétries existantes dans la configuration initiale Ω_0 . Une symétrie matérielle est caractérisée par l'invariance du comportement du milieu pour une autre configuration de référence Ω'_0 . Parmi les matériaux possédant une symétrie matérielle, on considère les matériaux élastiques isotropes, pour lesquels le groupe de symétrie est le groupe spécial orthogonal $SO(3)$ défini par $SO(3) = \{\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^3 \text{ rotation t.q. } \det(\mathbf{Q}) = 1\}$. Dans ce cas, l'énergie élastique associée vérifie, pour toute rotation $\mathbf{Q} \in SO(3)$:

$$W(\mathbf{FQ}) = W(\mathbf{F}). \quad (2.38)$$

Pour un matériau isotrope vérifiant l'AIM, l'énergie élastique peut être exprimée comme fonction des invariants de \mathbf{C} (définis précédemment par l'équation (2.17)) :

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} \tilde{W}(\iota_{\mathbf{C}}) d\xi, \quad (2.39)$$

où $\iota_{\mathbf{C}} = (I_1, I_2, I_3) = (\text{Tr}(\mathbf{C}), \text{Tr}(\text{Cof}(\mathbf{C})), \det(\mathbf{C}))$. Ce résultat est en particulier obtenu en utilisant la décomposition polaire du gradient de déformation, à savoir $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$, où $\mathbf{R} \in SO(3)$, \mathbf{U} et \mathbf{V} désignent respectivement les tenseurs des déformations "pures", à droite et à gauche. Ces tenseurs symétriques sont définis positifs et leurs valeurs propres sont les déformations principales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2$, que l'on retrouve notamment dans l'expression des invariants de \mathbf{C} ou \mathbf{B} . En combinant les équations (2.32) et (2.38), on obtient également les relations $W(\mathbf{U}) = W(\mathbf{QUQ}^T)$ et $W(\mathbf{V}) = W(\mathbf{QVQ}^T)$. On peut donc remarquer de cette décomposition spectrale que W dépend uniquement de \mathbf{U} (ou de \mathbf{V}) et donc des déformations principales λ_k .

La formulation de l'énergie associée (2.39) est valable dans le contexte lagrangien. La formulation eulérienne est équivalente, elle repose sur le fait que les invariants de \mathbf{C} sont également les invariants de \mathbf{B} . En utilisant (2.36) et (2.39), l'énergie élastique est décrite de manière eulérienne comme :

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} \tilde{W}(\iota_{\mathbf{B}}) d\xi = \int_{\Omega_t} \tilde{W}(\iota_{\mathbf{B}}) J^{-1} d\mathbf{x}. \quad (2.40)$$

Tenseurs des contraintes en fonction des invariants.

On a vu précédemment que l'énergie élastique d'un matériau hyper-élastique isotrope s'écrit en fonction de ses invariants. On se place désormais dans un contexte eulérien, les tenseurs seront de ce fait exprimés en fonction de \mathbf{B} . Pour exprimer le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, il nous faut dériver $W = W(\mathbf{B}) = W(I_1(\mathbf{B}), I_2(\mathbf{B}), I_3(\mathbf{B}))$ par rapport à \mathbf{B} :

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{B}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{B}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{B}}. \quad (2.41)$$

Si on injecte les formules :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \text{Tr}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \text{Tr}(\text{Cof}(\mathbf{B}))}{\partial \mathbf{B}} = \text{Tr}(\mathbf{B})\mathbf{I} - \mathbf{B}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \det(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} = \det(\mathbf{B})\mathbf{B}^{-1},$$

obtenues par développement de Taylor à l'ordre 1, l'équation (2.41) se réécrit comme :

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{B} + \alpha_{-1} \mathbf{B}^{-1}, \quad (2.42)$$

où :

$$\alpha_0 = \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} I_1, \quad \alpha_1 = -\frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad \alpha_{-1} = \frac{\partial W}{\partial I_3} I_3.$$

Cette formule nous permet d'exprimer le tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de \mathbf{B} . Pour cela, on utilise la relation (2.23) entre $\boldsymbol{\sigma}$ et le premier tenseur de Piola-Kirchhoff \mathcal{P} ainsi que les expressions de \mathcal{P} en termes de densité d'énergie W respectivement pour des matériaux compressibles (2.37) et incompressibles (2.30).

Pour un matériau isotrope compressible ($J \neq 1$), le tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B} = 2J^{-1} (\alpha_{-1} \mathbf{I} + \alpha_0 \mathbf{B} + \alpha_1 \mathbf{B}^2) \quad (2.43)$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, le tenseur \mathbf{B} satisfait son équation caractéristique (2.16), à savoir :

$$\mathbf{B}^3 - I_1 \mathbf{B}^2 + I_2 \mathbf{B} - I_3 \mathbf{I} = 0. \quad (2.44)$$

A partir de la relation précédente (2.44), le tenseur des contraintes de Cauchy peut être reformulé comme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{B} + \beta_{-1} \mathbf{B}^{-1} \quad (2.45)$$

avec :

$$\beta_0 = \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} I_1, \quad \beta_1 = -\frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad \beta_{-1} = \frac{\partial W}{\partial I_3} I_3.$$

Pour un matériau isotrope incompressible, l'expression correspondante est beaucoup plus simple de par la contrainte d'incompressibilité $J = \det(\mathbf{F})$. En effet, l'invariant I_3 est fixé puisque $I_3 = J^2 = 1$. La densité d'énergie ne dépend alors que des deux premiers

invariants $W = W(I_1, I_2)$. En utilisant (2.30), (2.37) et le théorème de Cayley-Hamilton (2.44), le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ s'écrit de manière analogue sous la forme :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= J^{-1}\mathcal{P}\mathbf{F}^T \\ &= -p^*\mathbf{I} + 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}}\mathbf{B} \\ &= -p^*\mathbf{I} + 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1}.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Pour une approche eulérienne, cette écriture est très pratique puisqu'elle dépend des caractéristiques directes \mathbf{Y} via le tenseur de Cauchy-Green à gauche $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{Y}) = [\nabla\mathbf{Y}]^{-1}[\nabla\mathbf{Y}]^{-T}$. On peut déjà remarquer que cette expression est fortement non-linéaire en \mathbf{Y} puisque \mathbf{B} l'est également. La pression hydrostatique associée à la contrainte d'incompressibilité p^* est arbitraire, elle dépend du modèle utilisé. Elle est choisie de sorte que les contraintes sont nulles pour un milieu non-déformé, i.e. $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$. En d'autres termes, comme un matériau non contraint vérifie $\mathbf{F} = \mathbf{B} = \mathbf{I}$, la pression hydrostatique pour un matériau hyper-élastique isotrope incompressible est définie par :

$$p^* = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\right),\tag{2.47}$$

conformément à l'équation (2.46).

Quelques exemples de modèles hyper-élastiques incompressibles.

Il existe une multitude de modèles non-linéaires afin de décrire le comportement de matériaux hyper-élastiques isotropes incompressibles. Certains d'entre-eux sont basés sur des approches phénoménologiques, qui s'appuient sur un développement mathématique de la densité d'énergie W en fonction des invariants I_k ou des déformations principales λ_k . La densité d'énergie W peut alors être exprimée à partir d'une série de Rivlin [94] ou de Ogden [80] comme :

$$W_{Rivlin} = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j,\tag{2.48}$$

où les c_{ij} sont les paramètres du modèle de Rivlin (avec $c_{00} = 0$), et :

$$W_{Ogden} = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n}(\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3),\tag{2.49}$$

où N et $(\mu_n, \alpha_n)_{n=1, \dots, N}$ désignent les paramètres du modèle de Ogden. Les paramètres des modèles phénoménologiques sont en général difficiles à déterminer.

Dans une autre classe d'approches, les données expérimentales sont utilisées pour déterminer les fonctions matérielles $\partial W/\partial I_1$ et $\partial W/\partial I_2$. Les modèles de Gent et Thomas ou encore Hart-Smith proposent notamment une formulation basée sur l'observation de certains phénomènes lors de tests mécaniques.

Le troisième type de modèles repose sur les caractéristiques physiques des matériaux, à savoir la structure interne des polymères (réseau de chaînes moléculaires spécifiques), ainsi que sur des méthodes statistiques. Les formulations mathématiques sont souvent complexes et dépendantes du matériau puisqu'elles prennent en compte les phénomènes microscopiques afin de déterminer la densité d'énergie W . Pour un matériau de Van der Waals d'un côté, le réseau interne de l'élastomère est assimilé à un gaz où les forces d'interactions s'appliquent entre les particules. D'un autre côté, [Arruda et Boyce](#) [3] (également appelé modèle *8-chain*) proposent une distribution de chaînes dans 8 directions correspondant aux sommets d'un cube inscrit dans la sphère unité.

Une comparaison détaillée d'un grand nombre de modèles hyper-élastiques a été proposée par [Marckmann et Verron](#) [68]. Elle dresse notamment un classement des modèles, prenant en compte différents critères, en particulier la plage de validité du modèle (i.e. fourchette de déformation en %) ou le nombre de paramètres du modèle. De manière peu surprenante, les modèles s'appuyant sur un grand nombre de paramètres sont particulièrement efficaces pour tout type de déformation. Cette étude mentionne également l'incapacité pour les modèles à 2 ou 3 paramètres de décrire correctement un large éventail de déformations, même si ces modèles sont conçus pour les fortes contraintes.

Dans cette thèse, on a recours au modèle de Mooney-Rivlin [72, 94] à deux paramètres $c_1, c_2 > 0$. La densité d'énergie W associée à ce modèle s'écrit :

$$W = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3). \quad (2.50)$$

Ce modèle peut être vu comme un cas particulier à la fois du modèle de Rivlin (2.48) en prenant $N = 1$, $c_{10} = c_1$ et $c_{01} = c_2$, mais également du modèle d'Ogden (2.49) avec $N = 2$, $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = -2$. Pour des questions de consistance du modèle dans la limite de faibles déformations, les paramètres c_1 et c_2 sont reliés au module de cisaillement G par :

$$G = 2(c_1 + c_2). \quad (2.51)$$

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ employé par la suite est alors déterminé à partir des équations (2.46) et (2.50) :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p^* \mathbf{I} + 2c_1 \mathbf{B} - 2c_2 \mathbf{B}^{-1}, \quad (2.52)$$

avec $p^* = 2c_1 I_1 - 2c_2 I_2$. Le modèle de Mooney-Rivlin coïncide avec le modèle Neo-Hookéen pour le choix de paramètres $c_2 = 0$, $c_1 = G/2$. D'après l'étude [68], le modèle de Mooney-Rivlin est le plus efficace pour décrire les déformations de l'ordre de 200% à 250%. Ce modèle est donc particulièrement adapté pour décrire précisément la déformation d'une membrane élastique. Pour des déformations inférieures à 150%, le modèle Néo-Hookéen doit être favorisé d'une part car il ne dépend que d'un seul paramètre c_1 et d'autre part car il est capable de prédire précisément le comportement du matériau pour les différents types de contraintes (les tests expérimentaux de traction, compression, cisaillement, etc. fournissent des estimations proches concernant la valeur de ce paramètre).

3 Méthode de couplage fluide/structure

Cette thèse vise à étudier l'interaction entre un fluide visqueux incompressible et des matériaux hyper-élastiques. Pour résoudre numériquement un tel problème d'interaction, il existe deux types d'approches distinctes. Comme l'illustre la Figure 1.6, elles reposent sur des formalismes de représentation différents, en particulier pour la prise en compte des propriétés physiques des milieux (éventuellement discontinues), et en ce qui concerne l'imposition des conditions aux bords.

Classiquement, la modélisation de l'interaction fluide-structure est basée sur des approches lagrangiennes. La description lagrangienne repose essentiellement sur un suivi précis de l'interface (*front tracking*) via l'utilisation de maillages *body-fitted*. Il devient alors possible de séparer les modèles fluide et élastique. Les méthodes *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE, voir les travaux de Nitikitpaiboon et Bathe [76], Turek et Hron [113] ou encore Chabannes et al. [19]) ou les méthodes de déformation du domaine spatial/espace-temps (DSD/ST, voir les travaux de Tezduyar et al. [109, 110]) appartiennent à cette classe d'approches. L'interface fluide-structure est explicitement suivie, ce qui assure une représentation précise de la géométrie et une imposition simple et directe des conditions de transmission à l'interface. Lorsque les déformations sont importantes, ou que des variations topologiques (séparation ou fusion) se manifestent, les méthodes lagrangiennes deviennent problématiques en raison de la déformation et de la distorsion de la grille qui entraînent souvent la nécessité de remailler le domaine de calcul. En outre, l'utilisation d'un partitionneur robuste est nécessaire pour préserver les performances de l'outil de calcul parallèle.

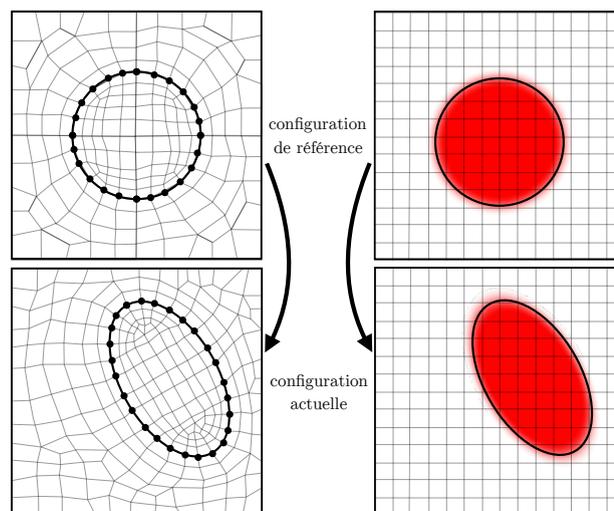


Figure 1.6 – Deux types d'approches pour décrire la déformation d'un corps élastique. À gauche : approche lagrangienne, à droite : approche eulérienne.

D'un autre côté, l'approche eulérienne regroupe les méthodes dites de capture d'in-

terface, pour lesquelles la position de l'interface est connue de manière implicite. Pour les méthodes Volume-Of-Fluid (VOF) [85], phase-field [102] ou level-set [81], une fonction scalaire est définie dans l'ensemble du domaine de calcul sur un maillage fixe. L'évolution de cette fonction est alors décrite par une équation de transport. Ce type de méthodes est généralement basé sur des méthodes de domaine fictif, ou encore sur la méthode aux frontières immergées (IBM) introduites par Peskin [83, 84]. Cette approche eulérienne n'est pas aussi précise que l'approche lagrangienne, mais elle est beaucoup plus polyvalente, plus facile à mettre en œuvre, permettant l'usage de discrétisations simples et une manipulation plus transparente du maillage.

De ce fait, le développement d'une méthode eulérienne sur maillage cartésien hiérarchique prend tout son sens. Une telle méthode offre un bon compromis entre précision du schéma numérique et faisabilité de la simulation. De sorte à représenter convenablement une configuration de pompe complexe, ce type de maillage peut être facilement adapté pour garantir une bonne résolution de la géométrie. Pour ce type d'application entre autres, une stratégie lagrangienne se trouvera confrontée à un problème de taille, à savoir le remaillage au cours du temps. La déformation du maillage sera un réel défi, notamment pour la considération de phénomènes de contact, pour lesquels il existe une fine couche de mailles fluide, située entre deux matériaux solides. Dans ce cas, une méthode lagrangienne body-fitted doit faire appel à un mailleur anisotrope afin d'effectuer des adaptations de maillage au cours du temps. Pour ce genre de phénomène, il faut également développer un schéma de discrétisation *a fortiori* complexe qui assure la stabilité de la méthode numérique sur maillages fortement anisotropes.

3.1 Suivi implicite de l'interface Γ_e

En général, l'interface fluide-structure ne coïncide pas *a priori* avec le maillage cartésien hiérarchique. La position de l'interface n'est par conséquent pas connue explicitement. Notre approche eulérienne s'inscrit parmi les méthodes de domaines fictifs (FDM). Les FDM sont couramment employées pour la simulation numérique de problèmes mettant en jeu des corps mobiles à géométries complexes. La méthode de domaine fictif la plus connue est l'approche par multiplicateur de Lagrange introduite par Glowinski *et al.* [42].

Dans cette thèse, on considère une approche de type interface diffuse, utilisée pour de multiples applications en mécanique des fluides notamment pour des problèmes multi-fluides (voir la review [1]). Ce type d'approche est en particulier très efficace pour des problèmes d'interactions faisant intervenir de nombreuses géométries complexes, qui peuvent éventuellement subir d'importants changements topologiques. L'interface Γ_e est définie de manière implicite via une fonction scalaire auxiliaire, notée ϕ . L'évolution de cette fonction ϕ est alors décrite par une équation de transport en utilisant la vitesse sur tout le domaine, indépendamment du milieu. Parmi les méthodes d'interface diffuse, il se dégage trois types d'approches distinctes.

- L'approche **Volume-Of-Fluid** (VOF) [85] est la plus couramment utilisée dans la littérature. La fonction ϕ est définie comme la portion volumique de solide (ou fluide) dans une cellule du maillage. Autrement dit, le domaine de calcul est décomposé en trois zones distinctes, à savoir la zone fluide où $\phi = 0$, la zone solide où $\phi = 1$ et le voisinage de l'interface où $0 < \phi < 1$. L'efficacité de cette méthode repose essentiellement sur le schéma d'advection utilisé. Les techniques SLIC, PLIC et THINC ont notamment été introduites afin de limiter la diffusion numérique du schéma de transport et ainsi obtenir une meilleure description de l'interface. Ces méthodes sont notamment reconnues pour garantir une bonne conservation du volume, mais l'implémentation d'une telle méthode reste une difficulté majeure. On peut également citer la méthode *Moment-Of-Fluid* (MOF) [37] qui est une amélioration de la méthode VOF, et qui affiche de meilleurs résultats pour suivre l'évolution de géométries irrégulières [53].
- Les méthodes **Level Set** ont été initiées par Osher et Sethian [81] dans le contexte de l'infographie et le traitement d'images. La fonction ϕ est classiquement définie comme la fonction distance signée à l'interface. Pour ces méthodes, l'équation d'advection est résolue au moyen de schémas HJ-WENO en espace et TVD-RK en temps. La propriété de fonction distance signée ne peut être conservée après quelques étapes d'advection, la fonction level set doit donc être fréquemment ré-initialisée en utilisant un algorithme de re-distanciation. Une méthode level set est peu coûteuse et offre un calcul simple et précis de la courbure ou de la normale à l'interface en tout point du domaine. Le gros désavantage demeure la non-conservation de masse pour des maillages peu raffinés. Cependant, une telle méthode prend son sens par l'utilisation de maillages adaptatifs comme le démontrent Gibou et al. [41]. On peut également noter le développement de méthodes hybrides Level Set / VOF. Parmi ces méthodes hybrides, les méthodes CLSVOF et CLSMOF (voir les travaux respectivement de Sussman et Puckett [104] et Jemison et al. [52]) tirent parti des fonctions level-set pour le calcul précis des normales et de la courbure, et améliorent également la conservation de la masse en utilisant les reconstructions VOF et MOF.
- Dans l'approche Phase-Field (PF) [102], l'évolution de l'indicateur de phases ϕ est gouvernée par une équation de transport modifiée pour prendre en compte les effets physiques provenant de l'interface. La fonction ϕ est définie comme un profil hyperbolique tangent à l'interface d'épaisseur fixée, compris entre -1 et $+1$. Traditionnellement, la dynamique de l'indicateur est gouvernée par l'équation de Cahn-Hilliard. Cette loi de conservation peut se résumer à une équation d'advection-diffusion avec terme source, faisant intervenir les dérivées d'ordre 4 de ϕ . Cette méthode est notamment appréciée puisqu'elle garantit la conservation de la masse totale du système. Pour cette approche, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à un schéma numérique qui inclut une compression artificielle comme pour l'approche VOF, ou à un algorithme de re-initialisation comme pour l'approche level set.

Dans ce travail de thèse, on a recours à une méthode level set. La fonction distance signée ϕ , est définie sur l'ensemble du domaine Ω comme la distance minimale à l'interface. Le signe de cette fonction est arbitrairement choisi comme :

$$\text{sgn}(\phi)(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_e(t), \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma_e(t), \\ +1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et l'interface est par conséquent définie comme :

$$\Gamma_e(t) = \{\mathbf{x} \in \Omega \text{ t.q. } \phi(t, \mathbf{x}) = 0\}. \quad (3.1)$$

L'évolution de la fonction distance est décrite par une équation de transport dans tout le domaine Ω à partir de la vitesse \mathbf{u} , écrite sous forme conservative (sous réserve que la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ soit précisément vérifiée) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) = 0. \quad (3.2)$$

En utilisant une formulation conservative de ce problème, la perte de volume est relativement limitée comparativement à sa version non-conservative.

3.2 Approche monolithique : couplage fort

A partir de la fonction level set ϕ , on est capable de définir à quel milieu un point appartient. En accord avec les propriétés des milieux, une quantité q peut être décomposée comme :

$$q = \chi_e(\phi)q_e + (1 - \chi_e(\phi))q_f, \quad (3.3)$$

où χ_e désigne la fonction Heaviside relative à Ω_e , qui vaut 1 si $\phi < 0$ et 0 si $\phi > 0$. La méthode d'interface diffuse s'appuie sur cette distance pour définir de manière continue une quantité sur tout le domaine de calcul. Comme l'illustre la Figure 1.7, la fonction de Heaviside est alors régularisée sur une fine couche d'épaisseur 2δ :

$$\chi_e(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi < -\delta \\ 0 & \text{if } \phi > +\delta \\ 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\phi}{\delta} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\pi \frac{\phi}{\delta}\right) \right) & \text{else.} \end{cases} \quad (3.4)$$

En pratique, l'épaisseur de cette couche de régularisation est généralement limitée à seulement quelques cellules de maillage, de sorte à assurer la consistance de la méthode numérique. On choisit ici $\delta = 3h$, où h désigne la taille caractéristique des cellules situées au voisinage de l'interface Γ_e . Ce choix a été réalisé de manière empirique, il permet d'assurer la robustesse de la méthode numérique, notamment dans le cas où les problèmes FSI considérés par la suite mettent en jeu des structures très rigides. En lissant les propriétés

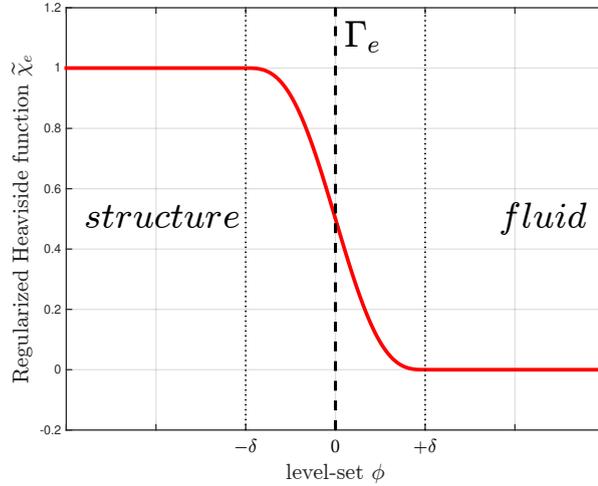


Figure 1.7 – Fonction Heaviside χ_e régularisée sur une distance 2δ .

matérielles à travers l'interface, les conditions de couplage (0.1) sont ainsi naturellement satisfaites par continuité.

D'un point de vue algorithmique, il existe deux stratégies de couplage en temps. Dans la première approche, dite *partitionnée*, les résolutions des problèmes fluide et structure sont découplées, autrement dit effectuées de manière indépendante sur chaque sous-domaine à partir de solveurs dédiés à chacun des sous-problèmes. Cette technique offre de ce fait une certaine souplesse quant au choix des méthodes et de leurs implémentations numériques. Le couplage est alors effectué par échanges de données entre les deux solveurs, puis par synchronisation de ces deux solveurs. Cette stratégie de couplage est la plus répandue dans la littérature, elle est employée par la plupart des méthodes lagrangiennes, ou encore par les méthodes aux frontières immergées (cf review [58]).

Au sein de cette famille, on distingue les approches partitionnées explicites et implicites. Le couplage *explicite* offre une certaine modularité, c'est-à-dire qu'il donne le choix à l'utilisateur. Ce dernier peut par exemple utiliser des solveurs adaptés selon le phénomène considéré, mettre en oeuvre des méthodes numériques différentes, changer les conditions aux limites assez aisément ou encore faire évoluer les milieux fluide et élastique avec des pas de temps différents. Cette technique est notamment utilisée par les logiciels commerciaux car elle permet la création simple d'interfaces entre différents codes et solveurs numériques. Les conditions de couplage ne sont, la plupart du temps, pas exactement satisfaites pour les méthodes de couplage explicites, on parle alors de couplage numérique faible.

Il existe un grand nombre de schémas de couplage explicites, comme le présentent Lesoinne et Farhat [62]. Certains sont dits synchrones (Figure 1.8a) lorsque les résolutions des sous-problèmes sont réalisées au même instant et d'autres asynchrones (Figure

1.8b) dans le cas contraire. Généralement, les algorithmes synchrones ne peuvent satisfaire correctement les conditions de continuité à l'interface conduisant à des schémas non conservatifs. Les schémas asynchrones sont plus intéressants d'un point de vue précision et stabilité numériques mais la synchronisation des solveurs fluide et structure est plus complexe.

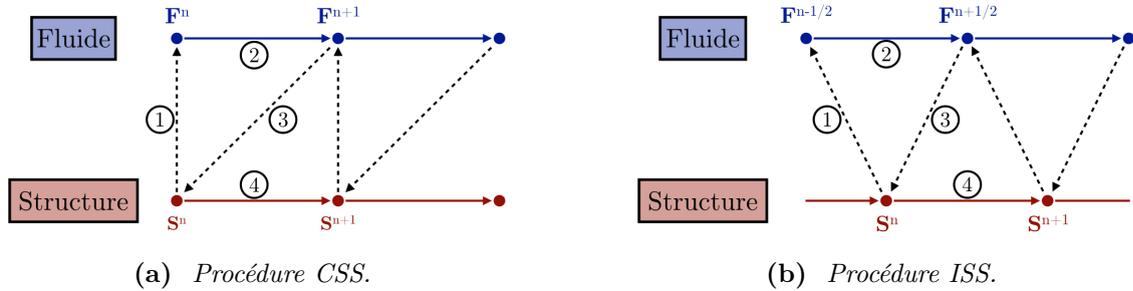


Figure 1.8 – Deux procédures de couplage partitionné proposées par Farhat [38]. Les quantités d'intérêt pour le fluide et la structure sont dénotées respectivement par \mathbf{F} et \mathbf{S} .

Dans le cadre des approches de couplage physique faible, les méthodes partitionnées *implicites*, ou *itératives*, permettent la limitation du décalage entre les instants de résolution des problèmes fluide et élastique. En respectant plus précisément les conditions de continuité à l'interface, un couplage numérique fort est réalisé. La précision obtenue est par conséquent bien plus importante. Ces algorithmes sont néanmoins plus coûteux en termes de calculs, plus complexes à mettre en oeuvre et le nombre de sous-itérations nécessaires à la convergence est difficile à réduire. Les algorithmes de couplage implicites sont généralement basés sur des méthodes du point fixe, de relaxation ou de Newton-Raphson [115].

Par opposition à l'approche partitionnée, l'approche *monolithique* consiste à résoudre en même temps les sous-problèmes fluide et élastique ainsi que les conditions de couplage, sous la forme d'un unique solveur numérique. On parle alors de couplage physique fort puisque les conditions de couplage sont exactement respectées à chaque itération en temps. Ce type de couplage offre une très grande stabilité numérique mais la méthode limite les possibilités de développement. En effet, fluide et structure sont régis par les mêmes équations et doivent être résolues de la même manière. Or, les sous-problèmes décrivent des physiques ou des comportements très différents qui nécessitent idéalement le développement de méthodes de résolution adaptées à chaque milieu.

Dans cette thèse, on considère un modèle eulérien "à un milieu", reposant sur un couplage monolithique. L'ensemble du problème couplé est discrétisé sur le domaine de calcul tout entier Ω de manière unifiée, sans distinction des milieux, en spécifiant une loi de comportement propre à chaque sous-domaine. Le modèle complet est exposé dans la Section 4.

3.3 Méthode de pénalisation volumique

Dans les sections précédentes, on a décrit la modélisation numérique de l'interaction entre le fluide et les solides hyper-élastiques. Pour fermer le système, on doit également considérer l'interaction des milieux fluides et élastiques avec les corps rigides. En effet, on doit imposer sur le bord du domaine rigide Ω_s la condition de continuité $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s$.

Dans le contexte d'une approche de domaine fictif, les corps rigides sont représentés de manière implicite à l'aide d'une fonction indicatrice. La condition au bord (0.2) est imposée via la méthode de pénalisation volumique introduite à l'origine par Angot et al. [2], ou plus précisément via son extension à l'ordre 2, à savoir la méthode IPC (*Image Point Correction*, voir [10]). Le principe de la méthode IPC est de corriger la valeur de la vitesse dans le solide en utilisant une approche Ghost-Cell afin d'obtenir la bonne vitesse de l'interface. En se référant aux notations de la Figure 1.9, la vitesse \mathbf{u}_S en un point solide S est déterminée à partir de la vitesse imposée à l'interface \mathbf{u}_s et de la vitesse fluide interpolée au point F :

$$\mathbf{u}_S = 2\mathbf{u}_s(\mathbf{x}_I) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_F).$$

Seules les cellules solides proches de l'interface sont mises à jour. Cette méthode IPC a été validée à plusieurs reprises notamment par [11, 12]. Par la suite, dans le cas où le corps rigide est immergé dans une structure élastique, i.e. $\Omega_s \subset \Omega_e$, on opte plutôt pour une pénalisation à l'ordre 1 ($\mathbf{u}_S = \mathbf{u}_s(\mathbf{x}_S)$) afin d'assurer la continuité de la vitesse à l'intérieur de la structure élastique. La méthode IPC pourrait en effet entraîner des perturbations lors du transport des caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} (2.8).

L'idée principale de la méthode de pénalisation est de considérer l'ensemble du système comme un milieu poreux, avec une perméabilité variable ε . À cet égard, une structure rigide a une très faible perméabilité $\varepsilon \ll 1$. L'approche consiste à ajouter un terme de pénalisation supplémentaire à l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.3) :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{S} + \frac{\chi_s}{\varepsilon} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}) \quad (3.5)$$

où la fonction indicatrice χ_s est relative à Ω_s :

$$\chi_s(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_s, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Dans le cas où il y a plusieurs corps rigides $N_b > 1$, le terme de pénalisation est simplement remplacé par $\sum_{i=1}^{N_b} \frac{\chi_s^{(i)}}{\varepsilon} (\mathbf{u}_s^{(i)} - \mathbf{u})$. Comme le montre [2], la solution du système (3.5)-(1.1b) converge vers la solution du système découplé (1.3)-(1.1b)-(0.2) quand $\varepsilon \rightarrow 0$, en $\sqrt{\varepsilon}$ [56]. Dans cette thèse, on fixe $\varepsilon = 10^{-10} h_{min}^2$, où h_{min} désigne la taille caractéristique du maillage, qui sera introduite dans le chapitre suivant.

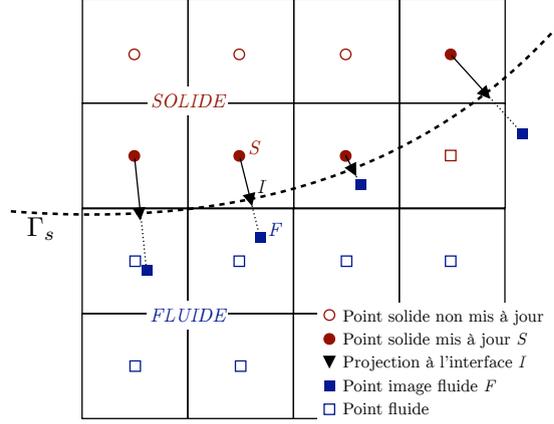


Figure 1.9 – Illustration de la pénalisation à l'ordre 2 pour imposer précisément la vitesse \mathbf{u}_s de la structure rigide sur sa frontière $\Gamma_s(t)$.

4 Modèle complet à un seul milieu

Pour résumer l'ensemble du chapitre, on considère au cours de cette thèse un modèle eulérien d'interaction fluide-structure, qui s'inscrit dans le cadre des méthodes de domaine fictif. La dynamique des trois milieux (fluide, structure élastique et solides non déformables) est décrite de façon unifiée par une méthode d'interface diffuse, par le biais d'une fonction distance ou level set ϕ . Le milieu unifié est alors gouverné par un système de lois de conservation, qui est résolu de manière monolithique. Les conditions de couplage à l'interface sont ainsi précisément imposées par continuité. À partir de la fonction Heaviside régularisée (3.4), une propriété du milieu η peut être écrite sous la forme $\eta = (1 - \chi_e)\eta_f + \chi_e\eta_e$. La densité et la viscosité dynamique sont par conséquent définies comme suit :

$$\begin{aligned}\rho &= (1 - \chi_e)\rho_f + \chi_e\rho_e, \\ \mu &= (1 - \chi_e)\mu_f + \chi_e\mu_e.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Pour synthétiser, le modèle eulérien d'interaction fluide-structure à un milieu s'écrit sous forme conservative comme suit :

$$\boxed{\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\right) &= -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \mathbf{Y}, \phi) + \frac{\chi_s}{\varepsilon}(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}) + \rho \mathbf{S}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0,\end{aligned}}\tag{4.2a}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{Y}) &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) &= 0,\end{aligned}}\tag{4.2b}$$

où ρ et μ sont les variables mixtes données par les équations (4.1). La vitesse des corps rigides non déformables \mathbf{u}_s est imposée par pénalisation volumique. Les évolutions des caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} et de la fonction distance signée ϕ sont décrites par les équations de transport (4.2b). Le tenseur mixte des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est également défini de manière continue comme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \mathbf{Y}, \phi) = \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}) + \chi_e(\phi)\boldsymbol{\sigma}_e(\mathbf{Y}), \quad (4.3)$$

de sorte à associer les lois de comportement fluide et hyper-élastique à chacun des deux milieux. D'une part, le tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\sigma}_f$ (équation (1.2)) est calculé dans l'ensemble du domaine pour renforcer la stabilité du système couplé. D'autre part, le tenseur des contraintes élastiques $\boldsymbol{\sigma}_e$ dérive du modèle de Mooney-Rivlin à deux paramètres, introduit précédemment par l'équation (2.50).

Une analyse mathématique de ce modèle eulérien a été proposée par [Cottet et al. \[24\]](#). Ce modèle a été plus récemment employé pour la simulation de l'interaction entre une vague solitaire et une série de structures élastiques immergées [\[28\]](#). Les auteurs mettent en évidence le phénomène de l'atténuation de vagues dans les zones côtières. Au cours des dernières décennies, plusieurs modèles eulériens pour la simulation de problèmes FSI ont été proposés [\[28, 36, 91, 93, 103, 114\]](#). Pour ce type d'approche, la déformation du matériau est décrite généralement à partir du champ des caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} . [Sugiyama et al. \[103\]](#) propose plutôt de suivre l'évolution du tenseur symétrique de Cauchy-Green à gauche \mathbf{B} via une équation d'advection avec terme source qui dépend explicitement du gradient de vitesse.

La résolution du système en question est effectuée dans l'ensemble du domaine de calcul Ω , c'est-à-dire à la fois dans le matériau et dans le fluide. Lorsque le fluide est soumis à des contraintes de cisaillement élevées, l'allongement des caractéristiques rétrogrades peut devenir critique et entraîner une croissance exponentielle de certaines composantes du gradient de déformation \mathbf{F} au voisinage de l'interface. Cette croissance exponentielle peut induire de fortes instabilités numériques, en particulier en présence de matériaux très rigides ou lorsque la déformation devient trop importante. Pour surmonter ce problème, les différents auteurs adoptent des stratégies différentes. Dans les travaux de [Sugiyama et al. \[103\]](#), le tenseur \mathbf{B} est remis à zéro de manière continue à l'intérieur du fluide afin de prévenir les éventuelles instabilités à proximité de l'interface. Une deuxième approche est basée sur la méthode Initial Point Set (IPS). D'une part, [Dunne et Rannacher \[36\]](#) proposent de définir la vitesse d'advection à l'intérieur du fluide par prolongation harmonique de la vitesse de la structure via une fonction IPS. D'autre part, [Rannacher et Richter \[91\]](#) utilisent une technique plus similaire aux approches ALE. La vitesse du fluide est alors mise à jour en résolvant un problème elliptique dans le fluide, muni des conditions limites à l'interface sur laquelle la vitesse est bien définie. Dans l'idée d'une généralisation de ces méthodes IPS, [Richter \[93\]](#) a introduit une nouvelle approche, basée sur une extension constante de la déformation solide sur une petite couche de cellules uniquement, située à l'extérieur de la structure élastique. Récemment, [Deborde et al. \[28\]](#) ont proposé une

amélioration de cette méthode en utilisant une méthode d'extrapolation linéaire des caractéristiques à l'intérieur du fluide. Dans notre étude, cette technique d'extrapolation est également employée. Couplé à une méthode Fast-Marching pour la ré-initialisation de la fonction level set, cet algorithme permet de garantir un calcul convenable des forces élastiques pendant toute la durée de la simulation.

Pour la résolution des modèles eulériens, les travaux de [36, 91, 93] sont basés sur des approches par Éléments Finis sur maillages cartésiens avec adaptation heuristique du maillage ou sur maillages non structurés. D'un autre côté, les modèles de [103, 114] sont discrétisés sur maillages cartésiens uniformes par des schémas Différences Finies. L'étude de [Deborde et al. \[28\]](#) sur maillages cartésiens uniformes fait intervenir une méthode Volumes-Finis pour résoudre les lois de conservation et une méthode Différences Finies (Weno 5) pour suivre l'évolution des caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} et de la fonction distance ϕ . Dans cette thèse, on propose une approche totalement Volumes Finis conservative sur maillages cartésiens hiérarchiques de type Quadtree/Octree, en utilisant la bibliothèque open-source Bitpit/PABLO. Le prochain chapitre est dédié à la méthode numérique développée pour la résolution du modèle eulérien (4.2).

Chapitre 2

Méthode numérique

Sommaire

1	Intégration en temps	50
1.1	Transport des caractéristiques rétrogrades et de la fonction level set	51
1.2	Méthode à pas fractionnaire	51
2	Schémas Volumes Finis sur maillages cartésiens hiérarchiques	52
2.1	Maillage de type quadtree	53
2.2	Interpolations et reconstructions polynomiales	56
2.3	Discrétisation des opérateurs différentiels	59
2.4	Algorithme d'adaptation de maillage	66
3	Contraintes numériques liées au modèle	69
3.1	Ré-initialisation de la fonction level set	71
3.2	Extrapolation des caractéristiques rétrogrades	80
3.3	Stabilisation de la méthode numérique	82
4	Quelques exemples de problèmes de transport	85
4.1	Advection d'une fonction indicatrice	85
4.2	Problème d'instabilité atmosphérique	85
4.3	Advection d'un cercle	89
4.4	Le serpent	90
5	Implémentation du code de calcul	93

Pour résoudre numériquement le modèle eulérien introduit dans le chapitre précédent, on propose une méthode numérique de type Volumes Finis sur maillage cartésien hiérarchique. Tout d'abord, la Section 1 est dédiée à la discrétisation en temps ainsi qu'à la méthode à pas fractionnaire utilisée pour résoudre de manière découplée le système d'EDPs (4.2) du chapitre précédent. Ensuite, l'ensemble des discrétisations en espace sur

maillage quadtree sera détaillé en Section 2. Quelques illustrations numériques seront ajoutées pour valider les discrétisations des opérateurs. On exposera également la procédure d'adaptation dynamique de maillage utilisée pour nos simulations. Les différents inconvénients de cette méthode seront également mis en évidence en Section 3, on expliquera alors les stratégies mises en oeuvre pour pallier ces contraintes. On finira par quelques exemples numériques d'applications pour des problèmes de transport dans la Section 4, afin de mettre en avant les différents schémas d'advection étudiés.

1 Intégration en temps

Dans cette section, les discrétisations en temps pour la résolution du modèle fluide-structure (Chapitre 1 - système (4.2)) sont détaillées. En guise de définition, on adoptera la notation temporelle discrète $\varphi^n := \varphi(t^n)$ pour une fonction φ quelconque, n désignant la n -ième itération en temps. Pour faire évoluer la solution au cours du temps sur un intervalle $[0, T_{max}]$, on introduit un pas de temps noté Δt qui permet de passer du temps t^n au temps t^{n+1} , i.e. $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Le pas de temps Δt peut varier au cours du temps mais on supposera par la suite qu'il est fixé pour simplifier l'écriture des schémas numériques, la généralisation à des pas de temps variables étant très accessible pour le lecteur. Comme pour toute méthode numérique explicite permettant de résoudre une EDP (ou système d'EDPs), le choix du pas de temps est directement soumis à une condition de stabilité appelée condition Courant-Lax-Friedrichs (CFL). La fin du Chapitre 3 (Section 3.2) est dédiée à la détermination de cette condition CFL.

Les équations du modèle eulérien sont résolues alternativement, les unes après les autres, c'est-à-dire de manière découplée. En effet, le système est fortement non linéaire en \mathbf{u} , \mathbf{Y} , ϕ et la linéarisation est délicate. Par ailleurs, il serait envisageable de résoudre ce système d'EDPs de manière implicite en utilisant un algorithme itératif de Newton. Cette stratégie serait particulièrement intéressante car elle offrirait la possibilité de s'affranchir de la contrainte CFL relative aux matériaux élastiques, qui peut devenir sévère pour de fortes rigidités. L'inconvénient réside toutefois dans les temps de calcul nécessaires pour construire et résoudre le système non linéaire. De ce fait, les caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} ainsi que la fonction level set ϕ seront tout d'abord transportées du temps t^n au temps t^{n+1} via les équations de transport (4.2b). Ces quantités seront alors utilisées dans un second temps pour déterminer \mathbf{u}^{n+1} par résolution des équations (4.2a). Le choix du couplage en temps, exposé dans ce qui suit, est motivé par l'analyse de stabilité réalisée dans le Chapitre 3 Section 2.

1.1 Transport des caractéristiques rétrogrades et de la fonction level set

Les équations de transport sont discrétisées par la méthode explicite classique de Heun (Runge-Kutta TVD d'ordre 2). Concernant la fonction distance (et de manière analogue pour les caractéristiques rétrogrades), le schéma s'écrit :

$$\phi^* = \phi^n - \Delta t \nabla \cdot (\phi U)^n, \quad (1.1a)$$

$$\phi^{n+1} = \frac{1}{2} \phi^n + \frac{1}{2} (\phi^* - \Delta t \nabla \cdot (\phi U)^*), \quad (1.1b)$$

où U fait référence à un champ de vitesse vérifiant la conservation de masse discrète, i.e. $\nabla \cdot U = 0$. Cette quantité sera introduite plus tard dans la Section 2.3. Utiliser cette vitesse U permet d'assurer l'équivalence des formes conservative et non-conservative de l'équation d'un point de vue discret. La vitesse U^* introduite dans l'équation (1.1b) est définie par extrapolation des itérations précédentes n et $(n-1)$, à savoir : $U^* \approx 2U^n - U^{n-1}$.

L'intégration d'ordre 2 en temps est ici nécessaire. En effet, on réalisera un schéma en espace précis à l'ordre 2 (au moins) dans la Section 2.3. Dans ce contexte, se suffire d'une intégration temporelle d'ordre un, de type Euler explicite par exemple, est réputé instable d'après l'étude de Carpentier [18]. Dans ce cas de figure, le pas de temps Δt doit être choisi extrêmement petit afin de garantir la stabilité du schéma numérique. Pour plus de détails concernant ce phénomène, une étude de stabilité sur un cas académique de l'équation d'advection 1D est proposée en Annexe A.

1.2 Méthode à pas fractionnaire

Comme pour la plupart des approches relatives à l'étude d'écoulements incompressibles, la méthode à pas fractionnaire, introduite par Chorin [20] et Temam [108], est utilisée. D'autres méthodes de projection ont été référencées dans l'article de Brown et al. [15]. La méthode consiste à prédire une vitesse à partir de l'équation de quantité de mouvement, puis à résoudre une équation elliptique afin d'imposer la contrainte de conservation de masse et déterminer la pression.

Tout d'abord, l'étape de prédiction est réalisée pour obtenir une première estimation de la vitesse notée \mathbf{u}^* . Pour ce faire, on choisit un schéma de Gear à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \frac{3\mathbf{u}^* - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + \left(2\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes U)^n - \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes U)^{n-1} \right) \\ = \frac{1}{\rho} \left(-\nabla p^* + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*, \mathbf{Y}^{n+1}, \phi^{n+1}) + \frac{\chi_s^{n+1}}{\epsilon} (\mathbf{u}_s^{n+1} - \mathbf{u}^*) \right) + \mathbf{S}^{n+1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

où p^* désigne une approximation de la pression. La version incrémentale de la méthode de projection proposée par Goda [44] est adoptée, en considérant $p^* := p^n$. Dans cette étape

de prédiction, le terme visqueux est discrétisé de façon implicite. Les quantités \mathbf{Y}^{n+1} et ϕ^{n+1} sont ici connues car déterminées au préalable (équations (1.1) de la Section 1.1) à partir des itérations précédentes n et $(n-1)$. Elles peuvent par conséquent être exploitées afin de calculer explicitement le tenseur des contraintes élastiques $\chi_e(\phi)\boldsymbol{\sigma}_e(\mathbf{Y})$.

Suite à l'étape de prédiction, rien ne garantit que la conservation de masse est respectée, autrement dit $\nabla \cdot \mathbf{u}^* \neq 0$. De ce fait, on applique une étape de projection :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}(\nabla p^{n+1} - \nabla p^*). \quad (1.3)$$

En utilisant le fait qu'on souhaite garantir $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$, si on applique l'opérateur divergence à l'équation (1.3), on obtient l'équation de Poisson suivante :

$$\Delta p' = \nabla \cdot \mathbf{u}^*, \quad (1.4)$$

où on désigne par $p' := (\Delta t/\rho)(p^{n+1} - p^*)$ l'incrément de pression. Après résolution du système linéaire précédent (1.4), une étape de correction est effectuée. La pression p^{n+1} et la vitesse \mathbf{u}^{n+1} sont alors déterminées comme suit :

$$\begin{cases} p^{n+1} = p^* + \frac{\rho}{\Delta t} p', & (1.5a) \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \nabla p'. & (1.5b) \end{cases}$$

2 Schémas Volumes Finis sur maillages cartésiens hiérarchiques

Le modèle eulérien introduit dans le Chapitre 1 a été très récemment étudié par [Deborde et al. \[28\]](#) dans le cadre de maillages cartésiens uniformes. L'originalité de cette thèse repose sur l'utilisation de maillages cartésiens hiérarchiques, de type quadtree, pour la résolution de problèmes fluide-structure, notamment pour la considération de structures élastiques rigides de type élastomères. Par le biais d'un Raffinement de Maillage Adapté (AMR), on offre alors la possibilité d'optimiser le temps de calcul tout en garantissant une bonne précision numérique. En raffinant par exemple au voisinage des interfaces et dans le sillage de corps immergés, et en déraffinant dans les zones dites plus régulières, le nombre d'inconnues du maillage est alors significativement réduit par rapport à un maillage totalement uniforme. De plus, avoir recours à une adaptation dynamique de maillage devient pertinent lorsqu'on souhaite suivre précisément l'évolution de corps en mouvement, pouvant subir de grandes déformations.

Dans cette section, on introduira tout d'abord la structure du maillage quadtree ainsi que la librairie de génération de maillage utilisée au cours de cette thèse. On mettra notamment en avant les différents avantages et les contraintes auxquels on a dû faire face. On détaillera ensuite les discrétisations Volumes Finis des différents opérateurs employés

dans le modèle, à savoir l'opérateur divergence, laplacien et d'advection. On présentera enfin le processus d'adaptation du maillage cartésien hiérarchique.

2.1 Maillage de type quadtree

Pour résoudre numériquement le modèle FSI, différentes catégories de maillages peuvent être considérées pour discrétiser le domaine de calcul Ω . Les maillages cartésiens hiérarchiques sont nativement faciles à générer et à manipuler, et donnent lieu à des schémas de discrétisation relativement simples à mettre en oeuvre. Les discrétisations resteront classiques dans les zones où le maillage est uniforme, par conséquent, une attention toute particulière sera portée sur le développement des schémas aux sauts de niveau.

La structure de données quadtree

La structure de données 1D de type quadtree permet de représenter une structure de données 2D par le biais d'une courbe de remplissage de l'espace. Comme le montre la Figure 2.1, une grille quadtree est composée de cellules carrées qui possèdent différents niveaux de raffinement. En partant de la *racine* de l'arbre (niveau 0), qui correspond au domaine carré Ω tout entier, la grille est raffinée récursivement jusqu'à un niveau de raffinement souhaité. Lors d'un raffinement, une cellule *mère* de niveau l est divisée en quatre cellules *filles* de niveau $(l + 1)$. Inversement, quatre cellules *filles* peuvent fusionner en une seule cellule *mère* lors d'un déraffinement de maillage. Si une cellule n'a pas d'enfant, ce qui signifie qu'elle est située à la cime de l'arbre, la cellule est appelée *feuille*. Dans cette thèse, on considère une structure d'arbre particulière, appelée quadtree linéaire, pour lequel seul le *feuillage* de l'arbre est stocké en mémoire. Ce type de structure possède un avantage immédiat en ce qui concerne le faible coût en mémoire ainsi que sa gestion lors d'une éventuelle adaptation du maillage. Ici, le maillage est défini comme gradué (ou balancé 2 : 1), ce qui signifie que la différence de niveaux entre une cellule et ses *voisines* (cellules qui lui sont adjacentes) est au maximum de un.

La librairie Bitpit/PABLO

Pour gérer efficacement et automatiquement la structure de données, on a recours à la librairie Bitpit/PABLO¹. Cette librairie a été développée par la société Optimad Engineering localisée à Turin (Italie), entreprise créée essentiellement par d'anciens doctorants de l'équipe de recherche. Plusieurs thèses ([88, 107] notamment) ont par la suite été réalisées en collaboration avec cette entreprise.

En suivant la numérotation *Z-order* proposée par Morton [73] en 1966, l'accès aux données/informations provenant des cellules voisines est effectué de manière optimale en termes de coûts, d'un point de vue temps de calcul et mémoire. Cette stratégie de raffinement adaptatif du maillage (AMR) offre la possibilité de définir le maillage de manière

1. <https://optimad.github.io/bitpit>

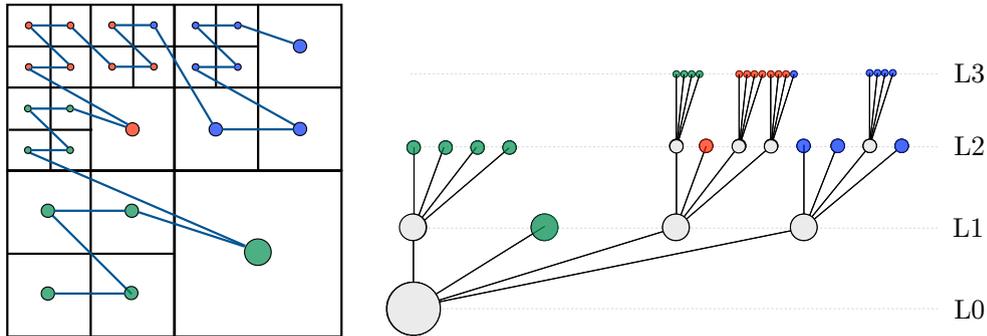


Figure 2.1 – Numérotation globale suivant le Z-order pour un maillage quadtree équilibré 2 :1 en deux dimensions. L'équilibrage des charges en parallèle est illustré par les couleurs.

transparente et peu coûteuse, éventuellement de manière dynamique au cours de la simulation. La procédure d'adaptation de maillage est décrite plus tard dans la Section 2.4. Cet outil fournit un stockage vectoriel optimal, nécessitant le moins de communications possibles, dans le cadre d'une parallélisation efficace du code de calcul. Pour préserver une très grande scalabilité du parallélisme, le nombre de communications inter-processeurs est limité à une seule couche de cellules voisines, appelées *cellules fantômes*. Compte tenu de cette contrainte de parallélisme, **les schémas de discrétisation des opérateurs reposent sur l'utilisation de stencils compacts, ce qui limite a fortiori l'ordre de précision de la méthode.**

Les courbes de remplissage sont utilisées généralement pour réduire un problème multidimensionnel, faisant intervenir la recherche de voisins proches, en un problème unidimensionnel. [Campbell et al. \[17\]](#) dressent une comparaison de trois courbes de remplissage fréquemment utilisées dans la littérature, basées respectivement sur les codes de Hilbert, Morton et Gray. Selon le problème étudié, la numérotation suivant le code de Hilbert fournit en général les meilleures performances en termes de partitionnement. Cependant, la courbe de Hilbert ne convient que pour des applications faisant intervenir des ensembles de points reliés par un court chemin. Les processus de mapping et de mapping inverse sont aussi plus complexes par rapport au code de Morton. Par ailleurs, le coût de l'accès à une donnée en n'importe quel point de la courbe est peu cher et reste constant via le code de Morton, ce qui n'est pas forcément le cas pour les deux autres codes.

