HAL open science

Comportements anabéliens des courbes de Berkovich sous les perspectives tempérées

Sylvain Gaulhiac

To cite this version:

Sylvain Gaulhiac. Comportements anabéliens des courbes de Berkovich sous les perspectives tempérées. Géométrie algébrique [math.AG]. Sorbonne Université, 2020. Français. NNT : 2020SORUS315 . tel-03375147

HAL Id: tel-03375147

https://theses.hal.science/tel-03375147v1

Submitted on 12 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sorbonne Université

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Sylvain Gaulhiac

Comportements anabéliens des courbes de Berkovich sous les perspectives tempérées

---

dirigée par Antoine Ducros

Soutenue le 24 septembre 2020 devant le jury composé de :

M. Omid Amini	École Polytechnique	Examinateur
M. Yves André	Sorbonne Université	Examinateur
M. Antoine Ducros	Sorbonne Université	Directeur
M. Klaus Künnemann	Universität Regensburg	Rapporteur, absent
M. Emmanuel Lepage	Sorbonne Université	Examinateur
M. Johannes Nicaise	Imperial College London	Rapporteur
M. Jérôme Poineau	Université de Caen Normandie	Examinateur

Institut de mathématiques de Jussieu-
Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

Sorbonne Université
École doctorale de sciences
mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

À toi, qui te reconnaîtras.

Comment trace-t-on une route à travers la neige ? Un homme marche en tête, suant et jurant, il déplace ses jambes à grand-peine, s'enlise constamment dans la neige friable, profonde. Il s'en va loin devant : des trous noirs jalonnent sa route. [...] C'est toujours par de belles journées qu'on trace les routes pour que les vents ne balaient pas le labeur humain. L'homme choisit lui-même ses repères dans l'infini neigeux : un rocher ou un grand arbre ; il meut son corps sur la neige comme le barreur conduit son bateau sur la rivière d'un cap à l'autre.

Varlam Chalamov
(Récits de la Kolyma)

Remerciements

Voici venu l'exercice des remerciements, exercice plus difficile qu'il n'y paraît. Les pages de remerciements sont celles que je lis toujours en assistant à des thèses : tout d'abord pendant les quelques minutes précédant le début de la soutenance, à la va-vite, attentif aux phrases croustillantes, en essayant quelquefois d'y trouver certains noms comme dans un jeu de cache-cache. Je m'en détourne toujours au début officiel de chaque soutenance pour écouter attentivement l'exposé dont j'ai encore l'espoir de comprendre quelques bribes, puis cet espoir est souvent déçu au bout d'une dizaine de minutes au maximum, je reviens alors sur ces pages initiales, et ainsi de suite, par vagues d'espoirs et de désillusions. Chaque couche se charge d'une attention accrue : en étant emplies d'un aspect humain parfois trop absent du reste du manuscrit, et les seules pages que je puisse comprendre instantanément, elles symbolisent une chaleur, un cocon, une sécurité face au vertige des cimes mathématiques qui les côtoient. Pour l'auditeur qui partagerait ce sentiment lors de ma soutenance, voici la matière que je lui offre, plus fournie que d'habitude, qu'il pourra comprendre peut-être mieux que les 170 pages qui la suivent.

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, Antoine Ducros. Je lui suis reconnaissant pour la précieuse confiance qu'il n'a eu de cesse de me témoigner, et ce dès le début, alors même que ma connaissance des espaces de Berkovich et des groupes fondamentaux n'avait d'égale que ma conscience de la nature de l'activité de recherche : toutes deux étant alors infimes. Antoine m'a encouragé à persévérer malgré les difficultés mathématiques rencontrées en chemin. En m'apprenant à ne pas avoir peur du vertige dans cet itinéraire semé d'embuches, il m'a fait prendre conscience que derrière un obstacle à surmonter ou une pente à gravir se dévoile bien souvent un paysage nouveau, plus riche, plus coloré. Toutes les discussions que l'on a pu avoir, ces heures passées dans son bureau à tenter de comprendre quelques lignes obscures sur les semi-graphes d'anabélioïdes, ces heures passées sur Zoom à réfléchir aux rayons de déploiement des torseurs, ses innombrables éclaircissements, ses nombreuses suggestions ainsi que ses multiples corrections de mon manuscrit ont été absolument décisifs. Au-delà du guide et de l'éclaireur il y a en lui valeur d'exemple : chez Antoine affleure constamment la passion pour les mathématiques, au nom de laquelle il ne compte ni son temps ni son investissement. Je salue son énergie intarissable, son enthousiasme, sa disponibilité, ainsi que sa promptitude à répondre aux mails (parfois de l'ordre de la minute). J'aimerais ensuite exprimer toute ma gratitude à Emmanuel Lepage, qui, au fil des discussions, a joué un rôle mathématique totalement essentiel

dans cette thèse. De lui vient l'idée de transposer le travail de Mochizuki dans le langage purement analytique de la théorie de Berkovich afin d'obtenir des résultats anabéliens faisant intervenir le squelette analytique ; de lui vient l'intuition du lien entre trivialité des cochaînes et minimalité des rayons de déploiement ; de lui le recours salutaire à la résolution des non-singularités... qu'il en soit chaleureusement remercié. Je remercie mes deux rapporteurs Johannes Nicaise et Klaus Künnemann, qui en plein été et malgré la crise sanitaire se sont pliés à cette tâche ingrate et ont pris le temps de relire attentivement mon travail. Mes remerciements les plus sincères vont également aux autres membres de mon jury : Omid Amini, Yves André, sans qui le groupe tempéré d'une variété analytique n'aurait sans doute jamais vu le jour, et Jérôme Poineau, avec qui j'ai eu le plaisir de partager au fil de diverses conférences des aventures tant mathématiques que musicales. Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Shinichi Mochizuki, pour son travail sur les semi-graphes d'anabélioïdes sur lequel s'appuie cette thèse, pour m'avoir laissé matière à me poser d'innombrables questions en lisant ses papiers, ainsi que pour avoir répondu avec clarté à certaines de mes questions naïves. Merci également à Nikita Karpenko pour m'avoir aidé à trouver un postdoc.

Il est temps de remercier tout ceux qui, embarqués sur le même navire, ont partagé les méandres, les affres et les illuminations de la thèse dans ce cher couloir du 5ème étage 15-16. Sudarshan, ce fut un plaisir d'avoir été ton co-bureau, également un bonheur et un privilège de t'avoir fait découvrir Bach, Schubert, Prokofiev, Chopin... et de les avoir fait résonner dans tout le couloir ; je te souhaite bonne chance dans ta future carrière politique en Inde. Mathieu Du., je ne sais ce qui est le plus courageux entre lire tout l'oeuvre de Zola ou persévérer dans tes calculs faramineux, mais je tiens à te féliciter pour ton opiniâtreté, et te remercier pour ces discussions et l'aide que tu m'a parfois apportée. Je tiens à remercier : Jean-Michel pour ses mini-cours aussi enflammés qu'insatiables, en salle commune, sur tout ce qui a à voir de près ou de loin avec les infini-catégories, Mahya et Grace pour avoir apporté de l'éclat, de la bonne humeur et de l'alacrité à ce couloir ainsi que pour les délicieux gâteaux iraniens ou libanais, Anna F., Alexandre, Benoît, Thibaut, petit Mathieu ou Vincent pour toutes ces pauses thé, Xavier, Vadim, Malo, Hernan, Sebastian, An Khuong, Anna S., Charles pour son aigle empaillé et son charisme inimitable, Ilias pour sa remarquable présence, et parmi la récolte fraîche : Christina, grand Thomas, petit Thomas, Haowen, Christophe. N'oublions pas les anciens : Hugo, Justin, Thomas, Jesua, Louis et Nicolina, Léo, Adrien S., Adrien B., Valentin, Martin, Arnaud, Andrés, Cyrus, Malick ... Merci à Thomas Blomme pour m'avoir accompagné dans cette belle aventure de l'organisation du Réga, pour les bons restaurants partagés ainsi que pour les quelques musiques piano/trombone jouées ensemble. J'ai disposé d'excellentes conditions de travail au sein de l'IMJ-PRG, auxquelles ont contribué l'efficacité et la gentillesse de l'équipe administrative : Émilie Jacquemot, Nadine Fournaiseau, Claire Lavollay, Gaëlle Callouard, Évariste Ciret, Sakina Madel-Kawami, et la direction de Loïc Merel et Jean-François Dat. Merci à Marie-Gontran Jalet qui a eu la patience de répondre à mes très nombreuses sollicitations lors de mes déboires avec l'Éducation Nationale. Dois-je remercier l'Académie de Versailles pour m'avoir forcé à adopter le statut aussi singulier qu'équivoque de *désagrégé* ? Je me contenterai de l'honorer, d'une pensée

furtive. Il n'est pas coutume de remercier ses étudiants dans les manuscrits de thèse, mais je tiens à en citer deux : Tran-Trung, je suis heureux d'avoir pu t'accompagner ainsi dans ton parcours, et te souhaite tout le meilleur dans ta future carrière mathématique ; Augustin L., ce fut un réel plaisir de partager avec toi toutes ces belles mathématiques agrégatives, ces extensions de corps, ces formes quadratiques et ces dénombrements dans les corps finis. Ton enthousiasme est précieux, je suis sûr qu'il t'ouvrira les portes que tu souhaites.

Si mon apprentissage des mathématiques a suivi depuis mon enfance un chemin plutôt linéaire, naturel, sans heurts ni fractures, il a tout de même à plusieurs reprises procédé par bonds et élans. À cet égard je me dois de citer et remercier Michel Alessandri, alias Michou, mon professeur de classes préparatoires. Par son investissement total, par ses yeux qui brillent à l'évocation de certains termes comme « Galois » ou « géométrie hyperbolique », par son heuristique et sa patience, il restera toujours pour moi un modèle en terme d'enseignement et de transmission. En m'expliquant dès la fin de la sup comment étendre un corps en prenant le quotient de l'anneau des polynômes par un idéal idoine, puis quelques mois plus tard en me dévoilant les bases de la théorie de Galois, c'est lui qui a réussi avec brio à m'insuffler le goût pour les mathématiques pures et pour leur beauté subversive. Son influence sur moi ne saurait être surestimée, et je lui en suis plus que reconnaissant. Parmi ceux et celles qui ont compté dans mon apprentissage mathématique, je citerais volontiers Pierre Meunier, Michel Pierre, Lionel Fourquaux, Yongquan Hu, Jérémy Le Borgne, Karine Beauchard, Arnaud Debussche, Mohammed Lemou, Daniel Perrin (Le Perrin), Philippe Caldéro et Jérôme Germoni (avec leur fameux H2G2), ainsi que Mathieu Florence et Zinovy Reichtein pour m'avoir initié à la recherche.

Mes années de thèse sont inséparables des conférences suivies à travers le monde et des voyages mémorables en Arizona, Russie, Colombie, Roumanie, Allemagne, Pologne, Brésil et Portugal ; j'aimerais citer quelques-unes des belles rencontres que j'ai pu y faire. Je suis heureux de t'avoir rencontré à Bucarest, Claudia, merci pour ta curiosité rare et ces beaux moments passés à Rennes et à Paris. Liana, de ces soirées à Cracovie jusqu'à ce séjour à Vama Veche, ta personnalité pleine de malice et d'audace est précieuse ; je te souhaite tout le meilleur avec Marco. Nous partageons, Kostya, une insatiable curiosité d'exploration, et je te dois l'inoubliable excursion dans le ghetto interlope de Ferentari. Katha, notre rencontre impromptue dans les ruelles sombres de Bogota en compagnie de Fabian, le petit cadeau d'anniversaire ainsi que les pas de salsa esquissés avec toutes les générations de ta famille réunie ont apporté une saveur colorée à mon séjour colombien. Merci également à Roberta pour ces moments passés au Brésil.

Parmi mes amis qui ont joué un rôle dans ces années trépidantes, Pierre est l'irréductible, l'autochtone : merci pour toutes les aventures partagées depuis notre rencontre au Club Musique de l'ENS, ainsi que pour toutes celles à venir. Alice et Édouard, je vous dois les plus beaux moments de mes années normaliennes, et ne saurais que trop vous en remercier. En vos deux personnalités, explosives quoique différentes, j'admire la force de volonté et la pugnacité avec laquelle vous agrippez vos passions. Une pensée pour mes autres amis de Rennes : Alex, Hugo M.,

Augustin M., Lucas, Thibault. Parmi mes amis parisiens, Matthieu P. gagne par son éloquence, des Fragments d'un Discours Amoureux à la bouffonnerie transcendantale, de Barthes à Zorn que tu m'as fait découvrir, je ne sais qui de ta vie ou de ton roman influence le plus l'autre, et te souhaite bonne chance dans ces deux aventures. Yann, j'espère bientôt siroter un espresso dans le coffee shop que tu ouvriras tout en étant professeur et gendarme. Depuis notre rencontre au Cercle des Mélomanes de LLG autour de bougies et de chocolats à écouter du Brahms sous la vigueur d'un poivre de Sichuan ou à danser sur les facéties de Schnittke, je te remercie Julien pour ton originalité et ton éclectisme, et souhaite belle continuation à tous tes projets. Si le Port du Salut s'enflamme presque chaque mois aux soirées Musique et Magie endiablées, c'est grâce à l'élan communicatif de Gautier dont l'enthousiasme n'a d'égal que la sympathie. Léon, ton imagination et ta sensibilité sont remarquables, c'est une chance de te connaître. Notre longue amitié m'est chère, Yumiko, et je te remercie pour l'attention que tu portes à mes rêves. Je tiens à remercier également pour leurs amitiés : Sacha Bufetov pour son esprit bouillonnant et son charisme sans pareil, Bastien qui m'a introduit à Hegel et à Mozart, et avec qui, dans sa thurne sombre, j'ai eu pour la première fois des discussions passionnantes ; Alexis le philosophe qui a eu la bonne idée de me proposer de s'asseoir côte-à-côte, au Pot, pendant la semaine des oraux ; Joseph B. qui connait les rues de Paris tout autant que le Clavier bien tempéré, Edu pour sa chaleur brésilienne et sa personnalité unique, Arnaud et son bagou généreux, Chenzhang, Élie, Jules, Katya et Arthur, Sacha V. qui après des thèses en mathématiques et bientôt en littérature ne recule devant aucune difficulté en choisissant d'élever un enfant ; Roman, Alina, Georgy, Petr, Sergueï, Konstantin, Alexey, Vishnu, Julie L-S pour nous avoir invité en Bourgogne dans le domaine de ses illustres grand-parents, Ellie et ce beau périple en Colombie Britannique. Parmi les ukrainiens de Kiev, j'aimerais remercier pour leur accueil et leur expressivité : Jenya, Katya, Macha, Dasha, Aliosha, Nastya, Igor, Sacha M., Oksanna, Valentina, et Sacha outre-atlantique. Les nombreux mois passés au centre de rééducation de Saint-Mo furent bien plus heureux que je ne pouvais l'espérer, grâce à cette belle troupe d'éclopés : Cindy, Thalia, Stéphanie, Niko, Renaud, Nhat, Patrice, Mélo, Yael, ainsi que mon kiné Léo, et Rémi qui m'a honoré d'être choisi comme sujet de mémoire. Une pensée pour Sophia, Polina, Iris, Geoffrey, Bernadette et Brigitte pour cette cohabitation rue Saint-Roch.

Quiconque me connaît sait toute la place que prend la musique dans ma vie : une place de premier ordre. Ceux qui m'entendaient dire presque chaque soir « je vais au concert » comprendront que l'équilibre entre la musique et le travail de thèse fut parfois délicat, surtout dans cette effervescence unique qu'est Paris. Les 65000 mots de cette thèse dépassent de peu en volume la somme de tous mes 63 articles musicaux écrits pour Bachtrack. Pour cette belle aventure journalistique dans ce merveilleux bouillonnement parisien, cette myriade de concerts et ces quelques centaines d'heures passées à chercher le mot juste, j'aimerais remercier mes chers éditeurs de Bachtrack : Nicolas Schotter et Tristan Labouret. Cette ébullition culturelle dans laquelle je suis entré n'aurait sans doute pas eu la même saveur sans deux personnes que je tiens à remercier chaleureusement, deux amis tout autant que mes deux « parents parisiens » : Anne-Marie et Jean-François. Pour votre générosité sans borne, pour l'organisation de ces beaux concerts

privés ou publics et tous les artistes rencontrés à ces occasions, pour les longues soirées, les plateaux de fromages gargantuesques et en particulier le Saint-Nectaire, enfin pour la mémoire de Marie-Laure, que je n'ai eu la chance de connaître, mais dont l'influence rayonnera longtemps encore. Qu'Arco ne soit pas oublié, sa personnalité était inégalable. Parmi les organisateurs de concerts, agents d'artistes ou critiques musicaux, je voudrais remercier : Christian Onckelet pour les fameux dîners et pour les *Musicales de Croissy* auxquelles je souhaite une belle continuation, Olivier Bouley pour ses *Pianissimes* dynamiques, l'inimitable Rémy Louis et sa faconde proverbiale, Bertrand Boissard et ses petits commentaires distillés à l'emporte-pièce, Alla Gouraud, enfin Alison Phillips et son étonnante volubilité. Également rencontrés grâce à la musique, je salue Joseph T., Marc C., Pablo, Benoît S., François-Xavier qui a hébergé mon cher Pétrof, Hélène, Alain L. P., Michael... Je suis très heureux d'avoir pu jouer de belles sonates piano-violon avec Benjamin ainsi qu'avec la talentueuse Noémie. À défaut de citer la longue liste des musiciens merveilleux que j'ai entendus ou rencontrés durant ces années, je me contenterai d'en remercier quelques-uns que j'ai pu côtoyer au-delà des concerts : Vadym Kholodenko, pianiste que j'admire sans retenue, pour son intelligence musicale et l'entretien qu'il m'a accordé ; Sacha Boldachev le démiurge de ce bel instrument qu'est la harpe, Ludmila Berlinskaïa et Arthur Ancelle pour leur amitié, Ferhan Önder pour sa gentillesse et ce concert mémorable à Vuitton, et enfin ma violoncelliste préférée, Anastasia Kobekina, pour sa générosité et son talent.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers ma chère maman que j'aime beaucoup, et qui depuis toujours me soutient, m'encourage, s'inquiète pour moi, m'aide, me fait confiance et me cuisine de bons plats. Merci infiniment ! J'ai une pensée émue pour mon papa, qui nous a quitté trop tôt, mais à qui je dois beaucoup et qui a tant fait pour moi : qu'il en soit profondément remercié. Merci également à mon cher frère Manuel, que quatre minutes séparent officiellement de moi, mais avec qui j'ai joué et partagé la complicité dès l'âge prénatal. Je lui souhaite tout le meilleur avec sa femme : à lui pour la thèse, les projets autour du piano, et toutes les inspirations à venir ; à sœur Xiao, l'éclectique talentueuse, dans son ambitieuse aventure de théréministe, d'artiste et de chercheuse ; enfin à eux deux dans les rêves qu'ils voudront réaliser. Je suis plein de reconnaissance envers mes grand-parents Bon Papa et Bonne Maman, pour leur générosité et leur soutient constant depuis toutes ces années. Merci aux autres membres de ma famille, mes tantes, mes oncles, mes cousins et mes cousines, en particulier la fratrie Arnold, mon oncle Gabriel, ainsi que mon cousin Romain et sa femme Stephanie, qui me soutiennent depuis longtemps.

Enfin, je remercie tout spécialement Yasya qui est à mes côtés depuis le début de ma thèse, m'encourage, me supporte, m'inspire, m'anime et me motive. Merci Yasya pour ton amour et ta complicité de tous les jours, pour ta personnalité unique, merci pour cette relation rare et précieuse, pour tous ces moments vécus et tous ceux qui nous attendent encore.

Résumé

Ce travail met en évidence certains comportements *anabéliens* des courbes analytiques au sens de la géométrie de Berkovich. Nous y montrons que la connaissance du *groupe fondamental tempéré* de certaines courbes appelées *analytiquement anabéliennes* détermine leurs *squelettes analytiques* en tant que graphes. Le fameux demi-plan de Drinfeld est un exemple de telles courbes. Le groupe fondamental tempéré d'un espace de Berkovich, introduit par André, a permis à Mochizuki de démontrer le premier résultat anabélien en géométrie de Berkovich, concernant les analytifiées de *courbes hyperboliques* sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. À cette fin Mochizuki développe le langage des *semi-graphes d'anabélioïdes* et des *tempéroïdes*. Notre travail consiste à associer un semi-graphe d'anabélioïdes à une courbe analytique munie d'une *triangulation minimale*, et à adapter les résultats de Mochizuki afin de retrouver le squelette analytique de la courbe. La nouveauté de ces résultats anabéliens est que les courbes auxquelles nous nous intéressons ne sont plus supposées de *nature algébrique*. Enfin, en combinant des résultats de résolution des non-singularités à une étude fine des ensembles de déploiement des μ_p-torseurs d'une courbe analytique en fonction des valeurs des cochaînes harmoniques associées, nous obtenons un résultat d'anabélianité partielle de la longueur d'une couronne.

Mots-clés

Géométrie anabélienne, espaces de Berkovich, groupe fondamental tempéré, courbes analytiques, couronnes analytiques, semi-graphe d'anabélioïdes, résolution des non-singularités.

Abstract

This work brings to light some *anabelian behaviours* of analytic curves in the context of Berkovich geometry. We show that the knowledge of the *tempered fundamental group* of some curves called *analytically anabelian* determines their *analytic skeletons* as graphs. The famous Drinfeld half-plane is an example of such a curve. The tempered fundamental group of a Berkovich space, introduced by André, enabled Mochizuki to prove the first anabelian result in Berkovich geometry, dealing with analytifications of *hyperbolic curves* over $\overline{\mathbb{Q}}_p$. To that end, Mochizuki develops the language of *semi-graphs of anabelioids* and *temperoids*. Our work consists in associating a semi-graph of anabelioids to a Berkovich curve equipped with a *minimal triangulation* and in adapting the results of Mochizuki in order to recover the analytic skeleton of the curve. The novelty of this anabelian result lies in the fact that the curves we are interested in are no longer supposed to be of *algebraic nature*. Finally, combining some results of resolution of non-singularities to some fine study of decomposition sets of μ_p-torsors and associated harmonic cochains, we obtain some result of partial anabelianity of lenghts of annuli.

Keywords

Anabelian geometry, Berkovich spaces, tempered fundamental group, analytic curves, semi-graph of anabelioids, resolution of non-singularities.

Table des matières

Introduction **17**

1 Le monde des courbes analytiques **35**

1.1 Espaces de Berkovich 35

1.1.1 Corps ultramétriques 35

1.1.2 Spectre de Berkovich d'un anneau de Banach 37

1.1.3 Espaces affinoïdes 40

1.1.4 Bons espaces analytiques 46

1.1.5 Analytification d'une variété algébrique 52

1.1.6 Morphismes et revêtements étales 54

1.2 Introduction aux courbes analytiques 58

1.2.1 Points d'une courbe analytique 59

1.2.2 Résultats généraux 60

1.2.3 Droites analytiques affine et projective $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ et $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ 63

1.2.4 Disques et couronnes analytiques 67

1.3 Squelette, triangulations et nœuds 72

1.3.1 Squelette analytique d'une courbe 72

1.3.2 Triangulations et nœuds 73

1.3.3 Triangulations généralisées et points superflus 75

1.4 Premiers comportements des μ_n-torseurs d'une courbe 77

1.4.1 Revêtements de Kummer et μ_ℓ-torseurs d'une couronne 77

1.4.2 Cochaînes harmoniques et suites exactes 78

1.4.3 Revêtements sauvages et conditions de déploiement 80

1.5 Groupe fondamental tempéré 84

1.5.1 Motivations 84

1.5.2 Morphismes tempérés et groupe fondamental tempéré 85

1.5.3 Quelques propriétés 87

2 Introduction aux anabélioïdes et tempéroïdes de Mochizuki 93
2.1 Le monde des anabélioïdes 94
2.1.1 Anabélioïdes connexes 94
2.1.2 Anabélioïdes 96
2.1.3 Semi-graphe d'anabélioïdes et anabélioïde des recouvrements $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ 99
2.1.4 Semi-graphe d'anabélioïdes d'une triangulation généralisée 101
2.2 Le monde des tempéroïdes 103
2.2.1 Définitions 103
2.2.2 Tempéroïde des recouvrements tempérés $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G})$ associé à un semi-graphe d'anabélioïdes 105
2.3 Hypothèses mochizukiennes 108
2.3.1 Contraintes locales 109
2.3.2 Contrainte globale 109
2.4 Reconstruction du semi-graphe sous-jacent d'un tempéroïde 110

3 Description du semi-graphe d'anabélioïdes d'une triangulation 111
3.1 Comportement des composantes coronaires 112
3.1.1 Cas d'une vraie triangulation 112
3.1.2 Triangulation généralisée et rabotée d'une courbe 113
3.2 Comportement des composantes sommitales 115
3.2.1 Germes d'espaces k-analytiques 115
3.2.2 Courbe résiduelle et valuation associée à une branche autour d'un point de type 2 118
3.2.3 Description des sous-groupes sommitaux 121
3.3 Compatibilité avec les hypothèses mochizukiennes 123
3.3.1 Simplification des hypothèses 123
3.3.2 Courbes analytiquement hyperboliques 126
3.3.3 Exemples de courbes k-analytiquement hyperboliques 128

4 Reconstruction anabélienne du squelette analytique 133
4.1 Tempéroïde connexe associé au semi-graphe d'anabélioïdes d'une triangulation 133
4.2 Reconstruction du squelette tronqué 135
4.2.1 Premier résultat anabélien, sur les squelettes tronqués 135
4.2.2 Courbes analytiquement hyperboliques à arêtes relativement compactes 136

4.2.3 Application : anabélianité tempérée du demi-plan de Drinfeld . . . 137
4.3 Reconstruction des arêtes cuspidales 138
4.3.1 Stabilité de l'hyperbolicité par revêtements finis étales 138
4.3.2 Commensurabilité terminale des sous-groupes cuspidaux 139
4.3.3 Ascendance vicinale et courbes analytiquement anabéliennes 142
4.4 Exemples de courbes k-analytiquement anabéliennes 145
4.4.1 Avec cusps coronaires finis 145
4.4.2 Avec cusps discaux épointés et coronaires finis 146

Intermède : Automorphismes du groupe tempéré préservant le graphe 149
Rappels et définitions 149
Bien fondé du morphisme θ_{π_e} 151
Indépendance vis-à-vis du représentant π_e 153
Indépendance vis-à-vis du choix de la branche issue d'un nœud donné . . . 154
Conclusion 156

5 Cochaînes harmoniques et longueur des couronnes 159
5.1 Cochaînes harmoniques et μ_p-torseurs 159
5.1.1 Morphisme de cochaîne 159
5.1.2 Cochaînes et minimalité du rayon de déploiement sur une couronne 162
5.1.3 Caractérisation des μ_p-torseurs de cochaîne nulle 166
5.2 Résolution des non-singularités 167
5.2.1 Définition et propriétés des points résolubles 167
5.2.2 Résolubilité du squelette d'une couronne et des points « seuils » . 170
5.2.3 Anabélianité de la trivialité des μ_p-torseurs 171
5.3 Anabélianité partielle de la longueur des couronnes 173
5.3.1 Longueurs et ensembles de déploiement 173
5.3.2 Résultat sur les longueurs des couronnes 176

Introduction

C'était l'un de ces matins où l'on sent en soi la réflexion attendre comme un acide incolore dans un flacon. Sa transparence n'a d'égale que sa vigueur d'attaque et son pouvoir de décapage.

Jules Romains
(Quand le navire...)

Motivations

Cette thèse est consacrée à la mise en évidence de phénomènes anabéliens dans le monde des courbes analytiques p-adiques ; avant de les présenter, nous allons faire une brève présentation de la « philosophie anabélienne » de Grothendieck qui les a inspirés.

Géométrie anablélienne dans le monde algébrique

En topologie, la classe d'homotopie d'un espace ayant de bonnes propriétés (par exemple un CW-complexe) est exactement déterminée par le groupe fondamental topologique de cet espace. L'idée de la géométrie anabélienne est qu'un comportement similaire puisse se produire en géométrie algébrique : un schéma X ayant de « bonnes propriétés » devrait être déterminé par son groupe fondamental étale. Le terme « anabélien », introduit par Grothendieck, est à comprendre au sens de « hautement non abélien ». En effet, parmi les bonnes propriétés que X doit vérifier est celle que le groupe fondamental étale $\pi_1(X)$ de X doit avoir tous ses sous-groupes d'indice fini non abéliens. Par exemple, les objets les plus simples de la géométrie algébrique sont les corps, qui sont des points de dimension 0. Le groupe fondamental étale $\pi_1(k)$ d'un corps k n'est autre que son *groupe de Galois absolu* $G_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}^s/k)$, où $\overline{k}^s$ désigne une clôture séparable de k. Néanmoins, comme toutes les extensions galoisiennes des corps finis sont cycliques, le groupe de Ga-

lois absolu de tout corps fini F est isomorphe au groupe abélien $\widehat{\mathbb{Z}}$. On en déduit que les corps finis n'ont pas un comportement anabélien. Voici dans ce qui suit un aperçu très bref, et loin d'être complet, de quelques résultats anabéliens majeurs en géométrie algébrique. Pour une belle introduction détaillée, lire [Pop11].

Le cas des corps

En dehors des corps finis, des corps ne se comportant pas de manière anabélienne peuvent être trouvés parmi les corps infinis de toute caractéristique. Par exemple, pour tout nombre premier p, en notant K et $K^\flat$ les complétions des corps valués

$$\mathbb{Q}_p\left(p^{1/p^\infty}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{F}_p\left((t)\right)\left(t^{1/p^\infty}\right),$$

un célèbre théorème de Fontaine-Wittenberger (cf. [FW]) nous indique que les groupes de Galois absolus G_K et $G_{K^\flat}$ sont isomorphes, c'est-à-dire que les schémas Spec(K) et Spec($K^\flat$) ont même groupe fondamental étale. Ce théorème fut l'une des motivations au développement de la théorie perfectoïde de Peter Scholze qui l'a généralisée aux corps perfectoïdes et à leurs basculements. L'un des premiers résultats anabéliens sur les corps est le fameux théorème de Neukirch-Uchida, concernant les corps globaux (i.e. les corps de nombres ou les corps de fonctions de dimension 1 sur les corps finis).

Théorème 0.0.1 (Neukirch-Uchida)**.** *Deux corps globaux ayant des groupes de Galois absolus isomorphes sont isomorphes. Plus précisément, si k_1 et k_2 sont deux corps globaux, l'application canonique suivante est une bijection :*

$$\mathrm{Isom}(k_1, k_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}^{\mathrm{Out}}(G_{k_1}, G_{k_2}),$$

où $\mathrm{Isom}^{\mathrm{Out}}(G_{k_1}, G_{k_2}) := \mathrm{Isom}(G_{k_1}, G_{k_2})/\mathrm{Inn}(G_{k_2})$ *désigne le groupe des isomorphismes extérieurs de G_{k_1} à G_{k_2}.*

Ce théorème a été prouvé par Neukirch ([Neu]) dans le cas des corps de nombres, puis par Uchida ([Uch]) pour les corps de fonctions sur $\mathbb{F}_q$. Pop a montré dans [Pop94] que ce résultat est vrai pour les corps infinis finiment engendrés sur leur sous-corps premier.

On peut montrer que les corps p-adiques (extensions finies de $\mathbb{Q}_p$) ne vérifient pas ce théorème. Mentionnons tout de même le théorème de Jarden-Ritter :

Théorème 0.0.2 (Jarden-Ritter, [JR])**.** *Soit K et L des extensions finies de $\mathbb{Q}_p$. Si K contient une racine p-ième de l'unité (une racine 4-ième de l'unité dans le cas $p = 2$), les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $G_K \simeq G_L$

ii) $[K : \mathbb{Q}_p] = [L : \mathbb{Q}_p]$ *et* $K^{\mathrm{ab}} = L^{\mathrm{ab}}$*, où* K^{ab} *désigne la sous-extension de* $K/\mathbb{Q}_p$ *abélienne maximale (de même pour* L*).*

Signalons également que Mochizuki propose dans [Mzk97] un résultat similaire au théorème de Neukirch-Uchida qui s'applique aux corps p-adiques, mais où les isomorphismes entre les groupes de Galois doivent respecter les filtrations définies par les groupes de ramifications supérieurs.

Le cas des courbes hyperboliques

Si X est un k-schéma de type fini, géométriquement connexe, tout point géométrique $\overline{x}$ de X induit une suite exacte de groupes profinis :

$$1 \to \pi_1(X_{\overline{k}}, \overline{x}) \to \pi_1(X, \overline{x}) \xrightarrow{\pi_X} G_k \to 1.$$

Si X est une courbe hyperbolique sur k, pour tout nombre premier p notons $\pi_1^{(p)}(X_{\overline{k}})$ le pro-p-quotient maximal de $\pi_1^{(p)}(X_{\overline{k}})$. Le noyau N de $\pi_1(X_{\overline{k}}) \to \pi_1^{(p)}(X_{\overline{k}})$ est un sous-groupe caractéristique de $\pi_1(X_{\overline{k}})$, il est ainsi invariant par tout morphisme de conjugaison venant de $\pi_1(X)$, c'est donc un sous-groupe normal de $\pi_1(X)$ via l'injection canonique $\pi_1(X_{\overline{k}}) \hookrightarrow \pi_1(X)$. Notons alors $\pi_1^{(p)}(X)$ le quotient $\pi_1(X)/N$.

Si X_1 et X_2 sont deux schémas de type finis sur k et géométriquement connexes, notons :

$$\mathrm{Isom}_{G_k}^{\mathrm{Out}}\left(\pi_1(X_1), \pi_1(X_2)\right) = \mathrm{Isom}_{G_k}\left(\pi_1(X_1), \pi_1(X_2)\right) / \mathrm{Inn}\left(\pi_1(X_{2,\overline{k}})\right)$$
$$\mathrm{Hom}_{G_k}^{\mathrm{op,Out}}\left(\pi_1^{(p)}(X_1), \pi_1^{(p)}(X_2)\right) = \mathrm{Hom}_{G_k}^{\mathrm{op}}\left(\pi_1^{(p)}(X_1), \pi_1^{(p)}(X_2)\right) / \mathrm{Inn}\left(\pi_1^{(p)}(X_{2,\overline{k}})\right)$$

Notons $\mathrm{Isom}_{\mathrm{Sch}_k}(X_1, X_2)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_k}^{\mathrm{dom}}(X_1, X_2)$) l'ensemble des isomorphismes de k-schémas (resp. l'ensemble des morphismes dominants de k-schémas) entre X_1 et X_2, et $\mathrm{Isom}_{\mathrm{Sch}}(X_1, X_2)$ l'ensemble des isomorphismes de schémas entre X_1 et X_2 (en oubliant la structure au-dessus de $\mathrm{Spec}(k)$).

Si $G_1 \to G$ et $G_2 \to G$ sont deux morphismes de groupes profinis au-dessus d'un même groupe G, notons $\mathrm{Hom}_G^{\mathrm{op}}(G_1, G_2)$ l'ensemble des morphismes continus ouverts de G_1 dans G_2.

Une courbe lisse et géométriquement connexe X est dite *hyperbolique* lorsque $2g+n >$

2, où g est le genre de la compactification normale $\overline{X}$ de X, et $n \in \mathbb{N}$ le cardinal de $\overline{X}(\overline{k}) \setminus X(\overline{k})$.

Dans une fameuse lettre à Faltings datant de 1983 ([G1], voir aussi [G2]), Grothendieck imagine un « programme anabélien » donnant l'existence d'une sous-catégorie pleine de la catégorie des schémas de type fini sur un corps k dont les objets sont « déterminés » par leur groupe fondamental étale. Il conjecture qu'une telle catégorie devrait contenir toute les courbes hyperboliques, les fibrations successives de telles courbes les unes par rapport aux autres, ainsi que l'espace des modules $\mathfrak{M}_g$ des courbes de genre donné g.

Si k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, le groupe fondamental d'une k-courbe normale propre ne dépend que de son genre. En particulier il y a un nombre infini de telles k-courbes ayant le même groupe fondamental étale. Néanmoins, le résultat suivant, dû à Tamagawa et basé sur des travaux antérieurs de Raynaud, Pop et Saïdi, nous indique que la situation est toute autre en caractéristique positive :

Théorème 0.0.3 ([Tam2])**.** *Si p est un nombre premier et G un groupe profini, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de courbes normales propres de genre $\geqslant 2$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de groupe fondamental G.*

Les conjectures de Grothendieck suivantes précisent le sens donné à la « détermination » d'une courbe par son groupe fondamental.

- **Conjecture** (Isom) **-absolue.** Si X_1 et X_2 sont deux courbes hyperboliques sur un corps k, alors l'application canonique suivante est une bijection :

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{Sch}}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}^{\mathrm{Out}}\left((\pi_1(X_1), \pi_1(X_2))\right).$$

  Très peu de résultats furent trouvés sur ces conjectures anabéliennes pendant une période de plus 10 ans après la formulation de celles-ci. C'est grâce à Tamagawa que tout bascule : il montre dans [Tam1] que la conjecture (Isom)-absolue est vraie pour les courbes hyperboliques *affines* sur des corps finis, résultat d'autant plus surprenant que les corps finis eux-mêmes ne sont pas anabéliens. Sa preuve utilise de manière judicieuse la théorie du corps des classes, la cohomologie galoisienne ℓ-adique et la formule des traces de Lefschetz. Le cas de courbes hyperboliques *propres* sur les corps finis a été montré dix ans plus tard par Mochizuki dans [Mzk07], par ses techniques de *cuspidalisation*.

- **Conjecture** (Isom)**-relative.** Si X_1 et X_2 sont deux courbes hyperboliques sur un corps k, alors l'application canonique suivante est une bijection :

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{Sch}_k}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{G_k}^{\mathrm{Out}}\left((\pi_1(X_1), \pi_1(X_2)\right).$$

  Peu après les résultats de Tamagawa où les corps de bases sont finis, Mochizuki montre dans [Mzk96] que la conjecture (Isom)-relative est vraie pour les courbes hyperboliques au-dessus d'un corps k finiment engendré sur $\mathbb{Q}$. Sa preuve, basée sur celle de Tamagawa pour les corps finis, fait appel à la géométrie logarithmique et aux groupes fondamentaux logarithmiques.

  Mentionnons que Stix a prouvé dans [Sti] un analogue de la conjecture (Isom)-relative concernant les courbes hyperboliques non constantes sur les corps infinis finiment engendrés et de caractéristique positive.

- **Conjecture** (Hom)**-relative.** Si X_1 et X_2 sont deux courbes hyperboliques sur un corps k, alors l'application canonique suivante est une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_k}^{\mathrm{dom}}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_k}^{\mathrm{op,Out}}\left(\pi_1(X_1), \pi_1(X_2)\right)$$

  Cette conjecture, qui met en jeu les morphismes dominants plutôt que les isomorphismes, est plus forte que la conjecture (Isom)-relative. Le résultat le plus profond a été obtenu par Mochizuki dans [Mzk99], et concerne les courbes hyperboliques sur les corps locaux *sous-p-adiques*, c'est-à-dire les corps qui se plongent dans une extension finiment engendrée de $\mathbb{Q}_p$. Les corps de nombres ainsi que les corps p-adiques (extensions finies de $\mathbb{Q}_p$) sont des exemples de tels corps.

  Théorème 0.0.4 ([Mzk99])**.** *Soit k un corps local sous-p-adique, et X_1, X_2 deux courbes hyperboliques sur k. Alors l'application canonique suivante est une bijection :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_k}^{\mathrm{dom}}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_k}^{\mathrm{op,Out}}\left(\pi_1^{(p)}(X_1), \pi_1^{(p)}(X_2)\right)$$

  La preuve de Mochizuki, très technique, utilise la théorie de Hodge p-adique qui étudie les propriétés des représentations galoisiennes venant de la géométrie arithmétique, ainsi que la théorie de Faltings des morphismes presque étales.

Remarque 0.0.5 (En dimension 2)*.* Mochizuki prouve dans [Mzk99] (Theorem D) l'anabélianité des *surfaces hyperboliquement fibrées* sur des corps sous-p-adiques. Une surface hyperboliquement fibrée X est définie comme le complémentaire d'un diviseur étale sur

une famille propre et lisse $\widetilde{X} \to X_0$ de courbes hyperboliques au-dessus d'une courbe hyperbolique X_0. Il montre plus précisément que la conjecture (Isom)-relative est vraie pour les surfaces hyperboliquement fibrées sur un corps sous-p-adique.

Géométrie anablélienne dans les espaces analytiques

Dans la lignée des développements de la géométrie anabélienne dans le cas des courbes hyperboliques, il est loisible de se poser des questions d'inspiration anabélienne dans les espaces des Berkovich, à savoir :

Dans quelle mesure un espace k-analytique est-il déterminé par son « groupe fondamental » ?

Il est possible de définir en théorie de Berkovich plusieurs « groupes fondamentaux » selon que ceux-ci classent les revêtements *topologiques*, *étales finis*, ou *étales*. Néanmoins le groupe fondamental *topologique* est souvent « trop petit » tandis que le groupe fondamental *étale* a tendance à être « trop grand » . Le groupe qui semble au mieux capturer les comportements anabéliens des espaces analytiques sur les corps non archimédiens est le groupe fondamental *tempéré*, introduit par Yves André dans [And]. Ce groupe classe les revêtements dits *tempérés*, définis comme les revêtements étales devenant topologiques après un changement de base fini étale, ce qui équivaut à demander que ces revêtements soient quotient d'un revêtement topologique d'un revêtement étale fini. Les revêtements topologiques tout autant que les revêtements étales finis sont des exemples de revêtements tempérés.

C'est Yves André, dans son article [And1], qui obtient pour la première fois des résultats de nature anabélienne en utilisant les espaces de Berkovich. À l'aide du groupe fondamental tempéré, il donne une description de nature géométrique des sous-groupes de Galois locaux $G_{\mathbb{Q}_p}$ du groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}}$ (voir 1.5.11) dans l'esprit de l'*Esquisse d'un programme* [G2] de Grothendieck, puis introduit un avatar p-adique du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GT}$. À la suite de cet article, ce sont Shinichi Mochizuki puis Emmanuel Lepage qui obtiennent les résultats les plus significatifs de géométrie anabélienne dans les espaces de Berkovich. Leurs résultats relient le groupe fondamental tempéré de l'analytifiée d'une courbe algébrique hyperbolique au graphe dual de sa réduction stable. Si X est une courbe hyperbolique définie sur un corps ultramétrique complet k algébriquement clos, nous savons que le type d'homotopie de l'analytifiée X^{an} (au sens des espaces de Berkovich, cf. 1.1.5) peut être décrit à partir du modèle stable $\mathscr{X}$ de X. Plus précisément, si $\mathscr{X}_s$ désigne la fibre spéciale de $\mathscr{X}$, le *graphe dual de la*

réduction stable, noté $\mathbb{G}_X$, est le graphe fini dont les sommets correspondent aux composantes irréductibles de $\mathscr{X}_s$, et dont les arêtes entre les sommets correspondent aux nœuds (i.e. aux singularités en les points doubles ordinaires, qui sont les seules singularités de $\mathscr{X}_s$ par hypothèse de stabilité) entre les composantes irréductibles (une arête boucle sur le même sommet lorsqu'il s'agit d'un point d'auto-intersection). Notons $\overline{X}$ la compactification normale de X. En définissant les *cusps* de X comme l'ensemble des points de $\overline{X}$ n'appartenant pas à X, il est possible d'enrichir $\mathbb{G}_X$ en un semi-graphe $\mathbb{G}_X^{\mathsf{c}}$, en ajoutant une arête ouverte (i.e. reliée seulement à un sommet en un bout, ouverte en l'autre bout) pour chaque cusp. Il existe alors un plongement topologique canonique $\mathbb{G}_X^{\mathsf{c}} \hookrightarrow X^{\mathrm{an}}$ qui admet une rétraction par déformation $X^{\mathrm{an}} \twoheadrightarrow \mathbb{G}_X^{\mathsf{c}}$ topologiquement propre ([Ber4]). L'espace analytique X^{an} a donc le même type d'homotopie que $\mathbb{G}_X$ (et que $\mathbb{G}_X^{\mathsf{c}}$). Le graphe $\mathbb{G}_X$ ne garde pas la trace des cusps, tandis que ceux-ci jouent un rôle dans le modèle stable. Dans le cas où X est la courbe hyperbolique obtenue en retirant 3 points à $\mathbb{P}^1_k$, $\mathbb{G}_X$ est réduit à un singleton qui sera un point de type 2 dans X^{an}, alors que $\mathbb{G}_X^{\mathsf{c}}$ est constitué de trois arêtes ouvertes reliées à ce même sommet.

Résultats de Mochizuki

Grâce au langage des *anabélioïdes*, des *semi-graphes d'anabélioïdes* et des *tempéroïdes* qu'il introduit en toute généralité dans [Mzk2] et [Mzk3] afin de donner une saveur géométrique aux objets définis catégoriquement telles les catégories galoisiennes, Mochizuki prouve dans [Mzk3] que le groupe fondamental tempéré de l'analytifiée d'une courbe hyperbolique détermine le graphe dual de sa réduction stable :

Théorème 0.0.6 ([Mzk3], Corollary 3.11)**.** *Si X_1 et X_2 sont deux courbes hyperboliques sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$, alors tout isomorphisme extérieur $\varphi : \pi_1^{\mathrm{temp}}(X^{\mathrm{an}}_{1,\mathbb{C}_p}) \simeq \pi_1^{\mathrm{temp}}(X^{\mathrm{an}}_{2,\mathbb{C}_p})$ détermine, fonctoriellement en φ, un unique isomorphisme de graphes entre les graphes duaux étendus de leurs réductions stables : $\overline{\varphi} : \mathbb{G}^{\mathsf{c}}_{X_1} \simeq \mathbb{G}^{\mathsf{c}}_{X_2}$.*

Mochizuki montre plus précisément qu'il est possible de reconstruire le graphe $\mathbb{G}_X$ de la réduction stable d'une courbe hyperbolique X à partir d'une (p')-version $\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X^{\mathrm{an}})$ du groupe fondamental tempéré qui se construit à partir de celui-ci en prenant la limite projective des quotients ayant un sous-groupe distingué sans torsion d'indice fini premier à p. Ce groupe classe l'ensemble des revêtements (tempérés) qui deviennent topologiques après un changement de base étale fini de degré premier à p. La reconstruction du graphe à partir de ce groupe est la suivante :

- les sommets de $\mathbb{G}_X$ correspondent aux classes de conjugaison des sous-groupes compacts maximaux de $\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X^{\mathrm{an}})$;

- les arêtes de $\mathbb{G}_X$ correspondent aux classes de conjugaison des intersections non triviales de deux sous-groupes compacts maximaux de $\pi_1^{\text{temp},\,(p')}(X^{\text{an}})$.

Résultats de Lepage

Quelques années plus tard, en 2010, Emmanuel Lepage précise le résultat de Mochizuki en montrant que si le groupe fondamental tempéré détermine en effet le graphe dual de la réduction stable d'une courbe hyperbolique, il le détermine également dans certains cas en tant que graphe métrique, c'est-à-dire que la connaissance du groupe fondamental tempéré permet de retrouver la métrique naturelle qui existe sur le graphe dual $\mathbb{G}_X$ de la réduction stable. Cette métrique est telle que la longueur d'une arête correspondant à un nœud est la largeur de la couronne correspondant à la fibre générique de la complétion formelle en ce nœud. Il faut néanmoins se restreindre aux courbes dites *de Mumford*, c'est-à-dire aux courbes algébriques propres dont les composantes irréductibles normalisées de la réduction stable sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$ (ce qui en théorie de Berkovich équivaut à dire que l'analytifié X^{an} est localement isomorphe à un ouvert de $\mathbb{P}^{1,\text{an}}$, ou encore que le genre topologique de X^{an} est le genre de X, ou encore que X^{an} admet une uniformisation par un ouvert de $\mathbb{P}^{1,\text{an}}$, ou encore qu'il n'a pas de point de type 2 de genre > 0 ...).

Théorème 0.0.7 ([Lep1], Th. 4.12 ; [Lep2], Th. 12)**.** *Soient X_1 et X_2 deux courbes hyperboliques de Mumford sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$, et $\varphi : \pi_1^{\text{temp}}(X_1^{\text{an}}) \simeq \pi_1^{\text{temp}}(X_2^{\text{an}})$ un isomorphisme. Alors l'isomorphisme entre les graphes duaux des réductions stables : $\overline{\varphi} : \mathbb{G}_{X_1} \simeq \mathbb{G}_{X_2}$ est un isomorphisme de* graphes métriques.

Lepage va plus loin dans son article [Lep3]. En utilisant des techniques de résolution des non-singularités et en prouvant qu'une courbe de Mumford sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ vérifie une telle résolution, il montre que le groupe tempéré de l'analytifiée d'une courbe de Mumford détermine son espace topologique sous-jacent. Il utilise pour cela un homéomorphisme entre l'analytifiée de toute $\overline{\mathbb{Q}}_p$-courbe propre et lisse et la limite projective des graphes duaux de toutes les réductions semi-stables de la courbe.

Théorème 0.0.8 ([Lep3], Theorem 3.9)**.** *Soient X_1 et X_2 deux courbes hyperboliques de Mumford sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$, et $\varphi : \pi_1^{\text{temp}}(X_1^{\text{an}}) \simeq \pi_1^{\text{temp}}(X_2^{\text{an}})$ un isomorphisme. Alors φ induit un homéomorphisme entre les analytifiées :*

$$X_1^{\text{an}} \xrightarrow{\sim} X_2^{\text{an}}.$$

Dans le cas des courbes de Tate, il obtient même mieux en montrant, toujours grâce à la résolution des non-singularités, que le groupe fondamental tempéré d'une courbe de Tate épointée détermine l'espace analytique de la courbe de Tate.

Théorème 0.0.9. *Soient $q_1, q_2 \in \overline{\mathbb{Q}}_p$, tels que $|q_1| < 1$ et $|q_2| < 1$. Pour $i \in \{1, 2\}$, posons $E_i = \mathbb{G}_m^{\mathrm{an}}/q_i^{\mathbb{Z}}$ et $X_i = E_i \setminus \{1\}$. Si les groupes tempérés $\pi^{\mathrm{temp}}(X_1)$ et $\pi^{\mathrm{temp}}(X_2)$ sont isomorphes, alors il existe $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ tel que $\sigma(q_1) = q_2$, et E_1 et E_2 sont isomorphes en tant qu'espaces $\mathbb{Q}_p$-analytiques.*

Contenu de la thèse

Ces résultats concernent les courbes analytiques de *nature algébrique*, c'est-à-dire les analytifiées de courbes algébriques. Or, la théorie des espaces analytiques de Berkovich est suffisamment riche pour faire apparaître toutes sortes de courbes qui sont essentiellement de *nature analytique*, sans provenir directement de courbes algébriques. Les exemples les plus simples mais non moins importants de telles courbes sont les *couronnes* et les *disques* analytiques. Si k est un corps ultramétrique complet, les couronnes (respectivement les disques) k-analytiques sont les espaces k-analytiques isomorphes au domaine k-analytique de $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ défini par la condition $\{|T| \in I\}$ pour un certain intervalle non vide I de $\mathbb{R}_+^\times$ (resp. de $\mathbb{R}_+$ et contenant 0 et rencontrant $\mathbb{R}_+^*$). Dans le sillage des résultats de Mochizuki et de Lepage, il est naturel de se demander si des résultats anabéliens similaires existent pour les courbes k-analytiques sans imposer que celles-ci soient de nature algébrique.

Reconstruction anabélienne du squelette analytique

Les résultats de Mochizuki et de Lepage faisant apparaître le graphe dual de la réduction stable $\mathbb{G}_X$, il convient d'en trouver pour les courbes k-analytiques un analogue défini uniquement dans le langage de la géométrie analytique sans requérir une quelconque nature algébrique. C'est le *squelette analytique* qui jouera ce rôle : si X est une courbe k-analytique quasi-lisse, le *squelette analytique* de X, noté $S^{\mathrm{an}}(X)$, est défini comme l'ensemble des points de X qui n'appartiennent à aucun disque analytique ouvert. Le squelette $S^{\mathrm{an}}(X)$ est alors un semi-graphe localement fini. Remarquons que $S^{\mathrm{an}}(X) = \emptyset$ lorsque $X = \mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ et que $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ est l'unique courbe k-analytique quasi-lisse, connexe et compacte de squelette analytique vide lorsque k est algébriquement clos. Par ailleurs, le squelette analytique est homéomorphe à un cercle pour une *courbe de Tate*, c'est-à-dire l'analytifiée d'une courbe elliptique à mauvaise réduction. Dès que l'application naturelle $\pi_0(S^{\mathrm{an}}(X)) \to \pi_0(X)$ est surjective, il existe une rétraction par déformation $X \twoheadrightarrow S^{\mathrm{an}}(X)$

topologiquement propre. En particulier, dans ce cas, X a le type d'homotopie de $S^{\mathrm{an}}(X)$.

Lorsque k est algébriquement clos, nous appellerons *courbe k-analytiquement hyperbolique* (3.3.6) toute courbe k-analytique X, quasi-lisse et connexe, telle que l'ensemble des nœuds (1.3.11) de son squelette analytique soit non vide et constitué uniquement de *noeuds hyperboliques* (3.3.3). Une courbe *k-analytiquement anabélienne* sera alors définie comme une courbe k-analytiquement hyperbolique vérifiant une condition technique, dite d'*ascendance vicinale* (4.3.11), permettant la reconstruction des arêtes ouvertes. L'analytifiée $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ d'une k-courbe algébrique $\mathscr{X}$ est k-analytiquement hyperbolique si et seulement si $\mathscr{X}$ est une courbe hyperbolique, auquel cas $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ est k-analytiquement anabélienne. Nous montrons dans ce papier le résultat suivant lorsque k est un corps non archimédien complet, non trivialement valué et algébriquement clos :

Théorème A : *Soient X_1 et X_2 deux courbes k-analytiquement anabéliennes. Tout isomorphisme entre les groupes tempérés : $\varphi : \pi_1^{\mathrm{temp}}(X_1) \xrightarrow{\sim} \pi_2^{\mathrm{temp}}(X_2)$ induit (fonctoriellement en φ) un isomorphisme de semi-graphes entre les squelettes analytiques associés : $\overline{\varphi} : S^{\mathrm{an}}(X_1) \xrightarrow{\sim} S^{\mathrm{an}}(X_2)$.*

Pour certaines courbes anabéliennes, dites *à arêtes relativement compactes* (cf. 4.2.4), l'isomorphisme φ du théorème ci-dessus peut être remplacé par l'hypothèse moins forte d'un isomorphisme entre les versions premières à p, $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X_i)$ (cf. 1.5.5), des groupes tempérés $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X_i)$.

Un exemple intéressant de courbe k-analytiquement anabélienne (à arêtes relativement compactes) est celui du *demi-plan de Drinfeld*, d'un intérêt majeur en théorie des nombres et analogue non archimédien du demi-plan de Poincaré. Soit k_0 un corps non-archimédien *local* de caractéristique positive (i.e. k_0 est soit une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, soit du type $\mathbb{F}_q((T))$) contenu dans le corps ultramétrique complet et algébriquement clos k dont la valuation prolonge celle de k_0. Le *demi-plan de Drinfeld*, noté $\mathfrak{D}^1_{k/k_0}$, est la courbe k-analytique définie en tant qu'ouvert de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$ par :

$$\mathfrak{D}^1_{k/k_0} = \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k \setminus \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k(k_0).$$

Il s'agit d'une courbe k-analytiquement anabélienne, non compacte, dont le squelette analytique n'est autre que l'*immeuble de Bruhat-Tits* de SL_2/k_0, noté $\mathfrak{B}^1_{k_0}$. L'anabélianité du demi-plan de Drinfeld nous permet d'énoncer le résultat suivant :

Proposition B : *Pour $i \in \{1,2\}$, soit p_i un nombre premier et k_i un corps de nombres p_i-adique, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}_{p_i}$. Supposons les groupes suivants isomorphes :*

$$\pi_1^{\mathrm{temp},(p_1')}(\mathfrak{D}^1_{\mathbb{C}_{p_1}/k_1}) \simeq \pi_1^{\mathrm{temp},(p_2')}(\mathfrak{D}^1_{\mathbb{C}_{p_2}/k_2}),$$

alors $p_1 = p_2$, et les extensions $k_1/\mathbb{Q}_{p_1}$ et $k_2/\mathbb{Q}_{p_2}$ ont même degré d'inertie : $[\widetilde{k_1} : \mathbb{F}_{p_1}] = [\widetilde{k_2} : \mathbb{F}_{p_2}]$.

Certaines courbes k-analytiquement anabéliennes peuvent par ailleurs être hyperboliques tout en ayant dans leur squelette analytique des arêtes ouvertes (appelées cusps). La quête de la propriété d'anabélianité parmi les courbes k-analytiquement hyperboliques nous amène à définir deux types de cusps privilégiés : les cusps *coronaires finis* et *discaux épointés* (4.4.1). En traitant les cusps coronaires finis à l'aide d'une condition de total déploiement de certains μ_p-torseurs (1.4.9) et les cusps discaux épointés par un résultat de Mochizuki (4.4.3), nous obtenons finalement le théorème suivant :

Théorème C *Soit k un corps ultramétrique complet algébriquement clos et non trivialement valué. Alors les trois types de courbes ci-dessous sont k-analytiquement anabéliennes :*

- *les courbes k-analytiquement hyperboliques à arêtes relativement compactes ;*
- *si k est de caractéristique mixte : les courbes k-analytiquement hyperboliques dont tous les cusps sont coronaires finis ;*
- *si k est de caractéristique mixte : les courbes k-analytiquement hyperboliques dont le squelette analytique est un semi-graphe fini et dont les cusps sont coronaires finis ou discaux épointés.*

Ces cas ne traitent néanmoins pas toutes les courbes k-analytiques hyperboliques, et nous ne savons pas pour le moment si toutes les courbes k-analytiquement hyperboliques sont k-analytiquement anabéliennes.

Caractère anabélien de la trivialité des cochaînes et anabélianité partielle des longueurs de couronnes

Il est naturel de se demander si un analogue du théorème 0.0.7 de Lepage reste vrai pour certains types de courbes k-analytiquement anabéliennes de nature analytique. Il existe sur les points de type 2 et 3 de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$ une métrique naturelle (cf. définition 1.2.21), stable par automorphismes de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$, et compatible avec la métrique naturelle sur le graphe

dual $\mathbb{G}_{\mathscr{X}}$ de la réduction stable d'une k-courbe hyperbolique de Mumford $\mathscr{X}$. Cette métrique permet de définir la *longueur* d'une couronne, invariante par automorphismes k-analytiques, et fournit ainsi une métrique sur le squelette analytique $S^{\mathrm{an}}(X)$ de toute courbe k-analytique quasi-lisse. La question qui surgit naturellement est alors :

Le groupe fondamental tempéré $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ d'une courbe k-analytiquement anabélienne X détermine-t-il la métrique naturelle du semi-graphe $S^{\mathrm{an}}(X)$?

Avant de tenter d'y répondre, il semble *a priori* plus simple d'étudier d'abord le cas d'une couronne k-analytique. Le groupe tempéré modéré $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(\mathcal{C})$ d'une couronne est toujours isomorphe au complété p'-profini $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$ de $\mathbb{Z}$, mais son groupe tempéré total $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{C})$ dépend de sa longueur. Bien qu'une couronne ne soit jamais une courbe k-analytiquement anabélienne, la question suivante semble pertinente :

Le groupe fondamental tempéré $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{C})$ d'une courbe k-analytique $\mathcal{C}$ détermine-t-il sa longueur ?

Pour chercher une réponse à cette question, on est tenté de s'inspirer du schéma de preuve que Lepage développe du théorème 0.0.7 ([Lep2], Theorem 12). Il faudrait partir d'un revêtement « ovoïdal » de la couronne totalement déployé au milieu de celle-ci, qui aurait l'avantage d'être une courbe k-analytiquement anabélienne. Savoir calculer la longueur d'un cycle d'un tel revêtement suffirait à connaître la longueur de la couronne (par un passage à la limite idoine). Néanmoins, on fait face rapidement au problème de détection des μ_{p^h}-torseurs à $\mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z}$-cochaîne nulle : en effet l'on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute courbe k-analytique quasi-lisse X, il existe un *morphisme de cochaînes* $\theta : H^1(X, \mu_n) \to \mathrm{Harm}(S^{\mathrm{an}}(X), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (cf. lemme 5.1.1), donné localement par le taux de croissance de toute fonction analytique définissant le torseur. Or, lorsque $n = p^h$ avec $h > 1$, il semble difficile de détecter le noyau de θ à partir du groupe tempéré, rendant *a priori* illusoire le schéma de preuve espéré. Néanmoins, la détection du noyau de θ lorsque $n = p$ est possible dans certains cas :

Théorème D *Soit X une courbe k-analytique qui vérifie l'une des deux conditions (exclusives l'une de l'autre) suivantes :*

1. *X est une couronne*
2. *X est une courbe k-analytiquement anabélienne, de squelette fini sans pont, sans point de genre > 0, sans bord, telle que les cusps soient coronaires et que de tout nœud ne puisse être issu au plus qu'un cusp.*

Alors l'ensemble des μ_p-torseurs de X de cochaîne triviale modulo p, c'est-à-dire l'ensemble $H^1(X, \mu_p) \cap \ker(\theta)$, est entièrement déterminé par $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$.

Pour montrer ce théorème nous faisons appel à la résolution des non-singularités couplée à la caractérisation de la non trivialité des cochaînes des μ_p-torseurs en terme de minimalité des rayons de déploiement en les points rigides (proposition 5.1.7). Cette condition s'exprime ensemblistement à partir des ensembles de déploiement des μ_p-torseurs (cf. 5.1.9), qui eux-mêmes peuvent être caractérisés à partir du groupe tempéré grâce à la « résolubilité » de certains points « seuils » (cf. lemme 5.2.4) qui joueront un rôle important.

