Moteur central des explosions extrêmes : l'instabilité magnétorotationnelle dans les proto-étoiles à neutrons

Alexis Reboul-Salze

▶ **To cite this version:**

Alexis Reboul-Salze. Moteur central des explosions extrêmes : l'instabilité magnétorotationnelle dans les proto-étoiles à neutrons. Phénomènes cosmiques de haute energie [astro-ph.HE]. Université Paris-Saclay, 2021. Français. NNT : 2021UPASP085 . tel-03379831

HAL Id: tel-03379831

https://theses.hal.science/tel-03379831

Submitted on 15 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

université
PARIS-SACLAY

Moteur central des explosions extrêmes : l'instabilité magnétorotationnelle dans les proto-étoiles à neutrons

Central engine of extreme explosions : magnetorotational instability in proto-neutron stars

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale n°127, Astronomie & Astrophysique d'Île-de-France (AAIF)
Spécialité de doctorat : Astronomie & Astrophysique
Unité de recherche : Université Paris-Saclay, CNRS, CEA, Astrophysique, Instrumentation et Modélisation de Paris-Saclay, 91191, Gif-sur-Yvette, France
Référent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse présentée et soutenue à Paris-Saclay, le 30/09/2021, par

Alexis REBOUL-SALZE

Composition du Jury

Patrice HELLO Professeur des Universités, Université Paris-Saclay (IJCLab)	Président
Jérôme PÉTRI Maître de Conférences, HDR, Observatoire astronomique de Strasbourg	Rapporteur & Examinateur
François RINCON Chargé de Recherche, HDR, CNRS Toulouse (IRAP)	Rapporteur & Examinateur
Guillaume DUBUS Directeur de Recherche, Université Grenoble Alpes (IPAG)	Examinateur
Laurène JOUVE Maîtresse de Conférences, Université Paul Sabatier (IRAP)	Examinatrice
Jérôme NOVAK Directeur de Recherche, Observatoire de Paris (LUTH)	Examinateur

Direction de la thèse

Jérôme GUILET Ingénieur-Recherche, Commissariat à l'Énergie Atomique (AIM)	Directeur de thèse
Thierry FOGLIZZO Ingénieur-Recherche, Commissariat à l'Énergie Atomique (AIM)	Co-Directeur de thèse

Thèse de doctorat
NNT : 2021UPASP085

-Que devient une étoile qui meurt ?
-Un rêve qui vit.
Pierre Bottero, Ellana

Remerciements

Une bien belle aventure se termine après trois années de thèse et cette aventure aura connu une fin aussi heureuse grâce aux soutiens divers et variés des nombreuses personnes ayant croisé mon chemin durant ces trois ans. Cette page est là pour prendre le temps de vous remercier de tout ce que vous m'avez apporté durant cette aventure scientifique et humaine.

Je tiens à commencer par remercier Jérôme, mon directeur de thèse (officiellement depuis 4 mois, officieusement depuis le début). Tu es devenu un modèle pour moi au cours de ces trois années, que ce soit par ta bonne humeur, ton écoute patiente, ta compréhension humaine, ta disponibilité, ton engagement écologique et tes qualités de scientifique. Tu m'auras beaucoup appris en termes d'intuition physique (et non pas physiquement comme cela me sera rappelé à chaque évocation des remerciements lors de la soutenance) et astrophysique, dont je connaissais si peu sans master d'astrophysique à mon actif avant d'arriver en thèse. Je te remercie de m'avoir fait confiance pour cette opportunité incroyable d'être ton premier thésard et de faire partie de cette deuxième famille qu'est MagBurst. Merci aussi pour ta patience face à ma procrastination (structurée) qui demande une forte efficacité de dernière minute. Tu m'as montré qu'il est possible d'évoluer dans un milieu compétitif tout en restant humble et humain et c'est l'une des raisons qui m'ont poussé à continuer dans la recherche, au moins pour quelques années.

Je tiens également à remercier Thierry, directeur officiel puis co-directeur. Bien que ton rôle ait principalement été administratif pour la thèse, ta présence aux différentes réunions était toujours la bienvenue ainsi que les questions intéressantes que tu soulèves à chaque discussion scientifique. Tu m'as également appris qu'il était possible de faire des expériences même pour étudier des phénomènes astrophysiques et que les analogies et comparaisons sont des outils puissants pour améliorer notre compréhension de ces phénomènes.

Je remercie également les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer mes travaux que ce soit ceux qui ont fait le déplacement, particulièrement Jérôme Pétri pour sa relecture et pour être venu de Strasbourg, ou ceux en visioconférence, particulièrement François Rincon pour sa relecture minutieuse, que j'espère pouvoir rencontrer et poursuivre les discussions sur les points soulevés pendant la soutenance dans les années qui viennent.

J'aimerais remercier bien évidemment les personnes travaillant au Département d'Astrophysique, à commencer par les autres membres de l'équipe Magburst : Raphaël et Matteo. Vous avez été d'énormes soutiens, toujours disponibles, pendant ces trois ans, que ce soit pour prendre en main le côté numérique, pour m'aider dans ma recherche bibliographique, pour vos relectures d'articles et de thèse ou pour discuter pendant de nombreuses pauses café. J'ai beaucoup appris pendant nos nombreuses discussions (scientifiques ou non) et j'ai apprécié nos voyages en confé-

rences, que ce soit à Nice, en Corse, en Allemagne ou au Japon. Je vous souhaite toute la réussite possible pour la suite de vos projets. Je remercie également les autres membres permanents du laboratoire avec qui j'ai des discussions enrichissantes, Marc-Antoine, Patrick pour des débats sur l'écologie, Matthias sur le métier de maître de conférences et merci d'avoir jonglé avec moi durant les pauses repas. Merci également à Sébastien, ancien membre du labo, pour tes conseils et pour avoir été dans mon comité de suivi.

Merci à tous les autres membres du laboratoire, avec une pensée particulière pour ceux qui venaient régulièrement aux sessions jeux virtuels qui ont permis d'égayer le confinement : Tine, Frances, Ugo, Noé.

Je tiens également à remercier tous les doctorants avec qui j'ai pu avoir la chance de discuter sur n'importe quel sujet, que ce soit les anciens, Bruno (merci pour le SAV latex), Raphaël, mes compagnons de promo, Antoine, Noé Florian, Jérémy, ou les doctorants suivants, Anne-Cécile, Quentin, Paul. Vous avez contribué à faire du Département d'Astrophysique un endroit chaleureux. Merci particulièrement à Jérémy et Anne-Cécile pour nos discussions quasi-quotidiennes et votre soutien moral toujours autour d'une tasse de thé pendant les moments difficiles.

Merci également à mes amis, Clément, Syléna, Eliot, Léa, pour ne citer qu'eux. Merci d'avoir toujours été partant pour m'écouter parler de ma thèse même si vous ne compreniez pas grand-chose et d'être toujours partant pour râler ensemble sur nos problèmes. Je remercie également tous ceux qui ont contribué à remplir de ces années de thèses de moments agréables et enrichissants et que je n'ai pas cités pour que les remerciements ne soient pas trop longs.

Finalement, je remercie ma famille, mes parents, Véronique et Benoit, ma grande sœur, Mylène, et mon grand frère, Cédric, qui m'ont soutenu pendant ses trois ans, qui m'ont permis de me concentrer sur ma thèse et ma soutenance et de réaliser quelque chose de fou, passer sa soutenance de thèse et se marier à moins de dix jours d'intervalle !

Évidemment, je te remercie toi, Induja, ma femme (je peux maintenant le dire), de m'avoir toujours motivé à bosser plus, à aller plus loin. Merci en particulier d'avoir relu et corrigé les fautes d'orthographe de ma thèse, de m'avoir fait répéter ma soutenance. Tu en as tellement fait pour moi au cours de ces trois ans que la liste prendrait encore quelques pages. Je ne te remercierai jamais assez d'avoir été si patiente et douce avec moi et ma capacité à être en retard sur tout. Maintenant, une nouvelle page s'ouvre sur notre histoire ensemble et je sais déjà qu'elle sera magnifique.

Résumé

La fin de vie des étoiles massives donne lieu à une explosion, appelée supernova. Ces explosions sont provoquées par l'effondrement de leur cœur de fer et la formation d'une étoile à neutrons. Les observations des supernovae montrent que certaines d'entre elles ont des caractéristiques extrêmes comme leur énergie cinétique pour les hypernovae ou leur luminosité pour les supernovae superlumineuses. Un moteur central de ces explosions différent du mécanisme des neutrinos pour les supernovae standards est souvent invoqué pour expliquer ces caractéristiques extrêmes : une explosion magnétorotationnelle. Ce mécanisme suppose la formation d'une proto-étoile à neutrons (PNS) en rotation rapide et avec un fort champ magnétique qui permet d'extraire l'énergie de rotation et obtenir une explosion plus énergétique ou lumineuse. Cette PNS, une fois refroidie en étoile à neutrons, fait partie de la classe des magnétars, qui se distingue par toute une diversité d'émissions à haute énergie dues à la dissipation de leur intense champ magnétique interne. Les observations de ces objets permettent d'inférer que la composante dipolaire de leur champ magnétique est de l'ordre de 10^{14}–10^{15} G.

L'origine des magnétars et de leur fort champ magnétique à grande échelle, particulièrement en présence de rotation rapide, reste une question ouverte. Deux mécanismes ont été invoqués pour amplifier le champ magnétique dans les PNS : la dynamo convective ou l'instabilité magnétorotationnelle (MRI). Cette thèse se propose d'étudier en détail le scénario de formation par la MRI. Celle-ci a déjà été étudiée de manière analytique ou dans des simulations numériques locales dans une boite représentant une partie de la PNS. Pour la première fois, cette thèse présente des modèles 3D sphériques simplifiés, ce qui permet d'étudier l'origine du dipôle.

Une première étude a été menée pour étudier la génération d'un champ magnétique à grande échelle dans l'approximation incompressible, ce qui permet une plus vaste exploration des paramètres et des simulations plus longues. Nos simulations montrent la présence d'une dynamo auto-entretenue, dont l'état saturé ne dépend pas des conditions initiales du champ magnétique. Bien que cet état soit dominé par le champ magnétique turbulent ($\geq 10^{15}$ G), un dipôle représentant 5 % du champ magnétique moyen est généré dans toutes les simulations. De manière inédite, ce dipôle est orienté vers le plan équatorial plutôt que vers l'axe de rotation. De plus, la comparaison de ces modèles sphériques avec les modèles locaux montre que l'état turbulent de la MRI a des propriétés similaires, bien que le champ magnétique soit légèrement plus faible dans les modèles globaux.

Un modèle basé sur l'approximation anélastique a ensuite été développé afin de prendre en compte les profils de densité et d'entropie d'une structure réaliste de PNS. Les simulations montrent également une dynamo auto-entrenue avec un champ magnétique moyen de $\geq 10^{14}$ G

et un dipôle équatorial de l'ordre de 4.3 % du champ magnétique. De plus, un nouveau comportement oscillant à grande échelle apparaît avec ce modèle réaliste : une dynamo de champ moyen qui peut être décrite comme une dynamo $\alpha\Omega$. La comparaison de ce modèle avec des modèles idéalisés montre que la stratification en densité favorise l'apparition d'une dynamo de champ moyen. La force de flottaison limite la turbulence dans le plan équatorial mais a une influence assez faible dans l'ensemble du fait de la forte diffusion thermique due aux neutrinos. Dans l'ensemble, les résultats présentés dans cette thèse confirment la capacité de la MRI de former des magnétars dans le cas d'une rotation rapide.

Abstract

Massive stars end their life in a violent explosion, called supernova. These explosions are due to the collapse of their iron core and lead to the formation of neutron stars. Observations show that some supernovae have extreme properties, such as their kinetic energy in the case of hypernovae or their luminosity in the case of superluminous supernovae. A central engine different from the neutrino-driven mechanism for standard supernovae is often invoked for these extreme explosions : a magnetorotational explosion. This mechanism assumes on a fast rotating proto-neutron star (PNS) with an intense magnetic field, which extracts the rotational energy to explain the extreme caracteristics of hypernovae or superluminous supernovae. With time, this PNS becomes a magnetar, a class of neutron stars caracterised by a wide diversity of high energy phenomena powered by the dissipation of their strong magnetic field. A magnetic dipole of 10^{14}–10^{15} G can be inferred from the observations of most magnetars.

The origin of magnetars and their large-scale magnetic field, especially in presence of fast rotation, remains an open question. Two promising mechanisms are invoked to amplify the magnetic field of PNS : the convective dynamo or the magnetorotational instability (MRI). This thesis studies in more details the scenario of magnetar formation by the MRI. This instability has been studied analytically or in local numerical simulations with a box representing a small part of the PNS. For the first time, this thesis uses simplified spherical 3D models to study the origin of the dipole.

A first study is designed to investigate large-scale magnetic field from an initial small-scale one using the incompressible approximation, which enables longer simulation times and the exploration of the parameter space. The numerical simulations of this model show a self-sustained turbulent MRI-driven dynamo, whose saturated state is independent of the initial magnetic field. This saturated state is dominated by a strong turbulent magnetic field of $B \geq 10^{15}$ G, but a non-dominant magnetic dipole represents systematically about 5 $\%$ of the averaged magnetic field strength. Interestingly, this dipole is found to be tilted toward the equatorial plane. By comparing these results with local simulations, global models reproduce several characteristics of local MRI turbulence such as the kinetic and magnetic spectra, while the turbulence is less vigorous in the global models.

A more realistic model based on the anelastic approximation was then developed in order to take into account the density and entropy profiles of the PNS. Simulation results show a self-sustained turbulent MRI-driven dynamo with a strong turbulent magnetic field of $B \geq 10^{14}$ G and a non-dominant equatorial dipole, which represents about 4.3 $\%$ of the averaged magnetic field strength. Interestingly, an axisymmetric magnetic field at large scales is observed to oscillate

with time, which can be described as a mean-field $\alpha\Omega$ dynamo. By comparing these results with the models with fewer physical ingredients, we find that the density gradient favors the apparition of this mean-field behaviour. Buoyancy due to the entropy gradient damps turbulence in the equatorial plane but has a relatively weak influence overall because of the high thermal diffusivity due to neutrinos.

To conclude, this thesis supports the ability of the MRI to generate magnetar-like large-scale magnetic fields in a fast-rotating PNS.

Table des matières

Introduction générale **1**

I. Partie introductive 7

1. Les magnétars : au cœur des évènements les plus extrêmes de l'Univers **9**
1.1. Magnétars : les champs magnétiques les plus intenses de l'Univers 10
1.1.1. Historique 10
1.1.2. La population des magnétars galactiques 13
1.1.3. Exemples des différentes observations de magnétars 16
1.2. Formation des étoiles à neutrons : supernovae par effondrement gravitationnel 22
1.2.1. Évolution d'une étoile massive 23
1.2.2. Formation d'une étoile à neutrons et mécanisme standard d'explosion 26
1.3. Supernovae superlumineuses et hypernovae : les explosions les plus extrêmes de l'Univers 31
1.3.1. Supernovae superlumineuses : les explosions les plus lumineuses . . . 31
1.3.2. Hypernovae : les phénomènes les plus énergétiques 33
1.3.3. Moteur central : un mécanisme unique pour les supernovae superlumineuses et les hypernovae ? 36
1.4. Autres phénomènes transitoires liés aux magnétars 43
1.4.1. Sursauts gamma courts et kilonovae : les évènements produisant le plus d'éléments lourds 43
1.4.2. Sursauts radio rapides : les rayonnements radio les plus intenses . . . 48
1.4.3. Des évènements transitoires bleus et rapides : les plus mystérieux ? . . 51
1.5. Conclusion : les magnétars au cœur du ciel transitoire 51

2. Scénarios de formation des magnétars **53**
2.1. Principes et équations de la MHD 54
2.1.1. Équations de la MHD décrivant la dynamique d'un fluide en rotation 54
2.1.2. Conservation du flux magnétique et loi du champ gelé 56
2.1.3. Ondes d'Alfvén 57
2.1.4. Les bases de la théorie dynamo 59
2.1.5. Amplification du champ toroïdal par cisaillement : Effet Omega . . . 60

2.1.6. Dynamo de champ moyen 62
2.2. Scénario du champ fossile 68
2.2.1. Le champ fossile lui-même originaire du champ fossile 69
2.2.2. Dynamos dans les étoiles massives 70
2.2.3. Fusion de deux étoiles en système binaire 71
2.2.4. Limites du scénario du champ fossile 71
2.3. Scénario d'amplification dans les PNS 73
2.3.1. Stabilité de la convection : le critère de Ledoux 73
2.3.2. Une dynamo convective dans une PNS 76

3. L'instabilité magnétorotationnelle (la MRI) 79
3.1. Présentation générale de l'instabilité magnétorotationnelle (MRI) 80
3.1.1. Description du mécanisme de la MRI 80
3.1.2. Une dérivation simple des propriétés de la MRI 81
3.2. Les enseignements des modèles locaux dans les disques d'accrétion 85
3.2.1. Turbulence et coefficients de transport 86
3.2.2. Impact des coefficients de diffusion 88
3.2.3. Impact de la stratification en densité 91
3.3. La MRI dans les proto-étoiles à neutrons 93
3.3.1. Étude locale de l'amplification du champ magnétique 94
3.3.2. Impact des neutrinos dans une proto-étoile à neutrons 95
3.3.3. Impact de la stratification thermique stable 100
3.3.4. D'une description locale vers une géométrie globale 101
3.4. Conclusion 102

II. Études numériques de la MRI dans les PNS 105

4. Méthodes : une approche numérique simplifiée 107
4.1. Approximations des équations de la magnétohydrodynamique 108
4.1.1. Approximation de Boussinesq 109
4.1.2. Approximation anélastique 110
4.1.3. Validité des approximations de la MHD dans les PNS 113
4.2. Simulations numériques 113
4.2.1. Modèle local : Le code Snoopy 116
4.2.2. Modèle global : MagIC 117
4.3. Mise en place de la configuration du modèle numérique 122
4.3.1. Forçage de la rotation différentielle 123
4.3.2. Un cas linéaire de la MRI 125
4.3.3. Mise en place d'une structure d'étoile à neutrons 126

4.3.4. Ondes de gravité dans un cas sans rotation 128

5. Modèle incompressible **131**
5.1. Numerical setup 133
5.1.1. Governing equations 133
5.1.2. Numerical methods 133
5.1.3. Initial conditions 134
5.1.4. Boundary conditions 136
5.1.5. Physical parameters and dimensionless numbers 137
5.2. Results 137
5.2.1. Typical quasi-stationary dynamos 137
5.2.2. Dynamo threshold 143
5.2.3. Robustness of the results 145
5.3. Comparison to local simulations 147
5.3.1. Setup for local models 148
5.3.2. Dynamo threshold 150
5.3.3. Turbulent energies and angular momentum transport 150
5.4. Discussion 153
5.4.1. Impact of the curvature 154
5.4.2. Forcing of the differential rotation 154
5.4.3. Diffusive processes 155
5.4.4. Incompressible approximation 156
5.5. Conclusions 156
5.6. Le régime des hauts nombres de Prandtl magnétique 161

6. Modèle anélastique **165**
6.1. Numerical setup 166
6.1.1. A 1D proto-neutron star model 166
6.1.2. Governing equations 168
6.1.3. Numerical methods 168
6.1.4. Initial conditions 169
6.1.5. Boundary conditions 170
6.1.6. Physical parameters and dimensionless numbers 170
6.2. A typical anelastic simulation 173
6.2.1. Quasi-stationary state of a MRI-driven dynamo 173
6.2.2. An $\alpha\Omega$ dynamo 179
6.3. Comparison with other models 183
6.3.1. Impact of the density gradient 184
6.3.2. Impact of buoyancy 186
6.3.3. Influence of the thermal Prandtl number 188

6.3.4. Comparison to our previous incompressible models 191
6.4. Discussion 192
6.4.1. Spatial distribution of the turbulence 192
6.4.2. $\alpha\Omega$ vs $\alpha^2\Omega$ dynamo 193
6.4.3. Properties of the α tensor components 193
6.4.4. Diffusive processes 194
6.4.5. Validity of the anelastic approximation 195
6.5. Conclusions 195

Conclusion **203**

A. Publication : A global model of the magnetorotational instability in proto-neutron stars **209**

Bibliographie **225**

Table des figures

0.1. Nébuleuse du Crabe et reste de supernova SN185 . . . 2
0.2. Classification des observations de supernovae . . . 3

1.1. Premier sursaut gamma mou observé en 1979 . . . 11
1.2. Diagramme $P - \dot{P}$ des pulsars et des magnétars . . . 14
1.3. Position des magnétars dans le plan de la Voie lactée . . . 17
1.4. Pulsations et sursauts chaotique de magnétars . . . 18
1.5. Évolution du flux et du profil de pulsation lors d'une flambée . . . 20
1.6. Ligne cyclotron dans l'évolution spectrale du magnétar SGR 0418+5729 . . . 21
1.7. L'éruption géante de 2004 provenant du magnétar SGR 1806-20 . . . 23
1.8. Structure d'une étoile massive en fin de vie . . . 25
1.9. Mécanisme d'explosion par les neutrinos d'une supernova classique . . . 28
1.10. Ondes gravitationnelles émise par un modèle de supernova gravitationnel . . . 30
1.11. Phases d'évolution d'une supernova superlumineuse PTF12dam . . . 32
1.12. Courbes de lumière et de vitesse d'expansion de SN2003dh et SN1998bw . . . 35
1.13. Spectres optiques de SN1998bw et SN2003dh . . . 37
1.14. Espace des phases du moteur central de magnétar millisecondes . . . 39
1.15. Explosion magnétorotationnelle d'une supernova . . . 40
1.16. Chronologie de la découverte de GW170817 . . . 46
1.17. Composantes émises lors d'une coalescence d'étoiles à neutrons . . . 47
1.18. Spectres dynamiques de sursauts radio rapides . . . 50

2.1. Propagations des ondes d'Alfvén . . . 58
2.2. Diagramme papillon des taches solaires . . . 60
2.3. Schéma de l'effet Ω à l'équateur . . . 61
2.4. Schéma de l'effet α. . . . 64
2.5. Simulation numérique de la fusion de deux étoiles massives . . . 72
2.6. Fraction électronique Y_e et de l'entropie par baryon dans une supernova . . . 75
2.7. Dynamo convective dans une PNS en rotation rapide . . . 77

3.1. Principe de la MRI dans un disque d'accrétion . . . 81
3.2. Schéma du modèle local de *shearing box*. . . . 82
3.3. Évolution des *Channel modes* de la MRI dans un modèle local . . . 85

3.4. Turbulence dans une simulation locale de la MRI . . . 88
3.5. Influence du nombre de Prantl magnétique Pm sur la MRI . . . 90
3.6. Diagramme spatio-temporel du champ magnétique toroïdal dans un modèle local stratifié . . . 92
3.7. Profils de rotation dans les PNS ou les étoiles à neutrons supermassives . . . 94
3.8. Amplification locale du champ magnétique par la MRI dans les PNS . . . 95
3.9. Régime de la MRI en présence de neutrinos dans les PNS . . . 97
3.10. Régime visqueux de la MRI dans les PNS . . . 99
3.12. Champ magnétique toroïdal dans une simulation globale de la MRI . . . 103

4.1. Harmoniques sphériques . . . 120
4.2. Rotation différentielle initiale dans notre configuration . . . 124
4.3. Modes linéaires de la MRI dans notre configuration . . . 126
4.4. Entropie et densité dans une simulation 1D de supernova . . . 128
4.5. Fréquence et taux d'amortissement de modes de gravité . . . 129

5.1. Rotation profile inside the PNS . . . 135
5.2. Initial magnetic field . . . 136
5.3. Temporal evolution of magnetic and kinetic energy density . . . 138
5.4. 3D visualisation of the magnetic field for a typical simulation . . . 139
5.5. Magnetic field and turbulent radial velocity in a typical simulation . . . 140
5.6. Shear rate inside the PNS for different MHD simulations . . . 140
5.7. Averaged magnetic and kinetic spectrum for a typical simulation . . . 141
5.8. Evolution of averaged and dipolar magnetic energy density in a typical simulation 142
5.9. Evolution of the dipolar tilt angle . . . 143
5.10. Energy densities for different initial magnetic field strength . . . 144
5.11. Energy densities for different magnetic Prandtl number Pm . . . 144
5.12. Early maximum toroidal magnetic field as a function of initial magnetic field strength B_0 . . . 145
5.13. Averaged magnetic field strength depending as a function of initial magnetic field strength . . . 146
5.14. Magnetic and kinetic vertical spectra for different initial conditions . . . 147
5.15. Magnetic and kinetic azimutal spectra for different initial conditions . . . 148
5.16. Dipole magnetic field strength as a function of averaged magnetic field strength 149
5.17. Comparison of global model with local model . . . 149
5.18. Obtention of a dynamo for local and global models . . . 150
5.19. Averaged magnetic energy density as a function of the box azimuthal size . . . 151
5.20. Comparison of magnetic field ratios for local and global models . . . 153
5.21. Magnetic and kinetic spectra for local and global model . . . 154
5.22. Énergie magnétique en fonction de Pm dans des simulations locales . . . 162

5.23. Perturbations du champ magnétique et de la vitesse pour deux Pm différents 163

6.1. Radial profiles of entropy and density for our PNS model 167
6.2. Ratio of the Brunt-Väisälä frequency to the rotation frequency in our model . 172
6.3. Initial poloidal magnetic field and toroidal magnetic field in a typical simulation 173
6.4. Magnetic field lines of a typical simulation 174
6.5. Time evolution of the magnetic and turbulent kinetic energy densities for a typical simulation 175
6.6. Magnetic and kinetic spectra of a typical simulation 176
6.7. Time evolution of total magnetic and dipolar energy densities in a typical simulation 177
6.8. Radius-time diagram of the dipole 178
6.9. Butterfly diagram of the mean toroidal magnetic field 181
6.10. Correlation coefficients for the α effect and a non-diagonal resistivity 182
6.11. Estimation of the component $\alpha_{\phi\phi}$ in a typical simulation 183
6.12. Toroidal magnetic field for incompressible, Boussinesq and anelastic models, with and without buoyancy 184
6.13. Comparison of magnetic and kinetic energy for Boussinesq and anelastic models 185
6.14. Comparison of dipole and magnetic energy for Boussinesq and anelastic models 186
6.15. Butterfly diagrams of the toroidal magnetic fields for all simulations 187
6.16. Radial velocity u_r for increasing Prandtl numbers 189
6.17. Time evolution of the magnetic and turbulent kinetic energy densities for increasing Pr 190
6.18. Estimation of $\alpha_{\phi\phi}$ for increasing Pr 191
6.19. Comparison of the dipole strength as a function of magnetic field strength with our previous study 192
6.20. Reference state of the anelastic model 199
6.21. Correlation coefficient between the EMF and the magnetic field for a typical simulation 201
6.22. α tensor components for a typical simulation 202

Listes des acronymes

MRI	Instabilité magnétorotationnelle
SN	Supernova
PNS	Proto-étoile à neutrons
SLSN	Supernova superlumineuse
BL	*Broad-lined*
SGR	Répéteur de sursauts gamma mous
AXP	Pulsar X anormal
GRB	Sursaut gamma
FRB	Sursaut radio rapide
MHD	Magnétohydrodynamique
EMF	Force électromotrice

Constantes physiques & unités dérivées

Constante gravitationnelle	$G = 6.674\,30(15) \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-2}\,s^{-1}}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.380\,649 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$
Électron-Volt	$\mathrm{eV} = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$
Erg	$\mathrm{erg} = 10^{-7}\ \mathrm{J}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 299\,792\,458\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
Masse de l'électron	$m_e = 9.109\,383\,701\,5(28) \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Masse du neutron	$m_n = 1.674\,927\,498\,04(95) \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Masse du proton	$m_p = 1.672\,621\,923\,69(51) \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Masse solaire	$M_\odot = 1.988\,47 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$
Rayon solaire	$R_\odot = 6.957 \times 10^{8}\ \mathrm{m}$
Unité astronomique	$\mathrm{au} = 149\,597\,870\,700\ \mathrm{m}$
Parsec	$\mathrm{pc} = \frac{64800}{\pi}\ \mathrm{au} \simeq 3.09 \times 10^{16}\ \mathrm{m}$
Année lumière	$\mathrm{ly} = 9\,460\,730\,472\,580\,800\ \mathrm{m}$

Introduction générale

Qui n'a jamais regardé le ciel la nuit en espérant voir une étoile filante ou une nouvelle étoile ? Qui ne s'est jamais demandé si cette étoile avait bougé et s'il s'agissait peut-être d'un signe de vie extraterrestre ? Ces derniers siècles, seules des étoiles filantes, astéroïdes qui brûlent en pénétrant dans l'atmosphère, ont pu être observées à l'œil nu, mais cela n'a pas toujours été le cas pour toutes les civilisations. En effet, toutes les civilisations humaines ont porté leur regard vers le ciel étoilé et certaines de ces civilisations ont laissé des traces écrites à propos de nouvelles étoiles qui sont apparues ou qui ont disparu dans le jour ou dans la nuit. L'humanité a alors compris que le ciel n'était pas totalement immuable et que les étoiles aussi pouvaient naître et mourir. Les plus grosses étoiles meurent de manière spectaculaire, elles explosent et éblouissent le ciel de leur lumière, au point de briller plus fort que toutes les étoiles de leurs galaxies d'origine. En apercevant cet événement, que l'on appelle aujourd'hui supernova, les astronomes de l'antiquité pensaient d'ailleurs qu'ils assistaient à la naissance d'une étoile, plutôt qu'à sa mort. Certaines traces écrites remonteraient jusqu'au 5e millénaire av. J.-C. en Inde ou l'an -1400 en Chine, bien que leurs interprétations soient difficiles. La première supernova datant de l'an 185 dont l'on a des traces écrites précises d'astronomes chinois a été décrite comme l'apparition d'une "étoile invitée" (Panneau de droite de la figure 0.1). De nombreuses traces historiques d'observations existent et l'on peut retenir notamment la supernova de 1006 et celle de 1054 dont le reste de supernova est bien connu sous le nom de la Nébuleuse du Crabe (Panneau de gauche de la figure 0.1).

Les supernovae historiques de 1572 et 1604 ont été particulièrement importantes pour la physique moderne et l'astrophysique, car elles ont remis en cause les dogmes de la physique de l'époque, par exemple l'immuabilité du ciel, dans l'esprit d'astronomes importants (Tycho Brahe, Johannes Kepler et Galileo Galilei).

Les observations historiques étaient effectuées à l'œil nu ou avec les télescopes de l'époque et étaient donc limitées aux explosions dans notre galaxie. Le taux de supernovae dans notre galaxie est estimé à 3 par siècle, mais celles-ci peuvent être masquées par la poussière et le gaz. Avec les télescopes modernes, il est possible de détecter des évènements provenant d'autres galaxies quasiment tous les jours et le nombre d'évènements détectables va être multiplié par cent avec les observations du télescope *Vera C. Rubin Observatory* qui vont commencer fin 2023. Grâce à cette grande quantité de données, les propriétés des supernovae ont été comparées entre elles et classées selon leurs caractéristiques spectrales (voir Figure 0.2 pour un résumé) : les supernovae de type II sont différenciées de celles de type I par la présence d'une raie d'hydrogène. Celles-ci

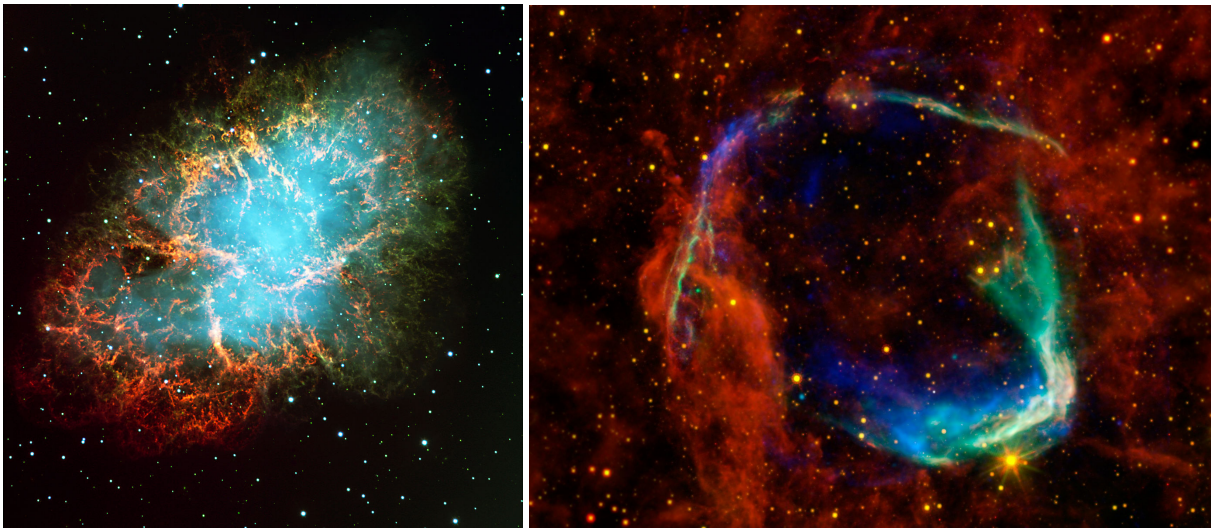


FIGURE 0.1. – (Gauche) Image de la Nébuleuse du Crabe formée par une supernova par effondrement gravitationnel qui date de 1054. (Droite) Image du reste de supernova associée à la supernova de l'an 185.

sont à nouveau classées en trois types (Ia, Ib et Ic) selon la présence ou non d'hélium et de silicium dans le spectre. La détection des galaxies dans laquelle ces supernovae apparaissent a pu permettre de différencier les supernovae Ia des supernovae des autres types spectraux (Ib, Ic et II) : les supernovae de type Ia ont lieu dans tout type de galaxie (elliptiques comme spirales) alors que les autres se produisent dans les régions des galaxies spirales où se forment des étoiles récentes. Dans cette thèse, nous nous placerons uniquement dans le contexte de la deuxième catégorie de supernovae : les supernovae de type Ib, Ic et II. Le nombre important de supernovae détectées ont également pu montrer que certaines parmi les types spectraux Ic et II sont des supernovae exceptionnelles, comme les supernovae superlumineuses (type Ic ou type II SLSN), qui ont une luminosité 100 fois plus importante, mais également les supernovae de type Ic-BL (BL pour Broad Lined), qui présentent des raies d'émission et d'absorption plus larges dans leur spectre et qui sont parfois associés à des sursauts gamma (des bouffées courtes et intenses de photons gamma détectés par des télescopes spatiaux). L'énergie cinétique des supernovae de type Ic-BL ($\sim 10^{52}$ erg $= 10^{45}$ J) est typiquement 10 fois supérieure à l'énergie déjà gigantesque ($\sim 10^{51}$ erg $= 10^{44}$ J) libérée par une supernova dite classique. L'équivalent de l'énergie cinétique typique d'une supernova classique correspondrait à la production de 10^{27} centrales nucléaires pendant un an, soit plus que l'énergie émise par le soleil pendant toute sa vie. Peu de sources d'énergie sont suffisamment importantes pour expliquer l'énergie gigantesque des supernovae et cela contraint les différents mécanismes d'explosion à l'origine des supernovae classiques et des supernovae extrêmes.

La compréhension théorique des supernovae est liée au développement de la physique nucléaire et a également une longue histoire (bien que nettement moins ancienne). La découverte

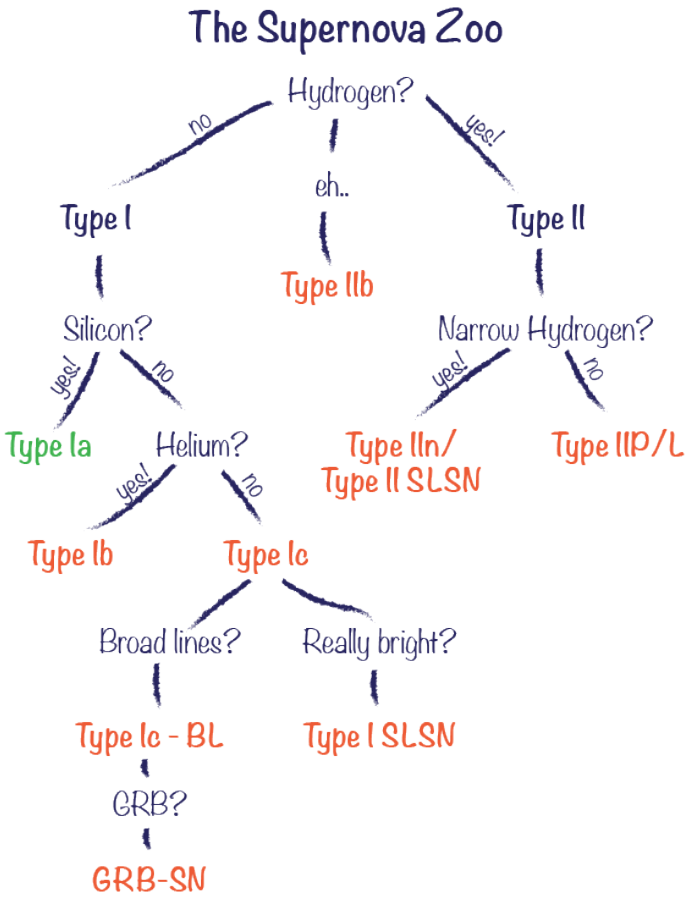


FIGURE 0.2. – Schéma de la classification des observations de supernovae. Crédit : Ashley Villar.

expérimentale du neutron a lieu en 1932 par James Chadwick (CHADWICK, 1932). Inspirés par ces travaux, les astrophysiciens Baade et Zwicky proposent en 1934 que des astres, composés principalement de neutrons, puissent exister (BAADE et ZWICKY, 1934). Ces astres, appelés étoiles à neutrons, auraient une très haute densité $\rho \sim 4 \times 10^{13}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, puisqu'il y aurait une masse de l'ordre de celle du soleil dans un rayon d'une dizaine de kilomètres. Cet article, étonnamment visionnaire, prédit aussi que la formation des étoiles à neutrons a lieu lors de l'implosion du cœur d'une étoile massive et que la conséquence de cette implosion est une supernova. On sait aujourd'hui que ce scénario explique les supernovae de types spectraux Ib, Ic et II, appelée "supernovae gravitationnelles", car leur source d'énergie provient de l'énergie gravitationnelle libérée lors de l'effondrement du cœur d'une étoile massive (étoile de masse supérieure à 8 fois la masse du soleil). Historiquement, la confirmation de cette hypothèse viendra avec la découverte en 1967 d'objets émettant de courtes pulsations radio régulières, avec une période allant de quelques millisecondes à quelques secondes, qui seront plus tard donc appelés pulsars. Les astronomes Jocelyn Bell Burnell et Antony Hewish, qui ont découvert

ces signaux en 1967 [1], ont d'ailleurs nommé le premier pulsar LGM-1 pour *Little Green Man*, car ce signal était si régulier que la possibilité qu'il provienne d'une civilisation extraterrestre était envisageable. La découverte de plusieurs autres sources similaires distantes les unes des autres a enterré cette idée. En particulier, la découverte d'un pulsar avec une période de 33 ms au centre de la nébuleuse du Crabe, reste de supernova, a permis d'identifier ces objets comme des étoiles à neutrons (Staelin et Reifenstein, 1968). Leur émission radio provient du plasma en rotation de l'étoile à neutrons et à son dipôle magnétique intense non aligné allant de 10^{11} G à 10^{13} G. Certaines étoiles à neutrons ont même un champ magnétique dipolaire encore plus intense, de l'ordre de 10^{14}–10^{15} G et sont appelées «magnétars». Le fort champ magnétique des magnétars en conjugaison avec une rotation rapide (c'est-à-dire une période de l'ordre de quelques millisecondes) est souvent au cœur des mécanismes magnétorotationnels pouvant expliquer les supernovae extrêmes comme les supernovae superlumineuses et les hypernovae. En effet, leur fort champ magnétique permet de puiser dans l'importante énergie rotationnelle du magnétar, ce qui expliquerait l'énergie ou la luminosité différente de ces supernovae extrêmes. Ce fort champ magnétique pourrait également aussi jouer un rôle important dans les kilonovae et être à l'origine des sursauts radio rapides (FRB). L'origine de ce fort champ magnétique, les plus intenses connus de l'univers, reste à l'heure actuelle une question ouverte. Le but de cette thèse est de proposer une réponse à cette question au travers d'un scénario de formation de magnétars par une instabilité magnétohydrodynamique : l'instabilité magnétorotationnelle (MRI).

La première partie de ce manuscrit est un état des lieux de la compréhension actuelle de la formation des magnétars et leur intérêt astrophysique. Le premier chapitre se penchera plus en détail sur le contexte astrophysique et montrera, en particulier, que les magnétars sont au cœur du mécanisme pour expliquer les observations de phénomènes extrêmement énergétiques, des supernovae aux tout récents sursauts radio rapides. Le deuxième chapitre présentera différents scénarios de formation de magnétar ainsi que les bases de la magnétohydrodynamique indispensables à la compréhension de ces scénarios. Le troisième chapitre se concentre sur une instabilité qui pourrait expliquer la formation des magnétars : l'instabilité magnétorotationnelle (MRI). Nous soulignerons les propriétés essentielles de cette instabilité, qui a longtemps été étudiée dans un autre contexte que celui des étoiles à neutrons, et les conditions spécifiques aux étoiles à neutrons.

Dans la deuxième partie de ce manuscrit, nous nous intéresserons à l'étude numérique de l'instabilité magnétorotationnelle dans une proto-étoile à neutrons. Le chapitre 4 détaillera les méthodes et outils utilisés pour l'étude de cette instabilité et le développement de modèles sphériques globaux simplifiés d'une proto-étoile à neutrons. Le chapitre 5 est consacré à l'étude de ce modèle sous l'approximation incompressible et nous étudierons le champ magnétique qui est généré par la MRI. Les résultats de ce modèle global sont comparés à ceux de modèles

1. C'est Jocelyn Bell Burnell qui a fait la découverte pendant sa thèse, mais c'est son directeur de thèse, Antony Hewish, qui a reçu le Prix Nobel. Il s'agit d'un exemple connu de l'effet Matilda, qui désigne le déni ou la minimisation récurrente et systémique de la contribution des femmes scientifiques à la recherche. Rien que pour les prix Nobels, il est possible de citer plusieurs exemples d'effet Matilda.

simulant une partie de la PNS. Ce chapitre montrera que la MRI est capable de générer des champs magnétiques, en particulier un dipôle, de l'ordre de grandeur des magnétars. Le chapitre 6 s'intéressera à un modèle plus réaliste de proto-étoile à neutrons, basé sur des modèles 1D de supernova par effondrement gravitationnel. Dans ce chapitre sera étudiée la dynamo obtenue par ce modèle réaliste, utilisant l'approximation anélastique. Une nouvelle structure à grande échelle du champ magnétique ainsi qu'un nouveau comportement cyclique sont obtenus dans ce modèle, ce qui permet d'interpréter la dynamo obtenue par une dynamo de champ moyen. Ces résultats ouvrent de nouvelles perspectives de modélisation de la MRI dans les explosions d'étoiles massives et les fusions d'étoiles à neutrons.

Première partie

Partie introductive

Chapitre 1

Les magnétars : au cœur des évènements les plus extrêmes de l'Univers

Un Magnétar pour les propulser,
Un Magnétar pour les unifier,
Un Magnétar pour les expliquer toutes,
Et dans la Rotation, les lier.

Sommaire

1.1. Magnétars : les champs magnétiques les plus intenses de l'Univers 10
1.1.1. Historique 10
1.1.2. La population des magnétars galactiques 13
1.1.3. Exemples des différentes observations de magnétars 16
1.2. Formation des étoiles à neutrons : supernovae par effondrement gravitationnel 22
1.2.1. Évolution d'une étoile massive 23
1.2.2. Formation d'une étoile à neutrons et mécanisme standard d'explosion 26
1.3. Supernovae superlumineuses et hypernovae : les explosions les plus extrêmes de l'Univers 31
1.3.1. Supernovae superlumineuses : les explosions les plus lumineuses 31
1.3.2. Hypernovae : les phénomènes les plus énergétiques 33
1.3.3. Moteur central : un mécanisme unique pour les supernovae superlumineuses et les hypernovae ? 36
1.4. Autres phénomènes transitoires liés aux magnétars 43
1.4.1. Sursauts gamma courts et kilonovae : les évènements produisant le plus d'éléments lourds 43
1.4.2. Sursauts radio rapides : les rayonnements radio les plus intenses 48
1.4.3. Des évènements transitoires bleus et rapides : les plus mystérieux ? 51
1.5. Conclusion : les magnétars au cœur du ciel transitoire 51

Les magnétars sont des étoiles à neutrons avec un champ magnétique extrêmement intense, se formant au cœur des supernovae. Nous commencerons ce chapitre par une description des magnétars et les différentes conséquences observationnelles de leur champ magnétique. Nous nous concentrerons ensuite sur le contexte de la formation des étoiles à neutrons et de la physique de l'effondrement gravitationnel d'une étoile massive en fin de vie. Nous présenterons dans un troisième temps les observations et les modèles décrivant les différentes explosions extrêmes : les supernovae superlumineuses et les hypernovae. Enfin, nous finirons ce chapitre en présentant d'autres phénomènes transitoires, qui ont également un lien avec les magnétars, principalement les kilonovae et les sursauts radio rapides.

1.1. Magnétars : les champs magnétiques les plus intenses de l'Univers

Les magnétars sont une classe de jeunes étoiles à neutrons qui montrent une grande variété d'émissions à travers tout le spectre électromagnétique, et possèdent des champs magnétiques de l'ordre de 10^{14}–10^{15} G, les plus intenses connus de l'Univers. Dans la suite de ce manuscrit, nous considérerons que tout champ magnétique inférieur à 10^{14} G comme faible, bien qu'un champ magnétique de 10^{13} G reste 100 millions de fois plus élevé que le plus fort champ magnétique créé en laboratoire sur Terre. Les magnétars représentent environ $\sim$10 % de la population à la naissance des étoiles à neutrons, bien que ce nombre soit potentiellement plus élevé (Keane et Kramer, 2008; Beniamini et al., 2019). Nous commencerons par tracer l'historique de la découverte des magnétars, puis nous continuerons en résumant les propriétés générales de la population actuelle des magnétars et finirons par détailler les différentes observations directes des magnétars.

1.1.1. Historique

Historiquement, la découverte des magnétars est liée à l'astronomie des hautes énergies, et particulièrement aux observations en rayons gamma. La première observation d'un magnétar date de 1979 lorsqu'un sursaut est observé en rayons X et en rayons gamma par le télescope spatial Verena 11 (Figure 1.1). Le terme de sursaut est utilisé pour décrire de courts évènements pouvant durer de quelques millisecondes à des dizaines de secondes. De la même source SGR 1900+14 a été émis un nouveau sursaut, observé deux ans plus tard par le télescope spatial Verena 12 (Mazets et Golenetskii, 1981). À l'époque, ces nouveaux sursauts étaient considérés comme les mêmes évènements astrophysiques que les sursauts gamma (que l'on appellera GRB dans la suite), mais des sursauts répétés, en particulier celui provenant d'une région d'étoiles en formation du Nuage de Magellan, ont rendu cela improbable. De plus, ces sursauts ont un spectre plus mou, c'est-à-dire dans des gammes d'énergie plus faible (on parle d'un spectre plus dur pour les gammes d'énergie plus élevées), que les GRBs classiques, ce qui explique le

nom de répéteur de gamma mous, donné aux sources de tels sursauts, *Soft Gamma Repeters* (SGR) en anglais. Le lien entre les SGRs et les étoiles à neutrons a été établi rapidement. En

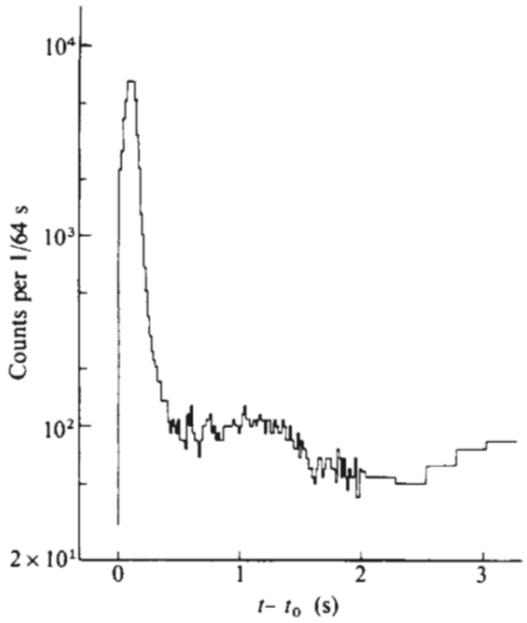


FIGURE I.I. – Courbe de lumière du premier sursaut gamma mou observé en 1979 par le satellite Venera 11 avec une résolution temporelle de 1/64s (MAZETS, GOLENETSKIJ et al., 1979).

effet, des pulsations de l'ordre de 8 secondes ont été observées dans le signal provenant de la source du Nuage de Magellan, qui a été nommé SGR 0526-66. Ces pulsations ont rappelé celles des pulsars, bien que la période de pulsation soit bien plus longue que les 33 ms du pulsar du Crabe (MAZETS, GOLENTSKII et al., 1979). SGR 0526-66 a également été associé au reste de supernova N49, ce qui a confirmé le lien entre supernovae et SGRs (CLINE et al., 1982). Pourtant, les SGRs ont été reconnus comme une classe distincte des GRBs classiques des années plus tard, lorsqu'une troisième source galactique SGR1806-20 a produit une centaine de sursauts gamma mous entre 1978 et 1986 (KOUVELIOTOU et al., 1987 ; LAROS et al., 1987). Le modèle des magnétars pour expliquer les SGRs est né en 1993 lorsque la possibilité d'amplifier le champ magnétique d'une étoile à neutrons par une dynamo pendant sa formation lors d'une supernova par effondrement gravitationnel a été proposée pour la première fois (C. THOMPSON et DUNCAN, 1993). Ensuite, C. THOMPSON et DUNCAN (1995, 1996) ont montré que l'activité d'un SGR pouvait bien être expliquée par la dissipation du champ magnétique, qui sert de source d'énergie à la fois pour les sursauts gamma mous et l'émission observée en rayons X que nous décrirons plus loin. Leur raisonnement est fondé sur des arguments énergétiques et sur le modèle des pulsars : pour obtenir une période de rotation de 8 secondes pour le pulsar SGR 0526-66 (et plus tard le pulsar de 7 secondes dans le reste de supernova CTB109) durant la durée de vie typique de $\sim 10^4$ ans d'un reste de supernova, le ralentissement de sa période $\dot{P}$ doit être

de l'ordre de $\sim 10^{-11}$–10^{-10} s s^{-1}. Sous l'hypothèse d'un freinage par un dipôle magnétique comme pour les pulsars, le champ magnétique dipolaire nécessaire pour atteindre ces valeurs de période et de dérivée de la période est de

$$B_{\mathrm{dip}} = 10^{14} \left(\frac{P}{5\,\mathrm{s}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\dot{P}}{10^{-11}\,\mathrm{s\,s^{-1}}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{G}, \tag{1.1}$$

où P est la période de rotation de l'étoile à neutrons. Les fortes valeurs de ralentissement signifient également que la variation de la période peut être détectée par des mesures suffisamment précises. De plus, un champ d'une telle intensité, qui est potentiellement plus intense à l'intérieur de l'étoile à neutrons, fournirait un réservoir d'énergie suffisant pour expliquer l'activité des SGRs. En effet, l'énergie magnétique d'une étoile à neutrons possédant un champ magnétique de 10^{15} G est de 10^{47} erg, ce qui est suffisant pour émettre des sursauts mous dont l'ordre de grandeur de l'énergie est de 10^{45} erg. La prédiction que la période de rotation des SGRs doit augmenter avec le temps à cause du freinage causé par le fort champ magnétique a été confirmée en 1998 par la première mesure du taux de ralentissement de la rotation d'un SGRs par Kouveliotou et al. (1998), qui a donné un champ magnétique $B_{\mathrm{dip}} \sim 8 \times 10^{14}$ G. Cette mesure directe a validé l'identification des SGRs aux magnétars pour l'ensemble de la communauté astrophysique.

Parallèlement à la découverte des SGRs, un autre objet astrophysique a été découvert : Gregory et Fahlman (1980) ont observé une nouvelle source céleste de rayons X au cœur du reste de supernova CTB 109. Cette source a montré des pulsations importantes avec une période de 3.5 secondes (qui a été comprise plus tard comme la deuxième harmonique d'une période de 7 secondes). La découverte de deux nouvelles sources similaires, 1E 1048.1-5937 (Seward et al., 1986) et 4U0142+61 (Helfand et al., 1994 ; Israel et al., 1994), avec une longue période et un spectre de rayons X anormalement intense a suggéré l'existence d'une nouvelle classe d'objets astrophysiques. Le terme de *Anomalous X-ray Pulsar* (AXP) a été introduit pour ces sources en 1995. Ces longues périodes et le spectre anormal ont d'abord été interprétés comme un nouveau type de binaire X de faible masse (une binaire X est composée d'un objet compact et d'une étoile en orbite stable et elle émet des rayons X du fait de l'accrétion de matière d'une étoile sur l'objet compact). En 1996, C. Thompson et Duncan (1996) ont proposé que les AXPs soient reliés au SGRs et qu'un sursaut typique d'un SGR provenant d'un AXP soit observable dans le futur. Rétrospectivement, cela paraît logique que si les AXPs sont de jeunes étoiles à neutrons avec des émissions à haute énergie importantes et une période de quelques secondes, ils soient identifiables à des magnétars. Il a fallu attendre 6 ans pour que deux évènements analogues soient observés (Gavriil et al., 2002 ; Kaspi et al., 2003) et viennent confirmer que les AXPs et les SGRs sont tous des magnétars.

1.1.2. La population des magnétars galactiques

Avec l'amélioration des télescopes spatiaux en rayons gamma et en rayons X et gamma, la population des magnétars galactiques est actuellement composée de 30 magnétars, dont 16 SGRs (12 confirmés, 4 candidats) et 14 AXPs (12 confirmés, 2 candidats). L'ensemble de leurs propriétés est détaillé dans un catalogue publié (Olausen et Kaspi, 2014) et ces propriétés sont mises à jour dans leur catalogue disponible en ligne [1].

La vaste majorité des magnétars connus ont été découverts par leurs sursauts courts en rayons X, grâce aux télescopes spatiaux qui surveillent le ciel entier comme le «Burst Alert Telescope» (BAT) à bord du télescope *Swift Gamma-Ray Burst Mission* lancé en 2004 et le «Gamma-ray Burst Monitor» (GBM) à bord du *Fermi Gamma-ray Space Telescope* lancé en 2008. Le satellite spatial SVOM qui doit être lancé début 2023 va également permettre de détecter et localiser efficacement les GRBs et les magnétars. L'utilisation exclusive de télescopes spatiaux est due à la filtration des rayonnements X et gamma par l'atmosphère terrestre (pour le bien de la vie terrestre). Comme ces missions spatiales ont été conçues pour détecter les GRBs classiques, la population connue des magnétars est biaisée vers les sources qui émettent des sursauts en rayons X ou en rayons gamma mous. Les magnétars partagent des caractéristiques communes de rotation et de champ magnétique, ce qui est révélateur des conditions nécessaires à la production de sursauts (bursts).

Propriétés générales

La place des magnétars dans le diagramme $P - \dot{P}$ des pulsars (Figure 1.2) montre que les magnétars ont une période beaucoup plus lente et un taux de ralentissement de cette période beaucoup plus important que les pulsars. L'ensemble des magnétars produisent des pulsations en rayons X avec une période P allant de 2 secondes à 12 secondes (en ignorant 2 sources qui n'ont montré des propriétés de magnétars que très brièvement). Les magnétars sont en décélération avec des taux de ralentissement $\dot{P}$ qui impliquent que les magnétars sont de jeunes étoiles à neutrons. En effet, le temps caractéristique de ralentissement est proportionnel au rapport $P/\dot{P} \sim 10^3 - 10^5$ ans. En supposant que le freinage se fasse par le dipôle magnétique, il est possible d'inférer un champ magnétique dipolaire de l'ordre de 10^{14}–10^{15} G pour la majorité des magnétars, bien qu'il y ait quelques magnétars dont le champ dipolaire est particulièrement faible, de l'ordre de 10^{12}–10^{13} G (par exemple SGR 0418+5729; Rea et al., 2013). De plus, l'énergie rayonnée par le freinage de la rotation par le dipôle magnétique d'un magnétar est appelée luminosité du ralentissement et est donnée par

$$\dot{L}_{sd} \equiv 4\pi^2 I \dot{P}/P^3 \simeq 2 \times 10^{33} \left(\frac{\dot{P}}{10^{-11}\,\mathrm{s\,s^{-1}}} \right) \left(\frac{P}{5\,\mathrm{s}} \right)^{-3} \mathrm{erg\,s^{-1}}, \tag{1.2}$$

1. http://www.physics.mcgill.ca/~pulsar/magnetar/main.html

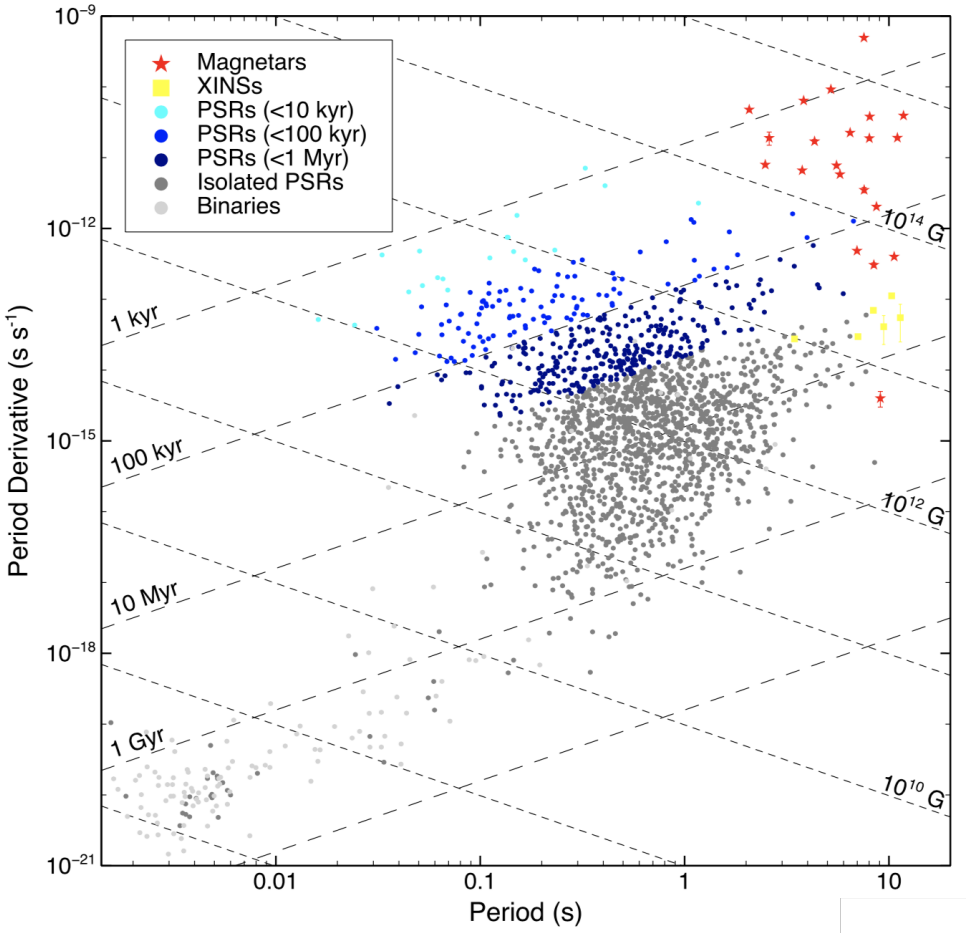


FIGURE 1.2. – Diagramme $P - \dot{P}$ de l'ensemble des pulsars et des magnétars (OLAUSEN et KASPI, 2014). L'acronyme PSRs correspond aux pulsars et *Binaries* aux pulsars en binaire avec un compagnon (naine blanche, étoile à neutrons). Les *X-ray isolated neutron stars* (XINSs) sont une classe d'étoiles à neutrons, caractérisés par des luminosités en rayons X faibles, de longueurs périodes et pas d'émission radio.

où $I = 1 - 2 \times 10^{45}$ g cm^2 est le moment d'inertie de l'étoile à neutrons. Cette luminosité est typiquement plus faible que la luminosité quiescente (luminosité au repos, en dehors des évènements transitoires) en rayons X des magnétars. Le modèle des pulsars, qui se base sur la luminosité de ralentissement, ne permet donc pas d'expliquer l'émission des magnétars. Si les valeurs de la période et du champ magnétique sont similaires pour la grande majorité des magnétars, les valeurs de la luminosité quiescente en rayons X sont beaucoup plus variées, allant de $\sim 10^{30}$ erg s^{-1} à 2×10^{35} erg s^{-1}. De ce point de vue, les magnétars peuvent être divisés en deux catégories : les magnétars persistants qui ont une luminosité de l'ordre $\sim 10^{35}$ erg s^{-1} et les magnétars transitoires qui ont une luminosité inférieure à 10^{33} erg s^{-1}. Les magnétars montrent

une grande variabilité dans leurs émissions en rayons X. Expliquer cette bimodalité dans la distribution de luminosité est une question importante de l'étude de l'évolution des magnétars, ainsi qu'expliquer les faibles différences de période des magnétars.

Dans la gamme des rayons X mous (de 100 eV à 10 keV), le spectre d'un magnétar est plutôt bien décrit par un modèle de corps noir avec, dans certains cas, une composante non thermique en loi de puissance, alors que dans la gamme des rayons X durs (10 keV à 100 keV), un «durcissement» du spectre (la proportion des photons de haute énergie augmente) montre une augmentation de l'énergie du spectre dans certains cas. Cette déviation de la loi du corps noir est due à des effets de transfert radiatif, sensible au fort champ magnétique (Kaspi et Beloborodov, 2017). Dans le modèle du corps noir, une température de surface $T_s \approx 4 \times 10^6$ K est nécessaire pour expliquer la luminosité en rayons X des magnétars persistants. Par comparaison, les modèles d'étoile à neutrons suggèrent qu'au bout de 1000 ans la température de surface est typiquement de $T_s = 10^6$ K et la température centrale de $T_c = 10^8$ K (Yakovlev et Pethick, 2004). Un mécanisme de chauffage lié au champ magnétique est donc nécessaire pour expliquer la température élevée des magnétars. La croûte proche de la surface pourrait être chauffée par la dissipation du champ magnétique et les modèles d'évolution magnéto-thermique, suggèrent que cela pourrait expliquer les comportements des magnétars et des étoiles à neutrons isolées (Pons et Viganò, 2019; Viganò et al., 2021). Ces modèles contiennent une physique complexe avec une équation d'état de la matière ultra-dense encore inconnue et des découplages entre les différentes particules composant l'étoile à neutrons comme les électrons et les neutrons pour l'Effet Hall ou les protons et les neutrons pour la diffusion ambipolaire. L'effet magnéto-thermique, c'est-à-dire une amplification du champ magnétique par des gradients de température, est potentiellement important dans la croûte de l'étoile à neutron (Blandford et al., 1983; Geppert et Wiebicke, 1991). Une autre explication possible pour le chauffage de la croûte serait un chauffage lors des phénomènes transitoires observables à plus haute énergie (Li et Beloborodov, 2015).

L'émission des magnétars est parfois observée à d'autres longueurs d'onde comme en ondes radio, en infrarouge et dans le visible. En effet, un lien existe entre les magnétars et les pulsars radio avec un champ magnétique relativement fort, de l'ordre de 10^{13} G. On remarquera que ces valeurs de champ magnétique sont faibles comparées à celles des magnétars, mais fortes comparées à celles des pulsars. Comme certaines observations de magnétars proviennent d'étoiles à neutrons avec un champ magnétique de cet ordre, il paraît logique d'imaginer que des pulsars puissent également produire une activité caractéristique des magnétars. Et en effet, des épisodes soudains, appelés flambées ou *outbursts* (Section 1.1.3), avec des sursauts en rayons X, caractéristiques de l'activité des magnétars, ont été détectés pour deux pulsars PSR J1846-0258 (Gavriil et al., 2008; Blumer et al., 2021) et PSR J1119-6127 (Göğüş et al., 2016; Kennea et al., 2016). Ces évènements similaires montrent la corrélation entre un fort champ magnétique et l'activité typique des magnétars et suggèrent que les pulsars à fort champ magnétique (par comparaison aux pulsars) sont des magnétars transitoires en période de non-activité.

Répartition spatiale et associations à des restes de supernovae

Un des aspects les mieux déterminés de la distribution spatiale des magnétars est leur confinement strict au plan galactique. Leur hauteur dans le plan galactique est de seulement $\sim 20 - 30$ pc, bien plus faible que celle des pulsars, ce qui indique que les magnétars sont des objets jeunes. En effet, un objet qui voyage à 200 km s^{-1} mettra 10^5 ans à parcourir une distance de 20 pc. La mesure directe de la vitesse des magnétars indique qu'ils voyagent à une vitesse typique de 200 km s¹ avec une déviation standard de l'ordre de 100 km s¹ (Tendulkar et al., 2013). Cette vitesse provient de l'asymétrie des supernovae qui pousse les objets compacts dans une direction par conservation du moment cinétique, on parle du *kick* des pulsars. Ainsi, les magnétars ne peuvent être plus vieux que 10^5 ans et sont généralement bien plus jeunes. Leur localisation dans le plan galactique (Figure 1.3) suggère que les observations sont biaisées contre les magnétars lointains. Toutefois, la distance de certains magnétars est comparable à celle du centre galactique, ce qui indique qu'une amélioration de la sensibilité des télescopes actuels, avec par exemple le télescope SVOM qui doit être lancé début 2023, permettrait de détecter l'ensemble de la population active des magnétars dans la Galaxie.

Des 24 magnétars confirmés, 9 d'entre eux sont associés à un reste de supernova et deux supplémentaires ont un candidat de reste de supernova. Ce nombre d'associations confirme une nouvelle fois la jeunesse de la population des magnétars puisque ceux-ci ne sont pas assez vieux pour s'être éloignés loin du lieu de la supernova. Les restes de supernovae associés à des magnétars galactiques n'ont pas de propriétés différentes des restes de supernovae classiques. L'énergie de la supernova est comparable à celle d'une supernova classique et rien ne semble différencier les magnétars des étoiles à neutrons du point de vue des restes de supernova (Zhou et al., 2019). Nous discuterons plus en détail dans le prochain chapitre des conséquences de ces observations sur le scénario de formation des magnétars.

1.1.3. Exemples des différentes observations de magnétars

Nous avons vu l'importance des mesures de la rotation et du ralentissement de la rotation pour le modèle de magnétar. Dans cette section, nous détaillerons, dans un premier temps, les observations permettant ces mesures puis nous décrirons, dans un second temps, les observations transitoires caractéristiques des magnétars et ce qu'elles peuvent nous apprendre de manière indirecte.

Pulsations et mesure de la rotation

Les observations qui permettent de mesurer avec précision les paramètres de rotation des magnétars sont les pulsations en rayons X ou en ondes radio, mais les pulsations radio n'ont été détectées que pour une faible fraction de la population de magnétars (5 magnétars) et toujours lors d'épisodes de flambées. Les flambées sont des évènements où le flux de rayons X augmente de manière très soudaine et de manière très importante (Section 1.1.3). Les pulsations radio

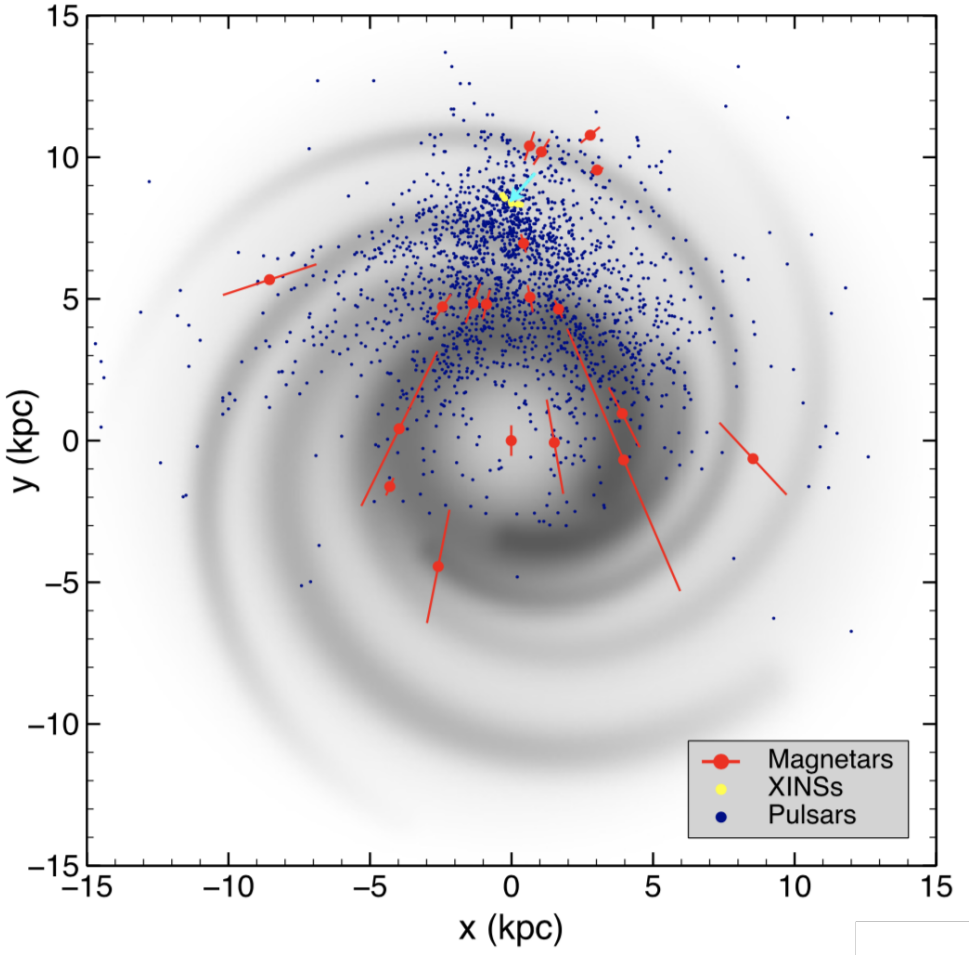


FIGURE 1.3. – Position des magnétars dans le plan de la Voie lactée avec le centre de la Galaxie en (0,0) et le Soleil marqué par une flèche. Les magnétars connus sont montrés comme des cercles rouges avec l'incertitude sur la distance, les étoiles à neutrons isolées en rayons X (XINS) comme des cercles jaunes et les autres pulsars connus comme des points bleus (OLAUSEN et KASPI, 2014).

détectées pendant celles-ci sont d'ailleurs très différentes de celles des pulsars puisque leurs morphologies sont très variables et les pulsations peuvent changer énormément sur des durées de l'ordre de la minute. Les pulsations en rayons X sont donc les principales observations utilisées pour caractériser les magnétars, car elles sont observables sur de longues durées pour une majorité de magnétars. Ces pulsations peuvent être variées, que ce soit pour leur forme ou pour l'énergie du pic des pulsations (Panneau (a) de la Figure 1.4). Ces profils de pulsations sont généralement stables sauf pendant les périodes de flambées. La méthode de mesure utilisée couramment qui provient de l'astronomie radio et de l'observation des pulsars s'appelle *phase-coherent timing*. Cette technique permet de prendre en compte chaque rotation du magnétar (qui est liée à la

fréquence du signal reçu) sur plusieurs années, et en gardant la phase des pulsations reçues cohérentes elle permet d'en déduire des mesures précises de la rotation et de son ralentissement. En particulier, elle a été appliquée pendant 14 ans sur les cinq magnétars les plus brillants à l'aide du satellite RXTE (voir Dib et Kaspi, 2014, pour une compilation des résultats). Cette méthode est utilisée lors des phases de flambées, notamment pour les magnétars transitoires, mais la variabilité des pulsations et la durée des flambées rendent les observations à long terme difficiles.

Comme les mesures avec le *phase-coherent timing* sont très précises, les déviations des observations par rapport à la théorie du ralentissement par le dipôle magnétique sont facilement détectables. Ces déviations omniprésentes dans l'évolution de la rotation des magnétars sont nommées comme du bruit de *timing* : il s'agit de phases d'errance aléatoire des phases à l'échelle de mois et d'années. Ce bruit est souvent modélisé de manière phénoménologique avec des dérivées d'ordre supérieur (jusqu'à l'ordre dix pour certains cas) de la période P.

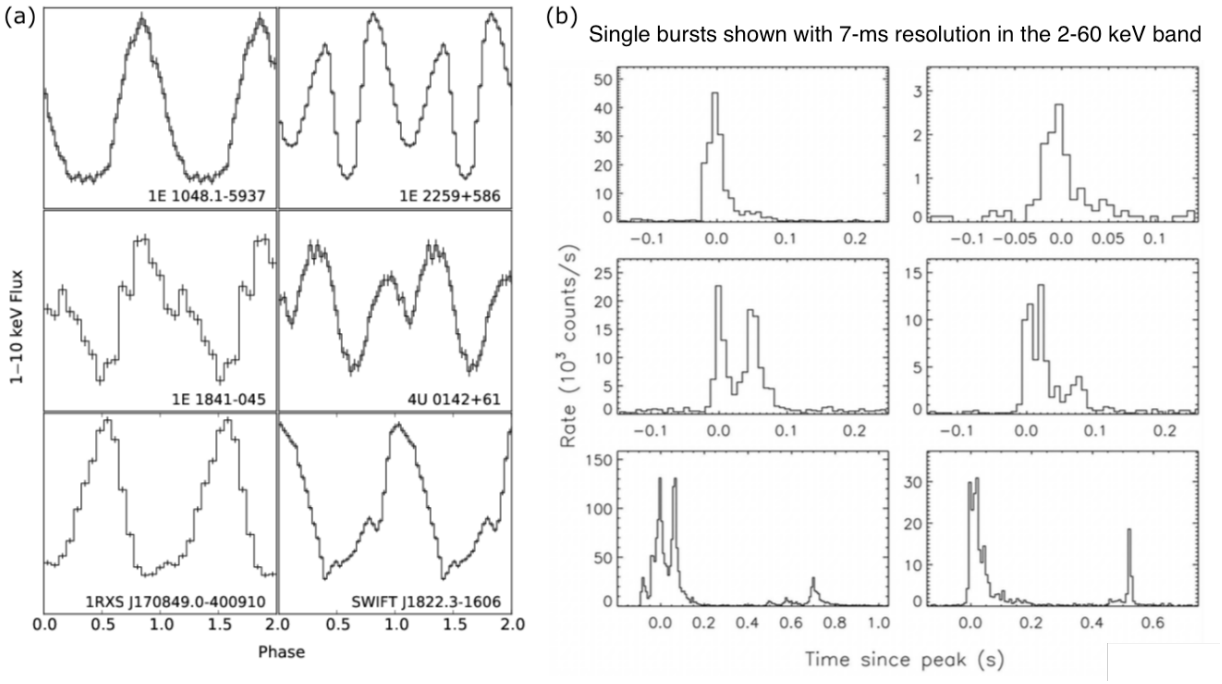


Figure 1.4. – (a) Pulsations en rayons X (b) Sursauts chaotiques en rayons Gamma (Kaspi et Beloborodov, 2017)

Glitchs

La précision des observations des magnétars a permis de découvrir que ceux-ci sont les étoiles à neutrons qui ont le plus souvent des accélérations soudaines de la rotation, dont la valeur de l'accélération peut être jusqu'à 10^4 plus grande que le ralentissement $\dot{P}$ du plus fort des magné-

tars (Kaspi et al., 2000 ; Dib et al., 2008). Ce phénomène appelé *glitch*, communs aux jeunes étoiles à neutrons, est typiquement associé à des changements à long terme du ralentissement $\dot{P}$. Contrairement aux pulsars, les magnétars récupèrent très bien des glitchs : ils retrouvent leur période initiale au bout d'une à deux semaines, et parfois une période supérieure à celle avant l'épisode du glitch. La coïncidence des glitchs avec de larges flambées (des augmentations transitoires de l'émission en rayons X) qui sont accompagnées de petits sursauts et des changements de profil de pulsations suggère qu'il s'agit d'un phénomène relié à la magnétosphère (région autour du magnétar où les phénomènes magnétiques dominent). Des anti-glitchs ont également été observés uniquement sur les magnétars. Il s'agit d'un ralentissement soudain, dont la valeur peut être 10^2 à 10^5 fois plus grande que le ralentissement usuel $\dot{P}$ des magnétars. L'origine des anti-glitchs est encore débattue, mais serait liée aux évènements transitoires des magnétars, particulièrement aux éruptions géantes.

Sursauts chaotiques (bursts)

Les courts sursauts chaotiques sont les plus communes des manifestations des magnétars. Certains magnétars ont émis des milliers de sursauts, sur de courtes périodes généralement (quelques mois/années), et d'autres n'ont montré qu'une poignée de sursauts, bien que surveillés régulièrement. Historiquement, la première catégorie correspondait aux SGRs et la deuxième aux AXPs, mais des sources très actives ont ensuite été silencieuses pendant des années et la réciproque s'est produit également. Ces sursauts apparaissent typiquement comme de simples pics (bien qu'il y ait des cas avec plusieurs pics), avec une montée du signal plus rapide que la descente (Figure 1.4). Il n'est pas clair si les sursauts arrivent de manière aléatoire avec les pulsations ou préférentiellement près du maximum de la pulsation. La Figure 1.4 présente des exemples de sursauts (panneau b) avec le profil de pulsations sur le panneau (a) (Kaspi et Beloborodov, 2017). La luminosité de ces sursauts peut aller de 10^{36} erg s^{-1} à 10^{43} erg s^{-1}, ce qui est de 10 à 10^8 fois plus importantes que leur luminosité quiescente. La durée de ces sursauts va de quelques millisecondes à quelques secondes, avec une moyenne autour de 100 millisecondes. Les sursauts sont parfois suivis de «queues», des émissions rémanentes de quelques minutes durant lesquelles les émissions de pulsations en rayons X augmentent. La queue du sursaut peut parfois contenir plus d'énergie que le sursaut lui-même.

Flambées (*outbursts*)

Les flambées sont des évènements où le flux de rayons X augmente de manière très soudaine et de manière très importante, avec un facteur allant de 10 à 10000 par rapport au flux quiescent. La luminosité des magnétars lors d'une flambée peut aller jusqu'à 10^{36} erg s^{-1}. Ces évènements sont souvent accompagnés de beaucoup d'anomalies radiatives : des changements dans les pulsations, des changements de longueur d'onde, un durcissement du spectre et de multiples sursauts courts en rayons X. Le durcissement du spectre correspond à une augmentation de la température

du corps noir d'un facteur $\sim 2-3$ et une diminution de l'exposant de la loi de puissance non-thermique d'un facteur ~ 2. Dans la majorité des cas, la rotation change également avec un glitch ou un anti-glitch. Après le début de la flambée, la luminosité décroît rapidement sur une échelle de temps de l'ordre de quelques minutes ou quelques heures puis s'en suit une longue décroissance (Figure 1.5), une émission rémanente souvent appelée *afterglow*, qui peut durer des années. La durée de cette relaxation et l'énergie contenue dans ces *afterglows* varient selon les flambées, même entre deux flambées d'une même source. Selon des estimations raisonnables, il n'y a pas de différence claire entre la fréquence de flambées observées pour les AXPs et les SGRs, bien que les flambées soient historiquement plus observées pour les SGRs.

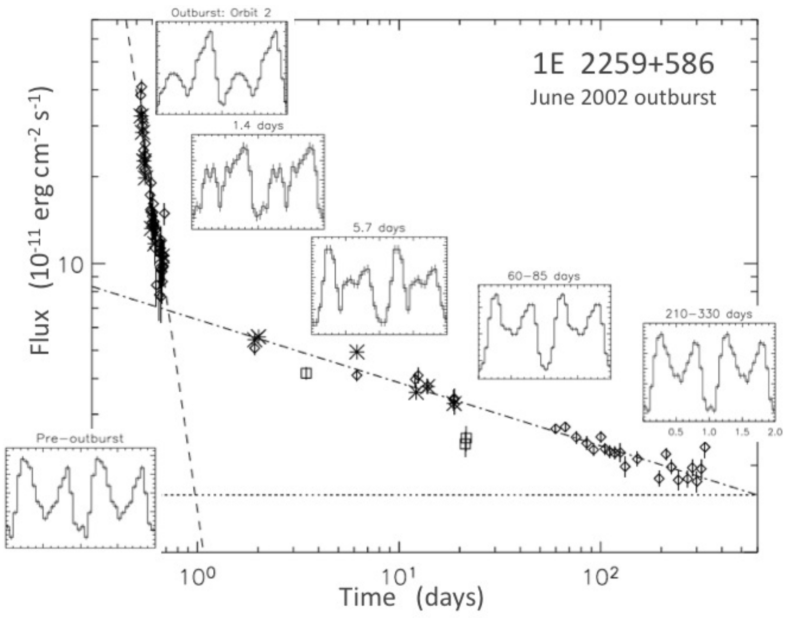


FIGURE 1.5. – Phase de décroissance d'une flambée : évolution du flux et du profil de pulsation lors d'une flambée (MEREGHETTI et al., 2015).

Le terme de magnétar transitoire a été utilisé pour décrire les sources qui ont une faible luminosité au repos ($<10^{33}$ erg s^{-1}), mais qui sont détectées lors de leurs flambées et lors de sursauts courts brillants. Il est probable que les magnétars transitoires soient la norme et que les sources très brillantes comme 4U0142+61 soient des exceptions. Les magnétars ayant un faible dipôle comme SGR 0418+5729 sont des magnétars transitoires et l'origine de leur émission de magnétar serait un fort champ magnétique interne ou multipolaire. L'évolution spectrale en rayons X lors des flambées peut fournir des indices sur la présence d'un fort champ magnétique toroïdal ou multipolaire. Un exemple de cette évolution spectrale lors de la flambée du magnétar SGR 0418+5729 est montré sur la Figure 1.6. On peut y voir une raie d'absorption, dont l'énergie varie avec la phase de la pulsation (TIENGO et al., 2013). Le champ magnétique interne peut être estimé pour ce magnétar, sous l'hypothèse que cette raie soit interprétée comme une raie

cyclotron de proton, c'est-à-dire que le proton induit une diffusion résonnante des photons, induisant un décalage en fréquence correspondant à sa fréquence cyclotron ($f_{\text{cyclotron}} = \frac{|q|B}{2\pi m}$). Une telle raie d'absorption a également été observée pour un autre magnétar à faible champ dipolaire Swift J1822.3-1606 par Rodríguez Castillo et al. (2016). Ces estimations du champ magnétique pour SGR 0418+5729 et Swift J1822.3-1606 donnent respectivement un champ magnétique $B \approx 2 \times 10^{14}$–$5 \times 10^{15}$ G et $B \approx 6 \times 10^{14}$–$2.5 \times 10^{15}$ G. Cette raie spectrale proviendrait d'une boucle magnétique proche de la surface du magnétar.

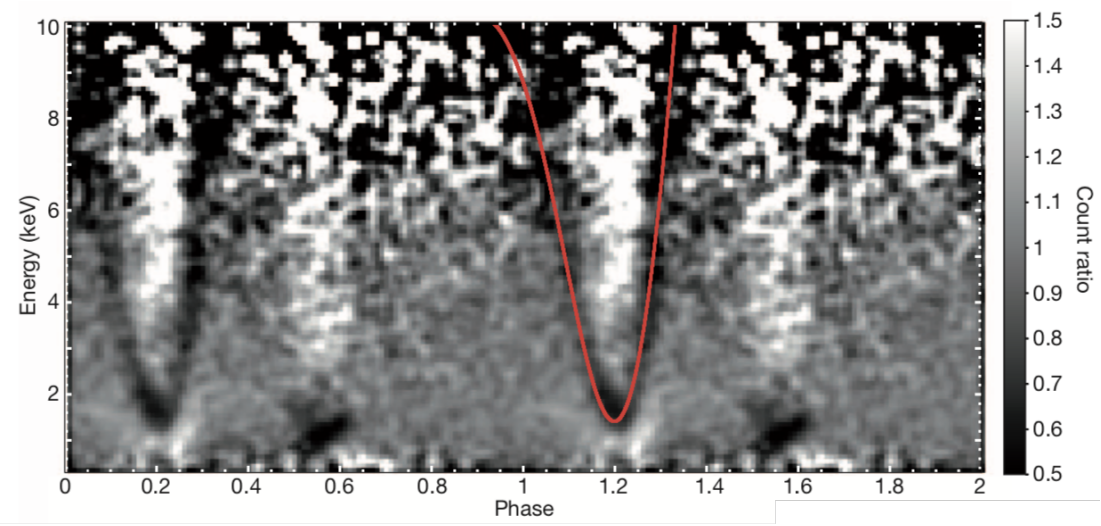


Figure 1.6. – Ligne cyclotron observée dans l'évolution spectrale d'une flambée du magnétar SGR 0418+5729 (Tiengo et al., 2013).

De plus, d'autres indices suggèrent que le champ magnétique dipolaire de surface n'est pas la composante la plus intense, mais qu'il existe un champ interne avec une géométrie différente encore plus intense. En effet, (Makishima et al., 2016, 2019) ont détecté des modulations de phase dans l'émission en rayons X de deux magnétars. Ces oscillations ont été interprétées comme une précession libre due à des déformations de l'étoile à neutrons à cause de la force magnétique d'un champ toroïdal extrêmement intense, de l'ordre de 10^{16} G.

Éruptions géantes (Giant Flares)

Trois manifestations de magnétars ont été si violentes et intenses qu'une nouvelle catégorie d'observations de magnétar a été créée : les éruptions géantes (Giant Flares). Ces trois éruptions géantes proviennent de différentes sources SGRs et ont été détectées en 1979 (SGR 0526-66 ; Evans et al., 1980), en 1998 (SGR1900+14 ; Hurley et al., 1999) et en 2004 (SGR 1806-20 ; Hurley et al., 2005 ; Mereghetti et al., 2005 ; Götz et al., 2006 ; Boggs et al., 2007). Les deux premières ont eu un pic de luminosité en rayons X de $10^{44} - 10^{45}$ erg s^{-1} et la troisième

a été particulièrement exceptionnelle avec un pic à 10^{47} erg s^{-1}, ce qui est 1000 fois plus élevé que la luminosité de toutes les étoiles de la Galaxie réunies. La courbe de lumière de cette dernière éruption est montrée sur la Figure 1.7 en exemple. La durée du pic initial est de 0.2 secondes et celui-ci est suivi par une émission rémanente (afterglow), phase de décroissance longue de plusieurs minutes avec des oscillations liées à la période de la source de $P = 7.56$ secondes. La bande de longueurs d'onde dans laquelle le plus d'énergie a été émise est la bande des rayons gamma mous, ce qui rend possible la détection d'éruptions géantes provenant d'autres galaxies. À part ces différences de spectre, les éruptions géantes ont des caractéristiques analogues aux GRBs dont le signal a une courte durée et les deux phénomènes peuvent être confondus. Trois autres sursauts gamma courts (Ofek et al., 2008 ; Hurley et al., 2010 ; Svinkin et al., 2021) ont d'ailleurs été proposés comme des éruptions géantes de magnétars, mais il est difficile de vérifier ces hypothèses du fait de la distance. Les GRBs courts (dont les propriétés seront détaillées dans la section 1.4.1) et les éruptions géantes de magnétars sont toutefois deux catégories différentes, puisque les magnétars ne peuvent expliquer tous les sursauts gamma courts provenant de galaxies plutôt vieilles (Berger, 2014).

Ces éruptions géantes seraient le produit d'une instabilité de la magnétosphère des magnétars. Les lignes de champ de la magnétosphère seraient tordues par un cisaillement à la surface du magnétar. Ce cisaillement continuerait jusqu'à ce que le champ soit trop tordu et que l'énergie contenue dans les lignes de champ soit relâchée sous la forme d'une éruption géante. Le mécanisme est analogue à celui des éruptions solaires.

De plus, des oscillations remarquables ont été détectées dans les *afterglows* des éruptions géantes et sont nommées oscillations quasi périodiques (QPO). L'analyse fréquentielle des *afterglows* a permis cette découverte à 92.5 Hz pour SGR 1806-20 (Israel et al., 2005), puis a posteriori à 84 Hz dans l'éruption de 1998 (Strohmayer et Watts, 2005). Depuis, des QPOs ont aussi été observés dans les sursauts d'une seule autre source (Huppenkothen et al., 2014). Ces QPOs seraient générés par des oscillations de la croûte des magnétars (Gabler et al., 2018 ; Bretz et al., 2021), mais le mécanisme exact est encore incertain.

1.2. Formation des étoiles à neutrons : supernovae par effondrement gravitationnel

Pour comprendre la formation des magnétars, il est nécessaire de comprendre comment une étoile à neutrons se forme lors d'une supernova. Nous détaillerons dans cette section ce processus de formation, en allant de la description de l'étoile progénitrice au mécanisme standard des supernovae gravitationnelles.

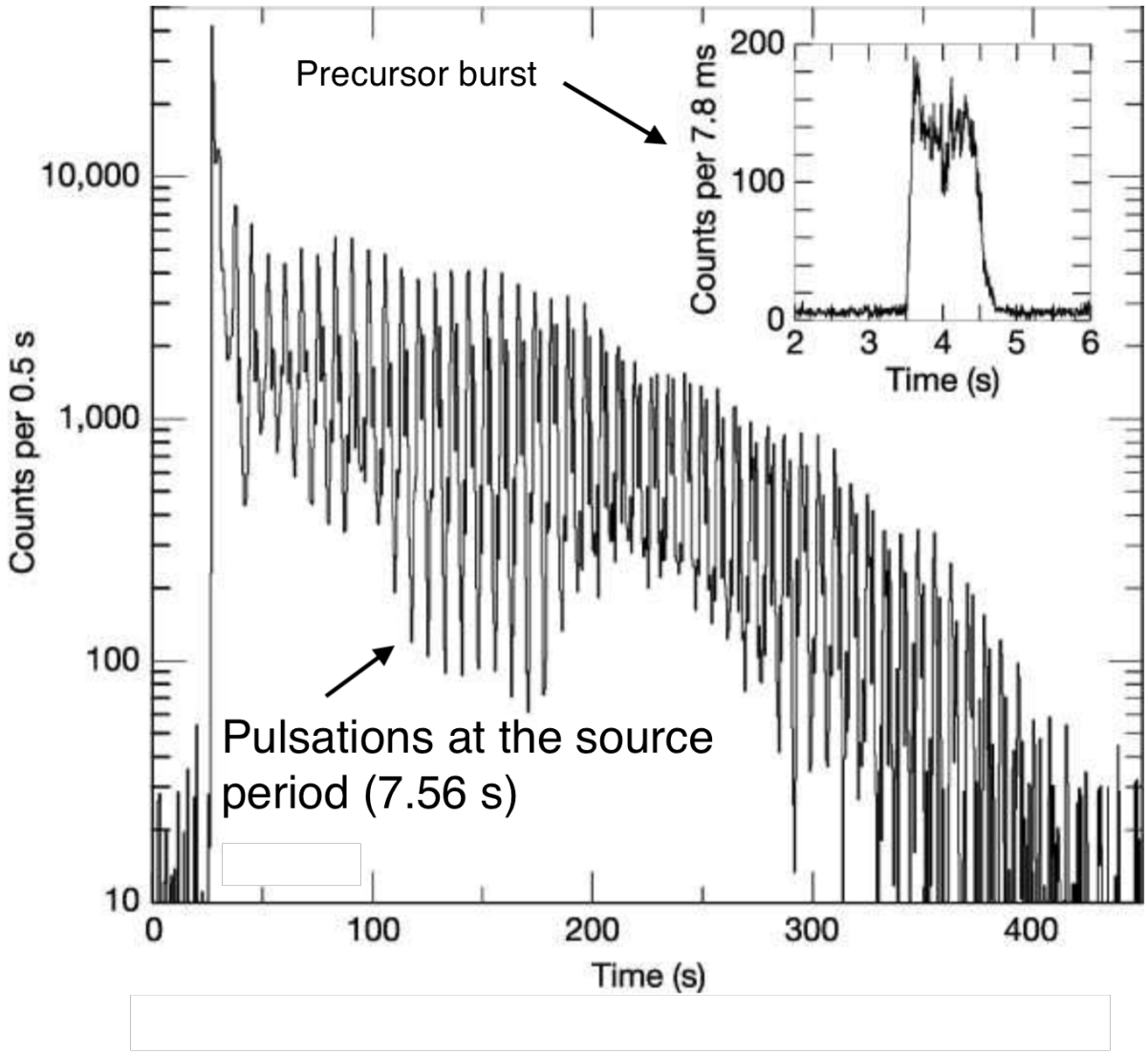


FIGURE 1.7. – L'éruption géante de 2004 provenant du magnétar SGR 1806-20. Évolution temporelle du signal entre 20–100 keV provenant du satellite RESSI, qui montre le pic initial à 26 s. Le petit panneau montre un sursaut précurseur qui a été observé juste avant. Les oscillations dans la phase de décroissance ont pour fréquence l'inverse de la période de rotation de l'étoile à neutrons (HURLEY et al., 2005).

1.2.1. Évolution d'une étoile massive

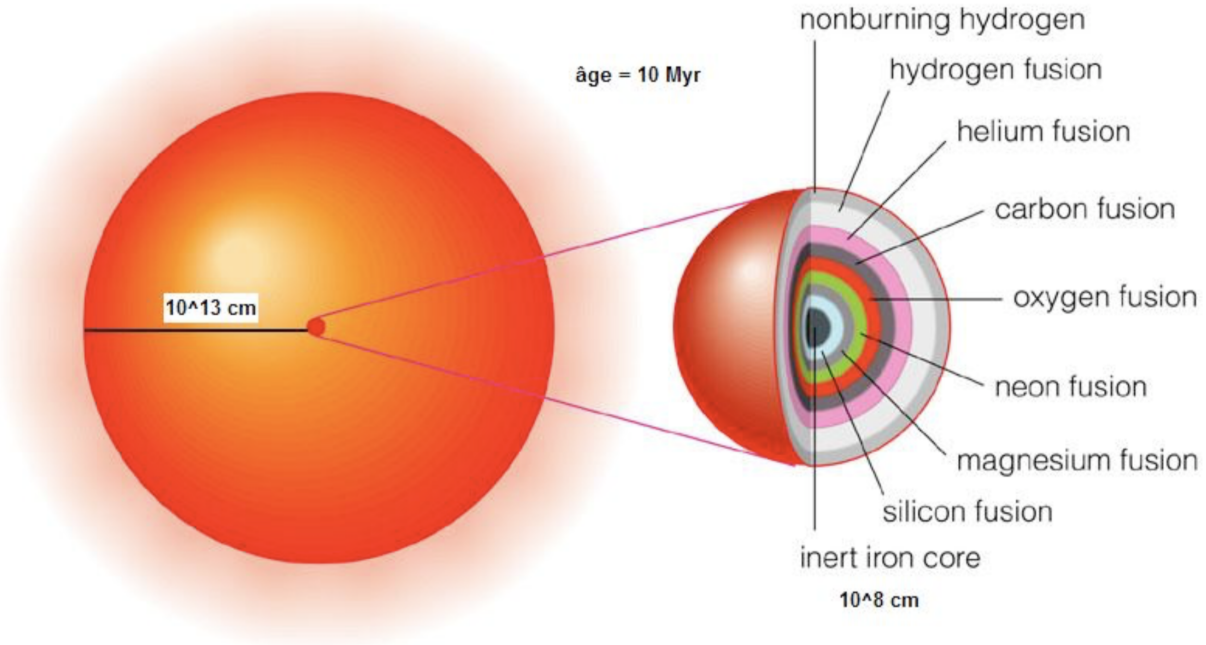
Après sa formation lors de l'effondrement d'un nuage de gaz, une étoile passe la majorité de sa vie dans une phase appelée séquence principale. Lors de cette phase, une étoile, composée majoritairement d'hydrogène, peut être simplement définie comme un réacteur thermonucléaire auto-gravitant : une réaction nucléaire de fusion de l'hydrogène en hélium va produire l'énergie

de l'étoile et la pression induite compense la force gravitationnelle due à sa propre masse. La réaction thermonucléaire qui se produit au cœur de l'étoile, où la densité et la température sont les plus élevées, est donc confinée par la gravité et l'étoile atteint un état d'équilibre qui perdurera tant que le cœur de l'étoile est majoritairement composé d'hydrogène. La durée de ce premier équilibre dépend de la température au cœur, qui augmente avec la masse de l'étoile. Les étoiles massives brûlent leur hydrogène plus rapidement, bien que leur réservoir soit plus important. Ainsi, notre Soleil restera sur la séquence principale pendant 10 milliards d'années, tandis que les étoiles de quelques dizaines de masses solaires brûleront en quelques dizaines de millions d'années.

Lorsque le cœur de l'étoile devient pauvre en hydrogène, les réactions nucléaires ralentissent et la phase de séquence principale est terminée. Sous l'effet de la gravité, le cœur se contracte jusqu'à ce que les conditions en densité et en température permettent la fusion de l'hélium en carbone et en oxygène, ce qui arrive à toute étoile de plus de $0.8M_\odot$ (le symbole $M_\odot$ désigne la masse du Soleil, qui vaut $1M_\odot = 1.9891 \times 10^{30}$ kg). Lorsque la fusion d'hélium s'arrête par manque de combustible, de nouvelles réactions nucléaires vers des éléments de plus en plus lourds vont prendre le relais, si les conditions de température et de densité le permettent. Ainsi pour une étoile de masse supérieure à environ $10M_\odot$, des réactions nucléaires successives vont former du néon, du magnésium, du silicium et finalement s'arrêter avec la production de fer, car il s'agit de l'élément le plus stable et a donc besoin d'énergie pour fusionner. Ainsi, l'étoile va avoir une structure en oignon représentée par la Figure 1.8 avec un cœur de fer dont la masse augmente avec le temps. Un cœur de fer a typiquement un rayon de l'ordre de $\sim 1000 - 2000$ km et une masse de $1.5M_\odot$. La force gravitationnelle est compensée par la pression de dégénérescence des électrons jusqu'à ce que le cœur de fer atteigne une masse limite. Il s'ensuit alors un effondrement, qui pourra conduire à l'expulsion des couches externes de l'étoile et produire une supernova. Ce processus sera détaillé dans la prochaine sous-section. Les étoiles entre $8M_\odot$ et $10M_\odot$ peuvent également produire des supernovae, dite de capture électronique, à partir d'un cœur composé d'oxygène, de néon et de magnésium, car les conditions ne sont pas atteintes pour obtenir du fer (Hillebrandt et al., 1984; Woosley et Heger, 2015). Les étoiles entre $0.8M_\odot$ et $8M_\odot$ ont un cœur de carbone et d'oxygène, qui ne produit pas de supernova, mais une nébuleuse planétaire. Il s'agit d'un évènement violent (toutefois beaucoup moins qu'une supernova) au cours duquel leurs couches externes sont expulsées et une naine blanche de carbone et d'oxygène est formée. Les naines blanches sont des astres compacts de quelques milliers de kilomètres de rayon pour une masse de l'ordre de celle du Soleil, supporté par la pression de dégénérescence des électrons.

Toutes les étoiles de masse de plus $10M_\odot$ ne forment pas le même objet compact. En effet, les étoiles extrêmement massives de plus de $100M_\odot$ explosent selon un autre mécanisme appelé supernova par instabilité de paires, que nous ne détaillerons pas dans cette thèse. Pour les autres étoiles massives, une vision simplifiée permet de déterminer l'objet compact restant après la supernova selon la masse de l'étoile progénitrice : les étoiles de moins de $30M_\odot - 40M_\odot$ forment des étoiles à neutrons (objet compact, composé principalement de neutrons, ayant une

masse typique de 1.5 $M_\odot$ pour un rayon d'une dizaine de kilomètres) et les étoiles de plus de $30M_\odot - 40M_\odot$ forment des trous noirs (objet si compact qu'il courbe l'espace-temps au point que la lumière ne peut pas s'en échapper). Cette différence s'explique par le fait que les étoiles plus massives forment un cœur de fer plus massif avec des couches externes composées d'éléments plus massifs. Ainsi lors de l'effondrement de ces étoiles très massives, l'étoile à neutrons formée atteint une masse limite au-dessus de laquelle elle s'effondre en trou noir sous l'effet de la gravité. Toutefois, des études systématiques utilisant des modèles d'étoile progénitrice, qui tiennent compte plus précisément de son évolution, de la rotation et de la compacité du cœur de fer, montrent qu'il s'agit plutôt d'une tendance des étoiles moins massives de former des étoiles à neutrons et plus massives de former des trous noirs (Sukhbold et al., 2016). En effet, dans certaines cas, des étoiles de moins de $30M_\odot$ et de plus de $30M_\odot$ peuvent également former des trous noirs et des étoiles à neutrons. Dans le cas de formation d'un trou noir, il est également possible de ne pas avoir d'explosion. Dans la suite, nous considérerons principalement les cas où l'objet compact rémanent est une étoile à neutrons.



© 2004 Pearson Education, publishing as Addison Wesley

Figure 1.8. – Schéma décrivant la structure d'une étoile massive en fin de vie. On y voit la structure en couche d'oignon avec les différents éléments issus de la nucléosynthèse stellaire.

1.2.2. Formation d'une étoile à neutrons et mécanisme standard d'explosion

La source principale de pression dans le cœur de fer d'une étoile massive est la pression de dégénérescence des électrons. Le gradient de pression permet au cœur de fer de rester en équilibre hydrostatique tant que les réactions nucléaires ne produisent pas suffisamment de fer pour que le cœur atteigne une masse limite : la masse de Chandrasekar $M_{\rm Ch}$. Cette masse est typiquement de l'ordre de $M_{\rm Ch} = 1.4 M_\odot$ et elle dépend faiblement de la température du cœur de fer ainsi que de sa fraction électronique Y_e, c'est-à-dire le nombre moyen d'électrons par baryons dans le milieu (les baryons sont l'ensemble des particules composites composé de trois quarks et ses représentants principaux sont les protons et les neutrons). Lorsque la pression n'est plus capable de compenser la gravité, l'effondrement, menant à la formation d'une étoile à neutrons et à l'éjection des couches externes, est alors inéluctable. La Figure 1.9 illustre le déroulement de l'effondrement et du mécanisme standard de l'explosion lors d'une supernova. Lors de la première phase de l'effondrement gravitationnel (panneau a), l'augmentation de la densité rend possible la capture des électrons par les protons pour former des neutrons. La réaction est la suivante

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e \tag{1.3}$$

où p symbolise un proton, e^- un électron, n un neutron, et ν_e un neutrino électronique. Ces réactions qui sont énergétiquement favorables diminuent la densité électronique et donc la pression de dégénérescence associée, ce qui accélère l'effondrement. Lorsqu'une densité de $\rho \simeq 10^{12}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ est atteinte, les neutrinos sont piégés dans la matière car leur temps caractéristique de diffusion devient plus court que le temps caractéristique d'effondrement, ce qui empêche la capture électronique (panneau b). La partie interne du cœur s'effondre de manière auto similaire et subsonique tandis que le reste du cœur de fer continue de s'effondrer à des vitesses supersoniques (Goldreich et Weber, 1980). Cet effondrement s'arrête lorsque la densité centrale atteint la densité de saturation nucléaire $\rho = 2.7 \times 10^{14}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$: l'interaction forte devient alors très répulsive (les nucléons sont en contact des uns et des autres) et la pression centrale augmente brusquement. La gravité est de suite compensée par cette nouvelle source de pression et celle-ci provoque un rebond. Celui-ci forme une onde de pression qui repousse la matière vers l'extérieur (panneau c). Le moment du rebond est utilisé comme instant de référence $t = 0$ dans la modélisation des supernovae. À cet instant, l'onde de pression va se propager jusqu'à former un choc lorsqu'elle atteint le point sonique à environ 10 km (le point sonique est le point où l'écoulement passe d'un effondrement supersonique à subsonique). Le rayon de choc continue d'augmenter (panneau d), mais la dissociation des noyaux de fer en neutrons et protons et les neutrinos électroniques qui sont produits par la réaction de capture électronique (équation 1.3) font perdre de l'énergie au choc. Cette perte d'énergie arrête la propagation du choc et ne permet pas au seul rebond de lancer l'éjection des couches externes et produire une explosion, bien que ce scénario a été l'un des premiers privilégiés pour expliquer les supernovae (Colgate et White, 1966). Lors d'une phase dite de «choc en panne», le choc se stabilise

alors à un rayon d'environ 200 km et la matière des couches d'éléments plus légers s'accrète sur l'objet central, qui forme une proto-étoile à neutrons (que nous appellerons PNS dans la suite). Cette phase correspond également à une phase d'accrétion durant laquelle les éléments plus légers tombent de manière supersonique (leur vitesse est de l'ordre d'un dixième de la vitesse de la lumière avant le choc) puis subsonique après le choc sur la PNS. Durant cette phase, le choc est appelé choc stationnaire d'accrétion. Une des problématiques centrales de l'étude des supernovae est de comprendre le processus qui permet de passer de cette phase de «choc en panne» à une phase d'éjection des couches externes et donc d'explosion.

