



HAL
open science

Modélisation du comportement élastoplastique cyclique multiaxial par une approche multisurface dans l'espace des déformations

Corado Ningre

► **To cite this version:**

Corado Ningre. Modélisation du comportement élastoplastique cyclique multiaxial par une approche multisurface dans l'espace des déformations. Science des matériaux [cond-mat.mtrl-sci]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2020. Français. NNT: 2020GRALI053 . tel-03381505

HAL Id: tel-03381505

<https://theses.hal.science/tel-03381505>

Submitted on 17 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **2MGE : Matériaux, Mécanique, Génie civil, Électrochimie**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Corado NINGRE

Thèse dirigée par **Ali TOURABI** (Université Grenoble Alpes)
et codirigée par **Didier IMBAULT** (Grenoble INP)
et **Guilhem BLÈS** (ENSTA Bretagne)

préparée au sein du **Laboratoire Sols, Solides, Structures et Risques (3SR)**
et de l'**Institut de Recherche Dupuy de Lôme (IRD)**
dans l'**École Doctorale I-MEP2 - Ingénierie - Matériaux, Mécanique, Environnement, Énergétique, Procédés, Production**

Modélisation du comportement élastoplastique cyclique multiaxial par une approche multisurface dans l'espace des déformations

Modeling of multiaxial cyclic elastic-plastic behavior by a strain-space multisurface approach

Thèse soutenue publiquement le **15 octobre 2020**,
devant le jury composé de :

Monsieur Christophe DESRAYAUD

Professeur, École des MINES de Saint-Étienne, Président

Madame Emmanuelle ROUHAUD

Professeure, Université de Technologie de Troyes, Rapporteur

Monsieur Alexis RUSINEK

Professeur, Université de Metz, Rapporteur

Monsieur Ali TOURABI

Maître de Conférences HDR, Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse

"Pratique le non-agir,
exécute le non-faire,
goûte le sans-saveur,
considère le petit comme le grand
et le peu comme beaucoup.
Attaque une difficulté dans les éléments faciles ;
Accomplis une grande œuvre par de menus actes.
La chose la plus difficile au monde
se réduit finalement à des éléments faciles.
L'œuvre la plus grandiose s'accomplit
nécessairement par de menus actes."

Tao-tö king, Lao-tseu

Remerciements

Ci-après, je vais m'attacher à remercier les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail de thèse. Elles sont si nombreuses que je ne pourrai pas être exhaustif ; ainsi, que celles et ceux qui ne sont pas cités sachent qu'ils n'en sont pas moins remerciés.

Monter une thèse nécessite le concours de nombreux acteurs... Pour commencer, je remercie la Fondation Grenoble INP, la Chaire Hydro'Like et General Electric d'avoir financé et suivi mes travaux. En particulier, mes remerciements vont à Valérie Bonnardel pour la Fondation, Olivier Métais et Guillaume Balarac pour la Chaire, et Stéphane Fréchet pour GE. Merci à vous de m'avoir fait confiance, d'avoir suivi mes travaux avec intérêt et d'avoir apporté une vision industrielle à un sujet aussi fondamental.

Qu'aurait été le résultat de ces années de travail sans un tel encadrement ? Certainement pas grand-chose... C'est pourquoi je remercie infiniment mes encadrants Ali Tourabi, Didier Imbault et Guilhem Blès. Ali, merci de m'avoir apporté ton expérience, ta rigueur, et d'avoir su me remotiver quand c'était nécessaire. Au-delà de tes qualités scientifiques, je retiendrai surtout tes qualités pédagogiques et humaines. Didier, merci pour ton œil avisé sur ce travail de thèse ; ton recul a notamment été très appréciable en amont des présentations. Merci également d'avoir toujours veillé à ce que je bénéficie des meilleures conditions de travail, souvent proches du luxe ! Guilhem, merci pour ton accueil à Brest, et merci de m'avoir formé en particulier sur les lois de comportement et leur implémentation. Merci également d'avoir réussi à me faire comprendre des concepts compliqués avec des mots simples ; c'est une immense qualité chez toi, qui m'a marqué. Encore une fois, merci à vous trois, c'est dans nos échanges et dans notre travail d'équipe que j'ai le plus apprécié cette expérience qu'est la thèse.

La théorie c'est beau, la simulation c'est "facile", mais la vérité se trouve dans les essais... Pour leur réalisation, je remercie chaleureusement Josselin Noël et Antoine Miras. Josselin, merci pour ton travail de qualité et ta polyvalence dans la préparation des essais, leur réalisation et leur dépouillement. Antoine, merci de nous avoir fait bénéficier de ton immense expérience et de nous avoir permis de déjouer de nombreux pièges, dans lesquels nous serions tombés sans ton expertise.

Pendant ces années, j'ai eu la chance de côtoyer de nombreuses personnes au sein du laboratoire 3SR... Merci à tous mes collègues doctorants, post-doctorants et permanents, pour leur bienveillance, leur bonne humeur, leurs conseils, leurs coups de gueule... Encore une fois, je ne peux pas citer tout le monde, mais je donne quelques

mentions spéciales ; à Josselin, pour nos nombreuses discussions techniques (parfois) ou pas (souvent), El Mahdi, pour notre périple en Corée, Théophile, pour nos parties de tennis, Nahia, pour le partage de nos galères... Merci également à Dimitri, Thibault, Maxime, François, Julia, Hamid, Barthélémy, Tanguy, Alberto et tous ceux qui se reconnaîtront dans les moments que nous avons partagés.

Pour décompresser en dehors du travail, mon truc à moi c'est le badminton...

Un immense merci aux joueuses et joueurs du club d'Échirolles pour leur accueil, et pour tous les moments passés ensemble ; les entraînements, les Interclubs, les tournois, les lotos, les apéros aux 3B et j'en passe ! J'espère pouvoir un jour à nouveau taper quelques volants avec vous, Anthony, Aurélie, Céline, Guillaume, Cyrille, Pascal, Fabien, Laurent, et tous les autres.

Ces années à Grenoble m'ont amené à m'éloigner de certains de mes amis, qui m'ont toujours apporté leur soutien même à distance...

Mathilde, Raph, quand je repense à Orléans, je me dis que je serais vraiment passé à côté de quelque chose sans vous ! Merci pour ça, hâte de vous revoir ! Nico, mon poulet, on se voit de moins en moins souvent, mais depuis un certain cours, on sait tous les deux qu'on n'a même plus besoin de se parler pour communiquer !

Enfin, que serait une personne sans la famille qui l'a entourée depuis le début...

J'exprime toute ma reconnaissance à mes parents et à ma sœur, qui m'ont transmis le meilleur d'eux-mêmes, m'ont encouragé (et non poussé) à faire des études et ont toujours soutenu mes choix d'orientation. Merci également à Anna, qui m'a rejoint avant la thèse, m'a accompagné durant cette aventure et continue de m'accompagner chaque jour, quelles que soient les difficultés.

Table des matières

Notations	1
1 Introduction	5
1.1 Contexte et verrous scientifiques	5
1.2 Objectifs du travail de thèse	8
1.3 Présentation du manuscrit	10
2 État de l’art	11
2.1 Rappels sur le modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure 1D (SVG-HP 1D)	12
2.1.1 Modèles élastoplastiques de Saint-Venant	12
2.1.2 Propriétés intrinsèques du modèle SVG-HP 1D	19
2.2 Modèles de plasticité multisurface	19
2.2.1 Modèle multisurface de Mróz	20
2.2.2 Modèle à éléments distribués d’Iwan (modèle DEM)	22
2.2.3 Discussion sur la non-intersection des surfaces seuil	23
2.3 Plasticité exprimée dans l’espace des déformations	24
2.3.1 Avantages de ce formalisme	24
2.3.2 Quelques modèles de plasticité dans l’espace des déformations	25
2.4 Modélisation de la plasticité sous chargement non proportionnel	25
2.4.1 Modèle ECNL	25
2.4.2 Modèle LMTNP2	26
2.5 Phénomène de rochet de torsion ou effet Poynting-Swift	31
2.5.1 Mise en évidence expérimentale	31
2.5.2 Explications théoriques et modélisation	32
2.6 Décomposition élastique-plastique des grandes transformations	36
3 Modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure 1D (SVG-HP 1D)	41
3.1 Définition des paramètres du modèle	42
3.1.1 Répartition homogène des seuils	42
3.1.2 Fonction générative des modules d’élasticité	42
3.2 Optimisation du choix des paramètres du modèle	50
3.2.1 Influence et choix du nombre d’éléments de Saint-Venant	51
3.2.2 Détermination du seuil limite	53
3.2.3 Fonction de densification des seuils	55
3.3 Ajout d’un ressort célibataire	57

4	Modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure 3D (SVG-HP 3D)	59
4.1	Vers un modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure 3D	60
4.1.1	Hypothèses et choix adoptés	60
4.1.2	Extension du modèle SVG-HP 1D au cas 3D	64
4.2	Définition du modèle SVG-HP 3D	67
4.2.1	Expression de la loi de comportement 3D	67
4.2.2	Règle d'écoulement de type normalité (NFR)	68
4.3	Méthode d'identification du modèle	75
4.4	Loi d'écrouissage cyclique pour les trajets proportionnels (SVG-EC 3D) . .	76
5	Analyse des prévisions du modèle SVG-HP 3D	85
5.1	Modèle éléments finis de traction-torsion combinées	86
5.2	Simulation de la traction-torsion combinées en chargement non proportionnel	87
5.3	Prédiction de l'effet Poynting-Swift	108
5.3.1	Illustration de la prédiction de l'effet Poynting-Swift par le modèle SVG-HP 3D	108
5.3.2	Analyse de l'effet Poynting-Swift avec le modèle	112
5.4	Résultats typiques de calcul de structure	118
5.4.1	Validation du modèle axisymétrique de traction-torsion combinées .	118
5.4.2	Chargement d'une structure en grande déformation	121
5.4.3	Chargement cyclique d'une structure	127
6	Proposition d'une règle d'écoulement interdépendante (IFR)	133
6.1	Présentation synthétique et illustration de la règle IFR	134
6.2	Définition provisoire	137
6.3	Problème de saut des surfaces seuil	142
6.4	Définition définitive	145
6.5	Analyse des prévisions du modèle SVG-HP 3D avec la règle d'écoulement IFR	156
6.5.1	Réponse sous chargement multiaxial de traction-torsion combinées .	156
6.5.2	Prévision de l'effet Poynting-Swift	164
7	Thermomécanique du modèle de Saint-Venant généralisé 3D	167
7.1	Préambule et hypothèses de base	167
7.2	Cas du modèle SVG-HP 1D	168
7.2.1	Analyse énergétique du modèle - Premier principe de la thermody- namique	168
7.2.2	Analyse thermodynamique du modèle - Second principe de la ther- modynamique	172
7.3	Extension de l'analyse thermodynamique au cas 3D	175
7.3.1	Cas du modèle de Saint-Venant élémentaire 3D	175

7.3.2	Généralisation au cas du modèle SVG-HP 3D	179
8	Proposition d'un critère de fatigue multiaxiale	187
8.1	Variables énergétiques de suivi de la fatigue multiaxiale	188
8.2	Critère de fatigue multiaxiale	190
8.2.1	Hypothèses de bases	190
8.2.2	Énoncé du critère	190
8.2.3	Courbe d'endurance en énergie	191
8.2.4	Constante énergétique critique	192
8.2.5	Fonction énergétique critique par cycle	193
8.2.6	Expression finale du critère de fatigue	194
8.2.7	Paramètre de suivi de l'endommagement	194
8.3	Validation du critère de fatigue multiaxiale	196
8.3.1	Éprouvette Arcan et matériau adopté	197
8.3.2	Évaluation des lois de cumul d'endommagement	203
8.3.3	Validation du critère de fatigue multiaxiale	206
9	Conclusion et perspectives	211
A	Résultats de traction-torsion combinées	217
B	Espace multidimensionnel d'Ilyushin	231
C	Application du modèle SVG-HP 3D au cas de la traction simple	237
D	Rotation de Jaumann en cisaillement simple	239
E	Contrainte conjuguée à la déformation logarithmique	243
	Bibliographie	245

Notations

Sigles

HPP	Hypothèse des Petites Perturbations
IFR	<i>Interdependency condition Flow Rule</i>
MMC	Mécanique des Milieux Continus
NFR	<i>Normality Flow Rule</i>
SVG-EC 3D	Saint-Venant Généralisé à Écrouissage Cyclique 3D
SVG-HP 1D	Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure 1D
SVG-HP 3D	Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure 3D

Opérateurs et fonctions mathématiques

X	scalaire
\vec{X}	vecteur
$\widetilde{\mathbf{X}}$	tenseur d'ordre deux
$\widetilde{\widetilde{\mathbf{X}}}$	tenseur d'ordre quatre
\underline{X}	scalaire de nature déviatoire
$\langle X \rangle$	opérateur de Macaulay
\vec{X}	vecteur de nature déviatoire
$\ \vec{X}\ $	norme euclidienne de \vec{X}
$\vec{X} \cdot \vec{Y}$	produit scalaire de \vec{X} et \vec{Y}
Mat $\widetilde{\mathbf{X}}$	matrice des composantes de $\widetilde{\mathbf{X}}$
Col $\widetilde{\mathbf{X}}$	matrice colonne des composantes de $\widetilde{\mathbf{X}}$
$\widetilde{\mathbf{X}}$	déviateur de $\widetilde{\mathbf{X}}$
$\ \widetilde{\mathbf{X}}\ $	norme euclidienne de $\widetilde{\mathbf{X}}$
Tr $\widetilde{\mathbf{X}}$	trace de $\widetilde{\mathbf{X}}$
$\widetilde{\mathbf{X}}^T$	transposée de $\widetilde{\mathbf{X}}$
$\widetilde{\mathbf{X}}^{-1}$	inverse de $\widetilde{\mathbf{X}}$
$\overset{oj}{\widetilde{\mathbf{X}}}$	dérivée de Jaumann de $\widetilde{\mathbf{X}}$
$\dot{\widetilde{\mathbf{X}}}$	dérivée temporelle de $\widetilde{\mathbf{X}}$
$\widetilde{\mathbf{X}} : \widetilde{\mathbf{Y}}$	produit doublement contracté de $\widetilde{\mathbf{X}}$ et $\widetilde{\mathbf{Y}}$
$C(x)$	fonction de densification des seuils
$\mathcal{H}(x)$	fonction de Heaviside
$M(x)$	fonction module tangent
$\Gamma(x)$	fonction gamma

Symboles

c	coefficient de courbure de la fonction générative s_1
c_1, c_2	paramètres de la loi d'écroissage cyclique
d	paramètre de la fonction générative s
D	endommagement total
D_c	endommagement critique
\mathbf{D}	sous-espace de dimension cinq des tenseurs déviatoires
$\tilde{\mathbf{D}}$	taux de déformation
e_k	rayon d'une surface seuil d'indice k dans l'espace déviatoire des déformations
e_k^*	seuil de déclenchement d'un frotteur d'indice k
e_n^*	seuil limite
E	module d'Young
E_∞	rigidité résiduelle en traction
E^*	cumul de la valeur absolue du taux d'énergie interne
$E^*_{/cycle}$	cumul de la valeur absolue du taux d'énergie interne sur un cycle
\dot{E}	taux d'énergie interne
f_k	fonction de charge
$\tilde{\mathbf{F}}$	gradient de la transformation
G_0	module d'élasticité à l'origine
G_k	module d'élasticité d'un ressort d'indice k
G_∞	module d'élasticité résiduelle
h_m	module de la partie sphérique de $\tilde{\mathbf{h}}$
\mathbf{H}	sous-espace de dimension un des tenseurs sphériques
$\tilde{\mathbf{h}}$	déformation de Hencky gauche
I	cumul du taux de dissipation de type entropique
$I_{/cycle}$	cumul du taux de dissipation de type entropique sur un cycle
\dot{I}	taux de dissipation de type entropique
$\tilde{\mathbf{I}}$	tenseur identité
J	changement de volume
$\tilde{\mathbf{J}}$	matrice Jacobienne
K	module de compressibilité volumique
$\tilde{\mathbf{L}}$	gradient eulérien des vitesses
M_p	module de la déformation plastique
n	nombre d'éléments de Saint-Venant
N	nombre de cycles
N_f	nombre de cycles à rupture

$-\underline{P}_i$	puissance des efforts intérieurs
Q_0	rayon de la surface seuil de von Mises
Q_c	déformation cumulée
Q_ε	module de la déformation dans le plan déviatoire
Q_σ	module de la contrainte dans le plan déviatoire
$-\dot{Q}_{ii}$	taux de chaleur interne intrinsèque
$\widetilde{\mathbf{R}}$	rotation propre
$\widetilde{\mathbf{R}}^{bj}$	rotation entre le référentiel j et le référentiel b
s, s_1, s_2, s_3	fonctions génératives
s_{BM}	facteur de sécurité du critère de Brown-Miller
s_{DV}	facteur de sécurité du critère de Dang Van
S	seuil de plasticité actuel
S_0	seuil de plasticité en cisaillement
S_S	seuil de saturation
S_S^∞	seuil de saturation limite
\mathbf{S}	espace des tenseurs du second ordre symétriques
t	temps
$\vec{\mathbf{V}}_k$	vecteur d'écoulement
$\widetilde{\mathbf{V}}$	tenseur de déformation pure gauche
W_i	travail des efforts intérieurs
W_p	travail plastique
$\widetilde{\mathbf{W}}$	taux de rotation
x	paramètre de seuil limite
Y_0	seuil de plasticité en traction
α	paramètre de la fonction de densification des seuils
α_1, α_2	paramètres de la loi d'écrouissage cyclique (chapitre 4) ou paramètres du critère de fatigue (chapitre 8)
α_j	angle de rotation du référentiel j
γ	paramètre de la loi d'écrouissage cyclique
$\gamma, \gamma^e, \gamma^p$	distorsion totale, élastique, plastique
$\frac{\gamma_c}{\delta}$	distorsion au point d'inflexion
δ	coefficient de courbure de la fonction générative s_2
Δ_k	écart entre le seuil e_k^* et la distorsion au point d'inflexion
$\varepsilon, \varepsilon^e, \varepsilon^p$	déformation totale, élastique, plastique
ε_a	amplitude de déformation
$\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$	tenseur des petites déformations
μ	module de cisaillement
ν	coefficient de Poisson
ξ	cumul d'énergie (E^* ou I)
$\xi_{/cycle}$	cumul d'énergie (E^* ou I) sur un cycle

π	puissance réversible
σ_a	amplitude de contrainte
σ_m	module de la partie sphérique de $\tilde{\sigma}$
σ_D	limite d'endurance
σ_{DV}	contrainte équivalente au sens de Dang Van
$\tilde{\sigma}$	contrainte de Cauchy
$\tilde{\sigma}^j$	contrainte observée depuis le référentiel de Jaumann
$\tilde{\sigma}^e$	somme des contraintes des éléments en élasticité
$\tilde{\sigma}^f$	somme des contraintes des éléments en plasticité
$\tilde{\sigma}^k$	contrainte dans l'élément d'indice k
$\tilde{\tau}^*$	contrainte conjuguée Jaumann-Hencky gauche
ϕ	angle de torsion ou <i>twist</i>
$\underline{\phi}$	dissipation intrinsèque
χ_f	constante énergétique critique
$\chi_{f/cycle}$	fonction énergétique critique par cycle

CHAPITRE 1

Introduction

Sommaire

1.1	Contexte et verrous scientifiques	5
1.2	Objectifs du travail de thèse	8
1.3	Présentation du manuscrit	10

Ce premier chapitre, composé de trois paragraphes, consiste tout d’abord à présenter le contexte ainsi que les verrous scientifiques associés à ce travail de thèse (§ 1.1). Les objectifs fixés pour lever ces verrous scientifiques seront présentés dans le paragraphe 1.2. Enfin, le dernier paragraphe sera dédié à une présentation synthétique du manuscrit, dans le but de guider le lecteur vers les différents chapitres proposés (§ 1.3).

1.1 Contexte et verrous scientifiques

L’hystérésis pure, à fermeture parfaite des cycles, est un phénomène universel qui se manifeste dans de nombreux domaines de la physique, et notamment en mécanique des solides. Pour étudier ce phénomène, Persoz a proposé le modèle symbolique discret de Saint-Venant généralisé [Persoz 1960]. Ce modèle est constitué de l’assemblage d’un grand nombre de modèles symboliques élémentaires de Saint-Venant. Par la suite, Persoz a proposé une extension de ce modèle au cas continu, qui a débouché sur le modèle de Saint-Venant généralisé continu. Ce dernier modèle a ensuite été étudié de façon plus complète par Guélin en 1980, qui a d’une part proposé une étude thermomécanique complète du modèle. D’autre part, il s’est inspiré des propriétés de ce modèle pour initier, à Grenoble, une approche phénoménologique basée sur la notion de mémoire discrète d’évènements, que le modèle est capable de mémoriser, à des instants privilégiés que sont les instants d’inversions de la sollicitation [Guélin 1980]. Cette approche a permis de construire un schéma théorique d’hystérésis pure, pour décrire le comportement thermomécanique irréversible des solides, sous sollicitations cycliques tridimensionnelles. Ce schéma théorique à mémoire discrète a montré de réelles aptitudes à reproduire les propriétés essentielles du comportement élastoplastique [Favier *et al.* 1988]. Ces aptitudes, le schéma à mémoire discrète les a héritées du modèle de Saint-Venant généralisé, dont les propriétés mécaniques trouvent une justification physique consistante, grâce à un parallèle micro-macro qualitatif, s’appuyant sur les mécanismes microstructuraux liés au mouvement des dislocations

[Wack & Tourabi 1992]. Ce schéma a ensuite été développé pour décrire une large gamme de comportements thermomécaniques cycliques, concernant : les matériaux métalliques [Pégon & Guélin 1987, Favier *et al.* 1988, Guélin & Nowacki 2000, Siret *et al.* 2012], les matériaux granulaires [Pégon *et al.* 1991], les effets du second ordre de type rochet [Guélin *et al.* 1999], les alliages à mémoire de forme [Rio *et al.* 1995, Manach *et al.* 1996, Guélin *et al.* 1997], les élastomères [Vandenbroucke *et al.* 2010, Rey *et al.* 2014], les matériaux ferroélectriques et ferromagnétiques [Tourabi *et al.* 1995] ainsi que les matériaux tissés et les polymères solides [Blès *et al.* 2000, Blès *et al.* 2002, Blès *et al.* 2009, Laurent *et al.* 2011, Dib *et al.* 2018].

Néanmoins, l'étude et la modélisation du comportement élastoplastique des matériaux solides, sous chargement cyclique, présentent toujours des questions ouvertes et des verrous scientifiques importants, auxquels le projet de thèse s'intéresse :

a De par sa définition, le schéma à mémoire discrète pose une difficulté pour son implémentation dans les codes de calcul par éléments finis commerciaux. Ceci est lié au fait que ce schéma nécessite la mémorisation des états mécaniques aux instants d'inversions, tels que la contrainte, la déformation et certaines autres variables thermodynamiques [Guélin *et al.* 1985]. Le nombre de mémorisations dépend du trajet de chargement, qui se révèle difficilement prévisible, dans le cas d'un calcul de structure. Cette limitation devient de plus en plus sévère si l'on considère des trajets à grand nombre de cycles ou des trajets non proportionnels, à niveaux de contrainte décroissants. Du point de vue numérique, ceci est essentiellement lié à la notion d'allocation dynamique de mémoire, que les codes de calcul par éléments finis commerciaux, comme Abaqus, n'offrent pas toujours aux utilisateurs.

Notons que cette difficulté a été contournée par le code universitaire Herezh++, développé par Rio, qui permet d'une part une allocation dynamique de la mémoire [Rio *et al.* 2009]; d'autre part, ce code peut être couplé à un code éléments finis commercial, tel qu'Abaqus [Rio *et al.* 2008].

Malgré ces travaux, les simulations de structures en sollicitations à grand nombre de cycles, avec le schéma à mémoire discrète, amènent une augmentation de la taille mémoire requise, non contrôlée par l'utilisateur. Ceci peut se révéler, dans certains cas, une limitation aléatoire contraignante pour l'ingénieur simulateur ; il devra se limiter en nombre d'éléments ou bien augmenter les capacités de mémoire de son ordinateur. Ainsi, l'implémentation du schéma à mémoire discrète dans les codes de calcul par éléments finis, pour un déploiement en bureau d'études, constitue toujours un verrou scientifique que le projet de thèse s'est proposé de lever. La méthode que nous nous proposons d'adopter consiste à étendre le modèle de Saint-Venant généralisé au cas tridimensionnel. Cette méthode nous permet de nous affranchir de la notion de mémoire discrète, tout en préservant les qualités du modèle de Saint-Venant généralisé, qui traduit fidèlement les différentes propriétés de l'hystérésis pure.

- b** Le phénomène de rochet de torsion, ou effets du second ordre de Poynting-Swift [Poynting 1909, Swift 1947], sont des effets difficiles à modéliser [Wack 1989, Delobelle *et al.* 1995]. Cet aspect constitue à la fois un verrou scientifique sérieux et un test sévère pour les lois de comportement élastoplastique cyclique [Majors & Krempl 1994]. La modélisation de ce phénomène complexe est étroitement liée à l’usage des déformations finies et au choix de la dérivée objective ou au choix du repère privilégié adopté pour l’écriture de la loi de comportement irréversible multiaxiale [Guélin *et al.* 1999, Kuroda 1999, Khan *et al.* 2007].

Au cours de ces dernières décennies, le comportement élastoplastique cyclique a fait l’objet d’une multitude de travaux, afin de proposer des modèles aptes à prendre en compte les effets de rochet, en général, et les effets du second ordre de Poynting-Swift, en particulier [Zhu *et al.* 2014]. A titre d’exemple, le modèle proposé par Zhu *et al.* repose sur une approche classique, comportant un écrouissage cinématique, un écrouissage isotrope, et défini par vingt-trois paramètres matériau. Ce travail, qui adopte le formalisme des grandes déformations, s’attache à simuler les résultats expérimentaux de rochet obtenus par Khan *et al.* sur un alliage de cuivre [Khan *et al.* 2007]. Le projet de thèse intègre la levée de ce verrou scientifique dans son programme de travail.

- c** Mróz a proposé un modèle multisurface réputé dans le domaine du comportement multiaxial cyclique [Mróz 1967]. Ce modèle repose sur une condition d’interdépendance du mouvement des surfaces seuil, ou condition de non-intersection. La pertinence physique de cette condition est toujours une question ouverte et suscite un débat dans la communauté scientifique [Brokate *et al.* 1996, Montans & Caminero 2007]. Le projet de thèse se propose d’apporter des éléments de réponse à cette question fondamentale, qui peut être considérée comme un verrou scientifique dans le domaine de l’étude du comportement élastoplastique cyclique multiaxial.

- d** L’étude de l’endurance des matériaux métalliques en fatigue oligocyclique et polycyclique, sous chargements multiaxiaux complexes, se heurte à des difficultés conceptuelles essentiellement liées à deux aspects, que sont la prise en compte de la nature de la sollicitation et la définition des lois de cumul de dommage sous sollicitations cycliques d’amplitudes variables.

Unifier l’étude de l’endurance dans les domaines de la fatigue oligocyclique et celui de la fatigue polycyclique est un verrou scientifique auquel le projet de thèse s’intéresse. Pour lever ce verrou, nous proposons de développer une approche de type énergétique reposant, d’une part, sur une définition thermodynamique de variables scalaires de suivi de la fatigue multiaxiale [Tourabi *et al.* 1996]; d’autre part, sur la proposition d’un critère de fatigue multiaxiale. Cette approche énergétique sera ensuite éprouvée par la comparaison de ses prévisions à celles de critères reconnus et utilisés dans le milieu industriel.

1.2 Objectifs du travail de thèse

Dans le cadre de ce travail de thèse, deux applications sont envisagées. La première concerne l'étude du comportement élastoplastique des matériaux métalliques en chargements cycliques multiaxiaux dans le domaine des petites déformations. La deuxième concerne l'étude de l'endurance des matériaux métalliques en fatigue oligocyclique et polycyclique. Pour lever les verrous scientifiques développés dans le paragraphe précédent, il est nécessaire d'adopter des choix méthodologiques pertinents. Dans le programme de travail de thèse, ces choix se traduisent par les objectifs suivants :

i Un objectif majeur de ce travail de thèse consiste à proposer un modèle mécanique de comportement élastoplastique cyclique multiaxial. Ce modèle sera appelé modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure tridimensionnel, auquel nous ferons référence sous le sigle SVG-HP 3D. Ce modèle sera issu d'une extension au cas tridimensionnel du modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure unidimensionnel (SVG-HP 1D) et reposera sur une approche multisurface dans l'espace des déformations. Cette extension sera effectuée dans le cas isotrope et le comportement du modèle SVG-HP 3D sera indépendant du temps, non visqueux, à température ambiante, sans écrouissage cyclique, sans endommagement ni vieillissement et sans transformations de phases. Ce modèle sera validé par une comparaison de ses prédictions à des résultats expérimentaux, disponibles dans la littérature ou obtenus au laboratoire par des essais réalisés sur des matériaux métalliques. Cette validation sera effectuée à travers des cycles complexes de chargements mécaniques non proportionnels.

Ce modèle sera développé dans le cadre des déformations finies. Ce choix se justifie par deux arguments essentiels. Le premier argument est issu d'une stratégie de développement qui permettrait, à terme, d'appliquer ce modèle à l'étude de la mise en forme des matériaux solides, au comportement de matériaux tels que les matériaux métalliques ductiles¹, les polymères solides, les matériaux tissés, ou les élastomères et de valoriser ce travail au-delà de l'application actuelle sur les matériaux métalliques en petites déformations. Notons que ce choix ne constitue aucunement une contre-indication, dans le cas présent d'une application sur les matériaux métalliques, limitée aux petites déformations. Le deuxième argument, le plus important et à caractère fondamental, concerne la prise en compte des effets de rochet du second ordre, qui sont des effets étroitement liés à l'usage des déformations finies et au choix de la dérivée objective (cf. § 1.1, point b).

1. Les matériaux métalliques ductiles peuvent atteindre des déformations importantes. En effet, [Rodriguez-Martinez *et al.* 2011] présentent des essais mécaniques de traction sur aluminium jusqu'à 15% à 20% de déformation plastique. [Rusinek *et al.* 2007] présentent des essais mécaniques sur un acier doux "mild steel ES" jusqu'à 40% de déformation vraie. [Borvik *et al.* 2001] présentent un acier "Weldox 460 E" qui a une déformation à rupture de 150% de déformation vraie.

- ii Un deuxième objectif majeur de ce travail de thèse concerne les aspects numériques et consiste notamment à l'implémentation du modèle SVG-HP 3D dans le code commercial de calcul par éléments finis Abaqus/Standard (cf. § 1.1, point a).
- iii En complément du modèle SVG-HP 3D, à fermeture parfaite des cycles, un modèle de Saint-Venant Généralisé à Écrouissage Cyclique tridimensionnel, auquel nous ferons référence sous le sigle SVG-EC 3D, sera proposé pour décrire les effets d'écrouissage cyclique et les effets de rochet d'écrouissage cyclique sur les trajets proportionnels (cf. § 1.1, point b). Ainsi, la démarche proposée consiste à considérer le modèle SVG-HP 3D comme le noyau central du comportement mécanique élastoplastique cyclique multiaxial, auquel des modèles particuliers peuvent être adjoints pour décrire des propriétés spécifiques, telles que l'écrouissage cyclique, dans ce cas. L'objectif ici est de proposer un modèle d'écrouissage cyclique SVG-EC 3D limité aux cas des trajets proportionnels. Cette limitation est motivée par un choix méthodologique, qui tient compte du grand volume de travail déjà inscrit dans le programme de thèse. Une étude complémentaire à ce travail de thèse pourra étendre ce modèle d'écrouissage cyclique au cas des trajets non proportionnels.
- iv Une analyse énergétique et thermodynamique du modèle SVG-HP 3D, limitée au cas de l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP), sera réalisée et un modèle thermodynamique sera proposé afin d'extraire des variables pertinentes pour le développement ultérieur d'une approche de la fatigue des matériaux métalliques (cf. § 1.1, point d). En adoptant la démarche proposée au point iii, le modèle thermodynamique envisagé ici doit être défini de sorte qu'il soit valable pour un couplage au modèle SVG-HP 3D ou pour un couplage au modèle SVG-EC 3D.
- v Un critère de fatigue multiaxiale de type énergétique sera proposé. Ce critère reposera sur l'évolution de variables de suivi de la fatigue multiaxiale, fournies par le modèle thermodynamique, du point iv. L'évolution de ces variables est basée sur le modèle SVG-HP 3D. Ce critère sera validé par une comparaison de ses prévisions à celles de modèles reconnus et utilisés dans le milieu industriel (cf. § 1.1, point d).
- vi Mettre en œuvre un modèle multisurface SVG-HP 3D avec une règle d'écoulement caractérisée par une condition de non-intersection des surfaces seuil, équivalente à celle proposée par Mróz. Ce modèle sera éprouvé par une comparaison de ses prévisions aux résultats expérimentaux (cf. § 1.1, point c).

1.3 Présentation du manuscrit

Le manuscrit est composé d'une introduction (chapitre 1), d'une conclusion générale et perspectives (chapitre 9) ainsi que de sept chapitres, qui constituent le corps du mémoire de thèse. Le chapitre 2 donne des éléments bibliographiques liés au sujet traité. Une étude détaillée du modèle SVG-HP 1D est proposée au chapitre 3. Nous présentons au chapitre 4 le modèle SVG-HP 3D, que nous proposons dans le cadre de ce travail de thèse pour décrire le comportement élastoplastique cyclique multiaxial. Le chapitre 5 propose la mise en œuvre et la validation du modèle SVG-HP 3D. Le chapitre 6 propose d'étudier une règle d'écoulement particulière, caractérisée par une condition d'interdépendance des mouvements des surfaces seuil. Dans le chapitre 7, nous proposons une analyse énergétique et thermodynamique du modèle de Saint-Venant. Enfin, le chapitre 8 présente un critère de fatigue multiaxiale que nous proposons dans le cadre de cette étude.

CHAPITRE 2

État de l'art

Sommaire

2.1	Rappels sur le modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure 1D (SVG-HP 1D)	12
2.1.1	Modèles élastoplastiques de Saint-Venant	12
2.1.2	Propriétés intrinsèques du modèle SVG-HP 1D	19
2.2	Modèles de plasticité multisurface	19
2.2.1	Modèle multisurface de Mróz	20
2.2.2	Modèle à éléments distribués d'Iwan (modèle DEM)	22
2.2.3	Discussion sur la non-intersection des surfaces seuil	23
2.3	Plasticité exprimée dans l'espace des déformations	24
2.3.1	Avantages de ce formalisme	24
2.3.2	Quelques modèles de plasticité dans l'espace des déformations	25
2.4	Modélisation de la plasticité sous chargement non proportionnel	25
2.4.1	Modèle ECNL	25
2.4.2	Modèle LMTNP2	26
2.5	Phénomène de rochet de torsion ou effet Poynting-Swift	31
2.5.1	Mise en évidence expérimentale	31
2.5.2	Explications théoriques et modélisation	32
2.6	Décomposition élastique-plastique des grandes transformations	36

Dans le paragraphe 2.1, le modèle de Saint-Venant généralisé unidimensionnel sera présenté. Deux modèles multisurface seront ensuite introduits dans le paragraphe 2.2. La notion de plasticité dans l'espace des déformations sera ensuite détaillée dans le paragraphe 2.3. Les modèles de plasticité utilisés et développés dans les travaux de thèse de Calloch seront présentés au paragraphe 2.4. Le phénomène de rochet de torsion, ou effet Poynting-Swift, sera présenté au paragraphe 2.5. Enfin, pour clore ce chapitre, la notion de décomposition élastique-plastique des grandes transformations sera discutée (§ 2.6).

2.1 Rappels sur le modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure 1D (SVG-HP 1D)

2.1.1 Modèles élastoplastiques de Saint-Venant

2.1.1.1 Modèle de Saint-Venant élémentaire

Le modèle de Saint-Venant élémentaire unidimensionnel, qui sera dans la suite désigné simplement par **élément de Saint-Venant**, est composé d'un ressort de comportement élastique linéaire, caractérisé par un module d'élasticité G , et d'un frotteur de Tresca caractérisé par un seuil de déclenchement en déformation constant e^* . Ce modèle, représenté sur la figure 2.1a, correspond au modèle **plasto-élastique simple** introduit par Persoz dans [Persoz 1960], qui a ensuite étudié son comportement plus en détails dans [Persoz 1969]. Le modèle était alors appelé **modèle M**, par rapport à sa ressemblance au modèle viscoélastique de Maxwell. Le ressort et le frotteur sont associés en série pour former un élément de Saint-Venant dont les paramètres sont définis par le couple (G, e^*) .

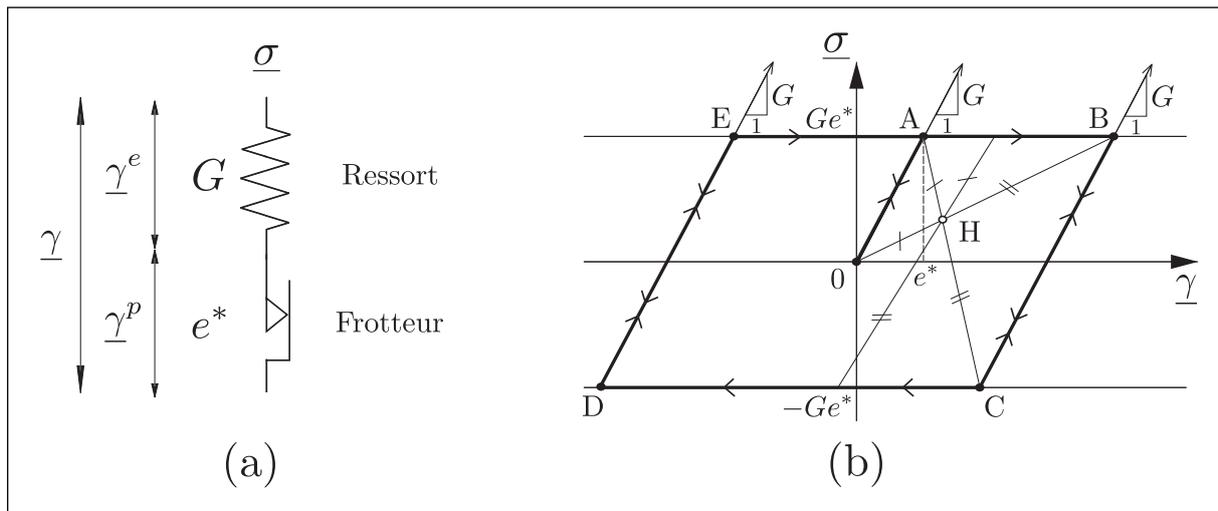


Fig. 2.1 – Modèle de Saint-Venant élémentaire (a) et sa réponse mécanique typique en comportement cyclique (b).

La déformation totale $\underline{\gamma}$ du modèle peut être partitionnée en la somme d'une déformation élastique $\underline{\gamma}^e$ relative au ressort et d'une déformation plastique $\underline{\gamma}^p$ relative au frotteur. Ce modèle élémentaire permet de reproduire le comportement du solide élastique parfaitement plastique [Lemaitre *et al.* 2009], illustré sur la figure 2.1b. En effet, si la déformation totale de l'élément est inférieure à la valeur du seuil de déclenchement en déformation de son frotteur, celui-ci reste bloqué. Le comportement du modèle se résume alors au comportement du ressort, soit un comportement purement élastique. La déformation élastique $\underline{\gamma}^e$ est alors égale à la déformation totale $\underline{\gamma}$. La contrainte dans le modèle, notée $\underline{\sigma}$, prend

ainsi la valeur $G\underline{\gamma}$. Cependant, si la déformation totale atteint ou dépasse le seuil de déclenchement e^* , le frotteur se met à glisser et, dès lors, la déformation du ressort reste constante. Dans ce cas, la déformation élastique $\underline{\gamma}^e$ n'évolue plus et devient égale à e^* , le seuil du frotteur. Le comportement devient parfaitement plastique et la contrainte dans le modèle $\underline{\sigma}$, qui reste constante, prend alors la valeur Ge^* . En tenant compte des deux régimes de sollicitation décrits précédemment, à savoir l'élasticité pure puis la plasticité parfaite, nous pouvons définir à tout moment la contrainte dans le modèle par la relation suivante :

$$\underline{\sigma} = G\underline{\gamma}^e \text{ avec } \underline{\gamma}^e = \underline{\gamma} - \underline{\gamma}^p \quad (2.1)$$

Sur la figure 2.1b, nous pouvons noter qu'après une inversion au point B, la courbe de décharge BCD est l'image de la courbe de première charge OAB par une homothétie de rapport -2 et de centre H. Ceci montre que le modèle de Saint-Venant élémentaire unidimensionnel obéit à la règle de Masing [Masing 1926]. On notera également que le comportement du modèle est indépendant du temps.

Le modèle de Saint-Venant élémentaire est un modèle unidimensionnel scalaire que nous associons à un comportement unidimensionnel de cisaillement. Par conséquent, $\underline{\sigma}$ représente une contrainte de cisaillement et $\underline{\gamma}$ représente une distorsion. La notation avec une barre inférieure souligne la nature déviatoire du comportement du modèle. Notons qu'il est possible d'adopter une autre définition pour décrire la déformation, telle que :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\underline{\gamma}}{2} \quad (2.2)$$

Dans ce cas, les deux paramètres du modèle seront définis par le couple $(2G, \frac{e^*}{2})$, comme illustré sur la figure 2.2, où la déformation élastique est notée $\underline{\varepsilon}^e$ et la déformation plastique est notée $\underline{\varepsilon}^p$.

2.1.1.2 Modèle de Saint-Venant à deux éléments

Le modèle de Saint-Venant unidimensionnel à deux éléments est composé de deux éléments de Saint-Venant associés en parallèle. Ce modèle est caractérisé par les couples (G_1, e_1^*) et (G_2, e_2^*) , tels que $e_1^* < e_2^*$ (figure 2.3a). Son comportement mécanique résulte de la sommation des contraintes $\underline{\sigma}_1$ et $\underline{\sigma}_2$, respectives des éléments indicés 1 et 2. La déformation totale est la même pour les deux éléments, du fait de la construction en parallèle du modèle. Si la déformation totale du modèle est inférieure au seuil de déclenchement en déformation e_1^* du premier frotteur, le comportement est purement élastique et les deux frotteurs sont bloqués. Cependant, si la déformation totale devient supérieure ou égale au seuil e_1^* , le premier frotteur se met à glisser et le premier ressort se bloque, ce qui amène une perte de rigidité de valeur G_1 (figure 2.3b). Finalement, si la déformation totale du modèle devient supérieure ou égale au seuil de déclenchement e_2^* du second frot-

teur, le comportement devient parfaitement plastique. Ainsi, nous pouvons à tout moment exprimer la contrainte totale dans le modèle par :

$$\underline{\sigma} = G_1 \underline{\gamma}_1^e + G_2 \underline{\gamma}_2^e \text{ avec } \begin{cases} \underline{\gamma}_1^e = \underline{\gamma} - \underline{\gamma}_1^p \\ \underline{\gamma}_2^e = \underline{\gamma} - \underline{\gamma}_2^p \end{cases} \quad (2.3)$$

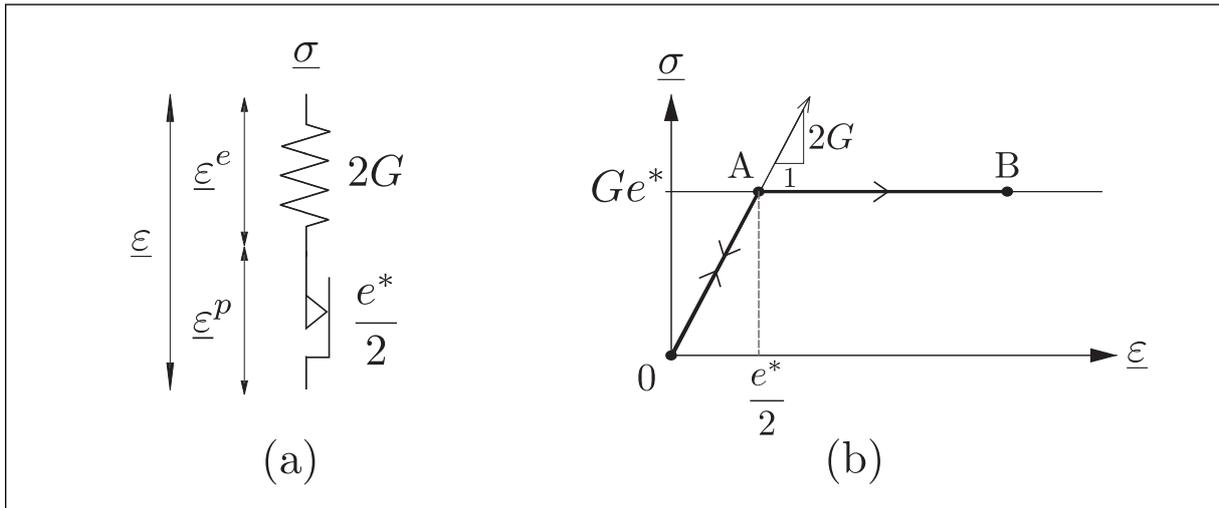


Fig. 2.2 – Modèle de Saint-Venant élémentaire (a) et sa réponse mécanique dans un diagramme rhéologique $(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon})$ (b).

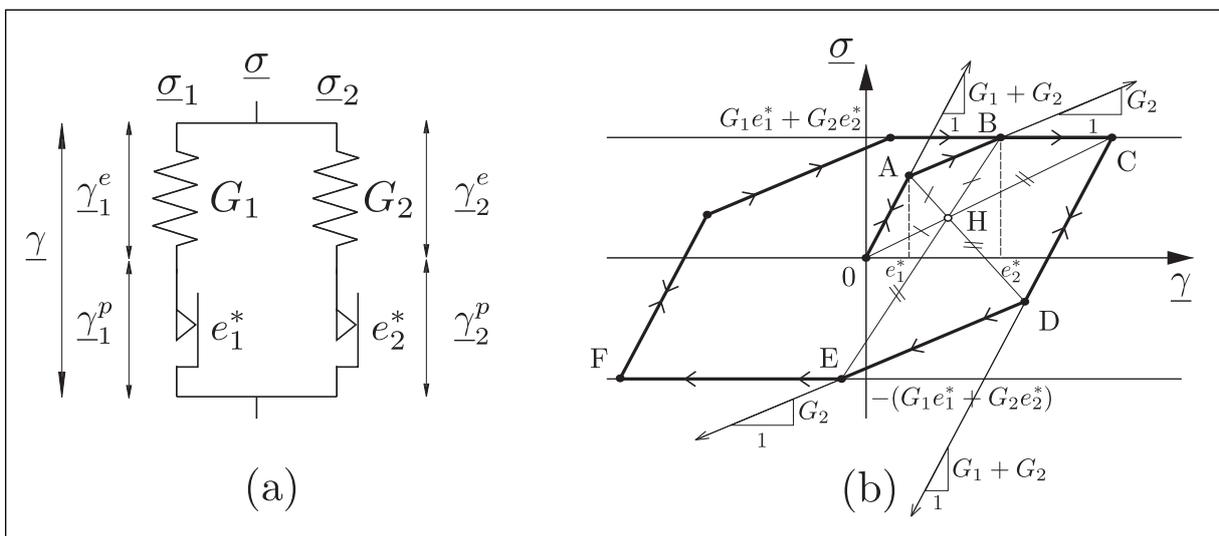


Fig. 2.3 – Modèle de Saint-Venant à deux éléments (a) et sa réponse mécanique typique en comportement cyclique (b).

2.1.1.3 Modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure unidimensionnel (SVG-HP 1D)

Le modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure unidimensionnel (SVG-HP 1D), qu'on appelle aussi modèle à n éléments de Saint-Venant, avec n un entier, est caractérisé par une suite discrète de couples $(G_1, e_1^*), (G_2, e_2^*), \dots, (G_k, e_k^*), \dots, (G_n, e_n^*)$. Cette suite est organisée par ordre croissant des seuils de déclenchement en déformation des frotteurs $e_1^* < e_2^* < \dots < e_k^* < \dots < e_n^*$ (figure 2.4a). Pour un grand nombre n d'éléments, le premier seuil tend vers 0 de manière à ce que le comportement du modèle soit toujours irréversible, même aux faibles déformations proches de l'origine. Cependant, un comportement quasi réversible peut être révélé par un chargement cyclique d'amplitude de déformation infinitésimale autour de l'origine ; il correspond à un module d'élasticité initial G_0 égal à la somme de tous les modules des ressorts G_k , i.e $G_0 = \sum_{k=1}^n G_k$ (figure 2.4b). La déformation totale dans le modèle SVG-HP 1D est la même pour tous les éléments du fait de la construction en parallèle. Au fur et à mesure de l'augmentation de la déformation totale, on observe des pertes de rigidité successives qui, de la même manière qu'avec le modèle à deux éléments, correspondent aux déclenchements successifs des seuils e_k^* des frotteurs. Pour un très grand nombre n d'éléments de Saint-Venant, le comportement résultant du modèle dans le diagramme $(\underline{\sigma}, \underline{\gamma})$ tend vers un comportement élastoplastique avec une évolution continue du module tangent, qui évolue de sa valeur initiale G_0 à l'origine vers une valeur nulle sur le seuil de plasticité S_0 telle que $S_0 = \sum_{k=1}^n G_k e_k^*$ (figure 2.4b). Ainsi, la contrainte totale dans le modèle est définie à tout moment par :

$$\underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n G_k \underline{\gamma}_k^e \text{ avec } \underline{\gamma}_k^e = \underline{\gamma} - \underline{\gamma}_k^p \text{ pour } k \in [1, n] \quad (2.4)$$

En adoptant la définition 2.2, la contrainte totale dans le modèle définie par la relation 2.4 s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n 2G_k \underline{\varepsilon}_k^e \text{ avec } \underline{\varepsilon}_k^e = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_k^p \text{ pour } k \in [1, n] \quad (2.5)$$

où $\underline{\varepsilon}_k^e$ et $\underline{\varepsilon}_k^p$ représentent respectivement la déformation élastique et la déformation plastique de l'élément de Saint-Venant d'indice k , telles que :

$$\underline{\varepsilon}_k^e = \frac{\underline{\gamma}_k^e}{2} \text{ et } \underline{\varepsilon}_k^p = \frac{\underline{\gamma}_k^p}{2} \quad (2.6)$$

De la même manière qu'avec le modèle élémentaire et le modèle à deux éléments, le modèle SVG-HP 1D obéit à la règle de Masing. C'est un modèle unidimensionnel scalaire que nous associons à un comportement unidimensionnel de cisaillement.

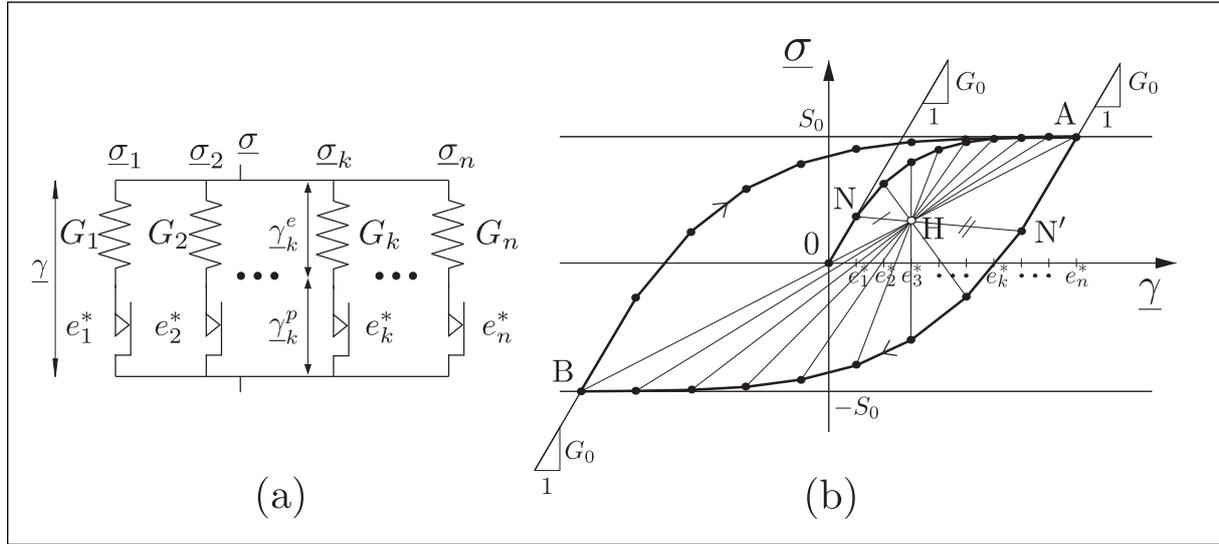


Fig. 2.4 – Modèle SVG-HP 1D (n éléments) (a) et sa réponse mécanique typique en comportement cyclique (b).

2.1.1.4 Diagramme topologique du modèle de Saint-Venant généralisé

Le fonctionnement du modèle de Saint-Venant élémentaire et celui à deux éléments est relativement simple à appréhender. Lorsque le nombre d'éléments devient important, le fonctionnement interne du modèle devient plus complexe. Un outil de représentation de l'état du modèle est introduit afin de mieux saisir et comprendre le fonctionnement du modèle en chargement complexe dans le cas d'un grand nombre d'éléments.

Considérons un modèle SVG-HP 1D avec un grand nombre n d'éléments. L'état de ce modèle peut être décrit à tout instant par la **représentation de Nayroles** [Persoz 1969], aussi appelée **diagramme topologique** [Blès 2002]. Dans cette représentation, dont un exemple est donné figure 2.5b, chaque élément du modèle est représenté par un point dont l'abscisse fixe représente le seuil de son frotteur. Un point est aussi repéré par son ordonnée qui représente la déformation de son ressort, correspondant à la déformation élastique de l'élément. Ainsi, dans ce diagramme, chaque point pourra se déplacer verticalement, selon le chargement, entre la première bissectrice OA et la quatrième bissectrice OB. Un point situé sur l'une ou l'autre de ces bissectrices signifiera que l'élément qu'il représente est en plasticité : le seuil de déclenchement de son frotteur est atteint. Nous nous proposons d'expliquer le fonctionnement de cette représentation sur un exemple simple, illustré sur la figure 2.5a.

Initialement, tous les points se situent sur l'axe des abscisses (segment OO' sur la figure 2.5b). Considérons une première déformation du modèle $\underline{\gamma}_1$. Les éléments dont le seuil est atteint, c'est à dire pour $\underline{\gamma}_1 \geq e_k^*$, s'alignent sur la première bissectrice (segment $O1'$). Les autres s'alignent sur une droite horizontale d'ordonnée $\underline{\gamma}_1$, qui correspond à la déformation actuelle dans tous les ressorts qui ne sont pas bloqués (segment $1'1$). Si

l'on inverse le chargement vers une déformation γ_2 , la ligne brisée O1'1 se voit translaturée vers le bas. Cependant, certains éléments ont à nouveau déclenché leur seuil en sens inverse : leurs points représentatifs s'alignent cette fois-ci sur la quatrième bissectrice (segment O2'). L'état du modèle est alors représenté par la ligne brisée O2'2''2. Si l'on inverse la sollicitation jusqu'à une nouvelle déformation γ_3 , l'état du modèle est désormais caractérisé par la ligne brisée O3'3''3'''3. De cette manière, l'état du modèle peut être représenté à tout instant par une ligne brisée dans ce diagramme. Cela illustre la capacité du modèle à être son propre support de mémoire de l'histoire du chargement et notamment des instants privilégiés que sont les inversions de la sollicitation.

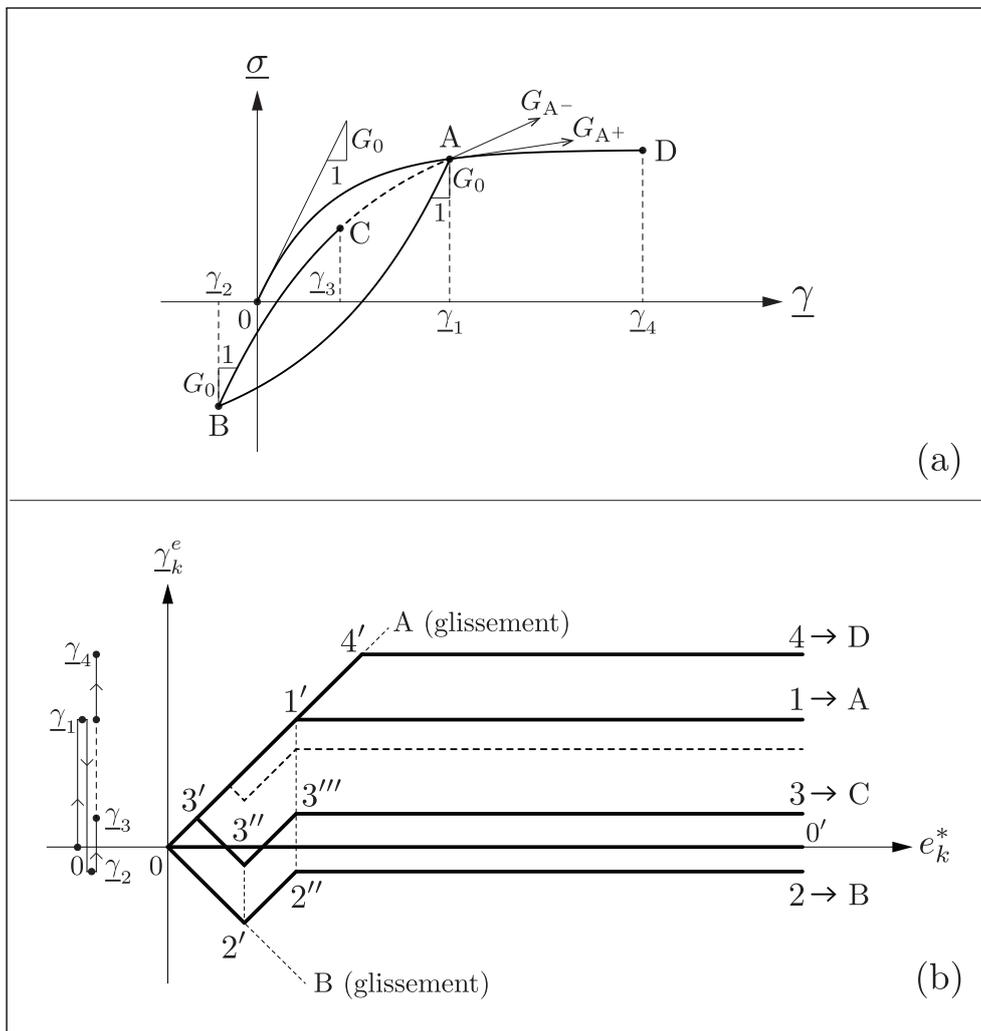


Fig. 2.5 – Diagramme topologique dans le cas d'un chargement OABAD : réponse du modèle dans le diagramme $(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon})$ (a) et diagramme topologique correspondant (b).

Poursuivons maintenant le chargement du point C vers le point D (figure 2.5a), en augmentant la déformation de $\underline{\gamma}_3$ vers $\underline{\gamma}_4$. Au passage du point A, nous observons une coïncidence, caractérisée par la disparition d'une ligne brisée, symbolisée par un trait discontinu sur la figure 2.5b. Cette coïncidence correspond à l'effacement de la mémoire des deux inversions en A et B. Après cet évènement, le diagramme topologique de la figure 2.5b montre une évolution O4'4, dans le prolongement de l'évolution O1'1, entamée au cours de la première charge OA (figure 2.5a). Ainsi, au cours du chargement AD, la réponse du modèle se caractérise par un retour sur la première charge, comme si les deux inversions en A et B n'avaient jamais eu lieu. Au point A, cela correspond à une chute de la rigidité du modèle qui passe de G_{A-} à G_{A+} (figure 2.5a). Cette chute de rigidité est liée à une plastification simultanée d'un ensemble d'éléments, correspondant au segment 3''3''' , lors de la coïncidence au point A.

Après un chargement irréversible quelconque du modèle, la mémoire peut être effacée. Pour cela, on applique un chargement cyclique symétrique OAB préalable dont l'amplitude de déformation est supérieure à celle de tous les chargements précédents, suivi d'un cyclage fondamental (figure 2.6a). Ce dernier consiste à appliquer au modèle des cycles en déformation d'amplitude très lentement décroissante, jusqu'à la déformation nulle. Après un cyclage fondamental, la ligne représentative de l'état du modèle, dans le diagramme topologique, est une ligne brisée autour de l'axe des abscisses (figure 2.6b). Pour effacer la mémoire du modèle, cette ligne brisée doit être confondue avec l'axe des abscisses aussi finement que possible. Cette finesse est directement liée au choix de la valeur du pas de déformation adopté pour décrire le cyclage fondamental.

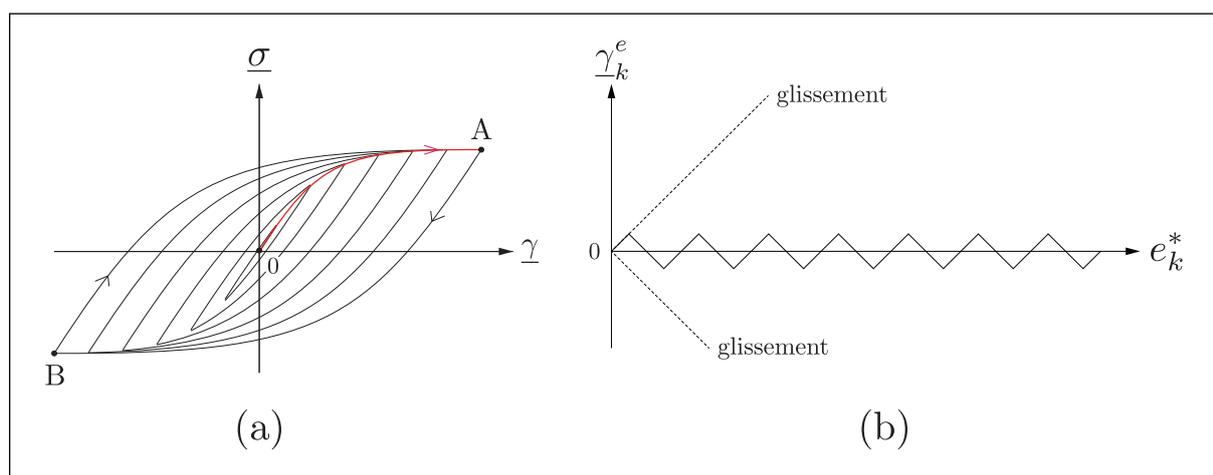


Fig. 2.6 – Effacement de la mémoire du modèle par un cyclage fondamental (a) et diagramme topologique correspondant (b).

2.1.2 Propriétés intrinsèques du modèle SVG-HP 1D

Le modèle SVG-HP 1D possède des propriétés remarquables, qui découlent directement de sa structure : on parle de propriétés intrinsèques. Ces propriétés doivent être distinguées soigneusement, dès à présent, en vue de l'extension tridimensionnelle de ce modèle. En effet, ces propriétés intrinsèques sont à la base du comportement cyclique du modèle SVG-HP 1D ; elles devront se retrouver dans l'extension 3D de ce modèle.

Ces propriétés sont les suivantes :

- i) La déformation totale γ dans le modèle est la même pour tous les éléments de Saint-Venant (figure 2.4a) ;
- ii) Le modèle comporte un grand nombre n d'éléments et le seuil de déclenchement du premier frotteur e_1^* tend vers 0, ce qui conduit à un comportement toujours irréversible du modèle, même aux faibles déformations proches de l'origine (figure 2.4b) ;
- iii) A chaque inversion, tous les frotteurs se bloquent et le modèle retrouve sa rigidité initiale caractérisée par un module d'élasticité de valeur $G_0 = \sum_{k=1}^n G_k$ (figure 2.4b) ;
- iv) Lors d'un chargement cyclique, le modèle obéit à la règle de Masing. Ce comportement est illustré sur la figure 2.4b, où la courbe de décharge AB est l'image de la courbe de première charge OA, par une homothétie de rapport -2 et de centre H. Ainsi, le point N' situé sur la branche AB, est l'image du point N situé sur la branche OA ;
- v) Au cours d'un chargement complexe, le modèle peut mémoriser des événements tels que les inversions. Ceci est illustré sur la figure 2.5a par la recharge BCAD et plus particulièrement par le retour au comportement de première charge OAD, après une coïncidence au point A. Cette capacité de mémorisation peut aussi être mise en évidence par un diagramme topologique (figure 2.5b) ;
- vi) Bien que le modèle fasse preuve d'un comportement irréversible, il existe un état neutre qui, après un chargement quelconque, peut être restauré au moyen d'un cyclage fondamental (figure 2.6).

2.2 Modèles de plasticité multisurface

Il existe un nombre important de modèles de plasticité que nous ne citerons pas ici. Le lecteur pourra s'orienter vers les articles de [Jiang & Kurath 1996] et [Chaboche 2008] ou les ouvrages de [Lemaitre *et al.* 2009] et [Hashiguchi 2014] pour se documenter de manière plus exhaustive sur le sujet. Dans ce paragraphe, nous ferons une présentation de quelques

modèles de plasticité multisurface en lien avec notre travail. Par modèles multisurface, il faut entendre des modèles qui peuvent être constitués d'un ensemble de surfaces seuil, nous excluons donc les modèles à deux surfaces seuil (*two surface models*) comme les modèles de [Dafalias & Popov 1975], [Krieg 1975] ou encore [Yoshida & Uemori 2002]. On se restreindra volontairement à la présentation de deux modèles multisurface majeurs, mais le lecteur pourra s'orienter vers [Prévost 1977], [Navarro & Brown 1997], [Montans 2001] ou encore [Khoei & Jamali 2005] pour des détails sur d'autres modèles moins connus mais toutefois intéressants. Par rapport aux modèles de plasticité plus classiques, on notera que les modèles multisurface présentent de très bons résultats en multiaxial sous chargements proportionnels, mais montrent des faiblesses pour décrire des chargements non proportionnels [Montans & Caminero 2007].

2.2.1 Modèle multisurface de Mróz

Le modèle de Mróz propose un emboîtement de n hypersurfaces dans l'espace des contraintes, chacune étant décrite par un critère de von Mises [Mróz 1967]. Ces surfaces seuil notées f_0, f_1, \dots, f_n et illustrées sur la figure 2.7a, sont décrites par un centre $\tilde{\mathbf{X}}_k$ et un rayon R_k . La fonction de charge associée à chaque surface d'indice k est de la forme :

$$f_k = J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\mathbf{X}}_k) - R_k = 0 \quad (2.7)$$

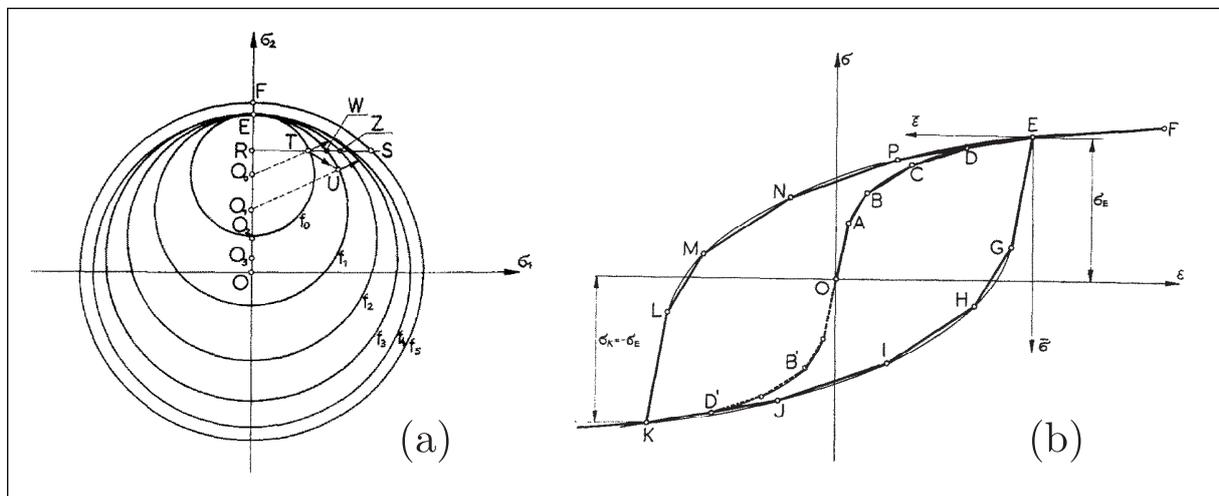


Fig. 2.7 – Représentation des différentes surfaces seuil dans l'espace des contraintes (a) et approximation de la courbe contrainte-déformation par des segments de modules tangents constants (b) [Mróz 1967].

Lorsque la contrainte se situe à l'intérieur de la plus petite surface seuil (surface f_0 sur la figure 2.7a), le comportement du modèle est élastique. Lorsque la contrainte rencontre

une surface seuil, celle-ci devient active (on la signale avec l'indice a), et l'écoulement plastique est alors défini par la règle d'écoulement :

$$d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = d\lambda \frac{\partial f_a}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (2.8)$$

Au cours de l'écoulement, la surface active respecte donc la condition $f_a = 0$. Dans son modèle, Mróz a défini un certain nombre de conditions sur le comportement des surfaces seuil. Une première condition est que la contrainte ne peut, à aucun moment du chargement, sortir de l'une des surfaces. Cela implique, lors d'un écoulement, les conditions suivantes sur les surfaces seuil de rayon inférieur à la surface active :

$$\begin{aligned} f_0 = f_1 = \dots = f_{a-1} = f_a = 0 \\ d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = d\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = d\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \dots = d\lambda_{a-1} \frac{\partial f_{a-1}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = d\lambda \frac{\partial f_a}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ces deux conditions réunies amènent l'égalité des multiplicateurs plastiques et des mouvements des centres des surfaces seuil de sorte que :

$$\begin{aligned} d\lambda_0 = d\lambda_1 = \dots = d\lambda_{a-1} = d\lambda \\ d\tilde{\mathbf{X}}_0 = d\tilde{\mathbf{X}}_1 = \dots = d\tilde{\mathbf{X}}_{a-1} = d\tilde{\mathbf{X}}_a \end{aligned} \quad (2.10)$$

Une hypothèse forte de ce modèle est que Mróz a choisi d'interdire l'intersection des surfaces seuil. Les raisons et conséquences de ce choix étant discutées dans le paragraphe 2.2.3, nous nous contenterons ici de donner les équations qui permettent de respecter cette condition de non-intersection :

$$d\tilde{\mathbf{X}}_a = ((R_{a+1} - R_a)\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - (R_{a+1}\tilde{\mathbf{X}}_a - R_a\tilde{\mathbf{X}}_{a+1})) \frac{d\mu}{R_a} \quad (2.11)$$

où $d\mu$ est donné par :

$$d\mu = \mathcal{H}(f_a) \frac{\left\langle \frac{\partial f_a}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} : d\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right\rangle}{\frac{\partial f_a}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{a+1} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})} \quad (2.12)$$

où \mathcal{H} désigne la fonction de Heaviside. Enfin, dans la règle d'écoulement donnée par la relation 2.8, le multiplicateur plastique $d\lambda$ est donné par :

$$d\lambda = \frac{\mathcal{H}(f_a)}{C_a(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} \frac{\left\langle \frac{\partial f_a}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} : d\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right\rangle}{\frac{\partial f_a}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} : \frac{\partial f_a}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}} \quad (2.13)$$

Le modèle de Mróz a été étudié du point de vue mathématique de manière poussée dans [Brokate *et al.* 1996] et [Brokate *et al.* 1998]. Certaines limites de ce modèle, notamment son incapacité à décrire correctement le rochet, ont été pointées par [Jiang & Sehitoglu 1996].

Aussi, la réponse de ce modèle possède une dépendance au nombre de surfaces seuil. Plus particulièrement, la translation de chacune des surfaces est affectée par leur nombre, phénomène à nouveau pointé par [Jiang & Sehitoglu 1996]. Dans le même article, l'auteur arrive à la conclusion que, bien que le modèle de Mróz cherche à éviter l'intersection des surfaces seuil, celle-ci peut intervenir dans le cas d'incrément de contrainte de grande amplitude. Une modification du modèle de Mróz, proposée par [Garud 1981], ajoute une condition permettant de rendre dépendante la translation des surfaces seuil et l'incrément de contrainte. Cela empêche notamment toute intersection des surfaces seuil même pour des incréments de contrainte importants.

2.2.2 Modèle à éléments distribués d'Iwan (modèle DEM)

Iwan propose deux modèles dans son article fondateur [Iwan 1966]. Parmi eux, le modèle DEM (*Distributed-Element Model*) est particulièrement intéressant. Ce modèle unidimensionnel est notamment très proche du modèle de Saint-Venant généralisé présenté au paragraphe 2.1. En effet, le modèle DEM est composé d'un assemblage en parallèle de n éléments, chaque élément étant lui-même constitué d'un ressort linéaire de rigidité E_i et d'un frotteur de seuil de déclenchement σ_i^* associés en série, comme illustré sur la figure 2.8a.

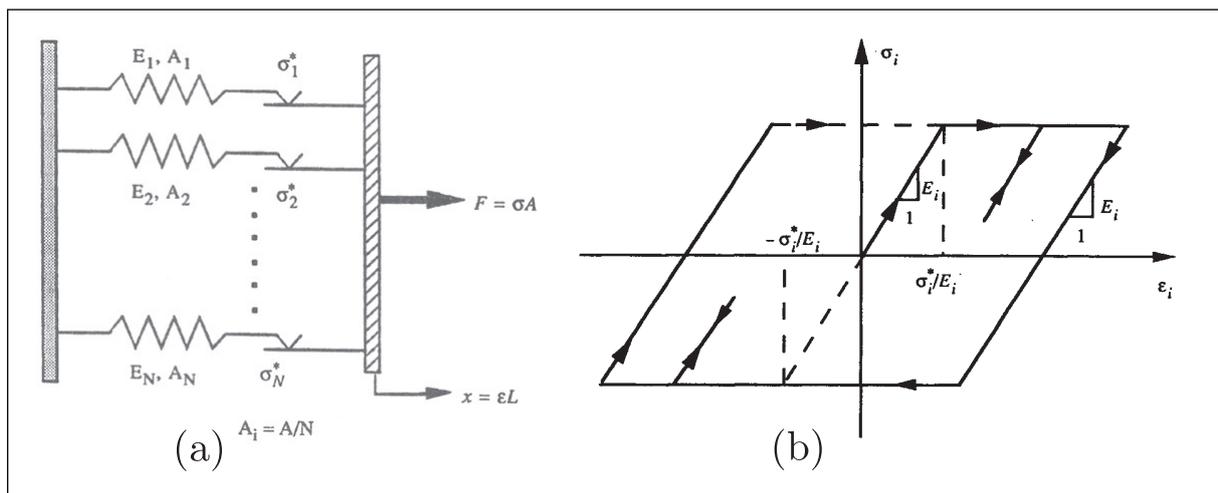


Fig. 2.8 – Représentation symbolique du modèle DEM (a) et comportement unidimensionnel d'un élément constitutif (b) [Iwan 1966]

Au fur et à mesure de l'augmentation de la force F appliquée sur le modèle, les frotteurs entrent en action et chaque élément du modèle adopte un comportement tel que celui décrit sur la figure 2.8b.

Un an après la publication du modèle DEM, Iwan propose une extension au cas multidimensionnel [Iwan 1967]. Ce faisant, il obtient un modèle multisurface, écrit dans l'espace des contraintes, et proche du modèle de Mróz. On parle même parfois de classes de modèles Iwan-Mróz dans certains ouvrages tant leur similitude est remarquable [Kolymbas & Viggiani 2009].

2.2.3 Discussion sur la non-intersection des surfaces seuil

Un modèle multisurface, écrit dans l'espace des contraintes ou des déformations, et au sein duquel les surfaces seuil sont mobiles, peut se révéler compliqué à implémenter numériquement. Cette difficulté est majoritairement due à la détection de la surface seuil active. Pour résoudre ce problème, [Mróz 1967] et [Prévost 1977] ont notamment abandonné la règle de Prager, au profit d'une règle d'écoulement qui force les surfaces seuil à s'aligner tangentiellement au cours du chargement. Cette règle implique que les petites surfaces ne peuvent pas sortir des grandes, et aucune intersection n'est possible entre les différentes surfaces seuil. Ces travaux ont amené les spécialistes à se demander si l'intersection (ou la non-intersection) des surfaces seuil est justifiée.

Sur ce sujet, les travaux de [Puzrin & Houlsby 2001] font figure de référence. Sans entrer dans les détails, qui peuvent être trouvés dans l'article, on notera les points suivants à retenir sur l'intersection ou la non-intersection des surfaces seuil :

- Il n'est pas toujours nécessaire de forcer la non-intersection des surfaces seuil, sauf dans le cas de l'utilisation d'une loi de comportement bilinéaire ;
- Une condition de non-intersection est une difficulté supplémentaire dans l'écriture d'un modèle ;
- La non-intersection peut parfois amener à des résultats incorrects pour des modèles pourtant simples ;
- L'intersection et la non-intersection ne violent pas les grands principes de la thermodynamique.

En conclusion, on retiendra qu'il n'y a pas de contre-indication théorique majeure à avoir des surfaces seuil qui peuvent s'intersecter. Dans le cas général, l'ajout d'une condition de non-intersection amène de la complexité dans l'écriture d'un modèle et dans son implémentation numérique. Si rien ne le justifie, on préconisera donc de laisser les surfaces seuil libres de s'intersecter entre elles. De manière générale, le choix pertinent entre ces deux possibilités sera celui conduisant à une prédiction réaliste du comportement mécanique.

2.3 Plasticité exprimée dans l'espace des déformations

Un modèle de plasticité tridimensionnel peut être écrit dans l'espace des contraintes ou dans l'espace des déformations. Ces deux cas se distinguent par l'écriture des principales équations régissant leur fonctionnement. Le premier formalisme concerne la majorité des modèles développés jusqu'à maintenant. Le second est plus rare et concerne un nombre de modèles relativement restreint. Il n'y a pas de raison particulière au fait que ce dernier formalisme soit moins usité, si ce n'est l'habitude de travailler dans l'espace des contraintes issue des premiers travaux en plasticité.

2.3.1 Avantages de ce formalisme

De nombreux auteurs se sont demandé s'il est plus indiqué d'écrire les modèles de plasticité dans l'espace des contraintes ou dans l'espace des déformations. Dans un premier temps, il convient de souligner que les fondements de ce formalisme ont été définis par Iliushin dans son postulat de la plasticité [Iliushin 1961]. On pourra également noter que ce formalisme est compatible avec les résultats expérimentaux. C'est ce qu'ont montré notamment [Brown *et al.* 2003] au travers d'essais de traction-torsion avec lesquels ils ont obtenu des surfaces seuil conformes à la théorie proposée par [Naghdi & Trapp 1975]. Dans cet article, les auteurs précisent notamment certaines relations permettant de passer d'une écriture en déformation à une écriture en contrainte ; pour le critère de charge en particulier. Cette équivalence possible entre les deux formalismes a été soulignée par [Yoder 1980], [Yoder & Iwan 1981] ainsi que [Lu & Vaziri 1997], et cependant remise en question par [Casey & Naghdi 1983]. Dans un cadre en grandes transformations, un modèle formulé dans l'espace des déformations est intéressant notamment si l'on utilise une déformation logarithmique, qui permet de séparer simplement les parties sphérique et déviatoire de la loi de comportement [Heiduschke 1995]. Toutefois, selon le couple contrainte-déformation choisi, une écriture dans l'espace des contraintes peut s'avérer plus judicieuse [Lubarda 1994]. Lubarda et Lu sont d'accord avec Drucker pour dire que l'usage de l'espace des contraintes ou des déformations est possible mais l'un n'est pas toujours aussi pratique que l'autre pour une situation donnée [Drucker 1988].

Notons également que l'utilisation de l'espace des déformations est très appréciée dans des cas bien spécifiques, comme par exemple la modélisation des phénomènes d'adoucissement dans le béton [Han & Chen 1986, Farahat *et al.* 1995]. Les matériaux métalliques présentent aussi de l'adoucissement et de l'endommagement ; [Bendarma *et al.* 2017] modélise l'endommagement d'un alliage d'aluminium réduisant la contrainte vraie jusqu'à zéro. Il est possible que, pour ces cas d'adoucissement et d'endommagement, une modélisation élastoplastique dans l'espace des déformations apporte des avantages.

Du point de vue de l'implémentation numérique, [Iwan & Yoder 1983] et [Lee 1995] soulignent la facilité d'implémentation supérieure dans le cas de l'utilisation de l'espace des déformations, par rapport à une formulation dans l'espace des contraintes.

2.3.2 Quelques modèles de plasticité dans l'espace des déformations

Certains auteurs ont mis en lumière la possibilité, pour un modèle écrit dans l'espace des contraintes, d'écrire son équivalent dans l'espace des déformations et *vice versa*. On peut effectivement dire que les modèles de plasticité classiques écrits dans l'espace des contraintes possèdent un équivalent dans l'espace des déformations. C'est le cas par exemple du modèle d'Armstrong-Frederick, dont un équivalent dans l'espace des déformations est proposé par [Wang & Barkey 1999]. Ce modèle possède des propriétés étendues par rapport aux modèles de type Armstrong-Frederick classiques, en ce qu'il a la possibilité de reproduire un comportement adoucissant du matériau. Il peut également modéliser le comportement élastique-parfaitement plastique.

Un autre modèle classique, écrit dans l'espace des contraintes, possède un équivalent dans l'espace des déformations. Il s'agit du modèle d'Iwan, présenté plus haut, au paragraphe 2.2.2. Yoder propose, dans sa thèse supervisée par Iwan, une variante du modèle DEM, qu'il écrit dans l'espace des déformations [Yoder 1980]. Yoder et Iwan publient notamment un article qui définit les bases de ce nouveau modèle qu'ils jugent parfaitement équivalent à celui écrit dans l'espace des contraintes [Yoder & Iwan 1981]. Il possède l'avantage d'être plus simple à implémenter numériquement ; du moins avec les outils de l'époque.

2.4 Modélisation de la plasticité sous chargement non proportionnel

Nous donnons dans ce paragraphe des éléments sur deux modèles proposés par [Calloch 1997], appelés ECNL et LMTNP2, et utilisés pour modéliser le comportement élastoplastique sous chargement non proportionnel.

2.4.1 Modèle ECNL

Dans ses travaux de thèse, Calloch utilise un modèle à Écrouissage Cinématique Non Linéaire (ECNL) [Calloch 1997]. Les équations de ce modèle sont données sur la figure 2.9. Ce modèle est essentiellement défini par sept équations. Par ailleurs, il comprend neuf paramètres E , ν , k , Q , Φ_∞ , Φ_0 , ω , γ et c . Ces paramètres matériau sont identifiables par un essai cyclique uniaxial de traction-compression. Pour cela, Calloch met en œuvre une méthode d'identification inverse en utilisant le logiciel SiDoLo. Cette identification est réalisée en utilisant trois cycles (le premier, le troisième et le septième) et le cycle stabilisé.

L'auteur constate un écart important entre les prévisions du modèle ECNL et les résultats expérimentaux. Ceci est illustré sur la figure 2.10, qui donne la comparaison

entre un résultat expérimental et le résultat obtenu avec le modèle ECNL. Le cas étudié est un chargement non proportionnel de type "sablier" dans le plan de Traction-Torsion Combinées (TTC) des déformations.

2.4.2 Modèle LMTNP2

Les résultats de la figure 2.10 conduisent l'auteur à conclure sur "la nécessité d'introduire dans le modèle une dépendance vis-à-vis de la non-proportionnalité du trajet de chargement". Calloch propose en conséquence un modèle avec sur-écrouissage cyclique prenant en compte la non-proportionnalité du trajet de chargement. Ce modèle, appelé LMTNP2, est décrit à la figure 2.11. Ce modèle est construit à partir du modèle ECNL, auquel quatre équations sont ajoutées; un paramètre scalaire A , appelé « paramètre de non proportionnalité », est calculé à partir du produit doublement contracté de la variable d'écrouissage cinématique tensorielle X , et de sa vitesse. Ce paramètre introduit la dépendance vis-à-vis de la non-proportionnalité du trajet de chargement. Si le chargement est proportionnel, ce paramètre vaut zéro. Plus le caractère du chargement est non proportionnel, plus ce paramètre approche la valeur 1. Les trois autres équations se basent sur ce paramètre A de non-proportionnalité pour modifier la valeur asymptotique Q de la variable d'écrouissage isotrope R du modèle ECNL. Si le trajet est proportionnel, la valeur Q aura celle du paramètre Q_0 , si le trajet est non proportionnel et de type circulaire, Q aura la valeur Q_∞ . Ainsi, en résumé, les équations LMTNP2 de modélisation de l'effet de la non-proportionnalité du trajet de chargement, appelé par l'auteur sur-écrouissage cyclique, augmentent la valeur de la variable R d'écrouissage isotrope du modèle classique ECNL, lorsque le trajet de chargement passe du type proportionnel au type non proportionnel.

Le modèle LMTNP2 est défini par quinze paramètres. L'identification de ces paramètres a été réalisée avec le logiciel SiDoLo sur l'ensemble des essais expérimentaux suivants : essai de traction-compression (premier, troisième, septième cycles et le cycle stabilisé), et les cycles stabilisés de sept essais de traction-torsion dont ceux utilisés pour la validation du modèle. Ce dernier, permet d'améliorer les résultats de modélisation présentés sur la figure 2.10; en effet, ceci est illustré par la figure 2.12.

⇒ Loi de Hooke :

$$\underline{\underline{E}}^e = \frac{1}{2\mu} \left\{ \underline{\underline{1}} - \frac{\nu}{1+\nu} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \right\} : \underline{\underline{\Sigma}}$$

⇒ Domaine d'élasticité :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, R, \underline{\underline{X}}) = J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - R - k$$

avec $J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) = \sqrt{\frac{3}{2} (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}) : (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}})}$ et $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}$

⇒ Lois d'évolution :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda} \underline{\underline{n}} \quad \text{où} \quad \underline{\underline{n}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2} \frac{(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}})}{J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})}$$

$$\dot{\underline{\underline{X}}} = C[\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - \varphi(p) \underline{\underline{X}} \dot{p}]$$

où $\dot{p} = \dot{\lambda}$ et $\varphi(p) = \varphi_\infty + (\varphi_0 - \varphi_\infty) \exp(-\omega p)$

$$\dot{R} = \gamma(Q - R) \dot{p}$$

⇒ Critère de charge-décharge :

$$\dot{p} = \frac{1}{h} \left\langle \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}}{J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \right\rangle \quad \text{si } f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \geq 0$$

$$h = \frac{3}{2} C - \frac{3}{2} C \varphi(p) \frac{\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}}{J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})} : \underline{\underline{X}} + \gamma(Q - R)$$

$$\dot{p} = 0 \quad \text{sinon}$$

Fig. 2.9 – Définition du modèle à Écrouissage Cinématique Non Linéaire (ECNL) proposé par [Calloch 1997].

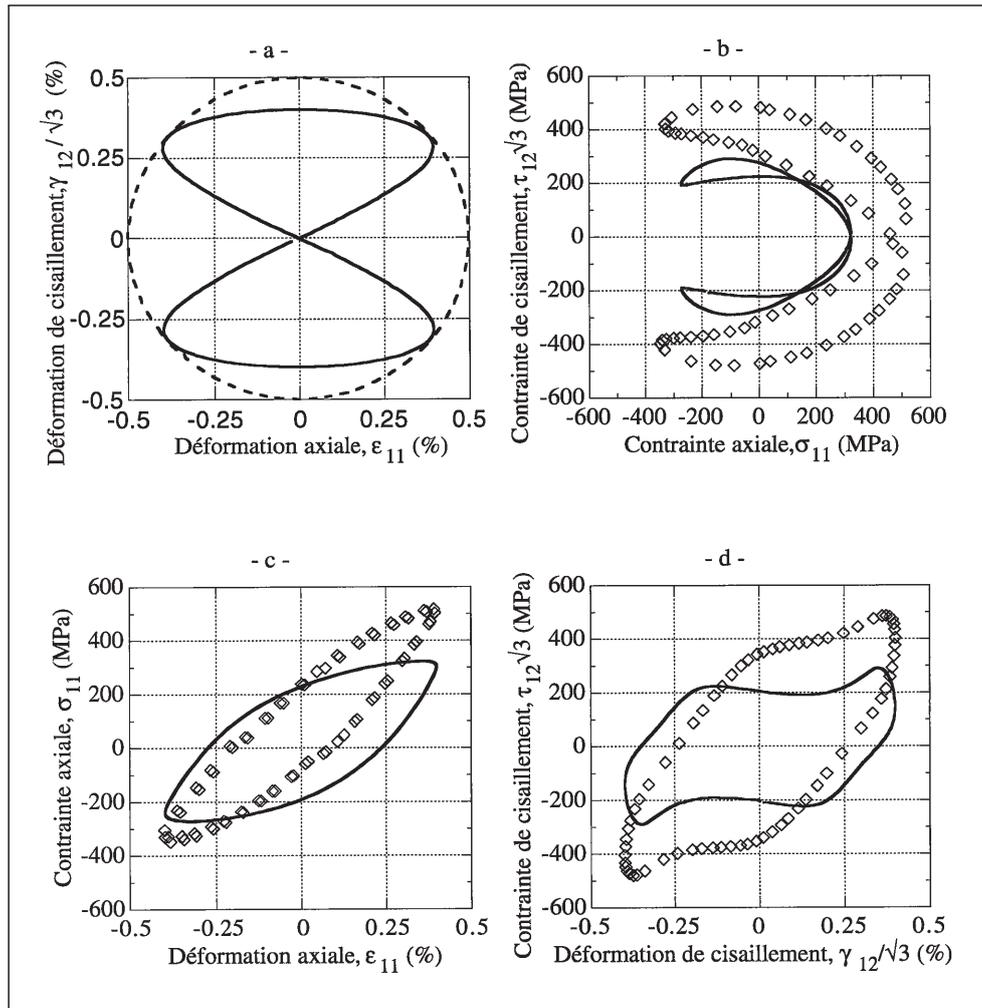


Fig. 2.10 – Comparaison des prévisions du modèle ECNL (trait plein) aux résultats expérimentaux (losanges) d'un essai de traction-torsion combinées [Calloch 1997].

⇒ Loi de Hooke :

$$\underline{\underline{E}}^e = \frac{1}{2\mu} \left\{ \underline{\underline{1}} - \frac{\nu}{1+\nu} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \right\} : \underline{\underline{\Sigma}}$$

⇒ Domaine d'élasticité :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, R, \underline{\underline{X}}) = J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - R - k$$

avec $J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) = \sqrt{\frac{3}{2} (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}) : (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}})}$ et $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}$

⇒ Lois d'évolution :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda} \underline{\underline{n}} \quad \text{où} \quad \underline{\underline{n}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2} \frac{(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}})}{J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})}$$

$$\underline{\underline{\dot{X}}} = C[\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p - \varphi(p) \underline{\underline{X}} \dot{p}]$$

où $\dot{p} = \dot{\lambda}$ et $\varphi(p) = \varphi_\infty + (\varphi_0 - \varphi_\infty) \exp(-\omega p)$

$$\underline{\underline{\dot{R}}} = \gamma(Q - R) \dot{p}$$

$$\underline{\underline{\dot{Q}}} = D(A) (Q_{AS}(A) - Q) \dot{p}$$

avec $D(A) = (d - f) A + f$

et $Q_{AS}^{\text{mod}}(A) = \frac{g A Q_\infty + (1 - A) Q_0}{g A + (1 - A)} + Q_i [A (1 - A)^n + A^n (1 - A)]$

$$A = 1 - \frac{(\underline{\underline{X}} : \underline{\underline{\dot{X}}})^2}{(\underline{\underline{X}} : \underline{\underline{X}}) (\underline{\underline{\dot{X}}} : \underline{\underline{\dot{X}}})}$$

⇒ Critère de charge-décharge :

$$\dot{p} = \frac{1}{h} \left\langle \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}}{J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \right\rangle \quad \text{si} \quad f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \geq 0$$

$$h = \frac{3}{2} C - \frac{3}{2} C \varphi(p) \frac{\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}}{J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})} : \underline{\underline{X}} + \gamma(Q - R)$$

$$\dot{p} = 0 \quad \text{sinon}$$

Fig. 2.11 – Définition du modèle LMTNP2 proposé par [Calloch 1997].

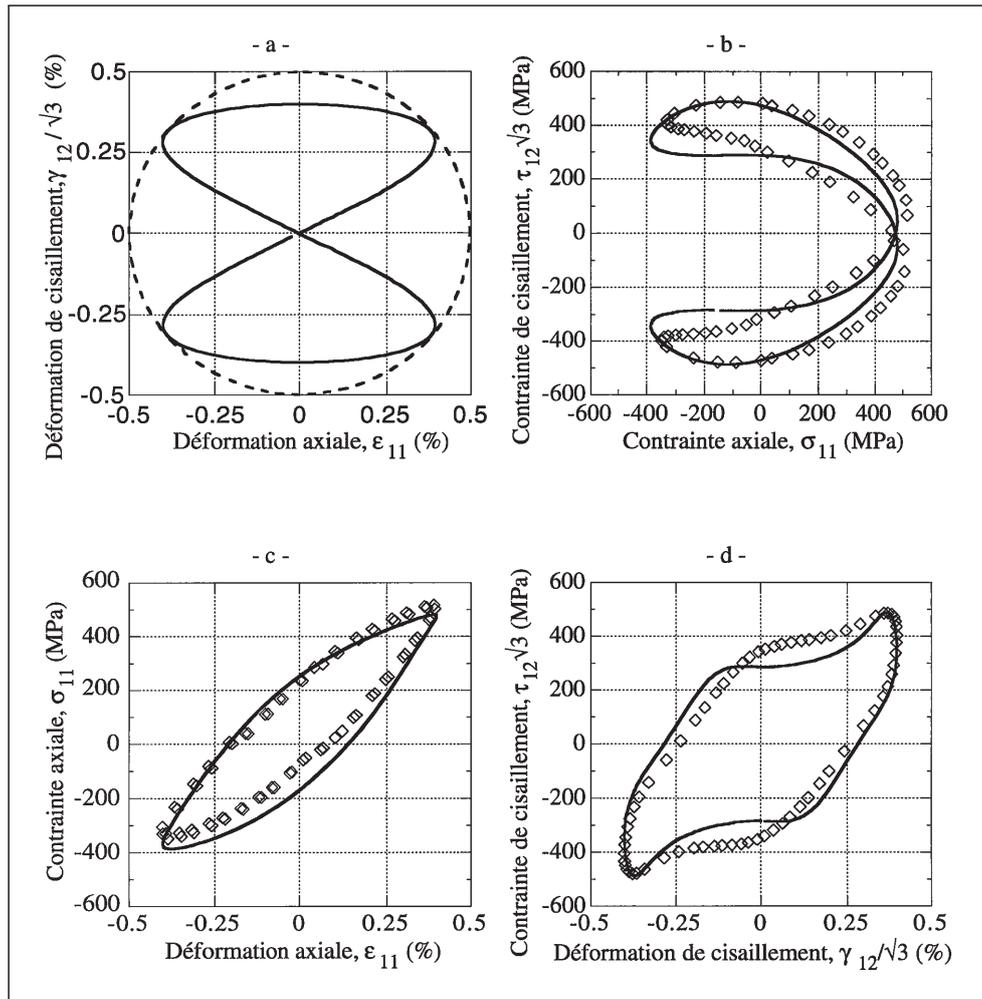


Fig. 2.12 – Comparaison des prévisions du modèle LMTNP2 (trait plein) aux résultats expérimentaux (losanges) d'un essai de traction-torsion combinées [Calloch 1997].

2.5 Phénomène de rochet de torsion ou effet Poynting-Swift

Ce paragraphe a pour objectif de présenter le phénomène de rochet de torsion, aussi appelé effet Poynting-Swift, du nom des auteurs précurseurs sur le sujet. Dans un premier temps, le phénomène sera présenté du point de vue expérimental. Puis, le point de vue de différents auteurs sur l'origine de ce phénomène sera exposé et leurs pistes de modélisation seront données. Ce paragraphe prend appui sur les travaux de [Han 1985], qui seront enrichis en présentant des avancées récentes sur le sujet.

2.5.1 Mise en évidence expérimentale

Au début du XX^e siècle, Poynting réalise des essais de torsion simple sur des cordes à piano, des fils de cuivre ou encore des fils de laiton [Poynting 1909, Poynting 1912]. Les fils sont libres de déplacement dans la direction axiale. Au cours de ces essais, Poynting fait deux observations. Premièrement, la torsion du fil s'accompagne d'un allongement axial, d'un rétrécissement radial et d'une augmentation de volume réversibles. Deuxièmement, l'allongement axial est proportionnel au carré de l'angle de torsion. Ces résultats ont ensuite été confirmés par les travaux de [Foux 1962], illustrés sur la figure 2.13, qui cherche à étendre les résultats de Poynting sur des cas autres que les fils. Dans la littérature, on fait classiquement référence à ce phénomène réversible sous le terme d'effet Poynting.

Les essais réalisés par Poynting et Foux ont mis en évidence des effets secondaires réversibles. Des essais de torsion à effort axial nul ont été menés par [Swift 1947], avec des sollicitations cycliques en grandes déformations. Pour la première fois, Swift a mis en évidence un allongement axial irréversible qui se cumule au cours du chargement cyclique, comme illustré sur la figure 2.14, qui est une reproduction proposée par [Majors & Krempl 1994].

Ce phénomène sera alors qualifié de rochet de torsion. Depuis ces travaux, on parle aussi d'effet Swift ou Poynting-Swift.

Plus récemment, des auteurs se sont attachés à caractériser le rochet de torsion sur des éprouvettes métalliques tubulaires. C'est notamment le cas de [Wack 1989], qui présente des résultats d'essais de torsion alternée sur tube réalisés dans le cadre de la thèse de [Han 1985]. Les essais ont été réalisés sur un acier de type 316L.

L'essai 206, présenté sur la figure 2.15, présente trois niveaux de déformation de torsion $\varepsilon_{\theta z}$ croissants ($\pm 0, 45\%$; $\pm 0, 90\%$; $\pm 1, 37\%$) avec trois cycles en torsion pour chaque niveau. Nous remarquons une courbure orientée vers les déformations positives, et l'apparition d'une déformation axiale non nulle croissante au fur et à mesure du cyclage.

L'essai 208 de Wack, présenté sur la figure 2.16, est similaire à l'essai 206 à ceci près que les niveaux de déformations changent ($\pm 0, 55\%$; $\pm 1, 10\%$; $\pm 1, 65\%$) et la dernière amplitude fait l'objet de neuf cycles.

Encore plus récemment, [Khan *et al.* 2007] ont réalisé des essais de torsion à effort axial nul sur des éprouvettes tubulaires en cuivre, en grandes déformations. Les résultats obtenus par ces auteurs sont présentés sur la figure 2.17. Nous remarquons là encore une courbure orientée vers les déformations axiales positives et une translation des cycles dans la même direction, typiques de l'effet Poynting-Swift.