En ce qui concerne la question initiale de l'éventuelle anabélianité des longueurs de couronnes, nous ne sommes pas en mesure, pour le moment, d'y répondre complètement. Néanmoins, la « résolubilité » des points de type 2 du squelette d'une couronne (cf. lemme 5.2.6) doublée de quelques raisonnements sur les ensembles de déploiement des μ_p-torseurs nous permettent d'énoncer un résultat d'anabélianité partielle :

Théorème E : *Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux couronnes k-analytiques dont les groupes tempérés $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{C}_1)$ et $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{C}_2)$ sont isomorphes. Alors $\mathcal{C}_1$ est de longueur finie si et seulement si $\mathcal{C}_2$ l'est également, auquel cas :*

$$|\ell(\mathcal{C}_1) - \ell(\mathcal{C}_2)| < \frac{2p}{p-1}.$$

On a aussi $d\left(\ell(\mathcal{C}_1), p\mathbb{N}^*\right) > 1$ si et seulement si $d\left(\ell(\mathcal{C}_2), p\mathbb{N}^*\right) > 1$; dans ce cas :

$$|\ell(\mathcal{C}_1) - \ell(\mathcal{C}_2)| < \frac{p}{p-1}.$$

Contenu détaillé du plan

- **Chapitre 1 :** Ce chapitre est une introduction aux espace analytiques de Berkovich ainsi qu'aux courbes analytiques et à leurs propriétés principales dont nous nous servirons par la suite.

  * La section 1.1 se veut une introduction générale à la théorie des espaces analytiques de Berkovich. Nous y présentons tous les objets et les propriétés de

base nécessaires, si ce n'est toujours à la lecture de ce texte, du moins à la compréhension des fondements de cette théorie.

* La section 1.2 se tourne vers les courbes analytiques, en donnant les premières définitions et propriétés spécifiques à ces objets, avant de définir les disques et les couronnes.
* Nous définissons dans la section 1.3 les notions de *triangulation*, de *triangulation généralisée*, de s*quelette* et de *nœuds* d'une courbe k-analytique, en nous inspirant très largement de l'étude systématique des courbes analytiques entreprise par Ducros dans [Duc].
* La section 1.4 est une présentation de certaines propriétés cruciales des μ_n-torseurs d'une courbe analytique, notamment des conditions de déploiement des torseurs sauvages que nous utiliserons sans modération, en particulier dans le dernier chapitre.
* Enfin, la section 1.5 est l'occasion d'introduire le *groupe fondamental tempéré* d'un espace analytique, classant l'ensemble des revêtements tempérés.

- **Chapitre 2 :** Dans ce chapitre nous présentons le langage des anabélioïdes et des tempéroïdes introduits par Mochizuki dans [Mzk2] et [Mzk3].

  * La section 2.1 nous introduit au monde des *anabélioïdes* et des *semi-graphes d'anabélioïdes*. Nous verrons notamment comment associer à toute courbe k-analytique quasi-lisse munie d'une triangulation S des graphe et semi-graphe d'anabélioïdes $\mathcal{G}^\natural(X,S)$ et $\mathcal{G}(X,S)$ définis à partir des revêtements *modérés* autour des points de la triangulation.
  * La section 2.2 se concentre sur les tempéroïdes, « versions limites » d'anabélioïdes.
  * Dans la section 2.3 seront introduites toute une liste de notions que nous aurons la concision d'appeler *mochizukiennes* plutôt que : de type injectif, totalement élevé, totalement détaché, sommitalement mince et quasi-cohérent.
  * La section 2.4 présente un résultat de Mochizuki fondamental dans la théorie des anabélioïdes, et clef de voûte de tout le chapitre 4, mais nécessitant l'ensemble des hypothèses mochizukiennes : le théorème de reconstruction du graphe d'anabélioïde à partir du tempéroïde connexe associé.

- **Chapitre 3 :** Nous entreprenons dans ce chapitre une description du semi-graphe d'anabélioïdes associé à une triangulation généralisée d'une courbe analytique.

* La description des composantes coronaires, objet de la section 3.1, découle d'un résultat de Berkovich sur l'aspect kummérien des revêtements modérés des couronnes analytiques.
* La description des composantes sommitales, plus délicate, repose sur la trivialité des revêtements modérés des disques, ainsi que sur une étude locale fine des valuations associées aux branches issues d'un point de type 2 et des points correspondants sur la courbe résiduelle. Ce sera l'objet de la section 3.2.
* La section 3.3 consiste à comprendre sous quelles contraintes sur une courbe X et une triangulation généralisée S le graphe d'anabélioïdes $\mathcal{G}^\natural(X, S)$ vérifie l'ensemble des conditions mochizukiennes. Ces considérations nous amènent à définir l'ensemble des courbes *k-analytiquement hyperboliques*, dont fait partie le fameux demi-plan de Drinfeld.

- **Chapitre 4 :** Ce chapitre est au coeur de nos problématiques anabéliennes, nous y prouvons des résultats de reconstruction du squelette analytique à partir du groupe tempéré.

  * La section 4.1 apportera une description, rassurante, du tempéroïde connexe du semi-graphe d'anabélioïdes associé à une triangulation généralisée d'une courbe en terme de revêtements tempérés modérés de cette courbe.
  * Nous énoncerons dans la section 4.2 notre premier théorème anabélien : la reconstruction du squelette tronqué. Après l'introduction des *courbes analytiquement anabéliennes à arêtes relativement compactes*, nous y verrons l'anabélianité tempérée du demi-plan de Drinfeld puis en déduirons le théorème 4.2.7.
  * La propriété de *commensurabilité terminale* d'un groupe nous mènera dans la section 4.3 vers la notion importante de *courbe analytiquement anabélienne*, définie en terme d'hyperbolicité analytique et d'une condition d'*ascendance vicinale* permettant la reconstruction des arêtes cuspidales. Nous énoncerons alors le théorème anabélien 4.3.12.
  * Nous prouverons dans la section 4.4 l'anabélianité analytique de certaines classes de courbes. Nous y verrons le rôle joué par les cups *coronaires fini*s et *discaux épointés*, sans savoir toutefois si cette description est exhaustive.

- **Intermède :** Cet intermède est une excursion vers le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)\right)$ des automorphismes du groupe tempéré modéré d'une courbe analytiquement anabélienne qui « préservent » le graphe du squelette analytique. Nous montrons qu'il

existe un morphisme naturel de ce groupe vers le complété (p')-profini $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$ de $\mathbb{Z}$, qui, s'il est défini selon le choix d'une arête et d'un sous-groupe vicinal ou cuspidal associé, ne dépend en fait d'aucun de ces choix.

- **Chapitre 5 :** Dans ce dernier chapitre nous étudions le caractère anabélien de la trivialité des cochaînes harmoniques ainsi que des longueurs de couronnes.

  * Après avoir prouvé l'existence du « *morphisme de cochaînes* » pour une courbe analytique, nous étudions dans la section 5.1 les relations que les valeurs modulo p des cochaînes associées aux μ_p-torseurs de la courbe entretiennent avec les ensembles de déploiement desdits torseurs.
  * La section 5.2 explique comment la notion de *résolution des non-singularités* permettent au groupe tempéré de détecter non seulement l'ensemble des points résolubles, mais également bien plus... La résolubilité de certains points « seuils » nous permettra alors d'énoncer au théorème 5.2.7 un résultat anabélien sur la trivialité modulo p des cochaînes des μ_p-torseurs d'une courbe analytique qui est soit une couronne, soit une courbe analytiquement anabélienne isomorphe à un ouvert de l'analytifiée d'une k-courbe de Mumford.
  * Finalement, grâce à la résolubilité du squelette d'une couronne assortie de quelques raisonnements sur les ensembles de déploiement des μ_p-torseurs, nous montrerons dans la section 5.3 un résultat d'anabélianité partielle des longueurs de couronnes : le théorème 5.3.5.

Articulation des chapitres : Les quatre premiers chapitres sont conçus pour être lus les uns à la suite des autres. Le lecteur familier avec les espaces de Berkovich, les courbes analytiques et le groupe tempéré pourra omettre le chapitre 1, tandis que celui familier avec le langage des anabélioïdes et tempéroïdes de Mochizuki n'apprendra rien de nouveau dans le chapitre 2. En revanche, les chapitres 3 et 4 sont intimement liés, la compréhension du chapitre 4 étant conditionnée à celle du chapitre 3. L'intermède, plus indépendant, n'utilise des chapitres précédents que le résultat principal d'anabélianité du squelette analytique des courbes analytiquement anabéliennes ainsi que la caractérisation des groupes sommitaux et vicinaux en terme du groupe tempéré. Le chapitre 5, nécessitant également la compréhension de l'anabélianité du squelette du chapitre 4, utilise des résultats des sections 1.2 et 1.4.

Les quatre premiers chapitres (sauf les deux premières sections introductives du pre-

mier chapitre) sont l'objet de l'article [Gau], en prépublication.

Chapitre 1

Le monde des courbes analytiques

J'ai eu tout de même une surprise : vous êtes plus intime, plus sincère, plus sérieux et plus profond que je ne m'y attendais.

Lettre de Panaït Istrati à Romain Rolland
(19 mars 1931)

1.1 Espaces de Berkovich

Cette section se veut une introduction très générale à la théorie analytique de Berkovich. Nous y présenterons les objets et les notions de bases, sans preuve. Le texte fondateur de cette théorie est [Ber1], nous y ferons souvent référence. Pour des introductions de qualité plus détaillées, voir par exemple les textes [Meh] (que nous avons suivi en partie), [Tem3], ou [Duc06]. Les lecteurs désireux de s'attaquer à la lecture de [Ber1], lecture parfois ardue, trouvons un certain réconfort à feuilleter [Jon].

1.1.1 Corps ultramétriques

Tous les anneaux considérés seront supposés unitaires et commutatifs.

Définition 1.1.1. *Une* valeur absolue *sur un corps k est une application $|\cdot| : k \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :*

1. $|1| = 1$,
2. *si* $x \in k$, $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$,
3. $\forall x, y \in k, |xy| = |x||y|$,

4. $\forall x, y \in k, |x - y| \leqslant |x| + |y|$

La valeur absolue $|\cdot|$ *sur* k *sera dite* non archimédienne*, ou* ultramétique*, lorsque pour tout couple* (x, y) *d'éléments de* k *:*

$$|x - y| \leqslant \max(|x|, |y|).$$

Un corps valué non archimédien*, ou* corps ultramétrique*, sera un corps muni d'une valuation non archimédienne.*

Tout corps k peut être muni d'une valeur absolue non archimédienne : la valeur absolue triviale $|\cdot|_0$ définie comme valant 1 sur $k^\times$.

Si k est un corps ultramétrique, on désignera par k° (resp. $k^{\circ\circ}$) l'ensemble des éléments de k de valeur absolue inférieure ou égale (resp. strictement inférieure) à 1. Cela fait de k° un sous-anneau de k et de $k^{\circ\circ}$ l'unique idéal maximal de k°. Le quotient $k^\circ/k^{\circ\circ}$, noté $\widetilde{k}$, est appelé le *corps résiduel* de k. Le corps k sera dit *de caractéristique mixte* lorsque $\mathrm{car}(k) = 0$ et $\mathrm{car}(\widetilde{k}) > 0$.

La topologie induite par la valeur absolue sur un corps ultramétrique k est totalement discontinue. Dès que deux éléments $x, y \in k$ vérifient $|x| \neq |y|$, on a : $|x + y| = \max(|x|, |y|)$, et cela induit certaines « pathologies » géométriques :

- les boules fermées de rayon non nul sont des parties ouvertes de k
- tous les triangles sont isocèles
- pour tout $a \in k$ et $r \in \mathbb{R}_+$ notons $B(a, r)$ la boule fermée de k de centre a et de rayon r, alors $B(a, r) = B(b, r)$ pour tout $b \in B(a, r)$: tout point d'une boule fermée en est un centre.

Nous travaillerons souvent dans la suite avec des corps ultramétriques complets (pour la topologie induite par la valeur absolue). Si k est un tel corps, une *extension complète* de k désigne une extension de k qui est un corps ultramétrique complet dont la valeur absolue prolonge celle de k.

Proposition 1.1.2. *Soit* k *un corps ultramétrique complet, et* $\overline{k}$ *une clôture algébrique de* k *:*

1. *la valeur absolue* $|\cdot|$ *s'étend de manière unique à toute extension algébrique de* k*, en particulier à* $\overline{k}$ *(*k *est hensélien),*
2. *le complété* $\widehat{\overline{k}}$ *de* $\overline{k}$ *est un corps ultramétrique complet algébriquement clos.*

Si p est un nombre premier, nous noterons $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques (complété de $\mathbb{Q}$ muni de la valeur absolue ultramétrique p-adique $|\cdot|_p$), et $\mathbb{C}_p$ le corps $\widehat{\overline{\mathbb{Q}_p}}$,

analogue p-adique du corps des complexes. Le corps $\mathbb{Q}_p$ est localement compact, mais $\mathbb{C}_p$ ne l'est plus. Le corps résiduel $\widetilde{\mathbb{Q}_p}$ est naturellement isomorphe à $\mathbb{F}_p$, tandis que $\widetilde{\mathbb{C}_p}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$.

Si k est un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$, notons $|k| = \{r \in \mathbb{R}_+, \exists x \in k, |x| = r\}$, ainsi que $|k^\times| = |k| \setminus \{0\}$, qui est un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$, et $\sqrt{|k^\times|} = \{r \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, r^n \in |k^\times|\}$ sa clôture divisible.

Exemples 1.1.3. En normalisant la valeur absolue p-adique de $\mathbb{Q}_p$ par $|p| = p^{-1}$, on a : $|\mathbb{Q}_p^\times| = p^{\mathbb{Z}}$, et $\sqrt{|\mathbb{Q}_p^\times|} = |\mathbb{C}_p^\times| = p^{\mathbb{Q}}$.

1.1.2 Spectre de Berkovich d'un anneau de Banach

Nous allons définir le spectre de Berkovich d'un anneau de Banach, analogue en géométrie de Berkovich du spectre affine d'un anneau en géométrie algébrique : ils joueront le rôle des « briques élémentaires » permettant de construire tous les objets de la théorie.

Dans ce texte toutes les (semi)-normes sur les anneaux ou les k-algèbres seront *sous-multiplicatives*, c'est-à-dire qu'une semi-norme sur un anneau A sera une fonction $|\cdot| : A \to \mathbb{R}_+$ vérifiant : $|0| = 0, |1| = 1$ si A est non nul, et pour tout couple (x, y) de A : $|xy| \leqslant |x||y|$ et $|x-y| \leqslant |x|+|y|$. Une semi-norme $|\cdot|$ est une *norme* lorsque $\ker(|\cdot|) = \{0\}$, et est dite *multiplicative* lorsque pour tout couple (x, y) de A : $|xy| = |x||y|$. Comme dans le cas des valeurs absolues corporelles, une semi-norme sera dite non archimédienne, ou ultramétrique, lorsque tout couple (x, y) de A vérifie : $|x - y| \leqslant \max(|x|, |y|)$.

Toute semi-norme sur un anneau A détermine une topologie sur A, qui est séparée si et seulement cette semi-norme est une norme. Une condition suffisante pour que deux semi-normes $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ définissent la même topologie sur A est qu'elles soient équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que : $C_1|\cdot|_1 \leqslant |\cdot|_2 \leqslant C_2|\cdot|_1$.

Définition 1.1.4. *Un anneau de Banach est anneau muni d'une norme $||\cdot||$ pour laquelle il est complet.*

Si I est un idéal de A, toute semi-norme $|\cdot|$ sur A induit une semi-norme sur A/I, la *semi-norme quotient*, définie par $|x + I|_{A/I} = \inf\{|y|, x - y \in I\}$. Si $|\cdot|$ est une norme et I est fermé, alors $|\cdot|_{A/I}$ est une norme sur A/I.

Définition 1.1.5. 1. *Si $(A, |\cdot|_A)$ et $(B, |\cdot|_B)$ sont deux anneaux semi-normés, un morphisme $f : A \to B$ sera dit* borné *lorsqu'il existe $C > 0$ tel que $|f(a)|_B \leqslant C \cdot |a|_A$ pour tout $a \in A$, et* admissible *lorsque la semi-norme quotient sur $A/\ker(f)$ induite par $|\cdot|_A$ est équivalente à la semi-norme induite sur $\mathrm{im}(f)$ par $|\cdot|_B$.*

2. *Si* $(A, ||\cdot||)$ *est un anneau normé, une semi-norme* $|\cdot|$ *sur* A *est dite* bornée, *lorsqu'il existe* $C > 0$ *tel que* $|a| \leqslant C \cdot ||a||$ *pour tout* $a \in A$, *autrement dit lorsque le morphisme identité* $(A, ||\cdot||) \to (A, |\cdot|)$ *est borné.*

Semi-norme spectrale : Voici comment associer à tout anneau de Banach une semi-norme qui, à défaut d'être toujours multiplicative, se comporte multiplicativement vis-à-vis des puissances d'un élément.

Définition 1.1.6 (Semi-norme spectrale associée à un anneau de Banach)**.** *Soit* $(A, |\cdot|)$ *un anneau de Banach, et* $a \in A$. *Il est connu que la limite* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x^n|}$ *existe dans* $\mathbb{R}_+$, *et est égale à* $\inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|a^n|}$. *Définissons alors le* rayon spectral de a *comme :*

$$\rho_A(a) := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x^n|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|a^n|}.$$

L'application $\rho_A : A \to \mathbb{R}_+$ *est appelée la* semi-norme spectrale *sur* A.

La semi-norme spectrale est invariante lorsqu'on remplace la norme $|\cdot|$ sur A par une norme équivalente. Les propriétés suivantes justifient cette appellation de « semi-norme » :

1. $\rho_A(0) = 0$ *et* $\rho_A(1) = 1$ *si* A *est non nul,*
2. $\forall a, b \in A, \rho_A(a-b) \leqslant \rho_A(a) + \rho_A(b)$ *(avec* $\rho_A(a-b) \leqslant \max(\rho_A(a), \rho_A(b))$ *si* A *est non archimédien),*
3. $\forall a, b \in A, \rho_A(ab) \leqslant \rho_A(a)\rho_A(b)$,
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in A, \rho_A(a^n) = \rho_A(a)^n$.

Un élément $a \in A$ vérifiant $\rho_A(a) = 0$ est appelé *quasi-nilpotent.*

Définition 1.1.7 (Spectre de Berkovich d'un anneau de Banach)**.** *Soit* $(A, ||\cdot||)$ *un anneau de Banach. Son* spectre (de Berkovich), *noté* $\mathscr{M}(A)$, *est défini comme l'ensemble des semi-normes multiplicatives bornées sur* A, *muni de la topologie la plus faible rendant continues les applications* $\mathscr{M}(A) \to \mathbb{R}_+, |\cdot| \mapsto |f|$, *pour tout* $f \in A$.

Si A est un anneau de Banach et $x \in \mathscr{M}(A)$ est la semi-norme $|\cdot|_x$, $\ker|\cdot|_x$ est un idéal premier fermé de A, et la semi-norme induite par $|\cdot|_x$ sur le quotient $A/\ker|\cdot|_x$ est une norme multiplicative, et peut ainsi être étendue à $\mathrm{Frac}(A/\ker|\cdot|_x)$.

Définition 1.1.8 (Corps résiduel complété)**.** *Si* A *est un anneau de Banach et* $x \in \mathscr{M}(A)$, *notons* $\mathscr{H}(x)$ *le* corps résiduel complété *de* x, *défini comme le complété de*

$\mathrm{Frac}(A/\ker|\cdot|_x)$ *selon la norme induite par la norme quotient. Si k est un corps ultramétrique complet et A est une k-algèbre de Banach, on a un plongement $k \hookrightarrow \mathscr{H}(x)$ faisant de $\mathscr{H}(x)$ une extension complète de k.*

Notations : Si $x \in \mathscr{M}(A)$ et $f \in A$, nous noterons $f(x)$ l'image de f dans $\mathscr{H}(x)$, et $|f(x)| := |f|_x$, qui est aussi par construction la valeur absolue de $f(x)$ dans le corps $\mathscr{H}(x)$.

Autre point de vue sur le spectre de Berkovich : Si A est un anneau de Banach, un *caractère* de A est défini comme un morphisme borné $A \to K$, où K est un corps valué complet. Deux caractères $A \xrightarrow{\varphi_K} K$ et $A \xrightarrow{\varphi_L} L$ sont sont dits *équivalents* lorsqu'il existe un caractère $A \xrightarrow{\varphi_M} M$ et des extensions complètes $M \hookrightarrow K$ et $M \hookrightarrow L$ telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & K \\
A \arrow[urr, "\varphi_K"] \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[drr, "\varphi_L"'] & M \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & L
\end{tikzcd}$$

Proposition 1.1.9. *Les points de $\mathscr{M}(A)$ correspondent exactement aux classes d'équivalences de caractères sur A.*

Voici quelques propriétés importantes des spectres de Berkovich, dont les preuves se trouvent dans [Ber1] et avec plus de détails dans [Jon] :

Théorème 1.1.10. *Soient A et B deux anneaux de Banach :*

1. *l'application $\mathscr{M}(A) \to \mathrm{Spec}(A), |\cdot|_x \mapsto \ker|\cdot|_x$ est continue et contient dans son image tous les idéaux maximaux de A ; en particulier $\mathscr{M}(A)$ est non vide dès que $A \neq 0$,*
2. *le spectre $\mathscr{M}(A)$ est compact (i.e. quasi-compact et séparé),*
3. *pour tout $f \in A$, on a $\rho_A(f) = \max_{x\in\mathscr{M}(A)} |f(x)|$,*
4. *un élément $f \in A$ est inversible si et seulement si $|f(x)| \neq 0$, pour tout $x \in \mathscr{M}(A)$,*
5. *tout morphisme borné $A \to B$ induit une application continue $\mathscr{M}(B) \to \mathscr{M}(A)$, et la fibre au-dessus d'un point $x \in \mathscr{M}(A)$ est homéomorphe à $\mathscr{M}\left(B\widehat{\otimes}_A\mathscr{H}(x)\right)$; si $y \in \mathscr{M}(B)$ est dans cette fibre, $\mathscr{H}(y)$ est naturellement une extension complète de $\mathscr{H}(x)$.*

Remarque 1.1.11. La compacité des spectres de Berkovich est l'une des spécificités importantes de la théorie qui n'apparaît pas en géométrie algébrique classique. Les spectres de Berkovich font office de « briques élémentaires », et leur compacité est source de nombreuses difficultés techniques lorsqu'on cherche à les « coller » pour former les espaces analytiques et définir les faisceaux structuraux.

1.1.3 Espaces affinoïdes

Fixons dans toute cette section un corps ultramétrique complet $(k, |\cdot|)$.

Algèbres affinoïdes : Nous allons commencer par définir les *algèbres affinoïdes*, qui sont en théorie analytique de Berkovich les analogues des algèbres de type fini sur un corps en géométrie algébrique.

Définition 1.1.12. *Pour toute famille finie $r := (r_1, \ldots, r_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, notons :*

$$k\{r^{-1}T\} = k\{r_1^{-1}T_1, \ldots, r_n^{-1}T_n\} := \left\{ f = \sum_{\nu} a_\nu T^\nu, a_\nu \in k, \lim_{|\nu| \to +\infty} a_\nu r^\nu = 0 \right\},$$

où $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$, $T^\nu = T_1^{\nu_1} \ldots T_n^{\nu_n}$ et $r^\nu = r_1^{\nu_1} \ldots r_n^{\nu_n}$.

Il s'agit d'une k-algèbre de Banach non archimédienne pour la norme multiplicative :

$$||f|| = \max_{\nu \in \mathbb{N}^n} |a_\nu| r^\nu.$$

*Pour $r_1 = \ldots = r_n = 1$, on obtient l'*algèbre de Tate affinoïde $k\{T\}$.

Remarque 1.1.13. L'algèbre $k\{r^{-1}T\}$ n'est autre que la complétion que l'algèbre des polynômes à n variables $k[T]$ selon la norme $||\cdot||$, et $||\cdot||$ n'est autre que la semi-norme spectrale $\rho_{k\{r^{-1}T\}}$ sur $k\{r^{-1}T\}$.

Définition 1.1.14 (Algèbre k-affinoïde)**.** *Une k-algèbre de Banach A est dite* k-affinoïde *lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, et un morphisme surjectif admissible $k\{r^{-1}T\} \twoheadrightarrow A$. L'algèbre A sera dite* strictement k-affinoïde *lorsque r peut être choisi tel que $r = (1 \ldots, 1)$.*

Les k-algèbres strictement affinoïdes sont les objets algébriques centraux de la géométrie rigide de Tate, et ont été à cet effet étudiés en détails dans [BGR]. Elles partagent de nombreuses propriétés avec les algèbres de type fini sur k, telles le Nullstellensatz ou le Lemme de Normalisation de Noether ([BGR], Chapitre 6).

La propriété d'être (strictement) k-affinoïde est stable par quotient. Si A est une algèbre k-affinoïde et K une extension complète de k, le produit tensoriel complété $A\widehat{\otimes}_k K$ est une algèbre K-affinoïde, et il existera toujours une extension complète K/k telle que $A\widehat{\otimes}_k K$ est strictement K-affinoïde. Cela permet souvent de ramener l'étude des algèbres k-affinoïdes à celle des algèbres strictement k-affinoïdes. Voici une liste de quelques propriétés vérifiées par les algèbres k-affinoïdes :

1. *Le produit tensoriel complété de deux algèbres k-affinoïdes au-dessus d'une troisième est k-affinoïde.*
2. *Toute algèbre k-affinoïde est noethérienne et tous ses idéaux sont fermés.*
3. *Toute algèbre k-affinoïde intègre est Japonaise.*
4. *Toute algèbre k-affinoïde est excellente.*

Les points (2) et (3) sont prouvés dans [Ber1] (Propositions 2.1.3 et 2.1.14), tandis que le point (4), nettement plus technique, a été prouvé par Kiehl ([Kie]) dans le cas strictement affinoïde, puis par Ducros dans le cas général ([Duc09]).

Algèbres k-affinoïdes et semi-norme spectrale : Voici quelques propriétés illustrant la pertinence de la semi-norme spectrale (cf. définition 1.1.6) dans l'étude des algèbres k-affinoïdes.

Proposition 1.1.15. *Soit A une algèbre k-affinoïde :*

1. *L'algèbre A est strictement affinoïde si et seulement si $\rho_A(a) \in \sqrt{|k^\times|} \cup \{0\}$ pour tout $a \in A$.*
2. *Pour tout $a \in A$, $\rho_A(a) = 0$ si et seulement si a est nilpotent (i.e. quasi-nilpotence et nilpotence coïncident sur une algèbre k-affinoïde). La semi-norme spectrale ρ_A est donc une norme si et seulement si A est réduite.*
3. *Si A est réduite, ρ_A est équivalente à la norme sur A.*

Espaces et domaines affinoïdes

Définition 1.1.16 (Espaces k-affinoïdes)**.** *Un* espace k-affinoïde *est la donnée d'un espace topologique X, d'une algèbre k-affinoïde A, et d'un homéomorphisme $X \simeq \mathscr{M}(A)$. Un espace k-affinoïde $X \simeq \mathscr{M}(A)$ est dit* strict *lorsque l'algèbre A est strictement k-affinoïde.*

Exemple 1.1.17. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, l'espace k-affinoïde $\mathscr{M}\left(k\{r^{-1}T\}\right)$ est appelé le polydisque de Berkovich fermé de polyrayon r. Le cas particulier où $n = 1$ correspond au disque de Berkovich fermé de rayon 1, et jouera un rôle important dans la suite.

Nous allons à présent définir les *domaines affinoïdes* d'un espace k-affinoïde, analogues des ouverts affines d'un schéma affine donné en géométrie algébrique.

Définition 1.1.18 (Domaine affinoïde)**.** *Soit A une algèbre k-affinoïde, et V un sous-ensemble de l'espace affinoïde $\mathscr{M}(A)$. On dit que V est un* domaine affinoïde *de $\mathscr{M}(A)$ s'il existe une A-algèbre k-affinoïde A_V possédant les deux propriétés suivantes :*

1. *l'image de $\mathscr{M}(A_V)$ dans $\mathscr{M}(A)$ (induite par $A \to A_V$) est égale à V,*
2. *tout morphisme $A \xrightarrow{\psi} B$ entre algèbres k-affinoïdes tel que le morphisme induit $\mathscr{M}(B) \to \mathscr{M}(A)$ soit d'image inclue dans V se factorise par un unique morphisme $A_V \xrightarrow{\widetilde{\psi}} B$ rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & B \\ & A_V \arrow[ur, "\widetilde{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

Il est possible de montrer ([Ber1], 2.2.4) que si V est un domaine affinoïde de $\mathscr{M}(A)$, l'application $\mathscr{M}(A_V) \to V$ est un homéomorphisme (donc V est compact), en particulier la classe d'isomorphisme de la A-algèbre A_V est uniquement déterminée par V.

Si $A \to B$ est un morphisme entre algèbres k-affinoïdes, l'image réciproque d'un domaine analytique V de $\mathscr{M}(A)$ est un domaine analytique de $\mathscr{M}(B)$ correspondant à la B-algèbre $A_V \widehat{\otimes}_A B$. L'intersection de deux domaines affinoïdes de X reste un domaine affinoïde : si U et V sont deux domaines affinoïdes, $A_{U\cap V} = A_U \widehat{\otimes}_A A_V$. Si U et V sont deux parties compactes et disjointes de X, $U \cup V$ est un domaine affinoïde si et seulement si U et V sont deux domaines affinoïdes de X ; dans ce cas $A_{U\cup V}$ s'identifie à $A_U \times A_V$.

Exemple 1.1.19. Soit $r > 0$, et $D(0,r) = \mathscr{M}(k\{r^{-1}T\})$ le disque de Berkovich k-analytique fermé de rayon r. Pour tout $s \in]0,r]$, le disque fermé $D(0,s)$ peut être considéré comme un domaine affinoïde de $D(0,r)$.

Exemple 1.1.20 (Domaines rationnels). Soit A une algèbre k-affinoïde et $X = \mathscr{M}(A)$. Soient $g, f_1, \ldots, f_n$ des éléments de A dont l'idéal qu'ils engendrent est A tout entier (autrement dit ils n'ont aucun zéro commun dans X), et $(r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$. Alors

$$V = X\left(r^{-1}\frac{f}{g}\right) := \{x \in X, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, |f_i(x)| \leqslant r_i|g(x)|\}$$

est un domaine affinoïde de X appelé *domaine rationnel*, et dont la A-algèbre associée est : $A\left\{r^{-1}\frac{f}{g}\right\} := A\{r^{-1}T\}/(gT - f_i)_i$, qui est k-affinoïde pour la norme quotient. Le théorème de Gerritzen-Grauert ([BGR] 7.3.5/3 dans le cas strict, [Tem2] dans le cas général) affirme que tout domaine affinoïde de X est une union finie de domaines rationnels.

Tout point de X a une base de voisinages qui sont des domaines affinoïdes (on parlera de *voisinages affinoïdes*). Par ailleurs, le corps résiduel complété $\mathscr{H}(x)$ ne dépend pas du domaine affinoïde dans lequel on considère x.

Faisceau structural

Théorème 1.1.21 (Théorème d'acyclicité de Tate, [BGR] 8.2, ou [Ber1] 2.2.5)**.** *Soit $\mathscr{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ un recouvrement fini d'un espace k-affinoïde $X = \mathscr{M}(A)$ par des domaines affinoïdes. Le complexe de Čech suivant est exact et admissible :*

$$0 \to A \to \prod_i A_{V_i} \to \prod_{i,j} A_{V_i\cap V_j} \to \dots$$

Un sous-ensemble V de X est dit *spécial* s'il s'exprime comme une union finie de domaines affinoïdes de X. Notons $S(X)$ l'ensemble des sous-ensembles spéciaux de X. La *G-topologie* sur X est définie comme la topologie de Grothendieck engendrée par la prétopologie sur la catégorie des sous-ensembles spéciaux de X, où un recouvrement de $V \in S(X)$ est un recouvrement ensembliste de V par un nombre fini de sous-ensembles spéciaux. Le théorème d'acyclicité de Tate permet de définir un faisceau pour la G-topologie.

Corollaire 1.1.22 ([Ber1], 2.2.6)**.** *Si $V \in S(X)$, posons*

$$A_V := \ker\left(\prod_i A_{V_i} \to \prod_{i,j} A_{V_i\cap V_j}\right),$$

où $(V_i)_i$ est un recouvrement fini de V par des domaines affinoïdes de X. Alors A_V est une k-algèbre de Banach qui ne dépend pas du recouvrement $(V_i)_i$ de V, et $V \mapsto A_V$ définit un faisceau pour la G-topologie de X. Par ailleurs, V est un domaine affinoïde si et seulement si A_V est une algèbre k-affinoïde, auquel cas $V \simeq \mathscr{M}(A_V)$.

Ce résultat permet de définir le *faisceau des fonctions analytiques* sur X.

Définition 1.1.23. *Si U est un ouvert (pour la topologie de Berkovich) de X, posons*

$$\mathscr{O}_X(U) := \varprojlim_V A_V,$$

où V décrit l'ensemble des sous-ensembles spéciaux contenus dans U. Cela définit un faisceau de k-algèbres sur X appelé le faisceau des fonctions analytiques sur X.

Un élément $f \in \mathscr{O}_X(U)$ peut être vu comme une fonction $f : U \to \prod_{x\in U} \mathscr{H}(x), x \mapsto (|f(x)|)_{x\in U}$.

Germes : Si $x \in X$, le germe du faisceau $\mathscr{O}_X$ en x, noté $\mathscr{O}_{X,x}$, est naturellement muni d'une semi-norme multiplicative induite par x. C'est un anneau local d'idéal maximal $m_x = \{f \in \mathscr{O}_{X,x}, |f(x)| = 0$. Notons $\kappa(x) = \mathscr{O}_{X,x}/m_x$ le corps résiduel de $\mathscr{O}_{X,x}$, appelé le *corps résiduel de x*. Soit$x \in X$, voici quelques propriétés importantes :

1. *Il existe un plongement canonique $\kappa(x) \hookrightarrow \mathscr{H}(x)$, avec $\kappa(x)$ dense dans $\mathscr{H}(x)$, ce qui fait de $\mathscr{H}(x)$ le complété du corps valué $\kappa(x)$.*
2. *L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est noethérien, hensélien, et excellent.*

Les caractères noethérien et hensélien sont prouvés dans [Ber2], Théorèmes 2.1.4 et 2.1.5, tandis que l'excellence se trouve dans [Duc09], Théorème 2.1.3.

Définition 1.1.24. *Dorénavant, un* espace k-affinoïde *sera un espace localement annelé constitué du spectre de Berkovich X d'une algèbre k-affinoïde muni du faisceau $\mathscr{O}_X$ construit ci-dessus.*

Un morphisme borné entre deux aalgèbres k-affinoïdes $A \to B$ induit un morphisme d'espaces localement annelés $\mathscr{M}(B) \to \mathscr{M}(A)$.

Définition 1.1.25. *Un morphisme entre deux espaces k-affinoïdes est défini comme un morphisme d'espaces localement annelés provenant d'un morphisme de k-algèbres borné entre les algèbres k-affinoïdes correspondantes.*

Cela permet de définir la *catégorie des espaces k-affinoïdes*, qui est équivalente à la catégorie opposée à la catégorie des k-algèbres affinoïdes munie des morphismes bornés.

Réduction, bord et intérieur d'un espace k-affinoïde

Nous allons introduire les notions de *bord* d'un espace k-affinoïde. L'existence *tangible* de bord est un phénomène apparaissant dans la théorie analytique de Berkovich qui n'a d'analogue ni en géométrie algébrique, ni en géométrie rigide (il existe une façon de parler

d'un morphisme sans bord en géométrie rigide, mais celui-ci ne s'incarne jamais comme sous-ensemble de l'espace considéré), ce qui est suffisamment rare pour être souligné.

Si A est un anneau de Banach, notons $A^\circ = \{a \in A, \rho_A(a) \leqslant 1\}$ et $A^{\circ\circ} = \{a \in A, \rho_A(a) < 1\}$, ce qui fait de A° un sous-anneau de A, et de $A^{\circ\circ}$ un idéal de A°. Notons $\widetilde{A} = A^\circ/A^{\circ\circ}$ le quotient, naturellement muni d'une structure de $\widetilde{k}$-algèbre, qui est de type fini lorsque A est k-affinoïde. Si B est une autre k-algèbre de Banach, tout morphisme $\varphi : A \to B$ induit des morphismes $\varphi^\circ : A^\circ \to B^\circ$ et $\widetilde{\varphi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$.

Si A est une algèbre k-affinoïde et $x \in X = \mathscr{M}(A)$, le morphisme de k-algèbres $\chi_x : A \to \mathscr{H}(x)$ induit donc un morphisme $\widetilde{\chi_x} : \widetilde{A} \to \widetilde{\mathscr{H}(x)}$, qui fournit une application entre les spectres analytiques et algébriques $\pi_X : X \to \mathrm{Spec}(\widetilde{A}), x \mapsto \ker(\widetilde{\chi_x})$.

Définition 1.1.26. *Si A est une algèbre k-affinoïde et $X = \mathscr{M}(A)$, notons $\widetilde{X} := \mathrm{Spec}(\widetilde{A})$ la* réduction de X. *L'application canonique $\pi_X : X \to \widetilde{X}$ décrite plus haut est appelé l'*application de réduction *associée à X.*

Proposition 1.1.27 ([Ber1], 2.2.4)**.** *Si A une algèbre k-affinoïde* stricte*, l'application $\pi_X : X \to \widetilde{X}$ est surjective et anticontinue (i.e. que l'image réciproque de tout ouvert de $\widetilde{X}$ est un fermé de X, et vice-versa).*

Définition 1.1.28 (Bord de Shilov)**.** *Si A est une algèbre k-affinoïde stricte et $X = \mathscr{M}(A)$, le* bord de Shilov *de X, noté $\Gamma(X)$, est défini comme l'image réciproque de l'ensemble des points génériques des composantes irréductibles de $\widetilde{X}$: $\Gamma(X) = \pi_X^{-1}(\widetilde{X}_{\text{gén}})$.*

Une définition équivalente lorsque X est non vide est la suivante : le bord de Shilov de X, $\Gamma(X)$, est l'unique sous-ensemble fermé minimal de X sur lequel toute fonction $f \in A$ atteint son maximum.

Le bord de Shilov d'un espace k-affinoïde existe toujours et est fini ([Ber1], 2.4.5).

Exemple 1.1.29. Si $r > 0$, le bord de Shilov du disque fermé de rayon r, $D(0,r) = \mathscr{M}\left(k\{r^{-1}T\}\right)$, est le singleton $\{\eta_{0,r}\}$ appelé *point de Gauss* et défini par :

$$|f(\eta_{0,r})| = \max_{i\in\mathbb{Z}} |a_i| r^i$$

dès que $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i \in k\{r^{-1}T\}$.

Définissons maintenant une autre notion de bord (et d'intérieur), relatif puis absolu, qui coïncidera avec le bord de Shilov dans le cas des courbes k-analytiques.

Définition 1.1.30 (Bord relatif d'un morphisme, bord absolu)**.**

1. *Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme d'espaces k-affinoïdes, avec $X = \mathscr{M}(A)$ et $Y = \mathscr{M}(B)$. L'*intérieur relatif de φ, *noté* $\mathrm{Int}(Y/X)$, *consiste en les points $y \in Y$ tels qu'il existe un morphisme surjectif et admissible de A-algèbres $\psi : A\{r_1^{-1}T_1, \ldots, r_n^{-1}T_n\} \twoheadrightarrow B$ vérifiant, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $|\psi(T_i)(y)| < r_i$. Le* bord relatif de φ, *noté $\partial^{\mathrm{an}}(Y/X)$, est le complémentaire de $\mathrm{Int}(Y/X)$ dans Y. Le morphisme φ sera dit* sans bord *lorsque $\partial^{\mathrm{an}}(Y/X) = \emptyset$.*
2. *Les* bord et intérieur absolus, *ou* analytiques, *de X, notés $\partial^{\mathrm{an}}X$ et $\mathrm{Int}(X)$, sont définis comme les bord et intérieur relatifs du morphisme canonique $X \to \mathscr{M}(k)$ induit par $k \hookrightarrow A$. L'espace k-affinoïde X est dit* sans bord *lorsque $\partial^{\mathrm{an}}X = \emptyset$.*

L'intérieur relatif s'interprète géométriquement de la manière suivante : si $y \in \mathrm{Int(Y/X)}$, le morphisme ψ induit une immersion fermée de Y dans le A-disque fermé de polyrayon $(r_1, \ldots, r_n)$ tel que l'image de y appartienne au disque ouvert correspondant. Voici quelques propriétés notoires :

Proposition 1.1.31 ([Ber1], 2.5.8 et 2.5.13)**.** *Soit $\varphi : Y = \mathscr{M}(B) \to X = \mathscr{M}(A)$ un morphisme d'espace k-affinoïdes :*

1. *L'intérieur $\mathrm{Int}(Y/X)$ est un ouvert de Y, ainsi $\partial^{\mathrm{an}}(Y/X)$ est un fermé.*
2. *Le morphisme φ est sans bord si et seulement s'il est* fini, *c'est-à-dire si B est une A-algèbre de Banach finie.*
3. *Si Y est un domaine affinoïde de X, $\mathrm{Int}(Y/X)$ correspond à l'intérieur topologique de Y dans X.*

Proposition 1.1.32 (consequence of [Ber1], 2.5.2.(d))**.** *Si X est un espace strictement k-affinoïde, le bord analytique $\partial^{\mathrm{an}}X$ correspond exactement à l'image réciproque, par l'application de réduction $\pi_X : X \to \widetilde{X}$, de l'ensemble des points non fermés de $\widetilde{X}$.*

Voici enfin un résultat reliant bord de Shilov et bord analytique :

Proposition 1.1.33 ([Ber1], 2.5.20)**.** *Soit V un domaine affinoïde d'un espace k-affinoïde X, alors :*

$$\Gamma(X) \cap V \subseteq \Gamma(V) \subseteq \partial^{\mathrm{an}}(Y/X) \cup (\Gamma(X) \cap V),$$

en particulier les points du bord de Shilov de V qui ne sont pas dans le bord de Shilov de X sont sur le bord relatif de l'immersion $V \to X$.

1.1.4 Bons espaces analytiques

Nous allons présenter brièvement les *bons espaces analytiques*, définis par Berkovich dans [Ber1] (Chapitre 3) sous le nom d'espaces analytiques. Il existe une notion plus

générale d'espace analytique, définie dans [Ber2], que nous n'aurons cependant pas à utiliser dans ce texte puisque tous les espaces avec lesquels nous travaillerons, les courbes analytiques, sont de bons espaces analytiques (voir [Duc], 3.3.7). Fixons un corps ultramétrique complet k.

Définition 1.1.34 (Non rigoureuse)**.** *Un* bon espace k-analytique *est un espace localement annelé* $(X, \mathscr{O}_X)$ *tel que chaque point admet un voisinage isomorphe à un espace* k*-affinoïde. Le faisceau structural est appelé le* faisceau des fonctions analytiques *sur* X*. L'espace* X *est dit* strict *lorsque tout point admet un voisinage affinoïde strict.*

Un morphisme de bons espaces k*-analytiques est un morphisme d'espaces localement annelés induit par des morphismes d'espaces* k*-affinoïdes. Les bons espaces* k*-analytiques forment une catégorie, qui admet des produits fibrés.*

Remarque 1.1.35. De par la compacité des espaces k-affinoïdes, la définition précise des bons espaces k-analytiques est assez technique, sans être particulièrement éclairante, nous nous permettrons de l'omettre dans la suite.

Exemple 1.1.36 (Espace affine k-analytique de dimension n). L'*espace affine* k*-analytique de dimension* n, noté $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$, est défini comme l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $k[T_1, \ldots, T_n]$ prolongeant la valeur absolue de k, muni de la topologie induite par la topologie produit sur $\mathbb{R}^{k[T_1,\ldots,T_n]}$. Il s'agit d'un bon espace k-analytique admettant la description suivante :

$$\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}} = \bigcup_{r \in (\mathbb{R}_+^*)^n} \mathscr{M}(k\{r^{-1}T\})$$

Définition 1.1.37 (Domaine analytique)**.** *Un sous-ensemble* V *d'un espace* k*-analytique* X *est un* domaine analytique *lorsqu'il admet un recouvrement* $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ *où chaque* V_i *est un domaine affinoïde de* X*, et tel que pour tout* $x \in V$ *il existe un sous-ensemble* I_x fini *de* I *tel que* $\bigcup_{i \in I_x} V_i$ *est voisinage ouvert de* x *dans* V*.*

Remarque 1.1.38. Un domaine analytique V de X peut être vu comme un morphisme de bons espaces k-analytiques $\varphi : V \to X$ induisant un homéomorphisme de V sur son image, et tel que pour tout morphisme de bons espaces k-analytiques $\psi : Z \to X$ tel que $\psi(Z) \subseteq \varphi(V)$, il existe un unique morphisme de bons espaces k-analytiques $\sigma : Z \to V$ qui factorise ψ, c'est-à-dire tel que $\psi = \varphi \circ \sigma$. On identifie alors un domaine analytique de X avec son image dans X.

Exemple 1.1.39. Les ouverts ainsi que les domaines affinoïdes d'un bon espace k-analytique X sont des exemples de domaines analytiques de X.

Par définition d'un bon espace, tout $x \in X$ admet un voisinage affinoïde, c'est-à-dire un voisinage isomorphe à $(\mathscr{M}(A), \mathscr{O}_{\mathscr{M}(A)})$ pour une certaine algèbre k-affinoïde A. Comme les domaines affinoïdes d'un espace k-affinoïde en forment une base de voisinages, la famille des domaines affinoïdes forme une base de voisinage de tout bon espace k-analytique.

L'image réciproque d'un domaine analytique par un morphisme de bons espaces k-analytiques est un domaine analytique. L'intersection de deux domaines analytiques reste un domaine analytique.

Définition 1.1.40 (Points rigides)**.** *Un point x d'un bon espace k-analytique X est dit* rigide *lorsque l'extension résiduelle complétée $\mathscr{H}(x)/k$ est finie. Notons $X_{[0]}$ l'ensemble des points rigides de X.*

Proposition 1.1.41. *Si k n'est pas trivialement valué et X est un bon espace analytique strict, $X_{[0]}$ est dense dans X.*

Remarque 1.1.42. Les points rigides sont exactement ceux qui apparaissent dans la géométrie rigide de Tate. Comme nous le verrons dans la suite, la théorie de Berkovich « rajoute » des points aux espaces rigides, permettant de meilleurs comportements topologiques.

Définition 1.1.43. *Soit X un bon espace k-analytique, et $x \in X$. Le point x est dit* réduit *(resp.* normal*,* régulier*) lorsque l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est* réduit *(resp.* normal*,* régulier*). L'espace k-analytique X sera dit* réduit *(resp.* normal*,* régulier*) si et seulement si chacun de ses points vérifie cette propriété.*

Dimension d'un bon espace k-analytique

Nous allons présenter la notion de *dimension* d'un bon espace k-analytique, qui nous permettra de définir les courbes k-analytiques, objets centraux de ce texte.

Soit A une algèbre k-affinoïde. Nous avons vu qu'il existe une extension complète K/k telle que l'algèbre K-affinoïde $A\widehat{\otimes}_k K$ soit stricte. Il est possible de montrer que la dimension de Krull de $A\widehat{\otimes}_k K$ ne dépend pas du corps K rendant stricte A.

Définition 1.1.44.

1. *Si A une algèbre k-affinoïde,* dimension k-analytique *de $X = \mathscr{M}(A)$, notée* $\dim(X)$*, est définie comme la dimension de Krull de l'anneau $A\widehat{\otimes}_k K$ pour toute extension complète rendant stricte l'algèbre K-affinoïde $A\widehat{\otimes}_k K$.*

2. *La* dimension *d'un bon espace k-analytique, Y notée* $\dim(Y)$*, est définie comme le supremum :*
$$\dim(Y) = \sup_V (\dim(V)),$$
où V parcourt l'ensemble des domaines affinoïdes de Y.

3. *Si $x \in Y$, la* dimension de x dans Y*, notée* $\dim_x(Y)$*, est définie comme l'infimum :*
$$\dim_x(Y) = \inf_V (\dim(U)),$$
où U parcourt l'ensemble des voisinages affinoïdes de x dans Y.

4. *L'espace Y est dit* purement de dimension n *lorsque* $\dim_x(Y) = n$ *pour tout* $x \in Y$.

La dimension d'un bon espace k-analytique Y est invariante par changement de base par une extension complète K/k : $\dim(Y) = \dim \underbrace{\left(Y \times_{\mathscr{M}(k)} \mathscr{M}(K)\right)}_{\text{bon espace } K\text{-analytique}}$.

Voici un autre point de vue sur la dimension d'un bon espace k-analytique, faisant intervenir les extensions $\widetilde{k} \hookrightarrow \widetilde{\mathscr{H}(x)}$, où $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ désigne le corps résiduel de l'extension résiduelle complétée $\mathscr{H}(x)$.

Définition 1.1.45. *Si x est un point d'un bon espace k-analytique X, notons :*
$$f_x = \mathrm{degtr}_{\widetilde{k}} \widetilde{\mathscr{H}(x)}$$
$$e_x = \mathrm{rang}_{\mathbb{Q}} \left(|\mathscr{H}(x)^\times|/|k^\times| \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\right)$$

Proposition 1.1.46 ([Ber2], 2.5.2)**.** *Si X est un bon espace k-affinoïde :* $\dim(X) = \sup_{x \in X}(f_x + e_x)$.

Remarque 1.1.47. Un *point d'Abhyankar* de X est un point $x \in X$ tel que $f_x + e_x = \dim_x(X)$. Si x est un point d'Abhyankar, l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ est artinien ([Duc18], 3.2.10). Par conséquent, $\mathscr{O}_{X,x}$ est un corps (et donc égal à $\kappa(x)$) dès qu'il est réduit, ce que l'on utilisera plus tard.

Proposition 1.1.48 ([Poi], 4.7)**.** *Si X est un espace k-affinoïde, tout point situé sur le bord de Shilov $\Gamma(X)$ est un point d'Abhyankar.*

Bord, intérieur, et quelques classes de morphismes

Généralisons aux bons espaces k-analytiques les notions de bord et d'intérieur vues en 1.1.30.

Définition 1.1.49. *Soit X et Y deux bons espaces k-analytiques, et $\varphi : Y \to X$ un morphisme.*

1. *L'*intérieur relatif $\mathrm{Int}(Y/X)$ *de φ est l'ensemble des points $y \in Y$ tels que pour tout voisinage affinoïde $U \subseteq X$ de $x = \varphi(y)$, il existe un voisinage affinoïde $V \subset Y$ de y tel que $V \subseteq \varphi^{-1}(U)$ et $y \in \mathrm{Int(V/U)}$. Le complémentaire de* $\mathrm{Int}(Y/X)$ *dans Y, noté $\partial^{\mathrm{an}}(Y/X)$, est appelé le* bord relatif *de φ. Le morphisme φ sera dit* sans bord *lorsque $\partial^{\mathrm{an}}(Y/X) = \emptyset$.*
2. *Les* bord et intérieur absolus*, ou* analytiques*, de X, notés $\partial^{\mathrm{an}}X$ et* $\mathrm{Int}(X)$*, sont définis comme les bord et intérieur relatifs du morphisme canonique $X \to \mathscr{M}(k)$. L'espace X est dit* sans bord *lorsque $\partial^{\mathrm{an}}X = \emptyset$.*

Si V est un domaine analytique de X, l'intérieur relatif $\mathrm{Int}(X/V)$ correspond exactement à l'intérieur topologique de V dans X ([Ber2], 1.5.5).

Définition 1.1.50 (Morphismes finis et propres)**.** *Soit $Y \to X$ un morphisme de bons espaces k-analytiques :*

1. *Le morphisme φ est dit propre lorsqu'il est compact (i.e. la préimage de tout compact est compacte) et sans bord. L'espace k-analytique X est* propre *lorsque le morphisme $X \to \mathscr{M}(k)$ l'est.*
2. *Si $x \in X$, φ est* fini en x *lorsqu'il existe un voisinage affinoïde $U \subseteq X$ de x tel que le morphisme $\varphi^{-1}(U) \to U$ est fini (cf. 1.1.31). Le morphisme φ est dit* fini *lorsqu'il l'est en chaque point de X.*

Remarque 1.1.51. Du deuxième point de la proposition 1.1.31 on déduit qu'un morphisme fini entre deux bons espaces k-analytiques est toujours sans bord. En particulier, un espace k-affinoïde est propre si et seulement si sa k-algèbre affinoïde correspondante est finie. On peut montrer qu'un morphisme fini est toujours propre.

Proposition 1.1.52 ([Ber1], 3.1.7)**.** *Si X est un bon espace k-analytique, le foncteur $(Y \to X) \mapsto \mathscr{O}_Y$ définit une équivalence de catégories entre la catégorie des bons espaces k-analytiques munis d'un morphisme fini vers X et la catégorie des $\mathscr{O}_X$-algèbres cohérentes.*

Définition 1.1.53 (Morphismes séparés, [Ber2], 1.4)**.** *Un morphisme $\varphi : Y \to X$ entre deux bons espaces k-analytiques est dit* séparé *lorsque le morphisme diagonal $\Delta_{Y/X} : Y \to Y \times_X Y$ est une immersion fermée. L'espace analytique X sera dit* séparé *lorsque le morphisme canonique $X \to \mathscr{M}(k)$ l'est.*

Berkovich a montré dans [Ber1] (3.1.5) qu'un bon espace k-analytique est séparé si et seulement s'il est *topologiquement séparé* (Hausdorff), la condition nécessaire n'étant *a priori* pas évidente. Cette notion nous permet enfin de définir les *courbes k-analytiques*, principaux objets d'étude de ce travail.

Définition 1.1.54 (Courbes k-analytiques)**.** *Un (bon) espace k-analytique est une* courbe analytique *lorsqu'il est séparé et purement de dimension* 1.

Remarque 1.1.55. Berkovich définit dans [Ber2] une notion plus générale d'espaces k-analytiques, où un point n'admet pas toujours de voisinage k-affinoïde. Une courbe k-analytique peut alors être définie comme un espace k-analytique séparé purement de dimension 1. Or, dans [Duc] (3.6.7), l'auteur montre la bonté de n'importe quelle courbe k-analytique ainsi définie, donc les deux définitions coïncident.

Remarque 1.1.56. Comme de nombreuses notions présentées ci-dessus, cette définition correspond *quasi verbatim* à la définition analogue en géométrie algébrique : une k-courbe est un k-schéma séparé purement de dimension 1.

Définissons maintenant les notions de *platitude* et de *(quasi)-lissité*, étudiées en détail dans [Duc18]. Ici les définitions naïves (venant de la géométrie algébrique) ne sont pas toujours suffisantes en raison de l'existence de bord dans la théorie de Berkovich.

Définition 1.1.57 (Platitude)**.** *Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme entre deux bons espaces k-analytiques :*

1. *Le morphisme φ est dit* naïvement plat *en $y \in Y$ si $\mathscr{O}_{Y,y}$ est un $\mathscr{O}_{X,\varphi(y)}$-module plat.*
2. *Le morphisme φ est dit* plat *en $y \in Y$ lorsque pour tout morphisme de bons espaces analytiques $\psi : X' \to X$ (avec X' pouvant être défini sur une extension complète de k quelconque), le changement de base de φ le long de ψ, $Y' \to X'$, est naïvement plat en n'importe quel point $y' \in Y'$ au-dessus de y. Le morphisme φ est* plat *lorsqu'il l'est en tout point de Y.*

Cette définition générale de platitude se comporte mieux que sa version naïve en ce que cette dernière n'est pas stable par changement de base. Néanmoins, Ducros montre dans [Duc18], Théorème 8.3.4, que les notions de platitude et de platitude naïve coïncident sur $\mathrm{Int}(Y/X)$. Par conséquent, dès que φ est sans bord, être plat revient à l'être naïvement.

Remarque 1.1.58 ([Duc18]4.1.13). Le faisceau structural $X \to \mathscr{M}(k)$ est plat, pour tout (bon) espace k-analytique X

Définition 1.1.59 (Quasi-lissité et lissité)**.** *Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme entre deux bons espaces k-analytiques :*

1. *Le morphisme φ est* quasi-lisse *en $y \in Y$ s'il est plat en y et géométriquement régulier en y, ce qui revient à dire qu'il est plat en y et :*

$$\dim_{\mathscr{H}(y)} \left(\Omega^1_{Y/X} \otimes \mathscr{H}(y)\right) = \dim_y Y_x.$$

   Le morphisme φ est quasi-lisse *lorsqu'il l'est en tout point de Y. L'espace X sera dit* quasi-lisse *lorsque le morphisme $X \to \mathscr{M}(k)$ l'est.*

2. *Le morphisme φ est* lisse *en $y \in Y$ lorsqu'il est quasi-lisse en y et que $y \notin \partial^{\mathrm{an}}(Y/X)$. Le morphisme φ est* lisse *lorsqu'il est quasi-lisse et sans bord. L'espace X sera dit* lisse *lorsque le morphisme $X \to \mathscr{M}(k)$ l'est.*

Remarque 1.1.60. Ducros définit autrement la quasi-lissité, dans [Duc18] 5.2.4, en terme de présentation jacobienne, mais montre au point 5.3.2 que cette définition est équivalente à celle présentée ci-dessus.

Bonnes propriétés topologiques

Les espaces de Berkovich jouissent de propriétés topologiques remarquables, qui constituent un atout majeur de cette théorie. Soit X un bon espace k-analytique :

1. *X est* localement compact*,*
2. *si X est* localement connexe par arcs*,*
3. *si X est quasi-lisse, il est* localement contractile*.*

Le premier point se déduit de la définition de bon espace k-analytique et de la compacité des espaces k-affinoïdes. Le deuxième point se trouve dans [Ber1] (3.2.1) tandis que le troisième point est prouvé dans [Ber4]. Hrushovski et Loeser ont montré dans [HL] que les analytifiées de variétés algébriques sont également localement contractiles, sans hypothèse de lissité. Leur travail repose sur une interaction fructueuse, en plein essor, entre théorie des modèles et espaces de Berkovich. Nous travaillerons dans la suite avec des bons espaces k-analytiques quasi-lisses : comme ils sont localement contractiles et localement connexes par arcs, on pourra leur appliquer la théorie du revêtement topologique universel.

1.1.5 Analytification d'une variété algébrique

Fixons un corps ultramétrique complet k. Nous allons définir le *foncteur d'analytification*, très important dans la théorie de Berkovich, associant à toute k-variété algébrique

$\mathscr{X}$ un bon espace k-analytique $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$, l'*analytifié* de $\mathscr{X}$.

Définition 1.1.61. *Soit $\mathscr{X}$ un k-schéma de type fini, et $F_{\mathscr{X}}$ le foncteur contravariant qui va de la catégorie des bons ensembles k-analytiques dans la catégorie des ensembles, qui à Y associe $\mathrm{Hom}_{loc\text{-}an}(Y, \mathscr{X})$, où $\mathrm{Hom}_{loc\text{-}an}(\cdot,\cdot)$ désigne les morphismes dans la catégorie des espaces localement annelés. Ce foncteur est représentable ([Ber1], 3.4.1), et l'on note $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ le représentant.*

Si $\mathscr{F}$ est un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-modules et $\pi : \mathscr{X}^{\mathrm{an}} \to \mathscr{X}$ désigne le morphisme canonique d'espaces localement annelés, alors $\mathscr{F}^{\mathrm{an}} := \pi^*\mathscr{F}$ est un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\mathrm{an}}}$-modules.

Voici quelques propriétés de l'analytification d'un k-schéma de type $\mathscr{X}$, dont les preuves se trouvent dans [Ber1], 3.4 :

1. *Le morphisme $\pi : \mathscr{X}^{\mathrm{an}} \to \mathscr{X}$ est plat et surjectif, induit une bijection $\pi_0(\mathscr{X}^{\mathrm{an}}) \simeq \pi_0(\mathscr{X})$, et identifie les points rigides de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ avec les points fermés de $\mathscr{X}$.*
2. *Pour toute extension ultramétrique complète K/k, $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}(K) \simeq \mathscr{X}(K)$.*
3. *L'analytifié $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ est sans bord et strict.*
4. *L'espace topologique $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ est séparé (resp. compact) si et seulement si $\mathscr{X}$ est séparé (resp. propre).*
5. *L'analytifié $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ est réduit, normal, régulier, lisse, si et seulement si le schéma $\mathscr{X}$ vérifie les mêmes propriétés.*
6. *Si $\mathscr{X}$ est propre et si $\mathscr{F}$ est un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-modules, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$ on a un isomorphisme : $H^q(\mathscr{X}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(\mathscr{X}^{\mathrm{an}}, \mathscr{F}^{\mathrm{an}})$.*
7. *Si $\mathscr{X}$ est propre, le foncteur $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ induit une équivalence de catégories entre les faisceaux cohérents de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-modules et les faisceaux cohérents de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}^{\mathrm{an}}$-modules.*

Exemples 1.1.62 (Exemples d'analytifications).

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, l'analytifié de $\mathbb{A}_k^n$ n'est autre que le bon espace k-analytique $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ déjà rencontré. Le morphisme canonique $\pi : \mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}} \to \mathbb{A}_k^n$ correspond au noyau : $x \mapsto \ker |\cdot|_x$ (il s'agit bien d'un idéal premier de $k[T_1, \ldots, T_n]$).
- Soit A une k-algèbre de type fini, et $\mathscr{X} = \mathrm{Spec}(A)$ le k-schéma affine associé. Alors $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur A qui étendent la valeur absolue de k. Si $\mathcal{I}$ est le faisceau d'idéaux permettant de définir $\mathscr{X}$ comme

fermé de Zariski de $\mathbb{A}^n_k$, le faisceau des fonctions analytiques sur $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ est donné par $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\mathrm{an}}} = \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_k}/\pi^*\mathcal{I}$.