L'idée principale pour raviver le choc est qu'une fraction de l'énergie gravitationnelle libérée lors de l'effondrement (de l'ordre de 3×10^{53} erg) soit convertie en énergie cinétique. Les interactions de la matière nucléaire avec les neutrinos jouent un rôle important pour le transport de cette énergie gravitationnelle. En effet, l'énergie cinétique de la matière acquise au cours de la chute est transmise en énergie thermique à la PNS lors du passage au choc. La PNS, étant opaque aux neutrinos, va agir comme un corps noir de neutrinos et elle va se refroidir en rayonnant son énergie thermique sous forme de neutrinos et antineutrinos des 3 saveurs par la surface de la PNS, aussi appelée neutrinosphère, pendant une dizaine de secondes. L'absorption d'une fraction de ce flux de neutrinos suffit à remettre en mouvement le choc dont l'expansion ultérieure donnerait une énergie suffisante pour produire une supernova. Ce scénario théorisé par Bethe et Wilson (1985) a été baptisé en anglais «delayed neutrino driven mechanism» («delayed» par opposition à une explosion directe sans arrêt du choc) sera simplement traduit par mécanisme d'explosion par les neutrinos. Pour que ce mécanisme d'explosion puisse réussir à produire une supernova, la matière entre la surface de la PNS et le choc doit être plus réchauffée que refroidi. Le chauffage se fait par l'absorption de l'énergie de neutrinos électroniques (notés ν_e) et de leur antiparticule ($\bar{\nu_e}$) grâce aux deux réactions suivantes :

$$\nu_e + n \rightarrow e^- + p, \tag{1.4}$$

$$\bar{\nu_e} + p \rightarrow e^+ + n, \tag{1.5}$$

Le refroidissement s'effectue par émission de neutrinos et il domine dans une région proche de la neutrinosphère (la couche de refroidissement), tandis que le flux de neutrinos est absorbé dans une région proche du choc, appelée la région de gain (panneau e). La pression sous le choc augmente avec le chauffage, ce qui provoque une expansion du fluide et peut remettre le choc en mouvement. La matière dans la région de gain doit alors avoir le temps d'être suffisamment chauffée avant d'atteindre la couche de refroidissement. Cela fournit un critère d'explosion en comparant le temps de chauffage τ_{heat} par les neutrinos avec le temps d'advection τ_{adv} (le temps de transport par la vitesse du fluide) nécessaire à un élément du fluide pour passer de la région de gain à la région de refroidissement. L'explosion est possible à condition que le rapport τ_{adv}/τ_{heat} atteigne une valeur proche de l'unité (Janka, 2001). Le flux et l'énergie des neutrinos émis à la neutrinosphère ainsi que l'efficacité de l'interaction des neutrinos modifient de manière critique ce rapport. La modélisation des supernovae nécessite donc un traitement

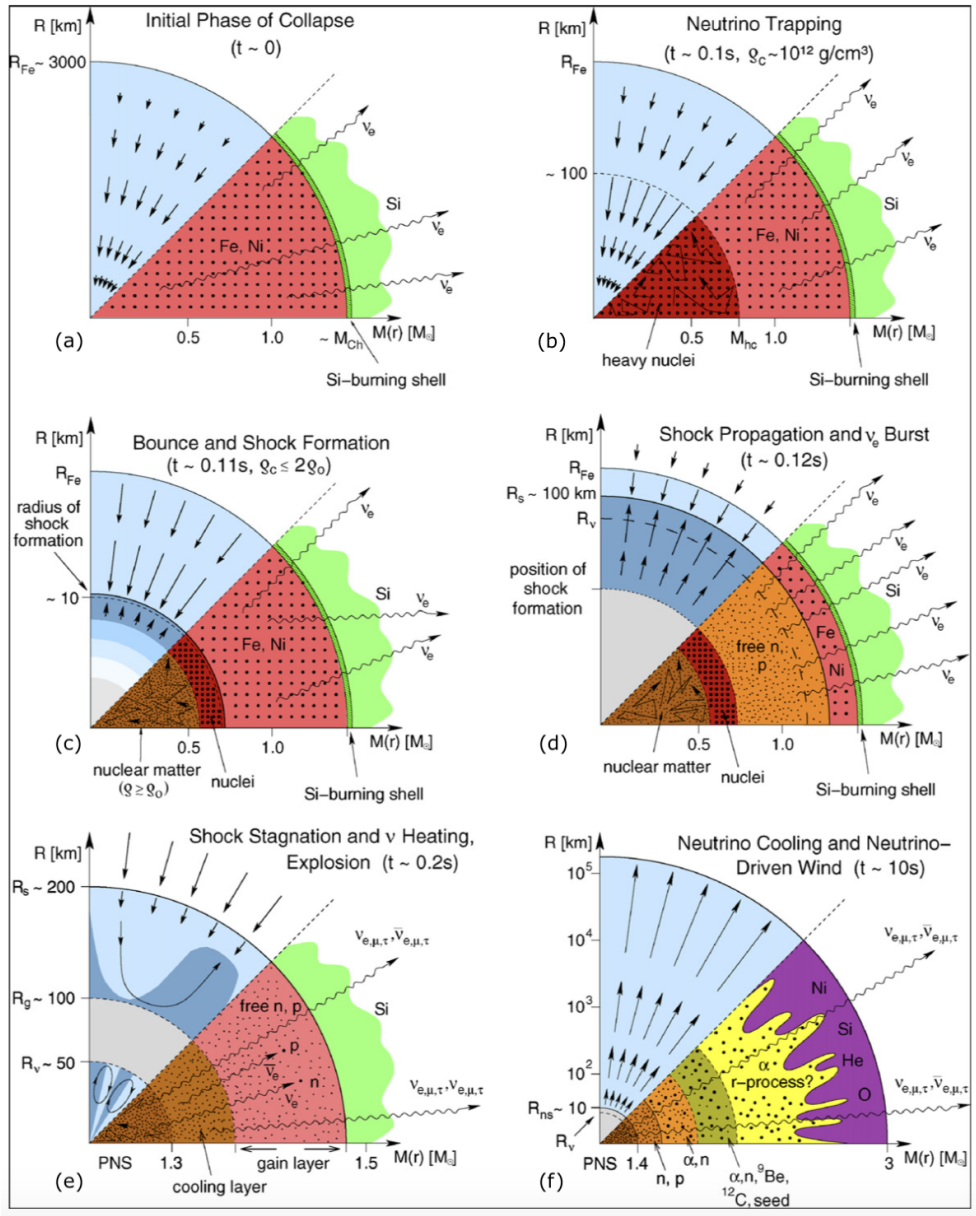


FIGURE 1.9. – Schéma décrivant le processus d'une supernova classique : le mécanisme d'explosion retardé dû aux neutrinos (JANKA, 2017). Deux parties composent chaque panneau : la moitié du bas décrit les processus affectant la composition nucléaire et la moitié du haut les conditions dynamiques de l'effondrement avec des flèches représentant la vitesse. L'axe vertical correspond au rayon avec $R_{\rm Fe}$, $R_{\rm s}$, R_{ν} sont respectivement les rayons du noyau de Fer, du choc, de la neutrinosphère et le rayon de gain. L'axe horizontal correspond à la masse incluse, où $M_{\rm hc}$ la masse s'effondrant de façon auto-similaire et $M_{\rm Ch}$ la masse de Chandrasekhar.

sophistiqué de la physique associée aux neutrinos. Le simple chauffage des neutrinos ne suffit pas à faire redémarrer le choc comme le montre l'échec des simulations 1D sans prescriptions supplémentaires à produire des explosions purement radiales. Ainsi le chauffage des neutrinos doit être aidé par des instabilités (magnéto)hydrodynamiques multidimensionnelles comme la convection dans la région de gain, ou encore certaines instabilités liées à la rotation ou au champ magnétique. L'instabilité du choc stationnaire (SASI, pour *standing accretion shock instability*) a été particulièrement étudiée et permet d'obtenir de manière plus régulière des explosions. En effet, les instabilités peuvent à la fois faire rester la matière plus longtemps dans la région de gain et faire gonfler le choc de manière asymétrique, ce qui va augmenter la région de gain dans certaines régions et ainsi la quantité de neutrinos absorbés, c'est-à-dire l'énergie du choc. Ce nouvel apport d'énergie et donc de pression augmente le rayon du choc et va lancer l'explosion. Toutefois, ce scénario d'explosion peut également échouer, auquel cas la matière de l'étoile va continuer à s'accréter sur la proto-étoile à neutrons et jusqu'à s'effondrer en trou noir. Les observations actuelles ont trouvé seulement deux candidats de supernova ratée, où la disparition soudaine d'une étoile massive dans le ciel a été observée (Neustadt et al., 2021). Nous considérerons dans la suite de cette thèse que les cas où le choc réussit à former une explosion et la proto-étoile à neutrons devient ainsi une étoile à neutrons.

Une fois que le choc réussit à redémarrer, il se propage à travers les couches externes de l'étoile à une vitesse typique de 10^5 km s^{-1}. Le rayon des étoiles massives étant entre 60 et 1500 fois celui du Soleil $R_\odot$ (700 000 km), le choc met donc de quelques heures à un jour pour se propager jusqu'à la surface de l'étoile et provoquer une expansion de l'enveloppe. C'est à ce moment que le rayonnement peut commencer à s'échapper vers l'extérieur, ce qui va marquer le début de la courbe de lumière. L'enveloppe, qui est en expansion quasi adiabatique, rayonne son énergie thermique, ce qui correspond à la phase ascendante de la courbe de lumière d'une supernova. Le pic de lumière peut être suivi ou non d'une phase de plateau selon la présence ou non d'une enveloppe d'hydrogène étendue. Cette dernière peut être éjectée pour différentes raisons lors de l'évolution du progéniteur (éjection durant les phases tardives, accrétion par un compagnon binaire). Pendant cette phase d'expansion, l'essentiel de l'énergie thermique est converti en énergie cinétique de l'éjecta et la courbe de lumière suit ensuite une décroissance exponentielle assez lente. En effet, l'énergie est fournie par la chaîne de désintégration radioactive du ^{56}Ni produit durant l'explosion. La quantité typique produite par une supernova est de l'ordre de $0.1 M_\odot$. Celui-ci se désintègre en ^{56}Co avec une demie-vie d'environ 6 jours. Ensuite le ^{56}Co se désintègre à son tour en ^{56}Fe avec une demi-vie d'environ 77 jours. Le milieu est donc chauffé par le rayonnement gamma de ces désintégrations, ce qui augmente son rayonnement électromagnétique. Dans une dernière phase, le choc rencontre le milieu interstellaire et continue de rayonner. Cela va donner lieu aux images de restes de supernova, présentées dans l'introduction générale.

L'importance des neutrinos dans le mécanisme d'explosion a été confirmée par les observations multimessagères de la supernova 1987A dans le nuage de Magellan, à seulement 50 kpc de nous. Cette supernova est exceptionnelle, car pour la première fois 24 neutrinos ont été détectés par différents détecteurs près de trois heures avant l'observation électromagnétique, ce qui est

attendu avec ce mécanisme puisque les neutrinos peuvent s'échapper avant les photons. De plus, le progéniteur de cette supernova, une supergéante bleue, a également pu être identifié grâce à des images antérieures à l'explosion. L'énergie de SN1987A est d'environ 1.5×10^{51} erg $= 1.5$ Bethe, ce qui correspond à l'énergie caractéristique d'une supernova et le pic de la luminosité bolométrique (luminosité intégrée sur toutes les longueurs d'onde) associé à l'explosion est d'environ 8×10^{41} erg s^{-1} (Catchpole et al., 1987). De manière plus générale, l'énergie d'une explosion par ce mécanisme peut atteindre jusqu'à 2×10^{51} erg (Janka, 2017; Burrows et al., 2020; Bollig et al., 2021).

Dans le cas d'une supernova dans notre Galaxie, il serait également possible d'observer un signal en onde gravitationnelle. En effet, les nombreuses simulations numériques multidimensionnelles ont montré que le signal des supernovae en ondes gravitationnelles est dominé par l'excitation des modes de gravité (mode-g avec pour force de rappel la force de flottaison) dans la PNS et par l'instabilité du choc stationnaire SASI à plus basse fréquence $100 Hz$ pour une explosion par mécanisme des neutrinos (Figure 1.10) (Murphy et al., 2009; E. Müller et al., 2012; Kuroda et al., 2017; Morozova et al., 2018; Powell et B. Müller, 2019; Mezzacappa et al., 2020; Andresen et al., 2021). Dans le cas d'une rotation faible, ces signaux peuvent être détectés à une distance de 10^4 pc et à des distances plus grandes avec la prochaine génération de détecteurs, constituée du *Einstein Telescope* (ET) en Europe et du *Comics Explorer* (CE) aux États-Unis, ainsi que l'observatoire spatial *Laser Interferometer Space Antenna* (LISA).

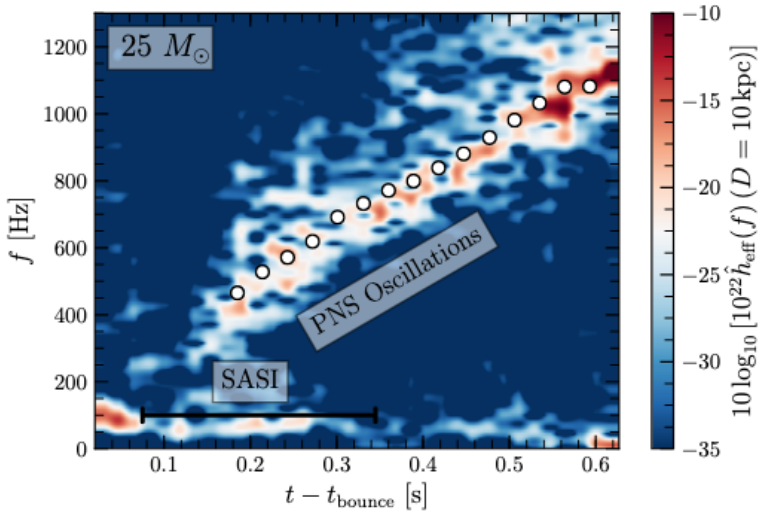


Figure 1.10. – Spectrogramme du signal en ondes gravitationnelles pour un modèle de supernova par effondrement gravitationnel d'une étoile de 25 $M_\odot$. Les points blancs représentent les fréquences des modes de gravité de la PNS obtenus à partir d'une analyse linéaire. La ligne noire correspond aux modes liés à l'instabilité SASI. Crédit : Radice et al. (2019)

1.3. Supernovae superlumineuses et hypernovae : les explosions les plus extrêmes de l'Univers

Après avoir vu dans la section précédente le processus d'une supernova classique, les observations montrent qu'un faible nombre de supernovae sont exceptionnelles. Environ 1% des supernovae ont une énergie 10 fois supérieure et environ 0.1% des supernovae ont une luminosité 100 fois supérieure. Ces supernovae sont respectivement appelées hypernovae (ou supernovae de type Ic-BL) et supernovae superlumineuses. Un nouveau mécanisme d'explosion différent de celui des neutrinos est nécessaire pour expliquer ces supernovae extraordinaires. Dans cette section, nous décrirons la découverte et les observations de ces supernovae, ainsi que les mécanismes pouvant expliquer leur particularité.

1.3.1. Supernovae superlumineuses : les explosions les plus lumineuses

Richardson et al. (2002) ont étudié les statistiques de la luminosité des supernovae et ainsi découvert une nouvelle classe de supernova qui était plus rare et beaucoup plus lumineuse que les autres. Après plusieurs évènements de ce type, la classe des supernovae superlumineuses (SLSNs) a été définie comme toute supernova qui a une luminosité près de 100 fois supérieure à une supernova classique, soit $L > 7 \times 10^{43}$ erg s^{-1} (Gal-Yam, 2012). À cette définition arbitraire, il faut rajouter la condition que cette luminosité doit être dépassée pendant au moins 48 heures, ce qui permet d'exclure des effets trop courts ou des émissions rémanentes (*afterglow*) provenant de sursauts gamma. Ce type de supernova est ensuite classé selon leur spectre au même titre que les supernovae classiques. Ainsi on distingue les SLSNs principalement en deux sous-types, les SLSNs de type I et de type II selon la présence ou non de raies d'hydrogène dans leur spectre.

Observations

La grande majorité (90%) des supernovae superlumineuses qui ont été observées sont des supernovae de type I (sans présence d'hydrogène). Ces SLSN sont donc les mieux caractérisées et nous décrirons donc les propriétés générales d'une telle supernova. Tout d'abord, en plus de la luminosité extrême de ces évènements, la courbe de lumière évolue plus lentement que les supernovae Ibc, avec un pic de luminosité qui est atteint au bout de $\simeq$ 20 jours (Figure 1.11) et un temps de décroissance également plus long (Gal-Yam, 2019). Ces courbes de lumières montrent souvent des doubles pics, avec un premier pic plus faible très tôt. Les SLSNe-I évoluent à travers plusieurs phases spectroscopiques : une première phase de photosphère chaude (la photosphère étant la couche d'une étoile d'où sont émis les photons), caractérisée par un continuum bleu avec une température de corps noir ($> 1.2 \times 10^4$ K) et des raies d'absorption du carbone et de l'oxygène dans la lumière visible et plusieurs caractéristiques UV fortes. Cette phase persiste typiquement jusqu'au pic de magnitude ou jusqu'à quelques semaines plus tard (Figure 1.11).

Elle est suivie d'une phase de photosphère froide avec des spectres similaires à ceux des SNe Ic. Cette phase évolue ensuite vers une phase nébulaire, caractérisée par des éjecta optiquement minces, et qui dure $\simeq$ 150 jours après le pic.

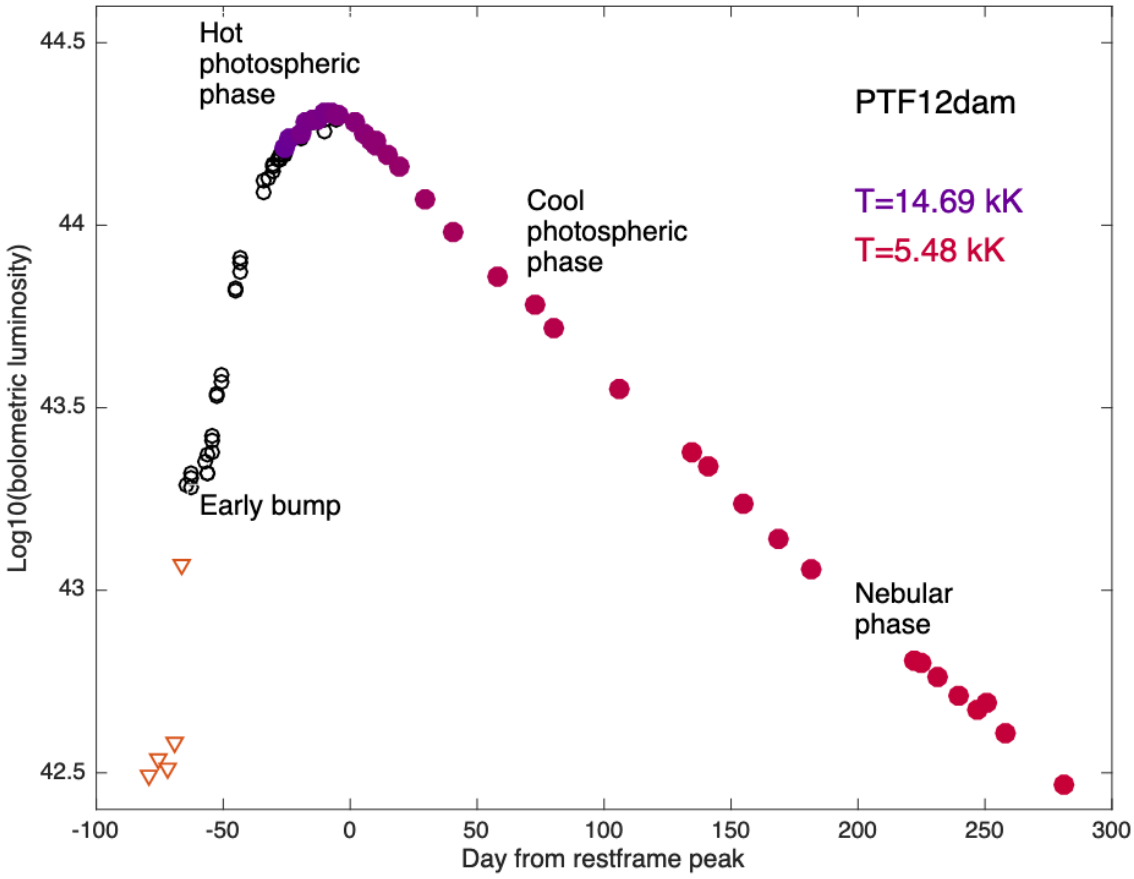


FIGURE I.11. – Phases d'évolution de la courbe de lumière de la supernova superlumineuse PTF12dam (GAL-YAM, 2019)

Bien que l'échantillon de SLSN-II soit plus faible, les SLSN-II ont également des courbes de lumières avec un temps de montée et un temps de décroissance très long, souvent plus long que pour les SLSN-I . D'un point de vue spectral, certaines ont des propriétés analogues aux supernovae de type IIm avec des raies d'émission fines et d'autres comparables aux SLSNs décrites ci-dessus.

Les galaxies hôtes de ces évènements sont typiquement de jeunes galaxies naines avec une faible masse stellaire et un haut taux de formation d'étoiles (GAL-YAM, 2019). La métallicité des galaxies semble un paramètre particulièrement important puisque peu d'évènements ont été trouvés dans une galaxie de métallicité supérieure à $Z = 0.5Z_{\odot}$ (PERLEY et al., 2016; CHEN

et al., 2017). La métallicité d'un astre indique la fraction de sa masse qui n'est pas constituée d'hydrogène ou d'hélium. Celle-ci modifie l'évolution stellaire en augmentant l'intensité des vents stellaires qui éjectent de la matière et forme donc des étoiles progénitrices moins massives. La métallicité augmente également la perte de moment cinétique due aux vents, ce qui donne des progéniteurs avec une rotation plus lente (Langer, 2012). Ces deux effets sont des conséquences de l'augmentation de l'opacité avec la teneur en métaux, ce qui intensifie les vents radiatifs des étoiles.

1.3.2. Hypernovae : les phénomènes les plus énergétiques

Dans les années 1980, le terme d'hypernova désignait un type de supernova prédit, aujourd'hui connu sous le nom de supernova par production de paires, qui concerne les étoiles particulièrement massives ($M > 140 M_{\odot}$). Ce terme faisait surtout référence à l'énergie extrême de certaines supernovae en comparaison aux supernovae classiques. C'est seulement à la fin des années 1990 qu'une nouvelle classe de supernovae extrêmes est apparue avec l'observation de SN 1998bw, exceptionnellement brillante, et du sursaut gamma long GRB 980425 qui l'a accompagné. Le terme d'hypernova est alors utilisé pour désigner les explosions associées à un GRB ou ayant une énergie cinétique de 10^{52} erg, soit 10 fois supérieure à l'énergie cinétique d'une supernova classique. Avant cette date, de nombreux sursauts gamma longs avaient été observés, mais leur origine était restée un mystère. En effet, les sursauts gamma ont été découverts en 1967 par un satellite militaire américain VELA qui cherchait des traces d'essais atomiques de l'URSS. La brièveté du signal (de l'ordre de 0.1 seconde pour les plus courts et de la dizaine de secondes pour les plus longs) les rendait particulièrement durs à tracer. De plus, les rayons gamma ont besoin d'évènements de haute énergie pour les produire, mais ils n'étaient encore corrélés à aucune supernova, éruption solaire ou autre activité dans le ciel.

La première question sur ces évènements était de savoir s'ils étaient d'origine galactique ou extragalactique. Dans le cas où ils proviennent de sources galactiques, leur distribution dans le ciel doit correspondre au plan de la Galaxie et dans le cas contraire, leur distribution doit être isotrope. Les observations du satellite *Compton Gamma Ray Observatory* et son instrument *Burst and Transient Source Explorer* (BATSE) lancé en 1991 ont montré que leur distribution était isotrope et leur origine était ainsi extragalactique, ce qui a été confirmé en 1997 par la détection de la galaxie hôte du GRB 970228 située à 6 milliards d'années-lumière (Bloom et al., 1998).

Avec la mise au point de nouveaux satellites, les sursauts gamma mous des magnétars, moins énergétiques, ont rapidement été séparés dans une classe différente. Pour le reste de la population des sursauts gamma, la distribution de la durée du signal montre que les GRBs peuvent être divisés en 2 classes : les GRBs courts (leur durée moyenne est de 0.3 seconde) et les GRBs longs (leur durée moyenne est de 30 secondes). Ces deux classes suggèrent deux origines différentes : la fusion de deux étoiles à neutrons à laquelle est associée une kilonova (voir Section 1.4.1) pour les GRBs courts et les hypernovae que nous allons décrire ici pour les GRBs longs. Le seul

évènement connu plus puissant que les plus énergétiques des GRBs longs est d'ailleurs le Big Bang. Les observations de sursauts gamma indiquent également qu'ils se décomposent en une émission prompte, le signal court en rayon gamma, et une émission rémanente plus longue, également appelée *afterglow*. Bien qu'il existe une diversité de sous-classes de GRBs, certaines caractéristiques des *afterglows* sont communes. Par exemple, une grande fraction de l'émission rémanente en rayons X présente un plateau dans l'émission (O'Brien et al., 2006; B. Zhang et al., 2006; Nousek et al., 2006; Sakamoto et al., 2007).

L'explication théorique pour ces évènements de haute énergie est qu'un écoulement de matière très collimaté, appelé jet, soit lancé à des vitesses ultra-relativistes pouvant atteindre jusqu'à 0.995 c, avec un facteur de Lorentz valant $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq 100$. Ainsi les GRBs ne sont observés que lorsque le jet pointe vers nous. Le mécanisme précis, appelé moteur central, du lancement du jet est encore débattu, comme nous le verrons dans la sous-section suivante, mais le lien avec les hypernovae peut paraître logique a posteriori, si la forte énergie cinétique est due à un jet. Le plateau des GRBs est généralement attribué à une injection prolongée d'énergie par le moteur central, bien que des explications intrinsèques au mécanisme d'émission du GRBs sont également possibles (Duffell et MacFadyen, 2015; Beniamini et al., 2020). Le terme d'hypernovae est de nos jours associé à une sous-classe des supernovae sans enveloppe d'hydrogène et d'hélium caractérisée par des raies spectrales particulièrement larges, les supernovae de type Ic-Broad-lined (BL). Cette largeur de raies d'émission est due à l'effet Doppler qui décale vers les plus grandes (petites) longueurs d'onde l'émission de la matière s'éloignant (se rapprochant) de l'observateur. Pour plus de clarté, nous ferons référence aux observations par le terme SN Ic-BL et aux modèles d'explosion par le terme hypernova dans la suite.

Observations

Depuis la première supernova associée à un GRB, SN1998bw, de nombreuses supernovae de type Ic-BL ont été observées, avec ou sans GRBs associés (Taddia et al., 2019). La courbe de lumière d'une SN Ic-BL montre typiquement une montée rapide vers un pic de luminosité en une quinzaine de jours (panneau du haut de la Figure 1.12). Dans certains cas, deux pics sont observés : le premier serait dû au refroidissement du choc d'un éjecta contenant peu de masse et le deuxième provient de la désintégration radioactive du nickel. Ces pics peuvent être aussi intenses que pour une SLSN, mais ils durent bien moins longtemps. La phase de décroissance liée à la désintégration du cobalt peut être plus variée et est généralement observée pendant une centaine de jours. La modélisation des courbes de lumière bolométriques par une explosion sphérique met en évidence que ces explosions ont une énergie de l'ordre 10^{52} erg et éjectent une grande masse de nickel, de l'ordre de quelques $\simeq 0.1 M_{\odot}$, ce qui est bien supérieur aux supernovae classiques. Pour pouvoir produire un GRB, l'énergie de l'éjecta relativiste de ces supernovae doit être supérieure à celle émise sous forme de rayons gamma dans un GRB long, qui est de l'ordre 10^{51} erg (Bloom et al., 2003). Les observations radio à temps tardifs permettent

d'estimer l'énergie de l'éjecta relativiste E_{rel}. En effet, il y a deux sources radio possibles pour les SN-GRBs : (i) l'émission rémanente du jet en ondes radio est observable pour tous les angles de vue, une fois que le jet ralentit à des vitesses non relativistes en se propageant dans le milieu interstellaire. (ii) Le choc de la supernova peut produire une émission radio qui, plus elle apparaît tôt et brillante, plus l'éjecta est rapide.

Ainsi on s'attendrait à détecter une émission radio importante si chaque supernova Ic-BL est associée à un GRB, mais cela n'a pas été encore confirmé. Pour les supernovae dont on possède des données des observations radio, l'énergie relativiste est estimée à $E_{rel} \sim 5 \times 10^{51}$ erg (Berger et al., 2004).

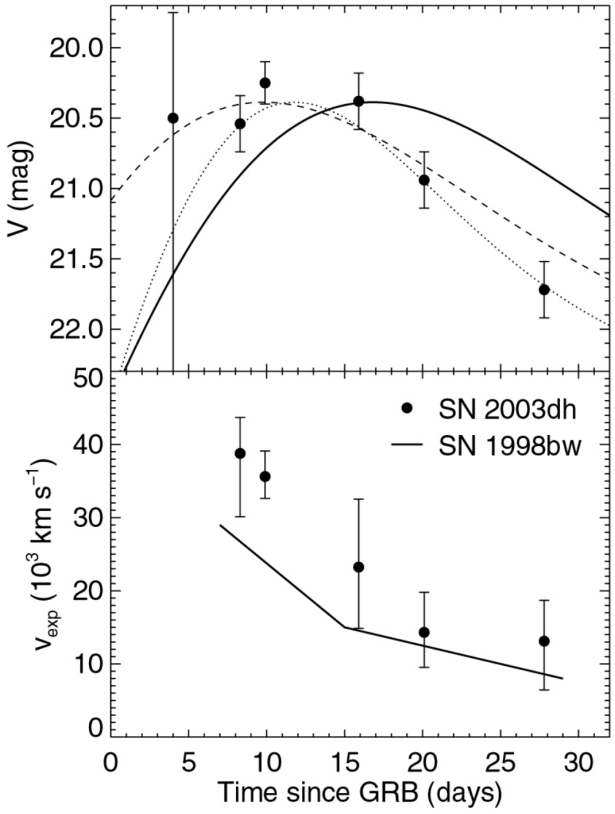


Figure 1.12. – Courbes de lumière (haut) et de vitesse d'expansion (bas) de SN2003dh et SN1998bw. La courbe tireté correspond à un décalage de 7 jours de la courbe en trait plein et la courbe pointillée à une évolution plus rapide en multipliant le temps par 0.7. Crédit : Hjorth et al. (2003).

Les supernovae de type Ic-BL sont caractérisées par leur grande énergie cinétique, comme suggérée par la largeur de leurs raies spectrales. Une bonne mesure de cette vitesse d'expansion de la SN est la raie d'émission du Fe II à la longueur d'onde $\lambda = 5169$ Å (un ångström vaut 10^{-10} m)

, qui est bien visible et large sur la Figure 1.13. Ainsi, la vitesse d'expansion d'une supernova Ic-BL est typiquement de l'ordre de 3×10^4 km s^{-1}. Des raies d'émission de l'oxygène [O] I ($\lambda = 6300$ Å et $\lambda = 6364$ Å) apparaissent également après 28 jours. Leur apparition tardive suggère que l'éjecta contenant de l'oxygène se propage plus lentement. Les raies d'émission indiquent ainsi que l'éjecta est divisé en deux composantes : une composante se propage rapidement et est riche en fer alors que l'autre se propage lentement et est riche en oxygène. Ces particularités suggèrent que l'écoulement de l'explosion soit bipolaire, en forme de jet, car le jet provoquerait un fort choc polaire qui correspondrait à la première composante alors que la composante équatoriale de l'explosion s'étendrait lentement et correspondrait donc à la deuxième composante. Il est probable que le GRB provienne d'une partie du jet très collimaté se propageant à une vitesse relativiste, bien que celui-ci soit possiblement indépendant de l'écoulement qui contient la majeure partie de l'énergie de l'explosion (Mazzali et al., 2001; Maeda et al., 2008; Tanaka et al., 2017). De plus, cette explication est confortée par les propriétés spectrales et de polarisation des supernovae qui pointent vers une explosion polaire quasiment axisymétrique (L. Wang et Wheeler, 2008; Ashall et al., 2019).

Les galaxies hôtes des supernovae de type Ic-BL et des sursauts gamma longs sont typiquement des galaxies lointaines avec une faible métallicité et un fort taux de formation stellaire. Les observations de GRBs suggèrent, de plus, que ces évènements sont localisés dans les régions formant beaucoup d'étoiles des galaxies hôtes. Comme pour les supernovae superlumineuses, cela suggère un mécanisme d'explosion qui est relié aux conséquences d'une faible métallicité, c'est-à-dire des étoiles plus massives avec une rotation rapide (Gehrels et al., 2009; Arcavi et al., 2010).

1.3.3. Moteur central : un mécanisme unique pour les supernovae superlumineuses et les hypernovae ?

L'énergie et la luminosité exceptionnelle de ces supernovae extrêmes ne peuvent être expliquées par le mécanisme standard des neutrinos et la désintégration radioactive du nickel. Une autre source contenant assez d'énergie pour produire ces explosions extrêmes a été assez rapidement proposée : l'énergie rotationnelle dans le cas d'une rotation forte (Wheeler et al., 2000; Akiyama et al., 2003; T. A. Thompson et al., 2004). En effet, si une étoile à neutrons, dont le moment d'inertie est de l'ordre $I \approx 1 - 2 \times 10^{45}$ g cm^2, a une période de rotation $P = 1$ ms, c'est-à-dire une fréquence angulaire $\Omega = 6289$ rad s^{-1}, alors son énergie rotationnelle est de

$$E_{rot} \approx \frac{1}{2} I_{ns} \Omega^2 \approx 2.4 \times 10^{52} \text{ erg} \left(\frac{M_{ns}}{1.5 M_\odot} \right) \left(\frac{R_{ns}}{10 \text{ km}} \right)^2 \left(\frac{P_{ns}}{1 \text{ ms}} \right)^{-2}, \qquad (1.6)$$

ce qui en fait un réservoir d'énergie suffisant pour produire ces supernovae extrêmes.

Cette énergie rotationnelle provient du moment cinétique de l'étoile progénitrice de ces supernovae extrêmes. Les observations de la rotation de surface des étoiles montrent que des

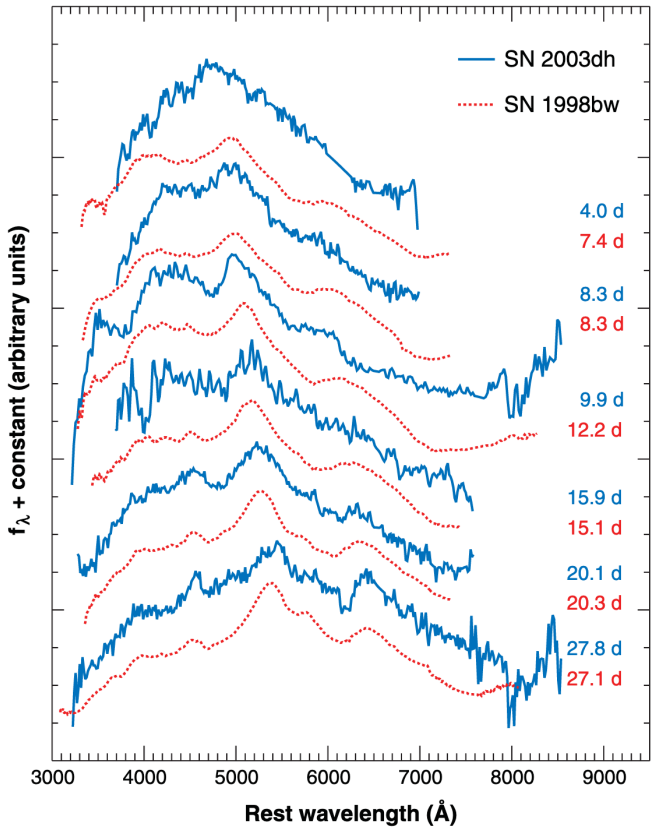


FIGURE 1.13. – Une comparaison des spectres optiques dans le référentiel au repos de SN1998bw et SN2003dh (associé au GRB 030329). Les caractéristiques et l'évolution des spectres montrent une similarité remarquable. La composante de l'émission rémanente (afterglow) a été retirée du spectre observé (HJORTH et al., 2003).

rotations rapides proches de la rotation critique, pour laquelle la force centrifuge compense la gravité, sont possibles (VINK et al., 2010). Toutefois, la rotation du cœur de fer est inconnue mais les modèles d'évolution stellaire prédisent que les éléments de l'étoile sont mélangés par la rotation rapide et que l'étoile évolue de manière chimiquement homogène (MAEDER, 1987; HEGER et al., 2000; BROTT et al., 2011). Cette évolution particulière empêche la formation d'une zone convective et d'une enveloppe, ce qui permet au cœur d'hélium de ne pas être ralenti par cette enveloppe d'hydrogène. Des modèles de progéniteurs unifiés pour les supernovae superlumineuses et les hypernovae ont également été développés à partir de cette évolution (AGUILERA-DENA et al., 2018, 2020). Les progéniteurs des hypernovae seraient alors des étoiles massives avec une faible métallicité (WOOSLEY et HEGER, 2006; YOON et al., 2006) et des binaires rapprochées d'étoiles massives (CANTIELLO et al., 2007; DETMERS et al., 2008).

Pour extraire cette énergie de rotation de manière efficace, un fort champ magnétique de grande échelle, généralement un dipôle, de l'ordre $10^{14} - 10^{16}$ G est nécessaire. Dans ce cas, la luminosité du dipôle serait alors de $L_{dip} \approx 10^{47} - 10^{51}$ erg s^{-1}. Ainsi le même moteur central peut, en principe, expliquer les deux classes de supernovae extrêmes selon les paramètres (Figure 1.14). Toutefois, la physique des mécanismes est différente pour les deux types de supernovae comme nous allons le voir dans les sous-sections suivantes. Un paramètre peut être particulièrement important pour expliquer ces différences : l'angle dipolaire θ_{dip} (angle entre l'axe du dipôle et l'axe de rotation).

Un magnétar milliseconde : moteur central des explosions magnétorotationnelles

Un fort champ dipolaire axial ($\theta_{dip} = 0°$) en présence de rotation rapide permet de lancer des jets relativistes. La rotation rapide va enrouler les lignes de champ et générer un champ magnétique toroïdal très intense. Ce champ magnétique toroïdal donne lieu à une pression magnétique extrême aux pôles qui va lancer le jet. Celui-ci prend la structure d'une «tour magnétique», qui ressemble à un ressort avec les lignes de champ enroulées (Figure 1.15). La propagation du jet à travers les couches externes de l'étoile va ainsi lancer l'explosion et produire un GRB si le jet est assez relativiste. Ce mécanisme d'explosion en présence de champ magnétique et de rotation rapide, également appelé explosion magnétorotationnelle, a été étudié par de nombreuses simulations numériques (Moiseenko et al., 2006; Shibata et al., 2006; Burrows et al., 2007; Dessart et al., 2008; Winteler et al., 2012; Mösta et al., 2014; Bugli et al., 2020; Obergaulinger et Aloy, 2021). Les études de la nucléosynthèse due aux jets dans ces supernovae montrent que ces modèles peuvent produire la grande quantité de nickel, caractéristique des hypernovae (Grimmett et al., 2021; Reichert et al., 2021). Pour expliquer l'énergie extrême des hypernovae, les paramètres typiques du magnétar sont $B \geq 10^{15}$ G et $P \approx 1$ ms. De plus, ce mécanisme pourrait également expliquer certaines supernovae particulièrement asymétriques. En effet, le fait que certaines supernovae de type Ic-BL ne soient pas associées à des émissions rémanentes de GRBs suggère qu'avec des paramètres de champ magnétique et de rotation moins extrêmes, le jet ne soit pas assez relativiste pour former un GRB, mais puisse quand même lancer une explosion magnétorotationnelle, c'est-à-dire une explosion dont l'énergie est obtenue par l'extraction de l'énergie de rotation par le champ magnétique. Il reste cependant beaucoup d'incertitudes sur ce mécanisme comme le processus précis de l'amplification du champ magnétique jusqu'à des valeurs d'intensité suffisamment forte ou la stabilité du jet (Mösta et al., 2014; Kuroda et al., 2020). La capacité à propulser un jet par des géométries différentes du dipôle magnétique axial (parallèle à l'axe de rotation), en particulier un dipôle équatorial θ_{dip}, a été récemment étudiée. La contribution des multipôles magnétiques peut ainsi être importante pour la formation d'un jet, bien que celui-ci aura une vitesse plus faible que dans le cas d'un dipôle, qui reste la géométrie la plus efficace pour lance une explosion bipolaire (Bugli et al., 2020; Bugli et al., 2021).

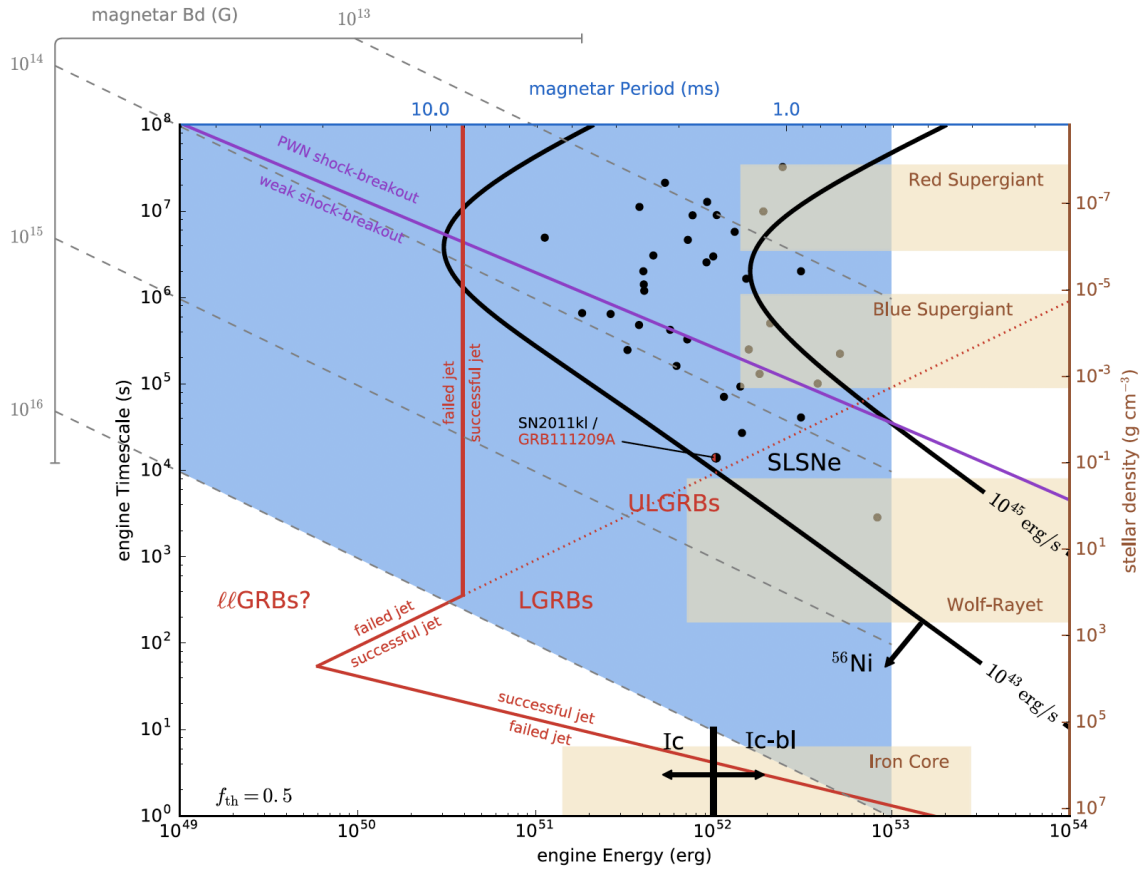


FIGURE 1.14. – Espace des phases du moteur central de magnétar millisecondes (dont il est considéré que la moitié de l'énergie va dans le jet et l'autre moitié réchauffe la supernova, augmentant sa luminosité). L'énergie E_e et le temps caractéristique du moteur central sont basés sur la période du magnétar P et son champ magnétique dipolaire B_d. La surface bleue montre l'espace des paramètres plausibles des magnétars ($E_e \leq 10^{53}$ erg, $B_d \leq 10^{16}$ G). Les contours noirs montrent la luminosité maximale de la supernova produite par le moteur central et les points noirs montrent les paramètres inférés par les observations de SLSNe. La ligne rouge sépare l'espace des paramètres d'après la capacité du jet collimaté à sortir des couches externes de l'étoile. Adapté de MARGALIT et al. (2018).

Les ondes gravitationnelles émises par ces modèles d'explosions magnétorotationnelles sont également plus importantes que dans le cas des supernovae classiques. En effet, l'amplitude des ondes gravitationnelles dépend de la fréquence de rotation dans le cas de rotation rapide et peut être $\simeq$ 100 fois plus élevée pour une explosion magnétorotationnelle (SCHEIDEGGER et al., 2010; CERDÁ-DURÁN et al., 2013; KURODA et al., 2014; TAKIWAKI et KOTAKE, 2018; PAJKOS et al., 2019; PAN et al., 2020; SHIBAGAKI et al., 2021). La distance de détection est ainsi de

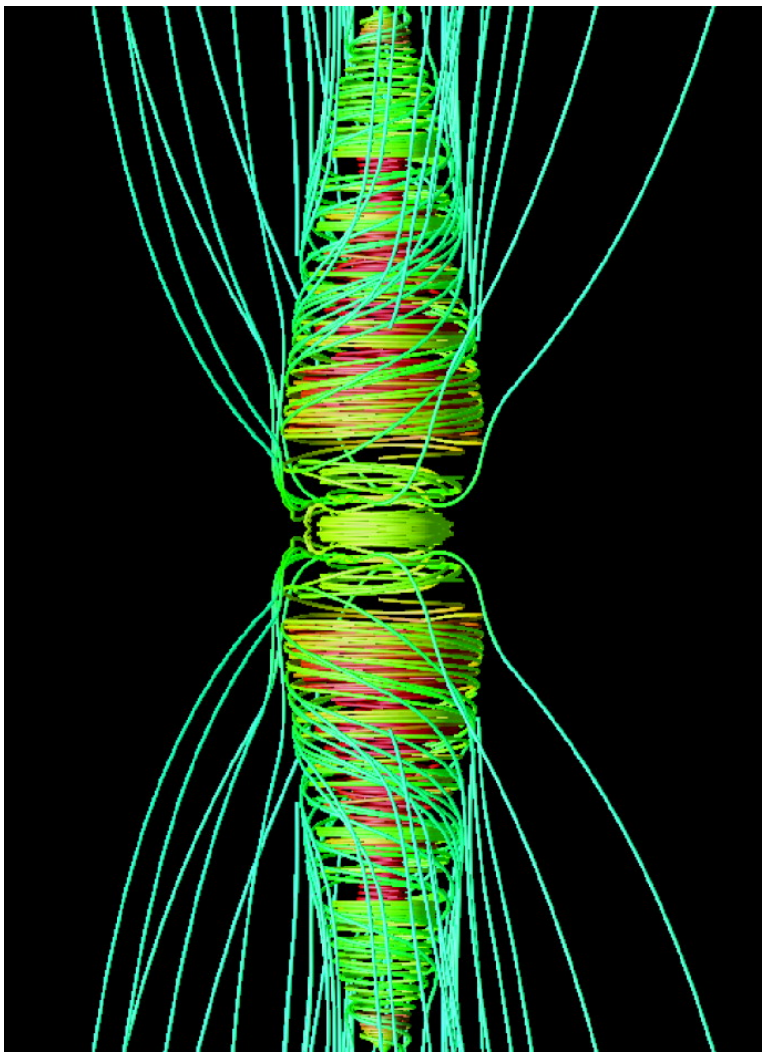


FIGURE 1.15. – Simulation numérique de l'explosion d'une supernova par le mécanisme magnétique : enroulement des lignes de champ dans les jets (à $t = 260$ ms) (BURROWS et al., 2007).

10^5 pc avec les versions avancées des interféromètres LIGO-VIRGO-KAGRA (SZCZEPANCZYK et al., 2021).

Un magnétar milliseconde : un modèle fidèle aux observations de SLSNe

Avec le développement du modèle de magnétar milliseconde pour les hypernovae et les GRBs, ce même moteur central a également été évoqué comme une source d'énergie supplémentaire. Si l'énergie supplémentaire est injectée à des temps tardifs, elle permet de transformer une supernova de type Ic classique en une SLSN (WOOSLEY, 2010 ; KASEN et BILDSTEN, 2010). Ce modèle se basant principalement sur la luminosité du dipôle et, dans certains cas, sur la

radioactivité du nickel permet de bien modéliser la courbe de lumière et ainsi contraindre les trois paramètres libres du modèle : la période du magnétar, l'intensité de son champ magnétique et la masse de l'éjecta de la supernova (Inserra et al., 2013). Ce modèle décrit alors une décroissance temporelle en $\propto t^{-2}$, qui peut se comprendre en considérant un cas très simplifiée : en supposant que le champ magnétique B et l'angle dipolaire, c'est-à-dire l'angle entre l'axe de rotation et l'axe du dipôle magnétique, sont constants sur les temps tardifs d'une supernova (une fois l'explosion lancée et la PNS formée), on a donc d'après la formule 1.1 :

$$P\dot{P} \propto B^2 \rightarrow \frac{P^2}{2} \propto Bt. \tag{1.7}$$

En insérant cette équation dans la formule de la luminosité 1.2, on obtient $L_{sd} \propto t^{-2}$. L'intensité de cette luminosité dépend d'ailleurs de l'angle dipolaire. Celle-ci est maximisée pour un dipôle perpendiculaire à l'axe de rotation ($\theta_{\text{dip}} = 90°$) avec une puissance 2 fois supérieure (Spitkovsky, 2006).

Ce modèle a été ensuite appliqué à un grand échantillon de SLSNe, principalement de type I (Nicholl et al., 2013 ; Margalit et al., 2018) mais également de type II (Dessart et Audit, 2018). Les paramètres trouvés sont typiquement $B \approx 2 \times 10^{14}$ G, $P \approx 2$ ms et $M_{ej} = 5M_{\odot}$ avec parfois des masses deux fois plus grandes dans les cas des SLSNe dont la luminosité décroît lentement. Il est également possible de bien modéliser le spectre des SLSNe par ce modèle de magnétar milliseconde : des modèles synthétiques de spectre ont été comparés aux observations et donnent de bons résultats pour différentes SLSNe (Dessart, Hillier et al., 2012 ; Jerkstrand et al., 2017). Dans l'ensemble, ce modèle explique bien les courbes de lumières standards et les spectres, mais il a du mal à expliquer les particularités de certaines courbes de lumière, comme certains pics apparaissant à des temps tardifs. En effet, ce modèle prédit une décroissance très lisse en $\propto t^{-2}$ et il peut être nécessaire de coupler ce modèle à un modèle d'interaction avec le milieu autour de l'étoile, ce qui est cohérent avec certaines observations qui montrent de telles interactions aux temps tardifs (voir Inserra et al., 2017). De plus, lorsque les paramètres conviennent bien pour les premiers jours d'observations, la luminosité des temps tardifs a tendance à être surestimée. Pour pallier à ce problème, il est souvent supposé que l'éjecta devient progressivement transparent et que l'énergie du magnétar n'est donc plus déposée entièrement aux temps tardifs. Cette hypothèse rajoute un paramètre libre dans le modèle, le temps pour que l'éjecta devienne transparent, et le rend ainsi moins contraignant.

Finalement, la luminosité du dipôle d'un magnétar peut également expliquer la courbe de lumière de certaines hypernovae (Woosley, 2010 ; L. J. Wang et al., 2019). Cela met en évidence que la limite entre les SLSNe et les hypernovae n'est pas clairement définie, mais qu'il est possible que les futures observations permettent de détecter tout un continuum de supernovae qui passe de la supernova superlumineuse à l'hypernova selon l'intensité du champ magnétique, la période du magnétar et son angle dipolaire θ_{dip} (voir Figure 1.14).

Des modèles alternatifs au magnétar milliseconde ?

L'idée qu'une rotation rapide couplée à de forts champs magnétiques pouvait expliquer le moteur central des hypernovae et des GRBs a donné lieu à un autre modèle, que nous présenterons succinctement ici : le modèle du «collapsar» (Woosley, 1993). Le modèle du *collapsar* correspond à l'effondrement d'une étoile massive en rotation qui forme un trou noir avec un moment cinétique et un disque d'accrétion soutenu par la force centrifuge. Le champ magnétique à l'intérieur de ce disque d'accrétion va permettre de former des jets dans la direction polaire et un vent puissant dans la direction équatoriale en puisant dans l'énergie rotationnelle ainsi que l'énergie de la matière accrétée par le trou noir. Ainsi l'hypernova (et le nickel) va être produit par le vent du disque ayant une vitesse de l'ordre de $0.1c$ alors que les jets polaires éjectés à des vitesses relativistes vont former des GRBs. Le moteur central pour expliquer les hypernovae est largement débattu entre le modèle du magnétar milliseconde et le modèle du *collapsar*. Certains arguments sont en faveur du modèle de magnétar. La luminosité du ralentissement par le dipôle du magnétar fournit ainsi une explication naturelle au plateau observé en rayon X dans l'*afterglow* de certains GRBs longs (Dall'Osso et al., 2011 ; Rea et al., 2015 ; Stratta et al., 2018). De plus, une rotation moindre est nécessaire pour former une étoile à neutrons avec une période d'une milliseconde que pour un disque en rotation képlerienne : le moment cinétique nécessaire est de 5×10^{15} cm^2 s^{-1} pour former une telle étoile à neutrons contre 1.5×10^{16} cm^2 s^{-1} pour former un disque autour d'un trou noir de $3M_\odot$. Il est également possible d'avoir un proto-magnétar supramassif (dont la masse est supportée par la rotation) et qui s'effondre ensuite en trou noir, lorsqu'il a transféré son énergie rotationnelle dans l'explosion par son fort champ magnétique. Il s'agirait donc d'un scénario intermédiaire entre le modèle du magnétar milliseconde et du collapsar (Dessart, O'Connor et al., 2012 ; Obergaulinger et Aloy, 2017). On notera également que les étoiles progénitrices en évolution chimique homogène conviennent aux deux modèles, puisqu'ils nécessitent des conditions similaires de rotation rapide.

Pour les SLSNe, les autres modèles proposés sont basés soit sur des interactions avec un milieu autour de l'étoile particulièrement dense, soit sur un autre modèle d'effondrement d'étoiles extrêmement massives (supérieur à 100 $M_\odot$), les supernovae par instabilité de paires, qui produiraient une masse de nickel suffisamment élevée (plusieurs masses solaires de nickel) pour expliquer la luminosité des SLSNe. Cependant, les modèles de supernovae par instabilité de paires ont du mal à modéliser le spectre de la majorité des SLSNe et ne convient qu'à une faible partie de SLSNe, celles qui atteignent leur pic très tard et qui décroissent très faiblement (Dessart, Hillier et al., 2012). En outre, un modèle basé sur l'interaction d'une supernova de type I avec le milieu environnant donne une aussi bonne correspondance avec les courbes de lumière que le modèle de magnétar milliseconde (Vreeswijk et al., 2017). En revanche, ces modèles ont plus de mal à expliquer les similarités entre les premiers pics avant le maximum de luminosité que l'on trouve dans la majorité des SLSNe, car l'endroit où le choc commence à émettre dépendrait énormément du milieu interstellaire complexe et cela ne permettrait pas d'obtenir un premier

pic régulier. Enfin, le modèle d'interaction avec le milieu interstellaire ne permet pas de prédire correctement certains spectres (Gal-Yam, 2019).

1.4. Autres phénomènes transitoires liés aux magnétars

Si le modèle de magnétar milliseconde est utilisé principalement comme moteur central pour les supernovae extrêmes, la simplicité du modèle ainsi que sa capacité à extraire de l'énergie de rotation pour produire un jet ou leur important réservoir d'énergie magnétique les rend intéressants pour expliquer d'autres phénomènes transitoires de haute énergie ou en radio. Ainsi les sursauts gamma courts, qui sont associés à des kilonovae, ou la découverte récente de nouveaux phénomènes transitoires, les sursauts radio rapides, peuvent être expliqués par la présence d'un magnétar. Nous allons donc détailler dans cette section les observations de ces phénomènes et leurs conséquences possibles sur le modèle de magnétar.

1.4.1. Sursauts gamma courts et kilonovae : les évènements produisant le plus d'éléments lourds

Nous avons vu dans la section 1.3.2 la définition des sursauts gamma courts : il s'agit des sursauts gamma, dont le signal a une durée inférieure à 2 secondes. L'origine des sursauts gamma courts est longtemps restée inconnue, mais la découverte de la binaire de pulsars Hulse-Taylor (Hulse et Taylor, 1975) a inspiré le scénario d'une coalescence de deux étoiles à neutrons. En effet, la relativité générale prévoit que deux objets astrophysiques en orbite et formant une binaire perdent de leur moment cinétique orbital en émettant des ondes gravitationnelles. Ces ondes gravitationnelles correspondent à des déformations de l'espace-temps qui se propagent à la vitesse de la lumière. La perte de moment cinétique va entraîner un rapprochement des orbites des deux objets jusqu'à ce qu'ils entrent en coalescence. Les observations du pulsar PSR B1913+16 dans la binaire de Hulse-Taylor ont pu mettre en évidence la décroissance de la période orbitale, prédite par la relativité générale, et ont permis de prédire que les deux étoiles à neutrons entreront en coalescence dans 3×10^8 ans. Cette durée avant la coalescence peut sembler longue, mais elle est relativement courte à l'échelle cosmologique (l'âge de l'Univers est d'environ 14 milliards d'années). Des études ont ainsi proposé que les coalescences d'étoiles à neutrons produisent les sursauts gamma avec une énergie de $\geq 10^{50}$ erg, typique des sursauts gamma courts (Eichler et al., 1989). De plus, l'environnement autour de ces coalescences serait peu dense à cause de l'éjection de la matière par les supernovae précédant la création de la binaire et au *kick* des étoiles à neutrons, ce qui serait favorable à la création et à la propagation d'un jet relativiste puisqu'il y a moins de matière à «pousser» pour se propager. Lattimer et al. (1977) et Eichler et al. (1989) ont également proposé que ces coalescences d'étoiles à neutrons soient un site de nucléosynthèse par capture rapide de neutrons (aussi appelé *r-process*) et de formation des éléments lourds. De la même façon que la désintégration du nickel donne lieu à la courbe de

lumière des SNe, la désintégration radioactive de ces éléments lourds produirait une contrepartie électromagnétique aux GRBs courts et aux ondes gravitationnelles. Cette contrepartie électromagnétique est appelée «kilonova», car sa luminosité est 1000 fois supérieure à celle des novae classiques [2] (Metzger et al., 2010). La coalescence d'étoiles à neutrons va également former un objet compact central qui peut évoluer de 3 manières différentes : s'effondrer en trou noir de manière prompte, former une étoile à neutrons hypermassive soutenue par la rotation, qui s'effondre en trou noir de manière retardée et, finalement, former une étoile à neutrons stable. De manière analogue aux supernovae, cette étoile à neutrons, hypermassive ou non, va émettre son énergie thermique sous forme de neutrinos. Cela permettrait d'observer le cœur du mécanisme et de mesurer la durée de vie de l'étoile à neutrons, à condition que l'évènement soit suffisamment proche, ce qui est peu probable. Ainsi les coalescences d'étoiles sont des évènements qui peuvent être détectés par des observations multimessagères (ondes électromagnétiques, ondes gravitationnelles, neutrinos) et multilongueurs d'onde (rayons gamma, rayons X, visible, ondes radio, etc.).

Observations : galaxies hôtes, ondes gravitationnelles et kilonova

Les observations des sursauts gamma courts et de leurs émissions rémanentes (*afterglows*) ont permis d'identifier les différentes galaxies hôtes et les enseignements suivants peuvent en être tirés :
— Les GRBs courts peuvent provenir à la fois de galaxies spirales et des galaxies elliptiques, ce qui suggère un délai entre la formation de la galaxie et les GRBs de l'ordre de $\leq 10^9$ ans.
— Aucune supernova n'a été observée en coïncidence avec un GRB court, jusqu'à la détection d'un GRB court particulier très récemment. Toutefois, ce cas particulier est théorisé comme une hypernova qui aurait presque «raté» son mécanisme d'explosion (B. .-B. Zhang et al., 2021).
— Les GRBs courts sont systématiquement plus loin du centre de la galaxie que les GRBs longs et ils correspondent bien aux prédictions de distribution spatiale des binaires d'objets compacts venant de modèles incluant les *kicks* d'objets compacts. Environ 50% des GRBs courts sont situés dans des régions peu brillantes de leurs galaxies, contrairement à la distribution des GRBs longs (Berger, 2014).

Ces observations suggèrent que l'origine des sursauts gamma courts correspond bien à la coalescence de deux objets compacts. Le scénario de la coalescence de deux étoiles à neutrons pour les GRBs courts a été définitivement confirmé en 2017 lors de la détection conjointe du sursaut gamma court GRB170817A par les télescopes spatiaux *Fermi* et *INTEGRAL* et des ondes gravitationnelles GW170817 par le *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* (LIGO). Sept minutes après la détection du GRB court, l'alerte de la détection des ondes gravitationnelles par LIGO-Virgo a été émise. La majorité des télescopes du monde ont débuté une course contre la montre pour retrouver dans le ciel l'émission rémanente et la kilonova en

2. les novae sont d'autres phénomènes transitoires moins énergétiques dus à l'accrétion de l'hydrogène d'une étoile par son compagnon, une naine blanche, et à la déflagration que la naine blanche pour initier l'explosion.

rayons X, dans le visible et en ondes radio à partir de la localisation par les ondes gravitationnelles. La Figure 1.16 présente la chronologie des évènements et l'étendue de la recherche et du suivi de cette kilonova dans toutes les longueurs d'onde.

La détection des ondes gravitationnelles a permis d'estimer la masse de cette binaire d'étoiles à neutrons $M_{\text{binaire}} = 2.74 M_\odot$ et la masse individuelle des deux étoiles à neutrons $M_1 \approx 1.36 - 1.60 M_\odot$ et $M_2 \approx 1.17 - 1.36 M_\odot$, avec une incertitude plus grande sur les masses individuelles (B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, Acernese, Ackley, C. Adams, T. Adams, Addesso, Adhikari, Adya, Affeldt, Afrough et al., 2017). Elle a aussi permis de contraindre l'équation d'état des étoiles à neutrons grâce à la mesure de leur déformabilité par les forces de marées pendant la phase d'orbite plongeante en spirale (B. P. Abbott et al., 2018). La kilonova a été caractérisée par un GRB court et une émission rémanente en optique et en radio détectée 11 heures après les ondes gravitationnelles avec des raies larges dans le spectre. Ce spectre transitionne d'une composante bleue (avec une vitesse $v \approx 0.3\ c$ jusqu'à 1 jour après) vers le rouge (avec une vitesse $v \approx 0.1\ c$ jusqu'à 10 jours après) avec l'expansion et le refroidissement de la source (Cowperthwaite et al., 2017). Ce changement est dû à la présence de deux composantes dans le spectre. En outre, la production d'éléments lourds, en particulier les lanthanides ont augmenté l'opacité du milieu et ainsi changé la couleur du spectre. L'étude de la courbe de lumière et du spectre de la kilonova, liés à la désintégration radioactive d'éléments lourds a permis d'estimer leur quantité produite : $\sim$ 16 000 fois la masse de la Terre avec une estimation de 10 fois la masse de la Terre d'or et de platine. En particulier, le strontium a été identifié avec certitude (Watson et al., 2019). La production d'éléments lourds par nucléosynthèse rapide fournit également une preuve directe de la composition riche en neutrons des étoiles à neutrons. La partie droite de la Figure 1.17 résume les différentes observations avec leur durée. Il est encore inconnu si le produit de la coalescence est une étoile à neutrons ou un trou noir, bien que ce dernier est l'objet compact privilégié par la plupart des modèles. Bien qu'aucun autre évènement de détection d'onde gravitationnelle et de contreparties électromagnétiques n'ait été observé depuis GW170817, d'autres GRBs courts accompagnés de leur émission rémanente, par exemple GRB 200522A (Bruni et al., 2021), sont des candidats de kilonovae qui peuvent apporter des contraintes sur le moteur central des kilonovae.

Modélisation de la coalescence de deux étoiles à neutrons

De manière analogue aux supernovae, la coalescence de deux étoiles à neutrons est particulièrement difficile à modéliser du fait de la diversité des ingrédients physiques à prendre compte : la gravité en relativité générale, les neutrinos, l'équation d'état de la matière ultra-dense et les instabilités magnétohydrodynamiques. La majorité de ces ingrédients physiques sont communs aux supernovae et seront détaillés dans les chapitres suivants. Le moteur central des sursauts gamma courts et des kilonovae est en somme assez similaire aux sursauts gamma longs et hypernovae. La conservation du moment cinétique des deux étoiles à neutrons entraîne une rotation rapide, qui en combinaison avec un fort champ magnétique permet de produire un jet relativiste et

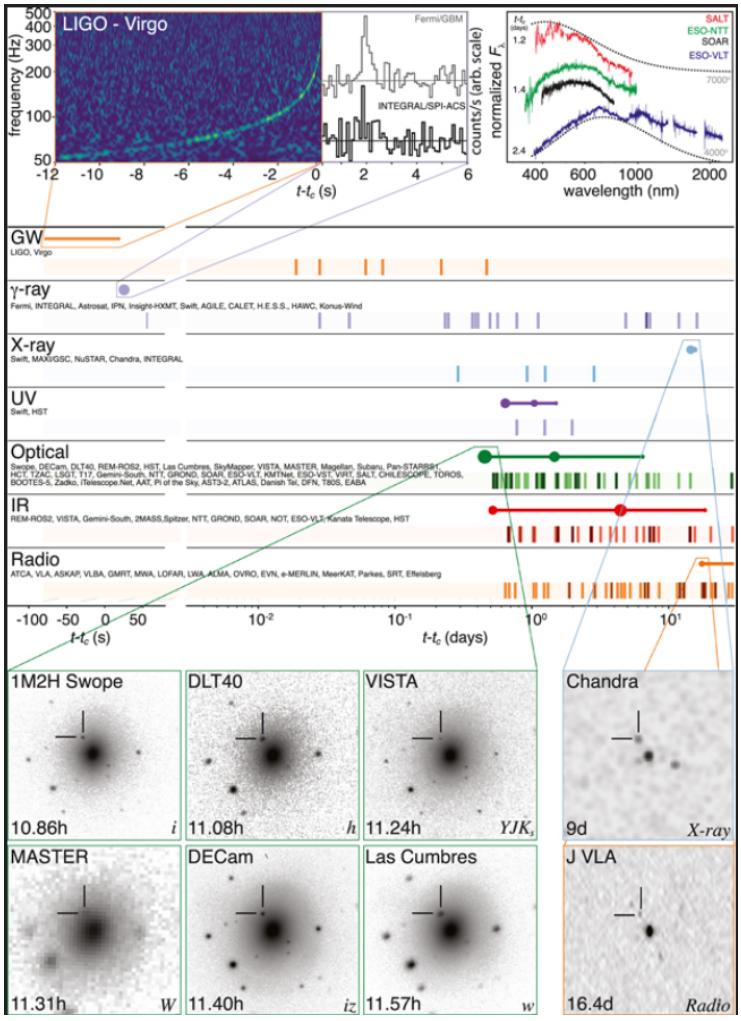


FIGURE 1.16. – Chronologie de la découverte de GW170817, GRB 170817A, SSS17a/AT 2017gfo, et des observations qui ont suivi, classées par messagers et longueur d'onde dans le temps relatif t_c de l'évènement d'ondes gravitationnelles. Deux types d'informations sont montrées pour chaque longueur d'onde/messager. Premièrement, les tirets sombres représentent les temps où l'information a été reportée par une circulaire (GCN). Les noms des instruments, infrastructures, ou équipes d'observations sont rapportés au début de chaque ligne. Deuxièmement, des observations représentatives sont présentées dans chaque longueur d'onde comme des cercles dont leur surface correspond à la luminosité. Les lignes solides indiquent si la source était détectable par au moins un télescope. Les zooms donnent une image de la première détection en ondes gravitationnelles, en rayons gamma, en rayons X et en ondes radio (Pour plus d'informations, voir B. P. ABBOTT, R. ABBOTT, T. D. ABBOTT, ACERNESE, ACKLEY, C. ADAMS, T. ADAMS, ADDESSO, ADHIKARI, ADYA et AL., 2017).

donc un sursaut gamma court. Le lancement du jet polaire entraîne avec lui un «cocon» de matière, qui va donner lieu à la composante bleue de la kilonova (Partie droite de la Figure 1.17). Le reste de la matière éjectée, se propageant plus lentement, donne lieu au reste de l'émission rémanente de la kilonova.

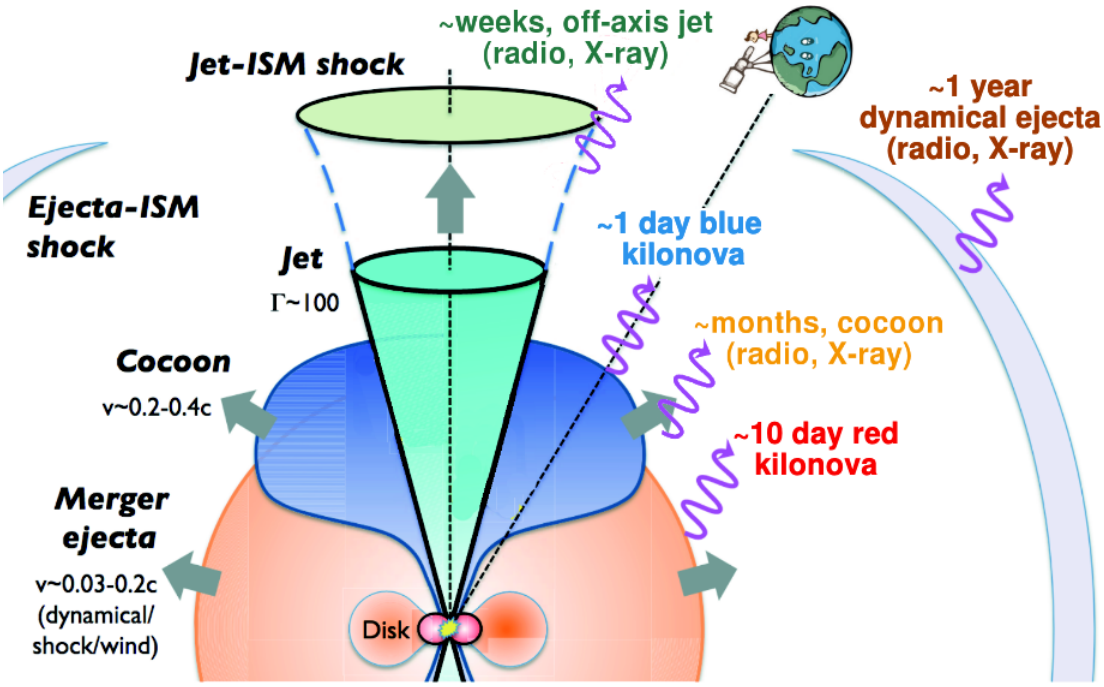


FIGURE 1.17. – Modèle actuel des différentes composantes émises lors d'une coalescence d'étoiles à neutrons. Crédit : K. Mooley, adapté de IOKA et NAKAMURA (2018)

Le moteur central du lancement du jet et du GRB court reste incertain à l'heure actuelle. Comme l'issue d'une coalescence d'étoiles à neutrons est soit une étoile à neutrons soit un trou noir, le moteur central est soit un magnétar (ou un proto-magnétar supermassif) soit un trou noir avec un disque d'accrétion. Les simulations numériques confirment la viabilité de ces deux scénarios, que ce soit pour un proto-magnétar (KIUCHI et al., 2018; CIOLFI et al., 2019; MÖSTA et al., 2020) ou un trou noir (FERNÁNDEZ et al., 2019). Toutefois, la présence de plateaux en rayon X dans les émissions rémanentes des GRBs courts, est naturellement expliquée par le modèle de magnétar (METZGER et al., 2008; BUCCIANTINI et al., 2012; ROWLINSON et al., 2013; GOMPERTZ et al., 2014). On notera également que, récemment, d'autres phénomènes transitoires en rayons X ont également interprété comme la coalescence d'étoiles à neutrons avec un magnétar comme objet compact restant pour expliquer la décroissance de leur courbe de lumière en $\propto t^{-2}$ (XUE et al., 2019). Le modèle de magnétar est donc plutôt favorisé pour le moteur central des GRBs courts. Des éléments de confirmations pour distinguer le moteur central pourraient provenir du début de la courbe de lumière des futures kilonovae (KAWAGUCHI

et al., 2020). Il s'agit d'ailleurs d'une des raisons qui fait du suivi rapide des évènements d'ondes gravitationnelles et de sursauts gamma un enjeu crucial des futures observations multimessagères.

1.4.2. Sursauts radio rapides : les rayonnements radio les plus intenses

Les sursauts radio rapides (*Fast radio bursts*, appelés FRBs dans la suite) sont des pulsations radio d'une durée de plusieurs millisecondes, mais leur densité de flux (analogue de la luminosité en ondes radio) est 10^{10} plus élevée que les pulsars et leur spectre est aussi très différent de toutes les sources radio connues. Cette densité de flux se mesure en Jansky ($1\,\mathrm{Jy} = 10^{-23}\,\mathrm{erg\,s^{-1}\,cm^{-2}\,Hz^{-1}}$). Pour estimer leur distance, les radioastronomes utilisent une mesure spécifique aux ondes radio : la mesure de dispersion DM. La mesure de dispersion $\mathrm{DM} = \int_0^d n_e ds$ donne l'intégrale de la densité électronique sur la distance de la source. Cela correspond à une dispersion des fréquences due à la densité des électrons libres n_e dans le milieu interstellaire (les fréquences les plus élevées arrivent avant les fréquences les moins élevées du signal, ce que l'on voit sur la Figure 1.18). Cette valeur permet donc soit d'étudier la densité du milieu interstellaire et intergalactique, soit de donner une estimation de la distance. Ainsi, l'origine extragalactique des FRBs a été tout de suite suggérée par la découverte du premier FRB 010724 en 2001 et de sa mesure de dispersion de $\mathrm{DM} = 375\,\mathrm{pc\,cm^{-3}}$ par le radiotélescope *Parkes Observatory* (Lorimer et al., 2007). En 2010, 16 «sursauts» ont été détectés par cet observatoire, mais il s'agissait d'une erreur cocasse. En effet, les radioastronomes du *Parkes Observatory* se sont rendu compte que ces «sursauts» étaient préférentiellement observés pendant les heures de travail, puisqu'il était possible d'obtenir un tel signal lorsque quelqu'un ouvrait la porte du micro-ondes avant que celui-ci ait fini sa durée préréglée (ces «sursauts» ont d'ailleurs été nommés Péritios du nom d'une créature mythique). Cette erreur et le fait qu'une forte mesure de dispersion peut être trouvée lorsque les ondes radio passent par certaines régions de notre Galaxie, ont d'abord entraîné des doutes sur l'origine extragalactique des FRBs. Toutefois, la détection d'évènements similaires, comme le FRB 110220 par le télescope de Parkes en 2011 puis en 2012 le FRB 121102 par le télescope d'Arecibo (Spitler et al., 2014, plus grand radiotélescope jusqu'en 2016 qui s'est effondré en 2020), ont confirmé qu'il s'agissait d'évènements astrophysiques d'origine extragalactique (Figure 1.18). La première localisation précise de la galaxie hôte d'un FRB a eu lieu en 2017, ce qui a permis de confirmer définitivement leur origine extragalactique (Tendulkar et al., 2017). Si quasiment tous les FRBs sont d'origine extragalactique, le 28 avril 2020 le FRB 200428 et une contrepartie en rayons X ont été détectés en provenance du magnétar galactique SGR J1935+2154 (Bochenek et al., 2020 ; Tavani et al., 2021). Comme nous le verrons dans la suite, les magnétars étaient déjà au cœur des discussions des sources des FRBs, mais cet évènement, bien que 30 fois moins énergétique que le plus faible des FRBs extragalactiques, prouve que les magnétars sont capables de produire des FRBs.

Propriétés générales des FRBs

Plus d'une centaine de FRBs ont maintenant été observés en particulier grâce aux méthodes de détection à champ large utilisées par le radiotélescope CHIME (The CHIME/FRB Collaboration et al., 2021), par le précurseur *Australian Squared Kilometer Array Precursor* (ASKAP) du futur radiotélescope *Squared Kilometers Array* (SKA). La structure temporelle d'un FRB est plutôt simple : il s'agit d'une pulsation gaussienne d'une durée de l'ordre de la milliseconde. Par l'argument de causalité, cette durée assez courte permet d'obtenir une taille $R = c\delta t \simeq 300\,\mathrm{km}$, ce qui suggère une origine liée aux objets compacts. Les ondes radio sont émises de manière cohérente dans des fréquences allant typiquement de 400 MHz à 8 GHz. Les propriétés de polarisation des FRBs sont très variées : ils peuvent être très polarisés ou non, avoir une polarisation circulaire ou non. Les FRBs peuvent toutefois être divisés en deux catégories : les répéteurs et les non-répéteurs (The CHIME/FRB Collaboration et al., 2021). Leur distribution est située à des hautes latitudes galactiques (donc en dehors du plan galactique), ce qui confirme une origine extragalactique. Leur distribution est également plutôt isotrope. Quand les effets de sélection et de couverture du ciel par les radiotélescopes sont pris en compte, le taux de détections de FRBs supérieur à 1 Jy est de $\sim 10^3 - 10^4\ \mathrm{sky}^{-1}\ \mathrm{day}^{-1}$ (Cordes et Chatterjee, 2019). Ce nombre est particulièrement élevé comparé aux autres phénomènes transitoires. Les galaxies hôtes de FRBs ont été localisées dans une dizaine de cas (dont la Voie lactée) et ces galaxies ont des propriétés très différentes, ce qui ne permet pas de tirer de conclusion claire, si ce n'est qu'elles ne correspondent aux galaxies hôtes d'aucun autre transient connu.

Des modèles de magnétars probables avec d'autres modèles très variés

A ce jour, environ cinquante modèles théoriques [3] ont été proposés pour expliquer ces sursauts radio rapides. Ces modèles sont très divers et vont des voiles de vaisseaux extraterrestres (Lingam et Loeb, 2017) jusqu'à des cordes cosmiques (Brandenberger et al., 2017) en passant par toutes sortes d'objets compacts, dont les trous blancs (Barrau et al., 2014). Une grande majorité de ces modèles utilise des objets compacts ou des binaires d'objets compacts (naines blanches, étoiles à neutrons, trous noirs). De manière générale, on peut diviser ces modèles en deux catégories : les évènements qui se répètent ou les évènements cataclysmiques. Parmi les modèles qui se répètent, les candidats de la source d'énergie des FRBs sont principalement le champ magnétique, la luminosité du dipôle, l'énergie gravitationnelle ou l'énergie cinétique (rotation/vents). Ainsi, on trouve des modèles d'éruptions géantes de magnétars (Horvath et al., 2021), de reconnexions magnétiques de magnétars (Wadiasingh et Timokhin, 2019), d'interaction entre des astéroïdes/comètes et des pulsars (Geng et Huang, 2015), d'accrétion de matière sur une étoile à neutrons ou d'interaction avec un vent provenant d'une autre source (modèle du «peigne cosmique») (B. Zhang, 2017), etc. Pour les modèles cataclysmiques, on

3. Ils sont répertoriés sur le site `https://frbtheorycat.org`)

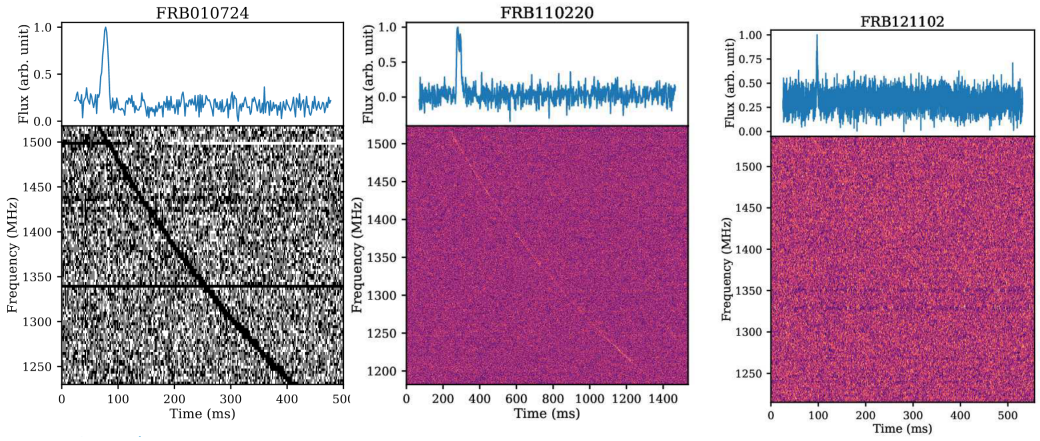


FIGURE 1.18. – Spectres dynamiques de sursauts radio rapides (FRBs). Dans chaque cas, le panneau du haut montre l'intensité de la pulsation en retirant la dispersion et en moyennant sur toutes les fréquences. La résolution temporelle et fréquentielle dépend du radiotélescope utilisé. (Gauche) FRB 010724, le premier sursaut découvert (LORIMER et al., 2007) avec DM $= 375\,\mathrm{pc\,cm^{-3}}$. (Milieu) FRB 110220, détecté par le radiotélescope Parkes (THORNTON et al., 2013) avec DM $= 944.4\,\mathrm{pc\,cm^{-3}}$. (Droite) La détection FRB 121102 par le radiotélescope d'Arecibo (SPITLER et al., 2014), le premier détecté par un radiotélescope différent du radiotélescope Parkes, avec DM $= 557.4\,\mathrm{pc\,cm^{-3}}$

.

trouve comme modèles des effondrements d'étoiles à neutrons (appelées «blizzards») (MOST et al., 2018), des coalescences d'objets compacts (naine blanche, étoile à neutrons, trou noir), particulièrement si l'un des objets est électriquement chargé (B. ZHANG, 2019). Cependant, les modèles cataclysmiques sont moins probables ou au moins plus rares, car le nombre de FRBs détectés semble suggérer qu'il n'y a pas assez d'évènements cataclysmiques (supernova, coalescence d'objets compacts) pour expliquer que la majorité des FRBs proviennent de sources uniques (RAVI, 2019).

Les modèles se basant sur un jeune magnétar étaient parmi les plus populaires et cette prédiction a été confirmée en 2020 par la détection du FRB 200428 provenant du SGR 1935+2154 galactique, ce qui a établi une confirmation directe que les magnétars pouvaient produire des FRBs. Le champ magnétique dipolaire du SGR 1935+2154 est de $B_{dip} = 2 \times 10^{14}$ G, ce qui veut dire que, d'un point de vue énergétique, un champ magnétique $B \geq 10^{15}$ G est suffisant pour expliquer les FRBs extragalactiques qui sont répétés (TAVANI et al., 2021). Ainsi les magnétars sont responsables d'une (grande) partie de FRBs et constituent sûrement des sources qui se répètent, mais il ne faut pas exclure les autres modèles trop vite (SAFARZADEH et al., 2020). En effet, un parallèle peut être dressé entre l'histoire récente des observations de FRBs et l'histoire des observations en rayons gamma et de leur classement progressif en trois types et trois origines bien distinctes (Les SGRs par des magnétars isolés, les GRBs courts par la coalescence d'étoiles

à neutrons et les GRBs longs par les hypernovae). Pour l'instant, il est difficile de distinguer d'autres classes de FRBs que les répéteurs et les non-répéteurs. En revanche, il est tout à fait possible qu'une nouvelle classification et des origines différentes émergent des futures observations et de possibles contreparties, en particulier multimessagères ou dans d'autres longueurs d'onde. Au vu du moteur central supposé des SLSNe et des hypernovae, ces observations seraient en mesure de prouver l'existence ou non d'une connexion entre tous ces phénomènes transitoires liés par un magnétar milliseconde.

1.4.3. Des évènements transitoires bleus et rapides : les plus mystérieux ?

Les *Fast Blue optical transients* (FBOTs) sont probablement une nouvelle classe de phénomènes transitoires qui ont la particularité d'être aussi lumineux qu'une SLSN, mais qui évoluent beaucoup plus rapidement (Drout et al., 2014). Ils atteignent leur pic de luminosité ($L > 10^{43}$ erg s^{-1}) en quelques jours et celle-ci décroît très rapidement, ce qui est en contradiction avec la désintégration radioactive du nickel utilisé dans les supernovae classiques. Le cas AT2018cow a été le plus étudié, dû à sa proximité (60 Mpc). Sa luminosité au pic est de 4×10^{44} erg s^{-1} avec un spectre optique dans le bleu (comme l'indique leur nom), mais sa décroissance a été plus rapide que tous les types de supernovae connus. Cela pourrait avoir une autre origine que les SN, mais les propriétés de sa galaxie hôte suggèrent plutôt l'effondrement d'une étoile massive. La particularité supplémentaire de AT2018cow est que sa contrepartie en rayons X a un spectre peu ordinaire : celui-ci s'étend jusqu'aux rayons X durs avec une bosse qui dure une vingtaine de jours. Bien que des modèles se basant sur des magnétars ont été proposés pour expliquer AT2018cow (Fang et al., 2019), d'autres modèles de supernova, par exemple, basés sur l'interaction avec le milieu circumstellaire d'une supernova par instabilité de paires (Leung et al., 2020) sont viables. Des évènements différents des supernovae peuvent être à l'origine de ces FBOTs comme la rupture d'une étoile ou d'une naine blanche par les forces de marées d'un trou noir (Perley et al., 2019; Kuin et al., 2019). La détection du FBOT AT2020xnd, comparable à AT2018cow, semble également privilégier la piste d'une nouvelle classe de phénomènes transitoires, et peut-être un nouveau moteur central et un nouveau progéniteur (Perley et al., 2021). Les progéniteurs de ces phénomènes transitoires restent incertains au vu du faible nombre d'évènements étudiés et de nouvelles observations multilongueurs d'onde ou multimessagères du ciel transitoire sont nécessaires pour caractériser cette nouvelle classe.

1.5. Conclusion : les magnétars au cœur du ciel transitoire

Comme nous l'avons vu dans ce chapitre, les magnétars sont au cœur des phénomènes transitoires. En effet, les magnétars galactiques sont caractérisés par une diversité d'observations liées à la dissipation de leur fort champ magnétique. Des évènements extragalactiques, comme les sursauts radio rapides (FRBs), peuvent être également expliqués par le réservoir d'énergie

magnétique des magnétars. De plus, la capacité de leur fort champ magnétique à extraire l'énergie rotationnelle de la proto-étoile à neutrons permet d'expliquer un grand nombre de phénomènes ayant une énergie ou une luminosité extrême. Les magnétars offrent une explication simple aux plateaux en rayons X des sursauts gamma courts lors de la coalescence d'étoiles à neutrons ainsi que ceux des sursauts gamma longs. Le modèle d'explosion magnétorotationnelle avec la présence d'un magnétar dont la période est de l'ordre de la milliseconde est un moteur central pouvant expliquer les observations des supernovae extrêmes, les supernovae superlumineuses et les hypernovae. Toutefois, ces modèles utilisent une forte intensité du champ dipolaire des magnétars conjointement à une rotation rapide sans motivation théorique que ces deux ingrédients physiques soient compatibles. On pourrait, en effet, naïvement penser qu'un fort champ magnétique entraîne un ralentissement important et ne soit donc pas compatible avec la rotation rapide. Cette idée semble d'ailleurs être confortée pour les magnétars galactiques avec leur lente période de l'ordre la seconde, bien que leur période à la naissance soit incertaine. Ce raisonnement soulève donc une question centrale de cette thèse : comment se forme le champ magnétique des magnétars et, en particulier, existe-t-il des scénarios compatibles avec de la rotation rapide ? Un tel scénario permettrait de fournir une justification théorique, ainsi que des précisions sur des configurations magnétiques réalistes, aux modèles de magnétar milliseconde qui expliquent les observations extrêmes du ciel transitoire. Dans la suite de cette thèse, nous détaillerons ainsi trois scénarios d'amplification du champ magnétique et de formation des magnétars : le scénario du champ fossile et le scénario de la dynamo convective dans les proto-étoiles à neutrons dans le chapitre 2, avant de nous concentrer à partir du chapitre 3 sur l'instabilité magnétorotationnelle dans les PNS.

Chapitre 2

Scénarios de formation des magnétars

Sommaire

2.1. Principes et équations de la MHD 54
2.1.1. Équations de la MHD décrivant la dynamique d'un fluide en rotation 54
2.1.2. Conservation du flux magnétique et loi du champ gelé 56
2.1.3. Ondes d'Alfvén 57
2.1.4. Les bases de la théorie dynamo 59
2.1.5. Amplification du champ toroïdal par cisaillement : Effet Omega 60
2.1.6. Dynamo de champ moyen 62
2.2. Scénario du champ fossile 68
2.2.1. Le champ fossile lui-même originaire du champ fossile 69
2.2.2. Dynamos dans les étoiles massives 70
2.2.3. Fusion de deux étoiles en système binaire 71
2.2.4. Limites du scénario du champ fossile 71
2.3. Scénario d'amplification dans les PNS 73
2.3.1. Stabilité de la convection : le critère de Ledoux 73
2.3.2. Une dynamo convective dans une PNS 76

Dans le précédent chapitre, nous avons montré que les magnétars étaient au cœur de nombreux phénomènes transitoires de haute énergie. Les modèles utilisés pour expliquer ces évènements partent quasi systématiquement du principe qu'un magnétar possède dès le début un champ dipolaire de l'ordre $10^{14} - 10^{16}$ G et souvent une rotation rapide avec une période de l'ordre de la milliseconde, alors que la majorité des étoiles à neutrons possède un champ dipolaire de $\sim 10^{12}$ G. Ce chapitre traite de la question théorique importante pour justifier ces modèles de magnétars : quelle est l'origine du champ magnétique des magnétars en présence ou non de rotation rapide ? Pour comprendre cette origine et l'amplification du champ magnétique, il est important de rappeler dans un premier temps les grands principes de la magnétohydrodynamique (MHD) et de l'amplification du champ magnétique par effet dynamo. En particulier, nous présenterons les équations de la MHD et de dynamo de champ moyen. Dans un second

temps, nous détaillerons différents scénarios de formation de magnétars en évoquant les mécanismes mis en jeu et leurs limitations. Le scénario le plus simple est celui du champ fossile par la conservation du flux magnétique du progéniteur. Ensuite, nous verrons un des deux scénarios qui amplifient in-situ le champ magnétique dans la proto-étoile à neutrons (PNS). Il s'agit de la dynamo convective dans la PNS, qui est analogue aux dynamos convectives dans les étoiles.

2.1. Principes et équations de la MHD

La magnétohydrodynamique est la théorie qui fournit une description macroscopique de la dynamique d'un fluide conducteur tel que celui contenu dans une PNS. Après l'effondrement du coeur de l'étoile massive, l'objet central est un gaz chaud, composé principalement de protons, de neutrons, d'électrons et de neutrinos, avec une densité proche de la densité de saturation nucléaire $\rho = 3 \times 10^{14}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Dans ces conditions, le gaz est fortement collisionnel, ce qui couple les différentes particules et permet de considérer le gaz comme un fluide. Ce fluide est conducteur avec le transport de charge électrique effectué par les électrons dégénérés, dont leur densité est liée à la fraction électronique $Y_e \sim 0.4$. Celle-ci est encore élevée dans la PNS avant le début d'une phase de déleptonisation où la diffusion des neutrinos piégés au cœur de la PNS entraîne une diminution du nombre d'électrons et de neutrinos électroniques. Les mouvements du fluide conducteur de la PNS, génèrent des courants électriques, ce qui induit un champ magnétique. Ce champ magnétique rétroagit sur le mouvement du fluide par la force de Lorentz. La présentation de la MHD sera concentrée sur les problématiques développées lors de ma thèse : la conservation du flux magnétique, l'effet dynamo qui permet d'amplifier le champ magnétique et, en particulier, les dynamos de champ moyen.

2.1.1. Équations de la MHD décrivant la dynamique d'un fluide en rotation

Les équations de la MHD peuvent être dérivées des équations de l'électromagnétisme de Maxwell, de la loi d'Ohm et des équations fluides et cette dérivation peut être trouvée dans de nombreux ouvrages (Dormy et Soward, 2007 ; Rax, 2005 ; Charbonneau, 2013). Pour que ces équations soient applicables à un gaz, il faut que ce gaz soit collisionnel et que le libre parcours moyen du grand nombre des particules, qui le composent, soit petit devant la longueur caractéristique du système. Les collisions permettent une distribution de vitesse des particules proche de celle de Maxwell-Boltzmann, ce qui permet de considérer une particule fluide.

Les autres hypothèses principales de cette dérivation sont que la vitesse du fluide ou la vitesse des ondes dans le fluide soit très inférieure à la vitesse de la lumière c (cela permet de négliger le courant de déplacement dans les équations de Maxwell), et que le fluide est quasi-neutre (c'est-à-dire $n^+ - n^- \ll n_c$ où $n_c = n^+ + n^-$ est la densité des particules chargées et $n^+,\ n^-$ sont les densités des particules chargées négativement ou positivement). La loi d'Ohm postule

également que la relation entre le champ électrique $\vec{E}'$ et le courant électrique $\vec{J}'$ est linéaire dans le référentiel du gaz, ce qui donne la loi d'Ohm généralisé par changement de référentiel entre le gaz et le référentiel inertiel de référence dans le cas d'une vitesse $\vec{u}$ non relativiste

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}), \tag{2.1}$$

où $\vec{E}$,$\vec{B}$ et $\vec{J}$ sont le champ électrique, le champ magnétique et le courant dans le référentiel galiléen de référence. Cette relation peut dépendre non-linéairement du champ magnétique dans le cas d'une étoile à neutrons froide. Dans la croûte surfacique de l'étoile à neutrons, l'effet Hall, qui correspond au découplage entre les espèces neutres du gaz et les électrons, est important alors que la diffusion ambipolaire, qui correspond au découplage entre les espèces neutres du gaz et les protons, est importante pour le cœur. Toutefois, ces effets peuvent être négligés dans les conditions d'une PNS à cause du fort taux de collisions entre les particules du gaz. D'autres effets plus incertains dans les proto-étoiles à neutrons ne seront également pas pris en compte dans cette thèse comme l'effet magnéto-thermique (Blandford et al., 1983) ou les effets de la MHD chirale (Masada et al., 2018; Dvornikov et al., 2020).

Sous ces hypothèses, nous considérons maintenant un fluide correspond à un ensemble de particules chargées dont les propriétés sont décrites par des grandeurs moyennes comme la vitesse $\vec{u}$, le champ magnétique $\vec{B}$, la densité ρ, l'entropie s ou la température T. Les équations de la MHD décrivent l'évolution temporelle de ces grandeurs pour une particule fluide conductrice. Ce système d'équations est placé dans le référentiel en rotation constante $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e_z}$ et est constitué de l'équation d'induction, provenant des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm généralisée

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{u} \times \vec{B} - \eta \vec{\nabla} \times \vec{B} \right), \tag{2.2}$$

avec η est la diffusivité magnétique (à ne pas confondre avec la conductivité $\sigma = \frac{1}{\mu_0 \eta}$ où μ_0 est la perméabilité du vide). Le système comporte l'équation de conservation de la masse ou également appelée équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \tag{2.3}$$

Il est également constitué de l'équation de Navier-Stokes décrivant le mouvement d'un fluide en rotation

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\, \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \rho \vec{g} - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot S, \tag{2.4}$$

où p est la pression incluant les forces centrifuges, μ_0 la permititivité du vide, $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur et S le tenseur des contraintes décrit par

$$\begin{aligned} S_{ij} &= 2\nu\rho\left[e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right], \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

où ν est la viscosité cinématique du fluide. Dans cette équation, la nouveauté introduite par la présence du champ magnétique par rapport à l'hydrodynamique est la force de Lorentz magnétique, qui s'écrit dans le cas non relativiste

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}. \tag{2.6}$$

Pour compléter ce système, une autre équation provenant des principes de la thermodynamique est nécessaire, l'équation de l'énergie exprimée ici en fonction de l'entropie

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}s\right) = \vec{\nabla}\cdot(\kappa\vec{\nabla}T) + C_\nu + \frac{\eta}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)^2, \tag{2.7}$$

où κ est la diffusivité thermique et C_ν correspond au chauffage visqueux donné par

$$C_\nu = 2\rho\left[e_{ij}e_{ji} - \frac{1}{3}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)^2\right]. \tag{2.8}$$

À ces équations, il faut ajouter une équation d'état de la forme $p \equiv p(\rho, T)$, qui dépend du fluide que l'on considère. Lorsque la diffusivité magnétique η et la viscosité ν sont nulles, c'est-à-dire que le milieu est non-visqueux et parfaitement conducteur ($\sigma \to +\infty$), on parle alors de MHD idéale. Le système d'équations présenté ici se veut le plus général et doit être résolu numériquement dans la majorité des cas. Des approximations sont également souvent utilisées pour simplifier la résolution. Le détail des approximations et des méthodes numériques sera détaillé dans le chapitre 4.

2.1.2. Conservation du flux magnétique et loi du champ gelé

L'équation d'induction (Eq. 2.2) s'écrit dans le cadre de la MHD idéale

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{B}). \tag{2.9}$$

De cette équation découle la conservation du flux magnétique à travers une surface fixe fermée Σ : on considère une surface Σ de contour $\mathrm{d}\vec{l}$ qui se déplace avec le fluide à la vitesse u. La

variation temporelle du flux magnétique $\Phi = \int\int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{dS}$ à travers cette surface s'écrit (Rax, 2005)

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int\int_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} + \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{u} \times \vec{dl}). \tag{2.10}$$

où $\vec{dS}$ et $\vec{dl}$ sont les éléments infinitésimaux orientés relatifs à la surface S et au contour C. En utilisant l'équation 2.9 et l'identité vectorielle, liée au produit mixte, $\vec{B} \cdot \vec{u} \times \vec{dl} = -\vec{u} \times \vec{B} \cdot \vec{dl}$, on obtient

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int\int_\Sigma \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) - \oint_C \vec{u} \times \vec{B} \cdot \vec{dl}. \tag{2.11}$$

On peut alors appliquer le théorème de Stokes [1] et obtenir

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int\int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0. \tag{2.12}$$

Ce résultat est appelé premier théorème d'Alfvén et on peut en déduire la loi du champ gelé, dont le nom provient du fait que les lignes de champ sont gelées dans le fluide. En effet, la conservation du flux magnétique indique qu'une surface traversant une unique ligne de champ ne peut se déplacer que le long de cette ligne de champ. Réciproquement, les lignes de champ ne peuvent se déplacer que le long de lignes de courant. Si le fluide se déplace, alors les lignes de champ se déplacent avec lui et le champ magnétique peut être ainsi transporté et comprimé.

On peut donc déduire de ce théorème une égalité de flux magnétique lors de l'effondrement d'une étoile massive. En effet, lorsque le champ magnétique est advecté entre deux sphères de rayon R_1,R_2 et de champ magnétique B_1, B_2, on a l'égalité :

$$4\pi R_1^2 B_1 = 4\pi R_2^2 B_2 \text{ soit } B_1 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 B_2. \tag{2.13}$$

Cette relation nous permettra dans la suite d'estimer le champ magnétique d'origine fossile d'une étoile à neutrons, c'est-à-dire le champ magnétique hérité du flux magnétique de l'étoile massive avant son effondrement. Dans le cas de MHD non-idéale, ce théorème n'est plus valide, mais l'approximation reste bonne si la diffusivité magnétique est faible, ce qui est valable le cas pour la majorité des plasmas astrophysiques sauf dans les cas de diffusion par la turbulence.

2.1.3. Ondes d'Alfvén

L'ajout de la force de Lorentz à l'équation de Navier-Stokes peut aboutir à une dynamique très complexe du fluide. Un aspect intéressant est celui de la propagation des ondes dans un fluide magnétisé. Dans un fluide sans champ magnétique, les ondes pouvant se propager sont

1. $\int\int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{dS} = \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl}$ avec $\vec{A}$ un vecteur quelconque.

les ondes sonores (avec la pression comme force de rappel), les ondes de gravité (avec la poussée d'Archimède comme force de rappel) et les ondes inertielles (avec la force de Coriolis comme force de rappel). La force de Lorentz rajoute deux contributions pouvant agir comme une force de rappel : la tension magnétique et la pression magnétique. En effet, celle-ci peut se mettre sous la forme suivante

$$\vec{F}_{Lorentz} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left[(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}(B \cdot B)\right]. \tag{2.14}$$

Le premier terme correspond à la tension magnétique et le deuxième terme à la pression magnétique (qui est d'ailleurs la composante de la force de Lorentz permettant de lancer les jets dans les explosions magnétorotationnelles vues dans le chapitre 1). Les ondes se propageant avec la force de tension comme force de rappel sont appelées ondes d'Alfvén. Ces dernières sont des ondes transverses non dispersives qui se propagent telle une onde sur une corde de guitare (Figure 2.1). La vitesse de propagation des ondes d'Alfvén est donnée par

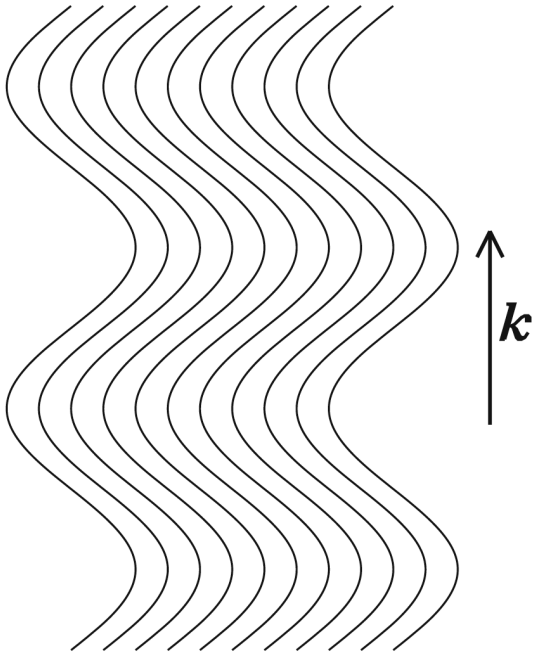


FIGURE 2.1. – Propagations des ondes d'Alfvén. Le vecteur d'onde $\vec{k}$ et la direction de propagation sont indiqués par une flèche.

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}, \tag{2.15}$$

où B_0 correspond à l'amplitude du champ magnétique (uniforme) le long de la propagation de l'onde. Ces ondes MHD ont été mises en évidence théoriquement pour la première fois par

Alfvén (1942), d'où leur nom. Les fluctuations de la pression magnétique peuvent se coupler aux ondes sonores et se propager comme une onde longitudinale. Il existe deux modes différents : les ondes magnétosoniques rapides ou lentes, selon si les fluctuations magnétiques sont en phase ou en anti-phase avec les fluctuations de la pression du gaz. Lorsque la vitesse des ondes sonores du fluide est très élevée comparée à la vitesse u ou à la vitesse d'Alfvén, les approximations permettant de filtrer les ondes sonores que nous appliquerons dans cette thèse sont justifiées (voir Chapitre 4). Dans cette limite, les ondes magnétosoniques lentes se comportent de fait comme les ondes d'Alfvén, qui peuvent toujours se propager.

2.1.4. Les bases de la théorie dynamo

Le terme dynamo, abréviation de "machine dynamo-électrique", provient des machines qui convertissent l'énergie mécanique en énergie électrique en utilisant l'induction électromagnétique. La théorie dynamo est la théorie qui explique comment les mouvements d'un fluide conducteur peuvent générer et maintenir le champ magnétique d'un astre astrophysique de manière analogue à l'effet dynamo en électrotechnique. Ainsi, on pense qu'une dynamo est à l'origine du champ magnétique de la Terre (géodynamo ou dynamo terrestre), de nombreuses planètes (dynamo planétaire), du Soleil et des étoiles (dynamos stellaires), etc. Les dynamos utilisent l'énergie cinétique turbulente d'un écoulement (souvent forcé par la convection ou la rotation) pour amplifier une graine de champ magnétique et l'auto-entretenir ensuite. Historiquement, cette idée a été proposée pour le champ magnétique du soleil en 1919 par Joseph Larmor et a été controversée pendant des dizaines d'années. En effet, bien qu'une dynamo auto-entretenue basée sur des courants induits dans un disque conducteur en rotation dans le champ magnétique d'un aimant, avait été démontrée théoriquement par Faraday puis expérimentalement par Siemens en 1866, des théorèmes anti-dynamo ont montré la difficulté d'étudier un tel mécanisme. Le théorème de Cowling en 1933 prouve qu'il n'est pas possible d'obtenir un effet dynamo (amplification et entretien du champ magnétique) pour un écoulement et un champ magnétique (nul à l'infini) purement axisymétrique (Cowling, 1933), alors que les observations du Soleil montrent plutôt qu'aux grandes échelles, le champ magnétique et l'écoulement sont axisymétriques. Cette controverse initiale à propos des dynamos auto-entretenues par les mouvements du fluide était plutôt liée à la difficulté du problème dynamo : celui-ci est intrinsèquement tridimensionnelle, mais également non linéaire dû à la rétroaction de la force de Lorentz sur l'écoulement. Pour pallier cette difficulté, certains écoulements sont étudiés de manière cinématique, c'est-à-dire que le champ de vitesse n'est plus une variable, mais une donnée constante. La force de Lorentz est donc négligée. Ces approximations permettent d'étudier la première phase d'amplification du champ magnétique, mais seules les équations complètes permettent d'étudier la phase de saturation et d'entretien du champ magnétique.

Du point de vue expérimental, des expériences ont montré que des dynamos auto-entretenues étaient possibles en laboratoire parmi lesquelles l'expérience de Karlsruhe (U. Müller et al., 2004), l'expérience de VKS (Monchaux et al., 2007) ainsi que d'autres encore en cours d'étude

comme, par exemple, les expériences DRESDYN (Stefani et al., 2019) et *Madison plasma experiment* (Spence et al., 2006). Avec le développement des algorithmes résolvant les équations de la MHD depuis les années 1980 et l'augmentation rapide de la puissance de calcul disponible, le principal outil d'étude des dynamos est la simulation numérique. Ces simulations permettent aujourd'hui de prendre en compte la majorité des ingrédients physiques et d'explorer les paramètres importants. Cependant, la complexité des simulations numériques rend leur analyse et leur interprétation souvent difficiles. Une autre approche théorique permet d'étudier le champ magnétique aux grandes échelles sans moyens numériques et a été utilisée, en particulier, pour modéliser les cycles solaires : la théorie de champs moyens. Cette approche, qui sera détaillée dans la section 2.1.6, consiste à décomposer le champ magnétique en une composante moyenne et une composante de fluctuations et résoudre les équations de la contribution moyenne à l'aide d'hypothèses sur les fluctuations. Pour étudier le cycle solaire, des taches noires ont été observées à la surface du Soleil et les mesures du champ magnétique par effet Zeeman dans ces taches solaires ont montré qu'elles étaient reliées au champ magnétique de surface (Hale, 1908). La mesure de la latitude des taches solaires au cours du temps, sous la forme d'un diagramme dit "papillon" à cause de l'allure des cycles en forme d'ailes de papillon, a montré que le champ magnétique évoluait selon un cycle 11 ans (Figure 2.2). Par leur simplicité pour expliquer le

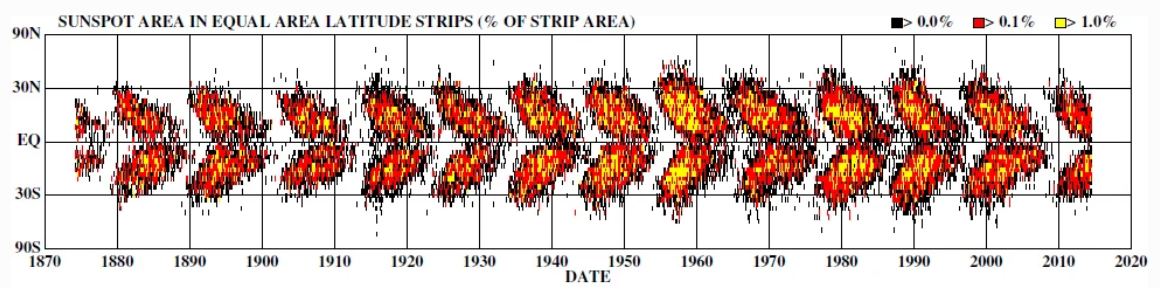


Figure 2.2. – Diagramme papillon montrant la position en latitude des taches solaires. Ce diagramme met en évidence un cycle de 11 ans où les taches solaires apparaissent à de moyennes latitudes, se rapprochent de l'équateur puis disparaissent (Hathaway, 2015)

cycle stellaire, les modèles de dynamo de champ moyen sont très populaires (également dans les disques d'accrétion) et sont également utiles pour améliorer l'interprétation des simulations numériques.