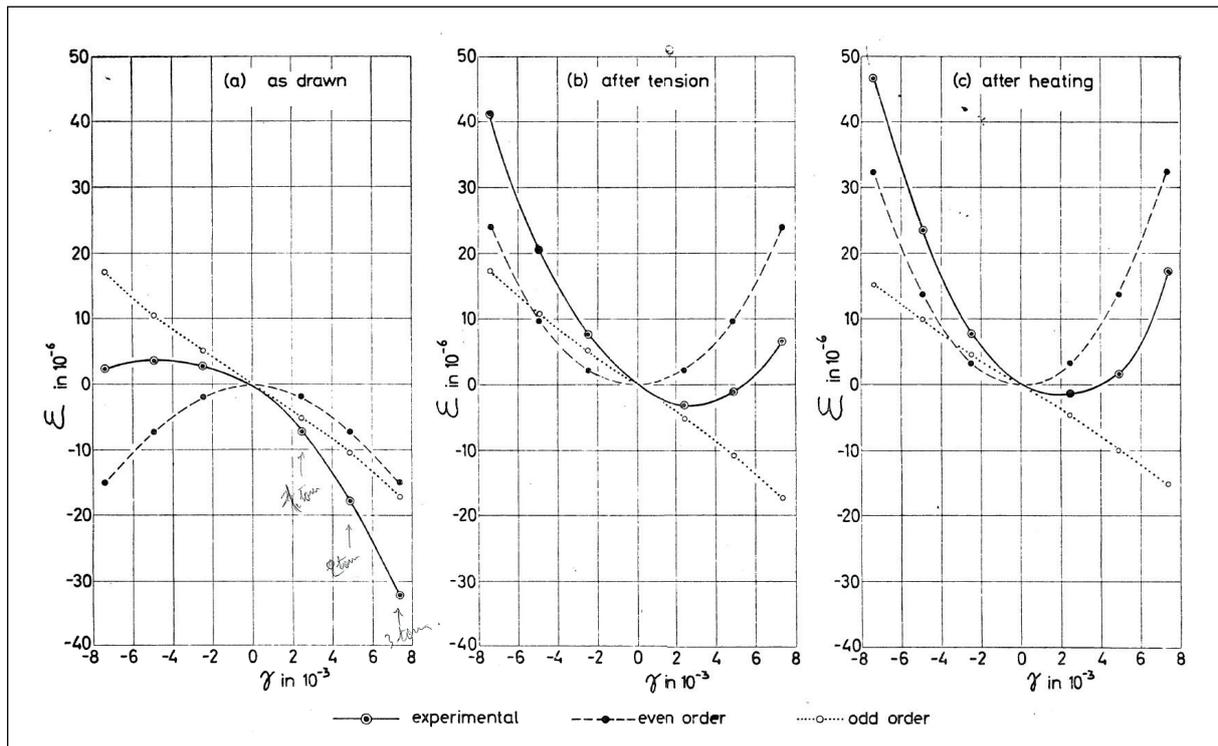


Fig. 2.13 – Mise en évidence de l'effet Poynting par [Foux 1962].

2.5.2 Explications théoriques et modélisation

Immédiatement après la mise en évidence expérimentale de l'effet Poynting-Swift, plusieurs auteurs ont travaillé à fournir une explication théorique, associée à des moyens de modéliser ce phénomène. [Rivlin 1953] montre que, dans le cas de la torsion d'un tube à effort axial nul, les trois composantes diagonales du tenseur de déformation sont proportionnelles au carré de la déformation de torsion.

Nous pouvons également citer l'explication de [Freudenthal & Gou 1969] qui, à partir d'un potentiel plastique particulier, arrivent à montrer que la déformation axiale est proportionnelle au carré de la déformation de cisaillement. Il convient de noter que toutes les explications précitées reposent essentiellement sur la non-linéarité de la loi de comportement.

Pour modéliser cet effet, plusieurs pistes ont été mises en oeuvre. Dans sa thèse, [Han 1985] propose une modélisation basée sur la notion de contrainte de référence virtuelle dans un modèle à mémoire discrète, couplée notamment à la dérivée de Jaumann. L'auteur montre que la modélisation du rochet de torsion est influencée par la dérivée de Jaumann, et que cette influence diminue si l'on considère un effort axial non-nul. [Majors & Krempl 1994] considèrent eux que l'effet Poynting-Swift est une manifestation de l'anisotropie induite. Ils montrent que les modèles dont la règle d'écoulement est anisotrope sont plus à même de modéliser correctement cet effet ; par opposition aux modèles uniquement basés sur une contrainte de rappel. Enfin, on peut citer une proposition récente de [Abdel-Karim & Khan 2010], qui parviennent à modéliser le phénomène sans pour autant reproduire le sens attendu de la courbure et au prix d'un modèle à grand nombre de paramètres.

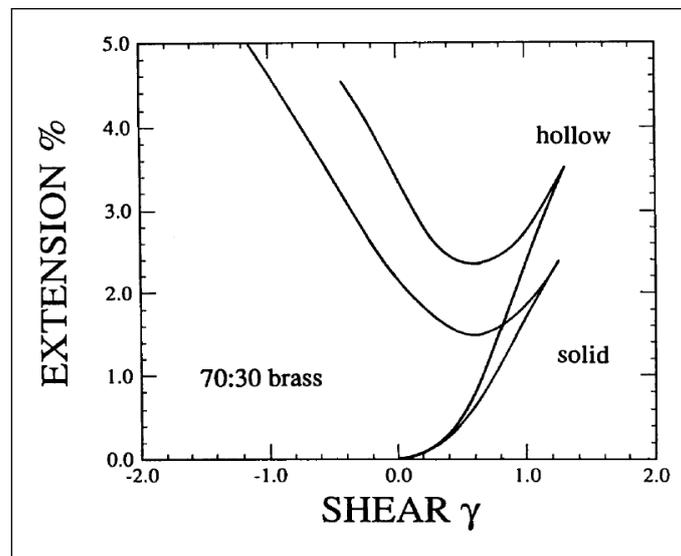


Fig. 2.14 – Allongement axial irréversible observé par Swift lors d'un essai de torsion à effort axial nul [Majors & Krempl 1994].

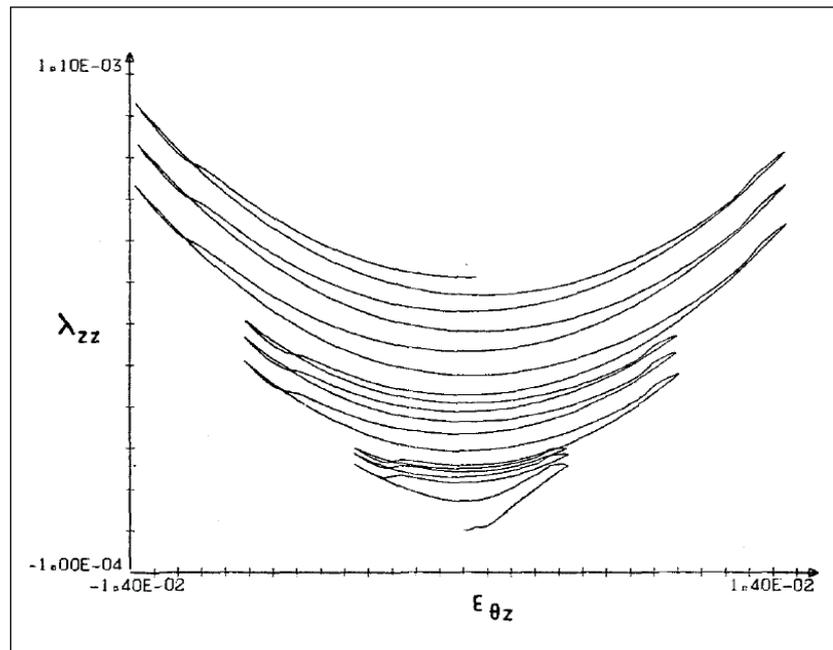


Fig. 2.15 – Résultat d'essai de torsion alternée sur un tube en acier 316L : essai 206 [Wack 1989].

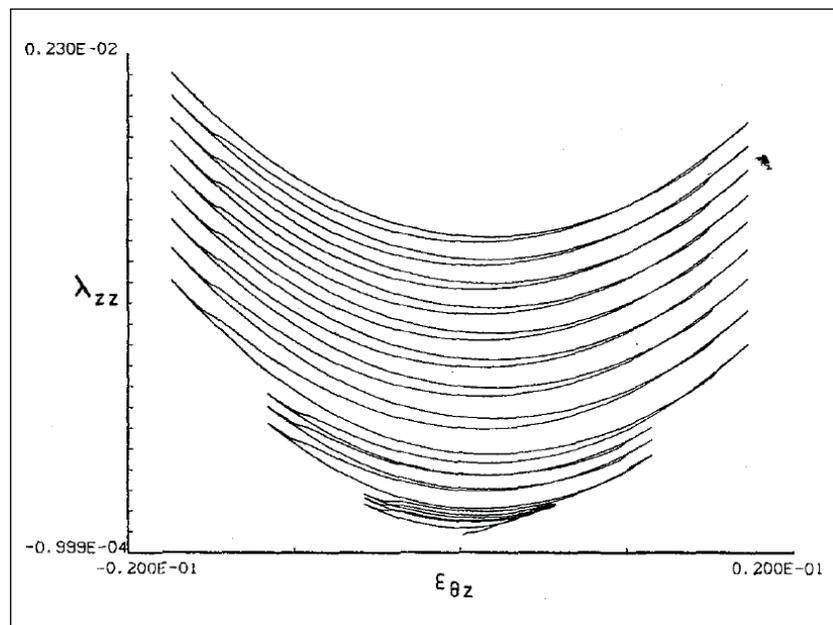


Fig. 2.16 – Résultat d'essai de torsion alternée sur un tube en acier 316L : essai 208 [Wack 1989].

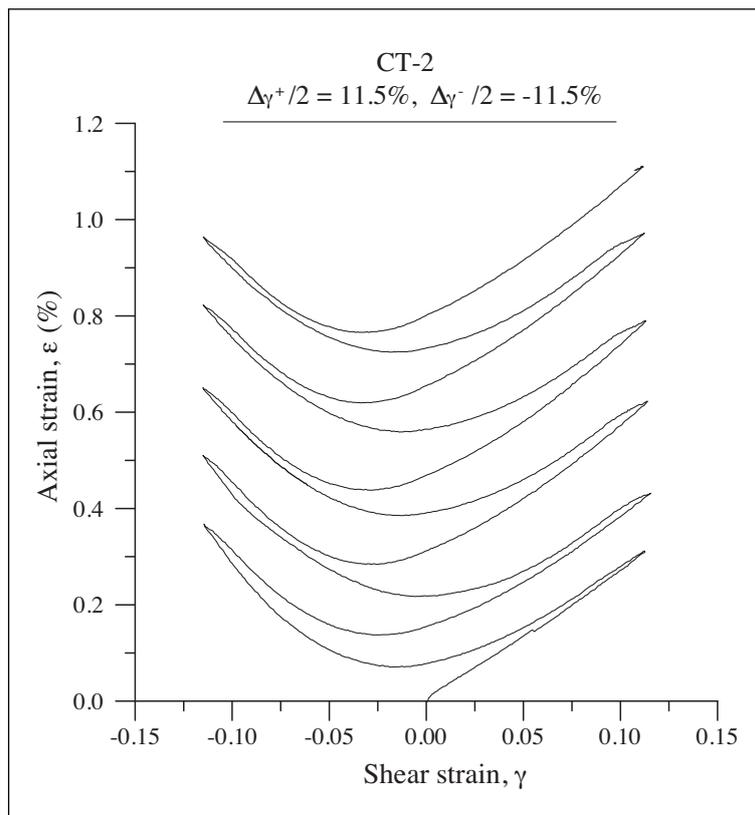


Fig. 2.17 – Résultat d’essai de torsion à effort axial nul sur éprouvette tubulaire en cuivre [Khan *et al.* 2007].

2.6 Décomposition élastique-plastique des grandes transformations

Dans [Naghdi 1990], une revue des travaux de recherche sur l'élastoplasticité en grandes transformations est faite. Il constate que le développement des recherches dans les grandes transformations des matériaux élastoplastiques a démarré dans les années 1960. Avant ces années, les développements de la théorie des matériaux élastoplastiques étaient limités aux petites déformations et en grande partie traitaient de réponses particulières des matériaux comme l'élasticité-plasticité parfaite ou de lois d'écrouissage particulières comme celles isotropes et cinématiques.

À la deuxième moitié de la décennie 1960-1970, deux écoles de pensée qui portent des philosophies différentes, ont émergé. L'une a été initiée par Lee [Lee 1968, Lee & Liu 1968, Lee 1969] et l'autre a été initiée par Green et Naghdi [Green & Naghdi 1965, Green & Naghdi 1968].

La première pose le principe d'une décomposition élastique-plastique multiplicative du gradient de la transformation :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}^e \circ \tilde{\mathbf{F}}^p \quad (2.14)$$

Il en résulte une équation constitutive entre la contrainte et la transformation élastique, posée ainsi :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\mathbf{F}}^e) \quad (2.15)$$

où $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ est la contrainte de Cauchy et $\tilde{\mathcal{H}}$ est une fonction tensorielle issue d'un potentiel hyperélastique. Bon nombre d'auteurs ont adopté ce principe pour développer leur modélisation du comportement de matériaux élastoplastiques en grandes transformations.

La seconde école, elle, choisit d'écrire l'équation constitutive entre la contrainte et la déformation sous la forme suivante :

$$\widetilde{\mathbf{S}}^{(m)} = \tilde{\mathcal{G}}(\widetilde{\mathbf{E}}^{(m)} - \widetilde{\mathbf{E}}_p^{(m)}) \quad (2.16)$$

où $\tilde{\mathcal{G}}$ est une fonction tensorielle qui peut être une loi élastique de Hooke, par exemple, ou, plus généralement, une loi non linéaire hyperélastique, $\widetilde{\mathbf{E}}^{(m)}$ est la déformation lagrangienne de Hill, telle que pour $m = 0$, par exemple, elle coïncide avec la déformation logarithmique droite et $\widetilde{\mathbf{E}}_p^{(m)}$ est la déformation plastique. Le couple contrainte-déformation $(\widetilde{\mathbf{S}}^{(m)}, \widetilde{\mathbf{E}}^{(m)})$ est un couple conjugué thermodynamiquement. Si la fonction $\tilde{\mathcal{G}}$ est isotrope, alors l'équation 2.16 peut être tournée par la rotation propre $\tilde{\mathbf{R}}$. Dans le cas $m = 0$, nous obtenons une équation constitutive eulérienne comme suit :

$$\tilde{\mathbf{R}} \circ \widetilde{\mathbf{S}}^{(0)} \circ \tilde{\mathbf{R}}^T = \tilde{\mathcal{G}}(\widetilde{\mathbf{L}\mathbf{n}\mathbf{V}} - \widetilde{\mathbf{L}\mathbf{n}\mathbf{V}}_p) \quad (2.17)$$

Parmi les auteurs qui adoptent cette démarche, citons par exemple les travaux de [Green & Naghdi 1965, Eterovic & Bathe 1990, Papadopoulos & Lu 1998, Miehe *et al.* 2002, Schröder *et al.* 2002, Horak & Jirasek 2013, Shutov & Ihlemann 2014].

D'autres auteurs suivent l'exemple de [Nemat-Nasser 1979, Nemat-Nasser 1982] et décomposent additivement le taux de déformation $\tilde{\mathbf{D}}$ en la somme d'un tenseur élastique et d'un tenseur plastique :

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}^e + \tilde{\mathbf{D}}^p \quad (2.18)$$

Parfois, selon leur choix de mesure de déformation et de dérivée temporelle, leurs travaux aboutissent à une approche incluse dans le principe de la deuxième école, équation 2.16 [Perić *et al.* 1992, Xiao *et al.* 2000, Zhu *et al.* 2014].

[Del Piero 2018] propose et argumente de façon consistante pour un autre type de décomposition de la transformation en une partie élastique et une partie plastique :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}^e + \tilde{\mathbf{F}}^p \quad (2.19)$$

Pour cela, il se base sur un milieu continu avec une représentation à deux échelles de la transformation.

Il apparaît donc que différentes options de décomposition élastique-plastique de la transformation sont pratiquées par les modélisateurs de matériaux élastoplastiques en grandes transformations. [Naghdi 1990] relève que les formulations sur la théorie générale des matériaux élastoplastiques en présence de grandes transformations sont controversées et il persiste de forts désaccords sur un nombre important de questions entre plusieurs écoles de plasticité existantes. Et, [Naghdi 1990] explique que la définition précise du concept de déformation plastique est controversée parmi les auteurs, et qu'aucune proposition ne permet de rendre compte de toutes les caractéristiques de la déformation permanente pour un matériau élastoplastique en grandes transformations.

Par ailleurs, quelques auteurs ont comparé les prédictions de modèles élastoplastiques en grandes transformations, basés sur les deux décompositions élastique-plastique : multiplicative (relation 2.14) et additive (relation 2.16). À titre d'exemple, les résultats de [Miehe *et al.* 2002] de simulation de structures en grandes transformations sont donnés aux figures 2.18, 2.19, 2.20 et 2.21. Ces résultats montrent une forte proximité dans les prédictions des deux principes de décomposition élastique-plastique, multiplicative et additive.

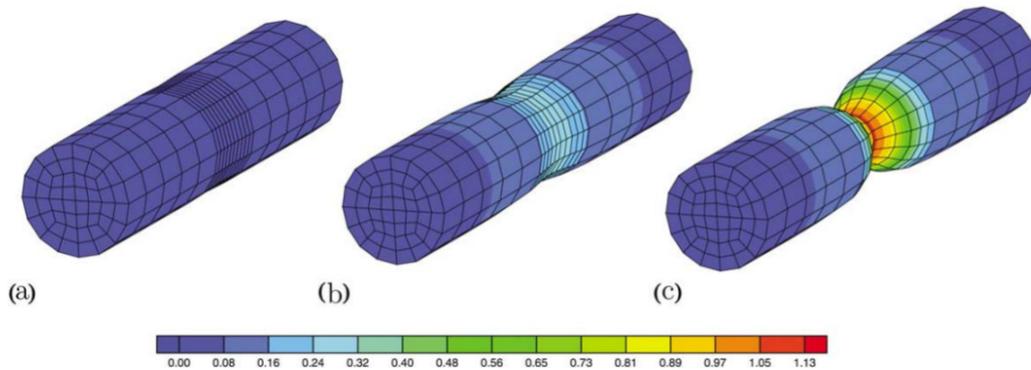


Fig. 6. Necking of a rod. Deformed specimen and distribution of equivalent plastic strain: (a) reference configuration, (b) intermediate state after onset of necking at $u = 8.4$ mm and (c) final state at $u = 14$ mm.

Fig. 2.18 – Simulation de la striction d'un barreau circulaire en grandes transformations [Miehe *et al.* 2002].

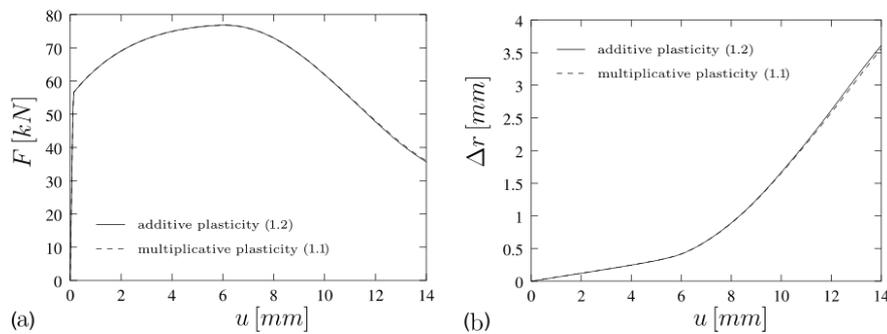


Fig. 7. Necking of a rod. Comparison of presented additive plasticity based on ansatz (1.2) with reference framework of multiplicative plasticity based on Eq. (1.1), see Appendix A. (a) Load displacement curve and (b) radial contraction Δr of the mid cross section of the rod.

Fig. 2.19 – Comparaison des deux décompositions élastique-plastique, soit multiplicative, soit additive, pour un cas de striction de barreau circulaire en grandes transformations [Miehe *et al.* 2002].

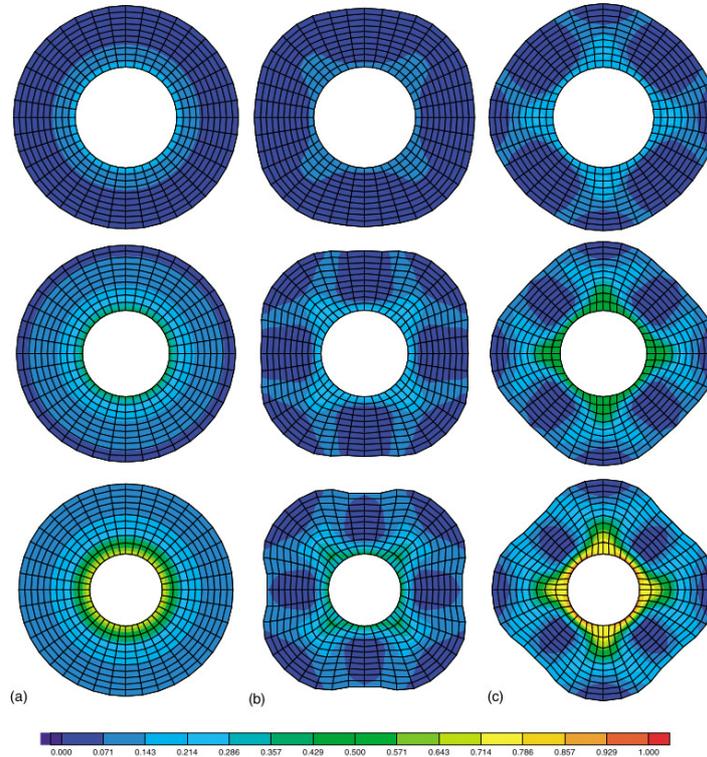


Fig. 9. Drawing of a flange. Deformed meshes and distributions of equivalent plastic strain for different radial displacements $u = 25, 50$ and 75 mm. (a) Isotropic response, (b) anisotropic response for $\delta = 3.4641$, (c) anisotropic response for $\delta = 0.86603$.

Fig. 2.20 – Simulation de la déformation plastique d’une plaque annulaire en grandes transformations [Miehe *et al.* 2002].

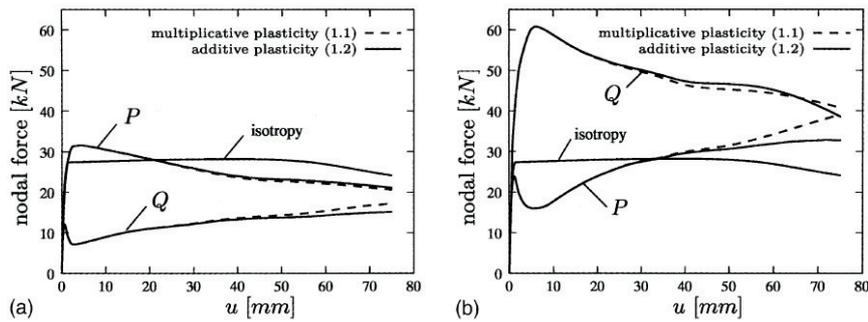


Fig. 10. Drawing of a flange. Comparison of the additive plasticity based on ansatz (1.2) with reference framework of multiplicative plasticity based on Eq. (1.1), see Appendix A. Load deflection curves for nodal forces acting at nodes P and Q . (a) Anisotropic response for $\delta = 3.4641$, (b) anisotropic response for $\delta = 0.86603$. For reference purpose, the isotropic response is also shown.

Fig. 2.21 – Comparaison des deux décompositions élastique-plastique, soit multiplicative, soit additive, pour la simulation de la figure 2.20 [Miehe *et al.* 2002].

Modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure 1D (SVG-HP 1D)

Sommaire

3.1	Définition des paramètres du modèle	42
3.1.1	Répartition homogène des seuils	42
3.1.2	Fonction générative des modules d'élasticité	42
3.2	Optimisation du choix des paramètres du modèle	50
3.2.1	Influence et choix du nombre d'éléments de Saint-Venant	51
3.2.2	Détermination du seuil limite	53
3.2.3	Fonction de densification des seuils	55
3.3	Ajout d'un ressort célibataire	57

Le modèle SVG-HP 1D ainsi que sa réponse à une sollicitation cyclique ont été présentés au paragraphe 2.1.1. Puis, les propriétés intrinsèques qui caractérisent ce modèle ont été présentées au paragraphe 2.1.2. Dans ce chapitre, le paragraphe 3.1 donne la méthode adoptée pour distribuer les seuils de déclenchement en déformation des frotteurs et les modules d'élasticité des ressorts composant le modèle. Ensuite, une méthode visant à optimiser la distribution des seuils et des modules est détaillée dans le paragraphe 3.2. Pour conclure ce chapitre, une version du modèle de Saint-Venant généralisé comportant un ressort célibataire supplémentaire sera présentée (§ 3.3).

Notons que, dans le cas d'un comportement élastoplastique 3D, les états de contrainte et de déformation plastiques sont de nature déviatoire. Bien que ce chapitre traite du cas 1D, les quantités scalaires de contrainte et de déformation seront notées $\underline{\sigma}$ et $\underline{\gamma}$ respectivement, où la barre inférieure rappelle la nature déviatoire des états de contrainte et de déformation considérés. Cette notation facilitera la transition vers le cas 3D, abordée au chapitre 4.

3.1 Définition des paramètres du modèle

3.1.1 Répartition homogène des seuils

La distribution discrète des seuils de déclenchement des frotteurs du modèle SVG-HP 1D est définie par un couple de paramètres (n, e_n^*) où n désigne le nombre total d'éléments de Saint-Venant et e_n^* désigne le seuil limite, qui est le seuil de déclenchement du frotteur du dernier élément, d'indice n . Les seuils de déclenchement des frotteurs sont définis par :

$$e_k^* = k de^* \text{ avec } de^* = \frac{e_n^*}{n} \text{ et } k \in [1, n] \quad (3.1)$$

On parle ici de distribution **homogène** car l'écart entre deux seuils consécutifs e_k^* et e_{k+1}^* est constant, tel que $e_{k+1}^* - e_k^* = de^*$.

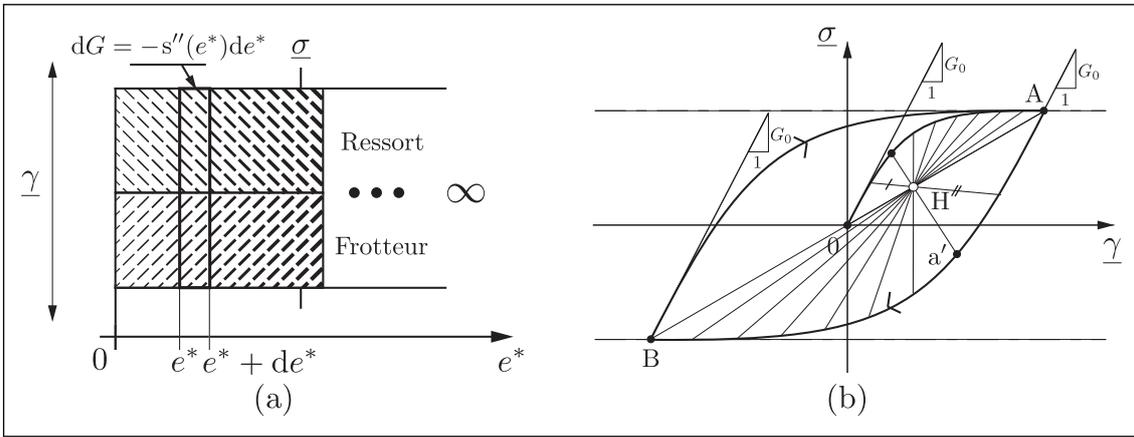


Fig. 3.1 – Modèle de Saint-Venant généralisé continu (a) et sa réponse mécanique typique en comportement cyclique (b) [Blès 2002].

3.1.2 Fonction générative des modules d'élasticité

Pour définir la distribution des modules d'élasticité G_k , une fonction $s(\underline{\gamma})$ est adoptée ; elle est appelée **fonction générative**. Cette fonction caractérise le comportement du modèle par la définition de la courbe contrainte-déformation $(\underline{\sigma}-\underline{\gamma})$ de première charge.

Considérons sur la figure 3.1 le cas du modèle SVG-HP 1D continu, tel que proposé dans [Persez 1960]. Cela consiste à remplacer la suite discrète des seuils de déclenchement en déformation e_k^* par une suite continue d'éléments indexés par un seuil de déclenchement en déformation continu e^* , pouvant varier de 0 à $+\infty$. Dans ce cas, une section comprise entre e^* et $e^* + de^*$ est équivalente à un élément de Saint-Venant dont le module d'élasticité vaut $-ds'(e^*)$ ou $-s''(e^*)de^*$, tel que :

$$G_{[e^*;e^*+de^*]} = -ds'(e^*) = -s''(e^*)de^* \quad (3.2)$$

Cette relation a été discrétisée comme suit :

$$G_1 = s'(0) - s'(e_1^*) \quad \text{et} \quad G_k = s'(e_{k-1}^*) - s'(e_k^*) \quad \forall k \in \{2, \dots, n\} \quad (3.3)$$

La figure 3.2 illustre la forme de la distribution des modules d'élasticité G_k des ressorts, avec une fonction générative typique.

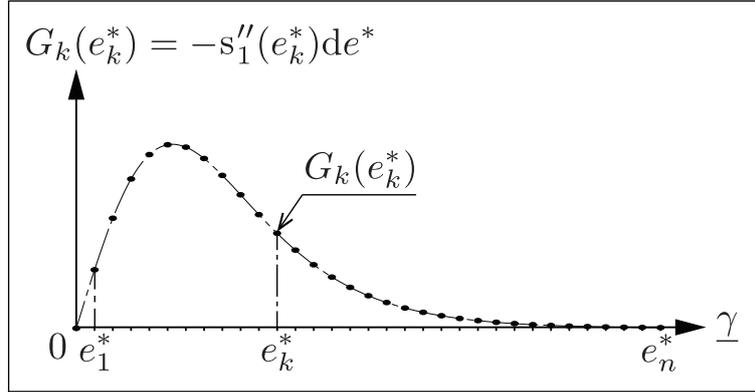


Fig. 3.2 – Distribution typique des modules d'élasticité G_k des ressorts.

Pour décrire le comportement élastoplastique cyclique d'un matériau donné, avec le modèle SVG-HP 1D, il est donc nécessaire d'identifier préalablement la fonction générative $s(\underline{\gamma})$ ou sa dérivée $s'(\underline{\gamma})$ à partir du comportement du matériau en cisaillement, ce qui correspond à un comportement déviatoire unidimensionnel.

Ce comportement est caractérisé, d'une part, par deux comportements limites : le comportement quasi élastique, défini par le module tangent à l'origine G_0 et le comportement quasi plastique défini par le seuil limite d'écoulement S_0 (figure 3.3). D'autre part, ce comportement est caractérisé par une zone de transition entre les comportements quasi élastique et quasi plastique (figure 3.3).

Le choix d'une fonction générative dépend de la forme de la courbe de première charge en cisaillement du matériau dont on se propose de modéliser le comportement. Il n'existe pas à notre connaissance une fonction générative unique pouvant s'adapter à tous les matériaux dont le comportement est élastoplastique, avec suffisamment de précision. Une définition sous forme différentielle peut toutefois être proposée [Wack & Tourabi 1992] :

$$s' = \frac{ds}{d\underline{\gamma}} = G_0 \left(1 - \left(\frac{s}{S_0} \right)^d \right) \quad (3.4)$$

où d est un paramètre qui caractérise la forme de la zone de transition. L'équation différentielle 3.4 n'a pas de solution analytique générale et doit être intégrée numériquement.

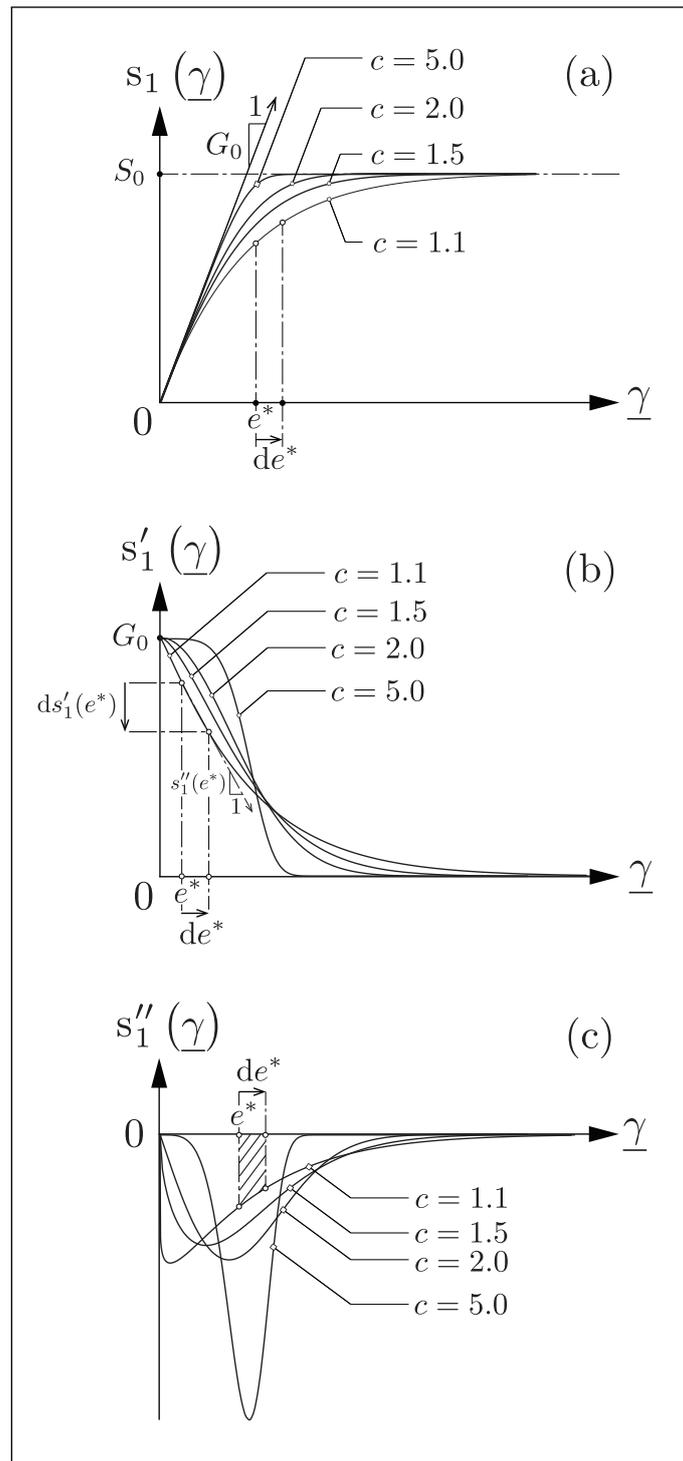


Fig. 3.3 – Fonction générative $s_1(\underline{\gamma})$ (a), dérivée première $s'_1(\underline{\gamma})$ (b) et dérivée seconde $s''_1(\underline{\gamma})$ (c) pour différentes valeurs du paramètre c .

Par ailleurs, l'équation 3.4 présente un couplage entre le module tangent et la valeur de la contrainte. Ceci rend son usage difficile sans une intégration qui permet de déterminer la valeur de la contrainte. Bien que cette équation différentielle admette des solutions analytiques pour des valeurs particulières du paramètre d , elle reste difficile à mettre en œuvre, notamment dans le cadre d'une implémentation dans un code de calcul par éléments finis. Afin de pouvoir modéliser un large spectre de comportements élastoplastiques, nous proposons dans ce paragraphe trois définitions de fonctions génératives, notées $s_1(\underline{\gamma})$, $s_2(\underline{\gamma})$ et $s_3(\underline{\gamma})$. Notons toutefois que dans l'intégralité des chapitres suivants, nous nous restreindrons à l'utilisation de la fonction générative $s_1(\underline{\gamma})$, définie par la relation 3.5.

- Définition de la fonction générative $s_1(\underline{\gamma})$:

La fonction générative $s_1(\underline{\gamma})$ est basée sur l'utilisation de la fonction gamma [Whittaker & Watson 1920]. Cette fonction, notée $\Gamma(x)$, est implémentée dans de nombreux outils numériques tels que Excel, MATLAB, Fortran, etc. La fonction générative $s_1(\underline{\gamma})$ est définie également par trois paramètres G_0 , S_0 et c . La forme de la courbe représentative de cette fonction est illustrée sur la figure 3.3a. Cette fonction est définie par sa dérivée $s'_1(\underline{\gamma})$ représentée sur la figure 3.3b et dont l'expression analytique est donnée par la relation suivante :

$$s'_1(\underline{\gamma}) = \frac{ds_1}{d\underline{\gamma}}(\underline{\gamma}) = G_0 e^{-\left(\frac{\underline{\gamma}}{\gamma_\Gamma}\right)^c} \quad (3.5)$$

avec $\gamma_\Gamma = \gamma^* \frac{c}{\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)}$ avec $\gamma^* = \frac{S_0}{G_0}$, $\underline{\gamma} \in \mathbb{R}_+$ et $c \in]1, 10^2] \subset \mathbb{R}$

où G_0 représente le module d'élasticité à l'origine, S_0 représente le seuil de plasticité, c est un paramètre qui caractérise le rayon de courbure de la zone de transition de la courbe contrainte-déformation et $\Gamma(x)$ représente la fonction gamma. La fonction $s'_1(\underline{\gamma})$, qui caractérise le module tangent, ne dépend que de la déformation totale $\underline{\gamma}$ et permet de définir la distribution des modules d'élasticité G_k , sans obligation de calcul de la fonction $s_1(\underline{\gamma})$. Notons qu'il n'existe pas, à notre connaissance, de forme analytique pour la fonction générative $s_1(\underline{\gamma})$, dont la dérivée est exprimée par la relation 3.5. Cependant, son évolution peut être obtenue aisément par une intégration numérique, en utilisant la méthode des trapèzes par exemple.

Les figures 3.3a et 3.3b illustrent les formes successives de la fonction générative $s_1(\underline{\gamma})$ ainsi que de sa dérivée première pour un couple de paramètres (G_0, S_0) donné et pour différentes valeurs du paramètre de courbure c . Aussi, sa dérivée seconde $s''_1(\underline{\gamma})$ est représentée sur la figure 3.3c, pour différentes valeurs de c . Elle est définie par :

$$s''_1(\underline{\gamma}) = \frac{d^2s_1}{d\underline{\gamma}^2}(\underline{\gamma}) = -c \frac{\underline{\gamma}^{c-1}}{(\gamma_\Gamma)^c} s'_1(\underline{\gamma}) \quad (3.6)$$

La forme de la fonction générative $s_1(\underline{\gamma})$, représentée sur la figure 3.3a, a été proposée uniquement pour illustrer la signification physique des trois paramètres du modèle : G_0 , S_0 et c . Une expression analytique ou une intégration numérique de cette fonction ne sont pas requises pour la définition du modèle. En effet, la distribution des modules d'élasticité G_k des ressorts est définie par la fonction $s'_1(e_k^*)$, selon l'équation 3.3, qui dépend de la suite discrète des seuils e_k^* définis par la relation 3.1.

Notons que les courbes de modules d'élasticité $s'_1(\underline{\gamma})$ (figure 3.3b) présentent chacune un point d'inflexion, c'est-à-dire un point en lequel la courbe coupe sa tangente. Nous pouvons déterminer la déformation $\underline{\gamma}_c$ pour laquelle la courbe $s'_1(\underline{\gamma})$ présente un point d'inflexion. Il s'agit de la déformation pour laquelle la courbe $s''_1(\underline{\gamma})$ admet un minimum et vérifie $s'''_1(\underline{\gamma}) = 0$. La dérivée tierce de la fonction générative $s'''_1(\underline{\gamma})$ est définie par :

$$s'''_1(\underline{\gamma}) = \frac{d^3 s_1}{d\underline{\gamma}^3}(\underline{\gamma}) = c \frac{\underline{\gamma}^{c-2}}{(\underline{\gamma}_\Gamma)^c} \left(c \left(\frac{\underline{\gamma}}{\underline{\gamma}_\Gamma} \right)^c - (c-1) \right) s'_1(\underline{\gamma}) \quad (3.7)$$

Nous pouvons maintenant déterminer la valeur de $\underline{\gamma}_c$ en résolvant $s'''_1(\underline{\gamma}) = 0$:

$$s'''_1(\underline{\gamma}_c) = 0 \Leftrightarrow \underline{\gamma}_c = 0 \text{ ou } \underline{\gamma}_c = \underline{\gamma}_\Gamma \left(\frac{c-1}{c} \right)^{\frac{1}{c}} \quad (3.8)$$

En première charge pour $\underline{\gamma}_c \geq 0$, la relation 3.8 impose un domaine de variation pour le paramètre c , tel que $c \geq 1$. Pour $c = 1$, l'équation 3.8 donne $\underline{\gamma}_c = 0$; dans ce cas il n'y a pas de point d'inflexion. Ainsi, un point d'inflexion existe sur la courbe des modules $s'_1(\underline{\gamma})$, si et seulement si $c > 1$. La figure 3.4 illustre les formes successives de la fonction générative ainsi que de ses dérivées premières et secondes, pour un couple de paramètres (G_0, S_0) donné et pour $c = 1$ et $c > 1$. Les courbes $s'_1(\underline{\gamma})$ pour $c > 1$ sont du type courbe en S inversé et correspondent bien à l'évolution typique des modules tangents pour les matériaux métalliques [Wack & Tourabi 1992]. La courbe $s'_1(\underline{\gamma})$ pour $c = 1$ a une forme d'exponentielle décroissante, ce qui ne correspond pas à l'évolution typique des modules tangents pour ces mêmes matériaux. Ainsi, pour se conformer au comportement typique des matériaux métalliques, nous choisissons d'exclure la valeur 1 du domaine de variation du paramètre c , même si cette valeur est mathématiquement admissible.

Notons que pour des valeurs du paramètre c proches de 10^2 , le comportement en première charge tend vers un comportement élastique parfaitement plastique (figure 3.5). Au-delà de cette valeur, l'évolution du paramètre c n'a que peu d'influence sur l'évolution de la fonction générative. C'est pourquoi nous limitons le domaine de variation de ce paramètre à $]1, 10^2]$ (cf. relation 3.5).

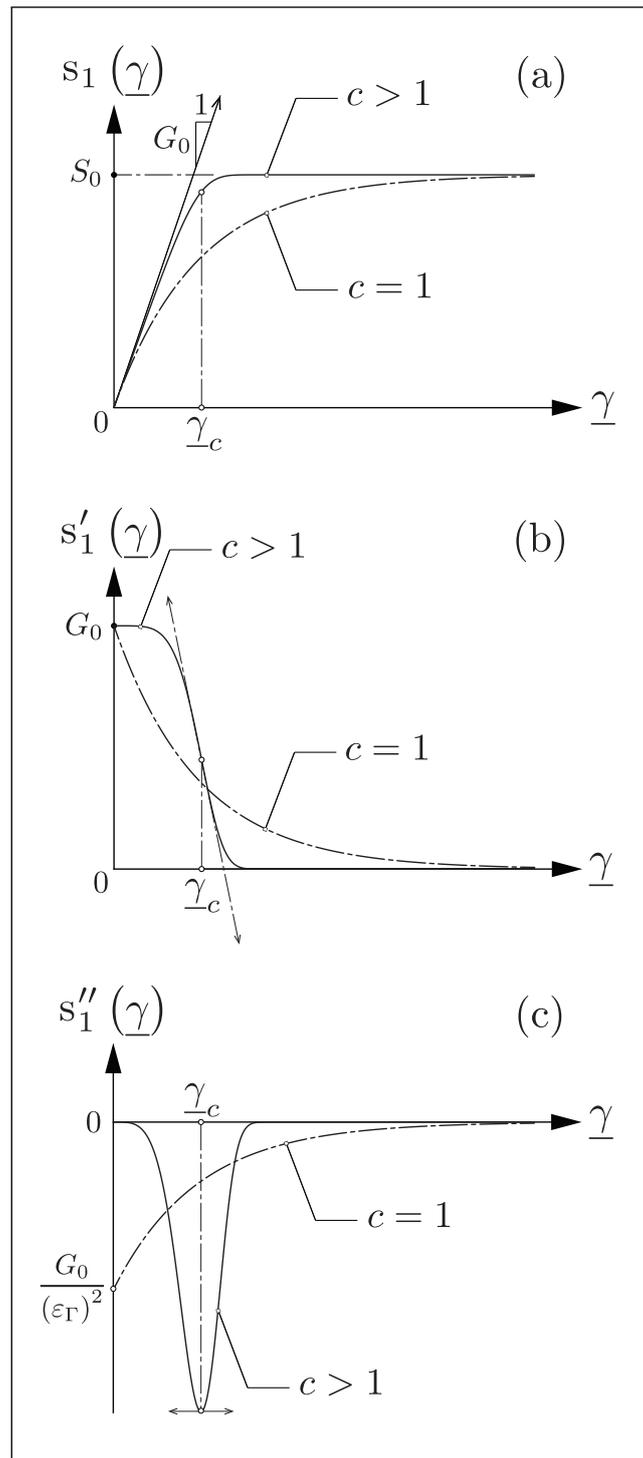


Fig. 3.4 – Fonction génératrice $s_1(\underline{\gamma})$ (a), dérivée première $s'_1(\underline{\gamma})$ (b) et dérivée seconde $s''_1(\underline{\gamma})$ (c) pour $c = 1$ et $c > 1$.

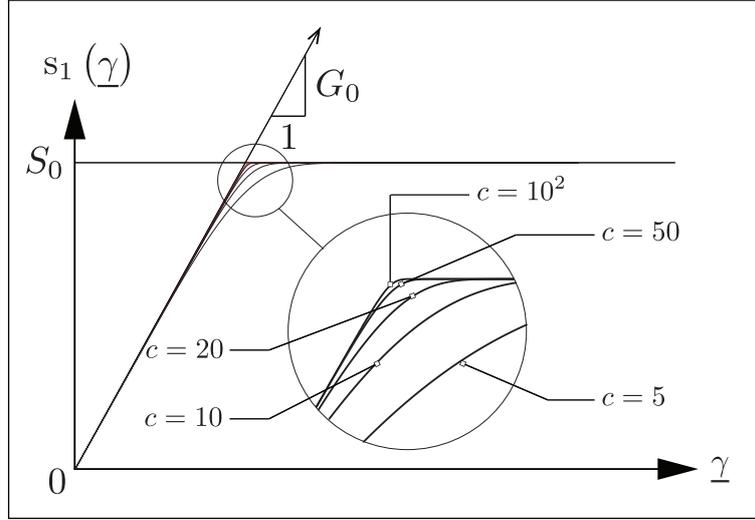


Fig. 3.5 – Fonction générative $s_1(\underline{\gamma})$ pour $c = 5, 10, 20, 50$ et 10^2 .

Ainsi, avec ce choix de fonction générative $s_1(\underline{\gamma})$ définie par la relation 3.5, les modules d'élasticité du modèle de Saint-Venant généralisé sont calculés comme suit :

$$G_1 = G_0 \left(1 - e^{-\left(\frac{e_1^*}{\gamma_\Gamma}\right)^c} \right) \quad \text{et} \quad G_k = G_0 \left(e^{-\left(\frac{e_{k-1}^*}{\gamma_\Gamma}\right)^c} - e^{-\left(\frac{e_k^*}{\gamma_\Gamma}\right)^c} \right) \quad \forall k \in \{2, \dots, n\} \quad (3.9)$$

- Définition de la fonction générative $s_2(\underline{\gamma})$:

La fonction générative $s_2(\underline{\gamma})$ proposée est du même type que la fonction générative $s_1(\underline{\gamma})$ et vient compléter son domaine d'utilisation. Elle peut notamment être utilisée pour modéliser le comportement de matériaux qui présentent une zone de transition relativement étendue entre le comportement quasi élastique et le comportement quasi plastique. En effet, nous illustrons sur la figure 3.6 les domaines de comportement **A** et **B**, caractéristiques des fonctions génératives $s_1(\underline{\gamma})$ et $s_2(\underline{\gamma})$ respectivement. Cette dernière est définie analytiquement par :

$$s_2(\underline{\gamma}) = S_0 \tanh \left(\delta \frac{\underline{\gamma}}{\gamma^*} + (\delta - 1) \tanh \left(\frac{\underline{\gamma}}{\gamma^*} \right) \right) \quad (3.10)$$

avec $\gamma^* = \frac{S_0}{G_0}$; $\underline{\gamma} \in \mathbb{R}_+$ et $\delta \in]0, 0.5] \subset \mathbb{R}$

où δ est un paramètre de courbure de la courbe contrainte-déformation, équivalent au paramètre c pour la fonction $s_1(\underline{\gamma})$. Le domaine de variation du paramètre δ , représenté par

le domaine **B** de la figure 3.6, a été choisi afin de compléter la gamme de comportements inclus dans le domaine **A**.

La figure 3.7 illustre les différentes formes des courbes représentatives de la fonction générative $s_2(\underline{\gamma})$ définie par la relation 3.10, pour un couple de paramètres (G_0, S_0) donné et pour différentes valeurs du paramètres δ . Le comportement illustré par la figure 3.7 montre une large gamme de zones de transition, entre le comportement quasi élastique et le comportement quasi plastique. D'une part, pour les valeurs de δ proches de 0, 5, la zone de raccordement est peu étendue et rappelle l'allure des courbes du domaine **A** (figure 3.6 et figure 3.7a).

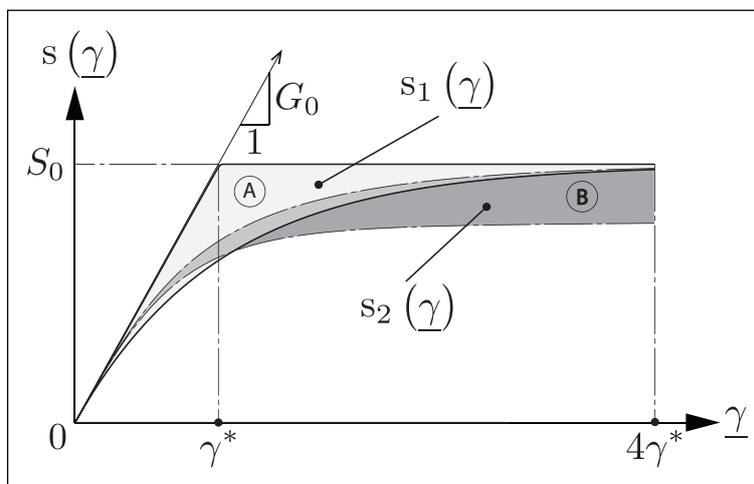


Fig. 3.6 – Domaines **A** et **B** de comportement en première charge définis respectivement par les relations 3.5 et 3.10.

D'autre part, pour les valeurs de δ qui tendent vers zéro, la zone de raccordement devient plus étendue et s'éloigne de l'allure des courbes du domaine **A** (figure 3.6, figure 3.7.a et 3.7.b).

- Définition de la fonction générative $s_3(\underline{\gamma})$:

La fonction générative $s_3(\underline{\gamma})$ proposée est définie à partir de la fonction tangente hyperbolique. Elle peut être utilisée pour un certain nombre de matériaux métalliques. Cette fonction $s_3(\underline{\gamma})$, qui ne dépend que des deux paramètres G_0 et S_0 , a pour expression analytique :

$$s_3(\underline{\gamma}) = S_0 \tanh\left(\frac{G_0}{S_0} \underline{\gamma}\right) \quad (3.11)$$

Contrairement aux deux fonctions génératives proposées précédemment, celle-ci ne permet pas de modifier la courbure au niveau du coude de la courbe contrainte-déformation. Malgré cette faiblesse, cette fonction peut convenir pour certains matériaux ou être utilisée à des fins de développement.

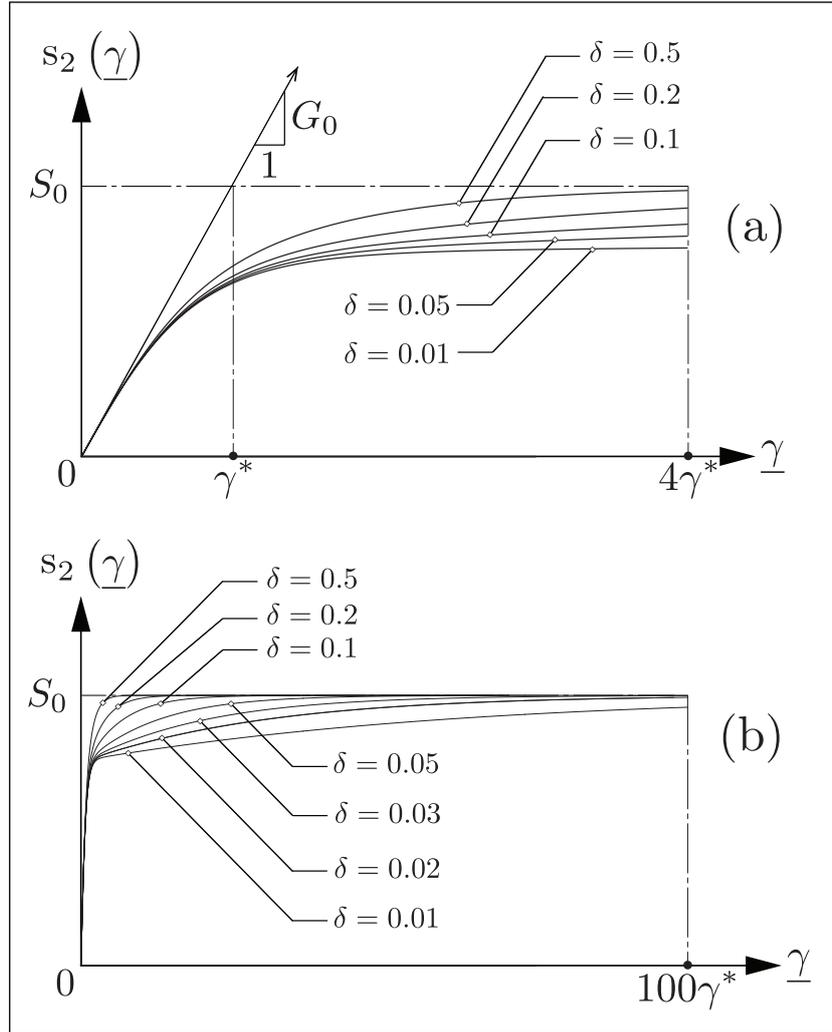


Fig. 3.7 – Domaine **B** de comportement en première charge défini par la relation 3.10 : pour $\underline{\gamma} \in [0, 4\gamma^*]$ (a) et pour $\underline{\gamma} \in [0, 100\gamma^*]$ (b).

3.2 Optimisation du choix des paramètres du modèle

Dans le paragraphe 3.1.1, nous avons introduit une distribution homogène des seuils de déclenchement en déformation des frotteurs. Cette distribution homogène peut se révéler problématique dans le cas où le nombre n d'éléments de Saint-Venant dans le modèle est relativement faible. Plus particulièrement, la zone de transition élastique-plastique, située autour du coude de la courbe contrainte-déformation, peut souffrir d'un manque de précision et apparaître comme une courbe affine par morceaux, comme c'est le cas pour les modèles de Saint-Venant élémentaire et/ou à deux éléments, par exemple (figures 2.1 et 2.3). Dans ce paragraphe, nous étudierons l'influence du couple de paramètres (n, e_n^*) et ferons des propositions pour optimiser le choix de ces paramètres.

3.2.1 Influence et choix du nombre d'éléments de Saint-Venant

Le nombre n d'éléments de Saint-Venant dans le modèle permet, s'il est suffisamment important, d'obtenir une réponse en contrainte continue ou du moins quasi continue. La figure 3.8a montre les réponses en contrainte du modèle SVG-HP 1D comportant un nombre croissant d'éléments (5, 10, 20, 50). Ces réponses sont comparées avec la courbe représentative de la fonction générative $s_1(\underline{\gamma})$ qui a permis de générer la distribution des modules d'élasticité du modèle. Elle a été obtenue par intégration de la fonction $s'_1(\underline{\gamma})$ par la méthode des trapèzes. Nous remarquons tout d'abord que les courbes contrainte-déformation pour 5 et 10 éléments sont saccadées du fait du nombre d'éléments trop faible. Aussi, nous pouvons voir que toutes les courbes sont situées au-dessus de la courbe représentative de la fonction $s_1(\underline{\gamma})$. Pour expliquer ce phénomène, nous calculons l'évolution du module tangent, défini par :

$$M(\underline{\gamma}) = \frac{d\sigma}{d\underline{\gamma}}(\underline{\gamma}) \quad (3.12)$$

La figure 3.8b montre les courbes d'évolution du module tangent du modèle de Saint-Venant pour les différents nombres d'éléments. La courbe $s'_1(\underline{\gamma})$ est également représentée. Nous remarquons que pour 5 éléments, la courbe de modules est en forme de marches d'escalier, toujours située au-dessus de la courbe analytique $s'_1(\underline{\gamma})$. Sur une marche d'escalier donnée, un ressort est toujours sollicité et le seuil de déclenchement du frotteur correspondant n'est pas atteint. Dans le même temps, la contrainte calculée par le modèle augmente, ce qui amène une surestimation de cette contrainte par rapport à la valeur voulue (figure 3.8a). Augmenter le nombre d'éléments dans le modèle permet d'augmenter le nombre de marches d'escalier et de réduire leur largeur. Ainsi, on comprend que pour un grand nombre d'éléments de Saint-Venant, la courbe de modules en marches d'escalier convergera vers la courbe analytique $s'_1(\underline{\gamma})$, et ainsi la contrainte sera estimée correctement.

Pour valider cette hypothèse, nous avons calculé l'erreur entre la contrainte calculée par le modèle et celle obtenue analytiquement. Ces courbes d'erreur sont représentées sur la figure 3.8.c, où nous avons ajouté un calcul pour 100 éléments.

La figure 3.8.c montre que l'erreur diminue lorsque le nombre d'éléments augmente, passant de plus de 20% pour 5 éléments à environ 1% pour 100 éléments. Au vu de ces résultats, nous recommandons de définir le modèle SVG-HP 1D avec un minimum de 50 éléments ; l'erreur sur l'estimation de la contrainte est alors de l'ordre de 2%. Selon le degré de précision souhaité, on pourra envisager d'insérer plus d'éléments dans le modèle.

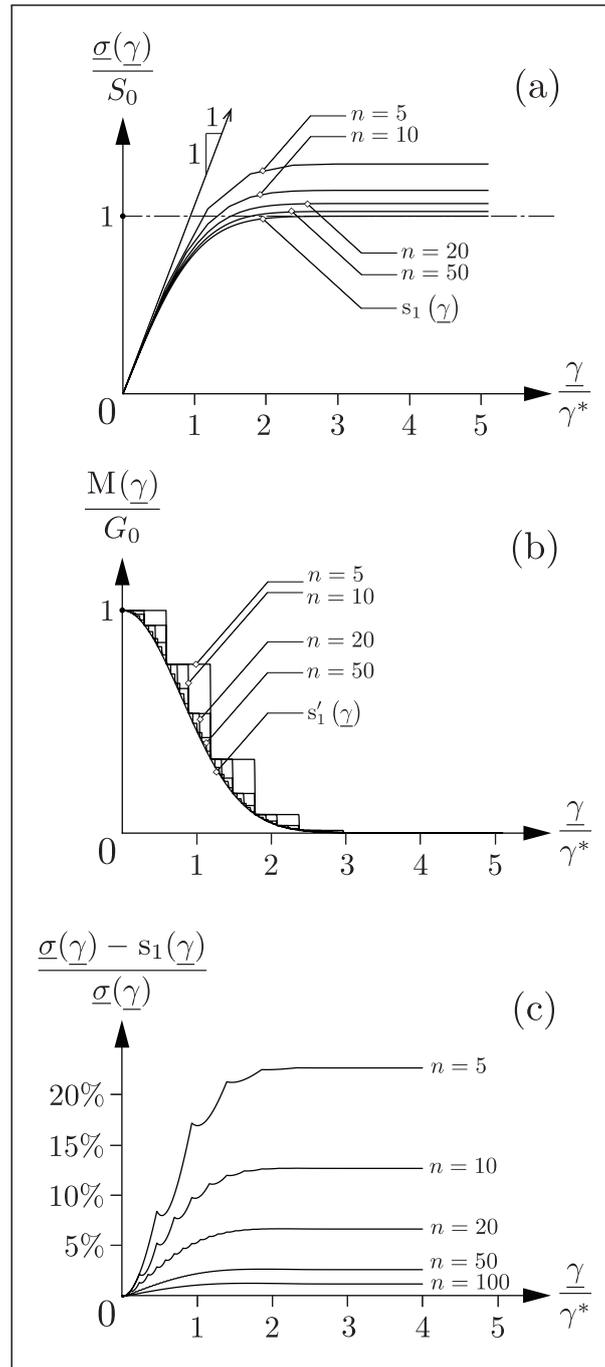


Fig. 3.8 – Réponse normalisée du modèle en contrainte (a), dérivée première normalisée de cette réponse (b) et évolution de l'erreur entre la réponse en contrainte et la fonction générative pour plusieurs valeurs de n (c).

3.2.2 Détermination du seuil limite

Le choix du seuil limite e_n^* , le seuil de déclenchement du dernier frotteur, est un aspect important pour une définition correcte du modèle. Nous proposons dans ce paragraphe une méthode pour choisir la valeur de e_n^* . Tout d'abord, il est nécessaire de fixer la valeur optimale du nombre d'éléments (cf. § 3.2.1). Puis, nous considérons une variable x , telle que :

$$x \in]0; 1] \text{ et } s'_1(e_n^*) = xG_0 \quad (3.13)$$

où $s'_1(\gamma)$ est la dérivée de la fonction générative, qui caractérise l'évolution du module tangent. Par conséquent, la variable x permet d'affecter une valeur du module tangent, pour le dernier seuil en déformation e_n^* .

Les relations 3.5 et 3.13 conduisent à une définition de e_n^* en fonction de la variable x et du paramètre c , qui caractérise la courbure de la zone de transition, soit :

$$e_n^*(x) = \gamma_\Gamma (-\ln x) \frac{1}{c} \quad (3.14)$$

Considérons, sur la figure 3.9a, la courbe de la dérivée première $s'_1(\gamma)$ de la fonction générative $s_1(\gamma)$ normalisée par G_0 . Trois domaines de définition sont possibles pour le seuil limite, selon la valeur de x choisie. De manière générale, pour $x \in [0, 1; 1]$, le seuil limite sera défini dans le domaine A représenté sur la figure 3.9a. Si $x \in [0, 01; 0, 1]$, alors e_n^* appartiendra au domaine B. Enfin, si $x < 0, 01$, alors le seuil limite appartiendra au domaine C.

Les conséquences de la définition de e_n^* dans chacun des domaines précités sont détaillées ci-dessous :

- Si e_n^* se trouve dans le domaine A, alors on estime que la valeur du seuil limite est trop faible ; on perd de l'information. Plus précisément, la somme des modules du modèle de Saint-Venant ainsi défini sera très inférieure au module initial G_0 de la fonction générative ; la courbe contrainte-déformation ainsi obtenue aura un seuil d'écoulement quasi plastique inférieur à S_0 . Ce cas est illustré, d'une part, par les deux courbes de modules correspondant à $e_n^*(x = 0, 5)$ et $e_n^*(x = 0, 25)$ représentées sur la figure 3.9b. D'autre part, les conséquences sur la courbe contrainte-déformation sont illustrées sur la figure 3.9c par les courbes $e_n^*(x = 0, 5)$ et $e_n^*(x = 0, 25)$ correspondantes ;
- Si e_n^* se trouve dans le domaine B, alors la valeur du seuil limite est acceptable. La courbe de $s'_1(\gamma)$ est bien prise en compte ; la partie qui ne l'est pas est suffisamment faible pour ne pas avoir une incidence trop importante sur les résultats. Ce cas est illustré par les courbes correspondant à $e_n^*(x = 0, 01)$ sur les figures 3.9b et 3.9c ;

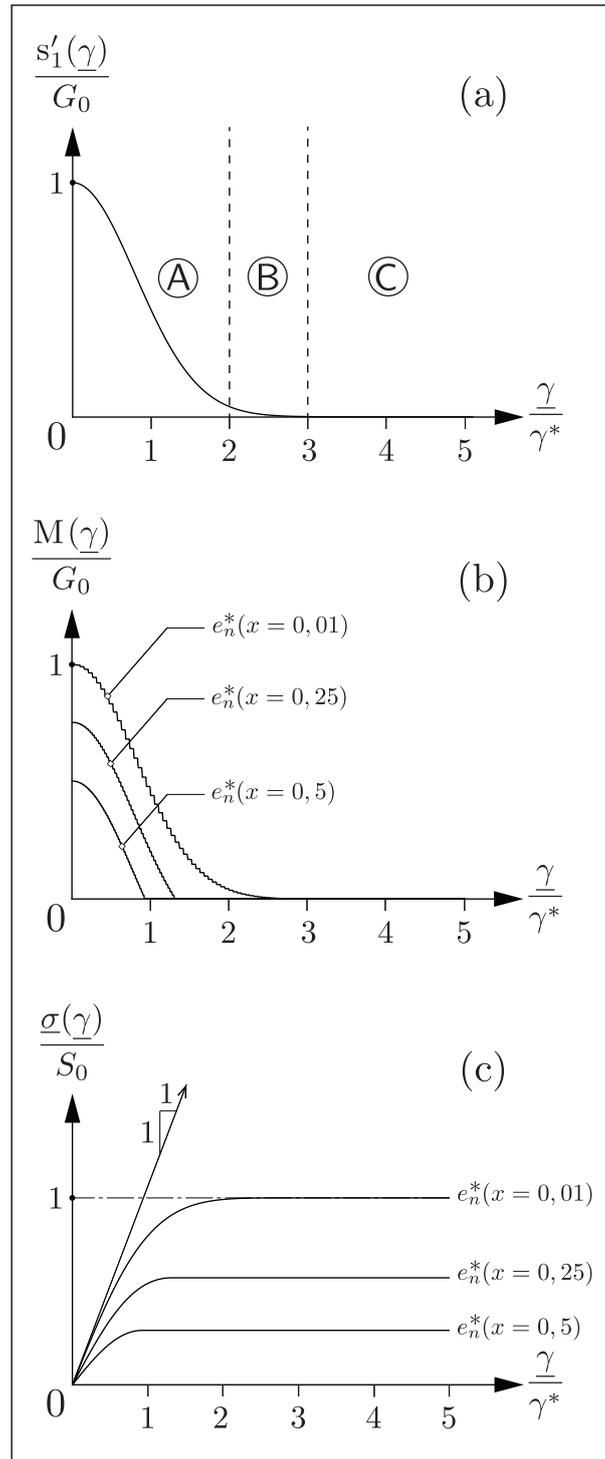


Fig. 3.9 – Domaines de définition de e_n^* (a), courbes de modules pour différentes valeurs de e_n^* (b) et réponses en contrainte associées (c).

- Enfin, si e_n^* se trouve dans le domaine C, le nombre n d'éléments peut se révéler insuffisant, conduisant à un seuil d'écoulement quasi plastique de la courbe contrainte-déformation plus élevé que S_0 . Ceci est dû à des marches d'escalier de la courbe de modules trop larges ce qui conduit la courbe contrainte-déformation à se situer au-dessus de la courbe souhaitée (cf. § 3.2.1).

Ainsi, il faut absolument éviter de choisir une valeur de e_n^* située dans le domaine A. La répartition des seuils devient acceptable à partir du domaine B, soit $x \in [0, 01; 0, 1]$. Enfin, selon le nombre n d'éléments dans le modèle, il est possible de définir un seuil limite e_n^* dans le domaine C. Dans tous les cas, il convient d'analyser la réponse du modèle pour s'assurer que les paramètres choisis donnent des résultats acceptables. Par exemple, en choisissant $n = 50$, nous avons déterminé que la valeur du paramètre $x = 0, 005$ donne des résultats satisfaisants.

3.2.3 Fonction de densification des seuils

Le choix d'un nombre n d'éléments et d'un seuil limite e_n^* adéquats permet d'obtenir une répartition des seuils offrant une modélisation relativement fine de la courbe contrainte-déformation. Néanmoins, si le nombre d'éléments est limité, la courbe de module présente alors des marches d'escalier. Ces marches sont évidemment plus critiques lorsqu'elles se situent dans la zone de transition, où la courbe de module possède la plus forte pente. C'est justement dans cette zone que se situe le point d'inflexion $\underline{\gamma}_c$ de la fonction générative. Pour améliorer la capacité du modèle à décrire au mieux le comportement élastoplastique visé, même dans le cas où le nombre n d'éléments est limité, nous pouvons proposer une répartition des seuils **non homogène** qui consiste à augmenter la densité de seuils autour du point d'inflexion. Dans un premier temps, nous calculons les écarts Δ_k entre chaque seuil e_k^* et le point d'inflexion $\underline{\gamma}_c$:

$$\Delta_k = |\underline{\gamma}_c - e_k^*| \quad (3.15)$$

Nous définissons notre fonction de densification de sorte que l'écart calculé par la relation 3.15 soit réduit autour du point d'inflexion :

$$C(e_k^*) = 1 + \alpha \frac{s_1''(e_k^*)}{s_1''(\underline{\gamma}_c)} \quad \text{avec } \alpha \in [0, 5] \quad (3.16)$$

où α est un paramètre positif qui permet d'obtenir une répartition plus ou moins dense des seuils autour du point d'inflexion. Nous pouvons désormais calculer les nouveaux écarts Δ'_k :

$$\Delta'_k = \frac{\Delta_k}{C(e_k^*)} \quad (3.17)$$

Connaissant ces nouveaux écarts, les nouvelles valeurs de seuils densifiés $e_k^{*'}$ sont obtenues par :

$$\begin{aligned} e_k^{*'} &= \underline{\gamma}_c - \Delta'_k \text{ si } e_k^* \leq \underline{\gamma}_c \\ e_k^{*'} &= \underline{\gamma}_c + \Delta'_k \text{ si } e_k^* > \underline{\gamma}_c \end{aligned} \quad (3.18)$$

L'effet de cette fonction de densification sur la répartition des seuils est illustré sur la figure 3.10. Plus précisément, sur la figure 3.10a, les seuils sont répartis de façon homogène. Sur la figure 3.10b, la fonction de densification, avec $\alpha = 1$, a été utilisée pour rapprocher les seuils du point d'inflexion $\underline{\gamma}_c$. Notons que si α est nul, les seuils sont répartis de façon homogène. Lorsque α augmente, les seuils se rapprochent du point d'inflexion. Attention, pour des valeurs importantes de α , supérieures à 10^2 typiquement, les seuils peuvent se confondre avec le point d'inflexion. C'est pourquoi en pratique, pour ne pas dégrader la modélisation loin du point d'inflexion, on se limite à des valeurs de α comprises entre 0 et 5.

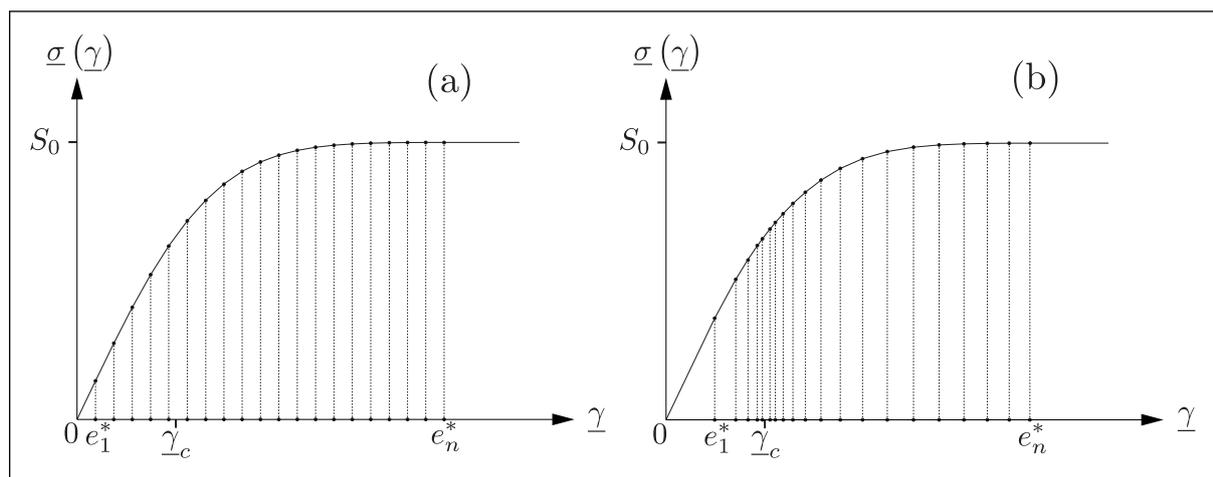


Fig. 3.10 – Distribution homogène des seuils représentée sur la courbe contrainte-déformation (a) et distribution obtenue avec la fonction de densification pour $\alpha = 1$ (b).

3.3 Ajout d'un ressort célibataire

Le modèle SVG-HP 1D peut être complété par l'ajout en parallèle d'un ressort **célibataire**, de rigidité G_∞ (figure 3.11a), comme proposé dans [Persoz 1969]. Ce ressort célibataire correspond alors à un élément de Saint-Venant dont le seuil de déclenchement en déformation du frotteur serait infini. Dans ce cas, le comportement quasi réversible à l'origine et aux inversions correspond à un module d'élasticité égal à la somme de tous les modules d'élasticité des ressorts dont le ressort célibataire, soit $\sum_{k=1}^n G_k + G_\infty$ (figure 3.11b). Les intersections entre les droites correspondant au module d'élasticité résiduelle G_∞ et l'axe des contraintes, pour $\sigma > 0$ et $\sigma < 0$, sont les seuils de plasticité du modèle $\left(+\sum_{k=1}^n G_k e_k^*\right)$ et $\left(-\sum_{k=1}^n G_k e_k^*\right)$ respectivement, comme illustré sur la figure 3.11.b. Ainsi, la contrainte totale dans le modèle SVG-HP 1D complété du ressort célibataire est définie par :

$$\underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n G_k \underline{\gamma}_k^e + G_\infty \underline{\gamma} \text{ avec } \underline{\gamma}_k^e = \underline{\gamma} - \underline{\gamma}_k^p \text{ pour } k \in [1, n] \quad (3.19)$$

En adoptant la définition 2.2 et compte tenu de la figure 2.2, la relation 3.19 s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n 2G_k \underline{\varepsilon}_k^e + 2G_\infty \underline{\varepsilon} \text{ avec } \underline{\varepsilon}_k^e = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_k^p \text{ pour } k \in [1, n] \quad (3.20)$$

La définition complète du comportement du modèle SVG-HP 1D complété par un ressort célibataire, illustré sur la figure 3.11, est synthétisée dans le tableau donné par la figure 3.12.

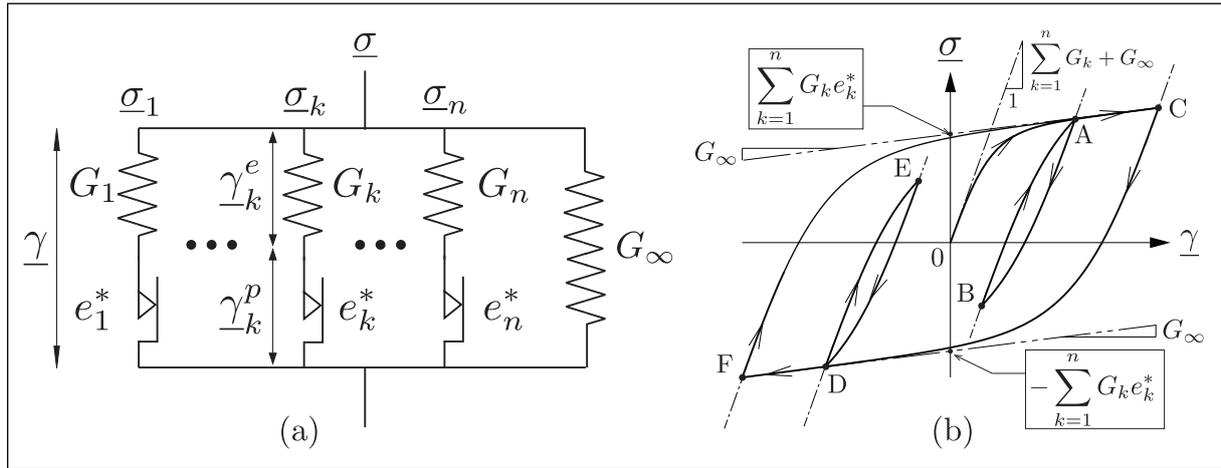


Fig. 3.11 – Modèle SVG-HP 1D complété par un ressort célibataire de module d'élasticité G_∞ (a) et sa réponse mécanique typique en comportement cyclique (b).

▷ Loi de comportement

$$\underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n G_k \left(\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_k^p \right) + G_\infty \underline{\gamma}$$

où $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_k^e + \underline{\gamma}_k^p$
 $\forall k \in [1, n]$

▷ Domaine d'élasticité

$$f_k = f \left(\underline{\gamma}, e_k^*, \underline{\gamma}_k^p \right) = \left| \underline{\gamma} - \underline{\gamma}_k^p \right| - e_k^* \leq 0$$

$\forall k \in [1, n]$

▷ Loi d'évolution

$$\dot{\underline{\gamma}}_k^p = \mathcal{H}(f_k) \cdot \left\langle \text{sgn}(\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_k^p) \cdot \dot{\underline{\gamma}} \right\rangle \text{sgn}(\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_k^p)$$

$\forall k \in [1, n]$

$\mathcal{H}(x) \Rightarrow$ fonction de Heaviside
 $\langle x \rangle \Rightarrow$ opérateur de Macaulay
 $\text{sgn}(x) \Rightarrow$ fonction signe

Fig. 3.12 – Définition du comportement du modèle SVG-HP 1D complété par un ressort célibataire illustré sur la figure 3.11.

Conclusion du chapitre

Le modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure unidimensionnel (SVG-HP 1D) a été présenté et son comportement typique illustré.

Une analyse approfondie a été menée pour la définition des paramètres du modèle. Ainsi, trois fonctions génératives ont été proposées ; elles permettent de couvrir un large spectre de modélisation du comportement des matériaux métalliques. Dans cette thèse, la première fonction générative proposée a été adoptée.

Des recommandations ont été faites concernant le nombre d'élément de Saint-Venant et la valeur optimale du seuil le plus grand.

Une fonction de densification des seuils des éléments de Saint-Venant a été proposée afin de mieux décrire le comportement des matériaux dans la région de transition entre l'élasticité et la plasticité.

Enfin, le modèle SVG-HP 1D a été complété par l'ajout d'un ressort célibataire.

Modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure 3D (SVG-HP 3D)

Sommaire

4.1	Vers un modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure 3D	60
4.1.1	Hypothèses et choix adoptés	60
4.1.2	Extension du modèle SVG-HP 1D au cas 3D	64
4.2	Définition du modèle SVG-HP 3D	67
4.2.1	Expression de la loi de comportement 3D	67
4.2.2	Règle d'écoulement de type normalité (NFR)	68
4.3	Méthode d'identification du modèle	75
4.4	Loi d'écrouissage cyclique pour les trajets proportionnels (SVG-EC 3D)	76

L'objectif de ce chapitre est de proposer une définition d'un modèle de comportement élastoplastique 3D. Le modèle proposé est une extension tridimensionnelle du modèle SVG-HP 1D, introduit au chapitre 2 et étudié au chapitre 3. Cette extension au cas 3D est réalisée dans un cadre caractérisé par des hypothèses, des choix et un parallèle entre les propriétés du modèle SVG-HP 1D et celles du modèle 3D proposé. Ce cadre est présenté au paragraphe 4.1. Au paragraphe 4.2, une définition précise du comportement du modèle 3D est donnée. Cette définition est basée sur une expression de la loi de comportement 3D et sur une règle d'écoulement appliquée à chacun des éléments de Saint-Venant. Une méthode d'identification du modèle est présentée au paragraphe 4.3. Enfin, une loi d'écrouissage cyclique pour les trajets proportionnels est proposée au paragraphe 4.4.

4.1 Vers un modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure 3D

4.1.1 Hypothèses et choix adoptés

En partant du modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure 1D (SVG-HP 1D), notre objectif est d'étendre ce modèle au cas tridimensionnel ; ceci afin d'aboutir à un modèle constitutif pertinent de nature phénoménologique pour décrire le comportement cyclique des milieux continus élastoplastiques, non visqueux. Il s'agit du modèle que nous avons appelé, au chapitre 1, le modèle SVG-HP 3D.

Le modèle recherché est à caractère élastoplastique ; il possède des propriétés intrinsèques qui le distinguent des modèles élastoplastiques classiques (cf. § 2.1.2). En effet, ce modèle exhibe au premier ordre un comportement typique, qui correspond à une irréversibilité dès le début du chargement, à droite de l'origine et présente une fermeture parfaite des cycles. Par ailleurs, ce modèle doit permettre un traitement consistant des effets du second ordre, tels que par exemple, les effets de rochet de torsion ou effets de Poynting-Swift (cf. § 1.2, point ii). Notons que dans le cadre du présent travail de thèse, l'application envisagée de ce modèle est l'étude du comportement cyclique des matériaux métalliques, dans le domaine des petites déformations (cf. § 1.2, point i).

Pour construire ce modèle, nous avons adopté un cadre défini par plusieurs hypothèses, qui seront exposées dans la suite de ce paragraphe.

Hypothèse H1 Le comportement est limité au cas isotrope à température ambiante.

Hypothèse H2 Le comportement du modèle est indépendant du temps et ne tient pas compte des phénomènes de viscosité, d'écrouissage cyclique, ou de tout autre phénomène d'altération ou de modification des propriétés mécaniques, tels que l'endommagement, le vieillissement ou les transformations de phases. Ainsi, le comportement du modèle au première ordre est celui d'un cycle stabilisé, qui se répète indéfiniment et de façon identique à lui-même, tant que le cycle de chargement est identique à lui-même.

Hypothèse H3 La déformation totale du modèle est la même pour tous les éléments de Saint-Venant et la contrainte totale est la somme des contraintes individuelles de chaque modèle élémentaire (cf. § 2.1.2, point i). Pour tenir compte de cette propriété intrinsèque, le modèle SVG-HP 3D adoptera une approche multisurface définie dans l'espace des déformations (cf. § 2.3).

Hypothèse H4 Compte tenu des objectifs fixés au paragraphe 1.2, points i et ii, et notamment la nécessité de la prise en compte des effets du second ordre, le modèle sera construit dans le cadre des transformations finies, malgré son application au domaine des

petites déformations envisagée dans le cadre de ce travail sur l'étude du comportement cyclique des matériaux métalliques. En effet, la prise en compte des effets du second ordre est étroitement liée à l'usage des transformations finies et plus particulièrement au choix de la dérivée objective (cf. § 1.1, point b). De nombreuses propositions de taux objectifs sont disponibles dans la littérature. Parmi les plus classiques nous pouvons mentionner la dérivée de Jaumann, la dérivée de Green–Naghdi, la dérivée de Lee ou la dérivée logarithmique. D'autres contributions originales ont été proposées récemment, telles que la dérivée logarithmique cinétique [Jiao & Fish 2017] ou un formalisme à quatre dimensions d'espace-temps [Panicaud & Rouhaud 2014, Wang *et al.* 2016]. Parmi les nombreuses possibilités, une étude comparative complète est nécessaire pour distinguer le meilleur choix, apte à rendre compte de façon consistante des effets du second ordre, dans le cadre de notre approche. Un tel projet peut faire l'objet d'une ou de plusieurs études ultérieures ; néanmoins, il est hors de portée du cadre actuel de notre travail, qui est nécessairement limité dans le temps. Dans le cadre de cette première approche pour la définition d'un modèle 3D multisurface, reposant sur les propriétés du modèle SVG-HP 1D, nous avons fait le choix provisoire de la dérivée objective classique de Jaumann ou taux corotationnel de Jaumann, tel que pour un tenseur $\tilde{\mathbf{A}}$, on a :

$$\overset{oj}{\tilde{\mathbf{A}}} = \dot{\tilde{\mathbf{A}}} + \tilde{\mathbf{A}} \circ \tilde{\mathbf{W}} - \tilde{\mathbf{W}} \circ \tilde{\mathbf{A}} \quad (4.1)$$

Où le symbole " oj " désigne la dérivée de Jaumann et $\tilde{\mathbf{W}}$ représente le tenseur taux de rotation ou partie antisymétrique du gradient eulérien des vitesses.

Hypothèse H5 - Choix de la mesure de déformation Différentes mesures de déformation existent. D'un point de vue pratique, le choix d'une mesure de déformation est en général effectué afin d'obtenir une formulation de la loi de comportement la plus simple possible et la plus aisée à mettre en œuvre. Dans ce contexte, notre choix s'est orienté vers le tenseur de déformation de Hencky gauche, noté $\tilde{\mathbf{h}}$. Ce tenseur est défini comme le logarithme népérien du tenseur de déformation pure gauche $\tilde{\mathbf{V}}$:

$$\tilde{\mathbf{h}} = \ln \tilde{\mathbf{V}} \quad (4.2)$$

Le choix du tenseur de déformation de Hencky gauche est motivé par plusieurs propriétés intéressantes de cette mesure de la déformation :

a On peut décomposer le tenseur de déformation de Hencky gauche en la somme d'une partie sphérique $h_m \tilde{\mathbf{I}}$ et d'une partie déviatoire $\tilde{\mathbf{h}}$ sous la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{h}} = h_m \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{h}} \quad (4.3)$$

avec

$$\underline{\tilde{\mathbf{h}}} = \tilde{\mathbf{h}} - h_m \tilde{\mathbf{I}} ; h_m = \frac{1}{3} \text{Tr} \tilde{\mathbf{h}} = \frac{1}{3} \ln J \quad (4.4)$$

où $\tilde{\mathbf{I}}$ représente le tenseur identité. Cette décomposition de la mesure de déformation logarithmique permet de séparer les déformations de changement de volume et celles à volume constant, comme les déformations plastiques des matériaux métalliques.

- b** En adoptant l'option de la décomposition additive de la déformation (§ 2.6, relation 2.17), le tenseur $\tilde{\mathbf{h}}$ se décompose en une partie élastique $\tilde{\mathbf{h}}^e$ et en une partie plastique $\tilde{\mathbf{h}}^p$, telles que :

$$\tilde{\mathbf{h}} = \tilde{\mathbf{h}}^e + \tilde{\mathbf{h}}^p \quad (4.5)$$

Cette méthode a été proposée par [Miehe *et al.* 2002] et d'autres auteurs. Des éléments bibliographiques sur la pertinence de cette méthode de décomposition de la déformation logarithmique sont donnés au paragraphe 2.6.

- c** Par définition d'une mesure de déformation, l'hypothèse des petites déformations conduit à :

$$\tilde{\mathbf{h}} \approx \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (4.6)$$

Où $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ désigne le tenseur des petites déformations, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ sa partie élastique et $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ sa partie plastique. Ainsi, le choix du tenseur de Henky gauche et de la décomposition additive de la déformation conduisent à une continuité de définition entre le domaine des petites et des grandes déformations.

- d** La dérivée de Jaumann de la déformation de Hencky gauche est proche du taux de déformation $\tilde{\mathbf{D}}$; elle s'exprime par une relation proposée par [Scheidler 1991], telle que :

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{h}}} = \left(\ln \tilde{\mathbf{V}} \right)^{\circ j} = \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{(\tilde{\mathbf{v}})} \triangleright \tilde{\mathbf{D}} \quad (4.7)$$

où $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{(\tilde{\mathbf{v}})}$ est un tenseur d'ordre quatre défini par Scheidler en 1991 et égal à l'unité $\tilde{\mathbf{I}}$ dans le cas d'une sollicitation irrotationnelle. La relation 4.7 ne joue pas un rôle fondamental dans la suite de la définition théorique du modèle SVG-HP 3D; néanmoins, elle a une portée pratique très utile du point de vue de la mise en œuvre numérique de la modélisation¹.

1. La mise en œuvre numérique du modèle SVG-HP 3D dans le code d'éléments finis Abaqus nécessite

Hypothèse H6 - Choix du tenseur de contrainte Nous choisissons d'utiliser le tenseur de contrainte de Cauchy, pour lequel nous utiliserons la notation classique $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$. La contrainte de Cauchy et la déformation de Hencky gauche ne sont pas conjuguées du point de vue thermodynamique. Ainsi, dans le cas général des transformations finies, la relation 4.7 ne peut pas être utile pour une définition rigoureuse de la puissance des efforts intérieurs, par exemple. La contrainte $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ est thermodynamiquement conjuguée au taux de déformation $\tilde{\mathbf{D}}$. Ainsi, la puissance des efforts intérieurs doit par conséquent être calculée en utilisant le taux de déformation $\tilde{\mathbf{D}}$. Néanmoins, pour envisager les applications futures en transformations finies, citées au point i du paragraphe 1.2, et une thermodynamique associée, il est nécessaire d'adopter un tenseur de contrainte conjugué à la déformation logarithmique de Hencky gauche, selon la dérivée objective de Jaumann, noté $\tilde{\boldsymbol{\tau}}^*$, que nous appelons contrainte conjuguée Jaumann-Hencky gauche (cf. annexe E).

Hypothèse H7 - Comportement élastique isotrope La définition complète de la loi multisurface nécessite la définition du comportement élastique à l'intérieur d'une surface seuil donnée. Pour cela, nous adoptons la loi élastique isotrope, telle que :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = K \left(\text{Tr } \tilde{\mathbf{h}} \right) \tilde{\mathbf{I}} + 2\mu \tilde{\mathbf{h}} \quad (4.8)$$

où K représente le module de compressibilité volumique et μ le module de cisaillement. Notons que la loi 4.8 est simplement une loi élastique et non une loi hyperélastique avec un potentiel préétabli. Dans le cadre de l'application actuelle, qui est l'étude du comportement des matériaux métalliques en petites déformations, un potentiel existe ; il correspond au potentiel classique de la loi élastique linéaire de Hooke. Dans le cas général des transformations finies, pour que la relation 4.8 conduise à l'existence d'un potentiel hyperélastique, il est nécessaire d'adopter, à la place du tenseur de contrainte de Cauchy, le tenseur $\tilde{\boldsymbol{\tau}}^*$ de la contrainte conjuguée Jaumann-Hencky gauche (cf. annexe E).

Hypothèse H8 - Sous-espace déviatoire multidimensionnel d'Ilyushin En transformations finies, le suivi de la déformation plastique en sollicitation rotationnelle ne peut se faire en considérant le plan déviatoire classique à deux dimensions. En effet, les trois paramètres d'orientation des axes principaux de déformation dans le repère corotationnel lié à la matière, qui correspondent aux trois angles d'Euler, comptent et ne peuvent pas

le calcul d'une matrice jacobienne, notée $\tilde{\mathbf{J}}$, définie par : $\overset{oj}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \tilde{\mathbf{J}} \triangleright \tilde{\mathbf{D}}$ où $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\tilde{\mathbf{D}}$ représentent respectivement la contrainte de Cauchy et le taux de déformation. Pour résoudre les équations d'équilibre de la structure, le solveur d'Abaqus utilise, dans sa version implicite, une méthode de Newton-Raphson. La matrice jacobienne est indispensable pour cette méthode. Une matrice jacobienne définie précisément améliorera le temps de calcul en réduisant le nombre d'itérations par incrément. Au contraire, une matrice jacobienne trop approximative, ou trop imprécise, allongera le temps de calcul et pourra même conduire à une absence de convergence. La matrice jacobienne est plus ou moins sollicitée par le solveur selon la méthode de résolution employée (quasi-Newton, full-Newton ou autre) et selon la finesse du maillage.

être négligés. Par conséquent, nous considérons le sous-espace déviatoire d'Ilyushin de dimension cinq, issu de l'espace des tenseurs du second ordre symétriques de dimension six (annexe B).

4.1.2 Extension du modèle SVG-HP 1D au cas 3D

Dans le cadre de ce travail de thèse, les applications envisagées concernent l'étude du comportement élastoplastique cyclique multiaxial et l'étude de l'endurance des matériaux métalliques dans le domaine des petites déformations. Dans un souci de clarté, le modèle sera présenté dans la suite en considérant son domaine d'application actuel, à savoir le domaine des petites déformations.

Pour illustrer l'extension du modèle SVG-HP 1D au cas 3D, nous adoptons la représentation dans le plan déviatoire classique à deux dimensions (2D). Dans ce plan, un tenseur déviatoire $\tilde{\mathbf{A}}$ donné est représenté à un instant donné par un vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ dont les coordonnées polaires sont le rayon Q_A et la phase Φ_A du tenseur $\tilde{\mathbf{A}}$. Ainsi, le tenseur déviatoire $\tilde{\mathbf{A}}$ sera représenté par le scalaire A dans le cas 1D et par le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ à deux composantes dans le cas 2D du plan déviatoire classique ou à cinq composantes dans le cas 5D du sous-espace déviatoire d'Ilyushin \mathbf{D} (cf. annexe B). La distance ou rayon Q_A dans le plan déviatoire classique 2D correspond à la norme euclidienne du vecteur à cinq composantes $\vec{\mathbf{A}}$. Dans le cas de la surface seuil classique de von Mises, cette norme permet de définir le rayon du cercle de von Mises dans le plan déviatoire classique 2D et le rayon de l'hypersphère de von Mises dans l'espace déviatoire d'Ilyushin \mathbf{D} (cf. relation B.13). Si l'on note Q_0 le rayon de la surface seuil de von Mises, sachant que le seuil S_0 du modèle de Saint-Venant 1D est associé à un seuil en cisaillement (cf. § 2.1), on a :

$$Q_0 = \sqrt{2}S_0 \quad (4.9)$$

L'extension 3D d'un élément de Saint-Venant 1D courant d'indice k est illustrée par la figure 4.1. Dans le cas 1D (figure 4.1a), en adoptant la définition 2.2, cet élément est défini par le couple de paramètres $(2G_k, \frac{e_k^*}{2})$. Nous associons au ressort 1D un comportement élastique isotrope 3D, caractérisé par un module d'élasticité en cisaillement G_k . Dans le cas isotrope adopté ici, nous associons au frotteur une surface seuil de von Mises fixe, centrée à l'origine dans l'espace déviatoire des contraintes (figure 4.1b et § 4.1.1 hypothèse H1). À cette surface seuil, on considère une surface seuil duale mobile dans l'espace déviatoire des déformations, dont le mouvement de son centre est paramétré par le vecteur déformation plastique $\vec{\mathbf{e}}_k^p$ (figure 4.1c). Dans le cas 1D, les seuils de déclenchement des frotteurs en déformation et en contrainte correspondent respectivement à $\frac{e_k^*}{2}$ et $G_k e_k^*$ (figure 4.1a). Compte tenu de la relation 4.9, les rayons respectifs des surfaces seuil dans les espaces déviatoires des déformations et des contraintes sont $\frac{e_k^*}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}G_k e_k^*$ respectivement (figures 4.1b et 4.1c).

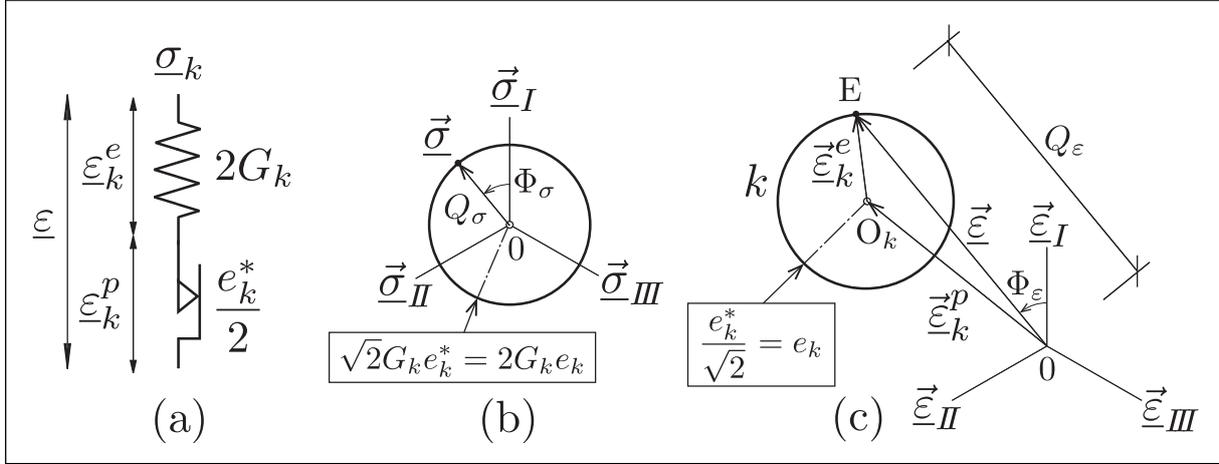


Fig. 4.1 – Élément de Saint-Venant 1D (a), représentations 3D dans le plan déviatoire des contraintes (b) et des déformations (c).

Notons e_k le rayon de la surface seuil dans l'espace déviatoire des déformations (figure 4.1c), tel que :

$$e_k = \frac{e_k^*}{\sqrt{2}} \quad (4.10)$$

Il en résulte que le rayon de la surface seuil dans l'espace déviatoire des contraintes est égal à $2G_k e_k$ (figure 4.1b).

Au cours du chargement, le rayon de la surface seuil dans l'espace des déformations reste constant, égal à e_k .

Cependant le glissement du frotteur, dans le cas unidimensionnel, se traduit par un écoulement plastique dans le cas tridimensionnel. Cet écoulement correspond à l'évolution de la position du centre de la surface seuil dans l'espace des déformations. Cette position est paramétrée par le vecteur déformation plastique $\vec{\underline{\epsilon}}_k^p$ (figure 4.1c). Le vecteur déformation élastique $\vec{\underline{\epsilon}}_k^e$ peut alors être déduit du vecteur déformation $\vec{\underline{\epsilon}}$ totale par :

$$\vec{\underline{\epsilon}}_k^e = \vec{\underline{\epsilon}} - \vec{\underline{\epsilon}}_k^p \quad (4.11)$$

L'extension vers le cas tridimensionnel, présentée ci-dessus dans le cas d'un seul élément de Saint-Venant, est valable pour chaque élément du modèle de Saint-Venant généralisé. Ainsi, le modèle de Saint-Venant généralisé 3D est caractérisé par une suite discrète de surfaces seuil de rayons e_k , définis par les équations 3.1 et 4.10, et par une distribution de modules d'élasticité G_k , définis par l'équation 3.3. La figure 4.2 illustre, dans le plan déviatoire des déformations, les surfaces seuil successives correspondant à la suite discrète des seuils de déclenchement des frotteurs. Initialement, toutes les surfaces seuil sont centrées sur l'origine du plan déviatoire des déformations (figure 4.2a). Au cours d'un chargement radial OC, toutes les surfaces seuil subissent la même déformation totale

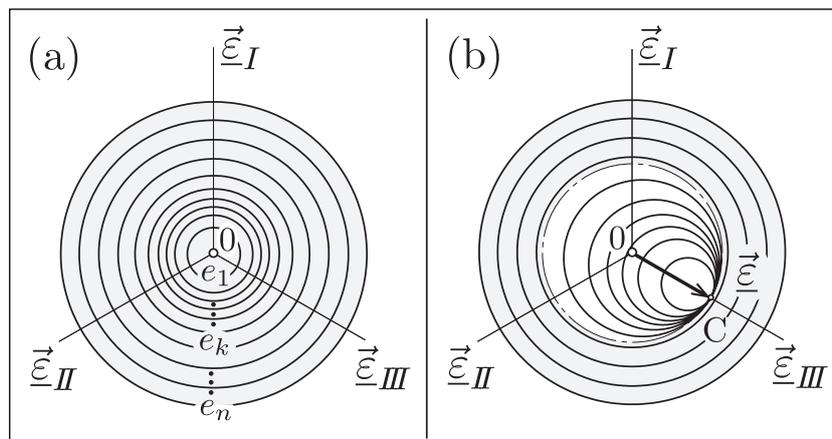


Fig. 4.2 – Illustration du comportement des surfaces seuil dans le plan déviatoire des déformations : état initial (a) et état après un chargement radial OC (b).