- Lorsque k est algébriquement clos, si E est une k-courbe elliptique à mauvaise réduction, son analytifiée peut être uniformisée par l'analytifiée du groupe multiplicatif. Plus précisément, il existe $q \in k$, $|q| < 1$, tel que :

$$E^{\mathrm{an}} = \mathbb{G}_m^{\mathrm{an}}/q^{\mathbb{Z}}.$$

  La courbe E^{an} est appelée *courbe de Tate*. De telles courbes ont joué un rôle fondamental historiquement puisque c'est en remarquant qu'elles sont uniformisables que Tate a développé la théorie des espaces analytiques rigides.

Voici des résultats importants dont nous nous servirons à plusieurs reprises dans la suite :

Théorème 1.1.63.

1. *Toute courbe k-analytique X propre (compacte et sans bord) est* algébrisable*, c'est-à-dire qu'elle est isomorphe à l'analytifiée $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ d'une k-courbe algébrique projective $\mathscr{X}$.*
2. *Soit Y une courbe k-analytique compacte ayant éventuellement un bord non vide, si elle est quasi-lisse Y est isomorphe à un domaine analytique de l'analytifiée $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ d'une k-courbe algébrique projective $\mathscr{X}$.*

La preuve du premier point apparaît dans [Ber1] (3.4.14) ou [Duc] (3.7.2), tandis que le second point de trouve dans [Duc] (6.3.1).

1.1.6 Morphismes et revêtements étales

Nous allons présenter dans cette section la notion de *morphisme étale* d'un (bon) espace k-analytique. Nous avons choisi de dédier au caractère étale cette section spécifique, plutôt que de le présenter à la suite de la platitude et de la lissité, en ce que cette notion est fondamentale dans la suite du texte : tous les revêtements et torseurs que nous aurons à considérer seront étales, les groupes de cohomologie seront ceux de la topologie sur le *site étale*, enfin la définition même du groupe tempéré fait appel au monde étale. Le texte de référence de cohomologie étale sur les espaces analytiques de Berkovich est [Ber2], dans lequel Berkovich entreprend une étude systématique de cette cohomologie et des principaux théorèmes (théorèmes de comparaison, dualité de Poincaré, théorèmes de changement de base...). Une introduction agréable à lire est [Duc15].

Définition 1.1.64 (Morphismes étales, [Ber2] 3.3.4)**.** *Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme entre deux espaces k-analytiques.*

1. *On dit que φ est* étale fini *lorsque pour tout domaine affinoïde $U = \mathscr{M}(A)$ de X, la préimage $V = \varphi^{-1}(U)$ est un domaine affinoïde de Y égal à $\mathscr{M}(B)$ pour une algèbre k-affinoïde B qui est une A-algèbre étale finie.*
2. *Le morphisme φ est* étale *en un point $y \in Y$ s'il existe un voisinage ouvert U de $\varphi(y)$ et un voisinage ouvert V de y tel que $\varphi(V) \subseteq U$ et induisant un morphisme fini étale de V dans U. On dit que φ est* étale *lorsqu'il l'est en chaque point de Y.*

Remarque 1.1.65. Parmi les morphismes étales, les morphismes finis (au sens de 1.1.50) sont exactement les morphismes *étales finis* au sens de la définition ci-dessus. Il n'y a donc aucune ambiguïté terminologique.

Remarque 1.1.66. Il aurait été possible de définir un morphisme étale comme un morphisme plat et non ramifié (notion que nous n'avons pas définie), comme il est possible de le faire en géométrie algébrique.

Voici quelques propriétés des morphismes étales :

1. *Un morphisme étale est ouvert et sans bord.*
2. *Les morphismes étales sont stables par composition, par extension du corps de base, et par changement de base par n'importe quel morphisme (sans que celui-ci soit étale).*
3. *Si $f : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ est un morphisme de k-schémas de type fini, le morphisme induit sur les analytifiés $f^{\mathrm{an}} : \mathscr{Y}^{\mathrm{an}} \to \mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ est étale si et seulement si $f : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ est étale.*

Fibres d'un morphisme étale Si $\varphi : Y \to X$ est un morphisme étale entre deux espaces k-affinoïdes et $x \in X$, la fibre $\varphi^{-1}(x)$ est finie, c'est une union finie $\coprod \mathscr{M}(k_i)$ où chaque k_i est une extension finie séparable de $\mathscr{H}(x)$.

Le théorème 3.4.1 de [Ber2] montre même que le comportement local du morphisme φ en un point y d'image x (plus précisément : le germe de $(Y, y) \to (X, x)$, cf. partie 3.2.1) dépend uniquement de l'extension séparable $\mathscr{H}(x) \hookrightarrow \mathscr{H}(y)$. En particulier, φ est un isomorphisme local en y si et seulement si $\mathscr{H}(y) = \mathscr{H}(x)$. On en déduit que si k est algébriquement clos, tout morphisme étale induit un isomorphisme local autour de chaque point rigide.

Présentons maintenant la notion de *revêtement étale*, que l'on utilisera tout au long de ce texte.

Définition 1.1.67 (Revêtement étale, [Ber2] 6.3.4.ii)**.** *Le morphisme $\varphi : Y \to X$ est un* revêtement étale de X *lorsque X admet un recouvrement ouvert $(X_i)_{i\in I}$ tel pour tout $i \in I$ l'on puisse écrire :*

$$\varphi^{-1}(X_i) = \coprod_{j\in J_i} Y_{i,j},$$

où chaque $Y_{i,j}$ est étale fini au-dessus de X_i, et où les ensembles d'indexation peuvent éventuellement être infinis. Si X est connexe, le revêtement étale $\varphi : Y \to X$ de X est dit galoisien *lorsqu'il est connexe et que le groupe d'automorphismes $G = \mathrm{Aut}(\varphi)$ agit simplement transitivement sur chaque fibre $\varphi^{-1}(x)$. Dans ce cas, X peut être interprété comme le quotient Y/G.*

Exemples de revêtements étales :

1. *Revêtement de Kummer.* Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{C}_I$ la courbe k-analytique définie comme domaine analytique de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ par la condition : $|T| \in I$ (ces courbes sont appelées *couronnes*, nous les étudierons plus en détail dans la prochaine section). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ inversible dans k. Alors le morphisme :

$$\mathcal{C}_I \to \mathcal{C}_{I^n}, z \mapsto z^n$$

   est un revêtement étale de $\mathcal{C}_I$, que l'on appellera *revêtement de Kummer*. Lorsque k contient toutes les racines n-ièmes de l'unité ce revêtement est galoisien, de groupe $\mu_n(k)$ isomorphe (non canoniquement) à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. *Revêtement topologique.* Tout revêtement topologique d'un espace k-analytique est un revêtement étale de cet espace, et un isomorphisme local en tout point de la source. Voici l'exemple, très important historiquement, de l'uniformisation d'une courbe de Tate. Supposons k algébriquement clos et non trivialement valué. Soit E une k-courbe elliptique à mauvaise réduction. Le théorème d'uniformisation de Tate permet d'affirmer qu'il existe $q \in k^{\circ\circ}$ et un isomorphisme d'espaces k-analytiques :

$$E^{\mathrm{an}} \simeq \mathbb{G}_m^{\mathrm{an}}/q^{\mathbb{Z}}.$$

   Le morphisme d'uniformisation $\mathbb{G}_m^{\mathrm{an}} \to E^{\mathrm{an}}$ est un revêtement topologique (donc étale) galoisien de E^{an} de groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}$.

3. *Logarithme.* Soit $D(0,1)^\circ$ le $\mathbb{C}_p$-disque unité ouvert, défini en tant que domaine analytique de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}_p}^{1,\mathrm{an}}$ par la condition $|T| < 1$. La fonction logarithme définie sur

$D(0,r)^\circ$ par :

$$\log(1+z) = \sum_{i\geqslant 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} z^i$$

induit un revêtement étale (à fibres infinies) de $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_p}$, galoisien de groupe de Galois $\mu_{p^\infty}(\mathbb{C}_p) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{p^n}(\mathbb{C}_p) \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Remarquons que ce revêtement ne peut pas être topologique puisque $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_p}$ est topologiquement simplement connexe.

Site étale : Si X est un bon espace k-analytique, les morphismes étales permettent de définir le *site étale* sur X, noté $X_{\text{ét}}$, dont la topologie est appelée la *topologie étale*. Si $\text{Ét}(X)$ désigne la catégorie des morphismes étales de but X, la topologie étale sur X est la topologie de Grothendieck sur la catégorie $\text{Ét}(X)$ engendrée par la prétopologie pour laquelle l'ensemble des recouvrements d'un morphisme $U \to X \in \text{Ét}(X)$ est formé des familles $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i\in I}$ telles que $U = \bigcup_{i\in I} f_i(U_i)$.

Comme toute immersion ouverte est étale, la topologie étale est plus fine que la topologie de Berkovich, et tout faisceau étale sera en particulier un faisceau topologique.

Le groupe multiplicatif : L'application $U \mapsto \mathscr{O}_U(U)^\times$ définit un faisceau sur $X_{\text{ét}}$ noté $\mathbb{G}_m$. Lorsque X est un bon espace k-analytique, on a :

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq H^1(X_{\text{ét}}, \mathbb{G}_m) \simeq H^1(X_{\mathrm{top}}, \mathbb{G}_m).$$

Le groupe des racines de l'unité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'application : $U \mapsto \{f \in \mathscr{O}_U(U)^\times, f^n = 1\}$ définit un faisceau sur $X_{\text{ét}}$, noté μ_n. Si $n \neq 0$ dans k, on dispose de la suite exacte dite *de Kummer* suivante, dont nous nous servirons à plusieurs reprises par la suite :

$$1 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{z\mapsto z^n} \mathbb{G}_m \to 1.$$

Comparaison entre cohomologies étales algébrique et analytique : Soit $\mathscr{X}$ un k-schéma de type fini. À tout faisceau en groupes abéliens $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{X}_{\text{ét}}$ est associé le faisceau analytifié $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ sur $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}_{\text{ét}}$. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau localement constant en ℓ-groupes abéliens pour un certain nombre premier ℓ non nul dans k, on a :

$$H^i(\mathscr{X}_{\text{ét}}, \mathscr{F}^{\mathrm{an}}) \simeq H^i(\mathscr{X}, \mathscr{F}).$$

Définissons maintenant les revêtements étales *modérés* des espaces k-analytiques, notion qui sera au centre de notre future construction du semi-graphe d'anabélioïdes associé

à une triangulation d'une courbe k-analytique. Rappelons que p désigne l'exposant caractéristique de $\widetilde{k}$.

Définition 1.1.68 (Revêtement étale modéré d'un espace analytique)**.**

- *Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme étale entre deux espaces k-analytiques. Si $y \in Y$, φ est dit* modéré *en y si l'entier $[L : \mathscr{H}(\varphi(y))]$ est premier à p, où L est une clôture galoisienne de $\mathscr{H}(y)$. On dit que φ est* modéré *s'il l'est en tout point $y \in Y$. Un* revêtement modéré de X *sera un revêtement étale de X qui est modéré. Nous noterons $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X)$ la catégorie des revêtements modérés finis de X.*
- *Lorsque X est connexe, $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X)$ est une catégorie galoisienne dont nous noterons $\pi_1^{\mathrm{t}}(X)$ le groupe fondamental qui sera appelé le* groupe fondamental modéré de X.

Remarque 1.1.69. Cette définition de morphisme modéré est légèrement différente de la notion de « *tame morphism* » que Berkovich introduit dans [Ber2] en imposant seulement que p soit premier avec $[\mathscr{H}(y) : \mathscr{H}(\varphi(y))]$. Notre nouvelle définition a l'avantage d'être plus maniable. Attention à ne pas penser qu'être modéré pour φ en $y \in Y$ signifierait que l'extension $\mathscr{H}(y)/\mathscr{H}(\varphi(y))$ devrait être modérément ramifiée. Une telle définition serait moins restrictive (puisque $\mathscr{H}(y)/\mathscr{H}(\varphi(y))$ est automatiquement modérément ramifiée dès que $[\mathscr{H}(y) : \mathscr{H}(\varphi(y))]$ est premier avec p, ce qui est en particulier le cas lorsque p est premier avec $[L : \mathscr{H}(\varphi(y))]$).

1.2 Introduction aux courbes analytiques

Les courbes analytiques, au centre de ce travail, sont les objets les mieux compris et parmi les plus étudiés de la théorie analytique de Berkovich.

Définition 1.2.1. *En suivant la définition de* [Duc] (1.3.1)*, nous appellerons* graphe réel *tout espace topologique X possédant les propriétés suivantes :*

- *X est séparé et localement compact ;*
- *X possède une base d'ouverts U satisfaisant les conditions suivantes :*
  - *i) pour tout couple (x, y) de points de U, il existe un unique fermé $[x, y]$ homéomorphe à un segment d'extrémités x et y,*
  - *ii) le bord de U dans X est fini.*

Si de plus X vérifie lui-même la propriété i), nous dirons que c'est un arbre réel.

Remarque 1.2.2. Ducros utilise les termes de « graphe » et d'« arbre » là où nous rajoutons l'adjectif *réel* afin de différentier ces objets topologiques des *graphes*, *semi-graphes* et *arbres* qui sont les objets de nature seulement combinatoire (et non topologique) définis

au début du chapitre 2, nécessaires à la définition de *semi-graphes d'anabélioïdes* (cf. 2.1.15). Néanmoins, quand le contexte sera clair, nous nous permettrons d'omettre cet adjectif *réel*.

L'une des raisons de la popularité des courbes analytiques est qu'elles sont des graphes réels, et ont donc localement l'allure d'*arbres réels*. Comme nous le verrons tout au long de ce texte, de telles propriétés permettent une étude combinatoire de ces objets. Antoine Ducros a étudié très en détail les courbes analytiques dans [Duc], et nous nous appuierons en grande partie sur son travail.

Fixons dans toute cette partie un corps ultramétrique complet k. Le corps résiduel $\widetilde{k}$ peut être *a priori* de caractéristique nulle (par exemple lorsque k est lui-même de caractéristique nulle et trivialement valué). Notons p l'exposant caractéristique de $\widetilde{k}$, c'est-à-dire sa caractéristique lorsque cette dernière est finie, ou bien $p = 1$ sinon.

Rappelons (cf. définition 1.1.54) qu'une *courbe k-analytique* est définie comme un (bon) espace k-analytique séparé purement de dimension 1.

1.2.1 Points d'une courbe analytique

Soit X une courbe k-analytique, et $x \in X$. Rappelons (cf. définition 1.1.45) que l'on peut associer à l'extension complète $\mathscr{H}(x)/k$ les deux grandeurs « transcendantes »

$$\begin{aligned} f_x &= \mathrm{degtr}_{\widetilde{k}} \widetilde{\mathscr{H}(x)} \\ e_x &= \mathrm{rang}_{\mathbb{Q}} \left(|\mathscr{H}(x)^\times| / |k^\times| \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \right), \end{aligned}$$

et que celles-ci vérifient $f_x + e_x \leqslant 1$ (cf. proposition 1.1.46). Fixons une clôture algébrique $\overline{k}$ de k, et $\widehat{\overline{k}}$ le complété de $\overline{k}$ selon l'unique valeur absolue de $\overline{k}$ étendant celle de k. On a alors une classification des points de X selon les grandeurs f_x et e_x.

Définition 1.2.3. *Un point $x \in X$ est dit :*

1. *de* type 1 *si $\mathscr{H}(x) \subseteq \widehat{\overline{k}}$ (dans ce cas $f_x = e_x = 0$)*
2. *de* type 2 *si $f_x = 1$*
3. *de* type 3 *si $e_x = 1$*
4. *de* type 4 *si $f_x = e_x = 0$ mais x n'est pas de type* 1.

Pour tout sous-ensemble $I \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, notons $X_{[I]}$ le sous-ensemble de X constitué des points dont le type appartient à I.

Rappelons que $X_{[0]}$ désigne l'ensemble des points rigides de X. Tout point rigide est de type 1, et on l'égalité $X_{[0]} = X_{[1]}$ dès que k est algébriquement clos (ce qui sera le cas dans les chapitres suivants) ou que k est trivialement valué.

Préservation du type par morphisme fini . Le type d'un point d'une courbe est préservé par les morphismes finis : si $f : X' \to X$ est un morphisme fini de (bons) espaces k-analytiques qui sont des courbes, pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ un point $x' \in X'$ sera de type i si et seulement si $f(x)$ est de type i.

Les points d'Abhyankar de X sont exactement les points de type 2 et 3, et d'après 1.1.48, si V est un domaine affinoïde de X, le bord de Shilov de V est constitué de points de type 2 ou 3. D'après la remarque 1.1.47, dès que X est une courbe k-analytique *réduite* et que $x \in X_{[2,3]}$, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un corps, égal à $\kappa(x)$. On a même un résultat plus précis dans le cas où la courbe est normale :

Proposition 1.2.4 ([Meh], 1.8.4)**.** *Soit X une courbe k-analytique* normale*. Les anneaux locaux $(\mathscr{O}_{X,x})_{x\in X}$ sont soit des corps, soit des anneaux de valuation discrète, et $\mathscr{O}_{X,x}$ est un corps si et seulement si x n'est pas rigide.*

Voici quelques résultats de densité :

1. *si k est non trivialement valué et X est stricte, $X_{[0]}$ est dense dans X,*
2. *si k est non trivialement valué, $X_{[2]}$ est dense dans X,*
3. *l'ensemble $X_{[3]}$ est non vide si et seulement si $\sqrt{|k^\times|} \neq \mathbb{R}_+^*$, auquel cas $X_{[3]}$ est dense dans X.*

1.2.2 Résultats généraux

Ducros montre dans [Duc], Théorème 3.5.1, que toute courbe k-analytique est un graphe réel, au sens de la définition 1.2.1, avec d'éventuels branchements infinis en les sommets. Plus précisément :

Proposition 1.2.5. *Soit X une courbe k-analytique connexe et non vide. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) l'espace topologique X est contractile

ii) l'espace topologique X est simplement connexe

iii) pour tout couple (x, y) de points de X il existe un unique fermé de X homéomorphe à un intervalle réel compact d'extrémités x et y.

De plus, tout point d'une courbe k-analytique admet une base de voisinages possédant les trois propriétés ci-dessus.

Remarque 1.2.6. Tout arbre réel peut être muni d'une topologie (éventuellement différente de sa topologie initiale) dite *topologie d'arbre réel*, définie à partir de la topologie sur les segments réels. Néanmoins la topologie de Berkovich sur un ouvert d'une courbe analytique qui est un arbre est plus grossière que la topologie d'arbre sur cet arbre. En effet, si x est un point d'une courbe analytique X et V un voisinage ouvert de x dans X, il n'y a qu'un nombre fini de branches issues de x (cf. définition 1.2.11) qui n'appartiennent pas à V.

Proposition 1.2.7 ([Meh], 1.8.14)**.** *Soit X une courbe k-analytique compacte. Pour tout couple (x, y) de points de X il n'existe sur X qu'un nombre fini de fermés homéomorphes à des intervalles réels compacts et d'extrémités x et y.*

Bord d'une courbe. Pour les courbes, les notions de bord de Shilov et de bord analytique coïncident, ce qui permet sans ambiguïté de parler du *bord* d'une courbe k-analytique.

Lemme 1.2.8. *Si X est une courbe k-affinoïde, son bord de Shilov et son bord analytique coïncident : $\Gamma(X) = \partial^{\mathrm{an}}(X)$.*

Proposition 1.2.9. *Soit X une courbe k-analytique* sans bord*, et V un domaine affinoïde de X. Alors les trois ensembles suivants coïncident :*

1. *le bord topologique ∂V de v dans X,*
2. *le bord analytique relatif $\partial^{\mathrm{an}}(V/X)$ de V dans X,*
3. *le bord de Shilov $\Gamma(V)$de V.*

La proposition suivante découle de ([Poi], 4.4) et du premier point de 1.1.15. Elle permet de caractériser le caractère strict d'une courbe k-affinoïde par son bord de Shilov :

Proposition 1.2.10. *Une courbe k-affinoïde X est stricte si et seulement si son bord de Shilov $\Gamma(V)$ contient uniquement des points de type* 2.

Terminons par quelques définitions qui nous seront utiles :

Définition 1.2.11 (Branches issue d'un point)**.** *Si x est un point d'une courbe analytique X, l'ensemble des* branches de X en x *est défini par :*

$$\mathrm{br}(X, x) = \varprojlim_{U} \pi_0(U \setminus \{x\})$$

où U décrit l'ensemble des voisinages ouverts de x. Si V est un voisinage ouvert de x, $b(V)$ est défini comme l'image de b dans $\pi_0(V \setminus \{x\})$. Une section *de b est un $b(V)$ pour un certain voisinage ouvert V de x.*

Remarque 1.2.12. Les points de type 1 ou 4 sont toujours unibranches, tandis que les points de type 2 sont des points de branchements infinis.

Définition 1.2.13 (Degré d'un morphisme fini et plat)**.**

Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme fini *et* plat *entre courbes k-analytiques, et $x \in X$.*

- *Si U est un domaine affinoïde de X contenant x, son image réciproque $\varphi^{-1}(U)$ est un domaine affinoïde de Y dont l'algèbre des fonctions est un $\mathscr{O}_U(U)$-module fini et localement libre ; si U est connexe le rang de ce module est bien défini et ne dépend pas du choix de U. On l'appellera le* degré de φ au-dessus de x*, et on le notera $\deg_x \varphi$. La fonction $x \to \deg_x \varphi$ est localement constante sur X, ce qui permet sans ambiguïté de définir $\deg \varphi$ dès que X est supposé* connexe *et non vide.*
- *Soit $a \in \mathrm{br}(X, x)$. Comme φ induit une application naturelle $\varphi : \mathrm{br}(Y, y) \to \mathrm{br}(X, x)$, il est loisible de considérer l'ensemble $\varphi^{-1}(a) \subset \mathrm{br}(Y, y)$. Si $b \in \varphi^{-1}(a)$, considérons un voisinage ouvert V de x dans X qui est un arbre tel que $\varphi^{-1}(V)$ soit une réunion disjointe (finie) d'arbres qui sépare les antécédents de x. Soit W la composante connexe de $\varphi^{-1}(a(V))$ correspondant à b. Le morphisme $W \to a(V)$ est alors fini et plat, et son degré ne dépend pas du choix de U. On le note alors :* $\deg(b \to a)$.

Remarque 1.2.14. Comme toute courbe est un *bon espace*, alors $\deg_x \varphi$ n'est rien d'autre que le rang du $\mathscr{O}_{X,x}$-module libre $\prod_{y \in \varphi^{-1}(x)} \mathscr{O}_{Y,y}$.

Définition 1.2.15 (Déploiement d'un revêtement)**.** *Un revêtement étale $\varphi : X \to Y$ entre deux espaces k-analytiques est dit* totalement déployé *en $x \in X$ si pour tout $y \in \varphi^{-1}(\{x\})$, l'extension $\mathscr{H}(x) \to \mathscr{H}(y)$ est un isomorphisme. Lorsque φ est de degré n, φ est totalement déployé en x si et seulement si la fibre $\varphi^{-1}(\{x\})$ est de cardinal n, ce qui revient à dire que φ est localement au voisinage de x un revêtement topologique (cf. [And], III.*1.2.1*).*

1.2.3 Droites analytiques affine et projective $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ et $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$

La **DROITE AFFINE k-ANALYTIQUE** $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, analytifiée de la droite affine $\mathbb{A}_k^1$, est la courbe k-analytique connexe, sans bord et lisse dont les points sont les semi-normes multiplicatives sur l'anneau de polynômes $k[T]$ qui étendent la norme de k. Elle est recouverte par les domaines affinoïdes de la forme :

$$\mathrm{D}(0,r) = \mathscr{M}\left(k\{r^{-1}T\}\right)$$

définis par la condition $|T| \leqslant r$.

Description de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ lorsque k est algébriquement clos : Nous allons donner une description très explicite des points de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ lorsque k est algébriquement clos et non trivialement valué (lorsque k est trivialement valué, voir [Meh], 1.2.2). Pour tout $r \geqslant 0$ et $a \in k$, notons $B(a,r) = \{x \in k, |x-a| \leqslant r\}$ la boule fermée (qui est aussi ouverte puisque k est ultramétrique !) de k centrée en a et de rayon r.

- Tout élément $a \in k$ détermine une semi-norme multiplicative sur $k[T]$, l'*évaluation en a* donnée par $P \in k[T] \mapsto |P(a)|$. Comme cette semi-norme étend la valeur absolue de k, elle définit un élément de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ noté η_a, ou $\eta_{a,0}$. On a alors $\mathscr{H}(\eta_a) = k[T]/(T-a) \simeq k$, c'est-à-dire que η_a est un point rigide, donc en particulier un point de type 1.

- Soit $a \in k$ et $r > 0$. Considérons l'application :

$$P \in k[T] \mapsto \sup_{b \in B(a,r)} |P(b)| = \sup_{b \in B(a,r)} |P|_{\eta_b}.$$

  Il s'agit bien d'une semi-norme multiplicative sur $k[T]$ qui prolonge la valeur absolue de k, définissant donc un élément de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, noté $\eta_{a,r}$, et donné par :

$$|P(\eta_{a,r})| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n}(|\alpha_i| r^i) \text{ dès que } P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (T-a)^i.$$

  On peut vérifier que $\eta_{a,r}$ ne dépend que de $B(a,r)$ (i.e. $\eta_{a,r} = \eta_{b,r}$ dès $b \in B(a,r)$).
  Deux cas se présentent :
  Lorsque $r \in |k^\times|$, $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_{a,r})} = \widetilde{k}(T)$, et $|\mathscr{H}(\eta_{a,r})^\times| = |k^\times|$, c'est-à-dire que $\eta_{a,r}$ est de type 2.
  Lorsque $r \notin |k^\times|$, $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_{a,r})} = \widetilde{k}$, et $|\mathscr{H}(\eta_{a,r})^\times|$ et le groupe engendré par $|k^\times|$ et

r, donc $\eta_{a,r}$ est de type 3.

- Soit $\mathscr{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de boules fermées (i.e. $B_{n+1} \subseteq B_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$) de k. Soit $|\cdot|_{B_n}$ l'unique point de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ déterminé par B_n (i.e. $|\cdot|_{B_n} = \eta_{a_n,r_n}$ dès que $B_n = B(a_n, r_n)$). Alors l'application :

$$P \in k[T] \mapsto \inf_{n\in\mathbb{N}} |P|_{B_n}$$

  définit un élément $|\cdot|_{\mathscr{B}}$ de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$.
  Si $\bigcap_n B_n$ est réduite à un singleton $a \in k$, alors $|\cdot|_{\mathscr{B}}$ correspond exactement à η_a. Si $\bigcap_n B_n$ est un disque fermé centré en $a \in k$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors $|\cdot|_{\mathscr{B}}$ correspond à $\eta_{a,r}$, et enfin il se peut que $\bigcap_n B_n$ soit vide, dans ce cas $|\cdot|_{\mathscr{B}}$ est un point de type 4.

Il est possible de montrer que cette description est exhaustive : tous les points de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ peuvent être décrits de cette manière.

Remarque 1.2.16. Il est possible qu'une suite décroissante de boules fermées soit d'intersection vide si et seulement si le corps k n'est pas *sphériquement complet*. Un corps valué est *sphériquement complet* lorsqu'il n'admet aucune extension immédiate. Un argument simple basé sur la non dénombrabilité de $\mathbb{C}_p$ permet de montrer que $\mathbb{C}_p$ n'est pas sphériquement complet, c'est-à-dire que $\mathbb{A}_{\mathbb{C}_p}^{1,\mathrm{an}}$ contient des points de type 4. Il existe cependant des corps ultramétriques complets algébriquement clos et non trivialement valués qui sont sphériquement complets ([Tem3], 2.3.3.7), et tout corps ultramétrique se plonge dans un tel corps valué.

Description de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ lorsque k dans le cas général : Le corps k n'est plus supposé ici algébriquement clos. Une semi-norme multiplicative sur $\widehat{\overline{k}}[T]$ induit une semi-norme multiplicative sur $k[T]$, de là il existe un morphisme surjectif continu et ouvert $\psi : \mathbb{A}_{\widehat{\overline{k}}}^{1,\mathrm{an}} \to \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. Soit $G_k = \mathrm{Gal}(k^s/k)$ le groupe de Galois absolu de k, ou k^s désigne la clôture séparable de k dans $\overline{k}$. Le groupe G_k agit sur $\mathbb{A}_{\widehat{\overline{k}}}^{1,\mathrm{an}}$.

Proposition 1.2.17 ([Ber1], 1.3.6)**.** *On a un isomorphisme d'espaces k-analytiques préservant le type des points :*

$$\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} \simeq \mathbb{A}_{\widehat{\overline{k}}}^{1,\mathrm{an}}/G_k.$$

Lorsque k n'est pas algébriquement clos, l'ensemble des points rigides est strictement inclus (et non égal) à l'ensemble des points de type 1. On a tout de même une bonne description des points de type rigides :

Proposition 1.2.18 ([Meh], 1.2.4)**.** *L'ensemble des points rigides de* $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ *est en bijection avec l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de* $k[T]$*, bijection qui à* $x \in \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ *associe le générateur unitaire de l'idéal* $\ker|\cdot|_x$*.*

La **DROITE PROJECTIVE** k**-ANALYTIQUE** $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$, analytifiée de la droite projective $\mathbb{P}_k^1$, est la courbe k-analytique propre (compacte et sans bord), connexe et lisse dont les points sont les semi-normes multiplicatives x sur l'anneau des polynômes $k[T_0, T_1]$ vérifiant $|T_i(x)| \neq 0$ pour au moins un $i \in \{0, 1\}$, modulo la relation d'équivalence qui identifie deux semi-normes x_1 et x_2 si et seulement s'il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait $|P(x_1)| = \delta^n |P(x_2)|$ pour tout polynôme homogène $P \in k[T_0, T_1]$ de degré n.

Soit $\{\infty\}$ le point rigide de $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ défini par la relation : $|T_0(x)| = 0$. On a un isomorphisme d'espaces k-analytiques

$$\rho : \mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}} \setminus \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$$

donné par : $|T(\rho(x))| = |T_1(x)|/|T_0(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}} \setminus \{\infty\}$.

Proposition 1.2.19. *Les droites affine et projective* k*-analytiques* $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ *et* $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ *sont des arbres (contractiles, simplement connexes). En particulier, pour tout couple* (x, y) *d'éléments de* $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ *(resp.* $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$*), il existe un unique fermé de* $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ *(resp. de* $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$*), noté* $[x, y]$*, homéomorphe à un intervalle et d'extrémités* x *et* y*.*

Exemples 1.2.20. Si a et b sont dans k, le segment joignant les points rigides η_a et η_b est :

$$[\eta_a, \eta_b] = \{\eta_{a,r}\}_{0 \leqslant r \leqslant |b-a|} \cup \{\eta_{b,s}\}_{0 \leqslant r \leqslant |b-a|}.$$

Le segment reliant η_a à ∞ est $[\eta_a, \infty] = \{\eta_{a,r}\}_{0 \leqslant r \leqslant \infty}$, avec la convention $\infty = \eta_{a,\infty}$.

Le type des points peut se lire sur l'arbre de $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ (ou de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$) :

- les points de types 2 sont les points de branchement de l'arbre,
- les points de type 3 n'ont aucun branchement, ils ont une valence égale à 2 dans l'arbre,
- les points de type 1 ou 4 sont les points unibranches de l'arbre, c'est-à-dire les « feuilles ».

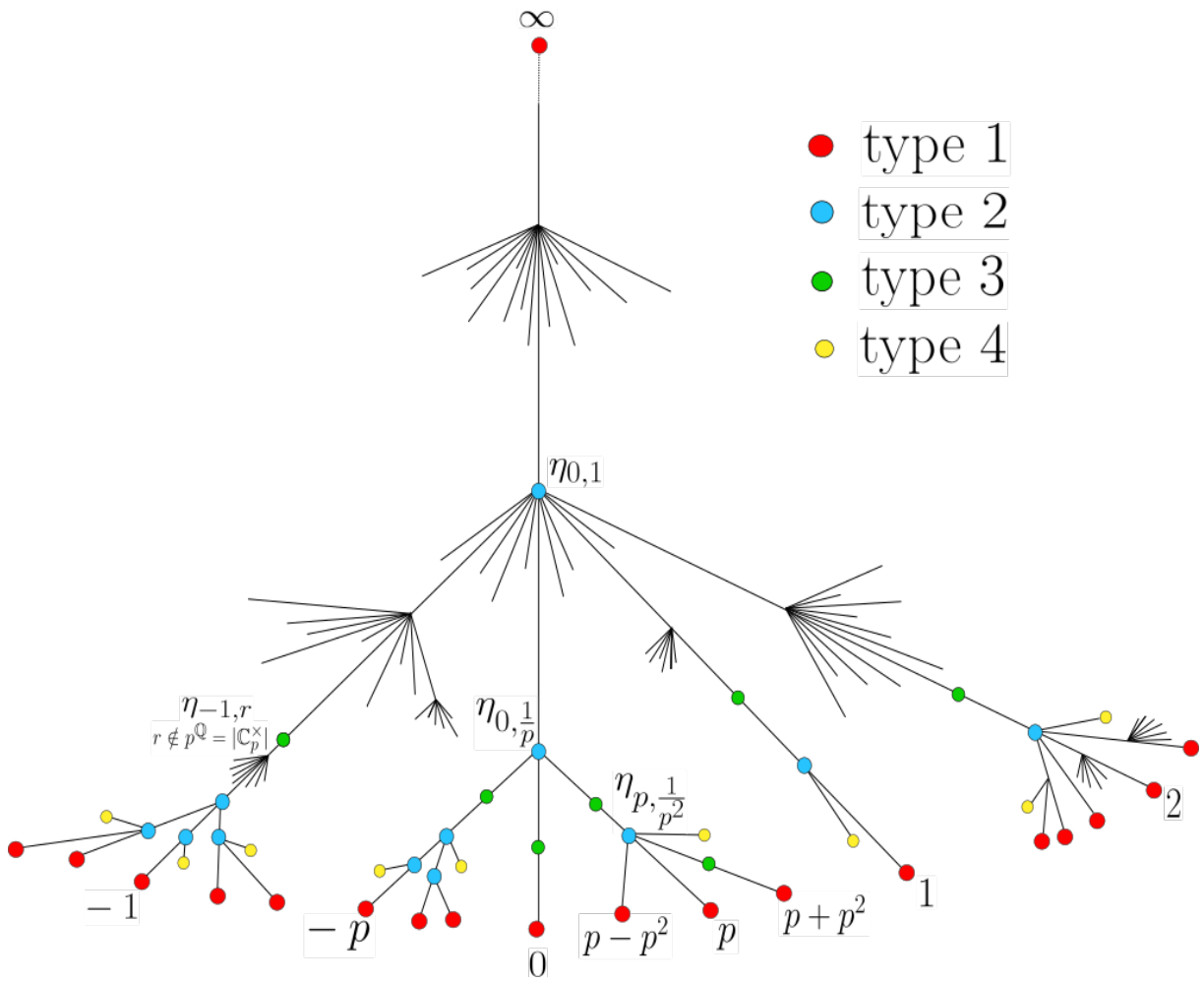

FIGURE 1.1 – Allure de la droite projective analytique $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_p}$

Définition 1.2.21 (Métrique sur $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{k,[2,3]}$)**.** *Lorsque k est algébriquement clos, il existe une métrique naturelle sur l'ensemble des points de type 2 et 3 de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$, invariante sous le groupe des automorphismes k-analytiques (qui sont les mêmes que les automorphismes algébriques, par GAGA) de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$. Elle est définie par la formule suivante :*

$$d(\eta_{a,r},\eta_{a',r'}) = \begin{cases} \log_p\left(\frac{|a-a'|}{r}\right) + \log_p\left(\frac{|a-a'|}{r'}\right) & si\ |a-a'| \geqslant \max(r,r'); \\ |\log_p\left(\frac{r}{r'}\right)| & si\ |a-a'| \leqslant \max(r,r') \end{cases}$$

1.2.4 Disques et couronnes analytiques

Nous allons définir des familles de courbes k-analytiques qui joueront un rôle fondamental dans la suite de ce texte en ce qu'elles seront à la base des notions de triangulation et de squelette analaytique : les couronnes et les disques k-analytiques. Ce sont les exemples les plus simples à définir de courbes k-analytiques qui ne sont pas de nature algébrique, c'est-à-dire qui ne sont pas les analytifiées de k-courbes algébriques.

Couronnes k-analytiques

Si $I = [a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}_+^*$ (éventuellement réduit à un singleton), notons $\mathcal{C}_I$ la courbe k-analytique définie comme espace k-affinoïde par :

$$\mathcal{C}_I = \mathscr{M}\left(k\{b^{-1}T, aU\}/(TU-1)\right).$$

Si $I \subset J$ sont des intervalles compacts de $\mathbb{R}_+^*$, il y a un morphisme naturel $\mathcal{C}_I \to \mathcal{C}_J$ qui identifie $\mathcal{C}_I$ à un domaine analytique de $\mathcal{C}_J$. Si I est un intervalle arbitraire de $\mathbb{R}_+^*$, on définit

$$\mathcal{C}_I = \varinjlim_{J\subset I} \mathcal{C}_J \subset \mathbb{G}_m^{\mathrm{an}}$$

où J décrit les intervalles compacts de $\mathbb{R}_+^*$. Il aurait été possible et équivalent de définir $\mathcal{C}_I$ comme le domaine analytique de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$ défini par la condition $\mid T \mid \in I$.

- *Algèbre des fonctions analytiques :* L'algèbre des fonctions analytiques sur $\mathcal{C}_I$ est donnée par :

$$\mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I) = \left\{\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i, a_i \in k, \lim_{|i|\to+\infty} |a_i| r^i = 0, \forall r \in I\right\}.$$

- *Bords :* Si $s < r \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\partial^{\mathrm{an}}\mathcal{C}_{\{r\}} = \{\eta_{0,r}\}$, tandis que $\partial^{\mathrm{an}}\mathcal{C}_{[s,r]} = \{\eta_{0,s}, \eta_{0,r}\}$.

Définition 1.2.22. *Une* couronne *désignera une courbe k-analytique isomorphe à $\mathcal{C}_I$ pour un certain intervalle I de $\mathbb{R}_+^*$. Les couronnes sont en particulier des courbes quasi-lisses, lisses dans le cas ouvert.*

Disques k-analytiques

Si $r \in \mathbb{R}_+^*$ notons $D(0,r)$ le *disque fermé centré en* 0 *de rayon* r, défini en tant qu'espace k-affinoïde par :

$$D(0,r) = \mathscr{M}\left(k\{r^{-1}T\}\right).$$

Si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ sont tels que $r_1 < r_2$, il y a un morphisme naturel $D(0,r_1) \to D(0,r_2)$ qui identifie $D(0,r_1)$ à un domaine analytique de $D(0,r_2)$. Si $r > 0$, on définit le *disque ouvert centré en* 0 *de rayon* r, noté $D(0,r)^\circ$, par :

$$D(0,r)^\circ := \varinjlim_{0<s<r} D(0,s) \subset \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}.$$

Le disque $D(0,r)$ (resp. $D(0,r)^\circ$) peut être également vu comme le domaine analytique de $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ défini par la condition $|T| \leqslant r$ (resp. $|T| < r$).

Notation : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0 et rencontrant $\mathbb{R}_+^*$. On note $\mathcal{D}_I$ le disque k-analytique sous-domaine de $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ défini par la condition $|T| \in I$, de sorte que si $r > 0$: $\mathcal{D}_{[0,r]} = D(0,r)$, et $\mathcal{D}_{[0,r[} = D(0,r)^\circ$.

- *Algèbre des fonctions analytiques :* L'algèbre des fonctions analytiques sur $\mathcal{D}_I$ est donnée par :

$$\mathscr{O}_{\mathcal{D}_I}(\mathcal{D}_I) = \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j T^j, a_j \in k, \lim_{j\to+\infty} |a_j| r^j = 0, \forall r \in I \right\}.$$

- *Bord :* Si $r > 0$, on a : $\partial^{\mathrm{an}}\mathcal{D}_{[0,r]} = \eta_{0,r}$ tandis que $\partial^{\mathrm{an}}\mathcal{D}_{[0,r[} = \emptyset$.

Définition 1.2.23. *Nous appellerons* disque k-analytique *toute courbe k-analytique isomorphe à $\mathcal{D}_{[0,r]}$ ou à $\mathcal{D}_{[0,r[}$ pour un certain $r \in \mathbb{R}_+^*$. Les disques sont en particulier des courbes quasi-lisses, lisses dans le cas ouvert.*

Propriétés, fonctions coordonnées

Nous allons donner les conditions d'inversibilité des fonctions analytiques sur les couronnes ou les disques k-analytiques.

Proposition 1.2.24 (Condition d'inversibilité d'une fonction analytique, [Duc] 3.6.6.1 et 3.6.6.2)**.** *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}_+$ rencontrant $\mathbb{R}_+^*$, avec $0 \notin I$ et $0 \in J$. Soient $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)$ et $g = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j T^j \in \mathscr{O}_{\mathcal{D}_J}(\mathcal{D}_J)$ deux fonctions k-analytiques sur $\mathcal{C}_I$ et $\mathcal{D}_J$.*

1. *la fonction f est inversible si et seulement s'il existe un entier $i_0 \in \mathbb{Z}$ (nécessairement unique) tel que $|a_{i_0}|r^{i_0} > \max_{i\neq i_0} |a_i|r^i$, pour tout $r \in I$;*
2. *la fonction g est inversible si et seulement si $a_0 = f(0) \neq 0$ et si $|a_0| > |a_j|r^j$ pour tout $r \in J \setminus \{0\}$ et tout $j \in \mathbb{N}_+^*$.*

Pour tout $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)$, on dira que f admet un *monôme strictement dominant* $a_{i_0}T^{i_0}$ lorsqu'il existe un entier $i_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $|a_{i_0}|r^{i_0} > \max_{i\neq i_0} |a_i|r^i$ pour tout $r \in I$; un monôme strictement dominant est alors unique, et i_0 sera appelé le *degré* de ce monôme. On définit de même la notion de monôme strictement dominant d'une fonction $g \in \mathscr{O}_{\mathcal{D}_J}(\mathcal{D}_J)$. La proposition précédente se formule donc ainsi : $f \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)$ est inversible si et seulement si elle admet un monôme strictement dominant, $a_{i_0}T^{i_0}$, et f s'écrit alors $f = a_{i_0}T^{i_0}(1+u)$ avec $u \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)$ de norme < 1 sur $\mathcal{C}_I$. De même, $g \in \mathscr{O}_{\mathcal{D}_J}(\mathcal{D}_J)$ est inversible si et seulement si elle admet un monôme strictement dominant de degré 0. Remarquons dans ce cas que la norme de g est alors constante égale à $|g(0)|$, et g s'écrit $g = g(0)(1+v)$ avec $v \in \mathscr{O}_{\mathcal{D}_J}(\mathcal{D}_J)$ de norme < 1 sur $\mathcal{D}_J$.

Concentrons-nous sur $\mathcal{C}_I$, et considérons une fonction inversible $f \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)^\times$ dont le degré i_0 du monôme strictement dominant est différent de 0. Soit $\varphi_f : \mathcal{C}_I \to \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ le morphisme induit par f, et Λ l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même définie par $r \mapsto |a_{i_0}|r^{i_0}$.

Proposition 1.2.25 ([Duc], 3.6.8)**.** *L'application Λ induit un homéomorphisme de I sur l'intervalle $\Lambda(I)$ de $\mathbb{R}_+^*$, et φ_f induit un morphisme fini et plat de degré $|i_0|$ de $\mathcal{C}_I$ vers $\mathcal{C}_{\Lambda(I)}$.*

Définition 1.2.26 (Fonctions coordonnées)**.** *Si $\mathcal{C}$ est une couronne k-analytique (resp. si $\mathcal{D}$ est un disque k-analytique), une fonction $f \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ (resp. $g \in \mathscr{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})$) sera dite* fonction coordonnée *lorsqu'elle induit un isomorphisme de courbes k-analytiques $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_I$ (resp. $\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_J$) pour un certain intervalle I de $\mathbb{R}_+^*$ (resp. J de $\mathbb{R}_+$ rencontrant $\mathbb{R}_+^*$ et contenant 0).*

Corollaire 1.2.27 (Caractérisation des fonctions cordonnées, [Duc], 3.6.11.3 et 3.6.12.3)**.**

1. *Une fonction analytique $f \in k_I$ est une fonction coordonnée si et seulement si f admet un monôme strictement dominant, de degré $i_0 \in \{-1, 1\}$. Si c'est le cas, f est inversible dans $\mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)$ et induit un isomorphisme $\mathcal{C}_I \simeq \mathcal{C}_{|a_{i_0}|I^{i_0}}$.*

2. *Une fonction analytique $g \in k_J$ est une fonction coordonnée si et seulement si elle est de la forme $g = a + h$ avec $h \in k_J$ dont le monôme $a_1 T$ est strictement dominant, et $a \in k$ est tel que $|a| \in |a_1|J$. Si c'est le cas, g induit un isomorphisme $\mathcal{D}_J \simeq \mathcal{D}_{|a_1|J}$.*

On déduit directement du corollaire ci-dessus le résultat suivant :

Proposition 1.2.28. *Si I' et J' sont deux intervalles de $\mathbb{R}_+$ rencontrant $\mathbb{R}_+^*$ avec $0 \notin I'$ et $0 \in J'$, alors :*

- *$C_{I'}$ est isomorphe à $\mathcal{C}_I$ si et seulement si $I' \in |k^\times|\, I^{\pm 1}$*
- *$\mathcal{D}_{J'}$ est isomorphe à $\mathcal{D}_J$ si et seulement si $J' \in |k^\times|\, J$.*

Notations : On appellera k-couronne de type $]*,*[$ (resp. $]0,*[$, $[*,+\infty[$, $[*,*]$, ...) toute couronne isomorphe à $\mathcal{C}_I$ pour un certain intervalle de la forme $[r_1, r_2]$ avec $0 < r_1 < r_2$ (resp. $]0, r[$ avec $r > 0$, $[r, +\infty[$ avec $r > 0$, $[r_1, r_2]$ avec $0 < r_1 < r_2$, ...). Remarquons que les types $]0,*[$ et $]*,+\infty[$ (ou $]0,*]$ et $[*,+\infty[$) coïncident. Une couronne est isomorphe à $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ si et seulement si elle est de type $]0,+\infty[$. Une couronne sera dite *ouverte* (resp. *fermée*) lorsqu'elle isomorphe à $\mathcal{C}_I$ pour un certain intervalle ouvert (resp. fermé) I de $\mathbb{R}_+^*$.

Caractérisation plus algébrique des fonctions coordonnées d'une couronne ([*Duc*], 3.6.13.1) *:*

Notons $\mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)^{\circ\circ}$ le sous-ensemble de $\mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)$ formé des fonctions de norme strictement inférieure à 1 sur $\mathcal{C}_I$. Nous avons vu qu'une fonction $f \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)$ est inversible si et seulement si elle admet un monôme strictement dominant, $a_{i_0} T^{i_0}$. Si c'est le cas, elle s'écrit $f = a_{i_0} T^{i_0}(1 + u)$, avec $u \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)^{\circ\circ}$, et la fonction $|f|$ est égale à $|a_{i_0}| \cdot |T|^{i_0}$ sur $\mathcal{C}_I$. Par ailleurs une fonction coordonnée de $\mathcal{C}_I$ est inversible. On en déduit que le groupe :

$$\mathscr{Z}_I := \mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)^\times / k^\times \cdot (1 + \mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)^{\circ\circ})$$

est isomorphe à $\mathbb{Z}$, un tel isomorphisme étant donné par le degré du monôme strictement dominant. En vertu du corollaire 1.2.27, une fonction $f \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)$ est une fonction coordonnée de $\mathcal{C}_I$ si et seulement si elle est inversible et que sa classe dans $\mathscr{Z}_I$ est un générateur de $\mathscr{Z}_I$.

On déduit de qui précède que si $\mathcal{C}$ est une couronne k-analytique quelconque, et $f \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, f est une fonction coordonnée lorsqu'elle est inversible est qu'elle s'envoie sur un générateur dans le groupe libre de rang 1 :

$$\mathscr{Z}(\mathcal{C}) := \mathscr{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})^\times / k^\times \cdot (1 + \mathscr{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})^{\circ\circ}).$$

Soit I' un sous-intervalle de I, alors il est facile de vérifier que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{Z}_I \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\ \mathscr{Z}_{I'} \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

De là, on a un isomorphisme canonique : $\mathscr{Z}_I \simeq \mathscr{Z}_{I'}$. On en déduit que si $f \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)^\times$ alors f est une fonction coordonnée de $\mathcal{C}_I$ si et seulement si $f_{|\mathcal{C}_{I'}}$ est une fonction coordonnée de $\mathcal{C}_{I'}$.

Remarque 1.2.29 ([Duc], 3.6.13.3). Si I n'est pas réduit à un singleton, ou si $I = \{r\}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^* \setminus \sqrt{|k^\times|}$, alors l'application $f \mapsto |f|$ induit un isomorphisme

$$\mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)^\times/(1 + \mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)^{\circ\circ}) \xrightarrow{\sim} |\mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)^\times|.$$

On peut dès lors reprendre le raisonnement ci-dessus en remplaçant $\mathscr{Z}_I$ par $|\mathscr{O}_{\mathcal{C}_I}(\mathcal{C}_I)^\times|/|k^\times|$.

Définition 1.2.30 (Module d'une couronne k-analytique)**.**
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$, le module *de la couronne $\mathcal{C}_I$ est défini comme la quantité :*

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{C}_I) = \frac{\sup I}{\inf I}.$$

Le module *d'une couronne k-analytique $\mathcal{C}$, noté* $\mathrm{Mod}(\mathcal{C})$*, est défini comme le module de $\mathcal{C}_I$ pour tout intervalle I de $\mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait un isomorphisme $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_I$. Cette définition ne dépend pas du choix de I en vertu de la proposition 1.2.28. Par cohérence avec la définition donnée de la métrique sur $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{k,[2,3]}$, la* longueur *d'une couronne $\mathcal{C}$ sera définie comme : $\ell(\mathcal{C}) = \log_p(\mathrm{Mod}(\mathcal{C}))$.*

Si $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, a' \in k$ vérifient $|a - a'| \leqslant \max(r, r')$, alors $d(\eta_{a,r}, \eta_{a',r'}) = |\log_p\left(\frac{r}{r'}\right)|$ correspond au module de l'unique couronne ouverte dont le bord est constitué des deux points $\eta_{a,r}$ et $\eta_{a',r'} = \eta_{a,r'}$.

Finissons par un résultat important dont nous nous servirons par la suite (pour les points de type 2 et 3).

Théorème 1.2.31 (Bases de voisinages sur une courbe quasi-lisse, [Duc], 4.3.5 et 4.5.4)**.**
Supposons le corps k algébriquement clos. Soit X une courbe k-analytique quasi-lisse, et $x \in X$. Alors x possède un voisinage ouvert connexe V dans X tel que le graphe $\overline{V}$ soit un arbre compact, avec :

- *si $x \in X_{[1,4]}$, alors V est un disque,*
- *si $x \in X_{[3]}$, V est une couronne et x n'appartient à aucun disque k-analytique ouvert de V (i.e. $x \in S^{\mathrm{an}}(V)$, voir définition 1.3.1 de la prochaine section)*
- *si $x \in X_{[2]}$, $V \setminus \{x\}$ est réunion disjointe de disques et d'un nombre fini de couronnes.*

Dans le cas où x est de type 3, la couronne V peut être choisie de type $],*[$ si $x \notin \partial^{\mathrm{an}} X$, de type $]*,*]$ avec $\partial^{\mathrm{an}} V = \{x\}$ si $x \in \partial^{\mathrm{an}} X$ et x n'est pas un point isolé de X, et enfin $V = \{x\}$ (V est de type $\{*\}$) lorsque x est un point isolé de X.*

Remarque 1.2.32. Le cas où x est de type 2 peut être vu comme une conséquence observée par Berkovich du théorème de réduction semi-stable. Néanmoins, nous nous servirons plutôt de [Duc] où l'auteur propose un cheminement « dans l'autre sens » , c'est-à-dire en partant de l'étude locale pour arriver au théorème de réduction stable.

1.3 Squelette, triangulations et nœuds

Dans toute cette section, ainsi que la prochaine, nous supposerons que k est un corps ultramétrique complet *algébriquement clos.*

1.3.1 Squelette analytique d'une courbe

Définition 1.3.1. *Soit X une courbe k-analytique quasi-lisse :*

1. *Le* squelette analytique *de X, noté $S^{\mathrm{an}}(X)$, est défini comme l'ensemble des points de X dont aucun voisinage ouvert dans X n'est un disque ouvert.*
2. *Un voisinage* totalement découpé autour de $x \in X_{[2,3]}$ *est un voisinage ouvert U de x tel que l'application* $\mathrm{br}(X, x) \to \pi_0(U \setminus \{x\})$ *soit bijective et que toute composante connexe de $U \setminus \{x\}$ soit une couronne ou un disque.*

Si $\pi_0(S^{\mathrm{an}}) \to \pi_0(X)$ est surjective, alors d'après les théorèmes 1.6.13 et 5.1.11 de [Duc] nous savons qu'il existe une rétraction par déformation $r_X : X \to S^{\mathrm{an}}(X)$. En particulier, X a le type d'homotopie de $S^{\mathrm{an}}(X)$.

Remarque 1.3.2. Le théorème 1.2.31 se reformule de la sorte :

- Si $x \in X_{[3]}$, x admet un voisinage ouvert totalement découpé Z qui est une couronne telle que $x \in S^{\mathrm{an}}(Z)$ et dont l'adhérence dans X est un arbre compact.
- Si $x \in X_{[2]}$, un voisinage U de x totalement découpé peut être choisi tel que son adhérence est un arbre compact et que $U \setminus \{x\}$ est réunion disjointe de disques et d'un nombre *fini* de couronnes.

Remarque 1.3.3. Dans [Duc] l'auteur utilise le terme de « graphe » même lorsqu'une arête est « ouverte » au sens où elle ne contient qu'une branche. Néanmoins, dans ce texte, afin d'être cohérent avec le langage de Mochizuki, nous différencierons un graphe (toutes les arêtes ont 2 branches) d'un semi-graphe (les arêtes peuvent avoir également 0 ou 1 branche). D'après [Duc], Théorème 5.1.11, le squelette analytique $S^{\mathrm{an}}(X)$ d'une courbe analytique quasi-lisse X est un semi-graphe localement fini contenu dans $X_{[2,3]}$ et qui contient le bord analytique de X. Si $S^{\mathrm{an}}(X)$ rencontre chaque composante connexe de X, alors c'est un semi-graphe *analytiquement admissible* dans le sens de [Duc], c'est-à-dire que c'est un sous-semi-graphe fermé de X dont toute composante connexe du complémentaire est un disque relativement compact dans X.

Définition 1.3.4 (Squelette tronqué)**.** *Soit X est une courbe k-analytique quasi-lisse. Nous savons que $S^{\mathrm{an}}(X)$ est un semi-graphe (cf. remarque 1.3.3 ci-dessus). Notons $S^{\mathrm{an}}(X)^{\natural}$, appelé le* squelette analytique tronqué *de X, le plus grand sous-graphe de $S^{\mathrm{an}}(X)$. Il est obtenu à partir de $S^{\mathrm{an}}(X)$ en retirant les arêtes qui ont strictement moins de deux branches aboutissant à des sommets.*

Une interprétation du squelette tronqué en terme de composantes relativement connexe sera donnée dans la suite de ce texte. Cette définition est cohérente avec celle de *squelette tronqué d'une triangulation* que nous donnons en 1.3.14.

Définition 1.3.5. *Si X est une couronne k-analytique, un domaine analytique Y de X est une* sous-couronne *de X s'il peut être défini comme l'image réciproque selon la rétraction $r_X : X \to S^{\mathrm{an}}(X)$ d'un sous-intervalle non vide J de $S^{\mathrm{an}}(X)$. On a dans ce cas $S^{\mathrm{an}}(Y) = J$.*

Remarque 1.3.6. Il y a un homéomorphisme naturel $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}(I)) \approx I$ dès que I est un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$. En particulier si $\mathcal{C}$ est une couronne $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$ admet une compactification topologique canonique $\widehat{S}^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$ dont les éléments n'appartenant pas à $\mathcal{C}$ sont appelés les *bouts de $\mathcal{C}$*.

1.3.2 Triangulations et nœuds

Définition 1.3.7 (Triangulation)**.** *Soit X une courbe k-analytique quasi-lisse. Nous appellerons* triangulation de X *tout sous-ensemble $S \subset X_{[2,3]}$ discret et fermé dans X tel que toute composante connexe de $X \setminus S$ soit un disque relativement compact ou une couronne k-analytique.*

Remarque 1.3.8. Attention, notre définition de *triangulation* diffère de celle que Ducros donne dans [Duc] dans la mesure où celui-ci exige que les composantes connexes de $X \setminus S$

soient *relativement compactes*. L'écart que nous prenons vis-à-vis de cette définition en autorisant les couronnes qui apparaissent parmi ces composantes à ne pas être relativement compactes nous permettra notamment de traiter le cas des courbes non compactes. Ducros autorise également des points rigides dans sa définition de triangulation, tandis que nous nous restreignons ici aux triangulations constituées uniquement de points de type 2 ou 3. Cette restriction permettra une bonne description des composantes sommitales du semi-graphe d'anabélioïdes que l'on associera à une triangulation (voir 2.1.4).

Remarque 1.3.9. Si X est *strictement k-analytique* et si la valuation sur k n'est pas triviale, alors X possède au moins une triangulation constituée uniquement de points de type 2 ([Duc], Théorème 5.1.14).

Nous allons définir les notions de *noeud* et de *courbe résiduelle* en un point de type 2, notions que nous utiliserons souvent par la suite.

Définition 1.3.10 (Courbe résiduelle)**.** *Si x est un point de type 2 d'une courbe k-analytique X, le corps résiduel $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est une extension de $\widetilde{k}$ de type fini et de degré de transcendance 1. Ainsi $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est de la forme $\widetilde{k}(\mathscr{C}_x)$ où $\mathscr{C}_x$ est une $\widetilde{k}$-courbe projective, lisse et intègre qui est uniquement déterminée par x et que l'on appellera la* courbe résiduelle *de x.*

Définition 1.3.11 (Nœuds d'un semi-graphe d'une courbe analytique)**.** *Soit $\Lambda \subseteq X$ un semi-graphe localement fini inclus dans X. Si $x \in \Lambda$, le* genre de x, *noté $g(x)$, est défini comme égal à 0 si x est de type $1, 3$ ou 4, et comme étant le genre de la courbe résiduelle $\mathscr{C}_x$ (cf. définition 1.3.10 ci-dessus) si x est de type 2. En reprenant les notations de [Duc] nous dirons qu'un point $x \in \Lambda$ est un* nœud de Λ *s'il satisfait l'une au moins des conditions suivantes :*

1. *x est un sommet topologique de Λ de valence $\geqslant 3$*
2. *$x \in \partial^{\mathrm{an}} X$*
3. *$g(x) > 0$*

Remarque 1.3.12. Nous savons d'après [Duc] (4.2.11.2) que si $x \in X_{[3]}$, il y a au plus deux branches de X issues de x, avec égalité si et seulement si x est intérieur. Il est possible également que $\mathrm{br}(X, x)$ soit vide, cela se produit si et seulement si x est un point isolé de X. Si $x \in \Lambda$, on en déduit que x est un nœud de Λ si et seulement si $x \in \partial^{\mathrm{an}} X$.