2.1.5. Amplification du champ toroïdal par cisaillement : Effet Omega

Pour obtenir un cycle dynamo, il faut que l'écoulement soit capable de générer ou d'amplifier le champ magnétique toroïdal en champ magnétique poloïdal et inversement. Un des exemples de processus permettant de (re)générer du champ magnétique toroïdal à partir du champ poloïdal est l'effet Ω. Cet effet se base sur la rotation différentielle d'un fluide conducteur, qui générer un

champ magnétique en le cisaillant. Pour comprendre cet effet dans un cas simplifié, nous nous placerons dans les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) avec pour vecteurs unitaires $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\phi})$ où r est la coordonnée radiale en coordonnées sphériques, θ la colatitude et ϕ la longitude). Nous supposerons également que le système est axisymétrique (aucune grandeur ne dépend de ϕ). Le champ magnétique peut être décomposé en une composante poloïdale $\vec{B_P} = B_r\vec{e_r} + B_\theta\vec{e_\theta}$ et une composante toroïdale $\vec{B_\phi} = B_\phi\vec{e_\phi}$ telle que :

$$\vec{B} = \vec{B}_P + B_\phi\vec{e_\phi}. \tag{2.16}$$

Pour mettre en évidence l'effet de la rotation différentielle, nous considérerons que le champ de vitesse est indépendant du temps et de la forme $\vec{u} = r\sin\theta\,\Omega(r,\theta)\,\vec{e_\phi}$. En négligeant le terme de diffusion magnétique, le système d'équations de la MHD se réduit à la composante toroïdale de l'équation d'induction (2.2), ce qui donne

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = r\sin\theta\vec{B}_P\cdot\vec{\nabla}\Omega. \tag{2.17}$$

Cette équation montre donc que la composante azimutale du champ croît linéairement avec le temps (dans le cas où Ω est indépendant du temps) et cela est dû au cisaillement par la rotation différentielle (Figure 2.3). Pour une rotation différentielle cylindrique (qui ne dépend que du rayon cylindrique que nous appellerons s dans la suite), on remarque également que la production de B_ϕ dépend uniquement du champ radial cylindrique B_s.

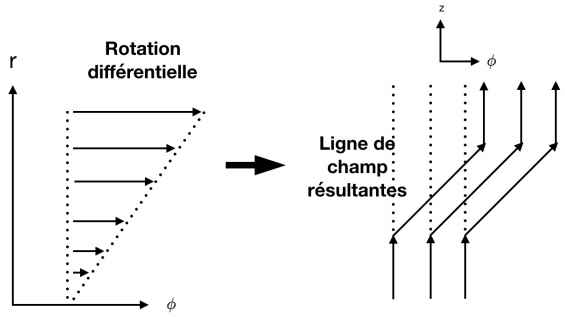


FIGURE 2.3. – Représentation schématique de l'effet Ω à l'équateur.

Dans une description très schématisée des dynamos à grande échelle, l'effet Ω est l'un des deux processus responsables de la dynamo en générant du champ magnétique toroïdal à partir du champ poloïdal. Pour estimer si l'effet Ω va être quantitativement important, il faut calculer le nombre dynamo sans dimension C_Ω, qui s'obtient en adimensionnant l'équation d'induction :

$$C_\Omega = \frac{\Omega R^2}{\eta}, \tag{2.18}$$

où R est le rayon caractéristique du domaine. Ce nombre mesure l'importance relative de l'étirement du champ magnétique par la rotation différentielle et de la diffusivité magnétique. Lorsque $C_\Omega > 1$, l'effet Ω est donc plus important que la diffusion et le champ magnétique toroïdal est amplifié.

2.1.6. Dynamo de champ moyen

La théorie du champ moyen est une théorie statistique qui consiste à considérer que le champ magnétique et le champ de vitesse peuvent être décomposés selon deux échelles différentes : une contribution moyenne sur la plus grande échelle et une composante de fluctuations à plus petite échelle (Moffatt, 1978; Krause et Raedler, 1980). Cette moyenne peut être définie de plusieurs manières différentes selon la géométrie du problème, mais doit avoir les propriétés mathématiques nécessaires à la manipulation des équations : commutations avec l'opérateur dérivé et intégration en espace et en temps ainsi que vérifier les règles de Reynolds

$$\overline{F+H} = \overline{F} + \overline{H},\ \overline{F\overline{H}} = \overline{F}\,\overline{H}, \tag{2.19}$$

avec des fonctions arbitraires $F = F(\vec{r}, t)$, $H = H(\vec{r}, t)$ et un opérateur moyenne que l'on écrira sous la forme $\bar{\cdot}$. Dans notre géométrie sphérique, la moyenne utilisée sera une moyenne axisymétrique sur l'ensemble de la longitude ϕ. On sépare ici le champ magnétique et la vitesse en une contribution moyenne et une contribution des fluctuations, soit $\vec{B} = \overline{\vec{B}} + \vec{b}$ et $\vec{U} = \overline{\vec{U}} + \vec{u}$. Par définition, la moyenne des contributions non axisymétrique est nulle ($\overline{\vec{u}} = \overline{\vec{b}} = 0$). Cette approche est différente d'une linéarisation puisqu'aucune hypothèse n'est faite sur l'amplitude de la moyenne et des fluctuations. Cette séparation des échelles peut être physiquement justifiée lorsqu'une différence d'échelle entre des moyennes à grande échelle (qui évoluent plus lentement en général) et des fluctuations à petite échelle (qui évoluent rapidement) est présente. Dans cette thèse, nous appliquerons ce formalisme à l'équation d'induction (2.2) uniquement et l'on obtient ainsi en prenant la moyenne :

$$\frac{\partial \overline{\vec{B}}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\overline{\vec{U}} \times \overline{\vec{B}} + \overline{\vec{u} \times \vec{b}} - \eta \vec{\nabla} \times \overline{\vec{B}} \right), \tag{2.20}$$

Une équation des fluctuations du champ magnétique linéaire en b peut être obtenue en retirant l'équation (2.20) à l'équation d'induction générale (2.2). On voit ici l'avantage de l'approche de champ moyen, car il n'est pas nécessaire de connaître le détail des petites échelles et de la turbulence, mais uniquement la moyenne du produit de la vitesse et du champ magnétique non axisymétrique, terme que nous appellerons dans la suite, force électromotrice,

$$\mathcal{E} = \overline{\vec{u} \times \vec{b}}. \tag{2.21}$$

Ce terme $\mathcal{E}$ est donc le seul terme source qui dépend des petites échelles et il joue un rôle central dans la théorie des dynamos de champ moyen. Pour pouvoir résoudre l'équation 2.20, une

relation de fermeture est nécessaire et elle doit exprimer la force électromotrice $\mathcal{E}$ en fonction des quantités moyennes $\overline{\vec{U}}$ et $\overline{\vec{B}}$. En supposant que $\vec{u}$ ne dépende pas de $\overline{\vec{B}}$, la relation entre $\mathcal{E}$ et $\overline{\vec{B}}$ peut être exprimée formellement par la décomposition suivante

$$\mathcal{E}_i = \alpha_{ij}\overline{B}_j + \beta_{ijk}\partial_k\overline{B}_j + \gamma_{ijkl}\partial_j\partial_k\overline{B}_l + ..., \tag{2.22}$$

où les coefficients des tenseurs, $\alpha,\ \beta, \gamma, ...$ dépendent de l'écoulement moyen $\overline{\vec{U}}$, des statistiques des fluctuations turbulentes $\vec{u}$, éventuellement de la diffusivité η, mais pas du champ magnétique moyen $\overline{\vec{B}}$. Dans le cas où il y a une bonne séparation d'échelles entre le champ moyen et les fluctuations, la décomposition a de fortes chances de converger et d'être dominée par les premiers termes : l'effet α et la résistivité turbulente (tenseur β) que nous décrirons dans la suite.

Effet alpha

La première contribution à la force électromotrice est le tenseur α tel que $\mathcal{E}_i = \alpha_{ij}\overline{B}_j$. On remarque que le tenseur α est un pseudotenseur puisque celui-ci établit une relation linéaire entre un vrai vecteur (un vecteur dont sa définition ne dépend pas de l'orientation de l'espace, également appelé vecteur polaire), la force électromotrice, et un pseudovecteur (un vecteur dont sa définition dépend de l'orientation de l'espace, également appelé vecteur axial), le champ magnétique. Dans le cas d'une rotation à symétrie cylindrique, cela induit des propriétés de symétries pour différentes composantes du tenseur : les composantes $\alpha_{rr}, \alpha_{r\phi}, \alpha_{\theta\theta}, \alpha_{\phi r}, \alpha_{\phi\phi}$ sont antisymétriques par rapport à l'équateur, alors que les autres composantes sont symétriques par rapport à l'équateur, qui est défini comme le plan passant par le centre de la sphère avec un vecteur normal parallèle à l'axe de rotation. Dans cette thèse, on s'intéressera particulièrement au cas où les fluctuations du champ de vitesse u sont statistiquement isotropes, c'est-à-dire invariant par rotation, car le tenseur α se réduit à ses composantes diagonales. En présence d'un écoulement turbulent isotrope, le tenseur α est diagonal et la force électromotrice est donc en moyenne parallèle au champ moyen. La force électromotrice génère ensuite un courant électrique d'après la loi d'Ohm (Éq. 2.1). Ce processus est appelé "effet α" et il permet de (re)générer un champ magnétique poloïdal à partir du champ magnétique toroïdal (Figure 2.4). En effet, un courant parallèle au champ moyen toroïdal $\overline{B}_\phi$ est généré et ce courant dans la direction azimutale va à son tour générer un champ magnétique poloïdal. Une composante importante du tenseur α que l'on cherchera à calculer est la composante $\alpha_{\phi\phi}$, car elle lie le champ magnétique toroïdal B_ϕ, amplifié par effet Ω (par exemple) à partir du champ poloïdal, et la force électromotrice selon ϕ, qui permet de regénérer le champ poloïdal. Cet effet permet ainsi de fermer le cycle dynamo avec l'effet Ω et on parle alors de dynamo $\alpha\Omega$. Les autres composantes diagonales α_{rr} et $\alpha_{\theta\theta}$ peuvent également contribuer à produire du champ toroïdal de la même façon. Lorsque cet effet génère plus ou autant de champ toroïdal que l'effet Ω, on parle de dynamo α^2 ou $\alpha^2 - \Omega$. Pour déterminer l'importance relative de l'effet α et de l'effet Ω, il faut calculer le nombre dynamo

C_α (qui caractérise l'importance de cet effet par rapport à la résistivité) donné par

$$C_\alpha = \frac{\alpha R}{\eta}, \tag{2.23}$$

et le comparer au nombre dynamo de l'effet Omega C_Ω. L'influence des composantes non diagonales du tenseur est également appelée *turbulent pumping* et ces composantes advectent le flux du champ moyen de manière analogue à un champ de vitesse moyen.

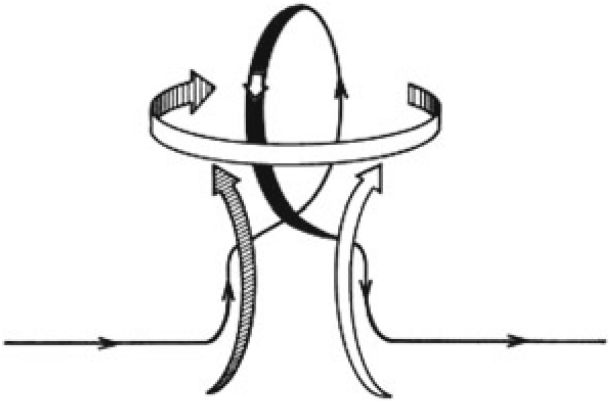


FIGURE 2.4. – Schématisation de l'effet α. Le champ magnétique initial est tordu par les tourbillons de la turbulence et la boucle de champ magnétique crée un courant parallèle au champ initial. Crédit : PARKER (1970).

Pour déterminer les coefficients du tenseur α, plusieurs méthodes sont possibles. La première manière de calculer l'effet α vient de la "théorie de champ moyen" est d'utiliser des hypothèses simplificatrices pour dériver une expression quasi analytique. Une des approximations les plus utilisées est l'approximation de corrélation du second ordre (*second order correlation approximation* ou SOCA) où les corrélations croisées entre deux composantes fluctuantes sont négligées. En supposant également que l'écoulement moyen $\vec{\overline{U}}$ peut être négligé et que les fluctuations de vitesse u sont statistiquement homogènes et isotropes, le nombre de composantes du tenseur α peut être réduit. Il est alors possible de dériver une expression simple et identique pour les composantes diagonales du tenseur α

$$\alpha_{ii} = -\frac{1}{3}\overline{\vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u})}\tau_c, \tag{2.24}$$

où τ_c est le temps de corrélation pour l'écoulement turbulent. Cette équation indique que l'effet α est une fonction quasi directe de l'hélicité $h = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u}$ des fluctuations turbulentes, ce qui peut se comprendre par un raisonnement physique. Les lignes de champ sont en effet tordues

par les tourbillons de la turbulence, mesuré par l'hélicité des fluctuations, et vont ainsi former les boucles de champ magnétique nécessaire à l'effet α (Figure 2.4). L'approximation SOCA ne permet pas de calculer les autres composantes du tenseur α. De plus, cette approximation est valide lorsque la diffusion magnétique est plus importante que l'induction. Cela correspond à un petit nombre de Reynolds magnétique ($Rm \ll 1$), qui caractérise l'importance de l'induction par rapport à la diffusion magnétique défini par

$$Rm = U\,L/\eta, \tag{2.25}$$

où U, L correspondent à la vitesse et la longueur caractéristique du système. Elle est également valide lorsque le nombre de Strouhal $St = u\tau/l$ est petit devant 1 où u,τ et l sont des vitesses, temps et longueurs caractéristiques de la turbulence. Dans la plupart des situations astrophysiques, le nombre de Reynolds magnétique est grand devant 1, celui de Strouhal est de l'ordre de 1, donc l'approximation n'est pas valide.

Une deuxième méthode consiste à estimer numériquement la force électromotrice et le champ moyen comme sortie de la simulation numérique MHD. Dans le cas où la force électromotrice est dominée par l'effet α, il est possible d'estimer celui-ci à partir de la corrélation entre la force électromotrice $\mathcal{E}$ et le champ magnétique $\overline{\vec{B}}$. En remplaçant la force électromotrice par sa décomposition avec α, l'égalité suivante peut être obtenue

$$\alpha_{ij} = \frac{\langle \mathcal{E}_i \overline{B}_j \rangle}{\langle \overline{B}_j^2 \rangle}. \tag{2.26}$$

où l'opérateur $\langle\cdot\rangle$ correspond à une moyenne différente de celle du champ moyen $\bar{\cdot}$ comme, par exemple, une moyenne temporelle ou sur le reste du volume. Cette méthode est incomplète puisqu'elle considère que la corrélation entre la force électromotrice et le champ magnétique moyen est uniquement due à la composante estimée α_{ij} et les contributions des autres composantes du tenseur α et celles du tenseur β sont négligées.

Une dernière méthode permet de calculer numériquement l'ensemble des composantes du tenseur α : la méthode *test field* (voir Schrinner et al., 2005 ; Schrinner et al., 2007, pour plus de détails). Cette approche se base sur la résolution numérique de l'équation d'induction pour les fluctuations magnétiques b pour un champ de vitesse $\vec{u}$ donné afin de calculer la force électromotrice $\mathcal{E}$. La relation linéaire entre le champ magnétique moyen $\overline{B}$ et $\mathcal{E}$ est ensuite inversée pour trouver les coefficients des tenseurs α et β. La difficulté de cette méthode est due aux nombres de coefficients à calculer, bien supérieure aux trois relations linéaires des trois composantes de $\mathcal{E}$. L'équation d'induction des fluctuations magnétiques doit donc être résolue pour de multiples champs magnétiques moyens tests avec le même champ de vitesse. Puisque les coefficients des tenseurs α et β ne dépendent pas du champ magnétique moyen, il est possible d'obtenir un système linéaire avec différents champs tests indépendants. Cette méthode permet donc d'obtenir toutes les composantes des tenseurs simultanément mais est également la plus complexe.

Résistivité turbulente

Le terme suivant dans l'expansion de la force électromotrice moyenne $\mathcal{E}$ est le pseudo tenseur de troisième ordre β

$$\mathcal{E}_i = \beta_{ijk}\partial_k \overline{B}_j. \tag{2.27}$$

Comme il s'agit d'un pseudo tenseur, ses composantes possèdent également des propriétés d'antisymétrie ou de symétrie par rapport à l'équateur. Afin de faciliter l'interprétation physique, le tenseur β peut également se mettre sous la forme d'un tenseur du deuxième ordre avec une relation linéaire entre le courant moyen $\overline{J} = \vec{\nabla} \times \overline{\vec{B}}$ et la force électromotrice

$$\mathcal{E}_i = \beta_{ij}\overline{J}_j. \tag{2.28}$$

Dans le cas où les fluctuations de vitesses sont statistiquement isotropes, il peut se simplifier en un tenseur diagonal et il est alors possible d'interpréter β comme une diffusivité turbulente. En particulier, quand on prend le rotationnel de la force électromotrice, on trouve un terme qui est analogue à la diffusivité magnétique η

$$\vec{\nabla} \times \mathcal{E} = \vec{\nabla} \times \left(\beta \vec{\nabla} \times \overline{\vec{B}}\right). \tag{2.29}$$

On peut donc définir une diffusivité effective $\eta_e = \eta + \beta$. De la même façon que pour l'effet α, il est possible d'estimer la diffusivité turbulente de plusieurs manières. Dans le cas de fluctuations de vitesse homogènes et isotropes, l'approximation SOCA montre que la diffusivité est reliée à l'intensité de la turbulence

$$\beta = \frac{1}{3}\tau_c \overline{u^2}, \tag{2.30}$$

où τ_c est le temps de corrélation de l'écoulement turbulent. Cette relation est relativement intuitive puisqu'il paraît logique qu'une turbulence plus forte plie et expulse les lignes de champ plus facilement quand la vitesse de la turbulence augmente.

Lorsque la contribution de la diffusivité domine la force électromotrice $\mathcal{E}$, il est possible d'estimer la valeur de β en calculant la corrélation du courant et de la force électromotrice avec

$$\beta_{ij} = \frac{\overline{\langle \mathcal{E}_i \overline{J}_j \rangle}}{\langle \overline{J}_j^2 \rangle}. \tag{2.31}$$

Il est également possible de calculer l'ensemble des composantes du tenseur β avec la méthode *test field*. Bien que celle-ci soit plus complexe, elle permet de calculer les coefficients du tenseur β et du tenseur α et ainsi en déduire leur contribution respective à la force électromotrice moyenne.

La diffusivité magnétique est souvent faible dans les astres astrophysiques, ce qui fait que la diffusivité effective peut être dominée par la diffusivité turbulente et avoir un impact important dans les processus de dynamo. Dans les simulations numériques où la diffusivité est souvent plus élevée que des valeurs réalistes pour des raisons de coûts numériques, la diffusivité turbulente est également utilisée pour justifier les valeurs numériques de diffusivité.

Fréquence d'une dynamo $\alpha\Omega$

Les sections précédentes ont décrit les effets principaux utilisés dans les dynamos de champ moyen. Dans cette section, nous nous intéresserons au cas d'une rotation différentielle cylindrique ($\overline{\vec{U}} = s\Omega(s)\vec{e_\phi}$) où $s = r\sin\theta$ est le rayon cylindrique, avec un effet α diagonal et uniforme ($\mathcal{E} = \alpha\overline{\vec{B}}$) et une diffusivité effective $\eta_e = \eta + \beta$ uniforme. Nous regarderons, dans ce cas, la possibilité d'obtenir une solution cyclique pour le champ magnétique $\overline{\vec{B}}$, de manière similaire au cycle solaire. En insérant la décomposition de la force électromotrice $\mathcal{E}$ dans l'équation d'induction (2.2), on obtient l'équation suivante

$$\frac{\partial\overline{\vec{B}}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\overline{\vec{U}}\times\overline{\vec{B}}\right) + \alpha\vec{\nabla}\times\left(\overline{\vec{B}}\right) + \eta_e\,\vec{\nabla}^2\,\overline{\vec{B}}\,.$$

Pour simplifier le calcul, on se place dans un repère localement cartésien, situé à l'équateur d'un système sphérique. On considère donc que les vecteurs unitaires $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ correspondent aux vecteurs $(\vec{e_r}, \vec{e_\phi}, \vec{e_\theta})$. La rotation avec un cisaillement cylindrique s'exprime donc $\overline{\vec{U}} = xS\vec{e_y}$ où $S = q\Omega$ est le cisaillement et q le taux de cisaillement défini, de manière générale, par

$$q = -\frac{s}{\Omega}\frac{d\Omega}{ds}, \tag{2.32}$$

avec s le rayon cylindrique. On supposera par simplicité que Ω est uniforme. Ce profil de rotation correspond à une linéarisation d'un profil de rotation $\Omega \propto s^{-q}$ sur de faibles longueurs. On cherchera des solutions sous la forme d'ondes planes élémentaire $\overline{\vec{B}}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}[\hat{B}(k)\exp(i\vec{k}\vec{x} + \lambda t)]$. On recherche une solution axisymétrique, ce qui se traduit par $k_y = 0$. L'équation précédente prend la forme

$$\lambda\hat{B} = \alpha i\vec{k}\times\hat{B} + \hat{B}_x S\vec{e_y} - \eta_e k^2\hat{B}.$$

On doit donc trouver les valeurs propres correspondant au problème suivant :

$$\lambda\hat{B} = \begin{pmatrix} -\eta_e k^2 & -i\alpha k_z & 0 \\ i\alpha k_z + S & -\eta_e k^2 & -i\alpha k_x \\ 0 & i\alpha k_x & -\eta_e k^2 \end{pmatrix}\hat{B},$$

En regardant la première ligne et la dernière ligne de la matrice, on voit que c'est l'effet α qui va générer les composantes $\hat{B}_x$ et $\hat{B}_z$ du champ poloïdal alors que, pour le champ toroïdal, le terme de l'effet Ω est présent sur la deuxième ligne. On en déduit la relation de dispersion suivante en prenant le déterminant de la matrice

$$(\lambda + \eta_e k^2)\left[(\lambda + \eta_e k^2)^2 + i\alpha S k_z - \alpha^2 k^2\right] = 0,$$

avec les solutions cycliques (la solution $\lambda = -\eta_e k^2$ est uniquement une solution décroissante) :

$$\lambda_{\pm} = -\eta_e k^2 \pm (\alpha^2 k^2 - i\alpha S k_z)^{1/2}.$$

Les parties réelles et imaginaires de ces deux solutions peuvent être approchées par les formules suivantes :

$$\mathrm{Re}\lambda_{\pm} \approx -\eta_e k^2 \pm |\frac{1}{2}\alpha q \Omega k_z|^{1/2},$$
$$\mathrm{Im}\lambda_{\pm} \equiv -\omega_{cyc} \approx \pm|\frac{1}{2}\alpha q \Omega k_z|^{1/2}.$$

Ces formules sont valides pour $\alpha k_z / S \ll 1$, ce qui correspond au cas où la génération du champ toroïdal est dominée par l'effet Ω et non par l'effet α (comme cela est possible pour une dynamo α^2). On voit ainsi que λ_+ est une solution croissante si $|\frac{1}{2}\alpha q \Omega k_z| \geq \eta_e^2 k^4$. La fréquence de la dynamo est alors $|\frac{1}{2}\alpha q \Omega k_z|^{1/2}$. Pour un taux de cisaillement $q = 1$ et en prenant $|k| \sim k_z \sim \frac{1}{R}$ comme approximation, on peut alors faire apparaître les nombres dynamo $C_\Omega C_\alpha$ qui donnent un bon ordre de grandeur nécessaire à l'obtention d'une dynamo $\alpha\Omega$

$$C_\Omega C_\alpha \geq 2. \tag{2.33}$$

Bien que ce calcul soit fait en coordonnées cartésiennes, il peut être aussi fait en coordonnées cylindriques ou sphériques avec un profil de rotation cylindrique plus général. Dans ce cas, une fréquence similaire est dérivée en remplaçant le terme $S = q\Omega$ par $\frac{d\Omega}{d \ln s}$. Il est également possible de considérer un effet α avec trois composantes différentes et dans ce cas, c'est la composante $\alpha_{\phi\phi}$ qui apparaît dans la fréquence du cycle dynamo, ce qui correspond bien à l'interprétation physique de cette composante. Pour effectuer un calcul plus exact, les composantes non diagonales de l'effet α et de la résistivité turbulente devraient être prises en compte, ainsi que le relâchement de l'hypothèse d'uniformité du tenseur α. Toutefois, le modèle que nous avons présenté ici a l'avantage de permettre une meilleure compréhension du mécanisme de dynamo $\alpha\Omega$ et les résultats de ce modèle peuvent être proches des résultats obtenus dans des simulations numériques globales.

2.2. Scénario du champ fossile

Le scénario le plus simple pour la formation d'un magnétar est de considérer que le champ provient de l'étoile progénitrice. Les observations des étoiles montrent qu'il existe principalement deux types d'étoiles massives ayant un fort champ magnétique, les étoiles de types Bp et Of?p. Leur champ de surface est supérieur à 10^3 G (voir, par exemple Petit et al., 2019). Ces observations reposent sur l'effet Zeeman (Donati et Landstreet, 2009; Reiners, 2012) : le champ magnétique influence les niveaux d'énergie des atomes et va ainsi déplacer ou séparer

en deux les raies d'émission. Cet écartement est faible si bien qu'il est difficile de le détecter directement, mais les composantes des raies séparées sont polarisées. Ainsi en observant les étoiles pour différentes polarisations, en sommant la lumière polarisée pour l'ensemble des raies, il est possible de mesurer la valeur du champ magnétique de surface, et de reconstruire une partie de la géométrie du champ en utilisant la variation du signal due à la rotation de l'étoile. Les étoiles massives ($M > 8M_{\odot}$) sont plus difficiles à observer que les étoiles de masse intermédiaire ou de type solaire, car le signal polarimétrique sommé sur l'ensemble des raies est plus faible dû à la température plus élevée et donc d'un nombre de raies d'absorption plus faibles. D'après les observations actuelles, les étoiles massives très magnétisées représentent $\sim 7\%$ des étoiles massives, ce qui semble bien correspondre à la fraction d'étoiles à neutrons étant des magnétars (Grunhut et al., 2017 ; Alecian et al., 2019). Le scénario du champ fossile se base sur l'idée que les étoiles magnétiques forment des magnétars et les étoiles non magnétiques des pulsars (Ferrario et Wickramasinghe, 2006). Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que les champs magnétiques à grande échelle dans les étoiles très magnétisées de type Of?p et Bp (supérieurs à $\sim 10^3$ G) , dans les naines blanches les plus magnétisées ($\sim 10^8$ G) et dans les magnétars correspondent à des flux magnétiques de surface du même ordre de grandeur $\Phi_B \sim 10^{27} - 10^{28}$ G cm^2. Les observations sont favorables au scénario de la conservation du flux magnétique, qui pourrait expliquer les intensités du champ extrême de ces astres si un tel flux magnétique est également présent dans le cœur de fer des étoiles massives. La conservation du flux magnétique entraîne l'amplification du champ magnétique lors de l'effondrement du cœur de fer de l'étoile massive. Le passage d'un cœur de fer avec un rayon $R_{fer} = 1 - 2 \times 10^3$ km au rayon d'une étoile à neutrons $R_{NS} = 12$ km entraîne une amplification du champ magnétique de l'ordre de 10^4. Ainsi la conservation du flux magnétique avec un champ magnétique dipolaire du cœur de fer valant $10^{10} - 10^{11}$ G suffirait à produire un magnétar. Une nouvelle question se pose alors : quelle est la valeur du champ magnétique dans le cœur de fer d'une étoile massive ? Pour ce qui est du champ magnétique à l'intérieur des étoiles massives, il est beaucoup plus difficile d'en obtenir une mesure indirecte. L'astérosismologie, l'étude des modes de vibrations dans le spectre de l'étoile, permet de potentiellement détecter un fort champ magnétique dans le cœur des étoiles massives par la suppression de certains modes d'oscillations (magnétoinertielles, magnétogravitationnelles, etc.) (Fuller et al., 2015 ; Stello et al., 2016). De nouvelles méthodes basées sur d'autres modes ont également été proposées, mais n'ont pas encore été appliquées (Prat et al., 2019 ; Mathis et al., 2021). Pour avoir une idée du champ magnétique dans le cœur de fer de l'étoile, il faut modéliser l'évolution de l'étoile et les différentes origines possibles du champ magnétique.

2.2.1. Le champ fossile lui-même originaire du champ fossile

Encore une fois, l'hypothèse la plus simple pour expliquer le champ de l'étoile progénitrice est que celui-ci provient de la formation de l'étoile : la contraction et la fragmentation d'un nuage moléculaire géant donnent lieu à une protoétoile entourée d'un disque d'accrétion. Le champ

magnétique mesuré dans les nuages moléculaires est suffisamment fort pour obtenir un champ de l'ordre de 10^3 G sous l'hypothèse de la conservation du flux de l'enveloppe stellaire (Moss, 2001; Mestel, 2001). Une des questions cruciales de ce scénario est de savoir si un équilibre magnétohydrodynamique stable peut être atteint avec un fort champ magnétique. Pour cela, la force de Lorentz doit s'équilibrer avec les autres forces du système : la pression, la gravité et la force de Coriolis. Différents ingrédients physiques sont importants à prendre compte comme les profils de densités, les gradients d'entropie, la rotation, etc. Une configuration stable du champ magnétique doit nécessairement être un mélange de champ poloïdal et toroïdal (Tayler, 1973). La modélisation numérique de Braithwaite et Spruit (2004) suggère qu'il existe de telles configurations pouvant durer la vie d'une étoile à partir de l'évolution spontanée d'un champ magnétique initial simple. D'autres simulations numériques de la relaxation d'un champ magnétique vers un équilibre montrent également que les systèmes en faible rotation tendent vers un dipôle non aligné et, en rotation rapide, un dipôle aligné (Duez, 2011). L'existence de configuration stable a également été confirmée analytiquement (Duez et al., 2010). La différence de champ magnétique entre les étoiles magnétisées et les étoiles non magnétisées pourrait être expliquée par une évolution sur deux branches différentes de configurations stables en présence de rotation différentielle (Aurière et al., 2007; Lignières et al., 2014; Jouve et al., 2020).

Dans le cas où le champ magnétique est stable, alors celui-ci va décroître lentement par la diffusivité magnétique avec une décroissance plus rapide pour les petites échelles. Les observations des étoiles très magnétisées (massives ou non) semblent corroborer cette idée, car leurs champs magnétiques très intenses ont souvent la structure d'un dipôle comme si les champs à petite échelle s'étaient dissipés par diffusion magnétique après des dizaines ou des centaines de millions d'années (Charbonneau, 2013).

2.2.2. Dynamos dans les étoiles massives

Un autre scénario possible est que le champ magnétique des étoiles massives soit formé par effet dynamo. Les étoiles massives de la séquence principale sont composées d'un cœur instable à la convection et d' une enveloppe radiative stable à la convection. Cette structure peut devenir plus complexe au fur et à mesure de l'évolution de l'étoile et de la formation d'éléments de plus en plus lourd. Dans l'enveloppe radiative qui peut être en rotation différentielle, la dynamo de Tayler-Spruit peut avoir lieu (Spruit, 2002; Braithwaite, 2006). Cette dernière se base sur une instabilité magnétique, l'instabilité de Tayler (Tayler, 1973), pour produire un champ poloïdal à partir du champ toroïdal, et sur l'effet Ω pour régénérer le champ toroïdal. Cette dynamo, souvent utilisée pour expliquer le transport du moment cinétique dans les étoiles, mais sa pertinence est néanmoins controversée par sa difficulté à être obtenue dans les simulations numériques (Zahn et al., 2007).

Différemment du champ de surface, il est également possible de s'intéresser à la zone convective où une dynamo peut se développer dans le cœur convectif et amplifier le champ magnétique (Augustson et al., 2016). Selon ce modèle qui a un champ magnétique moyen de $B \simeq$

2.5×10^5 G dans la zone convective de rayon $R \simeq R_\odot$, le flux magnétique correspondant serait de l'ordre $\Phi_B \sim 10^{27}$ G cm^2, ce qui correspond au flux magnétique des magnétars.

D'une manière plus générale, le champ magnétique dans les étoiles massives obtenu par effet dynamo est encore incertain et est également estimé comme étant trop faible pour former des magnétars (Spruit, 2008), bien que des modèles d'évolution stellaire semblent trouver un fort champ toroïdal (Aguilera-Dena et al., 2020).

2.2.3. Fusion de deux étoiles en système binaire

Un nouveau scénario pour amplifier le champ magnétique dans les étoiles massives a été proposé : la fusion de deux étoiles massives qui formerait une nouvelle étoile avec un fort champ magnétique (Schneider et al., 2019). Dans leur simulation numérique (Figure 2.5), le champ magnétique est amplifié par la turbulence et le cisaillement lors de la fusion des deux étoiles. Le champ magnétique extrait des $1.5 M_\odot$ au centre de la simulation donne un flux magnétique $\Phi_B \simeq 4 \times 10^{28}$ G cm^2, ce qui correspondrait à un champ magnétique de 10^{16} G pour une étoile à neutrons si le flux est conservé pendant le reste de l'évolution. Des arguments observationnels semblent conforter ce scénario, car les étoiles magnétiques sont souvent isolées (Carrier et al., 2002; Alecian et al., 2015) , alors qu'un grand nombre d'étoiles massives sont formées dans des systèmes multiples d'au moins deux étoiles (Sana et al., 2012). De plus, près de 10% des étoiles massives sont le résultat d'une fusion de deux étoiles (Podsiadlowski et al., 1992; de Mink et al., 2014). Ainsi la fraction d'étoiles massives ayant eu une fusion au cours de leur vie est comparable à la fraction d'étoiles massives magnétiques, qui coïncide également avec la fraction d'étoiles à neutrons qui sont des magnétars. Ces proportions confortent le scénario de formation du champ magnétique des étoiles magnétisées par une fusion d'étoiles binaires. La multiplicité des étoiles massives peut donc avoir une influence importante dans l"évolution des étoiles massives et doit être prise en compte.

2.2.4. Limites du scénario du champ fossile

Ces scénarios de formation d'étoiles massives magnétisées permettent d'expliquer la population des étoiles Of?p et Bp. En revanche, la comparaison de cette population avec la population des magnétars et des pulsars semble indiquer que le scénario du champ fossile ne suffit pas à produire tous les magnétars (Makarenko et al., 2021). En effet, la synthèse de ces populations à partir des observations actuelles indique que la distribution du champ magnétique obtenue par conservation du flux magnétique des étoiles massives est différente de celle des pulsars et des magnétars.

De plus, pour produire les explosions extrêmes décrites dans le chapitre 1, un autre ingrédient est important : une rotation rapide. Cependant, les études d'évolution stellaire d'étoiles massives initialement en rotation rapide montrent que le freinage par le fort champ magnétique ralentit l'étoile massive, qui devient alors en rotation lente (Meynet et al., 2011; A. T. Potter et al.,

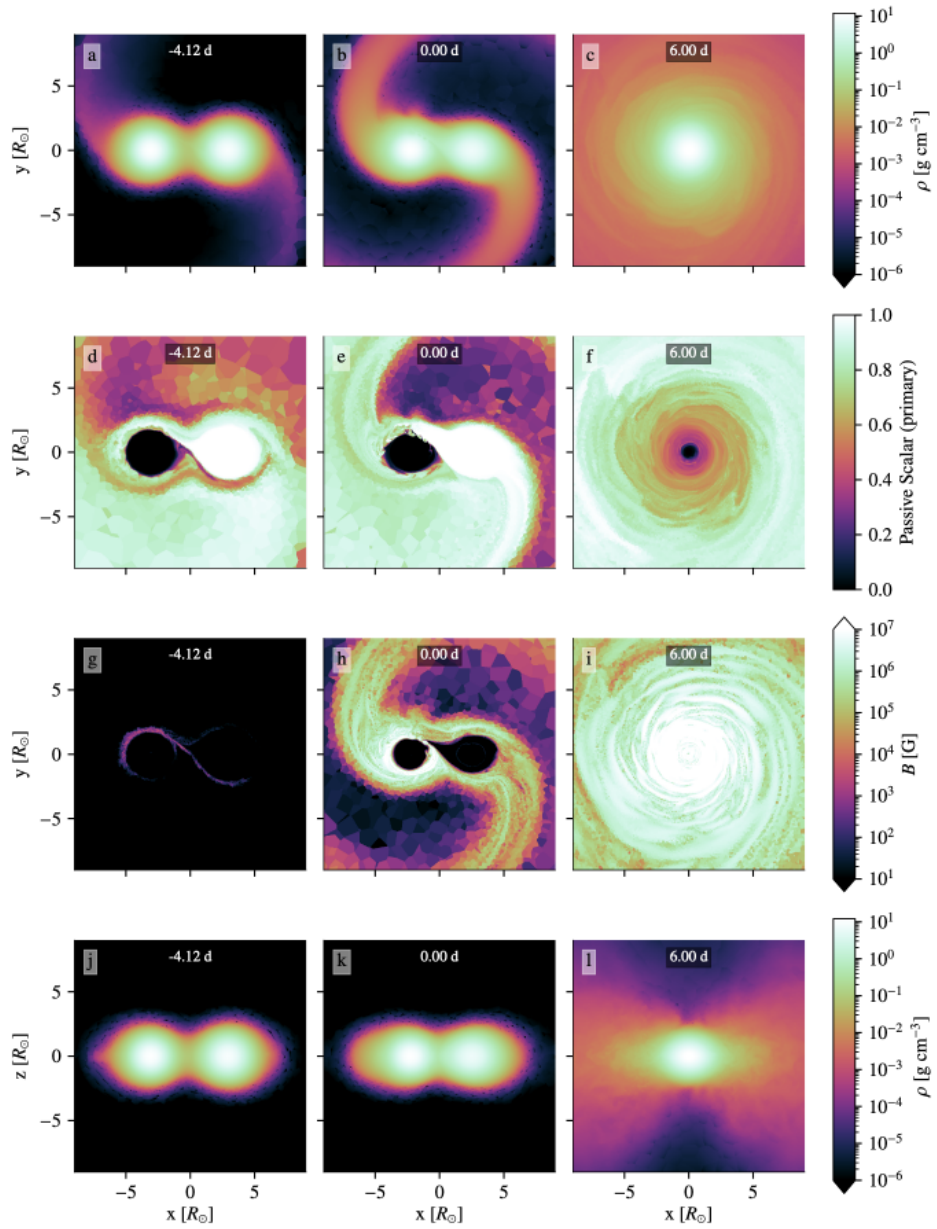


FIGURE 2.5. – Simulation numérique de la fusion de deux étoiles de masses $9M_\odot$ et $8M_\odot$.Évolution de la densité (Panneaux a-b-c et j-k-l) , de l'intensité du champ magnétique (Panneaux g-h-i) , et d'un scalaire passif qui indique la matière venant de l'étoile principale de 9 $M_\odot$ (Panneau d-e-f). Les panneaux (a) à (i) sont dans le plan orbital et les panneaux (j-k-l) donnent la vue de côté. Le temps $t = 0$ correspond à l'instant où les étoiles fusionnent. Crédit : SCHNEIDER et al. (2019)

2012; KESZTHELYI et al., 2020). En particulier, l'étoile résultante d'une fusion de deux étoiles

massives tend également à être en rotation lente à la fin de son évolution (Schneider et al., 2020). Les observations d'étoiles magnétiques en rotation confirment d'ailleurs que la rotation est ralentie par les vents magnétiques (Shultz et al., 2018, 2019).

En résumé, une étoile massive qui a un fort champ magnétique pourrait former un magnétar par conservation du flux magnétique et il est possible que le scénario du champ fossile permette d'expliquer une partie des magnétars galactiques, en particulier, ceux associés à des restes de supernovae sans caractéristiques énergétiques particulières. En revanche, ce scénario ne peut a priori pas donner lieu aux explosions extrêmes que nous avons décrites dans le chapitre 1, puisque le réservoir d'énergie disponible est limité par le freinage magnétique de l'étoile. Le modèle du magnétar milliseconde pour ces explosions extrêmes nécessite donc probablement que le champ magnétique soit amplifié dans la proto-étoile à neutrons au moment de sa formation.

2.3. Scénario d'amplification dans les PNS

Dans la section précédente, nous avons vu qu'il était possible de former des champs magnétiques de l'ordre de grandeur de celui des magnétars, mais que le scénario de conservation du flux n'est pas compatible avec l'hypothèse de rotation, nécessaire aux explosions extrêmes. Pour avoir les deux ingrédients indispensables aux supernovae extrêmes, un champ magnétique intense et une rotation rapide, l'amplification du champ magnétique doit avoir lieu in situ, soit dans la proto-étoile à neutrons (PNS) après l'effondrement du cœur de fer de l'étoile massive, soit dans l'étoile à neutrons hypermassive formée lors de la coalescence de deux étoiles à neutrons. Dans cette section, nous évoquerons un des scénarios proposés pour obtenir une telle amplification du champ magnétique, une dynamo convective dans la PNS. Nous évoquerons un deuxième scénario où le champ magnétique est amplifié par l'instabilité magnétorotationnelle (MRI) dans le prochain chapitre.

2.3.1. Stabilité de la convection : le critère de Ledoux

L'idée que la PNS soit instable à la convection a été proposée par Epstein (1979). Dans un premier temps, le gradient de composition du fluide nucléaire était pensé comme le moteur de la convection. La convection est particulièrement affectée par le gradient de la fraction électronique Y_e, car, due à la densité de la PNS, la pression de dégénérescence des électrons contribue à la pression du fluide. Ainsi un fluide pauvre en électrons aura une pression inférieure à un fluide riche en électrons. Une couche riche en électrons sur une couche pauvre en électrons est potentiellement instable à la convection. Toutefois, le gradient de la fraction électronique peut également être stabilisant selon l'énergie de symétrie nucléaire qui favorise un fluide avec un nombre de neutrons et de protons identique (L. F. Roberts et al., 2012). Le gradient d'entropie S peut également déterminer la stabilité de la proto-étoile à neutrons. Une couche d'un fluide chaud (entropie plus élevée) sur une couche d'un fluide froid (entropie plus faible) est stable à la

convection de manière analogue à de l'air chaud au-dessus d'air froid. Dans ce cas, on parle de zone stablement stratifiée. Pour prendre en compte les deux effets, les gradients d'entropie et de composition, un fluide est instable à la convection si le critère de Ledoux est satisfait

$$C_{\mathrm{L}} = \left.\frac{\partial \rho}{\partial S}\right|_{P,Y_e} \frac{dS}{dr} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial Y_e}\right|_{P,S} \frac{dY_e}{dr} > 0, \tag{2.34}$$

où ρ est la densité du fluide, P la pression et r le rayon sphérique. Dans un fluide stablement stratifié se propagent des ondes de gravité dont la fréquence est donnée par la fréquence de Brunt-Väisälä

$$N^2 \equiv -\frac{1}{\rho}\frac{d\Phi_{\mathrm{grav}}}{dr}\left(\left.\frac{\partial \rho}{\partial S}\right|_{P,Y_e} \frac{dS}{dr} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial Y_e}\right|_{P,S} \frac{dY_e}{dr}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{d\Phi_{\mathrm{grav}}}{dr} C_L, \tag{2.35}$$

où Φ_{grav} est le potentiel gravitationnel de la proto-étoile à neutrons. Ainsi, le critère de stabilité à la convection peut aussi s'exprimer en fonction de la fréquence de Brunt-Väisälä : si $N^2 > 0$, le fluide est stablement stratifié et si $N^2 < 0$, le fluide est instable à la convection. Un gradient radial d'entropie négatif $\frac{dS}{dr} < 0$ est déstabilisant (puisque $\frac{\partial \rho}{\partial S} < 0$ de manière générale) et, de manière similaire, un gradient radial de fraction électronique $\frac{dY_e}{dr} < 0$ est souvent déstabilisant, bien que cela dépende de l'équation d'état de la matière chaude et ultra-dense (L. F. Roberts et al., 2012). La convection sous la neutrinosphère (pour distinguer de la convection dans la région de gain sous le choc de la supernova) prédite par Epstein (1979) a longtemps été étudiée en 1D et 2D dans l'espoir qu'elle augmente suffisamment la luminosité des neutrinos pour obtenir de manière systématique des explosions de supernovae réussies (Burrows, 1987; Wilson et Mayle, 1988; Buras et al., 2006; L. F. Roberts et al., 2012). Les récentes simulations 3D confirment la présence d'une zone convective dans la PNS comme l'indiquent les profils radiaux du gradient d'entropie et de gradient électronique (Glas et al., 2019; Nagakura et al., 2020). Ainsi la proto-étoile à neutrons est composée de 3 zones dont le rayon évolue au cours du temps : un cœur stable à la convection, une couche convective approximativement isentropique et une zone extérieure stablement stratifiée. Typiquement, à $t = 200$ ms, la proto-étoile à neutrons a un rayon de l'ordre de 40 km avec un cœur stable de 10 km, une zone convective de 15 km et une zone stablement stratifiée de l'ordre de 15 km. Comme le temps de refroidissement de la proto-étoile à neutrons (~ 10 s) est plus long que le temps dynamique de la supernova (~ 100 ms), il est difficile numériquement d'étudier l'évolution de la PNS avec des simulations 3D. Les études d'évolution de la PNS utilisent alors des simulations 1D avec des prescriptions pour prendre en compte la turbulence et la convection, fondées sur la *mixing-length theory* (MLT) (Hüdepohl, 2014; L. F. Roberts et Reddy, 2017). Ces études établissent qu'une proportion de plus en plus grande de la PNS devient instable à la convection due aux gradients d'entropie et de fraction électronique et la PNS peut même être entièrement convective lors de la phase de refroidissement, c'est-à-dire une fois que la PNS a atteint le rayon d'une étoile

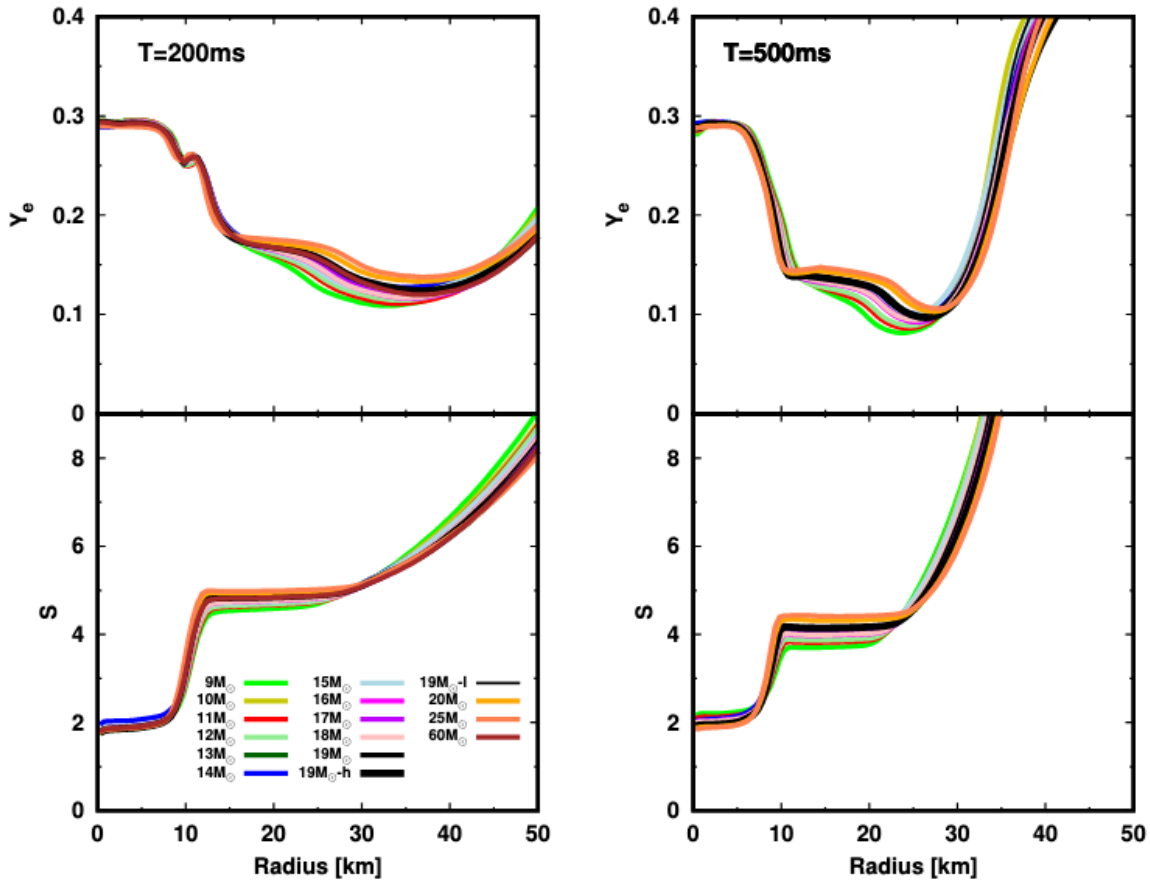


FIGURE 2.6. – Profils radiaux de la fraction électronique Y_e sur les panneaux du haut et de l'entropie par baryon S sur les panneaux du bas 200 ms (gauche) et 500 ms (droite) après le rebond. Ces quantités sont obtenues par une moyenne angulaire sur des simulations 3D de supernova par effondrement gravitationnel (NAGAKURA et al., 2020).

à neutrons froide. On voit d'ailleurs sur la Figure 2.6 que, entre 200 ms et 500 ms après le rebond, le rayon de la PNS diminue de 50 km à 35 km et que la zone convective garde sa taille de 15 km constante entre 10 km et 25 km. La convection a également des conséquences importantes sur le signal en neutrinos d'une supernova. La comparaison des modèles 3D et des modèles 1D, ne modélisant pas la convection, met en évidence qu'une description multidimensionnelle de la convection entraîne une diminution de l'énergie moyenne des neutrinos électroniques ν_e et des antineutrinos électroniques $\bar{\nu}_e$ mais une augmentation de l'énergie des autres espèces de neutrinos (NAGAKURA et al., 2021). De plus, la convection induit une brisure de symétrie qui pourrait être à l'origine d'une asymétrie entretenue de l'émission des neutrinos (*Lepton emission sustained asymmetry*, LESA), observée dans les simulations 3D de supernovae (TAMBORRA

et al., 2014; Glas et al., 2019). Cela correspond à un flux de leptons $L_{\nu_e} - L_{\bar{\nu}_e}$ (où L_{ν_e} et $L_{\bar{\nu}_e}$ sont respectivement le flux des neutrinos et antineutrinos électroniques) plus importante dans un hémisphère de la PNS, sous la forme d'un dipôle, ce qui peut renforcer l'asymétrie de l'explosion. La convection pourrait modifier le signal des neutrinos sur des durées plus longues (L. F. Roberts et al., 2012), puisque l'épisode convectif dure le temps de refroidissement de la PNS, soit de quelques secondes à plusieurs dizaines de secondes, ce qui comme nous allons le voir laisse le temps à une dynamo convective d'amplifier le champ magnétique jusqu'à des intensités similaires aux magnétars.

2.3.2. Une dynamo convective dans une PNS

La dynamo convective a été le premier mécanisme proposé pour la formation des magnétars dans l'article de C. Thompson et Duncan (1993). De nombreuses études ont montré l'existence de telles dynamos dans les étoiles et les planètes, particulièrement le Soleil et la Terre, mais cela n'avait jamais été envisagé pour les PNS. L'amplification du champ magnétique par effet dynamo dans la PNS peut être alimentée par deux réservoirs d'énergie : les mouvements convectifs et la rotation. Le rapport entre les forces d'inertie et les forces dues à la rotation définit le nombre de Rossby Ro, par $Ro \equiv \frac{u}{l\Omega}$, où u est la vitesse moyenne des mouvements convectifs, l une échelle de longueur caractéristique de l'écoulement et Ω le taux de rotation du fluide. Ce nombre modifie fortement l'efficacité et les propriétés d'une dynamo convective. En effet, une dynamo convective peut se produire avec une rotation lente (c'est-à-dire le cas où $Ro > 1$) mais la rotation favorise l'amplification des grandes échelles. Les champs magnétiques obtenus avec les modèles de dynamos peuvent être classifiés en deux types qui distinguent les dynamos dipolaires, dominés par le dipôle axial, et d'autres configurations, appelées sous le terme générique de dynamos multipolaires. Les simulations numériques de dynamos convectives montrent que les dynamos dipolaires ne sont plus obtenues avec un nombre de Rossby Ro qui augmente (Gastine et al., 2012; Schrinner et al., 2014). Les observations d'étoiles révèlent également que la rotation rapide tend à augmenter le dipôle (Shulyak et al., 2017). Dans le cas d'une rotation rapide ($Ro < 1$), ce qui correspond à une période de l'ordre de quelques millisecondes, alors une dynamo $\alpha\Omega$ similaire à celle du Soleil pourrait avoir lieu dans une proto-étoile à neutrons et générer un champ dipolaire de l'ordre de 10^{15} G. L'étude de C. Thompson et Duncan (1993) a posé les bases d'une dynamo convective dans une PNS en donnant des ordres de grandeur. L'estimation de la diffusion magnétique dans la PNS indique que le nombre de Reynolds magnétique $Rm \gg 1$ est très grand, ce qui rend une dynamo convective très probable. Toutefois, aucune étude numérique n'a testé leurs prédictions pendant près de 25 ans. Les premières simulations d'une dynamo convective dans une PNS ont été effectuées en 2020 et ont montré des résultats prometteurs pour la formation des magnétars (Raynaud et al., 2020). Ces simulations se basent sur la structure interne d'une PNS à $t = 200$ ms après le rebond, provenant de simulations 1D de supernova par effondrement gravitationnel (Hüdepohl, 2014) et obtiennent deux branches de dynamos différentes selon le nombre de Rossby : une branche

dite «faible» qui correspond aux dynamos oscillantes de type solaire pour $Ro > 0.2$ et une branche dite «forte» avec une énergie magnétique jusqu'à une dizaine de fois plus élevée que l'énergie cinétique et qui suit la loi d'échelle suivante $\frac{E_{\rm mag}}{E_{\rm kin}} \propto \frac{1}{Ro}$ (Figure 2.7). Un dipôle axial

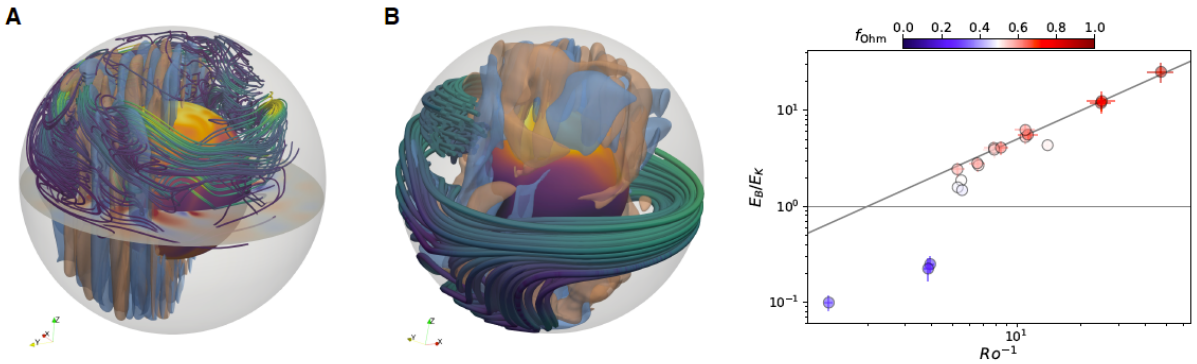


FIGURE 2.7. – Simulations numériques d'une dynamo convective dans une PNS en rotation rapide. (Panneau a) Rendu 3D de la branche faible (Panneau B) Rendu 3D de la branche forte. La couleur des lignes de champ magnétique et de la surface interne provient respectivement de l'intensité du champ et de l'entropie. Les isosurfaces bleues (rouges) du champ de vitesse radiale montrent les mouvements convectifs vers le bas (vers le haut). (Panneau de droite) Le rapport de l'énergie magnétique sur l'énergie cinétique en fonction de l'inverse du nombre de Rossby Ro. La branche forte de la dynamo apparaît pour des rotations assez fortes ($Ro < 2$). Crédit : RAYNAUD et al. (2020)

$B_{\rm dip}$ est généré par les simulations de la branche forte et son intensité, qui est entre 5×10^{14} et 10^{15} G, peut être potentiellement amplifiée par un facteur 4-5 lors de la contraction de la PNS en étoile à neutrons froide. La présence d'un champ magnétique toroïdal encore plus intense est également intéressante pour expliquer les propriétés de deux magnétars galactiques (MAKISHIMA et al., 2014; MAKISHIMA et al., 2016, 2019) (Voir Section 1.1.3). Il est ainsi tentant d'identifier la branche forte avec la formation des magnétars et la branche faible avec la formation de pulsar. À partir de ces modèles, trois scénarios peuvent être envisagés pour expliquer les différentes explosions extrêmes : les sursauts gamma longs pour une dynamo de la branche forte avec un taux de rotation parmi les plus rapides, les supernovae superlumineuses avec un taux de rotation intermédiaire pour lequel la branche forte se déclencherait plus tard, et finalement les supernovae classiques pour les périodes de rotations de l'ordre de 10 ms, qui donneraient les magnétars galactiques (RAYNAUD et al., 2020).

Le signal des ondes gravitationnelles émises par la PNS dans ce scénario pourrait également le confirmer de manière directe, bien que cela soit difficile. En effet, le signal de la convection est sous-dominant mais une signature du champ magnétique de la dynamo peut potentiellement être détectée dans le cas d'une rotation rapide : le champ magnétique extrêmement intense aug-

mente l'amplitude du signal de la convection sous la forme d'un excès d'ondes gravitationnelles de basse fréquence (Raynaud et al., 2021).

La limitation principale de ce scénario est que le champ magnétique généré par cette dynamo est enfoui sous une couche stablement stratifiée. Le champ magnétique doit donc remonter à la surface pour pouvoir influencer la dynamique de la supernova ou expliquer le dipôle de surface inféré par les observations des magnétars. Des instabilités de flottaison magnétique pourraient être capables de faire remonter des tubes de champ toroïdal mais la stratification peut également étouffer ces instabilités (Spruit et van Ballegooijen, 1982). L'interaction de la convection avec la couche stablement stratifiée doit donc être étudiée, particulièrement dans le cas de la rotation rapide. Pour cela, il faut comprendre la dynamique de cette couche stablement stratifiée où une autre instabilité, l'instabilité magnétorotationnelle, peut se développer. Cette instabilité est le troisième scénario de formation de magnétar, qui constitue le sujet central de cette thèse et que nous allons détailler dans le prochain chapitre.

Chapitre 3

L'instabilité magnétorotationnelle (la MRI)

Sommaire

3.1. Présentation générale de l'instabilité magnétorotationnelle (MRI) 80
3.1.1. Description du mécanisme de la MRI 80
3.1.2. Une dérivation simple des propriétés de la MRI 81
3.2. Les enseignements des modèles locaux dans les disques d'accrétion 85
3.2.1. Turbulence et coefficients de transport 86
3.2.2. Impact des coefficients de diffusion 88
3.2.3. Impact de la stratification en densité 91
3.3. La MRI dans les proto-étoiles à neutrons 93
3.3.1. Étude locale de l'amplification du champ magnétique 94
3.3.2. Impact des neutrinos dans une proto-étoile à neutrons 95
3.3.3. Impact de la stratification thermique stable 100
3.3.4. D'une description locale vers une géométrie globale 101
3.4. Conclusion 102

Dans le précédent chapitre, nous avons montré que les magnétars pouvaient potentiellement être formés par deux scénarios différents : la conservation du flux magnétique d'un champ fossile et une dynamo convective en présence de rotation rapide. Un autre scénario a été proposé pour expliquer l'amplification du champ magnétique jusqu'à des valeurs typiques des magnétars dans le cas d'une rotation rapide : l'instabilité magnétorotationnelle (MRI) (Akiyama et al., 2003). Cette instabilité due à la rotation différentielle a été depuis longtemps étudiée dans les disques d'accrétion mais est aussi applicable au contexte des supernovae. Ce chapitre a pour but d'expliquer la MRI en partant des éléments physiques indispensables à l'instabilité puis en ajoutant des ingrédients physiques réalistes au fur et à mesure. Nous commencerons donc par expliquer le mécanisme de l'instabilité dans un cas simple et en dérivons les propriétés générales. Nous nous concentrerons ensuite sur les résultats principaux des études de la MRI dans les disques d'accrétion, en particulier l'effet des diffusivités (visqueuse, magnétique et thermique) et

de la stratification. Finalement, nous détaillerons les conditions d'application de la MRI qui sont spécifiques aux supernovae par effondrement gravitationnel comme l'impact des neutrinos et la stratification stable dans la PNS.

3.1. Présentation générale de l'instabilité magnétorotationnelle (MRI)

Un écoulement en rotation différentielle peut être instable à différentes instabilités en présence d'un champ magnétique. Dans le cas hydrodynamique, un écoulement est instable lorsque le moment cinétique décroît avec le rayon cylindrique s, ce qui correspond au critère de Rayleigh $\frac{d(s^2\Omega)}{ds} < 0$. La stabilité en présence d'un champ magnétique a été décrite pour la première fois par Velikhov (1959) puis Chandrasekhar (1960) d'un point de vue théorique. Son importance astrophysique a pris de l'ampleur en 1991 lorsque la MRI a été proposée dans l'article de Balbus et Hawley (1991) pour expliquer le phénomène d'accrétion de matière sur un astre central, observé dans les disques astrophysiques. En effet, une évacuation efficace du moment cinétique est nécessaire pour que la matière tombe vers l'objet central sous l'effet de la gravité lors du phénomène d'accrétion et jusqu'alors aucun procédé ne permettait de trouver les bons ordres de grandeur de taux d'accrétion. Bien que cette instabilité ait été décrite particulièrement dans les disques d'accrétion, nous essayerons de donner dans cette section une description générale applicable à tous les plasmas astrophysiques.

3.1.1. Description du mécanisme de la MRI

Le mécanisme de fonctionnement de la MRI peut être décrit de manière schématique de la façon suivante. On suppose que l'on a un fluide conducteur en rotation différentielle dont le profile dépend uniquement du rayon cylindrique et dont la gravité est équilibrée par la force centrifuge et les forces de pressions (dans le cas d'un disque d'accrétion mince, ces forces de pressions sont négligeables, de sorte que la rotation est Képlerienne, c'est-à-dire que la force centrifuge compense seule la gravité). Pour étudier la stabilité de ce plasma, nous considérerons deux éléments de fluide placés à un même rayon r à deux hauteurs différentes (Figure 3.1). Dans le cas sans champ magnétique, si nous perturbons l'un des éléments du fluide en le déplaçant vers un rayon plus petit, la conservation du moment cinétique entraîne une augmentation de la vitesse de rotation de l'élément. Ainsi l'élément tourne maintenant plus vite que les autres éléments à son nouveau rayon et la force centrifuge plus forte qu'il subit le replace à son rayon initial. Ainsi le plasma est stable dans le cas hydrodynamique tant que la rotation différentielle ne satisfait pas le critère de Rayleigh.

Considérons maintenant le cas magnétisé le plus simple en MHD idéale avec la présence d'un champ magnétique vertical constant, dont la ligne de champ relie les deux éléments de fluide. Lorsque les éléments de fluide sont déplacés, le champ est déformé de manière à suivre

la trajectoire des éléments d'après la loi du champ gelé. Cette déformation entraîne une force de tension magnétique qui agit sur les éléments comme un ressort et transmet le moment cinétique de l'élément intérieur vers l'élément extérieur. Avec ce transfert, l'élément extérieur a une vitesse de rotation plus importante et la force centrifuge le pousse vers des rayons encore plus grands. Ainsi, la perturbation initiale se retrouve alors amplifiée, ce qui donne lieu à l'instabilité magnétorotationnelle. Puisque la loi du champ gelé est importante dans ce raisonnement, la présence de diffusion magnétique affecte l'instabilité en restreignant la déformation du champ magnétique, ce qui diminue la tension magnétique. On comprend ainsi l'apparition d'une limite inférieure à l'intensité du champ magnétique, dépendante de la diffusion, nécessaire au développement de la MRI. L'analogie du champ magnétique avec un ressort permet également de comprendre que dans le cas d'un champ trop intense, équivalent à un ressort trop rigide, les éléments ne peuvent se séparer et l'instabilité ne pourra pas se développer. Ce raisonnement simple permet de se représenter qualitativement les propriétés de la MRI que l'on peut retrouver quantitativement par les équations de la magnétohydrodynamique.

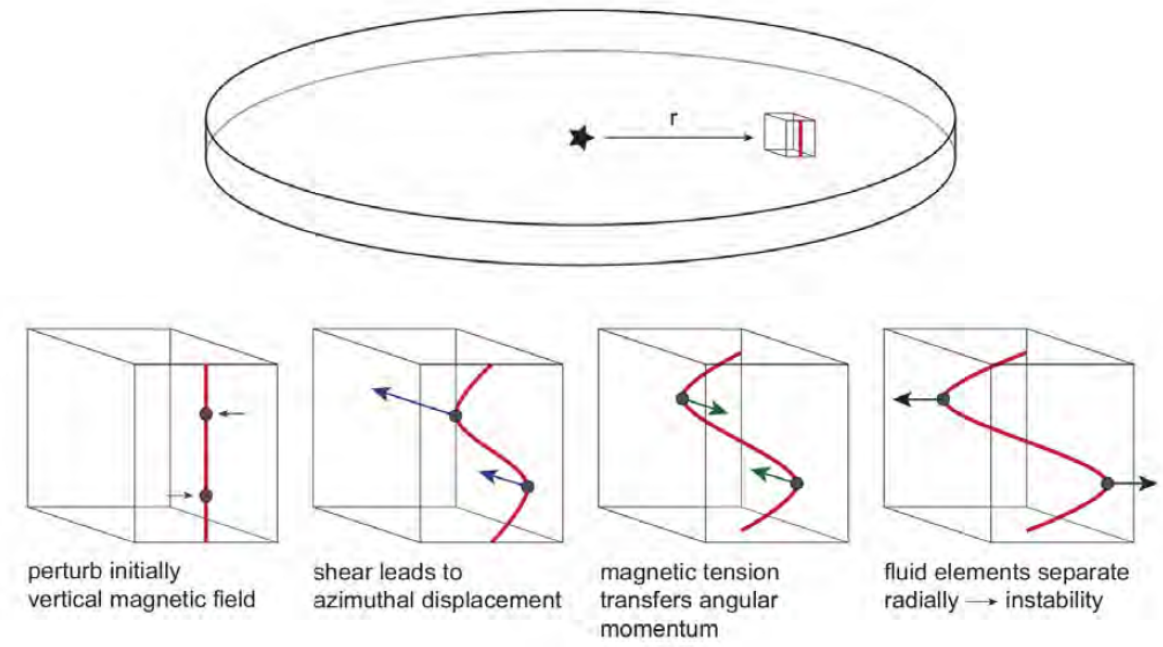


FIGURE 3.1. – Principe de la MRI dans un disque d'accrétion dont la vitesse angulaire décroît avec le rayon cylindrique s. Crédit : ARMITAGE (2015)

3.1.2. Une dérivation simple des propriétés de la MRI

Nous considérons un cas simple afin de dériver les propriétés de la MRI. Ces calculs sont inspirés de la revue sur la MRI de Sébastien FROMANG (2013). On considérera que la densité du

disque est constante $\rho = \rho_0$ et que la vitesse azimutale $\vec{U_0} = s\Omega(s)\vec{e_\phi}$ dépend uniquement du rayon cylindrique s, ce qui est dû à la contrainte de Taylor-Proudman. Il s'agit d'un théorème qui affirme que la vitesse du fluide est invariante selon l'axe parallèle à l'axe de rotation, lorsque la rotation est rapide. L'équation de Navier-Stokes pour cet écoulement statique s'écrit :

$$-\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} = 0, \tag{3.1}$$

où les forces centrifuges sont incluses dans le terme de pression. Cette équation traduit donc l'équilibre hydrostatique entre la force de pression, la force centrifuge et la gravité. Comme nous le verrons dans la suite, les profils de rotation différentielle sont souvent de la forme $\Omega(s) = \Omega_0 s^{-q}$, où q est nommé le taux de cisaillement et peut être défini de manière plus générale par $q = -\frac{s}{\Omega}\frac{d\Omega}{ds}$. Par exemple, un profil de rotation képlerienne dans les disques d'accrétion correspond à un taux de cisaillement $q = 1.5$. Nous allons étudier la stabilité linéaire de ce système en introduisant un champ magnétique uniforme et constant de la forme $\vec{B_0} = B_0\vec{e_z}$. Ces hypothèses sont équivalentes à nous placer dans un repère local dans une zone en cisaillement dont la taille est plus petite que les échelles de variations de $\vec{U_0}$ et de $\vec{B_0}$. Dans ce repère, l'approche locale (Figure 3.2) que nous présenterons ne prend pas en compte les termes de courbure dus aux variations spatiales des vecteurs unitaires ($\vec{e_s}$,$\vec{e_\phi}$,$\vec{e_z}$), ce qui revient à considérer un repère cartésien dans lequel la force de Coriolis est prise en compte avec un cisaillement du fluide linéaire ($U_0 = -qs\Omega_0$). Nous considérerons des petites perturbations

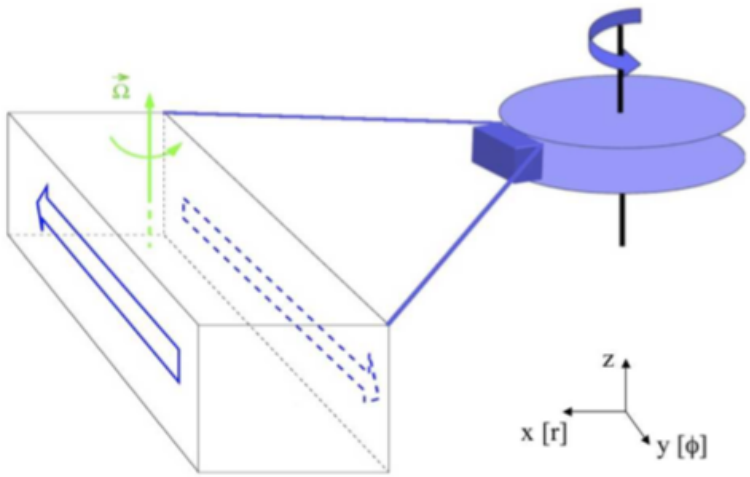


FIGURE 3.2. – Schéma illustrant l'approche locale et le système de coordonnées adoptés pour la relation de dispersion et pour les simulations avec des *shearing boxes*. Crédit : G. Lesur

axisymétriques du champ magnétique $\delta\vec{B}$ et du champ de vitesse $\delta\vec{U}$. En ne gardant que les termes linéaires, les équations de la MHD idéale deviennent alors

$$\frac{\partial \delta U_s}{\partial s} + \frac{\partial \delta U_z}{\partial z} = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \delta B_s}{\partial s} + \frac{\partial \delta B_z}{\partial z} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \delta\vec{B}}{dt} = \vec{\nabla} \times (\vec{U_0} \times \delta\vec{B}) + \vec{\nabla} \times (\delta\vec{U} \times \vec{B_0}), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \delta\vec{U}}{\partial t} + \delta\vec{U} \cdot \vec{\nabla}\, \vec{U_0} = \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\vec{\nabla} \times \delta\vec{B}) \times \vec{B_0} - 2\vec{\Omega} \times \delta\vec{U}, \tag{3.5}$$

En projetant l'équation de Navier-Stokes sur l'axe z, on voit rapidement que δU_z est constant en temps. Par souci de simplicité, nous supposons que les perturbations ont une structure purement verticale ($\frac{\partial}{\partial s} = 0$). Dans ce cas, la première équation (3.2) indique alors que δU_z est également uniforme et donc indépendant du système. Il est donc possible de la considérer comme nulle (δU_z=0). De plus, la projection de l'équation d'induction sur l'axe z montre que $\frac{\partial \delta B_z}{\partial t} = 0$. En utilisant la deuxième équation (3.3), on voit également que δB_z est uniforme et peut donc être intégré au champ $\vec{B_0}$ dans la suite des calculs. Il nous reste ainsi un système de 4 équations à 4 inconnues à résoudre. Comme les équations sont homogènes en z et en t, il est possible d'utiliser la transformée de Fourier et d'écrire les perturbations sous la forme

$$\delta X = \delta\hat{X} \exp(i(\omega t - k_z z)), \tag{3.6}$$

où le vecteur X représente les différentes composantes de $\delta\vec{U}$ et de $\delta\vec{B}$, ω est la fréquence complexe des perturbations, $\vec{k} = k_z\vec{e_z}$ le vecteur d'onde. Le système est ainsi instable si la partie imaginaire de la fréquence ω, également appelé taux de croissance $\sigma = -\Im(\omega)$, est positive ($\sigma > 0$). Cette formulation permet ainsi de s'affranchir de dérivées spatiales et temporelles en remplaçant l'opérateur $\vec{\nabla}$ par $-i\vec{k}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ par $i\omega$. Après un peu d'algèbre et en projetant sur les différents axes, les équations (3.4)-(3.5) deviennent alors

$$i\omega\delta B_s = -iB_0 k_z \delta U_s, \tag{3.7}$$

$$i\omega\delta B_\phi = -q\Omega_0 \delta B_s - iB_0 k_z \delta U_\phi, \tag{3.8}$$

$$i\omega\delta U_s = -i\frac{1}{\rho_0\mu_0} B_0 k_z \delta B_s + 2\Omega_0 \delta U_\phi \tag{3.9}$$

$$i\omega\delta U_\phi = -(2-q)\Omega_0 \delta U_s - i\frac{1}{\rho_0\mu_0} B_0 k_z \delta B_\phi, \tag{3.10}$$

où les chapeaux sur les variables ont été retirés par souci de clarté. En combinant ces équations, on obtient la relation de dispersion bicarrée suivante :

$$\omega^4 - \omega^2[2k^2 v_A^2 + \tilde{\kappa}^2] + k^2 v_A^2 [k^2 v_A^2 - 2q\Omega^2] = 0, \tag{3.11}$$

où $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}$ est la vitesse d'Alfvén, $\tilde{\kappa}^2 \equiv 2(2-q)\Omega^2$ définit la fréquence épicyclique et $k = k_z$ pour plus de généralité. Dans le cas hydrodynamique ($v_A = 0$), la relation de dispersion devient $\omega^2 - \tilde{\kappa}^2 = 0$, ce qui est stable pour $q \leq 2$. On retrouve ainsi le critère de Rayleigh appliqué à un cisaillement de la forme $\Omega \propto s^{-q}$.

La présence du champ magnétique modifie ce résultat classique et l'équation de dispersion (Eq. 3.11) a alors deux racines $\omega_\pm^2$. La somme s de ces deux racines est égale au terme $2s = 2k^2 v_A^2 + \tilde{\kappa}^2$ dans l'équation (3.11), et est toujours positive. Ainsi, si le produit des racines est également positif, alors les racines sont complexes et le système est instable. Le critère de stabilité est alors

$$k^2 v_A^2 - 2q\Omega^2 \geq 0. \tag{3.12}$$

Dans le cas où $q > 0$, il existe une valeur critique du nombre d'onde $k_c^2 = 2q\Omega^2/v_A^2$ telle que $k^2 v_A^2 - 2q\Omega^2$ soit négatif pour tout $k < k_c$. Ceci indique que le système est instable lorsque la fréquence de rotation décroît avec le rayon cylindrique. Notons à ce stade que la stabilité de l'écoulement ne dépend pas de l'intensité du champ magnétique, bien que l'intervalle des nombres d'onde instable en dépende.

De la relation de dispersion (Eq. 3.11) peuvent être déduites les propriétés du mode le plus instable : ce dernier est caractérisé par un taux de croissance σ_{max} et un nombre d'onde k_{max} selon les relations

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{q\Omega}{2}, k_{\text{max}}^2 v_A^2 = q\left(1 - \frac{q}{4}\right)\Omega^2. \tag{3.13}$$

Pour une rotation keplérienne ($q = 1.5$), le taux de croissance est de $\sigma_{\text{max}} = 0.75\Omega$ et le nombre d'onde est de l'ordre de $k_{\text{max}} = 0.9375\frac{\Omega}{v_A}$. La structure des modes décrits ici consiste en des couches horizontales alternantes de vitesses radiales et de champ magnétique radial (Figure 3.3). Le cisaillement entraîne la génération de champ magnétique toroïdal et de vitesse azimutale. Ces modes croissants sont appelés *channel modes*. Ces modes sont également des solutions du système d'équations non linéaires de la MHD et peuvent donc potentiellement continuer à croître jusqu'à de grandes amplitudes. Ces résultats ont des conséquences astrophysiques importantes : dans le cas de rotation rapide, le taux de croissance peut ainsi être très élevé dans les disques d'accrétion comme dans les supernovae. Ce taux de croissance important a rendu la MRI populaire pour expliquer l'amplification du champ magnétique dans les disques d'accrétion comme dans les supernovae. La longueur d'onde du mode le plus instable $\lambda_{\text{max}} \propto \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho_0 \Omega}}$ dépend linéairement du champ magnétique. Pour un champ «faible», cette longueur d'onde est courte, rendant difficile l'étude par simulation numérique de l'amplification du champ magnétique sur plusieurs ordres de grandeur. Pour compenser ce problème, des simulations locales permettent d'étudier la MRI dans un domaine réduit du disque ou de la proto-étoile à neutrons.

La situation considérée ci-dessus est volontairement simplifiée pour la compréhension du mécanisme physique et les propriétés basiques de la MRI. Les hypothèses que les perturbations sont axisymétriques et ne dépendent pas du rayon radial peuvent être relâchées. Il existe ainsi des modes dépendants du rayon cylindrique s et tous les modes peuvent apparaître à partir

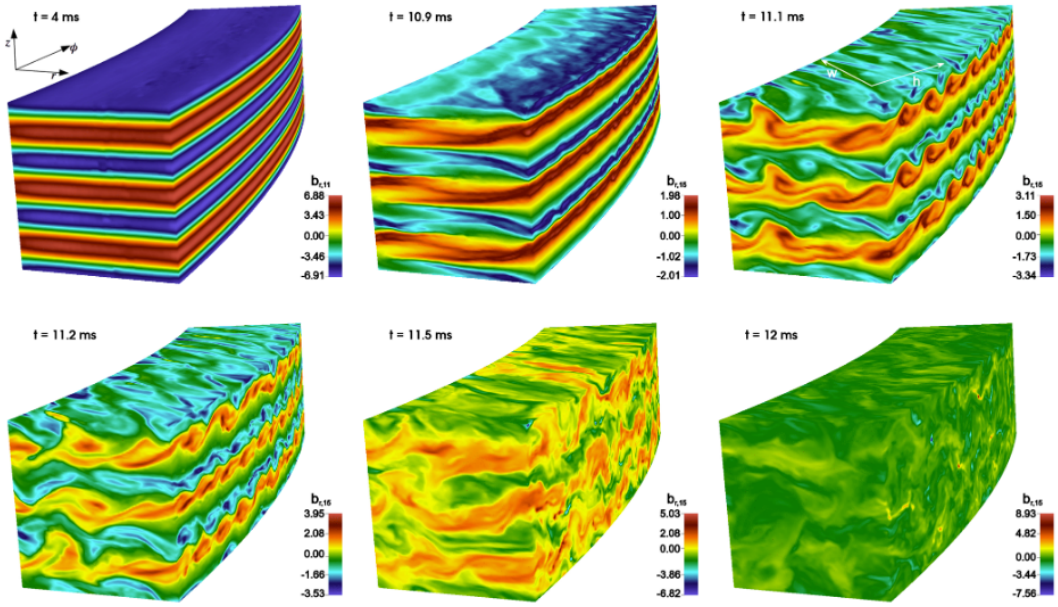


FIGURE 3.3. – Exemple de *channel modes* et de la turbulence liée aux instabilités parasites dans un modèle de *shearing box*. Distribution de la composante radiale du champ magnétique à six temps successifs de la simulation. La première image montre la structure linéaire des *channel modes*. Crédit : REMBIASZ, OBERGAULINGER et al. (2016)

d'un champ magnétique radial B_s (BALBUS et HAWLEY, 1991). Des modes non axisymétriques ont également été trouvés et ceux-ci sont même nécessaires à l'obtention de l'instabilité dans le cas d'un champ initial purement toroïdal (HAWLEY et BALBUS, 1992). Ainsi la MRI est une instabilité robuste qui croît du moment qu'un champ magnétique est présent dans un écoulement cisaillé où la fréquence de rotation décroît avec le rayon.

3.2. Les enseignements des modèles locaux dans les disques d'accrétion

Nous avons décrit dans la section précédente les aspects linéaires de la MRI, qui restent valides tant que les perturbations ne sont pas très grandes. Avec la croissance de la MRI, les termes non linéaires vont finir par influencer l'écoulement. Les outils les mieux adaptés pour l'étude des termes non linéaires et de la turbulence qui en découle sont les simulations numériques. En particulier, pour résoudre la longueur d'onde courte de la MRI, un modèle basé sur l'approche locale a été utilisé pour résoudre les équations de la MHD : le modèle de *shearing box* (Figure 3.2). Le principe de ce modèle est de considérer que le cisaillement est constant dans une zone de petite taille de l'objet astrophysique et que cette zone est constituée de petites boites dont

les propriétés statistiques de l'écoulement et du champ magnétique sont identiques, c'est-à-dire que les quantités comme la vitesse, le champ magnétique, moyennées temporellement et spatialement, ne varient pas. Ces hypothèses sont valides dans le cas d'un écoulement turbulent avec une taille caractéristique plus petite que la boite, et elles permettent de considérer des conditions aux limites périodiques. Les détails numériques de ce modèle seront présentés dans le chapitre 4. Les premières études numériques en 2D ont permis de confirmer les propriétés linéaires des *channel modes* et permis de caractériser la transition vers la turbulence : les couches oscillantes des *channel modes* génèrent un champ magnétique fort se déplaçant radialement, ce qui produit des gradients de vitesse et de forts courants (Hawley et Balbus, 1991). Ceux-ci sont sujets à des instabilités de type Kelvin-Helmholtz, qui grandissent sur le motif des *channel modes*, perturbent l'écoulement et conduisent au développement de la turbulence (Figure 3.3) (Goodman et Xu, 1994).

3.2.1. Turbulence et coefficients de transport

La MRI est étudiée dans les disques d'accrétion pour expliquer l'évacuation du moment cinétique vers l'extérieur et donc les taux d'accrétion observés sur l'objet central. Ce transport de moment cinétique peut être quantifié par la mesure des tenseurs des contraintes de Reynolds et de Maxwell. Le tenseur des contraintes de Reynolds est un tenseur utilisé pour décrire l'effet des fluctuations de la turbulence sur l'équation de Navier-Stokes moyennée (dans une démarche similaire à celle de la théorie dynamo de champ moyen). Le tenseur des contraintes de Maxwell permet de représenter l'interaction de la force de Lorentz avec le fluide et correspond aux contraintes appliquées à l'écoulement moyen par un champ magnétique. La composante $s\phi$ de ces tenseurs affecte l'évolution de la vitesse de rotation moyenne $\overline{U}_\phi$ dépendant du rayon cylindrique s, ce qui nous intéresse pour le transport de moment cinétique. Celui-ci est donc caractérisé par les composantes $s\phi$ des tenseurs de contraintes de Maxwell et de Reynolds définies par

$$M_{\mathrm{s}} = -\frac{1}{\mu_0}\langle B_s\, B_\phi\rangle\,, \tag{3.14}$$

$$R_{\mathrm{s}} = \rho\langle u_s\, u_\phi\rangle\,, \tag{3.15}$$

où u_s, u_ϕ sont la vitesse radiale et azimutale en coordonnées cylindriques et les crochets $\langle\cdot\rangle$ représentent une moyenne sur le volume. Pour obtenir un nombre sans dimension, ces composantes du tenseur de contraintes peuvent être normalisées soit par la pression thermique $\langle P\rangle$ dans le contexte des disques d'accrétion soit par la vitesse caractéristique du système due à la rotation, typiquement $\rho U_{\mathrm{car}} = \rho L_z \Omega$. Les premières simulations utilisant un modèle de *shearing box* avec une densité homogène et un champ magnétique vertical ont établi des résultats clés qui sont encore valables aujourd'hui (Hawley et Balbus, 1992 ; Hawley et al., 1995) :

— Dans les cas où la dissipation n'empêche pas le développement de *channel modes*, le comportement non linéaire de la MRI entraîne toujours de la turbulence MHD subsonique statistiquement stationnaire, qui transporte le moment cinétique vers l'extérieur.
— Le tenseur de contraintes de Maxwell est beaucoup plus élevé que le tenseur de Reynolds.
— Le transport de moment cinétique ainsi que l'énergie magnétique moyenne augmente avec l'intensité du champ magnétique vertical.
— Les résultats ci-dessus restent valides si le champ magnétique initial est toroïdal, bien que le transport soit légèrement plus faible.

Ces résultats ont été obtenus avec la présence d'un flux magnétique net (soit vertical soit azimutal), qui est conservé dans une simulation à cause des conditions aux limites périodiques. Le cas d'un champ magnétique aléatoire sans flux net, étudié en premier par Hawley et al. (1996), est qualitativement différent du cas avec flux net. En effet, l'instabilité n'est plus linéaire dans ce cas, bien qu'une turbulence MHD se développe de manière robuste. La Figure 3.4 présente un exemple de la turbulence MHD dans une simulation sans flux net. Le transport ne dépend pas de l'intensité du champ magnétique initial mais il est plus faible d'environ un ordre de grandeur par rapport au cas avec flux net. Finalement, un mécanisme dynamo non linéaire est également nécessaire pour entretenir la turbulence sur de longues échelles de temps. Sinon, les dissipations visqueuses et résistives font décroître le champ magnétique et l'écoulement redevient laminaire. Une caractéristique importante de la MRI a été confirmée : même "faible", la rétroaction du champ magnétique, via la force de Lorentz est indispensable au développement de la MRI. La dynamo MRI ne peut donc pas être décrite par la théorie dynamo cinématique et il s'agit d'une instabilité sous-critique, qui a besoin d'une amplitude minimale de perturbations pour se développer (Rincon et al., 2007 ; Riols et al., 2013).

Les premières simulations sans flux net dans le cadre de la MHD idéale ont vu apparaître un problème : le transport lié à la turbulence était une fonction décroissante de la résolution (Fromang et J. Papaloizou, 2007 ; Pessah et al., 2007 ; Simon et al., 2009 ; Guan et al., 2009 ; Bodo et al., 2011). Comme la seule différence entre ces simulations est la taille des cellules et le schéma numérique, les échelles les plus grandes de la simulation sont affectées par ce qui se passe aux plus petites échelles qui sont dissipées numériquement. Ainsi un traitement réaliste des petites échelles est obligatoire et l'introduction d'une viscosité et une résistivité physique a permis de corriger ce problème (Fromang et al., 2007). Avant de passer à l'effet des coefficients de diffusion, le problème de convergence de la valeur du transport a également été étudié dans le cas avec flux net toroïdal (Guan et al., 2009) ou vertical (Simon et al., 2009). Ces études ont montré la convergence du transport, ce qui peut s'interpréter par le fait que le flux net aide à réactiver constamment la MRI ou qu'il introduise une échelle de longueur typique indépendante de la grille.

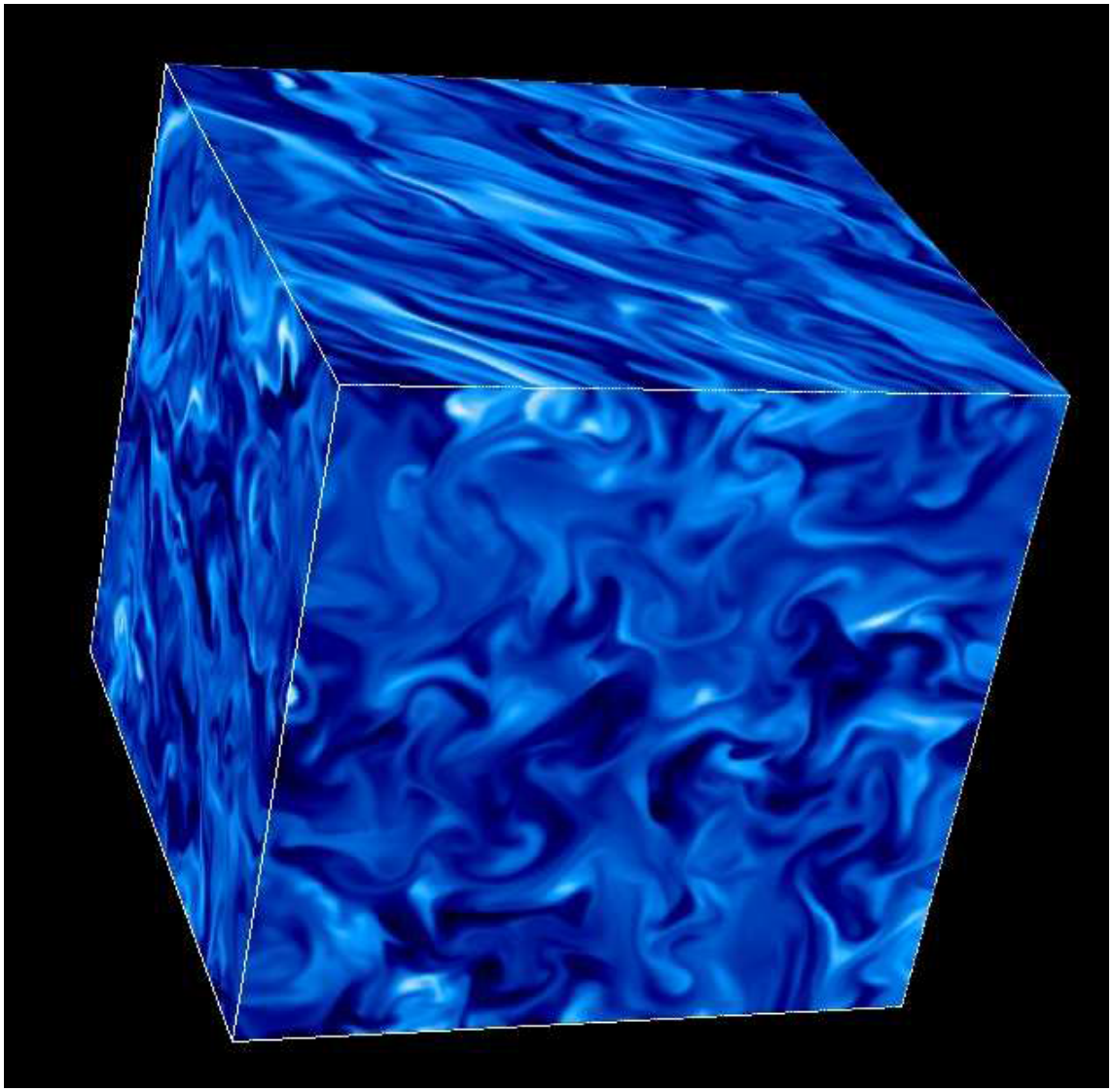


FIGURE 3.4. – Rendu 3D illustrant la structure typique du champ magnétique toroïdal dans une simulation de la MRI dans le cadre d'un modèle de *shearing box*. Crédit : FROMANG (2013)

3.2.2. Impact des coefficients de diffusion

Les études précédentes se plaçaient majoritairement dans le cadre de la MHD idéale et négligent les processus de diffusion, bien qu'une diffusion numérique ait lieu à l'échelle de la grille des simulations. Pour étudier les effets d'une dissipation physique explicite plutôt que numérique, la viscosité et la résistivité du plasma ont ensuite été ajoutées aux modèles. D'un point de vue linéaire, les études montrent que la dissipation tend à réduire le taux de croissance de la MRI et peut la stabiliser (LESUR et LONGARETTI, 2007 ; PESSAH et CHAN, 2008 ; LATTER et al., 2009). Pour comprendre l'importance de cette dissipation, le cas d'une forte résistivité sans

viscosité est particulièrement utile. Le terme supplémentaire dans l'équation d'induction correspond à ajouter un terme de diffusion ηk^2 dans le taux de croissance de la MRI $\sigma_\eta = \sigma - k^2\eta$. Puisque celui-ci est de l'ordre de $\sim \Omega$ et que le nombre d'onde est de $kv_A \sim \Omega$ pour le mode le plus instable, la MRI est fortement affectée lorsque

$$\Lambda_\eta = \frac{v_A^2}{\eta\Omega} \leq 1, \tag{3.16}$$

où le nombre sans dimension Λ_η est appelé le nombre d'Elsasser. Les processus de dissipation affectent de manière plus importante les petites échelles (grand nombre d'onde k) et les grandes échelles nécessitent une diffusion plus importante pour être affectées. Néanmoins, le critère simple provenant de l'analyse linéaire que le nombre d'Elsasser résistif doit être plus grand que 1 pour que la MRI puisse se développer a été confirmé par des analyses plus détaillées que l'ordre de grandeur présenté ici (Lesur et Longaretti, 2007 ; Pessah et Chan, 2008). De la même manière, le nombre d'Elsasser visqueux peut être défini pour l'effet de la viscosité

$$\Lambda_\nu = \frac{v_A^2}{\nu\Omega}. \tag{3.17}$$

Nous nous plaçons maintenant dans un régime sans résistivité mais avec une viscosité importante, c'est-à-dire quand l'intensité du champ magnétique est plus faible que l'intensité critique $B_{\text{visq}} \equiv \sqrt{\mu_0\rho\nu\Omega}$, le taux de croissance et le nombre d'onde du mode le plus instable sont donnés par (Pessah et Chan, 2008 ; Masada et Sano, 2008)

$$\sigma = \left(\frac{q\Lambda_\nu}{\sqrt{q(2-q)}}\right)^{1/2}\Omega, \tag{3.18}$$

$$k = \left(\frac{\tilde{\kappa}}{\nu}\right)^2. \tag{3.19}$$

En comparaison du cas idéal, le taux de croissance est plus faible et proportionnel au champ magnétique et la longueur d'onde de la MRI est déterminée uniquement par l'échelle typique de la viscosité et plus par le champ magnétique. On notera également que la MRI peut se développer dans un régime visqueux avec un nombre d'Elsasser visqueux $\Lambda_\nu \ll 1$ contrairement au cas résistif.

Les études non linéaires dont les simulations numériques avec une viscosité et une résistivité physique ont permis de résoudre le problème de convergence avec la résolution (Fromang et al., 2007). Le résultat le plus robuste est que le transport de moment cinétique et la turbulence augmentent avec le nombre de Prandtl magnétique Pm (Figure 3.5), défini par

$$Pm \equiv \frac{\nu}{\eta}. \tag{3.20}$$

Ce résultat est particulièrement robuste puisqu'il a été observé dans le cas sans flux net (Fromang et al., 2007), avec un flux net toroïdal (Simon et Hawley, 2009; Meheut et al., 2015) et un flux net vertical (Longaretti et Lesur, 2010). Ce résultat peut sembler intuitif dans le

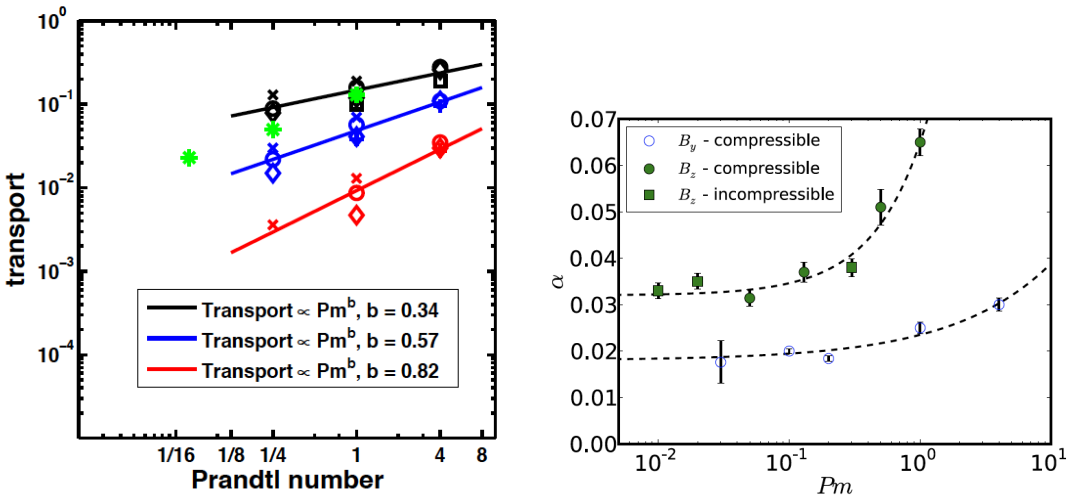


Figure 3.5. – (Gauche) Taux de transport de moment cinétique en fonction du nombre de Prandtl magnétique dans un modèle de *shearing box* en présence d'un flux net vertical. Les couleurs rouge, vert, noir correspondent à des intensités croissantes du champ magnétique vertical et les symboles (carrés, diamants, cercles, croix) à des valeurs décroissantes de la viscosité. Les points verts correspondent à des simulations de haute résolution avec une faible viscosité. Crédit : Longaretti et Lesur (2010) (Droite) Saturation du transport de moment cinétique dans le régime à bas Pm. Transport moyen de moment cinétique dans les simulations avec un flux net toroïdal (cercles bleu) et avec un flux net vertical (vert). Les lignes pointillées sont des lois de puissance avec un exposant de 0.58 et de 1.1, respectivement dans le cas avec flux net horizontal et avec flux net vertical (Meheut et al., 2015)

cas où la viscosité est constante et la résistivité diminue. Le champ magnétique est alors moins dissipé, donc plus intense, ce qui donne un transport plus élevé. Toutefois, lorsque l'on augmente la viscosité à résistivité constante, il est beaucoup moins intuitif que la turbulence soit plus vigoureuse et le champ magnétique plus élevé. Il y a donc une compétition entre les effets du nombre d'Elsasser et du nombre de Prandtl magnétique (Pessah, 2010; Longaretti et Lesur, 2010). Ce résultat est important puisque les conditions réalistes des disques accrétion correspondent à un régime où le nombre de Prandtl magnétique est faible $Pm < 1$. Dans ce régime, il est plus difficile d'obtenir une dynamo auto-entretenue : la possibilité de cette dynamo dans le cas sans flux net a été particulièrement étudiée dans l'espace de Fourier (Herault et al., 2011; Riols et al., 2015, 2017; Mamatsashvili et al., 2020). De nombreuses configurations et ajouts d'ingrédients physiques ont également été considérés pour obtenir un régime de la

MRI à bas nombre de Prandtl magnétique Pm. On peut notamment citer le cas d'un flux net toroïdal et vertical où une convergence du transport a été trouvée dans ce régime pour $Pm < 0.1$ (Meheut et al., 2015) ou encore les études du rapport d'aspect entre les différentes tailles (L_x, L_y, L_z) de *shearing box* (J. Shi et al., 2010; J.-M. Shi et al., 2016; Nauman et Pessah, 2016; Walker et Boldyrev, 2017; Nauman et Pessah, 2018). Les boites avec une forte hauteur ont ainsi montré des facilités à produire une dynamo auto-entretenue. La variation des rapports de forme L_z/L_x et L_y/L_x peut donc autant influencer la MRI que le nombre de Prandtl magnétique.

3.2.3. Impact de la stratification en densité

Un ingrédient physique caractéristique aux disques d'accrétion est négligé dans les études présentées dans les sections précédentes : la stratification en densité dans la direction verticale. En effet, un disque d'accrétion a une densité qui diminue avec la hauteur z, du fait de la composante verticale de la gravité. Dans un premier temps, l'influence de cette stratification semblait également résoudre le problème de convergence du transport du moment cinétique (J. Shi et al., 2010). Cependant, des études suivantes ont montré que ce problème se posait également dans le cas stratifié, bien que la dépendance à la résolution soit moins forte (Bodo et al., 2014; Ryan et al., 2017). Le changement principal dû à l'ajout d'un gradient de densité affecte la dynamique du champ magnétique toroïdal moyenné dans les directions radiale et azimutale : son intensité devient modulée en temps (Brandenburg et al., 1995; Gressel, 2010; J. Shi et al., 2010; Davis et al., 2010; Simon et al., 2012; Donnelly, 2014; Deng et al., 2019). Dans le cas stratifié, des effets de la force de flottaison avec champ magnétique s'ajoute aux effets non-linéaires de la MRI, ce qui peut donner lieu à un effet α et peut contribuer à la migration verticale du champ magnétique moyen vers les couches hautes du disque. Ces effets produisent un motif régulier et périodique visible sur la Figure 3.6. Ce comportement est ainsi similaire aux comportements des dynamos de champ moyen présentées dans le chapitre 2 et ce diagramme est donc appelé diagramme papillon par analogie avec le diagramme papillon des taches solaires. Les modes de grande échelle du champ magnétique toroïdal et leur dynamique ont également été étudiés dans le cas de simulations non stratifiées (Lesur et Ogilvie, 2008; Herault et al., 2011; Guan et Gammie, 2011; J.-M. Shi et al., 2016; Riols et al., 2017; Walker et Boldyrev, 2017; Mamatsashvili et al., 2020). Dans les cas d'une boite avec un grand rapport d'aspect vertical ou azimutal, un comportement quasi périodique peut également être trouvé mais le diagramme papillon est souvent moins régulier et plus chaotique que dans le cas d'un modèle avec une stratification en densité.

Pour comprendre le cycle de la dynamo due à la MRI, il est utile de se placer dans le cadre de la théorie des dynamos de champ moyen. La présence de l'effet Ω pour générer le champ toroïdal à partir du champ poloïdal ne fait pas de doute dû au caractère indissociable de la MRI et de rotation différentielle. Pour compléter la boucle, deux mécanismes qui permettent de régénérer le champ poloïdal à partir du champ toroïdal ont été proposés : une résistivité

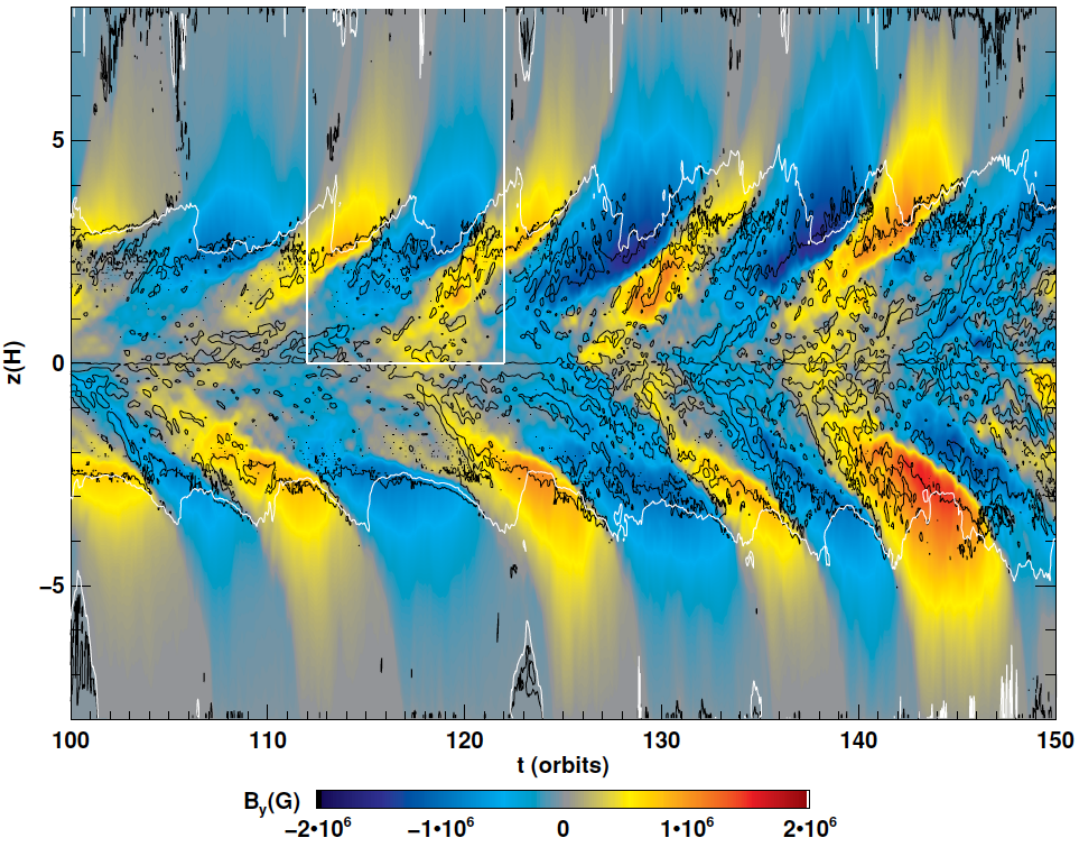


FIGURE 3.6. – Diagramme spatio-temporel de la composante toroïdale du champ magnétique moyenné dans la direction radiale dans une simulation stratifiée dans un modèle de *shearing box* sans flux net. Un champ magnétique toroïdal moyen est généré dans le plan du disque avant d'être éjecté vers la surface du disque de manière périodique. Ce rendu rappelle les diagrammes papillon des simulations de dynamos stellaires. Crédit : J. SHI et al. (2010)

turbulente non diagonale (LESUR et OGILVIE, 2008) ou le classique effet α (BRANDENBURG et al., 1995). Les composantes non-diagonales du tenseur de résistivité turbulente β_{ij} ont effectivement la capacité de coupler le champ radial et toroïdal par leurs gradients verticaux. Des composantes non négligeables ont ainsi été trouvées dans les simulations locales de la MRI (LESUR et LONGARETTI, 2009; GRESSEL, 2010) et pourraient être responsables de la propagation des motifs réguliers (GRESSEL, 2010; HERAULT et al., 2011). Les composantes diagonales du tenseur α ont également été estimées en négligeant les autres composantes, c'est-à-dire sous l'hypothèse que la force électromotrice est proportionnelle au champ magnétique moyen (ZIEGLER et RÜDIGER, 2001). L'étude la plus complète est celle de GRESSEL et PESSAH (2015) qui calcule les coefficients du tenseur α et de la résistivité turbulente β à l'aide de la méthode de *test field*. Bien qu'une composante non diagonale de la résistivité turbulente ait été

trouvée, la période de la dynamo obtenue correspond aux prédictions théoriques d'une dynamo $\alpha\Omega$. La prédiction quantitative du mécanisme $\alpha\Omega$ est également robuste à la variation du taux de cisaillement, ce qui confirme que l'effet α régénère le champ poloïdal. Cette étude a également mis en évidence une particularité de la MRI sur la symétrie des coefficients non diagonaux du tenseur α : la composante $\alpha_{s\phi}$ est symétrique avec la composante $\alpha_{\phi s}$ alors que la prédiction théorique pour une turbulence isotrope indique que ces composantes sont antisymétriques (Krause et Raedler, 1980). Cela témoigne que le champ magnétique radial et le champ toroïdal sont affectés de manière anisotrope dans la turbulence MRI.

Tous les résultats présentés dans cette section décrivent une partie locale du disque. Des simulations globales du disque de la MRI de disque d'accrétion ont également été effectuées avec l'amélioration des techniques numériques et l'augmentation de la puissance de calcul. Ces résultats ne seront pas présentés dans cette thèse puisqu'il est plus difficile d'en tirer des conclusions intéressantes pour les supernovae du fait de leurs conditions physiques très différentes (la géométrie cylindrique, les effets MHD non idéaux, tels que l'Effet Hall ou la diffusion ambipolaire, ainsi qu'un vent magnétique lancé depuis la surface du disque).