Parmi les bibliothèques de génération/gestion de maillages Quadtree/Octree, on peut notamment citer **Point Cloud Library**² (PCL), **DENDRO**³ ou encore **p4est**⁴. A notre

2. https://pointclouds.org/documentation/group__octree.html

3. <https://github.com/hsundar/dendro>

4. <https://p4est.org/>

connaissance, cette dernière librairie est aujourd’hui la plus performante. Elle est spécialement conçue pour des calculs massivement parallèles, plus particulièrement pour des approches AMR [16]. Les librairies p4est et Bitpit/PABLO possèdent toutefois quelques similarités, à savoir l’utilisation du code de Morton, la possibilité de définir un maillage balancé 2 :1 (gradué), ou encore la pondération de la charge du partitionnement entre les processeurs, non pas par rapport au nombre de cellules global, mais relativement à un coût opératoire estimé localement par cellule.

Notre intérêt pour la librairie Bitpit/PABLO s’explique notamment par les avantages qu’elle peut offrir pour nos applications. Tout d’abord, du point de vue de l’utilisateur, l’intégration de la librairie dans un code de calcul est assez naturelle et la prise en main est relativement accessible, notamment pour la gestion transparente et automatique des connectivités et des intersections. De plus, l’accès à des données non contiguës en mémoire est optimisé par les communications internes gérées par Bitpit/PABLO, ce qui est un atout indéniable pour notre application. Enfin, la librairie Bitpit/PABLO gère des octrees linéaires, ce qui permet de bénéficier de coûts de calculs raisonnables et compétitifs. En s’appuyant sur la courbe de remplissage de type *Z-order*, l’accès aux données relatives à une cellule (et ses voisines) du maillage est naturel. Au contraire, accéder directement aux informations relatives aux noeuds n’est pas optimal et doit être évité. Les méthodes **centre-cellules** (*cell-centered*) sont par conséquent favorisées. Récemment, un schéma Différence Finie d’ordre 2, avec inconnues au centre des cellules, a été développé au sein de l’équipe par [Raeli et al.](#) [89] pour la résolution de problèmes elliptiques. Son implémentation se révèle complexe car il est nécessaire d’identifier précisément la configuration de chaque stencil. Autrement dit, la discrétisation est adaptée pour chaque cellule en fonction de la répartition des différentes cellules du stencil, ce qui donne naissance à un grand nombre de cas de figure. Au cours de cette thèse, l’approche Volume Fini est préférée car elle se montre beaucoup plus versatile. De plus, la librairie Bitpit/PABLO favorise la manipulation des objets relatifs aux intersections, ce qui est un réel avantage, en particulier pour le calcul des flux.

Notations

Afin de décrire les discrétisations spatiales, on introduit les notations utilisées par la suite. Dans le cadre de cette thèse, on s’intéressera à la simulation numérique de phénomènes 2D et 2D axisymétrique. Dans le premier cas, on utilise le système de coordonnées cartésiennes classique ($\mathbf{x} = (x, y)$) alors que dans le second cas, on privilégie le système de coordonnées cylindriques dans lequel la variation dans la direction azimutale est nulle ($\mathbf{x} = (r, z)$). Dans cette section, les schémas seront décrits pour des quantités arbitraires, à savoir $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pour une fonction scalaire, et $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pour un champ de vecteurs. Pour discrétiser le domaine de calcul Ω de taille $D \times D$, on définit une configuration de maillage quadtree notée $(L_{min} - L_{max})$ pour laquelle le niveau de raffinement de chaque cellule l est compris entre un niveau de raffinement minimal L_{min} et un niveau de raffinement maximal L_{max} , i.e. $L_{min} \leq l \leq L_{max}$. En d’autres termes, les tailles caractéristiques de la plus petite cellule et de la plus grande cellule sont respectivement $h_{min} = D/2^{L_{max}}$ et $h_{max} = D/2^{L_{min}}$. Le

maillage ainsi construit contient N_{cells} cellules.

Pour une **cellule** Ω_i de taille h_i comprise entre h_{min} et h_{max} , on note \mathbf{x}_i son centre et $\varphi_i = \varphi(\mathbf{x}_i)$ la valeur discrète de la fonction φ évaluée en \mathbf{x}_i . Le volume de cette cellule est $|\Omega_i| = h_i^2$ en 2D et $|\Omega_i| = 2\pi r_i h_i^2$ en 2D axisymétrique. On définit enfin son stencil compact \mathcal{S}_i . Il comprend toutes les cellules voisines ou adjacentes de Ω_i :

$$\mathcal{S}_i = \{\Omega_k \subset \Omega : \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_k \neq \emptyset\},$$

où $\partial\Omega_i$ désigne la frontière de Ω_i . Ce stencil sera dit **uniforme** si toutes les cellules du stencil ont la même taille caractéristique h_i et **non uniforme** dans le cas contraire.

Sa frontière $\partial\Omega_i$ est décomposée en plusieurs **faces** f . De manière générale, une face f de centre \mathbf{x}_{fc} est définie comme l'intersection de deux cellules Ω_{in} et Ω_{out} . Le vecteur normal à la face \mathbf{n}_f est alors défini par convention comme pointant de Ω_{in} vers Ω_{out} . La taille caractéristique de cette face est $h_f = \min(h_{in}, h_{out})$ et son aire est $|f| = h_f$ en 2D et $|f| = 2\pi r_{fc} h_f$ en 2D axisymétrique. Son stencil compact est simplement défini comme l'intersection des stencils de Ω_{in} et Ω_{out} :

$$\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_{in} \cap \mathcal{S}_{out} = \{\Omega_k \subset \Omega : f \cap \partial\Omega_k \neq \emptyset\}.$$

Pour une face f , on parlera de configuration de stencil dite **uniforme** si les deux cellules Ω_{in} et Ω_{out} possèdent la même taille caractéristique, i.e. $h_f = h_{in} = h_{out}$, et **non uniforme** ou "**saut de niveau**" dans le cas contraire.

Enfin chaque cellule possède 4 **noeuds** notés $N_{i,p}$ ($p = 0, \dots, 3$), situés sur sa frontière $\partial\Omega_i$. De manière analogue, leurs stencils compacts $\mathcal{S}_{N_{i,p}}$ sont composés des cellules voisines au noeud, c'est-à-dire que pour tout $p = 0, \dots, 3$, on a :

$$\mathcal{S}_{N_{i,p}} = \{\Omega_k \subset \Omega : \mathbf{x}_{N_{i,p}} \in \partial\Omega_k\}.$$

Ainsi, le stencil compact de la cellule peut être reconstruit à partir des stencils relatifs aux faces ou relatifs aux noeuds, i.e.

$$\mathcal{S}_i = \bigcup_{f \subset \partial\Omega_i} \mathcal{S}_f = \bigcup_{p=0, \dots, 3} \mathcal{S}_{N_{i,p}}.$$

2.2 Interpolations et reconstructions polynomiales

Interpolation "centre-cellule" à "centre-face" \mathcal{I}

On introduit ici l'interpolation \mathcal{I} utilisée pour approcher la valeur d'une fonction φ quelconque au centre d'une face à partir des valeurs de la fonction aux centres des cellules, i.e. $\varphi_{fc} = \varphi(\mathbf{x}_{fc}) = \mathcal{I}(\varphi_{cc})$. Comme l'illustre la Figure 2.2, on distingue les faces ayant un stencil uniforme des faces ayant un stencil non uniforme. Dans un premier cas, si le stencil de la face est uniforme, on peut définir simplement φ_{fc} comme la moyenne unidirectionnelle de φ_{in} et φ_{out} . Dans le cas contraire, si le stencil n'est pas uniforme, il

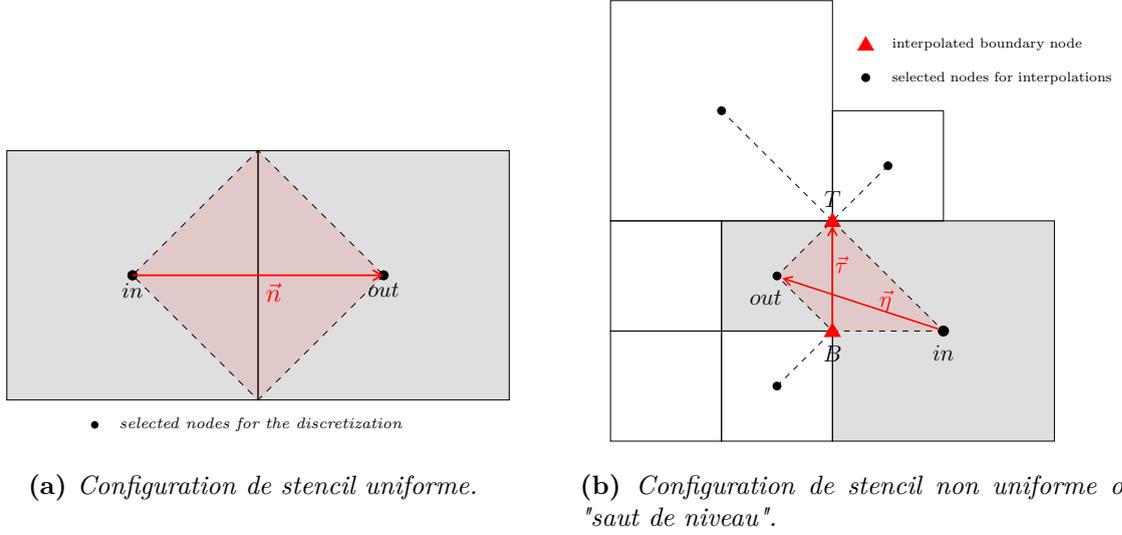


Figure 2.2 – Illustration du stencil \mathcal{S}_f d'une face $f = \overline{\Omega_{in}} \cap \overline{\Omega_{out}}$. Le quadrilatère rouge représente la cellule duale diamant définie par la suite dans la Section 2 et les points noirs représentent les points d'interpolation.

faut procéder différemment. Pour un maillage quadtree équilibré 2 :1, chaque stencil non uniforme est composé nécessairement de 5 cellules. Puisque $|\mathcal{S}_f| = 5$, l'interpolation sera au mieux d'ordre 2. On définit de ce fait φ_{fc} comme la moyenne unidirectionnelle de φ_T et φ_B . Procédant ainsi, il est alors possible d'approcher la valeur de la fonction à partir des stencils de chacun des noeuds T et B (\mathcal{S}_T et \mathcal{S}_B) composés de 4 ou 3 cellules. Une interpolation de type \mathbf{Q}_1 à 4 points (resp. \mathbf{P}_1 à 3 points) est alors employée par l'intermédiaire d'une base bilinéaire $\{1, x, y, xy\}$ (resp. linéaire $\{1, x, y\}$). Une approximation de type RBF ou des moindres carrés peut convenir ici mais en pratique, la précision obtenue via l'interpolation moyenne décrite ci-dessus est un peu plus élevée.

Reconstructions polynomiales

On considère la reconstruction compacte d'ordre 3 de type WENO introduite par [Semplice et al. \[98\]](#) dans le cadre de la résolution de systèmes hyperboliques. On cherche à construire un polynôme quadratique dans chaque cellule Ω_i , noté P_i^{O3} , qui conserve la moyenne $\bar{\varphi}_i$, i.e.

$$\frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} P_i^{O3}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \bar{\varphi}_i. \quad (2.1)$$

Pour un même maillage quadtree, le nombre et la répartition des voisins peuvent être totalement différents d'une cellule à l'autre, selon la configuration géométrique du stencil. L'étude de toutes les configurations de stencil devient alors une difficulté insurmontable en 2D, et encore plus en 3D. Pour contourner ce problème, on considère l'ensemble du stencil compact \mathcal{S}_i de la cellule afin d'obtenir une distribution appropriée des points d'in-

terpolation. L'interpolation est alors réalisée au sens des moindres carrés. Conformément à la répartition des cellules dans le stencil compact, il n'est pas possible d'obtenir une reconstruction d'ordre supérieur à 3 puisque la taille du stencil est comprise entre 7 et 13. De ce fait, la base quadratique est la meilleure base que nous puissions considérer. Le polynôme quadratique P_i^{O3} est défini par :

$$P_i^{O3}(\mathbf{x}) = c_0 + c_x(x - x_i) + c_y(y - y_i) + c_{xy}(x - x_i)(y - y_i) + \frac{c_{xx}}{2} \left((x - x_i)^2 - \frac{h_i^2}{12} \right) + \frac{c_{yy}}{2} \left((y - y_i)^2 - \frac{h_i^2}{12} \right). \quad (2.2)$$

Le vecteur des coefficients $\mathcal{C} = [c_0, c_x, c_y, c_{xy}, c_{xx}, c_{yy}]^T$ doit être déterminé en utilisant les valeurs moyennes de la fonction φ des cellules du stencil \mathcal{S}_i . Sous cette forme, on peut voir que $c_0 = \bar{\phi}_i$ puisqu'on souhaite garantir la conservation de la valeur moyenne (2.1). Outre la précision d'ordre 3 de l'interpolation, la procédure de reconstruction nécessite une conservation de moyenne non seulement dans Ω_i , mais également dans le stencil tout entier. Ceci est assuré en imposant que le polynôme reconstruit coïncide avec les valeurs moyennes des cellules au sens des moindres carrés. En d'autres termes, on détermine le vecteur des coefficients \mathcal{C} qui réalise :

$$\min_{\mathcal{C}} \sum_{k \in \mathcal{S}_i} \frac{1}{2} \left(\bar{\phi}_k - \frac{1}{|\Omega_k|} \int_{\Omega_k} P_i^{O3}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2 \quad (2.3)$$

A partir de la définition du polynôme P_i^{O3} (2.2) et du problème de minimisation (2.3), les coefficients sont déterminés en résolvant le système linéaire sur-déterminé $AC = \bar{\Phi}$ de taille $|\mathcal{S}_i| \times 6$ où :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= (\bar{\phi}_k)_{k \in \mathcal{S}_i} \\ A &= (A_k)_{k \in \mathcal{S}_i} \end{aligned} \quad (2.4)$$

pour lequel la k -ième ligne A_k de la matrice A est :

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 \\ x_k - x_i \\ y_k - y_i \\ (x_k - x_i)(y_k - y_i) \\ \frac{1}{2}(x_k - x_i)^2 + \frac{1}{24}(h_k^2 - h_i^2) \\ \frac{1}{2}(y_k - y_i)^2 + \frac{1}{24}(h_k^2 - h_i^2) \end{pmatrix}^T.$$

En pratique, la résolution de ce système linéaire n'est réalisée qu'une seule fois pour un maillage donné. Le coût de l'interpolation est donc négligeable devant le coût du reste de la simulation.

On définit également le polynôme linéaire P_i^{O2} associé au polynôme quadratique P_i^{O3} . Ce polynôme est obtenu simplement à partir de la valeur du gradient $\nabla\varphi$ au centre de la cellule Ω_i :

$$P_i^{O2}(\mathbf{x}) = \varphi_i + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T (\nabla\varphi)_i. \quad (2.5)$$

Ces reconstructions polynomiales seront utilisées dans la Section suivante 2.3.

2.3 Discrétisation des opérateurs différentiels

On présente dans cette section les différents opérateurs employés, discrétisés au sens des Volumes Finis.

Opérateur divergence

Cet opérateur est omniprésent, que ce soit dans l'étape de projection pour laquelle on doit calculer la divergence de \mathbf{u}^* , mais également dans l'étape de prédiction pour laquelle on considère la forme conservative des équations de Navier-Stokes. Par le théorème de Green-Ostrogradski, la divergence d'un champ \mathbf{v} au centre d'une cellule Ω_i s'écrit au sens des Volumes Finis comme :

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\partial\Omega_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds \quad (2.6)$$

Pour calculer cette intégrale de surface, on pourra utiliser deux formules de quadrature de Gauss-Legendre, selon l'ordre d'approximation désiré :

- la formule à 1 point (méthode point milieu \mathbf{x}_{fc}) d'ordre 2 :

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{f \subset \partial\Omega_i} \mathbf{v}_{fc} \cdot \mathbf{n}_f |f| + \mathcal{O}(h_i^2), \quad (2.7)$$

- la formule à 2 points d'ordre 3 :

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{f \subset \partial\Omega_i} \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{q_1} + \mathbf{v}_{q_2}) \cdot \mathbf{n}_f |f| + \mathcal{O}(h_i^3), \quad (2.8)$$

où q_1 et q_2 sont les points de quadratures de Gauss, situés sur la face f à une distance $h_f/(2\sqrt{3})$ de part et d'autre de \mathbf{x}_{fc} .

Afin de quantifier précisément l'erreur d'approximation commise lors du calcul de la divergence discrète, on considère un petit exemple numérique pour lequel on souhaite calculer la divergence de $\mathbf{v} = (-y, x)^T \frac{f}{0.385R}$ sur $[-2, 2]^2$ où R est la distance euclidienne ($R = \sqrt{x^2 + y^2}$) et $f = \tanh(R)/\cosh^2(R)$. On considère pour cela la formule de quadrature à deux points. Afin d'évaluer les flux $\mathbf{v}_{q_1} \cdot \mathbf{n}_f$ et $\mathbf{v}_{q_2} \cdot \mathbf{n}_f$, on a recours aux reconstructions polynomiales P^{O2} et P^{O3} introduites dans la Section 2.2. Les flux sont approchés comme moyennes des reconstructions réalisées de part et d'autre de la face :

$$\mathbf{v}_q = \frac{P_{out}(\mathbf{x}_q) + P_{in}(\mathbf{x}_q)}{2}.$$

La Figure 2.3 montre la distribution de l'erreur de troncature sur cet exemple, pour les deux reconstructions polynomiales P^{O2} et P^{O3} . Le test est réalisé à la fois sur maillage

uniforme et sur maillage quadtree, avec raffinement par boîtes imbriquées (cf Annexe B). On peut constater que, pour les deux reconstructions, l'erreur est significativement plus élevée aux sauts de niveaux. En réalité, si l'erreur est d'ordre 3 (resp. d'ordre 2) en utilisant la reconstruction P^{O3} (resp. P^{O2}) dans les zones uniformes, le schéma est détériorié à l'ordre 2 (resp. ordre 1) aux sauts de niveaux. L'étude de convergence en Annexe C atteste de cette perte d'un ordre de précision.

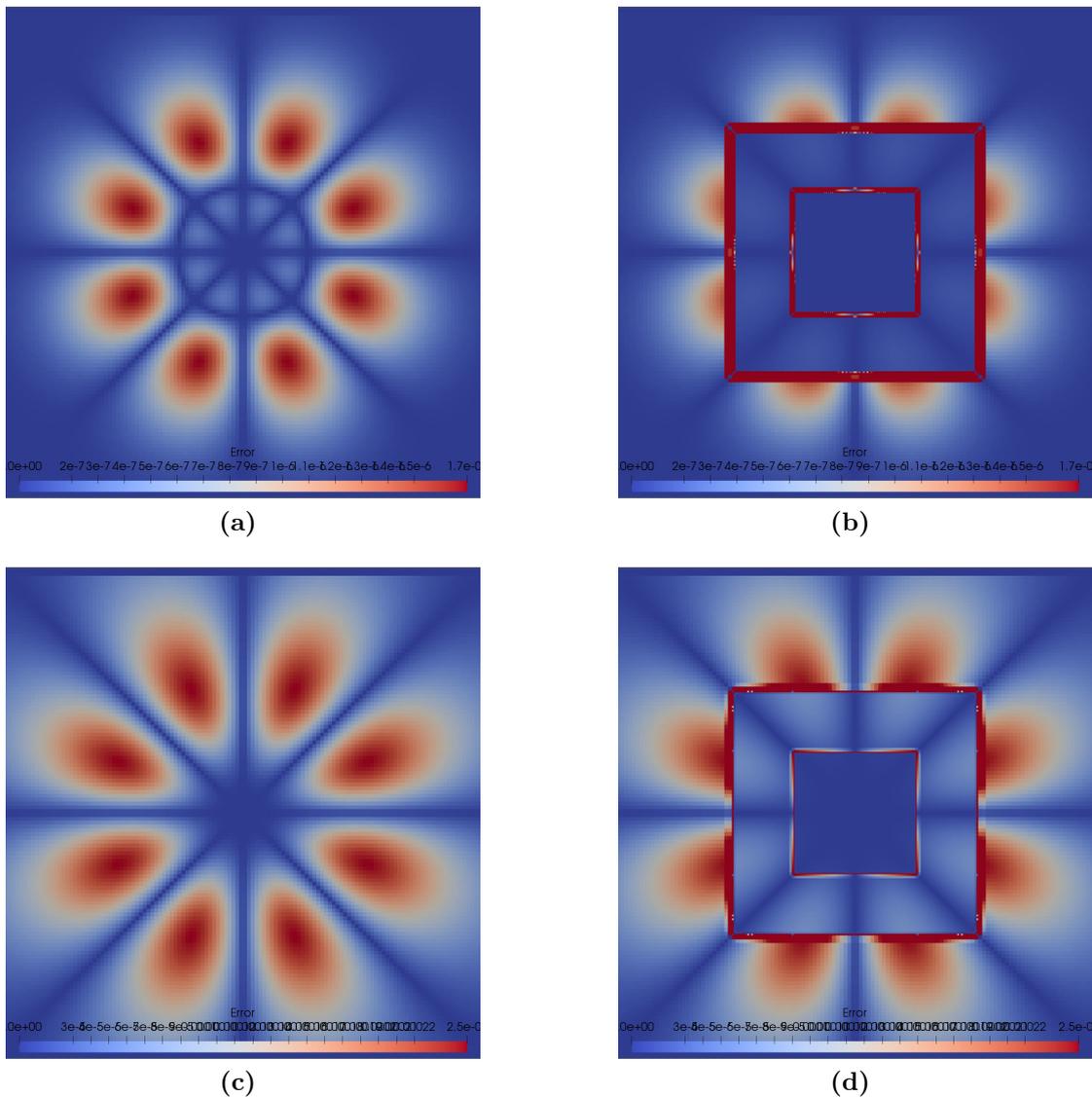


Figure 2.3 – Validation du schéma de discrétisation de l'opérateur divergence : répartition de l'erreur sur maillages uniforme (à gauche) et quadtree (à droite) à parité de niveau $L_{min} = 7$. Les deux reconstructions polynomiales P^{O3} (en haut) et P^{O2} (en bas) sont utilisées pour le calcul du flux $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_f$.

Obtenir une discrétisation de l'opérateur divergence précise à l'ordre 3 n'est ici pas indispensable car on ne pourra pas garantir l'ordre 3 pour l'ensemble des opérateurs. De plus, on évoque dans le prochain paragraphe la nécessité de stocker la vitesse normale aux faces U_{fc} de sorte à obtenir une distribution délocalisée des variables. Avoir recours à deux points de quadratures par face peut donc se révéler coûteux, d'autant plus qu'un point de quadrature suffit pour les cellules possédant un stencil uniforme. Dans l'Annexe C, on propose aussi une étude de l'erreur de troncature pour cet opérateur dans un cas simplifié. On cherche en effet à savoir s'il est possible d'empêcher la perte d'un ordre de précision aux sauts de niveaux. On examine en particulier l'impact du choix des points de quadrature sur l'erreur de troncature. On peut conclure de cette étude que la construction d'un schéma de discrétisation qui soit à la fois **conservatif** et **du second ordre aux sauts de niveaux** pour l'opérateur divergence ne peut être réalisée de manière aisée.

Distribution délocalisée des variables

Lors de l'étape de projection, le calcul du second membre de l'équation de Poisson $\nabla \cdot \mathbf{u}^*$ ne doit pas être réalisé à partir de la vitesse prédite \mathbf{u}^* , localisée au centre des cellules. En effet, des oscillations parasites peuvent apparaître en raison du découplage *odd-even* entre la vitesse et la pression. C'est l'un des principaux inconvénients des méthodes reposant sur une distribution colocalisée des variables pour lesquelles le découplage provoque de fortes variations de pression. Ce phénomène devient encore plus critique pour des maillages cartésiens hiérarchiques, car ce problème peut entraîner des instabilités numériques aux sauts de niveaux. Comme le montrent [Ferziger et Peric \[39\]](#), les méthodes classiques de colocalisation ne peuvent garantir simultanément la régularité de la pression et la conservation de la masse. Pour surmonter ce problème, [Patankar \[82\]](#) propose une méthode de type *Marker And Cell* (MAC) basée sur un maillage décalé, pour laquelle les localisations des inconnues de pression et de vitesse sont distinctes. En général, les inconnues de pression sont situées au centre des cellules du maillage primal et les inconnues normales de vitesse sont situées au centre des faces. Pour ce type de méthodes, l'étape de prédiction (1.2) et l'équation de Poisson (1.4) sont alors résolues en des positions distinctes, ce qui conduit à des discrétisations spatiales différentes. En ce sens, les distributions de variables délocalisées deviennent plus difficiles dans le cas de maillages cartésiens non uniformes. En particulier, la librairie Bitpit/PABLO est adaptée et optimisée pour la construction de schémas *cell-centered*, notamment en ce qui concerne la recherche des cellules voisines. Une méthode *face-centered* se révélerait à plus forte raison difficile à mettre en oeuvre sur le plan algorithmique, et inefficace du point de vue du temps de calcul.

Afin de stabiliser la méthode, on considère l'approche colocalisée introduite par [Rhie et Chow \[92\]](#) pour les écoulements stationnaires, et [Zang et al. \[118\]](#) pour les écoulements instationnaires. Une vitesse normale aux faces notée U_{fc}^* est définie dans Ω (voir [70])

comme :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* + \frac{\Delta t}{\rho} (\nabla p^n)_{cc} & (2.9a) \\ \widetilde{U}_{fc} = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}) & (2.9b) \\ U_{fc}^* = \widetilde{U}_{fc} - \frac{\Delta t}{\rho} (\nabla p^n)_{fc} & (2.9c) \end{cases}$$

où \mathcal{F} est l'opérateur réalisant l'interpolation de la vitesse normale définie au centre de la face, calculée à partir de la vitesse obtenue au centre des cellules. Un choix naturel pour l'opérateur \mathcal{F} serait de prendre l'interpolation \mathcal{I} définie précédemment dans la Section 2.2. On verra dans la Section 3.3 qu'une stabilisation de l'opérateur est nécessaire. Cette délocalisation des vitesses est illustrée par la Figure 2.4.

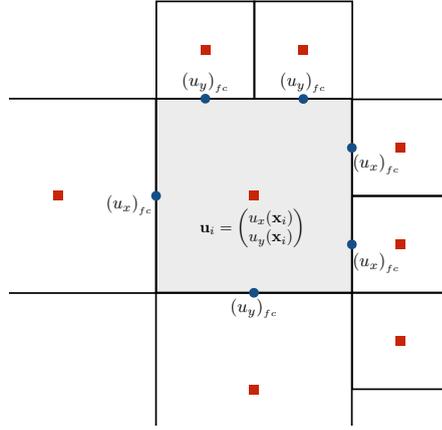


Figure 2.4 – Représentation de la distribution des vitesses relatives aux cellules (carrés rouges) et aux faces (points bleus) sur maillage cartésien hiérarchique.

La vitesse normale aux faces U_{fc}^* est alors utilisée pour résoudre l'équation de Poisson durant l'étape de projection. L'équation de Poisson (1.4) s'écrit désormais :

$$\Delta p' = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot U_{fc}^* \quad (2.10)$$

Une fois l'incrément de pression p' déterminé, les deux vitesses (relatives aux cellules et aux faces) sont finalement corrigées indépendamment :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - (\nabla p')_{cc} & (2.11a) \\ U_{fc}^{n+1} = U_{fc}^* - (\nabla p')_{fc} & (2.11b) \end{cases}$$

Ainsi définie, la vitesse normale U_{fc}^{n+1} satisfait la propriété de conservation de masse discrète dans la limite de la tolérance ϵ_Δ imposée lors de la résolution du solveur de Poisson, c'est-à-dire :

$$\sum_{f \subset \partial\Omega_i} (U_{fc}^{n+1} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}_f |f| = \mathcal{O}(\epsilon_\Delta) \ll 1, \quad \forall \Omega_i \subset \Omega.$$

En revanche, ce n'est pas le cas pour $\mathcal{F}(\mathbf{u}^{n+1})$. Dans ce cas, la conservation de masse discrète est respectée dans la limite de l'ordre du schéma numérique (en pratique $\mathcal{O}(h_i^2)$).

Par conséquent, les deux vitesses \mathbf{u} et U_{fc} doivent être stockées pour assurer la conservation de la masse. Cela peut représenter un coût important en termes de mémoire. Cependant, le stockage de la vitesse U_{fc} se résume à une unique dimension puisque seule la composante normale est considérée. On va voir par la suite que cette vitesse normale U_{fc} est utilisée notamment pour la discrétisation de l'opérateur d'advection.

Opérateur laplacien $\Delta = \nabla \cdot \nabla$

L'intérêt pour la résolution de problèmes elliptiques du type $-\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u) = f$ a fait naître une multitude de schémas numériques, que l'on peut regrouper en familles de méthodes (Différences Finis, Volumes Finis, Eléments Finis ou Galerkin Discontinu). Les travaux de [Droniou \[34\]](#) et [Klemetsdal et al. \[59\]](#) par exemple, décrivent plus particulièrement la famille des schémas Volumes Finis sur maillage générique de type polyédral. Ils examinent notamment les propriétés de coercivité et convergence, les principes du minimum et maximum, ou encore la monotonie de certains schémas. On citera les méthodes TPFA et MPFA (two-point and multi-point flux approximation), HMM (Hybrid Mimetic Mixed) et DDFV (Discrete Duality Finite Volume). Pour plus de détails concernant ces méthodes, le lecteur peut se référer à ces deux articles.

Parmi les approches sur maillages cartésiens hiérarchiques, on fera notamment référence à la méthode aux frontières immergées introduite par [Johansen et Colella \[54\]](#). L'équation de Poisson est résolue au centre des mailles via une discrétisation des flux à l'ordre 2 obtenue par interpolation des valeurs d'une grille fine à partir de la grille grossière. Ce schéma fait cependant intervenir un stencil à 5 points par face, ne correspondant pas au stencil compact \mathcal{S}_f . En d'autres termes, l'interpolation fait appel à des cellules appartenant au stencil d'une cellule \mathcal{S}_{in} (par exemple) mais pas au stencil de l'autre cellule \mathcal{S}_{out} . Par conséquent, cette méthode ne peut être considérée de par notre contrainte de parallélisme et par le soucis de garantir la conservativité du schéma. Dans l'approche de [Guittet et al. \[46\]](#) pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles, le terme diffusif est discrétisé par une méthode Volumes Finis sur un diagramme de Voronoi, construit à partir des données aux centres des faces. En effet, cette méthode est basée sur une répartition délocalisée des variables pour laquelle la vitesse normale aux faces est considérée. La reconstruction des flux pour une cellule de Voronoi est alors réalisée à partir des données de vitesses normales.

De notre côté, on a recours à une version simplifiée de la méthode DDFV proposée par [Coudière et al. \[26\]](#) et [Delcourte et al. \[29\]](#). Le schéma DDFV a notamment été appliqué par [Coudière et Hubert \[25\]](#) pour la résolution de problèmes de diffusion anisotrope, ou par [Lakhlili et al. \[60\]](#) pour simuler l'érosion d'un sol sous l'effet d'un écoulement fluide. Elle est basée sur le choix de cellules polygonales artificielles, dites duales, semblables à des diamants, comme le montre la Figure 2.2. Sur chaque face $f = \partial\Omega_{in} \cap \partial\Omega_{out}$, on souhaite approcher la dérivée normale d'une fonction φ au centre de cette face. Pour cela, le vecteur

normal \mathbf{n}_f est décomposé comme combinaison linéaire de deux vecteurs $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}_{out} - \mathbf{x}_{in}$ et $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}_T - \mathbf{x}_B$. En d'autres termes, $\exists c_\tau, c_\eta \in \mathbb{R} : \mathbf{n}_f = c_\tau \boldsymbol{\tau} + c_\eta \boldsymbol{\eta}$. Pour les deux directions introduites $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\tau}$, les dérivées directionnelles sont naturellement calculées comme :

$$\begin{cases} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\eta} = \varphi_{out} - \varphi_{in}, \\ \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau} = \varphi_T - \varphi_B. \end{cases} \quad (2.12a)$$

$$(2.12b)$$

Dans le cas où les deux cellules Ω_{in} et Ω_{out} ont la même taille, les vecteurs \mathbf{n}_f et $\boldsymbol{\eta}$ sont colinéaires, l'équation (2.12a) devient alors l'approximation centrée classique d'ordre 2, au sens des différences finies. Dans le cas contraire, les valeurs φ_T et φ_B sont interpolées en utilisant les stencils \mathcal{S}_T et \mathcal{S}_B relatifs aux noeuds T et B . Selon la taille du stencil (3 ou 4), l'interpolation \mathbf{P}_1 ou \mathbf{Q}_1 est choisie. De cette manière, la dérivée normale peut être exprimée linéairement à partir du stencil compact \mathcal{N}_f relatif à la face f :

$$\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}_f = c_\tau(\varphi_T - \varphi_B) + c_\eta(\varphi_{out} - \varphi_{in}) \equiv \sum_{k \in \mathcal{N}_f} \omega_k \varphi_k. \quad (2.13)$$

Validation de la discrétisation

On considère le problème de Poisson $-\Delta u = f$ sur $\Omega = [0, 2\pi]^2$, muni de conditions aux limites de type Dirichlet. La fonction définie par $u(x, y) = \cos(x + y) \sin(x - y)$ est solution de ce problème pour $f = 4u$. Le Tableau 2.1 présente les résultats obtenus sur maillages uniforme et quadtree, pour deux types de raffinements avec 3 sauts de niveaux ($L_{max} = L_{min} + 3$), à parité de niveau L_{min} . Les raffinements par boîtes et pseudo-aléatoire sont représentés en Annexe B.

grille L_{min}	uniforme				quadtree : raff. par boîtes				quadtree : raff. pseudo-aléatoire			
	L^1	q_1	L^∞	q_∞	L^1	q_1	L^∞	q_∞	L^1	q_1	L^∞	q_∞
5	4.96e-3	/	1.24e-2	/	1.48e-3	/	1.45e-2	/	7.62e-4	/	1.38e-2	/
6	1.17e-3	2.08	3.12e-3	1.99	4.05e-4	1.87	3.48e-3	2.06	1.83e-4	2.06	3.44e-3	2.00
7	2.85e-4	2.04	7.88e-4	1.99	9.52e-5	2.09	8.56e-4	2.02	4.53e-5	2.01	8.53e-4	2.01
8	7.01e-5	2.02	1.98e-4	1.99	2.29e-5	2.06	2.12e-4	2.01	1.11e-5	2.03	2.15e-4	1.99
9	1.74e-5	2.01	4.96e-5	2.00	5.77e-6	1.99	5.27e-5	2.01	2.79e-6	1.99	5.47e-5	1.97

Table 2.1 – Validation du schéma de discrétisation de l'opérateur Laplacien : étude de convergence sur maillages uniforme et quadtree à parité de niveau L_{min} . Le taux de convergence q_1 (resp. q_∞) au sens de la norme L^1 (resp. L^∞) indique une précision d'ordre 2.

On observe que les erreurs de discrétisation convergent à l'ordre 2 pour les trois types de maillage. Cependant, il est facile de vérifier que l'erreur de troncature est en $\mathcal{O}(1)$ aux sauts de niveau. Ceci est dû au calcul de la dérivée normale (2.13) effectué à l'ordre 1. Barbeiro [5] a précédemment prouvé qu'il est possible d'obtenir une erreur de discrétisation "supra-convergente" à l'ordre 2 pour une discrétisation "inconsistante" d'équations elliptiques 2D sur maillage non uniforme. De même, un constat similaire a été dressé par Diskin et Thomas [32] pour des maillages irréguliers. On observe de manière analogue ce phénomène de supra-convergence pour des maillages cartésiens hiérarchiques.

Pour un niveau de référence donné L_{min} , la configuration de maillage quadtree est $(L_{min} - \{L_{min} + 3\})$. En raffinant trois fois, on obtient logiquement une erreur L^1 beaucoup plus faible. Cependant, l'erreur L^∞ est légèrement plus grande car l'erreur induite par un saut de niveau peut être importante.

Opérateur d'advection ($\mathbf{u} \cdot \nabla$)

En régime incompressible, l'opérateur d'advection peut être écrit sous forme conservative $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\varphi = \nabla \cdot (\varphi\mathbf{u})$. On se place ainsi dans le cadre de la résolution de problèmes hyperboliques, pour lesquels il existe une multitude de méthodes numériques Volumes Finis (voir [LeVeque et al. \[63\]](#)). On considère notamment trois schémas numériques, à savoir :

1. **FV2** : extension du schéma de Godunov upwind à l'ordre 2. Ce schéma non-monotone repose sur la reconstruction linéaire par morceaux P^{O2} . Ce schéma convient notamment pour le transport de solutions régulières, ce qui est en particulier le cas pour des écoulements incompressibles.
2. **MOOD** : schéma de Détection Multidimensionnelle de l'Ordre Optimal à l'ordre 2, proposé par [Diot et al. \[31\]](#). Ce schéma TVD peut être vu comme une extension du schéma FV2 pour des solutions irrégulières. Ce schéma repose sur un critère de détection des discontinuités $u2$. D'un point de vue discret, l'algorithme peut être résumé comme suit : dans une cellule, si la solution ne respecte pas le principe du maximum discret et que sa courbure n'est pas régulière, alors l'ordre d'approximation est diminué. En d'autres termes, une reconstruction constante par morceaux est préférée au voisinage d'une singularité, afin de garantir la monotonie du schéma. Pour le transport de solutions régulières, les schémas FV2 et MOOD sont totalement équivalents.
3. **CWeno3** : schéma Weno Compact d'ordre 3. Ce schéma a été introduit par [Levy et al. \[64\]](#) pour des maillages uniformes et étendu plus tard pour des maillages cartésiens hiérarchiques par [Semplice et al. \[98\]](#). Les schémas Weno sont particulièrement appréciés car ils possèdent une certaine propriété de non-oscillation, qui permet de contrôler et limiter la variation totale de la solution. Dans chaque cellule Ω_i , un polynôme central P_C est défini comme combinaison linéaire convexe de 5 polynômes, à savoir un polynôme quadratique centré P^{O3} (dit optimal) et 4 reconstructions linéaires décentrées P^{O2} (une par diagonale) :

$$(P_C)_i = w_0 P_i^{O3} + \sum_{k=1}^4 w_k P_k^{O2}.$$

Les poids de cette combinaison linéaire sont alors déterminés de sorte à assurer la régularité de la solution. Cette méthode est particulièrement adaptée à notre situation, puisqu'elle fait intervenir exclusivement le stencil compact de la cellule. De ce schéma CWeno3, on définit également un schéma **FV3** adapté au transport de solutions régulières. En imposant $P_C = P^{O3}$, on garantit une précision optimale

du schéma numérique pour un coût de calcul considérablement réduit. Le schéma FV3 peut également être vu comme une généralisation à l'ordre 3 du schéma FV2.

Comme on a déjà pu le voir précédemment pour la discrétisation de l'opérateur divergence, il faut choisir une formule de quadrature adaptée. Pour les schémas d'ordre 3 (CWeno3 et FV3), on aura en effet besoin de la formule de quadrature à 2 points (2.8) alors que la formule "point milieu" (2.7) suffira pour les schémas d'ordre 2 (FV2 et MOOD). En chaque point de quadrature q d'une face f , le flux $\mathcal{F}(\varphi) = U\varphi$ est calculé en utilisant les reconstructions polynomiales de part et d'autre de la face. Comme l'illustre la Figure 2.5, on note $\varphi_q^- := P_{in}(\mathbf{x}_q)$ et $\varphi_q^+ := P_{out}(\mathbf{x}_q)$ les reconstructions de φ au point de quadrature q provenant respectivement des cellules Ω_{in} et Ω_{out} . Pour garantir la stabilité du schéma numérique, on privilégie le flux numérique de Rusanov ou Lax-Friedrichs local :

$$\mathcal{F}(\varphi)_q = \tilde{\mathcal{F}}(\varphi_q^-, \varphi_q^+) = \frac{U_q}{2}(\varphi_q^- + \varphi_q^+) - \frac{\alpha}{2}|U_q|(\varphi_q^+ - \varphi_q^-), \quad (2.14)$$

où α est le paramètre de stabilisation. Ce paramètre est choisi égal à 1 de sorte à ce que le flux soit calculé de manière totalement décentrée.

Revenons maintenant au modèle eulérien. Comme on a pu l'expliquer précédemment, la vitesse normale U_q doit ici vérifier la conservation de masse discrète. Il n'est donc pas opportun d'avoir recours à un schéma d'ordre 3 qui fait intervenir deux points de quadrature par face. En effet, seule la vitesse normale au centre de la face U_{fc} permet d'assurer cette propriété. Stocker deux vitesses normales par face entraînerait un coût considérable d'un point de vue mémoire et temps de calcul. Ainsi, seuls les schémas d'ordre 2 (FV2 et MOOD) sont considérés pour la discrétisation du modèle eulérien. Cependant, on pourra également apprécier la précision obtenue pour les schémas d'ordre 3 dans la Section 4 pour la résolution de problèmes de pur transport.

2.4 Algorithme d'adaptation de maillage

Parmi les méthodes de raffinement adaptatif de maillage existant dans la littérature, on peut distinguer deux types d'approches. La première repose sur une estimation *a priori* de la régularité locale de la solution, en se basant sur un critère de raffinement *ad hoc*. Parmi ce type de méthodes, on peut également inclure les techniques de raffinement adapté à la géométrie, en particulier pour la simulation d'écoulements autour de corps immergés [30] ou à surface libre [117]. De multiples critères ont été introduits pour définir la régularité de la solution. En régime compressible, des critères définis à partir des variables physiques telles que le gradient de la densité [74] ou la différence de vitesses dans le stencil [30] se montrent particulièrement adaptés. En régime incompressible, certaines études proposent notamment des critères basés sur le gradient de pression [116], la vorticité [87, 116], le Q-criterion [57], ou encore la hessienne de la vitesse [116, 117]. Chacun de ces critères convient plus ou moins selon le phénomène physique considéré. Ces méthodes de raffinement *a*

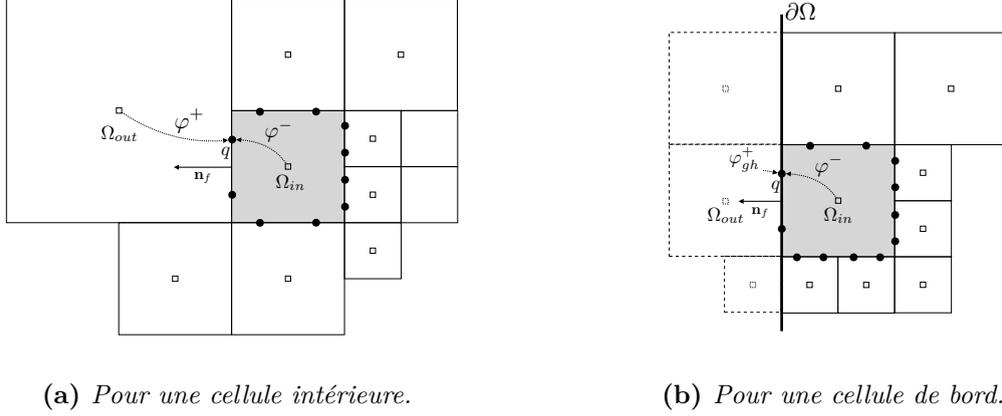


Figure 2.5 – Illustration de la reconstruction polynomiale d'ordre 3 d'une quantité φ aux points de quadrature de Gauss q (points noirs). Les cellules incluses dans le stencil de Ω_{in} sont représentées par des carrés blancs.

priori sont très intuitives et restent relativement simples à implémenter. Cependant, elles dépendent explicitement de paramètres de calibrage appelés seuils qu'il faut définir "à la main" afin de contrôler le nombre de degrés de liberté au cours de la simulation. Le choix de ces seuils dépend bien souvent du cas-test considéré, ce type de méthode est par conséquent difficile à automatiser.

La seconde approche repose sur une estimation *a posteriori* de l'erreur de troncature. Le principe de cette procédure d'adaptation est de représenter la solution du maillage fin comme la somme des solutions obtenues sur un maillage plus grossier virtuel et d'une série de différences, pour différents niveaux de raffinement du maillage. Les différences contiennent alors l'information de la résolution lors du passage d'une grille grossière à une grille plus fine. Pour cela, l'estimateur d'erreur peut être fourni par extrapolation de Richardson [7, 8] ou via une analyse multi-résolution par ondelettes [33, 95]. Ces méthodes d'estimation d'erreur *a posteriori* sont très intéressantes car elles permettent de définir le maillage optimal, pour une résolution de maillage donné, qui offre une précision maximale de la solution numérique. Cependant, le coût de calcul est conséquent pour ce type d'approche puisqu'il s'agit de faire évoluer la solution sur deux maillages alternativement. En faisant appel à la librairie Bitpit/PABLO, cela devient même délicat puisque seul le "feuillage" de l'arborescence est conservé, ce qui complique l'utilisation d'un maillage de niveau inférieur.

Dans le cadre de cette thèse, on utilise deux critères, l'un basé sur la géométrie, l'autre sur la hessienne de la vitesse. Le premier critère, reposant sur la fonction level set ϕ , permet de garantir une bonne précision au voisinage des interfaces Γ_s et Γ_e . Pour une cellule Ω_i , le niveau optimal relativement au critère level set $L_i^{opt,LS}$ est défini comme maximal $L_i^{opt,LS} = L_{max}$ si la cellule est située à une distance inférieure à une distance

seuil η^{LS} , i.e. $\phi_i < \eta^{LS}$. En pratique, le choix $\eta^{LS} = 10h_{min}$ assure que le maillage est toujours uniforme dans les matériaux (élastiques et rigides) si la procédure AMR est activée de manière suffisamment fréquente. De plus, si un solide Ω_s est immobile pendant la simulation, le maillage peut être déraffiné à l'intérieur de ce solide, sans impacter outre mesure la précision globale du schéma numérique.

Le deuxième critère, relatif à la solution numérique, est défini à partir de la Hessienne de la vitesse :

$$\mathcal{C}_i = \|\mathbf{H}(\mathbf{u})_i\|_F, \quad \forall \Omega_i \subset \Omega, \quad (2.15)$$

où $\|\cdot\|_F$ fait référence à la norme de Frobenius. La hessienne de la vitesse est approchée par une méthode des moindres carrés afin de régulariser le critère dans tout le domaine. A partir de seuils prédéfinis notés $\eta_{min}^{\mathbf{u}}$ et $\eta_{max}^{\mathbf{u}}$, le niveau optimal de raffinement L^{opt} est alors simplement déterminé comme la fonction linéaire satisfaisant $L^{opt}(\eta_{min}^{\mathbf{u}}) = L_{min}$ et $L^{opt}(\eta_{max}^{\mathbf{u}}) = L_{max}$.

Ce critère peut cependant faire apparaître des configurations de maillages inappropriées. En effet, dans les zones où la solution varie le plus, conserver des sauts de niveaux trop proches a tendance à provoquer de fortes instabilités numériques. On a pu en effet constater que 2 sauts de niveaux consécutifs $[L_{p-1} - L_p]$ et $[L_p - L_{p+1}]$ ne doivent être positionnés à 3-4 mailles l'un de l'autre. Pour éviter ces configurations de maillage, il faut lisser le critère plusieurs fois en utilisant les voisins proches. En pratique, le critère est lissé 20 fois.

Mise à jour des données

Il n'est pas nécessaire de modifier le maillage à chaque itération en temps, surtout en présence de matériaux rigides pour lesquels le pas de temps est très petit devant le pas de temps fluide classique ($\Delta t_f \ll \Delta t_e$). De plus, il est facile de constater que ce processus introduit inévitablement de petites perturbations dues à la mise à jour par interpolation des données de l'ancienne grille \mathcal{M}^{old} à la nouvelle grille \mathcal{M}^{new} . La procédure d'adaptation de maillage est par conséquent activée selon une fréquence donnée (relative au temps physique). Il serait également possible de s'en remettre à un critère de régularité de la solution afin d'optimiser le nombre d'adaptation de maillage pour chaque simulation. Grâce à la librairie Bitpit/Pablo, une fonction de mapping reliant une cellule *mère* à ses cellules *filles* est définie de manière naturelle, à partir de l'héritage parent-enfant basé sur le code de Morton. Pour réduire cette perte de précision, la reconstruction linéaire par morceaux P^{O2} (cf Section 2.2) est considérée pour mettre à jour la fonction φ^{new} à partir de la fonction φ^{old} . De la grille \mathcal{M}^{old} à la grille \mathcal{M}^{new} , la cellule Ω_i^{old} peut être :

- inchangée, sa taille reste alors la même. Pour la nouvelle cellule $\Omega_j^{new} = \Omega_i^{old}$, la valeur de la fonction est simplement transmise d'une grille à l'autre, i.e. $\varphi_j^{new} = \varphi_i^{old}$.
- raffinée, la cellule *mère* est alors divisée en 4 cellules *filles* Ω_j^{new} , $j = 1, \dots, 4$. Chacune des valeurs φ_j^{new} est alors reconstruite à partir de la cellule *mère* : $\varphi_j^{new} = P_i^{O2,old}(\mathbf{x}_j)$.

- dé-raffinée, la cellule fusionne alors avec 3 autres cellules *filles* Ω_k^{old} pour former une seule cellule *mère* Ω_j^{new} . La valeur φ_j^{new} est alors calculée comme la moyenne des reconstructions obtenues à partir des 4 cellules *filles*, i.e.

$$\varphi_j^{new} = \frac{1}{4} \left(P_i^{O2,old}(\mathbf{x}_j) + \sum_{k=1}^3 P_k^{O2,old}(\mathbf{x}_j) \right)$$

La Figure 2.6 illustre la procédure de mise à jour des données.

Puisque le maillage a changé, la vitesse normale aux faces U_{fc} doit également être recalculée sur la nouvelle grille. Cependant, comme il n'existe pas de fonction de mapping relative aux faces, cette vitesse U_{fc} est alors simplement interpolée. Pour conserver au mieux la masse d'un point de vue discret, l'adaptation du maillage est effectuée entre les étapes de prédiction et de projection. L'interpolation de U_{fc}^* est effectuée selon l'interpolateur centre-cellule à centre-face \mathcal{I} , précédemment introduit dans la Section 2.2.

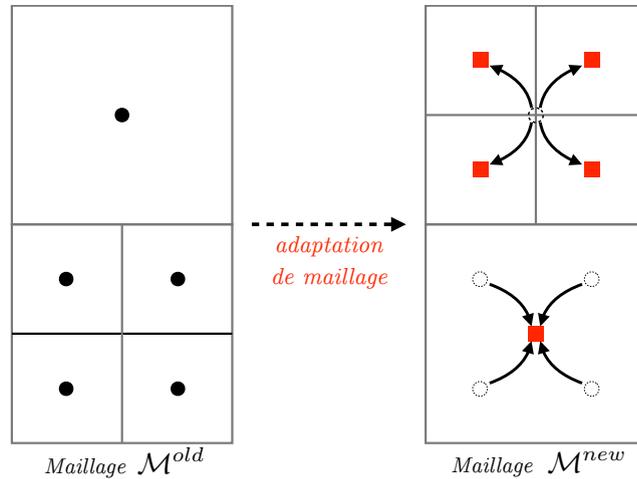


Figure 2.6 – Procédure d'adaptation de maillage : mise à jour des données d'un maillage \mathcal{M}^{old} à un maillage \mathcal{M}^{new} .