$\vec{\varepsilon}$ (figure 4.2b). Les surfaces seuil, dont le seuil de déclenchement en déformation a été atteint, glissent ; il s'agit des surfaces en blanc sur la figure 4.2b. Ce déplacement a lieu selon une règle d'écoulement qui sera définie au paragraphe 4.2.2. Les surfaces seuil dont le seuil de déclenchement en déformation n'a pas été atteint restent fixes ; il s'agit des surfaces en gris sur la figure 4.2b. La pointe du vecteur déformation totale $\vec{\varepsilon}$ est toujours à l'intérieur ou sur l'ensemble des cercles représentant les surfaces seuil. Il ne peut jamais être situé à l'extérieur d'aucune surface seuil k telle que $k \in [1, n]$, quelle que soit la règle d'écoulement adoptée.

Ainsi, l'extension 3D proposée conduit à un modèle multisurface, dont l'écoulement est défini dans l'espace des déformations (cf. § 4.1.1, hypothèse H3). Cette approche dans l'espace des déformations offre de façon naturelle la possibilité d'étendre le comportement du modèle SVG-HP 1D au cas 3D et de tenir compte de la propriété fondamentale du modèle qui requiert que la déformation totale du modèle soit la même pour tous les éléments individuels de Saint-Venant, qui correspondent ici à des surfaces seuil distinctes, dans l'espace des déformations.

Plusieurs auteurs ont souligné les avantages de la description du comportement plastique dans l'espace des déformations [Naghdi & Trapp 1975, Han & Chen 1986, Heidschke 1995, Farahat *et al.* 1995, Lee 1995, Brown *et al.* 2003]. Par ailleurs, il existe une équivalence à travailler dans l'espace des contraintes ou dans l'espace des déformations (cf. § 2.3). Néanmoins, travailler dans l'espace des déformations est plus simple, quand il s'agit de l'implémentation des lois de comportement dans les codes de calcul par éléments finis. En effet, lorsque la plasticité est écrite dans l'espace des contraintes et pour un incrément de déformation imposé donné, alors la contrainte finale doit être calculée par la résolution d'équations non linéaires. Si la plasticité est écrite dans l'espace des déformations pour un incrément de déformation imposé donné, cette difficulté est évitée. Également, le calcul des matrices Jacobiennes de la loi s'en trouve grandement simplifié.

4.2 Définition du modèle SVG-HP 3D

4.2.1 Expression de la loi de comportement 3D

En mécanique des solides déformables, il est classique et souvent utile de représenter un tenseur de contrainte comme la somme d'un traceur, aussi appelé partie sphérique ou isotrope, et d'un déviateur, aussi appelé partie déviatoire [Curnier 2005]. Le traceur concerne le changement de volume, tandis que le déviateur concerne le changement de forme. Dans le cas du tenseur de contrainte de Cauchy $\tilde{\sigma}$ à six dimensions, on a :

$$\tilde{\sigma} = \sigma_m \tilde{\mathbf{I}} + \underline{\tilde{\sigma}} \quad (4.12)$$

où σ_m est un scalaire représentant le traceur du tenseur des contraintes, $\tilde{\mathbf{I}}$ le tenseur identité et $\underline{\tilde{\sigma}}$ représente le déviateur de $\tilde{\sigma}$, qui est un tenseur du second ordre à cinq dimensions.

Un modèle de comportement peut ainsi être composé d'une partie sphérique et d'une partie déviatoire. Comme précisé au paragraphe 2.1 et en introduction du chapitre 3, le modèle de Saint-Venant généralisé permet de modéliser des états de contrainte purement déviatoires. Pour obtenir un modèle de comportement complet, il est nécessaire de prendre en compte les états de contrainte sphériques. Pour cela, il convient de tirer parti de la décomposition additive des tenseurs du second ordre dans l'expression de la loi de comportement, notée $\tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon})$. La partie déviatoire de la loi, notée $\underline{\tilde{\sigma}}(\tilde{\varepsilon})$, est définie par le modèle SVG-HP 1D étendu au cas 3D. On a donc, par extension de la relation 2.5 au cas tensoriel :

$$\underline{\tilde{\sigma}}(\tilde{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^n 2G_k \tilde{\varepsilon}_k^e \quad (4.13)$$

et en considérant le cas de l'addition d'un ressort célibataire de module d'élasticité G_∞ , la relation 3.20 donne :

$$\underline{\tilde{\sigma}}(\tilde{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^n 2G_k \tilde{\varepsilon}_k^e + 2G_\infty \tilde{\varepsilon} \quad (4.14)$$

La partie sphérique σ_m de la loi est, quant à elle, définie par une loi de comportement élastique isotrope, plus particulièrement la partie sphérique de la loi de Hooke linéaire isotrope, ce qui donne :

$$\sigma_m = K \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}) \quad (4.15)$$

où K représente le module de compressibilité volumique, défini par :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.16)$$

où E et ν représentent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau. Ainsi, en tenant compte des parties sphérique (relation 4.15) et déviatoire (relation 4.14), nous obtenons l'expression complète de la loi de comportement globale :

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon}) = K \text{Tr}(\tilde{\varepsilon})\tilde{\mathbf{I}} + \sum_{k=1}^n 2G_k(\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}_k^p) + 2G_\infty\tilde{\varepsilon} \quad (4.17)$$

La relation 4.17 représente une fonction isotrope de la déformation totale $\tilde{\varepsilon}$ et des déformations plastiques individuelles $\tilde{\varepsilon}_k^p$ de chaque élément de Saint-Venant.

Dans le paragraphe suivant, l'expression 4.17 de la loi de comportement du modèle SVG-HP 3D sera complétée par la définition d'une règle d'écoulement, qui permettra de préciser les déformations plastiques $\tilde{\varepsilon}_k^p$.

Notons que la loi de comportement définie par la relation 4.17 est conforme aux hypothèses H5, H6 et H7 décrites au paragraphe 4.1.1.

Le modèle SVG-HP 3D est ainsi défini par cinq paramètres matériau : K , G_0 , G_∞ , S_0 et c . Ces paramètres ont un sens physique précis et peuvent être identifiés par des mesures expérimentales directes ; nous reviendrons sur cet aspect au paragraphe 4.3. En effet, G_0 , S_0 et c correspondent respectivement au module initial en cisaillement, au seuil en cisaillement et au paramètre de courbure de la fonction générative de la distribution des modules G_k (relations 3.3, 3.9 et figure 3.3). Le paramètre K correspond au module de compressibilité volumique, lié à la partie isotrope de la loi et au comportement quasi élastique à droite de l'origine (relation 4.16). Le paramètre G_∞ correspond à la modélisation de la rigidité résiduelle révélée par un essai de cisaillement (figure 3.11). A ces cinq paramètres essentiels liés directement au comportement du matériau, il faut ajouter les deux paramètres accessoires n et e_n^* , respectivement le nombre d'éléments de Saint-Venant et le seuil limite (relation 3.13). Ces deux paramètres sont plutôt liés à la nature discrète de ce modèle multisurface et sont à optimiser en fonction de l'application et des capacités de calcul disponibles (§ 3.2.1 et § 3.2.2). Enfin, un paramètre de même nature α peut être ajouté si une fonction de densification des seuils est utilisée, qui permet de mieux répartir les seuils pour un couple de paramètres (n, e_n^*) donné (§ 3.2.3).

4.2.2 Règle d'écoulement de type normalité (NFR)

Dans le cas unidimensionnel, la déformation plastique est un scalaire qui correspond à la déformation du frotteur. Dans le cas tridimensionnel, la déformation plastique devient un tenseur du second ordre, déviatoire, qui nécessite la définition d'une règle d'écoulement. Plusieurs règles d'écoulement sont possibles. Il est donc nécessaire de faire un choix et de sélectionner une règle d'écoulement bien fondée liée à des propriétés physiques pertinentes. Dans le cadre de cette étude, chaque frotteur du modèle unidimensionnel de Saint-Venant est représenté par une surface seuil de type von Mises, dont la position dans l'espace des déformations est repérée par sa déformation plastique. Pour chaque surface seuil, **nous**

adoptons la règle d'écoulement de normalité dans l'espace des déformations.

Ce choix, classique et relativement simple, implique ici que l'incrément de déformation plastique soit toujours normal à la surface seuil actuelle dans l'espace des déformations, ceci pour tout chargement irréversible. Dans la suite du manuscrit, nous utiliserons le sigle NFR (de l'anglais *Normality Flow Rule*) pour y faire référence.

En adoptant la règle d'écoulement NFR, la définition complète du modèle SVG-HP 3D, dans le cadre de l'hypothèse HPP, est synthétisée dans le tableau donné par la figure 4.3. La loi ainsi définie apparaît comme l'extension au cas 3D du comportement 1D défini par la figure 3.12 du chapitre 3, en utilisant la règle d'écoulement NFR.

Si l'on considère l'hypothèse H4 du paragraphe 4.1.1, la loi d'évolution issue de la règle d'écoulement NFR devient :

$$\underline{\tilde{h}}_k^{\circ j p} = \mathcal{H}(f_k) \left\langle \underline{\tilde{U}}_k : \underline{\tilde{h}}^{\circ j} \right\rangle \underline{\tilde{U}}_k \quad (4.18)$$

Nous proposons dans la suite de ce paragraphe d'illustrer la règle d'écoulement NFR, dans le cadre de l'hypothèse HPP et dans le plan déviatoire classique 2D. Ceci nous permettra de révéler des propriétés intéressantes qui en découlent et de donner des éléments pratiques nécessaires à l'implémentation numérique.

Pour chaque surface seuil d'indice k , de centre O_k repéré par son vecteur de déformation plastique $\underline{\tilde{\epsilon}}_k^p$ à l'instant t , nous définissons un vecteur d'écoulement $\underline{\tilde{V}}_k$, tel que :

$$\forall k \in [1, n], \underline{\tilde{V}}_k = \underline{\tilde{\epsilon}} + d\underline{\tilde{\epsilon}} - \underline{\tilde{\epsilon}}_k^p \quad (4.19)$$

où $\underline{\tilde{\epsilon}}$ désigne la déformation totale du modèle, subie par toutes les surfaces seuil à l'instant t et $d\underline{\tilde{\epsilon}}$ désigne l'incrément de déformation totale imposé au cours du chargement entre l'instant t et l'instant $t + dt$ (figure 4.4).

D'une part, si la norme du vecteur $\underline{\tilde{V}}_k$ est inférieure ou égale au rayon de la surface seuil, i.e $\|\underline{\tilde{V}}_k\| \leq e_k$, le comportement de l'élément k est élastique et le centre de la surface seuil reste fixe entre les instants t et $t + dt$ (figure 4.4a) :

$$\forall k \in [1, n], \text{ si } \|\underline{\tilde{V}}_k\| \leq e_k, \text{ alors } d\underline{\tilde{\epsilon}}_k^p = \underline{\mathbf{0}} \text{ et } d\underline{\tilde{\epsilon}}_k^e = d\underline{\tilde{\epsilon}} \quad (4.20)$$

D'autre part, si la norme du vecteur $\underline{\tilde{V}}_k$ est strictement supérieure au rayon de la surface seuil, i.e $\|\underline{\tilde{V}}_k\| > e_k$, alors le comportement de l'élément k est élastoplastique. Dans ce cas, à l'instant $t + dt$, le centre de la surface seuil se déplace vers le point O'_k le long d'un incrément de déformation plastique $d\underline{\tilde{\epsilon}}_k^p$, colinéaire au vecteur d'écoulement $\underline{\tilde{V}}_k$. Cet écoulement est alors orthogonal à la surface seuil et obéit donc à la règle de la normalité (figure 4.4b) :

$$\forall k \in [1, n], \text{ si } \|\underline{\tilde{V}}_k\| > e_k, \text{ alors } d\underline{\tilde{\epsilon}}_k^p = \underline{\tilde{V}}_k - \frac{\underline{\tilde{V}}_k}{\|\underline{\tilde{V}}_k\|} e_k \text{ et } d\underline{\tilde{\epsilon}}_k^e = d\underline{\tilde{\epsilon}} - d\underline{\tilde{\epsilon}}_k^p \quad (4.21)$$

▷ Loi de comportement

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = K \text{Tr}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \tilde{\mathbf{I}} + \sum_{k=1}^n 2G_k \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^e + 2G_\infty \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \forall k \in [1, n]$$

où $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p \quad \forall k \in [1, n]$

$$G_1 = G_0 \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{e_1^*}{\gamma_\Gamma}\right)^c} \right\}$$

$$G_k = G_0 \left\{ e^{-\left(\frac{e_{k-1}^*}{\gamma_\Gamma}\right)^c} - e^{-\left(\frac{e_k^*}{\gamma_\Gamma}\right)^c} \right\} \quad \forall k \in [2, n]$$

$$\gamma_\Gamma = \frac{S_0}{G_0} \frac{c}{\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)}$$

▷ Domaine d'élasticité

$$f_k = f(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, e_k, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) = \|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p\| - e_k \leq 0 \quad \forall k \in [1, n]$$

▷ Loi d'évolution

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k^p = \mathcal{H}(f_k) \left\langle \tilde{\mathbf{U}}_k : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right\rangle \tilde{\mathbf{U}}_k \quad \forall k \in [1, n]$$

où $\tilde{\mathbf{U}}_k = \widetilde{\left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, e_k, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) = \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p\|} \quad \forall k \in [1, n]$

$\mathcal{H}(x) \Rightarrow$ fonction de Heaviside

$\langle x \rangle \Rightarrow$ opérateur de Macaulay

Fig. 4.3 – Définition complète de la loi du modèle SVG-HP 3D qui découle de la règle d'écoulement NFR, où $e_k = \frac{e_k^*}{\sqrt{2}}$.

Si le centre de la surface seuil d'indice k est à l'intérieur du cercle $\textcircled{\mathbf{A}}$, le comportement de l'élément k est élastique. Cette situation est illustrée par le cas (a) de la figure 4.5, qui correspond à la relation 4.20 et à la figure 4.4a, et on a donc :

$$\|\vec{\underline{\varepsilon}} - \vec{\underline{\varepsilon}}_k^p\| < e_k \quad (4.24)$$

Si le centre de la surface seuil d'indice k est sur le cercle $\textcircled{\mathbf{A}}$, le comportement de l'élément k est plastique. Cette situation est illustrée par le cas (b) de la figure 4.5, qui correspond à la relation 4.21 et à la figure 4.4b, et on a alors :

$$\|\vec{\underline{\varepsilon}} - \vec{\underline{\varepsilon}}_k^p\| = e_k \quad (4.25)$$

Pour chaque surface seuil, la règle d'écoulement NFR, définie par les relations 4.19, 4.20 et 4.21, est adoptée. Il en résulte un **mouvement indépendant de chacune des surfaces seuil par rapport aux autres**.

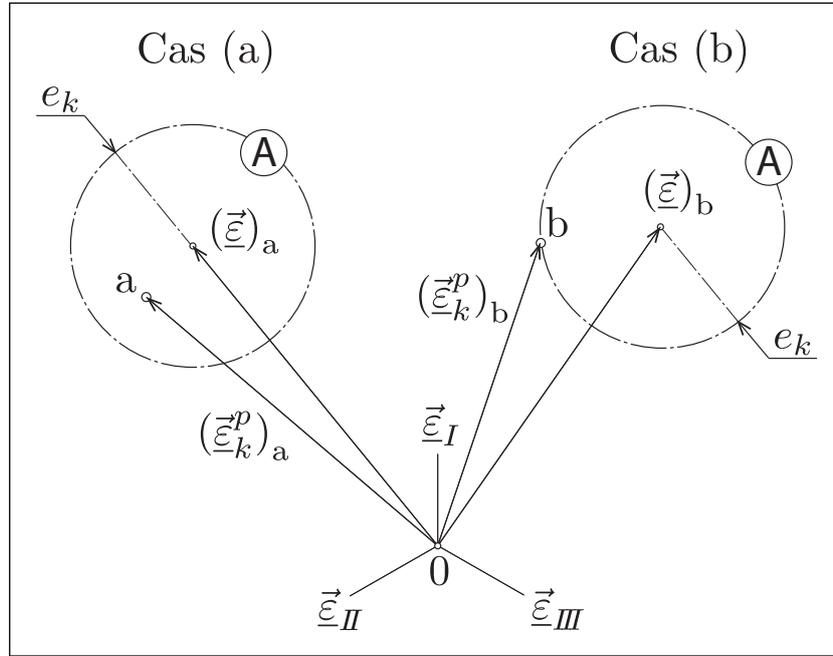


Fig. 4.5 – Illustration de la propriété 4.23 de la règle d'écoulement NFR dans le cas élastique (a) et dans le cas plastique (b).

La loi du modèle SVG-HP 3D de type multisurface, ainsi définie, a été implémentée dans un outil heuristique de simulation numérique 2D, dans l'environnement MATLAB, en considérant l'espace déviatoire 2D. Cet outil permet de visualiser le mouvement des surfaces seuil, où les déformations et les contraintes sont considérées comme des vecteurs et les surfaces seuil comme des cercles. La figure 4.6 montre des résultats de simulations dans le plan déviatoire bidimensionnel des déformations, obtenus avec l'outil heuristique 2D implémenté dans MATLAB.

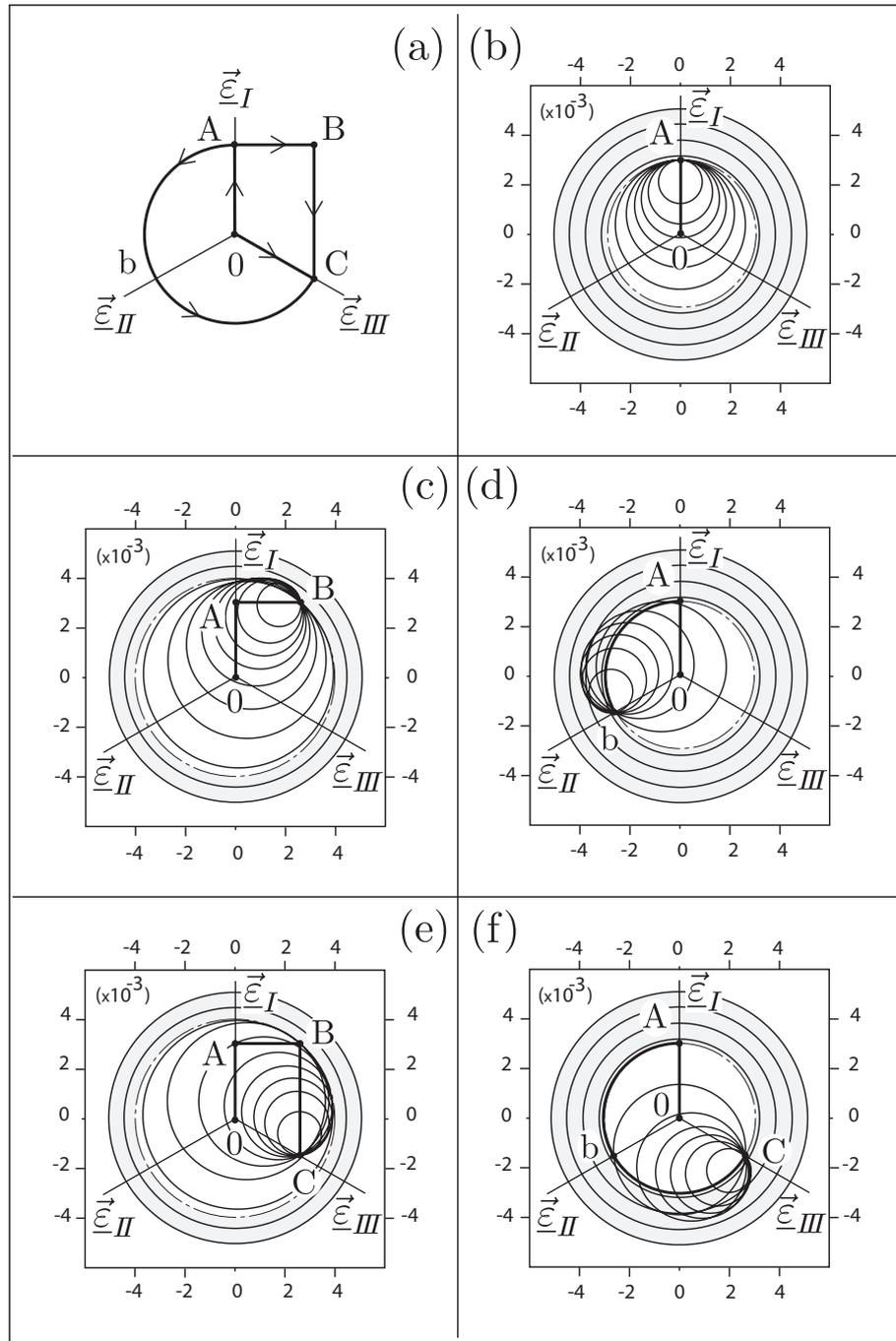


Fig. 4.6 – Résultats de simulations dans le plan déviatoire des déformations pour trois chemins de chargement : OC, OAbC et OABC (a) ; positions des surfaces seuil à la fin des chargements : OA (b), OAB (c), OAb (d), OABC (e) et OAbC (f). Les paramètres du modèle sont $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$, $Y_0 = 299$ MPa, $E_\infty = 4602$ MPa, $c = 2,0$ et $n = 10$ (cf. § 4.3).

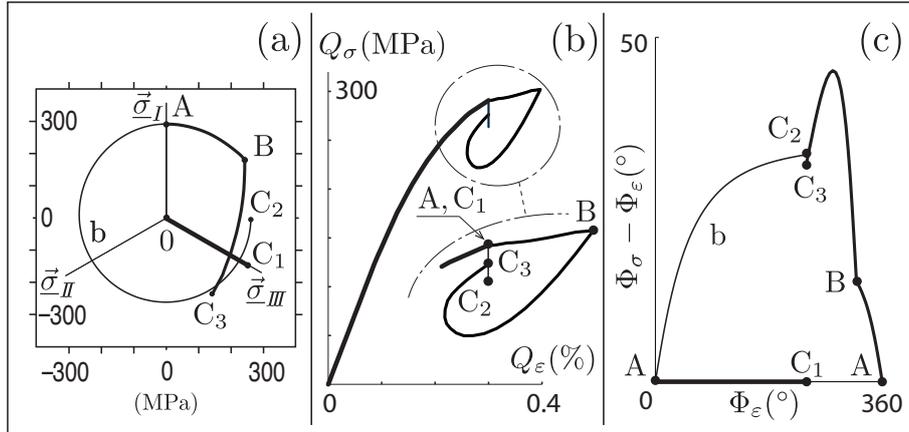


Fig. 4.7 – Réponses OC_1 , $OAbC_2$ et $OABC_3$ dans le plan déviatoire des contraintes (a), réponses dans le diagramme rhéologique (Q_ϵ , Q_σ) (b) et déphasage dans le plan déviatoire entre la contrainte et la déformation (c) pour les trajets de la figure 4.6a.

Sur la figure 4.6a, trois chemins de chargement distincts conduisant au même point C sont proposés : OC, OAbC, OABC. La figure 4.6b montre les positions des surfaces seuil à la fin du trajet OA.

Les figures 4.6c et 4.6d montrent quant à elles les positions des surfaces seuil aux points B et b (qui est un point courant entre les points A et C) respectivement. Enfin, les figures 4.2b, 4.6e et 4.6f illustrent la position finale au point C des surfaces seuil, pour chacun des trois trajets de chargement, respectivement OC, OABC et OAbC. Ces trois figures, qui illustrent des configurations de surfaces seuil relativement différentes, montrent que le modèle est sensible à l'histoire du chargement. Ceci est confirmé sur la figure 4.7a, qui donne trois réponses distinctes OC_1 , $OAbC_2$ et $OABC_3$ dans le plan déviatoire des contraintes, pour les trois cas de chargement considérés.

Le diagramme rhéologique (Q_ϵ , Q_σ) (figure 4.7b) montre que la réponse à deux trajets radiaux OA et OC_1 se confondent, même si leurs orientations sont différentes dans le plan déviatoire. De plus, cette figure montre clairement que les points C_1 , C_2 et C_3 diffèrent en contrainte tout en ayant la même déformation totale (figure 4.6a). Aussi, la figure 4.7c montre un déphasage entre la déformation dans le plan déviatoire des déformations et la réponse en contrainte dans le plan déviatoire des contraintes.

4.3 Méthode d'identification du modèle

Le comportement du modèle SVG-HP 3D est caractérisé par une hystérésis pure à fermeture parfaite des cycles, sans effet d'érouissage cyclique. Pour identifier K , G_0 , G_∞ , c et S_0 (cf. § 4.2.1), les cinq paramètres matériau du modèle, deux essais monotones sont nécessaires : un essai de traction simple et un essai de torsion (figure 4.8).

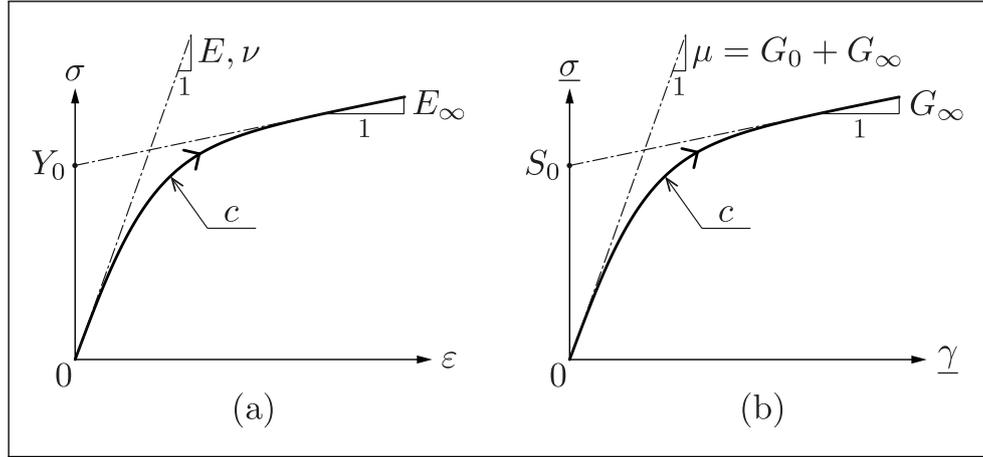


Fig. 4.8 – Identification des paramètres du modèle de Saint-Venant généralisé 3D : essai de traction simple (a) et essai de torsion (b).

En partant de l'expression de la loi de comportement (relation 4.17), le comportement quasi élastique à droite de l'origine peut être révélé pour :

$$\tilde{\underline{\varepsilon}}_k^p = \tilde{\underline{\mathbf{0}}} ; \forall k \in [1, n] \quad (4.26)$$

Ce qui conduit à la loi de Hooke linéaire isotrope :

$$\tilde{\underline{\sigma}}(\tilde{\underline{\varepsilon}}) = K \text{Tr}(\tilde{\underline{\varepsilon}})\tilde{\underline{\mathbf{I}}} + 2\mu\tilde{\underline{\varepsilon}} \quad (4.27)$$

où $\mu = G_0 + G_\infty$ (cf. § 3.3). La mesure de (E, ν) donnée par l'essai de traction simple (figure 4.8a) permet de caractériser les effets volumiques et d'identifier le module de compressibilité K , en vertu de la relation 4.16. Le résultat de l'essai de torsion monotone permet de faire une mesure directe des paramètres S_0 , G_∞ et μ ainsi que d'en déduire la valeur de G_0 (figure 4.8b). L'identification du paramètre de courbure c nécessite la comparaison directe de la courbe expérimentale de torsion à la simulation de la fonction générative $s_1(\underline{\gamma})$ et de les faire coïncider pour une valeur optimale de c (cf. relation 3.5 et figure 3.3).

Ainsi, les cinq paramètres K , G_0 , G_∞ , c et S_0 sont entièrement identifiés à partir des deux résultats d'essais monotones de traction simple et de torsion. Il est alors possible de déterminer les valeurs de Y_0 et E_∞ , en utilisant l'expression de la loi de comportement (annexe C) :

$$Y_0 = \sqrt{3}S_0 \frac{6K}{6K + 2G_\infty} \quad (4.28)$$

$$E_\infty = 2G_\infty \frac{9K}{6K + 2G_\infty} \quad (4.29)$$

Si l'on adopte une modélisation sans rigidité résiduelle en cisaillement ($G_\infty = 0$), les relations 4.28 et 4.29 donnent respectivement une correspondance classique de von Mises entre les seuils d'écoulement en traction simple et en cisaillement ($Y_0 = \sqrt{3}S_0$) ainsi qu'une rigidité résiduelle nulle en traction simple ($E_\infty = 0$).

4.4 Loi d'écrouissage cyclique pour les trajets proportionnels (SVG-EC 3D)

Le modèle SVG-HP 3D, tel qu'il a été défini aux paragraphes précédents, présente un comportement élastoplastique sans écrouissage cyclique, aussi qualifié de comportement d'hystérésis pure (cf. § 4.1.1, hypothèse H2).

Pour les matériaux métalliques, un phénomène de sur-écrouissage cyclique a été observé et modélisé lors de sollicitations multiaxiales non proportionnelles [Tanaka *et al.* 1985, Calloch & Marquis 1999, Keller & Trusov 1999]. Ce sur-écrouissage dépend à la fois du matériau et de la forme du trajet multiaxial (figure 4.9). Mais la modélisation de ce phénomène sort des objectifs de cette thèse (cf. § 1.2, point iii).

Ainsi, pour compléter la définition du modèle SVG-HP 3D, nous proposons une loi d'écrouissage cyclique, dont le champ d'application a été limité aux chargements proportionnels et ne prend pas en compte le phénomène de sur-écrouissage en chargements non proportionnels.

Considérons le cas d'un chargement en cisaillement cyclique, symétrique, à vitesse et amplitude de déformation constantes; la figure 4.10 illustre la réponse à une telle sollicitation, dans le cas d'un écrouissage cyclique durcissant. Pour une amplitude de déformation $\Delta\varepsilon_i$ donnée, l'écrouissage cyclique se manifeste par une évolution du seuil de la contrainte en fonction du nombre de cycles, de la valeur initiale S_0 à la valeur actuelle S . Cette évolution présente en général une limite, définie par un seuil de saturation $S_S(\Delta\varepsilon_i)$, qui dépend de l'amplitude de déformation $\Delta\varepsilon_i$ adoptée. L'évolution du seuil de contrainte actuel, en fonction du nombre de cycles ou en fonction du numéro d'ordre de l'inversion N_i , est généralement caractérisé par une courbe $S(N_i)$, appelée courbe de consolidation cyclique (figure 4.11a). Le phénomène de saturation de l'écrouissage cyclique est, quant à lui, caractérisé par la courbe d'écrouissage cyclique $S_S(\Delta\varepsilon_i)$ (figure 4.11b). Cette courbe présente en général un seuil limite, noté S_S^∞ , de sorte que :

$$S_S \in [S_0, S_S^\infty[\quad (4.30)$$

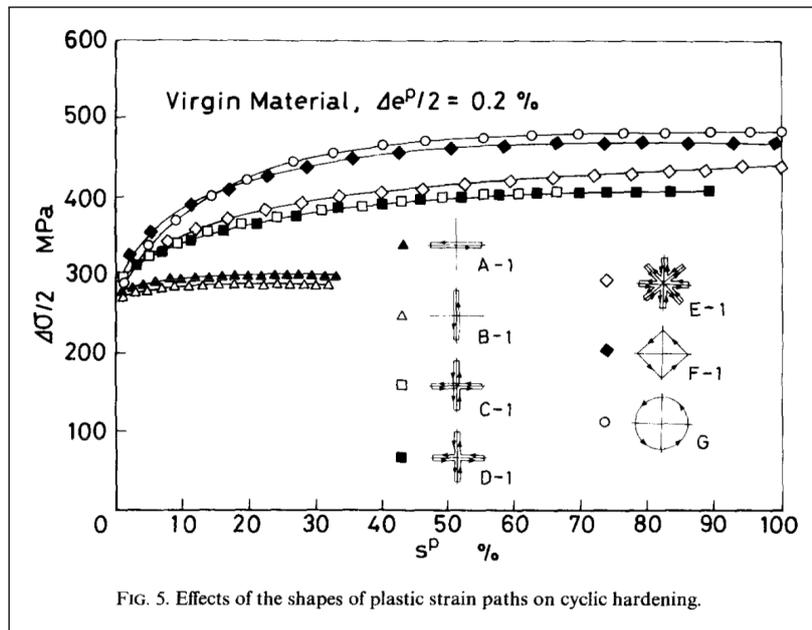


Fig. 4.9 – Mise en évidence de l'effet de la forme du trajet cyclique de traction-torsion combinées sur le niveau de contrainte stabilisé pour un acier inoxydable de type 316; niveau de contrainte en fonction de la déformation plastique cumulée au cours des cycles [Tanaka *et al.* 1985].

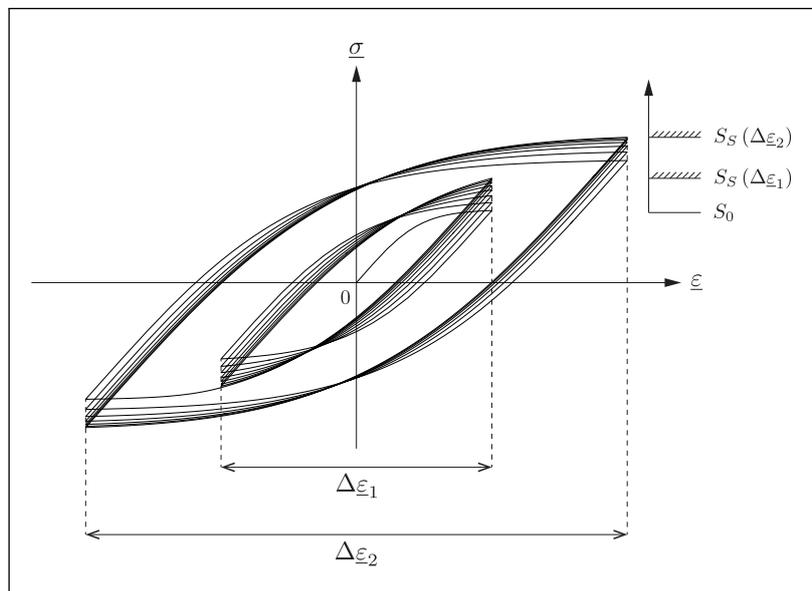


Fig. 4.10 – Illustration dans le cas unidimensionnel du comportement d'érouissage cyclique durcissant pour deux amplitudes de déformation $\Delta\varepsilon_1$ et $\Delta\varepsilon_2$.

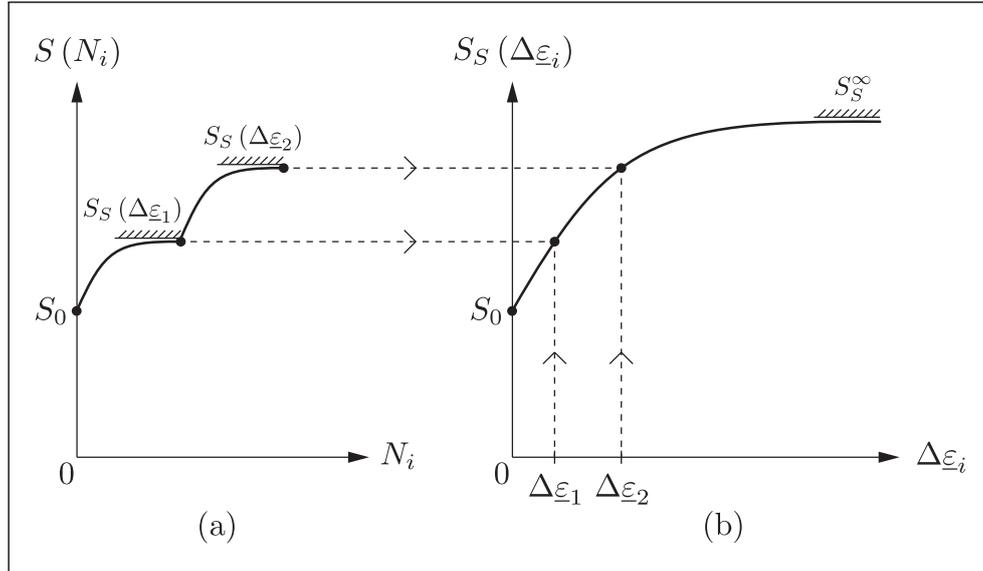


Fig. 4.11 – Courbe de consolidation cyclique (a) et courbe d'écroissage cyclique (b).

La loi d'écroissage cyclique SVG-EC 3D proposée ici consiste à définir l'évolution du seuil de contrainte actuel S au cours du chargement cyclique, en fonction de paramètres d'écroissage consistants. Par ailleurs, nous nous sommes fixé comme objectif, dans le cadre de ce travail, de proposer une loi d'écroissage cyclique robuste et relativement simple, qui permet de rendre compte de façon qualitative et relativement réaliste du comportement d'écroissage cyclique durcissant et adoucissant. Cette loi affecte très peu la définition du modèle SVG-HP 3D. En effet, la loi d'écroissage propose de remplacer le seuil de contrainte constant S_0 , par un seuil de contrainte S variable en fonction des conditions du chargement cyclique. Ainsi, la loi d'écroissage cyclique peut être considérée comme une couche additionnelle à la définition du modèle de Saint-Venant généralisé tridimensionnel. Nous pouvons alors soit choisir de l'utiliser, auquel cas on aura un modèle élastoplastique 3D avec écroissage cyclique (SVG-EC 3D), soit nous pouvons choisir de nous en passer et rester sur le modèle d'hystérésis pure 3D (SVG-HP 3D).

Dans le cas des matériaux métalliques, le comportement élastoplastique présente un écroissage cyclique durcissant ou adoucissant, étroitement lié au comportement plastique et aux mécanismes irréversibles de la déformation, eux-même liés aux mouvements et aux réarrangements des dislocations au sein de la microstructure. Il est donc nécessaire de définir une variable physique de base pour le suivi de l'écroissage cyclique. Nous appelons cette variable **déformation plastique équivalente**. Plusieurs choix sont possibles pour la définition de cette variable. Néanmoins, une des propriétés intrinsèques du modèle de Saint-Venant généralisé nous offre l'opportunité de proposer une définition pertinente et relativement simple. En effet, le comportement du modèle est toujours irréversible, même aux faibles déformations (cf. § 2.1.2). Ceci, car le seuil de déclenchement en déformation du premier frotteur est très proche de zéro. De fait, cela implique que la déformation

déviatoire totale du modèle de Saint-Venant généralisé ne comporte pas de partie élastique, elle est donc plastique à tout instant. Ainsi, la déformation plastique équivalente sera définie comme la déformation déviatoire totale du modèle, soit :

$$\tilde{\underline{\varepsilon}}_{eq}^p = \tilde{\underline{\varepsilon}} \quad (4.31)$$

Cette définition a pour avantage de garantir une déformation plastique équivalente constante lorsque le second invariant de la déformation totale est constant. Ainsi, $\tilde{\underline{\varepsilon}}_{eq}^p$ est une variable intéressante pour l'estimation de l'amplitude des cycles. En effet, cette amplitude correspond à une mesure de la déformation plastique ou module de la déformation plastique, qui sera noté M_p . Le module de la déformation plastique M_p est nul à l'instant initial ; il est calculé de la façon suivante au cours du chargement :

$$\begin{aligned} \text{Si } d\varepsilon_{eq}^p(t+dt) \geq 0 \text{ et } \|\tilde{\underline{\varepsilon}}_{eq}^p(t+dt)\| \geq M_p(t) \text{ alors } M_p(t+dt) &= \|\tilde{\underline{\varepsilon}}_{eq}^p(t+dt)\| \\ \text{où } d\varepsilon_{eq}^p(t+dt) &= \|\tilde{\underline{\varepsilon}}_{eq}^p(t+dt)\| - \|\tilde{\underline{\varepsilon}}_{eq}^p(t)\| \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } d\varepsilon_{eq}^p(t+dt) < 0 \text{ et } d\varepsilon_{eq}^p(t) < 0 \text{ et } \|\tilde{\underline{\varepsilon}}_{eq}^p(t+dt)\| < M_p(t) \\ \text{alors } M_p(t+dt) &= \|\tilde{\underline{\varepsilon}}_{eq}^p(t+dt)\| \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ainsi l'amplitude de déformation $\Delta \underline{\varepsilon}$, utilisée dans le cas unidimensionnel pour caractériser la courbe d'érouissage cyclique, sera remplacée par la variable M_p . La relation 4.32 permet d'augmenter la valeur du module de la déformation plastique. La relation 4.33 permet, lors d'une inversion, qui correspond à un module de la déformation plastique équivalente inférieur au module M_p actuel, de faire évoluer la valeur de celui-ci à la baisse.

Nous définissons également un paramètre de cumul, noté W_p , correspondant au travail plastique développé au cours du chargement cyclique. Ce paramètre permet de remplacer la variable N_i ou le nombre de cycles, utilisée dans le cas unidimensionnel pour caractériser la courbe de consolidation cyclique. Ainsi, W_p apparaît comme l'équivalent d'un compteur de cycles. Il est défini par :

$$dW_p = \|\tilde{d\underline{\varepsilon}}_{eq}^p\| S_0 \text{ où } \tilde{d\underline{\varepsilon}}_{eq}^p = \tilde{\underline{\varepsilon}}_{eq}^p(t+dt) - \tilde{\underline{\varepsilon}}_{eq}^p(t) \quad (4.34)$$

Nous adoptons la propriété d'érouissage cyclique effaçable. Cette propriété est illustrée par la figure 4.12, dans le cas d'un chargement caractérisé par deux amplitudes de cyclage respectives M_{p1} et M_{p2} , telles que $M_{p2} > M_{p1}$. La courbe d'érouissage cyclique $S_S(M_p)$ permet de définir les valeurs des seuils de saturation respectifs $S_S(M_{p1})$ et $S_S(M_{p2})$ (figure 4.12a). La courbe de consolidation cyclique $S(W_p)$ permet de caractériser l'évolution du seuil de contrainte actuel S vers les seuils de saturations respectifs, en fonction du paramètre de cumul W_p (figure 4.12b). Le passage de l'amplitude de cyclage M_{p1} à l'amplitude de cyclage M_{p2} correspond à une augmentation de la valeur du seuil de contrainte actuel S , ainsi qu'une augmentation de la valeur du seuil de saturation correspondant. Si nous revenons à une amplitude de cyclage M_{p1} , nous retrouvons le seuil

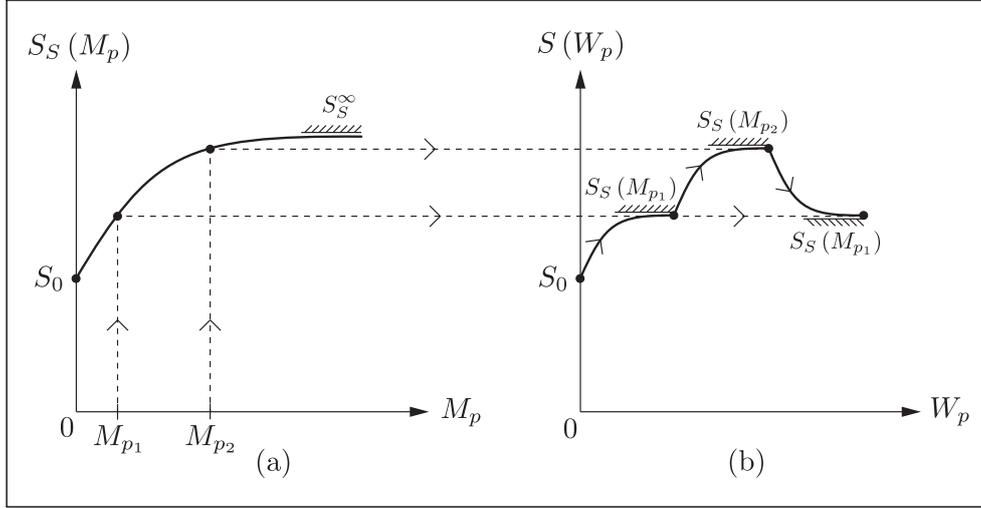


Fig. 4.12 – Illustration de la propriété d'écroissage cyclique effaçable : courbe d'écroissage cyclique (a) et courbe de consolidation cyclique (b).

$S_S(M_{p1})$, défini lors de la phase de montée ; cette propriété correspond au comportement d'écroissage cyclique effaçable.

La courbe d'écroissage cyclique $S_S(M_p)$, qui caractérise le seuil de saturation actuel, est définie par la fonction scalaire suivante :

$$S_S(M_p) = \frac{S_0}{\left(1 - \gamma \left(1 - e^{\frac{-M_p}{\alpha_1 M_0}}\right)\right)^{\frac{1}{c_1}}} \quad (4.35)$$

où γ , α_1 et c_1 sont des paramètres matériau constants, et M_0 est défini par :

$$M_0 = \frac{1}{2} \frac{S_0^2}{2\mu} \quad (4.36)$$

Ainsi, le seuil de saturation limite S_S^∞ de la courbe d'écroissage cyclique est tel que :

$$S_S^\infty = \frac{S_0}{(1 - \gamma)^{\frac{1}{c_1}}} \quad (4.37)$$

et la pente à l'origine de la courbe d'écroissage cyclique est telle que :

$$\frac{dS_S}{dM_p}(M_p) = \frac{S_0}{M_0} \cdot \frac{\gamma}{\alpha_1 c_1} \quad (4.38)$$

La courbe de consolidation cyclique $S(W_p)$, qui caractérise l'évolution du seuil de contrainte actuel, est définie par une équation différentielle ; ceci permet d'éviter de réactualiser à chaque incrément la valeur originale du seuil de contrainte :

$$dS(t + dt) = \alpha_2 \left(1 - \left(\frac{S(t) - S_0}{S_S(t + dt) - S_0} \right)^{c_2} \right) \left(\frac{S_S(t + dt) - S_0}{\|S_S(t + dt) - S_0\|} \right) dW_p \quad (4.39)$$

où α_2 et c_2 sont deux paramètres constants. Et :

$$S(t + dt) = S(t) + dS(t + dt) \quad (4.40)$$

L'équation différentielle 4.39 définit une évolution entre la position actuelle donnée par $S(t)$ et une position à atteindre $S_S(t + dt)$.

Ainsi, le modèle est défini par les deux équations 4.35 et 4.39 et par cinq paramètres matériau γ , α_1 , c_1 , α_2 et c_2 . Le seuil de cisaillement S_0 est identifié en utilisant un résultat expérimental de première charge en cisaillement ou en torsion (cf. § 4.3 et figure 4.8). L'identification des paramètres γ , α_1 et c_1 est réalisée à l'aide d'une courbe d'érouissage cyclique et les deux relations 4.37 et 4.38. L'identification des paramètres α_2 et c_2 est réalisée à l'aide d'une courbe expérimentale de consolidation cyclique. Notons que le paramètre α_2 caractérise la vitesse de montée ou de descente du seuil actuel $S(t)$ vers le seuil de stabilisation de l'érouissage cyclique, tandis que le paramètre c_2 caractérise la zone de transition de la courbe de consolidation entre le début de montée ou le début de descente et la stabilisation.

Les figures 4.13 et 4.14 illustrent respectivement les capacités du modèle SVG-EC 3D à modéliser les comportements d'érouissage cyclique durcissant et adoucissant.

Concernant la simulation de l'érouissage cyclique durcissant, de la figure 4.13, les valeurs des cinq paramètres matériau adoptés pour le comportement d'hystérésis pure sont : $K = 175$ GPa, $G_0 = 79$ GPa, $G_\infty = 1,5$ GPa, $S_0 = 173$ MPa et $c = 2$. Les valeurs des cinq paramètres complémentaires du modèle d'érouissage cyclique durcissant sont : $\gamma = 0,94$, $\alpha_1 = 10$, $c_1 = 2$, $\alpha_2 = 0,01$ et $c_2 = 0,5$. Concernant la simulation de l'érouissage cyclique adoucissant, de la figure 4.14, les valeurs des paramètres sont identiques, sauf celles des trois paramètres suivants : $S_0 = 400$ MPa, $\gamma = -0,78$ et $\alpha_1 = 1$.

La figure 4.15 illustre la capacité du modèle d'érouissage à rendre compte de l'effet de rochet d'érouissage cyclique en traction-compression à contrainte imposée, dans le cas d'un matériau à érouissage cyclique adoucissant.

Pour la simulation de la figure 4.15, les valeurs des cinq paramètres matériau adoptés pour le comportement d'hystérésis pure sont : $K = 120$ GPa, $G_0 = 70$ GPa, $G_\infty = 1,6$ GPa, $S_0 = 479$ MPa et $c = 2$. Les valeurs des cinq paramètres complémentaires du modèle d'érouissage cyclique adoucissant sont : $\gamma = -0,78$, $\alpha_1 = 5$, $c_1 = 2$, $\alpha_2 = 0,001$ et $c_2 = 0,5$.

Les simulations présentées sur les figures 4.13, 4.14 et 4.15 sont données à titre indicatif, afin d'illustrer qualitativement la capacité du modèle d'érouissage cyclique à rendre compte de l'érouissage cyclique par durcissement, par adoucissement ainsi que le rochet d'érouissage cyclique. Les valeurs des paramètres matériau adoptées pour ces simulations ne correspondent pas à celles de matériaux particuliers. Néanmoins, nous avons choisi des valeurs réalistes pour ces paramètres, qui correspondent à celles de matériaux tels que les aciers ordinaires au carbone ou des aciers faiblement alliés.

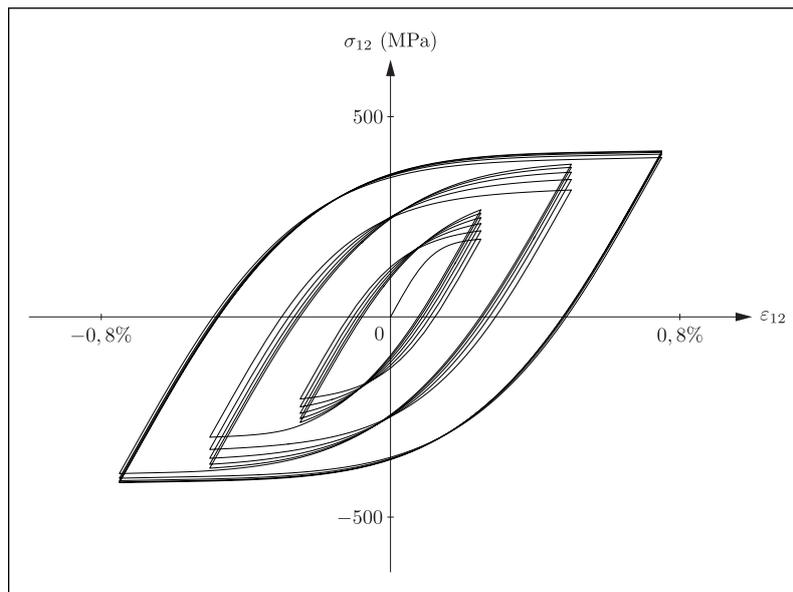


Fig. 4.13 – Illustration des propriétés du modèle SVG-EC 3D : cisaillement cyclique et érouissage durcissant.

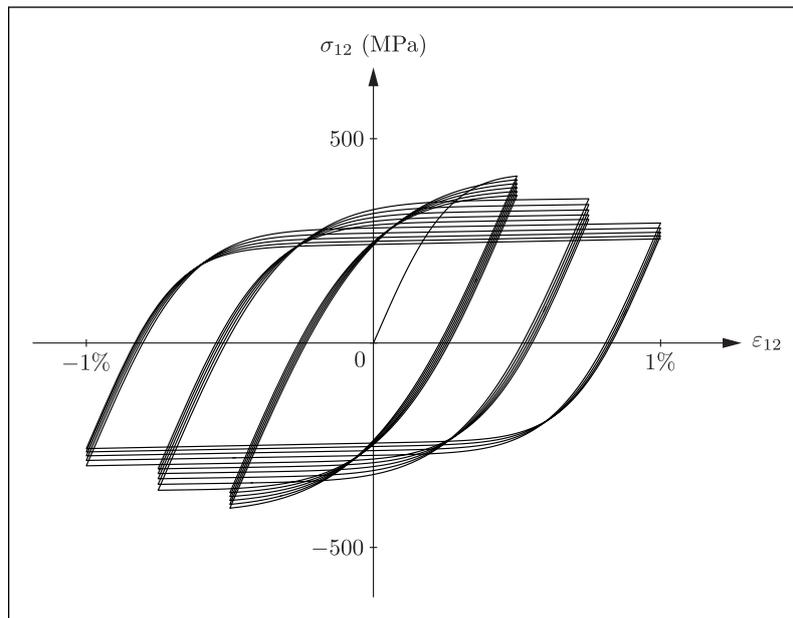


Fig. 4.14 – Illustration des propriétés du modèle SVG-EC 3D : cisaillement cyclique et érouissage adoucissant.

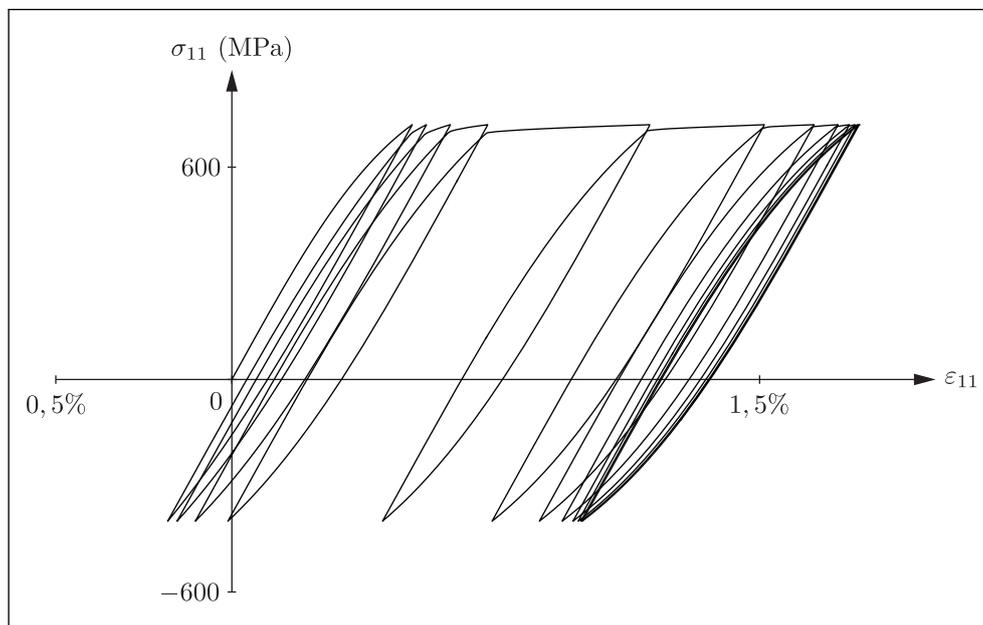


Fig. 4.15 – Illustration des propriétés du modèle SVG-EC 3D : modélisation du rochet axial.

Conclusion du chapitre

Un modèle de Saint-Venant Généralisé à Hystérésis Pure tridimensionnel (SVG-HP 3D) a été proposé. Ce modèle est une extension au cas 3D du modèle SVG-HP 1D, dans le cas des transformations finies ; ceci malgré son application au domaine des petites déformations, dans le cadre de ce travail. Ce choix est exigé par la nécessité de prise en compte des effets du second ordre.

Le modèle SVG-HP 3D correspond à une loi multisurface, définie dans l'espace des déformations. Les surfaces seuil sont des hypersphères de von Mises, exprimées dans l'espace déviatoire multidimensionnel d'Ilyushin. Ainsi cette loi prend en compte les grandes rotations de la matière et les grandes déformations.

Pour l'extension au cas 3D du modèle SVG-HP 1D, nous avons adopté le tenseur de déformation de Hencky gauche, l'option de décomposition additive de la déformation, la dérivée objective de Jaumann et une règle d'écoulement de type normalité pour chaque surface seuil du modèle. Ceci conduit à une indépendance totale des mouvements des surfaces seuil, les unes par rapport aux autres. La définition de la règle d'écoulement de normalité, qui est généralement explicitée dans l'espace des contraintes, a été transposée dans l'espace des déformations.

Le modèle multisurface SVG-HP 3D, ainsi obtenu, a été implémenté dans le code de calcul de structures par éléments finis Abaqus. Ce modèle a également été implémenté dans un outil heuristique de simulation numérique 2D, dans l'environnement MATLAB, en considérant l'espace déviatoire 2D classique. Cet outil permet de visualiser le mouvement des surfaces seuil, où les déformations et les contraintes sont considérées comme des vecteurs dans le plan et les surfaces seuil comme des cercles.

La loi élastoplastique tridimensionnelle SVG-HP 3D a été complétée par la superposition d'une loi d'écrouissage cyclique, relativement simple et efficace, permettant de définir un modèle de Saint-Venant Généralisé à Ecrouissage Cyclique tridimensionnel (SVG-EC 3D). Néanmoins, dans le cadre de ce travail, son champ d'application a été limité aux chargements proportionnels et ne prend pas en compte le phénomène de sur-écrouissage. Dans la suite, le modèle SVG-HP 3D sera à la base du développement d'une approche thermodynamique valable en petites déformations (cf. chapitre 7) et d'un critère de fatigue indépendant des effets d'écrouissage cyclique (cf. chapitre 8). La finalité correspond à l'application de cette approche à l'étude de la fatigue des matériaux métalliques. Ainsi le projet d'une étude complète des effets d'écrouissage cyclique sur des trajets non proportionnels a été écarté des objectifs de ce travail de thèse, compte tenu du fait que l'application visée par ce travail ne nécessite pas fondamentalement une telle étude.

Analyse des prévisions du modèle SVG-HP 3D

Sommaire

5.1	Modèle éléments finis de traction-torsion combinées	86
5.2	Simulation de la traction-torsion combinées en chargement non proportionnel	87
5.3	Prédiction de l'effet Poynting-Swift	108
5.3.1	Illustration de la prédiction de l'effet Poynting-Swift par le modèle SVG-HP 3D	108
5.3.2	Analyse de l'effet Poynting-Swift avec le modèle	112
5.4	Résultats typiques de calcul de structure	118
5.4.1	Validation du modèle axisymétrique de traction-torsion combinées	118
5.4.2	Chargement d'une structure en grande déformation	121
5.4.3	Chargement cyclique d'une structure	127

Le modèle SVG-HP 3D a été implémenté dans le code éléments finis Abaqus/Standard, grâce à l'utilisation d'une routine utilisateur UMAT (*User-Subroutine* UMAT). L'objectif essentiel du chapitre est de mettre en œuvre le modèle, afin d'illustrer son comportement et de confronter ses prédictions à des résultats expérimentaux disponibles dans la littérature ou obtenus au laboratoire, par des essais sur des matériaux métalliques. Cette confrontation sera effectuée à travers des cycles complexes de chargements mécaniques non proportionnels. Le but est d'analyser le comportement du modèle afin de le valider et d'apprécier sa pertinence ainsi que de constater ses limites à prédire les manifestations complexes du comportement mécanique réel des matériaux métalliques.

Ce chapitre est composé de quatre sections. La première section présente la méthode utilisée pour simuler un essai TTC avec Abaqus, et plus particulièrement le modèle éléments finis mis en place pour représenter l'éprouvette de traction-torsion (§ 5.1). La deuxième section présente des simulations de chargements non proportionnels de traction-torsion combinées et leurs comparaisons à des résultats expérimentaux (§ 5.2). La troisième section analyse les capacités du modèle SVG-HP 3D à rendre compte de l'effet

du second ordre de Poynting-Swift et utilise le modèle comme un outil heuristique pour donner une interprétation phénoménologique de ce phénomène complexe (§ 5.3). Enfin, la quatrième section donne une validation du modèle éléments finis utilisé pour représenter l'éprouvette de traction-torsion et expose des résultats de calcul de structure (§ 5.4).

5.1 Modèle éléments finis de traction-torsion combinées

Il est possible de modéliser une éprouvette de traction-torsion en éléments finis volumiques. La simulation de la partie centrale cylindrique seule de l'éprouvette requiert des conditions aux limites en déplacement non triviales, difficiles à mettre en œuvre avec les outils disponibles dans le code éléments finis Abaqus. Ainsi, pour éviter cette difficulté, il est nécessaire de simuler l'éprouvette entière avec ses extrémités massives. Cependant, ce type de modélisation demande un grand nombre d'éléments, ainsi qu'un temps de calcul important. Or, le code Abaqus offre la possibilité de modéliser un anneau situé au milieu de la zone utile de l'éprouvette (figure 5.1a), en utilisant un modèle axisymétrique. Le modèle axisymétrique mis en place pour ces calculs est représenté sur la figure 5.1b.

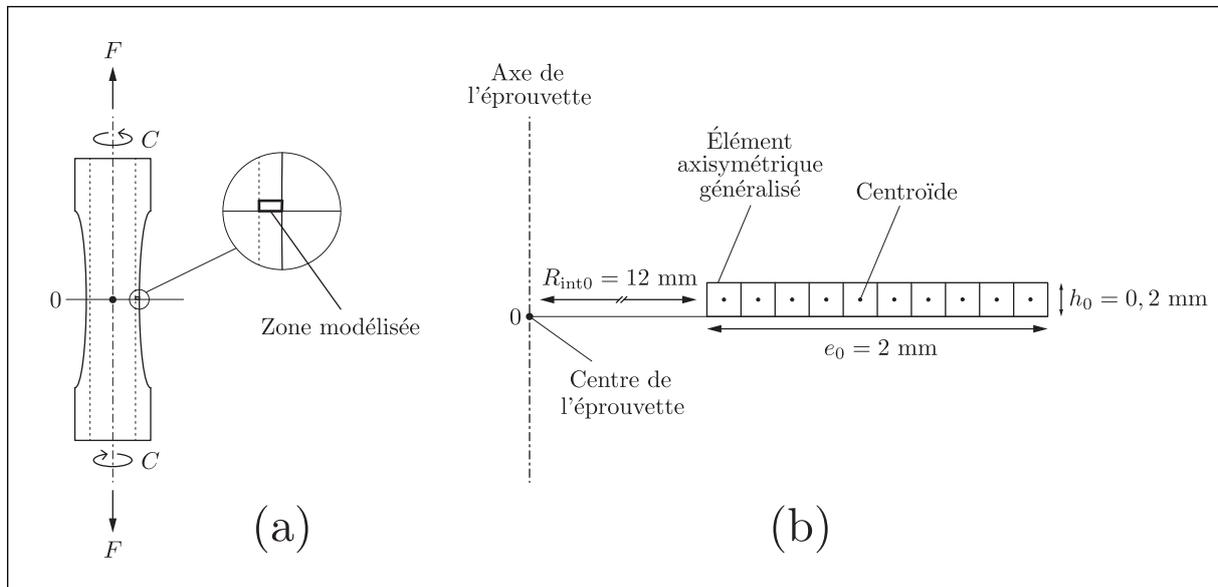


Fig. 5.1 – Localisation de la zone modélisée (a) et modèle éléments finis mis en place pour simuler les essais de traction-torsion combinées (b).

Le modèle axisymétrique est un domaine rectangulaire, positionné au rayon intérieur initial de l'éprouvette $R_{\text{int}0} = 12 \text{ mm}$, de largeur initiale $e_0 = 2 \text{ mm}$, qui représente l'épaisseur initiale du tube et de hauteur initiale $h_0 = 0,2 \text{ mm}$. Il est constitué de dix éléments axisymétriques généralisés, disponibles dans la bibliothèque du code Abaqus

[ABAQUS 2013]. Ces éléments, quadrangles à quatre nœuds, référencés CGAX4, sont identiques aux éléments axisymétriques standard CAX4 à deux degrés de liberté de déplacement des nœuds u_r et u_z , à ceci près qu'ils possèdent un degré de liberté supplémentaire qui correspond à l'angle de torsion ou *twist*, noté ϕ . Cet angle, exprimé en radian, représente la rotation du nœud autour de l'axe z d'axisymétrie. Sur la partie inférieure des éléments, le déplacement u_z et l'angle de torsion ϕ sont bloqués. Sur la partie supérieure, nous imposons le déplacement u_z et l'angle de torsion ϕ , afin de contrôler la simulation en déformation imposée de traction-torsion combinées. Ainsi, en considérant le cas des petites déformations, le déplacement u_z peut se déduire de la déformation axiale ε_{zz} par :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{u_z}{h_0} \quad \text{et} \quad u_z = h_0 \varepsilon_{zz} \quad (5.1)$$

De même, la rotation ϕ peut se déduire de la déformation de cisaillement $\varepsilon_{\theta z}$ par :

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{\gamma_{\theta z}}{2} = \frac{\phi R_{\text{ext}0}}{2h_0} \quad (5.2)$$

d'où

$$\phi = \frac{2h_0 \varepsilon_{\theta z}}{R_{\text{ext}0}} \quad (5.3)$$

Le code Abaqus fournit les composantes de la contrainte de Cauchy axiale σ_{zz} et de cisaillement $\sigma_{\theta z}$. Ces deux paramètres peuvent être utilisés pour une comparaison directe avec des données expérimentales. La force axiale et le couple de torsion appliqués à l'éprouvette sont alors :

$$F_z = 2\pi \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} \sigma_{zz} r dr \quad (5.4)$$

et

$$C_{\theta z} = 2\pi \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} \sigma_{\theta z} r^2 dr \quad (5.5)$$

5.2 Simulation de la traction-torsion combinées en chargement non proportionnel

Pour évaluer la capacité du modèle SVG-HP 3D à rendre compte des propriétés génériques du comportement des matériaux métalliques, nous considérons des chargements complexes non proportionnels en traction-torsion combinées. L'annexe A présente des résultats expérimentaux de traction-torsion combinées obtenus au laboratoire, sur un acier inoxydable 316L, en petites déformations. Ces essais caractérisent le comportement de ce matériau métallique sur le cycle stabilisé, après saturation de l'érouissage cyclique.

Plusieurs chargements non proportionnels ont été réalisés et les essais ont été contrôlés en déformation locale imposée. Dans le plan des déformations de traction-torsion, les possibilités de chargement sont infinies. L'objectif de cette campagne d'essai est de constituer une base de résultats expérimentaux la plus complète possible, pouvant servir de *benchmark*, afin d'éprouver les lois mécaniques développées pour décrire le comportement des matériaux métalliques. C'est pourquoi les essais ont été réalisés avec une variété de chargement la plus large possible et des formes de cycles les plus complexes possibles.

Les valeurs des paramètres matériau définissant le modèle SVG-HP 3D ont été identifiées au paragraphe A, relation A.11. Nous adoptons ces valeurs pour réaliser les simulations de l'ensemble des résultats expérimentaux présentés à l'annexe A. Les valeurs des trois paramètres accessoires supplémentaires, liés à la nature discrète du modèle, sont : $n = 50$ (relation 3.1), $x = 0,005$ (relation 3.14) et $\alpha = 1$ (relation 3.16).

Comparaison des simulations aux résultats expérimentaux La réponse du modèle et sa comparaison avec les résultats expérimentaux de l'annexe A pour les différents trajets sont données sur les figures 5.2 à 5.10.

Qualitativement, le modèle reproduit de façon très satisfaisante les propriétés génériques du comportement et ses manifestations complexes. En effet, le modèle reproduit très bien la forme générique des cycles dans le plan des contraintes, notamment pour les formes relativement complexes des chargements sablier, trèfle à 3 et 4 pétales et croix 1 et 2 (sous-figures (b) des figures 5.6 à 5.10). Sur les diagrammes rhéologiques contrainte-déformation dans le sens axial ou en cisaillement, quel que soit le type de chargement, la réponse du modèle est fidèle aux propriétés génériques du comportement réel, même pour les évolutions les plus intriquées (sous-figures (c) et (d) des figures 5.2 à 5.10). Par ailleurs, le modèle prédit remarquablement bien l'évolution du déphasage entre la contrainte et la déformation, quelle que soit la complexité du chargement. Ces évolutions non intuitives pour des chargements relativement simples, deviennent très sophistiquées et de plus en plus complexes d'un chargement à l'autre (sous-figures (e) des figures 5.2 à 5.10).

Notons, néanmoins, un léger écart d'orientation de la simulation par rapport aux résultats expérimentaux, dans le plan des contraintes. Cet écart est observé pour les trajets carré, hexagone et octogone dans le plan des contraintes (sous-figures (b) des figures 5.3 à 5.5). En effet, on observe que la simulation est tournée de quelques degrés dans le sens trigonométrique par rapport à la réponse du matériau.

Du point de vue quantitatif et quel que soit le type de chargement, nous observons une différence sensible en contrainte entre les simulations et le comportement réel. En effet, considérons le plan des contraintes et inscrivons la simulation ainsi que la réponse réelle correspondante du matériau, chacune dans un cercle ; on constate que le seuil limite en contrainte de la simulation, ainsi défini, est plus faible que celui du comportement réel du matériau (sous-figures (b) des figures 5.2 à 5.10). Cet aspect est compréhensible. En effet, l'identification du seuil limite S_0 du modèle SVG-HP 3D a été réalisé sur la base d'un cycle stabilisé en torsion (cf § A, relation A.11). Néanmoins, compte tenu des

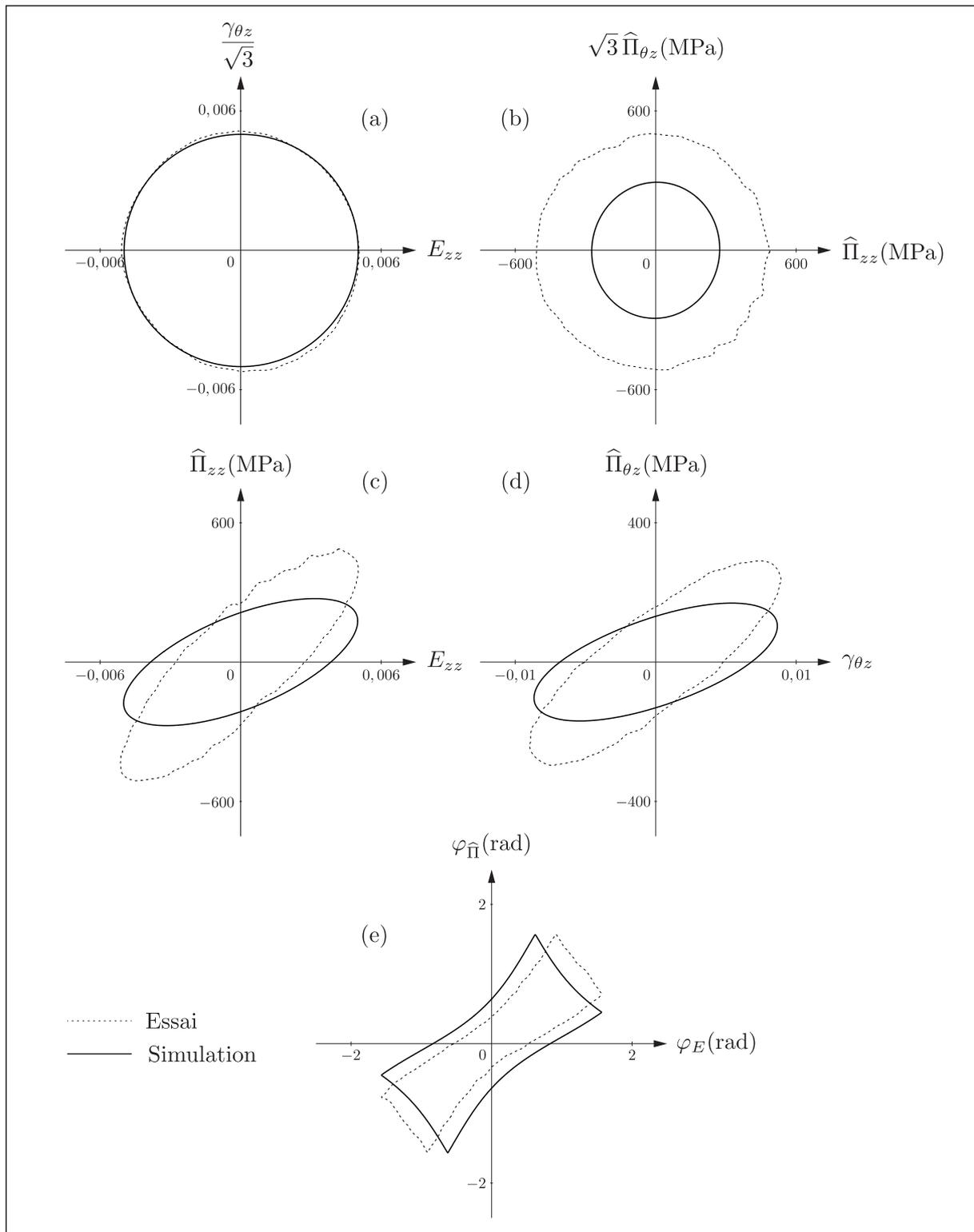


Fig. 5.2 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **cercle** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu); trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans la direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

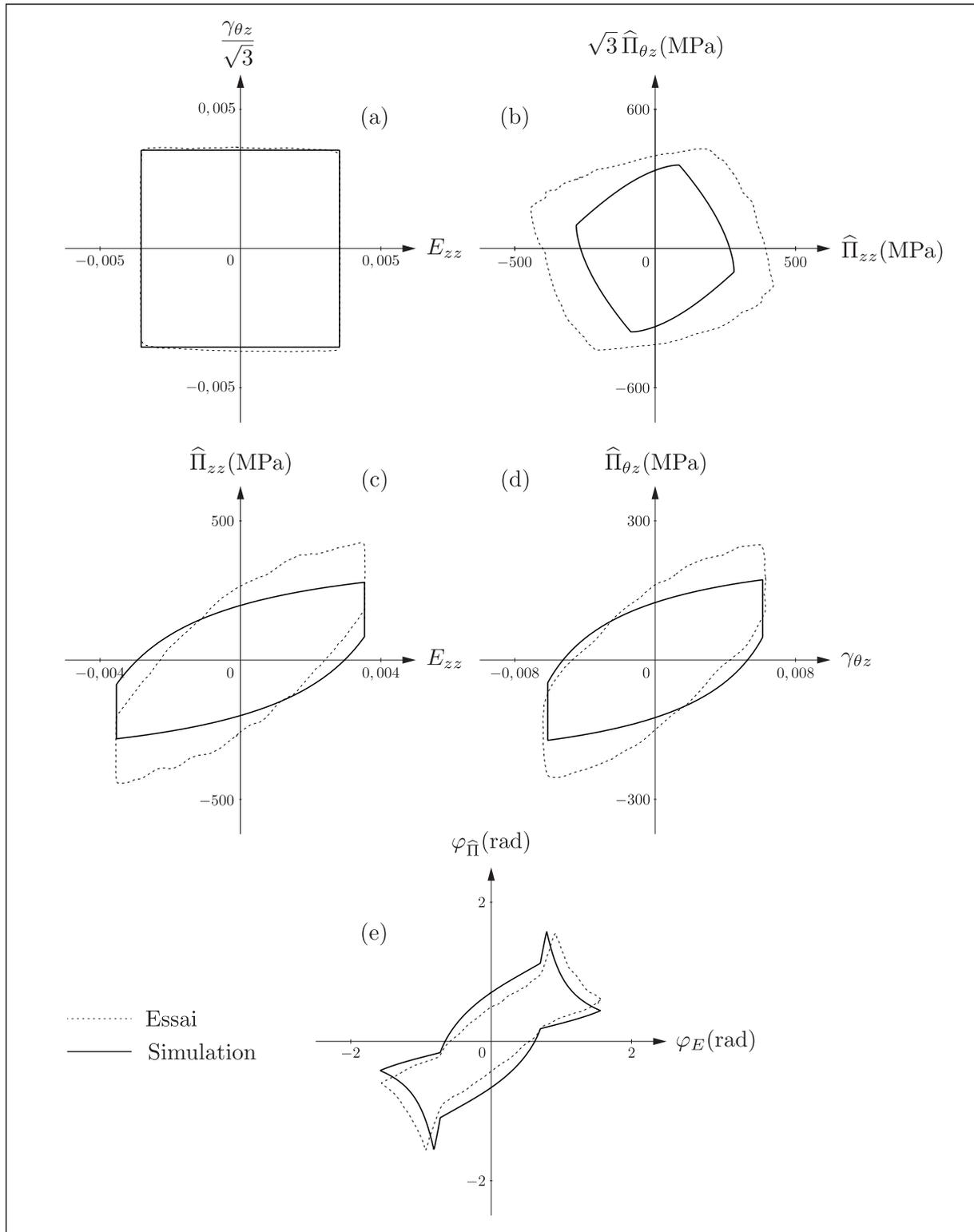


Fig. 5.3 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **carré** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu); trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans la direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

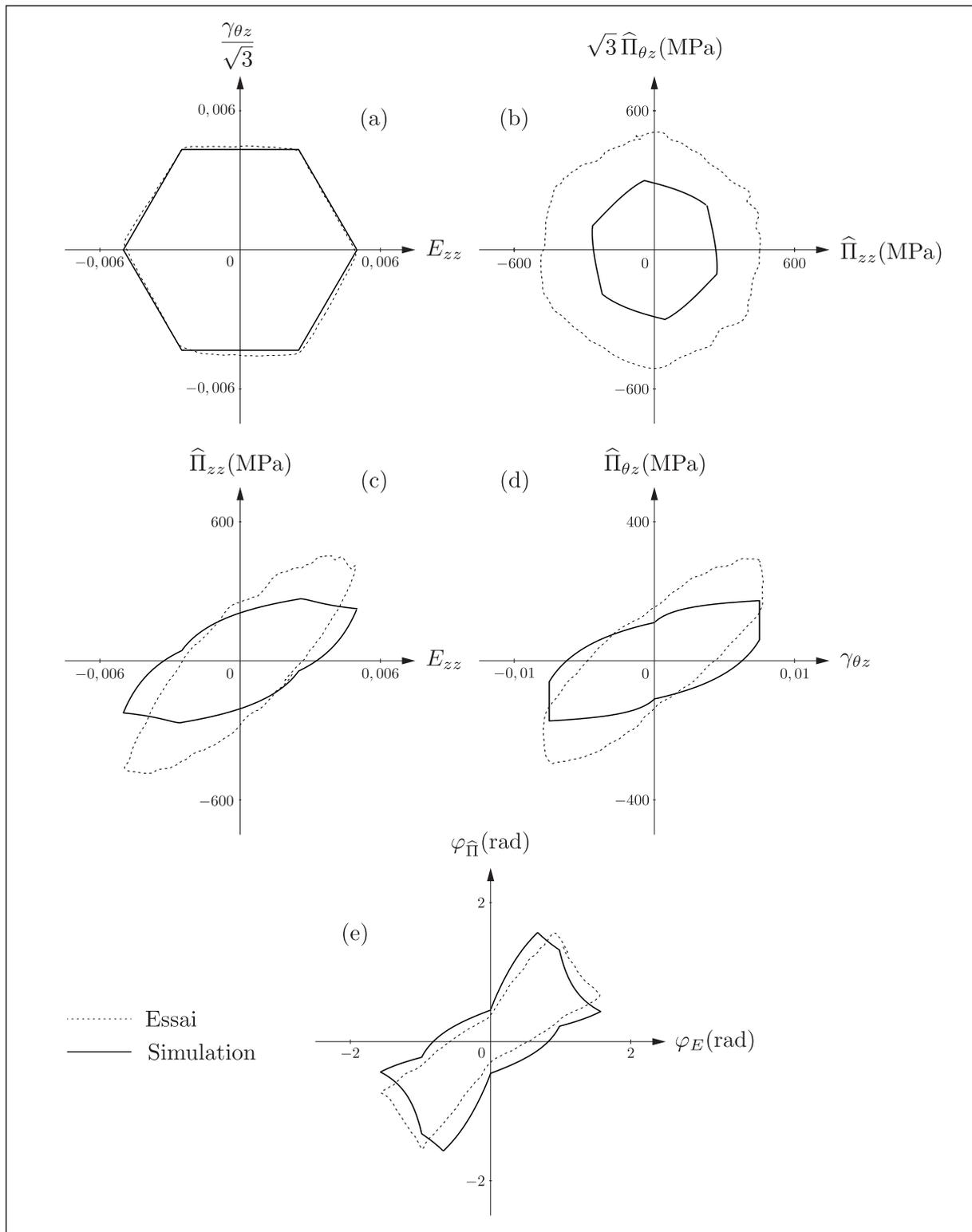


Fig. 5.4 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme d’**hexagone** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

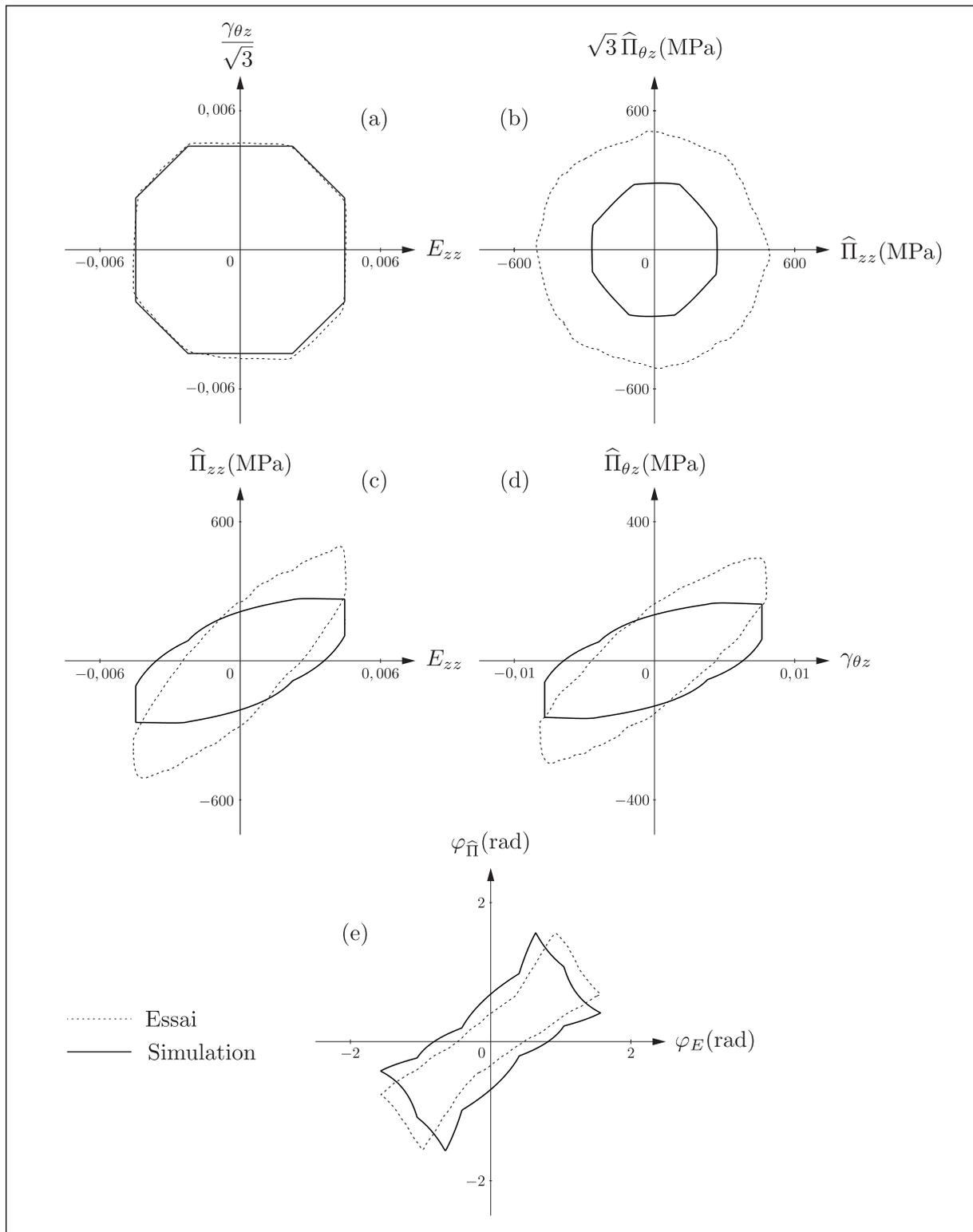


Fig. 5.5 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme d’**octogone** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

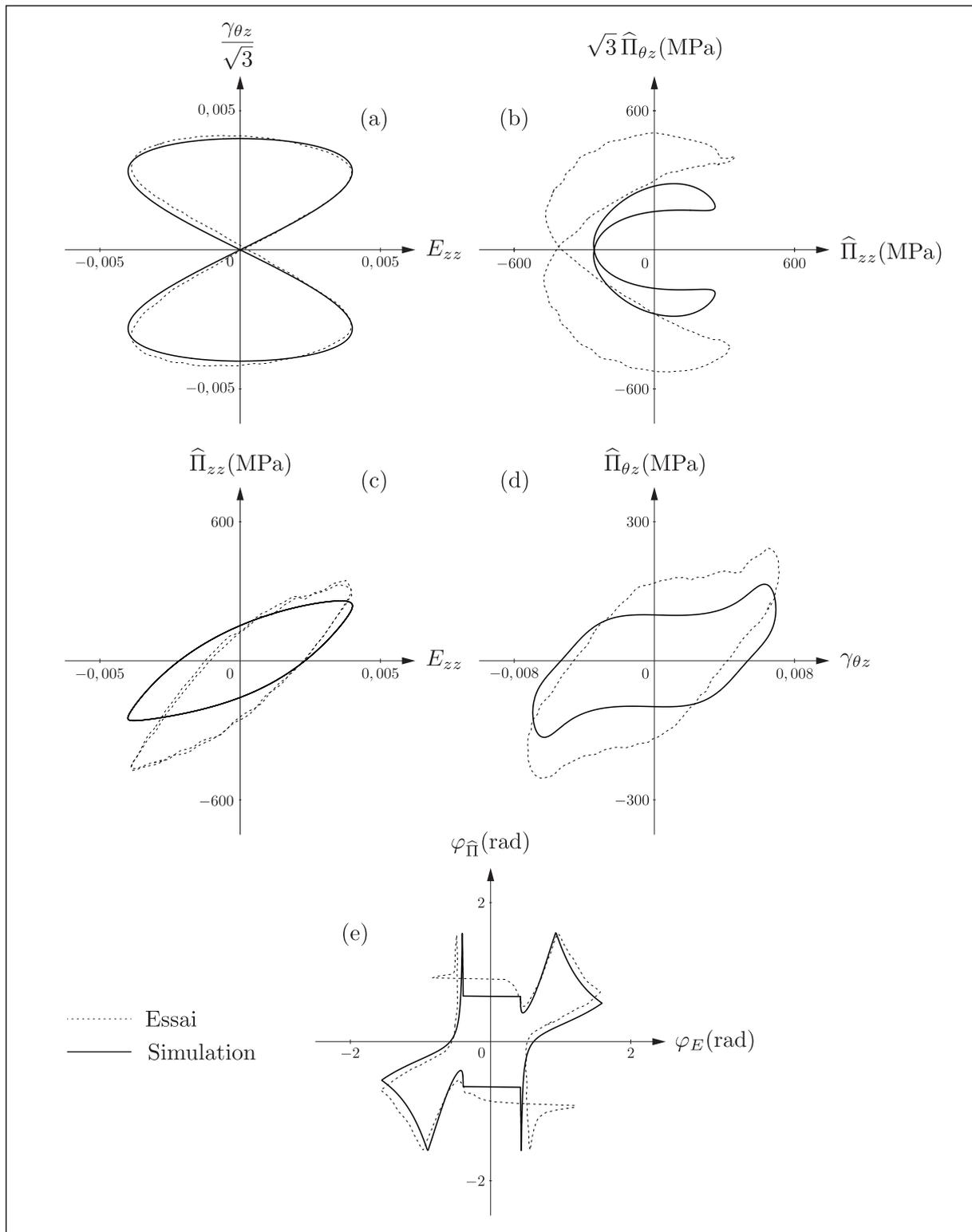


Fig. 5.6 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **sablier** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

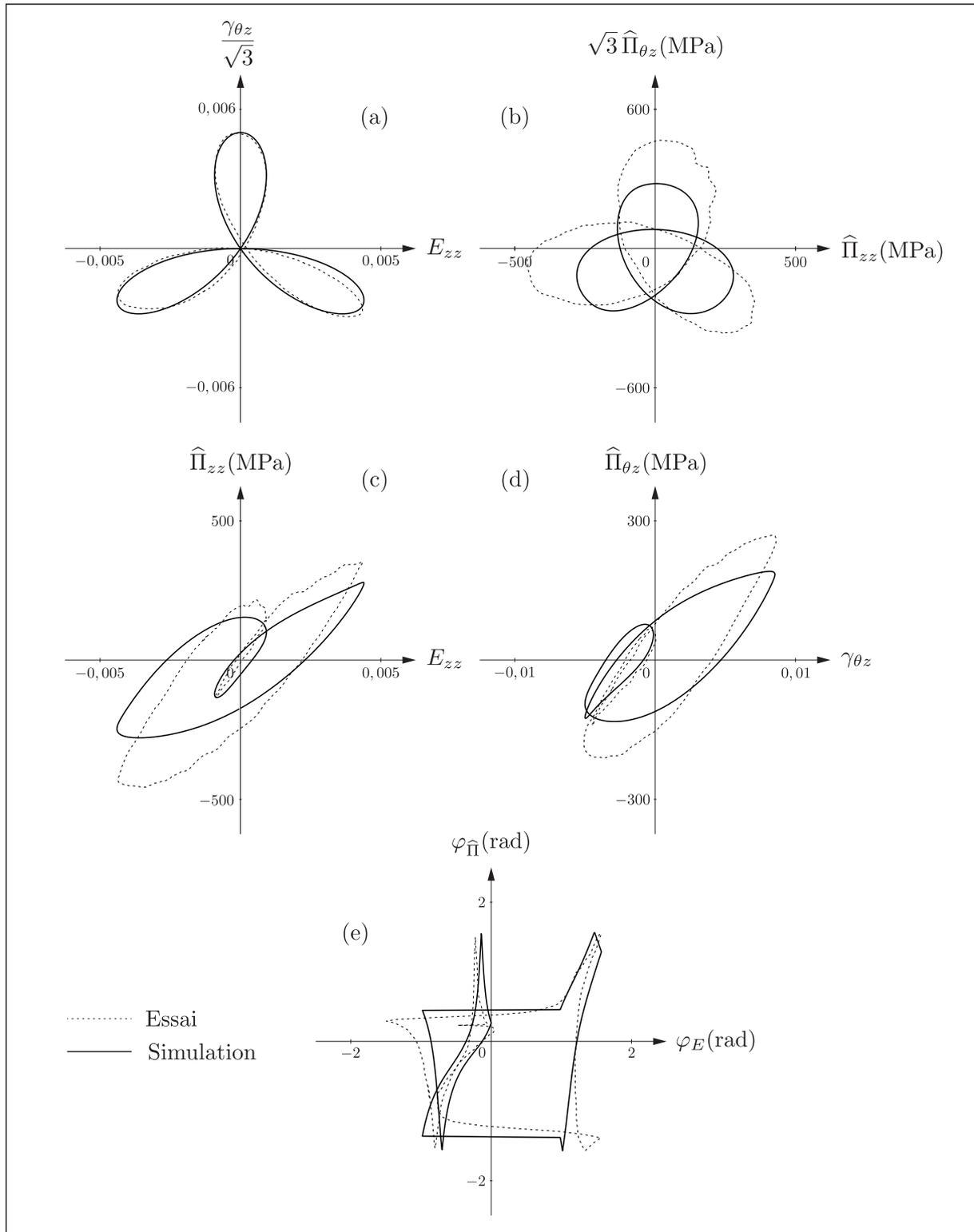


Fig. 5.7 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **trèfle à 3 pétales** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

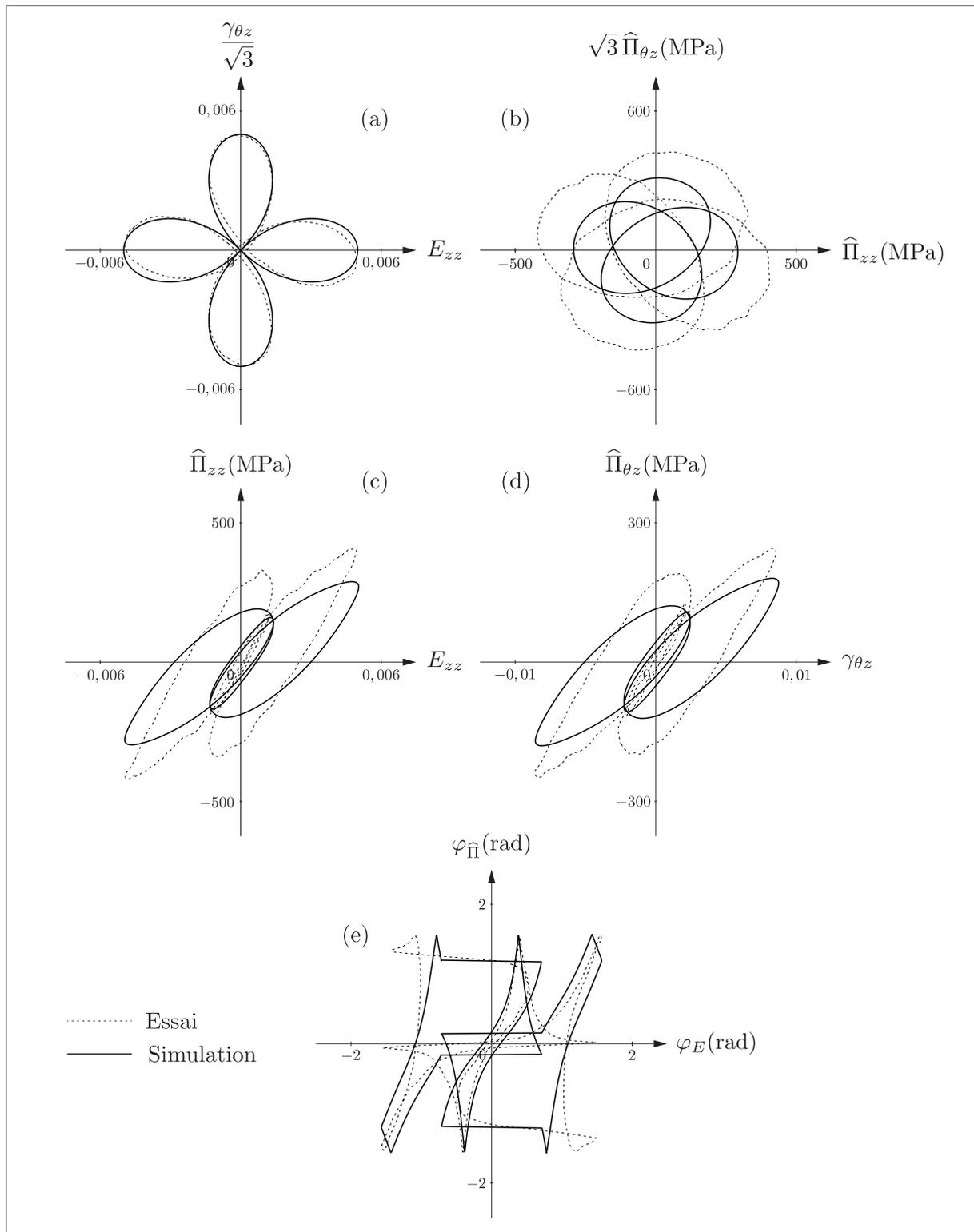


Fig. 5.8 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **trèfle à 4 pétales** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

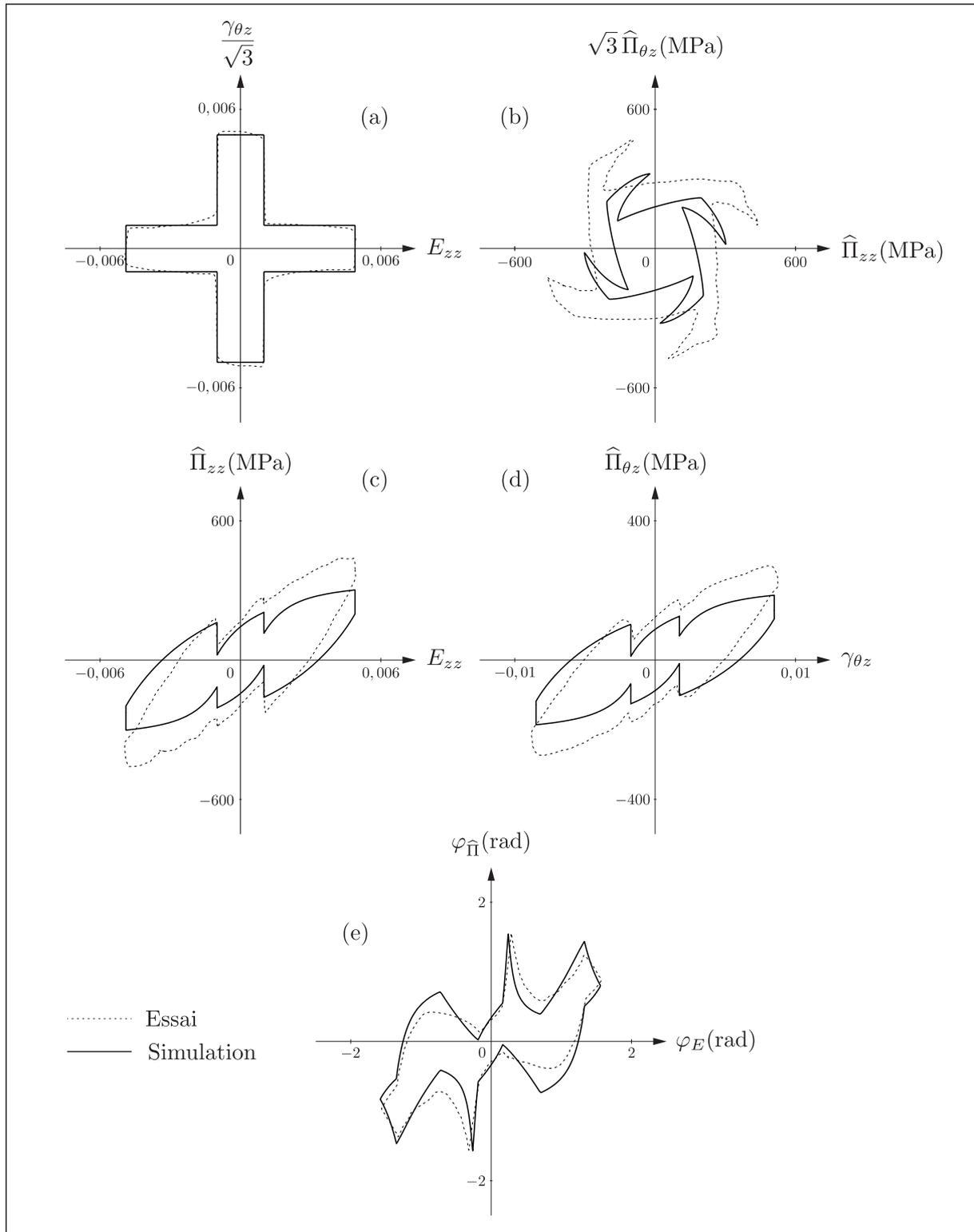


Fig. 5.9 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **croix numéro 1** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

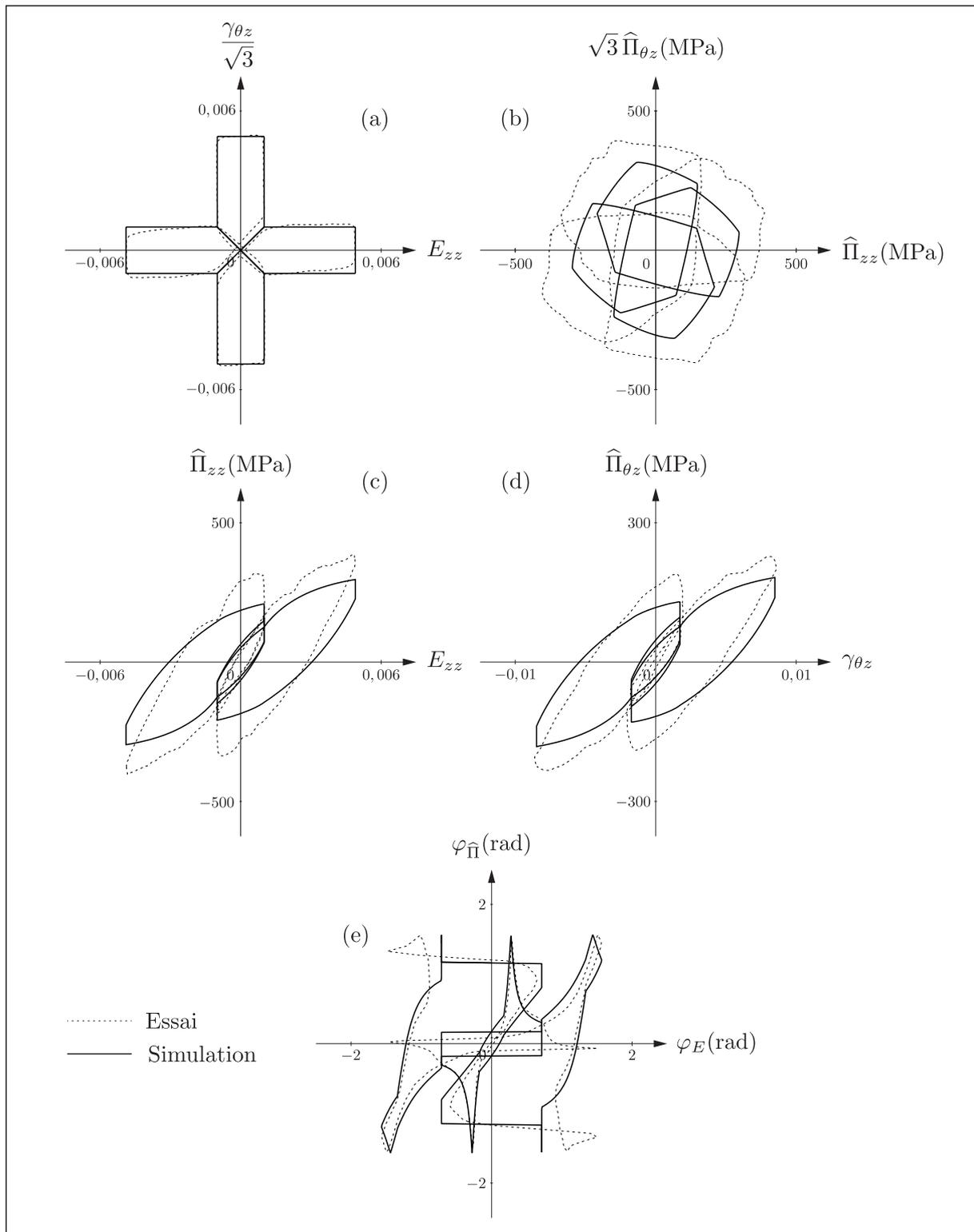


Fig. 5.10 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **croix numéro 2** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

travaux de [Tanaka *et al.* 1985], par exemple, évoqués au début du paragraphe 4.4, le seuil en contrainte du cycle stabilisé est sensible à la forme du trajet de chargement (figure 4.9) : c'est le phénomène d'érouissage cyclique en chargement non proportionnel (cf. § 2.4), appelé aussi phénomène de sur-érouissage cyclique [Calloch 1997], pour le différencier de l'érouissage cyclique sur les trajets proportionnels (§ 4.4). Le modèle SVG-HP 3D ne tient pas compte de l'érouissage cyclique. Par définition et comme son nom l'indique, c'est un modèle qui décrit un comportement d'hystérésis pure avec un seuil en contrainte constant, quel que soit le type de chargement. Il est donc cohérent d'observer une différence en contrainte entre les simulations et le comportement réel du matériau puisque le chargement en torsion, de nature unidimensionnelle, donne la valeur du seuil en contrainte du cycle stabilisé la plus faible relativement aux autres chargements de TTC.