3.3. La MRI dans les proto-étoiles à neutrons

L'importance potentielle de la MRI dans les supernovae gravitationnelles a été soulignée par Akiyama et al. (2003). La MRI peut avoir deux effets sur la supernova : convertir l'énergie de la rotation différentielle en énergie thermique à l'extérieur de la proto-étoile à neutrons (PNS) et générer un champ magnétique intense à grande échelle dans la PNS qui va influencer la dynamique de la supernova. Pour que la PNS soit instable à la MRI, une rotation différentielle qui décroît avec le rayon doit se développer à partir d'un cœur de fer en rotation solide (Ω constant). Les simulations numériques sans champ magnétique montrent que cette rotation différentielle apparaît naturellement à cause de la différence entre les profils de densités du cœur de fer et de la PNS (Akiyama et al., 2003; Ott et al., 2006). Du point de vue de la rotation, la PNS est divisée en deux zones : un cœur en rotation solide jusqu'à une dizaine de kilomètres et une zone extérieure en rotation différentielle (Figure 3.7). Dans les cas de rotation rapide, la rotation dans cette zone extérieure instable à la MRI est de l'ordre de $\Omega \sim 1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, ce qui implique que le taux de croissance linéaire est suffisamment rapide pour amplifier le champ magnétique avant le début de l'explosion qui a lieu quelques centaines de millisecondes après le rebond. Le taux de cisaillement q trouvé dans ces simulations est compris dans l'intervalle $1.25 < q < 1.5$. Il s'agit d'une première différence avec les disques d'accrétion : la gravité est principalement compensée par la force induite par la pression et non par la force centrifuge, ce qui ouvre la possibilité d'un profil de rotation non képlerien ($q \neq 1.5$). Ces profils de rotations restent valides en présence d'un champ magnétique dans les simulations en 2D et 3D de supernova magnétorotationnelle qui ne peuvent résoudre la MRI (Bugli et al., 2020; Bugli et al., 2021). De plus, en combinant la structure de la PNS due aux gradients d'entropie

et de fraction électronique et le profil de rotation, une PNS de 40 km peut être divisée en trois zones pour l'amplification du champ magnétique : un cœur stable à la rotation et à la convection de 10 km, une zone interne instable à la convection et à la MRI de l'ordre de 15 km et une zone externe stable à la convection et instable à la MRI de 15 km. Dans les simulations de coalescences d'étoiles à neutrons, un profil de rotation similaire est obtenu à la différence que le cœur de l'étoile à neutrons hypermassive est en rotation différentielle positive plutôt qu'en rotation solide (Panneau de droite de la Figure 3.7).

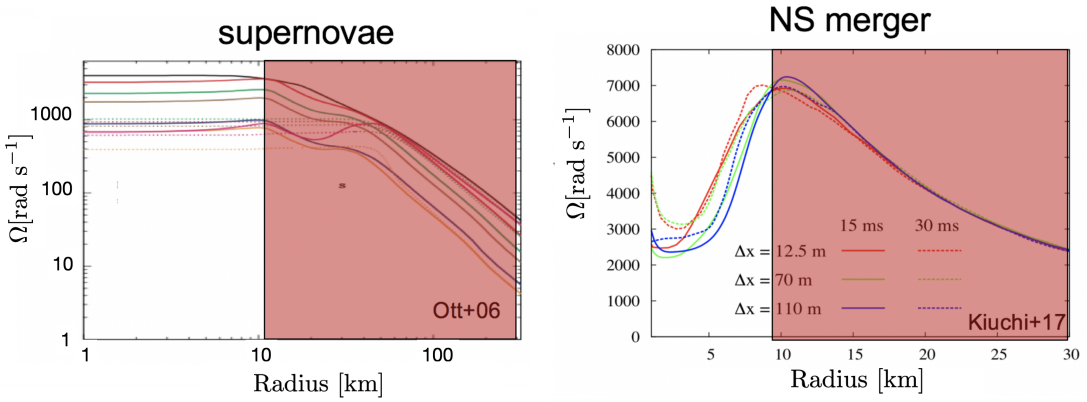


FIGURE 3.7. – (Gauche) Profils de rotation provenant de simulations de l'effondrement d'un cœur de fer en rotation solide avec différents taux de rotation solide initiaux par OTT et al. (2006). (Droite) Profils de rotation aux temps $t = 15$ ms et $t = 30$ ms (pointillés) provenant de simulations de coalescence d'étoiles à neutrons avec des résolutions différentes par KIUCHI et al. (2018). Δx correspond à la résolution de chaque simulation numérique. Les zones instables à la MRI sont indiquées par un filtre rouge.

3.3.1. Étude locale de l'amplification du champ magnétique

Les profils de rotations présentés en Fig. 3.7 impliquent que les PNS en rotation rapide sont instables à la MRI et que celle-ci est potentiellement importante pour l'évolution du champ magnétique. Les premières simulations locales de la MRI ont cherché à confirmer ces prédictions et les modèles de *shearing box* ont montré que le champ magnétique pouvait être amplifié sur des petites échelles jusqu'à des intensités de $> 10^{14}$ G (Figure 3.8) (OBERGAULINGER et al., 2009). Puisque le taux de cisaillement q est un nouveau paramètre libre dans le cadre des supernovae, l'étude de son impact a montré qu'un profil de rotation avec une rotation différentielle plus importante entraînait un champ magnétique plus important (MASADA et al., 2012). Dans le cas avec flux net, les simulations locales montrent qu'une amplification du champ magnétique d'un facteur ~ 10 est atteignable pendant la phase de croissance exponentielle des *channel modes* de la MRI avant que les instabilités parasites n'interrompent cette croissance (REMBIASZ,

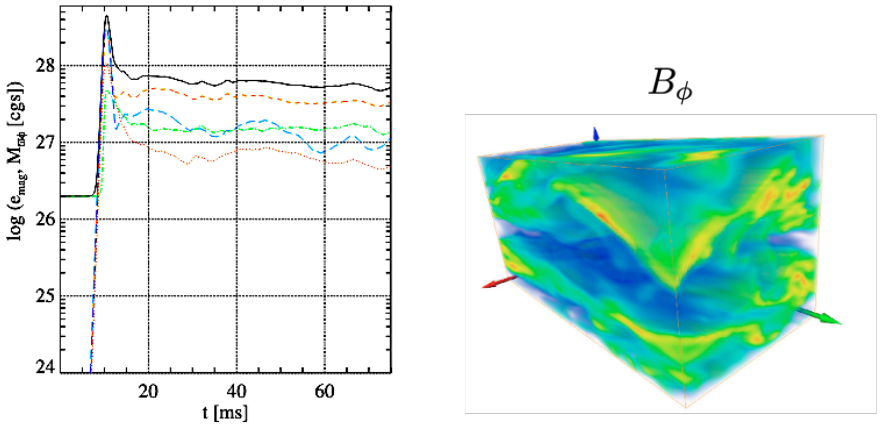


FIGURE 3.8. – (Gauche) Évolution de la densité moyenne d'énergie magnétique (trait plein) pour un modèle 3D. La contribution radiale s correspond à la ligne pointillée rouge, la contribution azimutale ϕ la ligne tiretée marron, la contribution verticale z la ligne verte et la valeur absolue du tenseur de contraintes de Maxwell $M_{s\phi}$ en bleu. La fréquence de rotation du modèle est de $\Omega = 1900\,\mathrm{s}^{-1}$ et le champ magnétique vertical initial $B_z^0 = 2 \times 10^{13}$ G. (Droite) Rendu volumique 3D du champ magnétique azimutal à $t = 37.2$ ms d'un modèle avec un champ magnétique vertical initial $B_z^0 = 3 \times 10^{13}$ G. Crédit : OBERGAULINGER et al. (2009)

GUILET et al., 2016 ; REMBIASZ, OBERGAULINGER et al., 2016). Il faut toutefois noter que ces simulations sont assez similaires aux simulations des disques d'accrétion et ne prennent pas en compte les autres conditions spécifiques aux proto-étoiles à neutrons comme les neutrinos et la stratification stable.

3.3.2. Impact des neutrinos dans une proto-étoile à neutrons

Une autre condition physique spécifique d'une PNS est la présence de neutrinos, qui interagissent de manière importante avec la matière, du fait de la haute densité et de la température élevée de la PNS. En effet, le libre parcours moyen l_ν (la distance moyenne que parcourt un neutrino avant d'interagir avec la matière) est plus faible que le rayon de la PNS (Panneau de gauche de la Figure 3.9) et les neutrinos sont donc piégés à l'intérieur de celle-ci. Le libre parcours moyen des neutrinos est défini par

$$l_\nu \equiv \frac{l_\nu}{n\sigma_\nu} = \frac{\rho}{\chi_\nu}, \tag{3.21}$$

où n est la densité de particules absorbantes ou diffusantes, σ_ν la section efficace des interactions des neutrinos avec ces particules, $\chi_\nu \equiv \frac{n\sigma_\nu}{\rho}$ est l'opacité des neutrinos. Le libre parcours moyen

des neutrinos dépend de leur énergie et est donc moyenné sur les énergies de la façon suivante

$$\langle l_\nu \rangle \equiv \left(\int \frac{l_\nu}{e_\nu} \frac{d\, e_\nu}{d\mathsf{e}} d\mathsf{e} \right), \tag{3.22}$$

où e_ν est la densité d'énergie des neutrinos. Ainsi les neutrinos électroniques ou anti-électroniques peuvent échanger de l'énergie avec la matière par le processus de capture électronique (Eq. 1.3) ou la réaction inverse, et les neutrinos de toutes saveurs peuvent modifier la quantité de mouvement de la matière par le processus de diffusion élastique neutrino-nucléon. Dans la PNS, ces processus dominent les autres processus de transport par les électrons ou photons et le transport de quantité de mouvement, de chaleur et de leptons est déterminé par les interactions des neutrinos (Bruenn et Dineva, 1996; Mezzacappa et al., 1998; Miralles et al., 2000; Socrates et al., 2005). La quantification de ces processus passe souvent par le calcul des opacités de l'ensemble des espèces de neutrinos χ_ν. Pour avoir le traitement le plus complet des processus de transfert radiatif des neutrinos, il faudrait résoudre, en parallèle des équations de la MHD, l'équation de Boltzmann, dans l'espace des phases et l'espace physique. Le nombre de dimensions à prendre en compte est donc de 7 (6 dimensions pour l'espace des phases et l'espace physique et 1 dimension temporelle), ce qu'il n'est pas possible de résoudre avec les puissances de calculs actuelles (le lecteur intéressé peut avoir un aperçu de la richesse et de la versatilité de l'équation de Boltzmann dans (Villani, 2002)). Ainsi des approximations doivent être effectuées soit sur les symétries de l'espace physique (Abbar et al., 2019; Nagakura et al., 2019; Delfan Azari et al., 2020) soit sur les interactions des neutrinos. Il existe différentes approximations de transfert radiatif pouvant être utilisées pour les neutrinos ou les photons et nous considérerons ici principalement l'approximation de diffusion du second ordre. Cette approximation consiste à considérer que les échelles que nous considérons sont plus grandes que le libre parcours moyen et que les différentes quantités physiques sont donc diffusées par les neutrinos. Guilet et al. (2015) ont étudié l'effet des neutrinos sur la MRI d'un point de vue linéaire et ont montré que celui-ci pouvait être différencié en deux cas en fonction de la longueur de la MRI λ_{MRI} (Panneau de droite de la Figure 3.9). Si la longueur d'onde de la MRI est plus longue que le libre parcours moyen des neutrinos, il est possible de se placer dans l'approximation diffusive et les neutrinos vont avoir un impact sur la MRI similaire à la présence d'une grande viscosité. Dans le cas contraire, les neutrinos vont entraîner une force de trainée qui atténue les fluctuations du champ de vitesse (Agol et Krolik, 1998; Jedamzik et al., 1998).

Régime de la MRI avec une force de trainée due aux neutrinos

La force de trainée est causée par un effet Doppler par le mouvement du fluide comparé au champ de radiation des neutrinos en arrière plan. Le flux de neutrinos dans le référentiel du fluide est alors responsable de la force de trainée par absorption ou diffusion élastique des neutrinos. Cette force de trainée des neutrinos peut être représentée par une accélération $-\Gamma \delta U$,

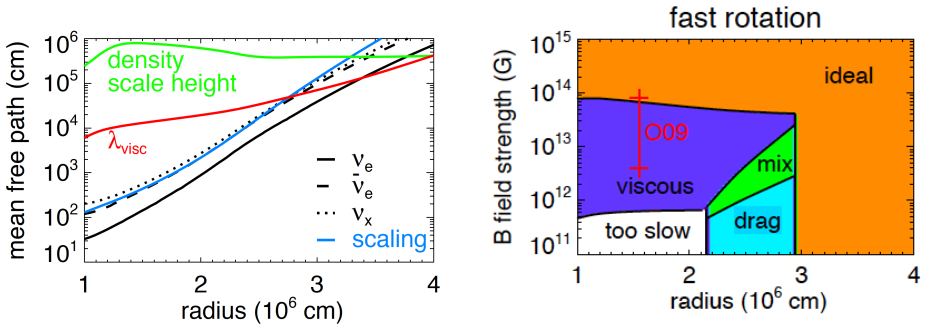


FIGURE 3.9. – (Gauche) Profils radiaux du libre parcours moyen des neutrinos. La ligne correspond aux neutrinos électroniques, la ligne tiretée aux antineutrinos électroniques et la ligne pointillée aux neutrinos leptoniques plus lourds. Pour comparaison, la hauteur d'échelle de la densité est montrée en vert et en rouge la longueur d'onde de la MRI en régime visqueux pour une rotation rapide ($\Omega = 2000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$). Crédit : GUILET et al. (2015). (Droite) Schéma représentant les différents régimes s'appliquant à la MRI selon le champ magnétique et le rayon dans la PNS pour une rotation rapide ($\Omega = 2000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$). Le régime *too slow* correspond aux cas où le taux de croissance de la MRI est trop petit pour assurer la croissance du champ magnétique ($\sigma = 10 s^{-1}$). Crédit : GUILET et al. (2015)

où δU est la perturbation de vitesse et le taux d'amortissement Γ est donné par

$$\Gamma \approx \frac{e_\nu \langle \chi_\nu \rangle}{\rho c} \propto T^6, \tag{3.23}$$

où $\langle \chi_\nu \rangle$ est l'opacité des neutrinos moyennée sur l'énergie de manière identique au libre parcours moyen (Eq. 3.22) et T la température de la PNS. L'étude linéaire de la MRI en présence de cette force de traînée démontre que celle-ci réduit d'un facteur Γ/Ω le taux de croissance du mode le plus instable de la MRI à condition que ce taux soit plus grand que la fréquence angulaire Ω. Les calculs du taux d'amortissement Γ à partir de simulations 1D de supernova indiquent que le taux de croissance de la MRI est réduit très fortement dans le cœur de la PNS et la zone interne (typiquement $s < 20$ km pour une PNS de 40 km) dans le cas d'une rotation rapide. Comme le libre parcours moyen dans cette région est plus court que la longueur d'onde de la MRI pour un champ magnétique «faible» $B = 10^{12}$ G, ce régime s'applique uniquement pour des rayons intermédiaires entre 20 km et 30 km (Panneau de droite de la Figure 3.9). Dans cette zone, le taux d'amortissement a un impact plus modéré qui ralentit mais n'empêche pas la croissance de la MRI et ainsi le champ magnétique peut être amplifié aux petites échelles jusqu'à ce qu'il soit suffisamment intense pour que la longueur d'onde de la MRI soit plus grande que le libre parcours moyen et que le régime visqueux s'applique. Un régime mixte apparaît alors où le régime de force de trainée s'applique aux petites échelles du champ magnétique et le régime visqueux sur les grandes échelles.

Régime diffusif des neutrinos

Dans ce régime, le transport de quantité de mouvement par les neutrinos peut être modélisé par une viscosité ν (van den Horn et van Weert, 1984; Burrows et Lattimer, 1988; C. Thompson et Duncan, 1993). La valeur de cette viscosité peut être calculée à partir du libre parcours moyen selon la formule (Guilet et al., 2015)

$$\nu = \frac{2}{15}\frac{e_\nu \langle l_\nu \rangle}{\rho c}, \tag{3.24}$$

où e_ν est l'énergie des neutrinos. Les simulations de supernova indiquent que cette viscosité varie environ de 10^9 cm^2 s^{-1} dans le cœur de la PNS et augmente jusqu'à 10^{12} cm^2 s^{-1} près de la neutrinosphère dans les premières centaines de millisecondes après le rebond. Cette viscosité peut être correctement approximée par la formule (van den Horn et van Weert, 1984; Keil et al., 1996; Guilet et al., 2015)

$$\nu = 1.2 \times 10^{10} \left(\frac{T}{10\,\mathrm{MeV}}\right)^2 \left(\frac{\rho}{10^{13}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}}\right)^{-2} \mathrm{cm^2 s^{-1}}. \tag{3.25}$$

Du fait de la grande valeur de la viscosité, la résistivité peut être négligée dans les prochains calculs puisqu'elle est beaucoup plus faible et que $Pm \gg 1$ comme nous le verrons dans la Section 3.3.2. De manière analogue aux disques d'accrétion, la viscosité réduit significativement le taux de croissance de la MRI lorsque le nombre d'Elsasser visqueux Λ_ν est plus petit que l'unité. Dans le cas d'une rotation rapide, une estimation du nombre d'Elsasser dans une PNS à un rayon de ~ 20 km donne

$$\Lambda_\nu \approx 4 \times 10^{-4} \left(\frac{B}{10^{12}\,\mathrm{G}}\right)^2 \left(\frac{\rho}{10^{13}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}}\right)^{-1} \left(\frac{\Omega}{1000\,\mathrm{s^{-1}}}\right)^{-1} \left(\frac{\nu}{2 \times 10^{10}\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}}\right)^{-1}. \tag{3.26}$$

Pour un champ magnétique «faible» initialement ($B \leq B_{\mathrm{visq}} \sim 5 \times 10^{13}$ G), la viscosité diminue fortement le taux de croissance et la longueur d'onde (Figure 3.10). On remarque, en particulier, que pour un champ magnétique suffisamment intense $B > 10^{12}$ G, la viscosité ralentit la croissance de la MRI mais n'empêche pas son développement. Le régime visqueux s'applique principalement dans le cœur de la PNS et pour les rayons intermédiaires entre 10 km et 30 km où la longueur d'onde de la MRI est plus grande que le libre parcours moyen (Panneau de droite de la Figure 3.9).

Le régime des hauts nombres de Prandtl magnétique

En conclusion, les neutrinos peuvent réduire la croissance de la MRI de manière significative dans les régions internes de la PNS dans le cas d'un champ magnétique «faible» $B \sim 10^{12}$ G,

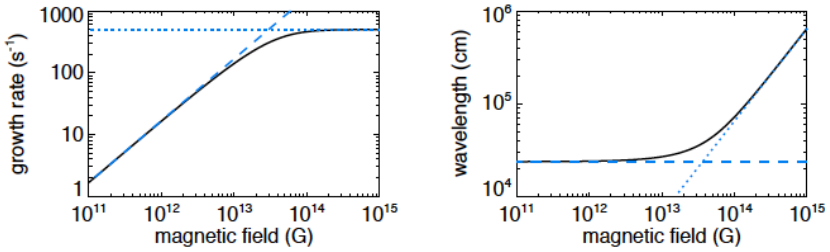


FIGURE 3.10. – Taux de croissance (Gauche) et longueur d'onde (Droite) du mode le plus instable de la MRI en fonction de l'intensité du champ magnétique. La ligne continue indique la solution numérique de l'équation de dispersion, la ligne tiretée la solution asymptotique dans le régime visqueux et la ligne pointillée la solution asymptotique dans le régime idéal. Crédit : GUILET et al. (2015)

.

mais, dans les régions externes, le champ magnétique est libre d'être amplifié linéairement comme en MHD idéale. Rapidement, le régime non linéaire est atteint et la turbulence MHD se développe. Or, les simulations numériques dans les disques d'accrétion prouvent que la turbulence et la saturation de la MRI sont fortement influencées par le nombre de Prandtl magnétique Pm. Le calcul de la conductivité des électrons relativistes et dégénérés se diffusant sur les protons donne une diffusivité magnétique de l'ordre de $\eta \simeq 3.1 \times 10^{-5}$ cm^2 s^{-1} (C. THOMPSON et DUNCAN, 1993). La viscosité induite par les neutrinos donne donc un nombre de Prandtl Pm magnétique variant de $Pm \sim 10^{13}$ à 10^{17} selon le rayon. Il s'agit de la limite généralement opposée à celle étudiée dans le contexte des disques d'accrétion et des métaux liquides (expériences de laboratoires, noyau externe de la Terre). Cette limite des grands nombres de Prandtl magnétique $Pm \gg 1$ a beaucoup moins été étudiée mais elle est également pertinente dans les plasmas chauds et diffus comme dans les régions intérieures des disques d'accrétion (BALBUS et HENRI, 2008; W. J. POTTER et BALBUS, 2017). Les résultats dans les disques d'accrétion mettent en évidence que l'énergie magnétique et le transport du moment cinétique sont proportionnels à Pm mais, qu'à partir d'un Pm suffisamment faible, ces quantités sont indépendantes de Pm (Section 3.2.2). Par analogie, on peut espérer qu'il soit possible d'atteindre des valeurs du champ magnétique et du transport indépendantes du nombre de Prandtl magnétique à partir d'un nombre de Prandtl suffisamment élevé. Ce régime est particulièrement difficile à étudier avec des simulations numériques puisqu'une très haute résolution est nécessaire pour résoudre les échelles résistives. En effet, le rapport de taille entre les échelles visqueuses et les échelles résistives est de l'ordre de $\sqrt{Pm} \geq 10^6$. En conséquence, les simulations utilisent souvent un nombre de Prandtl magnétique proche de l'unité à cause des contraintes numériques. Puisque le transport du moment cinétique et l'énergie du champ magnétique sont proportionnels au nombre de Prandtl magnétique pour ceux considérés dans les simulations (Figure 3.5), les résultats quantitatifs des simulations peuvent être vus comme une borne inférieure.

3.3.3. Impact de la stratification thermique stable

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la zone extérieure de la PNS a une stratification stable. L'analyse linéaire des modes de la MRI a montré que cet ingrédient physique peut jouer un rôle important dans les PNS (Masada et al., 2007). L'ajout de la force de flottaison dans l'étude de la stabilité linéaire de la MRI montre que la stratification a un effet stabilisant. Dans le cas sans viscosité, le critère d'instabilité de la MRI dérivée par Acheson et Gibbons (1978) est

$$q > \frac{N^2}{2\Omega^2}\frac{\eta}{\kappa}, \tag{3.27}$$

où N est la fréquence de Brunt-Väisälä et κ la diffusion thermique. On peut voir dans ce critère que la diffusion thermique peut réduire les effets stabilisants de la stratification, particulièrement sur des petites échelles spatiales. En effet, les échelles radiales l plus petites que l'échelle critique $L_c = \sqrt{\kappa/N}$ sont telles que le temps caractéristique de diffusion thermique est inférieur au temps caractéristique de la poussée d'Archimède $t_N = 1/N$. Sur ces échelles l, les écarts de densité ou d'entropie provoqués par les mouvements radiaux sont fortement réduits par diffusion thermique. La diffusion thermique due aux neutrinos peut être calculée à partir de leur opacité. L'importance de la diffusion thermique κ comparée à la viscosité est caractérisée par le nombre de Prandtl thermique, définie par

$$Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa} \sim 10^{-2} - 10^{-3}. \tag{3.28}$$

Un autre paramètre sans dimension qui permet de caractériser l'effet de la diffusion thermique κ est le nombre de Péclet Pe

$$Pe \equiv \frac{DU_{\text{car}}}{\kappa} \tag{3.29}$$

où D est la longueur caractéristique du système, $U_{\text{car}} = D\Omega$ la vitesse caractéristique dans le cas de la rotation rapide. La diffusivité thermique des neutrinos est plus importante que la viscosité donc les PNS sont plutôt dans le régime des bas nombres de Prandtl. Toutefois, dans le cas d'une PNS en rotation rapide, le nombre de Péclet Pe est plus grand que un.

Pour revenir à la stabilité linéaire, l'écart entre la résistivité des électrons calculée précédemment et la diffusion thermique due aux neutrinos démontre que la zone stratifiée de la PNS est toujours instable à la MRI, même pour une stratification importante. D'un point de vue non linéaire, les premières simulations locales prenant en compte la stratification thermique et la viscosité due aux neutrinos ont confirmé que la stratification stable joue un rôle important (Guilet et E. Müller, 2015). Ces simulations ont montré qu'une amplification du champ magnétique significative reste possible en présence de stratification (Figure 3.11). Toutefois, comparée au cas non stratifié, l'énergie magnétique finale décroît avec la stratification mais la structure du champ

magnétique est située à de plus grandes échelles que dans le cas instable à la convection. La comparaison de simulations avec des nombres de Prandtl différents met également en évidence que la diffusion thermique réduit l'impact de la stratification sur la turbulence et l'intensité du champ magnétique. Il est important de noter que ces simulations ont été menées dans le

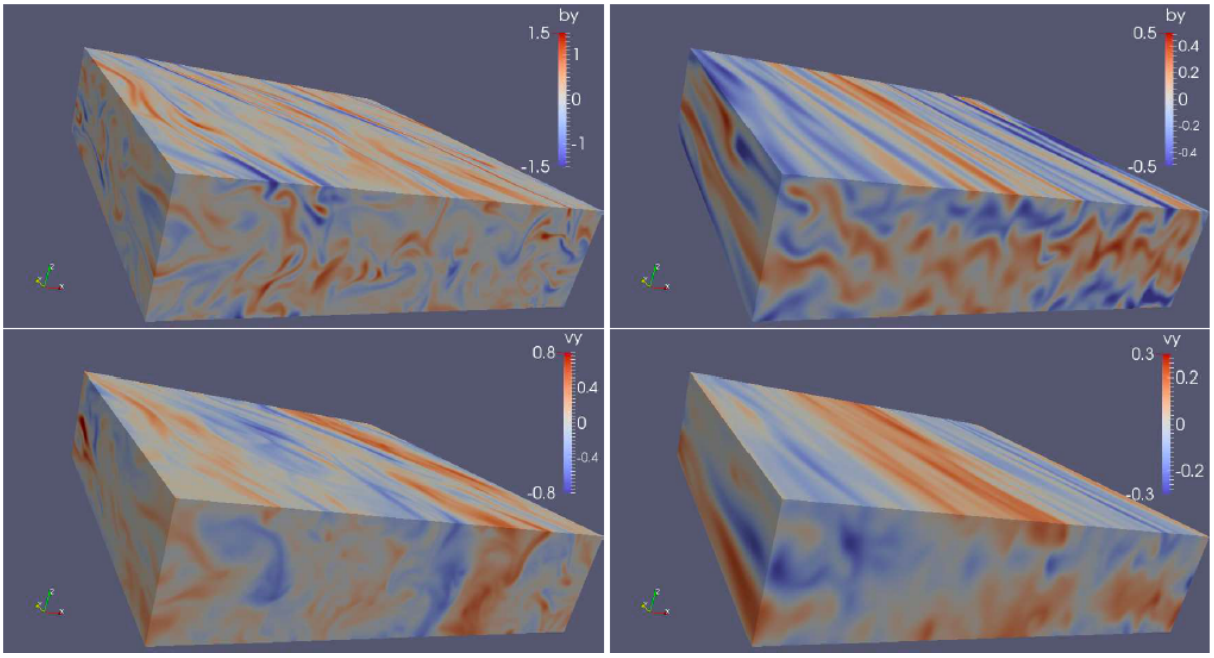


FIGURE 3.11. – Rendus 3D de deux simulations avec $Pr = 0.1$ pour un écoulement instable à la convection avec $N^2/\Omega^2 = -1$ (colonne de gauche) et un écoulement stablement stratifié avec $N^2/\Omega^2 = 10$ (colonne de droite). La première ligne de rendus montre le champ magnétique azimutal B_ϕ et la deuxième ligne la vitesse azimutale U_ϕ. Les échelles de couleurs sont différentes pour les deux simulations. Crédit : GUILET et E. MÜLLER (2015)

plan équatorial par souci de simplicité. Cette localisation est particulière puisque le cisaillement cylindrique et la gravité sphérique sont strictement alignés. Il est possible que la stratification ait une influence moindre sur la MRI pour d'autres latitudes puisque les mouvements radiaux cylindriques seront moins affectés.

3.3.4. D'une description locale vers une géométrie globale

Les simulations locales présentées précédemment ont permis de montrer qu'une amplification du champ magnétique était possible sur des petites échelles, mais celles-ci ne peuvent décrire la formation d'un champ magnétique à grande échelle. Le dipôle est d'ailleurs la principale contrainte observationnelle sur le champ magnétique des magnétars vues dans le chapitre 1. Il s'agit de la dernière différence principale avec les disques d'accrétion : la géométrie sphérique. Des simulations de la MRI en géométrie sphérique ont été effectuées dans d'autres contextes,

tels que le noyau liquide de la Terre (Petitdemange et al., 2008 ; Petitdemange, 2010 ; Petitdemange et al., 2013), les zones radiatives stellaires (Jouve et al., 2015 ; Gaurat et al., 2015 ; Jouve et al., 2020) ou un écoulement de Couette sphérique (Meduri et al., 2019). Ces simulations ont principalement étudié la croissance de la MRI à partir d'un champ magnétique à grande échelle préexistant et la stabilité du champ magnétique obtenu à partir de la rotation différentielle. Dans le contexte des supernovae, des efforts ont été faits pour se rapprocher d'un modèle de PNS globale. Des gradients globaux d'entropie et de composition ont été introduits dans les simulations locales, ce qui a entrainé des artefacts numériques à cause de conditions aux limites qui essayent d'imposer une condition périodique (Obergaulinger et al., 2009). Pour se rapprocher des simulations globales, des simulations d'un disque correspondant au plan équatorial de la PNS ont également été effectuées (Masada et al., 2015). Bien que ces simulations soient globales dans la direction radiale, elles restent locales verticalement. Enfin, le modèle le plus proche d'un modèle global a été développé par Mösta et al. (2015) qui considère un quart de PNS avec des conditions périodiques. Cette étude est ainsi la première à proposer un modèle global d'un quart de PNS qui possède une résolution suffisamment haute pour résoudre la longueur d'onde de la MRI. On y voit ainsi une dynamo se développer et le champ magnétique toroïdal être amplifié à partir d'un champ magnétique dipolaire de 7×10^{14} G (Figure 3.12). L'amplification est très rapide et le champ magnétique atteint un maximum de 5×10^{15} G au bout de 10 ms pour la simulation la mieux résolue (panneau de droite de la Figure 3.12). Dans cette simulation, le champ magnétique est plus turbulent et de larges structures de champ toroïdal sont également générées par la MRI. Toutefois, certaines structures du champ magnétique ne peuvent être décrites par ces simulations comme le dipôle équatorial, qui peut jouer un rôle crucial pour les modèles de supernovae superlumineuses (Section 1.3.3). Le temps très court de ces simulations est lié à leur coût numérique extrême : plusieurs dizaines de millions d'heures CPU (soit l'équivalent de $\sim$ 1100 ans de simulations sur un seul ordinateur).

3.4. Conclusion

Dans l'ensemble, ce chapitre a illustré la capacité et la robustesse de la MRI à amplifier le champ magnétique dans des conditions physiques variées. Pour les PNS, la viscosité et diffusivité thermique dues aux neutrinos, la stratification stable et la géométrie sont des conditions particulièrement importantes. Malgré une forte viscosité, l'amplification du champ magnétique est possible localement jusqu'aux intensités typiques des magnétars. En revanche, pour pouvoir expliquer la formation des magnétars, une étape cruciale reste manquante : le passage d'un champ magnétique très intense localement à un champ magnétique de grande échelle comme le dipôle. En effet, les simulations présentées dans ce chapitre sont soit locales (au moins partiellement) soit elles partent d'un champ magnétique dipolaire préexistant. Ces études ne permettent donc pas de prouver si la MRI est capable de générer un champ magnétique à grande échelle,

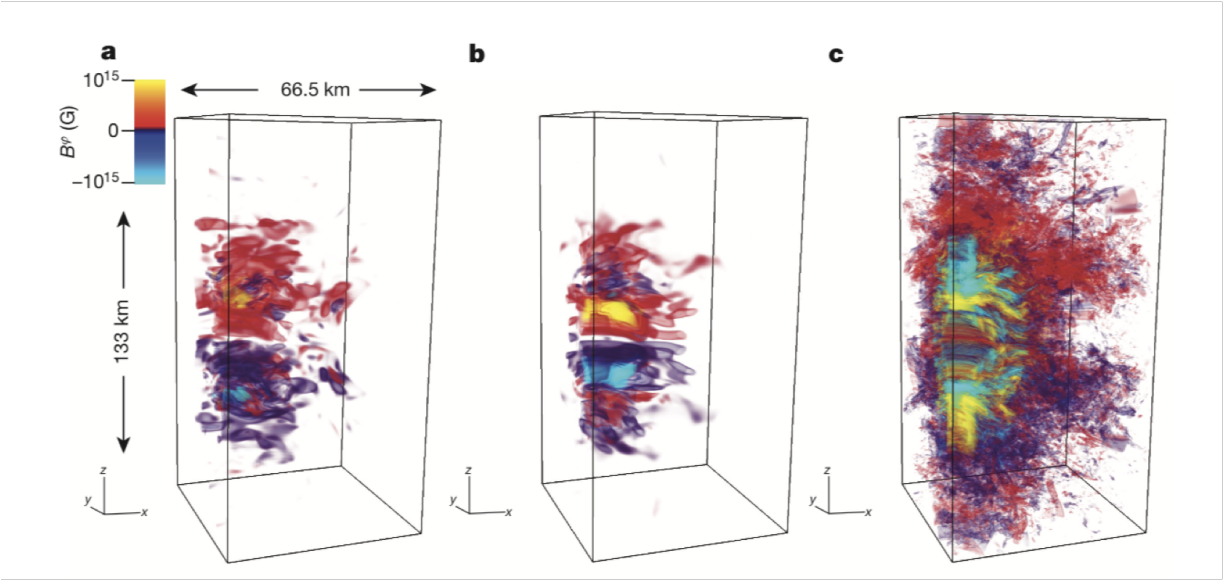


FIGURE 3.12. – Rendus 3D du champ magnétique toroïdal B_ϕ. Le panneau de gauche présente les conditions initiales des simulations (a), le panneau du milieu la simulation la moins résolue à $t = 10$ ms (b), le panneau de droite la simulation la mieux résolue à $t = 10$ ms (c). L'axe de rotation est l'axe z. Crédit : MÖSTA et al. (2015)

particulièrement une composante dipolaire, à partir des petites échelles. Dans la deuxième partie de cette thèse, nous nous attellerons à répondre à cette question. Le chapitre 4 détaillera les approximations et les méthodes utilisées pendant cette thèse. Le chapitre 5 présentera un modèle global simplifié de PNS contenant uniquement les ingrédients essentiels de la MRI sans flux net : la rotation différentielle, un champ magnétique aux petites échelles, une viscosité et une résistivité explicite et la géométrie sphérique. Ce modèle sera ensuite comparé aux simulations locales pour comprendre l'influence de la géométrie sphérique. Le chapitre 6, quant à lui, détaillera un modèle global plus réaliste de la zone stablement stratifiée d'une PNS avec l'ajout d'ingrédients physiques importants comme un profil de densité, un profil de gradient d'entropie stable. Ce modèle sera également comparé aux simulations contenant uniquement les ingrédients essentiels de la MRI.

Deuxième partie

Études numériques de la MRI dans les PNS

Chapitre 4

Méthodes : une approche numérique simplifiée

Sommaire

4.1. Approximations des équations de la magnétohydrodynamique 108
4.1.1. Approximation de Boussinesq 109
4.1.2. Approximation anélastique 110
4.1.3. Validité des approximations de la MHD dans les PNS 113
4.2. Simulations numériques 113
4.2.1. Modèle local : Le code Snoopy 116
4.2.2. Modèle global : MagIC 117
4.3. Mise en place de la configuration du modèle numérique 122
4.3.1. Forçage de la rotation différentielle 123
4.3.2. Un cas linéaire de la MRI 125
4.3.3. Mise en place d'une structure d'étoile à neutrons 126
4.3.4. Ondes de gravité dans un cas sans rotation 128

Introduction

Ce chapitre se concentre sur les approximations et les méthodes qui seront utilisées dans la suite de cette thèse pour l'étude de la MRI en géométrie sphérique. Comme nous l'avons vu, les simulations qui prennent en compte toute la complexité physique du problème dans un modèle global de supernova par effondrement gravitationnel sont très coûteuses numériquement et leur interprétation est, en général, difficile. Nous proposons une approche différente dans cette thèse : nous adopterons dans un premier temps un modèle aussi simplifié que possible en n'incluant que les paramètres physiques essentiels à la MRI. Cela nous permettra de parvenir à une compréhension fine de l'effet de ces paramètres sur la MRI. Nous pourrons par la suite étudier la façon dont la MRI est modifiée par les ingrédients supplémentaires nécessaires à une description

réaliste de la PNS. La section 4.1 détaille les différentes approximations (incompressible, de Boussinesq et anélatisque), qui seront utilisées pour simplifier les équations de la MHD. La section 4.2 présente les différents codes numériques utilisés pour les simulations locales et les simulations globales. Des tests numériques et la construction du modèle anélastique à partir des simulations 1D de supernova gravitationnelle seront également détaillés dans cette section.

4.1. Approximations des équations de la magnétohydrodynamique

Cette section a pour but de présenter les deux approximations des équations de la MHD utilisées pour décrire la dynamique de la PNS. Les approximations de Boussinesq et anélastique sont des simplifications particulièrement adaptées pour les écoulements induits par la poussée d'Archimède (convection et stratification). Le nom de l'approximation vient de Joseph Boussinesq (Boussinesq, 1903) et a été historiquement attribué par Rayleigh dans un article important sur la convection thermique (Rayleigh, 1916). Cette approximation a également été employée par Oberbeck dans les mêmes années (Oberbeck, 1879) et est parfois nommée approximation de Oberbeck-Boussinesq. Bien que les variations de densité soient l'essence de la flottaison, cette approximation consiste à les négliger dans tous les termes des équations sauf dans celui de la poussée d'Archimède. Cela permet de garder les ingrédients physiques clés avec un minimum de complexité. L'approximation de Boussinesq donne de bons résultats dans la modélisation de la convection dans des conditions de laboratoire, où la compressibilité des fluides peut en général être négligée (c'est-à-dire que la densité ne varie pas ou peu avec la pression). Lorsque l'on néglige également la poussée d'Archimède, la densité est alors toujours constante dans le fluide et l'on parle d'approximation incompressible. Toutefois, l'approximation de Boussinesq n'est pas toujours valable, notamment, lorsque la taille du système devient comparable ou supérieure à l'échelle de pression, comme par exemple dans l'atmosphère ou pour la plupart des objets astrophysiques.

L'approximation anélastique permet de prendre en compte la dépendance de la stratification en densité en fonction de la pression ainsi que la dépendance à un état de référence statique. Cette approximation a d'abord été introduite pour étudier la convection atmosphérique (Ogura et Phillips, 1962 ; Gough, 1969) puis elle a été reprise pour étudier la convection (d'un fluide à deux composants chimiques pour la modélisation) dans le noyau de la Terre (S. Braginsky, 1964). Lantz et Fan (1999) a adapté cette approximation à la modélisation de la convection solaire et stellaire et C. A. Jones et al. (2011) ont établi des cas tests numériques de références. Étant donnée leur simplicité, ces approximations sont utilisées pour décrire la convection et la génération de champ magnétique associée aux dynamos convectives dans le contexte géophysique ou stellaire. Elles ont également été utilisées pour décrire la MRI puisque les ondes sonores n'interviennent pas dans la dérivation de l'équation de dispersion de la MRI (Éq. 3.11). En effet, ces deux approximations présentées dans cette section permettent de filtrer les ondes sonores.

Nous verrons également dans la section suivante que cela permet de réduire le coût numérique des simulations.

4.1.1. Approximation de Boussinesq

L'idée derrière l'approximation de Boussinesq est que les variations de densité sont négligées pour l'inertie du fluide, mais que la gravité est suffisamment forte pour que ces variations soient prises en compte dans la poussée d'Archimède. L'équation d'état est ce qui permet d'exprimer les variations thermodynamiques de densité. Par exemple, la relation

$$\frac{1}{\rho}d\rho = -\alpha_T dT + \beta_p dp \tag{4.1}$$

décrit les variations de la densité causées par les changements de température et de pression. Les propriétés thermodynamiques apparaissant dans cette relation sont les coefficients de dilatation thermique à pression constante α_T et de compressibilité à température constante β_p définis par

$$\alpha_T = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p, \tag{4.2}$$

$$\beta_p = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T. \tag{4.3}$$

L'approximation de Boussinesq a été historiquement dérivée pour des liquides dont la température et la densité restent proches de constantes ρ_0 et T_0. Dans cette approximation, les perturbations de densité dues à la pression sont négligées et l'équation d'état devient alors $\rho = \rho_0(1 - \alpha_T(T - T_0))$. Les variables de la température et de l'entropie deviennent alors équivalentes à un facteur multiplicatif près puisque la relation thermodynamique

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dp = \frac{c_p}{T}dT - \frac{\alpha_T}{\rho}dP \tag{4.4}$$

nous donne $T_0 ds = c_p dT$. Les équations de la MHD dans le cadre de cette approximation s'écrivent

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0\,, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} = -\vec{\nabla}p - 2\vec{\Omega_0}\times\vec{u} - \alpha_T T\vec{g} + \frac{1}{\mu_0\rho_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B} + \nu\Delta\vec{u}\,, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{u}\times\vec{B} - \eta\,\vec{\nabla}\times\vec{B}\right), \tag{4.7}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\,, \tag{4.8}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}T\right) = \kappa\Delta T, \tag{4.9}$$

Comme on peut le voir dans l'équation de la chaleur, les termes de chauffage visqueux et par effet Joule sont négligés dans cette approximation.

Formellement, l'approximation de Boussinesq peut être dérivée d'une manière différente avec l'hypothèse d'une taille caractéristique du domaine d petite devant l'échelle de longueur caractéristique du fluide. On peut en effet définir un paramètre d'expansion supplémentaire ϵ' et retrouver l'approximation de Boussinesq dans la limite $\epsilon' \ll 1$, pour laquelle les gradients de quantités thermodynamiques du fluide deviennent uniformes (Malkus, 1964; Dormy et Soward, 2007). Cette méthode pour obtenir les équations se base sur la même stratégie que la méthode de dérivation de l'approximation anélastique, qui permet de prendre en compte les perturbations de densité liées à la pression.

4.1.2. Approximation anélastique

L'approximation anélastique permet d'ajouter des gradients thermodynamiques venant d'un état de référence. On suppose que l'écoulement et les processus incluant la génération du champ magnétique génèrent des petites perturbations qui ne modifient pas l'état de référence qui est considéré statique. Dans la suite, nous noterons les quantités se rapportant à l'état de référence avec un tilde, de sorte que les variables thermodynamiques peuvent s'écrire $\rho = \tilde{\rho} + \rho', T = \tilde{T} + T', p = \tilde{p} + p'$ ... L'approximation anélastique correspond à résoudre les équations au premier ordre d'un petit paramètre ϵ qui quantifie les perturbations par rapport à l'état de référence

$$\epsilon \sim \frac{T'}{\tilde{T}} \sim \frac{p'}{\tilde{p}} \sim \frac{\rho'}{\tilde{\rho}} \sim ... \ll 1. \tag{4.10}$$

Dans la suite, le prime correspondant aux perturbations sera enlevé. L'état de référence est supposé à l'équilibre hydrostatique et vérifie donc

$$\vec{\nabla}\tilde{p} = \tilde{\rho}\vec{\tilde{g}}. \tag{4.11}$$

Pour la convection, le système est supposé adiabatique, c'est-à-dire sans gradient d'entropie global, car les mouvements convectifs rendent l'entropie du fluide homogène. Dans le cas stablement stratifié, le système est non adiabatique et les gradients de température et de densité peuvent être exprimés en fonction du gradient de pression et du gradient d'entropie selon les formules

$$\frac{\nabla\tilde{T}}{\tilde{T}} = \frac{1}{\tilde{T}}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \nabla p + \frac{1}{\tilde{T}}\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p \nabla\tilde{S} = -\frac{\alpha_T}{c_p}\vec{\tilde{g}} + \frac{1}{c_p}\nabla\tilde{S}, \tag{4.12}$$

$$\frac{\nabla\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \nabla p + \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tilde{S}}\right)_p \nabla\tilde{S} = \beta_p\tilde{\rho}\vec{\tilde{g}} - \frac{\alpha_T}{c_p}\tilde{T}\nabla\tilde{S}, \tag{4.13}$$

où c_p est la capacité thermique du fluide. Au vu de la symétrie du système, l'état de référence ne dépend que du rayon. Dans le cas le plus général, il est possible de définir un état de référence par

la donnée des profils radiaux de température, de densité, de gravité et d'entropie. Les paramètres thermodynamiques α_T et β_p sont respectivement déterminés par ces profils selon les relations (4.12) et (4.13). Dans le cas adiabatique ($\nabla \tilde{S} = 0$), les nombres sans dimension qui quantifient les gradients de température et de densités sont définis comme le nombre de dissipation Di et le paramètre de compressibilité Co

$$Di = \frac{\alpha_T D}{c_p} \tilde{g}, \tag{4.14}$$

$$Co = D\beta_p \tilde{\rho} \tilde{g}, \tag{4.15}$$

où D est la longueur caractéristique du système. L'approximation de Boussinesq décrite ci-dessus est retrouvée pour $Di = Co = 0$ ou en considérant un état de référence faiblement stratifié (C. A. Jones et al., 2009). Nous donnerons ici la dérivation de l'équation de continuité au premier ordre comme exemple pour comprendre la méthode de dérivation des équations anélastiques. En utilisant la décomposition $\rho = \tilde{\rho} + \rho'$, l'équation de continuité devient

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\vec{u}) - \vec{\nabla} \cdot (\rho'\vec{u}) \,. \tag{4.16}$$

Le premier terme est nul, car l'état de référence est supposé statique (ou du moins variant lentement sur les échelles de temps dynamiques). Le dernier terme à droite est du second ordre et peut être négligé. La dérivée temporelle de la fluctuation de densité ρ' peut être comparée en ordre de grandeur aux deux termes de $\vec{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\vec{u})$ en faisant les hypothèses suivantes : l'échelle de temps des variations de densité est similaire (ou plus lente) que l'échelle temporelle représentée par la vitesse $\vec{u}$ et l'échelle de longueur associée au gradient n'est pas «trop petite». On a alors

$$\frac{[\partial \rho'/\partial t]}{\left[\tilde{\rho}\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right]} \approx \frac{[\partial \rho'/\partial t]}{\left[\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\tilde{\rho}\right]} \approx \frac{\rho'}{\tilde{\rho}} \approx \epsilon \,, \tag{4.17}$$

où les parenthèses carrées désignent des ordres de grandeur. Ainsi, la dérivée temporelle de ρ' est du second ordre et peut être négligée. L'équation de continuité s'écrit donc au 1er ordre

$$\vec{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\vec{u}) = 0. \tag{4.18}$$

Les ondes sonores sont donc filtrées dans l'approximation anélastique car les variations locales de densité ρ' sont négligées. Les hypothèses ci-dessus sont valides tant que la vitesse du fluide (et la vitesse d'Alfvén) sont plus faibles que la vitesse du son. Dans le cas général des équations anélastiques, les diffusivités magnétique, thermique et visqueuse peuvent également varier avec le rayon, mais par souci de simplicité, celles-ci seront considérées uniformes. En appliquant la

même méthode aux autres équations, on trouve

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{\rho}\vec{u} = 0\,, \tag{4.19}$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\tilde{\rho}}\right) - 2\Omega_0 \vec{e_z} \times \vec{u} - \alpha_T \tilde{T}\,\frac{s}{c_p}\,\vec{\tilde{g}} + \frac{1}{\mu_0\,\tilde{\rho}}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B} + \mathbf{F}^{\nu}\,, \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{u}\times\vec{B}\right) - \eta\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right), \tag{4.21}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{4.22}$$

$$\tilde{\rho}\tilde{T}(\frac{Ds}{Dt} + \vec{u}\cdot\nabla\tilde{S}) = \kappa\vec{\nabla}\cdot\left(\tilde{\rho}\tilde{T}\vec{\nabla}s\right) + C_\nu + \frac{\eta}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)^2\,, \tag{4.23}$$

où la pression réduite $p' = p/\tilde{\rho}$ joue le même rôle que la pression dans l'approximation de Boussinesq et C_ν est le chauffage visqueux défini dans le chapitre précédent (Eq. 2.8). L'apparition de la pression réduite p' vient de l'expression du terme de la poussée d'Archimède. En effet, les variations de densité ρ' due à aux variations d'entropie et de pression peuvent se mettre sous la forme

$$\rho' = \left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial s}\right)_p s + \left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{p}}\right)_s p = -\alpha_T\tilde{T}\frac{\tilde{\rho}}{c_p}s - \frac{1}{\tilde{\rho}\tilde{g}}\cdot\nabla\tilde{\rho}p. \tag{4.24}$$

La poussée d'Archimède s'écrit alors $\frac{\rho'}{\tilde{\rho}}\vec{g} = -\alpha_T\tilde{T}\frac{s}{c_p}\vec{g} - \frac{p}{\tilde{\rho}^2}\vec{\nabla}\tilde{\rho}$ que l'on insère dans l'équation de Navier-Stockes. Cette importante simplification caractérise la variante LBR, développée par (Lantz, 1992; S. I. Braginsky et P. H. Roberts, 1995), de l'approximation anélastique et justifie a posteriori d'utiliser la variable entropie plutôt que la température. Cette variante LBR a également l'avantage de conserver l'énergie dans le cas des ondes de gravité en présence d'une stratification stable (Brown et al., 2012). Dans le cas d'une zone stablement stratifiée, l'utilisation de cette variante est donc indispensable.

Une hypothèse supplémentaire est nécessaire à l'établissement de l'équation de l'entropie (Éq. (4.23)), car le terme exact de diffusion de l'entropie devrait également avoir un terme de diffusion de la température de l'état de référence $\vec{\nabla}\cdot\left(\kappa\vec{\nabla}\tilde{T}\right)$. Toutefois, dans les écoulements turbulents, la diffusion de l'entropie est supposée dominer la diffusion de la température. Ainsi la diffusivité thermique κ dans l'équation (4.23) correspond à une estimation de la diffusivité thermique turbulente.

Cette formulation a de nombreux avantages puisque la température n'est plus une variable dynamique du système et il n'est donc pas nécessaire de calculer les variations de pression, de densité et de température. Le système a donc autant d'inconnues que dans l'approximation de Boussinesq.

4.1.3. Validité des approximations de la MHD dans les PNS

Pour que ces approximations soient applicables dans le cas des proto-étoiles à neutrons, plusieurs hypothèses doivent être vérifiées : les hypothèses des approximations de Boussinesq et anélastique ainsi que celles de la MHD.

Pour l'approximation de Boussinesq, les conditions de validité ont été discutées dans l'étude de Guilet et E. Müller (2015). Premièrement, la filtration des ondes sonores est justifiée lorsque la vitesse du fluide ainsi que la vitesse d'Alfvén v_A sont plus faibles que la vitesse du son c_s, c'est-à-dire $u^2/c_s^2, v_A^2/c_s^2 \ll 1$, ce qui sera évalué a posteriori dans les simulations. Les modèles de PNS montrent que la vitesse du son est très grande, de l'ordre de $c_s \simeq 4 \times 10^9$ cms^{-1} (Guilet et al., 2015), ce qui justifie ainsi l'utilisation d'approximations filtrant les ondes sonores dans la majorité des cas. De plus, la vitesse du son étant inférieure à la vitesse de la lumière, le fluide est donc bien non-relativiste pour l'application des équations de la MHD. Deuxièmement, les perturbations de densité associées à la force de flottaison doivent être petites devant la densité, ce qui est évalué par $|\delta\rho/\rho_0| = |\alpha_T T'| \ll 1$. Comme cette condition dépend des perturbations de température dans la simulation, celles-ci seront évaluées a posteriori (voir Chapitre 6). L'hypothèse la moins valide de l'approximation de Boussinesq est de négliger le gradient de densité mais l'approximation anélastique permet de résoudre cette limitation.

Les hypothèses de l'approximation anélastique sont similaires à l'approximation de Boussinesq. En effet, la condition de validité de la filtration des ondes est identique et les perturbations des différentes quantités de l'état thermodynamique (entropie, pression, densité) seront également évaluées a posteriori dans les simulations afin de vérifier que les perturbations relatives sont bien petites. En revanche, une hypothèse est particulièrement difficile à vérifier : le caractère statique de l'état de référence. En effet, la PNS évolue sur un temps de l'ordre de la seconde, ce qui peut être aussi long que la durée de la simulation. Cette hypothèse sera toutefois utilisée par souci de simplicité.

4.2. Simulations numériques

Les systèmes (4.5)-(4.9) ou (4.19)-(4.23) (et a fortiori les équations dont elles dérivent) ne disposent pas de solution générale connue. Le calcul numérique est devenu indispensable aux études hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques. Les codes numériques ne donnent pas une solution exacte, mais une solution approchée discrétisée en temps et en espace. La résolution de ces équations n'est donc pas continue et cette démarche pour résoudre les équations différentielles peut être trouvée dans de nombreux ouvrages, (voir, par exemple, Glatzmaier, 2013). On appelle "schéma temporel" la méthode de discrétisation des dérivées temporelles des équations. Il en existe principalement deux types : explicites et implicites. Un schéma temporel explicite consiste à déterminer la solution au temps $t + \delta t$ en fonction de la valeur des quantités

au temps t (et parfois aux temps antérieurs $t - \delta t$, etc.) sous la forme

$$y(t + \delta t) = F(y(t), y(t - \delta t), ...), \tag{4.25}$$

où y est la solution recherchée et F une fonction qui dépend du système à résoudre et du schéma temporel utilisé. Le nombre de temps précédents utilisés dépend de l'ordre du schéma explicite. La méthode implicite consiste à déterminer la solution à $t + \delta t$ en résolvant une équation prenant en compte de la valeur des quantités en t (et parfois aux temps antérieurs $t - \delta t$, etc.) et en $t + \delta t$ sous la forme

$$G(y(t + \delta t), y(t), ...) = 0, \tag{4.26}$$

où G est fonction qui dépend du système à résoudre et du schéma temporel utilisé.

De manière générale, les schémas implicites sont plus stables (c'est-à-dire que les quantités physiques ont moins de chances de diverger) et permettent l'utilisation d'un pas de temps δt plus long. En revanche, elles sont plus coûteuses puisque la résolution de cette équation consiste à inverser une matrice. Des schémas mixtes implicites-explicites (IMEX), avec certains termes traités implicitement et d'autres explicitement, sont souvent utilisés pour optimiser à la fois le pas de temps, la stabilité et le coût en calculs.

De façon analogue, l'espace est également discrétisé (il est divisé en secteurs et les quantités physiques sont calculées uniquement en ces points). En géométrie cartésienne, cela revient à utiliser une grille contenant un certain nombre de points qui doit être suffisant pour restituer les structures des variables étudiées. En géométrie sphérique, l'espace peut être décomposé en sphères concentriques, qui peuvent à leur tour être discrétisées (Section 4.2.2). Les pas d'espace δx_i doivent être choisis précautionneusement pour pouvoir bien retranscrire les phénomènes physiques tout en gardant le coût numérique le plus faible possible. Le nombre de points d'espace et le pas de temps sont respectivement appelés résolution spatiale et résolution temporelle. La discrétisation des équations aux dérivées partielles et leur résolution numérique entraînent des erreurs purement numériques. Ces erreurs sont dues à la précision limitée des nombres sur une machine ou à l'approximation de séries infinies par une série finie dans la discrétisation. Ces erreurs donnent également lieu à une diffusion numérique, qui peut être plus grande que la diffusion physique selon les méthodes numériques. Il est donc important de pouvoir évaluer à quel point les calculs numériques reflètent la physique sous-jacente à l'aide de tests numériques de référence.

Dans la plupart des codes numériques modernes, le pas de temps peut être soit fixe soit adaptatif, c'est-à-dire qu'il peut s'adapter au système étudié afin de minimiser le coût numérique. Le pas de temps utilisé doit toutefois être cohérent avec le système et pouvoir accéder aux perturbations les plus rapides du système. Le pas de temps δt doit rester inférieur au temps nécessaire à l'onde ou au fluide pour parcourir un pas de temps spatial δx_i tout au long de la simulation (condition de Courant-Friedrichs-Lewy qui est appelé plus couramment condition

CFL (Courant et al., 1928)). Dans le cas MHD, cette condition s'exprime par

$$\sum_i \frac{\max(u_i, v_A, c_s)\delta t}{\delta x_i} < C_{\text{CFL}}, \tag{4.27}$$

où C_{CFL} une constante inférieure à 1 qui dépend des méthodes numériques utilisées. On remarque que plus l'écoulement est subsonique ($u<c_s$), plus les approximations filtrant les ondes sonores permettent de gagner en facteur conséquent, de l'ordre de l'inverse du nombre de Mach $Ma = u/c_s$ sur le pas de temps des simulations.

La discrétisation en espace peut être effectuée dans l'espace physique ou dans l'espace spectral. Les variables sont alors décomposées en série discrète de vecteurs sur une base spectrale. Le cas le plus simple est celui d'un cube discrétisé dans l'espace de Fourier où le passage d'une quantité $\vec{A}$ dans l'espace réel à la quantité $\hat{A}$ dans l'espace spectral se fait par la transformée de Fourier discrète

$$\hat{A}(\vec{k}, t) = \frac{1}{N}\sum_{\vec{x}} A(\vec{x}, t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \tag{4.28}$$

$$A(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{x}} \hat{A}(\vec{k}, t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \tag{4.29}$$

avec N le nombre de points par direction, $\vec{x}$ le vecteur position et $\vec{k}$ le vecteur d'onde. Cette transformation peut être effectuée de manière très rapide numériquement par la librairie FFTW (Fastest Fourier Transform in the West). L'avantage de résoudre les équations dans l'espace spectral est que l'opérateur de dérivation spatiale $\vec{\nabla}$ dans l'espace réel correspond à une simple multiplication par $i\vec{k}$ dans l'espace spectral. Cependant, les équations contiennent également des termes non linéaires de produits entre des champs de variables. L'équivalent d'un produit dans l'espace réel est une convolution dans l'espace de Fourier, ce qui est bien plus coûteux à calculer dans l'espace spectral que dans l'espace réel. Avec les librairies de transformation rapide, il est, de fait, moins coûteux de revenir dans l'espace réel pour calculer le produit et de convertir le résultat dans l'espace spectral pour qu'il soit utilisé dans les équations. Cet aller-retour entre l'espace physique et l'espace spectral entraîne un problème lié à un phénomène appelé *aliasing*. En effet, le produit de deux champs a une résolution égale à $2k_{\text{max}}$ dans l'espace spectral et il y a alors un biais dans l'information. Les modes compris entre $k_{\text{max}} < k < 2k_{\text{max}}$ seraient alors indissociables des modes $k/2$ (périodicité) dans l'espace spectral. Ces modes qui se recouvrent correspondent au dernier tiers des modes les plus élevés. La règle des deux tiers correspond à ne conserver que les deux tiers du spectre pour éviter le recouvrement des termes quadratiques. Pour des termes plus élevés, la coupure doit être plus importante.

Cette stratégie à la base des méthodes pseudo-spectrales, calcule donc les termes linéaires dans l'espace spectral et les termes non linéaires dans l'espace réel. La résolution des équations de la MHD par une approche pseudo-spectrale permet également d'avoir une faible dissipation

numérique de la vitesse et du champ magnétique. Cela induit la nécessité d'avoir des processus de diffusion explicites pour éviter que ces quantités grandissent à l'infini avec un pas de temps de plus en plus faible. Le problème de convergence de la MRI vue dans le chapitre précédent peut ainsi être résolu par l'utilisation de méthodes pseudo-spectrale avec une résolution spatiale suffisante. Pour s'assurer que la résolution spatiale permet de bien décrire la MRI, les spectres obtenus doivent converger avec le maximum de dissipation visqueuse ou résistive qui doit être situé à des échelles plus grandes que les plus petites échelles résolues dans la simulation.

4.2.1. Modèle local : Le code Snoopy

Pour résoudre localement les équations MHD dans l'approximation de Boussinesq, nous utiliserons le code pseudospectral SNOOPY (Lesur et Longaretti, 2005, 2007). Le code Snoopy a été utilisé pour étudier la MRI en absence de poussée d'Archimède par Lesur et Longaretti (2007), Rempel et al. (2010) et Longaretti et Lesur (2010). L'implémentation de la poussée d'Archimède a été utilisée pour étudier la convection verticale et l'instabilité baroclinique dans un disque d'accrétion (Lesur et Ogilvie, 2010 ; Lesur et J. C. B. Papaloizou, 2010). La direction de la stratification stable peut être choisie différemment de la direction du cisaillement. Cela est particulièrement important dans notre cas puisque le cisaillement sera cylindrique alors que la stratification est sphérique. Selon la région de la PNS que le modèle local représente, l'angle entre la stratification et le cisaillement peut aller de 0° à 90°.

Ce code résout les équations MHD dans un modèle de *shearing box* en trois dimensions en se basant sur une décomposition spectrale de Fourier, comme présentée précédemment dans l'équation (4.29). Les termes non linéaires sont calculés avec une méthode pseudo-spectrale utilisant la règle des deux tiers pour le dealiasing. L'intégration temporelle est effectuée à l'aide d'un schéma IMEX. La partie implicite traite les termes diffusifs et la partie explicite est un schéma Runge-Kutta du 3ème ordre. Nous nous intéresserons dans cette partie aux particularités d'un modèle de *shearing box*, en particulier sur le traitement du cisaillement et les conditions aux limites.

Traitement du cisaillement

Le code utilisant les bases de Fourier qui sont périodiques est particulièrement adapté à des conditions aux limites périodiques. Cependant, le cisaillement s'accommode mal de ce type de conditions aux limites, puisqu'il déforme les structures radiales qui perdront leur périodicité. Pour contourner cette difficulté, il convient d'utiliser des coordonnées cisaillées définit par

$$x' = x,\ y' = y - Sxt,\ z' = z, \tag{4.30}$$

où le repère cartésien (x, y, z) est une approximation locale du repère cylindrique (s, ϕ, z) et $S = -r\frac{d\Omega}{dr}$ est le cisaillement local. La dépendance spatiale du cisaillement est alors remplacée

par une dépendance en temps, qui est plus facilement traitable pour une méthode spectrale. Dans ce référentiel, des conditions périodiques peuvent être utilisées.

Ce changement de référentiel a des conséquences sur le traitement des ondes dans la simulation. Par exemple, le cisaillement d'une onde plane non-axisymmétrique avec un vecteur d'onde $\vec{k'}$ dans le référentiel cisaillé est décrit par un vecteur d'onde $\vec{k}$ dépendant du temps dans le référentiel non-cisaillé

$$k_x = k'_x - Sk_y t,\ k_y = k'_y,\ k_z = k'_z. \tag{4.31}$$

Les structures non-axisymmétriques deviennent ainsi de plus en plus petites dans la direction radiale avec le cisaillement de la grille. Sans traitement particulier, cela induit des erreurs dans la physique de ces ondes. En effet, les ondes de traîne, dont le nombre d'onde radial $|k_x|$ augmente avec le temps, se retrouvent à très haute fréquence et sont donc très fortement dissipées. Les ondes de tête, dont le nombre d'onde radial $|k_x|$ diminue avec le temps, sont moins dissipés et deviennent donc pertinentes pour la physique de l'écoulement. Cependant, ces ondes, dont le nombre d'onde radial initial est supérieur à la résolution spectrale, ne sont pas incluses dans la simulation.

Pour résoudre ce problème, Snoopy procède à un changement des ondes représentées par la grille tous les $t_{\mathrm{MAP}} = L_{\mathrm{y}}/(SL_{\mathrm{x}})$. Certaines des ondes de traîne disparaissent de la grille et sont remplacés par des ondes de tête, initialisées à zéro. Ce processus cause une perte d'énergie, dont il est possible de vérifier qu'elle est petite à condition que la simulation soit bien résolue. Le choix de la période t_{MAP} permet d'éviter une interpolation et de uniquement changer la position dans la grille. Cette procédure correspond à effectuer une réallocation des ondes de vecteur $\vec{k}$ sur la grille en définissant leur nouveau vecteur d'onde $\vec{K}'$

$$K'_{\mathrm{x}} = k_x - k_y S t_{\mathrm{MAP}}, \tag{4.32}$$

$$K'_{\mathrm{y}} = k_y. \tag{4.33}$$

4.2.2. Modèle global : MagIC

Dans cette partie, nous détaillerons le modèle numérique de l'étude dite globale effectuée avec le code MagIC (Wicht, 2002 ; Gastine et Wicht, 2012 ; Schaeffer, 2013). MagIC est un code MHD pseudospectral qui résout les équations en géométrie sphérique. Une description exhaustive de la technique numérique peut être trouvée dans Gilman et Glatzmaier (1981), Tilgner et Busse (1997) et Christensen et Wicht (2015).

Le fluide évolue librement entre deux sphères concentriques de rayons respectifs r_i et r_o. La distance $D = r_o - r_i$ sert d'unité de longueur au système. Le rapport de forme r_i/r_o est un paramètre libre, qui prendra deux valeurs différentes selon les modèles considérés.

Décomposition poloïdale toroïdale du champ de vitesse

Pour tout vecteur à divergence nulle $\vec{Y}$(solénoïdal) il existe un potentiel vecteur $\vec{X}$ tel que $\vec{Y} = \vec{\nabla} \times \vec{X}$. Cette propriété permet de décomposer le champ de quantité de mouvement $\tilde{\rho}\vec{U}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ en deux potentiels scalaires sous la forme

$$\tilde{\rho}\vec{U} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (W\,\vec{e_r}) + \vec{\nabla} \times (Z\,\vec{e_r})\,, \tag{4.34}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (g\,\vec{e_r}) + \vec{\nabla} \times (h\,\vec{e_r})\,. \tag{4.35}$$

Pour extraire ces potentiels scalaires à partir des variables physiques, il faut projeter la composante radiale de la variable et de son rotationnel de la variable en utilisant le fait que le potentiel toroïdal n'a pas de composante radiale :

$$\vec{e_r} \cdot \tilde{\rho}\vec{U} = -\Delta_H W, \tag{4.36}$$

$$\vec{e_r} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \tilde{\rho}\vec{U}\right) = -\Delta_H Z, \tag{4.37}$$

où l'opérateur Δ_H désigne la composante horizontale du Laplacien, définie par

$$\Delta_H = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial^2\phi}. \tag{4.38}$$

Les relations sont identiques pour le champ magnétique en remplaçant $\tilde{\rho}\vec{U}$ par $\vec{B}$ et les potentiels scalaires W et Z par les potentiels scalaires b et a. Pour obtenir les équations de la MHD s'appliquant à ces potentiels scalaires, il faut utiliser la même méthode : projeter les équations et le rotationnel des équations sur l'axe radial. Utiliser les équations de la MHD s'appliquant à ces potentiels scalaires, plutôt que les variables physiques, permet de s'assurer que la divergence de la quantité de mouvement et du champ magnétique reste nulle durant toute la durée de la simulation (sans risque d'erreur numérique).

Discrétisation spatiale

Puisque la géométrie du problème est sphérique, une décomposition sur la base de Fourier dans l'espace spectral n'est pas adaptée au problème. Ainsi les variables sont développées sur la base des harmoniques sphériques dans les directions angulaires et sur la base des polynômes de Chebyshev dans la direction radiale.

Les fonctions des harmoniques sphériques Y_l^m sont un choix naturel pour l'expansion des variables en colatitude θ et longitude ϕ et sont définies par

$$Y_l^m(\theta,\phi) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}, \tag{4.39}$$

où l et m sont respectivement le degré et l'ordre de l'harmonique sphérique et

$$P_l^m(X) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dX^l}\left[(X^2-1)^l\right], \tag{4.40}$$

est la fonction correspondant au polynôme de Legendre associé. La normalisation des harmoniques sphériques peut différer selon les contextes. La normalisation complète utilisée dans MagIC est telle que la relation d'orthogonalité vaut 1 entre deux harmoniques uniquement si les deux harmoniques sont identiques (même ordre m et degré l). Cela donne

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \left(\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{l+|m|)!}\right)^{1/2} P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}. \tag{4.41}$$

Par exemple, le champ magnétique poloïdal $g(r,\theta,\phi)$ se décompose en harmoniques sphériques (tronquée au degré et ordre l_{max}) de la façon suivante

$$g(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{l_{\text{max}}}\sum_{m=-l}^{m=l} g_{lm}(r)Y_l^m(\theta,\phi), \tag{4.42}$$

où g_{lm} correspondent aux coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques. Comme le potentiel $g(r,\theta,\phi)$ est une fonction réelle, on a la relation $g_{lm}^*(r) = g_{l,-m}(r)$, ce qui permet de ne calculer que les coefficients pour $m \geq 0$. La structure angulaire des harmoniques sphériques est visible sur la Figure 4.1 et l'on voit qu'un dipôle axial correspond à l'harmonique sphérique Y_1^0 et qu'un dipôle équatorial à l'harmonique sphérique Y_1^1. Le passage de la représentation $(r,\theta,\phi) \rightarrow (r,l,m)$ s'appelle une transformée de Legendre. Dans la direction longitudinale, celle-ci est équivalente à une transformée de Fourier en ϕ utilisant $N_\phi \geq 2l_{\text{max}}+1$. Pour la direction latitudinale, MagIC calcule les coefficients g_{lm} à l'aide d'une quadrature de Gauss-Legendre à partir des valeurs des fonctions de Legendre évaluées à des points de grille θ_j. Généralement, une résolution isotrope dans la région équatoriale est choisie avec un nombre de points en longitude $N_\phi = 2N_\theta$ valant le double du nombre de points en latitude. Pour le degré maximal des harmoniques sphériques, un choix $l_{\text{max}} = [\min(2N_\theta, N_\phi) - 1]/3$ suffit à prévenir les erreurs d'*aliasing*. La librairie SHTNS développé par Schaeffer (2013) permet d'effectuer des transformées de Legendre et de passer d'une représentation à l'autre de manière optimisée.

L'utilisation des harmoniques sphériques est très utile puisque celles-ci sont des fonctions propres de l'opérateur Laplacien (Éq. 4.38) et vérifient

$$\Delta_H Y_l^m = -\frac{l(l+1)}{r^2}Y_l^m. \tag{4.43}$$

D'autres dérivées spatiales peuvent également être exprimées comme une relation de récurrences entre différentes harmoniques sphériques. Ainsi la dérivation est remplacée par des produits et des sommes dans l'espace des harmoniques sphériques, de manière similaire à une base spectrale classique.

Pour la décomposition radiale, nous détaillerons ici les polynômes de Chebyshev $C(x)$ puisqu'il s'agit de la méthode utilisée pour toutes les simulations dans cette thèse. Un polynôme de

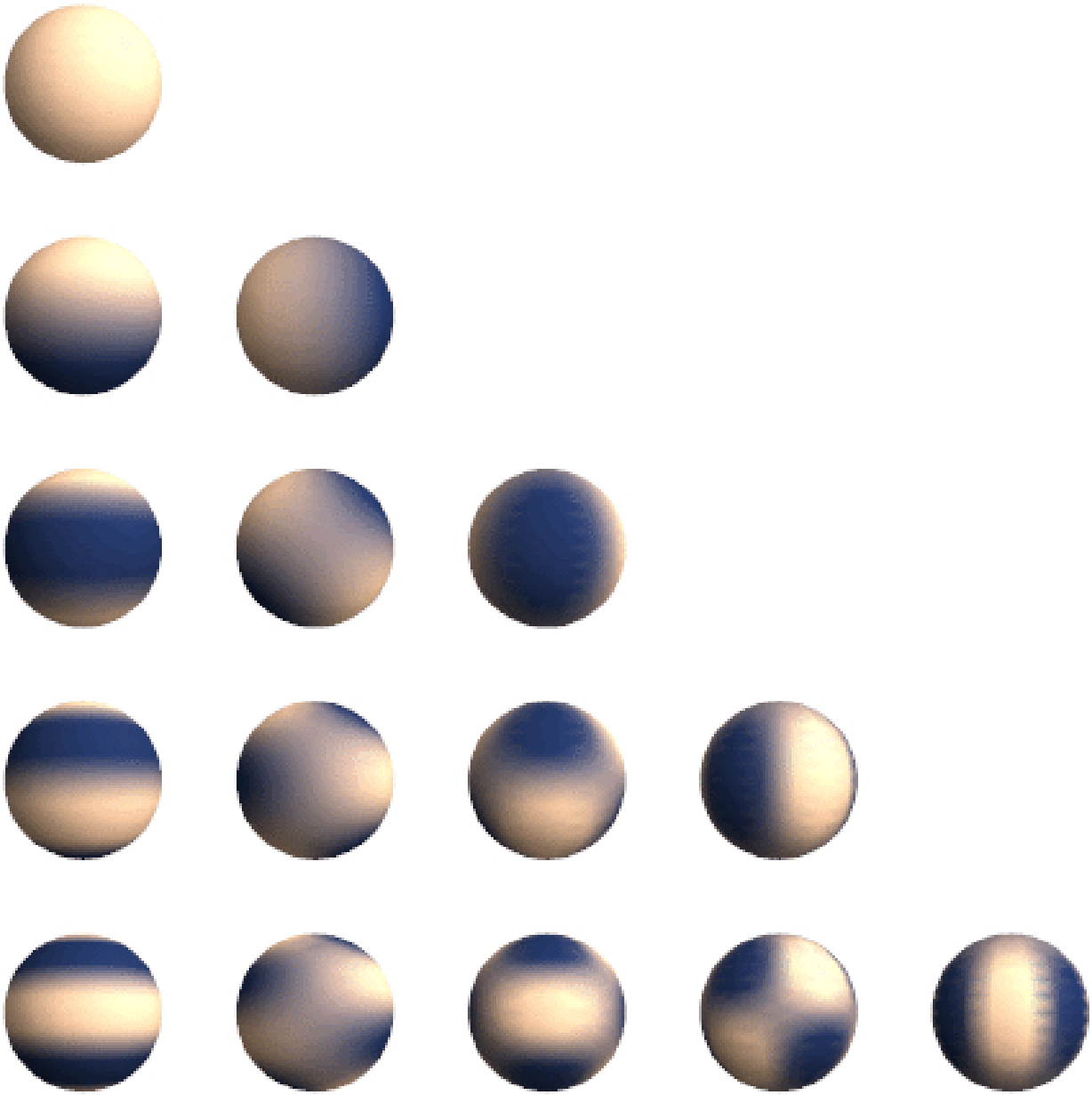


FIGURE 4.1. – Partie réelle des harmoniques sphériques Y_{lm} pour $l = 0, \ldots, 4$ (de haut en bas) et $m = 0, \ldots, 4$ (de gauche à droite). Crédit : Cyp - Own work https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=266718

Chebyshev de degré n est défini par

$$C_n(x) = \cos[n \arccos(x)] \text{ pour } -1 \leq x \leq 1. \tag{4.44}$$

En tronquant à un degré N qui dépend de la résolution radiale, le développement d'une variable A donne

$$A_{lm}(r) = \sum_{n=0}^{N} A_{lmn} C_n(r), \tag{4.45}$$

avec les coefficients g_{lmn} valant

$$g_{lmn} = \frac{2-\delta_{n0}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{dx g_{lm}(r(x)) C_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{4.46}$$

où x est relié au rayon r par $x(r) = 2\frac{r-r_i}{r_o-r_i} - 1$ pour que x soit dans l'espace de définition des polynômes de Chebyshev $[-1, 1]$. Les N_r points de grille radiale sont choisis pour que les polynômes de Chebyshev soient donnés par la fonction cosinus

$$C_{nk} = C_n(x_k) = \cos\left(\pi \frac{n(k-1)}{N_r - 1}\right) \text{ pour } k = 1, 2, ..., N_r, \tag{4.47}$$

où $x_k = cos\left(\pi\frac{(k-1)}{N_r-1}\right)$ sont les points de grilles. Ce choix particulier a deux avantages. Les points sont plus denses près du rayon interne r_i et du rayon externe r_o, ce qui permet de mieux résoudre les couches limites. De plus, les transformées de Fourier rapides peuvent être utilisées pour passer de la représentation sur la grille à l'espace spectral. Ce choix de points de grille s'appelle une grille de Gauss-Lobatto.

Schémas temporels

Les schémas temporels utilisés par MagIC sont des schémas IMEX où les termes linéaires sont traités implicitement et les termes non linéaires et la force de Coriolis sont traités explicitement. Ces termes sont traités explicitement, car ils couplent des modes très différents des harmoniques sphériques, ce qui rendrait l'inversion de la matrice temporelle plus coûteuse. Le schéma temporel historique de MagIC est un schéma du second ordre constitué par la combinaison d'un schéma de Crank-Nicolson pour la partie implicite et un schéma d'Adams-Bashforth pour les termes explicites. Ce schéma numérique a été utilisé pendant toute la première partie de ma thèse (pour les simulations du chapitre 5 et quelques-unes du chapitre 6). Entre-temps, d'autres schémas numériques ont été implémentés dans les versions plus récentes de MagIC avec notamment les méthodes IMEX multi-étapes de Runge-Kutta. L'évolution des quantités au pas de temps suivant est plus coûteuse avec ces méthodes puisqu'elles nécessitent plusieurs étapes pour calculer une itération. Toutefois, la stabilité du schéma est meilleure et le pas de temps est plus long. Le schéma du troisième ordre «BPR353» (Boscarino et al., 2013) a été utilisé dans la seconde moitié de cette thèse (pour la majorité des simulations du chapitre 6).

Conditions aux limites

Pour résoudre les équations numériquement, des conditions aux limites du domaine de la simulation doivent être imposées pour chaque variable.

D'un point de vue mécanique, les deux sphères aux rayons r_i et r_o sont considérées comme rigides et impénétrables. La vitesse radiale s'annule donc à ces rayons ($u_r = 0$). La condition aux limites la plus simple est de considérer que ces sphères sont en rotation solide. Il s'agit de la condition de non-glissement (*no slip*), où toutes les composantes de la vitesse s'annulent sauf pour la rotation ($u_\theta = 0$, $u_\phi = r_i\Omega_i$ où Ω_i et r_i sont respectivement la rotation et le rayon de la sphère interne ou $u_\phi = r_o\Omega_o$, pour la sphère externe). Dans le cas d'une surface libre, pour modéliser par exemple la surface d'une planète géante de gaz ou une étoile, il est souvent préférable de remplacer la condition de non-glissement par une condition aux limites où le stress visqueux s'annule, appelée condition *stress free*. De plus, il est également possible que le cœur interne tourne à la même vitesse que la sphère externe, les deux en rotation solide. Ces fréquences de rotations Ω_i et Ω_o peuvent être prises constantes sur toute la simulation ou changer sous l'effet des couples visqueux, électromagnétique dans le cas d'un cœur conducteur ou des couples liés au couplage entre les densités de la sphère externe et du cœur interne dans le cas où celles-ci diffèrent.

Pour les conditions aux limites magnétiques, on suppose que le fluide conducteur est entouré de régions isolantes pour le cœur et la sphère externe. Dans ce cas, le champ magnétique à l'intérieur du domaine est prolongé de manière continue par un champ magnétique externe décrit par un potentiel Φ tel que $\vec{B} = \nabla\Phi$ et vérifiant $\Delta\Phi = 0$ pour $r = r_i$ ou $r = r_o$. Cette condition aux limites isolantes correspond à la forme que doit prendre le champ magnétique dans le vide. Dans le cas où les régions du cœur et de la sphère externe soient parfaitement conductrices, la composante radiale du champ magnétique doit être continue et la condition s'exprime sous la forme $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$, où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface interne ou externe. Quand il y a un saut de perméabilité magnétique, une dernière condition aux limites magnétiques peut être imposée aux sphères internes et externes : la condition pseudo vacuum. Celle-ci impose que le champ magnétique soit purement radial, c'est-à-dire que la condition $\vec{B} \times \vec{n} = 0$ est vérifiée, où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface interne ou externe.

Pour les conditions aux limites thermiques, il est possible de fixer la différence d'entropie ΔS ou de température ΔT aux limites ou de fixer le flux de chaleur aux sphères internes et externes. Dans le cas non adiabatique, les perturbations d'entropie S sont considérées nulles aux limites et la stratification est due au gradient d'entropie de l'état de référence.

4.3. Mise en place de la configuration du modèle numérique

La section précédente a décrit les méthodes numériques utilisées durant cette thèse. Puisque les simulations locales ont été beaucoup utilisées pour étudier la MRI dans plusieurs contextes

différents, celles-ci n'ont pas nécessité d'ajustements ou de tests numériques supplémentaires lors de la configuration du modèle local. En revanche, l'utilisation d'un modèle global sans flux net initial pour étudier la génération du champ à grande échelle est la première étude de ce type dans les PNS. Pour cela, une des problématiques a été d'obtenir la rotation différentielle de manière à pouvoir étudier un état statistiquement stationnaire de la MRI. Nous avons également voulu vérifier que l'instabilité magnétohydrodynamique, présente dans nos simulations, est bien la MRI en vérifiant ses propriétés linéaires dans l'approximation incompressible. Finalement, nous avons développé un modèle anélastique de PNS à partir de simulations 1D de supernova d'une manière similaire à Raynaud et al. (2020) et testé l'implémentation de la stratification stable dans MagIC par l'étude d'ondes de gravité.

4.3.1. Forçage de la rotation différentielle

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la rotation différentielle apparait naturellement dans la PNS lors de l'effondrement du cœur de fer en rotation. Le profil de rotation différentielle initial dans nos simulations est principalement inspiré des études de Ott et al. (2006) et de Bugli et al. (2020). Le profil de rotation est cylindrique et est composé d'une zone interne en rotation solide et d'une zone externe en rotation différentielle selon une loi de puissance avec un exposant correspondant au taux de cisaillement initial q_0. La fréquence angulaire Ω varie avec le rayon cylindrique s selon

$$\Omega(s) = \Omega_i \left(1 + \left(\frac{s}{s_{\text{transition}}} \right)^{20 q_0} \right)^{-0.05}, \tag{4.48}$$

où $s_{\text{transition}}$ est le rayon de transition entre la rotation solide et la rotation différentielle, q_0 le taux de cisaillement initial et Ω_i est la fréquence angulaire du cœur interne. Cette fréquence Ω_i est déterminée telle que le moment cinétique du fluide avec ce profil de rotation est identique à celui d'un fluide en rotation solide à la fréquence angulaire Ω_0 du référentiel. On a

$$\Omega_{\text{i}} = \frac{I \Omega_0}{\displaystyle\int_V \tilde{\rho} s^2 \left(1 + \left(\frac{s}{s_{\text{transition}}} \right)^{20 q_{\text{o}}} \right)^{-0.05} dV}, \tag{4.49}$$

où s est le rayon cylindrique, V le volume de la simulation et I le moment d'inertie du domaine de la simulation. Ce profil permet d'avoir une transition continue entre la rotation solide et la rotation différentielle (Figure 4.2).

Les simulations numériques montrent également que cette rotation différentielle dure plusieurs centaines de millisecondes. Pour obtenir une rotation différentielle qui dure suffisamment, celle-ci doit être forcée dans nos simulations. Le recours à un forçage présente également l'avantage de pouvoir atteindre un état statistiquement stationnaire dont il est plus facile d'étudier les

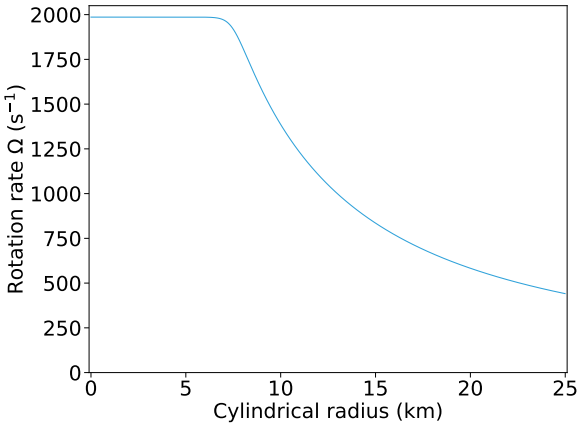


FIGURE 4.2. – Profil de rotation différentielle initiale avec $q_0 = 1.25$, $s_{\text{transition}} = 10\,\text{km}$ et $\Omega_i = 1986\,\text{s}^{-1}$.

propriétés physiques. Pour cela, nous avons étudié deux manières de forcer le profil de rotation différentielle, soit par la condition aux limites externes, soit par un forçage volumique.

Conditions aux limites

Les conditions aux limites peuvent avoir des conséquences importantes dans les simulations numériques. En effet, lors des premières simulations hydrodynamiques avec la condition avec glissement, cette dernière induisait une instabilité non désirée alors que le système était stable avec la condition sans glissement. Ce problème a inspiré l'implémentation d'une nouvelle condition aux limites basée sur la condition sans glissement : la composante azimutale de la vitesse est fixée à celle correspondant au profil de rotation initial tandis que les autres composantes sont gardées nulles. Ainsi la surface externe garde le profil de rotation différentielle constant tout au long de la simulation, ce qui force la rotation différentielle dans le domaine.

Le forçage de cette rotation différentielle avec les conditions aux limites rigides entraîne également un écoulement poloïdal axisymétrique, que l'on appelle la circulation méridienne. En effet, la variation spatiale rapide de la vitesse proche des conditions aux limites rend important le terme visqueux dans l'équation de Navier-Stokes (voir une dérivation dans KUNDU et COHEN, 2008). Cet écoulement est donc lié à la viscosité et, plus précisément au nombre d'Ekman E, un nombre sans dimension qui correspond au rapport de la viscosité sur la force de Coriolis défini par

$$E = \frac{\nu}{D^2\Omega}. \tag{4.50}$$

Dans les cas d'une rotation rapide $E \ll 1$, le nombre d'Ekman régit la taille δ_E de la couche limite visqueuse par

$$\delta_E \approx \sqrt{\frac{\nu}{\Omega \cos\theta}} \approx E^{1/2} D. \tag{4.51}$$

où θ est l'angle de l'axe de rotation avec la normale à la surface sphérique (Pedlosky, 1979). Dans le cas d'une turbulence magnétohydrodynamique, la force de Lorentz est à prendre en compte dans l'équilibre des forces près de la condition aux limites et modifie la taille de la couche limite δ. Une description locale et complète est donnée par Acheson et Hide (1973) et la taille des couches limites de type Hartmann-Ekman est de

$$\delta = \left(\Lambda_\eta + (1+\Lambda_\eta^2)^{1/2}\right)^{-1/2} \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}, \tag{4.52}$$

où Λ_η est le nombre d'Elsasser résistif local. En particulier, le champ magnétique a tendance à s'opposer à l'écoulement créé par la couche limite visqueuse et peut même l'annuler lorsque Λ_η est proche de l'unité.

Forçage par une force volumique

Nous avons également implémenté une autre manière de forcer la rotation différentielle en introduisant dans l'équation de Navier-Stockes une force volumique de type $-(\vec{u} - \vec{u_0})/\tau_f$ où le paramètre τ_f correspond au temps de forçage, qui permet de varier son efficacité, et $\vec{u_0}$ correspond au profil de vitesse de la rotation différentielle initiale que nous souhaitons forcer. L'étude de l'impact de cette force volumique a été menée linéairement et numériquement. D'un point de vue linéaire, la résolution de l'équation de dispersion avec cette nouvelle force montre que ce forçage peut réduire de manière importante le taux de croissance des modes axisymétriques de la MRI lorsque le temps de forçage τ_f est long. Bien que ces modes ne soient pas souvent dominants dans le cas sans flux net, nous sommes intéressés par la génération des modes aux grandes échelles dont les modes axisymétriques font partie. Le forçage était également trop faible pour entretenir la rotation différentielle lorsque τ_f est court. De plus, les tests hydrodynamiques de ce forçage montrent que la circulation méridienne est plus importante que dans le cas d'un forçage par la condition aux limites extérieures. Pour ces raisons, cette force volumique n'a donc pas été conservée dans les simulations et seul le forçage par la condition aux limites a été conservé pour le modèle numérique.

4.3.2. Un cas linéaire de la MRI

En utilisant le profil de rotation et le forçage de la rotation différentielle décrit ci-dessus, nous avons essayé de reproduire l'évolution linéaire des *channel modes* de la MRI avec un champ magnétique vertical constant. En ajoutant des perturbations axisymétriques de vitesse, les *channel*

modes sont obtenus en géométrie sphérique (Figure 4.3). On remarque que les couches sont bien horizontales dans le plan équatorial, mais sont déformées par la géométrie sphérique près de la sphère externe. La vitesse d'Alfvén initiale est de $v_A = 0.1D\Omega_0$. Pour un taux de cisaillement $q = -1.25$, la longueur d'onde des modes les plus instables de la MRI vaut $\lambda_{\mathrm{MRI}} = \frac{2\pi}{k_{\mathrm{max}}} = 0.68D$, ce qui correspond bien à la valeur trouvée dans les simulations $\lambda_{\mathrm{sim}} \approx 0.67D$. De la même manière, le taux de croissance du champ magnétique $\sigma \simeq 500\,\mathrm{s}^{-1}$, calculé à partir de l'évolution temporelle, est comparable au taux de croissance théorique $\sigma = \frac{q_0}{2}\Omega_0 = 625\,\mathrm{s}^{-1}$. Cela confirme également que les propriétés de l'instabilité dans notre simulation correspondent aux propriétés de la MRI. Ce test numérique a ainsi permis de valider notre configuration.

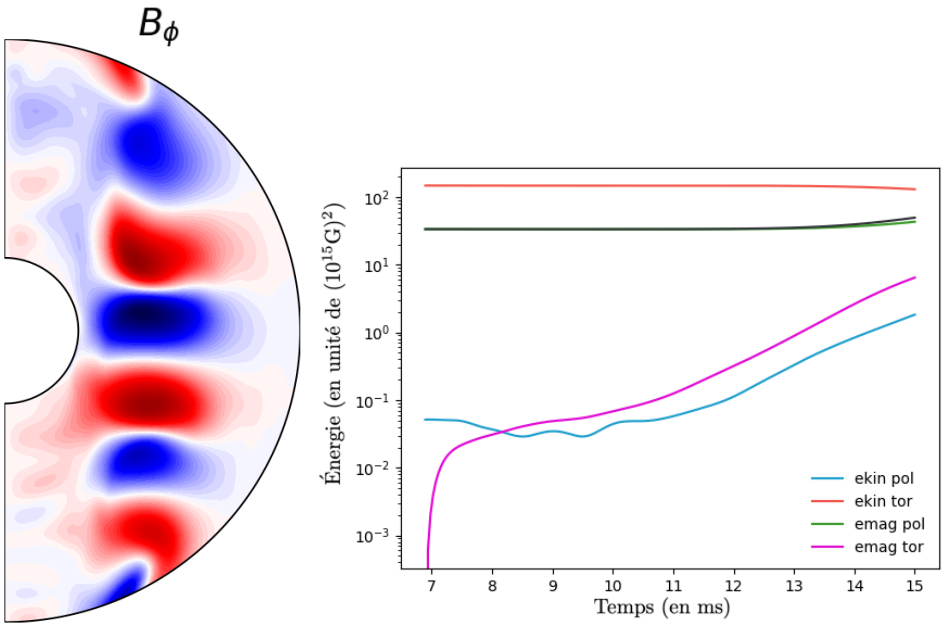


FIGURE 4.3. – (Gauche) Coupe méridionale du champ magnétique toroïdal B_ϕ à un instant donné. (Droite) Évolution de l'énergie magnétique toroïdale (violet), poloïdale (vert) et l'énergie cinétique poloïdale (bleu), toroïdale (orange) dans la simulation. La courbe noire correspond à l'énergie magnétique totale.

4.3.3. Mise en place d'une structure d'étoile à neutrons

Pour la mise en place du modèle anélastique d'une PNS, nous avons utilisé les données de simulations 1D de supernova par effondrement gravitationnel de HÜDEPOHL (2014). Ces simulations ont été effectuées avec le code *PROMETHEUS-VERTEX*, qui combine le code de simulation hydrodynamique *PROMETHEUS* avec le module de neutrino *VERTEX* (RAMPP et JANKA, 2002). Le module *VERTEX* résout les équations des moments dépendant de l'énergie pour trois espèces de neutrinos et d'antineutrinos en utilisant une relation de fermeture

avec un facteur d'Eddington variable et des taux d'interactions des neutrinos. La simulation utilise le modèle s27.0 d'étoile progénitrice de $27 M_\odot$ développé par Woosley et al. (2002) et l'équation d'état de la matière à haute densité LS220 de Lattimer et Swesty (1991). Dans cette simulation 1D, le transport de l'énergie et du nombre leptonique par la convection dans la PNS est modélisé par la théorie de la longueur de mélange (*mixing length theory*). Le principe de cette théorie, développé par Prandtl (1925) est de considérer qu'une particule de fluide conserve ses propriétés sur une longueur caractéristique avant de se mélanger avec le fluide. Les fluctuations des grandeurs physiques sont calculées à partir de cette longueur de mélange et des gradients des grandeurs variants sur des longueurs plus grandes que la longueur de mélange. Cette modélisation permet de traiter la convection et le transfert de moment cinétique de manière simplifiée.

De ces simulations sont extraits les profils 1D de gravité, de densité, d'entropie et de fraction leptonique. Pour les profils à $t = 0.2\,\mathrm{s}$, le gradient de fraction leptonique ne change pas la délimitation de la zone convective. Par souci de simplification, l'influence de la fraction électronique sur la fréquence de Brunt-Väisälä N est combinée avec l'effet du gradient d'entropie sous la forme d'un gradient d'entropie effectif ∇S_{eff} tel que

$$N^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{d\Phi_{\text{grav}}}{dr}\left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial S}\right|_{P,Y_e}\frac{dS}{dr} + \left.\frac{\partial\rho}{\partial Y_e}\right|_{P,S}\frac{dY_e}{dr}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d\Phi_{\text{grav}}}{dr}\left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial S_{\text{eff}}}\right|_{P,Y_e}\frac{dS_{\text{eff}}}{dr}\right). \tag{4.53}$$

Ces profils sont ensuite approximés par des polynômes pour l'implémentation dans MagIC (voir chapitre 6). Pour garder une implémentation cohérente avec MagIC, le profil du coefficient d'expansion thermique α_T est calculé selon l'équation (4.12) d'après les profils des autres quantités thermodynamiques. Le paramètre de contrôle de la fréquence de Brunt-Väisälä N est le nombre de Rayleigh Ra qui caractérise l'influence de la force de flottaison comparée au transport de chaleur et qui est liée à la fréquence de Brunt-Väisälä par

$$Ra = -\frac{N^2 D^4}{\kappa\nu}. \tag{4.54}$$

Par convention, le nombre de Rayleigh est négatif lorsque la stratification est stable et positif lorsqu'elle est instable à la convection. Nous avons vu que le rapport entre la fréquence de Brunt-Väisälä et le taux de rotation Ω qui dicte le comportement de la MRI (Guilet et E. Müller, 2015). Ce rapport s'exprime en fonction des nombres sans dimension suivants

$$\frac{N^2}{\Omega^2} = \frac{-Ra\,E^2}{Pr}. \tag{4.55}$$

La Figure 4.4 présente les profils de densité et du nombre de Brunt-Väisälä N pour une PNS à $t = 0.2\,\mathrm{s}$ après le rebond. Cette PNS est composée d'une zone convective allant de 12 km

à 25 km et une zone de stratification stable allant de 25 km à 39.25 km. Les diffusivités thermiques et visqueuses sont également calculées à partir de l'énergie et des opacités des neutrinos. Dans la zone stable, leur profil radial ne sera pas pris en compte par souci de simplicité. En effet, le libre parcours moyen des neutrinos augmente avec le rayon et les neutrinos peuvent commencer à s'échapper, ce qui complique leur prise en compte. De plus, le nombre de Prandtl Pr a un profil radial constant dans la zone stable et vaut $Pr = 0.005$.

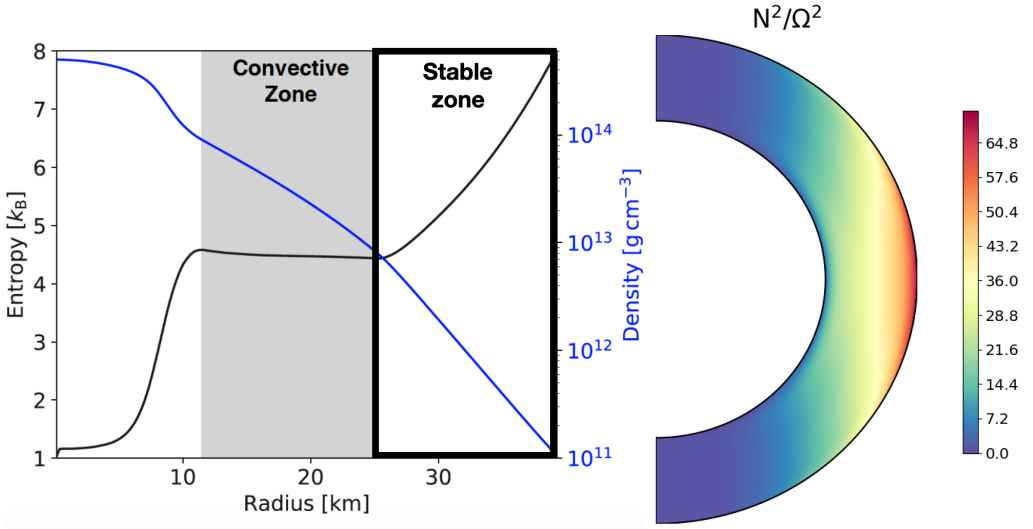


FIGURE 4.4. – (Gauche) Profils radiaux de l'entropie, de la densité. (Droite) Rapport de la fréquence de Brunt-Väisälä N et de la fréquence angulaire Ω. Le taux de cisaillement vaut $q = -1.5$ et la fréquence angulaire du cœur $\Omega_i = 3822\,\mathrm{rad/s}$.

4.3.4. Ondes de gravité dans un cas sans rotation

Pour tester cette nouvelle configuration, nous avons effectué des simulations hydrodynamiques avec $Pr = 0.1$ et $Ra = -9.4 \times 10^6$ et une rotation faible ($E = 0.444$) pour étudier les ondes de gravité du système.

Les propriétés des ondes de gravité sont décrites par leur fréquence et leur taux d'amortissement. D'un point de vue analytique, la fréquence des ondes de gravité pour un nombre d'onde k (GOSSARD et HOOKE, 1975) est donnée par

$$\omega_{\text{gravity}} = \sqrt{\frac{k_{\text{H}}^2}{k^2} N^2}, \tag{4.56}$$

où k_{H} est le nombre d'onde horizontal (au gradient d'entropie) qui vaut $k_{\text{H}} = \sqrt{\frac{l(l+1)}{r^2}}$ pour une harmonique sphérique de degré l à un rayon r. Le taux d'amortissement pour un mode

l vaut

$$\tau_{\text{gravity}} = k^2\kappa \approx \frac{l(l+1)}{r^2}\kappa, \tag{4.57}$$

où κ est la diffusivité thermique et le carré du nombre d'onde k^2 a été approximé par $k^2 = k_H^2 + k_r^2$, où $k_r^2 \simeq \pi/D^2$. La Figure 4.5 montre la comparaison de la fréquence et du taux

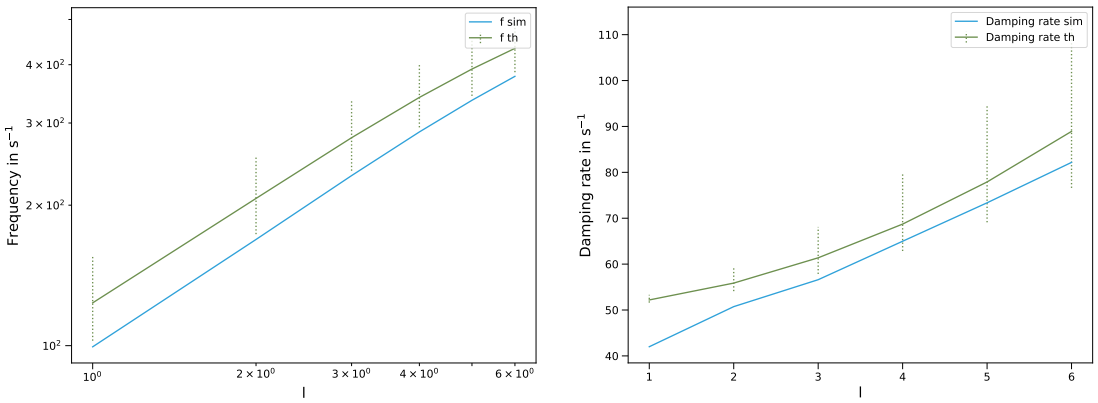


FIGURE 4.5. – Fréquence (gauche) et taux d'amortissement (droite) de modes g dans une simulation hydrodynamique avec $Pr = 0.1$ et $Ra = -9.4 \times 10^6$ testant l'implémentation dans le code MagIC de la zone stable de la PNS. Les deux figures comparent les valeurs mesurées dans la simulation (bleu) à une estimation analytique (vert). La barre d'erreur sur les valeurs analytiques correspond à la gamme des rayons présents dans le domaine $[r_i, r_o]$.

d'amortissement numériques avec les estimations analytiques. La fréquence est extraite des simulations à partir des oscillations des modes $l \leq 6$ du potentiel scalaire W et le taux d'amortissement à partir de la diminution de leur amplitude. Un bon accord est donc trouvé entre les valeurs numériques et analytiques. Ces résultats confirment que notre implémentation décrit bien la physique de la stratification thermique stable.

Chapitre 5

Modèle incompressible

Sommaire

5.1. Numerical setup . . . 133
5.1.1. Governing equations . . . 133
5.1.2. Numerical methods . . . 133
5.1.3. Initial conditions . . . 134
5.1.4. Boundary conditions . . . 136
5.1.5. Physical parameters and dimensionless numbers . . . 137
5.2. Results . . . 137
5.2.1. Typical quasi-stationary dynamos . . . 137
5.2.2. Dynamo threshold . . . 143
5.2.3. Robustness of the results . . . 145
5.3. Comparison to local simulations . . . 147
5.3.1. Setup for local models . . . 148
5.3.2. Dynamo threshold . . . 150
5.3.3. Turbulent energies and angular momentum transport . . . 150
5.4. Discussion . . . 153
5.4.1. Impact of the curvature . . . 154
5.4.2. Forcing of the differential rotation . . . 154
5.4.3. Diffusive processes . . . 155
5.4.4. Incompressible approximation . . . 156
5.5. Conclusions . . . 156
5.6. Le régime des hauts nombres de Prandtl magnétique . . . 161

Ce chapitre détaille la première étude de ce travail de thèse consacrée à l'amplification du champ magnétique par la MRI dans un modèle sphérique incompressible. Cette étude a été publiée dans le journal à comité de lecture *Astronomy & Astrophysics* (Reboul-Salze et al., 2021) (Cf. Annexe A). Le texte original en anglais est présenté dans ce chapitre, exception faite de l'introduction qui a été retirée afin d'éviter les redites avec la partie introductive de cette thèse. En voici, ci-dessous, un résumé en français.

La MRI est un mécanisme prometteur pour amplifier le champ magnétique dans les proto-étoiles à neutrons et expliquer la formation des magnétars. Ce scénario est étayé par de nombreuses études analytiques et locales, qui ont montré que le champ magnétique pouvait être amplifié par la MRI sur de petites échelles, comme nous l'avons vu dans la section 3.3. Toutefois, la capacité de la MRI à générer un champ dipolaire est toujours inconnue.

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à un modèle sphérique 3D simplifié d'une PNS en rotation rapide et en rotation différentielle. Pour cela, nous avons effectué des simulations MHD incompressibles avec des diffusivités explicites et le forçage de la rotation différentielle par la condition aux limites extérieures, présentée dans la section 4.3.1. Puisque nous souhaitons étudier la capacité à générer un champ dipolaire, seules les composantes à petite échelle du champ magnétique sont initialisées. Une étude paramétrique a été menée pour examiner l'influence des conditions initiales et des conditions aux limites magnétiques. Ces simulations globales, effectuées avec le code MagIC ont également été comparées avec des simulations locales de type *shearing box*, effectuées avec le code Snoopy.

Les simulations montrent qu'une dynamo générée par la MRI est obtenue indépendamment des conditions initiales à condition que le champ magnétique initial soit supérieur à une valeur critique $B_c \simeq 5 \times 10^{14}$ G. Une résistivité plus grande avec un nombre de Prandtl magnétique plus petit que $Pm \leq 16$ rend également l'obtention d'une dynamo plus difficile. Dans une simulation globale typique, cette dynamo sous-critique peut être décrite par son état quasi-stationnaire avec un champ magnétique turbulent de l'ordre de $B \geq 2 \times 10^{15}$ G et un dipôle non dominant, représentant environ 5% du champ magnétique total. De façon intéressante, ce dipôle est principalement équatorial, puisqu'il est orienté d'un angle $\theta_{\text{dip}} \simeq 80°$ par rapport à l'axe de rotation. Notre étude paramétrique a permis de montrer que ces résultats sont indépendants des conditions initiales et aux conditions aux limites. Ainsi la MRI est capable de générer un dipôle à partir d'un champ magnétique à petite échelle.

Comme cette étude était la première à décrire la géométrie sphérique en 3D d'une PNS, nous avons cherché à comparer nos résultats globaux à des simulations locales. Pour cela, nous avons varié la taille de la boite locale, particulièrement la longueur azimutale pour étudier l'obtention d'une dynamo selon Pm. Nous avons ensuite comparé les propriétés de la turbulence dans les simulations locales aux simulations globales. Bien que la turbulence soit plus vigoureuse dans les simulations locales, les modèles locaux reproduisent bien les caractéristiques de la turbulence globale de la MRI, particulièrement les spectres d'énergie cinétique et magnétique. Notre interprétation de ces résultats est que les grandes boites permettent à des structures plus allongées de se développer sans la contrainte de la courbure du modèle global, ce qui pourrait expliquer la différence de l'intensité du champ entre modèle global et local.

Dans l'ensemble, ces résultats appuient la capacité de la MRI de générer des champs magnétiques à grande échelle de l'ordre de grandeur des magnétars. Ils prédisent également la présence d'un champ magnétique à plus petite échelle encore plus intense, qui pourrait jouer un rôle pour les explosions extrêmes. De plus, l'accord entre les modèles locaux et globaux ouvre la

perspective d'étudier le régime des hauts Prandtl magnétiques Pm dans les modèles locaux et de pouvoir extrapoler ces résultats aux modèles globaux.