3 Contraintes numériques liées au modèle

Dans le Chapitre 1, on a pu détailler le modèle eulérien considéré durant cette thèse. Dans cette approche, le fluide et les solides sont représentés comme un seul milieu dans lequel les propriétés diffèrent. Ainsi, les dynamiques de chaque milieu sont décrites d'une seule manière, ce qui permet de surmonter bon nombre de problèmes que les approches Lagrangiennes peuvent induire. Parmi ces difficultés, on pourra faire référence notamment à la génération et l'évolution des maillages, ou encore l'imposition des conditions limites à l'interface. Cette méthode eulérienne présente toutefois deux inconvénients majeurs.

Dans le contexte des méthodes level set, il est nécessaire d’avoir fréquemment recours à un algorithme dit de ré-initialisation afin de remettre à jour la fonction level set ϕ . En pratique, si la fonction distance définie initialement satisfait $\|\nabla\phi(t=0, \cdot)\| = 1$, cela n’est plus vrai après un certain nombre d’itérations en temps. Suite aux transports successifs permettant de décrire l’évolution de cette fonction, il n’est pas possible de garantir que ϕ reste une fonction distance tout au long de la simulation. Ce défaut de la méthode est source de nombreuses instabilités numériques, spécifiquement lorsque le tenseur des contraintes σ devient irrégulier. Pour ré-initialiser la fonction distance signée, il existe un large éventail de stratégies dans la littérature. Dans la Section 3.1, on présentera d’une part la méthode de relaxation proposée par Russo et Smereka [96]. D’autre part, on proposera une méthode Fast-Marching précise à l’ordre 3, particulièrement adaptée à la ré-initialisation de la fonction distance pour des maillages cartésiennes hiérarchiques. Une comparaison des deux méthodes sera également mise en évidence.

Deuxièmement, il convient de souligner que le modèle décrit l’interaction entre des milieux gouvernés par des dynamiques radicalement différentes. Dans un matériau incompressible élastique, les particules se déplacent de manière organisée et restent proches les unes des autres (vérifiant ainsi $\det[\nabla\mathbf{X}] \approx \det[\nabla\mathbf{Y}] \approx 1$). La déformation d’un fluide incompressible est généralement plus grande et le temps caractéristique lié à la sollicitation est inférieur. Ainsi, les caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} peuvent devenir irrégulières à proximité de l’interface $\Gamma_e(t)$, pouvant engendrer des problèmes de stabilité. Pour régulariser ces caractéristiques, un algorithme d’extrapolation d’ordre élevé est adopté afin de mettre à jour \mathbf{Y} à l’intérieur du fluide. À cette fin, on a recours à la stratégie d’extrapolation linéaire introduite par Aslam [4], et utilisé précédemment par [28]. Les détails concernant l’algorithme sont présentés dans la Section 3.2.

En plus de ces deux inconvénients majeurs, une stabilisation de la méthode est nécessaire. D’une part, on a pu constater que le manque de précision aux sauts de niveaux peut provoquer l’apparition d’oscillations non-négligeables qui se propagent à travers tout le domaine, surtout pour de petits pas de temps. On verra qu’il est possible de limiter considérablement ces instabilités numériques. D’autre part, la prise en compte de structures à haute rigidité (i.e. $c_{wave} \gg \|\mathbf{u}\|$) s’avère être une source de nombreuses instabilités numériques, dues à la nature multi-physique du problème (différentes échelles de temps, différentes propriétés, etc.). On introduira notamment une viscosité artificielle pour le cas de figure où $\Omega_s \subset \Omega_e$. En s’inspirant des méthodes *Continuum Surface Force* (CSF) pour des problèmes d’interaction bi-fluide, on proposera également l’ajout d’un terme de tension de surface afin de stabiliser l’interface. Les détails relatifs à la stabilisation du schéma numérique sont donnés en Section 3.3.

3.1 Ré-initialisation de la fonction level set

Comme on a pu l'évoquer précédemment, il existe pléthore d'algorithmes de re-distanciation dans la littérature. En premier lieu, nous pouvons mentionner la méthode de relaxation introduite par [Sussman et al. \[105\]](#). Cette méthode populaire consiste en la résolution de l'équation Eikonale $\|\nabla\phi\| = 1$ par transports successifs depuis l'interface via des discrétisations décentrées (*upwind*) des dérivées premières. Par la suite, une amélioration a été apportée par [Russo et Smereka \[96\]](#) pour obtenir une meilleure préservation de la ligne 0 de la fonction distance. Plus précisément, cette méthode *linear subcell fix* garantit une précision à l'ordre 2 concernant la position de l'interface, et à l'ordre 1 pour la mise à jour de la fonction distance signée dans tout le domaine. Une généralisation à des ordres supérieurs est possible en ayant recours à des discrétisations d'ordre plus élevé faisant intervenir de plus grands stencils. Dans le cadre de cette thèse, il est inconcevable de mettre en place de telles améliorations de par la contrainte de parallélisme, à savoir que chaque cellule n'a accès qu'à son stencil compact (une seule couche de voisins).

En outre, les méthodes de Fast-Sweeping [[112](#), [119](#)] ne conviennent pas non plus car la numérotation en *Z-order* ne permet pas de résoudre l'équation d'Eikonale de manière efficace et peu coûteuse. Ce type de méthode repose en effet sur une succession de balayages pour propager l'information de l'interface vers le reste du domaine. Le coût de la méthode devient limité dès lors que la direction de propagation suit la numérotation globale du maillage. Avec la numérotation de type *Z-order*, deux cellules adjacentes ne sont pas forcément consécutives du point de vue du vecteur des données, ce qui empêche la définition d'une direction optimale de balayage.

Les méthodes de Fast-Marching introduites par [Sethian \[99, 100\]](#) restent plus intéressantes dans notre cas. Via cette méthodologie, l'information est propagée comme un front dans la direction normale, en couches successives depuis l'interface. Cette méthode est généralement plus efficace car elle est rapide en termes de temps de calcul, mais la scalabilité de l'algorithme demeure dégradée.

Méthode de relaxation *linear subcell fix*

Introduite par [Russo et Smereka \[96\]](#), cette méthode itérative consiste à la résolution de l'EDP instationnaire suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial\tau} &= \text{sgn}(\phi^0)(1 - \|\nabla\phi\|) \\ \phi(\tau = 0, \mathbf{x}) &= \phi^0(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

jusqu'à obtention de la solution d'équilibre. Ici, ϕ^0 représente la fonction distance signée initiale et sgn fait référence à la fonction signe. A $\tau = 0$, l'interface Γ^0 est définie comme la ligne 0 de la level set, i.e. $\Gamma^0 = \{\mathbf{x} \in \Omega : \phi^0(\mathbf{x}) = 0\}$. La résolution de l'équation (3.1) est effectuée via un schéma d'Euler explicite en temps. Pour chaque cellule Ω_i , le schéma

discret s'écrit :

$$\phi_i^{k+1} = \phi_i^k - \Delta\tau \begin{cases} (\operatorname{sgn}(\phi_i^0)|\phi_i^k| - D_i^0) & \text{si } \mathbf{x}_i \in \Gamma_{h_{min}}^0, \\ \operatorname{sgn}(\phi_i^0)G(\phi_i^k) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.2)$$

où $G(\phi) = \|\nabla\phi\| - 1$, et $D^0 = \phi^0/\|\nabla\phi^0\|$ désigne la distance signée initiale. Dans cette formulation, il est nécessaire de distinguer les cellules situées au voisinage de l'interface dans la première couche notée $\Gamma_{h_{min}}^0$ (*narrow band*) des autres afin de garantir que l'interface est bien préservée. Ce premier groupe est constitué des cellules pour lesquelles on peut trouver un voisin **par face** Ω_j situé de l'autre côté de l'interface, autrement dit vérifiant $\phi_i^0 \phi_j^0 < 0$.

On désigne les quatre dérivées décentrées (upwind) par $a = \partial_x^- \phi$, $b = \partial_x^+ \phi$, $c = \partial_y^- \phi$ et $d = \partial_y^+ \phi$. Ces quantités sont calculées au premier ordre via les discrétisations des dérivées normales aux faces $(\nabla\phi \cdot \mathbf{n})_{fc}$ utilisées précédemment pour l'opérateur Laplacien (voir Section 2.3). En utilisant ces notations, l'opérateur G est discrétisé comme :

$$G(\phi)_i = \begin{cases} \sqrt{\max(a_+^2, b_-^2) + \max(c_+^2, d_-^2)} - 1 & \text{si } \phi_i^0 > 0, \\ \sqrt{\max(a_-^2, b_+^2) + \max(c_-^2, d_+^2)} - 1 & \text{si } \phi_i^0 < 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

où, pour tout réel h , $h_+ = \max(h, 0)$ et $h_- = \min(h, 0)$. Via cette discrétisation décentrée de l'opérateur G , le schéma est stable sous la condition CFL : $\Delta\tau < h_{min}$ puisque la vitesse de propagation $\operatorname{sgn}(\phi^0)\mathbf{n}$ est de norme 1. L'algorithme est finalement arrêté lorsque la solution a convergé, à savoir, lorsque $\|\phi^{k+1} - \phi^k\|_{L^\infty} < 10^{-10}$.

Méthode Fast-Marching pour maillage cartésien hiérarchique

On propose une nouvelle version de la méthode Fast-Marching introduite par Sethian [99, 100]. La stratégie de la méthode repose sur une reconstruction d'ordre supérieur de l'interface, suivie de la propagation de l'information par fronts successifs dans tout le domaine. Par la suite, on suppose que le maillage est uniforme près de l'interface ; en d'autres termes, les stencils des cellules situées dans la première bande autour de l'interface $\Gamma_{h_{min}}$ sont toujours uniformes.

Dans un premier temps, la fonction distance est reconstruite avec une précision d'ordre 3 dans la première couche $\Gamma_{h_{min}}$. La Figure 2.7a illustre la technique employée pour reconstruire l'interface Γ . Par définition, la première bande $\Gamma_{h_{min}}$ est composée de toutes les cellules situées à une distance inférieure à h_{min} de l'interface, comme introduit dans le paragraphe précédent. Pour chaque cellule Ω_i concernée, la position du Γ est approximée. Avec l'ensemble de son stencil compact à 9 points \mathcal{S}_i , une reconstruction polynomiale est définie à partir d'une base bi-quadratique :

$$\widetilde{\phi}_i(\mathbf{x}) = c_0 + c_x x + c_y y + c_{xy} xy + \frac{c_{xx}}{2} x^2 + \frac{c_{yy}}{2} y^2 + \frac{c_{xxy}}{2} x^2 y + \frac{c_{xyy}}{2} x y^2 + \frac{c_{xyxy}}{4} x^2 y^2. \quad (3.4)$$

Via cette approximation, l'interface est représentée localement dans le stencil \mathcal{S}_i par

$$\Gamma_i := \{\mathbf{x} \in \Omega : \widetilde{\phi}_i(\mathbf{x}) = 0\}.$$

On peut ainsi définir le projeté orthogonal de \mathbf{x}_i , appelé \mathbf{x}_{opt} , sur l'interface reconstruite Γ_i en résolvant un problème de minimisation sous contrainte d'égalité :

$$\min_{\widetilde{\phi}_i(\mathbf{x})=0} \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2 \quad (3.5)$$

Ce problème est résolu par une méthode de Lagrangien augmenté. Pour ce faire, le problème (3.5) est réécrit de manière équivalente sous la forme d'un problème de minimisation sans contrainte pour lequel on cherche le minimum du Lagrangien augmenté :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2 + \lambda \widetilde{\phi}_i(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ fait référence à un multiplicateur de Lagrange, ce qui revient à trouver la solution couple $(\mathbf{x}_{opt}, \lambda_{opt})$ de :

$$\nabla_{\mathbf{x}, \lambda} \mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda) = 0. \quad (3.7)$$

La solution locale de cette équation est obtenue à l'aide d'un algorithme SQP de Newton. Etant donné que la reconstruction polynomiale $\widetilde{\phi}_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ est régulière, l'algorithme SQP converge quadratiquement vers la solution locale du problème (3.5), à condition que la donnée initiale \mathbf{x}_0 de l'algorithme soit suffisamment proche de \mathbf{x}_{opt} . En tant que condition initiale, on dispose de deux candidats évidents et simples à déterminer à savoir les intersections entre Γ_i et les axes vertical $x = x_i$ et horizontal $y = y_i$. Déterminer ces intersections revient à calculer les racines réelles d'un polynôme quadratique unidimensionnel. Il est toujours possible de trouver au moins une condition initiale puisqu'au moins un voisin de face est situé de l'autre côté de l'interface Γ . S'il existe plusieurs conditions initiales admissibles, on choisit celle qui est la plus proche de \mathbf{x}_i . En pratique, \mathbf{x}_0 est suffisamment proche de la position optimale \mathbf{x}_{opt} pour garantir que l'algorithme SQP converge en 3-4 itérations. Une fois que \mathbf{x}_{opt} est déterminée, les valeurs de la fonction distance et de son gradient sont définies par :

$$\begin{aligned} \phi_i &= \text{sgn}(\phi_i^0) \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{opt}\|, \\ \nabla \phi_i &= (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{opt}) / \phi_i. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Comme la reconstruction $\widetilde{\phi}_i$ est bi-quadratique, on obtient ainsi une approximation à l'ordre 3 de la fonction level set et à l'ordre 2 de son gradient au voisinage de l'interface.

Une fois la fonction distance ϕ et le vecteur normal $\mathbf{n} = \nabla \phi / \|\nabla \phi\|$ déterminés dans la première couche de cellules $\Gamma_{h_{min}}$, ils peuvent être utilisés comme données initiales pour la propagation de la fonction distance dans la direction normale. Dans la deuxième étape de l'algorithme, on sépare le domaine de calcul en 3 groupes de cellules. Le premier groupe est constitué de cellules dites **acceptées** (au départ $\Gamma_{h_{min}}$), pour lesquelles la paire $(\phi, \nabla \phi)$ a déjà été mise à jour et peut donc être choisie pour extrapoler les cellules voisines. Parmi les cellules non acceptées, on distingue les cellules **considérées** et les cellules **lointaines**. Les cellules **considérées**, qui représentent le front de propagation, peuvent être mises à jour puisqu'elles possèdent au moins 3 voisins **acceptés**. En revanche, une cellule **lointaine**

ne peut pas encore être mise à jour car moins de 3 de ses cellules voisines sont **acceptées**. À chaque étape de l'algorithme, certaines cellules **considérées** deviennent **acceptées** dès qu'elles sont mises à jour et certaines cellules **lointaines** deviennent **considérées** à leur tour, et par conséquent, le nombre de cellules **acceptées** augmente par couches successives.

Pour une cellule **considérée**, nous avons généralement 3 ou 4 cellules **acceptées** Ω_k , situées dans le sens opposé au sens de propagation, pour lesquelles le couple $(\phi_k, \nabla\phi_k)$ est connu. L'idée de la méthode est de définir de nouveaux marqueurs extrapolés à partir des cellules **acceptées**. En effet, des valeurs de la fonction level set peuvent être définies le long des droites caractéristiques de direction \mathbf{n}_k passant par \mathbf{x}_k . À partir de chaque cellule Ω_k , on identifie deux nouveaux marqueurs situés sur cette droite caractéristique à une distance d_k et $2d_k$ respectivement, où $d_k := \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|$. Ce choix est motivé par la nécessité d'assurer une bonne distribution des points d'interpolation. Les valeurs de la fonction distance évaluée en ces marqueurs sont donc respectivement $\phi_k + \text{sign}(\phi_i^0)d_k$ et $\phi_k + 2\text{sign}(\phi_i^0)d_k$. La Figure 2.7b illustre la construction de ce stencil d'interpolation. On peut alors effectuer une interpolation au sens des moindres carrés dans un stencil à 9 points (ou 12 points), pour lequel le polynôme reconstruit s'écrit :

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}) = \phi_i + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \nabla\phi_i + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T (H\phi)_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (3.9)$$

où $H\phi$ fait référence à la Hessienne de la fonction distance. En utilisant cette formulation, on obtient ainsi une approximation précise à l'ordre 3 de ϕ_i et à l'ordre 2 de $\nabla\phi_i$. Cette cellule **considérée** devient alors **acceptée** et pourra être utilisée par la suite pour mettre à jour les cellules voisines situées en aval du front de propagation.

Selon la configuration du maillage et la géométrie de l'interface, la propagation du front peut cependant être désorganisée. En effet, le front peut se déplacer à des vitesses différentes dans la direction normale. Dans le cas de géométries localement concaves (voir la Figure 2.8a), au moins une composante du vecteur normal est discontinue, ce qui donne lieu à l'apparition d'une ligne de singularité. Dans ce cas, il est essentiel que les deux fronts opposés se déplacent à la même vitesse de part et d'autre de la ligne de singularité. Par conséquent, on définit une condition de mise à jour afin de contrôler la vitesse de propagation du front. Cette condition est définie comme suit : si une cellule **considérée** Ω_i peut être mise à jour avec ϕ_i^{k+1} au cours de l'étape $(k+1)$, alors elle doit satisfaire la condition suivante :

$$|\phi_i^{k+1}| < |\phi_p^k| + \sqrt{2} h_p^k, \quad (3.10)$$

où, parmi toutes les cellules précédemment **acceptées** lors de l'itération k , Ω_p désigne la cellule la plus proche de l'interface. La taille caractéristique de la cellule Ω_p est désignée par h_p^k . Avec cette condition, le front avance couche après couche, ce qui garantit également que toutes les cellules **acceptées** demeurent situées en amont des cellules **considérées**.

Cependant, dans les cas où deux fronts se rencontrent dans des directions réellement opposées, effectuer de telles extrapolations n'a pas de sens (voir Figure 2.8b). La procédure

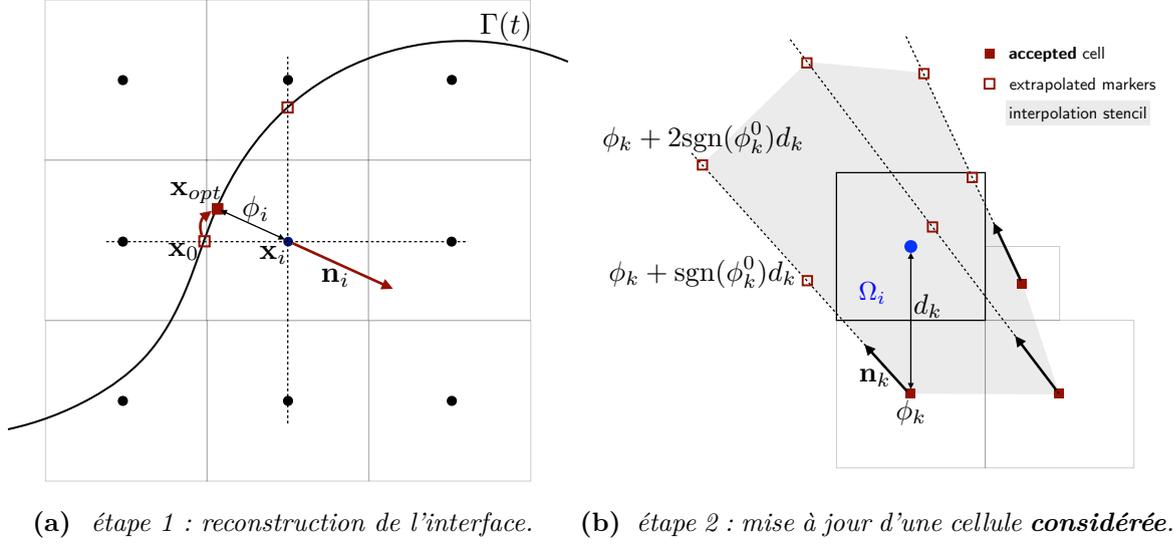


Figure 2.7 – Illustration de la méthode *Fast-Marching* utilisée pour ré-initialiser une fonction distance signée ϕ .

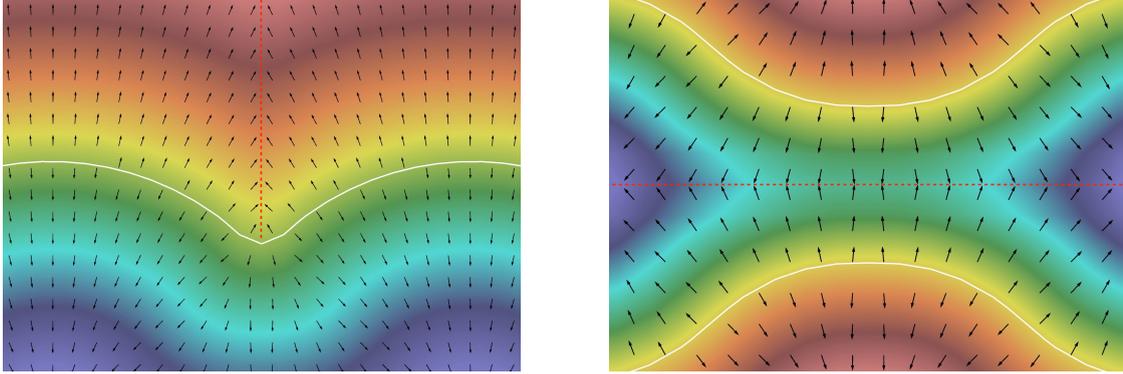
classique décrite précédemment n'est alors plus possible puisque les valeurs extrapolées sont fausses. Il n'est pas facile de trouver un critère approprié pour détecter ces lignes de singularité. On propose ici le critère suivant : s'il existe deux cellules **acceptées** Ω_k et $\Omega_{k'}$, voisines de Ω_i satisfaisant $\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{k'} < 0$, alors la procédure d'extrapolation ne peut pas être utilisée. Pour mettre à jour et régulariser ces cellules pathologiques, une interpolation moyenne est effectuée :

$$\phi_i \approx \frac{1}{N_k} \sum_{k=1}^{N_k} (\phi_k + (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)^T \nabla \phi_k) \quad (3.11)$$

où N_k est le nombre de cellules **acceptées** appartenant au stencil de la cellule **considérée** Ω_i . Certaines configurations ne sont pas identifiées par cette procédure, comme l'illustre par exemple la Figure 2.8a. En pratique, la procédure classique donne des résultats acceptables (précision d'ordre 1) malgré la ligne de singularité. Dans tous les cas, la précision au voisinage des lignes de singularité est au mieux d'ordre 1.

Distance maximale de re-distanciation

Si on remonte maintenant à l'origine de l'utilisation d'un tel algorithme, on peut se rendre compte qu'il n'est pas nécessaire de connaître précisément les valeurs de la fonction level set ϕ loin de l'interface. En effet, cette fonction est utilisée exclusivement pour estimer la fonction Heaviside régularisée $\tilde{\chi}_e$ nécessaire au calcul du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. Pour cette raison, on introduit un seuil d_{max} représentant la distance maximale jusqu'à laquelle il est important de garantir une bonne précision de la fonction distance. Plus précisément, l'algorithme de relaxation est considéré comme convergé lorsque, pour toutes les cellules



(a) Configuration dans laquelle $\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{k'} > 0$. (b) Configuration dans laquelle $\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{k'} < 0$.

Figure 2.8 – Méthode Fast-Marching : deux types de configurations pour lesquelles une composante de la normale est discontinue. L’interface Γ est représentée par la ligne blanche, la ligne pointillée rouge correspond à la ligne de singularité et les flèches noires aux vecteurs normaux. Les extrapolations classiques sont considérées acceptables dans la configuration de gauche mais pas dans la configuration de droite.

vérifiant $\phi_i^{n+1} < d_{max}$, on a également $|\phi_i^{n+1} - \phi_i^n| < 10^{-10}$. Concernant la méthode Fast-Marching, l’algorithme est stoppé lorsque le front de propagation dépasse cette distance d_{max} , i.e. $|\phi_p^k| > d_{max}$. Cette procédure de limitation est motivée par le coût exorbitant en temps de calcul d’un tel algorithme.

Pour éviter que la solution soit trop irrégulière dans l’autre partie du domaine $\phi > d_{max}$, la fonction level set est tronquée en imposant la valeur $\phi = d_{max}$. Par cette simplification, on introduit néanmoins une source potentielle d’instabilités puisque ϕ n’est plus différentiable près de cette interface. On note cependant que ce manque de régularité n’a pas de réelle influence sur les résultats tant que cette distance d_{max} reste suffisamment grande (en pratique, $d_{max} > 20h_{min}$ convient). Cette procédure permet une diminution considérable du temps de calcul nécessaire à la ré-initialisation de la fonction level set.

Pour une meilleure compréhension de la méthode Fast-Marching présentée ci-dessus, l’Algorithme 1 répertorie et ordonne les différentes étapes de la méthode.

Comparaison des deux méthodes de re-distanciation

Afin de tester la précision obtenue via ces deux algorithmes, on introduit un cas-test de validation. Dans un domaine $\Omega = [0, 5]^2$, on souhaite re-distancier une distance perturbée autour d’un cercle Γ de centre $(0, 0)$ et de rayon 2. La condition initiale perturbée est définie par :

$$\phi^0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)$$

Algorithme 1 : Méthode Fast-Marching d'ordre 3 pour la re-distanciation

Entrées : Fonction initiale à redistancier ϕ^0
 Toutes les cellules sont initialement **lointaines**;

Etape 1 : reconstruction de l'interface

→ identification des cellules situées dans la première couche $\Gamma_{h_{min}}$;
pour chaque cellule $\Omega_i \subset \Gamma_{h_{min}}$ **faire**
 | → reconstruction locale bi-quadratique de ϕ^0 (Eq. (3.4));
 | → Résolution du problème d'optimisation local sous contrainte (3.5) :
 | résolution de l'Eq. (3.7) par un algorithme SQP de Newton;
 | → mise à jour du couple $(\phi_i, \nabla\phi_i)$ (Eq. (3.8));
 | → la cellule Ω_i est désormais **acceptée**;

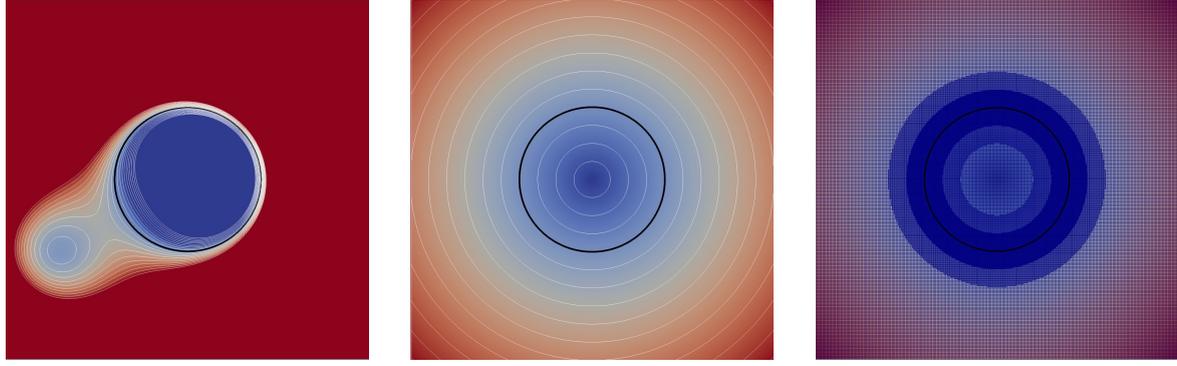
Etape 2 : Propagation du front couche par couche

tant que la solution itérée ϕ^k n'a pas convergé (voir paragraphe
 "**Distance maximale de redistanciation**") **faire**

| **pour** chaque cellule Ω_i **non acceptée** **faire**
 | | → identification des $N_{accepted}$ cellules **acceptées** Ω_k du stencil;
 | | **si** $N_{accepted} \geq 3$ **alors**
 | | | → la cellule Ω_i est désormais **considérée**;
 | | | **si** $\exists k, k' = 1, \dots, N_{accepted}$ t.q. $\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{k'} < 0$ **alors**
 | | | | Ω_i est une cellule pathologique \Rightarrow interpolation (3.11) ;
 | | | **sinon**
 | | | | → pour chaque cellule Ω_k , reconstruction des deux marqueurs dans
 | | | | la direction normale \mathbf{n}_k situés à une distance respective d_k et $2d_k$;
 | | | | → interpolation quadratique au sens des moindres carrés (3.9) \Rightarrow
 | | | | couple candidat $(\phi_i^{k+1}, (\nabla\phi)_i^{k+1})$;
 | | | | **si** la condition (3.10) est respectée **alors**
 | | | | | la cellule Ω_i est maintenant **acceptée**;
 | | | | **sinon**
 | | | | | la cellule Ω_i redevient **lointaine**;
 | | → mise à jour de la solution itérée ϕ^k ;

Sorties : Nouvelle fonction distance ϕ^{k+1} .

où $f(\mathbf{x}) = 0.1 + (x + 3.5)^2 + (y + 2)^2$ représente la perturbation. La fonction distance de référence ϕ^{ex} est ainsi analytique et sera utilisée pour le calcul de l'erreur. Les distances initiale perturbée et de référence sont représentées respectivement sur les Figures 2.9a et 2.9b.



(a) Distance initiale perturbée ϕ^0 . (b) Distance de référence ϕ^{ex} . (c) Maillage non uniforme considéré.

Figure 2.9 – Cas-test de validation : re-distanciation autour d'un cercle.

Les algorithmes sont validés à la fois sur maillages uniformes et non uniformes. En ce qui concerne la construction des maillages hiérarchiques, on définit un critère de raffinement de type level set, basé sur la distance elle-même ϕ^{ex} . On choisit ainsi d'imposer un raffinement maximal L_{max} autour du cercle et de déraffiner deux fois à partir d'une certaine distance. La Figure 2.9c décrit le type de maillage considéré ici. Pour évaluer la précision des algorithmes, les erreurs au sens $L_1 \|\phi^{num} - \phi^{ex}\|_1$ et au sens $L_\infty \|\phi^{num} - \phi^{ex}\|_\infty$ sont examinées. De plus, il est important d'évaluer dans quelle mesure la position de l'interface est conservée. Pour ce faire, il suffit d'estimer $\int_\Gamma |\phi(t, \mathbf{x})| ds$. Dans un cas idéal, cette quantité est égale à zéro puisque Γ représente la ligne zéro de la fonction distance. Cette intégrale est approximée en définissant $N_M = 10000$ marqueurs de coordonnées \mathbf{x}_M équidistants sur l'interface Γ . La valeur $\phi_M = \phi(\mathbf{x}_M)$ est interpolée de manière quadratique en utilisant le stencil de la cellule dans laquelle le marqueur est situé. Cette intégrale est ainsi estimée par :

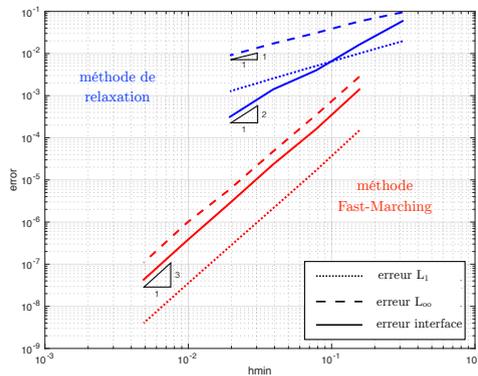
$$\int_\Gamma |\phi(t^n, \mathbf{x})| ds \approx \sum_{M=1}^{N_M} \frac{1}{2} \left(|\phi_M^n| + |\phi_{M+1}^n| \right) \|\mathbf{x}_{M+1} - \mathbf{x}_M\|.$$

Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 2.10. Tout d'abord, les études de convergence sur maillage uniforme (Figure 2.10a) et sur maillage non uniforme (Figure 2.10b) valident la précision des deux méthodes, pour les deux types de maillage. On observe d'un côté que la méthode de relaxation fournit une précision à l'ordre 1 concernant la fonction distance signée dans l'ensemble du domaine, et une précision d'ordre 2 pour la position de l'interface. De l'autre côté, la méthode Fast-Marching est bien plus précise

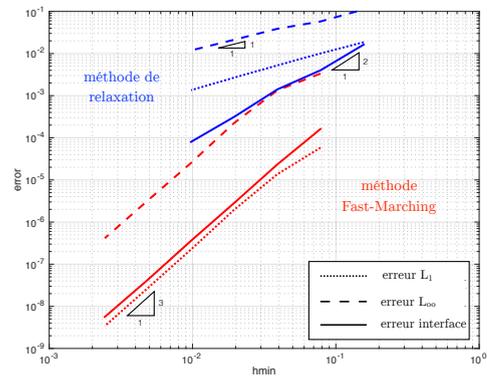
3. CONTRAINTES NUMÉRIQUES LIÉES AU MODÈLE

puisqu'elle garantit une précision à l'ordre 3 à la fois pour la fonction distance et pour la conservation de l'interface.

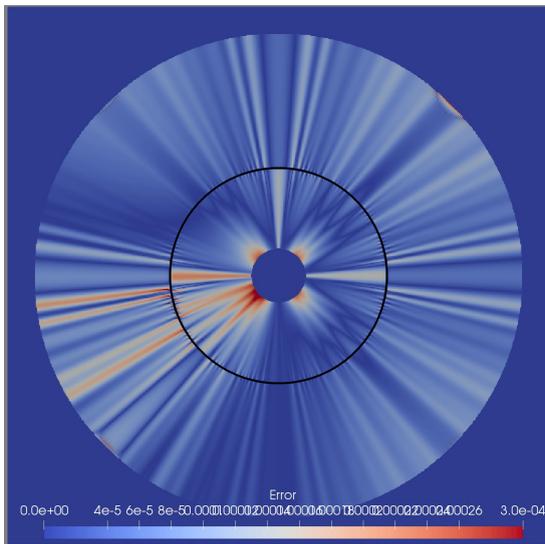
On pourra apprécier par la suite, dans la Section 4, l'utilité de l'algorithme de re-distanciation pour des problèmes de transport. L'influence de ces deux méthodes y sera également comparée.



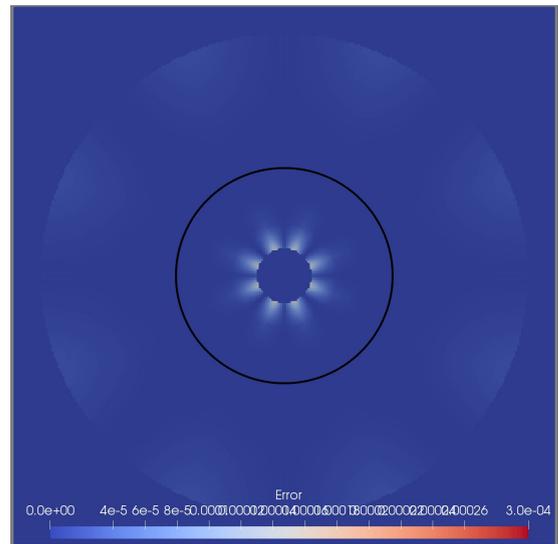
(a) étude de convergence sur maillage uniforme.



(b) étude de convergence sur maillage quadtree.



(c) Distribution de l'erreur pour la méthode de relaxation.



(d) Distribution de l'erreur pour la méthode Fast-Marching.

Figure 2.10 – Résultats obtenus pour les deux méthodes de re-distanciation. Etudes de convergence (en haut) et distributions de l'erreur sur le maillage quadtree $L_7 - L_9$ (cf Figure 2.9c).

3.2 Extrapolation des caractéristiques rétrogrades

Comme on a pu l'introduire au début de la section, des problèmes de stabilité peuvent être engendrés par des caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} devenues irrégulières au voisinage de l'interface. Dans le cas où le fluide exerce une importante force de cisaillement sur le solide, ces caractéristiques peuvent en effet devenir discontinues au cours de la simulation.

Pour garantir la régularité de \mathbf{Y} , [Dunne \[35\]](#) propose de modifier la vitesse d'advection utilisée pour transporter \mathbf{Y} à l'intérieur du fluide. Ceci se traduit par un prolongement continu du champ de vitesse à travers l'interface à chaque itération en temps, ce qui permet de régulariser \mathbf{Y} au voisinage de l'interface. Cependant, cette régularisation itérative reste coûteuse car nécessaire à chaque itération en temps. De plus, en prolongeant ou modifiant localement la vitesse normale U_{fc} dans le fluide, la conservation de masse discrète n'est plus garantie, il faudrait alors développer un schéma d'advection qui ne repose pas sur une formulation conservative. Une autre possibilité consisterait à calculer le tenseur des contraintes élastiques $\boldsymbol{\sigma}_e$ de manière décentrée, en utilisant uniquement l'information provenant de l'intérieur du solide. Cette idée est cependant insuffisante car les irrégularités naissant dans le fluide tendent (à long terme) à dégrader les caractéristiques à l'intérieur du solide par transports successifs.

Pour régulariser \mathbf{Y} , un algorithme d'extrapolation d'ordre élevé est adopté afin de mettre à jour l'information dans le fluide à partir de l'information solide. À cette fin, on utilise la technique d'extrapolation linéaire introduite par [Aslam \[4\]](#).

Pour détailler l'algorithme, on se place dans le cadre de l'extrapolation quadratique. Soit φ la fonction scalaire que l'on souhaite extrapoler dans le fluide, c'est-à-dire pour $\phi > 0$. Les dérivées normales du premier et second ordre sont définies respectivement par :

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}, \\ \varphi_{nn} &= \nabla\varphi_n \cdot \mathbf{n} = \nabla(\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

La méthode consiste en la résolution successive de trois équations de transport à vitesse $\mathbf{n} = \nabla\phi/||\nabla\phi||$ jusqu'à convergence :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_{nn}}{\partial\tau} + H(\phi)\nabla\varphi_{nn} \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial\tau} + H(\phi)(\nabla\varphi_n \cdot \mathbf{n} - \varphi_{nn}) &= 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + H(\phi)(\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} - \varphi_n) &= 0.\end{aligned}\tag{3.13}$$

L'opérateur Heaviside $H(\phi)$ garantit ici que la fonction scalaire φ demeure inchangée à l'intérieur du solide. En résolvant chaque équation de (3.13) jusqu'à l'état d'équilibre, on a alors reconstruit la solution pour laquelle la dérivée seconde directionnelle φ_{nn} est constante dans la direction normale. Ceci permet d'assurer la régularité \mathcal{C}^2 de l'extrapolation. L'extrapolation linéaire (resp. constante) associée peut être obtenue en imposant

$\varphi_{nn} = 0$ (resp. $\varphi_n = 0$), ce qui revient à résoudre les deux dernières équations (resp. la dernière équation). Pour ce modèle, on souhaite garantir au moins la continuité du tenseur $[\nabla \mathbf{Y}]$, ce qui correspond à une régularité \mathcal{C}^1 , par conséquent, l'extrapolation linéaire suffit. De plus, l'extrapolation quadratique est environ 50% plus coûteuse et n'est pas indispensable en pratique. Après extrapolation linéaire, le tenseur des contraintes élastiques est ainsi constant dans la direction normale.

Ces équations de transport sont résolues numériquement via un schéma semi-Lagrangien. Comme la vitesse de propagation $\mathbf{c} = H(\phi)\mathbf{n}$ est constante, identique pour chaque équation et indépendante de φ , le calcul des poids d'interpolation dans chaque cellule n'est effectué qu'une seule fois, ce qui limite considérablement le coût de calcul de l'algorithme. Dans chaque cellule Ω_i , la discrétisation de la dérivée particulaire (Lagrangienne) $\frac{D\varphi}{D\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + (\mathbf{c} \cdot \nabla)\varphi$ s'écrit :

$$\left(\frac{D\varphi}{D\tau}\right)_i = \frac{\varphi^{k+1}(\mathbf{x}_i) - \varphi^k(\mathbf{x}_d)}{\Delta\tau} \quad (3.14)$$

où $\Delta\tau$ est le pseudo pas de temps et $\mathbf{x}_d = \mathbf{x}_i - \Delta\tau\mathbf{c}_i$ correspond au pied de la caractéristique. Le schéma semi-Lagrangien est inconditionnellement stable, cependant, de par les contraintes de parallélisme auxquelles on est confronté, seul le stencil compact de la cellule peut être utilisé. Pour que l'interpolation reste réalisable, on doit s'assurer que le pied de la caractéristique demeure situé à l'intérieur de la cellule, autrement dit que la distance entre \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_d reste inférieure à $h_{min}/2$. Par conséquent, on impose $\Delta\tau = h_{min}/2$. Une interpolation linéaire à 3 (ou bilinéaire à 4) points est réalisée pour calculer $\varphi(\mathbf{x}_d)$. Comme l'illustre la Figure 2.11, cette interpolation est réalisée en utilisant le stencil du noeud le plus proche. À titre d'exemple, la Figure 2.12 montre le résultat des trois extrapolations (constante, linéaire et quadratique).

Distance maximale d'extrapolation

De manière analogue à l'algorithme de ré-initialisation de la fonction level set, il n'est pas nécessaire de suivre précisément le comportement des caractéristiques rétrogrades loin du matériau élastique. En effet, la contribution élastique $\widetilde{\chi}_e(\phi)\boldsymbol{\sigma}_e(\mathbf{Y})$ est nulle dans la partie fluide $\phi > +\delta$. De ce fait, les caractéristiques \mathbf{Y} sont extrapolées jusqu'à la distance seuil d_{max} . À partir de cette distance, les caractéristiques sont simplement ré-initialisées relativement à la configuration non-déformée, i.e. $\mathbf{Y}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{Y}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Les caractéristiques sont alors discontinues mais en pratique, cette discontinuité n'a aucune influence sur les résultats tant que cette distance d_{max} reste suffisamment grande ($d_{max} > 20h_{min}$). Le coût considérable que représente cet algorithme est ainsi drastiquement réduit.

Distance minimale d'extrapolation

Se pose également la question de la distance à partir de laquelle les caractéristiques doivent être mises à jour. En effet, s'il ne faut surtout pas modifier l'information à l'intérieur du matériau ($\phi < -\delta$) au risque de modifier son comportement, la question se pose

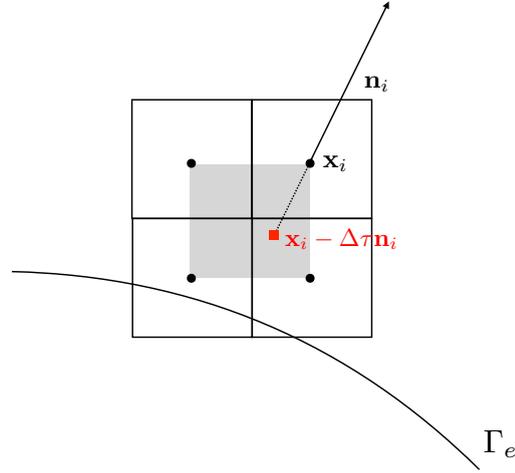


Figure 2.11 – *Illustration du schéma semi-lagrangien. La zone grise représente le stencil d’interpolation, correspondant au stencil du noeud le plus proche du pied de la caractéristique \mathbf{x}_d .*

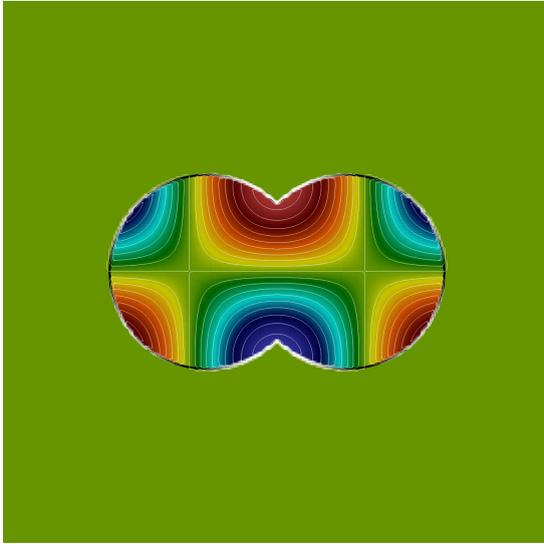
pour la zone intermédiaire multi-matériaux $-\delta < \phi < \delta$. Dans le cas où le matériau est mou ($c_{wave} \equiv \|\mathbf{u}\|$), les contraintes à l’interface sont assez limitées, les caractéristiques restent de ce fait assez régulières proche de l’interface. Cependant, dans le cas rigide ($c_{wave} \gg \|\mathbf{u}\|$), les contraintes sont beaucoup plus importantes et une discontinuité peut apparaître à la limite $\phi \rightarrow +\delta$ (ou encore $\tilde{\chi}_e \rightarrow 0$). En réalité, la zone intermédiaire peut être vue comme un matériau assez rigide, les caractéristiques restent ainsi très régulières. Pour limiter l’introduction d’instabilités numériques liées aux extrapolations (proportionnelles à la rigidité du matériau), seule la zone fluide est mise à jour. Par conséquent, les extrapolations des caractéristiques rétrogrades sont effectuées pour $\phi > +\delta$.

3.3 Stabilisation de la méthode numérique

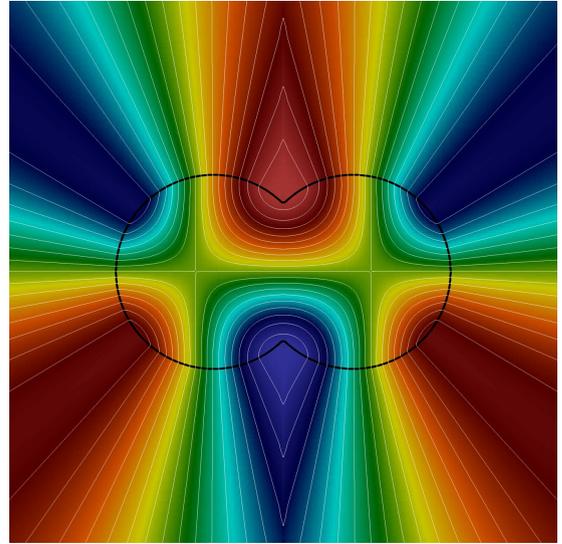
Ajout d’une viscosité artificielle pour la configuration $\Omega_s \subset \Omega_e$.

En pratique, lorsqu’on souhaite simuler l’interaction solide impliquant un corps rigide immergé dans une structure élastique, c’est-à-dire $\Omega_s \subset \Omega_e$, certaines instabilités peuvent apparaître au voisinage de l’interface Γ_s . Plus précisément, ce phénomène peut être observé en particulier pour des matériaux très rigides pour lesquels le ratio de vitesse $r_{vitesse} = c_{wave}/\|\mathbf{u}\|_{L^\infty}$ est significatif ($r_{vitesse} \gg 1$). Pour pallier ce problème, on introduit une viscosité artificielle régularisée par rapport à $\Omega_s(t)$. Comme la position et le mouvement de $\Omega_s(t)$ sont imposés durant la simulation, la fonction distance signée à $\Gamma_s(t)$ est connue au cours du temps. Ainsi, de manière analogue à la fonction de régularisation χ_e définie relativement à $\Omega_e(t)$ (Chapitre 1 - équation (3.4)), on peut définir simplement la fonction Heaviside régularisée χ_s relative à $\Omega_s(t)$. La viscosité mixte est alors définie par :

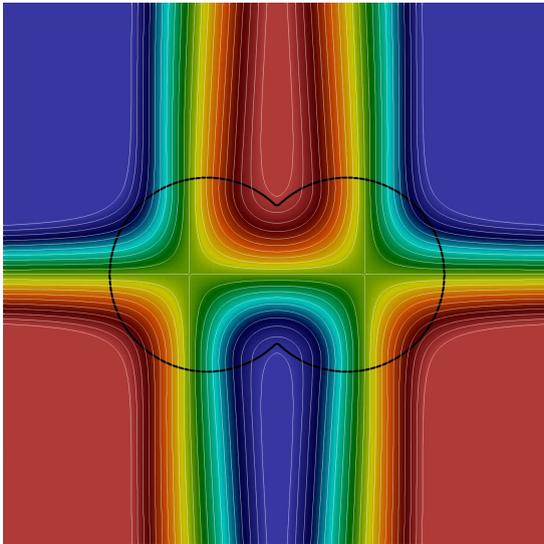
$$\mu = (1 - \tilde{\chi}_e)\mu_f + \chi_e\mu_e(1 + 10^6\chi_s) \quad (3.15)$$



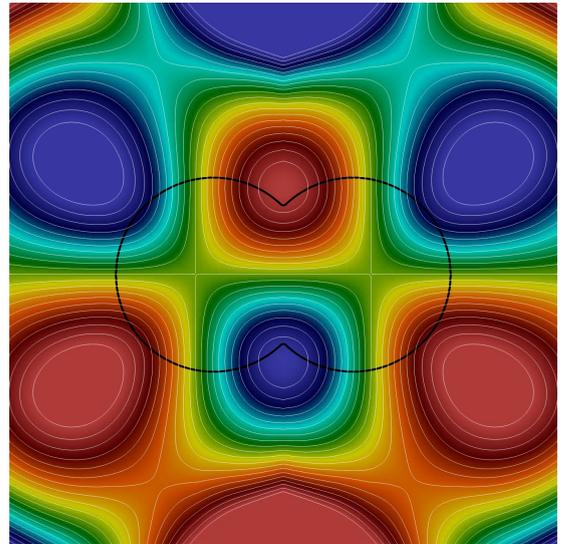
(a) solution avant extrapolation.



(b) solution après extrapolation constante.



(c) solution après extrapolation linéaire.



(d) solution après extrapolation quadratique.

Figure 2.12 – Exemple illustratif de l’algorithme d’extrapolation. La solution initiale $\phi^0(\mathbf{x}) = \cos(x) \sin(y)$ est imposée à l’intérieur d’une structure non-convexe (a) puis extrapolée de manière constante (b), linéaire (c) ou quadratique (d).

Ajout d’une tension de surface.

En présence de structures rigides, on a pu observer une perte de régularité de la solution au voisinage de l’interface fluide-structure Γ_e . Ce phénomène s’explique tout d’abord par l’existence d’un saut significatif dans le tenseur de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \mathbf{Y}, \phi)$ malgré la fonction de régularisation $\tilde{\chi}_e$. En effet, ce saut peut être très important puisqu’il dépend

linéairement du module de cisaillement G . De plus, nous avons observé que l'extrapolation des caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} est également une source d'instabilités numériques. Afin de maintenir la régularité de cette interface Γ_e et de limiter l'impact de ces instabilités sur la fonction level set, une tension de surface \mathbf{S} est artificiellement ajoutée dans l'étape de prédiction. Cette technique s'inspire des méthodes *Continuum Surface Force* (CSF) employées dans le cadre de la résolution de problèmes bi-fluidiques [13, 40]. Ce terme source peut s'écrire comme :

$$\mathbf{S} = -\sigma\kappa\nabla\widetilde{\chi}_e, \quad (3.16)$$

où $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$ désigne la courbure de l'interface et σ est un paramètre faisant référence, pour des problèmes bi-fluidiques, au coefficient de tension de surface entre les deux fluides. Dans le cadre d'une interaction fluide-solide, ce paramètre n'a pas de réelle signification physique, il est empiriquement défini par $\sigma = 10^{-6}Gh_{min}$. Avec un tel choix de paramètre, le terme de tension de surface \mathbf{S} devient négligeable pour des matériaux mous, pour lesquels ce terme de stabilisation n'est pas nécessaire pour garantir la stabilité de la méthode. De plus, le schéma numérique reste consistant.

Limitation des perturbations aux sauts de niveaux pour Δt petit.

Dans le contexte FSI mettant en jeu des structures rigides, il convient de s'intéresser à l'influence de petits pas de temps $\Delta t \ll h_{min}$ sur la stabilité du schéma numérique. Dans la limite où $\Delta t \rightarrow 0$, la solution numérique ne doit pas varier (ou presque) d'une itération à l'autre, autrement dit : $\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\| \rightarrow 0$. En l'état, la méthode décrite jusqu'ici ne permet pas de respecter cette condition sur maillage cartésien hiérarchique.

