



HAL
open science

Autour de $g(2)$ en astrophysique

Antonin Siciak

► **To cite this version:**

Antonin Siciak. Autour de $g(2)$ en astrophysique. Astrophysique [astro-ph]. Université Côte d'Azur, 2021. Français. NNT : 2021COAZ4039 . tel-03406783

HAL Id: tel-03406783

<https://theses.hal.science/tel-03406783v1>

Submitted on 28 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT

Autour de $g^{(2)}$ en astrophysique

Antonin SICIAK

Institut de Physique de Nice

Présentée en vue de l'obtention
du grade de docteur en PHYSIQUE
de l'Université Côte d'Azur

Dirigée par : Robin KAISER
Co-Dirigée par : Jean-Pierre RIVET
Soutenue le : 05/07/2021

Devant le Jury, composé de :

Jean-Philippe BERGER, Astronome-adjoint,
Université Grenoble Alpes.

Robin KAISER, Directeur de Recherche CNRS,
Université Côte d'Azur.

Aglaé KELLERER, Ingénieure de Recherche,
European Southern Observatory.

Jean-Marcel RAX, Professeur,
Université Paris-Saclay.

Caterina RICONDA, Professeur,
Université Pierre et Marie Curie.

Jean-Pierre RIVET, Chargé de recherche CNRS,
Université Côte d'Azur.

Farrokh VAKILI, Astronome,
Université Côte d'Azur.



INITIATIVE D'EXCELLENCE

UCA J.E.D.I.
UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR



AUTOUR DE $g^{(2)}$ EN ASTROPHYSIQUE

par

Antonin Siciak

Thèse de doctorat,

de l'Ecole Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées (ED n°364),

préparée à l'Institut de Physique de Nice (UMR CNRS-UCA 7010),

dans le cadre du programme doctoral d'excellence (jury 2017) de l'index UCA-JEDI.

Présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur en PHYSIQUE devant le Jury composé de :

Jean-Philippe BERGER, Rapporteur de thèse, Astronome-adjoint, Université Grenoble Alpes

Robin KAISER, Directeur de thèse, Directeur de Recherche CNRS, Université Côte d'Azur

Aglaé KELLERER, Examinatrice, Ingénieure de Recherche, European Southern Observatory

Jean-Marcel RAX, Rapporteur de thèse, Professeur, Université Paris-Saclay

Caterina RICONDA, Examinatrice, Professeur, Université Pierre et Marie Curie

Jean-Pierre RIVET, Co-Directeur de thèse, Chargé de Recherche CNRS, Université Côte d'Azur

Farrokh VAKILI, Président du Jury, Astronome, Université Côte d'Azur

05/07/2021

©2021 Antonin Siciak.

Tous droits réservés.

L'auteur autorise l'UCA à reproduire et distribuer publiquement des versions papiers et électroniques de ce document de thèse de doctorat, en totalité ou en parties.

AUTOUR DE $g^{(2)}$ EN ASTROPHYSIQUE

Résumé :

Ce travail est associé au développement d'un corrélogramme stellaire opérant dans le visible, sur le plateau de Calern, site d'observation astronomique de l'Observatoire de la Côte d'Azur. La thèse s'articule en trois parties : "Fondements", "Réalizations", et "Explorations". Il y a six résultats principaux originaux.

La première partie "Fondements" propose une comparaison des fonctions de corrélation $g^{(1)}$ (champ-champ), $g^{(3/2)}$ (intensité-champ), et $g^{(2)}$ (intensité-intensité), pour un champ chaotique ricien (i.e. dont l'amplitude possède une densité de probabilité de Rice) créée selon une modélisation proposée pour le milieu interstellaire "Weigelt blob B" voisin du système stellaire η Carinæ. Le champ résultant est une radiation cohérente superposée à une radiation chaotique Rayleigh (i.e. dont l'amplitude possède une densité de probabilité de Rayleigh) issue d'une multitude d'oscillateurs, libres et indépendants, en mouvement brownien non-relativiste dans un gaz support, relativement à un observateur inertiel. Cette étude a débouché sur :

- (i) La création d'un modèle basé sur un modèle cinétique classique ab-initio. Le modèle cinétique ab-initio est analysé de manière originale, la description repose sur des processus markoviens à sauts avec continuum d'états. Le modèle crée permet alors 1- de calculer les fonctions de corrélation du champ résultant de la situation d'intérêt pour le processus de transport normal des oscillateurs, et 2- d'explorer comment ces fonctions de corrélation rendraient compte d'un transport anormal des oscillateurs (des transports anormaux pertinents en astrophysique sont considérés).
- (ii) La preuve théorique de la sensibilité accrue de $g^{(3/2)}$ aux fluctuations non-classiques du champ, et à la composante cohérente dans un champ chaotique ricien. Cette fonction de corrélation présente de plus un meilleur rapport signal sur bruit statistique que $g^{(2)}$ en théorie. Le calcul des rapports signal sur bruit est mené avec une méthode (classique) différente et consistante avec celle d'Hanbury Brown et Twiss. La méthode de calcul semble plus adaptée aux corrélogrammes stellaires modernes.
- (iii) La preuve théorique de l'avantage du corrélogramme hybride (ou hétérodyne), mesurant également $g^{(2)}$, en terme de rapport signal sur bruit. Même remarque sur la méthode de calcul des rapports signal sur bruit qu'en (ii).

La partie "Réalizations" rapporte la caractérisation en laboratoire du corrélogramme et les résultats d'une campagne de mesures astrophysiques :

- (iv) La mesure de $g^{(2)}$ sur la raie $H\alpha$ de l'étoile P Cygni. Cette mesure a permis de confirmer sa nature chaotique Rayleigh, puis de caractériser quantitativement le temps de cohérence de cette raie.
- (v) La mesure de la distance Terre - P Cygni par la mesure de $g^{(2)}$ pour deux bases projetées.

La partie "Explorations" teste le potentiel de la mesure de $g^{(2)}$ pour identifier un laser aléatoire quasi-unidimensionnel relativement à un champ chaotique Rayleigh. Elle constitue une première étape dont les résultats sont :

- (vi) La découverte d'une transition dans $g^{(2)}$ en-dessous et au-dessus du seuil laser, et la création d'un modèle décrivant l'intensité du champ au dessus du seuil via un processus de Poisson composé homogène, en accord avec la mesure.

Mots clefs : Fonctions de corrélation, Processus markoviens à sauts avec continuum d'états, Radiation cohérente, Oscillateurs browniens, Astrophysique, Processus de transport.

AROUND $g^{(2)}$ IN ASTROPHYSICS

Abstract :

This work is linked to the development of a stellar correlometer operating in the visible spectrum, on the *plateau de Calern*, a site of the *Observatoire de la Côte d'Azur* for observations in astronomy/astrophysics. The dissertation has three parts: “Fundamentals”, “Realizations”, and “Explorations”. There are six main original results.

The first part “Fundamentals” compares the field’s correlation functions $g^{(1)}$ (field-field), $g^{(3/2)}$ (intensity-field), and $g^{(2)}$ (intensity-intensity), for a Rician chaotic field (i.e. whose amplitude has a Rician probability density) created according to a devised modelling of the interstellar medium “Weigelt blob B” in the vicinity of the stellar system η Carinae. The created field is the superposition of a coherent radiation, with a Rayleigh chaotic radiation (i.e. whose amplitude has a Rayleigh probability density) resulting from a multitude of free independent oscillators in non-relativistic Brownian motion in a support gas, with respect to an inertial observer. Three main achievements result from this study:

- (i) The creation of a model based on a classical Newton’s law kinetic model. The analysis of this Newton’s law kinetic model is original, the description is based on Jump Markov Processes with Continuum States. Then, the devised model allows 1- the field’s correlation functions derivation for the normal transport process of the oscillators, and 2- the exploration on how these correlation functions would highlight an anomalous transport of the oscillators (some relevant anomalous transports in astrophysics are considered).
- (ii) The theoretical proof of the greater sensitivity of $g^{(3/2)}$ to non-classical fluctuations, and to a coherent component in the field. Furthermore, this correlation function has a better signal to noise ratio than $g^{(2)}$, in theory. The derivation of the signal to noise ratios uses a different but consistent method with the one of Hanbury Brown and Twiss. This proposed method seems to be more relevant for modern stellar correlometers.
- (iii) The theoretical highlighting of the advantage of an heterodyne (or hybrid) stellar correlometer measuring $g^{(2)}$, in terms of signal to noise ratio. The same remark on the signal to noise ratios’ derivation method than the one in (ii) applies.

The part “Realizations” reports the experimental characterization of the correlometer, and the results of an on-star measurements campaign:

- (iv) The measurement of $g^{(2)}$ on the $H\alpha$ emission line of the star P Cygni. It confirmed its Rayleigh chaotic nature and allowed to quantify the coherence time of this emission line.
- (v) The measurement of the Earth - P Cygni’s distance through $g^{(2)}$ for two on-sky projected baselines.

The part “Explorations” tests the potential in measuring $g^{(2)}$ in order to distinguish a quasi-unidimensional random laser from a Rayleigh chaotic radiation. It is a first step whose results are:

- (vi) 1- The discovery of a transition ‘below-above threshold’ in $g^{(2)}$ for the random fibered laser. 2- A first model depicting the field’s intensity above threshold with a homogeneous compound Poisson process, consistent with the measurement.

Keywords : Correlation Functions, Jump Markov Processes with Continuum States, Coherent Radiation, Brownian Oscillators, Astrophysics, Transport Process.

*A mon arrière grand-père Grégoire Siciak,
A sa femme, mon arrière grand-mère, Marie Siciak, née Michalek,
A son fils aîné, mon grand-père, Casimir Siciak.*

A Philémon, repose en paix.



Remerciements

Parmi l'un des transferts les plus néfastes effectués du domaine de la planification économique à celui de la théorie - que l'on ne distingue plus du tout des fondements de l'ensemble - il y a l'idée que l'on peut administrer le travail intellectuel suivant les critères décidant de la nécessité ou du bien-fondé d'une activité.

Minima Moralia, Adorno,
né Wiesengrund.

Mes premiers remerciements sont adressés à Monsieur le Professeur Luis A. Orozco du *Joint Quantum Institute*, Washington D.C.. Le Professeur Orozco fut la personne dont j'ai le plus appris et avec laquelle j'ai le plus travaillé, et ce avec un immense plaisir. Ma thèse a eu le privilège d'être relue par Monsieur Orozco, et je ne saurais dire le contentement que j'ai ressenti quand Monsieur Orozco m'a dit que la dissertation lui plaisait. Je le remercie d'avoir bien voulu travailler avec moi, de sa confiance, et de m'avoir soutenu dans mes idées. Le Professeur Orozco m'a appris bien plus que de la Physique, et, pour le formuler de manière imagée, je respire mieux aujourd'hui grâce à lui.

Ma rencontre avec le Professeur Orozco a été organisée par mon Directeur de thèse, Monsieur Robin Kaiser, qui m'a présenté, et qui m'a fait confiance. Je le remercie donc tout naturellement. Robin m'a donné la chance de pouvoir donner une présentation dans une conférence internationale dès le début de ma deuxième année. Je lui en suis reconnaissant. Je le remercie aussi d'être venu me chercher pour cette thèse, je ne regrette pas. Je remercie le conseil académique de l'UCA, présidé par Madame la Professeure Lucile Chanquoy, et le Jury du programme doctoral d'excellence 2017 de l'index UCA-JEDI, présidé par Madame la Ministre, qui ont eu confiance dans mon dossier académique, et dans le projet scientifique. Enfin, je souhaite à Robin un franc succès dans son expérience sur la localisation d'Anderson.

La pertinence du projet scientifique doit beaucoup au travail préliminaire de Monsieur Antoine Dussaux, qui était en séjour Post-Doctoral dans l'équipe de Robin Kaiser entre 2015 et 2016. Je tiens à le remercier. Monsieur Antoine Dussaux a posé les fondations et a démontré leur potentiel. Sans son formidable travail, le projet de thèse n'aurait pas eu lieu d'être. Je le remercie aussi d'avoir pris de mes nouvelles, et pour ses encouragements.

J'ai pu passer quelques moments avec mon Co-Directeur de thèse, Monsieur Jean-Pierre Rivet. Je tiens à lui exprimer ma gratitude dans les lignes qui suivent. Je suis conscient de la chance immense que j'ai eu d'avoir une sorte de cours particulier avec Jean-Pierre, en guise d'introduction à l'astronomie. Je le remercie aussi pour ses partages sur la Physique en général. Je garde près de moi ses méthodes et son élégance dans le raisonnement, comme dans le relationnel. Je le remercie de m'avoir soutenu dans mes idées, et je le remercie infiniment d'avoir relu ma thèse. Enfin, je tiens à dire toute mon admiration pour le travail que Jean-Pierre a réalisé au C2PU avec ses collègues, et dont j'ai pu bénéficier via mon projet de thèse. La création du C2PU est

pour moi une source d'inspiration.

Le projet scientifique a pu être accepté dans la communauté de l'Observatoire de la Côte d'Azur grâce au soutien de Monsieur l'Astronome Emérite Farrokh Vakili. J'ai eu la chance de pouvoir profiter de sa connaissance encyclopédique sur ce qui est connu de la physique stellaire et des méthodes d'observation. Je le remercie pour ses idées, ses conseils, ses anecdotes culturelles, et sa pratique de l'ouverture d'esprit. Je me souviendrai des quelques moments passés en sa compagnie à l'observatoire ou en réunion. Enfin, je le remercie de m'avoir aidé dans la composition de mon Jury, et de me faire l'honneur d'en être le Président.

Ma collaboration avec Monsieur le Professeur Anderson Gomes a été initiée par Robin Kaiser. J'ai énormément apprécié travailler pendant deux mois avec Monsieur Gomes. J'ai appris auprès de lui comment appréhender les explorations et les imprévus dans un projet de recherche, et ce dans la bonne humeur, avec réflexion et enthousiasme. Je tiens à le remercier. J'espère que le travail réalisé et que mon modèle serviront pour la suite.

Je remercie maintenant les Rapporteurs et les Examinatrices de mon Jury.

Je commence par remercier les Rapporteurs de ma dissertation : Monsieur l'Astronome-adjoint Jean-Philippe Berger de l'Institut de Planétologie et d'Astrophysique de Grenoble, et Monsieur le Professeur Jean-Marcel Rax du Laboratoire de Physique des Deux Infinis, l'*Irène Joliot Curie Lab*. L'hyperspécialisation de la recherche décuple la quantité de travail des Rapporteurs, et je suis conscient de la responsabilité qui les incombe.

Je remercie Monsieur Berger d'avoir bien voulu rapporter ma thèse, et ce d'autant plus que Monsieur Berger avait la préparation d'une HDR en simultané de la lecture de ma thèse. Le choix de Monsieur Berger a fait l'unanimité lors des propositions de Rapporteurs. Enfin, je souhaite une belle réussite à son projet avec le C2PU.

J'aurais pu remercier Monsieur Rax en tout premier lieu, avec Monsieur Orozco. Je le remercie bien évidemment d'avoir accepté de rapporter ma thèse. C'est un grand honneur pour moi. Je le remercie aussi pour ses cours que j'ai eu la chance de suivre de la L3 au M2, de la Mécanique Analytique en passant par la Théorie Cinétique. Pour moi, ses cours ont été plus qu'une leçon de Physique puisque j'y ai appris des éléments d'Histoire et de Mathématiques. Ils ont été une source d'inspiration et de compréhension, et à chaque fois que je discute avec un ancien du parcours de Physique Fondamentale d'Orsay, les souvenirs sont unanimes : les 'génialissimes' cours du Professeur Rax.

Je remercie maintenant les Examinatrices de mon Jury.

Les contraintes de parité dans les Jurys, et la sous-représentation des chercheuses et enseignantes-chercheuses, impliquent pour celles qui exercent une sur-sollicitation pour des Jurys en tout genre. Je m'en suis rendu compte au cours de mon doctorat. Je remercie donc infiniment Madame l'Ingénieure de Recherche Aglaé Kellerer de l'Observatoire Européen Austral, et Madame la Professeure Caterina Riconda du Laboratoire pour l'Utilisation des Lasers Intenses, d'avoir accepté mon invitation. Leurs expertises respectives, en astronomie observationnelle et physique quantique (entre autres), et en physique des plasmas astrophysiques et des lasers (entre autres), sont une chance pour les discussions associées à ma soutenance. Ce sont leurs expertises complémentaires qui ont motivé mon invitation, et je suis ravi que mon invitation ait été acceptée aussi promptement.

Quelques remerciements adressés à des personnes qui m'ont conseillé scientifiquement.

J'ai eu la chance de rencontrer des personnes qui m'ont soutenu dans mes idées, et qui ont accepté de m'écouter et de m'aiguiller vers les « bons » experts. Ainsi, je remercie Monsieur

Thierry Grandou, Monsieur Mathias Albert, Monsieur Fabrice Mortessagne, et Monsieur Michel Le Bellac de leur aide. Je les remercie aussi de leur temps, et de leur bienveillance. J'ai grâce à eux trouvé les « bons » experts.

Ces « bons » experts furent Monsieur Cédric Bernardin et Monsieur Raphaël Chetrite du Laboratoire J.A. Dieudonné. Je les remercie de m'avoir écouté, et de s'être intéressé à mes idées. Ça a été un plaisir de discuter avec eux, une chance et un honneur de pouvoir le faire. Nous n'avons malheureusement pas pu dépasser la discussion de mon plan d'attaque, pour des raisons politiques regrettables. Ces raisons politiques ne se sont pas manifestées initialement, quand je suis parti à la recherche de « bons » experts, et c'est encore plus regrettable que la décision en elle-même, car cela m'aurait évité de leur faire perdre leur temps, ainsi que celui de l'Ecole Doctorale.

Je remercie Monsieur Gilles Chériaux d'avoir partagé ses précieuses connaissances sur la physique femto-seconde, et d'avoir été disponible pour le laboratoire au-delà de sa fonction.

Monsieur Eric Simonnet m'a donné une brève et lumineuse introduction à la théorie des grandes déviations, et des systèmes dynamiques aléatoires. Ces domaines attireraient ma curiosité, je lui en suis donc très reconnaissant. Je le remercie également de m'avoir donné son avis sur ma présentation de soutenance, et pour ses encouragements.

Enfin, je remercie Monsieur Mario Gattobigio de m'avoir donné un magnifique rappel sur le modèle standard pendant l'une de ses après-midis.

Quelques remerciements adressés à l'environnement académique de mon doctorat.

J'ai bénéficié du suivi de ma thèse par un comité composé de Monsieur Mathias Albert et de Monsieur Christophe Raufaste. Monsieur Albert et Monsieur Raufaste ont été disponibles et m'ont prodigué de bons conseils chaque année. Ils ont été essentiels au bon déroulement de mon doctorat, merci à eux deux. Je remercie tout particulièrement Mathias Albert pour plusieurs faits. Premièrement, pour avoir bien voulu considérer un travail en commun au début de ma thèse, qui n'a pas pu se faire pour des raisons politiques regrettables. Ensuite, pour m'avoir invité à l'édition 2019 du *Nice Physics Camp*. Enfin, pour m'avoir toujours conseillé avec soin, scientifiquement, et de manière générale. Merci. Je lui souhaite une belle thèse avec super-Juliette.

Je remercie Madame Elisabeth Taffin-de-Givenchy la Directrice de l'Ecole Doctorale des Sciences Fondamentales et Appliquées. Madame Elisabeth Taffin-de-Givenchy a toujours répondu présente pour m'aider ; de l'organisation des JDPN, aux démarches afin d'enclencher la quatrième année de thèse avec Raphaël Chetrite et Cédric Bernardin (qui finalement ne s'est pas actée). Je lui en suis d'autant plus reconnaissant que la crise de la covid a considérablement bouleversé le déroulement d'une grande proportion de doctorats, et que Madame Elisabeth Taffin-de-Givenchy a géré cette situation, avec la secrétaire de l'Ecole Doctorale Madame Catherine Briet, d'une manière que je trouve admirable. J'en profite pour remercier Madame Briet pour sa réactivité. Je remercie également la Maison des Etudes Doctorales pour leur constante disponibilité, en particulier Madame Hannane Berouag.

Madame Valérie Doya m'a permis de participer à l'animation de la fête de la Science à Mouans-Sartoux pour deux éditions du festival consécutives (2018 et 2019). Je la remercie pour ses stands, je les ai trouvés très originaux et j'ai aidé à les animer avec grand plaisir. Je la remercie de sa confiance et de ses conseils, en particulier de ses conseils sur le déroulement d'un doctorat. Je remercie aussi Madame Martine Olivi de m'avoir fait confiance pour aider à animer son stand, et pour ses partages que j'ai beaucoup appréciés.

J'ai pu intervenir dans la classe de Mathématiques de Madame Valérie Lemesle, ancienne Docteure de l'INLN, au collège du Rouret. Je remercie Madame Valérie Lemesle de sa confiance,

de ses conseils, et pour ses ateliers ludiques et recherchés. Je me suis fait une idée plus précise du métier de Professeur dans l'Éducation Nationale grâce à cette expérience. Je lui en suis très reconnaissant.

J'ai eu la chance (cela fera rire Monsieur Vittorio Maria Di Pietro) de pouvoir organiser l'édition 2019 des Journées Doctorales de la Physique Niçoise. Je tiens d'abord à remercier les créateurs de cet événement : Taha Rouabah et François Gustave, qui organisèrent la première édition en 2014. L'organisation de ce colloque ne se serait pas réalisée sans mes extraordinaires camarades doctorants Enzo d'Ambrosio (Docteur désormais) et Philippe John. L'organisation à leurs côtés reste un super souvenir moi, je les remercie pour ces moments. Je me dois aussi de remercier Monsieur Patrice Camelin dont l'aide pour discerner les étapes clefs dans la recherche de financements, nous a été plus que précieuse.

L'Institut Non Linéaire de Nice bénéficie d'une équipe administrative composée de Madame la Secrétaire du Directeur Nathalie Hamel, Monsieur le Gestionnaire François-Régis Huc, et Monsieur l'Administrateur Réseau Christian Taggiasco. Je les remercie tous les trois d'avoir toujours répondu consciencieusement à mes requêtes. Je remercie tout particulièrement Nathalie qui a soulagé mes missions de recherche de leur poids administratif avec une efficacité que j'ai trouvée redoutable.

Je remercie l'ensemble de l'équipe du *Learning Center*, la bibliothèque du campus *Sophia Tech*. Madame Justine Portelli, Madame Anne-Clémence Faure, et Madame Coralie Viguié, ont maintenu le précieux service de bibliothèque, malgré les restrictions sanitaires, et ont toujours été disponibles pour m'accueillir au *Learning Center*, où j'ai pu finir d'y rédiger ma thèse dans une ambiance calme et studieuse. Je remercie également l'équipe de la Bibliothèque Universitaire Sciences de Valrose pour la richesse de leur catalogue et pour le service de 'navette inter-BU'.

Enfin, je tiens à remercier quelques camarades doctorants ou post-doctorants qui m'ont aidé de diverses manières.

Aurélien Eloy et Patrice Camelin m'ont informé avec précision des règles concernant les formations doctorales, alors que rien ne les obligeait à le faire, qu'ils en soient ici remerciés. Je remercie Axel Dolcemascolo de m'avoir transmis les slides sur ce sujet, et de m'avoir donné envie d'organiser les JDPN.

Jean Decamp a généreusement partagé avec moi de merveilleux articles de C. Rovelli et P.W. Anderson. Pour ma culture en Sciences Physiques, merci Jean.

Ana Cipris, Marius Gaudesius, et Julian Meija ont rendu mes heures de formations doctorales plus agréables. Je les ai aussi côtoyés dans les divers colloques de l'ED, et je les remercie tous les trois pour l'ambiance cultivée qu'ils faisaient régner.

Vittorio Maria Di Pietro a été un modèle de créativité, de sérieux, et de productivité pour moi. J'ai eu la chance de bénéficier de ses conseils lorsqu'il rédigeait sa thèse. Ses conseils m'ont permis de rédiger ma propre thèse avec méthode. Merci Vittorio.

Enfin, je remercie Giovanni Paleari (désormais Monsieur) avec qui j'ai eu une discussion à priori anodine sur le calcul stochastique, et qui, à posteriori, m'a en fait révélé une autre piste pour ma modélisation. Merci mille fois Giovanni.

Sommaire

Remerciements	vii
Note liminaire	xv
Notations	xvii
Introduction	3
Introduction générale	3
I. Sur la notion de corrélation	3
II. Plan de la dissertation	5
État de l'art et motivations	7
III. Un peu d'histoire	7
III.1 Origines dans le domaine radio à cause d'une mauvaise prédiction	7
III.2 Avant la transposition au domaine visible	8
III.3 Les premiers corrélogrammes stellaires dans le visible	9
IV. Les corrélogrammes stellaires aujourd'hui	11
IV.1 Développements en laboratoire	11
IV.2 Un mode d'observation pour CTA ?	15
IV.3 Corrélogrammes stellaires avec les télescopes existants	15
V. Motivations	17
V.1 Partie I de la dissertation : "Fondements"	17
V.2 Partie II de la dissertation : "Réalizations"	22
V.3 Partie III de la dissertation : "Explorations"	26
Définitions des fonctions de corrélation utilisées	29
VI. Hypothèses et notations	29
VI.1 Le "champ"	29
VI.2 Auto-corrélation et fluctuations	30
VII. Fonction d'auto-corrélation du champ : $g^{(1)}(\tau)$	30
VIII. Fonction d'inter-corrélation intensité-champ : $g^{(3/2)}(\tau)$	31
IX. Fonction d'auto-corrélation de l'intensité : $g^{(2)}(\tau)$	34
X. Résumé	36
I Fondements	37
1 Modèle "premiers principes" du mouvement brownien	41
I. Introduction	42
I.1 Objectifs	42

I.2	Choix sur la modélisation du mouvement brownien	42
I.3	Organisation du chapitre	43
II.	Modèle de collisions de type cubes durs sans effets inertiels	43
II.1	Hypothèses et notations	45
II.2	Nature d'une composante V_α de $\mathcal{P}(m)$	46
II.3	Distribution des temps d'attente et des changements de vitesse	50
III.	Mouvement brownien	53
III.1	Sur la forme de la relation d'Einstein-Langevin	54
III.2	Limite brownienne	56
III.3	Analyse de la consistance du modèle	60
IV.	Simulations Monte-Carlo et vérifications	62
IV.1	Relaxation vers l'équilibre	63
IV.2	Comportement de la vitesse relative	64
IV.3	Relation d'Einstein-Langevin	66
V.	Conclusion	66
2	Corrélations de la radiation d'oscillateurs browniens	67
I.	Introduction	68
I.1	Objectifs	68
I.2	Choix de la situation physique	68
I.3	Organisation du chapitre	69
II.	Situation physique	69
II.1	Hypothèses	69
II.2	Considérations expérimentales	72
II.3	Champ ricien	73
III.	Calculs de $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, $g^{(2)}(\tau)$	76
III.1	Méthodes de calcul	77
III.2	Calcul de $g^{(3/2)}(\tau)$	78
III.3	Résultats et commentaires	79
IV.	Confirmation par simulations Monte-Carlo	81
IV.1	Principes de la simulation	81
IV.2	Figures de mérite	83
IV.3	Résultats pour $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, $g^{(2)}(\tau)$	85
V.	Conclusion	90
3	Comparaison des RSB statistiques	91
I.	Introduction	92
I.1	Objectifs	92
I.2	Choix sur le type de bruit et sur la détection	93
I.3	Organisation du chapitre	93
II.	Définitions et exemple	94
II.1	Définitions	94
II.2	Justification de l'ergodicité et conséquences	95
II.3	Exemple : RSB de la mesure de $g^{(1)}(\tau)$	97
III.	Mesure de $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$ via une estimation continue	99
III.1	Signaux	99
III.2	Bruit	102
III.3	Rapports signal sur bruit	104
IV.	Mesure de $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$ via estimation conditionnelle	106
IV.1	Principe et signaux	106
IV.2	Bruit	108
IV.3	RSB	109

V.	Quelques comparaisons et conclusions	110
V..1	Comparaison des méthodes	110
V..2	Comparaisons des mesures	111
V..3	Conclusions	115
II	Réalisations	117
4	Caractérisations et mesures avec le corrélogramme stellaire	119
I.	Introduction	120
I..1	Objectifs	120
I..2	Présentation de l'instrument	121
I..3	Organisation du chapitre	123
II.	Caractérisation de la réponse temporelle	124
II..1	Définitions et indications	124
II..2	Influence de l'intensité incidente	124
II..3	Influence des composants	129
III.	Méthode pour l'exploitation des mesures	132
III..1	Justification du modèle de fit pour la mesure de $g^{(2)}$	132
III..2	Interprétation du contraste lorsque σ limite la mesure	135
III..3	Figure de mérite du fit	136
IV.	Mesures de $g^{(2)}$ sur la raie d'émission H α de P Cygni	138
IV..1	Quelques éléments sur l'étoile P Cygni, sa variabilité, et sa raie H α	138
IV..2	Résultat de la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ et interprétation	139
IV..3	Résultat de la mesure de $g^{(2)}(\tau, \rho)$ et interprétation	140
V.	Conclusion	144
III	Explorations	145
5	Mesures sur un laser aléatoire	147
I.	Introduction	148
I..1	Objectifs	148
I..2	État de l'art de la source radiative utilisée	149
I..3	Organisation du chapitre	153
II.	Montage expérimental	153
II..1	Présentation du montage	154
II..2	Spectres mesurés	156
II..3	Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sans action "laser"	161
III.	Une action "laser" cohérente ?	164
III..1	Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ à l'échelle de la nanoseconde	164
III..2	Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ à l'échelle de la microseconde	165
III..3	Tentatives de caractérisation	169
IV.	Un modèle pour expliquer $g^{(2)}(0) = 1$ à l'échelle de la nanoseconde	171
V.	Conclusion	173
	Conclusion	177
	Résultats et critiques	177
I.	Un modèle physique pour calculer les fonctions de corrélation	177
II.	Vers un corrélogramme hybride opérant dans le visible	178
III.	Tentatives d'applications pour l'astrophysique	180

Ouvertures théoriques	181
IV. Introduction	181
IV..1 Objectifs	181
IV..2 Motivations (astro)physiques	182
IV..3 Organisation du chapitre	183
V. Méthode avec le modèles des cubes durs (sans effet inertiel)	183
V..1 Sur le choix de la modélisation	183
V..2 Champ de vitesse des oscillateurs harmoniques	184
V..3 Transformation Doppler-Fizeau et temps d'attente moyen	185
VI. Deux exemples clefs	186
VI..1 Etats stables non-Maxwelliens de la physique statistique non-extensive	186
VI..2 Gaz support d'électrons de champ de vitesse de Lévy-Feldheim	191
VI..3 Mini-conclusion	192
VII. Autre modèle envisagé et perspectives	192
VII..1 Modèle de MATC dans l'espace des vitesses	192
VII..2 Mouvement brownien relativiste	193
VII..3 Radiation synchrotron	193
VIII. Conclusion	194
Annexes	197
A Quelques généralités sur les PMSCE	197
I. Préliminaires	198
II. Existence et forme fonctionnelle de P_W	199
III. Caractérisation des PMSCE	201
IV. Coefficients de Kramers-Moyal pour un PMSCE	203
V. Sur l'évolution des moments d'un PM	203
B Moment d'ordre 4 du processus de Campbell en jeu	205
I. Rappels de la problématique	206
II. Transformation de la problématique	206
III. Calcul d'un moment joint d'ordre 4 d'un processus de Poisson	207
IV. Résultat final	208
C Fiche technique du corrélogramme	209
D Éléments sur P Cygni et sa raie $H\alpha$	211
I. Quelques éléments sur l'étoile P Cygni et sa variabilité	212
I..1 Localisation dans le diagramme d'Hertzprung-Russell	212
I..2 Variabilité séculaire et sphéricité de l'enveloppe de vent	213
I..3 Variabilité spectro-photométrique à plus "court terme"	214
II. Quelques éléments sur l'origine de la raie $H\alpha$	216
II..1 Sur la modélisation de l'enveloppe de vent	216
II..2 Sur le mécanisme de radiation $H\alpha$	217
II..3 Sur la formation de la raie d'émission $H\alpha$	218
E Photo du montage avec le LAF	221
Liste des publications	223

Note liminaire

Ce travail a été associé au développement d'un *corrélomètre stellaire* sur le plateau de Calern, site d'observation astronomique de l'Observatoire de la Côte d'Azur. Cette thèse est la première reliée à ce projet, et il est espéré qu'elle profitera au (à la) prochain(e) doctorant(e) qui travaillera sur le sujet. Cette dissertation est également destinée aux rapporteurs de thèse, et à cet égard, il a été choisi de ne présenter que les productions scientifiques originales et abouties. De nombreux ouvrages existent pour rappeler les notions de bases en jeu (d'un niveau inférieur à la fin du M2), et il a été jugé inutile d'écrire un chapitre pour le faire. Cependant, afin que la thèse puisse servir au groupe du Directeur de Recherche CNRS Robin Kaiser dont la spécialité n'est pas l'astrophysique, quelques rappels, qui seront superflus pour le lecteur astrophysicien, sont parfois donnés (en priorité en annexe, et quand cela n'est pas adéquat, dans le corps).

L'étude concernant la fonction de corrélation $g^{(3/2)}$, développée dans la première partie de cette thèse, fut motivée par une curiosité initiale de Robin Kaiser, sur son rapport signal sur bruit. La situation physique originale, et sa modélisation, sont le fait de l'auteur. Ce travail a été mené avec le soutien et l'aide du Professeur Luis A. Orozco du Joint Quantum Institute (JQI), et du département de Physique de l'Université d'état du Maryland, Washington, D.C..

Le travail instrumental rapporté dans la deuxième partie de cette dissertation a été mené en partie avec Jean-Pierre Rivet, Chargé de Recherche CNRS et Co-Directeur de thèse, qui est l'inventeur du module opto-mécanique raccordé au foyer du télescope. La campagne de caractérisation du corrélomètre rapportée dans ce mémoire a comporté deux étapes ; une première réalisée avec William Guérin, Chargé de Recherche CNRS, et une deuxième réalisée avec Clément Courde, Ingénieur de Recherche CNRS, et Jean-Pierre Rivet.

L'expérience présentée dans la dernière partie est due à une idée originale du Directeur de Recherche CNRS Robin Kaiser. Elle fut réalisée avec le soutien et l'aide du Professeur Anderson S.L. Gomes, du département de physique de l'Université fédérale de Pernambuco, Recife. La tentative de modélisation est le fait de l'auteur.

Les ouvertures théoriques présentées en Conclusion sont le fait de l'auteur.

Quelques indications pratiques pour finir.

Les codes pour la modélisation/simulation ont été écrits en langage global *Python*©(version 2.7.18), et les codes pour l'analyse des données expérimentales ont été écrits en langage global *Matlab*©®(version R2016a).

La dissertation est rédigée en français, mais les figures et schémas ont majoritairement leurs légendes en anglais.

L'auteur, Antonin Siciak.

Notations

Constantes physiques

- k_B : constante de Boltzmann.
 e : charge élémentaire.
 c : vitesse de la lumière dans le vide pour un observateur inertiel.

Probabilités

- V.A. : Variable Aléatoire.
 $\mathbb{P}\{C\}$: probabilité de l'événement C.
 P_X : densité de probabilité de la V.A. X .
 $X \rightsquigarrow \mathcal{L}$: X suit la loi de probabilité \mathcal{L}
 $\langle X \rangle$: espérance de la V.A. X .
 $\delta(x)$: distribution de Dirac (densité de la loi dégénérée).
 $\langle\langle X^2 \rangle\rangle$: variance de la V.A. X .
 α : exposant de Lévy.
 \mathcal{S}_α : loi α -stable de Lévy.
 $\mathcal{N}(\langle X \rangle, \langle\langle X^2 \rangle\rangle)$: loi normale de X .
 $\mathcal{E}(1/\langle X \rangle)$: loi exponentielle de paramètre $1/\langle X \rangle$.
 $\mathcal{P}_{\text{III}}(\langle X \rangle)$: loi d'un train d'impulsions de Poisson de densité homogène $\langle X \rangle$.

Processus stochastiques

- $C_{YY}(t, \tau) \equiv \langle\langle Y(t), Y(t + \tau) \rangle\rangle$: fonction d'auto-covariance du processus Y .
 δY : processus standardisé (ou centré).
 $S_{\delta Y}$: densité spectrale des fluctuations de Y .
 $\Phi(dt; y, t)$: propagateur du processus Y (V.A.).
 P_Φ : densité de probabilité de $\Phi(dt; y, t)$.
 K_n : coefficient de Kramers-Moyal d'ordre n .
 $T(y, t|y_0, t_0)$: densité (de probabilité) de transition markovienne.
PMSCE : Processus Markovien à Sauts avec Continuum d'Etats.
O.U. : Ornstein-Uhlenbeck.
W.K.B. : Wiener-Khintchine-Bochner.
 ν : densité du processus train d'impulsion de Poisson.

Modèle des cubes durs

\mathcal{O} :	observateur inertiel.
$\mathcal{P}(m)$:	oscillateur harmonique de masse m .
$\mathcal{P}_0(m_0)$:	particule support de masse m_0 .
ϱ :	côté du cube représentant $\mathcal{P}(m)$.
ϱ_0 :	côté du cube représentant $\mathcal{P}_0(m_0)$.
n :	densité du gaz support [m^{-3}].
T :	température canonique au sens de Boltzmann-Gibbs.
$\Gamma(t)$:	facteur de Lorentz de $\mathcal{P}(m)$ par rapport à \mathcal{O} à la date t .
α :	indice d'une composante vectorielle.
V_α :	processus composante α de la vitesse relative de $\mathcal{P}(m)$ par rapport à \mathcal{O} (réalisations v_α).
R_α :	processus composante α de la position relative de $\mathcal{P}(m)$ par rapport à \mathcal{O} .
U_α :	processus composante α de la vitesse relative de $\mathcal{P}_0(m_0)$ par rapport à \mathcal{O} (réalisations u_α).
W :	V.A. temps d'attente, de réalisations τ .
J :	V.A. changement de vitesse (par saut), de réalisations j .
$P_{WJ}(\tau, j v_\alpha, t)$:	densité de probabilité jointe W - J .
$P_{J W}(j \tau; v_\alpha, t)$:	densité de probabilité conditionnelle $J W$.
$P_W(\tau v_\alpha, t)$:	densité de probabilité de W .
$a(v_\alpha, t) = P_W(0 v_\alpha, t)$:	$a(v_\alpha, t)dt$ est la probabilité que V_α , tel que $V_\alpha(t) = v_\alpha$, saute entre $[t, t + dt[$.
$\lim_B(X)$:	limite brownienne de X .
τ_c :	temps d'attente moyen entre deux collisions successives.
σ_u :	écart-type de U_α dans son état stable.
σ_v :	écart-type de V_α dans son état stable.
γ :	coefficient de frottement visqueux du gaz unidimensionnel de cubes durs.

Description du champ

\mathcal{E} :	représentation analytique d'un mode d'une polarisation d'une composante vectorielle du vecteur champ électrique.
A :	amplitude complexe de \mathcal{E} .
I :	intensité de \mathcal{E} ($\propto [J]$).
ω :	pulsation harmonique de \mathcal{E} .
c :	vitesse de groupe de \mathcal{E} .
E_β :	module de $\langle A \rangle$.
ϕ :	phase de $\langle A \rangle$.
φ_t :	saut de phase de \mathcal{E} à la date t .
$\delta\omega_t$:	fluctuation de pulsation de \mathcal{E} à la date t .
σ_ω :	écart-type de la distribution de pulsation.
Ra :	Rayleigh.
Ri :	Ricien.
σ_τ :	écart-type (\sim temps de cohérence) de $ g_{\text{Ra}}^{(1)} $ si c'est une gaussienne.
τ_{cor} :	temps de cohérence dans $ g^{(1)} $ (en général).

Description de la mesure

ν :	densité de photo-événements (fréquence).
i :	photo-courant.
T_0 :	durée d'observation.
$h(t)$:	réponse impulsionnelle de la détection.
$1/f_i$:	constante de temps dans $h(t)$.
σ_h :	écart-type de $h(t)$ (i.e. constante de temps dans $h(t)$), si $h(t)$ est une gaussienne.
R_δ :	réponse impulsionnelle du corrélomètre.
σ :	écart-type de R_δ .
$2C_0\text{erfc}(\Delta)$:	contraste de la mesure $g^{(2)}(0)$ (en général).
C_1 :	contraste de la mesure $g^{(2)}(0)$ si σ limite la mesure.
ρ :	base projetée.
$V(\rho)$:	visibilité pour la base ρ .

Introduction

Introduction générale

La fonction $g^{(2)}$ dans le titre de la dissertation désigne la *fonction de corrélation* de l'énergie présente dans une radiation (ou intensité). Cette fonction est la quantité mesurée par un *corrélomètre stellaire*. L'adverbe "Autour" sous-entend que $g^{(2)}$ n'est pas la seule fonction de corrélation étudiée.

Avant d'exposer les grandes lignes du plan de cette dissertation, la présente "Introduction générale" donne quelques précisions sur la notion de corrélation en physique, et sur la façon dont elle est considérée dans cette thèse.

I. Sur la notion de corrélation

La notion de corrélation en physique peut être considérée dans au moins deux contextes. Dans un contexte expérimental appliqué, c'est une opération qui permet d'extraire une information d'un signal, et dans un cadre théorique fondamental, c'est une traduction mathématique de phénomènes physiques tangibles.

Avec le point de vue physique appliquée, la corrélation est une technique d'ingénierie du signal qui permet de mesurer une vitesse, une distance, mesurer un retard, réduire un bruit etc.. Un premier exemple introductif présentant la mesure d'un temps de parcours par inter-corrélation d'un signal émis et de son écho, peut être trouvé dans [1] chapitre 7, section 7.6.2.. L'ouvrage [2], chapitre 4, section 4.5.2, présente simplement, selon le même principe, des applications à localisation d'une source de bruit. Une revue assez complète des applications des fonctions de corrélations peut-être trouvée dans [3], chapitre 14. Enfin, il est impossible de ne pas mentionner les RADARS [4] et LIDARS [5]. Ils sont peut-être les instruments basés sur la mesure de corrélations, les plus utilisés aujourd'hui. Ils sont utilisés pour faire de la vélocimétrie, de la topographie, des mesures de concentration de gaz dans l'atmosphère etc. [5].

Le deuxième contexte relève de la physique fondamentale via la mécanique (statistique ou quantique selon le point de vue). La corrélation traduit dans ce cadre théorique des phénomènes physiques observés. Un premier exemple : la notion de corrélation permet d'expliquer la pression dynamique d'un gaz monoatomique (voir par exemple le complément C du chapitre III de [6], section IV.2). Un deuxième exemple fondamental concerne la théorie du transport. La notion de corrélation est à la base de l'équation de Langevin et de la formule de Green-Kubo (voir par exemple [7] chapitre 6, section 6.4) et permet d'établir un lien entre mobilité (propriété microscopique) et diffusion (propriété macroscopique). En physique statistique classique, la notion de corrélation est introduite par la notion des *fonctions de distribution (réduites)* de l'espace des phases du système de N particules, fonctions introduites par Yvon [8] pour la première fois. Ces fonctions permettent de définir *les fonctions de corrélation* (dîtes *irréductibles*) du système. Le système de N particules est alors entièrement caractérisé par la donnée de la fonction de distribution réduite à une particule et la donnée de l'ensemble des fonctions de corrélations irréductibles. C'est ce qui est appelée *la représentation de la corrélation du système*, voir par exemple [9], chapitre 4. L'évolution des fonctions de distributions réduites est donnée par la hiérarchie BBGKY d'équations intégro-différentielles, cette hiérarchie permet aussi d'écrire une dynamique des fonctions de corrélations, développée initialement par Prigogine [10]. La notion

de corrélation trouve également une origine dans la mécanique analytique. Soit un système hamiltonien, avec un couple de variable angle-action, rendu non intégrable car subissant une petite perturbation induisant une évolution de l'action. Alors pour ce système, la notion de corrélation est à la base d'une identité (appelée la relation d'Einstein, voir [11] chapitre 8, section 3) entre le premier moment de l'accroissement séculaire de l'action (espérance sur les angles initiaux), et le gradient (par rapport aux actions initiales) de la corrélation (deuxième moment) de l'accroissement périodique de l'action (périodique par rapport aux angles initiaux, et moment d'ordre 2 sur ces angles initiaux). Cette relation d'Einstein généralise l'exemple précédent de théorie du transport concernant la formule de Green-Kubo, et lorsqu'appliquée à l'électrodynamique, elle donne la relation entre émission spontanée et émission induite [11].

Quelques exemples concernant l'électrodynamique. La notion de corrélation appliquée au champ électromagnétique permet, entre autre, de caractériser la nature d'une radiation. Par exemple, la corrélation de l'énergie dans une radiation laser ou dans une radiation de type corps noir n'est pas la même (ce sera rappelé dans la partie "Définitions des fonctions de corrélation utilisées"). Plus encore, la notion de corrélation en électrodynamique est à la base de la notion de *cohérence* [12, 13] qui est une condition nécessaire aux phénomènes d'interférence. La notion de cohérence, trouve écho de l'optique [14], développée dans un cadre quantique initialement par Glauber [15], jusqu'à la physique des particules, et ce, des fermions [16, 17, 18], aux bosons (hors ceux de l'optique) [19, 20, 21], en passant par les hadrons [22, 23]. Le terme d'*interférométrie de Bose-Einstein* ou d'*interférométrie de Fermi-Dirac* est parfois employé [24].

Enfin, deux théorèmes fondamentaux liés à la corrélation sont en jeu dans cette dissertation. Le théorème de Wiener-Khinchine-Bochner, d'abord pressenti par Einstein [25], ensuite démontré par Wiener [26], et généralisé par Bochner (théorème de Bochner en mathématique) [27]. Il fut aussi démontré de manière indépendante par Khinchine [28]. Ce théorème permet de traduire les corrélations dans l'espace de Fourier, et réciproquement de caractériser les corrélations via une densité spectrale. Plus encore, ce théorème établit une dualité, via la transformée de Fourier, entre corrélation et densité de probabilité (dite *spectrale*). Ce théorème est utilisé dans toutes les branches de la physique qui sont concernées par l'étude de fluctuations. Le second théorème fondamental est la réciproque du théorème de Doob [29, 30], qui permet, sous réserve que le processus soit normal et stationnaire (au sens large), de déduire à partir de la forme de sa fonction d'auto-corrélation (en l'occurrence si elle est une exponentielle décroissante), si ce processus est markovien ou non, et en fait s'il est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck ou non. Ce théorème explique pourquoi la forme fonctionnelle exponentielle décroissante est souvent rencontrée pour une fonction d'auto-corrélation.

Dernier point. La notion de corrélation dépend du point de vue (classique ou quantique) choisi pour effectuer la description physique. Un exemple de la physique statistique permet de saisir ce fait. Les corrélations spatiales des fluctuations de densité pour un gaz parfait classique sont inexistantes (voir par exemple [31] chapitre 12, section §116), tandis qu'avec une description quantique du gaz parfait elles sont à prendre en compte (voir [31] chapitre 12, section §117). La raison est qu'en mécanique statistique classique, les corrélations entre particules sont toujours la conséquence d'interactions dynamiques (forces intermoléculaires etc.) entre elles. Alors que les corrélations à l'échelle quantique sont conséquences des statistiques quantiques qui sont, elles, complètement indépendantes de quelconques interactions dynamiques.

La notion de corrélation dans cette dissertation est appliquée à la corrélation spatiale et temporelle du champ électromagnétique, champ décrit classiquement et engendré selon une situation d'intérêt astrophysique, pour un observateur inertiel. La corrélation est considérée avec un point de vue eulérien.

Lorsque l'accent est mis sur la corrélation spatiale, la corrélation est considérée comme une technique pour déduire une information géométrique (diamètre, distance, etc.), de type imagerie astronomique, sur la cible stellaire. Ce point de vue est celui de la partie II "Réalizations".

Lorsque l'accent est mis sur la corrélation temporelle, la corrélation est considérée d'un point de vue plus fondamental, et pour deux finalités qui sont reliées. La première est de caractériser le mouvement des particules qui engendrent la radiation. Cet objectif est présent dans la partie I "Fondements". Dans cette partie, les corrélations de la radiation permettent de traduire des caractéristiques du processus de transport de la matière rayonnante. Ceci n'est évidemment possible que si le modèle de rayonnement est connu. D'où la deuxième finalité ; caractériser la nature même du processus de radiation. C'est par exemple un objectif de la partie III "Explorations".

II. Plan de la dissertation

Le reste de l'Introduction est composé comme suit. La seconde partie est dédiée à l'*État de l'art*, et la présentation du plan de la thèse y est affinée par l'exposition des *Motivations* pour chaque partie de la thèse. Le dernier développement de l'Introduction donne un glossaire des fonctions de corrélation étudiées ensuite, et donne leurs premières propriétés. Ce glossaire a pour finalité de faciliter la lecture de la suite de la dissertation.

Les problématiques physiciennes que cette dissertation touche sont les suivantes :

- P1 : Comment mettre en exergue une radiation stellaire cohérente ?
- P2 : Comment les fonctions de corrélations temporelles d'une radiation permettent-elles de caractériser le processus de transport de la matière rayonnante ?
- P3 : Comment un corrélogramme stellaire permet-il de déduire des informations géométriques sur la cible ?

Ces problématiques ne sont que partiellement traitées avec cette thèse de doctorat qui n'a pas la prétention d'y répondre, seulement d'y apporter quelques éléments de réponse, et ce en privilégiant le point de vue de la physique classique. A chaque fois qu'une sous-problématique ou une conclusion concerne les problématiques P1, P2, et P3, elle est encadrée de la même couleur, afin de faciliter une lecture synthétique de la dissertation.

Le corps de la dissertation est composé de trois grandes parties : "Fondements", "Explorations" et "Réalizations".

La partie I "Fondements" développe un modèle simple de la physique fondamentale qui est, d'une part, suffisant pour interpréter les mesures présentées dans la partie II "Réalizations", et d'autre part, qui a le niveau de détails suffisant pour envisager l'étude, via les fonctions de corrélations considérées, de processus de transport de la matière rayonnante plus sophistiqués. Cette étude de processus de transport plus sophistiqués est abordée dans la partie "Ouvertures théoriques" de la Conclusion.

L'étude de radiations stellaires aux fluctuations non-classiques est une grande source de motivation pour ce travail, l'explication est donnée dans la sous-partie suivante "Etat de l'art et motivations". La partie III "Explorations" est un premier pas dans cette direction.

Le résumé synoptique du plan de la dissertation est donné sur la figure 1.

Quelques détails structurels. La partie I "Fondements" contient trois chapitres théoriques. La partie II "Réalizations" contient un chapitre expérimental rapportant une caractérisation instrumentale et des mesures sur cibles stellaires. La partie III "Exploration" contient un chapitre expérimental, comportant un début de modélisation.

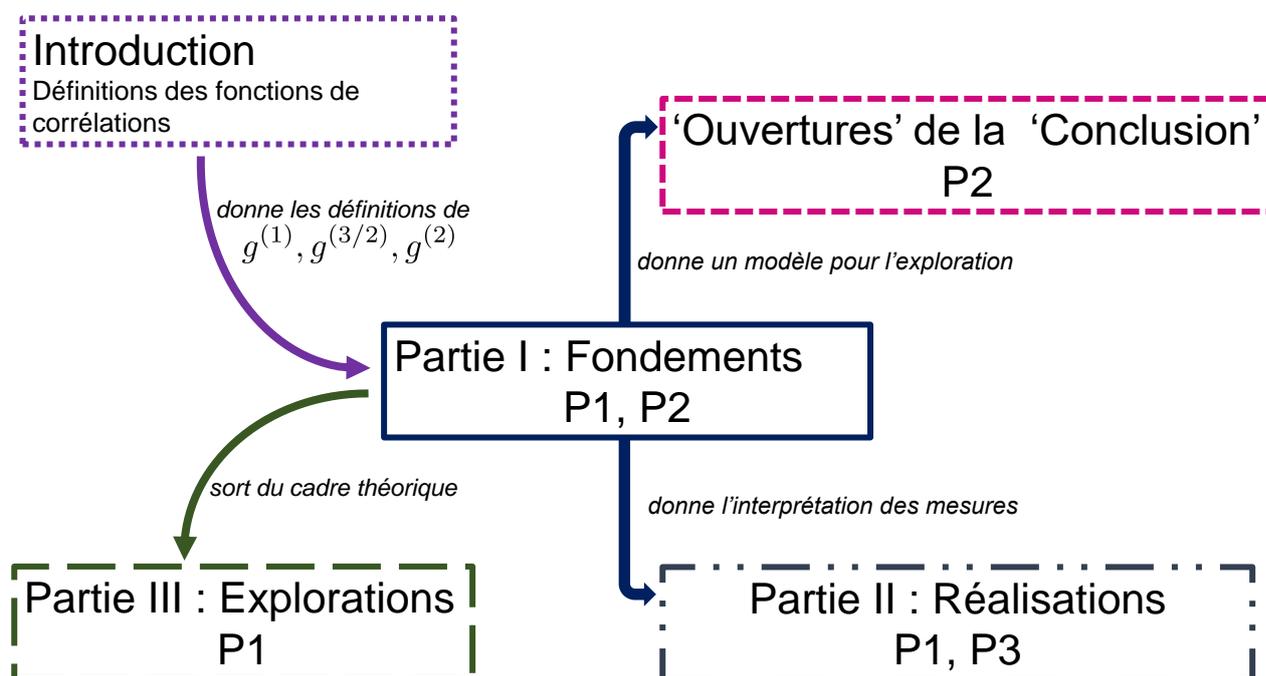


FIGURE 1 – Résumé synoptique du plan général de la dissertation. Les différentes problématiques P1, P2, et P3, abordées dans chaque partie sont notifiées.

État de l’art et Motivations

Avant de traiter d’une découverte paléontologique, il convient de prendre en compte différents facteurs : le temps, l’espace et la morphologie, je veux dire l’âge géologique du sédiment dans lequel la découverte a été faite [...] enfin, bien sûr, le stade évolutif atteint par le fossile recueilli.

Le présent du passé, Yves Coppens.

Le titre l’indique ; cette partie se scinde en deux. Un premier développement regroupe les parties III. et IV.. La partie V. constitue le deuxième.

Les travaux d’Hanbury Brown (qui était un physicien radio-astronome) et Twiss (qui était mathématicien spécialiste du radar), ainsi que quelques problématiques auxquelles ils ont du faire face, sont présentés dans la partie III. de manière succincte. L’état de l’art depuis le milieu des années 2000, qui est un héritage des travaux d’Hanbury Brown et Twiss, suit partie IV..

La deuxième partie V. donne les motivations physiques derrière chacune des trois parties “Fondements”, “Réalizations”, et “Explorations” de la dissertation. Certaines de ces motivations permettent d’expliquer des avancées reportées dans l’État de l’art partie IV..

Plusieurs termes techniques sont employés, le lecteur trouvera leur définition rigoureuse dans le glossaire clôturant cette Introduction, ou dans les chapitres concernés par le sujet.

III. Un peu d’histoire

Un corrélogramme stellaire (ou corrélogramme d’intensité en général) permet de mesurer les corrélations temporelles et/ou spatiales de l’intensité (énergie) d’une onde électromagnétique, avec, en pratique, une bande passante limitée. Un schéma de principe est donné figure 5. Le principe est exposé de manière détaillée avec le point de vue de la physique classique dans [32] chapitre 6 section 6.3, et avec un modèle semi-classique de la photo-détection chapitre 9 section 9.5 . Les sections 9.9 et 9.10 du chapitre 9 de [33], donnent également les éléments clefs avec un traitement semi-classique. L’article [34] est une introduction quasi-autonome sur le sujet. La section 17.4.3 du chapitre 17 de [35] donne une description quantique claire sur le phénomène. Les ouvrages [36, 37] d’Hanbury Brown retracent en détail l’histoire des idées ayant amené à cette innovation pour l’astrophysique et l’astronomie. Ce qui suit n’en est qu’un résumé concis et incomplet.

III..1 Origines dans le domaine radio à cause d’une mauvaise prédiction

L’idée de mesurer les corrélations dans l’énergie résidant dans une radiation stellaire, fut proposée pour la première fois par le physicien radio-astronome Hanbury Brown en 1949 [36] section 1.2, dans la finalité de mesurer les tailles angulaires des deux sources radio très intenses (à l’époque les plus intenses après le Soleil) : la *radiogalaxie* Cygnus A (Cyg A), et un *rémanent*

de *supernova* Cassiopeia A (Cas A). Les tailles de ces deux sources n'étaient pas connues mais semblaient être telles que la mesure n'aurait pas été accessible avec la radio-interférométrie d'amplitude classique. L'idée de la mesure du diamètre angulaire par corrélation d'intensité fut théorisée mathématiquement avec l'aide du mathématicien Twiss au début des années 1950. Hanbury Brown et Twiss sont référés ci-après par l'acronyme "HBT". Le corrélogramme stellaire radio fut mis au point et la mesure effectuée à l'observatoire de Jodrell Bank en 1952 [38]. Il s'avèrera alors que la mesure aurait pu être réalisée avec la radio-interférométrie d'amplitude classique, et le résultat fut confirmé la même année par deux mesures indépendantes, à Sydney et à Cambridge, [39, 40] utilisant précisément la radio-interférométrie d'amplitude classique. L'innovation d'HBT n'aura pas été vaine car la confrontation des deux méthodes donnant les mêmes résultats, confirmait la pertinence et la faisabilité de cette nouvelle technique pour la radio-interférométrie [41]. Sans la chance que la borne supérieure du diamètre angulaire prédit ait été fausse, et sans la confirmation des résultats par la radio-interférométrie d'amplitude classique, il n'est pas garanti que le succès de l'innovation d'HBT eut été le même [37]. Plus encore. Les deux sources radio scintillaient violemment à cause de l'interaction de la radiation radio avec la ionosphère (pour une explication simple du phénomène voir par exemple [42] section 14.1.), mais cela n'affecta pas la mesure [38]. Cette observation révéla en fait la remarquable propriété des corrélogrammes stellaires à ne pas être limités par l'effet d'un milieu turbulent sur la radiation détectée, voir table 4.

III.2 Avant la transposition au domaine visible

L'idée fût ensuite de transposer le principe au domaine visible [36]. Dans le domaine visible la fréquence est typiquement un million de fois plus grande que dans le domaine radio. Par conséquent, le quanta d'énergie correspondant à l'excitation élémentaire d'un mode de pulsation ω de la radiation (photon), égal à $\hbar\omega$, est plus important des mêmes ordres de grandeur. Ainsi à égale intensité mesurée (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$), avec une même résolution temporelle $\delta t_s = 1/f_i$ (où f_i est la bande passante de la détection), sur une même durée d'observation T_0 , le nombre de photon par δt_s d'un mode de pulsation dans le visible est en moyenne typiquement un million de fois plus faible que le nombre de photon d'un mode de pulsation radio. La figure 2 schématise de manière imagée cette différence. Cela dépend bien sûr de la luminance de la source, mais, dans le domaine visible, les temps d'attente entre photons détectés sont plus grands que la résolution temporelle de la détection actuelle, même pour des cibles de magnitude élevée. Par exemple, pour une étoile de magnitude relative zéro (Véga [alf Lyr]), avec un détecteur de surface 1m^2 , dans le visible le nombre de photon par δt_s est de 10^{-4} , voir par exemple [43] section 7. Par conséquent, tous les échantillons δt_s ne contiennent pas d'information physique, et la mesure est limitée par les photo-électrons générés en l'absence des photons d'intérêt. Cette génération de faux photo-événements est modélisable par un processus de Campbell (voir chapitre 3 partie II.) et donne le bruit de grenaille ("shot-noise" en anglais). Dans le domaine radio, le signal résultant de la mesure des corrélations d'intensité est uniquement dû aux corrélations d'intérêt (référées quelques fois par HBT par le terme "wave interaction noise"[44]), et est limité uniquement par la taille de l'échantillon des valeurs d'intensité crées. Dans le domaine visible, les corrélations d'intérêt sont superposées à celle des faux photo-événements, la taille de l'échantillon des valeurs d'intensité n'est plus le seul facteur limitant ; c'est surtout le bruit de grenaille qui limite la mesure des corrélations d'intensité. Ainsi, le nombre de photons d'intérêt détecté est un paramètre critique, et tout ce qui peut être fait pour l'augmenter, augmente le rapport signal sur bruit (RSB) de la mesure. En particulier, au premier ordre du raisonnement, augmenter la taille du collecteur augmente le rapport signal sur bruit. La *densité ν de (vrais) photo-événements* par détecteurs (ν est une quantité homogène à une fréquence, elle est définie au chapitre 3) est proportionnelle à la surface du collecteur donc à son diamètre D_T au carré (si celui-ci est circulaire). C'est là une différence avec le domaine radio ; dans le domaine radio si la taille du radio-télescope est suffisante pour définir une température effective à partir du signal de la source (pour la définition

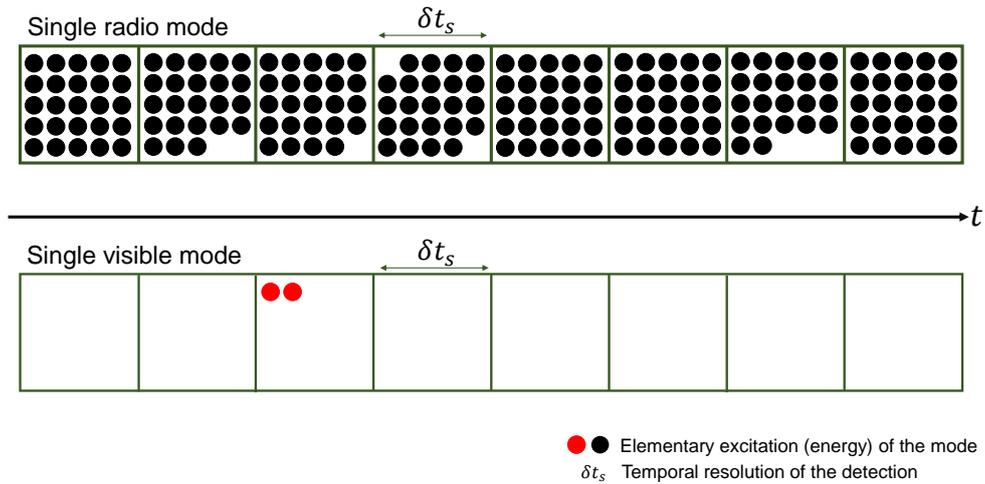


FIGURE 2 – Comparaison imagée du nombre de photons présents dans une durée égale à la résolution minimale δt_s de la détection, pour une radiation dans le visible et pour une radiation radio, de même intensité.

voir par exemple [42] section 1.2.3.), augmenter sa taille ne changera pas la température effective, et donc n'influera pas sur le rapport signal sur bruit. Dans le domaine radio, le RSB est limité par la taille $T_0 f_i$ de l'échantillon créé durant la durée d'observation T_0 (voir par exemple [42] section 1.2.3.). La table 1 résume les quelques différences soulignées dans ce paragraphe, entre le domaine visible et le domaine radio. Remarque. La dépendance du RSB de la mesure des corrélations d'intensité (et non juste de l'intensité) avec le diamètre des collecteurs, est un peu plus subtile dans le visible (voir section IV..1) : HBT démontrent qu'il existe en fait un diamètre de télescope optimal (à partir du quel le RSB est maximal), voir [45] section 5.1.

	Radio	Visible
fréquence (typ.)	$\sim 100\text{MHz}$	$\sim 100\text{THz}$
énergie des photons (typ. dans le vide)	$\sim 0,4\mu\text{eV}$	$\sim 0,4\text{eV}$
bruit de grenaille dans une mesure d'intensité ("shot noise")	Négligeable	Non Négligeable
Rapport Signal sur Bruit d'une mesure d'intensité	$\propto \sqrt{T_0 f_i}$	$\propto \sqrt{\nu} \propto D_T$

TABLE 1 – Quelques différences pratiques entre le domaine radio et le domaine visible.

III..3 Les premiers corrélomètres stellaires dans le visible

La première étape a été d'élaborer la modélisation mathématique en présence du bruit de grenaille, de justifier l'excès de corrélation avec un traitement semi-classique, et de calculer le RSB attendu [44]. Ensuite il a fallu tester le principe en laboratoire [46, 47]. La source utilisée était une lampe à décharge au Mercure purifiée isotopiquement, filtrée spectralement, et spatia-

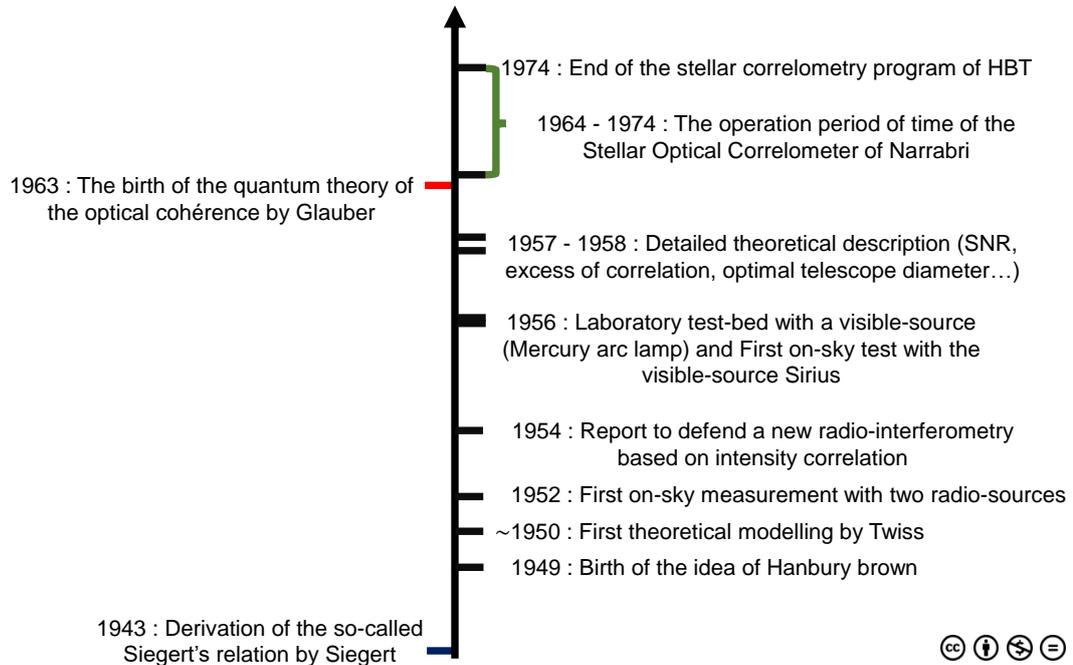


FIGURE 3 – Années charnières dans les travaux d’HBT.

lement avec un diaphragme qui fixait la taille de la source. Pour donner un ordre de grandeur : un diaphragme de diamètre $100\mu\text{m}$ observé à 23m donne un diamètre angulaire environ égal à une arcseconde. La lampe à décharge a été choisie, à défaut d’une lampe à filament, afin d’avoir une source la plus chaude possible pour maximiser le RSB en une durée d’observation donnée (en 1956-58 les lasers n’étaient pas encore présents, le premier effet laser est obtenu par Maiman en 1960). La détection se faisait à l’aide de deux tubes photo-multiplificateurs séparés d’une distance variable mimant la longueur de base. Le résultat, publié avant les études détaillées [44, 47], fut convainquant [46].

Le calcul du RSB fut ensuite affiné par rapport à l’étude [44]. Dans l’article [45], HBT démontrent l’existence d’un diamètre de télescope optimal (à partir duquel le RSB n’augmente plus), et une limitation des étoiles accessibles, paramétrée par la température de celles-ci ([45] figure 6).

Toujours en 1956, HBT menèrent ensuite un premier test en conditions réelles sur l’étoile Sirius (alf CMA), avec deux collecteurs de 1,56m de diamètre [48, 49]. Les conditions d’observation étaient loin d’être idéales [48], mais la robustesse de la mesure face à la turbulence, déjà remarquée lors des mesures de l’année 1952 sur Cygnus A et Cassiopeia A, se confirma [48].

Ce premier corrélogramme stellaire opérant dans le visible donna lieu à une version plus ambitieuse avec des collecteurs de diamètre 6,5m (plus de quatre fois la taille des collecteurs utilisés sur Sirius) : le corrélogramme stellaire de Narrabri, en Australie. Ce corrélogramme présentait la particularité d’avoir des télescopes se déplaçant sur une base (de rails) circulaire de diamètre 188m (donc donnant la possibilité d’atteindre des bases de 188m), tout en conservant les bases projetées constantes du fait de la géométrie circulaire [50, 51, 52]. Le corrélogramme stellaire de Narrabri opéra dans le visible de 1964 à 1972, et a permis d’élaborer le premier catalogue de mesure de diamètres angulaires consistant. Ce catalogue était composé de 32 étoiles de type spectral de O5 à F8 [53]. La figure 3 résume les années charnières des travaux d’HBT. La relation de Sievert [54, 55] est la relation qui relie la corrélation d’intensité au degré complexe de cohérence pour *un champ chaotique au sens de Glauber* (dont la définition est rappelée dans la sous-partie V.1), sans laquelle la méthode d’HBT n’aurait pas lieu d’être (voir chapitre 2 sous-partie III.3, table 2.1).

IV. Les corrélomètres stellaires aujourd'hui

L'innovation d'HBT ébranla les certitudes ; l'excès de corrélation dans l'intensité pour des temps proches de zéro, et la subséquente apparition d'un temps de cohérence dans la fonction $g^{(2)}(\tau)$ mesurée (pour une base donnée), provoqua polémique et suspicion [36]. Une bonne part des critiques reposait sur le fait que les fluctuations d'intensité attendues devaient être Poissonniennes (auquel cas effectivement il n'y pas d'excès de corrélation, voir (24) dans la dernière partie de l'Introduction) [36]. Une tentative d'explication positive indiqua que l'opération de filtrage, comme ayant lieu dans [46] par exemple, était responsable de cet excès de corrélation [56]. Il est reconnu aujourd'hui que l'excès de corrélation est lié uniquement à la nature stochastique du champ, et que l'opération de filtrage spectral ne la modifie pas. Ce sont les travaux de Glauber sur la cohérence quantique du champ électromagnétique, par exemple regroupés dans le recueil [57], initiés en 1963 [58], qui ont été la clef dans l'explication de l'excès de corrélation observé. Les travaux de Glauber sont à la base d'une nouvelle discipline de la physique : l'optique quantique [59]. Les corrélomètres stellaires d'aujourd'hui bénéficient de ce cadre théorique, de part la modernisation des détecteurs que l'optique quantique a apporté indirectement (voir la table 5 dans le dernier paragraphe de la partie V..2), et de part les caractérisations que la quantité $g^{(2)}(\tau)$ (la fonction mesurée par un corrélomètre stellaire) permet désormais de faire sur la nature de la radiation.

IV..1 Développements en laboratoire

Les développements en laboratoire ont servi à mettre au point des corrélomètres d'intensité digitalisés. Le développement des corrélomètres en configuration $g^{(2)}(\tau)$ (corrélations temporelles de l'intensité) a permis d'accéder à des temps de cohérence sub-nanosecondes [60], et de montrer qu'il est possible de caractériser des raies spectrales très fines [61]. Le développement des corrélomètres en configuration $g^{(2)}(\tau, \rho)$ [62] a permis de confirmer le potentiel des corrélomètres stellaires pour l'imagerie astronomique à ultra-haute résolution angulaire, déjà étudié théoriquement, par exemple dans [63, 64].

Le couplage des nouveaux *photo-compteurs*, apparus au milieu des années 2000 (voir la table 5 de cette Introduction, ou la partie haute de la table 1 dans [65], ou encore la table II dans [66]), avec des *convertisseurs temps-digital* (voir par exemple le bas de la table I de [65]) a permis de moderniser la version du compteur de coïncidences d'HBT (voir sections 4.3 et 6.2 de [36] ou l'annexe B dans [45]). L'aspect instrumental est discuté plus longuement dans la sous-partie V..2 suivante. Les paragraphes suivants développent les avancées obtenues en laboratoire.

Développements en laboratoire concernant la mesure de $g^{(2)}(\tau)$.

L'expérience d'HBT [46] a été répétée avec des photo-diodes à avalanche au silicium (SLiK) en mode Geiger (mode photo-compteur), et un oscilloscope digital de résolution temporelle de l'ordre de la nanoseconde dans le rôle du corrélateur [67]. Ce travail fût fondateur dans l'étape de modernisation, car il a démontré la faisabilité de la mesure absolue de $g^{(2)}(0)$ pour trois sources émettant un champ chaotique ("au sens de Glauber", omis ci-après) : une lampe à décharge au Mercure, un arc électrique d'Argon, et le soleil [67]. Ce travail fût suivi d'une étape de modernisation supplémentaire [60], où le corrélateur est devenu un *corrélateur digital* (composé d'un convertisseur temps-digital, ou TDC pour "Time to Digital Converter", et d'un ordinateur) et les photo-détecteurs sont devenus des modules photo-compteurs ("Single Photon Counting Module"). Ces modifications ont permis d'atteindre une résolution temporelle sub-nanoseconde (limitée par la résolution temporelle de l'ensemble du corrélomètre qui est de l'ordre de quelques centaines de picosecondes, voir chapitre 4). La mesure a ainsi pu être effectuée avec un champ chaotique de temps de cohérence d'environ un dixième de nanoseconde, sans filtrage spectral [60]. La mesure de $g^{(2)}(\tau)$ en laboratoire a également été menée dans le but d'examiner si la présence de raie spectrale pouvait être mise en évidence dans un continuum de rayonnement

chaotique [61]. Il s'avère de plus que la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour faire de la spectroscopie [68] est d'autant plus pertinente que la raie spectrale est fine [69, 61]. Enfin, l'effet de la turbulence sur une mesure de $g^{(2)}(\tau)$ a également été évalué [70], cet aspect est abordé un peu plus en détail dans la sous-partie V..2.

Développements en laboratoire concernant la mesure de $g^{(2)}(\tau, \rho)$.

La mesure $g^{(2)}(\tau, \rho)$ pour différents ρ permet d'accéder, via la relation de Siegert, au module du degré complexe de cohérence $g^{(1)}$ et à la visibilité proportionnelle à $g^{(1)}(0, \rho)$ (voir un exemple figure 8, la définition est par exemple donnée au chapitre 4, équations (4.33), (4.34)).

Le développement des corrélomètres stellaires à partir de tests en laboratoire est rendu possible grâce à l'apparition des lasers (relativement récente >1960). L'utilisation des lasers permet en pratique de simuler une mesure sur une cible réelle, avec un RSB donné, en un temps record. En effet, en utilisant une radiation laser diffusée par des particules en mouvement brownien (en mouvement dans un réservoir canonique à la température T), il est possible de créer une radiation chaotique (situation très similaire à celle qui est envisagée au chapitre 2, le terme chaotique sera défini dans la sous-partie V..1 suivante) avec une température équivalente corps noir de 10^5K en pratique [62]. Cette température corps noir est plus de 15 fois supérieure à celle d'environ 5500K obtenue avec une lampe à décharge, comme celle utilisée par HBT dans leur test en laboratoire en 1956 [46]. En conséquence, pour chaque base donnée en laboratoire l'acquisition ne dure plus qu'une minute [62], alors qu'elle durait environ 4heures avec une lampe à décharge [46, 47] ou [36] section 6.1.3.. La table 2 résume ces différences. Les deux paragraphes

	Dravins, Lagadec et Nuñez [62]	HBT [46, 47]
Température du rayonnement équivalente corps noir	$\sim 100000\text{K}$	$\sim 5500\text{K}$
Durée d'acquisition par base ρ	$\sim 1\text{min}$	$\sim 4\text{h}$

TABLE 2 – Modernisation des tests pour les corrélomètres stellaires en laboratoire.

suivants donnent la raison qui explique les différences de la table 2, et la raison pour laquelle la température du rayonnement est le paramètre clé dans le RSB de la mesure de $g^{(2)}(\tau, \rho)$.

L'influence de la température du rayonnement sur le RSB est détaillée de manière complète et quantitative dans [45]. Cependant, il est possible d'en comprendre qualitativement la raison, par exemple une explication claire et concise est donnée dans [71] section 3.3, qui est reprise dans [62] section 4.2. Cette explication qualitative s'articule autour des deux options logiques pour augmenter la densité de photo-événement ν par détecteur.

- La première est l'augmentation de ν via l'élargissement de la largeur spectrale. Dans l'absolu, l'augmentation de ν réduit l'impact du bruit de grenaille sur le RSB. Cependant, l'élargissement spectral réduit également le temps de cohérence τ_{cor} présent dans $g^{(1)}$ du même facteur (dualité temps-fréquence). Le temps de cohérence dans $g^{(2)}$ qui est proportionnel au temps de cohérence de $g^{(1)}$ (relation de Siegert), est également réduit du même facteur. Or, chaque valeur mesurée des corrélations de l'intensité, avec une résolution temporelle de σ , correspond en fait à une moyenne des corrélations sur cette résolution σ . Ainsi, lorsque le temps de cohérence diminue, l'excès de corrélation, présent sur une échelle de l'ordre du temps de cohérence, voit sa pondération dans cette moyenne sur σ réduite d'autant que le temps de cohérence est diminué. Le paramètre \mathfrak{C} défini par

$$\mathfrak{C} := \frac{\tau_{\text{cor}}}{\sigma}, \quad (1)$$

qui s'interpréterait comme le nombre de valeurs mesurées de $g^{(2)}$ dans τ_{cor} s'il n'était pas très petit devant un en pratique, diminue et s'écarte du cas idéal où $\mathfrak{C} \geq 1$. Ainsi,

l'élargissement de la largeur spectrale augmente ν mais réduit la pondération de l'excès de corrélation, et en conséquence le RSB de $g^{(2)}$ ne s'améliore pas. De manière quantitative (mais un peu anticipée à ce stade, cela invoque des résultats du chapitre 3), en supposant que l'augmentation de la largeur spectrale d'un facteur x augmente ν du même facteur, l'expression obtenue pour le RSB en injectant (3.61) dans l'expression adéquate de la table 3.1, avec la limite $\sigma_h \gg \sigma_\tau \sim \tau_{\text{cor}}$ (i.e. : la résolution temporelle du corréloètre limite la mesure), dévoile clairement que le RSB reste inchangé lorsque la largeur spectrale augmente.

- La deuxième est d'agrandir le diamètre D_T des collecteurs (en laboratoire ou en observation astronomique). Cette option augmente ν sans modifier le temps de cohérence de $g^{(2)}$. Cependant, lorsque D_T n'est plus négligeable devant la longueur de cohérence ρ_c présente dans la visibilité $\propto g^{(1)}(0, \rho)$ (voir un exemple en figure 8), la corrélation des intensités qu'ils collectent correspond, non plus à un point sur la courbe de $g^{(1)}(0, \rho)$, mais à une moyenne sur la zone de $g^{(1)}(0, \rho)$ correspondant à leur diamètre. Il existe ainsi un diamètre optimal à partir duquel le RSB de $g^{(2)}(0, \rho)$ n'augmente plus, mais au contraire diminue (voir [45] pour plus de détails). Autrement dit le paramètre

$$\mathfrak{R} := \frac{D_T}{\rho_c}, \quad (2)$$

doit rester petit devant 1.

En conclusion, l'augmentation du RSB de la mesure de $g^{(2)}(\tau, \rho)$ peut se résumer comme suit :

Augmenter ν en augmentant ou en laissant inchangé \mathfrak{C} , et en gardant $\mathfrak{R} \ll 1$.

Fondamentalement, cela revient à augmenter le nombre de photons dans un mode, tout en conservant ce seul mode de pulsation ω , c'est à dire : augmenter la densité énergétique spectrale ρ_ω (schématiquement avec la figure 2 cela revient à augmenter le nombre de points dans une case). Si l'observateur souhaite mimer une photosphère de type surface noire en laboratoire tout en augmentant le RSB de la mesure, un moyen est d'augmenter la température T de la source de rayonnement noir utilisée en laboratoire (parfois appelé *rayonnement thermique* ou *de type corps noir*), car la densité énergétique spectrale s'écrit alors

$$\rho_\omega(\omega; T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}. \quad (3)$$

De manière plus précise, HBT ont calculé la dépendance exacte du RSB avec la température corps noir de la cible, dans une configuration du corréloètre stellaire à deux télescopes (avec un diamètre optimal pour chaque température), voir [45] figure 6. Cette figure est reprise ici figure 4 pour faciliter la lecture.

La deuxième étape est de rendre compte de la température équivalente corps noir d'une radiation laser. A sa fréquence d'émission, un laser permet d'obtenir des luminances énergétiques spectrales (puissance rayonnées par unité de surface, d'angle solide et de fréquence) équivalentes à celles d'un corps noir porté à une température très élevée. La température équivalente "corps noir" d'un laser peut s'estimer comme suit. Un élément de surface dS d'un corps noir émet dans sa direction normale, dans un élément d'angle solide $d^2\Omega$ et dans la bande de pulsation $[\omega, \omega + d\omega]$ une puissance élémentaire

$$dP = \rho_\omega(\omega; T) c d\omega dS \frac{d^2\Omega}{4\pi},$$

où ρ_ω est la densité énergétique spectrale donnée par (3). Un moyen d'exprimer une relation qui relie plus simplement puissance rayonnée et température, est de considérer le rayonnement dans un cône de demi-angle au sommet $d\theta$ de sorte que $d^2\Omega = \pi(d\theta)^2$. En posant

$$dP_0 = \frac{\hbar\omega^3}{(2\pi c)^2} d\omega dS (d\theta)^2,$$

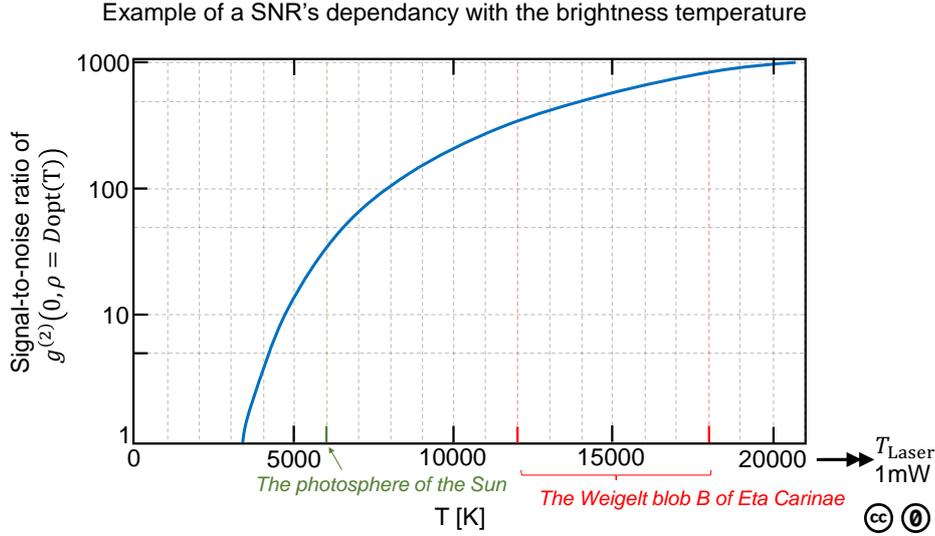


FIGURE 4 – Figure adaptée de [45]. Calcul de la dépendance du RSB de la mesure de $g^{(2)}(0, D_{\text{opt}}(T))$, pour une heure d’observation d’une cible disque circulaire uniforme de longueur d’onde $\lambda_{\text{eff}} = 540$, située au zénith de l’observateur, pour un corrélomètre à deux miroirs circulaires de diamètre optimal $D_{\text{opt}}(T)$ pour chaque température corps noir T , sans fond d’éclairage parasite, avec les paramètres de résolution temporelle donnés dans la section 4 de [45]. La température de 10^5K est cinq fois plus grande que la valeur maximale de la plage de températures représentées. Le “Weigelt blob” B d’Eta Car est décrit figure 6 de l’Introduction.

il vient :

$$T = \frac{\hbar\omega}{k_B} \frac{1}{\ln\left(\frac{dP_0}{dP} + 1\right)}. \quad (4)$$

Avec (4), un laser He-Ne ($\lambda \simeq 633$ nm, soit $\omega \simeq 29,8 \cdot 10^{14}$ rad/s) de largeur de raie $d\lambda = 0.01$ Å, soit $d\omega = 4,70 \cdot 10^9$ rad/s, émettant $dP = 1$ mW dans un cône de demi-angle au sommet $d\theta = 0.1$ mrad à partir d’une surface de $dS = 1$ cm² (exemple adapté pour reproduire un diamètre angulaire stellaire), conduirait à une température équivalente corps noir de

$$T_{\text{Laser}} \simeq 6 \cdot 10^9 \text{ K}. \quad (5)$$

Pour mimer en laboratoire une photosphère assimilée à une surface noire de température très élevée, il ne reste plus qu’à transformer la radiation laser en une radiation chaotique, ou du moins qui donne un $g^{(2)}(\tau)$ avec un excès de corrélation autour de $\tau = 0$. Remarque. Le rayonnement noir est rigoureusement une radiation chaotique, voir par exemple [14] chapitre 13. En pratique, un moyen de créer une radiation chaotique à partir d’une radiation laser, est de faire diffuser la radiation laser sur des particules en mouvement brownien, dans un gaz ou dans un liquide, voir par exemple [62, 61]. Chaque particule diffusante se comporte alors comme un oscillateur harmonique (à la pulsation du laser) indépendant des autres en bonne approximation. La diffusion réduit la température du rayonnement (5) de manière non-négligeable, mais la température résultante est toujours très élevée : typiquement 10^5K [62, 61], relativement aux températures surfaciques des photosphères les plus chaudes connues ; par exemple entre 12000K et 18000K pour les “Weigelt blobs” d’Eta Carinae, voir figure 6.

IV..2 Un mode d'observation pour CTA ?

Un réseau de corrélomètres stellaires donnant accès à plusieurs bases de longueur et d'orientation très différentes, simultanément, est en principe un moyen pour mesurer le module du degré de cohérence complexe $g^{(1)}$ avec un grand nombre de point de mesure, sur deux dimensions, et de manière consistante (sans avoir de considérations quant à la variabilité de la cible). Autrement dit, cela permettrait d'avoir un maillage dense du plan (u,v) des fréquences spatiales, consistant, pour lequel il y aurait une carte de valeurs $g^{(2)}(0, \rho)$ et donc de valeurs du module de la visibilité $\propto g^{(1)}(0, \rho)$ (relation de Siegert). Cela permettrait en particulier de réduire l'incertitude sur des paramètres de fit comme la distance, et/ou le diamètre angulaire de la cible, ou par exemple l'exposant dans le modèle d'assombrissement centre-bord (6) (cet aspect est abordé dans la sous-partie V..2 suivante).

Le projet CTA (“Cherenkov Telescope Array”) [72, 73] avec ses dizaines de télescopes de diamètres allant de 4m à 23m, fournirait un tel réseau de corrélomètres stellaires, et ce avec des lignes de bases kilométriques. Ce potentiel a été identifié dès 2006 [74] et semble être le déclencheur du renouveau des corrélomètres stellaires [75, 34]. Un consortium est né pour utiliser le maillage de télescopes du projet CTA comme un réseau de corrélomètres stellaires [76]. Le réseau de CTA offrirait une résolution angulaire largement sub-milliarcesconde ; par exemple une ligne de base de 2km de CTA, avec un corrélomètre stellaire opérant à $\lambda = 400\text{nm}$, offrirait une résolution franchement sous la centaine de micro-arcsecondes, ce qui serait une résolution sans précédent [77, 78].

Plusieurs travaux théoriques ont déjà été menés pour déterminer les objets d'intérêt qui pourraient être observés [63, 64], les phénomènes et lois physiques qui pourraient être étudiés [79, 80], et les limitations dues aux bruits [81]. Ces travaux bénéficient en partie d'une confirmation en laboratoire [71, 62], et également en conditions d'observation réelles [82] avec les paires de télescopes de 12m de diamètre de VERITAS [83] (acronyme de “Very Energetic Radiation Imaging Telescope Array System”) (Mt.Hopkins, Arizona) avec des lignes de bases entre 34 et 109m. Des efforts conséquents, par exemple [84, 85, 86], ont été menés au VERITAS pour tester la faisabilité d'un corrélomètre stellaire avec des collecteurs du même type que ceux de CTA, sur une ligne de base nommée “StarBase”, initiée en 2010 [87], spécifiquement dédiée à la corrélation d'intensité.

Cependant, les télescopes CTA ne sont pas faits pour être limités par la diffraction et ont une ouverture numérique très grande [72]. Bien que la qualité du front d'onde ne limite pas in fine la mesure de $g^{(2)}$ (discuté en sous-partie V..2, voir aussi table 4), il faut tout de même pouvoir injecter la radiation collectée dans les modules opto-mécaniques couplés aux télescopes (du type présenté au chapitre 4). La diffraction et l'ouverture numérique très grande (devant l'ouverture numérique d'une fibre optique par exemple) rendront difficile la réalisation pratique de corrélomètres stellaires à partir du réseau CTA [88].

IV..3 Corrélomètres stellaires avec les télescopes existants

Le développement des corrélomètres stellaires dans le visible a suivi une autre approche, peu après la suggestion d'utiliser CTA pour ce faire (en 2006 [74]). Cette approche consiste à utiliser les télescopes déjà en place pour les transformer en corrélomètre stellaire.

Le groupe de l'observatoire astronomique de Padova, sur le site d'observation astronomique du plateau d'Asiago [89] fût le premier à suivre cette voie. Leurs travaux donnent suite au projet QuantEye initié en 2005 [90], qui visait à implémenter l'instrumentation de l'optique quantique dans des applications astronomiques. Dès 2007 [91], la première mesure astronomique avec un télescope (le télescope Copernicus) couplé à un module photo-compteur de haute technologie “Aqueye” (pour “Asagio QUantum EYE”) [92] fut réalisée. Puis, une deuxième avec un module photo-compteur amélioré : “Iqueye” (pour “Italian QUantum EYE”) [93]. Ces avancées ont montré la possibilité d'observer l'excès de corrélation dans $g^{(2)}(\tau)$ avec un télescope couplé à

des photo-compteurs modernes pour la première fois, sur le télescope NTT (acronyme de “New Technology Telescope” en anglais) de l’ESO au Chili à La Silla [94]. En 2015, une nouvelle version du photo-compteur Aqueye, encore plus performante, est mise au point : Aqueye+ [95]. Avec Aqueye+ et Iqueye, un corrélomètre stellaire composé des télescopes Copernicus (1,82m de diamètre) et Galileo (1,22m de diamètre) séparés de quelques kilomètres, commencent à être mis au point en 2016 [96] ; c’est la première fois qu’un corrélomètre stellaire est envisagé avec une longueur de base kilométrique. A ce stade, il n’a pas encore donné de mesure sur cible réelle. En 2017, Pilyavsky et al. [65] ont simulé les résultats potentiels que des corrélomètres stellaires construits avec les télescopes de l’observatoire national de Kitty Peak [97] (Arizona, USA), de diamètres compris entre 0.4m et 4m, pourraient obtenir. Leur résultats démontrent que l’implémentation d’un corrélomètre stellaire sur les télescopes existant, avec des modules photo-compteurs commercialisés, permettrait de mesurer des diamètres d’étoiles de magnitude dans les bandes AB inférieure ou égale à 6, et ce avec une précision de 5% en une seule nuit d’observation [65].

Conclusion. La possibilité d’implémenter un corrélomètre stellaire sur des télescopes existants avec des photo-compteurs de haute technologie a été démontrée par le groupe du plateau d’Asagio [94, 96]. L’intérêt scientifique d’utiliser des télescopes existant a été appuyé par les simulations [65]. Un corrélomètre digital a été mis au point, à l’Institut Non Linéaire de Nice, avec des photo-compteurs commercialisés (par ExcelitasTM®) et a donné des résultats concluants [60]. Toutes ces raisons font que l’équipe I2C (“Intensity Interferometry at Calern”) [88, 98] s’est lancée dans le développement d’un corrélomètre stellaire opérant dans le visible avec les télescopes Omicron et Epsilon de C2PU [99]. Un premier succès en configuration $g^{(2)}(\tau)$ (un télescope) sur cible réelle en 2017 [100], a ouvert la voie, en 2018, à la première mesure de diamètres sur cibles réelles depuis le corrélomètre stellaire de Narrabri [101].

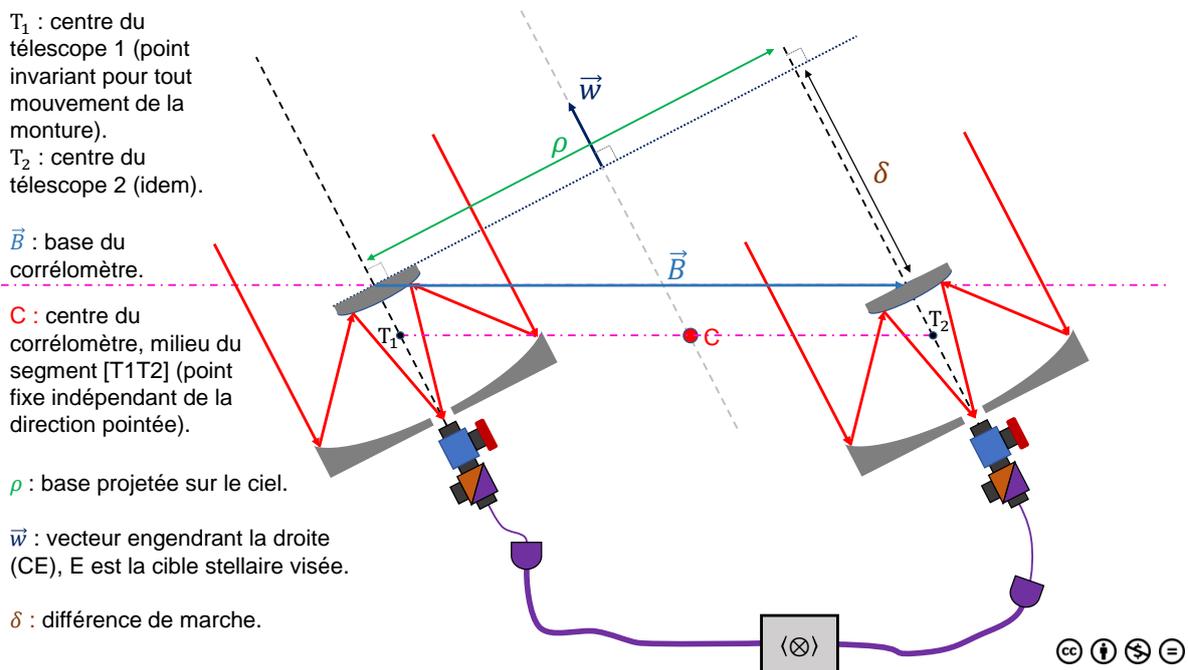


FIGURE 5 – Schématisation d’un corrélomètre stellaire opérant en configuration $g^{(2)}(\tau, \rho)$. Les détails sont donnés dans la légende de la figure 4.1.

V. Motivations

Etant donné l'état de l'art présenté dans la partie IV. précédente, cette partie justifie la pertinence des hypothèses très amonts considérées dans les différentes parties de la dissertation. Plusieurs termes techniques sont d'ores et déjà utilisés, et le lecteur trouvera leurs définitions précises dans les chapitres concernés ou dans le glossaire qui clôture cette Introduction. Au début de chaque chapitre de la dissertation les motivations sont affinées, la finalité est ici d'exposer une logique globale de la dissertation.

V.1 Partie I de la dissertation : “Fondements”

La partie I “Fondements” a pour finalité de comparer les trois premières *fonctions de corrélation temporelles*, notées $g^{(1)}$, $g^{(3/2)}$, et $g^{(2)}$, pour un champ électromagnétique résultant d'une situation physique d'intérêt en astrophysique. Ces fonctions de corrélation sont rigoureusement définies dans la partie suivante “Définitions des fonctions de corrélation utilisées”. La situation physique d'intérêt est liée à la problématique P1, et elle est précisée dans le paragraphe “choix de la situation physique”.

Par abus de langage, le terme “champ” sera employé pour “champ électromagnétique” ou “champ électrique”. Une définition rigoureuse de ce terme est donnée dans la partie suivante “Définitions des fonctions de corrélation utilisées”.

Choix de la situation physique

La situation physique considérée est motivée par la problématique P1, et sous-tend la question : Comment $g^{(1)}$, $g^{(3/2)}$, et $g^{(2)}$ rendent compte de la présence d'une radiation cohérente superposée, à l'endroit où se trouve l'observateur, à un fond radiatif chaotique au sens de Glauber ?

Un champ chaotique au sens de Glauber (“au sens de Glauber” sous-entendu ci-après) est un champ tel que son amplitude complexe soit un processus normal (complexe) [57] (chapitre 12, section 12.7 ou section 12.8).

La raison pour laquelle une radiation cohérente est envisagée est motivée par la suspicion d'existence de *lasers astrophysiques* [102, 103, 104] (plus de détails sont donnés chapitre 2, partie II.2). Ces lasers astrophysiques sont supposés exister en aval de l'étoile, sur le chemin étoile-observateur, dans des structures de leur milieu interstellaire. Voir un exemple figure 6, le mécanisme y est décrit dans la légende.

Soit un observateur ciblant, mais ne pouvant pas résoudre, le milieu interstellaire dont l'une des parties émettrait une radiation cohérente. La raison pour laquelle le fond radiatif chaotique est envisagé repose sur une hypothèse : le rayonnement du reste du milieu interstellaire est chaotique. Cette hypothèse est motivée par la diversité des processus de rayonnement possibles [113], couplée au principe de superposition et au théorème limite central.