Étude paramétrique On se propose dans ce paragraphe de réaliser une étude paramétrique afin de déterminer le seuil limite en contrainte du cycle stabilisé en fonction de la forme du trajet de chargement. Nous utilisons ainsi le modèle SVG-HP 3D comme un outil pour mesurer le seuil de saturation en fonction de la forme du trajet de chargement. Le seuil ainsi obtenu sera noté S_S au lieu de S_0 , le seuil initial identifié sur le cycle stabilisé en torsion. Le tableau 5.1 donne les valeurs du seuil de saturation S_S en cisaillement identifiées à l'aide du modèle SVG-HP 3D, ainsi que les valeurs correspondantes du seuil de saturation Y_S en traction, calculées en utilisant la relation 4.28 du chapitre 4.

Trajet de chargement	S_S MPa	Y_S MPa
Cercle, carré, hexagone et octogone	375,2	649
Sablier, trèfle à 3 et 4 pétales et croix 1	288,5	499
Croix 2	230,7	399

TABLE 5.1 – Valeurs des seuils de saturation S_S et Y_S en cisaillement et en traction, respectivement, selon le type de chargement non proportionnel.

Ainsi, dans le modèle SVG-HP 3D, nous remplaçons S_0 , le seuil initial, par S_S , le seuil de saturation, pour chacun des trajets. Les comparaisons des nouvelles simulations et des résultats expérimentaux de l'annexe A sont alors données sur les figures de 5.11 à 5.19.

Ces résultats montrent de façon plus évidente la pertinence du modèle SVG-HP 3D et ses capacités à prédire les propriétés génériques du comportement et ses manifestations complexes.

Notons aussi, concernant les trajets carré, hexagone et octogone dans le plan des contraintes (sous-figures (b) des figures 5.12 à 5.14), que l'écart observé précédemment dans l'orientation de la simulation dans le plan des contraintes, par rapport aux résultats expérimentaux, s'estompe avec la correction du seuil.

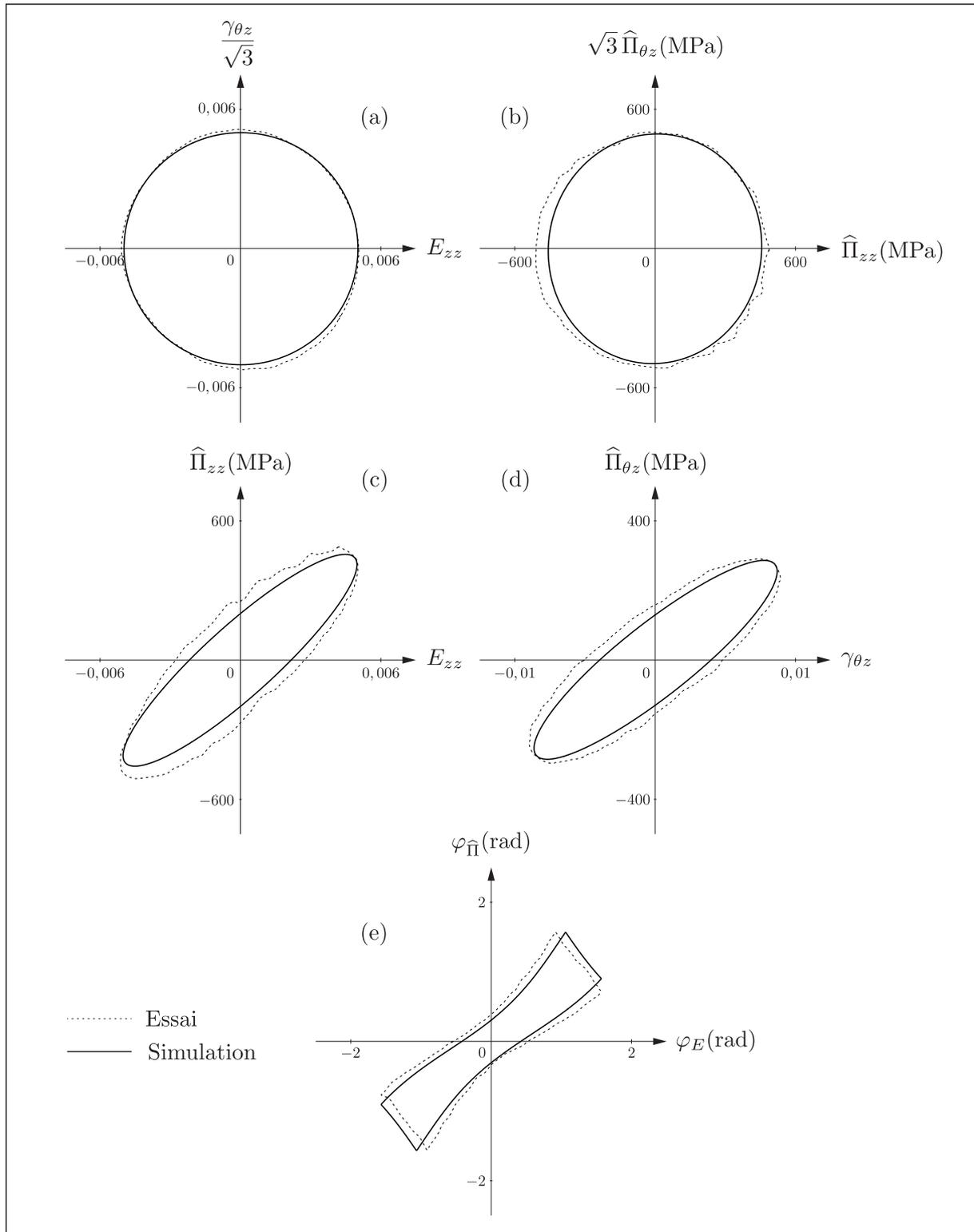


Fig. 5.11 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **cercle** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

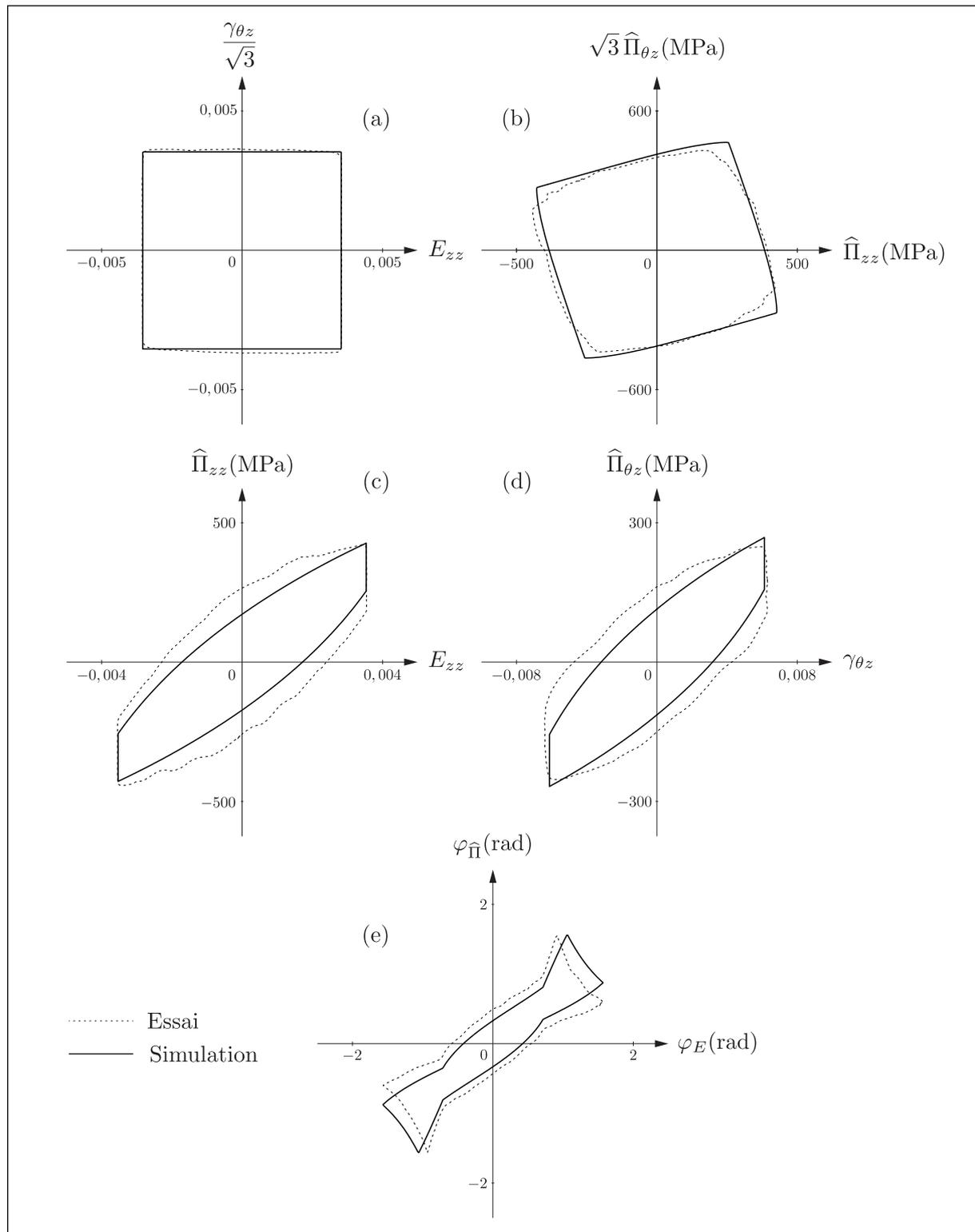


Fig. 5.12 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **carré** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

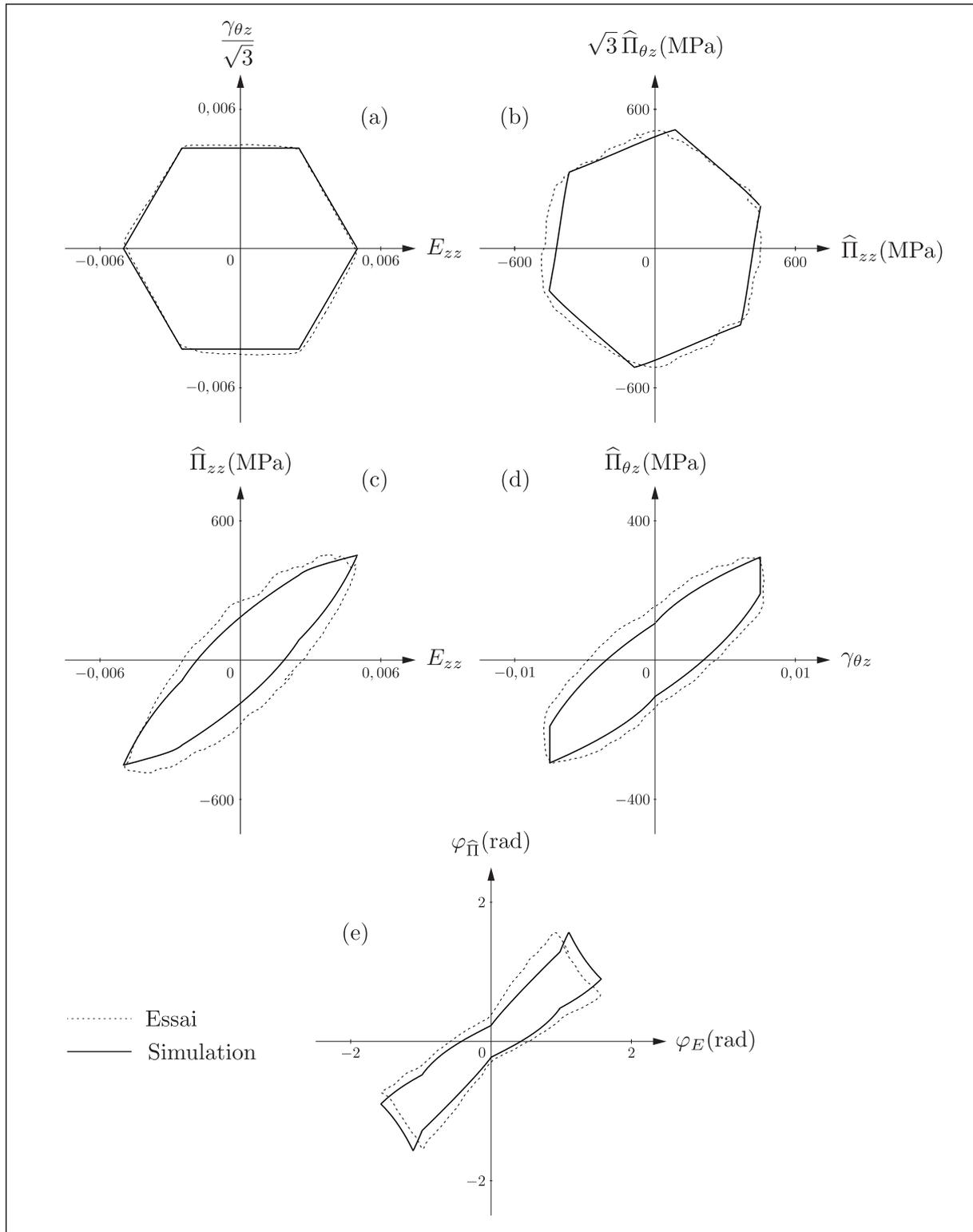


Fig. 5.13 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme d’**hexagone** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

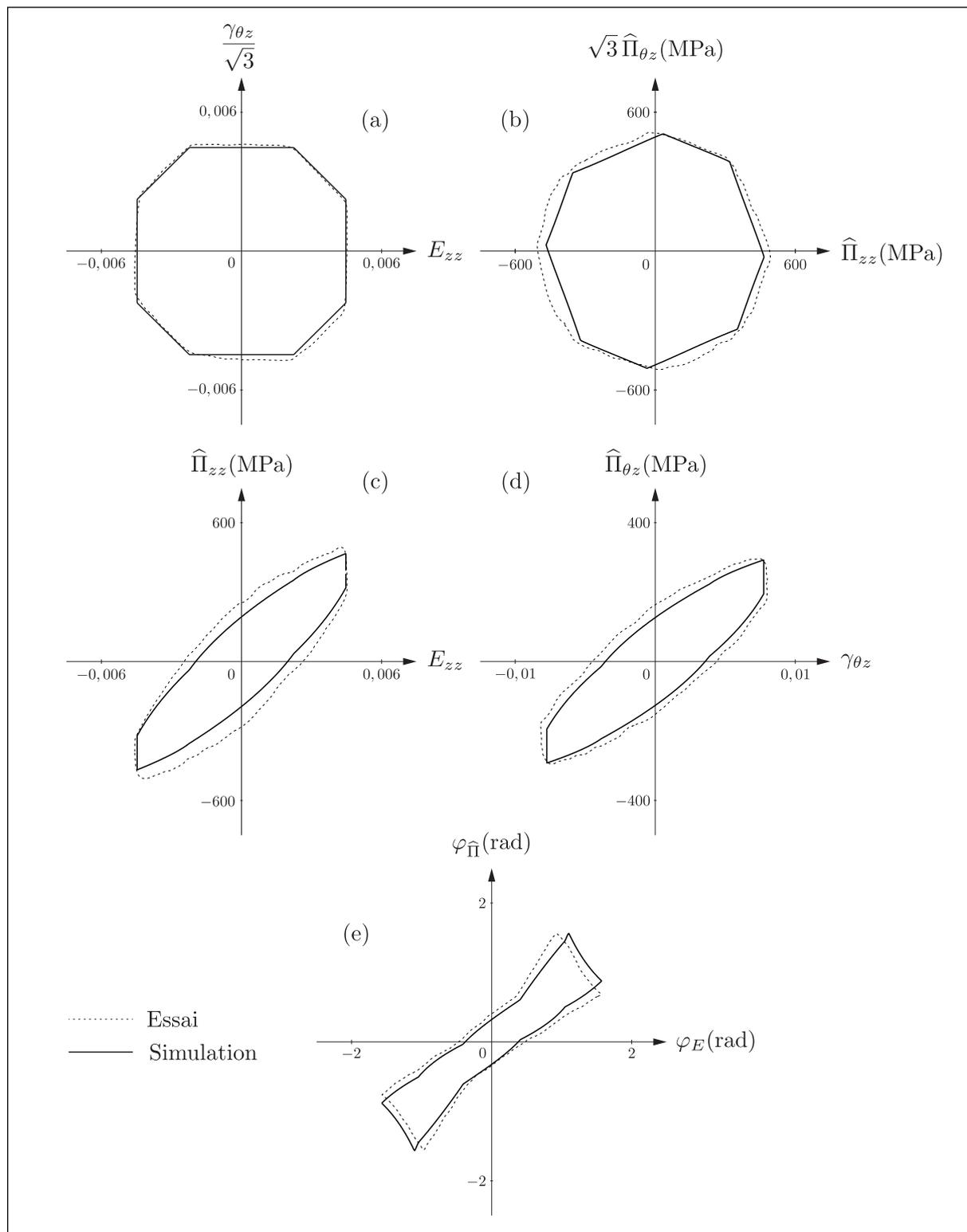


Fig. 5.14 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme d’**octogone** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

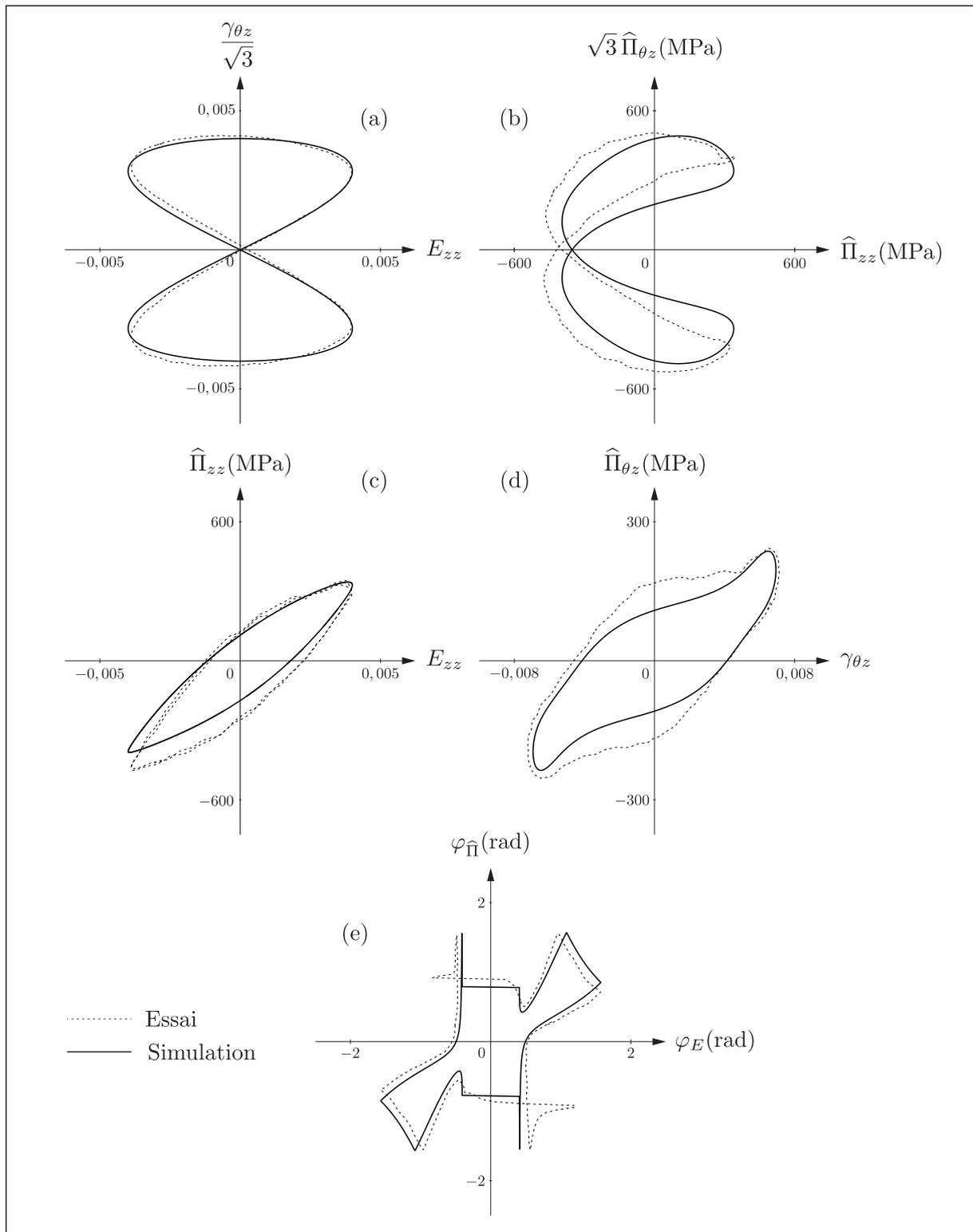


Fig. 5.15 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **sablier** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

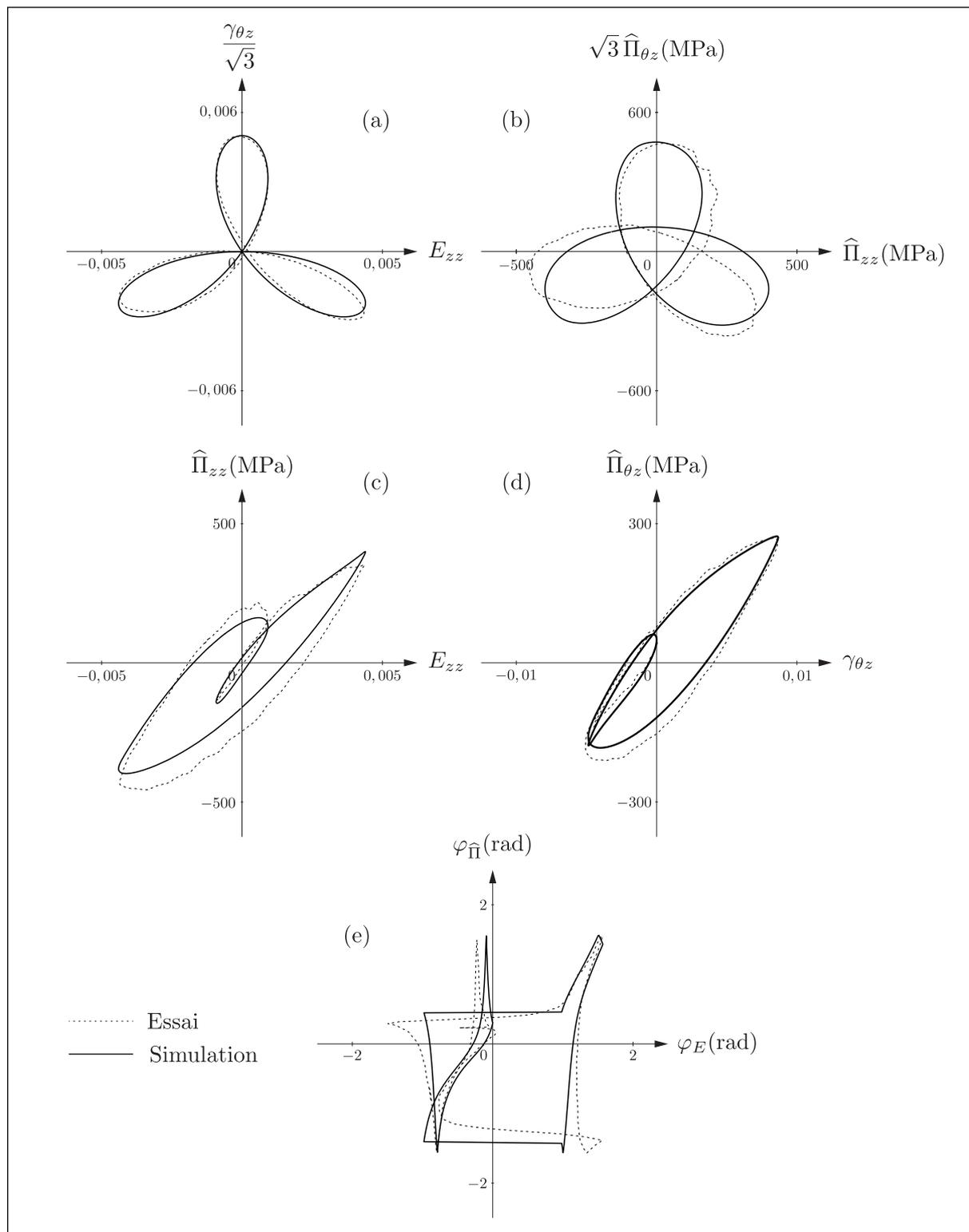


Fig. 5.16 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **trèfle à 3 pétales** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

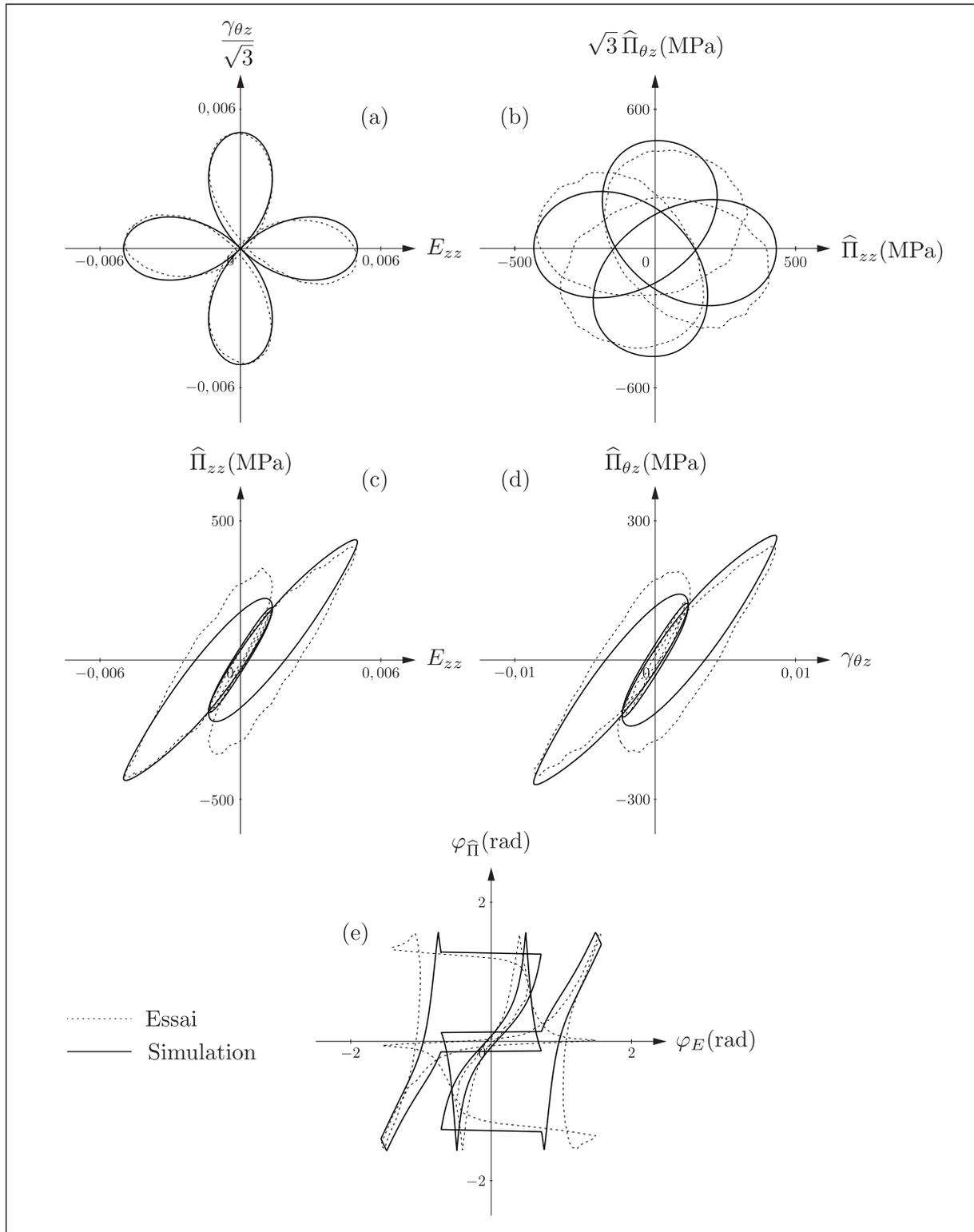


Fig. 5.17 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **trèfle à 4 pétales** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

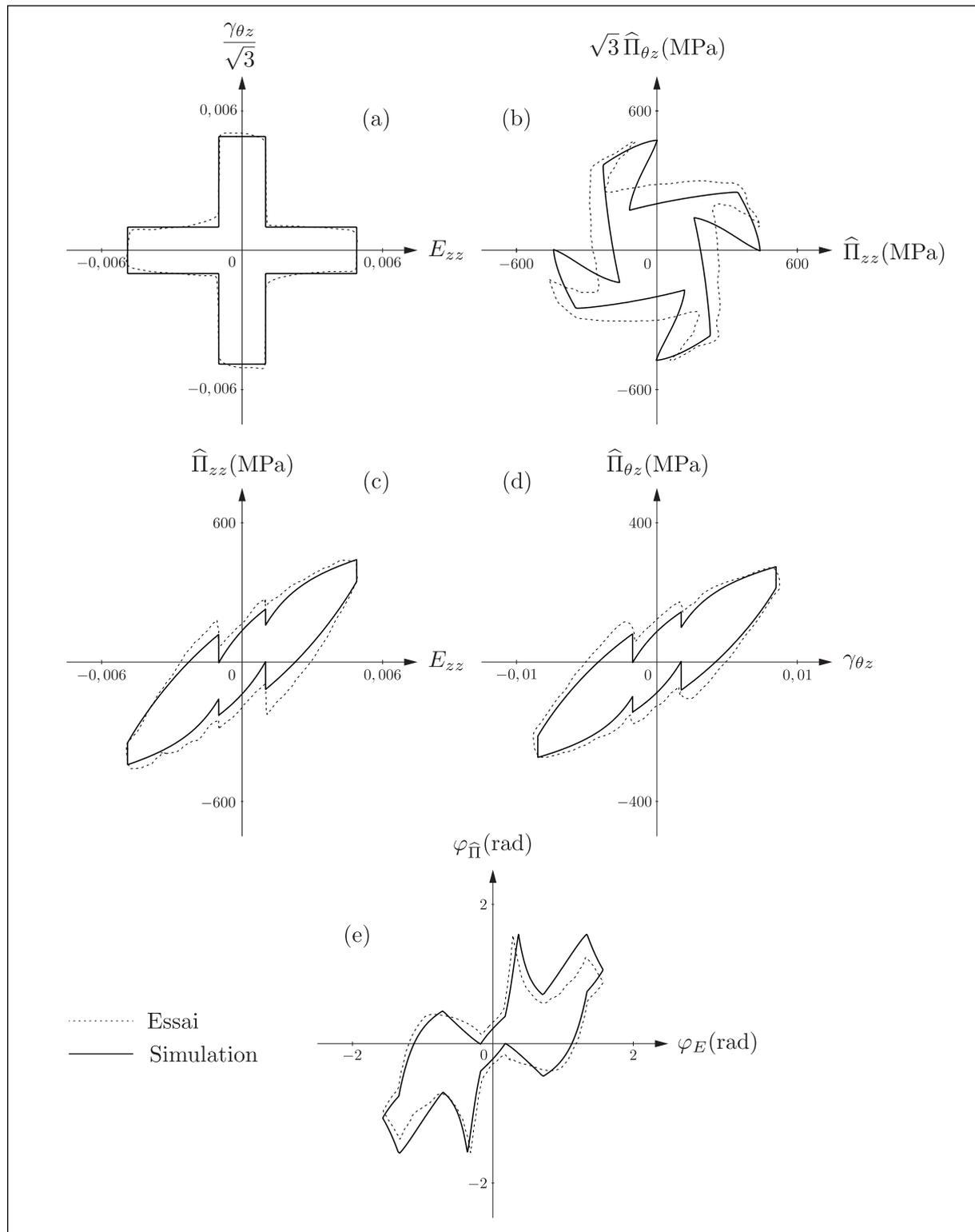


Fig. 5.18 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **croix numéro 1** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

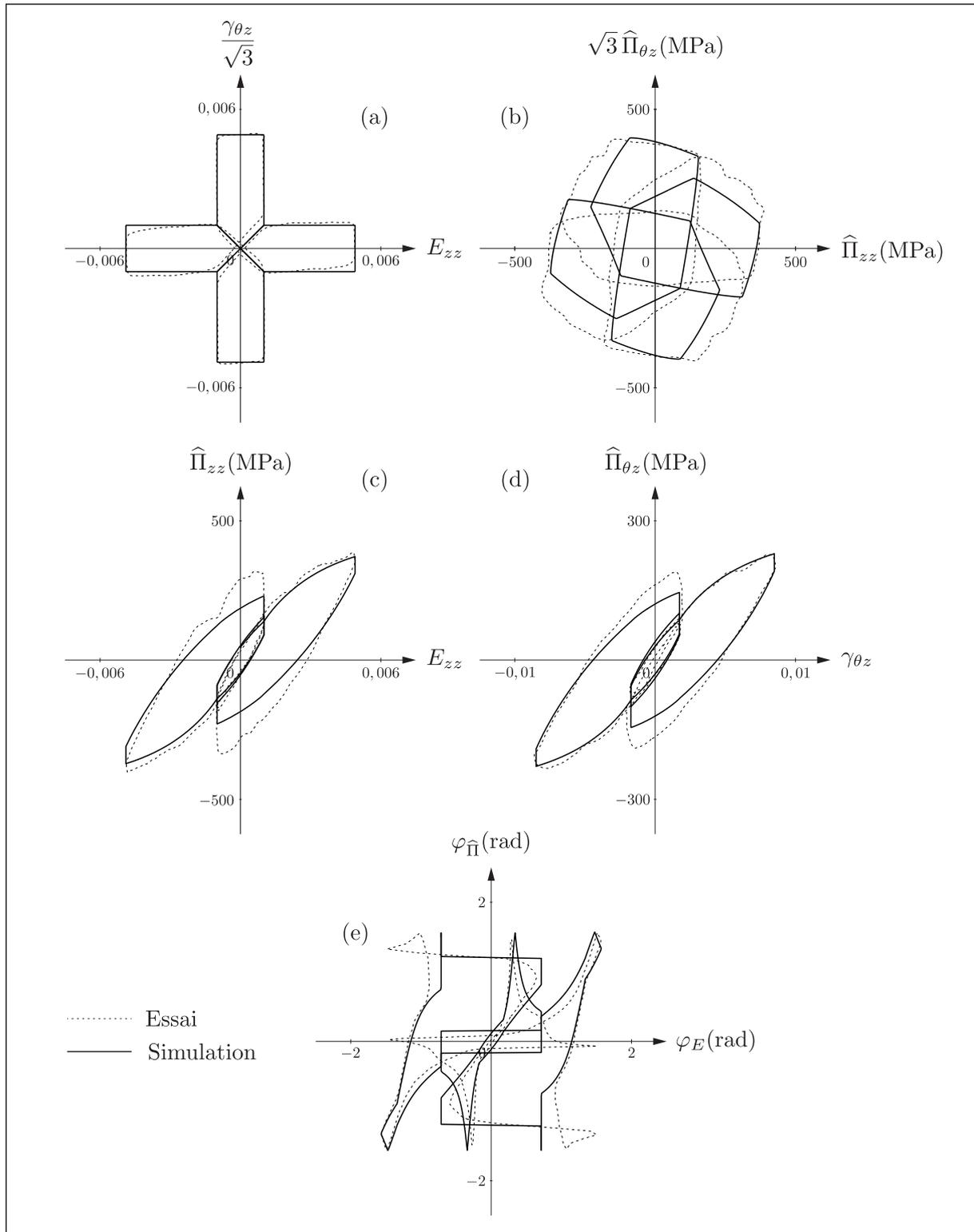


Fig. 5.19 – Comparaison expérience-simulation lors d’une sollicitation de traction-torsion combinée en trajet en forme de **croix numéro 2** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e).

5.3 Prédiction de l'effet Poynting-Swift

Le modèle SVG-HP 3D, à fermeture parfaite des cycles, développé dans le cadre du formalisme de grandes transformations, est capable de prédire les effets du second ordre de Poynting-Swift, observés dans le cas de la torsion alternée de tubes minces, à effort axial nul. Ce résultat est obtenu sans aucune équation dédiée ni paramètre d'ajustement supplémentaire (chapitre 4). Ce paragraphe se propose d'illustrer cet aspect et d'utiliser le modèle comme support pour analyser ce phénomène complexe.

Pour modéliser un tube en torsion et simuler numériquement l'effet Poynting-Swift, nous adoptons le modèle éléments finis axisymétrique présenté au paragraphe 5.1.

Pour l'ensemble des illustrations et simulations présentés dans ce paragraphe, nous adoptons un jeu de paramètres matériau correspondant à ceux d'un matériau métallique courant, tels que : $K = 164$ GPa, $G_0 = 75$ GPa, $G_\infty = 0,75$ GPa, $S_0 = 202$ MPa et $c = 2$. Ceci correspond encore à : $E = 197$ GPa, $\nu = 0,3$, $E_\infty = 2,25$ GPa, $Y_0 = 349$ MPa et $c = 2$ (cf. § 4.3).

5.3.1 Illustration de la prédiction de l'effet Poynting-Swift par le modèle SVG-HP 3D

Comme indiqué dans le paragraphe 2.5, l'effet Poynting-Swift se compose de deux effets : l'effet Poynting, réversible, et l'effet Swift, irréversible. Pour illustrer l'effet Poynting seul, considérons une loi élastique à la place de la loi élastoplastique de Saint-Venant généralisé. Dans ce cas, un chargement en torsion OAB tel que $\gamma_{\theta z} = \pm 0,04$ donne une courbe représentée sur la figure 5.20. On remarque que la courbe de première charge OA et la première moitié de la courbe de décharge AB sont parfaitement superposées. Aussi, la seconde moitié de la courbe de décharge AB est symétrique à la première moitié par rapport à l'axe des ordonnées : c'est l'effet réversible de Poynting seul. La forme typique de cet effet est illustrée expérimentalement sur les figure 2.13b et 2.13c. On notera également, sur la figure 5.20, que la déformation axiale est de l'ordre du carré de la déformation de torsion. En revenant à la loi élastoplastique du modèle SVG-HP 3D et en considérant le même chargement adopté précédemment, à la figure 5.20, nous obtenons la réponse décrite sur la figure 5.21. Nous pouvons faire plusieurs remarques. Premièrement, le niveau de déformation axiale obtenu en première charge OA est plus faible que celui atteint avec la loi purement élastique. Deuxièmement, après la première charge, à droite du point A, nous observons un comportement irréversible, au cours duquel la déformation axiale continue à croître et se cumule au cours de la branche de chargement AB. Là encore, dans ce cas irréversible, la déformation axiale est de l'ordre du carré de la déformation de torsion.

Il est important de noter que l'effet Poynting-Swift peut être caractérisé par différentes mesures de déformation. Sur la figure 5.22, trois mesures de déformation différentes issues du même calcul sont représentées.

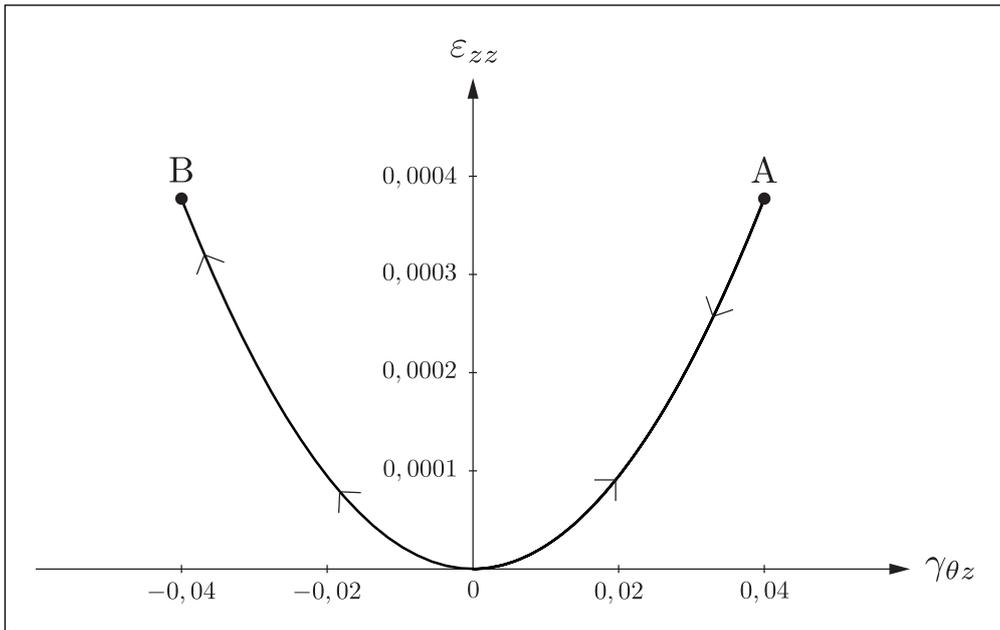


Fig. 5.20 – Effet Poynting seul mis en évidence avec une loi de comportement purement élastique dans le cas d'une première charge OA en torsion suivie d'une décharge AO et une recharge OB de même amplitude.

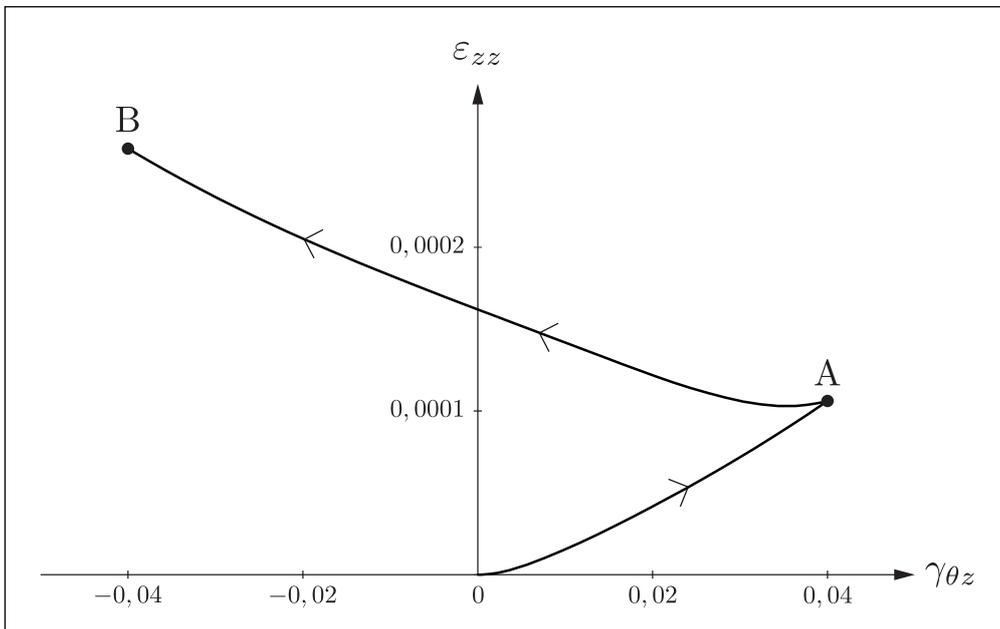


Fig. 5.21 – Effet Poynting-Swift mis en évidence avec la loi du modèle SVG-HP 3D dans le cas d'une première charge OA en torsion suivie d'une décharge AB.

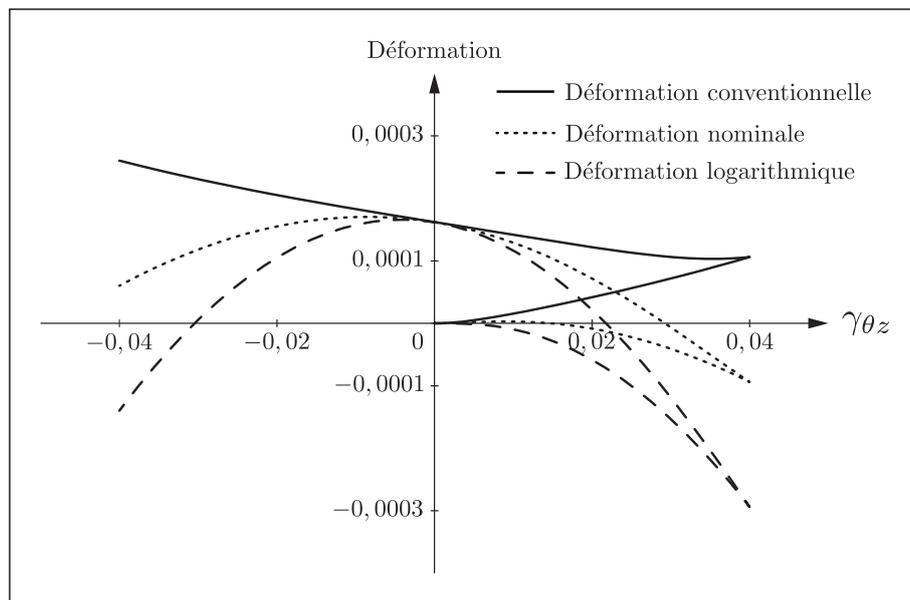


Fig. 5.22 – Caractérisation de l'effet Poynting-Swift par différentes mesures de déformation.

On remarque que, selon la déformation considérée, le sens de la courbure de la déformation axiale diffère. Ainsi, on portera une attention particulière lorsqu'il s'agira de comparer des résultats expérimentaux avec des résultats de simulation. Plus particulièrement, les expérimentateurs utilisent la déformation dite conventionnelle, définie par la relation 5.1. On s'attachera alors à calculer la même déformation à partir des modèles éléments finis.

Pour analyser le comportement du modèle, nous nous intéressons aux essais présentés dans [Wack 1989]. En appliquant les mêmes conditions de chargement que celles utilisées au cours de ses essais numérotés 206 et 208, nous obtenons les réponses présentées aux figures 5.23 et 5.24. Sur la première figure, la réponse n'est pas stabilisée sur le troisième palier de déformation, ce qui est conforme aux résultats illustrés sur la figure 2.15. La comparaison des résultats expérimentaux, présentés sur les figures 2.15 et 2.16 avec les simulations présentées sur les figures 5.23 et 5.24, respectivement, montre que le modèle sous estime la valeur de l'effet réversible de Poynting. Quant à l'effet de cumul irréversible de Swift, le résultat expérimental (figure 2.15) montre une déformation axiale cumulée de 6.10^{-4} , contre 4.10^{-4} pour le résultat de modélisation présenté sur la figure 5.23. Sur la figure 5.24, le modèle prévoit une saturation de la déformation axiale, sur le troisième palier de déformation, tandis que les expériences montrent une augmentation continue de celle-ci. Ainsi, la déformation axiale calculée est de l'ordre de 7.10^{-4} , après les deux paliers de déformation et neuf cycles sur le grand palier, contre une déformation axiale de 15.10^{-4} mesurée au cours de l'essai (figure 2.16).

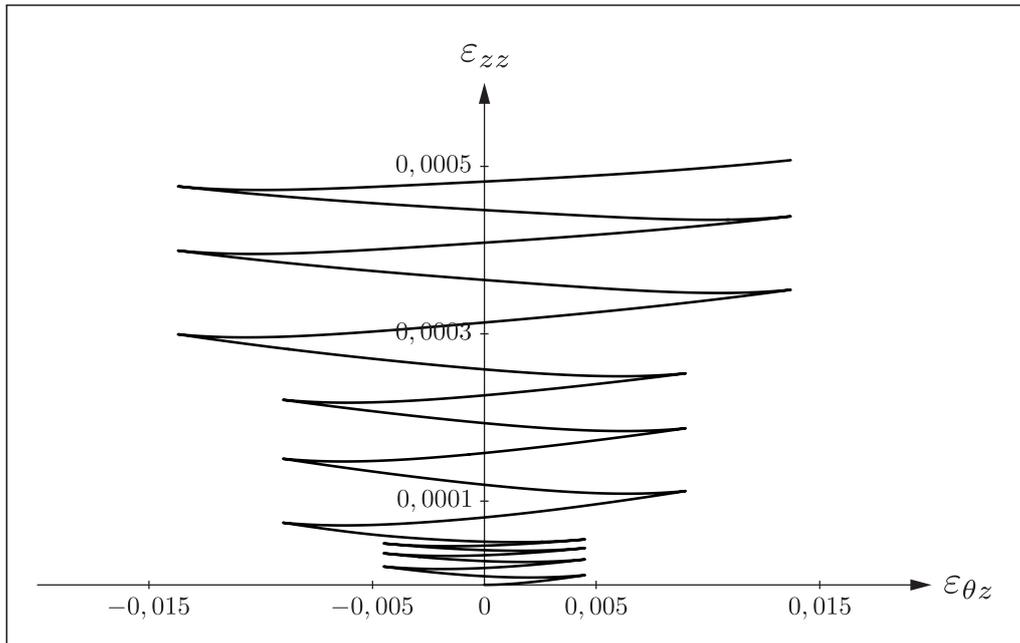


Fig. 5.23 – Réponse du modèle SVG-HP 3D à un chargement similaire à celui adopté par [Wack 1989] dans l'essai 206 (cf. figure 2.15 page 34).

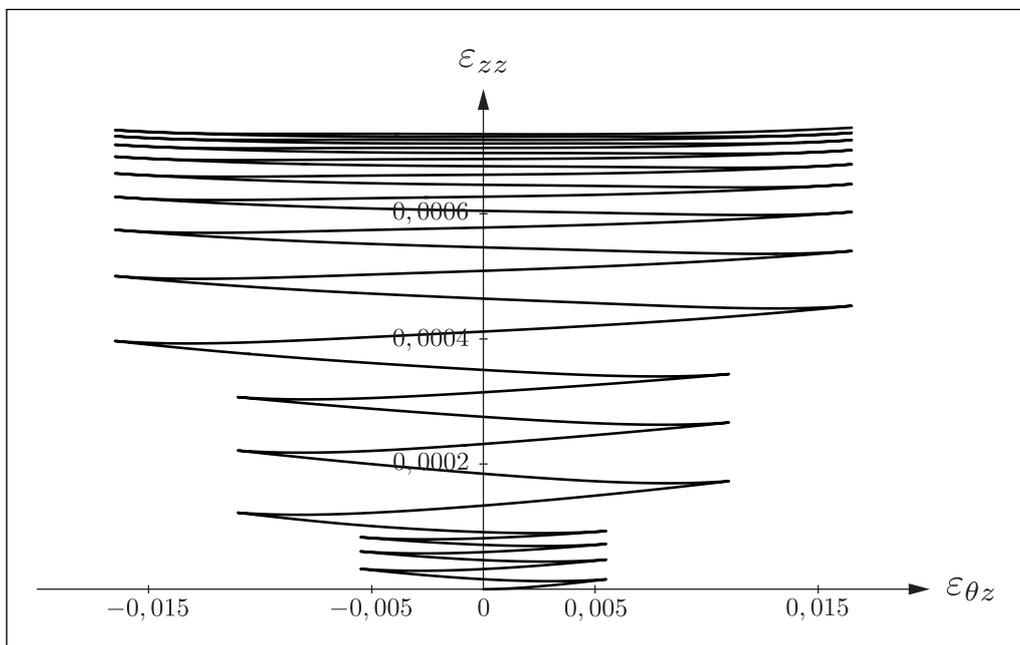


Fig. 5.24 – Réponse du modèle SVG-HP 3D à un chargement similaire à celui adopté par [Wack 1989] dans l'essai 208 (cf. figure 2.16 page 34).

5.3.2 Analyse de l'effet Poynting-Swift avec le modèle

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, d'utiliser le modèle SVG-HP 3D comme un outil heuristique pour analyser l'effet complexe de Poynting-Swift et tenter de lui apporter une interprétation.

Pour cela, considérons un chargement de torsion d'un tube à effort axial nul, de sorte que le tenseur de contrainte soit de la forme donnée à l'équation 5.6. Les axes choisis sont les suivants ; l'axe 1 est le long de la circonférence θ du tube, l'axe 2 est le long de l'axe z et l'axe 3 est radial au tube (figure 5.25). Ainsi, la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orientée selon les axes cylindriques. Appelons b , le référentiel lié à la base (\vec{e}_i) .

$$\text{Mat } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{(\vec{e}_i)} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Lors de ce chargement de torsion, nous supposons que le référentiel corotationnel de Jaumann j tourne par rapport au référentiel de base b d'un angle α_j , comme dans le cas d'un cisaillement simple, et comme illustré sur la figure 5.25.

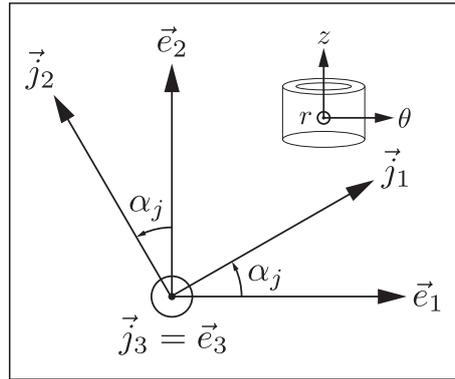


Fig. 5.25 – Rotation du référentiel corotationnel j par rapport au référentiel fixe b .

La rotation entre le référentiel j et le référentiel b est caractérisée par le tenseur de rotation $\tilde{\mathbf{R}}^{bj}$, dont les composantes sont :

$$\text{Mat } \tilde{\mathbf{R}}^{bj}_{(\vec{e}_i)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j & 0 \\ \sin \alpha_j & \cos \alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

La contrainte observée depuis le référentiel de Jaumann en rotation est définie par la relation suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^j = \tilde{\mathbf{R}}^{bjT} \circ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \circ \tilde{\mathbf{R}}^{bj} \quad (5.8)$$

Ainsi, on a :

$$\text{Mat } \tilde{\sigma}^{\setminus j}_{(\tilde{e}_i)} = \tau \begin{pmatrix} \sin 2\alpha_j & \cos 2\alpha_j & 0 \\ \cos 2\alpha_j & -\sin 2\alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

et en considérant la notation de Voigt Modifiée (relation B.4 de l'annexe B), on obtient :

$$\text{Col } \tilde{\sigma}^{\setminus j}_{(\tilde{E}_i)} = \tau \begin{pmatrix} \sin 2\alpha_j \\ -\sin 2\alpha_j \\ 0 \\ \sqrt{2} \cos 2\alpha_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

où $\tilde{\mathbf{E}}_i$ est la base de l'espace \mathbf{S} , définie par la relation B.5. A partir des deux premiers tenseurs $\tilde{\mathbf{E}}_1$ et $\tilde{\mathbf{E}}_2$ de la base $\tilde{\mathbf{E}}_i$, nous définissons un seul tenseur $\tilde{\mathbf{K}}$ tel que :

$$\tilde{\mathbf{K}} = \frac{\tilde{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\mathbf{E}}_2}{\sqrt{2}} \quad (5.11)$$

et :

$$\text{Mat } \tilde{\mathbf{K}}_{(\tilde{e}_i)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

où $\tilde{\mathbf{K}}$ est un tenseur du second ordre, symétrique, orthogonal au quatrième tenseur $\tilde{\mathbf{E}}_4$ de la base $\tilde{\mathbf{E}}_i$ et de norme 1, de sorte que la contrainte observée depuis le référentiel de Jaumann soit définie par deux composantes uniquement dans la base $(\tilde{\mathbf{E}}_4, \tilde{\mathbf{K}})$:

$$\tilde{\sigma}^{\setminus j} = \tau\sqrt{2} \left((\cos 2\alpha_j) \tilde{\mathbf{E}}_4 + (\sin 2\alpha_j) \tilde{\mathbf{K}} \right) \quad (5.13)$$

Si l'on adopte la notation vectorielle (\vec{E}_4, \vec{K}) pour représenter les tenseurs $(\tilde{\mathbf{E}}_4, \tilde{\mathbf{K}})$, introduite au paragraphe 4.1.2, cette écriture permet de représenter la contrainte observée depuis le référentiel corotationnel j dans un plan comme illustré sur la figure 5.26. Le plan (\vec{E}_4, \vec{K}) ainsi défini correspond à une coupe de l'espace à six dimensions \mathbf{S} et peut être assimilé à l'équivalent du plan déviatoire classique bidimensionnel, où l'axe \vec{E}_4 représente le cisaillement et l'axe \vec{K} représente la traction ou la compression.

En cisaillement simple, l'angle de rotation du référentiel j se déduit de la distorsion par la relation suivante (cf. annexe D) :

$$\alpha_j = -\frac{\gamma}{2} \quad (5.14)$$

La contrainte de cisaillement τ évolue aussi en fonction de la distorsion γ et donc de la rotation α_j . La figure 5.27 illustre le comportement cyclique en torsion et définit la

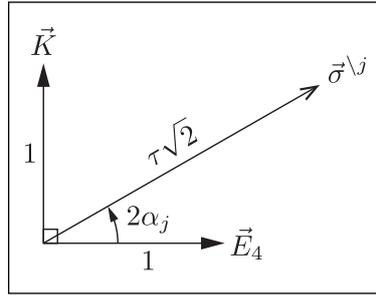


Fig. 5.26 – Plan de représentation (\vec{E}_4, \vec{K}) de la contrainte $\tilde{\sigma}^j$ observée depuis le référentiel corotationnel j .

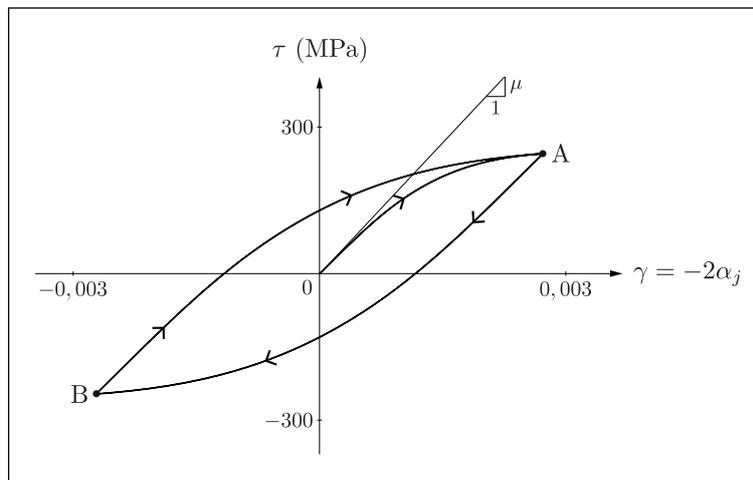


Fig. 5.27 – Comportement d'hystérésis pure à fermeture parfaite des cycles en cisaillement sans écrouissage cyclique.

relation entre la contrainte de cisaillement τ et la distorsion γ . Nous considérons ici un comportement élastoplastique parfait sans écrouissage cyclique.

En considérant les relations 5.13, 5.14 et le comportement d'hystérésis pure en cisaillement défini sur la figure 5.27, le trajet de cisaillement cyclique OABA dans le plan (\vec{E}_4, \vec{K}) décrit une forme caractéristique que nous nommons trajet "papillon", illustré sur la figure 5.28.

Ce trajet papillon est la conséquence directe de l'utilisation de la dérivée de Jaumann dans le modèle SVG-HP 3D. Nous avons implémenté ce trajet papillon dans l'outil heuristique 2D de Saint-Venant généralisé, piloté en contrainte (cf. §4.2.2). La réponse en déformation du modèle est illustrée dans le plan (\vec{E}_4, \vec{K}) de la déformation, sur la figure 5.29.

Nous constatons que la réponse en déformation présente un effet Poynting-Swift qui évolue vers $-\vec{K}$. Au vu de la relation 5.12 et du choix des axes \vec{e}_1 et \vec{e}_2 défini sur la figure 5.25, cela implique que la déformation axiale $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{zz}$ évolue positivement, on en déduit

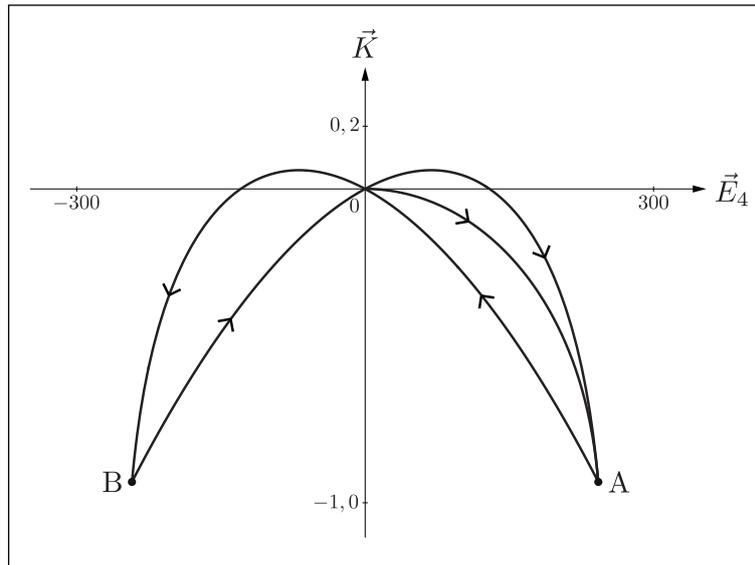


Fig. 5.28 – Trajet papillon résultant de la rotation de Jaumann dans le cas d'un essai de torsion à effort axial nul - représentation dans le plan 2D de la contrainte $\tilde{\sigma}^{\vee j}$.

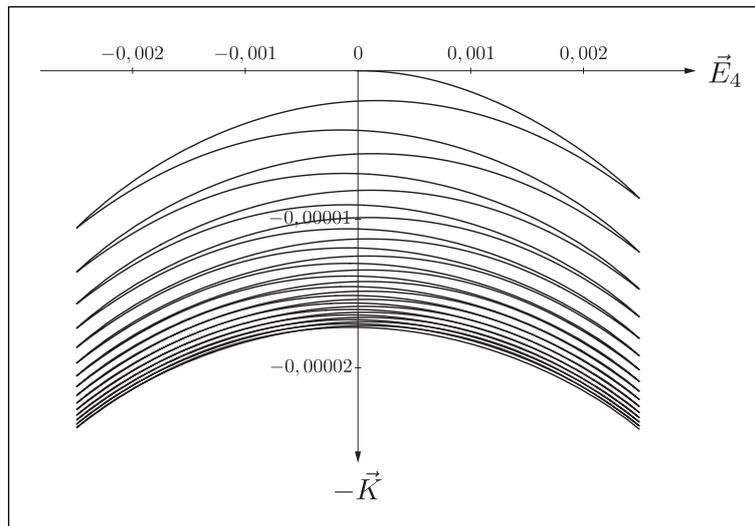


Fig. 5.29 – Réponse en déformation du modèle soumis à 15 cycles du trajet papillon en contrainte représenté sur la figure 5.28 - représentation dans le plan 2D de la déformation.

donc un allongement axial irréversible du tube, soumis à la torsion avec un effort axial nul. Nous remarquons également que l'effet semble se diriger vers une saturation. Aussi, nous retrouvons l'ordre de grandeur caractéristique du rochet de torsion, soit une déformation axiale de l'ordre du carré de la déformation de torsion.

La figure 5.30 présente l'évolution des centres des cercles du modèle, dans l'espace des déformations, lors d'un chargement cyclique en contrainte au cours d'un trajet papillon.

Le trajet papillon en contrainte présente une concavité orientée dans la direction $-\vec{K}$. Ceci amène également une concavité du trajet en déformation dans la même direction. Cette concavité du trajet de déformation dans le plan déviatoire a pour effet de déplacer globalement les centres des cercles du modèle vers le centre de cette concavité, donc dans la direction $-\vec{K}$. Les centres des cercles sont les déformations plastiques du modèle. Ainsi, lors d'une torsion cyclique de tube à effort axial nul, une déformation plastique se développe dans la direction $-\vec{K}$. Ceci conduit à l'effet Poynting-Swift, c'est-à-dire à une déformation axiale positive irréversible du tube et une réduction de son diamètre.

Par conséquent, selon notre analyse du modèle lors de la torsion cyclique d'un tube à effort axial nul, l'effet Poynting-Swift trouve son origine dans les deux effets couplés suivants :

Rotation de la matière La torsion du tube amène localement un cisaillement de la matière qui est accompagné d'une rotation de celle-ci. Cette rotation est ici prise en compte par la dérivée objective de Jaumann. Nous avons montré que cela conduit à un trajet en contrainte déviatoire assez particulier, que nous avons désigné par **trajet papillon**, avec notamment une concavité dans la direction de la composante de déformation axiale du tube (direction $-\vec{K}$).

Règle d'écoulement La concavité du trajet en contrainte amène une concavité similaire du trajet en déformation. Cette concavité conjuguée à la règle d'écoulement NFR du modèle développent une déformation plastique axiale positive du tube qui se cumule au cours du chargement cyclique.

Ainsi pour conclure notons que sans la rotation de la matière, la courbure du trajet en contrainte n'existerait pas et celle de la réponse en déformation, non plus. Sans cette courbure, aucune déformation axiale plastique ne peut se développer, ni se cumuler. Ceci traduit l'importance du choix de la dérivée objective à adopter pour décrire le comportement. Par ailleurs, ceci révèle clairement l'importance de la description du phénomène de rochet du second ordre, qui apparaît en effet comme un test sévère pour les lois de comportement élastoplastique cyclique indépendant du temps, mais apparaît aussi comme un guide précieux pour produire une modélisation pertinente par rapport à la réalité physique (cf. § 1.1, point b). Ainsi, une perspective prometteuse à notre travail apparaît et consiste à étudier l'influence du choix de la dérivée objective, afin de distinguer un meilleur choix que celui de la dérivée corotationnelle de Jaumann, adoptée dans le cadre de notre travail et qui a permis d'obtenir un résultat qualitativement très encourageant (cf. § 4.1.1, hypothèse 4).

Avec un choix pertinent de dérivée objective et la production d'une courbure dans le plan déviatoire de la contrainte, du type « papillon », il est possible qu'un autre modèle élastoplastique puisse manifester une déformation plastique axiale qui se cumule, et donc produire un effet de Poynting-Swift. Cependant, il nous semble que l'apparition de cet effet

est fortement liée à la nature même et à la définition de notre modèle. En effet, la nature multisurface du modèle joue un rôle important dans l'apparition de ce phénomène, par le déplacement des centres des surfaces seuil. D'autre part, le choix de la règle d'écoulement NFR, associée à ce modèle, joue un rôle central à l'origine de ce phénomène. Néanmoins, en partant de cette dernière conclusion, la définition des critères portant sur la définition d'une règle d'écoulement donnée, garantissant l'apparition d'un effet Poynting-Swift conforme au comportement réel, n'est pas aisée à établir (cf. § 1.1, point c).

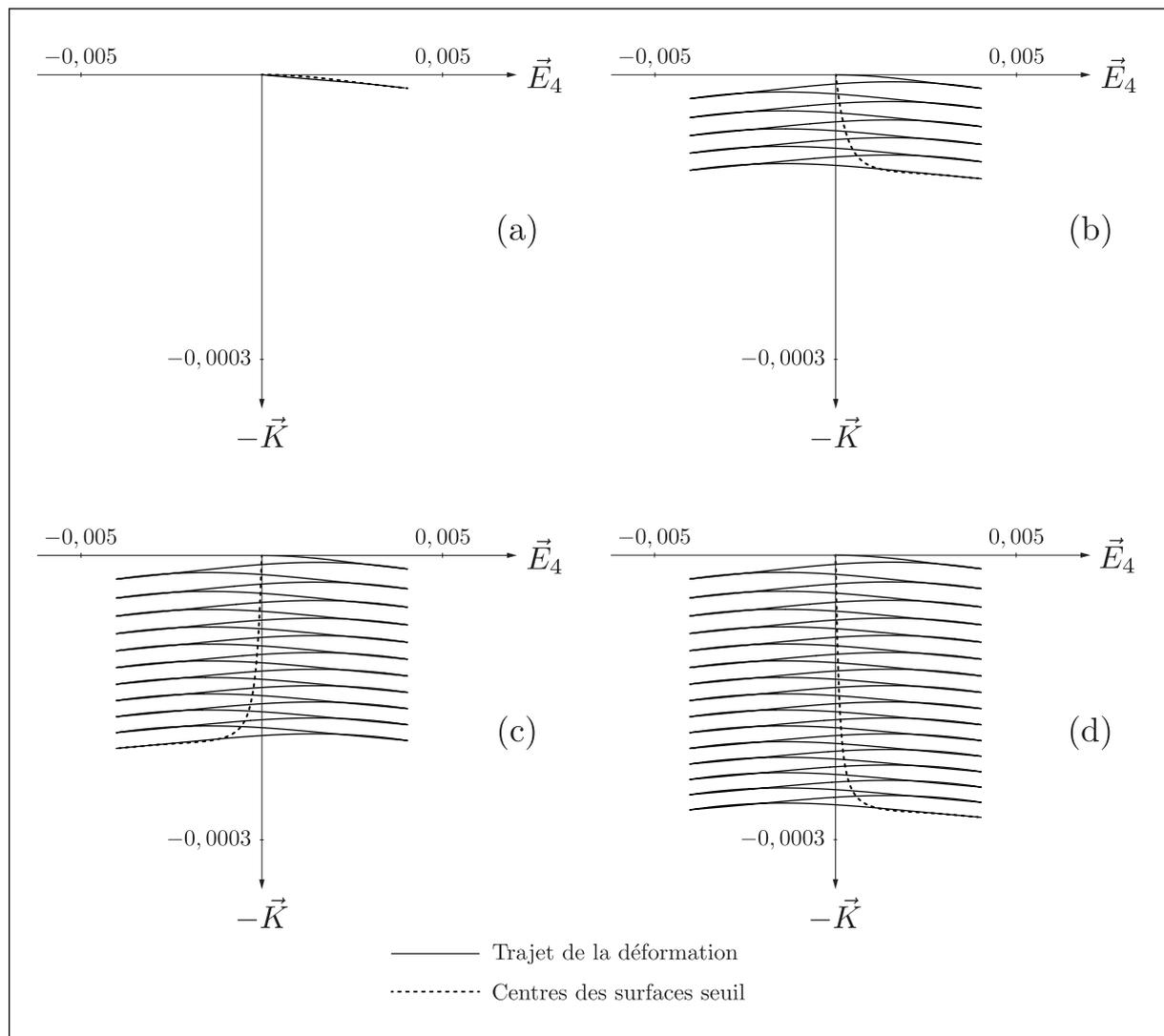


Fig. 5.30 – Réponse en déformation du modèle soumis à une première charge du trajet papillon en contrainte (a), après 5 cycles (b), après 10,5 cycles (c) et après 15 cycles (d). L'évolution des centres des cercles du modèle est représentée en pointillé.

5.4 Résultats typiques de calcul de structure

5.4.1 Validation du modèle axisymétrique de traction-torsion combinées

Pour la simulation des essais de TTC, nous avons adopté au paragraphe 5.1 un modèle élément finis axisymétrique 2D. L'objectif ici est de valider ce modèle. Pour cela, nous proposons de comparer les prévisions d'un modèle éléments finis axisymétrique 2D d'une éprouvette de TTC avec celles d'un modèle éléments finis volumiques 3D d'une éprouvette entière de TTC. Pour cette comparaison, nous utilisons le modèle SVG-HP 3D, sans écrouissage cyclique, à fermeture parfaite des cycles. Les valeurs des paramètres matériau adoptées sont celles de la relation A.11. Les valeurs des trois paramètres accessoires supplémentaires, liés à la nature discrète du modèle, sont : $n = 50$ (relation 3.1), $x = 0,005$ (relation 3.14) et $\alpha = 1$ (relation 3.16). La figure 5.31 montre les deux modèles éléments finis adoptés pour cette comparaison. Le modèle axisymétrique 2D, de la figure 5.31a, est composé de 479 éléments axisymétriques généralisés quadrangulaires linéaires à 4 nœuds (élément Abaqus CGAX4), où les nœuds ont trois degrés de liberté : le déplacement radial u_r , le déplacement axial u_z et l'angle de torsion ϕ .

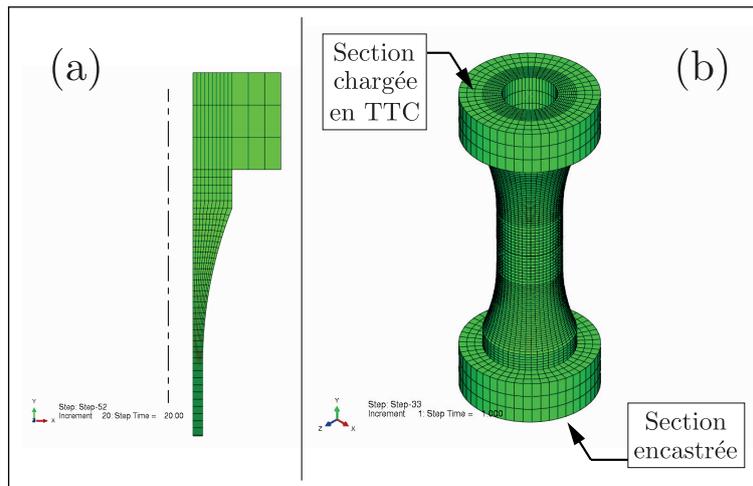


Fig. 5.31 – Modèle éléments finis axisymétrique 2D d'une demi éprouvette de TTC (a) et modèle élément finis 3D d'une éprouvette entière de TTC (b).

Le modèle 3D, de la figure 5.31b, est composé de 50900 éléments hexaédriques linéaires à 8 nœuds classiques (élément Abaqus C3D4). Le chargement de TTC est appliqué au niveau des deux surfaces supérieure et inférieure des mors de l'éprouvette, comme le montre la figure 5.31b. Une des deux surfaces est encastree; sur la seconde surface, on impose un déplacement axial et une rotation autour de l'axe de l'éprouvette (figure 5.31b).

De la même manière, sur l'éprouvette TTC axisymétrique 2D, de la figure 5.31a, le bord inférieur correspond à un plan de symétrie, où le déplacement $u_z = 0$ ainsi que la

rotation $\phi = 0$ et on impose au niveau de la surface supérieure du mors de l'éprouvette un déplacement axial u_z et une rotation ϕ , avec un déplacement radial $u_r = 0$.

La figure 5.32 donne la comparaison des réponses du modèle éléments finis axisymétrique 2D et du modèle éléments finis 3D au cours d'un chargement de TTC défini par la figure 5.32a. Ce chargement est défini dans le plan du déplacement axial et de la rotation relatifs des mors. Il est constitué d'une première charge Oa, de 6 cycles abcdea et, pour le modèle axisymétrique seul, d'une décharge aO, vers zéro.

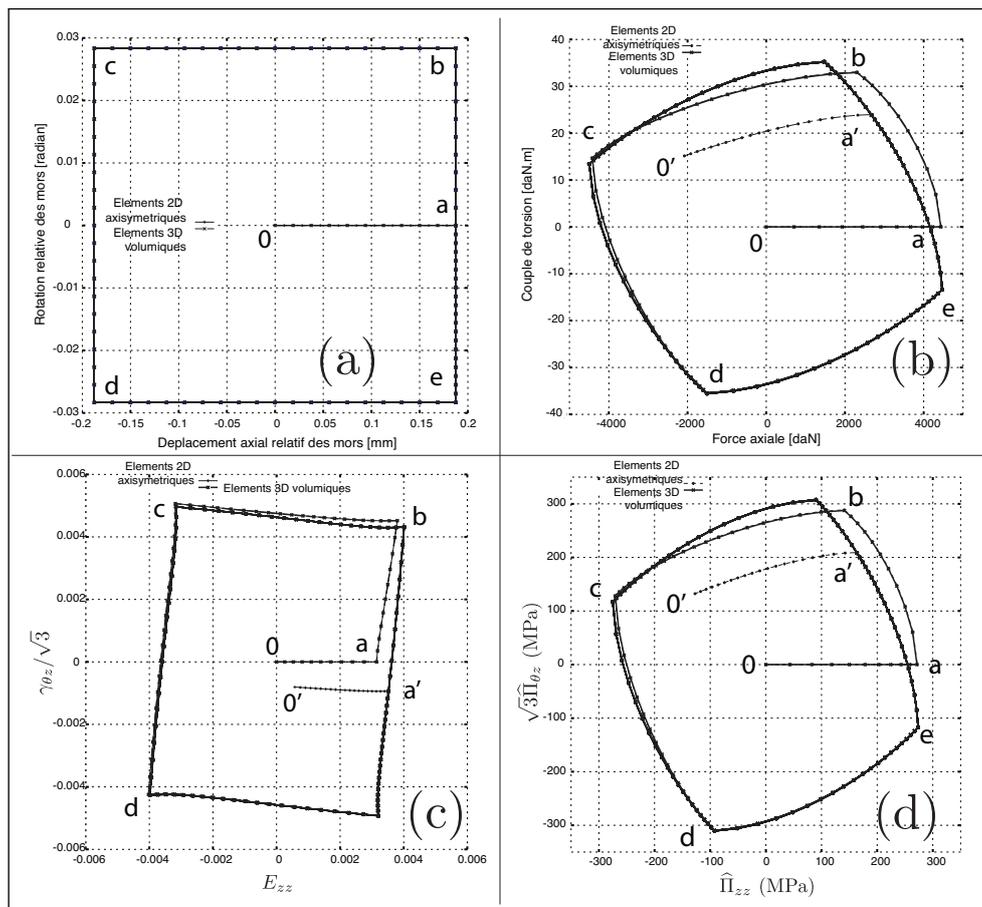


Fig. 5.32 – Comparaison des réponses du modèle éléments finis axisymétrique 2D et du modèle éléments finis 3D au cours d'un chargement de TTC : chargement en déplacement axial et rotation des mors (a), réponses des deux modèles en force axiale et en couple de torsion (b), réponses des deux modèles en déformation axiale et de torsion dans la zone utile de l'éprouvette (c), réponses des deux modèles en contrainte axiale et de torsion dans la zone utile de l'éprouvette (d).

Les figures 5.32b, 5.32c et 5.32d donnent les comparaisons des réponses des deux modèles dans les plans respectifs des efforts appliqués à l'éprouvette, des déformations et contraintes dans la partie centrale de l'éprouvette. Ces comparaisons montrent une coïn-

coïncidence parfaite des résultats. Pour illustrer cette coïncidence et permettre la distinction d'un résultat par rapport à l'autre, seuls les résultats du modèle éléments finis axisymétrique 2D sont représentés au cours de la décharge a'O', à la fin du programme de chargement.

Les composantes axiale et de cisaillement de la contrainte ($\hat{\Pi}_{zz}$, $\hat{\Pi}_{\theta z}$) et les composantes axiale et de distorsion de la déformation (E_{zz} , $E_{\theta z}$), dont les évolutions sont présentées sur les figures 5.32c et 5.32d, sont calculées, d'une part, à partir de la force axiale F_z et du couple $C_{\theta z}$ appliqués à l'éprouvette; d'autre part, à partir du déplacement et de l'angle de rotation des éléments au centre de la partie utile de l'éprouvette (figure 5.1 et § A).

Les figures 5.32c et 5.32d révèlent le phénomène de déphasage entre l'orientation dans le plan des contraintes et celle dans le plan des déformations, déjà observé sur les résultats expérimentaux et sur les simulations du paragraphe 5.2. Ce phénomène peut être distingué en comparant l'orientation du rayon d'un point remarquable sur les deux figures respectivement, tel que le rayon Ob par exemple. Cette comparaison montre, comme précédemment, une avance de phase de la contrainte par rapport à la déformation. Par ailleurs, même si le modèle SVG-HP 3D est à fermeture parfaite des cycles, nous observons sur les figures 5.32b, 5.32c et 5.32d, une accommodation progressive des cycles. Ce résultat est probablement lié à l'effet complexe de Poynting-Swift étudié au paragraphe précédent.

La coïncidence parfaite des résultats obtenus avec les deux modèles, observée sur la figure 5.32, est confortée par la comparaison des champs de contrainte et de déformation obtenus avec ces deux modèles, au même point du programme de chargement. Ce résultat est donné par la figure 5.33. En effet, la comparaison des champs de la composante principale majeure de la déformation logarithmique, du modèle 2D et du modèle 3D, montre un accord parfait de ces deux résultats (figures 5.33a et 5.33b). Dans le cas des deux champs de contrainte, les figures 5.33b et 5.33c donnent le même type de résultat, avec une correspondance parfaite de la répartition des contraintes dans l'éprouvette.

Ainsi, ces résultats montrent que la loi de comportement implémentée dans le code Abaqus/Standard donne des comportements identiques en traction-torsion avec des éléments finis classiques volumiques ou avec des éléments finis axisymétriques généralisés. La simulation en axisymétrie est plus intéressante, dans ce cas, car, d'une part, elle est plus rapide en raison du nombre plus faible de degrés de liberté. D'autre part, si nous admettons l'homogénéité du champ de déformation dans la partie utile de l'éprouvette de TTC, il est possible de ne modéliser qu'une tranche de cette partie utile par un modèle en éléments axisymétriques généralisés (cf. § 5.1). En effet les conditions aux limites en déplacement et rotation pour un chargement de TTC peuvent être appliquées selon un mode classique très simple, autorisé par les éléments axisymétriques généralisés, qui consiste à imposer un déplacement axial u_z et une torsion d'angle ϕ sur une section droite de l'éprouvette. Alors que ceci n'est pas possible à appliquer avec des éléments volumiques, sans contraindre les changements de diamètre et d'épaisseur de la partie utile de l'éprouvette de TTC.

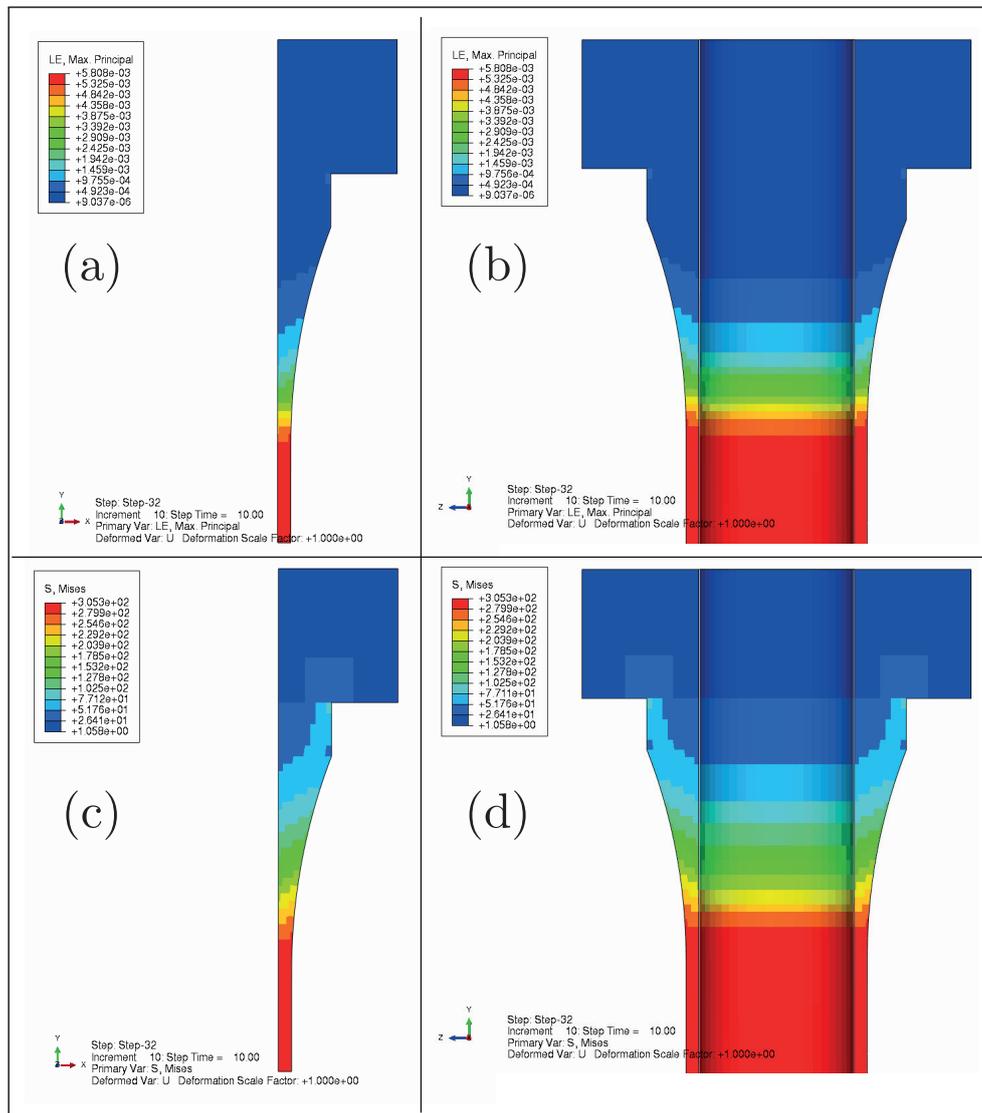


Fig. 5.33 – Comparaison des champs de contrainte et de déformation du modèle éléments finis axisymétrique 2D et du modèle éléments finis 3D, au cours d'un point commun du programme de chargement de TTC : champs de la composante principale majeure de la déformation logarithmique du modèle 2D (a) et du modèle 3D (b) ; champs de la contrainte de Mises du modèle 2D (c) et du modèle 3D (d).

5.4.2 Chargement d'une structure en grande déformation

Afin d'éprouver l'implémentation de la loi du modèle SVG-HP 3D dans le code Abaqus, nous envisageons dans ce paragraphe un chargement d'une structure en grande déformation. Le chargement envisagé, loin au-delà des limites de l'hypothèse des petites perturbations, n'a pas l'ambition d'être représentatif d'une réalité donnée, il permet simplement

d'éprouver de façon sévère et du point de vue numérique, la qualité de l'implémentation de la loi de comportement dans le code Abaqus et notamment celle de la matrice jacobienne.

La structure envisagée est une pale de turbine d'une hydrolienne à axe vertical [Zanette *et al.* 2010]. Le principe de fonctionnement d'une hydrolienne à axe vertical est décrit par la figure 5.34. Une colonne constituée d'un ensemble de turbines, reliées entre elles par un axe vertical, est exposée à un courant marin ou fluvial transversal. La rotation de l'hydrolienne ainsi définie est convertie en énergie électrique grâce à un générateur, fixé au sommet.

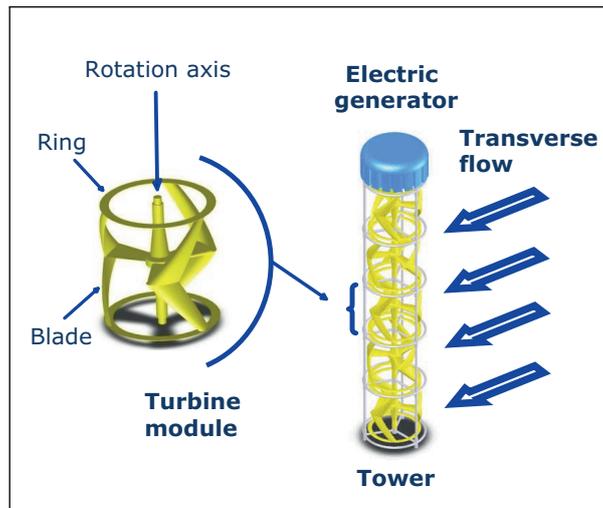


Fig. 5.34 – Principe de fonctionnement d'une hydrolienne à axe vertical [Zanette *et al.* 2010].

Une turbine à axe vertical est constituée de trois pales (figure 5.35a). La pale a une section variable et la forme d'une queue de baleine (figures 5.35b et 5.35c). Chaque pale est reliée au moyeu de la turbine par un bras, situé dans le plan horizontal de symétrie S de la turbine. Dans la suite nous appellerons pale de turbine, l'ensemble constitué de la pale en queue de baleine proprement dite, du bras et du moyeu (figure 5.35c).

Les dimensions principales d'une turbine à axe vertical sont définies par les paramètres de la figure 5.36. Pour réaliser notre chargement en grande déformation, nous adoptons une turbine de petite taille, avec un profil d'aile NACA0018, un diamètre $2R = 165$ mm, une hauteur $H = 180$ mm, $C_u = 22,7$ mm, $C_l = 48,2$ mm et $\gamma = 57,5^\circ$ [Zanette *et al.* 2010]. Le modèle de comportement est celui du modèle SVG-HP 3D, sans écrouissage cyclique, à fermeture parfaite des cycles. La fonction générative adoptée est celle en tangente hyperbolique (cf. relation 3.11). Nous avons adopté un module d'élasticité résiduelle nul ($E_\infty = 0$). Le modèle est ainsi défini par trois paramètres matériau uniquement, soient : $E = 200$ GPa, $\nu = \frac{1}{3}$ et $Y_0 = 400$ MPa. Les valeurs des trois paramètres accessoires supplémentaires, liés à la nature discrète du modèle, sont : $n = 50$ (relation 3.1), $x = 0,005$ (relation 3.14) et $\alpha = 1$ (relation 3.16). La figure 5.37 montre le modèle

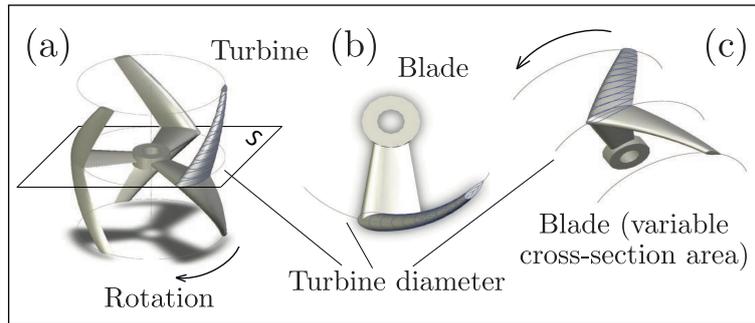


Fig. 5.35 – Géométrie d’une turbine à axe vertical : turbine complète (a), vue de dessus d’une pale de turbine (b) et vue en perspective d’une pale de turbine (c) [Zanette et al. 2010].

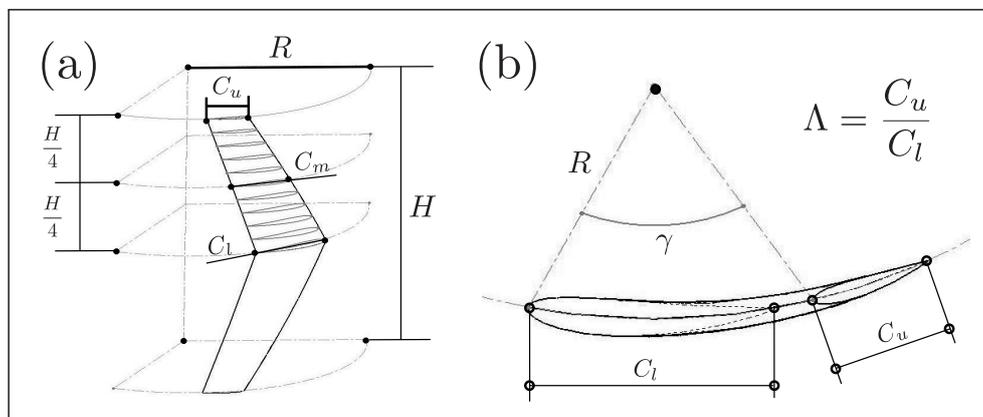


Fig. 5.36 – Dimensions principales d’une turbine à axe vertical : vue en perspective d’une pale de turbine (a) et vue de dessus d’une pale de turbine (b) [Zanette et al. 2010].

éléments finis mis en place pour réaliser la simulation. Ce modèle est composé de 97674 éléments tétraédriques linéaires à 4 nœuds (élément Abaqus C3D4). La pale est encastree au niveau de la surface interne du moyeu, dans la position de la figure 5.37. La pale ainsi orientée dans un repère $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$, a une aile droite et une aile gauche.

Le chargement de la pale consiste à appliquer une pression sous l’aile gauche. Le programme de chargement est décrit sur la figure 5.38. Ce programme consiste à appliquer un cycle de pression : en charge OAI et en décharge IBO'. La pression maximale au point d’inversion I est de 3,75 MPa. Les points A et B correspondent à la même pression, à mi-parcours et se situent respectivement le long du processus de charge et de décharge.

Les résultats de la simulation du chargement de la pale en grande déformation sont donnés sur les figures 5.39 et 5.40. Ces résultats correspondent respectivement aux champs de la norme du tenseur déformation logarithmique déviatoire et de la norme du tenseur contrainte de Cauchy déviatoire, en fonction de la situation dans le processus de chargement de la figure 5.38. La figure 5.39c montre qu’au point d’inversion à la pression

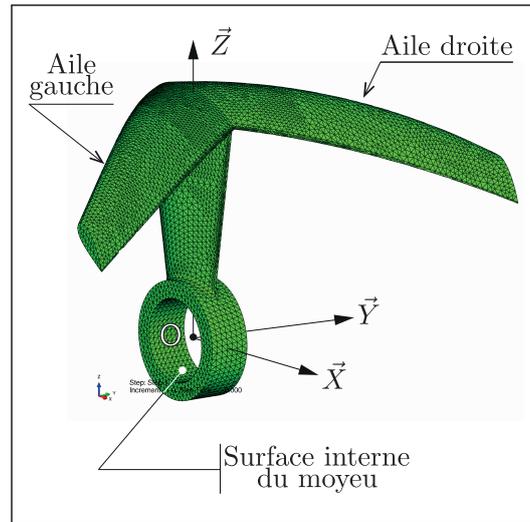


Fig. 5.37 – Modèle éléments finis 3D d'une pale de turbine à axe vertical composé de 97674 éléments tétraédriques linéaires à 4 nœuds.

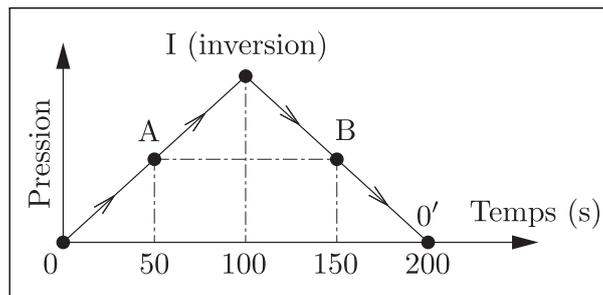


Fig. 5.38 – Programme de chargement de la pale de turbine de la figure 5.37, avec une pression appliquée sous l'aile gauche. La pression maximale à l'inversion au point I est de 3,75 MPa.

maximale, la norme du tenseur de déformation logarithmique, au pied de la pale, au niveau du moyeu est de l'ordre de 160%. Cette simulation constitue un test sévère, qui montre la robustesse du modèle et son implémentation dans le code d'éléments finis Abaqus/Standard en analyse quasi statique, i.e. avec l'utilisation d'une matrice jacobienne de la loi.

La comparaison des figures 5.39b et 5.39d montre des états de déformation très différents malgré un chargement à une pression identique. Cet aspect se constate aussi sur les champs de contraintes des figures 5.40b et 5.40d. À l'état final, à pression nulle au point O', la figure 5.39e montre un champ de déformation résiduelle hétérogène et très intense au niveau du pied de la pale à la jonction avec le moyeu. Pour la contrainte, la figure 5.40e montre que le champ de contrainte n'est pas entièrement relaxé, malgré une pression nulle sous l'aile.