1.3.3 Triangulations généralisées et points superflus

Remarque 1.3.13. Soit X une courbe k-analytique connexe, quasi-lisse, non vide, et $S^{\mathrm{an}}(X)$ son squelette dont on note Σ_X l'ensemble des nœuds. Les composantes connexes relativement compactes de $X \setminus \Sigma_X$ sont des couronnes ou des disques. Si les composantes connexes non relativement compactes de $X \setminus \Sigma_X$ sont des couronnes, alors Σ_X est une triangulation de X. En revanche il se peut que certaines composantes non relativement compactes ne soient pas des couronnes, auquel cas Σ_X ne constitue pas une triangulation de X. Cela se produit typiquement lorsqu'on enlève un point x de type 4 à une courbe k-analytique Y quasi-lisse de squelette analytique non vide. Si r désigne la rétraction canonique de Y sur $S^{\mathrm{an}}(Y)$, enlever x revient à rajouter l'arête ouverte $]x, r(x)]$: $S^{\mathrm{an}}(Y \setminus \{x\}) = S^{\mathrm{an}}(Y) \cup\,]x, r(x)]$. Or $r^{-1}(]x, r(x)])$ n'a aucune raison d'être une couronne. Cela nous amène à définir la notion de *triangulation généralisée.*

Définition 1.3.14 (Triangulation généralisée et squelettes associés)**.**

1. *Soit X une courbe k-analytique quasi-lisse. Nous appellerons* triangulation généralisée de X *tout sous-ensemble $S \subset X_{[2,3]}$ discret et fermé dans X tel que toute composante connexe relativement compacte de $X \setminus S$ soit un disque ou une couronne et tel que toute composante connexe non relativement compacte $\mathcal{C}$ de $X \setminus S$ s'écrive $r_X^{-1}(S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}))$, où r_X désigne la rétraction canonique de X sur son squelette analytique (on a bien $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}) \subseteq S^{\mathrm{an}}(X)$).*

2. *Si S est une triangulation généralisée de X, la réunion $\Gamma^\natural$ de S et des squelettes des composantes connexes de $X \setminus S$ qui sont des couronnes* relativement compactes *est un sous-graphe localement fini de X tracé sur $X_{[2,3]}$. Le graphe $\Gamma^\natural$ sera alors appelé le* squelette tronqué *de la triangulation S.*

3. *Si S est une triangulation généralisée de X, la réunion Γ de S et des squelettes des composantes connexes de $X \setminus S$ qui ne sont pas des disques est un semi-graphe localement fini et analytiquement admissible tracé sur $X_{[2,3]}$. Le semi-graphe Γ sera alors appelé le* squelette *de la triangulation généralisée S. Il est obtenu à partir du squelette tronqué $\Gamma^\natural$, qui est un graphe, en ajoutant des arêtes ouvertes qui sont exactement les squelettes analytiques des composantes connexes non relativement compactes de $X \setminus S$.*

Remarque 1.3.15. Toute triangulation de X est un cas particulier de triangulation généralisée, et ces deux notions coïncident dans le cas où X est compacte. Avec les notations précédentes, Σ_X constitue toujours une triangulation généralisée de X, de squelette

$S^{\mathrm{an}}(X)$. Réciproquement, si S est une triangulation généralisée de X et que Γ et $\Gamma^\natural$ désignent les squelette et squelette tronqué, alors S contient tous les noeuds de Γ ([Duc], Théorème 5.1.14). En revanche il se peut qu'un nœud s de Γ ne soit pas un nœud de $\Gamma^\natural$, cela se produit lorsque s est dans l'intérieur de X, de genre 0, que s est de valence 2 dans $\Gamma^\natural$ tout en étant un sommet de valence > 2 dans Γ, autrement dit si parmi les composantes connexes de $X \setminus S$ issues de s il y en a exactement deux qui sont des couronnes relativement compactes, et au moins une qui est non relativement compacte.

Remarque 1.3.16. Un point de $\Gamma^\natural$ qui est unibranche dans Γ est un nœud de Γ si et seulement s'il est soit de genre strictement positif, soit appartient au bord analytique $\partial^{\mathrm{an}}X$ de X. Notre définition de *noeud* diffère légèrement de celle de [Duc], cet écart nous permettant simplement d'alléger par la suite certains énoncés et d'affirmer qu'une triangulation généralisée non réduite à un singleton d'une courbe k-analytique est minimale si et seulement si elle est constituée exactement des nœuds de son squelette, comme nous le montre la proposition suivante.

Proposition 1.3.17 (Points superflus d'une triangulation généralisée, cf. [Duc], 5.1.16 pour le cas compact)**.** *Soit X une courbe k-analytique quasi-lisse et S une triangulation généralisée de X dont on note Γ le squelette. Soit $s \in S$ et $\Sigma = S \setminus \{s\}$, notons Γ_0 la composante connexe de $\Gamma \setminus \Sigma$ contenant s. Le sous-ensemble $S \setminus \{s\}$ est une triangulation généralisée si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

i) $s \notin \partial^{\mathrm{an}}X$

ii) $g(s) = 0$

iii) Γ_0 *est un intervalle ouvert ou bien un intervalle semi-ouvert d'extrémité s.*

Si S est une triangulation généralisée de X de squelette Γ, nous savons d'une part que S contient tous les nœuds de Γ, d'autre part que Γ contient le squelette analytique $S^{\mathrm{an}}(X)$ de X. Par conséquent toute triangulation généralisée de X contient les nœuds de $S^{\mathrm{an}}(X)$. Voici un résultat de minimalité de triangulation pour les courbes compactes :

Proposition 1.3.18 ([Duc], 5.4.12)**.** *Soit X une courbe k-analytique quasi-lisse, connexe et compacte. Soit Σ_X l'ensemble (potentiellement vide) des nœuds de $S^{\mathrm{an}}(X)$. Trois cas sont possibles :*

1. Σ_X est non vide *: ce cas se présente si et seulement si X possède une plus petite triangulation, auquel cas cette triangulation coïncide avec Σ_X. Si $|k^\times| \neq \{1\}$ et si X est strictement k-analytique, alors Σ_X est une triangulation de type* 2.

2. $S^{\mathrm{an}}(X)$ est non vide mais Σ_X est vide *: cela se produit si et seulement si X est une courbe de Tate, i.e. isomorphe à un quotient de la forme $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{an}}/q^{\mathbb{Z}}$ pour un certain $q \in k^*$ vérifiant $|q| < 1$ (cela n'est possible que lorsque k est non trivialement valué). Dans ce cas $S^{\mathrm{an}}(X)$ est un cercle, et les triangulations minimales de X sont les singletons $\{x\}$ avec $x \in S^{\mathrm{an}}(X)$. X possède donc une infinité de triangulations minimales, dont une infinité sont de type* 2.
3. $S^{\mathrm{an}}(X)$ est vide *: cela se présente si et seulement si $X \simeq \mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$. Dans ce cas les triangulations minimales sont les singletons $\{x\}$ avec $x \in X_{[2,3]}$. La courbe X possède donc une infinité de triangulations minimales, dont une infinité sont de type* 2 *dès que* $|k^\times| \neq \{1\}$.

Dans toute cette section nous supposons le ultramétrique complet k *algébriquement clos.*

1.4 Premiers comportements des μ_n-torseurs d'une courbe

1.4.1 Revêtements de Kummer et μ_ℓ-torseurs d'une couronne

Si X est un espace k-analytique et si $\ell \in \mathbb{N}^*$ est un entier inversible dans k, la *suite exacte de Kummer* sur $X_{\text{ét}}$:

$$1 \longrightarrow \mu_\ell \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^\ell} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1$$

induit une injection

$$\mathscr{O}_X(X)^\times/(\mathscr{O}_X(X)^\times)^\ell \overset{\iota}{\hookrightarrow} H^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell)$$

dont on notera on notera $\mathsf{Kum}_\ell(X)$ l'image. Nous savons d'après [Ber2] que tout faisceau étale localement constant sur $X_{\text{ét}}$ est représentable, ce qui est en particulier le cas de tout μ_ℓ-torseur. Par conséquent $H^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ classe tous les μ_ℓ-torseurs étales *analytiques* sur X à isomorphisme près. Si $f \in \mathscr{O}_X(X)^\times$ son image (f) dans $H^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ par ι correspond à $\mathscr{M}(\mathscr{O}_X[T]/(T^\ell - f))$. Les éléments de $\mathsf{Kum}_\ell(X)$ vus comme μ_ℓ-torseurs étales analytiques seront appelés les μ_ℓ-torseurs *de Kummer.*

Exemple 1.4.1. Si I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}_+^*$, la fonction T^ℓ induit un revêtement fini et plat (en fait étale modéré) $\mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I^\ell)$ permettant d'identifier $\mathcal{C}(I)$ au μ_ℓ-torseur de Kummer $\mathscr{M}(\mathscr{O}_{\mathcal{C}(I^\ell)}[T]/(T^\ell - S))$, où S est la coordonnée standard de $\mathcal{C}(I^\ell)$.

Proposition 1.4.2. *Soit X une couronne k-analytique, et $\ell \in \mathbb{N}^*$ un entier inversible dans k et* premier à p, *où p désigne l'exposant caractéristique de $\widetilde{k}$:*

1. *Puisque k est supposé algébriquement clos, $\mathsf{Kum}_\ell(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. Cet isomorphisme est non canonique si $\ell \geqslant 3$, mais le devient dès que l'on fixe une orientation de X.*
2. *Si Y est une sous-couronne de X (voir définition 1.3.5), l'injection de Y dans X induit un isomorphisme de groupes : $\mathsf{Kum}_\ell(X) \to \mathsf{Kum}_\ell(Y)$*
3. *Toute composante connexe d'un μ_ℓ-torseur de Kummer de X est une couronne.*

Démonstration. Les preuves de ces résultats se trouvent aux points 3.6.30 et 3.6.31 de [Duc]. Rappelons tout de même la preuve du premier point :

Nous avons défini dans la suite de 1.2.28 le groupe

$$\mathscr{Z}(X) = \mathscr{O}_X(X)^\times / k^\times \cdot (1 + \mathscr{O}_X(X)^{\circ\circ}),$$

en montrant qu'il est non canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}$, et que cet isomorphisme devient canonique en fixant une orientation de X.

Comme ℓ est premier avec p, le groupe $1 + \mathscr{O}_X(X)^{\circ\circ}$ est ℓ-divisible, par ailleurs le groupe $|k^\times|$ est lui-même ℓ-divisible puisque k est algébriquement clos. On a donc un isomorphisme : $\ell\mathscr{Z}(X) \simeq (\mathscr{O}_X(X)^\times)^\ell / k^\times \cdot (1 + \mathscr{O}_X(X)^{\circ\circ})$. De là, un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Kum}_\ell(X) \simeq \mathscr{O}_X(X)^\times / \left(\mathscr{O}_X(X)^\times\right)^\ell \simeq \mathscr{Z}(X)/\ell\mathscr{Z}(X),$$

qui s'incarne en un isomorphisme non canonique (lorsque $\ell \geqslant 3$, canonique si $\ell = 2$) : $\mathrm{Kum}_\ell(X) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. □

1.4.2 Cochaînes harmoniques et suites exactes

Définition 1.4.3 (Cochaînes harmoniques sur un semi-graphe localement fini)**.** *Soit Γ un semi-graphe localement fini et A un groupe abélien. Une A-*cochaîne harmonique sur Γ *est une application : $c : \{$arêtes orientées de $\Gamma\} \to A$ satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1. *si e et e' correspondent à la même arête munie de ses deux orientations distinctes : $c(e') = -c(e)$.*
2. *si x est un sommet de Γ :*

$$\sum_{\text{arêtes orientées vers } x} c(e) = 0_A.$$

L'ensemble des A-cochaînes harmoniques de Γ forme un groupe abélien noté $\mathrm{Harm}(\Gamma, A)$.

Lemme 1.4.4. *Soit Γ un semi-graphe connexe, et e, e' et e'' trois arêtes ouvertes distinctes de Γ, orientées vers le sommet auquel elles aboutissent. Soit A un groupe commutatif et $(a, a') \in A^2$. Alors il existe au moins un élément $c \in \mathrm{Harm}(\Gamma, A)$ tel que $c(e) = a, c(e') = a'$ et $c(e'') = -(a + a')$. On peut par ailleurs imposer $c(f) = 0$ pour toute autre arête ouverte f de Γ.*

Démonstration. Soient x, x' et y les sommets auxquels aboutissent e, e' et e'' (x, x' et y ne sont pas forcément distincts). Il existe des suites finies $(x = x_1, \ldots, x_r = y)$ et $(x' = x'_1, \ldots, x'_s = y)$ de sommets de Γ distincts et consécutifs, de telle sorte qu'il existe des arêtes orientées e_i (resp. e'_j) de Γ reliant x_i à x_{i+1} (resp. x'_j à x'_{j+1}) et orientées vers x_{i+1} (resp. x'_{j+1}). Soit c (resp. c') $\in \mathrm{Harm}(\Gamma, A)$ défini par $c(e) = c(e_i) = -c(e'') = a$ pour tout $i = 1 \ldots r-1$ (resp. $c'(e') = c'(e'_j) = -c'(e'') = a'$ pour tout $j = 1 \ldots s-1$). Alors la cochaîne harmonique $c + c' \in \mathrm{Harm}(\Gamma, A)$ vérifie les propriétés requises. □

Soit X une courbe k-analytique, π le morphisme du site étale $X_{\text{ét}}$ vers le site topologique X_{top} et ℓ un entier premier à p. La suite spectrale

$$H^p(X_{\text{top}}, \mathrm{R}^q\pi_*\mu_\ell) \Rightarrow H^{p+q}(X_{\text{ét}}, \mu_\ell)$$

induit la suite exacte :

$$0 \to H^1(X_{\text{top}}, \mu_\ell) \to H^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell) \to H^0(X_{\text{top}}, \mathrm{R}^1\pi_*\mu_\ell) \to 0 \tag{1.1}$$

Par ailleurs, si la courbe X est supposée *lisse* (i.e. quasi-lisse et sans bord), si S est une triangulation généralisée de X de squelette Γ, comme k est algébriquement clos on a la suite exacte suivante (cf. [Duc], 5.2.4) :

$$0 \to \prod_{x \in S} \mathbb{J}_x \to H^0(X_{\text{top}}, \mathrm{R}^1\pi_*\mu_\ell) \to \mathrm{Harm}(\Gamma, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to 0, \tag{1.2}$$

où le groupe $\mathbb{J}_x$ est défini comme suit :

- si x est de type 3 alors $\mathbb{J}_x$ est trivial ;
- si x est de type 2 alors $\mathbb{J}_x =_\ell \mathscr{J}(\widetilde{k})$ est le groupe de ℓ-torsion des $\widetilde{k}$-points de la jacobienne de la courbe résiduelle $\mathscr{C}_x$.

Remarque 1.4.5. Ducros obtient la suite exacte 1.2 dans [Duc], 5.2.4 en se plaçant dans le cadre d'une vraie triangulation. Néanmoins, son raisonnement reste valable dans notre

cadre des triangulations généralisées. En effet, on remarque qu'une telle suite exacte appliquée à une rabotée $\widetilde{X}$ de X (voir la définition 3.1.3, S est alors une vraie triangulation de $\widetilde{X}$) ne dépend pas du choix de $\widetilde{X}$: deux rabotées différentes donneront deux suites exactes isomorphes, ce qui permet d'étendre de telles suites exactes à X tout entier.

Quelque soit le type du point x, le groupe $\mathbb{J}_x$ est isomorphe (non canoniquement en général) à $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g(x)}$. La combinaison des deux suites exactes 1.1 et 1.2 et le fait que Γ soit homotope à X mène au résultat suivant :

Proposition 1.4.6. *On a le diagramme suivant, dont la ligne et la colonne sont exactes :*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & H^1(\Gamma_{\mathrm{top}}, \mu_\ell) \arrow[d] & & \\
 & & H^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \prod_{x\in S} \mathbb{J}_x \arrow[r] & H^0(X_{\mathrm{top}}, \mathrm{R}^1\pi_*\mu_\ell) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Harm}(\Gamma, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

1.4.3 Revêtements sauvages et conditions de déploiement

Supposons dans cette sous-section que k est de caractéristique nulle et $p > 0$, où p désigne la caractéristique résiduelle de k. Supposons la valeur absolue $|\cdot|$ sur k normalisée de telle sorte que $|p| = p^{-1}$.

Lemme 1.4.7. *Soient ξ et ξ' deux racines p-ièmes de l'unité distinctes dans k (supposé algébriquement clos). Alors $|\xi - \xi'| = p^{-\frac{1}{p-1}}$.*

Démonstration. Soit $\Phi_p = \dfrac{X^p - 1}{X - 1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} X^i = \prod_{\xi\in\mu'_p} X - \xi \in \mathbb{Q}[X]$ le p-ième polynôme cyclotomique, où μ'_p désigne l'ensemble des $p-1$ racines primitives p-ièmes de l'unité dans k. L'évaluation en 1 donne : $p = \prod_{\xi\in\mu'_p} 1 - \xi$. Pour ξ décrivant μ'_p tous les $1 - \xi$ ont la même norme en tant que conjuguées par $\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$. De là on déduit que $|1 - \xi| = p^{-\frac{1}{p-1}}$, puis on obtient le résultat en remarquant que la multiplication par n'importe quelle racine p-ième de l'unité est une isométrie de k. $\square$

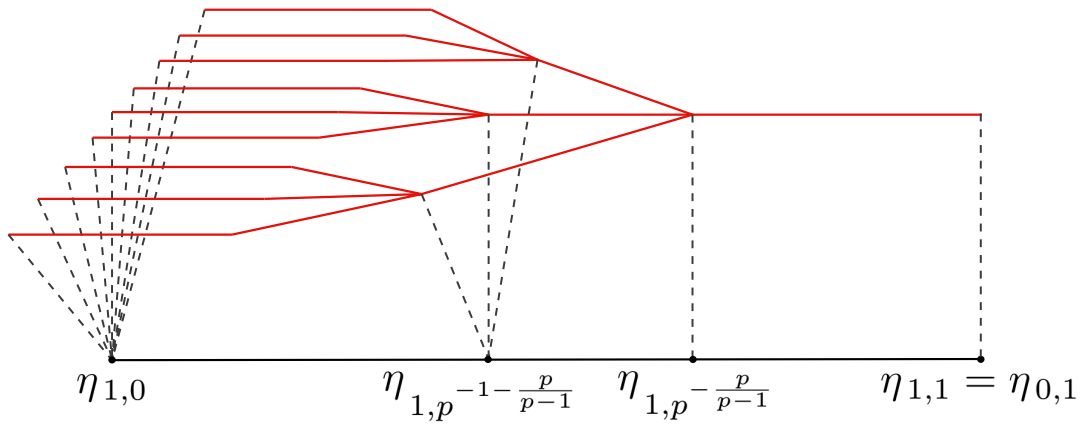

FIGURE 1.2 – Revêtement $\mathbb{G}_m^{\mathrm{an}} \xrightarrow{z \mapsto z^9} \mathbb{G}_m^{\mathrm{an}}$ avec $p = 3$, $h = 2$ et $z_0 = 1$.

La proposition suivante, donnant les ensembles de déploiement du μ_{p^h}-torseur donné par la fonction $\sqrt[p^h]{1+T}$, sera fondamentale dans la suite du texte.

Proposition 1.4.8. *Si $h \in \mathbb{N}^*$, le revêtement étale $\mathbb{G}_m^{\mathrm{an}} \xrightarrow{z \mapsto z^{p^h}} \mathbb{G}_m^{\mathrm{an}}$ est totalement déployé au-dessus du point $\eta_{z_0,r}$ vérifiant $r < |z_0| =: \alpha$ si et seulement si : $r < \alpha p^{-h-\frac{p}{p-1}}$. Plus précisément, l'image réciproque de $\eta_{z_0,r}$ contient :*

- *un seul élément quand $r \in [\alpha p^{-\frac{p}{p-1}}, \alpha]$;*
- *p^i éléments quand $r \in [\alpha p^{-i-\frac{p}{p-1}}, \alpha p^{-i-\frac{1}{p-1}}[$, avec $1 \leqslant i \leqslant h-1$;*
- *p^h éléments quand $r \in [0, \alpha p^{-h-\frac{1}{p-1}}[$.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{G}_m^{\mathrm{an}} \to \mathbb{G}_m^{\mathrm{an}}$ le revêtement donné par $f(z) = z^p$. Soit $z_1 \in k^*$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $\rho < |z_1|$ (de telle sorte que $\eta_{z_1,\rho} \notin]0,\infty[$). Afin de calculer $f(\eta_{z_1,\rho})$, remarquons que pour tout polynôme $P \in k[T]$:

$$|P\left(f(\eta_{z_1,\rho})\right)| = |(P \circ f)(\eta_{z_1,\rho})| = |P(T^p)(\eta_{z_1,\rho})|.$$

Ainsi $|(T - z_1^p)(f(\eta_{z_1,\rho}))| = |(T^p - z_1^p)(\eta_{z_1,\rho})|$. Or :

$$T^p - z_1^p = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} z_1^{p-i}(T - z_1)^i = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i (T - z_1)^i,$$

où l'on pose $\gamma_i = \binom{p}{i} z_1^{p-i}$, avec :

$$|\gamma_i| = \begin{cases} 1 & \text{si } i = p \\ p^{-1}|z_1|^{p-i} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p-1 \end{cases}$$

Ainsi $|(T - z_1^p)(f(\eta_{z_1,\rho}))| = \max_{1\leqslant i\leqslant p}\{|\gamma_i|\rho^i\} = \max\{\rho^p, \left(p^{-1}\rho^i|z_1|^{p-i}\right)_{1\leqslant i\leqslant p-1}\}$. Puisque l'on a supposé $\rho < |z_1|$, on obtient $|(T - z_1^p)(f(\eta_{z_1,\rho}))| = \max\{\rho^p, p^{-1}\rho|z_1|^{p-1}\}$, soit :

$$|(T - z_1^p)(f(\eta_{z_1,\rho}))| = \begin{cases} p^{-1}\rho|z_1|^{p-1} & \text{si } \rho \leqslant |z_1|p^{-\frac{1}{p-1}} \\ \rho^p & \text{si } \rho \geqslant |z_1|p^{-\frac{1}{p-1}} \end{cases}$$

Notons $\widehat{\rho} := |(T - z_1^p)(f(\eta_{z_1,\rho}))|$. Comme $f(\eta_{z_1,\rho})$ est une semi-norme multiplicative, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|(T - z_1^p)^k(f(\eta_{z_1,\rho}))| = \widehat{\rho}^k$. En écrivant :

$$(T^p - z_1^p)^k = \sum_{j=0}^{pk} \lambda_{k,j}(T - z_1)^j,$$

on obtient : $\widehat{\rho}^k = \max_{0\leqslant j\leqslant pk}\{|\lambda_{k,j}|\rho^j\}$.

Soit $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k(T - z_1^p)^k \in k[X]$, alors quitte à poser $\lambda_{k,j} = 0$ si $j > pk$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P(T^p) &= \sum_{k=0}^n \alpha_k(T^p - z_1^p)^k = \sum_{k=0}^n \alpha_k \sum_{j=0}^{pn} \lambda_{k,j}(T - z_1)^j \\ &= \sum_{j=0}^{pn} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k\lambda_{k,j}\right)}_{:=\widetilde{\alpha}_j}(T - z_1)^j. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} |P(f(\eta_{z_1,\rho}))| &= \max_{0\leqslant j\leqslant pn}\{|\widetilde{\alpha}_j|\rho^j\} = \max_{0\leqslant k\leqslant n}\left\{|\alpha_k| \cdot \max_{0\leqslant j\leqslant pn}\{|\lambda_{k,j}|\rho^j\}\right\} \\ &= \max_{0\leqslant k\leqslant n}\{|\alpha_k|\widehat{\rho}^k\} \end{aligned}$$

On en déduit que $f(\eta_{z_1,\rho}) = \eta_{z_1^p,\widehat{\rho}}$, c'est-à-dire :

$$f(\eta_{z_1,\rho}) = \begin{cases} \eta_{z_1^p,p^{-1}\rho|z_1|^{p-1}} & \text{si } \rho \leqslant |z_1|p^{-\frac{1}{p-1}} \\ \eta_{z_1^p,\rho^p} & \text{si } \rho \geqslant |z_1|p^{-\frac{1}{p-1}} \end{cases}$$

Cherchons maintenant les préimages par f de $\eta_{z_0,r}$, où $0 \leqslant r < \alpha := |z_0|$. Posons :

$$\widetilde{r} = \begin{cases} rp\alpha^{-\frac{p-1}{p}} & \text{si } r \leqslant \alpha p^{-\frac{p}{p-1}} \\ r^{\frac{1}{p}} & \text{si } r \geqslant \alpha p^{-\frac{p}{p-1}} \end{cases}$$

D'après ce qui précède, si $\widetilde{z_0}$ désigne une racine p-ième de z_0, alors :

$$\eta_{\widetilde{z_0},\widetilde{r}} \in f^{-1}\left(\{\eta_{z_0,r}\}\right),$$

et $f^{-1}\left(\{\eta_{z_0,r}\}\right)$ est constituée de tous les conjugués $\eta_{\xi\widetilde{z_0},\widetilde{r}}$ de $\eta_{\widetilde{z_0},\widetilde{r}}$ pour $\xi \in \mu_p$. De là :

$$f^{-1}\left(\{\eta_{z_0,r}\}\right) = \begin{cases} \{\eta_{\xi\widetilde{z_0},rp\alpha^{-\frac{p-1}{p}}}\}_{\xi\in\mu_p} & \text{si } r \leqslant \alpha p^{-\frac{p}{p-1}} \\ \{\eta_{\xi\widetilde{z_0},r^{\frac{1}{p}}}\}_{\xi\in\mu_p} & \text{si } r \geqslant \alpha p^{-\frac{p}{p-1}} \end{cases}$$

Puisque $|\widetilde{z_0}| = \alpha^{\frac{1}{p}}$, on a $|\xi\widetilde{z_0} - \xi'\widetilde{z_0}| = \alpha^{\frac{1}{p}} p^{-\frac{1}{p-1}}$ dès que $\xi \neq \xi' \in \mu_p$, d'après le lemme 1.4.7. On en déduit que $f^{-1}\left(\{\eta_{z_0,r}\}\right)$ a un unique élément si $r \geqslant \alpha p^{-\frac{p}{p-1}}$, p sinon.

Dans le cas général, avec $h \geqslant 1$, un raisonnement par récurrence sur h permet de conclure.

□

Corollaire 1.4.9. *Soit $\mathcal{C}$ une couronne k-analytique ouverte de module fini, que l'on peut supposer être un domaine analytique de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$. Soit $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}) =]x, y[$ son squelette analytique, avec $x, y \in \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$, et $h \in \mathbb{N}^*$. Si $\ell(\mathcal{C}) > h - 1$ et $y_0 \in S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})_{[2]}$ est tel que*

$$\varepsilon := d(y_0, y) < \min\left(\frac{p}{p-1}, \ell(\mathcal{C}) - (h-1)\right),$$

il existe un μ_{p^h}-torseur analytique $f \in H^1(\mathcal{C}, \mu_{p^h})$ tel que :

- *l'ensemble des points de $S^{\mathrm{an}}(X)$ en lesquels f n'a qu'un seul antécédent est $[y_0, y[$, en particulier f est non déployé au dessus de $[y_0, y[$,*
- *f est totalement déployé sur un voisinage ouvert de l'extrémité donnée par x ; plus précisément f est totalement déployée au-dessus de $r^{-1}\left(]x, y_1[\right)$ où $y_1 \in]x, y_0]_{[2]}$ est tel que $d(y_1, y_0) = h - 1$.*

Remarque 1.4.10. Avec les notations ci-dessus, si f correspond au torseur $Y \to X$, l'unique antécédent de y_0 est un « point de branchement » de $S^{\mathrm{an}}(Y)$, c'est-à-dire que c'est un nœud de $S^{\mathrm{an}}(Y)$. La condition $d(y_0, y) < \frac{p}{p-1}$ implique que l'on peut prendre y_0 arbitrairement proche de y. Ce point de vue sera important dans le dernier chapitre.

Démonstration. Si I désigne un intervalle de $\mathbb{R}^*_+$, notons $\mathcal{C}_{(I)}$ le domaine analytique de $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_k$ défini par la condition $\mid T - 1 \mid \in I$, c'est une couronne. Par ailleurs si J est un

autre intervalle de $\mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{C}_{(I)}$ et $\mathcal{C}_{(J)}$ sont isomorphes si et seulement si $J \in |k^\times|^{\pm 1}$. Par conséquent la couronne $\mathcal{C}$ est isomorphe à $\mathcal{C}_{(I)}$ pour un intervalle ouvert $I \subsetneq]0,1[$ vérifiant $\sup I \neq 1$, $\inf I \neq 0$ (car $\mathcal{C}$ est supposée de longueur finie), et tel que via cet isomorphisme le bout x corresponde à $\inf I$.

Posons :

$$\begin{cases} r_1 = p^{\varepsilon - \frac{p}{p-1}} \\ r_2 = \frac{r_1}{\mathrm{Mod}(\mathcal{C})} \end{cases}$$

On a alors

$$r_1 \in \left]p^{-\frac{p}{p-1}}, \min\{1, \mathrm{Mod}(\mathcal{C})p^{-(h-1)-\frac{p}{p-1}}\}\right[\cap (\sup I) \cdot |k^\times|,$$

et

$$0 < r_2 < p^{-(h-1)-\frac{p}{p-1}} < p^{-\frac{p}{p-1}} < r_1 < 1.$$

Ainsi, par construction, $\mathcal{C}$ est isomorphe à la couronne $\mathcal{C}_{(]r_2,r_1[)}$, d'où un isomorphisme

$$\psi : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{(]r_2,r_1[)}$$

qui identifie y_0, x et y respectivement à $\eta_{1,p^{-\frac{p}{p-1}}}, \eta_{1,r_2}$ et η_{1,r_1}. Notons r la rétraction de $\mathcal{C}_{(]r_2,r_1[)}$ sur son squelette analytique $]\eta_{1,r_2}, \eta_{1,r_1}[$.

La proposition 1.4.8 nous indique que le μ_{p^h}-torseur $f : \mathbb{G}_m^{\mathrm{an}} \xrightarrow{z \mapsto z^{p^h}} \mathbb{G}_m^{\mathrm{an}}$ vu comme revêtement de $\mathcal{C}_{]r_2,r_1[}$ (on le restreint à $f^{-1}(\mathcal{C}_{]r_2,r_1[})$) est :

- totalement déployé au-dessus de $r^{-1}\left(]\eta_{1,r_2}, \eta_{1,p^{-(h-1)-\frac{p}{p-1}}}[\right)$
- non déployé avec un seul antécédent au-dessus de $[\eta_{1,p^{-\frac{p}{p-1}}}, \eta_{1,r_1}[$,

ce qui permet de conclure. □

1.5 Groupe fondamental tempéré

1.5.1 Motivations

Soit k un corps ultramétrique complet (on ne le suppose pas algébriquement clos dans cette section) et p l'exposant caractéristique de son corps résiduel $\widetilde{k}$. Soit X un espace strictement k-analytique quasi-lisse et connexe muni d'un point géométrique $x \in X$ (i.e. un point défini sur une extension complète et algébriquement close de k). Nous allons définir les *revêtements tempérés* de X ainsi que le *groupe fondamental tempéré* $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X, x)$ de X en x, notions introduites par Yves André dans [And]. Ce dernier se place dans le

cadre d'un sous-corps complet K de $\mathbb{C}_p$ (en désignant par $\mathbb{C}_p$ la complétion d'une clôture algébrique fixée $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$). Or ces définitions s'étendent *verbatim* à tout corps non archimédien, ce que nous nous permettrons de faire librement dans la suite.

Rappelons qu'un *revêtement étale d'espaces k-analytiques $Y \to X$* est défini comme localement sur la base X une union disjointe de revêtements étales finis (1.1.67). Les *revêtements topologiques* (lorsque ces revêtements étales finis sont des isomorphismes) sont en particulier des revêtements étales, mais de nombreux revêtements étales ne donnent lieu à aucun revêtement topologique.

Puisque x est localement contractile, les revêtements topologiques de l'espace k-analytique pointé (X, x) sont classés par le *groupe fondamental topologique* classique $\pi_1^{\mathrm{top}}(X, x)$. De Jong définit dans [DJg] le *groupe fondamental étale de X en x*, $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)$, qui classe les revêtements étales de X, et dont $\pi_1^{\mathrm{top}}(X, x)$ est un quotient discret. Son complété profini, le *groupe fondamental algébrique* $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X, x)$, classe les revêtements étales finis. Ce dernier ne sera pas d'un grand intérêt dans le cadre de ce travail en ce qu'il est l'analogue du groupe fondamental classique de la géométrie algébrique (coïncidant avec celui-ci pour l'analytifiée d'une courbe algébrique) et que ce groupe ne porte aucun phénomène anabélien pour les courbes algébriques sur des corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Les autres groupes ont en pratique un comportement très éloigné de ce qui advient en géométrie complexe :

- $\pi_1^{\mathrm{top}}(X, x)$ est « trop petit » , par exemple $\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_p} \setminus \{0, 1, \infty\}), x) = \{1\}$;
- $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)$ est « trop grand », par exemple $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_p}, x)$ admet des groupes linéaires de la forme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$ comme quotients ([DJg], Proposition 7.4).

C'est pour remédier à ce « défaut » qu'Yves André introduit dans [And] la notion de *revêtement tempéré*, qui capture à la fois la théorie des revêtements topologiques et finis étales tout en offrant des comportements raisonnables qui s'apparentent à ce que l'on connaît en géométrie complexe.

1.5.2 Morphismes tempérés et groupe fondamental tempéré

Définition 1.5.1.

1. *Un* revêtement tempéré *d'un bon espace strictement k-analytique X, connexe, non vide, et quasi-lisse, sera défini comme un revêtement étale $\varphi : Y \to X$ qui devient*

topologique après un changement de base selon un revêtement étale fini, autrement dit qui est facteur du revêtement topologique d'un revêtement étale fini de X, i.e. s'il existe un diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr] & \\ W \arrow[dr, "\chi"'] & & Y \arrow[dl, "\varphi"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

où χ est un revêtement étale fini et ψ un revêtement topologique. Notons $\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp}}(X)$ *la catégorie des revêtements tempérés de X.*

2. *Si $x \in X$ est un point géométrique, Yves André introduit le* groupe fondamental tempéré de X en x, *noté $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X, x)$, qui classe les revêtements tempérés pointés de X en x, de sorte que la catégorie des revêtements tempérés de X est équivalente à la catégorie des ensembles discrets sur lesquels $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X, x)$ agit continûment.*

La classe d'isomorphisme de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X, x)$ ne dépend pas du point géométrique x considéré, de sorte que l'on pourra parler du *groupe fondamental tempéré* $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ *de* X, défini à unique isomorphisme extérieur près.

Remarque 1.5.2. Comme toute composante connexe d'un bon espace k-analytique est dénombrable à l'infini, un revêtement étale $\varphi : Y \to X$ avec Y connexe est tempéré si et seulement s'il s'insère dans un diagramme commutatif similaire à celui ci-dessus (1.3) avec ψ un revêtement topologique *à fibres dénombrables.* C'est le cas de tout revêtement tempéré galoisien.

Si (Y, y) est un revêtement étale fini galoisien géométriquement pointé de (X, x), alors le revêtement universel pointé $\psi : (\widetilde{Y}, \widetilde{y}) \to (Y, y)$ reste un revêtement étale galoisien de X de groupe de Galois $\Delta_Y := \mathrm{Gal}(\widetilde{Y}/X)$ s'insérant dans une suite exacte :

$$\{1\} \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}(Y, y) \longrightarrow \Delta_Y \longrightarrow \mathrm{Gal}(Y/X) \longrightarrow \{1\}$$

Considérons maintenant un morphisme $\varphi : (Y_2, y_2) \to (Y_1, y_1)$ de revêtement étales finis galoisiens géométriquement pointés de (X, x). Nous savons que χ s'étend en un morphisme $\widetilde{\varphi} : (\widetilde{Y_2}, \widetilde{y_2}) \to (\widetilde{Y_1}, \widetilde{y_1})$. On a alors un morphisme de groupes induit par $\varphi : \Delta_{Y_2} \to \Delta_{Y_1}$ qui envoie la paire (h_2, g_2) sur (h_1, g_1) telle que $\widetilde{\varphi} h_2 = h_1 \widetilde{\varphi}$ et $\varphi g_2 = g_1 \varphi$.

Remarque 1.5.3. Lorsque que les espaces k-analytiques considérés ci-dessus sont des courbes, le groupe $\pi_1^{\mathrm{top}}(Y, y)$ est un groupe libre discret. Cela découle du fait qu'une courbe k-analytique a le type d'homotopie d'un graphe.

Proposition 1.5.4 ([And]). *Soit X un bon espace strictement k-analytique connexe et quasi-lisse, et $x \in X$ un point géométrique. Alors on a l'égalité :*

$$\pi_1^{\mathrm{temp}}(X, x) = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \Delta_{Y_i},$$

dès que $(Y_i, y_i)_{i \in N}$ est un système projectif cofinal de revêtements étales finis galoisiens géométriquement pointés au-dessus de (X, x).

Le groupe fondamental tempéré $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ est un ainsi un groupe prodiscret (limite projective de groupes discrets).

Définition 1.5.5 (Revêtements tempérés modérés). *Notons $\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp}}(X)$ constituée des revêtements tempérés qui sont quotients d'un revêtement topologique d'un revêtement galoisien fini* de degré premier à p. *Nous noterons $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ le groupe (prodiscret) classant ces revêtements, de sorte que $\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ est équivalente à la catégorie des ensembles discrets sur lesquels $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ agit continûment. Nous appellerons $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ le* groupe tempéré modéré de X.

Remarque 1.5.6. Lorsque X est une courbe k-analytique, le groupe $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ peut se construire directement à partir de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$: en effet, $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ n'est autre la limite projective des quotients de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ qui ont un sous-groupe distingué sans torsion d'indice fini premier à p.

1.5.3 Quelques propriétés

Décrivons quelques propriétés du groupe fondamental tempéré.

Proposition 1.5.7 ([And], 2.1.6). *Soit X un bon espace k-analytique connexe quasi-lisse, et x un point géométrique :*

1. *Le morphisme naturel $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X, x) \to \pi_1^{\mathrm{top}}(X, x)$ est surjectif (le groupe tempéré peut donc avoir une infinité de quotients discrets).*
2. *Le morphisme naturel $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X, x) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(X, x)$ est d'image dense, $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X, x)$ peut être identifié à la complétion profinie de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X, x)$.*
3. *Si X est une courbe k-analytique, le morphisme $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X, x) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(X, x)$ est injectif.*

Le deuxième point montre que le groupe tempéré n'est pas « trop petit », tandis que le troisième point indique qu'il n'est pas non plus « trop grand » lorsque X est une courbe.

Remarque 1.5.8. Nous savons que la droite affine $\mathbb{C}_p$-analytique est algébriquement simplement connexe : $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_p}) = \{0\}$ (cela découle du caractère simplement connexe de droite affine algébrique $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}_p}$ et de l'équivalence entre les revêtements étales finis de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}_p}$ et ceux de $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_p}$). On déduit du troisième point de la proposition 1.5.7 que le groupe tempéré de la droite affine est trivial : $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_p}) = \{0\}$. Cela prouve le caractère non tempéré du revêtement étale donné par le logarithme $\log : D_{\mathbb{C}_p}(0,1)^\circ \to \mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_p}$.

Dans le cas d'un revêtement étale galoisien, la propriété d'être de nature topologique ou tempérée peut se lire directement sur son groupe de Galois, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.5.9 ([And], 2.1.9)**.** *Soit X un espace strictement k-analytique connexe et Y un revêtement étale galoisien de X de groupe de Galois G.*

1. *Si G est* sans torsion*, Y est un revêtement topologique de X ;*
2. *si G est* virtuellement sans torsion *(i.e. s'il contient au moins un sous-groupe d'indice fini qui est sans torsion), Y est un revêtement tempéré de X, et plus précisément un revêtement topologique d'un revêtement étale fini galoisien de X.*

Les courbes k-analytiques ont des groupes topologiques fondamentaux libres, puisqu'elles ont le type d'homotopie de graphes réels. On peut en déduire le résultat suivant, où la pro-VTFD-complétion d'un groupe est la limite projective de ses quotients virtuellement sans torsion et discrets (virtually torsion-free discrete).

Corollaire 1.5.10 ([And], 2.1.10)**.** *Si X est une courbe k-analytique quasi-lisse, le groupe $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ est la pro-VTFD-complétion de $\pi_1^{\text{ét}}(X)$.*

Description des sous-groupes de Galois locaux $G_{\mathbb{Q}_p}$ de $G_{\mathbb{Q}}$: Soit k un corps de nombres muni d'un plongement $\overline{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$, et X la k-courbe hyperbolique définie par $X = \mathbb{P}^1_k \setminus \{0,1,\infty\}$. Soit $X^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}$ la variété analytique complexe associée à X. Si x est un point géométrique de X, le groupe fondamental étale $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}}, x)$ est égal à la complétion profinie du groupe topologique $\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}, x)$, et l'injection $\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}, x) \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}}, x)$ fait de $\mathrm{Out}(\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}))$ un sous-groupe de $\mathrm{Out}(\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}}))$. L'action de Galois extérieure $G_k \xrightarrow{\rho} \mathrm{Out}(\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}}))$ est fidèle d'après le théorème de Belyi, ce qui permet de considérer

G_k comme un sous-groupe $\mathrm{Out}(\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}}))$. Si $k \subset \mathbb{R}$, on a la description suivante de $G_{\mathbb{R}}$, comme intersection de sous-groupes de $\mathrm{Out}(\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}}))$ (cf. [And1], 3.3.1) :

$$G_{\mathbb{R}} = G_k \cap \mathrm{Out}(\pi_1^{\mathrm{top}}(X_{\mathbb{C}}^{\mathrm{an}})).$$

Le groupe tempéré permet de donner un analogue non archimédien de ce résultat. Supposons le corps de nombres k muni d'une valuation p-adique ν induite par un plongement $\overline{k} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$, et notons k_ν le complété de k dans $\mathbb{C}_p$. Comme précédemment, pour tout point géométrique $x \in X$, l'injection $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X_{\mathbb{C}_p}^{\mathrm{an}}, x) \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}}, x)$ fait de $\mathrm{Out}(\pi_1^{\mathrm{temp}}(X_{\mathbb{C}_p}^{\mathrm{an}}))$ un sous-groupe de $\mathrm{Out}(\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}}))$. André montre que G_{k_ν} admet la description suivante :

Théorème 1.5.11 ([And1], 7.2.1)**.** *Il y a égalité des sous-groupes de* $\mathrm{Out}(\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}}))$ *:*

$$G_{k_\nu} = G_k \cap \mathrm{Out}(\pi_1^{\mathrm{temp}}(X_{\mathbb{C}_p}^{\mathrm{an}})).$$

Groupe d'automorphismes du π_1-foncteur tempéré : Supposons ici que k est un corps de nombres. Notons $\mathscr{V}_k$ la catégorie des k-variétés algébriques lisses et géométriquement connexes, et $\mathscr{T}$ la catégorie des groupes topologiques séparés dont les morphismes entre G et H sont les morphismes de groupes continus $G \to H$ à conjugaison près par un élément de H. En particulier : $\mathrm{Aut}_{\mathscr{T}}(G) = \mathrm{Out}(G)$. En restant dans le monde algébrique, on peut considérer le π_1-foncteur :

$$\begin{aligned} \underline{\pi}_{\overline{k}}^{\mathrm{alg}} : \ \mathscr{V}_k &\to \mathscr{T} \\ X &\mapsto \pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}}) \end{aligned}$$

Le résultat suivant, conjecturé par Ihara, Oda et Matsumoto, relie groupe de Galois absolu de k et groupe d'automorphismes du foncteur $\underline{\pi}_{\overline{k}}^{\mathrm{alg}}$:

Théorème 1.5.12 ([Pop18])**.** *On a un isomorphisme :* $G_k \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\underline{\pi}_{\overline{k}}^{\mathrm{alg}})$.

Cet isomorphisme est induit par l'*action extérieure*

$$\rho : G_k \to \mathrm{Out}(\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}}, \overline{x})) = \mathrm{Aut}_{\mathscr{T}}(\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}}, \overline{x}))$$

donnée par la suite exacte $1 \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}}, \overline{x}) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(X, \overline{x}) \to G_k \to 1$, pour tout $X \in \mathscr{V}_k$.

Lorsque k est muni d'une valuation p-adique ν induite par un plongement $\overline{k} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$, notons k_ν le complété de k dans $\mathbb{C}_p$. C'est un corps ultramétrique complet, et l'on peut

considérer le π_1-foncteur tempéré :

$$\begin{aligned} \underline{\pi}^{\mathrm{temp}}_{\mathbb{C}_p} : \ & \mathscr{V}_k \to \mathscr{T} \\ & X \mapsto \pi_1^{\mathrm{temp}}(X^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_p}) \end{aligned}$$

On a alors dans le monde tempéré un alors un résultat similaire au 1.5.12 :

Théorème 1.5.13 ([And1], 9.2.1)**.** *On a un isomorphisme :* $G_{k_\nu} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\underline{\pi}^{\mathrm{temp}}_{\mathbb{C}_p})$.

De manière analogue au cas algébrique, cet isomorphisme est induit par l'action extérieure donnée par la suite exacte $1 \to \pi_1^{\mathrm{temp}}(X^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_p}, \overline{x}) \to \pi_1^{\mathrm{temp}}(X^{\mathrm{an}}_{k_\nu}, \overline{x}) \to G_{k_\nu} \to 1$, pour tout $X \in \mathscr{V}_k$.

Description de quelques groupes tempérés : Nous nous plaçons ici dans le cas où k est un corps algébriquement clos et de caractéristique nulle, par exemple $k = \mathbb{C}_p$.

1. *Droites analytiques et projectives :* Les droites k-analytiques affine et projective sont simplement connexes, elles n'admettent aucun revêtement tempéré non trivial :
$$\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k) \simeq \pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_k) \simeq \{0\}.$$

2. *Le groupe multiplicatif :* Le groupe multiplicatif k-analytique $\mathbb{G}^{\mathrm{an}}_m$ est topologiquement simplement connexe, mais il admet des revêtements étales finis de Kummer, de sorte que :
$$\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathbb{G}^{\mathrm{an}}_m) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}.$$

3. *Courbes elliptiques :* Soit E une k-courbe elliptique. Le groupe topologique de E est trivial lorsque E a bonne réduction, isomorphe à $\mathbb{Z}$ dans le cas d'une mauvaise réduction. Au niveau des groupes tempérés, cela se traduit par :
   - si E est à bonne réduction :
   $$\pi_1^{\mathrm{temp}}(E^{\mathrm{an}}) \simeq \widehat{\mathbb{Z}} \times \widehat{\mathbb{Z}},$$
   - si E est à mauvaise réduction :
   $$\pi_1^{\mathrm{temp}}(E^{\mathrm{an}}) \simeq \widehat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}.$$

4. *Variété abélienne :* Soit $\mathcal{A}$ une variété abélienne sur k, de dimension g et dont le groupe fondamental topologique est de rang d, Emmanuel Lepage généralise le

cas des courbes elliptiques en décrivant le groupe tempéré de $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$ ([Lep1] 2.1) :

$$\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{A}^{\mathrm{an}}) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^{2g-d} \times \mathbb{Z}^d.$$

Finissons enfin par un résultat concernant l'abélianisé du groupe tempéré d'une k-courbe, similaire à son analogue algébrique. Supposons k algébriquement clos, soit $\mathscr{X}$ une k-courbe algébrique, x un point rigide de X, et $J = \mathrm{Jac}(\mathscr{X})$ la variété jacobienne de $\mathscr{X}$. Le morphisme $\mathscr{X} \to J, y \mapsto [y] - [x]$, induit un morphisme de groupes $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathscr{X}^{\mathrm{an}}, x) \to \pi_1^{\mathrm{temp}}(J^{\mathrm{an}}, 0)$ qui se factorise par l'abénialisé $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathscr{X}^{\mathrm{an}}, x)^{\mathrm{ab}} = \pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})^{\mathrm{ab}}$ (il ne dépend plus de x) puisque $\pi_1^{\mathrm{temp}}(J^{\mathrm{an}}, 0)$ est abélien.

Théorème 1.5.14 ([Lep1], 2.2)**.** *Le morphisme* $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})^{\mathrm{ab}} \to \pi_1^{\mathrm{temp}}(J^{\mathrm{an}}, 0)$ *est un isomorphisme.*

Chapitre 2

Introduction aux anabélioïdes et tempéroïdes de Mochizuki

Je le sais, je suis devenu trop abstrait et, pour concrétiser une abstraction, il faut la coiffer d'une seconde et d'une troisième.

Hermann Broch
(Quelques remarques à propos du kitsch)

Nous allons présenter le langage des semi-graphes d'anabélioïdes et de tempéroïdes utilisé par Mochizuki dans [Mzk1], [Mzk2] et [Mzk3] .

Commençons par définir un *semi-graphe* $\mathbb{G}$ qui consiste en une collection de données suivante :

- un ensemble $\mathcal{V}(\mathbb{G})$ dont les éléments sont appelés *sommets* ;
- un ensemble $\mathcal{E}(\mathbb{G})$ dont les éléments sont appelés *arêtes* et consistent en des ensembles de cardinal au plus 2 dont les éléments sont les *branches*, et tels que si $e, e' \in \mathcal{E}(\mathbb{G}) : e \neq e' \Rightarrow e \cap e' = \emptyset$;
- une collection $\zeta(\mathbb{G})$ de flèches $(\zeta_e)_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{G})}$ avec $\zeta_e : e \to \mathcal{V}(\mathbb{G})$

Si $v = \zeta_e(b)$ pour une arête e, une branche b de e et un sommet v, on dira que e (ou b) *aboutit* à v. Un semi-graphe $\mathbb{G}$ sera dit *fini* (resp. *dénombrable*) si les deux ensembles $\mathcal{V}(\mathbb{G})$ et $\mathcal{E}(\mathbb{G})$ sont finis (resp. dénombrables), et *localement fini* si pour chaque sommet $v \in \mathcal{V}(\mathbb{G})$ l'ensemble des arêtes aboutissant à v est fini. On parlera de *graphe* lorsque

toutes les arêtes contiennent deux branches.

Un morphisme entre deux semi-graphes

$$\mathbb{G} = \{\mathcal{V}(\mathbb{G}), \mathcal{E}(\mathbb{G}), \zeta(\mathbb{G})\} \to \mathbb{G}' = \{\mathcal{V}(\mathbb{G}'), \mathcal{E}(\mathbb{G}'), \zeta(\mathbb{G}')\}$$

est une collection d'applications $\mathcal{V}(\mathbb{G}) \to \mathcal{V}(\mathbb{G}')$, $\mathcal{E}(\mathbb{G}) \to \mathcal{E}(\mathbb{G}')$ qui rend compatibles entre elles les collections $\zeta(\mathbb{G})$ et $\zeta(\mathbb{G}')$ et telle que si l'arête e de $\mathbb{G}$ est envoyée sur l'arête e' de $\mathbb{G}'$, alors on a une injection $e \hookrightarrow e'$. Une arête de $\mathbb{G}$ ne peut donc pas être envoyée sur une arête de $\mathbb{G}'$ qui a un nombre strictement inférieur de branches.

2.1 Le monde des anabélioïdes

2.1.1 Anabélioïdes connexes

Si G est un groupe profini, nous noterons $\mathcal{B}(G)$ la catégorie des ensembles finis sur lesquels G opère continûment (i.e. de manière à ce que les stabilisateurs des points soient des sous-groupes ouverts de G). Soit $\mathfrak{Ens}^{\mathrm{f}}$ la catégorie des ensembles finis, et

$$\beta_G^* : \mathcal{B}(G) \to \mathfrak{Ens}^{\mathrm{f}}$$

le foncteur « oubli » défini en oubliant l'action de G. Le foncteur β_G^* est *exact* (i.e. commute aux colimites finies et aux produits finis) et *conservatif* (i.e. un morphisme α de $\mathcal{B}(G)$ est un isomorphisme si et seulement si $\beta_G^*(\alpha)$ est un isomorphisme de $\mathfrak{Ens}^{\mathrm{f}}$).

Rappelons (voir [Cad] ou [SGA1], Exposé 5 pour une exposition détaillée) qu'une catégorie $\mathcal{X}$ est appelée *catégorie galoisienne* si elle est équivalente à une catégorie de la forme $\mathcal{B}(G)$ avec G un groupe profini.

Grothendieck en donne également une caractérisation ne faisant appel à aucun groupe profini. Plus précisément, en vertu de [SGA1] (Exposé 5, Th. 4.1), une catégorie $\mathcal{X}$ est galoisienne si elle seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

- les limites finies et les colimites finies existent dans $\mathcal{X}$,
- il existe un foncteur covariant $\beta^* : \mathcal{X} \to \mathfrak{Ens}^{\mathrm{f}}$ qui est *exact* et *conservatif*,
- tout morphisme $u : X \to Y$ de $\mathcal{X}$ se factorise par $X \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{u''} Y$ où u' est un épimorphisme strict et u'' un monomorphisme qui induit un isomorphisme sur un sommande direct de Y.

Un tel foncteur $\beta^* : \mathcal{X} \to \mathfrak{Ens}^{\mathrm{f}}$ exact et conservatif est appelé un *foncteur fondamental* de la catégorie galoisienne $\mathcal{X}$. La donnée d'un foncteur fondamental β^* permet de construire une équivalence de catégorie entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{B}(\pi_1(\mathcal{X}, \beta^*))$ où le groupe profini $\pi_1(\mathcal{X}, \beta^*)$ est défini par :

$$\pi_1(\mathcal{X}, \beta^*) := \mathrm{Aut}(\beta^*),$$

équivalence par laquelle le foncteur β^* est identifié à $\beta^*_{\pi_1(\mathcal{X},\beta^*)}$.

Le groupe $\pi_1(\mathcal{X}, \beta^*)$ est appelé le *groupe fondamental* de la catégorie galoisienne $\mathcal{X}$ munie du foncteur fondamental β^*. Deux foncteurs fondamentaux sont toujours isomorphes et la classe d'isomorphismes de $\pi_1(\mathcal{X}, \beta^*)$ ne dépend pas de β^*. Nous pouvons donc considérer le *groupe fondamental* $\pi_1(\mathcal{X})$ *de* $\mathcal{X}$ qui sera défini à unique isomorphisme extérieur près. C'est un groupe profini. Remarquons qu'une catégorie galoisienne est connexe puisqu'elle possède un objet final, la limite vide.

Afin de développer une intuition plus géométrique et d'être cohérent avec la philosophie anabélienne de Mochizuki nous conserverons la terminologie de [Mzk2] en appelant *anabélioïde connexe* toute catégorie $\mathcal{X}$ équivalente à une catégorie de la forme $\mathcal{B}(G)$ où G est un groupe profini. Ainsi un anabélioïde connexe n'est autre qu'une catégorie galoisienne, mais dont les morphismes sont définis dans l'autre sens.

Définition 2.1.1. *Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des anabélioïdes connexes, un* morphisme d'anabélioïdes $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *est défini comme étant un foncteur exact $\varphi^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$. Un* isomorphisme d'anabélioïdes *entre deux anabélioïdes connexes est un morphisme dont le foncteur correspondant est une équivalence de catégories.*

Exemples 2.1.2.

- Si X et Y sont soit deux k-schémas localement noethériens connexes non vides, soit deux bons espaces k-analytiques connexes, la catégorie $\mathrm{Cov}^{\mathrm{alg}}(X)$ (resp $\mathrm{Cov}^{\mathrm{alg}}(Y)$) des revêtements étales finis de X (resp. de Y) est une catégorie galoisienne, donc un anabélioïde connexe. Un morphisme de k-schémas (ou d'espaces k-analytiques) $\varphi : X \to Y$ induit par changement de base un foncteur exact $\varphi^* : \mathrm{Cov}^{\mathrm{alg}}(Y) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{alg}}(X)$, i.e. un morphisme d'anabélioïdes $\varphi : \mathrm{Cov}^{\mathrm{alg}}(X) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{alg}}(Y)$, ce qui explique le choix de ce sens des flèches. Le groupe fondamental de l'anabélioïde connexe $\mathrm{Cov}^{\mathrm{alg}}(X)$ n'est autre que le *groupe fondamental algébrique* $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$. Ainsi :

$$\mathrm{Cov}^{\mathrm{alg}}(X) \simeq \mathcal{B}\left(\pi_1^{\mathrm{alg}}(X)\right).$$

- Si X est un bon espace k-analytique connexe, rappelons que $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X)$ désigne la catégorie des revêtements modérés de X (cf. 1.1.68), sous-catégorie pleine de $\mathrm{Cov}^{\mathrm{alg}}(X)$. Il s'agit d'un anabélioïde connexe, d'où :

$$\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X) \simeq \mathcal{B}\left(\pi_1^{\mathrm{t}}(X)\right).$$

Remarque 2.1.3. La catégorie $\mathfrak{Ens}^{\mathrm{f}}$ est l'exemple le plus simple d'anabélioïde connexe (obtenu en appliquant $\mathcal{B}(-)$ au groupe trivial). Cela nous permet de penser les foncteurs fondamentaux entre catégories galoisiennes comme des « points fondamentaux » des anabélioïdes connexes pensés comme objets géométriques.

Définition 2.1.4. *Un* point de base *d'un anabélioïde connexe $\mathcal{X}$ n'est autre qu'un morphisme d'anabélioïdes $\beta : \mathfrak{Ens}^{\mathrm{f}} \to \mathcal{X}$.*

Remarque 2.1.5. Si $\mathcal{X}$ est une catégorie galoisienne, un foncteur exact de $\mathcal{X}$ dans $\mathfrak{Ens}^{\mathrm{f}}$ est conservatif, c'est-à-dire que c'est un foncteur fondamental. Par conséquent il existe une correspondance bijective entre les foncteurs fondamentaux de la catégorie galoisienne $\mathcal{X}$ et les points de base de l'anabélioïde connexe $\mathcal{X}$. Si β est un point de base de $\mathcal{X}$ (considéré en tant qu'anabélioïde) et β^* est le foncteur associé, on définit le *groupe fondamental* de l'anabélioïde $\mathcal{X}$ muni de β, noté $\pi_1(\mathcal{X}, \beta)$, comme égal au groupe $\pi_1(\mathcal{X}, \beta^*)$. La classe d'isomorphisme de ce groupe étant indépendante du choix du point de base, on pourra considérer $\pi_1(\mathcal{X})$ qui sera défini à unique isomorphisme extérieur près.

Remarque 2.1.6. Un foncteur qui définit une équivalence de catégories est nécessairement exact, par conséquent un isomorphisme d'anabélioïdes connexes $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ n'est autre qu'une équivalence de catégories $\varphi^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$.

2.1.2 Anabélioïdes

Définition 2.1.7. *Une catégorie $\mathcal{X}$ est un* anabélioïde *si elle est équivalente à une catégorie produit*

$$\mathcal{X}_I := \prod_{i \in I} \mathcal{X}_i,$$

où I est un ensemble fini et $\mathcal{X}_i$ est un anabélioïde connexe pour tout $i \in I$. En d'autres termes, dans le langage de [*SGA*1]*, un anabélioïde est une «* catégorie multi-galoisienne *». Un morphisme d'anabélioïdes sera défini comme dans le cas connexe, c'est-à-dire comme un foncteur exact dans le sens opposé.*

Définition 2.1.8. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les colimites finies, possédant ainsi un objet initial $\mathbf{0}_{\mathcal{C}}$.*

1. *Un objet* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *différent de* $\mathbf{0}_{\mathcal{C}}$ *est dit* connexe *lorsqu'il n'existe pas dans* $\mathcal{C}$ *d'écriture sous forme de coproduit* $X = X_1 \coprod X_2$ *avec* $X_i \neq \mathbf{0}_{\mathcal{C}}$ *pour* $i = 1, 2$.
2. *Pour tout objet* $X \neq \mathbf{0}_{\mathcal{C}}$ *de* $\mathcal{C}$, *une* décomposition de X *est une écriture de la forme :*
$$X = \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$$
où A *est un ensemble fini,* $X_\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *et* $X_\alpha \neq \mathbf{0}_{\mathcal{C}}$. *En particulier l'objet* X *est* connexe *si et seulement si l'ensemble d'indexation de toute décomposition de* X *est de cardinal* 1.
3. *Lorsque* $\mathcal{C}$ *est une catégorie galoisienne, alors* (*cf.* [*Cad*], 3.2.1) *tout objet* $X \neq \mathbf{0}_{\mathcal{C}}$ *de* $\mathcal{C}$ *peut être écrit :*
$$X = \coprod_{i=1}^{r} X_i,$$
où les $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *sont des objets* connexes *tous distincts de* $\mathbf{0}_{\mathcal{C}}$. *Cette décomposition est unique* (*à permutations près*), *et les* X_i *sont appelées les* composantes connexes de X.

Proposition 2.1.9. *Si* $\mathcal{X}_I := \prod_{i \in I} \mathcal{X}_i$ *est l'anabélioïde défini en 2.1.7, alors tout objet* $X \neq \mathbf{0}_{\mathcal{X}_{\mathcal{I}}}$ *de* $\mathcal{X}_I$ *admet, à permutations près, une unique décomposition de la forme :*
$$X = \coprod_{j=1}^{s} X_j,$$
où les $X_j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X}_{\mathcal{I}})$ *sont des objets* connexes, *tous distincts de* $\mathbf{0}_{\mathcal{X}_{\mathcal{I}}}$, *et appelés les* composantes connexes de X.

Démonstration. En tant que catégorie multi-galoisienne, $\mathcal{X}_I$ admet les limites et colimites finies, d'où un unique objet final (resp. initial) noté $\mathbf{1}_{\mathcal{X}_I}$ (resp. $\mathbf{0}_{\mathcal{X}_I}$), et défini comme la limite (resp. colimite) vide. Pour $i \in I$, notons $\mathbf{0}_i$ et $\mathbf{1}_i$ les objets initiaux et finals de l'anabélioïde connexe $\mathcal{X}_i$. Si $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X}_i)$, notons $\widehat{X_i} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X}_I)$ défini en prenant le produit de X_i avec les $\mathbf{0}_j$ pour $j \in I \setminus \{i\}$. Si $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X}_I)$, notons $X[i] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X}_i)$ la composante de X sur $\mathcal{X}_i$ selon la décomposition $\mathcal{X}_I := \prod_{i \in I} \mathcal{X}_i$, de sorte que $X = (X[i])_{i \in I}$. On a alors :
$$X = \coprod_{i \in I} \widehat{X[i]}.$$
Par conséquent un objet X de $\mathcal{X}_I$ n'est connexe que s'il est de la forme $\widehat{X_i}$ pour un certain $i \in I$ et $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X}_i)$ objet connexe. En couplant ces considérations au résultat d'unicité

de la décomposition d'un objet non vide (i.e. non initial) d'une catégorie galoisienne en somme finie d'objets connexes (cf. définition 2.1.8, ou [Cad], 3.2.1 pour la preuve), on obtient l'unicité voulue : soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X}_I)$, $X \neq \mathbf{0}_{\mathcal{X}_I}$, et $I' \subset I$ formé des éléments i tels que $X[i] \neq \mathbf{0}_i$. Pour chaque $i \in I'$, considérons la décomposition (unique à permutation près des facteurs) de $X[i]$ en ces composantes connexes :

$$X[i] = \coprod_{j \in J_i} X_{i,j}$$

où J_i est un ensemble fini et $X_{i,j} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X}_i)$ est un objet connexe, pour tout $j \in J_i$. Il est alors clair que X s'écrit :

$$X = \coprod_{i \in I'} \coprod_{j \in J_i} \widehat{X_{i,j}},$$

que tous les $\widehat{X_{i,j}}$ sont des objets connexes de $\mathcal{X}_I$, et que cette décomposition est unique à permutations près. □

Corollaire 2.1.10. *Si $\mathcal{X}_I$ est l'anabélioïde défini en 2.1.7, alors l'ensemble fini I et les anabélioïdes connexes $\mathcal{X}_i$ (pour $i \in I$) sont canoniquement déterminés par l'anabélioïde abstrait $\mathcal{X}_I$. Les $\mathcal{X}_i$ sont appelées les* composantes connexes de l'anabélioïde $\mathcal{X}_I$.