La superposition des deux radiations, cohérente et chaotique, de même pulsation centrale, s'opère à l'endroit où se trouve l'observateur. Ces deux radiations sont émises par des zones bien distinctes du même milieu interstellaire, voir figure 6. Ce milieu interstellaire est supposé non résolu par l'observateur, et les deux radiations sont supposées se propager librement jusqu'à lui.

Une remarque générale sur le milieu interstellaire. En bonne approximation [114], le milieu interstellaire d'une supernovæ est triphasique. Lorsque la sphère d'influence gravitationnelle de l'étoile est suffisamment atténuée apparaît d'abord une zone de plasma dit coronal, c'est un plasma chaud (souvent de protons et d'électrons), résultant de la formation stellaire, dont la température est de l'ordre de 10^4 - 10^7 K. Ensuite, apparaît un gaz neutre composé de molécules simples (souvent du dihydrogène atomique). Enfin, un gaz froid formé d'autres molécules, qui peut parfois être ionisé. Ces trois phases de températures, de densités, et d'espèces chimiques différentes sont, quand il n'y a pas d'influences locales de la gravité, en équilibre de pression.

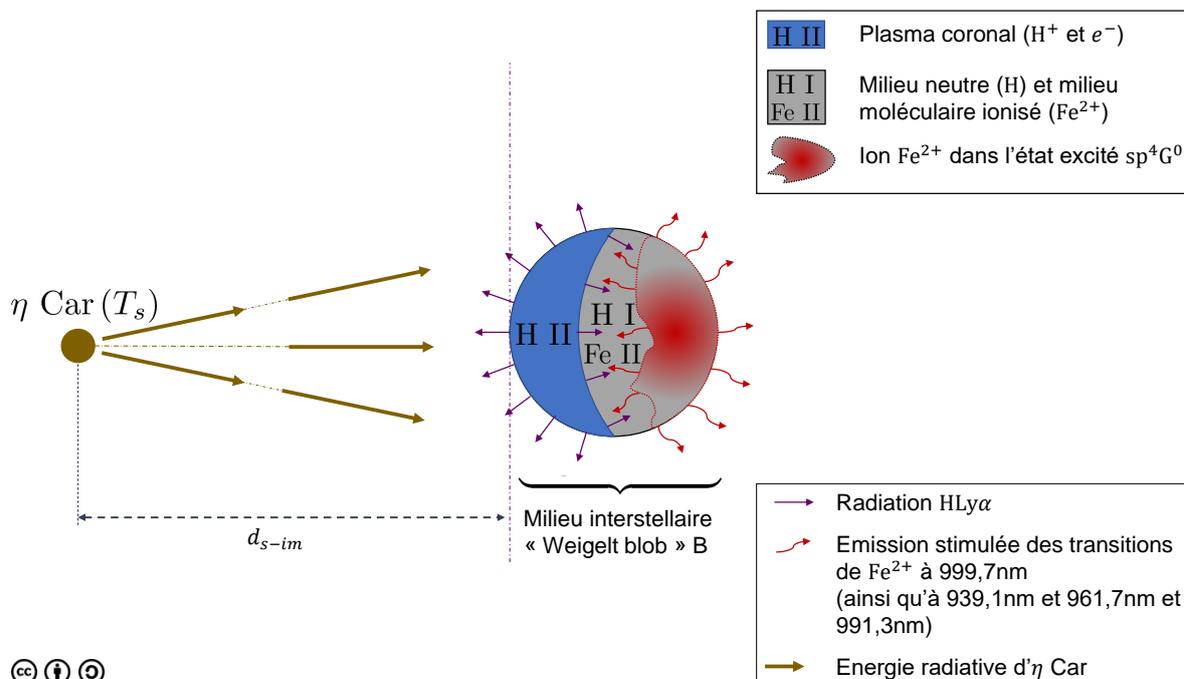


FIGURE 6 – Schéma d'un mécanisme de laser astrophysique construit sur l'exemple d'" η Carinae". Figure adaptée de [105]. La température de surface T_s de l'étoile η Car est comprise entre 36000K et 41000K [106, 107, 108]. Les parties du milieu interstellaire sont appelées Weigelt "blob" du nom du découvreur [109]. Ici il s'agit du Weigelt "blob" B, sphère d'un rayon estimé à 10^{17} m [110]. La température de surface du blob, est comprise entre 12000K et 18000K [105, 111], pour des densités variant de 10^{13} à 10^{16} particules par m^{-3} [111]. La dispersion moyenne des vitesses dans ce milieu interstellaire est de l'ordre de 10kms^{-1} [111]. La distance d_{s-im} est évaluée à $10^{18,3}$ m [112].

L'énergie radiative d' η Car provoque une transition Lyman- α des atomes d'hydrogène du milieu neutre [105]. Cette radiation Lyman- α , d'une part ionise les atomes de Fer pour créer des ions Fer II, et d'autre part s'élargit suffisamment en fréquence, après une certaine distance de propagation dans le milieu d'hydrogène et d'ions Fer II, pour pouvoir amener ces ions Fe II dans leur état excité sp^4G^0 [105]. Ce mécanisme se répète et l'inversion de population est maintenue, une transition laser apparaît alors à 999,7nm [105].

Cependant dans ce milieu, le bilan énergétique possède trois composantes à peu près égales : la turbulence et l'énergie cinématique, le rayonnement et l'énergie radiative, les rayons cosmiques et l'énergie de chauffage (particules d'énergie du GeV au TeV). Ce qui en fait donc un milieu avec des interactions complexes (aucune composante ne peut-être négligée devant les deux autres), et dont les sources de rayonnement potentielles, ajoutées à celles de l'étoile elle même, sont très diverses, voir par exemple [113]. Cette diversité laisse à penser que si une radiation cohérente existait, à une longueur d'onde donnée, au sein d'une partie du milieu interstellaire, ce ne serait certainement pas le seul processus de rayonnement engendrant cette longueur d'onde donnée.

Choix du champ chaotique (au sens de Glauber)

Il a déjà été rappelé qu'un champ chaotique (au sens de Glauber) est un champ tel que son amplitude complexe est un processus normal (complexe). Or, il existe une infinité de processus gaussiens complexes. D'un point de vue mathématique, pour caractériser un processus normal, il faut se donner sa fonction de covariance et son premier moment. Si ce processus est stable (i.e. dont les densités sont stationnaires), cela suffit, c'est une conséquence du théorème sur les moments d'un processus normal (ce théorème est mentionné au chapitre 2, partie III..1 avec plus de détails).

Le travail du physicien est donc de proposer une situation physique précise dans laquelle cette covariance et ce premier moment peuvent être déduits de lois naturelles portant sur la matière rayonnante et/ou sur le champ et sa propagation jusqu'à l'observateur. Un des moyens de former physiquement un champ chaotique est d'exploiter le théorème limite central (TLC, ci-après) et le principe de superposition appliqué à des contributions radiatives élémentaires. Cependant, même dans ce cadre, la subtilité du TLC généralisé est telle que plusieurs scénarios peuvent encore amener à un champ chaotique. Ces scénarios impliquent des mécanismes physiques très différents, notamment des situations d'équilibre tout comme des situations hors équilibre, au sens de la physique statistique de Boltzmann-Gibbs. La considération du cas général risque donc ici d'éloigner la modélisation d'une réalité physique, et il est plus prudent de choisir une situation physique donnant un champ chaotique particulier, et de s'y tenir.

Ainsi, l'étude est menée pour champ chaotique résultant du rayonnement d'une multitude d'oscillateurs harmoniques en mouvement brownien non-relativiste, dans un gaz support, relativement à un observateur inertiel. (La première forme du TLC assure la normalité de l'amplitude complexe associée à ce champ, et en fait donc un champ chaotique). L'*oscillateur harmonique* désigne une particule massive rayonnant un champ harmonique. Un modèle physique donnant un tel champ sera décrit sur les fondements du chapitre 1. Ce choix peut-être justifié par une description extrêmement grossière de la partie du milieu interstellaire qui rayonnerait ce champ : un gaz à l'équilibre thermodynamique canonique, dans lequel certaines de ses particules, en un grand nombre (devant un), en mouvement, rayonnent à la fréquence d'intérêt pour l'observateur (supposé inertiel) souhaitant mesurer $g^{(1)}$, $g^{(3/2)}$, et $g^{(2)}$. Cette modélisation très simpliste de l'équilibre du milieu interstellaire qui lui donne une température bien définie, est compatible avec l'hypothèse d'un rayonnement noir (ou rayonnement de corps noir), pour une définition précise voir par exemple [31] chapitre 5 section 63, ou [115] chapitre 13. Le rayonnement noir est rigoureusement un exemple de rayonnement chaotique, voir par exemple [14] chapitre 13.

Ce modèle, aussi surprenant que cela puisse paraître, est suffisant, avec la résolution temporelle du corrélogramme actuel, pour interpréter les mesures réelles et en laboratoire présentées en partie II "Réalizations". Si toutefois cette justification n'était pas suffisante pour le lecteur astrophysicien, il y a la possibilité de le justifier par la volonté de comparer les trois premières fonctions de corrélation temporelles du champ pour un système de la physique fondamentale qui permet un couplage champ-matière relativement simple. Par couplage champ-matière, il est ici sous-entendu que les fluctuations du champ sont considérées comme conséquences des lois et mécanismes qui expliquent le transport de la matière rayonnante. Le modèle développé dans le chapitre 1 permet ce couplage, et de part sa souplesse et son niveau de détails ouvre la voie à des

situations physiques plus sophistiquées, dont il sera question dans les “Ouvertures théoriques” de la Conclusion de cette dissertation.

Choix des trois premières fonctions de corrélations temporelles

Les raisons pour lesquelles ces trois fonctions sont considérées sont données dans ce paragraphe. Elles correspondent chacune à un moment différent du champ : d’ordre 2 pour $g^{(1)}$, d’ordre 3 pour $g^{(3/2)}$, et d’ordre 4 pour $g^{(2)}$, et :

- la transformée de Fourier de $g^{(1)}$ est connu sous le nom de spectre.
- $g^{(3/2)}$ est mesurée par un corrélomètre de la famille des *corrélomètres à adjonction de bruit*, technique développée dans les années 1960 [116], [117].
- $g^{(2)}$ est la corrélation de l’énergie résidant dans le champ (intensité).

La première motivation est purement mathématique, c’est un théorème. Un processus aléatoire (le champ électrique ici), est entièrement caractérisé par la hiérarchie de ses fonctions de corrélations (ou plutôt des densités de probabilités jointes associées), c’est un théorème, voir par exemple [118] chapitre 3 section 4. Donc, il faudrait idéalement travailler avec le plus de fonctions de corrélation possible, c’est à dire avec $g^{(n/2)}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. La figure 7 illustre l’intérêt de travailler avec plusieurs fonctions de corrélation, et deux exemples sont donnés ci-après.

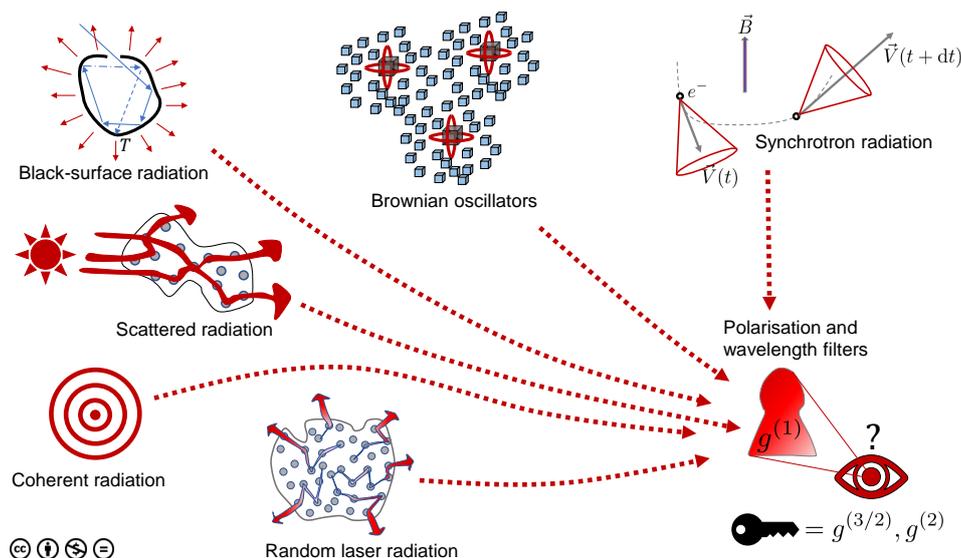


FIGURE 7 – Schématisation de quelques processus de radiation, et de l’impossibilité qu’à l’observateur de les distinguer par la seule donnée du spectre (dont $g^{(1)}$ est la transformée de Fourier). Figure adaptée de [119].

Premier exemple. Un champ chaotique et un champ cohérent, ou quasi-cohérent (laser conventionnel), peuvent avoir une fonction $g^{(1)}(\tau)$ identique. En effet, il suffit pour cela que le champ chaotique soit filtré spectralement, par un procédé quelconque, de sorte que son spectre (transformée de Fourier de la fonction $g^{(1)}(\tau)$) soit identique à celui du champ quasi-cohérent, et même cohérent si le filtre imaginé sélectionne une seule composante spectrale. La fonction $g^{(2)}(\tau)$ permet cependant de les différencier, voir la sous-partie IX. du glossaire “Définitions des fonctions de corrélation utilisées”. Pour une démonstration expérimentale voir par exemple les expériences pionnières [120, 121, 122].

Deuxième exemple. Soit un champ chaotique *classique*, i.e. dont les modules des deux quadratures sont indépendants et identiquement (normalement) distribués, et soit un champ chaotique *non-classique*, i.e. dont les modules des deux quadratures sont corrélés et/ou non-identiquement

distribués (de lois normales différentes). Ces deux champs sont de plus supposés avoir les mêmes constantes de temps dans leurs fonctions $g^{(2)}(\tau)$. Un champ chaotique non-classique est aussi appelé un état chaotique *comprimé* du champ (“squeezed chaotic state” en anglais), pour une définition claire (quantique) voir par exemple [123] chapitre 6 et 9. Alors, ces deux champs, de nature très différentes, ont en principe une fonction $g^{(2)}(\tau)$ identique, mais la fonction d’inter-corrélation intensité-champ $g^{(3/2)}(\tau)$, dont la transformée de Fourier est appelée *spectre de compression* (“squeezing”, ou “the spectrum of squeezing” en anglais), permet de les différencier, voir par exemple [124] section 2.4.

Ainsi, la fonction $g^{(2)}(\tau)$ permet en principe de différencier un champ chaotique d’un champ cohérent. La fonction $g^{(3/2)}(\tau)$ permet aussi de différencier un champ cohérent d’un champ chaotique, et en plus de différencier un champ chaotique classique d’un champ chaotique non-classique. Ces deux points sont résumés table 3. Il reste à examiner les expressions de ces deux

	$g^{(1)}(\tau)$	$g^{(2)}(\tau)$	$g^{(3/2)}(\tau)$
chaotique VS cohérent	non	oui	oui
chaotique VS chaotique comprimé	non	non	oui

TABLE 3 – Comment différencier une radiation chaotique classique de deux types de radiations non-classiques : une radiation chaotique comprimée, et une radiation cohérente.

fonctions, et laquelle des deux est la plus pertinente pour répondre aux différentes problématiques P1, P2, et P3.

Évidemment, travailler avec une hiérarchie infinie de fonctions de corrélations est impossible à réaliser d’un point de vue expérimental. En fonction de la zone du spectre électromagnétique dans laquelle l’observateur envisage sa mesure, seules quelques fonctions de corrélations sont mesurables avec un RSB acceptable en un temps raisonnable. Cet aspect est développé dans le chapitre 3. Le corrélogramme stellaire mis au point fonctionne dans le domaine visible, et actuellement, seules les trois premières fonctions de corrélations du champ $g^{(1)}$ (bien connue en spectroscopie, mais aussi lorsque le transport du champ est complexe, par exemple [125]), $g^{(3/2)}$ (pour ne citer que ceux qui en ont démocratisé l’usage en optique [126, 127]), et $g^{(2)}$ (par exemple [128, 60, 129]), sont accessibles en laboratoire. Par “accessibles”, il est entendu que leur usage est actuellement démocratisé au moins en laboratoire. C’est pourquoi ces trois fonctions de corrélations : $g^{(1)}$, $g^{(3/2)}$, et $g^{(2)}$, sont considérées.

Pour l’instant, dans le visible, seules $g^{(1)}$ (spectres énergétiques, degré de cohérence complexe de l’interférométrie d’amplitude, ou de l’interférométrie des tavelures) et $g^{(2)}$ (discutée dans les parties précédentes III. et IV.) ont été mesurées sur des cibles stellaires. L’utilisation de $g^{(2)}$ pour détecter des raies lasers astrophysiques semble avoir été initiée par Lavrinovich et Letokhov dans les années 1970 [130]. La fonction $g^{(3/2)}$ n’a donc pour l’instant jamais été mesurée sur cible stellaire. Cependant la fonction $g^{(2)}$ a déjà été mesurée sur cible stellaire via un corrélogramme à adjonction de bruit, aussi appelé *par hétérodynage* ou *technique de Brown-Twiss-Townes* [131], reporté avec succès pour la première fois par [132], et tenté au préalable par le projet SOIR-DETE [133, 134]. La fonction $g^{(3/2)}$ appartient aux fonctions de corrélations mesurées par ce type de corrélogramme.

Remarque. Ces trois fonctions de corrélations $g^{(1)}$, $g^{(3/2)}$, et $g^{(2)}$, ne sont pas restreintes à une radiation de fréquence dans le domaine visible, elles sont définies dans la partie suivante “Définitions des fonctions de corrélation utilisées”.

V..2 Partie II de la dissertation : “Réalizations”

La partie II de la dissertation s’inscrit dans les problématiques P1 et P3.

Mesurer $g^{(2)}(\tau)$ sur une raie d’émission stellaire

La première motivation est d’exposer la pertinence de la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sur une radiation présentant des caractéristiques qui en font une cible potentielle pour la problématique P1. Sur le principe, les motivations ont déjà été exposées dans la partie précédente V..1, voir aussi la figure 7. D’un point de vue pratique, les motivations sont les suivantes. D’une part, il faut montrer la faisabilité de la mesure sur une cible réelle, avec les conditions expérimentales d’un site d’observation astronomique, et l’implémentation du corrélogramme au télescope. D’autre part, il faut démontrer que la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ est exploitable pour caractériser la nature de cette radiation. Pour cela, il faut au préalable (en laboratoire) identifier quelle est la quantité dans l’analyse des données expérimentales la plus pertinente. Il faut ensuite donner l’incertitude de la mesure, ce qui sous-entend de déterminer en amont la réponse temporelle de l’instrument. La cible choisie est la raie H α de P Cygni. Cette raie est très intense (environ 20 fois plus que le continuum radiatif de l’étoile) et possède un spectre de largeur sub-nanométrique. La partie I. du chapitre 4 est dédiée à la présentation de cette étoile et de cette raie (son origine, son profil de raie,...), et donne les références qu’il convient de citer sur ce sujet. Cette partie s’appuie sur l’annexe D.

Déduire des informations géométriques sur la cible stellaire

La deuxième motivation est de présenter la capacité du corrélogramme pour l’imagerie astronomique dans un sens restreint, à savoir : déduire des informations géométriques sur la cible stellaire. L’intérêt des corrélogrammes stellaires pour ce faire est exposé de manière claire et concise dans l’article [88]. Un peu plus de détails est donné dans ce qui suit. La compétition s’effectue avec l’interférométrie d’amplitude classique. Des notions sur le sujet sont par exemple données dans [135, 136, 137] ou dans la plus récente monographie [138] passant en revue les dernières avancées du domaine. Il a été choisi de ne pas faire de rappels ici.

Aujourd’hui le contrôle de la différence de marche sous la milliseconde, et avec une précision meilleure que λ_{eff} , ne présente plus de difficultés techniques pour l’interférométrie avec des bases de quelques centaines de mètres au plus, dans le domaine optique (interféromètres comme VLTI, CHARA et NPOI), par exemple [139, 140, 141]. Remarque, en radio-interférométrie le contrôle des différences de marche ne présente également plus de difficultés pour des lignes de bases de quelques dizaines de mètres (interféromètres comme ALMA, LOFAR, LWA, VLBI) [42].

Intérêts des lignes de bases kilométriques et limitations de l’IAC.

Un interféromètre peut mesurer le module du degré complexe de cohérence (parfois appelé “equal-time degree of coherence” en anglais) qui correspond au module de $g^{(1)}(\tau = 0, \rho)$ (voir, par exemple, au chapitre 4 la relation (4.33)). Ce module peut renseigner sur la distance d entre l’observateur et l’objet (si la taille caractéristique a de l’objet est connue indépendamment) ou sur la taille caractéristique a (si la distance d est connue indépendamment), ainsi que sur la forme de l’objet stellaire. L’évolution de cette fonction avec la longueur de base ρ est dictée par une longueur caractéristique ρ_c (longueur de cohérence) qui est proportionnelle à

$$\rho_c \propto \lambda_{\text{eff}}/\vartheta_a,$$

où $\vartheta_a \approx a/d$ est le diamètre apparent de la cible stellaire depuis le lieu d’observation, et où λ_{eff} est la longueur d’onde centrale effective pour l’observateur.

Pour accéder aux détails fins de la forme de la cible stellaire, ou déterminer avec précision sa taille caractéristique ou sa distance au lieu d’observation, il faut pouvoir accéder aux valeurs

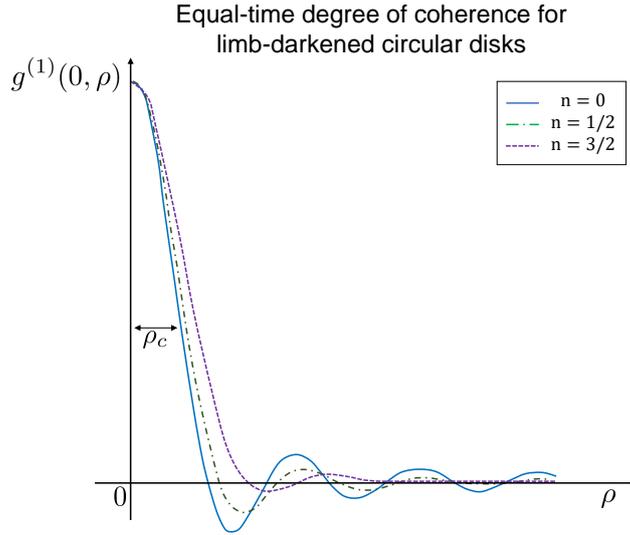


FIGURE 8 – Graphe de $g^{(1)}(0, \rho)$ pour plusieurs profils d’intensité de type assombrissement centre-bord. Le comportement des différents degré de cohérence diffère significativement pour $\rho > \rho_c$.

du module du degré complexe de cohérence pour $\rho > \rho_c$. D’où la motivation d’avoir de grandes bases pour l’interféromètre, et ce d’autant plus que la taille caractéristique de la cible est petite. Pour illustrer ce propos, la figure 8 présente le graphe du degré de cohérence $g^{(1)}(0, \rho)$ pour un modèle de distribution d’intensité I_{eff} d’importance pour les étoiles présentant une photosphère en bonne approximation à symétrie sphérique (I_{eff} ne dépend que de la coordonnée radiale \mathbf{r}), et en bonne approximation modélisable par une surface noire : le modèle d’assombrissement centre-bord (“limb-darkening” en anglais).

$$I_{\text{eff}} \left(\vartheta = \frac{\mathbf{r}}{d} \right) = \text{disq} \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_a} \right) \left(1 - \frac{\vartheta^2}{\vartheta_a^2} \right)^{n/2}, \quad (6)$$

où $n \in \mathbb{N}$, et la fonction $\text{disq}(x)$ est une fonction disque (sa valeur vaut 1 si $\mathbf{r} \leq a \Leftrightarrow \vartheta \leq \vartheta_a$). Le graphe pour plusieurs n dévoile que les différences s’accroissent pour les longues bases, i.e. $\rho > \rho_c$.

Les différences de marches doivent être contrôlées avec une précision spatiale plus petite que la longueur d’onde dans le transport de l’onde lumineuse des télescopes jusqu’au plan focal de l’interféromètre. Lorsque les bases sont longues (kilométriques), le maintien, ou la compensation, des différences de marche en temps réel (sub-milliseconde), et le suivi des franges devient un problème, pour les courtes longueurs d’ondes comme celles du domaine visible, ou celles du domaine radio. En effet, il faut assurer une précision spatiale de l’ordre de quelques dizaines de nanomètres sur des chemins optiques de l’ordre du kilomètre (ou plus), et ce, en comptant les phénomènes de diffraction qui ne sont plus négligeables sur ces longueurs de propagation, voir par exemple [142].

Avantages des corrélogrammes stellaires.

Les corrélogrammes stellaires mesurent des corrélations d’intensité (la fonction $g^{(2)}$). Ils sont limités par la résolution de la mesure des corrélations temporelles des intensités mesurées. La résolution temporelle du corrélogramme est définie par la dispersion caractéristique de sa réponse temporelle (réponse à un peigne de Dirac en principe, à une cadence d’impulsions non-résolues temporellement en pratique). C’est ce qui est étudié chapitre 4, partie II.. La comparaison de la précision opto-mécanique requise ℓ_{CS} pour un corrélogramme stellaire et de celle requise pour un

	IAC	CS
$\ell_{\text{opt-mec}}$	quelques nm sur la ligne de base (km)	quelques mm jusqu'au photo-détecteur (<1m)
qualité optique des télescopes	limite	ne limite pas
turbulence atmosphérique	limite	ne limite pas

TABLE 4 – Comparaison de l’interférométrie d’amplitude classique (IAC) et des corrélomètres stellaires (CS) pour l’imagerie astronomique dans le domaine visible avec des bases kilométriques. L’échelle des contraintes opto-mécaniques est notée $\ell_{\text{opt-mec}}$.

interféromètre à division d’amplitude avec typiquement $\ell_{IAC} = \lambda_{\text{eff}}/10$ s’écrit

$$\frac{\ell_{IAC}}{\ell_{CS}} = \frac{\lambda_{\text{eff}}/10}{c\sigma},$$

où σ est l’écart-type de la réponse temporelle du corrélomètre stellaire, et c la vitesse de propagation dans les bras du corrélomètre. Application numérique. Pour $\lambda_{\text{eff}} = 656,3\text{nm}$, $\sigma = 756\text{ps}$ (voir (4.4), chapitre 4), et $c = 2.10^8\text{m.s}^{-1}$ (si les bras du corrélomètre sont en fibre optique de silice)

$$\frac{\ell_{IAC}}{\ell_{CS}} \sim 10^{-7}.$$

Autrement dit, la contrainte de précision opto-mécanique dans un corrélomètre stellaire opérant dans le domaine visible est de l’ordre de plusieurs dizaines de millimètres, alors qu’elle serait dans un interféromètre d’amplitude classique de plusieurs dizaines de nanomètres. Pour les courtes longueurs d’ondes (domaine visible et infrarouge), les contraintes opto-mécaniques sont donc considérablement relâchées avec un corrélomètre stellaire.

De plus, le corrélomètre stellaire ne fait pas interférer la radiation captée par les télescopes avec elle-même (dans une description classique, qui est suffisante). Il y a donc la possibilité de positionner les détecteurs dans le voisinage des télescopes, sans contraintes particulières. Les détecteurs sont ensuite reliés au convertisseur temps-digital par des câbles coaxiaux. Cela enlève la nécessité d’avoir un contrôle à moins que la longueur d’onde, et en temps réel, sur le transport des radiations, pour pouvoir les superposer physiquement et créer une figure d’interférence qui reste stable au court de la durée d’observation.

Un guidage en temps réel correct est nécessaire, ainsi qu’une correction de type tip-tilt si possible, afin de maximiser l’intensité détectée. Cependant, les télescopes n’ont pas à être d’une qualité optique optimale car ils jouent simplement le rôle de collecteurs d’énergie radiative pour les détecteurs. La distorsion du front d’onde qu’ils peuvent induire n’impacte pas la mesure, tant que la taille de la zone sensible du capteur est assez grande pour collecter la totalité de l’énergie. De même, la turbulence atmosphérique et quelques sources lumineuses parasites (pleine lune par exemple) ne nuisent pas à la mesure [143]. La table 4 résume les avantages des corrélomètres stellaires par rapport à l’IAC pour des bases kilométriques.

Le développement des corrélomètres stellaires a été stoppé en 1974, le corrélomètre stellaire de Narrabri avait atteint ses limites en terme de sensibilité, voir par exemple [36] chapitre 12, section 12.1.. Depuis le milieu des années 2000 [144, 66], les photo-détecteurs ont connu une modernisation par rapport aux tubes photo-multiplicateurs (TPM ci-après) utilisés par HBT. Dans le domaine visible, des photo-diodes à avalanche en silicium (SLiK) opérant en mode Geiger, de 400nm jusqu’à 1000nm, sont apparues en catalogue (appelée par abus de langage “Single Photon Avalanche Diode”, d’acronyme SPAD en anglais). Elles sont plus sensibles et

plus rapides que les TPM : leur résolution temporelle, leur sensibilité, et leur temps mort de détection, sont environ cent fois meilleurs que ceux des TPM, voir la partie haute de la table 1 dans [65] ou la table II dans [66]. La table 5 ci-dessous donne la comparaison entre la résolution temporelle du tube photo-multiplicateur R.C.A de type 6342 [145] utilisé par HBT [47] et une photo-diode à avalanche ultra-rapide. La valeur d’efficacité quantique obtenue pour le tube photo-multiplicateur est déduite de la réponse de la cathode à une radiation (“radiant sensitivity” en anglais) qui est de 64mA/W [145]. Ces photo-diodes ont été implémentées en modules

	Tube photo-multiplicateur RCA 6342	Photo-diode à avalanche ultra-rapide
Résolution temporelle (ordre de grandeur)	$\sim 10\text{ns}$	$\sim 100\text{ps}$
efficacité quantique maximale	$\simeq 12\%$	$\simeq 69\%$

TABLE 5 – Comparaison des résolutions temporelles, et de l’efficacité quantique, du photo-multiplicateur (RCA type 6342A) utilisé par HBT, et de la photo-diode à avalanche ultra-rapide présente dans le module photo-compteur (Excelitas SPCM-ARQH) utilisé dans le corrélogramme développé.

photo-compteurs qui délivrent des impulsions de tension (voir figure 3.1), et permettent la *digitalisation* de la photo-détection. Les dates des impulsions en tension, pour l’observateur, sont appelées ici *photo-événements*. Ces modules sont commercialement appelés “modules compteurs de photon” ou “module de comptage de photon unique” (“Single Photon Counting Module” d’acronyme SPCM en anglais). L’appellation “photon unique”, présente aussi pour les photo-diodes à avalanche ultra-rapides, est un abus de langage ; tous les photons ne donnent pas un photo-électron ; l’efficacité quantique n’est pas parfaite (de l’ordre de 65% à 650nm pour les modèles utilisés “SPCM-ARQH” [146]), de sorte qu’il faut plus qu’un seul photon pour engendrer un photo-événement. Les impulsions de tensions délivrées par les modules photo-compteurs (voir figure 3.1) sont ensuite traitées par des convertisseurs temps-digital (“Time to Digital Converter” d’acronyme TDC en anglais), qui permettent de convertir l’impulsion de tension en photo-événement (une date), et ce pour des fréquences de photo-événements de plusieurs MHz, avec une résolution temporelle de quelques dizaines de picosecondes, voir la partie basse de la table 1 dans [65]. Il suffit alors de relier le convertisseur temps-digital à un ordinateur par connexion USB pour effectuer le calcul en temps réel (si la puissance de calcul de l’ordinateur le permet) des corrélations d’intensité, à partir des photo-événements générés par le convertisseur. La deuxième option est de sauvegarder les photo-événements et d’effectuer le calcul de manière différée. Dans les deux cas, ce calcul numérique prend la forme d’un histogramme ayant pour axe de abscisses les délais avec une résolution de quelques dizaines de picosecondes. Le *corrélomètre stellaire digitalisé*, ou *photonique*, ainsi construit est simplifié par rapport à celui mis au point par HBT (cet aspect est par exemple discuté en sous-partie III..2 du chapitre 3), et possède une résolution temporelle environ 30 fois plus fine. La table 6 résume les résolutions temporelles du corrélogramme digital mis au point (voir chapitre 4) et de celui d’HBT (valeur du corrélogramme construit à Narrabi, voir [36] section 12.8).

Or, le RSB dans la mesure de $g^{(2)}(0, \rho)$ (donnant accès au module de $g^{(1)}(0, \rho)$ pour une radiation chaotique), pour une base projetée ρ donnée, et dans le domaine visible (où seul le bruit de grenaille limite ultimement la mesure), est inversement proportionnel à la racine de σ ,

$$\text{RSB} \left\{ g^{(2)}(0, \rho) \right\} \propto \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \quad (7)$$

voir par exemple equation (12.1) dans [36] section 12.8.. Cette dépendance est retrouvée au chapitre 3 dans la table 3.1 en prenant $h_{\text{nor}}^{(2)} \equiv R_\delta$ et $\sigma_h \propto \sigma$. La définition de R_δ est (4.1) son

	Corrélomètre stellaire de Narrabi 1968 [52]	Corrélomètre stellaire de Calern 2020 [147]
Résolution temporelle σ	$\sim 17\text{ns}$	$\sim 600\text{ps}$

TABLE 6 – Comparaison des résolutions temporelles des corrélomètres stellaires de Narrabi (1968)(d’acronyme CSN), et de Calern (2020) (d’acronyme CSC). Pour le CSC, la valeur σ est précisément déterminée au chapitre 4. Pour le CSN la valeur prise est l’inverse de la bande passante de 60MHz indiquée dans, par exemple, [36] section 12.8.

expression est (4.2), celle de h_{nor} est (3.21).

La réduction de σ d’un peu plus d’un facteur 30 implique un gain de presque 6 sur le RSB pour une même durée d’observation avec (7). Ajoutés à cette rupture technologique, les avantages de la table 4 permettent de considérer à nouveau les corrélomètres stellaires, comme une alternative à l’IAC pour mesurer des caractéristiques géométriques de la cible stellaire, dans le domaine visible et dans l’infrarouge proche.

V.3 Partie III de la dissertation : “Explorations”

Le travail de la partie III est motivé par la problématique P1. Si une radiation stellaire cohérente est émise par un laser astrophysique, en suivant le mécanisme décrit figure 6, ce laser astrophysique n’a rien de commun avec un laser de laboratoire : il n’a pas de cavité. Sans miroirs,

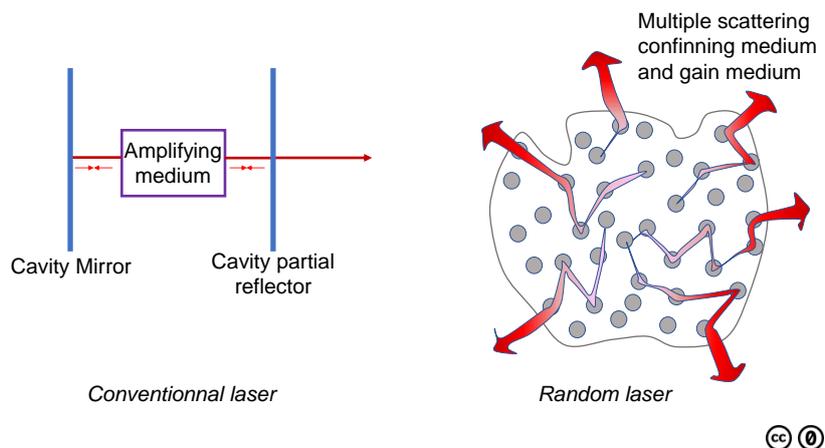


FIGURE 9 – Schémas de principe d’un laser conventionnel (à gauche) et d’un laser aléatoire (à droite). Figure adaptée de [148].

l’apparition de l’effet laser est conditionné à la capacité d’un milieu matériel à confiner la radiation, et à l’amplifier par émission stimulée. Un ingrédient physique possible pouvant effectuer ce confinement est la diffusion multiple, et du fait du caractère aléatoire de la diffusion, ce genre de laser est qualifié de *laser aléatoire* [148, 149, 150]. La différence avec un laser conventionnel est schématisée figure 9. A ce jour, il ne semble pas encore clairement établi qu’un tel système rayonnerait un champ cohérent ou quasi-cohérent, similaire à celui d’un laser conventionnel. Des propositions ont été faites pour répondre à cette question directement via la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ [151], la première date semble dater de 1976 [130].

Pour les lasers aléatoires de “laboratoire”, plusieurs modèles existent, ils sont cités et rapidement expliqués au chapitre 5, sous-partie I.2. Dans ces modèles, si le milieu diffusif est bonne approximation de dimension 1 ou 2, l’intensité du champ émis par un laser aléatoire suit une

loi de probabilité α -stable de Lévy, avec $\alpha = 2$ loin du seuil (loi normale) et $\alpha < 2$ près du seuil [152, 153, 154]. Ce comportement de l'intensité semble également conservé si le milieu diffusif est tri-dimensionnel, en théorie comme expérimentalement [155].

Expérimentalement, la confirmation n'a eu lieu qu'avec un laser quasi-unidimensionnel [156]. L'intensité d'un laser aléatoire, au moins pour un milieu diffusif mono ou bi-dimensionnel, n'est donc pas l'intensité d'un champ chaotique (loi exponentielle) ni celle d'un champ cohérent (train d'impulsions de Poisson). La mesure de la statistique des photons d'un mode d'un laser aléatoire tridimensionnel semble avoir été effectuée [157]. La mesure présentée consiste à compter les impacts sur l'image (λ, t) d'une caméra à balayage ("streak camera" en anglais) [157]. Mesure répétée un grand nombre de fois [157]. La statistique déduite pour un intervalle $\Delta\lambda$ (correspondant à la résolution minimale de la caméra) est alors interprétée comme la *distribution statistique des photons* pour un mode donné [157]. Cette statistique mesurée correspond à une statistique Poissonienne près du seuil, et une statistique de Bose-Einstein loin du seuil [157]. Ce qui est différent de la mesure avec un laser aléatoire unidimensionnel [156] ou tridimensionnel [155]. Remarque. La mesure réalisée dans [157] n'est pas la mesure de $g^{(2)}(\tau)$.

La loi de probabilité des valeurs prises par l'intensité a été étudiée et modélisée, mais il semble que rien n'est encore établi concernant le comportement temporel de l'intensité (caractériser l'intensité en tant que processus stochastique) : sa fonction d'auto-corrélation n'a, semble-t-il, jamais été encore ni mesurée, ni prédite. La mesure de $g^{(2)}$ sur un laser aléatoire de laboratoire permettrait de vérifier, au moins, que la fonction $g^{(2)}$ différencie bien un laser aléatoire d'un champ chaotique. Le travail reporté dans cette partie est une première exploration dans cette direction ; la mesure de la fonction $g^{(2)}$ sur la radiation émise par un laser aléatoire unidimensionnel, est analysée.

Définitions des fonctions de corrélation utilisées

[...] et, au fond, tu n'es pas responsable de l'existence d'une bande de tordus comme ces trois folles.

Elles se rendent pas compte, Boris Vian.

Cette partie est un glossaire qui donne les définitions, du point de vue de la physique classique, des fonctions de corrélation temporelles $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$, utilisées dans la suite de la dissertation. Il a été choisi de le faire dès l'introduction pour alléger les chapitres suivants, et préciser rigoureusement d'emblée ce qui est sous-entendu lorsqu'il est mentionné *champ*, *amplitude complexe*, *fonctions de corrélation*, ou *spectre*. Aussi, il est espéré que le lecteur puisse facilement se reporter à ce glossaire lorsqu'il recherche une définition précise.

Il n'est pas question ici de faire un exposé complet pour chaque fonction de corrélation. L'idée est de donner, dans un cadre de la physique classique, pour chaque fonction de corrélation : sa définition, la signification de sa densité spectrale des fluctuations, et un principe de mesure de cette fonction dans le visible.

Dans ce qui suit, rien n'est nouveau concernant $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$, mais concernant $g^{(3/2)}$ sa transposition au formalisme classique proposée ci-après, semble l'être. C'est pourquoi la partie concernée par $g^{(3/2)}$ est un peu plus détaillée. Elle reprend la section 2.3 de [158].

Le terme "processus" sera souvent employé pour raccourcir "processus stochastique".

Les vecteurs sont accentués avec une flèche selon l'ancienne convention typographique.

VI. Hypothèses et notations

VI.1 Le "champ"

Soit une polarisation d'un champ électrique satisfaisant les équations de Maxwell, avec un choix de jauge donné. Soient des modes (vectoriels) de composantes i, j, k dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3

$$\vec{u}_m(\vec{r}) = (u_{m,i}, u_{m,j}, u_{m,k})(\vec{r}),$$

satisfaisant l'équation de propagation de ce champ, relativement à un observateur inertiel (i.e. : dont les champs des quadri-accélération et des quadri-rotations sont nuls le long de sa ligne d'univers), pour des conditions aux limites et transverses usuelles.

La représentation analytique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ (la transformée de Hilbert du vecteur champ électrique réel est ajoutée à celui-ci) de ce champ vectoriel peut se développer selon les $\vec{u}_m(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_m c_m \vec{u}_m(\vec{r}) \exp(-i\omega_m t). \quad (8)$$

Le champ électrique est supposé déconnecté de sa source, de telle sorte que les coefficients complexes c_m dans (8) décrivent complètement le champ, voir par exemple [57] chapitre 12,

section 12.2. **Dans toute cette dissertation**, une seule composante E_j du vecteur $\vec{E}(\vec{r}, t)$, et un seul mode ℓ , sont considérés. De plus, la description du champ est eulérienne, dans le sens où le champ est considéré à un point \vec{r}_0 du référentiel d'un observateur inertiel, ainsi $\vec{u}_\ell(\vec{r}_0)$ est une constante. La quantité appelée, par abus de langage *champ*, dans la suite de la dissertation (parfois aussi *radiation*) est alors :

$$\mathcal{E}(t) := E_j(\vec{r}_0, t) = A_\ell \exp(-i\omega_\ell t), \quad (9)$$

où la quantité $A_\ell := c_\ell \cdot u_{\ell,j}$ est appelée *amplitude complexe* du champ. L'indice ℓ est omis par la suite pour alléger les notations. L'amplitude complexe A est considérée comme un processus stochastique, et par extension le champ scalaire complexe \mathcal{E} également.

VI.2 Auto-corrélation et fluctuations

Soit Y un processus (complexe ou réel). Si $\langle \dots \rangle$ est l'espérance mathématique associée à Y , la fonction d'auto-covariance de Y est notée

$$C_{YY}(t, \tau) := \langle Y^*(t)Y(t+\tau) \rangle - \langle Y^*(t) \rangle \langle Y(t+\tau) \rangle, \quad (10)$$

et si $\delta Y := Y - \langle Y \rangle$ est le processus centré, alors il est rappelé que

$$C_{YY}(t, \tau) = \langle \delta Y^*(t)\delta Y(t+\tau) \rangle, \quad (11)$$

et C_{YY} est donc aussi mentionnée comme l'auto-corrélation (des fluctuations) de Y . Lorsqu'il n'est pas nécessaire d'introduire une notation de type fonction, la notation $\langle\langle Y, Y \rangle\rangle \equiv \langle\langle Y^2 \rangle\rangle$ sera utilisée.

Si $C_{YY}(t, \tau) \equiv C_{YY}(\tau)$, le théorème de Wiener-Khintchine-Bochner (en acronyme "WKB" ci-après), appliqué avec un couple de variables (ζ, τ) conjuguées par transformée de Fourier, et définies positives, donne

$$S_{\delta Y}(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} C_{YY}(\tau) \cos(\zeta\tau) d\tau, \quad (12)$$

$$C_{YY}(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} S_{\delta Y}(\zeta) \cos(\zeta\tau) d\zeta. \quad (13)$$

La quantité $S_{\delta Y}$ est une densité de probabilité qui est appelée *densité spectrale (des fluctuations)*. Dans ce qui suit, il est supposé que \mathcal{E} est stationnaire au sens large, i.e. : $C_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(t, \tau) \equiv C_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\tau)$ et $\langle \mathcal{E}(t) \rangle = \langle \mathcal{E} \rangle$, sur l'échelle de temps considérée. La date τ sera toujours considérée **positive** sauf mention contraire.

VII. Fonction d'auto-corrélation du champ : $g^{(1)}(\tau)$

La fonction notée $g^{(1)}(\tau)$ est l'auto-corrélation du champ normalisée par l'énergie qu'il contient en moyenne $\langle I \rangle := \langle |\mathcal{E}|^2 \rangle$ (où : $|\mathcal{E}|$ est le module de $\mathcal{E}(t)$),

$$g^{(1)}(\tau) := \frac{\langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle}. \quad (14)$$

Le lien entre $C_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ et $g^{(1)}$ est quasi-immédiat. Premièrement, il faut remarquer que

$$\langle I \rangle = \langle |\mathcal{E}|^2 \rangle + \langle |\delta \mathcal{E}|^2 \rangle,$$

il vient alors :

$$C_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\tau) = \langle I \rangle \cdot g^{(1)}(\tau) - \langle |\mathcal{E}|^2 \rangle. \quad (15)$$

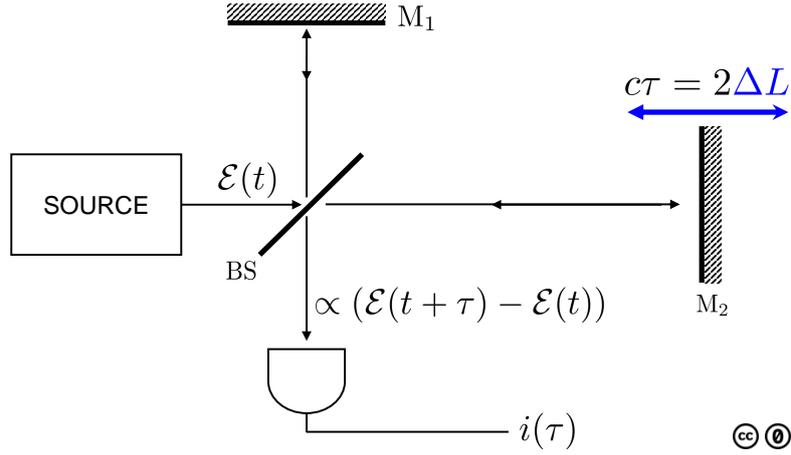


FIGURE 10 – Un principe de mesure de $g^{(1)}(\tau)$ dans le domaine visible, à l’aide d’un interféromètre de Michelson de miroirs M_1 et M_2 . “BS” signifie “beam splitter”. La translation ΔL du miroir permet de scanner $\tau = 2\Delta L/c$, où c est la vitesse de propagation de la radiation.

Pour des fluctuations contenant une faible énergie, i.e. : $\langle |\delta\mathcal{E}|^2 \rangle \ll |\langle \mathcal{E} \rangle|^2$, (15) se simplifie :

$$C_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\tau) = \langle I \rangle \left(g^{(1)}(\tau) - 1 \right). \quad (16)$$

L’application du théorème de WKB donne alors la densité spectrale des fluctuations $S_{\delta\mathcal{E}}$ en fonction de $g^{(1)}$ en appliquant (12) avec (15) ou (16). Cette densité spectrale $S_{\delta\mathcal{E}}$ est appelée *spectre* par la suite. Un principe pour mesurer $g^{(1)}(\tau)$ bien connu en optique est schématisé figure 10. Ce principe repose sur un interféromètre de Michelson. En supposant l’ergodicité en auto-covariance du champ considéré, le photo-courant résultant $i(\tau)$ est alors proportionnel à

$$i(\tau) \propto 1 - \Re \left\{ g^{(1)}(\tau) \right\}.$$

VIII. Fonction d’inter-corrélation intensité-champ : $g^{(3/2)}(\tau)$

La fonction de corrélation $g^{(3/2)}(\tau)$ est née à partir d’idées d’électrodynamique quantique datant d’une trentaine d’années [159][160][161]. Elle a été ensuite développée de manière formelle et rigoureuse par H.J. Carmichael *et al.* dans [162], puis par d’autres [163], [164], et de manière expérimentale [126], [127]. Une synthèse rédigée conjointement par les théoriciens et les expérimentateurs ayant démocratisé l’usage de $g^{(3/2)}$, peut être trouvée dans [165]. Une autre synthèse impliquant Glauber lui-même peut être trouvée dans [166].

Classiquement, cette fonction peut-être considérée comme un moment conjoint d’un champ \mathcal{E} , qui est l’inconnue à caractériser, et d’un oscillateur local \mathcal{E}_{lo} connu, d’ordre 3-1 (mettant en jeu trois fois le champ \mathcal{E} et une fois le champ \mathcal{E}_{lo}). Le champ \mathcal{E} à caractériser apparaît trois fois, donc il ne peut-être formé qu’une fois et demi son intensité, d’où l’exposant symbolique de (3/2). D’un point de vue type traitement du signal, $g^{(3/2)}$ est l’hybridation du champ à caractériser avec un bruit connu (l’oscillateur local). Seule l’énergie d’un champ peut actuellement être mesurée, donc pour accéder à un moment d’ordre 3 du champ, cette hybridation est nécessaire. Les corrélateurs à adjonction de bruits, voir par exemple [3] chapitre 10, section 10.2, utilisent ce principe d’hybridation du signal avec un “bruit” connu et maîtrisé. Cette technique date des années 1960 [116], [117].

Soit un champ \mathcal{E} d'amplitude complexe moyenne $E_\beta \exp(i\phi)$ et soit un oscillateur local \mathcal{E}_{l_0} d'amplitude complexe $A_{l_0} \exp(i\theta)$. L'adaptation classique de la définition de Carmichael *et al.* est alors :

$$g^{(3/2)}(\tau) := \frac{1}{2} \frac{\langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t) [\mathcal{E}^*(t+\tau)\mathcal{E}_{l_0}(t+\tau) + \mathcal{E}(t+\tau)\mathcal{E}_{l_0}^*(t+\tau)] \rangle}{\langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t) \rangle |\langle A(t+\tau) \rangle| |\langle A_{l_0}(t+\tau) \rangle|}. \quad (17)$$

La phase θ de \mathcal{E}_{l_0} est un paramètre libre, ce qui revient à choisir la phase relative $\theta - \phi$ entre \mathcal{E}_{l_0} et \mathcal{E} . La fonction $g^{(3/2)}(\tau)$ permet en fait de mesurer les fluctuations d'une ξ -quadrature (définie ci-après) conditionnée sur l'énergie du champ $I = \mathcal{E}^*\mathcal{E}$, indépendamment de l'amplitude de \mathcal{E}_{l_0} . Pour le voir plus clairement, (17) peut se réécrire. Il faut tout d'abord rappeler le concept de ξ -quadrature, aussi appelé *quadrature d'amplitude pour une phase ξ* [167], où ξ est une phase constante :

$$A_\xi(t) := \frac{1}{\sqrt{2}} [A(t) \exp(-i\xi) + A^*(t) \exp(i\xi)]. \quad (18)$$

Ce concept est illustré figure 11. L'amplitude complexe A du champ \mathcal{E} est supposée avoir des fluctuations

$$\delta A := A - E_\beta \exp(i\phi),$$

telles que les moments d'ordre trois ou plus soient négligeables devant les moments d'ordre deux ou moins. Cette hypothèse n'est pas en fait une hypothèse nécessaire ; c'est une conséquence de la réversibilité microscopique avec le formalisme quantique [168]. Elle est ici admise comme une hypothèse ad-hoc. Avec cette hypothèse, et après quelques développements calculatoires (sans difficultés), et si δA_ξ désigne la fluctuation de la ξ -quadrature, il vient :

$$g^{(3/2)}(\tau) = \cos(\phi - \theta) + \frac{\langle \delta A_\phi(t) \delta A_\theta(t + \tau) \rangle}{E_\beta^2 + \langle |\delta A(t)|^2 \rangle} + o(\langle |\delta A|^2 \rangle). \quad (19)$$

Lorsque $\theta = \phi$, (19) devient simplement

$$g_{\theta=\phi}^{(3/2)}(\tau) = 1 + \frac{C_{A_\phi A_\phi}(\tau)}{E_\beta^2 + \langle |\delta A(t)|^2 \rangle} + o(\langle |\delta A|^2 \rangle), \quad (20)$$

où $C_{A_\phi A_\phi}(\tau)$ est la fonction d'auto-covariance de la ϕ -quadrature de l'amplitude complexe du champ. L'équation (20) démontre que $g^{(3/2)}(\tau)$ permet de capturer les fluctuations de la ϕ -quadrature du champ \mathcal{E} définie par (18).

L'application du théorème de WKB ne pose pas de difficulté, la densité spectrale obtenue porte le nom de *spectre de compression* (“*spectrum of squeezing*” en anglais). Le résultat figure dans la table 7. L'appellation spectre de compression est parfois réservée à la transformée en cosinus de $C_{A_0 A_0}$, c'est à dire la densité spectrale des fluctuations de $\delta A_{\xi=0}$, voir par exemple [167] section 4. La fonction d'inter-corrélation intensité-champ permet donc d'accéder au spectre de compression du champ. Le paragraphe suivant donne plus de détails physiques sur le *squeezing* d'un champ. Cette appellation *squeezed field*, en anglais, est un abus de langage. La compression concerne la dispersion des fluctuations du champ selon une direction de l'espace des phases de ce champ. Il est de plus sous-entendu que selon cette direction privilégiée de l'espace des phases du champ, les fluctuations ne changent pas de nature (i.e. de loi de probabilité).

Un champ comprimé est un champ purement non-classique, il n'y a pas de correspondance théorique classique pour le décrire, au moins en électrodynamique quantique, voir par exemple [167] section 2 ou 3. Ce concept de compression des fluctuations, ou d'anisotropie des fluctuations dans l'espace des phases, peut s'appliquer en principe à n'importe quel champ. Il rend compte de la réduction de la dispersion des fluctuations du champ, selon une direction privilégiée de l'espace des phases (q, p) de ce champ, par rapport aux fluctuations de ce même champ non-comprimé. La figure 11 illustre ce propos ; la dispersion de l'amplitude complexe selon la direction ξ , qui dans l'exemple choisi correspond au petit axe du champ comprimé, est réduite par rapport à la dispersion du même champ non-comprimé. La relation d'incertitude

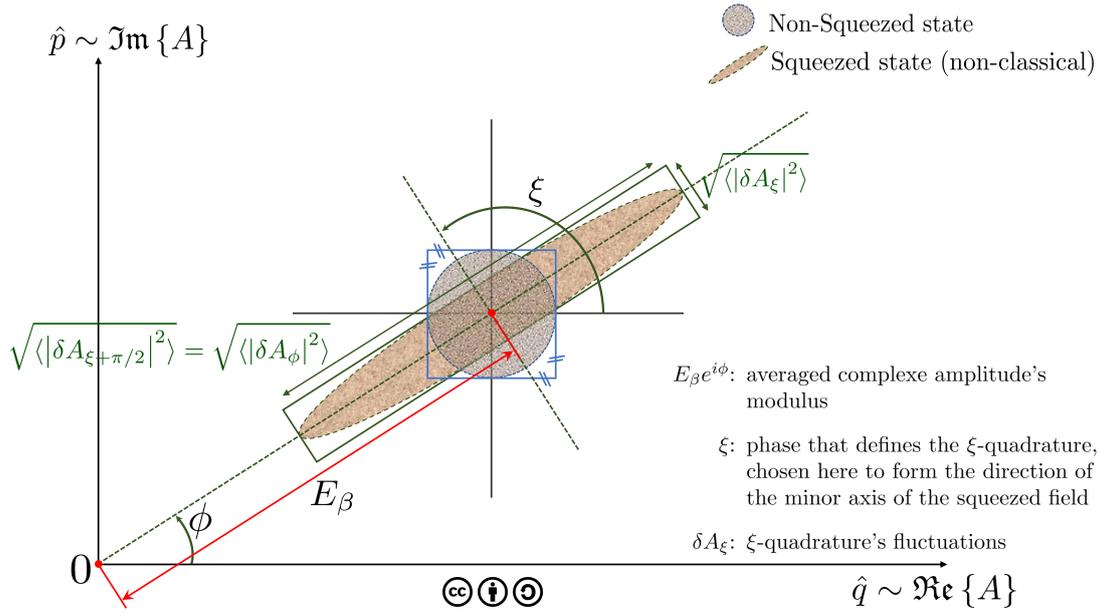


FIGURE 11 – Un exemple d'espace des phases $(\hat{q}, \hat{p}) \equiv (q, p)$, aussi appelé diagramme phaseur à la pulsation centrale du champ, pour un champ non-comprimé et un champ comprimé. La dispersion dans l'espace des phases est uniforme pour le champ non-comprimé.

d'Heisenberg s'applique sur les variables (opérateurs) conjuguées (q, p) de l'espace des phases, et impose que la dispersion dans la direction orthogonale à ξ soit accentuée en conséquence.

En électrodynamique quantique, l'étude de la compression du champ a par exemple servi à caractériser des vides non-classiques du champ électromagnétique, voir par exemple [167] section 4. Un vide classique du champ électromagnétique est représenté par un état cohérent qui possède des fluctuations dont la dispersion est uniforme quelque soit la direction de l'espace des phases. En revanche, un vide comprimé du champ électromagnétique possède un nombre de photons qui augmente, dans la direction de compression, en sinus hyperbolique au carré avec le facteur (\sim le taux) de compression, voir par exemple [167] section 3.

Enfin, le lecteur familier avec la théorie des probabilités peut faire le rapprochement entre la compression des fluctuations d'un champ selon une direction privilégiée de son espace des phases (q, p) , et la représentation dans le plan des ellipses d'égale densité d'un coupe de variables aléatoires normales. Si les deux V.A. normales (X, Y) ont les mêmes variances, les ellipses d'égale densité sont en fait des cercles (voir par exemple figure 2.5, chapitre 2), et aucune direction du plan (X, Y) ne possède des fluctuations plus ou moins dispersées. Par contre, si les deux V.A. normales n'ont pas les mêmes variances, les ellipses d'égale densité sont des ellipses caractérisées par un petit axe et un grand axe. La direction du grand axe possède alors des fluctuations avec une dispersion exacerbée par rapport à la direction du petit axe.

Un principe de mesure de $g^{(3/2)}(\tau)$ est présenté figure 12. La présence d'une amplitude complexe de moyenne non nulle $\langle A \rangle$ est nécessaire pour deux raisons. La première pour la normalisation par le terme $|\langle A(t + \tau) \rangle|$ au dénominateur de (17). La deuxième parce-que le numérateur est également nul en vertu de la propriété de circularité des processus complexes centrés stationnaires. En effet, il peut-être montré, pour un processus circulaire, que les moments impliquant un nombre différent de termes conjugués et non-conjugués sont nuls [169], voir chapitre 1, section 1.3.3.. Donc sous réserve que \mathcal{E}_{I_0} puisse être considéré comme déterministe, le numérateur de (17) est la somme de deux moments impliquant un nombre différents de termes conjugués et non-conjugués, il est donc nul. Ainsi, si $\langle A \rangle = 0$, alors (17) est la forme indéterminée $0/0$. Un champ émis par un corps noir possède une amplitude complexe qui est un processus gaussien

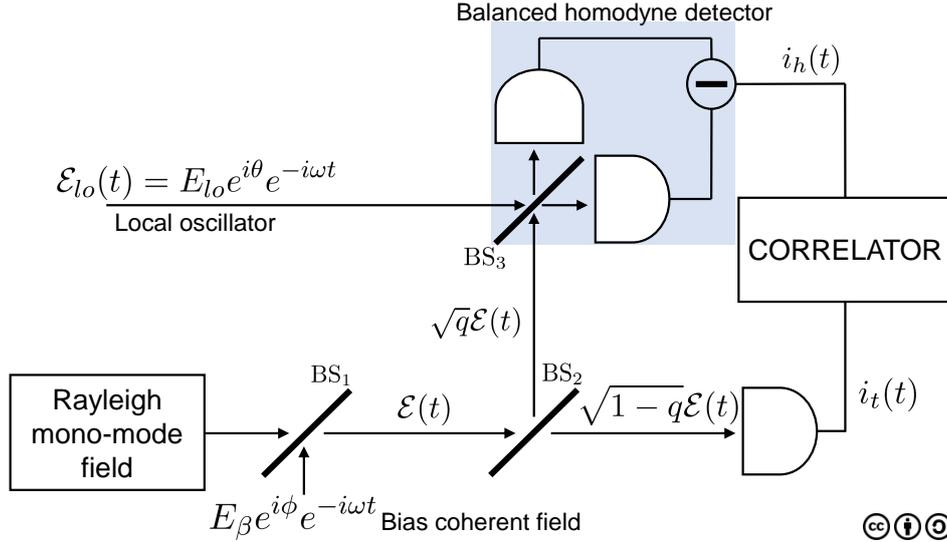


FIGURE 12 – Un principe de mesure de $g^{(3/2)}(\tau)$ dans le domaine visible. Il est supposé que $\langle A(t) \rangle = 0$. La moyenne non nulle est créée via une radiation cohérente d’amplitude complexe $E_\beta \exp(i\phi)$ qui se superpose à \mathcal{E} en BS_1 . BS_2 envoie une partie de l’intensité, avec une probabilité η , de la radiation vers un détecteur homodyne équilibré où \mathcal{E}_{lo} s’y superpose. Le photo-courant résultant $i_h(t)$ est proportionnel à l’intensité de la ϕ -quadrature du champ si $\theta = \phi$. BS_2 envoie l’autre partie de l’intensité, avec une probabilité $1 - q$, vers un détecteur dont le photo-courant $i_t(t)$ déclenche le corrélateur. Le courant $i_h(t)$ est acquis seulement s’il y a une fluctuation dans $i_t(t)$.

centré (voir par exemple [14] chapitre 13, section 13.1.3) donc $\langle A \rangle = 0$. Un tel champ est appelé *champ Rayleigh* dans cette dissertation, en vertu de la densité de probabilité qui régit le module de son amplitude complexe à chaque instant. C’est pourquoi la figure 12 introduit la moyenne non nulle $\langle A \rangle = E_\beta \exp(i\phi)$ dans l’amplitude complexe via un champ cohérent connu de l’utilisateur. Le signal $i_h(t)$ est explicité au chapitre 3, il y est démontré qu’effectivement $i_h(t)$ est proportionnel à l’intensité de la ϕ -quadrature du champ si $\theta = \phi$.

IX. Fonction d’auto-corrélation de l’intensité : $g^{(2)}(\tau)$

Cette fonction a pour la première fois été introduite pour le champ électromagnétique quantifié par Glauber [58]. C’est l’auto-corrélation de l’intensité I du champ \mathcal{E} , normalisée, dans un formalisme classique

$$g^{(2)}(\tau) := \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}. \quad (21)$$

Les propriétés de $g^{(2)}(\tau)$ ont largement été discutées dans les travaux de Glauber [57]. Le lien de $g^{(2)}$ avec C_{II} est immédiat :

$$C_{II}(\tau) = \langle I \rangle^2 \left(g^{(2)}(\tau) - 1 \right) \Leftrightarrow g^{(2)}(\tau) = 1 + \frac{C_{II}(\tau)}{\langle I \rangle^2}, \quad (22)$$

Deux remarques capitales pour la suite peuvent être faites dès maintenant.

L’intensité I (d’un mode) d’un champ *cohérent* peut être décrite classiquement par un processus *train d’impulsions de Poisson* (dérivée d’un processus de Poisson qui représente le nombre de photon du mode au cours du temps, les photons sont localisés sur l’axe du temps par des dates $(t_i)_i$ qui forment des points de Poisson stable, i.e. avec une densité $\langle I \rangle$ homogène pour les

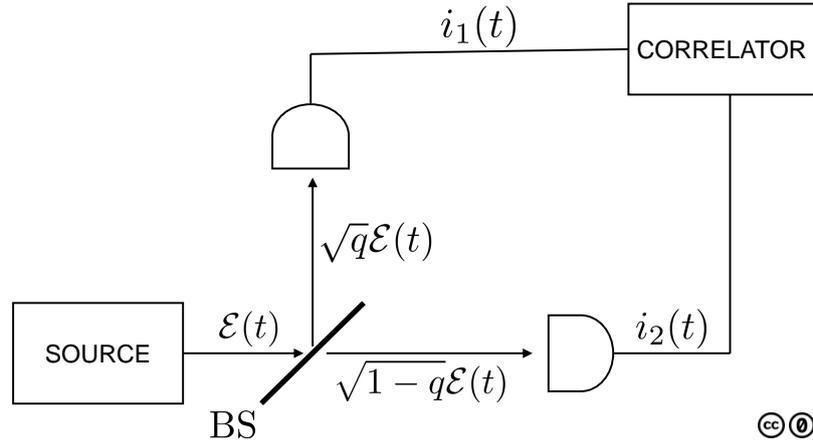


FIGURE 13 – Un principe de corrélographe d'intensité dans le domaine visible. “BS” signifie “beam splitter”, son ratio en intensité est “ $q/1 - q$ ”. La fonction $g^{(2)}(\tau)$ est proportionnelle à la corrélation des photo-courants i_1 et i_2 .

impulsions de Poisson. A chaque instant $I(t)$ est une V.A. de loi notée $\mathcal{P}_{\text{III}}(\langle I(t) \rangle)$, et s'écrit

$$I(t) = F_0 \sum_i \delta(t - t_i),$$

où F_0 est une constante qui a la dimension des unités de I multipliées à celles d'un temps, et alors :

$$C_{\text{II}}(\tau) = \langle I \rangle F_0 \delta(\tau). \quad (23)$$

Avec l'interprétation fonctionnelle de la distribution de Dirac : $\delta(\tau)$ est infini en $\tau = 0$ et nul pour $\tau > 0$, il vient alors (à la singularité en $\tau = 0$ près) :

$$I(t) \rightsquigarrow \mathcal{P}_{\text{III}}(\langle I(t) \rangle) \Rightarrow g^{(2)}(\tau) = 1. \quad (24)$$

L'intensité I (d'un mode) d'un champ chaotique Rayleigh (i.e. dont l'amplitude complexe est un processus gaussien centré) peut être décrite classiquement par un processus de loi exponentielle $\mathcal{E}(1/\langle I \rangle)$, stable, i.e. le paramètre $1/\langle I \rangle$ de la loi exponentielle est homogène. Alors :

$$C_{\text{II}}(0) = \langle I \rangle^2$$

et donc :

$$I(t) \rightsquigarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\langle I(t) \rangle}\right) \Rightarrow g^{(2)}(0) = 2. \quad (25)$$

Les relations (24) et (25) ne mettent pas en jeu des équivalences ; c'est à dire qu'une valeur $g^{(2)}(0^+) = 1$ (où 0^+ est une valeur arbitrairement proche de $\tau = 0$ mais non égale à 0, pour rester consistant avec la description classique proposée) n'implique pas la nature Poissonienne de I , et une valeur $g^{(2)}(0) = 2$ n'implique pas la nature exponentielle de I .

L'application du théorème de WKB ne pose aucun problème pour exprimer la densité spectrale des fluctuations $S_{\delta I}(\zeta)$ en fonction de $g^{(2)}(\tau)$. Voir table 7. Cette densité $S_{\delta I}(\zeta)$ est appelée *spectre d'intensité*.

Le principe de mesure de $g^{(2)}(\tau)$ dans le domaine visible est schématisé sur la figure 13. La loi de probabilité des fluctuations de l'intensité du champ se retrouve dans le photo-courant [170], par conséquent $g^{(2)}$ est directement donnée par l'inter-corrélation des deux photo-courants, à une constante de normalisation près.

X. Résumé

Les définitions classiques des fonctions de corrélation $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$, traduites en terme de la fonction d'auto-covariance de la quantité physique en jeu, et leurs densités spectrales de fluctuation, sont données dans la table 7. Chacune de ces fonctions de corrélation implique un moment du champ \mathcal{E} différent, par ordre croissant : $g^{(1)}$ implique un moment d'ordre 2, $g^{(3/2)}$ un moment d'ordre 3, $g^{(2)}$ un moment d'ordre 4.

	Écriture en fonction de $C_{\Upsilon\Upsilon}$	Densité spectrale
$g^{(1)}(\tau)$	$\frac{E_\beta^2 + C_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\tau)}{\langle I(t) \rangle}$	$S_{\delta\mathcal{E}}(\zeta) = \frac{\langle I \rangle}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(g^{(1)}(\tau) - \frac{E_\beta^2}{\langle I \rangle} \right) \cos(\zeta\tau) d\tau$
$g^{(3/2)}(\tau)$	$\approx 1 + \frac{C_{A_\phi A_\phi}(\tau)}{E_\beta^2 + \langle \delta A(t) ^2 \rangle}$	$S_{\delta A_\phi}(\zeta) = \frac{E_\beta^2 + \langle \delta A ^2 \rangle}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(g^{(3/2)}(\tau) - 1 \right) \cos(\zeta\tau) d\tau$
$g^{(2)}(\tau)$	$1 + \frac{C_{II}(\tau)}{\langle I \rangle^2}$	$S_{\delta I}(\zeta) = \frac{\langle I \rangle^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(g^{(2)}(\tau) - 1 \right) \cos(\zeta\tau) d\tau$

TABLE 7 – Résumé des définitions des fonctions de corrélation et de leurs densités spectrales respectives : le spectre, le spectre de compression, et le spectre d'intensité. Le champ possède une amplitude complexe $A = \langle A \rangle + \delta A$, avec $\langle A \rangle = E_\beta \exp(i\phi)$.

Première partie

Fondements

Introduction

Cette partie I intitulée “Fondements” est, comme son nom l’indique, la partie la plus essentielle de la présente dissertation. Chacun de ses chapitres développe une section principale de l’article publié [158]. La correspondance est la suivante : le chapitre 1 développe la section 4 de l’article, le chapitre 2 reprend la section 3, et le chapitre 3 détaille la section 5 de l’article. La figure 14 présente un résumé synoptique des liens internes entre les différents chapitres de cette partie, et du lien entre cette partie et le reste de la dissertation.

Par abus de langage, le terme *oscillateur brownien* est souvent employé pour raccourcir “oscillateur rayonné par une particule massive en mouvement brownien”, où l’*oscillateur* modélise le champ électrique rayonné par la particule massive.

Avec les motivations qui ont été introduites dans la partie “Introduction”, la finalité de cette partie I “Fondements” est de proposer une réponse aux deux questions P1a et P2a qui suivent, et qui sont des sous problématiques de, respectivement, P1 et P2 données dans l’Introduction générale :

- P1a : Comment $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$ rendent compte de la présence d’une radiation cohérente superposée à une radiation chaotique issue d’une multitude d’oscillateurs browniens libres, indépendants et non-relativistes, dans un gaz support, relativement à un observateur inertiel ?
- P2a : Comment $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$ permettent de caractériser le mouvement brownien libre non-relativiste, dans un gaz support, d’une matière rayonnante relativement à un observateur inertiel ?

Les réponses proposées ont pour ambition d’être quantitatives.

Ces questions requièrent une description fondamentale qui découple deux dynamiques : celle du mouvement brownien des oscillateurs, et celle des oscillations du champ rayonné. La raison est donnée dans le chapitre 1, et ce chapitre développe un modèle du mouvement brownien pertinent pour répondre aux questions P1a et P2a. Pour être quantitatif, il faut notamment établir les constantes de temps des fonctions de corrélation en fonction des caractéristiques physiques des oscillateurs (masse, dimensions spatiales), et des caractéristiques de leur mouvement brownien (dispersion en vitesse ou température, densité, masse et dimension des particules qui forment le gaz support). S’il est possible de le faire, il faut aussi bien identifier les relations qui changeraient si un autre processus de transport était considéré.

La première partie de la réponse aux questions P1a et P2a concerne la forme sous-laquelle apparaît l’information dans les fonctions de corrélation. Les calculs sont l’objet du chapitre 2 qui repose sur la modélisation du chapitre 1.

La deuxième partie de la réponse porte sur la durée nécessaire à l’observateur pour obtenir l’information contenue dans l’une au l’autre des fonctions de corrélation en présence d’un bruit. C’est le rôle du chapitre 3. Il aborde les estimations statistiques des rapports signal sur bruit pour les principes de mesures des fonctions de corrélation présentés dans l’Introduction, figures 10, 12, et 13, en présence d’un bruit de type processus de Campbell (bruit de grenaille).

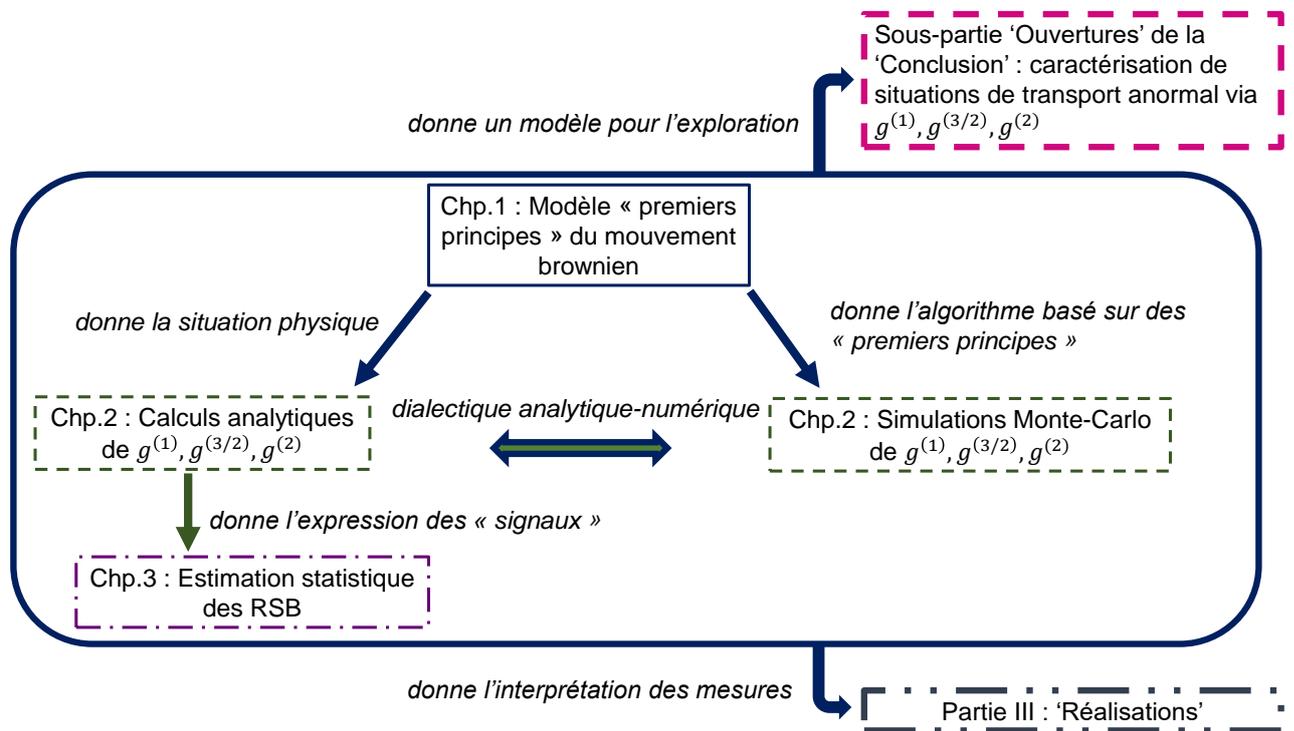


FIGURE 14 – Résumé synoptique des liens entre les chapitres de cette partie I, et de ses liens avec les autres parties de la dissertation.

Chapitre 1

Modèle "premiers principes" du mouvement brownien

Sommaire

I.	Introduction	42
I.1	Objectifs	42
I.2	Choix sur la modélisation du mouvement brownien	42
I.3	Organisation du chapitre	43
II.	Modèle de collisions de type cubes durs sans effets inertiels	43
II.1	Hypothèses et notations	45
II.2	Nature d'une composante V_α de $\mathcal{P}(m)$	46
II.3	Distribution des temps d'attente et des changements de vitesse	50
III.	Mouvement brownien	53
III.1	Sur la forme de la relation d'Einstein-Langevin	54
III.2	Limite brownienne	56
III.3	Analyse de la consistance du modèle	60
IV.	Simulations Monte-Carlo et vérifications	62
IV.1	Relaxation vers l'équilibre	63
IV.2	Comportement de la vitesse relative	64
IV.3	Relation d'Einstein-Langevin	66
V.	Conclusion	66

A l'âge de trois ans, l'enfant moyen entre dans une nouvelle phase graphique : il commence à simplifier ses griffonnages confus. Du chaos excitant, il commence à distiller les formes fondamentales, il fait des expériences avec [...] des carrés [...].

Le singe nu, Desmond Morris, traduit de l'anglais par Jean Rosenthal.

I. Introduction

Ce premier chapitre théorique est la base du chapitre suivant. La lecture de ce chapitre requiert un savoir-faire en théorie des probabilités et des processus stochastiques. Le parti pris de la rédaction est de supposer que le lecteur a des connaissances sur les processus markoviens continus, et possède des bases sur l'équation de Langevin et le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

I.1 Objectifs

La finalité de ce chapitre est de proposer un modèle de la physique fondamentale qui permet :

- 1) un couplage champ-matière, au sens où les fluctuations du champ s'expliquent par les fluctuations du processus de transport de la matière rayonnante,
- 2) de découpler la dynamique du mouvement de la matière rayonnante de celle des oscillations du champ rayonné, pour pouvoir décrire ces dynamiques même si leurs échelles de temps sont très différentes.

Rétrospectivement à la lecture du chapitre 2, ce présent chapitre peut également permettre de saisir ce que peuvent capturer les fonctions de corrélation $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$ sur un processus de transport de la matière rayonnante.

Ce chapitre décrit le mouvement brownien (non-relativiste) d'une particule classique massive non-chargée et libre (aucun potentiel n'est considéré), par rapport à un observateur inertiel (i.e. : dont le champ des quadri-rotations et quadri-accélérations le long de sa ligne d'univers sont nuls). Cette précision est importante pour la considération de l'effet Doppler-Fizeau qui interviendra dans le chapitre 2. La sous-partie qui suit I.2 justifie la modélisation choisie afin de découpler la dynamique du mouvement brownien des particules, de la dynamique des oscillations d'un champ qu'elles rayonneraient.

I.2 Choix sur la modélisation du mouvement brownien

C'est la vitesse qui est l'observable physique privilégiée pour décrire le mouvement brownien. La raison est rapidement rappelée dans les trois phrases suivantes afin de contextualiser le modèle choisi. Les particules massives ont une inertie, aussi faible soit-elle, et l'inertie engendre un caractère non-markovien de l'évolution de leur position : les positions successives qu'une particule occupe dépendent des positions précédentes (c'est la définition de l'inertie). L'évolution de la position d'une particule a donc un caractère non-markovien. L'inertie n'affecte cependant pas la vitesse, il faut donc privilégier la description du mouvement via la vitesse (relative à l'observateur), en espérant profiter de la puissance opérationnelle de l'hypothèse markovienne. La nature markovienne de la vitesse sera effectivement démontrée pour le modèle choisi dans la sous-partie II.2.

Les collisions sont traitées classiquement, elles sont supposées élastiques (par soucis de simplicité) et instantanées (devant les échelles de temps qui nous intéresse, de cinétique, i.e. : ns, à pré-cinétique, i.e. : \leq ps, mais \geq fs), donc localisables dans l'espace-temps. De plus, du fait de

la densité et de la température au sein d'un "blob" comme considéré figure 6, et du fait de la faible masse des particules élémentaires rayonnantes, les effets d'amortissements (parfois appelés effets inertiels) sur la vitesse entre deux collisions successives sont négligés. En conséquence de ces derniers points, la vitesse d'une particule massive sera considérée comme évoluant *par sauts* successifs dans le temps. La figure 1.1 schématise l'approximation faite dans la modélisation par sauts.

Le fait de considérer un caractère évolutif par sauts pour la vitesse, permet de découpler la dynamique régissant le mouvement brownien, de celle régissant l'oscillation du champ que rayonnerait la particule en mouvement brownien. Ces deux dynamiques peuvent être très différentes, par exemple la fréquence de collision peut-être largement inférieure à la fréquence de la radiation émise (entre deux collisions la radiation pourrait effectuer plusieurs milliers d'oscillations). La description de la vitesse comme un processus markovien continu, via la première forme de l'équation de Langevin, par exemple, permet de modéliser les changements de vitesses (incrémentés positifs ou négatifs) dus aux collisions, mais ne renseigne en rien de l'état de la vitesse entre deux collisions. Ce choix ne permet donc pas de décrire les fluctuations de la vitesse et une autre dynamique dont l'échelle de temps serait plus petite que le temps d'attente moyen entre deux collisions successives. (La description via les processus markoviens continus est souvent pertinente lorsque l'échelle cinétique [ns] ou pré-cinétique [$<ps$], adaptée pour décrire ce qu'il se passe entre deux collisions, peut-être "lissée" vers une échelle de temps plus grande, du type hydrodynamique [μs]). Dans la volonté de coupler les fluctuations du champ à celle du processus de transport de la matière rayonnante, tout en découplant les échelles de temps de ces deux dynamiques, l'approche par les processus markoviens à sauts est privilégiée.

I.3 Organisation du chapitre

L'annexe A détaille le minimum de connaissances à avoir sur les *Processus Markoviens à Sauts avec un Continuum d'Etats* (PMSCE, en acronyme), sans lequel il n'est pas possible d'aborder ce qui suit. Ce contenu a été placé en annexe afin de ne pas alourdir la lecture du lecteur accoutumé aux PMSCE. Pour le lecteur non-familier avec les PMSCE, mais ayant des connaissances sur les processus markoviens continus, il est espéré que l'annexe A lui soit profitable. Sur le sujet, des ouvrages de référence, en physique, sont [118] et [171]. Un résumé des notions fondamentales abordées dans l'annexe A est donné par la figure 1.2.

La partie II. se concentre sur la description microphysique du mouvement brownien. Le modèle utilisé est le modèle cinétique de type "premiers principes" du gaz de *cubes durs sans effets inertiels*. Ce modèle est parfois aussi appelé *cubes durs sans friction*, c'est à dire qu'aucun amortissement de la vitesse entre deux collisions n'est considéré. L'invention de ce modèle cinétique n'est pas originale à ce chapitre, le modèle peut par exemple être trouvé dans [171], chapitre 4. Cependant, l'analyse proposée est originale et l'utilisation de ce modèle pour coupler les fluctuations du champ à celle du processus de transport de la matière rayonnante (afin de comparer les premières fonctions de corrélations temporelles du champ, voir chapitre 2), semble être propre à cette dissertation et à la publication [158]. La partie II., en plus de justifier que chaque composante de la vitesse relative d'une particule soit un PMSCE, donne les résultats essentiels pour l'algorithme de simulation Monte-Carlo, dont les figures de proues sont détaillées en partie IV.. La partie III. permet d'exhiber que ce modèle donne bien lieu au mouvement brownien, dans une limite appelée à juste titre "limite brownienne". Dans cette partie III., la consistance du modèle est analysée, et la relation d'Einstein-Langevin obtenue est critiquée en partie IV..

II. Modèle de collisions de type cubes durs sans effets inertiels

Le modèle du gaz de cubes durs sans effets inertiels est un modèle connu de la théorie cinétique, et donc ce qui suit n'est pas nouveau. L'analyse et les méthodes utilisées localement pour

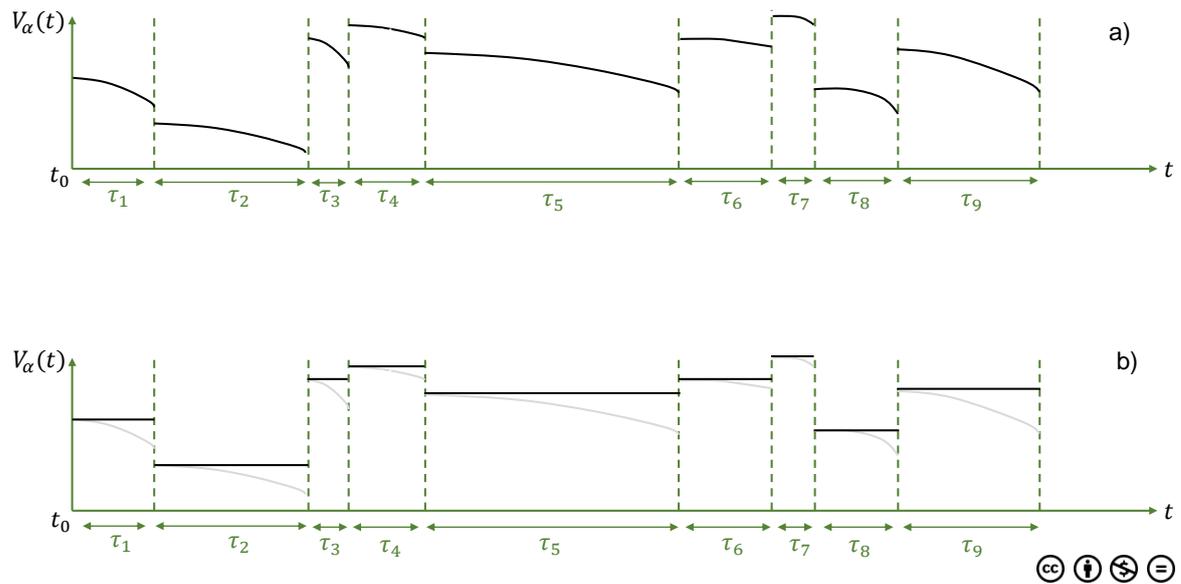


FIGURE 1.1 – Schématisation du principe de modélisation de la vitesse du mouvement brownien. V_α représente une composante du vecteur vitesse relative à l'observateur, et les (τ_i) représentent les temps d'attente entre deux collisions successives. Le modèle a) permet de décrire la distribution des temps d'attente entre chaque collisions, les changements de vitesse, et l'amortissement durant τ_i . Le modèle b) permet de décrire la distribution des temps d'attentes entre chaque collisions, les changements de vitesse, et suppose que V_α n'a pas le temps d'être amortie durant les τ_i . Avec b), V_α constitue un *Processus Markovien à Saut avec un Continuum d'Etat* (PMSCE), voir sous-partie II.2.

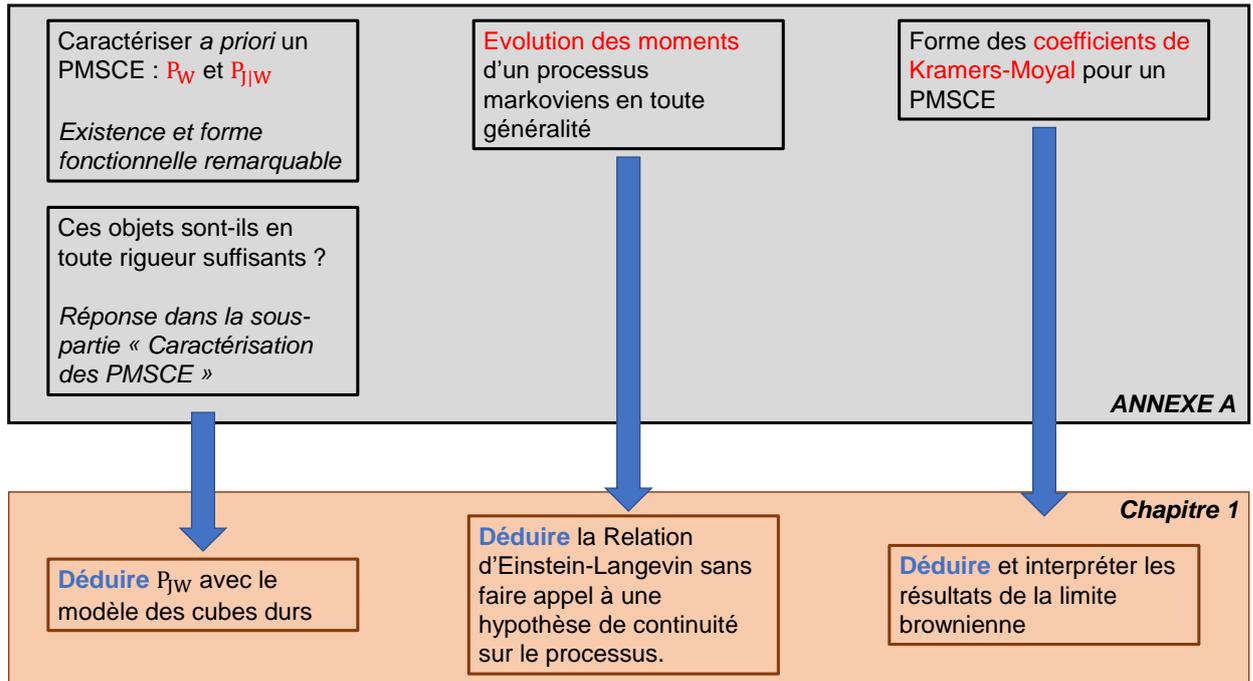


FIGURE 1.2 – Résumé des notions essentielles à ce chapitre détaillées dans l’annexe A.

dériver les quantités d’intérêt n’utilisent pas de nouvelles techniques mathématiques, mais sont originales. Les résultats finaux obtenus sont semblables à ceux de [171], chapitre 4, à quelques facteurs numériques près, et à quelques conventions différentes près.

Remarque. Les hypothèses invoquées dans la sous-partie II.1, les hypothèses inhérentes au modèle microphysique mises à part, sont relativement faibles comparées aux hypothèses invoquées dans une description de la vitesse via les processus markoviens continus (par exemple, l’équation de Langevin n’est pas posée ad-hoc). La contrepartie est qu’il faut mener une analyse mathématique plus conséquente.

II.1 Hypothèses et notations

Soit un gaz support de N particules libres \mathcal{P}_0 de masse m_0 , appelées particules “ordinaires”, réparties dans une enceinte cubique \mathcal{C} de côté L .

A la date t_0 une particule libre \mathcal{P} de masse m , appelée particule “extra-ordinaire” est injectée dans \mathcal{C} avec une vitesse initiale quelconque.

Les particules $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}_0(m_0)$ peuvent être des atomes ou des molécules. Elles sont traitées classiquement (i.e. : elles sont localisables dans l’espace-temps) et sont non-relativistes.

Soit un observateur inertiel \mathcal{O} . L’évolution de la vitesse relative des particules par rapport à l’observateur \mathcal{O} peut être décrite dans le référentiel de \mathcal{O} de manière globale. Les vecteurs de base du référentiel de \mathcal{O} sont notés : $(\vec{e}_\alpha)_{\alpha=x,y,z}$.

Les hypothèses du modèle du gaz de cubes durs (par abus de langage “modèle des cubes durs”, ci-après) sont les suivantes :

- (H0) : Les particules sont assimilées à des cubes. Tous les cubes sont parallèles entre eux. Pour \mathcal{P}_0 , le côté est ϱ_0 , et pour \mathcal{P} , le côté est ϱ .
- (H1) : Les collisions ne peuvent avoir lieu que sur les faces des cubes, et il n’est pas nécessaire que les faces soient parfaitement superposées pour qu’une collision ait lieu.
- (H2) : Aucune rotation n’est possible.

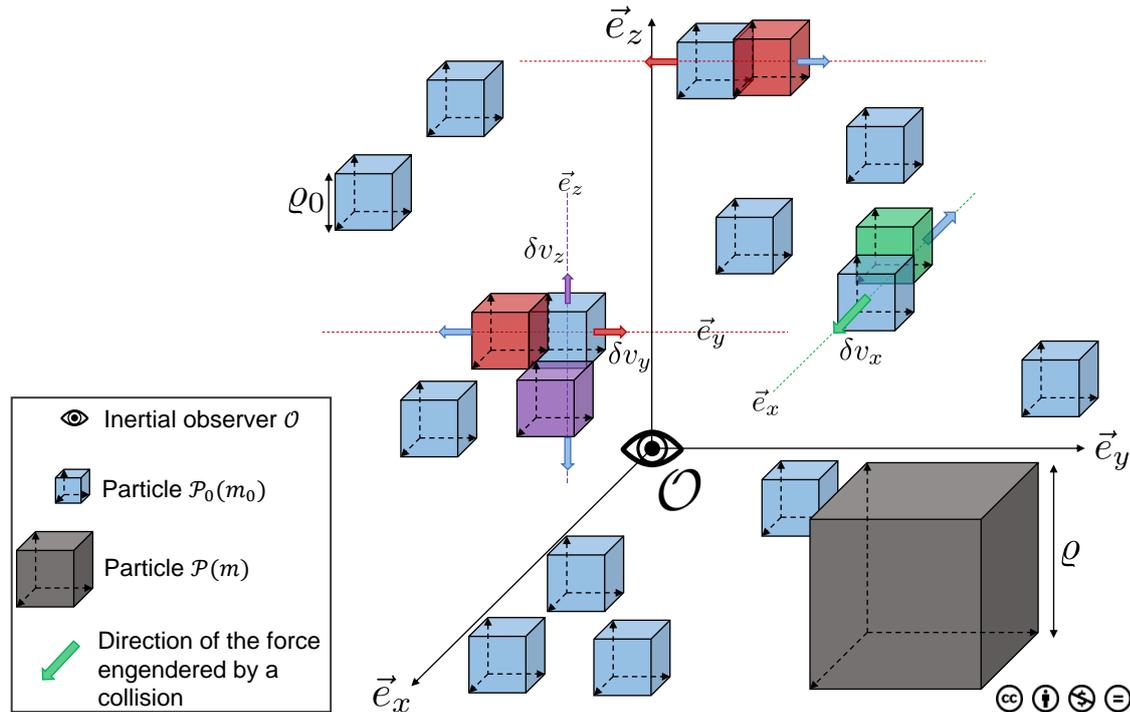


FIGURE 1.3 – Modèle cinétique des cubes durs. Les particules sont en mouvement par rapport à l'observateur \mathcal{O} . Les variations de vitesses, notées δv_x , δv_y , δv_z , ne sont engendrées que selon l'axe de la collision, à savoir \vec{e}_x , ou \vec{e}_y , ou \vec{e}_z .

(H0)+(H1)+(H2) \Rightarrow Une collision n'engendre des fluctuations que selon une seule des trois composantes de la vitesse à la fois.

(H3) : Cubes "durs" \Rightarrow les collisions sont élastiques.

Ces hypothèses forment ce qui est parfois appelé *le modèle du gaz unidimensionnel*. L'adjectif "unidimensionnel" caractérise l'interaction collision, et non pas la liberté de mouvement des particules. Une représentation d'un tel modèle est présentée figure 1.3.

A ces hypothèses sont ajoutées des hypothèses pour approximer la situation physique d'intérêt :

(H4) : Les effets d'amortissement de la vitesse sont négligés entre deux collisions successives.

(H5) : Les collisions avec l'enceinte \mathcal{C} sont négligées.

(H6) : Les $\mathcal{P}_0(m_0)$ sont supposées à l'équilibre thermodynamique canonique au sens de Boltzmann-Gibbs, où les mouvements de translations peuvent être décrits classiquement. Elles possèdent une température absolue T dans \mathcal{C} .

La table 1.1 résume les différents paramètres micro-physiques introduits. La sous-partie suivante II.2 établit chaque composante V_α de la vitesse relative de \mathcal{P} par rapport à \mathcal{O} comme étant un PMSCE.

II.2 Nature d'une composante V_α de $\mathcal{P}(m)$

Au vu du mécanisme de collision entre cubes durs, l'évolution d'une composante de la vitesse (de \mathcal{P} ou de \mathcal{P}_0) est indépendante des deux autres. En effet, d'après l'hypothèse (H1) une collision entre deux cubes n'agit que selon un axe commun aux deux faces des cubes : celui qui leur est perpendiculaire. De plus, les hypothèses (H0) et (H2) impliquent que les cubes sont toujours parallèles entre eux. Par conséquent, la force qui s'applique sur un cube lors d'une collision est dirigée selon un seul vecteur de base (\vec{e}_x , ou \vec{e}_y , ou \vec{e}_z). La variation de

Appellation	Notation et unités
masse des particules ordinaires \mathcal{P}_0	m_0 [kg]
masse de la particule extra-ordinaire \mathcal{P}	m [kg]
côté du cube ordinaire	ϱ_0 [m]
côté du cube extra-ordinaire	ϱ [m]
densité du gaz dans \mathcal{C}	n [m ⁻³]
nombre de particule \mathcal{P}_0 dans le gaz	N [\emptyset]
côté de l'enceinte cubique contenant le gaz	L [m]
température canonique du gaz	T [K]
composante α du vecteur vitesse de \mathcal{P} relativement à \mathcal{O}	$V_\alpha(t)$ [m/s]
composante α du vecteur vitesse de \mathcal{P}_0 relativement à \mathcal{O}	$U_\alpha(t)$ [m/s]

TABLE 1.1 – Notations, unités, et appellation des paramètres microphysiques.

vitesse induite est donc selon l'axe de la collision uniquement, les deux autres composantes de la vitesse restent inchangées. Deux collisions d'axes différents peuvent avoir lieu simultanément pour l'observateur \mathcal{O} , au quel cas, des fluctuations de vitesse sont induites selon ces deux axes de manière indépendante.

En conclusion, chaque composante V_α de la vitesse relative de \mathcal{P} , et chaque composante U_α de la vitesse relative de \mathcal{P}_0 , est traitée comme un processus stochastique indépendant des deux autres composantes de cette même vitesse. Les réalisations sont notées v_α pour V_α , et u_α pour U_α .