5.1. Numerical setup

5.1.1. Governing equations

The simulations performed in this article are designed to represent a fast rotating PNS. We assume that the hot PNS has a mass of $1.3 M_\odot$ and a radius of $r_\mathrm{o} = 25$ km. As the PNS is in solid body rotation for a radius $r \leq 10$ km (see Sect. 5.1.3 for the assumed rotation profile), the inner core of the PNS is stable to the MRI and it can be excluded from the simulation domain. We chose an inner core with a radius $r_\mathrm{i} = 6.25$ km. The shell gap $D \equiv r_\mathrm{o} - r_\mathrm{i} = 18.75$ km is the characteristic length of the simulation domain. In our model, we assume that neutrinos are in the diffusive regime such that their effects on the dynamics can be appropriately described by a viscosity ν (Guilet et al., 2015). The incompressible approximation is used for the sake of simplicity. We assume a uniform density $\rho_0 = 4 \times 10^{13}$ g cm^{-3} and neglect buoyancy effects. The diffusive incompressible MHD equations describing the dynamics of the PNS in a rotating frame at an angular frequency $\Omega_0 = 1000$ rad/s read

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} = -\vec{\nabla}p' - 2\vec{\Omega_0}\times\vec{u} + \frac{1}{\mu_0\rho_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B} + \nu\Delta\vec{u}\,, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{u}\times\vec{B} - \eta\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\,, \tag{5.2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0\,, \tag{5.3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\,, \tag{5.4}$$

where $\vec{u}$ is the flow velocity, $\vec{B}$ the magnetic field, η the magnetic diffusivity, p' a modified pressure that includes centrifugal forces and normalized by the density and μ_0 the vacuum permeability.

5.1.2. Numerical methods

In order to solve the incompressible MHD system of equations (5.1)–(5.4), we used the pseudo-spectral code MagIC (Wicht, 2002; Gastine et Wicht, 2012; Schaeffer, 2013)[1]. MagIC solves the 3D MHD equations in a spherical shell using a poloidal-toroidal decomposition for the velocity and the magnetic field,

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times(W\vec{e_r}) + \vec{\nabla}\times(Z\vec{e_r})\,, \tag{5.5}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times(b\vec{e_r}) + \vec{\nabla}\times\left(a_j\vec{e_r}\right)\,, \tag{5.6}$$

1. https://magic-sph.github.io

where W and Z are respectively the poloidal and toroidal kinetic scalar potentials, while b and a_j are the magnetic ones. The scalar potentials and the reduced pressure p' are decomposed on spherical harmonics for the colatitude θ and the longitude ϕ angles, together with Chebyshev polynomials in the radial direction. The time stepping scheme is a mixed implicit-explicit scheme : A Crank-Nicolson scheme is used to advance the linear terms and a second order Adams-Bashforth scheme to advance the nonlinear terms and the Coriolis force. The linear terms are computed in the spectral space, while the nonlinear terms and the Coriolis force are computed in the physical space and transformed back to the spectral space. For more detailed descriptions of the numerical method and the associated spectral transforms, the reader is referred to Gilman et Glatzmaier (1981), Tilgner et Busse (1997) and Christensen et Wicht (2015).

All the simulations presented in this paper were performed using a standard grid resolution of $(n_r, n_\theta, n_\phi) = (257, 512, 1024)$. The resolution was chosen to ensure that the dissipation scales are resolved. Indeed, the maxima of viscous and resistive dissipation are respectively at the spherical harmonic orders $l_\nu \simeq 40$ and $l_\eta \simeq 85$, which means that around ten cells resolve the resistive maximum.

5.1.3. Initial conditions

Many core-collapse simulations with a fast rotating progenitor have shown that the PNS is differentially rotating for several hundreds of milliseconds (e.g, Akiyama et al., 2003; Ott et al., 2006; Obergaulinger et al., 2018; Bugli et al., 2020). The contraction of the PNS and accretion on the PNS accelerates it while the angular momentum is transported outside the PNS by the MRI. However, it would not be possible to sustain a differentially rotating profile within an isolated shell of the PNS and in presence of strong magnetic fields, unless some forcing mechanism were to be applied at the boundaries. Therefore, in our simplified setup, we chose to artificially force the differential rotation by keeping the initial differential rotation profile at the outer boundary constant during the duration of the simulation. This leads to a quasi-stationary state that is simpler to study and to compare among different models. The internal rotation profile of this quasi-stationary state can evolve and is determined by the combined effects of the backreaction of the magnetic field and the rotational forcing.

As initial and outer boundary condition, we used a cylindrical rotation profile inspired by core-collapse simulations with a central part that rotates like a solid body and an outer part that is differentially rotating with a power law dependency :

$$\Omega(s) = \frac{\Omega_\mathrm{i}}{\left(1 + \left(\frac{s}{0.4 r_\mathrm{o}}\right)^{20 q_0}\right)^{0.05}}\,, \tag{5.7}$$

where s is the cylindrical radius, q_0 corresponds to the shear rate $q \equiv -\frac{r}{\Omega}\frac{d\Omega}{dr}$ in the outer part, and Ω_i is the rotation rate of the inner core. This rotation rate Ω_i was computed so that

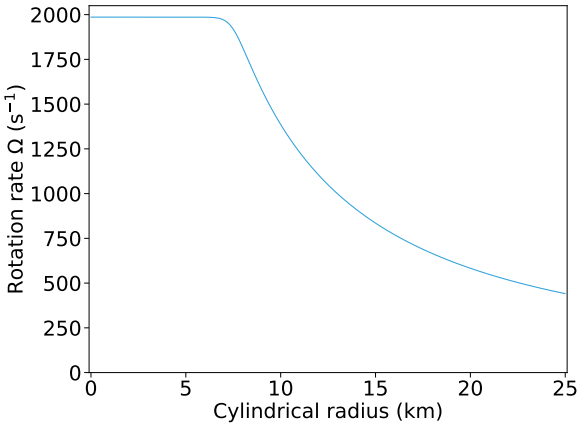


FIGURE 5.1. – Rotation profile inside the PNS as a function of the cylindrical radius. The inner region ($s < 10$ km) is in solid body rotation and the outer region ($s > 10$ km) follows a power law $\Omega \propto r^{-q_0}$ with $q_0 = 1.25$.

the ratio of total angular momentum over moment of inertia is equal to the frame rotation rate Ω_0 defined in Sect. 5.1.1. The profile shown in Fig. 5.1 with $q_0 = 1.25$ has a smooth transition between solid body rotation when $s < 0.4r_o$ and power law differential rotation when $s > 0.4r_o$.

Our model assumes a weak progenitor magnetic field and is designed to study in situ magnetic field amplification by the MRI, especially the large-scale field generation. Several local studies have already shown an efficient amplification of the magnetic field on small scales (e.g, OBERGAULINGER et al., 2009; MASADA et al., 2015; GUILET et E. MÜLLER, 2015; REMBIASZ, GUILET et al., 2016). Therefore, the magnetic field may be initialized by small-scale modes with magnetic field strength high enough to resolve the MRI fastest growing mode. The initial poloidal magnetic potential is a random superposition of modes with spherical harmonics indices (l, m) and a radial profile of the form

$$b_{l,m} \propto \begin{cases} 0 & \text{for } r < 7.5 \text{ km} \\ \cos(k_r(r - r_i)) & \text{for } r > 12.5 \text{ km} \end{cases}, \tag{5.8}$$

where k_r is the radial wavenumber and has a smooth transition between 7.5 km and 12.5 km. We selected Fourier radial modes and spherical harmonic modes, whose wavelengths $\lambda_r = 2\pi/k_r$ and $\lambda_l = \sqrt{\frac{r^2}{l(l+1)}}$ lie within the range $[L_{min}, L_{max}]$. We note that this initial magnetic field has a vanishing net magnetic flux over the simulation domain. The amplitude of these modes is initialized randomly with a wavelength dependence that provides a flat energy spectrum. Figure 5.2 shows an example of the initial poloidal magnetic field on a ϕ-slice with a typical value of $[L_{min}, L_{max}] = [0.23r_o, 0.38r_o]$.

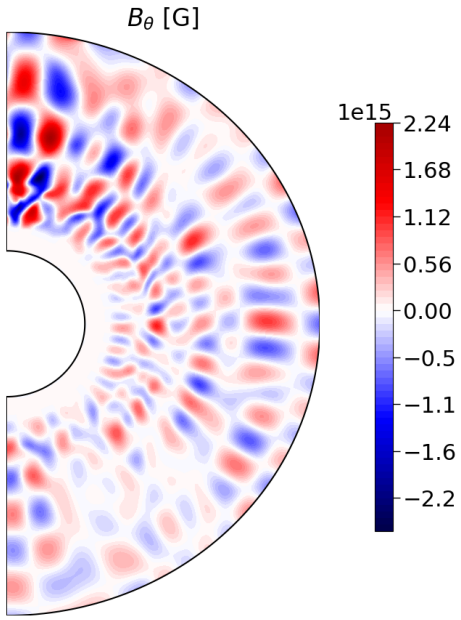


FIGURE 5.2. – Slice of the B_θ component of the initial magnetic field for the meridional plane $\phi = 0$ with $[L_{\rm min}, L_{\rm max}] = [0.23r_{\rm o}, 0.38r_{\rm o}]$ and $B_0 = 8.8 \times 10^{14}$ G.

The initial root mean square magnetic field strength B_0 is varied from $B_0 = 6.31 \times 10^{14}$ G to $B_0 = 3.36 \times 10^{15}$ G. The fastest growing mode of MRI in ideal MHD (BALBUS et HAWLEY, 1991) has a wavelength of

$$\lambda_{\rm MRI} = \frac{8\pi}{q_0(4-q_0)\Omega_0} \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \,. \tag{5.9}$$

It ranges from $\lambda_{\rm MRI} = 1.9 \times 10^5$ cm to $\lambda_{\rm MRI} = 1.0 \times 10^6$ cm and is well resolved with our resolution of $\Delta_r \equiv D/N_r = 7.32 \times 10^3$ cm.

5.1.4. Boundary conditions

We assumed non-penetrating boundary conditions ($u_r = 0$). At the inner boundary, we used a standard no-slip condition with an inner core in solid body rotation at a rate $\Omega_{\rm i}$ that evolves with the viscous torque (i.e., $u_\phi = \Omega_{\rm i} r_{\rm i}$ and $u_\theta = 0$). At the outer boundary, we used a modified no-slip condition where we forced u_ϕ to match the initial rotation profile at all times (and $u_\theta = 0$). The outer boundary is therefore not in solid body rotation. For the magnetic field, we compared three different boundary conditions : pseudo-vacuum (imposing a radial field : $\vec{B} \times \vec{n} = 0$, where $\vec{n}$ is the normal vector of the outer surface), perfect conductor (imposing a tangential field : $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$), and insulating (matching a potential field outside the domain).

5.1.5. Physical parameters and dimensionless numbers

We chose the physical parameters of the simulations to represent a fast rotating PNS model similar to the study of Guilet et al. (2015). All of our models have a uniform viscosity of $\nu = 7.03 \times 10^{11}$ cm s^{-2}. Given the values for the viscosity, the rotation rate Ω_0 and the characteristic length D (Sect. 5.1.1), the dimensionless Ekman number (characterizing the importance of viscosity over Coriolis force) is

$$E \equiv \frac{\nu}{\Omega_0 D^2} = 2 \times 10^{-4}. \tag{5.10}$$

For a PNS, the viscosity is large due to the impact of neutrinos while the resistivity is very small, which leads to a high magnetic Prandtl number $P_m \equiv \nu/\eta$. A realistic value of the magnetic Prandtl number for a PNS is $P_m \approx 10^{13}$ according to C. Thompson et Duncan (1993) and Masada et al. (2007). However, numerical simulations for these values of P_m are not possible due to numerical constraints. We varied the resistivity from $\eta = 4.39 \times 10^{10}$ cm s^{-2} to $\eta = 1.66 \times 10^{11}$ cm s^{-2}, which corresponds to magnetic Prandtl numbers in the range $P_m \in [4, 8, 16]$. Our standard value $P_m = 16$ is a compromise between the wish to be in the high magnetic Prandtl regime and the computing time constraints. The corresponding magnetic Reynolds number that characterizes the relative importance of magnetic advection to magnetic diffusion (resistivity) is

$$R_m \equiv \frac{D^2 \Omega_0}{\eta} \in \left[2 \times 10^4,\ 4 \times 10^4,\ 8 \times 10^4\right]. \tag{5.11}$$

5.2. Results

5.2.1. Typical quasi-stationary dynamos

We first describe the results from one fiducial simulation where we obtain a self-sustained dynamo. For the model `Standard` (see Table 5.2), we applied insulating boundary conditions and initialized the magnetic field with the parameters $B_0 = 8.8 \times 10^{14}$ G and $[L_{min}, L_{max}] = [0.23 r_o, 0.38 r_o]$ (see Sect. 5.1.3).

Figure 5.3 shows the temporal evolution of the volume-averaged toroidal and poloidal magnetic energy densities and the turbulent kinetic energy density. In order to separate the MRI-driven turbulent flow from the differential rotation, the turbulent kinetic energy density is computed by subtracting the contribution of the axisymmetric azimuthal velocity from the averaged kinetic energy density. After approximately 400 milliseconds, we obtain a statistically stationary state with a mean magnetic field intensity $B = 2.5 \times 10^{15}$ G. The main contribution is from the toroidal magnetic field, which is $\sim$2 times larger than the poloidal magnetic field. The magnetic field is predominantly nonaxisymmetric, the axisymmetric magnetic field being $\sim$3 times weaker than the total magnetic field. The averaged magnetic energy density is more than ten times

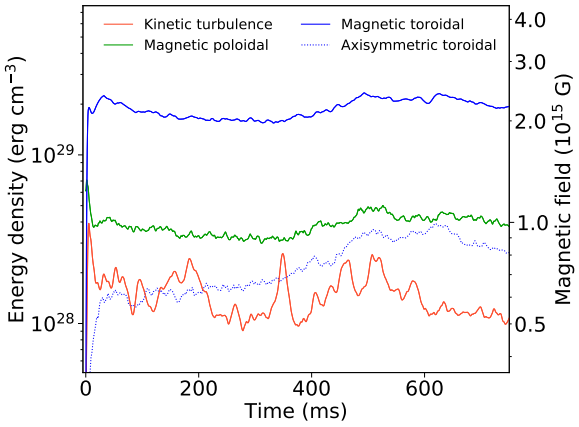


FIGURE 5.3. – Temporal evolution of the magnetic and turbulent kinetic energy density for the model `Standard` $B_0 = 8.8 \times 10^{14}$ G, $[L_{\rm min}, L_{\rm max}] = [0.23 r_{\rm o}, 0.38 r_{\rm o}]$. The blue and green lines are the toroidal and poloidal contributions of the magnetic energy density, while the orange line is the turbulent kinetic energy density (axisymmetric toroidal contribution is removed). The blue dotted line is the axisymmetric contribution to the toroidal magnetic energy density.

stronger than the turbulent kinetic energy density. A similar ratio is observed in local models of MRI-driven turbulence (see Sect. 5.3.3).

Figures 5.4 and 5.5 are representative snapshots of the quasi-stationary state and illustrate the complex geometry of the magnetic field due to MRI-driven turbulence. As is common in this turbulence, the winding of the magnetic field by the shear produces elongated structures in the azimuthal direction, which are clearly seen in the equatorial plane (Fig. 5.4). On the meridional cuts, the magnetic field is distributed on smaller scales. The turbulent structure of the magnetic field has lost memory of the initial magnetic configuration. Near the rotation axis, the magnetic field is not very intense and the MRI-driven turbulence is weaker for cylindrical radii smaller than $s_{\rm turb} \approx 9.4$ km. In the most turbulent zone, the turbulent radial velocity field has similar small-scale structures, while weak large-scale flows develop near the rotation axis (bottom panel of Fig. 5.5). The weak magnetic field and the non-turbulent flow near the rotation axis are expected because the vertically averaged shear rate of the simulation is small for $s \leq 9$ km and the inner part of the radial profile rotates as a solid body (blue line in Fig. 5.6).

To understand how the magnetic and kinetic energies are distributed over different scales, we computed the axisymmetric and nonaxisymmetric components of the toroidal and poloidal spectra (Fig. 5.7). To first order, the nonaxisymmetric toroidal magnetic spectrum as a function of the spherical harmonics order l (top panel of Fig. 5.7) can be decomposed in two parts : an increasing part up to order $l \simeq 20$ and a sharp decrease for the small scales where the dissipation occurs. The axisymmetric toroidal contribution dominates for the largest scales at $l < 3$, while it is clearly subdominant for the small scales. The quadrupole mode ($l = 2$) is particularly strong

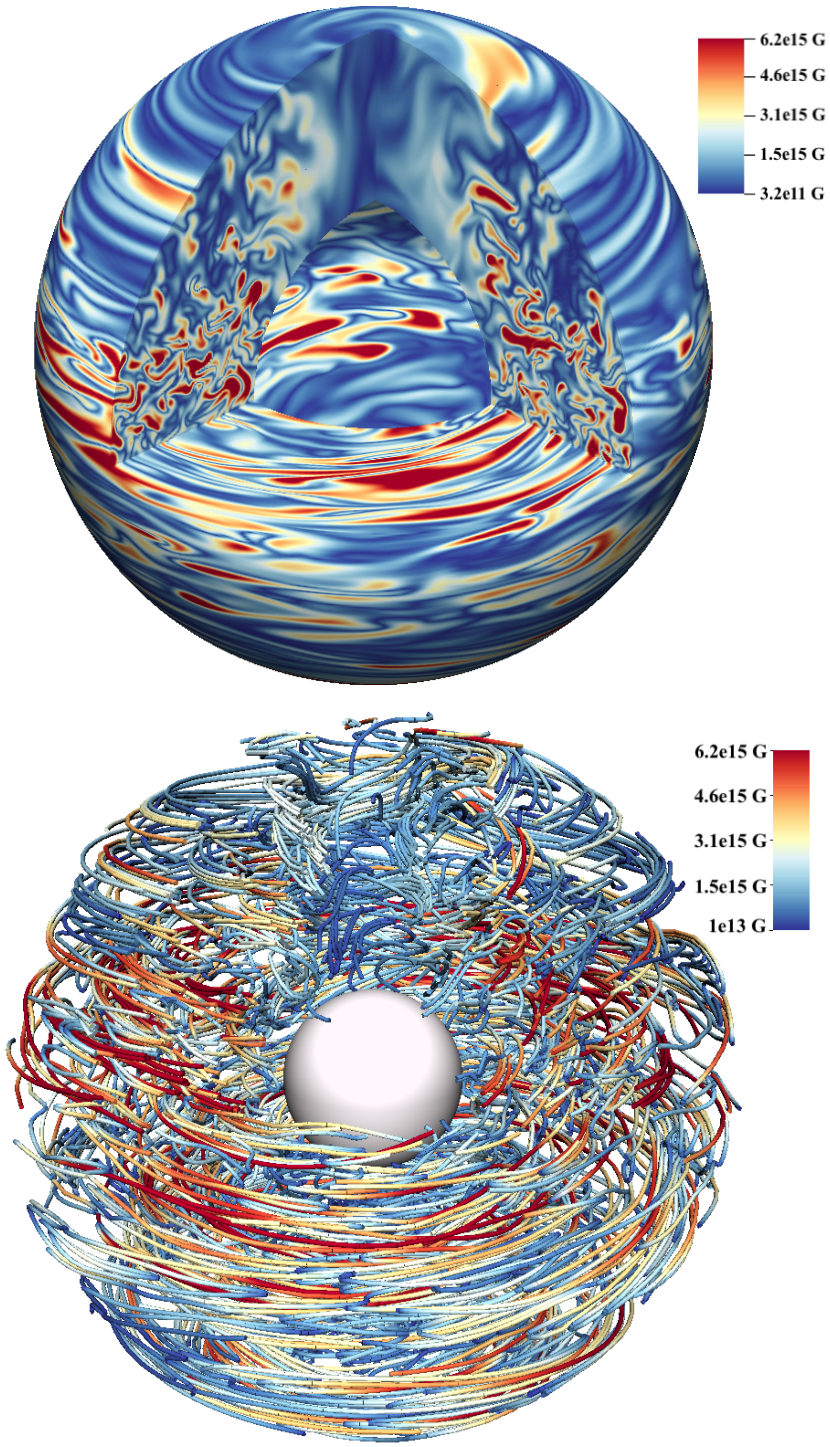


FIGURE 5.4. – Top : 3D snapshot of the intensity of the magnetic field at $t = 600$ ms for model `Standard`. The colors represent the magnetic field amplitude from weak (blue) to strong (red). Bottom : 3D snapshot of the magnetic field lines at $t = 600$ ms for the model `Standard`. The colors represent the magnetic field amplitude.

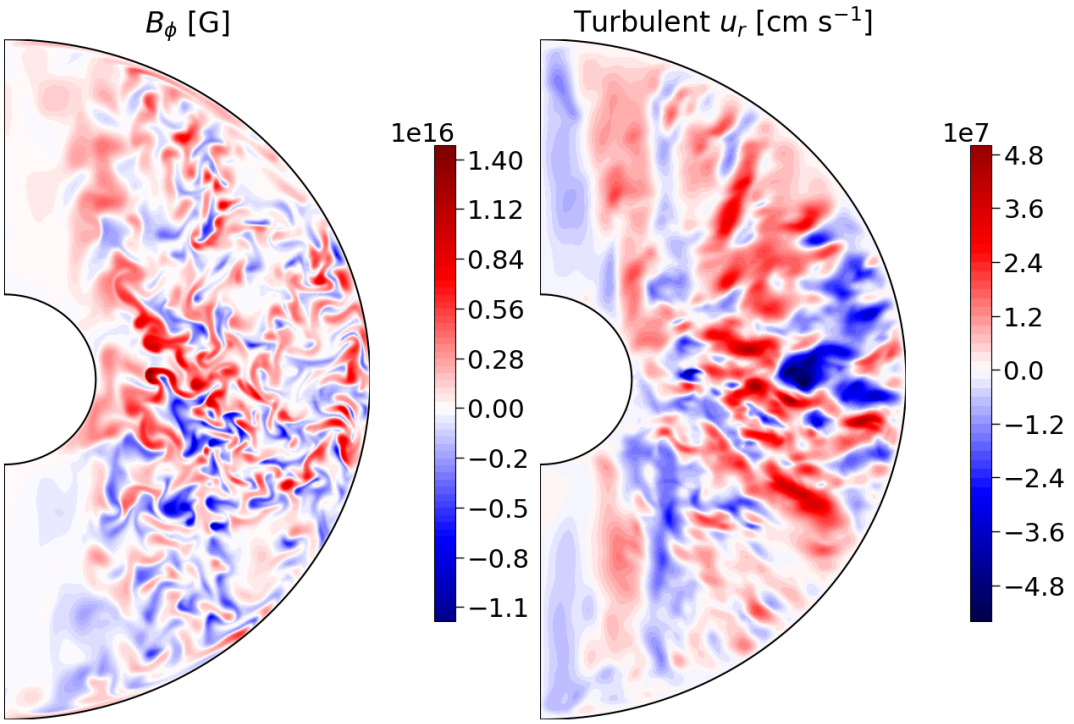


FIGURE 5.5. – Slices for $\phi = 0$ and $t = 600$ ms for the model `Standard`. Left : Azimuthal magnetic field B_ϕ. Right : Turbulent radial velocity u_r (i.e., the axisymmetric contribution is subtracted from the radial velocity).

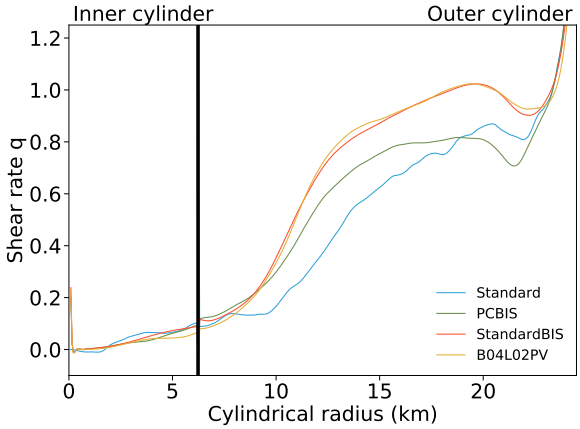


FIGURE 5.6. – Comparison of the vertically and azimuthally averaged shear rate q inside the PNS for different MHD simulations as a function of the cylindrical radius. The values are time-averaged in the quasi-stationary phase of the dynamo. The black line represents the radius of the inner core r_i.

for this model but this varies between different models. Contrary to the toroidal component, the poloidal magnetic field is dominated by its nonaxisymmetric component at all scales. The nonaxisymmetric poloidal magnetic spectrum is similar to the toroidal one but peaks at larger scales for $l \simeq 10$. These spectra show that the main contribution to the total magnetic energy comes from the toroidal component at intermediate scales ($l \sim 40$).

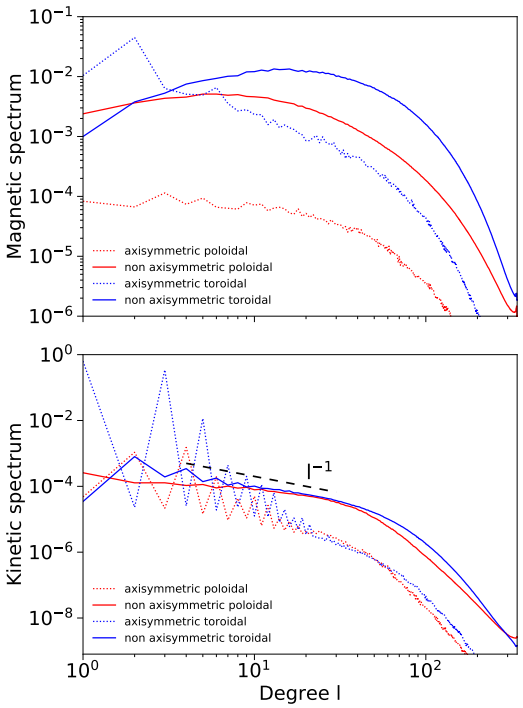


FIGURE 5.7. – Top : Spectrum of the toroidal magnetic energy (blue) and the poloidal magnetic energy (red) normalized by the total magnetic energy as a function of the spherical harmonics order l. The dotted lines correspond to the axisymmetric components of these energies. Bottom : Spectrum of the toroidal kinetic energy (blue) and the poloidal kinetic energy (red) normalized by the total kinetic energy as a function of the spherical harmonics order l. The dotted lines correspond to the axisymmetric components. The black dashed line corresponds to a scaling of l^{-1}.

The nonaxisymmetric poloidal and toroidal kinetic spectra are similar (bottom panel of Fig. 5.7) and can also be decomposed in two parts : a power law for the large scales and a sharp decrease for the small scales. The power law at larger scales ($l < 35$) seems to match a scaling of l^{-1}, which is consistent with the kinetic spectrum of high Reynolds local simulations (FROMANG, 2010). The axisymmetric toroidal component of the kinetic spectra is composed of the turbulence contribution dominating at small scales and the differential rotation dominating at large scales. The oscillations between odd and even modes observed for $l < 20$ are due to the symmetry of the differential rotation with respect to the equatorial plane. In the same way, the axisymmetric

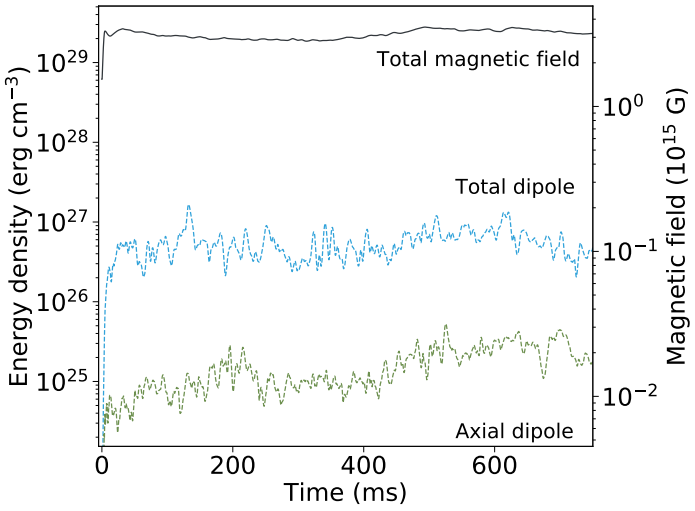


FIGURE 5.8. – Temporal evolution of the averaged magnetic energy density and dipolar energy density for the model `Standard`. The black line is the averaged magnetic energy density, the blue dash-dotted line is the averaged dipole energy density and the green dash-dotted is the axial dipole energy density.

poloidal contribution contains both turbulence (for $l > 20$) and the meridional circulation (for $l < 20$), which originates from the interplay between angular momentum transport and the outer boundary forcing. The total kinetic spectrum is dominated by the axisymmetric differential rotation and the meridional circulation at the large scales ($l < 10$), while the nonaxisymmetric kinetic turbulence dominates at the intermediate and small scales.

Since the magnetar timing parameters only constrain the dipolar component of the magnetic field, we focus in more details on this specific mode. The dipole field strength reaches a significant intensity of $B_{\rm dip} = 1.25 \times 10^{14}$ G but it is not the dominant mode in the simulation as it is approximately 20 times weaker than the total magnetic field intensity (see blue and black lines in Fig. 5.8). This is consistent with a visual inspection of the snapshots, where a dipole structure of the magnetic field cannot be seen.

In Fig. 5.8, the intensity of the axial dipole is $\sim$4 times lower than the averaged dipole intensity, implying that the dipole is tilted toward the equatorial plane. We computed the dipole tilt angle $\theta_{\rm dip}$ from the magnetic dipole moment $\vec{\mu}$ given by the formulas

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r} \times \vec{J} dV, \tag{5.12}$$

$$\theta_{\rm dip} = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\mu_z}{\sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}} \right), \tag{5.13}$$

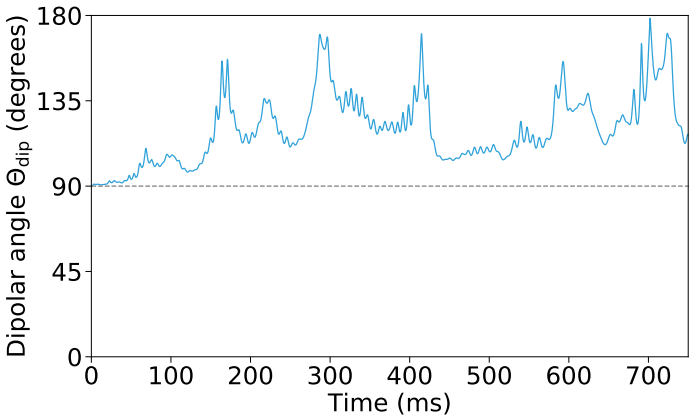


FIGURE 5.9. – Temporal evolution of the dipolar tilt angle in degrees for the model `Standard`. The aligned dipole corresponds to $\theta_{\text{dip}} = 0°$ and the equatorial dipole corresponds to $\theta_{\text{dip}} = 90°$.

where $\vec{J} = \nabla \times \vec{B}/\mu_0$ is the current and the volume integral covers the entire numerical domain. Figure 5.9 shows the time series of the dipole tilt angle. Its time-averaged value is $\theta_{\text{dip}} = 120°$ for the run `Standard`. This result is consistent with the ratio of the energy contained in the total dipole and axial dipole. The equatorial character of the dipole may be explained in the following way : The azimuthal magnetic field does not contribute to the axial dipole but it can contribute to the equatorial dipole through its $m = 1$ component. The fact that the MRI generates a predominantly azimuthal magnetic field may therefore explain the dominance of the equatorial dipole. The peaks we see in the dipole tilt angle evolution are due to the weakening of the dipole moment in the equatorial plane for short periods of time.

5.2.2. Dynamo threshold

We showed in the previous subsection that a MRI-driven dynamo can reach a quasi-stationary state but the turbulence can also be damped by the diffusion processes depending on the diffusivities or the initial magnetic field strength. In fact, diffusion processes (viscosity and resistivity) tend to limit the growth of MRI modes for weak fields (FROMANG et al., 2007; GUILET et al., 2015). Therefore, we expect the dynamo threshold to depend on the initial magnetic field intensity B_0 and the magnetic Prandtl number P_{m} (in this study, the Ekman number E is the same for all simulations).

Figure 5.10 shows the time evolution of the magnetic and turbulent kinetic energies for different values of B_0. Three behaviors are observed : For the lowest B_0 (dotted line), the turbulent energies decrease sharply with time, which indicates that no dynamo is achieved. For intermediate B_0 (dashed line), the turbulent energies have a slow decreasing phase followed by a fast drop. This behavior is called a transient dynamo in the following sections. For higher B_0,

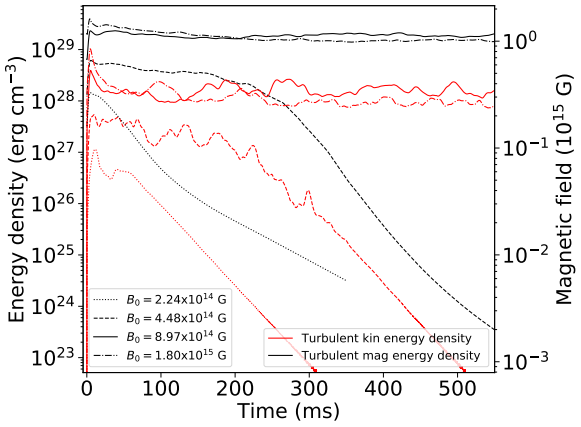


FIGURE 5.10. – Temporal evolution of the magnetic (black) and kinetic (red) turbulent energy densities for different values of B_0 with $[L_{\rm min}, L_{\rm max}] = [0.23r_{\rm o}, 0.38r_{\rm o}]$ and $P_{\rm m} = 16$.

the turbulent energies reach a quasi-steady state, with some fluctuations around a non-evolving average. In this case, the simulations reach a self-sustained quasi-stationary dynamo.

Figure 5.11 shows that a self-sustained dynamo can be obtained for $P_{\rm m} \gtrsim 12 \pm 4$. A simulation with $P_{\rm m} = 16$ gives a quasi-stationary dynamo, $P_{\rm m} = 8$ a transient dynamo, and $P_{\rm m} = 4$ no dynamo. This result is independent of the value of B_0 for $B_0 \geq 10^{15}$ G. It should be noted that the threshold of the dynamo action is set for relatively strong initial magnetic fields because of the high values of viscous and magnetic diffusivities. For lower diffusivities relevant to a PNS, we would expect MRI dynamo to set in for lower initial magnetic fields.

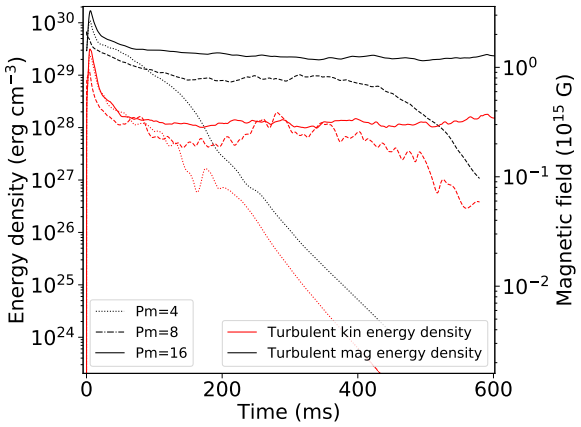


FIGURE 5.11. – Same as Fig. 5.10 for three different values of $P_{\rm m}$ and with $[L_{\rm min}, L_{\rm max}] = [0.75, 1]$ and $B_0 = 1.8 \times 10^{15}$ G.

5.2.3. Robustness of the results

The previous subsections demonstrated the ability of self-sustained MRI-driven dynamos to generate a significant, though subdominant, magnetic dipole. In this section, we assess the robustness of these results by studying the impact of initial and boundary conditions of the magnetic field. We show that the quasi-stationary state is independent of the initial conditions and that the boundary conditions only have a minor impact.

We varied the initial magnetic field amplitude B_0 and its minimum length scale $L_{\rm min}$ and display the results in Fig. 5.12. To characterize the early phase of magnetic amplification, we measured the early maximum of the toroidal magnetic field after a few milliseconds (i.e., the first local maximum value reached in the time series, see for example Fig. 5.11). For a given smallest

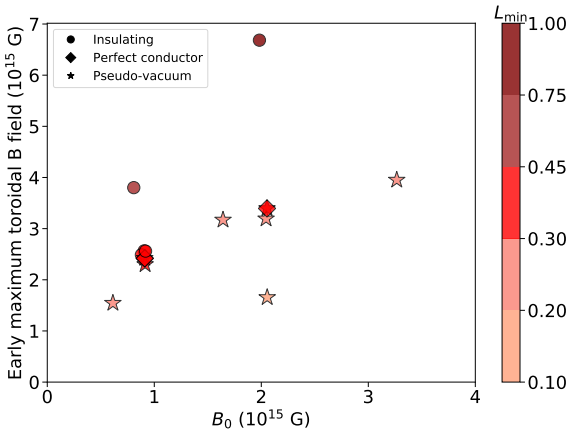


FIGURE 5.12. – Early maximum toroidal magnetic field as a function of initial magnetic field strength B_0. The symbol color describes the smallest initial magnetic length scale $L_{\rm min}$. The symbol shape represents the magnetic boundary conditions, between perfect conductor (diamond), insulating (circle) and pseudo-vacuum (star).

initial magnetic length scale $L_{\rm min}$ (indicated by the symbol color), the early maximum toroidal magnetic field is clearly increasing with the initial magnetic amplitude by a factor of $\sim$2. This dependence is shallower than in REMBIASZ, GUILET et al. (2016), probably because our initial magnetic field is on smaller scales. On the other hand, for a given B_0, the early maximum toroidal magnetic field increases by a factor of $\sim$5 when $L_{\rm min}$ is increased. The parameter $L_{\rm min}$ seems to have the most prominent effect on the early maximum toroidal magnetic field. A possible interpretation is that a small-scale magnetic field is more prone to dissipation. Finally, Fig. 5.12 suggests that the same initial conditions give approximately the same early maximum magnetic field, independently of the magnetic boundary conditions. Since this early maximum toroidal magnetic field is taken at the beginning of the simulation, boundary conditions may have a minor effect at this stage.

To characterize our self-sustained dynamos, we performed time and volume averages on the magnetic field once the simulation has reached a quasi-stationary state (Fig. 5.13). The averaged

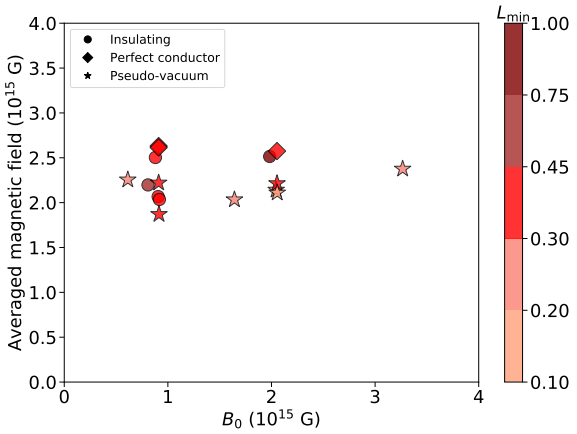


FIGURE 5.13. – Magnetic field strength averaged in the quasi-stationary state as a function of initial magnetic field strength B_0. The symbol color describes the smallest initial magnetic length scale L_{min}. The symbol shape represents the magnetic boundary conditions. This figure shows that the quasi-stationary state is roughly independent of the initial and boundary conditions, contrary to the early maximum.

magnetic field now displays much less variation than the early maximum. Indeed, all models lie between 1.8×10^{15} G and 2.7×10^{15} G, with a mean of $B = (2.27 \pm 0.23) \times 10^{15}$ G. Contrary to Fig. 5.12, no systematic impact of the initial conditions can be observed as different simulations give similar magnetic fields. For a given boundary condition, the small variations can be explained by the stochasticity of MRI-driven dynamos. On the other hand, the magnetic field is slightly stronger in the case of perfect conductor boundary conditions. This trend may be explained by a stronger toroidal magnetic field close to the outer boundary, since the perfect conductor condition allows for a non-vanishing toroidal magnetic field. Overall, these results indicate that the initial conditions and boundary conditions have a small impact on the global properties of the final quasi-stationary state.

It is important to assess to which extent our setup impacts the magnetic field morphology, and particularly the dipole component that is constrained by observations. The normalized magnetic and kinetic spectra depending on the Legendre polynomial order l (Fig. 5.14) and the azimuthal degree m (Fig. 5.15) show the differences at small and large scales for different models. The magnetic and kinetic spectra coincide well for the intermediate and small scales (top and bottom panel of Fig. 5.14), while the magnetic spectrum displays significant stochasticity at the large scales. For example, some models have a higher magnetic quadrupole $l = 2$, while other models have a maximum for a higher order l. It seems also that the models with perfect conductor boundary conditions (`PC` and `PCBIS`) have a lower kinetic $l = 1$ mode. As described

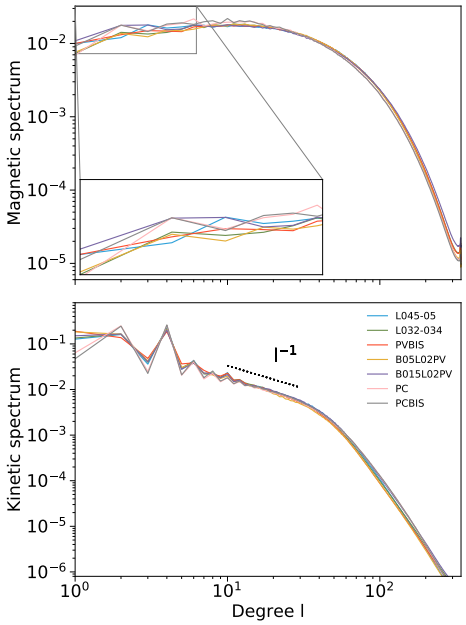


FIGURE 5.14. – Top : Spectrum of the magnetic energy as a function of the spherical harmonics order l. Bottom : Spectrum of the poloidal kinetic energy as a function of the spherical harmonics order l. Each line is from a different model. The dotted line corresponds to a scaling of l^{-1}.

in Sect. 5.2.1, the oscillations in the kinetic spectra are due to the meridional circulation. The magnetic spectra as a function of the azimuthal degree m (Fig. 5.15) is dominated by the large scales with a constant energy for $m \lesssim 10$ and decreases sharply for $m \gtrsim 10$. If we compare the l and m spectra, we note that the dominating scales are larger for the azimuthal spectrum, which is consistent with the elongated structures we can see in the equatorial plane of Fig. 5.4. Similarly, the kinetic energy decreases more steeply as a function of the azimuthal degree m than as a function of l. All models show a very good agreement for these kinetic and magnetic spectrum.

Even though the magnetic spectra of different simulations show significant dispersion at large scales, the dipole amplitude scales linearly with the averaged magnetic field (Fig. 5.16). The generation of a dipolar magnetic field is therefore a robust feature of the MRI and both initial and boundary conditions have a small impact on our qualitative and quantitative results, such as the dipole and the total magnetic field.

5.3. Comparison to local simulations

In this section, we would like to understand the impact of the geometry of the domain on the properties of the MRI. As our study is one of the first global spherical models that resolves

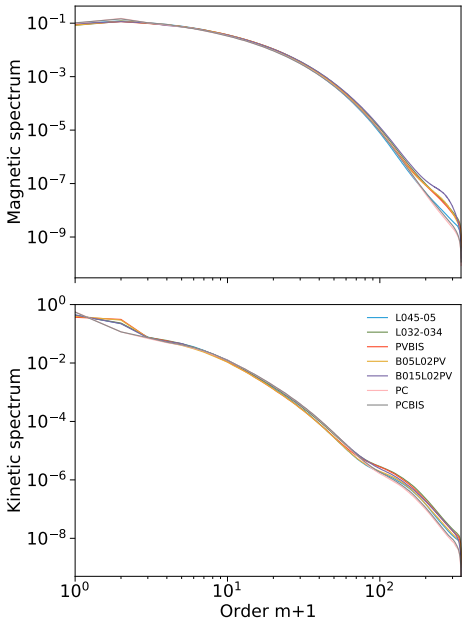


FIGURE 5.15. – Magnetic (top) and kinetic (bottom) normalized energy spectra as a function of the azimuthal degree m for different models.

the MRI, it is important to compare our results to local model results. We intend to establish whether a local Cartesian box can reproduce faithfully some of the properties of the MRI in a global spherical shell. A schematic view of the comparison is shown on Fig. 5.17. The Cartesian box is meant to represent the differentially rotating zone in the equatorial region of our global model. The Cartesian coordinates (x, y, z) in the local model corresponds to the cylindrical coordinates (s, ϕ, z) at the equator of the global model. The center of the box is at a radius of $s_0 \sim 0.7 r_o$. For the cylindrical radii $s_{cyl} \in [0.525 r_o, 0.9 r_o]$, the shear rate q is approximately constant and takes varying values in the range $[0.7, 1.0]$ for different models (see Fig. 5.6).

5.3.1. Setup for local models

The local models were computed with the code SNOOPY, which has been widely used to study the MRI (LESUR et LONGARETTI, 2005, 2007; GUILET et E. MÜLLER, 2015, and references therein). The rotation rate Ω_0 and the diffusivities in the local model are equal to the values used in the global model. The initial magnetic field was initialized with a sinusoidal radial profile of vertical field, which has been chosen such that the magnetic flux vanishes similarly to the global model. We have checked that the quasi-stationary turbulence is independent of the initial condition, provided that the magnetic field is strong enough to initiate an MRI dynamo.

To investigate the effect of the size of the domain and its geometry, we chose different box sizes (L_s, L_ϕ, L_z). If the properties of the MRI dynamo were independent of the domain

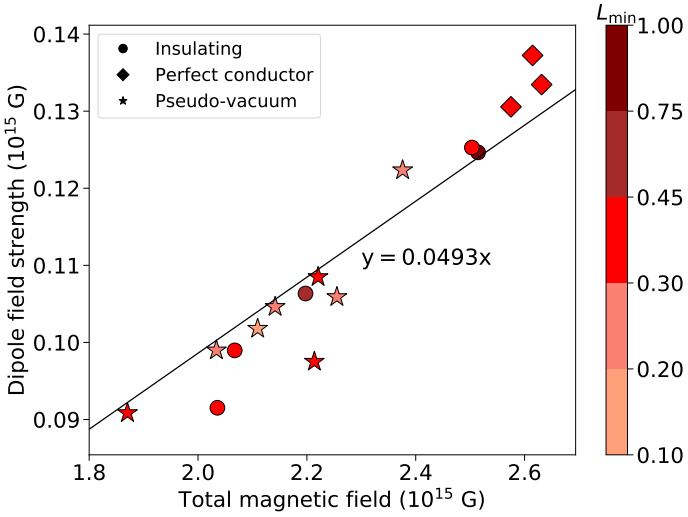


FIGURE 5.16. – Dipole magnetic field strength as a function of the averaged magnetic field strength. Symbols are defined in the caption of Fig. 5.12.

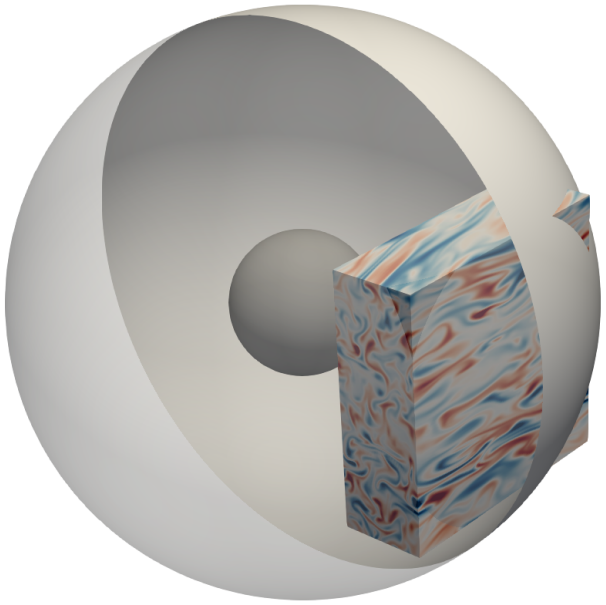


FIGURE 5.17. – Toroidal magnetic field B_ϕ of the local model `Ls03Lp09Lz09` with a box size $(L_s, L_\phi, L_z) = (0.3r_o, 0.9r_o, 0.9r_o)$ compared to the spherical domain of our global model.

geometry, then we would expect similar results when models have the same volume. The box $(L_s, L_\phi, L_z) = (0.5r_o, 4.5r_o, 1.2r_o)$ matches the volume of the most turbulent region V_{turb} in the global model where differential rotation is strong, which corresponds to a cylindrical

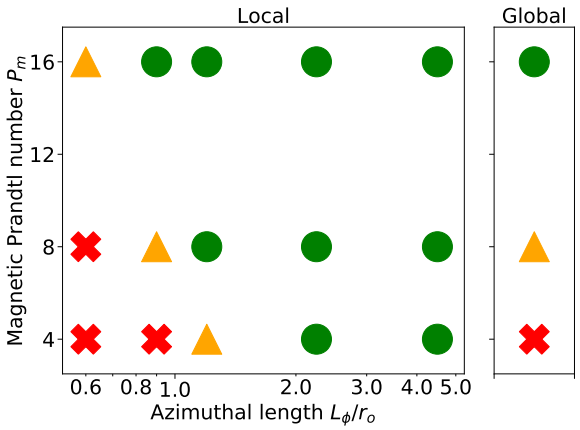


FIGURE 5.18. – Summary of the state (dynamo or not) of the model in a (L_ϕ, P_m) plane for both local and global models. A green circle corresponds to a self-sustained dynamo. An orange triangle corresponds to a transient dynamo. A red cross corresponds to no dynamo.

radius $s_\mathrm{cyl} \geq 0.5 r_\mathrm{o}$. Models with reduced box dimensions, especially the azimuthal length L_ϕ, have also been considered in an attempt to obtain results more similar to the global models. The volume of the box for the different box dimensions considered ranges from $V = 0.04 V_\mathrm{turb}$ to $V = V_\mathrm{turb}$ (see Table 5.1).

5.3.2. Dynamo threshold

For comparison with the results of Sect. 5.2.2, we determined the threshold in magnetic Prandtl number P_m necessary for dynamo action as a function of the azimuthal length L_ϕ. Figure 5.18 compares the dynamo threshold in the global model (right part) and the local model (left part). For the global model we obtain no dynamo for $P_\mathrm{m} \leq 4$, a transient dynamo for $P_\mathrm{m} = 8$ and a stable dynamo for $P_\mathrm{m} \geq 16$. The local model that matches this global behavior corresponds to a box size of $(L_s, L_\phi, L_z) = (0.3 r_\mathrm{o}, 0.9 r_\mathrm{o}, 0.9 r_\mathrm{o})$ and the P_m threshold decreases for larger boxes. This shows that the dynamo threshold is higher in the global model than the local model with the same volume.

5.3.3. Turbulent energies and angular momentum transport

To make a more detailed comparison between the local and the global models, we now consider the turbulent transport of angular momentum as well as the kinetic and magnetic energies. For comparison with the local models, the quantities from the global models were averaged for the cylindrical radius in the interval $s_\mathrm{cyl} \in [0.525 r_\mathrm{o}, 0.925 r_\mathrm{o}]$. We excluded a thin layer of thickness $0.075 r_\mathrm{o}$ near the outer boundary, where the turbulence is strongly affected by the boundary conditions.

Figure 5.19 shows the magnetic energy density as a function of the azimuthal length L_ϕ for different magnetic Prandtl number P_m, and different box lengths L_s and L_z. All local models have a significantly higher energy density than the global models (gray area), with the smaller boxes having a magnetic energy density closer to the global models. The impact of the box dimensions can also be deduced from these results. First, for a same radial length L_s (same color) and P_m (same marker), the magnetic energy density increases with the azimuthal length L_ϕ. Moreover, the magnetic energy density increases with the magnetic Prandtl number P_m, which was expected from previous local MRI studies (Lesur et Longaretti, 2007; Fromang et al., 2007; Longaretti et Lesur, 2010). Figure 5.19 shows that the global simulations tend to have a lower averaged magnetic energy density than the local simulations.

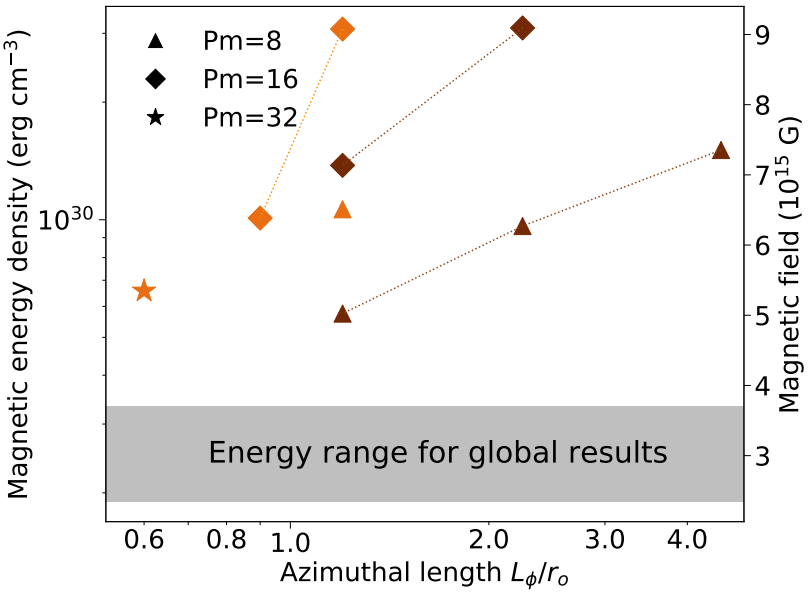


Figure 5.19. – Averaged magnetic energy density as a function of the box azimuthal size. The symbol shape represents the magnetic Prandtl number P_m. The symbol color indicates the radial length of the box (brown : $L_s = 0.67$; orange : $L_s = 0.4$). The gray zone represents the range of magnetic energy density averaged in the turbulent zone for our sample of global models.

In MRI turbulence, ratios of different time averaged quantities can be more robust, showing less variation than the turbulent energies. For example, the ratio of the magnetic to kinetic turbulent energies is around 10 for both local and global models (see Table 5.1). One can also look at the turbulent stresses and the different component contributions to the turbulent energies to compare in more details the local and global models (Table 5.1). For this diagnostic,

we used the $s\phi$ component of the Maxwell and Reynolds stress tensors, respectively defined as

$$M_{\rm s} = -\frac{1}{\rho_0 \mu_0} \left\langle \frac{B_s\, B_\phi}{D^2 \Omega_0^2} \right\rangle , \tag{5.14}$$

$$R_{\rm s} = \left\langle \frac{u_s\, u_\phi}{D^2 \Omega_0^2} \right\rangle , \tag{5.15}$$

where the brackets $\langle \cdot \rangle$ corresponds to the volume averaged value. The Maxwell and Reynolds

TABLE 5.1. – Local quantities used as diagnostics of the turbulence in both local and global models. The Maxwell and Reynolds stresses are normalized by the magnetic energy.

Name	$P_{\rm m}$	$q_{\rm avg}$	(L_s, L_ϕ, L_z)	$E_{\rm kin}$	$E_{\rm mag}$	$M_{\rm s}$	$R_{\rm s}$	$u_s^2/2$	$u_\phi^2/2$	$u_z^2/2$	$b_s^2/2$	$b_\phi^2/2$	$b_z^2/2$
Units	-	-	$[(r_{\rm o},r_{\rm o},r_{\rm o})]$	[erg/cm^3]	[erg/cm^3]	-	-	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]
LOCAL MODELS													
Pm8Ls05Lp45Lz12	8	0.8	(0.5, 4.5, 1.2)	1.69e29	1.51e30	0.422	0.0225	28.2	51.5	20.3	9.3	87.8	2.9
Pm8Ls05Lp22Lz12	8	0.8	(0.5, 2.25, 1.2)	9.16e28	9.64e29	0.406	0.0210	26.1	50.9	23	8.3	89.1	2.6
Pm8Ls05Lp12Lz12	8	0.8	(0.5, 1.2, 1.2)	4.85e28	5.75e29	0.381	0.0185	23.4	50.5	26.1	6.9	90.9	2.2
Pm8Ls03Lp12Lz12	8	0.8	(0.3, 1.2, 1.2)	1.10e29	1.06e30	0.405	0.0220	24	52.9	23.1	9.0	88	2.9
Ls05Lp22Lz12	16	0.8	(0.5, 2.25, 1.2)	3.51e29	3.10e30	0.439	0.0217	24	57.8	18.2	11.75	84.3	3.95
Ls05Lp12Lz12	16	0.8	(0.5, 1.2, 1.2)	1.29e29	1.38e30	0.433	0.0215	23.6	54.8	21.6	9.65	87.2	3.15
Ls03Lp12Lz12	16	0.8	(0.3, 1.2, 1.2)	2.53e29	3.08e30	0.356	0.0185	23.2	60.4	16.4	9.75	87.4	2.85
Ls03Lp09Lz09	16	0.8	(0.3, 0.9, 0.9)	8.25e28	1.01e30	0.411	0.0205	23	55.3	21.7	8.9	88.2	2.9
Pm32Ls03Lp08Lz08	32	0.8	(0.3, 0.8, 0.8)	3.95e28	6.57e29	0.389	0.0168	22.7	55.5	21.8	7.05	90.6	2.35
GLOBAL MODELS													
PVBIS	16	0.977	-	1.70e28	1.71e29	0.301	0.0152	22.7	55.8	21.5	4.05	94.2	1.75
PCBIS	16	0.819	-	1.86e28	3.11e29	0.299	0.00932	28.1	46.4	25.5	4.2	93.2	2.6
StandardBIS	16	0.95	-	1.56e28	1.92e29	0.302	0.0130	25.3	51.1	23.6	4.1	94	1.9
B04L015PV	16	0.951	-	1.28e28	1.90e29	0.305	0.0116	28.7	44.4	26.9	4.1	94.1	1.8
B05PV	16	0.903	-	1.69e28	2.29e29	0.304	0.0120	26.2	49	24.8	4.2	93.7	2.1
B08L015PV	16	0.859	-	1.90e28	2.65e29	0.325	0.0114	27.5	46.8	25.7	4.9	92.9	2.2
B05L008-023PV	16	0.936	-	1.73e28	2.11e29	0.313	0.0135	25.4	50.1	24.5	4.45	93.5	2.05
B05PC	16	0.793	-	2.42e28	3.33e29	0.304	0.0108	25	52.7	22.3	4.5	92.8	2.7

stresses normalized by the magnetic energy are weaker in global models, which shows that the angular momentum transport is less efficient. This difference can be explained for the Maxwell stress by the lower value of the magnetic radial contribution $b_{\rm s}$, while the other contributions are similar in proportion. The difference is also reduced for the local models that have a low magnetic energy.

Figure 5.20 shows that there is a correlation between the radial and vertical components of the magnetic field for physically different models, such as our local and global incompressible models, compressible stratified local and global models from an accretion disk study (HAWLEY et al., 2011) and stratified and unstratified local models (J. SHI et al., 2010; J.-M. SHI et al., 2016). Our local models seem to match well this trend, while our global models have a slightly lower radial contribution. It is unclear whether this small difference hints at an underlying systematic effect or is instead consistent with an inherent spread in the distribution of the data.

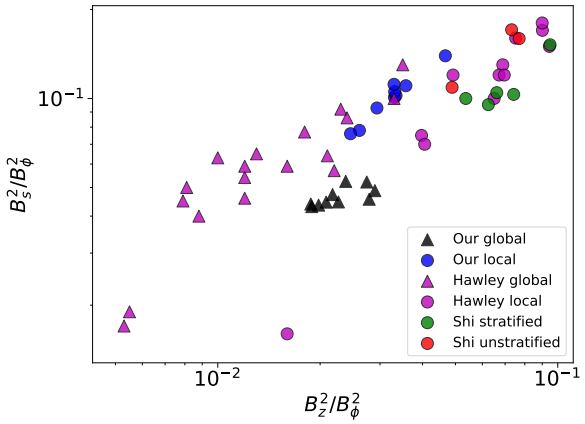


FIGURE 5.20. – Comparison for different models of the radial component B_s^2 as a function of vertical component B_z^2. Both components are normalized by the azimuthal component B_ϕ^2. The different values are taken from HAWLEY et al. (2011) and J. SHI et al. (2010) et J.-M. SHI et al. (2016)

Among local models, `Ls03Lp09Lz09` is the one showing features most similar to the global models (see the 3D snapshot in Fig. 5.17 and the one shown in Fig. 5.4 for a comparison). In addition to sharing the same threshold in P_m for dynamo action (Sect. 4.2), it has the smallest magnetic energy among the local models at P_m=16. Its kinetic and magnetic spectra can therefore be compared to the global nonaxisymmetric spectra (Fig. 5.21). The non-radial wavenumber $\tilde{k}$ is related to the spherical harmonic order l by the relation $\tilde{k} = \sqrt{l(l+1)/r^2}$ with r taken as $r = 0.75 r_\mathrm{o}$ for the global model in order to simplify the comparison. The magnetic spectrum of the local model is similar to the global spectrum. It can also be decomposed in an approximately flat part at large scales and an exponential decrease due to dissipation at small scales. The local kinetic spectrum is also in good agreement with the nonaxisymmetric spectrum global model. The local magnetic and kinetic spectra are stronger than the global ones at small scales, which is consistent with the stronger turbulence in our shearing boxes leading to slightly smaller dissipative scales. The main difference between the global and local spectra is therefore the presence of scales larger than the box, especially the axisymmetric component of the kinetic spectrum. Overall, these results suggest that the self-sustained dynamo obtained in the global models is typical of the MRI in local simulations.

5.4. Discussion

In this section, we discuss the influence of the domain geometry and the different limits of the simplifying assumptions made in our study : the impact of the curvature, the mechanical boundary conditions, the diffusive processes and the incompressible approximation.

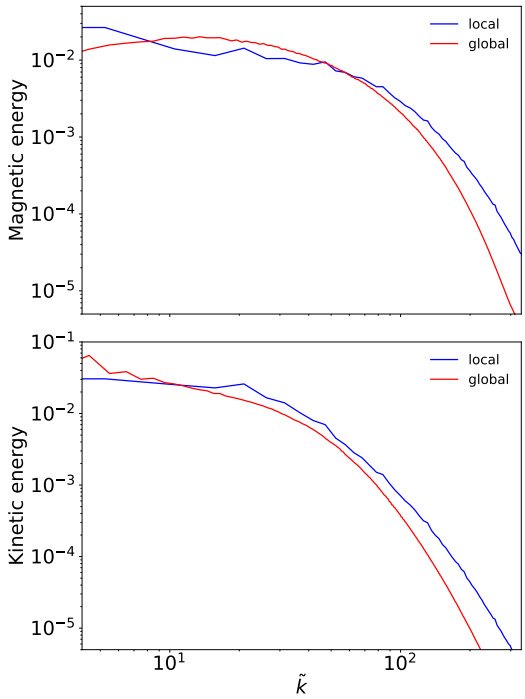


FIGURE 5.21. – Spectrum of the magnetic energy and kinetic energy as a function of the wavenumber $\tilde{k}$. The blue spectrum is averaged on the full duration of the local model `Ls03Lp12Lz12` and the red spectrum is the total nonaxisymmetric spectrum of the global model `Standard` (Fig. 5.7).

5.4.1. Impact of the curvature

As the local and global models are designed to have a similar differential rotation, one might have naively expected to obtain quantitatively similar results. However, the different geometry of the domain is sufficient to obtain different results between the local and global models. Our interpretation is that the curvature of the sphere and non-periodic boundaries reduce the coherence of the magnetic field and velocity field. Thus, local models and large boxes in particular tend to overestimate the field amplification, since they allow for larger coherence structures to develop and thus favor the MRI action over a broader range of scales.

5.4.2. Forcing of the differential rotation

We chose to rely on the outer mechanical boundary to force the differential rotation in the global simulations, which is justified by the dynamical evolution of the PNS in core-collapse supernovae. Indeed, the PNS contraction accelerates its rotation. At the same time, the MRI and the MHD turbulence transport the angular momentum toward the outer cylindrical radii

and therefore slow down the rotation. This behavior may even last longer than the duration of the core-collapse supernova because the contraction of the PNS can still continue after the explosion and the rotation can slow down due to winds or magnetic braking. These processes lead to the formation of two distinct regions within the PNS : The inner cylindrical part of the PNS is accelerated, while the outer cylindrical part is slowed down by the angular momentum transport. Our boundary conditions try to mimic this effect. We note that, despite being fixed at the boundary, the rotation profile inside the domain is free to evolve as a consequence of the backreaction of the magnetic field. As illustrated in Figure 5.6, we indeed observe that a stronger magnetic field leads to a lower degree of differential rotation.

However, one of the main limitations of this boundary condition is that the evolution of the global rotation profile is not well described as the effects of contraction, accretion, magnetic braking and transport of angular momentum is artificially taken into account on the outer boundary. Indeed, the timescale over which the rotation profile is significantly changed can be estimated by the amount of shear energy extracted by the combined effect of Reynolds and Maxwell stresses in the turbulent region. We estimate a shear energy of 3.9×10^{50} erg by comparing the rotational energy contained in the differentially rotating PNS to that of a PNS in solid body rotation with the same total angular momentum. The typical mean rate at which the shear energy is extracted is $\approx 5.2 \times 10^{51}$ erg s^{-1}. The typical timescale at which the energy is extracted from the shear is therefore ≈ 75 ms. This means that differential rotation would decrease rapidly without contraction and accretion. In MHD core collapse simulations, it remains unclear whether the speed-up due to contraction and accretion or rather the action of stresses and magnetic braking have a stronger impact on the rotation profile.

The energy injection by this outer boundary condition also depends on the viscous layer, and therefore on the diffusion processes. In addition, the energy injection of the outer boundary is different from the constant shear used in local models, which might be an other way to explain the differences between local and global models.

5.4.3. Diffusive processes

One could be tempted to solve our set of equations in the ideal MHD limit. However, resolution studies have shown that the turbulent transport is then sensitive to the numerical resolution (Pessah et al., 2007). Therefore, in order to avoid the pitfall of resolution-dependent results, we used explicit diffusivities and made sure that the diffusive scales were resolved. The low numerical diffusion of the pseudo-spectral codes ensure that only physical diffusivities impact the dynamics.

The regime of the diffusive parameters that can be numerically reached is a limit to our model : A realistic value of the neutrino viscosity is $\nu \sim 2 \times 10^{10}$ cm^2 s^{-1} at a radius of $\sim$20 km (Guilet et al., 2015). The corresponding Ekman number is then $E \sim 6 \times 10^{-6}$, which is lower than in our simulations by a factor of about 30. Using a more realistic value of E may lower the thresholds to obtain a dynamo (see Sect. 5.2.2) and may lead to a stronger amplification

of the magnetic field. Moreover, the resistivity used in our simulations is much larger than realistic values. Due to numerical constraints, the magnetic Prandtl number is limited to 16 in our study, much smaller than realistic values of $P_{\rm m} \sim 10^{13}$. Accretion disk studies have shown that the MRI-driven turbulence is highly sensitive to the magnetic Prandtl number, and generally it increases with $P_{\rm m}$ (Lesur et Longaretti, 2007; Fromang et al., 2007; Longaretti et Lesur, 2010). Our local numerical simulations confirm this trend (see Table 5.1). Our quantitative results should therefore be considered as lower bounds on the magnetic field strength that would be reached at higher $P_{\rm m}$. Investigating the regime of higher $P_{\rm m}$ in a global model is computationally demanding and it would certainly be more affordable to use local models. Further comparisons between local and global simulations would then allow us to extrapolate the results to a global model.

Finally, we assume that neutrinos are in the diffusive regime, which should be valid only in the inner part of the PNS. In the outer parts of the PNS, the neutrinos are in the nondiffusive regime on length scales at which the MRI grows. The impact of the neutrino drag regime on the linear phase has been studied by Guilet et al. (2015), but has never been studied in nonlinear numerical simulations. The evolution of the MRI in this regime remains an open question.

5.4.4. Incompressible approximation

The incompressible approximation was used to provide an idealized reference model and to reduce the cost of our numerical simulations by filtering out sound waves. First, filtering sound waves is justified when the sound speed $c_{\rm s}$ is much larger than both the fluid and Alfvén velocities ($v_A \equiv B/\sqrt{\mu_0 \rho}$). With $c_s \sim 5 \times 10^4\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ at $r \sim 20\,\mathrm{km}$, we check a posteriori that this condition is satisfied in our global models, for which $u^2/c_s^2 \leq v_A^2/c_s^2 \leq 10^{-4}$. This is consistent with the discussion of the Boussinesq approximation in Guilet et E. Müller (2015). Second, we neglect the composition and entropy gradients. The incompressible approximation could be extended to take into account the buoyancy within the Boussinesq approximation. However, we do not include it for the sake of simplicity and in order to be able to compare our results to most of the numerical studies of the MRI in the literature. Finally, density stratification is neglected and its study is postponed to a further work.

5.5. Conclusions

For the first time, we have investigated the generation of large-scale magnetic fields by the MRI in an idealized 3D spherical model of PNS. We performed a parameter exploration of the initial and boundary conditions and we compared in details the results of our global simulations with local shearing box simulations. The main findings of our study can be summarized as follows :

— The MRI leads to a quasi-stationary state with a strong turbulent magnetic field of $B \geq 2 \times 10^{15}$ G. The toroidal component of the magnetic field dominates over the poloidal field by a factor of $\sim$2. A nondominant magnetic dipole $B_{\rm dip} \sim 10^{14}$ G is generated, which represents about 5 % of the averaged magnetic field strength. Interestingly, this dipole is tilted toward the equatorial plane with a tilt angle in the interval $\theta_{\rm dip} \in [60°, 120°]$.
— The magnetic field amplification and dipole generation by the MRI is a robust mechanism that operates for a large number of different initial setups and magnetic boundary conditions. Indeed, the turbulent energies and the angular momentum transport in the quasi-stationary state do not depend much on the initial magnetic field and boundary conditions.
— The comparison between global and local studies suggests that the geometry of the domain leads to a decrease in the turbulent energies. Indeed, global models have lower turbulent energies than local models, although the ratio of kinetic and magnetic energies and the relative contributions to these energies are comparable. The results from the small boxes of the local simulations have a better agreement with those from the global models, which may be interpreted by the fact that the curvature in a spherical shell limits the coherence length scale of the turbulence.

These findings support the ability of the MRI to generate a strong magnetic dipole and explain magnetar formation. One should of course keep in mind that our results still need to be confirmed by setups with a more realistic PNS structure as discussed below.

The magnetic dipole amplitude obtained from the time and volume averages ranges from 9.1×10^{13} G to 1.35×10^{14} G, which is within the lower end of the observed range for the dipole of galactic magnetars. We further note that these results are obtained before the full contraction to the final size of a cold neutron star, which has a radius close to 12 km. If the magnetic flux is conserved during this contraction, we expect the magnetic field to be amplified by a factor of $\simeq$4, possibly bringing the dipolar component of the magnetic field in the middle of magnetar range 10^{14}–10^{15} G.

To compare our results directly with observations, the turbulent magnetic field should also be relaxed to a stable state without differential rotation and be evolved on longer timescales. Under the joint effects of magnetospheric dissipation and internal dissipation, the dipole from our model could become a stable equatorial dipole (Lander et D. I. Jones, 2018).

Similarly to our results, some observations suggest that the dipole may not be the strongest component of the magnetic field of magnetars. Indeed, Makishima et al. (2016, 2019) have detected phase modulations in X-ray emissions from two magnetars, which are interpreted as a free precession due to prolate deformations of the neutron star under the torque of a very intense internal toroidal field. The MRI-driven magnetic field is mainly toroidal and could be important to explain these observations.

As discussed above, our results suggest that a fast rotating PNS can become a typical magnetar through MRI action. A slower rotation, on the other hand, is expected to lead to a lower magnetic field and may explain the formation of low field magnetars (Rea et al., 2012, 2013, 2014). In fact, owing to the simplicity of our setup, our simulations can be rescaled to a different rotation frequency. For example, for a 30 times slower rotation rate [2], the magnetic field should be scaled down by a factor of 30. The final neutron star would have a magnetic dipole of $\simeq 1-2\times10^{13}$ G and a total magnetic field of $\simeq 3\times10^{14}$ G, which corresponds to a low field magnetar. The ratio of the magnetic dipole to the total magnetic field can also be compared to the cases of SGR 0418+5729 (Tiengo et al., 2013) and J1822.3-16066 (Rodríguez Castillo et al., 2016), for which the total magnetic field can be measured using the proton cyclotron line. The observed ratios are respectively $B_{\rm dip}/B_{\rm tot}\sim 0.0012-0.024$ and $B_{\rm dip}/B_{\rm tot}\sim 0.01-0.05$. These are roughly in agreement with our results $B_{\rm dip}/B_{\rm tot}\sim 0.05$. The slightly higher value found in our models may be due to the high resistivity used in our simulations, since we may expect that a lower resistivity would lead to a smaller-scale magnetic field.

The magnetic field we obtain is strong enough to potentially impact the core-collapse dynamics and launch jet-driven explosions. However, most of the studies of jet driven explosions assume a strong axial dipole field, while our study displays an equatorial dipole. Our results open the question of the impact of a tilted dipole on the dynamics of a core-collapse supernova. The dipolar tilt angle is also a key parameter to determine the amount of thermalized energy in the magnetosphere and the energy available to launch a jet (Margalit et al., 2018). Interestingly, Bugli et al., 2020 showed that higher order multipoles tend to decrease the efficiency of the magnetorotational launching mechanism but can still launch a jet, which suggests that the multipoles of our magnetic field could contribute to the explosion.

We stress that the limitations of this work need to be assessed. Our quantitative results (e.g., strength of the magnetic field and its dipolar component, dipolar tilt angle) may change with the addition of the density and entropy background gradients. A convective dynamo with fast rotation can occur in a realistic interior model of the full PNS, a mechanism that has recently been shown to be able to form magnetars (Raynaud et al., 2020). This raises the open question of the interaction of the MRI in a stably stratified zone with an inner convective dynamo in core-collapse supernovae. The stably stratified region unstable to the MRI is important to link the convective dynamo buried under the PNS surface and the explosion that is launched from the surface.

This study has been focused on the core-collapse supernova context but it is also relevant to binary neutron star mergers, which display similar conditions in terms of differential rotation and neutrino radiation (Guilet et al., 2017). The MRI may grow in the hypermassive neutron star resulting from the merger and the magnetic field may be amplified up to 10^{16} G (Siegel

2. The Ekman number used in our simulations would then correspond to the realistic value of the viscosity $\nu = 2\times10^{10}$ cm^2/s.

et al., 2013; Kiuchi et al., 2018; Ciolfi et al., 2019). These studies start with a strong axial magnetic dipole ($\geq 3 \times 10^{15}$ G), while in our case we start with a small-scale field and the MRI generates a strong tilted dipole. Although it is difficult to compare the results obtained with such different initial conditions, our work tends to support the ability of the MRI to generate an magnetar-like dipole in binary neutron star mergers. A detailed study with appropriate thermodynamic background state and differential rotation profile would further assess this possibility. This would support the invoked scenario of magnetars powering an X-ray transient as the aftermath of a binary neutron-star merger (Xue et al., 2019).

Investigating how the magnetic field of magnetars is generated in realistic conditions is a promising avenue of research as new observations will come in the multi-messenger era : The Large Synoptic Survey Telescope (LSST) will be able to observe one hundred times more supernovae (LSST Science Collaboration et al., 2017) and the future spatial telescope SVOM will help us to localize and observe transient events in the γ-ray sky, like electromagnetic counterparts of binary neutron-star mergers (Wei et al., 2016).

Acknowledgements

This research was supported by the European Research Council through the ERC starting grant MagBURST No. 715368. The computations were performed on the supercomputer Occigen of the CINES (Applications A0030410317 and A0050410317). We thank Thomas Gastine, Thierry Foglizzo and Sébastien Fromang for their valuable insight and expertise.

Appendix

Parameters of our global simulations

TABLE 5.2. – Overview of the global models. The resolution of these simulations is $(n_r, n_\theta, n_\phi) = (257, 512, 1024)$.

Name	P_m	Init length	B_0	Magnetic BCs	Dynamo	Magnetic field	Dipole	Early maximum
Units	-	[(r_o,r_o)]	[10^{15} G]	-	-	[10^{15} G]	[10^{15} G]	[10^{15} G]
Pm4L056-75	4.0	(0.56, 0.75)	2.0	Insulating	No	-	-	-
L034-38	16.0	(0.34, 0.38)	0.81	Insulating	Yes	2.20	0.106	3.80
L056-75	16.0	(0.56, 75)	2.0	Insulating	Yes	2.51	0.125	6.68
L024-026	16.0	(0.24, 0.26)	0.91	Insulating	Yes	2.07	0.099	2.57
Standard	16.0	(0.23,0.38)	0.88	Insulating	Yes	2.50	0.125	2.49
PV	16.0	(0.23,0.38)	0.91	Radial field	Yes	2.22	0.108	2.42
PVBIS	16.0	(0.23,0.38)	0.91	Radial field	Yes	1.87	0.091	2.30
B01PV	16.0	(0.23,0.38)	0.41	Radial field	Transient	-	-	-
B005PV	16.0	(0.23,0.38)	0.20	Radial field	No	-	-	-
Pm8B05L015PV	8.0	(0.15, 0.38)	2.0	Radial field	Transient	-	-	-
B05L015PV	16.0	(0.15, 0.38)	2.0	Radial field	Yes	2.14	0.105	3.19
B015L015PV	16.0	(0.15, 0.38)	0.61	Radial field	Yes	2.26	0.106	1.54
PC	16.0	(0.23,0.38)	0.91	Perfect conductor	Yes	2.63	0.133	2.42
PCBIS	16.0	(0.23,0.38)	0.91	Perfect conductor	Yes	2.61	0.137	2.42
StandardBIS	16.0	(0.23,0.38)	0.92	Insulating	Yes	2.04	0.092	2.56
B04L015PV	16.0	(0.15,0.38)	1.6	Radial field	Yes	2.03	0.100	3.17
B05PV	16.0	(0.23,0.38)	2.0	Radial field	Yes	2.21	0.098	3.39
B08L015PV	16.0	(0.15, 0.38)	3.3	Radial field	Yes	2.38	0.122	3.95
B05L008-023PV	16.0	(0.08,0.23)	2.1	Radial field	Yes	2.11	0.102	1.66
B05PC	16.0	(0.23,0.38)	2.1	Perfect conductor	Yes	2.58	0.131	3.39

5.6. Le régime des hauts nombres de Prandtl magnétique

Le régime de Prandtl magnétique atteignable dans les simulations numériques est une limitation importante pour nos modèles globaux. En effet, nous avons vu dans la section 3.3 qu'une valeur réaliste est de l'ordre de $Pm \sim 10^{13}$ alors que nos simulations globales sont limitées à $Pm = 16$ pour des raisons numériques. Dans le régime des hauts Pm, les simulations numériques requièrent une très haute résolution afin de pouvoir résoudre l'échelle de longueur résistive. Les résultats des simulations locales de la section précédente montrent que le champ magnétique augmente avec Pm (Figure 5.19). À la suite de ces résultats, nous avons souhaité étudier plus en détail le régime des hauts Pm à l'aide de simulations locales. De la même façon qu'un plateau existe pour le régime des bas Pm dans le contexte des disques d'accrétion (Meheut et al., 2015), nous avons souhaité déterminer l'existence d'un plateau du champ magnétique dans le régime des hauts Pm, c'est-à-dire si l'intensité du champ magnétique devient indépendante de Pm à partir d'un certain seuil. Dans cette section, nous présenterons succinctement les résultats obtenus dans cette étude, qui feront l'objet d'un article, actuellement en préparation (Guilet et al., in prep).

Afin de pouvoir continuer à comparer les résultats des simulations locales avec les simulations globales de la MRI, le modèle se base sur celui de l'étude précédente. Ainsi, la taille de la boite de *shearing box* utilisée est la boite $(L_x, L_y, L_z) = (1, 3, 3)$, qui est celle dont les résultats correspondaient le mieux aux simulations globales. Le modèle utilise également l'approximation incompressible et le code Snoopy pour résoudre les équations de la MHD. De la même manière, la plupart des paramètres restent identiques ou similaires au modèle global, comme la fréquence angulaire $\Omega = 1000\,\mathrm{rad/s}$, la longueur radiale $L_x = L = 10\,\mathrm{km}$, le taux de cisaillement $q = 0.8$ et la densité $\rho = 4 \times 10^{13}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Les paramètres qui varient sont la diffusivité magnétique η et la viscosité ν. Le système est alors gouverné par les nombres sans dimension suivants : le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{L^2\Omega}{\nu}, \tag{5.16}$$

qui est équivalent à l'inverse du nombre d'Ekman dans cette étude, et le nombre de Reynolds magnétique

$$Rm = \frac{L^2\Omega}{\eta}. \tag{5.17}$$

Pour cette étude paramétrique, nous avons effectuées 25 simulations avec Pm variant de $Pm = 8$ à $Pm = 256$ avec trois valeurs différentes des nombres de Reynolds ($Re = 400, 800$ et 1600). Dans cette section, les résultats seront présentés dans les unités adimensionnées par L, Ω et ρ_0 : la vitesse est en unités de $10^9\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$, le champ magnétique en unités de $1.6 \times 10^{16}\,\mathrm{G}$ et la densité d'énergie en unités de $2 \times 10^{31}\,\mathrm{erg\,cm^{-3}}$.

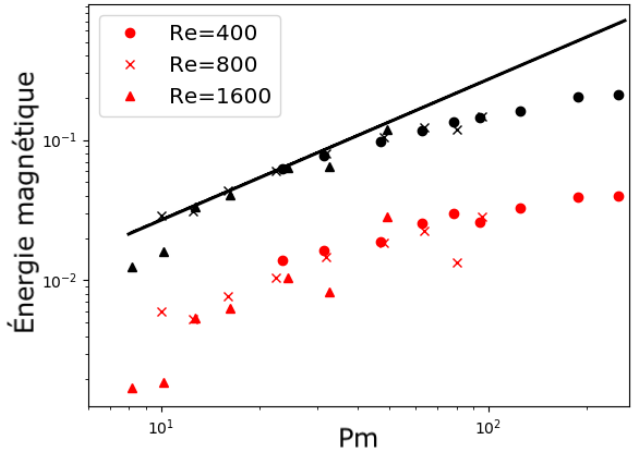


FIGURE 5.22. – Dépendance selon Pm de l'énergie magnétique moyenne (noir) et de l'énergie du champ magnétique de grande échelle (rouge) pour trois nombres de Reynolds différents $Re = 400$ (cercle), $Re = 800$ (croix) et $Re = 1600$ (triangle). La droite tracée correspond à une énergie proportionnelle à Pm.

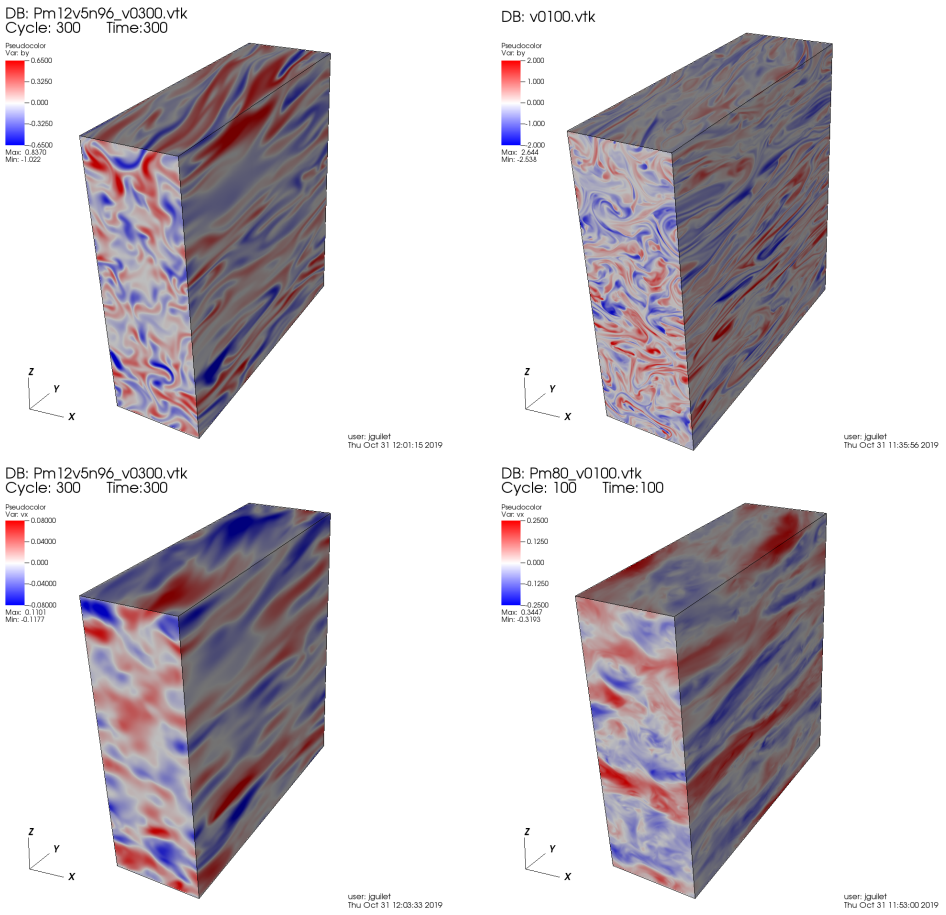
La Figure 5.22 montre que l'énergie magnétique augmente linéairement avec Pm jusqu'à des valeurs modérées $Pm \sim 50$. Pour des Pm plus élevés, l'énergie magnétique continue d'augmenter plus doucement et un plateau semble apparaître pour $Pm > 100$. En outre, l'énergie du champ magnétique à grande échelle augmente également avec Pm. Ainsi de grandes valeurs de Pm rendent la dynamo liée à la MRI plus efficace pour amplifier le champ magnétique aux petites échelles, mais également aux plus grandes échelles de la boite. Il est particulièrement intéressant de noter que l'augmentation du champ magnétique avec Pm est indépendante du nombre de Reynolds Re.

Bien que l'amplification des grandes échelles du champ magnétique n'est pas visible sur les rendus 3D du champ magnétique à un temps donné, l'intensité des structures aux petites échelles augmente avec Pm (Figure 5.23). La comparaison du champ magnétique pour $Pm = 12$ et $Pm = 80$ montre également que la taille des structures du champ magnétique azimutale B_y diminue avec Pm. En revanche, la taille des structures de la vitesse radiale ne varie pas entre les deux simulations alors que l'intensité de la vitesse augmente également avec Pm.

Dans l'ensemble, les résultats de cette étude montrent que le champ magnétique moyen et celui à grande échelle augmentent avec Pm jusqu'à ce qu'un plateau apparaisse pour $Pm > 100$. En faisant l'hypothèse que les spectres d'énergie magnétique des modèles locaux et globaux soient toujours en bon accord, le dipôle continue également d'être amplifié à des valeurs plus

intenses jusqu'à $Pm > 100$ et une extrapolation des valeurs du modèle global est possible. Dans ce cas, l'énergie du champ magnétique des simulations globales devrait être multipliée par $\sim 5-6$ et le champ magnétique par ~ 2.5. Ainsi l'extrapolation du dipôle de l'étude précédente donne $B_{\rm dip} \simeq 2.5 \times 10^{14}$ G, ce qui peut atteindre $B_{\rm dip} \simeq 10^{15}$ G par conservation du flux magnétique lors de la contraction en étoile à neutrons.

De plus, ces résultats sont indépendants du nombre de Reynolds, et ainsi cette dépendance en Pm uniquement, plutôt que le nombre de Reynolds Re ou le nombre de Reynolds magnétique Rm, souligne l'importance pour les simulations de décrire les processus diffusifs explicitement, puisque les simulations en MHD idéale ou utilisant des modèles sous-mailles ont un Pm proche de un, ce qui est problématique pour une description réaliste de la MRI.



(a) $Pm = 12.5$ (b) $Pm = 80$

FIGURE 5.23. – Représentations 3D des perturbations du champ magnétique azimutal (panneaux du haut) et de la vitesse radiale (panneaux du bas) à un temps donné. Les panneaux (a) correspondent à une valeur modérée de $Pm = 12.5$ et les panneaux (b) à une valeur haute $Pm = 80$ (b) (avec $Re = 800$ pour les deux).

Chapitre 6

Modèle anélastique

Ce chapitre détaille la deuxième étude de ce travail de thèse consacrée à l'amplification du champ magnétique par la MRI avec la structure de PNS plus réaliste. Cette étude est soumise dans le journal à comité de lecture *Astronomy & Astrophysics*. Le texte original en anglais est présenté dans ce chapitre, exception faite de l'introduction qui a été retirée afin d'éviter les redites avec la partie introductive de cette thèse. En voici un résumé en français.

Nous avons établi au chapitre 5 que la MRI peut générer un champ magnétique à grande échelle dans le cadre de l'approximation incompressible. Deux ingrédients physiques particulièrement importants ont toutefois été négligés : la stratification en densité et la force de flottaison dans une zone stablement stratifiée. Or, ceux-ci peuvent avoir une influence importante sur la MRI comme nous l'avons vu dans les sections 3.2 et 3.3.

Pour étudier, ces effets, nous avons donc développé un modèle sphérique 3D de la zone stable d'une PNS en rotation rapide. L'approximation anélastique est utilisée pour inclure les profils de densité et d'entropie décrits dans la section 4.3.3. Les conditions initiales du champ magnétique et du forçage de la rotation différentielle utilisé sont similaires à ceux utilisés dans le cadre de l'étude incompressible du chapitre 5. L'influence des principaux ingrédients physiques (comme le gradient de densité, la force de flottaison, et la dissipation thermique) sur la MRI est examinée par des simulations numériques effectuées à l'aide du code MagIC dans le cadre des approximations Boussinesq ou anélastiques.

Nos simulations montrent qu'une dynamo auto-entretenue est générée par la MRI et celle-ci confirme la majorité des résultats incompressibles : la dynamo est dominée par un champ turbulent $B \geq 10^{14}$ G et un dipôle équatorial sous-dominant représentant environ $4.3\,\%$ du champ magnétique est également généré. La relation linéaire entre le champ magnétique et le dipôle du modèle incompressible semble être toujours valide avec une légère modification du coefficient linéaire. De plus, nos modèles anélastiques ont dévoilé l'existence des oscillations du champ magnétique axisymétrique à grande échelle : ce nouveau comportement peut être correctement décrit par une dynamo de champ moyen de type $\alpha\Omega$.

La comparaison de ces résultats avec des modèles sans force de flottaison ou sans gradient de densité a permis d'établir que le gradient de densité favorise l'apparition d'une dynamo $\alpha\Omega$. Le champ magnétique turbulent est également plus faible dans les modèles anélastiques, avec

toutefois un dipôle similaire. La force de flottaison limite la turbulence dans le plan équatorial, mais a une influence assez faible dans l'ensemble du fait de la forte diffusion thermique due aux neutrinos. Toutefois, lorsque le nombre de Prandtl augmente (c'est-à-dire que la diffusion thermique diminue), la force de flottaison réduit particulièrement les perturbations de la vitesse radiale et modifie fortement la turbulence de la MRI.

Les résultats présentés dans ce chapitre confirment la capacité de la MRI à générer un champ magnétique à grande échelle dans des conditions réalistes. En outre, la présence d'une dynamo $\alpha\Omega$ dans la proto-étoile à neutrons ouvre la perspective de développer un modèle sous-maille de l'amplification in situ du champ magnétique dans des modèles globaux de supernovae par effondrement gravitationnel ou de coalescence d'étoiles à neutrons.

6.1. Numerical setup

6.1.1. A 1D proto-neutron star model

The simulations performed in this article are designed to represent the outer region of a fast-rotating PNS, which is stable to the convection and unstable to the MRI. To model this stably stratified region we use the same methods and internal structure as Raynaud et al. (2020) but focusing on a different part of the PNS. The PNS we consider has a baryonic (final gravitational) mass of 1.78 (1.59) $M_\odot$ and it is taken from a 1D core-collapse supernova simulation from Hüdepohl (2014). This simulation uses the high-density equation of state LS220 (Lattimer et Swesty, 1991) and the non-rotating 27 $M_\odot$ progenitor s27.0 by Woosley et al. (2002). The calculations were performed with the code Prometheus-Vertex, which combines the hydrodynamics solver Prometheus with the neutrino transport module Vertex (Rampp et Janka, 2002). This module solves the energy-dependent moment equations of three species of neutrinos and antineutrinos using a variable Eddington factor closure and including an up-to-date set of neutrino interaction rates. The energy and lepton number transport by convection is modeled with a mixing length treatment. We choose the physical parameters to represent the PNS at $t = 0.2\,\mathrm{s}$ after bounce according to the 1D CCSN simulation, whose profiles of density and specific entropy are shown in Fig. 6.1. While the models presented in Raynaud et al. (2020) focus on the convective zone, our simulation domain spans the outer stably stratified region, thus extending from $r_\mathrm{i} = 25.5\,\mathrm{km}$ to $r_\mathrm{o} = 39.25\,\mathrm{km}$, corresponding to the PNS surface defined by the density $\rho_o = 10^{11}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. All background profiles of density, temperature, entropy gradient and gravitational acceleration $(\tilde{\rho}, \tilde{T}, \nabla\tilde{S}, \tilde{g})$ are fitted from the PNS model described above with fifth-order to eleventh-order polynomials, hence reproducing the profiles with a good accuracy. Their values at the outer boundary are noted with the letter 'o' as a subscript. To have a self-consistent anelastic model, the thermal expansion coefficient at constant pressure

$\tilde{\alpha}_T = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P$ is computed using the following thermodynamic relation

$$\frac{d \ln \tilde{T}}{dr} = \frac{1}{c_p}\frac{d}{dr}\tilde{S} - \frac{\tilde{\alpha}_T \tilde{g}}{c_p}, \tag{6.1}$$

where $c_p = 3.6 \times 10^8$ erg K^{-1} g^{-1} is the specific heat capacity at constant pressure, assumed to be uniform. The comparison between the profiles of the 1D CCSN model and the anelastic reference state shows a good agreement (see appendix 6.5). For the sake of simplicity, several assumptions are made in this work. In order to describe the buoyancy associated with both entropy and lepton number gradients, we use an effective entropy gradient assuming the thermal and lepton number diffusivities to be identical. In our model, we also assume that the neutrinos are in a diffusive regime, so that the effects on the dynamics can be modelled by thermal and viscous diffusivities, respectively κ and ν. The magnetic diffusivity η is also included explicitly in our simulations. Finally, we assumed all the diffusivities κ, ν and η to be constant inside the simulation domain.

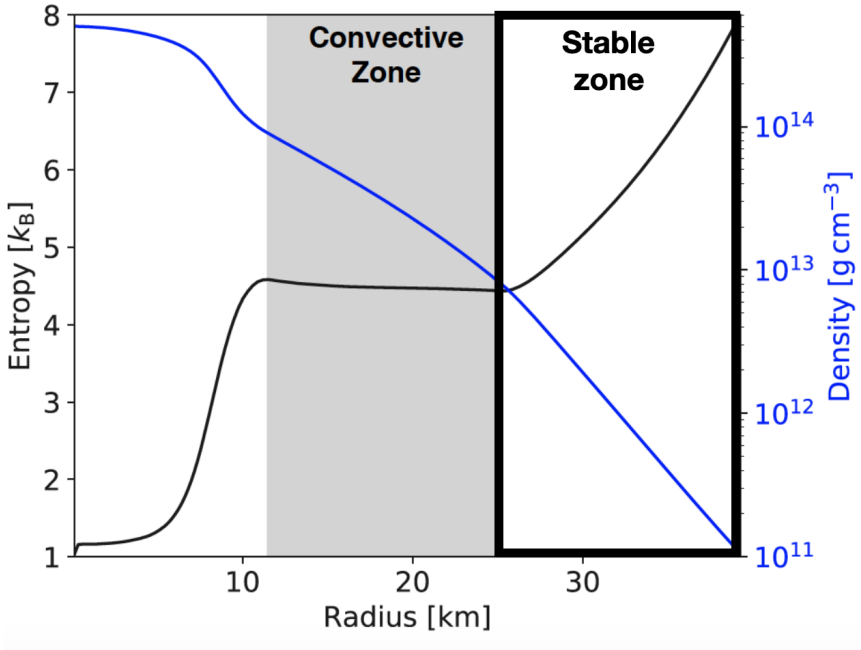


FIGURE 6.1. – 1D radial profiles of the entropy per baryon (black line) and the density (blue line) of our PNS model at $t = 0.2$ s post-bounce. Our simulation domain corresponds to the outer stably stratified layer delimited by the thick black line.

6.1.2. Governing equations

We adopt the anelastic approximation to model the flow inside the PNS in order to take into account the density and effective entropy gradient, while filtering out sound waves. The MHD anelastic equations describing the dynamics of the PNS in a rotating frame at an angular frequency $\Omega_0 = 958\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ read (C. A. Jones et al., 2011)

$$\vec{\nabla}\cdot\tilde{\rho}\vec{u} = 0\,, \tag{6.2}$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\tilde{\rho}}\right) - 2\Omega_0\vec{e}_z\times\vec{u} - \tilde{\alpha}_T\tilde{T}\,\frac{s'}{c_p}\,\tilde{g}\,\vec{e}_r + \frac{1}{\mu_0\,\tilde{\rho}}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B} + \mathbf{F}^{\nu}\,, \tag{6.3}$$

$$\tilde{\rho}\tilde{T}\left(\frac{Ds'}{Dt} + \vec{u}\cdot\nabla\tilde{S}\right) = \kappa\vec{\nabla}\cdot\left(\tilde{\rho}\tilde{T}\vec{\nabla}s'\right) + \Phi_{\nu} + \frac{\eta}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)^2\,, \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{u}\times\vec{B}\right) + \eta\nabla^2\vec{B}\,, \tag{6.5}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\,, \tag{6.6}$$

where $\vec{u}$ is the flow velocity, $\vec{B}$ is the magnetic field, P is the pressure, s' is the entropy perturbation, and μ_0 is the vacuum permeability. In the above system, the viscous force and the viscous heating are given by $F_i^{\nu} = \tilde{\rho}^{-1}\partial_j\sigma_{ij}$ and $\Phi_{\nu} = \partial_j u_i\sigma_{ij}$, where $\sigma_{ij} = 2\tilde{\rho}\nu(e_{ij} - e_{kk}\delta_{ij}/3)$ is the rate of strain tensor and $e_{ij} = (\partial_j u_i + \partial_i u_j)/2$ is the deformation tensor. Tensors are expressed with the Einstein summation convention and the Kronecker symbol δ_{ij}.

6.1.3. Numerical methods

In order to integrate in time the system of Eqs. (6.2)–(6.6) we use the benchmarked, pseudo-spectral code MagIC [1] (Wicht, 2002; Gastine et Wicht, 2012; Schaeffer, 2013). MagIC solves the 3D MHD equations in a spherical shell using a poloidal-toroidal decomposition for the velocity and the magnetic field,

$$\tilde{\rho}\vec{u} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times(W\vec{e_r}) + \vec{\nabla}\times(Z\vec{e_r})\,, \tag{6.7}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times(b\vec{e_r}) + \vec{\nabla}\times\left(a_j\vec{e_r}\right)\,, \tag{6.8}$$

where W and Z are respectively the poloidal and toroidal kinetic scalar potentials, while b and a_j are the magnetic ones. The scalar potentials and the pressure P are decomposed on spherical harmonics for the colatitude θ and the longitude ϕ angles, together with Chebyshev polynomials in the radial direction. The linear terms are computed in the spectral space, while the nonlinear

1. https://magic-sph.github.io

terms and the Coriolis force are computed in the physical space and transformed back to the spectral space. For more detailed descriptions of the numerical method and the associated spectral transforms, the reader is referred to Gilman et Glatzmaier (1981), Tilgner et Busse (1997) and Christensen et Wicht (2015).

The simulations presented in this paper were performed either using a standard grid resolution of $(n_r, n_\theta, n_\phi) = (257, 512, 1024)$ or a higher one of $(n_r, n_\theta, n_\phi) = (385, 768, 1536)$. The resolution was chosen to ensure that the dissipation scales are resolved. For model `Standard`, around nine cells resolve the resistive scale as the maxima of viscous and resistive dissipation are respectively at the spherical harmonic orders $l_\nu \simeq 70$ and $l_\eta \simeq 100$.

6.1.4. Initial conditions

Many core-collapse simulations with a fast-rotating progenitor have shown that the PNS is differentially rotating for several hundreds of milliseconds (e.g, Akiyama et al., 2003; Ott et al., 2006; Obergaulinger et al., 2018; Bugli et al., 2020). In order to sustain differential rotation in our simulations for a similar duration, we force the outer boundary to rotate according to the initial rotation profile, with a similar method as the one used in our incompressible study (paper I). The rotation profile is then evolved dynamically inside the simulation domain. The initial cylindrical rotation profile is inspired by the simulations of Bugli et al. (2020) and is composed of an inner part in solid body rotation and an outer part in differential rotation with a cylindrical profile

$$\Omega(s) = \frac{\Omega_\mathrm{i}}{\left(1 + \left(\frac{s}{0.25 r_\mathrm{o}}\right)^{20 q_\mathrm{o}}\right)^{0.05}}\,, \tag{6.9}$$

where s is the cylindrical radius, $q_\mathrm{o} = 1.5$ corresponds to the shear rate

$$q = -\frac{s}{\Omega}\frac{d\Omega}{ds} \tag{6.10}$$

at the outer boundary, and $\Omega_\mathrm{i} = 3822$ rad s^{-1} is the rotation rate of the inner core. This rotation rate Ω_i was computed so that the ratio of total angular momentum over the moment of inertia is equal to the frame rotation rate Ω_0 defined in Sect. 6.1.2. This is computed with the following formula

$$\Omega_\mathrm{i} = \frac{I\Omega_0}{\displaystyle\int_V \tilde{\rho} s^2 \left(1 + \left(\frac{s}{0.25 r_\mathrm{o}}\right)^{20 q_\mathrm{o}}\right)^{-0.05} dV}, \tag{6.11}$$

where s is the cylindrical radius, V the volume of the domain and I the moment of inertia of the simulation domain.

For the initial magnetic field, the toroidal component is set to zero and the poloidal component is initialized with a random superposition of modes with spherical harmonics indices

(l, m) with a radial dependency based on Fourier modes as in paper I but with a radial modulation of their amplitude to keep a constant Alfvén speed, defined by

$$v_{\rm A} = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \tilde{\rho}}}. \tag{6.12}$$

This initialization implies that the initial magnetic field is stronger in the inner region, which has a higher density (see left panel of Fig. 6.3). For all the simulations, the Fourier and spherical harmonic modes are selected so that their wavelength is between $[0.3D, 0.5D]$ with D the shell width

$$D = r_{\rm o} - r_{\rm i} = 13.7\,{\rm km}. \tag{6.13}$$

The initial root mean square magnetic field strength at the outer boundary ranges from $B_{\rm o} = 1.5 \times 10^{14}$ G to $B_{\rm o} = 3.3 \times 10^{14}$ G depending on the model. This strong magnetic field allows us to be sure that the MRI is well resolved : the wavelength of the fastest growing mode in ideal MHD with $B_{\rm o} = 1.5 \times 10^{14}$ G reads (Balbus et Hawley, 1991)

$$\lambda_{\rm MRI} = \frac{8\pi}{q_{\rm o}(4-q_{\rm o})\Omega_0} \frac{B_{\rm o}}{\sqrt{\mu_0 \tilde{\rho}_{\rm o}}} \simeq 0.69D \simeq 9.5 \times 10^5 \text{ cm}. \tag{6.14}$$

6.1.5. Boundary conditions

We assume non-penetrating boundary conditions ($u_r = 0$). At the inner boundary, we use a stress-free condition, where the viscous stress vanishes. For the outer boundary, we force u_ϕ to match the initial profile at all times and the other components of the velocity are set to zero, exactly like in our previous setup (paper I). For the magnetic field, we use insulating boundary conditions (matching a potential field outside the domain), while the entropy perturbations are set to zero at both boundaries.

6.1.6. Physical parameters and dimensionless numbers

In rapidly-rotating fluids, the impact of stable stratification on the MRI is characterized by the ratio of the Brunt-Väisälä frequency squared N^2 over the rotation frequency squared Ω^2, with

$$N^2 \equiv -\frac{\tilde{g}}{\tilde{\rho}} \left(\left.\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{S}}\right|_{\tilde{P},Y_e} \frac{d\tilde{S}}{dr} + \left.\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y_e}\right|_{\tilde{P},\tilde{S}} \frac{dY_e}{dr} \right), \tag{6.15}$$

where Y_e is the electron fraction and $\tilde{P}$ is the pressure of the reference state of the PNS model. In our model, this ratio is larger than for the model studied in Guilet et E. Müller (2015), especially at the equator (see Fig. 6.2). Our stratification remains small compared to typical values of $N^2/\Omega^2 \sim 10^3 - 10^4$ in radiative zone of intermediate and massive stars (Fuller

et al., 2019). The Brunt-Väisälä frequency at the outer boundary is $N_o = 4136\,\mathrm{s}^{-1}$. Accordingly, we might expect the buoyancy to dampen MRI-driven turbulence (Guilet et E. Müller, 2015) but the thermal diffusivity κ also plays an important role as it reduces the impact of the stable stratification on radial scales smaller than a critical scale L_c. One way to estimate L_c is to compare the timescale for thermal diffusion to the timescale of gravity waves, obtaining

$$L_c = \sqrt{\frac{\kappa}{N_o}}. \tag{6.16}$$

For the uniform thermal and viscous diffusivities we use the values from the 1D CCSN model taken in the middle of the stable zone $r \simeq 3.3 \times 10^6$ km, which are respectively $\kappa = 1.61 \times 10^{14}\,\mathrm{cm\,s}^{-2}$ and $\nu = 8.03 \times 10^{11}\,\mathrm{cm\,s}^{-2}$. While all our models share the same constant kinematic viscosity, we considered three different values for the thermal diffusivity, $\kappa = \{1.61 \times 10^{14}, 4.02 \times 10^{13}, 8.03 \times 10^{12}\}\,\mathrm{cm\,s}^{-2}$ which means that the thermal Prandtl number is

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} = \left\{5.0 \times 10^{-3},\, 2 \times 10^{-2},\, 0.1\right\}. \tag{6.17}$$

With these values, the critical scale ranges from $L_c = 0.14L = 1.97 \times 10^5$ cm to $L_c = 0.07L = 0.98 \times 10^4$ cm. In our simulations, the ratio of the Brunt-Väisälä frequency N_o at the outer boundary to frame rotation Ω_0 is fixed by the following formula

$$\frac{N_o}{\Omega_0} = \sqrt{\frac{-RaE^2}{Pr}}, \tag{6.18}$$

where the Ekman number E (characterizing the importance of viscosity over the Coriolis force) reads

$$E = \frac{\nu}{\Omega_0\, D^2} = 4.44 \times 10^{-4}, \tag{6.19}$$

and the Rayleigh number Ra is defined by

$$Ra = -\frac{\tilde{\alpha}_{T,o} T_o g_o D^4}{c_p \nu \kappa} \left|\frac{d\tilde{S}}{dr}\right|_o. \tag{6.20}$$

The Ekman number is kept identical for all the models presented in this article. Therefore, to keep the Brunt-Väisälä frequency constant between our models with buoyancy effects while varying the the thermal Prandtl number, the Rayleigh number is also varied from $Ra = -4.73 \times 10^5$ to $Ra = -9.46 \times 10^6$.