Démonstration. Notons $\varepsilon_i = \widehat{\mathbf{1}}_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X}_I)$ (rappelons qu'il est défini en prenant le produit de $\mathbf{1}_i$ avec les $\mathbf{0}_j$ pour $j \in I \setminus \{i\}$). Les ε_i sont des objets connexes de $\mathcal{X}_I$, et l'on obtient la décomposition :

$$\mathbf{1}_{\mathcal{X}_I} = \coprod_{i \in I} \varepsilon_i.$$

Par la proposition 2.1.9 précédente, une telle décomposition est unique (à permutations des facteurs près). De là les ε_i sont entièrement déterminés par $\mathcal{X}_I$ en tant que composantes connexes de l'élément final $\mathbf{1}_{\mathcal{X}_I}$, de même que l'ensemble I. Ainsi, pour chaque $i \in I$, l'anabélioïde connexe $\mathcal{X}_i$ est déterminé tout aussi canoniquement par $\mathcal{X}_I$ en tant que sous-catégorie pleine de $\mathcal{X}_I$ formée des objets *au-dessus de* ε_i. □

Soit $\mathcal{X}$ un anabélioïde et $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})$. Désignons par $\mathcal{X}_S$ la catégorie des objets de $\mathcal{X}$ au-dessus de S, c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les flèches $X \to S$ de $\mathcal{X}$, et dont les flèches entre $X \to S$ et $X' \to S$ sont les S-morphismes $X \to X'$. Soit $i_S^* : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_S$ le foncteur défini en prenant le produit fibré avec S.

Proposition 2.1.11 ([Mzk2], Prop. 1.2.1)**.** *La catégorie $\mathcal{X}_S$ est un anabélioïde, et le foncteur i_S^* est exact, c'est-à-dire qu'il définit un morphisme d'anabélioïdes $i_S : \mathcal{X}_S \to \mathcal{X}$.*

Remarque 2.1.12. Les composantes connexes de l'anabélioïde $\mathcal{X}_S$ sont ici en bijection avec les composantes connexes de S en tant qu'objet de $\mathcal{X}$. Par conséquent $\mathcal{X}_S$ est un *anabélioïde connexe* si et seulement si S est lui-même un objet connexe.

Définition 2.1.13. *Un morphisme d'anabélioïdes $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ est un* revêtement fini étale *s'il se factorise comme la composée d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{Y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_S$ avec le morphisme $i_S : \mathcal{X}_S \to \mathcal{X}$ où $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})$.*

Remarque 2.1.14. Un morphisme continu $\theta : H \to G$ entre deux groupes profinis H et G induit naturellement un foncteur exact $\theta^* : \mathcal{B}(G) \to \mathcal{B}(H)$, c'est-à-dire un morphisme d'anabélioïdes $\theta : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(G)$. Un tel morphisme est un revêtement fini étale si et seulement si θ est une injection qui permet d'identifier H à un sous-groupe ouvert de G. Par ailleurs, tout revêtement fini étale d'anabélioïdes connexes peut être écrit sous cette forme sous un choix approprié des points de base à la source et au but.

2.1.3 Semi-graphe d'anabélioïdes et anabélioïde des recouvrements $\mathcal{B}(\mathcal{G})$

Nous allons maintenant définir la notion de *semi-graphe d'anabélioïdes* introduite par Mochizuki dans [Mzk3], qui est la transcription dans le langage anabélioïdique des *semi-graphes de groupes profinis* introduits par le même auteur dans [Mzk1]. Nous introduirons ensuite la catégorie des *recouvrements finis étales* d'un tel semi-graphe qui permettra de définir ses *revêtements finis étales.*

Définition 2.1.15. *Un* semi-graphe d'anabélioïdes (connexes) $\mathcal{G}$ *consiste en une collection de données suivante :*

- *un semi-graphe $\{\mathbb{G}, \mathcal{V}, \mathcal{E}\}$;*
- *pour chaque sommet $v \in \mathcal{V}$, un anabélioïde connexe $\mathcal{G}_v$;*
- *pour chaque arête $e \in \mathcal{E}$, un anabélioïde connexe $\mathcal{G}_e$;*
- *pour chaque branche b d'une arête e aboutissant à un sommet v, un morphisme d'anabélioïdes $b : \mathcal{G}_e \to \mathcal{G}_v$, c'est-à-dire un foncteur exact $b^* : \mathcal{G}_v \to \mathcal{G}_e$.*

Nous appellerons anabélioïdes constituants *les différents anabélioïdes connexes $\mathcal{G}_e$ et $\mathcal{G}_v$. Un semi-graphe d'anabélioïdes $\mathcal{G}$ est dit* connexe *(resp.* fini, dénombrable, localement fini*) lorsque le semi-graphe sous-jacent $\mathbb{G}$ est connexe (resp. fini, dénombrable, localement fini). Nous parlerons de* graphe d'anabélioïdes *lorsque $\mathbb{G}$ sera un graphe.*

Il y a une notion naturelle de morphisme de semi-graphes d'anabélioïdes *: un morphisme entre deux semi-graphes d'anabélioïdes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ est la donnée :*

- *d'un morphisme entre les semi-graphes associés :* $\mathbb{G} \to \mathbb{G}'$,
- *pour chaque sommet* v *(resp. arête* e*) de* $\mathbb{G}$ *envoyé sur un sommet* v' *(resp.* e'*) de* $\mathbb{G}'$*, des morphismes d'anabélioïdes* $\mathcal{G}_v \to \mathcal{G}'_{v'}$ *et* $\mathcal{G}_e \to \mathcal{G}'_{e'}$ *tels que si* e *aboutit à* v*, alors il y a un isomorphisme entre les morphismes d'anabélioïdes composés* $\mathcal{G}_e \to \mathcal{G}_v \to \mathcal{G}_{v'}$ *et* $\mathcal{G}_e \to \mathcal{G}_{e'} \to \mathcal{G}_{v'}$ *(i.e un isomorphisme entre les foncteurs associés et définis dans l'autre sens).*

Définition 2.1.16. *Soit* $\mathcal{G}$ *un semi-graphe connexe d'anabélioïdes non vide.*

Définissons la catégorie des recouvrements finis de $\mathcal{G}$*, notée* $\mathcal{B}(\mathcal{G})$*, comme la catégorie dont les objets sont déterminés par la donnée de* $\{S_c, \varphi_b\}$ *où :*

- *pour chaque sommet ou arête* c*,* $S_c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G}_c)$*,*
- *pour chaque branche* b *d'une arête* $e \in \mathcal{E}$ *aboutissant au sommet* $v \in \mathcal{V}$*,* $\varphi_b : b^*S_v \xrightarrow{\sim} S_e$ *est un isomorphisme dans* $\mathcal{G}_e$*,*

et dont les morphismes sont obtenus de manière naturelle à partir des morphismes au sein des différents anabélioïdes constituants $\mathcal{G}_c$ *de sorte que ces morphismes soient compatibles avec les différents* φ_b*.*

Proposition 2.1.17 ([Mzk3])**.** *La catégorie* $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ *des recouvrements finis de* $\mathcal{G}$ *est un anabélioïde connexe.*

$\mathcal{B}(\mathcal{G})$ étant un anabélioïde connexe, c'est-à-dire une catégorie galoisienne, il a un groupe fondamental.

Définition 2.1.18. *Si* $\mathcal{G}$ *est un semi-graphe d'anabélioïdes, son* groupe fondamental*, noté* $\pi_1(\mathcal{G})$*, est défini comme égal au groupe fondamental* $\pi_1(\mathcal{B}(\mathcal{G}))$ *de l'anabélioïde connexe* $\mathcal{B}(\mathcal{G})$*. Il est défini à unique isomorphisme extérieur près.*

Considérons maintenant un semi-graphe connexe d'anabélioïdes $\mathcal{G}$. Prenons $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}(\mathcal{G}))$ et considérons le revêtement fini étale d'anabélioïdes $i_S : \mathcal{B}(\mathcal{G})_S \to \mathcal{B}(\mathcal{G})$. Alors les définitions précédentes impliquent que $\mathcal{B}(\mathcal{G})_S$ est exactement la catégorie des recouvrements finis (i.e. un $\mathcal{B}(-)$) d'un certain semi-graphe connexe d'anabélioïdes $\mathcal{G}'$ équipé d'un morphisme $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ de semi-graphes d'anabélioïdes au-dessus d'un morphisme de semi-graphes $\mathbb{G}' \to \mathbb{G}$ qui est *propre*, c'est-à-dire qui préserve le nombre de branches des arêtes.

Plus précisément, si v est par exemple un sommet de $\mathbb{G}$, l'ensemble des sommets v' de $\mathbb{G}'$ au-dessus de v correspondent aux composantes connexes de l'anabélioïde $\mathcal{B}(\mathcal{G})_S \times_{\mathcal{B}(\mathcal{G})} \mathcal{G}_v$ qui n'est pas forcément connexe, et l'anabélioïde connexe $\mathcal{G}'_{v'}$ n'est autre que la composante connexe de $\mathcal{B}(\mathcal{G})_S \times_{\mathcal{B}(\mathcal{G})} \mathcal{G}_v$ déterminée par v'.

Définition 2.1.19.

1. *Si $\mathcal{G}$ est un semi-graphe d'anabélioïdes, un* revêtement fini étale *de $\mathcal{G}$ est un morphisme de semi-graphes d'anabélioïdes $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ induit par le revêtement fini étale d'anabélioïdes $i_S : \mathcal{B}(\mathcal{G})_S \to \mathcal{B}(\mathcal{G})$ pour un certain $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}(\mathcal{G}))$.*
2. *Un morphisme de semi-graphes d'anabélioïdes $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ est dit* localement trivial *(resp.* localement fini étale*) si et seulement si les morphismes induits entre chaque anabélioïde constituant sont des isomorphismes (resp. sont finis étales).*

2.1.4 Semi-graphe d'anabélioïdes d'une triangulation généralisée

Soit k un corps ultramétrique complet algébriquement clos. Nous allons maintenant associer à une triangulation généralisée un graphe d'anabélioïdes. Fixons pour la suite de cette partie une courbe k-analytique X quasi-lisse non vide munie d'une triangulation généralisée $S \subset X_{[2,3]}$. Commençons par lui associer un graphe (resp. semi-graphe) qui n'est autre que l'analogue du squelette tronqué (resp. squelette) de la triangulation généralisée S.

Notons $\mathcal{C}^\natural(X,S)$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty(X,S)$) l'ensemble des composantes connexes de $X \setminus S$ qui sont des couronnes relativement compactes (respectivement des composantes non relativement compactes) et $\mathcal{D}(X,S)$ l'ensemble des composantes connexes de $X \setminus S$ qui sont des disques. Si $\mathcal{C} \in \mathcal{C}^\natural(X,S)$, l'inclusion $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}) \hookrightarrow X$ s'étend à la compactification naturelle $\widehat{S}^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$ (cf. 1.3.6) en une application $\zeta_{\mathcal{C}} : \widehat{S}^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}) \to X$ (mais celle-ci n'est pas forcément injective, en particulier si la couronne $\mathcal{C}$ « boucle sur elle-même », i.e. si l'adhérence de $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$ dans X est homéomorphe à un cercle).

Définition 2.1.20.

1. *Le graphe localement fini associé à la triangulation généralisée S, noté $\mathbb{G}^\natural(X,S)$, est défini par :*
   - *ses sommets correspondent aux éléments de S ;*
   - *ses arêtes correspondent aux éléments de $\mathcal{C}^\natural(X,S)$: si e est une arête nous désignerons par $\mathcal{C}_e$ la couronne associée, e étant alors définie comme l'ensemble constitué des deux bouts de $\mathcal{C}_e$;*
   - *les branches (au sens des semi-graphes) d'une arête e correspondent aux bouts (au sens k-analytique) de $\mathcal{C}_e$, et une branche b de e aboutit à $\zeta_{\mathcal{C}_e}(b)$.*
2. *Le semi-graphe localement fini associé à la triangulation généralisée S, noté $\mathbb{G}(X,S)$, est défini par :*

- *ses sommets et ses arêtes fermées (c'est-à-dire contenant deux branches) correspondent exactement à ceux de* $\mathbb{G}^\natural(X,S)$ *;*
- *ses arêtes ouvertes (contenant une seule branche) correspondent aux éléments de* $\mathcal{C}^\infty(X,S)$*, c'est-à-dire aux arêtes non relativement compactes : si* e *est une telle arête nous désignerons par* $\mathcal{C}_e$ *la composante associée,* e *étant alors définie comme le singleton constitué de l'unique bout de* $\mathcal{C}_e$ *correspondant à son bord topologique dans* X *;*
- *l'unique branche d'une arête ouverte* e *correspondant à une composante* $\mathcal{C}_e$ *aboutit au sommet de* S *qui correspond au bord topologique de* $\mathcal{C}_e$ *dans* X*.*

Si $s \in S$, définissons $\mathsf{Comp}(X,S,s)$ comme l'image de l'application naturelle : $\mathrm{br}(X,s) \to \pi_0(X \setminus S)$. Définissons :

$$\mathcal{C}(X,S,s) = \Big(\mathcal{C}^\natural(X,S) \cup \mathcal{C}^\infty(X,S)\Big) \cap \mathsf{Comp}(X,S,s)$$
$$\mathcal{D}(X,S,s) = \mathcal{D}(X,S) \cap \mathsf{Comp}(X,S,s)$$
$$\mathrm{St}(X,S,s) = \{s\} \cup \bigsqcup_{T \in \mathsf{Comp}(X,S,s)} T \quad : \text{ « l'étoile en } s \text{ de la triangulation généralisée } S \text{ »}$$

Définition 2.1.21 (Graphe d'anabélioïdes associé à une triangulation généralisée)**.**

Le graphe $\mathbb{G}^\natural(X,S)$ *(resp. le semi-graphe* $\mathbb{G}(X,S)$*) peut être enrichi en un graphe d'anabélioïdes (resp. semi-graphe d'anabélioïdes) que l'on notera*

$$\mathcal{G}^\natural(X,S) \ \ (\textit{resp. } \mathcal{G}(X,S))$$

et qui sera défini par :

- *si* $s \in S$ *est un sommet,* $\mathcal{G}_s = \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathrm{St}(X,S,s))$
- *si* $e \in \mathcal{C}^\natural(X,S) \cup \mathcal{C}^\infty(X,S)$ *est une arête,* $\mathcal{G}_e = \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C}_e)$
- *si* b *est une branche de* e *aboutissant à* s*, alors*

$$b : \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C}_e) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathrm{St}(X,S,s))$$

est défini par le foncteur exact $b^* : \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathrm{St}(X,S,s)) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C}_e)$ *induit naturellement par l'injection* $\mathcal{C}_e \hookrightarrow \mathrm{St}(X,S,s)$*.*

Remarque 2.1.22. Le graphe $\mathbb{G}^\natural(X,S)$ prend en compte uniquement les couronnes *relativement compactes* (i.e. les éléments de $\mathcal{C}^\natural(X,S)$) parmi les arêtes qui apparaissent comme composantes connexes de $X \setminus S$. Néanmoins, la situation est différente pour le graphe d'anabélioïdes $\mathcal{G}^\natural(X,S)$, dont $\mathbb{G}^\natural(X,S)$ est le graphe sous-jacent : la définition même de

l'anabélioïde connexe associé à un sommet permet de garder une trace des composantes non relativement compactes (i.e. des éléments de $\mathcal{C}^\infty(X,S)$) issues de ce sommet.

2.2 Le monde des tempéroïdes

2.2.1 Définitions

Nous allons ici décrire le langage des tempéroïdes introduit par Mochizuki dans [Mzk3], versions « limites » d'anabélioïdes qui permettront de définir le *groupe fondamental tempéré d'un semi-graphe d'anabélioïdes*, analogue dans un contexte beaucoup plus catégorique du *groupe fondamental tempéré* d'espaces analytiques que nous avons introduit au 1.5.1.

Si Π est un groupe topologique, notons $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\Pi)$ la catégorie dont les objets sont les ensembles dénombrables discrets munis d'une action continue (i.e. à stabilisateurs ouverts) de Π, et dont les morphismes sont les morphismes de Π-ensembles. Un objet T de $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\Pi)$ est connexe (au sens des catégories) si et seulement si l'action de Π est transitive sur T.

Définition 2.2.1.

1. *Un groupe topologique* Π *est dit* tempéré *lorsqu'il peut être écrit comme une limite projective de groupes topologiques discrets dénombrables.*
2. *Une catégorie* $\mathcal{T}$ *sera appelée* tempéroïde connexe *si elle est équivalente à une catégorie de la forme* $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\Pi)$ *où* Π *est un groupe tempéré.*
3. *Une catégorie* $\mathcal{T}$ *sera appelée* tempéroïde *si elle est équivalente à une catégorie produit*
$$\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j$$
où J *est un ensemble dénombrable et* $\mathcal{T}_j$ *est un tempéroïde connexe pour tout* $j\in J$.
4. *Soient* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *des tempéroïdes. Un* morphisme de tempéroïdes $\varphi:\mathcal{T}_1\to\mathcal{T}_2$ *est défini comme un foncteur* $\varphi^*:\mathcal{T}_2\to\mathcal{T}_1$ *dans le sens opposé qui préserve les colimites dénombrables et les produits finis.*

Remarque 2.2.2. Tout groupe profini est tempéré. Si Π est un groupe tempéré, alors sa topologie admet une base de sous-groupes ouverts distingués, et tout sous-groupe ouvert de Π est fermé et d'indice dénombrable. Si $H\subseteq\Pi$ est un sous-groupe, alors l'ensemble

Π/H muni de l'action à gauche de Π définit un objet de $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\Pi)$ si et seulement si H est ouvert dans Π.

Remarque 2.2.3. Soit J un ensemble dénombrable et $\mathcal{T}_j$ un tempéroïde connexe, pour tout $j \in J$. Considérons le tempéroïde

$$\mathcal{T}_J := \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j.$$

Alors l'ensemble J et les tempéroïdes connexes $\mathcal{T}_j$ sont entièrement déterminés par le tempéroïde abstrait $\mathcal{T}_J$. Les différents $\mathcal{T}_j$ seront appelés les *composantes connexes de* $\mathcal{T}$. Ce résultat se montre comme dans 2.1.9 et 2.1.10, et découle de l'unicité de la décomposition en objets connexes de l'objet initial $\mathbf{1}_{\mathcal{T}_J}$ de $\mathcal{T}_J$.

En pensant aux tempéroïdes connexes comme à des « versions limites » d'anabélioïdes connexes, nous aimerions être capables de définir le « groupe fondamental » d'un tempéroïde connexe. La proposition suivante le permet :

Proposition 2.2.4 ([Mzk3], Prop. 3.2)**.** *Soient* Π_1 *et* Π_2 *deux groupes topologiques tempérés. Définissons* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *comme étant les tempéroïdes connexes* $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\Pi_1)$ *et* $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\Pi_2)$*. Alors il y a une bijection naturelle entre les* classes d'isomorphismes de morphismes de tempéroïdes $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ *et l'ensemble des* homorphismes continus extérieurs $\Pi_1 \to \Pi_2$ *(i.e. l'ensemble des orbites de l'action de* Π_2 *par conjugaison à droite sur l'ensemble* $\mathrm{Hom}(\Pi_1 \to \Pi_2)$ *des homomorphismes continus de* Π_1 *dans* Π_2*).*

Remarque 2.2.5. Deux morphismes de tempéroïdes $\varphi, \psi : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ sont dits *isomorphes* si les foncteurs associés $\varphi^*, \psi^* : \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_1$ sont isomorphes, c'est-à-dire s'il existe une transformation naturelle entre φ et ψ dont tous les morphismes induits sont des isomorphismes.

Définition 2.2.6 (Groupe fondamental tempéré d'un tempéroïde connexe)**.** *La proposition précédente nous permet d'affirmer que si* $\mathcal{T}$ *est un tempéroïde connexe, alors tous les groupes tempérés* Π *tels que la catégorie* $\mathcal{T}$ *est équivalente à* $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\Pi)$ *sont isomorphes entre eux (de façon canonique modulo les automorphismes intérieurs). Cela permet ainsi de définir le* groupe fondamental tempéré *de* $\mathcal{T}$*, noté*

$$\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{T}),$$

comme étant égal au groupe Π *défini à unique isomorphisme extérieur près.*

Exemples 2.2.7. Soit X un espace k-analytique connexe. Rappelons que $\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp}}(X)$ désigne la catégorie des revêtements tempérés de X. Alors $\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp}}(X)$ est un tempéroïde

connexe, et le groupe tempéré $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ n'est autre que le groupe fondamental tempéré du tempéroïde connexe $\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp}}(X)$, de sorte que :

$$\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp}}(X) \simeq \mathcal{B}^{\mathrm{temp}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)\right).$$

La catégorie $\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp},\,(p')}(X)$ des revêtements tempérés modérés (cf. définition 1.5.5) de X est également un temproïde connexe, et :

$$\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp},\,(p')}(X) \simeq \mathcal{B}^{\mathrm{temp}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X)\right).$$

Nous allons maintenant introduire la notion de *revêtement étale d'un tempéroïde*, qui se définit de manière très analogue à celle de *revêtement étale fini d'un anabélioïde.*

Proposition 2.2.8. *Soit $\mathcal{T}$ un tempéroïde connexe et $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$. La catégorie $\mathcal{T}_T$ des objets de $\mathcal{T}$ au-dessus de T est un tempéroïde dont les composantes connexes correspondent aux composantes connexes de T en tant qu'objet de $\mathcal{T}$. De plus, le foncteur $i_T^* : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_T$ défini en prenant le produit avec T commute avec les produits finis et les colimites dénombrables et définit donc un morphisme de tempéroïdes connexes :*

$$i_T : \mathcal{T}_T \to \mathcal{T}$$

Définition 2.2.9. *Un morphisme de tempéroïdes connexes $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{T}$ est un* revêtement étale *s'il se factorise comme le composé d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_T$ avec le morphisme $i_T : \mathcal{T}_T \to \mathcal{T}$ où $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$.*

Si $\mathcal{X}$ est une catégorie, nous noterons $\mathcal{X}^\top$ la catégorie formée à partir de $\mathcal{X}$ dont les objets sont toutes les colimites dénombrables «formelles» arbitraires d'objets de $\mathcal{X}$. Si I et J sont deux ensembles dénombrables d'indices, les morphismes sont définis de manière naturelle par :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}^\top}(\coprod_{i\in I} A_i, \coprod_{j\in J} B_j) := \prod_{i\in I}\prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(A_i, B_j)$$

Remarque 2.2.10. Si $\mathcal{X}$ est un anabélioïde (resp. anabélioïde connexe), la catégorie $\mathcal{X}^\top$ est un tempéroïde (resp. tempéroïde connexe) que l'on appelera la *tempérification* de $\mathcal{X}$. En particulier si G est un groupe profini alors $\mathcal{B}(G)^\top = \mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(G)$.

2.2.2 Tempéroïde des recouvrements tempérés $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G})$ associé à un semi-graphe d'anabélioïdes

Définition 2.2.11. *Soit $\mathcal{G}$ un semi-graphe connexe dénombrable non vide d'anabélioïdes.*

Définissons la catégorie des recouvrements de $\mathcal{G}$, *notée*

$$\mathcal{B}^{\mathrm{cov}}(\mathcal{G}),$$

comme la catégorie dont les objets sont déterminés par la donnée de $\{S_c, \varphi_b\}$ *où :*

- *pour chaque sommet ou arête* c, $S_c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G}_c^\top)$,
- *pour chaque branche* b *d'une arête* $e \in \mathcal{E}$ *aboutissant au sommet* $v \in \mathcal{V}$, $\varphi_b : b^* S_v \xrightarrow{\sim} S_e$ *est un isomorphisme dans* $\mathcal{G}_e^\top$,

et dont les morphismes sont obtenus de manière naturelle à partir des morphismes au sein des $\mathcal{G}_c^\top$ *de sorte que ces morphismes soient compatibles avec les différents* φ_b.

Remarque 2.2.12. Nous avons implicitement utilisés dans la définition précédente le fait que les foncteurs $b^* : \mathcal{G}_v \to \mathcal{G}_e$ se prolongent tout naturellement en des foncteurs : $b^* : \mathcal{G}_v^\top \to \mathcal{G}_e^\top$.

Considérons maintenant un semi-graphe connexe dénombrable d'anabélioïdes $\mathcal{G}$. Si $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}^{\mathrm{cov}}(\mathcal{G}))$ alors les définitions précédentes impliquent que la catégorie $\mathcal{B}^{\mathrm{cov}}(\mathcal{G})_S$ au-dessus de S est exactement la catégorie des recouvrements (i.e. un $\mathcal{B}^{\mathrm{cov}}(-)$) d'un certain semi-graphe connexe dénombrable d'anabélioïdes $\mathcal{G}'$ équipé d'un morphisme $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ de semi-graphes d'anabélioïdes.

Définition 2.2.13. *Si* $\mathcal{G}$ *est un semi-graphe connexe dénombrable d'anabélioïdes, un* revêtement étale *de* $\mathcal{G}$ *est un morphisme de semi-graphes d'anabélioïdes* $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ *induit comme dans ce qui précède par un certain* $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}^{\mathrm{cov}}(\mathcal{G}))$.

Par analogie avec le monde des revêtements finis de semi-graphes d'anabélioïdes nous aimerions pouvoir dire que $\mathcal{B}^{\mathrm{cov}}(\mathcal{G})$ est un tempéroïde connexe. Or cela est faux généralement, et afin d'avoir des résultats similaires nous allons avoir besoin d'introduire une certaine catégorie de revêtements étales qui contiendra à la fois les revêtements finis et les revêtements étales triviaux (isomorphes à un coproduit dénombrable de copies de la base), et à laquelle il sera suffisant de se restreindre.

Si $\mathcal{G}$ est un semi-graphe connexe dénombrable d'anabélioïdes nous allons donc définir la catégorie des *recouvrements tempérés* $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ qui sera une sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}^{\mathrm{cov}}(\mathcal{G})$ contenant les recouvrements finis $\mathcal{B}(\mathcal{G})$. On aura ainsi des injections pleines :

$$\mathcal{B}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{B}^{\mathrm{cov}}(\mathcal{G})$$

Définition 2.2.14 (Revêtements tempérés)**.** *Un recouvrement étale* $\{S_v, \varphi_e\} \in \mathcal{B}^{\mathrm{cov}}(\mathcal{G})$ *est dit* tempéré *si le revêtement étale de semi-graphes d'anabélioïdes* $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ *auquel il*

donne lieu est tel qu'il existe un revêtement étale fini $\mathcal{G}'' \to \mathcal{G}$ avec la propriété que pour chaque sommet ou arête c de $\mathbb{G}$, la restriction de $\mathcal{G}'' \to \mathcal{G}$ à $\mathcal{G}_c$ trivialise la restriction de $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ à $\mathcal{G}_c$. Cela revient à dire que par le changement de base $\mathcal{G}''_c \to \mathcal{G}_c$ le revêtement $\mathcal{G}'_c \to \mathcal{G}_c$ est trivial, c'est-à-dire isomorphe au coproduit d'un nombre dénombrable de copies de $\mathcal{G}''_c$.

Un tel revêtement étale $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ induit par un recouvrement tempéré sera appelé revêtement tempéré *du semi-graphe d'anabélioïdes $\mathcal{G}$. La catégorie des recouvrements tempérés sera notée*

$$\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}).$$

Le prochain résultat, de [Mzk3], nous montre que les revêtements tempérés sont suffisants dans la théorie des tempéroïdes, et suffisamment riches pour pouvoir définir sous certaines hypothèses le groupe fondamental tempéré d'un semi-graphe de tempéroïdes.

Proposition 2.2.15 (Groupe tempéré d'un semi-graphe d'anabélioïdes)**.** *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ des semi-graphes connexes, dénombrables, quasi-cohérents, totalement élevés, totalement détachés et sommitalement minces (ces notions seront définies dans la suite) d'anabélioïdes. Alors :*

1. *La catégorie $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G})$ est un tempéroïde connexe, ce qui permet de définir le* groupe fondamental tempéré *du semi-graphe $\mathcal{G}$, noté*

$$\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}),$$

comme étant égal au groupe fondamental tempéré $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}))$ du tempéroïde connexe $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G})$. On a donc une équivalence de catégories :

$$\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G})) \approx \mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}).$$

2. *L'injection pleine $\mathcal{B}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G})$ induit une injection de groupes topologiques*

$$\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \pi_1(\mathcal{G})$$

.

3. *Tout morphisme de semi-graphes d'anabélioïdes $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ induit un morphisme de tempéroïdes $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}') \to \mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G})$. Par ailleurs si $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ est un revêtement tempéré et si $\mathcal{G}$ est cohérent, alors le morphisme induit $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}') \to \mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G})$ est un revêtement étale.*

Remarque 2.2.16. Soit $\mathcal{G}$ un semi-graphe connexe, dénombrable, quasi-cohérent, totalement élevé, totalement détaché et sommitalement mince d'anabélioïdes. Soit $(\mathcal{G}_i \to \mathcal{G})_{i\in I}$ une famille de revêtements étales finis connexes de $\mathcal{G}$ qui est cofinale (c'est-à-dire telle que si pour chaque $i \in I$ $\mathcal{G}_i \to \mathcal{G}$ est induit par un certain $S_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}(\mathcal{G}))$, alors la famille $(S_i)_{i\in I}$ est cofinale dans $\mathcal{B}(\mathcal{G})$). Nous savons alors que le groupe profini $\pi_1(\mathcal{G})$ peut être construit comme la limite projective :

$$\pi_1(\mathcal{G}) = \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Gal}(\mathcal{G}_i/\mathcal{G}).$$

Pour tout $i \in I$ notons $\widetilde{\mathcal{G}}_i \to \mathcal{G}_i$ le *« revêtement universel »* de $\mathcal{G}_i$, i.e. le revêtement étale localement trivial de $\mathcal{G}_i$ dont le semi-graphe sous-jacent correspond au revêtement universel du semi-graphe $\mathbb{G}_i$ correspondant à $\mathcal{G}_i$. Le groupe $T_i := \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}_i}(\widetilde{\mathcal{G}}_i)$ est alors un groupe libre discret. Par ailleurs $\widetilde{\mathcal{G}}_i \to \mathcal{G}$ est un revêtement tempéré galoisien, dont le groupe de Galois s'insère dans une suite exacte :

$$\{1\} \longrightarrow T_i \longrightarrow \mathrm{Gal}(\widetilde{\mathcal{G}}_i/\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathcal{G}_i/\mathcal{G}) \longrightarrow \{1\}.$$

La famille $(\mathrm{Gal}(\widetilde{\mathcal{G}}_i/\mathcal{G}))_{i\in I}$ est un système projectif, et le groupe tempéré de $\mathcal{G}$ peut être décrit de la manière suivante :

$$\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}) = \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Gal}(\widetilde{\mathcal{G}}_i/\mathcal{G}).$$

2.3 Hypothèses mochizukiennes

Avant d'énoncer le résultat fondamental sur les semi-graphes d'anabélïoides dont nous nous servirons dans la suite, nous allons tout d'abord avoir besoin de définir certaines notions que l'on qualifiera de *mochizukiennes*.

Si $\mathcal{G}$ est un semi-graphe d'anabélïoides, notons π_v et π_b (ou π_e) les groupes fondamentaux des anabélioïdes connexes $\mathcal{G}_v$ et $\mathcal{G}_e$ dont on choisit des points de bases, pour chaque sommet v et chaque branche b d'une arête e aboutissant à v. La branche b définit un morphisme de groupes (extérieur) $b_* : \pi_b \to \pi_v$. On dira que $\mathcal{G}$ est de *type injectif* lorsque tous les morphismes de ce type sont injectifs. Si $\mathcal{G}$ est de type injectif, nous continuerons à noter π_b l'image de π_b dans π_v par b_*, celle-ci étant définie à conjugaison près dans π_v.

2.3.1 Contraintes locales

Définition 2.3.1. *Soit $\mathcal{G}$ un semi-graphe d'anabélioïdes de type injectif. Un* approximateur de $\mathcal{G}$ *sera défini comme un morphisme de semi-graphes d'anabélioïdes $\mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ au-dessus d'un même semi-graphe $\mathbb{G}$ tel que $\mathcal{G}'$ est de type injectif et :*

1. *il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que pour tout sommet v de $\mathbb{G}$ le groupe π'_v soit fini de cardinal $\leqslant N$;*
2. *si c est une arête ou un sommet de $\mathbb{G}$, alors le morphisme de groupes $\pi_c \to \pi'_c$ induit par le morphisme d'anabélioïdes $\mathcal{G}_c \to \mathcal{G}'_c$ est surjectif.*

Définition 2.3.2. *Un groupe profini G est dit* mince *lorsque le centralisateur $Z_G(H)$ de tout sous-groupe ouvert H de G est trivial.*

Remarque 2.3.3. Un groupe profini G est mince si et seulement si le centre de tout sous-groupe ouvert est trivial. En effet la nécessité de cette condition est évidente, tandis que l'autre sens se montre comme suit : si $H \subseteq G$ est un sous-groupe ouvert et $h \in Z_G(H)$, alors le sous-groupe H' engendré par H et h est ouvert et h est dans son centre, donc trivial par hypothèse.

Définition 2.3.4. *Soit $\mathcal{G}$ un semi-graphe d'anabélioïdes de type injectif de semi-graphe sous-jacent $\mathbb{G}$.*

1. *$\mathcal{G}$ est dit* totalement détaché *lorsque, pour tout sommet v auquel une branche b aboutit, π_v est d'ordre infini et pour tout $g \in \pi_v$:*
   i) l'intersection $\pi_b \cap g.\pi_b.g^{-1}$ est triviale dans π_v si $g \notin \pi_b$
   ii) l'intersection $\pi_b \cap g.\pi_{b'}.g^{-1}$ est triviale dans π_v si b' est une branche différente de b aboutissant à v.
2. *$\mathcal{G}$ est dit* totalement élevé *si pour tout sommet v de $\mathbb{G}$ et pour tout entier $M \geqslant 1$ il existe un approximateur $\mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ et un sous-groupe $N_M \subseteq \pi'_v$ d'ordre $\geqslant M$ tel que dans π'_v l'intersection $N_M \cap \pi'_b$ soit triviale pour toute branche b aboutissant à v.*
3. *$\mathcal{G}$ est dit* sommitalement mince *si pour tout sommet v de $\mathbb{G}$ l'anabélioïde connexe $\mathcal{G}_v$ est* mince*, c'est-à-dire si π_v est un groupe mince.*

2.3.2 Contrainte globale

Les définitions précédentes étant de nature locale, nous allons donner une dernière définition de nature plus globale, celle que *quasi-cohérence.*

Définition 2.3.5. *Un semi-graphe d'anabélioïdes $\mathcal{G}$ de type injectif sera dit* quasi-cohérent *lorsque pour tout entier $r \geqslant 1$ et toute collection de revêtements finis étales $(\mathcal{H}_c \to \mathcal{G}_c)_c$ de degrés $\leqslant r$ (où c décrit toutes les composantes du graphe $\mathbb{G}$, ie. l'ensemble des arêtes et des sommets), il existe un approximateur $\mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ tel que, pour toute composante c de $\mathbb{G}$, le tiré en arrière à $\mathcal{G}_c$ du « revêtement universel » $\mathcal{H}'_c \to \mathcal{G}'_c$ de $\mathcal{G}'_c$ (ie. le revêtement fini étale déterminé par le sous-groupe trivial de $\mathcal{G}'_c$) trivialise $\mathcal{H}_c \to \mathcal{G}_c$.*

$\mathcal{G}$ sera dit cohérent *s'il est* quasi-cohérent *et que, pour chaque composante c de $\mathbb{G}$, le groupe profini π_c est topologiquement finiment engendré.*

2.4 Reconstruction du semi-graphe sous-jacent d'un tempéroïde

Nous allons énoncer un résultat de Mochizuki, fondamental dans la suite de ce texte, qui justifie l'usage que l'on fait des semi-graphes d'anabélioïdes. Il faut le voir comme une version faible de [Mzk3] , Corollary 3.9.
Mochizuki définit les morphismes *quasi-géométriques* de tempéroïdes puis énonce un résultat général important qui donne sous certaines hypothèses une correspondance entre les morphismes localement ouverts de semi-graphes d'anabéloïdes et les morphismes quasi-géométriques des tempéroïdes correspondants. Il n'est cependant pas nécessaire ici de définir les morphismes quasi-géométriques car nous utiliserons une version plus faible de son résultat. En effet, en remarquant que tout isomorphisme de tempéroïdes est quasi-géométrique, on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.4.1 (Reconstruction du semi-graphe d'anabélioïdes sous-jacent, [Mzk3] (Corollary 3.9))**.**

Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ des graphes connexes dénombrables d'anabélioïdes de type injectif, quasi-cohérents, totalement élevés, totalement détachés et sommitalement minces. Alors en appliquant "$\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(-)$" on obtient une bijection naturelle entre les isomorphismes de semi-graphes d'anabélioïdes $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ *et les* isomorphismes de tempéroïdes $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{H})$.

Chapitre 3

Description du semi-graphe d'anabélioïdes d'une triangulation

Et l'harmonie est trop exquise,
Qui gouverne tout son beau corps,
Pour que l'impuissante analyse
En note les nombreux accords.

Charles Baudelaire
(Tout entière, les Fleurs du Mal)

Ce chapitre est dédié à la description du semi-graphe d'anabélioïdes d'une triangulation (généralisée) d'une courbe k-analytique quasi-lisse (cf. section 2.1.4). La description des composantes coronaires, c'est-à-dire les composantes des arêtes, se déduit facilement du caractère kummérien des revêtements modérés d'une couronne. La description des composantes sommitales, plus délicate, fera appel à des considérations locales de germes, de courbe résiduelle attachée à un point de type 2 et de valuations attachées aux branches qui en sont issues. Nous serons en mesure de donner des conditions sur la courbe triangulée assurant l'ensemble des conditions mochizukiennes à son graphe d'anabélioïdes. Cela nous mènera jusqu'à la définition des courbes k-analytiquement hyperboliques.

Soit k un corps ultramétrique complet, algébriquement clos, et p l'exposant caractéristique de $\widetilde{k}$. Fixons un système de racines primitives l'unité, de sorte que l'on ait des isomorphismes naturels : $\mu_n(k) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}^*} \mu_n(k) = \widehat{\mathbb{Z}}$ (plutôt que de parler de $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$).

3.1 Comportement des composantes coronaires

3.1.1 Cas d'une vraie triangulation

Nous appellerons *kummérien* tout revêtement étale fini $\varphi : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ entre deux couronnes k-analytiques compactes tel qu'il existe un certain entier ℓ premier à p permettant de considérer $\mathcal{C}'$ comme un μ_ℓ-torseur de Kummer de $\mathcal{C}$ via φ. Rappelons que le choix d'une orientation de $\mathcal{C}$ permet d'exhiber un isomorphisme canonique : $\mathsf{Kum}_\ell(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ (cf. 1.4.2).

Soit $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$ le complété pro-p'-fini de $\mathbb{Z}$, égal à $\prod_{q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}} \mathbb{Z}_q$.

Proposition 3.1.1 (Description du groupe fondamental modéré des disques et des couronnes, [Ber2], Théorèmes 6.3.2 et 6.3.5)**.**

1. *Tout revêtement fini modéré d'un disque est trivial. De là, si $\mathcal{D}$ est un disque k-analytique, alors $\pi_1^{\mathrm{t}}(\mathcal{D}) = \{1\}$;*
2. *Tout revêtement fini galoisien modéré d'une couronne de type $\mathcal{C}_I$ avec I intervalle compact de $\mathbb{R}_+^*$ est kummérien. De là, si $\mathcal{C}$ est une couronne k-analytique compacte, $\pi_1^{\mathrm{t}}(\mathcal{C}) = \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$.*

Si $\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ est un plongement de couronnes k-analytiques compactes permettant de considérer $\mathcal{C}'$ comme une sous-couronne de $\mathcal{C}$, alors comme on a d'une part pour tout entier ℓ premier à p un isomorphisme $\mathsf{Kum}_\ell(\mathcal{C}') \simeq \mathsf{Kum}_\ell(\mathcal{C})$ (cf. 1.4.2) et que de l'autre tout revêtement galoisien modéré de $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}'$ est kummérien, le foncteur naturel associé $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C}') \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C})$ est une équivalence de catégories. Par conséquent, pour n'importe quelle couronne k-analytique $\mathcal{C}$ (en particulier pour toute couronne ouverte) l'on a :

$$\pi_1^{\mathrm{t}}(\mathcal{C}) = \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}.$$

Si S est une triangulation généralisée de X, les composantes $\mathcal{G}_e$ du graphe d'anabélioïdes $\mathcal{G}(X, S)$ données par les arêtes correspondant à des couronnes sont donc isomorphes (en tant qu'anabélioïdes connexes) à $\mathcal{B}(\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})$.

Remarque 3.1.2. En reprenant le raisonnement précédent restreint aux μ_ℓ-torseurs on obtient pour toute couronne $\mathcal{C}$ l'isomorphisme :

$$H^1(\mathcal{C}_{\text{ét}}, \mu_\ell) \simeq \mathsf{Kum}_\ell(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}.$$

3.1.2 Triangulation généralisée et rabotée d'une courbe

Expliquons pourquoi la description du semi-graphe d'anabélioïdes $\mathcal{G}(X,S)$ associé à une triangulation généralisée S d'une courbe k-analytique X peut se ramener, quitte à restreindre X en une courbe que l'on appellera une *rabotée* de X, à supposer que S est une vraie triangulation de X. Reprenons l'exemple esquissé à la remarque 1.3.13 : celui d'une courbe k-analytique Y quasi-lisse de squelette analytique non vide, à laquelle on enlève un point x de type 4. Enlever x revient à rajouter l'arête ouverte $]x,r(x)]$: $S^{\mathrm{an}}(Y\setminus\{x\}) = S^{\mathrm{an}}(Y)\cup\,]x,r(x)]$. Or $r^{-1}(]x,r(x)])$ n'a aucune raison d'être une couronne. Néanmoins, tout point $\widetilde{x}\in]x,r(x)]$ est de type 2 ou 3, et $r^{-1}(]\widetilde{x},r(x)])$ a le bon goût d'être une couronne k-analytique d'après [Duc] (5.1.12.3). Cela nous amène à définir la notion de *rabotée d'une courbe.*

Définition 3.1.3 (Rabotée d'une courbe)**.** *Soit X une courbe k-analytique connexe quasi-lisse dont S est une triangulation généralisée non vide de squelette Γ. Notons r la rétraction canonique de X sur Γ. Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble (éventuellement vide) des composantes connexes de $\Gamma\setminus S$ non relativement compactes dans Γ dont la préimage par r n'est pas une couronne k-analytique. Il existe une famille $(x_I)_{I\in\mathscr{I}}$ de S telle que I est un intervalle ouvert non relativement compact aboutissant à x_I, pour tout $I\in\mathscr{I}$. Une* rabotée de X relativement à S *sera définie comme une courbe k-analytique $\widetilde{X}$ obtenue à partir de X en ne gardant de chaque $r^{-1}(I)$ que les couronnes $r^{-1}(\,]x_I,\widetilde{x_I}[\,)$:*

$$\begin{aligned}\widetilde{X} &= \left(X\setminus\bigcup_{I\in\mathscr{I}} r^{-1}(I)\right)\cup\bigcup_{I\in\mathscr{I}} r^{-1}(\,]x_I,\widetilde{x_I}[\,)\\ &= X\setminus\bigcup_{I\in\mathscr{I}} r^{-1}(I\setminus\,]x_I,\widetilde{x_I}[\,),\end{aligned}$$

où $(\widetilde{x_I})_{I\in\mathscr{I}}$ est une collection de points de Γ vérifiant $\widetilde{x_I}\in I$ pour tout $I\in\mathscr{I}$.

Si l'ensemble Σ_X des nœuds du squelette analytique $S^{\mathrm{an}}(X)$ est non vide, on désignera par rabotée de X *toute rabotée de X relativement à la triangulation généralisée Σ_X.*

Remarque 3.1.4. La courbe X est une rabotée d'elle-même si et seulement si S constitue une triangulation de X. La notion de *rabotée* n'est donc utile que dans le cas contraire. Remarquons qu'une rabotée $\widetilde{X}$ de X relativement à S contient toujours S en tant qu'ensemble des sommets du squelette de la triangulation de $\widetilde{X}$ définie par S, et que la donnée d'une rabotée de X est équivalente au choix de la famille $(\widetilde{x_I})_{I\in\mathscr{I}}$.

Proposition 3.1.5. *Soit X une courbe k-analytique connexe quasi-lisse munie d'une triangulation généralisée S non vide de squelette Γ. Notons $\widetilde{X}$ une rabotée de X rela-*

tivement à S. Alors les deux semi-graphes d'anabélioïdes $\mathcal{G}(\widetilde{X}, S)$ et $\mathcal{G}(X, S)$ sont isomorphes. Ainsi, tous les groupes des arêtes (que celles-ci soient ouvertes ou fermées) sont isomorphes à $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$.

Démonstration. L'application $\mathcal{I} \mapsto r(\mathcal{I})$ établit une bijection entre les composantes connexes de $X \setminus S$ qui ne sont ni des disques ni des couronnes, et l'ensemble $\mathscr{I}$ (cf. définition 3.1.3) des composantes connexes de $\Gamma \setminus S$ non relativement compactes dans Γ dont la préimage par r n'est pas une couronne. Soit $(\widetilde{x_I})_{I \in \mathscr{I}}$ la famille de Γ permettant de définir $\widetilde{X}$. Eu égard à la construction de $\mathcal{G}(\widetilde{X}, S)$ et $\mathcal{G}(X, S)$, il suffit de montrer que pour toute arête ouverte e de $\mathcal{G}(X, S)$ (telle que la composante $\mathcal{I}_e$ corresponde à $I_e \in \mathscr{I}$), le foncteur $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{I}_e) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}\left(r^{-1}\left(\,]x_{I_e}, \widetilde{x_{I_e}}[\,\right)\right)$ induit naturellement par l'injection $r^{-1}\left(\,]x_{I_e}, \widetilde{x_{I_e}}[\,\right) \hookrightarrow \mathcal{I}_e$ est une équivalence de catégories. Comme $r^{-1}\left(\,]x_{I_e}, \widetilde{x_{I_e}}[\,\right)$ est une couronne et que tout revêtement galoisien modéré d'une couronne est kummérien, on a

$$\pi_1^{\mathrm{t}}\left(r^{-1}(\,]x_{I_e}, \widetilde{x_{I_e}}[\,)\right) = \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}.$$

Soit $(J_k =]x_{I_e}, y_k[)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de sous-intervalles emboités de I_e, avec $J_k \subseteq J_{k+1}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{C}_k = r^{-1}(J_k)$: c'est une couronne k-analytique. Remarquons que $\mathcal{C}_k$ est une sous-couronne de $\mathcal{C}_{k'}$ dès que $k < k'$, d'où l'équivalence de catégories $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C}_k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C}'_k)$. Comme chaque $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C}_k)$ est équivalente à $\mathcal{B}\left(\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}\right)$ et que l'on a :

$$\mathcal{I}_e = \varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_k,$$

alors on obtient en passant à la limite inductive que $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{I}_e) \simeq \mathcal{B}\left(\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}\right)$, d'où l'équivalence souhaitée $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{I}_e) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}\left(r^{-1}\left(\,]x_{I_e}, \widetilde{x_{I_e}}[\,\right)\right)$.

□

La proposition précédente nous indique qu'étudier le semi-graphe d'anabélioïdes d'une courbe munie d'une triangulation généralisée revient à étudier le semi-graphe d'anabélioïde d'une courbe munie d'une vraie triangulation. Par conséquent, toutes les arêtes de $\mathcal{G}(X, S)$ se comportent comme si elles étaient associées à de vraies couronnes en ce qu'elles ont chacun pour groupe associé $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$. Il est ainsi justifiable d'appeler *composantes coronaires* d'une triangulation généralisée toutes les arêtes (ou les composantes associées aux arêtes) de son semi-graphe d'anabélioïdes.

Remarque 3.1.6. On peut montrer que le morphisme $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\widetilde{X}) \to \pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ induit par le plongement $\widetilde{X} \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme de groupes : $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(\widetilde{X}) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$. Ainsi, une courbe et sa rabotée sont indistinguables sous le prisme des revêtements (tem-

pérés) modérés. En revanche ils n'auront plus du tout les mêmes p-revêtements, et le morphisme $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\widetilde{X}) \to \pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ n'a aucune chance d'être un isomorphisme dès que $\widetilde{X} \subsetneq X$.

3.2 Comportement des composantes sommitales

3.2.1 Germes d'espaces k-analytiques

Commençons par rappeler la définition de la catégorie des *germes ponctuels d'espaces k-analytiques* :

Un morphisme entre espaces k-analytiques pointés $f : (Y, y) \to (X, x)$ est un *isomorphisme local* s'il induit un isomorphisme d'un voisinage ouvert de y dans Y sur un voisinage ouvert de x dans X. La catégorie des *germes d'espaces k-analytiques* est définie comme la localisée de la catégorie des espaces k-analytiques pointés par la famille des isomorphismes locaux. Un morphisme entre espaces analytiques pointés $f : (Y, y) \to (X, x)$ induit par conséquent un isomorphisme de germes si et seulement si c'est un isomorphisme local.

Soit $\varphi : (Y, y) \to (X, x)$ un morphisme de germes d'espaces k-analytiques. On dira qu'un morphisme $\psi : (Z, z) \to (W, w)$ d'espaces k-analytiques pointés est un *représentant de* φ s'il induit le morphisme φ dans la catégorie des germes d'espaces analytiques, ce qui revient à dire qu'il existe un diagramme commutatif de morphismes de germes :

$$\begin{tikzcd}
(Y, y) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\varphi"'] & (Z, z) \arrow[d, "\psi"] \\
(X, x) \arrow[r, "\sim"] & (W, w)
\end{tikzcd}$$

où les lignes horizontales sont des isomorphismes. Tout morphisme de germes admet un représentant, cela découle de l'existence d'un « calcul des fractions catégorique »(cf. [Ber2], 3.4) dans la catégorie des germes d'espaces k-analytiques.

Définition 3.2.1. *Un morphisme de germes d'espaces k-analytiques $\varphi : (Y, y) \to (X, x)$ sera appelé un* revêtement modéré fini *(resp.* revêtement fini étale*)* de (X, x) *s'il admet au moins un représentant qui est un revêtement modéré fini ((resp. fini étale) d'espaces k-analytiques pointés. Nous noterons par la suite* $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}((X, x))$ *(resp.* $\mathrm{Cov}^{\mathrm{fét}}((X, x))$*) les catégories respectives de ces revêtements du germe (X, x).*

Si X désigne notre courbe k-analytique quasi-lisse de départ, S une triangulation généralisée et $s \in S$, remarquons que l'on a :

$$\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}((X,s)) := \varinjlim_{U} \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U)$$

où U décrit l'ensemble des voisinages ouverts de s.

Si $\mathcal{C} \in \mathcal{C}(X,S)$ et $\mathcal{D} \in \mathcal{D}(X,S)$, définissons de même :

$$\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C} \cap (X,s)) := \varinjlim_{U} \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C} \cap U)$$
$$\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{D} \cap (X,s)) := \varinjlim_{U} \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{D} \cap U).$$

La proposition suivante signifie que les comportements locaux des revêtements modérés autour de s sont décrits par les extensions finies du corps résiduel complété $\mathscr{H}(s)$ dominées par une extension galoisienne de degré premier à p.

Proposition 3.2.2. *Le foncteur naturel $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}((X,s)) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathscr{H}(s))$ est une équivalence de catégories, où $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathscr{H}(s))$ désigne la catégorie des schémas finis étales au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathscr{H}(s))$ dominés par un revêtement galoisien de degré premier à p.*

Démonstration. Cela découle directement du théorème 3.4.1 de [Ber2] qui nous indique que le foncteur naturel $\mathrm{Cov}^{\mathrm{fét}}((X,s)) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{fét}}(\mathscr{H}(s))$ est une équivalence de catégories, où $\mathrm{Cov}^{\mathrm{fét}}(\mathscr{H}(s))$ désigne la catégorie des schémas finis étales au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathscr{H}(s))$. □

Lemme 3.2.3. *Considérons deux domaines analytiques U_1 et U_2 de $X \setminus S$ qui sont des couronnes k-analytiques aboutissant à s, avec $U_1 \subseteq U_2$. Alors le plongement $U_1 \hookrightarrow U_2$ induit une équivalence de catégories : $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_1)$.*

Démonstration. Le point délicat est que le simple plongement $U_1 \hookrightarrow U_2$ ne suffit pas à faire de U_1 une sous-couronne de U_2 (voir définition 1.3.5). Les squelettes analytiques peuvent néanmoins s'écrire $S^{\mathrm{an}}(U_1) =]s, x_1[$ et $S^{\mathrm{an}}(U_2) =]s, x_2[$ avec $x_1, x_2 \in X$, de telle sorte qu'il existe $y \in X$ tel que $S^{\mathrm{an}}(U_1) \cap S^{\mathrm{an}}(U_2) =]s, y[$. Soit $V \subseteq U_1 \cap U_2$ la sous-couronne de U_1 et de U_2 dont le squelette analytique est $]s, y[$. D'après la proposition 1.4.2 combinée au caractère kummérien des revêtements modérés d'une couronne, on a les équivalences de catégories $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(V)$ et $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(V)$, d'où l'équivalence souhaitée : $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_1)$. □

Lemme 3.2.4. *Pour toute composante $T \in \mathsf{Comp}(X,S,s)$ la catégorie $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(T \cap (X,s))$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{B}(\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})$ des $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$-ensembles finis, et si $T \in \mathcal{C}(X,S,s)$ le foncteur de restriction $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(T) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(T \cap (X,s))$ est une équivalence de catégorie.*

Démonstration. D'après la proposition 3.1.5, on peut supposer que S est une vraie triangulation de X. Soit $T \in \mathsf{Comp}(X, S, s)$, et soit $(U_i)_i$ une base de voisinages ouverts de s telle que chaque $U_i \cap T$ soit une couronne (une telle base d'ouverts existe toujours). Si $U_i \subset U_j$ alors $U_i \cap T \to U_j \cap T$ est un plongement de couronnes, d'où l'on déduit d'après le lemme 3.2.3 précédent que le foncteur de restriction $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_j \cap T) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_i \cap T)$ est une équivalence de catégories. Par ailleurs ces équivalences sont compatibles avec l'identification des $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_i \cap T)$ à $\mathcal{B}(\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})$. On obtient donc en passant à la limite inductive que $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}((X, s) \cap T)$ est elle-même équivalente à $\mathcal{B}(\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})$, ainsi que l'équivalence lorsque T est une couronne. □

Proposition 3.2.5. *Soit $(X, S = \{s\})$ une courbe k-analytique connexe quasi-lisse munie d'une triangulation possédant un unique sommet.*

1. *Soit U un voisinage ouvert de s totalement découpé autour de s. Alors le foncteur naturel $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U)$ induit par l'injection $U \hookrightarrow X$ est pleinement fidèle et son image essentielle est constituée des objets de $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U)$ qui sont triviaux sur tout disque de $\mathsf{Comp}(X, S, s)$, c'est-à-dire dont l'image par le foncteur de restriction $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{D} \cap U)$ est triviale pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}(X, S)$.*
2. *Le foncteur de restriction $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}((X, s))$ est pleinement fidèle et son image essentielle est constituée des objets de $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}((X, s))$ qui sont triviaux sur tout disque de $\mathsf{Comp}(X, S, s)$, c'est-à-dire dont l'image par le foncteur de restriction $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}((X, s)) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{D} \cap (X, s))$ est triviale pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}(X, S)$.*

Démonstration.

1. Considérons le recouvrement ouvert de X suivant : $\mathcal{U} := U \cup (T)_{T \in \mathsf{Comp}(X,S,s)}$.
   Une *donnée de descente sur $\mathcal{U}$* consiste en la donnée de $(Y_U, (Y_T, \varphi_T)_T)$ où $Y_U \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U)$, $Y_T \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(T)$ et pour toute composante $T \in \mathsf{Comp}(X, S, s)$ un isomorphisme
   $$\varphi_T : \restriction Y_U \times_U U \cap T \xrightarrow{\sim} \restriction Y_T \times_T U \cap T.$$
   Les conditions usuelles sur les 1-cocycles sont ici tautologiques puisque l'intersection de trois des composantes ouvertes de $\mathcal{U}$ est automatiquement vide. Par descente topologique nous savons que la catégorie $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X)$ est équivalente à la catégorie des données de descente sur $\mathcal{U}$. Comme par ailleurs le foncteur de restriction $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(T) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U \cap T)$ est toujours pleinement fidèle (si T est un disque cela découle de la trivialité de tout revêtement modéré sur T, et si T est une couronne cela découle du lemme 3.2.3), alors le foncteur $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U)$ est pleinement fidèle.

Son image essentielle consiste en la donnée des éléments de $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U)$ dont l'image par le foncteur de restriction $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U \cap T)$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(T) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U \cap T)$ pour toute composante $T \in \mathsf{Comp}(X, S, s)$. Or nous savons d'après 3.2.3 que si T est une couronne ce dernier foncteur est une équivalence de catégories et que si T est un disque, tout revêtement modéré de T est trivial, de là l'on déduit le résultat.

2. Soit $(U_i)_i$ la famille des voisinages ouverts de s totalement découpés autour de s. Nous savons que cette famille forme une base de voisinages ouverts de s. Par le premier point démontré ci-dessus l'on sait que si $U_i \subset U_j$ le foncteur $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_j) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_i)$ est pleinement fidèle. En passant à la limite inductive on obtient que tous les foncteurs $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_j) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}((X, s))$ sont pleinement fidèles. Comme les $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_i)$ sont eux-mêmes pleinement fidèles d'après le premier point, alors par transitivité le foncteur $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}((X, s))$ est lui-même pleinement fidèle.

   Cherchons son image essentielle. Si $Z \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}((X, s))$ est dans l'image essentielle, alors il découle de la trivialité de tout revêtement modéré d'un disque que sa restriction à $\mathcal{D} \cap (X, s)$ est triviale pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}(X, S)$. Réciproquement, soit $Y \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}((X, s))$ tel que sa restriction à $\mathcal{D} \cap (X, s)$ soit triviale pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}(X, S)$. Il en existe alors un représentant $Y_i \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_i)$ pour un certain voisinage U_i totalement découpé autour de s. Si $\mathcal{D} \cap U_i$ est un disque, alors la restriction de Y_i à $\mathcal{D} \cap U_i$ est automatiquement triviale, et si $\mathcal{D} \cap U_i$ est une couronne nous savons d'après le lemme 3.2.4 que le foncteur de restriction $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{D} \cap U_i) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{D} \cap (X, s))$ est une équivalence de catégorie, donc la restriction de Y_i à $\mathcal{D} \cap U_i$ est également triviale. Par le premier point de la proposition cela nous indique que Y_i est dans l'image essentielle de $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(U_i)$, ce qui nous permet de conclure que Y est bien dans l'image essentielle de $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}((X, s))$, d'où le résultat.

□

3.2.2 Courbe résiduelle et valuation associée à une branche autour d'un point de type 2

Rappelons (cf. 1.3.10) que la *courbe résiduelle* d'un point x de type 2 d'une courbe k-analytique X est la $\widetilde{k}$-courbe projective, lisse et intègre dont le corps des fonctions vérifie :

$$\widetilde{k}(\mathscr{C}_x) = \widetilde{\mathscr{H}(x)}.$$

Le *genre de* x, noté $g(x)$, est défini comme le genre de la courbe résiduelle $\mathscr{C}_x$ lorsque x est de type 2 (il est égal à 0 sinon). L'espace (topologique) de Zariski-Riemann $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$ des valuations sur $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ triviales sur $\widetilde{k}$ est alors homéomorphe à l'espace topologique sous-jacent au schéma $\mathscr{C}_x$: au point générique correspond la valuation triviale et à chaque point fermé correspond une valuation discrète.

Dans ([Duc], 4.2.6), l'auteur associe à chaque branche $b \in \mathrm{br}(X, x)$ une valuation $\langle . \rangle_b$ sur $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ triviale sur $\widetilde{k}$, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$. En composant $\langle . \rangle_b$ avec la valuation $|.|_x$ définie naturellement sur $\mathscr{H}(x)$ l'on obtient une valuation $|.|_b$ sur $\mathscr{H}(x)$ qui raffine par construction $|.|_x$ et coïncide avec celle-ci sur k.

En notant $\langle . \rangle_0$ la valuation triviale sur $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$, Ducros déduit de la théorie de la réduction de Temkin ([Tem1]) que l'application $b \mapsto \langle . \rangle_b$ établit une injection

$$\mathrm{br}(X, x) \hookrightarrow \mathbb{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}} \setminus \{\langle . \rangle_0\}$$

dont l'image est de complémentaire fini, et qui est bijective si et seulement si x appartient à l'intérieur analytique de X. La réunion de l'image et de la valuation triviale correspond à la réduction de Temkin du germe (X, x).

Remarque 3.2.6. Ducros établit en fait un résultat un peu plus général en faisant usage de valuations graduées. Néanmoins, comme x est de type 2, nous n'en avons pas besoin dans ce texte, et toutes les valuations considérées sont des valuations classiques.