En effet, lors de l'étape de projection (2.10), et plus particulièrement lors de l'interpolation de la vitesse normale U_{fc} , des perturbations non-négligeables sont introduites aux sauts de niveaux. Suite à l'étape de prédiction, il est facile de remarquer que $\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n\| \rightarrow 0$ quand $\Delta t \rightarrow 0$. Pendant l'étape de projection, il est cependant impossible de garantir que $\|U_{fc}^* - U_{fc}^n\| \rightarrow 0$ puisque la vitesse normale $U_{fc}^* = \mathcal{I}(\mathbf{u}^*)$ est obtenue par l'interpolation "centre-cellule à centre-face" introduite dans la Section 2.2. Si la perturbation introduite est très limitée pour une configuration de stencil uniforme, ce n'est pas le cas pour un saut de niveaux. En d'autres termes, si une cellule Ω_i possède un stencil uniforme, alors on peut vérifier que $\nabla \cdot U_{fc}^* \rightarrow 0$, mais pas dans le cas contraire. Par conséquent, après projection, un gradient de pression apparaît naturellement dans chaque cellule adjacente à un saut de niveaux, ce qui traduit logiquement une évolution non-physique de la solution.

Pour pallier ce problème, on propose donc de redéfinir l'opérateur \mathcal{F} qui permet de calculer la vitesse normale \widetilde{U}_{fc} :

$$\widetilde{U}_{fc} = \mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}) := \begin{cases} \mathcal{I}(\widetilde{\mathbf{u}}) & \text{si le stencil } \mathcal{S}_f \text{ est uniforme,} \\ U_{fc}^n + \mathcal{I}(\widetilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Ce choix possède un autre avantage indéniable. L'interpolation est effectuée sur une petite quantité $(\widetilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n)$ correspondant à la variation induite par l'étape de prédiction. La perturbation introduite lors de cette interpolation est donc très faible.

4 Quelques exemples de problèmes de transport

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution de problèmes de transport 2D. La vitesse de transport est choisie au préalable à divergence nulle, de sorte à conserver la masse du système. On pourra alors comparer les schémas d'advection initialement présentés en Section 2.3, à savoir l'extension à l'ordre 2 et 3 du schéma de Godunov (FV2 et FV3), le schéma MOOD d'ordre 2 (MOOD) et le schéma compact Weno d'ordre 3 (CWeno3). On vérifiera notamment les propriétés des schémas pour le transport de fonctions discontinues. On pourra également comparer les différents schémas de discrétisations, d'un point de vue précision numérique et temps de calcul, sur maillages uniforme et non uniforme. On mesurera enfin le gain d'une simulation numérique réalisée sur maillage AMR dynamique vis-a-vis d'une simulation sur maillage purement uniforme, pour des problèmes faisant intervenir des fonctions level set.

4.1 Advection d'une fonction indicatrice

On considère une fonction discontinue de type fonction indicatrice sur un sous-ensemble $A(t)$ de $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1] : \varphi^0 = \chi_{A(t=0) \subset \Omega}$. Comme illustré sur la Figure 2.13a, ce sous-ensemble $A(t=0)$ est arbitrairement défini comme l'union de disques et d'un rectangle, afin de considérer différentes configurations géométriques, régulières ou non. En choisissant une vitesse d'advection $\mathbf{u} = 2\pi(y, -x)$, le sous-ensemble revient à sa position initiale au temps $T_{max} = 1$, i.e. $A(t = T_{max}) = A(t = 0)$, ce qui implique que $\varphi(T_{max}, \cdot) = \varphi^0$.

Trois simulations sur maillage uniforme L_7 sont effectuées, en ayant recours aux trois schémas d'advection FV2, MOOD et CWeno3. Sur ce type de cas-test, la précision obtenue est d'ordre 1, une étude de convergence est de ce fait superflue. Néanmoins, on peut vérifier les propriétés de ces schémas. On utilise pour cela le schéma RK2-TVD pour la discrétisation en temps. On peut constater en effet que le schéma FV2 (Figure 2.13b) est non-monotone et conserve très mal la discontinuité. De même, le schéma CWeno3 (Figure 2.13c) n'est pas TVD mais il permet de limiter la dégradation au voisinage de la discontinuité de par son caractère non-oscillatoire. A l'inverse, le schéma monotone MOOD (Figure 2.13d) garantit une bonne préservation de la discontinuité ainsi que la solution constante à l'intérieur du sous-ensemble $A(t)$. Ces observations concordent donc bien avec les propriétés connues de ces schémas numériques.

4.2 Problème d'instabilité atmosphérique

On considère désormais un problème possédant une solution régulière analytique afin de réaliser une étude de convergence. Ce problème est parfois appelé "problème d'instabilité atmosphérique" car il imite le mélange de fronts froid et chaud. On définit un champ de

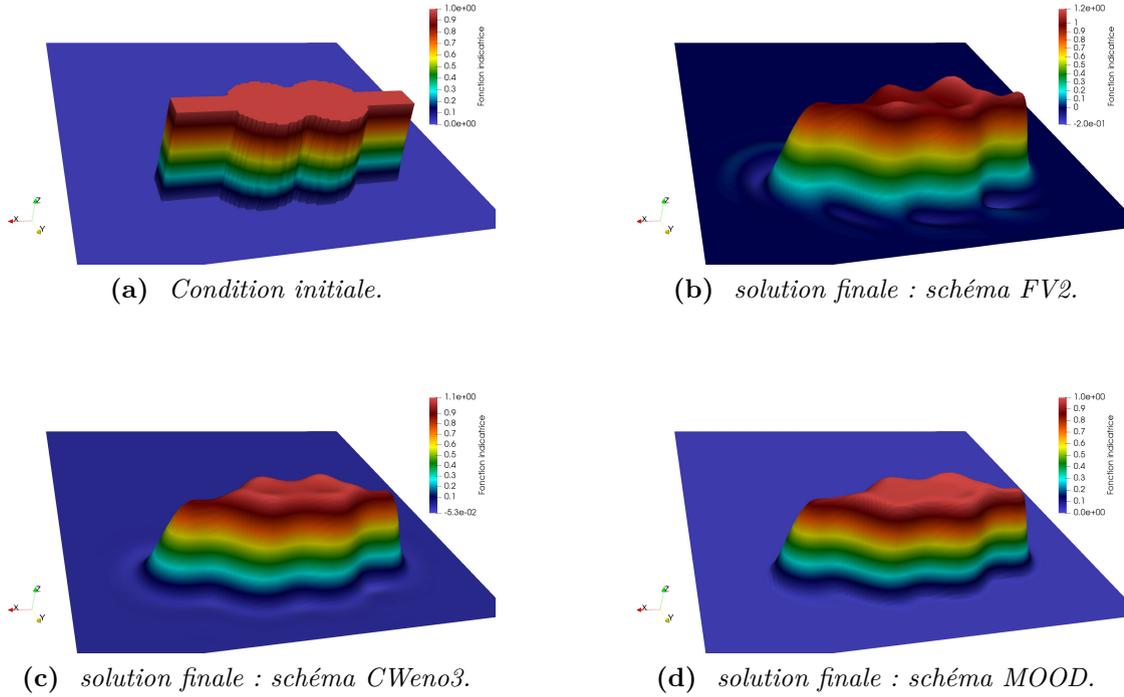


Figure 2.13 – Advection d’une fonction indicatrice : condition initiale et solution numérique obtenue pour les trois schémas de discrétisation.

vitesse de rotation :

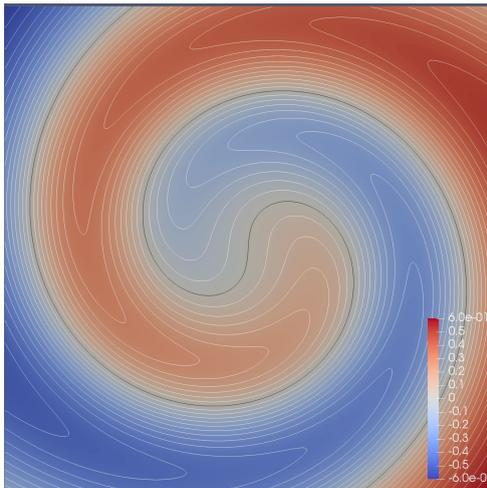
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{f}{0.385R}(-y, x)^T,$$

où $f = \tanh(R)/(\cosh(R))$ avec $R = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. La solution associée à ce problème s’écrit alors :

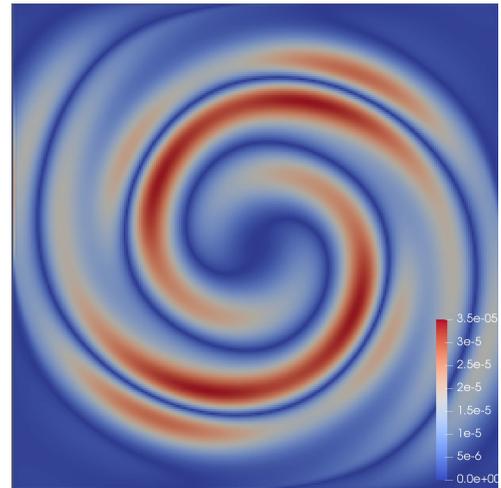
$$\varphi(t, \mathbf{x}) = -\tanh\left(\frac{y}{2} \cos\left(\frac{ft}{0.385R}\right) - \frac{x}{2} \sin\left(\frac{ft}{0.385R}\right)\right).$$

Afin de tester différentes configurations de maillage hiérarchique, on utilise deux types de raffinement, à savoir les raffinements par boîtes imbriquées et pseudo-aléatoire, présentés en Annexe B. Les simulations sont effectuées sur le domaine $\Omega = [-4, 4]^2$ jusqu’au temps final $T_{max} = 3$. La solution finale de ce problème $\varphi(T_{max}, \cdot)$ est présentée sur la Figure 2.14a. Sur la Figure 2.14, on peut également voir la répartition de l’erreur obtenue via le schéma RK3-FV3 sur tout le domaine pour les maillages uniforme et non uniformes, pour les deux types de raffinement. Ici, les maillages sont choisis à parité de niveau L_{min} ; en d’autres termes, la taille caractéristique de la plus grosse maille h_{max} est la même. On peut constater sur la Figure 2.14c que l’erreur est drastiquement diminuée dans la zone la plus raffinée au centre et que la présence de sauts de niveaux n’a pas d’effet indésirable sur la précision globale du schéma numérique. De même pour la Figure 2.14d, malgré le

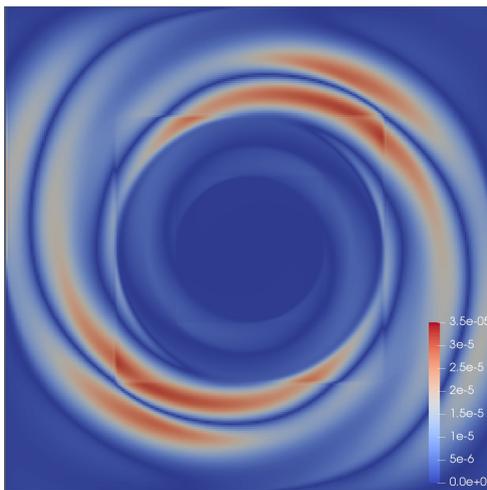
nombre considérable de sauts de niveaux, l'erreur reste toujours inférieure à celle obtenue sur maillage uniforme.



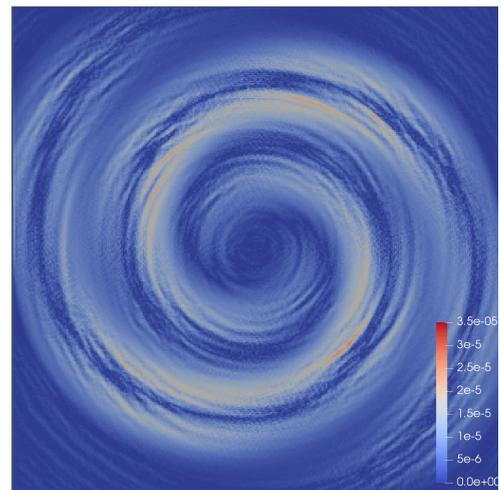
(a) Solution à $t = 3s$.



(b) Distribution de l'erreur sur le maillage uniforme L_8 .



(c) Distribution de l'erreur sur le maillage quadtree $L_8 - L_{10}$ avec raffinement par boites.

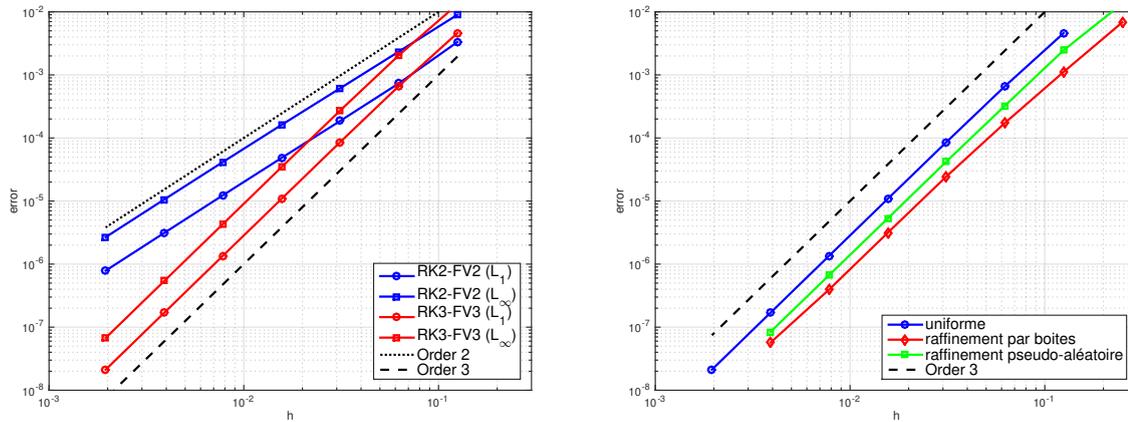


(d) Distribution de l'erreur sur le maillage quadtree $L_8 - L_{10}$ avec raffinement pseudo-aléatoire.

Figure 2.14 – Problème d'instabilité atmosphérique : solution à $t = 3$ et répartition de l'erreur obtenue via le schéma $RK3-FV3$ pour chaque type de maillage.

Sur un plan quantitatif, la Figure 2.15 présente les études de convergence pour la validation des schémas numériques. En adoptant les schémas du même ordre pour l'intégration en temps, à savoir $RK2$ et $RK3$ (TVD), on compare tout d'abord les résultats obtenus sur maillage uniforme avec les schémas $RK2-FV2$ et $RK3-FV3$. Comme le montre la Figure 2.15a, les ordres de précisions respectivement 2 et 3 sont obtenus de manière

cohérente. Ici, les schémas FV3 et CWeno3 ainsi que FV2 et MOOD donnent des résultats très similaires car les solutions sont suffisamment régulières. De même, la Figure 2.15b met également en évidence la précision d'ordre 3 obtenue sur maillages non uniformes.



(a) Erreur L_1 et L_∞ pour les schémas RK2-FV2 et RK3-FV3 sur maillage uniforme.

(b) Erreur L_1 pour le schémas RK3-FV3 sur différents types de maillage.

Figure 2.15 – Problème d’instabilité atmosphérique : études de convergence. A droite, la comparaison est effectuée à parité de niveau L_{min} .

Enfin, une estimation du ratio précision / temps de calcul est proposée dans le tableau 2.2. Il est évident que, pour une simulation donnée (même maillage), le schéma RK3-FV3 demeure toujours plus coûteux que le schéma RK2-FV2. Cependant, ce n’est pas le cas à parité d’erreur. En effet, il faut constater que pour atteindre une certaine précision, le maillage doit être beaucoup plus fin pour le schéma RK2-FV2. Ainsi, la généralisation à l’ordre 3 prend tout son sens.

seuil d’erreur L_∞	RK3-FV3	RK2-FV2	ratio
10^{-3}	1.86	1.23	0.66
10^{-4}	12.35	30.53	2.47
10^{-5}	86.11	619.17	7.19
10^{-6}	674.84	21376.25	31.68
10^{-7}	5555.41	909558.9	163.72
10^{-8}	45236.76	11954944.46	264.27

Table 2.2 – Problème d’instabilité atmosphérique : comparaison des temps de calculs (en s) pour les schémas RK2-FV2 et RK3-FV3 à parité d’erreur L_∞ . Les calculs sont réalisés sur des maillages uniformes pour $N_p = 192$ processeurs.

4.3 Advection d'un cercle

On s'intéresse désormais au transport de fonctions level set. Un cercle de centre $(0, 1/2)$ et de rayon 0.15 est transporté dans un domaine $[-1, 1]^2$ via le champ de vitesse de rotation $\mathbf{u} = 2\pi(y, -x)^T$. La position de ce cercle est connue au cours du temps, on pourra par conséquent déterminer de manière précise l'erreur du schéma numérique. Durant la simulation, le cercle fait 3 rotations complètes, i.e. $T_{max} = 3$. Comme l'illustre la Figure 2.16, les simulations sont effectuées sur maillages AMR, avec adaptation dynamique de maillage basée sur le critère distance toutes les $0.01s$. Cette fréquence d'adaptation de maillage est motivée par la nécessité d'assurer la meilleure précision possible proche de l'interface.

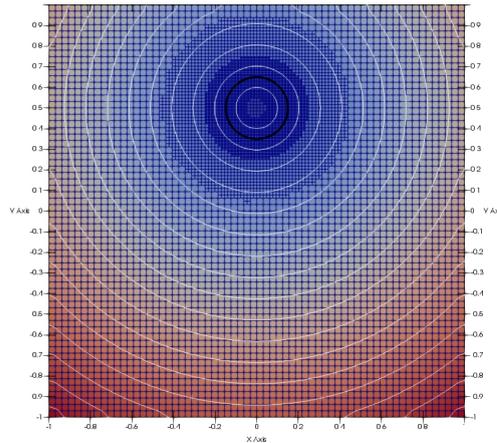


Figure 2.16 – *Advection d'un cercle : lignes de niveaux de la fonction level set (l'interface est représentée en noir) et le maillage AMR $L_6 - L_8$ induit au temps $t = T_{max}$.*

Dans ce cas-test, le cercle ne subit aucune déformation, il n'est donc pas nécessaire d'avoir recours à un algorithme de ré-initialisation de la fonction level set. Cependant, afin de minimiser l'erreur mesurée, la fonction level set est re-distanciée une fois à la fin de la simulation via la méthode Fast-Marching. Cette ré-initialisation est également importante afin d'évaluer la conservation du volume du disque Ω_D . En effet, le volume du disque est calculé via la fonction Heaviside régularisée $\widetilde{\chi}_D$ (pour $\delta = h_{min}$) :

$$V_{\Omega_D}(t) = \int_{\Omega_D(t)} \widetilde{\chi}_D(\phi(t, \mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \approx \sum_i^{N_{cells}} \widetilde{\chi}_D(\phi(t, \mathbf{x}_i)) |\Omega_i|.$$

Les simulations sont réalisées à la fois sur maillages uniforme et AMR. Le Tableau 2.3 présente les résultats obtenus en utilisant le schéma RK3-FV3, à savoir l'erreur au sens de la norme L_∞ , la perte relative de volume $|V_{\Omega_D}(t) - V_{\Omega_D}(0)|/V_{\Omega_D}(0)$ et le temps de calcul. Pour chacune des quantités reportées dans le tableau, le ratio correspond au ratio entre la quantité obtenue sur maillage uniforme et celle obtenue sur maillage AMR. On peut ainsi constater que, pour un calcul environ 7 fois plus rapide, la simulation réalisée sur maillage AMR fournit des résultats comparables à ceux obtenus sur maillage uniforme. En effet,

l'erreur L_∞ et la perte de volume sont respectivement 6% et 3% plus importantes, ce qui reste relativement faible si on prend en compte le gain de calcul.

	L_{max} h_{min}	8	9	10	11
Uniforme	Erreur L_∞	1.592E-04	1.959E-05	2.452E-06	3.072E-07
	PRV	1.195E-03	1.458E-04	1.835E-05	2.299E-06
	Temps de calcul	631.32	4936.48	41499.43	370285.71
AMR	Erreur L_∞	1.799E-04	2.167E-05	2.585E-06	3.280E-07
	PRV	1.302E-03	1.517E-04	1.879E-05	2.354E-06
	Temps de calcul	126.39	814.88	6142.61	51245.60
Comparaison AMR VS Uniforme	Erreur L_∞ PRV Temps de calcul	+ 12.51% + 8.20% ÷ 4.99	+ 9.61% + 3.87% ÷ 5.06	+ 5.15% + 2.36% ÷ 6.76	+ 6.34% + 2.30% ÷ 7.23

Table 2.3 – *Advection d'un cercle : comparaison en termes de précision, perte relative de volume (PRV) et temps de calcul (en s) obtenus sur maillages uniforme et AMR à parité de niveau L_{max} . Les simulations ont été réalisées avec $N_p = 24$ processeurs.*

4.4 Le serpent

Ce cas test level set est un moyen efficace permettant de quantifier les performances d'une méthode de suivi d'interface. Au cours de la simulation, l'interface s'étire jusqu'à devenir un long filament, soumis à un important flux de cisaillement.

Dans le domaine $[0, 1]^2$, l'interface est d'abord définie comme un cercle centré en $\mathbf{x}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ et de rayon $R = 0,15$, comme l'isoline 0 de la fonction distance :

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - R.$$

Cette fonction level set est déformée par le champ de vitesse à divergence nulle :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T_{max}}\right) \left(-\sin^2(\pi x) \sin(2\pi y), \sin^2(\pi y) \sin(2\pi x) \right)^T.$$

La simulation est composée de deux phases : le serpent s'étire dans la première phase $0 < t < T_{max}/2$, puis se rétracte dans la seconde phase $T_{max}/2 < t < T_{max}$ pour finalement revenir à sa position initiale. On effectue ici deux simulations en choisissant respectivement $T_{max} = 3$ et $T_{max} = 10$. Pour ces deux simulations, la Figure 2.17 montre la position de l'interface, d'une part à mi-parcours (lorsque le serpent est complètement déplié) et d'autre part à la fin de la simulation (lorsque le serpent retrouve sa forme initiale). Ce test est très critique car la résolution du maillage dans la queue du serpent peut devenir insuffisante, ce qui entraîne des problèmes de conservation du volume ou de la courbure, comme le montre la Figure 2.17d. Pour ce cas applicatif, des méthodes telles

que *Moment Of Fluid* (MOF) ou *Coupled Level Set MOF* (CLSMOF) sont beaucoup plus appropriées, comme l'illustrent les études de [Jemison et al.](#) [52, 53]. Les méthodes level set sont beaucoup moins coûteuses et plus faciles à mettre en oeuvre, mais le prix à payer reste son incapacité à préserver les géométries irrégulières (dites *sharp*). Il est alors nécessaire d'imposer une résolution de maillage très fine pour limiter le lissage de l'interface dans les zones irrégulières.

Les simulations sont réalisées sur maillages AMR en utilisant le schéma RK3-FV3, en fixant les paramètres d'adaptation de maillage à $\eta_{min} = 0,05$ et $\eta_{max} = 0,1$ avec $L_{min} = 2$ pour limiter le calcul du temps total. Dans cet exemple, on teste également l'influence de l'algorithme de ré-initialisation de la fonction level set, à savoir les méthodes de relaxation et Fast-Marching. La procédure de re-distanciation est activée avec une fréquence de 0,05s.

Le Tableau 2.4 montre les résultats, c'est-à-dire les erreurs L_1 et L_∞ ainsi que la perte relative de volume, obtenus pour $T_{max} = 3$. On peut constater que l'utilisation de la méthode Fast-Marching conduit à de meilleurs résultats (ordre > 2 contre 1.4 pour la méthode de relaxation). Cependant, l'ordre 3 vérifié dans les cas-tests précédents n'est pas obtenu ici. Cette perte de précision est principalement due à l'existence d'une ligne de singularité (colonne vertébrale du serpent). Au voisinage de cette singularité, la solution est au mieux d'ordre 1. Si les précisions restent proches en termes d'erreur, ce n'est cependant pas le cas en ce qui concerne la conservation de volume. L'algorithme de re-distanciation employé a donc un réel impact d'un point de vue quantitatif.

Algorithme de re-distanciation	L_{max} h_{min}	8	9	10	11
		7.813E-03	3.906E-03	1.953E-03	9.766E-04
méthode de relaxation	erreur L_1	4.434E-04	1.215E-04	4.236E-05	1.464E-05
	q_1	/	1.868	1.520	1.532
	erreur L_∞	4.573E-03	4.804E-04	1.466E-04	5.706E-05
	q_∞	/	3.251	1.712	1.362
	PRV	0.277%	0.094%	0.033%	0.013%
	q_{PRV}	/	1.555	1.529	1.363
méthode Fast-Marching	erreur L_1	3.434E-04	4.916E-05	1.123E-05	2.094E-06
	q_1	/	2.804	2.130	2.423
	erreur L_∞	5.731E-03	7.905E-04	2.310E-04	5.658E-05
	q_∞	/	2.858	1.775	2.029
	PRV	0.0365%	0.0242%	0.0098%	0.0021%
	q_{PRV}	/	0.591	1.309	2.253

Table 2.4 – *Le serpent* : erreurs L_1 et L_∞ et perte relative de volume (PRV) à $T_{max} = 3$.

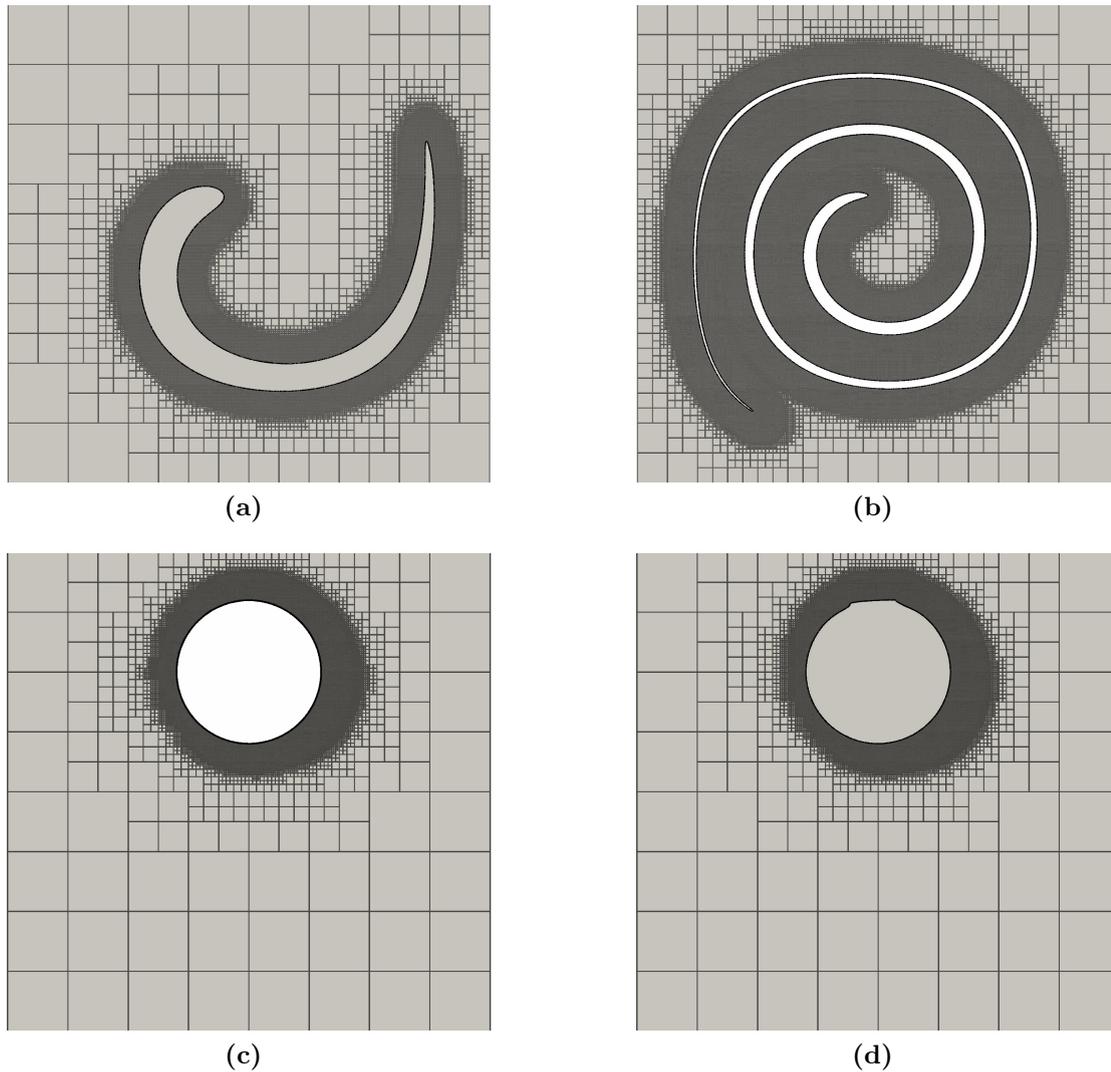


Figure 2.17 – *Le serpent* : simulations avec le schéma $RK3-FV3$ sur maillage AMR ($L_{max} = 10$). Simulations pour $T_{max} = 3$ (à gauche) et $T_{max} = 10$ (à droite). En haut : position de l'interface à mi-parcours $t = T_{max}/2$; en bas : position de l'interface finale à $t = T_{max}$.

5 Implémentation du code de calcul

Pour compléter la présentation de cette méthode, l'implémentation est détaillée dans cette section. Tout d'abord, l'Algorithme 2 situé en fin de chapitre présente brièvement l'organisation du code de calcul développé pour résoudre un problème d'interaction fluide-structure. Il permet de répertorier et résumer les différentes étapes évoquées au cours de ce chapitre, afin d'apporter une meilleure lisibilité au lecteur.

Le code de calcul C++ / MPI est construit autour de la librairie Bitpit/PABLO pour la génération et la gestion de maillages AMR. L'ensemble des fonctions et routines ont été implémentées en utilisant l'essentiel des fonctions intrinsèques de cette librairie afin de profiter de la structure vectorielle de données quadtree.

Comme expliqué précédemment, chaque itération en temps fait intervenir deux résolutions de systèmes linéaires. D'une part, l'étape de prédiction est résolue par un schéma de Gear (voir Equation (1.2)), ce qui se traduit par une prise en compte implicite du terme diffusif. Ce choix nous permet entre autres de nous affranchir de la contrainte CFL très restrictive $\Delta t \approx \mathcal{O}(h^2)$. D'autre part, l'étape de projection (Equation (1.4) puis (2.10)) consiste en la résolution d'un problème de Poisson. La résolution de ces systèmes linéaires est effectuée en utilisant la librairie PETSc⁵. Parmi l'ensemble des méthodes itératives existantes, deux méthodes de Krylov ont été testées, à savoir les méthodes du gradient bi-conjugué stabilisé (BiCGStab) et du résidu minimal généralisé (GMRes). Si les deux méthodes convergent convenablement, la méthode BiCGStab se révèle néanmoins plus rapide en ce qui concerne le coût global d'une résolution du système de Poisson. Pour accélérer la convergence de la méthode itérative BiCGStab, une méthode de Schwarz additif restreint (PCASM) est employée en tant que préconditionneur.

Une simulation FSI s'avère extrêmement chronophage, les calculs parallèles sont par conséquent réalisés sur des clusters HPC locaux et régionaux, donnant accès à un très grand nombre de ressources et noeuds inter-connectés. Les simulations présentées dans le Chapitre 4 ont été réalisées en ayant recours à la plateforme expérimentale **PlaFRIM**⁶, soutenue par l'Inria, le CNRS (LABRI et IMB), l'Université de Bordeaux, Bordeaux INP et le Conseil Régional Aquitaine, ainsi que la machine **Curta**⁷, fournie par le Mésocentre de Calcul Intensif Aquain (MCIA). Je remercie par conséquent l'ensemble des acteurs intervenant dans le développement et la maintenance de ces clusters.

5. <https://www.mcs.anl.gov/petsc/>

6. <https://www.plafrim.fr/>

7. <https://redmine.mcia.fr/>

Algorithme 2 : Code de Calcul FSI

Entrées : Mise en place du cas-test de simulation
définition des différentes géométries;
définition du maillage adapté;
initialisation des variables, $t \leftarrow 0$;

tant que $t < T_{max}$, **faire**

- définition du pas de temps Δt (Chap. 3, Section 3.2);
- transport des caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} et de la fonction level-set ϕ (Eq. (1.1)) : schéma RK2-TVD en temps, schéma FV2 en espace (avec terme de stabilisation pour \mathbf{Y} , cf Chap. 3 Section 3.1);
- mise à jour éventuelle de \mathbf{Y} et ϕ , selon une fréquence donnée :
 - re-distanciation de ϕ (Section 3.1);
 - extrapolation linéaire de \mathbf{Y} dans le fluide (Section 3.2);
- étape de prédiction (Eq. (1.2)) : schéma de Gear en temps, schémas VF en espace (Section 2.3), calcul du terme de pénalisation (Chap. 1, Section 3.3);
- adaptation éventuelle du maillage, selon une fréquence donnée (Section 2.4);
- interpolation de la vitesse normale aux faces U_{fc} (Eqs. (2.9) et (3.17));
- étape de projection : résolution d'une équation de Poisson (Eq. (2.10));
- étape de correction (Eq. (2.11));
- mise à jour des variables, $t \leftarrow t + \Delta t$;

Sorties : Série de fichiers + données.

Chapitre 3

Stabilité de la méthode numérique

Sommaire

1	Analyse de stabilité du modèle simplifié 1D	97
1.1	Linéarisation	98
1.2	Comportement asymptotique des schémas numériques	99
2	Analyse de stabilité pour l'intégration en temps du modèle .	102
2.1	Schémas préservant la linéarité de manière exacte (ELP)	103
2.2	Schémas ne préservant pas exactement la linéarité (non ELP)	107
2.3	Test numérique 1D	109
2.4	Stabilisation en une dimension d'espace	109
3	Généralisation en deux dimensions	111
3.1	Schéma FV2 stabilisé pour le transport des caractéristiques rétrogrades	111
3.2	Condition de stabilité	113

La méthode numérique présentée précédemment fait intervenir des schémas de discrétisations Volumes Finis (VF) sur maillages cartésiens hiérarchiques. En particulier, les équations de transport sont résolues de manière conservative, ce qui est intéressant notamment pour garantir précisément la propriété de conservation de masse. Pour un problème d'interaction fluide-structure, cette propriété est indispensable, surtout lorsqu'il met en jeu des matériaux très rigides et/ou hautement déformables. De plus, la construction de schémas Volumes-Finis sur maillage de type quadtree est relativement aisée et peu coûteuse, si on se réfère à la contrainte de parallélisme (chaque cellule n'a accès qu'à ses voisins adjacents). Sous cette contrainte, un schéma Différence Finie d'ordre 2, avec inconnues au centre des cellules, a été développé au sein de l'équipe par [Raeli et al.](#) [89] pour la résolution de problèmes elliptiques sur maillages quadtree/octree. Son implémentation est complexe puisqu'il faut adapter les poids d'interpolation et de discrétisation à la configuration du stencil, c'est-à-dire en prenant en compte la répartition des différentes cellules

voisines. Pour cela, il faut au préalable identifier les différentes configurations de maillages, ce qui devient délicat en 3D ou pour des maillages non gradués. Au contraire, les schémas Volumes Finis développés au cours de cette thèse sont beaucoup plus versatiles et nativement simples à mettre en oeuvre. En effet, les discrétisations reposent sur l'utilisation de l'ensemble du stencil compact (relatif à un noeud, une face ou une cellule), sans prêter d'attention particulière à la configuration de ce stencil.

Cependant, on a pu observer sur de nombreux cas tests numériques que l'utilisation du schéma FV2, décrit dans le Chapitre 2 Section 2.3 pour la résolution de problèmes de transport, peut introduire de nombreuses instabilités numériques. En pratique, la solution obtenue peut devenir oscillante, en particulier au voisinage de l'interface. Ces oscillations sont d'autant plus critiques pour des rigidités élevées puisqu'elles peuvent conduire à un calcul instable. Ces perturbations demeurent néanmoins consistantes dans le sens où l'amplitude de ces oscillations diminue avec un maillage plus raffiné. Pour déceler l'origine de ces perturbations, on introduit un schéma Différence Finie d'ordre 2 classique (FD2). On étudie alors l'impact du schéma de discrétisation utilisé (FD2 ou FV2) sur la régularité de la solution, et ce pour chacun des termes advectifs $A := (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ (pour la convection et les transports des caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} et de la fonction level set ϕ). Les résultats sont répertoriés dans le Tableau 3.1.

terme advectif	schéma de discrétisation				
$A(\mathbf{u})$ (convection)	FV2	FD2	FD2	FV2	FV2
$A(\phi)$ (transport de ϕ)	FV2	FD2	FV2	FD2	FV2
$A(\mathbf{Y})$ (transport de \mathbf{Y})	FV2	FD2	FV2	FV2	FD2
stabilité de la méthode	✗	✓	✗	✗	✓

Table 3.1 – Influence du schéma de discrétisation pour l'opérateur d'advection $A := (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ sur la stabilité de la méthode numérique. Le symbole ✓ (resp. ✗) indique que la solution numérique reste régulière (resp. oscillante) au cours de la simulation.

On a donc pu constater de manière numérique que ces instabilités sont dues à l'utilisation d'un schéma Volume Fini pour résoudre l'équation de transport portant sur les caractéristiques rétrogrades :

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{Y}) = 0. \quad (0.1)$$

Pour vérifier ces observations purement numériques, on propose une analyse de stabilité en une dimension d'espace. Pour ce faire, on introduit une simplification du modèle eulérien d'interaction fluide-structure pour une configuration unidimensionnelle (1D). Le modèle se résume ainsi à un système de deux EDPs non linéaires où les inconnues sont la vitesse u et la caractéristique rétrograde Y :

$$\partial_t u + u \partial_x u = \partial_x \sigma_e(Y), \quad (0.2a)$$

$$\partial_t Y + u \partial_x Y = 0. \quad (0.2b)$$

Sans perte de généralité, le modèle néo-hookéen est choisi ($c_1 = G/2$, $c_2 = 0$ où G est le module de cisaillement), le tenseur des contraintes s'écrit alors :

$$\sigma_e(Y) = G[(\partial_x Y)^{-2} - 1]. \quad (0.3)$$

Dans ce cas de figure, on considère un domaine de calcul purement élastique, de sorte que $\Omega = \Omega_e$. Il n'est donc pas nécessaire de considérer la fonction level set dans ce modèle.

Dans la suite du chapitre, on étudiera tout d'abord la consistance asymptotique de nos schémas de discrétisation au sens des Différences Finies et des Volumes Finis, notamment pour le terme d'advection. L'importance du choix de l'intégration en temps sera ensuite mise en évidence. On verra notamment que selon la méthode numérique, la contrainte de stabilité (condition CFL) est plus ou moins restrictive. Par analogie avec les observations réalisées en 2D, le problème lié à la discrétisation du transport des caractéristiques rétrogrades sera examiné. On constatera en particulier qu'une formulation Volume Fini pour résoudre cette équation de transport conduit à une solution beaucoup plus oscillatoire. Un test numérique 1D sera par ailleurs effectué afin de confirmer les résultats 2D reportés dans le Tableau 3.1.

1 Analyse de stabilité du modèle simplifié 1D

Pour faire l'analyse de ce modèle 1D, il est nécessaire de le linéariser. A partir du système linéarisé, on pourra alors vérifier si les schémas de discrétisation des termes élastique $\partial_x \sigma_e$ et advectif $u \partial_x Y$ préservent ou non l'asymptotique.

Par la suite, on s'intéressera en particulier à la consistance asymptotique des différents schémas de discrétisation des opérateurs. Il est important de distinguer l'étude réalisée ici des travaux faisant référence à l'analyse asymptotique du régime incompressible pour des écoulements compressibles dans la limite bas Mach $Ma \rightarrow 0$. La théorie initiale de [Lions et Masmoudi \[65\]](#) (1998) a donné lieu à de nombreuses recherches dédiées à la construction de schémas numériques pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles préservant l'asymptotique bas Mach (voir notamment [\[49\]](#) et ses références).

A contrario, l'objectif de ce chapitre est de vérifier la convergence asymptotique des schémas numériques dans la limite de petites perturbations de la solution. Dans cette optique, un schéma sera dit *préservant la linéarité* (LP) si le schéma discret limite, obtenu après linéarisation, est consistant avec l'opérateur continu limite (ou linéarisé). La propriété de consistance asymptotique est schématisée par la Figure 3.1.

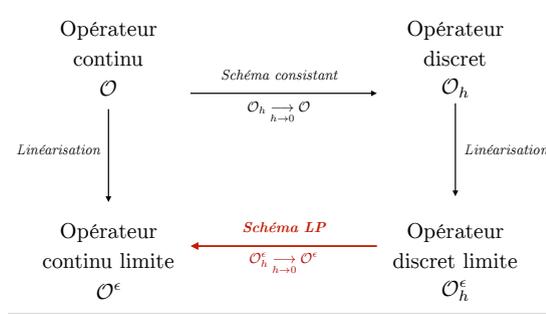


Figure 3.1 – Schématisation de la consistance asymptotique.

1.1 Linéarisation

On décompose le couple solution (u, Y) comme la somme d'une solution non perturbée (u_0, Y_0) et d'une petite perturbation homogène à (\tilde{u}, \tilde{Y}) :

$$u(t, x) = u_0(t, x) + \varepsilon \tilde{u}(t, x), \quad (1.1a)$$

$$Y(t, x) = Y_0(t, x) + \varepsilon \tilde{Y}(t, x). \quad (1.1b)$$

Au temps initial $t = 0$, les caractéristiques rétrogrades sont définies comme l'identité. De ce fait, Y peut être perçue comme une perturbation de l'identité en imposant $Y_0(t, x) := x$.

En introduisant la décomposition (1.1) dans la seconde équation du modèle (0.2b), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t(x + \varepsilon \tilde{Y}) + (u_0 + \varepsilon \tilde{u}) \partial_x(x + \varepsilon \tilde{Y}) \\ &= \partial_t x + \varepsilon \partial_t \tilde{Y} + (u_0 + \varepsilon \tilde{u}) \partial_x x + \varepsilon (u_0 + \varepsilon \tilde{u}) \partial_x \tilde{Y} \\ &= u_0 + \varepsilon (\partial_t \tilde{Y} + \tilde{u} + u_0 \partial_x \tilde{Y}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Par identification des termes d'ordre 0 et ε , et en négligeant les termes d'ordre supérieur, on peut remarquer que $u_0 = 0$ si Y est une perturbation de l'identité, et :

$$\partial_t \tilde{Y} + \tilde{u} = 0. \quad (1.3)$$

On opère de la même manière avec la première équation (0.2a) du modèle. En utilisant le développement de Taylor $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$ au voisinage de zéro, le tenseur des contraintes (0.3) peut tout d'abord être approché comme :

$$\sigma_\varepsilon(Y) = G[(1 + \varepsilon \partial_x \tilde{Y})^{-2} - 1] = -2G\varepsilon \partial_x \tilde{Y} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

L'équation (0.2a) devient alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t u_0 + \varepsilon \partial_t \tilde{Y} + u_0 \partial_x u_0 + \varepsilon (u_0 \partial_x \tilde{u} + \tilde{u} \partial_x u_0) - \partial_x (-2G\varepsilon \partial_x \tilde{Y}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \partial_t \tilde{Y} + 2G\varepsilon \partial_x \tilde{Y} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \partial_t \tilde{Y} + 2G \partial_{xx}^2 \tilde{Y} + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.4)$$

En conclusion, le modèle linéarisé associé au modèle 1D non linéaire (0.2) s'écrit :

$$\partial_t \tilde{u} = -2G \partial_{xx}^2 \tilde{Y}, \quad (1.5a)$$

$$\partial_t \tilde{Y} = -\tilde{u}. \quad (1.5b)$$

En dérivant chaque équation par rapport au temps, ces équations peuvent être réécrites sous la forme d'équations d'ondes :

$$\partial_{tt}^2 \tilde{u} = a^2 \partial_{xx}^2 \tilde{u}, \quad (1.6a)$$

$$\partial_{tt}^2 \tilde{Y} = a^2 \partial_{xx}^2 \tilde{Y}. \quad (1.6b)$$

pour lesquelles la vitesse de propagation a vérifie :

$$a^2 = 2G. \quad (1.7)$$

Cette vitesse $a = \sqrt{2G}$ correspond plus précisément à la vitesse des ondes élastiques se propageant à l'intérieur du matériau.

1.2 Comportement asymptotique des schémas numériques

Pour simplifier les écritures, on se limite ici à une discrétisation uniforme du domaine de calcul $\Omega = [0, 1]$. Si Ω est décomposé en N cellules distinctes, chaque cellule Ω_i est alors centrée en $x_i = (i + 1/2)\Delta x$ où $\Delta x = 1/N$ est le pas en espace ou la taille caractéristique du maillage.

Tout d'abord, la consistance asymptotique du schéma de discrétisation du terme élastique peut être vérifiée de manière assez naturelle. En une dimension, le schéma s'écrit simplement dans chaque cellule Ω_i comme :

$$\left(\partial_x \sigma_e(Y) \right)_i = \frac{1}{\Delta x} \left(\sigma_e(Y)|_{i+\frac{1}{2}} - \sigma_e(Y)|_{i-\frac{1}{2}} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

En utilisant une discrétisation centrée classique des dérivées premières, le tenseur des contraintes (0.3) est approché par :

$$\sigma_e(Y)|_{i\pm\frac{1}{2}} = G \left[\left(\frac{\Delta x}{Y_{i\pm 1} - Y_i} \right)^2 - 1 \right].$$

Le schéma de discrétisation à l'ordre 2 du terme élastique $\partial_x \sigma_e$ se résume ainsi à :

$$\left(\partial_x \sigma_e(Y) \right)_i = G \Delta x \left[\frac{1}{(Y_{i+1} - Y_i)^2} - \frac{1}{(Y_i - Y_{i-1})^2} \right]. \quad (1.8)$$

Pour vérifier la consistance asymptotique du schéma (1.8), la valeur discrète de Y est linéarisée. De manière analogue à (1.1b), Y_i est définie comme une perturbation de l'identité, à savoir :

$$Y_i = x_i + \varepsilon \tilde{Y}_i. \quad (1.9)$$

En injectant la décomposition (1.9) dans le schéma (1.8), on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\partial_x \sigma_\varepsilon(\tilde{Y}))_i &= \frac{G\Delta x}{(x_{i+1} - x_i + \varepsilon(\tilde{Y}_{i+1} - \tilde{Y}_i))^2} - \frac{G\Delta x}{(x_i - x_{i-1} + \varepsilon(\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_{i-1}))^2} \\
 &= \frac{G}{\Delta x} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon}{\Delta x}(\tilde{Y}_{i+1} - \tilde{Y}_i)\right)^{-2} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{\Delta x}(\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_{i-1})\right)^{-2} \right] \\
 &= \frac{G}{\Delta x} \left[\left(1 - 2\frac{\varepsilon}{\Delta x}(\tilde{Y}_{i+1} - \tilde{Y}_i)\right) - \left(1 - 2\frac{\varepsilon}{\Delta x}(\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_{i-1})\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \\
 &= -\frac{2G\varepsilon}{\Delta x^2}(\tilde{Y}_{i+1} - 2\tilde{Y}_i + \tilde{Y}_{i-1}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= -2G\varepsilon(\partial_{xx}^2 \tilde{Y})_i + \mathcal{O}(\Delta x^2 + \varepsilon^2).
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la relation discrète

$$(\partial_x \sigma_\varepsilon(\tilde{Y}))_i = -2G(\partial_{xx}^2 \tilde{Y})_i + \mathcal{O}(\Delta x^2) \tag{1.11}$$

est par conséquent en accord avec l'équation du modèle linéarisé (1.5a), d'où la consistance asymptotique du schéma numérique (1.8).

On examine désormais le comportement asymptotique des schémas d'advection, à la fois pour des approches Différences Finies et Volumes Finis. D'après l'équation du modèle linéarisé (1.5b), le schéma d'advection préserve la linéarité à l'ordre p si, et seulement si, pour $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(\partial_t \tilde{Y})_i = -\tilde{u}_i + \mathcal{O}(\Delta x^p).$$

Tout d'abord, on se place dans le contexte Différence Finie. En particulier, le schéma Différence Finie décentré amont ($u_i > 0$) à l'ordre 1, noté *FD1*, s'écrit :

$$(u\partial_x Y)_i = u_i \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \tag{1.12}$$

Par linéarisation du schéma FD1, on a immédiatement :

$$\begin{aligned}
 (\partial_t Y)_i &= -(u\partial_x Y)_i \\
 \varepsilon(\partial_t \tilde{Y})_i &= -\varepsilon\tilde{u}_i \frac{(x_i + \varepsilon\tilde{Y}_i) - (x_{i-1} + \varepsilon\tilde{Y}_{i-1})}{\Delta x} \\
 (\partial_t \tilde{Y})_i &= -\tilde{u}_i + \mathcal{O}(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

On peut de ce fait constater que la propriété LP est naturellement garantie, **de manière exacte**, par le schéma FD1. Cette observation peut d'ailleurs être faite pour n'importe quel schéma Différence Finie consistant. En d'autres termes, la consistance numérique d'un schéma Différence Finie pour une équation d'advection entraîne *a fortiori* la consistance asymptotique. Ce résultat provient du caractère "centré" pour la prise en compte de la vitesse.

Si on procède de la même manière avec un schéma Volume Fini quelconque, on peut constater que la propriété LP n'est pas assurée de manière exacte. En effet, considérons dans un premier temps le schéma Volume Fini d'ordre 1 classique, noté FV1, basé sur une reconstruction constante par morceaux. Le schéma de discrétisation FV1 de l'opérateur $u\partial_x Y = \partial_x(uY) - Y\partial_x u$ est :

$$(u\partial_x Y)_i = \frac{1}{\Delta x} \left(F_{LLF}(u, Y)|_{i+\frac{1}{2}} - F_{LLF}(u, Y)|_{i-\frac{1}{2}} \right) - Y_i \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (1.14)$$

où F_{LLF} désigne le flux numérique Local Lax-Friedrichs ou de Rusanov défini en $(i + \frac{1}{2})$ par :

$$F_{LLF}(u, Y)|_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}}}{2} (Y_i + Y_{i+1}) - \frac{|u_{i+\frac{1}{2}}|}{2} (Y_{i+1} - Y_i). \quad (1.15)$$

Le flux va alors être calculé dans la direction décentrée (dite *upwind*), selon le signe de $u_{i\pm\frac{1}{2}}$. Ici, cette vitesse est définie comme la moyenne arithmétique : $u_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_i + u_{i\pm 1})$. Pour le schéma FV1, il faut donc considérer quatre configurations, à savoir :

$$u_{i\pm\frac{1}{2}} > 0, \quad u_{i\pm\frac{1}{2}} < 0, \quad (u_{i+\frac{1}{2}} > 0 \text{ et } u_{i-\frac{1}{2}} < 0), \quad \text{et } (u_{i+\frac{1}{2}} < 0 \text{ et } u_{i-\frac{1}{2}} > 0).$$

Par exemple, choisissons le premier cas où $u_{i\pm\frac{1}{2}} > 0$. Par linéarisation du schéma FV1 (1.14), on a :

$$\begin{aligned} (\partial_t Y)_i &= -(u\partial_x Y)_i \\ \varepsilon(\partial_t \tilde{Y})_i &= -\frac{1}{\Delta x} \left(\varepsilon \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} (x_i + \varepsilon \tilde{Y}_i) - \varepsilon \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}} (x_{i-1} + \varepsilon \tilde{Y}_{i-1}) \right) \\ &\quad + (x_i + \varepsilon \tilde{Y}_i) \frac{\varepsilon}{\Delta x} (\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}) \\ (\partial_t \tilde{Y})_i &= -\frac{1}{\Delta x} \left(\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} x_i - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}} x_{i-1} - x_i (\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

et donc :

$$(\partial_t \tilde{Y})_i = -\tilde{u}_{i-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{si } u_{i\pm\frac{1}{2}} > 0.$$

De la même manière pour les trois autres configurations, on peut montrer que le schéma FV1 préserve la linéarité à l'ordre 1. Considérons maintenant un schéma Volume Fini d'ordre plus élevé. On choisit la généralisation à l'ordre 2 du schéma FV1, notée FV2, basée sur une reconstruction linéaire par morceaux de Y . Par le calcul, on obtient alors :

$$\begin{aligned} (\partial_t Y)_i &= -(u\partial_x Y)_i \\ (\partial_t \tilde{Y})_i &= -\frac{1}{\Delta x} \left[\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} \left(x_i + \frac{\Delta x}{2} \right) - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}} \left(x_i - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] + x_i \frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= -\frac{1}{2} (\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} + \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

et de ce fait,

$$(\partial_t \tilde{Y})_i = -\tilde{u}_i - \frac{\Delta x^2}{8} (\partial_{xx}^2 \tilde{u})_i + \mathcal{O}(\varepsilon) (+\mathcal{O}(\Delta x^4)). \quad (1.16)$$

Cette formulation est identique pour les quatre configurations de vitesse énoncées précédemment. Le schéma FV2 préserve ainsi la linéarité à l'ordre 2.