Suivant les notations introduites dans l'annexe A, et données dans la section concernée de la liste des Notations page xvi, la V.A. temps d'attente est notée W , ses réalisations sont notées τ , et la V.A. incrément de vitesse est notée J , et ses réalisations sont notées j . La densité de probabilité jointe $P_{WJ}(\tau, j|v_\alpha, t)$ définit la probabilité intersection de trois événements $E_1(\tau)$, $E_2(\tau)$, et E_3

$$P_{WJ}(\tau, j|v_\alpha, t)d\tau dj = \mathbb{P}\{E_1(\tau) \cap E_2(\tau) \cap E_3\},$$

où les $(E_i)_i$ sont :

$E_1(\tau)$: V_α ne saute pas dans l'intervalle de temps $[t, t + \tau[$ sachant que $V_\alpha(t) = v_\alpha$.

$E_2(\tau)$: V_α saute dans l'intervalle de temps $[t + \tau, t + \tau + d\tau[$ sachant que $V_\alpha(t + \tau) = v_\alpha$.

E_3 : V_α atteint l'intervalle d'états $[v_\alpha + j, v_\alpha + j + dj[$.

Si $\tau = 0$, l'événement $E_1(0)$ se confond avec la condition $V_\alpha(t) = v_\alpha$, et devient un événement certain, ainsi : $E_1(0) \cap E_2(0) = E_2(0)$. L'événement $E_2(0)$ devient :

$E_2(0)$: V_α saute dans l'intervalle de temps $[t, t + dt[$ sachant que $V_\alpha(t) = v_\alpha$.

La probabilité $P_{WJ}(\tau = 0, j|v_\alpha, t)dtdj$ est alors la probabilité que : sachant que $V_\alpha(t) = v_\alpha$, V_α saute entre $[t, t + dt[$ et soit dans $[v_\alpha, v_\alpha + j + dj[$. L'objectif de cette présente sous-partie II.2 est d'expliciter la densité de probabilité $P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t)$, ce qui est nécessaire et suffisant pour montrer que V_α peut-être traité comme un PMSCE (voir annexe A).

La première étape est d'établir la probabilité que $\mathcal{P}(m)$, ayant une vitesse relative (par rapport à \mathcal{O}), selon \vec{e}_α , v_α à la date t , percute, dans la durée infinitésimale dt , une particule $\mathcal{P}_0(m_0)$ dont la vitesse relative selon \vec{e}_α est dans $[u_\alpha, u_\alpha + du_\alpha[$. Cette probabilité est notée $q(u_\alpha, dt|v_\alpha, t)$. Soient $(\mathcal{P}_{0,i})_i$ les N particules $\mathcal{P}_0(m_0)$. La probabilité q peut-être considérée comme la probabilité d'une réunion d'événements $(C_i)_i$

$$q(u_\alpha, dt|v_\alpha, t) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^N C_i\right),$$

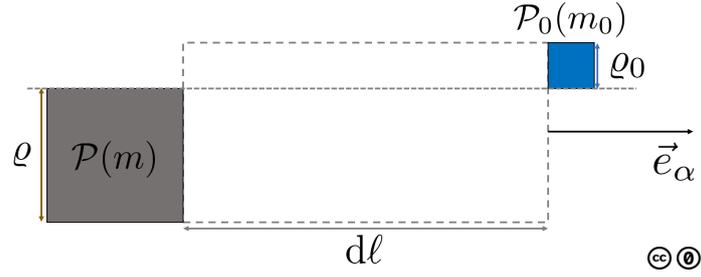
où l'événement C_i correspond à l'occurrence d'une collision, dans l'intervalle de temps $[t, t + dt[$, entre \mathcal{P} , ayant la vitesse v_α selon \vec{e}_α à la date t , et la particule $\mathcal{P}_{0,i}$ ayant une vitesse, selon \vec{e}_α , dans $[u_\alpha, u_\alpha + du_\alpha[$. La formule du crible donne alors :

$$q(u_\alpha, dt|v_\alpha, t) = \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} \mathbb{P}\{C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_k}\}. \quad (1.1)$$

Les événements C_i sont indépendants entre eux et la probabilité $\mathbb{P}\{C_i\}$ d'un événement C_i possède une expression explicite, elle est déterminée ci-après.

Si la vitesse U_α d'une particule $\mathcal{P}_{0,i}$ est déterministe, alors la probabilité $\mathbb{P}\{C_i\}$ s'interprète géométriquement. C'est la probabilité que \mathcal{P} soit dans le cylindre de collision d'axe \vec{e}_α d'une particule $\mathcal{P}_{0,i}$, représenté figure 1.4. La probabilité $\mathbb{P}\{C_i\}$ est simplement donnée par le rapport du volume du cylindre de collision $(\varrho + \varrho_0)^2 \cdot d\ell$ (cf figure 1.4) sur le volume total de l'enceinte \mathcal{C} qui est L^3 . Dans un cadre non relativiste, la longueur du cylindre de collision dépend trivialement de u_α via : $d\ell = |u_\alpha - v_\alpha| dt$.

Maintenant, U_α n'est pas déterministe. Les N particules libres $(\mathcal{P}_{0,i})_i$ sont supposées être à


 FIGURE 1.4 – Définition du cylindre de collision d'axe \vec{e}_α de longueur $d\ell$ et de volume $(\varrho + \varrho_0)^2 \cdot d\ell$.

l'équilibre thermodynamique canonique où les mouvement de translations peuvent être décrits classiquement, c'est l'hypothèse (H6). Dans la situation considérée, l'énergie d'interaction entre elles est indépendante de leurs vitesses (collisions élastiques (H3)). Ces hypothèses amènent à un résultat connu de la physique statistique : les lois de probabilités de chaque composante du vecteur vitesse relative de $\mathcal{P}_{0,i}$ et de $\mathcal{P}_{0,j \neq i}$ sont indépendantes entre elles, et plus encore : elles sont identiques. Cette loi de probabilité commune est, pour chaque composante U_α de la vitesse, une loi normale centrée et de variance $\sigma_u^2 = k_B T / m_0$. La densité de probabilité (indépendante du temps) est notée $\mathbf{P}_{u_\alpha}(u_\alpha)$. Ainsi, la probabilité $\mathbb{P}\{C_i\}$ s'écrit de manière identique quelque soit i :

$$\mathbb{P}\{C_i\} = \frac{|u_\alpha - v_\alpha| dt (\varrho + \varrho_0)^2}{L^3} \mathbf{P}_{u_\alpha}(u_\alpha) du_\alpha. \quad (1.2)$$

La distribution de la vitesse de $\mathcal{P}_{0,i}$ étant indépendante de $\mathcal{P}_{0,j \neq i}$, les événements C_i sont indépendants entre eux (la collision entre \mathcal{P} et $\mathcal{P}_{0,i}$, ne dépend pas de la collision entre \mathcal{P} et $\mathcal{P}_{0,j \neq i}$). La formule (1.1) s'écrit alors :

$$\mathbf{q}(u_\alpha, dt | v_\alpha, t) = \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} \prod_{i=i_1}^{i_k} \mathbb{P}\{C_i\}. \quad (1.3)$$

Or, le terme : $\prod_{i=i_1}^{i_k} \mathbb{P}\{C_i\}$, au vu de (1.2), est proportionnel à l'infiniment petit : $dt^{i_k - i_1 + 1}$.

A l'ordre $o(dt)$ (qui physiquement s'interprète comme le fait de ne considérer l'occurrence que d'une collision entre \mathcal{P} et $\mathcal{P}_{0,i}$ durant $[t, t + dt]$) la relation (1.3) devient donc :

$$\mathbf{q}(u_\alpha, dt | v_\alpha, t) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}\{C_i\} + o(dt),$$

soit en posant $n = N/L^3$,

$$\mathbf{q}(u_\alpha, dt | v_\alpha, t) = n(\varrho + \varrho_0)^2 |u_\alpha - v_\alpha| \mathbf{P}_{u_\alpha}(u_\alpha) du_\alpha dt + o(dt). \quad (1.4)$$

Il reste à essayer d'exprimer u_α en fonction de l'incrément en vitesse j , qui apparaît dans $\mathbf{P}_{WJ}(\tau = 0, j | v_\alpha, t)$. Par définition, la densité $\mathbf{P}_{WJ}(\tau = 0, j | v_\alpha, t)$ recherchée s'obtiendra alors en utilisant l'expression (1.4) où u_α s'exprime en fonction de j .

Soient u'_α et v'_α les vitesses de $\mathcal{P}_{0,i}$ et de \mathcal{P} après une collision. Par définition $j := v'_\alpha - v_\alpha$. La conservation de l'impulsion et la conservation de l'énergie cinétique (hypothèse (H3)) permettent d'obtenir un système à deux équations d'inconnues u'_α et v'_α . Après un peu d'algèbre, il vient :

$$v'_\alpha - v_\alpha = \frac{2m_0}{m + m_0} (u_\alpha - v_\alpha),$$

Soit en posant :

$$\mu := 2m_0/(m + m_0), \quad (1.5)$$

$$j = \mu(u_\alpha - v_\alpha) \Leftrightarrow u_\alpha = v_\alpha + \frac{j}{\mu}. \quad (1.6)$$

Si \mathcal{P} ayant la vitesse v_α percute $\mathcal{P}_{0,i}$ ayant une vitesse dans $[u_\alpha, u_\alpha + du_\alpha[$ avec u_α donnée par (1.6) et donc avec : $du_\alpha = dj/\mu$, alors V_α sera dans $[v_\alpha + j, v_\alpha + j + dj[$ en vertu de (1.6). Les sauts de V_α n'étant dus qu'aux collisions, par définition de \mathbf{q} et de $P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t)$, il vient :

$$P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t) dj dt = \mathbf{q} \left(u_\alpha = v_\alpha + \frac{j}{\mu}, dt|v_\alpha, t \right).$$

Puis avec (1.4), en divisant par $dj dt$ de chaque côté, et en passant à la limite $dt \rightarrow 0$:

$$P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t) = \frac{\eta}{\mu^2} |j| P_{u_\alpha} \left(v_\alpha + \frac{j}{\mu} \right), \quad (1.7)$$

où le paramètre η , correspond à l'inverse du libre parcours moyen, donc homogène à l'inverse d'une distance, est défini par :

$$\eta := n(\varrho + \varrho_0)^2, \quad (1.8)$$

remarque : $(\varrho + \varrho_0)^2$ correspond à la section efficace de collision. La densité de probabilité P_{u_α} est une gaussienne centrée en zéro, donc :

$$P_{u_\alpha} \left(v_\alpha + \frac{j}{\mu} \right) = \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(v_\alpha + j/\mu)^2}{2\sigma_u^2} \right), \quad (1.9)$$

où :

$$\sigma_u^2 = \frac{k_B T}{m_0} \quad (1.10)$$

La densité $P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t)$ a été explicitée en (1.7), son expression est déterminée par celle de $P_{u_\alpha} \left(v_\alpha + \frac{j}{\mu} \right)$ qui est donnée en (1.9). La quantité $P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t)$ est donc bien définie. Cette densité de probabilité jointe permet de définir :

$$P_W(0|v_\alpha, t) = \int P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t) dj, \quad (1.11)$$

et :

$$P_{J|W}(j|0; v_\alpha, t) = \frac{P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t)}{\int P_{WJ}(0, j'|v_\alpha, t) dj'}. \quad (1.12)$$

D'après le résultat (A.11) de l'annexe A, cela revient à définir V_α comme un PMSCE. Il peut de plus être remarqué que $P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t)$ ne fait pas intervenir t dans son expression (1.7), il en est donc de même pour (1.11) et (1.12), ainsi V_α est un PMSCE homogène temporellement.

Il reste à examiner si (1.11) et (1.12) ont des expressions analytiques, c'est ce qui est étudié dans la sous partie II.3 qui suit.

II.3 Distribution des temps d'attente et des changements de vitesse

La connaissance de (1.11) et (1.12) est nécessaire et suffisante d'après (A.11). D'un point de vue pratique, cette donnée permet de répondre à la question "quand et comment V_α saute?". En effet, la connaissance de (1.11) permet de déduire $P_W(\tau|v_\alpha, t)$ via (A.8). Puis $P_{J|W}(j|\tau; v_\alpha, t)$ est déduite de (1.12) car sa dépendance en τ se fait par définition en remplaçant t par $t + \tau$ dans $P_{J|W}(j|0; v_\alpha, t)$.

Après avoir injecté (1.7) dans (1.11), et après quelques manipulations, certes un peu longues,

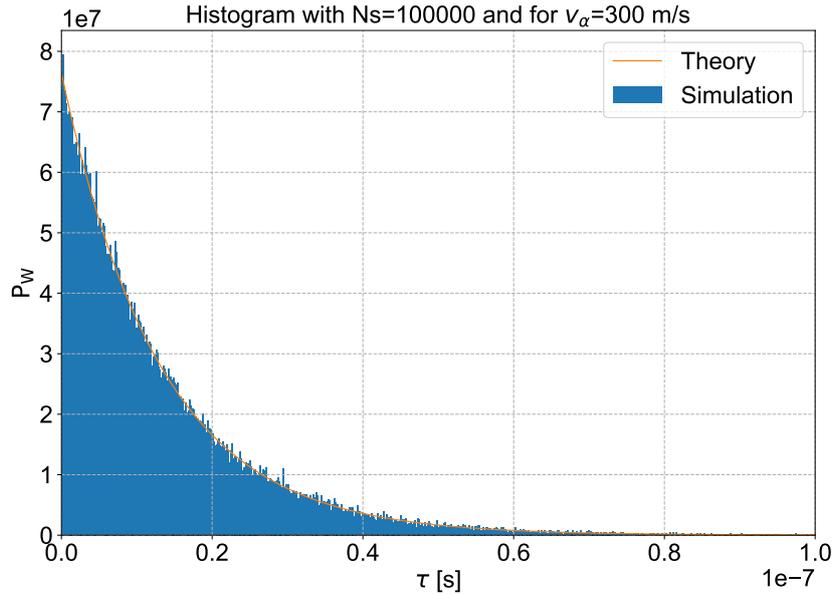


FIGURE 1.5 – Exemple de résultat de la génération Monte-Carlo de la loi exponentielle (1.15) de W par la méthode de l'inverse, pour 100000 tirages. Les paramètres microphysiques sont précisés en figure 1.6.

mais typiques de celles sur les intégrales gaussiennes, une expression analytique pour $P_W(0|v_\alpha, t)$ est obtenue :

$$P_W(0|v_\alpha, t) \equiv P_W(0|v_\alpha) = \eta \left(v_\alpha \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{v_\alpha}{\sigma_u \sqrt{2}} \right) + \sigma_u \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \exp \left(-\frac{v_\alpha^2}{2\sigma_u^2} \right) \right) \quad (1.13)$$

Pour rappel, voir l'annexe A, une fonction notée a est utilisée pour alléger le formalisme :

$$a(v_\alpha, t) := P_W(0|v_\alpha, t). \quad (1.14)$$

Dans la présente situation $a(v_\alpha, t) \equiv a(v_\alpha)$, qui est donnée par (1.13), et donc en appliquant (A.8), il vient :

$$P_W(\tau|v_\alpha, t) \equiv P_W(\tau|v_\alpha) = a(v_\alpha) \exp(-a(v_\alpha)\tau). \quad (1.15)$$

En injectant (1.13) dans (1.15), l'expression obtenue n'est pas triviale mais reste analytique. La simulation Monte-Carlo des temps d'attente W , pour un état (v_α, t) donné, suivant (1.15), se fait en générant la loi exponentielle (1.15) de paramètre $a(v_\alpha)$ par la méthode de l'inverse (pour un rappel sur cette méthode voir par exemple [172]). Un exemple de résultat de la génération Monte-Carlo est donné figure 1.5.

Connaissant $P_{J|W}(0, j|v_\alpha)$ et $P_W(0|v_\alpha)$, l'expression de (1.12) ne pose pas de difficultés. Cependant afin d'alléger l'écriture deux fonctions sont introduites. Soit la fonction H définie par :

$$(H(v_\alpha))^{-1} := \mu^2 \sigma_u \sqrt{2\pi} \left(v_\alpha \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{v_\alpha}{\sigma_u \sqrt{2}} \right) + \sigma_u \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \exp \left(-\frac{v_\alpha^2}{2\sigma_u^2} \right) \right), \quad (1.16)$$

et soit la fonction Ψ définie par :

$$\Psi(j|v_\alpha) = |j| \exp \left(-\frac{(v_\alpha + j/\mu)^2}{2\sigma_u^2} \right). \quad (1.17)$$

Il vient alors pour (1.12) :

$$P_{J|W}(j|0; v_\alpha, t) \equiv P_{J|W}(j|0; v_\alpha) = H(v_\alpha) \Psi(j|v_\alpha). \quad (1.18)$$

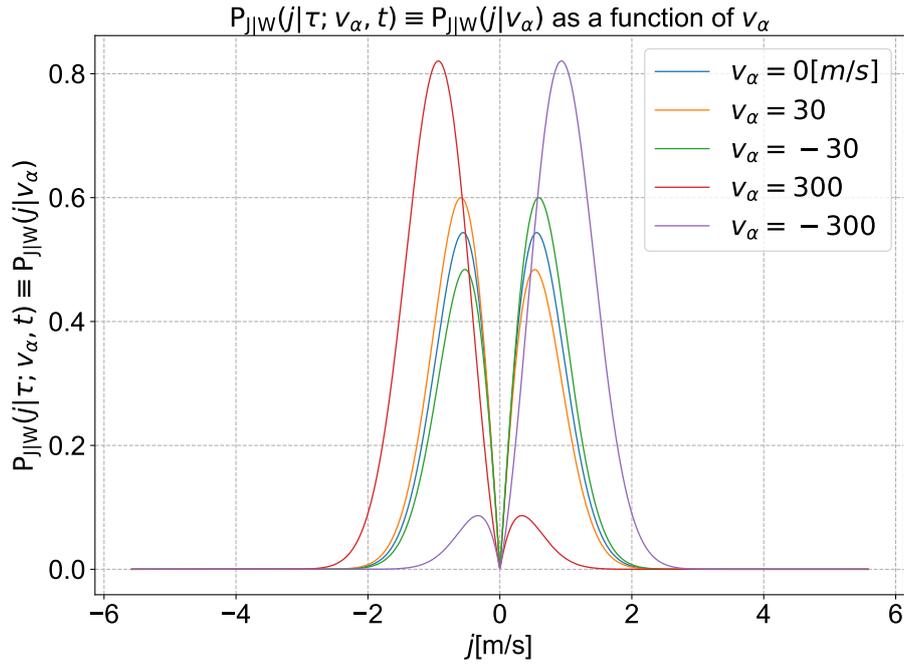


FIGURE 1.6 – Graphe de $P_{J|W}$ pour plusieurs valeurs de v_α . Les paramètres microphysiques sont tels que : $\mu = 10^{-3}$, $m_0 = 60,23 \cdot 10^{-27}$ kg (gaz d'Argon 36), $\varrho = 100\varrho_0$, et $\varrho_0 = 0,3$ nm. La température et la pression sont standards : $T = 300$ K, et $P = 1,013$ bar. Le comportement est consistant avec la relaxation vers l'équilibre canonique : lorsque $v_\alpha > \langle V_\alpha \rangle = 0$, le saut en vitesse a une plus grande probabilité d'avoir une valeur ramenant V_α vers 0. Lorsque $v_\alpha = 0$, les incréments positifs sont équiprobables aux incréments négatifs, assurant le maintien en moyenne autour de 0.

Par définition de $P_{J|W}(j|\tau; v_\alpha, t)$, son expression est déduite de celle de $P_{J|W}(j|0; v_\alpha, t)$, en remplaçant t par $t + \tau$. Comme ici (1.18) ne dépend pas du temps,

$$P_{J|W}(j|\tau; v_\alpha, t) \equiv P_{J|W}(j|v_\alpha) = H(v_\alpha)\Psi(j|v_\alpha). \quad (1.19)$$

Le graphe de $P_{J|W}$ est présenté figure 1.6 pour plusieurs valeurs v_α .

La simulation Monte-Carlo pour les incréments de vitesses J peut se faire par la méthode du rejet (pour un rappel sur cette méthode voir par exemple [172]). L'inversion analytique de la fonction de répartition $F_{J|W}$ n'est pas aisée. En effet, si $y := F_{J|W}(j|v_\alpha)$, pour mettre en place une méthode de l'inverse il faut résoudre l'équation suivante pour j :

$$y = H(v_\alpha) \int_{-\infty}^j |j'| \exp\left(-\frac{(v_\alpha + j'/\mu)^2}{2\sigma_u^2}\right) dj'.$$

La méthode du rejet s'est avérée plus fructueuse. La fonction Ψ admet deux extrema, notés j_+ et j_- ,

$$j_- = -\frac{\mu}{2} \left(v_\alpha + \sqrt{v_\alpha^2 + 4\sigma_u^2} \right) < 0 \quad (1.20)$$

$$j_+ = \frac{\mu}{2} \left(-v_\alpha + \sqrt{v_\alpha^2 + 4\sigma_u^2} \right) > 0 \quad (1.21)$$

Une fonction majorante de $\Psi(j|v_\alpha)$, notée $\beta(j|v_\alpha)$, a été trouvée avec une contrainte de forme gaussienne, elle s'écrit :

$$\beta(j|v_\alpha) = [\Psi(j_+|v_\alpha) + \Psi(j_-|v_\alpha)] \exp\left(-\frac{(j - j_c)^2}{2\sigma_j^2}\right), \quad (1.22)$$

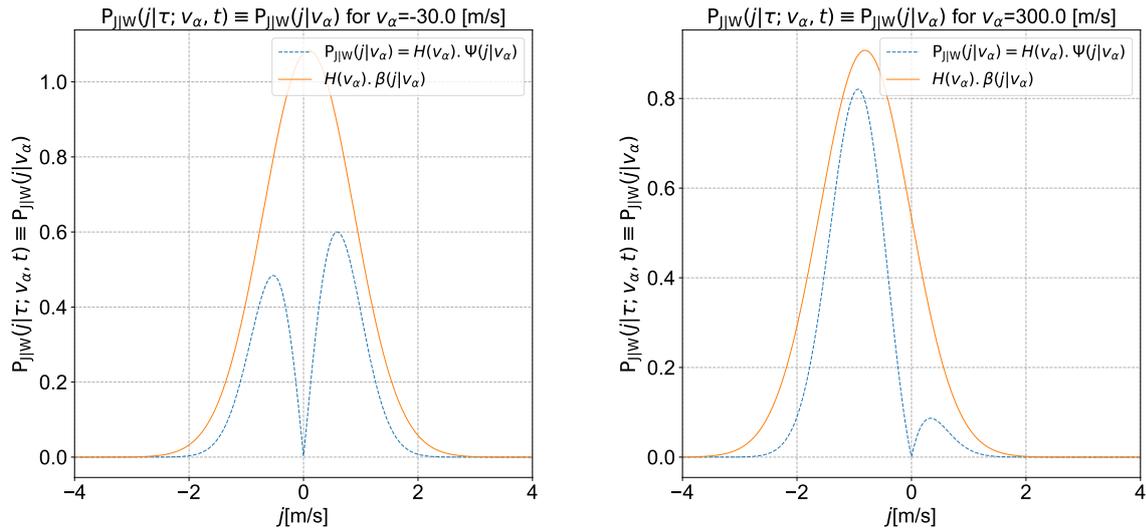


FIGURE 1.7 – Majoration de $\Psi(j|v_\alpha)$ par la fonction $\beta(j|v_\alpha)$ donnée par (1.22) pour différentes valeurs de v_α . Les paramètres microphysiques sont identiques à ceux de la figure 1.6.

où j_+ et j_- sont donnés par (1.20) et (1.21), où la variance σ_j^2 est définie par :

$$\sigma_j^2 = 2 \left(\sigma_u^2 \mu^2 \right), \quad (1.23)$$

et où le centre j_c de la gaussienne est défini comme le barycentre entre $\Psi(j_+|v_\alpha)$ et $\Psi(j_-|v_\alpha)$:

$$j_c = \frac{j_+ \Psi(j_+|v_\alpha) + j_- \Psi(j_-|v_\alpha)}{\Psi(j_+|v_\alpha) + \Psi(j_-|v_\alpha)}. \quad (1.24)$$

Quelques exemples de la majoration sont montrés en figure 1.7, et un exemple de génération Monte-Carlo est présenté figure 1.8.

III. Mouvement brownien

Il reste à démontrer que le modèle précédent donne bien le mouvement brownien, au moins dans une certaine limite. Il suffit pour cela de montrer que V_α tend, dans cette limite, vers le processus d’Ornstein-Uhlenbeck, et qu’une figure de proue du mouvement brownien comme la relation d’Einstein-Langevin est opérationnelle. Par opérationnelle, il est entendu que la relation d’Einstein-Langevin trouve une écriture avec les différents paramètres microphysiques introduits dans le modèle des cubes durs précédent.

Tout d’abord, la sous partie III.1 rappelle l’origine de la forme de la relation d’Einstein-Langevin à partir de considérations générales. Cette sous-partie fait fréquemment appel à la partie V. de l’annexe A. Ce travail en amont permet de déduire la relation d’Einstein-Langevin plus efficacement dans la sous-partie III.2 (et l’expression finale de la relation d’Einstein-Langevin, en fonction de tous les paramètres micro-physiques, est déduite dans la sous-partie IV..3).

Dans la sous-partie III.2, le modèle des cubes durs sans effets inertiels est examiné dans une limite appelée, à juste titre, “limite brownienne”. Il y est montré que dans cette limite et sur une échelle de temps qui est précisée, chaque composante V_α du vecteur vitesse relative de $\mathcal{P}(m)$, peut-être vue comme un processus continu, qui n’est autre que le processus d’Ornstein-Uhlenbeck.

La consistance du modèle est analysée en sous-partie III.3.

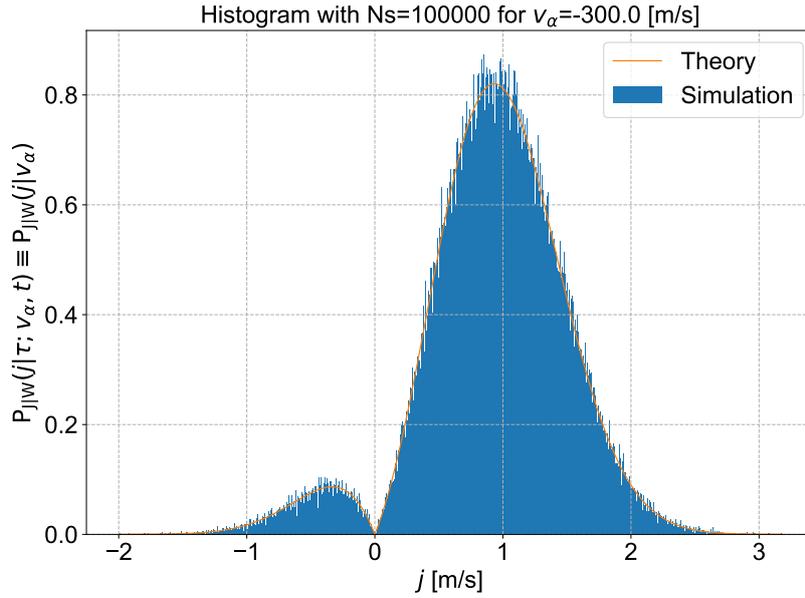


FIGURE 1.8 – Exemple de résultat de la génération Monte-Carlo pour 100000 tirages de J par la méthode du rejet avec (1.22). Les paramètres microphysiques sont les mêmes que ceux de la figure 1.6.

III.1 Sur la forme de la relation d'Einstein-Langevin

La forme de la relation d'Einstein-Langevin est une conséquence générale de l'évolution des moments d'un processus markovien, qu'il soit continu ou à saut. Quelques résultats sur l'évolution des moments d'un processus markovien ont été développés dans la partie V. de l'annexe A. Dans ce qui suit la forme de la relation d'Einstein-Langevin est dérivée à partir de ces considérations générales.

Soit un processus markovien, noté V_α tel que ses deux premiers coefficients de Kramers-Moyal s'écrivent à l'aide de deux constantes A et D :

$$K_1(v_\alpha, t) = -A \cdot v_\alpha, \quad (1.25)$$

$$K_2(v_\alpha, t) = D. \quad (1.26)$$

Remarque-Rappel. Si V_α est continu, alors K_1 et K_2 sont ses seuls coefficients de Kramers-Moyal non nuls, et avec les formes (1.25) et (1.26), V_α correspond au processus d'Ornstein-Uhlenbeck (abrégié "O.U." ci après).

Soit R_α le processus intégral de V_α .

Il s'agit d'expliciter l'évolution temporelle de l'écart-type de R_α . La relation (A.21), sous réserve de pouvoir expliciter le terme $\langle\langle R_\alpha(t), V_\alpha(t) \rangle\rangle$, et de pouvoir l'intégrer par rapport à t , permet cela. Maintenant, $\langle\langle R_\alpha(t), V_\alpha(t) \rangle\rangle$, fonction de t , est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En effet, en détaillant la dérivée de $\langle\langle R_\alpha(t), V_\alpha(t) \rangle\rangle$ par rapport au temps, en utilisant (A.20), en utilisant (A.17) [qui prend une forme particulière avec (1.25)], et en utilisant (A.22) avec $k = \ell = 1$, il vient :

$$\frac{d\langle\langle R_\alpha(t), V_\alpha(t) \rangle\rangle}{dt} = \langle V_\alpha^2(t) \rangle - \langle V_\alpha(t) \rangle^2 - A [\langle R_\alpha(t) V_\alpha(t) \rangle - \langle R_\alpha(t) \rangle \langle V_\alpha(t) \rangle]$$

Soit :

$$\frac{dC_{rv}}{dt} + A \cdot C_{rv} = \langle\langle V_\alpha^2(t) \rangle\rangle, \quad (1.27)$$

Où, pour alléger l'écriture de (1.27), il est noté : $C_{rv}(t) = \langle\langle R_\alpha(t), V_\alpha(t) \rangle\rangle$.

Le terme $\langle\langle V_\alpha^2(t) \rangle\rangle$ dans (1.27) peut-être explicité. En effet, en utilisant (A.18) avec (1.25) et

(1.26), il vient l'équation différentielle

$$\frac{d\langle\langle V_\alpha^2(t)\rangle\rangle}{dt} + 2A\langle\langle V_\alpha^2(t)\rangle\rangle = D. \quad (1.28)$$

Avec la condition initiale : $V_\alpha(t = t_0) = v_{\alpha,0}$, où : $v_{\alpha,0}$ est une constante, impliquant que $\langle\langle V_\alpha^2(t = t_0)\rangle\rangle = 0$, la solution de (1.28) s'écrit

$$\langle\langle V_\alpha^2(t)\rangle\rangle = \frac{D}{2A} (1 - \exp(-2A(t - t_0))), \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.29)$$

Avec (1.29), l'équation (1.27) peut se résoudre à l'aide de la méthode de variation des constantes, et il vient :

$$C_{rv}(t) = \frac{D}{2A^2} [1 + \exp(-2A(t - t_0)) - 2\exp(-A(t - t_0))]. \quad (1.30)$$

La relation (A.21) est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre, elle s'intègre facilement entre t_0 et t , et la solution s'écrit

$$\langle\langle R_\alpha^2(t)\rangle\rangle = \frac{D}{A^2} \left[(t - t_0) + \frac{1}{2A} [1 - \exp(-2A(t - t_0))] - \frac{2}{A} [1 - \exp(-A(t - t_0))] \right]. \quad (1.31)$$

Posons

$$\tau_v := \frac{1}{A}. \quad (1.32)$$

Aux temps longs, c'est-à-dire pour

$$\tau := (t - t_0) \gg \tau_v,$$

la forme de (1.31) se simplifie :

$$\lim_{\tau \gg \tau_v} \left[\sqrt{\langle\langle R_\alpha^2(t)\rangle\rangle} \right] = \frac{\sqrt{D}}{A} \cdot \sqrt{\tau}. \quad (1.33)$$

La relation (1.33) est une forme généralisée de la relation d'Einstein-Langevin.

Remarque. La seule hypothèse qui a été faite sur la nature de V_α concerne la forme de ses deux premiers coefficients de Kramers-Moyal (1.25) et (1.26). L'équation de Langevin n'a pas été introduite et V_α n'a pas été supposé comme continu.

Dans le contexte de la partie précédente II., V_α est une composante du vecteur vitesse relative de $\mathcal{P}(m)$ et R_α est une composante du vecteur position relative.

La relation d'Einstein-Langevin fait intervenir le coefficient de frottement visqueux du fluide ou du gaz, noté γ . C'est l'application de (1.33) dans la situation où une particule $\mathcal{P}(m)$ se déplace dans un gaz à l'équilibre thermodynamique canonique de température T . S'il est supposé que $\langle V_\alpha \rangle$ suit le principe fondamental de la dynamique, avec la condition initiale $V_\alpha(t = t_0) = v_{\alpha,0}$, il vient :

$$\langle V_\alpha(t) \rangle = v_{\alpha,0} \exp\left(-\frac{\gamma}{m}(t - t_0)\right). \quad (1.34)$$

De plus l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique canonique donne

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\langle\langle V_\alpha^2(t)\rangle\rangle \right] = \frac{k_B T}{m}. \quad (1.35)$$

En comparant (1.34) à la solution de (A.17) avec (1.25) donnant $\langle V_\alpha(t) \rangle$, et en comparant (1.35) avec la limite en $t \rightarrow +\infty$ de (1.29), il vient :

$$A = \frac{\gamma}{m}, \quad (1.36)$$

$$D = \frac{2\gamma k_B T}{m^2}. \quad (1.37)$$

La relation (1.33) prend alors la forme de la relation d'Einstein-Langevin :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\langle R_\alpha^2(t) \rangle} \right] = \sqrt{\frac{2k_B T}{\gamma}} \cdot \sqrt{\tau}. \quad (1.38)$$

L'enjeu de la partie III..2 est d'examiner si le modèle permet d'exprimer γ , ou de manière équivalente d'écrire (1.33), en fonction des paramètres microphysiques introduits. Il faudra alors vérifier si la relation d'Einstein-Langevin ainsi obtenue possède des dépendances avec la température T et la densité n du gaz consistantes.

III..2 Limite brownienne

Il est ici examiné dans quelle mesure le modèle précédent donne le mouvement brownien. Il faut et suffit pour cela d'étudier la forme des coefficients de Kramers-Moyal de V_α . Plus précisément, pour démontrer le mouvement brownien il faut et suffit de montrer que les deux premiers coefficients ont la même forme que ceux du processus d'O.U., et de pouvoir dire si la hiérarchie des $(K_n(v_\alpha, t))_n$ peut-être tronquée à $n = 2$ inclus, et si oui sous-quelle condition. Les $(K_n)_n$ peuvent s'exprimer en fonction des paramètres microphysiques introduits en partie II.. En utilisant le résultat (A.15) avec l'expression (1.7) obtenue pour $P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t)$, en effectuant un changement de variable, et en adimensionnalisant l'intégrale présente dans l'expression, il vient :

$$K_n(v_\alpha, t) \equiv K_n(v_\alpha) = \frac{\eta \sigma_u}{\sqrt{2\pi}} (\sigma_u \mu)^n \cdot \mathfrak{J}_n \left(\frac{v_\alpha}{\sigma_u} \right), \quad (1.39)$$

où :

$$\mathfrak{J}_n(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - y)^n |x - y| \exp(-x^2/2) dx, \quad (1.40)$$

et où η est donné par (1.8) et σ_u par (1.10).

Aucune expression analytique n'a été trouvée pour $\mathfrak{J}_n(y)$. Pour v_α/σ_u fini, l'analyse avec un logiciel de calcul formel montre cependant qu'il n'y a pas de divergence avec n . La divergence en n dans (1.39) est donc donnée par $(\sigma_u \mu)^n$. L'expression des $(K_n)_n$ est ensuite examinée dans une certaine limite des paramètres microphysiques du modèle des cubes durs.

Cette limite est fondée sur deux hypothèses. La première concerne les tailles et masses des particules :

$$\varrho_0 \ll \varrho \quad , \quad \text{et,} \quad m_0 \ll m. \quad (1.41)$$

La deuxième est une hypothèse rajoutée ad-hoc :

$$(1.41) \Rightarrow \forall n \in \left[1, E \left(\frac{m}{m_0} \right) \right], \quad \langle V_\alpha^{2n} \rangle \ll \sigma_u^{2n}, \quad (1.42)$$

où $E(X)$ désigne la partie entière de X . L'hypothèse (1.42) sera démontrée à posteriori.

La "limite brownienne" est l'ordre un dans les infiniment petits, c'est à dire, avec les notations de Landau, les termes en $O((v_\alpha/\sigma_u)^2)$, ou en $o(m_0/m)$ (ou $O((m_0/m)^2)$), ou en $o(\varrho_0/\varrho)$ (ou $O((\varrho_0/\varrho)^2)$). Une quantité X examinée dans cette limite est notée $\lim_B(X)$.

La forme de K_1 et K_2 est particulière dans cette limite. En remarquant tout d'abord que pour tout n :

$$K_n(-v_\alpha) = (-1)^n K_n(v_\alpha),$$

il s'en suit que K_1 est impaire et que K_2 est paire. Les développements limités de K_1 et K_2 en $v_\alpha = 0$ se ramènent en fait à des développements limités en $(v_\alpha/\sigma_u)^2$ ($v_\alpha \ll \sigma_u$ avec (1.42)). En introduisant les coefficients $(k_{ij})_{ij}$ et les coefficients sans dimensions $(c_n^{(\ell, m)})_{\ell, m}$ définis par

$$k_{n\ell} := \frac{1}{\ell!} \left. \frac{d^\ell K_n}{dv_\alpha^\ell} \right|_{v_\alpha=0}, \quad c_n^{(\ell, m)} := \sigma_u^{\ell-m} \frac{k_{n\ell}}{k_{nm}}, \quad (1.43)$$

les coefficients de Kramers-Moyal K_1 et K_2 s'écrivent avec (1.42) :

$$K_1(v_\alpha) = k_{11}v_\alpha \left[1 + c_1^{(3,1)} \left(\frac{v_\alpha}{\sigma_u} \right)^2 + c_1^{(5,1)} \left(\frac{v_\alpha}{\sigma_u} \right)^4 + o \left(\left(\frac{v_\alpha}{\sigma_u} \right)^4 \right) \right] \quad (1.44)$$

$$K_2(v_\alpha) = k_{20} \left[1 + c_2^{(2,0)} \left(\frac{v_\alpha}{\sigma_u} \right)^2 + c_2^{(4,0)} \left(\frac{v_\alpha}{\sigma_u} \right)^4 + o \left(\left(\frac{v_\alpha}{\sigma_u} \right)^4 \right) \right]. \quad (1.45)$$

Remarque. Il a été vérifié que les coefficients $c_n^{(\ell,m)}$ présents dans (1.44) et (1.45) ne divergent pas : en utilisant (1.39) dans (1.43), et en inter-changeant dérivation et intégration, il a été trouvé : $c_1^{(3,1)} = 1$, $c_1^{(5,1)} = -2$, $c_2^{(2,0)} = 3/2$, $c_2^{(4,0)} = 1/8$.

Dans la limite brownienne (1.44) et (1.45) deviennent :

$$\lim_B(K_1(v_\alpha)) = -A \cdot v_\alpha, \quad \text{où : } A := -\lim_B(k_{11}), \quad (1.46)$$

$$\lim_B(K_2(v_\alpha)) = D, \quad \text{où : } D := \lim_B(k_{20}). \quad (1.47)$$

A ce stade, il peut déjà être remarqué que (1.46) et (1.47) sont les formes des coefficients de Kramers-Moyal pour le processus d'O.U.. Il faut maintenant donner une expression de A et D en fonction des paramètres microphysiques.

Pour calculer k_{11} il faut d'abord calculer $K_1(v_\alpha)$. En partant de l'expression (1.39), et après quelques manipulations et résultats typiques des intégrales gaussiennes, il vient :

$$K_1(v_\alpha) = \frac{-2\eta\mu}{\sigma_u\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{v_\alpha} (u^2 + v_\alpha^2) \exp\left(\frac{-u^2}{2\sigma_u^2}\right) du + 2 \int_{v_\alpha}^{+\infty} uv_\alpha \exp\left(\frac{-u^2}{2\sigma_u^2}\right) \right). \quad (1.48)$$

Le coefficient k_{11} se déduit en injectant (1.48) dans (1.43). L'application de la règle de différenciation de Leibniz donne, après quelques manipulations,

$$k_{11} = \frac{-4\eta\mu}{\sqrt{2\pi}} \sigma_u. \quad (1.49)$$

Le calcul de $k_{20} = K_2(v_\alpha = 0)$ n'impose pas de dérivation, et se réduit à un calcul typique d'intégrale gaussienne. Ainsi après quelques étapes,

$$k_{20} = \frac{4\eta\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \sigma_u^3. \quad (1.50)$$

Dans la limite brownienne

$$\lim_B(\eta) = n\varrho^2,$$

$$\lim_B(\mu) = 2m_0/m,$$

en injectant ces approximations dans (1.49) et (1.50) les deux constantes $A := -\lim_B(k_{11})$ et $D := \lim_B(k_{20})$ s'expriment en fonction des paramètres microphysiques comme suit :

$$A = \frac{8n\varrho^2\sqrt{m_0k_B T}}{m\sqrt{2\pi}}, \quad (1.51)$$

$$D = \frac{16n\varrho^2\sqrt{m_0}(k_B T)^3}{m^2\sqrt{2\pi}}. \quad (1.52)$$

La relation d'Einstein-Langevin (1.33) peut donc s'écrire en fonction des paramètres microphysique du modèle. Cependant, il reste à montrer comment (i.e. sur quelle échelle de temps) V_α peut-être considéré comme un processus continu. Il adviendrait alors qu'avec (1.46) et (1.47)

V_α soit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, et que le modèle des cubes durs donne effectivement lieu au mouvement brownien.

Avant de chercher à déterminer cette échelle de temps, les conditions de son existence sont étudiées. Si μ est supposé très petit devant 1 (i.e. $m_0 \ll m$),

$$\sigma_u \mu = 2 \frac{\sqrt{m_0 k_B T}}{m} + o\left(\frac{m_0}{m}\right),$$

et

$$\sigma_u \mu > 1 \text{ m.s}^{-1} \Leftrightarrow T > \frac{m^2}{4m_0 k_B},$$

or le terme $m^2/4m_0 k_B$ est d'autant plus grand que $m \gg m_0 \Leftrightarrow \mu \ll 1$. Par exemple, si $\mu \sim 10^{-3}$, cela revient à supposer $\mathcal{P}(m)$ mille fois plus massive que les particules $\mathcal{P}_0(m_0)$, alors

$$\sigma_u \mu > 1 \text{ m.s}^{-1} \Leftrightarrow T > 1,8 \cdot 10^{28} \text{K},$$

ce qui impose une température arbitrairement grande. La température du "blob" considéré figure 6 est comprise entre 12000K et 18000K (voir les références dans la légende de cette figure). En conclusion, pour des températures petites devant 10^{28}K , et si (1.41) est vérifiée, ce qui implique $\mu \ll 1$, il existe nécessairement une échelle de vitesse usuelle telle que : $\sigma_u \mu \ll 1$.

Soit Δt l'échelle de temps minimale sur laquelle V_α peut-être considéré comme continu. Comme un processus markovien continu ne possède que ses deux premiers coefficients de Kramers-Moyal non nuls, cela revient à déterminer Δt telle que les K_n soient négligeables devant K_1 et K_2 . La dépendance en n de (1.39) se fait via $(\sigma_u \mu)^n$. Il faut donc trouver Δt telle que $\sigma_u \mu \ll 1$.

En remarquant qu'avec (1.51) et (1.52),

$$\frac{D}{2A} = \frac{k_B T}{m} =: \sigma_v^2, \quad (1.53)$$

d'après (1.29), si Δt est la durée sur laquelle le processus est considéré, il vient :

$$\sigma_v^2 = \frac{\langle\langle V_\alpha^2(t) \rangle\rangle}{1 - \exp(-2\Delta t/\tau_v)},$$

où :

$$\tau_v := \frac{1}{A} = \frac{m\sqrt{2\pi}}{8n\varrho^2\sqrt{m_0 k_B T}}. \quad (1.54)$$

Comme $\sigma_v^2 = \sigma_u^2 \cdot m_0/m$ l'amplitude de σ_u^2 exprimée dans les unités de $\langle\langle V_\alpha^2(t) \rangle\rangle$ est

$$\frac{m/m_0}{1 - \exp(-2\Delta t/\tau_v)}.$$

Pour $\Delta t \geq 7\tau_v$, l'amplitude de σ_u^2 vaut $\sim m/m_0$, et alors dans ces mêmes unités puisque $m \gg m_0$ [cf (1.41)] :

$$\sigma_u \mu = \frac{2\sqrt{m_0/m}}{1 + m_0/m} = 2\sqrt{\frac{m_0}{m}} + o\left(\frac{m_0}{m}\right) \ll 1 [\text{unités de } \sqrt{\langle\langle V_\alpha^2(t) \rangle\rangle}]. \quad (1.55)$$

Ainsi, sur une échelle de temps d'une dizaine de τ_v ou plus, le terme $\sigma_u \mu$ qui forme la dépendance en n de (1.39) est de l'ordre de $\sqrt{m_0/m}$, infiniment petit devant 1 avec (1.41). Donc seuls $(\sigma_u \mu)$ et $(\sigma_u \mu)^2$ sont à l'ordre $o(m_0/m)$. Conclusion sur une échelle de temps d'une dizaine de τ_v ou plus, et avec (1.41), tous les $K_{n>2}$ sont nuls à la limite brownienne

$$\left[\forall \tau \geq 7\tau_v, \lim_B (\sigma_u \mu) = 2\sqrt{\frac{m_0}{m}} \Rightarrow \lim_B (K_{n>2}) = 0. \right] \quad (1.56)$$

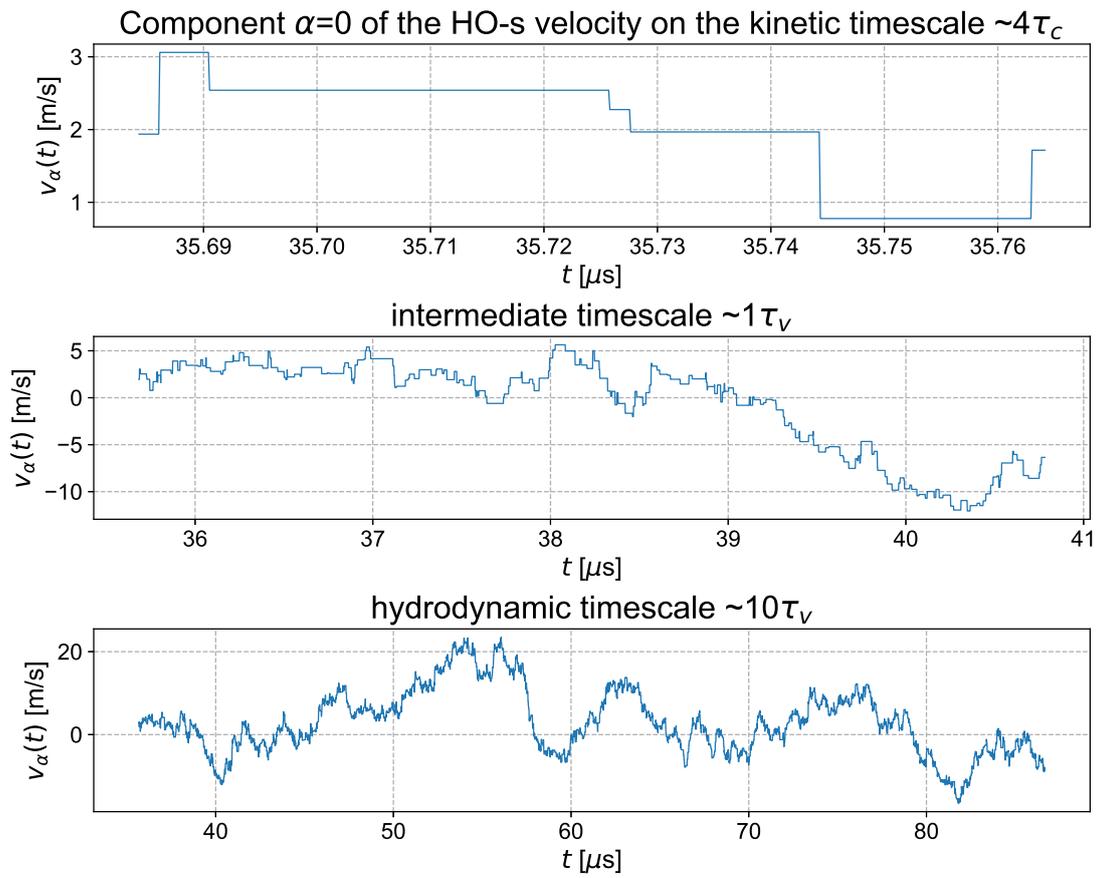


FIGURE 1.9 – Simulations d’une composante V_α sur plusieurs échelles de temps. “HO” est l’acronyme pour “Harmonic Oscillator”, oscillateur harmonique, en anglais.

L'équation de Kramers-Moyal se réduit alors à une équation de Fokker-Planck. Avec l'hypothèse supplémentaire (1.42), les deux premiers coefficients de Kramers-Moyal deviennent (1.46) et (1.47), et la solution de l'équation de Fokker-Planck est le processus d'O.U.. La figure (1.9) représente le comportement de V_α sur plusieurs échelles temporelles. Plus de détails concernant la confirmation de la théorie par la simulation suivent en partie IV..

Conclusion. Sur une échelle de temps d'une dizaine de τ_v au moins, chaque composante V_α du vecteur vitesse relative de $\mathcal{P}(m)$ tend, dans la limite brownienne, vers le processus d'O.U. ayant pour coefficient de Kramers-Moyal K_1 donné par (1.46), avec la constante de dérive (1.51), et K_2 donné par (1.47), avec la constante de diffusion (1.52). La constante de temps τ_v donnée par (1.54) est par définition le temps de relaxation vers l'équilibre thermodynamique, constante de temps qui apparaît dans la densité de probabilité de transition markovienne $\mathbb{T}(v_\alpha, t|v_{\alpha,0}, t_0)$ du processus d'O.U.. Chaque composante V_α dans l'état stable du mouvement (pour $t - t_0 \gg \tau_v$), i.e. lorsque $\mathbb{T}(v_\alpha, t|v_{\alpha,0}, t_0)$ atteint son état stationnaire, est donc bien un processus normal de moyenne nulle et de variance constante $\sigma_v^2 = D/2A = k_B T/m$, comme attendu dans une situation d'équilibre thermodynamique canonique (au sens de Boltzmann-Gibbs).

III.3 Analyse de la consistance du modèle

Pour s'assurer de la consistance du modèle, il faut premièrement s'assurer que (1.54) est bien plus grand que le temps moyen entre deux collisions pour $\mathcal{P}(m)$, calculé dans la limite brownienne, et noté τ_c . (Si la thermalisation a eu lieu alors qu'il n'y pas eu de collisions la situation est absurde dans notre cas).

Le temps moyen entre deux collisions est défini comme le temps d'attente moyen $\langle W \rangle$ entre deux collisions, dans l'état stable du mouvement (i.e. : quand $\mathcal{P}(m)$ est thermalisée), pour le module moyen du vecteur vitesse relative \vec{V} de $\mathcal{P}(m)$

$$\vec{V}(t) := \sum_{\alpha=x,y,z} V_\alpha(t) \vec{e}_\alpha.$$

Lorsque $\mathcal{P}(m)$ atteint l'état stable de son mouvement, i.e. lorsque la densité de transition markovienne de chaque composante V_α atteint son état stationnaire, autrement dit lorsque $\mathcal{P}(m)$ atteint l'équilibre thermodynamique canonique, la densité de probabilité du module V de \vec{V}

$$V := \|\vec{V}\|,$$

est une maxwellienne dont le premier moment $\langle V \rangle$ est

$$\langle V \rangle = 2\sqrt{\frac{2k_B T}{\pi m}}. \quad (1.57)$$

Pour déterminer τ_c , il suffit de calculer, dans la limite brownienne, le premier moment de W avec la densité exponentielle (1.15) prise en (1.57). C'est trivialement $1/a(\langle V \rangle)$ d'où

$$\tau_c := \lim_B (\langle W \rangle_{\langle V \rangle}) = \lim_B \left(\frac{1}{a(\langle V \rangle)} \right).$$

Après quelques développements limités, il vient

$$\tau_c = \frac{\sqrt{\pi m_0}}{n \rho^2 \sqrt{2k_B T}} \left(1 - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{m_0}{m} \right) + o\left(\frac{m_0}{m}\right). \quad (1.58)$$

La comparaison avec (1.54) s'en suit directement :

$$\frac{\tau_c}{\tau_v} = \frac{4m_0}{m} + o\left(\frac{m_0}{m}\right), \quad (1.59)$$

et $m_0 \ll m$ donc les ordering sont bien vérifiés : $\tau_c \ll \tau_v$.

Avec (1.54) la relation (1.59) au premier ordre en (m_0/m) , peut se réécrire en fonction de la constante A (1.51) du premier coefficient de Kramers-Moyal pris dans la limite brownienne (1.46) :

$$\tau_c = \frac{4m_0}{m} \cdot \frac{1}{A} + o\left(\frac{m_0}{m}\right) \Leftrightarrow \lim_B(\tau_c) = 2 \lim_B(\mu) \cdot \frac{1}{A}. \quad (1.60)$$

Les expressions (1.58) ou (1.60) peuvent se réécrire sous une forme peut-être plus facile à interpréter physiquement. Soit $\langle V_{\text{rel}} \rangle$ le module moyen de la vitesse relative entre $\mathcal{P}(m)$ (de vitesse \vec{V} relative à \mathcal{O}) et $\mathcal{P}_0(m_0)$ (de vitesse \vec{U} relative à \mathcal{O}). Une fois que $\mathcal{P}(m)$ atteint l'état stable de son mouvement, le module moyen de sa vitesse \vec{V} est donné par (1.57), de même pour $\mathcal{P}_0(m_0)$ en remplaçant m par m_0 dans l'expression (1.57). Ainsi la vitesse relative moyenne devient dans la limite brownienne (1.41) :

$$\begin{aligned} \langle V_{\text{rel}} \rangle &:= |\langle V \rangle - \langle U \rangle|, \\ \langle V_{\text{rel}} \rangle &= 2\sqrt{\frac{2k_B T}{\pi m_0}} + o\left(\sqrt{\frac{m_0}{m}}\right), \end{aligned}$$

et alors τ_c s'écrit en fonction de la densité des $\mathcal{P}_0(m_0)$, de $\langle V_{\text{rel}} \rangle$, et de la section efficace σ_{col} des collisions entre $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}_0(m_0)$ (qui se réduit dans la limite brownienne à la surface du cercle inscrit dans la face d'un cube représentant les $\mathcal{P}(m)$) :

$$\tau_c = \frac{2\pi}{n\sigma_{\text{col}}\langle V_{\text{rel}} \rangle}, \quad (1.61)$$

où, avec la limite brownienne (1.41), $\sigma_{\text{col}} = \pi\varrho^2$.

Il faut enfin tester l'hypothèse (1.42) faite ad-hoc.

Premièrement, dans l'état stable de V_α , i.e. pour : $t \gg \tau_v + t_0$.

Dans cet état stable V_α est un processus normal de moyenne nulle et de variance

$$\langle V_\alpha^2 \rangle = \sigma_v^2.$$

De plus, $\sigma_v^2 = \sigma_u^2 \cdot m_0/m$, donc $\langle V_\alpha^2 \rangle = \sigma_v^2 \ll \sigma_u^2$. Pour $n \geq 2$, la formule des moments gaussiens avec l'approximation de Stirling pour $n!$ (relativement bonne pour $n \geq 2$), donne :

$$\langle V_\alpha^{2n} \rangle \approx \sqrt{2}\sigma_u^{2n} \cdot \exp\left(n\left(\ln(n) + \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) + \ln(2) - 1\right)\right).$$

De plus : $\ln(2) < 1$, donc tant que :

$$\ln(n) - \ln(m/m_0) \leq 0,$$

il vient

$$\langle V_\alpha^{2n} \rangle \ll \sigma_u^{2n},$$

et donc :

$$\forall t \geq 7\tau_v + t_0, \quad \forall n \in \left[1, E\left(\frac{m}{m_0}\right)\right], \quad \langle V_\alpha^{2n} \rangle \ll \sigma_u^{2n}.$$

Pour $n > E\left(\frac{m}{m_0}\right) \gg 1$, l'approximation $\langle V_\alpha^{2n} \rangle \ll \sigma_u^{2n}$ n'est certes plus valable, mais en vertu de (1.39) (obtenu sans supposer (1.42)) et de sa dépendance en $(\sigma_u \mu)^n$, les $(K_n)_{n \gg 1}$ sont négligeables devant K_1 et K_2 (sur une échelle de plus de $7\tau_v$ et avec (1.41)).

Deuxièmement, il faut tester (1.42) dans l'état de transition vers l'équilibre, i.e. : pour $t \in [t_0, 7\tau_v + t_0[$.

Dans ce régime transitoire, l'approximation $\langle V_\alpha^{2n} \rangle \ll \sigma_u^{2n}$ est valide si en plus de (1.41), la vitesse initiale $v_{\alpha,0}$ est de l'ordre de quelques σ_v . Plus $m \gg m_0$ et plus $v_{\alpha,0}$ peut-être grande. Pour s'en convaincre il suffit d'explicitier les moments $\langle V_\alpha^{2n}(t) \rangle$ dans ce régime transitoire, et de factoriser les expressions par $\sigma_v^{2n}/\sigma_u^{2n}$.

Conclusion. Avec (1.41), l'hypothèse $\langle V_\alpha^{2n} \rangle \ll \sigma_u^{2n}$ est consistante :

- i. $\forall n \in \left\lceil \left[1, E\left(\frac{m}{m_0}\right) \right] \right\rceil$, et donc en moyenne ($v_\alpha^{2n} \ll \sigma^{2n}$) constitue une bonne approximation, et ce pour :
- $\forall t \geq t_0 + 7\tau_v$, quelque soit la vitesse d'injection (non-relativiste) de $\mathcal{P}(m)$ à la date t_0
 - $\forall t \in [t_0, t_0 + 7\tau_v[$, pour une vitesse d'injection telle que ses composantes $v_{\alpha,0}$ soient de l'ordre de quelques σ_v au plus.
- ii. si $n > E\left(\frac{m}{m_0}\right)$ alors certes ($V_\alpha^{2n} \ll \sigma^{2n}$) n'est plus valide, mais avec (1.41) : $n \gg 1$ et les $(K_n)_{n \gg 1}$, sur une échelle de temps d'une dizaine de τ_v , sont négligeables devant K_1 et K_2 en vertu de la dépendance en $(\sigma_{u\mu})^n$ de (1.39).

La partie suivante IV. présente les figures de mérite de la simulation réalisée.

IV. Simulations Monte-Carlo et vérifications

Le modèle précédent a été codé en python 2.7.18 [173]. Le seul générateur aléatoire non construit et utilisé, est le générateur aléatoire uniforme de la bibliothèque "numpy". Le générateur aléatoire normal, nécessaire dans la méthode du rejet pour simuler $P_{J|W}$ (voir sous partie II.3) a été construit à l'aide d'une transformation de Box-Müller (pour un rappel sur cette transformation voir par exemple [172]). Le générateur aléatoire exponentielle nécessaire pour simuler P_W (voir sous partie II.3) a lui été construit avec la méthode de l'inverse.

L'algorithme de simulation repose sur les expressions analytiques (1.15) et (1.19), qui déterminent quand et comment les composantes $(V_\alpha)_\alpha$ de la vitesse, qui sont indépendantes entre elles (voir sous-partie II.2), sautent. Les routines pour simuler P_W et $P_{J|W}$ donnent les résultats attendus, voir les exemples des figures 1.5 et 1.8.

L'extraction de l'état stable du mouvement est réalisée comme suit ; c'est la dernière composante qui atteint l'état stable qui définit l'instant de date "début de l'état stable". La création d'un axe des temps communs aux trois composantes s'opère avec une interpolation de pas égal au temps d'attente minimal enregistré, et chaque date de sauts est conservée.

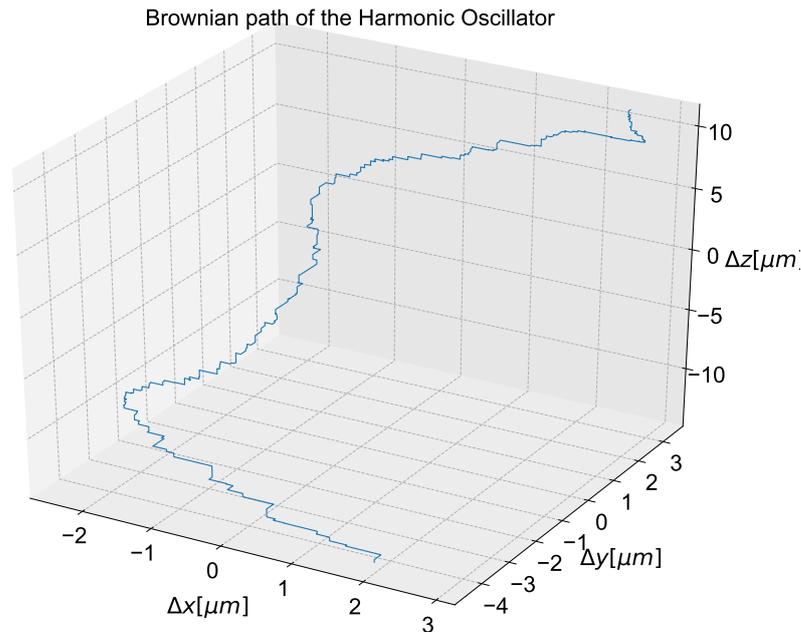


FIGURE 1.10 – Exemple de trajectoire brownienne de $\mathcal{P}(m)$ (appelée "Harmonic Oscillator" dans le titre) à l'échelle microscopique. Les sauts sont visibles.

Le comportement du mouvement est cohérent avec ce qui est attendu, les effets d'amortissements de la vitesse entre deux collisions étant négligés (voir sous-partie I..2), les sauts sont décrits à l'échelle microscopique cinétique, voir figures 1.10 et 1.14, et la transition vers l'échelle macroscopique hydrodynamique fait disparaître les sauts, voir figures 1.9 et 1.11, comme attendu.

Remarque. Les figures présentées résultent de la simulation avec les paramètres microphysiques de la figure 1.6. Ce choix est arbitraire. La particule $\mathcal{P}(m)$ est appelée "Harmonic Oscillator", par rapport à ce qui suivra dans le chapitre 2.

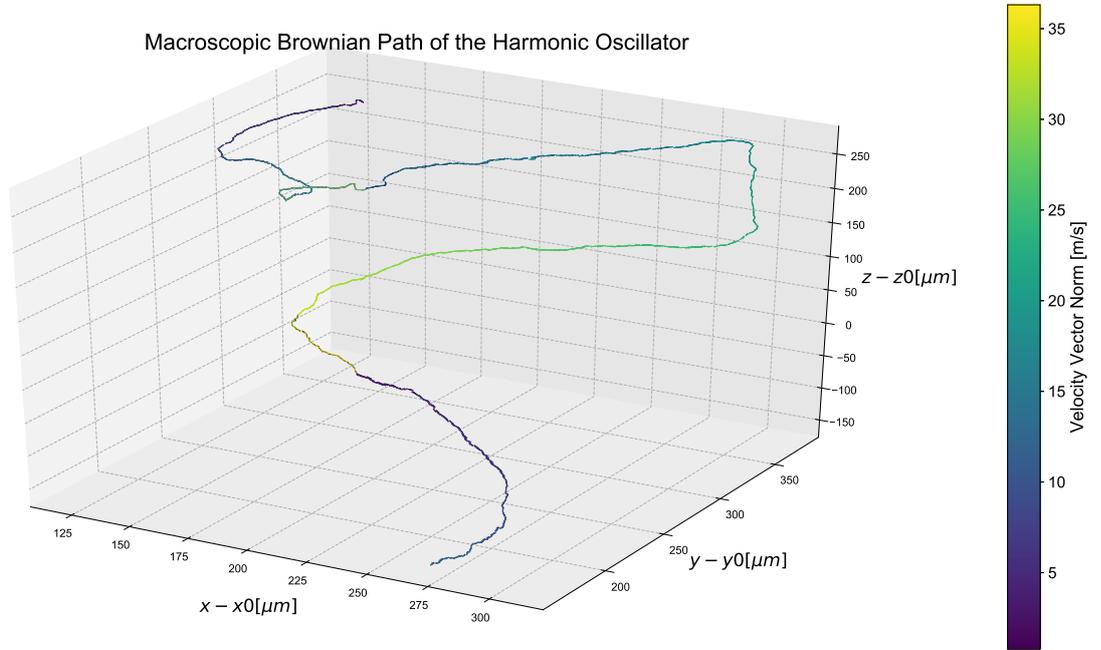


FIGURE 1.11 – Exemple de trajectoire brownienne de $\mathcal{P}(m)$ à l'échelle macroscopique.

IV..1 Relaxation vers l'équilibre

Le coefficient de frottement visqueux γ qui intervient dans (1.34) trouve une expression en fonction des paramètres microphysiques dans la limite brownienne. Avec (1.51) dans (1.36), il vient :

$$\gamma = \frac{m}{\tau_v} = \frac{8n\varrho^2\sqrt{m_0k_B T}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.62)$$

L'utilisation de (1.52) dans (1.37) donne le même résultat. L'état du mouvement de relaxation vers l'équilibre a donc été étudié pour plusieurs valeurs de la vitesse initiale (vitesse relative à la date t_0 origine des temps). Comme expliqué en sous partie (III..3), pour des vitesses d'injection largement supérieures à σ_v , cas de la figure 1.13, l'hypothèse de la limite brownienne (1.42) n'est pas valide dans le régime transitoire, et donc l'expression (1.62) est une moins bonne approximation que pour des vitesses d'injection de l'ordre de quelques σ_v , pour lesquelles (1.42) est valide, cas de la figure 1.12.

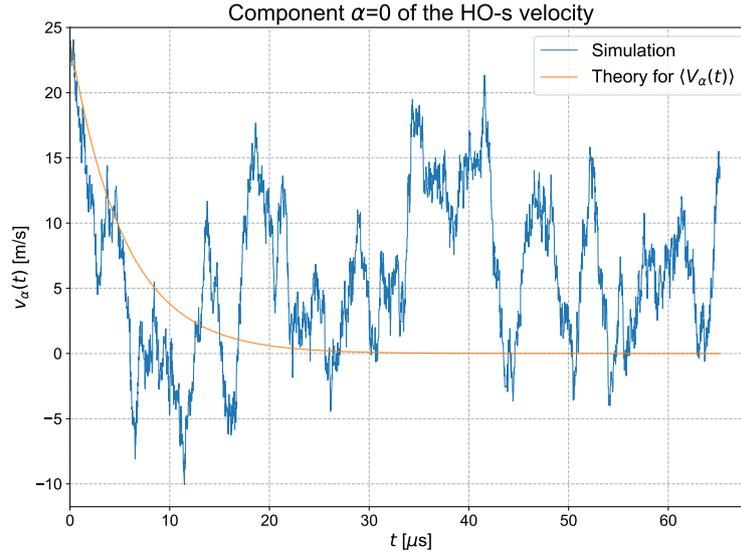


FIGURE 1.12 – Relaxation vers l'équilibre canonique pour la première composante de \vec{V} . La vitesse initiale vaut un peu plus que 4 fois σ_v , et ainsi (1.42) est valide dans le régime transitoire. L'évolution attendue pour $\langle V_\alpha \rangle$ est donnée par (1.34) avec γ donné par (1.62).

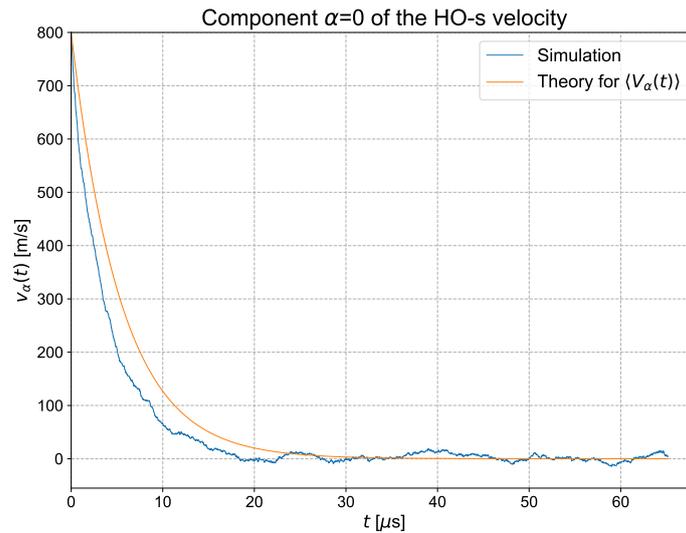


FIGURE 1.13 – Relaxation vers l'équilibre canonique pour la première composante de \vec{V} . La vitesse initiale vaut ici un peu plus de 136 fois σ_v . Dans le régime transitoire l'hypothèse (1.42) n'est pas valide avec une telle vitesse initiale, et donc l'expression obtenue (1.62) pour γ est une approximation discutable ; c'est pourquoi la simulation ne reproduit pas parfaitement l'évolution (1.34).

IV..2 Comportement de la vitesse relative

Les sauts de vitesse, et leur conséquence sur la position relative à l'observateur, sont fidèlement représentés, voir par exemple figure 1.14. Dans l'état stable du mouvement de $\mathcal{P}(m)$ (i.e. pour $t \geq t_0 + 7\tau_v$), l'équilibre thermodynamique canonique de Boltzmann-Gibbs, où les mouvements de translation peuvent être décrits classiquement, et où l'énergie d'interaction entre les particules est indépendante de leur vitesse, est atteint. Chaque composante V_α est bien un processus normal centré en zéro, de variance constante $\sigma_v^2 = k_B T/m$, les trois histogrammes sont constants. Il est équivalent de vérifier que le module V du vecteur vitesse relative de $\mathcal{P}(m)$

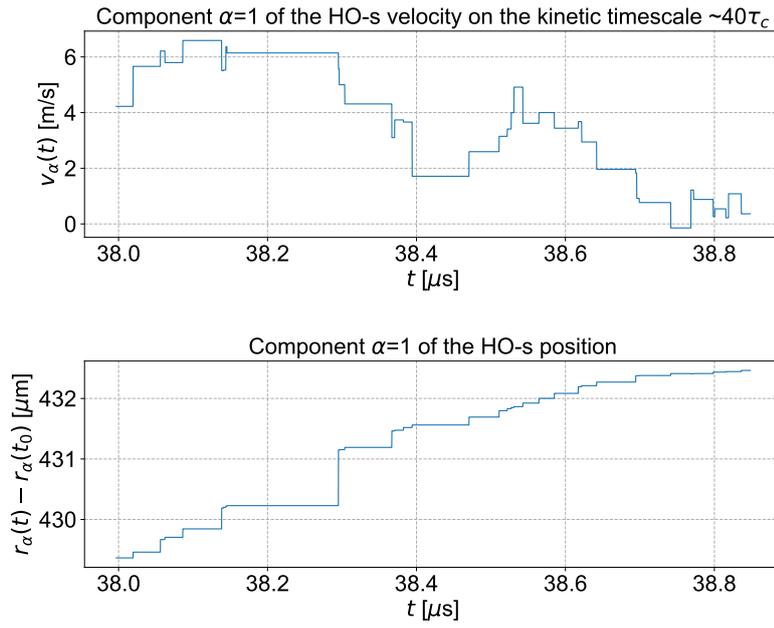
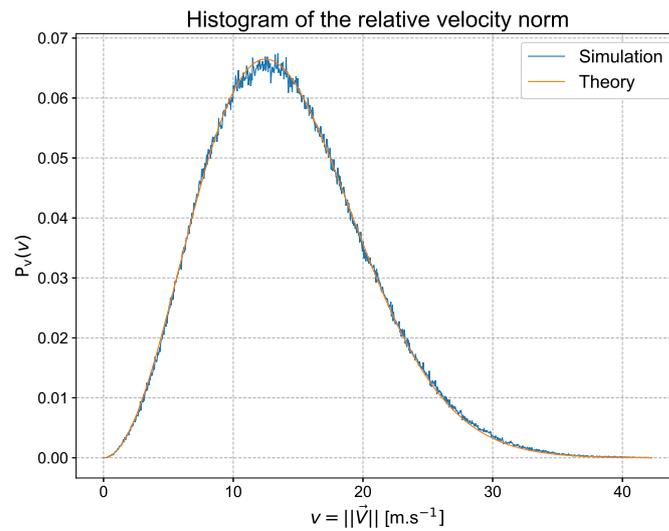


FIGURE 1.14 – Comportement à l'échelle cinétique.

possède une densité de probabilité maxwellienne

$$P_V(v) = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \right)^3 v^2 \exp(-v^2/2\sigma_v^2).$$

ce qui est bien le cas, voir figure 1.15.

FIGURE 1.15 – Contour de l'histogramme du module de \vec{V} , pour plus d'un million d'échantillons Monte-Carlo.

IV..3 Relation d'Einstein-Langevin

Pour une composante V_α , la relation d'Einstein-Langevin (1.33), avec (1.51) et (1.52) s'écrit en fonction des paramètres microphysiques. Pour en analyser les dépendances, la relation d'Einstein-Langevin peut également être écrite pour le vecteur position relative \vec{R} de $\mathcal{P}(m)$. Les trois composantes de \vec{R} sont indépendantes entre elles, car elles sont les processus intégraux des composantes $(V_\alpha)_\alpha$ qui sont indépendants entre elles. L'écart-type de \vec{R} s'écrit donc comme la somme de trois écart-types identiques, et ainsi

$$\lim_{t \gg \tau_v + t_0} \left(\lim_B \left(\sqrt{\langle \langle \vec{R}^2(t) \rangle \rangle} \right) \right) = \sqrt{\frac{3}{4n\varrho^2}} \cdot \left(\frac{2\pi k_B T}{m_0} \right)^{1/4} \cdot \sqrt{t}. \quad (1.63)$$

La dépendance attendue en \sqrt{t} est présente.

A T constante, plus les $\mathcal{P}(m_0)$ sont légères, plus σ_u^2 augmente, donc plus le mouvement de $\mathcal{P}(m)$ est sujet aux collisions, et donc plus la distance de diffusion, à une date fixée, est grande.

Toujours à T fixée, la pression $P = nk_B T$ joue le rôle de piège, comme attendu. C'est à dire qu'à une date fixée donnée, plus la pression est élevée moins la distance de diffusion est grande. Enfin à P fixée la température joue le rôle d'amplificateur du mouvement, comme attendu.

La relation d'Einstein-Langevin (1.63) obtenue avec ce modèle des cubes durs sans effets inertiels, et dans sa limite brownienne, est donc opérationnelle et cohérente.

V. Conclusion

Le modèle cinétique (classique) des cubes durs sans effets inertiels est une description idéalisée : collisions élastiques, pas de rotations, pas d'amortissements entre deux collisions successives, traitement classique des particules, pas de potentiel (particules libres). Dans ce chapitre ce modèle est considéré dans un cadre non-relativiste. Le modèle repose sur des "premiers principes" tels que la conservation de la masse et la conservation de l'impulsion. Le traitement depuis les "premiers principes" est analytique, avec une description fondée sur les processus markoviens à sauts avec continuum d'états (PMSCE). Ce modèle s'avère fructueux pour décrire de manière probabiliste le temps d'attente entre deux collisions et le changement de vitesse induit par une collision, et ce en fonction des caractéristiques des espèces chimiques en présence (masse, dimension) et des propriétés du gaz support (distribution d'équilibre des vitesses, température, densité). L'état de la vitesse entre deux collisions est donc décrit, et cela permet de considérer simultanément une autre dynamique, dont l'échelle de temps caractéristique serait plus petite que le temps d'attente moyen entre deux collisions successives. Dans une certaine limite du modèle, le mouvement brownien non-relativiste de particules indépendantes (qui, dans le prochain chapitre, rayonnent un champ décrit comme un oscillateur), dans un gaz support, est correctement modélisé jusqu'à une échelle temporelle pré-cinétique (\leq ps, mais \geq fs), et jusqu'à une échelle spatiale microscopique (\geq nm). Le chapitre 2 suivant exploite ce modèle pour déterminer les fonctions de corrélation d'un champ résultant de la superposition d'une multitude d'oscillateurs, rayonnés par des particules indépendantes dans l'état stable de leur mouvement brownien, avec une radiation cohérente.

Chapitre 2

Corrélations de la radiation d'oscillateurs browniens

Sommaire

I. Introduction	68
I.1 Objectifs	68
I.2 Choix de la situation physique	68
I.3 Organisation du chapitre	69
II. Situation physique	69
II.1 Hypothèses	69
II.2 Considérations expérimentales	72
II.3 Champ ricien	73
III. Calculs de $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, $g^{(2)}(\tau)$	76
III.1 Méthodes de calcul	77
III.2 Calcul de $g^{(3/2)}(\tau)$	78
III.3 Résultats et commentaires	79
IV. Confirmation par simulations Monte-Carlo	81
IV.1 Principes de la simulation	81
IV.2 Figures de mérite	83
IV.3 Résultats pour $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, $g^{(2)}(\tau)$	85
V. Conclusion	90

[...] si vous tenez à penser à l'aide d'idées comme celle de champ, ce champ désormais est toujours complètement déterminé par le mouvement des particules qui l'engendrent.

La nature de la physique, Richard Feynman, traduit de l'américain par Hélène Isaac, Jean-Marc Lévy-Leblond et Françoise Balibar.

I. Introduction

Ce deuxième chapitre théorique utilise le modèle du chapitre 1 précédent. Sa lecture est nécessaire pour aborder le chapitre 3 suivant. La lecture requiert des connaissances en théorie des probabilités (notamment la notion d'ellipse d'égale densité pour un couple de V.A. normales), et des processus stochastiques.

Par abus de langage, le terme *oscillateur brownien* est souvent employé pour raccourcir "oscillateur rayonné par une particule massive en mouvement brownien", où l'*oscillateur* modélise le champ électrique rayonné par la particule massive.

L'abréviation "O.U." correspond toujours à Ornstein-Uhlenbeck.

Par abus de langage, l'emploi du terme "processus" signifie "processus stochastique".

I.1 Objectifs

Ce chapitre propose une comparaison des premières fonctions de corrélations temporelles $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$, d'un mode d'une polarisation d'une composante vectorielle d'un champ résultant d'une multitude d'oscillateurs browniens libres, indépendants, et non-relativistes, relativement à un observateur inertiel, et superposé à une radiation cohérente.

Une propriété mathématique connue sur les moments gaussiens, rappelée en partie III.1, assure que pour un tel champ, les moments joints du champ d'ordres supérieurs par rapport à $g^{(1)}$, s'expriment en fonction de $g^{(1)}$. Il n'y a donc a priori pas plus d'information physique dans $g^{(2)}$ et $g^{(3/2)}$ que dans $g^{(1)}$. Cependant, d'une part, la transformée de Fourier (à quelques facteurs près) de $g^{(3/2)}$ permet d'accéder à une densité spectrale des fluctuations supplémentaire : le spectre de compression, ce qui permet de différencier un champ chaotique classique d'un champ chaotique non-classique (voir l'Introduction tables 3 et 7). D'autre part, le calcul de $g^{(3/2)}(\tau)$ pour un tel champ n'a semble-t-il jamais été fait, la forme sous-laquelle l'information physique apparaît dans $g^{(3/2)}(\tau)$ reste donc à préciser. La détermination de cette forme est essentielle pour le chapitre 3 suivant, qui aborde les rapports signal sur bruit relatifs aux différentes fonctions de corrélation. Un autre prisme possible pour la lecture de ce chapitre, déjà indiqué au chapitre précédent partie I.1, est d'examiner, dans le cadre du modèle cinétique du chapitre 1, comment $g^{(1)}$, $g^{(3/2)}$ et $g^{(2)}$ permettent de rendre compte d'un processus de transport.

I.2 Choix de la situation physique

Le choix de ne considérer qu'un mode d'une polarisation d'une composante vectorielle d'un champ électrique solution de l'équation de propagation (avec un choix de jauge, des conditions transverses et limites usuels) relativement à \mathcal{O} , est fait par soucis de simplicité. Quitte à munir l'observateur inertiel \mathcal{O} d'un polariseur, et d'un sélecteur de mode.

Les motivations de la situation étudiée ici ont été données dans la partie V.1 de l'Introduction. Elles s'inscrivent dans la perspective d'établir l'existence d'un laser astrophysique. Voir notamment l'exemple de la figure 6. Une certaine zone du milieu interstellaire, milieu observé, mais

non résolu, par \mathcal{O} , est supposée émettre une radiation de nature cohérente à une fréquence donnée. Des observations et mesures supplémentaires justifiant cette hypothèse sont détaillées dans la partie II. suivante. Étant donné la diversité des processus de rayonnement possibles dans ce milieu interstellaire, il est supposé que d'autres processus de rayonnement existent à la fréquence de la radiation cohérente. Ces processus prennent place dans une autre partie du milieu interstellaire. Il est de plus supposé que cette partie émette une radiation de nature chaotique, plus précisément selon les termes donnés par la problématique P1a (voir l'introduction de cette partie "Fondements"). Cette autre partie du milieu interstellaire est (grossièrement) supposée être à l'équilibre thermodynamique canonique (au sens de Boltzmann-Gibbs). De plus, son rayonnement est supposé résulter d'une multitude d'oscillateurs browniens libres, non-relativistes, et indépendants. Ces deux radiations, cohérente et chaotique, se propagent librement jusqu'à \mathcal{O} , où elles se superposent.

Des raisons mathématiques viennent aussi légitimer la situation considérée. La première est une nécessité : $g^{(3/2)}$ n'est pas définie si cette radiation cohérente n'est pas considérée (voir la VIII. de l'Introduction), quitte à ce qu'elle soit introduite artificiellement. Ensuite, c'est aussi dans un souci de généralité. Un champ chaotique est par définition (selon la définition de Glauber, donnée par exemple dans [57] chapitre 12, section 12.7 ou section 12.8) un champ pour lequel l'amplitude complexe est un processus (complexe) gaussien. Rien sur sa moyenne n'est donc a priori supposé. La superposition de cette radiation cohérente assure une moyenne non nulle à l'amplitude complexe du champ résultant de la multitude d'oscillateurs browniens, et permet de mener l'étude de la partie III. de façon plus générale.

I..3 Organisation du chapitre

La situation physique est détaillée en partie II.. Il y est notamment précisé l'appellation de champ *ricien* (champ gaussien de moyenne non nulle).

Les calculs de $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, $g^{(2)}(\tau)$ pour un champ ricien semblent être originaux dans le cadre astrophysique. Ils ne présentent pas de difficultés particulières et n'ont pas été menés avec des méthodes novatrices, seul celui de $g^{(3/2)}(\tau)$ est exhibé. Les calculs ont été effectués selon deux méthodes qui sont précisées en sous-partie III..1. Les résultats sont présentés en sous-partie III..3 et commentés.

Une dialectique est ensuite proposée en partie IV.. Reposant sur le modèle cinétique "premiers principes" du chapitre 1, la simulation Monte-Carlo teste les résultats de la partie III.. Cette simulation basée sur des "premiers principes" utilise des hypothèses au caractère plus amont que de celles de la partie III.. La sous-partie IV..3 dévoile la confirmation des calculs théoriques par la simulation. Des tests sont effectués en sous-partie IV..2, afin de vérifier la consistance de la simulation.

II. Situation physique

La situation physique envisagée peut-être modélisée à l'aide d'une certaine limite du modèle des cubes durs sans effets inertiels du chapitre 1 précédent, elle est détaillée au II..1. Le champ résultant de cette situation est développé en II..3.

II..1 Hypothèses

Les hypothèses du modèle des cubes durs sont données en II..1 du chapitre 1. En gardant les mêmes notations, voici la situation physique considérée :

- a) Soient $N_{ho} \gg 1$ particules $\mathcal{P}(m)$ libres dans l'état stable de leur mouvement brownien non-relativiste dans un gaz support de $N \gg N_{ho}$ particules $\mathcal{P}_0(m_0)$ à l'équilibre thermodynamique canonique au sens de Boltzmann-Gibbs.

- b) Les $\mathcal{P}(m)$ sont supposées ne pas interagir entre elles, tant elles sont minoritaires devant les $\mathcal{P}_0(m_0)$.
- c) Chaque $(\mathcal{P}(m))_{\ell \in [1; N_{ho}]}$ est supposée rayonner un champ électrique \mathcal{E}_ℓ . Lorsqu'une particule $\mathcal{P}(m)$ est au repos, son champ \mathcal{E}_ℓ est décrit par un oscillateur harmonique à une pulsation ω_0 et une amplitude $E_0/\sqrt{N_{ho}}$. Ce champ \mathcal{E}_ℓ est appelé oscillateur brownien lorsque les $\mathcal{P}(m)$ sont dans l'état stable de leur mouvement brownien. La pulsation ω_0 est d'intérêt pour l'observateur inertiel \mathcal{O} .
- d) A chaque collision (élastique) un saut de phase uniformément distribué dans $[0; 2\pi]$ apparaît dans le champ rayonné par une particule $\mathcal{P}(m)$. Ces sauts de phase sont indépendants entre eux et indépendants des fluctuations de pulsation.
- e) L'émission du rayonnement est supposée ne pas changer l'impulsion des particules $\mathcal{P}(m)$, et les causes de l'émission ne sont pas discutées ici. La conservation de l'énergie des particules $\mathcal{P}(m)$ (qui rayonnent) est assurée par un apport d'énergie radiative reçu par les $\mathcal{P}(m)$ selon le scénario schématisé en figure 6 (Weigelt blob de l'étoile η Carinæ).
- f) Les interactions champ-particule sont négligées. En particulier le gaz support est transparent (ou optiquement mince) à la pulsation ω_0 .
- g) Une région de la zone observée émet une radiation cohérente qui a une amplitude E_β et une pulsation ω_0 bien définies. Cette région est suffisamment distincte de celle où sont localisés les $\mathcal{P}(m)$ et les $\mathcal{P}_0(m_0)$, pour qu'il n'y ait aucune interaction entre la radiation cohérente et ces particules. La radiation cohérente arrive jusqu'à \mathcal{O} sans interagir avec quoi que ce soit d'autre qui modifierait sa nature cohérente.
- h) L'ensemble des deux zones de rayonnement (la zone de radiation cohérente, et la zone où sont localisés les $\mathcal{P}(m)$ et les $\mathcal{P}_0(m_0)$) est non-résolu par l'observateur de sorte que les deux types de rayonnement sont non-discernables géométriquement, les deux rayonnements se superposent en \mathcal{O} .
- i) La vitesse de groupe et de phase des radiations est constante jusqu'à l'observateur, elle est notée c .

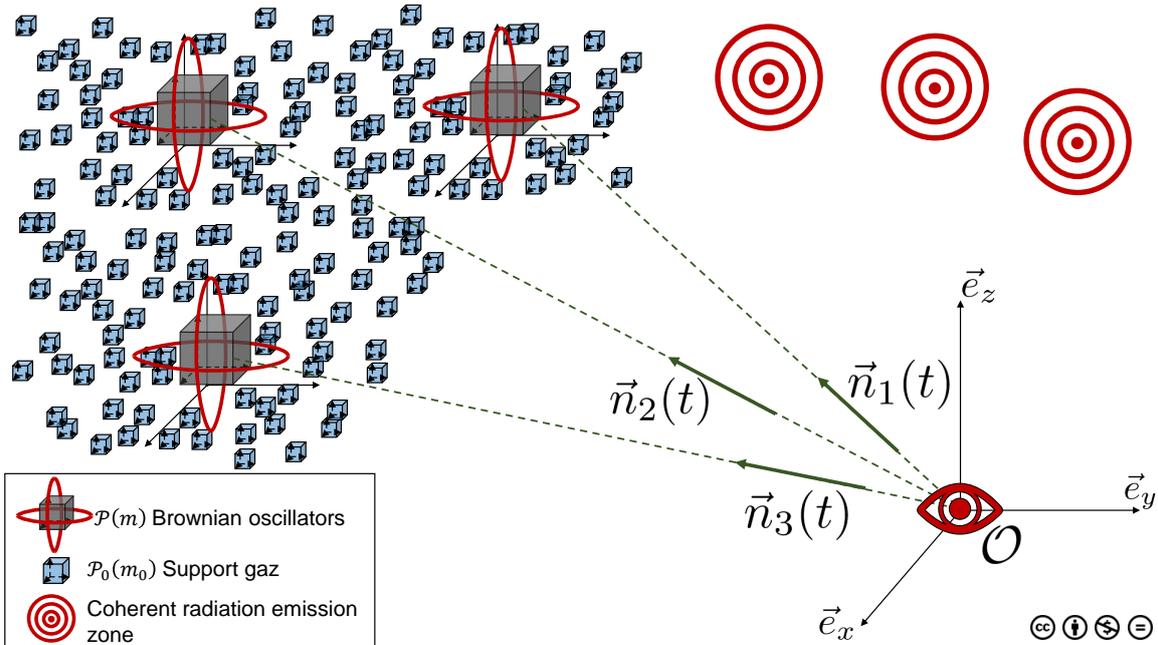


FIGURE 2.1 – Modélisation de la situation physique envisagée. Le modèle des cubes durs analysé au chapitre précédent est utilisé pour modéliser le transport des particules $(\mathcal{P}(m))_\ell$. L'observateur \mathcal{O} reçoit le champ provenant des deux zones représentées.

Les hypothèses a) et b) impliquent que chaque composante vectorielle du processus vitesse relative \vec{V} d'une particule $\mathcal{P}(m)$, par rapport à \mathcal{O} , est la forme stable d'un processus d'O.U. indépendant des deux autres composantes. Dans cette forme stable la densité de transition markovienne ne dépend pas du temps.

Le modèle cinétique du chapitre 1, lorsque considéré sur une durée supérieure à $7\tau_v$ (τ_v défini par (1.32) et explicité par (1.54)), dans sa limite brownienne, donne le mouvement brownien ; chaque composante de \vec{V} est décrite par un processus d'O.U. (de mêmes coefficients de Kramers-Moyal K_1 et K_2 que les deux autres composantes, et indépendant des deux autres composantes). De plus, l'indépendance des N_{ho} particules $\mathcal{P}(m)$ entre elles implique que l'analyse originale du modèle des cubes durs, présentée au chapitre 1 précédent, est valide pour chaque $\mathcal{P}(m)$. Le modèle des cubes durs analysé au chapitre 1 précédent est donc pertinent pour décrire le transport des particules $(\mathcal{P}(m))_\ell$ dans la scénario physique envisagé. En particulier, la description des temps d'attente (1.15) est utilisée pour caractériser les sauts de phase dans un oscillateur brownien à chaque collision. La modélisation de la situation physique envisagée est présentée sur la figure 2.1.

Une précision. Le champ \mathcal{E}_ℓ correspond à la représentation analytique d'une polarisation d'une composante vectorielle et d'un mode du vecteur champ électrique satisfaisant l'équation de propagation (avec un choix de jauge, des conditions transverses et limites usuels), relativement à \mathcal{O} , et pris à l'endroit où se trouve \mathcal{O} .

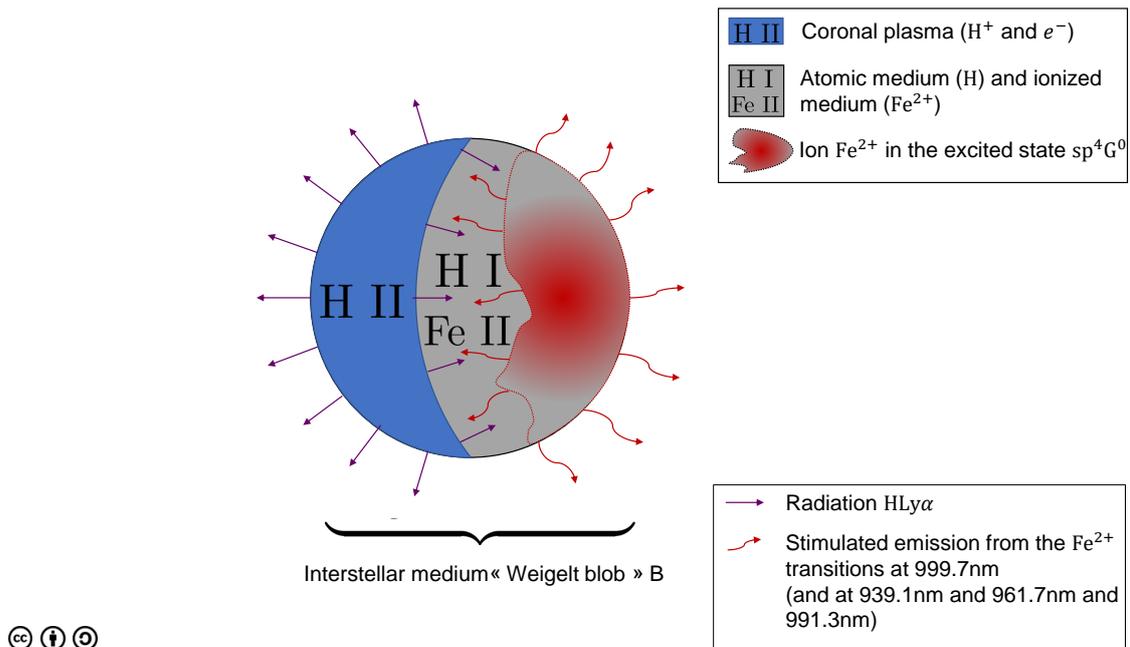


FIGURE 2.2 – Milieu interstellaire Weigelt blob B dans le voisinage (à $10^{18.3}\text{m}$ [112]) d' η Car. C'est en bonne approximation une sphère de rayon estimé à 10^{17}m [110]. La température de surface du blob, est comprise entre 12000K et 18000K [105, 111], pour des densités variant de 10^{13} à 10^{16} particules par m^{-3} [111]. La dispersion moyenne des vitesses dans ce milieu interstellaire est de l'ordre de 10kms^{-1} [111].

La situation physique envisagée, dont une modélisation est présentée en figure 2.1, peut correspondre à celle du Weigelt blob B d' η Car, représenté figure 2.2, avec les hypothèses (Hwb_i)_i suivantes :

Hwb₁ : La taille du plasma coronal est négligée devant le reste du milieu interstellaire. Ainsi seul le milieu atomique (H I) et ionisé (Fe II) est considéré.

Hwb₂ : Les particules (H I et Fe II) sont traitées classiquement et de manière non-relativiste. Avec la température de surface entre 12000K et 18000K, l'énergie de ces particules est

comprise entre 1,03 et 1,05 eV. Les atomes H I correspondent aux particules $\mathcal{P}_0(m_0)$ du modèle schématisé en figure 2.1, et les ions Fe II correspondent aux particules $\mathcal{P}(m)$.

Hwb₃ : Suivant le mécanisme d'excitation des ions Fe II, expliqué dans la légende de la figure 6, le milieu interstellaire est divisé en deux zones :

Hwb_{3a} : Dans l'une, les ions Fe II sont supposés produire une radiation cohérente à la pulsation ω_0 . Cela modélise de manière idéalisée l'action laser suspectée [105].

Hwb_{3a} : Dans l'autre, les ions Fe II sont supposés produire une radiation chaotique Rayleigh (avec une composante à ω_0), et ce, en étant à l'équilibre canonique de Boltzmann-Gibbs, en mouvement brownien. Dans cette partie, les ions Fe II sont en sous nombre devant les atomes H I qui forment un gaz support, de sorte que chaque ion Fe II est indépendant des autres. L'hypothèse d'équilibre canonique de Boltzmann-Gibbs est compatible avec la théorie du milieu interstellaire d'Ostriker et McKee [114], qui décrit un équilibre de pression entre les trois composantes du milieu interstellaire.

Hwb₄ : Les atomes H I sont supposés ne pas rayonner à ω_0 . La pulsation ω_0 correspond à une transition entre niveaux d'énergie de l'ion Fe II qui n'est pas reproductible avec les niveaux d'énergie de l'atome H I.

Hwb₅ : La radiation due à l'accélération des ions Fe II dans leur mouvement brownien est négligée. L'application de la formule de Larmor :

$$P = \frac{2}{3} \frac{(2e)^2}{c^3} \left| \frac{\Delta V}{\Delta t} \right|^2,$$

pour ΔV de l'ordre de σ_v pour l'ion Fe II en mouvement brownien à une température de 18000K, et Δt de l'ordre d'une femtoseconde, donne une valeur numérique de l'ordre de $10^{-27}W$, qui est négligée.

II.2 Considérations expérimentales

La situation physique II.1 est ici considérée d'un point de vue théorique. Le même type de situation physique a été étudié expérimentalement dans [61] (voir la deuxième expérience présentée dans la section 6 de cet article). Le montage expérimental, schématisé figure 2.3, permet de s'intéresser à un mode et à une polarisation, de la superposition d'une radiation laser et d'une radiation de type corps noir provenant d'une lampe à décharge d'Argon. Dans cette expérience, la lampe à décharge crée un plasma d'Argon possédant une température équivalente corps noir bien définie.

Le modèle cinétique précédent concerne des particules non chargées et donc n'est pas adapté pour décrire un plasma. Cependant, avec la température équivalente corps noir bien définie, le plasma d'Argon est supposé être à l'équilibre thermodynamique, et le mouvement brownien pour les émetteurs est une modélisation acceptable. Ainsi, la radiation de la lampe à décharge correspond à la superposition d'oscillateurs browniens considérée ici. La radiation laser correspond à la radiation cohérente. La radiation cohérente n'interagit avec aucun milieu qui modifierait sa nature cohérente sur son chemin jusqu'à l'observateur, de même pour la radiation chaotique, tout comme dans la situation qui est envisagée théoriquement ici.