We use a constant resistivity of $\eta = 5.0 \times 10^{10}\,\mathrm{cm\,s}^{-2}$, which gives a magnetic Prandtl number

$$Pm = \frac{\nu}{\eta} = 16\,. \tag{6.21}$$

As in paper I, the choice of this value for our simulations is forced by the high cost of simulating high Pm models, and it lies well below a realistic parameter regime. In fact, the neutrino viscosity is very large compared to the typical resistivity of a degenerate electron gas inside a PNS. Realistic estimates of the magnetic Prandtl number predict $Pm \approx 10^{13}$ (C. Thompson et Duncan, 1993; Masada et al., 2007), which cannot be reached in direct numerical simulations. The magnetic Reynolds number that characterizes the relative importance of induction to magnetic diffusion is

$$Rm = \frac{D^2\,\Omega_0}{\eta} = 3.6 \times 10^4, \tag{6.22}$$

and, for the same reasons, it is quite small compared to realistic estimates. Overall, the only parameters that are varied in this study are the thermal Prandtl number Pr and the Rayleigh number Ra, which in two simulations is also set to zero, so as to remove the thermal stratification and allow a clearer assessment of the impact of buoyancy in our models.

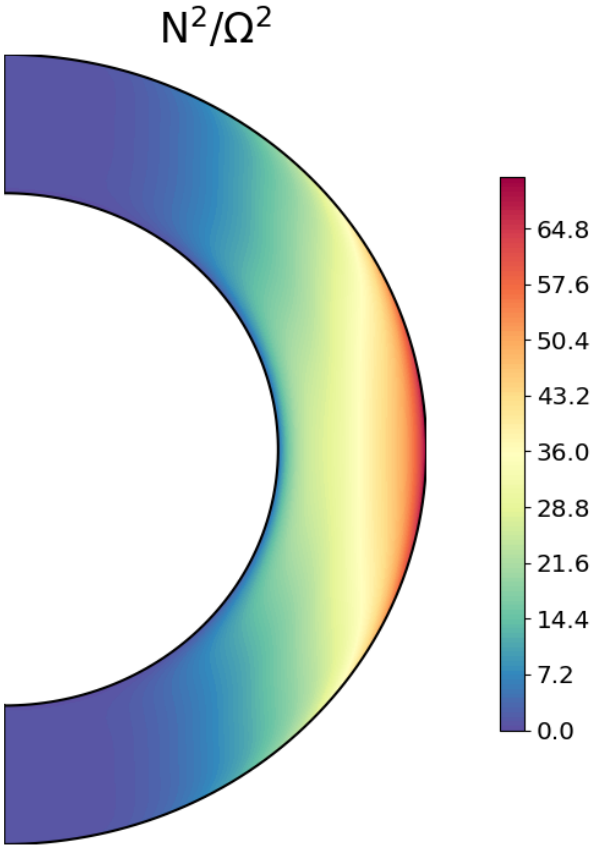


Figure 6.2. – Ratio of the squared Brunt-Väisälä frequency N^2 (Eq. 6.15) to the squared initial rotation frequency Ω^2 (Eq. 6.9). The buoyancy influence is strongest in the red regions.

6.2. A typical anelastic simulation

6.2.1. Quasi-stationary state of a MRI-driven dynamo

We start by describing the magnetic field produced by one fiducial simulation where we obtain an MRI-driven dynamo, hereafter called model `Standard`. For this model we used the standard diffusivities and an initial magnetic field intensity of $B_o = 1.5 \times 10^{14}$ G (see Table 6.2).

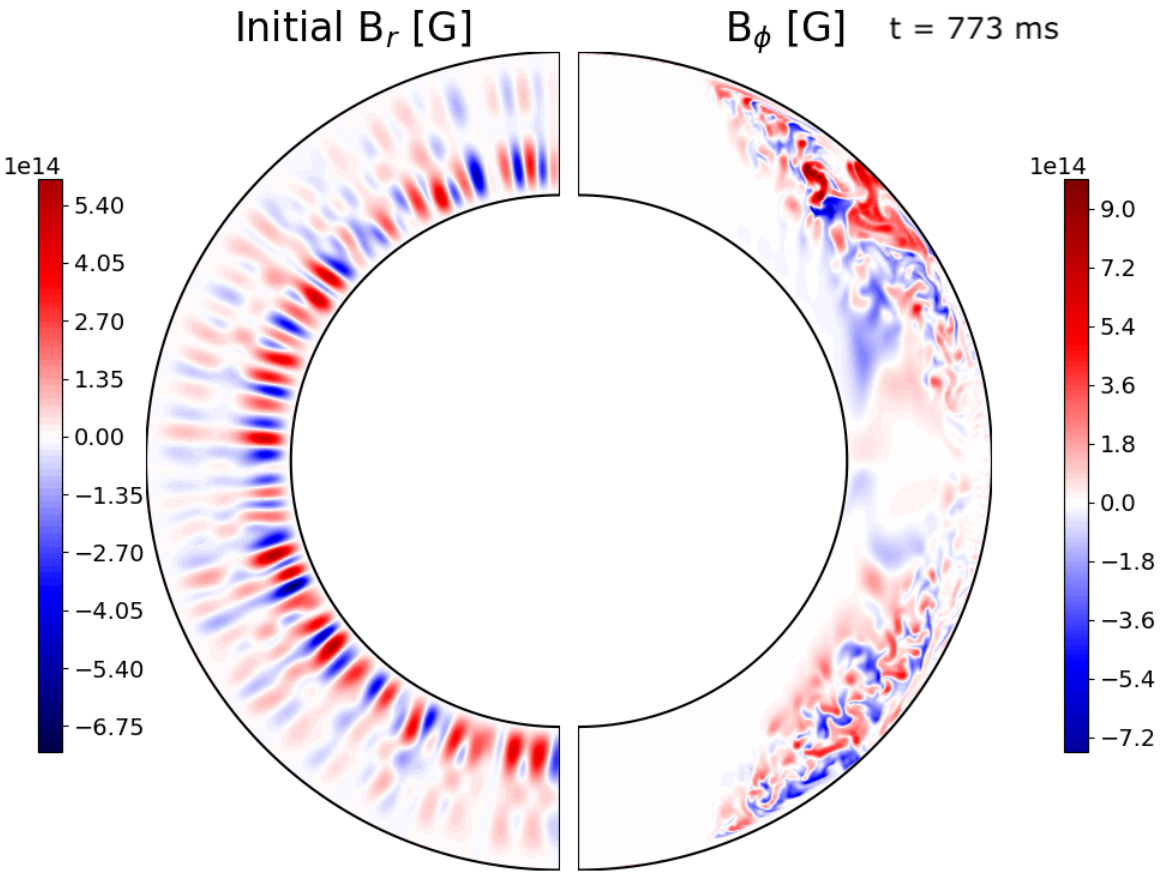


FIGURE 6.3. – Meridional slices at $\phi = 0$ of the initial poloidal magnetic field B_r (left) and of the toroidal magnetic field B_ϕ at $t = 773$ ms (right) for model `Standard`.

Figures 6.3 (right panel) and 6.4 show selected snapshots of the toroidal magnetic field and the magnetic field lines that highlight the complex geometry of the MRI-driven turbulence. On the meridional cuts in Fig. 6.3, the spatial distribution of the small-scale turbulence is particularly striking for several reasons. First, almost no turbulence is observed in the equatorial plane, while strong turbulence develops in mid-latitude regions. The same feature can be seen for the kinetic turbulence on the radial velocity u_r. This phenomenon can be explained by the influence of the

buoyancy force (see Sect. 6.3.2 for more details). Second, the high density regions at lower radii are devoid of MRI turbulence, as only wide patches of magnetic field can be observed there with no small-scale turbulence. This is more unexpected and will be discussed in Sect. 6.4.1. Note also that the region close to the rotation axis is in solid body rotation and is therefore stable to the MRI, which leads to no turbulence as would be expected. Finally, the comparison between the initial and saturated magnetic field shown in Fig. 6.3 suggests that the magnetic field has lost the memory of its initial configuration. The contrast between the equatorial plane and mid-latitude regions is present in the magnetic field lines as well, where strong and elongated field lines in the azimuthal direction can be seen in the mid-latitude regions of Fig. 6.4. These field lines are generated by the expected winding of the magnetic field by the shear. Some small-scale loop of field lines can also be seen with a weaker magnetic field in the mid-latitude regions.

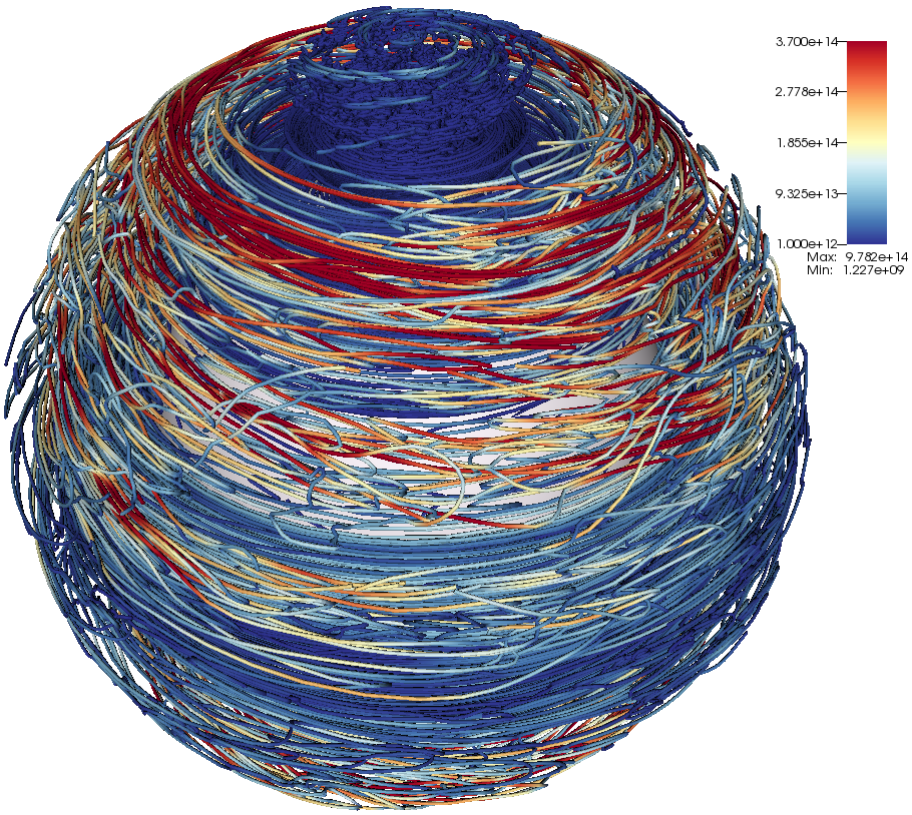


FIGURE 6.4. – 3D rendering of the magnetic field lines in the simulation `Standard` at $t = 773$ ms. The color represents the magnetic field amplitude in Gauss.

For a more quantitative assessment, we now examine the energetics of this MRI-driven dynamo. Figure 6.5 shows the time evolution of the toroidal and poloidal magnetic energy densities and the turbulent kinetic energy density. The latter is computed by subtracting the contribution of the axisymmetric rotation from the averaged kinetic energy density in order

to separate the differential rotation and the MRI-driven turbulent flow. After several hundred milliseconds, we obtain a statistically stationary state with a mean magnetic field of $B \simeq 1.4 \times 10^{14}$ G in the full simulation volume. If we reduce the volume to take into account the localization of the turbulence, the resulting mean magnetic field is $B \simeq 2.25 \times 10^{14}$ G.

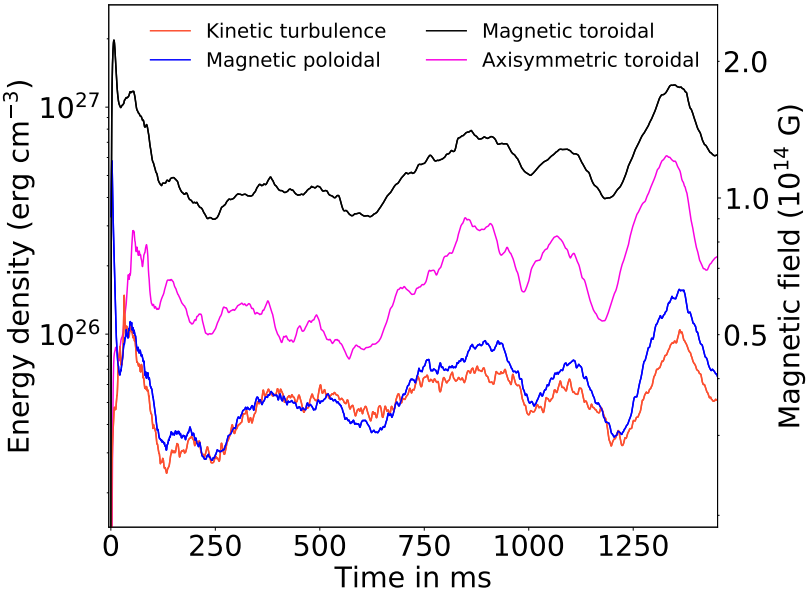


FIGURE 6.5. – Time evolution of the magnetic and turbulent kinetic energy densities for model `Standard` with $B_o = 1.5 \times 10^{14}$ G. The black and blue lines are the toroidal and poloidal contributions of the magnetic energy density, while the red line is the turbulent kinetic energy density (i.e. the energy of the non-axisymmetric component of the velocity). The magenta line is the axisymmetric contribution to the toroidal magnetic energy density.

In order to compare the intensity in the full volume to our previous incompressible study (paper I), where the density $\rho_o = 4 \times 10^{13}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ was higher, we use the dimensionless magnetic field strength defined by the Lorentz number

$$\mathcal{B} = \frac{B}{\sqrt{\tilde{\rho}_o \mu_0} D\Omega}. \tag{6.23}$$

We have $\mathcal{B} \simeq 0.096$ for model `Standard` and $\mathcal{B} \simeq 0.064$ for paper I, which is lower but of the same order of magnitude. This difference will be discussed in further details in Sect. 6.3.4. Compared to paper I, most of the ratios between the energies or magnetic field are similar. The kinetic energy is around 10 times lower than the total magnetic energy and the toroidal magnetic field is about ~ 2.5 times larger than the poloidal magnetic field. The main difference with paper I is the increased axisymmetric component of the toroidal magnetic field, which is higher

than the total poloidal magnetic field and is almost equal to the non-axisymmetric toroidal magnetic field, as will be discussed in Sect. 6.3.1. An interesting new feature compared to paper I is the presence of synchronous oscillations of the magnetic and kinetic energy densities. These oscillations suggest the presence of a dynamo cycle, as we will see in Sect. 6.2.2.

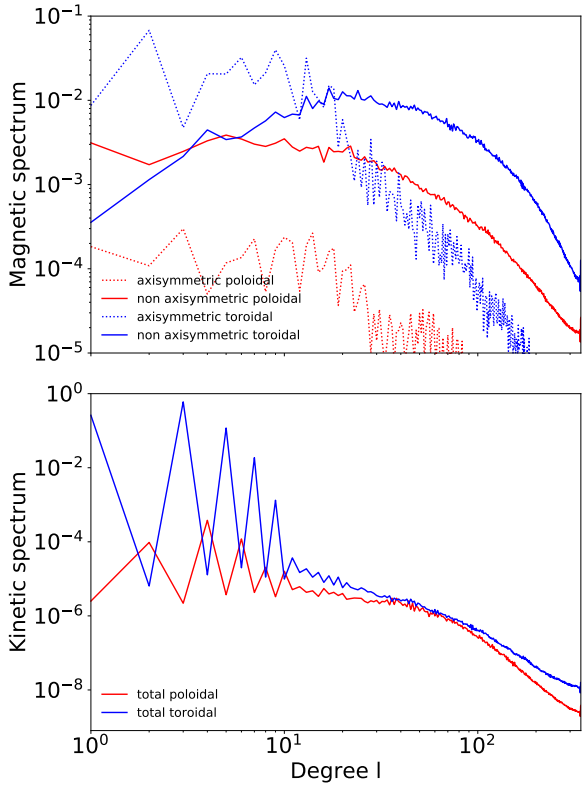


FIGURE 6.6. – (Top) Instantaneous spectrum of the poloidal magnetic energy (red) and the toroidal magnetic energy (blue) normalized by the total magnetic energy as a function of the spherical harmonics order l at $t = 773$ ms. The dotted (solid) lines correspond to the axisymmetric (non-axisymmetric) contributions to these energies. (Bottom) Spectrum of the poloidal kinetic energy (red) and the toroidal kinetic energy (blue) normalized by the total kinetic energy as a function of the spherical harmonics order l at $t = 773$ ms.

To understand how the magnetic and kinetic energies are distributed over different scales, instantaneous toroidal and poloidal spectra are presented in Fig. 6.6. On the small scales, the non-axisymmetric poloidal and toroidal magnetic spectra are similar to those of Paper I. For the poloidal component, the non-axisymmetric contribution dominates at all scales as in Paper I. By contrast, at large scales, the toroidal magnetic spectrum is dominated by the axisymmetric component, with a particularly strong quadrupole. These strong axisymmetric modes are a new feature of the toroidal spectrum and are linked to the stronger axisymmetric toroidal energy and the mean-field dynamo described in the next section. Overall, these spectra show that the

total magnetic energy comes essentially from the axisymmetric contribution at large scales and the non-axisymmetric contribution at small scales.

Axisymmetric structures that are symmetric with respect to the equatorial plane, such as the rotation and meridional circulation, translate into oscillations between odd and even harmonic order l visible in the kinetic spectra (Gubbins et K. Zhang, 1993). The kinetic spectra are comparable to those of paper I, as small and intermediate scales are dominated by turbulence while differential rotation dominates at large scales.

We now highlight the time evolution of the magnetic dipole, since it is the component inferred by observations. The dipole energy translates into an intensity $B_{\rm dip} \simeq 6.3 \times 10^{12}$ G, which represents $\simeq 4.5\%$ of the total magnetic field (Fig. 6.7). This intensity may seem weak, but the dimensionless magnetic field strength $\mathcal{B}_{\rm dip}$ corresponding to this dipole intensity gives $\mathcal{B}_{\rm dip} = 0.0043$, which is higher than the value $\mathcal{B}_{\rm dip} \simeq 0.0032$ obtained for paper I. Furthermore, the evolution of the dipole energy suggests that the dipole is tilted towards the equator, since the axial dipole is twice lower than the average dipole. With the same method as paper I, an averaged tilt angle of $\theta_{\rm dip} \approx 100°$ can be computed from the magnetic dipole moment. Overall, this model produces results which are qualitatively consistent with paper I, with a stronger dimensionless dipole.

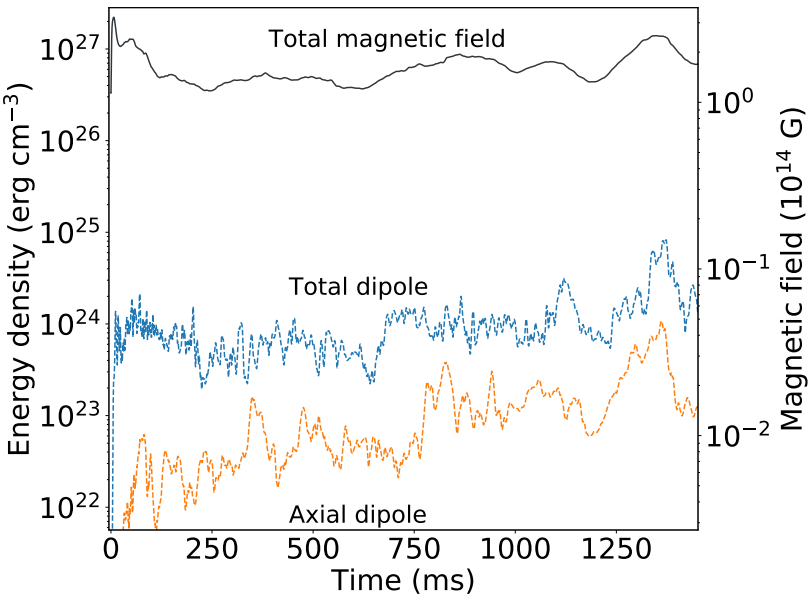


Figure 6.7. – Time evolution of the axial dipole (dashed orange), total dipole (dashed blue) and total magnetic (solid black) energy densities of the model `Standard`.

To look in more detail at the dipole geometry, we show in Fig. 6.8 the time evolution and radial dependence of the modes $(l = 1, m = 0)$ and $(l = 1, m = 1)$. The dipole is mainly present in the low-density region (outer radii), where the turbulence is the strongest. Both modes

are radially coherent and form large-scale structures. The equatorial dipole rotates at a different rotation speed than the simulation frame, which leads to oscillations of the equatorial dipole. The timescale of these oscillations (of the order of 50 ms) is much longer than the rotation period of the frame, which means that the magnetic dipole rotates with a frequency close to that of the simulation frame. The time evolution of the axisymmetric component of magnetic dipole is characterised by slower periodic reversals, which again suggests that a mean-field oscillatory behaviour is present in the simulations.

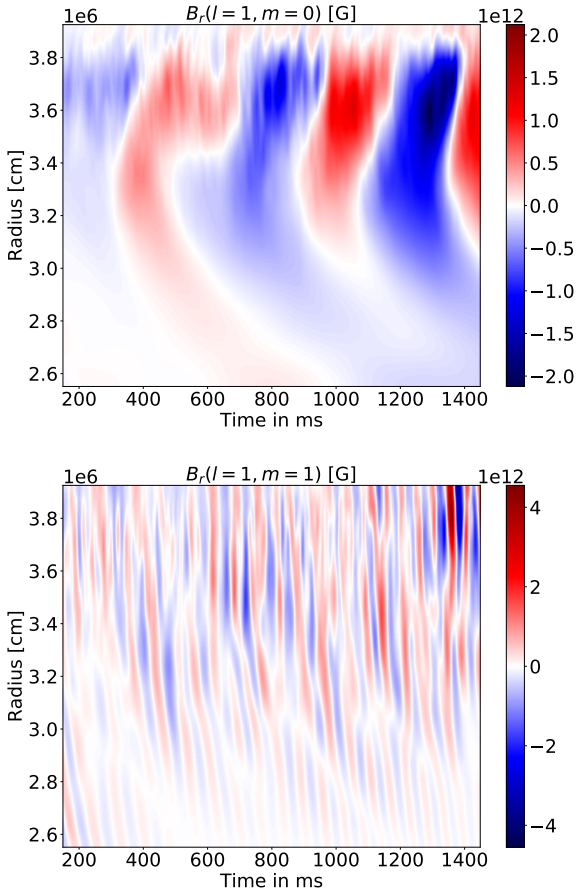


FIGURE 6.8. – (Top) Radius-time diagram of the axial dipolar mode $B_r(l = 1, m = 0)$. The period of the dipole reversal is $P_{\text{dip}} \simeq 410$ ms. (Bottom) Radius-time diagram of the equatorial dipolar mode amplitude $B_r(l = 1, m = 1)$ at a given azimuth $\phi = 0$ in the rotating frame of the simulation. The fast oscillations are due to the rotation of this dipole mode.

6.2.2. An $\alpha\Omega$ dynamo

The previous subsection hinted at a mean-field dynamo by pointing out the presence of an oscillatory behaviour. The general mean-field theory has been developed by Moffatt (1978) et Krause et Raedler (1980) and has been widely used to study dynamos. In this work, the mean-field concept is used to understand which processes dominate the generation of the mean magnetic field. The basic idea of a mean-field dynamo is that a large-scale magnetic field is generated by small-scale turbulence. The velocity and magnetic fields are therefore decomposed in a mean component and a small-scale one, which we represent using the following notation : $\vec{X} = \overline{\vec{X}}^{\phi} + \vec{X}'$. In this work, the definition of *mean* will be the axisymmetric average operator noted $\overline{\cdot}^{\phi}$, which verifies the Reynolds averaging rules. The approach of the mean-field theory is to expand the EMF $\vec{\mathcal{E}}$ only in terms of the mean quantities ($\overline{\vec{u}}^{\phi}$ and $\overline{\vec{B}}^{\phi}$) and the statistical properties of the fluctuating ones ($\vec{u}'$ and $\vec{B}'$). We now focus in more detail on the characterisation of this mechanism. The most common realisation of a mean-field dynamo with differential rotation is the so-called $\alpha\Omega$ dynamo. The Ω-effect corresponds to the shearing of the magnetic field by differential rotation that generates a toroidal magnetic field from a poloidal one. With our cylindrical differential rotation, the Ω-effect reads

$$\frac{\partial \overline{B_\phi}^{\phi}}{\partial t} = s\overline{B_s}^{\phi}\frac{d\Omega}{ds} \tag{6.24}$$

and it should induce an anti-correlation between the radial field $\overline{B_s}^{\phi}$ in cylindrical coordinates and the azimuthal magnetic field $\overline{B_\phi}^{\phi}$.

The α-effect comes instead from the closure relation of the mean electromotive force (EMF)

$$\vec{\mathcal{E}} = \overline{\vec{u}' \times \vec{B}'}^{\phi}\ , \tag{6.25}$$

where $\vec{u}' = \vec{u} - \overline{\vec{u}}^{\phi}$ and $\vec{B}' = \vec{B} - \overline{\vec{B}}^{\phi}$, expressed as a function of the mean magnetic field $\overline{\vec{B}}^{\phi}$

$$\mathcal{E}_i = \alpha_{ij}\overline{B}_j^{\phi} + \beta_{ij}\left(\overline{\vec{\nabla} \times \vec{B}}^{\phi}\right)_j\ , \tag{6.26}$$

where α_{ij} and β_{ij} are tensors that do not depend on $\overline{\vec{B}}^{\phi}$ and i, j refer to spherical $r,\ \theta,\ \phi$ or cylindrical coordinates $s, \phi,\ z$. The diagonal components of the α tensor correspond to the component of the EMF in the direction of the mean magnetic field and their effect is physically described as the twisting of the mean magnetic field lines by the cyclonic turbulence, which forms magnetic field loops that can generate poloidal magnetic field from the toroidal magnetic field and vice versa.

In our case, the generation of poloidal magnetic field by this effect can be seen as a correlation between the toroidal component of the EMF and the toroidal component of the magnetic field B_ϕ in the form of $\mathcal{E}_\phi = \alpha_{\phi\phi}\overline{B_\phi}^\phi$. The diagonal components of the β tensor are in the direction of the mean current $\overline{\vec{J}}^\phi = \mu_0^{-1}\nabla \times \overline{\vec{B}}^\phi$ and their effect is physically described as a turbulent diffusivity, which adds to the magnetic diffusivity η. Another effect that has been proposed to complete the dynamo loop in the case of the MRI is a non-diagonal resistivity $\beta_{\phi s}$, which could generate poloidal field from the toroidal one (Lesur et Ogilvie, 2008). In this case, the azimuthal component of the electromotive force $\mathcal{E}_\phi$ would be correlated with the radial current $\overline{J_s}^\phi$ in cylindrical coordinates. One (or both) of these two effects, in combination with the Ω-effect, may therefore be expected to complete the dynamo cycle leading to a self-sustained magnetic field.

The usual way to characterise an $\alpha\Omega$ dynamo is to compute space-time diagrams of B_ϕ, B_s and $\mathcal{E}_\phi$, which are often referred to as *butterfly diagrams*. Figure 6.9 shows these azimuthally averaged quantities in the southern hemisphere at $r = 0.86 r_o$ (which lies in the middle of the turbulent region). First, the butterfly diagrams show large coherent structures in the mid-latitudes, which is consistent with a mean-field oscillatory dynamo with a period of $P \simeq 410$ ms. The visual inspection of the butterfly diagrams suggests that the dynamo can be interpreted as an $\alpha\Omega$ dynamo. Indeed, the components $\overline{B_\phi}^\phi$ and $\overline{B_s}^\phi$ are anti-correlated, which shows that $\overline{B_\phi}^\phi$ is mainly generated by the Ω-effect. On the other hand, the electromotive force $\mathcal{E}_\phi$ is correlated with $\overline{B_\phi}^\phi$, which suggests that the α-effect plays an important role.

To corroborate the visual correlations of the butterfly diagrams, we compute the Pearson correlation coefficient between two quantities X and Y with the following formula

$$\mathcal{C}_P(X,Y) = \frac{\int_t (X - \langle X\rangle_t)dt \int_t (Y - \langle Y\rangle_t)dt}{\sqrt{(\int_t (X - \langle X\rangle_t)^2 dt)}\sqrt{(\int_t (Y - \langle Y\rangle_t)^2 dt)}} \tag{6.27}$$

where $\langle\cdot\rangle_t$ represents a time average. Fig. 6.10 shows the correlation coefficients between $\mathcal{E}_\phi$ and, respectively, $\overline{B_\phi}^\phi$ and the radial current $\overline{J_s}^\phi$ in order to test the non-diagonal resistivity hypothesis. We find that $\overline{B_\phi}^\phi$ and $\mathcal{E}_\phi$ are well correlated, while no correlation is found between $\overline{J_s}$ and $\mathcal{E}_\phi$. This means that the α-effect is prominent in our simulations. Moreover, the anti-symmetry of the correlation matches with the expected symmetry of the components of the tensor α.

We can estimate the value of the diagonal components of the α tensor with the formula :

$$\alpha_{ii} = \frac{\langle \overline{B_i}^\phi \, \overline{\mathcal{E}_i}^\phi \rangle_t}{\langle (\overline{B_i}^\phi)^2 \rangle_t}\,. \tag{6.28}$$

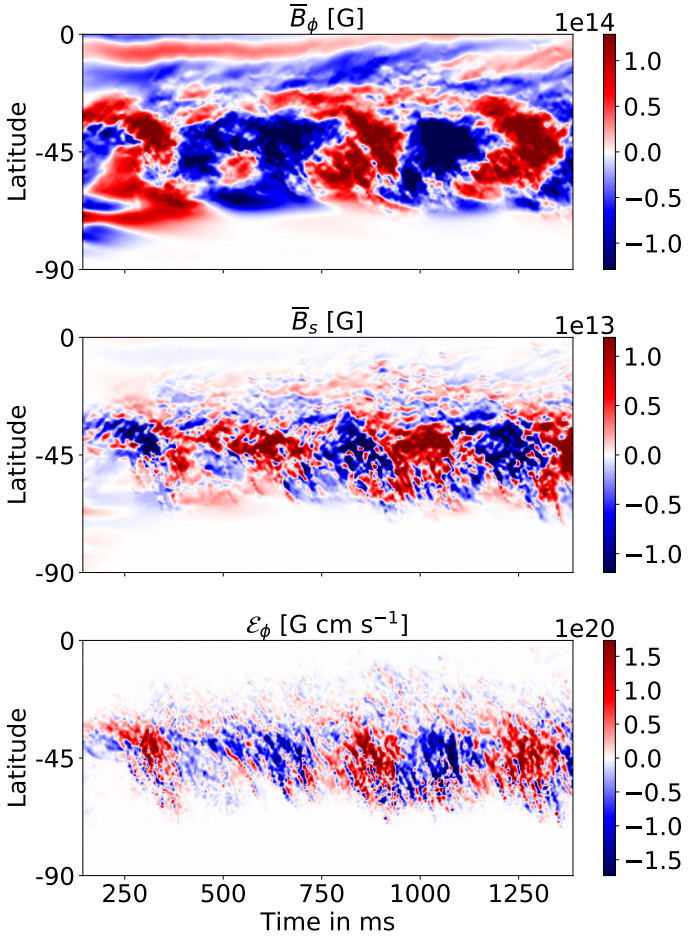


FIGURE 6.9. – Butterfly diagrams of $\overline{B_\phi}^\phi$ (top), $\overline{B_s}^\phi$ (middle) and $\mathcal{E}_\phi$ (bottom) in the southern hemisphere of model `Standard`. Each butterfly diagram is computed at the same spherical radius $r = 0.86 r_o$ in the turbulent region.

This estimation supposes that the EMF is only due to the α-effect, which is a good approximation in the case of high correlation values. A theoretical estimation is possible under the second order correlation approximation, which considers only second order fluctuating quantities, in addition to several hypothesis (MOFFATT, 1978; KRAUSE et RAEDLER, 1980). The turbulence is, in fact, assumed to be statistically homogeneous and isotropic and the mean flow $\overline{u}^\phi$ is usually also neglected. The second order correlation approximation is valid when one of two dimensionless numbers are small : the magnetic Reynolds number Rm or the Strouhal number $St = \mathcal{V}\tau/\mathcal{L}$, where $\mathcal{V}$, τ and $\mathcal{L}$ are typical values of the velocity, time variation and length scale of the turbulence. Under these hypotheses, the diagonal components of the α tensor are

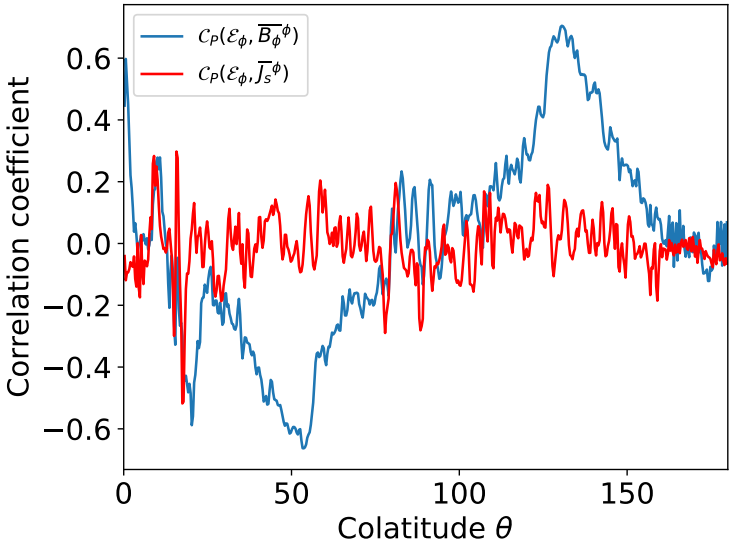


FIGURE 6.10. – Time-averaged correlation coefficients (Eq. 6.27) between $\mathcal{E}_\phi$ and $\overline{B_\phi}^\phi$ (blue) and between $\mathcal{E}_\phi$ and $\overline{J_s}^\phi$ (red) taken at $r = 0.86 r_o$ in model `Standard`.

proportional to the kinetic helicity h

$$\alpha_{ii} = -\frac{\tau_c}{3}\overline{\vec{u}' \cdot \nabla \times \vec{u}'}^\phi = -\frac{\tau_c}{3} h \,, \tag{6.29}$$

where τ_c is the correlation timescale of the turbulence. Although, the conditions theoretically necessary for the validity of this formula are not satisfied in our simulation [2], we find a quantitative agreement between Eqs. (6.28) and (6.29) for $\tau_c \simeq 2.5\,\mathrm{ms} = 0.38 \times 2\pi/\Omega_0$ with the peak value of $\alpha_{\phi\phi} \simeq 6 \times 10^5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ (see Fig. 6.11). This empirical turbulent correlation time is consistent with the timescale of MRI turbulence, which is typically a fraction of the rotation period.

Finally, the value of $\alpha_{\phi\phi}$ can be used to estimate the theoretical frequency of an $\alpha\Omega$ dynamo using the relation (e.g. BUSSE et SIMITEV, 2006; GASTINE et al., 2012; GRESSEL et PESSAH, 2015)

$$\omega = \left|\frac{1}{2}\alpha_{\phi\phi}\frac{d\Omega}{d\ln s}k_z\right|^{1/2} = \left|\frac{1}{2}\alpha_{\phi\phi} q \Omega k_z\right|^{1/2} , \tag{6.30}$$

where k_z is the vertical wavenumber. We compute the shear rate $q = -0.65$ and the rotation rate $\Omega = 688\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ in the middle of the turbulent region from a vertically and azimuthally averaged rotation profile, which gives lower values than q_o and Ω_0. We estimate

2. The Strouhal number is order of unity and the magnetic Reynolds number is order of a few hundred.

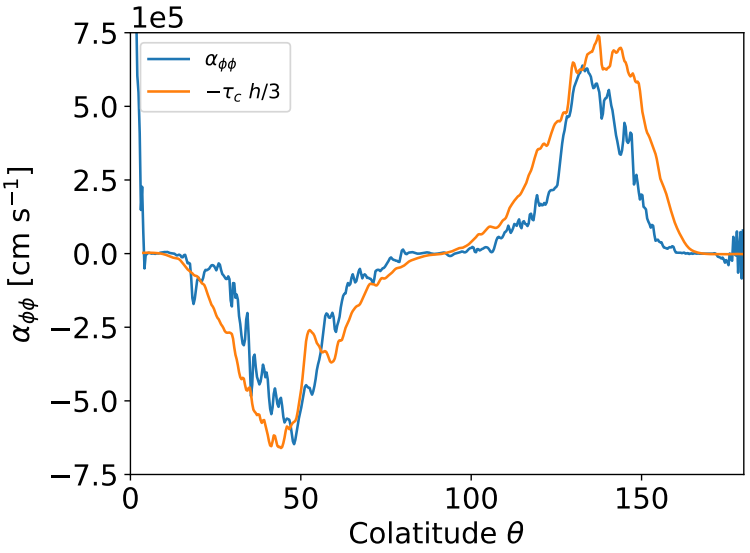


FIGURE 6.11. – Time averaged values of the $\alpha_{\phi\phi}$ component estimated with Eq. 6.28 (blue) and with the turbulent kinetic helicity (orange) (Eq. 6.29) taken at $r = 0.86 r_o$ and with $\tau_c = 2.5$ ms.

$k_z \simeq 2.79 \times 10^{-6}$ cm^{-1} by taking the longest vertical length in the turbulent region at mid-latitudes and obtain a period of $P_{\alpha\Omega} = 2\pi/\omega_{\alpha\Omega} = 324$ ms, which is roughly in agreement with the period inferred from the butterfly diagrams. The small difference between the two values is compatible with the uncertainties in our estimate of the different parameters and may for example be due to an overestimation of the α-effect, as we take its peak value in the turbulent region. If we consider an average on the angles $\theta \in [30°, 60°]$, we obtain a period $P_{\alpha\Omega} = 393$ ms, which is closer to the measured period $P \simeq 410$ ms. All these results show that the MRI-driven dynamo we obtained in our simulations can be described as an $\alpha\Omega$ dynamo with a good degree of accuracy.

6.3. Comparison with other models

After demonstrating with a realistic PNS setup that the MRI can produce subdominant dipole and a turbulent dynamo with a mean-field behaviour, we aim at understanding the influence of the different physical ingredients we added in the anelastic model (shell aspect ratio, buoyancy, thermodynamic background, etc.). We discuss in particular the impact of the density profile (Sect. 6.3.1), the entropy profile (Sect. 6.3.2) and the thermal diffusivity (Sect. 6.3.3), comparing these results with our previous incompressible study (Sect. 6.3.4).

6.3.1. Impact of the density gradient

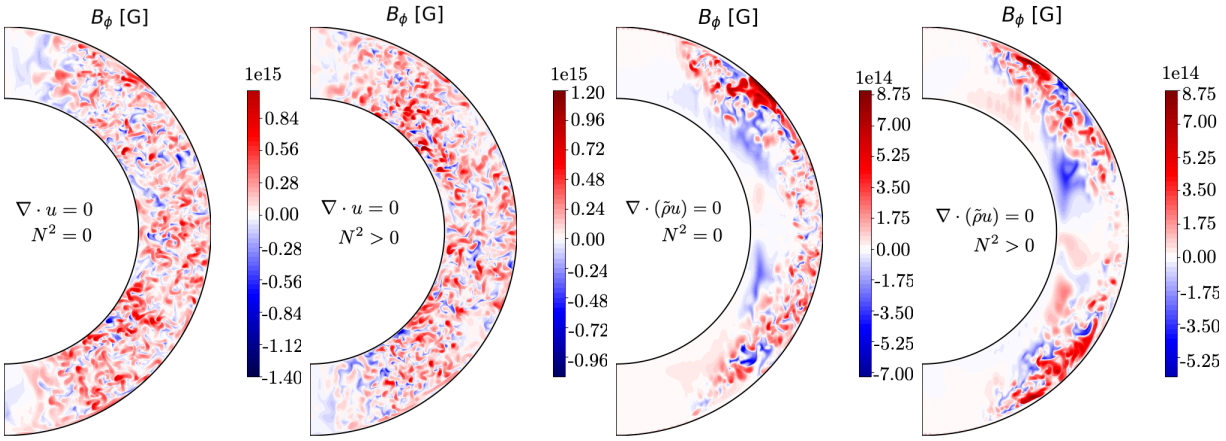


FIGURE 6.12. – Meridional cuts of B_ϕ for incompressible (panel a), Boussinesq (panel b), anelastic without buoyancy (panel c), and anelastic including buoyancy (panel d) models, respectively.

We compare the results of four simulations under different approximations : the Boussinesq approximation (i.e. no density gradient) or the anelastic approximation (i.e. with a density gradient), both with or without buoyancy ($N^2 > 0$ or $N^2 = 0$). For Boussinesq models, constant density is taken equal to the density $\rho_o = 10^{11}$ gcm^{-3} at the outer boundary of the anelastic model. All the other simulation parameters are kept identical. In order to simplify the interpretation of the results, we start by describing the effect of the density gradient.

The comparison of the snapshots of B_ϕ in Fig. 6.12 gives qualitative insights on the effect of the density gradient. While the maximum intensity of the magnetic field is slightly higher for Boussinesq simulations, the striking difference between Boussinesq and anelastic simulations is its structure : for the former models MRI-driven turbulence develops in all the domain except at the poles, while it is restricted to the outer, low density layers for the latter. It also seems that at mid-latitudes the magnetic field has structures at slightly larger scales in the anelastic cases. These differences are due to the background density gradient, since both anelastic simulations (with or without buoyancy) have a similar magnetic field structure.

Figure 6.13 compares the time evolution of the turbulent magnetic (green) and kinetic (orange) energy densities and the axisymmetric magnetic energy density (purple). Both Boussinesq simulations have a higher turbulent magnetic energy and kinetic energy. This is at least partly due to the presence of turbulence in only half of the domain for anelastic simulations compared to the full domain for Boussinesq simulations, as the maximum field strength difference on the snapshots is too low to explain the difference in magnetic energy. On the other hand, the Boussinesq model with buoyancy have a similar axisymmetric magnetic energy den-

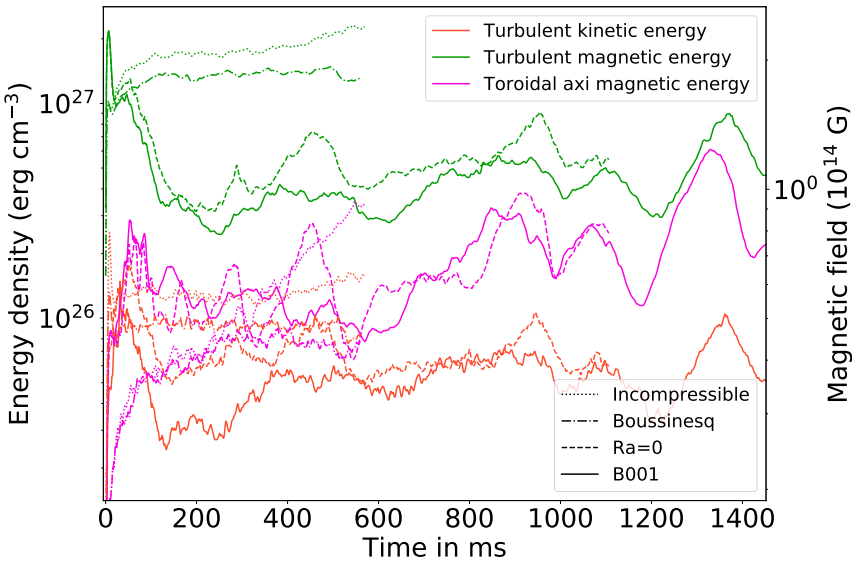


FIGURE 6.13. – Time evolution of the non-axisymmetric (green) and axisymmetric (purple) magnetic and turbulent kinetic (orange) energy densities for incompressible (dotted line), Boussineq (dash-dotted line), anelastic without buoyancy (dashed line) and anelastic (solid line) models.

sity such that the ratio between axisymmetric magnetic energy and turbulent magnetic energy is higher for anelastic simulations. The axisymmetric component for the Boussinesq model without buoyancy, called model `Incompressible`, is quite peculiar as it increases faster than the turbulent magnetic energy and reaches a higher energy than all other models. The ratio of axisymmetric magnetic energy to turbulent magnetic energy also saturates at higher levels. Another important point, however, is the presence of clear oscillations only for anelastic simulations, which suggests that there is no mean-field dynamo with a constant density.

In a similar fashion to magnetic axisymmetric energy, the dipole energy density seems to be of the same order for all simulations , except for model `Incompressible` which is higher at late times (Fig. 6.14). Due to its total magnetic energy also increasing, both Boussinesq models have a similar ratio of dipole field to total magnetic field of $\simeq 3.4\%$, which is lower than these of anelastic models $\simeq 4.3\%$ as it will be discussed in section 6.3.4. The dipole energy density is also dominated by its equatorial component in all simulations, which indicates that the inclination of the dipole towards the equator is a robust feature of the MRI.

To check for the presence of a mean-field behaviour, we show in Fig. 6.15 the butterfly diagrams of $\overline{B_\phi}^\phi$. For Boussinesq simulations (panels a and b), the MRI unstable region is more noisy. It is hard to observe clear signs of coherent mean-field patterns with buoyancy

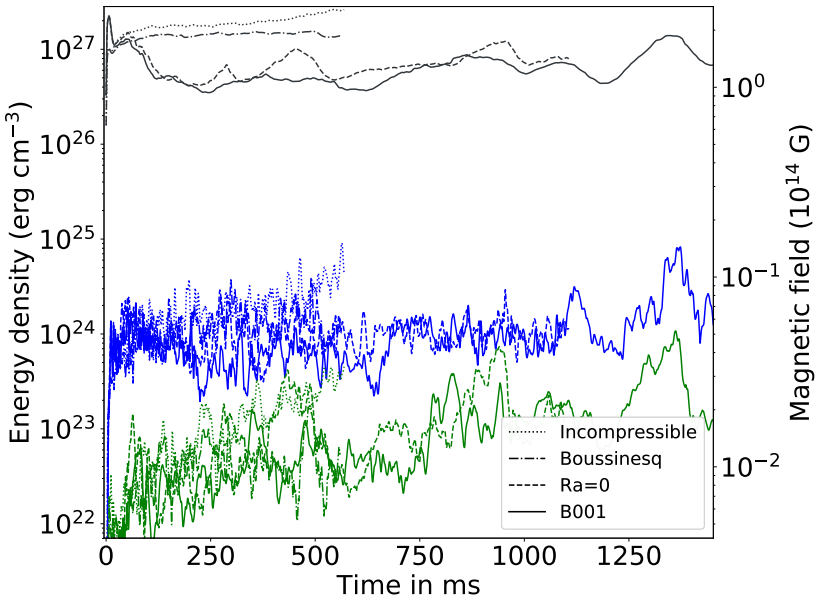
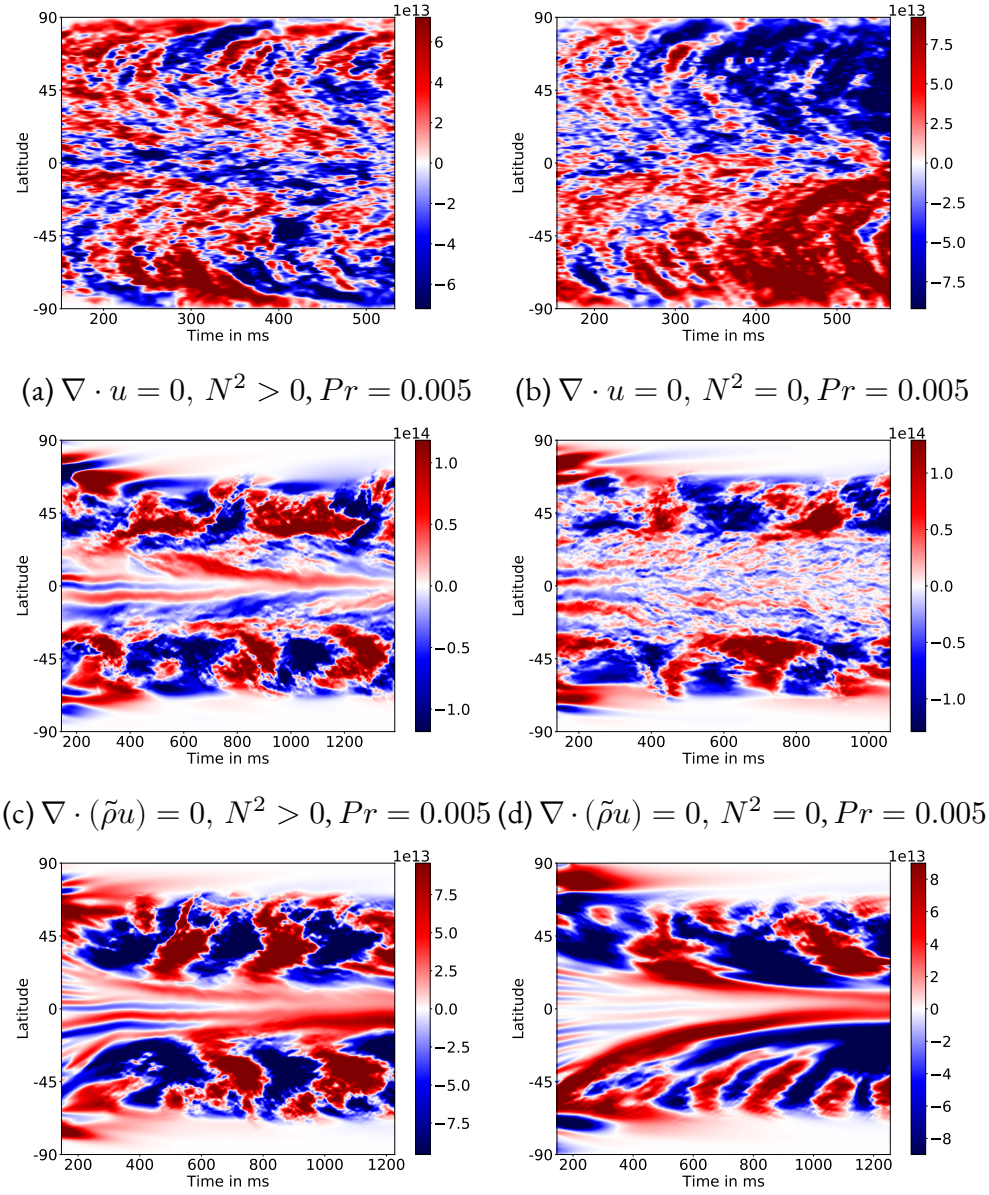


FIGURE 6.14. – Time evolution of the axial dipole (green), total dipole (blue) and total magnetic (black) energy densities of the same models displayed in Fig. 6.13.

(panel a), while without buoyancy (panel b) an increasing quadrupole develops after 400 ms. This quadrupole is rather puzzling, as its strength is higher than the incompressible models of paper I and does not match an $\alpha\Omega$ behaviour. Indeed, there is no clear signal in the toroidal component of the EMF $\mathcal{E}_\phi$ and we find that the correlation coefficients between the EMF $\mathcal{E}_\phi$ and $\overline{B_\phi}^\phi$ is low, with an averaged $C_P(\mathcal{E}_\phi, \overline{B_\phi}^\phi) \simeq 0.04$ in both hemispheres. We also find no correlations between the EMF $\mathcal{E}_\phi$ and $\overline{J_s}^\phi$. The physical origin of this toroidal quadrupole is so far uncertain. We would like to point out that this region is not turbulent and the patterns found there (which can also be seen in the Boussinesq model with buoyancy in panel a) are probably not caused by a true mean-field mechanism. These results suggest that it is more difficult to have a mean-field behaviour without density stratification. The stronger dipole to total magnetic field ratio in the case of anelastic models might be due to the mean-field dynamo boosting the generation of the dipole.

6.3.2. Impact of buoyancy

To study the influence of buoyancy, we focus first on the comparison of model `Incompressible` to the Boussinesq model with buoyancy. The comparison between the snaphots of B_ϕ shows that the structure of the turbulence is rather similar, while the turbulent magnetic field is stronger without buoyancy (Fig. 6.12). This result is also found in terms of turbulent energy density,



(a) $\nabla \cdot u = 0,\ N^2 > 0, Pr = 0.005$ (b) $\nabla \cdot u = 0,\ N^2 = 0, Pr = 0.005$

(c) $\nabla \cdot (\tilde{\rho} u) = 0,\ N^2 > 0, Pr = 0.005$ (d) $\nabla \cdot (\tilde{\rho} u) = 0,\ N^2 = 0, Pr = 0.005$

(e) $\nabla \cdot (\tilde{\rho} u) = 0,\ N^2 > 0, Pr = 0.02$ (f) $\nabla \cdot (\tilde{\rho} u) = 0,\ N^2 > 0, Pr = 0.1$

FIGURE 6.15. – Butterfly diagrams of $\overline{B_\phi}^\phi$ at $r = 0.86 r_o$ for the models shown in Fig. 6.12 for Boussinesq with buoyancy (panel a), Boussinesq without buoyancy (panel b), anelastic with buoyancy (panel c), anelastic without buoyancy (panel d), anelastic with buoyancy with $Pr = 0.02$ (panel e) and $Pr = 0.1$ (panel f). Each butterfly diagram is computed at the same spherical radius $r = 0.86 r_o$ in the turbulent region.

for both magnetic and kinetic energies (Fig. 6.13). As mentioned in the previous section, the

physical origin of the large axisymmetric energy density of model `Incompressible` is uncertain and this feature will not be discussed.

For anelastic models, an effect can be seen in the equatorial plane, where MRI-driven turbulence is damped with buoyancy (panels (c) and (d) of Fig. 6.12). The fluctuations in the equatorial region of the anelastic models shown in the butterfly diagram suggest that the onset of turbulence can be seen only without buoyancy (see panel (c) and (d) of Fig. 6.15). This effect may be expected because, in the equatorial plane, the buoyancy quenches the motions in the direction of the differential rotation gradient, which reduces the MRI turbulence (Menou et al., 2004; Guilet et E. Müller, 2015). The lack of turbulence in the equatorial plane with buoyancy may explain partly the lower turbulent magnetic and kinetic energy densities of model `Standard` compared to the model without buoyancy (Fig. 6.13).

By contrast, the mid-latitude regions are less impacted by the buoyancy. Indeed, the magnetic field B_ϕ seems only slightly reduced in strength, but it has a similar structure outside of the equatorial plane (Fig. 6.12). The anelastic model without buoyancy has also a mean-field dynamo producing a field with a similar amplitude to model `Standard` at the mid-latitudes (see panel (c) and (d) in Fig. 6.15). This leads to a similar axisymmetric toroidal energy density (Fig. 6.13) and dipole energy density (Fig. 6.14) for both anelastic models. In addition, the dynamo wave frequency is also the same between the anelastic models, which shows that buoyancy does not impact the dynamo mechanism at $Pr = 0.005$.

6.3.3. Influence of the thermal Prandtl number

The previous section shows that, except in the equatorial plane, buoyancy has a rather small impact on the anelastic simulations overall, which might be due to the high thermal diffusivity. To further study the influence of the thermal diffusion, we run two anelastic simulations with smaller thermal diffusivity corresponding to larger Prandtl numbers, respectively $Pr = 0.02$ and $Pr = 0.1$. By comparing the timescale for thermal diffusion to compensate the entropy fluctuations to the timescale of gravity waves, we may expect the thermal diffusion to reduce the effects of buoyancy on scales smaller than the critical length L_c defined by Eq. (6.16). For our simulation `Standard` at $Pr = 0.005$, the critical length at mid-latitudes $L_c \simeq 0.14D$ is of the same order of magnitude as the turbulent scale of the radial velocity, such that buoyancy effects are expected to be marginal. By contrast, at $Pr = 0.1$, the critical scale decreases to $L_c \simeq 0.03D$ such that buoyancy should affect the turbulence. The buoyancy force is expected to suppress turbulent motions at scales larger than L_c. As a consequence, the typical scale of the radial velocity is expected to be smaller at higher Pr.

To check this expectation we compare snapshots of the radial velocity in Fig. 6.16. For increasing Pr we observe a decrease in both the size of the velocity structures and the maximum amplitude of the radial velocity. This trend is confirmed to some extent by the corresponding kinetic energy time series in Fig. 6.17. The kinetic energy of the simulation at $Pr = 0.1$ (dotted

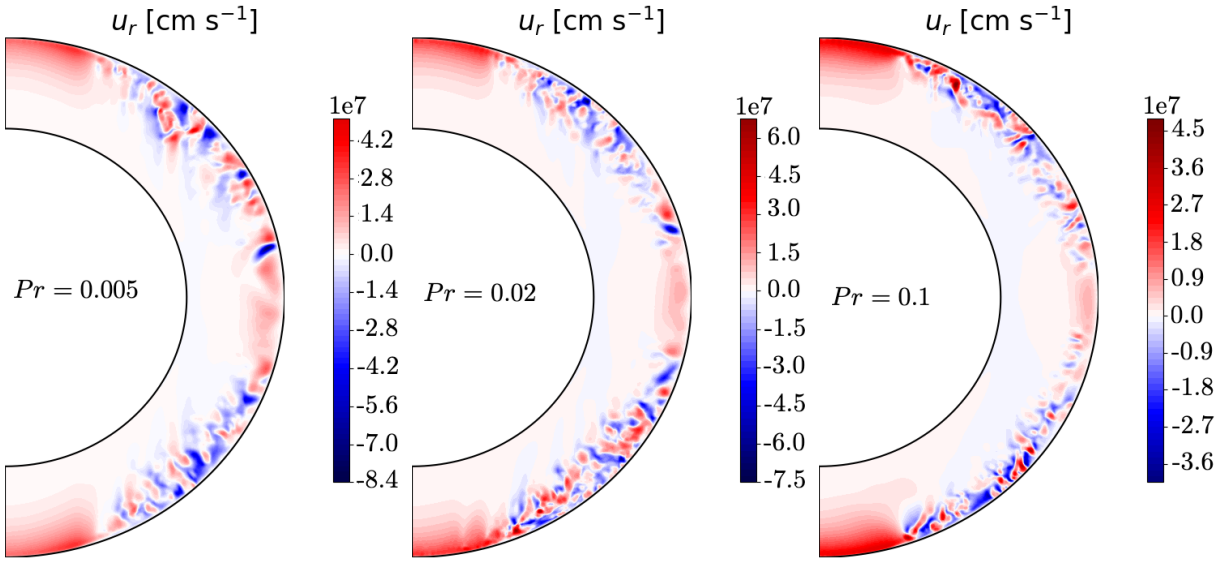


FIGURE 6.16. – Snapshots of the radial velocity u_r for increasing Prandtl numbers. From left to right, the slices correspond to $Pr = 0.005$ at $t = 773$ ms, $Pr = 0.02$ at $t = 1128$ ms, $Pr = 0.1$ at $t = 1128$ ms.

lines) is indeed the lowest during most of the simulation time. The turbulent magnetic energy follows the same trend with Pr as the turbulent kinetic energy (green curves).

Despite the differences in the turbulence properties, the axisymmetric toroidal magnetic energy is not strongly dependent on Pr and the characteristic oscillations of a mean-field dynamo are present in all three simulations. This suggest that buoyancy does not strongly impact the mean-field behaviour. The butterfly diagrams in the turbulent region at mid-latitudes are very similar for $Pr = 0.02$ (panel (e) in Fig. 6.15) and the `Standard` simulation at $Pr = 0.005$ (panel (c)), with a very similar dynamo period (see Table 6.1). To check whether the specific behaviour at different Pr is still an $\alpha\Omega$ dynamo, we compare in Fig. 6.18 the $\alpha_{\phi\phi}$ component for the different Prandtl numbers. At $Pr = 0.02$, we find a mean $\alpha_{\phi\phi} \simeq 3.4 \times 10^5$ cm s^{-1} in the turbulent region, which translates into the period $P_{\alpha\Omega} \simeq 385$ ms using the same k_z and Eq. (6.30), hence relatively close to the simulation `Standard`.

TABLE 6.1. – Periods of the different mean-field patterns for $Pr = 0.005$, $Pr = 0.02$ and $Pr = 0.1$. The different period in the south hemisphere is added for the run $Pr = 0.1$.

Pr	0.005	0.02	0.1
P [ms]	410	418	512
P_{South}	-	-	205
$P_{\alpha\Omega}$	393	385	551

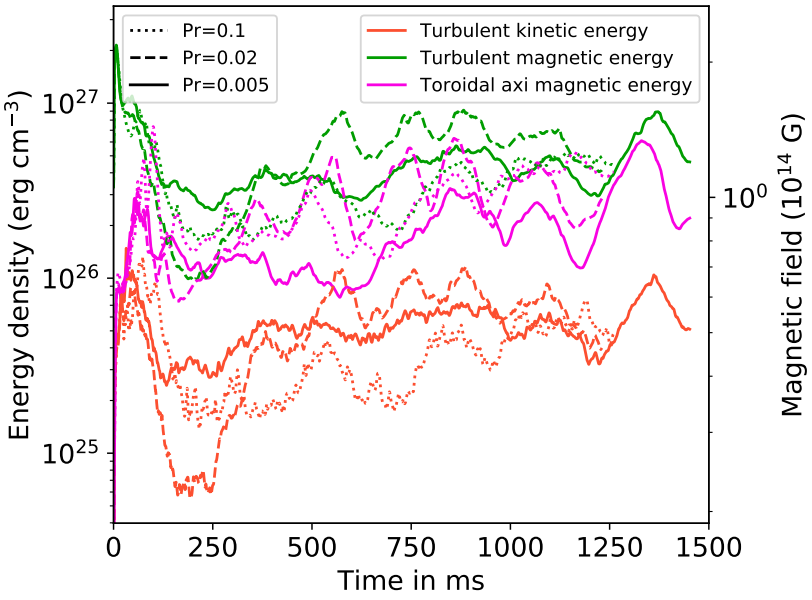


FIGURE 6.17. – Time evolution of the magnetic and turbulent kinetic energy densities for models with $Pr = 0.1$ (dot), $Pr = 0.02$ (dash) and $Pr = 0.005$ (solid). The colors represent the same quantities as in Fig. 6.13.

At the higher Prandtl number $Pr = 0.1$, oscillating dynamo cycles are still present but with different characteristics. This is especially the case in the southern hemisphere, where we observe mean-field patterns of lower amplitude but higher frequency (with a period of $P_{\rm South} \simeq 205$ ms). In the northern hemisphere, the patterns look more like the other anelastic simulations, albeit with a lower frequency $P_{\rm North} \simeq 502$ ms. Another difference with the other butterfly diagrams is the direction in which the pattern propagates, which is towards the equator rather than towards the pole as in the other anelastic simulations.

At $Pr = 0.1$, we measure $\alpha_{\phi\phi} \simeq 7 \times 10^4$ cm s^{-1} in the northern hemisphere and $\alpha_{\phi\phi} \simeq 3 \times 10^4$ cm s^{-1} in the southern one (Fig. 6.18). By assuming that the turbulent region has a size of approximately half the one from simulation `standard`, we obtain a period $P_{\alpha\Omega} = 534$ ms in the northern hemisphere, which is in good agreement with the frequency shown by the butterfly diagram. The lower $\alpha_{\phi\phi}$ value in the southern hemisphere would lead to a longer period and therefore, it is clear that the patterns with half the period in the south hemisphere cannot be explained with the same $\alpha\Omega$ dynamo formalism. This new behaviour of the south hemisphere with $Pr = 0.1$ remains obscure and might result from being close to the dynamo threshold. This idea is also supported by the fact a a more typical $\alpha\Omega$ dynamo occurs in the northern hemisphere but with a weaker α-effect.

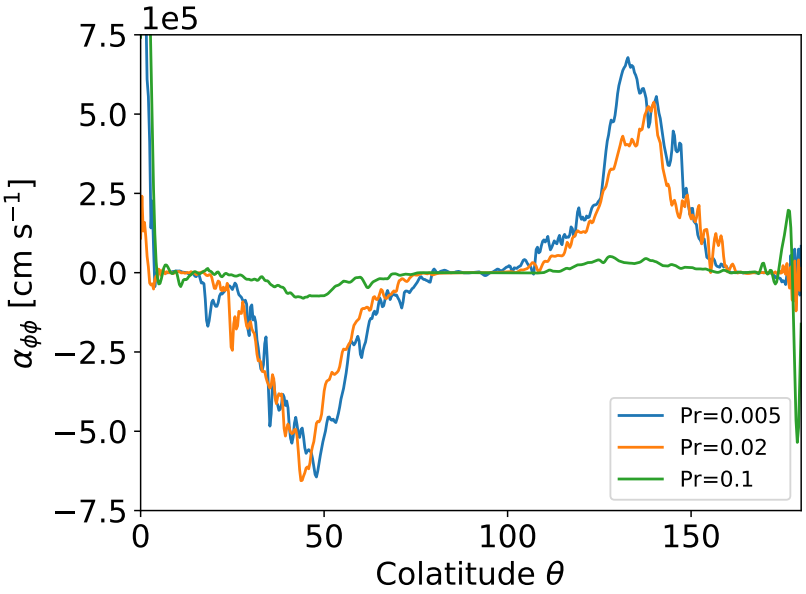


FIGURE 6.18. – Time averaged values of the $\alpha_{\phi\phi}$ component estimated using Eq. (6.28) at $r = 0.86r_o$ in the turbulent region for three different Prandtl numbers : $Pr = 0.005$ (blue), $Pr = 0.02$ (orange) and $Pr = 0.1$ (green).

All in all, the results presented in this section show that a low Prandtl number diminishes the impact of buoyancy on the MRI dynamo, whereas the buoyancy force can limit the MRI driven dynamo for Prandtl numbers closer to unity.

6.3.4. Comparison to our previous incompressible models

One of the important results of paper I is the robust linear relationship between the dipole intensity and the averaged magnetic field strength (see their Fig. 16). In order to directly compare the ratios measured in simulations that have different densities and parameters, we reproduce the same figure by using the dimensionless dipole strength defined by $\mathcal{B}_{\rm dip} = B_{\rm dip}/\sqrt{\mu_0\tilde{\rho}_o}\frac{1}{D\Omega}$ and the dimensionless total magnetic field strength $\mathcal{B}_{\rm tot} = B_{\rm tot}/\sqrt{\mu_0\tilde{\rho}_o}\frac{1}{D\Omega}$ instead of the magnetic intensities. For anelastic simulations, we find higher magnetic strength $\mathcal{B}_{\rm tot}$ and dipole strength $\mathcal{B}_{\rm dip}$ compared to paper I. However the ratio of $\mathcal{B}_{\rm dip}$ to $\mathcal{B}_{\rm tot}$ of anelastic simulations is quite similar, albeit a bit smaller ($\simeq 4.3\%$) compared to the linear relationship of paper I.

For this work's Boussinesq simulations, the differences with paper I are more important. The magnetic strength $\mathcal{B}_{\rm tot}$ is higher by a factor approximately 3 due to the stronger turbulence, while having a dipole strength $\mathcal{B}_{\rm dip}$ twice stronger. This gives a different linear relationship of $\simeq 3.4\%$ between the magnetic dipole and the magnetic field strength. This change of the linear relationship between this work's Boussinesq models and the incompressible models of

Paper I is probably due to the difference in the aspect ratio between the models. Indeed, with a lower shell gap D, the forcing of the differential rotation by the outer boundary is expected to be more efficient, which might lead to stronger turbulence for a similar dipole intensity. This result highlights the importance of developing global models that take into account the full PNS structure.

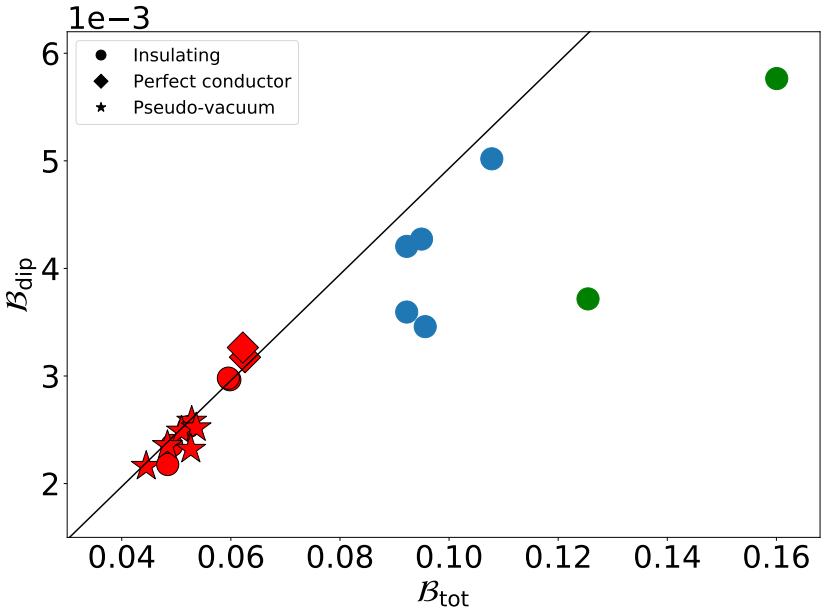


FIGURE 6.19. – Dimensionless dipole strength $\mathcal{B}_{\rm dipole}$ as a function of the dimensionless magnetic field strength $\mathcal{B}_{\rm tot}$. The simulations of this work are in blue (anelastic models) and green (no density stratification), while the incompressible simulations from paper I are in red. Dimensionless magnetic field strengths $\mathcal{B}$ were used in order to compare results with different densities $\tilde{\rho}_{\rm o}$ and parameters.

6.4. Discussion

6.4.1. Spatial distribution of the turbulence

One puzzling feature of the turbulence in the anelastic models is its concentration in the low density region. The MRI modes can be damped by the viscosity or the resistivity if the initial magnetic field is lower than a critical value. In order to investigate whether the lack of turbulence in the high density region is due to the initial magnetic field, we ran a simulation with a higher resolution $(n_r, n_\theta, n_\phi) = (385, 768, 1536)$ and a magnetic field twice as high $B_{\rm o} = 3.3 \times 10^{14}$ G. We find similar results for the magnetic field as model `Standard` as shown in Table 6.2, which confirms that our results are well converged and are not an artefact of the

initial magnetic field. The absence of turbulence in the high density region may be due to the magnetic Prandtl number Pm being close to the dynamo threshold and therefore might change with a lower physical resistivity or a higher Pm.

6.4.2. $\alpha\Omega$ vs $\alpha^2\Omega$ dynamo

As shown in the previous sections, the dynamos observed in our anelastic models are consistent with an $\alpha\Omega$ mechanism.Although the anti-correlation of B_s and B_ϕ in the butterfly diagrams (Fig. 6.9) suggests that the Ω-effect generates the toroidal field, we would like to assess this more quantitatively. For this purpose, we compare the Ω-effect to the generation of toroidal field by the diagonal components α_{rr} and $\alpha_{\theta\theta}$ (see appendix 6.5), which would be relevant in the case of an $\alpha^2\Omega$ dynamo. To distinguish between an $\alpha\Omega$ and $\alpha^2\Omega$ dynamo, we compute the ratio of the two dynamo numbers $C_\alpha = \max(_{\mathrm{rr}},)\mathrm{R}/\eta$ and $C_\Omega = \Omega R^2/\eta$ in the turbulent region, which gives

$$\frac{C_\Omega}{C_\alpha} = \frac{\Omega R}{\alpha} \approx 100, \tag{6.31}$$

where R is taken as the middle radius $(r_{\mathrm{i}} + r_{\mathrm{o}})/2$. This estimate therefore confirms that the Ω-effect largely dominates the generation of the toroidal field and that the dynamo in our simulations is an $\alpha\Omega$ dynamo.

6.4.3. Properties of the α tensor components

The characterization of the MRI-driven $\alpha\Omega$ dynamo in our simulations is done by estimating the tensor components α_{ij}. Our method assumes that the EMF component $\mathcal{E}_i$ is only due to the contribution of the mean magnetic field component B_j and neglects the contribution of the other components of the α tensor and the turbulent resistivity tensor β components. In the azimuthal EMF $\mathcal{E}_\phi$, the contribution from $\alpha_{\phi r}$ and $\alpha_{\phi\theta}$ can be neglected because the Pearson correlation coefficients between $\mathcal{E}_\phi$ and B_θ or B_r are much lower in the turbulent region than the one for B_ϕ (panels (c) and (d) of appendix 6.5). The $\alpha_{\phi\phi}$ component is well estimated and is therefore the main contribution to the generation of the poloidal magnetic field. Due to their weaker correlation in the turbulent region, the other $\alpha_{\phi i}$ components (appendix 6.5) may be wrongly estimated and they do not drive the generation of the poloidal field. The other α components do not dominate the generation of toroidal field since the dynamo cannot be described as an $\alpha^2\Omega$ dynamo.

In the case of a statistically symmetric velocity field with respect to the equator, mean-field theory predicts that the components of the α_{ij} tensor (Eq. 6.26) are either equatorial-symmetric ($\alpha_{\mathrm{r}\theta}$, $\alpha_{\theta\mathrm{r}}$, $\alpha_{\phi\theta}$, $\alpha_{\theta\phi}$) or equatorial-antisymmetric (α_{rr}, $\alpha_{\phi\mathrm{r}}$, $\alpha_{\phi\phi}$, $\alpha_{\mathrm{r}\phi}$, $\alpha_{\theta\theta}$) (Gubbins et K. Zhang, 1993). The estimation of the components α_{ij} (Fig. 6.11 and the appendix 6.5) shows that these properties are verified in our simulations.

We also compare the signs of α tensor components to the study of the MRI by Gressel et Pessah (2015), who use the test field method to measure them taking into account the contribution of all components. For the diagonal components, we also find that $\alpha_{\phi\phi}$ has an opposite sign to α_{rr} (see appendix. 6.5), which corresponds to the radial component α_{xx} in Gressel et Pessah (2015). Interestingly, in our models the off-diagonal elements of the α tensor have opposite signs across the domain with respect to their conjugate, but they don't have the same amplitude, contrary to the expectations of mean-field theory in the case of isotropic turbulence (Krause et Raedler, 1980). By contrast, in local simulations of the MRI with stratification they are found to have the same sign, which has been interpreted as a significant anisotropy of the MRI turbulence (Brandenburg, 2008; Gressel et Pessah, 2015). This different behaviour might be due to the difference in geometry between a local model with a vertical stratification and a spherical global model with a radial stratification.

6.4.4. Diffusive processes

Ideal MHD without any explicit diffusion has sometimes been used to study the MRI, but convergence studies have shown that the strength of MRI turbulence then depends on resolution (Fromang et J. Papaloizou, 2007; Pessah et al., 2007). To avoid this issue, we considered explicit diffusivities and used pseudo-spectral methods (which have low numerical dissipation), making sure that the diffusive scales are well resolved. This constraint forces us to use diffusivities that are sometimes larger than the expected values in a PNS. In particular, the value of the magnetic Prandtl number Pm we adopted in our simulations is much lower than the value expected in a PNS. This is a significant limit to our models because the quantitative results of the MRI turbulence are heavily dependent on Pm, as shown by studies of accretion disks (Lesur et Longaretti, 2007; Fromang et al., 2007; Longaretti et Lesur, 2010; Meheut et al., 2015) and in paper I. The magnetic field strength that would be reached at higher Pm is probably higher than those presented in this work, which should therefore be considered as lower bounds. The turbulent region may also be bigger and occupy all the domain in this regime, if its size is indeed affected by the magnetic diffusivity in the denser region.

Lastly, we assume that neutrinos are in the diffusive regime, which is valid when scales considered are longer than the neutrino mean free path. As the simulation domain is close to the PNS surface, the neutrino mean free path is large ($\simeq 5 \times 10^5$ cm at $r = 33$ km) and most of the turbulence would therefore be impacted by a neutrino drag. In this regime, the study of Guilet et al. (2015) shows that the neutrino drag, weaker in the outer layer of the PNS (for a radius ≥ 30 km), does not impact the linear modes of the MRI. Therefore, the MRI is able to grow freely on small scales in this region. However, the impact of the neutrino drag has been studied only in the linear phase but never in non-linear simulations. It would be especially important to assess it if we consider that the turbulence in our simulations is close to the PNS surface, where the diffusive approximation is less valid. The evolution of the MRI in this regime is postponed to future studies.

6.4.5. Validity of the anelastic approximation

The anelastic approximation is used in our models to include density stratification with a reduced computational cost with respect to standard MHD, as it allows to filter out sound waves. The filtering of sound waves is justified when the different velocities of our system, such as fluid velocity u, Alfvén velocity $v_{\rm A}$ and gravity wave $v_{\rm g}$ velocity, are much lower than the sound speed $c_{\rm s}$ of the fluid. From the 1D CCSN simulation used to compute our anelastic reference state, we can compute the sound speed, which ranges from $c_{\rm s} \simeq 4 \times 10^9$ cm s^{-1} at the inner boundary to $c_{\rm s} \simeq 2.9 \times 10^9$ cm s^{-1} at the outer boundary. Using the values of Alfvén speed shown in Fig. 6.19, we can verify a posteriori that $v_{\rm A}^2/c_{\rm s}^2 \leq 10^{-2}$. Since the turbulent kinetic energy is lower than the magnetic energy, we also have $u^2/c_{\rm s}^2 \leq v_{\rm A}^2/c_{\rm s}^2 \leq 10^{-2}$. For the gravity waves, we ran some hydrodynamic tests in the anelastic model with $Pr = 0.1$ and rotation a thousand times slower, finding a good agreement with the frequency and damping rate expected from large-scale gravity modes ($l \leq 6$). To justify the filtering of sound waves, we also verified a posteriori in our anelastic simulations that the oscillation frequency of these modes is lower than the Lamb frequency $w_{\rm Lamb} = c_{\rm s}k$, where $k = \sqrt{l(l+1)/r^2}$ is the horizontal wavenumber of the spherical harmonics. Note also, that the LBR anelastic approximation (Lantz, 1992; S. I. Braginsky et P. H. Roberts, 1995) that we use describes well the propagation of gravity modes when compared to compressible equations (Brown et al., 2012). Lastly, we also verified that relative density perturbations $\delta\rho$ due to entropy perturbations are small : $\delta\rho/\tilde{\rho} \sim \tilde{\alpha}_T \tilde{T} s'/(c_p \tilde{\rho}) << 1$.

The main limitation in our implementation of the anelastic approximation is that the thermodynamical background is assumed not to evolve over the timescale of the simulation. Our simulations last approximately one second, but the 1D CCSN simulation shows that during that time the width of the outer stably stratified region shrinks from approximately 15 km to 5 km, while the PNS radius contracts from 40 km to 20 km. It is difficult to take into account this structural evolution in our models, hence the study of MRI-driven dynamos at later times is postponed to future works.

6.5. Conclusions

We have investigated the effect of the density gradient and stable stratification on the generation of large-scale magnetic fields by the MRI in 3D spherical PNS models. We developed anelastic models using a thermodynamic background describing the stably stratified region of a PNS based on 1D CCSN simulations and compared our results to those obtained with incompressible and Boussinesq models. The main findings of our study can be summarized as follows :

— We obtain a quasi-stationary state with a MRI-driven dynamo in presence of density stratification and stable thermal stratification. The averaged magnetic field strength is

around $\sim 1.4 \times 10^{14}$ G and the (mostly) equatorial magnetic dipole represents around $\sim 4.3\%$ of the averaged magnetic field. These results are consistent with our previous incompressible study once rescaled for the different density.

— The MRI-driven dynamo shows a qualitatively different behaviour in presence of density stratification, with a prominent axisymmetric component of the magnetic field displaying oscillations on a timescale significantly longer than the rotation period. This mean-field dynamo and its oscillation period is well described by an $\alpha\Omega$ mechanism. The frequency of the observed dynamo is well explained by an α-effect, which is consistent with the theoretical calculations based on the local kinetic helicity.

— A low thermal Prandtl number prevents the buoyancy to damp the MRI turbulence, except in the equatorial plane. When Pr is increased, the radial velocity is distributed at smaller scales, which can impact the MRI-driven dynamo and its $\alpha\Omega$ mechanism.

These findings support the ability of the MRI to generate a strong large-scale magnetic field in presence of realistic physical ingredients, hence providing an important mechanism that can help explaining magnetar formation.

Although the magnetic dipole of 6×10^{12} G obtained in our simulations may seem weak to form a magnetar, one should note that these results are obtained with a large PNS with a radius of $r_o = 39.25$ km, thus before the contraction to the final size of a cold neutron star with a radius close to 12 km. Under the plausible hypothesis that magnetic flux will be conserved during this contraction, the magnetic field could be amplified by a factor of ~ 10 and the dipole would then be close to the lower end of the magnetar range $10^{14} - 10^{15}$ G. In addition to this dipolar magnetic field, the MRI in our anelastic models generates a large scale toroidal field of $B \simeq 8 \times 10^{13}$ G that can be amplified to $\sim 10^{15}$ G by flux conservation. Finally, we note that there are reasons to expect that our simulations may underestimate the intensity of the magnetic field generated by the MRI. Importantly, as highlighted in the discussion, a higher magnetic Prandtl number will quantitatively change the results, leading most likely to an increase in the magnetic field strength. Higher magnetic Prandtl numbers may also enable a fully turbulent state extending to the higher density region at smaller radii, where we may expect a higher magnetic field.

An important limitation of our approach concerns the evolution of the PNS structure. Indeed, the 1D CCSN simulation used in this work shows that the PNS contracts in about 5 s and becomes almost fully convective with a thin stably stratified outer layer of a few kilometers. We do not take this evolution into account yet, since the required developments are beyond the scope of the present study. Forthcoming improvements will consist in modelling the entire PNS, which includes both stably stratified and convective zones. In the latter, the onset of a convective dynamo with fast rotation can generate magnetar-like magnetic fields (Raynaud et al., 2020). This leads to a strong magnetic field buried below the stably stratified zone, which could impact the MRI-driven dynamo. The stably stratified region may also influence the convective dynamo as shown in some studies of planetary dynamos (Gastine et Wicht, 2020). The interplay between the convective dynamo and the MRI-driven dynamo is therefore a key question of

magnetorotational explosions, since the magnetic field at the PNS surface has the strongest impact on the launch of the explosion (Obergaulinger et Aloy, 2017, 2020; Bugli et al., 2020; Bugli et al., 2021).

The core-collapse dynamics may be impacted by the large-scale magnetic field that we obtain in our simulations. The dipole field in our models may be a bit low to directly launch jets, especially since the equatorial component is less efficient than the aligned component as shown by Bugli et al. (2021). Nonetheless, other large-scale mean-field structures, such as the toroidal mean magnetic field, may still impact the supernova dynamics. The presence of a mean-field dynamo in our simulations opens exciting perspectives to model the generation of large-scale magnetic field in core-collapse simulations. Indeed, our results can be used to calibrate a subgrid model of the MRI-driven turbulence with an $\alpha\Omega$ dynamo mechanism. This would allow models to describe *in situ* amplification of the PNS magnetic field instead of relying on an unrealistically strong initial magnetic field.

Magnetic fields are also important in the context of binary neutron star mergers, since magnetars are invoked to power short gamma-ray bursts and kilonovae, such as the GW170817 event (Metzger et al., 2018). A stable magnetar could indeed explain the high luminosity of the kilonova associated with the recent short gamma-ray burst GRB200522A (Fong et al., 2021), an interpretation which is also invoked to explain an X-ray transient as the aftermath of a binary neutron-star merger (Xue et al., 2019). To support this scenario, the MRI has been invoked to amplify the magnetic field, as similar conditions in terms of neutrino radiation and differential rotation can be found in neutron star mergers (Guilet et al., 2017). Realistic simulations have shown that the MRI amplifies the magnetic field from an initial strong axial dipole (Siegel et al., 2013; Kiuchi et al., 2018; Ciolfi et al., 2019; Mösta et al., 2020). The study of large-scale field generation is difficult in realistic models of neutron star mergers because it requires to take into account many different physical ingredients : general relativity, treatment of neutrino physics, equation of state of hot and dense matter, magnetohydrodynamics. The development of idealized models with methods similar to those employed in this study will help to understand the effects of different physical processes and provide a useful reference for comparison and calibration of $\alpha\Omega$ dynamos in merger simulations (Shibata et al., 2021).

Investigating the different scenarii of magnetar formation is a promising avenue of research as more statistics will be available for transients events in the multi-messenger era. For instance, new statistics on FRBs and their host galaxies may give new insights on magnetar formation in further galaxies, since magnetars are at least one of the FRB progenitors.

Acknowledgements

We thank Hans-Thomas Janka who provided the data of 1D CCSN supernova simulations. This research was supported by the European Research Council through the ERC starting grant MagBURST No. 715368. The computations were performed on the supercomputer Occigen of the CINES (Applications A0030410317 and A0050410317). The authors are grateful

to Thomas Gastine, Thierry Foglizzo and Sébastien Fromang for their valuable insight and expertise.

Appendix

Reference state of the anelastic model

The comparison of the reference model in the simulation to the mixing-length theory (mlt) model of 1D CCSN simulations is presented in this appendix.

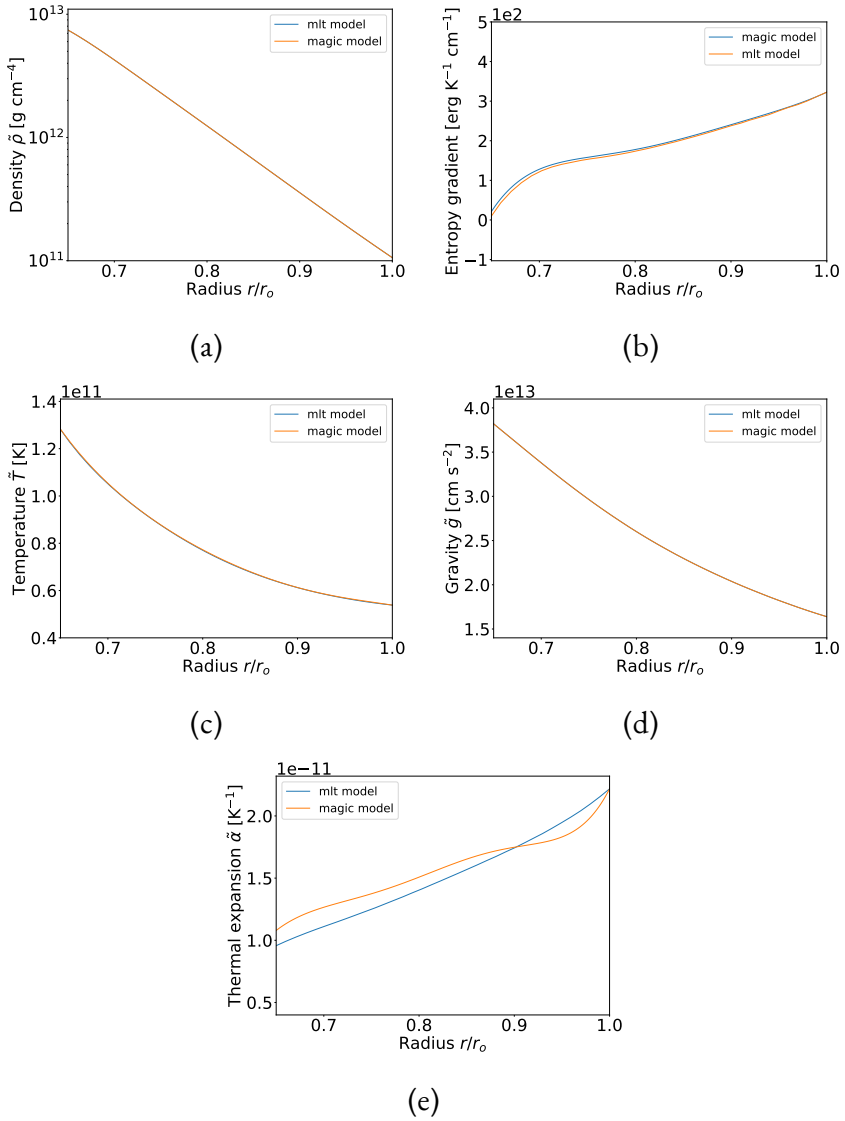


FIGURE 6.20. – Comparison of the reference state considered in this study (*magic model*) with the mlt model of the 1D CCSN simulation by HÜDEPOHL (2014). (a) Density profile, (b) effective entropy profile, (c) temperature profile, (d) gravity profile, (e) thermal expansion profile, as a function of the normalized radius. The conversion between dimensional and dimensionless units is done by simple multiplication by the reference values at the outer boundary.

Parameters of our global simulations

TABLE 6.2. – Overview of the global models. All simulations use $Pm = 16$ and insulating magnetic boundary conditions. The $(n_r, n_\theta, n_\phi) = (257, 512, 1024)$ resolution is called "Medium" and the $(n_r, n_\theta, n_\phi) = (385, 768, 1536)$ resolution is called "High". Ra corresponds to the Rayleigh number, Pr to the thermal Prandtl number, B_o to the initial magnetic field strength at the outer boundary. Magnetic field and dipole field strengths are time and space averaged. P_{sim} corresponds to the estimated period of the mean-field dynamo patterns, k_z to the vertical wavenumber and $q\Omega$ to the value in the turbulent region. k_z, $q\Omega$ and the alpha component $\alpha_{\phi\phi}$ are used to compute the theoretical $\alpha\Omega$ period $P_{\alpha\Omega}$.

Name	Resolution	Ra	Pr	B_o	Magnetic field	Dipole	P_{sim}	k_z	$q\Omega$	$\alpha_{\phi\phi}$	P
Units	-	-	-	[10^{14} G]	[10^{14} G]	[10^{14} G]	[ms]	[cm^{-1}]	[rad s^{-1}]	[cm s^{-1}]	[ms]
`Standard`	Medium	4.73e5	0.005	1.5	1.40	0.063	410	2.79e-6	447	4.1e5	393
`High Res`	High	4.73e5	0.005	3.3	1.36	0.053	386	2.79e-6	480	6e5	313
`Incompressible`	High	0.0	-	1.5	2.36	0.085	NO	-	-	-	-
`Boussinesq`	High	4.73e5	0.005	1.5	1.85	0.0548	NO	-	-	-	
`Anel Ra0`	Medium	0.0	0.005	1.5	1.41	0.051	430	2.79e-6	487	3.7e5	396
`Anel Pr0 02`	Medium	1.892e6	0.02	1.5	1.59	0.074	418	2.79e-6	560	3.4e5	385
`Anel Pr0 1`	Medium	9.46e6	0.1	1.5	1.36	0.062	512	5.1e-6	726	7.0e4	551

Correlation coefficients between the EMF and the magnetic field

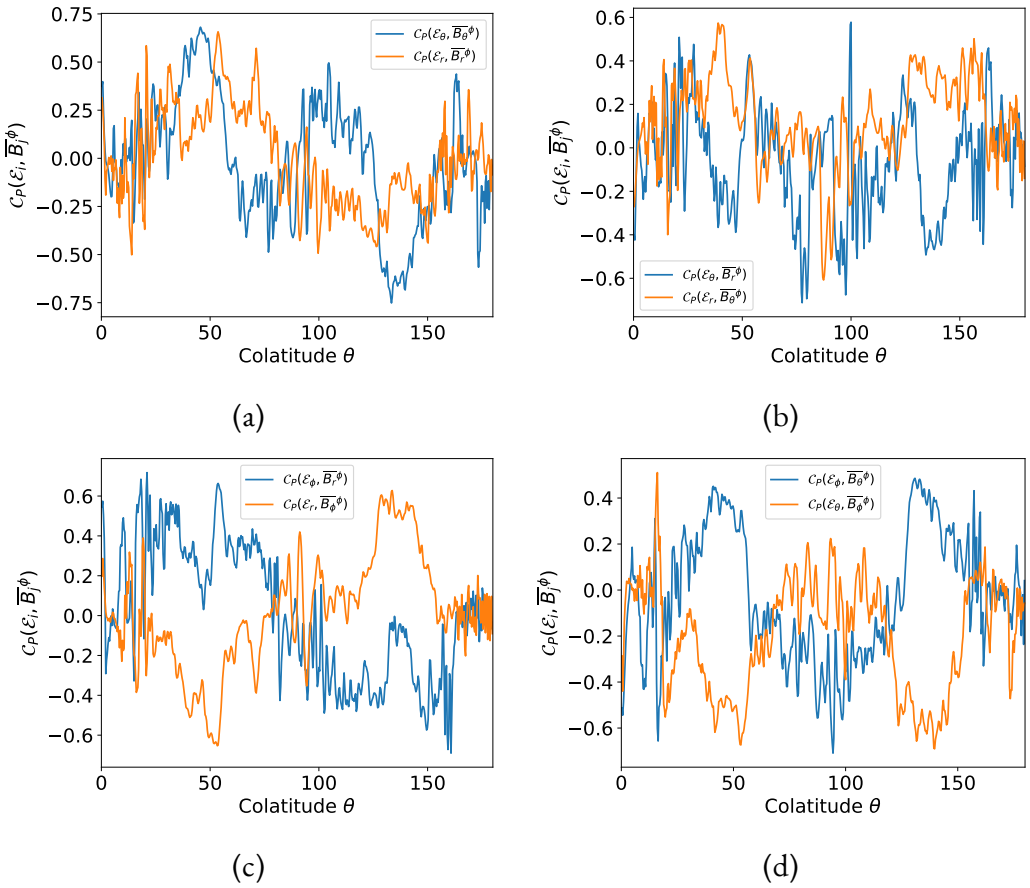


FIGURE 6.21. – Time averaged values of the correlation coefficient between the EMF and the magnetic field taken at $r = 0.86 r_o$.

Estimation of the components of the α tensor

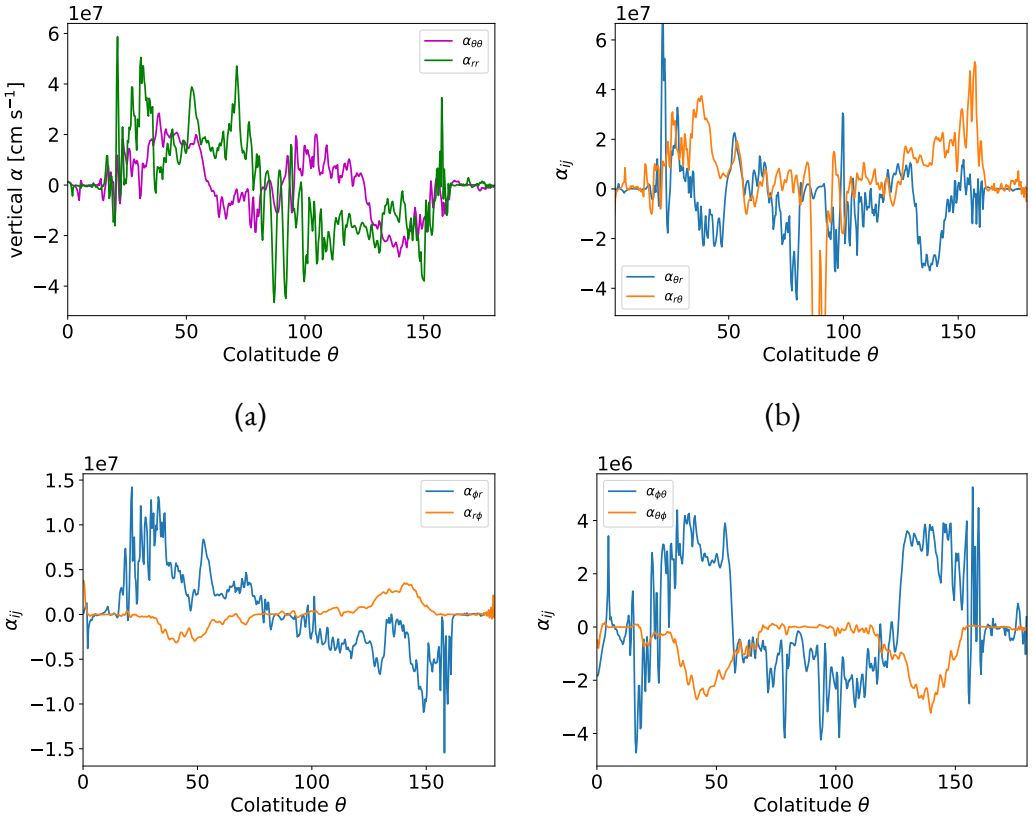


FIGURE 6.22. – Time averaged values of the α tensor components estimated by the correlation between the EMF and the magnetic field taken at $r = 0.86 r_o$.

Conclusion

Cette thèse a pour ambition d'apporter une compréhension de l'amplification du champ magnétique à l'œuvre dans les supernovae gravitationnelles. Elle revêt une grande importance autant pour expliquer les propriétés des supernovae extrêmes que pour fournir une référence pour la modélisation du champ magnétique des magnétars. Afin d'étudier la MRI dans une proto-étoile à neutrons de façon aussi détaillée que possible, nous avons utilisé des modèles simplifiés dans lesquels les différents ingrédients physiques ont été ajoutés un à un. Nous nous sommes servis d'outils numériques, en comparant des simulations locales et globales et ces deux types de simulations se sont révélés très complémentaires.

Au chapitre 5, nous avons étudié un modèle incompressible sphérique, qui a donné les résultats suivants :

— Lorsque le champ magnétique initial est supérieur à une valeur critique $B_c \simeq 5 \times 10^{14}$ G, une dynamo indépendante des conditions initiales est générée par la MRI. Une dynamo auto-entretenue est plus difficile à obtenir lorsque la résistivité est plus grande, avec un nombre de Prandtl plus petit que $Pm \leq 16$. Dans une simulation globale typique, le champ magnétique turbulent de l'état quasi-stationnaire est de l'ordre de $B \geq 2 \times 10^{15}$ G, avec un champ toroïdal deux fois plus intense que le champ poloïdal. Un dipôle non dominant est généré par la MRI et représente environ 5% du champ magnétique total. Il est intéressant de noter que ce dipôle est orienté d'un angle $\theta_{\text{dip}} \simeq 80°$ par rapport à l'axe de rotation, et est donc principalement équatorial.

— Notre étude paramétrique a permis de montrer que l'amplification du champ magnétique et du dipôle est indépendante des conditions initiales et des conditions aux limites magnétiques. Sous ces approximations, la MRI est capable de générer un dipôle à partir d'un champ magnétique à petite échelle jusqu'à des intensités de l'ordre des magnétars.

— Nous avons cherché à comparer nos résultats globaux à des simulations locales car cette étude était la première à décrire la géométrie sphérique en 3D d'une PNS. Nous avons donc comparé les propriétés de la turbulence dans les simulations locales aux simulations globales. Bien que la turbulence soit plus vigoureuse dans les simulations locales, les modèles locaux reproduisent bien les caractéristiques de la turbulence globale de la MRI, particulièrement les spectres d'énergie cinétique et magnétique. Notre interprétation de ces résultats est que les grandes boites permettent à des structures plus allongées de se développer sans la contrainte de la courbure du modèle global.

— Suite à ces comparaisons, nous avons effectué des simulations locales pour étudier le régime des hauts Pm et avons montré que le champ magnétique augmente avec Pm avant d'atteindre un plateau pour $Pm > 100$. De façon intéressante, le champ magnétique à grande échelle a la même dépendance en Pm que le champ magnétique turbulent, ce qui rend possible l'extrapolation des valeurs du modèle global.

Au chapitre 6, nous avons étudié un modèle anélastique sphérique, incluant un profil de densité et de gradient d'entropie, qui a donné les résultats suivants :

— Une dynamo auto-entretenue est générée par la MRI dans nos simulations et celle-ci vérifie la majorité des résultats incompressibles. On constate que la dynamo est dominée par un champ turbulent $B \geq 10^{14}$ G et qu'un dipôle équatorial sous-dominant représentant $4.3\,\%$ du champ magnétique est également généré. Bien que l'intensité semble plus faible que pour la précédente étude incompressible, le champ magnétique adimensionné par la densité et la vitesse caractéristique du système est plus intense.
— De plus, des oscillations temporelles du champ magnétique moyen sont présentes dans les simulations anélastiques. La fréquence de ces oscillations correspond à une dynamo $\alpha\Omega$, dont l'effet α est correctement estimé par sa valeur théorique à partir de l'hélicité cinétique locale. Ces résultats confirment que la MRI est donc capable de générer un champ magnétique à grande échelle dans un modèle réaliste de PNS.
— Pour déterminer l'influence de la stratification thermique, les simulations anélastiques ont été comparées avec des simulations Boussinesq. Cette comparaison montre deux effets : le gradient de densité favorise la présence d'une dynamo de champ moyen et il affecte la distribution spatiale de la turbulence puisque celle-ci est située principalement dans les régions de faible densité des modèles anélastiques.
— L'influence du gradient d'entropie a été déterminée par des comparaisons avec des modèles sans poussée d'Archimède. Due à la forte diffusion thermique des neutrinos, celle-ci affecte peu les régions en dehors du plan équatorial mais limite la turbulence dans ce plan pour les modèles anélastiques. Lorsque la diffusion thermique est diminuée, les perturbations de la vitesse radiale sont réduites en taille et en amplitude par la poussée d'Archimède, ce qui réduit la turbulence de la MRI.

Perspectives

Les travaux menés durant ces trois (courtes) années de thèse ont amené des éléments de réponses, mais ceux-ci ainsi que leurs limitations soulèvent de nouvelles questions intéressantes. Ils ont ainsi ouvert de nombreuses perspectives complémentaires qu'il serait intéressant d'étudier.

Régime des hauts nombres de Prandtl magnétiques

Une limitation des travaux de cette thèse est le régime de Prandtl magnétique Pm atteignable dans les simulations numériques globales, dans lesquelles il est égal à $Pm = 16$. L'étude locale, qui fait l'objet d'un article en préparation, permet d'atteindre des nombres de Prandtl élevés de l'ordre de 200, plus proches des valeurs réalistes de $Pm = 10^{13}$. Les résultats de l'étude locale suggèrent que la turbulence liée à la MRI ne dépende plus de Pm à partir d'un Pm plus grand que $Pm \simeq 100 - 200$. L'analyse des données de ces simulations pourrait permettre de développer une meilleure compréhension de l'effet dynamo dans ce régime à haut Pm. Avec cette compréhension, la comparaison des simulations locales et globales effectuée dans le chapitre 5 permettrait d'extrapoler les valeurs d'intensité du champ magnétique pour des Pm réalistes. Il faut toutefois noter que cette comparaison doit être confirmée pour les modèles anélastiques. En effet, les résultats de ces simulations pourraient être changés par une plus faible diffusivité magnétique, qui pourrait par exemple rendre possible le développement de la MRI dans les régions de plus forte densité. En redimensionnant par la densité la plus élevée du modèle anélastique, le champ magnétique pourrait potentiellement être amplifié par un facteur ~ 8.

Dans l'ensemble, les valeurs quantitatives explicitées dans cette thèse peuvent être vues comme des bornes inférieures du champ magnétique de la PNS et peuvent être plus élevées d'un facteur ~ 2.5. Avec une telle extrapolation, le dipôle $B_{\rm dip}$ généré dans nos simulations peut atteindre $B_{\rm dip} \simeq 10^{15}$ G pour le modèle incompressible et $B_{\rm dip} \simeq 1.5 \times 10^{14}$ G après la contraction de la PNS en une étoile à neutrons de 12 km. Ces valeurs correspondent à l'ordre de grandeur du champ magnétique observé des magnétars galactiques et confirment que la MRI est un mécanisme capable d'expliquer la formation des magnétars en présence de rotation rapide.

Interaction avec une dynamo convective

Le rapport de forme du domaine de simulation semble avoir une influence sur la génération du dipôle et des grandes échelles. En effet, le ratio de l'intensité du champ dipolaire sur celle du champ moyen est différent entre les modèles Boussinesq du chapitre 6 adaptés à la géométrie de la zone stable et les modèles incompressibles du chapitre 5, dont le rapport de forme est plus grand. Cette différence implique que l'amplification du champ magnétique doit être étudiée dans un modèle de PNS comprenant sa géométrie et sa structure complète. Ainsi, ce modèle devrait décrire la zone stablement stratifiée et la zone convective de la PNS dans laquelle peut se développer une dynamo qui génère des champs magnétiques encore plus intenses que ceux générés par la MRI (Raynaud et al., 2020). La difficulté numérique de ces modèles est de décrire fidèlement l'interface entre la zone convective et la zone stablement stratifiée. La question de l'interaction d'une dynamo convective avec la dynamo générée par la MRI est particulièrement importante puisque le champ magnétique qui peut influencer la dynamique de l'explosion est le champ à la surface. L'influence des champs magnétiques générés par la dynamo convective, enfouis sous la zone stablement stratifiée, est donc incertaine.

Évolution temporelle de la proto-étoile à neutrons

Les modèles présentés dans cette thèse utilisent des approximations dont certaines hypothèses ne sont que faiblement justifiées d'un point de vue physique. Bien que le modèle anélastique permet de prendre en compte une description réaliste d'une proto-étoile à neutrons, les profils de l'état thermodynamique ne peuvent pas évoluer avec le temps, ce qui constitue la limite principale de nos modèles. En effet, les simulations ont une durée d'environ 1 s au cours de laquelle la PNS passe d'un rayon de 40 km à un rayon de 20 km avec une diminution de la zone stablement stratifiée. Pour modéliser l'évolution temporelle de la PNS, une méthode serait de coupler les simulations anélastiques à un code 1D de supernova. Ce dernier permettrait de faire évoluer temporellement l'état de référence de l'approximation anélastique et le code MHD résoudrait les équations anélastiques.

Une autre méthode consisterait à utiliser un code de supernova décrivant la majorité de la physique (neutrinos, gravité auto-consistente, magnétohydrodynamique, etc.) pour développer un modèle semi-réaliste se concentrant uniquement sur la PNS. De telles simulations avec une résolution suffisante pour résoudre la MRI seraient coûteuses, mais la comparaison de ces simulations avec celles anélastiques permettrait de mieux comprendre les conséquences des hypothèses de l'approximation anélastique.

Relaxation du champ magnétique vers un état d'équilibre

L'intensité du dipôle dans nos simulations correspond à celle inférée par les observations des magnétars. D'autres observations peuvent être également comparées. L'interprétation d'une raie d'absorption comme une ligne cyclotron pour deux magnétars galactiques SGR 0418+5729 (Tiengo et al., 2013) et J1822.3-16066 (Rodríguez Castillo et al., 2016), fournit ainsi deux estimations du champ magnétique moyen. Pour ces magnétars, les ratios de l'intensité du dipôle sur celle du champ magnétique sont respectivement de l'ordre de $B_{\mathrm{dip}}/B \simeq 0.0012 - 0.024$ et $B_{\mathrm{dip}}/B \simeq 0.01 - 0.05$, ce qui est plutôt en accord avec nos résultats de $B_{\mathrm{dip}}/B \simeq 0.04 - 0.05$. Un champ magnétique toroïdal plus intense que le dipôle est également suggéré par la détection de modulations dans les émissions en rayons X de deux magnétars (Makishima et al., 2016, 2019), ce qui concorde avec le champ principalement toroïdal généré par la MRI.

Toutefois, pour effectuer une meilleure comparaison aux observations, le champ magnétique doit être relaxé vers un état d'équilibre dans la proto-étoile à neutrons. En effet, pour expliquer les observations des magnétars, le champ magnétique doit survivre à des durées bien plus longues que la durée de nos simulations, de quelques semaines pour une supernova superlumineuse à plusieurs milliers d'années pour les répéteurs de sursauts gamma mous. Ainsi le champ turbulent doit être évolué vers un état d'équilibre sans rotation différentielle, puisque la contraction de la PNS est de l'ordre de quelques secondes. Par exemple, le dipôle axial peut évoluer vers un dipôle équatorial stable sous les effets de dissipation interne et de dissipation dans la magnétosphère (Lander et D. I. Jones, 2018). Lander et al. (2021) montre également que la réduction du

champ magnétique à ses grandes échelles provoque des erreurs conséquentes pour le calcul de l'équilibre. Cela pointe l'importance d'obtenir des configurations de champ magnétique réaliste pour les différentes dynamos dans une proto-étoile à neutrons.