En conclusion, la formulation Différence Finie FD1 préserve la linéarité de manière exacte d'après la relation (1.13). De manière immédiate, ceci entraîne *a fortiori* la préservation exacte de l'asymptotique pour le modèle continu linéarisé. La formulation FV2, quant à elle, ne vérifie la consistance asymptotique qu'à l'ordre 2. En dérivant par rapport au temps la relation (1.16), on obtient alors :

$$\begin{aligned} (\partial_{tt}^2 \tilde{Y})_i &= -(\partial_t \tilde{u})_i - \frac{\Delta x^2}{8} (\partial_{txx}^3 \tilde{u})_i + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= a^2 (\partial_{xx}^2 \tilde{Y})_i + \frac{a^2 \Delta x^2}{8} (\partial_{xxxx}^4 \tilde{Y})_i + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Par identification avec le modèle linéarisé continu écrit sous la forme d'équations d'ondes (1.6), on peut constater l'apparition d'un terme dispersif, proportionnel à $(a^2 \Delta x^2)$. Le résultat obtenu permet d'expliquer les observations réalisées précédemment, à savoir que l'amplitude des instabilités numériques est plus importante en présence de matériaux rigides (lorsque $a = 2G$ est grand) mais reste consistante dans le sens où elle diminue en raffinant le maillage (lorsque Δx est petit).

Par la suite, on pourra confirmer que ce terme dispersif joue un rôle majeur concernant la stabilité de la méthode numérique couplée, utilisée pour la résolution du modèle 1D (0.2).

2 Analyse de stabilité pour l'intégration en temps du modèle

Afin de mieux appréhender l'influence de l'intégration en temps sur la stabilité de la méthode numérique, on effectue une analyse de Von Neumann. Pour cela, on étudiera différents choix de discrétisation en temps du modèle linéarisé (1.5). Comme pour le modèle 2D d'interaction fluide-structure, le modèle est résolu de manière découplée. Pour ce faire, on fait évoluer la caractéristique rétrograde Y puis la vitesse u du temps t^n au temps t^{n+1} en résolvant de manière explicite :

$$\partial_t Y = \mathcal{G}(u, Y) := -u \partial_x Y, \quad (2.1a)$$

$$\partial_t u = \mathcal{F}(u, Y) := -u \partial_x u + \partial_x \sigma_e. \quad (2.1b)$$

Précédemment, on a pu constater que les schémas de discrétisation introduits dans la Section 1.2 pour la résolution de l'équation d'advection (2.1a) possèdent des comportements asymptotiques différents. Par conséquent, on étudiera dans un premier temps, les schémas vérifiant la préservation de la linéarité de manière exacte (schémas DF). Ils seront notés ELP, pour *Exactly Linearity Preserving*. Les schémas non ELP (FV1 et FV2)

seront examinés dans un second temps. On utilisera désormais les indices j dans nos discrétisations pour éviter toute confusion avec le nombre imaginaire $i = \sqrt{-1}$.

2.1 Schémas préservant la linéarité de manière exacte (ELP)

On effectue une analyse de Von-Neumann. Sous l'hypothèse de conditions aux limites périodiques, le couple solution (\tilde{u}, \tilde{Y}) est décomposé comme une série de Fourier. Pour simplifier l'écriture, cette série est restreinte à un seul mode de Fourier. Les valeurs discrètes \tilde{u}_j^n et \tilde{Y}_j^n sont alors écrites sous la forme :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_j^n &= \mathcal{U}(\xi)^n e^{2i\pi\xi j\Delta x}, \\ \tilde{Y}_j^n &= \mathcal{Y}(\xi)^n e^{2i\pi\xi j\Delta x},\end{aligned}$$

ou de manière plus adéquate :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_j^n &= \mathcal{U}(\theta)^n e^{ij\theta} \\ \tilde{Y}_j^n &= \mathcal{Y}(\theta)^n e^{ij\theta}\end{aligned}\tag{2.2}$$

en posant $\theta := 2\pi\xi\Delta x \in \mathbb{R}$. Pour faciliter l'étude, un schéma Euler explicite d'ordre 1 est privilégié pour la discrétisation des dérivées en temps.

Schéma (T1) : les deux équations sont totalement découplées en temps.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{Y_j^{n+1} - Y_j^n}{\Delta t} &= \mathcal{G}_j(u^n, Y^n), \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \mathcal{F}_j(u^n, Y^n).\end{aligned}}\tag{2.3}$$

Si on considère un schéma ELP pour la résolution de l'équation d'advection (0.2b), on obtient dans la limite où $\varepsilon \rightarrow 0$ le système discrétisé suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{Y}_j^{n+1} - \tilde{Y}_j^n}{\Delta t} &= -\tilde{u}_j^n, \\ \frac{\tilde{u}_j^{n+1} - \tilde{u}_j^n}{\Delta t} &= -2G \frac{\tilde{Y}_{j+1}^n - 2\tilde{Y}_j^n + \tilde{Y}_{j-1}^n}{\Delta x^2},\end{aligned}\tag{2.4}$$

En introduisant les formulations de Fourier (2.2) dans le système (2.4), et en utilisant le fait que

$$(\tilde{Y}_{j+1} - 2\tilde{Y}_j + \tilde{Y}_{j-1}) = (e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2)\mathcal{Y} = (-4\sin^2(\theta/2))\mathcal{Y},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^{n+1} &= \mathcal{Y}^n - \Delta t \mathcal{U}^n, \\ \mathcal{U}^{n+1} &= \mathcal{U}^n + 8G \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathcal{Y}^n,\end{aligned}\tag{2.5}$$

qui peut être réécrite de manière compacte sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{U} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ 4\frac{C^2}{\Delta t} \sin^2(\frac{\theta}{2}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{U} \end{pmatrix}^n := \mathcal{A} \begin{pmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{U} \end{pmatrix}^n. \quad (2.6)$$

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(\theta)$ représente ici la matrice d'amplification de Fourier et C est le nombre réel positif défini par :

$$C = a \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (2.7)$$

$a = \sqrt{2G}$ désignant la vitesse de propagation des ondes élastiques définie précédemment (équation (1.7)). La méthode numérique est alors dite asymptotiquement stable si le rayon spectral $\rho(\mathcal{A})$ de la matrice \mathcal{A} est inférieur à 1, autrement dit :

$$\max_p \{|\lambda_p|\} \leq 1, \quad (2.8)$$

où les λ_p désignent les valeurs propres de la matrice \mathcal{A} . Comme les valeurs propres de la matrice \mathcal{A} issue de l'équation (2.6) sont :

$$\lambda_{\pm} = 1 \pm 2iC \sin(\theta/2),$$

son rayon spectral est :

$$\rho(\mathcal{A}) = 1 + 4C^2 \sin^2(\theta/2) \geq 1, \quad \forall \theta, \quad (2.9)$$

Cette dernière inégalité montre que le schéma totalement découplé (T1) (2.3) est instable pour le régime asymptotique.

Schéma (T2) : la caractéristique Y^{n+1} résultant de la première équation est prise en compte dans la seconde équation.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{Y_j^{n+1} - Y_j^n}{\Delta t} &= \mathcal{G}_j(u^n, Y^n), \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \mathcal{F}_j(u^n, Y^{n+1}). \end{aligned}} \quad (2.10)$$

Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, le système discrétisé est :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_j^{n+1} &= \tilde{Y}_j^n - \Delta t \tilde{u}_j^n, \\ \tilde{u}_j^{n+1} &= \tilde{u}_j^n - 2G\Delta t \frac{\tilde{Y}_{j+1}^{n+1} - 2\tilde{Y}_j^{n+1} + \tilde{Y}_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

En injectant dans la deuxième équation \tilde{Y}_j^{n+1} , provenant du résultat de la première équation, on obtient alors :

$$\tilde{u}_j^{n+1} = \tilde{u}_j^n - 2G \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\tilde{Y}_{j+1}^n - 2\tilde{Y}_j^n + \tilde{Y}_{j-1}^n) + 2G \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (\tilde{u}_{j+1}^n - 2\tilde{u}_j^n + \tilde{u}_{j-1}^n),$$

2. ANALYSE DE STABILITÉ POUR L'INTÉGRATION EN TEMPS DU MODÈLE

ce qui se traduit en termes de développement de Fourier par :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{U} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ 4\frac{C^2}{\Delta t} \sin^2(\frac{\theta}{2}) & 1 - 4C^2 \sin^2(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{U} \end{pmatrix}^n. \quad (2.11)$$

Les valeurs propres de la matrice d'amplification issue de l'équation (2.11) sont alors :

$$\lambda_{\pm} = 1 - 2C^2 \sin^2(\theta/2) \pm 2C \sin(\theta/2) \sqrt{C^2 \sin^2(\theta/2) - 1},$$

On peut facilement remarquer ici que $\rho(\mathcal{A}) \geq 1$ si $C > 1$. Après calculs, on trouve également que pour $C \leq 1$, $\rho(\mathcal{A}) = 1$, de manière exacte pour tout θ . Ce résultat est illustré par la Figure (3.2a). Autrement dit, par la définition de C , la méthode de résolution est asymptotiquement stable sous la condition :

$$\Delta t < 1 \cdot \frac{\Delta x}{a}. \quad (2.12)$$

Cependant, le rayon spectral étant exactement 1 sous cette condition CFL, les hautes et basses fréquences ne sont pas amorties au cours de la simulation, ce qui peut devenir problématique à long terme. En d'autres termes, le schéma (T2) est stable sous condition CFL, mais la solution numérique peut rester oscillante en cas de petites perturbations.

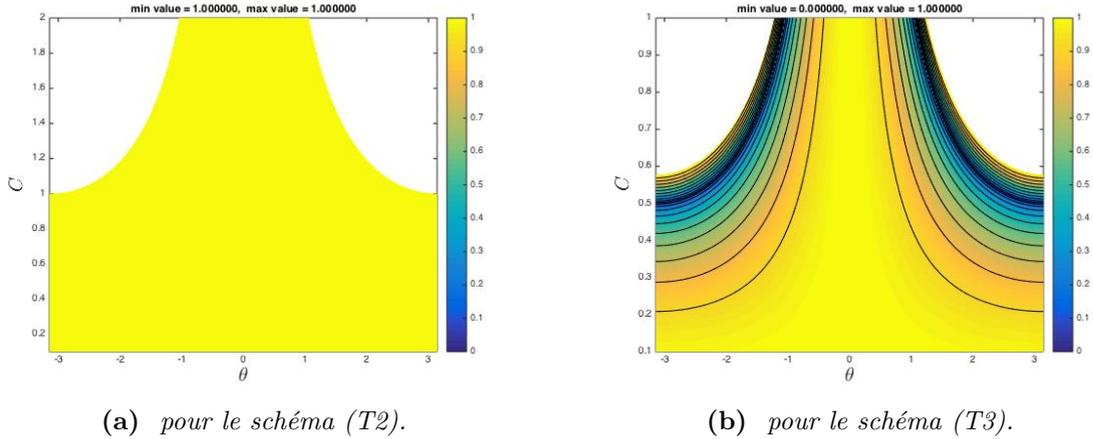


Figure 3.2 – *Stabilité asymptotique du modèle FSI 1D : rayons spectraux en fonction de θ et C obtenus via des schémas ELP en espace, pour deux schémas d'intégration en temps. Dans les zones blanches, le rayon spectral $\rho(\mathcal{A})$ est supérieur à 1.*

Schéma (T3) : la caractéristique Y^{n+1} est obtenue à partir d'une extrapolation en temps de la vitesse ($u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1}$).

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{Y_j^{n+1} - Y_j^n}{\Delta t} &= \mathcal{G}_j(u^{n+1}, Y^n), \quad \text{avec } u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1}, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \mathcal{F}_j(u^n, Y^{n+1}). \end{aligned}} \quad (2.13)$$

Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, le système discrétisé est :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_j^{n+1} &= \tilde{Y}_j^n - 2\Delta t \tilde{u}_j^n + \Delta t \tilde{u}_j^{n-1}, \\ \tilde{u}_j^{n+1} &= \tilde{u}_j^n - 2G\Delta t \frac{\tilde{Y}_{j+1}^{n+1} - 2\tilde{Y}_j^{n+1} + \tilde{Y}_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Si on injecte \tilde{Y}_j^{n+1} , provenant de la première équation, dans la deuxième équation, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j^{n+1} &= \tilde{u}_j^n - 2G \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\tilde{Y}_{j+1}^n - 2\tilde{Y}_j^n + \tilde{Y}_{j-1}^n) \\ &\quad + 4G \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (\tilde{u}_{j+1}^n - 2\tilde{u}_j^n + \tilde{u}_{j-1}^n) \\ &\quad - 2G \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (\tilde{u}_{j+1}^{n-1} - 2\tilde{u}_j^{n-1} + \tilde{u}_{j-1}^{n-1}). \end{aligned}$$

Le développement de Fourier associé s'écrit alors sous forme matricielle comme :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y}^{n+1} \\ \mathcal{U}^{n+1} \\ \mathcal{U}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\Delta t & \Delta t \\ 4\frac{C^2}{\Delta t} \sin^2(\frac{\theta}{2}) & 1 - 8C^2 \sin^2(\frac{\theta}{2}) & 4C^2 \sin^2(\frac{\theta}{2}) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Y}^n \\ \mathcal{U}^n \\ \mathcal{U}^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Les valeurs propres de la matrice d'amplification issue de l'équation (2.14) sont $\lambda_0 = 0$ et :

$$\lambda_{\pm} = 1 - 4C^2 \sin^2(\theta/2) \pm 2C \sin(\theta/2) \sqrt{4C^2 \sin^2(\theta/2) - 1},$$

Par le calcul, on peut montrer que la méthode est asymptotiquement stable sous la condition $C < \sqrt{3}/3$, c'est-à-dire :

$$\Delta t < \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\Delta x}{a}. \quad (2.15)$$

Cette condition de stabilité est vérifiée numériquement via la Figure (3.2b). La condition CFL (2.15) de ce schéma (T3) est un peu plus restrictive que celle du schéma (T2) mais le rayon spectral est ici strictement inférieur à 1, assurant une meilleure stabilité du couplage.

Pour conclure, les résultats obtenus montrent l'importance du choix de l'intégration en temps. Les équations étant résolues alternativement, il est nécessaire de coupler correctement la vitesse u et la caractéristique rétrograde Y . Le schéma d'intégration utilisé pour l'intégration en temps du modèle eulérien 2D correspond à une généralisation à l'ordre 2 du schéma (T3).

2.2 Schémas ne préservant pas exactement la linéarité (non ELP)

Dans la section précédente, la stabilité asymptotique a été étudiée dans le cas où l'équation d'advection portant sur la caractéristique rétrograde Y (0.2b) est résolue par un schéma ELP, ce qui est notamment le cas pour les méthodes de discrétisation Différences Finies.

On considère désormais les schémas FV1 et FV2 pour lesquels la consistance asymptotique est assurée avec des précisions respectivement d'ordres 1 et 2. On suppose ici que $\tilde{u}_{i\pm 1/2} > 0$. Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, les deux schémas linéarisés peuvent être réécrits respectivement sous la forme :

$$(\partial_t \tilde{Y})_j = -\frac{1}{2}(\tilde{u}_j + \tilde{u}_{j-1}), \quad (2.16)$$

et

$$(\partial_t \tilde{Y})_j = -\frac{1}{2}(\tilde{u}_j + \frac{1}{2}(\tilde{u}_{j+1} + \tilde{u}_{j-1})). \quad (2.17)$$

Pour effectuer l'analyse asymptotique, la méthode de discrétisation en temps (T3) est préférée. On a en effet pu constater dans la section précédente que le schéma (T3) offre une meilleure stabilité par rapport aux deux autres. On rappelle que ce schéma est défini comme :

$$\begin{aligned} \frac{Y_j^{n+1} - Y_j^n}{\Delta t} &= \mathcal{G}_j(u^{n+1}, Y^n), \quad \text{avec } u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1}, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \mathcal{F}_j(u^n, Y^{n+1}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Par les décompositions de Fourier suivantes :

$$(\tilde{u}_j + \tilde{u}_{j-1}) = (1 + e^{-i\theta}) \mathcal{U} = (1 + \cos(\theta) - i \sin(\theta)) \mathcal{U},$$

et

$$\tilde{u}_j + \frac{1}{2}(\tilde{u}_{j+1} + \tilde{u}_{j-1}) = \left(1 + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) \mathcal{U} = 2 \cos^2(\theta/2) \mathcal{U},$$

la discrétisation de la première équation donne la relation :

$$\mathcal{Y}^{n+1} = \mathcal{Y}^n - \Delta t(1 + \cos(\theta) - i \sin(\theta)) \mathcal{U}^n + \frac{\Delta t}{2}(1 + \cos(\theta) - i \sin(\theta)) \mathcal{U}^{n-1} \quad (2.19)$$

pour le schéma FV1, et :

$$\mathcal{Y}^{n+1} = \mathcal{Y}^n - 2\Delta t \cos^2(\theta/2) \mathcal{U}^n + \Delta t \cos^2(\theta/2) \mathcal{U}^{n-1} \quad (2.20)$$

pour le schéma FV2. Après calculs, les matrices d'amplification \mathcal{A}_{FV1} et \mathcal{A}_{FV2} relatives aux schémas FV1 et FV2 sont finalement :

$$\mathcal{A}_{FV1} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t(1 + \cos(\theta) - i \sin(\theta)) & \frac{\Delta t}{2}(1 + \cos(\theta) - i \sin(\theta)) \\ 4\frac{C^2}{\Delta t} \sin^2(\theta/2) & 1 + C^2\kappa(\theta) & -C^2\kappa(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

avec $\kappa(\theta) := -\sin^2(\theta) + 2i \sin(\theta) \sin^2(\theta/2)$, et :

$$\mathcal{A}_{FV2} = \begin{pmatrix} 1 & -2\Delta t \cos^2(\theta/2) & \Delta t \cos^2(\theta/2) \\ 4\frac{C^2}{\Delta t} \sin^2(\theta/2) & 1 - 2C^2 \sin^2(\theta) & C^2 \sin^2(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Il serait délicat d'écrire explicitement les valeurs propres non nulles de ces deux matrices \mathcal{A}_{FV1} et \mathcal{A}_{FV2} . De plus, déterminer analytiquement leur rayon spectral est réellement inextricable. Par conséquent, le comportement des rayons spectraux est analysé de manière numérique. La Figure 3.3 présente les rayons spectraux $\rho(\mathcal{A}_{FV1})$ et $\rho(\mathcal{A}_{FV2})$ obtenus.

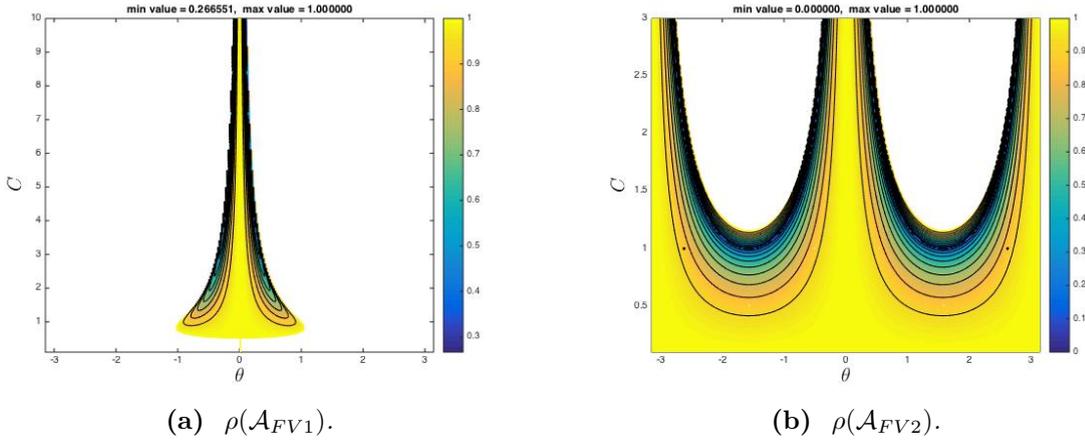


Figure 3.3 – *Stabilité asymptotique du modèle FSI 1D : rayons spectraux en fonction de θ et C obtenus via des schémas en espace non ELP (FV1 et FV2), et le schéma (T3) pour l'intégration en temps. Dans les zones blanches, le rayon spectral $\rho(\mathcal{A})$ est supérieur à 1.*

A partir de ces figures, on peut constater que la méthode de résolution du problème (0.2) est asymptotiquement instable si le terme advectif est discrétisé par un schéma Volume Fini d'ordre 1. En considérant une généralisation de cette discrétisation à l'ordre 2, le schéma est alors stabilisé. Numériquement, la méthode numérique devient stable pour $C < 1.15$, autrement dit :

$$\Delta t < 1.15 \frac{\Delta x}{a}, \quad (2.23)$$

Cette condition de stabilité est nettement moins restrictive que celle obtenue via les méthodes de discrétisation Différences Finies (équation (2.15)). Cependant, on peut s'apercevoir que les hautes fréquences (pour $\theta = \pm\pi$) ne sont pas amorties. Cette étude fournit ainsi un élément de réponse quant au caractère oscillatoire de la solution obtenue via le schéma FV2 pour le transport des caractéristiques rétrogrades. Dans le cas où le problème est raide, autrement dit pour des rigidités élevées, la régularité du tenseur des contraintes $\chi_e \sigma_e$ devient insuffisante, ce qui peut conduire à l'apparition de quelques instabilités parasites. Pour stabiliser la méthode numérique, il convient par conséquent d'imposer la

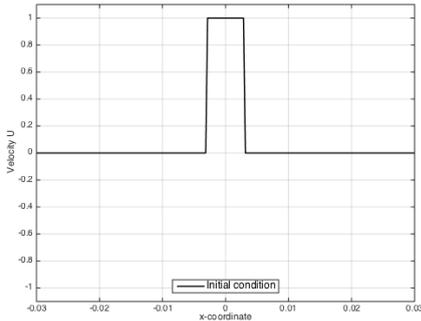
propriété ELP afin de favoriser l'amortissement des hautes fréquences, et par conséquent empêcher la prolifération de ces oscillations.

2.3 Test numérique 1D

Afin de confirmer les résultats du Tableau 3.1 obtenus en 2D, un test numérique 1D est effectué. Le domaine de calcul $\Omega = \Omega_e$ est discrétisé de manière uniforme en $N = 200$ sous-intervalles. Comme l'illustre la Figure 3.4a, une condition initiale discontinue de type fonction Heaviside est prescrite :

$$u(t = 0, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 0.003, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.24)$$

de sorte à favoriser l'apparition d'instabilités numériques. L'ensemble des paramètres utiles pour la reproduction de ce test numérique est reporté dans le Tableau 3.4b. Afin de vérifier l'influence du choix de discrétisation pour l'opérateur d'advection $A(Y)$, deux tests numériques sont effectués en utilisant alternativement les schémas Volume Fini FV2 et Différence Finie FD2 (détaillés dans la Section 1.2). Les solutions ainsi obtenues sont représentées sur la Figure 3.5 pour deux instants $t = 0.5$ ms et $t = 1$ ms. On peut en effet observer que le schéma FV2 produit une solution beaucoup plus oscillatoire ce qui traduit un caractère dispersif. Le schéma reste stable puisque l'amplitude des oscillations reste limité et n'explose pas. Ces résultats sont donc bien conformes à l'étude de stabilité réalisée précédemment. Elle met ainsi en évidence la nécessité de stabiliser le schéma FV2.



(a) Condition initiale $u(t = 0, \cdot)$.

Paramètres		Valeurs
Structure	$\Omega (= \Omega_e)$	$[-0.03, 0.03]$
	Shear modulus G	1 MPa
Schémas	intégration en temps	(T3)
	CFL	0.25
	terme convectif $A(u)$ terme advectif $A(Y)$	FV2 FV2/FD2

(b) Paramètres du test numérique.

Figure 3.4 – Test numérique de la méthode en 1D : mise en oeuvre.

2.4 Stabilisation en une dimension d'espace

La construction du schéma FV2 ELP est présentée dans cette section. Pour mieux comprendre ce qui différencie les schémas FV2 et FD2, on propose de comparer leurs erreurs

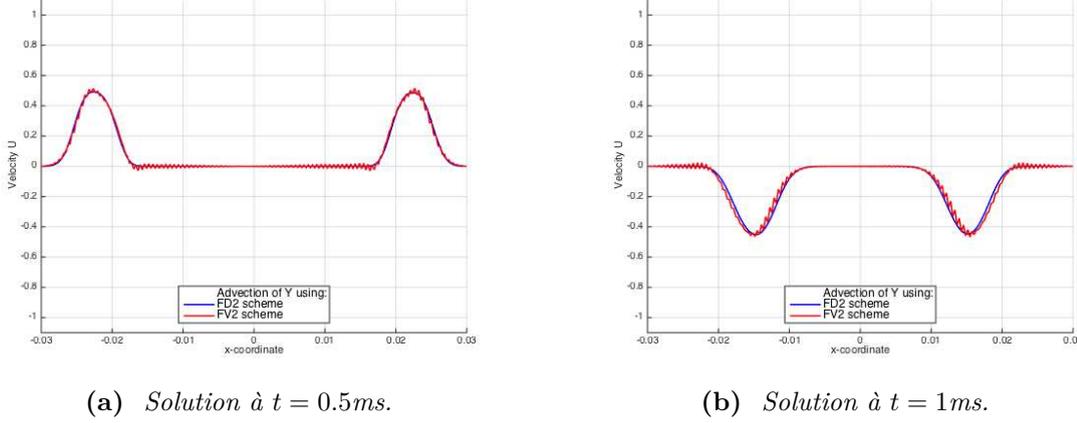


Figure 3.5 – Test numérique de la méthode en 1D : solutions obtenues via les schémas de discrétisation FV2 et FD2 pour l’opérateur d’advection $A(Y)$.

de troncatures. Considérons le cas où $u > 0$ sur tout le domaine Ω . D’un point de vue discret, les schémas de discrétisation FD2 et FV2 pour l’opérateur d’advection $A(Y)$ peuvent être reformulés comme :

$$\left(\tilde{A}_{FD2}(Y)\right)_i = \frac{u_i}{4\Delta x}(Y_{i+1} + 3Y_i - 5Y_{i-1} + Y_{i-2}), \quad (2.25a)$$

$$\left(\tilde{A}_{FV2}(Y)\right)_i = \frac{u_{i+\frac{1}{2}}}{4\Delta x}(Y_{i+1} - Y_{i-1}) - \frac{u_{i-\frac{1}{2}}}{4\Delta x}(-3Y_i + 4Y_{i-1} - Y_{i-2}), \quad (2.25b)$$

pour chaque cellule $\Omega_i \subset \Omega$, $i = 1, \dots, N$. En effectuant un développement limité jusqu’à l’ordre 3 au moins, il en découle que les erreurs de troncatures respectives e_{FD2} et e_{FV2} sont données par :

$$\left(e_{FD2}\right)_i = \left[-\frac{1}{12}u_i(\partial_{xxx}^3 Y)_i\right]\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3), \quad (2.26a)$$

$$\left(e_{FV2}\right)_i = \left[-\frac{1}{12}u_i(\partial_{xxx}^3 Y)_i + \frac{1}{8}(\partial_{xx}^2 u)_i(\partial_x Y)_i\right]\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3). \quad (2.26b)$$

On peut déduire que $\left(e_{FD2}\right)_i - \left(e_{FV2}\right)_i = -\left(S_{FV2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3)$, avec :

$$\left(S_{FV2}\right)_i = \frac{\Delta x^2}{8}(\partial_{xx}^2 u)_i(\partial_x Y)_i. \quad (2.27)$$

Ce résultat est conforme à l’étude asymptotique réalisée dans la Section 1. En résumé, si l’approximation du terme advectif par le schéma FV2

$$A(Y)_i = \left(\tilde{A}_{FV2}(Y)\right)_i \quad (2.28)$$

ne préserve pas la linéarité de manière exacte, le schéma défini par :

$$A(Y)_i = \left(\tilde{A}_{FV2}(Y)\right)_i - \left(S_{FV2}\right)_i \quad (2.29)$$

est ELP. Par l'ajout d'un terme de stabilisation consistant avec le terme (2.27) pour le transport des caractéristiques rétrogrades, la méthode numérique est stabilisée. La méthode Volume Fini décrite précédemment bénéficie par conséquent du caractère "non oscillatoire" dont sont naturellement pourvues les méthodes Différences Finies.

3 Généralisation en deux dimensions

L'analyse 1D effectuée dans la section précédente permet d'expliquer en partie les phénomènes observés en deux dimensions. En effet, l'étude asymptotique confirme de manière théorique les observations numériques. D'un côté, il faut prêter une grande attention au schéma d'intégration en temps. La méthode numérique peut conduire à une solution oscillante (via le schéma (T2)), voire pire, peut être carrément instable (via le schéma (T1)). D'un autre côté, il est nécessaire de résoudre l'équation de transport portant sur les caractéristiques rétrogrades par un schéma ELP en espace pour garantir la régularité de la solution au cours de la simulation. Par identification avec le schéma FD2, qui est naturellement ELP, on a pu conclure qu'il est possible de stabiliser la méthode FV2 par l'ajout d'un terme source.

Dans un premier temps, une généralisation à deux dimensions de cette stabilisation est proposée, pour des configurations 2D et 2D axi-symétrique. On détaillera également le calcul du terme source, de sorte à assurer que le schéma FV2 est bien ELP. Par la suite, on explicitera la contrainte CFL utilisée pour nos simulations.

3.1 Schéma FV2 stabilisé pour le transport des caractéristiques rétrogrades

De par l'utilisation de maillages cartésiens hiérarchiques de type quadtree, la généralisation à deux dimensions est assez simple. Le terme de stabilisation \mathbf{S}_{FV2} pour l'opérateur d'advection $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{Y}$ peut être traité direction par direction, de manière indépendante, i.e. $\mathbf{S}_{FV2} = (\mathbf{S}_x)_{FV2} + (\mathbf{S}_y)_{FV2}$ avec :

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_x)_{FV2} &= \frac{\Delta x^2}{8} (\partial_{xx}^2 \mathbf{u}_x) (\partial_x \mathbf{Y}), \\ (\mathbf{S}_y)_{FV2} &= \frac{\Delta y^2}{8} (\partial_{yy}^2 \mathbf{u}_y) (\partial_y \mathbf{Y}), \end{aligned} \tag{3.1}$$

dans le cas où le maillage est purement uniforme. De manière plus compacte, le terme de stabilisation peut être réécrit sous la forme :

$$\mathbf{S}_{FV2} = \frac{h^2}{8} (\partial_{xx}^2 \mathbf{u}_x, \partial_{yy}^2 \mathbf{u}_y)^T [\nabla \mathbf{Y}] =: \frac{h^2}{8} (\nabla \cdot [\nabla^{diag} \mathbf{u}]) [\nabla \mathbf{Y}], \tag{3.2}$$

où $[\nabla^{diag}\mathbf{u}]$ désigne la matrice diagonale issue du gradient de vitesse $[\nabla\mathbf{u}]$, i.e.

$$[\nabla^{diag}\mathbf{u}]_{ij} := [\nabla\mathbf{u}]_{ij}\delta_{ij}.$$

Par le calcul, il est possible de vérifier que le terme de stabilisation (3.2) est le même dans le cas d'une configuration 2D axi-symétrique et pour un maillage quadtree quelconque.

Pour que le schéma FV2 stabilisé soit réellement ELP, la discrétisation du terme de stabilisation doit être effectuée à partir de la vitesse normale aux faces U_{fc} . Pour plus de clarté, on rappelle le schéma de discrétisation de l'opérateur d'advection FV2 employé au cours de cette thèse. Ce schéma a été décrit au préalable dans le Chapitre 2 Section 2.3. Tout d'abord, une reconstruction linéaire par morceaux de φ est effectuée. Dans chaque cellule Ω_i du maillage, le polynôme linéaire $\tilde{\varphi}_i^{O2}$ est déterminé au sens des moindres carrés, à partir des valeurs de la fonction provenant du stencil compact de la cellule \mathcal{S}_i .

Écrit sous sa forme conservative, l'opérateur d'advection $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\varphi$ est discrétisé dans chaque cellule par la formule de quadrature "point milieu" :

$$(\nabla \cdot \mathcal{F}(\varphi))_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{f \subset \partial\Omega_i} \mathcal{F}(\varphi)_{fc} \cdot \mathbf{n}_f |f|, \quad (3.3)$$

où $\mathcal{F} = \mathbf{u}\varphi$. Le flux numérique de Rusanov (ou Local Lax-Friedrichs) est considéré de sorte que le flux soit calculé de manière totalement *upwind* :

$$\mathcal{F}(\varphi)_{fc} = \tilde{\mathcal{F}}(\varphi_{fc}^-, \varphi_{fc}^+) = \frac{U_{fc}}{2}(\varphi_{fc}^- + \varphi_{fc}^+) - \frac{1}{2}|U_{fc}|(\varphi_{fc}^+ - \varphi_{fc}^-). \quad (3.4)$$

Ici, $\varphi_{fc}^- = \varphi|_{\Omega_{in}}(\mathbf{x}_{fc})$ et $\varphi_{fc}^+ = \varphi|_{\Omega_{out}}(\mathbf{x}_{fc})$ sont obtenus par reconstruction de part et d'autre de la face $f = \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out}$. La vitesse normale à la face U_{fc} correspond à la vitesse vérifiant la conservation de masse discrète dans chaque cellule dans la limite de la tolérance du solveur de Poisson ϵ_Δ :

$$\sum_{f \subset \partial\Omega_i} (U_{fc}\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}_f = \mathcal{O}(\epsilon_\Delta).$$

Puisque l'opérateur d'advection est déterminé à partir de cette vitesse normale U_{fc} , la discrétisation du terme de stabilisation doit l'être également. Par conséquent, le terme de stabilisation est calculé pour chaque cellule Ω_i comme :

$$(\mathbf{S}_{FV2})_i = -\mathbf{u}_i \cdot (\nabla\mathbf{Y})_i + \sum_{f \subset \partial\Omega_i} \frac{h_f}{2} \frac{|f|}{|\Omega_i|} U_{fc} (\nabla\mathbf{Y})_i \cdot \mathbf{e}_f. \quad (3.5)$$

Ici, $\mathbf{e}_f (\neq \mathbf{n}_f)$ désigne le vecteur unitaire à la face f . L'approximation de l'opérateur gradient $(\nabla\mathbf{Y})$ est réalisée de manière classique, c'est-à-dire centrée.

Pour conclure, la formulation Volume Fini stabilisée

$$\left((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{Y} \right)_i \approx \left((\nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{Y})) \right)_i - \left(\mathbf{S}_{FV2} \right)_i \quad (3.6)$$

ne sera jamais exactement identique à une formulation équivalente Différence Finie mais la différence des deux approximations restera à l'ordre trois. La formulation (3.6) est ainsi adoptée comme schéma de discrétisation pour l'équation de transport des caractéristiques rétrogrades, de sorte à remédier aux problèmes d'instabilités numériques observées au voisinage de l'interface.

3.2 Condition de stabilité

Dans la limite de rigidité faible ou nulle, le choix du pas de temps est limité par la condition de stabilité classique, reliée à la vitesse d'advection \mathbf{u} du fluide. Le terme de diffusion étant traité de manière implicite, la stabilité du schéma est assurée par la condition CFL :

$$\Delta t_f < \frac{h_{min}}{\|\mathbf{u}\|_{max}} \quad (3.7)$$

qui est reliée à la dimension caractéristique du maillage h_{min} basée sur la plus petite cellule du maillage et sur la vitesse maximale du fluide $\|\mathbf{u}\|_{max}$ dans le domaine, au sens de la norme L^∞ .

Dans le contexte d'une modélisation de la déformation de structures hyper-élastiques, il est naturel de prendre également en compte la célérité des ondes élastiques se propageant dans un matériau. En effet, les méthodes d'intégration en temps sont en grande partie explicites. Dans un milieu isotrope, il en existe 2 types :

- les ondes longitudinales (ou dites de pression) se propageant dans la direction normale à la direction de déformation avec une célérité $C_L = \sqrt{(\lambda + \mu)/\rho}$,
- les ondes transversales (ou de cisaillement) se propageant (tangentiellement) dans la direction de déformation avec une célérité $C_T = \sqrt{\mu/\rho}$,

où λ et μ désignent ici les coefficients de Lamé propres au matériau. De manière équivalente, ces vitesses peuvent être réécrites à partir des modules de Young E et de Poisson ν par les relations :

$$\rho C_L^2 = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \rho C_T^2 = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.8)$$

Dans la limite d'incompressibilité d'un matériau élastique $\nu \rightarrow 1/2$, les ondes longitudinales se propagent avec une vitesse infinie alors que la vitesse des ondes de cisaillement reste finie : $C_T = \sqrt{E/(3\rho)} = \sqrt{G/\rho}$ si G désigne le module de cisaillement.

A partir de l'étude de [Gorsse et al. \[45\]](#), reprise plus tard par [De Brauer et al. \[27\]](#) pour des modèles multi-matériaux compressibles, il est également possible de faire l'analogie pour des régimes incompressibles. Si on restreint l'étude à un problème à une

seule dimension (considérons x ici par exemple) $\partial_t \boldsymbol{\psi} + \partial_x H(\boldsymbol{\psi}) = 0$, les valeurs propres de la jacobienne de H sont :

$$\left\{ \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_x \pm \sqrt{\alpha_1/\rho}, \mathbf{u}_x \pm \sqrt{\alpha_2/\rho} \right\}$$

où α_1 et α_2 sont les valeurs propres du produit matriciel $-\nabla[\boldsymbol{\sigma}_e][\nabla\mathbf{Y}]$. Dans le cas d'un modèle néo-hookéen (paramètres $c_1 = G/2$, $c_2 = 0$), et dans la limite d'un matériau incompressible, ces valeurs propres deviennent $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_x \pm \sqrt{G/\rho}\}$. Cette observation permet de conclure que la condition de stabilité est bien basée sur la célérité des ondes élastiques $c_{wave} = \sqrt{G/\rho}$.

Par la suite, le pas de temps sera ainsi défini par :

$$\Delta t_e = cfl \frac{h_{min}}{\|\mathbf{u}\|_{max} + c_{wave}} \quad (3.9)$$

où $cfl < 1$ est le nombre CFL. Pour des cas tests faisant intervenir des matériaux élastiques, on prendra $cfl = \frac{1}{4}$, dans le cas contraire, cette contrainte pourra être relaxée à $cfl = \frac{1}{2}$. Dans le cas de structures très rigides ($G \gg 1$), cette contrainte est très restrictive, ce qui a un effet considérable sur le coût de calcul total d'une simulation FSI.

Chapitre 4

Validation et simulations numériques

Sommaire

1	Etude de convergence : le vortex de Taylor-Green	116
2	Écoulements autour de corps rigides	117
2.1	Le cylindre	118
2.2	La sphère en régime 2D axi-symétrique	122
2.3	Le cylindre à vitesse constante	124
2.4	Sédimentation d'un cylindre	126
3	Problèmes d'interaction fluide-structure (FSI)	128
3.1	Validation : structure élastique immergée dans une cavité entraînée	129
3.2	Déformation induite par un corps immergé tournant autour d'un axe	134
3.3	Membranes oscillantes	137
4	Application : simulation d'un écoulement dans une pompe cardiaque	139

Dans ce chapitre, la validation de la méthode numérique est effectuée via différents cas tests, classés par ordre croissant de complexité. Dans un premier temps, le cas du vortex de Taylor-Green est étudié afin de vérifier l'ordre de convergence du solveur fluide. Ensuite, différents écoulements fluides mettant en jeu des corps immergés, immobiles et mobiles, sont présentés et confrontés à la littérature. Quelques problèmes FSI sont proposés dans un troisième temps, permettant la validation de la méthode numérique développée, et mettant en avant l'utilisation de l'adaptation dynamique de maillage. On finira ce chapitre par une application biomédicale, dédiée à la simulation de l'écoulement dans une géométrie de pompe cardiaque de type *LVAD*.

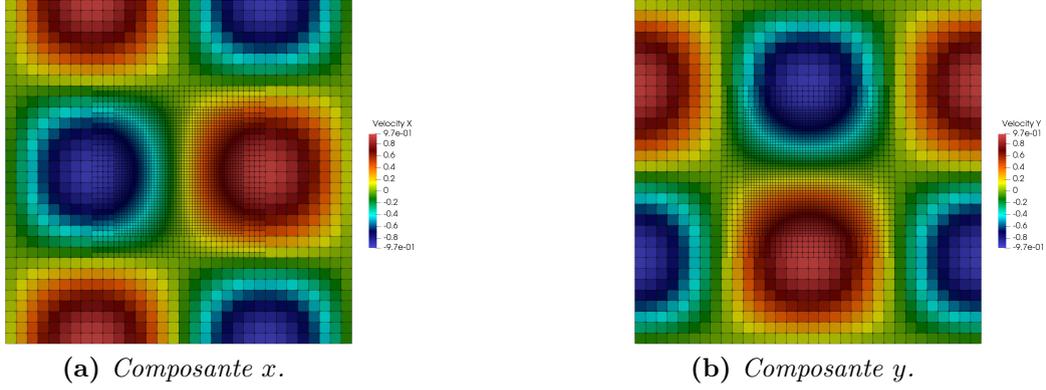


Figure 4.1 – Vortex de Taylor-Green : champ de vitesse pour un nombre de Reynolds $Re = 100$ à $t = 0.1$ sur le maillage quadtree avec raffinement par boîtes. Ici, $L_{max} = 7$.

1 Etude de convergence : le vortex de Taylor-Green

Pour vérifier l'ordre de convergence du solveur fluide, le cas test du vortex de Taylor-Green est étudié. Les propriétés du fluide sont fixées à $\rho = \rho_f = 1$ et $\mu = \mu_f = 0.01$. La solution est connue de manière analytique au cours du temps. La vitesse définie par :

$$\mathbf{u}_{ex}(t, \mathbf{x}) = \left(\cos(x) \sin(y), -\sin(x) \cos(y) \right) F(t), \quad (1.1)$$

avec $F(t) = e^{-2\nu t}$ est solution des équations de Navier-Stokes incompressibles pour une pression donnée par :

$$p_{ex}(t, \mathbf{x}) = \frac{\rho}{4} \left(\cos(2x) + \cos(2y) \right) F^2(t). \quad (1.2)$$

Le domaine de calcul est fixé à $\Omega = [0, 2\pi]^2$ de sorte que la dérivée normale de la pression soit nulle sur $\partial\Omega$. Des conditions aux limites de type Dirichlet sont imposées pour la vitesse. Le solveur numérique est testé pour des maillages uniformes et non uniformes, pour 2 sauts de niveaux ($L_{max} - L_{min} = 2$). La solution ainsi que le maillage quadtree considéré (avec raffinement par boîtes imbriquées) sont illustrés sur la Figure 4.1.

Les maillages sont comparés à parité de niveau de raffinement maximal L_{max} . La vitesse \mathbf{u} , obtenue de manière numérique, est comparée à la solution exacte \mathbf{u}_{ex} au temps final $T_{max} = 0.1$ à partir des normes L^1 et L^∞ discrètes :

$$e_1 = \frac{1}{|\Omega|} \sum_i \|\mathbf{u}_{ex}(T_{max}, \mathbf{x}_i) - \mathbf{u}_i\|_1 |\Omega_i|,$$

et :

$$e_\infty = \max_i \|\mathbf{u}_{ex}(T_{max}, \mathbf{x}_i) - \mathbf{u}_i\|_\infty.$$

L'étude de convergence présentée par le biais de la Figure 4.2 montre une convergence d'ordre 2 en espace à la fois sur maillages uniformes et non uniformes. Pour ce cas test,

la solution ne varie que peu au cours du temps, l'erreur liée à la discrétisation en temps devient par conséquent négligeable. Cependant, il faut noter que la méthode de projection considérée dans cette thèse n'est précise qu'à l'ordre 1 en temps. Une extension au second ordre de la méthode de projection a été proposée par [Bell et al.](#) et pourrait être intégrée à la méthode numérique. Cependant, l'objectif de cette thèse demeure la simulation de problèmes FSI impliquant des matériaux rigides, pour laquelle le pas de temps est extrêmement petit. L'erreur en temps étant insignifiante, garantir l'ordre 2 en temps n'est pas primordial.

Les erreurs en espace obtenues sur les maillages de type quadtree sont significativement plus importantes que sur maillages uniformes car les sauts de niveaux sont définis arbitrairement. Dans cette configuration de maillage, certains sauts de niveau passent par des zones à forts gradients, ce qui peut introduire une erreur localement significative.

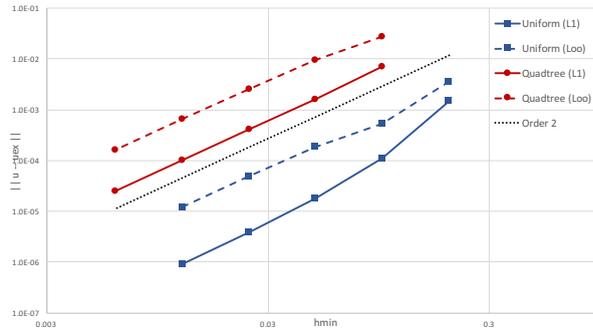


Figure 4.2 – *Vortex de Taylor-Green : études de convergence sur maillages uniformes et non uniformes, à parité de niveau maximum L_{max} .*

2 Ecoulements autour de corps rigides

Un moyen efficace pour évaluer la précision de notre solveur numérique consiste à calculer les forces hydrodynamiques agissant sur les corps immergés. Calculée à partir du tenseur des contraintes visqueux $\boldsymbol{\sigma}_e$, la force exercée par le fluide sur une structure rigide Ω_s est définie comme :

$$\mathbf{F} = - \int_{\Gamma_s} \mathbb{T}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x}, \quad (2.1)$$

où $\mathbb{T}(\mathbf{u}, p) = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_e(\mathbf{u})$ est le tenseur des contraintes totales. En général, il est plus naturel de comparer les résultats numériques en termes de coefficients sans dimension :

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{F}}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 S}, \quad (2.2)$$

où U_∞ est la vitesse d'entrée "non perturbée" du fluide, et S est une surface de référence relative au corps rigide.

Pour calculer ces forces extérieures, une première méthode, dite lagrangienne, est naturellement utilisée dans la littérature. Elle repose sur la discrétisation de la frontière du corps en n petites surfaces disjointes S_k , tel que $\Gamma_s = \cup_k S_k$. Sur chacune de ces surfaces, le tenseur des contraintes est alors interpolé à partir de la solution discrète. Une approximation à l'ordre 2 de cette force est ainsi donnée par :

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^n \mathbb{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k), p(\mathbf{x}_k)) \cdot \mathbf{n}_k |S_k|, \quad (2.3)$$

où \mathbf{x}_k et \mathbf{n}_k désignent respectivement le centre de masse (ou marqueur lagrangien) et le vecteur normal de la surface S_k , pointant vers l'extérieur. La Figure 4.3a illustre cette méthode lagrangienne.

Comme les points du maillage ne coïncident pas avec l'interface fluide-solide, ce calcul de la force peut être imprécis, surtout pour des méthodes de pénalisation, pour lesquelles les conditions aux limites sur Γ_s ne sont pas parfaitement imposées. De plus, la méthode lagrangienne n'est pas très pratique pour prendre en considération les corps en mouvement, car la position des marqueurs lagrangiens doit être suivie dans le temps et donc calculée à chaque pas de temps. Pour contourner ce problème, on privilégie une approche eulérienne. Un domaine fictif $\widetilde{\Omega}_s$, appelé volume de contrôle, contenant le domaine solide Ω_s est arbitrairement défini dans le domaine de calcul Ω . En pratique, ce nouveau domaine est choisi rectangulaire, de sorte qu'il s'adapte au maillage utilisé pour la simulation, comme le montre la Figure 4.3b. De ce fait, le volume entier de $\widetilde{\Omega}_s$ est exactement connu. Dans ce contexte, la force peut être reformulée de manière équivalente comme :

$$\mathbf{F} = -\frac{d}{dt} \int_{\widetilde{\Omega}_s} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial \widetilde{\Omega}_s} (\mathbb{T}(\mathbf{u}, p) - \rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)) \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\partial \Omega_s} \rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (2.4)$$

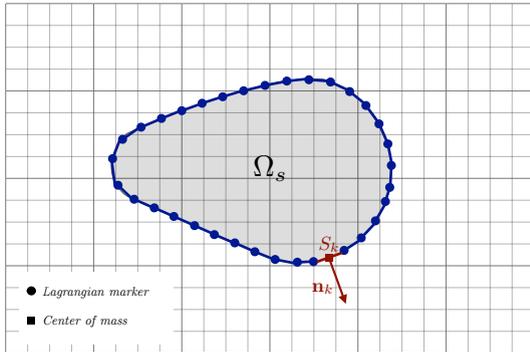
En particulier, puisque $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s$ sur Γ_s , la troisième intégrale est nulle. La force est finalement calculée comme :

$$\mathbf{F} = -\frac{d}{dt} \int_{\widetilde{\Omega}_s} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial \widetilde{\Omega}_s} (\mathbb{T}(\mathbf{u}, p) - \rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)) \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (2.5)$$

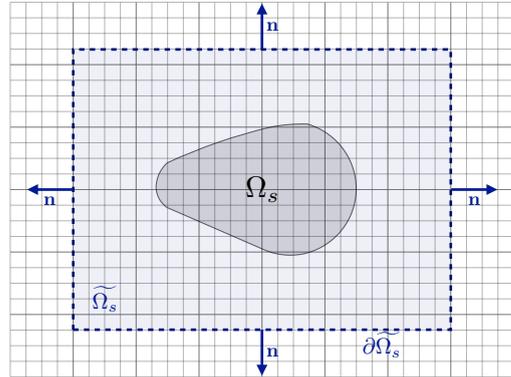
Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux travaux de Noca [77]. L'avantage de cette méthode est indéniable sur le plan de la précision du calcul, notamment dans le cadre des méthodes de pénalisation. En effet, toutes les interpolations peuvent être effectuées dans le fluide, à une distance suffisante de la structure. De plus, le calcul de l'équation (2.5) ne dépend pas du volume de contrôle. Une interpolation compacte à l'ordre 3 est adoptée ici pour garantir la précision numérique. Pour chaque marqueur défini sur $\widetilde{\Omega}_s$, on utilise le stencil compact de la cellule fluide à laquelle il appartient.

2.1 Le cylindre

Un cylindre immobile, de diamètre $D = 1$ et centré en $(0, 0)$, est immergé dans un fluide à vitesse constante $U_\infty = 1$. Le domaine de calcul $\Omega = [-8D, 16D] \times [-12D, 12D]$ est



(a) méthode lagrangienne (marqueurs lagrangiens).

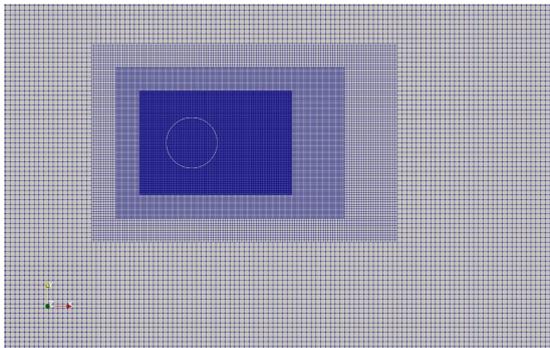


(b) méthode eulérienne (volume de contrôle).