Hors du laboratoire, des raies d'émission du milieu interstellaire de l'étoile η Carinae anormalement intenses ont été détectées, et sont suspectées d'être de nature cohérente (laser). Leurs spectres sont suffisamment fins, et l'énergie radiative d' η Car est telle que les inversions de population nécessaires peuvent être maintenues :

- à 999,7nm et à 991,3nm, transition de l'ion Fer II dans le *Weigelt blob* B d' η Car, reporté pour la première fois par [174] et dont un possible mécanisme laser a été développé dans [105].

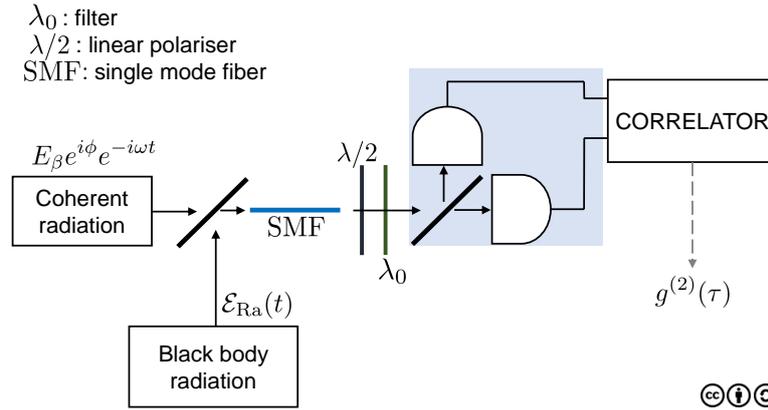


FIGURE 2.3 – Principe de l’expérience menée dans [61], correspondant à la situation étudiée ici théoriquement.

- à 250,7nm et à 250,9nm, transition de l’ion Fer II dans le même Weigelt blob B d’ η Car, observé pour la première fois par [112, 175], et dont le mécanisme laser qui pourrait l’expliquer a été mis au point dans [176].
- à 844,6nm, transition de l’oxygène des Weigelt blobs d’ η Car, observée pour la première fois par [174], et dont le mécanisme d’émission laser a été étudié dans [177].

Ces raies d’émission ne proviendraient que d’une partie du Weigelt blob (voir figure 6 dans l’Introduction ou figure 2.2). L’autre partie est ici supposée être localement à l’équilibre thermodynamique, et produit un rayonnement qui peut être une superposition d’oscillateurs browniens. La finalité est de quantifier l’effet d’une telle superposition dans les fonctions de corrélation.

II.3 Champ ricien

L’observateur étant inertiel, la description de l’effet Doppler-Fizeau peut se faire via des vecteurs tridimensionnels de son référentiel. L’état stable du mouvement brownien induit des fluctuations dans les vitesses \vec{V}_{ℓ} relatives à l’observateur \mathcal{O} . L’indice ℓ dénombre les oscillateurs browniens, voir figure 2.1. Ces fluctuations de vitesses sont, pour chaque composante vectorielle de \vec{V}_{ℓ} , normalement distribuées, de moyenne nulle et de variance $\sigma_v^2 = k_B T/m$. Cette variance est donnée dans la limite brownienne du modèle des cubes durs, pris sur une échelle de temps de plusieurs τ_v (défini par (1.54)), par la relation (1.53). Les fluctuations de vitesses engendrent des fluctuations de pulsations via l’effet Doppler-Fizeau pour \mathcal{O} , autour de la pulsation centrale ω_0 . La relation (2.29) entre la fréquence $\omega_{\ell}(t)$ perçue par l’observateur inertiel à la date t , et correspondant à l’oscillateur brownien \mathcal{E}_{ℓ} , et le terme $\vec{n}_{\ell}(t) \cdot \vec{V}_{\ell}(t)$ est telle que, pour $\|\vec{V}_{\ell}\| \ll c$, la loi de $\omega_{\ell}(t)$ est normale, voir (2.30) et (2.31). Sa moyenne est $\langle \omega_{\ell} \rangle = \omega_0$ et sa variance est

$$\sigma_{\omega}^2 := \langle \langle \omega_{\ell}(t)^2 \rangle \rangle = \frac{\omega_0^2}{c^2} \sigma_v^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} \frac{k_B T}{m}. \quad (2.1)$$

Dans la limite brownienne du modèle des cubes durs, pris sur une échelle de temps de plusieurs τ_v défini par (1.54), cette variance s’écrit en fonction de la constante de dérive A et de la constante de diffusion D :

$$\lim_B (\sigma_{\omega}^2) = \frac{\omega_0^2}{c^2} \cdot \frac{D}{2A}. \quad (2.2)$$

Rappels. Les constantes A et D s’expriment en fonction des paramètres microphysiques selon, respectivement, (1.51) et (1.52), et apparaissent, respectivement, dans les coefficients de Kramers-Moyal K_1 et K_2 donnés respectivement par (1.46) et (1.47) dans la limite brownienne.

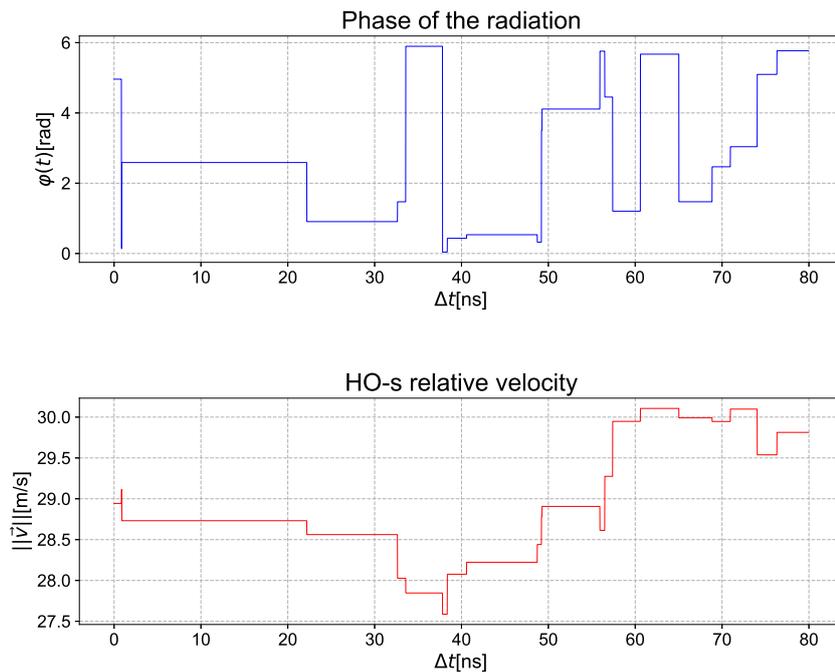


FIGURE 2.4 – Sauts de phases dans un seul oscillateur brownien. Les dates de sauts de phase correspondent aux dates de saut de vitesse. Exemple tiré de la simulation Monte-Carlo détaillée en IV.. L'appellation “HO” est utilisée pour “Harmonic Oscillator” qui désigne une particule $\mathcal{P}(m)$ par abus de langage.

D'après l'hypothèse d), les collisions élastiques du mouvement brownien sont supposées induire des sauts de phase φ_t^ℓ uniformément distribués à chaque date de collision t , dans $[0; 2\pi]$, et indépendants des fluctuations de pulsation : $\delta\omega_t^\ell := \omega_t^\ell - \omega_0$. La distribution de ces sauts de phase est associée à la distribution des temps d'attente W donnée par (1.15) dans le modèle cinétique du chapitre précédent. Un exemple tiré de la simulation Monte-Carlo, qui est détaillé en partie IV., est donné figure 2.4 en guise de schéma.

Le champ \mathcal{E}_ℓ reçu par \mathcal{O} , i.e. un oscillateur brownien, est donc un oscillateur présentant des sauts de phases φ_t^ℓ et des fluctuations de pulsation $\delta\omega_t^\ell$:

$$\mathcal{E}_\ell(t) = \frac{E_0}{\sqrt{N_{ho}}} \exp(i\varphi_t^\ell) \exp(-i\delta\omega_t^\ell t) \exp(-i\omega_0 t). \quad (2.3)$$

En vertu du théorème limite central, la superposition de $N_{ho} \gg 1$ champs (2.3) (indépendants et identiquement distribués [les densités de probabilité de la partie réelle et de la partie imaginaire du champ $\mathcal{E}_\ell(t)$ peuvent se calculer, elles ne correspondent pas à une loi α -stable de Lévy, et leurs variances sont définies]) donne en très bonne approximation un champ avec une amplitude complexe A_{Ra} gaussienne

$$\mathcal{E}_{Ra}(t) := \sum_{\ell=1}^{N_{ho} \gg 1} \mathcal{E}_\ell(t) = A_{Ra}(t) \exp(-i\omega_0 t), \quad (2.4)$$

et donc (2.4) est bien un champ chaotique au sens de Glauber [57] (chapitre 12, section 12.7 ou section 12.8). Le suffixe Ra est pour “Rayleigh” car il peut être montré que $|A_{Ra}|$ suit une loi de Rayleigh à chaque instant. Il reste à caractériser le processus gaussien complexe A_{Ra} . Comme les

φ_t^ℓ sont uniformément distribués sur $[0; 2\pi]$, et indépendants des fluctuations de pulsation, $\langle A_{\text{Ra}} \rangle$ est nulle. Sa covariance se déduit également sans difficultés. Tout d'abord, cette covariance ne dépend pas de t car A_{Ra} est un processus stable dans la situation considérée. En effet, dans l'état stable du mouvement brownien \vec{V} est la forme stable d'un processus d'O.U. tri-dimensionnel (dans lequel la densité de transition markovienne des états de vitesse ne dépend pas de t). Par conséquent, la densité des fluctuations de pulsation $\delta\omega_t^\ell$ est également indépendante de t (car l'effet Doppler-Fizeau fait intervenir t uniquement à travers V_ℓ et le facteur de Lorentz, voir (2.29), mais celui-ci ne dépend que de V_ℓ pour un observateur inertiel). De plus, la densité (1.15) ne dépend pas de t , donc la distribution des sauts de phase φ_t^ℓ est stationnaire. Ainsi les processus qui modélisent les fluctuations de pulsation et de phase sont stables (i.e. de densités stationnaires), et donc A_{Ra} est stable. Ensuite, vient le calcul de l'auto-corrélation de A_{Ra} . Premièrement, il faut remarquer qu'un saut de phase φ_t^ℓ pour un oscillateur brownien ℓ est indépendant du saut de phase d'un autre oscillateur brownien, en plus d'être indépendant des $\delta\omega_t^\ell$, car les $\mathcal{P}(m)$ sont indépendantes (hypothèse b)). Ensuite, d'après l'hypothèse c), deux phases φ_t^ℓ et $\varphi_{t+\tau}^\ell$ à deux instants différents t et $t + \tau$ sont indépendantes, sauf si elles sont identiques. Avec la distribution uniforme sur $[0, 2\pi]$ (d'après l'hypothèse c) également) il vient :

$$\langle \exp(i(\varphi_{t+\tau}^\ell - \varphi_t^\ell)) \rangle = \mathbb{P} \left\{ \varphi_{t+\tau}^\ell = \varphi_t^\ell | \langle V_\ell \rangle \right\},$$

où V_ℓ est la norme du vecteur vitesse relative de la particule $\mathcal{P}(m)$ formant l'oscillateur brownien ℓ par rapport à \mathcal{O} . L'espérance de V_ℓ est la même pour tous les $\mathcal{P}(m)$: $\langle V_\ell \rangle \equiv \langle V \rangle$, elle est donnée par (1.57) dans l'état stable du mouvement. La probabilité que les phases φ_t^ℓ et $\varphi_{t+\tau}^\ell$ soient égales, étant donnée une vitesse moyenne $\langle V \rangle$, est égale à la probabilité que le temps d'attente soit supérieur ou égal à τ , sachant un état de vitesse $\langle V \rangle$. La loi exponentielle régissant les temps d'attente W (1.15) permet alors de déduire $\langle \exp(i(\varphi_{t+\tau}^\ell - \varphi_t^\ell)) \rangle$. Enfin, la vitesse (et donc la pulsation) est supposée ne pas changer entre deux collisions, et la distribution normale centrée des $\delta\omega_t^\ell$ a pour fonction caractéristique $\exp(-\sigma_\omega^2 t^2 / 2)$. Ainsi, il vient pour $\tau \geq 0$:

$$\langle \mathcal{E}_{\text{Ra}}^*(t) \mathcal{E}_{\text{Ra}}(t + \tau) \rangle = \langle \mathcal{E}_{\text{Ra}}^*(t - \tau) \mathcal{E}_{\text{Ra}}(t) \rangle = \langle \mathcal{E}_{\text{Ra}}^*(0) \mathcal{E}_{\text{Ra}}(\tau) \rangle = E_0^2 \exp(-\tau/\tau_c - \sigma_\omega^2 \tau^2 / 2), \quad (2.5)$$

où τ_c est le temps moyen entre deux collisions, dans la limite brownienne, donné par (1.58).

En résumé, le processus gaussien qu'est l'amplitude complexe A_{Ra} , est donc de moyenne nulle, et a pour fonction de d'auto-covariance : $E_0^2 \exp(-\tau/\tau_c - \sigma_\omega^2 \tau^2 / 2)$.

Avec la radiation cohérente en fond d'amplitude complexe $E_\beta \exp(i\phi)$, le champ $\mathcal{E}_{\text{Ri}}(t)$ perçu par \mathcal{O} est en fait

$$\mathcal{E}_{\text{Ri}}(t) = A_{\text{Ri}}(t) \exp(-i\omega_0 t), \quad (2.6)$$

où l'amplitude complexe A_{Ri} est simplement

$$A_{\text{Ri}}(t) = E_\beta \exp(i\phi) + A_{\text{Ra}}(t). \quad (2.7)$$

Le suffixe Ri est pour "Rice". Avec A_{Ra} processus gaussien centré de covariance E_0^2 à $\tau = 0$, il est en effet possible de montrer que le module $|A_{\text{Ri}}|$, de réalisations a , suit une loi de Rice de paramètres E_β et $E_0^2/2$

$$P_{|A_{\text{Ri}}|}(a) = \frac{a}{E_0^2/2} \cdot \exp\left(-\frac{a^2 + E_\beta^2}{E_0^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{aE_\beta}{E_0^2/2}\right), \quad (2.8)$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre 0 :

$$I_0(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(x \cos(y)) dy.$$

Des tirages de A_{Ri} , issus de la simulation Monte-Carlo présentée dans la partie IV., sont donnés figure 2.5 afin de donner une représentation du champ ricien. C'est la représentation typique

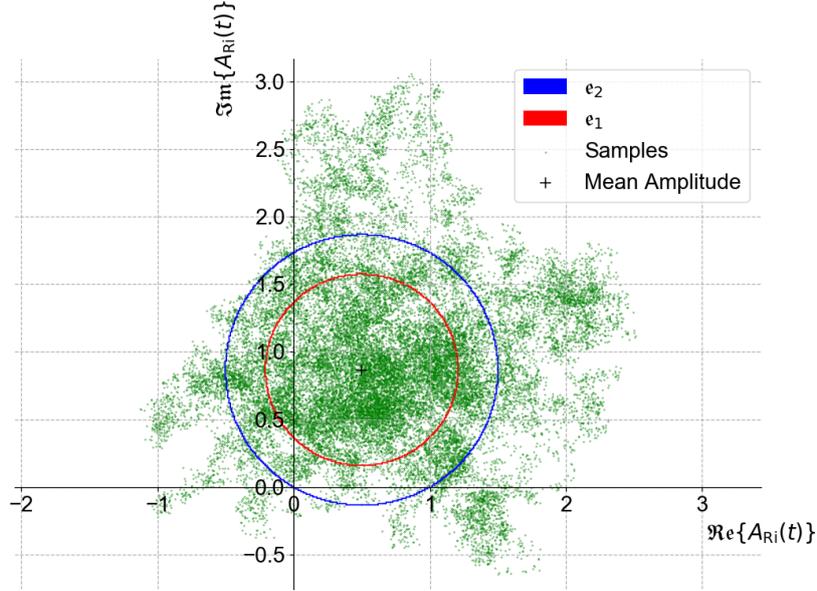


FIGURE 2.5 – 40002 réalisations Monte-Carlo des quadratures $\Re\{A_{Ri}(t)\}$ et $\Im\{A_{Ri}(t)\}$ résultantes de la simulation Monte-Carlo IV.. L'ellipse de la corrélation ϵ_1 (qui contient théoriquement $\approx 39,4\%$ de la probabilité totale) et l'ellipse d'égalité de densité ϵ_2 d'ordre 2 (qui contient théoriquement $\approx 86,5\%$ de la probabilité totale) y sont représentées.

associée à un couple de V.A. normales que sont les deux quadratures $\Re\{A_{Ri}(t)\}$ et $\Im\{A_{Ri}(t)\}$. Ces deux quadratures ne sont pas corrélées et disposent de la même variance $E_0^2/2$. Les ellipses d'égalité de densité ϵ_1 et ϵ_2 sont donc des cercles. Pour un grand nombre de réalisations (autour de 100000 ou plus) il n'y a plus aucun écart entre la probabilité théorique contenue dans les ellipses d'égalité de densité et le résultat de la simulation. Ces ellipses d'égalité de densité (des cercles ici) ont permis d'établir la consistance de la simulation indépendamment des fonctions de corrélations.

III. Calculs de $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, $g^{(2)}(\tau)$

Les calculs des fonctions $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, $g^{(2)}(\tau)$ avec un champ ricien (2.6) semblent être originaux, dans un contexte astrophysique, à cette dissertation et à l'article publié [158]. Aucun calcul ne présente de difficulté particulière, et aucun n'a été mené avec une méthode novatrice. Seul le calcul de $g^{(3/2)}(\tau)$ est détaillé.

Les calculs utilisent deux résultats finaux du modèle des cubes durs : la densité de probabilité (1.15) pour les temps d'attente W , et la loi normale des pulsations, d'écart-type σ_ω , proportionnel à (1.53), résultant de la transformation (2.30), due à l'effet Doppler-Fizeau non-relativiste. Ces deux résultats déterminent le calcul de l'auto-corrélation de $\langle \mathcal{E}_{Ra}^*(t)\mathcal{E}_{Ra}(t+\tau) \rangle$, et donc l'expression de $g^{(1)}(\tau)$. Cependant, pour mener les calculs, ces deux résultats peuvent être considérés comme des hypothèses ad-hoc, i.e. il n'est pas nécessaire de préciser les expressions des constantes caractéristiques dans les densités de probabilités des temps d'attente ou des pulsations. Le reste des calculs repose sur l'exploitation de la normalité supposée de l'amplitude complexe, plus précisément sur l'utilisation d'une forme du théorème limite central comme un moyen de former une amplitude complexe normale [(2.4) injectée dans (2.7)].

III.1 Méthodes de calcul

La première méthode consiste à réécrire le champ \mathcal{E} via une famille de fonctions possédant des propriétés commodes, de type base pré-hilbertienne pour les fonctions de carré sommable sur \mathbb{C} , mais sans être une famille génératrice. Cette méthode conserve l'interprétation physique du champ résultant de contributions élémentaires indépendantes. Elle est traditionnellement utilisée par les physiciens [54], ou par exemple [178], chapitre 3, pour mener les calculs avec un champ Rayleigh (2.4) pour $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ seulement. C'est donc dans un cadre moins général que celui qui est considéré ici.

Soient les $(e_\ell(t))_\ell$ dépendant du paramètre t définis par :

$$e_\ell(t) := \exp(i(\varphi_\ell^\ell - \delta\omega_\ell^\ell t)) = \frac{\sqrt{N_{ho}}}{E_0} \mathcal{E}_\ell(t) \exp(i\omega_0 t), \quad (2.9)$$

le champ \mathcal{E}_{Ri} (2.6) se ré-écrit alors :

$$\mathcal{E}_{\text{Ri}}(t) = \left(E_\beta \exp(i\phi) + E_0 \frac{1}{\sqrt{N_{ho}}} \sum_{i=1}^{N_{ho} \gg 1} e_\ell(t) \right) \exp(-i\omega_0 t). \quad (2.10)$$

Les calculs consistent à développer les produits de termes (2.10) impliqués dans les différents moments en jeu, puis d'opérer l'espérance $\langle \dots \rangle$ qui est celle définie pour la densité de probabilité jointe $\varphi_\ell^\ell - \delta\omega_\ell^\ell$. Les calculs sont menés dans la limite $N_{ho} \rightarrow \infty$, c'est la limite "à la physicienne" $N_{ho} \gg 1$, et en remarquant les propriétés qui suivent. La distribution uniforme des φ_ℓ^ℓ sur $[0; 2\pi]$, indépendants entre eux, est indépendante avec la distribution normale des $\delta\omega_\ell^\ell$, donc :

$$\langle e_\ell^*(t) e_n(t) \rangle = \delta_n^\ell = \langle e_\ell^*(t) e_n(t) \rangle^*. \quad (2.11)$$

Avec le résultat (2.5) pour $\tau \geq 0$:

$$\forall \tau \geq 0, \quad \langle e_\ell^*(t) e_n(t + \tau) \rangle = \langle e_\ell^*(t - \tau) e_n(t) \rangle = \langle e_\ell^*(0) e_n(\tau) \rangle = \delta_n^\ell \exp(-\tau/\tau_c - \sigma_\omega^2 \tau^2/2), \quad (2.12)$$

où δ_n^ℓ est le symbole de Kronecker. La distribution uniforme des φ_ℓ^ℓ donne également :

$$\langle e_\ell \rangle = \langle e_\ell^* \rangle = 0. \quad (2.13)$$

Des moments des $(e_\ell)_\ell$ d'ordres supérieurs à 2 interviennent dans le calcul de $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$, la distribution uniforme des φ_ℓ^ℓ sur $[0, 2\pi]$, et leur indépendance entre eux, et avec les fluctuations de pulsation, permettent de conclure :

$$\langle e_i^*(t) e_j(t) e_k^*(t + \tau) \rangle = 0, \quad (2.14)$$

$$\langle e_k^*(t) e_\ell^*(t) e_m(t + \tau) e_n^*(t + \tau) \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = \ell = m = n, \\ k = n, \quad \text{et}, \quad \ell = n, \\ k = \ell, \quad \text{et}, \quad m = n. \end{cases} \quad (2.15)$$

La deuxième méthode repose sur l'utilisation du théorème d'Isserlis [179], qui est connu sous le nom de théorème de Wick en théorie des champs [180], et qui en mathématique est considéré comme une propriété des moments gaussiens, qui ne porte pas de nom particulier. Cette méthode a le mérite d'être moins fastidieuse que la précédente, et il est à noter que Glauber considère également cette méthode dans [57] par exemple chapitre 12, section 12.8. Le théorème n'a d'intérêt que pour le calcul de moments d'ordre 4 ou plus, donc son utilisation n'est pertinente que pour le calcul de $g^{(2)}(\tau)$. Ce théorème s'applique pour les vecteurs gaussiens et les processus gaussiens, standardisés. Il faut tout de même développer les produits de champs

$$\mathcal{E}_{\text{Ri}}(t) = E_\beta \exp(i\phi) \exp(-i\omega_0 t) + A_{\text{Ra}}(t) \exp(-i\omega_0 t)$$

pris aux dates en jeu, et ensuite appliquer le théorème sur le processus A_{Ra} , sachant que c'est processus gaussien centré de covariance $E_0^2 \exp(-\tau/\tau_c - \sigma_\omega^2 \tau^2/2)$.

Un rappel de ce théorème. Soit un moment d'ordre n d'un processus gaussien centré Y , noté $\langle Y_1 \dots Y_n \rangle$. Chaque Y_i est une réalisation de Y à une date donnée. Alors d'après le théorème d'Isserlis

$$\langle Y_1 \dots Y_n \rangle = \begin{cases} \sum_{p \in P(n,2)} \prod_{\{i,j\} \in p} \langle Y_i Y_j \rangle & , \\ 0, & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \quad (2.16)$$

où $P(n, 2)$ est l'ensemble des partitions p de $\llbracket 1, n \rrbracket$ par paires absolument distinctes (deux paires $\{i, j\}$ et $\{i', j'\}$ sont absolument distinctes si $i \neq i'$ et $j \neq j'$). Le cardinal de $P(n = 2q, 2)$ est $n!/(2^q q!)$, par exemple pour $n = 4$, $\text{card}[P(4, 2)] = 3$.

III..2 Calcul de $g^{(3/2)}(\tau)$

Le calcul de $g^{(3/2)}(\tau)$ fait intervenir un oscillateur local

$$\mathcal{E}_{lo}(t) := E_{lo} \exp(i\theta) \exp(-i\omega_{lo}t) \quad (2.17)$$

qui, en premier lieu, est supposé posséder une pulsation ω_{lo} déterministe, égale à ω_0 .

Le calcul est développé pour la méthode utilisant les $(e_\ell(t))_\ell$. L'utilisation du théorème d'Isserlis n'est pas pertinente car le calcul ne fait intervenir que des moments pairs d'ordre 2 au plus.

A ce stade, il n'est pas évident que $g^{(3/2)}$ ne dépende que de τ , la notation $g^{(3/2)}(t, \tau)$ est donc pour l'instant employée.

La forme non-normalisée $G^{(3/2)}$ est composée de deux termes complexes conjugués :

$$G^{(3/2)}(t, \tau) = \langle \mathcal{E}_{\text{Ri}}^*(t) \mathcal{E}_{\text{Ri}}(t) \mathcal{E}_{\text{Ri}}^*(t + \tau) \mathcal{E}_{lo}(t + \tau) \rangle + c.c.. \quad (2.18)$$

Il suffit donc de calculer un seul des deux, le deuxième s'en déduit.

Premièrement, il faut expliciter l'intensité $I(t) := \mathcal{E}_{\text{Ri}}^*(t) \mathcal{E}_{\text{Ri}}(t)$, ceci vient sans difficulté, et il en découle

$$\langle I(t) \rangle = E_0^2 + E_\beta^2. \quad (2.19)$$

et, en ne gardant que les termes qui ne sont pas nuls sous l'action de $\langle \rangle$, il vient :

$$\begin{aligned} \langle I(t) \mathcal{E}_{\text{Ri}}^*(t + \tau) \mathcal{E}_{lo}(t + \tau) \rangle &= E_\beta^3 E_{lo} \exp(i(\theta - \phi)) \\ &+ E_0^2 E_\beta E_{lo} \exp(i(\theta - \phi)) \lim_{N_{ho} \rightarrow +\infty} \frac{1}{N_{ho}} \sum_{k,\ell=1}^{N_{ho}} \langle e_k^*(t) e_\ell(t) \rangle \\ &+ E_0^2 E_\beta \exp(i(\theta - \phi)) \lim_{N_{ho} \rightarrow +\infty} \frac{1}{N_{ho}} \sum_{k,\ell=1}^{N_{ho}} \langle e_k^*(t) e_\ell(t + \tau) \rangle \end{aligned}$$

En appliquant les propriétés (2.11) et (2.12), en ajoutant le complexe conjugué, et en normalisant par

$$2\langle I(t) \rangle |\langle A_{\text{Ri}} \rangle| |\langle A_{lo} \rangle| = 2(E_\beta^2 + E_{lo}^2) E_\beta E_{lo}, \quad (2.20)$$

il vient :

$$g^{(3/2)}(t, \tau) \equiv g^{(3/2)}(\tau) = \cos(\theta - \phi) \left(1 + \frac{s}{1+s} \exp(-\tau/\tau_c - \tau^2 \sigma_\omega^2/2) \right), \quad (2.21)$$

où :

$$s := \frac{E_0^2}{E_\beta^2}. \quad (2.22)$$

Ce facteur s peut-être interprété comme un rapport d'aspect : c'est le carré du rapport entre la distance du centre de l'ellipse de corrélation ϵ_1 à l'origine du plan complexe, et son rayon,

la figure 2.5 aide a mieux le visualiser. En d'autres termes, c'est le carré du rapport entre la dispersion et la moyenne de l'amplitude du champ.

Le résultat final peut être exprimé en fonction de $g^{(1)}(\tau)$. Une fois $g^{(1)}(\tau)$ calculé, il peut-être remarqué que

$$\frac{s}{1+s} \exp(-\tau/\tau_c - \tau^2 \sigma_\omega^2/2) = |g^{(1)}(\tau)| - \frac{1}{1+s},$$

et alors $g^{(3/2)}(\tau)$ se réécrit :

$$g^{(3/2)}(\tau) = \cos(\theta - \phi) \left(\frac{s}{1+s} + |g^{(1)}(\tau)| \right). \quad (2.23)$$

Dans un second temps l'oscillateur local est supposé posséder une pulsation ω_{lo} qui fluctue également. Cette hypothèse est plus réaliste, si par exemple l'oscillateur local est un laser, la cavité de celui-ci n'est pas parfaitement stable, et la fréquence centrale d'émission fluctue. Par soucis de simplicité, ω_{lo} a été considéré comme un processus gaussien de moyenne constante ω_1 et de variance constante $\sigma_{\omega_{lo}}^2$. Ce processus est considéré indépendant de tous les autres processus en jeu. Remarque. Un modèle plus sophistiqué pour décrire le comportement stochastique d'un laser peut par exemple être trouvé dans [181], chapitre 13.

En standardisant le processus $\omega_{lo} = \omega_1 + \delta\omega_{lo}$, et en effectuant le changement de variable $t + \tau \mapsto t'$, le premier terme de $G^{(3/2)}$ devient

$$\begin{aligned} \langle I(t) \mathcal{E}_{\text{Ri}}^*(t + \tau) \mathcal{E}_{lo}(t + \tau) \rangle = & \left(E_\beta^3 E_{lo} \exp(i(\theta - \phi)) \right. \\ & + E_0^2 E_\beta E_{lo} \exp(i(\theta - \phi)) \lim_{N_{ho} \rightarrow +\infty} \frac{1}{N_{ho}} \sum_{k,\ell=1}^{N_{ho}} \langle e_k^*(t' - \tau) e_\ell(t' - \tau) \rangle \\ & + E_0^2 E_\beta \exp(i(\theta - \phi)) \lim_{N_{ho} \rightarrow +\infty} \frac{1}{N_{ho}} \sum_{k,\ell=1}^{N_{ho}} \langle e_k^*(t' - \tau) e_\ell(t') \rangle \left. \right) \\ & \cdot \exp(-i(\omega_1 - \omega_0)t') \langle \exp(-i\delta\omega_{lo}' t') \rangle. \end{aligned}$$

Le terme $\langle \exp(-i\delta\omega_{lo}' t') \rangle$ est la fonction caractéristique de $\delta\omega_{lo}$ prise en t' . Avec l'ajout du complexe conjugué, les propriétés (2.11) et (2.12), et la normalisation par (2.20), il vient :

$$g^{(3/2)}(\tau) = \cos((\omega_1 - \omega_0)\tau + \theta - \phi) \left(\frac{s}{1+s} + |g^{(1)}(\tau)| \right) \exp(-\sigma_{\omega_{lo}}^2 \tau^2/2). \quad (2.24)$$

III..3 Résultats et commentaires

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 2.1. Les résultats affichés dans les deux colonnes sont consistants : le passage à la limite $s \rightarrow +\infty$ de la colonne 'champ ricien' donne bien les résultats de la colonne 'champ Rayleigh'. A l'exception de $g^{(3/2)}$ qui n'est pas définie pour un champ Rayleigh. Pour $s \rightarrow 0$, la radiation devient parfaitement cohérente, il est alors attendu une fonction $g^{(1)}$ sinusoïdale et une fonction $g^{(2)}$ qui ne présente pas d'extremum en $\tau = 0$. Ce qui est bien le cas. De plus la transition est en accord avec l'expérience menée dans [61] dans laquelle les auteurs mesurent $g^{(2)}$ pour des s de plus en plus petits (donc pour E_β de plus en plus grand devant E_0).

Les trois fonctions de corrélation permettent de capturer deux caractéristiques du phénomène de transport considéré (le mouvement brownien non-relativiste de particules libres et indépendantes); le temps d'attente moyen τ_c entre deux collisions donné dans le cadre du modèle développé sur le modèle cinétique des cubes durs par (1.60), et l'élargissement Doppler σ_ω donné

TABLE 2.1 – Expressions des fonctions de corrélations pour un champ Rayleigh (connu) et pour un champ ricien (nouveau). Le facteur s est donné par (2.22).

	Champ ricien $\mathcal{E}_{\text{Ri}}(t)$	Champ Rayleigh $\mathcal{E}_{\text{Ra}}(t)$
$g^{(1)}$	$\frac{1 + s \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c} - \frac{\sigma_\omega^2 \tau^2}{2}\right)}{1 + s} \exp(-i\omega_0 \tau)$	$\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c} - \frac{\sigma_\omega^2 \tau^2}{2}\right) \exp(-i\omega_0 \tau)$
$g^{(3/2)}$	$\frac{\cos(\theta - \phi) \left(\frac{s}{1+s} + g^{(1)}(\tau) \right)}{\cos((\omega_1 - \omega_0)\tau + \theta - \phi) \left(\frac{s}{1+s} + g^{(1)}(\tau) \right) \exp\left(-\frac{\sigma_{\omega_{l_0}}^2 \tau^2}{2}\right)}$	non définie
$g^{(2)}$	$ g^{(1)}(\tau) ^2 + 1 - \frac{1}{(1+s)^2}$	$ g^{(1)}(\tau) ^2 + 1$

dans le cadre du modèle développé sur le modèle cinétique des cubes durs par (2.2). L'élargissement Doppler donne la dispersion d'une composante de la vitesse relative σ_v à l'équilibre, via la transformation (2.30), due à l'effet Doppler-Fizeau pour un observateur inertiel (2.29) pris dans sa limite non-relativiste. Pour résumer : dans le cadre du modèle développé sur le modèle cinétique des cubes durs pris sur une échelle de plusieurs τ_v , et dans sa limite brownienne, la donnée d'une des trois fonctions de corrélation permet d'écrire un système de deux équations à deux inconnues A et D :

$$(S_B) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_B(\tau_c) = 2 \lim_B(\mu) \cdot \frac{1}{A}, \\ \lim_B(\sigma_\omega^2) = \frac{\omega_0^2}{c^2} \cdot \frac{D}{2A}. \end{cases}$$

Rappel : les constantes A et D s'expriment en fonction des paramètres microphysiques selon, respectivement, (1.51) et (1.52). La mesure d'une fonction de corrélation donne accès à $\lim_B(\tau_c)$ et $\lim_B(\sigma_\omega^2)$, quitte à mesurer plusieurs fonctions de corrélation pour affiner les résultats. Cela permet de résoudre le système (S_B) d'inconnues A et D et de déterminer entièrement le processus de transport normal (mouvement brownien), puisque A et D caractérisent entièrement K_1 (1.46) et K_2 (1.47) qui définissent le processus d'O.U. tri-dimensionnel qu'est la vitesse relative \vec{V}_ℓ d'une particule libre $\mathcal{P}(m)$ relativement à \mathcal{O} .

La relation obtenue pour $g^{(2)}(\tau)$ pour le champ ricien généralise la relation connue dite de Siegert [54, 55].

Le résultat pour $g^{(3/2)}(\tau)$, lorsque l'oscillateur local présente des fluctuations de pulsation ω_{l_0} , souligne l'importance d'avoir un oscillateur local avec une pulsation centrale la plus constante possible, et la plus proche possible de la pulsation centrale du champ considéré. Le terme en cosinus

$$\cos((\omega_1 - \omega_0)\tau + \theta - \phi),$$

s'interprète comme un battement. Si l'expérimentateur peut choisir la phase de l'oscillateur local, que \mathcal{E}_{l_0} puisse être considéré comme déterministe ou non, cette phase θ doit être choisie la plus proche possible de ϕ , pour maximiser l'amplitude du signal $g^{(3/2)}(\tau)$. Il peut-être aussi remarqué que si $\phi = \theta$ alors

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left(g^{(3/2)}(\tau)\right) = 1 = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left(g^{(2)}(\tau)\right). \quad (2.25)$$

Une remarque importante pour le chapitre suivant : $g^{(3/2)}(\tau)$ dépend du module de $g^{(1)}(\tau)$, tandis que $g^{(2)}(\tau)$ en dépend au carré. Par conséquent, si la mesure est limitée par la résolution temporelle (ce qui est toujours le cas à partir d'une certaine échelle), $g^{(3/2)}$ permet d'accéder à des τ_c deux fois plus petits, et des σ_ω racine de deux fois plus grands. C'est à dire dans la présente situation, avec (1.54), pour une même masse m_0 donnée, l'accès à des températures quatre fois plus élevées, ou pour une même température T donnée, l'accès à des masses m_0 quatre fois plus petites. Et c'est à dire, avec (2.1), pour une même température T des masses m deux fois plus petites, et pour une même masse m donnée, des températures deux fois plus élevées.

Quand $s \rightarrow 0$ et quand $s = 1$, les inégalités démontrées dans [165] entre $g^{(3/2)}(0)$ et $\sqrt{g^{(2)}(0)}$ sont également vérifiées ici :

$$\begin{aligned} s \ll 1 &\Rightarrow \left| g^{(3/2)}(0) \right| \leq \sqrt{g^{(2)}(0)}, \\ s = 1 &\Rightarrow \left| g^{(3/2)}(0) \right| \leq \sqrt{2g^{(2)}(0)}. \end{aligned}$$

Pour $\theta = \phi$ ces inégalités peuvent être précisées, quelque soit s . Elles dévoilent alors encore plus la "sensibilité" accrue de $g^{(3/2)}(0)$ à la présence d'une partie cohérente dans la radiation perçue, relativement à celle de $g^{(2)}(0)$. Tout d'abord, il faut remarquer que la limite pour $s \gg 1$ de $g^{(3/2)}(0)$ égale celle de $g^{(2)}(0)$

$$\lim_{s \gg 1} \left(g^{(3/2)}(0) \right) = 2 = \lim_{s \gg 1} \left(g^{(2)}(0) \right). \quad (2.26)$$

Ensuite, les valeurs en $\tau = 0$ peuvent se réécrire

$$\theta = \phi \Rightarrow g^{(3/2)}(0) = 2 - \frac{1}{1+s}, \quad (2.27)$$

$$g^{(2)}(0) = 2 - \frac{1}{(1+s)^2}. \quad (2.28)$$

Donc la présence d'une partie cohérente dans la radiation a un effet $1+s$ fois plus élevé dans $g^{(3/2)}$ relativement à celui dans $g^{(2)}$. Par exemple, pour $s = 1$, $g^{(3/2)}(0) = 1.5$, c'est à dire que la valeur en zéro a diminué de moitié par rapport à l'amplitude entre les deux limites (2.26) et (2.25). Pour $g^{(2)}$ cette valeur n'a diminué que d'un quart par rapport à l'amplitude entre les deux limites (2.26) et (2.25) : $g^{(2)}(0) = 1.75$.

Les résultats sont confirmés par la simulation Monte-Carlo, voir la partie IV. suivante, qui repose sur le modèle cinétique "premiers principes" du chapitre 1.

IV. Confirmation par simulations Monte-Carlo

La simulation Monte-Carlo repose sur des hypothèses du type "premiers principes" qui permettent d'atteindre les hypothèses utilisées pour les calculs de la partie III. précédente. Le principe de cette simulation est détaillé en sous-partie IV..1. Les figures de mérite qui permettent de s'assurer que les hypothèses des calculs sont atteintes, sont présentées en sous-partie IV..2. Enfin, les résultats, qui confirment les calculs, sont présentés dans une dernière sous-partie IV..3.

IV..1 Principes de la simulation

La simulation repose sur le modèles des cubes durs sans effets inertiels du chapitre 1, dans sa limite brownienne, et l'algorithme qui en découle, voir partie IV. de ce chapitre 1.

Les $(\mathcal{P}(m))_\ell$ n'interagissant pas les unes avec les autres (hypothèse d), pour chacune d'entre elles les trois composantes du vecteur vitesse \vec{V}_ℓ relative à l'observateur inertiel \mathcal{O} , sont simulées suivant l'algorithme du chapitre 1. La vitesse initiale des $(\mathcal{P}(m))_\ell$ n'importe pas, car seul l'état

stable du mouvement est conservé, c'est à dire le mouvement après $7\tau_v$, τ_v défini par (1.32) et explicité par (1.54). Dans cet état stable la durée considérée est également supérieure à $7\tau_v$, pour que le modèle atteigne sa limite continue.

La position de chaque $(\mathcal{P}(m))_\ell$ relativement à \mathcal{O} est repérée par \vec{n}_ℓ , voir figure 2.1, et l'effet Doppler-Fizeau est calculé de manière exacte (2.29) pour générer la pulsation $\omega_\ell(t)$ correspondante à $\vec{n}_\ell(t)$ et $\vec{V}_\ell(t)$. L'observateur \mathcal{O} est supposé inertiel, son espace local de repos est global et la description peut se faire avec des vecteurs tri-dimensionnels

$$\omega_\ell(t) = \frac{\omega_0}{\Gamma_\ell(t) \left(1 - \frac{\vec{n}_\ell(t) \cdot \vec{V}_\ell(t)}{c}\right)}, \quad (2.29)$$

où Γ_ℓ est le facteur de Lorentz de la particule $\mathcal{P}_\ell(m)$ par rapport à l'observateur \mathcal{O} . L'observateur \mathcal{O} étant inertiel :

$$\Gamma_\ell(t) = \left(1 - \frac{\vec{V}_\ell \cdot \vec{V}_\ell}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Pour chaque saut dans une composante de \vec{V}_ℓ , un tirage uniforme entre $[0, 2\pi]$ est effectué pour générer un saut de phase φ_t^ℓ , si t est la date du saut, dans la phase de \mathcal{E}_ℓ . Voir figure 2.4. Pour compléter cette figure, un exemple de l'effet produit dans un champ \mathcal{E}_ℓ est présenté figure 2.6.

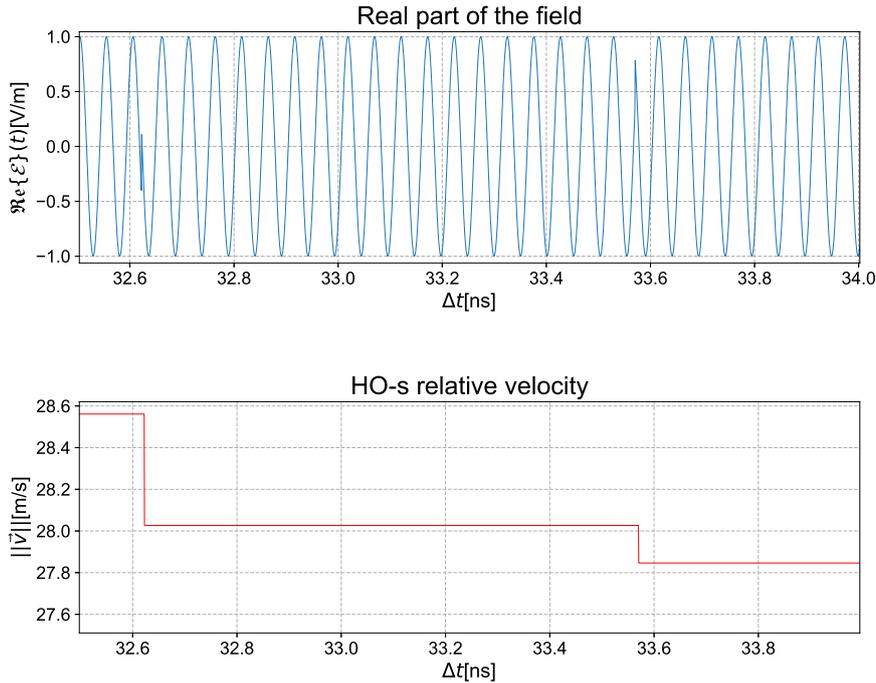


FIGURE 2.6 – Effets des sauts de phase dus aux collisions élastiques dans un oscillateur brownien. L'appellation “HO” est utilisée pour “Harmonic Oscillator” qui désigne une particule $\mathcal{P}(m)$ par abus de langage.

Le champ reçu par l'observateur \mathcal{E}_{Ri} est la somme des différents champs \mathcal{E}_ℓ , superposée à la radiation cohérente \mathcal{E}_{lo} .

Les paramètres libres sont le nombre N_{ho} de particules $(\mathcal{P}(m))_\ell$, leur masse m , leur dimension ρ . La masse m_0 des particules du gaz support, leur dimension ϱ_0 , leur température T et leur

densité n sont également paramètres libres. La température T ne peut pas être choisie arbitrairement grande, elle doit rester inférieure à $10^{28}K$, voir la remarque de la partie III.2 du chapitre 1, et doit être choisie de sorte que $\langle V \rangle$ et $\langle U \rangle$ soient non-relativistes. Enfin, la pulsation d'intérêt ω_0 peut-être choisie librement, même beaucoup plus grande que la fréquence de collision, et ce grâce à la modélisation de \vec{V}_ℓ par un PMSCE : les temps d'attente permettent de découpler la dynamique de l'oscillation émise, de l'axe du temps de la dynamique du mouvement. Les exemples montrés ont les paramètres microphysiques suivants : $\mu = 10^{-3}$, $m_0 = 60, 23 \cdot 10^{-27} \text{kg}$ (gaz d'Argon 36), $\varrho = 100\varrho_0$, et $\varrho_0 = 0,3 \text{nm}$. La température et la pression sont standards : $T = 300K$, et $P = 1,013 \text{bar}$ ($n = P/k_B T$). Leur choix est arbitraire (le choix de l'Argon 36 a été fait car c'est un isotope stable de l'Argon dominant dans certaines atmosphères stellaires). Avec ces paramètres le temps d'attente moyen entre deux collisions successives τ_c (1.58) est de l'ordre de la ns, et le temps de relaxation vers l'équilibre τ_v (1.32), explicité par (1.54), est de l'ordre de la μs .

La résolution numérique, pour l'interpolation de l'axe du temps, est fixée à la moitié du minimum W_{\min} des temps d'attente W générés (typiquement $\sim 1 - 100 \text{fs}$ pour les paramètres microphysiques précédents), ou, si la pulsation ω_0 est telle que $2\pi/\omega_0$ soit plus petit que W_{\min} , la résolution est fixée pour respecter le théorème d'échantillonnage de Shanon.

Pour une simulation avec une trentaine d'oscillateurs browniens, sur une durée d'une centaine de τ_v , répétée plusieurs fois pour générer quelques millions d'échantillons Monte-Carlo, la durée de simulation est de plusieurs heures (typiquement 5 – 10h) sur un ordinateur avec un processeur intel i7 de première génération (i7-4720HQ @2.6GHz) et 8GO de RAM.

IV..2 Figures de mérite

La première figure de mérite, pour la génération Monte-Carlo du champ, est la densité de probabilité P_Ω des fluctuations de pulsations $\delta\omega_t^\ell$ autour de ω_0 . Dans un cadre non relativiste (2.29) se simplifie, et il est attendu que quelque soit ℓ quelque soit t :

$$P_\Omega(\delta\omega_t^\ell) = \frac{c}{\omega_0} \cdot P_{v_\ell \cdot n_\ell} \left(\frac{c}{\omega_0} \delta\omega_t^\ell \right). \quad (2.30)$$

La densité $P_{v_\ell \cdot n_\ell}$ s'obtient facilement. Chaque composante de \vec{V}_ℓ est indépendante et identiquement distribuée. Dans l'état stable du mouvement, chaque composante est un processus normal de moyenne nulle et de variance σ_v^2 . Donc la variable aléatoire $\vec{V}_\ell \cdot \vec{n}$ est à chaque instant la somme de trois V.A. indépendantes $n_i V_{i,\ell} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, n_{\ell,i}^2 \sigma_v^2)$, et donc comme \vec{n}_ℓ est unitaire $\sum_i n_{\ell,i}^2 = 1$, $P_{v_\ell \cdot n_\ell}$ est, à chaque instant, gaussienne centrée de variance σ_v^2 , ainsi, avec $\sigma_\omega = \omega_0 \sigma_v / c$:

$$P_\Omega(\delta\omega_t^\ell) = \frac{1}{\sigma_\omega \sqrt{2\pi}} \exp(-(\delta\omega_t^\ell)^2 / 2\sigma_\omega^2). \quad (2.31)$$

La maxwellienne des vitesses était obtenue par la simulation, voir figure 1.15, donc sans surprise l'effet Doppler-Fizeau est simulé avec succès, voir un exemple figure 2.7.

Les autres figures de mérite pour le champ ont déjà été présentées :

- la consistance des dates de sauts de phases avec les dates de sauts dans les composantes des \vec{V}_ℓ , voir un exemple figure 2.4 et l'effet produit dans le champ, un exemple est donné figure 2.6.
- la représentation des réalisations du champ dans le plan complexe de ses quadratures, et la vérification du contenu en terme de probabilité des ellipses d'égalité de densité, voir un exemple figure 2.5.

Toutes sont en accord avec la théorie. Pour finir, un exemple de l'intensité du champ ricien généré est également donnée figure 2.8, à l'échelle cinétique (ns). Les apparences de l'intensité pour un champ chaotique sont bien retrouvées : Dans le cas où l'effet Doppler-Fizeau prédomine

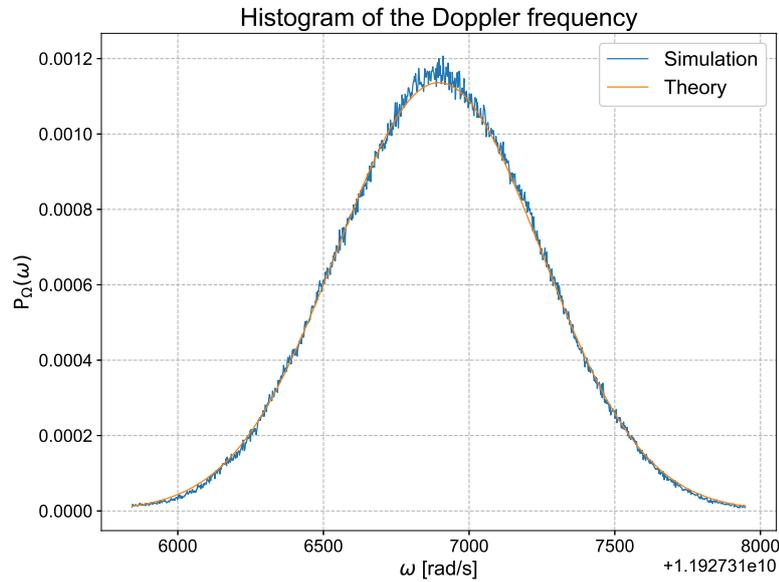


FIGURE 2.7 – Contour de l’histogramme des $\omega_{\ell}(t)$ superposée à la densité théorique \mathcal{P}_{Ω} attendue. La simulation Monte-Carlo comporte 1 162 170 réalisations. La pulsation centrale ω_0 est fixée arbitrairement (tirage au sort) à $6900 + 11,92731\text{GHz}$.

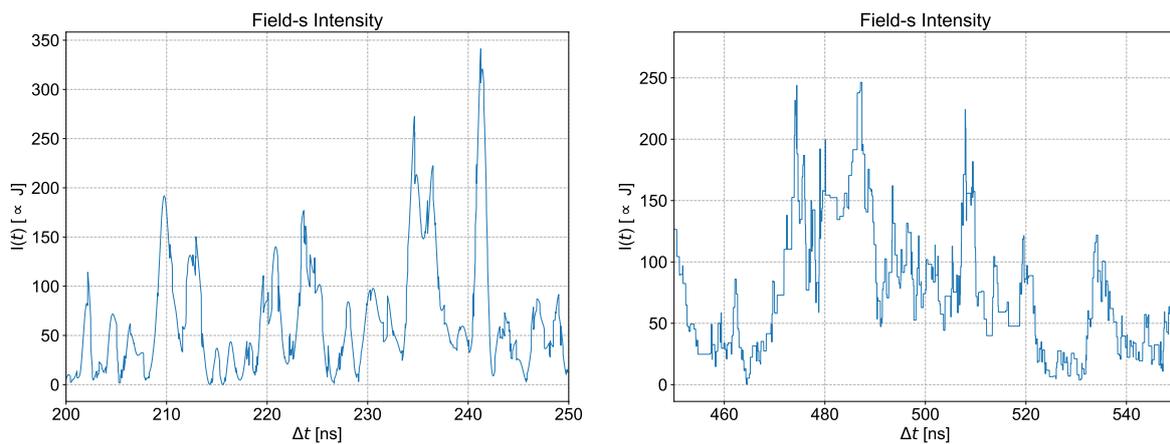


FIGURE 2.8 – Intensité à l’échelle cinétique (ns) de \mathcal{E}_{Ri} pour $\sigma_v \tau_c \gg \lambda_0$ (à gauche) et pour $\sigma_v \tau_c \ll \lambda_0$ (à droite). La pulsation $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ est 10^6 fois plus importante pour le cas de gauche.

sur l'effet des collisions, i.e. : $\sigma_v \tau_c \gg \lambda_0$ (voir discussion partie IV..3), les fluctuations dans l'intensité sont plus lisses, voir figure 2.8 cas de gauche, et possèdent une échelle de temps déterminée $\sim 1/\sigma_\omega$. En effet, dans ce cas, le spectre, densité de probabilité de la fréquence des fluctuations, est une gaussienne centrée sur ω_0 , de variance σ_ω^2 , à la singularité en $\omega = 0$ près (voir discussion sous-partie suivante IV..3). Les fréquences possibles des fluctuations du champ sont donc concentrées dans une région autour de ω_0 de largeur de quelques σ_ω . Dans le cas opposé $\sigma_v \tau_c \ll \lambda_0$, voir figure 2.8 cas de droite, la densité de probabilité des fluctuations est une lorentzienne (à la singularité en $\omega = 0$ près, voir discussion sous-partie suivante IV..3); les fréquences de fluctuations probables sont plus diverses que dans le cas de la gaussienne, et les fréquences élevées devant ω_0 ont une probabilité de survenir moins négligeable que dans le cas de la densité gaussienne. De plus dans ce cas "lorentzien", les fluctuations d'intensité sont de nature fractale. C'est à dire que les fluctuations persistent de manière similaire sur plusieurs échelles de temps, très différentes, qui peuvent être arbitrairement petites. En effet, la densité de probabilité lorentzienne (loi de Cauchy), centrée ici sur ω_0 et de largeur caractéristique (2.34), possède ses deux premiers moments qui divergent. Ainsi, en principe il y a des fluctuations de fréquence infinie. C'est ce qui explique qu'il y ait des fluctuations similaires quelque soit l'échelle de temps considérée.

IV..3 Résultats pour $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, $g^{(2)}(\tau)$

Les résultats des fonctions de corrélation sont en accord avec les résultats de la table 2.1. Les cas limites $s \rightarrow 0$ (radiation purement cohérente) et $s \rightarrow +\infty$ (radiation Rayleigh) sont également retrouvés par la simulation.

Les fonctions de corrélation permettent de capturer le temps d'attente moyen entre deux collisions τ_c donné par (1.58), ou par (1.60), et la dispersion σ_v d'une composante de la vitesse relative, donnée fondamentalement par (1.53), via σ_ω résultant de la transformation (2.30), due à l'effet Doppler-Fizeau non-relativiste. La résolution de ce système de deux équations (1.60) et (1.53) d'inconnues A , définie par (1.46), et D , définie par (1.47), permet de déduire les deux premiers coefficients de Kramers-Moyal d'une composante V_α ($\alpha = 1, 2, 3$) de la vitesse relative d'une particule $\mathcal{P}(m)$ formant un oscillateur brownien relativement à l'observateur \mathcal{O} .

Les exemples présentés concernent un cas où l'énergie présente dans la radiation cohérente d'amplitude complexe $E_\beta \exp(i\phi)$, et l'énergie dans la radiation chaotique Rayleigh résultant des oscillateurs browniens indépendants, sont égales (i.e. : $s = 1$).

Deux situations limites bien connues sont présentées. Dans l'une l'effet Doppler-Fizeau est le principal responsable de la forme de $g^{(1)}(\tau)$, et dans l'autre ce sont les collisions qui donnent la dépendance en τ dans $g^{(1)}$. Ces deux situations dépendent de l'ordering entre τ_c et $1/\sigma_\omega$. Cet ordering peut s'interpréter simplement en considérant l'écart-type du libre parcours moyen $\sigma_v \tau_c$ et la longueur d'onde centrale $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ de la radiation :

$$\exp(-\tau/\tau_c - \sigma_\omega^2 \tau^2/2) \approx \begin{cases} \exp(-\tau/\tau_c) & \text{si : } \sigma_v \tau_c \ll \lambda_0 \\ \exp(-\sigma_\omega^2 \tau^2/2) & \text{si : } \sigma_v \tau_c \gg \lambda_0. \end{cases} \quad (2.32)$$

$$(2.33)$$

Les transformées de Fourier (spectres, voir table 7) de (2.32) et (2.33) permettent d'identifier les constantes d'élargissement spectral. Pour (2.32) le spectre est lorentzien, à la singularité en $\omega = 0$ près (singularité due à $\langle \mathcal{E}_{\text{Ri}} \rangle$) centré en ω_0 , et de largeur caractéristique avec (1.61) :

$$\Delta\omega = n\sigma_{\text{col}} \langle V_{\text{rel}} \rangle, \quad (2.34)$$

comme attendu, voir par exemple [182] chapitre 10, section 10.6. Cela confirme la pertinence du modèle des cubes durs du chapitre 1. Pour (2.33), le spectre est gaussien, à la singularité en $\omega = 0$ près (singularité due à $\langle \mathcal{E}_{\text{Ri}} \rangle$), centré en ω_0 et de largeur caractéristique :

$$\Delta\omega = \sigma_\omega.$$

Les figures 2.9, 2.10, et 2.11, présentent les résultats de la simulation Monte-Carlo “premiers principes” superposés à la prédiction théorique, dans les deux limites (2.32), et (2.33), pour $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$. La différence entre les deux sous-figures est à chaque fois la pulsation centrale, 10^6 fois plus grande pour les sous-figures du haut. Les paramètres microphysiques sont ceux énoncés en sous-partie IV..1.

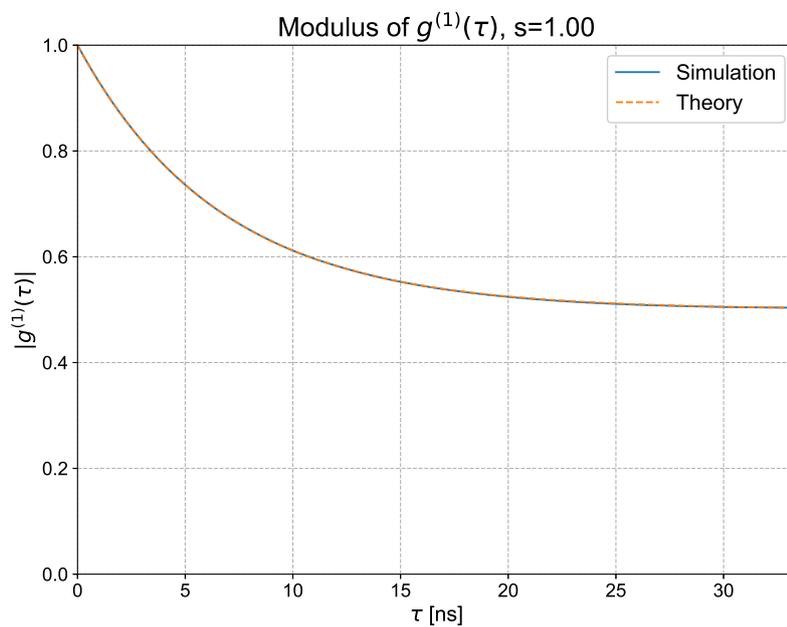
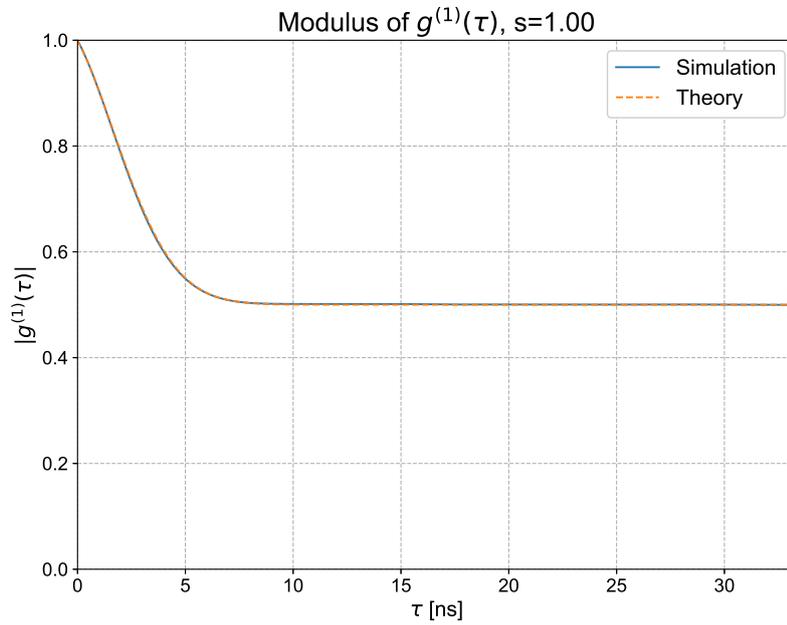


FIGURE 2.9 – Fonction de corrélation $g^{(1)}(\tau)$ pour $\sigma_v \tau_c \gg \lambda_0$ (en haut) et $\sigma_v \tau_c \ll \lambda_0$ (en bas), pour un champ ricien avec $s = 1$. Le nombre de réalisations Monte-Carlo est d'un peu plus d'un million, l'accord entre la théorie et la simulation est parfait.

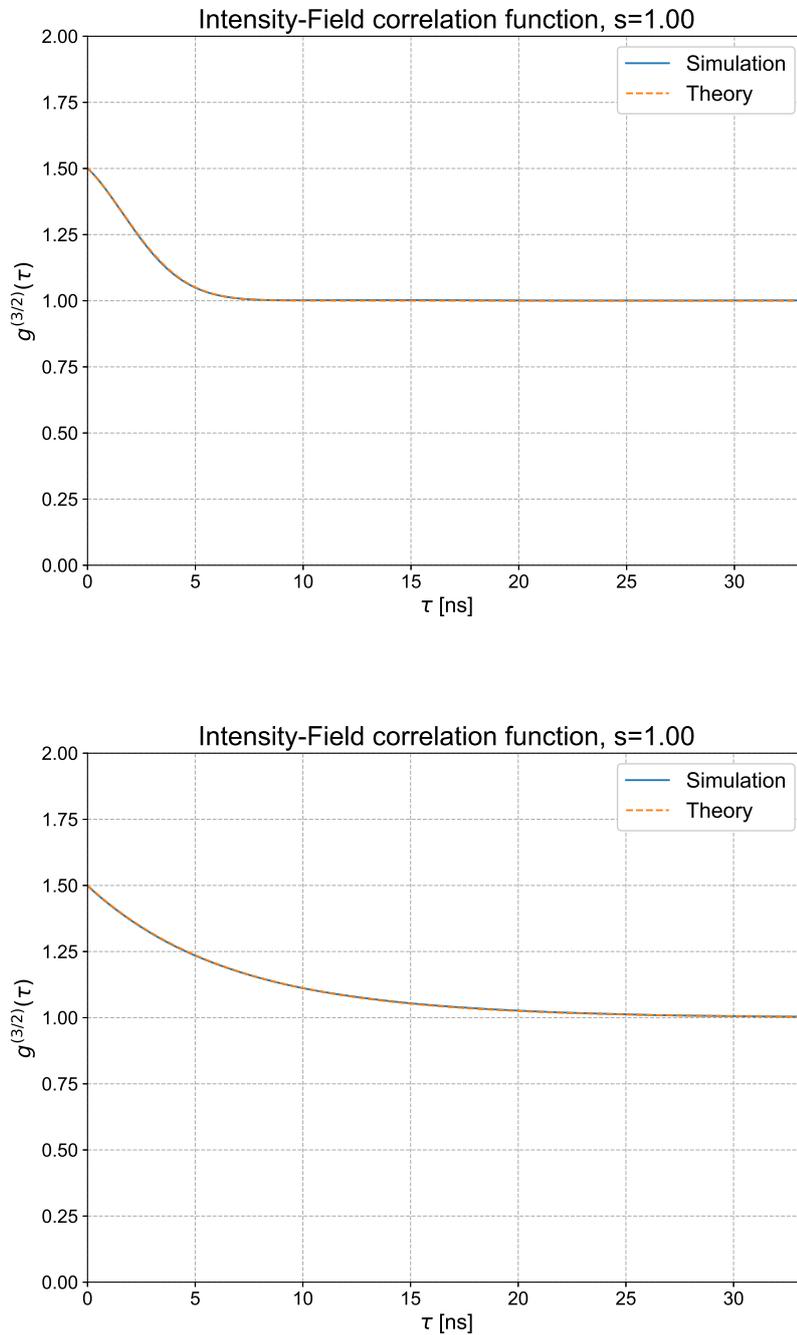


FIGURE 2.10 – Fonction de corrélation $g^{(3/2)}(\tau)$ pour $\sigma_v \tau_c \gg \lambda_0$ (en haut) et $\sigma_v \tau_c \ll \lambda_0$ (en bas), pour un champ ricien avec $s = 1$. Le nombre de réalisations Monte-Carlo est d'un peu plus d'un million, l'accord entre la théorie et la simulation est parfait.

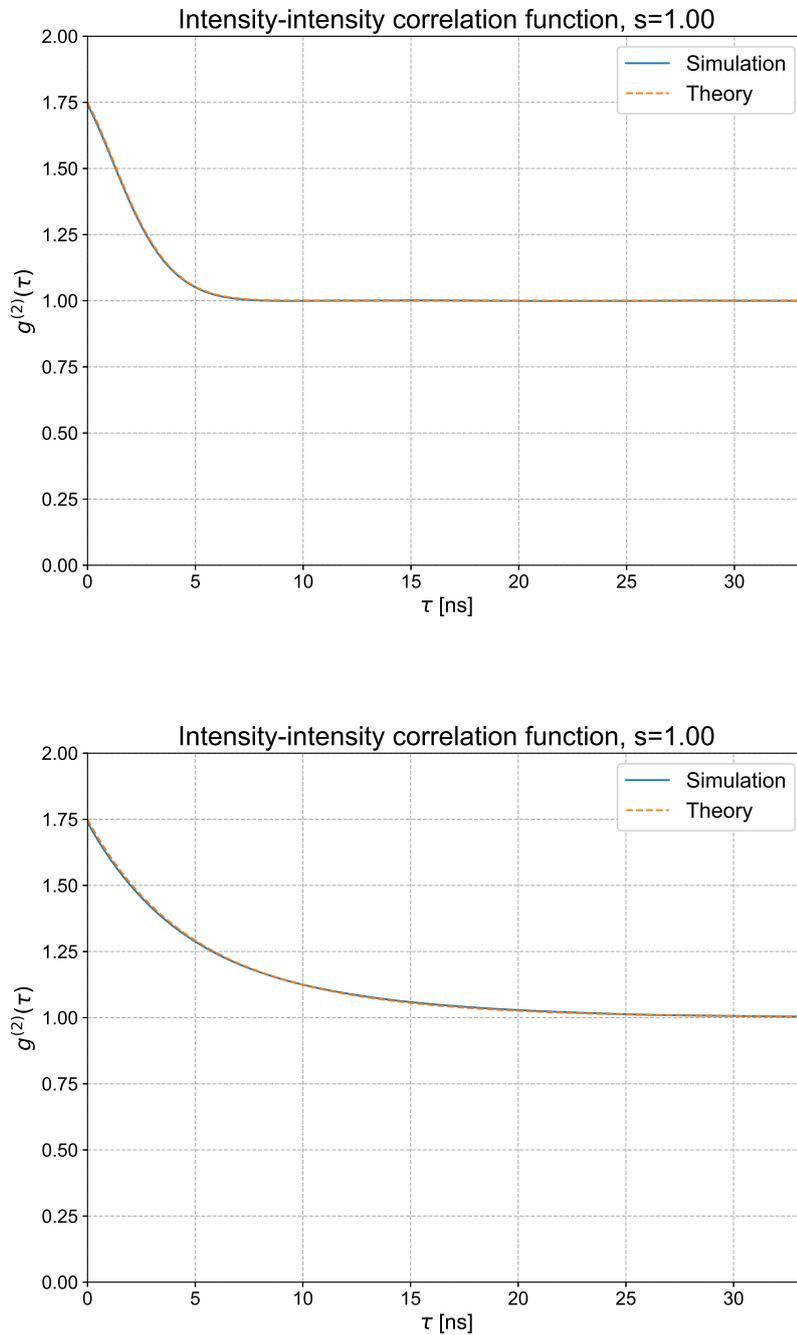


FIGURE 2.11 – Fonction de corrélation $g^{(2)}(\tau)$ pour $\sigma_v \tau_c \gg \lambda_0$ (en haut) et $\sigma_v \tau_c \ll \lambda_0$ (en bas), pour un champ ricien avec $s = 1$. Le nombre de réalisations Monte-Carlo est d'un peu plus d'un million, l'accord entre la théorie et la simulation est parfait.

V. Conclusion

La situation physique considérée d'un point de vue théorique, dans un contexte astrophysique, est originale et s'inscrit dans un contexte bien défini [130, 102, 104, 174, 183]. Elle est également appuyée par une étude expérimentale [61] qui lui correspond à peu de choses près. Les calculs des fonctions de corrélation pour un champ ricien, voir table 2.1, dans ce contexte astrophysique, semblent être originaux. Ces calculs s'inscrivent dans le modèle des cubes durs sans effets inertiels, développé au chapitre 1. En pratique, ils reposent surtout sur la normalité du champ qui est due à la multitude d'oscillateurs browniens indépendants en jeu. Le modèle des cubes durs permet de proposer une simulation Monte-Carlo basée sur des hypothèses de type *ab initio* (conservation de la masse, de l'impulsion). Une dialectique analytique-numérique s'installe donc, et les calculs et les simulations sont en parfait accord.

La présence d'une composante cohérente dans la radiation a un effet de réduction de la valeur $g^{(2)}(0)$ (2.28), mais cet effet de réduction est $1 + s$ fois plus élevé sur la valeur $g^{(3/2)}(0)$ (2.27). Sachant que les limites de $g^{(3/2)}(0)$ et $g^{(2)}(0)$ sont identiques pour une composante cohérente négligeable (2.26), et identiques pour $\tau \rightarrow +\infty$ (2.25), cela peut se traduire par le fait que $g^{(3/2)}$ est plus sensible à la présence d'une composante cohérente dans un champ chaotique que $g^{(2)}$.

Les fonctions de corrélation permettent de capturer le temps d'attente moyen entre deux collisions : τ_c , donné par (1.60), et la dispersion σ_v d'une composante de la vitesse relative, donnée par (1.53), via σ_ω résultant de la transformation (2.30), due à l'effet Doppler-Fizeau non-relativiste. La résolution du système de deux équations (1.60) et (2.2) d'inconnues A , définie par (1.46), et D , définie par (1.47), permet de déduire les deux premiers coefficients de Kramers-Moyal de chacune des composantes de \vec{V} . Dans la limite brownienne ces coefficients déterminent entièrement \vec{V} sur l'échelle de temps d'une dizaine de τ_v défini par (1.54). Les fonctions de corrélation permettent donc de caractériser le processus de transport de la matière rayonnante étudié au chapitre 1.

Enfin, avec les hypothèses de la situation physique considérée, la fonction $g^{(3/2)}$ fait intervenir le module de $g^{(1)}$ et non son carré comme $g^{(2)}$. Elle permet donc d'accéder directement au module de la visibilité, quantité mesurée en interférométrie d'amplitude classique.

Chapitre 3

Comparaison des RSB statistiques

Sommaire

I.	Introduction	92
I..1	Objectifs	92
I..2	Choix sur le type de bruit et sur la détection	93
I..3	Organisation du chapitre	93
II.	Définitions et exemple	94
II..1	Définitions	94
II..2	Justification de l'ergodicité et conséquences	95
II..3	Exemple : RSB de la mesure de $g^{(1)}(\tau)$	97
III.	Mesure de $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$ via une estimation continue	99
III..1	Signaux	99
III..2	Bruit	102
III..3	Rapports signal sur bruit	104
IV.	Mesure de $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$ via estimation conditionnelle	106
IV..1	Principe et signaux	106
IV..2	Bruit	108
IV..3	RSB	109
V.	Quelques comparaisons et conclusions	110
V..1	Comparaison des méthodes	110
V..2	Comparaisons des mesures	111
V..3	Conclusions	115

Et le bruit retentissait comme je m’y attendais le moins, emportant tout mon échafaudage de comptes et de calculs. Je courais à la cuvette pour contrôler le fait. Au fond, le trou nauséabond était immobile comme un miroir. En me penchant dessus, je l’obscurcissais tout. Je m’étais trompé.

Moravagine, Blaise Cendrars.

I. Introduction

Ce troisième chapitre est également théorique et porte sur l’estimation de rapports signal sur bruit. Il repose sur les résultats de la table 2.1 du chapitre 2 précédent. Sa lecture requiert un savoir-faire en théorie des probabilités et des processus stochastiques (entre autres ; des bases sur le processus de Campbell [aussi appelé processus *de grenaille* par abus d’extension du bruit qui porte ce nom], le théorème de Campbell, le théorème de Slutsky [pour un rappel sur ce théorème voir par exemple [184] chapitre 12, section 12.1] et l’ergodicité).

Le terme “densité” est utilisé au sens de la densité d’un processus de Poisson (le terme “intensité” est également employé, mais il est évité ici en raison de la confusion qu’il pourrait engendrer avec l’intensité I). Dans le cadre de ce chapitre cette densité correspond à une fréquence de *photo-électrons*. Par conséquent le terme “densité” est également employé hors du cadre des processus de Poisson, par abus de langage, pour signifier fréquence de photo-électrons.

Comme au chapitre précédent, les qualificatifs “Rayleigh” et “ricien” sont utilisés pour le champ chaotique considéré, et ce en vertu des lois de probabilité associées au module de l’amplitude complexe.

L’acronyme “RSB” est employé pour “Rapport Signal sur Bruit”.

Si $n = 2, 3, 4$, la notation $g_{\text{Ri}}^{(n/2)}(\tau)$ réfère à la colonne de gauche de la table 2.1, et la notation $g_{\text{Ra}}^{(n/2)}(\tau)$ réfère à la colonne de droite de cette même table.

I.1 Objectifs

Ce chapitre propose un calcul théorique des rapports signal sur bruit statistiques associés aux mesures des fonctions de corrélation $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$. Les résultats sont dépendants du principe de mesure considéré, et du type de bruit considéré. Les principes de mesures sont ceux introduits dans l’Introduction de la dissertation, schématisés figures 10, 12, et 13. La mesure de l’intensité de la radiation est faite avec une photo-détection linéaire, et la corrélation est estimée dans l’espace direct (pas d’estimation de la corrélation par Transformée de Fourier Directe). Le choix du type de bruit considéré est justifié dans la sous-partie I.2 suivante.

Deux méthodes pour estimer la corrélation dans l’espace direct sont étudiées et comparées. La première est appelée *méthode (d’estimation) continue (ou régime continu)*, du fait que la corrélation est estimée par un opérateur linéaire continu. La deuxième méthode est appelée *méthode (d’estimation) conditionnelle (ou régime conditionnel)*, du fait que la corrélation est estimée via les probabilités conditionnelles. Cette méthode est souvent utilisée dans des situations d’électrodynamique quantique [185, 186, 162, 126, 187].

La finalité est d’examiner s’il y a un avantage à mesurer l’une ou l’autre des fonctions de corrélation, avec l’une ou l’autre des méthodes d’estimation, en terme de RSB, et/ou en terme de résolution temporelle, et de quantifier cet (ces) avantage(s). Les considérations techniques de la photo-détection ne sont pas développées outre de ce qui est nécessaire, l’accent est d’abord mis sur les principes.

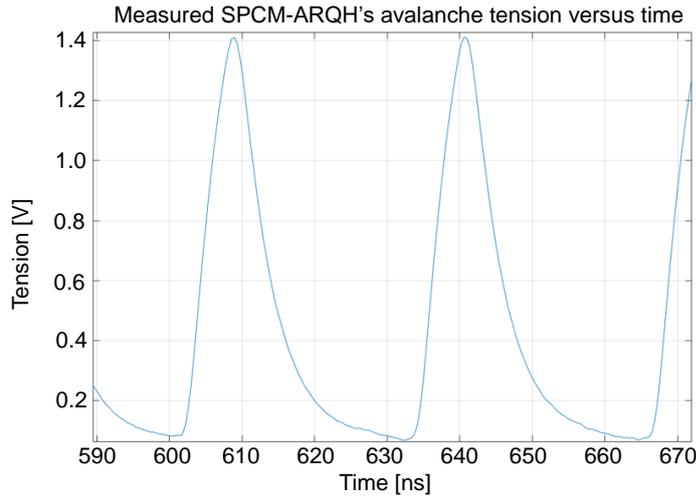


FIGURE 3.1 – Tension en sortie du module photo-compteur (SPCM-ARQH fabriqué par Excelitas, voir annexe C) utilisé dans [100, 101, 147]. Cette tension est proportionnelle à la réponse impulsionnelle h de la photo-détection.

I.2 Choix sur le type de bruit et sur la détection

Les mesures sur cibles stellaires, avec le corrélogramme stellaire développé, ont toutes été limitées par *le bruit de grenaille* [100, 101, 147]. L'évolution du RSB est en racine du temps d'observation pour chacune de ces campagnes expérimentales. Par conséquent, et dans un souci de simplicité, seul le bruit de grenaille est considéré comme source de bruit. Donc, par exemple, le *bruit de quantification* du corrélateur, [3] chapitre 10, section 10.1, n'est pas pris en compte. Le bruit Johnson, ou le bruit en $1/f$ sont également ignorés (voir par exemple [188] pour un rappel sur ces bruits).

La photo-détection est considérée comme linéaire. Ceci est aussi justifié par des observations expérimentales. La réponse impulsionnelle de la photo-détection, notée $h(t)$, homogène à un courant [$C.s^{-1}$] est considérée comme une exponentielle décroissante de paramètre f_i , définie pour les temps t positifs par

$$h(t) = e f_i \exp(-f_i t) \Theta(t), \quad (3.1)$$

où $\Theta(t) = 0$ si $t < 0$ et $\Theta(t) = 1$ si $t \geq 0$. La figure 3.1 donne la réponse impulsionnelle observée sur laquelle l'approximation (3.1) repose. La valeur de f_i est de l'ordre de 10GHz [146].

I.3 Organisation du chapitre

La partie suivante II. précise les notations et définitions. Elle précise notamment ce qui est considéré comme étant le signal, et comment est défini le bruit. La mesure de $g^{(1)}(\tau)$ est également étudiée dans cette partie, comme application directe des définitions.

La partie III. traite la méthode d'estimation continue, avec laquelle la corrélation est estimée via un opérateur linéaire continu. Les calculs sont menés pour $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$, et exhibés pour les deux types de champs ; Rayleigh et ricien. Le calcul du RSB de $g^{(3/2)}$ pour un champ chaotique (Rayleigh ou ricien) et le calcul du RSB de $g^{(2)}$ dans le cas ricien, semblent être originaux. La méthode de calcul du bruit de la mesure est différente de celle proposée par HBT dans l'article référence sur le sujet [44].

La partie IV. fait de même mais lorsque la corrélation est estimée via les probabilités conditionnelles. Les calculs des RSB de $g^{(3/2)}$ et $g^{(2)}$, pour un champ chaotique ricien ou Rayleigh, avec cette méthode semblent être originaux.

La dernière partie V. compare les deux méthodes d'estimations étudiées, et quelques situations d'intérêt énoncées ci-après :

Q0 : Soit un champ chaotique ricien \mathcal{E}_{Ri} , généré suivant le modèle du chapitre 2, vaut-il mieux mesurer $g^{(3/2)}$ ou $g^{(2)}$ pour quantifier sa composante cohérente ?

Q1 : Soit un champ chaotique Rayleigh \mathcal{E}_{Ra} , généré suivant le modèle du chapitre 2, vaut-il mieux (en terme de RSB) mesurer $g^{(2)}(\tau)$ ou, en superposant à \mathcal{E}_{Ra} une radiation cohérente connue et maîtrisée, mesurer $g^{(3/2)}(\tau)$?
(Sachant que $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$ comportent les mêmes informations τ_c, σ_ω , et une valeur en $\tau = 0$ identique si $s \rightarrow 0$.)

Q2 : Soit un champ chaotique Rayleigh \mathcal{E}_{Ra} , généré suivant le modèle du chapitre 2, vaut-il mieux (en terme de RSB) mesurer directement $g^{(2)}(\tau)$, ou ajouter à \mathcal{E}_{Ra} une radiation cohérente connue et maîtrisée, puis mesurer $g^{(2)}(\tau)$?

Cette partie V. répond donc à la finalité principale de ce chapitre.

II. Définitions et exemple

La sous-partie II.1 précise les définitions du “signal” et du “bruit” pour les rapports signal sur bruit qui sont calculés dans les parties suivantes. La sous-partie II.2 justifie rigoureusement l'ergodicité. Cette justification est essentielle pour les parties suivantes III.1, III.2, IV.1, et IV.2, où la corrélation est considérée d'un point de vue de la mesure, via un estimateur qui opère dans le temps. Enfin la dernière sous-partie II.3 met en application les définitions proposées pour calculer du RSB de la mesure de $g^{(1)}(\tau)$, à titre d'exemple.

II.1 Définitions

La grandeur physique mesurée est l'énergie résidant dans le champ, appelée depuis le chapitre 2 intensité I . Cette mesure est supposée se faire par photo-détection linéaire de réponse (3.1), elle donne lieu à un signal i qui est un photo-courant composé de photo-électrons de charge e .

Signal

Le “signal” est le résultat d'une mesure parfaite (sans bruit) de la fonction de corrélation pour le champ d'intérêt, champ représenté par un processus stable. Le signal est défini en terme de photo-courant. L'espérance d'un photo-courant est caractérisée en terme d'une fréquence ν de photo-électrons, appelée densité, proportionnelle à l'intensité I (carré du module son amplitude complexe A du champ). Dans le cas du champ ricien d'amplitude complexe

$$A_{\text{Ri}}(t) = E_\beta \exp(i\phi) + A_{\text{Ra}}(t),$$

où $A_{\text{Ra}}(t)$ est donné par la somme dans (2.10), l'espérance du photo-courant s'exprime en fonction des densités ν_0 et ν_β respectivement associées à $\langle |A_{\text{Ra}}|^2 \rangle = E_0^2$ et E_β^2 :

$$\langle i \rangle \propto \langle I \rangle := \langle |A_{\text{Ri}}|^2 \rangle = E_\beta^2 + E_0^2 \Leftrightarrow \langle i \rangle = (\nu_\beta + \nu_0)e. \quad (3.2)$$

Il peut déjà être remarqué que le rapport d'aspect s donné par (2.22) fait disparaître les constantes dans la proportionnalité et donc :

$$s = \nu_0/\nu_\beta. \quad (3.3)$$

La partie comportant du signal dans les fonctions de corrélation est définie comme l'amplitude de la fonction de corrélation par rapport à sa limite en $\tau \rightarrow +\infty$, ainsi pour $n = 2, 3, 4$:

$$\text{information} \left\{ g^{(n/2)}(\tau) \right\} := g^{(n/2)}(\tau) - \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left(g^{(n/2)}(\tau) \right). \quad (3.4)$$

Bruit

Le “bruit” est défini comme étant l’écart-type de la quantité constituant la mesure (de la fonction de corrélation) lorsque i est un processus de Campbell, de réponse (3.1) à des impulsions de Poisson de densité homogène notée ν (cela correspond à une fréquence de photo-électrons). (Remarque. N’importe quelle détection avec une fonction de réponse impulsionnelle soumise à un train d’impulsions de Poisson de densité homogène, engendre un processus de Campbell i). Avec l’estimation continue de la corrélation, développée en partie III., la mesure de $g^{(3/2)}$, et de $g^{(2)}$, consiste en l’estimation d’une inter-corrélation (moment d’ordre 2) de deux photo-courants détectés indépendamment. Dans ce cas le bruit est l’écart-type de l’estimation de l’inter-corrélation entre deux processus de Campbell. Avec l’estimation conditionnelle de la corrélation, détaillée en partie IV., ou dans le cas de la mesure de $g^{(1)}$, voir partie II.3, la mesure consiste en l’estimation d’une moyenne (moment d’ordre 1) d’un photo-courant (conditionnée dans le cas de $g^{(3/2)}$ et $g^{(2)}$). Dans ce cas le bruit est l’écart-type de l’estimation de la moyenne pour un photo-courant étant un processus de Campbell.

La densité ν étant homogène, le processus de Campbell i est stationnaire au second-ordre, et s’écrit de manière générique

$$i(t) = \langle i \rangle + \delta i(t),$$

et l’appellation bruit de grenaille est employée pour $\sqrt{\delta i^2(0)}$. Rigoureusement, cela correspond à la racine de l’auto-covariance de i prise en $\tau = 0$, voir (3.7), (i.e. : à l’écart-type de $i(t)$ à chaque instant t)

$$\sigma_i = e\sqrt{\frac{f_i\nu}{2}}, \quad (3.5)$$

où l’espérance du processus de Campbell i est donné par le théorème de Campbell :

$$\langle i \rangle = \nu \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = \nu e,$$

La dépendance de (3.5) est en racine de ν , le rapport $\langle i \rangle/\sigma_i$ se comporte donc en $\sqrt{\nu}$.

II.2 Justification de l’ergodicité et conséquences

L’expression de la corrélation pour cette étude de RSB, doit modéliser la façon dont elle est mesurée expérimentalement. Expérimentalement un échantillon (série de valeurs à différents instants) de la quantité constituant la mesure est construit pendant une durée T_0 donnée. Il faut tout d’abord s’assurer que l’ergodicité est vérifiée dans le cas du signal considéré comme dans le cas du bruit considéré, afin d’expliciter le signal et le bruit via les échantillons construits.

Signal

Dans le cas du “signal” où le champ considéré est un champ chaotique ricien ou Rayleigh, l’intensité I est ergodique en covariance. En effet, soit le processus Z dont les réalisations sont

$$Z(t; t_a) := I(t)I(t + t_a),$$

où t_a est un paramètre de type origine. L’ auto-covariance de Z , notée $C_{ZZ}(\tau)$ implique un moment d’ordre 4 de I donc d’ordre 8 du champ. Or, le théorème d’Isserlis (2.16) implique que ce moment sera une combinaison linéaire de $g^{(1)}(\tau)$. Avec la forme de $g^{(1)}(\tau)$, produit d’une exponentielle décroissante et d’une gaussienne, voir table 2.1, il vient

$$\lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} C_{ZZ}(\tau) d\tau \right) = 0. \quad (3.6)$$

Donc d'après le théorème de Slutsky, (3.6) équivaut à ce que Z soit ergodique en moyenne, et donc cela implique que I est ergodique en covariance. De plus, il est établi qu'avec une photo-détection linéaire les propriétés statistiques de l'intensité d'un champ sont codées dans le photo-courant [170] ; en particulier si I est ergodique en auto-covariance alors i l'est également.

Bruit

Dans le cas du "bruit", le photo-courant i est un processus de Campbell de réponse (3.1) à des impulsions de poisson de densité homogène $\nu = \langle i \rangle / e$. Son auto-covariance $C_{ii}(\tau)$ est

$$\forall \tau \geq 0, \quad C_{ii}(\tau) = e^2 \frac{\nu f_i}{2} \exp(-f_i \tau). \quad (3.7)$$

Avec (3.7) le théorème de Slutsky est vérifié et i est donc ergodique en moyenne. Il reste à examiner l'ergodicité en covariance. Soit $(t_k)_k$ l'ensemble des points de Poisson de densité homogène ν , qui forme le train d'impulsions de Poisson :

$$I(t) = F_0 \sum_k \delta(t - t_k),$$

où F_0 est une constante introduite pour l'homogénéité de l'équation. Le processus de Campbell i peut être vu comme la réponse de (3.1) au processus I , i.e. : si $*$ est le produit de convolution usuel,

$$i = I * h. \quad (3.8)$$

Soit le processus z tel que ses réalisations soient

$$z(t; t_a) = i(t)i(t + t_a),$$

où t_a est un paramètre de type origine. Notons C_{zz} la fonction d'autocovariance de z , elle ne doit pas dépendre de t_a . Son calcul est détaillé en annexe B. Les grandes lignes du calcul sont esquissées ci-après. Avec la linéarité (3.8), et les inversions successives 'opérateur de convolution-espérance', C_{zz} s'exprime comme la convolution d'un moment joint d'ordre 4 de I , avec un produit de trois convolutions de h , auquel est soustrait $\langle z \rangle^2$. Maintenant, I peut-être considéré comme une transformation linéaire d'un processus de Poisson, c'est sa dérivée (au sens des distributions). Ainsi, par linéarité de la dérivée, et inversion 'dérivée-espérance', le moment d'ordre 4 de I est obtenu en dérivant quatre fois le moment joint d'ordre 4 d'un processus de poisson homogène de densité ν . Après calcul (fastidieux), voir (B.13), ce moment d'ordre 4 de I est un polynôme en ν , et la dépendance dans les dates respectives n'apparaît que sous forme de distribution Dirac (car en fonction de l'ordering des dates, des distributions d'Heaviside apparaissent, qui deviennent des distributions de Dirac avec la dérivation au sens des distributions). Les actions successives des opérateurs linéaires de convolution sont traitées au sens des distributions, et après quelques manipulations

$$\forall \tau \geq 0, \quad C_{zz}(\tau) = e^4 \nu^3 f_i \exp(-f_i \tau) + \frac{e^4 \nu^2 f_i^2}{4} \exp(-2f_i \tau). \quad (3.9)$$

Avec (3.9), le théorème de Slutsky est vérifié pour z :

$$\lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} C_{zz}(\tau) d\tau \right) = 0,$$

donc z est ergodique en moyenne, et donc i est ergodique en covariance.

Conséquences

En conclusion, l'ergodicité en covariance est valide dans le cas du "signal" comme dans le cas du "bruit". La corrélation trouve alors un estimateur opérationnel d'un point de vue expérimental :

$$\langle i(t)i(t+\tau) \rangle \stackrel{\text{L}^2}{=} \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} i(t)i(t+\tau) dt \right). \quad (3.10)$$

Remarques. Le membre de droite (dont la limite est prise en $T_0 \rightarrow +\infty$) dans (3.10) est ici appelé *estimateur de la corrélation dans l'espace direct*, il est noté $E_{ii}(\tau, T_0)$:

$$E_{ii}(\tau, T_0) := \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} i(t)i(t+\tau) dt. \quad (3.11)$$

Le symbole '=' dans (3.10) n'est pas à prendre au sens de l'égalité stricte, il signifie que cet estimateur $E_{ii}(\tau, T_0)$ converge dans L^2 vers $\langle i(t)i(t+\tau) \rangle$ (c'est à dire que $\langle |i(t)i(t+\tau) - E_{ii}(\tau, T_0)|^2 \rangle$ tend vers 0 quand T_0 tend vers $+\infty$, voir par exemple [189], chapitre 3, section 3.7.1.). Donc cet estimateur converge en loi vers la corrélation au sens de l'espérance $\langle \dots \rangle$, et donc le calcul des statistiques, en particulier l'écart-type, peut s'effectuer sur cet estimateur, avant de les passer à la limite $T_0 \rightarrow +\infty$ pour déduire les statistiques portant sur $\langle i(t)i(t+\tau) \rangle$. Cette limite $T_0 \rightarrow +\infty$ signifie physiquement que : $T_0 \gg \tau_{\text{cor},i}$, avec T_0 fini, pour rendre compte de la réalité expérimentale, où $\tau_{\text{cor},i}$ est le temps de corrélation de i défini de manière générale (sous-réserve de stationnarité au second ordre) à partir de la fonction d'auto-covariance de i par

$$\tau_{\text{cor},i} := \frac{\int_0^{+\infty} C_{ii}(\tau) d\tau}{C_{ii}(0)}. \quad (3.12)$$

Avec la stationnarité

$$\langle i(t)i(t+\tau) \rangle = \langle i(t)i(t-\tau) \rangle,$$

l'équation (3.10) peut se réécrire en définissant un produit de convolution à partir de $E_{ii}(-\tau, T_0)$:

$$\langle i(t)i(t+\tau) \rangle \stackrel{\text{L}^2}{=} i * i[\tau]. \quad (3.13)$$

Le symbole ' L^2 ' sous ce signe '=' est omis par la suite pour alléger l'écriture.

II.3 Exemple : RSB de la mesure de $g^{(1)}(\tau)$

Afin d'appliquer les définitions proposées précédemment, le cas de la mesure de $g^{(1)}(\tau)$ est traité comme un exemple. Il est supposé que f_i ne limite par la mesure, c'est à dire que la densité $\nu = \langle i \rangle / e$ engendrée par la radiation est bien plus petite (i.e. d'un facteur 100) que f_i .

La mesure de $g^{(1)}(\tau)$ considérée est celle de la figure 10 de l'Introduction, rappelée en figure 3.2, via un interféromètre de Michelson. Le courant moyenné en sortie est

$$\langle i(\tau) \rangle = \nu \left(1 - \Re \left\{ g^{(1)} \right\} \right) * h[\tau]. \quad (3.14)$$

La quantité mesurée est : $\langle i(\tau) \rangle$, pour chaque τ . Le résultat obtenu pour l'ensemble des τ (avec une résolution discrète finie en pratique), à un plateau près, et une fois normalisé, correspond à $\Re \left\{ g^{(1)} \right\}$.

Avec l'ergodicité en covariance (3.6) qui implique l'ergodicité en moyenne, la mesure de $\langle i(\tau) \rangle$ peut-être assimilée à la mesure d'une moyenne temporelle sur une durée d'observation T_0 , pour chaque ΔL créant un échantillon de $n_s = \nu T_0$ valeurs de i , pour chaque τ . C'est à dire :

$$\langle i(\tau) \rangle \equiv m_i(\tau) = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} i_k(\tau). \quad (3.15)$$

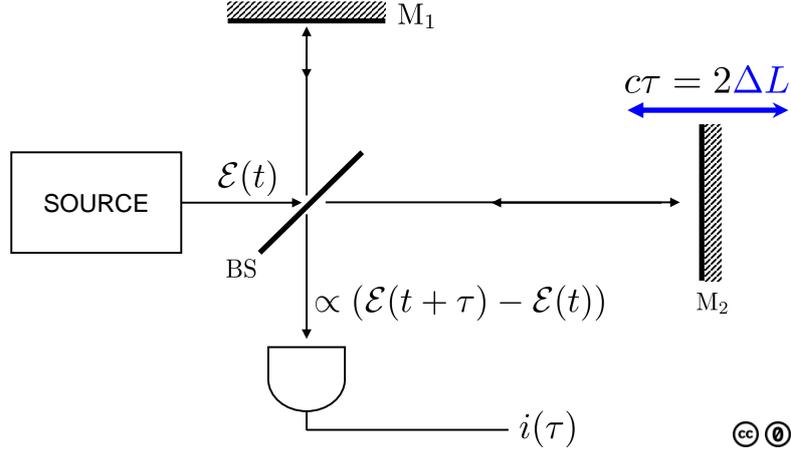


FIGURE 3.2 – Rappel de la figure 10 de l'Introduction.

Signal

En se débarrassant du niveau constant $\nu * h[\tau] = e\nu$, la partie signal dans la quantité mesurée est simplement proportionnelle à

$$\nu \Re \{ g^{(1)} \} * h[\tau]. \quad (3.16)$$

Avec la définition (3.4), et la table 2.1, l'information contenue dans $g^{(1)}(\tau)$ est

$$\text{information} \{ g^{(1)}(\tau) \} = \frac{s}{1+s} |g_{\text{Ra}}^{(1)}(\tau)| \exp(-i\omega_0 t). \quad (3.17)$$

Comme $\nu \equiv \nu_0 + \nu_\beta$, et $s = \nu_0/\nu_\beta$, l'expression du signal en terme de photo-courant est obtenue en injectant (3.17) dans (3.16) :

$$\text{signal} \{ g^{(1)}(\tau) \} = \nu_0 |g_{\text{Ra}}^{(1)}(\tau)| \cos(\omega_0 \tau) * h(\tau). \quad (3.18)$$

Bruit

Le bruit correspond à l'écart-type sur la mesure, donc sur (3.15), et ce, selon la définition proposée, lorsque i est un processus de Campbell. Il s'agit donc de calculer l'écart-type sur une moyenne évaluée, pour un τ donné, avec un nombre fini, noté n_s , d'échantillons indépendants (la valeurs d'un $i_k(\tau)$ ne dépend pas des autres) et identiquement distribués (le processus de Campbell i est stable). Pour chaque i_k l'écart-type est donné par $\sqrt{C_{ii}(0)}$ (voir (3.7) ou (3.5)), ainsi, pour chaque valeur de τ , la racine de

$$\langle \langle m_i(\tau)^2 \rangle \rangle := \langle m_i(\tau)^2 \rangle - \langle m_i(\tau) \rangle^2,$$

vaut avec $n_s = (\nu_0 + \nu_\beta)T_0$:

$$\sqrt{\langle \langle m_i(\tau)^2 \rangle \rangle} = \sqrt{\frac{C_{ii}(0)}{n_s}} = e \sqrt{\frac{f_i}{2T_0}}. \quad (3.19)$$

RSB

Le rapport signal sur bruit se déduit alors :

$$\text{SNR} \{ g^{(1)}(\tau) \} = \sqrt{\frac{2T_0}{f_i}} \nu_0 |g_{\text{Ra}}^{(1)}(\tau)| \cos(\omega_0 \tau) * h_{\text{nor}}(\tau), \quad (3.20)$$

où :

$$h_{\text{nor}}(t) := \frac{h(t)}{e}, \quad (3.21)$$

l'indice "nor" signifie que h_{nor} est normalisée dans le sens où : $\int h_{\text{nor}}(t)dt = 1$.