Puisque x est de type 2, ce dernier résultat se reformule comme suit : l'application qui à une branche b associe la valuation $\langle . \rangle_b$ sur $\widetilde{\mathscr{H}(x)} = \widetilde{k}(\mathscr{C}_x)$ induit une injection dont l'image est de complémentaire fini de $\mathrm{br}(X, x)$ dans l'ensemble $\mathbb{P}_{\widetilde{k}(\mathscr{C}_x)/\widetilde{k}} \setminus \{\langle . \rangle_0\}$. Comme ce dernier s'identifie à l'ensemble des points fermés de $\mathscr{C}_x$, cela revient à une bijection entre $\mathrm{br}(X, x)$ et l'ensemble des points fermés d'un ouvert de Zariski $\mathscr{U}_x$ de $\mathscr{C}_x$, égal à $\mathscr{C}_x$ tout entier si et seulement si x est dans l'intérieur analytique de X.

Soit $b \in \mathrm{br}(X, x)$ une branche issue de x. Dans ([Duc], 4.2.2), l'auteur définit l'anneau associé à b, noté $\mathscr{O}_X(b)$, par la limite inductive :

$$\mathscr{O}_X(b) = \varinjlim_{V} \mathscr{O}_X(V),$$

où V décrit l'ensemble des sections de b. Il existe un morphisme naturel de $\mathscr{O}_{X,x}$ dans $\mathscr{O}_X(b)$. La courbe X est normale puisque quasi-lisse ; l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est ainsi artinien

et intègre, c'est donc un corps qui coïncide avec son corps résiduel $\kappa(x)$ (cf. prop. 1.2.4). Par ailleurs, toute section Z de b est un non vide, connexe et normale, par conséquent $\mathscr{O}_X(Z)$ est intègre, et par passage à la limite on en déduit que $\mathscr{O}_X(b)$ lui-même est intègre. Le corps $\kappa(x)$ coïncidant avec $\mathscr{O}_{X,x}$, il se plonge dans $\mathscr{O}_X(b)$.

Définition 3.2.7. *Notons $\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}$ la fermeture intégrale séparable de $\kappa(x)$ dans l'anneau $\mathscr{O}_X(b)$; c'est un corps naturellement muni d'une valuation prolongeant la valuation $|.|_b$ sur $\kappa(x)$ (qui est elle-même la restriction à $\kappa(x)$ de la valuation $|.|_b$ définie sur $\mathscr{H}(x)$, $\kappa(x)$ étant dense dans $\mathscr{H}(x)$ car X est un bon espace) que nous continuerons à noter $|.|_b$ et qui jouit de la propriété suivante :*

Proposition 3.2.8 ([Duc08], Proposition 3.6 ; [Duc], Théorème 4.2.19)**.**
Le corps valué $(\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}, |.|_b)$ est le hensélisé de $(\kappa(x), |.|_b)$.

On en déduit que $(\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}, |.|_b)$ est une extension *immédiate* de $(\kappa(x), |.|_b)$: ces deux corps valués ont même groupe de valeurs et même corps résiduel.

- *groupe des valeurs :* Si l'on note $\mathcal{C}_e$ la couronne correspondant à l'arête e associée à la branche b, le Théorème 4.3.5 de [Duc] nous indique qu'il existe une fonction $\lambda \in \kappa(x) = \mathscr{O}_{X,x}$ définie sur $\mathcal{C}_e$, qui en est une fonction coordonnée, telle que $|\lambda|_b$ soit infiniment proche de 1 inférieurement, et telle que :

$$|\kappa(x)^\times|_b = |\mathscr{O}_X(b)^\times_{\mathrm{sep}}|_b = |k^\times| \oplus |\lambda|_b^{\mathbb{Z}}$$

- *corps résiduel :* Les corps résiduels associés $\widetilde{\kappa(x)}_b$ et $\widetilde{\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}}$ sont égaux à $\widetilde{k}$, et sont en particulier algébriquement clos.

Notons $\mathscr{O}_X(b)^{\mathrm{s}}_{\mathrm{sep}}$ une clôture séparable $\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}$. Comme $\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}$ est hensélien, la valuation sur $\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}$ se prolonge en une unique valuation sur $\mathscr{O}_X(b)^{\mathrm{s}}_{\mathrm{sep}}$, encore notée $|.|_b$. Notons $\mathcal{I}_b$ et $\mathcal{W}_b$ les groupes d'inertie et de ramification de l'extension de corps valués $\mathscr{O}_X(b)^{\mathrm{s}}_{\mathrm{sep}}/\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}$, et $\mathcal{I}_b^{\mathrm{t}} = \mathcal{I}_b/\mathcal{W}_b$ son *groupe d'inertie modérée.* On a l'isomorphisme :

$$\mathcal{I}_b^{\mathrm{t}} \simeq \mathrm{Hom}(|\mathscr{O}_X(b)^{\mathrm{s}\,\times}_{\mathrm{sep}}|_b/|\mathscr{O}_X(b)^\times_{\mathrm{sep}}|_b, \widetilde{\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}}^{\,\times})$$

que l'on peut récrire de la manière suivante sachant que $|\mathscr{O}_X(b)^\times_{\mathrm{sep}}|_b = |k^\times| \oplus |\lambda|_b^{\mathbb{Z}}$ et que $|k^\times|$ est divisible :

$$\mathcal{I}_b^{\mathrm{t}} = \mathrm{Hom}(|\lambda|_b^{\mathbb{Q}}/|\lambda|_b^{\mathbb{Z}}, \widetilde{k}^\times) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \widetilde{k}^\times).$$

Comme $\widetilde{k}$ est algébriquement clos de caractéristique p, on obtient : $\mathcal{I}_b^{\mathrm{t}} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$.

Si $\kappa(x)_b^{\mathrm{s}}$ désigne une clôture séparable de $\kappa(x)_b$ munie d'une valuation (encore notée $|.|_b$) prolongeant $|.|_b$ sur $\kappa(x)_b$), notons $\mathcal{I}_{\kappa(x)_b}^{\mathrm{t}}$ le groupe d'inertie modérée de l'extension $\kappa(x)_b^{\mathrm{s}}/\kappa(x)_b$. Comme $\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}$ est le hensélisé de $\kappa(x)_b$ nous avons l'égalité des groupes d'inertie modérée :

$$\mathcal{I}_b^{\mathrm{t}} = \mathcal{I}_{\kappa(x)_b}^{\mathrm{t}} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$$

Remarque 3.2.9. Pour tout entier n premier à p, le seul quotient d'ordre n de $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$ correspond à l'extension de $\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}$ obtenue en extrayant une racine n-ième d'un élément de norme $|.|_b$ égale à $|\lambda|_b$.

3.2.3 Description des sous-groupes sommitaux

Proposition 3.2.10 ([Duc], Théorème 4.3.13)**.** *Supposons que $\varphi : Y \to X$ est un morphisme étale entre deux courbes k-analytiques quasi-lisses, $y \in Y_{[2]}$ et $x \in X_{[2]}$ son image. Soit $b \in \mathrm{br}(Y, y)$ d'image $a \in \mathrm{br}(X, x)$. Soient $\mathscr{C}_y$ et $\mathscr{C}_x$ les courbes résiduelles de y et x, et $\mathscr{Q}$ (resp. $\mathscr{P}$) le point fermé de $\mathscr{C}_y$ (resp. $\mathscr{C}_x$) correspondant à b (resp. a) par la bijection précédente. Alors $\mathscr{P}$ est l'image de $\mathscr{Q}$ par $\mathscr{C}_y \to \mathscr{C}_x$, et en notant e l'indice de ramification en $\mathscr{Q}$, on a : $e = \deg(b \to a)$.*

Remarque 3.2.11. En reprenant les notations de la proposition précédente, comme $x \in X_{[2]}$ nous savons que le groupe $|\mathscr{H}(x)^\times|/|k^\times|$ est fini, et comme k est algébriquement clos $|k^\times|$ est divisible, d'où $|k^\times| = |\mathcal{H}(x)^\times|$ et $|\mathcal{H}(x)^\times|$ est divisible. Par ailleurs comme le corps $\mathscr{H}(x)$ est *stable* (cf [Duc], Théorème 4.3.14) nous avons l'égalité :

$$[\mathscr{H}(y) : \mathscr{H}(x)] = [\widetilde{\mathscr{H}(y)} : \widetilde{\mathscr{H}(x)}] \cdot [|\mathscr{H}(y)^\times| : |\mathscr{H}(x)^\times|]$$

Ainsi

$$[\mathscr{H}(y) : \mathscr{H}(x)] = [\widetilde{\mathscr{H}(y)} : \widetilde{\mathscr{H}(x)}] = [\widetilde{k}(\mathscr{C}_y) : \widetilde{k}(\mathscr{C}_x)] = \deg(\mathscr{C}_y \to \mathscr{C}_x),$$

en particulier, lorsque φ est galoisien, φ est modéré en y si et seulement si le morphisme $\mathscr{C}_y \to \mathscr{C}_x$ induit par φ en y est de degré premier à p.

En combinant la remarque précédente avec les propositions 3.2.5 et 3.2.10, nous obtenons naturellement un résultat dont nous nous servirons par la suite pour étudier le comportement local de $\mathcal{G}(X, S)$:

Corollaire 3.2.12 (Allure locale de $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X)$)**.** *Soit X une courbe k-analytique connexe quasi-lisse munie d'une triangulation généralisée ayant un unique sommet s, celui-ci étant supposé de type 2. Soit $\mathscr{U}_s$ le sous-schéma ouvert de $\mathscr{C}_s$ associé à s, tel que l'on ait une bijection entre $\mathrm{br}(X,s)$ et les points fermés de $\mathscr{U}_s$. Soit $\mathscr{D}_s \subset \mathscr{U}_s$ le sous-schéma ouvert correspondant aux éléments de $\mathcal{D}(X,s)$. Alors la catégorie $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X)$ est équivalente à la catégorie des revêtements finis de $\mathscr{U}_s$ dominés par des revêtements galoisiens modérément ramifiés de degré premier à p et étales au-dessus de $\mathscr{D}_s$.*

Définition 3.2.13. *Soit $\mathscr{C}$ une courbe propre, normale et intègre au-dessus de $\widetilde{k}$. Soit $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ une sous-courbe ouverte (éventuellement égale à $\mathscr{C}$) et $\mathscr{Y} \to \mathscr{D}$ un revêtement fini étale connexe de $\mathscr{D}$. On dit que $\mathscr{Y}$ est* modérément ramifié le long de $\mathscr{C} \setminus \mathscr{D}$ *lorsque les valuations définies par les points fermés de $\mathscr{C} \setminus \mathscr{D}$ sont toutes* modérément ramifiées *dans l'extension $\widetilde{k}(\mathscr{C})/\widetilde{k}(\mathscr{D})$.*

Notons $\mathrm{Cov}^{\mathrm{tame}}(\mathscr{D})$ la catégorie des revêtements finis étales de $\mathscr{D}$ modérément ramifiés le long de $\mathscr{C} \setminus \mathscr{D}$. C'est une catégorie galoisienne dont nous noterons $\pi_1^{\mathrm{tame}}(\mathscr{D})$ le groupe fondamental, défini à isomorphismes intérieurs près. Notons qu'il ne dépend que de $\mathscr{D}$, car $\mathscr{C}$ se retrouve à partir de $\mathscr{D}$ comme égal à sa compactification normale.

Rappelons que si G est un groupe et p un nombre premier, la *p'-complétion profinie* de G, notée $G^{(p')}$, est le groupe profini défini comme la limite inverse du système projectif des quotients finis G/N où N décrit l'ensemble des sous-groupes distingués de G d'indice premier à p. Lorsque G est lui-même profini $G^{(p')}$ sera appelé le *p'-quotient maximal* de G.

Remarque 3.2.14. Reprenons les notations de la définition 3.2.13. Notons $\pi_1(\mathscr{D})$ le groupe fondamental étale de $\mathscr{D}$. En remarquant que toute extension de corps valués dominée par une extension galoisienne de degré premier à p est automatiquement modérément ramifiée on obtient l'isomorphisme :

$$\pi_1(\mathscr{D})^{\mathrm{tame},\,(p')} = \pi_1(\mathscr{D})^{\,(p')}$$

Proposition 3.2.15 (Grothendieck)**.** *Soit $\mathscr{C}$ une courbe propre, normale et intègre de genre g au-dessus d'un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ une sous-courbe ouverte (éventuellement égale à $\mathscr{C}$) et $n \geqslant 0$ le nombre de points fermés de $\mathscr{C} \setminus \mathscr{D}$. Alors $\pi_1(\mathscr{D})^{(p')}$ est isomorphe à la p'-complétion profinie de $\Pi_{g,n}$ où $\Pi_{g,n}$ est le groupe fondamental (topologique) du complémentaire de n points sur une surface de Riemann sur $\mathbb{C}$ de genre g, qui admet la présentation suivante par générateurs et relations :*

$$\Pi_{g,n} := \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \mid [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g]\gamma_1 \ldots \gamma_n = 1 \rangle$$

Définition 3.2.16. *Soit X une courbe k-analytique quasi-lisse munie d'une triangulation généralisée S de squelette Γ. Si $s \in S$, définissons la* valence généralisée en s *comme l'entier*

$$n_s = \mathrm{val}_\Gamma(s) + \widetilde{n}_s \in \mathbb{N},$$

où $\mathrm{val}_\Gamma(s)$ désigne la valence de s dans le semi-graphe Γ, et $\widetilde{n}_s$ est le cardinal du complémentaire de l'image de $\mathrm{br}(X, s) \hookrightarrow \mathscr{C}_s(\widetilde{k})$ dans $\mathscr{C}_s(\widetilde{k})$:

$$\widetilde{n}_s = \sharp(\mathscr{C}_s(\widetilde{k}) \setminus \mathrm{br}(X, s)).$$

Corollaire 3.2.17 (Allure locale de $\mathcal{G}(X, S)$)**.** *Soit X une courbe k-analytique quasi-lisse munie d'une triangulation généralisée S. Si $s \in S$ est un point de type 2 de valence généralisée n_s, notons $\mathscr{C}_s$ la courbe résiduelle en s, $g(s)$ son genre, et $\mathscr{D}_s$ le sous-schéma ouvert correspondant aux disques (i.e. aux éléments de $\mathcal{D}(X, S, s)$). Alors n_s n'est autre que le cardinal de $\mathscr{C}_s(\widetilde{k}) \setminus \mathscr{D}_s(\widetilde{k})$, et le groupe fondamental de la composante sommitale en s de $\mathcal{G}(X, S)$ est :*

$$\pi_s = \pi_1(\mathscr{D}_s)^{(p')} = \Pi_{g(s),n_s}^{(p')}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la combinaison du corollaire 3.2.12, de la remarque 3.2.14 et de la proposition 3.2.15 ci-dessus. □

3.3 Compatibilité avec les hypothèses mochizukiennes

3.3.1 Simplification des hypothèses

Soit X une courbe k-analytique quasi-lisse, connexe, munie d'une triangulation généralisée S de squelette Γ. Nous voudrions savoir à quelles conditions sur S le graphe d'anabélioïdes $\mathcal{G}^\natural(X, S)$ construit plus haut vérifie l'ensemble des hypothèses *mochizukiennes* permettant d'appliquer le théorème de reconstruction 2.4.1, à savoir : de type injectif, quasi-cohérent, totalement élevé, totalement détaché et sommitalement mince. D'après 3.1.5, on peut sans perte de généralité supposer que S est une vraie triangulation de X. Supposons $\mathcal{G}^\natural(X, S)$ connexe et non réduit à un sommet.

Vérifions tout d'abord que les hypothèses mochizukiennes sur $\mathcal{G}^\natural(X, S)$ excluent l'appartenance à S de « points superflus » (cf. 1.3.17). Supposons que $s \in S$ est tel que

$g(s) = 0$ et $s \notin \partial^{\mathrm{an}} X$. Notons alors Γ_0 la composante connexe de $\Gamma \setminus \{S \setminus \{s\}\}$ contenant s, et distinguons les deux cas donnés par la proposition 1.3.17 :

- *Cas où Γ_0 est un intervalle ouvert* :
  Dans ce cas $\mathrm{St}(X, S, s)$ est une couronne de squelette analytique Γ_0. Si b (associée à une arête e) est une branche aboutissant à s, alors le morphisme $b_* : \pi_b \to \pi_s$ correspond au foncteur $\iota_b : \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathrm{St}(X, S, s)) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C}_e)$ induit naturellement par l'injection $\mathcal{C}_e \hookrightarrow \mathrm{St}(X, S, s)$. Comme celle-ci est un *bon plongement* alors ι_b est une équivalence de catégorie, par conséquent b_* correspond au morphisme identité $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')} \to \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$, ce qui exclut la possibilité pour $\mathcal{G}^{\natural}(X, S)$ d'être totalement détaché.

- *Cas où Γ_0 est un intervalle semi-ouvert d'extrémité s* :
  Dans ce cas $\mathrm{St}(X, S, s)$ est un disque k-analytique (cf. [Duc], 5.1.16.2). Ainsi, le morphisme $b_* : \pi_b \to \pi_s$ correspondant au foncteur $\iota_b : \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathrm{St}(X, S, s)) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C}_e)$ induit naturellement par l'injection $\mathcal{C}_e \hookrightarrow \mathrm{St}(X, S, s)$ n'est autre que le morphisme trivial $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')} \to \{1\}$, ce qui interdit à $\mathcal{G}^{\natural}(X, S)$ d'être de type injectif.

De là, nous en déduisons qu'une triangulation généralisée S sur X vérifiant les hypothèses mochizukiennes sera automatiquement « minimale » (i.e. ne contenant aucun point superflu) et constituée des nœuds de son squelette. Par ailleurs, une triangulation généralisée S de X vérifiant les hypothèses mochizukiennes ne contient nul point de type 3. En effet, supposons que $s \in S$ est un nœud de type 3 de son squelette. Alors $s \in \partial^{\mathrm{an}} X$, et nous savons que s admet un voisinage ouvert qui est une couronne Z de type $]*, *]$. Ainsi $\mathrm{St}(X, S, s)$ est elle-même une couronne de type $]*, *]$. Si b (associée à une arête e) est la branche aboutissant à s, l'injection $\mathcal{C}_e \hookrightarrow \mathrm{St}(X, S, s)$ est un *bon plongement*, ainsi le foncteur induit $\iota_b : \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathrm{St}(X, S, s)) \to \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C}_e)$ est une équivalence de catégorie, donc le morphisme $b_* : \pi_b \to \pi_s$ correspond à l'isomorphisme $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')} \to \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$, ce qui exclut la possibilité pour $\mathcal{G}^{\natural}(X, S)$ d'être totalement détaché. Nous allons donc seulement considérer dans la suite des triangulations généralisées constituées de points de type 2 qui sont les nœuds du squelette qu'elles constituent.

Il reste à montrer que si une triangulation S de squelette Γ est exactement constituée des nœuds de Γ, alors le graphe d'anabélioïdes associé, $\mathcal{G}^{\natural}(X, S)$, vérifie sous certaines hypothèses à préciser l'ensemble des conditions mochizukiennes. Eu égard à l'ingratitude des définitions de ces hypothèses la tâche semble malaisée, mais se simplifie en combinant la proposition 3.2.12 à la remarque suivante de Mochizuki :

Proposition 3.3.1 ([Mzk3], Example 2.10)**.** *Soit Σ un ensemble non vide de nombres premiers contenant au moins un entier différent de p. Soit $\mathcal{G}$ un semi-graphe d'anabélioïdes tel que, pour chaque sommet v, π_v est le pro-Σ quotient maximal du groupe fondamental d'une surface de Riemann hyperbolique, et tel que les différents morphismes $\pi_b \hookrightarrow \pi_v$ correspondent aux inclusions des groupes d'inertie des «cusps» de la courbe hyperbolique. Alors $\mathcal{G}$ est cohérent, totalement élevé, totalement détaché et sommitalement mince.*

Remarque 3.3.2. Nous n'allons pas prouver ici la proposition 3.3.1, mais observer que la minceur sommitale est une conséquence du corollaire 1.3.4 de [Nak]. En effet si $n > 0$ le groupe $\Pi_{g,n}^{(p')}$ associé à un point $s \in S$ est un pro-p' groupe libre de rang $2g + n - 1$. Or Nakamura nous dit exactement que les p'-complétions des groupes libres de rang $\geqslant 2$ ou des groupes du type $\Pi_{g,0}$ avec $g \geqslant 2$ ont un centre trivial. Par ailleurs si H est un sous-groupe ouvert de $\Pi_{g,n}^{(p')}$ nous savons que H est le groupe $\pi_1^{\mathrm{tame},(p')}(\mathscr{H}_s)$ correspondant à un revêtement étale de degré premier à p (et donc modérément ramifié le long de $\mathscr{C}_s \setminus \mathscr{U}_s$) de $\mathscr{U}_s$. Or la formule de Riemann-Hurwitz nous assure que le genre de $\mathscr{H}_s$ ne peut pas être strictement plus petit que celui de $\mathscr{U}_s$, la courbe $\mathscr{H}_s$ reste donc hyperbolique et ainsi H est du type $\Pi_{g',n'}^{(p')}$ avec $2g' + n' > 2$. Par conséquent H est également de centre trivial, et cela est vrai pour tout sous-groupe H ouvert dans $\Pi_{g,n}^{(p')} = \pi_s$, ce qui signifie exactement que π_s est mince.

En reprenant les notations de la proposition 3.2.15, rappelons que la courbe $\mathscr{D}$ est dite *hyperbolique* lorsque : $2g + n > 2$. De la même manière, une *surface de Riemann hyperbolique* est définie comme le complémentaire de $n \geqslant 0$ points d'une surface de Riemann compacte de genre g telle que $2g + n > 2$, c'est-à-dire lorsqu'on est dans l'un des cas suivants :

i) $g = 0$ et $n \geqslant 3$
ii) $g = 1$ et $n \geqslant 1$
iii) $g \geqslant 2$

Cela nous mène naturellement aux définitions suivantes :

Définition 3.3.3 (Nœuds hyperboliques)**.** *Soit X une courbe k-analytique connexe quasi-lisse munie d'une triangulation généralisée S uniquement constituée des nœuds de son squelette Γ. Soit $s \in S$, rappelons que la* valence généralisée *en s est définie comme l'entier $n_s = \mathrm{val}_\Gamma(s) + \widetilde{n}_s \in \mathbb{N}$, où $\mathrm{val}_\Gamma(s)$ désigne la valence de s dans le semi-graphe*

Γ, *et* $\widetilde{n}_s$ *est le cardinal du complémentaire de l'image de* $\mathrm{br}(X,s) \hookrightarrow \mathscr{C}_s(\widetilde{k})$ *dans* $\mathscr{C}_s(\widetilde{k})$. *Le nœud* s *est dit* nœud hyperbolique *lorsque :* $2g(s) + n_s > 2$.

Remarque 3.3.4. Soit $\mathscr{U}_s$ l'ouvert de Zariski de $\mathscr{C}_s$ tel que $\mathrm{br}(X,s) \hookrightarrow \mathscr{C}_s(\widetilde{k})$ établisse une bijection entre $\mathrm{br}(X,s)$ et $\mathscr{U}_s(\widetilde{k})$, et $\mathscr{D}_s \subset \mathscr{U}_s$ le sous-ouvert de Zariski tel que les branches discales (i.e. associées aux éléments de $\mathcal{D}(X,S,s)$) correspondent exactement à $\mathscr{D}_s(\widetilde{k})$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}_\Gamma(s) &= \sharp(\mathscr{U}_s(\widetilde{k}) \setminus \mathscr{D}_s(\widetilde{k})) \\
\widetilde{n}_s &= \sharp(\mathscr{C}_s(\widetilde{k}) \setminus \mathscr{U}_s(\widetilde{k})) \\
n_s &= \sharp(\mathscr{C}_s(\widetilde{k}) \setminus \mathscr{D}_s(\widetilde{k}))
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\widetilde{n}_s > 0$ si et seulement si $s \in \partial^{\mathrm{an}} X$.

Remarque 3.3.5. Avec les définitions précédentes, un nœud s de X non isolé dans Γ (i.e. $\mathrm{val}_\Gamma(s) \neq 0$) est non hyperbolique seulement dans la situation où s est unibranche dans Γ, de genre 0 et sur le bord analytique de X mais qu'il ne « manque qu'une branche », c'est-à-dire $\widetilde{n}_s = 1$. C'est le cas par exemple d'une couronne compacte : son bord analytique est constitué de deux nœuds qui forment une triangulation mais qui sont deux nœuds non hyperboliques. Par ailleurs, un nœud de type 3 ne peut jamais être hyperbolique : en effet, si s est un tel nœud, nous savons que s admet un voisinage ouvert qui est une couronne Z de type $]*,*]$ avec $\{s\} = \partial^{\mathrm{an}} Z$, ce qui donne $n_s = 2$, et ainsi $2g(s) + n_s = 2$, d'où l'obstruction à l'hyperbolicité.

3.3.2 Courbes analytiquement hyperboliques

Définition 3.3.6 (Courbes k-analytiquement hyperboliques)**.** *Soit* X *une courbe* k-*analytique connexe quasi-lisse. Nous dirons que* X *est une courbe* k-analytiquement hyperbolique *lorsque l'ensemble des nœuds de son squelette analytique* $S^{\mathrm{an}}(X)$ *est non vide et uniquement constitué de nœuds hyperboliques.*

Proposition 3.3.7. *Soit* X *une courbe* k-*analytiquement hyperbolique dont on note* $\Sigma_X \subset S^{\mathrm{an}}(X)$ *l'ensemble non vide des nœuds du squelette analytique (automatiquement de squelette* $S^{\mathrm{an}}(X)$*). Alors le graphe d'anabélioïdes* $\mathcal{G}^\natural(X,\Sigma_X)$ *vérifie l'ensemble des hypothèses* mochizukiennes*, à savoir : de type injectif, quasi-cohérent, totalement élevé, totalement détaché et sommitalement mince.*

Démonstration. D'après la proposition 3.3.1, afin de montrer ce résultat il suffit de montrer que notre graphe d'anabélioïdes $\mathcal{G}^\natural(X,\Sigma_X)$ vérifie les hypothèses prescrites dans la

proposition sus-citée, en prenant $\Sigma = \mathbb{P} \setminus \{p\}$ (auquel cas le *pro-*Σ *quotient maximal* ne sera rien d'autre que le p'*-quotient maximal*).

- *Pour tout $s \in \Sigma_X$, π_s est le p'-quotient maximal du groupe fondamental d'une surface de Riemann hyperbolique :*

  D'après le corollaire 3.2.17 nous savons que π_s est le p'-quotient maximal de $\Pi_{g(s),n_s}$. Puisque s est par hypothèse un nœud hyperbolique nous savons que $2g(s) + n_s > 2$, c'est-à-dire que $\Pi_{g(s),n_s}$ est le groupe fondamental d'une surface de Riemann hyperbolique (de genre $g(s)$ avec n_s points manquants).

- *Les morphismes $\pi_b \xrightarrow{b_*} \pi_s$ correspondent aux inclusions des groupes d'inertie des « cusps » :*

  Reprenons ici les notations $\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}$ et $\mathcal{I}_b^{\mathrm{t}}$ de la partie 3.2.2. Soit $\mathcal{A}$ une $\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}$-algèbre finie modérément ramifiée, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ définit un $\mathcal{I}_b^{\mathrm{t}}$-ensemble fini. Via la tensorisation par $\mathscr{O}_X(b)$ au-dessus de $\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}$, $\mathcal{A}$ définit un revêtement étale fini de $\mathcal{C}_e$ qui est modéré. Réciproquement, tout revêtement modéré Y de $\mathcal{C}_e$ provient d'une $\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}$-algèbre modérément ramifiée. Cela découle par exemple de la Proposition 4.2.20 de [Duc] selon laquelle une branche $a \in \mathrm{br}(Y, y)$ au-dessus de b induit une extension de corps $\mathscr{O}_Y(a)_{\mathrm{sep}}/\mathscr{O}_X(b)_{\mathrm{sep}}$ finie de degré $\deg(a \to b)$. Ceci définit une équivalence de catégories $\mathcal{B}(\mathcal{I}_b^{\mathrm{t}}) \xrightarrow{\tau^*} \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathcal{C}_e)$ qui induit un isomorphisme de groupes : $\pi_b \xrightarrow{\tau} \mathcal{I}_b^{\mathrm{t}}$ (nous savions déjà d'après la section 3.1 que ces groupes sont tous deux isomorphes à $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$). Comme $\mathcal{I}_b^{\mathrm{t}} = \mathcal{I}_{\kappa(s)_b}^{\mathrm{t}}$, τ correspond à un isomorphisme $\pi_b \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\kappa(s)_b}^{\mathrm{t}}$.
  Le corps résiduel de $\widetilde{\kappa(s)} = \widetilde{\mathscr{H}(s)} = \widetilde{k}(\mathscr{C}_s)$ muni de $\langle . \rangle_b$ n'est autre que $\widetilde{k}$, qui est algébriquement clos. Par conséquent, en reprenant les raisonnements précédents, on obtient l'égalité :
  $$\mathcal{I}_{\widetilde{\kappa(s)}_b}^{\mathrm{t}} = \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')},$$
  où $\mathcal{I}_{\widetilde{\kappa(s)}_b}^{\mathrm{t}}$ désigne le groupe d'inertie modérée de $\widetilde{\kappa(s)}$ munie de $\langle . \rangle_b$ (où l'on a préalablement fixé une clôture séparable de $\widetilde{\kappa(s)}$ munie d'une valuation prolongeant $\langle . \rangle_b$ sur $\widetilde{\kappa(s)}$). On en déduit que le morphisme naturel $\mathcal{I}_{\kappa(s)_b}^{\mathrm{t}} \xrightarrow{\eta} \mathcal{I}_{\widetilde{\kappa(s)}_b}^{\mathrm{t}}$ est un isomorphisme. Notons $\mathscr{P}$ le point de $\mathscr{C}_s$ correspondant à b. Le groupe $\mathcal{I}_{\widetilde{\kappa(s)}_b}^{\mathrm{t}}$ correspond au groupe d'inertie modérée $\mathcal{I}_{\mathscr{P}}^{\mathrm{t}}$ du point $\mathscr{P}$, qui se plonge dans π_s.

Par ailleurs, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{I}^{\mathrm{t}}_{\kappa(s)_b} \arrow[dr, "\eta"] & \\ \pi_b \arrow[ur, "\tau"] \arrow[rr, "b_*"] & & \mathcal{I}^{\mathrm{t}}_{\mathscr{P}} \subset \pi_s \end{tikzcd}$$

où τ et η sont les isomorphismes naturels invoqués plus haut. En conséquence b_* correspond bien au plongement du groupe d'inertie du *cusp* $\mathscr{P}$ dans π_s.

□

Remarque 3.3.8. Soit $S = \{s\}$ une triangulation réduite à un singleton d'une courbe k-analytique X quasi-lisse connexe. Dans ce cas $\mathcal{G}^\natural(X, S)$ n'est rien d'autre que l'anabélioïde connexe $\mathcal{B}(\pi_s)$. Comme le graphe sous-jacent n'est constitué que d'un sommet et qu'il n'y a aucune branche, alors $\mathcal{G}^\natural(X, S)$ est automatiquement de type injectif, totalement élevé, totalement détaché et quasi-cohérent. D'après [Nak], 1.3.4, le groupe π_s n'est mince que si le comportement en s est hyperbolique, ce qui correspond à $2g(s) + n_s > 2$. On retrouve ainsi un cas particulier de la proposition 3.3.1.

3.3.3 Exemples de courbes k-analytiquement hyperboliques

1. **Exemples de courbes k-analytiquement hyperboliques compactes**

Soit X une courbe k-analytique connexe quasi-lisse, *compacte* et non vide. Notons Σ_X l'ensemble des nœuds de $S^{\mathrm{an}}(X)$. Nous savons que $S^{\mathrm{an}}(X) = \emptyset$ si et seulement si $X = \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$ (k est supposé algébriquement clos), dans ce cas, *a fortiori*, $\Sigma_X = \emptyset$. Si $S^{\mathrm{an}}(X) \neq \emptyset$, alors $\Sigma_X = \emptyset$ si et seulement si X est une courbe de Tate (cf. 1.3.18), auquel cas $S^{\mathrm{an}}(X)$ est homéomorphe à un cercle. Dans ces deux cas, X n'est à l'évidence pas k-analytiquement hyperbolique. Les exclure revient à supposer que $\Sigma_X \neq \emptyset$. Alors deux cas se présentent :

(a) si $S^{\mathrm{an}}(X) = \{s\}$ est un singleton, X est k-analytiquement hyperbolique si et seulement si s est un nœud hyperbolique, ce qui est le cas dès que s vérifie $g(s) \geqslant 2$ ou $\{g(s) = 1$ et $s \in \partial^{\mathrm{an}} X\}$. Lorsque $g(s) = 0$, $\{s\}$ est un nœud hyperbolique si et seulement si $\widetilde{n}_s \geqslant 3$. En particulier, un disque k-analytique fermé, dont le squelette est réduit au bord (c'est un singleton vérifiant $\widetilde{n}_s = 1$) n'est jamais analytiquement anabélien ;

(b) si $S^{\mathrm{an}}(X)$ contient au moins une arête et X n'est pas une courbe de Tate, alors X est k-analytiquement hyperbolique dès que ses points unibranches sont de genre > 0, ceci permet d'éviter les nœuds non hyperboliques décrits au 3.3.5.

2. **Courbes marquées comme exemples de courbes k-analytiquement hyperboliques non compactes**

Définition 3.3.9. *Une* courbe k-analytique marquée *est définie comme une courbe k-analytique Y de la forme $Y = X \setminus \mathsf{E}$ où (X, E) est la donnée d'une courbe k-analytique non vide X, quasi-lisse et connexe, et d'un sous-ensemble $\mathsf{E} \subset X$ fermé et discret de points* rigides *de X.*

Soit $Y = X \setminus \mathsf{E}$ une courbe marquée. Comme les éléments de E en tant que points rigides sont des points unibranches de X par quasi-lissité, la courbe Y reste connexe, quasi-lisse, mais ne jouit pas de la compacité dès que $\mathsf{E} \neq \emptyset$, même lorsque X est elle-même compacte. Nous allons étudier les nœuds de $S^{\mathrm{an}}(Y)$, et notamment les conditions d'hyperbolicité de ces derniers.

Si $S^{\mathrm{an}}(X)$ est non vide : Nous savons que c'est un sous-graphe analytiquement admissible de X, et l'on note r la rétraction canonique de X sur $S^{\mathrm{an}}(X)$. Remarquons que l'on a :

$$S^{\mathrm{an}}(Y) = S^{\mathrm{an}}(X) \cup \bigcup_{x \in \mathsf{E}}]x, r(x)].$$

Notons Σ_Y l'ensemble des nœuds de $S^{\mathrm{an}}(Y)$, et $\Sigma_Y^{\perp}$, l'ensemble des sommets pluribranches (de valence $\geqslant 3$) de $S^{\mathrm{an}}(Y) \setminus S^{\mathrm{an}}(X)$. De tels points apparaissent lorsque deux points de E sont dans le même disque de $X \setminus \Sigma_X$. Alors Σ_Y peut être décrit par :

$$\Sigma_Y = \Sigma_X \cup \bigcup_{x \in \mathsf{E}} \{r(x)\} \cup \Sigma_Y^{\perp}.$$

Soit $t \in \Sigma_Y^{\perp}$. Alors il existe $x_1, x_2 \in \mathsf{E}$ tels que $r(x_1) = r(x_2) := r_0$ et

$$]x_1, r(x_1)] \cap]x_2, r(x_2)] = [t, r_0],$$

d'où $\mathrm{val}_{S^{\mathrm{an}}(Y)}(t) \geqslant 3$, ce qui fait de t un nœud hyperbolique de $S^{\mathrm{an}}(Y)$.

Soit $x \in \mathsf{E}$, alors $x \notin S^{\mathrm{an}}(X)$ puisque ce dernier n'est constitué que de points de

type 2 ou 3 et que x est rigide. Alors $]x, r(x)]$ définit une branche de $r(x)$ dans $S^{\mathrm{an}}(Y)$ qui n'est pas dans $S^{\mathrm{an}}(X)$. Par conséquent :

$$\mathrm{val}_{S^{\mathrm{an}}(Y)}(r(x)) > \mathrm{val}_{S^{\mathrm{an}}(X)}(r(x)).$$

Supposons que $S^{\mathrm{an}}(X)$ n'est pas réduit à un singleton. Si $r(x)$ est de valence 2 en tant que point de $S^{\mathrm{an}}(X)$, cela implique que $\mathrm{val}_{S^{\mathrm{an}}(Y)}(r(x)) \geqslant 3$, ce qui fait de $r(x)$ un nœud hyperbolique de $S^{\mathrm{an}}(Y)$.
Si maintenant $r(x)$ est un point unibranche de $S^{\mathrm{an}}(X)$, nous savons que c'est un nœud de $S^{\mathrm{an}}(X)$ qui est de genre $\geqslant 1$ ou sur le bord analytique de X. Ainsi $r(x)$ reste un nœud de $S^{\mathrm{an}}(Y)$. On a au pire des cas (lorsque le nœud est non hyperbolique) : $2g(r(x)) + \mathrm{val}_{S^{\mathrm{an}}(X)}(r(x)) + \widetilde{n_{r(x)}} \geqslant 2$. Par conséquent :

$$2g(r(x)) + \mathrm{val}_{S^{\mathrm{an}}(Y)}(r(x)) + \widetilde{n_{r(x)}} > 2,$$

ce qui fait de $r(x)$ un nœud hyperbolique de $S^{\mathrm{an}}(Y)$.

Si on suppose que $S^{\mathrm{an}}(X)$ est réduit à un singleton $\{s\}$, alors tous les points de E se rétractent sur s, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathsf{E}$, $r(x) = s$. Si s est un nœud hyperbolique dans $S^{\mathrm{an}}(X)$, il le reste dans $S^{\mathrm{an}}(Y)$. Si $g(s) \geqslant 1$ et $\mathsf{E} \neq \emptyset$, alors s est un nœud hyperbolique de $S^{\mathrm{an}}(Y)$ par l'inégalité $\mathrm{val}_{S^{\mathrm{an}}(Y)}(s) > \mathrm{val}_{S^{\mathrm{an}}(X)}(s)$. En revanche, lorsque $g(s) = 0$, le nœud s de $S^{\mathrm{an}}(Y)$ n'a *a priori* plus aucune raison d'être hyperbolique. Il le sera dès que $\widetilde{n_s} \geqslant 2$, ou dès que $s \in \partial^{\mathrm{an}}(X)$, que $\mathrm{Card}(\mathsf{E}) \geqslant 2$ et que les points de E sont « suffisamment éloignés » au sens où il existe $x_1, x_2 \in \mathsf{E}$ tels que $]x_1, s] \cap]x_2, s] = \{s\}$ (i.e. x_1 et x_2 ne sont pas dans le même disque de $X \setminus \{s\}$).

Si $S^{\mathrm{an}}(X)$ est vide : Lorsque X est compact cela correspond à $X = \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$. Dans tous les cas $S^{\mathrm{an}}(Y)$ est l'enveloppe convexe de E, et Σ_Y correspond exactement aux sommets pluribranches de cette enveloppe convexe, c'est-à-dire que Σ_Y est non vide si et seulement si $\mathrm{Card}(\mathsf{E}) \geqslant 3$, auquel cas tous les éléments de Σ_Y sont des *nœuds hyperboliques*.

Nous savons que Σ_Y est une triangulation de X tout autant que de Y, avec pour cette dernière des composantes non relativement compactes qui apparaissent. Soit $e \in \mathsf{E}$ et V la composante connexe de $X \setminus \Sigma_Y$ contenant e. Nous savons que V est un disque k-analytique ouvert ([Duc], 5.5.3). Si l'on se place maintenant dans Y,

la composante connexe de $Y \setminus \Sigma_Y$ correspondante est exactement $V \setminus \{e\}$. Ce n'est ainsi plus un disque, mais une couronne k-analytique $\mathcal{C}_e$ non relativement compacte dans Y, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{C}^\infty(Y, \Sigma_Y)$. Lorsque X est compacte il est facile de voir que l'application $e \mapsto \mathcal{C}_e$ établit une bijection entre E et $\mathcal{C}^\infty(Y, \Sigma_Y)$.

Conclusion : Une courbe marquée $Y = X \setminus \mathsf{E}$ avec X compacte sera alors k-analytiquement hyperbolique dès que l'on est dans l'un des cas suivants :

(a) X est elle-même une courbe k-analytiquement hyperbolique ;

(b) X est une courbe de Tate et $\mathsf{E} \neq \emptyset$;

(c) $X = \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$ et $\mathrm{Card}(\mathsf{E}) \geqslant 3$;

(d) $S^{\mathrm{an}}(X)$ est réduit à un nœud *non hyperbolique* $\{s\}$, et l'une des conditions suivantes est vérifiée :
- $g(s) = 1$ et $\mathsf{E} \neq \emptyset$,
- $s \in \partial^{\mathrm{an}}(X)$, $\mathrm{Card}(\mathsf{E}) \geqslant 2$, $\exists\, x_1, x_2 \in \mathsf{E}$, $]x_1, s] \cap]x_2, s] = \{s\}$.

Exemple 3.3.10. *Le cas d'une courbe elliptique.* Soit $\mathscr{X}$ une courbe elliptique sur k munie de son élément neutre $e \in \mathscr{X}(k)$. Si $\mathscr{X}$ est à mauvaise réduction, $S^{\mathrm{an}}(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})$ est un cercle ne contenant pas le point rigide e. Si $\mathscr{X}$ est à bonne réduction, son squelette est constitué d'un unique nœud de genre 1. Dans les deux cas, $\mathscr{Y} = \mathscr{X}^{\mathrm{an}} \setminus \{e\}$ définit une courbe k-analytiquement hyperbolique. Cela permet d'associer de manière canonique une courbe marquée k-analytiquement hyperbolique à toute courbe elliptique sur k.

3. **Le demi-plan de Drinfeld**

Voici un exemple important de courbe k-analytiquement hyperbolique qui n'est pas l'analytifiée d'une courbe algébrique. Soit k_0 un corps non-archimédien *local* de caractéristique résiduelle $p > 0$ (i.e. k_0 est soit une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, soit du type $\mathbb{F}_q((T))$ où q est une puissance de p) contenu dans le corps k ultramétrique complet et algébriquement clos dont la valuation prolonge celle de k_0.

Le *demi-plan de Drinfeld*, noté $\mathfrak{D}^1_{k/k_0}$, est la courbe k-analytique analogue non archimédien du demi-plan de Poincaré, définie en tant qu'ouvert de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$ par :

$$\mathfrak{D}^1_{k/k_0} = \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k \setminus \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k(k_0).$$

Le demi-plan de Drinfeld $\mathfrak{D}^1_{k/k_0}$ est une courbe k-analytiquement hyperbolique non compacte et sans bord. En effet, son squelette analytique ainsi que l'ensemble de ses nœuds peuvent être décrits par :

$$\begin{cases} S^{\mathrm{an}}(\mathfrak{D}^1_{k/k_0}) = \{\text{enveloppe convexe de } \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k(k_0)\} \setminus \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k(k_0) = \{\eta_{a,r}\}_{\,a\in k_0,\, r\in\mathbb{R}^\times_+} \\ \\ \Sigma_{\mathfrak{D}^1_{k/k_0}} = \{\eta_{a,r}\}_{\,a\in k_0,\, r\in|k_0^\times|} \end{cases}$$

Ainsi, dans $S^{\mathrm{an}}(\mathfrak{D}^1_{k/k_0})$, tous les nœuds sont de valence $q+1$ (donc hyperboliques) où q désigne le cardinal du corps fini $\widetilde{k_0}$. Par ailleurs $S^{\mathrm{an}}(\mathfrak{D}^1_{k/k_0})$ n'est pas seulement un semi-graphe, mais un vrai graphe (toutes les arêtes sont « fermées ») infini, de là l'égalité avec le squelette tronqué :

$$S^{\mathrm{an}}(\mathfrak{D}^1_{k/k_0}) = S^{\mathrm{an}}(\mathfrak{D}^1_{k/k_0})^\natural.$$

Berkovich montre dans [Ber4] que le groupe $\mathrm{Aut}_k(\mathfrak{D}^1_{k/k_0})$ des automorphismes k-analytiques de $\mathfrak{D}^1_{k/k_0}$ coïncide avec $\mathrm{PGL}_2(k_0)$, et Alon étend dans [Al] ce résultat à un produit fini : si $k_1, \ldots, k_r \subset k$ sont des sous-extensions de k qui sont des corps ultramétriques locaux pour la valuation induite par celle de k, et si $M = \{\sigma \in \mathfrak{S}_r, k_{\sigma(i)} = k_i, 1 \leqslant i \leqslant r\}$, alors :

$$\mathrm{Aut}_k\left(\prod_{i=1}^r \mathfrak{D}^1_{k/k_i}\right) = M \ltimes \prod_{i=1}^r \mathrm{PGL}_2(k_i).$$

Remarque 3.3.11. Le squelette $S^{\mathrm{an}}(\mathfrak{D}^1_{k/k_0})$ n'est autre que l'*immeuble de Bruhat-Tits* de SL_2/k_0, noté $\mathfrak{B}^1_{k_0}$. On s'en rend facilement compte en considérant $\mathfrak{B}^1_{k_0}$ selon sa description en termes de normes : considérons le k_0-espace vectoriel

$$V = \bigoplus_{i=0}^1 k_0 T_i \subset k[T_0, T_1],$$

alors $\mathfrak{B}^1_{k_0}$ est défini comme l'ensemble des normes sur V modulo la relation qui identifie deux normes ρ_1, ρ_2 si et seulement si celles-ci sont *homothétiques*, c'est-à-dire s'il existe $c \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $\rho_1 = c.\rho_2$.

Chapitre 4

Reconstruction anabélienne du squelette analytique

Dans un monde suffisamment ordonné, il serait inutile de faire l'effort déraisonnable de noter de tels hasards miraculeux.

Henry Miller
(Sexus)

Soit k un corps ultramétrique complet, algébriquement clos, dans lequel on a fixé un système de racines primitives de l'unité. Notons p l'exposant caractéristique du corps résiduel $\widetilde{k}$.

4.1 Tempéroïde connexe associé au semi-graphe d'anabélioïdes d'une triangulation

Proposition 4.1.1. *Soit X une courbe k-analytique quasi-lisse, connexe, munie d'une triangulation généralisée S non vide. On a une équivalence de catégories (donc un isomorphisme d'anabélioïdes connexes) :*

$$\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(\mathcal{G}(X,S))$$

Démonstration. Remarquons que $\mathcal{U}(X,S) := (\mathrm{St}(X,S,s_i))_{s_i \in S}$ est un recouvrement ouvert de X.

Une *donnée de descente sur* $\mathcal{U}(X,S)$ est la donnée, pour tout $s_i \in S$, d'un élément $Y_{s_i} \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(\mathrm{St}(X,S,s_i))$ et d'une famille d'isomorphismes $(\varphi_{j,i})_{j,s_j \neq s_i}$ avec

$$\varphi_{i,j} : Y_{s_i} \times_{\mathrm{St}(X,S,s_i)} U_{i,j} \xrightarrow{\sim} Y_{s_j} \times_{\mathrm{St}(X,S,s_j)} U_{i,j} \tag{4.1}$$

au-dessus de $U_{i,j} := \mathrm{St}(X,S,s_i) \times_X \mathrm{St}(X,S,s_j) = \mathrm{St}(X,S,s_i) \cap \mathrm{St}(X,S,s_j)$.

Les conditions de 1-cocycles usuelles sont ici tautologiques car l'intersection de trois étoiles centrées en trois éléments distincts de S est toujours vides : si (s_1, s_2, s_3) est un triplet d'éléments distincts de S, alors $\bigcap_{i=1}^{3} \mathrm{St}(X,S,s_i) = \emptyset$.

Remarquons que si (s_i, s_j) est un couple d'éléments distincts de S, alors :

$$U_{i,j} = \mathrm{St}(X,S,s_i) \cap \mathrm{St}(X,S,s_j) = \bigsqcup_e \mathcal{C}_e$$

où e décrit l'ensemble des composantes de $\mathcal{C}(X,S)$ qui sont des couronnes dont les deux branches aboutissent en s_i et en s_j. Par conséquent, la condition d'existence des isomorphismes $\varphi_{i,j}$ de l'équation (4.1) ci-dessus peut se récrire :

$$\varphi_{i,j} : Y_{s_i} \times_{\mathrm{St}(X,S,s_i)} \bigsqcup_e \mathcal{C}_e \xrightarrow{\sim} Y_{s_j} \times_{\mathrm{St}(X,S,s_j)} \bigsqcup_e \mathcal{C}_e.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que cette condition correspond exactement à la « condition de recollement » permettant de définir les objets de la catégorie $\mathcal{B}(\mathcal{G}(X,S))$, d'où l'on déduit une équivalence de catégories entre $\mathcal{B}(\mathcal{G}(X,S))$ et la catégorie des données de descente sur $\mathcal{U}(X,S)$. D'autre part, par descente topologique, la catégorie $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X)$ est elle-aussi équivalente à la catégorie des données de descente sur $\mathcal{U}(X,S)$, d'où le résultat escompté.

□

Corollaire 4.1.2. *Sous les mêmes hypothèses, on a une équivalence de catégories* (*donc un isomorphisme de tempéroïdes connexes*) *:*

$$\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp},(p')}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}(X,S)).$$

Démonstration. D'après la proposition précédente on peut identifier les anabélioïdes connexes $\mathrm{Cov}^{\mathrm{t}}(X)$ et $\mathcal{B}(\mathcal{G}(X,S))$. Sous cette identification, l'ensemble des systèmes projectifs cofinaux de revêtements finis étales galoisiens de $\mathcal{G}(X,S)$ correspond à l'ensemble

des systèmes projectifs cofinaux de revêtements galoisiens finis de X modérés. Par ailleurs, si $\mathcal{G}_i$ est un revêtement étale fini galoisien de $\mathcal{G}(X,S)$ correspondant au revêtement Y_i de X, en reprenant les notations de la remarque 2.2.16 et de la proposition 1.5.4 on a un isomorphisme entre les groupes $T_i := \mathrm{Gal}(\widetilde{\mathcal{G}}_i/\mathcal{G}_i)$ et $\pi_1^{\mathrm{top}}(Y_i)$ (qui sont des groupes libres discrets) ainsi qu'entre les groupes $\mathrm{Gal}(\mathcal{G}_i/\mathcal{G}(X,S))$ et $\mathrm{Gal}(Y_i/X)$. De là on obtient un isomorphisme :

$$\mathrm{Gal}(\widetilde{\mathcal{G}}_i/\mathcal{G}(X,S)) \simeq \Delta_i,$$

qui induit, en vertu de la remarque 2.2.16 et de la proposition 1.5.4, un isomorphisme :

$$\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}(X,S)) \simeq \pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X).$$

□

Remarque 4.1.3. Si X est une courbe k-analytique quasi-lisse et connexe munie d'une triangulation généralisée S, on a une équivalence de catégories suivante :

$$\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}(X,S)) \simeq \mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}^\natural(X,S)).$$

En effet, selon le même raisonnement que ce qui précède, on montre que $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}^\natural(X,S))$ est elle aussi équivalente à $\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp},\,(p')}(X)$.

4.2 Reconstruction du squelette tronqué

4.2.1 Premier résultat anabélien, sur les squelettes tronqués

Théorème 4.2.1. *Soient X_1 et X_2 deux courbes k-analytiques quasi-lisses et connexes munies respectivement de triangulations généralisées S_1 et S_2 non vides de squelettes tronqués $\Gamma_1^\natural$ et $\Gamma_2^\natural$ dont les graphes d'anabélioïdes vérifient tous deux l'ensemble des hypothèses mochizukiennes. Supposons qu'il existe un isomorphisme entre les groupes tempérés premiers à p :*

$$\varphi : \pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X_1) \xrightarrow{\sim} \pi_2^{\mathrm{temp},\,(p')}(X_2).$$

Alors φ induit un isomorphisme de graphes entre les squelettes tronqués associés :

$$\Gamma_1^\natural \xrightarrow{\sim} \Gamma_2^\natural.$$

Remarque 4.2.2. Comme les groupes $\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X_i)$ peuvent se reconstruire directement à partir des $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X_i)$ (cf. remarque 1.5.6), tout isomorphisme entre $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X_1)$ et $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X_2)$

induit un isomorphisme entre $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X_1)$ et $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X_2)$. Ainsi, par le théorème ci-dessus, tout isomorphisme entre les $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X_i)$ induit un isomorphisme de graphes entre les squelettes tronqués.

Démonstration. Puisque l'on a $\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp},(p')}(X_i) = \mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X_i))$, l'isomorphisme φ induit une équivalence de catégories $\mathrm{Cov}^{\mathrm{temp},(p')}(X_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cov}^{\mathrm{temp},(p')}(X_2)$.

Par le corollaire 4.1.2 couplé à la remarque 4.1.3, on déduit une équivalence de catégories : $\mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}^\natural(X_1, S_1)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}^\natural(X_2, S_2))$.

En ayant montré au 3.3.7 que les $\mathcal{G}^\natural(X_i, S_i)$ sont quasi-cohérents, totalement élevés, totalement détachés et sommitalement minces, on déduit finalement du théorème 2.4.1 un isomorphisme de graphes d'anabélioïdes :

$$\mathcal{G}^\natural(X_1, S_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^\natural(X_2, S_2),$$

qui induit en particulier un isomorphisme de graphes : $\mathbb{G}^\natural(X_1, S_1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}^\natural(X_2, S_2)$, c'est-à-dire un isomorphisme de graphes entre les squelettes tronqués : $\Gamma_1^\natural \xrightarrow{\sim} \Gamma_2^\natural$.

□

Corollaire 4.2.3. *Soient X_1 et X_2 deux courbes k-analytiquement hyperboliques dont on note Σ_{X_1} et Σ_{X_2} les ensembles de nœuds des squelettes respectifs. Supposons qu'il existe un isomorphisme entre les groupes tempérés premiers à p :*

$$\varphi : \pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X_1) \xrightarrow{\sim} \pi_2^{\mathrm{temp},(p')}(X_2).$$

Alors φ induit un isomorphisme de graphes entre les squelettes analytiques tronqués :

$$S^{\mathrm{an}}(X_1)^\natural \xrightarrow{\sim} S^{\mathrm{an}}(X_2)^\natural.$$

Démonstration. Nous savons d'après le corollaire 3.3.7 que les graphes d'anabélioïdes $\mathcal{G}^\natural(X_1, \Sigma_{X_1})$ et $\mathcal{G}^\natural(X_2, \Sigma_{X_2})$ vérifient tous deux l'ensemble des hypothèses mochizukiennes. Il suffit donc de leur appliquer le théorème 4.2.1 ci-dessus pour obtenir le résultat escompté. □

4.2.2 Courbes analytiquement hyperboliques à arêtes relativement compactes

Définition 4.2.4 (Courbes k-analytiquement hyperboliques à arêtes relativement compactes)**.** *Une courbe k-analytiquement hyperbolique sera dite* à arêtes relativement com-

pactes *lorsque toutes les composantes connexes de* $X \setminus \Sigma_X$ *sont relativement compactes dans* X*, ce qui revient à dire que* $\mathcal{C}^\infty(X, \Sigma_X) = \emptyset$*, ou bien que* $S^{\mathrm{an}}(X)$ *est un vrai graphe, ou que* $S^{\mathrm{an}}(X) = S^{\mathrm{an}}(X)^\natural$*.*

Exemple 4.2.5. Toute courbe k-analytiquement hyperbolique compacte est à arêtes relativement compactes. Si k_0 est un corps local contenu dans k, le demi-plan de Drinfeld $\mathfrak{D}^1_{k/k_0}$ est également à arêtes relativement compactes.

Le résultat suivant met en évidence le comportement « anabélien » de telles courbes :

Théorème 4.2.6. *Soient* X_1 *et* X_2 *deux courbes* k*-analytiquement hyperboliques à arêtes relativement compactes. Supposons qu'il existe un isomorphisme entre les groupes tempérés premiers à* p *:*

$$\varphi : \pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X_1) \xrightarrow{\sim} \pi_2^{\mathrm{temp},\,(p')}(X_2).$$

Alors φ *induit (fonctoriellement en* φ*) un isomorphisme de graphes entre les squelettes analytiques associés :* $S^{\mathrm{an}}(X_1) \xrightarrow{\sim} S^{\mathrm{an}}(X_2)$*.*

Démonstration. Ce résultat se déduit directement du corollaire 4.2.3 et de la caractérisation des courbes k-analytiquement hyperboliques en terme de l'égalité entre squelette et squelette tronqué. □

4.2.3 Application : anabélianité tempérée du demi-plan de Drinfeld

Proposition 4.2.7. *Pour* $i \in \{1, 2\}$*, soit* p_i *un nombre premier et* k_i *un corps de nombres* p_i*-adique, c'est-à-dire une extension finie de* $\mathbb{Q}_{p_i}$*. Supposons les groupes suivants isomorphes :*

$$\pi_1^{\mathrm{temp},(p_1')}(\mathfrak{D}^1_{\mathbb{C}_{p_1}/k_1}) \simeq \pi_1^{\mathrm{temp},(p_2')}(\mathfrak{D}^1_{\mathbb{C}_{p_2}/k_2}),$$

alors $p_1 = p_2$*, et les extensions* $k_1/\mathbb{Q}_{p_1}$ *et* $k_2/\mathbb{Q}_{p_2}$ *ont même degré d'inertie :* $[\widetilde{k_1} : \mathbb{F}_{p_1}] = [\widetilde{k_2} : \mathbb{F}_{p_2}]$*.*

Démonstration. Nous savons que $\mathfrak{D}^1_{\mathbb{C}_{p_i}/k_i}$ est une courbe $\mathbb{C}_{p_i}$-analytiquement hyperbolique à arêtes relativement compactes. Par conséquent, le théorème 4.2.6 permet d'affirmer que le groupe $\pi_1^{\mathrm{temp},(p_i')}(\mathfrak{D}^1_{\mathbb{C}_{p_i}/k_i})$ détermine la classe d'isomorphisme du semi-graphe $S^{\mathrm{an}}(\mathfrak{D}^1_{\mathbb{C}_{p_i}/k_i}) = \mathfrak{B}^1_{k_i}$ (on n'utilise pas ici la fonctorialité de $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ du théorème 4.2.6). Or tous les sommets de $\mathfrak{B}^1_{k_i}$ ont une valence égale à $q_i + 1$, où $q_i = p_i^{f_i}$ est le cardinal de $\widetilde{k_i}$ et $f_i = [\widetilde{k_i} : \mathbb{F}_{p_i}]$ est le degré d'inertie de $k_i/\mathbb{Q}_{p_i}$. Ainsi on en déduit $q_1 = q_2$, puis $p_1 = p_2$ et enfin $f_1 = f_2$ en calculant $\ln q_i / \ln p_i$. □

4.3 Reconstruction des arêtes cuspidales

Nous venons de montrer que l'on peut retrouver le squelette analytique *tronqué* d'une courbe k-analytiquement hyperbolique à partir de son groupe tempéré, ce qui correspond au squelette tout entier dans les cas où les courbes en question sont à arêtes relativement compactes. Peut-on retrouver de manière générale tout le squelette d'une courbe k-analytiquement hyperbolique à partir de son groupe tempéré ? En nous inspirant de ce que fait Mochizuki dans [Mzk3], nous allons définir les courbes k-analytiquement anabéliennes comme l'ensemble des courbes k-analytiquement hyperboliques vérifiant une condition technique dite d'*ascendance vicinale*, que nous énoncerons, puis nous montrerons comment ces techniques de reconstruction *au niveau de tous les revêtement étales finis* (sans se restreindre aux revêtements modérés) d'une courbe k-analytiquement anabélienne permettent de retrouver à partir du groupe tempéré de la courbe les arêtes ouvertes du squelette qui faisaient défaut dans le squelette tronqué.

4.3.1 Stabilité de l'hyperbolicité par revêtements finis étales

Lemme 4.3.1. *Soit X une courbe k-analytiquement hyperbolique, et $X' \xrightarrow{f} X$ un revêtement fini étale connexe. Alors X' est une courbe k-analytiquement hyperbolique, et $f^{-1}(\Sigma_X) \subseteq \Sigma_{X'}$.*

Démonstration. Le revêtement $f : X' \to X$ est fini et plat et Σ_X et $\Sigma_{X'}$ sont respectivement l'ensemble des nœuds de $S^{\mathrm{an}}(X)$ et de $S^{\mathrm{an}}(X')$, ainsi l'on déduit directement de [Duc] (Proposition 6.2.5) que $f^{-1}(\Sigma_X) \subseteq \Sigma_{X'}$. En particulier $\Sigma_{X'}$ est non vide.