Deux étapes sont également à prendre en compte pour la relaxation du champ magnétique : une première phase juste après la dynamo avec des conditions d'une proto-étoile à neutrons chaude et une seconde phase de refroidissement avec la formation d'une étoile à neutrons froide. Pour cette dernière, l'état d'équilibre doit également prendre en compte une structure d'étoile à neutrons froide avec la présence de diffusion ambipolaire dans son cœur et d'une croûte surfacique dans laquelle l'effet Hall peut être important.

Modélisation de l'amplification dans les modèles de supernova gravitationnelle

Le champ magnétique généré par la MRI est potentiellement assez intense pour influencer la dynamique de l'effondrement du cœur de fer et lancer l'explosion. Toutefois, les modèles d'explosion magnétorotationnelle les plus avancés utilisent de manière quasi systématique un champ magnétique initial très intense avec une structure à grande échelle, le plus souvent un dipôle axial par souci de simplicité. On peut néanmoins noter que les études récentes, inspirées notamment par les résultats de nos modèles de dynamo, cherchent à déterminer la capacité à produire des explosions de géométries plus complexes que le dipôle (Bugli et al., 2020 ; Bugli et al., 2021). Le cas du dipôle équatorial étudié par Bugli et al. (2021) est particulièrement intéressant puisqu'il correspond au dipôle généré par la MRI dans nos simulations. Avec ce dipôle, l'explosion est moins énergétique qu'avec un dipôle axial mais toutefois plus énergétique que le cas hydrodynamique. Des différentes géométries magnétiques présentées dans cette étude, le dipôle équatorial est la seule dont l'explosion est plutôt sphérique, alors que l'axe de rotation est privilégiée pour les explosions avec le dipôle axial et autres multipôles. Les différences entre ces modèles d'explosions magnétorotationnelles témoignent de l'importance d'obtenir des configurations réalistes du champ magnétique pour la PNS.

Cependant, la résolution de ces simulations ne permet pas de capturer la dynamique de l'amplification du champ magnétique dans la PNS et ainsi avoir une connexion plus robuste entre les effets dynamos dans la PNS et l'explosion. Une solution possible est envisageable avec la présence d'une dynamo $\alpha\Omega$ dans nos simulations de la MRI : la modélisation de l'amplification du champ magnétique sous la forme d'un modèle sous-maille. En effet, la calibration de l'effet α sur nos simulations permettrait de prendre en compte la turbulence que les simulations d'explosion ne peuvent décrire, faute de résolution. L'influence d'une amplification in situ du champ magnétique sur l'explosion pourrait alors être étudiée.

Application au contexte des coalescences d'étoiles à neutrons

Les méthodes et modèles présentés dans cette thèse peuvent être également appliqués à un contexte astrophysique légèrement différent : les coalescences d'étoiles à neutrons. En effet, des conditions similaires de rotation différentielle et d'émission de neutrinos peuvent être trouvées dans l'objet central résultant de la coalescence (Guilet et al., 2017). Des études réalistes, supposant un dipôle initial (très) intense, ont montré que la MRI amplifiait le champ magnétique (Siegel et al., 2013 ; Kiuchi et al., 2018 ; Ciolfi et al., 2019 ; Mösta et al., 2020). L'étude de l'amplification du champ à partir d'un champ magnétique initial plus réaliste dans la coalescence d'étoiles à neutrons est particulièrement difficile puisque les conditions nécessitent un traitement fidèle de la relativité générale, des interactions de neutrinos, de l'équation d'état de la matière chaude et dense et de la magnétohydrodynamique. La comparaison avec des modèles idéalisés, similaires à ceux développés dans cette thèse, permettrait donc de mieux comprendre l'influence des différents ingrédients physiques ainsi que d'explorer des simulations plus longues pour une gamme de paramètres plus étendue. Ces comparaisons permettraient également de calibrer un modèle de dynamo $\alpha\Omega$ et de développer un modèle sous-maille pour améliorer le traitement du champ magnétique dans des simulations qui ne résolvent pas la MRI. Ces questions sont particulièrement importantes pour la coalescence d'étoiles à neutrons puisqu'un fort champ magnétique en présence de rotation rapide est un moteur central probable pour expliquer l'origine de sursauts gamma courts et des kilonovae (Metzger et al., 2018 ; Mösta et al., 2020). Un magnétar stable comme objet rémanent pourrait ainsi expliquer la grande luminosité du sursaut gamma court GRB200522A (Fong et al., 2021). En outre, les effets magnétohydrodynamiques sont potentiellement pertinents pour l'émission du signal gravitationnel après la fusion des étoiles à neutrons. L'étude de ces effets est importante pour savoir si les futurs observatoires d'ondes gravitationnelles seront capables de les détecter et apporter des contraintes sur le champ magnétique au cours de la coalescence.

Annexe A

Publication : A global model of the magnetorotational instability in protoneutron stars

A&A 645, A109 (2021)
https://doi.org/10.1051/0004-6361/202038369
© A. Reboul-Salze et al. 2021

Astronomy & Astrophysics

A global model of the magnetorotational instability in protoneutron stars

A. Reboul-Salze, J. Guilet, R. Raynaud, and M. Bugli

Laboratoire AIM, CEA/DRF-CNRS-Université Paris Diderot, IRFU/Département d'Astrophysique, CEA-Saclay 91191, France
e-mail: alexis.reboul-salze@cea.fr

Received 7 May 2020 / Accepted 18 October 2020

ABSTRACT

Context. Magnetars are isolated neutron stars characterized by their variable high-energy emission, which is powered by the dissipation of enormous internal magnetic fields. The measured spin-down of magnetars constrains the magnetic dipole to be in the range of $10^{14}-10^{15}$ G. The magnetorotational instability (MRI) is considered to be a promising mechanism to amplify the magnetic field in fast-rotating protoneutron stars and form magnetars. This scenario is supported by many local studies that have shown that magnetic fields could be amplified by the MRI on small scales. However, the efficiency of the MRI at generating a dipole field is still unknown.
Aims. To answer this question, we study the MRI dynamo in an idealized global model of a fast rotating protoneutron star with differential rotation.
Methods. Using the pseudo-spectral code MagIC, we performed three-dimensional incompressible magnetohydrodynamics simulations in spherical geometry with explicit diffusivities where the differential rotation is forced at the outer boundary. We performed a parameter study in which we varied the initial magnetic field and investigated different magnetic boundary conditions. These simulations were compared to local shearing box simulations performed with the code Snoopy.
Results. We obtain a self-sustained turbulent MRI-driven dynamo, whose saturated state is independent of the initial magnetic field. The MRI generates a strong turbulent magnetic field of $B \geq 2\times10^{15}$ G and a nondominant magnetic dipole, which represents systematically about 5% of the averaged magnetic field strength. Interestingly, this dipole is tilted toward the equatorial plane. By comparing these results with shearing box simulations, we find that local models can reproduce fairly well several characteristics of global MRI turbulence such as the kinetic and magnetic spectra. The turbulence is nonetheless more vigorous in the local models than in the global ones. Moreover, overly large boxes allow for elongated structures to develop without any realistic curvature constraint, which may explain why these models tend to overestimate the field amplification.
Conclusions. Overall, our results support the ability of the MRI to form magnetar-like large-scale magnetic fields. They furthermore predict the presence of a stronger small-scale magnetic field. The resulting magnetic field could be important to power outstanding stellar explosions, such as superluminous supernovae and gamma-ray bursts.

Key words. stars: magnetars – supernovae: general – dynamo – gamma-ray burst: general – magnetohydrodynamics (MHD) – methods: numerical

1. Introduction

Magnetars are a class of young and highly magnetized neutron stars that produce a wide variety of outstanding emission at X-ray or soft γ-ray energies (Kouveliotou et al. 1998; Kaspi & Beloborodov 2017, and references therein). The period and the spin-down of these objects are measured by the long time follow-up of their pulsed X-ray activity, and a surface dipolar magnetic field of $B_{\rm dip} = 10^{14}\left(\frac{P}{5\,\rm s}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\dot{P}}{10^{-11}\,\rm s\,s^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$ G $\simeq 10^{14}-10^{15}$ G can be inferred under the assumption of magnetic dipole spin-down (Olausen & Kaspi 2014)[1]. Their activity can be explained by the decay of their ultrastrong magnetic field and also includes short bursts (Götz et al. 2006), large outbursts (Coti Zelati et al. 2018), giant flares (Hurley et al. 2005), and quasi-periodic oscillations (Israel et al. 2005). Absorption lines are also been detected in outbursts for two objects and interpreted as proton cyclotron lines (Tiengo et al. 2013; Rodríguez Castillo et al. 2016). This suggests the presence of a strong non-dipolar surface field, whereas a weaker dipolar component is derived from the timing parameters of these objects.

Magnetic fields, especially in the presence of fast rotation, could play an important role in the dynamics of core-collapse supernovae and have garnered considerable interest in the last decade. Indeed, a strong magnetic field would efficiently extract the large rotational energy of a protoneutron star (PNS) rotating with a period of a few milliseconds. The presence of a magnetic field can impact the explosion by converting the energy of differential rotation into thermal energy (Thompson et al. 2005) and/or into a large-scale magnetic field, which can launch jets and lead to a magnetorotational explosion (Moiseenko et al. 2006; Shibata et al. 2006; Dessart et al. 2008; Winteler et al. 2012; Mösta et al. 2014; Obergaulinger et al. 2018; Bugli et al. 2020; Kuroda et al. 2020). Moreover, a millisecond proto-magnetar is a potential central engine for long gamma-ray bursts (Duncan & Thompson 1992; Metzger et al. 2011, 2018) associated with "hypernovae" or supernovae type Ic Broad Lined (Drout et al. 2011). These rare events are characterized by a kinetic energy ten times higher than that of standard supernovae. Furthermore, millisecond magnetars have been invoked to explain some superluminous supernovae through a

[1] http://www.physics.mcgill.ca/~pulsar/magnetar/main.html

Open Access article, published by EDP Sciences, under the terms of the Creative Commons Attribution License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

delayed energy injection due to the dipole spin-down luminosity (Nicholl et al. 2013; Inserra et al. 2013; Margalit et al. 2018). Millisecond magnetars may also be formed in binary neutron star mergers. This can provide a natural explanation for the extended emission and the plateau phase in X-ray sources associated with a fraction of short gamma-ray bursts (Metzger et al. 2008; Bucciantini et al. 2012; Rowlinson et al. 2013; Gompertz et al. 2014). An X-ray transient has also recently been detected and interpreted as the formation of a magnetar in the aftermath of a binary neutron-star merger (Xue et al. 2019).

Several scenarios have been invoked to explain the origin of the magnetic field in magnetars. It may stem from the field of the progenitor amplified by magnetic flux conservation. This scenario can lead to the strongest magnetic fields in the case of highly magnetized progenitors that could be formed in stellar mergers (Schneider et al. 2019), although it may not explain the formation of millisecond magnetars since highly magnetized progenitors are slow rotators (Spruit 2008; Shultz et al. 2018). An alternative process is an in situ magnetic field amplification by a turbulent dynamo in the PNS, either by a convective dynamo (Thompson & Duncan 1993; Raynaud et al. 2020) or the magnetorotational instability (MRI, see Akiyama et al. 2003; Obergaulinger et al. 2009).

The first local analytical study of the MRI in the context of Keplerian accretion disks by Balbus & Hawley (1991) showed that in presence of differential rotation small seed perturbations are amplified exponentially with time. The first local simulations by Hawley & Balbus (1992) showed that the turbulent velocity and magnetic field reach a statistically stationary state. In ideal magnetohydrodynamics (MHD) and with an initial vertical uniform magnetic field, the growth rate of the instability is on the order of the rotation rate Ω. In this case, the wavelength of the fastest growing mode is proportional to the magnetic field intensity. Therefore, the weaker the magnetic field, the shorter the MRI wavelength and the more difficult it becomes to resolve in a global model. This instability has thus widely been studied in the local approximation, either analytically or by using "shearing box" simulations representing a part of the accretion disk. The linear growth of the MRI has been studied with thermal stratification (entropy and composition gradient) and with diffusion processes (viscosity and resistivity; Balbus 1995; Menou et al. 2004; Pessah & Chan 2008).

Core-collapse supernova simulations show a strong differential rotation in the PNS (Akiyama et al. 2003; Ott et al. 2006). Numerical models in the context of supernovae have shown that the MRI can grow on shorter timescales than the successful explosion time and that an efficient amplification of the magnetic field occurs at small scales (Obergaulinger et al. 2009; Guilet & Müller 2015; Rembiasz et al. 2016). The influence of the specific physical conditions of PNSs were studied in these local models. First, the pressure gradient rather than the centrifugal force balances gravity, which can lead to a non-Keplerian rotation profile. In the case of a steeper rotation profile, a stronger MRI turbulence develops in shearing box simulations (Masada et al. 2012). Secondly, due to the high density inside the PNS, neutrinos are in the diffusive regime and their transport of momentum can be described with a high viscosity, which can limit the growth of the MRI if the initial magnetic field is too low (Guilet et al. 2015). Finally, the buoyancy forces driven by the entropy and lepton fraction can reduce the MRI turbulence in the case of stable stratification (Guilet & Müller 2015).

The impact of the spherical geometry of the full PNS on the MRI turbulence and the ability of the MRI to generate a large-scale field, similar to the inferred magnetic field of magnetars, is still unknown. The first attempts to address this question rely on semi-global models that include radial gradients of density and entropy (Obergaulinger et al. 2009; Masada et al. 2015). However, these models remain local at least vertically and therefore cannot investigate the generation of a large-scale magnetic field. Global axisymmetric simulations of the MRI also show magnetic field amplification (Sawai et al. 2013; Sawai & Yamada 2016). Mösta et al. (2015) performed the first simulations describing a quarter of the PNS with a high enough resolution to resolve the MRI wavelength and showed the development of the MRI turbulence. The model was, however, started with an initial magnetic dipole and therefore did not demonstrate the generation of a magnetar-like magnetic dipole.

This paper studies for the first time the global properties of the MRI in a full 3D spherical model, where no initial large-scale magnetic field is assumed. To resolve the MRI wavelength with a reasonable resolution, we use a sufficiently strong initial magnetic field. However, only the small scales are initialized in order to study the generation of the magnetic dipole. This intense and small-scale magnetic field can be interpreted as the result of the first amplification described in local models. With respect to previous studies, a different approach is also used for the physical setup, which is reduced to its most fundamental ingredients. This has the advantage of providing a useful reference for our physical understanding, while at the same time drastically reducing the computational cost and enabling long simulation times and the exploration of the parameter space.

The paper is organized as follows. In Sect. 2, we describe the physical and numerical setup. The results are then presented in Sect. 3 for the saturated nonlinear phase of the MRI, and in Sect. 4 for the comparison of our global model to local models of the MRI. Finally, we discuss the validity of our assumptions in Sect. 5 and draw our conclusions in Sect. 6.

2. Numerical setup

2.1. Governing equations

The simulations performed in this article are designed to represent a fast rotating PNS. We assume that the hot PNS has a mass of $1.3\,M_\odot$ and a radius of $r_\mathrm{o} = 25\,\mathrm{km}$. As the PNS is in solid body rotation for a radius $r \leq 10\,\mathrm{km}$ (see Sect. 2.3 for the assumed rotation profile), the inner core of the PNS is stable to the MRI and it can be excluded from the simulation domain. We chose an inner core with a radius $r_\mathrm{i} = 6.25\,\mathrm{km}$. The shell gap $D \equiv r_\mathrm{o} - r_\mathrm{i} = 18.75\,\mathrm{km}$ is the characteristic length of the simulation domain. In our model, we assume that neutrinos are in the diffusive regime such that their effects on the dynamics can be appropriately described by a viscosity ν (Guilet et al. 2015). The incompressible approximation is used for the sake of simplicity. We assume a uniform density $\rho_0 = 4 \times 10^{13}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ and neglect buoyancy effects. The diffusive incompressible MHD equations describing the dynamics of the PNS in a rotating frame at an angular frequency $\Omega_0 = 1000\,\mathrm{s^{-1}}$ read

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} p' - 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{u} + \frac{1}{\mu_0 \rho_0}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} + \nu\Delta\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B} - \eta\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0, \tag{4}$$

where $\boldsymbol{u}$ is the flow velocity, $\boldsymbol{B}$ the magnetic field, η the magnetic diffusivity, p' the reduced pressure (i.e., the pressure normalized by the density) and μ_0 the vacuum permeability.

2.2. Numerical methods

In order to solve the incompressible MHD system of Eqs. (1)–(4), we used the pseudo-spectral code MagIC (Wicht 2002; Gastine & Wicht 2012; Schaeffer 2013)[2]. MagIC solves the 3D MHD equations in a spherical shell using a poloidal-toroidal decomposition for the velocity and the magnetic field,

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times (W \boldsymbol{e}_\mathrm{r}) + \boldsymbol{\nabla} \times (Z \boldsymbol{e}_\mathrm{r}), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times (b \boldsymbol{e}_\mathrm{r}) + \boldsymbol{\nabla} \times \left(a_j \boldsymbol{e}_\mathrm{r}\right), \tag{6}$$

where W and Z are respectively the poloidal and toroidal kinetic scalar potentials, while b and a_j are the magnetic ones. The scalar potentials and the reduced pressure p' are decomposed on spherical harmonics for the colatitude θ and the longitude ϕ angles, together with Chebyshev polynomials in the radial direction. The time stepping scheme is a mixed implicit-explicit scheme: A Crank-Nicolson scheme is used to advance the linear terms and a second order Adams-Bashforth scheme to advance the nonlinear terms and the Coriolis force. The linear terms are computed in the spectral space, while the nonlinear terms and the Coriolis force are computed in the physical space and transformed back to the spectral space. For more detailed descriptions of the numerical method and the associated spectral transforms, the reader is referred to Gilman & Glatzmaier (1981), Tilgner & Busse (1997), and Christensen & Wicht (2015).

All the simulations presented in this paper were performed using a standard grid resolution of $(n_\mathrm{r}, n_\theta, n_\phi) = (257, 512, 1024)$. The resolution was chosen to ensure that the dissipation scales are resolved. Indeed, the maxima of viscous and resistive dissipation are respectively at the spherical harmonic orders $l_\nu \simeq 40$ and $l_\eta \simeq 85$, which means that around ten cells resolve the resistive maximum.

2.3. Initial conditions

Many core-collapse simulations with a fast rotating progenitor have shown that the PNS is differentially rotating for several hundreds of milliseconds (e.g, Akiyama et al. 2003; Ott et al. 2006; Obergaulinger et al. 2018; Bugli et al. 2020). The contraction of the PNS and accretion on the PNS accelerates it while the angular momentum is transported outside the PNS by the MRI. However, it would not be possible to sustain a differentially rotating profile within an isolated shell of the PNS and in presence of strong magnetic fields, unless some forcing mechanism were to be applied at the boundaries. Therefore, in our simplified setup, we chose to artificially force the differential rotation by keeping the initial differential rotation profile at the outer boundary constant during the duration of the simulation. This leads to a quasi-stationary state that is simpler to study and to compare among different models. The internal rotation profile of this quasi-stationary state can evolve and is determined by the combined effects of the backreaction of the magnetic field and the rotational forcing.

As initial and outer boundary condition, we used a cylindrical rotation profile inspired by core-collapse simulations with a central part that rotates like a solid body and an outer part that is differentially rotating with a power law dependency:

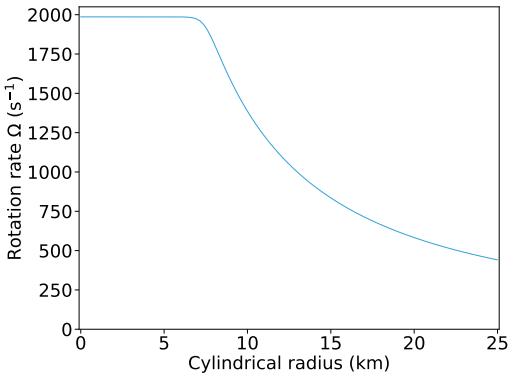


Fig. 1. Rotation profile inside the PNS as a function of the cylindrical radius. The inner region ($s < 10\,\mathrm{km}$) is in solid body rotation and the outer region ($s > 10\,\mathrm{km}$) follows a power law $\Omega \propto r^{-q_0}$ with $q_0 = 1.25$.

$$\Omega(s) = \frac{\Omega_\mathrm{i}}{\left(1 + \left(\frac{s}{0.4\,r_\mathrm{o}}\right)^{20 q_0}\right)^{0.05}}, \tag{7}$$

where s is the cylindrical radius, q_0 corresponds to the shear rate $q \equiv -\frac{r}{\Omega}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}$ in the outer part, and Ω_i is the rotation rate of the inner core. This rotation rate Ω_i was computed so that the ratio of total angular momentum over moment of inertia is equal to the frame rotation rate Ω_0 defined in Sect. 2.1. The profile shown in Fig. 1 with $q_0 = 1.25$ has a smooth transition between solid body rotation when $s < 0.4\,r_\mathrm{o}$ and power law differential rotation when $s > 0.4\,r_\mathrm{o}$.

Our model assumes a weak progenitor magnetic field and is designed to study in situ magnetic field amplification by the MRI, especially the large-scale field generation. Several local studies have already shown an efficient amplification of the magnetic field on small scales (e.g, Obergaulinger et al. 2009; Masada et al. 2015; Guilet & Müller 2015; Rembiasz et al. 2016). Therefore, the magnetic field may be initialized by small-scale modes with magnetic field strength high enough to resolve the MRI fastest growing mode. The initial poloidal magnetic potential is a random superposition of modes with spherical harmonics indices (l, m) and a radial profile of the form

$$b_{l,m} \propto \begin{cases} 0 & \text{for } r < 7.5\,\mathrm{km} \\ \cos(k_\mathrm{r}(r - r_\mathrm{i})) & \text{for } r > 12.5\,\mathrm{km} \end{cases}, \tag{8}$$

where k_r is the radial wavenumber and has a smooth transition between 7.5 km and 12.5 km. We selected Fourier radial modes and spherical harmonic modes, whose wavelengths $\lambda_\mathrm{r} = 2\pi/k_\mathrm{r}$ and $\lambda_\mathrm{l} = \sqrt{\frac{r^2}{l(l+1)}}$ lie within the range $[L_\mathrm{min}, L_\mathrm{max}]$. We note that this initial magnetic field has a vanishing net magnetic flux over the simulation domain. The amplitude of these modes is initialized randomly with a wavelength dependence that provides a flat energy spectrum. Figure 2 shows an example of the initial poloidal magnetic field on a ϕ-slice with a typical value of $[L_\mathrm{min}, L_\mathrm{max}] = [0.23\,r_\mathrm{o}, 0.38\,r_\mathrm{o}]$.

The initial root mean square magnetic field strength B_0 is varied from $B_0 = 6.31 \times 10^{14}\,\mathrm{G}$ to $B_0 = 3.36 \times 10^{15}\,\mathrm{G}$. The

[2] https://magic-sph.github.io

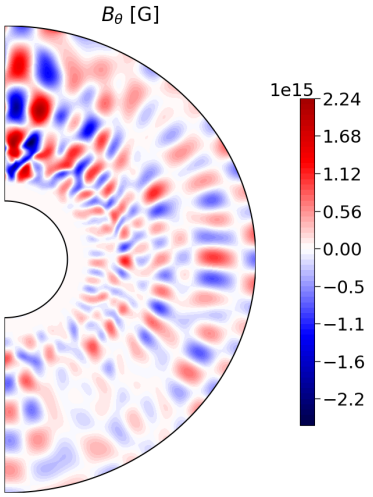


Fig. 2. Slice of the B_θ component of the initial magnetic field for the meridional plane $\phi = 0$ with $[L_{\rm min}, L_{\rm max}] = [0.23\,r_{\rm o}, 0.38\,r_{\rm o}]$ and $B_0 = 8.8 \times 10^{14}$ G.

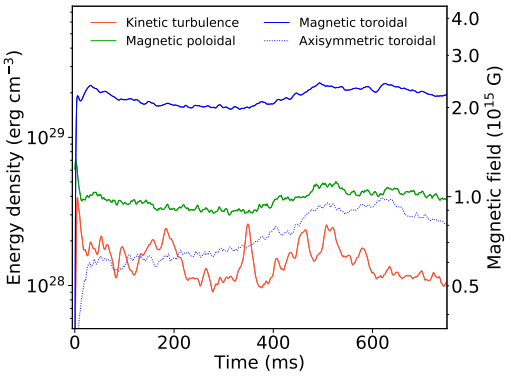


Fig. 3. Temporal evolution of the magnetic and turbulent kinetic energy density for the model `Standard` $B_0 = 8.8 \times 10^{14}$ G, $[L_{\rm min}, L_{\rm max}] = [0.23\,r_{\rm o}, 0.38\,r_{\rm o}]$. The blue and green lines are the toroidal and poloidal contributions of the magnetic energy density, while the orange line is the turbulent kinetic energy density (axisymmetric toroidal contribution is removed). The blue dotted line is the axisymmetric contribution to the toroidal magnetic energy density.

fastest growing mode of MRI in ideal MHD (Balbus & Hawley 1991) has a wavelength of

$$\lambda_{\rm MRI} = \frac{8\pi}{q_0(4-q_0)\Omega_0}\frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \tag{9}$$

It ranges from $\lambda_{\rm MRI} = 1.9\times10^5$ cm to $\lambda_{\rm MRI} = 1.0\times10^6$ cm and is well resolved with our resolution of $\Delta_{\rm r} \equiv D/N_{\rm r} = 7.32\times10^3$ cm.

2.4. Boundary conditions

We assumed non-penetrating boundary conditions ($u_{\rm r} = 0$). At the inner boundary, we used a standard no-slip condition with an inner core in solid body rotation at a rate $\Omega_{\rm i}$ that evolves with the viscous torque (i.e., $u_\phi = \Omega_{\rm i} r_{\rm i}$ and $u_\theta = 0$). At the outer boundary, we used a modified no-slip condition where we forced u_ϕ to match the initial rotation profile at all times (and $u_\theta = 0$). The outer boundary is therefore not in solid body rotation. For the magnetic field, we compared three different boundary conditions: pseudo-vacuum (imposing a radial field: $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{n} = 0$, where $\boldsymbol{n}$ is the normal vector of the outer surface), perfect conductor (imposing a tangential field: $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n} = 0$), and insulating (matching a potential field outside the domain).

2.5. Physical parameters and dimensionless numbers

We chose the physical parameters of the simulations to represent a fast rotating PNS model similar to the study of Guilet et al. (2015). All of our models have a uniform viscosity of $\nu = 7.03\times10^{11}$ cm s^{-2}. Given the values for the viscosity, the rotation rate Ω_0 and the characteristic length D (Sect. 2.1), the dimensionless Ekman number (characterizing the importance of viscosity over Coriolis force) is

$$E \equiv \frac{\nu}{\Omega_0 D^2} = 2\times10^{-4}. \tag{10}$$

For a PNS, the viscosity is large due to the impact of neutrinos while the resistivity is very small, which leads to a high magnetic Prandtl number $P_{\rm m} \equiv \nu/\eta$. A realistic value of the magnetic Prandtl number for a PNS is $P_{\rm m} \approx 10^{13}$ according to Thompson & Duncan (1993) and Masada et al. (2007). However, numerical simulations for these values of $P_{\rm m}$ are not possible due to numerical constraints. We varied the resistivity from $\eta = 4.39\times10^{10}$ cm s^{-1} to $\eta = 1.66\times10^{11}$ cm s^{-1}, which corresponds to magnetic Prandtl numbers in the range $P_{\rm m} \in [4, 8, 16]$. Our standard value $P_{\rm m} = 16$ is a compromise between the wish to be in the high magnetic Prandtl regime and the computing time constraints. The corresponding magnetic Reynolds number that characterizes the relative importance of magnetic advection to magnetic diffusion (resistivity) is

$$R_{\rm m} \equiv \frac{D^2\,\Omega_0}{\eta} \in \left[2\times10^4,\, 4\times10^4,\, 8\times10^4\right]. \tag{11}$$

3. Results

3.1. Typical quasi-stationary dynamos

We first describe the results from one fiducial simulation where we obtain a self-sustained dynamo. For the model `Standard` (see Table A.1), we applied insulating boundary conditions and initialized the magnetic field with the parameters $B_0 = 8.8\times10^{14}$ G and $[L_{\rm min}, L_{\rm max}] = [0.23\,r_{\rm o}, 0.38\,r_{\rm o}]$ (see Sect. 2.3).

Figure 3 shows the temporal evolution of the volume-averaged toroidal and poloidal magnetic energy densities and the turbulent kinetic energy density. In order to separate the MRI-driven turbulent flow from the differential rotation, the turbulent kinetic energy density is computed by subtracting the contribution of the axisymmetric azimuthal velocity from the averaged kinetic energy density. After approximately 400 ms, we obtain a statistically stationary state with a mean magnetic field intensity $B = 2.5\times10^{15}$ G. The main contribution is from the toroidal magnetic field, which is ∼2 times larger than the poloidal magnetic field. The magnetic field is predominantly nonaxisymmetric, the axisymmetric magnetic field being ∼3 times weaker than the total magnetic field. The averaged magnetic energy density is more than ten times stronger than the turbulent kinetic energy

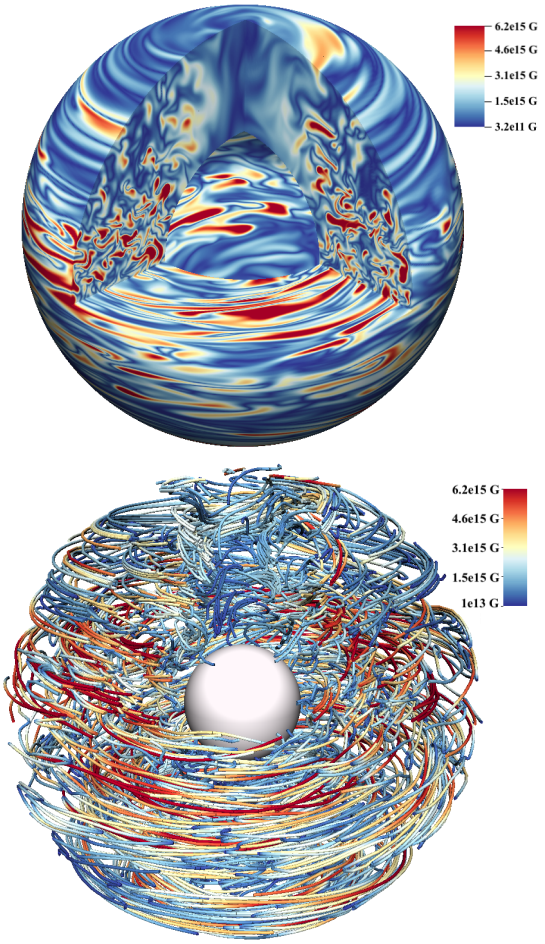


Fig. 4. *Top*: 3D snapshot of the intensity of the magnetic field at t = 600 ms for model `Standard`. The colors represent the magnetic field amplitude from weak (blue) to strong (red). *Bottom*: 3D snapshot of the magnetic field lines at t = 600 ms for the model `Standard`. The colors represent the magnetic field amplitude.

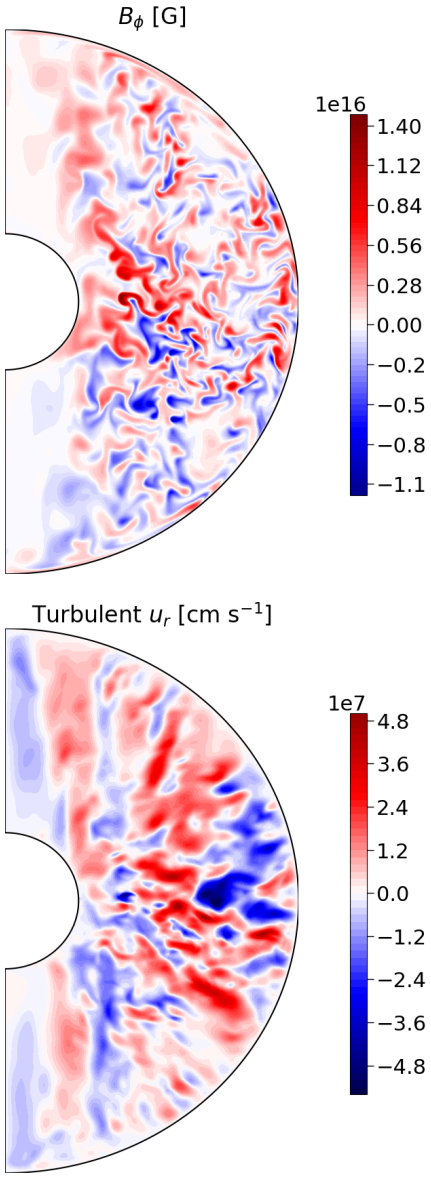


Fig. 5. Slices for $\phi = 0$ and t = 600 ms for the model `Standard`. *Top*: azimuthal magnetic field B_ϕ. *Bottom*: turbulent radial velocity u_r (i.e., the axisymmetric contribution is subtracted from the radial velocity).

density. A similar ratio is observed in local models of MRI-driven turbulence (see Sect. 4.3).

Figures 4 and 5 are representative snapshots of the quasi-stationary state and illustrate the complex geometry of the magnetic field due to MRI-driven turbulence. As is common in this turbulence, the winding of the magnetic field by the shear produces elongated structures in the azimuthal direction, which are clearly seen in the equatorial plane (Fig. 4). On the meridional cuts, the magnetic field is distributed on smaller scales. The turbulent structure of the magnetic field has lost memory of the initial magnetic configuration. Near the rotation axis, the magnetic field is not very intense and the MRI-driven turbulence is weaker for cylindrical radii smaller than $s_{\rm turb} \approx 9.4$ km. In the most turbulent zone, the turbulent radial velocity field has similar small-scale structures, while weak large-scale flows develop near the rotation axis (bottom panel of Fig. 5). The weak magnetic field and the non-turbulent flow near the rotation axis are expected because the vertically averaged shear rate of the simulation is small for $s \leq 9$ km and the inner part of the radial profile rotates as a solid body (blue line in Fig. 6).

To understand how the magnetic and kinetic energies are distributed over different scales, we computed the axisymmetric and nonaxisymmetric components of the toroidal and poloidal spectra (Fig. 7). To first order, the nonaxisymmetric toroidal

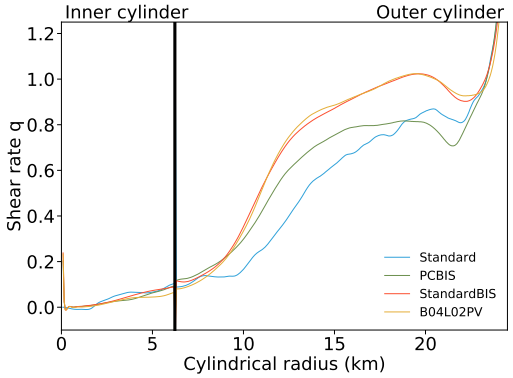


Fig. 6. Comparison of the vertically and azimuthally averaged shear rate q inside the PNS for different MHD simulations as a function of the cylindrical radius. The values are time-averaged in the quasi-stationary phase of the dynamo. The black line represents the radius of the inner core r_i.

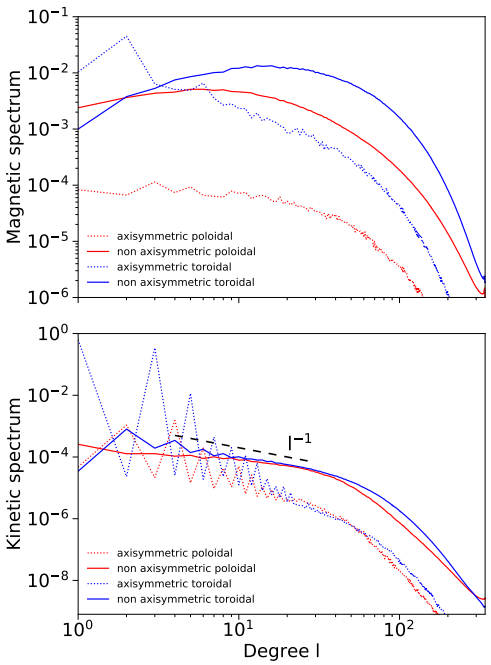


Fig. 7. *Top*: spectrum of the toroidal magnetic energy (blue) and the poloidal magnetic energy (red) normalized by the total magnetic energy as a function of the spherical harmonics order l. The dotted lines correspond to the axisymmetric components of these energies. *Bottom*: spectrum of the toroidal kinetic energy (blue) and the poloidal kinetic energy (red) normalized by the total kinetic energy as a function of the spherical harmonics order l. The dotted lines correspond to the axisymmetric components. The black dashed line corresponds to a scaling of l^{-1}.

magnetic spectrum as a function of the spherical harmonics order l (top panel of Fig. 7) can be decomposed in two parts: an increasing part up to order $l \simeq 20$ and a sharp decrease for the small scales where the dissipation occurs. The axisymmetric toroidal contribution dominates for the largest scales at $l < 3$, while it is clearly subdominant for the small scales. The quadrupole mode ($l = 2$) is particularly strong for this model but this varies between different models. Contrary to the toroidal component, the poloidal magnetic field is dominated by its nonaxisymmetric component at all scales. The nonaxisymmetric poloidal magnetic spectrum is similar to the toroidal one but peaks at larger scales for $l \simeq 10$. These spectra show that the main contribution to the total magnetic energy comes from the toroidal component at intermediate scales ($l \sim 40$).

The nonaxisymmetric poloidal and toroidal kinetic spectra are similar (bottom panel of Fig. 7) and can also be decomposed in two parts: a power law for the large scales and a sharp decrease for the small scales. The power law at larger scales ($l < 35$) seems to match a scaling of l^{-1}, which is consistent with the kinetic spectrum of high Reynolds local simulations (Fromang 2010). The axisymmetric toroidal component of the kinetic spectra is composed of the turbulence contribution dominating at small scales and the differential rotation dominating at large scales. The oscillations between odd and even modes observed for $l < 20$ are due to the symmetry of the differential rotation with respect to the equatorial plane. In the same way, the axisymmetric poloidal contribution contains both turbulence (for $l > 20$) and the meridional circulation (for $l < 20$), which originates from the interplay between angular momentum transport and the outer boundary forcing. The total kinetic spectrum is dominated by the axisymmetric differential rotation and the meridional circulation at the large scales ($l < 10$), while the nonaxisymmetric kinetic turbulence dominates at the intermediate and small scales.

Since the magnetar timing parameters only constrain the dipolar component of the magnetic field, we focus in more details on this specific mode. The dipole field strength reaches a significant intensity of $B_{\rm dip} = 1.25 \times 10^{14}$ G but it is not the dominant mode in the simulation as it is approximately 20 times weaker than the total magnetic field intensity (see blue and black lines in Fig. 8). This is consistent with a visual inspection of the snapshots, where a dipole structure of the magnetic field cannot be seen.

In Fig. 8, the intensity of the axial dipole is ∼4 times lower than the averaged dipole intensity, implying that the dipole is tilted toward the equatorial plane. We computed the dipole tilt angle $\theta_{\rm dip}$ from the magnetic dipole moment $\boldsymbol{\mu}$ given by the formulas

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \iiint \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{J} \mathrm{d}V, \tag{12}$$

$$\theta_{\rm dip} = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\mu_z}{\sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}} \right), \tag{13}$$

where $\boldsymbol{J} = \nabla \times \boldsymbol{B}/\mu_0$ is the current and the volume integral covers the entire numerical domain. Figure 9 shows the time series of the dipole tilt angle. Its time-averaged value is $\theta_{\rm dip} = 120^\circ$ for the run `Standard`. This result is consistent with the ratio of the energy contained in the total dipole and axial dipole. The equatorial character of the dipole may be explained in the following way: The azimuthal magnetic field does not contribute to the axial dipole but it can contribute to the equatorial dipole through its $m = 1$ component. The fact that the MRI generates a predominantly azimuthal magnetic field may therefore explain the dominance of the equatorial dipole. The peaks we see in the

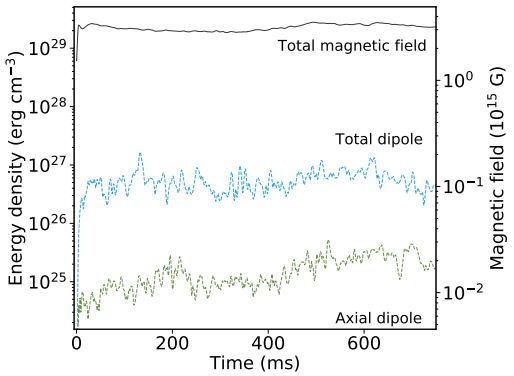


Fig. 8. Temporal evolution of the averaged magnetic energy density and dipolar energy density for the model `Standard`. The black line is the averaged magnetic energy density, the blue dash-dotted line is the averaged dipole energy density and the green dash-dotted is the axial dipole energy density.

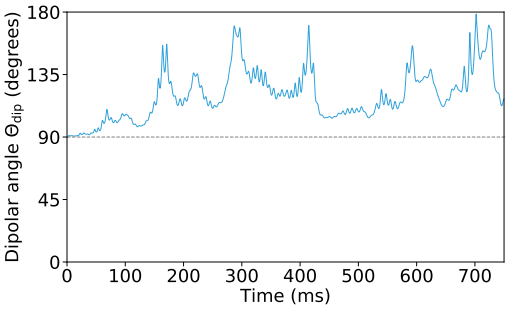


Fig. 9. Temporal evolution of the dipolar tilt angle in degrees for the model `Standard`. The aligned dipole corresponds to $\theta_{dip} = 0°$ and the equatorial dipole corresponds to $\theta_{dip} = 90°$.

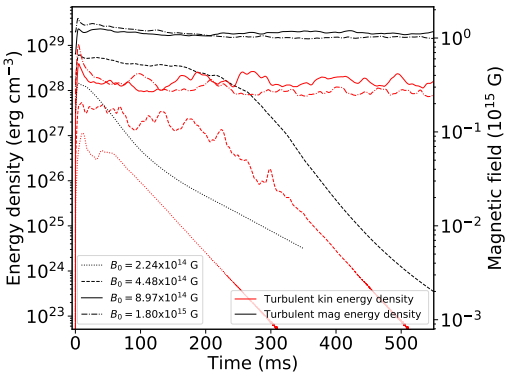


Fig. 10. Temporal evolution of the magnetic (black) and kinetic (red) turbulent energy densities for different values of B_0 with $[L_{min}, L_{max}] = [0.23\, r_o, 0.38\, r_o]$ and $P_m = 16$.

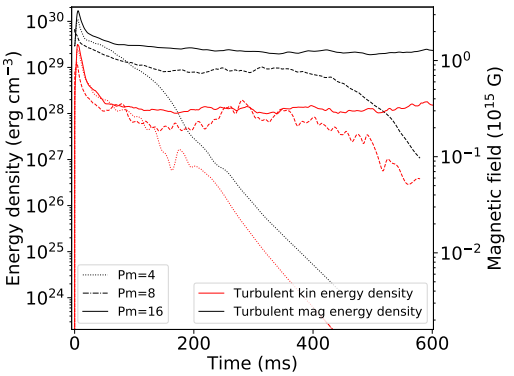


Fig. 11. Same as Fig. 10 for three different values of P_m and with $[L_{min}, L_{max}] = [0.75, 1]$ and $B_0 = 1.8 \times 10^{15}$ G.

dipole tilt angle evolution are due to the weakening of the dipole moment in the equatorial plane for short periods of time.

3.2. Dynamo threshold

We showed in the previous subsection that a MRI-driven dynamo can reach a quasi-stationary state but the turbulence can also be damped by the diffusion processes depending on the diffusivities or the initial magnetic field strength. In fact, diffusion processes (viscosity and resistivity) tend to limit the growth of MRI modes for weak fields (Fromang et al. 2007; Guilet et al. 2015). Therefore, we expect the dynamo threshold to depend on the initial magnetic field intensity B_0 and the magnetic Prandtl number P_m (in this study, the Ekman number E is the same for all simulations).

Figure 10 shows the time evolution of the magnetic and turbulent kinetic energies for different values of B_0. Three behaviors are observed: For the lowest B_0 (dotted line), the turbulent energies decrease sharply with time, which indicates that no dynamo is achieved. For intermediate B_0 (dashed line), the turbulent energies have a slow decreasing phase followed by a fast drop. This behavior is called a transient dynamo in the following sections. For higher B_0, the turbulent energies reach a quasi-steady state, with some fluctuations around a non-evolving average. In this case, the simulations reach a self-sustained quasi-stationary dynamo.

Figure 11 shows that a self-sustained dynamo can be obtained for $P_m \gtrsim 12 \pm 4$. A simulation with $P_m = 16$ gives a quasi-stationary dynamo, $P_m = 8$ a transient dynamo, and $P_m = 4$ no dynamo. This result is independent of the value of B_0 for $B_0 \geq 10^{15}$ G. It should be noted that the threshold of the dynamo action is set for relatively strong initial magnetic fields because of the high values of viscous and magnetic diffusivities. For lower diffusivities relevant to a PNS, we would expect MRI dynamo to set in for lower initial magnetic fields.

3.3. Robustness of the results

The previous subsections demonstrated the ability of self-sustained MRI-driven dynamos to generate a significant, though subdominant, magnetic dipole. In this section, we assess the robustness of these results by studying the impact of initial and boundary conditions of the magnetic field. We show that the quasi-stationary state is independent of the initial conditions and that the boundary conditions only have a minor impact.

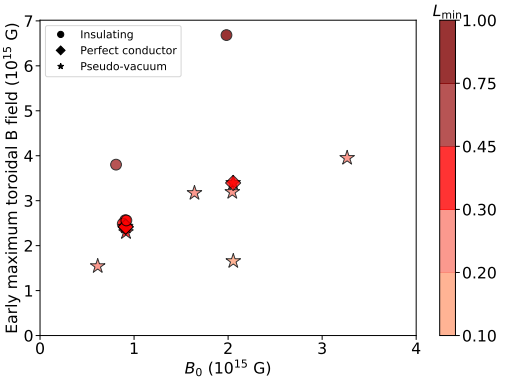


Fig. 12. Early maximum toroidal magnetic field as a function of initial magnetic field strength B_0. The symbol color describes the smallest initial magnetic length scale L_{min}. The symbol shape represents the magnetic boundary conditions, between perfect conductor (diamond), insulating (circle) and pseudo-vacuum (star).

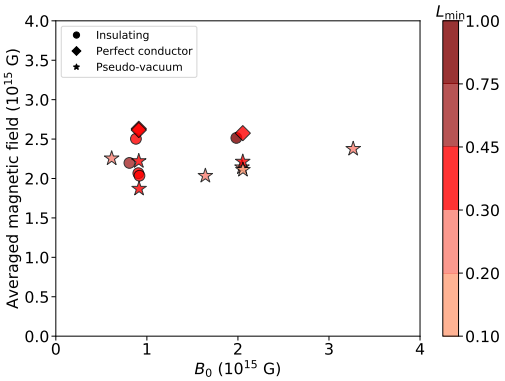


Fig. 13. Magnetic field strength averaged in the quasi-stationary state as a function of initial magnetic field strength B_0. The symbol color describes the smallest initial magnetic length scale L_{min}. The symbol shape represents the magnetic boundary conditions. This figure shows that the quasi-stationary state is roughly independent of the initial and boundary conditions, contrary to the early maximum.

We varied the initial magnetic field amplitude B_0 and its minimum length scale L_{min} and display the results in Fig. 12. To characterize the early phase of magnetic amplification, we measured the early maximum of the toroidal magnetic field after a few milliseconds (i.e., the first local maximum value reached in the time series, see for example Fig. 11). For a given smallest initial magnetic length scale L_{min} (indicated by the symbol color), the early maximum toroidal magnetic field is clearly increasing with the initial magnetic amplitude by a factor of ∼2. This dependence is shallower than in Rembiasz et al. (2016), probably because our initial magnetic field is on smaller scales. On the other hand, for a given B_0, the early maximum toroidal magnetic field increases by a factor of ∼5 when L_{min} is increased. The parameter L_{min} seems to have the most prominent effect on the early maximum toroidal magnetic field. A possible interpretation is that a small-scale magnetic field is more prone to dissipation. Finally, Fig. 12 suggests that the same initial conditions give approximately the same early maximum magnetic field, independently of the magnetic boundary conditions. Since this early maximum toroidal magnetic field is taken at the beginning of the simulation, boundary conditions may have a minor effect at this stage.

To characterize our self-sustained dynamos, we performed time and volume averages on the magnetic field once the simulation has reached a quasi-stationary state (Fig. 13). The averaged magnetic field now displays much less variation than the early maximum. Indeed, all models lie between 1.8×10^{15} G and 2.7×10^{15} G, with a mean of $B = (2.27 \pm 0.23) \times 10^{15}$ G. Contrary to Fig. 12, no systematic impact of the initial conditions can be observed as different simulations give similar magnetic fields. For a given boundary condition, the small variations can be explained by the stochasticity of MRI-driven dynamos. On the other hand, the magnetic field is slightly stronger in the case of perfect conductor boundary conditions. This trend may be explained by a stronger toroidal magnetic field close to the outer boundary, since the perfect conductor condition allows for a non-vanishing toroidal magnetic field. Overall, these results indicate that the initial conditions and boundary conditions have a small impact on the global properties of the final quasi-stationary state.

It is important to assess to which extent our setup impacts the magnetic field morphology, and particularly the dipole component that is constrained by observations. The normalized magnetic and kinetic spectra depending on the Legendre polynomial order l (Fig. 14) and the azimuthal degree m (Fig. 15) show the differences at small and large scales for different models. The magnetic and kinetic spectra coincide well for the intermediate and small scales (top and bottom panel of Fig. 14), while the magnetic spectrum displays significant stochasticity at the large scales. For example, some models have a higher magnetic quadrupole $l = 2$, while other models have a maximum for a higher order l. It seems also that the models with perfect conductor boundary conditions (PC and PCBIS) have a lower kinetic $l = 1$ mode. As described in Sect. 3.1, the oscillations in the kinetic spectra are due to the meridional circulation. The magnetic spectra as a function of the azimuthal degree m (Fig. 15) is dominated by the large scales with a constant energy for $m \lesssim 10$ and decreases sharply for $m \gtrsim 10$. If we compare the l and m spectra, we note that the dominating scales are larger for the azimuthal spectrum, which is consistent with the elongated structures we can see in the equatorial plane of Fig. 4. Similarly, the kinetic energy decreases more steeply as a function of the azimuthal degree m than as a function of l. All models show a very good agreement for these kinetic and magnetic spectrum.

Even though the magnetic spectra of different simulations show significant dispersion at large scales, the dipole amplitude scales linearly with the averaged magnetic field (Fig. 16). The generation of a dipolar magnetic field is therefore a robust feature of the MRI and both initial and boundary conditions have a small impact on our qualitative and quantitative results, such as the dipole and the total magnetic field.

4. Comparison to local simulations

In this section, we would like to understand the impact of the geometry of the domain on the properties of the MRI. As our study is one of the first global spherical models that resolves the MRI, it is important to compare our results to local model results. We intend to establish whether a local Cartesian box can reproduce faithfully some of the properties of the MRI in a global

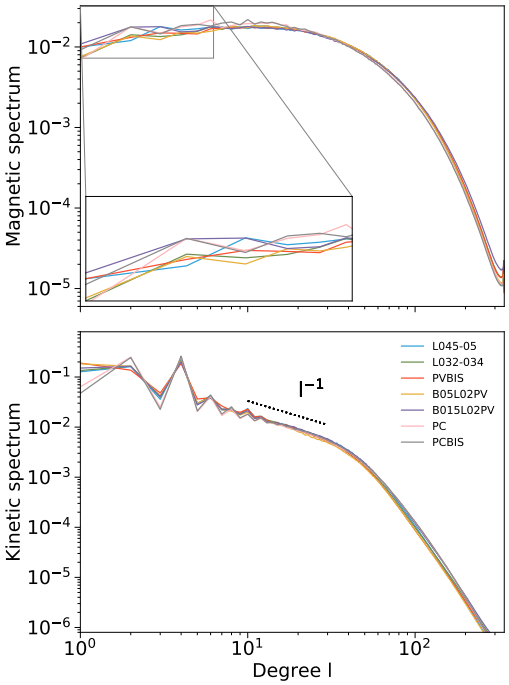


Fig. 14. *Top*: spectrum of the magnetic energy as a function of the spherical harmonics order l. *Bottom*: spectrum of the poloidal kinetic energy as a function of the spherical harmonics order l. Each line is from a different model. The dotted line corresponds to a scaling of l^{-1}.

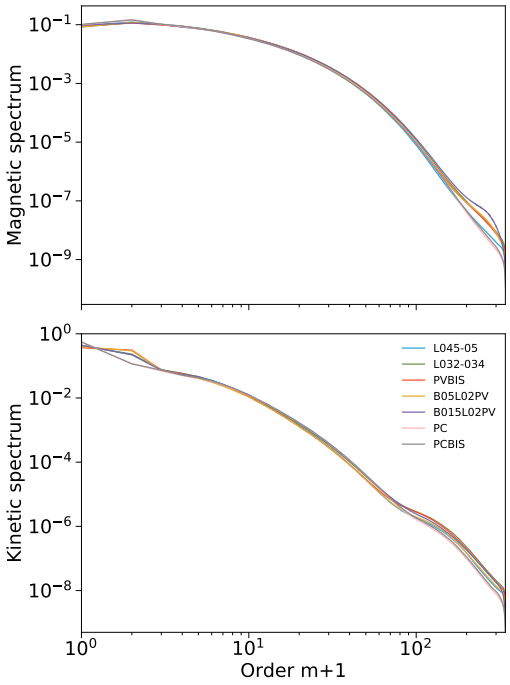


Fig. 15. Magnetic (*top*) and kinetic (*bottom*) normalized energy spectra as a function of the azimuthal degree m for different models.

spherical shell. A schematic view of the comparison is shown on Fig. 17. The Cartesian box is meant to represent the differentially rotating zone in the equatorial region of our global model. The Cartesian coordinates (x, y, z) in the local model corresponds to the cylindrical coordinates (s, ϕ, z) at the equator of the global model. The center of the box is at a radius of $s_0 \sim 0.7\, r_o$. For the cylindrical radii $s_{cyl} \in [0.525\, r_o, 0.9\, r_o]$, the shear rate q is approximately constant and takes varying values in the range [0.7, 1.0] for different models (see Fig. 6).

4.1. Setup for local models

The local models were computed with the code SNOOPY, which has been widely used to study the MRI (Lesur & Longaretti 2005, 2007; Guilet & Müller 2015, and references therein). The rotation rate Ω_0 and the diffusivities in the local model are equal to the values used in the global model. The initial magnetic field was initialized with a sinusoidal radial profile of vertical field, which has been chosen such that the magnetic flux vanishes similarly to the global model. We have checked that the quasi-stationary turbulence is independent of the initial condition, provided that the magnetic field is strong enough to initiate an MRI dynamo.

To investigate the effect of the size of the domain and its geometry, we chose different box sizes (L_s, L_ϕ, L_z). If the properties of the MRI dynamo were independent of the domain geometry, then we would expect similar results when models have the same volume. The box $(L_s, L_\phi, L_z) = (0.5\, r_o, 4.5\, r_o, 1.2\, r_o)$ matches the volume of the most turbulent region V_{turb} in the global model where differential rotation is strong, which corresponds to a cylindrical radius $s_{cyl} \geq 0.5\, r_o$. Models with reduced box dimensions, especially the azimuthal length L_ϕ, have also been considered in an attempt to obtain results more similar to the global models. The volume of the box for the different box dimensions considered ranges from $V = 0.04\, V_{turb}$ to $V = V_{turb}$ (see Table 1).

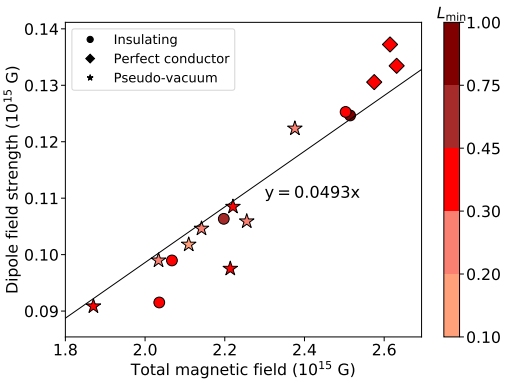


Fig. 16. Dipole magnetic field strength as a function of the averaged magnetic field strength. Symbols are defined in the caption of Fig. 12.

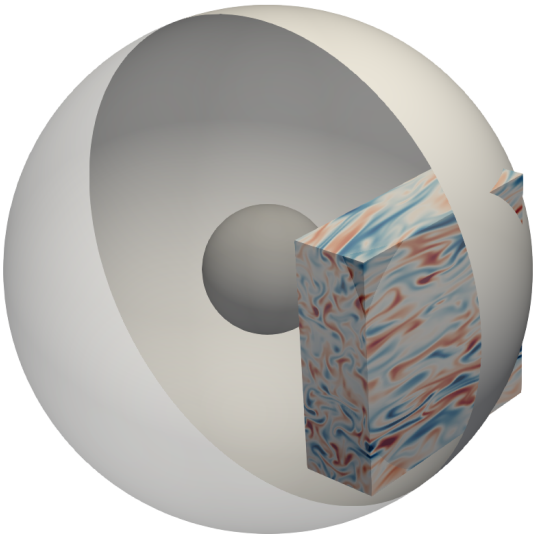


Fig. 17. Toroidal magnetic field B_ϕ of the local model `Ls03Lp09Lz09` with a box size (L_s, L_ϕ, L_z) = (0.3 r_o, 0.9 r_o, 0.9 r_o) compared to the spherical domain of our global model.

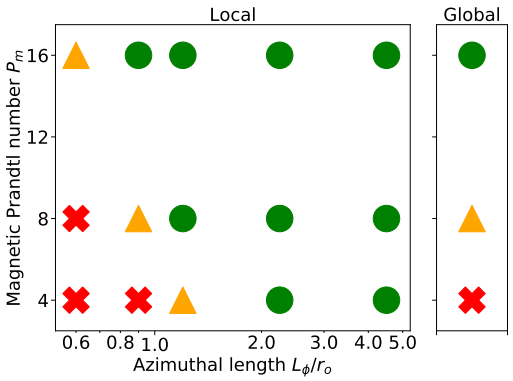


Fig. 18. Summary of the state (dynamo or not) of the model in a (L_ϕ, P_m) plane for both local and global models. A green circle corresponds to a self-sustained dynamo. An orange triangle corresponds to a transient dynamo. A red cross corresponds to no dynamo.

4.2. Dynamo threshold

For comparison with the results of Sect. 3.2, we determined the threshold in magnetic Prandtl number P_m necessary for dynamo action as a function of the azimuthal length L_ϕ. Figure 18 compares the dynamo threshold in the global model (right part) and the local model (left part). For the global model we obtain no dynamo for $P_m \leq 4$, a transient dynamo for $P_m = 8$ and a stable dynamo for $P_m \geq 16$. The local model that matches this global behavior corresponds to a box size of (L_s, L_ϕ, L_z) = (0.3 r_o, 0.9 r_o, 0.9 r_o) and the P_m threshold decreases for larger boxes. This shows that the dynamo threshold is higher in the global model than the local model with the same volume.

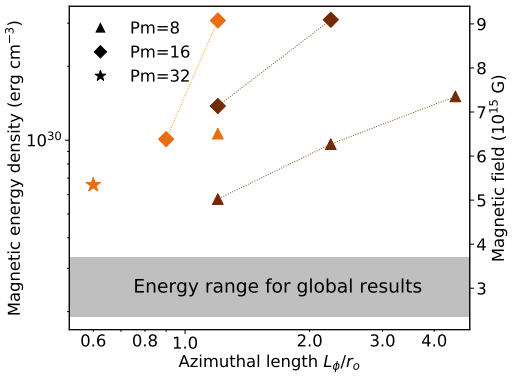


Fig. 19. Averaged magnetic energy density as a function of the box azimuthal size. The symbol shape represents the magnetic Prandtl number P_m. The symbol color indicates the radial length of the box (brown: L_s = 0.67; orange: L_s = 0.4). The gray zone represents the range of magnetic energy density averaged in the turbulent zone for our sample of global models.

4.3. Turbulent energies and angular momentum transport

To make a more detailed comparison between the local and the global models, we now consider the turbulent transport of angular momentum as well as the kinetic and magnetic energies. For comparison with the local models, the quantities from the global models were averaged for the cylindrical radius in the interval $s_{cyl} \in [0.525\, r_o, 0.925\, r_o]$. We excluded a thin layer of thickness 0.075 r_o near the outer boundary, where the turbulence is strongly affected by the boundary conditions.

Figure 19 shows the magnetic energy density as a function of the azimuthal length L_ϕ for different magnetic Prandtl number P_m, and different box lengths L_s and L_z. All local models have a significantly higher energy density than the global models (gray area), with the smaller boxes having a magnetic energy density closer to the global models. The impact of the box dimensions can also be deduced from these results. First, for a same radial length L_s (same color) and P_m (same marker), the magnetic energy density increases with the azimuthal length L_ϕ. Moreover, the magnetic energy density increases with the magnetic Prandtl number P_m, which was expected from previous local MRI studies (Lesur & Longaretti 2007; Fromang et al. 2007; Longaretti & Lesur 2010). Figure 19 shows that the global simulations tend to have a lower averaged magnetic energy density than the local simulations.

In MRI turbulence, ratios of different time averaged quantities can be more robust, showing less variation than the turbulent energies. For example, the ratio of the magnetic to kinetic turbulent energies is around 10 for both local and global models (see Table 1). One can also look at the turbulent stresses and the different component contributions to the turbulent energies to compare in more details the local and global models (Table 1). For this diagnostic, we used the $s\phi$ component of the Maxwell and Reynolds stress tensors, respectively defined as

$$M_{s\phi} = -\frac{1}{\rho_0 \mu_0} \left\langle \frac{B_s\, B_\phi}{D^2 \Omega_0^2} \right\rangle, \tag{14}$$

$$R_{s\phi} = \left\langle \frac{u_s\, u_\phi}{D^2 \Omega_0^2} \right\rangle, \tag{15}$$

Table 1. Local quantities used as diagnostics of the turbulence in both local and global models.

Name	P_m	q_{avg}	(L_s, L_ϕ, L_z)	E_{kin}	E_{mag}	$M_{s\phi}$	$R_{s\phi}$	$u_s^2/2$	$u_\phi^2/2$	$u_z^2/2$	$b_s^2/2$	$b_\phi^2/2$	$b_z^2/2$
Units	–	–	$[(r_o, r_o, r_o)]$	[erg cm^{-3}]	[erg cm^{-3}]	–	–	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]
Local models													
`Pm8Ls05Lp45Lz12`	8	0.8	(0.5, 4.5, 1.2)	1.69×10^{29}	1.51×10^{30}	0.422	0.0225	28.2	51.5	20.3	9.3	87.8	2.9
`Pm8Ls05Lp22Lz12`	8	0.8	(0.5, 2.25, 1.2)	9.16×10^{28}	9.64×10^{29}	0.406	0.0210	26.1	50.9	23	8.3	89.1	2.6
`Pm8Ls05Lp12Lz12`	8	0.8	(0.5, 1.2, 1.2)	4.85×10^{28}	5.75×10^{29}	0.381	0.0185	23.4	50.5	26.1	6.9	90.9	2.2
`Pm8Ls03Lp12Lz12`	8	0.8	(0.3, 1.2, 1.2)	1.10×10^{29}	1.06×10^{30}	0.405	0.0220	24	52.9	23.1	9.0	88	2.9
`Ls05Lp22Lz12`	16	0.8	(0.5, 2.25, 1.2)	3.51×10^{29}	3.10×10^{30}	0.439	0.0217	24	57.8	18.2	11.75	84.3	3.95
`Ls05Lp12Lz12`	16	0.8	(0.5, 1.2, 1.2)	1.29×10^{29}	1.38×10^{30}	0.433	0.0215	23.6	54.8	21.6	9.65	87.2	3.15
`Ls03Lp12Lz12`	16	0.8	(0.3, 1.2, 1.2)	2.53×10^{29}	3.08×10^{30}	0.356	0.0185	23.2	60.4	16.4	9.75	87.4	2.85
`Ls03Lp09Lz09`	16	0.8	(0.3, 0.9, 0.9)	8.25×10^{28}	1.01×10^{30}	0.411	0.0205	23	55.3	21.7	8.9	88.2	2.9
`Pm32Ls03Lp08Lz08`	32	0.8	(0.3, 0.8, 0.8)	3.95×10^{28}	6.57×10^{29}	0.389	0.0168	22.7	55.5	21.8	7.05	90.6	2.35
Global models													
`PVBIS`	16	0.977	–	1.70×10^{28}	1.71×10^{29}	0.301	0.0152	22.7	55.8	21.5	4.05	94.2	1.75
`PCBIS`	16	0.819	–	1.86×10^{28}	3.11×10^{29}	0.299	0.00932	28.1	46.4	25.5	4.2	93.2	2.6
`StandardBIS`	16	0.95	–	1.56×10^{28}	1.92×10^{29}	0.302	0.0130	25.3	51.1	23.6	4.1	94	1.9
`B04L015PV`	16	0.951	–	1.28×10^{28}	1.90×10^{29}	0.305	0.0116	28.7	44.4	26.9	4.1	94.1	1.8
`B05PV`	16	0.903	–	1.69×10^{28}	2.29×10^{29}	0.304	0.0120	26.2	49	24.8	4.2	93.7	2.1
`B08L015PV`	16	0.859	–	1.90×10^{28}	2.65×10^{29}	0.325	0.0114	27.5	46.8	25.7	4.9	92.9	2.2
`B05L008-023PV`	16	0.936	–	1.73×10^{28}	2.11×10^{29}	0.313	0.0135	25.4	50.1	24.5	4.45	93.5	2.05
`B05PC`	16	0.793	–	2.42×10^{28}	3.33×10^{29}	0.304	0.0108	25	52.7	22.3	4.5	92.8	2.7

Notes. The Maxwell and Reynolds stresses are normalized by the magnetic energy.

where the brackets $\langle\cdot\rangle$ corresponds to the volume averaged value.

The Maxwell and Reynolds stresses normalized by the magnetic energy are weaker in global models, which shows that the angular momentum transport is less efficient. This difference can be explained for the Maxwell stress by the lower value of the magnetic radial contribution b_s, while the other contributions are similar in proportion. The difference is also reduced for the local models that have a low magnetic energy.

Figure 20 shows that there is a correlation between the radial and vertical components of the magnetic field for physically different models, such as our local and global incompressible models, compressible stratified local and global models from an accretion disk study (Hawley et al. 2011) and stratified and unstratified local models (Shi et al. 2010, 2016). Our local models seem to match well this trend, while our global models have a slightly lower radial contribution. It is unclear whether this small difference hints at an underlying systematic effect or is instead consistent with an inherent spread in the distribution of the data.

Among local models, `Ls03Lp09Lz09` is the one showing features most similar to the global models (see the 3D snapshot in Fig. 17 and the one shown in Fig. 4 for a comparison). In addition to sharing the same threshold in P_m for dynamo action (Sect. 4.2), it has the smallest magnetic energy among the local models at $P_m = 16$. Its kinetic and magnetic spectra can therefore be compared to the global nonaxisymmetric spectra (Fig. 21). The non-radial wavenumber $\tilde{k}$ is related to the spherical harmonic order l by the relation $\tilde{k} = \sqrt{l(l+1)/r^2}$ with r taken as $r = 0.75\,r_o$ for the global model in order to simplify the comparison. The magnetic spectrum of the local model is similar to the global spectrum. It can also be decomposed in an approximately flat part at large scales and an exponential decrease due to dissipation at small scales. The local kinetic spectrum is also in good agreement with the nonaxisymmetric spectrum global model. The local magnetic and kinetic spectra are stronger than the global ones at small scales, which is consistent with the stronger turbulence in our shearing boxes leading to slightly smaller dissipative scales. The main difference between the global and local spectra is therefore the presence of scales larger than the box, especially the axisymmetric component of the kinetic spectrum. Overall, these results suggest that the self-sustained dynamo obtained in the global models is typical of the MRI in local simulations.

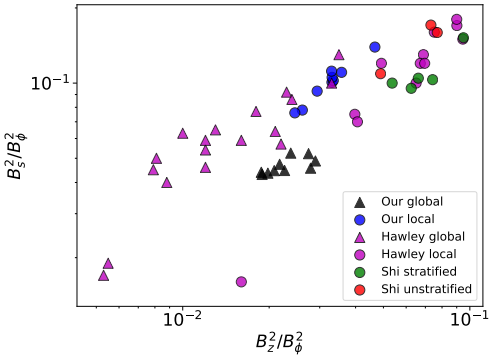


Fig. 20. Comparison for different models of the radial component B_s^2 as a function of vertical component B_z^2. Both components are normalized by the azimuthal component B_ϕ^2. The different values are taken from Hawley et al. (2011) and Shi et al. (2010, 2016).

5. Discussion

In this section, we discuss the influence of the domain geometry and the different limits of the simplifying assumptions made in our study: the impact of the curvature, the mechanical boundary conditions, the diffusive processes and the incompressible approximation.

5.1. Impact of the curvature

As the local and global models are designed to have a similar differential rotation, one might have naively expected to obtain

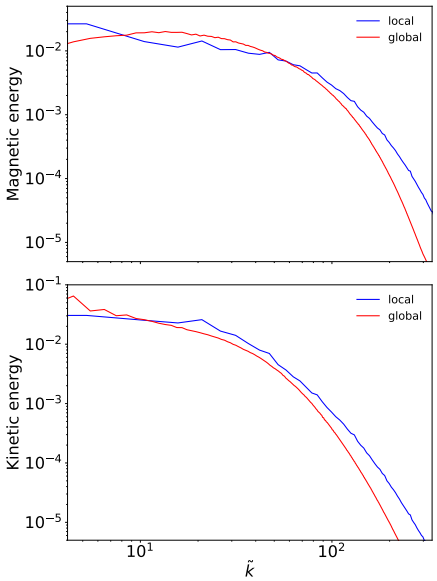


Fig. 21. Spectrum of the magnetic energy and kinetic energy as a function of the wavenumber $\tilde{k}$. The blue spectrum is averaged on the full duration of the local model `Ls03Lp12Lz12` and the red spectrum is the total nonaxisymmetric spectrum of the global model `Standard` (Fig. 7).

quantitatively similar results. However, the different geometry of the domain is sufficient to obtain different results between the local and global models. Our interpretation is that the curvature of the sphere and non-periodic boundaries reduce the coherence of the magnetic field and velocity field. Thus, local models and large boxes in particular tend to overestimate the field amplification, since they allow for larger coherence structures to develop and thus favor the MRI action over a broader range of scales.

5.2. Forcing of the differential rotation

We chose to rely on the outer mechanical boundary to force the differential rotation in the global simulations, which is justified by the dynamical evolution of the PNS in core-collapse supernovae. Indeed, the PNS contraction accelerates its rotation. At the same time, the MRI and the MHD turbulence transport the angular momentum toward the outer cylindrical radii and therefore slow down the rotation. This behavior may even last longer than the duration of the core-collapse supernova because the contraction of the PNS can still continue after the explosion and the rotation can slow down due to winds or magnetic braking. These processes lead to the formation of two distinct regions within the PNS: The inner cylindrical part of the PNS is accelerated, while the outer cylindrical part is slowed down by the angular momentum transport. Our boundary conditions try to mimic this effect. We note that, despite being fixed at the boundary, the rotation profile inside the domain is free to evolve as a consequence of the backreaction of the magnetic field. As illustrated in Fig. 6, we indeed observe that a stronger magnetic field leads to a lower degree of differential rotation.

However, one of the main limitations of this boundary condition is that the evolution of the global rotation profile is not well described as the effects of contraction, accretion, magnetic braking and transport of angular momentum is artificially taken into account on the outer boundary. Indeed, the timescale over which the rotation profile is significantly changed can be estimated by the amount of shear energy extracted by the combined effect of Reynolds and Maxwell stresses in the turbulent region. We estimate a shear energy of 3.9×10^{50} erg by comparing the rotational energy contained in the differentially rotating PNS to that of a PNS in solid body rotation with the same total angular momentum. The typical mean rate at which the shear energy is extracted is $\approx 5.2 \times 10^{51}\,\mathrm{erg\,s^{-1}}$. The typical timescale at which the energy is extracted from the shear is therefore ≈ 75 ms. This means that differential rotation would decrease rapidly without contraction and accretion. In MHD core collapse simulations, it remains unclear whether the speed-up due to contraction and accretion or rather the action of stresses and magnetic braking have a stronger impact on the rotation profile.

The energy injection by this outer boundary condition also depends on the viscous layer, and therefore on the diffusion processes. In addition, the energy injection of the outer boundary is different from the constant shear used in local models, which might be an other way to explain the differences between local and global models.

5.3. Diffusive processes

One could be tempted to solve our set of equations in the ideal MHD limit. However, resolution studies have shown that the turbulent transport is then sensitive to the numerical resolution (Pessah et al. 2007). Therefore, in order to avoid the pitfall of resolution-dependent results, we used explicit diffusivities and made sure that the diffusive scales were resolved. The low numerical diffusion of the pseudo-spectral codes ensure that only physical diffusivities impact the dynamics.

The regime of the diffusive parameters that can be numerically reached is a limit to our model: A realistic value of the neutrino viscosity is $\nu \sim 2 \times 10^{10}\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}$ at a radius of ~20 km (Guilet et al. 2015). The corresponding Ekman number is then $E \sim 6 \times 10^{-6}$, which is lower than in our simulations by a factor of about 30. Using a more realistic value of E may lower the thresholds to obtain a dynamo (see Sect. 3.2) and may lead to a stronger amplification of the magnetic field. Moreover, the resistivity used in our simulations is much larger than realistic values. Due to numerical constraints, the magnetic Prandtl number is limited to 16 in our study, much smaller than realistic values of $P_\mathrm{m} \sim 10^{13}$. Accretion disk studies have shown that the MRI-driven turbulence is highly sensitive to the magnetic Prandtl number, and generally it increases with P_m (Lesur & Longaretti 2007; Fromang et al. 2007; Longaretti & Lesur 2010). Our local numerical simulations confirm this trend (see Table 1). Our quantitative results should therefore be considered as lower bounds on the magnetic field strength that would be reached at higher P_m. Investigating the regime of higher P_m in a global model is computationally demanding and it would certainly be more affordable to use local models. Further comparisons between local and global simulations would then allow us to extrapolate the results to a global model.

Finally, we assume that neutrinos are in the diffusive regime, which should be valid only in the inner part of the PNS. In the outer parts of the PNS, the neutrinos are in the nondiffusive regime on length scales at which the MRI grows. The impact of the neutrino drag regime on the linear phase has been studied by Guilet et al. (2015), but has never been studied in nonlinear numerical simulations. The evolution of the MRI in this regime remains an open question.

5.4. Incompressible approximation

The incompressible approximation was used to provide an idealized reference model and to reduce the cost of our numerical simulations by filtering out sound waves. First, filtering sound waves is justified when the sound speed c_s is much larger than both the fluid and Alfvén velocities ($v_A \equiv B/\sqrt{\mu_0\rho}$). With $c_s \sim 5 \times 10^4\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ at $r \sim 20\,\mathrm{km}$, we check a posteriori that this condition is satisfied in our global models, for which $u^2/c_s^2 \leq v_A^2/c_s^2 \leq 10^{-4}$. This is consistent with the discussion of the Boussinesq approximation in Guilet et al. (2015). Second, we neglect the composition and entropy gradients. The incompressible approximation could be extended to take into account the buoyancy within the Boussinesq approximation. However, we do not include it for the sake of simplicity and in order to be able to compare our results to most of the numerical studies of the MRI in the literature. Finally, density stratification is neglected and its study is postponed to a further work.

6. Conclusions

For the first time, we have investigated the generation of large-scale magnetic fields by the MRI in an idealized 3D spherical model of PNS. We performed a parameter exploration of the initial and boundary conditions and we compared in details the results of our global simulations with local shearing box simulations. The main findings of our study can be summarized as follows:

- The MRI leads to a quasi-stationary state with a strong turbulent magnetic field of $B \geq 2 \times 10^{15}$ G. The toroidal component of the magnetic field dominates over the poloidal field by a factor of ∼2. A nondominant magnetic dipole $B_{\mathrm{dip}} \sim 10^{14}$ G is generated, which represents about 5% of the averaged magnetic field strength. Interestingly, this dipole is tilted toward the equatorial plane with a tilt angle in the interval $\theta_{\mathrm{dip}} \in [60°, 120°]$.
- The magnetic field amplification and dipole generation by the MRI is a robust mechanism that operates for a large number of different initial setups and magnetic boundary conditions. Indeed, the turbulent energies and the angular momentum transport in the quasi-stationary state do not depend much on the initial magnetic field and boundary conditions.
- The comparison between global and local studies suggests that the geometry of the domain leads to a decrease in the turbulent energies. Indeed, global models have lower turbulent energies than local models, although the ratio of kinetic and magnetic energies and the relative contributions to these energies are comparable. The results from the small boxes of the local simulations have a better agreement with those from the global models, which may be interpreted by the fact that the curvature in a spherical shell limits the coherence length scale of the turbulence.

These findings support the ability of the MRI to generate a strong magnetic dipole and explain magnetar formation. One should of course keep in mind that our results still need to be confirmed by setups with a more realistic PNS structure as discussed below.

The magnetic dipole amplitude obtained from the time and volume averages ranges from 9.1×10^{13} G to 1.35×10^{14} G, which is within the lower end of the observed range for the dipole of galactic magnetars. We further note that these results are obtained before the full contraction to the final size of a cold neutron star, which has a radius close to 12 km. If the magnetic flux is conserved during this contraction, we expect the magnetic field to be amplified by a factor of ≃4, possibly bringing the dipolar component of the magnetic field in the middle of magnetar range 10^{14}–10^{15} G.

To compare our results directly with observations, the turbulent magnetic field should also be relaxed to a stable state without differential rotation and be evolved on longer timescales. Under the joint effects of magnetospheric dissipation and internal dissipation, the dipole from our model could become a stable equatorial dipole (Lander & Jones 2018).

Similarly to our results, some observations suggest that the dipole may not be the strongest component of the magnetic field of magnetars. Indeed, Makishima et al. (2016, 2019) have detected phase modulations in X-ray emissions from two magnetars, which are interpreted as a free precession due to prolate deformations of the neutron star under the torque of a very intense internal toroidal field. The MRI-driven magnetic field is mainly toroidal and could be important to explain these observations.

As discussed above, our results suggest that a fast rotating PNS can become a typical magnetar through MRI action. A slower rotation, on the other hand, is expected to lead to a lower magnetic field and may explain the formation of low field magnetars (Rea et al. 2012, 2013, 2014). In fact, owing to the simplicity of our setup, our simulations can be rescaled to a different rotation frequency. For example, for a 30 times slower rotation rate[3], the magnetic field should be scaled down by a factor of 30. The final neutron star would have a magnetic dipole of $\simeq 1$–2×10^{13} G and a total magnetic field of $\simeq 3 \times 10^{14}$, which corresponds to a low field magnetar. The ratio of the magnetic dipole to the total magnetic field can also be compared to the cases of SGR 0418+5729 (Tiengo et al. 2013) and J1822.3−16066 (Rodríguez Castillo et al. 2016), for which the total magnetic field can be measured using the proton cyclotron line. The observed ratios are respectively $B_{\mathrm{dip}}/B_{\mathrm{tot}} \sim 0.0012$–$0.024$ and $B_{\mathrm{dip}}/B_{\mathrm{tot}} \sim 0.01$–$0.05$. These are roughly in agreement with our results $B_{\mathrm{dip}}/B_{\mathrm{tot}} \sim 0.05$. The slightly higher value found in our models may be due to the high resistivity used in our simulations, since we may expect that a lower resistivity would lead to a smaller-scale magnetic field.

The magnetic field we obtain is strong enough to potentially impact the core-collapse dynamics and launch jet-driven explosions. However, most of the studies of jet driven explosions assume a strong axial dipole field, while our study displays an equatorial dipole. Our results open the question of the impact of a tilted dipole on the dynamics of a core-collapse supernova. The dipolar tilt angle is also a key parameter to determine the amount of thermalized energy in the magnetosphere and the energy available to launch a jet (Margalit et al. 2018). Interestingly, Bugli et al. (2020) showed that higher order multipoles tend to decrease the efficiency of the magnetorotational launching mechanism but can still launch a jet, which suggests that the multipoles of our magnetic field could contribute to the explosion.

We stress that the limitations of this work need to be assessed. Our quantitative results (e.g., strength of the magnetic field and its dipolar component, dipolar tilt angle) may change with the addition of the density and entropy background gradients. A convective dynamo with fast rotation can occur in a realistic interior model of the full PNS, a mechanism that has recently been shown to be able to form magnetars (Raynaud et al. 2020). This raises the open question of the interaction of the MRI in a stably stratified zone with an inner

[3] The Ekman number used in our simulations would then correspond to the realistic value of the viscosity $\nu = 2 \times 10^{10}\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}$.

convective dynamo in core-collapse supernovae. The stably stratified region unstable to the MRI is important to link the convective dynamo buried under the PNS surface and the explosion that is launched from the surface.

This study has been focused on the core-collapse supernova context but it is also relevant to binary neutron star mergers, which display similar conditions in terms of differential rotation and neutrino radiation (Guilet et al. 2017). The MRI may grow in the hypermassive neutron star resulting from the merger and the magnetic field may be amplified up to 10^{16} G (Siegel et al. 2013; Kiuchi et al. 2018; Ciolfi et al. 2019). These studies start with a strong axial magnetic dipole ($\geq 3 \times 10^{15}$ G), while in our case we start with a small-scale field and the MRI generates a strong tilted dipole. Although it is difficult to compare the results obtained with such different initial conditions, our work tends to support the ability of the MRI to generate an magnetar-like dipole in binary neutron star mergers. A detailed study with appropriate thermodynamic background state and differential rotation profile would further assess this possibility. This would support the invoked scenario of magnetars powering an X-ray transient as the aftermath of a binary neutron-star merger (Xue et al. 2019).

Investigating how the magnetic field of magnetars is generated in realistic conditions is a promising avenue of research as new observations will come in the multi-messenger era: The Large Synoptic Survey Telescope (LSST) will be able to observe one hundred times more supernovae (LSST Science Collaboration 2017) and the future spatial telescope SVOM will help us to localize and observe transient events in the γ-ray sky, like electromagnetic counterparts of binary neutron-star mergers (Wei et al. 2016).

Acknowledgements. This research was supported by the European Research Council through the ERC starting grant MagBURST No. 715368. The computations were performed on the supercomputer Occigen of the CINES (Applications A0030410317 and A0050410317). We thank Thomas Gastine, Thierry Foglizzo and Sébastien Fromang for their valuable insight and expertise.

References

Akiyama, S., Wheeler, J. C., Meier, D. L., & Lichtenstadt, I. 2003, ApJ, 584, 954
Balbus, S. A. 1995, ApJ, 453, 380
Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 1991, ApJ, 376, 214
Bucciantini, N., Metzger, B. D., Thompson, T. A., & Quataert, E. 2012, MNRAS, 419, 1537
Bugli, M., Guilet, J., Obergaulinger, M., Cerdá-Durán, P., & Aloy, M. A. 2020, MNRAS, 492, 58
Christensen, U., & Wicht, J. 2015, in Treatise on Geophysics, 2nd edn., ed. G. Schubert (Oxford: Elsevier), 245
Ciolfi, R., Kastaun, W., Kalinani, J. V., & Giacomazzo, B. 2019, Phys. Rev. D, 100, 023005
Coti Zelati, F., Rea, N., Pons, J. A., Campana, S., & Esposito, P. 2018, MNRAS, 474, 961
Dessart, L., Burrows, A., Livne, E., & Ott, C. D. 2008, ApJ, 673, L43
Drout, M. R., Soderberg, A. M., Gal-Yam, A., et al. 2011, ApJ, 741, 97
Duncan, R. C., & Thompson, C. 1992, ApJ, 392, L9
Fromang, S. 2010, A&A, 514, L5
Fromang, S., Papaloizou, J., Lesur, G., & Heinemann, T. 2007, A&A, 476, 1123
Gastine, T., & Wicht, J. 2012, Icarus, 219, 428
Gilman, P. A., & Glatzmaier, G. A. 1981, ApJS, 45, 335
Gompertz, B. P., O'Brien, P. T., & Wynn, G. A. 2014, MNRAS, 438, 240
Götz, D., Mereghetti, S., Molkov, S., et al. 2006, A&A, 445, 313
Guilet, J., & Müller, E. 2015, MNRAS, 450, 2153
Guilet, J., Müller, E., & Janka, H.-T. 2015, MNRAS, 447, 3992
Guilet, J., Bauswein, A., Just, O., & Janka, H.-T. 2017, MNRAS, 471, 1879
Hawley, J. F., & Balbus, S. A. 1992, ApJ, 400, 595
Hurley, K., Boggs, S. E., Smith, D. M., et al. 2005, Nature, 434, 1098
Hawley, J. F., Guan, X., & Krolik, J. H. 2011, ApJ, 738, 84
Inserra, C., Smartt, S. J., Jerkstrand, A., et al. 2013, ApJ, 770, 128
Israel, G. L., Belloni, T., Stella, L., et al. 2005, ApJ, 628, L53
Kaspi, V. M., & Beloborodov, A. M. 2017, ARA&A, 55, 261
Kiuchi, K., Kyutoku, K., Sekiguchi, Y., & Shibata, M. 2018, Phys. Rev. D, 97, 124039
Kouveliotou, C., Dieters, S., Strohmayer, T., et al. 1998, Nature, 393, 235
Kuroda, T., Arcones, A., Takiwaki, T., & Kotake, K. 2020, ApJ, 896, 102
Lander, S. K., & Jones, D. I. 2018, MNRAS, 481, 4169
Lesur, G., & Longaretti, P. Y. 2005, A&A, 444, 25
Lesur, G., & Longaretti, P. Y. 2007, MNRAS, 378, 1471
Longaretti, P. Y., & Lesur, G. 2010, A&A, 516, A51
LSST Science Collaboration (Marshall, P., et al.) 2017, https://doi.org/10.5281/zenodo.842713
Makishima, K., Enoto, T., Murakami, H., et al. 2016, PASJ, 68, S12
Makishima, K., Murakami, H., Enoto, T., & Nakazawa, K. 2019, PASJ, 71, 15
Margalit, B., Metzger, B. D., Thompson, T. A., Nicholl, M., & Sukhbold, T. 2018, MNRAS, 475, 2659
Masada, Y., Sano, T., & Shibata, K. 2007, ApJ, 655, 447
Masada, Y., Takiwaki, T., Kotake, K., & Sano, T. 2012, ApJ, 759, 110
Masada, Y., Takiwaki, T., & Kotake, K. 2015, ApJ, 798, L22
Menou, K., Balbus, S. A., & Spruit, H. C. 2004, ApJ, 607, 564
Metzger, B. D., Quataert, E., & Thompson, T. A. 2008, MNRAS, 385, 1455
Metzger, B. D., Giannios, D., Thompson, T. A., Bucciantini, N., & Quataert, E. 2011, MNRAS, 413, 2031
Metzger, B. D., Beniamini, P., & Giannios, D. 2018, ApJ, 857, 95
Moiseenko, S. G., Bisnovatyi-Kogan, G. S., & Ardeljan, N. V. 2006, MNRAS, 370, 501
Mösta, P., Richers, S., Ott, C. D., et al. 2014, ApJ, 785, L29
Mösta, P., Ott, C. D., Radice, D., et al. 2015, Nature, 528, 376
Nicholl, M., Smartt, S. J., Jerkstrand, A., et al. 2013, Nature, 502, 346
Obergaulinger, M., Cerdá-Durán, P., Müller, E., & Aloy, M. A. 2009, A&A, 498, 241
Obergaulinger, M., Just, O., & Aloy, M. A. 2018, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., 45, 084001
Olausen, S. A., & Kaspi, V. M. 2014, ApJS, 212, 6
Ott, C. D., Burrows, A., Thompson, T. A., Livne, E., & Walder, R. 2006, ApJS, 164, 130
Pessah, M. E., & Chan, C.-K. 2008, ApJ, 684, 498
Pessah, M. E., Chan, C.-K., & Psaltis, D. 2007, ApJ, 668, L51
Raynaud, R., Guilet, J., Janka, H.-T., & Gastine, T. 2020, Sci. Adv., 6, eaay2732
Rea, N., Israel, G. L., Esposito, P., et al. 2012, ApJ, 754, 27
Rea, N., Israel, G. L., Pons, J. A., et al. 2013, ApJ, 770, 65
Rea, N., Viganò, D., Israel, G. L., Pons, J. A., & Torres, D. F. 2014, ApJ, 781, L17
Rembiasz, T., Guilet, J., Obergaulinger, M., et al. 2016, MNRAS, 460, 3316
Rodríguez Castillo, G. A., Israel, G. L., Tiengo, A., et al. 2016, MNRAS, 456, 4145
Rowlinson, A., O'Brien, P. T., Metzger, B. D., Tanvir, N. R., & Levan, A. J. 2013, MNRAS, 430, 1061
Sawai, H., & Yamada, S. 2016, ApJ, 817, 153
Sawai, H., Yamada, S., & Suzuki, H. 2013, ApJ, 770, L19
Schaeffer, N. 2013, Geochem. Geophys. Geosyst., 14, 751
Schneider, F. R. N., Ohlmann, S. T., Podsiadlowski, P., et al. 2019, Nature, 574, 211
Shi, J., Krolik, J. H., & Hirose, S. 2010, ApJ, 708, 1716
Shi, J.-M., Stone, J. M., & Huang, C. X. 2016, MNRAS, 456, 2273
Shibata, M., Liu, Y. T., Shapiro, S. L., & Stephens, B. C. 2006, Phys. Rev. D, 74, 104026
Shultz, M. E., Wade, G. A., Rivinius, T., et al. 2018, MNRAS, 475, 5144
Siegel, D. M., Ciolfi, R., Harte, A. I., & Rezzolla, L. 2013, Phys. Rev. D, 87, 121302
Spruit, H. C. 2008, in 40 Years of Pulsars: Millisecond Pulsars, Magnetars and More, eds. C. Bassa, Z. Wang, A. Cumming, & V. M. Kaspi, Am. Inst. Phys. Conf. Ser., 983, 391
Thompson, C., & Duncan, R. C. 1993, ApJ, 408, 194
Thompson, T. A., Quataert, E., & Burrows, A. 2005, ApJ, 620, 861
Tiengo, A., Esposito, P., Mereghetti, S., et al. 2013, Nature, 500, 312
Tilgner, A., & Busse, F. H. 1997, J. Fluid Mech., 332, 359
Wei, J., Cordier, B., Antier, S., et al. 2016, ArXiv e-prints [arXiv:1610.06892]
Wicht, J. 2002, Phys. Earth Planet. Inter., 132, 281
Winteler, C., Käppeli, R., Perego, A., et al. 2012, ApJ, 750, L22
Xue, Y. Q., Zheng, X. C., Li, Y., et al. 2019, Nature, 568, 198

Appendix A: Parameters of our global simulations

Table A.1. Overview of the global models.

Name	P_m	Init length	B_0	Magnetic BCs	Dynamo	Magnetic field	Dipole	Early maximum
Units	–	$[(r_o, r_o)]$	$[10^{15}$ G]	–	–	$[10^{15}$ G]	$[10^{15}$ G]	$[10^{15}$ G]
Pm4L056-75	4.0	(0.56, 0.75)	2.0	Insulating	No	–	–	–
L034-38	16.0	(0.34, 0.38)	0.81	Insulating	Yes	2.20	0.106	3.80
L056-75	16.0	(0.56, 75)	2.0	Insulating	Yes	2.51	0.125	6.68
L024-026	16.0	(0.24, 0.26)	0.91	Insulating	Yes	2.07	0.099	2.57
Standard	16.0	(0.23, 0.38)	0.88	Insulating	Yes	2.50	0.125	2.49
PV	16.0	(0.23, 0.38)	0.91	Radial field	Yes	2.22	0.108	2.42
PVBIS	16.0	(0.23, 0.38)	0.91	Radial field	Yes	1.87	0.091	2.30
B01PV	16.0	(0.23, 0.38)	0.41	Radial field	Transient	–	–	–
B005PV	16.0	(0.23, 0.38)	0.20	Radial field	No	–	–	–
Pm8B05L015PV	8.0	(0.15, 0.38)	2.0	Radial field	Transient	–	–	–
B05L015PV	16.0	(0.15, 0.38)	2.0	Radial field	Yes	2.14	0.105	3.19
B015L015PV	16.0	(0.15, 0.38)	0.61	Radial field	Yes	2.26	0.106	1.54
PC	16.0	(0.23, 0.38)	0.91	Perfect conductor	Yes	2.63	0.133	2.42
PCBIS	16.0	(0.23, 0.38)	0.91	Perfect conductor	Yes	2.61	0.137	2.42
StandardBIS	16.0	(0.23, 0.38)	0.92	Insulating	Yes	2.04	0.092	2.56
B04L015PV	16.0	(0.15, 0.38)	1.6	Radial field	Yes	2.03	0.100	3.17
B05PV	16.0	(0.23, 0.38)	2.0	Radial field	Yes	2.21	0.098	3.39
B08L015PV	16.0	(0.15, 0.38)	3.3	Radial field	Yes	2.38	0.122	3.95
B05L008-023PV	16.0	(0.08, 0.23)	2.1	Radial field	Yes	2.11	0.102	1.66
B05PC	16.0	(0.23, 0.38)	2.1	Perfect conductor	Yes	2.58	0.131	3.39

Notes. The resolution of these simulations is $(n_r, n_\theta, n_\phi) = (257, 512, 1024)$.

Bibliographie

Abbar, Sajad, Huaiyu Duan, Kohsuke Sumiyoshi, Tomoya Takiwaki et al. (août 2019). "On the occurrence of fast neutrino flavor conversions in multidimensional supernova models". In : *Phys. Rev. D* 100.4, 043004, p. 043004. arXiv : 1812.06883 [astro-ph.HE] (cf. p. 96).

Abbott, B. P., R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, M. Afrough et al. (oct. 2017). "GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral". In : *Phys. Rev. Lett.* 119.16, 161101, p. 161101. arXiv : 1710.05832 [gr-qc] (cf. p. 45).

Abbott, B. P., R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya et et al. (oct. 2017). "Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger". In : *ApJ* 848.2, L12, p. L12. arXiv : 1710.05833 [astro-ph.HE] (cf. p. 46).

Abbott, B. P., R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese et al. (oct. 2018). "GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State". In : *Phys. Rev. Lett.* 121.16, 161101, p. 161101. arXiv : 1805.11581 [gr-qc] (cf. p. 45).

Acheson, D. J. et M. P. Gibbons (juin 1978). "On the Instability of Toroidal Magnetic Fields and Differential Rotation in Stars". In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* 289.1363, p. 459-500 (cf. p. 100).

Acheson, D. J. et R. Hide (fév. 1973). "Hydromagnetics of rotating fluids". In : *Reports on Progress in Physics* 36.2, p. 159-221 (cf. p. 125).

Agol, Eric et Julian Krolik (nov. 1998). "Photon Damping of Waves in Accretion Disks". In : *ApJ* 507.1, p. 304-315. arXiv : astro-ph/9805358 [astro-ph] (cf. p. 96).

Aguilera-Dena, David R., Norbert Langer, John Antoniadis et Bernhard Müller (oct. 2020). "Precollapse Properties of Superluminous Supernovae and Long Gamma-Ray Burst Progenitor Models". In : *ApJ* 901.2, 114, p. 114. arXiv : 2008.09132 [astro-ph.SR] (cf. p. 37, 71).

Aguilera-Dena, David R., Norbert Langer, Takashi J. Moriya et Abel Schootemeijer (mai 2018). "Related Progenitor Models for Long-duration Gamma-Ray Bursts and Type Ic Superluminous Supernovae". In : *ApJ* 858.2, 115, p. 115. arXiv : 1804.07317 [astro-ph.SR] (cf. p. 37).

Akiyama, Shizuka, J. Craig Wheeler, David L. Meier et Itamar Lichtenstadt (fév. 2003). "The Magnetorotational Instability in Core-Collapse Supernova Explosions". In : *ApJ* 584.2, p. 954-970. arXiv : astro-ph/0208128 [astro-ph] (cf. p. 36, 79, 93, 134, 169).

Alecian, E., C. Neiner, G. A. Wade, S. Mathis et al. (jan. 2015). "The BinaMIcS project: understanding the origin of magnetic fields in massive stars through close binary systems". In : *New Windows on Massive Stars*. Sous la dir. de Georges Meynet, Cyril Georgy, José Groh et Philippe Stee. T. 307, p. 330-335. arXiv : 1409.1094 [astro-ph.SR] (cf. p. 71).

Alecian, E., F. Villebrun, J. Grunhut, G. Hussain et al. (juin 2019). "Fossil magnetic fields in intermediate-mass and massive stars". In : *EAS Publications Series*. T. 82. EAS Publications Series, p. 345-355. arXiv : 1705.10650 [astro-ph.SR] (cf. p. 69).

Alfvén, H. (oct. 1942). "Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves". In : *Nature* 150.3805, p. 405-406 (cf. p. 59).

Andresen, H., R. Glas et H. -Th Janka (mai 2021). "Gravitational-wave signals from 3D supernova simulations with different neutrino-transport methods". In : *MNRAS* 503.3, p. 3552-3567. arXiv : 2011.10499 [astro-ph.HE] (cf. p. 30).

Arcavi, Iair, Avishay Gal-Yam, Mansi M. Kasliwal, Robert M. Quimby et al. (sept. 2010). "Core-collapse Supernovae from the Palomar Transient Factory: Indications for a Different Population in Dwarf Galaxies". In : *ApJ* 721.1, p. 777-784. arXiv : 1004.0615 [astro-ph.CO] (cf. p. 36).

Armitage, Philip J. (sept. 2015). "Physical processes in protoplanetary disks". In : *arXiv e-prints*, arXiv:1509.06382, arXiv:1509.06382. arXiv : 1509.06382 [astro-ph.SR] (cf. p. 81).

Ashall, C., P. A. Mazzali, E. Pian, S. E. Woosley et al. (août 2019). "GRB 161219B/SN 2016jca: a powerful stellar collapse". In : *MNRAS* 487.4, p. 5824-5839. arXiv : 1702.04339 [astro-ph.HE] (cf. p. 36).

Augustson, Kyle C., Allan Sacha Brun et Juri Toomre (oct. 2016). "The Magnetic Furnace: Intense Core Dynamos in B Stars". In : *ApJ* 829.2, 92, p. 92. arXiv : 1603.03659 [astro-ph.SR] (cf. p. 70).

Aurière, M., G. A. Wade, J. Silvester, F. Lignières et al. (déc. 2007). "Weak magnetic fields in Ap/Bp stars. Evidence for a dipole field lower limit and a tentative interpretation of the magnetic dichotomy". In : *A&A* 475.3, p. 1053-1065. arXiv : 0710.1554 [astro-ph] (cf. p. 70).

Baade, W. et F. Zwicky (mai 1934). "On Super-novae". In : *Proceedings of the National Academy of Science* 20.5, p. 254-259 (cf. p. 3).

Balbus, Steven A. et John F. Hawley (juill. 1991). "A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. I. Linear Analysis". In : *ApJ* 376, p. 214 (cf. p. 80, 85, 136, 170).

Balbus, Steven A. et Pierre Henri (fév. 2008). "On the Magnetic Prandtl Number Behavior of Accretion Disks". In : *ApJ* 674.1, p. 408-414. arXiv : 0706.0828 [astro-ph] (cf. p. 99).

Barrau, Aurélien, Carlo Rovelli et Francesca Vidotto (déc. 2014). "Fast radio bursts and white hole signals". In : *Phys. Rev. D* 90.12, 127503, p. 127503. arXiv : 1409.4031 [gr-qc] (cf. p. 49).

Beniamini, Paz, Raphaël Duque, Frédéric Daigne et Robert Mochkovitch (fév. 2020). "X-ray plateaus in gamma-ray bursts' light curves from jets viewed slightly off-axis". In : *MNRAS* 492.2, p. 2847-2857. arXiv : 1907.05899 [astro-ph.HE] (cf. p. 34).

Beniamini, Paz, Kenta Hotokezaka, Alexander van der Horst et Chryssa Kouveliotou (mai 2019). "Formation rates and evolution histories of magnetars". In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 487.1, p. 1426-1438. eprint : https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/487/1/1426/28755049/stz1391.pdf (cf. p. 10).

Berger, E., S. R. Kulkarni et D. A. Frail (sept. 2004). "The Nonrelativistic Evolution of GRBs 980703 and 970508: Beaming-independent Calorimetry". In : *ApJ* 612.2, p. 966-973. arXiv : astro-ph/0405431 [astro-ph] (cf. p. 35).

Berger, Edo (août 2014). "Short-Duration Gamma-Ray Bursts". In : *ARA&A* 52, p. 43-105. arXiv : 1311.2603 [astro-ph.HE] (cf. p. 22, 44).

Bethe, H. A. et J. R. Wilson (août 1985). "Revival of a stalled supernova shock by neutrino heating". In : *ApJ* 295, p. 14-23 (cf. p. 27).

Blandford, R. D., J. H. Applegate et L. Hernquist (sept. 1983). "Thermal origin of neutron star magnetic fields." In : *MNRAS* 204, p. 1025-1048 (cf. p. 15, 55).

Bloom, J. S., S. G. Djorgovski, S. R. Kulkarni et D. A. Frail (nov. 1998). "The Host Galaxy of GRB 970508". In : *ApJ* 507.1, p. L25-L28. arXiv : astro-ph/9807315 [astro-ph] (cf. p. 33).

Bloom, J. S., D. A. Frail et S. R. Kulkarni (sept. 2003). "Gamma-Ray Burst Energetics and the Gamma-Ray Burst Hubble Diagram: Promises and Limitations". In : *ApJ* 594.2, p. 674-683. arXiv : astro-ph/0302210 [astro-ph] (cf. p. 34).

Blumer, Harsha, Samar Safi-Harb, Maura A. McLaughlin et William Fiore (avr. 2021). "Reactivation of the High Magnetic Field Pulsar PSR J1846-0258 with Magnetar-like Bursts". In : *ApJ* 911.1, L6, p. L6. arXiv : 2103.12557 [astro-ph.HE] (cf. p. 15).

Bochenek, C. D., V. Ravi, K. V. Belov, G. Hallinan et al. (nov. 2020). "A fast radio burst associated with a Galactic magnetar". In : *Nature* 587.7832, p. 59-62. arXiv : 2005.10828 [astro-ph.HE] (cf. p. 48).

Bodo, G., F. Cattaneo, A. Ferrari, A. Mignone et al. (oct. 2011). "Symmetries, Scaling Laws, and Convergence in Shearing-box Simulations of Magneto-rotational Instability Driven Turbulence". In : *ApJ* 739.2, 82, p. 82. arXiv : 1106.5727 [astro-ph.HE] (cf. p. 87).

Bodo, G., F. Cattaneo, A. Mignone et P. Rossi (mai 2014). "On the Convergence of Magnetorotational Turbulence in Stratified Isothermal Shearing Boxes". In : *ApJ* 787.1, L13, p. L13. arXiv : 1404.6079 [astro-ph.HE] (cf. p. 91).

Boggs, Steven E., A. Zoglauer, E. Bellm, K. Hurley et al. (mai 2007). "The Giant Flare of 2004 December 27 from SGR 1806-20". In : *ApJ* 661.1, p. 458-467. arXiv : astro-ph/0611318 [astro-ph] (cf. p. 21).

Bollig, Robert, Naveen Yadav, Daniel Kresse, Hans-Thomas Janka et al. (juill. 2021). "Self-consistent 3D Supernova Models From -7 Minutes to +7 s: A 1-bethe Explosion of a 19 $M_\odot$ Progenitor". In : *ApJ* 915.1, 28, p. 28. arXiv : 2010.10506 [astro-ph.HE] (cf. p. 30).

Boscarino, Sebastiano, Lorenzo Pareschi et Giovanni Russo (2013). "Implicit-explicit Runge–Kutta schemes for hyperbolic systems and kinetic equations in the diffusion limit". In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 35.1, A22-A51 (cf. p. 121).

Boussinesq, Joseph (1903). *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonic avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière: Tome I-[II]...* T. 2. Gauthier-Villars (cf. p. 108).

Braginsky, SI (1964). "Magnetohydrodynamics of the Earth's core". In : *Geomag. Aeron.* 4, p. 698-712 (cf. p. 108).

Braginsky, Stanislav I. et Paul H. Roberts (jan. 1995). "Equations governing convection in earth's core and the geodynamo". In : *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 79.1, p. 1-97 (cf. p. 112, 195).

Braithwaite, J. (avr. 2006). "A differential rotation driven dynamo in a stably stratified star". In : *A&A* 449.2, p. 451-460. arXiv : astro-ph/0509693 [astro-ph] (cf. p. 70).

Braithwaite, Jonathan et Hendrik C. Spruit (oct. 2004). "A fossil origin for the magnetic field in A stars and white dwarfs". In : *Nature* 431.7010, p. 819-821. arXiv : astro-ph/0502043 [astro-ph] (cf. p. 70).

Brandenberger, Robert, Bryce Cyr et Aditya Varna Iyer (juill. 2017). "Fast Radio Bursts from the Decay of Cosmic String Cusps". In : *arXiv e-prints*, arXiv:1707.02397, arXiv:1707.02397. arXiv : 1707.02397 [astro-ph.CO] (cf. p. 49).

Brandenburg, A. (sept. 2008). "The dual role of shear in large-scale dynamos". In : *Astronomische Nachrichten* 329.7, p. 725. arXiv : 0808.0959 [astro-ph] (cf. p. 194).

Brandenburg, Axel, Ake Nordlund, Robert F. Stein et Ulf Torkelsson (juin 1995). "Dynamo-generated Turbulence and Large-Scale Magnetic Fields in a Keplerian Shear Flow". In : *ApJ* 446, p. 741 (cf. p. 91, 92).

Bretz, Joseph, C. A. van Eysden et Bennett Link (juill. 2021). "Tangled magnetic field model of QPOs". In : *MNRAS* 504.4, p. 5880-5898 (cf. p. 22).

Brott, I., S. E. de Mink, M. Cantiello, N. Langer et al. (juin 2011). "Rotating massive main-sequence stars. I. Grids of evolutionary models and isochrones". In : *A&A* 530, A115, A115. arXiv : 1102.0530 [astro-ph.SR] (cf. p. 37).

Brown, Benjamin P., Geoffrey M. Vasil et Ellen G. Zweibel (sept. 2012). "Energy Conservation and Gravity Waves in Sound-proof Treatments of Stellar Interiors. Part I. Anelastic Approximations". In : *ApJ* 756.2, 109, p. 109. arXiv : 1207.2804 [astro-ph.SR] (cf. p. 112, 195).

Bruenn, Stephen W. et Tamara Dineva (fév. 1996). "The Role of Doubly Diffusive Instabilities in the Core-Collapse Supernova Mechanism". In : *ApJ* 458, p. L71 (cf. p. 96).

Bruni, G., B. O'Connor, T. Matsumoto, E. Troja et al. (mai 2021). "Late-time radio observations of the short GRB 200522A: constraints on the magnetar model". In : *MNRAS*. arXiv : 2105.01440 [astro-ph.HE] (cf. p. 45).

Bucciantini, N., B. D. Metzger, T. A. Thompson et E. Quataert (jan. 2012). "Short gamma-ray bursts with extended emission from magnetar birth: jet formation and collimation". In : *MNRAS* 419.2, p. 1537-1545. arXiv : 1106.4668 [astro-ph.HE] (cf. p. 47).