Dans une application astrophysique de type interférométrie d'amplitude, la quantité mesurée est le module de $g_{\text{Ra}}^{(1)}(0, \rho)$, qui correspond (à une normalisation près) à la visibilité (ρ est une base projetée donnée). Seule la valeur $\tau = 0$ importe, et la mesure est le contraste de la figure d'interférence. Il n'y a donc pas besoin de prendre en compte la réponse temporelle h . Il faut que la durée d'observation T_0 soit suffisante pour que (3.20) ait une valeur acceptable (typiquement ≥ 3), cela dépend de la magnitude de l'étoile (à la longueur d'onde considérée), qui est indirectement ν_0 . La difficulté expérimentale réside dans le maintien de la différence de marche, qui dépend du mouvement sidéral de la cible. Le maintien doit être effectué en temps réel (i.e. sous la milliseconde) avec une précision opto-mécanique plus fine que l'incrément de différence de marche correspondant à l'interfrange (donc une précision plus petite que la longueur d'onde). Sans cela, la figure d'interférence n'est pas stable au cours du temps, et le contraste des franges disparaît. La dépendance en ν_0 est consistante avec celle obtenue par exemple dans [190], ou dans [137] équation (8.11) pour le calcul du RSB de $g^{(1)}(0, \rho)$.

III. Mesure de $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$ via une estimation continue

Cette partie traite le cas de la méthode d'estimation continue de la corrélation, dans laquelle la corrélation est estimée via $E_{i_1 i_2}(\tau, T_0)$ (3.11). Les signaux sont évalués à l'aide du produit de convolution (3.13). Le bruit correspond l'écart type de $E_{i_1 i_2}(\tau, T_0)$, pris dans la limite $T_0 \gg 1$. Les cas d'un champ Rayleigh et d'un champ ricien sont tous les deux traités.

La première partie s'occupe d'établir les expressions des signaux selon les principes de mesures schématisés figure 12 et 13. Afin de faciliter la lecture, ces figures sont reproduites ici, figure 3.3 et 3.4.

La deuxième partie contient un calcul de l'écart-type de $E_{i_1 i_2}$ avec une méthode originale par rapport à celle utilisée dans [44].

La dernière partie présente synthétiquement les rapports signal sur bruit.

III.1 Signaux

Cette sous-partie s'appuie sur les principes de mesures présentés dans l'Introduction. Les définitions (17) pour $g^{(3/2)}(\tau)$, et (21) pour $g^{(2)}(\tau)$, sont également utilisées. Les expressions des signaux sont données dans le cas d'un champ naturellement ricien, comme dans le cas d'un champ Rayleigh auquel l'observateur a superposé une radiation cohérente connue et maîtrisée.

Signal de la mesure de $g^{(3/2)}(\tau)$

Le *photo-courant homodyne* i_h est la soustraction des deux photo-courants i_{bs1} and i_{bs2} qui correspondent respectivement au signal après transmission, et après réflexion, sur le séparateur BS3 supposé équilibré, voir figure 12. En supposant de plus $q = 1/2$, ils s'écrivent

$$i_{bs1}(t) \propto \frac{|\mathcal{E}/\sqrt{2} - \mathcal{E}_\alpha|^2}{2} * h[t], \quad (3.22)$$

$$i_{bs2}(t) \propto \frac{|\mathcal{E}/\sqrt{2} + \mathcal{E}_\alpha|^2}{2} * h[t], \quad (3.23)$$

la soustraction $i_{bs2} - i_{bs1}$ donne alors

$$i_h(t) \propto \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{E}^* \mathcal{E}_\alpha + \mathcal{E} \mathcal{E}_\alpha^*) * h[t]. \quad (3.24)$$

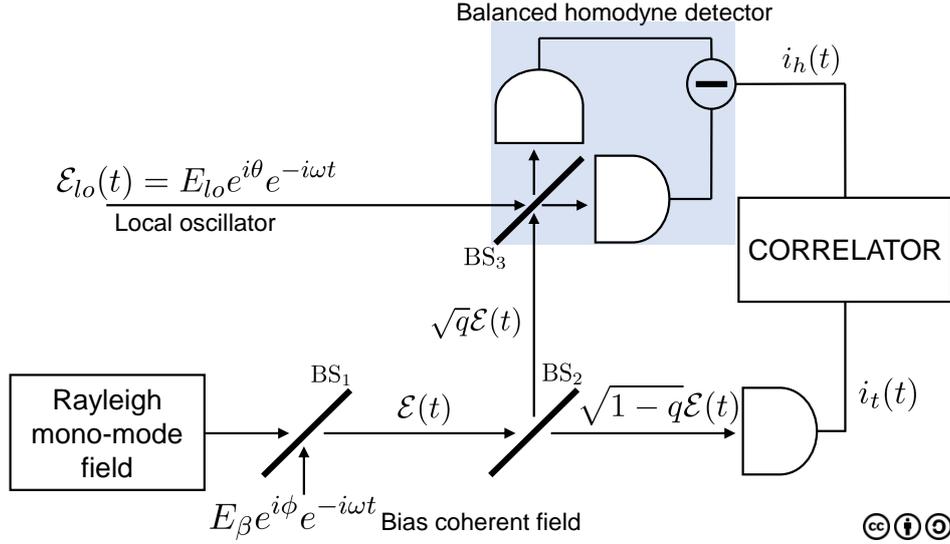


FIGURE 3.3 – Rappel du principe de mesure considéré pour $g^{(3/2)}$, voir légende de la figure 12. Cas où la radiation incidente n'est pas ricienne naturellement.

Le photo-courant direct i_t est directement donné par la convolution de l'intensité I avec la réponse impulsionnelle h

$$i_t = I * h. \quad (3.25)$$

Avec la conséquence (3.13) de l'ergodicité, l'intercorrélacion de i_t avec i_h peut-être considérée comme une opération de convolution

$$\langle i_t(t) i_h(t + \tau) \rangle = i_t * i_h[\tau],$$

et avec la définition (17) de $g^{(3/2)}$, si $h^{(2)} := h * h$, et en terme de densité ν_0 , ν_β , telles que $\langle I(t) \rangle \propto e(\nu_0 + \nu_\beta) = e\nu_\beta(1 + s)$, et ν_{lo} , telle que $\langle I_{lo} \rangle \propto e\nu_{lo}$, il vient :

$$\langle i_t(t) i_h(t + \tau) \rangle = \nu_\beta(1 + s) \sqrt{2\nu_\beta\nu_{lo}} \cdot g^{(3/2)} * h^{(2)}[\tau].$$

L'information contenue dans $g^{(3/2)}$ se déduit selon (3.4), avec le résultat de la table 2.1

$$\text{information} \{g^{(3/2)}(\tau)\} = \cos(\theta - \phi) \left(\left| g_{\text{Ri}}^{(1)}(\tau) \right| - \frac{1}{1 + s} \right), \quad (3.26)$$

et ainsi

$$\text{signal} \{g^{(3/2)}(\tau)\} = \nu_\beta(1 + s) \sqrt{2\nu_\beta\nu_{lo}} \cos(\theta - \phi) \left(\left| g_{\text{Ri}}^{(1)} \right| * h^{(2)}[\tau] - \frac{e^2}{1 + s} \right). \quad (3.27)$$

Pour traiter le cas du champ Rayleigh, l'opération $s \rightarrow +\infty$ n'est pas possible avec $g^{(3/2)}$ car elle n'est pas définie dans cette limite. Il faut nécessairement considérer que l'observateur superpose au champ Rayleigh naturel une radiation cohérente, connue et maîtrisée, d'amplitude complexe $E_\beta \exp(i\phi)$, créant ainsi un champ ricien artificiel. Alors le signal doit être modifié car la véritable information est $g_{\text{Ra}}^{(1)}$, et pour rappel (voir table 2.1)

$$\left| g_{\text{Ri}}^{(1)}(\tau) \right| = \frac{1 + s \left| g_{\text{Ra}}^{(1)}(\tau) \right|}{1 + s}, \quad (3.28)$$

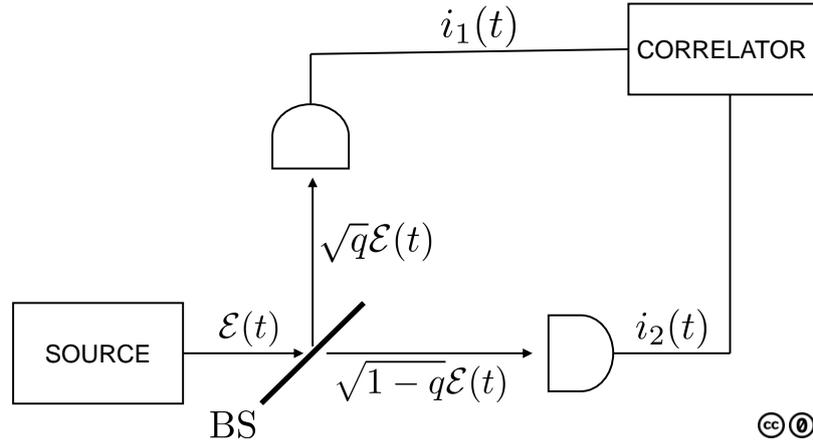


FIGURE 3.4 – Rappel de la figure 13.

ainsi l'information dans $g^{(3/2)}$, notée $g_a^{(3/2)}$ où l'indice a est pour "artificiel", qui signifie que le champ est rendu ricien artificiellement, devient

$$\text{information} \left\{ g_a^{(3/2)}(\tau) \right\} = \cos(\theta - \phi) \left(\frac{s}{1+s} \left| g_{\text{Ra}}^{(1)}(\tau) \right| \right), \quad (3.29)$$

et le signal s'écrit donc :

$$\text{signal} \left\{ g_a^{(3/2)}(\tau) \right\} = \nu_0 \sqrt{2\nu_\beta \nu_{l_0}} \cos(\theta - \phi) \cdot \left| g_{\text{Ra}}^{(1)} \right| * h^{(2)}[\tau]. \quad (3.30)$$

Signal de la mesure de $g^{(2)}(\tau)$

Le principe de la mesure supposé est celui de la figure 13. Pour commencer, le cas du champ ricien est considéré (cas le plus général).

Avec (3.13) l'auto-corrélation du photo-courant i est traitée comme une convolution, et avec

$$\langle i \rangle = e(\nu_\beta + \nu_0) = e\nu_\beta(1+s),$$

il vient :

$$\langle i(t)i(t+\tau) \rangle = \nu_\beta^2(1+s)^2 \cdot g_{\text{Ri}}^{(2)} * h^{(2)}[\tau]. \quad (3.31)$$

L'information contenue dans $g_{\text{Ri}}^{(2)}$ se déduit selon (3.4), avec le résultat de la table 2.1

$$\text{information} \left\{ g_{\text{Ri}}^{(2)}(\tau) \right\} = \left(\left| g_{\text{Ri}}^{(1)}(\tau) \right|^2 - \frac{1}{(1+s)^2} \right), \quad (3.32)$$

d'où :

$$\text{signal} \left\{ g_{\text{Ri}}^{(2)}(\tau) \right\} = \nu_\beta^2(1+s)^2 \left(\left| g_{\text{Ri}}^{(1)} \right|^2 * h^{(2)}[\tau] - \frac{e^2}{(1+s)^2} \right). \quad (3.33)$$

Dans le cas d'un champ Rayleigh dont le module de son amplitude complexe est E_0 , il faut et suffit de passer à la limite $s \rightarrow +\infty$ (i.e. : $\nu_\beta \rightarrow 0$), y compris dans l'expression de $\left| g_{\text{Ri}}^{(1)} \right|$ (3.28), et

$$\text{signal} \left\{ g_{\text{Ra}}^{(2)}(\tau) \right\} = \nu_0^2 \left(\left| g_{\text{Ra}}^{(1)} \right|^2 * h^{(2)}[\tau] \right). \quad (3.34)$$

Enfin, le champ Rayleigh peut-être superposé à une radiation cohérente connue et maîtrisée,

c'est ce qui est ici appelé l'hétérodynage. Dans ce cas la véritable information est $g_{\text{Ra}}^{(1)}$ et avec (3.28), l'information (3.32) devient

$$\text{information} \left\{ g_{\text{Ri,a}}^{(2)}(\tau) \right\} = \frac{s^2}{(1+s)^2} \left| g_{\text{Ra}}^{(1)}(\tau) \right| \left(\frac{2}{s} + \left| g_{\text{Ra}}^{(1)}(\tau) \right| \right), \quad (3.35)$$

où l'indice a dans $g_{\text{Ri,a}}^{(2)}$ signifie que le champ est rendu ricien artificiellement. Le signal s'écrit donc

$$\text{signal} \left\{ g_{\text{Ri,a}}^{(2)}(\tau) \right\} = \nu_0^2 \left| g_{\text{Ra}}^{(1)} \right| \left(\frac{2}{s} + \left| g_{\text{Ra}}^{(1)} \right| \right) * h^{(2)}[\tau]. \quad (3.36)$$

Il peut déjà être remarqué qu'avec E_β choisi tel que $\nu_\beta \gg \nu_0$, le signal (3.36) implique une convolution de $\left| g_{\text{Ra}}^{(1)} \right|$ par $h^{(2)}$, tandis que dans (3.34) c'est une convolution de $\left| g_{\text{Ra}}^{(1)} \right|^2$ par $h^{(2)}$ qui est en jeu.

III..2 Bruit

Cette sous-partie aborde le calcul du bruit associé à la mesure de $g^{(3/2)}$ et de $g^{(2)}$. Dans les deux cas, la mesure consiste en l'estimation de l'inter-corrélation de deux photo-courants i_1 et i_2 , engendré par la même radiation, mais généré par deux détecteurs indépendants. Selon la définition du bruit posée dans la sous-partie II..1, le bruit correspond à l'écart-type de l'estimation de l'inter-corrélation de deux processus de Campbell. La démarche développée ici se concentre sur le principe de la mesure en laboratoire, elle n'est donc pas aussi complète que celle de [44, 45] menée spécifiquement pour une application astrophysique. Les calculs présentés ici sont plus simples, ils tiennent compte de l'évolution technologique de la détection depuis les expériences d'HBT (voir partie V..2 de l'Introduction), et, enfin, ils permettent de répondre aux questions posées en I..3.

Commentaires sur le calcul d'HBT

L'article pionnier dans le calcul du bruit pour le corrélogramme stellaire est [44], l'étude y est menée dans le cadre de mesure sur cible stellaire. Cet article fait référence dans les travaux d'HBT pour le calcul du RSB.

Le calcul proposé en sous-partie III..2 est plus simple. Ceci est notamment dû à la simplification de la description grâce à la digitalisation du corrélogramme (voir partie V..2 de l'Introduction), digitalisation qui n'existait pas encore en 1958. En effet, dans le corrélogramme d'HBT, [47] figure 4 ou [36] figure 6.2 par exemple, le courant de sortie des tubes photo-multiplicateurs est amplifié puis entre dans un multiplicateur linéaire et s'en suit une série de filtrages. Le calcul de l'écart type sur $E_{i_1 i_2}$ nécessite donc de décomposer en série de Fourier les courants afin de prendre en compte les effets du filtrage. Avec la digitalisation du corrélogramme, le multiplicateur linéaire, les filtres, et les amplificateurs disparaissent. Ainsi, le calcul de l'écart type sur $E_{i_1 i_2}$ mené en sous-partie III..2 n'implique pas nécessairement une décomposition en série de Fourier de i_1 et i_2 . Remarque. Le calcul de l'écart-type sur $E_{i_1 i_2}$ avec une décomposition de Fourier, sous réserve de justifier son existence, requerrait : 1) d'établir la loi de probabilité des coefficients de Fourier, 2) de pouvoir intervertir somme et intégrale. Deux points non triviaux qui sont évités avec le calcul proposé en sous-partie III..2.

Remarque importante. La méthode spectrale utilisée dans [44] n'est valable que dans la limite $\nu \gg f_i$. Dans cette limite la loi d'une réalisation du processus de Campbell est une loi normale, la preuve est donnée dans la section 1.6 de [191], qui repose sur la section 1.4 de ce même article, qui établit la densité de probabilité P_i associée à une réalisation du processus de Campbell. Remarque. Dans la section 1.6 de [191], l'auteur mathématicien écrit une série d'Edgeworth (voir par exemple [192]), qui permet de développer P_i en série de puissances de $1/\nu$ dans une limite

mathématicienne $1/\nu \rightarrow 0$. C'est bien en fonction du rapport (f_i/ν) que la série d'Edgeworth s'écrit, dans une limite $f_i/\nu \rightarrow 0$ plus physicienne.

Le calcul mené dans [44] repose se déroule comme suit. Dans la limite $\nu \gg f_i$ la densité P_i tend donc vers une gaussienne, i.e. une réalisation de i est une V.A. normale, et ainsi, les coefficients de Fourier, notés ici $a_n(i)$ et $b_n(i)$, qui sont des transformations linéaires d'une V.A. normale, sont également des VA normales. En supposant de plus la stabilité harmonique, c'est à dire qu'une harmonique $\xi_k[i]$ au sens de l'analyse de Fourier,

$$\xi_n[i](t) = a_n(i) \cos\left(\frac{2\pi n}{T_0}t\right) + b_n(i) \sin\left(\frac{2\pi n}{T_0}t\right),$$

doit être stationnaire lorsque considérée comme un processus, il peut-être montré que cela équivaut à ce que les coefficients de Fourier soient décorrélés et orthogonaux (au sens des probabilités), et comme de plus ils sont de loi normale, ils sont indépendants. Ainsi, si

$$\begin{aligned} \chi_n^2 &:= a_n^2 + b_n^2, \\ \alpha_n &:= \arctan(b_n/a_n), \end{aligned}$$

les $(\chi_n)_n$ sont des VA mutuellement indépendantes de loi de Rayleigh, et sont indépendantes des $(\alpha_n)_n$, qui sont, quant à elles, des VA mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[0; 2\pi]$. En supposant la T_0 -périodicité, et sous réserve d'application du théorème de Dirichlet, la série de Fourier de i s'écrit en fonction de χ_n et α_n

$$i(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T_0}t - \alpha_n\right).$$

Les séries de Fourier (III.2) de i_1 et i_2 sont alors injectées dans $E_{i_1 i_2}(\tau, T_0)$ pour calculer

$$\langle E_{i_1 i_2}^2 \rangle - \langle E_{i_1 i_2} \rangle^2,$$

dans la limite $T_0 \rightarrow +\infty$, puis l'écart-type $\sqrt{\langle\langle E_{i_1 i_2}^2 \rangle\rangle}$ est déduit. Le calcul mené dans [44] utilise surtout l'hypothèse d'indépendance entre les $(\chi_n)_n$ et les $(\alpha_n)_n$, leurs indépendances mutuelles respectives, et la loi uniforme des $(\alpha_n)_n$ sur $[0, 2\pi]$. Rappel : ces propriétés découlent de l'approximation de la loi d'une réalisation du processus de Campbell, dans la limite $\nu \gg f_i$, par la loi normale.

A l'époque de [44], $f_i \sim 100\text{MHz}$, i.e. la réponse temporelle de la photo-détection était de plusieurs dizaines de ns, réponse d'un tube photo-multiplicateur R.C.A de type 6342 [47]. En réalité diminuée d'un facteur conséquent (10-100) par les filtrages et opérations successives après la multiplication [47]. Soixante ans plus tard, la photo-détection a une réponse temporelle cent fois plus fine : $f_i \sim 10\text{GHz}$, i.e. la résolution temporelle d'une photo-diode à avalanche en silicium utilisée pour former un module photo-compteur, est de l'ordre de la centaine de picosecondes (voir partie V..2 de l'Introduction). L'approximation $\nu \gg f_i$ n'est donc plus systématiquement valide.

Calcul de l'écart-type de l'estimateur de la corrélation

Soient deux processus de Campbell indépendants i_1 et i_2 , de même réponse h aux mêmes impulsions de Poisson de densité homogène ν . Il s'agit d'évaluer la limite de la racine de

$$\langle\langle E_{i_1 i_2}^2 \rangle\rangle \equiv \langle\langle E_{i_1 i_2}, E_{i_1 i_2} \rangle\rangle := \langle E_{i_1 i_2}^2 \rangle - \langle E_{i_1 i_2} \rangle^2, \quad (3.37)$$

lorsque $T_0 \gg 1$.

Par linéarité intégrale-espérance, le calcul de $\langle E_{i_1 i_2}^2 \rangle$ implique le calcul d'un moment joint i_1 - i_2

d'ordre 2-2 (donc d'ordre 4). Avec l'indépendance de i_1 et i_2 , ce moment joint i_1 - i_2 d'ordre 2-2 se réduit à un produit de l'autocorrélation de i_1 par l'autocorrélation de i_2 :

$$\langle E_{i_1 i_2}^2 \rangle = \frac{1}{T_0^2} \iint_{[0, T_0]^2} \left(C_{i_1 i_1}(|v-u|) + \langle i_1 \rangle^2 \right) \left(C_{i_2 i_2}(|v-u|) + \langle i_2 \rangle^2 \right) dudv, \quad (3.38)$$

où $C_{i_1 i_1}(|v-u|)$ et $C_{i_2 i_2}(|v-u|)$ sont données par (3.7).

Par commutation intégrale-espérance, le calcul de $\langle E_{i_1 i_2} \rangle^2$ se réduit à l'intégrale de l'inter-corrélation de i_1 et i_2 . Avec leur indépendance, le calcul devient trivial à l'aide du théorème de Campbell

$$\langle E_{i_1 i_2} \rangle^2 = e^4 \nu_1^2 \nu_2^2. \quad (3.39)$$

La soustraction des deux termes (3.38) et (3.39) fait disparaître les termes en $\nu_1^2 \nu_2^2$, et après intégration, il vient

$$\begin{aligned} \langle \langle E_{i_1 i_2}^2 \rangle \rangle &= \left(\frac{e^4 \nu_1 \nu_2 f_i}{4} + e^4 (\nu_1^2 \nu_2 + \nu_1 \nu_2^2) \right) \frac{1}{T_0} \\ &\quad - \left(\frac{e^4 \nu_1 \nu_2}{8} [1 - \exp(-2f_i T_0)] + e^4 (\nu_1^2 \nu_2 + \nu_1 \nu_2^2) [1 - \exp(-f_i T_0)] \right) \frac{1}{T_0^2}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Le passage à la limite $T_0 \rightarrow +\infty$ s'opère en appliquant $T_0 \gg \tau_{\text{cor},i}$, en ne gardant que les termes proportionnels à $1/T_0$ (ordre 1), et ainsi :

$$\lim_{T_0 \gg \tau_{\text{cor},i}} \left(\langle \langle E_{i_1 i_2}^2 \rangle \rangle \right) = \frac{e^4 \nu_1 \nu_2 f_i}{4T_0} \left(1 + \frac{\nu_1 + \nu_2}{f_i} \right) + o\left(\frac{\tau_{\text{cor},i}}{T_0} \right). \quad (3.41)$$

Les régimes asymptotiques dans les deux limites $\nu_1, \nu_2 \gg 1$ et $\nu_1, \nu_2 \ll f_i$, sont

$$\lim_{T_0 \gg \tau_{\text{cor},i}} \left(\langle \langle E_{i_1 i_2}^2 \rangle \rangle \right) = \begin{cases} \frac{e^4 \nu_1 \nu_2 (\nu_1 + \nu_2)}{4T_0} + o\left(\frac{\tau_{\text{cor},i}}{T_0} \right), & \text{si : } \nu_1, \nu_2 \gg f_i, \\ \frac{e^4 \nu_1 \nu_2 f_i}{4T_0} + o\left(\frac{\tau_{\text{cor},i}}{T_0} \right), & \text{si : } \nu_1, \nu_2 \ll f_i \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\lim_{T_0 \gg \tau_{\text{cor},i}} \left(\langle \langle E_{i_1 i_2}^2 \rangle \rangle \right) = \begin{cases} \frac{e^4 \nu_1 \nu_2 (\nu_1 + \nu_2)}{4T_0} + o\left(\frac{\tau_{\text{cor},i}}{T_0} \right), & \text{si : } \nu_1, \nu_2 \gg f_i, \\ \frac{e^4 \nu_1 \nu_2 f_i}{4T_0} + o\left(\frac{\tau_{\text{cor},i}}{T_0} \right), & \text{si : } \nu_1, \nu_2 \ll f_i \end{cases} \quad (3.43)$$

Dans ce qui suit, l'étude est menée dans le cas où f_i ne limite pas la mesure, c'est à dire que $\nu_1, \nu_2 \ll f_i$. Typiquement, $\nu \sim 10^5, 10^6$ photo-électrons/s tandis que $f_i \sim 10\text{GHz}$. Ainsi, le bruit considéré dans la présente étude s'écrit comme la racine de (3.43) :

$$\sigma_{ii} := \sqrt{\lim_{T_0 \gg \tau_{\text{cor},i}} \left(\langle \langle E_{i_1 i_2}^2 \rangle \rangle \right)} = \frac{e^2 \sqrt{\nu_1 \nu_2 f_i}}{2\sqrt{T_0}}. \quad (3.44)$$

III..3 Rapports signal sur bruit

Dans le cas de la mesure de $g^{(3/2)}$, le bruit est σ_{ii} donné par (3.44) où les deux processus de Campbell indépendants sont : $i_1 = i_t$ et $i_2 = i_h$, de densités respectives :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= (\nu_0 + \nu_\beta)/2, \\ \nu_2 &\approx \nu_{l_0}, \end{aligned}$$

dans la limite où $\nu_{l_0} \gg \nu_0 + \nu_\beta$, et $q = 1/2$, voir figure 3.3.

Dans le cas de la mesure de $g^{(2)}$ le bruit (3.44) est calculé pour deux processus de Campbell indépendants de même densité (séparateur équilibré)

$$\nu_1 = \nu_2 = (\nu_0 + \nu_\beta)/2.$$

L'indépendance est justifiée dans les principes de mesure considérés, figure 12 et figure 13, car il y a deux détecteurs, indépendants, en jeu.

Il suffit alors d'effectuer la division de (3.27), (3.30), (3.34), (3.33), et (3.36), par le bruit σ_i correspondant. Les résultats sont présentés en table 3.1. Il y a trois cas considérés, un champ Rayleigh \mathcal{E}_{Ra} , un champ ricien naturellement \mathcal{E}_{Ri} , et un champ rendu ricien artificiellement $\mathcal{E}_{\text{Ri,a}}$. Pour la colonne de $g^{(3/2)}$, la phase θ de l'oscillateur local, d'amplitude complexe $E_{l_o} \exp(i\theta)$, vérifie $\theta = \phi$, et le bruit est calculé dans la limite où l'oscillateur local domine, i.e. : $f_i \gg \nu_{l_o} \gg \nu_0 + \nu_\beta$. Pour avoir les expressions du RSB de $g^{(3/2)}$ en fonction de la phase relative $\theta - \phi$, il suffit de multiplier les résultats par $\cos(\theta - \phi)$.

TABLE 3.1 – Expressions des rapports signal sur bruit (RSB) de $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$ dans le cas où $\nu_0 + \nu_\beta \ll f_i$ mesure non limitée par la détection, avec la méthode d'estimation **continu**.

RSB $E_{i_1 i_2}$	$g^{(3/2)}(\tau)$	$g^{(2)}(\tau)$
\mathcal{E}_{Ra}	non défini	$4\nu_0 \sqrt{\frac{T_0}{f_i}} \cdot \left(g_{\text{Ra}}^{(1)} ^2 * h_{\text{nor}}^{(2)}[\tau] \right)$
\mathcal{E}_{Ri}	$4\nu_\beta \sqrt{(1+s)} \sqrt{\frac{T_0}{f_i}} \cdot \left(g_{\text{Ri}}^{(1)} ^2 * h_{\text{nor}}^{(2)}[\tau] - \frac{1}{1+s} \right)$	$4\nu_\beta (1+s) \sqrt{\frac{T_0}{f_i}} \cdot \left(g_{\text{Ri}}^{(1)} ^2 * h_{\text{nor}}^{(2)}[\tau] - \frac{1}{(1+s)^2} \right)$
$\mathcal{E}_{\text{Ri,a}}$	$4 \frac{\nu_0}{\sqrt{1+s}} \sqrt{\frac{T_0}{f_i}} \cdot g_{\text{Ra}}^{(1)} ^2 * h_{\text{nor}}^{(2)}[\tau]$	$4 \frac{\nu_0 s}{1+s} \sqrt{\frac{T_0}{f_i}} \cdot g_{\text{Ra}}^{(1)} \left(\frac{2}{s} + g_{\text{Ra}}^{(1)} \right) * h_{\text{nor}}^{(2)}[\tau]$

Remarques. Le RSB de la mesure de $g^{(3/2)}$ ne dépend pas de ν_{l_o} , ce qui est attendu puisque l'oscillateur local crée le signal, mais il est également la source de bruit ($\nu_{l_o} \gg \nu_0 + \nu_\beta$).

Les RSB des mesures de $g^{(3/2)}$ et $g_{\text{Ri}}^{(2)}$ présentent deux contributions opposées, toutes les deux renforcées par l'augmentation de ν_β relativement à ν_0 . Il existe une valeur de ν_β , fonction de ν_0 , qui maximise le RSB, et au delà de laquelle le RSB décroît rapidement. Ce qui est attendu puisque si s diminue les amplitudes de $g^{(3/2)}$ et $g_{\text{Ri}}^{(2)}$ en $\tau = 0$, se rapprochent de 1 qui est la limite en $\tau \rightarrow +\infty$, et donc selon la définition du signal employée ici, le signal disparaît. Il n'est pas jugé bon d'analyser plus en détail ce comportement puisque l'observateur n'a pas la main mise sur ν_β dans ce cas.

Dans le cas de la mesure de $g_a^{(3/2)}$ ou de $g_{\text{Ri,a}}^{(2)}$, l'observateur a cette fois un degré de liberté sur ν_β , comment doit-il le choisir afin de maximiser le RSB ?

Pour la mesure de $g_a^{(3/2)}$, ν_β doit être choisi le plus grand possible, mais dans la limite $\nu_\beta \ll \nu_{l_o} \ll f_i$ (sinon l'oscillateur local n'est plus la seule contribution pour ν_2 dans (3.44)). Ce qui est, en quelque sorte, attendu puisque ν_β est nécessaire pour définir $g^{(3/2)}$: au vu de (3.36) le signal est précisément multiplié par ν_β .

Pour la mesure de $g_{\text{Ri,a}}^{(2)}$, la limite $\nu_\beta \gg \nu_0 \Leftrightarrow s \ll 1$, est intéressante parce-qu'elle ne met en jeu que $|g_{\text{Ra}}^{(1)}|$ pour le terme dominant, et non son carré. Ce qui permet d'accéder à des temps de cohérence deux fois plus petits. Le terme dominant est alors en $\nu_0/(1+s)$, et donc là aussi ν_β doit être choisi le plus grand possible relativement à ν_0 , mais dans la limite $\nu_\beta \ll f_i$ (sinon le bruit calculé n'est plus correct, il faut prendre la racine de (3.42)). Ce résultat n'est pas intuitif, valide, au risque de se répéter, uniquement si $\nu_0 \ll \nu_\beta \ll f_i$, il provient du fait que le signal est proportionnel au produit de $\nu_0 > 1$ photo-électron.s⁻¹, et ν_β tandis que le bruit en dépend via leur somme.

Enfin, il y a une erreur dans l'article publié [158], un facteur racine de deux a été oublié au

dénominateur dans le calcul de (3.44), et les résultats de l'article sont donnés avec la convention qu'avant les séparateurs la densité est 2ν ($\forall\nu$). Ce qui fait que les résultats des RSB dans l'article [158] doivent être multipliés par $2\sqrt{2}$.

IV. Mesure de $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$ via estimation conditionnelle

Cette partie développe un autre principe de mesure des fonctions $g^{(3/2)}$ et $g^{(2)}$, qui repose sur la formalisation de la corrélation avec les probabilités conditionnelles. Quelques rappels sur ce principe de mesure sont d'abord donnés en sous-partie IV..1, avant d'explicitier les signaux dans cette même sous-partie. Le bruit est calculé dans la sous-partie IV..2 suivante, et enfin les RSB sont présentés dans la dernière sous-partie IV..3.

IV..1 Principe et signaux

De manière générale, l'inter-corrélation de i_1 et i_2 se réécrit avec le théorème de Bayes :

$$\langle i_1(t_1)i_2(t_2) \rangle = \iint i_{1,1}i_{2,2}P_{i_2|i_1}^{1|1}(i_{2,2}, t_2|i_{1,1}, t_1)P_{i_1}(i_{1,1}, t_1)di_{1,1}di_{2,2}, \quad (3.45)$$

où $P_{i_2|i_1}^{1|1}$ est la densité conditionnelle de probabilité jointe i_2 - i_1 , d'ordre 1-1. Les valeurs $i_{1,1}$ et $i_{2,2}$ correspondent respectivement à $i_1(t_1)$, et $i_2(t_2)$. La relation (3.45) permet de construire le principe de mesure d'une fonction de corrélation *par conditionnement* (i.e. via les probabilités conditionnelles). En supposant la stationnarité au second ordre sur l'échelle de temps de la mesure, $P_{i_2|i_1}^{1|1}$ ne dépend que de $i_{1,1}$, $i_{2,2}$ et $\tau := |t_2 - t_1|$. La notation utilisée est dans ce cas :

$$\langle i_1(t)i_2(t + \tau) \rangle := \langle i_2(\tau) \rangle_c, \quad (3.46)$$

Le principe de la mesure repose sur la capacité à générer un "click" $i_1(t_c)$ déclenchant une acquisition de i_2 sur une durée donnée [165]. Aujourd'hui le "click" peut-être généré avec un module photo-compteur (type de détecteur discuté en Introduction, sous-partie V..2 par exemple). La durée Δt_{acq} de l'acquisition de i_2 est de l'ordre de plusieurs temps de cohérence $N\tau_{\text{cor,h}}$ ($N = 7$ par exemple) de i_2 . Ce temps de cohérence $\tau_{\text{cor,h}}$ est la constante de temps caractéristique présente dans le module de la fonction $g^{(1)}$ (ou dans le module au carré de $g^{(1)}$) convoluée avec la réponse h (auto-convoluée avec elle-même ou non). Ce temps $\tau_{\text{cor,h}}$ dépend des constantes de temps présente dans $g^{(1)}(\tau)$, à savoir : τ_c , donné par (1.58), et $\sigma_\omega = \omega_0\sigma_v/c$ où σ_v est donnée par (1.53), et il dépend de f_i^{-1} . Il peut par exemple être défini comme la largeur à mi hauteur de cette convolution, ou comme la moyenne quadratique de f_i^{-1} , τ_c , et σ_ω^{-1} . Ce temps de cohérence $\tau_{\text{cor,h}}$ peut-être très grand devant τ_c et σ_ω^{-1} si $f_i^{-1} \gg \tau_c, \sigma_\omega^{-1}$.

L'opération est ensuite répétée pour chaque "click" $i_1(t_c)$, il se forme alors un échantillon de $n_s = \nu_1 T_0$ acquisitions de i_2 , toutes sur une durée de $N\tau_{\text{cor}}$. Pour chaque $\tau \in [0, 7\tau_{\text{cor,h}}]$ il y a n_s valeurs de i_2 . Avec l'ergodicité en auto-covariance dans le cas du signal considéré, comme dans le cas du bruit considéré, cette moyenne peut-être remplacée par une moyenne temporelle sur les valeurs acquises au cours du temps. Ainsi pour chaque τ , la mesure de $\langle i_2(\tau) \rangle_c$ peut donc être assimilée à la moyenne sur ces n_s valeurs mesurées, voir par exemple [193] section 3. Il convient d'introduire la résolution temporelle d'échantillonnage Δt_{sam} de l'électronique qui permet de créer l'échantillon de i_2 . C'est cette résolution qui donne le nombre de points τ pour i_2 dans une durée d'acquisition Δt_{acq} , elle est à priori différente de la résolution f_i^{-1} de la photo-détection. Avec les instruments d'aujourd'hui [144] elles sont du même ordre de grandeur.

Remarque. Le principe de mesure perd son sens si le déclenchement des acquisitions de i_2 est saturé, i.e. : $\nu_1 \gg f_i$. Ce n'est pas simplement une précaution instrumentale à prendre. En effet, si $\nu_1 > f_i$, à la fin d'une acquisition de i_2 , il est presque certain qu'une nouvelle acquisition soit déclenchée. Le nombre d'acquisition de i_2 n'est plus alors causé par les fluctuations de i_1 , mais

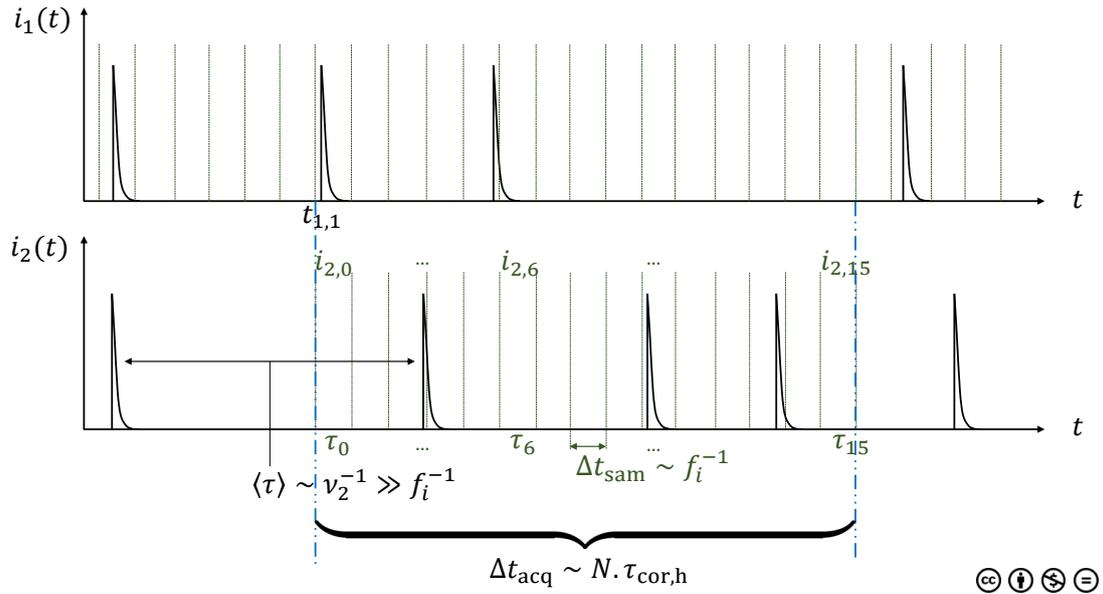


FIGURE 3.5 – Principe de mesure de $\langle i_1(t)i_2(t+\tau) \rangle$ par conditionnement, valide si $\nu_1 \ll f_i$. A chaque $i_{1,k}$, $k = 0, 1, \dots, n_s$, non nul, quitte à placer un seuil, une acquisition de i_2 est lancée pour une durée de $N \cdot \tau_{\text{cor,h}}$. L'échantillonnage s'opère avec une résolution Δt_{sam} . Soit l'intégrale de i_2 sur la durée infinitésimale Δt_{sam} donne une valeur $i_2(\tau_\ell)$. Soit un histogramme, de résolution Δt_{sam} , est construit. Dès qu'il y a une valeur de i_2 non nulle dans un τ_ℓ , quitte à mettre un seuil, la barre τ_ℓ de l'histogramme est incrémentée de 1.

devient périodique de période Δt_{acq} . Le conditionnement est alors déterministe, ou aléatoire si Δt_{acq} fluctue pour une raison quelconque, mais dans les deux cas P_{i1} n'intervient pas, et donc $P_{i2|i1}^{1|1}$ dans (3.45) perd son sens. La mesure devient la mesure d'un échantillon de $n_s = T_0/\Delta t_{\text{acq}}$ valeurs de i_2 en chaque $\tau \in [0, 7\tau_{\text{cor,h}}]$.

Signal de la mesure de $g^{(3/2)}$

La définition de $g^{(3/2)}(\tau)$ s'écrit avec le point de vue des probabilités conditionnelles [165] :

$$2g^{(3/2)}(\tau) = \frac{\langle \mathcal{E}^*(t+\tau)\mathcal{E}_\alpha(t+\tau) + \mathcal{E}(t+\tau)\mathcal{E}_\alpha^*(t+\tau) \rangle_c}{E_\beta E_\alpha}. \quad (3.47)$$

Or le photo-courant $i_2 = i_h$ est donné par (3.24), donc :

$$\langle i_h(\tau) \rangle_c = \sqrt{2\nu_{l0}\nu_\beta} \cdot g^{(3/2)} * h[\tau]. \quad (3.48)$$

Avec (3.26), le signal se déduit directement

$$\text{signal} \left\{ g^{(3/2)}(\tau) \right\} = \sqrt{2\nu_{l0}\nu_\beta} \cos(\theta - \phi) \cdot \left(\left| g_{\text{Ri}}^{(1)} \right| - \frac{1}{1+s} \right) * h[\tau]. \quad (3.49)$$

Dans le cas d'une mesure de $g^{(3/2)}$ sur un champ Rayleigh, il faut nécessairement que l'observateur lui superpose une radiation cohérente, connue et maîtrisée, d'amplitude complexe $E_\beta \exp(i\phi)$, créant ainsi un champ ricien artificiel. Alors le signal doit être modifié car la véritable information est $\left| g_{\text{Ra}}^{(1)} \right|$ qui est reliée à $\left| g_{\text{Ri}}^{(1)} \right|$ par (3.28), et il vient

$$\text{signal} \left\{ g_a^{(3/2)}(\tau) \right\} = \frac{s\sqrt{2\nu_{l0}\nu_\beta}}{1+s} \cos(\theta - \phi) \cdot \left| g_{\text{Ra}}^{(1)} \right| * h[\tau]. \quad (3.50)$$

Signal de la mesure de $g^{(2)}$

La définition de $g^{(2)}(\tau)$ s'écrit avec le point de vue des probabilités conditionnelles [126] :

$$g^{(2)}(\tau) := \frac{\langle I(\tau) \rangle_c}{\langle I \rangle^2}. \quad (3.51)$$

Or la mesure de $\langle i_2(\tau) \rangle_c$ est proportionnelle à $\langle I(\tau) \rangle_c$, soit avec (3.51) :

$$\langle i_2(\tau) \rangle_c = (\nu_0 + \nu_\beta) g^{(2)} * h[\tau]. \quad (3.52)$$

Avec (3.32), le signal se déduit directement

$$\text{signal} \{ g_{\text{Ri}}^{(2)}(\tau) \} = \nu_\beta (1 + s) \cdot \left(|g_{\text{Ri}}^{(1)}|^2 - \frac{1}{(1 + s)^2} \right) * h[\tau]. \quad (3.53)$$

Dans le cas d'un champ Rayleigh dont le module de l'amplitude complexe est E_0 , il faut et suffit de passer à la limite $s \rightarrow +\infty$ (i.e. : $\nu_\beta \rightarrow 0$), y compris dans l'expression de $|g_{\text{Ri}}^{(1)}|$ (3.28), et

$$\text{signal} \{ g_{\text{Ra}}^{(2)}(\tau) \} = \nu_0 \cdot |g_{\text{Ra}}^{(1)}|^2 * h[\tau]. \quad (3.54)$$

Enfin, le cas de l'hétérodynage. L'information est alors donnée par (3.35) et en l'injectant dans (3.52), le signal s'en déduit

$$\text{signal} \{ g_{\text{Ri,a}}^{(2)}(\tau) \} = \frac{\nu_0 s}{1 + s} \cdot |g_{\text{Ra}}^{(1)}| \left(\frac{2}{s} + |g_{\text{Ra}}^{(1)}| \right) * h[\tau]. \quad (3.55)$$

IV..2 Bruit

Avec l'ergodicité en auto-covariance, $\langle i_2(\tau) \rangle_c$ peut-être assimilée à une moyenne temporelle, c'est à dire à une moyenne sur les n_s valeurs collectées au cours du temps pour ce τ donné. Ces valeurs de i_2 sont identiquement distribuées si i_2 est un processus stable, et indépendantes (la valeurs de i_2 lors d'une acquisition de durée $N\tau_{\text{cor,h}}$, ne dépendent pas de l'acquisition précédente). Selon la définition choisie pour le bruit, pour chaque valeur de τ , le bruit correspond à l'écart-type sur l'estimation de la moyenne de i_2 , lorsque i_2 est un processus de Campbell. C'est à dire, pour chaque valeur de $\tau \in [0, 7\tau_{\text{cor,h}}]$:

$$\sigma_{i,c} = \sqrt{\frac{C_{i_2 i_2}(0)}{n_s}},$$

où $C_{i_2 i_2}$ est donnée par (3.7). Or $n_s = \nu_1 T_0$, donc :

$$\sigma_{i,c} = e \sqrt{\frac{\nu_2 f_i}{2\nu_1 T_0}}. \quad (3.56)$$

Dans le cas de la mesure de $g^{(2)}$ pour un champ ricien d'intensité $E_0^2 + E_\beta^2$ (3.2),

$$\nu_1 = \nu_2 = (\nu_0 + \nu_\beta)/2,$$

et donc

$$\sigma_{i,c} = e \sqrt{\frac{f_i}{2T_0}}. \quad (3.57)$$

Dans le cas de la mesure de $g^{(3/2)}$ pour un champ ricien d'intensité $E_0^2 + E_\beta^2$ (3.2), avec $q = 1/2$ (voir figure 3.3), et avec un oscillateur local tel que $\nu_{l_0} \gg \nu_0 + \nu_\beta$,

$$\nu_1 = (\nu_0 + \nu_\beta)/2,$$

$$\nu_2 \approx \nu_{l_0},$$

et donc

$$\sigma_{i,c} = e \sqrt{\frac{\nu_{l_0} f_i}{\nu_\beta (1 + s) T_0}}. \quad (3.58)$$

IV..3 RSB

Les RSB sont obtenus en divisant (3.49) et (3.50) par (3.58), et, (3.53), (3.54), et (3.55) par (3.57). Les résultats sont synthétisés dans le tableau 3.2. Il y a trois cas considérés, un champ Rayleigh \mathcal{E}_{Ra} , un champ ricien naturellement \mathcal{E}_{Ri} , et un champ rendu ricien artificiellement $\mathcal{E}_{\text{Ri,a}}$. Pour la colonne de $g^{(3/2)}$, la phase θ de l'oscillateur local, d'amplitude complexe $E_{lo} \exp(i\theta)$, vérifie $\theta = \phi$, et le bruit est calculé dans la limite où l'oscillateur local domine, i.e. : $f_i \gg \nu_{lo} \gg \nu_0 + \nu_\beta$. Pour avoir les expressions du RSB de $g^{(3/2)}$ en fonction de la phase relative $\theta - \phi$, il suffit de multiplier les résultats par $\cos(\theta - \phi)$.

Dans le cas de la mesure de $g_{\text{Ri}}^{(2)}$, et $g^{(3/2)}$, il y a deux contributions de signe opposées, toutes deux dépendantes de s , le RSB peut donc en principe s'annuler. Il existe une valeur de ν_β , fonction de ν_0 , pour laquelle le RSB est maximal. Comme l'observateur ne contrôle pas ν_β dans ce cas, il n'a pas été jugé bon d'en discuter plus longuement.

Dans le cas de la mesure de $g_{\text{Ri,a}}^{(2)}$, et $g_a^{(3/2)}$, l'observateur peut paramétrer ν_β . Comment doit-il le choisir pour maximiser le RSB ?

Pour la mesure de $g_a^{(3/2)}$, ν_β doit être choisi le plus grand possible dans la limite $\nu_\beta \ll \nu_{lo} \ll f_i$. L'effet d'amélioration sur le RSB évolue en racine avec l'augmentation de ν_β relativement à ν_0 . Sachant que ν_β doit rester bien inférieur à ν_{lo} , pour ne pas contribuer au bruit dans la détection homodyne, l'effet d'amélioration sur le RSB est limité.

Pour la mesure sur $g_{\text{Ri,a}}^{(2)}$ la limite $\nu_\beta \gg \nu_0$ est intéressante, de même qu'elle l'était pour le régime continu, car le terme dominant ne fait intervenir que $|g_{\text{Ra}}^{(1)}|$ et non son carré. Ce qui permet d'accéder à des temps de cohérence deux fois plus petits. Le terme dominant se comporte en $\nu_0/(1+s)$ et donc ν_β doit être choisi le plus grand possible relativement à ν_0 , dans la limite $\nu_\beta \ll f_i$.

Enfin, les résultats qui sont présentés dans l'article [158] utilisent la convention qu'avant le séparateur (BS) les densités sont de 2ν ($\forall \nu$). Dans le cas de la mesure de $g^{(2)}$ les résultats exhibés dans l'article et les résultats de la table 3.2 sont identiques car (3.57) ne dépend pas de ν . Dans le cas de la mesure de $g^{(3/2)}$, le résultat de l'article [158] doit être divisé par $\sqrt{2}$ si la densité engendrée par le champ est $\nu_0 + \nu_\beta$, car avec un séparateur équilibré : $\nu_1 = (\nu_0 + \nu_\beta)/2$.

TABLE 3.2 – Expressions des rapports signal sur bruit (RSB) de $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$ dans le cas où $\nu_0 + \nu_\beta \ll f_i$, mesure non limitée par la détection, avec la méthode d'estimation **conditionnelle**.

RSB $\langle \dots \rangle_c$	$g^{(3/2)}(\tau)$	$g^{(2)}(\tau)$
\mathcal{E}_{Ra}	non défini	$\nu_0 \sqrt{\frac{2T_0}{f_i}} \cdot \left(g_{\text{Ra}}^{(1)} ^2 * h_{\text{nor}}[\tau] \right)$
\mathcal{E}_{Ri}	$\nu_\beta \sqrt{(1+s)} \sqrt{\frac{2T_0}{f_i}} \cdot \left(g_{\text{Ri}}^{(1)} * h_{\text{nor}}[\tau] - \frac{1}{1+s} \right)$	$\nu_\beta (1+s) \sqrt{\frac{2T_0}{f_i}} \cdot \left(g_{\text{Ri}}^{(1)} ^2 * h_{\text{nor}}[\tau] - \frac{1}{(1+s)^2} \right)$
$\mathcal{E}_{\text{Ri,a}}$	$\frac{\nu_0}{\sqrt{1+s}} \sqrt{\frac{2T_0}{f_i}} \cdot g_{\text{Ra}}^{(1)} * h_{\text{nor}}[\tau]$	$\frac{\nu_0 s}{1+s} \sqrt{\frac{2T_0}{f_i}} \cdot g_{\text{Ra}}^{(1)} \left(\frac{2}{s} + g_{\text{Ra}}^{(1)} \right) * h_{\text{nor}}[\tau]$

V. Quelques comparaisons et conclusions

Pour effectuer les comparaisons qui suivent, il a été choisi d'évaluer les RSB en $\tau = 0$. Ce choix est motivé par la problématique P1, pour laquelle la valeur des fonctions de corrélations $g^{(3/2)}$ et $g^{(2)}$ en $\tau = 0$ apporte un élément de réponse clé.

La convolution du module de $g_{\text{Ra}}^{(1)}$ avec h_{nor} (auto-convoluée ou non), a été évaluée dans le pire des scénarios pour la corrélation temporelle ; le cas où $|g_{\text{Ra}}^{(1)}|$ et h_{nor} sont gaussiens, de variances respectives $\sigma_\tau^2 \sim \tau_c^2 + \sigma_\omega^{-2}$ et $\sigma_h^2 \sim f_i^{-2}$.

$$|g_{\text{Ra}}^{(1)}|(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_\tau^2}\right), \quad (3.59)$$

$$h_{\text{nor}}(t) = \frac{1}{\sigma_h\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_h^2}\right). \quad (3.60)$$

Dans un espace unidimensionnel, en l'occurrence le domaine temporel, les signaux gaussiens sont ceux qui maximisent l'entropie au sens de la théorie de l'information (i.e. au sens de Shannon), voir par exemple [3] section 9.2.3.. Dans un espace bi-dimensionnel, formé d'un espace et de son dual par transformée de Fourier, le domaine temps-fréquence par exemple, c'est le contraire : les signaux gaussiens minimisent l'entropie : ils sont la condition d'égalité du principe d'incertitude d'Heisenberg. Par conséquent, la variance de l'estimation des fonctions de corrélation est bornée supérieurement par la variance obtenue dans le cas gaussien. Les prédictions ainsi effectuées sont pessimistes. La convolution $|g^{(1)}|^n * h_{\text{nor}}^{(q)}[\tau]$ s'exprime alors analytiquement pour $(n, q) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^2$,

$$\epsilon_{n,q}(\tau) := |g^{(1)}|^n * h_{\text{nor}}^{(q)}[\tau] = \frac{1}{\sqrt{1 + nq \left(\frac{\sigma_h}{\sigma_\tau}\right)^2}} \exp\left(\frac{-\tau^2}{2\frac{\sigma_\tau^2}{n} \left(1 + nq \left(\frac{\sigma_h}{\sigma_\tau}\right)^2\right)}\right). \quad (3.61)$$

Une première sous-partie propose de comparer les deux méthodes de mesures : la méthode continue et la méthode conditionnelle, bien sûr pour un cas où il est possible d'utiliser l'une ou l'autre sans conséquences sur le résultat de la mesure.

Les deuxième et troisième sous-parties répondent respectivement aux questions Q1 et Q2 posées en sous-partie I.3.

V.1 Comparaison des méthodes

La principale différence entre les deux méthodes est que le module de $g_{\text{Ra}}^{(1)}$ apparaît au carré dans la méthode continue. Ce qui implique que la méthode conditionnelle permet d'accéder à des temps de cohérence σ_τ racine de deux fois plus petits avant que la mesure ne soit limitée par σ_h . Ce gain en résolution est au prix d'un RSB 2 (quand $\sigma_h \gg \sigma_\tau$) à $2\sqrt{2}$ (quand $\sigma_h \ll \sigma_\tau$) fois plus faible pour la méthode conditionnelle.

Lorsque l'expérimentateur peut mettre en place la méthode d'estimation continue (qui nécessite un corrélateur), que la détection n'est limitée que par le bruit de grenaille, et que la mesure implique des densités faibles devant f_i , mais qui sont tout de même grandes devant un, la méthode d'estimation continue est à privilégier.

La méthode d'estimation conditionnelle est à privilégier lorsque les densités sont de l'ordre du photo-événement unique (situation rencontrée en électrodynamique quantique par exemple) par seconde, ou moins. Dans ce cas la méthode d'estimation continue ne fait pas sens car le signal ne peut pas être traité de manière continue. Cette situation requiert une description quantique qui sort du traitement classique proposé ici. La formulation quantique est donnée de manière claire dans [165], et [194] présente ce que la méthode continue permettrait de "mesurer" dans ce cadre

(ou plutôt ce qu'elle ne permet pas de mesurer), la comparaison avec la méthode conditionnelle y est également donnée.

Dans les comparaisons qui suivent, seule la méthode d'estimation continue est retenue.

V.2 Comparaisons des mesures

La première sous-sous-partie compare la mesure de $g^{(2)}$ par rapport à celle $g^{(3/2)}$ pour un champ ricien, et répond ainsi à la question Q0 énoncée au I.3. La deuxième sous-sous-partie examine l'impact de l'hétérodynage, et répond aux deux questions Q1 et Q2 posées dans cette même sous-partie I.3.

Mesure de $g^{(3/2)}$ versus mesure de $g_{\text{Ri}}^{(2)}$

Cette sous-sous-partie tente de répondre à la question Q0, amenée par la problématique P1. Un observateur souhaite quantifier la composante cohérente d'un champ ricien, formé suivant le scénario développé au chapitre 2. A-t-il intérêt à mesurer $g^{(2)}$ plutôt que $g^{(3/2)}$, ou l'inverse ? Dans ce qui suit, le cas où la résolution de la détection limite la mesure de τ_c , et/ou σ_ω^{-1} , i.e. : $\sigma_h \gg \sigma_\tau$, est considéré en priorité.

Au chapitre 2, la sensibilité accrue de $g^{(3/2)}$, relativement à $g^{(2)}$, à la présence d'une partie cohérente dans le champ ricien incident avait déjà été exhibée, (2.28) et (2.27). Par rapport à la valeur de 2 attendue pour $s \gg 1$ (composante cohérente du champ ricien négligeable devant sa composante Rayleigh), l'effet d'une partie cohérente dans le champ incident sur la valeur en $\tau = 0$ est $1 + s$ fois plus fort sur $g^{(3/2)}(0)$ que sur $g^{(2)}(0)$. Cette sensibilité est conjointe avec un meilleur RSB lorsque la résolution de la détection limite la mesure. En effet, le rapport du RSB de $g^{(3/2)}$ sur celui de $g_{\text{Ri}}^{(3/2)}$, voir table 3.1,

$$\frac{\text{RSB} \{g^{(3/2)}(0)\}}{\text{RSB} \{g_{\text{Ri}}^{(2)}(0)\}} = \frac{1}{\sqrt{1+s}} \cdot \frac{\epsilon_{12}(0) - \frac{1}{1+s}}{\epsilon_{22}(0) - \frac{1}{(1+s)^2}}, \quad (3.62)$$

est toujours supérieur à un lorsque $\sigma_h \gg \sigma_\tau$, le résultat (3.62) est tracé figure (3.6).

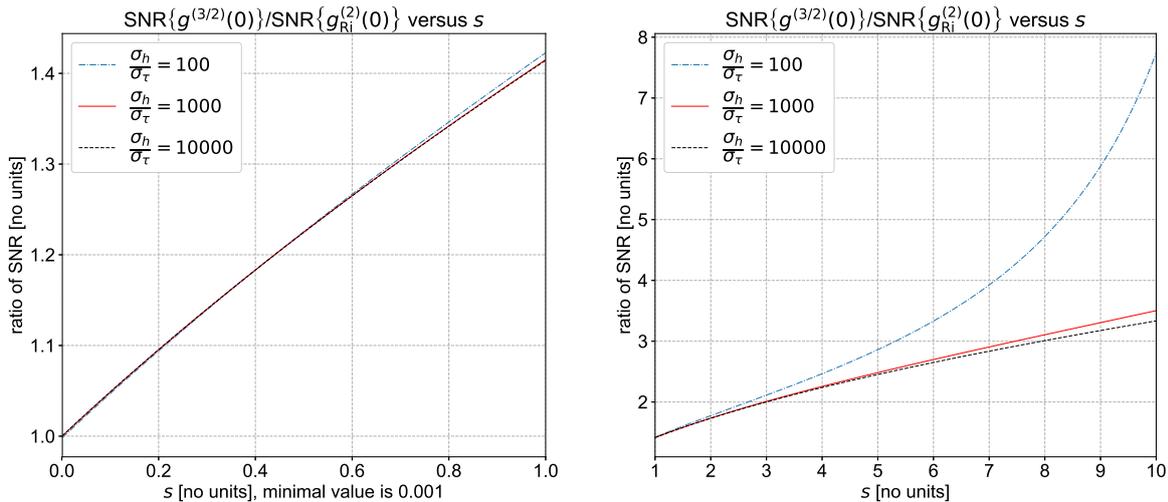


FIGURE 3.6 – Graphe du rapport du RSB en $\tau = 0$ de la mesure de $g^{(3/2)}$ sur celui de la mesure de $g_{\text{Ri}}^{(2)}$, pour estimation continue de la corrélation, et lorsque la résolution temporelle de h limite la mesure, i.e. $\sigma_h \sim f_i^{-1} \gg \sigma_\tau \sim \sqrt{\tau_c^2 + \sigma_\omega^{-2}}$.

Pour $s < 1$, i.e. : $\nu_\beta > \nu_0$ (la composante cohérente du champ ricien est plus intense que sa

composante Rayleigh), le gain en terme de RSB est compris entre 1 et $\simeq \sqrt{2}$, en fonction du rapport σ_h/σ_τ , ce qui réduit au mieux de moitié la durée d'observation T_0 pour un RSB donné. Le cas $s > 1$ correspond au cas où la partie cohérente du champ est moins intense que la partie chaotique. Dans ce cas les gains en RSB sont plus significatifs, et la durée d'observation pour un même RSB est au moins réduite de moitié.

Exemple. Pour $\nu_\beta = 3\nu_0 \Leftrightarrow s = 1/3$, mesurer $g^{(3/2)}$ au lieu de $g^{(2)}$, quand $\sigma_h \gg \sigma_\tau$, donne un gain de 1.16 en terme de RSB, soit un gain de 1.35 en terme de durée d'observation. Il faut combiner cela au fait que la valeur en $\tau = 0$ pour $g^{(3/2)}$ s'écarte plus de 2 : pour $s = 1/3$, $g^{(3/2)}(0) = 1.25$ tandis que $g^{(2)}(0) = 1.44$. La présence de la composante cohérente est plus rapidement et plus clairement quantifiée en mesurant $g^{(3/2)}$.

Remarque. Du fait des deux contributions de signes opposés dans le RSB de la mesure de $g_{\text{Ri}}^{(2)}$, ce RSB peut s'annuler. De même pour le RSB de $g^{(3/2)}$, mais la valeur de s qui l'annule n'est pas la même que celle qui annule le RSB de la mesure de $g_{\text{Ri}}^{(2)}$. Le rapport des RSB présente donc une singularité, pour une combinaison de $\sigma_h, \sigma_\tau, \nu_0, \nu_\beta$ qui annule le RSB de la mesure de $g_{\text{Ri}}^{(2)}$ mais pas celui de la mesure de $g^{(3/2)}$. Cette singularité explique le comportement de la courbe en bleu du graphe de droite de la figure 3.6. Cette singularité est due au fait de considérer un rapport de RSB, et ce rapport de RSB n'a aucune signification physique. De plus, il est rappelé que l'observateur ne maîtrise ni ν_β , ni ν_0 , ni σ_τ .

Lorsque la détection ne limite pas la mesure, i.e. : $\sigma_h \ll \sigma_\tau$, le RSB de la mesure de $g^{(2)}$ est meilleur de plus d'un facteur 2, et plus s diminue plus cet avantage se confirme.

Conclusion. Lorsque la résolution temporelle de la détection limite la mesure de τ_c , et/ou σ_ω^{-1} , i.e. : $\sigma_h \gg \sigma_\tau$, l'observateur a tout intérêt à mesurer $g^{(3/2)}$ plutôt que $g_{\text{Ri}}^{(2)}$ pour quantifier le poids de la composante cohérente dans le champ ricien incident.

Impact de l'hétérodynage

Cette sous-partie s'occupe de répondre aux questions Q1 et Q2 posées dans l'introduction, en sous-partie I.3. L'observateur est supposé avoir la possibilité de superposer au champ Rayleigh incident, un champ cohérent dont il maîtrise l'intensité, et donc ν_β . C'est ce qui est appelé l'hétérodynage.

L'analyse cherche à déterminer s'il y a un intérêt en terme de RSB à opérer de la sorte dans la mesure de $g_{\text{Ra}}^{(2)}$. L'analyse examine aussi si la mesure de $g_a^{(3/2)}$ possède un meilleur RSB que la mesure de $g_{\text{Ra}}^{(2)}$.

Sur le choix de mesurer $g_a^{(3/2)}$ à la place de mesurer $g_{\text{Ra}}^{(2)}$.

Le rapport des RSB s'écrit

$$\frac{\text{RSB} \left\{ g_a^{(3/2)}(0) \right\}}{\text{RSB} \left\{ g_{\text{Ra}}^{(2)}(0) \right\}} = \frac{1}{\sqrt{1+s}} \cdot \frac{\epsilon_{12}(0)}{\epsilon_{22}(0)}. \quad (3.63)$$

Lorsque σ_h limite la mesure (i.e. $\sigma_\tau \ll \sigma_h$), il est possible d'obtenir un gain proche de $\sqrt{2}$ sur le RSB grâce à l'hétérodynage. La figure 3.7 présente les graphes de (3.63). Lorsque σ_h ne limite pas la mesure, il n'y a pas de gain à espérer, au mieux les RSB sont identiques (voir courbe en trait plein bleu de la figure 3.7).

Exemple. Pour $\nu_0 = 500\text{kpcps}$ ($5 \cdot 10^5$ photo-événements par seconde \equiv Hz), qui est l'ordre de grandeur mesuré lors de la campagne expérimentale présentée dans [147], $\nu_\beta = 10\nu_0$ est encore acceptable pour la limite $\nu_0 \ll f_i \sim 10\text{GHz}$. Ce paramétrage permet d'atteindre un gain de 1.35 en terme de RSB, soit un gain de 1.82 en terme de durée d'observation, pour $\sigma_h \sim 10\text{ns}$ et $\sigma_\tau \sim 1\text{ps}$.

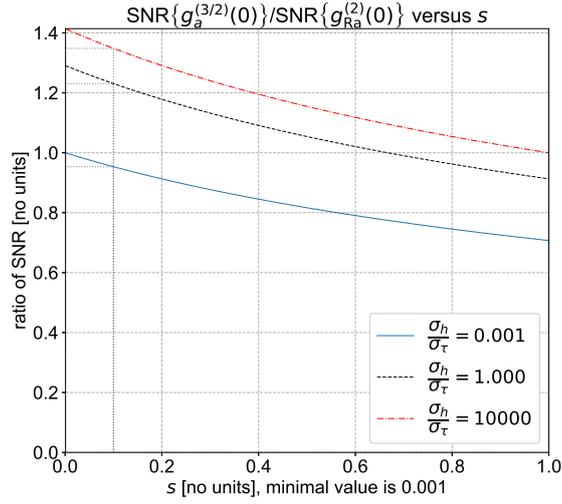


FIGURE 3.7 – Graphe du rapport du RSB en $\tau = 0$ de la mesure de $g_a^{(3/2)}$ sur celui de la mesure de $g_{Ra}^{(2)}$, pour estimation continue de la corrélation, et lorsque la résolution temporelle de h limite la mesure $\sigma_h \gg \sigma_\tau$, lorsque $\sigma_h \sim \sigma_\tau$, et lorsque h ne limite pas la mesure $\sigma_h \ll \sigma_\tau$. Le curseur en pointillé indique un paramétrage de ν_β dix fois plus grand que ν_0 .

Sur la mesure de $g_{Ri,a}^{(2)}$ à la place de mesurer $g_{Ra}^{(2)}$.

Le rapport des RSB s'écrit

$$\frac{\text{RSB} \{g_{Ri,a}^{(2)}(0)\}}{\text{RSB} \{g_{Ra}^{(2)}(0)\}} = \frac{s}{1+s} \cdot \frac{2}{s} \frac{\epsilon_{12}(0) + \epsilon_{22}(0)}{\epsilon_{22}(0)}. \quad (3.64)$$

Que h limite ou non la mesure de σ_τ , que s soit plus grand ou plus petit que 1, (3.64) est toujours supérieur à un, le graphe est représenté figure 3.8 pour $\nu_\beta > \nu_0$ et pour $\nu_\beta < \nu_0$. En fonction

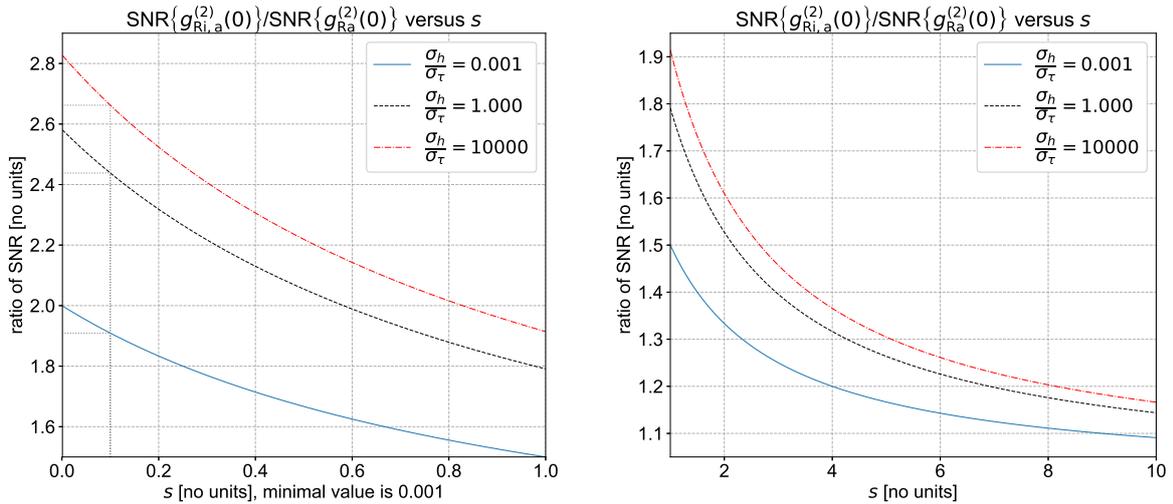


FIGURE 3.8 – Graphe du rapport du RSB en $\tau = 0$ de la mesure de $g_{Ri,a}^{(2)}$ sur celui de la mesure de $g_{Ra}^{(2)}$, pour estimation continue de la corrélation, lorsque la résolution temporelle de h limite la mesure $\sigma_h \gg \sigma_\tau$, lorsque $\sigma_h \sim \sigma_\tau$, et lorsque h ne limite pas la mesure $\sigma_h \ll \sigma_\tau$. Le curseur en pointillé indique un paramétrage de ν_β dix fois plus grand que ν_0

de l'intensité du champ Rayleigh incident, les gains en terme de RSB sont très disparates (mais

toujours plus grand que un). Ils sont d'autant plus importants que $\sigma_h \gg \sigma_\tau$.

Exemple. Pour $\nu_0 = 500\text{kcps}$, $\nu_\beta = 10\nu_0$ est encore acceptable pour la limite $\nu_0 \ll f_i \sim 10\text{GHz}$. Ce paramétrage permet d'atteindre un gain de 2,66 en terme de RSB, soit un gain de 7,08 en terme de durée d'observation, pour $\sigma_h \sim 10\text{ns}$ et $\sigma_\tau \sim 1\text{ps}$.

Conclusion. L'hétérodynage permet de gagner dans tous les cas, et ce de manière particulièrement significative lorsque la réponse temporelle de la détection limite la mesure du temps de cohérence présent dans $g^{(1)}$.

V..3 Conclusions

Les calculs des rapports signal sur bruit menés dans ce chapitre concernent deux méthodes d'estimation de la corrélation, et semblent être originaux concernant la mesure de $g^{(3/2)}$ pour un champ ricien ou Rayleigh. Pour la mesure de $g^{(2)}$ les expressions du RSB pour un champ ricien avec la méthode d'estimation continue, et des RSB pour un champ Rayleigh ou ricien avec la méthode conditionnelle, semblent également être originaux. La méthode utilisée pour calculer la variance de l'estimateur continu de la corrélation est différente de celle utilisée par HBT dans l'article pionnier de [44], et permet de considérer le cas $\nu \ll f_i$.

Dans le cas où la réponse temporelle de la détection limite la mesure, c'est à dire que f_i^{-1} est supérieur aux temps caractéristiques présents dans le module de $g^{(1)}$, à savoir τ_c donné par (1.58) et σ_ω^{-1} donné par (2.1), l'observateur a tout intérêt à mesurer $g^{(3/2)}$ plutôt que $g_{\text{Ri}}^{(2)}$. En effet, la mesure de $g^{(3/2)}$ est plus sensible au poids de la composante cohérente dans le champ ricien incident (fait remarqué au chapitre 2), et offre un meilleur rapport signal sur bruit.

La fonction $g^{(3/2)}$ fait intervenir le module de $g^{(1)}$ et non son carré comme $g^{(2)}$, propriété déjà remarquée au chapitre 2. Par conséquent, pour une limitation de la résolution temporelle donnée, imposée par la convolution avec la réponse impulsionnelle h de constante de temps f_i^{-1} , la mesure de $g^{(3/2)}$ permet, par rapport à la mesure de $g^{(2)}$, d'accéder à des τ_c deux fois plus petits et des σ_ω racine de deux fois plus grands. La capture d'un τ_c (1.58) deux fois plus petit, permet pour une masse m_0 donnée, l'accès à des températures T quatre fois plus élevées, ou, pour une température T donnée, l'accès à des masses m_0 quatre fois plus petites. La capture d'un σ_ω (2.1) racine de deux fois plus grand permet, pour une température T donnée, l'accès à des masses m deux fois plus petites, et pour une masse m donnée, l'accès à des températures T deux fois plus élevées. La finalité de mesurer les temps caractéristiques apparaissant dans $g^{(1)}$, justifie donc la mesure de $g_a^{(3/2)}$ plutôt que la mesure de $g_{\text{Ra}}^{(2)}$, d'autant plus que le rapport signal sur bruit est légèrement meilleur lorsque f_i^{-1} limite la mesure.

L'hétérodynage permet de gagner dans tous les cas, et ce de manière particulièrement significative lorsque la réponse temporelle de la détection limite la mesure. Notamment, mesurer $g_{\text{Ri,a}}^{(2)}$ à la place de $g_{\text{Ra}}^{(2)}$, pour un champ Rayleigh incident engendrant une densité ν_0 typique de la dernière campagne de mesure [147], apporte un gain d'au moins 7 sur le temps d'observation.

Deuxième partie

Réalisations

Chapitre 4

Caractérisations et mesures avec le corrélogramme stellaire

Sommaire

I.	Introduction	120
I.1	Objectifs	120
I.2	Présentation de l'instrument	121
I.3	Organisation du chapitre	123
II.	Caractérisation de la réponse temporelle	124
II.1	Définitions et indications	124
II.2	Influence de l'intensité incidente	124
II.3	Influence des composants	129
III.	Méthode pour l'exploitation des mesures	132
III.1	Justification du modèle de fit pour la mesure de $g^{(2)}$	132
III.2	Interprétation du contraste lorsque σ limite la mesure	135
III.3	Figure de mérite du fit	136
IV.	Mesures de $g^{(2)}$ sur la raie d'émission $H\alpha$ de P Cygni	138
IV.1	Quelques éléments sur l'étoile P Cygni, sa variabilité, et sa raie $H\alpha$	138
IV.2	Résultat de la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ et interprétation	139
IV.3	Résultat de la mesure de $g^{(2)}(\tau, \rho)$ et interprétation	140
V.	Conclusion	144

C'est ce qu'on pourrait appeler du
 petit-nègre allemand :
Demain, pas travailler,
Machine kapoutt !
Toujours, toujours dormir !
Dormir, extra bon !
Jusqu'après dimanche, au revoir,
Au revoir, au revoir.
Travailler, pas comprendre !
Travailler, pas comprendre !
 Moi, je suis en plein *Michel Strogoff*.

Les Russkoffs, Cavanna.

I. Introduction

Ce chapitre est le premier chapitre expérimental. L'interprétation des mesures repose sur les éléments théoriques développés dans la partie I "Fondements". Quelques notions sur le transfert radiatif peuvent aider à la lecture de l'annexe D associée à la partie IV..

Le mot anglais technique *fit* (ajustement, en français) est conservé, comme il est souvent toléré de le faire dans ce contexte technique.

L'appellation "densité" de photo-électrons ou photo-événements du chapitre 2 est conservée, et sa notation est toujours ν .

Les fits des données expérimentales sont effectués avec la méthode des moindres carrés, sauf mention contraire.

Dans ce chapitre, et uniquement pour des raisons de mises en évidence expérimentales, les fonctions de corrélation sont également considérées pour $\tau < 0$. Il suffit de remplacer τ par sa valeur absolue dans les expressions utilisées dans les chapitres précédents.

I.1 Objectifs

Un premier objectif est de déterminer expérimentalement la réponse impulsionnelle R_δ (aussi appelée réponse temporelle) du corrélogramme développé. Les éléments constituant ce corrélogramme sont détaillés dans la sous-partie I.2 suivante. Cette réponse temporelle est étudiée paramétriquement en fonction de l'intensité, des composants (détecteurs, connecteurs, paramètres intrinsèques du corrélateur). La connaissance de R_δ permet de rendre la mesure de $g^{(2)}$ quantitative. Vient ensuite, le rapport d'une campagne de mesure sur l'étoile P Cygni (HD 193237, HR 7763, HIP 100044), abrégée "P Cyg" dans ce qui suit.

Premièrement, la campagne de mesure souhaite caractériser la nature de la raie d'émission de la transition H-alpha avec la mesure de $g^{(2)}$, dans le contexte de la problématique P1. A priori, cette raie d'émission est de nature chaotique Rayleigh mais elle possède de nombreuses caractéristiques spectrales similaires aux raies d'émission suspectées d'être de nature cohérente. Ensuite, si la nature chaotique Rayleigh est avérée, proposer une estimation du temps de cohérence de la raie, dans une perspective spectroscopiste [69, 68, 61]. Enfin, d'un point de vue technique, cette campagne expérimentale dévoile la faisabilité de la mesure de $g^{(2)}$, avec l'instrument développé, en condition d'observation astronomique.

Deuxièmement, la campagne de mesure veut démontrer qu'un corrélogramme stellaire peut déduire des informations géométriques sur la cible avec des télescopes très modestes, de la classe des 1 mètre.

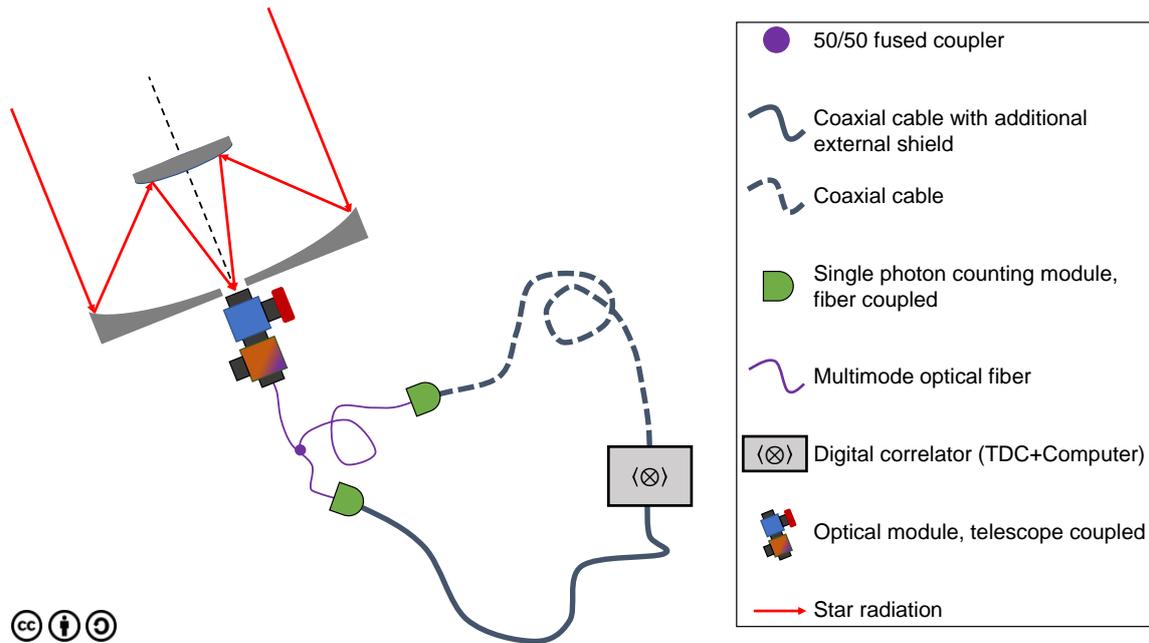


FIGURE 4.1 – Schéma de principe du corrélogramme stellaire, permettant une mesure de $g^{(2)}(\tau)$.

I.2 Présentation de l'instrument

La fiche technique de l'instrument développé est placée en annexe C afin de ne pas alourdir de détails cette sous-partie. La figure 4.1 donne le principe de l'instrument dans le cadre d'une mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sur cible stellaire. Dans le contexte d'une mesure de $g^{(2)}(\rho, \tau)$ il suffit de rajouter un télescope, et d'associer un seul module photo-compteur par télescope, voir figure 5 de l'Introduction. Les sorties des photo-compteurs convergent ensuite vers le corrélateur digital. Le corrélateur digital est composé d'un convertisseur temps digital qui crée des photo-événements (date les impulsions générées par les photo-compteurs), et d'un ordinateur qui effectue le calcul de l'histogramme des coïncidences de photo-événements. La figure 4.2 présente le montage réalisé en laboratoire pour effectuer les tests et réglages.

Un module optique permet d'injecter la lumière stellaire concentrée par le télescope dans une fibre multimode (dont le coeur est en silice, les détails techniques sont indiqués en annexe C). Ce module optique est détaillé figure 4.3 et 4.2. Il permet également de sélectionner une polarisation (linéaire) et d'effectuer un filtrage spectral. Il assure aussi une voie de sortie vers une caméra de guidage, essentielle à l'observateur lors d'une mesure en conditions réelles. Le réglage de l'injection de la lumière, via la lentille de chambre, dans la fibre en sortie du module est effectué en laboratoire grâce à un télescope artificiel, le schéma est présenté figure 4.2. Le paragraphe suivant détaille le protocole suivi pour ce réglage.

La première étape est de positionner la lentille de chambre (convergente) de sorte que son foyer corresponde avec l'entrée de la fibre. Le réglage est effectué par auto-collimation en injectant de la lumière dans le sens de propagation inverse. Ensuite, il faut s'assurer du positionnement de la lentille collimatrice (divergente), tel que le faisceau de lumière soit collimaté en traversant le filtre et l'élément polariseur. Là encore, le réglage est effectué par auto-collimation en injectant de la lumière dans le sens de propagation inverse. Remarque. Les lentilles sont disposées dans des supports qui se traduisent en se vissant/dévisant le long de l'axe de révolution de cylindres. Ces cylindres ont le même axe de révolution. L'axe optique est donc géométriquement l'axe des cylindres. Le télescope artificiel est composé d'un collimateur (relié à la source de laboratoire) placé sur un support qui permet de le traduire dans le plan perpendiculaire à l'axe optique.

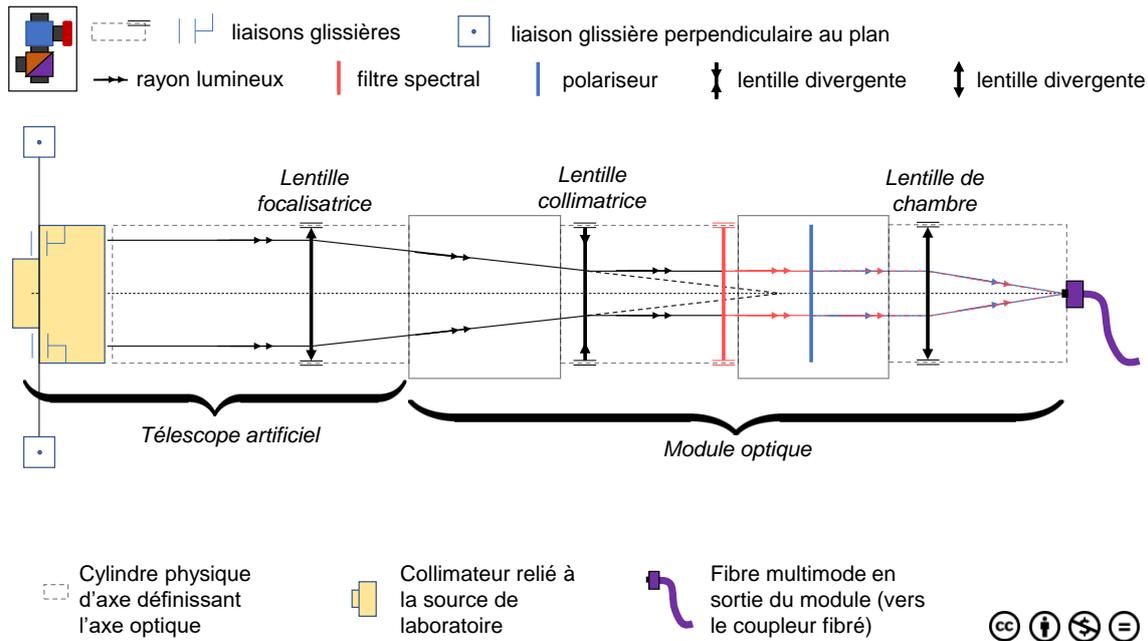


FIGURE 4.2 – Schéma du montage télescope artificiel-module optique réalisé et réglé en laboratoire. La partie du montage concernant la caméra de guidage, voir la figure 4.3, n'est pas représentée ici afin de ne pas alourdir le schéma.

Vient ensuite une lentille focalisatrice (convergente) disposée dans un support qui se translate en se vissant/dévisant le long de l'axe de révolution d'un cylindre. Ce cylindre est géométriquement fixé au module de sorte que son axe de révolution corresponde à l'axe optique. Le télescope artificiel possède donc, comme un télescope réel, trois degrés de liberté ; deux dans le plan perpendiculaire à l'axe optique, et un le long de l'axe optique, permettant de régler la focalisation. Le réglage de la focalisation s'effectue de sorte à confondre le foyer objet de la lentille collimatrice avec le foyer image de la lentille focalisatrice. Les réglages sont affinés en maximisant la densité de photo-événements ν obtenue sur la détection. Le réglage de la position du capteur de la caméra image est ensuite effectué, de sorte que l'injection optimale corresponde à une position plutôt centrée sur l'image de la caméra.

En sortie du module, le coupleur fibré, équilibré (en bonne approximation), crée deux voies de détection (les modules photo-compteurs disposent d'une connexion fibrée). Cette astuce permet de contourner la limitation en résolution temporelle due au temps mort de la détection (caractéristique des modules photo-compteurs, environ 24ns [146]).

Les modules photo-compteurs sont disposés dans des boîtes métalliques spécifiquement conçues pour les isoler des perturbations électromagnétiques, et leurs alimentations sont distinctes. Chaque détecteur est ainsi, dans une bonne approximation, indépendant de l'autre. Leurs signaux de sorties (tensions) sont directement envoyés vers le convertisseur temps-digital via des câbles coaxiaux, dont l'un dispose d'un second blindage externe, afin de garantir l'isolation électromagnétique, et d'éviter les potentielles interactions d'une voie de détection avec l'autre. Les longueurs des voies de détection (en terme de fibres multimodes et de câbles coaxiaux) ne sont pas identiques. Un déséquilibre permet de déplacer l'origine des temps τ de la valeur nulle, vers une valeur différente. Le corrélateur digital présente en effet une singularité dans sa mesure de $g^{(2)}$ autour du délais de valeur nulle et autour de quelques dates correspondantes aux durées de propagation, au sein des fibres, de réflexions internes (dues aux interfaces fibrées). La longueur des câbles coaxiaux doit être choisie pour déplacer l'origine du délai nul, loin des dates où il y

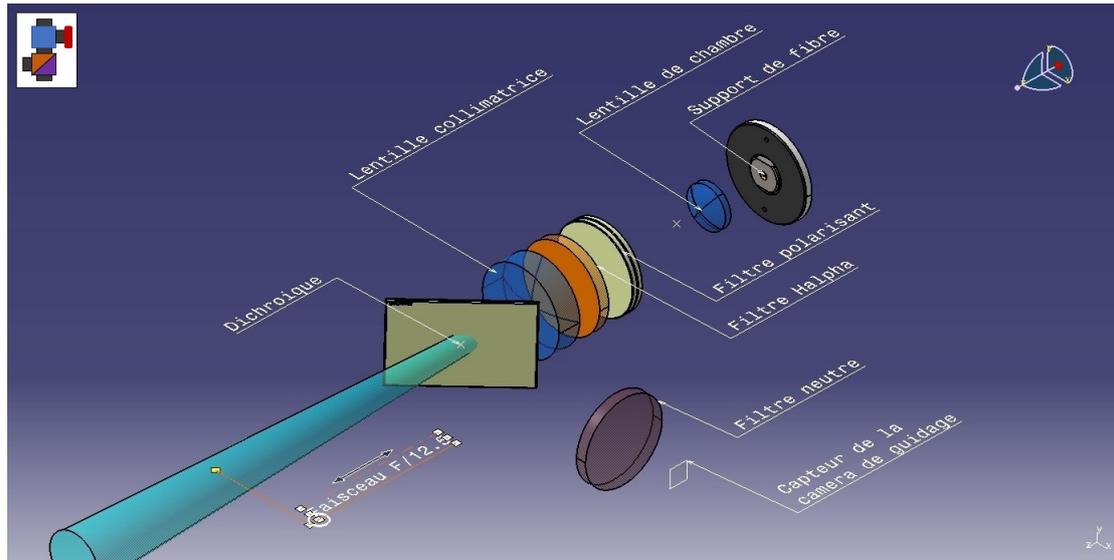


FIGURE 4.3 – Vue éclatée du module optique couplé au télescope, courtoisie de Jean-Pierre Rivet.

a un excès de corrélations dû aux réflexions parasites sur les interfaces des fibres multimodes. Remarque. Ces réflexions parasites peuvent être atténuées avec des fibres avec un connecteur “APC”, acronyme en anglais pour “Angled Physical Contact”.

Le corrélateur digital mesure en temps réel un histogramme des coïncidences de photo-événements avec une résolution minimale possible de 10ps, pour une fenêtre temporelle de largeur variable. La durée de cette fenêtre temporelle a été fixée à 600ns, la largeur possible dépend de la résolution choisie, de la puissance de calcul de l’ordinateur relié au convertisseur temps-digital, et du taux de transfert de données possible entre ce convertisseur et cet ordinateur. Cet histogramme correspond à la mesure de $g^{(2)}(\tau)$. La différence de délai opto-électronique est calculable grâce à la mesure des longueurs de câbles coaxiaux et des fibres multimodes, et des vitesses de groupe de leurs milieux. La date correspondant à un délai nul physiquement est calculée sans difficultés et de manière suffisamment précise pour retrouver la zone d’intérêt dans la mesure de $g^{(2)}(\tau)$.

I.3 Organisation du chapitre

La partie II. s’organise en deux sous-parties. La première sous-partie II.2 caractérise la réponse impulsionnelle globale R_δ du corrélogramme. L’étude analyse l’influence de l’intensité incidente sur la largeur caractéristique de R_δ . La principale cause est la différence du comportement des modules photo-compteurs à basse intensité et à forte intensité. La deuxième sous-partie II.3 quantifie l’influence de chaque composant sur la réponse impulsionnelle globale. L’étude se concentre sur l’influence de la longueur des connecteurs électroniques, et le seuil de datation, d’une impulsion générée par un module photo-compteur, du convertisseur temps-digital.

La troisième partie aborde l’exploitation des mesures. Connaissant R_δ , et la fonction $g^{(2)}$ théorique, quelles sont les caractéristiques de la fonction $g^{(2)} * R_\delta$ mesurée ? Cette partie identifie la figure de mérite du fit des données expérimentales la plus robuste, c’est à dire la figure de mérite du fit la moins fluctuante mesure à mesure dans des conditions expérimentales identiques. Le cas où R_δ limite la mesure, qui est le cas rencontré dans la campagne de mesures astrophysiques présentée partie IV., est également analysé en détail.

La partie IV. présente les résultats de la campagne de mesure sur la raie d’émission $H\alpha$ de l’étoile P Cygni, qui ont donné lieu à la publication [147]. Une première sous-partie I., reléguée à l’annexe D, présente quelques éléments sur P Cyg, sa variabilité et la forme du profil de sa

raie $H\alpha$. Cette sous-partie permet de justifier la pertinence de la mesure sur l'échelle de temps de la campagne d'observation. Les deux sous-parties suivantes IV..2 et IV..3, présentent respectivement les résultats de la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ (un télescope) et ceux de la mesure de $g^{(2)}(\tau, \rho)$ (deux télescopes).

II. Caractérisation de la réponse temporelle

Le montage considéré par défaut est celui présenté en sous-partie I..2, figure 4.1 et dont les détails sont donnés en annexe C, sauf mention contraire. Le module optique n'est plus couplé au télescope mais à une source de laboratoire selon le schéma de la figure 4.2.

II.1 Définitions et indications

La caractérisation temporelle s'est faite pour deux régimes de densité ν de photo-événements : $1 \leq \nu \leq 18\text{Mcps}$ (moyenne à forte) et $\nu \leq 1\text{Mcps}$. La caractérisation dans ces deux régimes n'a pas pu se faire avec la même source impulsionnelle : un laser femto-seconde (voir détails dans la prochaine sous-partie) pour le régime de ν moyenne à forte, et une diode laser impulsionnelle (voir détails dans la prochaine sous-partie) pour le régime de ν faible. Remarque. Le filtre $H\alpha$ (centré sur 653,6nm, de distribution spectrique rectangulaire de largeur 1nm) a été enlevé car il ne correspondait pas aux longueurs d'ondes disponibles. Les longueurs d'ondes utilisées (voir détails dans la prochaine sous-partie) restent relativement proches de 653,6nm.

La source (un laser femtoseconde ou une diode laser impulsionnelle) délivre des impulsions d'intensité $F_p \delta(t - kT)$, avec une période T , de largeur temporelle non résolue par le corrélogramme. Dans les deux cas tout se passe donc comme si le corrélogramme était soumis à une intensité de type peigne de Dirac

$$I(t) = F_p \sum_k \delta(t - kT).$$

Pour une telle intensité, l'auto-corrélation attendue est également un peigne de Dirac

$$\forall \tau \geq 0, R_\delta(\tau) \equiv g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \propto \sum_k \delta(\tau - kT). \quad (4.1)$$

La mesure de $g^{(2)}$ (4.1) correspond directement à R_δ .

II.2 Influence de l'intensité incidente

Régime de ν moyen à fort

La source utilisée est un laser femtoseconde cadencé à 80MHz. Les impulsions sont de l'ordre de quelques dizaines de femtosecondes, de longueur d'onde 662nm (relativement proche de la longueur d'onde $H\alpha$ qui est de 656,3nm, l'efficacité de détection est identique pour ces deux longueurs d'ondes). La puissance du laser femtoseconde est scannée sur une dizaine de points pour des densités ν de photo-événements entre 1Mcps et 18Mcps, quitte à placer une densité optique. La figure 4.4 dévoile la forme de la réponse impulsionnelle R_δ autour de la date qui correspond physiquement à un délai nul, c'est à dire au multiple $k = 1$ de T . Pour des ν standards (entre 1 et 7Mcps), la fonction R_δ est en très bonne approximation gaussienne : fit avec un SSE ("the Sum of Squares due to Error", plus la valeur de cette somme est faible plus le fit est pertinent pour la prédiction) de 0,0005 et un R-square (indique dans quelle proportion le modèle de fit explique la variabilité des données, une valeur de 1 indique que le modèle explique en totalité la variation des données) de 0,9995. Pour $\nu \geq 8\text{Mcps}$, la forme est un profil de Voigt avec une composante lorentzienne de faible largeur devant la largeur de la composante gaussienne.

A chaque point de puissance du laser femtoseconde, correspond un ν , et un écart-type σ de R_δ .

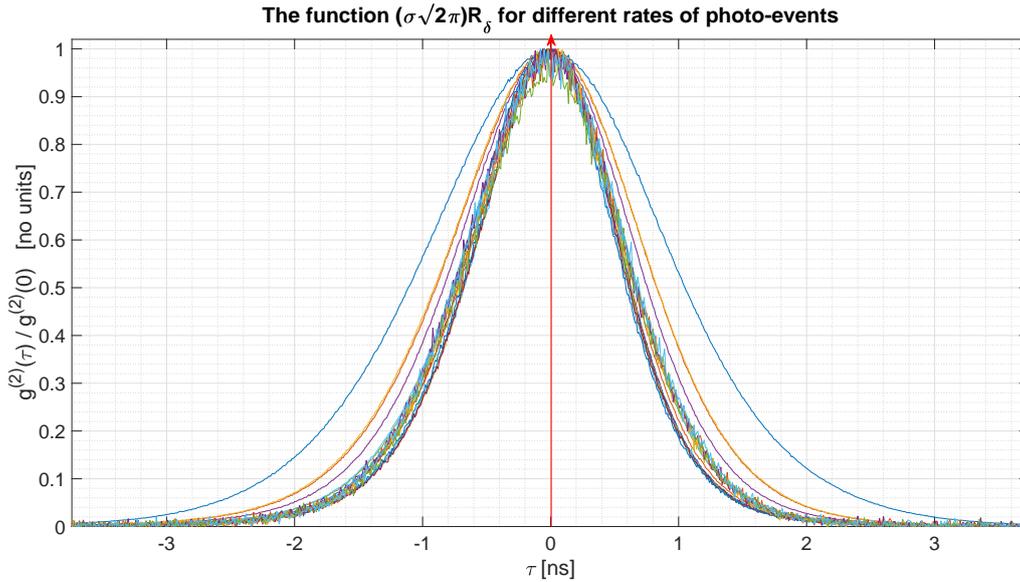


FIGURE 4.4 – Réponse impulsionnelle globale R_δ , divisée par sa valeur en zéro $1/\sigma(\nu)\sqrt{2\pi}$ (pour des raisons de présentation), mesurée pour différentes densités de photo-événements ν , de 0,99Mcps à 17,5Mcps, autour de la date qui correspond physiquement à un délai nul. La réponse R_δ idéale est représentée par la flèche rouge (distribution de Dirac). Les trois courbes avec les largeurs les plus grandes, qui se distinguent clairement, correspondent à des $\nu \geq 8$ Mcps, pour lesquels R_δ est un profil de Voigt avec une composante lorentzienne de faible largeur devant la largeur de la composante gaussienne.