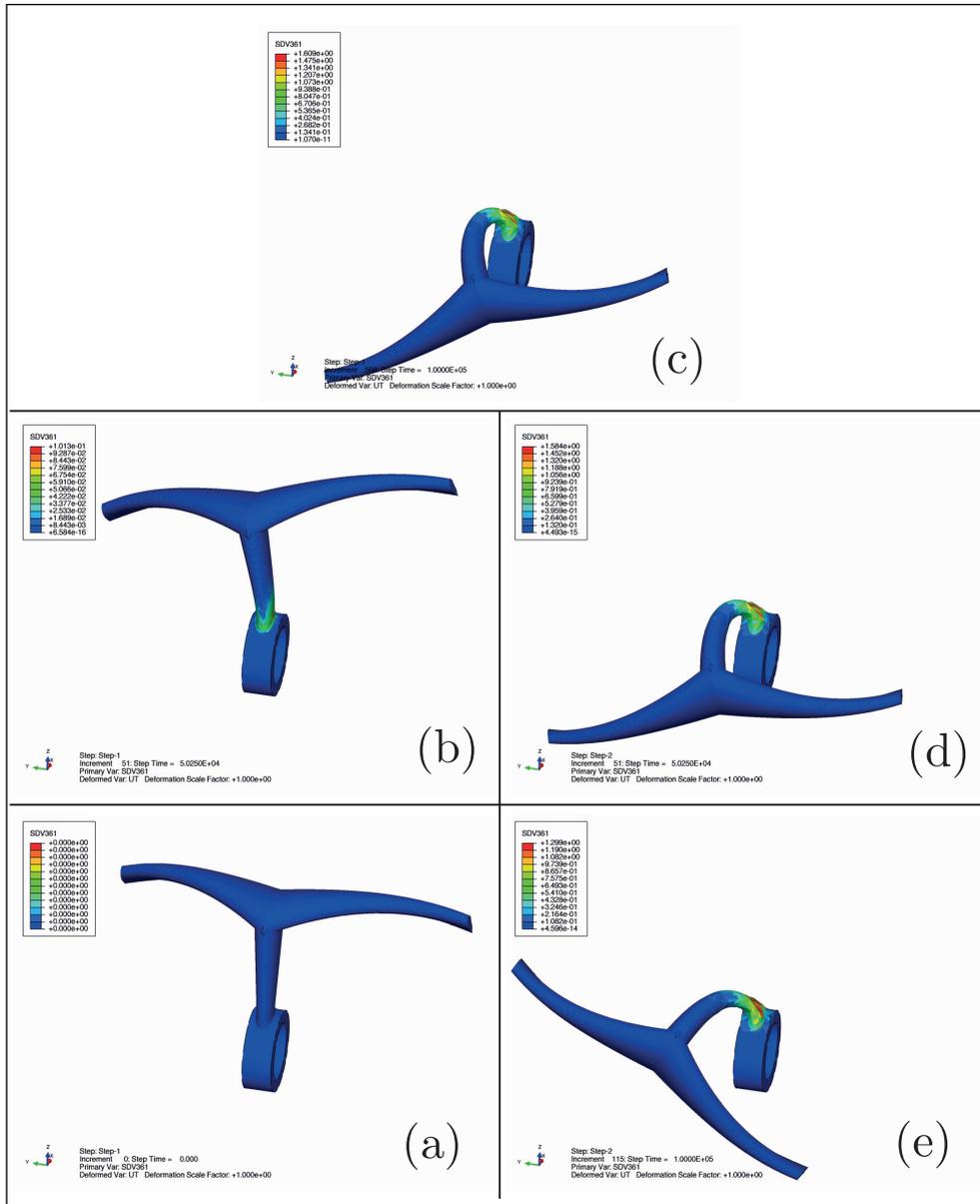


Fig. 5.39 – Champs de la norme du tenseur déformation logarithmique déviatoire ou rayon dans le plan déviatoire (cf. relation B.12), en fonction de la situation dans le processus de chargement de la figure 5.38 : à l’origine O (a), au point A (b), à l’inversion au point I (c), au point B (d) et à l’état final en décharge complète au point O’ (e).

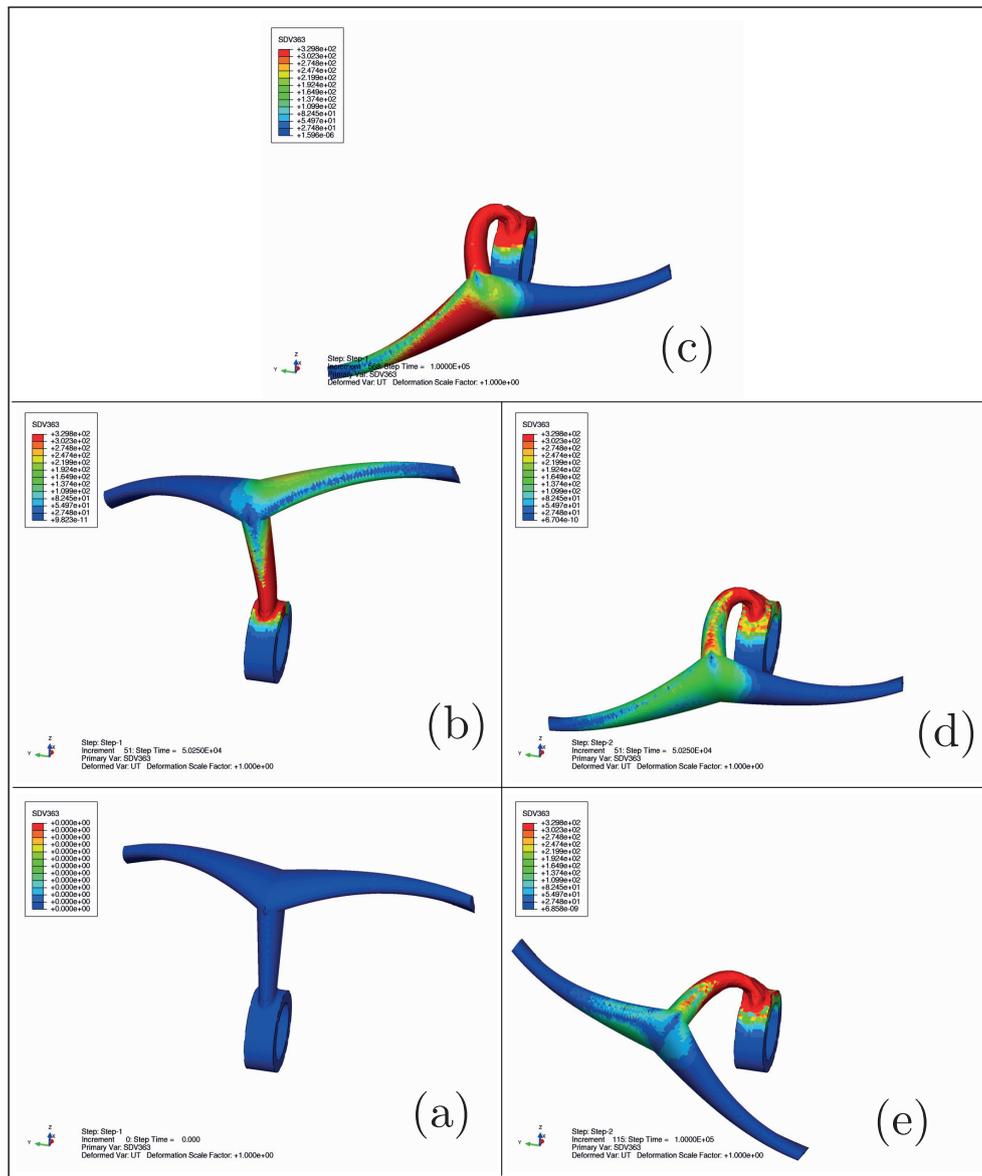


Fig. 5.40 – Champs de la norme du tenseur contrainte de Cauchy déviatoire ou rayon dans le plan déviatoire (cf. relation B.12), en fonction de la situation dans le processus de chargement de la figure 5.38 : à l'origine O (a), au point A (b), à l'inversion au point I (c), au point B (d) et à l'état final en décharge complète au point O' (e).

5.4.3 Chargement cyclique d'une structure

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'illustrer le comportement cyclique d'une structure avec un effet d'érouissage cyclique, en utilisant le modèle SVG-EC 3D. De la même manière que dans le paragraphe précédent, nous considérons la structure formée par une pale de turbine à axe vertical et son modèle éléments finis présenté à la figure 5.37. Nous gardons la même orientation de la pale dans le repère $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ et le même encastrement au niveau de la surface interne du moyeu. Néanmoins, afin de modéliser plus finement les liaisons du bras avec la pale et avec le moyeu, nous adoptons un modèle composé de 589068 éléments tétraédriques linéaires à 4 nœuds (élément Abaqus C3D4). La figure 5.41 donne le détail du maillage de la zone de liaison bras-moyeu (figure 5.41a) et le détail du maillage de la pale avec une vue suivant la direction $(-\vec{Z})$.

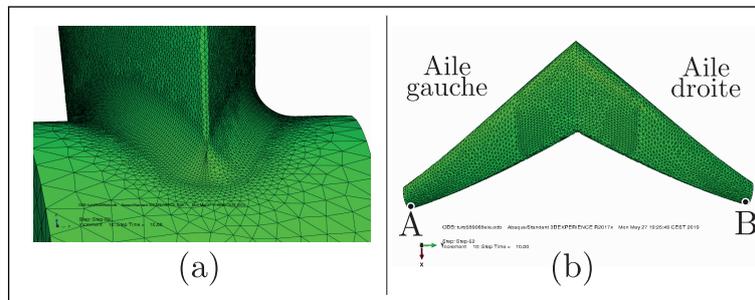


Fig. 5.41 – Modèle éléments finis 3D d'une pale de turbine à axe vertical composé de 589068 éléments tétraédriques linéaires à 4 nœuds : détail du maillage de la zone de liaison bras-moyeu (a) et détail du maillage de la pale avec une vue suivant la direction $(-\vec{Z})$ (b).

Pour cette simulation, nous utilisons le modèle SVG-EC 3D, avec un érouissage cyclique adoucissant (cf. § 4.4). Les valeurs des cinq paramètres matériau adoptés pour le comportement d'hystérésis pure sont : $K = 175$ GPa, $G_0 = 79$ GPa, $G_\infty = 1,5$ GPa, $c = 2$ et $S_0 = 347$ MPa. Les valeurs des six paramètres complémentaires du modèle d'érouissage cyclique adoucissant sont : $\gamma = -1.25$, $\alpha_1 = 0.01$, $c_1 = 2$, $\alpha_2 = 0.5$ et $c_2 = 0.5$ (cf. § 4.4). Les valeurs des trois paramètres accessoires supplémentaires, liés à la nature discrète du modèle SVG-EC 3D, sont : $n = 50$ (relation 3.1), $x = 0,005$ (relation 3.14) et $\alpha = 1$ (relation 3.16).

Considérons deux points A et B sur le bord de fuite de la pale en bout d'aile gauche et droit, respectivement, définis sur la figure 5.41b ; nous définissons U_m le déplacement moyen des extrémités des ailes selon l'axe \vec{Z} , tel que :

$$U_m = \frac{U_z^A + U_z^B}{2} \quad (5.15)$$

Où U_z^A et U_z^B représentent le déplacement, selon l'axe \vec{Z} , des points A et B.

Nous définissons aussi l'angle α_z , qui désigne la rotation des extrémités des ailes autour de l'axe \vec{Z} , tel que :

$$\tan \alpha_z = \frac{U_x^A - U_x^B}{d_{AB}} \quad (5.16)$$

Où U_x^A et U_x^B représentent respectivement le déplacement, selon l'axe \vec{X} , des points A et B; d_{AB} représente la distance initiale entre les points A et B.

Le chargement est défini, d'une part, par une pression variable entre ± 4 MPa, appliquée identiquement sous les ailes gauche et droite de la pale, qui provoque une force, de module F_z , selon l'axe \vec{Z} . D'autre part, on applique sous les ailes gauche et droite une force surfacique dans les directions \vec{X} et $-\vec{X}$ respectivement. Cette force surfacique varie en intensité entre ± 1 MPa. Cette force provoque un moment, de module M_z , autour de l'axe \vec{Z} . Trois chargements A, B et C ont été envisagés. Ces chargements sont définis respectivement sur les figures 5.42a, 5.42c et 5.42e, dans des diagrammes (F_z, M_z) .

Les réponses du modèle aux trois chargements A, B et C sont donnés respectivement sur les figures 5.42b, 5.42d et 5.42f, dans des diagrammes (U_m, α_z) . Ces résultats révèlent un comportement complexe, non intuitif. Le point représentatif de l'état final de la pale dans le diagramme (U_m, α_z) est étroitement lié à l'histoire du chargement.

La figure 5.43 donne pour chacun des chargements A, B et C, les réponses du modèle dans les deux diagrammes (F_z, U_m) et (M_z, α_z) , respectivement. Ainsi les figures 5.43a et 5.43b correspondent au chargement A, les figures 5.43c et 5.43d correspondent au chargement B et les figures 5.43e et 5.43f correspondent au chargement C. Ces résultats confirment les remarques précédentes.

La figure 5.44 donne pour chacun des chargements A, B et C, à l'état final au point représentatif O' de la figure 5.42, le champ de la composante principale majeure de la déformation logarithmique et le champ de la contrainte équivalente de Mises. Ces champs sont représentés respectivement sur les figures 5.44a et 5.44b pour le chargement A, sur les figures 5.44c et 5.44d pour le chargement B et sur les figures 5.44e et 5.44f pour le chargement C. Ces résultats illustrent l'influence de l'histoire du chargement sur l'état final de la pale en contrainte et en déformation.

À l'état final, à l'annulation du chargement extérieur sur la pale, la figure 5.44 montre que l'état de contrainte n'est pas entièrement relaxé et le champ de déformation résiduelle est hétérogène et intense au niveau du pied de la pale à la jonction avec le moyeu. Par ailleurs, les états de déformation et de contrainte résiduelles sont étroitement liés à l'histoire du chargement.

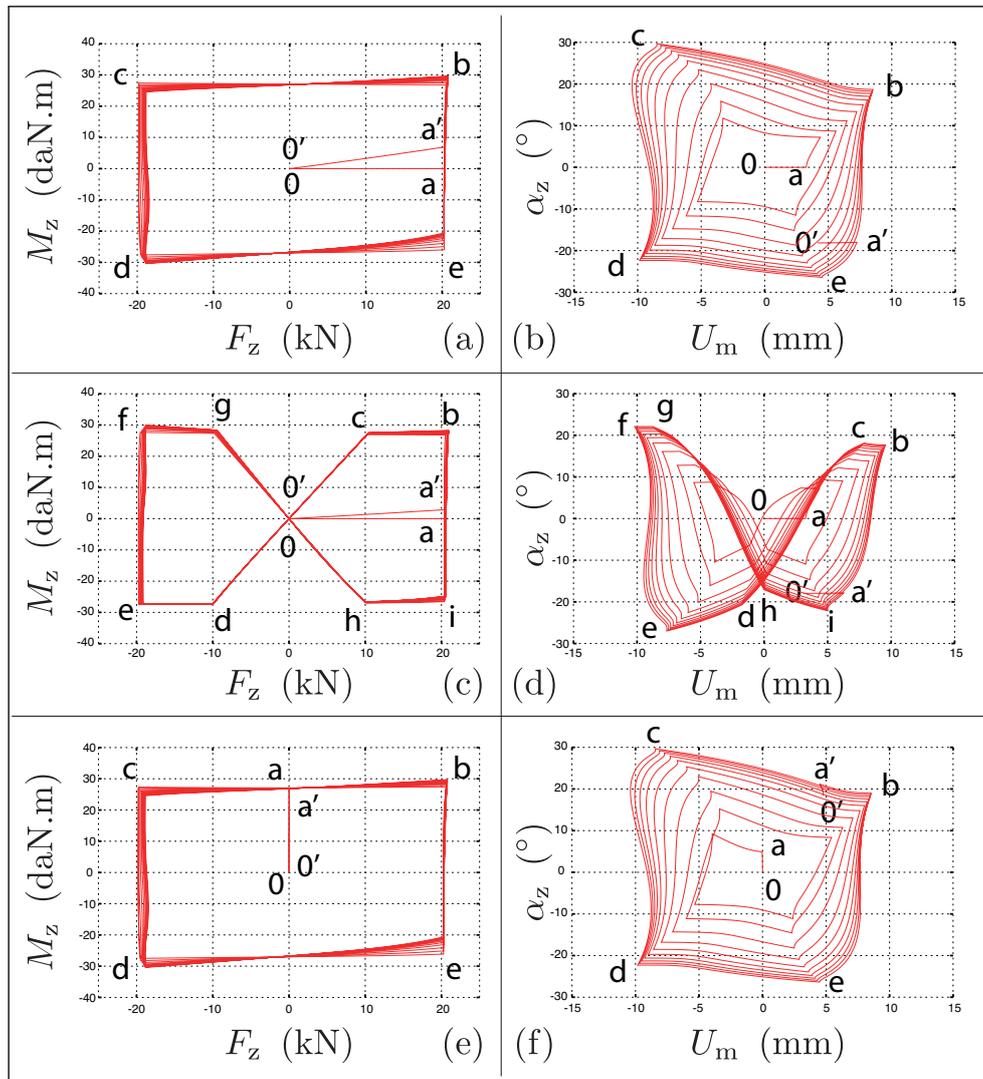


Fig. 5.42 – Chargement de la pale dans le diagramme (F_z, M_z) et réponse du modèle dans le diagramme (U_m, α_z) : chargement de type A (a, b), chargement de type B (c, d) et chargement de type C (e, f).

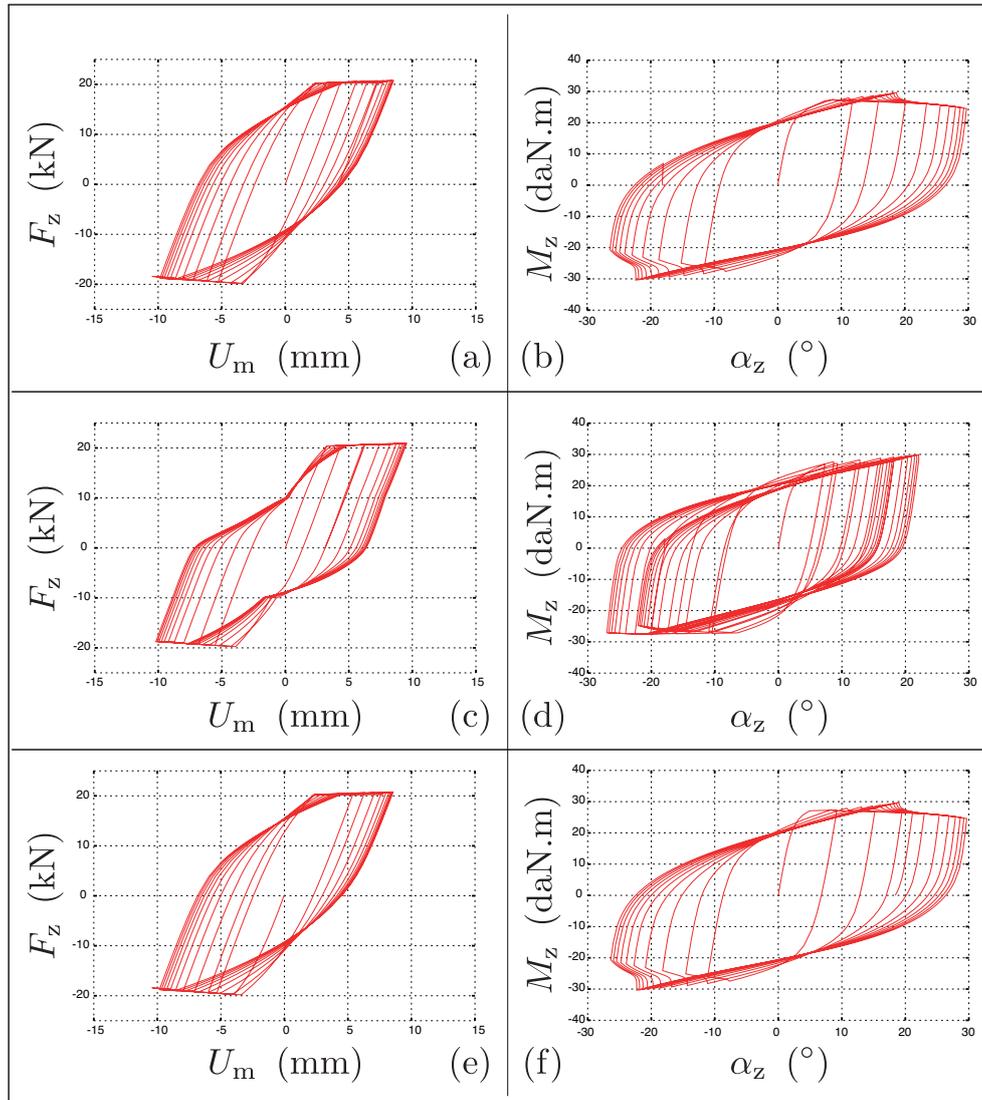


Fig. 5.43 – Réponses du modèle dans les diagrammes (F_z, U_m) et (M_z, α_z) , respectivement : chargement de type A (a, b), chargement de type B (c, d) et chargement de type C (e, f).

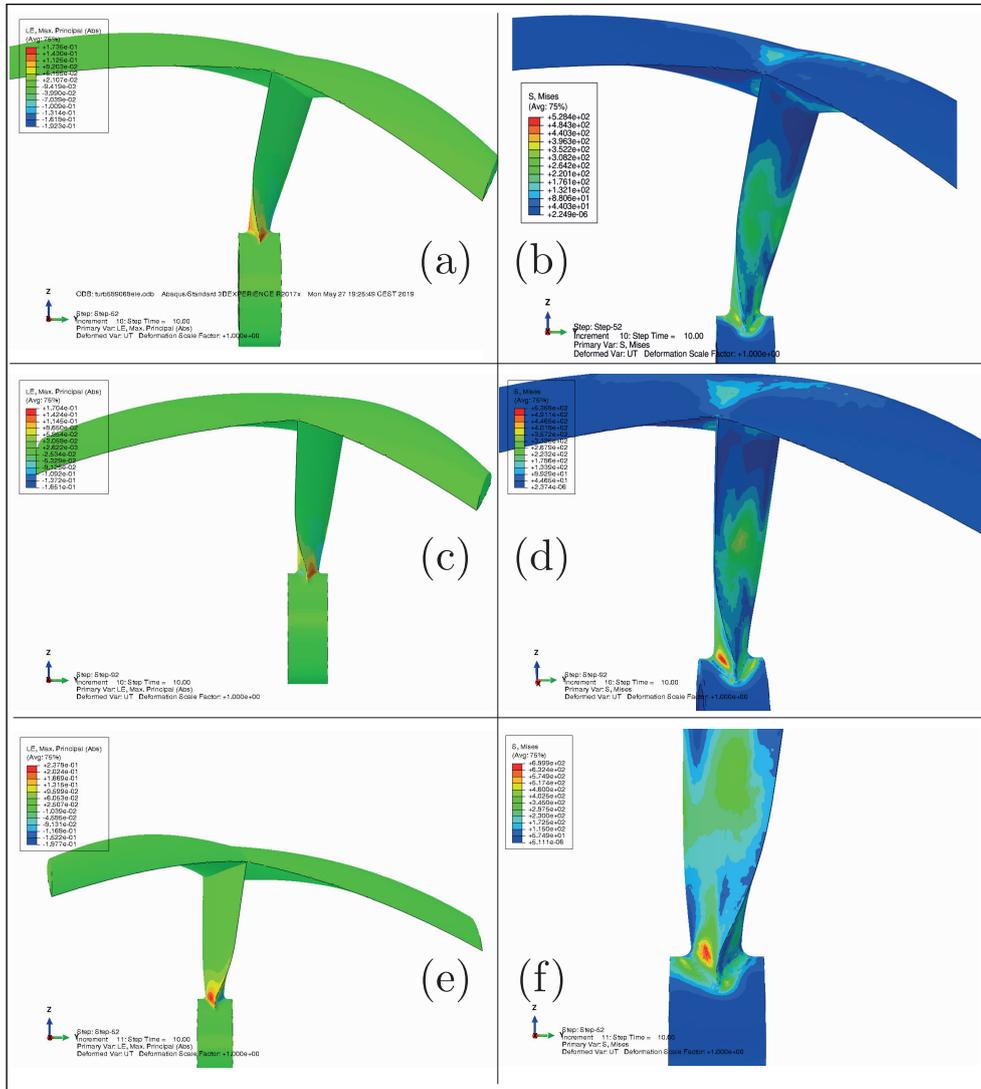


Fig. 5.44 – Champ de la composante principale majeure de la déformation logarithmique résiduelle et champ résiduel de la contrainte équivalente de Mises, respectivement, sur une pale déformée sans amplification des déplacements : chargement de type A (a, b), chargement de type B (c, d), chargement de type C (e, f).

Conclusion du chapitre

Le modèle SVG-HP 3D a été validé par la comparaison de ses prévisions à des résultats expérimentaux de TTC et des chargements non proportionnels complexes.

Ce modèle a montré sa capacité à reproduire de façon remarquable les propriétés génériques du comportement cyclique des matériaux métalliques sur un large éventail de trajets de nature non proportionnelle.

Les résultats de modélisation ont montré la capacité du modèle à reproduire les évolutions complexes du déphasage entre le plan de la contrainte et le plan de la déformation, au cours du chargement. Ceci nous conforte d'une part dans notre choix du modèle phénoménologique de SVG-HP 1D, comme base de départ de notre approche de modélisation. D'autre part, ceci nous conforte dans le choix de la règle d'écoulement NFR dans l'espace des déformations, pour la généralisation 3D de la modélisation, qui a conduit à la définition du modèle SVG-HP 3D.

Par ailleurs, le modèle SVG-HP 3D, à fermeture parfaite des cycles, i.e. sans écrouissage cyclique, est capable de prédire, qualitativement et avec les bons ordres de grandeurs, les effets du second ordre de Poynting-Swift, observés dans le cas de la torsion alternée de tubes minces, à effort axial nul. Ce résultat est obtenu sans aucune équation dédiée ni paramètre d'ajustement supplémentaire. Par la suite, ce modèle a servi comme support heuristique pour donner une interprétation à ce phénomène complexe. En effet, les rôles combinés de la rotation de la matière et de la règle d'écoulement plastique ont été mis en évidence.

Ainsi, un modèle SVG-HP 3D a été proposé et implémenté dans le code éléments finis commercial Abaqus. Ce modèle est performant et prédictif. Ceci correspond à un objectif central du travail de thèse.

D'une part, l'implémentation numérique du modèle SVG-HP 3D dans le code éléments finis commercial Abaqus a été illustrée par le chargement cyclique d'une structure avec un effet d'écrouissage cyclique. D'autre part, cette implémentation a été éprouvée par un chargement d'une structure en grande déformation, loin au-delà des limites de l'hypothèse des petites perturbations. Ceci a permis de montrer l'efficacité et la robustesse du modèle et son implémentation dans le code Abaqus.

Proposition d'une règle d'écoulement interdépendante (IFR)

Sommaire

6.1	Présentation synthétique et illustration de la règle IFR	134
6.2	Définition provisoire	137
6.3	Problème de saut des surfaces seuil	142
6.4	Définition définitive	145
6.5	Analyse des prévisions du modèle SVG-HP 3D avec la règle d'écoulement IFR	156
6.5.1	Réponse sous chargement multiaxial de traction-torsion combinées	156
6.5.2	Prévision de l'effet Poynting-Swift	164

Le choix d'une règle d'écoulement plastique n'est pas unique. Nous avons adopté la règle d'écoulement de type normalité, ou règle d'écoulement NFR, pour étendre le modèle SVG-HP 1D au cas tridimensionnel (§ 4.2.2). Ce choix a montré sa pertinence avec des prévisions du modèle SVG-HP 3D en adéquation avec les résultats expérimentaux (cf. chapitre 5). D'autres choix existent, tels que la règle d'écoulement proposée par Mróz dans l'espace des contraintes [Mróz 1967], celle proposée par Pégon et Guélin [Guélin 1980, Pégon 1988, Guélin *et al.* 1997] et celle proposée par Blès [Blès 2002]. Ces choix considèrent un mouvement interdépendant des surfaces seuil. En effet, en plus de la normalité, la règle d'écoulement avec interdépendance des mouvements des surfaces seuil introduit une condition sur le mouvement d'une surface seuil par rapport à celui des autres. Nous proposons dans ce chapitre une seconde règle d'écoulement, définie dans l'espace des déformations, qui introduit une interdépendance des mouvements des surfaces seuil. Et, nous proposons d'éprouver ce choix par une comparaison aux résultats expérimentaux.

Dans la suite du manuscrit, nous utiliserons le sigle IFR (*Interdependency condition Flow Rule*) pour désigner la règle d'écoulement interdépendante présentée dans ce chapitre.

Une présentation synthétique et une illustration de la règle IFR seront données au paragraphe 6.1. La paragraphe 6.2 donnera une définition précise provisoire de la règle d'écoulement IFR. Nous révélerons au paragraphe 6.3 un problème de saut des surfaces

seuil. Ce problème sera corrigé au paragraphe 6.4 et une définition définitive sera proposée. Le paragraphe 6.5 sera destiné à la comparaison des prédictions du modèle SVG-HP 3D, qui résulte de la règle d'écoulement IFR, aux résultats expérimentaux et à la conclusion sur la pertinence de cette règle d'écoulement.

6.1 Présentation synthétique et illustration de la règle IFR

La règle d'écoulement IFR est caractérisée à la fois par une règle de normalité et une règle de non-intersection des surfaces seuil. Elle est équivalente à celle proposée par [Mróz 1967], mais elle est définie dans l'espace des déformations. En adoptant la règle d'écoulement IFR, la définition du modèle SVG-HP 3D est synthétisée dans le tableau donnée par la figure 6.1.

Le mouvement des surfaces seuil suit une loi d'écrouissage de type Mróz [Mróz 1967, Brokate *et al.* 1996]. Cette loi est définie essentiellement par trois règles :

1. $\forall k \in [1, n]$, $f_k \leq 0$, où f_k désigne le domaine d'élasticité d'indice k
2. $\forall k \in [1, n]$, si $f_k < 0$, $\tilde{\underline{\epsilon}}_k^p = \tilde{\mathbf{0}}$
3. une condition de non-intersection des n surfaces seuil :

$$\begin{aligned} \forall k_1, k_2 \in [1, n] \quad \text{avec} \quad e_{k_1} < e_{k_2} \\ \text{Domaine d'élasticité } f_{k_1} \subset \text{Domaine d'élasticité } f_{k_2} \\ \Leftrightarrow \\ \|\tilde{\underline{\epsilon}}_{k_1}^p - \tilde{\underline{\epsilon}}_{k_2}^p\| \leq (e_{k_2} - e_{k_1}) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Le modèle SVG-HP 3D, issu de la règle d'écoulement IFR, a été implémenté dans l'outil heuristique de simulation numérique 2D, dans l'environnement MATLAB, en considérant l'espace déviatoire 2D. Cet outil nous permet de visualiser la cinématique des surfaces seuil, où les déformations et les contraintes sont considérées comme des vecteurs dans le plan et les surfaces seuil comme des cercles.

A partir de ce modèle, nous avons adopté une simulation avec des chargements, dans le plan déviatoire bidimensionnel des déformations, identiques à ceux de la figure 4.6a de la règle d'écoulement NFR. Ceci, d'une part, pour avoir un point de comparaison avec la règle d'écoulement NFR et, d'autre part, pour illustrer le mouvement des surfaces seuil résultant de la condition de non-intersection de ces surfaces. Les résultats de cette simulation, dans le plan déviatoire bidimensionnel des déformations, sont donnés sur la figure 6.2.

▷ Loi de comportement

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = K \text{Tr}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \tilde{\mathbf{I}} + \sum_{k=1}^n 2G_k \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^e + 2G_\infty \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \forall k \in [1, n]$$

$$\text{où } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p \quad \forall k \in [1, n]$$

$$G_1 = G_0 \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{e_1^*}{\gamma_\Gamma}\right)^c} \right\}$$

$$G_k = G_0 \left\{ e^{-\left(\frac{e_{k-1}^*}{\gamma_\Gamma}\right)^c} - e^{-\left(\frac{e_k^*}{\gamma_\Gamma}\right)^c} \right\} \quad \forall k \in [2, n]$$

$$\gamma_\Gamma = \frac{S_0}{G_0} \frac{c}{\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)}$$

▷ Domaine d'élasticité

$$f_k = f(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, e_k, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p) = \|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^p\| - e_k \leq 0 \quad \forall k \in [1, n]$$

▷ Loi d'évolution

$$1. \quad \forall k \in [1, n], \quad \text{si } f_k < 0, \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k^p = \tilde{\mathbf{0}}$$

$$2. \quad \|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k_1}^p - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k_2}^p\| \leq (e_{k_2} - e_{k_1})$$

$$\forall k_1, k_2 \in [1, n] / e_{k_1} < e_{k_2}$$

Fig. 6.1 – Présentation synthétique du modèle SVG-HP 3D qui découle de la règle d'écoulement IFR.

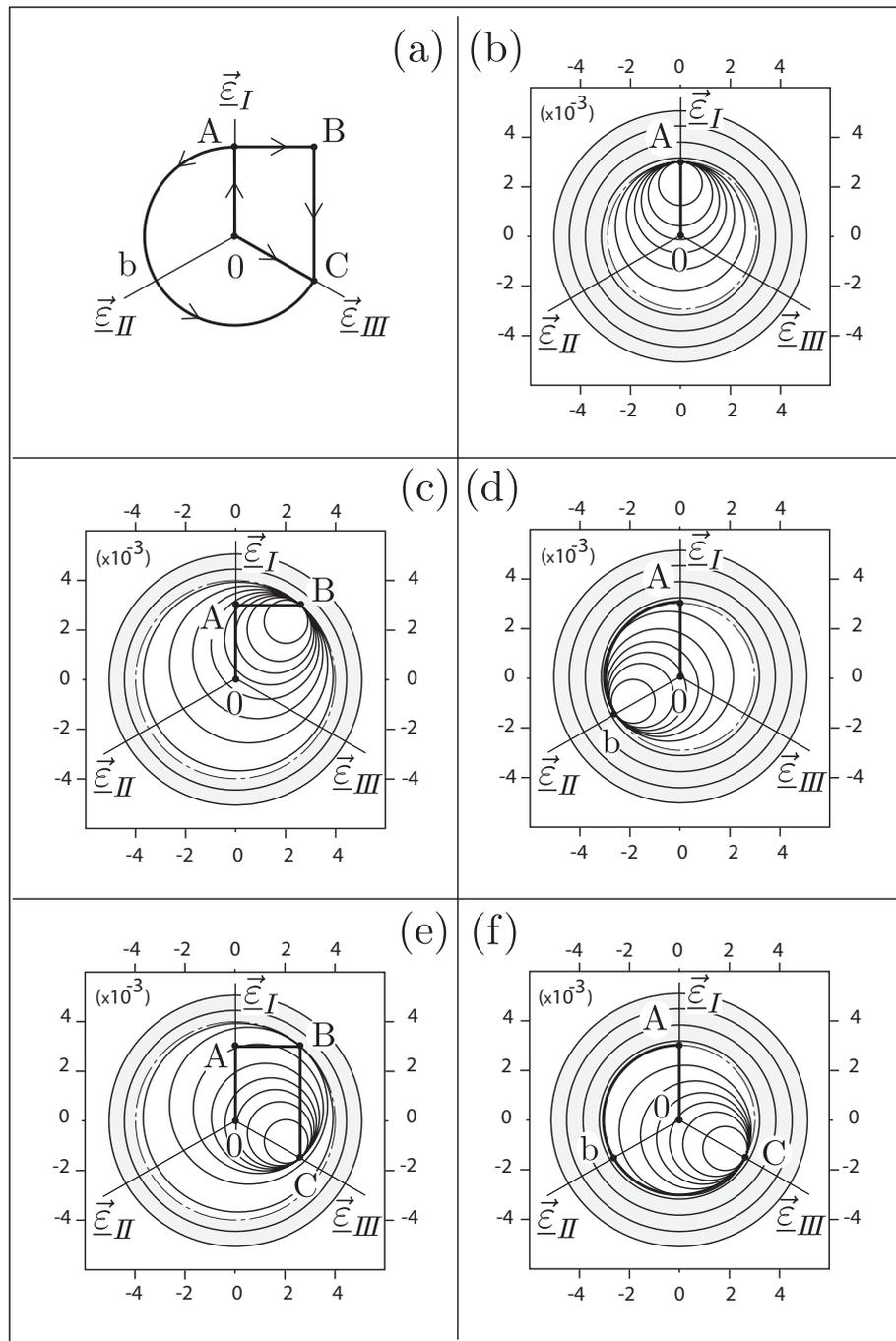


Fig. 6.2 – Résultats de simulations dans le plan déviatoire des déformations pour trois chemins de chargement : OC , $OAbC$ et $OABC$ (a) ; positions des surfaces seuil à la fin des chargements : OA (b), OAB (c), OAb (d), $OABC$ (e) et $OAbC$ (f). Les paramètres du modèle sont $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$, $Y_0 = 299$ MPa, $E_\infty = 4602$ MPa, $c = 2,0$ et $n = 10$.

Sur la figure 6.2a, trois chemins de chargement distincts conduisant au même point C sont proposés : OC, OAbC, OABC. La figure 6.2b montre les positions des surfaces seuil à la fin du trajet OA.

Les figures 6.2c et 6.2d montrent quant à elles les positions des surfaces seuil aux points B et b (qui est un point courant entre les points A et C) respectivement. Enfin, les figures 4.2b, 6.2e et 6.2f illustrent la position finale au point C des surfaces seuil, pour chacun des trois trajets de chargement, respectivement OC, OABC et OAbC. Ces trois figures montrent des configurations de surfaces seuil, au point C, assez proches. Ces configurations, proches entre elles, sont relativement éloignées de celles obtenues pour les mêmes trajets dans le cas NFR (figures 4.6e et 4.6f).

Le diagramme rhéologique (Q_ε, Q_σ) (figure 6.3b) montre que les réponses des trois trajets se confondent. Ainsi, cette figure montre que les points C_1, C_2 et C_3 , obtenus à la fin des trois trajets respectivement, sont confondues. Ce résultat aussi présente une différence sensible avec celui obtenu par la règle d'écoulement NFR (figure 4.7b).

En comparaison avec les résultats obtenus avec la règle d'écoulement NFR, la figure 6.3c montre un déphasage faible entre la déformation dans le plan déviatoire des déformations et la réponse en contrainte dans le plan déviatoire des contraintes (figure 4.7c), sur les trajets circulaires (trajet OAbC₂) ou proche du circulaire AB.

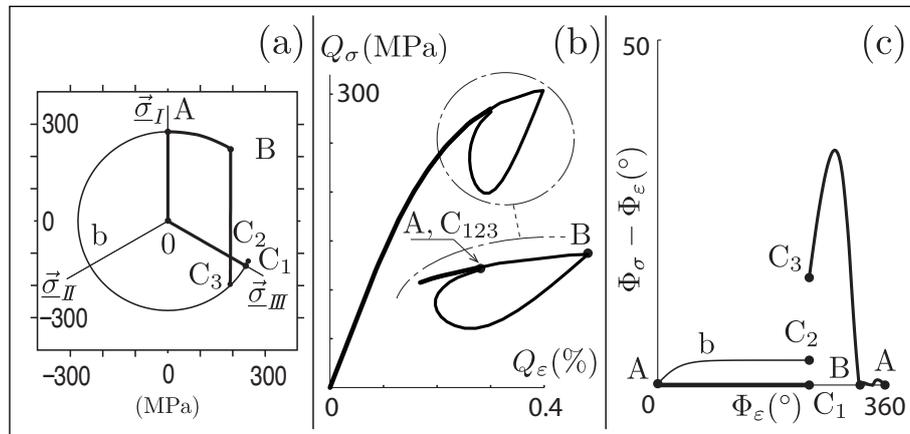


Fig. 6.3 – Réponses OC₁, OAbC₂ et OABC₃ dans le plan déviatoire des contraintes (a), réponses dans le diagramme rhéologique (Q_ε, Q_σ) (b) et déphasage dans le plan déviatoire entre la contrainte et la déformation (c) pour les trajets de la figure 6.2a.

6.2 Définition provisoire

Pour illustrer la définition de la règle d'écoulement IFR, nous nous intéressons au mouvement d'une surface seuil courante d'indice k , représentée par un cercle de rayon e_k , dont le centre se déplace de O_k à O'_k , le long d'un chemin de chargement radial Oa, à

partir de l'origine sur la figure 6.4a et le long d'un chemin ab , après une inversion en a , sur la figure 6.5a. L'état de déformation actuel à l'instant t est représenté par le vecteur $\vec{\underline{\epsilon}}$ (repérant les points A , a ou b), composé de la somme d'un vecteur déformation plastique $\vec{\underline{\epsilon}}_k^p$ (repérant les points O_k ou O'_k) et d'un vecteur déformation élastique $\vec{\underline{\epsilon}}_k^e$ ($\vec{\underline{\epsilon}} = \overrightarrow{OA}$ sur la figure 6.4b et $\vec{\underline{\epsilon}} = \overrightarrow{Oa}$ sur la figure 6.5b). Nous introduisons un vecteur d'écoulement $\vec{\underline{V}}_k$, défini comme précédemment par la relation 4.19. Dans le cas de la figure 6.4, $\vec{\underline{V}}_k = \overrightarrow{O_k a}$. Dans le cas de la figure 6.5, $\vec{\underline{V}}_k = \overrightarrow{O_k b}$. Au cours d'un chargement caractérisé par un incrément de déformation totale $d\vec{\underline{\epsilon}}$ ($d\vec{\underline{\epsilon}} = \overrightarrow{Aa}$ sur la figure 6.4b et $d\vec{\underline{\epsilon}} = \overrightarrow{ab}$ sur la figure 6.5b), trois cas se présentent :

Cas 1 : Aucune surface seuil ne glisse si :

$$\begin{aligned} \forall k \in [1, n], \text{ si } \|\vec{\underline{V}}_k\| \leq e_k, \text{ alors } d\vec{\underline{\epsilon}}_k^p = \vec{\underline{0}}; \\ d\vec{\underline{\epsilon}}_k^e = d\vec{\underline{\epsilon}} \text{ et } d\vec{\underline{\sigma}}_k = G_k d\vec{\underline{\epsilon}}_k^e \end{aligned} \quad (6.2)$$

Cas 2 : Les surfaces seuil du modèle se scindent en deux groupes, tels que :

$$\forall k \in [1, r-1]; \|\vec{\underline{V}}_k\| > e_k; \text{ Groupe des surfaces seuil qui glissent} \quad (6.3)$$

$$\forall k \in [r, n]; \|\vec{\underline{V}}_k\| \leq e_k; \text{ Groupe des surfaces seuil qui ne glissent pas} \quad (6.4)$$

La surface seuil d'indice $r-1$ est la plus grande surface qui glisse. La surface seuil d'indice r est la plus petite surface qui ne glisse pas. Dans le cas d'un modèle de Saint-Venant avec un nombre n d'éléments tendant vers l'infini, la surface d'indice r vérifiera la condition $\|\vec{\underline{V}}_r\| = e_r$. Cette surface d'indice r est une surface de référence pour le positionnement de l'ensemble des surfaces seuil de rayon strictement inférieur à e_r . Cette surface est représentée sur les figures 6.4a et 6.4b par le cercle en gras d'indice r et de centre O . Sur les figures 6.5a et 6.5b, la surface de référence est représentée par le cercle en gras d'indice r et de centre O_r .

- Pour les surfaces seuil qui ne glissent pas, on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in [r, n], \text{ si } \|\vec{\underline{V}}_k\| \leq e_k, \text{ alors } d\vec{\underline{\epsilon}}_k^p = \vec{\underline{0}}; \\ d\vec{\underline{\epsilon}}_k^e = d\vec{\underline{\epsilon}} \text{ et } d\vec{\underline{\sigma}}_k = G_k d\vec{\underline{\epsilon}}_k^e \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dans ce cas le comportement est élastique. Il correspond à celui décrit par la figure 4.4a.

- Pour les surfaces seuil qui glissent, on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in [1, r-1], \text{ si } \|\vec{\underline{V}}_k\| > e_k, \text{ alors } d\vec{\underline{\epsilon}}_k^p = \vec{\underline{V}}_k - \frac{\vec{\underline{V}}_r}{\|\vec{\underline{V}}_r\|} e_k; \\ d\vec{\underline{\epsilon}}_k^e = d\vec{\underline{\epsilon}} - d\vec{\underline{\epsilon}}_k^p \text{ et } d\vec{\underline{\sigma}}_k = G_k d\vec{\underline{\epsilon}}_k^e \end{aligned} \quad (6.6)$$

où $\vec{\mathbf{V}}_r$ est le vecteur d'écoulement de la surface de référence d'indice r et $\vec{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_r^p$ désigne le vecteur déformation plastique de la surface de référence d'indice r . Dans le cas de la figure 6.4b, la surface de référence d'indice r est centrée à l'origine \mathbf{O} , par conséquent $\vec{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_r^p = \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\mathbf{V}}_r = \vec{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + d\vec{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \vec{\mathbf{Oa}}$. Dans le cas de la figure 6.5b, la surface de référence d'indice r est centrée en \mathbf{O}_r et $\vec{\mathbf{V}}_r = \vec{\mathbf{O}_r\mathbf{b}}$. La relation 6.6 se traduit sur les figures 6.4b et 6.5b par un déplacement de la surface seuil d'indice k , à partir de sa position à l'instant t , centrée en \mathbf{O}_k , d'un vecteur $\vec{\mathbf{V}}_k$ suivi d'un déplacement le long du vecteur $-\vec{\mathbf{V}}_r$ d'une distance e_k , ce qui déplace son centre de \mathbf{O}_k à \mathbf{O}'_k .

Cas 3 : Toutes les surfaces seuil glissent si :

$$\forall k \in [1, n], \text{ si } \|\vec{\mathbf{V}}_k\| > e_k, \text{ alors } d\vec{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k^p = \vec{\mathbf{V}}_k - \frac{\vec{\mathbf{V}}_n}{\|\vec{\mathbf{V}}_n\|} e_k; \quad (6.7)$$

$$d\vec{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k^e = d\vec{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} - d\vec{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k^p \text{ et } d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_k = G_k d\vec{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k^e$$

où $\vec{\mathbf{V}}_n$ est le vecteur d'écoulement de la surface seuil d'indice n . Dans ce cas la dernière surface d'indice n joue le rôle de la surface de référence pour toutes les autres et son mouvement est simplement dicté par la règle de normalité.

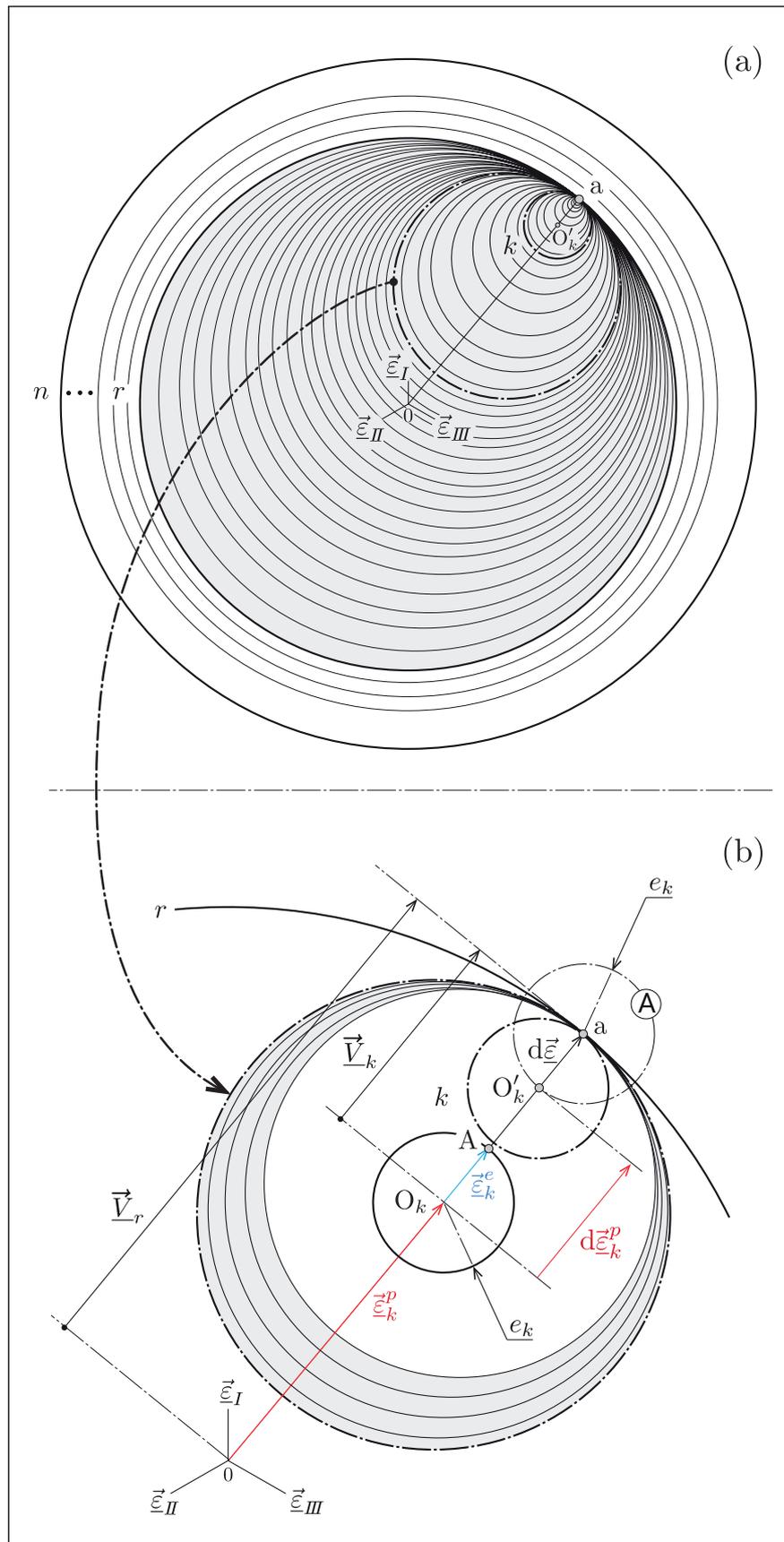


Fig. 6.4 – Modèle SVG-HP 3D avec règle d'écoulement IFR : positions des surfaces seuil à la suite d'une charge radiale Oa .

6.3 Problème de saut des surfaces seuil

Pour un faible nombre n d'éléments de Saint-Venant, la définition provisoire de la règle d'écoulement IFR conduit à un phénomène de saut des surfaces seuil et à des discontinuités dans la réponse du modèle qui dépendent de la valeur du nombre n d'éléments de Saint-Venant. Pour illustrer ce phénomène, considérons le cas d'une surface seuil courante d'indice k , représentée par un cercle de rayon e_k , initialement centrée en O_k à l'instant t et qui se déplace au cours d'une décharge ab , après une inversion du chargement au point a (figure 6.6a). La décharge ab se compose d'un incrément de déformation élastique $\overrightarrow{aa'}$ et d'un très petit incrément de déformation plastique $\overrightarrow{a'b}$. Dans le cas limite où le nombre n d'éléments de Saint-Venant tend vers l'infini, il existe toujours une surface de référence d'indice r qui vérifie $\|\overrightarrow{V}_r\| = e_r$ et qui passe simultanément par le point d'inversion a et le point b , telle que $d\overrightarrow{\epsilon} = \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{aa'} + \overrightarrow{a'b}$ (figure 6.6a). En appliquant la définition provisoire de la règle d'écoulement IFR, la surface seuil d'indice k se déplace à partir de sa position initiale à l'instant t centrée en O_k d'un vecteur \overrightarrow{V}_k , suivi d'un déplacement le long du vecteur $-\overrightarrow{V}_r$ d'une distance e_k , ce qui se traduit par un déplacement de son centre de O_k à O'_k (relation 6.6). Dans ce cas, le module du vecteur $\overrightarrow{O_k O'_k}$, qui correspond à l'écoulement plastique de la surface seuil d'indice k , est du même ordre de grandeur que le module du vecteur $\overrightarrow{a'b}$; par conséquent, le mouvement de la surface seuil d'indice k est continu et ne présente pas d'effet de saut (figure 6.6a).

Dans le cas où le nombre n d'éléments de Saint-Venant est fini, il n'existe pas toujours une surface de référence d'indice r vérifiant $\|\overrightarrow{V}_r\| = e_r$. Dans ce cas, la surface de référence d'indice r est telle que $\|\overrightarrow{V}_r\| \leq e_r$; elle passe nécessairement par le point a , mais pas nécessairement par le point b (figure 6.6b).

De la même façon que précédemment, si l'on applique la définition provisoire de la règle d'écoulement IFR, la surface seuil d'indice k se déplace à partir de sa position initiale à l'instant t centrée en O_k d'un vecteur \overrightarrow{V}_k , suivi d'un déplacement le long du vecteur $-\overrightarrow{V}_r$ d'une distance e_k , ce qui se traduit par un déplacement de son centre de O_k à O'_k . Dans ce cas, le module du vecteur $\overrightarrow{O_k O'_k}$, qui correspond à l'écoulement plastique de la surface seuil d'indice k , a une valeur beaucoup plus importante que celle du module du vecteur $\overrightarrow{a'b}$; ceci révèle l'effet de saut induit par la définition provisoire de la règle d'écoulement IFR conjuguée avec un nombre n d'éléments de Saint-Venant fini (figure 6.6b). Cet effet est aussi illustré par la figure 6.7 qui donne la comparaison des déplacements de la surface seuil courante d'indice k de la figure 6.6a en k' , d'un vecteur $\overrightarrow{O_k O'_k}$, dans le cas limite où le nombre n d'éléments de Saint-Venant tend vers l'infini et celle de la figure 6.6b en k'' , d'un vecteur $\overrightarrow{O_k O''_k}$, dans le cas où le nombre n d'éléments de Saint-Venant est fini. Cette figure montre bien l'effet de saut qui a tendance à exagérer l'écoulement plastique de la surface seuil d'indice k : $\|\overrightarrow{O_k O''_k}\| \gg \|\overrightarrow{O_k O'_k}\|$.

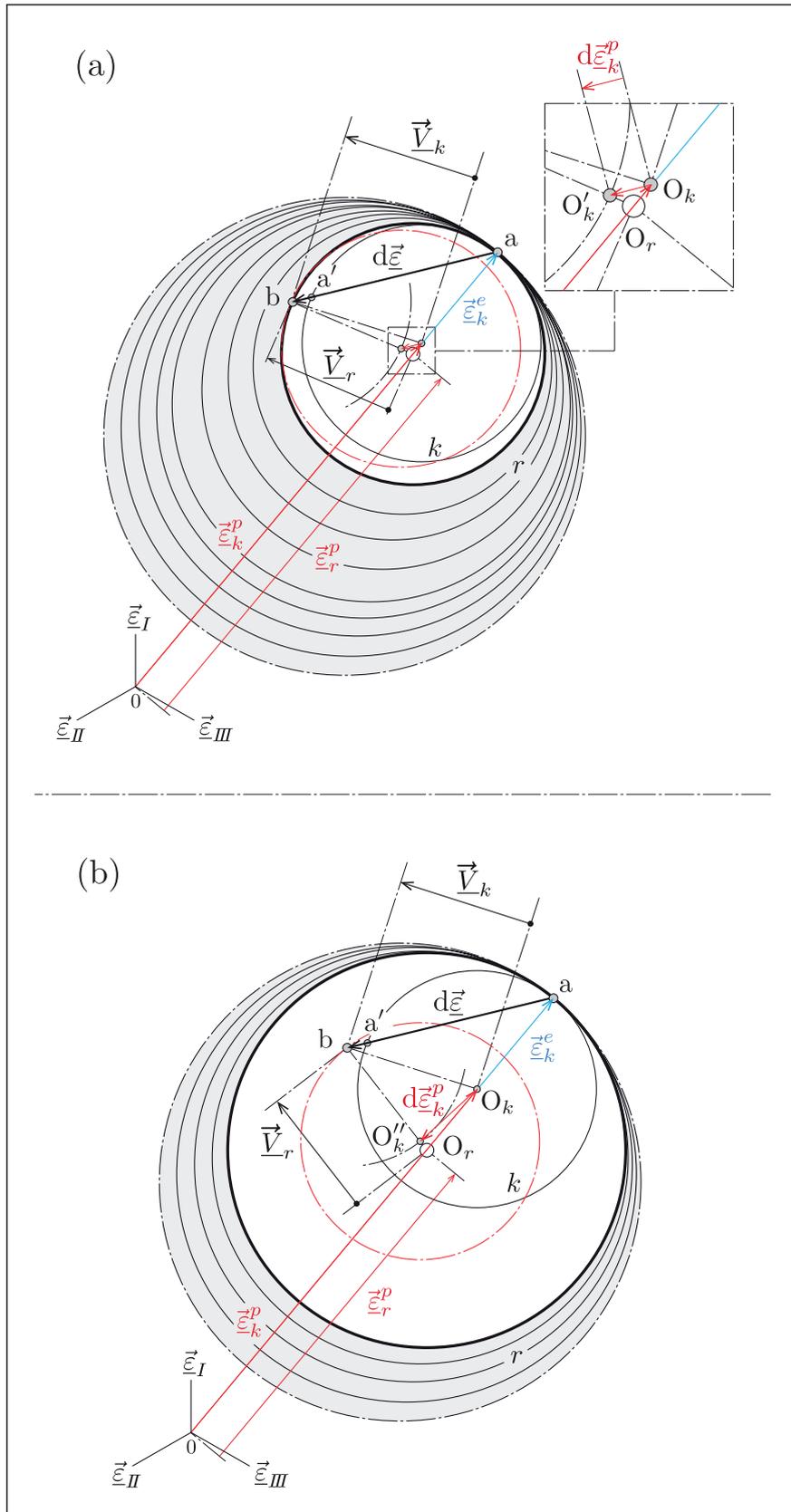


Fig. 6.6 – Modèle SVG-HP 3D avec règle d'écoulement IFR provisoire : évolution du centre du cercle k de O_k à O'_k (a) et de O_k à O''_k (b) en décharge ab avec beaucoup (a) et peu (b) d'éléments de Saint-Venant.

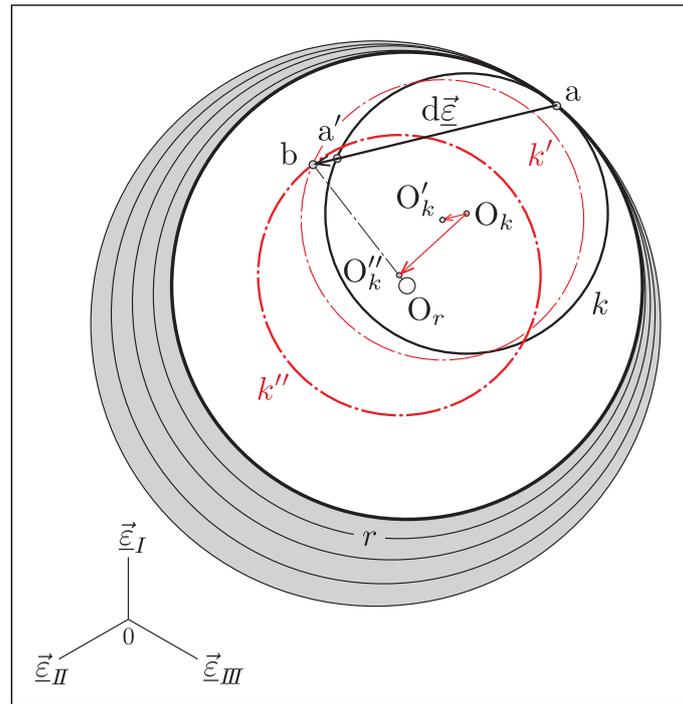


Fig. 6.7 – Modèle SVG-HP 3D avec règle d'écoulement IFR provisoire : saut du cercle k ($O_k \rightarrow O'_k$) si le nombre d'éléments de Saint-Venant est fini.

La figure 6.8 illustre l'influence du nombre d'éléments de Saint-Venant sur la réponse en contrainte du modèle, liée à l'effet de saut des surfaces seuil en déformation.

Plus particulièrement, cette figure montre la réponse du modèle issue d'un chargement $Oabc$ imposé en déformation (figure 6.8a), pour différentes valeurs du nombre n d'éléments de Saint-Venant. Pour n compris entre cinq et dix éléments de Saint-Venant, les figures 6.8b et 6.8c révèlent des discontinuités très marquées dans la réponse du modèle en contrainte. L'amplitude des discontinuités est réduite pour $n = 50$ (figure 6.8d) ; néanmoins, ces discontinuités ne disparaissent pas totalement et nous pouvons les observer au niveau du point b et du point c. Il faut un grand nombre d'éléments pour éliminer totalement ces discontinuités de la réponse du modèle ($n = 500$, figure 6.8e).

Ce résultat montre que le modèle 3D résultant de la définition provisoire de la règle d'écoulement IFR nécessite un très grand nombre d'éléments de Saint-Venant. Du point de vue pratique, l'implémentation d'un tel modèle dans un code éléments finis conduit très rapidement à des besoins très importants en espace de mémorisation et augmente sensiblement les temps de calcul. C'est pourquoi la définition provisoire de la règle d'écoulement IFR est abandonnée, au profit d'une définition qui conduit à un modèle SVG-HP 3D dont la réponse en contrainte ne présente plus de discontinuités liées au faible nombre d'éléments de Saint-Venant. Cette définition sera proposée et étudiée au paragraphe suivant.

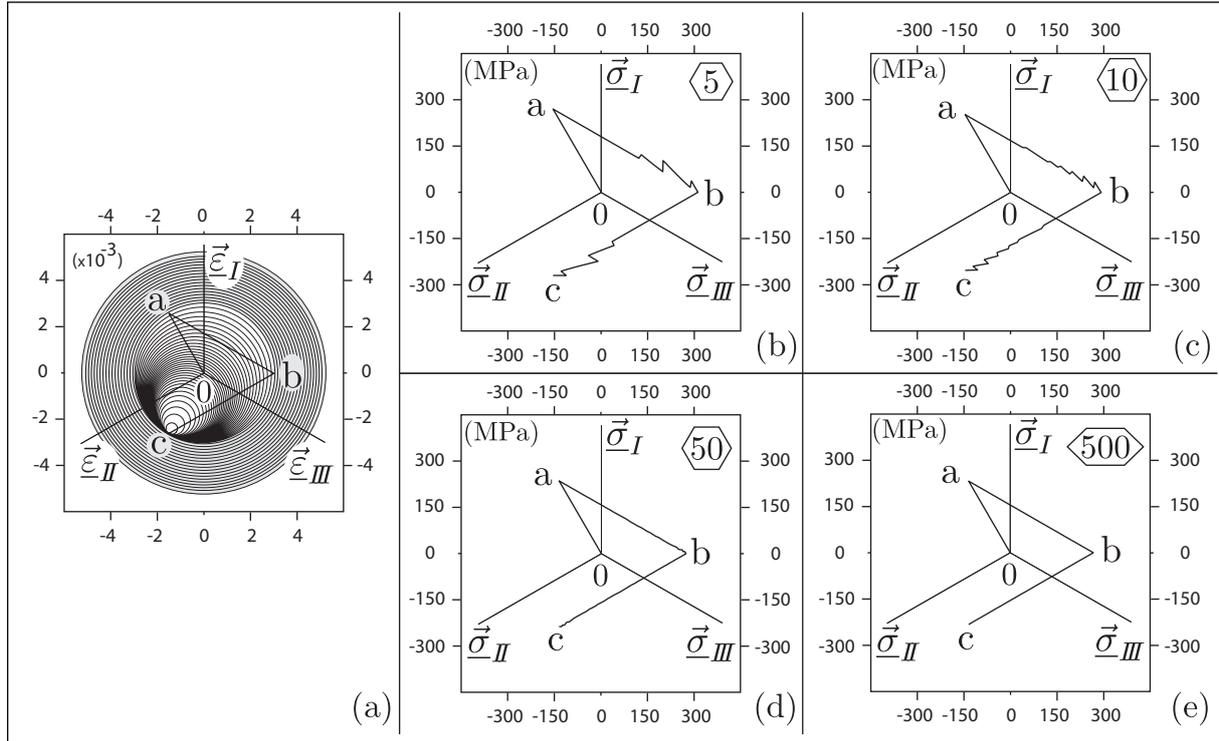


Fig. 6.8 – Modèle SVG-HP 3D avec règle d'écoulement IFR provisoire : chargement en déformation Oabc (a) et réponses en contrainte pour 5 (b), 10 (c), 50 (d) et 500 (e) éléments de Saint-Venant dans le modèle.

6.4 Définition définitive

Pour illustrer la définition finale adoptée pour la règle d'écoulement IFR, nous nous intéressons au mouvement de la surface seuil d'indice $r - 1$ par rapport à la surface seuil d'indice r , compte tenu des relations 6.3 et 6.4 ; à savoir le mouvement, respectivement, de la plus grande surface seuil qui glisse par rapport à la plus petite surface seuil qui ne glisse pas. Notons les deux propriétés importantes que doit respecter la surface seuil d'indice $r - 1$ au cours de son mouvement par rapport à la surface seuil d'indice r :

- Au cours de l'écoulement, le centre O_{r-1} de la surface seuil d'indice $r - 1$ doit se déplacer en un point qui se situe sur le cercle $\textcircled{\mathbf{A}}$ tel que le point O'_{r-1} , par exemple (figure 6.9). Ceci compte tenu de la propriété 4.23, illustrée par la figure 4.5 et les relations 4.24 et 4.25. En effet, au temps $t + dt$ et conformément à la relation 4.23 appliquée au mouvement de la surface seuil d'indice $r - 1$, nous avons : $\|(\underline{\underline{\epsilon}} + d\underline{\underline{\epsilon}}) - (\underline{\underline{\epsilon}}_{r-1}^p + d\underline{\underline{\epsilon}}_{r-1}^p)\| \leq e_{r-1}$, avec $d\underline{\underline{\epsilon}}_{r-1}^p = \underline{\underline{O}}_{r-1}\underline{\underline{O}}'_{r-1}$. La position exacte du point O'_{r-1} sur le cercle $\textcircled{\mathbf{A}}$ sera définie par la règle d'écoulement.
- Au cours de l'écoulement, le centre O_{r-1} de la surface seuil d'indice $r - 1$ doit se

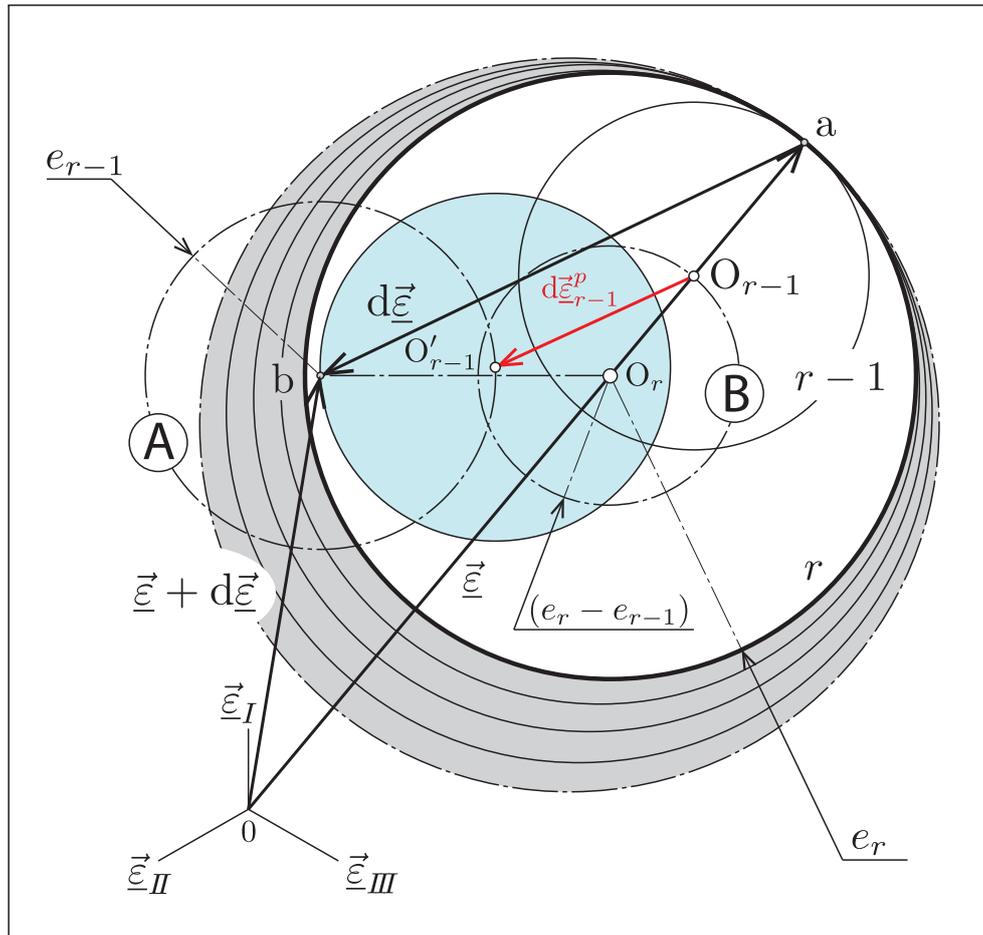


Fig. 6.9 – Modèle SVG-HP 3D avec règle d'écoulement IFR : problématique du déplacement des surfaces seuil $(r - 1)$ en décharge ab .

déplacer sur un point qui se situe à l'intérieur du cercle \textcircled{B} ou à la limite sur le cercle \textcircled{B} , tel que le point O'_{r-1} , par exemple (figure 6.9). Ceci compte tenu de la condition d'interdépendance du mouvement des surfaces seuil dans l'espace des déformations, qui impose qu'une surface seuil de faible rayon reste toujours à l'intérieur d'une surface de plus grand rayon. En effet, au temps $t + dt$, si O'_{r-1} est à l'intérieur ou sur le cercle \textcircled{B} , de rayon $e_r - e_{r-1}$, la surface seuil d'indice $r - 1$, de rayon e_{r-1} , ne peut jamais sortir de la surface seuil d'indice r et de rayon e_r .

Ainsi, compte tenu des deux propriétés précédentes, le centre O'_{r-1} doit se situer à la fois sur le cercle \textcircled{A} et sur ou dans le cercle \textcircled{B} après un écoulement plastique. Ceci permet une multitude de solutions. Pour définir la règle d'écoulement IFR, il est nécessaire donc de faire un choix pour le positionnement du centre O'_{r-1} . La figure 6.10 donne un agrandissement autour de l'intersection des cercles \textcircled{A} et \textcircled{B} , afin de montrer les possibilités de positionnement du centre O'_{r-1} de la surface seuil d'indice $r - 1$ et d'illustrer

le choix à adopter pour la définition finale de la règle d'écoulement IFR.

La figure 6.10 propose plusieurs vecteurs incréments de déformation plastique $d\vec{\underline{\epsilon}}_{r-1}^p$, caractérisant le déplacement du point O_{r-1} . Deux positions particulières O''_{r-1} et O'''_{r-1} se distinguent :

- Le point O''_{r-1} correspond à la règle d'écoulement NFR ; le déplacement $\overrightarrow{O_{r-1}O''_{r-1}}$ du centre de la surface seuil d'indice $r - 1$ correspond à la règle d'écoulement NFR, définie par les relations 4.20 et 4.21 et illustrée par la figure 4.4. En effet, dans ce cas, le déplacement $d\vec{\underline{\epsilon}}_{r-1}^p$ du centre O_{r-1} est orienté le long du vecteur d'écoulement \vec{V}_{r-1} . Ainsi, la surface seuil se déplace à partir de sa position initiale à l'instant t centrée en O_{r-1} d'un vecteur \vec{V}_{r-1} , suivi d'un déplacement le long du vecteur $-\vec{V}_{r-1}$ d'une distance e_{r-1} , ce qui se traduit par un déplacement de son centre de O_{r-1} à O''_{r-1} , situé sur le cercle **(A)**.
- Le point O'''_{r-1} correspond à la définition provisoire de la règle d'écoulement IFR : Le déplacement $\overrightarrow{O_{r-1}O'''_{r-1}}$ du centre de la surface seuil d'indice $r - 1$ correspond à la définition provisoire de la règle d'écoulement IFR, définie par les équations 6.2 à 6.7 et illustrée par les figures 6.4 et 6.5. En effet, la surface seuil se déplace à partir de sa position initiale à l'instant t , centrée en O_{r-1} , d'un vecteur \vec{V}_{r-1} suivi d'un déplacement le long du vecteur $-\vec{V}_r$ d'une distance e_{r-1} , ce qui se traduit par un déplacement de son centre de O_{r-1} à O'''_{r-1} , situé sur le cercle **(A)**.

Soit I le point d'intersection du segment $\overline{bO_r}$ avec le cercle **(B)**, sur la figure 6.10. Ce point existe à la condition que le point b se situe à l'extérieur du cercle **(B)**, ce qui correspond à la condition : $\|\vec{V}_r\| > (e_r - e_{r-1})$. Le point O'_{r-1} situé à l'intersection entre le segment $\overline{O_{r-1}I}$ et le cercle **(A)**, définit une position intermédiaire entre les points O''_{r-1} et O'''_{r-1} . L'incrément de déformation plastique $d\vec{\underline{\epsilon}}_{r-1}^p = \overrightarrow{O_{r-1}O'_{r-1}}$ peut être un choix pertinent pour la définition finale de la règle d'écoulement IFR. Pour justifier ce choix, considérons sur la figure 6.11 le cas où le point b se situe sur le cercle de référence d'indice r . Dans ce cas, les cercles **(A)** et **(B)** sont tangents en I . Le point O'_{r-1} , qui appartient à la fois au cercle **(A)** et se trouve à l'intérieur ou sur le cercle **(B)**, se retrouve alors situé en I . De même, sur la figure 6.10, le point O'''_{r-1} sera confondu avec le point O'_{r-1} et le point I . Ainsi, la définition finale de la règle d'écoulement IFR se retrouve confondue avec sa définition provisoire. Cette situation peut correspondre, d'une part, à un choix particulier de l'incrément de déformation totale $d\vec{\underline{\epsilon}}$ (figure 6.11). D'autre part, cette situation peut correspondre au cas où le nombre d'éléments n du modèle SVG-HP 3D tend vers l'infini ; dans ce cas, le diamètre du cercle **(B)** tend vers zéro. Ainsi, une règle d'écoulement basée sur la donnée du point I est applicable dans tous les cas où le point b est à l'intérieur ou sur le cercle de référence d'indice r et à l'extérieur du cercle **(B)**. Cette méthode permet une unicité dans la définition et une continuité entre les différents cas cités plus haut.

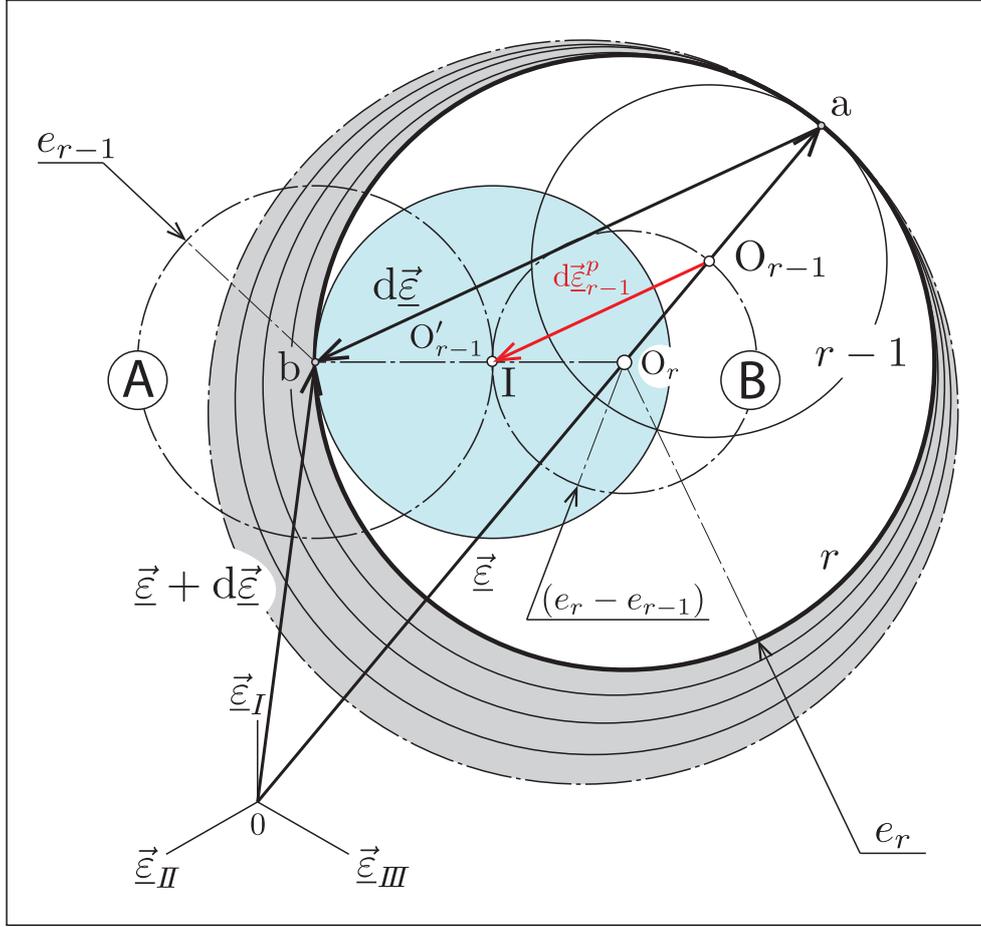


Fig. 6.11 – Modèle SVG-HP 3D avec règle d'écoulement IFR : cas particulier où le point b se situe sur le cercle de référence d'indice r .

Cas 2 : Les surfaces seuil du modèle se scindent en deux groupes, tels que :

$$\forall k \in [1, r-1]; \|\vec{\mathbf{V}}_k\| > e_k; \text{ Groupe des surfaces seuil qui glissent} \quad (6.9)$$

$$\forall k \in [r, n]; \|\vec{\mathbf{V}}_k\| \leq e_k; \text{ Groupe des surfaces seuil qui ne glissent pas} \quad (6.10)$$

i) Pour les surfaces seuil qui ne glissent pas, on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in [r, n], \text{ si } \|\vec{\mathbf{V}}_k\| \leq e_k, \text{ alors } d\vec{\epsilon}_k^p &= \vec{\mathbf{0}}; \\ d\vec{\epsilon}_k^e &= d\vec{\epsilon} \text{ et } d\vec{\sigma}_k = G_k d\vec{\epsilon}_k^e \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dans ce cas le comportement est élastique. Il correspond à celui décrit par la figure 4.4a.

ii) Nous devons définir le mouvement de la surface seuil d'indice $k = r - 1$. Dans ce deuxième cas, la surface seuil d'indice r est la surface fixe de référence pour le positionnement de la surface seuil d'indice $r - 1$, dont le mouvement comporte deux possibilités distinctes :

- La première possibilité concerne le cas où $\|\vec{\mathbf{V}}_r\| \leq (e_r - e_{r-1})$ (le point b se situe dans le cercle $\textcircled{\mathbf{B}}$). Alors, l'écoulement de la surface seuil d'indice $r - 1$ est tel que :

$$d\vec{\underline{\mathbf{e}}}_{r-1}^p = \vec{\mathbf{V}}_{r-1} - \frac{\vec{\mathbf{V}}_{r-1}}{\|\vec{\mathbf{V}}_{r-1}\|} e_{r-1}; d\vec{\underline{\mathbf{e}}}_k^e = d\vec{\underline{\mathbf{e}}} - d\vec{\underline{\mathbf{e}}}_k^p \text{ et } d\vec{\underline{\mathbf{\sigma}}}_k = G_k d\vec{\underline{\mathbf{e}}}_k^e \quad (6.12)$$

Ce cas est illustré par la figure 6.12. Cette figure présente quatre combinaisons possibles pour les positions des points b et O_{r-1} . Plus particulièrement, le point b , qui donne la position du vecteur $\vec{\underline{\mathbf{e}}} + d\vec{\underline{\mathbf{e}}}$, peut être positionné sur ou à l'intérieur du cercle $\textcircled{\mathbf{B}}$, centré en O_r et de rayon $(e_r - e_{r-1})$. Ainsi dans ce cas le point I de la figure 6.10 n'existe pas, par définition; on ne peut donc pas s'en servir pour définir $d\vec{\underline{\mathbf{e}}}_{r-1}^p$, le déplacement de la surface seuil d'indice $r - 1$. Par ailleurs, le centre O_{r-1} , qui caractérise la position actuelle au temps t de la surface seuil d'indice $r - 1$, est aussi situé sur ou à l'intérieur du cercle $\textcircled{\mathbf{B}}$, conformément à la condition d'interdépendance du mouvement des surfaces seuil dans l'espace des déformations. Par conséquent, le vecteur d'écoulement $\vec{\mathbf{V}}_{r-1} = \overrightarrow{O_{r-1}b}$ se trouve également à l'intérieur du cercle $\textcircled{\mathbf{B}}$. Compte tenu de la relation 6.14, le vecteur $d\vec{\underline{\mathbf{e}}}_{r-1}^p$ est orienté le long de $\vec{\mathbf{V}}_{r-1}$ et son module est plus faible que $\|\vec{\mathbf{V}}_{r-1}\|$, donc $d\vec{\underline{\mathbf{e}}}_{r-1}^p = \overrightarrow{O_{r-1}O'_{r-1}}$ est également à l'intérieur du cercle $\textcircled{\mathbf{B}}$. Cela implique que le point O'_{r-1} se situe à l'intérieur du cercle $\textcircled{\mathbf{B}}$. Ceci garantit que le cercle d'indice $r - 1$ ne pourra pas sortir du cercle de référence d'indice r . Notons que la relation 6.12 est équivalente à la règle d'écoulement NFR et plus particulièrement à la relation 4.21. La règle d'écoulement NFR peut être utilisée ici, car la condition d'interdépendance du mouvement des surfaces seuil est respectée. De plus, cette règle nous permet d'éviter le phénomène de saut, contrairement au cas de la définition provisoire de la règle IFR et plus précisément au cas défini par la relation 6.6.

- La seconde possibilité concerne le cas où $\|\vec{\mathbf{V}}_r\| > (e_r - e_{r-1})$. Alors, l'écoulement de la surface seuil d'indice $r - 1$ est caractérisé par I, le point d'intersection du segment $\overline{bO_r}$ avec le cercle $\textcircled{\mathbf{B}}$ (figure 6.10), tel que :

$$d\vec{\underline{\mathbf{e}}}_{r-1}^p = \left(\vec{\mathbf{V}}_{r-1} \cdot \vec{\mathbf{U}} - \sqrt{e_{r-1}^2 + \left(\vec{\mathbf{V}}_{r-1} \cdot \vec{\mathbf{U}} \right)^2 - \|\vec{\mathbf{V}}_{r-1}\|^2} \right) \vec{\mathbf{U}} \quad (6.13)$$

où :

$$\vec{\mathbf{U}} = \frac{\vec{\underline{\mathbf{e}}}^I - \vec{\underline{\mathbf{e}}}_{r-1}^p}{\|\vec{\underline{\mathbf{e}}}^I - \vec{\underline{\mathbf{e}}}_{r-1}^p\|} \quad (6.14)$$

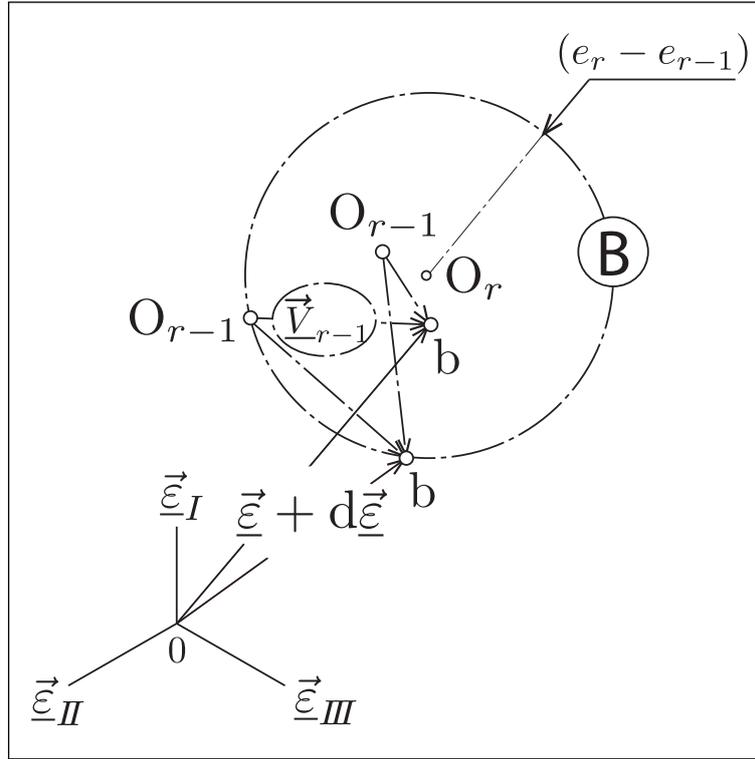


Fig. 6.12 – Modèle SVG-HP 3D avec règle d'écoulement IFR : cas où le point b se situe dans le cercle (B) .

et

$$\vec{\underline{\underline{E}}}^I = \vec{\underline{\underline{E}}}^p + \frac{\vec{\underline{\underline{V}}}_r}{\|\vec{\underline{\underline{V}}}_r\|} (e_r - e_{r-1}) \quad (6.15)$$

Le vecteur $\vec{\underline{\underline{E}}}^I$ caractérise la position du point I à partir du vecteur $\vec{\underline{\underline{E}}}^p$, qui définit la position de la surface de référence d'indice r . La relation 6.14 définit un vecteur unitaire $\vec{\underline{\underline{U}}}$, le long de $\overline{O_{r-1}I}$. Le module de $d\vec{\underline{\underline{E}}}^p_{r-1}$, défini par la relation 6.13 et illustré sur la figure 6.10, est tel que $\|d\vec{\underline{\underline{E}}}^p_{r-1}\| = \vec{\underline{\underline{V}}}_{r-1} \cdot \vec{\underline{\underline{U}}} - \overline{O'_{r-1}c}$. La distance $\overline{O'_{r-1}c}$ peut être déterminée par l'application du théorème de Pythagore dans les triangles rectangles $O_{r-1}bc$ et $O'_{r-1}bc$ représentés sur la figure 6.10. Notons que le vecteur $\vec{\underline{\underline{U}}}$, défini par la relation 6.14, ne pourra pas être calculé si $\|\vec{\underline{\underline{E}}}^I - \vec{\underline{\underline{E}}}^p_{r-1}\|$ est proche de zéro ; c'est à dire si le point O_{r-1} est trop proche du point I. Ceci peut se produire dans deux situations :

- Lorsque le nombre d'éléments de Saint-Venant tend vers l'infini et pour tous les cas de chargement. En effet, dans ce cas $(e_r - e_{r-1})$ tend vers zéro et $\vec{\underline{\underline{E}}}^I$ tend vers $\vec{\underline{\underline{E}}}^p_r$ compte tenu de la relation 6.15. La quantité $\|\vec{\underline{\underline{E}}}^I - \vec{\underline{\underline{E}}}^p_{r-1}\|$ est alors proche zéro, sachant que $\vec{\underline{\underline{E}}}^p_r$ tend vers $\vec{\underline{\underline{E}}}^p_{r-1}$.
- Lorsque le nombre d'éléments de Saint-Venant est fini et pour des cas de

chargement particuliers où le point O_{r-1} se retrouve très proche du point I.

Ces deux situations correspondent au cas où le point b se situe sur le cercle de référence d'indice r ou est très proche de celui-ci. Les cercles **(A)** et **(B)** sont alors tangents en I (figure 6.11). Dans ces conditions, nous avons montré que la définition provisoire de la règle d'écoulement IFR ne présente pas de phénomène de saut (figure 6.6). Ceci nous conduit donc à adopter, pour la surface seuil d'indice $r - 1$, un écoulement basé sur l'équation 6.6, tel que :

$$\text{Si } \|\vec{\underline{\epsilon}}^I - \vec{\underline{\epsilon}}_{r-1}^p\| \text{ est très proche de zéro, alors } d\vec{\underline{\epsilon}}_{r-1}^p = \vec{\underline{V}}_{r-1} - \frac{\vec{\underline{V}}_r}{\|\vec{\underline{V}}_r\|} e_{r-1} \quad (6.16)$$

iii) Le mouvement des surfaces seuil de rayon inférieur à e_{r-1} est défini à l'aide de celui de la surface seuil d'indice $r - 1$, tel que :

$$\begin{aligned} \forall k \in [1, r - 2], d\vec{\underline{\epsilon}}_k^p &= \vec{\underline{V}}_k - \frac{\vec{\underline{V}}_{r-1} - d\vec{\underline{\epsilon}}_{r-1}^p}{\|\vec{\underline{V}}_{r-1} - d\vec{\underline{\epsilon}}_{r-1}^p\|} e_k; \\ d\vec{\underline{\epsilon}}_k^e &= d\vec{\underline{\epsilon}} \text{ et } d\vec{\underline{\sigma}}_k = G_k d\vec{\underline{\epsilon}}_k^e \end{aligned} \quad (6.17)$$

Les centres des surfaces seuil s'alignent sur le segment $\overline{bO'_{r-1}}$ (figure 6.13). Nous pouvons constater qu'au cours de l'incrément de déformation totale, les incréments de déformation plastique respectifs des différentes surfaces seuil gardent leur direction, ce qui n'était pas toujours vrai dans le cas de la définition provisoire (figure 6.6b).

Cas 3 : Toutes les surfaces seuil glissent si :

$$\begin{aligned} \forall k \in [1, n], \|\vec{\underline{V}}_k\| > e_k, \text{ alors } d\vec{\underline{\epsilon}}_k^p &= \vec{\underline{V}}_k - \frac{\vec{\underline{V}}_n}{\|\vec{\underline{V}}_n\|} e_k; \\ d\vec{\underline{\epsilon}}_k^e &= d\vec{\underline{\epsilon}} - d\vec{\underline{\epsilon}}_k^p \text{ et } d\vec{\underline{\sigma}}_k = G_k d\vec{\underline{\epsilon}}_k^e \end{aligned} \quad (6.18)$$

où $\vec{\underline{V}}_n$ est le vecteur d'écoulement de la surface d'indice n . Dans ce cas, la dernière surface d'indice n joue le rôle de la surface de référence pour toutes les autres et son mouvement est simplement dicté par la règle de la normalité.

Il est à noter que dans ce cas, le comportement du modèle est assez différent du cas 2 ; dans le cas 2, en effet, l'évolution des surfaces seuil en mouvement se base sur les surfaces seuil immobiles. Ici, ce n'est plus possible et ainsi le mouvement des surfaces seuil change notablement entre les cas 2 et 3. Par conséquent, nous recommandons de ne pas se trouver dans le cas 3 ; ceci est possible par un choix adapté du dernier seuil e_n , qui ne devra alors ne jamais être atteint lors de la sollicitation mécanique.

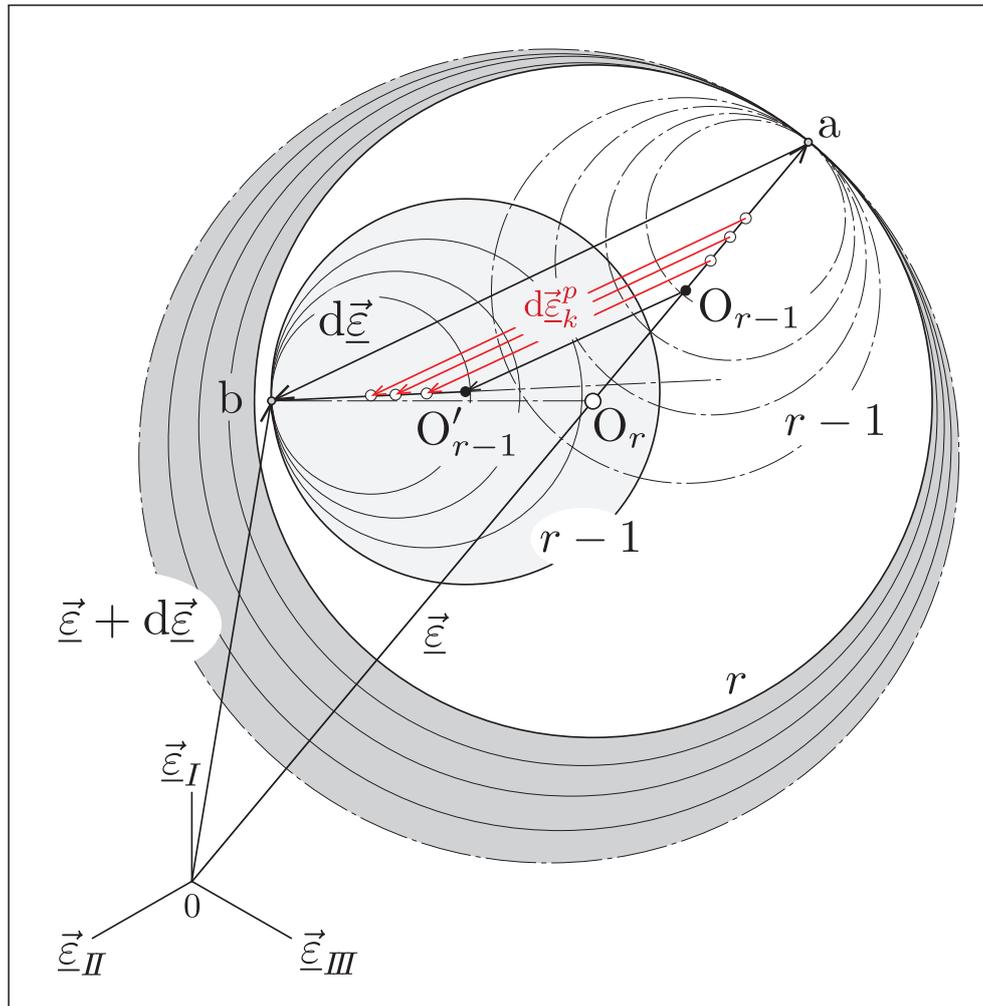


Fig. 6.13 – Modèle SVG-HP 3D avec règle d'écoulement IFR : alignement du centre des surfaces seuil par rapport à la surface seuil d'indice $r - 1$.

La définition adoptée de la règle d'écoulement IFR, définie par les relations 6.8 à 6.18, permet d'éviter le phénomène de saut évoqué dans le paragraphe 6.3 et illustré par les figures 6.6 et 6.7. Pour montrer cette absence de saut, nous réalisons le même trajet de chargement que sur la figure 6.6b, dans les mêmes conditions, mais cette fois-ci en utilisant la définition adoptée de la règle d'écoulement IFR. Le résultat est illustré sur la figure 6.14.

Nous remarquons sur cette figure que le module du vecteur $\overrightarrow{O_{r-1}O'_{r-1}}$, qui correspond à l'écoulement plastique de la surface seuil d'indice $r - 1$, est du même ordre de grandeur que le module du vecteur $\overrightarrow{a'b}$; par conséquent, le mouvement de la surface seuil d'indice $r - 1$ est continu et ne présente pas d'effet de saut. Comme les surfaces seuil suivantes d'indice compris entre 1 et $r - 2$ s'alignent sur le mouvement de la surface d'indice $r - 1$, il n'apparaît plus d'effet de saut pour aucune des surfaces seuil.

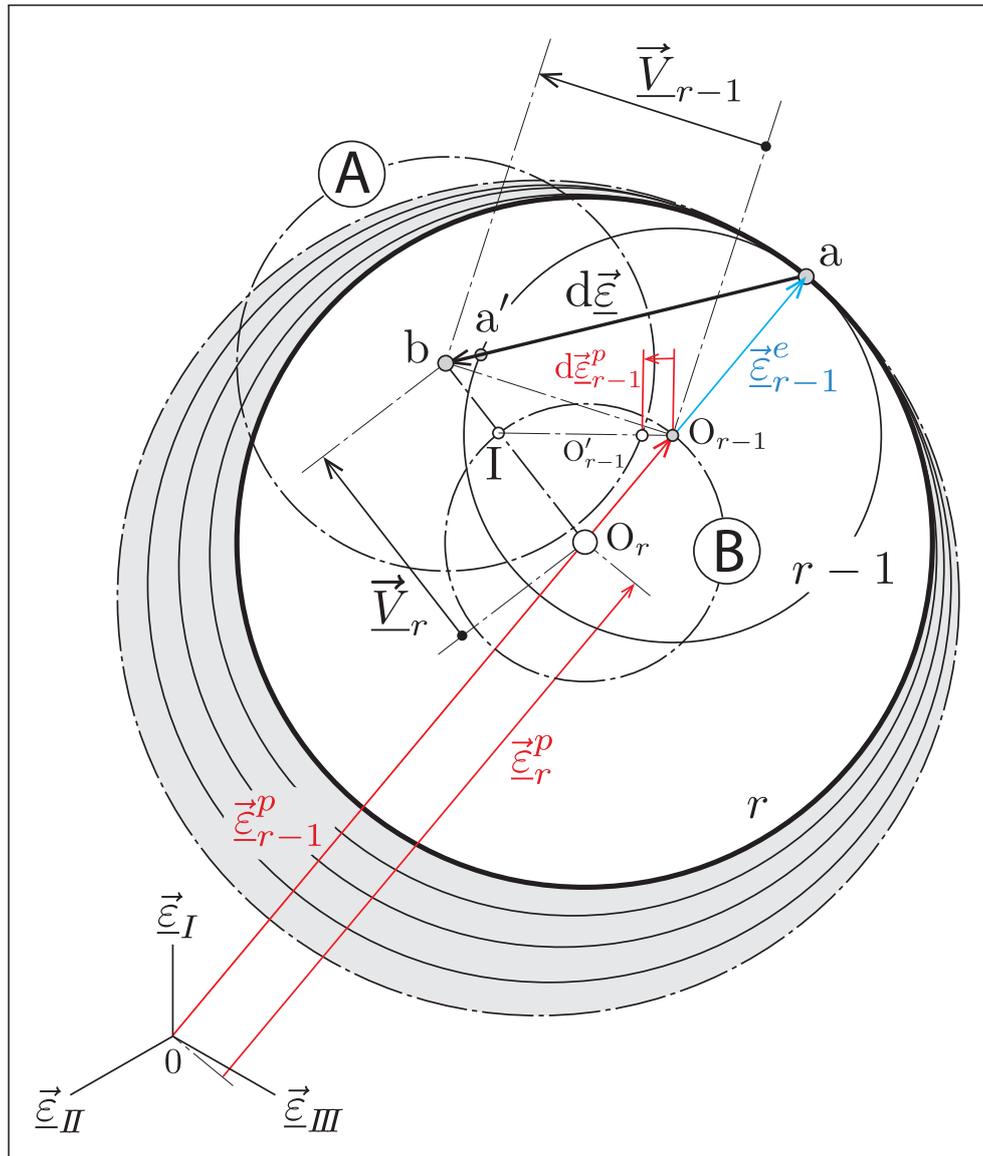


Fig. 6.14 – Modèle SVG-HP 3D avec règle d'écoulement IFR : absence de saut pour un chargement identique à celui de la figure 6.6b.

La définition adoptée de la règle d'écoulement IFR permet d'éviter le phénomène de saut et les instabilités qu'il implique même pour un faible nombre d'éléments. La figure 6.15, qui reprend le chargement en déformation Oabc illustré sur la figure 6.8, montre la réponse du modèle avec la définition définitive de la règle d'écoulement IFR. Nous pouvons remarquer que la définition définitive améliore grandement l'allure de la réponse en contrainte pour cinq et dix éléments de Saint-Venant (figures 6.15b et 6.15c respectivement) par rapport à la définition provisoire (figures 6.8b et 6.8c respectivement). Pour cinquante éléments (figure 6.15d), l'amélioration est encore visible. Dans le cadre

d'une implémentation numérique du modèle, à nombre d'éléments égal, on obtiendra donc une meilleure réponse du modèle avec la définition définitive de la règle d'écoulement IFR, tout en respectant la condition de non-intersection des surfaces seuil.