Soit $s' \in \Sigma_{X'}$, supposons qu'il existe $s \in \Sigma_X$ tel que $s' \in f^{-1}(\{s\})$. En reprenant les notations de la définition 3.3.3, l'hyperbolicité de s se traduit par : $2g(s) + \mathrm{val}_{S^{\mathrm{an}}(X)}(s) + \widetilde{n}_s > 2$. Or f est fini, ainsi $s \in \partial^{\mathrm{an}} X$ implique $s' \in \partial^{\mathrm{an}} X'$, c'est-à-dire $\widetilde{n}_{s'} > 0$ dès que $\widetilde{n}_s > 0$. Par ailleurs $\mathrm{val}_{S^{\mathrm{an}}(X')}(s') \geqslant \mathrm{val}_{S^{\mathrm{an}}(X)}(s)$, et la formule de Riemann-Hurwitz permet d'affirmer que $g(s') \geqslant g(s)$. On en déduit que s' est un nœud hyperbolique. Supposons que $s' \notin f^{-1}(\Sigma_X)$. Cela implique que $s' \notin \partial^{\mathrm{an}}(X')$, car dans le cas contraire la finitude de f entraînerait $f(s') \in \partial^{\mathrm{an}}(X)$ et de là $f(s') \in \Sigma_X$, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent $\widetilde{n}_{s'} = 0$. On a aussi $\mathrm{val}_{S^{\mathrm{an}}(X')}(s') \geqslant 1$ car si cette dernière était nulle, par connexité de $S^{\mathrm{an}}(X')$, on aurait $\Sigma_{X'} = \{s'\}$, et comme $\Sigma_{X'} \cap f^{-1}(\Sigma_X) \neq \emptyset$ cela donnerait $s' \in f^{-1}(\Sigma_X)$. Si s' est unibranché dans $S^{\mathrm{an}}(X')$ ou de valence égale à 2, alors en tant que nœud de $S^{\mathrm{an}}(X')$ il doit vérifier $g(s') > 0$, d'où l'hyperbolicité de s' (si $\mathrm{val}_{S^{\mathrm{an}}(X')}(s') \geqslant 3$ le nœud s' est automatiquement hyperbolique). On en déduit que X' est une courbe k-analytiquement hyperbolique. □

Soient X_1 et X_2 deux courbes k-analytiquement hyperboliques. Pour $i \in \{1,2\}$, notons $\Delta_i := \pi_1^{\mathrm{temp}}(X_i)$, et supposons donné un isomorphisme $\varphi : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} \Delta_2$. Soient $\Delta_1' \subseteq \Delta_1$ et $\Delta_2' \subseteq \Delta_2$ deux sous-groupes ouverts d'indice fini se correspondant via φ, et $X_i' \xrightarrow{f_i} X_i$ les revêtements finis étales connexes associés (en particulier on a l'égalité $\Delta_i' = \pi_1^{\mathrm{temp}}(X_i')$).

Corollaire 4.3.2. *Les techniques de reconstruction du corollaire 4.2.3 s'appliquent aux sous-groupes Δ_1' et Δ_2' se correspondant via φ, c'est-à-dire que l'isomorphisme*

$$\varphi : \pi_1^{\mathrm{temp}}(X_1) \xrightarrow{\sim} \pi_2^{\mathrm{temp}}(X_2)$$

induit un isomorphisme de graphes d'anabélioïdes $\mathcal{G}^\natural(X_1', \Sigma_{X_1'}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^\natural(X_2', \Sigma_{X_2'})$, donc en particulier un isomorphisme de graphes :

$$S^{\mathrm{an}}(X_1')^\natural \xrightarrow{\sim} S^{\mathrm{an}}(X_2')^\natural.$$

4.3.2 Commensurabilité terminale des sous-groupes cuspidaux

Définition 4.3.3. *Soit X une courbe k-analytiquement hyperbolique et Σ_X l'ensemble non vide des nœuds de son squelette analytique. Après l'identification donnée par l'isomorphisme $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{G}(X, \Sigma_X)) \simeq \pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$, nous dirons qu'un sous-groupe compact de $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ est un :*

- sous-groupe vicinal *s'il est de la forme π_e pour une arête e fermée, c'est-à-dire associée à une couronne relativement compacte,*
- sous-groupe cuspidal *s'il est de la forme π_e pour e une arête ouverte, en particulier c'est le groupe associé à une couronne non relativement compacte dès que Σ_X forme une vraie triangulation de X.*

Nous désignerons par arête vicinale *(resp.* cuspidale*) toute arête de $S^{\mathrm{an}}(X)$ associée à une couronne relativement compacte (resp. à une composante non relativement compacte) de $X \setminus \Sigma_X$.*

L'étude menée dans la section 3.1 des composantes coronaires nous permet d'affirmer que les sous-groupes vicinaux tout autant que cuspidaux sont isomorphes à $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$.

Remarque 4.3.4. D'après [Mzk3] (théorème 3.7), nous savons que les sous-groupes compacts maximaux de $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ correspondent exactement aux *sous-groupes sommitaux*, c'est-à-dire de la forme π_v pour $v \in \Sigma_X$, et que les sous-groupes vicinaux sont exactement les intersections non triviales de deux sous-groupes compacts maximaux. Un sous-groupe

cuspidal n'est en revanche contenu que dans un seul sous-groupe compact maximal de $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$. Par conséquent, un sous-groupe ne peut être à la fois vicinal et cuspidal.

Définition 4.3.5. *Si G est un groupe et $H \subseteq G$ un sous-groupe, le* commensurateur *de H dans G, noté $C_G(H)$, est le sous-groupe de G défini par :*

$$C_G(H) := \{g \in G \mid (gHg^{-1} \cap H) \text{ est d'indice fini dans } H \text{ et dans } gHg^{-1}\}.$$

On dira que H est commensurément terminal *dans G lorsque $C_G(H) = H$.*

Remarque 4.3.6. La terminalité commensurable est préservée par restriction du groupe total : si $G' \overset{\iota}{\hookrightarrow} G$ est une injection de groupes et $H' \subseteq G'$ un sous-groupe, alors H' est commensurément terminal dans G' dès que $\iota(H')$ est commensurément terminal dans G. Cela découle directement des définitions.

Lemme 4.3.7. *Si G est un groupe topologique dont H est un sous-groupe commensurément terminal, alors H est uniquement déterminé par n'importe lequel de ses sous-groupes d'indice fini.*

Démonstration. Soit V un sous-groupe fini de H. Nous affirmons que H est obtenu à partir de V en prenant son commensurateur, c'est-à-dire : $H = C_G(V)$. En effet, comme H est commensurément terminal, cela revient à montrer que $C_G(H) = C_G(V)$. Notons n l'indice de V dans H.

- *Montrons $C_G(V) \subseteq C_G(H)$:* Soit $g \in C_G(V)$, par hypothèse il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $[V : gVg^{-1} \cap V] = r$. Par multiplicativité des indices on a :

  $$[H : gVg^{-1} \cap V] = rn = [H : gHg^{-1} \cap H] \cdot [gHg^{-1} \cap H : gVg^{-1} \cap V].$$

  Par conséquent $[H : gHg^{-1} \cap H] \leqslant rn$, en particulier $[H : gHg^{-1} \cap H]$ est fini. On montre de manière tout à fait similaire que $[gHg^{-1} : gHg^{-1} \cap H]$ est fini, d'où $g \in C_G(H)$.
- *Montrons $C_G(H) \subseteq C_G(V)$:* Soit $g \in C_G(H)$, par hypothèse il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $[H : gHg^{-1} \cap H] = s$. Rappelons que si A est un groupe et B et B' sont des sous-groupes de A, alors $[B' : B' \cap B] \leqslant [A : B]$. En prenant $A = H$, $B' = V$ et $B = gVg^{-1} \cap H$, on obtient :

  $$[V : gVg^{-1} \cap V] \leqslant [H : gVg^{-1} \cap H].$$

Or $[H : gVg^{-1} \cap H] = [H : gHg^{-1} \cap H] \cdot [gHg^{-1} \cap H : gVg^{-1} \cap H]$. En prenant $A = gHg^{-1}$, $B' = gHg^{-1} \cap H$ et $B = gVg^{-1}$, on obtient :

$$[gHg^{-1} \cap H : gVg^{-1} \cap H] \leqslant [gHg^{-1} : gVg^{-1}] = [H : V] = n.$$

Par conséquent $[V : gVg^{-1} \cap V] \leqslant sn$, en particulier $[V : gVg^{-1} \cap V]$ est fini. On montre de manière similaire que $[gVg^{-1} : gVg^{-1} \cap V]$ est également fini, d'où $g \in C_G(V)$.

□

Lemme 4.3.8. *Soit X une courbe k-analytiquement hyperbolique, notons $\Delta := \pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$. Tout sous-groupe cuspidal de $\Delta^{(p')}$ est commensurément terminal dans $\Delta^{(p')}$. Un sous-groupe cuspidal étant compact, il est dès lors uniquement déterminé par n'importe lequel de ses sous-groupes ouverts.*

Démonstration. Soit $\pi_x \subset \Delta^{(p')}$ un sous-groupe cuspidal associé à un cusp x aboutissant à $s \in \Sigma_X$. En notant $\widehat{\Delta}^{(p')}$ le complété pro-p' fini de Δ, on a $\widehat{\Delta}^{(p')} = \pi_1^{\mathrm{t}}(X)$ (groupe fondamental modéré profini de X) et une injection $\Delta^{(p')} \hookrightarrow \widehat{\Delta}^{(p')}$ donnée par les propositions 1.5.7 ou 2.2.15. D'après la remarque 4.3.6, il suffit de montrer que π_x est commensurément terminal dans $\widehat{\Delta}^{(p')}$, cela impliquera qu'il l'est également dans $\Delta^{(p')}$. Supposons par l'absurde que π_x n'est pas commensurément terminal dans $\widehat{\Delta}^{(p')}$, c'est-à-dire qu'il existe un élément $\sigma \in \widehat{\Delta}^{(p')}$ n'appartenant pas à π_x tel que $\pi_x \cap \pi_x^\sigma$ soit d'indice fini et donc ouvert dans π_x et π_x^σ (où l'on note $\pi_x^\sigma := \sigma\pi_x\sigma^{-1}$). Puisque π_x et π_x^σ sont compacts, leurs topologies profinies sont celles induites par la topologie profinie de $\widehat{\Delta}^{(p')}$, et comme les sous-groupes ouverts distingués de $\widehat{\Delta}^{(p')}$ forment une base d'ouverts, il existe un sous-groupe ouvert $\mathcal{U} \triangleleft \widehat{\Delta}^{(p')}$ vérifiant :

$$\pi_x \cap \mathcal{U} \subseteq \pi_x \cap \pi_x^\sigma \quad \text{et} \quad \pi_x^\sigma \cap \mathcal{U} \subseteq \pi_x \cap \pi_x^\sigma.$$

De là on obtient : $\pi_x \cap \mathcal{U} = \pi_x \cap \pi_x^\sigma \cap \mathcal{U} = \pi_x^\sigma \cap \mathcal{U} = (\pi_x \cap \mathcal{U})^\sigma$.

Soit $Z \xrightarrow{f} X$ le revêtement fini modéré connexe et galoisien donné par $\mathcal{U}$, de sorte que $\mathcal{U} = \pi_1^{\mathrm{t}}(Z)$. Soit z un cusp de Z (i.e. une composante associée à une arête ouverte de $S^{\mathrm{an}}(Z)$) au-dessus de x tel que $z^\sigma \neq z$ (cela est possible quitte à prendre $\mathcal{U}$ suffisamment petit, car $\sigma \notin \pi_x$). Les groupes $\pi_z := \pi_x \cap \mathcal{U}$ et $\pi_{z^\sigma} := (\pi_x \cap \mathcal{U})^\sigma$ sont les groupes d'inertie de z et z^σ, et l'on a $\pi_z = \pi_{z^\sigma}$. On peut supposer, qui à restreindre à nouveau $\mathcal{U}$, que Z admet un autre cusp z' au-dessus de x, distinct de z et z^σ.

Soit $s \in \partial^{\mathrm{an}}(Z)$. Comme Z est quasi-lisse en s, il existe une courbe k-analytique lisse

Y_s et un voisinage V_s de s dans Z tel que V_s s'identifie à un domaine analytique fermé de Y_s. Fixons un voisinage affinoïde W_s de s dans Y_s ; l'intersection $T_s := V_s \cap W_s$ s'identifie à un voisinage analytique compact de s dans Z. Quitte à restreindre chacun des W_s, pour s parcourant $\partial^{\mathrm{an}}(Z)$, on peut supposer que les T_s sont disjoints dans Z. Soit Z^+ la courbe k-analytique obtenue en recollant $\coprod W_s$ et Z le long de $\coprod T_s$. On peut par ailleurs restreindre Z^+ de manière à ce que sous l'injection $S^{\mathrm{an}}(Z) \hookrightarrow S^{\mathrm{an}}(Z^+)$ les arêtes cuspidales de Z restent des arêtes cuspidales de $S^{\mathrm{an}}(Z^+)$.

Fixons un entier $\ell \geqslant 2$ premier à p. Comme la courbe Z^+ est lisse, le diagramme 1.4.6 permet d'exhiber un morphisme de groupes surjectif :

$$H^1(Z^+_{\text{ét}}, \mu_\ell) \xrightarrow{\quad\theta\quad} \mathsf{Harm}(S^{\mathrm{an}}(Z^+), \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}).$$

Soient e_z, e_{z^σ} et $e_{z'}$ les arêtes cuspidales de $S^{\mathrm{an}}(Z^+)$ correspondant aux cusps z, z^σ et z' de Z, et orientées vers le sommet auquel elles aboutissent. Le lemme 1.4.4 permet d'exhiber une cochaîne harmonique $c \in \mathrm{Harm}(S^{\mathrm{an}}(Z^+), \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ telle que $c(e_z) \neq c(e_{z^\sigma})$. Soit $h \in H^1(Z_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ la restriction à Z d'un élément de $\theta^{-1}(\{c\})$ vu comme une classe d'isomorphisme de μ_ℓ-torseurs analytiques sur Z^+. Nous savons que h définit (à isomorphisme près) un revêtement modéré de Z. Or $\theta(h)(e_z) \neq \theta(h)(e_{z^\sigma})$ contredit l'égalité des groupes d'inertie $\pi_z = \pi_{z^\sigma}$, d'où la commensurabilité terminale de tout sous-groupe cuspidal dans $\widehat{\Delta}^{(p')}$ et donc dans $\Delta^{(p')}$.

Par ailleurs tout sous-groupe cuspidal étant compact, ses sous-groupes ouverts sont d'indice fini. Il suffit dès lors d'appliquer le lemme 4.3.7 précédent pour obtenir qu'un sous-groupe cuspidal est uniquement déterminé par n'importe lequel de ses sous-groupes ouverts. □

4.3.3 Ascendance vicinale et courbes analytiquement anabéliennes

Lemme 4.3.9. *Soit X une courbe k-analytiquement hyperbolique. Notons $\Delta := \pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$. Si $\Delta' \subseteq \Delta$ est un sous-groupe ouvert d'indice fini induisant un morphisme $\iota : \Delta'^{(p')} \to \Delta^{(p')}$, alors l'image selon ι de tout sous-groupe vicinal de $\Delta'^{(p')}$ est soit triviale, soit un sous-groupe ouvert d'un sous-groupe vicinal de $\Delta^{(p')}$, soit un sous-groupe ouvert d'un sous-groupe cuspidal de $\Delta^{(p')}$, ces cas étant mutuellement exclusifs.*

Démonstration. Le sous-groupe $\Delta' \subseteq \Delta$ définit un revêtement fini étale connexe $X' \xrightarrow{f} X$ envoyant $S^{\mathrm{an}}(X')$ sur $S^{\mathrm{an}}(X)$. Comme $f^{-1}(\Sigma_X) \subseteq \Sigma_{X'}$ (cf. lemme 4.3.1), l'image d'une

arête vicinale de $S^{\mathrm{an}}(X')$ est soit hors du squelette de X (auquel cas l'image du sous-groupe vicinal associé est triviale), soit contenue dans une arête vicinale, soit dans une arête cuspidale de $S^{\mathrm{an}}(X)$, d'où les cas possibles.

Lorsque l'image est non triviale, le fait qu'un sous-groupe vicinal de ${\Delta'}^{(p')}$ ne puisse s'envoyer à la fois sur des sous-groupes de sous-groupes vicinaux et cuspidaux de $\Delta^{(p')}$ résulte directement du caractère totalement détaché du semi-graphe d'anabélioïdes $\mathcal{G}(X, \Sigma_X)$. □

Remarque 4.3.10. Soit $\mathcal{C}'$ une couronne de X' correspondant à une arête vicinale e' de $S^{\mathrm{an}}(X')$ s'envoyant sur une couronne $\mathcal{C}$ de X correspondant à une arête e (vicinale ou cuspidale) de $S^{\mathrm{an}}(X)$. Quitte à identifier $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) au domaine analytique de $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ défini par la condition $|T| \in I$ (resp. $|T| \in J$) avec I (resp. J) un intervalle non vide de $\mathbb{R}_+^*$, le morphisme envoyant $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ est défini par une fonction analytique f inversible sur $\mathcal{C}'$ s'écrivant $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i$ et admettant un unique monôme strictement dominant $|a_j| r^j$ pour un certain $j \in \mathbb{Z}$. Le morphisme $\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ est alors fini et plat de degré $|j|$ (cf. [Duc], 3.6.8). Si $\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ est modéré, le morphisme de groupes injectif $\pi_{e'} \hookrightarrow \pi_e$ qu'il induit identifie $\pi_{e'}$ à l'unique sous-groupe d'indice $|j|$ de $\pi_e = \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$, à savoir $|j|\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$, qui est ouvert.

Définition 4.3.11 (Courbes k-analytiquement anabéliennes)**.** *Une courbe k-analytique non vide X, connexe, quasi-lisse et de groupe tempéré noté $\Delta := \pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ sera dite* k-analytiquement anabélienne *lorsqu'elle est k-analytiquement hyperbolique et qu'elle vérifie la condition suivante que l'on appellera propriété d'*ascendance vicinale *:*

> *Tout sous-groupe cuspidal de $\Delta^{(p')}$ admet un sous-groupe ouvert qui n'est autre que l'image d'un sous-groupe vicinal de ${\Delta'}^{(p')}$ par le morphisme naturel*
>
> $$\iota : {\Delta'}^{(p')} \to \Delta^{(p')}$$
>
> *induit par l'injection d'un certain sous-groupe ouvert $\Delta' \subseteq \Delta$ d'indice fini.*

Théorème 4.3.12. *Soient X_1 et X_2 deux courbes k-analytiquement anabéliennes. Supposons qu'il existe un isomorphisme entre les groupes tempérés :*

$$\varphi : \pi_1^{\mathrm{temp}}(X_1) \xrightarrow{\sim} \pi_2^{\mathrm{temp}}(X_2).$$

Alors φ induit un isomorphisme de semi-graphes $\bar{\varphi} : S^{\mathrm{an}}(X_1) \xrightarrow{\sim} S^{\mathrm{an}}(X_2)$, fonctoriel en φ.

Démonstration. Pour $i \in \{1, 2\}$, notons Σ_{X_i} l'ensemble (non vide) des nœuds du squelette analytique de X_i, et $\Delta_i = \pi_i^{\mathrm{temp}}(X_i)$. Le corollaire 4.2.3 fournit un isomorphisme de graphes entre les squelettes tronqués :

$$\widetilde{\varphi} : S^{\mathrm{an}}(X_1)^{\natural} \xrightarrow{\sim} S^{\mathrm{an}}(X_2)^{\natural}.$$

Afin d'obtenir l'isomorphisme voulu entre les squelettes (non tronqués), il reste à montrer que la donnée de φ permet de retrouver les arêtes ouvertes, c'est-à-dire d'établir une bijection entre $\mathcal{C}^{\infty}(X_1, \Sigma_{X_1})$ et $\mathcal{C}^{\infty}(X_2, \Sigma_{X_2})$ compatible avec $\widetilde{\varphi}$.

Considérons une arête cuspidale $x_1 \in \mathcal{C}^{\infty}(X_1, \Sigma_{X_1})$ de sous-groupe cuspidal associé $\pi_{x_1} \subset \Delta_1^{(p')}$. D'après la propriété d'ascendance vicinale dont jouit X_1, il est loisible de considérer un sous-groupe ouvert d'indice fini $\Delta_1' \subseteq \Delta_1$ tel que π_{x_1} admette un sous-groupe ouvert qui est l'image d'un sous-groupe vicinal π_{e_1}' de ${\Delta_1'}^{(p')}$ par le morphisme naturel $\iota_1 : {\Delta_1'}^{(p')} \to \Delta_1^{(p')}$. Considérons alors les groupes Δ_2' et $\pi_2' \subseteq {\Delta_2'}^{(p')}$ associés par φ à Δ_1' et $\pi_{e_1}' \subseteq {\Delta_1'}^{(p')}$. Le lemme 4.3.9 nous permet alors d'affirmer que π_2' est un sous-groupe vicinal de ${\Delta_2'}^{(p')}$, dont l'image par le morphisme $\iota_2 : {\Delta_2'}^{(p')} \to \Delta_2^{(p')}$ est un sous-groupe ouvert d'un sous-groupe cuspidal π_{x_2} de $\Delta_2^{(p')}$ pour un certain $x_2 \in \mathcal{C}^{\infty}(X_2, \Sigma_{X_2})$. Or, en sa qualité de commensurément terminal (voir lemme 4.3.8), π_{x_2} est entièrement déterminé par ce sous-groupe ouvert. D'autre part x_2 est entièrement déterminé par π_{x_2} puisque la propriété dont jouit $\mathcal{G}^{\natural}(X_2, \Sigma_{X_2})$ d'être totalement détaché implique qu'une arête cuspidale est entièrement déterminée par la classe de conjugaison de son sous-groupe cuspidal. Par ailleurs, cette manière d'associer x_2 à x_1 ne dépend pas du choix du sous-groupe ouvert $\Delta_1' \subseteq \Delta_1$ vérifiant les propriétés requises : si Δ_1'' est un autre sous-groupe ouvert d'indice fini de Δ_1 permettant d'associer $x_2'' \in \mathcal{C}^{\infty}(X_2, \Sigma_{X_2})$ à x_1, alors l'intersection $\Delta_1' \cap \Delta_1''$ est un sous-groupe ouvert de Δ_1 d'indice fini permettant d'associer à x_1 un élément $x_2''' \in \mathcal{C}^{\infty}(X_2, \Sigma_{X_2})$, qui par le corollaire 4.3.2 doit être égal à x_2 tout autant qu'à x_2'', d'où l'égalité $x_2 = x_2''$.

Par conséquent, $x_1 \mapsto x_2$ est bien défini et induit une bijection $\mathcal{C}^{\infty}(X_1, \Sigma_{X_1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\infty}(X_2, \Sigma_{X_2})$ compatible avec $\widetilde{\varphi}$, d'où le résultat escompté. □

Remarque 4.3.13. La propriété d'ascendance vicinale fait appel à un sous groupe ouvert d'indice fini $\Delta' \subseteq \Delta$ associé à un revêtement étale $X' \xrightarrow{f} X$. Or, puisqu'il s'agit d'un sous-groupe de $\Delta = \pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ et non de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)^{(p')}$, le morphisme f n'a aucune raison d'être modéré. De là, c'est bien le groupe tempéré total $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ qui détermine le sque-

lette analytique $S^{\mathrm{an}}(X)$, tandis que le groupe tempéré modéré, à savoir $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)^{(p')}$, ne détermine que le squelette tronqué $S^{\mathrm{an}}(X)^{\natural}$. Par ailleurs, il n'y aucun espoir que le groupe $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)^{(p')}$ premier à p puisse déterminer tout le squelette analytique $S^{\mathrm{an}}(X)$ dès que la courbe k-analytiquement hyperbolique X n'est pas à arêtes relativement compactes. En effet, considérons une composante connexe $\mathcal{E}$ de $X \setminus \Sigma_X$ associée à une arête non relativement compacte (arête ouverte), et $Y = X \setminus \mathcal{E}$ la courbe obtenue à partir de X par ablation de $\mathcal{E}$. Une telle ablation rajoute du bord, de telle sorte que Y reste une courbe k-analytiquement hyperbolique. Par ailleurs il y a égalité des groupes tempérés premier à p : $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)^{(p')} = \pi_1^{\mathrm{temp}}(Y)^{(p')}$, cela découle du théorème de rigidité 4.3.4 de [Ber2] appliqué à l'immersion $Y \hookrightarrow X$ ainsi que de la description des revêtement modérés d'une couronne et de l'expression de $\mathcal{E}$ comme limite inductive de couronnes. En revanche, les deux squelettes analytiques sont différents en tant que semi-graphes en ce que $S^{\mathrm{an}}(Y)$ est obtenu à partir de $S^{\mathrm{an}}(X)$ par ablation de l'arête ouverte associée à $\mathcal{E}$, d'où l'impossibilité de retrouver $S^{\mathrm{an}}(X)$ à partir de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)^{(p')}$.

4.4 Exemples de courbes k-analytiquement anabéliennes

Les courbes k-analytiquement hyperboliques à arêtes relativement compactes (4.2.4) sont des exemples de courbes k-analytiquement anabéliennes. De là, les courbes k-analytiquement hyperboliques compactes tout autant que le demi-plan de Drinfeld sont des courbes k-analytiquement anabéliennes. Ce ne sont cependant pas les seuls exemples de telles courbes, comme le montrent les résultats suivants.

Définition 4.4.1 (Cusps coronaires, coronaires finis et discaux épointés)**.** *Soit X une courbe k-analytiquement hyperbolique. Un cusp sera dit :*

- coronaire *lorsque la composante connexe de $X \setminus \Sigma_X$ qu'il définit est une couronne ;*
- coronaire fini *dès qu'il est coronaire et que la couronne associée est de longueur finie ;*
- discal épointé *dès qu'il est coronaire et que la couronne associée est isomorphe à un disque k-analytique privé d'un point rigide (la couronne est alors de longueur infinie).*

4.4.1 Avec cusps coronaires finis

Proposition 4.4.2. *Si k est de caractéristique mixte, alors toute courbe k-analytiquement hyperbolique dont tous les cusps sont coronaires finis est k-analytiquement anabélienne.*

Démonstration. Soit X une telle courbe, et $(e_i)_{i\in I}$ l'ensemble des cusps de X, vus comme arêtes de $S^{\mathrm{an}}(X)$. Par hypothèse, pour chaque $i \in I$, la composante connexe de $X \setminus \Sigma_X$ déterminée par e_i est une couronne de longueur finie que l'on note $\mathcal{C}_i$. Soit x_i le sommet de $S^{\mathrm{an}}(X)$ auquel $\mathcal{C}_i$ aboutit. Le corollaire 1.4.9 assure l'existence d'un μ_p-torseur Y_i de $\mathcal{C}_i$ et d'un point $z_i \in S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}_i)$ tel que Y_i est totalement déployé au-dessus de l'ouvert $r^{-1}\left(\,]z_i, x_i[\,\right)$ et non déployé avec un seul antécédent au-dessus du complémentaire de $]z_i, x_i[$ dans $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}_i)$ (r désigne ici la rétraction canonique de X sur son squelette analytique). Soit X' l'ouvert de X défini par :

$$X' = X \setminus \bigcup_{i\in I} r^{-1}\left(S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}_i) \setminus\,]z_i, x_i[\,\right) = r^{-1}\left(S^{\mathrm{an}}(X)^{\natural}\right) \cup \bigcup_{i\in I} r^{-1}\left(\,]z_i, x_i[\,\right).$$

Soit Y le revêtement fini étale de X obtenu en recollant chacun des Y_i au revêtement trivial de X' à p feuillets le long des $r^{-1}\left(\,]z_i, x_i[\,\right)$. Notons $y_i \in Y$ l'unique point au-dessus de z_i, c'est un nœud de X'. Si $\widetilde{x}_i \in Y$ désigne l'un des p antécédents de x_i, alors $]y_i, \widetilde{x}_i[$ définit une arête vicinale de $S^{\mathrm{an}}(X')$, dont le sous-groupe vicinal associé s'envoie sur un sous-groupe ouvert du sous-groupe cuspidal π_{e_i}, et ce pour chaque $i \in I$. Par conséquent le revêtement X' assure que X vérifie la propriété d'ascendance vicinale, d'où le résultat. On vient même de montrer par cette preuve que X vérifie une propriété plus forte d' « ascendance vicinale simultanée » en ce que l'on peut trouver un revêtement étale fini, X', permettant l'ascendance vicinale de tous les cusps simultanément. □

4.4.2 Avec cusps discaux épointés et coronaires finis

Proposition 4.4.3. *Si $\mathscr{X}$ est une k-courbe hyperbolique et k est de caractéristique mixte, la courbe k-analytique $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ est k-analytiquement anabélienne.*

Démonstration. Cela est une reformulation directe de la propriété *(iv)* apparaissant dans la preuve du résultat 3.11 de [Mzk3]. □

Remarquons qu'en vertu de la proposition ci-dessus, toute courbe marquée $Y = X \setminus \mathsf{E}$ k-analytiquement hyperbolique avec X compacte est k-analytiquement anabélienne.

Exemple 4.4.4. *Le cas d'une courbe elliptique.* Nous avons vu dans l'exemple 3.3.10 une manière canonique d'associer à une k-courbe elliptique $\mathscr{X}$ une courbe k-analytiquement hyperbolique : il s'agit de $\mathscr{Y} = \mathscr{X}^{\mathrm{an}} \setminus \{e\}$, où $e \in \mathscr{X}(k)$ est l'élément neutre de $\mathscr{X}$. Or, par ce qui précède, une telle courbe $\mathscr{Y}$ est k-analytiquement anabélienne. Cela permet d'associer de manière canonique une courbe k-analytiquement anabélienne à toute courbe elliptique sur k.

Corollaire 4.4.5. *Toute courbe k-analytiquement hyperbolique dont le squelette analytique est un semi-graphe fini et dont les cusps sont uniquement coronaires finis ou discaux épointés est k-analytiquement anabélienne dès que k est de caractéristique mixte.*

Démonstration. Soit X une telle courbe. En reprenant *verbatim* le raisonnement de la preuve de la proposition 4.4.2, il est possible de construire un revêtement fini étale X' de X assurant l'ascendance vicinale de tout cusp coronaire fini de X. De là, quitte à prolonger tous les cusps coronaires finis en des cusps discaux épointés, on peut supposer dans le reste de la preuve que tous les cusps de X sont discaux épointés. Remarquons que même si des cusps coronaires finis apparaissent dans X', cela ne pose aucun problème en ce que l'ascendance vicinale des cusps ne doit pas nécessairement être « simultanée ».

Soit $(\varpi_i)_{i\in I}$ l'ensemble (fini) des cusps discaux épointés, chacun associés à une couronne $\mathcal{C}_i$ s'incarnant comme un disque $\mathcal{D}_i$ privé d'un point rigide x_i. Soit $\overline{X}$ la courbe k-analytique obtenue à partir de X :

- en prolongeant chaque $\mathcal{C}_i$ à $\mathcal{D}_i$, pour tout $i \in I$;
- pour chaque $x \in \partial^{\mathrm{an}} X$, en prolongeant en des disques $(\mathcal{D}_{x,j})_{1\leqslant j\leqslant \widetilde{n}_x}$ les $\widetilde{n}_x$ branches issues de x manquant à X en raison de l'appartenance de x à son bord.

En sa qualité de compacte et sans bord, $\overline{X}$ est algébrisable : il existe une k-courbe projective lisse $\overline{\mathscr{X}}$ telle que $\overline{X} = \overline{\mathscr{X}}^{\mathrm{an}}$. Notons $\mathscr{X} = \overline{\mathscr{X}} \setminus \{(x_i)_{i\in I}\}$: on a $S^{\mathrm{an}}(X) = S^{\mathrm{an}}(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})$, $\mathscr{X}$ est une k-courbe hyperbolique, et X s'identifie à un domaine analytique fermé de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$. Si $i \in I$, en considérant ϖ_i comme un cusp discal épointé de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ qui est une courbe k-analytiquement anabélienne d'après 4.4.3, il existe un revêtement fini étale Y_i de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ et une arête vicinale de $S^{\mathrm{an}}(Y)$ dont le sous-groupe vicinal associé est naturellement envoyé sur un sous-groupe ouvert du sous-groupe cuspidal π_{ϖ_i}. Ainsi, la considération des revêtements $Y_i \times_{\mathscr{X}^{\mathrm{an}}} X$ permet de conclure que X vérifie la propriété d'ascendance vicinale, d'où son anabélianité. □

Récapitulons les résultats obtenus en donnant une liste des courbes k-analytiquement hyperboliques que l'on sait être anabéliennes :

Théorème 4.4.6. *Soit k un corps ultramétrique complet algébriquement clos et non trivialement valué. Alors les trois types de courbes ci-dessous sont k-analytiquement anabéliennes :*

- *les courbes k-analytiquement hyperboliques à arêtes relativement compactes (*ex : *le demi-plan de Drinfeld) ;*
- *si k est de caractéristique mixte : les courbes k-analytiquement hyperboliques dont tous les cusps sont coronaires finis ;*

- *si k est de caractéristique mixte : les courbes k-analytiquement hyperboliques dont le squelette analytique est un semi-graphe fini et dont les cusps sont coronaires finis ou discaux épointés.*

Remarque 4.4.7. Dans la preuve de l'ascendance vicinale des analytifiées des k-courbes hyperboliques donnée par Mochizuki dans [Mzk3], le morphisme que l'auteur utilise (associé à un sous-groupe ouvert $\Delta' \subseteq \Delta$ permettant l'ascendance vicinale d'un sous-groupe cuspidal de $\Delta^{(p')}$), qui n'est pas du tout modéré, est donné par la « multiplication par p au niveau de la jacobienne ». Dans le cas des cusps coronaires finis, nous montrons la propriété d'ascendance vicinale en prenant une « racine p-ième » d'une fonction coordonnée sur une couronne. Il serait tentant de généraliser des constructions similaires à toute courbe k-analytiquement hyperbolique X. Il faudrait typiquement pouvoir fabriquer un revêtement étale fini de X ayant au-dessus d'un point de type 2 fixé un antécédent tel que l'extension résiduelle correspondante soit inséparable, ou montrer qu'une courbe k-analytiquement hyperbolique admet une fonction globale inversible, puis prendre le revêtement donné par sa « racine p-ième ». Or la possibilité d'une telle construction ne semble pour l'instant pas évidente à l'auteur, mais il n'est pas exclu que toute courbe k-analytiquement hyperbolique soit k-analytiquement anabélienne.

Les courbes k-analytiquement hyperboliques dont on ne connaît pour l'instant pas l'éventuel caractère k-analytiquement anabélien sont de deux types :

- celles qui ont des cusps autres que coronaires finis ou discaux épointés ;
- celles dont les cusps sont uniquement coronaires finis ou discaux épointés, qui ont au moins un cusp discal épointé mais dont le squelette analytique est un semi-graphe infini.

Automorphismes du groupe tempéré préservant le graphe

La petite détresse, l'espèce de vertige à l'envers, qui marquent le moment où l'on se ressaisit, quand justement l'on s'est abandonné à quelque giration intérieure.

Jules Romains

(Quand le navire...)

Soit k un corps ultramétrique complet, algébriquement clos, et p l'exposant caractéristique de $\widetilde{k}$. Fixons, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, une racine primitive n-ième de l'unité, de sorte que l'on ait des isomorphismes naturels : $\mu_n(k) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}^*} \mu_n(k) = \widehat{\mathbb{Z}}$.

Soit X une courbe k-analytiquement hyperbolique.

Rappels et définition

Le groupe $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ détermine, en tant que graphe, le squelette tronqué $S^{\mathrm{an}}(X)^\natural$ de X. Les sommets de ce graphe, c'est-à-dire les nœuds de X, sont en bijection avec les classes de conjugaison des sous-groupes compacts maximaux de $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$, tandis que les arêtes fermées, dites *vicinales*, sont en bijection avec les classes de conjugaison des intersections non triviales de deux sous-groupes compacts maximaux de $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$. Pour chaque sommet v, un *sous-groupe sommital associé* à v est un représentant π_v de la classe de conjugaison des sous-groupes compacts maximaux associée à v. De même, pour chaque arête vicinale e, un *sous-groupe vicinal* associé à e est un représentant π_e de la classe de conjugaison associée à e. Si e' est un cusp, ou *arête cuspidale* (i.e. une arête ouverte de $S^{\mathrm{an}}(X)$), il est entièrement déterminé par la classe de conjugaison de tout sous-groupe cuspidal $\pi_{e'}$ correspondant (puisque le semi-graphe d'anabélioïdes associé est totalement détaché, voir 2.3.4). En revanche, si X n'est pas k-analytiquement

anabélienne, il n'y a *a priori* pas d'espoir de déterminer les groupes cuspidaux à partir de $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$.

Si e est une arête vicinale correspondant à une couronne $\mathcal{C}_e$ et que π_e est un sous-groupe vicinal associé à e, alors $\pi_e \simeq \pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(\mathcal{C}_e)$. Par ailleurs, comme tout revêtement modéré connexe d'une couronne est kummérien, le choix d'une orientation de $\mathcal{C}_e$ fournit un isomorphisme canonique :

$$\pi_e \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}.$$

Rappelons que tout groupe cuspidal $\pi_{e'}$ est également isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$ (cf. 3.1.5), et que cet isomorphisme est canonique dès que l'on munit d'une orientation l'arête e'.

Si π_v est un groupe sommital associé à un nœud v de X de type (g,n) (où $g = g(v)$ est le genre de v et $n = n_v$ est la valence généralisée en v, cf. 3.2.16), nous savons que π_v est isomorphe à la (p')-complétion profinie de $\Pi_{g,n}$, où :

$$\Pi_{g,n} = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \mid [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g]\gamma_1 \ldots \gamma_n = 1\rangle.$$

De là, l'abélianisé π_v^{ab} de π_v est isomorphe à :

$$\left(\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}\right)^{2g+n} / \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 0,$$

où la famille $(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ est vue comme une $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$-base de $(\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^{2g+n}$.

Définition 4.4.8. *Notons*

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)\right)$$

le sous-groupe du groupe des automorphismes de $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ préservant le graphe, c'est-à-dire laissant stable les classes de conjugaison de chaque sous-groupe sommital, chaque sous-groupe vicinal et chaque sous-groupe cuspidal.

Si v est un nœud de X qui est dans l'intérieur de X, notons $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_v^{\mathrm{ab}}\right)$ le sous-groupe du groupe des automorphismes de π_v^{ab} qui préservent chaque sous-groupe vicinal ou cuspidal inclus dans π_v et associé à une arête aboutissant à v.

Remarque 4.4.9. Le groupe $\mathrm{Aut}(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X))$ des automorphismes de $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ agit sur l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes compacts maximaux de $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ (resp. des intersections non triviales de deux sous-groupes compacts

maximaux de $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$). De là, tout élément $\sigma \in \mathrm{Aut}(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X))$ induit un automorphisme de graphes :

$$\overline{\sigma} : S^{\mathrm{an}}(X)^{\natural} \xrightarrow{\sim} S^{\mathrm{an}}(X)^{\natural}.$$

L'application $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$ fournit donc un morphisme : $\mathrm{Aut}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)\right) \to \mathrm{Aut}\left(S^{\mathrm{an}}(X)^{\natural}\right)$, dont le noyau contient $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)\right)$. Lorsque X est k-analytiquement anabélienne, tout élément $\sigma \in \mathrm{Aut}(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X))$ induit un automorphisme de semi-graphes :

$$\widetilde{\sigma} : S^{\mathrm{an}}(X) \xrightarrow{\sim} S^{\mathrm{an}}(X).$$

L'application $\sigma \mapsto \widetilde{\sigma}$ fournit alors un morphisme : $\mathrm{Aut}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)\right) \to \mathrm{Aut}\left(S^{\mathrm{an}}(X)\right)$, dont le noyau est exactement égal à $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)\right)$.

Remarque 4.4.10. Si e est une arête issue de v et que $\pi_e \subseteq \pi_v^{\mathrm{ab}}$ est un sous-groupe (vicinal ou cuspidal) associé à e, alors on a un morphisme canonique, de restriction : $\varpi : \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_v^{\mathrm{ab}}\right) \to \mathrm{Aut}(\pi_e)$.

Bien-fondé du morphisme θ_{π_e}

Lemme 4.4.11. *Soit π_e un sous-groupe vicinal ou cuspidal de $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ associé à une arête e, alors il existe un morphisme naturel de groupes*

$$\theta_{\pi_e} : \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)\right) \to \mathrm{Aut}(\pi_e).$$

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X))$. L'automorphisme σ préserve la classe de conjugaison de π_e, donc on sait seulement, *a priori*, qu'il existe $g \in \pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ tel que : $\sigma(\pi_e) = g^{-1}\pi_e g$.

Si $a \in \pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$, notons ζ_a l'automorphisme intérieur de $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ donné par la conjugaison par a : pour tout $x \in \pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X), \zeta_a(x) = axa^{-1}$.

Posons $\theta_{\pi_e}(\sigma) = \zeta_g \circ \sigma_{|\pi_e} : \pi_e \to \pi_e \in \mathrm{Aut}(\pi_e)$. Nous allons montrer que θ_{π_e} ne dépend que de σ et non de g, puis que θ_{π_e} définit bien un morphisme de groupes.

- Montrons que $\theta_{\pi_e}(\sigma)$ ne dépend que de σ. Soient $h \in \pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ tel que l'on ait aussi $\sigma(\pi_e) = h^{-1}\pi_e h$. Soit $x \in \pi_e$, montrons que $\zeta_g \circ \sigma(x) = \zeta_h \circ \sigma(x)$.

On a : $\sigma(x) = g^{-1}(\zeta_g \circ \sigma(x))g = h^{-1}(\zeta_h \circ \sigma(x))h^{-1}$, donc

$$\zeta_h \circ \sigma(x) = \zeta_{hg^{-1}}(\underbrace{\zeta_g \circ \sigma(x)}_{\in \pi_e}).$$

Par ailleurs l'égalité $g^{-1}\pi_e g = h^{-1}\pi_e h$ implique $hg^{-1} \in \mathrm{N}_{\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)}(\pi_e)$ (le normalisateur de π_e dans $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$). Remarquons que

$$\mathrm{N}_{\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)}(\pi_e) \subseteq C_{\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)}(\pi_e)$$

($C_{\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)}(\pi_e)$ désigne le commensurateur de π_e dans $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$). La remarque 2.7.2 de [Mzk3] (et notre lemme 4.3.8 dans le cas cuspidal) nous indique que π_e est commensurément terminal dans $\pi_1^{\mathrm{t}}(X)$, le groupe fondamental modéré profini de X (qui est aussi le complété pro-p'-fini de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$). Comme on a un morphisme injectif $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X) \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(X)$, alors π_e est commensurément terminal dans $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$: $C_{\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)}(\pi_e) = \pi_e$. On en déduit que $\mathrm{N}_{\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)}(\pi_e) = \pi_e$, et donc $hg^{-1} \in \pi_e$. De là, comme $\pi_e \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$ est abélien, $\zeta_{hg^{-1}}$ agit trivialement sur π_e. On en déduit que $\zeta_g \circ \sigma(x) = \zeta_h \circ \sigma(x)$, et donc que $\theta_{\pi_e}(\sigma)$ est bien défini.

- Montrons que l'application $\theta_{\pi_e} : \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)\right) \to \mathrm{Aut}(\pi_e)$ définit un morphisme de groupes. Soient $\sigma, \rho \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X))$, et $g, h \in \pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ tels que $\sigma(\pi_e) = g^{-1}\pi_e g$ et $\rho(\pi_e) = h^{-1}\pi_e h$.
  On a par définition :

$$\theta_{\pi_e}(\sigma) = \zeta_g \circ \sigma_{\,|\pi_e} \quad \text{et} \quad \theta_{\pi_e}(\rho) = \zeta_h \circ \rho_{\,|\pi_e}.$$

  Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\sigma\rho(\pi_e) &= \sigma(h)^{-1}\sigma(\pi_e)\sigma(h)\\ &= \sigma(h)^{-1}g^{-1}\pi_e g\sigma(h)\\ &= (g\sigma(h))^{-1}\,\pi_e\,(g\sigma(h))\,,\end{aligned}$$

  donc : $\theta_{\pi_e}(\sigma\rho) = \zeta_{g\sigma(h)} \circ \sigma\rho_{\,|\pi_e}$.

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\theta_{\pi_e}(\sigma) \circ \theta_{\pi_e}(\rho) &= \zeta_g \circ \sigma \circ \zeta_h \circ \rho_{\,|\pi_e} \\
&= \zeta_g \circ (\sigma \circ \zeta_h \circ \sigma^{-1}) \circ \sigma \circ \rho_{\,|\pi_e} \\
&= \zeta_g \circ \zeta_{\sigma(h)} \circ \sigma \circ \rho_{\,|\pi_e} \\
&= \zeta_{g\sigma(h)} \circ \sigma\rho_{\,|\pi_e} \\
&= \theta_{\pi_e}(\sigma\rho),
\end{aligned}$$

donc θ_{π_e} est bien un morphisme de groupes.

□

Indépendance vis-à-vis du représentant π_e

Lemme 4.4.12. *Soit e une arête de $S^{\mathrm{an}}(X)$, que l'on munit d'une orientation. Alors le morphisme composé :*

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}(\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X)) \xrightarrow{\theta_{\pi_e}} \mathrm{Aut}(\pi_e) \xrightarrow{\sim} (\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^\times$$

ne dépend pas du choix du représentant π_e dans sa classe de conjugaison : si π_e et π'_e sont deux sous-groupes (vicinaux ou cuspidaux) de $\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X)$ associés à e, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Aut}\,(\pi_e) \arrow[dr, "\sim"] & \\
\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X)\right) \arrow[ur, "\theta_{\pi_e}"] \arrow[rr] \arrow[dr, "\theta_{\pi'_e}"'] & & (\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^\times \\
 & \mathrm{Aut}\,(\pi'_e) \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Le choix d'une orientation de e permet de définir sans ambiguïté les isomorphismes $\mathrm{Aut}(\pi_e) \xrightarrow{\sim} (\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^\times$ et $\mathrm{Aut}(\pi'_e) \xrightarrow{\sim} (\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^\times$.

Comme π_e et π'_e sont dans la même classe de conjugaison, il existe $g \in \pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X)$ tel que $\pi'_e = g\pi_e g^{-1} = \zeta_g(\pi_e)$. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}(\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X))$, et $h \in \pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X)$ tel

que $\sigma(\pi_e) = h^{-1}\pi_e h$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sigma(\pi'_e) &= \sigma(g)\sigma(\pi_e)\sigma(g)^{-1} \\
&= \sigma(g)h^{-1}\pi_e h\sigma(g)^{-1} \\
&= \sigma(g)h^{-1}(g^{-1}\pi'_e g)h\sigma(g)^{-1} \\
&= \left(gh\sigma(g)^{-1}\right)^{-1}\pi'_e\left(gh\sigma(g)^{-1}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que : $\theta_{\pi_e}(\sigma) = \zeta_h \circ \sigma_{|\pi_e}$ et $\theta_{\pi'_e}(\sigma) = \zeta_{gh\sigma(g)^{-1}} \circ \sigma_{|\pi'_e}$. De là :

$$\begin{aligned}
\zeta_{g^{-1}} \circ \theta_{\pi'_e}(\sigma) \circ \zeta_{g\,|\pi_e} &= \zeta_{g^{-1}} \circ \zeta_{gh\sigma(g)^{-1}} \circ \sigma \circ \zeta_{g\,|\pi_e} \\
&= \zeta_{g^{-1}} \circ \zeta_g \circ \zeta_h \circ \zeta_{\sigma(g^{-1})} \circ \sigma \circ \zeta_{g\,|\pi_e} \\
&= \zeta_h \circ \sigma \circ \zeta_{g^{-1}} \circ \sigma^{-1} \circ \sigma \circ \zeta_{g\,|\pi_e} \\
&= \zeta_h \circ \sigma_{|\pi_e} \\
&= \theta_{\pi_e}(\sigma)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\theta_{\pi'_e}(\sigma) = \zeta_g \circ \theta_{\pi_e}(\sigma) \circ (\zeta_g)^{-1}$, autrement dit $\theta_{\pi'_e}$ et θ_{π_e} sont « conjugués » :

$$\theta_{\pi'_e} = \zeta_{\zeta_g} \circ \theta_{\pi_e}.$$

De là, le résultat découle de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi_e \arrow[rr, "\zeta_g"] \arrow[dr, "\sim"'] & & \pi'_e \arrow[dl, "\sim"] \\
& (\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^\times &
\end{tikzcd}$$

□

Indépendance vis-à-vis du choix de la branche issue d'un nœud donné

Lemme 4.4.13. *Soit v un nœud de X auquel aboutit e, et π_v le sous-groupe sommital contenant π_e associé. Alors θ_{π_e} se factorise par $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_v^{\mathrm{ab}}\right)$, c'est-à-dire qu'il existe des morphismes naturels $\theta_{\pi_v^{\mathrm{ab}}} : \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)\right) \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_v^{\mathrm{ab}}\right)$ et*

$\varpi : \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_v^{\mathrm{ab}}\right) \to \mathrm{Aut}\left(\pi_e\right)$, *tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)\right) \arrow[rr, "\theta_{\pi_e}"] \arrow[dr, "\theta_{\pi_v^{\mathrm{ab}}}"'] & & \mathrm{Aut}\left(\pi_e\right) \\
& \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_v^{\mathrm{ab}}\right) \arrow[ur, "\varpi"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On montre l'existence d'un morphisme

$$\theta_{\pi_v^{\mathrm{ab}}} : \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)) \to \mathrm{Aut}\left(\pi_v^{\mathrm{ab}}\right)$$

en le construisant exactement de la même manière que θ_{π_e} : si $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X))$, il existe $g \in \pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ tel que $\sigma(\pi_v) = g^{-1}\pi_v g$. Rappelons que le fait, pour θ_{π_e}, d'être bien défini, découle de deux propriétés : la terminalité commensurable de π_e dans $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$, et le caractère abélien de π_e. Ici nous savons d'après le Corollaire 2.7 de [Mzk3] que π_v est commensurément terminal dans $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$, néanmoins il n'est pas abélien. En reprenant la preuve de l'existence de θ_{π_e}, on voit que $\sigma \mapsto \zeta_g \circ \sigma_{|\pi_v} \in \mathrm{Aut}(\pi_v)$ est bien définie *à automorphismes intérieurs près de* π_v, c'est-à-dire qu'elle définie une application (et même un morphisme) $\theta_{\pi_v} : \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)) \to \mathrm{Out}(\pi_v)$. On obtient alors $\theta_{\pi_v^{\mathrm{ab}}}$ en composant θ_{π_v} avec le morphisme naturel $\mathrm{Out}(\pi_v) \to \mathrm{Aut}(\pi_v^{\mathrm{ab}})$.

Une fois l'application $\theta_{\pi_v^{\mathrm{ab}}} : \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)) \to \mathrm{Aut}(\pi_v^{\mathrm{ab}})$ construite, la preuve qu'il s'agit d'un morphisme de groupes est identique à celle développée pour θ_{π_e}. Il est alors immédiat que l'image de $\theta_{\pi_v^{\mathrm{ab}}}$ est incluse dans $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_v^{\mathrm{ab}}\right)$.

□

Soit π_v un sous-groupe sommital associé à un nœud v de X, de type (g, n), *qui n'est pas situé sur le bord de* X. Soient $e_1, \ldots, e_n$ les arêtes de $S^{\mathrm{an}}(X)$ associées aux n branches issues de v. Pour tout $i \in \{1, \ldots n\}$, notons π_{e_i} l'unique sous-groupe vicinal ou cuspidal associé à e_i et considéré comme sous-groupe de π_v^{ab}.

Soient $\varpi_i : \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_v^{\mathrm{ab}}\right) \to \mathrm{Aut}(\pi_{e_i})$ les morphismes de restriction canoniques. En munissant chaque branche e_i de l'orientation sortante de v, on a des isomorphismes : $\pi_{e_i} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$, qui induisent des isomorphismes : $\mathrm{Aut}(\pi_{e_i}) \xrightarrow{\sim} (\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^{\times}$. En composant à gauche par ϖ, on obtient des morphismes :

$$\widetilde{\varpi}_i : \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_v^{\mathrm{ab}}\right) \to (\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^{\times}$$

Lemme 4.4.14. *Les morphismes* $\widetilde{\varpi}_1, \ldots, \widetilde{\varpi}_n : \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_v^{\mathrm{ab}}\right) \to (\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^\times$ *sont tous égaux, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Aut}(\pi_{e_1}) \arrow[dr, "\sim"] & & \\
\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_v^{\mathrm{ab}}\right) \arrow[ur, "\varpi_1"] \arrow[r, "\varpi_i"] \arrow[dr, "\varpi_n"'] & \mathrm{Aut}(\pi_{e_i}) \arrow[r, "\sim"] & (\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^\times \arrow[r] & (\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^\times/\{\pm 1\} \\
 & \mathrm{Aut}(\pi_{e_n}) \arrow[ur, "\sim"'] & &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Rappelons que : $\pi_v^{\mathrm{ab}} \simeq \left(\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}\right)^{2g+n} /_{\sum_{i=1}^n \gamma_i = 0}$, où les $(\gamma_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ forment une famille libre du $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$-module $(\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^{2g+n}$, avec pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$: $\overline{\langle \gamma_i \rangle} = \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}\gamma_i = \pi_{e_i}$. Les morphismes $\pi_{e_i} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$ correspondent alors à $\lambda\gamma_i \mapsto \lambda$ ($\lambda\gamma_i \mapsto -\lambda$ si l'on avait privilégié l'autre orientation de e_i).

Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}(\pi_v^{\mathrm{ab}})$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, comme $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}) \simeq (\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^\times$, il existe $c_i \in (\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^\times$ tel que $\varpi_i(\sigma)$ corresponde à la multiplication par c_i, c'est-à-dire, en restant au niveau de σ : $\sigma(\gamma_i) = c_i\gamma_i$. Par ailleurs :

$$0 = \sigma(0) = \sigma\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i\right) = \sum_{i=1}^n \sigma(\gamma_i) = \sum_{i=1}^n c_i\gamma_i,$$

et cela force tous les c_i à être égaux. On en déduit que $\widetilde{\varpi}_1(\sigma) = \ldots = \widetilde{\varpi}_n(\sigma) = c$, d'où l'égalité des morphismes $\widetilde{\varpi}_1, \ldots, \widetilde{\varpi}_n$. □

Remarque 4.4.15. L'hypothèse $v \notin \partial^{\mathrm{an}}X$ est nécessaire. En effet, dans le cas contraire, certains γ_i ne correspondraient pas à de vraies branches de $S^{\mathrm{an}}(X)$ issues de v, mais à des branches « amputées » dont l'absence traduirait exactement l'appartenance de v au bord de X. Or dans ce cas il n'y a, *a priori*, aucune raison pour que les éléments de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}(\pi_v^{\mathrm{ab}})$ préservent $\overline{\langle \gamma_i \rangle}$.

Conclusion

Proposition 4.4.16. *Si X est une courbe k-analytiquement hyperbolique telle que les points du bord son unibranches dans $S^{\mathrm{an}}(X)$, le morphisme composé*

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)\right) \xrightarrow{\theta_{\pi_e}} \mathrm{Aut}\left(\pi_e\right) \to (\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')})^\times/\{\pm 1\}$$

ne dépend pas du choix de l'arête e, ce qui fournit un morphisme ne dépendant que de X :

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X)\right) \xrightarrow{\Theta_X} \left(\widehat{\mathbb{Z}}^{\,(p')}\right)^{\times}/\{\pm 1\}.$$

Démonstration. Soit e une arête vicinale de $S^{\mathrm{an}}(X)$ aboutissant à deux sommets v et v' n'appartenant pas au bord de X. Soient π_e un sous-groupe vicinal associé à e, π_v et $\pi_{v'}$ des groupes sommitaux contenant π_e et associés respectivement aux sommets v et v'. Alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_{v'}^{\mathrm{ab}}\right) \arrow[dr] & & \\
\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X)\right) \arrow[ur, "\theta_{\pi_{v'}^{\mathrm{ab}}}"] \arrow[rr, "\theta_{\pi_e}"] \arrow[dr, "\theta_{\pi_v^{\mathrm{ab}}}"'] & & \mathrm{Aut}\,(\pi_e) \arrow[r] & (\widehat{\mathbb{Z}}^{\,(p')})^{\times}/\{\pm 1\} \\
 & \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_v^{\mathrm{ab}}\right) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

En effet, le seul point délicat est que l'orientation de e sortante de v est différente de celle sortante de v', donc si $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}(\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X))$ et si son image par le morphisme $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}(\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X)) \to (\widehat{\mathbb{Z}}^{\,(p')})^{\times}$ est égale à c en passant par v, elle sera égale à $-c$ en passant par v'. Or ce problème n'en est plus un lorsque l'on quotiente par $\{\pm 1\}$. Puisque que la courbe X est connexe, le squelette $S^{\mathrm{an}}(X)$ l'est aussi, et deux arêtes distinctes peuvent toujours être reliées par un chemin dont l'intérieur ne contient aucun point de $\partial^{\mathrm{an}}X$ (d'après l'hypothèse sur $\partial^{\mathrm{an}}X$). De là, la commutativité du diagramme ci-dessus couplée au lemme 4.4.14 permet d'affirmer que le morphisme composé :

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}(X)\right) \xrightarrow{\theta_{\pi_e}} \mathrm{Aut}\,(\pi_e) \to (\widehat{\mathbb{Z}}^{\,(p')})^{\times}/\{\pm 1\}$$

ne dépend pas de l'arête e. On obtient ainsi le résultat. □

Exemple 4.4.17. Si p est un nombre premier et K un corps p-adique, alors on a un morphisme naturel :

$$\Theta_{\mathfrak{D}^1_{\mathbb{C}_p/K}} : \mathrm{Aut}_{\mathrm{Graph}}\left(\pi_1^{\mathrm{temp},\,(p')}\left(\mathfrak{D}^1_{\mathbb{C}_p/K}\right)\right) \to (\widehat{\mathbb{Z}}^{\,(p')})^{\times}/\{\pm 1\}.$$

Question : Quelles informations sur X ce morphisme Θ_X porte-il ? Peut-on en avoir une interprétation plus naturelle ?

Chapitre 5

Cochaînes harmoniques et longueur des couronnes

Ce me serait d'une aide bien précieuse, si j'avais la chance de mettre sur pied la conclusion de cette petite étude. J'étais justement à un point un peu difficile : il fallait trouver une imperceptible transition pour passer à une nouvelle idée, puis un finale, glissando*, en sourdine, un long murmure qui devait enfin s'achever par un* climax *abrupt, affolant comme un coup de canon ou le bruit d'une montagne qui éclate.*

Knut Hamsun
(La Faim)

Soit k un corps ultramétrique complet, algébriquement clos, de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle $p > 0$ (par exemple : $k = \mathbb{C}_p$), normalisé par $|p| = \frac{1}{p}$.

5.1 Cochaînes harmoniques et μ_p-torseurs

5.1.1 Morphisme de cochaîne

Soit X une courbe k-analytiquement anabélienne sans bord, de squelette fini (en tant que semi-graphe), ne contenant aucun point de genre > 0, et dont les cusps sont coronaires. Posons $\mathbb{G} = S^{\mathrm{an}}(X)$, $\mathbb{G}^\natural = S^{\mathrm{an}}(X)^\natural$, Ω un revêtement topologique universel de X, ainsi que $\mathbb{T} = S^{\mathrm{an}}(\Omega)$ et $\mathbb{T}^\natural = S^{\mathrm{an}}(\Omega)^\natural$, faisant de $\mathbb{T}^\natural$ un revêtement universel de $\mathbb{G}^\natural$.

Prolongement de X en une courbe de Mumford : Soit X' une courbe k-analytiquement anabélienne propre obtenue à partir de X en prolongeant en un disque chaque couronne ouverte associée aux cusps de X, et Ω' son revêtement universel contenant Ω. Alors X' est l'analytifiée $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ d'une courbe de Mumford $\mathscr{X}$ sur k. De là, on a un plongement naturel $\Omega' \subseteq \mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$, et Ω peut lui-même être plongé dans $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ en tant qu'ouvert de Ω'.

Par ailleurs, $\mathbb{G}^\natural = S^{\mathrm{an}}(X')$ et $\mathbb{T}^\natural = S^{\mathrm{an}}(\Omega')$: les cusps coronaires de X ou de Ω n'apparaissent plus dans les squelettes de X' et Ω' puisqu'on les a prolongés en des disques.

Lemme 5.1.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un morphisme naturel :*

$$H^1(X, \mu_n) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

dont l'image contient $\mathrm{Harm}(\mathbb{G}^\natural, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ *(vu comme sous-groupe de* $\mathrm{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ *en prolongeant les cochaînes par* 0 *sur toutes les arêtes cuspidales de* $\mathbb{G}$*).*

Démonstration. La suite exacte de Kummer fournit une suite exacte :

$$1 \to \mathscr{O}_X(X)^\times / \left(\mathscr{O}_X(X)^\times\right)^n \to H^1(X, \mu_n) \to {}_nH^1(X, \mathbb{G}_m) \to 1.$$

Or $H^1(X, \mathbb{G}_m) = H^1_{\mathrm{top}}(X, \mathbb{G}_m)$: tout $\mathbb{G}_m$-torseur étale est en fait topologique, cela découle de [Ber2] (4.1.10).

Soit $h \in H^1(X, \mu_n)$ et $\overline{h}$ son image dans ${}_nH^1(X, \mathbb{G}_m)$. Ainsi, si $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $\mathscr{U}$ de x dans X tel que $\overline{h}$ soit trivial sur $\mathscr{U}$. De là, $h_{|\mathscr{U}}$ provient d'une fonction $f \in \mathscr{O}_{\mathscr{U}}(\mathscr{U})^\times$ définie modulo les puissances n-ièmes. Or on a un morphisme naturel : $\mathscr{O}_{\mathscr{U}}(\mathscr{U})^\times \xrightarrow{\theta_{\mathscr{U}}} \mathrm{Harm}(S^{\mathrm{an}}(\mathscr{U}), \mathbb{Z})$ qui se factorise en un morphisme :

$$\mathscr{O}_{\mathscr{U}}(\mathscr{U})^\times / \left(\mathscr{O}_{\mathscr{U}}(\mathscr{U})^\times\right)^n \to \mathrm{Harm}\left(S^{\mathrm{an}}(\mathscr{U}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right).$$

Le morphisme $\theta_{\mathscr{U}}$ se construit de la manière suivante : si e est une arête orientée de $S^{\mathrm{an}}(\mathscr{U})$, si l'on note r la rétraction canonique de $\mathscr{U}$ sur son squelette, alors $r^{-1}(e)$ est isomorphe à la couronne ouverte de $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ définie par la condition $\{1 < |T| < \lambda\}$ où le début de l'arête correspond au bout défini par 1 tandis que la fin correspond au bout défini par λ.