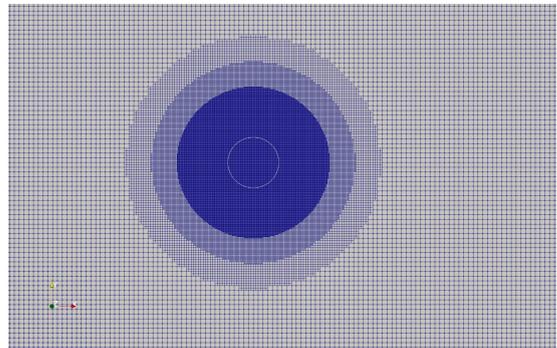
Figure 4.3 – Méthodes pour le calcul des forces et coefficients hydrodynamiques.

choisi suffisamment large, de sorte que les bords du domaine ne soient pas trop proches du cylindre. Dans le sens de l'écoulement, les conditions aux limites de Dirichlet $\mathbf{u} = U_\infty \mathbf{e}_x$ sont imposées à l'entrée, et des conditions de Neumann homogènes sont employées en sortie du domaine. Pour les autres bords du domaine, des conditions de non écoulement (*no-flow*) sont choisies. Les propriétés dimensionnelles du fluide sont fixées à $\rho = 1$ et $\mu = Re^{-1}$.

Les simulations sont réalisées sur différents types de maillages non uniformes. Le premier est basé sur un raffinement par boîtes, pour lequel la géométrie du solide n'est pas prise en compte, tandis que le second est basé sur la fonction level set relative à Ω_s , critère plus naturel pour mieux prendre en compte la géométrie du solide (voir Figure 4.4).



(a) Raffinement par boites autour du cylindre.



(b) Raffinement via un critère level set.

Figure 4.4 – Ecoulement autour d'un cylindre : différents raffinements de maillages utilisés.

Re = 550.

On examine dans un premier temps le régime d'écoulement pour $Re = 550$ sur une courte durée $t \in [0, 5]$. Le coefficient de traînée C_D est calculé au cours du temps et comparé aux résultats donnés par Ploumhans et Winckelmans [86]. La Figure 4.5 présente l'évolution de ce coefficient, pour des simulations réalisées sur les maillages cartésiens hiérarchiques de types 4.4a et 4.4b. Au regard de la Figure 4.5a, on constate d'une part la convergence en maillage, et d'autre part que les résultats obtenus sont bien conformes à ceux reportés par Ploumhans. A partir des Figures 4.5b et 4.5c, on peut également remarquer que la solution obtenue n'est pas très sensible au choix du raffinement. En effet, les résultats sont équivalents d'un point de vue qualitatif pour les deux types de raffinement considérés. Pour la configuration $L_9 - L_{12}$ par exemple, la différence relative est plus précisément inférieure à 0.007%.

Dans tous les prochains tests, on optera pour le raffinement par boîtes imbriquées car il permet d'adapter le maillage de manière plus adéquate au sillage du corps rigide.

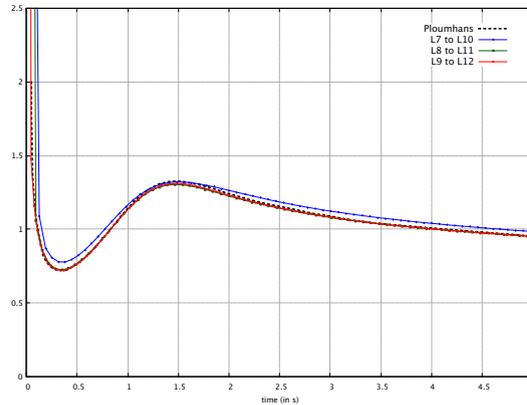
Re = 200.

On s'intéresse dans un second temps au régime $Re = 200$ sur une plus longue durée de simulation. À partir d'un certain moment, l'écoulement se déstabilise, devient perturbé, ce qui entraîne une production de tourbillons dans le sillage du cylindre. Ce test met en évidence la capacité de la méthode numérique pour décrire la propagation de ces tourbillons.

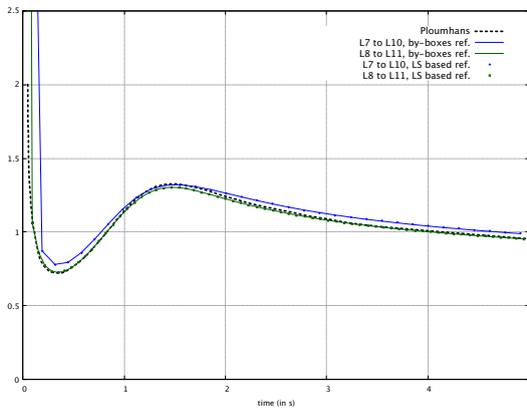
L'évolution temporelle des coefficients de traînée C_D et de portance C_L obtenus sur maillage non uniforme, avec raffinement par boîtes imbriquées, est présentée sur la Figure 4.6a. Afin de comparer avec les études précédentes, le coefficient de traînée moyen est calculé et le nombre de Strouhal $St = fD/U_\infty$ est déterminé à partir de la fréquence des oscillations f . Ces quantités, reportées dans le Tableau 4.6b, sont en accord avec la littérature.

On s'intéresse maintenant à l'effet du déraffinement sur la précision globale du solveur. A partir du maillage uniforme de niveau L_{max} , le calcul est également effectué sur trois maillages intermédiaires non uniformes avec respectivement un, deux et trois niveaux de déraffinement. Pour les quatre calculs, les maillages sont choisis identiques au voisinage du cylindre. À titre de comparaison, les coefficients hydrodynamiques, le nombre de Strouhal St et le temps de calcul sont donnés dans le Tableau 4.1. La Figure 4.7 illustre également l'évolution des coefficients hydrodynamiques sur deux périodes d'oscillation pour ces quatre maillages.

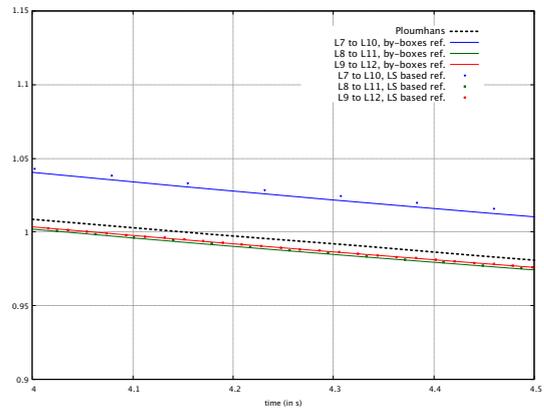
Pour un ou deux niveaux de déraffinement, les résultats sont extrêmement proches de ceux obtenus sur maillage uniforme. D'un point de vue quantitatif, pour les deux premiers maillages quadtree, les différences relatives en ce qui concerne le nombre de Strouhal et l'amplitude des oscillations sont respectivement inférieures à 0.4% et 1.4%. Avec trois



(a) Convergence en maillage pour le maillage avec raffinements par boîtes.



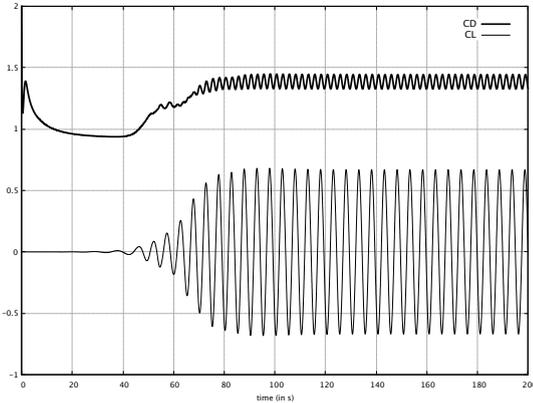
(b) Comparaison pour les deux types de raffinement : $t \in [0, 5]$.



(c) Comparaison pour les deux types de raffinements : zoom sur l'intervalle $t \in [4, 4.5]$.

Figure 4.5 – *Ecoulement autour d'un cylindre à $Re = 550$: évolution du coefficient de trainée C_D au cours du temps. Les simulations sont effectuées sur maillages non uniformes, pour deux types de raffinement.*

niveaux de déraffinement, la différence est plus importante mais reste raisonnable. Cependant, le coût de calcul est environ six fois moins important, le rapport précision / temps de calcul est donc très intéressant. Ces comparaisons montrent par conséquent comment un déraffinement approprié du maillage permet une diminution significative du coût de la simulation, tout en garantissant une dégradation limitée de la précision du solveur numérique. Finalement, on peut constater qu'avec un déraffinement trop important, la précision ne peut être assurée de manière assez naturelle.


 (a) Coefficients aérodynamiques C_D et C_L .

Auteurs	C_D	St
Braza et al. [14]	1.4000	0.2000
Henderson [48]	1.3412	0.1971
He et al. [47]	1.3560	0.1978
Bergmann [9]	1.3900	0.1999
Taymans [107]	1.3951	0.2039
Présente étude	1.3920	0.2013

(b) Comparaison avec la littérature.

Figure 4.6 – Écoulement autour d’un cylindre à $Re = 200$: résultats obtenus pour un maillage quadtree $L_8 - L_{11}$ (raffinement par boîtes) et comparaison avec la littérature en termes de coefficient de traînée moyen C_D et nombre de Strouhal St .

Niveau L_{min}	Nombre de cellules	C_D	C_L	St	Temps de calcul (# processeurs)
11	4194304	1.392 ± 0.061	0 ± 0.352	0.2013	29h48min (288)
10	1081600	1.392 ± 0.062	0 ± 0.351	0.2012	6h09min (600)
9	312832	1.391 ± 0.061	0 ± 0.347	0.2006	4h02min (600)
8	125824	1.369 ± 0.054	0 ± 0.313	0.1956	3h02min (480)

Table 4.1 – Écoulement autour d’un cylindre à $Re = 200$: influence quantitative du déraffinement sur les coefficients hydrodynamiques, le nombre de Strouhal St et le temps de calcul. Le niveau maximum de raffinement est fixé à $L_{max} = 11$.

2.2 La sphère en régime 2D axi-symétrique

L’écoulement autour d’une sphère est classiquement étudié dans la littérature afin de valider la méthode numérique en trois dimensions d’espace. Comme l’évoquent notamment Johnson et Patel [55], on peut répertorier trois types de régimes laminaires d’écoulement. Pour un nombre de Reynolds $Re < 210$, l’écoulement est stationnaire et axi-symétrique, dans l’intervalle $210 < Re < 270$, l’écoulement n’est plus axi-symétrique mais reste stationnaire, et pour $Re > 270$ il devient instationnaire. De ce fait, il est opportun de valider l’outil numérique dans une configuration 2D axi-symétrique pour le premier régime $Re < 210$.

Pour ce faire, une sphère immobile de diamètre $D = 1$ centrée au point $(0, 0)$ est immergée dans une configuration cylindrique. Sous l’hypothèse d’axi-symétrie, le domaine de calcul (plan à θ fixé) est alors défini comme $\Omega = [0D, 20D] \times [-5D, 15D]$. Ce domaine est choisi intentionnellement grand, de sorte que ses limites droite, supérieure et inférieure

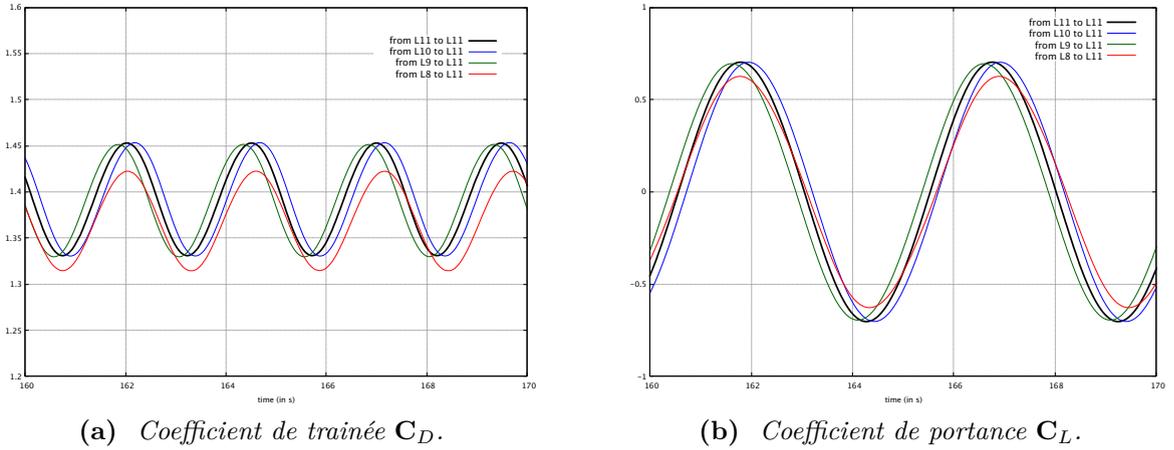


Figure 4.7 – *Ecoulement autour d'un cylindre à $Re = 200$: influence qualitative du déaffinement sur les coefficients hydrodynamiques. Le niveau maximum de raffinement est fixé à $L_{max} = 11$.*

soient suffisamment éloignées de la sphère. Sur le bord de gauche à $r = 0$, des conditions de symétrie sont naturellement choisies et en bas, des conditions d'entrée $u_r = 0$ et $u_z = U_\infty = 1$ sont imposées. À la sortie et à droite, on privilégie les conditions limites de type *no flow*. Au départ, la vitesse axiale du fluide est initialisée à U_∞ .

Pour ce cas test de validation, on s'intéresse à l'estimation de la position du vortex généré en aval de la sphère. Selon le nombre de Reynolds, la re-circulation du fluide n'est pas la même. En effet, plus le nombre de Reynolds est élevé, plus la zone de re-circulation est large, comme le montre la Figure 4.8. Pour définir le vortex, on identifie son centre $\mathbf{x}_c = (r_c, z_c)$, et la coordonnée z_s du point de stagnation situé sur l'axe de symétrie $r = 0$. En ces deux points de stagnation \mathbf{x}_c et $(0, z_s)$, la vitesse tend à zéro.

Les simulations sont effectuées sur des maillages non uniformes, avec raffinement par boîtes imbriquées avec trois niveaux de déaffinement, comme dans la Section 2.1 (Figure 4.4a). Les simulations sont arrêtées lorsque la solution est devenue stationnaire, autrement dit que la solution a convergé en temps. Pour différents nombres de Reynolds, les points de stagnation obtenus pour la configuration de maillage $L_7 - L_{10}$ sont présentés sur la Figure 4.9. Ces résultats sont comparés avec la littérature, à savoir avec les travaux de Johnson et Patel [55], Taneda [106], Magnaudet et al. [66] et Tomboulides [111]. Le centre du vortex \mathbf{x}_c est plutôt difficile à déterminer visuellement. Ceci peut expliquer les légères différences avec les autres études. Cependant, sa position reste plutôt bien approchée pour les différents nombres de Reynolds. En ce qui concerne le point de stagnation $(0, z_s)$, la distance entre ce point et la sphère est très proche de celle rapportée par Magnaudet et al. [66].

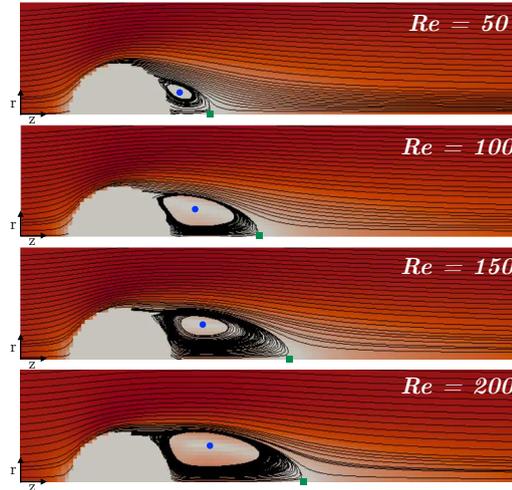


Figure 4.8 – La sphère en régime 2D axi-symétrique : vitesse axiale u_z et lignes d'écoulement obtenues pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re . Zoom sur le domaine $[0, 1] \times [-1, 4]$. Les ronds bleus et les carrés verts correspondent respectivement aux points de stagnation \mathbf{x}_c et $(0, z_s)$.

2.3 Le cylindre à vitesse constante

Le cas du cylindre à vitesse constante est analogue au cas test du cylindre fixe (Section 2.1). Le cylindre se déplace alors avec une vitesse $\mathbf{u}_s = -U_\infty \mathbf{e}_x$, avec $U_\infty = 1$, dans un fluide initialement au repos. Pour ces deux configurations d'écoulement, les forces appliquées sur le cylindre sont identiques, ce qui conduit en théorie aux mêmes coefficients de traînée.

Les simulations sont effectuées sur des maillages non uniformes. Dans un premier temps, le maillage est choisi fixe. Dans ce cas, on utilise un raffinement par boîtes de sorte que le cylindre reste situé à l'intérieur de la zone la plus raffinée (Figure 4.10a). Dans un second temps, le maillage est adapté de manière dynamique via la procédure d'adaptation de maillage décrite dans le Chapitre 2 Section 2.4. Les paramètres d'adaptation sont fixés à $\eta_{min}^{\mathbf{u}} = 0.5$ et $\eta_{max}^{\mathbf{u}} = 5$ et la procédure est déclenchée toutes les 0.1s. En tant qu'illustration, la composante z de la vorticité à $t = 5$ est représentée via la Figure 4.10, sur laquelle le maillage AMR est affiché en arrière-plan. Le nombre de cellules du maillage AMR est considérablement inférieur (environ 4 fois moins) à celui du maillage fixé, ce qui a un effet significatif sur le temps de calcul total (-75% en théorie). Plus précisément, une simulation sur la grille AMR est environ 65% moins coûteuse qu'une simulation sur maillage fixé, pour la même configuration de maillage $L_9 - L_{12}$. Cette légère perte d'accélération du calcul peut s'expliquer par le coût de la procédure d'adaptation de maillage. À titre indicatif, ce coût est compris entre 70 et 80% du coût d'une itération en temps du solveur numérique.

L'évolution en temps du coefficient de traînée C_D pour les maillages fixes et dynamiques est en bon accord avec les résultats de Ploumhans et Winckelmans [86], comme en atteste la Figure 4.11. Le coefficient de traînée oscille en raison du mouvement du

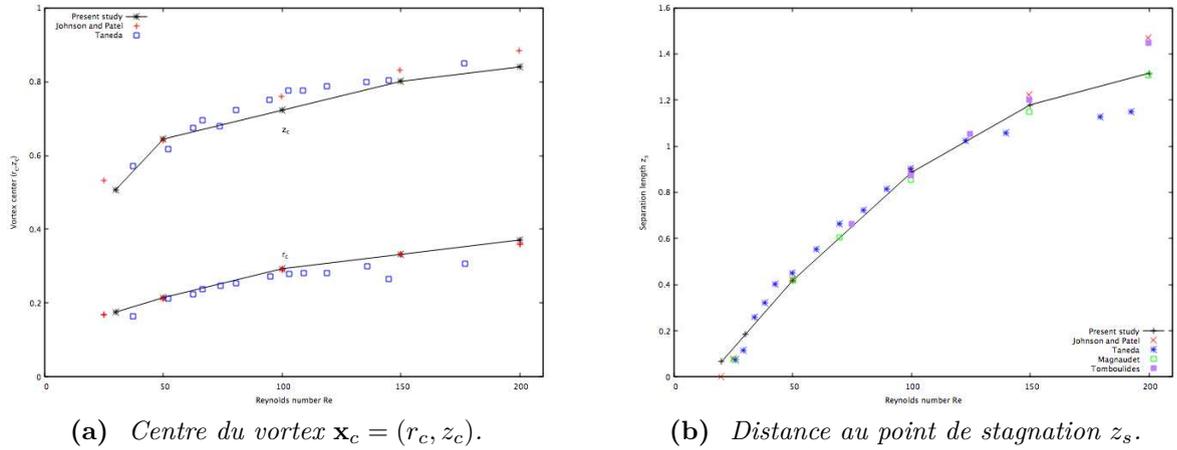


Figure 4.9 – La sphère en régime 2D axi-symétrique : caractéristiques du vortex présent en aval de la sphère en fonction du nombre de Reynolds Re .

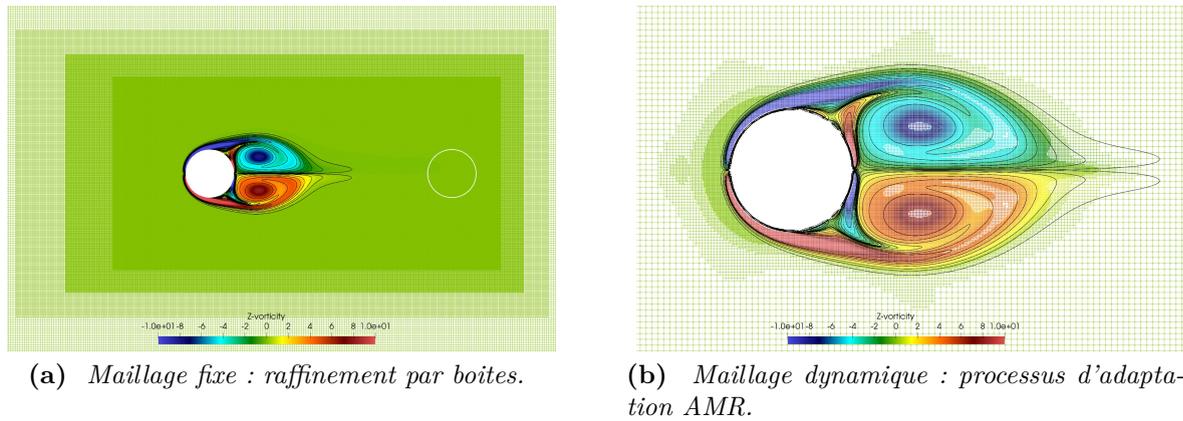
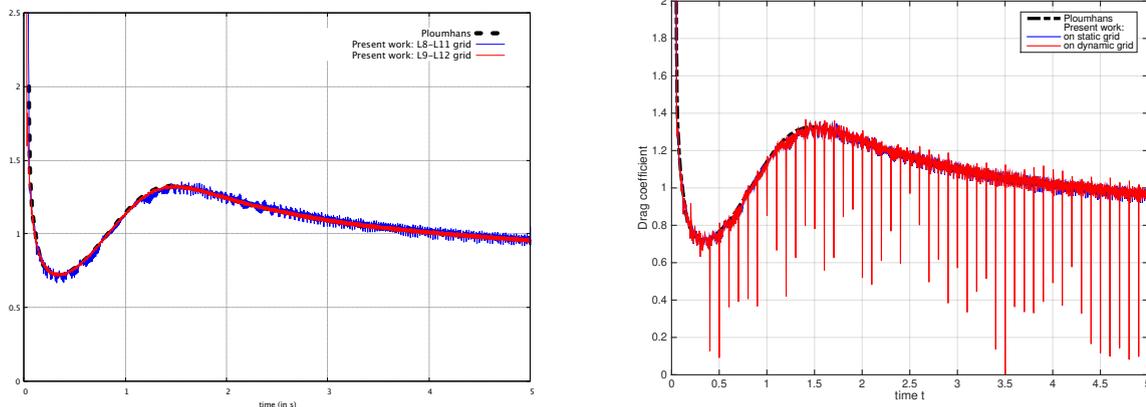


Figure 4.10 – Cylindre à vitesse constante : composante z de la vorticité ω à $t = 5$. La configuration du maillage $L_9 - L_{12}$ est visible en arrière-plan et les contours sont représentés pour $|\omega_z(\mathbf{x})| = 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$.

cylindre, mais on observe que l'amplitude des oscillations diminue de façon consistante avec le raffinement du maillage. De plus, on peut constater l'apparition périodique de pics, par le biais des maillages AMR, à chaque fois qu'une adaptation du maillage est effectuée. Ces oscillations parasites sont dues à la perturbation introduite entre deux pas de temps consécutifs. Après adaptation du maillage, les quantités sont définies sur le nouveau maillage par interpolation des quantités définies sur l'ancien maillage. Le calcul des forces hydrodynamiques est par conséquent perturbé mais la solution se re-stabilise après quelques itérations.



(a) Convergence en maillage, pour des maillages fixes.

(b) Comparaison maillage fixe VS maillage dynamique (configuration $L_9 - L_{12}$).

Figure 4.11 – *Cylindre à vitesse constante : coefficients de traînée C_D pour des maillages non uniformes.*

2.4 Sédimentation d'un cylindre

On s'intéresse maintenant à la sédimentation d'un disque, soumis à la gravité. Dans une cavité étroite contenant un fluide visqueux, un cylindre de rayon r et centré en $\mathbf{x}_c(t=0)$ est initialement au repos. Le déplacement du cylindre est dû à la force gravitationnelle, via l'accélération de la pesanteur $g = 980$. Deux cas sont ensuite étudiés, pour des valeurs différentes de densité du disque ρ_s et de viscosité du fluide μ_f . L'ensemble des valeurs utilisées pour les simulations est donné dans le Tableau 4.2.

Le canal est relativement étroit, le domaine de calcul considéré $\Omega = [-2 - \eta/2, 4 + \eta/2] \times [-\eta, 6]$ (avec $\eta = 0.1$ de sorte à ajouter une petite zone de pénalisation en bas) est donc principalement composé de zones inutiles au calcul. De ce fait, le maillage est déraffiné autant que possible à l'extérieur de la cavité. Des conditions de limites de type non-glissement sont naturellement imposées par pénalisation à gauche et à droite du canal, mais également en bas. En haut, des conditions de Neumann homogènes sont prescrites.

Paramètres		Valeurs
Fluide	Taille du canal	2×6
	ρ_f	1
	μ_f	0.01 ou 0.1
Cylindre	centre $\mathbf{x}_c(t=0)$	(1, 4)
	rayon r	1/8
	ρ_s	1.5 ou 1.25

Table 4.2 – *Sédimentation d'un cylindre : paramètres du cas test.*

Les maillages non uniformes AMR, avec adaptation dynamique, sont préférés ici. En effet, le cylindre est transporté sur toute la longueur du canal, un maillage fixe et optimisé est par conséquent difficile à définir. Les résultats qui suivent, obtenus sur des maillages AMR, sont quasiment identiques à ceux obtenus pour des maillages purement uniformes, à parité de niveau maximum L_{max} .

Le mouvement du cylindre est modélisé via les équations de Newton-Euler. Pour simplifier, on choisit de négliger la vitesse angulaire car elle influence peu le déplacement du matériau. La vitesse du disque \mathbf{u}_s est donc définie comme la vitesse de translation du centre de masse \mathbf{x}_c . Par conséquent, la vitesse du solide et la position de son centre vérifient :

$$\begin{aligned} \rho_s |\Omega_s| \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} &= \mathbf{F}_{hydro} + (\rho_f - \rho_s) |\Omega_s| \mathbf{g} \\ \frac{d\mathbf{x}_c}{dt} &= \mathbf{u}_s \end{aligned} \quad (2.6)$$

où \mathbf{F}_{hydro} est la force hydrodynamique agissant sur le cylindre, et $\mathbf{g} = (0, g)$ est la force gravitationnelle. Ces EDOs sont résolues en utilisant un schéma classique de Runge-Kutta (Heun) à l'ordre deux. Les forces \mathbf{F}_{hydro} sont calculées en utilisant la formulation lagrangienne (2.1), car cette dernière formulation produit un peu moins d'oscillations, comparée à la formulation eulérienne (2.5). Aucun modèle de collision n'est utilisé dans ce solveur. Une réduction du pas de temps Δt est nécessaire et améliore considérablement la précision numérique lorsque le cylindre se rapproche du mur. Pour cette raison, le nombre CFL est fixé à $cfl = 0.1$.

Cas 1 : $\rho_s = 1.5$ et $\mu_f = 0.01$.

Ce cas a notamment été étudié par [Bergmann et al.](#) [10] et [Coquerelle et Cottet](#) [21]. La Figure 4.12 montre la composante z de la vorticité ainsi que le maillage AMR, à certains instants $t \in \{0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$. Après collision, le cylindre reste relativement stable malgré les fortes instabilités numériques introduites lors du calcul des forces. Les résultats présentés sur la Figure 4.13 sont en accord avec les résultats obtenus dans la littérature. Concernant la Figure 4.13b, les deux pics de vitesse observés en $x = \pm r$ sont issus de l'utilisation de la méthode de pénalisation d'ordre deux.

Cas 2 : $\rho_s = 1.25$ et $\mu_f = 0.1$.

Dans ce cas, le cylindre tombe plus lentement que dans le cas 1, notamment parce que le fluide est beaucoup plus visqueux. On compare les résultats obtenus sur maillage AMR à ceux de [Glowinski et al.](#) [43] et de [Lee et al.](#) [61], voir Figure 4.14. On peut observer que la vitesse maximale de chute est légèrement surestimée après un certain temps mais reste raisonnable. En pratique, on a pu vérifier que, dans la limite où l'accélération du corps tend à 0, à savoir $d\mathbf{u}_s/dt \rightarrow 0$, la force de traînée déterminée par le calcul fluctue bien autour de $(\rho_f - \rho_s) |\Omega_s| g$. Ceci est bien cohérent avec l'équation (2.6).

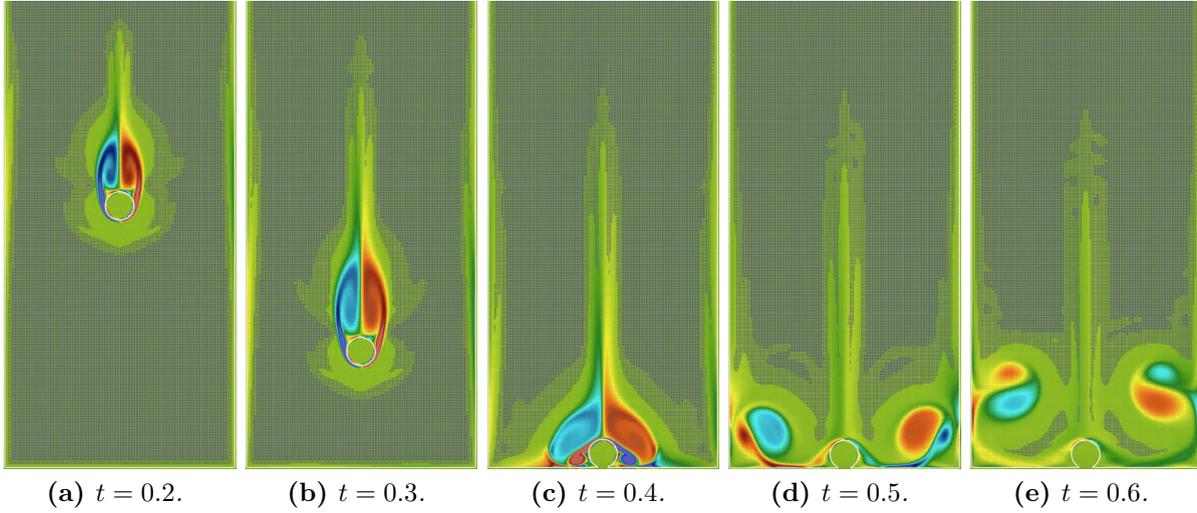
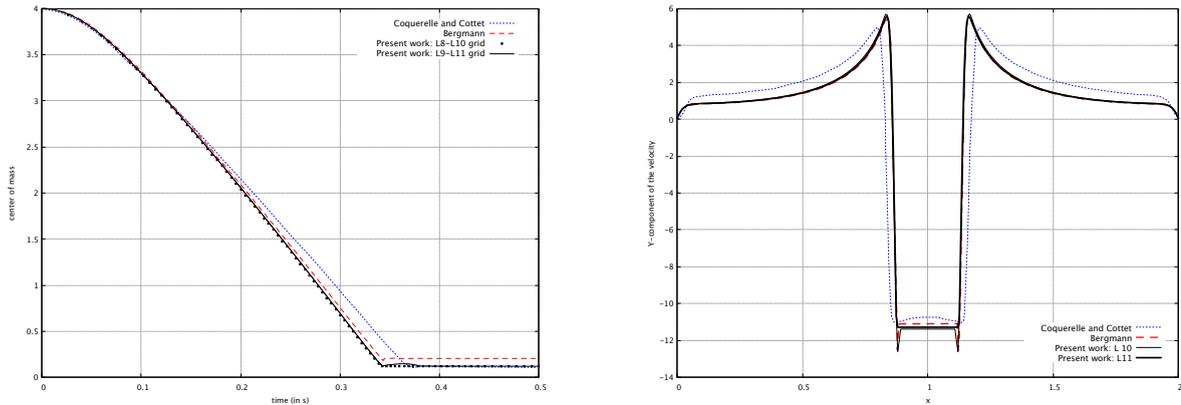


Figure 4.12 – *Sédimentation d’un cylindre - Cas 1 : composante z de la vorticité pour différents instants. Le maillage AMR $L_8 - L_{10}$ est visible en arrière-plan.*



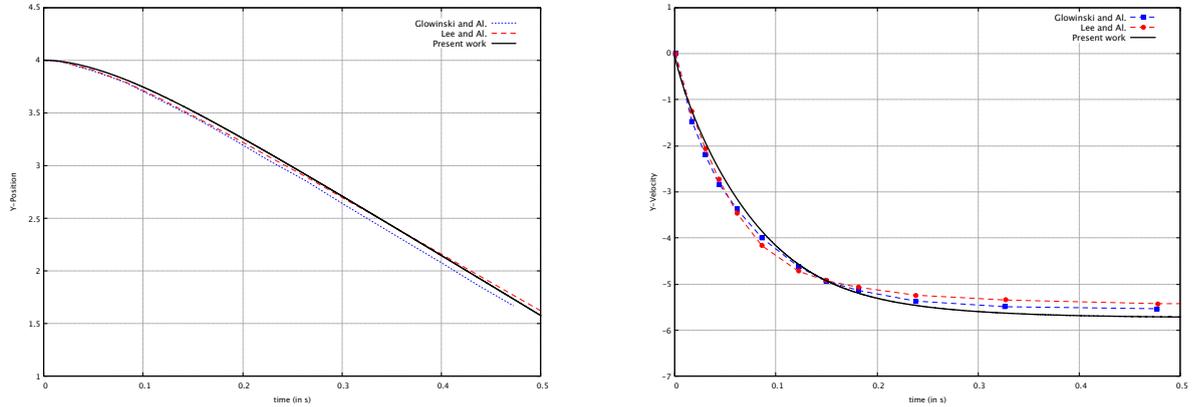
(a) *Evolution en temps de la composante y du centre de masse \mathbf{x}_c .*

(b) *Profil de la vitesse verticale (u_y) le long de l’axe $y = y_c$ au temps $t = 0.1$.*

Figure 4.13 – *Sédimentation d’un cylindre - Cas 1 : validation par comparaison avec les études [10] et [21].*

3 Problèmes d’interaction fluide-structure (FSI)

En premier lieu, une validation numérique de notre méthode est effectuée à partir d’un cas test de référence, pour lequel un écoulement fluide conduit à la déformation d’une structures. Par la suite, la déformation induite par le déplacement d’un corps immergé à l’intérieur d’un matériau est étudié afin d’estimer quel est l’impact de l’AMR sur la précision numérique de la méthode. Enfin, un exemple introductif à l’application bio-médicale (Section 4) est proposé pour analyser le comportement de fines membranes



(a) Evolution en temps de la composante y du centre de masse \mathbf{x}_c .

(b) Evolution de la vitesse verticale $(u_y)_s$ du cylindre.

Figure 4.14 – Sédimentation d'un cylindre - Cas 2 : validation par comparaison avec les études [43] et [61].

hyper-élastiques, mises en mouvement par un support oscillant. L'écoulement généré pour des configurations 2D et 2D axi-symétrique est également présenté.

3.1 Validation : structure élastique immergée dans une cavité entraînée

Dans le but de valider la méthode numérique, on étudie la déformation d'un cylindre immergé dans une cavité entraînée. Ce cas test a été analysé à plusieurs reprises, dans les contextes lagrangien et eulérien, par [Zhao et al. \[120\]](#), [Sugiyama et al. \[103\]](#) ou [Deborde et al. \[28\]](#). Dans une cavité $\Omega = [0, 1]^2$, un cylindre élastique est immergé dans un fluide de densité $\rho_f = 1$ et de viscosité $\mu_f = 10^{-2}$. Initialement, le cylindre est centré au point $\mathbf{x}_c(t = 0) = (0.6, 0.5)^T$ et son diamètre est de 0.4. La Figure 4.15 montre la mise en oeuvre de la simulation. Les propriétés de la structure élastique et du fluide sont identiques, autrement dit, on a $\rho_e = \rho_f$ et $\mu_e = \mu_f$. La déformation du matériau néo-hookéen ($c_2 = 0$) est testée pour deux modules de cisaillement différents afin de considérer à la fois des matériaux peu rigide ($G = 0.1$) et très rigide ($G = 10$).

Au temps $t = 0$, le fluide et la structure sont au repos. L'écoulement est alors généré en imposant une vitesse horizontale $\mathbf{u} = (U_\infty, 0)^T$ sur la paroi supérieure. Ici, on choisit $U_\infty = 1$. Sur les autres murs, des conditions limites de non-glissement sont imposées. Pour valider le modèle d'interaction fluide-structure à un seul milieu, les simulations sont effectuées sur des maillages uniformes. La fonction level set ϕ et les caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} sont mises à jour toutes les 0.01s, jusqu'à une distance maximale de $d_{max} = 0.2$.

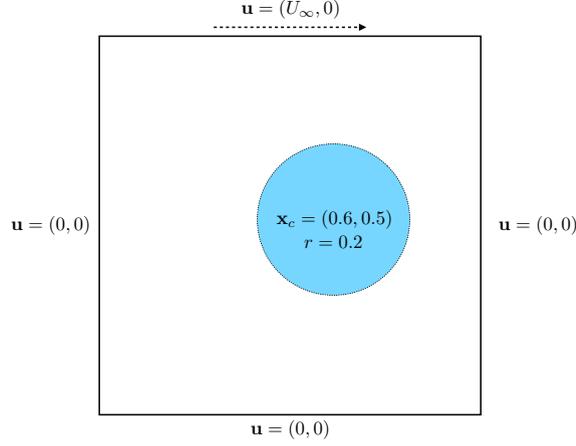


Figure 4.15 – *Structure élastique immergée dans une cavité entraînée : configuration de simulation.*

Matériau peu rigide ($G = 0.1$).

La position de l'interface est calculée pour différents instants, à savoir $t = 1.17, 2.34, 3.52, 4.69, 5.86, 7.03$ et 8.20 . En tant qu'illustration, la composante y de la vitesse et la composante z de la vorticité au temps $t = 4.69$ sont présentées sur la Figure 4.16. Comme l'interface $\Gamma_e(t)$ n'est connue qu'implicitement, on reconstruit des marqueurs sur l'interface à partir de la fonction level-set. Pour ce faire, il faut définir la projection orthogonale sur $\Gamma_e(t)$ pour toutes les cellules situées dans le voisinage de l'interface, en utilisant la valeur de la fonction level-set et le vecteur normal $\mathbf{n} = \nabla\phi/|\nabla\phi|$. Cette approximation à l'ordre trois de la projection orthogonale est réalisée par une reconstruction bi-quadratique à partir du stencil compact de la cellule. Pour plus de détails, cette reconstruction de l'interface est expliquée dans le Chapitre 2 Section 3.1. Les interfaces obtenues au cours de la simulation sont présentées sur la Figure 4.17. Les résultats obtenus coïncident bien avec ceux reportés par [Zhao et al. \[120\]](#).

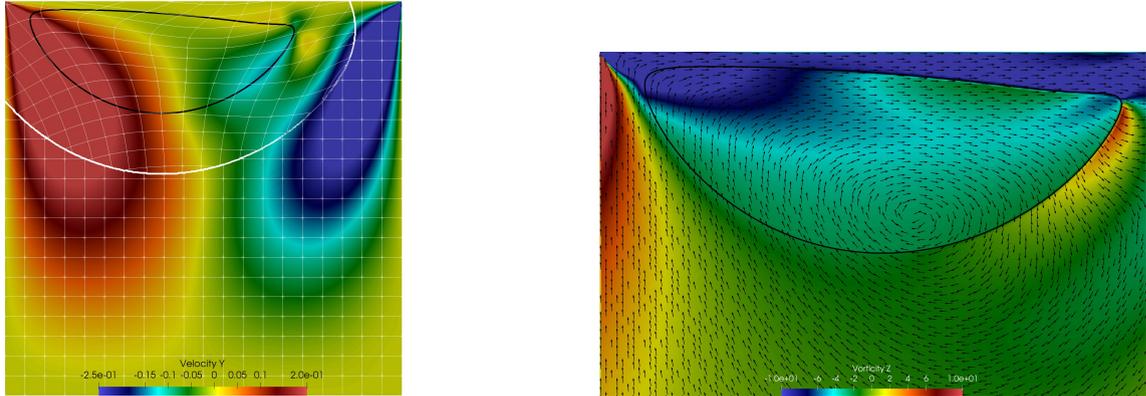
De plus, la Figure 4.18 décrit l'évolution temporelle du centroïde (ou centre de masse) $\mathbf{x}_c(t)$ du matériau. La position du centroïde est calculée via la formule :

$$\mathbf{x}_c(t) \approx \frac{\sum_{i=1}^{N_{cells}} \widetilde{\Omega}_i^e(t) \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^{N_{cells}} \widetilde{\Omega}_i^e(t)}, \quad (3.1)$$

où $\widetilde{\Omega}_i^e$ est une approximation de la fraction volumique de la structure dans la cellule Ω_i , autrement dit : $\widetilde{\Omega}_i^e = \chi_e(\phi_i)|\Omega_i|$. La fonction de Heaviside régularisée χ_e est calculée comme pour le tenseur de contrainte de couplage. La courbe obtenue sur des maillages uniformes est en accord avec les résultats de [Sugiyama et al. \[103\]](#) et [Deborde et al. \[28\]](#).

Matériau relativement rigide ($G = 10$).

De manière analogue, on évalue l'efficacité de la méthode numérique pour décrire la dé-



(a) Composante y de la vitesse. En blanc, les contours des caractéristiques rétrogrades.

(b) Composante z de la vorticité. Les flèches correspondent au champ de vitesse.

Figure 4.16 – Structure élastique immergée dans une cavité entraînée ($G = 0.1$) : aperçus de la vitesse et de la vorticité au temps $t = 4.69$.

formation de matériaux assez rigides. Comme dans le paragraphe précédent, la position de l'interface de la structure est calculée pour différents instants, à savoir $t = 2.34, 4.63$ et 7.03 . Une comparaison avec les travaux de [Zhao et al. \[120\]](#) est effectuée, comme l'atteste la Figure 4.19. La déformation et le mouvement de la structure rigide obtenus ici sont en accord avec la littérature. On peut constater de plus que la convergence en maillage est correctement atteinte pour ces deux niveaux de raffinement L_{max} .

L'un des principaux défauts des méthodes level set demeure la non conservation de la masse de chaque phase au cours de la simulation, une condition essentielle pour la modélisation numérique de problèmes multi-physiques [101]. Pour quantifier la conservation de masse, une estimation du volume de la structure est donnée par :

$$|\Omega_e(t)| \approx \sum_{i=1}^{N_{cells}} \widetilde{\Omega}_i^e(t) \quad (3.2)$$

en utilisant la fonction Heaviside régularisée χ_e . Pour les deux rigidités, la variation relative de volume est reportée sur la Figure 4.20. Malgré la grande déformation de la structure peu rigide ($G = 0.1$), la conservation de la masse est plutôt bien respectée. En effet, pour le maillage le plus fin L_{10} , l'erreur relative reste toujours en dessous de 0.02% au cours de la simulation, ce qui est inférieur aux résultats obtenus par [Nishiguchi et al. \[75\]](#). Dans le cas plus rigide ($G = 10$), la déformation est très faible. On aurait pu s'attendre à ce que la perte de volume soit beaucoup moins importante que dans le premier cas, mais leurs ordres de grandeur sont les mêmes. Cette perte de volume est certainement due aux instabilités induites proche de l'interface, qui peuvent devenir plus importantes pour des problèmes rigides. Cependant, cette erreur reste vraiment limitée et diminue avec une précision d'ordre un.

On met également en avant l'importance de l'algorithme d'extrapolation des carac-

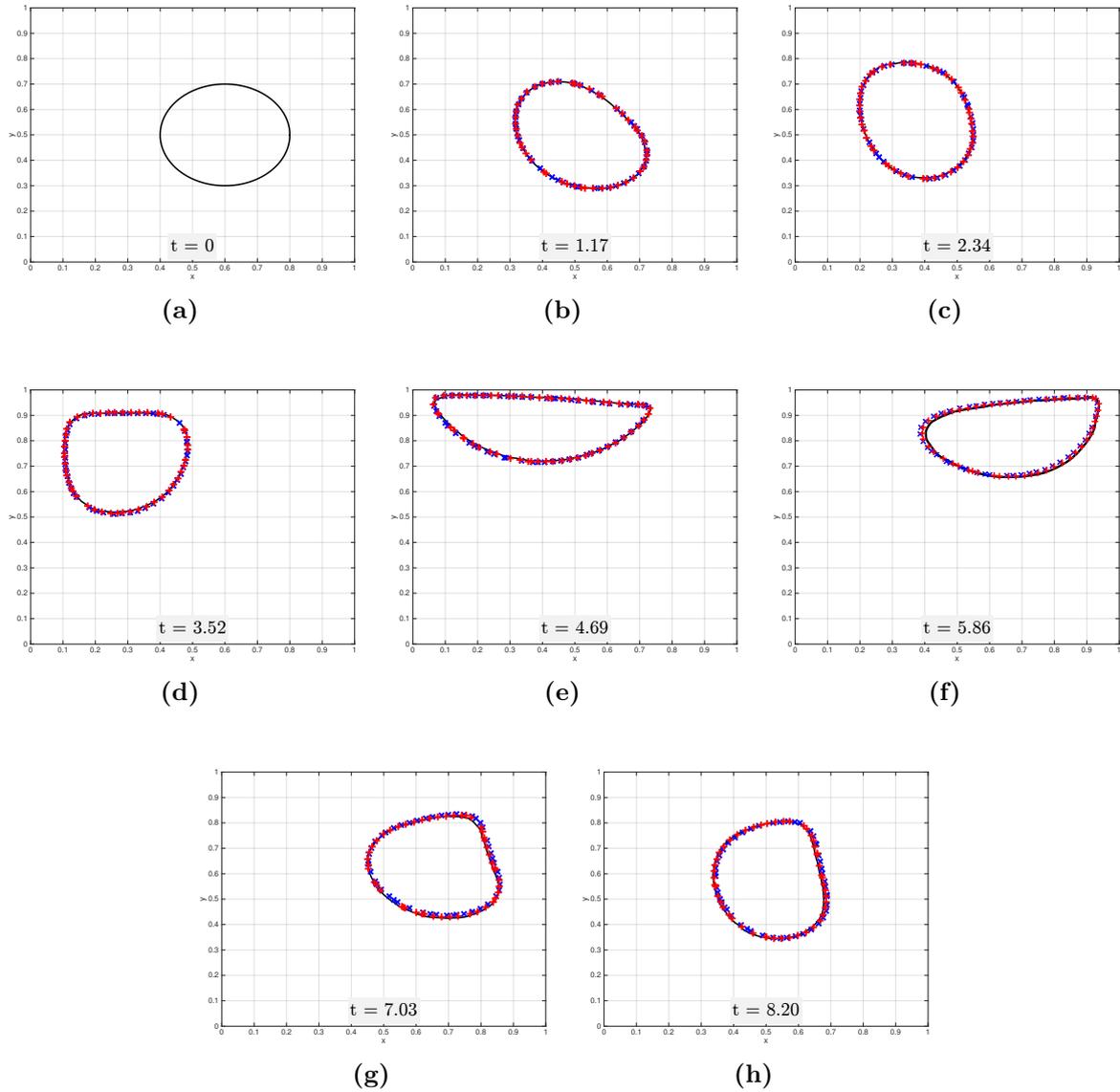


Figure 4.17 – *Structure élastique immergée dans une cavité entraînée ($G = 0.1$) : position de l'interface $\Gamma_e(t)$ pour différents instants t . La comparaison est réalisée avec les résultats de [120] (ligne noire). Les marqueurs $+$ et \times font référence aux résultats obtenus sur les maillages L_9 and L_{10} respectivement.*

téristiques rétrogrades, présenté dans le Chapitre 2 Section 3.2. La Figure 4.21 montre en particulier les contours des caractéristiques rétrogrades à $t = 4.25s$ résultant d'une simulation sans extrapolation des caractéristiques \mathbf{Y} . Pour les cas faiblement rigide et assez rigide, la régularité de ces fonctions de mapping est complètement perdue. Si les contours restent bien ordonnés à l'intérieur de la structure élastique, ce n'est pas le cas

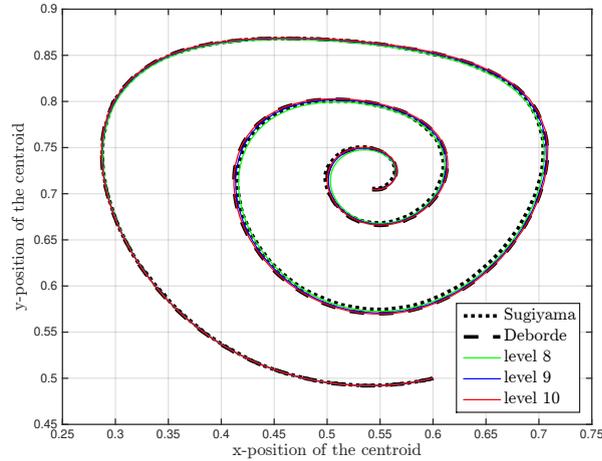


Figure 4.18 – Structure élastique immergée dans une cavité entraînée ($G = 0.1$) : évolution du centre de masse jusqu'au temps $t = 20s$. Les simulations sont effectuées sur les maillages uniformes L_8 à L_{10} .

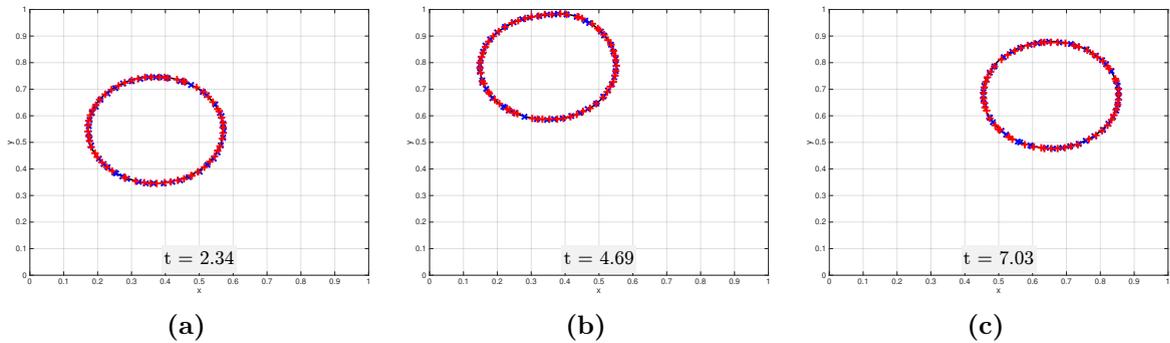


Figure 4.19 – Structure élastique immergée dans une cavité entraînée ($G = 10$) : position de l'interface $\Gamma_e(t)$ pour différents instants t . La comparaison est réalisée avec les résultats de [120] (ligne noire). Les marqueurs $+$ et \times font référence aux résultats obtenus sur les maillages L_9 et L_{10} respectivement.

dans le fluide. Cette perte de régularité provoque une perte évidente de précision, qui peut même se traduire par un calcul instable au long terme. En effet, le tenseur des contraintes connaît alors une croissance exponentielle et irréversible au voisinage de l'interface, plus particulièrement pour des cas très rigides $G \gg 1$.