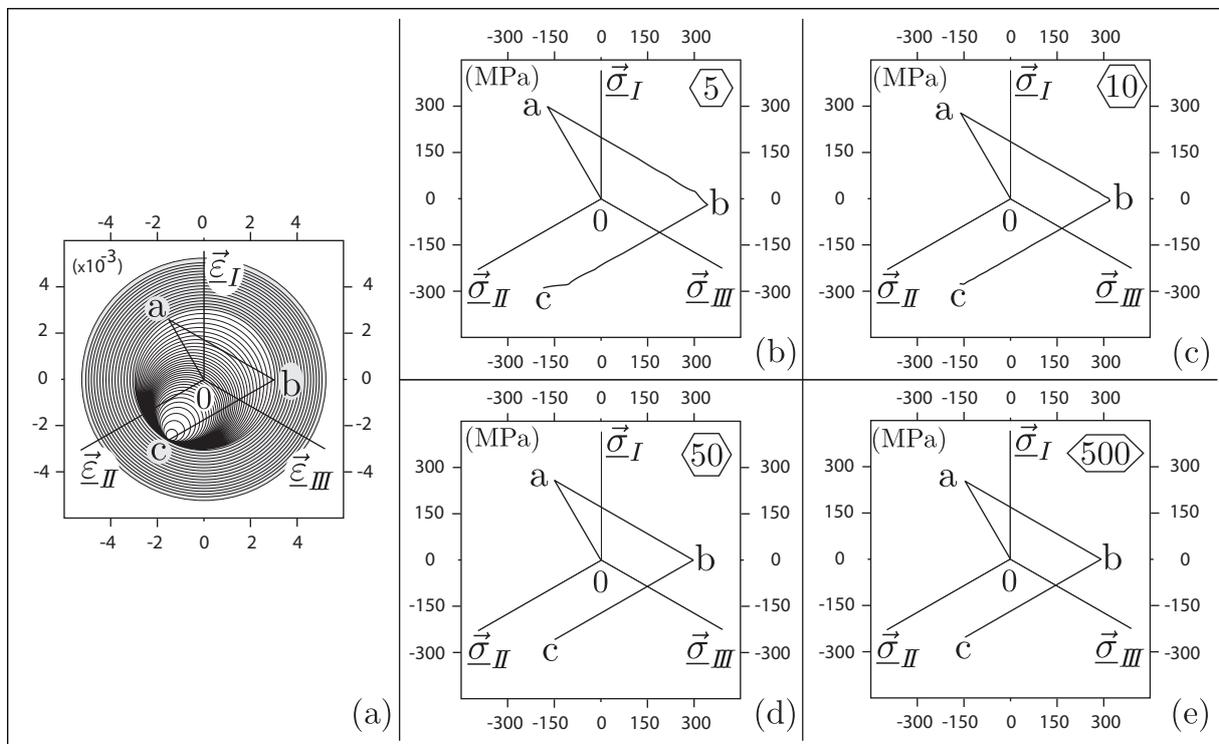


Fig. 6.15 – Modèle SVG-HP 3D avec règle d'écoulement IFR définitive : chargement en déformation Oabc (a) et réponses en contrainte pour 5 (b), 10 (c), 50 (d) et 500 (e) éléments de Saint-Venant dans le modèle.

6.5 Analyse des prévisions du modèle SVG-HP 3D avec la règle d'écoulement IFR

6.5.1 Réponse sous chargement multiaxial de traction-torsion combinées

Dans le paragraphe 5.2, nous avons confronté les prédictions du modèle SVG-HP 3D, avec la règle d'écoulement NFR, aux résultats expérimentaux de TTC, afin de qualifier sa capacité à modéliser le comportement élastoplastique en chargements multiaxiaux non proportionnels. L'objectif de ce paragraphe est de suivre la même démarche en utilisant la règle d'écoulement IFR, dans sa définition définitive. Ceci nous permet de comparer les performances de ces deux modélisations. Pour cela, nous avons adopté les mêmes paramètres du modèle SVG-HP 3D que précédemment, avec la règle d'écoulement NFR. Pour la simulation des résultats d'essais présentés en annexe A, nous avons substitué le paramètre S_0 , le seuil initial identifié à l'annexe A, par le paramètre S_S , le seuil limite sur le cycle stabilisé en fonction de la forme du trajet de chargement, issu de l'étude paramétrique du paragraphe 5.2 (table 5.1). Ceci nous permet de faire abstraction du phénomène d'écrouissage cyclique et de focaliser l'attention sur la qualité de modélisation des propriétés génériques du comportement ; sachant que, par ailleurs, ces deux modèles sont des modèles d'hystérésis pure à fermeture parfaite des cycles et qu'ils n'ont pas la capacité de rendre compte de l'écrouissage cyclique sur les trajets non proportionnels.

Les résultats des simulations avec la règle d'écoulement IFR sont donnés aux figures 6.16 à 6.22.

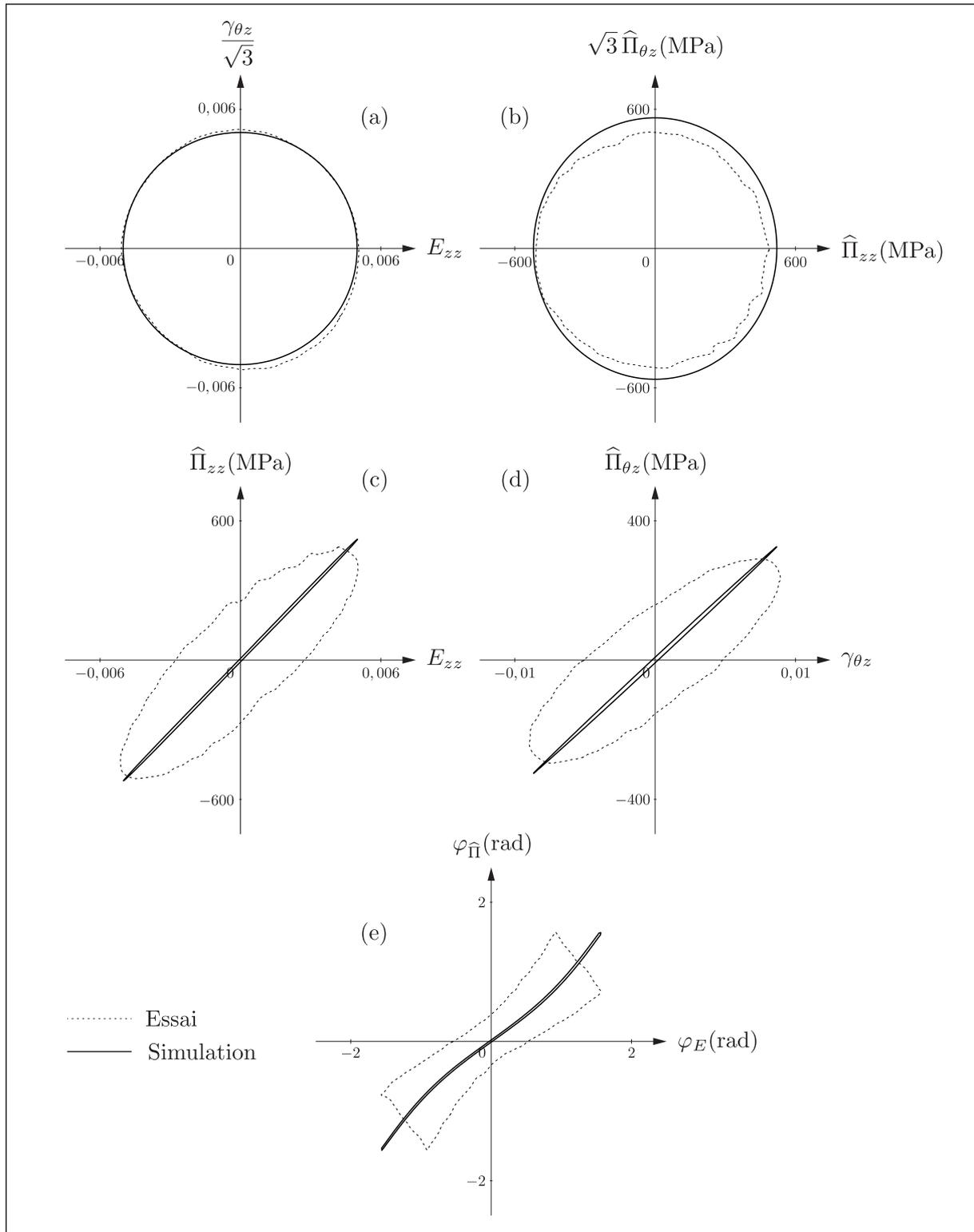


Fig. 6.16 – Comparaison expérience-simulation règle IFR, lors d'une sollicitation de traction-torsion combinées en trajet en forme de **cercle** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e). Cette même comparaison avec la règle NFR est donnée à la figure 5.11 page 99.

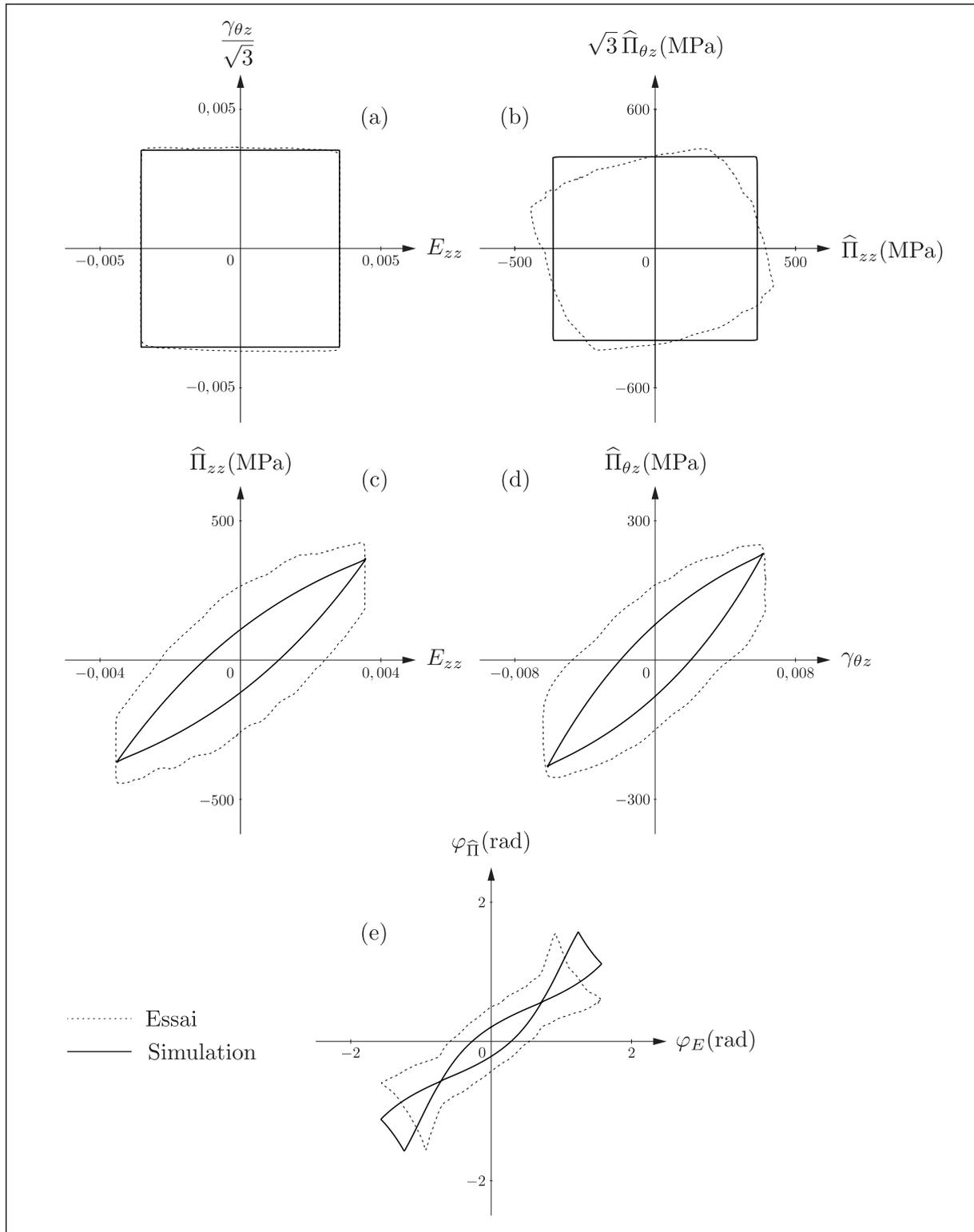


Fig. 6.17 – Comparaison expérience-simulation règle IFR, lors d'une sollicitation de traction-torsion combinées en trajet en forme de **carré** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans la direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e). Cette même comparaison avec la règle NFR est donnée à la figure 5.12 page 100.

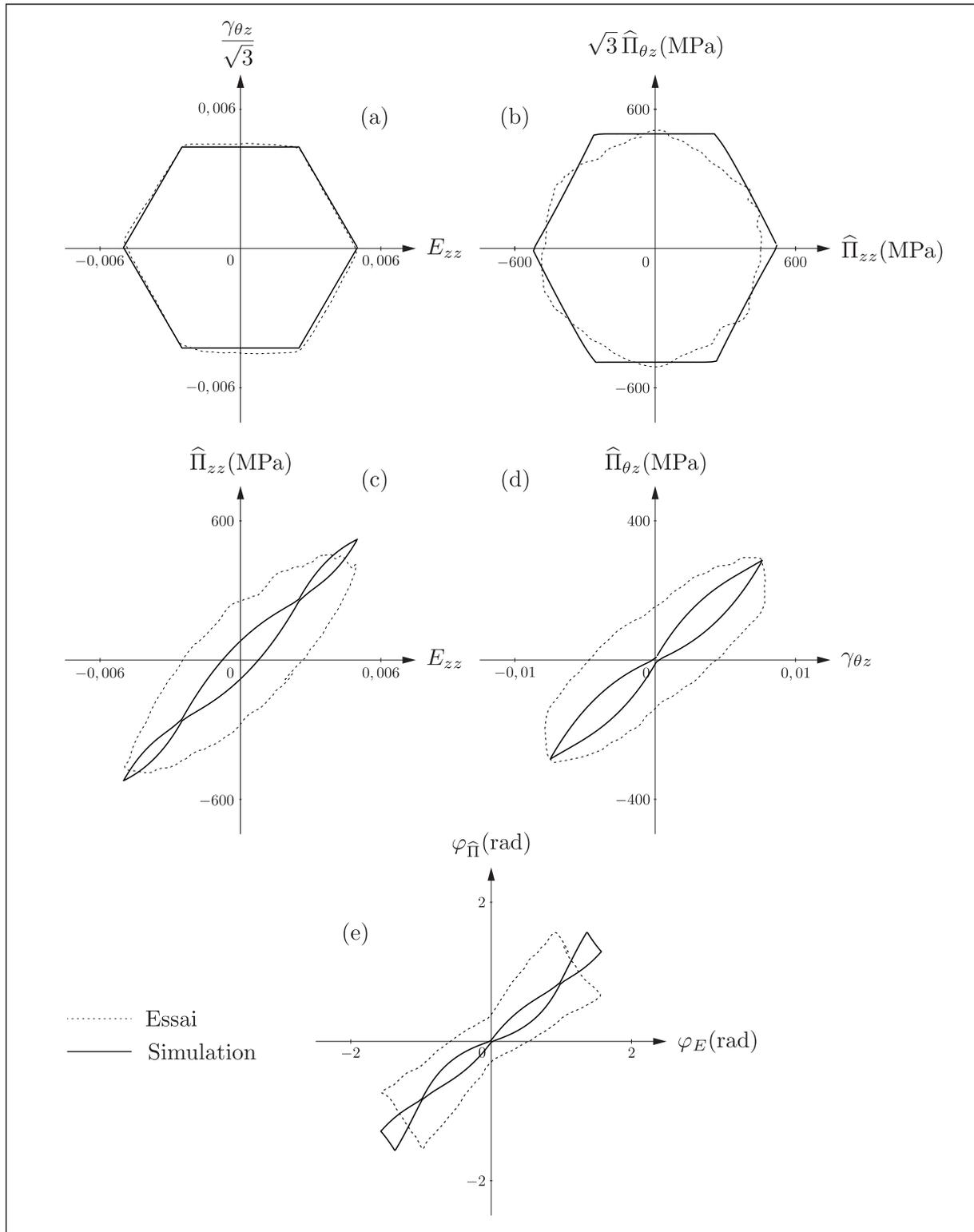


Fig. 6.18 – Comparaison expérience-simulation règle IFR, lors d'une sollicitation de traction-torsion combinées en trajet en forme d'**hexagone** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e). Cette même comparaison avec la règle NFR est donnée à la figure 5.13 page 101.

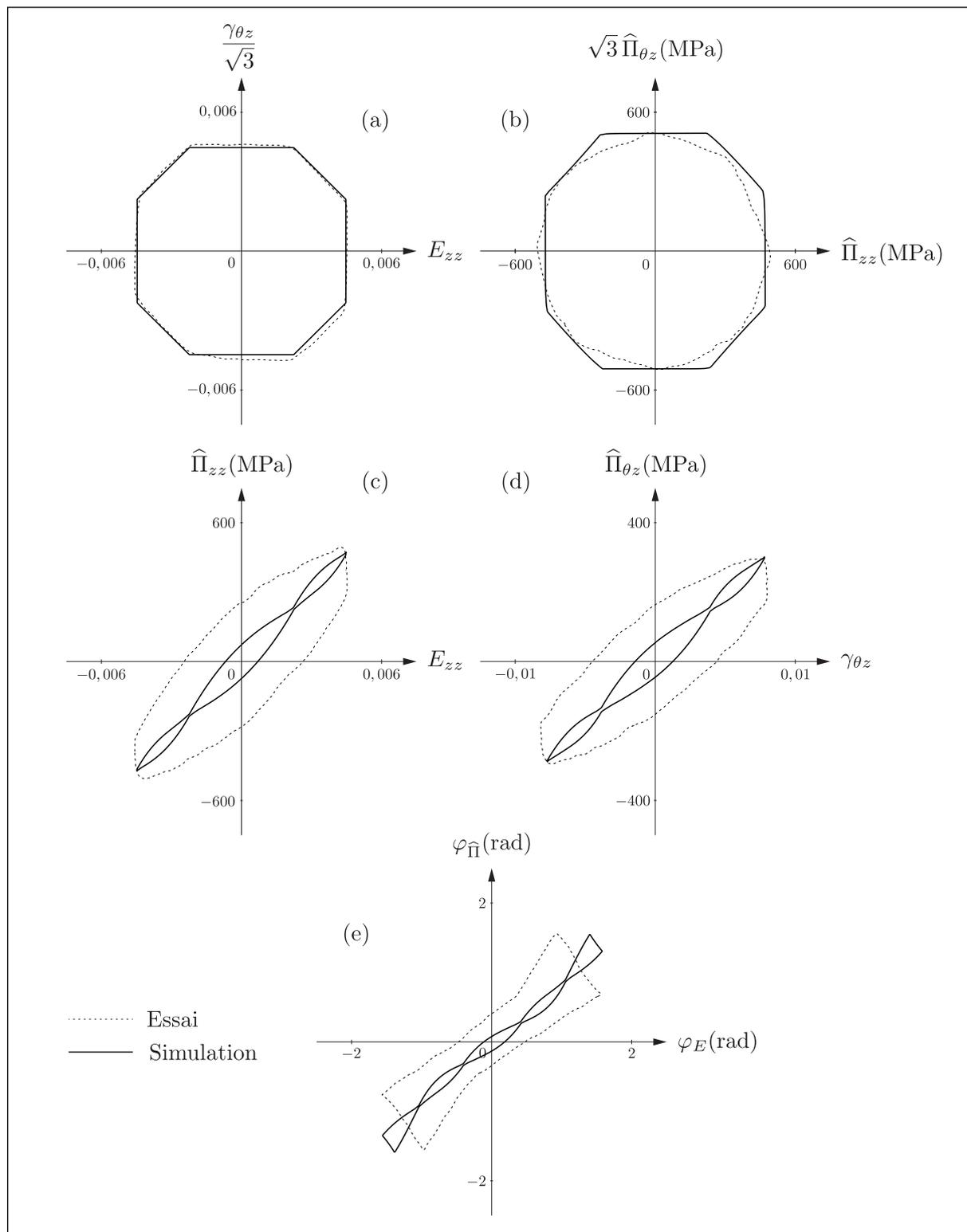


Fig. 6.19 – Comparaison expérience-simulation règle IFR, lors d'une sollicitation de traction-torsion combinées en trajet en forme d'**octogone** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu) ; trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e). Cette même comparaison avec la règle NFR est donnée à la figure 5.14 page 102.

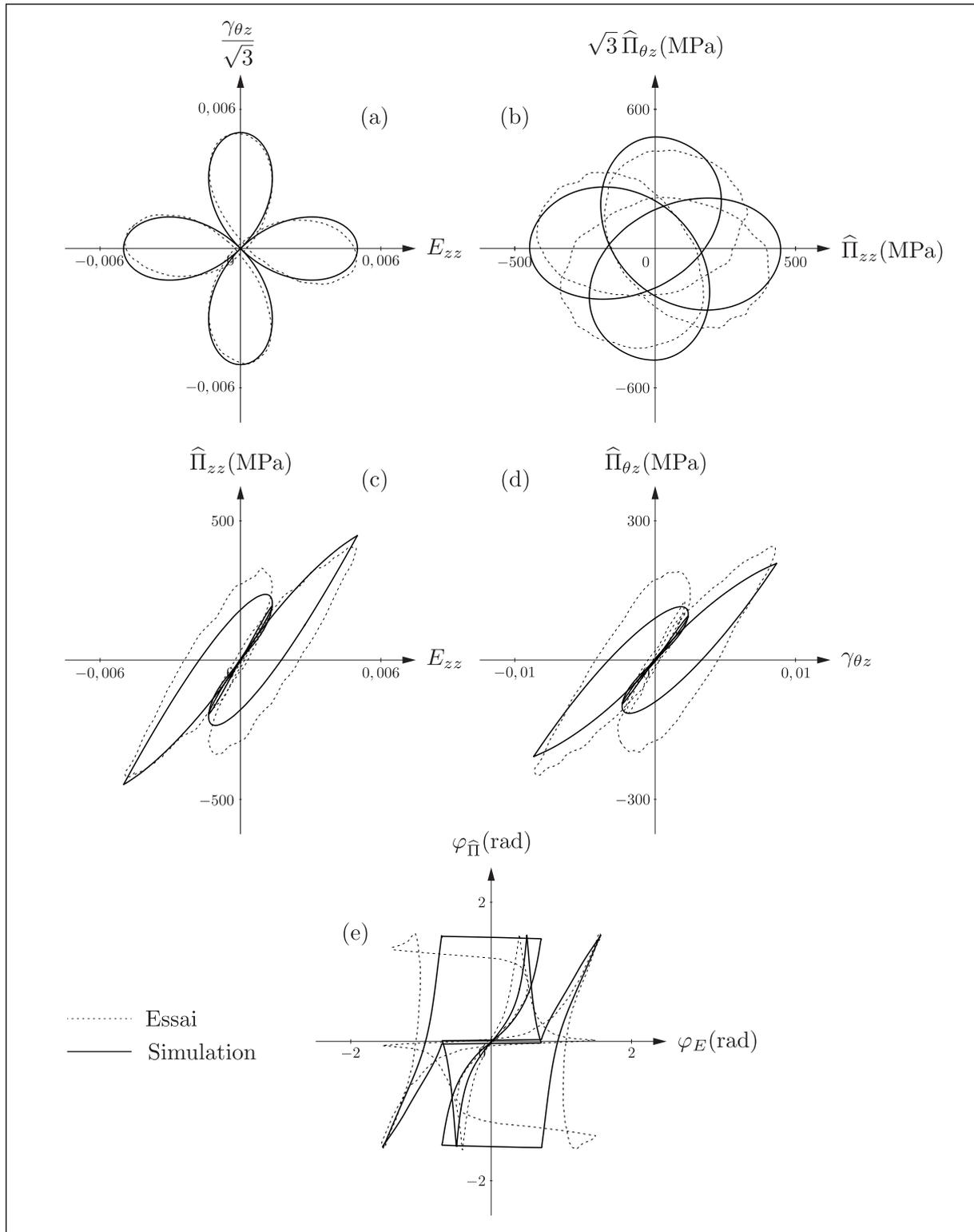


Fig. 6.20 – Comparaison expérience-simulation règle IFR, lors d'une sollicitation de traction-torsion combinées en trajet en forme de **trèfle à 4 pétales** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu); trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e). Cette même comparaison avec la règle NFR est donnée à la figure 5.17 page 105.

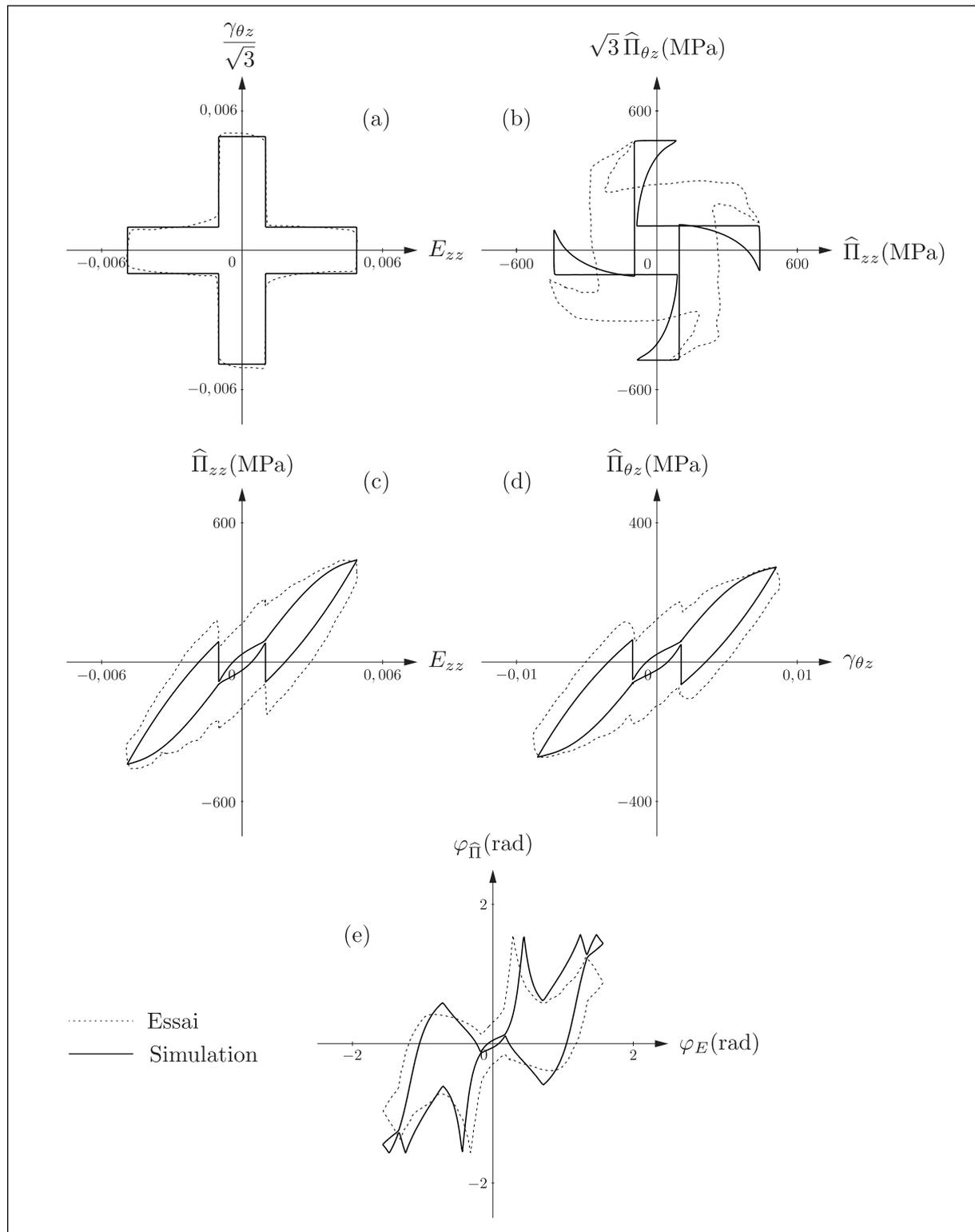


Fig. 6.21 – Comparaison expérience-simulation règle IFR, lors d'une sollicitation de traction-torsion combinées en trajet en forme de **croix numéro 1** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu); trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e). Cette même comparaison avec la règle NFR est donnée à la figure 5.18 page 106.

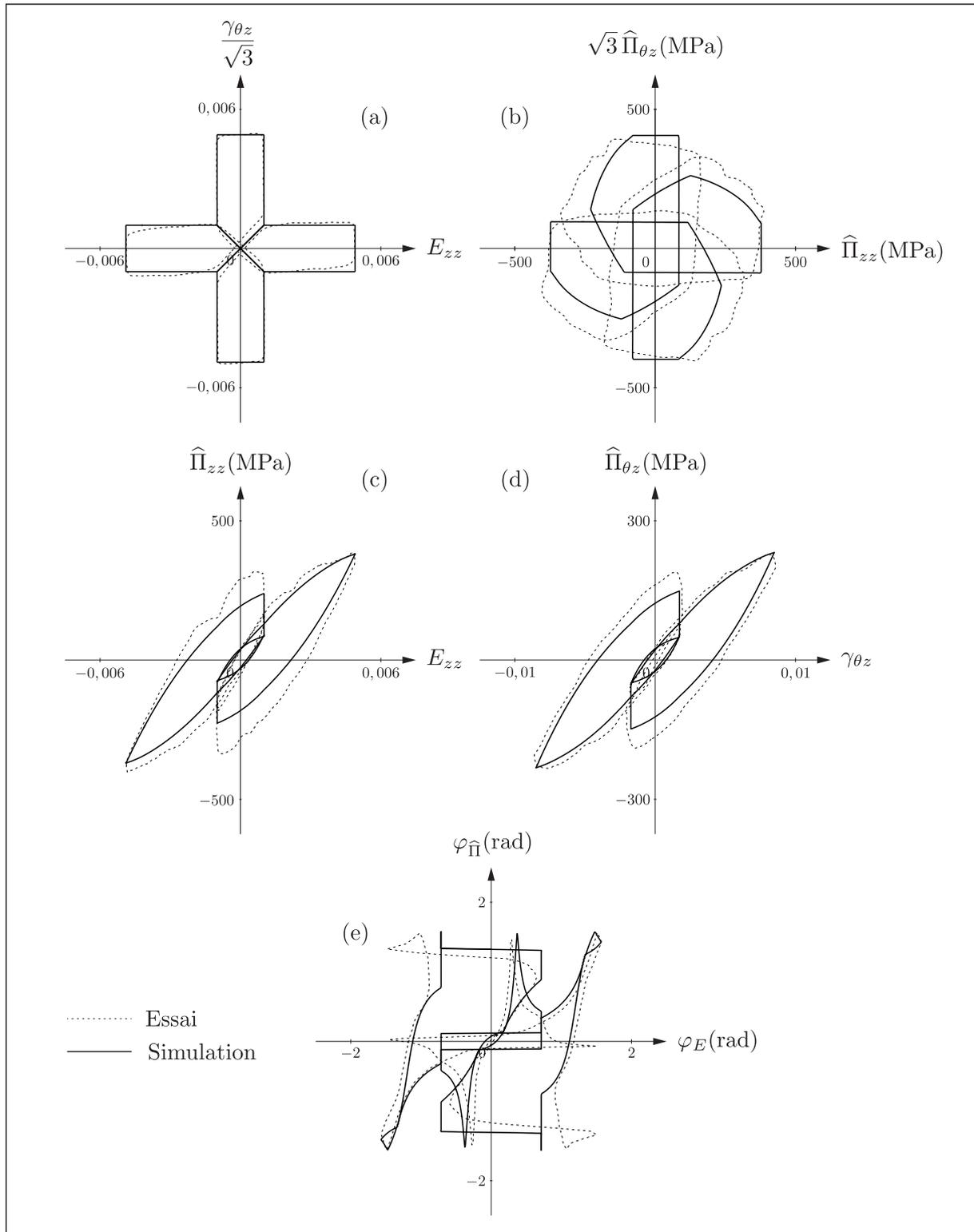


Fig. 6.22 – Comparaison expérience-simulation règle IFR, lors d'une sollicitation de traction-torsion combinées en trajet en forme de **croix numéro 2** : expérience (trait pointillé) et simulation (trait continu); trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse contrainte-déformation dans le direction axiale (c), réponse contrainte-déformation dans la direction de cisaillement (d) et caractérisation du déphasage contrainte-déformation (e). Cette même comparaison avec la règle NFR est donnée à la figure 5.19 page 107.

Sur les trajets cercle, carré, hexagone et octogone des figures 6.16 à 6.19, les résultats des simulations montrent que la règle d'écoulement IFR ne permet pas de prédire le déphasage entre la contrainte et la déformation. Par ailleurs, les simulations correspondantes rhéologiques contrainte-déformation dans le sens axial comme en cisaillement sont assez éloignées des résultats expérimentaux. Sur les trajets carré, hexagone et octogone, l'incapacité du modèle à rendre compte du déphasage se constate dans le plan des contraintes (sous-figures (b) des figures 6.17, 6.18 et 6.19). En effet, contrairement aux simulations avec la règle NFR, sur les figures 5.12, 5.13 et 5.14 respectivement, les figures 6.17, 6.18 et 6.19 montrent que la réponse en contrainte est en phase avec la sollicitation en déformation et elle est complètement déphasée par rapport aux résultats expérimentaux. Sur les trajets trèfle à 4 pétales et croix numéro 1, des figures 6.20 et 6.21, les résultats des simulations montrent que le déphasage entre la contrainte et la déformation est qualitativement bien estimé ; néanmoins, les résultats de ces simulations sont de moins bonne qualité que ceux obtenus avec la règle d'écoulement NFR (figure 5.17 et 5.18). Le trajet croix numéro 2, qui présente des séquences de chargement qui traversent l'origine, semble présenter des simulations de meilleure qualité dans le plan des contraintes, sur les diagrammes rhéologiques contrainte-déformation dans le sens axial et en cisaillement, ainsi que la prédiction du déphasage (figure 6.22). Cependant, la réponse en contrainte du modèle se distingue des résultats expérimentaux ; notamment dans le motif de petit carré au centre du plan des contraintes, de taille très sous-estimée par rapport à l'expérience et mal orienté. Ceci contrairement à la figure 5.19, pour le même trajet avec la règle NFR. Notons enfin que la réponse en contrainte du trèfle à 4 pétales est relativement bonne, mais celle de la croix numéro 1 est sous estimée par le modèle, notamment le carré central sous estimé et mal orienté de la même façon que la croix numéro 2.

Finalement, on constate que la règle d'écoulement IFR possède une faiblesse dans la modélisation du déphasage entre la contrainte et la déformation. Elle se révèle aussi imprécise sur la prédiction de la réponse dans le plan des contraintes. Comparativement, la règle d'écoulement NFR donne de bien meilleurs résultats.

6.5.2 Prédiction de l'effet Poynting-Swift

Dans la section 5.3, nous avons simulé, avec notre modèle doté de la règle d'écoulement NFR, un chargement de torsion alternée à effort axial nul sur tube mince, en appliquant les mêmes conditions de chargement que celles de l'essai 206 de [Wack 1989] (cf. § 2.5). Ceci, afin de constater si le comportement du modèle correspondant à la règle d'écoulement NFR manifeste l'effet Poynting-Swift. L'objectif de ce paragraphe est de suivre la même démarche pour la règle d'écoulement IFR, dans sa définition définitive.

Les paramètres du modèle choisis pour cette simulation sont les mêmes que ceux utilisés pour le modèle avec la règle d'écoulement NFR. Le résultat de simulation avec un chargement similaire à celui de l'essai 206 de [Wack 1989] avec la règle d'écoulement IFR est donné à la figure 6.23.

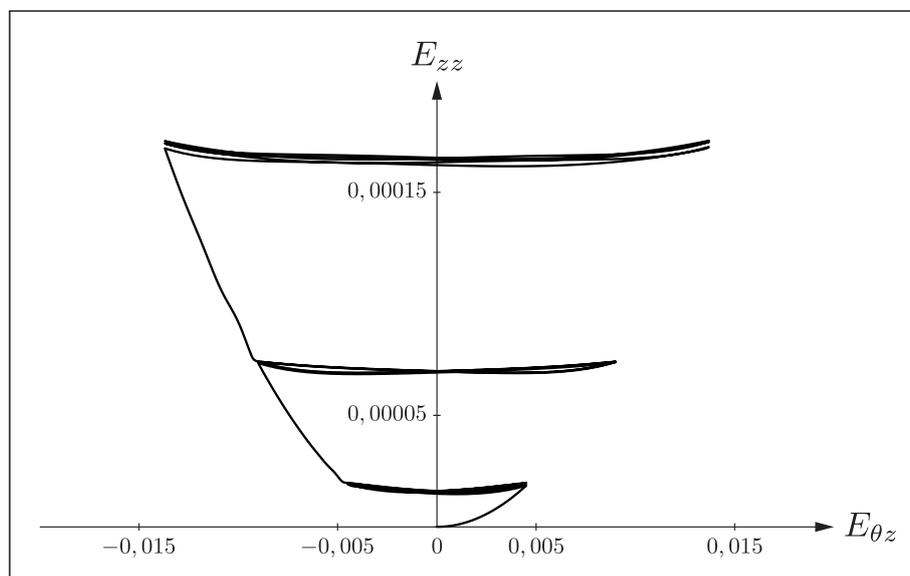


Fig. 6.23 – Réponse du modèle SVG-HP 3D, avec la règle d'écoulement IFR, à un chargement similaire à celui imposé par [Wack 1989] dans l'essai 206 (figure 2.15 page 34). La même simulation avec le modèle NFR est donnée à la figure 5.23 page 111.

Nous constatons que le modèle avec la règle d'écoulement IFR manifeste une augmentation de la déformation axiale, au cours du chargement cyclique en torsion, mais le comportement observé est qualitativement différent des résultats expérimentaux d'effet Poynting-Swift (cf. figures 2.15, 2.16 et 2.17) sur deux points :

1. La forme incurvée ou concave des courbes de déformation axiale en fonction de la déformation de torsion n'est pas présente avec la règle d'écoulement IFR ;
2. L'effet de rochet ou cumul de la déformation axiale à chaque cycle de déformation de torsion n'est pas présent dans la réponse du modèle IFR. Seule une augmentation de la déformation axiale est présente lorsque l'amplitude de déformation de torsion augmente d'un palier à un autre.

L'amplitude de la déformation axiale est relativement faible par rapport à celle obtenue avec la règle NFR et celle obtenue expérimentalement [Wack 1989].

Ce résultat de simulation avec la règle d'écoulement IFR a été produit dans les mêmes conditions que celui de la figure 5.23 avec la règle d'écoulement NFR. Le seul élément qui diffère est la règle d'écoulement. Notamment, la prise en compte de la rotation de la matière est identique entre ces deux résultats de simulation. Une conclusion de la section 5.3.2 était qu'à la fois la rotation de la matière et la règle d'écoulement sont à

l'origine de l'effet Poynting-Swift. Les points 1 et 2 ci-dessus renforcent cette conclusion, sur le fait que la règle d'écoulement est un élément d'importance pour la manifestation de l'effet de rochet du second ordre ou effet Poynting-Swift.

Conclusion du chapitre

Une règle d'écoulement, définie dans l'espace des déformations, avec une condition d'interdépendance des mouvements des surfaces seuil, ou règle d'écoulement IFR, a été proposée. La règle d'écoulement IFR a été implémentée dans le code de calcul de structures par éléments finis Abaqus et dans l'outil heuristique de simulation dans un espace déviatoire 2D qui permet de visualiser le mouvement des surfaces seuil, dans l'environnement MATLAB.

Le modèle obtenu en utilisant la règle d'écoulement IFR donne des résultats moins satisfaisants que celui doté de la règle d'écoulement NFR. En effet, la règle d'écoulement IFR conduit à une sous-estimation des déphasages entre la contrainte et la déformation. Certains trajets, tels que le trajet en croix, montrent un écart important entre les résultats expérimentaux et la modélisation. Étonnamment, le trajet en forme de trèfle à quatre pétales est assez correctement modélisé par la règle d'écoulement IFR.

Enfin, les effets du second ordre de Poynting-Swift sont relativement mal reproduits par la règle d'écoulement IFR ; à la fois pour la forme typique incurvée des courbes comme pour l'effet de cumul de déformation axiale.

Thermomécanique du modèle de Saint-Venant généralisé 3D

Sommaire

7.1	Préambule et hypothèses de base	167
7.2	Cas du modèle SVG-HP 1D	168
7.2.1	Analyse énergétique du modèle - Premier principe de la thermodynamique	168
7.2.2	Analyse thermodynamique du modèle - Second principe de la thermodynamique	172
7.3	Extension de l'analyse thermodynamique au cas 3D	175
7.3.1	Cas du modèle de Saint-Venant élémentaire 3D	175
7.3.2	Généralisation au cas du modèle SVG-HP 3D	179

L'objectif de ce chapitre est de proposer une analyse énergétique et thermodynamique du modèle SVG-HP 3D, limitée au cas de l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP). Cette analyse conduira à une modélisation thermodynamique qui permettra de fournir des variables pertinentes pour le développement d'une approche de la fatigue des matériaux métalliques.

Ce chapitre est constitué de trois paragraphes. Le premier paragraphe donne des éléments d'introduction et les hypothèses de base (§ 7.1). Les paragraphes 7.2 et 7.3 sont quant à eux consacrés aux modèles SVG-HP 1D et SVG-HP 3D, respectivement.

7.1 Préambule et hypothèses de base

Le modèle ressorts-frotteurs SVG-HP 1D est une entité symbolique, qui représente de façon schématique simplifiée le comportement du volume élémentaire de matière de la Mécanique des Milieux Continus (MMC). Le modèle joue ainsi un rôle heuristique phénoménologique. L'étude proposée ici s'attache à exploiter ce caractère heuristique du modèle pour aboutir à une analyse énergétique et thermodynamique consistante. Cette analyse du comportement du modèle est du type phénoménologique. Elle ne s'attache à

aucun domaine matériel particulier, ni à aucune frontière de séparation extérieur-intérieur. C'est une analyse phénoménologique, qui s'intéresse à l'examen mécanique, énergétique et thermodynamique de la structure interne du modèle et s'attache particulièrement à l'identification des sources internes d'irréversibilité. Elle fait abstraction de la notion de domaine matériel, de cycles de transformation, de transfert thermique, d'équation de la chaleur et de toute équation de bilan d'échange avec l'extérieur.

- **Hypothèse 1** - L'analyse énergétique et thermodynamique envisagée sera valable dans le cadre de l'application aux matériaux métalliques, en petites déformations.
- **Hypothèse 2** - Le modèle SVG-HP 1D est considéré comme un système thermodynamique, et nous adoptons la convention classique qui considère négatives la puissance et la chaleur fournies par ce système.
- **Hypothèse 3** - Nous excluons toutes sources d'irréversibilités internes par actions à distance sur le modèle.

Le comportement élastoplastique du modèle SVG-HP 1D est de nature déviatoire. Bien que ce chapitre traite de quantités de nature énergétique scalaires, les variables énergétiques se rapportant au modèle SVG-HP 1D seront notées avec une barre inférieure. Cette notation permet de rappeler cet aspect.

Considérant le modèle SVG-HP 1D, nous notons les quantités correspondantes $\underline{\dot{E}}$, $-\underline{\dot{Q}}_{ii}$, $\underline{\dot{\phi}}$, $\underline{\dot{I}}$ et $\underline{\pi}$, respectivement le taux d'énergie interne, le taux de chaleur interne intrinsèque, la dissipation intrinsèque, le taux de dissipation de type entropique et la puissance réversible reçue.

7.2 Cas du modèle SVG-HP 1D

7.2.1 Analyse énergétique du modèle - Premier principe de la thermodynamique

Considérons le cas du modèle SVG-HP 1D, composé de n éléments de Saint-Venant et caractérisé par une suite discrète de seuils de déclenchement e_k^* (cf. relation 3.1) et une distribution des modules d'élasticité G_k des ressorts (cf. relation 3.3).

La puissance des efforts intérieurs ($-\underline{P}_i$) est telle que :

$$(-\underline{P}_i) = \underline{\sigma} \cdot \underline{\dot{\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n \underline{\sigma}_k \quad \text{et} \quad (-\underline{P}_i)_k = \underline{\sigma}_k \cdot \underline{\dot{\varepsilon}} \quad (7.1)$$

où $\underline{\sigma}$ est la contrainte totale du modèle, $\underline{\sigma}_k$ et $(-\underline{P}_i)_k$ représentent respectivement la contrainte et la puissance des efforts intérieurs dans l'élément courant d'indice k .

La figure 7.1 donne la réponse du modèle SVG-HP 1D, dans un diagramme contrainte-déformation ($\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}$), au cours d'un cycle symétrique OABA, à vitesse de déformation $\dot{\underline{\varepsilon}}$ constante. Pour simplifier la lecture et la comparaison des différents diagrammes rhéologiques, on considère une vitesse de déformation $\dot{\underline{\varepsilon}} = \pm 10^{-2} \text{ s}^{-1}$. La figure 7.2 donne le diagramme de la puissance des efforts intérieurs du modèle unidimensionnel de Saint-Venant généralisé, correspondant au cycle de la figure 7.1.

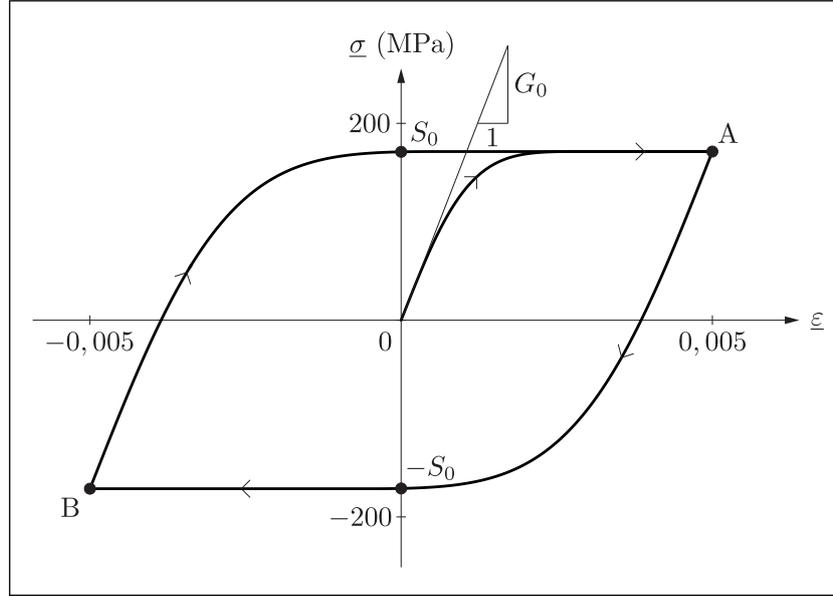


Fig. 7.1 – Diagramme contrainte-déformation du modèle SVG-HP 1D lors d'un cycle symétrique OABA ($G_0 = 105 \text{ GPa}$; $S_0 = 173,2 \text{ MPa}$; $c = 2,0$; $n = 200$, $e_n^* = 0,0043$; $\dot{\underline{\varepsilon}} = \pm 10^{-2} \text{ s}^{-1}$).

Le premier principe de la thermodynamique permet d'exprimer la puissance des efforts intérieurs, comme la somme de deux termes :

$$(-P_i) = \dot{E} + (-\dot{Q}_{ii}) \quad (7.2)$$

le taux d'énergie interne \dot{E} lié au stockage de l'énergie dans les ressorts et le taux de chaleur interne intrinsèque $(-\dot{Q}_{ii})$ lié à la dissipation de chaleur par les frotteurs.

Pour un élément courant de Saint-Venant, d'indice k , appartenant au modèle SVG-HP 1D, nous désignons par $\underline{\sigma}_k^e$ la contrainte de l'élément quand le ressort se déforme alors que le frotteur est figé et par $\underline{\sigma}_k^f$ la contrainte de l'élément quand le frotteur glisse alors que le ressort est figé. Ainsi, $\underline{\sigma}_k^e$ traduit l'activité du ressort et $\underline{\sigma}_k^f$ traduit l'activité du frotteur. Les expressions de $\underline{\sigma}_k^e$ et $\underline{\sigma}_k^f$ sont accessibles par une analyse mécanique du modèle. En effet, la contrainte $\underline{\sigma}_k$ dans l'élément courant de Saint-Venant, d'indice k , est telle que :

$$\underline{\sigma}_k = G_k \underline{\varepsilon}_k^e \quad \text{et} \quad \underline{\varepsilon}_k^e = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_k^p \quad (7.3)$$

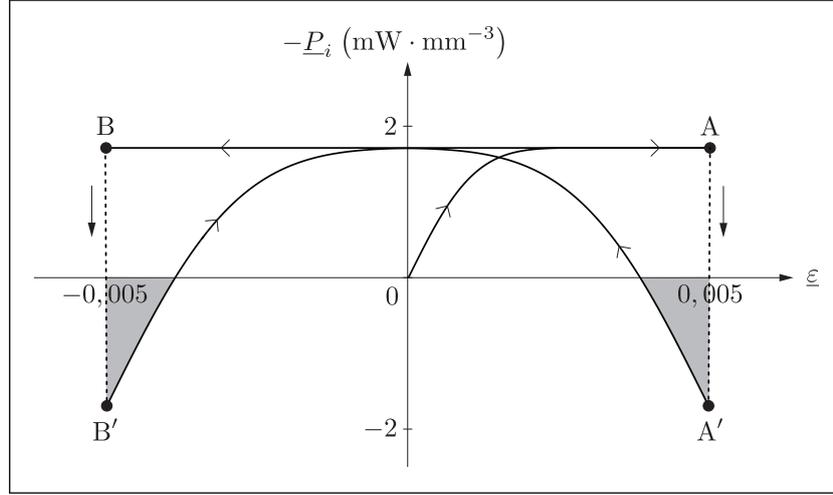


Fig. 7.2 – Diagramme de la puissance des efforts intérieurs du modèle SVG-HP 1D lors du cycle symétrique OABA de la figure 7.1.

où $\underline{\varepsilon}_k^e$ et $\underline{\varepsilon}_k^p$ sont respectivement la déformation élastique et plastique de l'élément k . Si la déformation totale $\underline{\varepsilon}$ est inférieure ou égale à la valeur du seuil en déformation e_k^* de l'élément, alors le frotteur est bloqué et sa déformation plastique n'évolue pas. Cela se traduit par un incrément de déformation plastique nul : $d\underline{\varepsilon}_k^p = 0$. Dans ce cas, la contrainte dans l'élément de Saint-Venant traduit l'activité du ressort : $\underline{\sigma}_k = \underline{\sigma}_k^e$. Si au contraire la déformation totale $\underline{\varepsilon}$ est strictement supérieure à la valeur du seuil en déformation e_k^* de l'élément, alors le frotteur glisse et sa déformation plastique évolue. Cela se traduit par un incrément de déformation plastique non nul : $d\underline{\varepsilon}_k^p \neq 0$. Dans ce cas la contrainte dans l'élément de Saint-Venant traduit l'activité du frotteur : $\underline{\sigma}_k = \underline{\sigma}_k^f$. Ainsi :

$$\text{Si } d\underline{\varepsilon}_k^p = 0 \quad ; \quad \underline{\sigma}_k^f = 0 \quad ; \quad \underline{\sigma}_k^e = G_k \underline{\varepsilon}_k^e \quad (7.4)$$

et

$$\text{Si } d\underline{\varepsilon}_k^p \neq 0 \quad ; \quad \underline{\sigma}_k^f = G_k e_k^* \quad ; \quad \underline{\sigma}_k^e = 0 \quad (7.5)$$

Avec les relations 7.4 et 7.5, le taux d'énergie interne $\dot{\underline{E}}$ et le taux de chaleur interne intrinsèque $(-\dot{\underline{Q}}_{ii})$, sont définis par :

$$\dot{\underline{E}} = \underline{\sigma}^e \dot{\underline{\varepsilon}} \quad ; \quad \underline{\sigma}^e = \sum_{k=1}^n \underline{\sigma}_k^e \quad (7.6)$$

et

$$(-\dot{\underline{Q}}_{ii}) = \underline{\sigma}^f \dot{\underline{\varepsilon}} \quad ; \quad \underline{\sigma}^f = \sum_{k=1}^n \underline{\sigma}_k^f \quad (7.7)$$

Les figures 7.3 et 7.4 donnent respectivement les diagrammes du taux d'énergie interne \dot{E} et du taux de chaleur interne intrinsèque ($-\dot{Q}_{ii}$) du modèle SVG-HP 1D, correspondant au cycle de la figure 7.1. Les relations 7.1 à 7.7 sont issues d'analyses purement mécaniques et énergétiques du modèle et ne font appel à aucune hypothèse thermodynamique.

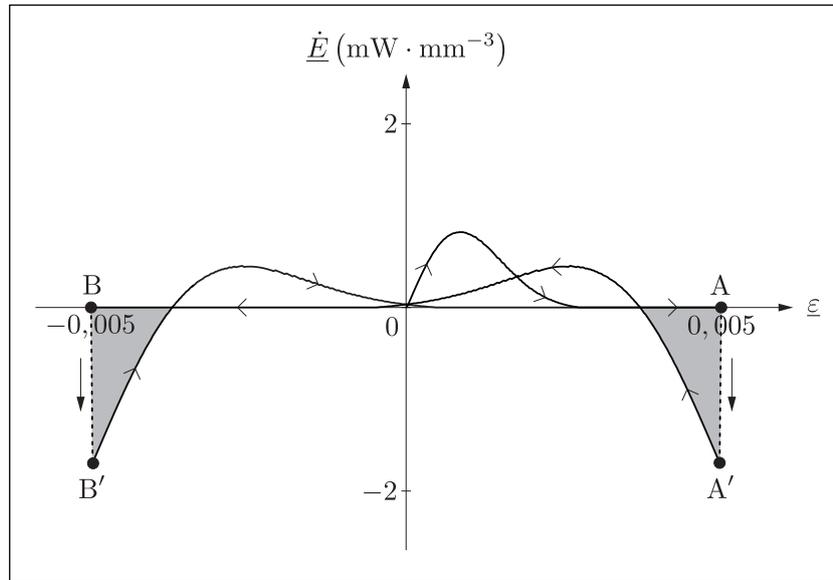


Fig. 7.3 – Diagramme du taux de d'énergie interne du modèle SVG-HP 1D lors du cycle symétrique OABA de la figure 7.1.

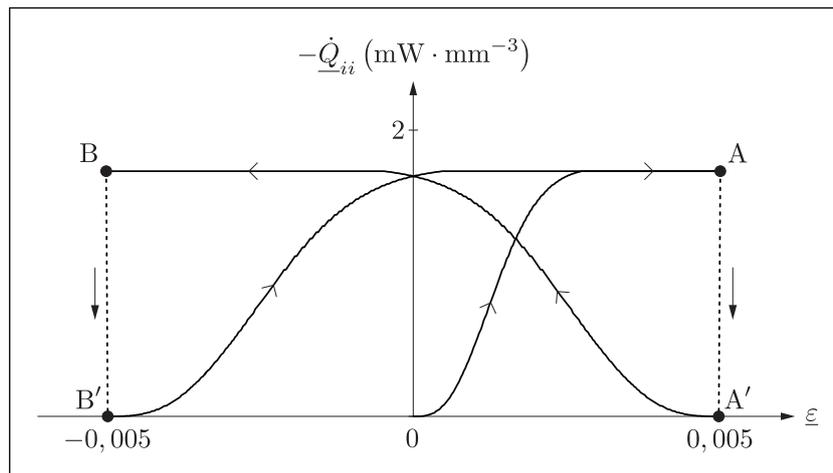


Fig. 7.4 – Diagramme du taux de chaleur interne intrinsèque du modèle SVG-HP 1D lors du cycle symétrique OABA de la figure 7.1.

7.2.2 Analyse thermodynamique du modèle - Second principe de la thermodynamique

- **Hypothèse 4** - L'équation fondamentale de Gibbs du modèle SVG-HP 1D s'écrit sous la forme suivante [Germain 1973, Vidal *et al.* 1994, Coirier & Nadot-Martin 2013] :

$$\underline{\dot{I}} = \underline{\dot{E}} - \underline{\pi} \quad (7.8)$$

Où $\underline{\dot{I}}$ est un taux de dissipation de type entropique et $\underline{\pi}$ est une puissance réversible. Dans le cadre de ce travail de thèse, nous proposons une définition de la puissance réversible du modèle, telle que :

$$\underline{\pi} = \sum_{k=1}^n \underline{\pi}_k \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\pi}_k = \underline{\sigma}_k \underline{\dot{\epsilon}} & \text{si } (-\underline{P}_i)_k \leq 0, \\ \underline{\pi}_k = 0 & \text{si } (-\underline{P}_i)_k > 0. \end{cases} \quad (7.9)$$

Les figures 7.5 et 7.6 donnent respectivement les évolutions de la puissance réversible $\underline{\pi}$ et le taux de dissipation de type entropique $\underline{\dot{I}}$ du modèle SVG-HP 1D, correspondant au cycle de la figure 7.1.

Ainsi, l'hypothèse 4, caractérisée par l'équation de Gibbs 7.8 et la définition 7.9 de la puissance réversible que nous avons adoptée, constitue la charnière entre les analyses mécanique et énergétique, effectuées précédemment, puis l'analyse thermodynamique actuelle du modèle. Cette hypothèse conduit à une dissipation intrinsèque, notée $\underline{\phi}$, toujours positive, en accord avec le second principe de la thermodynamique :

$$\underline{\phi} = (-\underline{P}_i) - \underline{\pi} \geq 0 \quad (7.10)$$

La dissipation intrinsèque du modèle, qui en résulte, apparaît comme la somme de deux taux, le premier $\underline{\dot{I}}$ est du type entropique et le deuxième $(-\underline{\dot{Q}}_{ii})$ est de type calorifique, telle que :

$$\underline{\phi} = \underline{\dot{I}} + (-\underline{\dot{Q}}_{ii}) \geq 0 \quad (7.11)$$

La figure 7.7 donne l'évolution de la dissipation intrinsèque $\underline{\phi}$ du modèle SVG-HP 1D, correspondant au cycle de la figure 7.1.

Remarque Cette analyse thermodynamique et notamment l'équation 7.11 nous permettent d'identifier deux sources internes d'irréversibilité. La première est de nature calorifique et correspond à l'activité des frotteurs. La seconde est plus subtile et correspond au désordre créé dans la structure du modèle au cours du cyclage. En effet, pour un chargement cyclique donné constitué d'une suite de charges et décharges d'amplitudes différentes, un désordre est créé dans le modèle, suite aux déclenchements successifs des différents modèles élémentaires de Saint-Venant. Cet aspect est illustré par le diagramme topologique de la figure 2.5 (cf. § 2.1.1.4). Ainsi, deux

chargements cycliques différents conduisent à deux états de désordre différents. Notons par ailleurs que la puissance réversible $\underline{\pi}$ ne correspond pas à toute la puissance disponible dans les ressorts $\underline{\dot{E}}$, qui coïncide avec le taux d'énergie interne, défini par les relations 7.4 à 7.6, mais à une partie seulement de cette dernière. Compte tenu de sa définition, la puissance réversible $\underline{\pi}$ dépend du chargement cyclique adopté. Ainsi, pour les mêmes raisons, liées au désordre dans la structure du modèle, deux chargements cycliques différents conduisent à deux évolutions différentes de la puissance réversible. Ceci conduit finalement à des situations en nombre illimité en fonction du choix du chargement cyclique. Par conséquent, la démarche classique de la « thermodynamique des processus irréversibles », développée par Germain, qui consiste à proposer un potentiel pour définir la puissance réversible, qui tient compte de toutes les situations, est difficile à mettre en œuvre, dans la mesure où la structure interne du modèle est connue [Germain 1973, Lemaitre & Chaboche 1985]. D'un autre côté, cette démarche de modélisation n'est pas unique¹. L'essentiel est de proposer une modélisation qui respecte le premier principe de la thermodynamique et qui aboutit à une définition consistante de la dissipation intrinsèque, respectant le second principe de la thermodynamique. L'approche de modélisation thermodynamique que nous adoptons est une approche originale, qui ne postule pas de potentiel pour décrire les propriétés du système thermodynamique. Cette approche se distingue donc de la démarche classique. Elle est basée sur la définition originale 7.9 de la puissance réversible.

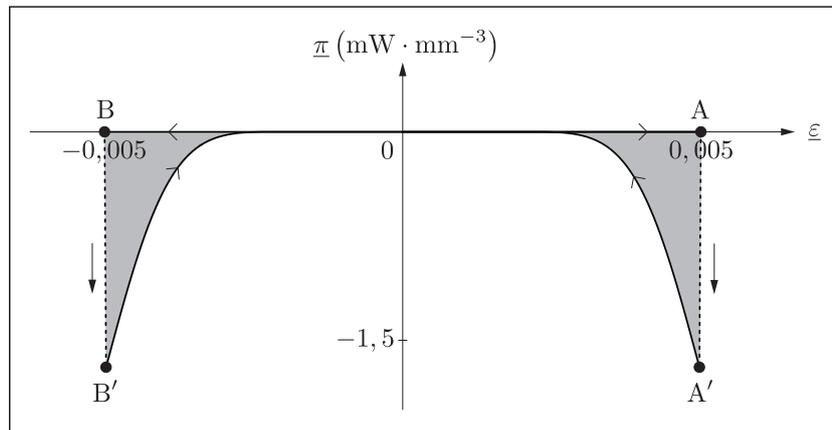


Fig. 7.5 – Diagramme de la puissance réversible du modèle SVG-HP 1D lors du cycle symétrique OABA de la figure 7.1.

1. Paul GERMAIN, dans son livre « Mécanique des milieux continus », édition de 1973, page 144, en application de l'équation de Gibbs (Eq. 8), écrit : « Une des manières de décrire complètement les propriétés d'un système thermostatique est de donner un potentiel ».

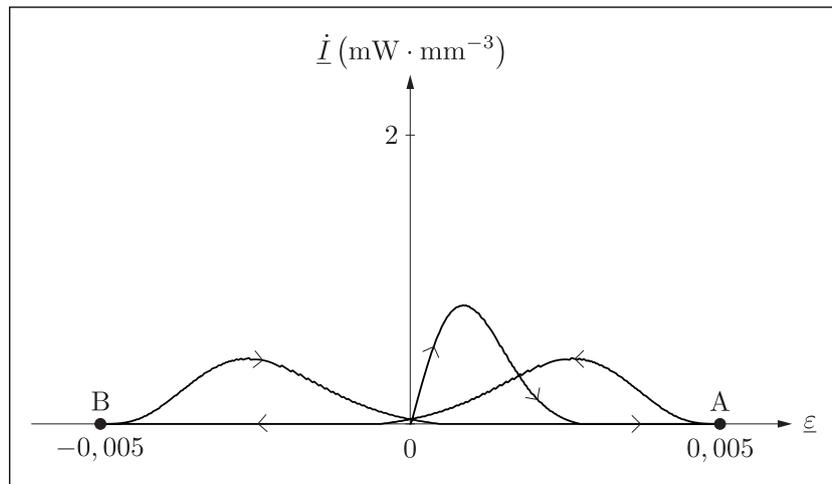


Fig. 7.6 – Diagramme du taux de dissipation de type entropique du modèle SVG-HP 1D lors du cycle symétrique OABA de la figure 7.1.

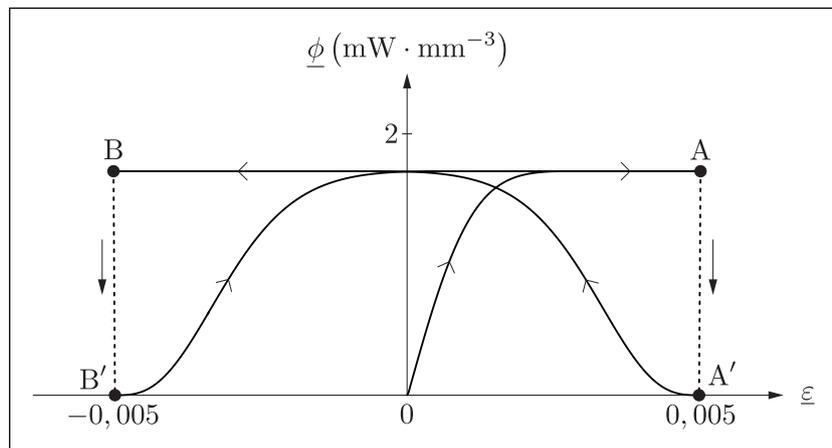


Fig. 7.7 – Diagramme de la dissipation intrinsèque du modèle SVG-HP 1D lors du cycle symétrique OABA de la figure 7.1.

7.3 Extension de l'analyse thermodynamique au cas 3D

7.3.1 Cas du modèle de Saint-Venant élémentaire 3D

Considérons le cas d'un modèle de Saint-Venant élémentaire d'indice k , associé à un comportement élastique isotrope défini par un module d'élasticité en cisaillement G_k , et à une surface seuil de type von Mises, définie dans l'espace déviatoire des déformations appartenant à \mathbf{D} le sous-espace de dimension cinq des tenseurs déviatoires, par une hypersphère de rayon e_k (cf. relation 4.10). La contrainte $\tilde{\underline{\sigma}}_k$ dans l'élément est telle que :

$$\tilde{\underline{\sigma}}_k = G_k \tilde{\underline{\epsilon}}_k^e \text{ et } \tilde{\underline{\epsilon}}_k^e = \tilde{\underline{\epsilon}} - \tilde{\underline{\epsilon}}_k^p \quad (7.12)$$

où $\tilde{\underline{\epsilon}}_k^e$ et $\tilde{\underline{\epsilon}}_k^p$ correspondent respectivement aux tenseurs déformation élastique et déformation plastique de l'élément k . Les tenseurs de contrainte $\tilde{\underline{\sigma}}_k^e$ et $\tilde{\underline{\sigma}}_k^f$, qui traduisent symboliquement l'activité du ressort et du frotteur respectivement, sont tels que :

$$\text{Si } d\tilde{\underline{\epsilon}}_k^p = \tilde{\mathbf{0}} \text{ alors } \tilde{\underline{\sigma}}_k^f = \tilde{\mathbf{0}} \text{ et } \tilde{\underline{\sigma}}_k^e = G_k \tilde{\underline{\epsilon}}_k^e \quad (7.13)$$

et

$$\text{Si } d\tilde{\underline{\epsilon}}_k^p \neq \tilde{\mathbf{0}} \text{ alors } \tilde{\underline{\sigma}}_k^e = \tilde{\mathbf{0}} \text{ et } \tilde{\underline{\sigma}}_k^f = G_k e_k \frac{\tilde{\underline{\epsilon}}_k^e}{\|\tilde{\underline{\epsilon}}_k^e\|} \quad (7.14)$$

où $\|\tilde{\underline{\epsilon}}_k^e\|$ représente la norme du tenseur $\tilde{\underline{\epsilon}}_k^e$. La description énergétique et thermodynamique du modèle de Saint-Venant élémentaire tridimensionnel se traduit alors par :

$$\begin{aligned} (-\underline{P}_i)_k &= (\dot{\underline{E}})_k + (-\dot{\underline{Q}}_{ii})_k = \tilde{\underline{\sigma}}_k : \tilde{\underline{D}} \\ (\dot{\underline{E}})_k &= \tilde{\underline{\sigma}}_k^e : \tilde{\underline{D}} \\ (-\dot{\underline{Q}}_{ii})_k &= \tilde{\underline{\sigma}}_k^f : \tilde{\underline{D}} \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$(\underline{\pi})_k = \tilde{\underline{\sigma}}_k : \tilde{\underline{D}} \text{ si } (-\underline{P}_i)_k \leq 0 \text{ et } (\underline{\pi})_k = 0 \text{ si } (-\underline{P}_i)_k > 0 \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} (\underline{I})_k &= (\dot{\underline{E}})_k - (\underline{\pi})_k \geq 0 \\ \underline{\phi} &= (-\underline{P}_i)_k - (\underline{\pi})_k \geq 0 \\ \underline{\phi} &= \dot{\underline{I}} + (-\dot{\underline{Q}}_{ii}) \geq 0 \end{aligned} \quad (7.17)$$

où le symbole " : " représente le produit doublement contracté de deux tenseurs, $\tilde{\mathbf{0}}$ l'élément neutre de l'ensemble \mathbf{D} et $\tilde{\underline{D}}$ le tenseur taux de déformation. Notons que dans les relations 7.15 et 7.16, il n'est pas nécessaire d'envisager la décomposition du tenseur taux de déformation $\tilde{\underline{D}}$ en deux tenseurs isotrope et déviatoire, dans la mesure où cette opération est implicite dans ces deux relations, compte tenu de la nature du tenseur $\tilde{\underline{\sigma}}_k$. La définition de la puissance réversible $(\underline{\pi})_k$, donnée par la relation 7.16, est illustrée sur

la figure 7.8. Sur cette figure, les tenseurs sont représentés dans le plan déviatoire bidimensionnel par des vecteurs (cf. § 4.1.2 et figure 4.1). Par ailleurs, pour cette illustration et pour simplifier, dans le cadre des transformations infinitésimales, nous faisons l'approximation $d\vec{\underline{\epsilon}} \approx \vec{\underline{D}} dt$, où $\vec{\underline{D}}$ représente le tenseur déviatoire du taux de déformation. La surface seuil se trouve dans une position courante sur la figure 7.8a. A partir de cette position, nous envisageons une décharge radiale ACD. Au cours de la décharge AC et conformément à la définition de la puissance réversible, $d(\pi)_k = \vec{\underline{\sigma}}_k \cdot d\vec{\underline{\epsilon}}$ car dans ce cas le produit scalaire est tel que : $\vec{\underline{\sigma}}_k \cdot d\vec{\underline{\epsilon}} \leq 0$, sachant que le vecteur contrainte $\vec{\underline{\sigma}}_k$ est aligné avec le vecteur $\vec{\underline{\epsilon}}_k^e$ sur ce trajet en vertu de la relation 7.12, telle que $\vec{\underline{\sigma}}_k = G_k \vec{\underline{\epsilon}}_k^e$ (figure 7.8b). Sur le trajet CD, $d(\pi)_k = 0$ et $\vec{\underline{\sigma}}_k \cdot d\vec{\underline{\epsilon}} > 0$ (figure 7.8c). La figure 7.9 illustre la définition de la puissance réversible $(\pi)_k$ dans le cas d'un chemin rectiligne non radial. La surface seuil d'indice k se trouve dans une position courante, paramétrée par le vecteur $\vec{\underline{\epsilon}}_k^p$, à partir de laquelle on envisage une décharge rectiligne non radiale AB'C. Au cours de cette décharge, le trajet est décrit par des incréments successifs de déformation $d\vec{\underline{\epsilon}}_i$, avec $i \in [1, \alpha]$. Le long du trajet AB', $\vec{\underline{\sigma}}_k \cdot d\vec{\underline{\epsilon}}_i \leq 0$ et par conséquent, $d(\pi)_k = \vec{\underline{\sigma}}_k \cdot d\vec{\underline{\epsilon}}_i$, $\forall i$. Sur le trajet B'C, $\vec{\underline{\sigma}}_k \cdot d\vec{\underline{\epsilon}}_i > 0$ et par conséquent, $d(\pi)_k = 0$, $\forall i$.

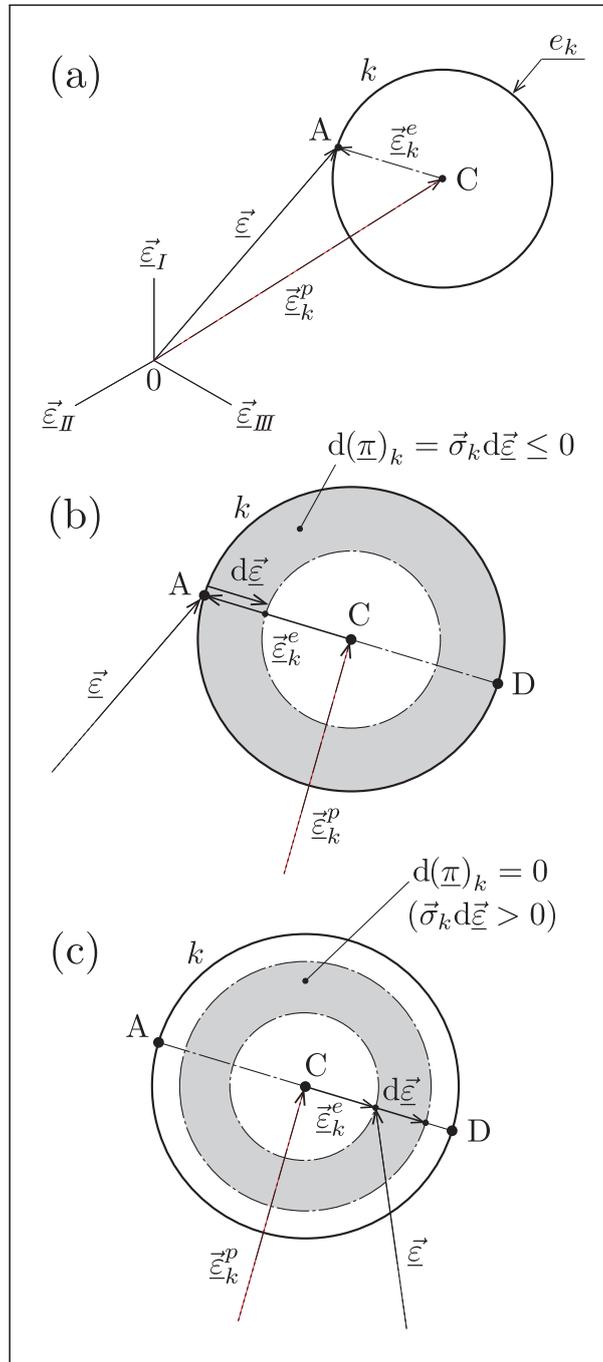


Fig. 7.8 – Illustration de la définition 7.16 de la puissance réversible : position courante de la surface seuil d'indice k (a), décharge AC (b) et décharge CD (c).

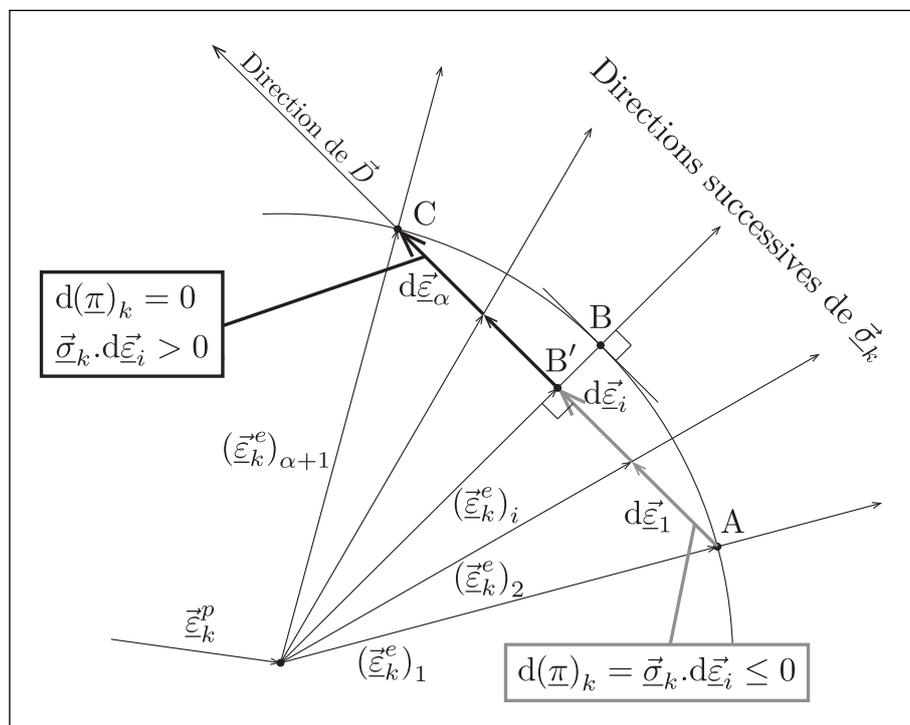


Fig. 7.9 – Cas d'une décharge le long d'un chemin rectiligne AC : le long du trajet AB' où $d(\pi)_k = \vec{\sigma}_k \cdot d\vec{\varepsilon}_i \leq 0$ et le long du trajet B'C où $d(\pi)_k = 0$ et $\vec{\sigma}_k \cdot d\vec{\varepsilon}_i > 0$.

7.3.2 Généralisation au cas du modèle SVG-HP 3D

Considérons le cas du modèle SVG-HP 3D, défini par n modèles de Saint-Venant élémentaires caractérisés par n hypersphères dont les seuils de déclenchement sont définis par une suite discrète e_k (cf. relations 3.1 et 4.10), et par une distribution des modules d'élasticité en cisaillement G_k (relation 3.3). La contrainte totale $\tilde{\underline{\sigma}}$ du modèle est telle que :

$$\tilde{\underline{\sigma}} = \sum_{k=1}^n \tilde{\underline{\sigma}}_k \quad (7.18)$$

où $\tilde{\underline{\sigma}}_k$ est la contrainte dans un élément courant de Saint-Venant, définie par la relation 7.12. La contrainte $\tilde{\underline{\sigma}}^e$, qui traduit l'activité élastique de l'ensemble des modèles élémentaires, est telle que :

$$\tilde{\underline{\sigma}}^e = \sum_{k=1}^n \tilde{\underline{\sigma}}_k^e \quad (7.19)$$

où $\tilde{\underline{\sigma}}_k^e$ est la contrainte dans un élément courant de Saint-Venant, définie par les relations 7.13 et 7.14. La contrainte $\tilde{\underline{\sigma}}^f$, qui traduit l'activité plastique de l'ensemble des modèles élémentaires, est telle que :

$$\tilde{\underline{\sigma}}^f = \sum_{k=1}^n \tilde{\underline{\sigma}}_k^f \quad (7.20)$$

où $\tilde{\underline{\sigma}}_k^f$ est la contrainte dans un élément courant de Saint-Venant, définie par les relations 7.13 et 7.14.

La description énergétique et thermodynamique du modèle SVG-HP 3D se déduit de celle du modèle de Saint-Venant élémentaire tridimensionnel et des relations 7.18 à 7.20, telle que :

$$\begin{aligned} -\underline{P}_i &= \underline{\dot{E}} + (-\underline{\dot{Q}}_{ii}) = \tilde{\underline{\sigma}} : \tilde{\underline{D}} \\ \underline{\dot{E}} &= \tilde{\underline{\sigma}}^e : \tilde{\underline{D}} \\ -\underline{\dot{Q}}_{ii} &= \tilde{\underline{\sigma}}^f : \tilde{\underline{D}} \\ \underline{\pi} &= \sum_{k=1}^n (\underline{\pi})_k \text{ avec } (\underline{\pi})_k = \tilde{\underline{\sigma}}_k : \tilde{\underline{D}} \text{ si } (-\underline{P}_i)_k \leq 0 \text{ et } (\underline{\pi})_k = 0 \text{ si } (-\underline{P}_i)_k > 0 \quad (7.21) \\ \underline{\dot{I}} &= \underline{\dot{E}} - \underline{\pi} \geq 0 \\ \underline{\phi} &= \underline{P}_e - \underline{\pi} \geq 0 \\ \underline{\phi} &= \underline{\dot{I}} + (-\underline{\dot{Q}}_{ii}) \geq 0 \end{aligned}$$

Pour illustrer le comportement du modèle SVG-HP 3D et les résultats correspondants à son analyse énergétique et thermodynamique, nous considérons deux chargements dans le plan déviatoire classique de la déformation ; le premier est défini sur la figure 7.10a par un trajet radial OA suivi d'un trajet circulaire ABCA ; le second est défini sur la figure 7.11 par un trajet radial OA suivi d'un trajet de forme triangulaire ABCA. Pour illustrer l'évolution des variables énergétiques et thermodynamiques, nous définissons une déformation cumulée, telle que :

$$Q_c = \int_0^t \|\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}\| dt \quad (7.22)$$

où $\|\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}\|$ représente le rayon dans le plan déviatoire de la vitesse de déformation. Dans le cas de la figure 7.10, la réponse du modèle est donnée dans le plan déviatoire des contraintes sur la figure 7.10b. Cette figure montre que le point représentatif de l'état de contrainte est en avance de phase par rapport à celui de la déformation, aux points B et C, ainsi qu'à la fin du trajet au point A en déformation et A'' en contrainte. Ce trajet étant caractérisé par l'absence d'inversion, la définition 7.21 conduit donc à une puissance réversible nulle : $\underline{\pi} = 0$. Ceci conduit aux égalités suivantes : $\underline{\phi} = -\underline{P}_i$ et $\underline{\dot{I}} = \underline{\dot{E}}$, compte tenu de la relation 7.21. La figure 7.10c donne l'évolution des différentes variables thermodynamiques du modèle en fonction de la déformation cumulée Q_c . Au cours du trajet radial OA, la dissipation intrinsèque présente une contribution de type entropique et une contribution de type calorifique, non nulles. Au point A, lors du passage du trajet radial au trajet circulaire, le comportement du modèle se modifie. Le taux d'énergie interne et la dissipation de type entropique deviennent nulles et le comportement du modèle se caractérise alors par une dissipation de type purement calorifique. Ce phénomène est lié symboliquement au glissement des frotteurs et par conséquent au mouvement des hypersphères qui caractérisent les différents seuils des modèles de Saint-Venant élémentaires. Ceci peut être illustré par le glissement des surfaces seuil de la figure 4.6 au cours du trajet circulaire AbC. En effet, cette figure montre que la déformation amène un mouvement des surfaces seuil, lié à un comportement plastique de chacun des modèles de Saint-Venant élémentaires. Dans le cas de la figure 7.11, la réponse du modèle est donnée dans le plan déviatoire des contraintes sur la figure 7.12. Dans ce cas aussi, nous constatons que la contrainte est en avance de phase par rapport à la déformation, aux points B et C ainsi qu'à la fin du trajet au point A en déformation et A' en contrainte. La différence de niveau qu'on observe entre le point A et les points B et C sur le diagramme de la puissance des efforts intérieurs est lié à une variation de la vitesse de chargement entre le trajet OA et les trajets AB, BC, et CA (figure 7.13). Nous pouvons également observer cet aspect sur les diagrammes de la dissipation intrinsèque (figure 7.15) et du taux de chaleur (figure 7.16). Les figures 7.14, 7.17 et 7.18 donnent respectivement les diagrammes de la puissance réversible, du taux d'énergie interne et de la dissipation de type entropique.

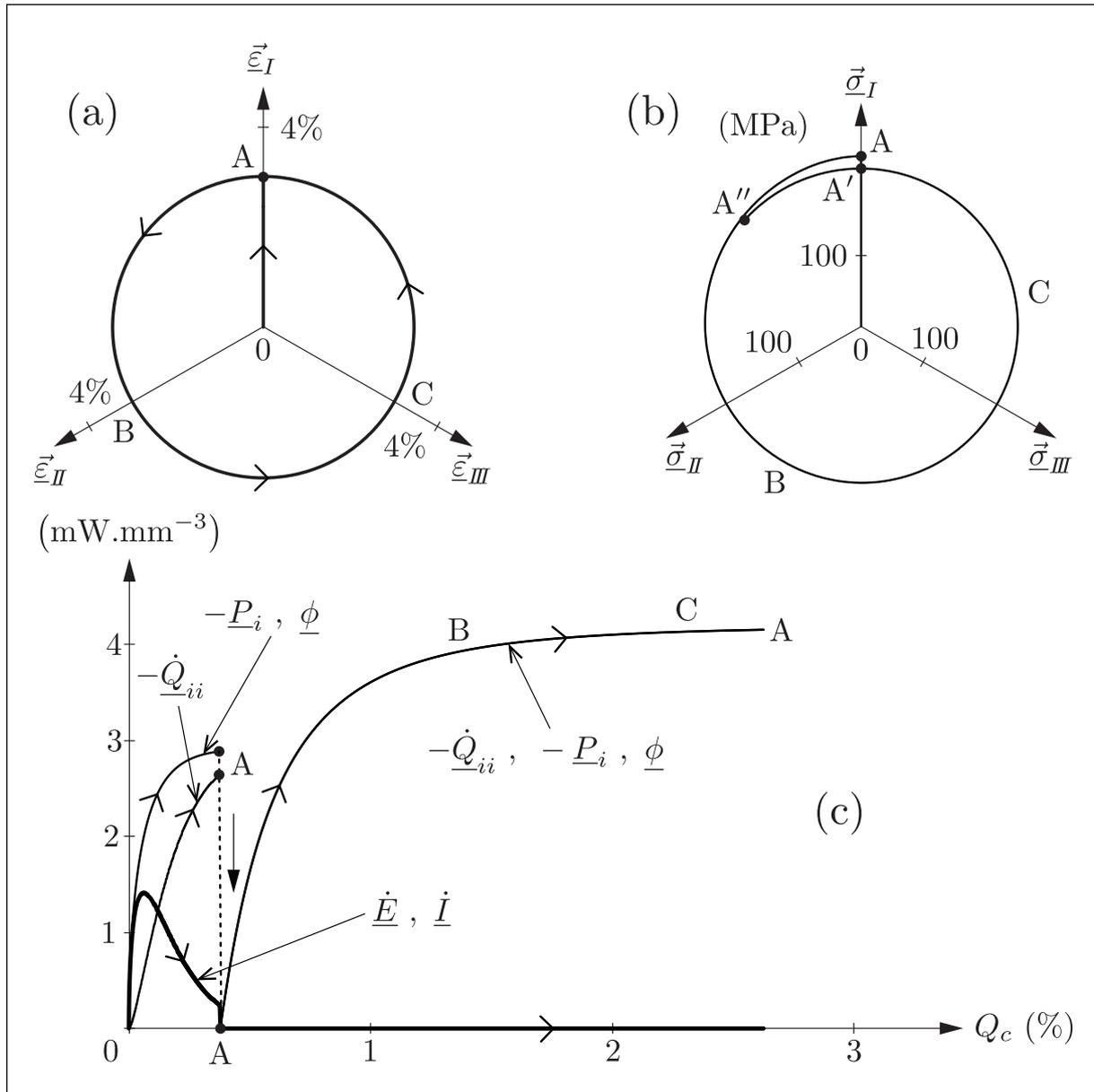


Fig. 7.10 – Chargement du modèle SVG-HP 3D dans le plan déviatoire; chargement OABCA défini en déformation par un trajet radial OA, suivi d'un trajet circulaire ABC (a), réponse du modèle en contrainte (b) et évolution de la puissance et des différents taux énergétiques en fonction de la déformation cumulée (c) ($E = 210$ GPa; $\nu = 0,3$; $Y_0 = 300$ MPa; $c = 2,0$; $n = 200$; $e_n^* = 0,0043$).

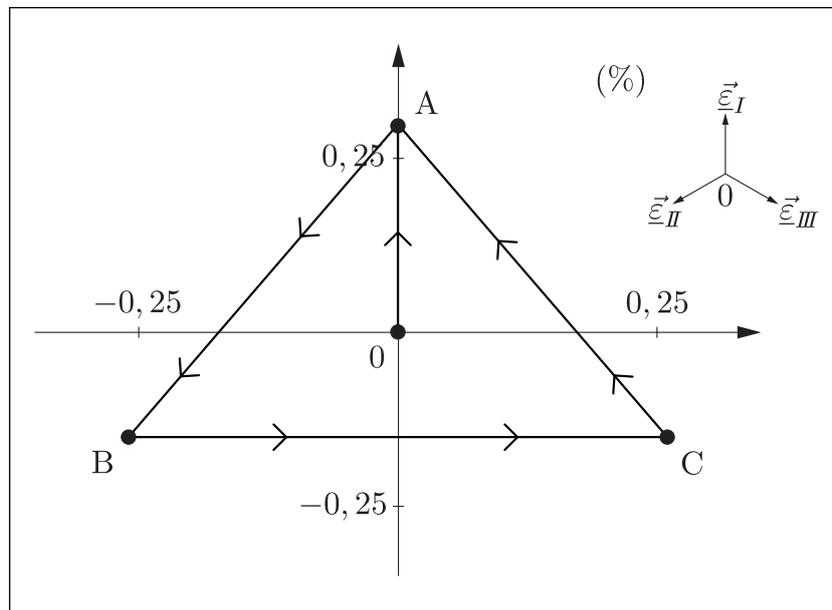


Fig. 7.11 – Chargement du modèle SVG-HP 3D dans le plan déviatoire des déformations par un cycle OABCA sous la forme d'un triangle.

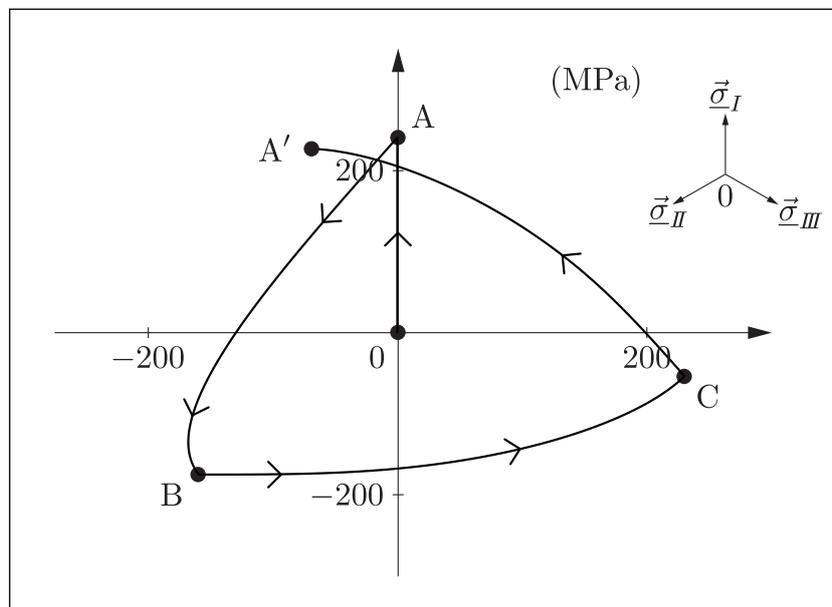


Fig. 7.12 – Réponse du modèle SVG-HP 3D au chargement de la figure 7.11 dans le plan déviatoire des contraintes ($E = 210$ GPa; $\nu = 0,3$; $Y_0 = 300$ MPa; $c = 2,0$; $n = 200$; $e_n^* = 0,0043$).

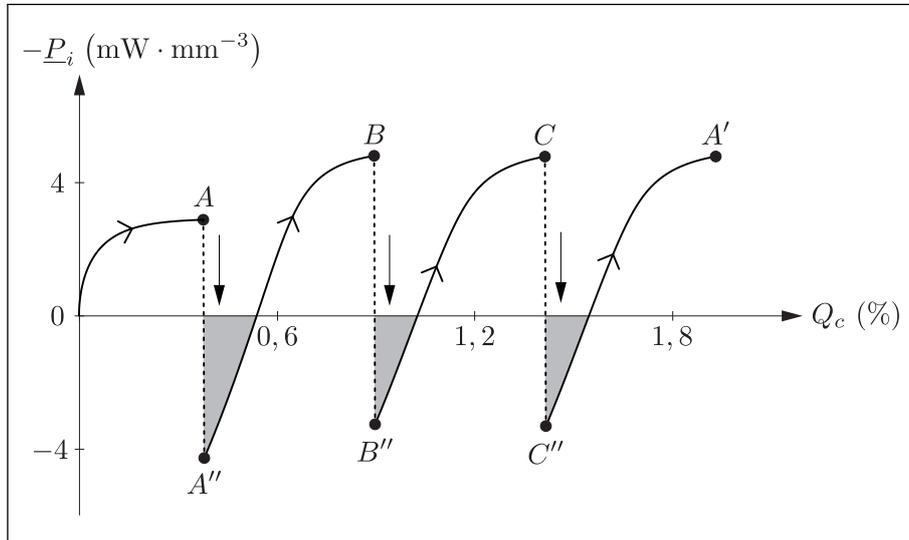


Fig. 7.13 – Diagramme de la puissance des efforts intérieurs correspondant au chargement de la figure 7.11 ($E = 210 \text{ GPa}$; $\nu = 0,3$; $Y_0 = 300 \text{ MPa}$; $c = 2,0$; $n = 200$; $e_n^* = 0,0043$).

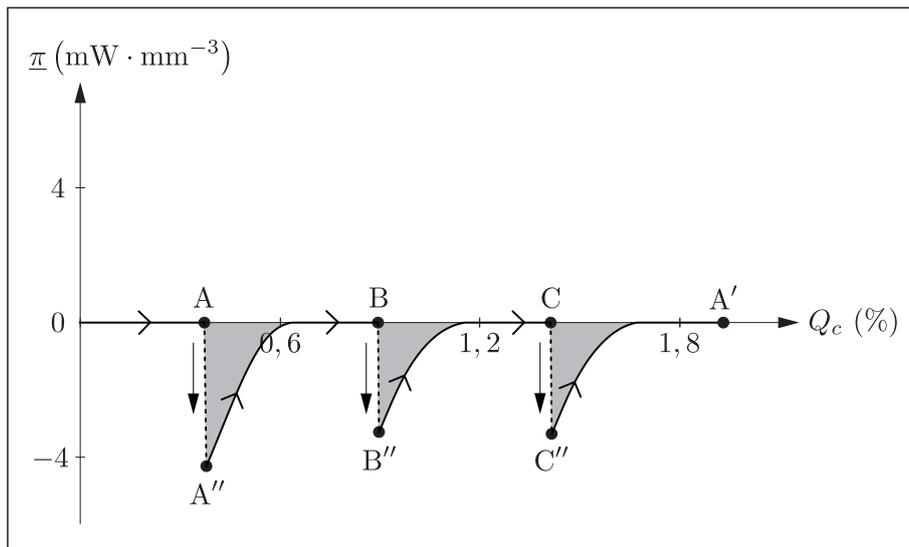


Fig. 7.14 – Diagramme de la puissance réversible correspondant au chargement de la figure 7.11 ($E = 210 \text{ GPa}$; $\nu = 0,3$; $Y_0 = 300 \text{ MPa}$; $c = 2,0$; $n = 200$; $e_n^* = 0,0043$).

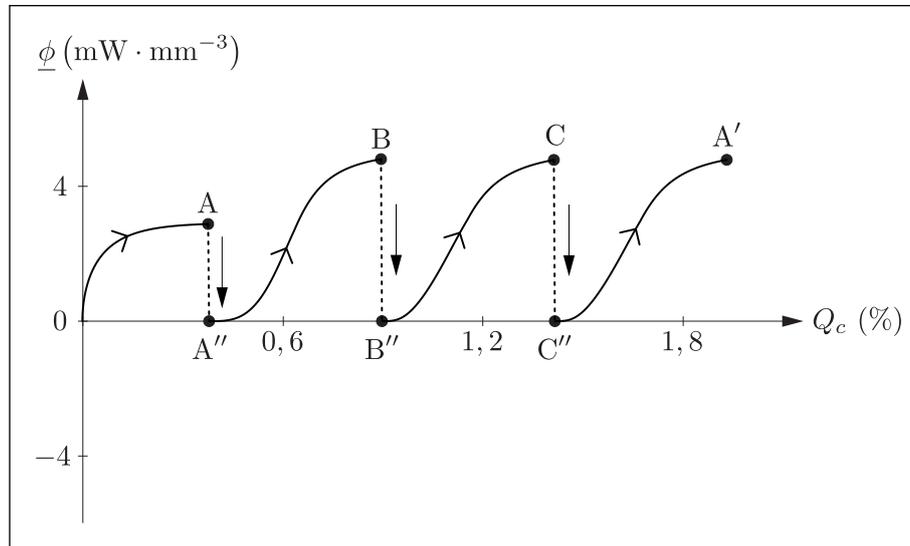


Fig. 7.15 – Diagramme de la dissipation intrinsèque correspondant au chargement de la figure 7.11 ($E = 210$ GPa; $\nu = 0,3$; $Y_0 = 300$ MPa; $c = 2,0$; $n = 200$; $e_n^* = 0,0043$).

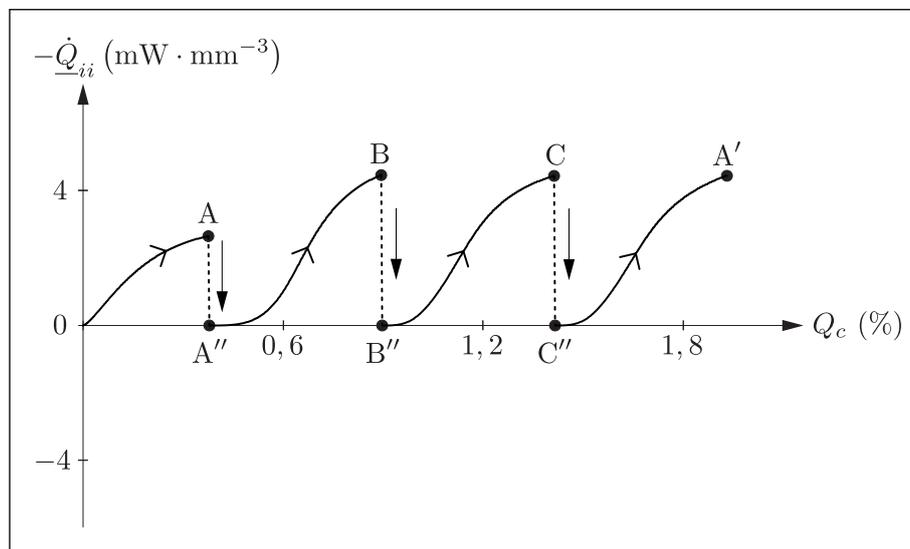


Fig. 7.16 – Diagramme du taux de chaleur interne intrinsèque correspondant au chargement de la figure 7.11 ($E = 210$ GPa; $\nu = 0,3$; $Y_0 = 300$ MPa; $c = 2,0$; $n = 200$; $e_n^* = 0,0043$).

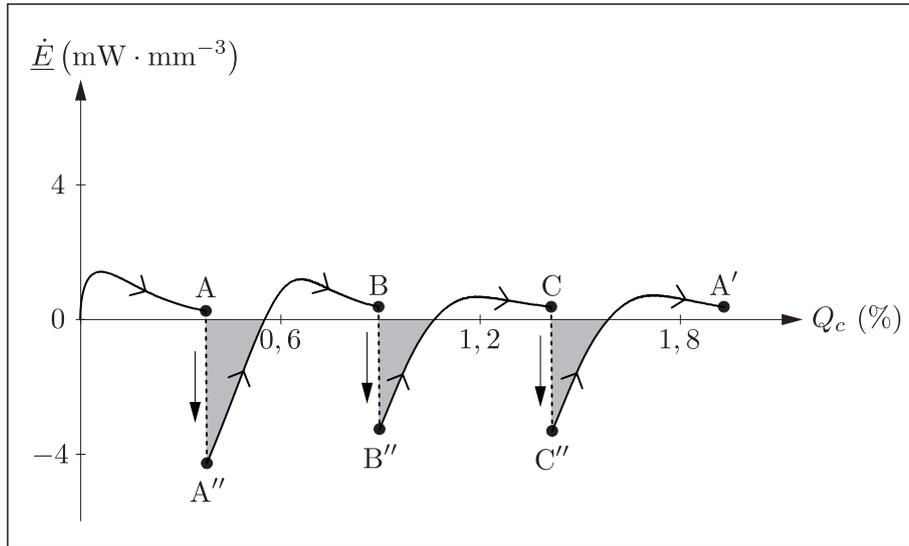


Fig. 7.17 – Diagramme du taux d'énergie interne correspondant au chargement de la figure 7.11 ($E = 210$ GPa; $\nu = 0,3$; $Y_0 = 300$ MPa; $c = 2,0$; $n = 200$; $e_n^* = 0,0043$).