Le temps d'acquisition est de quelques minutes par point (le RSB est très grand devant 1). La mesure de $g^{(2)}$ obtenue est corrigée d'une mesure obtenue, au même ν , avec une source de temps de cohérence nul pour la résolution de l'instrument. Cela permet de corriger les corrélations parasites dues à des biais instrumentaux. L'écart-type σ de R_δ est déduit précisément par un fit utilisant la méthode des moindres carrés (basé sur un algorithme de type 'Trust-Region'). La figure 4.5 donne l'évolution de la largeur à mi-hauteur $2\sigma\sqrt{2\ln(2)}$ de R_δ avec ν . La loi empirique trouvée pour la réponse impulsionnelle globale du corrélogramme est ainsi

$$\forall \nu \in [0.99, 17.5]\text{Mcps}, \quad R_\delta(\tau, \nu) = \frac{1}{\sigma(\nu)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma^2(\nu)}\right), \quad (4.2)$$

où l'écart-type $\sigma(\nu)$ est la fonction

$$\sigma(\nu) = \frac{1}{2\sqrt{2\ln(2)}} (0,9500 \cdot \exp(-0,9835 \cdot \nu) + 1,196 \cdot \exp(0,03633 \cdot \nu)), \quad (4.3)$$

avec ν en Mcps et $\sigma(\nu)$ donnée en ns.

Régime de faible ν

La cadence du laser femtoseconde est de 80MHz, ce qui correspond à une période de $T = 12.5$ ns. Avec le coupleur fibré équilibré (en principe, et en pratique c'est une bonne approximation à 2% près autour de 660nm), une voie de détection est soumise (probabilistiquement) à une cadence d'impulsion de période de l'ordre du temps mort de détection (d'environ 24ns). Pour étudier le comportement de R_δ en régime de basse intensité, il faut que les photo-événements soient rares relativement au temps mort de la détection. Il ne faut donc pas seulement atténuer la

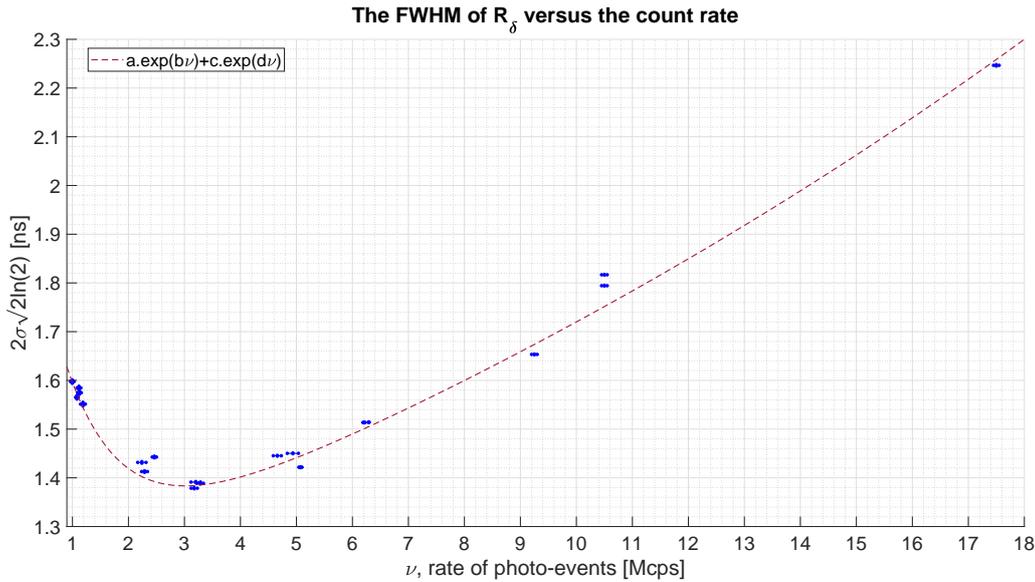


FIGURE 4.5 – Evolution de la largeur à mi-hauteur $2\sigma\sqrt{2\ln(2)}$ de la réponse impulsionnelle avec la densité de photo-événements. Les points en bleu représentent les données expérimentales avec leurs barres d’erreur (résultat de l’écart-type du fit gaussien sur la fonction $g^{(2)}(\tau)$ mesurée). Le modèle déduit par fit (méthode des moindres carrés, algorithme type ‘Trust-Region’) est une somme de deux exponentielles. Les paramètres sont : $a = 0,9500$; $b = -0,9835$; $c = 1,196$; $d = 0,03633$. Les résultats du fit sont très bons : SSE= 0,0031; le modèle est approprié pour la prédiction, R-square= 0,9947; le modèle explique 99,5% des variations observées.

puissance de la source impulsionnelle, il faut aussi changer sa cadence pour que la période T soit plus grande que le temps mort de la détection. Cela n’était pas possible avec le laser femtoseconde utilisé, et il a fallu changer de source. La source utilisée pour ce faire a été une Diode Laser Impulsionnelle (DLI). Les impulsions délivrées s’étalent sur une durée comprise entre 33 et 35ps, qui reste donc suffisamment faible pour être considérée comme une distribution de Dirac pour la résolution du corrélogramme. La longueur d’onde est 778nm, et le comportement des modules photo-compteurs est sensiblement le même qu’à la longueur d’onde de 660nm ou H α (environ 69% à 656.3nm et à 660nm d’efficacité de détection, contre 65% à 778nm).

La première étape est de vérifier l’absence de dispersion temporelle qui serait induite par les fibres multimodes. En particulier par la longue fibre (20m) reliant la sortie du module optique à l’entrée du coupleur fibré qui crée les deux voies de détections. La longueur de 20m est imposée par la disposition des salles du bâtiment abritant les télescopes. Cette précaution est davantage nécessaire qu’avec le laser femtoseconde, car les impulsions ont cette fois une durée de l’ordre de quelques picosecondes, donc plus proche de la résolution temporelle de l’instrument (de quelques centaines de picosecondes). La largeur temporelle des impulsions mesurée en entrée du coupleur (avec un oscilloscope moderne), après les vingt mètres de fibre multimode, est toujours comprise entre 33 et 35ps.

Ensuite les points de mesure pour les différents ν sont obtenus en faisant varier la cadence de la DLI, et/ou en atténuant à l’aide de densité(s) optique(s). En fonction de la valeur de ν plusieurs heures d’acquisitions sont nécessaires par point de mesure afin d’avoir un RSB correct (i.e. : ≥ 5). Les densités optiques sont placées en amont du module optique. De même qu’à plus fort ν , pour chaque ν une mesure de $g^{(2)}$ avec une source de temps de cohérence nul pour la résolution temporelle de l’instrument (une lampe à filament) est réalisée. Lorsque ν est proche de la densité de photo-événements obtenue dans le noir total, la mesure de $g^{(2)}$ est corrigée de celle obtenue dans le noir total. Les corrélations parasites sont ainsi corrigées avant de réaliser le fit de R_δ . La

figure 4.6 donne un exemple de R_δ obtenue.

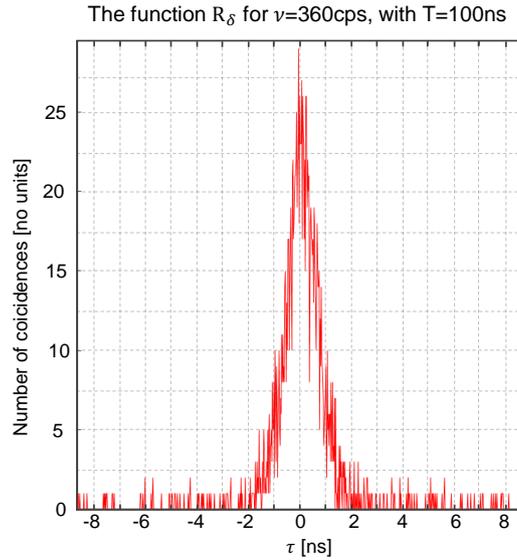


FIGURE 4.6 – Exemple de réponse impulsionnelle non normalisée mesurée dans le régime de très basse intensité pour un RSB de 25. Les impulsions de la DLI sont espacées de 100ns (environ 10 fois le temps mort de la détection) et atténuée de sorte que $\nu = 360\text{cps}$ (au moins trois fois le ν obtenu dans le noir total). Le fit gaussien est très bon : SSE de 0,009 et un R-square de 0,992.

En bonne approximation R_δ est une gaussienne, le fit gaussien est réalisé avec la même méthode qu'à plus fort ν , et ses résultats sont très bons : typiquement un SSE de 0,009 et un R-square de 0,992. Pour chaque ν un écart-type σ du fit gaussien de R_δ est obtenu. Il n'y a pas de tendance particulière relevée pour l'évolution de σ en fonction de ν . L'évolution de σ en fonction de ν fluctue autour d'une valeur moyenne $756 \pm 39\text{ps}$. L'incertitude du fit est au maximum de quelques picosecondes, 9ps au maximum. L'incertitude statistique de la série de mesure est de 39ps. Ces deux incertitudes sont indépendantes. L'incertitude finale retenue sur la mesure de σ est donc de $\sqrt{39^2 + 9^2} = 40\text{ps}$:

$$\forall \nu \in [0, 1]\text{Mcps}, \quad \sigma(\nu) = 756 \pm 40\text{ps}. \quad (4.4)$$

L'incertitude sur ν est au plus de 3,85% de sa valeur, de même qu'à plus fort ν (figure 4.5). Le résultat de σ pour le dernier point de mesure où $\nu = 1,3249\text{Mcps}$ est consistant avec celui de la figure 4.5 aux barres d'erreurs près.

Analyse supplémentaire

Enfin, une analyse supplémentaire a été menée pour déterminer le comportement de la réponse impulsionnelle en fonction de l'énergie présente dans les impulsions. Une même densité ν (grandeur moyenne par définition) peut correspondre à une faible cadence avec une énergie importante par impulsion, mais également à une cadence dix fois plus forte avec une énergie dix fois plus faible par impulsion. La réponse impulsionnelle R_δ doit en principe dépendre de ν uniquement, bien sûr pour la gamme d'acceptance énergétique des détecteurs. Cette étude est donc une vérification qui permet de valider le résultat (4.4) tiré des données présentées figure 4.7.

Pour réaliser cette étude il faut établir l'évolution de l'écart-type σ de R_δ avec l'énergie d'une impulsion, ou le nombre de photons présent en moyenne dans une impulsion, noté n_{pp} , arrivant sur une voie de détection. Pour mesurer n_{pp} , une façon de faire est de mesurer la puissance des impulsions P_T pour une cadence $1/T$ donnée (ou mesurée), à l'aide d'un bolomètre par exemple,

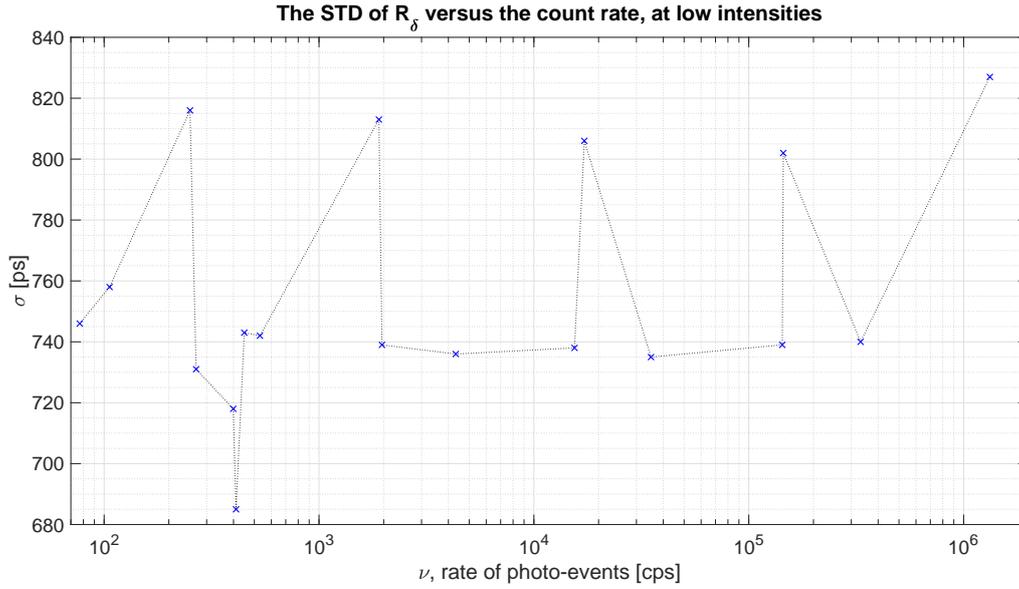


FIGURE 4.7 – Écart-type de la réponse impulsionnelle à basse intensité en fonction de ν . L'échelle des abscisses est logarithmique. L'écart-type σ est déduit d'un fit gaussien (avec la même méthode que pour la figure 4.5) sur la fonction $g^{(2)}$ mesurée.

et d'en déduire n_{pp} avec la connaissance de la longueur d'onde $\lambda_p = 2\pi c_g/\omega_p$, où c_g est la vitesse de groupe des impulsions dans les fibres multimodes en silice.

$$n_{pp} = \alpha \frac{P_T T}{\hbar \omega_p}, \quad (4.5)$$

où α est le coefficient d'atténuation qui prend en compte le facteur 2 dû au coupleur fibré. Une densité de photo-événements ν peut correspondre à plusieurs couples $(n_{pp}, 1/T)$. Un couple $(n_{pp}, 1/T)$ est obtenu en faisant varier $1/T$ et l'atténuation α . Les atténuations α possibles sont bien sûr fixées par le jeu de densités optiques disponible. Le protocole expérimental est le suivant : pour une atténuation α donnée (mesurée dans un premier temps), et pour une cadence $1/T$ donnée les mesures de P_T et $g^{(2)}$ sont effectuées. La mesure de P_T s'effectue au bolomètre quand cela est possible, sinon elle est déduite de la mesure des différentes atténuations α , et de la caractérisation puissance-fréquence de la DLI réalisée au préalable. La mesure de $g^{(2)}$ avec un RSB suffisant (i.e. ≥ 5) peut prendre quelques dizaines de minutes comme plusieurs heures en fonction de l'atténuation α en jeu. La fonction $g^{(2)} = R_\delta$ obtenue est ensuite corrigée des corrélations parasites, et le fit gaussien est effectué pour déduire σ (écart-type de R_δ). Pour un α donné, la mesure de $g^{(2)}$ est effectuée pour 5 cadences : 1kHz, 10kHz, 100kHz, 1MHz, 10MHz (qui donnent toutes une période T entre les impulsions plus grandes que le temps mort de la détection). La figure 4.8 présente les résultats. La barre d'erreur verticale est donnée par (4.4), soit ± 40 ps. Quelque soit la cadence, l'incertitude sur la cadence est tout à fait négligeable devant celle de la mesure de P_T . La barre d'erreur horizontale est donc principalement due à la mesure de la puissance P_T . Le bolomètre à disposition était optimal pour une mesure de puissance entre 1 et $500\mu\text{W}$. A faible puissance ($\sim 0, 100\mu\text{W}$) et à forte puissance ($\sim 900\mu\text{W}$), les incertitudes sont plus grandes qu'en régime de mesure nominal. L'incertitude maximale retenue horizontalement est 8% de la valeur n_{pp} . Aux barres d'incertitudes près, l'écart-type σ de R_δ correspondant à un $\nu = n_{pp}e(\lambda_p)/T$, où $e(\lambda_p)$ est l'efficacité de détection à la longueur d'onde λ_p , est identique pour les différents couples $(n_{pp}, 1/T)$ qui correspondent à ce ν . Conclusion : le résultat (4.4) est bien validé.

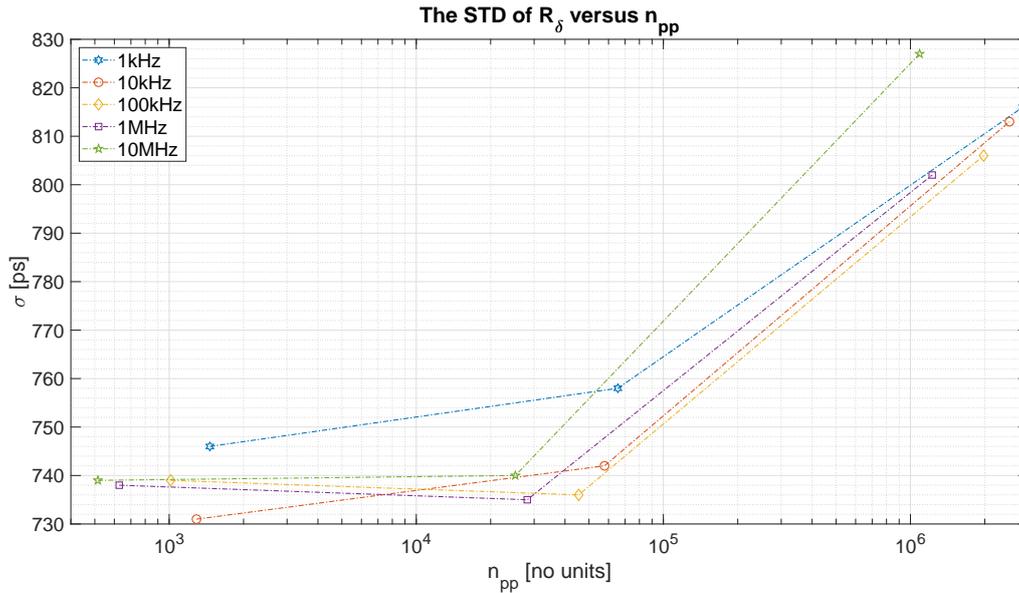


FIGURE 4.8 – Evolution de l'écart-type de R_δ en fonction de l'énergie présente dans les impulsions. L'échelle des abscisses est logarithmique. Pour un ν donné correspondant à plusieurs couples $(n_{pp}, 1/T)$ l'écart-type σ ne change pas, aux barres d'erreur près (non représentées, verticalement : $\pm 40\text{ps}$, horizontalement $\pm 8\%$ de n_{pp}). Exemple. Le ν correspondant à une cadence de 100kHz avec $3,5 \cdot 10^4$ photons par impulsions, correspond aussi à une cadence de 1MHz avec $3,5 \cdot 10^3$ photons par impulsions, et l'écart-type σ est bien le même pour ces deux couples $(n_{pp}, 1/T)$ correspondant à ce ν .

II.3 Influence des composants

La section précédente donne l'écart-type σ de la réponse R_δ , qui est la réponse impulsionnelle globale du corrélogramme. Afin d'identifier les contributions des différents composants du corrélogramme dans cet écart-type, quelques études supplémentaires sont résumées ci-après. La réponse R_δ du corrélogramme à une cadence d'impulsions (picosecondes ou moins) est, dans le cas d'un instrument parfait, un peigne Dirac (4.1) de paramètre la période T de la cadence des impulsions. Dans la réalité, voir figure 4.4, autour d'un instant de date de multiple kT la réponse impulsionnelle R_δ est une gaussienne (4.2) de variance σ^2 , qui évolue en fonction de ν . Cependant, une question demeure : pour un ν donné, cette variance est-elle identique à tous les instants de date de multiple kT ? Cette question permet de déterminer s'il y a une limitation sur la fenêtre temporelle pour laquelle l'histogramme des coïncidences entre photo-événements est calculé. Si le comportement du corrélateur digital varie significativement (relativement à la valeur moyenne de l'écart-type de σ) entre des τ grands et des τ petits, il faut alors paramétrer les chemins opto-électroniques des deux voies de détection, et donc la longueur des câbles coaxiaux et des fibres multimodes, pour translater l'origine physique $\tau = 0$ dans la plage de plus faible σ (vers les τ grands ou vers les τ petits). Cette question se pose dans un contexte astrophysique car la longueur des câbles et des fibres est contrainte par la distance entre les télescopes, et la disposition du bâtiment. Les longueurs de câbles coaxiaux nécessaires peuvent atteindre plusieurs dizaine de mètres (33m en l'occurrence, voir annexe C). La figure 4.9 donne les résultats de la largeur à mi-hauteur $2\sigma\sqrt{2\ln(2)}$ résultant du fit gaussien de R_δ pour tous les multiples kT sur une fenêtre de 600ns, avec une résolution minimale de 10ps, pour un ν autour de 3Mcps. L'origine physique $\tau = 0$ se situe autour de la date de 203ns. L'étude a été répétée pour plusieurs ν entre 100kcps et 8Mcps, et aucune tendance particulière n'est à signaler, quelque soit ν . L'incertitude du fit (entre 9 et 15ps) quant à σ est plus importante que

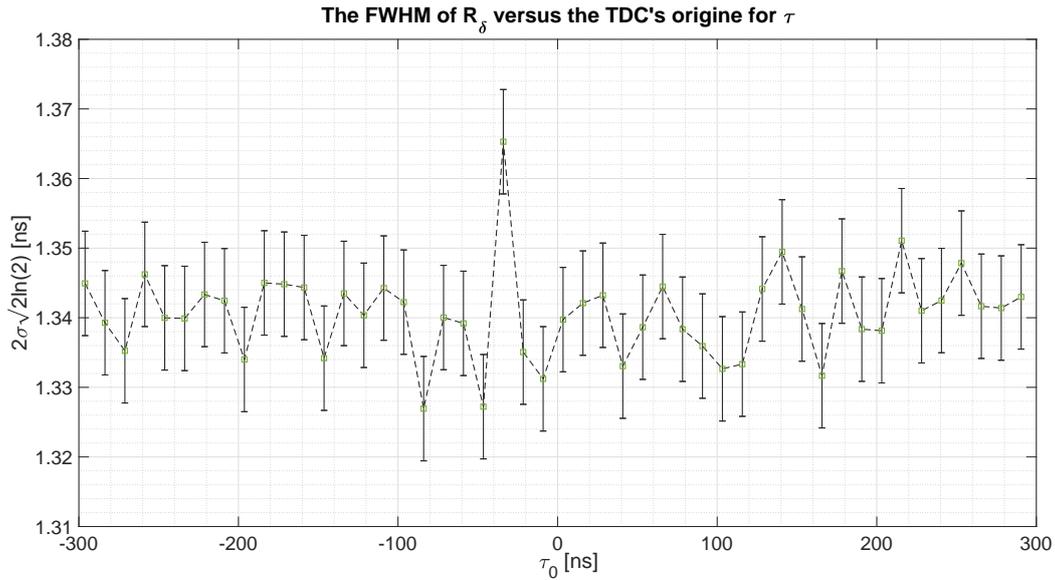


FIGURE 4.9 – Evolution de la largeur à mi-hauteur $2\sigma\sqrt{2\ln(2)}$ résultant du fit gaussien de R_δ en fonction des multiples kT pour $\nu = 3.1742\text{Mcps}$. Il n’y a aucune tendance, et l’écart-type de cette série de mesure est de 7ps , inférieur à l’incertitude du fit de R_δ .

l’incertitude statistique sur la série de mesure, qui est au plus de 8ps . Conclusion, le calcul de l’histogramme des coïncidences par le corrélateur digital est homogène sur une fenêtre de 600ns , avec une résolution minimale de 10ps , quelque soit $\nu \in [0, 8]\text{Mcps}$.

Le seuil à partir duquel le convertisseur temps-digital transforme une impulsion générée par un module photo-compteur en un photo-événement est appelé seuil de comptage. Son influence a été quantifiée pour un ν donné entre 100kpcps et 8Mcps . La figure 4.10 dévoile le résultat. Il n’y a pas d’influence significative relativement à la valeur de σ , l’effet est inférieur à 20ps pour un même ν , soit moins de $2,6\%$ de σ .

Enfin, l’influence de la longueur des câbles coaxiaux a été mesurée pour un ν donné entre 100kpcps et 8Mcps . La figure 4.11 donne le résultat de la comparaison de deux configurations du corrélogramme impliquant des longueurs de câbles coaxiaux très différentes (d’un facteur 6). Là encore, l’influence est négligeable relativement à la valeur de σ . La réduction d’un facteur ~ 6 de la longueur d’un câble coaxial a un effet de réduction de l’ordre de 20ps , soit $2,6\%$ de σ .

Conclusion. La principale contribution dans l’écart-type de la réponse impulsionnelle R_δ vient donc des modules photo-compteurs.

Le constructeur indique un écart-type de 350ps pour la réponse impulsionnelle d’un module photo-compteur. L’auto-corrélation d’une réponse impulsionnelle gaussienne avec cet écart-type donnerait une réponse impulsionnelle gaussienne d’écart-type égal à 495ps , soit 66% de la valeur trouvée en (4.4). L’ordre de grandeur de la contribution manquante ne peut pas s’expliquer par les autres composants. L’écart-type de la réponse impulsionnelle d’un module photo-compteur, au moment de la campagne expérimentale rapportée dans la partie IV., est donc plus élevé que ce qui est annoncé par le constructeur.

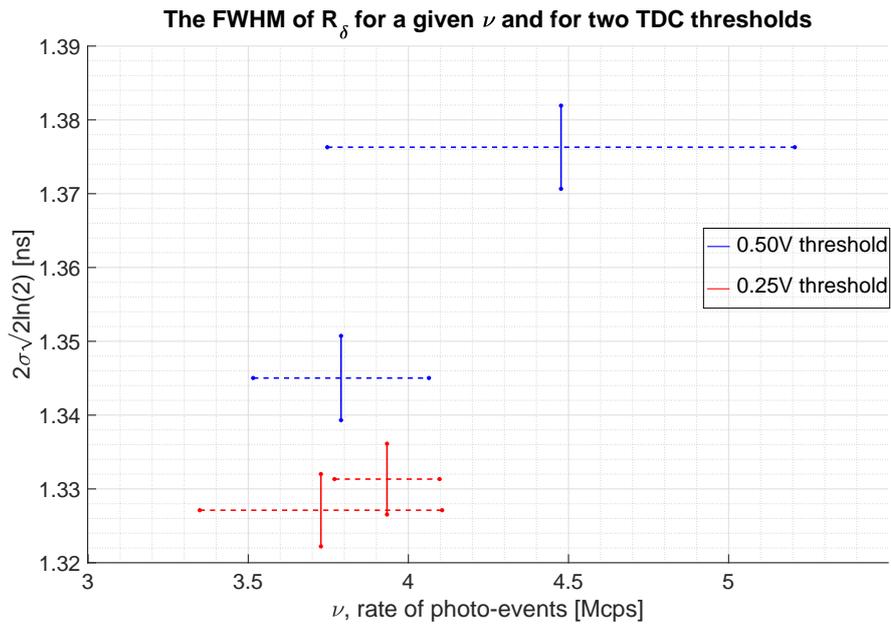


FIGURE 4.10 – Influence du seuil de comptage d'un photo-événement du convertisseur temps-digital, sur l'écart-type σ , pour ν autour de 4Mcps. Les barres d'erreur verticales indiquent l'incertitude du fit gaussien, les barres d'erreur horizontales indiquent l'écart-type associé à la valeur moyenne ν .

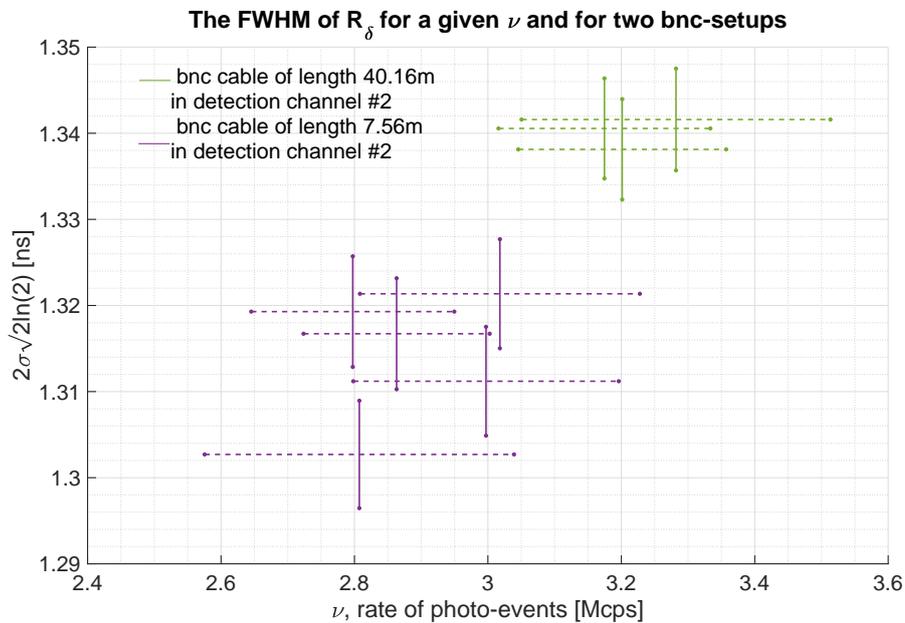


FIGURE 4.11 – Influence de la longueur des câbles coaxiaux sur σ pour ν autour de 3Mcps. Les barres d'erreur verticales indiquent l'incertitude du fit gaussien, les barres d'erreur horizontales indiquent l'écart-type associé à la valeur moyenne ν .

III. Méthode pour l'exploitation des mesures

Cette présente sous-partie s'appuie sur les deux sous-parties précédentes pour déterminer la forme attendue de la fonction $g^{(2)}$ mesurée avec le corrélogramme de réponse R_δ . Une fois le modèle de fit identifié, il faut examiner la figure de mérite la plus robuste, afin d'établir une procédure de mesure rigoureuse.

III.1 Justification du modèle de fit pour la mesure de $g^{(2)}$

Il faut premièrement justifier le modèle (de fit) attendu pour une mesure de $g^{(2)}$, donné par table 2.1, avec un corrélogramme de réponse impulsionnelle R_δ , donnée par (4.2).

Par soucis de simplicité le calcul est effectué dans la limite $s \rightarrow +\infty$ (champ Rayleigh), mais le cas où s est fini ne change rien à la conclusion quant au modèle de fit approprié. Dans ce cas, $s \rightarrow +\infty$, il est rappelé que :

$$\forall \tau, \quad g^{(2)}(\tau) = 1 + \exp(-2|\tau|/\tau_c - \sigma_\omega^2 \tau^2), \quad (4.6)$$

où la constante τ_c est donnée par (1.60), la constante σ_ω donnée par (2.1), est reliée à σ_v donnée par (1.53) via la transformation (2.30), résultant de l'effet Doppler-Fizeau non-relativiste par rapport à l'observateur.

La convolution de $g^{(2)}$ avec R_δ ne pose pas de difficultés calculatoires particulières, après quelques manipulations d'intégrales gaussiennes, il vient :

$$\forall \tau, \quad g^{(2)} * R_\delta[\tau] = 1 + C_0 \cdot \exp\left(-\left(1 - \Upsilon^2\right) \frac{\tau^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \left[\exp\left(\Upsilon^2 \frac{\tau}{\tau_c}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\Delta + \Upsilon \frac{\tau}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \exp\left(-\Upsilon^2 \frac{\tau}{\tau_c}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\Delta - \Upsilon \frac{\tau}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right], \quad (4.7)$$

où :

— Υ est une constante sans dimension faisant intervenir le rapport ϵ_1 sans dimension

$$\epsilon_1 := \frac{1}{\sigma\sigma_\omega}, \quad (4.8)$$

$$\Upsilon := \sqrt{\frac{\epsilon_1^2}{2 + \epsilon_1^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 2(\sigma\sigma_\omega)^2}}, \quad (4.9)$$

— Δ est une constante sans dimension faisant intervenir le rapport ϵ_2 sans dimension

$$\epsilon_2 := \frac{\tau_c}{\sigma}, \quad (4.10)$$

$$\Delta := \frac{\Upsilon\sqrt{2}}{\epsilon_2} = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\tau_c \sqrt{1 + 2(\sigma\sigma_\omega)^2}}, \quad (4.11)$$

— C_0 est une constante vis-à-vis de τ , sans dimension, définie par :

$$C_0 := \frac{\Upsilon}{2} \cdot \exp(\Delta^2), \quad (4.12)$$

— où $\operatorname{erfc}(\dots)$ est la fonction d'erreur de Gauss complémentaire :

$$\operatorname{erfc}(X) := 1 - \operatorname{erf}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_X^{+\infty} \exp(-u^2) du.$$

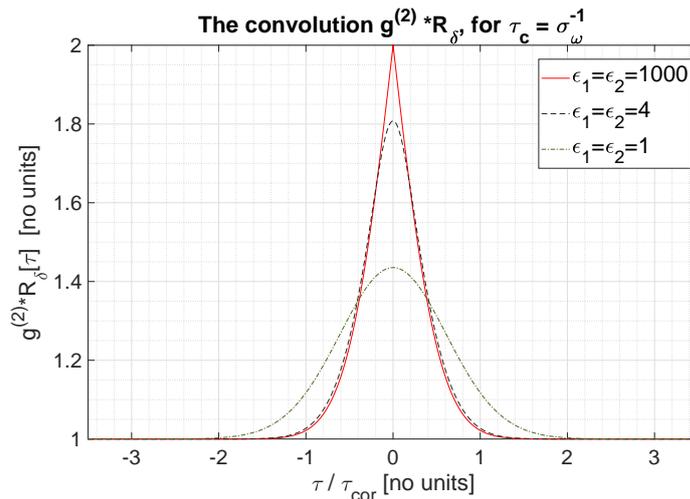


FIGURE 4.12 – Le graphe donne la convolution (4.7) pour quelques valeurs $\epsilon_1, \epsilon_2 \geq 1$, avec $\tau_c = \sigma_\omega^{-1}$. La définition choisie pour la constante τ_{cor} est donnée par (4.21), c'est la largeur à mi-hauteur de $g^{(1)}(\tau)$ pour le champ considéré.

Deux exemples de graphe de (4.7) sont donnés, un en figure 4.12 et un en figure 4.14. La figure 4.12 donne la représentation graphique pour différentes valeurs de ϵ_1 et ϵ_2 , grandes devant 1 (i.e. : l'écart-type σ de R_δ ne limite pas la mesure), et la figure 4.14 pour $\epsilon_1, \epsilon_2 \ll 1$ (i.e. : l'écart-type σ de R_δ limite la mesure). Remarque ; pour définir rigoureusement la limitation ou non de la mesure par σ , la quantité à comparer à σ est la largeur caractéristique du spectre $g^{(1)}$ (voir (4.21)).

Quelques commentaires sur le résultat (4.7). La dépendance gaussienne en facteur des exponentielles que multiplie les fonctions d'erreur complémentaires de Gauss $\text{erfc}(\dots)$, assure la convergence vers 1 du résultat lorsque $\tau \rightarrow \infty$.

Aussi, il n'y a pas de difficultés à vérifier que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} (4.7) = 1 + \exp(-2|\tau|/\tau_c - \sigma_\omega^2 \tau^2), \quad (4.13)$$

comme attendu puisque, au sens des distributions, R_δ converge dans ce cas vers la distribution de Dirac, élément neutre pour le produit de convolution.

La valeur maximale est en $\tau = 0$, elle vaut :

$$g^{(2)} * R_\delta[0] = 1 + 2C_0 \cdot \text{erfc}(\Delta) \quad (4.14)$$

La quantité $2C_0 \cdot \text{erfc}(\Delta)$ est appelée dans ce qui suit *contraste*. Dans un cas idéal où σ est petit devant le temps de cohérence τ_{cor} , le contraste est maximal et vaut 1. Le temps τ_{cor} est défini comme la largeur caractéristique associée à $g^{(1)}$, dont une définition possible est la largeur à mi-hauteur. Pour une fonction $g^{(1)}$ pour un champ Rayleigh ou ricien de la table 2.1, la largeur à mi-hauteur est

$$\tau_{\text{cor}} := \sigma_\omega^{-1} \sqrt{4 \ln(2) + \zeta^2}, \quad (4.15)$$

où $\zeta := \epsilon_1/\epsilon_2$. Dans le cas d'un champ chaotique ricien la valeur maximale du contraste vaut $g^{(2)}(0) - 1 = 1 - 1/(1+s)^2$, voir (2.28), qui est donc inférieure à 1. La figure 4.13 donne l'évolution du contraste $2C_0 \cdot \text{erfc}(\Delta)$ en fonction de ϵ_1 , pour différentes valeurs de ϵ_2 relativement à ϵ_1 (i.e. : τ_c plus ou moins grand devant σ_ω^{-1}). La valeur en $\tau = 0$ chute très rapidement (loi de puissance) de la valeur idéale, égale à 1, vers 0 au fur et à mesure que σ limite la mesure. Ce phénomène est appelé ci-après *chute de contraste*, au sens où la valeur du contraste chute de sa valeur maximale de 1 pour se rapprocher de zéro. C'est la première valeur entre celle de

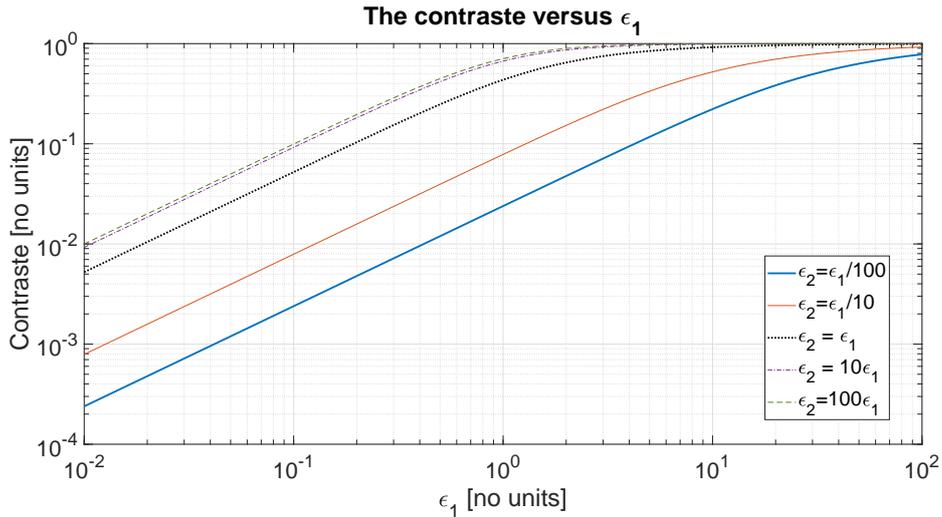


FIGURE 4.13 – Le graphe donne la valeur en $\tau = 0$ (4.14) moins un, qui est appelé le *contraste*, pour $\epsilon_1 \in [0.01, 100]$, et pour différents ϵ_2 (relativement à ϵ_1). Les échelles des abscisses et des ordonnées sont logarithmiques.

ϵ_1 et celle de ϵ_2 à être inférieure à 1 qui fixe la valeur de σ pour laquelle la chute de contraste commence. Un ordre de grandeur qui est peut-être à retenir : pour une valeur de σ dix fois plus grande que (4.21) le contraste a chuté de plus de 90% de son amplitude maximale de 1.

En fonction du classement des temps $\sigma, \tau_c, \sigma_\omega^{-1}$, l'équation (4.7) peut se simplifier. Dans le cas où $\sigma \gg \tau_c, \sigma_\omega^{-1}$, il vient au premier ordre de ce qui devient, avec cette hiérarchie, des infiniments petits ϵ_1 et ϵ_2 ,

$$\lim_{\sigma \gg \tau_c, \sigma_\omega^{-1}} \left(g^{(2)} * R_\delta[\tau] \right) = 1 + C_1 \cdot \exp\left(\frac{-\tau^2}{2\sigma^2}\right) + o(\epsilon_1) + o(\epsilon_2), \quad (4.16)$$

où la quantité C_1 est une constante vis-à-vis de τ , qui est l'approximation du contraste avec l'ordering en jeu, et qui est définie par :

$$C_1 := \frac{\epsilon_1}{\sqrt{2}} \cdot \exp(\zeta^2) \operatorname{erfc}(\zeta), \quad (4.17)$$

où ζ est le rapport sans dimension :

$$\zeta := \frac{1/\sigma_\omega}{\tau_c} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (4.18)$$

Le résultat (4.16) est une gaussienne, le graphe est donné figure (4.14). Pour la figure 4.14, il a été choisi (arbitraire) de prendre $\tau_c \sim \sigma_\omega^{-1}$, autrement dit, l'élargissement dû aux collisions et l'élargissement dû à l'effet Doppler-Fizeau ont le même poids. Pour $\epsilon_1, \epsilon_2 \ll 1$ la convolution (4.7) devient gaussienne (4.16).

En toute rigueur, les données expérimentales suivent bien (4.7). Cependant, l'approximation (4.16) est très bonne dans le cadre des mesures effectuées, où $\sigma \gg \tau_c, \sigma_\omega^{-1}$: en effet, en pratique il n'y aucune différence appréciable entre le fit des données par (4.7) et le fit des données par (4.16). Les données sont fittées par (4.7), mais par abus de langage, justifié par (4.16), c'est le terme de *fit gaussien* de la mesure de $g^{(2)}$ qui est employé dans ce qui suit. L'écart-type associé au fit est mentionné comme l'écart-type d'une densité de probabilité gaussienne.

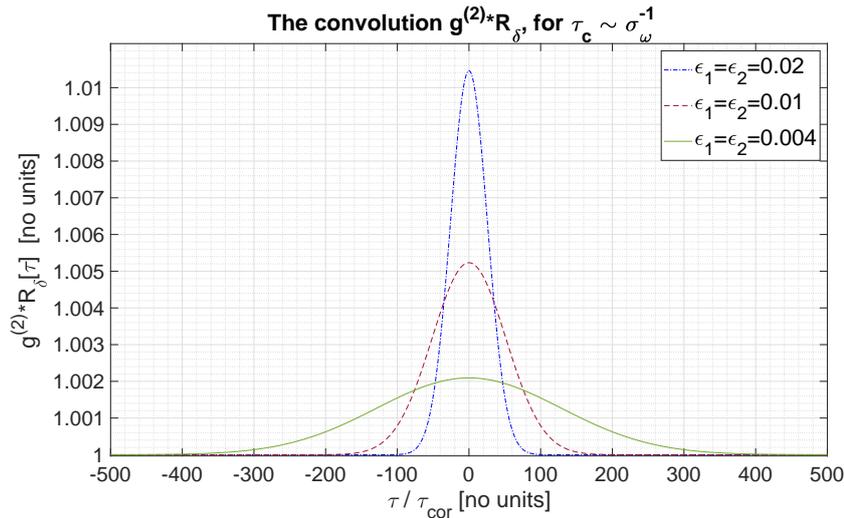


FIGURE 4.14 – Le graphe donne la convolution (4.7) pour quelques valeurs $\epsilon_1, \epsilon_2 \ll 1$, avec $\tau_c = \sigma_{\omega}^{-1}$. La définition choisie pour la constante τ_{cor} est défini par (4.21) comme la largeur à mi-hauteur de $g^{(1)}(\tau)$ pour le champ considéré. Une constante de temps plus pertinente, dans ce cas où (4.16) est une bonne approximation, est σ .

III..2 Interprétation du contraste lorsque σ limite la mesure

Il s'agit ici de discuter l'interprétation de la notion de contraste définie via (4.14), dans le cas où σ limite la mesure. Cette quantité C_1 est établie dans la sous-sous-partie suivante comme la figure de mérite du fit des données expérimentales, la plus pertinente.

Il peut être remarqué que C_1 prend une forme particulière lorsque $\varsigma \ll 1$

$$(\sigma_{\omega}^{-1} \ll \tau_c \Leftrightarrow \varsigma \ll 1) \Rightarrow C_1 = \frac{\epsilon_1}{\sqrt{2}} + o(\epsilon_1) + O(\varsigma), \quad (4.19)$$

et lorsque $\varsigma \gg 1$,

$$(\sigma_{\omega}^{-1} \gg \tau_c \Leftrightarrow \varsigma \gg 1) \Rightarrow C_1 = \frac{\epsilon_2}{\sqrt{2\pi}} + o(\epsilon_2) + O(\varsigma^{-1}), \quad (4.20)$$

Dans les cas limites d'un spectre lorentzien qui correspond à (4.20), et d'un spectre gaussien qui correspond à (4.19), C_1 ne fait respectivement intervenir que τ_c et σ_{ω}^{-1} . La donnée de C_1 , avec celle de σ , permet donc de déduire, dans ces cas limites, quantitativement la constante de temps régissant l'évolution des fonctions de corrélation avec τ .

Cependant, lorsque $\varsigma \sim 1$, i.e. : τ_c ne peut être négligé devant σ_{ω}^{-1} , et vice versa, la mesure de C_1 ne permet pas de déduire τ_c ou σ_{ω}^{-1} , car il y a deux inconnues (τ_c, σ_{ω}) pour une équation : (4.17). De plus, comme σ limite la mesure, i.e. $\sigma \gg \sigma_{\omega}^{-1}, \tau_c$, la forme de $g^{(2)} * R_{\delta}$ est uniquement déterminée par σ , voir (4.16). Par conséquent la forme fonctionnelle de $g^{(2)} * R_{\delta}$ ne permet pas non plus de déduire τ_c et σ_{ω} . Dans le cas $\sigma \gg \sigma_{\omega}^{-1}, \tau_c$, et lorsque $\varsigma \sim 1$, l'accès à τ_c et σ_{ω} est donc impossible avec la mesure considérée. Dans ce cas limitant, la mesure de C_1 permet seulement d'apprécier qualitativement la largeur caractéristique associée à $g^{(1)}$, notée τ_{cor} , dont une définition possible est la largeur à mi-hauteur, pour une fonction $g^{(1)}$ pour un champ Rayleigh ou ricien de la table 2.1, la largeur à mi-hauteur est

$$\tau_{\text{cor}} := \sigma_{\omega}^{-1} \sqrt{4 \ln(2) + \varsigma^2}. \quad (4.21)$$

Remarque. Il peut aussi être choisi de définir τ_{cor} comme la moyenne quadratique de τ_c et σ_{ω}^{-1} :

$$\tau_{\text{cor}} = \sqrt{\sigma_{\omega}^{-2} + \tau_c^2} = \sigma_{\omega}^{-1} \sqrt{1 + \varsigma^{-2}}.$$

Quelque soit la définition choisie pour τ_{cor} , le contraste C_1 se réécrit en fonction de τ_{cor} et de ς , par exemple avec (4.21) :

$$C_1 = \frac{\tau_{\text{cor}}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\exp(\varsigma^2) \text{erfc}(\varsigma)}{\sqrt{\varsigma^2 + 4 \ln(2)}}. \quad (4.22)$$

La constante qui multiplie le rapport τ_{cor}/σ est fixée en fonction du ratio ς entre σ_ω^{-1} et τ_c . La donnée de C_1 ne permet pas plus de déterminer le couple d'inconnues $(\tau_{\text{cor}}, \varsigma)$ que le couple d'inconnues équivalent $(\tau_c, \sigma_\omega^{-1})$.

En conclusion ; lorsque : $\sigma \gg (\sigma_\omega^{-1}, \tau_c)$, le contraste C_1 est proportionnel à la constante de temps caractéristique τ_{cor} (quelque soit sa définition précise) régissant l'évolution de $g^{(1)}$

$$C_1 \propto \frac{\tau_{\text{cor}}}{\sigma} + o(\epsilon_1) + o(\epsilon_2), \quad (4.23)$$

et cette relation qualitative ne peut être quantitative que lorsque le spectre est gaussien, ce qui correspond à (4.19), ou lorentzien, ce qui correspond à (4.20).

III..3 Figure de mérite du fit

Maintenant que le modèle du fit de la mesure de $g^{(2)}$ a été justifié, l'objectif est d'identifier la figure de mérite de ce fit la moins sujette aux variations aléatoires. Ce qui est appelé ici variations aléatoires, ce sont les variations de mesures à mesures, dans des conditions identiques. Pour ce faire, un ensemble statistique de trois mesures de $g^{(2)}$ pour un même ν , dans des conditions expérimentales, aussi identiques que possible, a été étudié. Ces conditions expérimentales sont celles de la figure 4.2, où la source est une source thermique filtrée par le filtre $H\alpha$ de distribution spectrique un rectangle de $\Delta\lambda = 1\text{nm}$ de large centré sur $653,6\text{nm}$.

Avec le filtre $H\alpha$ de largeur $\Delta\lambda$ et la source thermique utilisée, le spectre en sortie du filtre est en bonne approximation une gaussienne, et donc $g^{(1)}$ est également une gaussienne. C'est à dire que $\tau_c \rightarrow +\infty$ dans l'expression (4.6) de $g^{(2)}$ ou encore que le rapport (4.18) tend vers 0. Autrement dit, C_1 est donné par (4.19). La constante de temps apparaissant dans $g^{(2)}$ ne correspond cependant pas à σ_ω^{-1} car le filtre utilisé possède un temps de cohérence beaucoup plus petit ; τ_{fil} , qui impose la constante de temps dans $g^{(1)}$:

$$\tau_{\text{fil}} := \frac{\lambda_0^2}{c\Delta\lambda}. \quad (4.24)$$

La constante de temps σ_ω^{-1} apparaissant dans $g^{(2)}$ équation (4.6), est liée à la constante de temps apparaissant dans $g^{(1)}$ par la relation de Siegert (dans le cas Rayleigh, table (2.1) colonne de droite) :

$$\sigma_\omega^{-1} \equiv \tau_{\text{fil}}\sqrt{2}, \quad (4.25)$$

le contraste attendu (4.19) devient alors :

$$C_1 = \frac{\tau_{\text{fil}}}{\sigma} + o\left(\frac{\tau_{\text{fil}}}{\sigma}\right), \quad (4.26)$$

avec τ_{fil} donné par (4.24).

L'intensité est fixée de manière à minimiser σ , de sorte à maximiser C_1 (4.26), afin d'obtenir un signal $g^{(2)} * R_\delta$ d'amplitude la plus forte possible. Au vu de (4.3), le minimum de σ est attendu pour $\nu \in [2, 4]\text{Mcps}$. Les valeurs étant sensiblement les mêmes dans cette plage, la valeur $\nu \sim 2\text{Mcps}$ a été choisie.

Application numérique. Avec $\sigma = 598 \pm 40\text{ps}$ (c'est à dire pour ν autour de 2Mcps), $\Delta\lambda = 1\text{nm}$ et $\lambda_0 = 656,3\text{nm}$; (4.24) vaut :

$$\tau_{\text{fil}} = 1,43 \pm 0,14\text{ps} \quad (4.27)$$

et le contraste attendu :

$$C_1 \simeq 1,43/598 = (2,39 \pm 0,24).10^{-3} \quad (4.28)$$

L'incertitude de (4.27) a été calculée avec une incertitude de 0,1nm sur $\Delta\lambda$, indiquée par le constructeur (Alluxa). Elle a ensuite été propagée dans (4.28).

Pour chacune des trois mesures, la durée d'acquisition fût choisie pour atteindre un très bon RSB (12, 20, et 21), pour que l'incertitude du fit limite le moins possible l'analyse. Un RSB autour de 20 est bien sûr très difficile à atteindre en condition réelle (pour $\nu \sim 2\text{Mcps}$, la durée d'observation est d'environ 45heures). Des figures de mérite du fit gaussien de $g^{(2)}$ peuvent être :

- la valeur en $\tau = 0$ (4.14) qui est le maximum attendu, ou le contraste égal à C_1 dans l'approximation (4.16)
- l'écart-type σ
- la surface sous la courbe de $g^{(2)} * R_\delta$ égale à $C_1\sigma\sqrt{2\pi}$

La table 4.1 donne les résultats des trois figures de mérite énoncées, avec l'incertitude du fit sur celles-ci.

TABLE 4.1 – Résultats pour trois figures de mérite du fit gaussien de $g^{(2)}$. Le fit est réalisé avec la méthode des moindres carrés. Les mesures sont réalisées dans les mêmes conditions expérimentales. A chaque fois le fit est très bon, en moyenne sur les trois mesures : SSE=3.10⁻⁶, R-square : 85%.

	σ [ps]	C_1 [10 ⁻³ pas d'unité]	$C_1\sigma\sqrt{2\pi}$ [ps]
mesure 1 ($\nu = 2.1165\text{Mcps}$, RSB=12)	556,9±101,1	2,168±0,350	2,140±0,435
mesure 2 ($\nu = 2.0807\text{Mcps}$, RSB=20)	529,2±76,7	2,238±0,202	2,099±0,323
mesure 3 ($\nu = 2.0909\text{Mcps}$, RSB=21)	512,7±67,4	2,214±0,196	2,012±0,283
incertitude du fit relative à la valeur (moyenne sur les trois mesures)	15,34%	11,30%	16,61%
dispersion statistique en % de la moyenne	4,19%	1,61%	3,14%
écart-type global en % de la moyenne	15,91%	11,41%	16,90%

La dispersion statistique de leurs valeurs sur les trois mesures est donnée relativement à la valeur moyenne sur ces trois mesures. Enfin, l'écart-type total comprenant la dispersion statistique et l'incertitude moyenne du fit sur les trois mesures, toutes deux supposées indépendantes, est également précisé relativement à la valeur moyenne. Il a été choisi d'exhiber les résultats afin de donner une appréciation numérique typique des variations mesures à mesures.

Remarque. L'aire est déduite de l'écart-type σ et de C_1 , tous deux donnés par le fit. Calculer l'aire sous la courbe de manière indépendante du fit, donne des incertitudes beaucoup plus importantes que celles affichées table 4.1, et dépend très fortement de l'intervalle de τ considéré. Cette incertitude se réduit au fur et à mesure que la résolution temporelle augmente, mais reste supérieur d'un ordre de grandeur (au moins) à l'incertitude sur l'aire lorsqu'elle est déduite directement du modèle de fit.

Il en ressort que la figure de mérite la plus robuste (i.e. : avec la plus faible dispersion d'une mesure à l'autre) est C_1 , et que la valeur la plus précise au regard du fit est aussi C_1 .

Conclusion. La figure de mérite du fit de la mesure correspondant à $g^{(2)} * R_\delta$ la plus pertinente est le contraste C_1 .

Remarque. Les valeurs de σ obtenues en table 4.1, pour $\nu \sim 2\text{Mcps}$, sont consistantes avec les résultats de la partie II..2. Pour $\nu \sim 2\text{Mcps}$, la valeur attendue avec (4.3), voir aussi la figure 4.4, est de $598 \pm 40\text{ps}$, ce qui est cohérent avec les résultats de la table 4.1. Les valeurs de contrastes obtenues en table 4.1 sont également consistantes avec la prédiction (4.28).

Le résultat de la mesure 1 de $g^{(2)}$ est donné figure 4.15 à titre d'exemple.

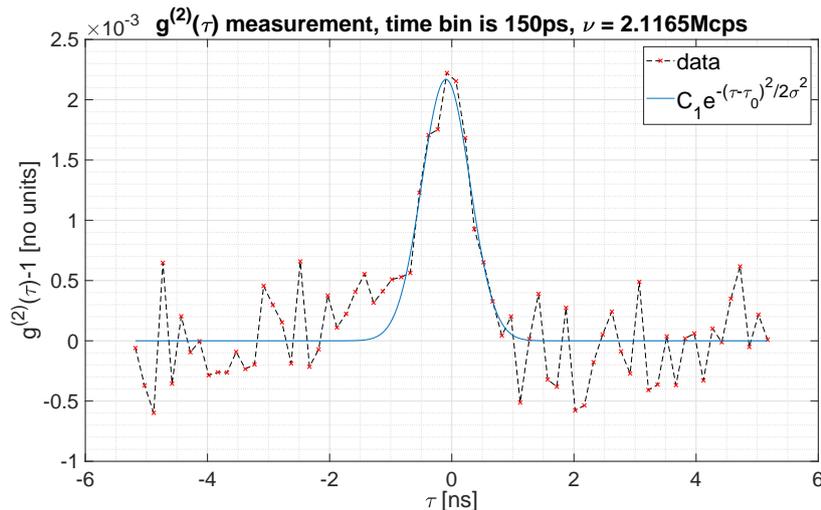


FIGURE 4.15 – Données expérimentales de la mesure 1, fittées par (4.16).

IV. Mesures de $g^{(2)}$ sur la raie d'émission $H\alpha$ de P Cygni

P Cyg est une étoile classée au stade évolutif de *variable bleue lumineuse* (VBL, ci après), malgré quelques singularités qui dénotent avec le reste des étoiles classées à ce stade. Elle possède également une propriété des étoiles de type Wolf-Rayet [195], i.e. : l'éjection de matière depuis le noyau sous forme de vent stellaire à haute vitesse $\sim 100, 1000 \text{ km.s}^{-1}$. La première sous-partie I. présente rapidement la fiche d'identité de P Cygni et ses propriétés qui font consensus actuellement. Ce système *étoile - vent stellaire* a été mis en évidence par la particularité des profils de raie d'émission, profils de raie atypiques, dit *profils de raie de type P Cygni*. L'origine et les particularités de ce profil de raie sont qualitativement décrits en II.. Ces deux premières sous-parties n'ont pas grand intérêt pour le lecteur astrophysicien familier avec les systèmes étoile - enveloppe de vent [196], et c'est pourquoi elles ont été placées en annexe D.

Parmi les raies d'émissions de P Cyg, la raie d'émission $H\alpha$ de largeur, à priori, sub-nanométrique, constitue une cible test dans le contexte de la problématique P1 de cette dissertation. L'expérience proposée, à savoir la mesure de $g^{(2)}$ sur cette raie, a pour finalité de i) déterminer si la nature de cette raie n'est pas chaotique ii) si la nature chaotique n'est pas infirmée, proposer une estimation du temps de cohérence (4.21) (constante de temps dans $g^{(2)}(\tau)$). Cette expérience est rapportée en sous-partie IV..2. La nature chaotique (Rayleigh) étant confirmée, la dernière sous-partie IV..3 rapporte la mesure de $g^{(2)}(\tau, \rho)$ (configuration à deux télescopes) pour deux bases projetées. Cette mesure a permis de fournir une nouvelle estimation de la distance Terre-P Cygni avec une incertitude acceptable.

IV..1 Quelques éléments sur l'étoile P Cygni, sa variabilité, et sa raie $H\alpha$

Le contenu de cette sous-partie est placé en annexe D afin d'alléger ce chapitre pour le lecteur astrophysicien.

L'annexe D contient deux tables originales, D.1 et D.2, permettant d'apprécier clairement que la variabilité spectro-photométrique de P Cyg sur une durée d'une semaine (durée de la campagne expérimentale) n'est, à priori, pas à prendre en compte.

L'annexe D contient également une figure originale permettant d'expliquer qualitativement, mais le plus précisément possible, l'origine du profil de raie P Cygni, et sa forme atypique. Enfin, l'annexe D contient la comparaison du spectre mesuré sur P Cygni, peu de temps après la campagne de mesure, et la comparaison avec la modélisation basée sur un code de transfert

radiatif avancé le CMFGEN, voir figure D.5.

IV..2 Résultat de la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ et interprétation

A priori, voir les tables D.1 et D.2, les variations spectro-photométriques de P Cyg sur une durée de l'ordre de la semaine sont négligeables. La mesure de $g^{(2)}(\tau)$ (un télescope) effectuée du 1er au 6 août 2018 a donc à priori un sens. La table 4.2 résume les conditions d'observations.

TABLE 4.2 – Conditions d'observation pour les 4 nuits de mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sur la raie $H\alpha$ de P Cyg du 1er au 6 août 2018. “Début” et “Fin” indiquent respectivement la date UTC (Universal Time Coordinate) de début d'observation et la date de fin. Le paramètre a est l'intervalle de masse d'air durant la nuit. La dernière colonne donne le *seeing* (grandeur exprimant le niveau de dégradation des images astronomiques sous l'effet de la turbulence atmosphérique). Cette quantité, qui s'exprime en secondes d'arc, est mesurée en temps réel sur le site de Calern par l'instrument GDIMM [197, 198] de la station CATS (Calern Atmospheric Turbulence Station)[199]. Les chiffres du *seeing* sont les médianes sur la durée d'observation.

Configuration	Début	Fin	a	<i>seeing</i>
$g^{(2)}(\tau)$	1 Août, 23h02	2 Août 3h11	1.00 → 1.10	1.29''
$g^{(2)}(\tau)$	2 Août 22h25	3 Août 3h54	1.00 → 1.18	0.66''
$g^{(2)}(\tau)$	4 Août 2h04	4 Août 5h09	1.06 → 1.44	1.10''
$g^{(2)}(\tau)$	6 Août 21h43	7 Août 0h05	1.02 → 1.22	0.56''

Il faut cependant noter que des variations spectro-photométriques en $H\alpha$ sur des VBL furent déjà relevées sur des périodes de quelques jours seulement ; l'étoile HD 188001 est un exemple [200].

Le montage expérimental utilisé est celui décrit en partie I.2. Le filtre $H\alpha$ est celui utilisé pour les caractérisations en laboratoire, voir sous-partie III..3.

Avec les intensités mesurées au cours de ces 8 nuits, engendrant des densités ν en dessous de 1Mcps, la valeur de l'écart-type de la réponse temporelle R_δ attendu est (4.4) : $\sigma = 756 \pm 40$ ps. Une radiation chaotique Rayleigh centrée sur $\lambda_0 = 656,3$, de spectre gaussien, donc de $g^{(1)}(\tau)$ gaussien, de constante de temps τ_{fil} (4.24) fixée par $\Delta\lambda = 1$ nm, donnerait un contraste mesuré (fit de $g^{(2)}(\tau)$) de :

$$C_1 \simeq 1,43/756 = (1,89 \pm 0,24).10^{-3}. \quad (4.29)$$

Etant donné que la raie $H\alpha$ a une largeur caractéristique inférieure à 1nm, voir figure D.5 ou figure 4.16 graphe de gauche, trois scénarios sont possibles. Ils se déclinent suivant leurs valeurs de C_1 , comparativement à la valeur C_1 mesurée en laboratoire avec une radiation chaotique Rayleigh, avec un $g^{(1)}(\tau)$ en bonne approximation gaussien $\propto \exp(-\tau^2/2\tau_{\text{fil}}^2)$, et de constante de temps τ_{fil} contrôlée par le filtre $\Delta\lambda$ (4.27).

- i) Si la raie $H\alpha$ de P Cyg est de nature cohérente, la valeur du contraste $C_1 = g^{(2)} * R_\delta[0] - 1$ est censée être égale à 0, en vertu de (24) ou en vertu de la limite $s \rightarrow 0$ dans la table 2.1.
- ii) Si la raie $H\alpha$ de P Cyg est de nature chaotique ricienne (i.e. avec une composante cohérente, voir chapitre 2), le contraste C_1 attendu doit être plus faible que celui obtenu en laboratoire avec une radiation chaotique Rayleigh, et ce d'autant plus que la composante cohérente est forte devant la composante Rayleigh, voir (2.28).
- iii) Si la raie $H\alpha$ de P Cyg est de nature chaotique Rayleigh, comme la largeur caractéristique de son spectre est plus petite que la largeur du filtre $\Delta\lambda = 1$ nm (voir figure D.5 ou figure 4.16 graphe de gauche), le temps de cohérence τ_{cor} associé à $g^{(1)}$ est donc plus grand que $\tau_{\text{fil}} = 1,43$ ps, calculé en (4.27). Donc le contraste C_1 attendu (4.23) doit être plus élevé que celui obtenu en laboratoire. Une estimation numérique de τ_{cor} peut même être

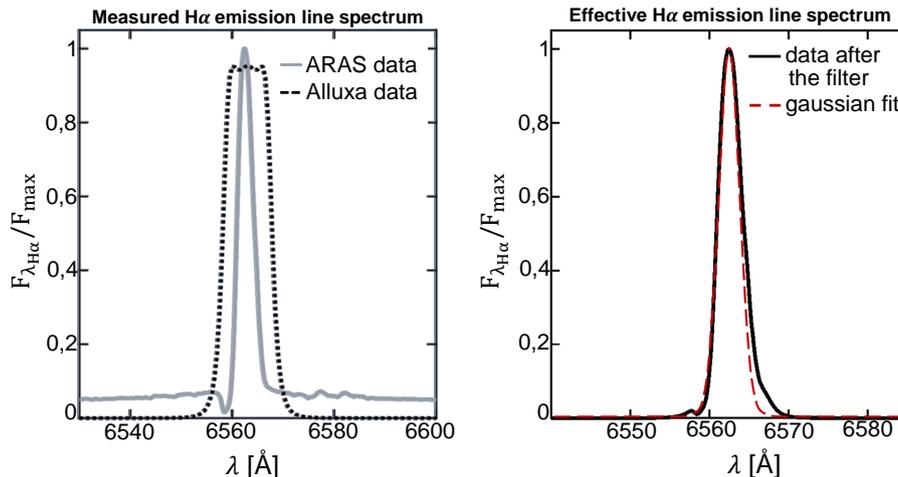


FIGURE 4.16 – A gauche, superposition du spectre mesuré par J.Guarro i Flò [201] et du spectre du filtre de largeur 1nm (donnée du constructeur Alluxa). A droite, spectre résultant (après filtrage). Le fit gaussien est bon (R-square de 86%, SSE de $5 \cdot 10^{-6}$).

déduite en supposant que $g^{(1)}(\tau)$ est une gaussienne, ce qui n'est pas, au vu du spectre résultant après filtrage voir figure 4.16 graphe de gauche, une approximation absurde (le fit gaussien est bon sur le spectre). En effet, (4.21) s'écrit dans la limite gaussienne ($\zeta \ll 1$) : $\tau_{\text{cor}} = 2\sigma_{\omega}^{-1} \sqrt{2 \ln(2)}$, et σ_{ω}^{-1} se déduit de C_1 avec (4.19).

Les résultats de la mesure sont présentés figure 4.17. Le contraste C_1 mesuré est donné table 4.4, il est plus de deux fois et demi supérieur à (4.29).

Conclusion : C'est le scénario iii) qui est validé par l'expérience.

En propageant les incertitudes sur C_1 et σ , l'estimation de τ_{cor} s'écrit :

$$(4.19) \Rightarrow \sigma_{\omega}^{-1} = C_1 \cdot \sigma = 3,63 \pm 0.73\text{ps}, \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow \tau_{\text{cor}} = 8,55 \pm 1,72\text{ps}. \quad (4.31)$$

Même avec les barres d'incertitudes, le résultat (4.30) est supérieur à $\sqrt{2}$ fois le résultat (4.27). Remarque. L'incertitude sur C_1 est beaucoup plus importante que celles affichées en table 4.1 car la durée d'observation T_0 est de 14,5 heures et que la densité ν est plus de 5 fois plus faible, le RSB obtenu est compris entre 3 et 4, il est donc 4 à 5 fois plus faible que les RSB de la table 4.1.

IV..3 Résultat de la mesure de $g^{(2)}(\tau, \rho)$ et interprétation

Une série de mesure fut menée dans une configuration $g^{(2)}(\tau, \rho)$ à deux télescopes les nuits du 7, 8 et 10 août 2018. Voir table 4.3 pour le résumé des conditions d'observation.

Avec une radiation chaotique, la mesure de $g^{(2)}(\tau, \rho)$ permet d'accéder directement au module carré de $g^{(1)}(\tau, \rho)$

$$g^{(2)}(\tau, \rho) = 1 - \frac{1}{(1+s)^2} + p \cdot |g^{(1)}(\tau, \rho)|^2, \quad (4.32)$$

où :

- $p = 1/2$ si la partie imaginaire et la partie réelle de \mathcal{E} sont décorréées (\mathcal{E} non polarisé), et $p = 1$ si elles sont corrélées (\mathcal{E} polarisé), voir [36] chapitre 3, équation (3.43), la preuve est donnée par exemple dans [202] section 2.4.

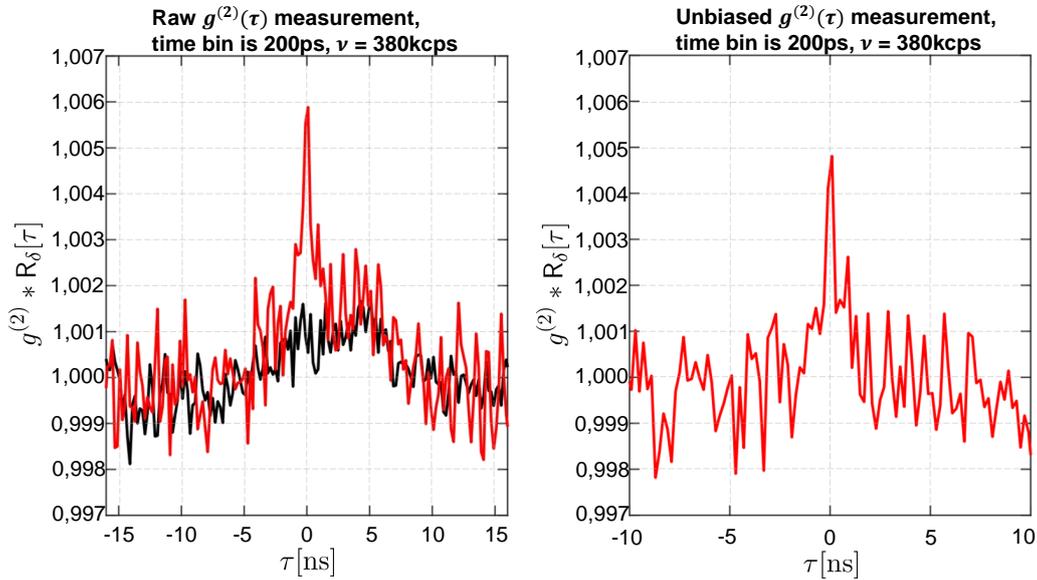


FIGURE 4.17 – Résultat de la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sur la raie $H\alpha$ de P Cyg, après 14,5 heures d’acquisition. A gauche résultats brut de $g^{(2)} * R_\delta[\tau]$ (courbe rouge) superposés à une acquisition (courbe noire) au même flux avec une radiation au temps de cohérence non résolu par le corrélomètre. Cette acquisition (courbe noire) permet de corriger la mesure des corrélations parasites, voir la figure de droite sur laquelle le fit gaussien est réalisé et C_1 est déduit.

TABLE 4.3 – Conditions d’observation pour les 3 nuits de mesure de $g^{(2)}(\tau, \rho)$ sur la raie $H\alpha$ de P Cyg du 7 au 10 août 2018. Les indications concernant les 4 colonnes du tableau sont identiques à celles données en table 4.2.

Configuration	Début	Fin	a	seeing
$g^{(2)}(\tau, \rho)$	7 Août 2h54	7 Août 5h56	1.10 → 1.79	0.56''
$g^{(2)}(\tau, \rho)$	8 Août 0h12	8 Août 5h53	1.00 → 1.80	0.60''
$g^{(2)}(\tau, \rho)$	8 Août 22h11	9 Août 5h50	1.00 → 1.81	0.74''
$g^{(2)}(\tau, \rho)$	10 Août 1h11	10 Août 5h30	1.01 → 1.71	n.a.
$g^{(2)}(\tau, \rho)$	10 Août 21h40	11 Août 5h37	1.00 → 1.70	1.19''

$$g^{(1)}(\tau, \rho) := \frac{\mathcal{E}^*(r_1, t)\mathcal{E}(r_2, t + \tau)}{\sqrt{\langle I(r_1, t) \rangle \langle I(r_2, t + \tau) \rangle}}, \quad (4.33)$$

où : $\rho := |r_2 - r_1|$.

La fonction $g^{(1)}(\tau, \rho)$ est souvent appelée degré complexe de cohérence, sa valeur $g^{(1)}(\tau = 0, \rho)$, normalisée par $g^{(1)}(0, 0)$, est appelée visibilité. Elle est définie pour une fréquence spatiale $\rho/\lambda_{\text{eff}}$ donnée,

$$V(\rho/\lambda_{\text{eff}}) := \frac{g^{(1)}(0, \rho/\lambda_{\text{eff}})}{g^{(1)}(0, 0)}. \quad (4.34)$$

L'enveloppe de vent de P Cyg est à priori à symétrie sphérique, voir discussion dans l'annexe D sous-partie I.2. Cette enveloppe est vue depuis un observateur terrestre comme une zone émissive dont le profil d'intensité effectif I_{eff} peut se paramétrer par une coordonnée angulaire σ sur le plan tangent à la sphère céleste, et par une coordonnée radiale locale τ . En fonction de la distance d de la source à l'observateur, cette coordonnée radiale peut se remplacer par une coordonnée apparente $\vartheta = \tau/d$. Si cette zone émet une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_{eff} (ici $\simeq 656,3$ nm), alors le profil d'intensité est relié à $g^{(1)}(0, \rho)$ défini en (4.33) par le théorème de vanCittert-Zernike en champ lointain :

$$g^{(1)}(0, \rho/\lambda_{\text{eff}}) = \exp(ik_{\text{eff}}\rho) \frac{\int_{\tau=0}^{+\infty} \int_{\sigma=0}^{2\pi} I_{\text{eff}}(\vartheta, \sigma) \exp(-ik_{\text{eff}}\rho\vartheta) \vartheta d\vartheta d\sigma}{\int_{\tau=0}^{+\infty} \int_{\sigma=0}^{2\pi} I_{\text{eff}}(\vartheta, \sigma) \vartheta d\vartheta d\sigma}, \quad (4.35)$$

où $k_{\text{eff}} = 2\pi/\lambda_{\text{eff}}$. En supposant que la symétrie sphérique, géométrique, de l'enveloppe engendre la symétrie circulaire de l'émission, i.e. : I_{eff} est indépendant de l'angle σ , la transformée de Fourier dans (4.35) se réécrit comme une transformée d'Hankel, et le module au carré de la visibilité (4.34) devient :

$$|V(\rho/\lambda_{\text{eff}})|^2 = \left| \frac{\int_0^{+\infty} I_{\text{eff}}(\vartheta) J_0(2\pi\vartheta\rho/\lambda_{\text{eff}}) 2\pi\vartheta d\vartheta}{\int_0^{+\infty} I_{\text{eff}}(\vartheta) 2\pi\vartheta d\vartheta} \right|^2, \quad (4.36)$$

où J_0 est la fonction de Bessel non-modifiée de première espèce et d'ordre 0. Le profil d'intensité effectif $I_{\text{eff}}(\tau)$ est donné par le code CMFGEN qui permet de reproduire fidèlement le spectre observé (voir figure D.5).

Dans le cas de la mesure : $s \rightarrow +\infty$ la radiation est chaotique Rayleigh, et le champ est polarisé linéairement $p = 1$. Il vient donc directement pour un ρ donné :

$$C_1(\rho/\lambda_{\text{eff}}) = \left| g^{(1)}(0, \rho/\lambda_{\text{eff}}) \right|^2,$$

autrement dit, si $C_1(\rho = 0)$ est le contraste de $g^{(2)}(\tau)$, la visibilité (4.34) s'obtient directement en fonction de la quantité mesurée C_1 :

$$|V(\rho/\lambda_{\text{eff}})|^2 = \frac{C_1(\rho/\lambda_{\text{eff}})}{C_1(\rho = 0)}. \quad (4.37)$$

Ainsi, la mesure de $g^{(2)}$ pour différents ρ , donne les points $|V(\rho/\lambda_{\text{eff}})|^2$ correspondants via (4.37), et la reconstruction de la fonction $\rho \mapsto |V(\rho/\lambda_{\text{eff}})|^2$ permet de déduire l'inconnue d via le modèle attendu (4.36).

L'évolution de la base projetée au cours des différentes nuits d'observation, et la durée d'observation, ont été telles que deux intervalles de valeurs de ρ ; $9,5 < \rho < 12\text{m}$ et $12 < \rho < 15\text{m}$, en plus de celui $\rho = 0$, sont exploitables ($\text{RSB} \geq 3$) pour reconstruire la courbe de visibilité. Les mesures de C_1 pour ces deux intervalles sont données en table 4.4, $\langle \rho \rangle$ est la base projetée moyenne dans ces intervalles. L'incertitude sur $\langle \rho \rangle$ est l'écart-type des distributions dans ces deux intervalles. T_0 est la durée d'observation totale, ν est la densité (moyenne sur T_0) de photo-événements par

TABLE 4.4 – Résumé des résultats de la mesure de C_1 pour la configuration $g^{(2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau, \rho/\lambda_{\text{eff}})$.

$\langle \rho \rangle$ [m]	T_0 [h]	ν [kpcps]	$C_1 (\times 10^{-3})$
0	14.5	380	4.80 ± 0.93
10.7 ± 0.7	8	826	1.72 ± 0.46
13.9 ± 0.9	19	905	1.01 ± 0.29

détecteur. L'incertitude sur C_1 est l'incertitude du fit gaussien sur la mesure (voir partie III.), ou l'écart-type des données sur un intervalle où $g^{(2)}(\tau)$ est en moyenne égal à 1 (pour $\tau \gg \tau_{\text{cor}}$). Ces deux incertitudes sont les mêmes à 1 ou 2 pour cents près.

La courbe de visibilité obtenue contient donc deux points en plus de $|V(0)|^2$ qui vaut 1 par définition. Un fit utilisant la méthode des moindres carrés permet de déduire d . Pour rappel, l'hypothèse initiale est un disque d'émission circulaire qui repose sur la sphéricité de l'enveloppe de vent de P Cygni. Les résultats sont présentés figure 4.18. Les trois points de mesures sont affichés avec leurs barres d'erreur ; les barres d'erreur horizontales n'existent que pour $\langle \rho \rangle \neq 0$, elles correspondent à l'écart-type de la distribution de ρ dans les intervalles en question. Le point de mesure $|V(0)|^2$ n'est pas représenté car il vaut 1 par définition. La normalisation par $|V(0)|^2$ ne s'est pas faite via $C_1(0)$ résultant de la mesure $g^{(2)}(\tau)$, mais via la valeur $C_1(0)$ attendue connaissant le spectre (donc $g^{(1)}(\tau)$), et R_δ . Ce choix est fait pour éviter la propagation, avec l'opération de normalisation, de l'incertitude du fit sur $C_1(0)$ qui est importante par rapport aux autres barres d'erreur. Le médiocre RSB de la mesure $g^{(2)}(\tau)$ en est la raison. Cela peut être critiqué car R_δ n'a pas été caractérisée juste avant la mesure, dans les conditions du site d'observation, et sa stabilité n'a pas été étudiée sur l'échelle de temps d'une semaine. Il est supposé que la stabilité de R_δ est suffisante pour faire confiance à la caractérisation effectuée en laboratoire. Les barres d'erreur verticales des points $\langle \rho \rangle \neq 0$ correspondent uniquement à la propagation de l'incertitude sur l'écart-type σ de R_δ , avec l'incertitude du fit sur les $C_1(\rho/\lambda_{\text{eff}})$ résultant des mesures $g^{(2)}(\tau, \rho/\lambda_{\text{eff}})$. Le fit est opéré via la méthode des moindres carrés. Avec un écart-type des deux points de mesures par rapport au modèle de 0,25 kpc, le résultat obtenu est :

$$d = 1,56 \pm 0,25 \text{ kpc.} \quad (4.38)$$

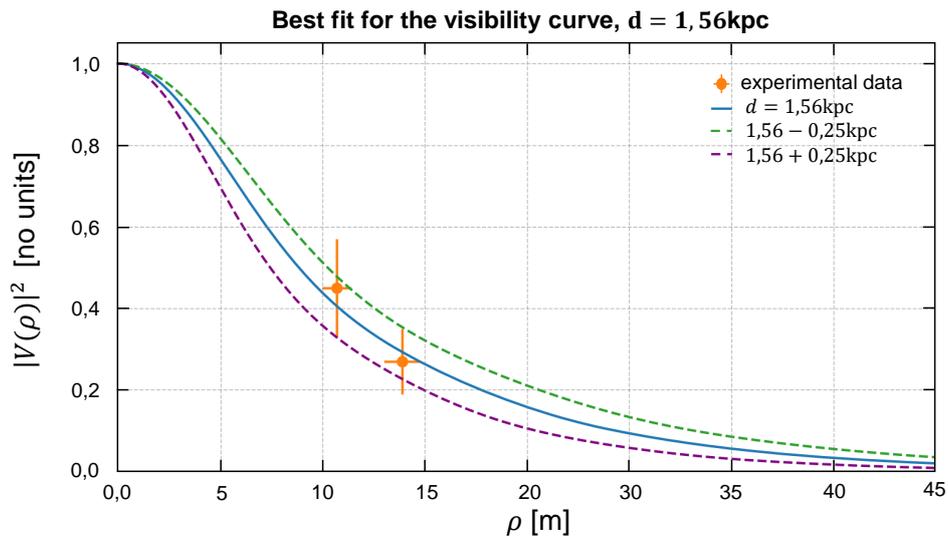


FIGURE 4.18 – Résultat du fit de la courbe de visibilité via (4.36).

V. Conclusion

Le corrélogramme mis au point possède une réponse temporelle R_δ gaussienne dont l'écart-type σ est de l'ordre d'une demi-nanoseconde. La méthode d'exploitation des mesures a été élaborée en s'appuyant sur des calculs et une analyse statistique des mesures en laboratoire. Cela aura permis d'identifier la quantité adéquate pour quantifier une mesure limitée par la résolution temporelle σ . Le corrélogramme stellaire développé est opérable en conditions d'observations astronomiques réelles.

La raie $H\alpha$ de P Cyg présente toutes les caractéristiques spectrales des raies d'émission suspectées d'être de nature quasi-cohérente : une forte intensité spectrique (plus de 20 fois celle du continuum), une largeur spectrale sub-nanométrique. Le mécanisme de formation de cette raie semble bien connu, et rien ne laisse penser que cette raie est de nature cohérente. La mesure de $g^{(2)}(\tau)$ effectuée a permis de confirmer la nature chaotique Rayleigh de cette raie, pour la première fois.

La nature chaotique Rayleigh confirmée, la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ a donné une estimation de σ_ω^{-1} (4.30). Les barres d'incertitudes sont telles que le résultat de la mesure n'est pas comparable avec le même résultat de σ_ω^{-1} donné par la mesure directe du spectre. La mesure de $g^{(2)}(\tau)$ reste cependant une perspective spectroscopiste pour des raies d'émission chaotiques de largeur spectrale encore plus fine. En effet, contrairement à une mesure avec un spectromètre de résolution donnée, plus la largeur spectrale de la raie est fine, plus la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ donne un résultat clair (C_1 est d'autant plus grand que τ_{cor} est grand (4.23)).

Enfin, la mesure de $g^{(2)}(\tau, \rho/\lambda_{\text{eff}})$ a confirmé un potentiel pour les mesures astrophysiques puisqu'elle a permis de déduire une information géométrique ; la distance de l'étoile à l'observateur (4.38). Avec seulement deux bases disponibles (10,7m et 13,9m), et un RSB d'environ trois pour ces deux points de mesure de $g^{(2)}(0, \rho/\lambda_{\text{eff}})$, les barres d'erreur sont encore élevées (16% du résultat). Cependant, la simplicité technique de la mesure n'est pas comparable à une mesure de $g^{(1)}(0, \rho/\lambda_{\text{eff}})$ par interférométrie d'amplitude classique.

Troisième partie

Explorations

Chapitre 5

Mesures sur un laser aléatoire

Sommaire

I.	Introduction	148
I.1	Objectifs	148
I.2	État de l'art de la source radiative utilisée	149
I.3	Organisation du chapitre	153
II.	Montage expérimental	153
II.1	Présentation du montage	154
II.2	Spectres mesurés	156
II.3	Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sans action "laser"	161
III.	Une action "laser" cohérente ?	164
III.1	Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ à l'échelle de la nanoseconde	164
III.2	Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ à l'échelle de la microseconde	165
III.3	Tentatives de caractérisation	169
IV.	Un modèle pour expliquer $g^{(2)}(0) = 1$ à l'échelle de la nanoseconde	171
V.	Conclusion	173

CONCLUSION. Les acteurs sont mal définis - l'expérience n'est pas contrôlée - l'expérience n'a pas été répétée. Jusqu'à plus ample informé le mystère doit être considéré comme n'ayant pas eu lieu.

Simon l'embaumeur ou la solitude du magicien,
Jacques Testart.

I. Introduction

Ce chapitre utilise les notations, les définitions, et appellations des chapitres 2 et 4. Il requiert quelques notions sur les lois α -stables de Lévy, et sur les processus de Poisson composés.

Le laser aléatoire unidimensionnel, où laser aléatoire fibré, est dans ce qui suit souvent abrégé en acronyme : LAF. Il est parfois référé par "système" ou "source radiative". Le champ qu'il rayonne est noté : \mathcal{E}_{rfl} , dont l'intensité est notée : I_{rfl} . L'indice "rfl" est l'acronyme de "Random Fiber Laser" en anglais. Le *seuil* désigne la valeur du paramètre de pompe pour lequel la raie d'émission "laser" du LAF apparaît (une raie d'émission de largeur spectrale très fine apparaît au dessus d'un continuum). Le terme "laser" est utilisé pour le LAF tout du long de ce chapitre, sans certitude aucune si l'appellation est rigoureusement exacte. Ce chapitre n'a pas d'autre prétention que celle d'être une première exploration de la fonction $g^{(2)}$ pour le champ \mathcal{E}_{rfl} , avec toutes les imperfections inhérentes à une première exploration.

I.1 Objectifs

Ce chapitre rapporte une mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sur une source radiative, un LAF mis au point il y a une dizaine d'année [203]. Cette source est décrite comme un *laser aléatoire unidimensionnel* au sens des modèles [204, 152]. Cette source est similaire à celle décrite dans [205]. Le qualificatif *aléatoire* est précisé en partie I.2, tout comme les caractéristiques de cette source radiative.

La mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour le champ \mathcal{E}_{rfl} rayonné par le LAF, a pour finalité de tester une propriété acceptée dans la théorie des lasers aléatoires tels que définis, par exemple, dans [150, 149]. Cette propriété est la suivante ; un laser aléatoire, au dessus de son seuil, dans un régime de *diffusion forte* (libre parcours moyen très petit devant la taille du système) et dans un milieu très actif (probabilité d'absorption d'un photon, dans un certain intervalle, élevée devant la probabilité d'émission spontanée), génère un état cohérent du champ électromagnétique [206]. La propriété de cohérence est défendue, notamment, par une expérience reportée en 2001 [157] qui dévoile une loi de probabilité de Poisson des photons émis par un laser aléatoire (tri-dimensionnel) au dessus de son seuil.

L'étude rapportée dans ce chapitre est motivée par la possibilité de tester, via la mesure de $g^{(2)}(\tau)$, l'existence de laser en milieu astrophysique, par exemple dans un plasma coronal d'une étoile suffisamment chaude, voir la discussion associé à la figure 6 de l'Introduction. A priori un tel laser n'a rien de comparable à un laser conventionnel crée à partir d'une cavité à miroirs avec un mode optique bien défini.

Les hypothèses nécessaires pour la création d'un laser aléatoire sont [207, 149] :

- la diffusion multiple dans un milieu actif (i.e. : où une inversion de population est possible avec un apport d'énergie) qui permet de confiner la radiation (l'onde)
- l'amplification de l'intensité de la radiation, dans ce milieu, par émission stimulée
- l'existence d'un seuil (dû à la diffusion multiple) en deçà duquel les pertes en amplification dominant, et au dessus duquel les gains dominant.

Exemple. Dans [205] la diffusion est la diffusion Rayleigh et l'amplification est obtenue par effet Raman. Un milieu gazeux avec une absorption négative (un plasma de décharge par exemple) couplé à une source externe d'énergie radiative pour créer l'inversion de population est un bon candidat de milieu "naturel" pour créer un laser aléatoire [208]. Ces ingrédients physiques se retrouvent dans certains environnements stellaires [209].

L'étude rapportée dans ce chapitre est un test préliminaire afin d'examiner comment la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ permet d'identifier une radiation de laser aléatoire. Il n'est pas certain, à ce stade, que la mesure de $g^{(2)}$ effectuée ait rigoureusement un sens, car la stationnarité au second ordre de I_{eff} n'a pas encore été établie, et l'hypothèse d'ergodicité en auto-covariance pour I_{eff} est posée ad-hoc, et n'a pas été testée. Des éléments présentés dans la sous-section I.2 apportent plus de précisions.

I.2 État de l'art de la source radiative utilisée

La source radiative utilisée repose sur une fibre de silice mono-mode dopée à l'Erbium ($Z = 68$) et au Germanium ($Z = 32$), dans laquelle des sous-réseaux de Bragg ont été gravés de manière aléatoire. Ces sous-réseaux de Bragg ont pour fonction d'engendrer une diffusion multiple des photons, telle qu'elle prendrait place dans un milieu désordonné. Le caractère aléatoire (au sens : loi uniforme) de leurs périodes spatiales respectives, ainsi que l'indépendance statistique de celles-ci, est essentiel pour engendrer une diffusion multiple de type milieu désordonné [210, 203].

Sur la création de sous-réseaux de Bragg aléatoires

La fabrication du réseau de Bragg à l'intérieur de la fibre optique, requiert un ajout, lors de la fabrication de cette dernière, de constituants photosensibles, ici l'Erbium et le Germanium. Ceux-ci ont la propriété de modifier définitivement l'indice de réfraction local du milieu s'ils sont soumis à une radiation UV. Ainsi, l'illumination UV de la fibre par une figure d'interférence crée une modulation de l'indice de réfraction le long de la fibre. Cette modulation transforme l'intérieur de la fibre en un réseau de Bragg. Si la figure d'interférence est composée de franges rectilignes d'interfrange bien déterminé, cet interfrange correspond à la période spatiale du réseau de Bragg. L'interfrange est adapté pour correspondre à la longueur d'onde à laquelle le réseau de Bragg doit réfléchir. Si la figure d'interférence possède un interfrange aléatoire alors la modulation de l'indice de réfraction le long de la fibre n'est plus périodique, cette modulation est une succession de sous-réseaux de Bragg de périodes spatiales différentes et aléatoires. La variation aléatoire de l'interfrange de la figure d'interférence peut s'effectuer à l'aide de modulateur de phase opto-électronique couplé à un générateur de bruit analogique [210], et/ou en exploitant la friction (non contrôlée) du déplacement de la fibre devant la figure d'interférence [210]. L'exploitation du phénomène naturel de friction permet en pratique d'assurer une distribution aléatoire uniforme (dans un intervalle donné) de la période spatiale des sous-réseaux de Bragg successifs. La friction permet également de garantir l'indépendance (en terme de loi de probabilité) entre les périodes spatiales des sous-réseaux de Bragg dans la fibre [210]. La figure 5.1 schématise le procédé de fabrication des sous-réseaux de Bragg aléatoires.

Résonance de la cavité et modes laser

La succession des sous-réseaux de Bragg le long de la fibre, avec des périodes spatiales uniformément et indépendamment distribuées, transforme la fibre en une cavité unidimensionnelle désordonnée [203]. En pratique, cette cavité crée une radiation intense dans un intervalle de longueur d'onde centré en $\lambda_B = 1535,5$ nm, de largeur $\Delta\lambda_B \simeq 0,2$ nm, lorsqu'elle est soumise à une radiation laser centrée sur 980 nm [203]. La radiation laser centrée sur 980 nm est appelée dans ce qui suit *la pompe*. La radiation \mathcal{E}_{eff} créée dans la cavité, est suspectée être une radiation de type laser au dessus du seuil [203], pour deux raisons. Premièrement, il existe un phénomène de seuil sur l'intensité de la pompe entrant dans la cavité, qui régit l'apparition de la

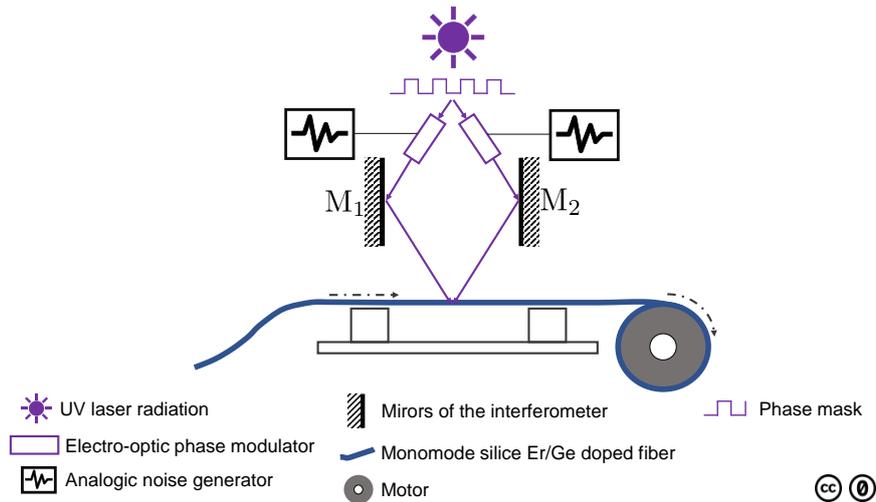


FIGURE 5.1 – Procédé de fabrication des réseaux de Bragg le long de la fibre, avec des périodes spatiales aléatoires. Figure adaptée de [210].

raie d'émission [203]. Deuxièmement, au dessus du seuil le profil spectral de \mathcal{E}_{rf} prend la forme d'une raie d'émission de largeur très fine $\simeq 0,2$ nm, et I_{rf} devient trois fois plus forte que le continuum [203]. Ce seuil fluctue en pratique, car il ne serait pas identique pour les différents modes "lasers" et la durée d'activation d'un mode possède un comportement erratique [211]. Ce seuil dépendrait de caractéristiques propres à chaque mode : sa durée d'activation moyenne, et son amplitude [204, 212, 211].

Pour confirmer l'appellation "laser" de la radiation émise, il reste à établir que les fluctuations d'énergie dans celle-ci correspondent à celle d'un état cohérent du champ électromagnétique.

Une autre discussion s'impose sur les modes de la cavité. Les modes (de propagation) propres de la cavité unidimensionnelle en jeu, ou ses résonances, correspondent-ils, même que partiellement, aux modes de la radiation "laser"? Les modes propres de la cavité sont aussi appelés les états quasi-liés [212] ("Quasi-Bound states" en anglais). Cette question s'inscrit dans le cadre général de la propagation d'une onde dans un milieu diffusif désordonné [213, 214]. En toute rigueur, la réponse est négative [212] : les modes "laser" et les modes de la cavité aléatoire sont bien distincts, et ils ne sont même pas en nombre égal dans un même intervalle spectral donné [211]. Les modes "lasers" peuvent correspondre à des modes de flux constants [212] ("constant-flux states" en anglais), mais peuvent également avoir des sauts d'amplitude, avec une amplitude non-stationnaire [211]. Dans la limite de forte diffusion, et autour du seuil d'émission "laser", les modes de flux constants et les modes propres de la cavité aléatoire tendent à se confondre [212]. Au dessus du seuil ce n'est pas nécessairement le cas [212], et les modes de flux constants sont moins probables car il y a une compétition entre les modes "laser" actifs simultanément pour le gain disponible [212, 154]. Les modes ont tendances à se repousser, (selon une répulsion de mode de type Wigner [152]); il y a une très forte corrélation entre la disparition d'un mode et l'apparition d'un autre [211]. Cette compétition entre les modes est une caractéristique générale des lasers aléatoires et s'accompagne d'un échange d'énergie entre les modes [215]. Elle engendre la saturation des modes laser actifs [215, 152, 212]. En pratique, cette compétition se traduit par une grande variabilité spectrale et par une amplitude des modes "laser" non-stationnaire et discontinue. Elle est modélisée de manière phénoménologique par un mécanisme d'excitation des modes "lasers" par sauts et avec des seuils sur leurs amplitudes (un mécanisme discontinu et erratique, qualifié de "hard excitation mechanism" en anglais) [211]. Chaque mode "laser" est activé par effet de seuil [211], voir figure 5.2. La signification physique des seuils et des sauts sur les amplitudes des différents modes "laser" reste à comprendre [211], mais le principe du modèle

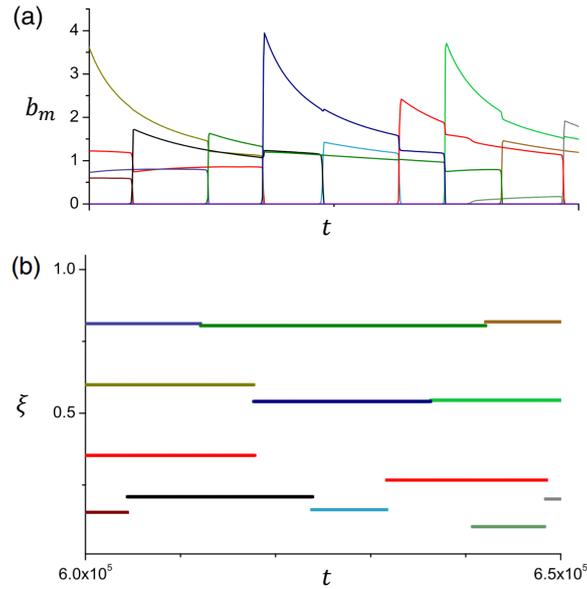


FIGURE 5.2 – Un mécanisme d’excitation des modes “lasers” permettant de reproduire le spectre observé, figure adaptée de [211]. La sous-figure a) représente l’amplitude b_m des modes “laser” m (une couleur correspond à un mode) localisés en une position ξ (normalisée à la longueur totale de la cavité de sous-réseaux de Bragg). Un mode laser s’active par effet de seuil, et reste actif durant une durée finie, plus petite que le temps de vie d’un niveau excité du milieu actif (observation expérimentale) [211]. La durée d’activation des modes est représentée en sous-figure b). Un mode “laser” peut être actif simultanément à d’autres modes ou non, et durant son activation son amplitude peut présenter des sauts.

permet d’expliquer le comportement spectral observé [211].

Sur les fluctuations de l’intensité

La compétition entre les modes discutée dans le paragraphe précédent, engendre une dépendance non-monotone de I_{rff} avec l’énergie apportée dans le milieu actif par la pompe [152].