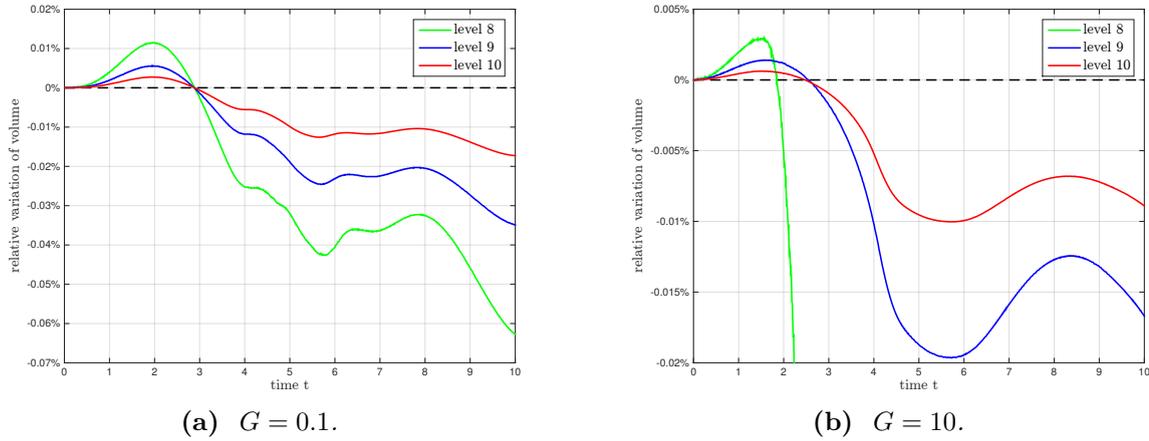


Figure 4.20 – Structure élastique immergée dans une cavité entraînée : estimation de la variation relative de masse au cours du temps.

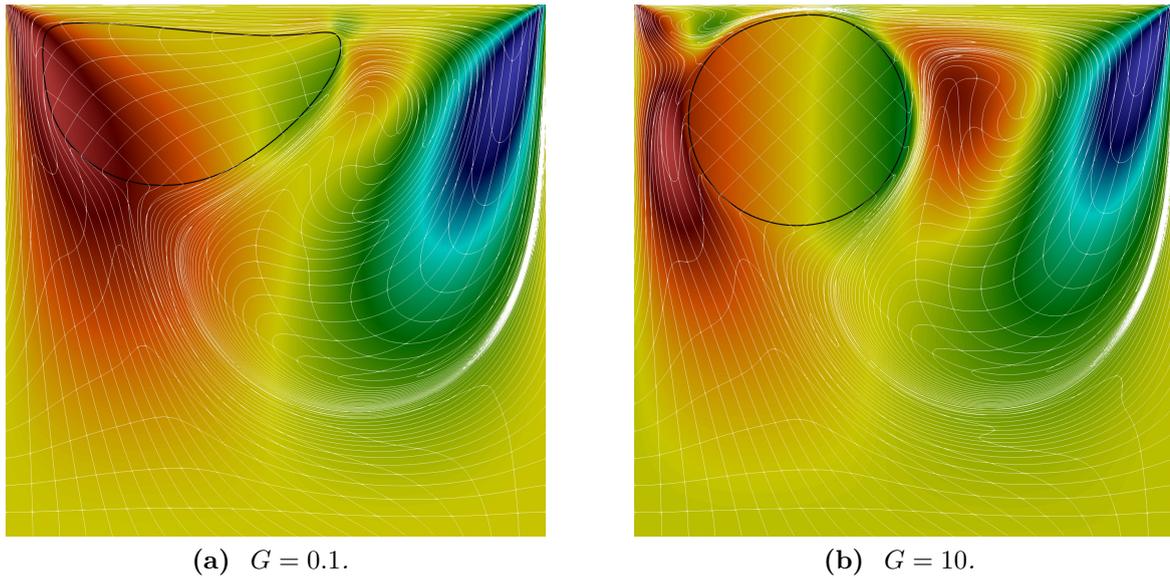


Figure 4.21 – Structure élastique immergée dans une cavité entraînée : vitesse \mathbf{u}_y et contours des caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} à $t = 4.25s$ dans le cas où l’algorithme d’extrapolation n’est pas activé.

3.2 Déformation induite par un corps immergé tournant autour d’un axe

On s’intéresse désormais à la simulation de la déformation élastique induite par un déplacement rigide interne. Un cylindre est immergé à l’intérieur de cette structure et se déplace

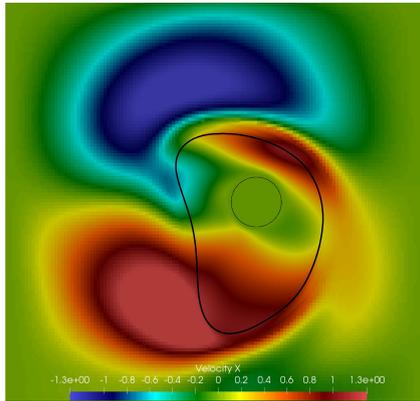
autour d'un axe. Dans ce cas de figure, on dresse une comparaison entre les simulations réalisées sur un maillage uniforme et sur des maillages non uniformes avec adaptation dynamique, en termes de précision et de coût de calcul.

Le cas test est configuré de manière similaire à la section précédente. Dans une cavité $\Omega = [0, 1]^2$, un cylindre élastique est immergé dans un fluide visqueux, comme représenté sur la Figure 4.15. Les propriétés du fluide et de la structure sont définies de manière identique à celles de la Section 3.1.

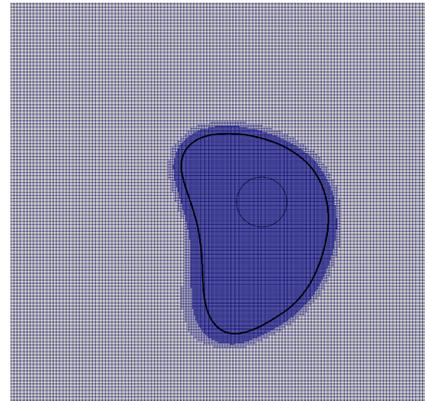
Le cylindre déformable est défini comme un matériau néo-Hookean de rigidité modérée $G = 1$. Au départ, le fluide et la structure sont au repos et la paroi supérieure reste immobile ($U_\infty = 0$) pendant la simulation. A l'intérieur du cylindre élastique, un petit cylindre rigide, de diamètre 0.12, est immergé. Son mouvement est imposé, la trajectoire du cylindre rigide décrit un cercle autour du centre du domaine, avec un rayon $r_s = 0.15$. La vitesse imposée \mathbf{u}_s est définie analytiquement comme :

$$\mathbf{u}_s(t) = \begin{cases} \pi r_s t \left(-\sin(\pi t^2/2), \cos(\pi t^2/2) \right)^T & \text{if } t < 2, \\ 2\pi r_s \left(-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t) \right)^T & \text{if } t \geq 2 \end{cases}$$

Jusqu'à $t = 2$, une vitesse transitoire du cylindre rigide est imposée pour éviter les éventuels effets de compression. À partir de $t \geq 2$, le régime périodique permanent est alors atteint.



(a) Composante x de la vitesse.



(b) Maillage AMR $L_7 - L_9$.

Figure 4.22 – Déformation induite par un corps immergé tournant autour d'un axe : aperçu de la vitesse et du maillage AMR à $t = 5s$. Les lignes noires fine et épaisse représentent respectivement les interfaces Γ_s et Γ_e .

Les simulations sont effectuées d'une part sur le maillage uniforme L_9 , et d'autre part sur des maillages non uniformes avec adaptation dynamique. La Figure 4.22 présente la composante x de la vitesse au temps $t = 5$ obtenue sur le maillage AMR avec 2 niveaux

de déraffinement (configuration $L_7 - L_9$). Afin de comparer convenablement les résultats obtenus sur chaque type de maillage, la même résolution de maillage est imposée à l'interface Γ_e afin de garantir une précision comparable au voisinage de cette interface. Durant la procédure d'adaptation de maillage, seul le critère level set est utilisé ici pour définir le niveau de raffinement de chaque cellule. Pour ces simulations, la distance minimum à partir de laquelle le maillage peut être déraffiné est fixée à $10h_{min}$ et le processus d'adaptation est activé toutes les 0.05s.

Pour évaluer l'impact du déraffinement sur la précision globale, les simulations sont effectuées pour différents nombres de déraffinement ($L_{max} - L_{min}$), allant de 1 à 3. Pour comparer les résultats, la position de l'interface est examinée pour les quatre simulations. Les positions de Γ_e aux temps $t = 2$ et $t = 5$ sont représentées sur la Figure 4.23. Malgré la grande différence en ce qui concerne le nombre de points de maillage, les déformations restent assez similaires. De plus, comme le montre la Figure 4.24, les variations relatives de la masse du matériau restent du même ordre de grandeur dans tous les cas. Par conséquent, on peut conclure que le déraffinement a un impact non négligeable sur la solution mais qu'il reste très limité tant que le nombre de déraffinement n'est pas trop élevé.

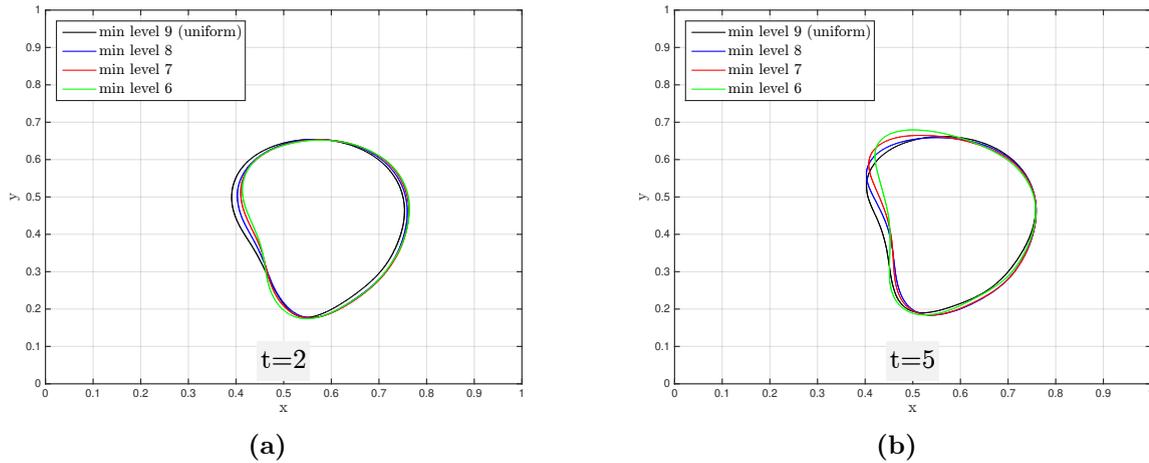


Figure 4.23 – Déformation induite par un corps immergé tournant autour d'un axe : position de l'interface Γ_e aux temps $t = 2s$ (à gauche) et $t = 5s$ (à droite). La comparaison est réalisée pour des maillages AMR, à parité de niveau $L_{max} = 9$ proche de l'interface.

Toutefois, il existe une différence significative entre les quatre simulations du point de vue des temps de calcul. Le nombre moyen de cellules du maillage N_{cells} et le temps de calcul de chaque simulation sont reportés dans le Tableau 4.3. Les temps de calcul présentés ici ont été obtenus pour un même nombre de processeurs $N_p = 64$. Pour mesurer l'efficacité de la méthode numérique, les gains par rapport à la simulation sur maillage uniforme sont calculés. On observe que le coût d'une simulation sur maillage AMR est considérablement réduit. La corrélation entre N_{cells} et le temps de calcul est de plus intéressante puisque les

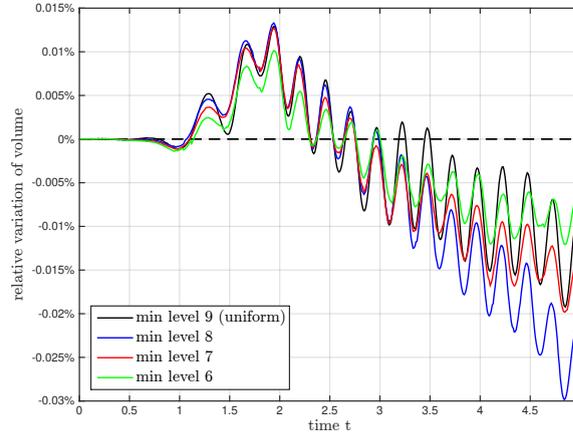


Figure 4.24 – Déformation induite par un corps immergé tournant autour d'un axe : estimation de la variation relative de la masse au cours du temps. La comparaison est réalisée pour des maillages AMR, à parité de niveau $L_{max} = 9$ proche de l'interface.

gains sont presque identiques, ce qui atteste de la bonne scalabilité du code de calcul. La différence entre les gains s'explique par le coût important des adaptations de maillage et des communications inter-processeurs qui en résultent.

niveau minimum L_{min}	nombre moyen N_{cells}	gain	temps de calcul (in s)	gain
9 (uniforme)	262144	/	13406	/
8	86909	-67%	5618	-58%
7	43016	-84%	3432	-74%
6	31882	-88%	3015	-78%

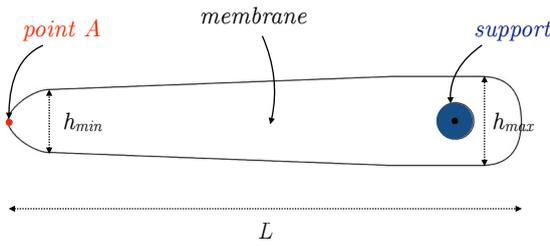
Table 4.3 – Déformation induite par un corps immergé tournant autour d'un axe : coûts de calcul des simulations effectuées sur les différents maillages AMR. Les gains sont calculés par rapport à la simulation sur le maillage uniforme L_9 . Les résultats ont été obtenus pour $N_p = 64$ processeurs.

3.3 Membranes oscillantes

La simulation du comportement de fines membranes hyper-élastiques, pour lesquelles le ratio longueur/épaisseur est assez élevé, est un réel challenge. Pour garantir une résolution précise aux extrémités de cette membrane, il faut pour cela construire un maillage suffisamment fin. Pour des méthodes cartésiennes purement uniformes, la densité du maillage peut devenir excessivement élevée, même dans les zones où la solution reste très régulière. L'utilisation de maillages cartésiens hiérarchiques prend de ce fait tout son sens pour ce

type de problèmes d'interactions.

Le domaine de calcul $\Omega = [0, 4] \times [-2, 2]$ cm est rempli d'eau ($\rho_f = 10^3$ kg/m³ et $\mu_f = 10^{-3}$ Pa.s), initialement au repos. Dans ce domaine, une membrane de type élastomère est immergée comme le décrit la Figure 4.25a. Elle possède une épaisseur non constante, et le ratio longueur/épaisseur minimale est supérieur de l'ordre de 8 dans notre cas. La membrane est mise en mouvement par un support rigide, introduit à l'intérieur, proche de son extrémité la plus épaisse. Ce support décrit un mouvement imposé oscillatoire de haut en bas, avec une amplitude et une fréquence données. Le support est activé de manière transitoire de sorte à limiter les effets de compression. Les propriétés de la membrane et de son support sont reportées dans le Tableau 4.25b. Ce problème d'interaction fluide-structure est hautement rigide si on se réfère au ratio $c_{wave}/c_{support,max} \approx 45$, où c_{wave} et $c_{support,max}$ désignent respectivement la célérité des ondes élastiques et la célérité maximale du support.



(a) Schématisation de la membrane.

Paramètres		Valeurs
Membrane	G	1 MPa
	ρ_e	ρ_f
	μ_e	μ_f
	longueur L	1.95 cm
	épaisseur h_{min}	2.4 mm
	épaisseur h_{max}	3.4 mm
Support	point $A(t=0)$	(0.005, 0)
	centre	(0.022, 0)
	rayon	0.7 mm
	fréquence f	100 Hz
	amplitude	2 mm

(b) Propriétés des solides.

Figure 4.25 – Membranes oscillantes : configuration et propriétés de la membrane et de son support.

Le fluide, la membrane et le support sont initialement au repos. Une condition aux limites de type symétrie est imposée à gauche et des conditions limites de type non glissement sont choisies pour les autres bords du domaine de calcul. Les simulations sont effectuées sur des maillages AMR, avec adaptation dynamique de maillage basée sur les deux critères d'adaptation level set et hessienne de la vitesse. Les paramètres utilisés pour ce dernier critère sont $\eta_{min}^u = 10^5$ et $\eta_{max}^u = 10^6$. Le niveau de raffinement du maillage uniforme initial est fixé à $L_{max} = 9$ de sorte à assurer une bonne résolution à l'intérieur de la membrane (au moins 20 cellules dans l'épaisseur minimale de la membrane). Le niveau minimal du maillage est fixé à $L_{min} = 6$. L'adaptation du maillage est déclenchée 100 fois par période d'oscillation $T = 1/f$. La fonction level-set et les caractéristiques rétrogrades sont mises à jour, quant à elles, 200 fois par période.

Deux types de simulations sont réalisées, dans un premier temps pour une configuration 2D et dans un second temps pour une configuration 2D axi-symétrique. Dans le premier cas, la membrane s'apparente à un drapeau, c'est-à-dire à une fine plaque, mise en

mouvement par un cylindre rigide. Dans le second cas, la membrane représente un disque troué en son centre, excité par un anneau placé à son extrémité extérieure, c'est-à-dire la plus éloignée de l'axe de symétrie. La composante z de la vorticité ainsi que le maillage AMR (configuration $L_7 - L_9$) utilisé sont présentés pour différents instants après trois périodes d'oscillations T . Les Figures 4.26 et 4.27 font référence aux configurations 2D et 2D axi-symétrique respectivement. Ici, on a recours au modèle néo-hookéen ($c_1 = G/2$, $c_2 = 0$). On peut constater que la déformation de la membrane ainsi que la quantité de fluide entrain  e sont *a fortiori* bien plus grandes dans le cas axi-symétrique. Le disque trou   en son centre reproduit un débit anti-symétrique pulsatile vers le haut et le bas.

On se place désormais dans la configuration axi-symétrique exclusivement pour regarder l'influence d'un paramètre de calibration, noté α , du modèle Mooney-Rivlin à deux paramètres. Comme évoqué dans le Chapitre 1 Section 2.4, pour des questions de consistance du modèle dans la limite de faibles déformations, les deux paramètres c_1 et c_2 sont reliés au module de cisaillement :

$$G = 2(c_1 + c_2).$$

En pratique, ces deux paramètres, qui sont relatifs à un matériau donné, sont déterminés de manière empirique à partir de données expérimentales. Ces données sont généralement obtenues par l'intermédiaire de tests élémentaires tels que la traction, l'extension uni-axiale et bi-axiale ou encore le cisaillement. Pour tester différentes valeurs de paramètres, c_1 et c_2 sont définis ici comme :

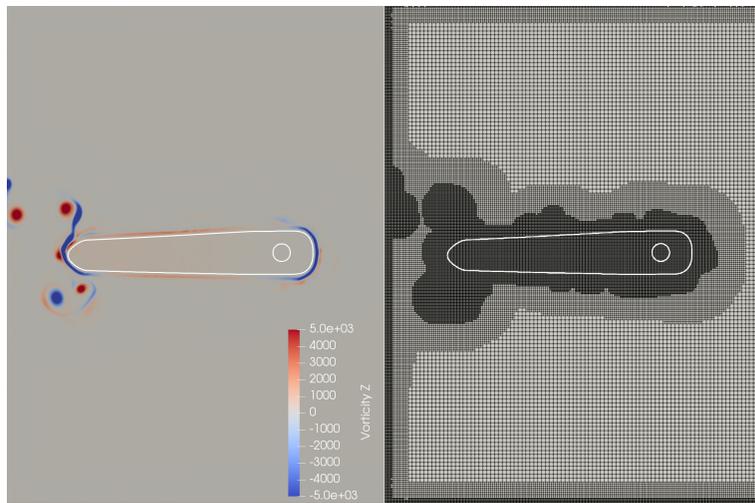
$$c_1 = \frac{\alpha}{2}G \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{1 - \alpha}{2}G. \quad (3.3)$$

Les simulations sont effectuées pour trois valeurs de α , à savoir $\alpha = 1$ (coincide avec le modèle néo-hookéen), $\alpha = 1/2$ et $\alpha = 0$. Le déplacement dans chaque direction (radiale et axiale) d'un point de référence A situé au bout de la membrane est suivi de manière lagrangienne au cours du temps pour les trois simulations. Ce point A correspond au point où la courbure de l'interface Γ_e est la plus forte. Les résultats sont présentés sur la Figure 4.28.

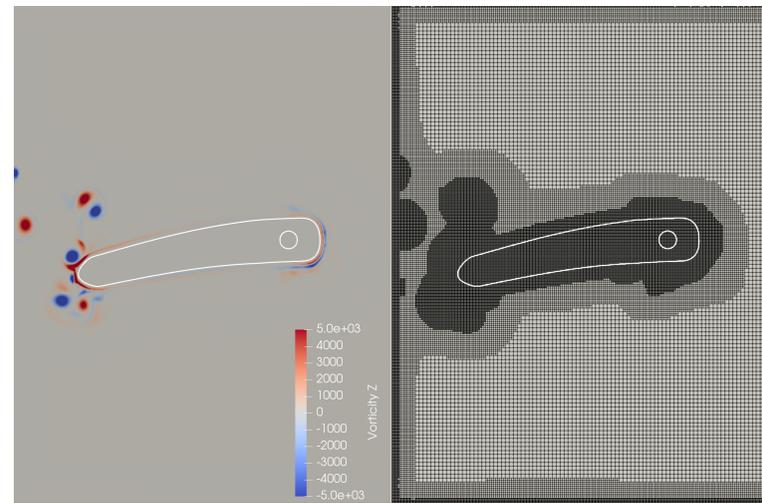
On peut observer qu'à partir de la troisième période, le déplacement du point de référence est périodique et d'amplitude quasi constante. Le modèle néo-hookéen conduit à une amplitude de déformation plus faible dans la direction axiale et par conséquent plus grande dans la direction radiale.

4 Application : simulation d'un écoulement dans une pompe cardiaque

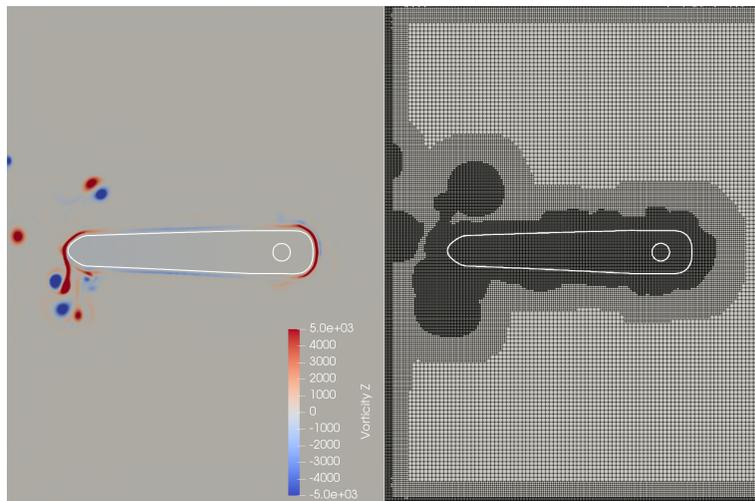
Comme énoncé en introduction, la méthode numérique est appliquée à un problème bio-médical d'interaction fluide-structure. Ce travail de thèse, initié en collaboration avec



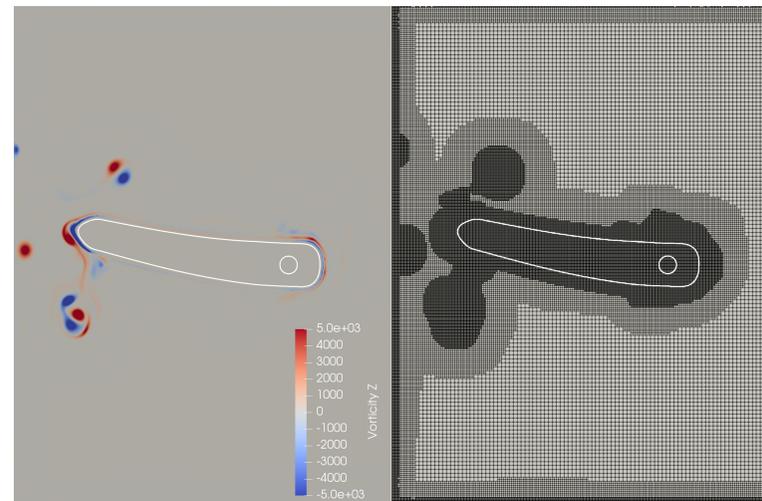
(a) $t = 3T$.



(b) $t = 3.25T$.



(c) $t = 3.5T$.



(d) $t = 3.75T$.

Figure 4.26 – Membrane oscillante 2D : composante z de la vorticité et maillage AMR.

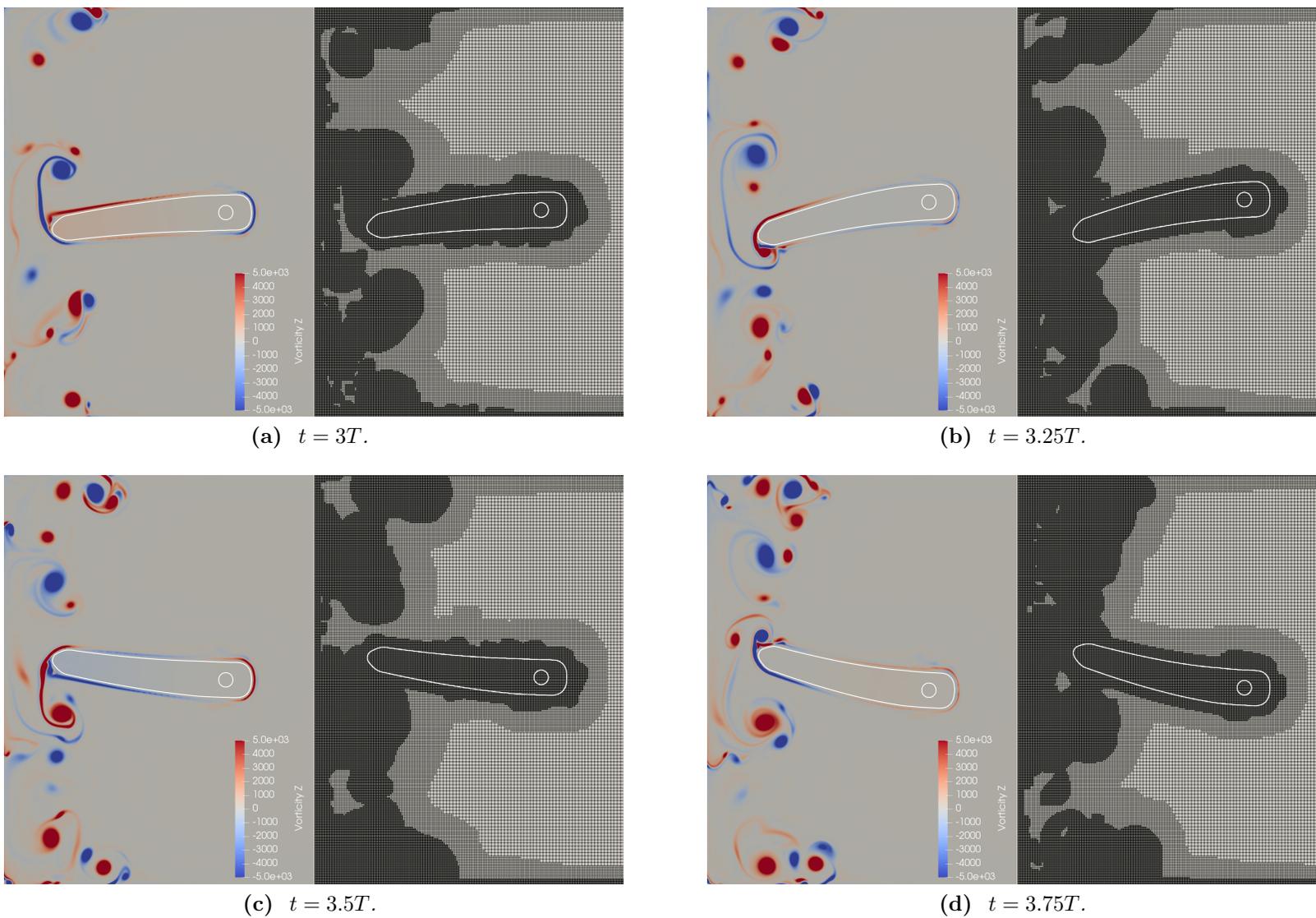


Figure 4.27 – Membrane oscillante 2D axi-symétrique : composante z de la vorticité et maillage AMR.

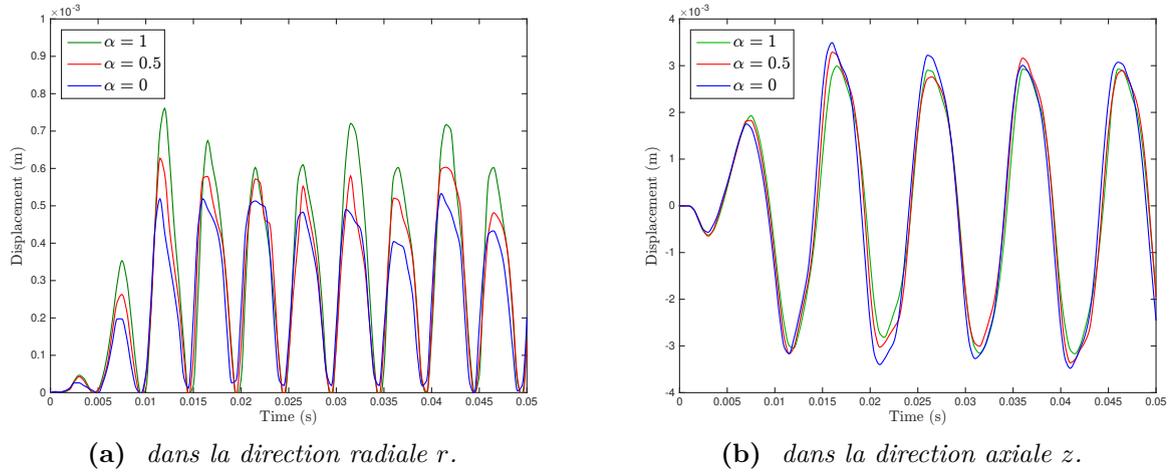


Figure 4.28 – Membrane oscillante 2D axi-symétrique : déplacement du point de référence A au cours du temps dans les deux directions pour différentes valeurs de α .

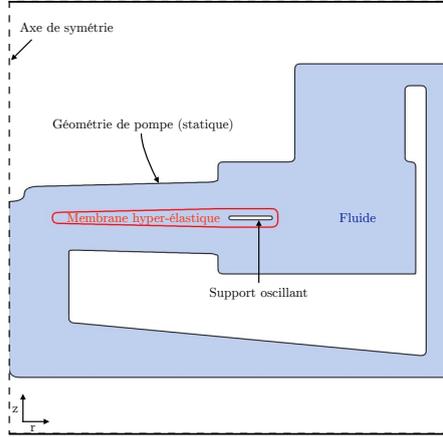
la société CorWave SA¹, est dédié à la simulation d'un écoulement sanguin dans une géométrie de pompe cardiaque, généré par une membrane oscillante de type élastomère. Grâce à cette technologie de membrane ondulatoire, le dispositif d'assistance du ventricule gauche (LVAD) permet de rétablir un flux sanguin tout en préservant une pulsatilité, contrairement aux pompes rotatives à flux continu (de type turbines) pré-existant sur le marché, qui fournissent une pulsatilité limitée et artificielle. Son fonctionnement se rapproche par conséquent plus de celui du coeur humain, puisqu'il peut recréer fidèlement les phases d'éjection et de remplissage (systole et diastole). Dans le cadre de l'optimisation d'un tel dispositif, un objectif principal est de déterminer le ou les paramètres impactants du dispositif, qui permettent de limiter au maximum les dommages infligés au sang, tout en reproduisant un débit sanguin cible.

En tant que preuve du concept, une simulation préliminaire du dispositif LVAD de CorWave a été effectuée au sein de l'équipe de recherche par Bergmann (voir la Figure 1 en introduction). Les résultats ont été obtenus sur maillage cartésien uniforme via le code NaSCar présenté dans [10]. La méthode numérique développée est utilisée pour simuler un écoulement dans ce type de dispositif LVAD, en configuration 2D axi-symétrique. Le dispositif étant proche d'une géométrie cylindrique, que ce soit pour la membrane ou la structure interne de la pompe, et pour le régime de viscosité mis en jeu, une simulation 2D axi-symétrique représente une bonne approximation du phénomène 3D.

À l'intérieur d'un domaine 2D axi-symétrique $\Omega = [0, 4] \times [-2, 2]$ cm est défini un circuit fermé dans lequel un fluide peut circuler, de manière à imiter la géométrie LVAD de CorWave. La Figure 4.29a illustre le dispositif utilisé pour nos simulations. La mise en

1. <https://www.corwave.com/>

4. APPLICATION : SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT DANS UNE POMPE CARDIAQUE



(a) Schématisation de la géométrie de pompe.

	Paramètres	Valeurs
Membrane	G	1 MPa
	ρ_e	ρ_f
	μ_e	μ_f
	rayon intérieur	0.5 cm
	rayon extérieur	2.45 cm
	épaisseur intérieure	1 mm
Support	épaisseur extérieure	1.7 mm
	position radiale	2.2 cm
	rayon intérieur	2.0 cm
	rayon extérieur	2.4 cm
	épaisseur	0.35 mm
	fréquence	100 Hz
	amplitude	0.6 mm

(b) Propriétés des solides.

Figure 4.29 – Écoulement dans une pompe cardiaque : configuration et propriétés de la membrane et de son support.

oeuvre de la simulation est réalisée de manière très similaire à la précédente. Les éléments de compréhension non fournis ici sont identiques à ceux énoncés dans la Section 3.3. Dans cette configuration d'écoulement, on assimile le fluide à de l'eau, étant un fluide newtonien qui possède des propriétés proches de celles du sang. À l'intérieur du fluide est immergée une membrane circulaire de type élastomère, trouée en son centre, d'épaisseur non constante. La membrane est entraînée par un support rigide annulaire, qui oscille de haut en bas avec une amplitude et une fréquence données. Toutes les propriétés de la membrane et du support sont indiquées dans le Tableau 4.29b.

Le fluide, la membrane et le support sont initialement au repos. Une condition aux limites de type symétrie est imposée à gauche. Les trois autres bords du domaine sont inclus dans la géométrie de pompe qui est statique, les conditions de type mur sont donc naturellement satisfaites par pénalisation. Les simulations sont effectuées sur des maillages AMR, avec adaptation dynamique de maillage basée sur les deux critères d'adaptation level set et hessienne de la vitesse. Les paramètres utilisés pour ce dernier critère sont $\eta_{min}^u = 10^6$ et $\eta_{max}^u = 10^7$. À l'intérieur de la géométrie de pompe, le maillage est déraffiné autant que possible pour limiter au maximum la taille du maillage. De plus, pour assurer une bonne résolution de maillage à l'intérieur de la membrane, une vingtaine de cellules dans l'épaisseur minimale de la membrane est nécessaire. Le niveau de raffinement de maillage uniforme initial est donc fixé à $L_{max} = 10$. Le niveau minimal du maillage dans la zone fluide est fixé à $L_{min} = 6$. L'adaptation du maillage est déclenchée 100 fois par période d'oscillation. La fonction level-set et les caractéristiques rétrogrades sont mises à jour 500 fois par période car un grand nombre de mises à jour est important ici du fait des possibles contacts entre la membrane et la géométrie de pompe. Enfin, les paramètres de calibration du modèle de Mooney-Rivlin sont choisis identiques, à savoir $c_1 = c_2 = G/4$.

La composante z de la vorticité et la magnitude de la vitesse sont présentées sur la Figure 4.31, à différents instants. Pour mieux comprendre le phénomène, les images correspondent au moment où le support revient à sa position initiale, c'est-à-dire après 2, 3, 4 et 5 périodes d'oscillation. On peut constater un phénomène de pompage par l'apparition d'un débit en sortie de canal. Le fluide est bien expulsé vers le bas et une certaine périodicité est observable à partir d'un certain nombre de périodes.

Pour quantifier l'efficacité de la méthode, la conservation de la masse de la membrane est suivie au cours de la simulation. La Figure 4.30a présente la perte relative de masse de la membrane pendant les sept premières périodes d'oscillation du support. Avec une perte relative inférieure à 1%, on peut considérer que la masse est plutôt bien conservée. De plus, cette perte reste relativement stable, dans le sens où elle n'explose pas à partir d'un certain temps mais semble osciller autour d'une valeur fixe. Comme le montre la Figure 4.30b, la déformation de la membrane permet de reproduire un débit en sortie de pompe. Après 7 périodes, le régime d'écoulement n'est pas encore établi, mais un caractère oscillatoire semble se dessiner. Afin d'observer un débit réellement pulsatile, il faudrait poursuivre les calculs un peu plus longtemps, sur une dizaine de périodes. On peut néanmoins remarquer que plus on augmente la fréquence d'oscillation du *holder*, plus le débit et la perte de volume sont importants.

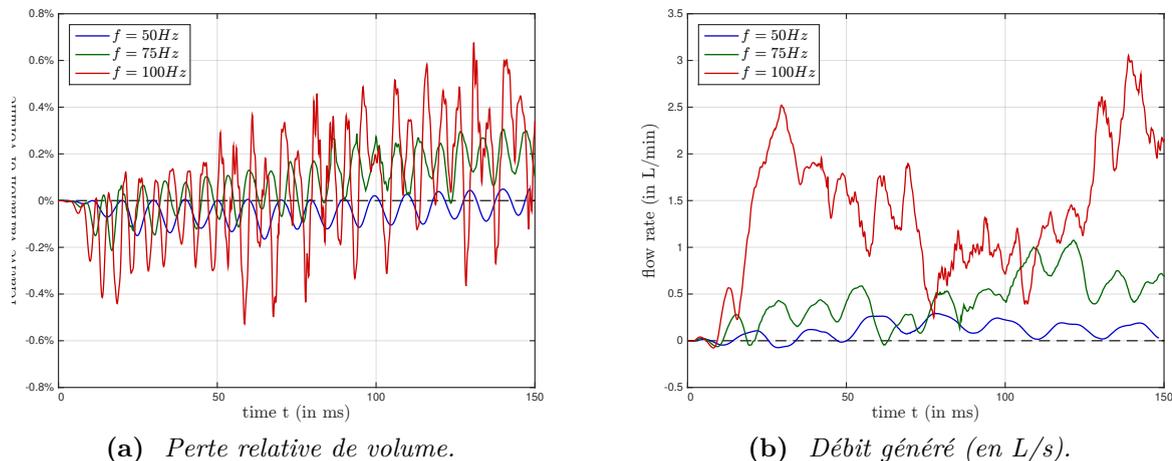
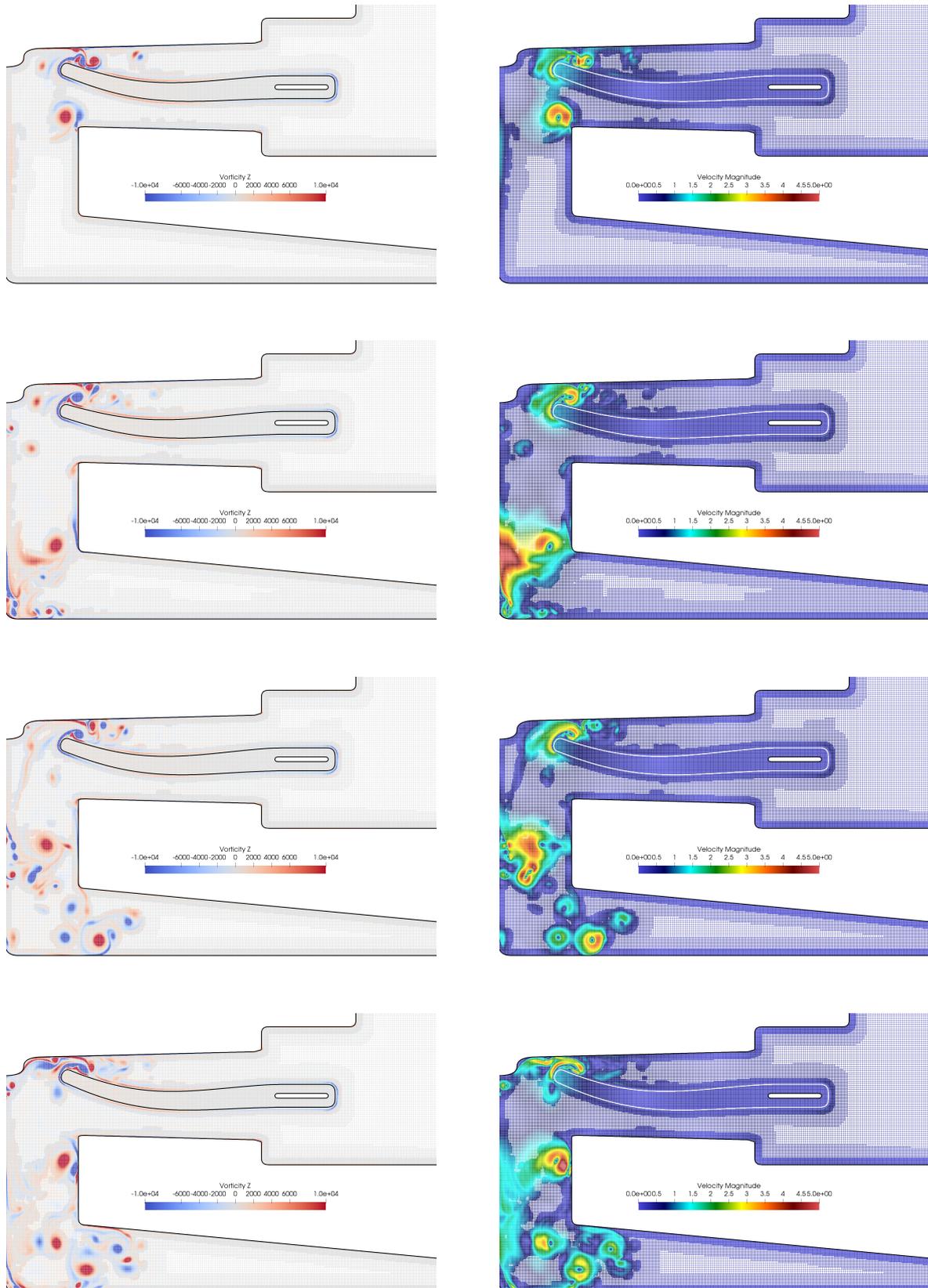


Figure 4.30 – *Ecoulement dans une pompe cardiaque : perte relative de volume de la membrane et débit sanguin généré au cours du temps.*

4. APPLICATION : SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT DANS UNE POMPE CARDIAQUE



145

Figure 4.31 – *Ecoulement dans une pompe cardiaque : composante z de la vorticité (  gauche) et magnitude de la vitesse (  droite). De haut en bas : solution aux temps $t = 2T$, $3T$, $4T$ et $5T$. Le maillage AMR est visible en arrière-plan.*

Conclusion et perspectives

Les problèmes d'interaction fluide-structure apparaissent dans bon nombre d'applications industrielles. Leur simulation demeure aujourd'hui encore un défi et les méthodes numériques développées sont le plus souvent dédiées à des applications bien spécifiques. L'objectif principal de cette thèse est de proposer une méthode numérique versatile, dans le sens où elle permet la simulation d'une multitude de problèmes d'interaction fluide-structure, mettant en jeu des géométries complexes. Pour cela, on a eu recours à un modèle eulérien unifié, autrement dit à un seul milieu, qui s'inscrit parmi les méthodes de domaine fictif. Le modèle considéré, expliqué intégralement dans le Chapitre 1, favorise l'utilisation de maillages cartésiens, ce qui facilite le développement de la méthode numérique. Pour les méthodes lagrangiennes, une part importante du travail est en effet consacrée à la construction de maillages adaptés à la géométrie, et ce pour chaque simulation. Pour résoudre des problèmes d'interaction fluide-structure, les maillages cartésiens hiérarchiques sont d'autant plus intéressants puisqu'ils permettent de prendre en compte le caractère multi-échelles du problème. Par comparaison avec les méthodes *body-fitted*, la précision reste modeste, mais elle offre néanmoins un bon compromis entre précision et faisabilité de la simulation.

La contribution principale de cette thèse repose sur la méthode numérique 2D / 2D axi-symétrique développée pour la résolution de ce modèle eulérien d'interaction fluide-structure. Cette méthode numérique, détaillée dans le Chapitre 2, repose sur des schémas de discrétisation Volumes Finis centre-cellule, développés pour des maillages cartésiens hiérarchiques de type quadtree. Pour des questions relatives au parallélisme, la construction de ces schémas Volumes Finis est contrainte par l'utilisation de stencils compacts. Cette contrainte est très restrictive en ce qui concerne les choix de discrétisation et limite l'ordre de précision des schémas. Cependant, elle garantit une bonne efficacité du calcul parallèle et la scalabilité de la méthode. Par l'utilisation de schémas conservatifs, notamment pour le transport de la fonction level set, des propriétés telles que la conservation de masse sont convenablement assurées. Toutefois, on a pu expérimenter en pratique, puis confirmer analytiquement dans le Chapitre 3, que la robustesse de la méthode est remise en question pour des rigidités très élevées. Plus précisément, on a mis en évidence l'importance du schéma en espace pour le transport des caractéristiques rétrogrades. Celui-ci doit préserver exactement l'asymptotique (EAP) afin de prévenir le caractère oscillatoire de la solution. Le schéma FV2, utilisé notamment pour le transport de la fonction level

set ou pour la discrétisation des termes convectifs, ne vérifie pas cette propriété. Pour remédier à ces instabilités numériques, le schéma FV2 peut être stabilisé via l'ajout d'un terme source, terme qui a été déterminé par comparaison des erreurs de troncatures avec une méthode Différence Finie classique, naturellement EAP par construction.

Dans le Chapitre 4, l'outil numérique a été validé à travers différents cas tests. Dans un premier temps, la convergence d'ordre deux en espace a été confirmée. On a pu ensuite apprécier l'utilisation de maillages AMR pour la simulation d'écoulements libres, autrement dit non confinés. Par un déraffinement bien choisi, le coût de calcul peut être fortement réduit sans perte de précision significative. Dans le cas d'écoulements confinés comme dans un canal ou dans une cavité, la perte de précision est plus importante. Cette observation s'explique notamment par la difficulté liée à la définition d'un maillage adapté. Comme on a pu le voir dans le Chapitre 2, le manque de précision aux sauts de niveau pour la discrétisation de certains opérateurs se fait ressentir puisqu'il a une réelle incidence sur la précision globale du solveur numérique. S'il est impossible de définir des zones du domaine pour lesquelles la solution est suffisamment régulière, la précision est nécessairement dégradée.

Perspectives

Comme on a pu le voir, la méthode de résolution est explicite en temps. Les problèmes d'interaction fluide-structure considérés font intervenir des milieux possédant des échelles de temps très différentes. Dans le cas de membranes oscillantes par exemple (Section 3.3), la célérité des ondes élastiques est environ 50 fois plus grande que la vitesse du fluide. De ce fait, le pas de temps nécessaire pour assurer la stabilité de la méthode est considérablement réduit, augmentant le coût de calcul global d'une simulation. Développer une formulation implicite de cette méthode pour s'affranchir de la contrainte $CFL \Delta t \sim h/c_{wave}$ serait une réelle opportunité de sorte à améliorer la faisabilité d'une simulation FSI. De plus, l'utilisation d'une formulation implicite apporterait une plus grande stabilité dans la limite des très fortes rigidités. Le développement d'une formulation réellement implicite du système couplé fortement non linéaire est complexe, puisqu'elle repose sur une approche itérative. Le système linéaire à construire est *a fortiori* mal conditionné, ce qui rend sa résolution délicate et coûteuse. Il serait également possible d'envisager la formulation implicite non itérative développée par [Li et al. \[51\]](#). Pour s'affranchir de la contrainte du pas de temps relative aux ondes élastiques, les auteurs proposent d'introduire une expansion linéaire du tenseur des contraintes élastiques via un tenseur jacobien, qui répond à la nature multi-physique du problème, découlant des différentes échelles de temps et propriétés des milieux.

Du point de vue du schéma numérique, une vraie amélioration de la méthode consisterait en le développement de nouvelles discrétisations des opérateurs de sorte à diminuer les

erreurs de troncature aux sauts de niveau. Les pertes de précision observées ont un réel impact sur la précision globale du solveur, au moins pour la simulation d'écoulements confinés. De plus, l'utilisation d'une méthode *phase field* plutôt que *level set* pourrait se révéler intéressante dans l'objectif de limiter la dissipation et ainsi améliorer la conservation de la masse. A première vue, l'implémentation semble réalisable sous la contrainte de parallélisme, et les résultats sont encourageants dans le cadre d'applications bi-fluidiques, comme le montre [69].

A la fin du Chapitre 4, une application a été proposée via la simulation d'un écoulement dans une géométrie de pompe cardiaque. Les résultats obtenus ici sont purement académiques dans le sens où ils ne sont pas comparés avec l'expérience. Il serait donc opportun de confronter ces résultats à de vraies données expérimentales. Cet outil numérique pourrait également être utilisé pour d'autres applications bio-médicales, telles que la simulation de l'écoulement sanguin dans une aorte, lors d'une dissection aortique ou en présence d'un anévrisme. La dissection aortique est une affection grave caractérisée par l'irruption de sang à l'intérieur de la paroi de l'aorte suite à une déchirure. Le sang entre dans la paroi élastique de l'aorte et décolle les feuillets superposés dont elle est constituée. L'outil numérique développé au cours de cette thèse offre par exemple la possibilité de simuler cette perturbation de l'écoulement sanguin suite à cette dissection aortique.