Soit $\tau : \{z \in \mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}, 1 < |T(z)| < \lambda\} \xrightarrow{\sim} r^{-1}(e)$ un tel isomorphisme, et $\alpha \in \mathscr{O}_{\mathscr{U}}(\mathscr{U})^\times$. Il existe un unique $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \circ \tau$ s'écrive $z \mapsto z^m g(z)$ avec g de norme constante. Cela découle de la caractérisation de l'inversibilité des fonctions analytiques d'une cou-

ronne énoncée au 1.2.24, et m est alors le degré de l'unique monôme strictement dominant de $\alpha \circ \tau$. Il suffit enfin de poser $\theta_{\mathscr{U}}(\alpha)(e) = m$, cela définit bien un élément de $\mathrm{Harm}(S^{\mathrm{an}}(\mathscr{U}), \mathbb{Z})$.

On a $S^{\mathrm{an}}(X) \cap \mathscr{U} \subseteq S^{\mathrm{an}}(\mathscr{U})$, et l'inclusion peut être *a priori* stricte. Montrons néanmoins que le support de $\theta_{\mathscr{U}}(f)$ (c'est-à-dire l'ensemble des arêtes e de $S^{\mathrm{an}}(\mathscr{U})$ telles que $\theta_{\mathscr{U}}(f)(e) \neq 0$) est inclus dans $S^{\mathrm{an}}(X) \cap \mathscr{U}$. Soit e une arête orientée de $S^{\mathrm{an}}(\mathscr{U})$ non incluse dans $S^{\mathrm{an}}(X)$. Si $y \in e$, y appartient à un disque ouvert $\mathcal{D}$ de X. Il existe alors un disque fermé $\mathcal{D}_0 \subsetneq \mathcal{D}$ contenant y dans son intérieur. Comme $\mathcal{D}_0$ est un disque fermé, son groupe de Picard $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{D}_0)$ est trivial. De là, le μ_n-torseur $h_{|\mathcal{D}_0}$ est donné par une fonction $f_0 \in \mathscr{O}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{D}_0)^\times$. Or toute fonction inversible sur un disque fermé est de norme constante, d'où l'on déduit que la cochaîne associée à f_0 au voisinage de y est triviale, en particulier $\theta_{\mathscr{U}\cap\mathcal{D}_0}(f_0)$ est la cochaîne nulle sur $S^{\mathrm{an}}(\mathscr{U} \cap \mathcal{D}_0)$. Or ces constructions locales sont compatibles entre elles, $\theta_{\mathscr{U}\cap\mathcal{D}_0}(f_0) = \theta_{\mathscr{U}\cap\mathcal{D}_0}(f)$, et ainsi $\theta_{\mathscr{U}}(f)(e) = 0$, donc le support de $\theta_{\mathscr{U}}(f)$ est bien inclus dans $S^{\mathrm{an}}(X) \cap \mathscr{U}$.

Ces constructions locales $x \mapsto \theta_{\mathscr{U}}(f)$ se recollent entre elles pour finalement former un morphisme : $H^1(X, \mu_n) \to \mathrm{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Pour montrer que $\mathrm{Harm}(\mathbb{G}^\natural, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{im}(\theta)$, considérons la courbe de Mumford X' prolongeant X, obtenue en prolongeant les cusps en des disques. Comme $\mathbb{G}^\natural = S^{\mathrm{an}}(X')$, on a d'après [Lep2] un morphisme $\overline{\theta} : H^1(X', \mu_n) \to \mathrm{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ d'image exactement égale à $\mathrm{Harm}(\mathbb{G}^\natural, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et qui rend commutatif le diagramme suivant (on note ι le plongement de X dans X') :

$$\begin{tikzcd}
H^1(X', \mu_n) \arrow[rr, "\iota^*"] \arrow[dr, "\overline{\theta}"'] & & H^1(X, \mu_n) \arrow[dl, "\theta"] \\
& \mathrm{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &
\end{tikzcd}$$

□

Remarque 5.1.2. Comme l'existence du morphisme $H^1(X, \mu_n) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est valable pour tout n, on considèrera dorénavant θ comme une application :

$$\theta : \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} H^1(X, \mu_n) \to \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

qui pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ induit un morphisme $H^1(X, \mu_n) \to \mathrm{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Lemme 5.1.3. *Tout prolongement de X en l'analytifiée X' d'une courbe de Mumford, obtenu en prolongeant chaque arête cuspidale en un disque, induit une section de θ, restreinte aux cochaînes à support dans $\mathbb{T}^\natural$:* $\mathrm{Harm}(\mathbb{T}^\natural, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\tau} H^1(\Omega, \mu_n)$.

Démonstration. Comme X' est l'analytifiée d'une courbe de Mumford sur k, il existe d'après [Lep2] une suite exacte :

$$1 \to k^\times \to \mathscr{O}_{\Omega'}(\Omega')^\times \to \mathrm{Harm}(\mathbb{T}^\natural, \mathbb{Z}) \to 0.$$

Puisque $k^\times$ est divisible (k est algébriquement clos), cette suite exacte induit un isomorphisme :

$$\mathscr{O}_{\Omega'}(\Omega')^\times/(\mathscr{O}_{\Omega'}(\Omega')^\times)^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Harm}(\mathbb{T}^\natural, \mathbb{Z})/n\,\mathrm{Harm}(\mathbb{T}^\natural, \mathbb{Z}) = \mathrm{Harm}(\mathbb{T}^\natural, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Or la suite exacte de Kummer fournit un morphisme injectif :

$$\mathscr{O}_{\Omega'}(\Omega')^\times/(\mathscr{O}_{\Omega'}(\Omega')^\times)^n \hookrightarrow H^1(\Omega', \mu_n).$$

De là, si l'on note ι le plongement canonique de Ω dans Ω', en composant $\mathrm{Harm}(\mathbb{T}^\natural, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathscr{O}_{\Omega'}(\Omega')^\times/(\mathscr{O}_{\Omega'}(\Omega')^\times)^n \hookrightarrow H^1(\Omega', \mu_n)$ avec $\iota^* : H^1(\Omega', \mu_n) \to H^1(\Omega, \mu_n)$, on obtient finalement un morphisme :

$$\tau : \mathrm{Harm}(\mathbb{T}^\natural, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^1(\Omega, \mu_n).$$

Cela permet de parler *du* μ_n-torseur de Ω associé (selon le choix de X') à une $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-cochaîne de $\mathbb{T}^\natural$. □

Remarque 5.1.4. Ce morphisme n'est pas canonique, il dépend *a priori* du plongement de Ω dans $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$, qui dépend lui-même de X'.

5.1.2 Cochaînes et minimalité du rayon de déploiement sur une couronne

Soit $\mathcal{C}$ une couronne k-analytique de longueur finie. Soit $\alpha \in k$ et $\eta_{\alpha,0} = \eta_\alpha$ le point rigide de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$ associé. Nous allons voir que les μ_p-torseurs de cochaînes non nulles modulo p sur $\mathcal{C}$ vérifient une condition de minimalité permettant de les distinguer des μ_p-torseurs à cochaîne nulle.

Définition 5.1.5. *Si X est une courbe k-analytique et $f \in H^1(X, \mu_n)$, notons $\mathscr{D}(f)$*

l'ensemble des points de X au-dessus desquels le torseur analytique défini par f est totalement déployé.

Définition 5.1.6 (Rayon de déploiement d'un torseur en un point rigide)**.** *Supposons que $\mathcal{C}$ est une sous-couronne de $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ de la forme $|T| \in I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$. Si $\eta_\alpha \in \mathcal{C}$, pour tout torseur $f \in H^1(\mathcal{C}, \mu_p)$, notons $\varrho_f(\alpha)$ le* rayon de déploiement de f en α, *défini par :*

$$\varrho_f(\alpha) = \sup\{r \in]0, |\alpha|[, \eta_{\alpha,r} \in \mathscr{D}(f)\}$$

La proposition suivante montre que le rayon de déploiement en les points rigides de $\mathcal{C}$ permet de détecter l'éventuelle nullité de la $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-cochaîne $\theta(f)$.

Proposition 5.1.7. *À α fixé dans $\mathcal{C}$, $\varrho_f(\alpha)$ est minimal exactement lorsque $f \in H^1(\mathcal{C}, \mu_p)$ est de cochaîne non nulle modulo p, c'est-à-dire lorsque $f \notin \ker(\theta)$.*

Plus précisément :

- *$f \notin \ker(\theta)$ si et seulement si $\varrho_f(\alpha) = |\alpha|\, p^{-\frac{p}{p-1}}$,*
- *$f \in \ker(\theta)$ si et seulement si $\varrho_f(\alpha) > |\alpha|\, p^{-\frac{p}{p-1}}$.*

Démonstration. La suite exacte de Kummer fournit un morphisme

$$\mathscr{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})^\times / (\mathscr{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})^\times)^p \hookrightarrow H^1(\mathcal{C}, \mu_p)$$

qui devient un isomorphisme lorsqu'on se restreint à toute sous-couronne compacte, en raison de la trivialité du groupe de Picard de tout sous-espace k-affinoïde. Quitte à restreindre $\mathcal{C}$, on peut donc supposer que f est donné par une fonction $g \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})^\times$, c'est-à-dire que le torseur analytique correspondant est défini par : $\mathscr{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})[S]/(S^p - g)$.

Étudier le rayon de déploiement de f le long de l'intervalle $[\eta_\alpha, \eta_{\alpha,|\alpha|}]$ revient à faire le changement de fonction coordonnée $t = T - \alpha$ et étudier la convergence de la fonction $\sqrt[p]{g(t+\alpha)}$.

- Supposons que $f \notin \ker(\theta)$. Il existe $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, premier à p, tel que g soit de taux de croissance n, autrement dit dont le degré du monôme strictement dominant soit n : $g(T) = a_n T^n (1 + u(T))$, avec $|u| < 1$ sur $\mathcal{C}$. Quitte à normaliser (k est algébriquement clos), on peut supposer $a_n = 1$.
  La série définissant $\sqrt[n]{1+T}$ a un rayon de convergence égal à 1 puisque n est premier avec p. De là, il existe une fonction $v(T)$ de norme < 1 sur $\mathcal{C}$ telle que $(1+v)^n = 1 + u$, donc $g(T) = (T(1+v))^n$. Comme $T(1+v)$ est une fonction coordonnée, on peut se ramener au cas où $g(T) = T^n$. Comme n est premier à p,

les μ_p-torseurs donnés par les fonctions T^n et T ont les mêmes ensembles de total déploiement, et l'on peut ainsi supposer $g(T) = T$. Le résultat est alors donné par la proposition 1.4.8.

- Supposons que $f \in \ker(\theta)$. Cela se traduit par le fait que le degré du monôme strictement dominant de g (le taux de croissance) est nul modulo p : il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $g(T) = a_0 T^{mp}(1 + u(T))$, avec $|u| < 1$ sur $\mathcal{C}$. Quitte à diviser par T^{mp} (c'est la classe de g modulo $(\mathscr{O}(\mathcal{C})^\times)^p$ qui détermine le torseur f), on peut prendre $m = 0$. Supposons que g s'écrive

$$g(T) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k.$$

Autrement dit, pour tout $r \in I$ et $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $|a_k| r^k < |a_0|$. Quitte à normaliser et à se restreindre à une sous-couronne, on peut supposer que $a_0 = 1$ et que l'intervalle I, ouvert ou fermé, ait pour bornes $1 - \varepsilon$ et 1 pour un certain $\varepsilon \in]0, 1[$. Dans ce cas on doit avoir, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $|a_k| < 1$ et $|a_{-k}| < (1-\varepsilon)^k$. Pour tout $i \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{Z}$, posons $\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{i!}$. En utilisant la formule du binôme généralisée, on peut écrire :

$$\begin{aligned} g(t+\alpha) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (t+\alpha)^k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \left(\sum_{i \geqslant 0} \binom{k}{i} \alpha^{k-i} t^i \right) \\ &= \sum_{i \geqslant 0} \underbrace{\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \binom{k}{i} \alpha^{k-i} \right)}_{A_i} t^i = \sum_{i \geqslant 0} A_i t^i \end{aligned}$$

On a $|\alpha| \leqslant 1$ puisque $\eta_\alpha \in \mathcal{C}$. De là, $|A_0| = |a_0| = 1$. En notant $v(t) = \sum_{i \geqslant 1} A_i t^i$, la proposition 1.4.8 nous permet d'affirmer que le torseur f est totalement déployé en $\eta_{\alpha,r}$ dès que $|v(\eta_{0,r})| < p^{-\frac{p}{p-1}}$. On a donc $\varrho_f(\alpha) \geqslant r$ si pour tout $i \geqslant 1$: $|A_i| r^i < p^{-\frac{p}{p-1}}$. De là :

$$\varrho_f(\alpha) \geqslant \inf_{i \geqslant 1} \left\{ \sqrt[i]{|A_i|^{-1}} p^{-\frac{1}{i}\left(\frac{p}{p-1}\right)} \right\}.$$

Par ailleurs, comme pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $|a_k \alpha^k| < 1$, alors tout $i \geqslant 1$ vérifie :

$|A_i| < |\alpha|^{-i}$, d'où :

$$\sqrt[i]{|A_i|^{-1}}p^{-\frac{1}{i}\left(\frac{p}{p-1}\right)} > |\alpha|\, p^{-\frac{1}{i}\left(\frac{p}{p-1}\right)}.$$

On en déduit :

$$\varrho_f(\alpha) \geqslant \min\left\{|A_1|^{-1}p^{-\frac{p}{p-1}}, |\alpha|\, p^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right\} > |\alpha|\, p^{-\frac{p}{p-1}}.$$

□

Remarque 5.1.8. Si $h > 1$, il n'est plus vrai que $\varrho_f(\alpha)$ est minimal si et seulement si $f \in H^1(\mathcal{C}, \mu_{p^h})$ est de $\mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z}$-cochaîne non nulle, c'est-à-dire lorsque $f \notin \ker(\theta)$. Il est facile de montrer que dès que f est de cochaîne *première avec* p, alors :

$$\varrho_f(\alpha) = |\alpha|\, p^{-h-\frac{1}{p-1}}.$$

En revanche, si f' désigne l'élément de $H^1(\mathcal{C}, \mu_{p^h})$ engendré par la fonction $T^p \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})^\times$, alors sa $\mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z}$-cochaîne $\theta(f')$ est non nulle puisqu'elle vaut p, mais on peut montrer que son rayon de déploiement en α vérifie :

$$\varrho_{f'}(\alpha) \geqslant |\alpha|\, p^{1-h-\frac{1}{p-1}} = p\varrho_f(\alpha) > \varrho_f(\alpha),$$

le rayon $\varrho_{f'}(\alpha)$ n'est donc pas minimal alors même que $f' \notin \ker(\theta)$. Par ailleurs, si la couronne $\mathcal{C}$ est par exemple donnée par la condition $|T| \in]1-\varepsilon, 1[$ avec $\varepsilon > 0$, le torseur $g \in H^1(\mathcal{C}, \mu_{p^h})$ donné par la fonction $1+T \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})^\times$ est de cochaîne nulle, donc appartient à $\ker(\theta)$, mais son rayon en un point rigide $\alpha = \eta_\alpha$ est :

$$\varrho_g(\alpha) = p^{-h-\frac{1}{p-1}}.$$

Par conséquent, dès que $|\alpha| \in]\frac{1}{p}, 1[$, on a : $\varrho_g(\alpha) < \varrho_{f'}(\alpha)$.

Corollaire 5.1.9. *Si $f \in H^1(\mathcal{C}, \mu_p)$, la trivialité de la cochaîne associée à f se repère ensemblistement à partir des ensembles de déploiement des différents μ_p-torseurs sur $\mathcal{C}$:*

- $f \notin \ker(\theta) \iff \mathscr{D}(f)_{[2]} \subseteq \bigcap_{f' \in H^1(\mathcal{C}, \mu_p)} \mathscr{D}(f')_{[2]}$,

- $$\begin{aligned} f \in \ker(\theta) &\iff \exists f' \in H^1(\mathcal{C}, \mu_p), \mathscr{D}(f)_{[2]} \nsubseteq \mathscr{D}(f')_{[2]} \\ &\iff \forall f' \in H^1(\mathcal{C}, \mu_p) \setminus \ker(\theta), \mathscr{D}(f)_{[2]} \nsubseteq \mathscr{D}(f')_{[2]}. \end{aligned}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 5.1.7 couplée à la densité

de $X_{[2]}$ dans X. $\square$

5.1.3 Caractérisation des μ_p-torseurs de cochaîne nulle

L'étude menée jusqu'ici permettant de caractériser ensemblistement les μ_p-torseurs de cochaîne nulle modulo p concerne les couronnes k-analytiques. Afin d'étendre ces considérations nous avons besoin d'une définition et de quelques contraintes.

Définition 5.1.10. *Une arête e d'un graphe (ou semi-graphe) $\mathbb{H}$ est un* pont *si et seulement si l'application $\pi_0(\mathbb{H} \setminus \{e\}) \to \pi_0(\mathbb{H})$ est non injective, c'est-à-dire que l'arête e « sépare » plusieurs composantes connexes de $\mathbb{H} \setminus \{e\}$. On dit que $\mathbb{H}$ est* sans pont *lorsqu'aucune de ses arêtes n'est un pont.*

Proposition 5.1.11. *Revenons à la courbe X considérée en 5.1.1, c'est-à-dire k-analytiquement anabélienne, sans bord, de squelette fini, sans point de genre > 0, et dont les cusps sont coronaires. Supposons que $\mathbb{G} = S^{\mathrm{an}}(X)$ est sans pont, et que de tout noeud de $S^{\mathrm{an}}(X)$ ne peut être issu au plus qu'un cusp. Si $f \in H^1(X, \mu_p)$, alors $f \in \ker(\theta)$ si et seulement si, pour toute arête vicinale e de $S^{\mathrm{an}}(X)$ de couronne associée $\mathcal{C}_e$, il existe $f_e \in H^1(X, \mu_p)$ tel que :*

$$\big(\mathscr{D}(f)_{[2]} \setminus \mathscr{D}(f_e)_{[2]}\big) \cap \mathcal{C}_{e\,[2]} \neq \emptyset.$$

Démonstration. L'hypothèse selon laquelle au plus un cusp ne peut être issu de chaque nœud implique qu'une cochaîne $c \in \mathrm{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est nulle si et seulement si elle est nulle sur toute arête vicinale de $\mathbb{G}$ (i.e. toute arête de $\mathbb{G}^\natural$).

- Supposons que pour toute arête vicinale e de $\mathbb{G}$, de couronne $\mathcal{C}_e$, il existe $f_e \in H^1(X, \mu_p)$ tel que : $\big(\mathscr{D}(f)_{[2]} \setminus \mathscr{D}(f_e)_{[2]}\big) \cap \mathcal{C}_{e\,[2]} \neq \emptyset$. En notant $f_{e\,|\,\mathcal{C}_e}$ et $f_{|\,\mathcal{C}_e}$ les restrictions de f_e et f à $\mathcal{C}_e$, cette égalité s'écrit $\mathscr{D}(f_{|\,\mathcal{C}_e})_{[2]} \nsubseteq \mathscr{D}(f_{e\,|\,\mathcal{C}_e})_{[2]}$, ce qui implique, d'après 5.1.9, que $\theta(f)(e) = 0$. Ceci étant vrai pour toute arête vicinale e, $\theta(f)$ est la cochaîne nulle.

- Soit $f \in H^1(X, \mu_p)$ et e une arête vicinale de couronne associée $\mathcal{C}_e$, supposons $f \in \ker(\theta)$. D'après 5.1.7, comme $\theta(f)(e) = 0$, pour tout $g_e \in H^1(\mathcal{C}_e, \mu_p)$ de cochaîne non nulle, on a : $\mathscr{D}(f_{|\,\mathcal{C}_e})_{[2]} \nsubseteq \mathscr{D}(g_e)_{[2]}$. Il reste à montrer qu'il existe $f_e \in H^1(X, \mu_p)$ de cochaîne non nulle en e.
  Par hypothèse, l'arête e n'est pas un pont de $\mathbb{G}$; en cette qualité elle n'est pas non plus un pont de $\mathbb{G}^\natural$. De là, l'application d'évaluation en e :

$$\mathrm{Harm}(\mathbb{G}^\natural, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{ev_e}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

est non nulle. Choisissons $c_e \in \mathrm{ev}_e^{-1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, c'est-à-dire tel que $c_e(e) \neq 0$. Par le lemme 5.1.1, l'image de θ contient $\mathrm{Harm}(\mathbb{G}^\natural, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Il suffit alors de prendre $f_e \in \theta^{-1}(\{c_e\})$: on a $\mathscr{D}(f_{|\mathcal{C}_e})_{[2]} \nsubseteq \mathscr{D}(f_{e\,|\,\mathcal{C}_e})_{[2]}$, ce qui se récrit :

$$\big(\mathscr{D}(f)_{[2]} \setminus \mathscr{D}(f_e)_{[2]}\big) \cap \mathcal{C}_{e\,[2]} \neq \emptyset.$$

□

5.2 Résolution des non-singularités

La résolution des non-singularités, en géométrie algébrique, consiste à savoir si une courbe hyperbolique $\mathscr{X}$ admet un revêtement fini $\mathscr{Y}$ dont la réduction stable admette des composantes irréductibles au-dessus du lieu lisse de la réduction stable (ou des réductions semi-stables) de X. De telles techniques s'avèrent d'une grande utilité en géométrie anabélienne, voir par exemple [PoSt] : si X_0 est une courbe hyperbolique géométriquement connexe sur une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$ telle que $X_{0,\overline{\mathbb{Q}}_p}$ vérifie ce genre de résolution des non-singularités, toute section de $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_0) \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ a son image dans un groupe de décomposition d'un unique point de valuation.

Lepage montre dans [Lep3] que toute courbe de Mumford sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ vérifie une résolution des non-singularités et applique ce résultat à l'étude anabélienne du groupe tempéré des analytifiées de telles courbes. Il montre par exemple que si X_1 et X_2 sont deux courbes de Mumford sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ dont les analytifiées ont des groupes tempérés isomorphes, alors X_1^{an} et X_2^{an} sont naturellement homéomorphes ([Lep3], Théorème 3.9).

5.2.1 Définition et propriétés des points résolubles

Dans le cadre de ce travail, nous allons donner une définition *ad hoc* de *point résoluble* et de *résolution des non-singularités*, par souci de se maintenir dans le langage de la géométrie analytique et afin d'éviter d'alourdir les notations par des considérations de modèle stable et semi-stable non nécessaires.

Définition 5.2.1 (Points résolubles)**.** *Soit X une courbe k-analytique quasi-lisse. On dira que $x \in X$* vérifie la résolution des non-singularités*, ou tout simplement* est résoluble*, s'il existe un revêtement étale fini Y de X et un nœud y de $S^{\mathrm{an}}(Y)$ au-dessus de x. Cela revient à pouvoir* « singulariser » *x en un nœud d'un revêtement étale fini de X, d'où la terminologie. L'ensemble des* points résolubles *de X sera noté $X_{\mathrm{rés}}$.*

Remarque 5.2.2. On a toujours $X_{\text{rés}} \subseteq X_{[2]}$. Pour être cohérent avec [Lep3], nous dirons que X *vérifie la résolution des non-singularités* lorsque $X_{\text{rés}} = X_{[2]}$. Lepage montre dans [Lep3] (Theorem 2.6) que l'analytifiée de toute $\overline{\mathbb{Q}}_p$-courbe de Mumford vérifie la résolution des non-singularités.

Définition 5.2.3. *Si $f \in H^1(X, \mu_n)$, notons $\mathscr{D}(f)_{\text{rés}} := \mathscr{D}(f) \cap X_{\text{rés}}$ l'ensemble des points résolubles de X au-dessus desquels le torseur analytique défini par f est totalement déployé.*

La notion de résolution des non-singularités est de saveur toute anabélienne : elle permet de déterminer à partir du seul groupe tempéré $\pi_1^{\text{temp}}(X)$ l'ensemble des points résolubles, l'appartenance ou non de ceux-ci aux couronnes définies par les arêtes vicinales du squelette, au squelette $S^{\text{an}}(X)$ lui-même, ainsi qu'aux ensembles de déploiement des torseurs analytiques de X.

Propriétés : Pour toute courbe k-analytique X quasi-lisse, le groupe tempéré $\pi_1^{\text{temp}}(X)$ permet de déterminer :

- *l'ensemble $X_{\text{rés}}$ des points résolubles de X,*
- *si e est une arête vicinale de couronne $\mathcal{C}_e$, l'ensemble des points résolubles de X qui appartiennent à $\mathcal{C}_e$,*
- *l'ensemble $S^{\text{an}}(X)_{\text{rés}} := S^{\text{an}}(X) \cap X_{\text{rés}}$ des points résolubles qui appartiennent au squelette,*
- *si f est un μ_n-torseur de X, l'ensemble $\mathscr{D}(f)_{\text{rés}}$.*

Plus précisément :

1. Les groupes de décomposition D_x des points résolubles de X dans $\pi_1^{\text{temp}}(X)$ correspondent exactement aux sous-groupes compacts maximaux D de $\pi_1^{\text{temp}}(X)$ tels qu'il existe un sous-groupe ouvert d'indice fini H de $\pi_1^{\text{temp}}(X)$ tel que l'image de $D \cap H$ par le morphisme naturel $H \to H^{(p')}$ soit non commutative.
2. Soit e une arête vicinale de $S^{\text{an}}(X)$, et $\mathcal{C}_e$ la couronne associée. Si D_x est un groupe de décomposition d'un point $x \in X_{\text{rés}}$, alors $x \in \mathcal{C}_e$ si et seulement si l'image $D_x^{(p')}$ de D_x par le morphisme $\pi_1^{\text{temp}}(X) \to \pi_1^{\text{temp},(p')}(X)$ est un ouvert d'un sous-groupe vicinal π_e associé à e.
3. Soit $x \in X_{\text{rés}}$ un point résoluble. Notons $D_x^{(p')}$ un groupe de décomposition de x dans $\pi_1^{\text{temp},(p')}(X)$. Soit Y un revêtement étale fini tel qu'il existe un nœud y de $S^{\text{an}}(Y)$ au-dessus de X, ce qui revient à considérer un sous-groupe ouvert d'indice fini H de $\pi_1^{\text{temp}}(X)$ tel que $\pi_y = D_x^{(p')} \cap H^{(p')}$ soit non commutatif. Notons ι le

morphisme $H^{(p')} \to \pi_1^{\mathrm{temp},(p')}$, alors $\iota(\pi_y)$ est un sous-groupe ouvert de $D_x^{(p')}$. Il y a trois possibilités vis-à-vis de l'appartenance de x à $S^{\mathrm{an}}(X)$:

- *Cas* 1 *:* $x \notin S^{\mathrm{an}}(X)$, c'est le cas lorsque $\iota(\pi_y)$ est trivial.
- *Cas* 2 *:* x est un sommet du squelette, c'est le cas lorsque $\iota(\pi_y)$ est non commutatif. Dans ce cas $D_x^{(p')} = \pi_x$ est le seul sous-groupe sommital contenant $\iota(\pi_y)$, d'après le lemme 4.3.7 il peut aussi s'exprimer comme le commensurateur de $\iota(\pi_y)$ dans $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$.
- *Cas* 3 *:* x appartient à une arête e de $S^{\mathrm{an}}(X)$, c'est le cas lorsque $\iota(\pi_y)$ est commutatif non trivial. Dans ce cas $D_x^{(p')} = \pi_e$, et π_e est le seul sous-groupe vicinal ou cuspidal (selon la nature de e) contenant $\iota(\pi_y)$, aussi égal au commensurateur de $\iota(\pi_y)$ dans $\pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$.

4. Soit $f \in H^1(X, \mu_n)$ et D_x un groupe de décomposition dans $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ d'un point $x \in X_{\text{rés}}$. Alors la connaissance de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$, de f (vu comme morphisme de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) et de D_x permet de déterminer si $x \in \mathscr{D}(f)$.

Le point (1), que l'on retrouve dans [Lep3], est une conséquence de ([Lep4], prop. 10) : si D est un sous-groupe compact de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$, il existe $x \in X$ et un sous-groupe de décomposition D_x de x dans $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ tel que $D \subseteq D_x$. De là, les sous-groupes de décomposition dans $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ des points de X sont exactement les sous-groupes compacts maximaux de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$. L'image $D_x^{(p')}$ de D_x par le morphisme $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X) \to \pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ triviale si x n'appartient pas à $S^{\mathrm{an}}(X)$, commutative non triviale (en fait égale à $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p')}$)) si x se situe sur une arête de $S^{\mathrm{an}}(X)$, et non commutative si x est un sommet de $S^{\mathrm{an}}(X)$.

Le point (2) résulte du fait suivant : si $Y \xrightarrow{f} X$ est un revêtement fini étale galoisien de groupe G dont un nœud y de $S^{\mathrm{an}}(Y)$ résout $x \in X_{\text{rés}}$, il existe une rétraction canonique $S^{\mathrm{an}}(Y)/G \twoheadrightarrow f^{-1}(S^{\mathrm{an}}(X))/G \simeq S^{\mathrm{an}}(X)$, et le sous-graphe $f^{-1}(S^{\mathrm{an}}(X)) \subseteq S^{\mathrm{an}}(Y)$ est tel que $f^{-1}(S^{\mathrm{an}}(X)) \cap Y_{\text{rés}}$ est déterminé par la donnée de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ et du sous-groupe ouvert d'indice fini $H \subseteq \pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$ définissant le revêtement f.

Le point (3) peut être interprété comme une conséquence des lemmes 3.6 et 3.8 de [Lep3].

Pour le (4), il faut d'abord avoir en tête le point suivant : si $Y \xrightarrow{f} X$ est un revêtement fini étale galoisien donné par un sous-groupe ouvert $H \subseteq \pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$, la donnée du morphisme $\iota : H^{(p')} \to \pi_1^{\mathrm{temp},(p')}(X)$ permet de connaître la préimage par f d'un nœud $x \in S^{\mathrm{an}}(X)$ fixé. En particulier, lorsque f est un μ_n-torseur, la donnée de ι permet de savoir si f est totalement déployé au-dessus de x (cf. [Lep2], prop. 7). Si maintenant $x \in X_{\text{rés}}$, si $Z \xrightarrow{g} X$ est un revêtement fini étale galoisien de groupe G dont un nœud

$z \in S^{\mathrm{an}}(Z)$ résout x, et si $f \in H^1(X, \mu_n)$ correspond au torseur analytique $Y \to X$, le tiré en arrière $Y \times_X Z \to Z$ hérite d'une action naturelle de $\mu_n \times G$. La trivialité de f au dessus de x se lit alors dans l'action de $G \times \mu_n$ au-dessus $f^{-1}(x)$, c'est-à-dire au-dessus de la G-orbite de z.

5.2.2 Résolubilité du squelette d'une couronne et des points « seuils »

Soit X la courbe considérée dans 5.1.1, c'est-à-dire k-analytiquement anabélienne sans bord, de squelette fini, ne contenant aucun point de genre > 0, et dont les cusps sont coronaires. On a vu que X se réalise comme ouvert non vide de l'analytifiée X' d'une k-courbe de Mumford, mais *a priori* on ne peut pas en conclure que X vérifie la résolution des non-singularités en ce qu'elle n'est pas définie sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$; la preuve du théorème 2.6 de [Lep3] ne fonctionne plus lorsque $|k^\times|$ est par exemple indénombrable. Nous n'aurons néanmoins besoin dans la suite que d'une version très faible de la résolution des non-singularités. À défaut de pouvoir montrer que tous les points de type 2 sont résolubles, il nous suffira d'avoir la résolubilité des points de type 2 du squelette d'une couronne, ainsi que celle des points « seuils » de branchement des μ_p-torseurs de cochaîne non triviale.

Lemme 5.2.4. *Soit e une arête de $S^{\mathrm{an}}(X)$, de couronne $\mathcal{C}_e$, et α un point rigide de $\mathcal{C}_e$ n'appartenant pas au squelette de $\mathcal{C}_e$. Soit r la rétraction canonique de X sur son squelette, et $x_\alpha \in \mathcal{C}_e$ l'unique point de $]\alpha, r(\alpha)[$ situé à une distance $\frac{p}{p-1}$ de $r(\alpha)$. Si e n'est pas un pont de $\mathbb{G}$, $x_\alpha \in X_{\text{rés}}$.*

Démonstration. Nous savons d'après la proposition 5.1.7 que tout μ_p-torseur analytique $Y \to X$ de X dont la cochaîne est non nulle modulo p sur l'arête e est non déployé avec un seul antécédent au-dessus de chaque point de $[x_\alpha, r(\alpha)[$ et totalement déployé au-dessus de $[\alpha, x_\alpha[$. Or un tel μ_p-torseur de X de cochaîne non nulle modulo p sur e existe : comme dans la preuve de la proposition 5.1.11, le fait que e n'est pas un pont implique que

$$(\mathrm{ev}_e \circ \theta)^{-1}\left((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\right)$$

est un ensemble non vide de $H^1(X, \mu_p)$.

Nous en déduisons que si $Y \to X$ est un tel torseur, l'unique antécédent $y \in Y$ de x_α est un point de branchement, donc un nœud de $S^{\mathrm{an}}(Y)$. Ainsi x_α est un point résoluble de X, résolu par le revêtement $Y \to X$. □

Remarque 5.2.5. Un tel point x_α situé à une distance $\frac{p}{p-1}$ du squelette est bien un point « seuil ». En effet, en parcourant le segment $[\alpha, r(\alpha)]$, x_α est exactement le seuil jusqu'auquel tout μ_p-torseur de cochaîne non nulle sur l'arête e est totalement déployé.

Lemme 5.2.6. *Soit $\mathcal{C}$ une couronne k-analytique. Alors tous les points de type 2 du squelette analytique de $\mathcal{C}$ sont résolubles :* $S^{\mathrm{an}}(X)_{\text{rés}} = S^{\mathrm{an}}(X)_{[2]}$.

Démonstration. On peut supposer qu'il existe un intervalle non vide I de $\mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{C}$ soit le domaine analytique de $\mathbb{P}_k^{1,\mathrm{an}}$ défini par la condition $|T-1| \in I$, que l'on notera $\mathcal{C}_{(I)}$. Soit $x \in \mathcal{C}_{[2]}$, il existe $r \in I$ tel que $x = \eta_{1,r}$. Quitte à remplacer l'intervalle I par $J = r^{-1}p^{-\frac{p}{p-1}}I$ (on a alors $\mathcal{C}_{(I)} \simeq \mathcal{C}_{(J)}$ car $r^{-1}p^{-\frac{p}{p-1}} \in |k^\times|$), on peut supposer $x = \eta_{1,p^{-\frac{p}{p-1}}}$. D'après la proposition 1.4.8, le point x n'admet alors qu'un seul antécédent y par le revêtement étale $Y \to \mathcal{C}$ induit par $\mathbb{G}_m^{\mathrm{an}} \xrightarrow{z \mapsto z^p} \mathbb{G}_m^{\mathrm{an}}$, et y est un point de branchement de Y, c'est-à-dire que c'est un nœud de $S^{\mathrm{an}}(Y)$. On en déduit que x est un point résoluble de X. □

5.2.3 Anabélianité de la trivialité des μ_p-torseurs

L'étude menée jusqu'ici permet de prouver le caractère anabélien de la trivialité d'une cochaîne associée à un μ_p-torseur d'une courbe k-analytique dans le cas où celle-ci est soit un couronne, soit une courbe analytiquement anabélienne qui se plonge comme ouvert dans l'analytifiée d'une k-courbe de Mumford.

Théorème 5.2.7. *Soit X une courbe k-analytique qui vérifie l'une des deux conditions (exclusives l'une de l'autre) suivantes :*

1. *X est une couronne*
2. *X est une courbe k-analytiquement anabélienne, de squelette fini sans pont, sans point de genre > 0, sans bord, telle que les cusps soient coronaires et que de tout nœud ne puisse être issu au plus qu'un cusp.*

Alors l'ensemble des μ_p-torseurs de X de cochaîne triviale modulo p, c'est-à-dire l'ensemble $H^1(X, \mu_p) \cap \ker(\theta)$, est entièrement déterminé par $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X)$.

Démonstration. Traitons le deuxième cas, lorsque la courbe est k-analytiquement anabélienne. Le cas où X est une couronne se traite exactement de la même manière, en remplaçant $\mathcal{C}_e$ par X, et en s'inspirant du corollaire 5.1.9, plutôt que de la proposition 5.1.11.

D'après la proposition 5.1.11, un élément $f \in H^1(X, \mu_p)$ appartient à $\ker(\theta)$ si et seulement si, pour toute arête vicinale e de $S^{\mathrm{an}}(X)$ de couronne associée $\mathcal{C}_e$, il existe $f_e \in H^1(X, \mu_p)$ tel que :

$$\big(\mathscr{D}(f)_{[2]} \setminus \mathscr{D}(f_e)_{[2]}\big) \cap \mathcal{C}_{e\,[2]} \neq \emptyset,$$

et l'on peut toujours choisir f_e tel que $\theta(f_e)(e) \neq 0$. Si l'on est dans ce cas, dès que α est un point rigide de $\mathcal{C}_e$, le « point seuil » $x_\alpha \in]\alpha, r(\alpha)[$ situé à une distance $\frac{p}{p-1}$ de $r(\alpha)$ est déployé par f mais ne l'est pas par f_e : cela découle de la proposition 5.1.7. On a donc $x_\alpha \in \mathscr{D}(f) \setminus \mathscr{D}(f_e)$, et comme de tels points seuils sont résolubles grâce au lemme 5.2.4, on obtient :

$$x_\alpha \in \mathscr{D}(f)_{\text{rés}} \setminus \mathscr{D}(f_e)_{\text{rés}}.$$

Puisque $X_{\text{rés}} \subseteq X_{[2]}$, on peut affirmer que $f \in \ker(\theta)$ si et seulement s'il existe $f_e \in H^1(X, \mu_p)$ tel que

$$(\mathscr{D}(f)_{\text{rés}} \setminus \mathscr{D}(f_e)_{\text{rés}}) \cap \mathcal{C}_e \neq \emptyset. \tag{5.1}$$

Or, d'après les propriétés des points résolubles présentées au 5.2.1, les ensembles $\mathscr{D}(f)_{\text{rés}}$, $\mathscr{D}(f)_{\text{rés}}$ et $\mathcal{C}_e \cap X_{\text{rés}}$ sont déterminés par le groupe tempéré $\pi_1^{\text{temp}}(X)$, donc la condition (5.1) ci-dessus se détecte à partir du groupe tempéré, d'où le résultat. □

Remarque 5.2.8. La deuxième condition sur la courbe X équivaut à demander que X soit une courbe k-analytiquement anabélienne isomorphe à un ouvert de l'analytifiée d'une k-courbe de Mumford, telle que $S^{\text{an}}(X)$ soit sans pont et que de tout nœud ne puisse être issu au plus qu'un cusp.

Corollaire 5.2.9. *Restons dans le cadre du théorème précédent. Soit $h \in \mathbb{N}^*$, notons* $\text{mod}(p) : \text{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z}) \to \text{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ *la réduction modulo p des $\mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z}$-cochaînes. Il est possible de caractériser à partir du groupe tempéré $\pi_1^{\text{temp}}(X)$ le noyau du morphisme composé*

$$\text{mod}(p) \circ \theta : H^1(X, \mu_{p^h}) \to \text{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Démonstration. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^1(X, \mu_{p^h}) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & \text{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z}) \arrow[d, "\text{mod}(p)"] \\
H^1(X, \mu_p) \arrow[r, "\theta"] & \text{Harm}(\mathbb{G}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

où la première flèche verticale est induite par la suite exacte : $1 \to \mu_{p^{h-1}} \to \mu_{p^h} \xrightarrow{\pi} \mu_p \to 1$. Via l'identification $H^1(X, \mu_{p^i}) \simeq \text{Hom}(\pi_1^{\text{temp}}(X), \mu_{p^i})$, ce morphisme n'est autre que

$$\text{Hom}(\pi_1^{\text{temp}}(X), \mu_{p^h}) \xrightarrow{\pi_*} \text{Hom}(\pi_1^{\text{temp}}(X), \mu_p),$$

et se caractérise donc uniquement à partir du groupe tempéré $\pi_1^{\text{temp}}(X)$. On conclut en utilisant 5.2.7 et la commutativité du diagramme. □

5.3 Anabélianité partielle de la longueur des couronnes

Nous allons montrer comment des considérations ensemblistes sur l'intersection du squelette d'une couronne avec les ensembles de déploiement de ses μ_p-torseurs permet d'extraire des informations sur la longueur de la couronne, avant d'en donner une interprétation anabélienne.

5.3.1 Longueurs et ensembles de déploiement

Le lemme suivant permet de déterminer si une couronne est de longueur $> \frac{2p}{p-1}$ à partir de la connaissance de ses μ_p-torseurs de cochaîne nulle :

Lemme 5.3.1. *Une couronne k-analytique $\mathcal{C}$ est de longueur strictement supérieure à $\frac{2p}{p-1}$ si et seulement si tout μ_p-torseur de cochaîne nulle sur $\mathcal{C}$ est totalement déployé sur une partie non vide de son squelette analytique. Autrement dit :*

$$\ell(\mathcal{C}) > \frac{2p}{p-1} \iff \forall f \in H^1(\mathcal{C}, \mu_p) \cap \ker(\theta), \mathscr{D}(f)_{[2]} \cap S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}) \neq \emptyset.$$

Démonstration. Supposons $\ell(\mathcal{C}) > \frac{2p}{p-1}$, et considérons $f \in H^1(\mathcal{C}, \mu_p) \cap \ker(\theta)$. Comme dans la preuve de la proposition 5.1.7, quitte à restreindre $\mathcal{C}$ (mais légèrement, de manière à toujours avoir la condition sur la longueur) on peut supposer que $\mathcal{C}$ est la sous-couronne de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$ donnée par la condition $T \in]1-\varepsilon, 1[$ avec $1-\epsilon < p^{-\frac{2p}{p-1}}$, et que le μ_p-torseur f est défini par une fonction $g \in \mathscr{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})^\times$ s'écrivant :

$$g(T) = 1 + \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} a_k T^k}_{u(T)},$$

avec pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $|a_k| < 1$ et $|a_{-k}| < (1-\varepsilon)^k$. Le squelette de $\mathcal{C}$ est l'intervalle $]\eta_{0,1-\varepsilon}, \eta_{0,1}[$, et le torseur est totalement déployé au-dessus d'un point $\eta_{0,r} \in S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$ dès que $|u(\eta_{0,r})| < p^{-\frac{p}{p-1}}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$:

- si $r < p^{-\frac{p}{p-1}}$, $|a_k r^k| < p^{-\frac{kp}{p-1}} \leqslant p^{-\frac{p}{p-1}}$
- si $r > (1-\varepsilon)\, p^{\frac{p}{p-1}}$, $|a_{-k} r^{-k}| < (1-\varepsilon)^k (1-\varepsilon)^{-k} p^{-\frac{kp}{p-1}} = p^{-\frac{kp}{p-1}} < p^{-\frac{p}{p-1}}$

Or on a $1-\varepsilon < p^{-\frac{2p}{p-1}}$ (par hypothèse sur la longueur de $\mathcal{C}$), d'où :

$$r_1 = (1-\varepsilon)\, p^{\frac{p}{p-1}} < p^{-\frac{p}{p-1}} = r_2.$$

Par conséquent, le torseur f est totalement déployé sur l'intervalle non vide $]\eta_{0,r_1}, \eta_{0,r_2}[$ du squelette. Par densité de $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})_{[2]}$ dans $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$, on en déduit que $\mathscr{D}(f)_{[2]} \cap S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.

Réciproquement, si $\ell(\mathcal{C}) \leqslant \frac{2p}{p-1}$, on vérifie que le torseur donné par la fonction $g(T) = 1 + T + (1-\varepsilon)T^{-1}$ n'est totalement déployé au-dessus d'aucun point de $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$. □

Il est en fait possible de réduire de moitié la borne précédente à partir d'une condition plus fine nécessitant de regarder l'ensemble des μ_p-torseurs totalement déployés *au voisinage d'une extrémité fixée.* Nous avons besoin pour cela de la définition suivante :

Définition 5.3.2. *Soit $\mathcal{C}$ une couronne k-analytique non vide. Son squelette $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$ est un intervalle (ouvert ou fermé), dont on note ω l'une des deux extrémités. Notons $H^1_\omega(\mathcal{C}, \mu_p)$ le sous-groupe de $H^1(\mathcal{C}, \mu_p)$ constitué des μ_p-torseurs totalement déployés* au voisinage de *ω, c'est-à-dire totalement déployés au-dessus d'un sous-intervalle d'intérieur non vide de $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$ dont le complémentaire dans $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$ est un intervalle n'admettant pas ω comme extrémité.*

Lemme 5.3.3. *Une couronne k-analytique $\mathcal{C}$ est de longueur strictement supérieure à $\frac{p}{p-1}$ si et seulement si, pour toute extrémité ω de $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$:*

$$\mathrm{Card}\left(\bigcap_{f \in H^1_\omega(\mathcal{C}, \mu_p)} \mathscr{D}(f)_{[2]} \cap S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})\right) \geqslant 2.$$

Démonstration. Supposons $\ell(\mathcal{C}) > \frac{p}{p-1}$, et considérons $f \in H^1_\omega(\mathcal{C}, \mu_p)$. Quitte à restreindre $\mathcal{C}$ (mais légèrement, de manière à toujours avoir la condition sur la longueur), on peut supposer que $\mathcal{C}$ est la sous-couronne de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$ donnée par la condition $T \in]1-\varepsilon, 1]$ avec $1 - \epsilon < p^{-\frac{p}{p-1}}$. Soit $\mathcal{D}_0$ le disque k-analytique fermé de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$ centré en 0 et de rayon 1, c'est-à-dire défini par la condition $|T| \in [0, 1]$. La couronne $\mathcal{C}$ est alors un sous-espace k-analytique de $\mathcal{D}_0$; d'après l'hypothèse sur f il est possible de prolonger f en un torseur $\widetilde{f} \in H^1(\mathcal{D}_0, \mu_p)$ de $\mathcal{D}_0$ trivial au-dessus de $\mathcal{D}_0 \setminus \mathcal{C}$. Puisque $\mathrm{Pic}(\mathcal{D}_0)$ est trivial ($\mathcal{D}_0$ est un espace k-affinoïde), $\widetilde{f}$ est donné par une fonction $g \in \mathscr{O}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{D}_0)^\times$ s'écrivant

$$g(T) = 1 + \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k T^k}_{v(T)},$$

avec $|a_k| < 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Le squelette de $\mathcal{C}$ est l'intervalle $]\eta_{0,1-\varepsilon}, \eta_{0,1}]$, et le torseur $f = \widetilde{f}_{|\mathcal{C}}$ est totalement déployé au-dessus d'un point $\eta_{0,r} \in S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$ dès que $|v(\eta_{0,r})| < p^{-\frac{p}{p-1}}$.

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in]1-\varepsilon, p^{-\frac{p}{p-1}}[$, on a $|a_k r^k| < p^{-\frac{p}{p-1}}$, c'est-à-dire $|v(\eta_{0,r})| < p^{-\frac{p}{p-1}}$. Ainsi, l'intervalle $]\eta_{0,1-\varepsilon}, \eta_{0,p^{-\frac{p}{p-1}}}[$ appartient à $\mathscr{D}(f)$. Comme ce raisonnement est indépendant du choix de $f \in H^1_\omega(\mathcal{C}, \mu_p)$, on obtient :

$$]\eta_{0,1-\varepsilon}, \eta_{0,p^{-\frac{p}{p-1}}}[\subseteq \bigcap_{f \in H^1_\omega(\mathcal{C},\mu_p)} \mathscr{D}(f) \cap S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}),$$

et on conclut par densité des points de type 2 dans $\mathcal{C}$.

Réciproquement, considérons une couronne $\mathcal{C}$ de longueur $\ell(\mathcal{C}) \leqslant \frac{p}{p-1}$, et supposons qu'il existe deux points distincts $x_1, x_2 \in \bigcap_{f \in H^1_\omega(\mathcal{C},\mu_p)} \mathscr{D}(f)_{[2]} \cap S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$. Soit $y \in]x_1, x_2[$ un point de type 2. Soit I la composante connexe de $S^{\mathrm{an}}(C) \setminus \{y\}$ n'aboutissant pas à ω, et $\mathcal{C}_I$ la sous-couronne de $\mathcal{C}$ de squelette I. Quitte à renuméroter x_1 et x_2, on peut supposer $x_2 \in I$. Comme la couronne $\mathcal{C}_I$ est de longueur $< \frac{p}{p-1}$, il existe $h \in H^1(\mathcal{C}_I, \mu_p)$ tel que $\mathscr{D}(h) \cap S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}_I) =]y, x_2[$. De là, h se prolonge en un torseur $\widetilde{h} \in H^1(\mathcal{C}, \mu_p)$ de $\mathcal{C}$, tel que $\mathscr{D}(\widetilde{h}) \cap S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}) =]x_1, y[$ (ou $[x_1, y[$, selon que $\mathcal{C}$ est ouverte ou fermée en x_1). Ainsi $\widetilde{h} \in H^1_\omega(\mathcal{C}, \mu_p)$, ce qui mène à une contradiction puisque $x_2 \notin \mathscr{D}(\widetilde{h})$.

□

Corollaire 5.3.4. *Il est possible de déterminer à partir du groupe fondamental tempéré d'une couronne k-analytique si celle-ci est de longueur strictement supérieure à $\frac{p}{p-1}$.*

Démonstration. On a montré dans le lemme 5.2.6 que tous les points de type 2 du squelette de $\mathcal{C}$ sont résolubles : $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})_{\text{rés}} = S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})_{[2]}$. Ainsi :

$$\bigcap_{f \in H^1_\omega(\mathcal{C},\mu_p)} \mathscr{D}(f)_{[2]} \cap S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C}) = \bigcap_{f \in H^1_\omega(\mathcal{C},\mu_p)} \mathscr{D}(f)_{\text{rés}} \cap S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})_{\text{rés}}.$$

D'après les propriétés des points résolubles présentées au 5.2.1, le groupe tempéré $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{C})$ caractérise les ensembles $\mathscr{D}(f)_{\text{rés}}$ et $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})_{\text{rés}}$. Par ailleurs, un torseur $f \in H^1(\mathcal{C}, \mu_p)$ appartient à $H^1_\omega(\mathcal{C}, \mu_p)$ si et seulement s'il est totalement déployé au-dessus de l'ensemble des points de type 2 d'un voisinage de ω dans $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$. Comme tous les points de type 2 de $S^{\mathrm{an}}(\mathcal{C})$ sont résolubles, $H^1_\omega(\mathcal{C}, \mu_p)$ lui-même est caractérisé par le groupe tempéré. Le résultat se déduit alors de la condition donnée par le lemme 5.3.3. □

5.3.2 Résultat sur les longueurs des couronnes

Nous voici en mesure d'énoncer un résultat d'anabélianité partielle des longueurs de couronnes. À défaut de savoir si le groupe tempéré d'une couronne détermine sa longueur, au moins ce résultat indique-t-il que deux couronnes ayant des groupes tempérés isomorphes ne peuvent avoir des longueurs trop éloignées l'une de l'autre, en donnant une borne précise sur la différence desdites longueurs.

Théorème 5.3.5. *Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux couronnes k-analytiques dont les groupes tempérés $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{C}_1)$ et $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{C}_2)$ sont isomorphes. Alors $\mathcal{C}_1$ est de longueur finie si et seulement si $\mathcal{C}_2$ l'est également, auquel cas :*

$$|\ell(\mathcal{C}_1) - \ell(\mathcal{C}_2)| < \frac{2p}{p-1}.$$

On a aussi $d\,(\ell(\mathcal{C}_1), p\mathbb{N}^*) > 1$ si et seulement si $d\,(\ell(\mathcal{C}_2), p\mathbb{N}^*) > 1$; dans ce cas :

$$|\ell(\mathcal{C}_1) - \ell(\mathcal{C}_2)| < \frac{p}{p-1}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier premier à p, et $i \in \{1, 2\}$. Nous savons que tous les μ_n-torseurs de $\mathcal{C}_i$ sont kummériens. Ainsi, toutes les couronnes définies par les éléments de $H^1(\mathcal{C}_i, \mu_n)$ sont de longueur $\frac{\ell(\mathcal{C}_i)}{n}$ (avec éventuellement $\ell(\mathcal{C}_i) = +\infty$).

Par ailleurs, tous les μ_n-torseurs de $\mathcal{C}_i$ se lisent sur son groupe tempéré puisque $H^1(\mathcal{C}_i, \mu_n) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{C}_i), \mu_n)$. D'après le corollaire 5.3.4 il est donc possible, à partir de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(\mathcal{C}_i)$, de savoir si $\frac{\ell(\mathcal{C}_i)}{n} > \frac{p}{p-1}$, puis, pas-à-pas, de trouver le plus petit entier j tel que :

$$\frac{\ell(\mathcal{C}_i)}{n^{j+1}} \leqslant \frac{p}{p-1} < \frac{\ell(\mathcal{C}_i)}{n^j}, \qquad \text{i.e. tel que} \qquad n^j \frac{p}{p-1} < \ell(\mathcal{C}_i) \leqslant n^{j+1} \frac{p}{p-1}.$$

Comme les groupes tempérés des deux couronnes sont isomorphes, un tel j sera identique pour $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. En particulier, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ *premier à* p :

$$N \frac{p}{p-1} < \ell(\mathcal{C}_1) \iff N \frac{p}{p-1} < \ell(\mathcal{C}_2).$$

On en déduit les résultats souhaités. □

Bibliographie

[Al] Gil Alon, *Automorphisms of Products of Drinfeld Half Planes*, arXiv: 1703 : 00059

[And] Yves André, *Period Mapping and Differential Equations : From* $\mathbb{C}$ *to* $\mathbb{C}_p$, MSJ Memoirs, Mathematical Society of Japan **12** (2003).

[And1] Yves André, *On a geometric description of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ *and a p-adic avatar of* $\widehat{GT}$, Duke Mathematical Journal **119** (2003), pp. $1-39$.

[Ber1] Vladimir Berkovich, *Spectral Theory and Analytic Geometry Over Non-Archimedean Fields*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society **33** (1990).

[Ber2] Vladimir Berkovich, *Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques **78** (1993), pp. $5-161$.

[Ber3] Vladimir Berkovich, *The automorphism group of the Drinfeld half-plane*, C. R. Acad. Sci. Paris **321** (1995), n° 9, pp. $1127-1132$.

[Ber4] Vladimir Berkovich, *Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible*, Invent. Math. **137** (1999), pp. $1-84$.

[BGR] Siegfried Bosch, ulrich Güntzer, Reinhold Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **261**, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[Cad] Anna Cadoret, *Galois Categories*, Progress in Mathematics **304** (2013), pp. 171 – 246.

[DJg] Aise De Jong, *Etale fondamental groups of non-Archimedian analytic spaces*, Compositio Math. **97** (1995), pp. 89 – 118.

[Duc] Antoine Ducros, *La structure des courbes analytiques* (projet de livre).

[Duc06] Antoine Ducros, *Espaces analytiues p-adiques au sens de Berkovich*, Séminaire Bourbaki **311** (2006), exposé 958, pp. 137 – 176.

[Duc08] Antoine Ducros, *Triangulations et cohomologie étale sur une courbe analytique p-adique*, J. Algebraic Geometry **17** (2008), no. 3, pp. 503 – 575.

[Duc09] Antoine Ducros, *Les espaces de Berkovich sont excellents*, Annales de l'Institut Fourier **59** (2009), pp. 1443 – 1552.

[Duc15] Antoine Ducros, *Étale cohomology of schemes andanalytic spaces*, in Berkovich Spaces and Applications, Lecture notes in mathematics **59**, Springer, Cham (2015), pp. 67 – 118.

[Duc18] Antoine Ducros, *Families of Berkovich spaces*, Astérisque **400** (2018).

[FW] Jean-Marc Fontaine and Jean-Pierre Wittenberger , *Extensions algébriques et corps de normes des extensions APF de corps locaux*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér.A-B **288(8)** (1979), pp. $A441 - A444$.

[Gau] Sylvain Gaulhiac, *Reconstruction du squelette des courbes analytiques* (preprint) arXiv :1904.03126v2.

[G1] Alexandre Grothendieck, *Letter to Faltings* (1983), manuscrit reproduit dans *Geometric Galois actions I*, London Math. Soc.L.N., Cambridge (1997).

[G2] Alexandre Grothendieck, *Esquisse d'un programme* (1984), manuscrit reproduit dans *Geometric Galois actions I*, London Math. Soc.L.N., Cambridge (1997).

[HL] Ehud Hrushovski and François Loeser, *Non archimedean tame topology and stably dominated types*, Annals of Math. Studies **192** (2016), Princeton University Press, Princeton, NJ.

[Jon] Mattias Jonsson, *Annotations to Berkovich's book,* `//docplayer.net/33934280- Annotations-to-berkovich-s-book.html`

[JR] Mosche Jarden and Jürgen Ritter, *On the characterization of local fields by their absolute Galois groups*, Journal of Number Theory **11** (1979), pp. 1 – 13.

[Kie] Reinhardt Kiehl, *Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie*, J. Reine Angew. Math. **234** (1969), pp. 89 – 98.

[Lep1] Emmanuel Lepage, *Tempered fundamental group and metric graph of a Mumford curve*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences **46** (2010), no.4, pp. 849 – 897.

[Lep2] Emmanuel Lepage, *Tempered fundamental group and graph of the stable reduction*, The Arithmetic of Fundamental Groups.

[Lep3] Emmanuel Lepage, *Resolution of non-singularities for Mumford curves*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences **49** (2013), pp. 861 – 891.

[Lep4] Emmanuel Lepage, *Tempered fundamental group*, in *Geometric and differential Galois theories*, Séminaires et Congrès **27**, SMF, (2013), pp. 93 – 113.

[Meh] Vlerë Mehmeti, *Patching on Berkovich Spaces and the Local-Global Principle*, (2019), Thèse.

[Mzk96] Shinichi Mochizuki, *The profinite Grothendieck Conjecture for closed hyperbolic curves over number fields*, J. Math. Sci. Univ Tokyo **3** (1996), pp. 571 – 627.

[Mzk97] Shinichi Mochizuki, *A version of the Grothendieck conjecture for p-adic local fields*, Internat. J. Math. no. 4, **8** (1997), pp. 499 – 506.

[Mzk99] Shinichi Mochizuki, *The local pro-p anabelian geometry of curves*, Invent. Math. **138** (1999), no. 2, pp. 319 – 423.

[Mzk1] Shinichi Mochizuki, *The Absolute Anabelian Geometry of Hyperbolic Curves*, Galois Theory and Modular Forms, Kluwer Academic Publishers (2003), pp. 77 – 122.

[Mzk2] Shinichi Mochizuki, *The Geometry of Anabelioids*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences **40** (2004), pp. 819 – 881.

[Mzk3] Shinichi Mochizuki, *Semi-graphs of Anabelioids*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences **42** (2006).

[Mzk07] Shinichi Mochizuki, *Absolute anabelian cuspidalizations of proper hyperbolic curves*, J. Math. Kyoto Univ. **47** (2007), pp. 451 – 539

[Nak] Hiroaki Nakamura, *Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **1** (1994), pp. 71 – 136.

[Neu] Jürgen Neukirch, *Kennzeichnung der p-adischen und der endlischen algebraischen Zahlkörprer*, Invent. Math. **6** (1969), pp. 296 – 314.

[Poi] Jérôme Poineau, *Les espaces de Berkovich sont angéliques*, Bull. Soc. Math. France **141 (2)** (2013), pp. 267 – 297.

[Pop94] Florian Pop, *On Grothendieck's conjecture of birational anabelian Geometry*, Ann. of Math. **139** (1994), pp. 145 – 182.

[Pop11] Florian Pop, *Anabelian Phenomena*, in *Non-abelian Fundamental Groups and Iwasawa Theory*, London Math. Society LNS**393** Cambridge University Press (2011), pp. 1 – 55.

[Pop18] Florian Pop, *Reconstruction of Function Fields from their pro-ℓ abelian divisorial Inertia* (preprint), arXiv 1810.04768.

[PoSt] Florian Pop and Jakob Stix , *Arithmetic in the fundamental group of a p-adic curve. On the p-adic section conjecture for curves.*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **725** (2017), pp. 1 – 40.

[SGA1] *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960 – 1961, dirigé par A. Grothendieck, augmenté de deux exposés de M. Raynaud, Lecture Notes in Mathematics **224**, Springer-Verlag (1971).

[Sti] Jacob stix, *Projective anabelian curves in positive characteristic and descent theory for* log-*étale covers*, Bonner Mathematische Schriften **354**, Bonn (2002).

[Sza] Tamas Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge studies in advanced mathematics **117** (2009).

[Tam1] Akio Tamagawa, *The Grothendieck conjecture for affine curves*, Compositio Math. **109** (1997), pp. 135 – 194.

[Tam2] Akio Tamagawa, *Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental groups*, J. Algebraic Geom **13** (2004), pp. 675 – 724.

[Tem1] Michael Temkin, *On the local properties of non-Archimedean analytic spaces II*, Israel J. Math. **140** (2004), pp. 1 – 27.

[Tem2] Michael Temkin, *A new proof of the Gerritzen-Grauert theorem*, Ann. Math. **333(2)** (2005), pp. 261 – 269.

[Tem3] Michael Temkin, *Introduction to Berkovich analytic spaces*, Lecture Notes in Mathematics **2119** (2015), pp. 3 – 66.

[Uch] K. Uchida, *Isomorphisms of Galois groups of algebraic function fields*, Ann. Math. **106** (1977), pp. 589 – 598.