La loi de probabilité des réalisations de I_{rff} exhibe un comportement complexe ; plusieurs régimes semblent coexister, et ce, en fonction de la taille effective du milieu actif, et de l’énergie apportée par la pompe [156]. Le schéma d’un tel comportement est donné figure 5.3, il y est précisé les différentes lois suivies par les réalisations de I_{rff} . Ces lois sont expliquées théoriquement (quelque soit la dimension de la cavité) [216, 152, 153, 155], et observées expérimentalement pour une cavité tri-dimensionnelle [154] comme pour la cavité unidimensionnelle en jeu [156]. La loi de probabilité des réalisations de I_{rff} transite d’une loi normale en dessous du seuil “laser”, à des lois de Lévy α -stables au voisinage du seuil “laser”, puis à nouveau à une loi normale au dessus du seuil [154, 156]. Il ne semble pas y avoir encore d’éléments pour caractériser I_{rff} en tant que processus stochastique, c’est à dire pour décrire la probabilité conditionnelle d’une réalisation de I_{rff} à une date donnée, sachant qu’une réalisation donnée a eu lieu à telle autre date antérieure. En particulier $g^{(2)}$ (l’auto-corrélation de I_{rff}) n’est pas connue.

De manière plus précise près du seuil “laser”, l’intensité d’un laser aléatoire (quelque qu’il soit tant que c’est sur un mécanisme de diffusion [et non de sub ou super-diffusion] responsable du confinement de la radiation) doit suivre une loi de Lévy stable de paramètre [216]

$$\alpha = \langle l \rangle / l_a,$$

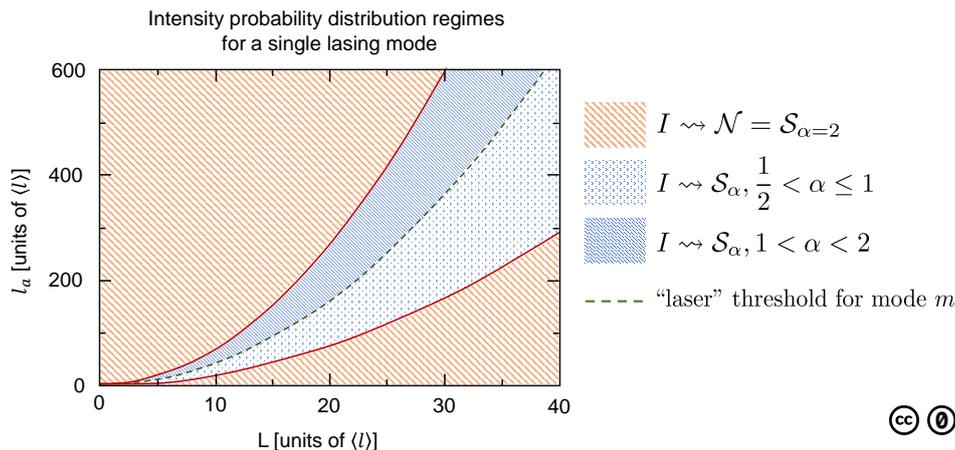


FIGURE 5.3 – Schématisation des lois de probabilité de l’intensité I d’un laser aléatoire unidimensionnel, figure adaptée de [216]. L’axe des abscisses est la taille L de la cavité (quasi-) unidimensionnelle, l’axe des ordonnées est la longueur de gain l_a qui dépend de l’énergie apportée par la pompe dans le milieu actif. Loin du seuil laser pour un mode donné, l’intensité suit une loi normale \mathcal{N} . Au voisinage du seuil elle suit une loi α -stable de Lévy \mathcal{S}_α d’exposant $1/2 < \alpha \leq 1$ en dessous du seuil, $1 < \alpha < 2$ au dessus du seuil. Le seuil laser dépend du mode [204], c’est pourquoi la figure est rigoureusement pertinente pour un seul mode laser m .

où $\langle l \rangle$ est le libre parcours moyen d’un photon dans le milieu diffusif, et l_a la longueur de gain dans ce même milieu (i.e. : la longueur caractéristique à partir de laquelle l’amplitude de la radiation est amplifiée d’un facteur “e”). Elle dépend de la quantité d’énergie apportée par la pompe dans le milieu actif. Le raisonnement permettant d’obtenir ce résultat est direct : il s’appuie sur la définition de l’amplification de l’émission spontanée, et sur la loi de probabilité du libre parcours moyen due à la diffusion dans le milieu actif [216].

Un raisonnement plus sophistiqué [153] permet de décrire la diffusion isotropique dans le milieu actif via une marche aléatoire de “porteur” d’énergie (correspondant à un nombre de photons) interagissant avec une population atomique apportant un gain par émission stimulée. L’hypothèse principale est de supposer que les photons générés par émission stimulée sont tous diffusés dans la même direction. C’est une hypothèse particulièrement adaptée à la situation quasi-unidimensionnelle du LAF. Ce modèle aboutit à la même conclusion que [216] : la loi de l’intensité est une loi de puissance [153], et la loi de α -stable de Lévy apparaît en faible dimension, par exemple pour un système de dimension 2 [153]. Pour le LAF étudié, en négligeant le diamètre de la fibre devant sa longueur, la dimension 1 est une bonne approximation.

La mesure de $g^{(2)}(\tau)$ a un sens si I_{rff} peut-être décrite comme un processus stationnaire au second ordre, pour pouvoir écrire $g^{(2)}(\tau)$ et non $g^{(2)}(t, \tau)$. Cette propriété n’a rien d’évident au vu du caractère erratique et non-stationnaire de l’excitation des modes “lasers”, voir la discussion du paragraphe précédent “Résonances de la cavité et modes lasers”. La mesure de $g^{(2)}(\tau)$ peut en principe donner un résultat identique à celui d’un champ cohérent sans que \mathcal{E}_{rff} soit pour autant un champ cohérent (au sens où le nombre de photon dans un mode est un processus de Poisson). Comme précisé dans l’Introduction, sous-partie IX., $g^{(2)} = \mathbb{I}$ (à une singularité éventuelle en $\tau = 0$) n’est pas exclusif à l’état cohérent, mathématiquement. Un exemple est justement donné partie IV..

Les travaux pour décrire I_{rff} en tant que processus, (d’après les résultats [154, 156] gaussien, loin

du seuil, ou de Lévy, près du seuil) ne semblent pas avoir encore abouti sur la forme attendue pour son auto-corrélation $g^{(2)}$. Le mécanisme de compétition entre les modes n'est pas encore bien compris [211], et donc la variabilité (i.e. : les fluctuations temporelles) de I_{rff} au dessus du seuil n'est pas encore comprise. Ainsi, la mesure proposée, malgré le risque que $g^{(2)}(\tau)$ ne soit pas définie, présente donc un intérêt, au moins exploratoire, afin de faire un premier pas pour caractériser le processus I_{rff} , via une tentative de mesure de son auto-corrélation. Rappel. Un commentaire sur la mesure effectuée dans [157], qui n'est pas la mesure de $g^{(2)}$, est donné dans l'Introduction partie V..3.

I.3 Organisation du chapitre

Ce chapitre présente tout d'abord les observations et mesures effectuées, et tente de faire le lien avec les modèles développés jusqu'à présent. Un début d'effort théorique est mené, partie IV., pour proposer un modèle décrivant I_{rff} au dessus du seuil sur une échelle temporelle de l'ordre de la nanoseconde.

La première partie II. se concentre sur les préparatifs nécessaires à la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour l'action "laser" du LAF au dessus du seuil. Pour ce faire, la première sous-partie II..1 présente le montage réalisé. Ce montage est plus compliqué que la simple injection de \mathcal{E}_{rff} dans le corrélomètre, car il a fallu effectuer un doublage en fréquence pour adapter la longueur d'onde centrale de \mathcal{E}_{rff} au dessus du seuil à la chaîne de détection disponible. Le doublage en fréquence a nécessité une amplification optique en amont. La sous-partie II..2 expose les mesures de spectres, et confirme certaines des propriétés de variabilité décrites dans [211]. Enfin, la sous-partie II..3 présente les résultats de la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sur \mathcal{E}_{rff} sous le seuil "laser", une fois l'amplification et le doublage en fréquence effectué, et après un filtrage spectral centré sur 780 nm de largeur 1 nm.

La deuxième partie III. présente les résultats de la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ autour du seuil "laser", et bien au dessus. Il apparaît deux échelles de temps distinctes : une échelle temporelle de l'ordre de la nanoseconde III..1, et une échelle de l'ordre de la microseconde III..2. Il s'en suit une tentative de caractérisation, à l'échelle microseconde, de la dépendance de I_{rff} avec l'énergie apportée par la pompe, menée dans la sous-partie III..3. Enfin, la partie IV. est une tentative de modélisation du comportement observé à l'échelle nanoseconde.

II. Montage expérimental

En principe il suffit d'injecter la radiation \mathcal{E}_{rff} dans le corrélomètre présenté au chapitre 4. Il se trouve que la longueur d'onde centrale de \mathcal{E}_{rff} est dans l'infrarouge, autour de 1542,6 nm, mais que la chaîne de photo-détection n'est pas opérationnelle dans ce domaine de longueurs d'ondes. Il a donc fallu trouver un moyen de déplacer la longueur d'onde dans un intervalle acceptable pour la photo-détection, ce qui complexifie le montage expérimental.

C'est la génération de seconde harmonique (ou doublage en fréquence), [217] section 7.1, ou [218] chapitre 3, qui a été choisie pour déplacer spectralement \mathcal{E}_{rff} dans un domaine de longueur d'onde accessible à la photo-détection. Son effet sur le spectre de \mathcal{E}_{rff} est discuté dans la partie II..2, et son effet sur la nature stochastique de I_{rff} est discuté dans la partie II..3.

Pour effectuer une génération de seconde harmonique efficace il a fallu amplifier l'intensité avant que la radiation ne soit focalisée dans le cristal non-linéaire. L'effet d'une telle amplification optique, externe et indépendante de la source, sur le spectre de \mathcal{E}_{rff} est abordé dans la partie II..2. Son effet sur la nature des fluctuations de I_{rff} est lui étudié en sous-partie II..3.

II.1 Présentation du montage

L'intensité I_{rf} est amplifiée pour pouvoir rendre effectif le doublage en fréquence, réalisé avec un cristal non-linéaire (KDP, phosphate de mono-potassium) de forme cubique de côté L égal à environ 1 cm. Le transport de la radiation depuis le système jusqu'à l'amplificateur, puis en sortie de l'amplificateur jusqu'au système optique focalisant dans le cristal, est réalisé avec des fibres mono-modes qui acceptent les longueurs d'ondes infrarouge (fibres mono-modes à maintien de polarisation avec connecteurs FC/APC). La radiation est ensuite focalisée au centre du cristal puis collimatée pour passer à travers d'éventuelles densités optiques, et un filtre spectral qui est utilisé uniquement quand le LAF est sous son seuil. Le fait d'utiliser un filtre permet de créer un temps de cohérence, à partir d'une radiation de spectre large, résolu par le corrélomètre. Cette technique est utilisée pour les calibrations du contraste en laboratoire, voir chapitre 4 sous-partie III.3. Le filtre à disposition n'est pas le filtre idéal, il aurait du être centré sur 771,3 nm (qui correspond à la longueur d'onde centrale de la raie du LAF après doublage en fréquence), voir figure 5.8. Le spectre en dessous du seuil du LAF est un spectre large sans structure fine, voir par exemple la figure 3 dans [203], courbe noire. Les parties du spectre dans un intervalle de 1 nm autour de 1542,6 nm et autour de 1560 nm sont supposées identiques en dessous du seuil. Il est de plus supposé que la mesure de la fonction $g^{(2)}$ dans ces deux parties du spectre, en dessous du seuil, donne le même résultat. Ces deux hypothèses sont rappelées en sous-partie II.3. La radiation est ensuite ré-injectée dans une fibre multimode qui constitue l'entrée du corrélomètre présenté au chapitre 4. Le coupleur fibré utilisé dans le corrélomètre est équilibré pour une longueur d'onde de 780 nm (il diffère donc de celui utilisé pour la mesure sur la raie H α de l'étoile P Cygni, voir chapitre 4). L'ensemble est schématisé figure 5.4.

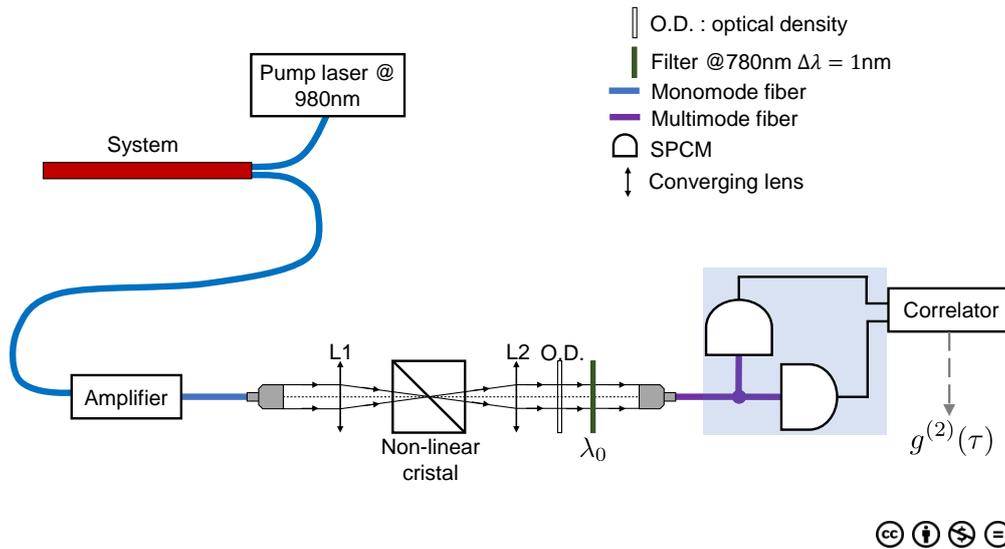


FIGURE 5.4 – Montage expérimental réalisé pour mesurer $g^{(2)}(\tau)$ sur l'intensité émise par le LAF (nommé "System" sur la figure). Le filtre spectral centré sur 780 nm est retiré lorsque le LAF est au-dessus de son seuil. L'analyseur de spectre (mentionné en sous-partie II.2) est toujours utilisé avant doublage. Une photo du montage est donnée en annexe E.

Le réglage du doublage en fréquence consiste à trouver l'angle optimal de l'axe du cristal relativement au faisceau incident, et à s'assurer que la focalisation prenne place au centre du cristal. Ce réglage est effectué au-dessus du seuil du LAF pour avoir une intensité maximale. Pour se faire, un pré-réglage (qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer au dessus du seuil du LAF) permet de régler le système des deux lentilles convergentes L_1 et L_2 : le faisceau est collimaté avant L_1 et doit être collimaté après L_2 , il s'agit de confondre le foyer image de L_1 avec le foyer objet de L_2 .

Une fois ce réglage effectué, le cristal (de forme cubique) est placé sur une platine qui permet de le translater le long de l'axe optique, et verticalement, et dans une bague de rotation qui permet de le faire tourner autour de l'axe optique. Le réglage de l'angle du cristal et de sa position le long de l'axe optique, s'effectue avec la mesure de la densité de photo-événements ν d'un module photo-compteur en temps réel. Deux indicateurs permettent d'effectuer avec précision le réglage : l'optimisation de valeur de ν , et l'équilibrage de ν sur les deux voies de détection. Le coupleur fibré 50/50 est en effet équilibré, typiquement à 0,40% près, pour une longueur d'onde autour de 780 nm, mais un déséquilibre plus grand apparaît au fur et à mesure que la longueur d'onde s'écarte de cette valeur. Les modules photo-compteurs ont une efficacité quantique nulle à partir de 1100 nm, donc ne peuvent pas détecter la partie du spectre qui n'aurait pas été doublée. L'efficacité du doublage n'a pas été analysée en détail.

Le spectre du LAF au dessus du seuil, après amplification mais avant doublage, sur la totalité de l'intervalle de longueurs d'ondes accessibles avec l'analyseur de spectre, est présenté figure 5.9 : la raie d'émission du LAF possède une intensité sans égale avec le continuum de 600 nm à 1700 nm. Pour s'assurer que la radiation du LAF est bien la radiation injectée dans le corrélomètre après doublage, il aurait fallu un filtre à 771,3 nm (qui correspond à la longueur d'onde centrale de la raie du LAF après doublage, voir figure 5.8). Un tel filtre n'était pas à disposition. Les tests qui ont été effectués pour s'assurer que la raie d'émission du LAF (donc lorsque le LAF est au dessus de son seuil) est bien la radiation principale injectée dans le corrélomètre sont les suivants :

- 1) Constatation d'une densité ν de photo-événements largement supérieure à celle obtenue en dessous du seuil.
- 2) Constatation d'un équilibrage de la densité de photo-événements par photo-compteur à 2,35% près (au plus) sur les deux voies de détections (dans le corrélomètre le coupleur fibré, adapté pour 780 nm, crée deux voies de détection). Cet équilibrage des deux voies de détection est typiquement de 0,40% à 780 nm. La valeur d'équilibrage entre les deux voies de détection à 2,35% près est consistante avec un écart de la longueur d'onde d'environ 10 nm : la raie d'émission du LAF est centrée sur 771,3 nm après doublage.
- 3) Constatation de la chute (très importante) de ν lorsque le filtre spectral centré sur la longueur d'onde 780 nm de largeur 1 nm est placé sur le trajet du faisceau.

Le réglage de l'amplificateur du laser de pompe (dont l'énergie radiative vient exciter les atomes d'Erbium et de Germanium de la fibre) s'effectue à l'aide d'un tournevis. Cet amplificateur est un appareil fabriqué en laboratoire. L'unité du paramètre qui contrôle l'intensité du laser de pompe n'est pas connue, ni le type de grandeur que constitue ce paramètre (tension, courant,...). C'est de manière certaine une quantité proportionnelle au *paramètre de pompe*. C'est pour cela qu'il est appelé ci-après, par abus de langage, paramètre de pompe, et est noté : r . L'intervalle observé des valeurs de r étant des valeurs seuils est $[0,084; 0,095]$.

La distinction de l'état "en dessous du seuil" - "au dessus du seuil" s'effectue à l'aide d'un analyseur de spectre optique, voir sous-partie suivante II.2. A chaque valeur réglée de r le spectre est observé, avant doublage et après amplification, s'il n'y a pas de structure particulière autour de λ_B (5.1), l'état est défini en dessous du seuil. A la moindre apparition d'une raie d'émission (voir par exemple figure 5.7) l'état est défini "au dessus du seuil".

Observation expérimentale importante. Il y a un phénomène d'hystérésis sur le réglage de r . Ainsi, d'un jour à l'autre une même valeur de r peut correspondre à un état "au dessus du seuil" tout comme à un état "en dessous du seuil". L'observateur ne peut pas se fier à la valeur affichée de r de manière absolue, la valeur de r n'a de sens que relativement à une même série de mesure. L'état "au dessus du seuil" ou "en dessous du seuil" est systématiquement vérifié par une mesure de spectre à chaque modification de la valeur de r .

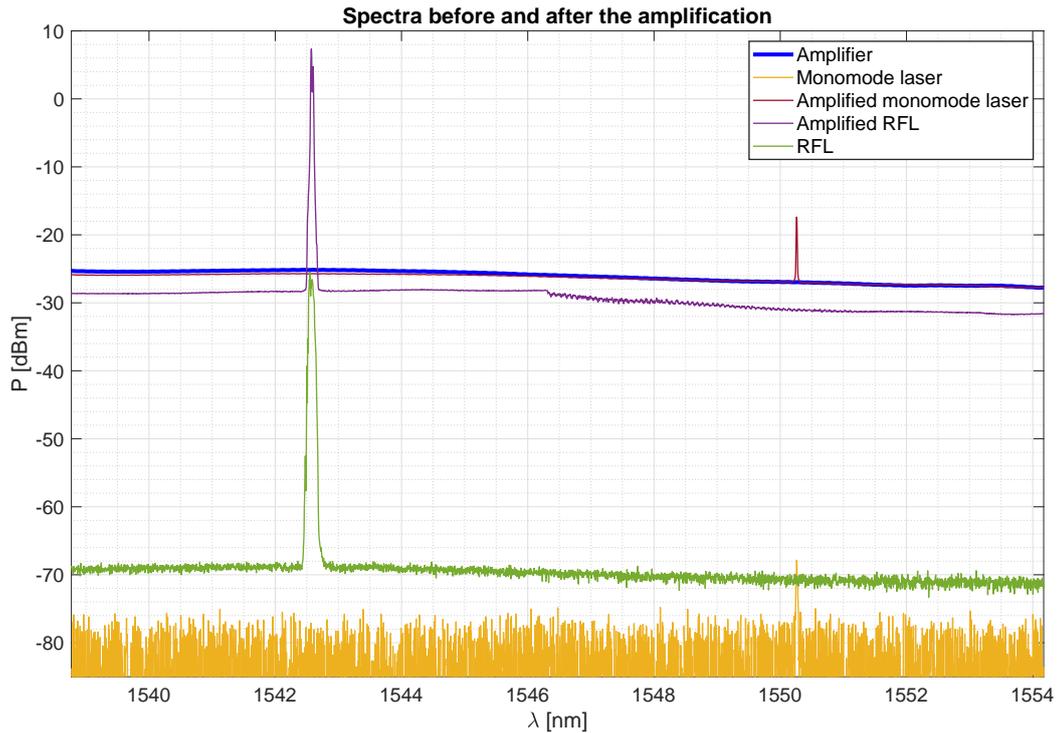


FIGURE 5.5 – Spectres mesurés pour les différentes sources, avant et après amplification.

II.2 Spectres mesurés

Quelque soit la mesure effectuée, les spectres sont mesurés avant et après amplification. Ils n'ont jamais été mesurés après doublage en fréquence en raison de la trop faible intensité de la radiation relativement à la sensibilité de l'analyseur de spectre optique à disposition (AQ6370D de Yokogawa TM®). La figure 5.5 présente les spectres de \mathcal{E}_{rf} avant et après amplification, le spectre de l'amplificateur seul, et le spectre d'un laser conventionnel centré sur une longueur d'onde proche de λ_B (avant et après amplification). L'amplificateur utilisé (non-sensible à la phase, "phase insensitive amplifier" en anglais) ne déforme pas les spectres dans presque toute sa plage d'amplification, excepté au voisinage du gain d'amplification maximal. Cette observation est bien sûr relative à la résolution de l'analyseur de spectre optique, d'échantillonnage minimal 0,001 nm (donnée constructeur) avec une précision minimale de 0,01 nm, et une résolution minimale de 0,02 nm (données constructeurs). Il peut déjà être remarqué que la longueur d'onde centrale du profil de raie est légèrement différente de [203] :

$$\lambda_B = 1542,6 \text{ nm.} \quad (5.1)$$

Ceci peut s'expliquer par un nombre de sous-réseaux de Bragg différents [203]. La variabilité du spectre de la raie d'émission du LAF avec l'énergie radiative apportée par la pompe est présentée figure 5.6. Les spectres correspondant aux premiers états "au dessus du seuil" sont présentés figure 5.7.

Le spectre présente également une variabilité pour une valeur du paramètre de pompe donnée, et ce même bien au dessus du seuil "laser". Cette variabilité s'exprime sur une échelle de temps de la milliseconde (durée d'acquisition minimale de l'analyseur de spectre optique), au moins. L'emploi du temps pour cette expérience n'aura pas permis de déterminer précisément l'échelle de temps caractéristique de cette variabilité. Il peut cependant déjà être constaté que deux acquisitions de spectre successives, c'est à dire avec 1 ms d'écart, présentent des différences

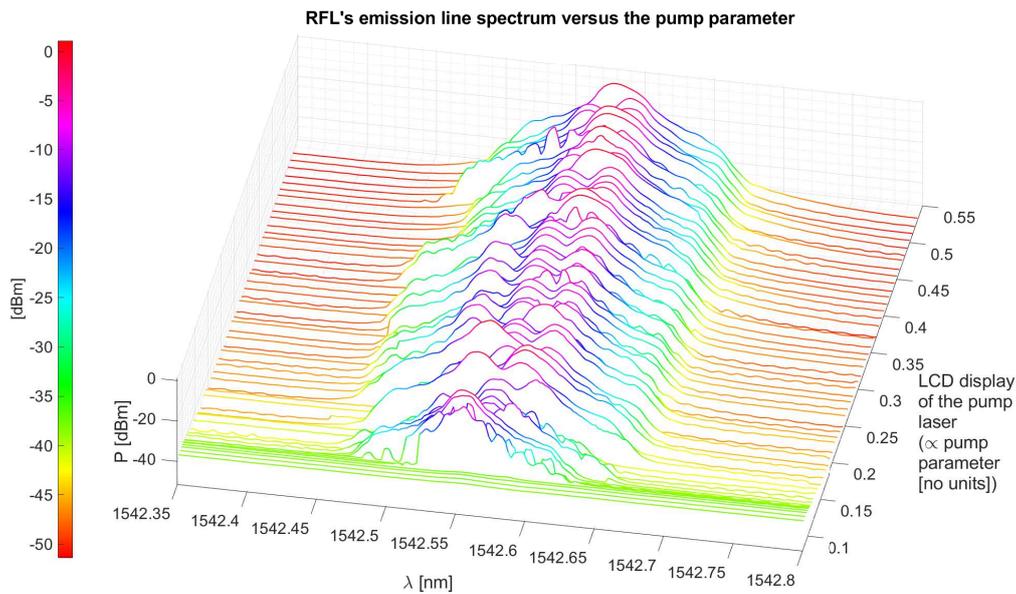


FIGURE 5.6 – Spectres mesurés au dessus du seuil pour différentes valeur du paramètre de pompe (dont l'unité est inconnue). Les premières courbes (en vert) pour lesquelles la raie d'émission a une faible intensité, relativement aux autres valeurs, sont zoomées en figure 5.7.

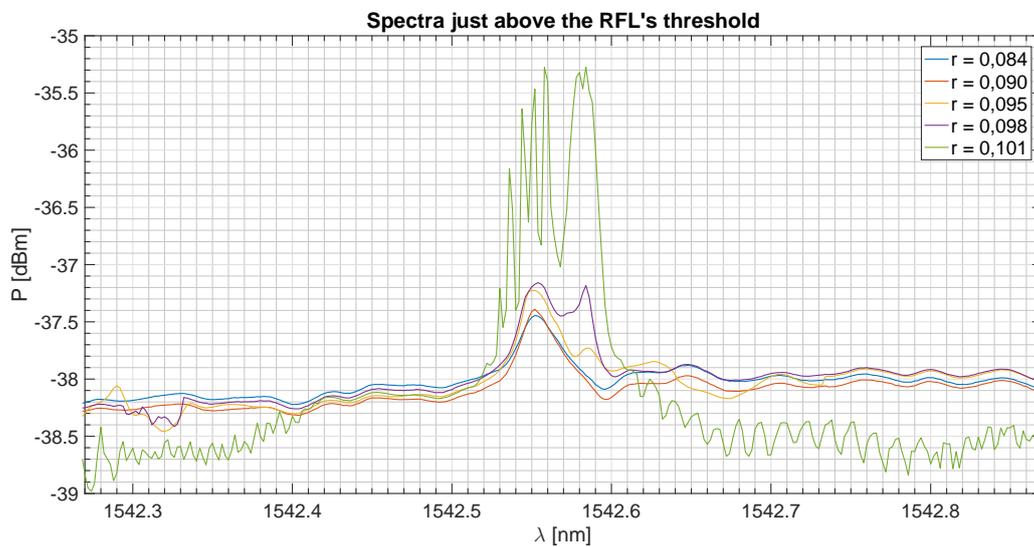


FIGURE 5.7 – Spectres mesurés pour différentes valeurs du paramètre de pompe r (dont l'unité est inconnue) juste au dessus (avec le pas de réglage accessible) du seuil du LAF. Ces valeurs de r proches du seuil du LAF par valeurs supérieures, sont sujettes à un phénomène d'hystérésis dont l'origine n'est pas comprise à ce jour, et ont donc un sens uniquement pour cette figure. Le spectre en dessous du seuil est plat, avec une puissance autour $-38,3\text{dBm}$ pour la valeur d'amplification utilisée ici.

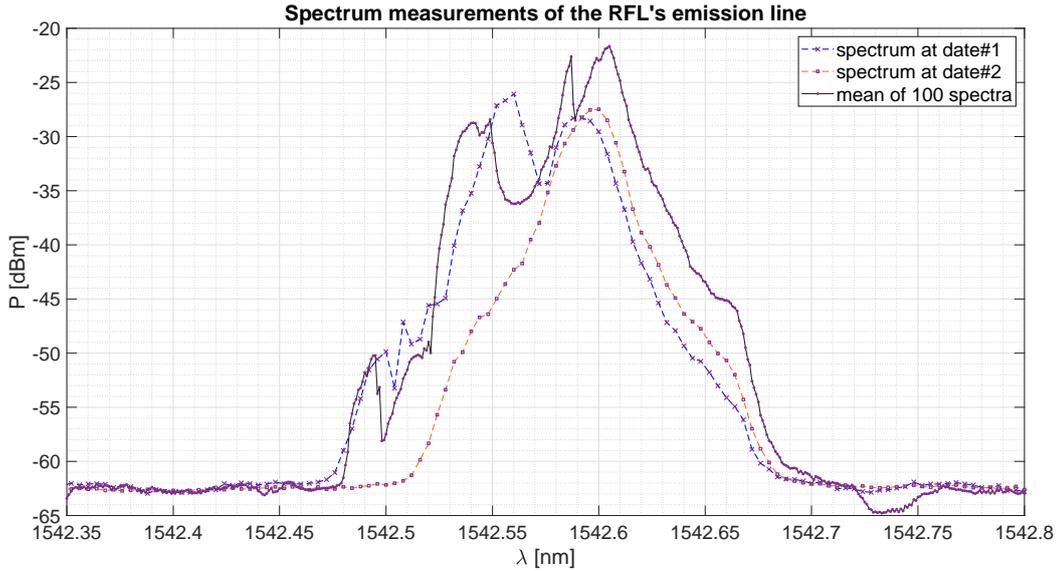


FIGURE 5.8 – Spectre mesuré de la raie d’émission du LAF. L’échantillonnage de l’analyseur de spectre optique est de 0,001 nm pour la moyenne de 100 spectres mesurés successivement sur un intervalle de moins de 0,5 nm, et dans une durée de moins de 0,1 s. Les spectres mesurés à deux instants de dates différentes, sont affichés pour rendre compte de la variabilité spectrale de \mathcal{E}_{rfl} . L’échantillonnage pour ces deux spectres est de 0,005 nm.

significatives ; voir figure 5.8. La moyenne temporelle sur 0,1 s (soit sur 100 spectres) dévoile un profil de raie à la forme non-triviale, voir figure 5.8. Cette variabilité spectrale s’expliquerait par une compétition entre les différents modes “laser”, discutée dans la partie I.2 précédente.

Sur l’échelle de temps de la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ (typiquement une trentaine d’heures) le spectre pris au début et à la fin de l’acquisition présente des différences qui sont similaires à celles affichées figure 5.8. Le spectre dépend du temps, et donc sa transformée de Fourier inverse : $g^{(1)}$ dépend également du temps, i.e. :

$$g^{(1)} \equiv g^{(1)}(t, \tau).$$

La radiation \mathcal{E}_{rfl} en tant que processus n’est donc pas stationnaire au second ordre sur l’échelle de temps de la mesure de $g^{(2)}$. Sans hypothèses supplémentaires, il est impossible de dire si $g^{(2)}$ dépendra uniquement de τ , ou si comme $g^{(1)}$, elle dépendra de t et τ . Les variations spectrales sont confinées sur un support de longueur d’onde restreint et bien déterminé ; entre 1542,45 nm et 1542,75 nm. L’amplitude des variations de puissance, sur 1 ms, relativement au maximum en $\lambda_B = 1542,6$ nm est de 10% au plus.

Effet du doublage en fréquence sur le spectre

La connaissance du spectre de \mathcal{E}_{rfl} après doublage en fréquence est importante car une mesure de contraste $C_1 = 0$ peut correspondre à une radiation chaotique de temps de cohérence non-résolu par le corrélomètre. A la longueur d’onde en jeu, autour de 771,3 nm, si \mathcal{E}_{rfl} est un champ chaotique tel que la largeur caractéristique de son spectre soit de plus de 3 nm, alors la valeur de C_1 n’est plus mesurable avec la précision du corrélomètre, et \mathcal{E}_{rfl} n’est plus distinguable d’un champ cohérent. Si le doublage en fréquence élargit le spectre (plusieurs phénomènes détaillés dans le prochain paragraphe peuvent en être la cause), il est alors impossible de conclure sur la nature stochastique de I_{rfl} . La mesure directe du spectre de \mathcal{E}_{rfl} après doublage s’est avérée impossible avec l’analyseur de spectre à disposition du fait de la trop faible intensité devant le seuil de détection de l’appareil (et ce même avec une valeur d’amplification maximale). Par

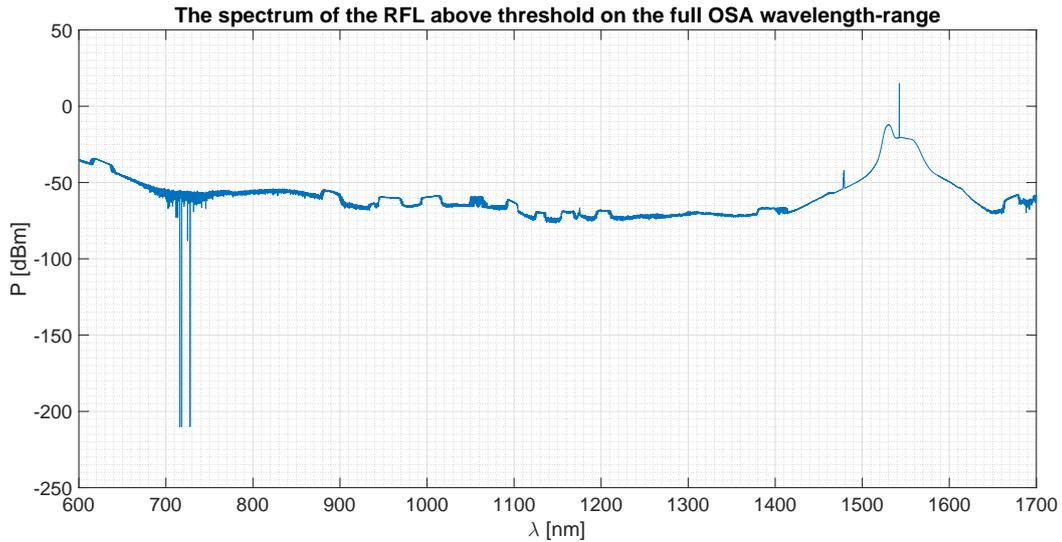


FIGURE 5.9 – Spectre du LAF amplifié, avant doublage en fréquence, mesuré avec l’analyseur de spectre sur la totalité de l’intervalle de longueurs d’ondes accessibles. “RFL” est l’acronyme de *Random Fiber Laser* en anglais, et “OSA” est l’acronyme de *Optical Spectrum Analyser* en anglais. La raie du LAF est visible autour de 1542 nm. Le gain d’amplification paramétré est propre à la mesure présentée sur cette figure. La partie du spectre dans un intervalle de 1 nm autour de $2 \times 780 = 1560$ nm est sans structure fine sous le seuil du LAF.

conséquent, il faut passer en revue les phénomènes physiques qui prennent place lorsque qu’une radiation se propage dans un milieu non-linéaire, comme le cristal KDP, et qui seraient susceptibles de modifier le spectre de la radiation.

La radiation \mathcal{E}_{rfl} émise par le LAF en dessous du seuil, est de nature continue et possède un spectre large, voir figure 5.6. Si l’intensité pour chacune des composantes spectrales en jeu est suffisante pour être doublée, ce qui serait le cas avec l’amplification apportée car l’amplification ne modifie pas le spectre (exceptée pour des valeurs d’amplification extrêmes), le spectre après doublage en fréquence est à priori large également. Dans la configuration expérimentale mise en place, le spectre de \mathcal{E}_{rfl} en dessous du seuil serait donc essentiellement déterminé par le filtre spectral placé avant l’entrée du corrélogramme, et après le cristal non-linéaire, voir figure 5.4. Ce filtre est utilisé pour effectuer une mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sur \mathcal{E}_{rfl} en dessous du seuil, puis retiré lorsque \mathcal{E}_{rfl} est généré au dessus du seuil.

Au dessus du seuil, si \mathcal{E}_{rfl} n’est pas sous forme d’impulsions, et si chaque composante spectrale est suffisamment amplifiée pour être doublée en fréquence, la fréquence centrale du spectre (correspondant au maximum d’intensité) est davantage doublée en fréquence que le bord du spectre. En effet, le doublage en fréquence dépend de l’intensité au carré (effet non-linéaire). Cela a pour conséquence de réduire la largeur caractéristique du spectre, par exemple pour un spectre gaussien après doublage l’écart-type du spectre est réduit d’un facteur $\sqrt{2}$. Ce phénomène ne participe donc pas à élargir le spectre, ce qui va dans le bon sens pour la mesure. Cependant, il est probable que \mathcal{E}_{rfl} soit sous forme d’impulsions, comme il est envisagé théoriquement [216, 154, 155]. Ces impulsions résulteraient du mécanisme de compétition entre les modes [212, 211], et de leur soudaine et erratique synchronisation [152, 154, 211]. En toute rigueur, la propagation d’une impulsion dans un milieu non-linéaire (et dispersif), comme le cristal KDP utilisé, modifie le spectre de la radiation si l’impulsion est suffisamment intense pour être doublée en fréquence. Ce qui est le cas dans l’expérience menée ; \mathcal{E}_{rfl} est effectivement doublé en fréquence. En effet, pour ces impulsions, le phénomène d’auto-modulation de phase, et celui de la dispersion de la vitesse de groupe dans le cristal, prennent place simultanément, voir par

exemple la section 7.5 du chapitre 7 de [219]. Le phénomène de dispersion de la vitesse de groupe de l'impulsion tend à élargir l'impulsion temporellement, donc à réduire sa largeur spectrale. Ce phénomène ne tend donc pas à élargir le spectre de \mathcal{E}_{rff} . Le phénomène d'auto-modulation de phase déplace spectralement le front avant de l'impulsion vers des fréquences plus basses de $\delta\omega_{\text{spm}}$, et de la même quantité $\delta\omega_{\text{spm}}$ le front arrière de l'impulsion vers des fréquences plus hautes. Le phénomène d'auto-modulation de phase engendre donc un élargissement de l'ordre de (voir par exemple [219], section 7.5)

$$2\delta\omega_{\text{spm}} = 2 \frac{n_2 \frac{\omega_0}{c} I_0 L}{\tau_p}, \quad (5.2)$$

où : τ_p est la durée des impulsions, n_2 est relié à la susceptibilité Kerr $\chi^{(3)}$ par (voir par exemple [218], chapitre 5)

$$n_2 := \frac{3\chi^{(3)}(\omega, -\omega, \omega)}{4\epsilon_0 n_0^2 c},$$

la pulsation centrale est ω_0 , et qui a pour vitesse de groupe dans le vide, de permittivité ϵ_0 , la constante c . L'intensité I_0 est définie par :

$$I_0 := 2n_0\epsilon_0 c |\mathcal{E}_{\text{rff}}|^2 \quad (5.3)$$

où n_0 est l'indice de réfraction usuel relié à susceptibilité du premier ordre $\chi^{(1)}$.

L'élargissement (5.2) peut se réécrire en fonction des quantités mesurées par l'analyseur de spectre : la largeur spectrale $\Delta\lambda_{\text{rff}}$, et la puissance P_0 pour la surface δs du disque de la fibre mono-mode en entrée de l'analyseur de spectre. La largeur spectrale $\Delta\lambda_{\text{rff}}$ est reliée à τ_p par : $1/\tau_p = c\Delta\lambda_{\text{rff}}/\lambda_B^2$. La puissance P_0 est reliée à l'intensité par : $I_0 = 2n_0 \frac{P_0}{\delta s}$. Ainsi :

$$2\delta\omega_{\text{spm}} = 8\pi c \frac{\Delta\lambda_{\text{rff}}}{\lambda_B^3} \frac{P_0}{\delta s} L n_0 n_2,$$

ou en terme de longueur d'onde :

$$2\delta\lambda_{\text{spm}} = 4 \frac{\Delta\lambda_{\text{rff}}}{\lambda_B} \frac{P_0}{\delta s} L n_0 n_2. \quad (5.4)$$

Application numérique. La puissance mesurée correspondant à I_0 avant doublage est de $P_0 \simeq 1 \mu\text{W}$ pour une surface δs correspondant à l'aire du disque de la fibre mono-mode de diamètre $125 \mu\text{m}$, l'intensité dans le KDP d'indice $n_0 \simeq 1,48$ à λ_B , est donc

$$I_0 \simeq 241 \text{W.m}^{-2}.$$

La largeur spectrale de l'impulsion est environ égale à $\Delta\lambda_{\text{rff}} = 0,15 \text{ nm}$, et la longueur L correspond au côté du cube de 1 cm formant le cristal de KDP. L'élargissement spectral (5.4) s'écrit alors

$$2\delta\lambda_{\text{spm}} \simeq 4,7 * 10^{-4} n_2 \quad [\text{m}].$$

L'effet non-linéaire dans le cristal KDP est généré par un mécanisme de polarisation électronique, l'indice de réfraction non-linéaire n_2 est de l'ordre de $10^{-20} \text{ m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$ pour ce type de mécanisme, voir [218] table 5.1. Par conséquent l'élargissement spectral $2\delta\lambda_{\text{spm}}$ dû à l'auto-modulation de phase dans le cristal est tout à fait négligeable devant la largeur spectrale $\Delta\lambda_{\text{rff}}$.

Par conséquent, au dessus du seuil, en toute rigueur il faut s'attendre à une modification du spectre de \mathcal{E}_{rff} si la radiation est sous-forme d'impulsions. Cependant l'élargissement spectral induit par le phénomène non-linéaire d'auto-modulation de phase au sein du cristal non-linéaire est tout à fait négligeable devant $\Delta\lambda_{\text{rff}}$. Le phénomène de dispersion de vitesse de groupe au sein du cristal non-linéaire tend à élargir temporellement l'impulsion donc à réduire la largeur spectrale, ce qui va dans le bon sens pour l'expérience. En dessous du seuil, où \mathcal{E}_{rff} est à priori une radiation continue, il n'y a pas de modification spectrale attendue pour \mathcal{E}_{rff} tant que chaque composante spectrale est suffisamment amplifiée pour être doublée.

Remarque. Les bandes d'acceptance spectrale et angulaire du doublage n'ont pas été caractérisées.

Effet de l'amplification sur le spectre

L'amplification utilisée modifie la forme du spectre pour les valeurs d'amplification les plus élevées du paramétrage de gain possible. En dehors de ce voisinage de valeurs élevées aucune modification du spectre n'est observée, relativement à un échantillonnage de 0,005 nm et une résolution de 0,02 nm de l'analyseur de spectre utilisé.

II.3 Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sans action "laser"

Doublage en fréquence et nature des fluctuations de l'intensité

Le doublage en fréquence conserve l'état cohérent du champ [220]. Cependant, un état chaotique Rayleigh est transformé par le doublage en fréquence : il exhibe des fluctuations *supra-thermiques* (i.e. : $g^{(2)}(0) > 2$) après doublage, qu'il soit multi-mode [221], ou mono-mode [220]. Autrement dit, le doublage en fréquence conserve les fluctuations poissoniennes mais accentue les fluctuations du champ chaotique Rayleigh, dans le sens où l'excès de corrélation à $\tau = 0$ dans $g^{(2)}$ est accentué [220]. Par conséquent, malgré l'influence du doublage en fréquence sur les fluctuations du champ chaotique Rayleigh, il est tout de même possible de mettre en exergue une transition d'un état chaotique Rayleigh vers un état cohérent du champ.

Amplification externe et nature des fluctuations de l'intensité

L'amplification avec un amplificateur standard indépendant de la source modifie la nature des fluctuations de l'intensité de la radiation [222, 223]. La transformation du processus stochastique champ \mathcal{E}_{rff} par l'amplification dépend précisément de la nature de ce processus. Lorsque le processus \mathcal{E}_{rff} avant amplification est l'inconnue, il est impossible de déduire la nature de \mathcal{E}_{rff} par la seule donnée des deux fonctions de corrélation $g^{(1)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$, car un processus stochastique est caractérisé par la hiérarchie (infinie) de ses fonctions de corrélation (théorème discuté en Introduction, en sous-partie V.1, paragraphe "Choix des trois premières fonctions de corrélation"). La seule exception est le processus gaussien où la seule donnée de l'auto-corrélation (et du premier moment) suffit. Cependant, un processus \mathcal{E}_{rff} gaussien de moyenne nulle (donc un processus I_{rff} exponentiel, voir (25) dans l'Introduction) donne $g^{(2)}(0) = 2$, certes, mais la réciproque est fautive ; $g^{(2)}(0) = 2$ n'implique pas que \mathcal{E}_{rff} soit gaussien de moyenne nulle (voir le paragraphe suivant (25) dans l'Introduction).

Conséquence sur la caractérisation de \mathcal{E}_{rff} en tant que processus aléatoire

Du fait du doublage en fréquence, l'identification d'un champ chaotique Rayleigh avec la seule donnée de $g^{(2)}(0)$ est délicate, car si l'action du doublage sur un champ chaotique Rayleigh semble connue ($g^{(2)}(0)$ devient plus grand que 2 [221, 220]), l'action du doublage sur un champ donné, non chaotique Rayleigh, peut très bien donner $g^{(2)}(0) > 2$ également. Ainsi, les étapes d'amplification et de doublage en fréquence font qu'aucune conclusion absolue ne peut être déduite sur la nature du processus \mathcal{E}_{rff} , au dessus comme en dessous du seuil. Seules des conclusions négatives peuvent-être données.

Mesures

Dans l'idéal la mesure en dessous du seuil (et aussi celle au-dessus du seuil) aurait dû être effectuée avec un filtre centré sur 771,3 nm (qui correspond à la longueur d'onde centrale de la raie du LAF après doublage), de largeur 1 nm. Le seul filtre qui était à disposition était centré sur 780 nm de largeur 1 nm. Les hypothèses qui sont faites sont les suivantes :

H-LAF-1) Les parties du spectre dans un intervalle de 1 nm autour de 1542,6 nm et autour de 1560 nm sont identiques en dessous du seuil,

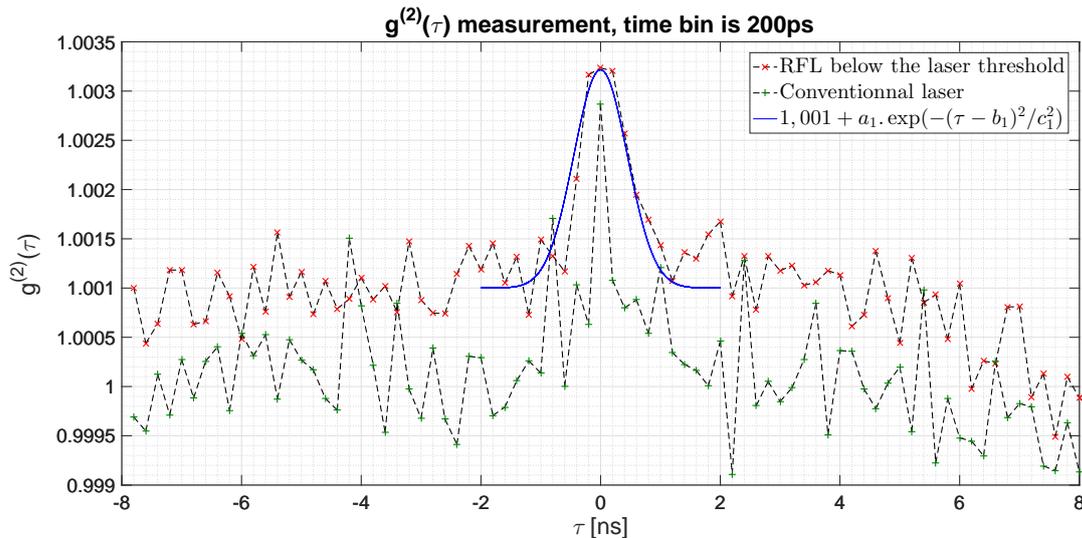


FIGURE 5.10 – Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sur le LAF en dessous du seuil après amplification, doublage en fréquence, et filtrage spectral par une porte centrée sur 780 nm de largeur 1 nm. L’autre graphe est la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour un laser conventionnel (émettant à 1550 nm) après amplification et doublage en fréquence (et sans filtrage spectral). Ces deux mesures ont été effectuées avec un même ν et une même valeur de gain d’amplification. L’origine du plateau dans la mesure de $g^{(2)}$ sur le LAF au dessus du seuil n’est pas encore comprise.

H-LAF-2) Les radiations correspondantes ont la même nature stochastique en dessous du seuil. Ces hypothèses sont acceptables du fait qu’il n’y ait pas de structure spectrale particulière en dessous du seuil du LAF.

La figure 5.10 dévoile la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ obtenue pour \mathcal{E}_{rfl} en dessous du seuil filtré spectralement par un filtre centré sur 780 nm de largeur 1 nm, ainsi que la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ obtenue pour un laser conventionnel centré sur 1550 nm (au dessus de son seuil laser).

Pour ces deux sources, la radiation est amplifiée avant d’être doublée en fréquence et d’être injectée dans le corrélogramme. La densité de photo-événements par détecteur ν est de 968 kcps pour chacune des deux mesures. Pour cette valeur l’écart-type σ de la réponse temporelle du corrélogramme R_δ est donné par (4.4). La valeur de ν n’a pas pu être choisie pour minimiser σ selon (4.3) car il aurait fallu paramétrer l’amplificateur dans la zone où il déforme les spectres. La durée d’acquisition a été fixée à environ 20 heures pour avoir un RSB d’environ 13. Le spectre de \mathcal{E}_{rfl} en dessous du seuil après filtrage, mais sans doublage, a pu être observé. Il est en bonne approximation gaussien. En conséquence, $g^{(1)}(\tau)$ est aussi une gaussienne en bonne approximation. Si \mathcal{E}_{rfl} est un champ chaotique Rayleigh, alors la relation (4.19) s’applique, et la constante de temps caractéristique dans $g^{(2)}(\tau)$ est reliée à celle imposée par le filtre (4.24)

$$\tau_{\text{fil}} = \frac{\lambda_0^2}{c\Delta\lambda} = 2,03 \pm 0,20 \text{ ps}, \quad (5.5)$$

par la relation (4.25). L’incertitude a été calculée à partir de l’incertitude sur la largeur spectrale du filtre donnée par le constructeur. Le contraste attendu (4.19) est alors de :

$$C_1 = \frac{\tau_{\text{fil}}}{\sigma} = (2,68 \pm 0,30) \cdot 10^{-3} \quad (5.6)$$

L’incertitude de (5.5), et celle portant sur l’écart-type σ de la réponse temporelle du corrélogramme, ont été propagées pour obtenir l’incertitude dans (5.6).

La valeur de C_1 mesurée (avec un fit gaussien, voir chapitre 4, sous-partie III.1) est

$$C_1 = (3,22 \pm 0,36) \cdot 10^{-3} \quad (5.7)$$

L'incertitude est celle donnée par le fit, qui est bon (SSE = $3,5 \cdot 10^{-6}$, R-square = 80%). L'incertitude du fit est cependant très influencée par le plateau qui apparaît autour de la valeur de 1,001. L'origine de ce plateau n'est pas comprise à ce jour. Les barres d'erreur entre (5.6) et (5.7) s'intersectent, il ne peut donc rien être conclu rigoureusement sur la nature stochastique de \mathcal{E}_{rf} . Cependant, sachant que le doublage en fréquence a tendance à exacerber les fluctuations d'intensité exponentielles (radiation chaotique Rayleigh), c'est à dire à augmenter $g^{(2)}(0)$, la tendance observée sur C_1 est consistante avec la nature chaotique Rayleigh de \mathcal{E}_{rf} en dessous du seuil, modulo l'influence de l'amplification.

La valeur $g_L^{(2)} * R_\delta[0]$ mesurée avec le laser conventionnel n'est pas égale à 1 même au bruit de grenaille près. Elle est du même ordre de grandeur que C_1 mesuré sur \mathcal{E}_{rf} en dessous du seuil :

$$g_L^{(2)} * R_\delta[0] \simeq 2,90 \cdot 10^{-3} \quad (5.8)$$

La même mesure sans doublage n'a pas pu être effectuée car les modules photo-compteurs ont une efficacité quantique nulle à 1550 nm. En pratique, un laser conventionnel possède une valeur $g^{(2)}(0)$ plus au moins égale à 1 en fonction de sa qualité, mais n'est jamais comparable à la valeur obtenue pour un champ chaotique Rayleigh (5.7). Par exemple, avec un laser Helium-Neon de longueur d'onde centrale $\simeq 633$ nm (conventionnel), sans doublage en fréquence et sans amplification, un pic apparaît en $g_L^{(2)} * R_\delta[0]$ avec la résolution temporelle minimale de 10 ps du corrélateur digital. Cependant, ce pic a une amplitude trois fois plus faible que (5.8), et présente une largeur caractéristique de moins de 20ps, cette largeur n'a pas de signification physique car elle est inférieure à la résolution temporelle du corrélogramme. Elle est interprétée comme un biais du convertisseur temps-digital. La figure 5.10 dévoile une largeur 20 fois plus importante que celle obtenue avec un laser He-Ne en pratique, une largeur d'environ 400 ps. Cette largeur caractéristique est également inférieure à la résolution temporelle σ du corrélogramme, mais reste du même ordre de grandeur, et il est difficile d'interpréter sa signification physique.

Conclusion. La valeur $g^{(2)} * R_\delta[0]$ mesurée avec un laser conventionnel, après doublage en fréquence et amplification, ne correspond pas à celle obtenue pour une mesure de $g^{(2)}$ sur un laser He-Ne sans doublage et sans amplification. Cependant, la mesure est difficilement interprétable car la largeur caractéristique de la fonction $g^{(2)}$ mesurée est inférieure à σ .

Il est possible que la mesure ait été effectuée avec une composante du fond d'émission stimulée amplifiée (ASE) superposée à la raie laser à 1550 nm, voir uniquement sur l'ASE dont le temps de cohérence ne serait pas résolu par le corrélogramme. C'est ce qui expliquerait la différence avec la mesure de $g^{(2)}$ avec un laser He-Ne sans amplification et sans doublage. Pour dissiper ce doute il aurait fallu placer un filtre spectral centré sur 775 nm en entrée du corrélogramme. Cependant, la valeur de la densité de photo-événement obtenue après doublage tend à confirmer que la mesure a bien été effectuée avec une radiation composée, au moins en grande partie, de la raie laser à 1550 nm. En effet, si la densité de photo-événement correspondait à une mesure de $g^{(2)}$ sur l'ASE, alors cela impliquerait que le ν mesuré correspondant à la raie laser à 1550 nm soit 10 fois plus important, voir figure 5.5 : le niveau de l'ASE correspond à environ -27 dBm, alors que celui de la raie laser à 1550 nm correspond à -17 dBm. C'est à dire que le ν mesuré correspondant à la raie laser aurait été de $\simeq 10$ Mcps. Or, sur la raie laser du LAF, avec la même valeur d'amplification, il n'a jamais été mesuré un tel ν , et la raie laser du LAF est plus intense que celle du laser conventionnel à 1550nm, voir figure 5.5. Donc la mesure de $g^{(2)}$ semble bien avoir été effectuée sur la raie laser à 1550 nm.

Par conséquent, il n'est pas impossible que les procédés d'amplification puis de génération de seconde harmonique utilisés, biaisent la nature stochastique d'une radiation laser conventionnelle. Il est aussi possible que la valeur de C_1 anormalement élevée soit un biais du convertisseur temps-digital, différent du biais constaté avec la mesure de $g^{(2)}$ sur un laser He-Ne sans doublage et sans amplification. Avec les données disponibles, il est ici impossible de conclure rigoureusement sur l'effet combiné de l'amplification et du doublage en fréquence sur la nature d'une radiation laser.

Ainsi, étant données les incertitudes qui demeurent sur l'effet de l'amplification utilisée combinée à un doublage en fréquence sur la nature stochastique d'une radiation (quasi)cohérente, il est choisi de ne rien conclure de manière affirmative sur la nature stochastique de \mathcal{E}_{rf} au-dessus du seuil du LAF avec les mesures effectuées.

D'autre part, la valeur C_1 mesurée avec \mathcal{E}_{rf} , de $g^{(1)}$ gaussien de largeur fixée par (5.5), sous le seuil du LAF est plus haute que la valeur attendue pour une radiation chaotique Rayleigh. Sous réserve que l'amplification accentue la valeur $g^{(2)}(0)$ d'un champ chaotique Rayleigh, ou la laisse inchangée, cette observation est consistante avec le fait que \mathcal{E}_{rf} soit un champ chaotique Rayleigh sous le seuil, car le procédé de génération de seconde harmonique accentue la valeur $g^{(2)}(0)$ d'un champ chaotique Rayleigh (voir les références données dans le premier paragraphe de cette sous-partie).

III. Une action “laser” cohérente ?

Le protocole de l'expérience est le suivant : augmenter l'énergie apportée par la pompe pour franchir le seuil du LAF et mesurer $g^{(2)}(\tau)$ au dessus du seuil.

III..1 Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ à l'échelle de la nanoseconde

Quelques observations sur la nature du seuil, dans la configuration expérimentale mise en place.

- Seuil laser erratique. Le seuil “laser” ne possède pas une valeur bien définie, il varie. Cela implique en pratique l'apparition de la raie “laser” sur le spectre pour une valeur du paramètre de pompe, noté r , qui varie (en dehors des erreurs systématiques de lecture du paramètre pompe). De plus, il y a des fluctuations dans les structures de la raie du LAF sans modifier le paramètre de la pompe.
- Pulsations. Il est également possible d'observer près de la valeur “seuil”, sans toucher au paramètre de pompe, des disparitions totales de la raie pendant des durées qui peuvent aller jusqu'à l'ordre de la seconde. Ce qui pourrait s'interpréter comme des sortes de pulsations.
- Hystérésis. Remarque déjà faite en sous-partie II..1. Une fois que la valeur seuil est franchie, un comportement de type hystérésis apparaît : la raie laser persiste pour des valeurs plus faibles de r que la valeur qui avait donné lieu à l'apparition de la raie initialement. L'observateur ne peut se fier à la valeur de r affichée en absolu, elle peut correspondre à un état “au dessus du seuil” un jour de mesure, et le lendemain correspondre à un état “en dessous du seuil”. L'état “au dessus du seuil” est défini par l'apparition de la raie d'émission du LAF avec l'analyseur de spectre.

Rappel. Le filtre spectral centré sur 780 nm de largeur 1 nm n'est présent qu'en dessous du seuil. Le protocole est le suivant. En partant d'une valeur suffisamment en dessous du seuil, une acquisition de $g^{(2)}(\tau)$ est effectuée pour chaque pas de réglage de r (pas le plus fin possible). Il se trouve que le pas de réglage de r n'est pas régulier. Dans l'idéal il faut choisir une valeur de la densité de photo-événement ν qui minimise σ (voir figure 4.5). Cependant, pour ce faire, en dessous du seuil il aurait fallu paramétrer le gain d'amplification proche de sa valeur maximale. Cette option n'a pas été considérée. La densité de photo-événements ν est autour de 970 kcps, en dessous du seuil et est maintenue à cette valeur au dessus du “seuil” grâce une atténuation optique. Le spectre obtenu au dessus du seuil sur la totalité de l'intervalle de longueurs d'ondes accessibles avec l'analyseur de spectre à disposition est présenté figure 5.9. L'intensité de la raie d'émission du LAF est très largement supérieure au continuum de 600 nm à 1700 nm.

L'acquisition de $g^{(2)}$ dure plusieurs heures à chaque fois. La limite de temps pour réaliser l'expérience, avec $\nu \sim 1\text{Mcps}$ impose un RSB maximal d'environ 17 par point de mesure, soit en moyenne 32 heures d'acquisition par point de mesure (i.e. pour chaque point de la courbe $g^{(2)}(\tau)$ de la figure 5.11). Ce RSB est simplement limité par le bruit de grenaille, cela a été vérifié avec

les données expérimentales : l'écart-type dans une région de $g^{(2)} * R_\delta$ éloignée de l'origine physique des délais τ , diminue bien en racine du temps comme prévu (3.44).

Le résultat est présenté figure 5.11. En dessous du seuil, l'incertitude du fit sur C_1 varie peu car

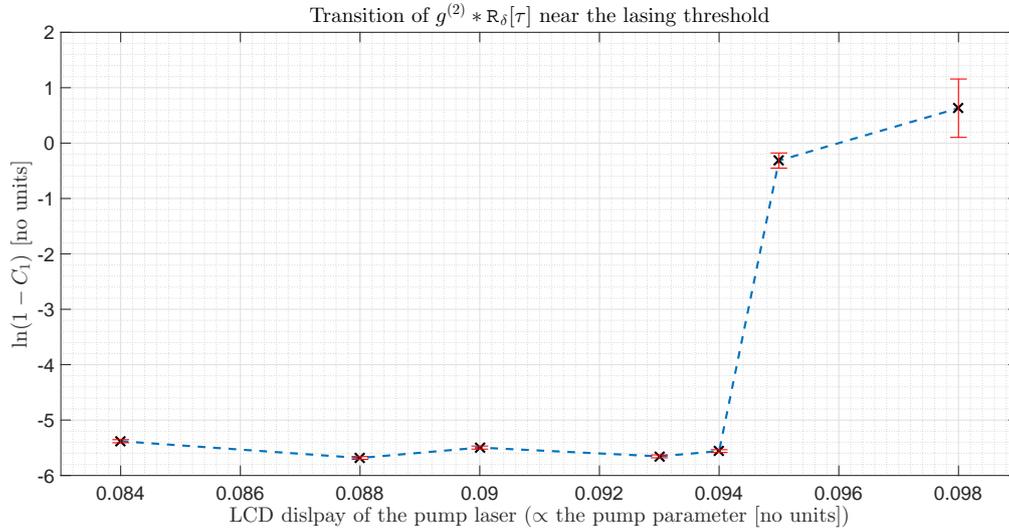


FIGURE 5.11 – Évolution de C_1 au voisinage du seuil du laser fibré aléatoire. En dessous du seuil (filtre centré à 780 nm de largeur 1 nm présent) $C_1 > 0$ et donc $\ln(1 - C_1) < 0$. Les incertitudes en dessous du seuil sont celles du fit gaussien. Au dessus du seuil (aucun filtre spectral), $C_1 \rightarrow 0$ et donc $\ln(1 - C_1) < 0 \rightarrow 0$. De plus, au dessus du seuil il n’y a plus de structure particulière dans $g^{(2)} * R_\delta$, les incertitudes correspondent au bruit de grenaille, et sont très similaires à celles du fit (à 1% près). Les incertitudes sont ensuite propagées à travers la forme fonctionnelle $\ln(1 - x)$.

les points de mesures ont tous à peu près le même RSB. L’incertitude maximale est de $0,36 \cdot 10^{-3}$. Au dessus du seuil, il n’y a plus de structure particulière dans $g^{(2)} * R_\delta$, la valeur à $\tau = 0$ est donnée avec un écart-type de la mesure de $g^{(2)}$ dans l’intervalle considéré, qui correspond physiquement au bruit de grenaille (racine carré de l’auto-corrélation de l’intensité à délai nul). Sous réserve des deux hypothèses H-LAF-1 et H-LAF-2, données en sous-partie II.3, et sous réserve que le spectre au dessus du seuil ne soit pas élargi d’une largeur spectrale de plus de 3nm, la mesure révèle une transition dans le comportement statistique de \mathcal{E}_{rff} . La transformation de la loi de probabilité de I_{rff} par l’amplification ne permet pas de conclure de manière absolue. Cependant, la transition relative entre l’état de \mathcal{E}_{rff} sous le seuil et au dessus du seuil est claire, barres d’erreur comprises. Les figures 5.12, et 5.13, reportent l’observation de cette transition statistique pour la plage totale de délais sur laquelle est construit l’histogramme des corrélations de I_{rff} . Cette transition est compatible avec les résultats obtenus dans [157]. La figure 5.13 révèle l’existence d’une autre constante de temps (de l’ordre de plusieurs microsecondes) au dessus du seuil.

III..2 Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ à l’échelle de la microseconde

Rappel. Au dessus du seuil le filtre centré sur 780 nm de largeur 1 nm n’est pas présent. Au dessus du seuil, la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ requiert d’agrandir la fenêtre temporelle sur laquelle le convertisseur temps-digital génère les photo-événements servant au calcul de l’histogramme des corrélations de I_{rff} . (Le calcul de l’histogramme des corrélations est réalisé par l’ordinateur). D’une fenêtre de 600 ns, il faut passer à une fenêtre de 760 μs pour mesurer correctement $g^{(2)}(\tau)$, soit une fenêtre temporelle plus de mille fois plus grande. Le taux de transfert du convertisseur

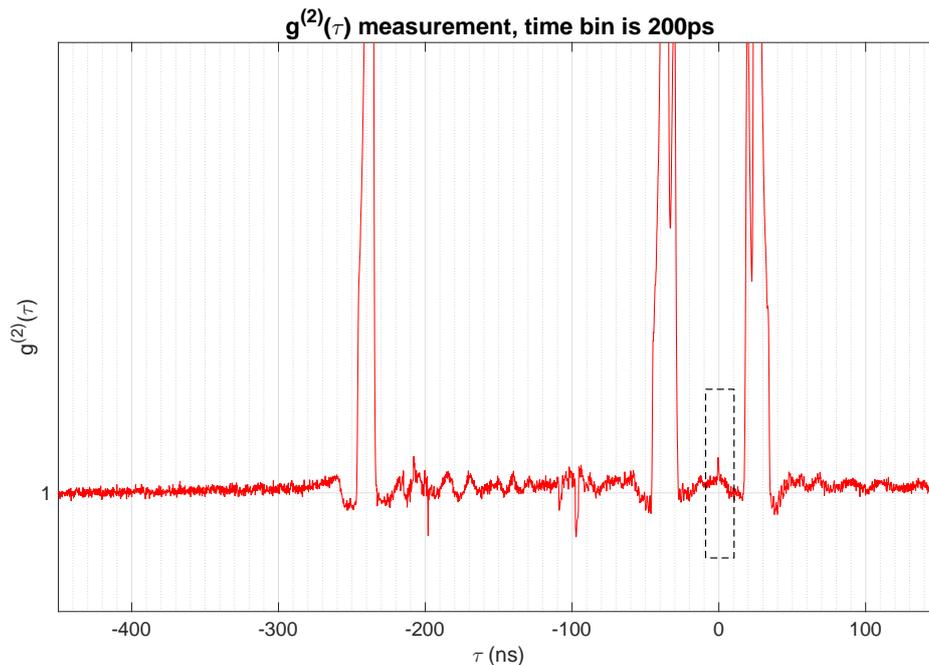


FIGURE 5.12 – Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour \mathcal{E}_{rfl} en dessous du seuil du LAF. La zone en pointillés noirs correspond à l’intervalle de délais de la figure 5.10. Les “pics” centrés en -240 ns, -40 ns, et +30 ns sont dus à des réflexions parasites au sein du corrélogramme.

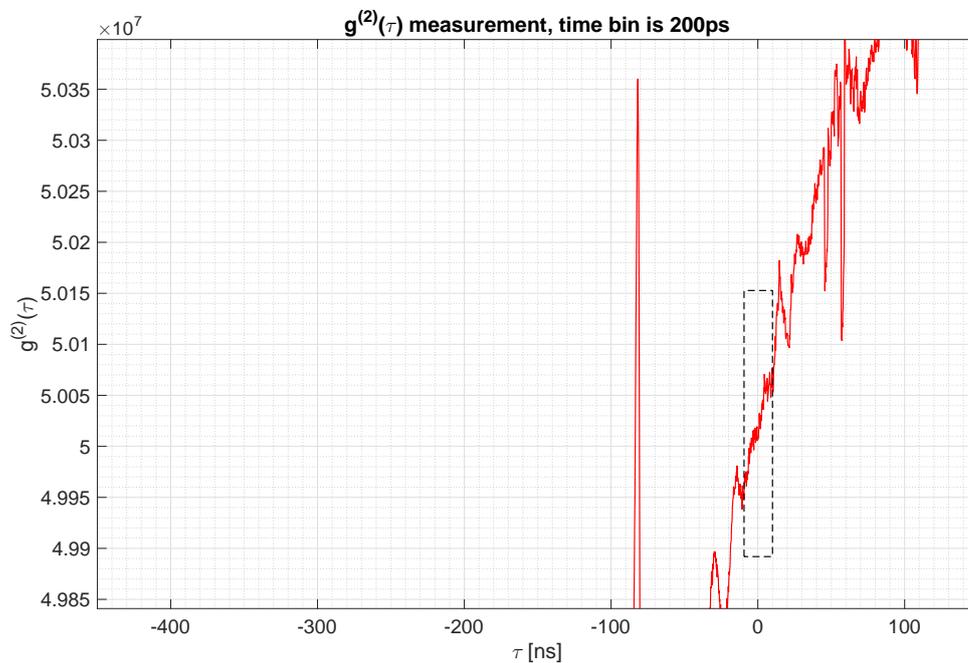


FIGURE 5.13 – Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour \mathcal{E}_{rfl} au dessus du seuil du LFA. L’axe des ordonnées est non-normalisé. La zone en pointillés noirs correspond à l’intervalle de délais de la figure 5.10. Il n’y a plus aucune structure dans cette zone au dessus du seuil, voir figure 5.14. L’apparition d’une structure en cloche de largeur de plusieurs centaines de microsecondes est observée.

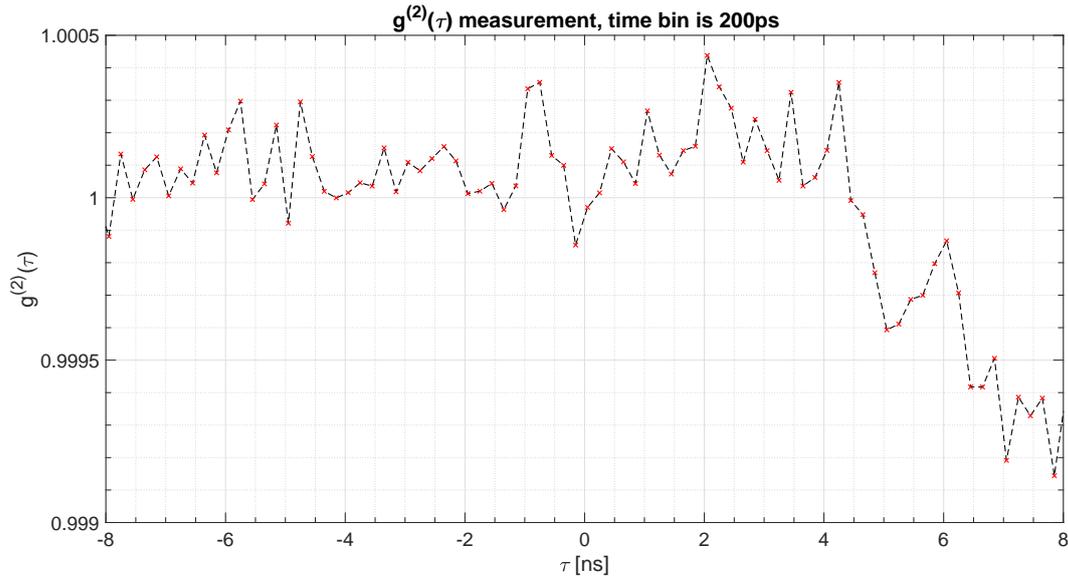


FIGURE 5.14 – Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour \mathcal{E}_{eff} au dessus du seuil du LFA. Résultat à comparer directement avec celui de la figure 5.10.

temps-digital vers l'ordinateur, et la capacité de calcul en temps réel de cet ordinateur, étant limités, il a fallu réduire la densité de photo-événements ν , qui était autour de 970 kcps, pour obtenir une résolution temporelle de l'histogramme des corrélations la plus petite possible. Si rien n'est fait pour atténuer ν , la résolution temporelle de l'histogramme des corrélations de I_{eff} est de 253 ns (plus de mille fois celle de la fenêtre temporelle de 600 ns qui est de 200 ps). La réduction de ν doit se faire telle que ν reste largement au dessus des valeurs mesurées en l'absence de tout signal. L'atténuation s'est faite de sorte que ν (moyenne par définition), au dessus du seuil, ait une valeur autour de 150 kcps, avec des maxima autour de 350 kcps et des minimums autour de 40 kcps. En l'absence de tout signal ν vaut 7 kcps. Avec l'atténuation réalisée, la résolution temporelle de l'histogramme des corrélations de I_{eff} peut alors être abaissée à 5 ns (relativement à 253 ns) sur la fenêtre de 760 μs . Pour abaisser cette résolution temporelle de 5 ns sous la nanoseconde, il aurait fallu rapprocher ν des niveaux mesurés en l'absence de signal. Cette option n'a pas été choisie. Avec le temps d'expérimentation disponible, la durée d'une acquisition pour une valeur du paramètre pompe r au dessus du seuil (excepté pour les trois points de la figure 5.11) a été fixée à la durée maximale envisageable, soit environ 20 heures. La mesure de $g^{(2)}(\tau)$ révèle trois constantes de temps de l'ordre de la microseconde au dessus du seuil, voir table 5.1. La première, notée τ_γ , de l'ordre de la centaine de micro-secondes, dessi-

TABLE 5.1 – Constantes de temps constatées dans la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ au dessus du seuil du LAF.

notation proposée	signification possible	ordre de grandeur constaté
τ_γ	temps de cohérence des impulsions	$\sim 100 \mu\text{s}$
τ_{III}	pseudo-période des impulsions	$\sim 10 \mu\text{s}$
τ_L	largeur du lobe central dans $g^{(2)}$	$\sim 1 \mu\text{s}$

nerait une enveloppe de type exponentielle décroissante (elle se visualise figure 5.16). Le temps de cohérence τ_γ serait la constante de temps caractéristique telle que, qualitativement, deux impulsions séparées de moins de τ_γ ont tendance à être similaires, et deux impulsions séparées

d'une durée de plus de τ_γ ne se ressemblent plus. La deuxième, notée τ_{III} de l'ordre de la dizaine de microsecondes, caractériserait une pseudo-période de pseudo-oscillations modulées par l'enveloppe. L'indice III est utilisé pour rappeler la présence des impulsions du LAF. Cette observation est compatible avec l'émission d'impulsions du LAF au dessus du seuil, qui s'expliquerait par de soudaines synchronisations de modes "laser". La pseudo-période des impulsions formant I_{rff} est responsable de l'apparition de la constante τ_{III} dans $g^{(2)}$. La troisième, notée τ_L , correspond à la largeur du lobe central dans la fonction $g^{(2)}$, c'est le pic centré sur $\tau = 0$. Son interprétation n'est pas encore claire, cette quantité est reliée à τ_γ . La table 5.1 résume cette observation et des interprétations possibles.

La figure 5.15 présente les mesures de $g^{(2)}(\tau)$ obtenues sur une échelle de plusieurs centaines de microsecondes lorsque \mathcal{E}_{rff} est en dessous du seuil (avec filtre à 780 nm) ou approchant le seuil par valeurs supérieures (sans filtre à 780 nm). Les pseudo-oscillations apparaissent au fur et à mesure que le seuil est franchi. La figure 5.16 fait de même mais lorsque le seuil est largement

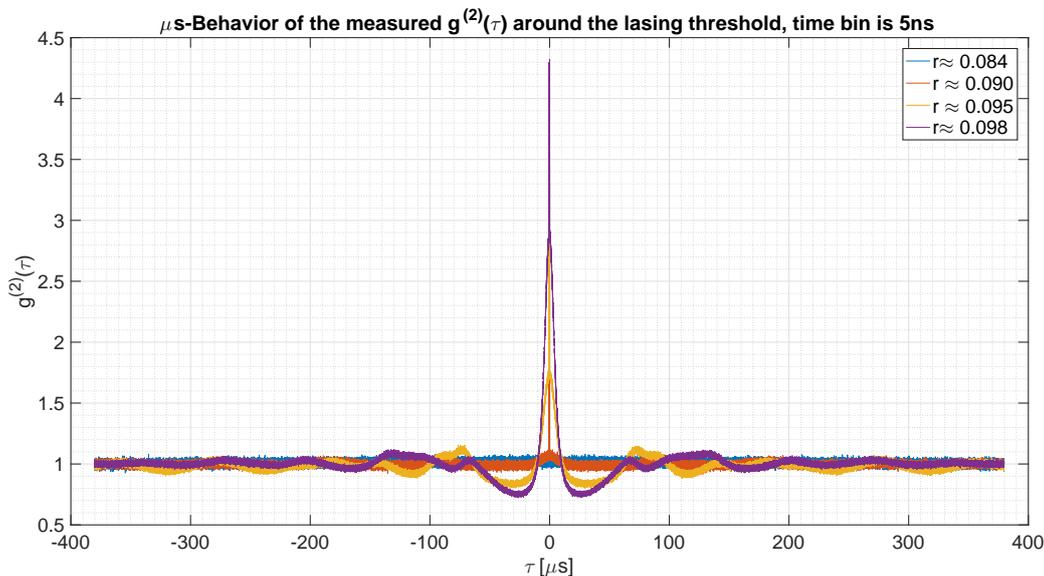


FIGURE 5.15 – Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour \mathcal{E}_{rff} au voisinage du seuil du LAF, et pour une échelle de temps de l'ordre de la centaine de microsecondes. Le paramètre r est appelé par abus de langage le paramètre de pompe, en réalité c'est une constante qui lui est proportionnelle. La structure fine qui se dessine en haut du lobe central (i.e., centré sur $\tau = 0$) correspond en fait aux pics de corrélations parasites présentés par exemple figure 5.13.

franchi. Une tentative de caractérisation de l'évolution des pseudo-oscillations avec le paramètre de pompe est menée dans la sous-partie suivante.

Une observation importante. Au dessus du seuil, la forme stable du signal $g^{(2)} * R_\delta$, comme présenté figure 5.16, semble apparaître quasi-instantanément (durée en dessous de la minute). Sans analyse plus fine, il peut alors être tentant de réaliser l'acquisition sur quelques minutes seulement. Un test a été effectué pour vérifier si $g^{(2)}(\tau)$ pouvait être estimé via (3.11) sur une durée de l'ordre de la minute (sous réserve de l'ergodicité en auto-covariance). Il s'avère que la mesure de $g^{(2)}$ à partir d'une date t_0 , et pour une durée T_0 de l'ordre de quelques minutes, n'est pas identique à la mesure de $g^{(2)}$ à partir d'une date $t_1 \neq t_0$ pour la même durée T_0 . La signification de ce comportement est difficile à déterminer. Il est possible que ce soit un fait physique, mais il est aussi possible que ce soit dû aux fluctuations du paramètre pompe. La figure 5.17 rend compte de cette non-stationnarité du second ordre lorsque l'acquisition ne dure que quelques minutes. La valeur $g^{(2)} * R_\delta[0]$ pour 5 acquisitions indépendantes, d'une minute chacune, et pour un même paramètre de pompe donné, y est affichée. Au voisinage du seuil les 5

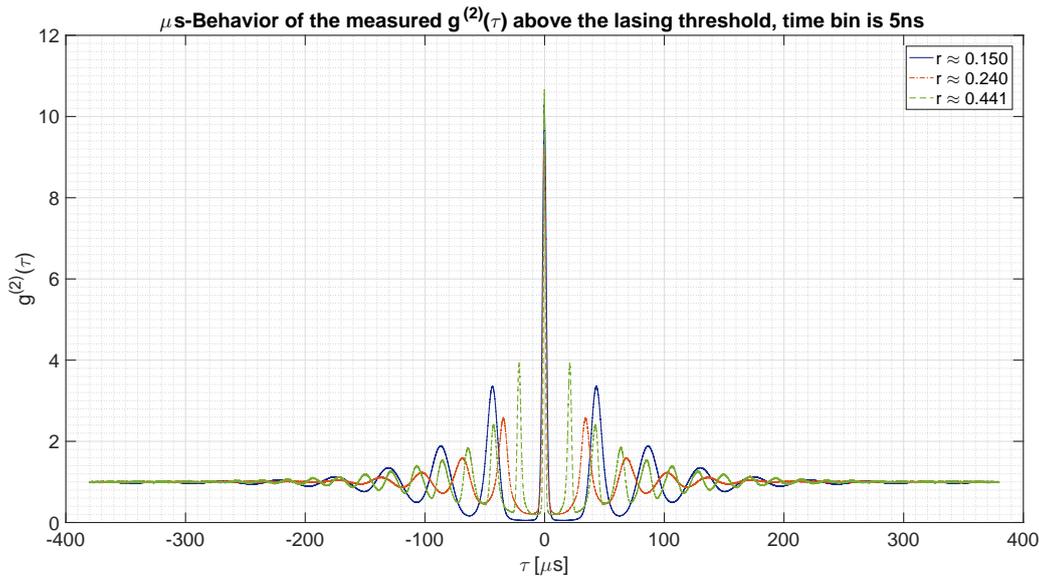


FIGURE 5.16 – Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour \mathcal{E}_{rff} bien au dessus du seuil du LFA. Le paramètre r est proportionnel au paramètre de pompe. Les pics de corrélations parasites sont moins visibles que sur la figure 5.15 car l’amplitude du lobe central a plus que doublée.

acquisitions indépendantes, de même durée (1minute), réalisées à des dates différentes, donnent le même résultat. Au delà de ce voisinage, les 5 acquisitions diffèrent ; la stationnarité au second ordre n’est donc pas valide. Ce test a également été effectué pour une durée d’acquisition T_0 de 5minutes, et suggère la même conclusion. Par conséquent, une durée d’observation T_0 de l’ordre de quelques minutes, ne permet pas de définir $g^{(2)}(\tau)$. Même si la forme stable du signal $g^{(2)} * R_\delta$ semble apparaître quasi-instantanément, c’est une illusion, et il est nécessaire d’intégrer le plus longtemps possible pour que (3.10) puisse être valide (si l’ergodicité en auto-covariance est vérifiée, ce qui est supposé ad-hoc ici). Le manque de temps n’a pas permis de comparer deux mesures de $g^{(2)}$, réalisées dans les mêmes conditions, mais à deux instants différents, et pour des durées d’acquisition T_0 longues (de quelques dizaines d’heures). Remarque ; à cause du phénomène d’hystérésis mentionné en sous-partie III..1, le seuil du LAF pour la mesure présentée figure 5.17 n’est pas le même que celui présenté figure 5.11. Pour la figure 5.17 le premier point de mesure est le premier point au dessus du seuil.

III..3 Tentatives de caractérisation

Une tentative de caractérisation du comportement du LAF au dessus de son seuil est présentée dans cette sous-partie. La caractérisation est essentiellement basée sur l’évolution des constantes de temps dévoilées en table 5.1, avec les variations du paramètre de pompe.

La première étude concerne la largeur caractéristique du lobe central présent dans la mesure de $g^{(2)}(\tau)$. Pour chaque valeur r , le lobe centrale est fitté par une gaussienne en très bonne approximation (en moyenne : R-square=88%, SSE= 2.10^{-6}), l’évolution de la largeur à mi-hauteur avec le paramètre pompe est reportée figure 5.18. La largeur à mi-hauteur τ_L décroît algébriquement avec l’augmentation du paramètre de pompe r (en $\sim 1/r^2$)

$$\tau_L(r) \propto ar^b + c, \quad (5.9)$$

où les constantes a, b et c sont données dans la légende de la figure 5.18. Le modèle exponentiel semble aussi pertinent, le fit est légèrement moins bon, voir figure 5.18.

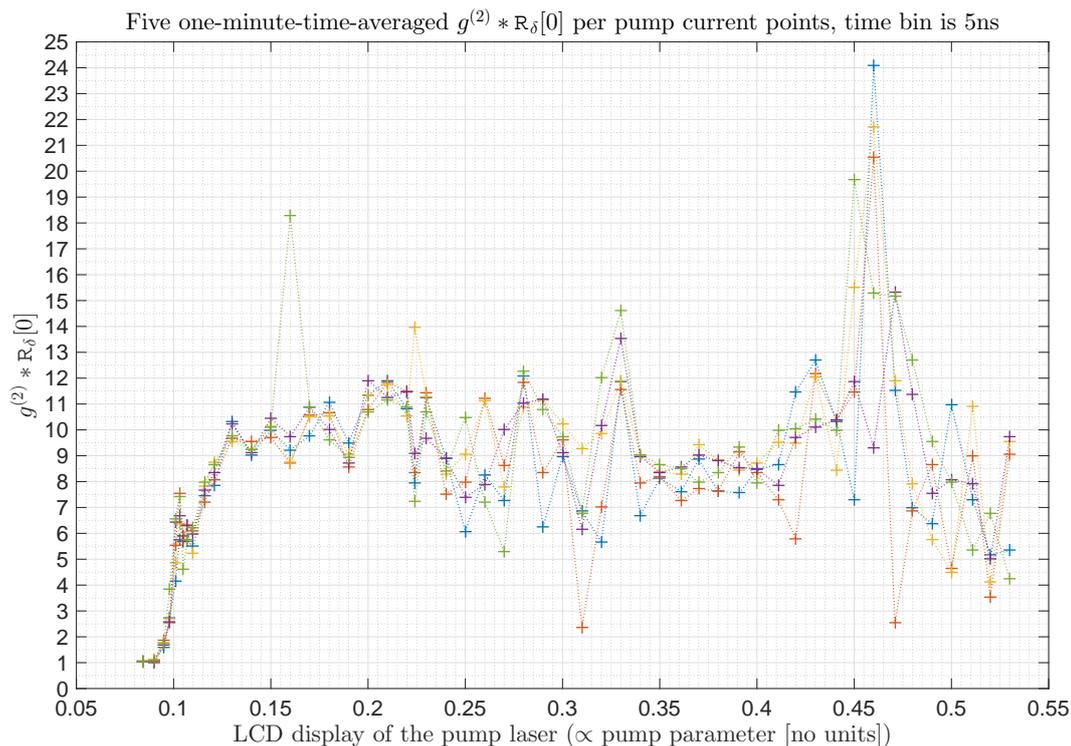


FIGURE 5.17 – Valeurs de $g^{(2)} * R_{\delta}[0]$ pour 5 acquisitions indépendantes, de même durée (1minute), réalisées à des dates différentes. Le premier point au dessus du seuil (accessible avec le pas de réglage disponible) est le premier point de mesure affiché.

La deuxième étude concerne le nombre de pseudo-oscillations présentes dans la fenêtre temporelle, ce qui renseigne indirectement sur l'évolution de τ_{III} avec r (τ_{III} est obtenu en divisant la durée de la fenêtre temporelle par le nombre de pseudo-oscillations présentes). Cette étude ne dévoile aucune tendance particulière, voir figure 5.19. La pseudo-période entre les impulsions serait indépendante de r , et donc le phénomène physique engendrant les impulsions au dessus du seuil du LAF ne dépendrait pas de r .

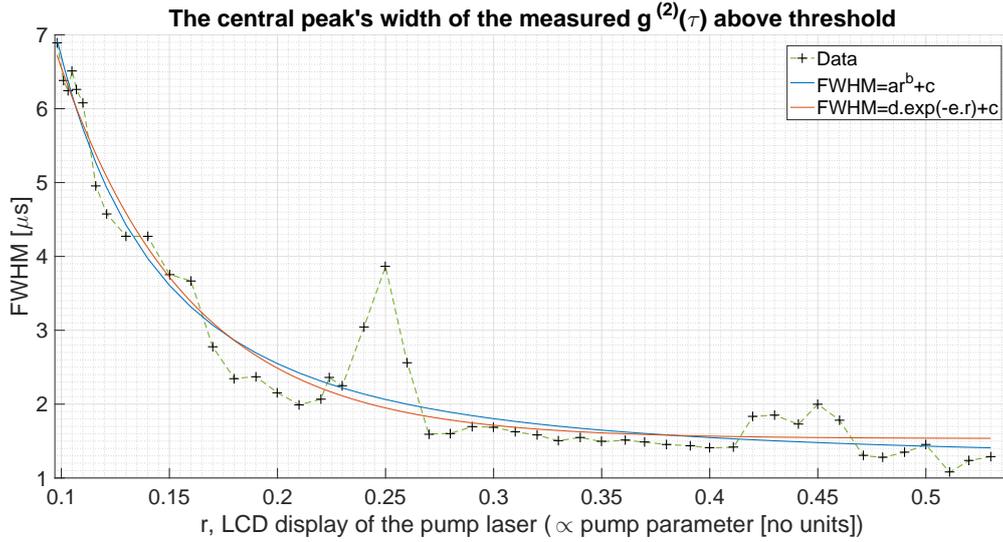


FIGURE 5.18 – Évolution de la largeur à mi-hauteur du lob central de $g^{(2)}(\tau)$ pour \mathcal{E}_{eff} au dessus du seuil. Les paramètres du fit sont : $a = 0,04821 \pm 0,0500$, $b = -2,055 \pm 0,444$, $c = 1,231 \pm 0,306$. Le modèle de fit est très bon R-square= 94,7%, malgré des écarts au modèle, localisés, significatifs SSE= 7,4. Le modèle de fit exponentiel a pour paramètres : $d = 26,44$, $e = 16,61$, et $c = 1,533$. Le modèle est moins bon : R-square= 94,2%, et le modèle est moins pertinent pour la prédiction : SSE=8,1.

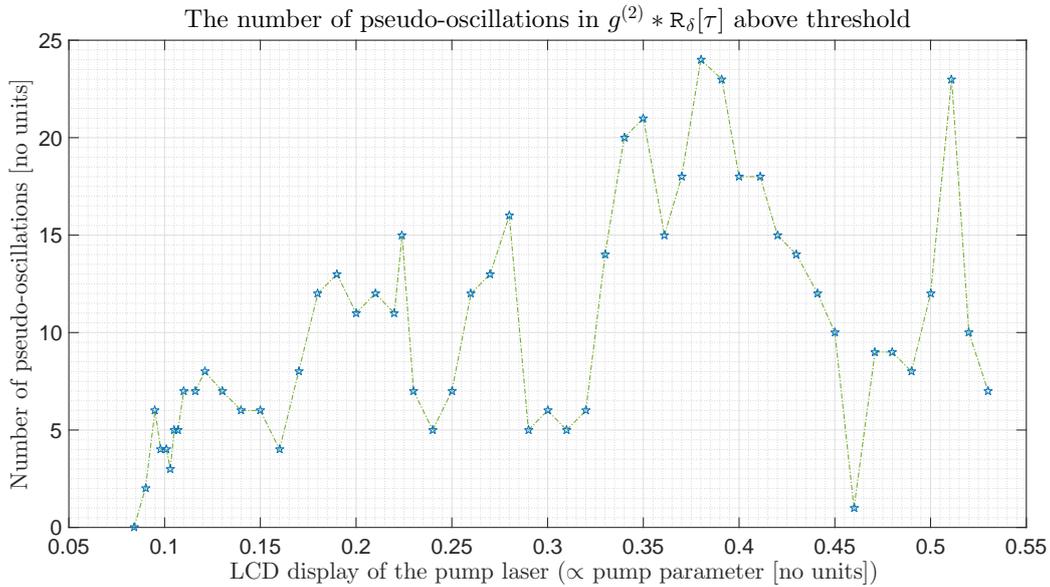


FIGURE 5.19 – Évolution du nombre des pseudo-oscillations présentes dans la fenêtre temporelle avec r (comptées uniquement pour $\tau > 0$). Aucune tendance particulière n'est à relever.

IV. Un modèle pour expliquer $g^{(2)}(0) = 1$ à l'échelle de la nanoseconde

Dans ce qui suit l'influence du doublage en fréquence, et l'influence de l'amplification sont volontairement ignorées.

Soit le $n(t)$ le nombre de photons présents dans une durée $[0, t]$, où 0 est le choix arbitraire de

l'origine des dates. Au dessus du seuil, I_{rff} pourrait résulter de synchronisations de différents modes "laser" survenant sur une échelle de temps microseconde (voir table 5.1), donc rares relativement à l'échelle nano-seconde, et à priori indépendantes (comme suggéré par le mécanisme d'excitation proposé dans [211]), le nombre de synchronisation $N_s(t)$ dans un intervalle $[0, t]$ donné, suivrait alors une loi de Poisson. Ainsi, le nombre de photons $n(t)$ peut être décrit comme un processus de Poisson composé

$$n(t) = \sum_{k=1}^{N_s(t)} n_k, \quad (5.10)$$

où :

- $N_s(t)$ est un processus de Poisson de densité homogène ν_s , représentant le nombre de synchronisation. Les synchronisations sont donc des points de Poisson $(t_k)_k$ sur l'axe du temps, ayant eu lieu durant $[0, t]$.
- Les $(n_k)_k$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Elles représentent le nombre de photons créés lors d'une synchronisation à la date t_k , et sont indépendantes des $(t_k)_k$. Ce nombre de photon est relié au nombre de modes qui se synchronisent à la date t_k . La loi des $(n_k)_k$ est déduite ci-après à partir des prédictions et observations.

L'intensité I_{rff} est le processus dérivée de n , et s'écrit alors (en $[\text{photon.s}^{-1}]$) :

$$I_{\text{rff}}(t) = \sum_k n_k \delta(t - t_k). \quad (5.11)$$

Pour que les réalisations $I_{\text{rff}}(t_k)$ soient des V.A. de loi α -stable de Lévy \mathcal{S}_α [154, 155, 156], il faut et suffit que les $(n_k)_k$ suivent une loi \mathcal{S}_α , tronquée pour que $\langle n_k^2 \rangle$ reste fini (car c'est indirectement une énergie). Remarque. Dans [155] I_{rff} est également considérée comme une somme de V.A. de Lévy α -stables tronquées pour étudier la statistique des réalisations de I_{rff} . Ici I_{rff} est décrit comme un processus stochastique pour étudier sa fonction d'auto-corrélation. L'auto-covariance de I_{rff} se déduit en dérivant (deux fois) l'auto-covariance de n :

$$C_{I_{\text{rff}}I_{\text{rff}}}(\tau) = \left(\langle n_k \rangle^2 + \langle n_k^2 \rangle \right) \nu_s \delta(\tau). \quad (5.12)$$

Le premier moment de I_{rff} se déduit sans difficulté en dérivant le premier moment de n qui se calcule sans difficultés grâce à l'indépendance des $(t_k)_k$ et des $(n_k)_k$,

$$\langle I_{\text{rff}} \rangle = \langle n_k \rangle \nu_s,$$

et par conséquent avec (22) (voir Introduction), exceptée la singularité en $\tau = 0$,

$$\forall \tau > 0, \quad g^{(2)}(\tau) = 1. \quad (5.13)$$

Remarque. Le modèle ci-dessus permet de retrouver la description classique attendue pour un mode d'un champ cohérent. En effet, avec une description classique, l'intensité (d'un mode) d'un champ cohérent est distribuée selon un train d'impulsions de Poisson de densité homogène (voir la sous-partie IX. de l'Introduction). Le fait qu'il n'y ait qu'un seul mode revient dans le modèle ci-dessus à prendre les $(n_k)_k$ comme des variables aléatoires dégénérées qui prennent la valeur 1 avec la probabilité 1. Par conséquent $n(t) \equiv N_s(t)$ est un processus de Poisson homogène. Par définition d'un processus de Poisson composé, $N_s(t)$ représente le nombre d'occurrences qui ont pour dates des points de Poisson $(t_i)_i$. Avec un seul mode, les occurrences sont le nombre de photons présents dans $[0, t]$, qui, classiquement, sont localisés (définition classique (d'un mode) d'un champ cohérent). L'interprétation de $N_s(t)$ devient donc le nombre de photons dans $[0, t]$. Cette interprétation est consistante avec le fait que $n(t) = N_s(t)$ puisque c'est la définition posée

pour $n(t)$. L'intensité I_{rff} s'écrit alors comme la dérivée d'un processus de Poisson homogène, c'est à dire un train d'impulsions de Poisson

$$I_{\text{rff}} = F_0 \sum_i \delta(t - t_i),$$

où F_0 est une constante qui a les unités de I_{rff} multipliées à celles d'un temps.

V. Conclusion

Trois résultats majeurs sont à retenir de l'expérience réalisée.

- La transition de la valeur $g^{(2)}(0)$; plus grande que 1 en dessous du seuil du LAF, et égale à 1 au dessus du seuil. Voir figure 5.11. L'amplification et la génération de seconde harmonique, empêchent toutes conclusions supplémentaires sur la nature du champ \mathcal{E}_{rff} au dessus du seuil comme en dessous du seuil. Les observations en dessous du seuil ne sont pas incompatibles avec une nature chaotique Rayleigh de \mathcal{E}_{rff} , et la transition observée ne contredit pas la transition de la loi de probabilité des réalisations de I_{rff} lors du franchissement du seuil, mise en évidence expérimentalement dans [154, 155, 156].
- Deux constantes de temps apparaissent au dessus du seuil, τ_γ et τ_{III} , voir table 5.1. Le temps τ_γ peut s'interpréter comme le temps de cohérence des impulsions émises par le LAF ($\sim 100 \mu\text{s}$), et τ_{III} par leur pseudo-période ($\sim 10 \mu\text{s}$).
- Une troisième constante de temps remarquable est la largeur τ_L du lobe central dans $g^{(2)}$. Elle diminuerait algébriquement avec l'augmentation du paramètre de pompe, voir (5.9). Le modèle exponentiel semble aussi pertinent pour cette décroissance.