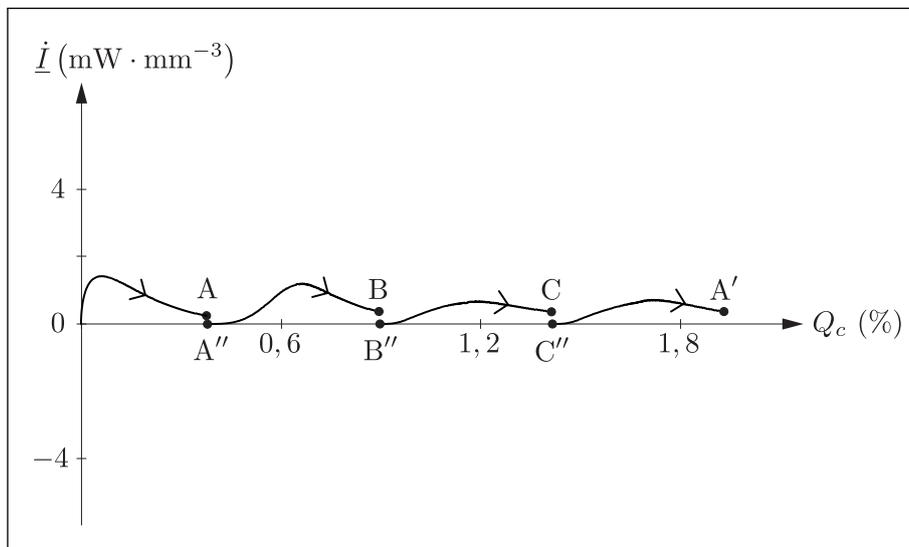


Fig. 7.18 – Diagramme du taux de dissipation de type entropique correspondant au chargement de la figure 7.11 ($E = 210$ GPa; $\nu = 0,3$; $Y_0 = 300$ MPa; $c = 2,0$; $n = 200$; $e_n^* = 0,0043$).

Conclusion du chapitre

Une analyse énergétique et thermodynamique du modèle SVG-HP 1D a été proposée et étendue au cas général du modèle SVG-HP 3D. Cette analyse est applicable à l'étude du comportement des matériaux métalliques, dans le domaine des petites déformations. Elle nous permet d'extraire, à partir des évolutions mécaniques cycliques complexes du modèle SVG-HP 3D, les évolutions des différentes variables énergétiques et thermodynamiques. Les évolutions de ces variables sont alors basées sur le modèle mécanique complet du comportement élastoplastique tridimensionnel.

L'analyse énergétique et thermodynamique du modèle SVG-HP 3D réalisée dans le cadre de ce travail s'inspire de celle du modèle de Saint-Venant généralisé continu, constitué d'une infinité de modèles de Saint-Venant élémentaires [Guélin 1980, Tourabi *et al.* 1996, Blès *et al.* 2000, Siret *et al.* 2012]. Néanmoins, notons que cette dernière, initiée par Guélin en 1980, repose sur la notion de mémoire discrète et ne s'intéresse pas au comportement individuel à l'échelle des modèles élémentaires. Dans le cas présent, l'analyse proposée ne fait pas appel à la notion de mémoire discrète, et s'intéresse au comportement individuel de chaque modèle élastoplastique élémentaire. La superposition de l'ensemble des comportements élémentaires conduit à la prédiction du comportement thermomécanique global. Notre analyse se distingue aussi par une nouvelle définition de la puissance réversible qui, au travers de l'équation fondamentale de Gibbs, permet une définition plus précise du taux de dissipation du type entropique, ce qui est essentiel dans la perspective de développement d'un modèle de suivi de l'endommagement par fatigue. Notons, néanmoins, que la définition de la puissance réversible, que nous adoptons ici, est difficile à envisager avec le modèle à mémoire discrète, qui n'a pas accès directement aux comportements élémentaires des éléments élastoplastiques de Saint-Venant.

Proposition d'un critère de fatigue multiaxiale

Sommaire

8.1	Variables énergétiques de suivi de la fatigue multiaxiale	188
8.2	Critère de fatigue multiaxiale	190
8.2.1	Hypothèses de bases	190
8.2.2	Énoncé du critère	190
8.2.3	Courbe d'endurance en énergie	191
8.2.4	Constante énergétique critique	192
8.2.5	Fonction énergétique critique par cycle	193
8.2.6	Expression finale du critère de fatigue	194
8.2.7	Paramètre de suivi de l'endommagement	194
8.3	Validation du critère de fatigue multiaxiale	196
8.3.1	Éprouvette Arcan et matériau adopté	197
8.3.2	Évaluation des lois de cumul d'endommagement	203
8.3.3	Validation du critère de fatigue multiaxiale	206

Dans ce chapitre, nous proposons un critère de fatigue multiaxiale reposant sur l'analyse thermodynamique présentée au chapitre précédent. Ce chapitre est constitué de trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous donnons la définition des variables énergétiques adoptés pour la définition du critère (§ 8.1). Le critère est défini au deuxième paragraphe (§ 8.2). Dans le dernier paragraphe, les prédictions du critère sont comparées à celles des critères de Brown-Miller et de Dang Van (§ 8.3).

8.1 Variables énergétiques de suivi de la fatigue multiaxiale

L'analyse énergétique et thermodynamique développée au chapitre 7 nous permet d'extraire, à partir d'évolutions mécaniques cycliques complexes, des variables scalaires de suivi de la fatigue multiaxiale reposant sur le modèle mécanique complet du comportement élastoplastique tridimensionnel. Deux variables en particulier ont été identifiées comme pouvant décrire le comportement en fatigue [Tourabi *et al.* 1996]. La définition de ces deux variables constitue un choix préliminaire relativement simple, que nous adoptons dans le cadre de ce travail. La première variable est associée au taux d'énergie interne et la seconde variable est associée au taux de dissipation non calorifique du type entropique. Ces variables sont définies de la façon suivante :

$$E^* = \int_0^t |\dot{E}| dt \quad (8.1)$$

$$I = \int_0^t \dot{I} dt \quad (8.2)$$

où t désigne le temps actuel, E^* représente le cumul de la valeur absolue du taux d'énergie interne \dot{E} et I désigne le cumul du taux de dissipation du type entropique \dot{I} . La variable E^* peut être interprétée comme un indicateur des échanges d'énergie entre le matériau et le milieu extérieur. La variable I , qui correspond à l'énergie dissipée de type entropique, peut être interprétée comme un indicateur du désordre provoqué dans la structure.

Les variables énergétiques E^* et I ne représentent qu'une fraction du travail des efforts intérieurs W_i :

$$W_i = \int_0^t (-\underline{P}_i) dt \quad (8.3)$$

où \underline{P}_i désigne la puissance des efforts intérieurs. En effet, cet aspect est illustré par la figure 8.1. Plus particulièrement, sur la figure 8.1a, trois cycles de traction-compression d'amplitudes de déformation croissantes sont considérés : il s'agit des cycles OABA, OCDC et OEFE. Pour chacun de ces cycles, les figures 8.1b, 8.1c et 8.1d donnent respectivement les évolutions des variables W_i , E^* et I . Considérons par exemple les évolutions AEF'E' des variables E^* et I ; ces évolutions montrent qu'à la fin du grand cycle de traction-compression, les valeurs de ces variables ne représentent qu'une fraction du travail des efforts intérieurs W_i , à la fin du cycle.

Lorsqu'un chargement cyclique uniaxial ou multiaxial est défini par la répétition d'un cycle de chargement donné, nous notons $E^*_{/cycle}$ et $I_{/cycle}$ les valeurs des variables E^* et I obtenues au cours du cycle répété, soit :

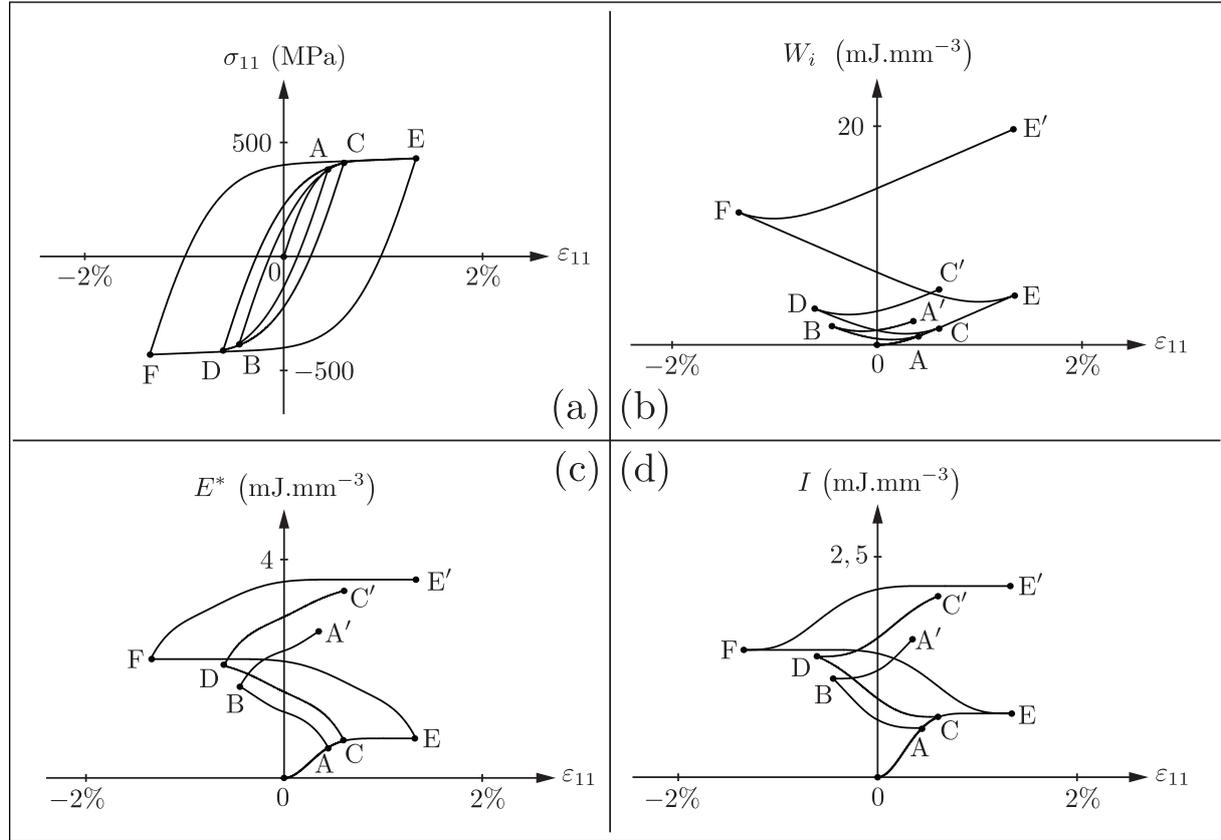


Fig. 8.1 – Trois cycles de traction cyclique OABA, OCDC et OEFE (a) et évolutions correspondantes : du travail des efforts intérieurs W_i (b), de la variable E^* (c) et de la variable I (d).

$$E^*_{/cycle} = \int_{t_0}^{t_f} |\dot{E}| dt \quad (8.4)$$

$$I_{/cycle} = \int_{t_0}^{t_f} \dot{I} dt \quad (8.5)$$

où t_0 représente le temps au début du cycle et t_f représente le temps à la fin du cycle. Ainsi, si nous considérons, à titre d'exemple, le cycle ABA' sur les figures 8.1c et 8.1d : $t_0 = t_A$ et $t_f = t_{A'}$ où t_A est le temps au début du cycle, au point A et $t_{A'}$ est le temps à la fin du cycle, au point A'. Les deux variables $E^*_{/cycle}$ et $I_{/cycle}$ seront considérées par la suite lors de la mise en œuvre du modèle de fatigue proposé, afin de comparer leurs effets et évaluer leur pertinence. L'utilisation de l'une ou l'autre de ces variables n'ayant pas d'influence sur la suite des développements et de la définition du critère de fatigue, nous adopterons la notation ξ pour désigner indépendamment E^* ou I et la notation $\xi_{/cycle}$ pour désigner indépendamment $E^*_{/cycle}$ ou $I_{/cycle}$.

8.2 Critère de fatigue multiaxiale

8.2.1 Hypothèses de bases

La définition du critère de fatigue multiaxiale est basée sur les hypothèses suivantes :

- **Hypothèse 1** - Pour le calcul des variables énergétiques ξ et $\xi_{/cycle}$, le modèle mécanique de comportement élastoplastique tridimensionnel considéré est le modèle SVG-HP 3D, à la saturation de l'érouissage cyclique. Cette hypothèse revient à négliger les effets de l'érouissage cyclique sur le comportement en fatigue du matériau.
- **Hypothèse 2** - Pour le calcul des variables énergétiques ξ et $\xi_{/cycle}$, nous négligeons l'effet de la première charge, par rapport à l'effet des cycles fermés à la stabilisation de l'érouissage cyclique.
- **Hypothèse 3** - Nous postulons l'existence d'une constante énergétique critique, notée χ_f , qui une fois atteinte conduit à la rupture par fatigue [Naderi *et al.* 2010]. Cette constante énergétique caractérise le matériau. Elle est indépendante de la nature de la sollicitation : type, amplitude, fréquence, uniaxiale ou multiaxiale.

8.2.2 Énoncé du critère

Le critère de fatigue multiaxiale est basé sur le postulat de l'hypothèse 3. À la constante énergétique critique χ_f , nous associons une fonction énergétique critique par cycle, notée $\chi_{f/cycle}$, dont la valeur dépend du type de la sollicitation multiaxiale adoptée et de la nature du cycle appliqué au matériau, telle que :

$$N_f \chi_{f/cycle} = \chi_f \quad (8.6)$$

où N_f représente le nombre de cycles appliqués à la rupture par fatigue.

Pour un nombre de cycles N appliqués au matériau, tel que $N \leq N_f$, le critère de fatigue multiaxiale peut être énoncé par la relation suivante :

$$N \chi_{f/cycle} \leq \chi_f \quad (8.7)$$

La relation 8.6 apparaît alors comme la limite de la relation 8.7 au point de rupture par fatigue.

Pour la mise en œuvre effective du critère de fatigue multiaxiale, il est nécessaire de définir dans l'expression 8.7 la constante énergétique critique χ_f , qui caractérise le matériau, et la fonction énergétique critique par cycle $\chi_{f/cycle}$, qui caractérise la sollicitation.

8.2.3 Courbe d'endurance en énergie

La détermination expérimentale d'une courbe d'endurance d'un matériau est généralement déterminée par des essais cycliques en traction-compression, en flexion rotative, en flexion alternée ou autre type de sollicitation. La courbe d'endurance peut être caractérisée par une courbe de Wöhler ou par une courbe de Manson-Coffin (figures 8.2a et 8.2b).

Un diagramme de Wöhler est caractérisé par le couple (σ_a, N_f) , respectivement l'amplitude de contrainte imposée et le nombre de cycles à la rupture. La courbe expérimentale d'endurance de Wöhler peut être décrite par le modèle de Palmgren [Bathias & Bailon 1980] :

$$\sigma_a = \sigma_D + \left(\frac{\alpha}{N_f} \right)^\beta \quad (8.8)$$

Ce modèle est défini par σ_D , la limite d'endurance, et deux paramètres α et β . La figure 8.2a donne une illustration sommaire de la forme de la courbe d'endurance de Wöhler et la relation 8.8 correspondante.

Un diagramme de Manson-Coffin est caractérisé par le couple (ε_a, N_f) , respectivement l'amplitude de déformation imposée et le nombre de cycles à la rupture. La courbe expérimentale d'endurance correspondante peut être décrite par la loi de Manson-Coffin [Hénaff & Morel 2005] :

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (8.9)$$

Cette loi est définie par cinq paramètres : E , σ'_f , ε'_f , b et c . La figure 8.2b donne une illustration sommaire de la forme de la courbe d'endurance de Manson-Coffin, issue de la relation 8.9.

Une courbe expérimentale d'endurance classique peut être convertie en une courbe d'endurance exprimée en énergie, notée $\xi(N_f)$, grâce au modèle SVG-HP 3D et à l'analyse énergétique et thermodynamique associées. Ceci est illustré par la figure 8.2. La courbe d'endurance est découpée en n paliers σ_a ou ε_a (figures 8.2a et 8.2b). Pour chaque palier et pour le type de sollicitation adopté, nous utilisons le modèle SVG-HP 3D et l'analyse énergétique et thermodynamique, implémentés dans le code Abaqus, pour calculer l'énergie pour un seul cycle ABA, soit l'énergie par cycle. Cette énergie, notée $\xi_{/cycle}$, est obtenue pour une amplitude donnée σ_a ou ε_a . Ce calcul est réalisé grâce au jeu de paramètres matériau du modèle mécanique de Saint-Venant généralisé 3D (E ; ν ; Y_0 ; E_∞ ; c).

Ainsi, pour un palier de chargement donné σ_a ou ε_a , l'énergie à la rupture $\xi(N_f)$, est telle que :

$$\xi(N_f) = N_f \xi_{/cycle} \quad (8.10)$$

La courbe d'endurance $\xi(N_f)$ ainsi obtenue présente une allure typique et peut être décrite par une loi puissance [Naderi *et al.* 2010] :

$$\xi(N_f) = \alpha_1 N_f^{\alpha_2} \quad (8.11)$$

où α_1 et α_2 sont deux paramètres.

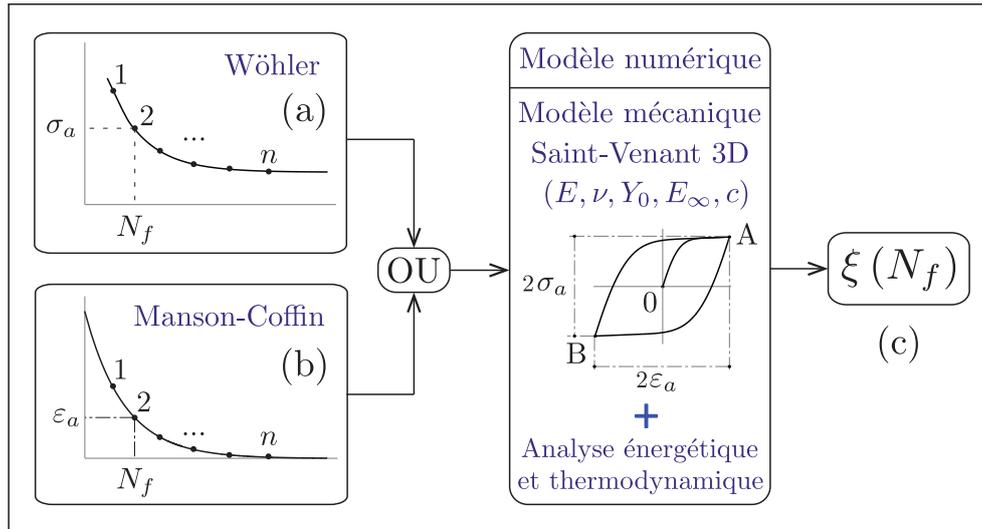


Fig. 8.2 – Schématisation de la procédure de conversion de la courbe d'endurance $\sigma_a(N_f)$ (a) ou $\varepsilon_a(N_f)$ (b) en une courbe d'endurance exprimée en énergie $\xi(N_f)$ (c).

Les cinq paramètres du comportement élastoplastique du matériau peuvent être mesurés sur un cycle symétrique stabilisé de traction-compression (cycle AB figure 8.3), en adoptant la méthode employée à l'annexe A (cf. figure A.1). Ces paramètres peuvent aussi être mesurés sur la courbe de Ramberg-Osgood [Suresh 2008] ou courbe de première charge après saturation de l'érouissage cyclique [Wack & Tourabi 1992]. Cette courbe est obtenue par un cyclage à amplitude lentement décroissante ou cyclage fondamental, appliqué à partir d'un cycle stabilisé (figure 8.3). Ces mesures permettent de déterminer les cinq paramètres du modèle de Saint-Venant généralisé (K ; G_0 ; S_0 ; G_∞ ; c), en utilisant les relations classiques de l'élasticité linéaire (cf. relation 4.16) et en inversant les relations 4.28 et 4.29.

8.2.4 Constante énergétique critique

La constante énergétique critique χ_f est une caractéristique du matériau, indépendante de la nature de la sollicitation, de son amplitude et de sa fréquence. La relation 8.6, suggère que cette constante s'écrive sous la forme d'un produit de N_f par une fonction qui dépend de la nature de la sollicitation. Par conséquent, en partant de l'expression 8.11 de la

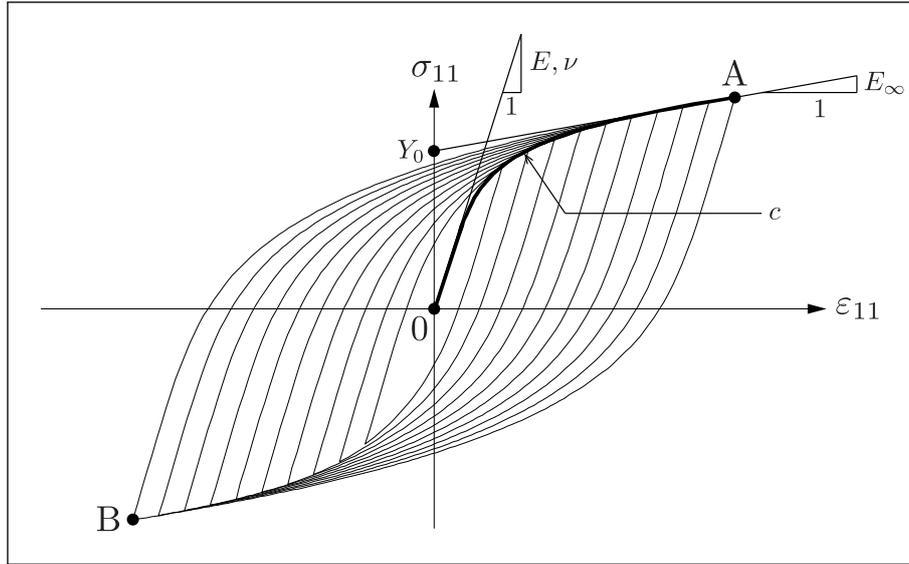


Fig. 8.3 – Courbe de première charge OA après la saturation de l'écroutissage cyclique, en traction-compression, ou courbe de Ramberg-Osgood.

courbe d'endurance en énergie, et en inversant cette relation, nous pouvons aboutir à une définition de la constante énergétique critique χ_f , telle que :

$$\chi_f = N_f \xi(N_f)^{\frac{-1}{\alpha_2}} = \alpha_1^{\frac{-1}{\alpha_2}} \quad (8.12)$$

Où α_1 et α_2 sont les deux paramètres matériau qui caractérisent la courbe d'endurance en énergie.

Par ailleurs, en utilisant la relation 8.10 et en comparant le critère de fatigue sous sa forme 8.6 et la définition de la constante énergétique critique 8.12, on en déduit par identification une expression de la fonction énergétique critique par cycle $\chi_{f/cycle}$ en fonction de l'énergie par cycle $\xi_{/cycle}$, telle que :

$$\chi_{f/cycle} = (N_f)^{\frac{-1}{\alpha_2}} (\xi_{/cycle})^{\frac{-1}{\alpha_2}} \quad (8.13)$$

8.2.5 Fonction énergétique critique par cycle

Pour appliquer le critère de fatigue multiaxiale 8.7, il est nécessaire d'avoir une expression générale de la fonction énergétique critique par cycle $\chi_{f/cycle}$, valable quelle que soit la nature de la sollicitation. Pour cela, il est nécessaire d'éliminer N_f dans l'expression 8.13, à l'aide de la définition 8.12 de la constante énergétique critique et de la relation 8.10, telle que :

$$N_f = (\alpha_1)^{\frac{1}{1-\alpha_2}} (\xi_{/cycle})^{\frac{1}{\alpha_2-1}} \quad (8.14)$$

D'où :

$$\chi_{f/cycle} = (\alpha_1)^{\frac{1}{\alpha_2(\alpha_2-1)}} (\xi_{/cycle})^{\frac{1}{1-\alpha_2}} \quad (8.15)$$

Cette expression définit une fonction énergétique critique par cycle $\chi_{f/cycle}$ en fonction de l'énergie par cycle $\xi_{/cycle}$ développée au cours d'un cycle de chargement donné.

8.2.6 Expression finale du critère de fatigue

L'énoncé du critère 8.7, la définition de la constante énergétique critique 8.12 et la définition de la fonction énergétique critique par cycle 8.15, donnent l'expression finale du critère de fatigue multiaxiale, sous sa forme explicite, telle que :

$$(\xi_{/cycle})^{\frac{1}{1-\alpha_2}} (\alpha_1)^{\frac{1}{\alpha_2(\alpha_2-1)}} \cdot N \leq \alpha_1^{\frac{-1}{\alpha_2}} \quad (8.16)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$N \cdot (\xi_{/cycle})^{\frac{1}{1-\alpha_2}} \leq \alpha_1^{\frac{1}{1-\alpha_2}} \quad (8.17)$$

Ainsi, pour un cycle de chargement donné, quelle que soit la nature de la sollicitation adoptée, qui produit une énergie $\xi_{/cycle}$ et qui est répétée N fois, la relation 8.16 ou la relation 8.17 exprime le critère de fatigue en fonction des deux paramètres matériau α_1 et α_2 , qui caractérisent la courbe d'endurance en énergie.

8.2.7 Paramètre de suivi de l'endommagement

Afin de caractériser le niveau de dégradation du matériau par fatigue, nous introduisons la notion de paramètre d'endommagement, qui permet de qualifier l'état du matériau en fonction de l'histoire du chargement cyclique composée d'une succession de différentes séquences de cycles identiques. Deux lois de cumul d'endommagement ont été envisagées. Ces deux lois sont présentées dans les deux paragraphes suivants.

8.2.7.1 Généralisation du critère - Loi de Miner

Une généralisation du critère de fatigue exprimé sous la forme 8.7, peut s'écrire :

$$\sum_{k=1}^n (N_k \chi_{f/cycle}^k) \leq \chi_f \quad (8.18)$$

où $\chi_{f/cycle}^k$ est l'énergie critique produite par un cycle appartenant au bloc k , au cours d'un chargement défini par la sommation de n blocs d'indice k . Chaque bloc est caractérisé par un nombre de cycles N_k de même amplitude et de même nature. En utilisant la relation 8.6, la généralisation du critère 8.18 conduit à la loi classique de cumul de Miner, telle que :

$$D = \sum_{k=1}^n \delta_k = \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{N_{fk}} \leq 1 \quad (8.19)$$

Où D et δ_k représentent respectivement l'endommagement total et l'endommagement partiel dû au bloc d'indice k . Le nombre de cycles à la rupture dû au bloc d'indice k seul correspond à N_{fk} et le nombre de cycles effectifs appliqués est noté N_k .

La généralisation du critère de fatigue 8.16, exprimé sous sa forme explicite, conduit à :

$$D = \sum_{k=1}^n \delta_k = \sum_{k=1}^n \left(N_k \left(\frac{\alpha_1}{\xi_{f/cycle}^k} \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - 1}} \right) \quad (8.20)$$

Où $\xi_{f/cycle}^k$ représente l'énergie développée au cours d'un cycle du bloc d'indice k .

8.2.7.2 Loi d'endommagement non linéaire

Nous adoptons dans ce cas la loi d'endommagement non linéaire proposée par [Naderi & Khonsari 2010b] et définie par :

$$D = \sum_{k=1}^n \left(D_{k+1} + \frac{D_c - D_{k-1}}{\ln \left(\frac{1 - D_c}{1 - \delta_{k-1}} \right)} \ln \left(\frac{1 - \delta_k}{1 - \delta_{k-1}} \right) \right) \quad (8.21)$$

Le paramètre d'endommagement D évolue d'une valeur initiale D_0 , pour $k = 1$, vers une valeur critique D_c , qui traduit un endommagement total du matériau par fatigue. Le paramètre δ_k représente l'endommagement partiel dû au bloc d'indice k , défini par la relation 8.20, issue de notre critère énergétique multiaxial.

8.3 Validation du critère de fatigue multiaxiale

Les hypothèses adoptées au paragraphe 8.2.1 et le choix des deux variables énergétiques proposés dans les relations 8.1 et 8.2 (§ 8.1), conduisent-ils à un critère de fatigue consistant ? C'est la question à laquelle nous nous proposons de répondre dans ce paragraphe. Du point de vue méthodologique, cette question peut se scinder en deux questions plus précises :

- En se limitant au cas des sollicitations biaxiales, quel est le degré de validité du critère de fatigue proposé ?
- Parmi les deux variables adoptées dans les relations 8.1 et 8.2 du paragraphe 8.1, quelle est la variable énergétique la plus pertinente ?

Pour répondre à ces deux questions, nous nous proposons de comparer les prévisions de notre critère à celles de deux critères de fatigue multiaxiaux, utilisés dans le milieu industriel. Ces critères sont ceux de Dang Van et de Brown-Miller, disponibles dans le logiciel de calcul de durabilité fe-safe, couplé au code commercial Abaqus.

Le critère de Brown-Miller est un critère de fatigue multiaxiale de type plan critique, exprimé en déformation. Il est notamment réputé performant dans le domaine de la fatigue oligocyclique. Le critère de Dang Van est aussi un critère multiaxial de type plan critique. Il est quant à lui réputé performant dans le domaine de la fatigue polycyclique. Ainsi, la comparaison des prévisions de notre critère à celles de ces deux critères de fatigue multiaxiaux correspond à un choix méthodologique pertinent, au regard de notre volonté de proposer un critère permettant d'unifier les domaines de la fatigue oligocyclique et de la fatigue polycyclique.

Pour réaliser cette comparaison et positionner les prévisions de notre modèle par rapport à celles des deux critères précités, nous adoptons une structure sous la forme d'une éprouvette dont la forme est inspirée du dispositif d'essai Arcan [Biner 2001]. Cette éprouvette, que nous appellerons éprouvette Arcan, nous permet de générer, dans sa partie utile, un champ de contrainte cyclique biaxial hétérogène, à partir d'une sollicitation cyclique uniaxiale de traction-compression.

Ce paragraphe est constitué de trois parties. La première partie présente l'éprouvette Arcan et les paramètres matériau adoptés (§ 8.3.1). La deuxième partie propose une évaluation des lois de cumul d'endommagement présentées au paragraphe précédent (§ 8.3.2). La troisième partie est consacrée à la validation du critère de fatigue multiaxiale proposé (§ 8.3.3).

8.3.1 Éprouvette Arcan et matériau adopté

8.3.1.1 Forme géométrique de l'éprouvette Arcan

La figure 8.4 définit la forme et les dimensions de l'éprouvette Arcan adoptée. Comme cela est indiqué par la figure 8.4, l'éprouvette a la forme d'une plaque d'épaisseur 5 mm. Elle est constituée de deux têtes d'amarrage, munies chacune de cinq trous de fixation et d'une partie utile au centre, de forme en S.

Le détail A de la figure 8.4 donne le positionnement et les dimensions des trous de fixation de l'éprouvette au niveau des têtes d'amarrage. Ainsi, l'éprouvette est fixée par cinq trous de diamètre 5 mm, régulièrement répartis sur la tête d'amarrage de l'éprouvette.

Le détail B de la figure 8.4 précise la forme et les dimensions de la partie utile de l'éprouvette, de forme en S. Ainsi, l'éprouvette subit un chargement uniaxial de traction simple le long de son axe (Axe Y sur la figure 8.4). La forme de la zone centrale de l'éprouvette permet de générer un champ de contrainte hétérogène complexe.

8.3.1.2 Modèle numérique de l'éprouvette Arcan

Le modèle éléments finis de l'éprouvette Arcan est illustré sur la figure 8.5. Il comprend 4230 éléments C3D8, qui sont des hexaèdres à 8 nœuds et 8 points d'intégration. Le modèle contient 6348 nœuds au total. Les trous de fixation inférieurs de l'éprouvette sont encastres, tandis que les trous de fixation supérieurs sont pilotés en déplacement.

L'éprouvette Arcan est sollicitée par un effort axial. Cependant, sa géométrie induit une réponse complexe à ce chargement pourtant simple. La complexité de la réponse de l'éprouvette Arcan à un chargement piloté en déplacement est illustrée sur la figure 8.6. Le deuxième invariant de la déformation et de la contrainte sont illustrés sur les figures 8.6a et 8.6b respectivement. Les zones les plus contraintes apparaissent en rouge et coïncident logiquement avec les zones où la durée de vie est la plus faible. Dans la suite, nous adoptons un point particulier unique sur l'éprouvette, que nous appelons **point de comparaison**. Ce point nous servira de point de référence pour toutes les valeurs numériques comparées issues des prévisions de notre critère et celles des deux critères de fatigue de Brown-Miller et de Dang Van. Ce point correspond au point d'intégration 7 de l'élément 2753 et se situe dans la zone centrale de l'éprouvette. Il a été choisi car il correspond au point le plus sollicité de la structure et coïncide avec la durée de vie la plus faible.

La figure 8.7 donne, au point de comparaison, les évolutions des composantes axiale σ_{yy} et de cisaillement σ_{xy} de la contrainte, au cours d'un cycle de chargement en déplacement de ± 1 mm à une vitesse constante de 10^{-2} mm.s⁻¹. Cette figure montre que le chargement cyclique uniaxial de traction-compression génère dans la zone centrale de l'éprouvette un état de contrainte biaxial de traction-cisaillement. Ainsi, les figures 8.6 et 8.7 montrent qu'un chargement cyclique uniaxial de l'éprouvette Arcan conduit, au centre de l'éprouvette, à une sollicitation cyclique biaxiale de traction-cisaillement et un champ de contrainte hétérogène.

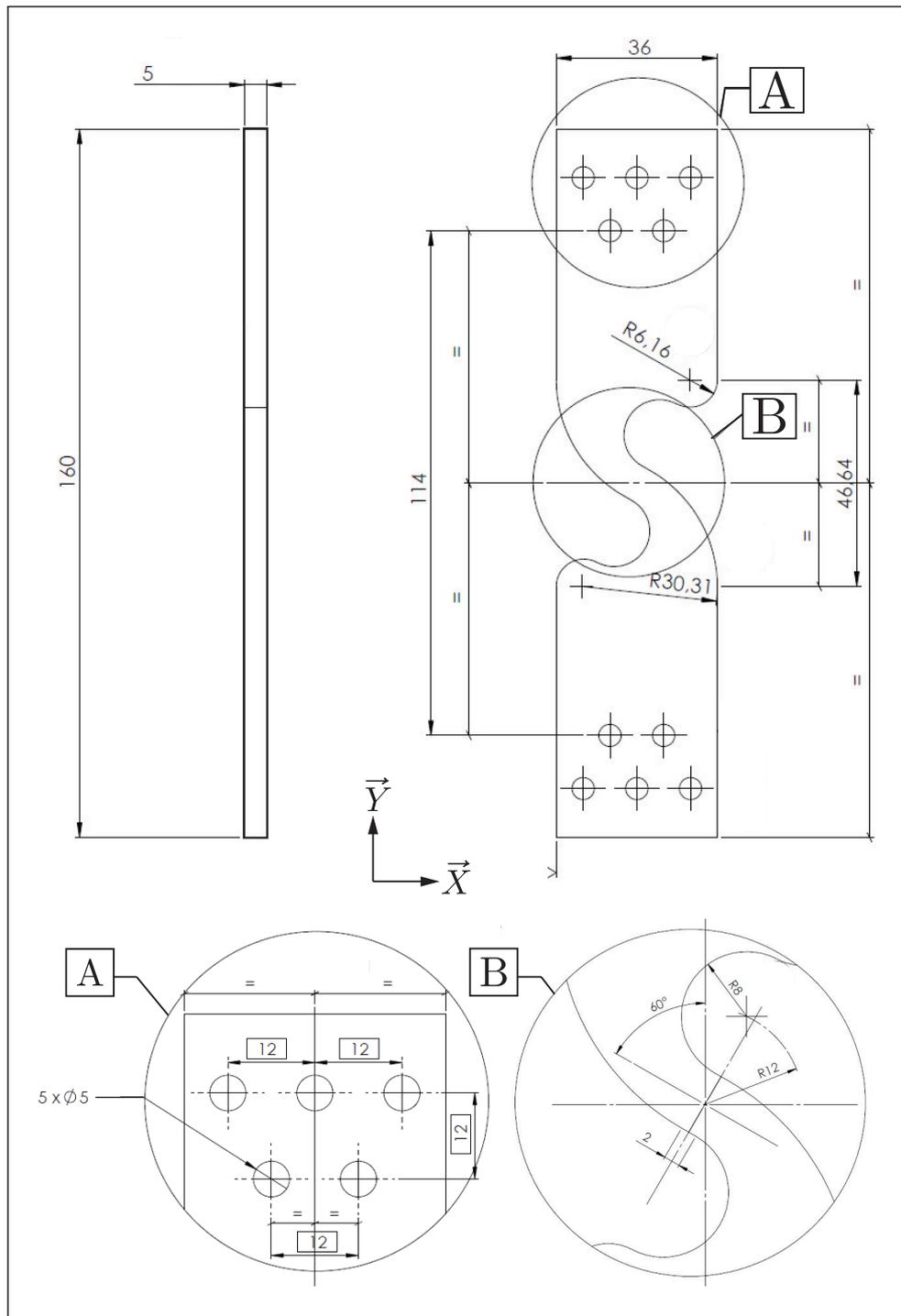


Fig. 8.4 – Plan de l'éprouvette Arcan.

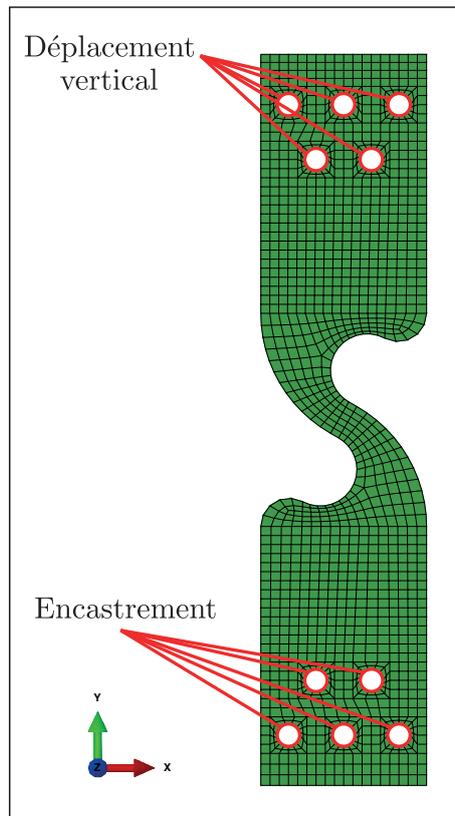


Fig. 8.5 – Modèle éléments finis de l'éprouvette Arcan.

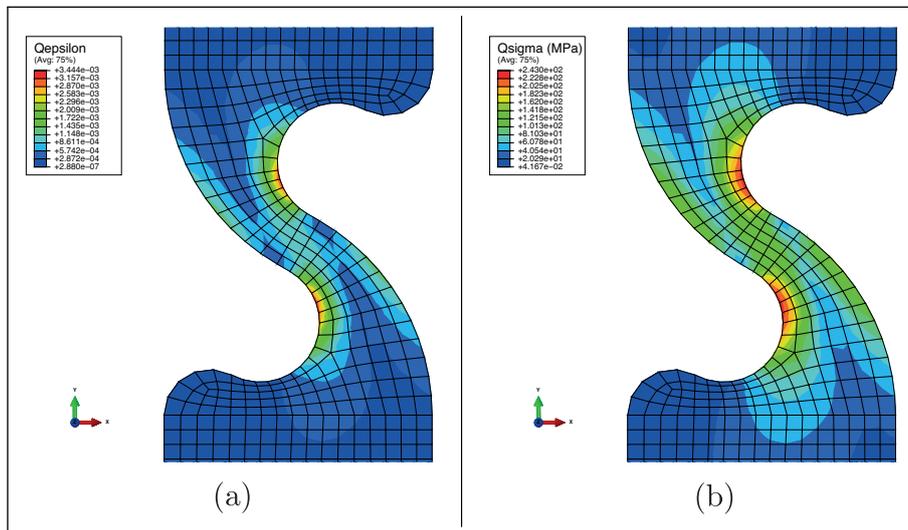


Fig. 8.6 – Cartographie du deuxième invariant de la déformation (a) et de la contrainte (b) en réponse à une sollicitation uniaxiale.

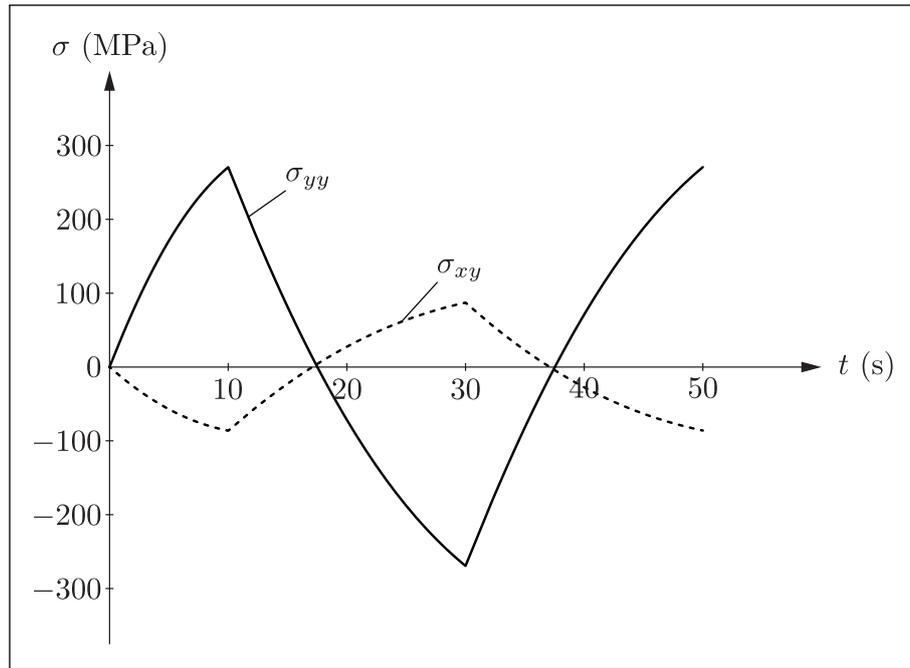


Fig. 8.7 – Evolution des composantes axiale σ_{yy} et de cisaillement σ_{xy} de la contrainte, au point de comparaison, au cours d'un cycle d'amplitude ± 1 mm à une vitesse constante 10^{-2} mm.s $^{-1}$.

8.3.1.3 Choix d'un matériau pour la validation du critère

Pour confronter les prédictions de notre critère de fatigue multiaxiale à celles des deux critères de référence, qui sont les critères de Brown-Miller et de Dang Van, il est nécessaire d'adopter un matériau métallique, pour lequel nous disposons des paramètres matériaux nécessaires à ces trois critères. Le logiciel de calcul de durabilité fe-safe, couplé au code commercial Abaqus, possède une base de données sur les matériaux métalliques relativement fournie, qui permet d'alimenter les deux critères de Brown-Miller et de Dang Van. Dans cette base de données, nous avons choisi un acier de type 316L, pour lequel nous disposons des données matériaux nécessaires permettant d'utiliser les deux critères de référence, et nous avons extrait les données nécessaires pour la mise en œuvre de notre critère ; plus particulièrement, la courbe de Ramberg-Osgood et une courbe d'endurance de ce matériau. Le matériau choisi sera appelé dans la suite **matériau modèle**.

La courbe de Ramberg-Osgood du matériau modèle proposé dans fe-safe nous permet de mesurer les cinq paramètres matériau de notre modèle de SVG-HP 3D (E ; ν ; Y_0 ; E_∞ ; c), comme illustré sur la figure 8.3. La comparaison de la courbe de Ramberg-Osgood du matériau modèle et sa modélisation par le modèle SVG-HP 3D est illustrée sur la figure 8.8. La légende de cette figure indique les valeurs adoptées pour les des cinq paramètres matériau du modèle. Notons que la précision de cette modélisation du comportement mécanique conditionnera la précision des calculs des variables énergétiques,

et par conséquent affectera les valeurs de durée de vie estimées par notre critère. La figure 8.8 montre que la modélisation de la courbe de Ramberg-Osgood du matériau modèle est suffisamment précise compte tenu de la nature exploratoire de notre étude actuelle.

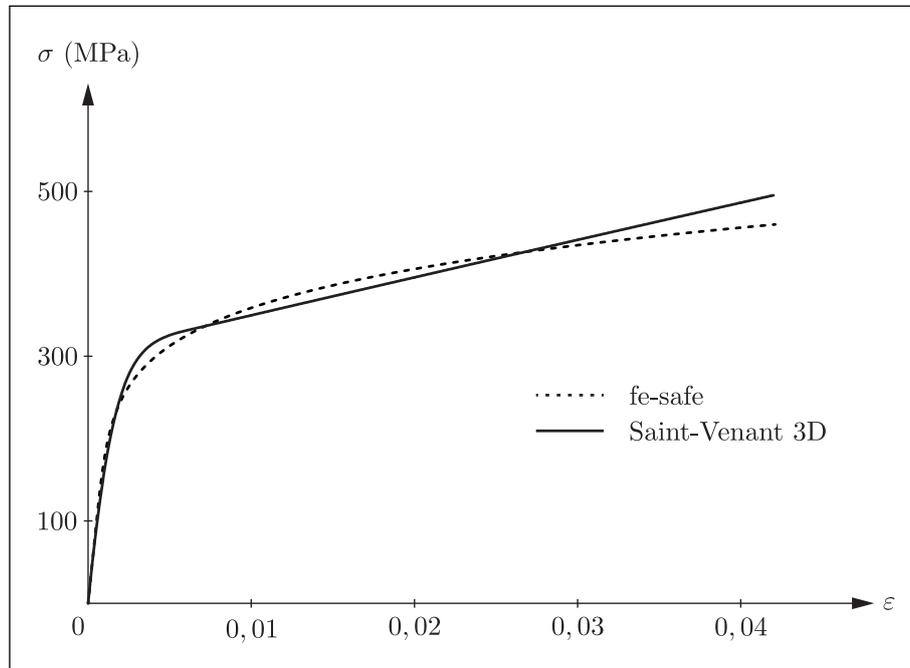


Fig. 8.8 – Comparaison de la courbe de Ramberg-Osgood du matériau modèle (trait discontinu) avec la modélisation issue du modèle de Saint-Venant 3D (trait plein) ($E = 193468$ MPa; $\nu = 0,33$; $Y_0 = 299$ MPa; $c = 1,2$; $E_\infty = 4499$ MPa).

La courbe d'endurance du matériau modèle proposée dans fe-safe est celle de Manson-Coffin. Cette courbe est illustrée sur la figure 8.9. Elle est caractérisée par les cinq paramètres correspondant à la relation 8.9. Les valeurs de ces paramètres sont données dans la légende de la figure 8.9. Les deux courbes d'endurance en énergie correspondantes aux variables énergétiques E^* et I (cf. relations 8.1 et 8.2) sont données sur les figures 8.10 et 8.11, respectivement. Ces courbes correspondent aux conversions respectives de la courbe d'endurance de Manson-Coffin du matériau modèle, selon la méthode proposée au paragraphe 8.2.3.

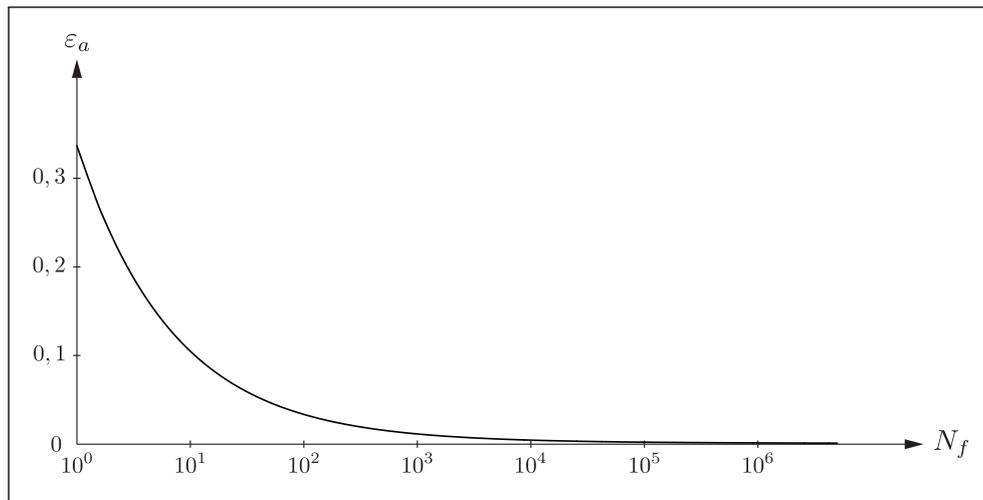


Fig. 8.9 – Courbe de Manson-Coffin du matériau modèle proposé dans le logiciel fe-safe (paramètres de la relation 8.9 : $E = 193468$ MPa ; $\sigma'_f = 703,4$; $\varepsilon'_f = 0,476$; $b = -0,0835$; $c = -0,5142$).

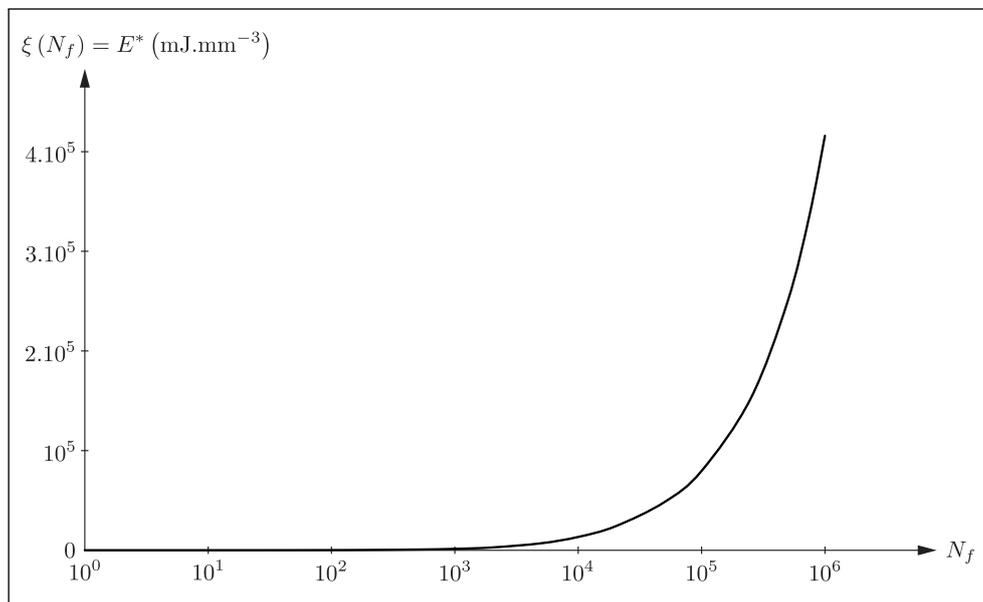


Fig. 8.10 – Courbe de fatigue exprimée en énergie et basée sur le cumul de la valeur absolue du taux d'énergie interne E^* (paramètres de la relation 8.11 : $\alpha_1 = 20,631$ mJ.mm⁻³ et $\alpha_2 = 0,717$).

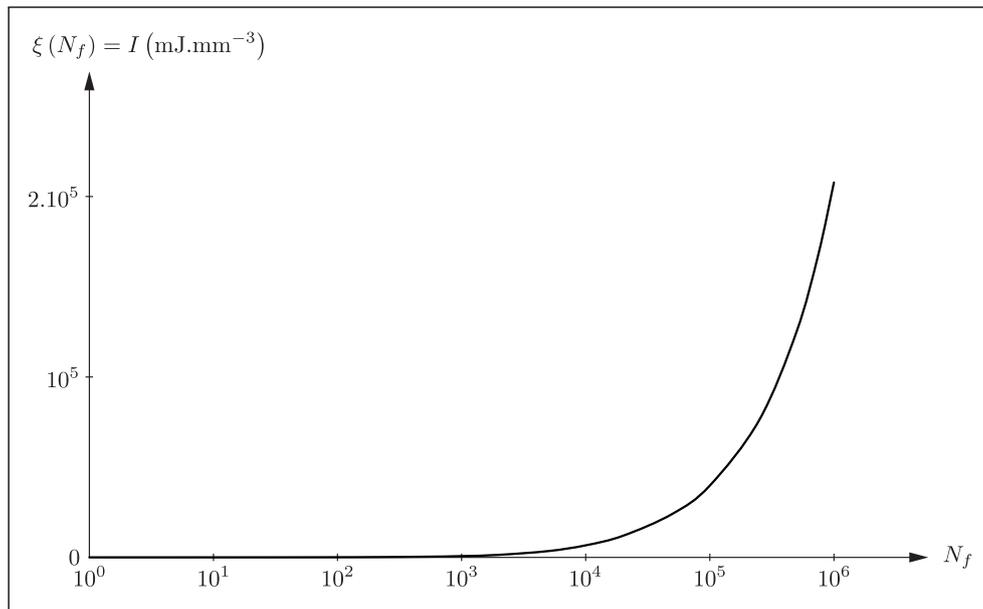


Fig. 8.11 – Courbe de fatigue exprimée en énergie et basée sur le cumul du taux d'entropie I (paramètres de la relation 8.11 : $\alpha_1 = 10,282 \text{ mJ}\cdot\text{mm}^{-3}$ et $\alpha_2 = 0,717$).

8.3.2 Évaluation des lois de cumul d'endommagement

Il s'agit dans ce paragraphe de mettre en œuvre et d'évaluer le comportement de la loi de cumul d'endommagement non linéaire définie par la relation 8.21 et de comparer ses prévisions à celle de la loi de cumul linéaire de Miner (relation 8.19). Pour cela, considérons le cas du chargement défini par la figure 8.12.

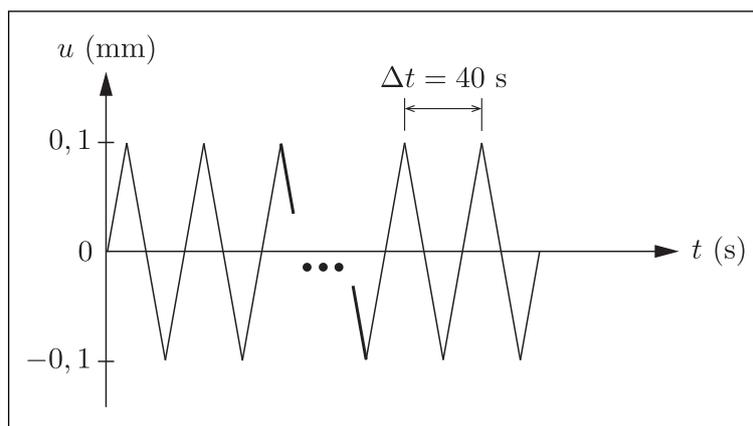


Fig. 8.12 – Chargement cyclique symétrique de l'éprouvette Arcan, contrôlé en déplacement.

Pour un chargement allant jusqu'à $N = 20.10^3$ cycles, les figures 8.13a et 8.13b donnent la comparaison des évolutions de la loi d'endommagement non linéaire avec celles de la loi linéaire de Miner. Nous pouvons remarquer tout d'abord que le type d'énergie considéré, E^* ou I , n'a quasiment pas d'influence sur la valeur de l'endommagement. En effet, pour l'endommagement non linéaire, par exemple, l'écart entre les évolutions de l'endommagement calculées avec ces deux variables est de l'ordre de 2%. Ensuite, nous remarquons que la valeur de l'endommagement non linéaire est toujours inférieure à celle de l'endommagement calculé par la loi de Miner. Compte tenu des travaux de Naderi et Khonsari, ce résultat est plus proche de la réalité des expériences [Naderi & Khonsari 2010b, Naderi & Khonsari 2010a].

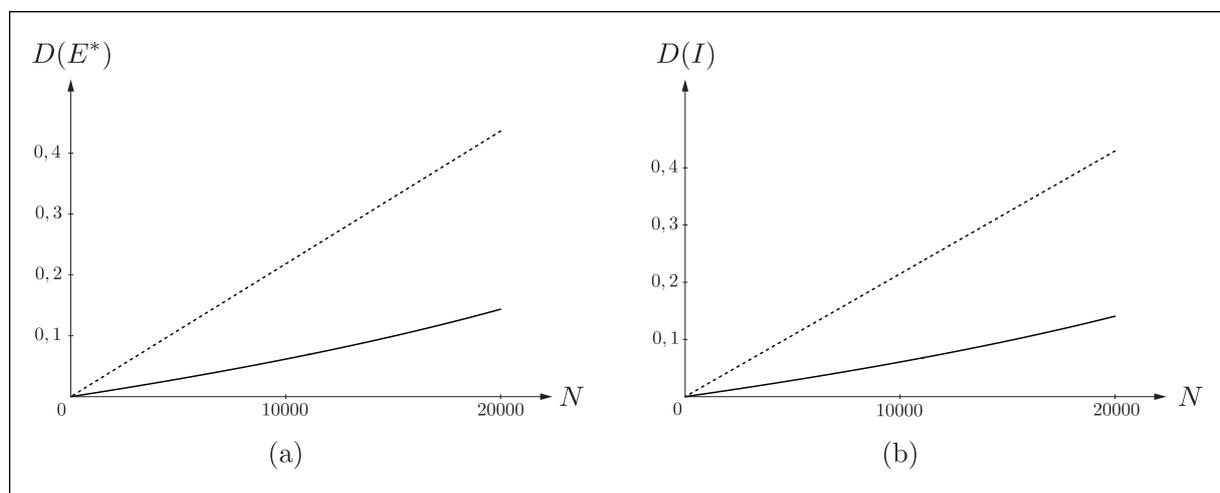


Fig. 8.13 – Cumul d'endommagement linéaire (trait discontinu) et non linéaire (trait continu) dans le cas où la durée de vie est calculée à partir de la valeur absolue du taux d'énergie interne (a) et à partir du taux d'entropie (b).

Afin d'étudier le comportement de la loi d'endommagement non linéaire, au cours d'un chargement défini par la succession de blocs, considérons le cas du chargement cyclique de la figure 8.14, constitué de deux blocs. Ce chargement est caractérisé par un bloc 1 et un bloc 2. Le bloc 1 correspond à un chargement de 60.10^3 cycles symétriques de $\pm 0,09$ mm ; le bloc 2 correspond à un chargement de 30.10^3 cycles symétriques de $\pm 0,11$ mm. Dans un premier cas, nous simulons une séquence commençant par le bloc 1 et se terminant par le bloc 2 (figure 8.14a). Dans un second cas, l'ordre des blocs est inversé (figure 8.14b). La comparaison de l'endommagement obtenu dans ces deux cas permet d'étudier l'effet de la non linéarité sur le cumul de l'endommagement. La figure 8.15 donne le résultat de cette comparaison, en utilisant la variable énergétique E^* .

Selon que l'on commence par le bloc 1 ou par le bloc 2, le nombre de cycles final à rupture n'est pas le même. Notons toutefois que cette différence dans le nombre de cycles à rupture en fin de séquence de chargement serait aussi présente en utilisant la loi de

Miner. Nous remarquons également que l'allure de la courbe de cumul de chaque bloc est identique, que le bloc concerné arrive en première ou en seconde position dans la séquence de chargement. Ainsi, nous confirmons que la loi d'endommagement est bien non linéaire, mais elle ne permet pas de reproduire l'effet de séquence souvent recherché en fatigue, qui consiste à avoir, pour un bloc donné, l'influence du bloc précédent. Ceci conduirait à un cumul d'endommagement différent, pour un bloc donné, selon son ordre dans la séquence de chargement.

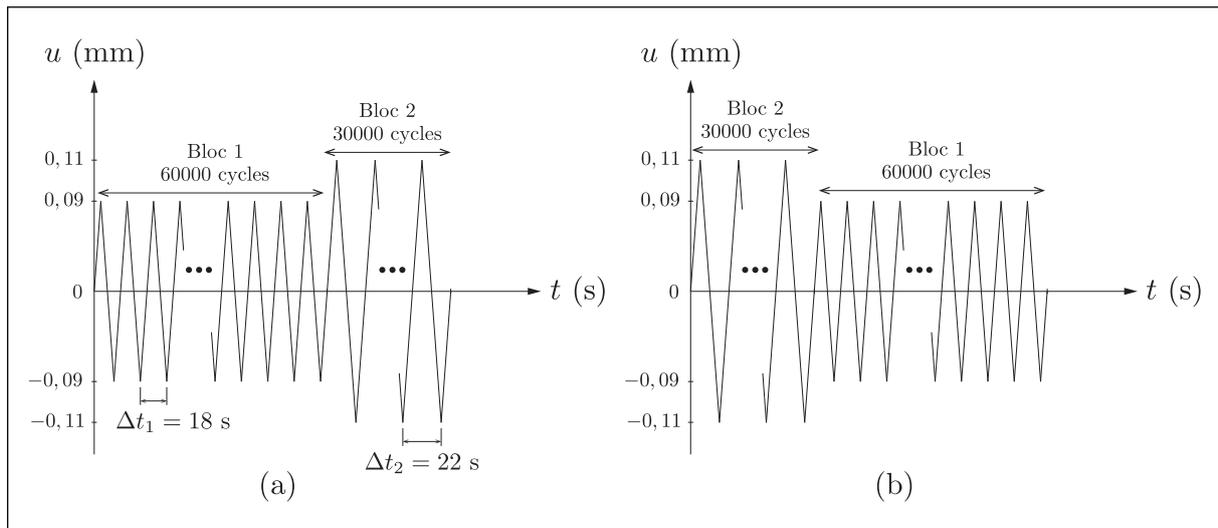


Fig. 8.14 – Représentation de deux séquences de chargement ; bloc 1 suivi du bloc 2 (a) et bloc 2 suivi du bloc 1 (b).

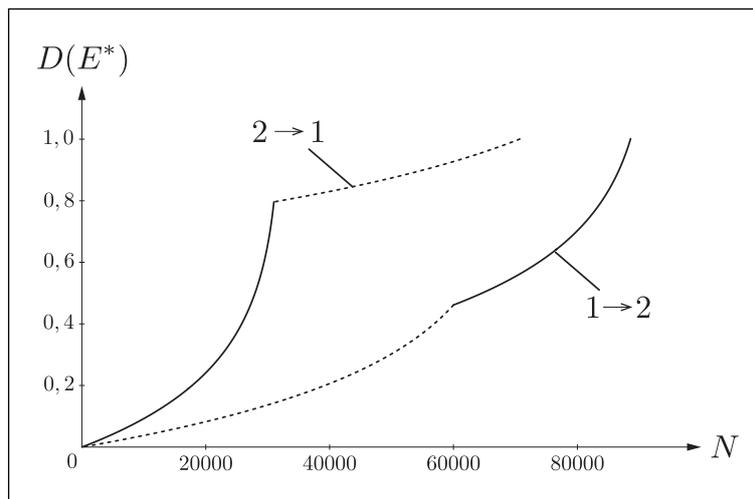


Fig. 8.15 – Cumul d'endommagement basé sur E^* pour deux séquences composées des blocs 1 (trait discontinu) et 2 (trait continu).

8.3.3 Validation du critère de fatigue multiaxiale

Nous considérons le chargement cyclique symétrique de l'éprouvette Arcan contrôlé en déplacement et présenté sur la figure 8.12. Notre modèle SVG-HP 3D, sans écrouissage, la thermodynamique associée et le critère de fatigue proposé, implémentés dans Abaqus et la subroutine utilisateur UMAT, permettent de déterminer la durée de vie de l'éprouvette. La figure 8.16 illustre la cartographie de durée de vie obtenue, en utilisant la valeur absolue du taux d'énergie interne comme variable énergétique de cumul. L'utilisation du taux d'entropie comme variable énergétique de cumul donne une cartographie de durée de vie très proche de celle de la figure 8.16 et n'est par conséquent pas présentée ici.

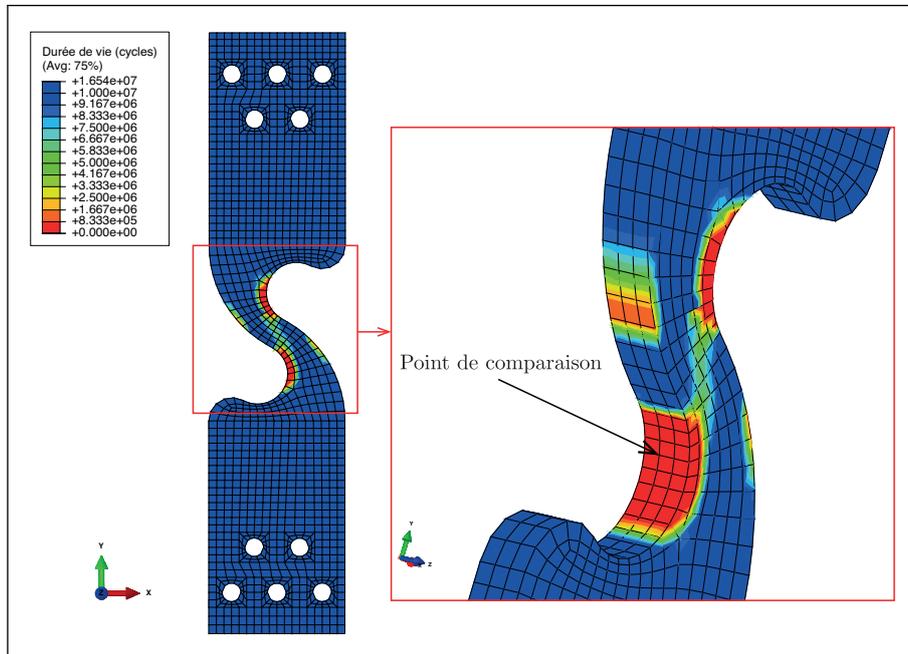


Fig. 8.16 – Cartographie de la durée de vie calculée en nombre de cycles à rupture avec notre critère de fatigue basé sur la valeur absolue du taux d'énergie interne, correspondant au chargement cyclique défini par la figure 8.12.

Le tableau 8.1 donne les résultats des calculs de durée de vie, obtenus au point de comparaison, en considérant d'une part la variable énergétique de cumul basée sur la valeur absolue du taux d'énergie interne et d'autre part sur le cumul du taux d'entropie. Ce tableau montre que le choix de la variable énergétique de cumul a peu d'influence sur la durée de vie finale obtenue, exprimée en nombre de cycles à la rupture. Ceci même si les valeurs de $E_{/cycle}^*$ et $I_{/cycle}$ se distinguent nettement, ce qui est aussi le cas des valeurs de $E_{f/cycle}^*$ et $I_{f/cycle}$.

$E^*_{/cycle}$ mJ.mm ⁻³	$I_{/cycle}$ mJ.mm ⁻³	$E^*_{f/cycle}$ mJ.mm ⁻³	$I_{f/cycle}$ mJ.mm ⁻³	$N_f(E^*_{/cycle})$ cycles	$N_f(I_{/cycle})$ cycles
0,99	0,49	$3,2 \cdot 10^{-7}$	$8,3 \cdot 10^{-7}$	45822	45563

TABLE 8.1 – Valeurs caractéristiques calculées au point de comparaison, correspondant au chargement cyclique illustré sur la figure 8.12.

La réponse mécanique élastoplastique au chargement cyclique de la figure 8.12 de l'éprouvette Arcan, obtenue avec le modèle SVG-HP 3D, a été utilisée comme donnée d'entrée pour le calcul de durée de vie avec fe-safe et le critère de Brown-Miller. La figure 8.17 illustre la cartographie de durée de vie obtenue avec le critère de Brown-Miller. La comparaison des figures 8.16 et 8.17 montre un très bon accord entre les prévisions des deux modèles, au niveau de la répartition géométrique des durées de vie, ainsi que des ordres de grandeur de celles-ci.

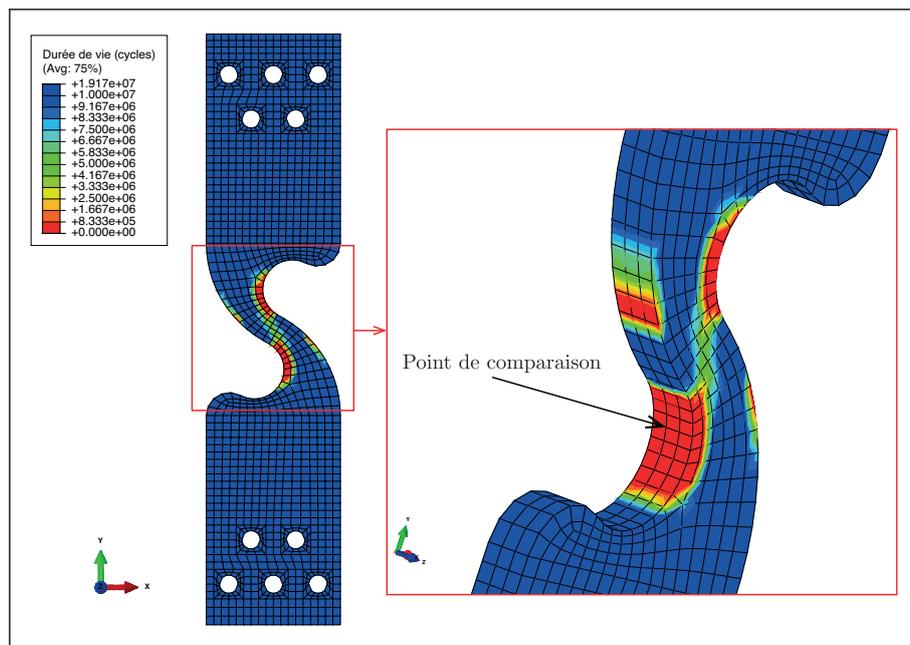


Fig. 8.17 – Cartographie de la durée de vie calculée en nombre de cycles à rupture avec le critère de Brown-Miller mis en œuvre avec le logiciel fe-safe, correspondant au chargement cyclique illustré sur la figure 8.12.

La valeur de durée de vie obtenue avec le critère Brown-Miller, au point de comparaison, est :

$$N_f = 31974 \text{ cycles} \quad (8.22)$$

En comparaison des résultats obtenus au tableau 8.1, ce résultat est très encourageant.

En effet, la mise en œuvre de notre démarche énergétique pour le calcul de la durée de vie donne des ordres de grandeurs très réalistes en comparaison avec le critère de Brown-Miller. Par ailleurs, la zone d'initiation de fissure est correctement prédite par le modèle. En termes de perspectives de poursuite de cette étude, d'une part une validation en se basant sur des données expérimentales doit être réalisée, afin de confirmer la pertinence des prédictions de notre modèle ; d'autre part, une modélisation plus fine de la courbe de Ramberg-Osgood pourra affiner les prévisions du modèle, car cette courbe, qui définit le comportement mécanique, a un impact important sur le calcul des variables énergétiques et par conséquent sur les prévisions du modèle de fatigue.

En se basant sur la réponse de l'éprouvette Arcan à la sollicitation présentée sur la figure 8.12, il est possible de déterminer les coefficients de sécurité s_{BM} et s_{DV} liés aux critères de Brown-Miller et de Dang Van respectivement. La détermination de ces coefficients est réalisée directement par le logiciel fe-safe et nécessite un calcul élastique. Les cartographies des deux coefficients de sécurité sont illustrées sur la figure 8.18. Nous pouvons constater que dans la zone la plus sollicitée de l'éprouvette, les valeurs de s_{DV} sont environ deux fois supérieures aux valeurs de s_{BM} . Plus particulièrement, au point de comparaison, on a :

$$\begin{aligned} s_{DV} &= 0,617 \\ s_{BM} &= 0,363 \end{aligned} \quad (8.23)$$

Le critère de Dang Van, tel qu'implémenté dans le logiciel fe-safe, ne permet pas de déterminer un nombre de cycles à rupture. Le critère est utilisé dans sa forme originale. Cependant, [Fouché-Sanseigne & Bracq 2011] ont proposé une méthode de calcul d'un nombre de cycles à rupture à partir du critère de Dang Van. Nous avons utilisé l'outil proposé par les auteurs pour déterminer le nombre de cycles à rupture au point de comparaison, pour la sollicitation présentée sur la figure 8.12.

La sollicitation de l'éprouvette Arcan présente une composante de contrainte σ_{zz} nulle dans la direction de l'épaisseur. Par conséquent, nous avons considéré un état de contrainte plane σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} pour la recherche du plan critique.

Les paramètres de la loi de Basquin, issus de la base de données fe-safe, sont $\sigma'_f = 703,4$ MPa et $b = -0,0835$ (figure 8.9). Ces valeurs sont utilisées pour déterminer le paramètre α du critère de Dang Van. Ainsi, la contrainte équivalente au sens de Dang Van peut être calculée et injectée dans la loi de Basquin, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sigma_{DV} &= 283 \text{ MPa} \\ N_f &= 54390 \text{ cycles} \end{aligned} \quad (8.24)$$

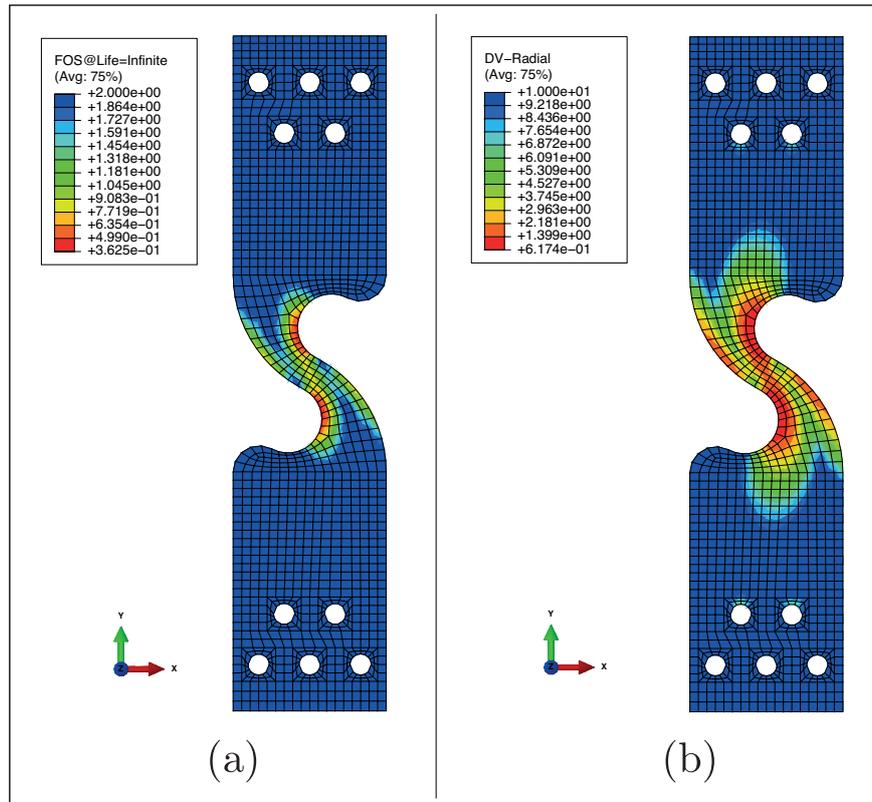


Fig. 8.18 – Cartographie des facteurs de sécurités liés au critère de Brown-Miller (a) et de Dang Van (b) en réponse à la sollicitation illustrée sur la figure 8.12 et pour un calcul élastique.

Ce résultat est relativement proche de la durée de vie calculée avec notre critère et de celle calculée avec le critère de Brown-Miller. Le tableau 8.2 propose une synthèse des durées de vie calculées au point de comparaison avec les différents critères évoqués, à partir de la sollicitation présentée sur la figure 8.12.

	Brown-Miller	Dang Van	$N_f(E^*_{/cycle})$	$N_f(I_{/cycle})$
N_f	31974	54390	45822	45563

TABLE 8.2 – Durées de vie calculées au point de comparaison avec les critères de Brown-Miller, Dang Van, notre critère et ce pour la sollicitation présentée sur la figure 8.12.

Nous remarquons que les prévisions de notre critère sont encadrées par celles des critères de Brown-Miller et de Dang Van. Rappelons que le critère de Brown-Miller est réputé performant dans le domaine de la fatigue oligocyclique et celui de Dang Van est réputé performant dans le domaine de la fatigue à grand nombre de cycle. Par conséquent, ce résultat est très encourageant. Il est nécessaire de poursuivre l'étude en faisant des comparaisons sur d'autres amplitudes de chargement et avec des résultats expérimentaux.

Conclusion du chapitre

Une approche énergétique originale a été proposée afin de prédire la durée de vie de structures en matériaux métalliques. Cette approche, implémentée dans le code de calcul de structures par éléments finis Abaqus, est basée d'une part sur la loi de comportement élastoplastique multiaxiale multisurface SVG-HP 3D, en chargements cycliques complexes. D'autre part, cette loi est complétée par une analyse énergétique et thermodynamique, qui fournit les variables énergétiques nécessaires au suivi de l'endommagement par fatigue.

Cette approche a été illustrée, dans son intégralité, par la proposition d'un critère de fatigue relativement simple. Les prédictions de ce critère ont été comparées à celles de deux critères reconnus, celui de Dang Van et celui de Brown-Miller. Les résultats obtenus sont très encourageants.

L'étude réalisée ne permet pas de discriminer une des deux variables énergétiques proposées, même si la pertinence physique de la variable de type entropique paraît plus évidente. L'analyse énergétique et thermodynamique permet un choix très large de variables ou de combinaison de variables énergétiques de cumul, pour le suivi de l'endommagement par fatigue. Un choix consistant ne peut se faire sans des arguments physiques pertinents, au niveau microstructural. Ceci sort du cadre de ce travail de thèse. Cette étude doit alors se poursuivre pour affiner le choix des variables énergétiques de cumul et pour améliorer la modélisation proposée dans le cadre de ce travail.

Conclusion et perspectives

Une analyse approfondie du modèle SVG-HP 1D a été menée. Trois fonctions génératives ont été proposées ; elles permettent de couvrir un large spectre de modélisation du comportement de matériaux métalliques.

Des recommandations ont été faites concernant le nombre d'éléments de Saint-Venant et la valeur optimale du seuil le plus grand. Une fonction de densification des seuils des éléments de Saint-Venant a été proposée afin de mieux décrire le comportement des matériaux dans la région de transition entre l'élasticité et la plasticité. Enfin, le modèle SVG-HP 1D a été complété par l'ajout d'un ressort célibataire.

Un modèle SVG-HP 3D a été proposé, dans le cas des transformations finies et consiste en une extension au cas tridimensionnel du modèle SVG-HP 1D ; ceci malgré son application au domaine des petites déformations, dans le cadre de ce travail. Ce choix est motivé par la nécessité de prise en compte des effets du second ordre. Ce modèle correspond à une loi multisurface dans l'espace des déformations. Les surfaces seuil sont des hypersphères de von Mises, exprimées dans l'espace déviatoire multidimensionnel d'Ilyushin.

Pour l'extension tridimensionnelle du modèle SVG-HP 1D, nous avons adopté le tenseur de déformation de Hencky gauche, l'option de décomposition additive de la déformation, la dérivée objective de Jaumann et une règle d'écoulement de type normalité pour chaque surface seuil du modèle, dans l'espace déviatoire multidimensionnel d'Ilyushin des déformations. Ceci conduit à une indépendance totale des mouvements des surfaces seuil, les uns par rapport aux autres.

Le modèle mécanique SVG-HP 3D, ainsi obtenu, a été implémenté dans le code de calcul de structures par éléments finis Abaqus, dans le cas des éléments finis volumiques 3D. Il a également été implémenté dans un outil heuristique de simulation numérique 2D, dans l'environnement MATLAB, en considérant l'espace déviatoire 2D classique. Cet outil permet de visualiser le mouvement des surfaces seuil, où les déformations et les contraintes sont considérées comme des vecteurs dans le plan et les surfaces seuil comme des cercles.

La loi élastoplastique du modèle SVG-HP 3D a été complétée par la superposition d'une loi d'écrouissage cyclique valable pour les chargements proportionnels, ne prenant pas en compte le phénomène de sur-écrouissage, aboutissant au modèle SVG-EC 3D.

Le modèle SVG-HP 3D a été validé par la comparaison de ses prévisions à des résultats expérimentaux de TTC et des chargements non proportionnels complexes. Il a montré sa capacité à reproduire de façon remarquable les propriétés génériques du comportement cyclique des matériaux métalliques sur un large éventail de trajets de nature non proportionnelle.

Ainsi, la réponse du modèle reproduit les évolutions complexes de la contrainte et du déphasage entre la contrainte et la déformation, pour des chargements très variés. Ceci valide d'une part notre choix du modèle phénoménologique de Saint-Venant généralisé, comme base de départ pour notre approche de modélisation. D'autre part, ceci valide le choix de la règle d'écoulement NFR dans l'espace des déformations.

Nous avons aussi montré que le modèle SVG-HP 3D, à fermeture parfaite des cycles, i.e. sans écrouissage cyclique, est capable de prédire, qualitativement et avec les bons ordres de grandeurs, les effets du second ordre de Poynting-Swift, observés dans le cas de la torsion alternée de tubes minces, à effort axial nul. Ce résultat est obtenu sans aucune équation dédiée ni paramètre d'ajustement supplémentaire. Par la suite, ce modèle a servi comme support heuristique pour donner une interprétation à ce phénomène complexe. En effet, les rôles combinés de la rotation de la matière et de la règle d'écoulement plastique ont été mis en évidence.

L'implémentation numérique du modèle SVG-HP 3D dans le code Abaqus, avec sa cinématique des hypersphères dans l'espace déviatoire multidimensionnel d'Ilyushin, a été illustrée et éprouvée en chargement cyclique, en petites déformations et en transformations finies. Le modèle a montré son efficacité et sa robustesse.

Une règle d'écoulement définie dans l'espace des déformations, avec une condition d'interdépendance des mouvements des surfaces seuil, ou règle d'écoulement IFR, a été proposée. Cette règle d'écoulement a été implémentée dans le code de calcul de structures par éléments finis Abaqus et dans l'outil heuristique de simulation 2D, dans l'environnement MATLAB. Le modèle obtenu donne des résultats moins satisfaisants que celui avec la règle d'écoulement NFR. En effet, l'effet Poynting-Swift, est relativement mal reproduit par la règle d'écoulement IFR; le rochet de déformation axiale du second d'ordre n'est pas prédit par ce modèle. Par ailleurs, la règle d'écoulement IFR conduit en général à une sous-estimation des déphasages entre la contrainte et la déformation et produit un écart important entre les résultats expérimentaux et la modélisation sur certains trajets de chargement.

Une analyse énergétique et thermodynamique du modèle SVG-HP 1D a été proposée et étendue au cas du modèle SVG-HP 3D. Cette analyse est applicable à l'étude du comportement des matériaux métalliques, dans le domaine des petites déformations. Elle nous permet d'extraire, à partir des évolutions mécaniques cycliques complexes du modèle SVG-HP 3D, les évolutions des différentes variables énergétiques et thermodynamiques. Les évolutions de ces variables sont alors basées sur le modèle mécanique complet.

L'analyse thermodynamique du modèle de Saint-Venant est basée sur une définition originale de la puissance réversible qui, au travers de l'équation fondamentale de Gibbs, permet une distinguer un taux de dissipation du type calorifique et un taux de dissipation de type entropique.

Enfin, une approche énergétique a été proposée afin de prédire la durée de vie de structures en matériaux métalliques. Cette approche, implémentée dans le code de calcul de structure par éléments finis Abaqus, repose d'une part sur la loi de comportement élastoplastique multiaxiale multisurface, en chargements cycliques complexes. D'autre part, cette loi est complétée par une analyse énergétique et thermodynamique, qui fournit les variables énergétiques nécessaires au suivi de l'endommagement par fatigue. Cette approche a été illustrée, dans son intégralité, par la proposition d'un critère de fatigue relativement simple. Les prédictions de ce critère ont été comparées à celles des critères de Dang Van et de Brown-Miller. Les résultats obtenus sont très encourageants.



Cette contribution à l'étude du comportement thermomécanique cyclique des matériaux métalliques ouvre des perspectives de développements futurs.

1) Le modèle SVG-HP 3D a été complété par la superposition d'une loi d'écrouissage cyclique, relativement simple et efficace. Néanmoins, dans le cadre de ce travail, son champ d'application a été limité aux chargements proportionnels et ne prend pas en compte le phénomène de sur-écrouissage. Une perspective naturelle à ce travail, dans le cadre de la thèse, est de proposer un modèle d'écrouissage cyclique valable dans le cas général des chargements non proportionnels et d'étendre ainsi le modèle d'écrouissage cyclique proposé. Ce travail en perspective pourra s'appuyer sur les données expérimentales obtenues

à l'annexe A et sur la méthode proposée par notre modèle d'érouissage cyclique, qui consiste à faire varier le seuil actuel en fonction de paramètres consistants calculés en se basant sur le modèle SVG-HP 3D complet et sur sa définition.

2) La prise en compte des effets du second ordre est étroitement liée au choix de la dérivée objective ou au choix du repère privilégié adopté pour l'écriture de la loi de comportement irréversible multiaxiale. Dans le cadre de notre travail, nous avons adopté la dérivée objective de Jaumann et nous avons constaté la sensibilité des effets du second ordre, aux rôles combinés de la rotation de la matière et de la règle d'écoulement plastique.

Parmi la multitude d'options possibles, une analyse systématique est nécessaire pour distinguer le meilleur choix, apte à rendre compte de façon consistante des effets du second ordre. Une telle perspective peut faire l'objet de plusieurs études théoriques et/ou expérimentales ultérieures. Ces études futures doivent permettre d'étudier plus finement l'influence du choix de la dérivée objective sur le comportement des effets du second ordre.

3) Les prévisions de l'approche énergétique proposée dans le cadre de ce travail, comparées à celles des deux critères de Dang Van et de Brown-Miller, donnent des résultats très encourageants. Néanmoins, les prévisions du modèle de fatigue doivent être évaluées en se basant directement sur des données expérimentales, dans le cadre d'une étude spécifique.

4) L'étude que nous avons réalisée ne permet pas de discriminer une des deux variables énergétiques proposées, même si la pertinence physique de la variable de type entropique paraît plus évidente. L'analyse énergétique et thermodynamique permet un large choix de variables ou de combinaisons de variables énergétiques de cumul, pour le suivi de l'endommagement par fatigue. Un choix consistant ne peut se faire sans des arguments physiques pertinents, au niveau microstructural. Cet aspect doit être étudié de manière plus approfondie dans l'avenir, pour affiner le choix des variables énergétiques de cumul et pour améliorer la modélisation proposée dans le cadre de notre travail.

5) Le modèle SVG-HP 3D, avec son implémentation numérique dans le code Abaqus, ouvre des perspectives très intéressantes pour l'étude de la mise en forme des matériaux métalliques ductiles, des polymères ou d'autres types de matériaux qui présentent des grandes déformations.

En effet, ce modèle possède les ingrédients nécessaires pour aborder un tel domaine d'étude. Ces ingrédients sont liés à la spécificité du modèle SVG-HP 3D et à son fonctionnement, reposant sur la déformation et sur la cinématique des surfaces seuil, exprimées dans l'espace déviatoire multidimensionnel d'Ilyushin.

Dans la perspective d'une utilisation future du modèle SVG-HP 3D en transformations finies, il est nécessaire d'adopter, à la place du tenseur de contrainte de Cauchy, le tenseur

de contrainte conjuguée Jaumann-Hencky gauche. Ce travail n'était pas nécessaire pour l'application actuelle sur l'étude du comportement des matériaux métalliques, en petites déformation.

Du point de vue numérique, l'implémentation du tenseur de contrainte conjuguée Jaumann-Hencky gauche ne présente pas de difficulté majeure. Notons que les aspects fondamentaux du modèle, dans l'espace des déformations, sont déjà traités des points de vue théorique et numérique.

Résultats de traction-torsion combinées

Cette annexe présente des résultats expérimentaux de Traction-Torsion Combinées (TTC), réalisés au laboratoire sur un matériau métallique.

Matériau et éprouvettes

Le matériau adopté est un acier inoxydable austénitique de type AISI 316L, de la nuance UGIMA 4404 HM commercialisé par Ugitech. Le tableau A.1 donne la composition chimique du matériau fourni par Ugitech.

	C	Si	Mn	Ni	Cr	Mo	S	P	N
	%	%	%	%	%	%	%	%	%
Min.				10,0	16,5	2,0	0,015		
Max.	0,03	1,0	2,0	12,0	17,5	2,5	0,030	0,045	0,1

TABLE A.1 – Composition chimique du matériau (source Ugitech).

Les éprouvettes sont des tubes minces de diamètres extérieur $\phi_{ext} = 28$ mm et de diamètre intérieur $\phi_{int} = 24$ mm, avec une zone utile de hauteur $h = 30$ mm. Ces éprouvettes ont été usinées à partir de barres rondes laminées de diamètre 80 mm fournie par Ugitech.

Mesures des contraintes et des déformations

Nous adoptons la mesure de contrainte de Piola-Kirchhoff de type 1 (PK1). Ainsi, la contrainte axiale, notée $\hat{\Pi}_{zz}$, est donnée par :

$$\hat{\Pi}_{zz} = \frac{F_z}{\pi(R_{ext0}^2 - R_{int0}^2)} \quad (\text{A.1})$$

où F_z est la force axiale appliquée, R_{ext0} et R_{int0} sont respectivement les rayons extérieur et intérieur de l'éprouvette avant déformation. Pour le calcul de la contrainte de cisaillement, notée $\hat{\Pi}_{\theta z}$, nous considérons une répartition linéaire dans l'épaisseur du tube, telle que :

$$\hat{\Pi}_{\theta z} = \frac{2C_{\theta z}R_{ext0}}{\pi(R_{ext0}^4 - R_{int0}^4)} \quad (\text{A.2})$$

Pour la mesure de la déformation, nous adoptons l'hypothèse des petites déformations. Ainsi, les déformations conventionnelles axiale E_{zz} , circonférentielle $E_{\theta\theta}$ et de cisaillement $E_{\theta z}$ sont définies telles que :

$$E_{zz} = \frac{h - h_0}{h_0} \quad E_{\theta\theta} = \frac{R_{ext} - R_{ext0}}{R_{ext0}} \quad E_{\theta z} = \frac{\gamma_{\theta z}}{2} = \frac{\theta R_{ext0}}{2h_0} \quad (\text{A.3})$$

où h_0 , h sont respectivement les bases de mesure initiale et actuelle de l'éprouvette, R_{ext} le rayon extérieur actuel de l'éprouvette, θ l'angle de torsion de la zone utile de l'éprouvette de hauteur h_0 et $\gamma_{\theta z}$ son angle de distorsion.

A partir des relations A.1 à A.3, on définit la déformation et la contrainte équivalentes, notées respectivement E_{eq} et $\hat{\Pi}_{eq}$:

$$E_{eq} = \sqrt{E_{zz}^2 + \frac{\gamma_{\theta z}^2}{3}} \quad (\text{A.4})$$

et :

$$\hat{\Pi}_{eq} = \sqrt{\hat{\Pi}_{zz}^2 + 3\hat{\Pi}_{\theta z}^2} \quad (\text{A.5})$$

Par ailleurs, il est intéressant de mesurer le déphasage entre la contrainte dans le plan $(\hat{\Pi}_{zz}, \sqrt{3}\hat{\Pi}_{\theta z})$ et la déformation dans le plan $(E_{zz}, \frac{\gamma_{\theta z}}{\sqrt{3}})$. Pour cela, nous définissons la phase de la contrainte $\varphi_{\hat{\Pi}}$ par :

$$\varphi_{\hat{\Pi}} = \arctan\left(\frac{\hat{\Pi}_{\theta z}}{|\hat{\Pi}_{zz}|}\right) \quad (\text{A.6})$$

et la phase de la déformation φ_E par :

$$\varphi_E = \arctan\left(\frac{E_{\theta z}}{|E_{zz}|}\right) \quad (\text{A.7})$$

Contrôle des essais et caractérisation du comportement en TTC

L'objectif des essais est de révéler les caractéristiques essentielles du comportement d'hystérésis pure du matériau en chargements non proportionnels de TTC. Pour atteindre ce comportement, il est nécessaire d'une part d'atteindre la stabilisation des effets d'écrouissage cyclique, après un chargement cyclique de quelques dizaines de cycles, d'autre part d'effectuer un contrôle des essais en déformation locale dans la zone utile de l'éprouvette, en temps réel. Nous avons réalisé ce contrôle grâce à l'utilisation d'un extensomètre optique disponible au laboratoire.

Ainsi, pour un cycle de chargement imposé en déformation dans le plan $(E_{zz}, \frac{\gamma_{\theta z}}{\sqrt{3}})$, la réponse en contrainte sera représentée par un cycle stabilisé dans le plan $(\hat{\Pi}_{zz}, \sqrt{3}\hat{\Pi}_{\theta z})$.

Plusieurs cycles de chargement différents ont été envisagés. Chaque cycle correspond à un essai TTC. Ces cycles correspondent à des trajets dans le plan des déformations $(E_{zz}, \frac{\gamma_{\theta z}}{\sqrt{3}})$ qui forment à chaque fois une boucle, qui a le même point de départ et d'arrivée.

Les trajets ont été définis de sorte que leur amplitude maximum soit de 0,5%, c'est à dire que dans le plan $(E_{zz}, \frac{\gamma_{\theta z}}{\sqrt{3}})$, le trajet en déformation soit inscrit dans un cercle de rayon 0,5%. Les essais TTC sont pilotés de sorte que la vitesse de déformation apparente dans le plan $(E_{zz}, \frac{\gamma_{\theta z}}{\sqrt{3}})$, notée \dot{E}_{eq}^* , reste constante. Cette vitesse est définie par :

$$\dot{E}_{eq}^* = \frac{\sqrt{(dE_{zz})^2 + \left(\frac{d\gamma_{\theta z}}{\sqrt{3}}\right)^2}}{dt} \quad (\text{A.8})$$

Pour tous les essais la vitesse de déformation adoptée est telle que $\dot{E}_{eq}^* = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Cette vitesse de chargement relativement faible a été adoptée afin de considérer la réponse du matériau comme une réponse dans le domaine quasi statique et de négliger les effets visqueux, qui sont par ailleurs relativement faibles dans le cas des matériaux métalliques.

Caractérisation des paramètres matériau du modèle SVG-HP 3D

La méthode d'identification des cinq paramètres K , G_0 , G_∞ , c et S_0 du modèle d'hystérésis pure de Saint-Venant généralisé 3D est présentée au paragraphe § 4.3. Cette méthode concerne un comportement d'hystérésis pure à fermeture parfaite des cycles. Dans ce cas, elle est basée sur les résultats de deux essais monotones de traction simple et de torsion.

Dans le cas présent, le comportement d'hystérésis pure à fermeture parfaite des cycles correspond au cycle stabilisé après saturation de l'écroutissage cyclique. Ainsi, dans le cas présent, les effets volumiques seront caractérisés, de la même façon, à l'aide du résultat d'un essai monotone de traction simple, comme cela est indiqué au paragraphe 4.3; quant au comportement déviatoire d'hystérésis pure, il sera caractérisé par un résultat cyclique de torsion alternée, sur le cycle stabilisé.

Ainsi, un essai monotone de traction simple a permis de mesurer le module d'Young et le coefficient de Poisson du comportement quasi élastique, à droite de l'origine, tels que :

$$E = 175000 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \nu = 0,28 \quad (\text{A.9})$$

Un essai de torsion alternée à $E_{\theta z} = \pm 0,6 \%$ et $\dot{E}_{\theta z} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ a permis d'obtenir un cycle stabilisé donné par la figure A.1.

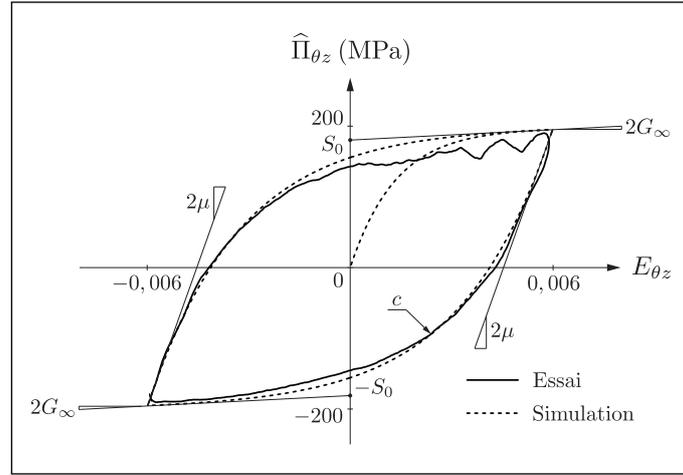


Fig. A.1 – Identification des paramètres du comportement d’hystérésis pure par un cycle stabilisé de torsion alternée : résultat d’essai obtenu après saturation de l’érouissage cyclique (trait plein) et résultat de simulation numérique par le modèle d’hystérésis pure, i.e. sans érouissage cyclique (trait pointillé).

Sur ce cycle stabilisé, nous superposons une simulation numérique obtenue par le modèle d’hystérésis pure de Saint-Venant généralisé. Le résultat expérimental permet de faire une mesure directe des paramètres μ , S_0 et G_{∞} , et la comparaison expérience-modélisation permet de déterminer la valeur du paramètre de courbure c .

La mesure du module de cisaillement du comportement quasi élastique est compatible avec les mesures A.9, telle que :

$$\mu = 68359 \text{ MPa} \quad (\text{A.10})$$

Ces mesures permettent de déterminer entièrement les valeurs des cinq paramètres du modèle d’hystérésis pure de Saint-Venant généralisé, tels que :

$$\begin{aligned} K &= 132576 \text{ MPa} \\ G_0 &= 67774 \text{ MPa} \\ G_{\infty} &= 586 \text{ MPa} \\ S_0 &= 173,5 \text{ MPa} \\ c &= 1,01 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Les relations 4.28 et 4.29 et les valeurs des paramètres A.11 permettent de déterminer les valeurs de Y_0 et E_{∞} , telles que :

$$Y_0 = 300 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad E_{\infty} = 1755 \text{ MPa} \quad (\text{A.12})$$

Résultats expérimentaux de TTC

Les résultats expérimentaux de traction-torsion combinées sont donnés aux figures A.2, A.3, A.4, A.5, A.6, A.7, A.8, A.9 et A.10.

Les sous-figures (a) représentent les trajets imposés en déformation dans le diagramme $(E_{zz}, \frac{\gamma_{\theta z}}{\sqrt{3}})$. Ces trajets comportent quelques oscillations de faible amplitude, aussi bien dans la direction de traction que dans la direction de torsion. Ceci est dû à la faible amplitude de la déformation imposée, dont la valeur est proche des limites d'utilisation de l'extensomètre optique disponible au laboratoire.

Les sous-figures (b) représentent les réponses en contrainte dans le diagramme $(\hat{\Pi}_{zz}, \sqrt{3}\hat{\Pi}_{\theta z})$. L'allure de la réponse en contrainte peut être proche (trajet circulaire, par exemple) ou au contraire très différente (trajet en croix, par exemple) du trajet imposé en déformation. Ceci confirme la complexité du comportement élastoplastique sous chargement multiaxial.