Annexes

A. Etude de stabilité pour une équation d'advection 1D : influence de l'intégration en temps

Pour résoudre un problème d'advection, réaliser une discrétisation spatiale d'ordre 2 et se suffire d'une intégration temporelle simple est réputé instable, comme le mentionne [Carpentier \[18\]](#). Pour vérifier cette conjecture, on propose de réaliser une étude de stabilité simple dans le cadre de la résolution de l'équation d'advection 1D à vitesse constante positive $a > 0$:

$$\partial_t \varphi + a \partial_x \varphi = 0. \quad (4.1)$$

On étudiera ici deux discrétisations Volumes-Finis respectivement d'ordres 1 et 2 notées FV1 et FV2. Ces discrétisations en espace seront couplées à deux discrétisations explicites en temps, à savoir Euler explicite et Runge-Kutta d'ordre 2 notées RK1 et RK2. Le schéma RK1-FV utilisé pour la résolution de l'équation (4.1) s'écrit :

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - C(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (4.2)$$

où $C = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ et $F_{i\pm\frac{1}{2}}$ est le flux d'advection reconstruit en $(i \pm \frac{1}{2})$. La discrétisation FV1 correspond au schéma de Rusanov (ou local Lax-Friedrichs) pour lequel les flux sont définis de façon décentrée par :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \varphi_i, \quad F_{i-\frac{1}{2}} = \varphi_{i-1}. \quad (4.3)$$

De même, on définit le schéma FV2 comme une généralisation du schéma FV1. Les flux sont reconstruits linéairement de façon décentrée :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \varphi_i + \frac{\Delta x}{2} (\partial_x \varphi)_i, \quad F_{i-\frac{1}{2}} = \varphi_{i-1} + \frac{\Delta x}{2} (\partial_x \varphi)_{i-1}. \quad (4.4)$$

En utilisant des approximations centrées des dérivées premières, on obtient les schémas explicites suivants :

$$(RK1 - FV1) : \quad \varphi_i^{n+1} = C\varphi_{i-1}^n + (1 - C)\varphi_i^n,$$

$$(RK1 - FV2) : \quad \varphi_i^{n+1} = -\frac{C}{4}\varphi_{i-2}^n + \frac{5C}{4}\varphi_{i-1}^n + \left(1 - \frac{3C}{4}\right)\varphi_i^n - \frac{C}{4}\varphi_{i+1}^n,$$

$$(RK2 - FV2) : \quad \varphi_i^{n+1} = \frac{C^2}{32}\varphi_{i-4}^n - \frac{5C^2}{16}\varphi_{i-3}^n + \frac{C}{32}(31C - 8)\varphi_{i-2}^n - \frac{C}{8}(7C - 10)\varphi_{i-1}^n \\ + \left(1 - \frac{3C}{4} - \frac{C^2}{32}\right)\varphi_i^n + \frac{C}{16}(3C - 4)\varphi_{i+1}^n + \frac{C^2}{32}\varphi_{i+2}^n.$$

On réalise une analyse de von-Neumann. Pour cela, on cherche une solution de la forme $\varphi_j^n = \Phi^n(k)e^{2i\pi k(j\Delta x)/L}$, avec $k \in \mathbb{Z}$ ou de manière équivalente :

$$\varphi_j^n = \Phi^n(k)e^{i\theta_k}, \quad \text{avec } \theta_k = 2\pi k \frac{\Delta x}{L} \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

En appliquant cette solution à chacun des schémas numériques, on peut alors déterminer les coefficients d'amplification $G(\theta_k) \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Phi^{n+1}(k) = G(\theta_k)\Phi^n(k)$. Un schéma sera alors stable si $|G(\theta_k)|^2 < 1$, $\forall \theta_k$. Par le calcul, on obtient pour chacun des schémas les expressions suivantes :

$$(RK1 - FV1) : \quad |G(\theta_k)|^2 = (C \cos(\theta_k) - C + 1)^2 + C^2 \sin(\theta_k)^2,$$

$$(RK1 - FV2) : \quad |G(\theta_k)|^2 = \frac{C^2}{16}(6 \sin(\theta_k) - \cos(\theta_k) \sin(\theta_k))^2 \\ + \frac{1}{4}(C + C \cos(\theta_k)^2 - 2C \cos(\theta_k) - 2)^2,$$

$$(RK2 - FV2) : \quad |G(\theta_k)|^2 = \frac{1}{16}(C^2 \cos(\theta_k) - 2C \cos(\theta_k)^2 - 2C + 7C^2 \cos(\theta_k)^2 - 5C^2 \cos(\theta_k)^3 \\ + C^2 \cos(\theta_k)^4 + 4C \cos(\theta_k) - 4C^2 + 4)^2 + \frac{1}{1024}(C^2(8 \sin(2\theta_k) - 48 \sin(\theta_k) \\ - 30C \sin(2\theta_k) + 10C \sin(3\theta_k) - C \sin(4\theta_k) + 34C \sin(\theta_k))^2).$$

Ainsi développées, il est difficile de déterminer une condition simple pour laquelle $|G(\theta_k)|^2 < 1$. De ce fait, on trace numériquement la valeur de ces coefficients d'amplification en fonction de C et θ_k . On remarque que ces coefficients sont 2π -périodiques, on considère alors $\theta_k \in [0, 2\pi]$ et $C \in [0, 1]$. On sait en effet que pour $C > 1$, un schéma explicite est instable pour un problème d'advection.

La Figure 4.32 montre la variation de $|G(\theta_k)|^2$ en fonction de C et θ_k pour chacun des trois schémas numériques. On peut déjà re-vérifier que le schéma d'ordre 1 décentré classique (RK1-FV1) est évidemment stable sous la condition CFL classique $\Delta t < \Delta x/a$. Cependant, on constate qu'avec une discrétisation d'ordre 2 (FV2) couplé au schéma d'Euler explicite en temps, le schéma est instable pour une CFL acceptable $C \gg 0$. Cependant, il n'est pas inconditionnellement instable, il faut choisir un pas de temps excessivement petit. En considérant une intégration en temps d'ordre plus élevé, le schéma est alors stable sous la condition CFL classique.

On vient ainsi de re-vérifier la remarque de [Carpentier \[18\]](#). On peut donc conclure qu'il est préférable d'utiliser un schéma Runge-Kutta 2 TVD pour assurer la stabilité du schéma numérique relatif aux transports des caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} et de la fonction level-set ϕ , comme indiqué dans le Chapitre 2 Section 1.1.

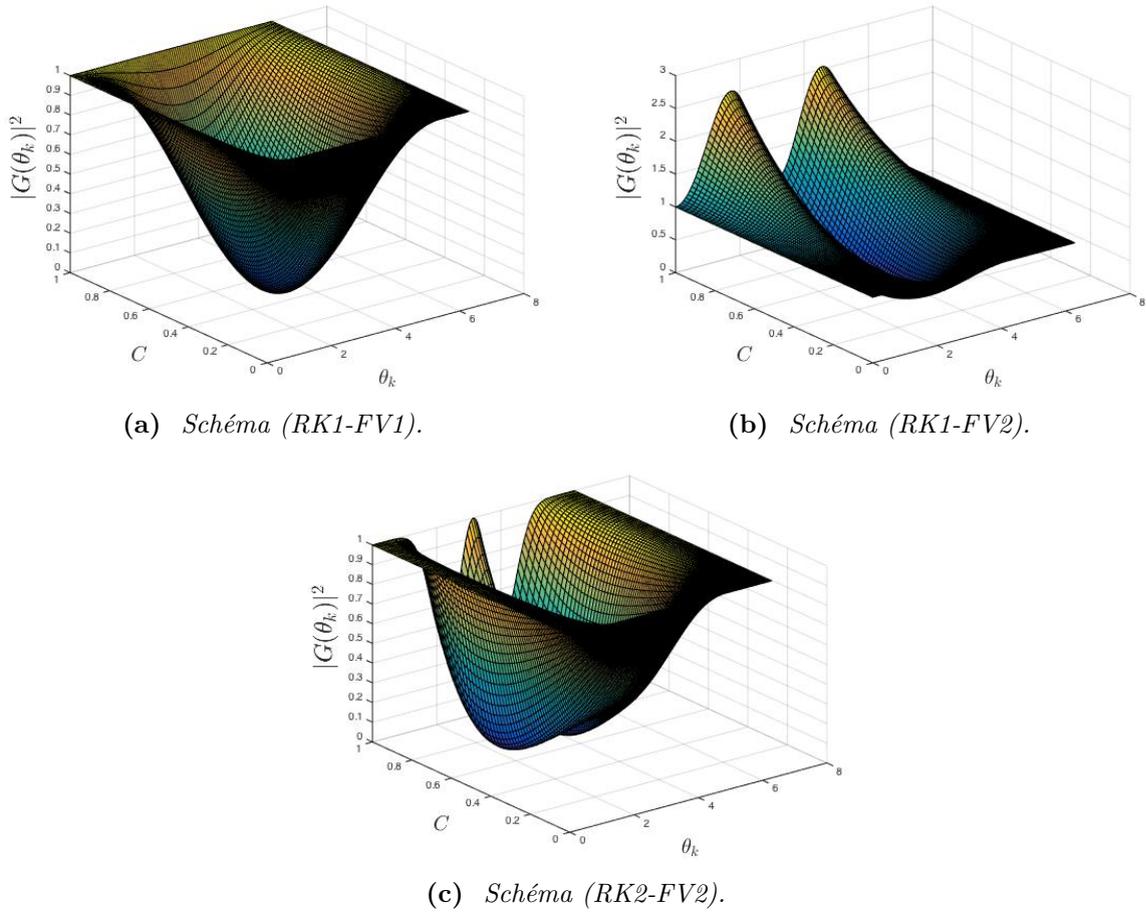


Figure 4.32 – Représentation graphique de $|G(\theta_k)|^2$ pour chacun des schémas numériques étudiés pour résoudre un problème d'advection 1D à vitesse constante.

B. Types de maillage considérés pour les validations

Afin de tester différentes configurations de maillage Cartésien hiérarchique, on introduit deux types de raffinement. Le premier maillage quadtree repose sur un raffinement par boîtes (Figure 4.33a) pour lequel on définit des boîtes imbriquées les unes dans les autres. Cette configuration simple permet de se focaliser sur l'effet des sauts de niveaux à long terme. Le second type de maillage est caractérisé par un raffinement pseudo-aléatoire (Figure 4.33b). En utilisant la numérotation globale en "Z-order", une cellule est alors

raffinée si son identifiant est divisible par un entier donné. Avec ce type de maillage, on s'assure alors que toutes les configurations de stencils sont bien testées.

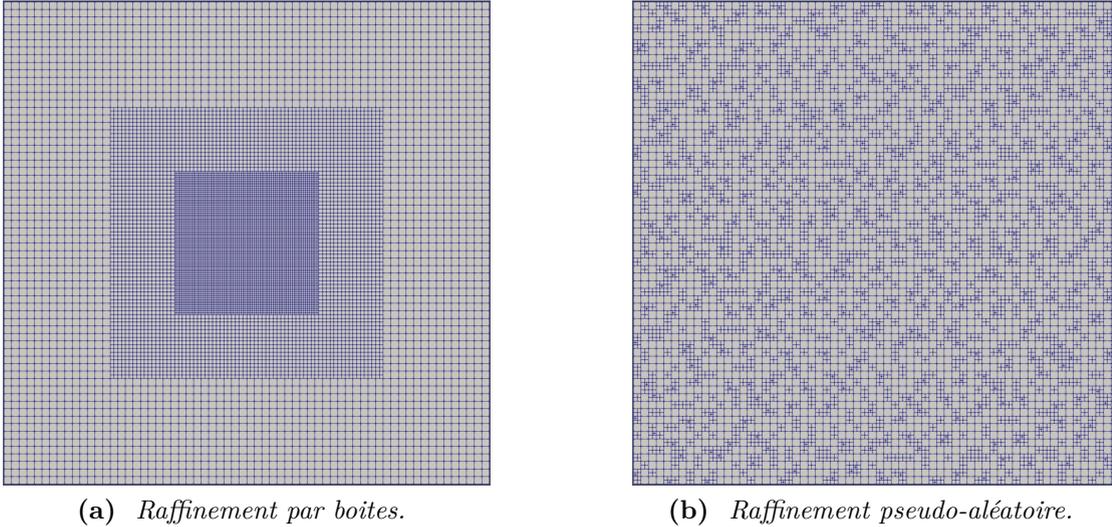


Figure 4.33 – *Illustration des deux types de maillage quadtree utilisés pour les validations d'opérateurs. Exemples pour une configuration $L_6 - L_8$.*

C. Erreur de troncature pour l'opérateur divergence sur maillage quadtree

Pour mieux comprendre les résultats obtenus lors de la validation de l'opérateur divergence (Chapitre 2 Section 2.3), on étudie l'erreur de troncature dans un cas simplifié. On a pu observer précédemment la perte de précision aux sauts de niveaux comparativement à l'erreur obtenue sur maillage uniforme. La Figure 4.34 représente les études de convergence obtenues pour la validation de l'opérateur divergence, pour les deux reconstructions polynomiales P^{O3} et P^{O2} . On peut observer la perte d'un ordre de précision aux sauts de niveaux par rapport à l'ordre de précision de la reconstruction polynomiale.

On souhaite également regarder l'influence du choix des points de quadrature sur l'erreur de troncature à un saut de niveaux et plus particulièrement pour la cellule la plus grosse pour laquelle l'erreur est la plus forte. Pour cela, la reconstruction quadratique P^{O3} est considérée afin de minimiser l'erreur liée à l'interpolation. La solution sera de toute manière au mieux d'ordre 2 puisque la fonction est évaluée de manière ponctuelle $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i)$ et non par valeur moyenne dans la cellule $\mathbf{v}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. On cherche ainsi à tester s'il est possible d'obtenir une erreur d'ordre 2 dans la cellule grossière, tout en restant conservatif.

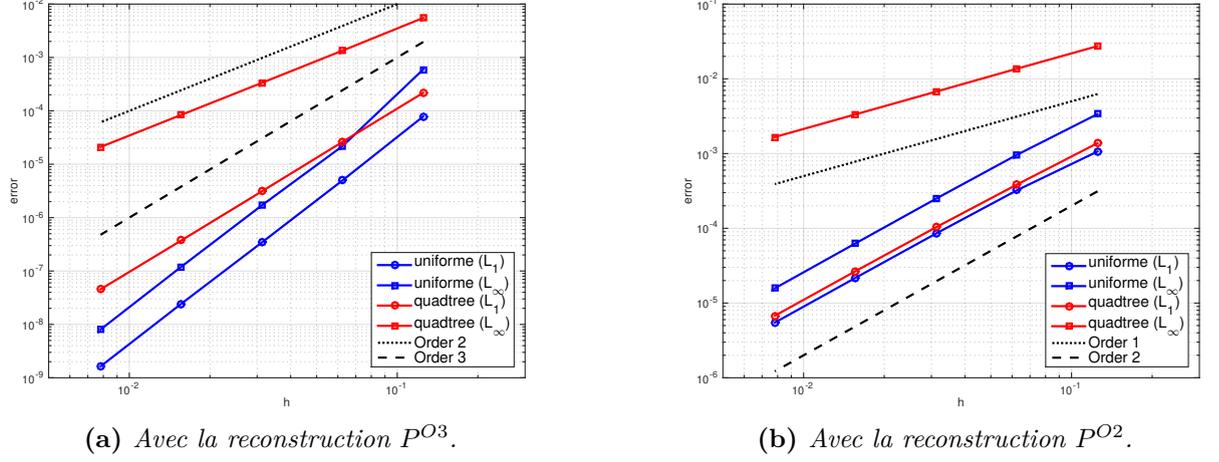


Figure 4.34 – Validation du schéma de discrétisation de l'opérateur divergence : étude de convergence sur maillages uniforme (à gauche) et quadtree (à droite) à parité de niveau $L_{min} = 7$.

La formule de quadrature de Gauss à deux points s'écrit :

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{f \subset \partial \Omega_i} \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{q_1} + \mathbf{v}_{q_2}) \cdot \mathbf{n}_f |f| + \mathcal{O}(h_i^3), \quad (4.6)$$

où q_1 et q_2 désignent les points de quadrature relatifs à la face f . Sur chaque face, le flux $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ est évalué à partir de la valeur moyenne des valeurs reconstruites de part et d'autre de la face, i.e. $\mathbf{v}_q = \frac{P_{out}(\mathbf{x}_q) + P_{in}(\mathbf{x}_q)}{2}$. On choisit le cas où $\mathbf{v}(x, y) = ((x - y)^3, 0)^T$ de sorte que le cas soit unidimensionnel. On a alors $\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_x \mathbf{v}_x = 3(x - y)^2$. Par le calcul, on peut constater que la différence $(\partial_x \mathbf{v}_x^{num} - \partial_x \mathbf{v}_x^{exacte})$ pour ce problème peut être décomposée comme suit :

$$(\partial_x \mathbf{v}_x^{num} - \partial_x \mathbf{v}_x^{exacte}) = C_1 \partial_{yy} \mathbf{v}_x h + C_2 h^2 + \mathcal{O}(h^3) \quad (4.7)$$

En effet, on peut constater que si $C_1 = 0$, l'erreur de troncature sera d'ordre 2.

La Figure 4.35 montre les résultats obtenus pour différentes configurations de maillage et choix de paramètre $\theta \in [0, 1]$. Dans la configuration 1, seul $\theta = 0$ permet de garantir l'ordre 2, ce qui est tout à fait évident puisque les points de quadrature coïncident au centre de la face, comme pour le stencil uniforme (configuration 2). Avec un point de quadrature par face, on ne peut atteindre l'ordre 2. De même, la configuration 2 montre que choisir un point d'un côté et deux de l'autre introduit une erreur d'ordre 1.

Si on considère deux points de quadrature par face (configuration 3), on peut s'apercevoir qu'il est possible d'obtenir l'ordre 2. En effet, la valeur pour laquelle $C_1 = 0$ correspond à $\theta = 1/\sqrt{3}$, ce qui correspond aux points de quadratures de Gauss. Ceci est donc cohérent avec les résultats obtenus. Cependant, si on considère la configuration 4

pour laquelle on choisit un seul point pour la face ayant un stencil uniforme, l'ordre 2 est perdu.

On peut ainsi déduire de ces calculs que pour obtenir une erreur de troncature d'ordre 2 aux sauts de niveaux, tout en garantissant la conservativité du schéma numérique, il faut considérer deux points de quadrature par face, même pour les faces ayant un stencil uniforme. Cependant, conserver deux points de quadrature pour chaque face n'est pas envisageable durant cette thèse, d'une part pour des questions de coûts (de calcul et de mémoire), d'autre part, car il faudrait adapter la discrétisation des autres opérateurs (laplacien et d'advection) de sorte à garantir la conservation de masse discrète.

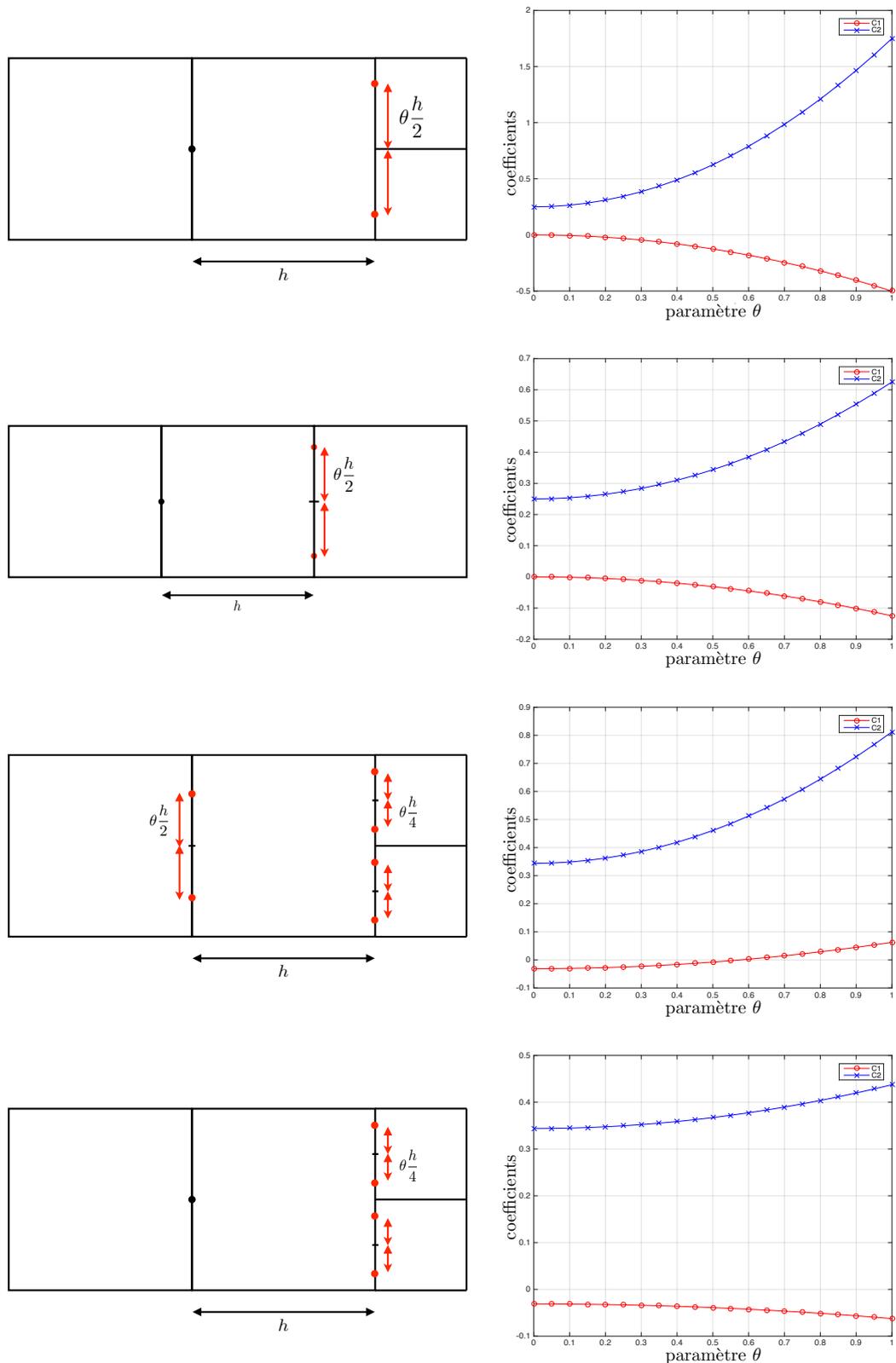


Figure 4.35 – Erreur de troncature pour l'opérateur divergence dans un cas unidirectionnel. A gauche : illustration des choix de points de quadrature, à droite : coefficients C_1 et C_2 obtenus, conformément à l'équation (4.7).

Table des figures

1	Simulation préliminaire en trois dimensions, inspirée du dispositif LVAD de CorWave, réalisée au sein de l'équipe [10].	14
1.1	Notations utilisées dans le cadre d'un problème d'interaction fluide-structure.	18
1.2	Les caractéristiques directes \mathbf{X} et rétrogrades \mathbf{Y} sont utilisées pour décrire la déformation d'une structure.	21
1.3	Illustration géométrique des contraintes exercées sur un matériau.	27
1.4	Diagramme contrainte-déformation en traction de différents types de matériaux.	28
1.5	Exemples de déformations élémentaires.	30
1.6	Deux types d'approches pour décrire la déformation d'un corps élastique	38
1.7	Fonction Heaviside χ_e régularisée sur une distance 2δ	42
1.8	Deux procédures de couplage partitionné proposées par Farhat [38]	43
1.9	Illustration de la pénalisation à l'ordre 2 pour imposer précisément la vitesse \mathbf{u}_s de la structure rigide sur sa frontière $\Gamma_s(t)$	45
2.1	Numérotation globale suivant le Z -order pour un maillage quadtree balancé 2 : 1 en deux dimensions	54
2.2	Illustration du stencil \mathcal{S}_f d'une face $f = \overline{\Omega_{in}} \cap \overline{\Omega_{out}}$	57
2.3	Validation du schéma de discrétisation de l'opérateur divergence : répartition de l'erreur sur maillages uniforme et quadtree à parité de niveau L_{min}	60
2.4	Représentation de la distribution des vitesses relatives aux cellules et aux faces sur maillage cartésien hiérarchique	62
2.5	Illustration de la reconstruction polynomiale d'ordre 3 d'une quantité φ aux points de quadrature de Gauss q	67
2.6	Procédure d'adapation de maillage : mise à jour des données d'un maillage \mathcal{M}^{old} à un maillage \mathcal{M}^{new}	69
2.7	Illustration de la méthode Fast-Marching utilisée pour ré-initialiser une fonction distance signée ϕ	75
2.8	Méthode Fast-Marching : deux types de configurations pour lesquelles une composante de la normale est discontinue	76
2.9	Cas-test de validation : re-distanciation autour d'un cercle.	78
2.10	Résultats obtenus pour les deux méthodes de re-distanciation	79

TABLE DES FIGURES

2.11	Illustration du schéma semi-lagrangien	82
2.12	Exemple illustratif de l'algorithme d'extrapolation	83
2.13	Advection d'une fonction indicatrice : condition initiale et solution numérique obtenue pour les trois schémas de discrétisation.	86
2.14	Problème d'instabilité atmosphérique : solution à $t = 3$ et répartition de l'erreur obtenue via le schéma RK3-FV3 pour chaque type de maillage. . .	87
2.15	Problème d'instabilité atmosphérique : études de convergence	88
2.16	Advection d'un cercle : lignes de niveaux de la fonction level set et le maillage AMR induit au temps $t = T_{max}$	89
2.17	Le serpent : simulations avec le schéma RK3-FV3 sur maillage AMR . .	92
3.1	Schématisation de la consistance asymptotique.	98
3.2	Stabilité asymptotique du modèle FSI 1D : rayons spectraux en fonction de θ et C obtenus via des schémas ELP en espace, pour deux schémas d'intégration en temps	105
3.3	Stabilité asymptotique du modèle FSI 1D : rayons spectraux en fonction de θ et C obtenus via des schémas en espace non ELP (FV1 et FV2), et le schéma (T3) pour l'intégration en temps	108
3.4	Test numérique de la méthode en 1D : mise en oeuvre.	109
3.5	Test numérique de la méthode en 1D : solutions obtenues via les schémas de discrétisation FV2 et FD2 pour l'opérateur d'advection $A(Y)$	110
4.1	Vortex de Taylor-Green : champ de vitesse pour un nombre de Reynolds $Re = 100$ à $t = 0.1$ sur le maillage quadtree avec raffinement par boîtes . .	116
4.2	Vortex de Taylor-Green : études de convergence sur maillages uniformes et non uniformes, à parité de niveau maximum L_{max}	117
4.3	Méthodes pour le calcul des forces et coefficients hydrodynamiques.	119
4.4	Écoulement autour d'un cylindre : différents raffinements de maillages utilisés.	119
4.5	Écoulement autour d'un cylindre à $Re = 550$: évolution du coefficient de trainée C_D au cours du temps	121
4.6	Écoulement autour d'un cylindre à $Re = 200$: résultats obtenus pour un maillage quadtree $L_8 - L_{11}$ (raffinement par boîtes) et comparaison avec la littérature en termes de coefficient de trainée moyen C_D et nombre de Strouhal St	122
4.7	Écoulement autour d'un cylindre à $Re = 200$: influence qualitative du déraffinement sur les coefficients hydrodynamiques	123
4.8	La sphère en régime 2D axi-symétrique : vitesse axiale u_z et lignes d'écoulement obtenues pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re	124
4.9	La sphère en régime 2D axi-symétrique : caractéristiques du vortex présent en aval de la sphère en fonction du nombre de Reynolds Re	125
4.10	Cylindre à vitesse constante : composante z de la vorticité ω à $t = 5$	125
4.11	Cylindre à vitesse constante : coefficients de trainée C_D pour des maillages non uniformes.	126

4.12	Sédimentation d'un cylindre - Cas 1 : composante z de la vorticité pour différents instants	128
4.13	Sédimentation d'un cylindre - Cas 1 : validation par comparaison avec les études [10] et [21].	128
4.14	Sédimentation d'un cylindre - Cas 2 : validation par comparaison avec les études [43] et [61].	129
4.15	Structure élastique immergée dans une cavité entraînée : configuration de simulation.	130
4.16	Structure élastique immergée dans une cavité entraînée ($G = 0.1$) : aperçus de la vitesse et de la vorticité au temps $t = 4.69$	131
4.17	Structure élastique immergée dans une cavité entraînée ($G = 0.1$) : position de l'interface $\Gamma_e(t)$ pour différents instants t	132
4.18	Structure élastique immergée dans une cavité entraînée ($G = 0.1$) : évolution du centre de masse jusqu'au temps $t = 20$ s	133
4.19	Structure élastique immergée dans une cavité entraînée ($G = 10$) : position de l'interface $\Gamma_e(t)$ pour différents instants t	133
4.20	Structure élastique immergée dans une cavité entraînée : estimation de la variation relative de masse au cours du temps.	134
4.21	Structure élastique immergée dans une cavité entraînée : vitesse \mathbf{u}_y et contours des caractéristiques rétrogrades \mathbf{Y} à $t = 4.25$ s dans le cas où l'algorithme d'extrapolation n'est pas activé.	134
4.22	Déformation induite par un corps immergé tournant autour d'un axe : aperçu de la vitesse et du maillage AMR à $t = 5$ s	135
4.23	Déformation induite par un corps immergé tournant autour d'un axe : position de l'interface Γ_e aux temps $t = 2$ s et $t = 5$ s	136
4.24	Déformation induite par un corps immergé tournant autour d'un axe : estimation de la variation relative de la masse au cours du temps	137
4.25	Membranes oscillantes : configuration et propriétés de la membrane et de son support.	138
4.26	Membrane oscillante 2D : composante z de la vorticité et maillage AMR.	140
4.27	Membrane oscillante 2D axi-symétrique : composante z de la vorticité et maillage AMR.	141
4.28	Membrane oscillante 2D axi-symétrique : déplacement du point de référence A au cours du temps dans les deux directions pour différentes valeurs de α	142
4.29	Ecoulement dans une pompe cardiaque : configuration et propriétés de la membrane et de son support.	143
4.30	Ecoulement dans une pompe cardiaque : perte relative de volume de la membrane et débit sanguin généré au cours du temps.	144
4.31	Ecoulement dans une pompe cardiaque : composante z de la vorticité et magnitude de la vitesse	145
4.32	Représentation graphique de $ G(\theta_k) ^2$ pour chacun des schémas numériques étudiés pour résoudre un problème d'advection 1D à vitesse constante.	153

TABLE DES FIGURES

4.33	Illustration des deux types de maillage quadtree utilisés pour les validations d'opérateurs	154
4.34	Validation du schéma de discrétisation de l'opérateur divergence : étude de convergence sur maillages uniforme et quadtree à parité de niveau L_{min} . . .	155
4.35	Erreur de troncature pour l'opérateur divergence dans un cas uni-directionnel	157

Liste des tableaux

2.1	Validation du schéma de discrétisation de l'opérateur Laplacien : étude de convergence sur maillages uniforme et quadtree à parité de niveau L_{min} . . .	64
2.2	Problème d'instabilité atmosphérique : comparaison des temps de calculs (en s) pour les schémas RK2-FV2 et RK3-FV3 à parité d'erreur L_{∞}	88
2.3	Advection d'un cercle : comparaison en termes de précision, perte relative de volume, et temps de calcul obtenus sur maillages uniforme et AMR à parité de niveau L_{max}	90
2.4	Le serpentin : erreurs L_1 et L_{∞} et perte relative de volume (PRV) à $T_{max} = 3$.	91
3.1	Influence du schéma de discrétisation pour l'opérateur d'advection $A := (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ sur la stabilité de la méthode numérique	96
4.1	Écoulement autour d'un cylindre à $Re = 200$: influence quantitative du déraffinement sur les coefficients hydrodynamiques, le nombre de Strouhal St et le temps de calcul	122
4.2	Sédimentation d'un cylindre : paramètres du cas test.	126
4.3	Déformation induite par un corps immergé tournant autour d'un axe : coûts de calcul des simulations effectuées sur les différents maillages AMR	137

Bibliographie

- [1] Daniel M ANDERSON, Geoffrey B MCFADDEN et Adam A WHEELER : Diffuse-interface methods in fluid mechanics. Annual review of fluid mechanics, 30(1):139–165, 1998.
- [2] Philippe ANGOT, Charles-Henri BRUNEAU et Pierre FABRIE : A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. Numerische Mathematik, 81(4):497–520, 1999.
- [3] Ellen M ARRUDA et Mary C BOYCE : A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. 1993.
- [4] Tariq D ASLAM : A partial differential equation approach to multidimensional extrapolation. Journal of Computational Physics, 193(1):349–355, 2004.
- [5] S BARBEIRO : Supraconvergent cell-centered scheme for two dimensional elliptic problems. Applied numerical mathematics, 59(1):56–72, 2009.
- [6] John BELL, Louis HOWELL et Phillip COLELLA : An efficient second-order projection method for viscous incompressible flow. In 10th Computational Fluid Dynamics Conference, page 1560, 1991.
- [7] Marsha J BERGER, Phillip COLELLA et al. : Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. Journal of computational Physics, 82(1):64–84, 1989.
- [8] Marsha J BERGER et Joseph OLIGER : Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. Journal of computational Physics, 53(3):484–512, 1984.
- [9] Michel BERGMANN : Aerodynamic optimization using Reduced Order Model and optimal control. Application to the laminar wake flow around a circular cylinder. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004.
- [10] Michel BERGMANN, Jessica HOVNANIAN et Angelo IOLLO : An accurate cartesian method for incompressible flows with moving boundaries. Communications in Computational Physics, 15(5):1266–1290, 2014.

- [11] Michel BERGMANN et Angelo IOLLO : Modeling and simulation of fish-like swimming. Journal of Computational Physics, 230(2):329–348, 2011.
- [12] Michel BERGMANN, Angelo IOLLO et Rajat MITTAL : Effect of caudal fin flexibility on the propulsive efficiency of a fish-like swimmer. Bioinspiration & biomimetics, 9(4):046001, 2014.
- [13] Jeremiah U BRACKBILL, Douglas B KOTHE et Charles ZEMACH : A continuum method for modeling surface tension. Journal of computational physics, 100(2):335–354, 1992.
- [14] M BRAZA, PHHM CHASSAING et H Ha MINH : Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. Journal of fluid mechanics, 165:79–130, 1986.
- [15] David L BROWN, Ricardo CORTEZ et Michael L MINION : Accurate projection methods for the incompressible navier–stokes equations. Journal of computational physics, 168(2):464–499, 2001.
- [16] Carsten BURSTEDDE, Lucas C WILCOX et Omar GHATTAS : p4est : Scalable algorithms for parallel adaptive mesh refinement on forests of octrees. SIAM Journal on Scientific Computing, 33(3):1103–1133, 2011.
- [17] Paul M CAMPBELL, Karen D DEVINE, Joseph E FLAHERTY, Luis G GERVASIO et James D TERESCO : Dynamic octree load balancing using space-filling curves. Williams College Department of Computer Science, Tech. Rep. CS-03-01, 2003.
- [18] Romuald CARPENTIER : Approximation et analyse numérique d’écoulements instationnaires. Application à des instabilités tourbillonnaires. Thèse de doctorat, Nice, 1995.
- [19] Vincent CHABANNES, Gonçalo PENA et Christophe PRUD’HOMME : High-order fluid–structure interaction in 2d and 3d application to blood flow in arteries. Journal of Computational and Applied Mathematics, 246:1–9, 2013.
- [20] Alexandre Joel CHORIN : Numerical solution of the navier-stokes equations. Mathematics of computation, 22(104):745–762, 1968.
- [21] Mathieu COQUERELLE et G-H COTTET : A vortex level set method for the two-way coupling of an incompressible fluid with colliding rigid bodies. Journal of Computational Physics, 227(21):9121–9137, 2008.
- [22] Georges-Henri COTTET et Emmanuel MAITRE : A level-set formulation of immersed boundary methods for fluid–structure interaction problems. Comptes Rendus Mathématique, 338(7):581–586, 2004.

-
- [23] Georges-Henri COTTET et Emmanuel MAITRE : A level set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces. Mathematical models and methods in applied sciences, 16(03):415–438, 2006.
- [24] Georges-Henri COTTET, Emmanuel MAITRE et Thomas MILCENT : Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 42(3):471–492, 2008.
- [25] Yves COUDIÈRE et Florence HUBERT : A 3d discrete duality finite volume method for nonlinear elliptic equations. SIAM Journal on Scientific Computing, 33(4):1739–1764, 2011.
- [26] Yves COUDIÈRE, Jean-Paul VILA et Philippe VILLEDIEU : Convergence rate of a finite volume scheme for a two dimensional convection-diffusion problem. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 33(3):493–516, 1999.
- [27] Alexia DE BRAUER, Angelo IOLLO et Thomas MILCENT : A cartesian scheme for compressible multimaterial models in 3d. Journal of Computational Physics, 313:121–143, 2016.
- [28] Julien DEBORDE, Thomas MILCENT, Pierre LUBIN et Stéphane GLOCKNER : Numerical simulations of the interaction of solitary waves and elastic structures with a fully eulerian method. Water Waves, 2:433–466, 2020.
- [29] Sarah DELCOURTE, Komla DOMELEVO et Pascal OMNES : Discrete duality finite volume method for second order elliptic problems. Hermes Science publishing, pages 447–458, 2005.
- [30] Darren DEZEEUW et Kenneth G POWELL : An adaptively refined cartesian mesh solver for the euler equations. Journal of Computational Physics, 104(1):56–68, 1993.
- [31] Steven DIOT, Stéphane CLAIN et Raphaël LOUBÈRE : Improved detection criteria for the multi-dimensional optimal order detection (mood) on unstructured meshes with very high-order polynomials. Computers & Fluids, 64:43–63, 2012.
- [32] Boris DISKIN et James L THOMAS : Notes on accuracy of finite-volume discretization schemes on irregular grids. Applied numerical mathematics, 60(3):224–226, 2010.
- [33] Margarete O DOMINGUES, Sônia M GOMES, Olivier ROUSSEL et Kai SCHNEIDER : Adaptive multiresolution methods. In ESAIM : Proceedings, volume 34, pages 1–96. EDP Sciences, 2011.
- [34] Jerome DRONIOU : Finite volume schemes for diffusion equations : introduction to and review of modern methods. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 24(08):1575–1619, 2014.

- [35] Th DUNNE : An eulerian approach to fluid–structure interaction and goal-oriented mesh adaptation. International journal for numerical methods in fluids, 51(9-10): 1017–1039, 2006.
- [36] Thomas DUNNE et Rolf RANNACHER : Adaptive finite element approximation of fluid-structure interaction based on an eulerian variational formulation. In Fluid-structure interaction, pages 110–145. Springer, 2006.
- [37] Vadim DYADECHKO et Mikhail SHASHKOV : Moment-of-fluid interface reconstruction. Los Alamos Report LA-UR-05-7571, 2005.
- [38] Charbel FARHAT et Michael LESOINNE : Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems. Computer methods in applied mechanics and engineering, 182(3-4):499–515, 2000.
- [39] Joel H FERZIGER et Milovan PERIC : Computational methods for fluid dynamics. Springer Science & Business Media, 2012.
- [40] Cédric GALUSINSKI et Paul VIGNEAUX : On stability condition for bifluid flows with surface tension : Application to microfluidics. Journal of Computational Physics, 227(12):6140–6164, 2008.
- [41] Frederic GIBOU, Ronald FEDKIW et Stanley OSHER : A review of level-set methods and some recent applications. Journal of Computational Physics, 353:82–109, 2018.
- [42] Roland GLOWINSKI, T-W PAN, Todd I HESLA et Daniel D JOSEPH : A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. International Journal of Multiphase Flow, 25(5):755–794, 1999.
- [43] Roland GLOWINSKI, Tsorng-Whay PAN, Todd I HESLA, Daniel D JOSEPH et Jacques PERIAUX : A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : application to particulate flow. Journal of Computational Physics, 169(2):363–426, 2001.
- [44] Katuhiko GODA : A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two-or three-dimensional cavity flows. Journal of computational physics, 30(1):76–95, 1979.
- [45] Yannick GORSSE, Angelo IOLLO, Thomas MILCENT et Haysam TELIB : A simple cartesian scheme for compressible multimaterials. Journal of Computational Physics, 272:772–798, 2014.
- [46] Arthur GUITTET, Maxime THEILLARD et Frédéric GIBOU : A stable projection method for the incompressible navier–stokes equations on arbitrary geometries and adaptive quad/octrees. Journal of Computational Physics, 292:215–238, 2015.

-
- [47] J-W HE, R GLOWINSKI, R METCALFE, A NORDLANDER et J PERIAUX : Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder : I. oscillatory cylinder rotation. Journal of Computational Physics, 163(1):83–117, 2000.
- [48] Ronald D HENDERSON : Details of the drag curve near the onset of vortex shedding. Physics of Fluids, 7(9):2102–2104, 1995.
- [49] Raphaèle HERBIN, J-C LATCHÉ et Khaled SALEH : Low mach number limit of some staggered schemes for compressible barotropic flows. Mathematics of Computation, 90(329):1039–1087, 2021.
- [50] Sergio R IDELSOHN, Julio MARTI, A LIMACHE et Eugenio OÑATE : Unified lagrangian formulation for elastic solids and incompressible fluids : application to fluid–structure interaction problems via the pfem. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197(19-20):1762–1776, 2008.
- [51] S II, K SUGIYAMA, S TAKEUCHI, S TAKAGI et Yoichiro MATSUMOTO : An implicit full eulerian method for the fluid–structure interaction problem. International journal for numerical methods in fluids, 65(1-3):150–165, 2011.
- [52] Matthew JEMISON, Eva LOCH, Mark SUSSMAN, Mikhail SHASHKOV, Marco ARIENTI, Mitsuhiro OHTA et Yaohong WANG : A coupled level set-moment of fluid method for incompressible two-phase flows. Journal of Scientific Computing, 54(2):454–491, 2013.
- [53] Matthew JEMISON, Mark SUSSMAN et Mikhail SHASHKOV : Filament capturing with the multimaterial moment-of-fluid method. Journal of Computational Physics, 285:149–172, 2015.
- [54] Hans JOHANSEN et Phillip COLELLA : A cartesian grid embedded boundary method for poisson’s equation on irregular domains. Journal of Computational Physics, 147(1):60–85, 1998.
- [55] TA JOHNSON et VC PATEL : Flow past a sphere up to a reynolds number of 300. Journal of Fluid Mechanics, 378:19–70, 1999.
- [56] Benjamin KADOCH, Dmitry KOLOMENSKIY, Philippe ANGOT et Kai SCHNEIDER : A volume penalization method for incompressible flows and scalar advection–diffusion with moving obstacles. Journal of Computational Physics, 231(12):4365–4383, 2012.
- [57] SJ KAMKAR, Andrew M WISSINK, Venkateswaran SANKARAN et A JAMESON : Feature-driven cartesian adaptive mesh refinement for vortex-dominated flows. Journal of computational physics, 230(16):6271–6298, 2011.

- [58] Woojin KIM et Haecheon CHOI : Immersed boundary methods for fluid-structure interaction : A review. International Journal of Heat and Fluid Flow, 75:301–309, 2019.
- [59] Øystein S KLEMETS DAL, Olav MØYNER, Xavier RAYNAUD et Knut-Andreas LIE : A comparison of consistent discretizations for elliptic problems on polyhedral grids. In International Conference on Finite Volumes for Complex Applications, pages 585–594. Springer, 2020.
- [60] Jalal LAKHLILI, Cedric GALUSINSKI et Frederic GOLAY : Discrete duality finite volume applied to soil erosion. In Congrès français de mécanique. AFM, Association Française de Mécanique, 2015.
- [61] Tae-Rin LEE, Yoon-Suk CHANG, Jae-Boong CHOI, Wing Kam LIU, Young-Jin KIM et al. : Immersed finite element method for rigid body motions in the incompressible navier–stokes flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197 (25-28):2305–2316, 2008.
- [62] M LESOINNE et C FARHAT : Improved staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems. In Proceedings of the WCCM IV conference on computational mechanics. CIMNE, Barcelona, 1998.
- [63] Randall J LEVEQUE et al. : Finite volume methods for hyperbolic problems, volume 31. Cambridge university press, 2002.
- [64] Doron LEVY, Gabriella PUPPO et Giovanni RUSSO : Central weno schemes for hyperbolic systems of conservation laws. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 33(3):547–571, 1999.
- [65] P-L LIONS et Nader MASMOUDI : Incompressible limit for a viscous compressible fluid. Journal de mathématiques pures et appliquées, 77(6):585–627, 1998.
- [66] Jacques MAGNAUDET, Mayela RIVERO et Jean FABRE : Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. part 1. steady straining flow. Journal of fluid mechanics, 284:97–135, 1995.
- [67] Emmanuel MAITRE, Thomas MILCENT, Georges-Henri COTTET, Annie RAOULT et Yves USSON : Applications of level set methods in computational biophysics. Mathematical and Computer Modelling, 49(11-12):2161–2169, 2009.
- [68] Gilles MARCKMANN et Erwan VERRON : Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. Rubber chemistry and technology, 79(5):835–858, 2006.
- [69] Shahab MIRJALILI, Suhas S JAIN et Micheal DODD : Interface-capturing methods for two-phase flows : An overview and recent developments. Center for Turbulence Research Annual Research Briefs, 2017:117–135, 2017.

-
- [70] Rajat MITTAL, Haibo DONG, Meliha BOZKURTAS, FM NAJJAR, Abel VARGAS et Alfred VON LOEBBECKE : A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries. Journal of computational physics, 227(10):4825–4852, 2008.
- [71] Joe J MONAGHAN : Smoothed particle hydrodynamics. Annual review of astronomy and astrophysics, 30(1):543–574, 1992.
- [72] Melvin MOONEY : A theory of large elastic deformation. Journal of applied physics, 11(9):582–592, 1940.
- [73] Guy M MORTON : A computer oriented geodetic data base and a new technique in file sequencing. 1966.
- [74] Kazuhiro NAKAHASHI : An automatic grid generator for the unstructured upwind method. In 9th Computational Fluid Dynamics Conference, page 1985, 1989.
- [75] Koji NISHIGUCHI, Rahul BALE, Shigenobu OKAZAWA et Makoto TSUBOKURA : Full eulerian deformable solid-fluid interaction scheme based on building-cube method for large-scale parallel computing. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 117(2):221–248, 2019.
- [76] C NITIKITPAIBOON et KJ BATHE : An arbitrary lagrangian-eulerian velocity potential formulation for fluid-structure interaction. Computers & structures, 47(4-5):871–891, 1993.
- [77] Flavio NOCA : On the evaluation of time-dependent fluid-dynamic forces on bluff bodies. Thèse de doctorat, California Institute of Technology, 1997.
- [78] Ray W OGDEN : Nonlinear elasticity, anisotropy, material stability and residual stresses in soft tissue. In Biomechanics of soft tissue in cardiovascular systems, pages 65–108. Springer, 2003.
- [79] Ray W OGDEN : Nonlinear elasticity with application to material modelling. Centre of Excellence for Advanced Materials and Structures, 2003.
- [80] Raymond William OGDEN : Large deformation isotropic elasticity—on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 326(1567):565–584, 1972.
- [81] Stanley OSHER et James A SETHIAN : Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations. Journal of computational physics, 79(1):12–49, 1988.
- [82] Suhas PATANKAR : Numerical heat transfer and fluid flow. CRC press, 1980.

- [83] Charles S PESKIN : Numerical analysis of blood flow in the heart. Journal of computational physics, 25(3):220–252, 1977.
- [84] Charles S PESKIN : The fluid dynamics of heart valves : experimental, theoretical, and computational methods. Annual review of fluid mechanics, 14(1):235–259, 1982.
- [85] James Edward PILLIOD JR et Elbridge Gerry PUCKETT : Second-order accurate volume-of-fluid algorithms for tracking material interfaces. Journal of Computational Physics, 199(2):465–502, 2004.
- [86] P PLOUMHANS et GS WINCKELMANS : Vortex methods for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry. Journal of Computational Physics, 165(2):354–406, 2000.
- [87] Stéphane POPINET : Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries. Journal of Computational Physics, 190(2):572–600, 2003.
- [88] Alice RAELI : Solution of the variable coefficients Poisson equation on Cartesian hierarchical meshes in parallel : applications to phase changing materials. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux, 2017.
- [89] Alice RAELI, Michel BERGMANN et Angelo IOLLO : A finite-difference method for the variable coefficient poisson equation on hierarchical cartesian meshes. Journal of computational physics, 355:59–77, 2018.
- [90] PW RANGLES et Larry D LIBERSKY : Smoothed particle hydrodynamics : some recent improvements and applications. Computer methods in applied mechanics and engineering, 139(1-4):375–408, 1996.
- [91] Rolf RANNACHER et Thomas RICHTER : An adaptive finite element method for fluid-structure interaction problems based on a fully eulerian formulation. In Fluid Structure Interaction II, pages 159–191. Springer, 2011.
- [92] CM RHIE et W Li CHOW : Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. AIAA journal, 21(11):1525–1532, 1983.
- [93] Thomas RICHTER : A fully eulerian formulation for fluid–structure-interaction problems. Journal of Computational Physics, 233:227–240, 2013.
- [94] RS RIVLIN : Large elastic deformations of isotropic materials iv. further developments of the general theory. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 241(835):379–397, 1948.
- [95] Olivier ROUSSEL, Kai SCHNEIDER, Alexei TSIGULIN et Henning BOCKHORN : A conservative fully adaptive multiresolution algorithm for parabolic pdes. Journal of Computational Physics, 188(2):493–523, 2003.

-
- [96] Giovanni RUSSO et Peter SMEREKA : A remark on computing distance functions. Journal of Computational Physics, 163(1):51–67, 2000.
- [97] PB RYZHAKOV, Riccardo ROSSI, SR IDELSOHN et Eugenio ONATE : A monolithic lagrangian approach for fluid–structure interaction problems. Computational mechanics, 46(6):883–899, 2010.
- [98] Matteo SEMPLICE, Armando COCO et Giovanni RUSSO : Adaptive mesh refinement for hyperbolic systems based on third-order compact weno reconstruction. Journal of Scientific Computing, 66(2):692–724, 2016.
- [99] James A SETHIAN : A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. Proceedings of the National Academy of Sciences, 93(4):1591–1595, 1996.
- [100] James A SETHIAN : Fast marching methods. SIAM review, 41(2):199–235, 1999.
- [101] Atul SHARMA : Level set method for computational multi-fluid dynamics : A review on developments, applications and analysis. Sadhana, 40(3):627–652, 2015.
- [102] Jie SHEN et Xiaofeng YANG : A phase-field model and its numerical approximation for two-phase incompressible flows with different densities and viscosities. SIAM Journal on Scientific Computing, 32(3):1159–1179, 2010.
- [103] Kazuyasu SUGIYAMA, Satoshi II, Shintaro TAKEUCHI, Shu TAKAGI et Yoichiro MATSUMOTO : A full eulerian finite difference approach for solving fluid–structure coupling problems. Journal of Computational Physics, 230(3):596–627, 2011.
- [104] Mark SUSSMAN et Elbridge Gerry PUCKETT : A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3d and axisymmetric incompressible two-phase flows. Journal of computational physics, 162(2):301–337, 2000.
- [105] Mark SUSSMAN, Peter SMEREKA, Stanley OSHER et al. : A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. 1994.
- [106] Sadatoshi TANEDA : Experimental investigation of the wake behind a sphere at low reynolds numbers. Journal of the Physical Society of Japan, 11(10):1104–1108, 1956.
- [107] Claire TAYMANS : Solving Incompressible Navier-Stokes Equations on Octree grids : towards Application to Wind Turbine Blade Modelling. Thèse de doctorat, Bordeaux, 2018.
- [108] Roger TEMAM : Sur l’approximation de la solution des équations de navier-stokes par la méthode des pas fractionnaires (ii). Archive for Rational Mechanics and Analysis, 33(5):377–385, 1969.

- [109] Tayfun E TEZDUYAR, Mittal BEHR, S MITTAL et J LIOU : A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces—the deforming-spatial-domain/space-time procedure : I. the concept and preliminary tests. Computer methods in applied mechanics and engineering, 94(3):339–351, 1992.
- [110] Tayfun E TEZDUYAR, Mittal BEHR, S MITTAL et J LIOU : A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces—the deforming-spatial-domain/space-time procedure : li. computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. Computer methods in applied mechanics and engineering, 94(3):353–371, 1992.
- [111] Ananias G TOMBOULIDES : Direct and large eddy simulation of wake flows : Flow past a sphere. 1994.
- [112] Yen-Hsi Richard TSAI, Li-Tien CHENG, Stanley OSHER et Hong-Kai ZHAO : Fast sweeping algorithms for a class of hamilton–jacobi equations. SIAM journal on numerical analysis, 41(2):673–694, 2003.
- [113] Stefan TUREK et Jaroslav HRON : Proposal for numerical benchmarking of fluid-structure interaction between an elastic object and laminar incompressible flow. In Fluid-structure interaction, pages 371–385. Springer, 2006.
- [114] Boris VALKOV, Chris H RYCROFT et Ken KAMRIN : Eulerian method for multiphase interactions of soft solid bodies in fluids. Journal of Applied Mechanics, 82(4), 2015.
- [115] Eric VERON : Calcul numérique des grandes déformations de structures minces en contact avec des fluides lords. Thèse de doctorat, Nantes, 2016.
- [116] J WACKERS, K AIT SAID, GB DENG, P QUEUTEY, M VISONNEAU et I MIZINE : Adaptive grid refinement applied to rans ship flow computation. In Proceedings of the 28th Symposium on Naval Hydrodynamics, Pasadena, California, 2010.
- [117] Jeroen WACKERS, Ganbo DENG, Alban LEROYER, Patrick QUEUTEY et Michel VISONNEAU : Adaptive grid refinement for hydrodynamic flows. Computers & Fluids, 55:85–100, 2012.
- [118] Yan ZANG, Robert L STREET et Jeffrey R KOSEFF : A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible navier-stokes equations in curvilinear coordinates. Journal of Computational Physics, 114(1):18–33, 1994.
- [119] Yong-Tao ZHANG, Hong-Kai ZHAO et Jianliang QIAN : High order fast sweeping methods for static hamilton–jacobi equations. Journal of Scientific Computing, 29(1):25–56, 2006.

- [120] Hong ZHAO, Jonathan B FREUND et Robert D MOSER : A fixed-mesh method for incompressible flow–structure systems with finite solid deformations. Journal of Computational Physics, 227(6):3114–3140, 2008.