Bugli, M., J. Guilet, M. Obergaulinger, P. Cerdá-Durán et al. (fév. 2020). "The impact of non-dipolar magnetic fields in core-collapse supernovae". In : *MNRAS* 492.1, p. 58-71. arXiv : 1909.02824 [astro-ph.HE] (cf. p. 38, 93, 123, 134, 158, 169, 197, 207).

Bugli, Matteo, Jérôme Guilet et Martin Obergaulinger (mai 2021). "Three-dimensional core-collapse supernovae with complex magnetic structures: I. Explosion dynamics". In : *arXiv e-prints*, arXiv:2105.00665, arXiv:2105.00665. arXiv : 2105.00665 [astro-ph.HE] (cf. p. 38, 93, 197, 207).

Buras, R., M. Rampp, H. -Th. Janka et K. Kifonidis (mars 2006). "Two-dimensional hydrodynamic core-collapse supernova simulations with spectral neutrino transport. I. Numerical method and results for a 15 $M_\odot$ star". In : *A&A* 447.3, p. 1049-1092. arXiv : astro-ph/0507135 [astro-ph] (cf. p. 74).

Burrows, A., L. Dessart, E. Livne, C. D. Ott et al. (juill. 2007). "Simulations of Magnetically Driven Supernova and Hypernova Explosions in the Context of Rapid Rotation". In : *ApJ* 664.1, p. 416-434. arXiv : astro-ph/0702539 [astro-ph] (cf. p. 38, 40).

Burrows, A. et J. M. Lattimer (jan. 1988). "Convection, Type II supernovae, and the early evolution of neutron stars." In : *Phys. Rep.* 163.1, p. 51-62 (cf. p. 98).

Burrows, Adam (juill. 1987). "Convection and the Mechanism of Type II Supernovae". In : *ApJ* 318, p. L57 (cf. p. 74).

Burrows, Adam, David Radice, David Vartanyan, Hiroki Nagakura et al. (jan. 2020). "The overarching framework of core-collapse supernova explosions as revealed by 3D FORNAX simulations". In : *MNRAS* 491.2, p. 2715-2735. arXiv : 1909.04152 [astro-ph.HE] (cf. p. 30).

Busse, Friedrich H. et Radostin D. Simitev (oct. 2006). "Parameter dependences of convection-driven dynamos in rotating spherical fluid shells". In : *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 100.4, p. 341-361. arXiv : 0904.4293 [physics.flu-dyn] (cf. p. 182).

Cantiello, M., S. -C. Yoon, N. Langer et M. Livio (avr. 2007). "Binary star progenitors of long gamma-ray bursts". In : *A&A* 465.2, p. L29-L33. arXiv : astro-ph/0702540 [astro-ph] (cf. p. 37).

Carrier, F., P. North, S. Udry et J. Babel (oct. 2002). "Multiplicity among chemically peculiar stars. II. Cool magnetic Ap stars". In : *A&A* 394, p. 151-169. arXiv : astro-ph/0208082 [astro-ph] (cf. p. 71).

Catchpole, R. M., J. W. Menzies, A. S. Monk, W. F. Wargau et al. (nov. 1987). "Spectroscopic and photometric observations of SN 1987A- II. Days 51 to134." In : *MNRAS* 229, 15P-25 (cf. p. 30).

Cerdá-Durán, Pablo, Nicolas DeBrye, Miguel A. Aloy, José A. Font et al. (déc. 2013). "Gravitational Wave Signatures in Black Hole Forming Core Collapse". In : *ApJ* 779.2, L18, p. L18. arXiv : 1310.8290 [astro-ph.SR] (cf. p. 39).

Chadwick, J. (juin 1932). "The Existence of a Neutron". In : *Proceedings of the Royal Society of London Series A* 136.830, p. 692-708 (cf. p. 3).

Chandrasekhar, S (1960). "The stability of non-dissipative Couette flow in hydromagnetics". In : *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 46.2, p. 253 (cf. p. 80).

Charbonneau, Paul (jan. 2013). *Solar and Stellar Dynamos*. Saas-Fee Advanced Course (cf. p. 54, 70).

Chen, Ting-Wan, Stephen J. Smartt, Rob M. Yates, Matt Nicholl et al. (sept. 2017). "Superluminous supernova progenitors have a half-solar metallicity threshold". In : *MNRAS* 470.3, p. 3566-3573. arXiv : 1605.04925 [astro-ph.GA] (cf. p. 32).

Christensen, U.R. et J. Wicht (2015). "8.10 - Numerical Dynamo Simulations". In : *Treatise on Geophysics (Second Edition)*. Sous la dir. de Gerald Schubert. Second Edition. Oxford : Elsevier, p. 245-277 (cf. p. 117, 134, 169).

Ciolfi, Riccardo, Wolfgang Kastaun, Jay Vijay Kalinani et Bruno Giacomazzo (juill. 2019). "First 100 ms of a long-lived magnetized neutron star formed in a binary neutron star merger". In : *Phys. Rev. D* 100.2, 023005, p. 023005. arXiv : 1904.10222 [astro-ph.HE] (cf. p. 47, 159, 197, 208).

Cline, T. L., U. D. Desai, B. J. Teegarden, W. D. Evans et al. (avr. 1982). "Precise source location of the anomalous 1979 March 5 gamma-ray transient." In : *ApJ* 255, p. L45-L48 (cf. p. 11).

Colgate, Stirling A. et Richard H. White (mars 1966). "The Hydrodynamic Behavior of Supernovae Explosions". In : *ApJ* 143, p. 626 (cf. p. 26).

Cordes, James M. et Shami Chatterjee (août 2019). "Fast Radio Bursts: An Extragalactic Enigma". In : *ARA&A* 57, p. 417-465. arXiv : 1906.05878 [astro-ph.HE] (cf. p. 49).

Courant, Richard, Kurt Friedrichs et Hans Lewy (1928). "Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik". In : *Mathematische annalen* 100.1, p. 32-74 (cf. p. 115).

Cowling, T. G. (nov. 1933). "The magnetic field of sunspots". In : *MNRAS* 94, p. 39-48 (cf. p. 59).

Cowperthwaite, P. S., E. Berger, V. A. Villar, B. D. Metzger et al. (oct. 2017). "The Electromagnetic Counterpart of the Binary Neutron Star Merger LIGO/Virgo GW170817. II. UV, Optical, and Near-infrared Light Curves and Comparison to Kilonova Models". In : *ApJ* 848.2, L17, p. L17. arXiv : 1710.05840 [astro-ph.HE] (cf. p. 45).

Dall'Osso, S., G. Stratta, D. Guetta, S. Covino et al. (fév. 2011). "Gamma-ray bursts afterglows with energy injection from a spinning down neutron star". In : *A&A* 526, A121, A121. arXiv : 1004.2788 [astro-ph.HE] (cf. p. 42).

Davis, Shane W., James M. Stone et Martin E. Pessah (avr. 2010). "Sustained Magnetorotational Turbulence in Local Simulations of Stratified Disks with Zero Net Magnetic Flux". In : *ApJ* 713.1, p. 52-65. arXiv : 0909.1570 [astro-ph.HE] (cf. p. 91).

de Mink, S. E., H. Sana, N. Langer, R. G. Izzard et al. (fév. 2014). "The Incidence of Stellar Mergers and Mass Gainers among Massive Stars". In : *ApJ* 782.1, 7, p. 7. arXiv : 1312.3650 [astro-ph.SR] (cf. p. 71).

Delfan Azari, Milad, Shoichi Yamada, Taiki Morinaga, Hiroki Nagakura et al. (jan. 2020). "Fast collective neutrino oscillations inside the neutrino sphere in core-collapse supernovae". In : *Phys. Rev. D* 101.2, 023018, p. 023018. arXiv : 1910.06176 [astro-ph.HE] (cf. p. 96).

Deng, Hongping, Lucio Mayer, Henrik Latter, Philip F. Hopkins et al. (avr. 2019). "Local Simulations of MRI turbulence with Meshless Methods". In : *The Astrophysical Journal Supplement Series* 241.2, p. 26 (cf. p. 91).

Dessart, L., A. Burrows, E. Livne et C. D. Ott (jan. 2008). "The Proto-Neutron Star Phase of the Collapsar Model and the Route to Long-Soft Gamma-Ray Bursts and Hypernovae". In : *ApJ* 673.1, p. L43. arXiv : 0710.5789 [astro-ph] (cf. p. 38).

Dessart, Luc et Edouard Audit (mai 2018). "Super-luminous Type II supernovae powered by magnetars". In : *A&A* 613, A5, A5. arXiv : 1712.04492 [astro-ph.HE] (cf. p. 41).

Dessart, Luc, D. John Hillier, Roni Waldman, Eli Livne et al. (oct. 2012). "Superluminous supernovae: ^{56}Ni power versus magnetar radiation". In : *MNRAS* 426.1, p. L76-L80. arXiv : 1208.1214 [astro-ph.SR] (cf. p. 41, 42).

Dessart, Luc, Evan O'Connor et Christian D. Ott (juill. 2012). "The Arduous Journey to Black Hole Formation in Potential Gamma-Ray Burst Progenitors". In : *ApJ* 754.1, 76, p. 76. arXiv : 1203.1926 [astro-ph.HE] (cf. p. 42).

Detmers, R. G., N. Langer, Ph. Podsiadlowski et R. G. Izzard (juin 2008). "Gamma-ray bursts from tidally spun-up Wolf-Rayet stars?" In : *A&A* 484.3, p. 831-839. arXiv : 0804.0014 [astro-ph] (cf. p. 37).

Dib, Rim et Victoria M. Kaspi (mars 2014). "16 yr of RXTE Monitoring of Five Anomalous X-Ray Pulsars". In : *ApJ* 784.1, 37, p. 37. arXiv : 1401.3085 [astro-ph.HE] (cf. p. 18).

Dib, Rim, Victoria M. Kaspi et Fotis P. Gavriil (fév. 2008). "Glitches in Anomalous X-Ray Pulsars". In : *ApJ* 673.2, p. 1044-1061 (cf. p. 19).

Donati, J. -F. et J. D. Landstreet (sept. 2009). "Magnetic Fields of Nondegenerate Stars". In : *ARA&A* 47.1, p. 333-370. arXiv : 0904.1938 [astro-ph.SR] (cf. p. 68).

Donnelly, Cara (2014). "Shearing waves and the MRI dynamo in stratified accretion discs". Thèse de doct. University of Cambridge (cf. p. 91).

Dormy, Emmanuel et Andrew M. Soward (2007). *Mathematical Aspects of Natural Dynamos*. T. 13 (cf. p. 54, 110).

Drout, M. R., R. Chornock, A. M. Soderberg, N. E. Sanders et al. (oct. 2014). "Rapidly Evolving and Luminous Transients from Pan-STARRS1". In : *ApJ* 794.1, 23, p. 23. arXiv : 1405.3668 [astro-ph.HE] (cf. p. 51).

Duez, V. (déc. 2011). "Numerical simulations of magnetic relaxation in rotating stellar radiation zones". In : *Astronomische Nachrichten* 332, p. 983 (cf. p. 70).

Duez, V., J. Braithwaite et S. Mathis (nov. 2010). "On the Stability of Non-force-free Magnetic Equilibria in Stars". In : *ApJ* 724.1, p. L34-L38. arXiv : 1009.5384 [astro-ph.SR] (cf. p. 70).

Duffell, Paul C. et Andrew I. MacFadyen (juin 2015). "From Engine to Afterglow: Collapsars Naturally Produce Top-heavy Jets and Early-time Plateaus in Gamma-Ray Burst Afterglows". In : *ApJ* 806.2, 205, p. 205. arXiv : 1407.8250 [astro-ph.HE] (cf. p. 34).

Dvornikov, Maxim, V. B. Semikoz et D. D. Sokoloff (avr. 2020). "Generation of strong magnetic fields in a nascent neutron star accounting for the chiral magnetic effect". In : *Phys. Rev. D* 101.8, 083009, p. 083009. arXiv : 2001.08139 [astro-ph.HE] (cf. p. 55).

Eichler, David, Mario Livio, Tsvi Piran et David N. Schramm (juill. 1989). "Nucleosynthesis, neutrino bursts and γ-rays from coalescing neutron stars". In : *Nature* 340.6229, p. 126-128 (cf. p. 43).

Epstein, R. I. (août 1979). "Lepton-driven convection in supernovae." In : *MNRAS* 188, p. 305-325 (cf. p. 73, 74).

Evans, W. D., R. W. Klebesadel, J. G. Laros, T. L. Cline et al. (avr. 1980). "Location of the gamma-ray transient event of 1979 March 5". In : *ApJ* 237, p. L7-L9 (cf. p. 21).

Fang, Ke, Brian D. Metzger, Kohta Murase, Imre Bartos et al. (juin 2019). "Multimessenger Implications of AT2018cow: High-energy Cosmic-Ray and Neutrino Emissions from Magnetar-powered Superluminous Transients". In : *ApJ* 878.1, 34, p. 34. arXiv : 1812.11673 [astro-ph.HE] (cf. p. 51).

Fernández, Rodrigo, Alexander Tchekhovskoy, Eliot Quataert, Francois Foucart et al. (jan. 2019). "Long-term GRMHD simulations of neutron star merger accretion discs: implications for electromagnetic counterparts". In : *MNRAS* 482.3, p. 3373-3393. arXiv : 1808.00461 [astro-ph.HE] (cf. p. 47).

Ferrario, Lilia et Dayal Wickramasinghe (avr. 2006). "Modelling of isolated radio pulsars and magnetars on the fossil field hypothesis". In : *MNRAS* 367.3, p. 1323-1328. arXiv : astro-ph/0601258 [astro-ph] (cf. p. 69).

Fong, W., T. Laskar, J. Rastinejad, A. Rouco Escorial et al. (jan. 2021). "The Broadband Counterpart of the Short GRB 200522A at z = 0.5536: A Luminous Kilonova or a Collimated Outflow with a Reverse Shock?" In : *ApJ* 906.2, 127, p. 127. arXiv : 2008.08593 [astro-ph.HE] (cf. p. 197, 208).

Fromang, S. (mai 2010). "MHD simulations of the magnetorotational instability in a shearing box with zero net flux: the case Pm = 4". In : *A&A* 514, L5, p. L5. arXiv : 1004.2382 [astro-ph.HE] (cf. p. 141).

Fromang, S. (sept. 2013). "MRI-driven angular momentum transport in protoplanetary disks". In : *EAS Publications Series*. Sous la dir. de P. Hennebelle et C. Charbonnel. T. 62. EAS Publications Series, p. 95-142. arXiv : 1305.3416 [astro-ph.SR] (cf. p. 81, 88).

Fromang, S. et J. Papaloizou (déc. 2007). "MHD simulations of the magnetorotational instability in a shearing box with zero net flux. I. The issue of convergence". In : *A&A* 476.3, p. 1113-1122. arXiv : 0705.3621 [astro-ph] (cf. p. 87, 194).

Fromang, S., J. Papaloizou, G. Lesur et T. Heinemann (déc. 2007). "MHD simulations of the magnetorotational instability in a shearing box with zero net flux. II. The effect of transport coefficients". In : *A&A* 476.3, p. 1123-1132. arXiv : 0705.3622 [astro-ph] (cf. p. 87, 89, 90, 143, 151, 156, 194).

Fuller, Jim, Matteo Cantiello, Dennis Stello, Rafael A. Garcia et al. (oct. 2015). "Asteroseismology can reveal strong internal magnetic fields in red giant stars". In : *Science* 350.6259, p. 423-426. arXiv : 1510.06960 [astro-ph.SR] (cf. p. 69).

Fuller, Jim, Anthony L. Piro et Adam S. Jermyn (mai 2019). "Slowing the spins of stellar cores". In : *MNRAS* 485.3, p. 3661-3680. arXiv : 1902.08227 [astro-ph.SR] (cf. p. 170).

Gabler, Michael, Pablo Cerdá-Durán, Nikolaos Stergioulas, José A. Font et al. (mai 2018). "Constraining properties of high-density matter in neutron stars with magneto-elastic oscillations". In : *MNRAS* 476.3, p. 4199-4212. arXiv : 1710.02334 [astro-ph.HE] (cf. p. 22).

Gal-Yam, Avishay (août 2012). "Luminous Supernovae". In : *Science* 337.6097, p. 927. arXiv : 1208.3217 [astro-ph.CO] (cf. p. 31).

Gal-Yam, Avishay (août 2019). "The Most Luminous Supernovae". In : *ARA&A* 57, p. 305-333. arXiv : 1812.01428 [astro-ph.HE] (cf. p. 31, 32, 43).

Gastine, T., L. Duarte et J. Wicht (oct. 2012). "Dipolar versus multipolar dynamos: the influence of the background density stratification". In : *A&A* 546, A19, A19. arXiv : 1208.6093 [astro-ph.SR] (cf. p. 76, 182).

Gastine, T. et J. Wicht (2012). "Effects of compressibility on driving zonal flow in gas giants". In : *Icarus* 219.1, p. 428-442 (cf. p. 117, 133, 168).

Gastine, T. et J. Wicht (déc. 2020). "Stable stratification promotes multiple zonal jets in a turbulent Jovian dynamo model". In : *arXiv e-prints*, arXiv:2012.06438, arXiv:2012.06438. arXiv : 2012.06438 [astro-ph.EP] (cf. p. 196).

Gaurat, M., L. Jouve, F. Lignières et T. Gastine (août 2015). "Evolution of a magnetic field in a differentially rotating radiative zone". In : *A&A* 580, A103, A103. arXiv : 1507.01508 [astro-ph.SR] (cf. p. 102).

Gavriil, F. P., M. E. Gonzalez, E. V. Gotthelf, V. M. Kaspi et al. (mars 2008). "Magnetar-Like Emission from the Young Pulsar in Kes 75". In : *Science* 319.5871, p. 1802. arXiv : 0802.1704 [astro-ph] (cf. p. 15).

Gavriil, F. P., V. M. Kaspi et P. M. Woods (sept. 2002). "Magnetar-like X-ray bursts from an anomalous X-ray pulsar". In : *Nature* 419.6903, p. 142-144. arXiv : astro-ph/0209202 [astro-ph] (cf. p. 12).

Gehrels, N., E. Ramirez-Ruiz et D. B. Fox (sept. 2009). "Gamma-Ray Bursts in the Swift Era". In : *ARA&A* 47.1, p. 567-617. arXiv : 0909.1531 [astro-ph.HE] (cf. p. 36).

Geng, J. J. et Y. F. Huang (août 2015). "Fast Radio Bursts: Collisions between Neutron Stars and Asteroids/Comets". In : *ApJ* 809.1, 24, p. 24. arXiv : 1502.05171 [astro-ph.HE] (cf. p. 49).

Geppert, U. et H. -J. Wiebicke (fév. 1991). "Amplification of neutron star magnetic fields by thermoelectric effects. I - General formalism". In : *A&AS* 87.2, p. 217-228 (cf. p. 15).

Gilman, P. A. et G. A. Glatzmaier (fév. 1981). "Compressible convection in a rotating spherical shell. I - Anelastic equations. II - A linear anelastic model. III - Analytic model for compressible vorticity waves". In : *ApJS* 45, p. 335-388 (cf. p. 117, 134, 169).

Glas, Robert, H-Thomas Janka, Tobias Melson, Georg Stockinger et al. (2019). "Effects of LESA in three-dimensional supernova simulations with multidimensional and ray-by-ray-plus neutrino transport". In : *The Astrophysical Journal* 881.1, p. 36 (cf. p. 74, 76).

Glatzmaier, Gary A (2013). *Introduction to Modeling Convection in Planets and Stars*. Princeton University Press (cf. p. 113).

Göğüş, Ersin, Lin Lin, Yuki Kaneko, Chryssa Kouveliotou et al. (oct. 2016). "Magnetar-like X-Ray Bursts from a Rotation-powered Pulsar, PSR J1119-6127". In : *ApJ* 829.2, L25, p. L25. arXiv : 1608.07133 [astro-ph.HE] (cf. p. 15).

Goldreich, P. et S. V. Weber (juin 1980). "Homologously collapsing stellar cores". In : *ApJ* 238, p. 991-997 (cf. p. 26).

Gompertz, B. P., P. T. O'Brien et G. A. Wynn (fév. 2014). "Magnetar powered GRBs: explaining the extended emission and X-ray plateau of short GRB light curves". In : *MNRAS* 438.1, p. 240-250. arXiv : 1311.1505 [astro-ph.HE] (cf. p. 47).

Goodman, Jeremy et Guohong Xu (sept. 1994). "Parasitic Instabilities in Magnetized, Differentially Rotating Disks". In : *ApJ* 432, p. 213 (cf. p. 86).

Gossard, Earl E et William H Hooke (1975). "Waves in the atmosphere: atmospheric infrasound and gravity waves-their generation and propagation". In : *Atmospheric Science* 2 (cf. p. 128).

Götz, D., S. Mereghetti, S. Molkov, K. Hurley et al. (jan. 2006). "Two years of INTEGRAL monitoring of the soft gamma-ray repeater SGR 1806-20: from quiescence to frenzy". In : *A&A* 445.1, p. 313-321. arXiv : astro-ph/0508615 [astro-ph] (cf. p. 21).

Gough, D. O. (mai 1969). "The Anelastic Approximation for Thermal Convection." In : *Journal of Atmospheric Sciences* 26.3, p. 448-456 (cf. p. 108).

Gregory, P. C. et G. G. Fahlman (oct. 1980). "An extraordinary new celestial X-ray source". In : *Nature* 287.5785, p. 805-806 (cf. p. 12).

Gressel, Oliver (juin 2010). "A mean-field approach to the propagation of field patterns in stratified magnetorotational turbulence". In : *MNRAS* 405.1, p. 41-48. arXiv : 1001.5250 [astro-ph.EP] (cf. p. 91, 92).

Gressel, Oliver et Martin E. Pessah (sept. 2015). "Characterizing the Mean-field Dynamo in Turbulent Accretion Disks". In : *ApJ* 810.1, 59, p. 59. arXiv : 1507.08634 [astro-ph.HE] (cf. p. 92, 182, 194).

Grimmett, J. J., Bernhard Müller, Alexander Heger, Projjwal Banerjee et al. (fév. 2021). "The chemical signature of jet-driven hypernovae". In : *MNRAS* 501.2, p. 2764-2781. arXiv : 2010.06766 [astro-ph.HE] (cf. p. 38).

Grunhut, J. H., G. A. Wade, C. Neiner, M. E. Oksala et al. (fév. 2017). "The MiMeS survey of Magnetism in Massive Stars: magnetic analysis of the O-type stars". In : *MNRAS* 465.2, p. 2432-2470. arXiv : 1610.07895 [astro-ph.SR] (cf. p. 69).

Guan, Xiaoyue et Charles F. Gammie (fév. 2011). "Radially Extended, Stratified, Local Models of Isothermal Disks". In : *ApJ* 728.2, 130, p. 130. arXiv : 1012.3789 [astro-ph.HE] (cf. p. 91).

Guan, Xiaoyue, Charles F. Gammie, Jacob B. Simon et Bryan M. Johnson (avr. 2009). "Locality of MHD Turbulence in Isothermal Disks". In : *ApJ* 694.2, p. 1010-1018. arXiv : 0901.0273 [astro-ph.GA] (cf. p. 87).

Gubbins, David et Keke Zhang (jan. 1993). "Symmetry properties of the dynamo equations for palaeomagnetism and geomagnetism". In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 75.4, p. 225-241 (cf. p. 177, 193).

Guilet, Jérôme, Andreas Bauswein, Oliver Just et Hans-Thomas Janka (oct. 2017). "Magnetorotational instability in neutron star mergers: impact of neutrinos". In : *MNRAS* 471.2, p. 1879-1887. arXiv : 1610.08532 [astro-ph.HE] (cf. p. 158, 197, 208).

Guilet, Jérôme et Ewald Müller (juin 2015). "Numerical simulations of the magnetorotational instability in protoneutron stars - I. Influence of buoyancy". In : *MNRAS* 450.2, p. 2153-2171. arXiv : 1501.07636 [astro-ph.HE] (cf. p. 100, 101, 113, 127, 135, 148, 156, 170, 171, 188).

Guilet, Jérôme, Ewald Müller et Hans-Thomas Janka (mars 2015). "Neutrino viscosity and drag: impact on the magnetorotational instability in protoneutron stars". In : *MNRAS* 447.4, p. 3992-4003. arXiv : 1410.1874 [astro-ph.HE] (cf. p. 96-99, 113, 133, 137, 143, 155, 156, 194).

Hale, George E. (nov. 1908). "On the Probable Existence of a Magnetic Field in Sun-Spots". In : *ApJ* 28, p. 315 (cf. p. 60).

Hathaway, David H. (sept. 2015). "The Solar Cycle". In : *Living Reviews in Solar Physics* 12.1, 4, p. 4. arXiv : 1502.07020 [astro-ph.SR] (cf. p. 60).

Hawley, John F. et Steven A. Balbus (juill. 1991). "A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. II. Nonlinear Evolution". In : *ApJ* 376, p. 223 (cf. p. 86).

Hawley, John F. et Steven A. Balbus (déc. 1992). "A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. III. Long-Term Evolution in a Shearing Sheet". In : *ApJ* 400, p. 595 (cf. p. 85, 86).

Hawley, John F., Charles F. Gammie et Steven A. Balbus (fév. 1995). "Local Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Accretion Disks". In : *ApJ* 440, p. 742 (cf. p. 86).

Hawley, John F., Charles F. Gammie et Steven A. Balbus (juin 1996). "Local Three-dimensional Simulations of an Accretion Disk Hydromagnetic Dynamo". In : *ApJ* 464, p. 690 (cf. p. 87).

Hawley, John F., Xiaoyue Guan et Julian H. Krolik (sept. 2011). "Assessing Quantitative Results in Accretion Simulations: From Local to Global". In : *ApJ* 738.1, 84, p. 84. arXiv : 1103.5987 [astro-ph.HE] (cf. p. 152, 153).

Heger, A., N. Langer et S. E. Woosley (jan. 2000). "Presupernova Evolution of Rotating Massive Stars. I. Numerical Method and Evolution of the Internal Stellar Structure". In : *ApJ* 528.1, p. 368-396. arXiv : astro-ph/9904132 [astro-ph] (cf. p. 37).

Helfand, David J., R. H. Becker, G. Hawkins et R. L. White (oct. 1994). "The Nature of the Compact X-Ray Source in the Supernova Remnant G27.4+0.0". In : *ApJ* 434, p. 627 (cf. p. 12).

Herault, J., F. Rincon, C. Cossu, G. Lesur et al. (sept. 2011). "Periodic magnetorotational dynamo action as a prototype of nonlinear magnetic-field generation in shear flows". In : *Phys. Rev. E* 84.3, 036321, p. 036321. arXiv : 1109.1811 [astro-ph.SR] (cf. p. 90-92).

Hillebrandt, W., K. Nomoto et R. G. Wolff (avr. 1984). "Supernova explosions of massive stars - The mass range 8 to 10 solar masses". In : *A&A* 133.1, p. 175-184 (cf. p. 24).

Hjorth, Jens, Jesper Sollerman, Palle Møller, Johan P. U. Fynbo et al. (juin 2003). "A very energetic supernova associated with the γ-ray burst of 29 March 2003". In : *Nature* 423.6942, p. 847-850. arXiv : astro-ph/0306347 [astro-ph] (cf. p. 35, 37).

Horvath, J. E., P. H. R. S. Moraes, M. G. B. de Avellar et L. S. Rocha (juin 2021). "Fast Radio Bursts as crustal dynamical events induced by magnetic field evolution in young magnetars". In : *arXiv e-prints*, arXiv:2106.15030, arXiv:2106.15030. arXiv : 2106.15030 [astro-ph.HE] (cf. p. 49).

Hüdepohl, Lorenz (2014). "Neutrinos from the formation, cooling, and black hole collapse of neutron stars". eng. Thèse de doct. München : Technische Universität (cf. p. 74, 76, 126, 166, 199).

Hulse, R. A. et J. H. Taylor (jan. 1975). "Discovery of a pulsar in a binary system." In : *ApJ* 195, p. L51-L53 (cf. p. 43).

Huppenkothen, D., C. D'Angelo, A. L. Watts, L. Heil et al. (juin 2014). "Quasi-periodic Oscillations in Short Recurring Bursts of the Soft Gamma Repeater J1550-5418". In : *ApJ* 787.2, 128, p. 128. arXiv : 1404.2756 [astro-ph.HE] (cf. p. 22).

Hurley, K., S. E. Boggs, D. M. Smith, R. C. Duncan et al. (avr. 2005). "An exceptionally bright flare from SGR 1806-20 and the origins of short-duration γ-ray bursts". In : *Nature* 434.7037, p. 1098-1103. arXiv : astro-ph/0502329 [astro-ph] (cf. p. 21, 23).

Hurley, K., T. Cline, E. Mazets, S. Barthelmy et al. (jan. 1999). "A giant periodic flare from the soft γ-ray repeater SGR1900+14". In : *Nature* 397.6714, p. 41-43. arXiv : astro-ph/9811443 [astro-ph] (cf. p. 21).

Hurley, K., A. Rowlinson, E. Bellm, D. Perley et al. (mars 2010). "A new analysis of the short-duration, hard-spectrum GRB 051103, a possible extragalactic soft gamma repeater giant flare". In : *MNRAS* 403.1, p. 342-352. arXiv : 0907.2462 [astro-ph.HE] (cf. p. 22).

Inserra, C., M. Nicholl, T. -W. Chen, A. Jerkstrand et al. (juill. 2017). "Complexity in the light curves and spectra of slow-evolving superluminous supernovae". In : *MNRAS* 468.4, p. 4642-4662. arXiv : 1701.00941 [astro-ph.HE] (cf. p. 41).

Inserra, C., S. J. Smartt, A. Jerkstrand, S. Valenti et al. (juin 2013). "Super-luminous Type Ic Supernovae: Catching a Magnetar by the Tail". In : *ApJ* 770.2, 128, p. 128. arXiv : 1304.3320 [astro-ph.HE] (cf. p. 41).

Ioka, Kunihito et Takashi Nakamura (avr. 2018). "Can an off-axis gamma-ray burst jet in GW170817 explain all the electromagnetic counterparts?" In : *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2018.4, 043E02, 043E02. arXiv : 1710.05905 [astro-ph.HE] (cf. p. 47).

Israel, G. L., T. Belloni, L. Stella, Y. Rephaeli et al. (juill. 2005). "The Discovery of Rapid X-Ray Oscillations in the Tail of the SGR 1806-20 Hyperflare". In : *ApJ* 628.1, p. L53-L56. arXiv : astro-ph/0505255 [astro-ph] (cf. p. 22).

Israel, G. L., S. Mereghetti et L. Stella (sept. 1994). "The Discovery of 8.7 Second Pulsations from the Ultrasoft X-Ray Source 4U 0142+61". In : *ApJ* 433, p. L25. arXiv : astro-ph/9407092 [astro-ph] (cf. p. 12).

Janka, H. -Th. (mars 2001). "Conditions for shock revival by neutrino heating in core-collapse supernovae". In : *A&A* 368, p. 527-560. arXiv : astro-ph/0008432 [astro-ph] (cf. p. 27).

Janka, Hans-Thomas (2017). "Neutrino-Driven Explosions". In : *Handbook of Supernovae*. Sous la dir. d'Athem W. Alsabti et Paul Murdin, p. 1095 (cf. p. 28, 30).

Jedamzik, Karsten, Višnja Katalinić et Angela V. Olinto (mars 1998). "Damping of cosmic magnetic fields". In : *Phys. Rev. D* 57.6, p. 3264-3284. arXiv : astro-ph/9606080 [astro-ph] (cf. p. 96).

Jerkstrand, A., S. J. Smartt, C. Inserra, M. Nicholl et al. (jan. 2017). "Long-duration Superluminous Supernovae at Late Times". In : *ApJ* 835.1, 13, p. 13. arXiv : 1608.02994 [astro-ph.HE] (cf. p. 41).

Jones, C. A., P. Boronski, A. S. Brun, G. A. Glatzmaier et al. (nov. 2011). "Anelastic convection-driven dynamo benchmarks". In : *Icarus* 216.1, p. 120-135 (cf. p. 108, 168).

Jones, C. A., K. M. Kuzanyan et R. H. Mitchell (août 2009). "Linear theory of compressible convection in rapidly rotating spherical shells, using the anelastic approximation". In : *Journal of Fluid Mechanics* 634, p. 291 (cf. p. 111).

Jouve, L., T. Gastine et F. Lignières (mars 2015). "Three-dimensional evolution of magnetic fields in a differentially rotating stellar radiative zone". In : *A&A* 575, A106, A106. arXiv : 1412.2900 [astro-ph.SR] (cf. p. 102).

Jouve, L., F. Lignières et M. Gaurat (sept. 2020). "Interplay between magnetic fields and differential rotation in a stably stratified stellar radiative zone". In : *A&A* 641, A13, A13. arXiv : 2006.08230 [astro-ph.SR] (cf. p. 70, 102).

Kasen, Daniel et Lars Bildsten (juill. 2010). "Supernova Light Curves Powered by Young Magnetars". In : *ApJ* 717.1, p. 245-249. arXiv : 0911.0680 [astro-ph.HE] (cf. p. 40).

Kaspi, V. M., F. P. Gavriil, P. M. Woods, J. B. Jensen et al. (mai 2003). "A Major Soft Gamma Repeater-like Outburst and Rotation Glitch in the No-longer-so-anomalous X-Ray Pulsar 1E 2259+586". In : *ApJ* 588.2, p. L93-L96. arXiv : astro-ph/0304205 [astro-ph] (cf. p. 12).

Kaspi, Victoria M. et Andrei M. Beloborodov (août 2017). "Magnetars". In : *ARA&A* 55.1, p. 261-301. arXiv : 1703.00068 [astro-ph.HE] (cf. p. 15, 18, 19).

Kaspi, Victoria M., Jessica R. Lackey et Deepto Chakrabarty (juill. 2000). "A Glitch in an Anomalous X-Ray Pulsar". In : *ApJ* 537.1, p. L31-L34. arXiv : astro-ph/0005326 [astro-ph] (cf. p. 19).

Kawaguchi, Kyohei, Masaru Shibata et Masaomi Tanaka (fév. 2020). "Diversity of Kilonova Light Curves". In : *ApJ* 889.2, 171, p. 171. arXiv : 1908.05815 [astro-ph.HE] (cf. p. 47).

Keane, E. F. et M. Kramer (déc. 2008). "On the birthrates of Galactic neutron stars". In : *MNRAS* 391.4, p. 2009-2016. arXiv : 0810.1512 [astro-ph] (cf. p. 10).

Keil, Wolfgang, H. -Thomas Janka et Ewald Mueller (déc. 1996). "Ledoux Convection in Protoneutron Stars—A Clue to Supernova Nucleosynthesis?" In : *ApJ* 473, p. L111. arXiv : astro-ph/9610203 [astro-ph] (cf. p. 98).

Kennea, J. A., A. Y. Lien, F. E. Marshall, D. M. Palmer et al. (jan. 2016). "Trigger 706396: Swift detection of a short burst from PSR 1119-6127." In : *GRB Coordinates Network* 19735, p. 1 (cf. p. 15).

Keszthelyi, Z., G. Meynet, M. E. Shultz, A. David-Uraz et al. (jan. 2020). "The effects of surface fossil magnetic fields on massive star evolution - II. Implementation of magnetic braking in MESA and implications for the evolution of surface rotation in OB stars". In : *MNRAS* 493.1, p. 518-535. arXiv : 2001.06239 [astro-ph.SR] (cf. p. 72).

Kiuchi, Kenta, Koutarou Kyutoku, Yuichiro Sekiguchi et Masaru Shibata (juin 2018). "Global simulations of strongly magnetized remnant massive neutron stars formed in binary neutron star mergers". In : *Phys. Rev. D* 97.12, 124039, p. 124039. arXiv : 1710.01311 [astro-ph.HE] (cf. p. 47, 94, 159, 197, 208).

Kouveliotou, C., S. Dieters, T. Strohmayer, J. van Paradijs et al. (mai 1998). "An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft γ-ray repeater SGR1806 - 20". In : *Nature* 393.6682, p. 235-237 (cf. p. 12).

Kouveliotou, C., J. P. Norris, T. L. Cline, B. R. Dennis et al. (nov. 1987). "SMM Hard X-Ray Observations of the Soft Gamma-Ray Repeater 1806-20". In : *ApJ* 322, p. L21 (cf. p. 11).

Krause, F. et K. -H. Raedler (1980). *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory* (cf. p. 62, 93, 179, 181, 194).

Kuin, N. Paul M., Kinwah Wu, Samantha Oates, Amy Lien et al. (août 2019). "Swift spectra of AT2018cow: a white dwarf tidal disruption event?" In : *MNRAS* 487.2, p. 2505-2521. arXiv : 1808.08492 [astro-ph.HE] (cf. p. 51).

Kundu, Pijush K. et Ira M. Cohen (2008). *Fluid Mechanics: Fourth Edition* (cf. p. 124).

Kuroda, Takami, Almudena Arcones, Tomoya Takiwaki et Kei Kotake (juin 2020). "Magnetorotational Explosion of a Massive Star Supported by Neutrino Heating in General Relativistic Three-dimensional Simulations". In : *ApJ* 896.2, 102, p. 102. arXiv : 2003.02004 [astro-ph.HE] (cf. p. 38).

Kuroda, Takami, Kei Kotake, Kazuhiro Hayama et Tomoya Takiwaki (déc. 2017). "Correlated Signatures of Gravitational-wave and Neutrino Emission in Three-dimensional General-relativistic Core-collapse Supernova Simulations". In : *ApJ* 851.1, 62, p. 62. arXiv : 1708.05252 [astro-ph.HE] (cf. p. 30).

Kuroda, Takami, Tomoya Takiwaki et Kei Kotake (fév. 2014). "Gravitational wave signatures from low-mode spiral instabilities in rapidly rotating supernova cores". In : *Phys. Rev. D* 89.4, 044011, p. 044011. arXiv : 1304.4372 [astro-ph.HE] (cf. p. 39).

Lander, S. K., P. Haensel, B. Haskell, J. L. Zdunik et al. (mai 2021). "Magnetic fields in late-stage proto-neutron stars". In : *MNRAS* 503.1, p. 875-895. arXiv : 2007.14609 [astro-ph.HE] (cf. p. 206).

Lander, S. K. et D. I. Jones (déc. 2018). "Neutron-star spindown and magnetic inclination-angle evolution". In : *MNRAS* 481.3, p. 4169-4193. arXiv : 1807.01289 [astro-ph.HE] (cf. p. 157, 206).

Langer, N. (sept. 2012). "Presupernova Evolution of Massive Single and Binary Stars". In : *ARA&A* 50, p. 107-164. arXiv : 1206.5443 [astro-ph.SR] (cf. p. 33).

Lantz, S. R. et Y. Fan (mars 1999). "Anelastic Magnetohydrodynamic Equations for Modeling Solar and Stellar Convection Zones". In : *ApJS* 121.1, p. 247-264 (cf. p. 108).

Lantz, Steven Richard (jan. 1992). "Dynamical Behavior of Magnetic Fields in a Stratified, Convecting Fluid Layer". Thèse de doct. CORNELL UNIVERSITY. (cf. p. 112, 195).

Laros, J. G., E. E. Fenimore, R. W. Klebesadel, J. -L. Atteia et al. (sept. 1987). "A New Type of Repetitive Behavior in a High-Energy Transient". In : *ApJ* 320, p. L111 (cf. p. 11).

Latter, Henrik N., Pierre Lesaffre et Steven A. Balbus (avr. 2009). "MRI channel flows and their parasites". In : *MNRAS* 394.2, p. 715-729. arXiv : 0901.4712 [astro-ph.HE] (cf. p. 88).

Lattimer, J. M., F. Mackie, D. G. Ravenhall et D. N. Schramm (avr. 1977). "The decompression of cold neutron star matter." In : *ApJ* 213, p. 225-233 (cf. p. 43).

Lattimer, James M. et Douglas F. Swesty (déc. 1991). "A generalized equation of state for hot, dense matter". In : *Nucl. Phys. A* 535.2, p. 331-376 (cf. p. 127, 166).

Lesur, G. et P. -Y. Longaretti (déc. 2005). "On the relevance of subcritical hydrodynamic turbulence to accretion disk transport". In : *A&A* 444.1, p. 25-44. arXiv : astro-ph/0509541 [astro-ph] (cf. p. 116, 148).

Lesur, G. et P. -Y. Longaretti (juill. 2007). "Impact of dimensionless numbers on the efficiency of magnetorotational instability induced turbulent transport". In : *MNRAS* 378.4, p. 1471-1480. arXiv : 0704.2943 [astro-ph] (cf. p. 88, 89, 116, 148, 151, 156, 194).

Lesur, G. et P. -Y. Longaretti (sept. 2009). "Turbulent resistivity evaluation in magnetorotational instability generated turbulence". In : *A&A* 504.2, p. 309-320. arXiv : 0907.1393 [astro-ph.HE] (cf. p. 92).

Lesur, G. et G. I. Ogilvie (sept. 2008). "On self-sustained dynamo cycles in accretion discs". In : *A&A* 488.2, p. 451-461. arXiv : 0807.1703 [astro-ph] (cf. p. 91, 92, 180).

Lesur, G. et J. C. B. Papaloizou (avr. 2010). "The subcritical baroclinic instability in local accretion disc models". In : *A&A* 513, A60, A60. arXiv : 0911.0663 [astro-ph.EP] (cf. p. 116).

Lesur, Geoffroy et Gordon I. Ogilvie (mai 2010). "On the angular momentum transport due to vertical convection in accretion discs". In : *MNRAS* 404.1, p. L64-L68. arXiv : 1002.4621 [astro-ph.EP] (cf. p. 116).

Leung, Shing-Chi, Sergei Blinnikov, Ken&'ichi Nomoto, Petr Baklanov et al. (nov. 2020). "A Model for the Fast Blue Optical Transient AT2018cow: Circumstellar Interaction of a Pulsational Pair-instability Supernova". In : *ApJ* 903.1, 66, p. 66. arXiv : 2008.11404 [astro-ph.HE] (cf. p. 51).

Li, Xinyu et Andrei M. Beloborodov (déc. 2015). "Plastic Damping of Alfvén Waves in Magnetar Flares and Delayed Afterglow Emission". In : *ApJ* 815.1, 25, p. 25. arXiv : 1505.03465 [astro-ph.HE] (cf. p. 15).

Lignières, François, Pascal Petit, Michel Aurière, Gregg A. Wade et al. (août 2014). "The dichotomy between strong and ultra-weak magnetic fields among intermediate-mass stars". In : *Magnetic Fields throughout Stellar Evolution*. Sous la dir. de Pascal Petit, Moira Jardine et Hendrik C. Spruit. T. 302, p. 338-347. arXiv : 1402.5362 [astro-ph.SR] (cf. p. 70).

Lingam, Manasvi et Abraham Loeb (mars 2017). "Fast Radio Bursts from Extragalactic Light Sails". In : *ApJ* 837.2, L23, p. L23. arXiv : 1701.01109 [astro-ph.HE] (cf. p. 49).

Longaretti, P. -Y. et G. Lesur (juin 2010). "MRI-driven turbulent transport: the role of dissipation, channel modes and their parasites". In : *A&A* 516, A51, A51. arXiv : 1004.1384 [astro-ph.SR] (cf. p. 90, 116, 151, 156, 194).

Lorimer, D. R., M. Bailes, M. A. McLaughlin, D. J. Narkevic et al. (nov. 2007). "A Bright Millisecond Radio Burst of Extragalactic Origin". In : *Science* 318.5851, p. 777. arXiv : 0709.4301 [astro-ph] (cf. p. 48, 50).

LSST Science Collaboration, Phil Marshall, Timo Anguita, Federica B. Bianco et al. (août 2017). "Science-Driven Optimization of the LSST Observing Strategy". In : *arXiv e-prints*, arXiv:1708.04058, arXiv:1708.04058. arXiv : 1708.04058 [astro-ph.IM] (cf. p. 159).

Maeda, Keiichi, Koji Kawabata, Paolo A. Mazzali, Masaomi Tanaka et al. (fév. 2008). "Asphericity in Supernova Explosions from Late-Time Spectroscopy". In : *Science* 319.5867, p. 1220. arXiv : 0801.1100 [astro-ph] (cf. p. 36).

Maeder, A. (mai 1987). "Evidences for a bifurcation in massive star evolution. The ON-blue stragglers." In : *A&A* 178, p. 159-169 (cf. p. 37).

Makarenko, Ekaterina I., Andrei P. Igoshev et A. F. Kholtygin (avr. 2021). "Testing the fossil field hypothesis: could strongly magnetised OB stars produce all known magnetars?" In : *MNRAS*. arXiv : 2104.10579 [astro-ph.HE] (cf. p. 71).

Makishima, K., T. Enoto, J. S. Hiraga, T. Nakano et al. (mai 2014). "Possible Evidence for Free Precession of a Strongly Magnetized Neutron Star in the Magnetar 4U 0142+61". In : *Phys. Rev. Lett.* 112.17, 171102, p. 171102. arXiv : 1404.3705 [astro-ph.HE] (cf. p. 77).

Makishima, Kazuo, Teruaki Enoto, Hiroaki Murakami, Yoshihiro Furuta et al. (juin 2016). "Evidence for a 36 ks phase modulation in the hard X-ray pulses from the magnetar 1E 1547.0-5408". In : *PASJ* 68, S12, S12. arXiv : 1501.07684 [astro-ph.HE] (cf. p. 21, 77, 157, 206).

Makishima, Kazuo, Hiroaki Murakami, Teruaki Enoto et Kazuhiro Nakazawa (jan. 2019). "A NuSTAR study of the 55 ks hard X-ray pulse-phase modulation in the magnetar 4U 0142+61". In : *PASJ* 71.1, 15, p. 15. arXiv : 1810.11147 [astro-ph.HE] (cf. p. 21, 77, 157, 206).

Malkus, WVR (1964). "Boussinesq equations and convection energetics". In : *WHOI Geophysical Fluid Dynamics Notes, Ref*, p. 64-46 (cf. p. 110).

Mamatsashvili, George, George Chagelishvili, Martin E. Pessah, Frank Stefani et al. (nov. 2020). "Zero Net Flux MRI Turbulence in Disks: Sustenance Scheme and Magnetic Prandtl Number Dependence". In : *ApJ* 904.1, 47, p. 47. arXiv : 2009.14736 [astro-ph.HE] (cf. p. 90, 91).

Margalit, Ben, Brian D. Metzger, Todd A. Thompson, Matt Nicholl et al. (avr. 2018). "The GRB-SLSN connection: misaligned magnetars, weak jet emergence, and observational signatures". In : *MNRAS* 475.2, p. 2659-2674. arXiv : 1705.01103 [astro-ph.HE] (cf. p. 39, 41, 158).

Masada, Youhei, Kei Kotake, Tomoya Takiwaki et Naoki Yamamoto (oct. 2018). "Chiral magnetohydrodynamic turbulence in core-collapse supernovae". In : *Phys. Rev. D* 98.8, 083018, p. 083018. arXiv : 1805.10419 [astro-ph.HE] (cf. p. 55).

Masada, Youhei et Takayoshi Sano (déc. 2008). "Axisymmetric Magnetorotational Instability in Viscous Accretion Disks". In : *ApJ* 689.2, p. 1234-1243. arXiv : 0808.2338 [astro-ph] (cf. p. 89).

Masada, Youhei, Takayoshi Sano et Kazunari Shibata (jan. 2007). "The Effect of Neutrino Radiation on Magnetorotational Instability in Proto-Neutron Stars". In : *ApJ* 655.1, p. 447-457. arXiv : astro-ph/0610023 [astro-ph] (cf. p. 100, 137, 172).

Masada, Youhei, Tomoya Takiwaki et Kei Kotake (jan. 2015). "Magnetohydrodynamic Turbulence Powered by Magnetorotational Instability in Nascent Protoneutron Stars". In : *ApJ* 798.1, L22, p. L22. arXiv : 1411.6705 [astro-ph.HE] (cf. p. 102, 135).

Masada, Youhei, Tomoya Takiwaki, Kei Kotake et Takayoshi Sano (nov. 2012). "Local Simulations of the Magnetorotational Instability in Core-collapse Supernovae". In : *ApJ* 759.2, 110, p. 110. arXiv : 1209.2360 [astro-ph.SR] (cf. p. 94).

Mathis, S., L. Bugnet, V. Prat, K. Augustson et al. (mars 2021). "Probing the internal magnetism of stars using asymptotic magneto-asteroseismology". In : *A&A* 647, A122, A122. arXiv : 2012.11050 [astro-ph.SR] (cf. p. 69).

Mazets, E. P. et S. V. Golenetskii (mars 1981). "Recent Results from the Gamma-Ray Burst Studies in the KONUS Experiment". In : *Ap&SS* 75.1, p. 47-81 (cf. p. 10).

Mazets, E. P., S. V. Golenetskij et Y. A. Guryan (déc. 1979). "Soft gamma-ray bursts from the source B1900+14". In : *Soviet Astronomy Letters* 5, p. 343 (cf. p. 11).

Mazets, E. P., S. V. Golentskii, V. N. Ilinskii, R. L. Aptekar et al. (déc. 1979). "Observations of a flaring X-ray pulsar in Dorado". In : *Nature* 282.5739, p. 587-589 (cf. p. 11).

Mazzali, Paolo A., Ken'ichi Nomoto, Ferdinando Patat et Keiichi Maeda (oct. 2001). "The Nebular Spectra of the Hypernova SN 1998bw and Evidence for Asymmetry". In : *ApJ* 559.2, p. 1047-1053. arXiv : astro-ph/0106095 [astro-ph] (cf. p. 36).

Meduri, Domenico G., François Lignières et Laurène Jouve (juill. 2019). "Nonaxisymmetric magnetorotational instability in spherical Couette flow". In : *Phys. Rev. E* 100.1, 013110, p. 013110 (cf. p. 102).

Meheut, Heloise, Sébastien Fromang, Geoffroy Lesur, Marc Joos et al. (juill. 2015). "Angular momentum transport and large eddy simulations in magnetorotational turbulence: the small Pm limit". In : *A&A* 579, A117, A117. arXiv : 1505.05661 [astro-ph.SR] (cf. p. 90, 91, 161, 194).

Menou, Kristen, Steven A. Balbus et Henk C. Spruit (mai 2004). "Local Axisymmetric Diffusive Stability of Weakly Magnetized, Differentially Rotating, Stratified Fluids". In : *ApJ* 607.1, p. 564-574. arXiv : astro-ph/0402150 [astro-ph] (cf. p. 188).

Mereghetti, S., D. Götz, A. von Kienlin, A. Rau et al. (mai 2005). "The First Giant Flare from SGR 1806-20: Observations Using the Anticoincidence Shield of the Spectrometer on INTEGRAL". In : *ApJ* 624.2, p. L105-L108. arXiv : astro-ph/0502577 [astro-ph] (cf. p. 21).

Mereghetti, Sandro, José A. Pons et Andrew Melatos (oct. 2015). "Magnetars: Properties, Origin and Evolution". In : *Space Sci. Rev.* 191.1-4, p. 315-338. arXiv : 1503.06313 [astro-ph.HE] (cf. p. 20).

Mestel, L. (jan. 2001). "Magnetic Fields across the H-R Diagram". In : *Magnetic Fields Across the Hertzsprung-Russell Diagram*. Sous la dir. de G. Mathys, S. K. Solanki et D. T.

Wickramasinghe. T. 248. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, p. 3 (cf. p. 70).

Metzger, B. D., G. Martínez-Pinedo, S. Darbha, E. Quataert et al. (août 2010). "Electromagnetic counterparts of compact object mergers powered by the radioactive decay of r-process nuclei". In : *MNRAS* 406.4, p. 2650-2662. arXiv : 1001.5029 [astro-ph.HE] (cf. p. 44).

Metzger, B. D., E. Quataert et T. A. Thompson (avr. 2008). "Short-duration gamma-ray bursts with extended emission from protomagnetar spin-down". In : *MNRAS* 385.3, p. 1455-1460. arXiv : 0712.1233 [astro-ph] (cf. p. 47).

Metzger, Brian D., Todd A. Thompson et Eliot Quataert (avr. 2018). "A Magnetar Origin for the Kilonova Ejecta in GW170817". In : *ApJ* 856.2, 101, p. 101. arXiv : 1801.04286 [astro-ph.HE] (cf. p. 197, 208).

Meynet, G., P. Eggenberger et A. Maeder (jan. 2011). "Massive star models with magnetic braking". In : *A&A* 525, L11, p. L11. arXiv : 1011.5795 [astro-ph.SR] (cf. p. 71).

Mezzacappa, A., A. C. Calder, S. W. Bruenn, J. M. Blondin et al. (mars 1998). "An Investigation of Neutrino-driven Convection and the Core Collapse Supernova Mechanism Using Multigroup Neutrino Transport". In : *ApJ* 495.2, p. 911-926. arXiv : astro-ph/9709188 [astro-ph] (cf. p. 96).

Mezzacappa, Anthony, Pedro Marronetti, Ryan E. Landfield, Eric J. Lentz et al. (juill. 2020). "Gravitational-wave signal of a core-collapse supernova explosion of a 15 $M_\odot$ star". In : *Phys. Rev. D* 102.2, 023027, p. 023027. arXiv : 2007.15099 [astro-ph.HE] (cf. p. 30).

Miralles, Juan A., José A. Pons et Vadim A. Urpin (nov. 2000). "Convective Instability in Proto-Neutron Stars". In : *ApJ* 543.2, p. 1001-1006. arXiv : astro-ph/0007069 [astro-ph] (cf. p. 96).

Moffatt, Henry K (1978). "Field generation in electrically conducting fluids". In : *Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne* 2, p. 5-1 (cf. p. 62, 179, 181).

Moiseenko, S. G., G. S. Bisnovatyi-Kogan et N. V. Ardeljan (juill. 2006). "A magnetorotational core-collapse model with jets". In : *MNRAS* 370.1, p. 501-512 (cf. p. 38).

Monchaux, R., M. Berhanu, M. Bourgoin, M. Moulin et al. (jan. 2007). "Generation of a Magnetic Field by Dynamo Action in a Turbulent Flow of Liquid Sodium". In : *Phys. Rev. Lett.* 98.4, 044502, p. 044502. arXiv : physics/0701075 [physics.flu-dyn] (cf. p. 59).

Morozova, Viktoriya, David Radice, Adam Burrows et David Vartanyan (juill. 2018). "The Gravitational Wave Signal from Core-collapse Supernovae". In : *ApJ* 861.1, 10, p. 10. arXiv : 1801.01914 [astro-ph.HE] (cf. p. 30).

Moss, D. (jan. 2001). "Magnetic Fields in the Ap and Bp Stars: a Theoretical Overview". In : *Magnetic Fields Across the Hertzsprung-Russell Diagram*. Sous la dir. de G. Mathys, S. K. Solanki et D. T. Wickramasinghe. T. 248. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, p. 305 (cf. p. 70).

Most, Elias R., Antonios Nathanail et Luciano Rezzolla (sept. 2018). "Electromagnetic Emission from Blitzars and Its Impact on Non-repeating Fast Radio Bursts". In : *ApJ* 864.2, 117, p. 117. arXiv : 1801.05705 [astro-ph.HE] (cf. p. 50).

Mösta, Philipp, Christian D. Ott, David Radice, Luke F. Roberts et al. (déc. 2015). "A large-scale dynamo and magnetoturbulence in rapidly rotating core-collapse supernovae". In : *Nature* 528.7582, p. 376-379. arXiv : 1512.00838 [astro-ph.HE] (cf. p. 102, 103).

Mösta, Philipp, David Radice, Roland Haas, Erik Schnetter et al. (oct. 2020). "A Magnetar Engine for Short GRBs and Kilonovae". In : *ApJ* 901.2, L37, p. L37. arXiv : 2003.06043 [astro-ph.HE] (cf. p. 47, 197, 208).

Mösta, Philipp, Sherwood Richers, Christian D. Ott, Roland Haas et al. (avr. 2014). "Magnetorotational Core-collapse Supernovae in Three Dimensions". In : *ApJ* 785.2, L29, p. L29. arXiv : 1403.1230 [astro-ph.HE] (cf. p. 38).

Müller, E., H. -Th. Janka et A. Wongwathanarat (jan. 2012). "Parametrized 3D models of neutrino-driven supernova explosions. Neutrino emission asymmetries and gravitational-wave signals". In : *A&A* 537, A63, A63. arXiv : 1106.6301 [astro-ph.SR] (cf. p. 30).

Müller, U, R Stieglitz et S Horanyi (2004). "A two-scale hydromagnetic dynamo experiment". In : *Journal of Fluid Mechanics* 498, p. 31-71 (cf. p. 59).

Murphy, Jeremiah W., Christian D. Ott et Adam Burrows (déc. 2009). "A Model for Gravitational Wave Emission from Neutrino-Driven Core-Collapse Supernovae". In : *ApJ* 707.2, p. 1173-1190. arXiv : 0907.4762 [astro-ph.SR] (cf. p. 30).

Nagakura, Hiroki, Adam Burrows, David Radice et David Vartanyan (mars 2020). "A systematic study of proto-neutron star convection in three-dimensional core-collapse supernova simulations". In : *MNRAS* 492.4, p. 5764-5779. arXiv : 1912.07615 [astro-ph.HE] (cf. p. 74, 75).

Nagakura, Hiroki, Adam Burrows, David Vartanyan et David Radice (jan. 2021). "Core-collapse supernova neutrino emission and detection informed by state-of-the-art three-dimensional numerical models". In : *MNRAS* 500.1, p. 696-717. arXiv : 2007.05000 [astro-ph.HE] (cf. p. 75).

Nagakura, Hiroki, Taiki Morinaga, Chinami Kato et Shoichi Yamada (déc. 2019). "Fast-pairwise Collective Neutrino Oscillations Associated with Asymmetric Neutrino Emissions in Core-collapse Supernovae". In : *ApJ* 886.2, 139, p. 139. arXiv : 1910.04288 [astro-ph.HE] (cf. p. 96).

Nauman, Farrukh et Martin E. Pessah (déc. 2016). "Sustained Turbulence in Differentially Rotating Magnetized Fluids at a Low Magnetic Prandtl Number". In : *ApJ* 833.2, 187, p. 187. arXiv : 1609.08543 [astro-ph.SR] (cf. p. 91).

Nauman, Farrukh et Martin E. Pessah (oct. 2018). "Transport properties of Keplerian flows in extended local domains with no imposed field". In : *MNRAS* 480.1, p. 204-209. arXiv : 1909.04290 [astro-ph.SR] (cf. p. 91).

Neustadt, J. M. M., C. S. Kochanek, K. Z. Stanek, C. M. Basinger et al. (2021). *The search for failed supernovae with the Large Binocular Telescope: a new candidate and the failed SN fraction with 11 yr of data*. arXiv : 2104.03318 [astro-ph.SR] (cf. p. 29).

Nicholl, M., S. J. Smartt, A. Jerkstrand, C. Inserra et al. (oct. 2013). "Slowly fading super-luminous supernovae that are not pair-instability explosions". In : *Nature* 502.7471, p. 346-349. arXiv : 1310.4446 [astro-ph.CO] (cf. p. 41).

Nousek, J. A., C. Kouveliotou, D. Grupe, K. L. Page et al. (mai 2006). "Evidence for a Canonical Gamma-Ray Burst Afterglow Light Curve in the Swift XRT Data". In : *ApJ* 642.1, p. 389-400. arXiv : astro-ph/0508332 [astro-ph] (cf. p. 34).

O'Brien, P. T., R. Willingale, J. Osborne, M. R. Goad et al. (août 2006). "The Early X-Ray Emission from GRBs". In : *ApJ* 647.2, p. 1213-1237. arXiv : astro-ph/0601125 [astro-ph] (cf. p. 34).

Oberbeck, Anton (1879). "Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen". In : *Annalen der Physik* 243.6, p. 271-292 (cf. p. 108).

Obergaulinger, M. et M. Á. Aloy (juill. 2017). "Protomagnetar and black hole formation in high-mass stars". In : *MNRAS* 469.1, p. L43-L47. arXiv : 1703.09893 [astro-ph.SR] (cf. p. 42, 197).

Obergaulinger, M. et M. Á. Aloy (mars 2020). "Magnetorotational core collapse of possible GRB progenitors - I. Explosion mechanisms". In : *MNRAS* 492.4, p. 4613-4634. arXiv : 1909.01105 [astro-ph.HE] (cf. p. 197).

Obergaulinger, M. et M. Á. Aloy (mai 2021). "Magnetorotational core collapse of possible GRB progenitors - III. Three-dimensional models". In : *MNRAS* 503.4, p. 4942-4963. arXiv : 2008.07205 [astro-ph.HE] (cf. p. 38).

Obergaulinger, M., P. Cerdá-Durán, E. Müller et M. A. Aloy (avr. 2009). "Semi-global simulations of the magneto-rotational instability in core collapse supernovae". In : *A&A* 498.1, p. 241-271. arXiv : 0811.1652 [astro-ph] (cf. p. 94, 95, 102, 135).

Obergaulinger, M., O. Just et M. A. Aloy (août 2018). "Core collapse with magnetic fields and rotation". In : *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.* 45.8, p. 084001. arXiv : 1806.00393 [astro-ph.HE] (cf. p. 134, 169).

Ofek, E. O., M. Muno, R. Quimby, S. R. Kulkarni et al. (juill. 2008). "GRB 070201: A Possible Soft Gamma-Ray Repeater in M31". In : *ApJ* 681.2, p. 1464-1469. arXiv : 0712.3585 [astro-ph] (cf. p. 22).

Ogura, Yoshimitsu et Norman A. Phillips (mars 1962). "Scale Analysis of Deep and Shallow Convection in the Atmosphere." In : *Journal of Atmospheric Sciences* 19.2, p. 173-179 (cf. p. 108).

Olausen, S. A. et V. M. Kaspi (mai 2014). "The McGill Magnetar Catalog". In : *ApJS* 212.1, 6, p. 6. arXiv : 1309.4167 [astro-ph.HE] (cf. p. 13, 14, 17).

Ott, Christian D., Adam Burrows, Todd A. Thompson, Eli Livne et al. (mai 2006). "The Spin Periods and Rotational Profiles of Neutron Stars at Birth". In : *ApJS* 164.1, p. 130-155. arXiv : astro-ph/0508462 [astro-ph] (cf. p. 93, 94, 123, 134, 169).

Pajkos, Michael A., Sean M. Couch, Kuo-Chuan Pan et Evan P. O'Connor (juin 2019). "Features of Accretion-phase Gravitational-wave Emission from Two-dimensional Rotating Core-collapse Supernovae". In : *ApJ* 878.1, 13, p. 13. arXiv : 1901.09055 [astro-ph.HE] (cf. p. 39).

Pan, Kuo-Chuan, Matthias Liebendörfer, Sean Couch et Friedrich-Karl Thielemann (oct. 2020). "Stellar Mass Black Hole Formation and Multi-messenger Signals from Three Dimensional Rotating Core-Collapse Supernova Simulations". In : *arXiv e-prints*, arXiv:2010.02453, arXiv:2010.02453. arXiv : 2010.02453 [astro-ph.HE] (cf. p. 39).

Parker, E. N. (nov. 1970). "The Generation of Magnetic Fields in Astrophysical Bodies. I. The Dynamo Equations". In : *ApJ* 162, p. 665 (cf. p. 64).

Pedlosky, J. (oct. 1979). "Finite-Amplitude Baroclinic Waves in a Continuous Model of the Atmosphere." In : *Journal of Atmospheric Sciences* 36.10, p. 1908-1924 (cf. p. 125).

Perley, D. A., R. M. Quimby, L. Yan, P. M. Vreeswijk et al. (oct. 2016). "Host-galaxy Properties of 32 Low-redshift Superluminous Supernovae from the Palomar Transient Factory". In : *ApJ* 830.1, 13, p. 13. arXiv : 1604.08207 [astro-ph.HE] (cf. p. 32).

Perley, Daniel A., Anna Y. Q. Ho, Yuhan Yao, Christoffer Fremling et al. (mars 2021). "Real-time Discovery of AT2020xnd: A Fast, Luminous Ultraviolet Transient with Minimal Radioactive Ejecta". In : *arXiv e-prints*, arXiv:2103.01968, arXiv:2103.01968. arXiv : 2103.01968 [astro-ph.HE] (cf. p. 51).

Perley, Daniel A., Paolo A. Mazzali, Lin Yan, S. Bradley Cenko et al. (mars 2019). "The fast, luminous ultraviolet transient AT2018cow: extreme supernova, or disruption of a star by an intermediate-mass black hole?" In : *MNRAS* 484.1, p. 1031-1049. arXiv : 1808.00969 [astro-ph.HE] (cf. p. 51).

Pessah, Martin E. (juin 2010). "Angular Momentum Transport in Protoplanetary and Black Hole Accretion Disks: The Role of Parasitic Modes in the Saturation of MHD Turbulence". In : *ApJ* 716.2, p. 1012-1027. arXiv : 0908.1791 [astro-ph.HE] (cf. p. 90).

Pessah, Martin E. et Chi-kwan Chan (sept. 2008). "Viscous, Resistive Magnetorotational Modes". In : *ApJ* 684.1, p. 498-514. arXiv : 0801.4570 [astro-ph] (cf. p. 88, 89).

Pessah, Martin E., Chi-kwan Chan et Dimitrios Psaltis (oct. 2007). "Angular Momentum Transport in Accretion Disks: Scaling Laws in MRI-driven Turbulence". In : *ApJ* 668.1, p. L51-L54. arXiv : 0705.0352 [astro-ph] (cf. p. 87, 155, 194).

Petit, V., G. A. Wade, F. R. N. Schneider, L. Fossati et al. (nov. 2019). "The MiMeS survey of magnetism in massive stars: magnetic properties of the O-type star population". In : *MNRAS* 489.4, p. 5669-5687. arXiv : 1909.00877 [astro-ph.SR] (cf. p. 68).

Petitdemange, Ludovic (avr. 2010). "Two-dimensional non-linear simulations of the magnetostrophic magnetorotational instability". In : *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 104.2-3, p. 287-299 (cf. p. 102).

Petitdemange, Ludovic, Emmanuel Dormy et Steven Balbus (oct. 2013). "Axisymmetric and non-axisymmetric magnetostrophic MRI modes". In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 223, p. 21-31 (cf. p. 102).

Petitdemange, Ludovic, Emmanuel Dormy et Steven A. Balbus (août 2008). "Magnetostrophic MRI in the Earth's outer core". In : *Geophys. Res. Lett.* 35.15, L15305, p. L15305. arXiv : 0901.1217 [astro-ph.EP] (cf. p. 102).

Podsiadlowski, Ph., P. C. Joss et J. J. L. Hsu (mai 1992). "Presupernova Evolution in Massive Interacting Binaries". In : *ApJ* 391, p. 246 (cf. p. 71).

Pons, José A. et Daniele Viganò (déc. 2019). "Magnetic, thermal and rotational evolution of isolated neutron stars". In : *Living Reviews in Computational Astrophysics* 5.1, 3, p. 3. arXiv : 1911.03095 [astro-ph.HE] (cf. p. 15).

Potter, Adrian T., Shashikumar M. Chitre et Christopher A. Tout (août 2012). "Stellar evolution of massive stars with a radiative α-Ω dynamo". In : *MNRAS* 424.3, p. 2358-2370. arXiv : 1205.6477 [astro-ph.SR] (cf. p. 71).

Potter, William J. et Steven A. Balbus (déc. 2017). "Demonstration of a magnetic Prandtl number disc instability from first principles". In : *MNRAS* 472.3, p. 3021-3028. arXiv : 1704.02485 [astro-ph.HE] (cf. p. 99).

Powell, Jade et Bernhard Müller (juill. 2019). "Gravitational wave emission from 3D explosion models of core-collapse supernovae with low and normal explosion energies". In : *MNRAS* 487.1, p. 1178-1190. arXiv : 1812.05738 [astro-ph.HE] (cf. p. 30).

Prandtl, Ludwig (1925). "7. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz". In : *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 5.2, p. 136-139 (cf. p. 127).

Prat, V., S. Mathis, B. Buysschaert, J. Van Beeck et al. (juill. 2019). "Period spacings of gravity modes in rapidly rotating magnetic stars. I. Axisymmetric fossil field with poloidal and toroidal components". In : *A&A* 627, A64, A64. arXiv : 1903.05620 [astro-ph.SR] (cf. p. 69).

Radice, David, Viktoriya Morozova, Adam Burrows, David Vartanyan et al. (mai 2019). "Characterizing the Gravitational Wave Signal from Core-collapse Supernovae". In : *ApJ* 876.1, L9, p. L9. arXiv : 1812.07703 [astro-ph.HE] (cf. p. 30).

Rampp, M. et H. -T. Janka (déc. 2002). "Radiation hydrodynamics with neutrinos. Variable Eddington factor method for core-collapse supernova simulations". In : *A&A* 396, p. 361-392. arXiv : astro-ph/0203101 [astro-ph] (cf. p. 126, 166).

Ravi, Vikram (juill. 2019). "The prevalence of repeating fast radio bursts". In : *Nature Astronomy* 3, p. 928-931. arXiv : 1907.06619 [astro-ph.HE] (cf. p. 50).

Rax, Jean-Marcel (2005). *Physique des plasmas: Cours et applications*. Dunod (cf. p. 54, 57).

Rayleigh, Lord (1916). "LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side". In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 32.192, p. 529-546 (cf. p. 108).

Raynaud, Raphaël, Pablo Cerdá-Durán et Jérôme Guilet (mars 2021). "Gravitational wave signature of proto-neutron star convection: I. MHD numerical simulations". In : *arXiv e-prints*, arXiv:2103.12445, arXiv:2103.12445. arXiv : 2103.12445 [astro-ph.SR] (cf. p. 78).

Raynaud, Raphaël, Jérôme Guilet, Hans-Thomas Janka et Thomas Gastine (2020). "Magnetar formation through a convective dynamo in protoneutron stars". In : *Science Advances* 6.11 (cf. p. 76, 77, 123, 158, 166, 196, 205).

Rea, N., M. Gullón, J. A. Pons, R. Perna et al. (nov. 2015). "Constraining the GRB-Magnetar Model by Means of the Galactic Pulsar Population". In : *ApJ* 813.2, 92, p. 92. arXiv : 1510.01430 [astro-ph.HE] (cf. p. 42).

Rea, N., G. L. Israel, P. Esposito, J. A. Pons et al. (juill. 2012). "A New Low Magnetic Field Magnetar: The 2011 Outburst of Swift J1822.3-1606". In : *ApJ* 754.1, 27, p. 27. arXiv : 1203.6449 [astro-ph.GA] (cf. p. 158).

Rea, N., G. L. Israel, J. A. Pons, R. Turolla et al. (juin 2013). "The Outburst Decay of the Low Magnetic Field Magnetar SGR 0418+5729". In : *ApJ* 770.1, 65, p. 65. arXiv : 1303.5579 [astro-ph.GA] (cf. p. 13, 158).

Rea, N., D. Viganò, G. L. Israel, J. A. Pons et al. (jan. 2014). "3XMM J185246.6+003317: Another Low Magnetic Field Magnetar". In : *ApJ* 781.1, L17, p. L17. arXiv : 1311.3091 [astro-ph.GA] (cf. p. 158).

Reboul-Salze, A., J. Guilet, R. Raynaud et M. Bugli (jan. 2021). "A global model of the magnetorotational instability in protoneutron stars". In : *A&A* 645, A109, A109. arXiv : 2005.03567 [astro-ph.HE] (cf. p. 131).

Reichert, M., M. Obergaulinger, M. Eichler, M. Á. Aloy et al. (mars 2021). "Nucleosynthesis in magneto-rotational supernovae". In : *MNRAS* 501.4, p. 5733-5745. arXiv : 2010.02227 [astro-ph.HE] (cf. p. 38).

Reiners, Ansgar (fév. 2012). "Observations of Cool-Star Magnetic Fields". In : *Living Reviews in Solar Physics* 9.1, 1, p. 1. arXiv : 1203.0241 [astro-ph.SR] (cf. p. 68).

Rembiasz, T., J. Guilet, M. Obergaulinger, P. Cerdá-Durán et al. (août 2016). "On the maximum magnetic field amplification by the magnetorotational instability in core-collapse supernovae". In : *MNRAS* 460.3, p. 3316-3334. arXiv : 1603.00466 [astro-ph.SR] (cf. p. 94, 135, 145).

Rembiasz, T., M. Obergaulinger, P. Cerdá-Durán, E. Müller et al. (mars 2016). "Termination of the magnetorotational instability via parasitic instabilities in core-collapse supernovae". In : *MNRAS* 456.4, p. 3782-3802. arXiv : 1508.04799 [astro-ph.SR] (cf. p. 85, 95).

Rempel, Erico L., Geoffroy Lesur et Michael R. E. Proctor (juill. 2010). "Supertransient Magnetohydrodynamic Turbulence in Keplerian Shear Flows". In : *Phys. Rev. Lett.* 105.4, 044501, p. 044501. arXiv : 1006.5669 [astro-ph.EP] (cf. p. 116).

Richardson, Dean, David Branch, Darrin Casebeer, Jennifer Millard et al. (fév. 2002). "A Comparative Study of the Absolute Magnitude Distributions of Supernovae". In : *AJ* 123.2, p. 745-752. arXiv : astro-ph/0112051 [astro-ph] (cf. p. 31).

Rincon, F., G. I. Ogilvie et M. R. E. Proctor (juin 2007). "Self-Sustaining Nonlinear Dynamo Process in Keplerian Shear Flows". In : *Phys. Rev. Lett.* 98.25, 254502, p. 254502. arXiv : 0705.2814 [astro-ph] (cf. p. 87).

Riols, A., F. Rincon, C. Cossu, G. Lesur et al. (sept. 2013). "Global bifurcations to subcritical magnetorotational dynamo action in Keplerian shear flow". In : *Journal of Fluid Mechanics* 731, p. 1-45. arXiv : 1306.3374 [astro-ph.HE] (cf. p. 87).

Riols, A., F. Rincon, C. Cossu, G. Lesur et al. (mars 2015). "Dissipative effects on the sustainment of a magnetorotational dynamo in Keplerian shear flow". In : *A&A* 575, A14, A14. arXiv : 1410.3406 [astro-ph.HE] (cf. p. 90).

Riols, A., F. Rincon, C. Cossu, G. Lesur et al. (fév. 2017). "Magnetorotational dynamo chimeras. The missing link to turbulent accretion disk dynamo models?" In : *A&A* 598, A87, A87. arXiv : 1607.02903 [astro-ph.HE] (cf. p. 90, 91).

Roberts, L. F., G. Shen, V. Cirigliano, J. A. Pons et al. (fév. 2012). "Protoneutron Star Cooling with Convection: The Effect of the Symmetry Energy". In : *Phys. Rev. Lett.* 108.6, 061103, p. 061103. arXiv : 1112.0335 [astro-ph.HE] (cf. p. 73, 74, 76).

Roberts, Luke F. et Sanjay Reddy (2017). "Neutrino Signatures from Young Neutron Stars". In : *Handbook of Supernovae*. Sous la dir. d'Athem W. Alsabti et Paul Murdin, p. 1605 (cf. p. 74).

Rodríguez Castillo, Guillermo A., Gian Luca Israel, Andrea Tiengo, David Salvetti et al. (mars 2016). "The outburst decay of the low magnetic field magnetar SWIFT J1822.3-1606: phase-resolved analysis and evidence for a variable cyclotron feature". In : *MNRAS* 456.4, p. 4145-4155. arXiv : 1510.09157 [astro-ph.HE] (cf. p. 21, 158, 206).

Rowlinson, A., P. T. O'Brien, B. D. Metzger, N. R. Tanvir et al. (avr. 2013). "Signatures of magnetar central engines in short GRB light curves". In : *MNRAS* 430.2, p. 1061-1087. arXiv : 1301.0629 [astro-ph.HE] (cf. p. 47).

Ryan, Benjamin R., Charles F. Gammie, Sebastien Fromang et Pierre Kestener (mai 2017). "Resolution Dependence of Magnetorotational Turbulence in the Isothermal Stratified Shearing Box". In : *ApJ* 840.1, 6, p. 6. arXiv : 1702.00777 [astro-ph.HE] (cf. p. 91).

Safarzadeh, Mohammadtaher, J. Xavier Prochaska, Kasper E. Heintz et Wen-fai Fong (déc. 2020). "Confronting the Magnetar Interpretation of Fast Radio Bursts through Their Host Galaxy Demographics". In : *ApJ* 905.2, L30, p. L30. arXiv : 2009.11735 [astro-ph.HE] (cf. p. 50).

Sakamoto, T., J. E. Hill, R. Yamazaki, L. Angelini et al. (nov. 2007). "Evidence of Exponential Decay Emission in the Swift Gamma-Ray Bursts". In : *ApJ* 669.2, p. 1115-1129. arXiv : 0707.2170 [astro-ph] (cf. p. 34).

Sana, H., S. E. de Mink, A. de Koter, N. Langer et al. (juill. 2012). "Binary Interaction Dominates the Evolution of Massive Stars". In : *Science* 337.6093, p. 444. arXiv : 1207.6397 [astro-ph.SR] (cf. p. 71).

Schaeffer, NathanaëL. (mars 2013). "Efficient spherical harmonic transforms aimed at pseudospectral numerical simulations". In : *Geochem. Geophys. Geosyst.* 14.3, p. 751-758. arXiv : 1202.6522 [physics.comp-ph] (cf. p. 117, 119, 133, 168).

Scheidegger, S., R. Käppeli, S. C. Whitehouse, T. Fischer et al. (mai 2010). "The influence of model parameters on the prediction of gravitational wave signals from stellar core collapse". In : *A&A* 514, A51, A51. arXiv : 1001.1570 [astro-ph.HE] (cf. p. 39).

Schneider, F. R. N., S. T. Ohlmann, Ph Podsiadlowski, F. K. Röpke et al. (juill. 2020). "Long-term evolution of a magnetic massive merger product". In : *MNRAS* 495.3, p. 2796-2812. arXiv : 2005.05335 [astro-ph.SR] (cf. p. 73).

Schneider, Fabian R. N., Sebastian T. Ohlmann, Philipp Podsiadlowski, Friedrich K. Röpke et al. (oct. 2019). "Stellar mergers as the origin of magnetic massive stars". In : *Nature* 574.7777, p. 211-214. arXiv : 1910.14058 [astro-ph.SR] (cf. p. 71, 72).

Schrinner, M., L. Petitdemange, R. Raynaud et E. Dormy (avr. 2014). "Topology and field strength in spherical, anelastic dynamo simulations". In : *A&A* 564, A78, A78. arXiv : 1312.7364 [astro-ph.SR] (cf. p. 76).

Schrinner, M., K. -H. Rädler, D. Schmitt, M. Rheinhardt et al. (avr. 2005). "Mean-field view on rotating magnetoconvection and a geodynamo model". In : *Astronomische Nachrichten* 326.3, p. 245-249 (cf. p. 65).

Schrinner, Martin, Karl-Heinz Rädler, Dieter Schmitt, Matthias Rheinhardt et al. (avr. 2007). "Mean-field concept and direct numerical simulations of rotating magnetoconvection and the geodynamo". In : *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 101.2, p. 81-116. arXiv : astro-ph/0609752 [astro-ph] (cf. p. 65).

Seward, F. D., P. A. Charles et A. P. Smale (juin 1986). "A 6 Second Periodic X-Ray Source in Carina". In : *ApJ* 305, p. 814 (cf. p. 12).

Shi, Jiming, Julian H. Krolik et Shigenobu Hirose (jan. 2010). "What is the Numerically Converged Amplitude of Magnetohydrodynamics Turbulence in Stratified Shearing Boxes?" In : *ApJ* 708.2, p. 1716-1727. arXiv : 0909.2003 [astro-ph.HE] (cf. p. 91, 92, 152, 153).

Shi, Ji-Ming, James M. Stone et Chelsea X. Huang (mars 2016). "Saturation of the magnetorotational instability in the unstratified shearing box with zero net flux: convergence in taller boxes". In : *MNRAS* 456.3, p. 2273-2289. arXiv : 1512.01106 [astro-ph.HE] (cf. p. 91, 152, 153).

Shibagaki, Shota, Takami Kuroda, Kei Kotake et Tomoya Takiwaki (avr. 2021). "Characteristic time variability of gravitational-wave and neutrino signals from three-dimensional simulations of non-rotating and rapidly rotating stellar core collapse". In : *MNRAS* 502.2, p. 3066-3084. arXiv : 2010.03882 [astro-ph.HE] (cf. p. 39).

Shibata, Masaru, Sho Fujibayashi et Yuichiro Sekiguchi (sept. 2021). "Long-term evolution of neutron-star merger remnants in general relativistic resistive magnetohydrodynamics with a mean-field dynamo term". In : *Phys. Rev. D* 104 (6), p. 063026 (cf. p. 197).

Shibata, Masaru, Yuk Tung Liu, Stuart L. Shapiro et Branson C. Stephens (nov. 2006). "Magnetorotational collapse of massive stellar cores to neutron stars: Simulations in full general relativity". In : *Phys. Rev. D* 74.10, 104026, p. 104026. arXiv : astro-ph/0610840 [astro-ph] (cf. p. 38).

Shultz, M. E., G. A. Wade, Th Rivinius, E. Alecian et al. (nov. 2019). "The magnetic early B-type stars - III. A main-sequence magnetic, rotational, and magnetospheric biography". In : *MNRAS* 490.1, p. 274-295. arXiv : 1909.02530 [astro-ph.SR] (cf. p. 73).

Shultz, M. E., G. A. Wade, Th Rivinius, C. Neiner et al. (avr. 2018). "The magnetic early B-type stars I: magnetometry and rotation". In : *MNRAS* 475.4, p. 5144-5178. arXiv : 1801.02924 [astro-ph.SR] (cf. p. 73).

Shulyak, D., A. Reiners, A. Engeln, L. Malo et al. (août 2017). "Strong dipole magnetic fields in fast rotating fully convective stars". In : *Nature Astronomy* 1, 0184, p. 0184. arXiv : 1801.08571 [astro-ph.SR] (cf. p. 76).

Siegel, Daniel M., Riccardo Ciolfi, Abraham I. Harte et Luciano Rezzolla (juin 2013). "Magnetorotational instability in relativistic hypermassive neutron stars". In : *Phys. Rev. D* 87.12, 121302, p. 121302. arXiv : 1302.4368 [gr-qc] (cf. p. 158, 197, 208).

Simon, Jacob B., Kris Beckwith et Philip J. Armitage (mai 2012). "Emergent mesoscale phenomena in magnetized accretion disc turbulence". In : *MNRAS* 422.3, p. 2685-2700. arXiv : 1203.0314 [astro-ph.SR] (cf. p. 91).

Simon, Jacob B. et John F. Hawley (déc. 2009). "Viscous and Resistive Effects on the Magnetorotational Instability with a Net Toroidal Field". In : *ApJ* 707.1, p. 833-843. arXiv : 0906.5352 [astro-ph.HE] (cf. p. 90).

Simon, Jacob B., John F. Hawley et Kris Beckwith (jan. 2009). "Simulations of Magnetorotational Turbulence with a Higher-Order Godunov Scheme". In : *ApJ* 690.1, p. 974-997. arXiv : 0806.3969 [astro-ph] (cf. p. 87).

Socrates, Aristotle, Omer Blaes, Aimee Hungerford et Chris L. Fryer (oct. 2005). "The Neutrino Bubble Instability: A Mechanism for Generating Pulsar Kicks". In : *ApJ* 632.1, p. 531-562. arXiv : astro-ph/0412144 [astro-ph] (cf. p. 96).

Spence, EJ, MD Nornberg, CM Jacobson, RD Kendrick et al. (2006). "Observation of a turbulence-induced large scale magnetic field". In : *Physical review letters* 96.5, p. 055002 (cf. p. 60).

Spitkovsky, Anatoly (sept. 2006). "Time-dependent Force-free Pulsar Magnetospheres: Axisymmetric and Oblique Rotators". In : *ApJ* 648.1, p. L51-L54. arXiv : astro-ph/0603147 [astro-ph] (cf. p. 41).

Spitler, L. G., J. M. Cordes, J. W. T. Hessels, D. R. Lorimer et al. (août 2014). "Fast Radio Burst Discovered in the Arecibo Pulsar ALFA Survey". In : *ApJ* 790.2, 101, p. 101. arXiv : 1404.2934 [astro-ph.HE] (cf. p. 48, 50).

Spruit, H. C. (jan. 2002). "Dynamo action by differential rotation in a stably stratified stellar interior". In : *A&A* 381, p. 923-932. arXiv : astro-ph/0108207 [astro-ph] (cf. p. 70).

Spruit, H. C. (fév. 2008). "Origin of neutron star magnetic fields". In : sous la dir. de C. Bassa, Z. Wang, A. Cumming et V. M. Kaspi. T. 983, p. 391-398. arXiv : 0711.3650 [astro-ph] (cf. p. 71).

Spruit, H. C. et A. A. van Ballegooijen (fév. 1982). "Stability of toroidal flux tubes in stars". In : *A&A* 106.1, p. 58-66 (cf. p. 78).

Staelin, David H. et III Reifenstein Edward C. (déc. 1968). "Pulsating Radio Sources near the Crab Nebula". In : *Science* 162.3861, p. 1481-1483 (cf. p. 4).

Stefani, F, A Gailitis, G Gerbeth, A Giesecke et al. (2019). "The DRESDYN project: liquid metal experiments on dynamo action and magnetorotational instability". In : *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* 113.1-2, p. 51-70 (cf. p. 60).

Stello, Dennis, Matteo Cantiello, Jim Fuller, Rafael A. Garcia et al. (mars 2016). "Suppression of Quadrupole and Octupole Modes in Red Giants Observed by Kepler *". In : *PASA* 33, e011, e011. arXiv : 1602.05193 [astro-ph.SR] (cf. p. 69).

Stratta, Giulia, Maria Giovanna Dainotti, Simone Dall'Osso, X. Hernandez et al. (déc. 2018). "On the Magnetar Origin of the GRBs Presenting X-Ray Afterglow Plateaus". In : *ApJ* 869.2, 155, p. 155. arXiv : 1804.08652 [astro-ph.HE] (cf. p. 42).

Strohmayer, Tod E. et Anna L. Watts (oct. 2005). "Discovery of Fast X-Ray Oscillations during the 1998 Giant Flare from SGR 1900+14". In : *ApJ* 632.2, p. L111-L114. arXiv : astro-ph/0508206 [astro-ph] (cf. p. 22).

Sukhbold, Tuguldur, T. Ertl, S. E. Woosley, Justin M. Brown et al. (avr. 2016). "Core-collapse Supernovae from 9 to 120 Solar Masses Based on Neutrino-powered Explosions". In : *ApJ* 821.1, 38, p. 38. arXiv : 1510.04643 [astro-ph.HE] (cf. p. 25).

Svinkin, D., D. Frederiks, K. Hurley, R. Aptekar et al. (jan. 2021). "A bright γ-ray flare interpreted as a giant magnetar flare in NGC 253". In : *Nature* 589.7841, p. 211-213. arXiv : 2101.05104 [astro-ph.HE] (cf. p. 22).

Szczepanczyk, Marek, Javier Antelis, Michael Benjamin, Marco Cavaglia et al. (avr. 2021). "Detecting and reconstructing gravitational waves from the next Galactic core-collapse supernova in the Advanced Detector Era". In : *arXiv e-prints*, arXiv:2104.06462, arXiv:2104.06462. arXiv : 2104.06462 [astro-ph.HE] (cf. p. 40).

Taddia, F., J. Sollerman, C. Fremling, C. Barbarino et al. (jan. 2019). "Analysis of broad-lined Type Ic supernovae from the (intermediate) Palomar Transient Factory". In : *A&A* 621, A71, A71. arXiv : 1811.09544 [astro-ph.HE] (cf. p. 34).

Takiwaki, Tomoya et Kei Kotake (mars 2018). "Anisotropic emission of neutrino and gravitational-wave signals from rapidly rotating core-collapse supernovae". In : *MNRAS* 475.1, p. L91-L95. arXiv : 1711.01905 [astro-ph.HE] (cf. p. 39).

Tamborra, Irene, Florian Hanke, Hans-Thomas Janka, Bernhard Müller et al. (sept. 2014). "Self-sustained Asymmetry of Lepton-number Emission: A New Phenomenon during the

Supernova Shock-accretion Phase in Three Dimensions". In : *ApJ* 792.2, 96, p. 96. arXiv : 1402.5418 [astro-ph.SR] (cf. p. 75).

Tanaka, Masaomi, Keiichi Maeda, Paolo A. Mazzali, Koji S. Kawabata et al. (mars 2017). "Three-dimensional Explosion Geometry of Stripped-envelope Core-collapse Supernovae. II. Modeling of Polarization". In : *ApJ* 837.2, 105, p. 105. arXiv : 1702.03127 [astro-ph.HE] (cf. p. 36).

Tavani, M., C. Casentini, A. Ursi, F. Verrecchia et al. (jan. 2021). "An X-ray burst from a magnetar enlightening the mechanism of fast radio bursts". In : *Nature Astronomy* 5, p. 401-407. arXiv : 2005.12164 [astro-ph.HE] (cf. p. 48, 50).

Tayler, R. J. (jan. 1973). "The adiabatic stability of stars containing magnetic fields-I.Toroidal fields". In : *MNRAS* 161, p. 365 (cf. p. 70).

Tendulkar, S. P., C. G. Bassa, J. M. Cordes, G. C. Bower et al. (jan. 2017). "The Host Galaxy and Redshift of the Repeating Fast Radio Burst FRB 121102". In : *ApJ* 834.2, L7, p. L7. arXiv : 1701.01100 [astro-ph.HE] (cf. p. 48).

Tendulkar, Shriharsh P., P. Brian Cameron et Shrinivas R. Kulkarni (juill. 2013). "Proper Motions and Origins of AXP 1E 2259+586 and AXP 4U 0142+61". In : *ApJ* 772.1, 31, p. 31 (cf. p. 16).

The CHIME/FRB Collaboration, : Mandana Amiri, Bridget C. Andersen et al. (juin 2021). "The First CHIME/FRB Fast Radio Burst Catalog". In : *arXiv e-prints*, arXiv:2106.04352, arXiv:2106.04352. arXiv : 2106.04352 [astro-ph.HE] (cf. p. 49).

Thompson, Christopher et Robert C. Duncan (mai 1993). "Neutron Star Dynamos and the Origins of Pulsar Magnetism". In : *ApJ* 408, p. 194 (cf. p. 11, 76, 98, 99, 137, 172).

Thompson, Christopher et Robert C. Duncan (juill. 1995). "The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars - I. Radiative mechanism for outbursts". In : *MNRAS* 275.2, p. 255-300 (cf. p. 11).

Thompson, Christopher et Robert C. Duncan (déc. 1996). "The Soft Gamma Repeaters as Very Strongly Magnetized Neutron Stars. II. Quiescent Neutrino, X-Ray, and Alfven Wave Emission". In : *ApJ* 473, p. 322 (cf. p. 11, 12).

Thompson, Todd A., Philip Chang et Eliot Quataert (août 2004). "Magnetar Spin-Down, Hyperenergetic Supernovae, and Gamma-Ray Bursts". In : *ApJ* 611.1, p. 380-393. arXiv : astro-ph/0401555 [astro-ph] (cf. p. 36).

Thornton, D., B. Stappers, M. Bailes, B. Barsdell et al. (juill. 2013). "A Population of Fast Radio Bursts at Cosmological Distances". In : *Science* 341.6141, p. 53-56. arXiv : 1307.1628 [astro-ph.HE] (cf. p. 50).

Tiengo, Andrea, Paolo Esposito, Sandro Mereghetti, Roberto Turolla et al. (août 2013). "A variable absorption feature in the X-ray spectrum of a magnetar". In : *Nature* 500.7462, p. 312-314. arXiv : 1308.4987 [astro-ph.HE] (cf. p. 20, 21, 158, 206).

Tilgner, A. et F. H. Busse (fév. 1997). "Finite-amplitude convection in rotating spherical fluid shells". In : *J. Fluid Mech.* 332.1, p. 359-376 (cf. p. 117, 134, 169).

van den Horn, L. J. et C. G. van Weert (juill. 1984). "Transport properties of neutrinos in stellar collapse. II - Shear viscosity, heat conduction, and diffusion". In : *A&A* 136.1, p. 74-80 (cf. p. 98).

Velikhov, EP (1959). "Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic field". In : *Sov. Phys. JETP* 36.9, p. 995-998 (cf. p. 80).

Viganò, Daniele, Alberto García-García, José A. Pons, Clara Dehman et al. (avr. 2021). "Magneto-thermal evolution of neutron stars with coupled Ohmic, Hall and ambipolar effects via accurate finite-volume simulations". In : *arXiv e-prints*, arXiv:2104.08001, arXiv:2104.08001. arXiv : 2104.08001 [astro-ph.HE] (cf. p. 15).

Villani, Cédric (2002). "A review of mathematical topics in collisional kinetic theory". In : *Handbook of mathematical fluid dynamics* 1.71-305, p. 3-8 (cf. p. 96).

Vink, Jorick S., I. Brott, G. Gräfener, N. Langer et al. (mars 2010). "The nature of B supergiants: clues from a steep drop in rotation rates at 22 000 K. The possibility of Bi-stability braking". In : *A&A* 512, L7, p. L7. arXiv : 1003.1280 [astro-ph.SR] (cf. p. 37).

Vreeswijk, Paul M., Giorgos Leloudas, Avishay Gal-Yam, Annalisa De Cia et al. (jan. 2017). "On the Early-time Excess Emission in Hydrogen-poor Superluminous Supernovae". In : *ApJ* 835.1, 58, p. 58. arXiv : 1609.08145 [astro-ph.HE] (cf. p. 42).

Wadiasingh, Zorawar et Andrey Timokhin (juill. 2019). "Repeating Fast Radio Bursts from Magnetars with Low Magnetospheric Twist". In : *ApJ* 879.1, 4, p. 4. arXiv : 1904.12036 [astro-ph.HE] (cf. p. 49).

Walker, Justin et Stanislav Boldyrev (sept. 2017). "Magnetorotational dynamo action in the shearing box". In : *MNRAS* 470.3, p. 2653-2658. arXiv : 1704.08636 [astro-ph.SR] (cf. p. 91).

Wang, L. et J. C. Wheeler (sept. 2008). "Spectropolarimetry of supernovae." In : *ARA&A* 46, p. 433-474. arXiv : 0811.1054 [astro-ph] (cf. p. 36).

Wang, L. J., X. F. Wang, Z. Cano, S. Q. Wang et al. (oct. 2019). "Broad-lined type Ic supernova iPTF16asu: A challenge to all popular models". In : *MNRAS* 489.1, p. 1110-1119. arXiv : 1712.07359 [astro-ph.HE] (cf. p. 41).

Watson, Darach, Camilla J. Hansen, Jonatan Selsing, Andreas Koch et al. (oct. 2019). "Identification of strontium in the merger of two neutron stars". In : *Nature* 574.7779, p. 497-500. arXiv : 1910.10510 [astro-ph.HE] (cf. p. 45).

Wei, J., B. Cordier, S. Antier, P. Antilogus et al. (oct. 2016). "The Deep and Transient Universe in the SVOM Era: New Challenges and Opportunities - Scientific prospects of the SVOM mission". In : *arXiv e-prints*, arXiv:1610.06892, arXiv:1610.06892. arXiv : 1610.06892 [astro-ph.IM] (cf. p. 159).

Wheeler, J. Craig, Insu Yi, Peter Höflich et Lifan Wang (juill. 2000). "Asymmetric Supernovae, Pulsars, Magnetars, and Gamma-Ray Bursts". In : *ApJ* 537.2, p. 810-823. arXiv : astro-ph/9909293 [astro-ph] (cf. p. 36).

Wicht, Johannes (oct. 2002). "Inner-core conductivity in numerical dynamo simulations". In : *Phys. Earth Planet. Inter.* 132.4, p. 281-302 (cf. p. 117, 133, 168).

Wilson, J. R. et R. W. Mayle (jan. 1988). "Convection in core collapse supernovae." In : *Phys. Rep.* 163.1, p. 63-77 (cf. p. 74).

Winteler, C., R. Käppeli, A. Perego, A. Arcones et al. (mai 2012). "Magnetorotationally Driven Supernovae as the Origin of Early Galaxy r-process Elements?" In : *ApJ* 750.1, L22, p. L22. arXiv : 1203.0616 [astro-ph.SR] (cf. p. 38).

Woosley, S. E. (mars 1993). "Gamma-Ray Bursts from Stellar Mass Accretion Disks around Black Holes". In : *ApJ* 405, p. 273 (cf. p. 42).

Woosley, S. E. (août 2010). "Bright Supernovae from Magnetar Birth". In : *ApJ* 719.2, p. L204-L207. arXiv : 0911.0698 [astro-ph.HE] (cf. p. 40, 41).

Woosley, S. E. et A. Heger (fév. 2006). "The Progenitor Stars of Gamma-Ray Bursts". In : *ApJ* 637.2, p. 914-921. arXiv : astro-ph/0508175 [astro-ph] (cf. p. 37).

Woosley, S. E., A. Heger et T. A. Weaver (nov. 2002). "The evolution and explosion of massive stars". In : *Reviews of Modern Physics* 74.4, p. 1015-1071 (cf. p. 127, 166).

Woosley, S. E. et Alexander Heger (sept. 2015). "The Remarkable Deaths of 9-11 Solar Mass Stars". In : *ApJ* 810.1, 34, p. 34. arXiv : 1505.06712 [astro-ph.SR] (cf. p. 24).

Xue, Y. Q., X. C. Zheng, Y. Li, W. N. Brandt et al. (avr. 2019). "A magnetar-powered X-ray transient as the aftermath of a binary neutron-star merger". In : *Nature* 568.7751, p. 198-201. arXiv : 1904.05368 [astro-ph.HE] (cf. p. 47, 159, 197).

Yakovlev, D. G. et C. J. Pethick (sept. 2004). "Neutron Star Cooling". In : *ARA&A* 42.1, p. 169-210. arXiv : astro-ph/0402143 [astro-ph] (cf. p. 15).

Yoon, S. -C., N. Langer et C. Norman (déc. 2006). "Single star progenitors of long gamma-ray bursts. I. Model grids and redshift dependent GRB rate". In : *A&A* 460.1, p. 199-208. arXiv : astro-ph/0606637 [astro-ph] (cf. p. 37).

Zahn, J. -P., A. S. Brun et S. Mathis (oct. 2007). "On magnetic instabilities and dynamo action in stellar radiation zones". In : *A&A* 474.1, p. 145-154. arXiv : 0707.3287 [astro-ph] (cf. p. 70).

Zhang, B. -B., Z. -K. Liu, Z. -K. Peng, Y. Li et al. (mai 2021). "A Peculiarly Short-duration Gamma-Ray Burst from Massive Star Core Collapse". In : *arXiv e-prints*, arXiv:2105.05021, arXiv:2105.05021. arXiv : 2105.05021 [astro-ph.HE] (cf. p. 44).

Zhang, Bing (fév. 2017). "A "Cosmic Comb" Model of Fast Radio Bursts". In : *ApJ* 836.2, L32, p. L32. arXiv : 1701.04094 [astro-ph.HE] (cf. p. 49).

Zhang, Bing (mars 2019). "Charged Compact Binary Coalescence Signal and Electromagnetic Counterpart of Plunging Black Hole-Neutron Star Mergers". In : *ApJ* 873.2, L9, p. L9. arXiv : 1901.11177 [astro-ph.HE] (cf. p. 50).

Zhang, Bing, Y. Z. Fan, Jaroslaw Dyks, Shiho Kobayashi et al. (mai 2006). "Physical Processes Shaping Gamma-Ray Burst X-Ray Afterglow Light Curves: Theoretical Implications from the Swift X-Ray Telescope Observations". In : *ApJ* 642.1, p. 354-370. arXiv : astro-ph/0508321 [astro-ph] (cf. p. 34).

Zhou, Ping, Jacco Vink, Samar Safi-Harb et Marco Miceli (sept. 2019). "Spatially resolved X-ray study of supernova remnants that host magnetars: Implication of their fossil field origin". In : *A&A* 629, A51, A51. arXiv : 1909.01922 [astro-ph.HE] (cf. p. 16).

Ziegler, U. et G. Rüdiger (nov. 2001). "Shear rate dependence and the effect of resistivity in magneto-rotationally unstable, stratified disks". In : *A&A* 378, p. 668-678 (cf. p. 92).

université PARIS-SACLAY
ÉCOLE DOCTORALE
Astronomie
et Astrophysique
d'Île-de-France (AAIF)

Titre : Moteur central des explosions extrêmes : l'instabilité magnétorotationnelle dans les proto-étoiles à neutrons

Mots clefs : Magnétars, Supernovae, Sursauts Gammas, Dynamo, Magnétohydrodynamique (MHD), Méthodes Numériques

Résumé : La fin de vie des étoiles massives donne lieu à une explosion, appelée supernova. Ces explosions sont provoquées par l'effondrement de leur cœur de fer et la formation d'une étoile à neutrons. Les observations des supernovae montrent que certaines d'entre elles ont des caractéristiques extrêmes comme leur énergie cinétique pour les hypernovae ou leur luminosité pour les supernovae superlumineuses. Un moteur central de ces explosions différent du mécanisme des neutrinos pour les supernovae standards est souvent invoqué pour expliquer ces caractéristiques extrêmes : une explosion magnétorotationnelle. Ce mécanisme suppose la formation d'une proto-étoile à neutrons (PNS) en rotation rapide et avec un fort champ magnétique qui permet d'extraire l'énergie de rotation et obtenir une explosion plus énergétique ou lumineuse. Cette PNS, une fois refroidie en étoile à neutrons, fait partie de la classe des magnétars, qui se distingue par toute une diversité d'émissions à haute énergie dues à la dissipation de leur intense champ magnétique interne. Les observations de ces objets permettent d'inférer que la composante dipolaire de leur champ magnétique est de l'ordre de 10^{14}–10^{15} G.
L'origine des magnétars et de leur fort champ magnétique à grande échelle, particulièrement en présence de rotation rapide, reste une question ouverte. Deux mécanismes ont été invoqués pour amplifier le champ magnétique dans les PNS : la dynamo convective ou l'instabilité magnétorotationnelle (MRI). Cette thèse se propose d'étudier en détail le scénario de formation par la MRI. Celle-ci a déjà été étudiée de manière analytique ou dans des simulations numériques locales dans une boite représentant une partie de la PNS. Pour la première fois, cette thèse présente des modèles 3D sphériques simplifiés, ce qui permet d'étudier l'origine du dipôle.
Une première étude a été menée pour étudier la génération d'un champ magnétique à grande échelle dans l'approximation incompressible, ce qui permet une plus vaste exploration des paramètres et des simulations plus longues. Nos simulations montrent la présence d'une dynamo auto-entretenue, dont l'état saturé ne dépend pas des conditions initiales du champ magnétique. Bien que cet état soit dominé par le champ magnétique turbulent ($\geq 10^{15}$ G), un dipôle représentant 5 % du champ magnétique moyen est généré dans toutes les simulations. De manière inédite, ce dipôle est orienté vers le plan équatorial plutôt que vers l'axe de rotation. De plus, la comparaison de ces modèles sphériques avec les modèles locaux montre que l'état turbulent de la MRI a des propriétés similaires, bien que le champ magnétique soit légèrement plus faible dans les modèles globaux.
Un modèle basé sur l'approximation anélastique a ensuite été développé afin de prendre en compte les profils de densité et d'entropie d'une structure réaliste de PNS. Les simulations montrent également une dynamo auto-entrenue avec un champ magnétique moyen de $\geq 10^{14}$ G et un dipôle équatorial de l'ordre de 4.3 % du champ magnétique. De plus, un nouveau comportement oscillant à grande échelle apparaît avec ce modèle réaliste : une dynamo de champ moyen qui peut être décrite comme une dynamo $\alpha\Omega$. La comparaison de ce modèle avec des modèles idéalisés montre que la stratification en densité favorise l'apparition d'une dynamo de champ moyen. La force de flottaison limite la turbulence dans le plan équatorial mais a une influence assez faible dans l'ensemble du fait de la forte diffusion thermique due aux neutrinos. Dans l'ensemble, les résultats présentés dans cette thèse confirment la capacité de la MRI de former des magnétars dans le cas d'une rotation rapide.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France

université PARIS-SACLAY
ÉCOLE DOCTORALE
Astronomie
et Astrophysique
d'Île-de-France (AAIF)

Title: Central engine of extreme explosions: magnetorotational instability in proto-neutron stars

Keywords: Magnetars, Supernovae, Gamma-ray bursts, Dynamo, Magnetohydrodynamics (MHD), Numerical Methods

Abstract:
Massive stars end their life in a violent explosion, called supernova. These explosions are due to the collapse of their iron core and lead to the formation of neutron stars. Observations show that some supernovae have extreme properties, such as their kinetic energy in the case of hypernovae or their luminosity in the case of superluminous supernovae. A central engine different from the neutrino-driven mechanism for standard supernovae is often invoked for these extreme explosions : a magnetorotational explosion. This mechanism assumes on a fast rotating proto-neutron star (PNS) with an intense magnetic field, which extracts the rotational energy to explain the extreme caracteristics of hypernovae or superluminous supernovae. With time, this PNS becomes a magnetar, a class of neutron stars caracterised by a wide diversity of high energy phenomena powered by the dissipation of their strong magnetic field. A magnetic dipole of 10^{14}–10^{15} G can be inferred from the observations of most magnetars.
The origin of magnetars and their large-scale magnetic field, especially in presence of fast rotation, remains an open question. Two promising mechanisms are invoked to amplify the magnetic field of PNS : the convective dynamo or the magnetorotational instability (MRI). This thesis studies in more details the scenario of magnetar formation by the MRI. This instability has been studied analytically or in local numerical simulations with a box representing a small part of the PNS. For the first time, this thesis uses simplified spherical 3D models to study the origin of the dipole.
A first study is designed to investigate large-scale magnetic field from an initial small-scale one using the incompressible approximation, which enables longer simulation times and the exploration of the parameter space. The numerical simulations of this model show a self-sustained turbulent MRI-driven dynamo, whose saturated state is independent of the initial magnetic field. This saturated state is dominated by a strong turbulent magnetic field of $B \geq 10^{15}$ G, but a non-dominant magnetic dipole represents systematically about 5 % of the averaged magnetic field strength. Interestingly, this dipole is found to be tilted toward the equatorial plane. By comparing these results with local simulations, global models reproduce several characteristics of local MRI turbulence such as the kinetic and magnetic spectra, while the turbulence is less vigorous in the global models.
A more realistic model based on the anelastic approximation was then developed in order to take into account the density and entropy profiles of the PNS. Simulation results show a self-sustained turbulent MRI-driven dynamo with a strong turbulent magnetic field of $B \geq 10^{14}$ G and a non-dominant equatorial dipole, which represents about 4.3 % of the averaged magnetic field strength. Interestingly, an axisymmetric magnetic field at large scales is observed to oscillate with time, which can be described as a mean-field $\alpha\Omega$ dynamo. By comparing these results with the models with fewer physical ingredients, we find that the density gradient favors the apparition of this mean-field behaviour. Buoyancy due to the entropy gradient damps turbulence in the equatorial plane but has a relatively weak influence overall because of the high thermal diffusivity due to neutrinos.
To conclude, this thesis supports the ability of the MRI to generate magnetar-like large-scale magnetic fields in a fast-rotating PNS.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France