Les sous-figures (c) et (d) représentent les réponses contrainte-déformation dans les directions axiale et de torsion respectivement. Ces figures permettent notamment de qualifier le matériau dans les deux directions et ainsi détecter une éventuelle anisotropie. Sauf lorsque le trajet imposé en déformation est dissymétrique entre la traction et la torsion, ces réponses (c) et (d) sont très proches ; ceci semble montrer une isotropie initiale du matériau.

Enfin, les sous-figures (e) et (f) montrent qu'il existe un déphasage entre le trajet dans l'espace des déformations et la réponse dans l'espace des contraintes. Nous remarquons que pour tous les cas de chargement, la contrainte est en avance de phase par rapport à la déformation. Aussi, pour les chargements cercle, carré, hexagone et octogone, les sous-figures (f) semblent montrer un déphasage moyen de l'ordre de $\frac{\pi}{6}$.

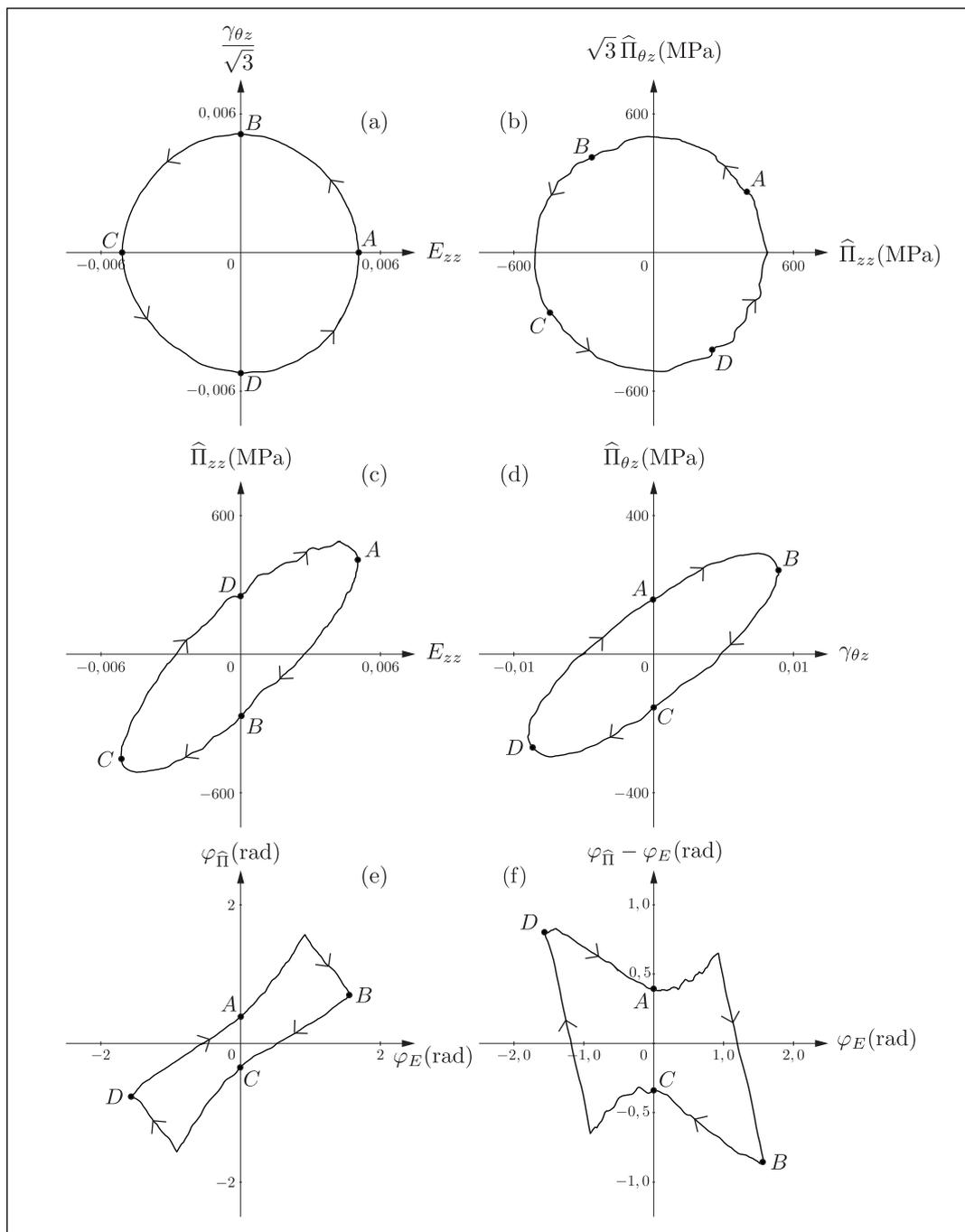


Fig. A.2 – Résultat d'un essai de traction-torsion combinées, pour un trajet non proportionnel en forme de **cercle** : trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse dans le direction axiale (c), réponse dans la direction de cisaillement (d) et déphasage entre la déformation et la contrainte (e, f). Seul le comportement stabilisé, après écouissage cyclique, est représenté.

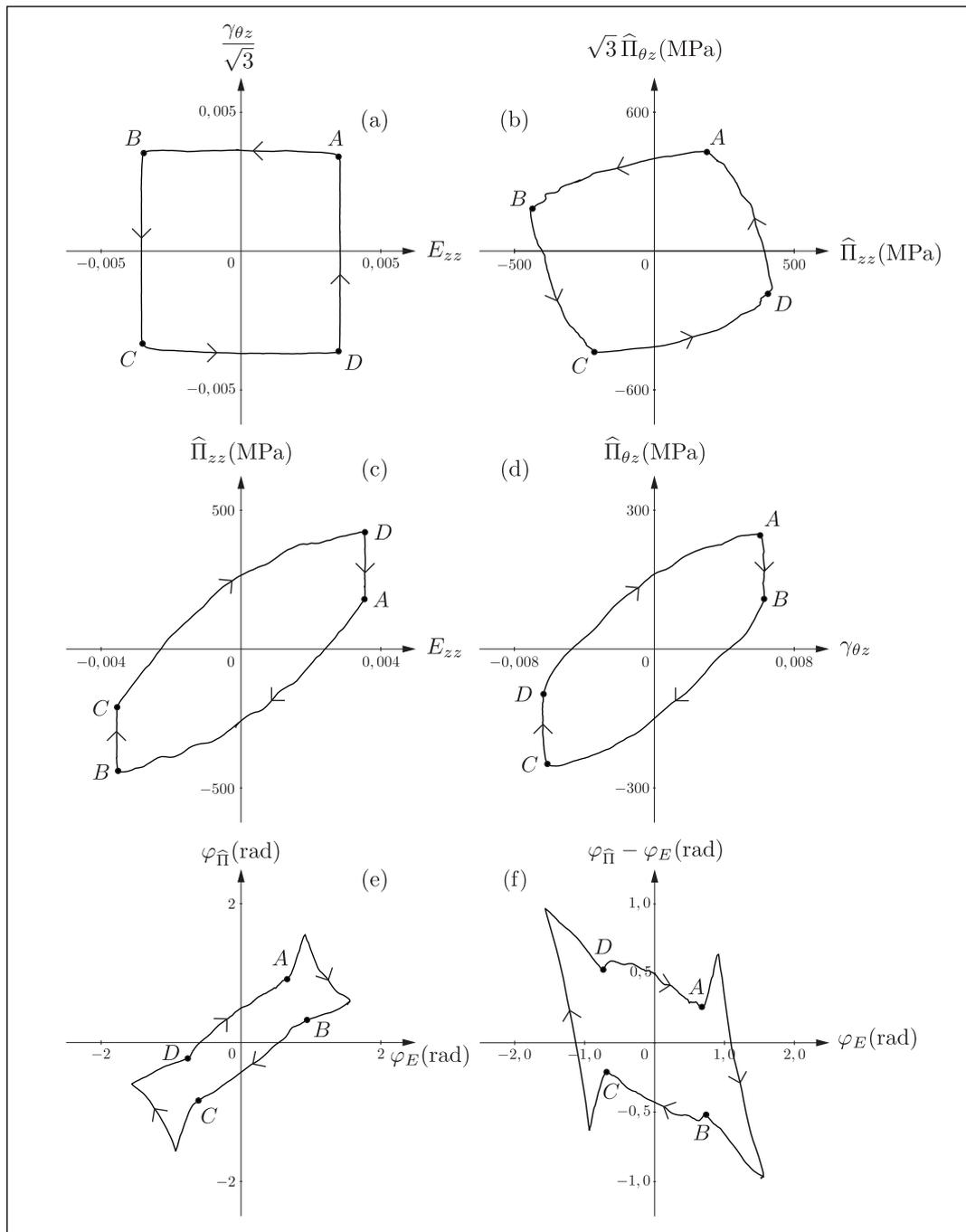


Fig. A.3 – Résultat d'un essai de traction-torsion combinées, pour un trajet non proportionnel en forme de **carré** : trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse dans le direction axiale (c), réponse dans la direction de cisaillement (d) et déphasage entre la déformation et la contrainte (e, f). Seul le comportement stabilisé, après écouissage cyclique, est représenté.

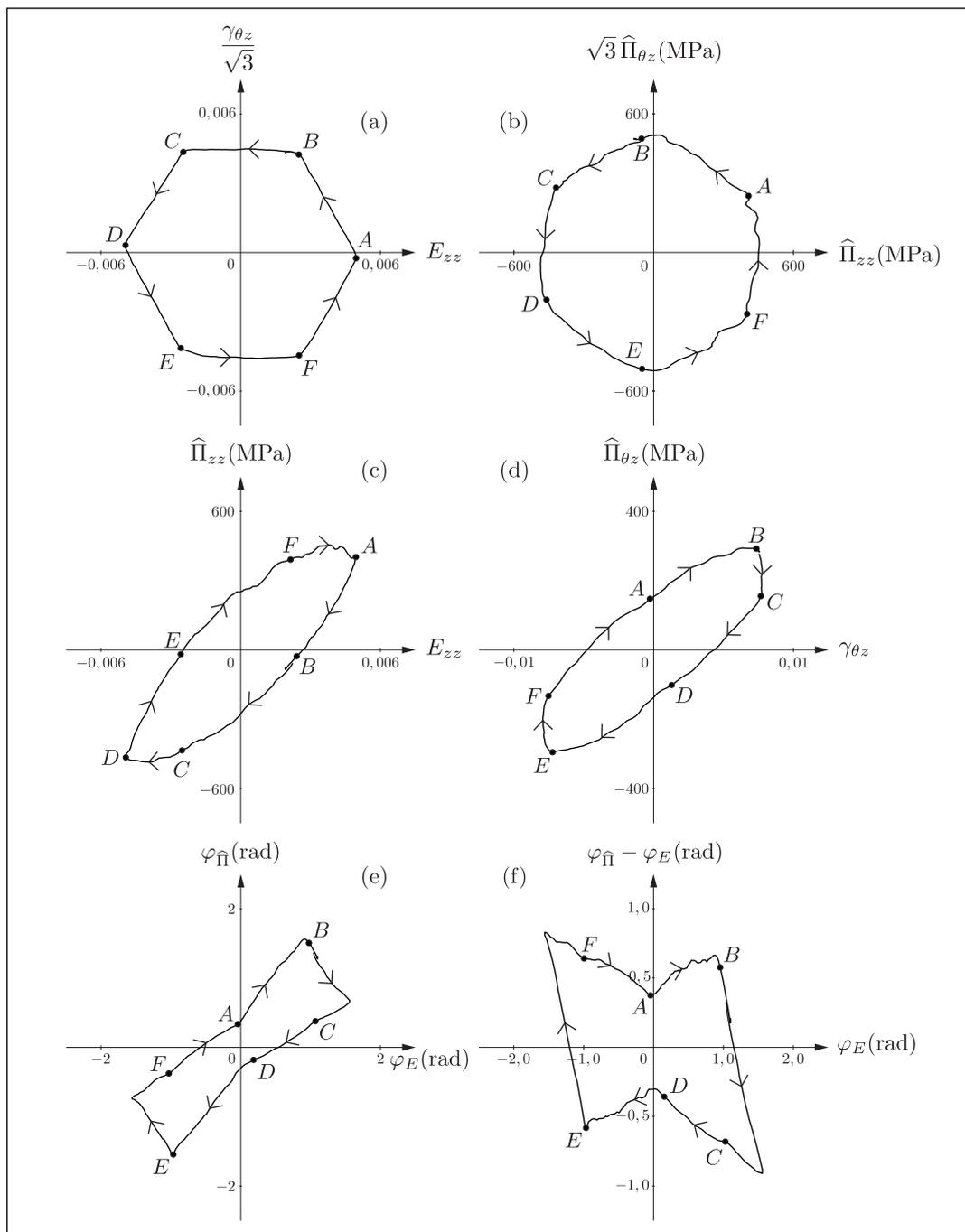


Fig. A.4 – Résultat d'un essai de traction-torsion combinées, pour un trajet non proportionnel en forme d'hexagone : trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse dans le direction axiale (c), réponse dans la direction de cisaillement (d) et déphasage entre la déformation et la contrainte (e, f). Seul le comportement stabilisé, après écoulement cyclique, est représenté.

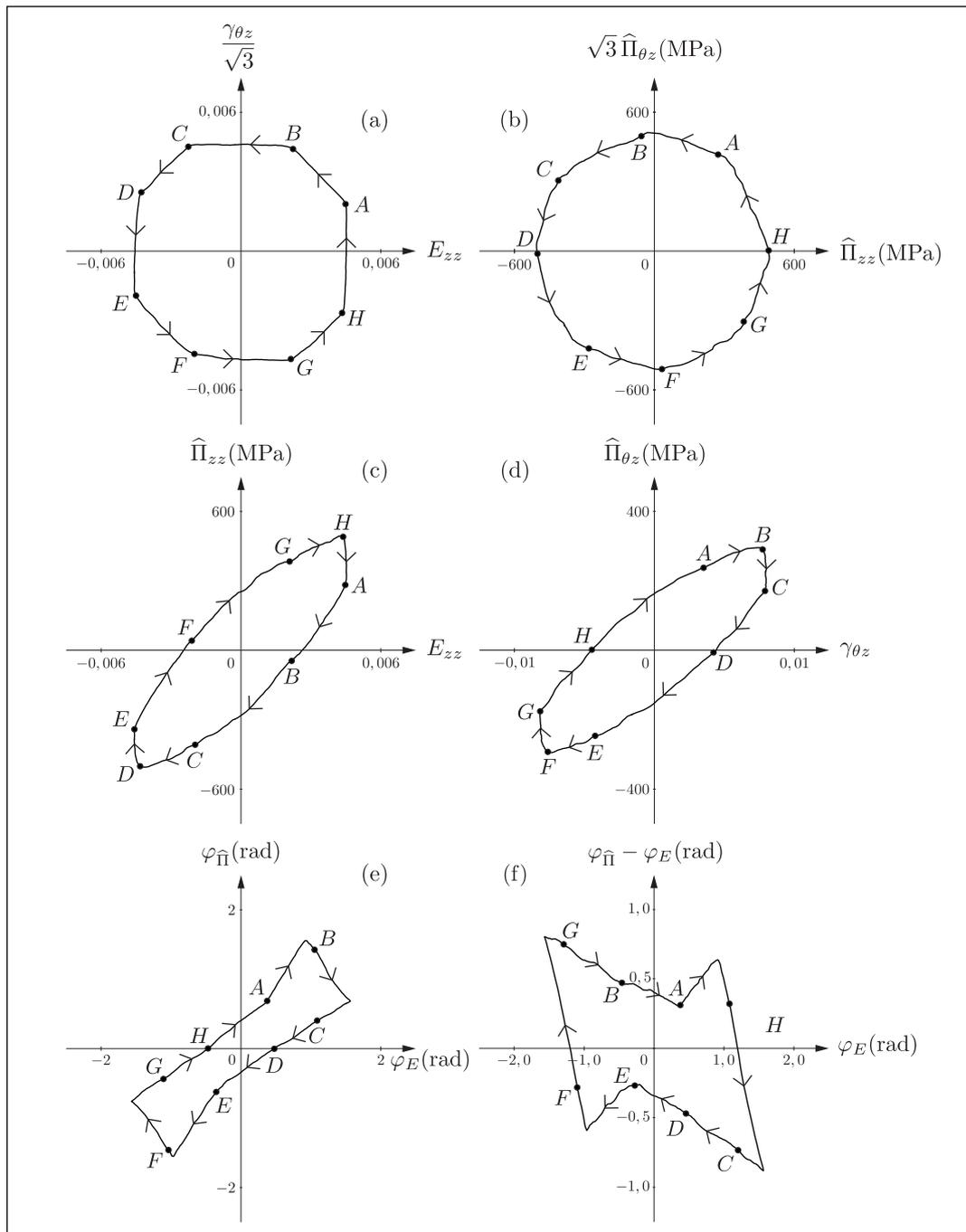


Fig. A.5 – Résultat d'un essai de traction-torsion combinées, pour un trajet non proportionnel en forme d'octogone : trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse dans le direction axiale (c), réponse dans la direction de cisaillement (d) et déphasage entre la déformation et la contrainte (e, f). Seul le comportement stabilisé, après écouissage cyclique, est représenté.

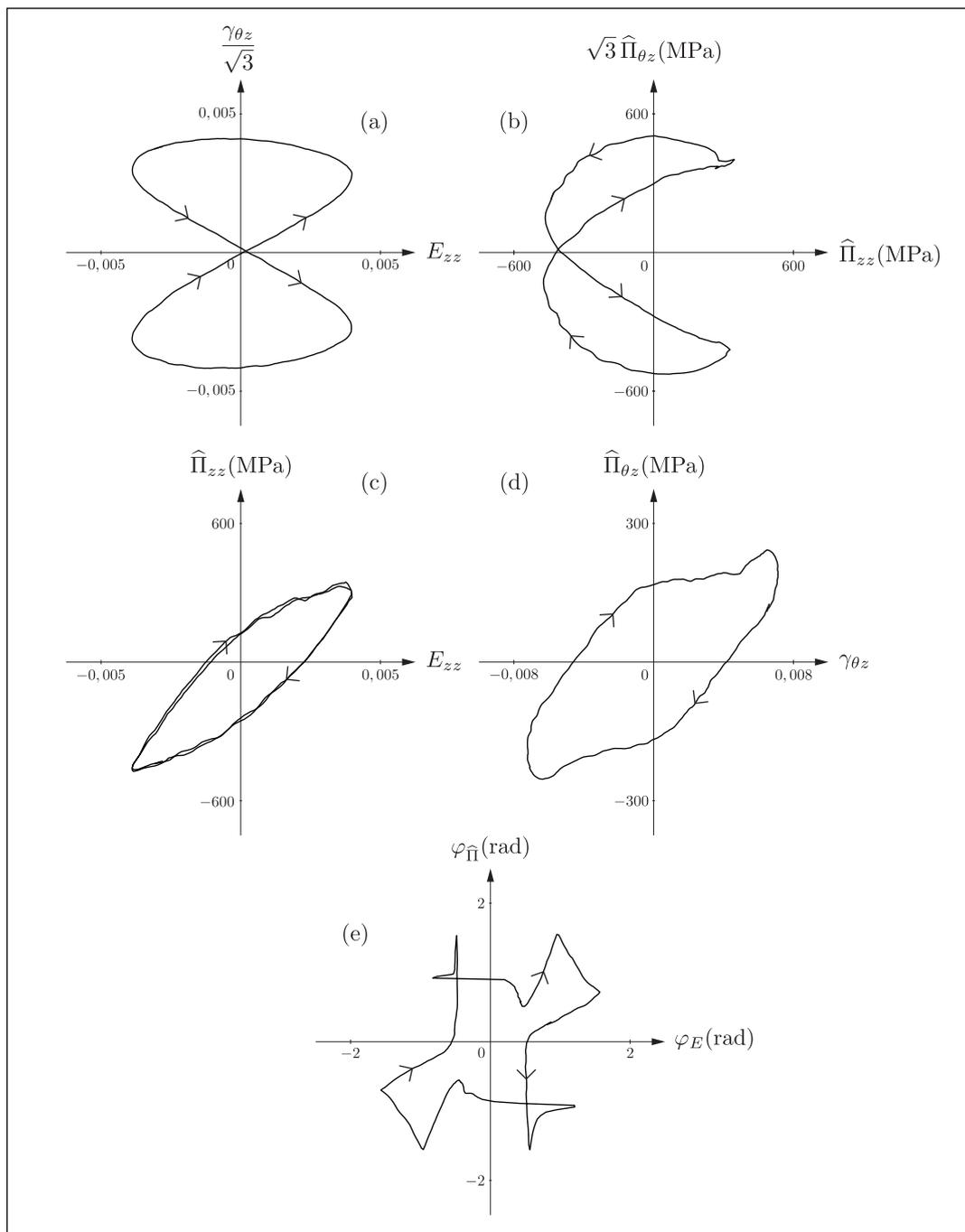


Fig. A.6 – Résultat d'un essai de traction-torsion combinées, pour un trajet non proportionnel en forme de **sablier** : trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse dans le direction axiale (c), réponse dans la direction de cisaillement (d) et déphasage entre la déformation et la contrainte (e). Seul le comportement stabilisé, après écouissage cyclique, est représenté.

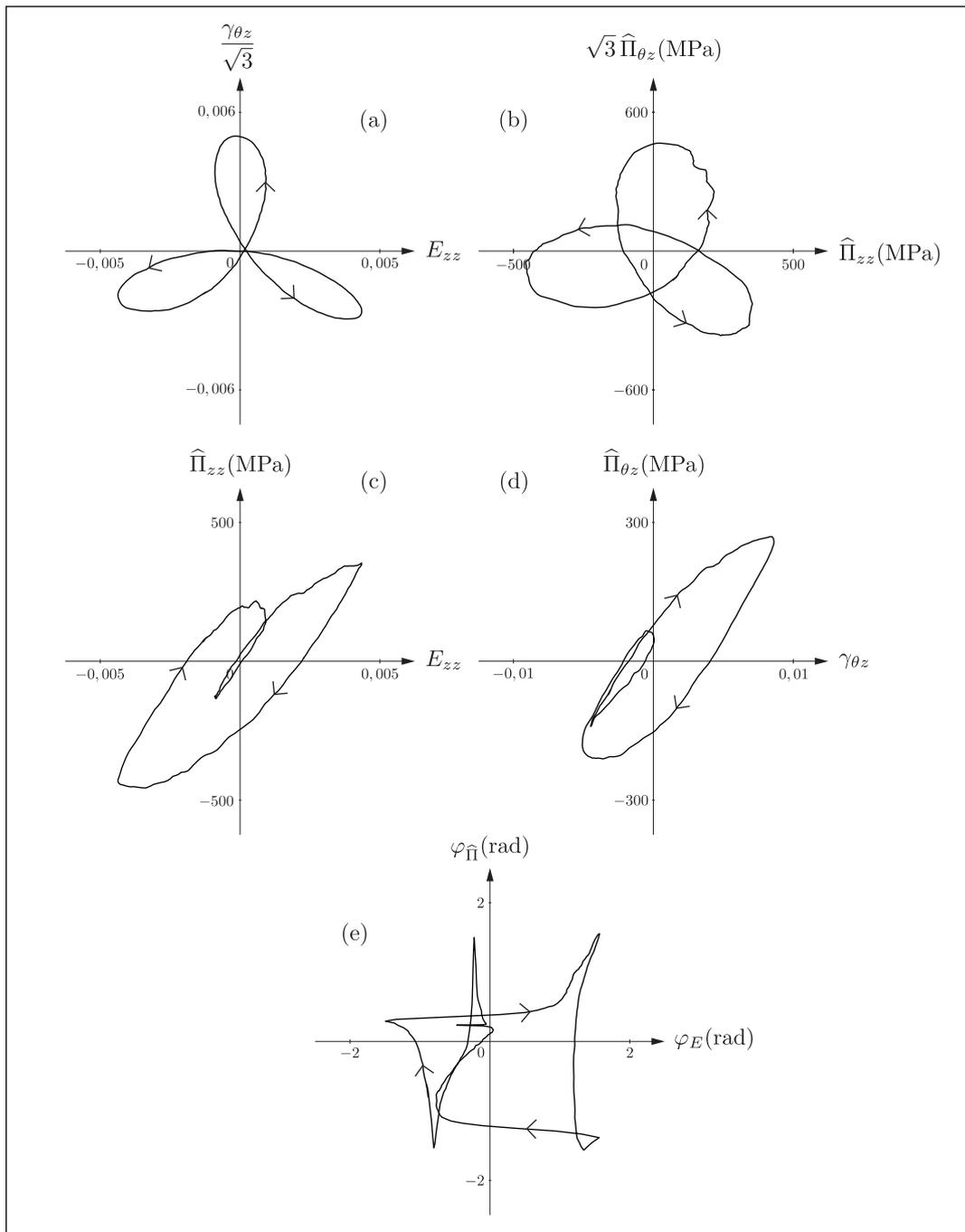


Fig. A.7 – Résultat d'un essai de traction-torsion combinées, pour un trajet non proportionnel en forme de **trèfle à 3 pétales** : trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse dans le direction axiale (c), réponse dans la direction de cisaillement (d) et déphasage entre la déformation et la contrainte (e). Seul le comportement stabilisé, après écouissage cyclique, est représenté.

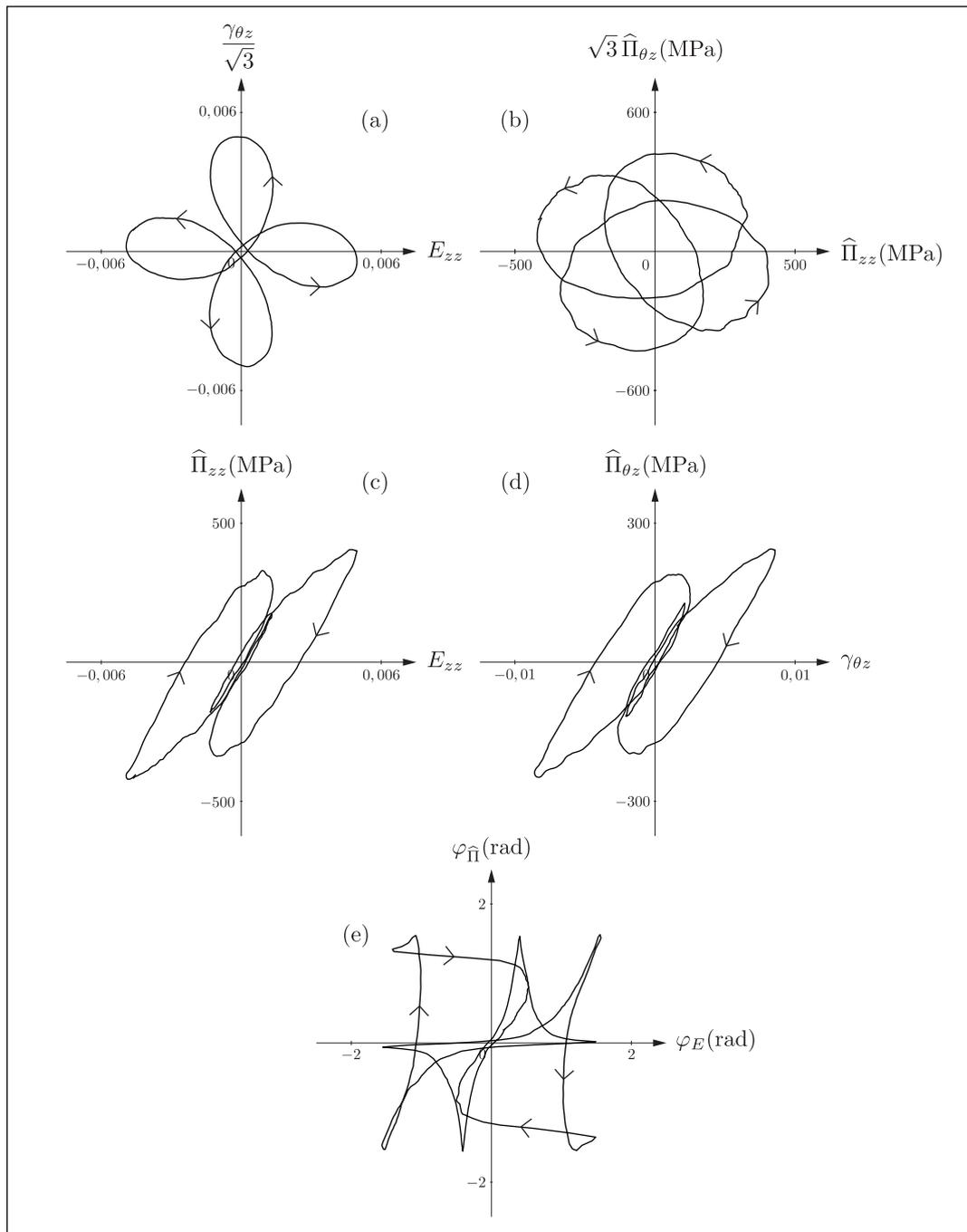


Fig. A.8 – Résultat d'un essai de traction-torsion combinées, pour un trajet non proportionnel en forme de **trèfle à 4 pétales** : trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse dans le direction axiale (c), réponse dans la direction de cisaillement (d) et déphasage entre la déformation et la contrainte (e). Seul le comportement stabilisé, après écouissage cyclique, est représenté.

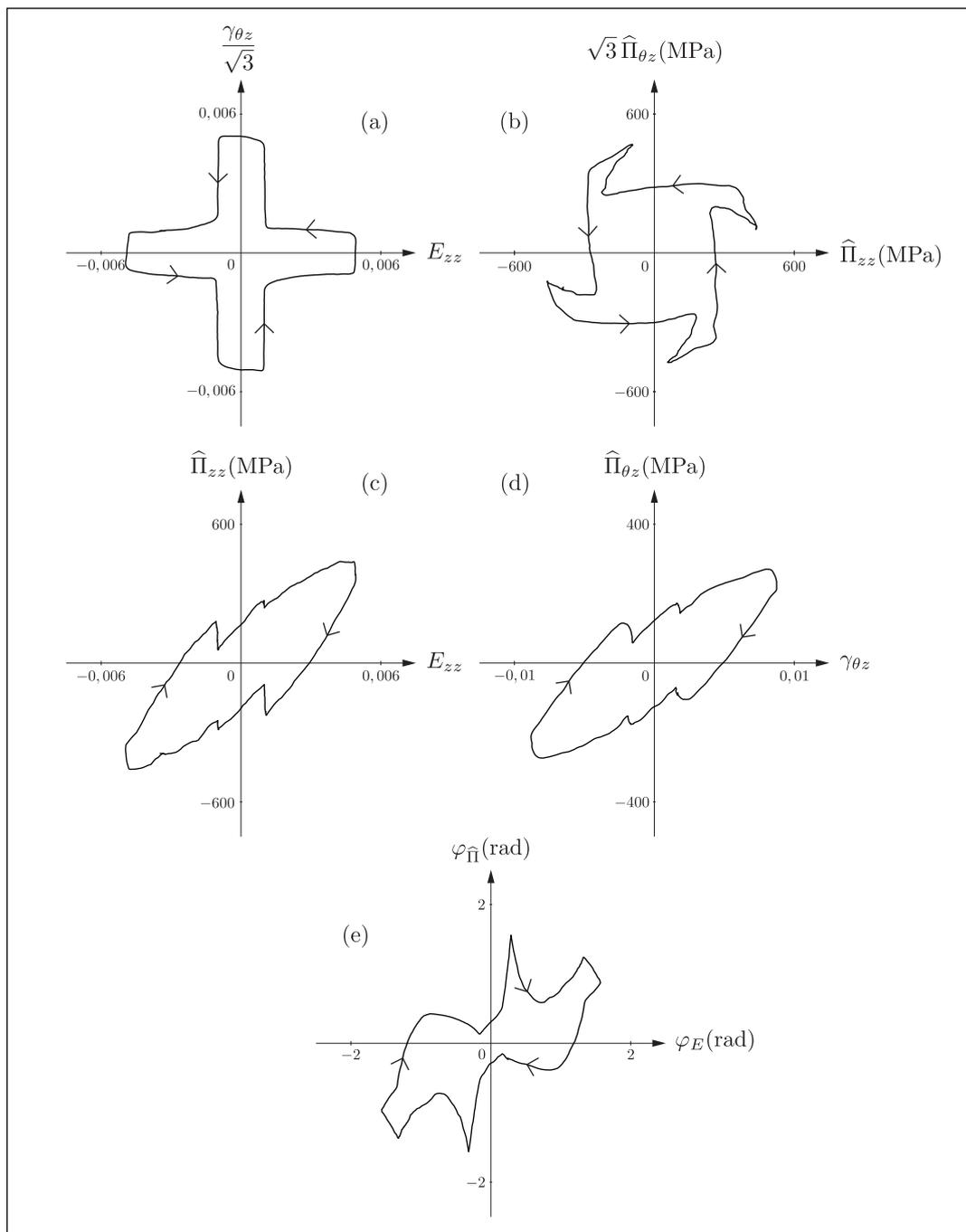


Fig. A.9 – Résultat d'un essai de traction-torsion combinées, pour un trajet non proportionnel en forme de **croix numéro 1** : trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse dans le direction axiale (c), réponse dans la direction de cisaillement (d) et déphasage entre la déformation et la contrainte (e). Seul le comportement stabilisé, après écoulement cyclique, est représenté.

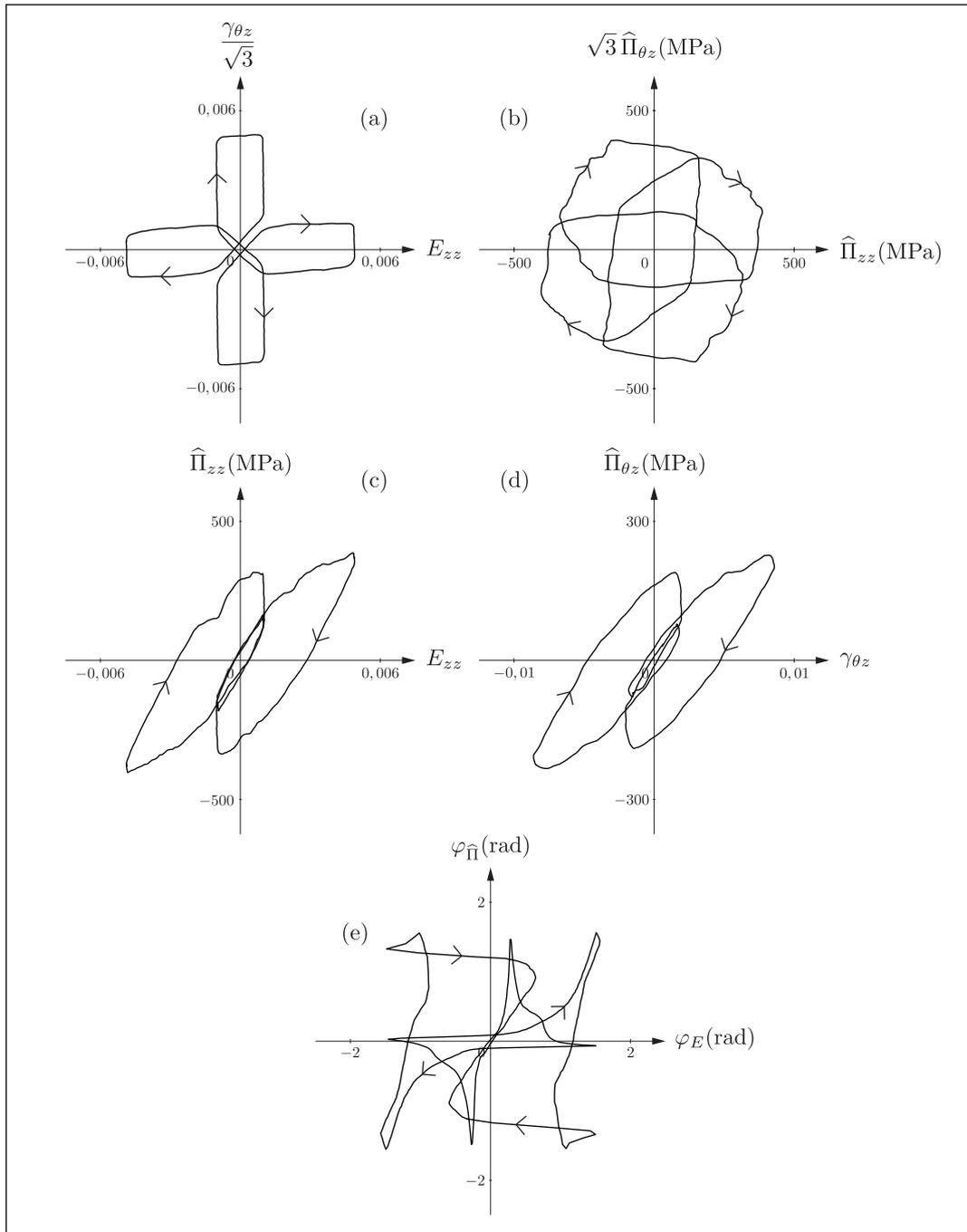


Fig. A.10 – Résultat d'un essai de traction-torsion combinées, pour un trajet non proportionnel en forme de **croix numéro 2** : trajet en déformation (a), réponse en contrainte (b), réponse dans le direction axiale (c), réponse dans la direction de cisaillement (d) et déphasage entre la déformation et la contrainte (e). Seul le comportement stabilisé, après écouissage cyclique, est représenté.

Espace multidimensionnel d'Ilyushin

Un tenseur du second ordre symétrique $\tilde{\mathbf{A}}$ est exprimé par une matrice de composantes $\text{Mat } \tilde{\mathbf{A}}_{(\vec{e}_i)}$ définie dans une base orthonormée $(\vec{e}_i) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace matériel tridimensionnel \mathbf{E} , telle que :

$$\text{Mat } \tilde{\mathbf{A}}_{(\vec{e}_i)} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

où la base orthonormée (\vec{e}_i) dans l'espace \mathbf{E} est telle que :

$$\begin{aligned} (\vec{e}_i) &= (\vec{e}_i)^0 \text{ base orthonormée directe au temps } t = 0 \\ \text{et } \forall t > 0, (\overset{\circ j}{\vec{e}_i}) &= 0, i \in [1, 3] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où " $\circ j$ " désigne la dérivée objective corotationnelle de Jaumann. On notera que, au cours du temps, (\vec{e}_i) dépend du point M car le tenseur vitesse de rotation $\tilde{\mathbf{W}}$ dépend lui-même de M . La dérivée objective de Jaumann et la relation B.2 garantissent l'orthonormalité de la base (\vec{e}_i) à tout instant t . Avec une dérivée objective de Lie (convective), ceci n'aurait pas été possible.

L'espace des tenseurs du second ordre symétriques \mathbf{S} est composé de deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux, \mathbf{D} le sous-espace de dimension 5 des tenseurs déviatoires et \mathbf{H} le sous-espace de dimension 1 des tenseurs sphériques, tels que :

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{D} \text{ et } \tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{3} (\text{Tr } \tilde{\mathbf{A}}) \tilde{\mathbf{I}} + \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \quad (\text{B.3})$$

où $\tilde{\mathbf{I}}$ représente le tenseur identité, $\underline{\tilde{\mathbf{A}}}$ représente le déviateur du tenseur $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\frac{1}{3}(\text{Tr } \tilde{\mathbf{A}})\tilde{\mathbf{I}}$ sa partie sphérique.

Nous pouvons adopter une notation de Voigt Modifiée, qui est parfois appelée notation de Mandel, telle que le tenseur $\tilde{\mathbf{A}}$ soit exprimé par une matrice colonne $\text{Col } \tilde{\mathbf{A}}_{(\tilde{\mathbf{E}}_i)}$ telle que :

$$\text{Col } \tilde{\mathbf{A}}_{(\tilde{\mathbf{E}}_i)} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ \sqrt{2}A_{12} \\ \sqrt{2}A_{13} \\ \sqrt{2}A_{23} \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

dans la base $(\tilde{\mathbf{E}}_i)$ de l'espace \mathbf{S} , définie par :

$$\begin{aligned} \text{Mat } \tilde{\mathbf{E}}_{1(\tilde{\mathbf{e}}_i)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{Mat } \tilde{\mathbf{E}}_{2(\tilde{\mathbf{e}}_i)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{Mat } \tilde{\mathbf{E}}_{3(\tilde{\mathbf{e}}_i)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{Mat } \tilde{\mathbf{E}}_{4(\tilde{\mathbf{e}}_i)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{Mat } \tilde{\mathbf{E}}_{5(\tilde{\mathbf{e}}_i)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{Mat } \tilde{\mathbf{E}}_{6(\tilde{\mathbf{e}}_i)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{avec } \tilde{\mathbf{E}}_i &= \tilde{\mathbf{0}} \quad \forall i \text{ avec } i \in [1, 6] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Cette notation de Voigt modifiée est définie de sorte que le produit scalaire de $(\text{Col } \tilde{\mathbf{A}})^T$ par $\text{Col } \tilde{\mathbf{B}}$ coïncide avec la trace du produit contracté des deux tenseurs $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$, ou produit doublement contracté, soit :

$$\left(\text{Col } \tilde{\mathbf{A}}\right)^T \cdot \text{Col } \tilde{\mathbf{B}} = \text{Tr} \left(\tilde{\mathbf{A}} \circ \tilde{\mathbf{B}}^T \right) = \tilde{\mathbf{A}} : \tilde{\mathbf{B}} \quad (\text{B.6})$$

Avec ce produit scalaire dans \mathbf{S} , la base $\tilde{\mathbf{E}}_i$ est orthonormée. Nous pouvons également adopter une notation de Voigt Isotrope Déviatoire, qui permet comme son nom l'indique de distinguer les parties isotrope et déviatoire du tenseur symétrique considéré.

Pour cette notation de Voigt Isotrope Déviatoire, une base $(\tilde{\mathbf{f}}_i)$ de l'espace \mathbf{S} est définie par :

$$\begin{aligned} \text{Mat } \tilde{\mathbf{f}}_{1(\tilde{\mathbf{e}}_i)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{Mat } \tilde{\mathbf{f}}_{2(\tilde{\mathbf{e}}_i)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{Mat } \tilde{\mathbf{f}}_{3(\tilde{\mathbf{e}}_i)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{Mat } \tilde{\mathbf{f}}_{4(\tilde{\mathbf{e}}_i)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{Mat } \tilde{\mathbf{f}}_{5(\tilde{\mathbf{e}}_i)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{Mat } \tilde{\mathbf{f}}_{6(\tilde{\mathbf{e}}_i)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

La base $(\tilde{\mathbf{f}}_i)$ est orthonormée, en effet :

$$\forall i, j \in [1, 6], \text{Tr}(\tilde{\mathbf{f}}_i \circ \tilde{\mathbf{f}}_j^T) = \delta_{ij} \quad (\text{B.8})$$

Le sous-espace \mathbf{H} admet une base $(\tilde{\mathbf{k}})$ où $\tilde{\mathbf{k}} = \tilde{\mathbf{f}}_1$. Dans cette base, la composante $\text{Col}\left(\frac{1}{3}(\text{Tr } \tilde{\mathbf{A}})\tilde{\mathbf{I}}\right)_{(\tilde{\mathbf{k}})}$ de la partie sphérique de $\tilde{\mathbf{A}}$ se déduit des composantes de $\tilde{\mathbf{A}}$ dans la base $(\tilde{\mathbf{E}}_i)$ par la relation suivante :

$$\text{Col}\left(\frac{1}{3}(\text{Tr } \tilde{\mathbf{A}})\tilde{\mathbf{I}}\right)_{(\tilde{\mathbf{k}})} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ \sqrt{2}A_{12} \\ \sqrt{2}A_{13} \\ \sqrt{2}A_{23} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Une base orthonormée du sous-espace \mathbf{D} , notée $(\tilde{\mathbf{d}}_j)$, peut être définie par les cinq tenseurs unitaires $\tilde{\mathbf{d}}_j$ avec $j \in [1, 5]$, tels que :

$$\tilde{\mathbf{d}}_j = \tilde{\mathbf{f}}_{j+1} \text{ avec } j \in [1, 5] \quad (\text{B.10})$$

Ainsi, dans cette base, les composantes $\text{Col } \underline{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{a}}_j)$ de la partie déviatoire du tenseur $\underline{\tilde{\mathbf{A}}}$, notée $\underline{\tilde{\mathbf{A}}}$, se déduisent des composantes de $\underline{\tilde{\mathbf{A}}}$ dans la base $(\tilde{\mathbf{E}}_i)$ par la relation suivante :

$$\text{Col } \underline{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{a}}_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ \sqrt{2}A_{12} \\ \sqrt{2}A_{13} \\ \sqrt{2}A_{23} \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Ainsi, $\text{Col } \underline{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{a}}_j)$ représente les coordonnées d'un vecteur $\vec{\underline{\tilde{\mathbf{A}}}}$, dont la norme euclidienne est confondue avec le deuxième invariant du déviateur $\underline{\tilde{\mathbf{A}}}$, tel que :

$$\|\vec{\underline{\tilde{\mathbf{A}}}}\| = \sqrt{\text{Tr}(\underline{\tilde{\mathbf{A}}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{A}}}^T)} \quad (\text{B.12})$$

où $\|\vec{\underline{\tilde{\mathbf{A}}}}\|$ représente une distance ou rayon dans le sous-espace déviatoire \mathbf{D} .

Par conséquent, la relation B.11, appliquée à la partie déviatoire du tenseur de contrainte de Cauchy $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, conduit à un vecteur à cinq composantes $\vec{\underline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}}$ qui permet d'exprimer l'équation de la surface seuil de von Mises dans le sous-espace déviatoire \mathbf{D} , qui correspond à une hypersphère. Le rayon de cette surface seuil coïncide avec la norme euclidienne du vecteur à cinq composantes $\vec{\underline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}}$, telle que :

$$\begin{aligned} \|\vec{\underline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}}\| &= \sqrt{\text{Tr}(\underline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \circ \underline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^T)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

où σ_y représente la limite d'élasticité en traction simple.

Ainsi, le sous-espace \mathbf{D} correspond à un espace à cinq dimensions d'Ilyushin. Le choix d'une matrice de projection permettant de passer d'un espace à six dimensions à un espace à cinq dimensions, telle que celle proposée par l'équation B.11, n'est pas unique. En effet, la généralisation de la matrice de projection de la transformation classique d'Ilyushin, détaillée par [Meggiolaro *et al.* 2016], est telle que :

$$\text{Col } \underline{\tilde{\mathbf{A}}}_{(\tilde{\mathbf{d}}_j)} = k_s \begin{pmatrix} \cos \phi_s & \cos \left(\phi_s + \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\phi_s + \frac{4\pi}{3} \right) & 0 & 0 & 0 \\ \sin \phi_s & \sin \left(\phi_s + \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\phi_s + \frac{4\pi}{3} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ \sqrt{2}A_{12} \\ \sqrt{2}A_{13} \\ \sqrt{2}A_{23} \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

où k_s and ϕ_s sont deux paramètres permettant de définir une norme cohérente avec l'espace de dimension 6. Plus particulièrement, les choix définis par les relations B.11 et B.13 impliquent $k_s = \sqrt{\frac{2}{3}}$ et $\phi_s = 0$. Finalement, dans la base $(\tilde{\mathbf{f}}_i)$, les composantes $\text{Col } \underline{\tilde{\mathbf{A}}}_{(\tilde{\mathbf{f}}_i)}$ du tenseur $\tilde{\mathbf{A}}$ se déduisent des composantes de $\tilde{\mathbf{A}}$ dans la base $(\tilde{\mathbf{E}}_i)$ par la relation suivante :

$$\text{Col } \underline{\tilde{\mathbf{A}}}_{(\tilde{\mathbf{f}}_i)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ \sqrt{2}A_{12} \\ \sqrt{2}A_{13} \\ \sqrt{2}A_{23} \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Les déformations plastiques déviatoires du modèle doivent être stockées en mémoire vive lors d'un calcul de structure par éléments finis. Ces déformations exprimées dans la base $(\tilde{\mathbf{d}}_j)$ sont représentées par cinq composantes au lieu de six en notation de Voigt Modifiée. Ceci nous permet de réduire de $\frac{1}{6}$ l'espace mémoire occupé par ces variables internes du modèle.

Application du modèle SVG-HP 3D au cas de la traction simple

Dans le cas de la traction simple, on a :

$$\text{Mat } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{(\tilde{\boldsymbol{e}}_i)} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \text{Mat } \tilde{\boldsymbol{h}}_{(\tilde{\boldsymbol{e}}_i)} = \begin{pmatrix} h_a & 0 & 0 \\ 0 & h_t & 0 \\ 0 & 0 & h_t \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Soit :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \sigma \tilde{\boldsymbol{E}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{h}} &= h_a \tilde{\boldsymbol{E}}_1 + h_t (\tilde{\boldsymbol{E}}_2 + \tilde{\boldsymbol{E}}_3) \\ \tilde{\boldsymbol{I}} &= \sum_{i=1}^3 \tilde{\boldsymbol{E}}_i \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

où $(\tilde{\boldsymbol{E}}_i)$ est une base orthonormée de l'espace \mathbf{S} (annexe B), et :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{2}{3} \sigma \tilde{\boldsymbol{E}}_1 - \frac{1}{3} \sigma (\tilde{\boldsymbol{E}}_2 + \tilde{\boldsymbol{E}}_3) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma \tilde{\boldsymbol{f}}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{h}} &= (h_a - h_t) \left(\frac{2}{3} \tilde{\boldsymbol{E}}_1 - \frac{\tilde{\boldsymbol{E}}_2 + \tilde{\boldsymbol{E}}_3}{3} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} (h_a - h_t) \tilde{\boldsymbol{f}}_2 \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

où $(\tilde{\boldsymbol{f}}_i)$ est une base orthonormée de l'espace \mathbf{S} (annexe B). La partie déviatoire de l'expression 4.17 de la loi de comportement s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\tilde{\boldsymbol{h}}) = \sum_{k=1}^n 2G_k \tilde{\boldsymbol{h}}_k^e + 2G_\infty \tilde{\boldsymbol{h}} \quad (\text{C.4})$$

Dans le cas de la traction simple, le chargement est radial, ce qui implique :

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{h}}}{\|\tilde{\boldsymbol{h}}\|} = \frac{\tilde{\boldsymbol{h}}_k^e}{\|\tilde{\boldsymbol{h}}_k^e\|} = \frac{\tilde{\boldsymbol{h}}_k^p}{\|\tilde{\boldsymbol{h}}_k^p\|} \quad \forall k \in [1, n] \quad (\text{C.5})$$

où le symbole $\|\tilde{\mathbf{A}}\|$ exprime la norme du tenseur $\tilde{\mathbf{A}}$, définie par la relation B.13. Dans le cas d'une plastification totale du modèle, on a :

$$\|\tilde{\mathbf{h}}_k^e\| = e_k \quad \forall k \in [1, n] \quad (\text{C.6})$$

En considérant les relations C.3, C.5 et C.6, on a :

$$\sum_{k=1}^n 2G_k \tilde{\mathbf{h}}_k^e = \sum_{k=1}^n 2G_k e_k \tilde{\mathbf{f}}_2 = \sqrt{2} S_0 \tilde{\mathbf{f}}_2 \quad (\text{C.7})$$

où S_0 représente le seuil de plasticité en cisaillement. En remplaçant dans la relation C.4 et en considérant la partie isotrope de la loi 4.17, on a :

$$\sigma \tilde{\mathbf{E}}_1 = K (h_a + 2h_t) \sum_{i=1}^3 \tilde{\mathbf{E}}_i + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} G_\infty (h_a - h_t) \tilde{\mathbf{f}}_2 + \sqrt{2} S_0 \tilde{\mathbf{f}}_2 \quad (\text{C.8})$$

En exploitant la deuxième équation scalaire dans C.8, on peut écrire :

$$\sqrt{3} S_0 = h_a (3K - 2G_\infty) + h_t (6K + 2G_\infty) \quad (\text{C.9})$$

Sachant que $\frac{d(\sqrt{3}S_0)}{dh_a} = 0$, on en déduit l'expression du coefficient de contraction sur le plateau de plasticité, noté ν_∞ , quand h_a tend vers l'infini, soit :

$$\frac{dh_t}{dh_a} = -\nu_\infty = -\frac{3K - 2G_\infty}{6K + 2G_\infty} \quad (\text{C.10})$$

$$h_t = \frac{\sqrt{3}S_0}{6K + 2G_\infty} - \nu_\infty h_a \quad (\text{C.11})$$

En éliminant h_t avec les relations C.10 et C.11 dans la relation C.8, on obtient :

$$\sigma = \sqrt{3}S_0 \frac{6K}{6K + 2G_\infty} + \left(2G_\infty \frac{9K}{6K + 2G_\infty} \right) h_a \quad (\text{C.12})$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma = Y_0 + E_\infty h_a \quad (\text{C.13})$$

Avec :

$$E_\infty = 2G_\infty \frac{9K}{6K + 2G_\infty} \quad (\text{C.14})$$

$$Y_0 = \sqrt{3}S_0 \frac{6K}{6K + 2G_\infty} \quad (\text{C.15})$$

Rotation de Jaumann en cisaillement simple

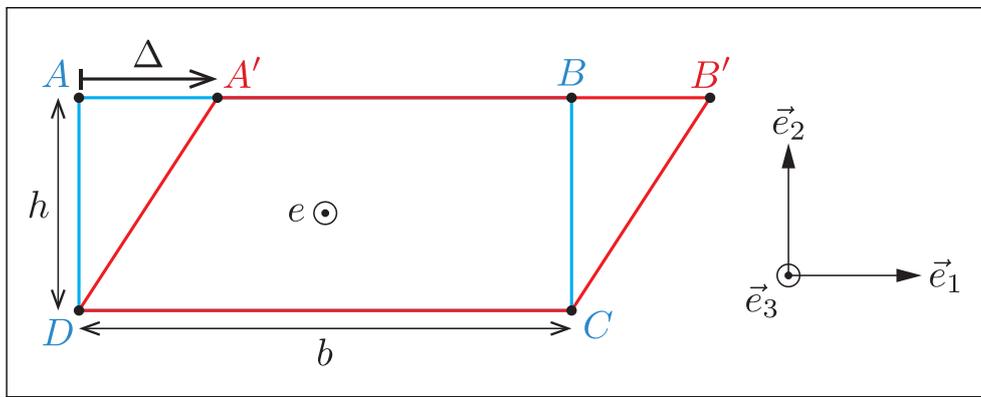


Fig. D.1 – Transformation de cisaillement simple : la configuration de référence Ω_0 est en bleu et celle actuelle Ω_t est en rouge. La base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormée. Les dimensions dans la configuration de référence sont la largeur b , la hauteur h et l'épaisseur e . Un paramètre γ est défini comme la ratio de Δ sur h ; $\gamma = \frac{\Delta}{h}$. Sur le schéma γ est positif.

Nous nous plaçons dans le cas d'une transformation de cisaillement ou glissement simple comme décrit à la figure D.1 dans un référentiel d'observation appelé b . Une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est choisie fixe dans le référentiel b .

La finalité du propos est de démontrer que la rotation de Jaumann α_j dans ce cas est, fonction du paramètre γ selon :

$$\alpha_j = -\frac{\gamma}{2} \quad (\text{D.1})$$

à condition qu'à un instant nous ayons

$$\alpha_j = \gamma = 0 . \quad (\text{D.2})$$

La rotation de Jaumann est définie par

$$\vec{j}_i = \tilde{\mathbf{R}}^{bj} \triangleright \vec{e}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{D.3})$$

où $(\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$ est une base entraînée par la rotation de Jaumann et égale à $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, à l'instant où γ est nul.

Nous choisissons de chercher la solution de cette rotation de Jaumann de la forme suivante

$$\text{Mat } \tilde{\mathbf{R}}^{bj}_{(\vec{e}_i)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j & 0 \\ \sin \alpha_j & \cos \alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Choix de trois vecteurs libres Nous choisissons trois vecteurs matériels libres dans la configuration de référence Ω_0 pour lesquels il est simple de déduire de la transformation comment ils sont entraînés par cette transformation de cisaillement simple. Ces vecteurs représentent ce que certains appellent des fibres de matières. Il est admis que cette transformation conduit à un champ de déformation homogène. Ainsi, il n'est pas nécessaire de choisir des vecteurs matériels infinitésimaux. Notre choix est le suivant

- $\overrightarrow{\Delta x_0} = \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{\Delta y_0} = \overrightarrow{DA}$
- $\overrightarrow{\Delta z_0} = e.\vec{e}_3$.

Transformation des trois vecteurs libres D'après la transformation, ces vecteurs ou fibres matérielles sont transformées en les vecteurs suivants, respectivement

- $\overrightarrow{\Delta x_t} = \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{\Delta y_t} = \overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA'}$
- $\overrightarrow{\Delta z_t} = e.\vec{e}_3$.

Gradient de la transformation Le gradient de la transformation $\tilde{\mathbf{F}}$ peut être défini ainsi

$$\vec{dx}_t = \tilde{\mathbf{F}} \triangleright \vec{dx}_0 \quad (\text{D.5})$$

pour toute fibre de matière infinitésimale \vec{dx} . Ainsi, appliquons cette définition aux trois vecteurs matériels choisis

$$\overrightarrow{\Delta x_t} = \tilde{\mathbf{F}} \triangleright \overrightarrow{\Delta x_0} \quad (\text{D.6})$$

$$\overrightarrow{\Delta y_t} = \tilde{\mathbf{F}} \triangleright \overrightarrow{\Delta y_0} \quad (\text{D.7})$$

$$\overrightarrow{\Delta z_t} = \tilde{\mathbf{F}} \triangleright \overrightarrow{\Delta z_0} \quad (\text{D.8})$$

ce qui donne

$$\overrightarrow{DC} = \tilde{\mathbf{F}} \triangleright \overrightarrow{DC} \quad (\text{D.9})$$

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA'} = \tilde{\mathbf{F}} \triangleright \overrightarrow{DA} \quad (\text{D.10})$$

$$e.\vec{e}_3 = \tilde{\mathbf{F}} \triangleright e.\vec{e}_3 \quad (\text{D.11})$$

Ces trois équations vectorielles constituent un système linéaire à 9 équations et 9 inconnues, qui sont les composantes du tenseur $\tilde{\mathbf{F}}$. Après résolution de ce système nous obtenons

$$\text{Mat } \tilde{\mathbf{F}}_{(\tilde{\mathbf{e}}_i)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta}{h} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

Gradient eulérien des vitesses La dérivée par rapport au temps du gradient de la transformation va alors être

$$\text{Mat } \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{(\tilde{\mathbf{e}}_i)} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.13})$$

tandis que son inverse sera

$$\text{Mat } \tilde{\mathbf{F}}^{-1}_{(\tilde{\mathbf{e}}_i)} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.14})$$

Le tenseur gradient eulérien des vitesses $\tilde{\mathbf{L}}$ peut être calculée ainsi

$$\tilde{\mathbf{L}} = \dot{\tilde{\mathbf{F}}} \circ \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \quad (\text{D.15})$$

Ainsi, sa matrice est

$$\text{Mat } \tilde{\mathbf{L}}_{(\tilde{\mathbf{e}}_i)} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.16})$$

Taux de rotation Le taux de rotation $\tilde{\mathbf{W}}$ peut être défini ainsi

$$\tilde{\mathbf{W}} = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{L}} - \tilde{\mathbf{L}}^T) \quad (\text{D.17})$$

Ainsi, sa matrice est

$$\text{Mat } \tilde{\mathbf{W}}_{(\tilde{\mathbf{e}}_i)} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.18})$$

Vitesse de rotation de Jaumann La dérivée par rapport au temps de la rotation de Jaumann est

$$\text{Mat } \dot{\tilde{\mathbf{R}}}^{bj}_{(\tilde{\mathbf{e}}_i)} = \dot{\alpha}_j \begin{pmatrix} -\sin \alpha_j & -\cos \alpha_j & 0 \\ \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.19})$$

La vitesse de rotation de Jaumann $\tilde{\Omega}^{bj}$ peut être définie ainsi

$$\tilde{\Omega}^{bj} = \dot{\tilde{\mathbf{R}}}^{bj} \circ \tilde{\mathbf{R}}^{bjT} \quad (\text{D.20})$$

Ainsi, sa matrice est

$$\text{Mat } \tilde{\Omega}^{bj}_{(\tilde{e}_i)} = \dot{\alpha}_j \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.21})$$

Définition de la vitesse de rotation de Jaumann La vitesse de rotation de Jaumann est définie comme étant égale à tout instant au taux de rotation

$$\forall t \quad \tilde{\Omega}^{bj} = \tilde{\mathbf{W}} \quad (\text{D.22})$$

Ainsi cela nous amène à l'équation suivante

$$\forall t \quad (-\dot{\alpha}_j) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.23})$$

$$\iff \forall t \quad \left(\dot{\alpha}_j + \frac{\dot{\gamma}}{2} \right) = 0 \quad (\text{D.24})$$

$$\iff \forall t \quad \left(\alpha_j + \frac{\gamma}{2} \right) = \theta_0 \quad (\text{D.25})$$

$$\iff \forall t \quad \left(\alpha_j + \frac{\gamma}{2} \right) = \theta_0 \quad (\text{D.26})$$

où θ_0 est une constante au cours du temps. Or, par hypothèse, il existe un instant tel que

$$\alpha_j = \gamma = 0 \quad (\text{D.27})$$

donc

$$\theta_0 = 0 \quad (\text{D.28})$$

et ainsi

$$\forall t \quad \alpha_j = -\frac{\gamma}{2} \quad (\text{D.29})$$

Contrainte conjuguée à la déformation logarithmique

Soit p_i la puissance des efforts intérieurs par unité de volume de référence :

$$p_i = -J \operatorname{Tr} \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \circ \tilde{\boldsymbol{D}} \right) \quad (\text{E.1})$$

Ainsi, la puissance des efforts intérieurs d'un corps \mathcal{B} est :

$$\mathcal{P}_i = \iiint_{\mathcal{B}_0} p_i(M) dV_0 \quad (\text{E.2})$$

où \mathcal{B}_0 est le domaine dans la configuration de référence du corps.

Soit $\tilde{\boldsymbol{\tau}}^*$ la contrainte eulérienne conjuguée à la déformation logarithmique $\tilde{\boldsymbol{h}}$ selon la dérivée de Jaumann. Nous appellerons ce tenseur, la **contrainte conjuguée Jaumann-Hencky gauche**. Elle est définie par :

$$\operatorname{Tr} \left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \circ \overset{\circ j}{\tilde{\boldsymbol{h}}} \right) = -p_i \quad (\text{E.3})$$

pour tout état mécanique et toute vitesse d'évolution de cet état.

D'après la relation 4.7, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \circ \overset{\circ j}{\tilde{\boldsymbol{h}}} \right) &= \operatorname{Tr} \left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \circ \left(\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{(\tilde{\boldsymbol{v}})} \triangleright \tilde{\boldsymbol{D}} \right) \right) \\ &= \operatorname{Tr} \left(\tilde{\boldsymbol{D}} \circ \left(\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{(\tilde{\boldsymbol{v}})}^T \triangleright \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \right) \right) \\ &= \operatorname{Tr} \left(\tilde{\boldsymbol{D}} \circ \left(\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{(\tilde{\boldsymbol{v}})} \triangleright \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \right) \right) \\ &= \operatorname{Tr} \left(\left(\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{(\tilde{\boldsymbol{v}})} \triangleright \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \right) \circ \tilde{\boldsymbol{D}} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Donc

$$\forall \tilde{\boldsymbol{D}} \text{ symétrique, } \operatorname{Tr} \left(\left(\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{(\tilde{\boldsymbol{v}})} \triangleright \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \right) \circ \tilde{\boldsymbol{D}} \right) = -p_i = J \operatorname{Tr} \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \circ \tilde{\boldsymbol{D}} \right)$$

Donc

$$\operatorname{Tr} \left(\left(\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{(\tilde{\boldsymbol{v}})} \triangleright \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* - J \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right) \circ \tilde{\boldsymbol{D}} \right) = 0 \quad \forall \tilde{\boldsymbol{D}} \text{ symétrique}$$

Donc le tenseur d'ordre deux $(\tilde{\delta}_{(\tilde{\mathbf{v}})} \triangleright \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* - J\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ est antisymétrique. Or ce tenseur est aussi symétrique, donc il est nécessairement nul. D'où la définition de la contrainte conjuguée Jaumann-Hencky gauche :

$$\tilde{\delta}_{(\tilde{\mathbf{v}})} \triangleright \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* = J\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \iff \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* = J\tilde{\delta}_{(\tilde{\mathbf{v}})}^{-1} \triangleright \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{E.5})$$

[Eterovic & Bathe 1990, Perić *et al.* 1992, Xiao *et al.* 2000, Miehe *et al.* 2002, Itskov 2004, Shutov & Ihlemann 2014] définissent $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ une contrainte conjuguée à la déformation lagrangienne logarithmique $\tilde{\mathbf{H}} = \ln \tilde{\mathbf{U}}$ ainsi :

$$\text{Tr} \left(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \circ \dot{\tilde{\mathbf{H}}} \right) = -p_i \quad (\text{E.6})$$

Or

$$\tilde{\mathbf{R}} \circ \dot{\tilde{\mathbf{H}}} \circ \tilde{\mathbf{R}}^T = \overset{orp}{\tilde{\mathbf{h}}} \quad (\text{E.7})$$

où $\tilde{\mathbf{R}}$ est la rotation propre et $\overset{orp}{\cdot}$ la dérivée objective corotationnelle de Green-Naghdi. Ainsi,

$$\text{Tr} \left(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \circ \dot{\tilde{\mathbf{H}}} \right) = \text{Tr} \left(\tilde{\mathbf{R}} \circ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \circ \tilde{\mathbf{R}}^T \circ \tilde{\mathbf{R}} \circ \dot{\tilde{\mathbf{H}}} \circ \tilde{\mathbf{R}}^T \right) = \text{Tr} \left(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}' \circ \overset{orp}{\tilde{\mathbf{h}}} \right) \quad (\text{E.8})$$

où $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}' = (\tilde{\mathbf{R}} \circ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \circ \tilde{\mathbf{R}}^T)$ est alors la contrainte eulérienne conjuguée à la déformation logarithmique $\tilde{\mathbf{h}}$ selon la dérivée de Green-Naghdi, que nous appellerons contrainte conjuguée Green-Naghdi-Hencky gauche.

Ils aboutissent à la relation suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}' = J\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{(\tilde{\mathbf{v}})}^{-1} \triangleright \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{E.9})$$

où $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{(\tilde{\mathbf{v}})}$ satisfait la relation [Hoger 1986] :

$$\overset{orp}{\tilde{\mathbf{h}}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{(\tilde{\mathbf{v}})} \triangleright \tilde{\mathbf{D}} \quad (\text{E.10})$$

Ainsi, les relations 4.7 et E.10 sont analogues ; La première exprime la relation entre le taux de déformation $\tilde{\mathbf{D}}$ et la dérivée de Jaumann de la déformation logarithmique $\tilde{\mathbf{h}}$, tandis que la seconde exprime la relation entre ce taux $\tilde{\mathbf{D}}$ et la dérivée de Green-Naghdi de cette déformation $\tilde{\mathbf{h}}$. Les tenseurs de contrainte eulériens conjugués respectifs, notés $\tilde{\boldsymbol{\tau}}^*$ et $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}'$, sont alors définis par les relations E.5 et E.9.

Bibliographie

- [ABAQUS 2013] ABAQUS. *Abaqus 6.13 Documentation*. Dassault Systèmes, Providence, RI, USA, 2013. (Cité en page 87.)
- [Abdel-Karim & Khan 2010] M. Abdel-Karim et A. S. Khan. *Cyclic multiaxial and shear finite deformation response of OFHC Cu : Part II, An extension to the KHL model and simulations*. International Journal of Plasticity, vol. 26, pages 758–773, 2010. (Cité en page 33.)
- [Bathias & Baïlon 1980] C. Bathias et J. P. Baïlon. La fatigue des matériaux et des structures. Hermès, 2 édition, 1980. (Cité en page 191.)
- [Bendarma *et al.* 2017] A. Bendarma, T. Jankowiak, T. Lodygowski, A. Rusinek et M. Klosak. *Experimental and numerical analysis of aluminum alloy AW5005 behavior subjected to tension and perforation under dynamic loading*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, vol. 55, no. 4, pages 1219–1233, 2017. (Cité en page 24.)
- [Biner 2001] S. B. Biner. *Fatigue crack growth studies under mixed-mode loading*. International Journal of Fatigue, vol. 23, no. S259-S263, 2001. (Cité en page 196.)
- [Blès *et al.* 2000] G. Blès, S. P. Gadaj, P. Guélin, W. K. Nowacki et A. Tourabi. *Thermo-mechanics of viscoplastic large strains of solid polymers*. Archives of Mechanics, vol. 52, no. 3, pages 397–427, 2000. (Cité en pages 6 et 186.)
- [Blès *et al.* 2002] G. Blès, S. P. Gadaj, W. K. Nowacki et A. Tourabi. *Experimental study of a PA66 solid polymer in the case of shear cyclic loading*. Archives of Mechanics, vol. 54, no. 2, pages 155–174, 2002. (Cité en page 6.)
- [Blès *et al.* 2009] G. Blès, W. K. Nowacki et A. Tourabi. *Experimental study of the cyclic visco-elasto-plastic behavior of a nylon fiber strap*. International Journal of Solids and Structures, vol. 46, no. 13, pages 2693–2705, 2009. (Cité en page 6.)
- [Blès 2002] G. Blès. *Bases thermomécaniques de la modélisation du comportement des matériaux tissés et des polymères solides*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2002. (Cité en pages 16, 42 et 133.)
- [Borvik *et al.* 2001] T. Borvik, O.S. Hopperstad, T. Berstad et M. Langseth. *A computational model of viscoplasticity and ductile damage for impact and penetration*. Eur. J. Mech. A/Solids, vol. 20, pages 685–712, 2001. (Cité en page 8.)

- [Brokate *et al.* 1996] M. Brokate, K. Dressler et P. Krejci. *On the Mróz model*. European Journal of Applied Mathematics, vol. 7, no. 5, pages 473–497, 1996. (Cité en pages 7, 22 et 134.)
- [Brokate *et al.* 1998] M. Brokate, P. Krejci et D. Rachinskii. *Some analytical properties of the multidimensional continuous Mróz model of plasticity*. Control and Cybernetics, vol. 27, no. 2, pages 199–215, 1998. (Cité en page 22.)
- [Brown *et al.* 2003] A. A. Brown, J. Casey et D. J. Nikkel. *Experiments conducted in the context of the strain-space formulation of plasticity*. International Journal of Plasticity, vol. 19, pages 1965–2005, 2003. (Cité en pages 24 et 66.)
- [Calloch & Marquis 1999] S. Calloch et D. Marquis. *Triaxial tension-compression tests for multiaxial cyclic plasticity*. International Journal of Plasticity, vol. 15, pages 521–549, 1999. (Cité en page 76.)
- [Calloch 1997] S. Calloch. *Essais triaxiaux non-proportionnels et ingénierie des modèles de plasticité cyclique*. PhD thesis, Ecole normale supérieure de Cachan, 1997. (Cité en pages 25, 27, 28, 29, 30 et 98.)
- [Casey & Naghdi 1983] J. Casey et P. M. Naghdi. *On the nonequivalence of the stress space and strain space formulations of plasticity theories*. Journal of Applied Mechanics, vol. 50, no. 2, pages 350–354, 1983. (Cité en page 24.)
- [Chaboche 2008] J. L. Chaboche. *A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories*. International Journal of Plasticity, vol. 24, pages 1642–1693, 2008. (Cité en page 19.)
- [Coirier & Nadot-Martin 2013] Jean Coirier et Carole Nadot-Martin. *Mécanique des milieux continus*. Dunod, 2013. (Cité en page 172.)
- [Curnier 2005] A. Curnier. *Mécanique des solides déformables*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1 édition, 2005. (Cité en page 67.)
- [Dafalias & Popov 1975] Y. F. Dafalias et E. P. Popov. *A model of nonlinearly hardening materials for complex loading*. Acta Mechanica, vol. 21, pages 173–192, 1975. (Cité en page 20.)
- [Del Piero 2018] Gianpietro Del Piero. *On the Decomposition of the Deformation Gradient in Plasticity*. Journal of Elasticity, vol. 131, no. 1, pages 111–124, 2018. (Cité en page 37.)
- [Delobelle *et al.* 1995] P. Delobelle, P. Robinet et L. Bocher. *Experimental study and phenomenological modelization of ratchet under uniaxial and biaxial loading of an*

- austenitic stainless steel*. International Journal of Plasticity, vol. 11, no. 4, pages 295–330, 1995. (Cité en page 7.)
- [Dib *et al.* 2018] W. Dib, G. Blès, A. Blaise et A. Tourabi. *Modelling of cyclic visco-elasto-plastic behaviour of coated woven fabrics under biaxial loading and finite strain*. International Journal of Solids and Structures, pages 147–167, 2018. (Cité en page 6.)
- [Drucker 1988] D. C. Drucker. *Conventional and unconventional plastic response and representation*. Applied Mechanics Reviews, vol. 41, no. 4, pages 151–167, 1988. (Cité en page 24.)
- [Eterovic & Bathe 1990] A. Eterovic et K. Bathe. *A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measure*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 30, pages 1099–1114, 1990. (Cité en pages 37 et 244.)
- [Farahat *et al.* 1995] A. M. Farahat, M. Kawakami et M. Ohtsu. *Strain-space plasticity model for the compressive hardening-softening behaviour of concrete*. Construction and Building Materials, vol. 9, no. 1, pages 45–49, 1995. (Cité en pages 24 et 66.)
- [Favier *et al.* 1988] D. Favier, P. Guélin, A. Tourabi, B. Wack et P. Pegon. *Ecrouissages - schémas thermomécaniques et à variables internes : Méthode de définition utilisant le concept d'hystérésis pure*. Archives of Mechanics, vol. 40, no. 5-6, pages 611–640, 1988. (Cité en pages 5 et 6.)
- [Fouché-Sanseigne & Bracq 2011] L. Fouché-Sanseigne et P. O. Bracq. *Fatigue validation process for a helicopter-mounted turret*. In Fatigue Design, 2011. (Cité en page 208.)
- [Foux 1962] A. Foux. *An experimental investigation of the Poynting effect*. Proceedings of the International Symposium on Second-order Effects in Plasticity, Elasticity and Fluid Dynamics, pages 228–251, 1962. (Cité en pages 31 et 32.)
- [Freudenthal & Gou 1969] A. M. Freudenthal et P. F. Gou. *Second order effects in the theory of plasticity*. Acta Mechanica, vol. 8, pages 34–52, 1969. (Cité en page 32.)
- [Garud 1981] Y. S. Garud. *A New Approach to the Evaluation of Fatigue Under Multiaxial Loadings*. Journal of Engineering Materials and Technology, vol. 103, no. 2, pages 118–125, April 1981. (Cité en page 22.)
- [Germain 1973] P. Germain. Cours de mécanique des milieux continus, volume Tome 1. Masson et Cie, 1973. (Cité en pages 172 et 173.)

- [Green & Naghdi 1965] A. E. Green et P. M. Naghdi. *A general theory of an elastic-plastic continuum*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 18, no. 4, pages 251–281, 1965. (Cité en pages 36 et 37.)
- [Green & Naghdi 1968] A. E. Green et P. M. Naghdi. *A Thermodynamic Development of Elastic-Plastic Continua*. In H. Parkus et L. I. Sedov, éditeurs, Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids, pages 117–131, Vienna, 1968. Springer Vienna. (Cité en page 36.)
- [Guélin & Nowacki 2000] P. Guélin et K. Nowacki W. *From rate independent to rate dependent constitutive behaviours for wave motions studies*. J. Phys. IV France, vol. 10, no. PR9, pages Pr9–9–Pr9–14, 2000. (Cité en page 6.)
- [Guélin *et al.* 1985] P. Guélin, W. K. Nowacki et P. Pégon. *Etude des schémas thermo-mécaniques à mémoire discrète : Bases physiques et formalisme du schéma d'hystérésis pure*. Archives of Mechanics, vol. 37, no. 4-5, pages 343–363, 1985. (Cité en page 6.)
- [Guélin *et al.* 1997] P. Guélin, A. Tourabi et V. Pop. *A discrete memory phenomenological pattern of hysteresis with applications to plasticity, shape memory and demagnetisation*. Balkan Physics Letters, vol. 5, page 1235, 1997. (Cité en pages 6 et 133.)
- [Guélin *et al.* 1999] P. Guélin, W. K. Nowacki, D. Quereyron et A. Tourabi. *Ratcheting and constitutive patterns of rate-form defined in preferred reference frames*. Archives of Mechanics, vol. 51, no. 3-4, pages 357–390, 1999. (Cité en pages 6 et 7.)
- [Guélin 1980] P. Guélin. *Remarques sur l'hystérésis mécanique : les bases d'un schéma thermo-mécanique à structure héréditaire*. Journal de Mécanique, vol. 19, no. 2, pages 217–247, 1980. (Cité en pages 5, 133 et 186.)
- [Han & Chen 1986] D. J. Han et W. F. Chen. *Strain-space plasticity formulation for hardening-softening materials with elastoplastic coupling*. International Journal of Solids and Structures, vol. 22, no. 8, pages 935–950, 1986. (Cité en pages 24 et 66.)
- [Han 1985] S. Han. *Le comportement d'hystérésis des solides et sa description par un schéma à mémoire discrète : le cas des aciers inoxydables*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1985. (Cité en pages 31 et 33.)
- [Hashiguchi 2014] K. Hashiguchi. *Elastoplasticity theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 édition, 2014. (Cité en page 19.)
- [Heiduschke 1995] K. Heiduschke. *The logarithmic strain space description*. International Journal of Solids and Structures, vol. 32, no. 8/9, pages 1047–1062, 1995. (Cité en pages 24 et 66.)

- [Hénaff & Morel 2005] G. Hénaff et F. Morel. *Fatigue des structures*. Ellipses, 2005. (Cité en page 191.)
- [Hoger 1986] A. Hoger. *The material time derivative of logarithmic strain*. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 22, no. 9, pages 1019–1032, 1986. (Cité en page 244.)
- [Horak & Jirasek 2013] Martin Horak et Milan Jirasek. *An extension of small-strain models to the large-strain range based on an additive decomposition of a logarithmic strain*. In *Programs and Algorithms of Numerical Mathematics*, pages 88–93, Prague, 2013. Institute of Mathematics AS CR. (Cité en page 37.)
- [Iliushin 1961] A. A. Iliushin. *On the postulate of plasticity*. *PMM*, vol. 25, no. 3, pages 503–507, 1961. (Cité en page 24.)
- [Itskov 2004] Mikhail Itskov. *On the application of the additive decomposition of generalized strain measures in large strain plasticity*. *Mechanics Research Communications*, vol. 31, no. 5, pages 507–517, 2004. (Cité en page 244.)
- [Iwan & Yoder 1983] W. D. Iwan et P. J. Yoder. *Computational aspects of strain-space plasticity*. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 109, no. 1, pages 231–243, 1983. (Cité en page 24.)
- [Iwan 1966] W. D. Iwan. *A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response*. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 33, no. 4, pages 893–900, 1966. (Cité en page 22.)
- [Iwan 1967] W. D. Iwan. *On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems*. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 34, no. 3, pages 612–617, 1967. (Cité en page 23.)
- [Jiang & Kurath 1996] Y. Jiang et P. Kurath. *Characteristics of the Armstrong-Frederick type plasticity models*. *International Journal of Plasticity*, vol. 12, no. 3, pages 387–415, 1996. (Cité en page 19.)
- [Jiang & Sehitoglu 1996] Y. Jiang et H. Sehitoglu. *Comments on the Mróz multiple surface type plasticity models*. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, no. 7, pages 1053–1068, 1996. (Cité en page 22.)
- [Jiao & Fish 2017] Yang Jiao et Jacob Fish. *Is an additive decomposition of a rate of deformation and objective stress rates passé?* *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 327, pages 196–225, 2017. (Cité en page 61.)

- [Keller & Trusov 1999] E. Keller et P.V. Trusov. *Model for plasticity effects in metals under nonproportional cyclic loading*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, vol. 40, no. 6, pages 1126–1132, 1999. (Cité en page 76.)
- [Khan *et al.* 2007] A. S. Khan, X. Chen et M. Abdel-Karim. *Cyclic multiaxial and shear finite deformation response of OFHC : Part I, experimental results*. International Journal of Plasticity, vol. 23, pages 1285–1306, 2007. (Cité en pages 7, 32 et 35.)
- [Khoei & Jamali 2005] A. R. Khoei et N. Jamali. *On the implementation of a multi-surface kinematic hardening plasticity and its applications*. International Journal of Plasticity, vol. 21, pages 1741–1770, 2005. (Cité en page 20.)
- [Kolymbas & Viggiani 2009] D. Kolymbas et G. Viggiani, éditeurs. *Mechanics of natural solids*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. (Cité en page 23.)
- [Krieg 1975] R. D. Krieg. *A practical two surface plasticity theory*. Journal of Applied Mechanics, vol. 42, no. 3, pages 641–646, 1975. (Cité en page 20.)
- [Kuroda 1999] M. Kuroda. *Interpretation of the behavior of metals under large plastic shear deformations : comparison of macroscopic predictions to physically based predictions*. International Journal of Plasticity, vol. 15, pages 1217–1236, 1999. (Cité en page 7.)
- [Laurent *et al.* 2011] H. Laurent, A. Vandenbroucke, G. Rio et N. Aït Hocine. *A simplified methodology to identify material parameters of a hyperelasto-visco-hysteresis model : application to a fluoro-elastomer*. Modelling and Simul. Mater. Sci. Eng., vol. 19, no. 8, 2011. (Cité en page 6.)
- [Lee & Liu 1968] E. H. Lee et D. T. Liu. *Finite Strain Elastic-Plastic Theory*. In H. Parkus et L. I. Sedov, éditeurs, *Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids*, pages 213–222, Vienna, 1968. Springer Vienna. (Cité en page 36.)
- [Lee 1968] E. H. Lee. *Elastic-plastic deformation at finite strains, Technical Report No. 183, Contract Report No 10*. Division of Engineering Mechanics Stanford University, 1968. (Cité en page 36.)
- [Lee 1969] E. H. Lee. *Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains*. Journal of Applied Mechanics, vol. 36, no. 1, pages 1–6, 1969. (Cité en page 36.)
- [Lee 1995] J. H. Lee. *Advantages of strain-space formulation in computational plasticity*. Computers and Structures, vol. 54, no. 3, pages 515–520, 1995. (Cité en pages 24 et 66.)

- [Lemaitre & Chaboche 1985] Jean Lemaitre et Jean-Louis Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1985. (Cité en page 173.)
- [Lemaitre *et al.* 2009] Jean Lemaitre, Jean-Louis Chaboche, A. Benallal et R. Desmorat. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 3 édition, 2009. (Cité en pages 12 et 19.)
- [Lu & Vaziri 1997] P. F. Lu et R. Vaziri. *The equivalence of stress- and strain-based plasticity theories*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 147, pages 125–138, 1997. (Cité en page 24.)
- [Lubarda 1994] V. A. Lubarda. *Elastoplastic constitutive analysis with the yield surface in strain space*. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 42, no. 6, pages 931–952, 1994. (Cité en page 24.)
- [Majors & Krempl 1994] P. Majors et E. Krempl. *Comments on induced anisotropy, the Swift effect, and finite deformation inelasticity*. *Mechanics Research Communications*, vol. 21, no. 5, pages 465–472, 1994. (Cité en pages 7, 31 et 33.)
- [Manach *et al.* 1996] P. Y. Manach, D. Favier et G. Rio. *Finite element simulations of internal stresses generated during the pseudoelastic deformation of NiTi bodies*. *Journal de Physique*, vol. 06, no. C1, pages 235–244, 1996. (Cité en page 6.)
- [Masing 1926] G. Masing. *Eigenspannungen und verfestigung beim messing (Self stretching and hardening for brass)*. In *Proceedings of the Second International Congress for Applied Mechanics*, pages 332–335, Zurich, Suisse, 1926. (Cité en page 13.)
- [Meggiolaro *et al.* 2016] M.A. Meggiolaro, J.T. Pinho de Castro et H. Wu. *A general class of non-linear kinematic models to predict mean stress relaxation and multiaxial ratcheting in fatigue problems - Part I : Ilyushin spaces*. *International Journal of Fatigue*, vol. 82, pages 158–166, 2016. (Cité en page 234.)
- [Miehe *et al.* 2002] C. Miehe, N. Apel et M. Lambrecht. *Anisotropic additive plasticity in the logarithmic strain space : modular kinematic formulation and implementation based on incremental minimization principles for standard materials*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, no. 47, pages 5383–5425, 2002. (Cité en pages 37, 38, 39, 62 et 244.)
- [Montans & Caminero 2007] F. J. Montans et M. A. Caminero. *On the consistency of nested surfaces models and their kinematic hardening rules*. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, pages 5027–5042, 2007. (Cité en pages 7 et 20.)
- [Montans 2001] F. J. Montans. *Implicit multilayer J2-plasticity using Prager's translation rule*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, pages 347–375, 2001. (Cité en page 20.)

- [Mróz 1967] Z. Mróz. *On the description of anisotropic workhardening*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 15, pages 163–175, 1967. (Cité en pages 7, 20, 23, 133 et 134.)
- [Naderi & Khonsari 2010a] M. Naderi et M. M. Khonsari. *An experimental approach to low-cycle fatigue damage based on thermodynamic entropy*. International Journal of Solids and Structures, vol. 47, pages 875–880, 2010. (Cité en page 204.)
- [Naderi & Khonsari 2010b] M. Naderi et M. M. Khonsari. *A thermodynamic approach to fatigue damage accumulation under variable loading*. Material Science and Engineering A, vol. 527, pages 6133–6139, 2010. (Cité en pages 195 et 204.)
- [Naderi et al. 2010] M. Naderi, M. Amiri et M. M. Khonsari. *On the thermodynamic entropy of fatigue fracture*. Proceedings of the Royal Society A, vol. 466, pages 423–438, 2010. (Cité en pages 190 et 192.)
- [Naghdi & Trapp 1975] P. M. Naghdi et J. A. Trapp. *The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surfaces in strain space*. International Journal of Engineering Science, vol. 13, pages 785–797, 1975. (Cité en pages 24 et 66.)
- [Naghdi 1990] P. M. Naghdi. *A critical review of the state of finite plasticity*. Journal of Applied Mathematics and Physics, vol. 41, pages 315–394, 1990. (Cité en pages 36 et 37.)
- [Navarro & Brown 1997] A. Navarro et M. W. Brown. *A constitutive model for elastic-plastic deformation under cyclic multiaxial straining*. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, vol. 20, no. 5, pages 747–758, 1997. (Cité en page 20.)
- [Nemat-Nasser 1979] S. Nemat-Nasser. *Decomposition of strain measures and their rates in finite deformation elastoplasticity*. International Journal of Solids and Structures, vol. 15, no. 2, pages 155–166, 1979. (Cité en page 37.)
- [Nemat-Nasser 1982] S. Nemat-Nasser. *On finite deformation elasto-plasticity*. International Journal of Solids and Structures, vol. 18, no. 10, pages 857–872, 1982. (Cité en page 37.)
- [Panicaud & Rouhaud 2014] B. Panicaud et E. Rouhaud. *A frame-indifferent model for a thermo-elastic material beyond the three-dimensional Eulerian and Lagrangian descriptions*. Continuum Mech. Thermodyn., vol. 26, pages 79–93, 2014. (Cité en page 61.)

- [Papadopoulos & Lu 1998] Panayiotis Papadopoulos et Jia Lu. *A general framework for the numerical solution of problems in finite elasto-plasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 159, no. 1, pages 1–18, 1998. (Cité en page 37.)
- [Pégon & Guélin 1987] P. Pégon et P. Guélin. *On thermomechanical Zaremba schemes of hysteresis*. Res. Mech. Letters, pages 21–34, 1987. (Cité en page 6.)
- [Pégon *et al.* 1991] P. Pégon, P. Guélin, D. Favier, B. Wack et W. K. Nowacki. *Constitutive scheme of discrete memory form for granular materials*. Archives of Mechanics, vol. 43, no. 1, pages 3–27, 1991. (Cité en page 6.)
- [Pegon 1988] P. Pegon. *Contribution à l'étude de l'hystérésis élastoplastique*. PhD thesis, Université Joseph Fourier et INPG, 1988. (Cité en page 133.)
- [Perić *et al.* 1992] Djordje Perić, D. R. J. Owen et M. E. Honnor. *A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains : Computational issues*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 94, no. 1, pages 35–61, 1992. (Cité en pages 37 et 244.)
- [Persoz 1960] B. Persoz. *Introduction à l'étude de la rhéologie*. Dunod, 1960. (Cité en pages 5, 12 et 42.)
- [Persoz 1969] B. Persoz. *La rhéologie*. Monographies du centre d'actualisation scientifique et technique de l'INSA. Masson et Cie, 1969. (Cité en pages 12, 16 et 57.)
- [Poynting 1909] J. H. Poynting. *On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears and on the lengthening of loaded wires when twisted*. Proceedings of the Royal Society A, vol. 82, no. 557, pages 546–559, 1909. (Cité en pages 7 et 31.)
- [Poynting 1912] J. H. Poynting. *On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted, and on the pressure of distortional waves in steel*. Proceedings of the Royal Society A, vol. 86, no. 590, pages 534–561, 1912. (Cité en page 31.)
- [Prévost 1977] J. H. Prévost. *Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behaviour*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, vol. 1, pages 195–216, 1977. (Cité en pages 20 et 23.)
- [Puzrin & Houlsby 2001] A. M. Puzrin et G. T. Houlsby. *On the non-intersection dilemma in multiple surface plasticity*. Géotechnique, vol. 51, no. 4, pages 369–372, May 2001. (Cité en page 23.)
- [Rey *et al.* 2014] T. Rey, G. Chagnon, D. Favier et J.-B. Le Cam. *Hyperelasticity with rate-independent microsphere hysteresis model for rubberlike materials*. Computational Materials Science, vol. 90, pages 89–98, 2014. (Cité en page 6.)

- [Rio *et al.* 1995] G. Rio, P. Y. Manach et D. Favier. *Finite element simulation of shell and 3D mechanical behaviour of NiTi shape memory alloys*. Archives of Mechanics, vol. 47, no. 3, pages 537–556, 1995. (Cité en page 6.)
- [Rio *et al.* 2008] Gérard Rio, Hervé Laurent et G. Blès. *Asynchronous interface between a finite element commercial software ABAQUS and an academic research code HERZ++*. Advances in Engineering Software, vol. 39, pages 1010–1022, 2008. (Cité en page 6.)
- [Rio *et al.* 2009] Gérard Rio, Denis Favier et Yinong Liu. *Elastohysteresis model implemented in the finite element software HERZ++*. In European Symposium on Martensitic Transformations, 2009. (Cité en page 6.)
- [Rivlin 1953] R. S. Rivlin. *The solution of problems in second order elasticity theory*. Journal of Rational Mechanics and Analysis, vol. 2, pages 53–81, 1953. (Cité en page 32.)
- [Rodriguez-Martinez *et al.* 2011] J. A. Rodriguez-Martinez, A. Rusinek et A. Arias. *Thermo-viscoplastic behaviour of 2024-T3 aluminium sheets subjected to low velocity perforation at different temperatures*. Thin-Walled Structures, vol. 49, pages 819–832, 2011. (Cité en page 8.)
- [Rusinek *et al.* 2007] A. Rusinek, R. Zaera et J. R. Klepaczko. *Constitutive relations in 3-D for a wide range of strain rates and temperatures - Application to mild steels*. International Journal of Solids and Structures, vol. 44, pages 5611–5634, 2007. (Cité en page 8.)
- [Scheidler 1991] M. Scheidler. *Time rates of generalized strain tensors. Part II : Approximate basis-free formulas*. Mechanics of Materials, vol. 11, pages 211–219, 1991. (Cité en page 62.)
- [Schröder *et al.* 2002] J. Schröder, F. Gruttmann et J. Löblein. *A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress-strain measures*. Computational Mechanics, vol. 30, no. 1, pages 48–64, 2002. (Cité en page 37.)
- [Shutov & Ihlemann 2014] A. V. Shutov et J. Ihlemann. *Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticity in view of reference change*. International Journal of Plasticity, vol. 63, pages 183–197, 2014. (Cité en pages 37 et 244.)
- [Siret *et al.* 2012] O. Siret, A. Tourabi et C. Desrayaud. *Cold weldability of aluminium : Contribution of the mechanical loadings to the formation of metallic bonds*. Journal of Materials Processing Technology, vol. 212, pages 2424–2432, 2012. (Cité en pages 6 et 186.)

- [Suresh 2008] S. Suresh. *Fatigue of materials*. Cambridge University Press, 2 édition, 2008. (Cité en page 192.)
- [Swift 1947] H. W. Swift. *Length changes in metals under torsional overstrain*. *Engineering*, vol. 163, no. 253, 1947. (Cité en pages 7 et 31.)
- [Tanaka *et al.* 1985] E. Tanaka, S. Murakami et M. Ooka. *Effects of strain path shapes on non-proportional cyclic plasticity*. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 33, no. 6, pages 559–575, 1985. (Cité en pages 76, 77 et 98.)
- [Tourabi *et al.* 1995] A. Tourabi, P. Guélin et D. Favier. *Towards modelling of deformable ferromagnets and ferroelectrics*. *Archives of Mechanics*, vol. 47, no. 3, pages 437–483, 1995. (Cité en page 6.)
- [Tourabi *et al.* 1996] A. Tourabi, P. Guélin, B. Wack, P. Pegon, D. Favier et W. K. Nowacki. *Useful scalar parameters for multiaxial fatigue deformation studies*. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 19, no. 10, pages 1181–1195, 1996. (Cité en pages 7, 186 et 188.)
- [Vandenbroucke *et al.* 2010] A. Vandenbroucke, H. Laurent, N. Aït Hocine et G. Rio. *A Hyperelasto-Visco-Hysteresis model for an elastomeric behaviour : Experimental and numerical investigations*. *Computational Materials Science*, vol. 48, pages 495–503, 2010. (Cité en page 6.)
- [Vidal *et al.* 1994] C. Vidal, G. Dewel et P. Borckmans. *Au-delà de l'équilibre*. Hermann, 1994. (Cité en page 172.)
- [Wack & Tourabi 1992] B. Wack et A. Tourabi. *Some remarks on macroscopic observations and related microscopic phenomena of the mechanical behaviour of metallic materials*. *Arch. Mech.*, vol. 44, no. 5, pages 621–662, 1992. (Cité en pages 6, 43, 46 et 192.)
- [Wack 1989] B. Wack. *The torsion of a tube (or a rod) : general cylindrical kinematics and some axial deformation and ratchet measurements*. *Acta Mechanica*, vol. 80, pages 39–59, 1989. (Cité en pages 7, 31, 34, 110, 111, 164 et 165.)
- [Wang & Barkey 1999] H. Wang et M. E. Barkey. *A strain space nonlinear kinematic hardening/softening plasticity model*. *International Journal of Plasticity*, vol. 15, pages 755–777, 1999. (Cité en page 25.)
- [Wang *et al.* 2016] M. Wang, B. Panicaud, E. Rouhaud, R. Kerner et A. Roos. *Incremental constitutive models for elastoplastic materials undergoing finite deformations by using a four-dimensional formalism*. *International Journal of Engineering Science*, vol. 106, pages 199–219, 2016. (Cité en page 61.)

- [Whittaker & Watson 1920] E. T. Whittaker et G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, 3 édition, 1920. (Cité en page 45.)
- [Xiao *et al.* 2000] H. Xiao, O. T. Bruhns et A. Meyers. *A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and the deformation gradient*. *International Journal of Plasticity*, vol. 16, no. 2, pages 143–177, 2000. (Cité en pages 37 et 244.)
- [Yoder & Iwan 1981] P. J. Yoder et W. D. Iwan. *On the formulation of strain-space plasticity with multiple loading surfaces*. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, no. 4, pages 773–778, 1981. (Cité en pages 24 et 25.)
- [Yoder 1980] P. J. Yoder. *A strain-space plasticity theory and numerical implementation*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1980. (Cité en pages 24 et 25.)
- [Yoshida & Uemori 2002] F. Yoshida et T. Uemori. *A model of large-strain cyclic plasticity describing the Bauschinger effect and workhardening stagnation*. *International Journal of Plasticity*, vol. 18, pages 661–686, 2002. (Cité en page 20.)
- [Zanette *et al.* 2010] J. Zanette, D. Imbault et A. Tourabi. *A design methodology for cross flow water turbines*. *Renewable Energy*, vol. 35, pages 997–1009, 2010. (Cité en pages 122 et 123.)
- [Zhu *et al.* 2014] Y. Zhu, G. Kang, Q. Kan et O. T. Bruhns. *Logarithmic stress rate based constitutive model for cyclic loading in finite plasticity*. *International Journal of Plasticity*, vol. 54, pages 34–55, 2014. (Cité en pages 7 et 37.)

Résumé

Ce travail concerne l'étude théorique, numérique et expérimentale du comportement mécanique élastoplastique en chargements cycliques complexes multiaxiaux de matériaux métalliques. Le comportement élastoplastique est décrit par un modèle multisurface, avec une prise en compte des grandes transformations. Ce modèle est écrit dans l'espace multidimensionnel d'Ilyushin des déformations, de dimension 5. La modélisation qui en résulte permet de décrire le comportement multiaxial des matériaux métalliques, en chargements cycliques complexes, notamment non proportionnels, avec une prise en compte des déformations finies, de l'irréversibilité indépendante du temps, des effets secondaires cumulés (effet Poynting-Swift) et des effets d'écrouissage cyclique. Le modèle ainsi développé a été implémenté dans un code commercial de calcul par éléments finis, afin de produire un outil opérationnel de calcul des structures telles que les équipements mécaniques et les composants internes des centrales hydroélectriques (turbines, alternateurs, etc.). Le modèle proposé a été validé par comparaison à des résultats d'essais biaxiaux de traction-torsion combinées, réalisés sur un acier inoxydable. Ce modèle a été complété par une analyse énergétique et thermodynamique qui permet la mise en place, à terme, d'une approche énergétique pertinente pour le suivi de l'endommagement par fatigue. Dans le cadre de ce travail, cette approche a été illustrée par la proposition d'un critère de fatigue, validé par la comparaison de ses prédictions à celles d'autres critères de fatigue classiques, proposés dans la littérature.

Mots-clés : Plasticité cyclique, comportement thermomécanique, fatigue des métaux, effets du second ordre, écrouissage cyclique, grandes transformations

Abstract

This work deals with the theoretical, numerical and experimental study of the elastoplastic mechanical behavior of metallic materials in complex multiaxial cyclic loadings. The elastoplastic behavior is described by a multisurface model, within the finite strain theory. This model is written in the five-dimensional Ilyushin strain space. The resulting model is able to describe the multiaxial behavior of metallic materials, in complex cyclic loadings, in particular non-proportional, taking into account finite strain, time-independent irreversibility, cumulative second order effects (Poynting-Swift effect) and cyclic hardening. The model has been implemented in a commercial finite element calculation code, in order to produce an operational tool for calculating structures such as mechanical equipment and internal components of hydroelectric power plants (turbines, alternators, etc.). The proposed model was validated by comparison with combined tensile-torsion biaxial test results obtained on stainless steel. This model has been completed by an energy and thermodynamic analysis that allows the implementation of a relevant energy approach for the monitoring of fatigue damage. As part of this work, this approach was illustrated by the proposal of a fatigue criterion, validated by the comparison of its predictions with those of other classical fatigue criteria proposed in the literature.

Keywords: Cyclic plasticity, thermomechanical behavior, fatigue of metals, second order effects, cyclic hardening, finite strain