Une piste pour modéliser I_{rff} en tant que processus stochastique a été imaginée, et s'est avérée fructueuse pour expliquer pourquoi $g^{(2)}(0)$ égal 1 au dessus du seuil. Il reste cependant à décrire précisément la troncature effectuée dans la loi \mathcal{S}_α pour garantir l'existence de $\langle n_k^2 \rangle$.

L'hypothèse de stationnarité au second ordre de I_{rff} pourrait être testée en effectuant deux mesures de $g^{(2)}$ dans des conditions identiques, de durées identiques, mais réalisées à des instants différents. L'hypothèse d'ergodicité en auto-covariance, posée ad-hoc également, serait testable en effectuant le calcul de $g^{(2)}$ sur un échantillon de N_v valeurs de I_{rff} construit à partir de mesures différentes et indépendantes, puis en comparant ce calcul à la mesure de $g^{(2)}$ obtenue via (3.11), sur une durée d'acquisition T_0 générant également N_v valeurs. Le temps aura manqué pour tester ces deux hypothèses qui n'ont rien d'évident, étant donné le comportement très singulier des fluctuations du champ \mathcal{E}_{rff} généré par le LAF.

La transition observée dans $g^{(2)}$ suggère que la fonction $g^{(2)}$ permettrait d'identifier un laser aléatoire unidimensionnel relativement à une radiation chaotique. Cette expérience doit être reproduite et vérifiée, si possible sans doublage en fréquence et sans amplification. Ce résultat constitue néanmoins une première étape afin de savoir si la fonction $g^{(2)}$ permet d'identifier un laser astrophysique relativement à une radiation chaotique.

Conclusion

Résultats et critiques

Camper dans la campagne française,
déjà, ça demande du coeur au ventre*.
Les paysans n'aiment guère. Surtout, ils
ne comprennent pas. Un qui couche
dehors, c'est un va-nu-pieds, un
traîne-misère, un cagnagnoux**.

* C'était en 1950! Depuis...

** Un cagnagnoux, c'est un romanichel,
en parler morvandiau. Féminin : une
cagnagnouse.

Bête et méchant, Cavanna

Chaque chapitre contient sa conclusion. La présente conclusion générale résume les résultats avec moins de détails techniques, mais plus de recul, et de sorte à inclure chaque conclusion locale dans un ensemble logique. Elle a également pour finalité de permettre au lecteur voulant lire la conclusion générale avant le corps de la dissertation, d'y trouver suffisamment d'éléments pour avoir une idée précise des travaux présentés.

I. Un modèle physique pour calculer les fonctions de corrélation

La première partie "Fondements" propose une comparaison originale des fonctions de corrélation $g^{(1)}$ (champ-champ), $g^{(3/2)}$ (intensité-champ), et $g^{(2)}$ (intensité-intensité), pour un champ chaotique ricien (appellation proposée, l'amplitude possède une densité de probabilité de Rice) créé selon une situation physique qui peut s'appliquer au milieu interstellaire "Weigelt blob B" voisin du système stellaire Eta Carinae. La comparaison est menée dans le cadre des problématiques P1 et P2. Remarque. Un travail préliminaire, également original, a été mené avant de se lancer dans les calculs : la transposition de la définition de $g^{(3/2)}$ de nature quantique, au domaine de la physique classique.

Dans la situation physique fondamentale considérée le champ ricien résulte de la superposition d'une radiation cohérente avec une radiation chaotique Rayleigh (appellation proposée, l'amplitude possède une densité de probabilité de Rayleigh) issue d'une multitude d'oscillateurs (un oscillateur est une particule massive rayonnant au repos un champ décrit par un oscillateur harmonique), libres et indépendants, en mouvement brownien non-relativiste dans un gaz support, relativement à un observateur inertiel. Ces oscillateurs sont appelés oscillateurs browniens. Cette situation physique peut correspondre à celle du milieu interstellaire "Weigelt blob B", la modélisation imaginée est la suivante. La taille du plasma coronal du milieu interstellaire est négligée, seul le milieu atomique (H I) et ionisé (Fe II) est considéré. Le milieu interstellaire est divisé (conceptuellement) en deux zones. Une dans laquelle les ions Fe II produisent une radiation chaotique Rayleigh en étant dans l'état stable d'un mouvement brownien libre et non-relativiste, relativement à un observateur inertiel, dans un gaz support d'hydrogène H I à

l'équilibre canonique de Boltzmann-Gibbs. Les ions Fe II sont supposés indépendants les uns des autres de part leur faible nombre comparé à celui des atomes H I. Les ions Fe II forment alors des oscillateurs browniens indépendants selon l'appellation utilisée. Les atomes H I sont supposés ne pas rayonner autour de la pulsation d'intérêt. Dans l'autre partie du milieu interstellaire, les ions Fe II sont supposés produire une radiation cohérente modélisant de manière idéalisée l'action laser suspectée. L'observateur inertiel ne peut pas résoudre les deux zones du milieu interstellaire et les deux types de radiation se propagent librement jusqu'à lui.

La modélisation originale proposée repose sur un modèle cinétique de type "premiers principes" pour décrire le transport des oscillateurs browniens (Fe II). Le modèle cinétique "premiers principes" est le modèle du gaz de cubes durs, considéré sans amortissement de la vitesse entre deux collisions (l'appellation "sans effets inertiels" est utilisée). Il est de plus traité dans un cadre non-relativiste. Ce modèle est analysé de manière originale avec deux espèces chimiques : une population d'oscillateurs (Fe II) créant la radiation d'intérêt pour un observateur inertiel, et une population de particules formant un gaz support (H I). Ces deux espèces sont libres de tout potentiel, et les oscillateurs sont indépendants entre eux du fait de leur faible nombre devant les particules du gaz support. Les collisions sont élastiques. Des hypothèses au caractère amont : la conservation de la masse, la conservation de l'impulsion, et l'équilibre canonique pour le gaz support (au sens de la physique statistique de Boltzmann-Gibbs) permettent d'atteindre le mouvement brownien pour les oscillateurs (dans une certaine limite du modèle, appelée limite brownienne). Ce modèle possède des hypothèses simples, et son traitement est analytique avec une description fondée sur les processus markoviens à sauts avec continuum d'états (PMSCE). La nature de ce modèle permet de découpler la dynamique du mouvement brownien des oscillateurs, des oscillations du champ qu'ils rayonnent. Ces deux dynamiques peuvent en effet être très différentes en fonction de la pulsation considérée, et/ou de la température et de la densité du gaz. Enfin, l'analyse laisse transparaitre les modifications à apporter pour prendre en compte un autre équilibre (une autre distribution des vitesses) pour le gaz support, et donc un autre processus de transport pour les oscillateurs, ainsi que les changements intervenant dans un cas relativiste.

Ainsi, la modélisation développée est suffisamment sophistiquée pour permettre d'examiner comment les fonctions de corrélation rendraient compte de situations de transport anormal, cet aspect est développé plus précisément dans les "Ouvertures théoriques" qui suivent.

Les résultats des fonctions de corrélation semblent être originaux pour $g^{(3/2)}$, dans le cas ricien et Rayleigh, et pour $g^{(2)}$ dans le cas ricien. Le niveau de détail permet de rendre compte de l'influence de la masse et de la taille des espèces chimiques en présence, de la température et de la densité du gaz, ainsi que de l'influence de la distribution des vitesses dans les constantes de temps apparaissant dans les fonctions de corrélation. Des simulations Monte-Carlo basées sur le modèle cinétique du gaz de cubes durs confirment les calculs analytiques.

Remarque. Le champ chaotique ricien est un champ chaotique général dans le sens où son amplitude complexe forme un processus (complexe) gaussien non centré. Son auto-corrélation est cependant fixée par la situation physique particulière considérée. La considération d'un champ ricien est faite pour trois raisons : par soucis de généralité (pour que les calculs puissent servir dans un autre contexte), pour que $g^{(3/2)}$ soit définie, et pour examiner la situation du Weigelt blob B, situation d'intérêt concernant la problématique P1.

II. Vers un corrélogramme hybride opérant dans le visible

Les résultats des calculs dévoilent que la fonction d'inter-corrélation intensité-champ, $g^{(3/2)}$, est plus sensible à la présence de la radiation cohérente. De plus, la transformée de Fourier de $g^{(3/2)}$ (spectre de compression) permet de rendre compte d'un champ chaotique non-classique, tandis que $g^{(2)}$, ou sa transformée de Fourier, ne le permet pas. Ainsi, au moins en principe, la fonction $g^{(3/2)}$ est plus pertinente que $g^{(2)}$ pour mettre en exergue des fluctuations non-classiques

dans une radiation. La difficulté pratique, particulièrement dans une mesure astrophysique, est double. Premièrement, il faut pouvoir maintenir la stabilité de la pulsation centrale de l'oscillateur local, qui serait par exemple un laser de très bonne qualité. En effet, sur un site d'observation astronomique, il n'est pas aisé de maintenir une pièce à température constante (et ce durant toute une nuit), et l'espace disponible peut-être réduit (par rapport à une salle de laboratoire). Deuxièmement, il faut s'assurer que la pulsation centrale de l'oscillateur local est bien identique à la pulsation centrale de la radiation stellaire. Sous réserve de la stabilité de l'oscillateur local, un filtre suffisamment étroit peut-être une solution efficace. Ces difficultés pratiques demandent de s'assurer que le Rapport Signal sur Bruit de $g^{(3/2)}$ est au moins aussi bon que celui de $g^{(2)}$. La comparaison des RSB de $g^{(2)}$ et de $g^{(3/2)}$ est originale. Les calculs de RSB sont menés en supposant une limitation par le bruit de grenaille, inévitable dans le cas d'un corrélogramme stellaire opérant dans le visible. Les constatations expérimentales confirment que c'est, en très bonne approximation, le seul bruit à prendre en compte. L'estimation de la corrélation peut se faire en principe selon deux méthodes. Une méthode utilisant un estimateur continu et une méthode utilisant les probabilités conditionnelles. Les RSB sont calculés pour ces deux méthodes. Dans le cas de l'estimation continue, le calcul est mené d'une façon différente de celle d'HBT. La méthode proposée prend en compte la simplification technologique du corrélogramme. Les résultats obtenus pour $g^{(2)}$ dans le cas Rayleigh sont consistants avec ceux d'HBT. Les résultats obtenus pour $g^{(3/2)}$, et pour $g^{(2)}$ dans le cas ricien, sont originaux. Les résultats des RSB obtenus avec une estimation conditionnelle de la corrélation sont originaux dans le cas de $g^{(3/2)}$, pour un champ Rayleigh et pour un champ ricien. Le résultat du RSB obtenu pour $g^{(2)}$ dans le cas d'un champ ricien, avec la méthode d'estimation conditionnelle, est également original. Ces calculs aboutissent naturellement à leur comparaison : les comparaisons entre méthodes d'estimation d'une part, et entre fonctions de corrélation d'autre part.

Avant d'énoncer les résultats, il convient de préciser une subtilité. Un champ ricien peut être rendu ricien artificiellement. Il peut résulter de la superposition d'un champ Rayleigh (l'inconnue) avec un champ cohérent (maîtrisé et connu de l'observateur). Ce principe est celui de l'hétérodynage, il est à la base des corrélogrammes hybrides. Auquel cas la mesure de $g^{(3/2)}$ peut avoir lieu pour un champ Rayleigh s'il est rendu ricien artificiellement.

D'après les calculs menés, dans un contexte astrophysique la méthode d'estimation continue de la corrélation est à privilégier. Trois résultats sont à retenir sur les comparaisons entre les RSB de $g^{(2)}$ et $g^{(3/2)}$ pour la méthode d'estimation continue de la corrélation. Le premier est que le RSB de $g^{(3/2)}$ est meilleur que celui de $g^{(2)}$ pour un champ ricien. Ce résultat conforte donc la pertinence, du point de vue théorique, de mesurer $g^{(3/2)}$ plutôt que $g^{(2)}$ pour mettre en exergue des fluctuations non-classiques dans une radiation. Le deuxième résultat concerne la comparaison de la mesure de $g^{(3/2)}$ pour un champ Rayleigh rendu ricien artificiellement, avec la mesure de $g^{(2)}$ pour ce champ Rayleigh. Il s'avère que le RSB de la mesure de $g^{(3/2)}$ est légèrement meilleur (jusqu'à presque un facteur 2 sur le temps d'observation) que celui de la mesure de $g^{(2)}$ quand la mesure est limitée par la réponse temporelle de la détection. Enfin, le troisième résultat concerne la comparaison du RSB obtenu avec la mesure de $g^{(2)}$ via un corrélogramme standard, et le RSB obtenu avec un corrélogramme hybride (le champ Rayleigh, qui est l'inconnue, est hybridé à un champ cohérent connu et maîtrisé, dans chaque bras du corrélogramme). Les résultats sont largement en faveur du corrélogramme hybride, et ce d'autant plus que la réponse temporelle du corrélogramme limite la mesure. Le gain sur le temps d'observation dépend de la densité de photo-événements détectée ; par exemple, un gain d'au moins 7 sur le temps d'observation peut-être espéré avec les densités de photo-événements de la campagne de mesures astrophysiques rapportée dans le chapitre 4. Ce gain potentiel pousse à envisager sérieusement un corrélogramme stellaire hybride opérant dans le visible. Les difficultés pratiques identifiées sont les mêmes que celles énoncées pour envisager la mesure de $g^{(3/2)}$.

III. Tentatives d'applications pour l'astrophysique

La partie "Réalizations" contient deux mesures originales qui s'inscrivent dans les problématiques P1 et P3. Le travail rapporté s'appuie sur une caractérisation de la réponse temporelle du corrélomètre, menée en laboratoire, ainsi que sur la mise au point et les réglages des modules opto-mécaniques couplés aux foyers des télescopes.

La mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sur la raie H α de P Cygni a été réalisée pour la première fois, permettant de confirmer la nature chaotique Rayleigh de cette raie pour la première fois, et de déduire quantitativement le temps de cohérence de cette raie. Ces résultats confirment la possibilité de caractériser (en partie) la nature stochastique d'un champ d'une raie d'émission stellaire, de largeur spectrale sub-nanométrique, et d'intensité bien supérieure celle du continuum rayonné par la cible stellaire.

La deuxième mesure, résultant de la même campagne d'observation, est celle de la distance Terre-P Cygni. L'utilisation du modèle CMFGEN de transfert radiatif, couplé à une mesure de spectre, a permis d'établir un modèle de la visibilité consistant avec les mesures de $g^{(2)}(0, \rho)$ pour deux bases ρ données. La distance Terre-P Cygni a été déduite de la visibilité. Ces résultats sont une étape supplémentaire pour affirmer la capacité des corrélomètres stellaires à déduire des informations géométriques sur la cible stellaire, avec des télescopes de taille modeste (de la classe des 1 m de diamètre). Cette capacité repose sur la connaissance précise de la réponse temporelle du corrélomètre. Pour ce faire, il faudrait idéalement caractériser cette réponse avant chaque mesure.

La partie "Exploration" rapporte la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sur un laser aléatoire unidimensionnel, et une tentative de modélisation. Le travail entrepris n'a pas d'autre prétention que d'être une exploration, c'est une première tentative, réalisée dans la finalité de caractériser la nature stochastique de l'intensité de ce laser aléatoire quasi-unidimensionnel. Cette tentative s'inscrit dans le cadre de la problématique P1, dans le sens où un laser astrophysique ne dispose pas de cavité bien définie, et serait par essence un laser aléatoire. Dans la quête de la détection de raies laser astrophysiques, initiée semble-t-il par Lavrinovich et Letokhov dans les années 1970, il faut donc savoir si la mesure de la quantité $g^{(2)}(0)$ permet d'identifier une radiation de laser aléatoire, relativement à une radiation chaotique. La mesure révèle une transition dans la valeur $g^{(2)}(\tau = 0)$ en dessous et au dessus du seuil. Des analyses supplémentaires sont poursuivies pour identifier l'influence de certaines complexifications expérimentales. L'expérience doit également être répétée, si possible par un autre groupe de recherche. Cependant, cette mesure reste une première étape indispensable.

La mesure renseigne également sur le comportement intrinsèque du laser quasi-unidimensionnel étudié. Au dessus du seuil, la fonction $g^{(2)}(\tau)$ possède des variations à l'échelle de la centaine de microsecondes. Trois constantes de temps apparaissent : une pseudo-période d'impulsions qui seraient le résultat de soudaines synchronisations de modes lasers, un temps de cohérence de ces impulsions, et la largeur du lobe central dans $g^{(2)}$. La largeur du lobe central dans $g^{(2)}$ décroîtrait algébriquement ou exponentiellement avec l'augmentation du paramètre de pompe. A l'échelle nanoseconde, une piste de modèle a été proposée pour décrire l'intensité au dessus du seuil. Le nombre de photons dans une durée donnée est décrit par un processus de Poisson composé homogène, pour rendre compte du caractère erratique des synchronisations de modes lasers. Le nombre de photons créés lors d'une synchronisation suit une loi α -stable de Lévy tronquée. L'intensité résultante possède alors des réalisations qui suivent une statistique de Lévy, et sa fonction d'auto-corrélation $g^{(2)}$ est consistante avec la mesure effectuée.

Ouvertures théoriques

Je connais vingt drogues dont une dose minimale suffirait à vous faire disparaître comme le comprimé d'aspirine faisait disparaître les petits éléphants roses de l'ivrogne qui avait la gueule de bois. Rien ne me prouve que vous ne soyez pas un petit éléphant rose né de ma gueule de bois métaphysique.

Lettre ouverte à Dieu, Robert Escarpit.

IV. Introduction

La partie VII. nécessite quelques notions sur la théorie des marches aléatoires à temps continu (**MATC** ci-après). Outre les articles historiques [224, 225, 226, 227], la section 5 du chapitre 2 et la section 6 du chapitre 3 de [228], ou les chapitres 3 et 8 de [229], donnent les éléments essentiels. La partie VI. demande quelques notions sur la théorie cinétique fractionnaire (**TCF**, ci-après). Outre les articles historiques [230, 231], la lecture des monographies [232, 233, 234] donne une introduction complète sur le sujet.

Le contenu de ce qui suit s'appuie sur les deux premiers chapitres de cette dissertation.

Les notations sont celles des chapitres 1 et 2. Les réalisations du processus vitesse relative \vec{U} des particules $\mathcal{P}_0(m_0)$ sont notées \vec{u} .

Il y a deux conflits de notation ; l'indice α est utilisé comme indice d'une composante vectorielle du vecteur vitesse relative, ou position relative, et aussi pour l'exposant générique de Lévy. La lettre grecque Γ est soit la fonction facteur de Lorentz, soit la fonction gamma d'Euler.

IV..1 Objectifs

Cette partie de la conclusion aborde une perspective envisagée à la suite du travail théorique de la partie I "Fondements". La partie I se concentre sur une situation d'équilibre connue : le transport normal de particules massives (non-chargées) rayonnant un champ d'intérêt dans un gaz support. Le travail mené apporte une réponse quantitative, basée sur des premiers principes physiques, pour dire comment les fonctions de corrélation temporelles $g^{(1)}$, $g^{(3/2)}$, et $g^{(2)}$, permettent de caractériser ce transport. L'idée serait d'effectuer le même travail dans une situation hors-équilibre (au sens de la physique statistique de Boltzmann-Gibbs). Plus précisément, pour une situation de transport anormal qui pourrait prendre place dans un environnement stellaire. Expérimentalement, la possibilité de rendre compte de processus de diffusion non-gaussiens par la mesure de $g^{(n)}(\tau)$ ($n \geq 2$) a déjà été envisagée par [235]. L'article détaille comment mesurer quelques $g^{(n)}(\tau)$ (notamment pour $n = 3, 4$) et exhibe les résultats expérimentaux pour des champs électriques "non-gaussiens".

L'idée d'analyser un comportement critique via les fonctions de corrélation d'une quantité physique, pertinente, est répandue. Pour ne donner qu'un exemple, mettant en jeu des corrélations

spatiales uniquement, dans un espace de dimension d , les fonctions de corrélations spatiales de la densité particulaire permettent de dévoiler une structure géométrique de nature fractale. Pour être plus précis ; pour des situations “normales” l’auto-covariance normalisée $c(r)$ de la densité particulaire $n(r)$ a une dépendance exponentielle décroissante pour $r \gg r_c$ [236] chapitre 2

$$c(r) := \frac{\langle n(r)n(0) \rangle - \langle n(0) \rangle^2}{\langle n(0)^2 \rangle - \langle n(0) \rangle^2} \propto \exp(-r/r_c).$$

Tandis que pour une structure fractale $c(r)$ suit une loi de puissance [236] :

$$\forall r \gg r_c, \quad c(r) \propto \frac{1}{r^{d-d_f}}.$$

où d_f est la dimension fractale.

La finalité de cette ouverture est d’analyser quantitativement un angle d’attaque pour décrire comment les fonctions de corrélation $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$, de la radiation permettraient d’identifier une situation de transport anormale.

IV..2 Motivations (astro)physiques

Tout d’abord, quelques généralités. Le transport anormal est désormais révélé et modélisé sur plusieurs échelles de temps et pour des phénomènes physiques divers et variés [237]. Il peut s’expliquer par un caractère désordonné ou fractal de la structure spatiale du milieu dans lequel le phénomène de transport prend place [238]. Il peut aussi s’expliquer (les deux cas peuvent même se cumuler) par une dynamique qui modifie la distribution des vitesses d’équilibre (maxwellienne) [239]. Cela peut-être dû à la présence d’un champ de forces extérieur [240], ou de fluctuations intrinsèques des propriétés microscopiques du milieu [241]. Il est intimement lié à la présence de la complexité au sens physique [242]. Un des premiers exemples de transport anormal est peut-être la diffusion turbulente conjecturée par Richardson [243]. Cet exemple revu avec précision dans [238], par exemple, montre qu’un transport advectif-diffusif peut donner une situation de super-diffusion (donc de transport anormal). Un autre exemple amenant à une situation de super-diffusion, est un mécanisme de convection-diffusion en présence de champ de vitesse aléatoire dans l’espace, mais statique dans le temps, voir [244]. Un dernier exemple. Le transport de particule dans un plasma turbulent avec un gradient de pression est : non-local (transport non-fickien), a un caractère non-markovien (effets de mémoire), et est non-gaussien (diffusion anormale) [245]. La complexité des situations physiques donnant lieu à du transport anormal varie donc grandement.

Plusieurs publications dans des domaines de l’astrophysique révèlent des situations de transport anormale dans les diverses plasmas astrophysiques, notamment via la mesure de spectre en énergie, la subséquente distribution des vitesses n’est pas une maxwellienne [246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256]. Ces observations ont motivés des efforts théoriques remarquables ; l’apparition d’une mécanique statistique non-extensive et des *distributions kappa* [257, 258, 259], parfois appelées distributions de Lorentz généralisées, qui généralisent la distribution des vitesses maxwellienne. Il en est plus longuement discuté dans la sous-partie VI..1 avec des références qu’il convient de donner.

Physiquement, la turbulence quasi-stationnaire (des champs électromagnétiques et/ou des champs de vitesses) engendrant une granulation de l’espace des phases, l’absence de collisions, et les corrélations à longue portée (dues à l’interaction longue portée du potentiel coulombien) sont des éléments typiques amenant au transport anormal dans les plasmas [260, 261, 262, 263]. Le transport de particules chargées dans des champs magnétostatiques stochastiques amène également à des situations de transport anormal [264, 265, 266].

L’observation du transport anormal dans les plasmas astrophysiques ne concerne pas seulement la matière ; la diffusion anormale d’ondes électromagnétiques a également été relevée [267, 268, 269, 270]. Le transport anormal dans les plasmas (astrophysiques) possède désormais

un socle théorique avec la mécanique statistique non-extensive et les distributions κ [271, 272], et d'autre part avec les modèles de MATC couplés à la TCF, par exemple [273, 245, 274, 275, 276], ou encore la récente monographie [277].

IV..3 Organisation du chapitre

Dans une volonté de garder le modèle du gaz de cubes durs comme modèle de marche aléatoire, la première partie V. identifie les étapes clés qui interviennent lorsque la distribution de vitesse du gaz support P_u s'écarte de la maxwellienne. La justification de la volonté de conserver le modèle des cubes durs est donnée en sous-partie V..1.

La deuxième partie VI. présente deux exemples clés, qui résultent d'approches théoriques différentes pour traiter le transport anormal. Ces deux approches théoriques différentes sont celles identifiées à la fin de la sous-partie IV..2. Le premier exemple VI..1 s'inscrit dans la mécanique statistique non-extensive. La distribution de vitesse P_u du gaz support est décrite par une distribution kappa, décrivant fidèlement les distributions de vitesse d'électrons et/ou d'ions dans les plasmas astrophysiques observées (voir citations en sous-partie IV..2). Un rapide tour d'horizon des fondements de ces états stables non-maxwelliens est également donné dans cette même sous-partie VI..1. Le deuxième exemple VI..2 s'inscrit lui dans la TCF. Il concerne aussi un cas d'intérêt mis en évidence expérimentalement. La distribution de vitesse P_u du gaz support est décrite par une distribution de Lévy-Feldheim. Enfin, une dernière sous-partie VI..3 fixe les objectifs envisagés.

La dernière partie VII. évoque une autre modélisation possible ; l'abandon du modèle des cubes durs pour un modèle de marche aléatoire dans l'espace des vitesses. Cette possibilité est discutée. Cette dernière partie aborde également deux perspectives que la modélisation des chapitres 1 et 2 ne permet pas de prendre en compte : un régime relativiste, et le rayonnement de particules chargées accélérées.

V. Méthode avec le modèles des cubes durs (sans effet inertiel)

Cette partie constitue une "feuille de route" pour traiter les exemples de la partie VI.. Elle commence par justifier l'attachement au modèle développé dans le chapitre 1. La situation considérée dans le chapitre 2 ne change pas : une population d'oscillateurs harmoniques $\mathcal{P}(m)$ en sous-effectif par rapport aux particules du gaz support $\mathcal{P}_0(m_0)$ ($m_0 \ll m$), donc indépendants entre eux, mais en nombre grand devant l'unité, de sorte à générer un champ chaotique au sens de Glauber, rayonnent à une pulsations d'intérêt ω_0 pour un observateur inertiel.

V..1 Sur le choix de la modélisation

L'ambition est de conserver l'approche avec le modèle du gaz de cubes durs du chapitre 1 et la subséquente situation considérée au chapitre 2. Cette modélisation permet d'ancrer le travail dans une réalité physique, aussi idéalisée soit-elle. Des modèles (et des codes) cinétiques plus sophistiqués que le modèle du chapitre 1 existent, le code OSHUN [278] est un exemple, mais l'objectif est d'utiliser un modèle avec un code peu couteux en temps de calcul, pour effectuer des explorations préliminaires.

Dans le modèle des cubes durs développé au chapitre 1 les collisions de type dures considérées sont celles entre $\mathcal{P}(m)$ et les particules support $\mathcal{P}_0(m_0)$. Si les $\mathcal{P}(m)$ représentent des neutres et que les $\mathcal{P}_0(m_0)$ représentent des électrons (ou des ions) alors le modèle est une bonne approximation. En revanche, si les $\mathcal{P}(m)$ représentent des ions et que les $\mathcal{P}_0(m_0)$ représentent des électrons, alors la situation physique ne peut pas être fidèlement décrite par cette modélisation car :

- 1) la répulsion coulombienne n'est pas prise en compte

- 2) le champ rayonné par une particule chargée dont la vitesse fluctue (donc est accélérée) n'est pas pris en compte

De plus, si le plasma est composé d'électrons, de neutres, et d'ions alors il faut modifier les calculs pour considérer les collisions entre les neutres $\mathcal{P}(m)$ et les deux types de particules support ; les ions et les électrons. Les changements à apporter dans les calculs semblent réalistes ; il suffit de rajouter des cubes $\mathcal{P}_i(m_i)$ pour les ions, de même taille (ou presque), et de même masse (ou presque), que les $\mathcal{P}(m)$ (les neutres), et de considérer des collisions dures entre les $\mathcal{P}(m)$ et les $\mathcal{P}_i(m_i)$. Les interactions entre les $\mathcal{P}_i(m_i)$ (les ions) et les $\mathcal{P}_0(m_0)$ (les électrons) ne sont pas directement à prendre en compte ; elles sont implicitement présentes dans les distributions de vitesses.

Enfin le modèle est non-relativiste, donc non adapté aux plasmas à très haute densité d'énergie. Cependant, pour un plasma composé d'ions qui seraient les particules $\mathcal{P}(m)$ et d'électrons qui seraient les particules $\mathcal{P}_0(m_0)$, si la densité d'énergie cinétique est suffisamment élevée pour négliger la répulsion coulombienne (i.e. : une énergie supérieure à 5keV pour un plasma deutérium-tritium), mais reste tout de même non-relativiste (i.e. : les particules ont une énergie inférieure à 100keV), le modèle des cubes durs sans effets inertiel reste une bonne approximation.

Pour rentrer dans les détails, l'objectif se ramène à l'analyse d'une modification de la densité de probabilité P_{u_α} des composantes de la vitesse \vec{U} des particules $\mathcal{P}_0(m_0)$ dans (1.7), qui est rappelée ci-après pour faciliter la lecture

$$P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t) = \frac{\eta}{\mu^2} |j| P_{u_\alpha} \left(v_\alpha + \frac{j}{\mu} \right).$$

Il est aussi rappelé que si $P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t)$ possède une expression bien définie, elle permet de définir P_W (1.11) et $P_{J|W}$ (1.12), qui caractérisent alors entièrement un PMSCE (A.11) (annexe A). La question de la nature markovienne de V_α sera donc équivalente à la possibilité, ou non, d'obtenir une expression bien définie pour $P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t)$. Cette question se ramène à la possibilité d'obtenir une expression (implicite ou explicite) pour la distribution de vitesse P_{u_α} .

Reste la question d'une relaxation de V_α vers une distribution stable, qui conditionne le fait que $g^{(1)}$, $g^{(3/2)}$, et $g^{(2)}$ ne dépendent que de τ . La réponse ne sera obtenue qu'une fois la densité de transition markovienne T déduite. La déduction de T se fait en résolvant l'équation de Kramers-Moyal (5.14), dont les coefficients sont déduits de $P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t)$.

V.2 Champ de vitesse des oscillateurs harmoniques

Une fois le travail du physicien effectué pour déterminer P_{u_α} , il suffit de d'injecter l'expression obtenue (si elle est analytique) dans (1.7). La densité jointe $P_{WJ}(0, j|v_\alpha, t)$ se déduit. Il faut alors essayer de calculer

- la densité P_W donnée par (1.11) à $\tau = 0$, étape a.1 de la figure 5.20, puis par (A.8) pour $\tau > 0$, étape a.2 figure 5.20.
- la densité conditionnelle $P_{J|W}$ donnée par (1.12) à $\tau = 0$, étape c.1, puis effectuer le changement $t \rightarrow t + \tau$ pour déduire, par définition, son expression en τ , étape c.2.
- les coefficients de Kramers-Moyal $K_n(v_\alpha, t)$ définis par (A.15). C'est l'étape b.1.

Si les $(K_n)_n$ peuvent être calculés, il faut ensuite essayer de résoudre l'équation de Kramers-Moyal (équation aux dérivées partielles d'ordre infini) en $T(v_\alpha, t|v_{\alpha,0}, t_0)$, c'est l'étape b.2 de la figure 5.20.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n [K_n(v, t) T(v, t|v_0, t_0)]}{\partial v^n} \quad (5.14)$$

Une fois la densité de transition markovienne T déduite, il faut identifier sa forme stable P_v (si elle existe), c'est l'étape b.3 indiquée sur la figure 5.20.

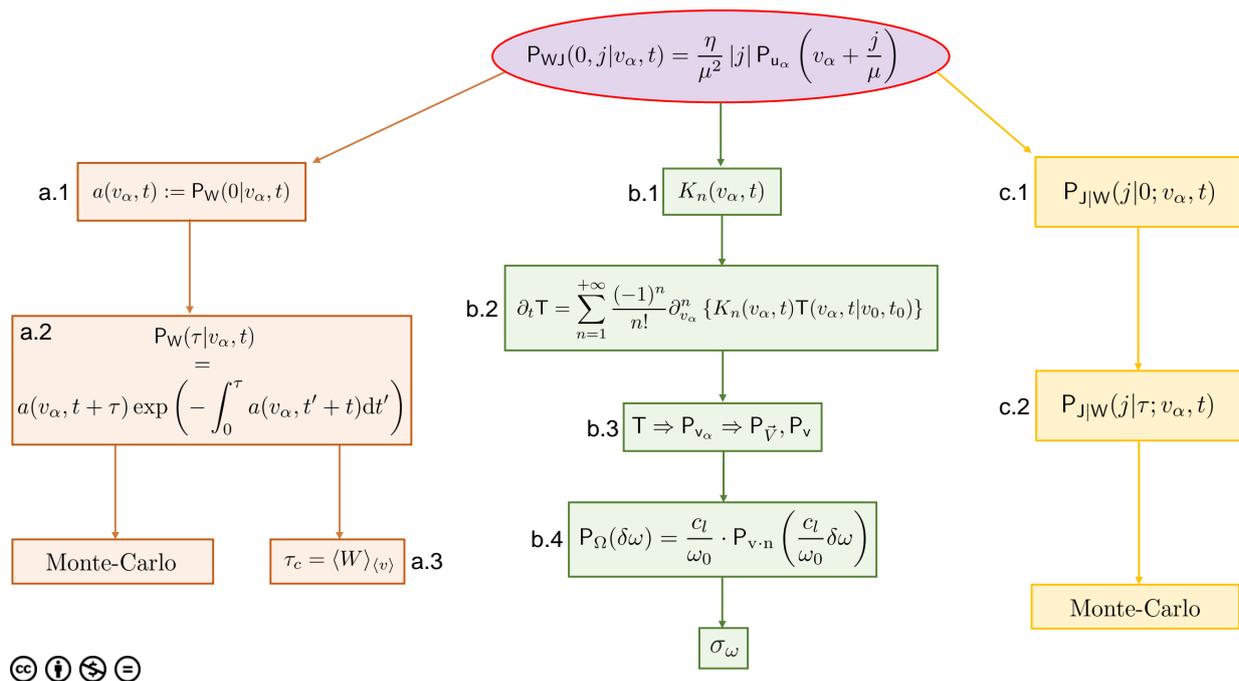


FIGURE 5.20 – Résumé synoptique des étapes de calculs à effectuer. Les étiquettes $(a.i)_i$, $(b.i)_i$, et $(c.i)_i$ constituent les différentes étapes. Elles sont expliquées dans le texte de la sous-partie V..2.

La figure 5.20 indique ensuite les étapes restantes pour dériver les quantités (microphysiques) intervenant dans $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$, ainsi que les densités de probabilités intervenant dans l'algorithme Monte-Carlo (savoir quand et comment incrémenter en vitesse).

V.3 Transformation Doppler-Fizeau et temps d'attente moyen

Il reste enfin à déterminer la loi de ω car elle intervient dans le calcul de $g^{(1)}(\tau)$ (et donc de $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$) via la fonction caractéristique $\langle \exp(-i\omega t) \rangle$. C'est l'étape b.4 sur la figure 5.20. Le mécanisme qui lie la vitesse à la pulsation rayonnée est la transformation Doppler-Fizeau (2.29), rappelée ci-après pour faciliter la lecture :

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{\Gamma(t) \left(1 - \frac{\vec{n}(t) \cdot \vec{V}(t)}{c} \right)}$$

Dans le cas de l'effet Doppler-Fizeau non-relativiste, la transformation entre la loi de probabilité de $\vec{V} \cdot \vec{n}$ et celle de ω est linéaire : la transformation pour $\delta\Omega = \Omega - \langle \Omega \rangle$ est donnée par (2.30), rappelée ci-après

$$P_{\delta\Omega}(\delta\omega) = \frac{c}{\omega_0} \cdot P_{v \cdot n} \left(\frac{c}{\omega_0} \delta\omega \right).$$

Remarque. Dans un cadre relativiste, les chances d'obtenir une expression analytique pour $P_\Omega(\omega)$ seraient minces car le facteur de Lorentz $\Gamma(t)$ dépend aussi de \vec{V} .

Une fois $P_{\delta\Omega}$ déterminée, il faut identifier une largeur caractéristique σ_ω .

La détermination du temps d'attente moyen τ_c , étape a.3, entre deux collisions requiert la connaissance de $\langle v \rangle$ (donc de la densité de probabilité du module de la vitesse relative P_v) et de P_W .

VI. Deux exemples clefs

Cette partie aborde deux exemples de transport anormal, chacun inscrit dans un cadre théorique différent pour déterminer P_{u_α} . Ils peuvent être tous deux directement implémentés à la modélisation développée aux chapitres 1 et 2. Le premier VI.1 est plus qu'un exemple, au sens où il aborde une distribution des vitesses sous une forme générale, qui généralise la maxwellienne des vitesses, dans un cadre théorique consistant : *la mécanique statistique non-extensive*.

VI.1 Etats stables non-Maxwelliens de la physique statistique non-extensive

Les observations expérimentales, citées en IV..2, ont motivés les efforts théoriques : des nouvelles distributions de vitesses non-maxwelliennes, dites *distributions kappa*, ont été introduites pour interpréter les mesures [257, 258, 279].

Cadre théorique des distributions kappa

Ces fonctions de distributions non-maxwelliennes se sont en fait inscrites dans le développement d'une mécanique statistique non-extensive [280, 271] à partir d'une nouvelle définition de l'entropie [281, 282], non-additive contrairement à l'entropie de Boltzmann-Gibbs, dite *au sens de Tsallis* du nom de son inventeur. Mathématiquement, cette entropie est construite en considérant les distributions exponentielles, omniprésentes dans les distributions en mécanique statistique à cause de la définition de l'entropie de Boltzmann-Gibbs avec un logarithme, comme la limite de la suite trouvée par Bernoulli pour obtenir : $\exp(-1)$. Cette construction repose sur le concept de *densité de probabilité escortée* [283] qui requiert quelques précautions pour le calcul des moments [284]. Pour une introduction pédagogique de ces notions voir par exemple [272] chapitre 1, section 1.4.2, 1.4.3., et 1.4.4.. Il existe une version du théorème limite central adaptée aux densités de probabilités escortées [285], ce qui confère à la mécanique statistique non-extensive un théorème limite central opérationnel. Cette nouvelle version de l'entropie donne aussi une équation de Fokker-Planck cinétique opérationnelle [286], et définit des états stables hors-équilibre au sens où ils n'ont pas une distribution maxwellienne des vitesses, mais une distribution dite distribution kappa [287, 288]. Ces états d'équilibre peuvent de plus être atteints adiabatiquement [287], et la distribution kappa est une distribution canonique de l'espace des états [289, 290]. La notion de température est différente de celle résultant de l'optimisation de l'entropie de Boltzmann-Gibbs, et les relations thermodynamiques usuelles se voient transformées en relation thermodynamiques dites non-extensives, et ce de manière consistante [291].

Cette nouvelle mécanique statistique non-extensive, combinée au théorème limite central généralisé, permet d'unifier la super-diffusion et la diffusion normale [292, 293]. Ce lien entre la super-diffusion et la mécanique statistique non-extensive s'est d'abord exprimé via les distributions kappa [294] indépendamment de l'entropie au sens de Tsallis. En particulier, la diffusion anormale engendrée par un potentiel extérieur (et une force qui en dérive) découle d'une équation de Fokker-Planck cinétique non-linéaire, et de la recherche d'extremum sur l'entropie au sens de Tsallis avec le même type de contraintes que celles utilisées pour rendre extrémal l'entropie de Boltzmann-Gibbs (l'optimisation de l'entropie de Boltzmann-Gibbs et l'équation de Fokker-Planck cinétique linéaire donnent le processus d'Ornstein-Uhlenbeck [diffusion normale]) [295]. Les contraintes physiques de l'ensemble canonique qui servent à rendre extremum l'entropie au sens de Tsallis, en fonction des probabilités d'occupation individuelle, ont été analysées sur les exemples concrets de l'oscillateur harmonique (classique et quantique) et du système à deux niveaux non-dégénéré [296].

L'entropie de Tsallis, qui est une version paramétrée de l'entropie proposée dans [297], n'est pas la seule qui permet d'expliquer l'origine des distributions kappa comme état stable, ou du moins les lois de puissance dans les queues de distributions de vitesse. Une autre modification de l'entropie a été proposée par exemple dans [298].

Pourquoi cette nouvelle mécanique statistique ?

La définition de Boltzmann-Gibbs de l'entropie, via une exponentielle, implique que deux sous-systèmes, d'un même système dynamique, sont indépendants : les probabilités qu'a le système d'occuper les volumes de l'espace des phases concernés, se multiplient. La raison est que l'exponentielle est un morphisme de groupe, donc que l'entropie de Boltzmann-Gibbs est additive, c'est à dire une grandeur extensive. Le fait que l'espace des phases de certains systèmes dynamiques connaisse des attracteurs, implique la non-indépendance des éléments de volume de cet espace des phases. L'entropie de Boltzmann-Gibbs, parce-qu'additive, ne peut pas rendre compte de ces systèmes. C'est pourquoi des efforts sont menés pour généraliser l'entropie de Boltzmann-Gibbs.

L'entropie au sens de Tsallis peut rigoureusement être obtenue à partir d'une équation fonctionnelle non-linéaire représentant l'entropie d'un système complexe qui est composée d'une partie additive linéaire (qui correspond à l'entropie de Boltzmann-Gibbs), et d'une partie multiplicative (qui contient toute sorte de produit des entropies partielles) [289]. La partie multiplicative peut s'interpréter comme la traduction des corrélations à longue portée responsable de la granulation de l'espace des phases [289, 282].

Pourquoi les plasmas astrophysiques ?

Les plasmas astrophysiques sans collisions (dures), possèdent des corrélations à longue portée entre leurs particules dues à l'interaction coulombienne. Cela suffit déjà à montrer que la distribution d'équilibre des vitesses n'est pas une maxwellienne [260]. Des plasmas astrophysiques sans collisions (dures) possèdent aussi une turbulence quasi-stationnaire qui peut se traduire par une granulation de l'espace des phases, ou la présence d'attracteurs, [261]. Ces deux "ingrédients" des plasmas astrophysiques expliquent pourquoi ils sont au centre des efforts théoriques pour développer une nouvelle mécanique statistique non-extensive.

Différents scénarios pertinents pour les plasmas astrophysiques, et générant des distributions kappa de vitesses sont discutés, par exemple, dans [258] et dans le chapitre 6 de [272]. Quelques situations particulières sont résumées ci-après :

- le non-équilibre d'un plasma avec des photons [299]. L'approximation du corps noir est très grossière pour un plasma astrophysique, le scénario de non-équilibre [299] est plus réaliste. L'interaction coulombienne fluctue du fait du non-équilibre avec les photons et amène à une super-diffusion des particules du plasma [299].
- un plasma avec interaction de Landau (interaction onde - particule chargée, souvent appelée interaction de Cherenkov lorsqu'elle est quasi linéaire) [300, 301]. L'équation cinétique de Fokker-Planck avec une diffusion quasi-linéaire engendrée par l'échange d'énergie onde - particule, amène à une distribution kappa des vitesses, que ce soit en négligeant les collisions coulombiennes [300, 301], ou en les incluant [302]. Remarque. Dans ce cas la distribution kappa n'est pas nécessairement la solution unique de l'équation de Fokker-Planck cinétique, mais reste une solution [302]. Le chapitre 8 de [272] détaille ce mécanisme dans la limite non-linéaire, non pas avec l'équation de Fokker-Planck cinétique, mais à l'aide de la théorie de la turbulence dans les plasmas. La distribution kappa des vitesses reste la solution du problème non-linéaire.
- une situation négligeant les interactions champs-particules (interactions de Landau), mais incluant collisions coulombiennes, densités non-homogènes, non-localité, et transfert radiatif dans l'équation cinétique de Boltzmann pour décrire la distribution de vitesse des électrons du vent solaire [303]. Le comportement asymptotique de la distribution kappa est trouvé [303] en accord avec les mesures [304].

Aussi, une nouvelle fonction de dispersion plasma a été inventée [305] pour s'adapter aux nouvelles densités de probabilités kappa des vitesses. De plus, leurs propriétés commencent à être

considérer pour caractériser d'autres grandeurs du plasma astrophysique, comme la forme fonctionnelle, et les caractéristiques physiques, de l'énergie potentielle qui agit sur les particules du plasma [306].

Conclusion

Il n'est maintenant plus à établir que les distributions kappa dérivent d'un cadre théorique consistant et rigoureux, et qu'elles permettent d'expliquer la présence stable et omniprésente des états non-maxwelliens dans les plasmas astrophysiques. Elles permettent, entre autre, d'unifier la notion de température cinétique et physique pour ces états stables non-maxwelliens [290]. Elles permettent de définir une distance thermodynamique qui sépare l'état non-maxwellien qu'elles décrivent, qui est rigoureusement un état méta-stable, de l'état d'équilibre maxwellien [307]. Enfin, l'indice kappa, noté κ , de ces distributions a un sens physique profond, qui est abordé dans le prochain paragraphe, et ses valeurs permettent déjà de mieux différencier ces états (méta)stables non-maxwelliens dans les plasmas astrophysiques [308].

Expression d'une distribution kappa

Soit \vec{u} le vecteur vitesse d'une particule de masse m_0 ayant d degré de liberté. Soit $(u_\alpha)_{\alpha \in \llbracket 1; d \rrbracket}$ les coordonnées de \vec{u} dans le référentiel d'un observateur inertiel \mathcal{O} . Soit $\langle \vec{u} \rangle$ la vitesse moyenne de cette particule (elle est non nulle si par exemple il existe un courant), de composantes $\langle u_\alpha \rangle$ dans le référentiel de \mathcal{O} . La densité de probabilité de \vec{u} , appelée distribution kappa, est la densité de probabilité $P_{\vec{u}}^{\kappa_0}$, définie pour tout réel $\kappa_0 > 3/2$ par ([259], ou [272] chapitre 1 section 1.2 par exemple) :

$$\forall \kappa_0 > 0, \quad P_{\vec{u}}^{\kappa_0}(\vec{u}; \sigma_u, d) := \frac{1}{(\sigma_u \sqrt{2\pi\kappa_0})^d} \frac{\Gamma(\kappa_0 + \frac{d}{2} + 1)}{\Gamma(\kappa_0 + 1)} \cdot \left[1 + \frac{1}{2\kappa_0\sigma_u^2} \sum_{\alpha=1}^d (u_\alpha - \langle u_\alpha \rangle)^2 \right]^{-\kappa_0 - 1 - \frac{d}{2}}, \quad (5.15)$$

où : $\sigma_u = k_B T / m_0$, où T est la température définie au sens de Boltzmann-Gibbs, et où $\Gamma(x)$ est la *fonction gamma* (d'Euler). Le graphe de la densité de probabilité d'une composante ($d = 1$) P_{u_α} est donné figure 5.21 où il est à comparer avec la densité normale de l'équilibre thermodynamique canonique $\kappa_0 \rightarrow +\infty$. La différence principale est dans la décroissance de la densité vers 0 pour u_α grand.

La distribution kappa $P_{\vec{u}}^\kappa$ dans un espace à trois dimensions $d = 3$, est souvent une densité de probabilité donnée, en gardant les vecteurs dans l'expression, sous la forme ([309, 305, 301] par exemple) :

$$\forall \kappa > 3/2, \quad P_{\vec{u}}^\kappa(\vec{u}; \sigma_u) = \frac{1}{(\sigma_u \sqrt{2\pi(\kappa - \frac{3}{2})})^3} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \cdot \left[1 + \frac{(\vec{u} - \langle \vec{u} \rangle)^2}{2(\kappa - \frac{3}{2})\sigma_u^2} \right]^{-\kappa - 1}, \quad (5.16)$$

où : $\kappa = \kappa_0 + 3/2$. L'écriture de (5.16) est à privilégier avec $\kappa_0 = \kappa - 3/2$ car κ_0 est indépendant de d , c'est même un invariant, qui possède une interprétation physique précise [259]. Il en sera discuté dans la prochaine sous-sous-partie.

La densité de probabilité P_u de la norme u du vecteur vitesse, qui est la quantité à directement comparer avec la maxwellienne des vitesses, est donnée en caractérisant le vecteur vitesse dans (5.15) par sa norme et des coordonnées angulaires qui repère sa position dans l'espace de dimension d , et en intégrant sur ces coordonnées angulaires (ce qui revient à multiplier (5.15) par la densité de module u dans l'espace des vitesses de dimension d), il vient alors [259]

$$\forall \kappa_0 > 0, \quad P_u(u) = \frac{\sqrt{2}}{(\sigma_u \sqrt{\kappa_0})^d} \frac{\Gamma(\kappa_0 + 1 + \frac{d}{2})}{\Gamma(\kappa_0 + 1)\Gamma(\frac{d}{2})} \cdot u^{d-1} \left[1 + \frac{u^2}{2\kappa_0\sigma_u^2} \right]^{-1 - \kappa_0 - \frac{d}{2}}. \quad (5.17)$$

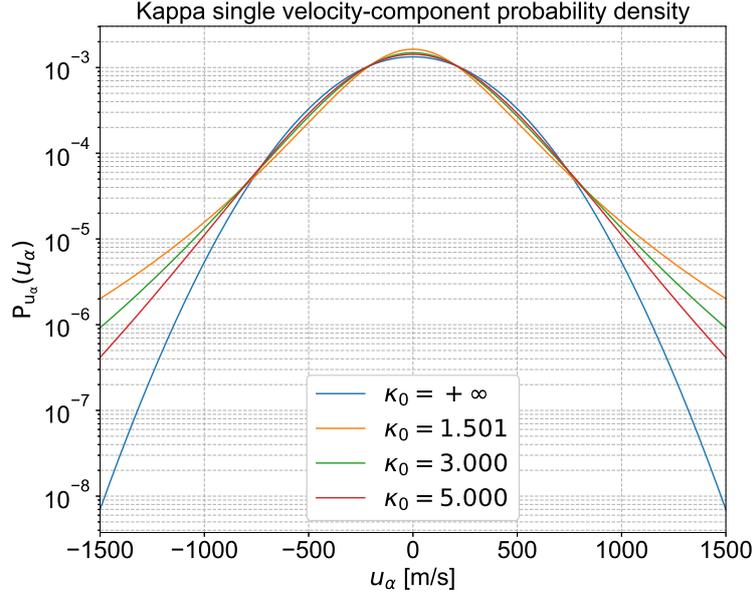


FIGURE 5.21 – kappa-densité d’une composante u_α du vecteur vitesse \vec{u} , pour une dispersion $\sigma_u = 300\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Le cas $\kappa_0 \rightarrow +\infty$ correspond à la densité normale donnée par l’équilibre thermodynamique canonique de Boltzmann-Gibbs (pour des interactions qui ne dépendent pas de la vitesse et un traitement classique des mouvements de translation).

Le graphe de (5.17) est donné figure 5.22 où il est comparé à la maxwellienne des vitesses ($\kappa_0 \rightarrow +\infty$). Là aussi, la différence principale réside dans la décroissance de la densité vers 0 pour u grand.

L’exemple qui suit introduit la distribution κ comme une fonction de distribution de l’espace des phases d’un système dynamique, et non comme une simple distribution de vitesse. Soit une particule $\mathcal{P}_0(m_0)$ possédant d degré de liberté, dont la dynamique peut être décrit par un Hamiltonien $H(\vec{r}, \vec{u})$, la κ -densité de cette particule peut aussi être une fonction de densité de probabilité de l’espace des phases [310] :

$$\forall \kappa_0 > 0, \quad P_{\mathbf{r}, \mathbf{u}}^\kappa(\vec{r}, \vec{u}; \sigma_u, d) \propto \left[1 + \frac{1}{\kappa_0} \frac{H(\vec{r}, \vec{u}) - \langle H \rangle}{k_B T} \right]^{-\kappa_0 - 1 - \frac{d}{2}}. \quad (5.18)$$

Si l’hamiltonien est la somme d’une énergie cinétique $\varepsilon_K(\vec{u})$ s’exprimant suivant

$$d_K = \frac{2\langle \varepsilon_K \rangle}{k_B T}, \quad (5.19)$$

degrés de liberté, et d’une énergie potentielle $\Phi(\vec{r})$, s’exprimant suivant

$$d_\Phi = \frac{2\langle |\Phi| \rangle}{k_B T}, \quad (5.20)$$

degrés de liberté, donnant un degré de liberté total d tel que :

$$d = d_K + d_\Phi \cdot \text{sign}(\Phi) \quad (5.21)$$

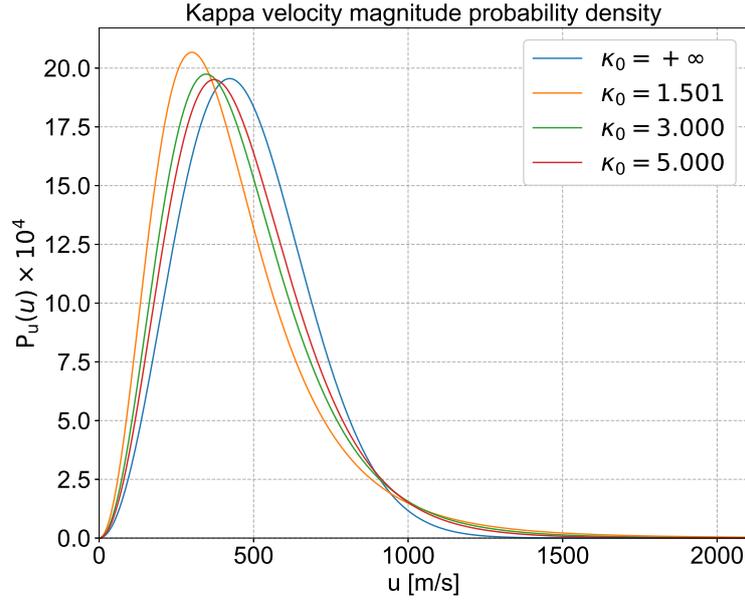


FIGURE 5.22 – kappa-densité de la norme de la vitesse, pour une dispersion $\sigma_u = 300\text{m.s}^{-1}$ et trois degré de liberté. Le cas $\kappa_0 \rightarrow +\infty$ correspond à la distribution maxwellienne des vitesses.

alors (5.18) devient [310] :

$$P_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{\kappa_0}(\vec{r}, \vec{u}; \sigma_u, d) = \frac{\Gamma\left(\kappa_0 + 1 + \frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\kappa_0 + 1 + \frac{d_{\Phi}\text{sign}(\Phi)}{2}\right)} \frac{\left[1 + \frac{1}{\kappa_0} \frac{H(\vec{r}, \vec{u})}{k_B T}\right]^{-\kappa_0 - 1 - d}}{(\sigma_u \sqrt{2\pi\kappa_0})^{d_{\kappa}} \int \left(1 + \frac{1}{\kappa_0} \frac{\Phi(\vec{r})}{k_B T}\right)^{-\kappa_0 - 1 - \frac{d_{\Phi}\text{sign}(\Phi)}{2}} d\vec{r}} \quad (5.22)$$

Dans le cas où l'énergie potentielle est un potentiel d'énergie électrique et que la particule $\mathcal{P}_0(m_0)$ possède une charge q , la distribution de Maxwell-Boltzmann (par exemple [311] chapitre 2 section 2.2.1) est obtenue à la limite $\kappa \rightarrow +\infty$ (par exemple [272] chapitre 1 section 1.2)

$$\lim_{\kappa_0 \rightarrow +\infty} \left[P_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{\kappa_0}(\vec{r}, \vec{u}) \right] = P_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{\text{MB}}(\vec{r}, \vec{u}) \propto \exp\left(\frac{-q\Phi(\vec{r})}{k_B T}\right) \cdot \frac{1}{(\sigma_u \sqrt{2\pi})^3} \exp\left(\frac{-\vec{u}^2}{2\sigma_u^2}\right). \quad (5.23)$$

Sens physique de l'indice κ_0

L'indice κ_0 est un invariant par rapport au nombre de degré de liberté d et par rapport au nombre de particule considérées N [259]. Il possède une signification physique profonde :

- κ_0 relié à l'écart-type σ_ε de l'énergie interne moyenne $\langle \varepsilon \rangle$, si N est le nombre de particules du système [259]

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sigma_\varepsilon}{\langle \varepsilon \rangle} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa_0}}$$

L'indice κ_0 permet donc de définir un état méta-stable qui est proche de l'équilibre thermodynamique usuel $\kappa_0 \in [1, +\infty[$, et un état méta-stable qui en est très éloigné $\kappa_0 \in]0, 1]$.

- κ_0 est relié à la fonction de corrélation $c_u(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de vitesse (ou d'énergie) entre deux particules de vecteurs vitesses \vec{u}_1 et \vec{u}_2 [259]

$$c_u(\vec{u}_1, \vec{u}_2) := \frac{\langle \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \rangle - \langle \vec{u}_1 \rangle \cdot \langle \vec{u}_2 \rangle}{\sqrt{\langle \vec{u}_1^4 \rangle - \langle \vec{u}_1^2 \rangle^2} \sqrt{\langle \vec{u}_2^4 \rangle - \langle \vec{u}_2^2 \rangle^2}} = \frac{d/2}{\kappa_0 + d/2}$$

Voir également les travaux précurseurs [312] sur le sujet. Cela implique donc que la fonction de corrélation des vitesses permet entièrement caractériser l'état méta-stable.

- κ_0 défini rigoureusement une *mesure thermodynamique* de l'écart de l'état méta-stable à l'équilibre thermodynamique usuel, voir [308, 307]

Objectifs

L'angle d'attaque est de choisir P_{u_α} dans (1.7) comme étant égale à (5.15) avec $d = 1$, et d'examiner comment les constantes associées au phénomène de collisions et à l'effet Doppler-Fizeau, notées respectivement τ_c et σ_ω , apparaissant dans $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$, sont reliées à l'indice invariant κ_0 et aux constantes microphysiques (m, m_0, T , etc.).

VI.2 Gaz support d'électrons de champ de vitesse de Lévy-Feldheim

Dans les plasmas la turbulence, voir par exemple [313, 314], peut s'organiser en structures auto-similaires à différentes échelles de manière intermittente ou non. Cette observation ne semble pas spécifique au plasma, mais plutôt à la turbulence elle-même, l'observation expérimentale fut reportée semble-t-il pour la première fois dans [315]. Les densités de probabilités infiniment divisibles (qui peuvent être une densité de probabilité d'une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées) permettent de traduire cette auto-similarité [316]. Par conséquent, les lois de Lévy α -stables (et donc la loi normale) ont un rôle privilégié pour décrire les phénomènes qui engendrent ces structures auto-similaires. Remarque. La réciproque est fautive, une loi stable n'implique pas nécessairement un phénomène de transport qui donne une structure auto-similaire, voir par exemple [317].

Dans les plasmas de Tokamaks par exemple, la mesure du champ électrique au bord de la zone de confinement a dévoilé des structures auto-similaires dans la distribution spatiale de ce champ [318] (voir également les références données dans [266]). S'inspirant de cette observation, la situation a été modélisée [265], ou [277] chapitre 3 section 3.5., et numérisée [266]. Soit un champ magnétostatique constant et homogène qui agit sur un gaz support d'électrons $\mathcal{P}_0(m_0)$. (Rappel : ce gaz est également composé des neutres $\mathcal{P}(m)$ qui sont les oscillateurs harmoniques). Ce gaz d'électrons est supposé présenter une turbulence de champ électrique intermittente, c'est à dire un champ électrique non-homogène dans l'espace qui fluctue dans le temps en un point donné. L'origine de ce phénomène n'est pas discutée ici. Ce champ agit sur les électrons $\mathcal{P}_0(m_0)$. Suivant les observations expérimentales [318], ce champ électrique est décrit par un processus de Lévy stable, isotropique et stationnaire par incréments (qui sont indépendants). Ce processus de Lévy a un exposant α compris entre 1,1 et 1,3 [318], et une intensité de bruit D_E (unité de $(g/cm)^{\alpha/2}s^{-1}$). Les collisions entre électrons donnent une force de friction $-\gamma m_0 \vec{u}$, avec le coefficient γ donné dans le modèle des cubes durs par (1.62).

Une équation de Fokker-Planck fractionnaire peut s'écrire sur la distribution de vitesse

$$\mathbb{T}(\vec{u}, t | \vec{u}_0, t_0)$$

[265], ou [277] chapitre 3 section 3.5. La résolution donne \mathbb{T} comme une densité de Lévy-Feldheim (tridimensionnelle) [319]. La relaxation depuis \vec{u}_0 à t_0 s'effectue vers un état stationnaire non-maxwellien. Plus précisément, la densité de probabilité du vecteur vitesse \vec{u} , isotropique, s'exprime avec une densité de probabilité de Lévy-Feldheim tridimensionnelle \mathfrak{g}_3 [319], qui est dans sa limite stationnaire (état stable du mouvement)

$$P_{\mathbf{u}}(\vec{u}) = \left(\frac{D_E}{\alpha\gamma} \right)^{-3/\alpha} \mathfrak{g}_3 \left(\left(\frac{D_E}{\alpha\gamma} \right)^{-1/\alpha} \vec{u}; \alpha \right). \quad (5.24)$$

Autrement dit, chaque composante U_α , indépendante des deux autres, est distribuée dans l'état stable du mouvement selon

$$P_{u_\alpha}(u_\alpha) = \mathbf{g} \left(\left(\frac{DE}{\alpha\gamma} \right)^{-1/\alpha} u_\alpha; \alpha \right), \quad (5.25)$$

où $\mathbf{g}(x, \alpha)$ est une densité de probabilité α -stable de Lévy, de fonction caractéristique : $\exp(-|k|^\alpha)$ ([320], par exemple)

$$\mathbf{g}(x, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(-|k|^\alpha) \exp(-ikx) dx. \quad (5.26)$$

Il est à noter que la dynamique d'une particule chargée dans ce scénario a été étudiée numériquement, récemment, dans [266].

Objectifs

L'angle d'attaque est d'injecter (5.25) dans (1.7) et d'examiner comment les constantes associées au phénomène de collisions et à l'effet Doppler-Fizeau, notées respectivement τ_c et σ_ω , sont reliées à l'exposant de Lévy α et aux constantes microphysiques.

VI.3 Mini-conclusion

Dans les deux exemples, si la route analytique n'aboutit pas, le code écrit pour les simulations des chapitres 1 et 2, permettra tout de même de générer P_W (1.11) et $P_{J|W}$ (1.12). En particulier la résolution de (5.14) peut s'effectuer numériquement. Les méthodes de génération aléatoires seront simplement à adapter. Les fonctions $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$, calculées numériquement, en découleront.

La finalité est de proposer une étude préliminaire (analytique-numérique) pour examiner quantitativement comment $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$ rendent compte du transport anormal (non-relativiste) du gaz support des oscillateurs harmoniques (et donc des oscillateurs harmoniques eux mêmes). Avec les exemples considérés, il s'agit d'examiner comment $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$ capturent α et κ .

VII. Autre modèle envisagé et perspectives

Le modèle des cubes durs n'est pas la seule voie pour examiner la problématique de l'analyse du transport anormal à travers $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$.

VII.1 Modèle de MATC dans l'espace des vitesses

Une autre route est peut-être le modèle développé dans [321]. Ce modèle se concentre uniquement sur la grandeur vitesse relative. Il permet de générer une distribution kappa de la vitesse en considérant un modèle de vols de Lévy pour les incréments de vitesse. L'origine des vols de Lévy dans l'espace des vitesses n'est pas expliquée physiquement, mais permet effectivement de générer une distribution kappa [321]. Comme attendu, la limite avec la maxwellienne est bien retrouvée lorsque l'exposant de Lévy dans la distribution des incréments de vitesse tend vers 2 [321].

Le modèle des vols de Lévy (voir par exemple [322] pour une introduction du concept, la grandeur x de l'article n'est pas nécessairement la position spatiale) pour les incréments de vitesse est discutable car il induit une divergence de la variance des incréments de vitesse [322]. Cette divergence signifie que les sauts de vitesse arbitrairement grands n'ont pas de "coût" temporel, donc ont lieu avec une accélération infinie. Physiquement, ceci est discutable pour une particule présentant une masse. En termes plus techniques de la théorie des MATC, le modèle de vols de

Lévy pour les incréments de vitesse ne présente pas de couplage entre la distribution des incréments de vitesse par sauts (selon la composante α de la vitesse), et la distribution des temps d'attente entre chaque saut de vitesse. Au contraire, un modèle de type marches de Lévy (voir par exemple [323] chapitre 12, ou [322]) dans l'espace des vitesses possède une densité jointe saut de vitesse - temps d'attente, non-séparable. Plusieurs modèles de marche de Lévy existent [322], il y a notamment la possibilité d'introduire des fluctuations entre chaque saut. Il resterait alors à donner une origine physique aux incréments de vitesse, à la non-séparabilité de la densité jointe saut - temps d'attente, et éventuellement aux fluctuations entre deux sauts de vitesse.

VII.2 Mouvement brownien relativiste

Le traitement de hautes densités d'énergie, amenant à un mouvement relativiste, est une perspective naturelle dans un contexte astrophysique. La finalité serait donc d'analyser $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$, pour le mouvement brownien relativiste [324], toujours relativement à un observateur inertiel. Les conditions d'existence théorique du mouvement brownien relativiste sont discutées dans, par exemple, [325]. Une monographie relativement récente sur le sujet est [324]. La version relativiste du processus d'Ornstein-Uhlenbeck a par exemple été étudiée dans [326]. L'approche se concentre sur la méthode de Langevin, et prend pour point de départ une équation de Langevin relativiste. Les auteurs dérivent une équation cinétique de Kramers relativiste, et une équation cinétique de Fokker-Planck relativiste. Il resterait donc à examiner si cette équation peut-être obtenue en considérant une version relativiste du modèle des cubes durs, notamment en considérant la transformation du parallélépipède de collision par effets relativistes.

Une autre question se pose naturellement avec ces considérations relativistes : sachant que fondamentalement le temps propre d'un observateur accéléré, ainsi que sa capacité à étiqueter spatio-temporellement des événements hors de sa ligne d'univers, ne sont pas les mêmes qu'un observateur inertiel, est-ce qu'un observateur accéléré peut percevoir une radiation cohérente comme une radiation chaotique (ou réciproquement) ? Est-ce que $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$, sont des invariants relativistes (i.e. identiques pour tout type d'observateurs) pour une radiation de nature stochastique donnée ?

VII.3 Radiation synchrotron

L'état de plasma est majoritaire dans les atmosphères stellaires et milieux interstellaires, il est donc tentant d'essayer de déterminer les expressions de $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$ pour un champ rayonné par l'accélération (ou les fluctuations de vitesse) d'une particule chargée. Ce processus de rayonnement diffère de celui imaginé dans la situation du chapitre 2, voir par exemple [327] chapitre 14. Les sources de rayonnement générées par les particules chargées accélérées sont nombreuses dans l'espace ; synchrotron, cyclotron (cas non-relativiste de la radiation synchrotron), bremsstrahlung (aussi appelée émission libre-libre, "free-free emission" en anglais), voir par exemple l'ouvrage [113]. Une source synchrotron est accessible depuis l'hémisphère nord : la radiation synchrotron dans le bleu (dans le visible) de la nébuleuse du crabe (NGC 1952, M1) [328]. La figure 5.23 est une image astronomique de la nébuleuse du crabe. La composante dans le bleu optique de la nébuleuse du crabe possède un spectre continu et est fortement polarisée [329] (page 71). La magnitude absolue de la nébuleuse du crabe est de -3 [329] (page 71), sa magnitude apparente est environ deux fois plus grande que celle de P Cygni dans le visible, par conséquent la densité de photo-événements par détecteur est au moins 6,30 fois plus faible, et par conséquent (voir la formule adéquate table 3.1), la mesure de $g^{(2)}$ prendrait au moins 40 fois plus de temps pour un même RSB. Il faudrait alors effectuer une observation sur deux mois ou plus. La mesure expérimentale est donc difficilement envisageable sur des télescopes de tailles modestes de la classe des 1 m de diamètre.

Théoriquement, une question attrayante, pour l'astrophysicien, serait : peut-on à travers $g^{(1)}(\tau)$,



FIGURE 5.23 – Nébuleuse du crabe. Crédits pour l’image rayon-X : NASA/CXC/ASU/J. Hester et al.. Crédits pour l’image optique : NASA/HST/ASU/J. Hester et al.

$g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$ accéder à la grandeur physique responsable de l’accélération des particules chargées ? Par exemple dans le cas d’une radiation synchrotron, peut-on déduire des caractéristiques du champ magnétique responsable de l’accélération des particules chargées ?

VIII. Conclusion

Le modèle des cubes durs du chapitre 1 et la situation qui en découle envisagée au chapitre 2, peuvent d’ores et déjà servir à l’exploration de situations de transport anormal pertinentes dans un contexte astrophysique, discutées en VI., en modifiant la distribution des vitesses du gaz support selon la méthode détaillée au V.. La finalité est de pouvoir dire quantitativement comment $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, et $g^{(2)}(\tau)$, rendent compte du transport anormal du gaz support des oscillateurs harmoniques (et donc des oscillateurs harmoniques eux-mêmes) ; comment permettent-elles d’accéder à l’indice κ de la distribution des vitesses de l’état stable non-maxwellien (cas de la sous-partie VI.1) ? ou à l’exposant α de processus de Lévy stable (cas de la sous-partie VI.2) ? A la suite des développements menés au chapitre 1 et chapitre 2, deux pistes, qui peuvent éventuellement être couplées, semblent accessibles pour enrichir le modèle : inclure une troisième population de particules pour modéliser un plasma ions-neutres-électrons, et inclure un traitement relativiste du mouvement brownien. La première permettrait de rendre plus fidèlement compte d’un plasma, la deuxième permettrait de répondre aux interrogations fondamentales posées dans la sous-partie VII.2, et permettrait également de modéliser un gaz support à haute densité d’énergie.

Un modèle alternatif au modèle des cubes durs, qui resterait simple et donnerait un code peu couteux en temps de calcul, est un modèle de marche de Lévy pour la vitesse, suivant l’approche de [321]. Le développement actuel de la théorie des MATC offre une palette riche de possibilités pour la modélisation. Il resterait cependant à donner une justification physique à cette MATC dans l’espace des vitesses.

Annexes

Annexe A

Quelques généralités sur les PMSCE

Sommaire

I.	Préliminaires	198
II.	Existence et forme fonctionnelle de P_W	199
III.	Caractérisation des PMSCE	201
IV.	Coefficients de Kramers-Moyal pour un PMSCE	203
V.	Sur l'évolution des moments d'un PM	203

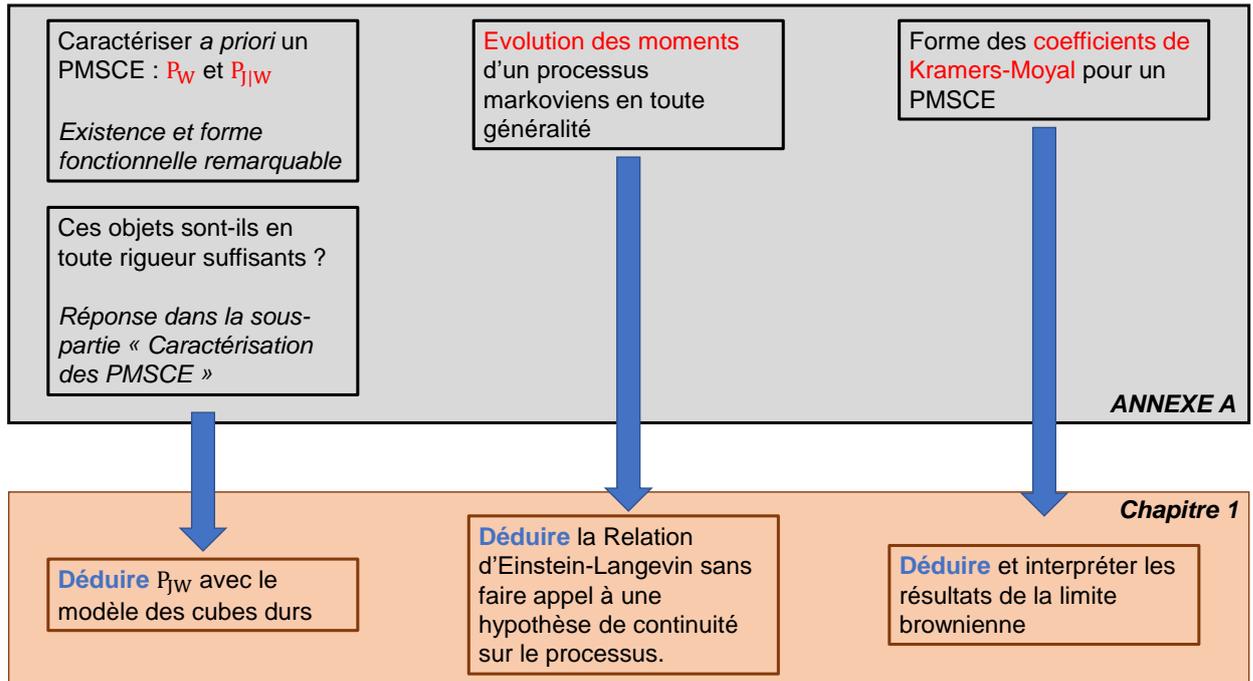


FIGURE A.1 – Résumé des notions essentielles au chapitre 1 détaillées dans cette l'annexe.

Le minimum de connaissance nécessaire à la compréhension du modèle présenté en II. du chapitre 1 est rassemblé dans cette annexe. Les démonstrations amenant aux résultats sont expliquées dans le texte. Seules les formules essentielles pour la suite sont écrites.

Le premier objectif est de rappeler comment caractériser de manière unique un Processus Markovien à Saut avec Continuum d'Etat (PMSCE). Les objets mathématiques identifiés comme nécessaires et suffisants sont alors explicités dans le cadre du modèle de cubes durs dans les sous-parties II.2 et II.3 du chapitre 1. Le deuxième rappel est une conséquence du premier, il concerne la forme particulière que prennent les coefficients de Kramers-Moyal pour un PMSCE. C'est toute la sous-partie clef III.2 du chapitre 1 qui repose sur ce rappel. Enfin, une sous-partie concernant l'évolution des moments d'un processus markovien (à sauts ou continu) est développée. Elle permet de déduire la relation d'Einstein-Langevin, en toute généralité, sans faire intervenir l'équation de Langevin et l'hypothèse de continuité. Ces liens, entre cette annexe et le chapitre 1, sont résumés figure A.1. La première sous-partie I. pose le cadre et les notations.

I. Préliminaires

Soit V un PMSCE quelconque.

Pour caractériser V il faut, à fortiori, pouvoir prédire :

- quand V sautera d'un état donné (v, t)
- quel sera alors le nouvel état atteint

Le temps d'attente W entre deux sauts successifs est supposé être une V.A. à densité à tout instant. L'existence de P_W et sa forme fonctionnelle remarquable sont montrées en partie II., en concédant une hypothèse peu restrictive sur l'existence d'une fréquence (probabiliste) de saut, et en supposant l'existence d'une densité conjointe W - J . L'existence d'une densité conjointe W - J implique l'existence d'une densité conditionnelle $J|W$ (voir la relation générale (A.13)). Il est donc indirectement supposé que le changement d'état par saut $J|W$ est une V.A. à densité à

tout instant. Une hypothèse supplémentaire de dérivabilité de cette densité, au premier ordre par rapport à la variable temps d'attente, est faite. Cette hypothèse de dérivabilité est induite par l'hypothèse d'une fréquence (probabiliste) de saut.

Les densités associées à W , $J|W$, et au couple W - J , seront notées : $P_W(\tau|v, t)$, $P_{J|W}(j|\tau; v, t)$, et $P_{WJ}(\tau, j|v, t)$. Elles définissent les probabilités :

- $P_W(\tau|v, t)d\tau \equiv$ probabilité que, sachant que : $V(t) = v$, V saute dans l'intervalle de date $[t + \tau, t + \tau + d\tau]$,
- $P_{J|W}(j|\tau; v, t)dj \equiv$ probabilité que, sachant que : $V(t) = v$, et que : V saute à la date $t + \tau$, V atteigne une nouvelle valeur située dans $[v + j, v + j + dj]$,
- $P_{WJ}(\tau, j|v, t)d\tau dj \equiv$ probabilité que, sachant que : $V(t) = v$, V saute dans l'intervalle de date $[t + \tau, t + \tau + d\tau]$, et atteigne une nouvelle valeur située dans $[v + j, v + j + dj]$.

Un point sur les notations.

- A un instant donné, une V.A. est notée par une lettre capitale X , ses réalisations sont notées en minuscule x , et sa densité est notée : $P_X(x)$.
- Chaque densité est en fait une densité conditionnelle, par rapport à un état (v, t) donné.
- Dans la formulation : $P_{J|W}(j|\tau; v, t)$, la réalisation τ de W est séparée de la réalisation "état (v, t) " par un point virgule, pour indiquer qu'il est possible que la densité soit conditionnée par τ mais pas par (v, t) .

II. Existence et forme fonctionnelle de P_W

Soit $\mathbf{p}(\tau; v, t)$ la probabilité que V saute, depuis la réalisation $V(t) = v$ atteinte à la date t , entre $[t, t + \tau[$. Deux hypothèses ad-hoc sont nécessaires pour la suite :

Ha : la fonction \mathbf{p} est dérivable au moins une fois, par rapport à t et à τ . Ce qui s'interprète comme le fait de pouvoir définir une fréquence de saut pour une réalisation v donnée.

Hb : la valeur en zéro est nulle : $\mathbf{p}(\tau = 0; v, t) = 0$. Ce qui se comprend bien : la probabilité de tomber sur une date t de saut dans l'ensemble non-dénombrable \mathbb{R}_+ est nulle.

L'hypothèse de transition markovienne ajoutée aux deux hypothèses précédentes, suffit à justifier l'existence d'une fonction $a(v, t)$ qui correspond en terme probabiliste à $P_W(\tau = 0|v, t)$ (dont l'existence à été supposée a priori), et qui définit entièrement $P_W(\tau|v, t)$, dont la forme fonctionnelle est remarquable. C'est ce qui est développé ci-après en deux étapes.

Première étape : existence $P_W(\tau = 0|v, t)$.

Soit un intervalle infinitésimal $[t, t + dt[$. Il est tout à fait possible de le diviser en $n \geq 2$ sous-intervalles : $[t, t_1[$, $[t_1, t_2[$, ..., $[t_{n-1}, t + dt[$, où les points $(t_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont définis en sachant que la distance de chaque sous-intervalle est dt/n .

En vertu de la nature markovienne de V , la probabilité que V ne saute pas dans un sous-intervalle $[t_{i-1}, t_i[$ est indépendante que V saute ou ne saute pas dans $[t_{i-2}, t_{i-1}[$. Cette indépendance permet d'écrire la probabilité que V ne saute pas dans l'intervalle total $[t, t + dt[$ comme un produit sur i des probabilités $1 - \mathbf{p}(dt/n; v, t_{i-1})$:

$$1 - \mathbf{p}(dt; v, t) = \prod_{i=1}^n (1 - \mathbf{p}(dt/n; v, t_{i-1})). \quad (\text{A.1})$$

Avec l'hypothèse (Ha) de dérivabilité de \mathbf{p} et le théorème de Taylor, les probabilités $1 - \mathbf{p}(dt/n; v, t_{i-1})$ sont indépendantes de i au premier ordre en dt , et ainsi :

$$1 - \mathbf{p}(dt; v, t) = (1 - \mathbf{p}(dt/n; v, t))^n + o(dt).$$

Alors, en ne gardant que le premier ordre des infinitésimaux dt et $n\mathbf{p}(dt/n; v, t)$ (car avec l'hypothèse de départ (Hb) : $\lim_{\tau \rightarrow 0} [\mathbf{p}(\tau; v, t)] = 0$ et n est fini), la probabilité que V saute entre t et $t + dt$, sachant que $V(t) = v$, prend une forme fonctionnelle remarquable :

$$\mathbf{p}(dt; v, t) = n \cdot \mathbf{p}(dt/n; v, t). \quad (\text{A.2})$$

Enfin, avec (A.2) et l'hypothèse de dérivabilité de \mathbf{p} , sa \mathbf{p}' dérivée par rapport à la variable $\tau = dt$ vérifie :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbf{p}'(\tau) = \mathbf{p}'\left(\frac{\tau}{n}\right). \quad (\text{A.3})$$

La relation (A.3) est également vraie lorsque $n \rightarrow +\infty$, et ainsi \mathbf{p}' s'avère être égale à la constante $\mathbf{p}'(0)$, notée $a(v, t)$. Il en découle :

$$\mathbf{p}(\tau = dt; v, t) = a(v, t)dt. \quad (\text{A.4})$$

Par définition de \mathbf{p} , et de \mathbf{P}_W dont l'existence est supposée,

$$a(v, t) = \mathbf{P}_W(\tau = 0|v, t).$$

Ce qui achève la première étape ; $\mathbf{P}_W(\tau = 0|v, t)$ existe bien.

Deuxième étape : existence et forme fonctionnelle de $\mathbf{P}_W(\tau|v, t)$.

La probabilité que V ne saute pas dans $[t, t + \tau + d\tau]$, notée $\bar{\mathbf{p}}(\tau + d\tau; v, t)$, peut s'écrire comme le produit de la probabilité que V ne saute pas durant $[t, t + \tau]$, et de la probabilité que V ne saute pas durant $[t + \tau, t + \tau + d\tau]$, car ce sont deux événements indépendants à cause de l'hypothèse markovienne sur V . Avec (A.4), il vient :

$$\bar{\mathbf{p}}(\tau + d\tau; v, t) = \bar{\mathbf{p}}(\tau; v, t) [1 - a(v, t + \tau)d\tau]. \quad (\text{A.5})$$

En passant à la limite $d\tau \rightarrow 0$, apparaît une équation différentielle d'ordre un sur $\bar{\mathbf{p}}(\tau; v, t)$. Sa résolution donne alors :

$$1 - \mathbf{p}(\tau; v, t) = \exp\left(-\int_0^\tau a(v, t + t')dt'\right). \quad (\text{A.6})$$

L'existence de $\mathbf{P}_W(\tau = 0|v, t)$ est prouvée par (A.4), il n'est donc pas absurde de supposer l'existence de $\mathbf{P}_W(\tau|v, t)$ ad-hoc, afin de vérifier s'il est possible de lui trouver une expression explicite, et si oui, sous quelle(s) condition(s). L'existence de la densité conjointe W - J : $\mathbf{P}_{WJ}(\tau, j|v, t)$, est également supposée à priori (ce qui n'est pas absurde car $\mathbf{P}_W(\tau|v, t)$ peut-être défini à partir de cette quantité, voir la relation générale (A.12)). Sa condition d'existence sera discutée à posteriori.

La probabilité que V saute entre $[t + \tau, t + \tau + d\tau]$ et soit dans l'intervalle $[v + j, v + j + dj]$, sachant que $V(t) = v$, s'écrit par définition avec la densité conjointe $\mathbf{P}_{WJ}(\tau, j|v, t)$:

$$\mathbb{P}(E_{wj}) = \mathbf{P}_{WJ}(\tau, j|v, t)d\tau dj.$$

La probabilité $\mathbb{P}(E_{wj})$ s'écrit d'autre part comme la réunion de trois événements :

E_a : Sachant que $V(t) = v$, V ne saute pas entre $[t, t + \tau]$,

E_b : Sachant que $V(t + \tau) = v$, V saute entre $[t + \tau, t + \tau + d\tau]$,

E_c : Sachant l'événement E_b , V atteint $[v + j, v + j + dj]$.

L'hypothèse markovienne sur V garantit l'indépendance des événements E_a et E_b , ainsi que celle des événements E_a et E_c . De plus : $E_c|E_b \equiv E_c$. La formule des probabilités composées pour ces trois événements devient alors :

$$\mathbb{P}(E_{wj}) = \mathbb{P}(E_c) \cdot \mathbb{P}(E_b) \cdot \mathbb{P}(E_a).$$

La probabilité de E_a correspond par définition à (A.6). La probabilité de E_b s'exprime directement avec la définition de $a(v, t + \tau)$:

$$\mathbb{P}(E_b) = a(v, t + \tau)d\tau.$$

La probabilité de E_c s'exprime par définition avec la densité conditionnelle $P_{J|W}(j|\tau + d\tau'; v, t)$ (existe puisqu'elle est définie à partir de $P_{WJ}(\tau, j|v, t)$ dont l'existence est supposée)

$$\mathbb{P}(E_c) = P_{J|W}(j|\tau + d\tau'; v, t)dj,$$

où $d\tau' \in [t + \tau, t + \tau + d\tau]$. Il est supposé que :

Ha-bis : $P_{J|W}$ est dérivable au moins une fois par rapport à sa variable τ . Ce qui revient à supposer l'existence d'une fréquence de saut pour un incrément j donné depuis un état (v, t) donné. Cette hypothèse est induite par l'hypothèse (Ha) de dérivabilité de \mathfrak{p} .

Avec l'hypothèse (Ha-bis) de dérivabilité sur $P_{J|W}$, et en passant à la limite des infiniment petits, il vient :

$$P_{WJ}(\tau, j|v, t) = P_{J|W}(j|\tau; v, t) \cdot a(v, t + \tau) \exp\left(-\int_0^\tau a(v, t + t')dt'\right), \quad (\text{A.7})$$

La densité conjointe P_{WJ} est donc définie si et seulement si la densité conditionnelle $P_{J|W}$ l'est. Si le comportement par saut de V est tel qu'il est raisonnable de supposer l'existence d'une densité de probabilité $P_{J|W}$ pour décrire les incréments par sauts, alors, l'équivalent de la formule des probabilités conditionnelles pour les densités de probabilité permet de conclure en la comparant à (A.7) : la quantité $P_{WJ}(\tau|v, t)$ possède une forme fonctionnelle explicite, entièrement définie par la donnée de $a(v, t) = P_{WJ}(0|v, t)$:

$$P_{WJ}(\tau; v, t) = a(v, t + \tau) \cdot \exp\left(-\int_0^\tau a(v, t + t')dt'\right). \quad (\text{A.8})$$

Conclusion : la densité $P_{WJ}(\tau; v, t)$ est entièrement définie par $a(v, t) = P_{WJ}(0; v, t)$ selon (A.8).

III. Caractérisation des PMSCE

Il convient désormais de vérifier si les objets identifiés comme étant *a priori* nécessaires, et dont l'existence et la forme fonctionnelle (pour P_W) ont été établies dans la sous-partie précédente, sont en toute rigueur suffisants.

De manière générale, un processus markovien (à sauts ou continu) est entièrement défini, à la distribution initiale près, par la donnée de la densité de transition markovienne, qui est notée ici \mathbb{T} . Les objets précédents que sont P_W et $P_{J|W}$ permettent bien de définir de manière unique \mathbb{T} . C'est ce qui est développé dans cette présente sous-partie.

Pour le montrer, le propagateur du processus markovien V est introduit. C'est le processus aléatoire dont les réalisations sont définies par, si $v = V(t)$:

$$\Phi(dt; v, t) := V(t + dt) - V(t). \quad (\text{A.9})$$

Il est supposé qu'à chaque instant la V.A. Φ est une V.A. à densité, dont la densité est notée : $P_\Phi(\phi|dt; v, t)$. Cette densité de probabilité est par définition

$$P_\Phi(\phi|dt; v, t) = \mathbb{T}(v + \phi, t + dt|v, t).$$

La donnée de $P_\Phi(\phi|dt; v, t)$ définit donc \mathbb{T} de manière unique et réciproquement.

La densité de probabilité $P_\Phi(\phi|dt; v, t)$ est reliée à P_W et $P_{J|W}$ via un développement en série de Taylor, c'est ce qui démontré dans ce qui suit.

La probabilité $P_\Phi(\phi|dt; v, t)d\phi$ peut s'interpréter comme la réunion de deux événements :

$$P_\Phi(\phi|dt; v, t)d\phi = \mathbb{P}\{A \cup B\},$$

événement A : Sachant que $V(t) = v$, V en sautant dans $[t, t + dt[$, atteint $[v + \phi, v + \phi + d\phi[$,

événement B : $V(t)$ ne saute pas dans $[t, t + dt[$, et donc Φ est la V.A. dégénérée en 0.

Les deux événements A et B sont disjoints, donc :

$$P_{\Phi}(\phi|dt; v, t)d\phi = \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B\} \quad (\text{A.10})$$

L'évènement A est lui même l'intersection de deux sous-événements : l'évènement A_1) V saute depuis la réalisation v , atteinte à la date t , à une date $t' + dt'$ dans $[t, t + dt[$, et l'évènement A_2) V atteint $[v + \phi, v + \phi + d\phi[$. Avec la formule des probabilités conditionnelles, la probabilité de l'évènement A s'exprime par

$$\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{A_2|A_1\} \cdot \mathbb{P}\{A_1\},$$

où par définition :

$$\mathbb{P}\{A_1\} = P_{\mathbb{W}}(\tau = 0|v, t)dt,$$

et

$$\mathbb{P}\{A_2|A_1\} = P_{\mathbb{J}|\mathbb{W}}(\phi|\tau = dt'; v, t)d\phi.$$

En supposant que $P_{\mathbb{J}|\mathbb{W}}$ est dérivable au moins une fois par rapport à sa variable τ , la probabilité de l'évènement A se réécrit au premier ordre en dt' en fonction de $P_{\mathbb{W}}(\tau = 0|v, t)$ et $P_{\mathbb{J}|\mathbb{W}}(\phi|\tau = 0; v, t)$:

$$\mathbb{P}\{A\} = P_{\mathbb{W}}(0|v, t)dtP_{\mathbb{J}|\mathbb{W}}(\phi|0; v, t)d\phi + o(dt)$$

L'évènement B peut lui aussi être interprété comme l'intersection de deux événements : l'évènement B_1) V ne saute pas dans $[t, t + dt[$, et l'évènement B_2) Φ est la V.A. dégénérée en 0 de densité la distribution de Dirac $\delta(\phi)$. La probabilité de B_1 est par définition :

$$\mathbb{P}\{B_1\} = 1 - P_{\mathbb{W}}(0|v, t)dt,$$

la probabilité conditionnelle $B_2|B_1$ est par définition

$$\mathbb{P}\{B_2|B_1\} = \delta(\phi)d\phi.$$

La probabilité de B se déduit alors avec la formule des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}\{B\} = [1 - P_{\mathbb{W}}(0|v, t)dt] \delta(\phi)d\phi$$

L'équation (A.10) devient alors au premier ordre $o(dt)$:

$$P_{\Phi}(\phi|dt; v, t) = P_{\mathbb{W}}(0|v, t)P_{\mathbb{J}|\mathbb{W}}(\phi|0; v, t)dt + [1 - P_{\mathbb{W}}(0|v, t)dt] \delta(\phi) + o(dt) \quad (\text{A.11})$$

Ce qui achève la démonstration : $\Gamma(v + \phi, t + dt|v, t) = P_{\Phi}(\phi|dt; v, t)$ est définie de manière unique par la donnée de $P_{\mathbb{W}}(0|v, t)$ et $P_{\mathbb{J}|\mathbb{W}}(\phi|0; v, t)$, ces objets sont donc nécessaires et suffisants pour caractériser un processus markovien à sauts. Plus encore, il est nécessaire et suffisant de déterminer $P_{\mathbb{W}\mathbb{J}}(0, j|v, t)$ car :

$$P_{\mathbb{W}}(0|v, t) = \int P_{\mathbb{W}\mathbb{J}}(0, j|v, t)dj, \quad (\text{A.12})$$

$$P_{\mathbb{J}|\mathbb{W}}(j|0; v, t) = \frac{P_{\mathbb{W}\mathbb{J}}(0, j|v, t)}{\int P_{\mathbb{W}\mathbb{J}}(0, j'|v, t)dj'}. \quad (\text{A.13})$$

IV. Coefficients de Kramers-Moyal pour un PMSCE

Les coefficients de Kramers-Moyal, notés dans ce qui suit $(K_n(v, t))_n$, permettent également de caractériser complètement un processus markovien V (de réalisations notées v). En effet, ils apparaissent dans l'équation de Kramers-Moyal, et la résolution de l'équation de Kramers-Moyal, quand elle est possible, donne \mathbb{T} à une distribution initiale près.

L'existence des $(K_n)_n$ suppose que les moments du propagateur (A.9) possèdent une forme analytique dépendant de dt , la définition des $(K_n)_n$ est rappelée ici car la convention choisie est de ne pas les faire dépendre de $n!$:

$$K_n(v, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\frac{\langle \Phi^n(dt; v, t) \rangle}{dt} \right]. \quad (\text{A.14})$$

Le moment d'ordre n du propagateur (A.9) s'exprime directement via (A.11), et il vient :

$$K_n(v, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} j^n P_{\text{WJ}}(0, j|v, t) dj. \quad (\text{A.15})$$

Ainsi, la densité jointe $P_{\text{WJ}} := P_{\text{JW}} \cdot P_{\text{W}}$ définit de manière unique les $(K_n(v, t))_n$, c'est consistant car ils sont un autre moyen de caractériser le processus $V(t)$.

V. Sur l'évolution des moments d'un PM

Du fait de la nature markovienne de V , les évolutions des moments de V et de son processus intégral s'écrivent sous forme d'équations différentielles, et ce que V soit continu ou à sauts. C'est ce qui est rappelé ici. Ces rappels servent dans le chapitre 1 sous-partie III..1.

Tout ce qui suit est valable pour $t \geq t_0$ où t_0 définit l'état initial $V(t_0)$. La réalisation générique v correspond à la valeur de V . Le processus V peut-être *continu* ou *à sauts*.

L'idée est de déduire une équation différentielle régissant l'évolution du moment d'ordre ℓ de V , noté : $\langle V^\ell(t) \rangle$.

En utilisant la définition du propagateur (A.9) et la formule du binôme de Newton, une première relation entre $\langle V^\ell(t+dt) \rangle$ et $\langle V^\ell(t) \rangle$ peut-être déduite. Cette relation fait intervenir un moment joint $V - \Phi$, d'ordre $(\ell - k, k)$. Ce moment joint s'exprime par définition comme un moment associé à \mathbb{T} et comme un moment associé à P_Φ . Ainsi, en faisant apparaître le premier ordre en dt de la définition (A.14), puis en passant à la limite $dt \rightarrow 0$, la dérivée de $\langle V^\ell(t) \rangle$ et il vient l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{d\langle V^\ell(t) \rangle}{dt} = \sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} \langle K_k(v, t) V^{\ell-k}(t) \rangle. \quad (\text{A.16})$$

L'application de (A.16) avec $\ell = 1$ et $\ell = 2$ donne respectivement l'évolution de la moyenne $\langle V(t) \rangle$ et de l'autocovariance de V , notée $\langle\langle V^2(t) \rangle\rangle \equiv \langle\langle V(t), V(t) \rangle\rangle$, où de manière générique :

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle := \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle.$$

Les deux premiers coefficients de Kramers-Moyal sont impliqués :

$$\frac{d\langle V(t) \rangle}{dt} = \langle K_1(v, t) \rangle, \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{d\langle\langle V^2(t) \rangle\rangle}{dt} = 2\langle\langle V(t), K_1(v, t) \rangle\rangle + \langle K_2(v, t) \rangle. \quad (\text{A.18})$$

Les équations (A.17) et (A.18) sont utilisées dans la partie III. du chapitre 1.

Le processus intégral de V est supposé exister, il est noté R . Un processus markovien ne possède

pas de dérivée bien définie, comme la dérivée de R est bien définie puisqu'elle vaut V , R ne peut pas être un processus markovien. Cependant, l'évolution de ces moments prend une forme synthétique.

L'expression de $\langle R^\ell(t + dt) \rangle$, pour $\ell \geq 1$, dépend, au premier ordre $o(dt)$, de $\langle R^\ell(t) \rangle$ et du moment joint R - V d'ordre $(\ell - 1, 1)$. Il suffit d'utiliser le développement limité de R au premier ordre en dt et la formule du binôme de Newton. En passant à la limite $dt \rightarrow 0$, il vient alors une première équation d'évolution pour $\langle R^\ell(t) \rangle$:

$$\frac{d\langle R^\ell(t) \rangle}{dt} = \ell \langle R^{\ell-1}(t) V(t) \rangle. \quad (\text{A.19})$$

L'application de (A.19) avec $\ell = 1$ et $\ell = 2$, donne :

$$\frac{d\langle R(t) \rangle}{dt} = \langle V(t) \rangle, \quad (\text{A.20})$$

et l'évolution de l'autocovariance de R , notée $\langle\langle R^2(t) \rangle\rangle$:

$$\frac{d\langle\langle R^2(t) \rangle\rangle}{dt} = 2\langle\langle R(t), V(t) \rangle\rangle \quad (\text{A.21})$$

Les deux équations (A.20) et (A.21) sont utilisées dans la sous-partie III..1 du chapitre 1.

Enfin, une relation qui est la clef de voûte de la sous-partie III..1 du chapitre 1 est également démontrée ici. Elle concerne l'évolution d'un moment croisé $R - V$ d'ordre $(k, \ell) \in \mathbb{N}^{*2}$ quelconque, $\langle R^k(t) V^\ell(t) \rangle$.

Il faut commencer par écrire $V^\ell(t + dt)$ et $R^k(t + dt)$ en fonction de, respectivement, $V^\ell(t)$ (en procédant de la même façon que pour obtenir (A.16)) et $R^k(t)$ (en procédant de la même façon que pour obtenir (A.19)). Ensuite, il faut effectuer leur multiplication, toujours à l'ordre $o(dt)$, vient alors deux moments triplement joints $\forall n \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$:

$$\langle R^k(t) V^{\ell-n}(t) \Phi^n(dt; v, t) \rangle$$

et $\langle R^{k-1}(t) V^{\ell-n+1}(t) \Phi^n(dt; v, t) \rangle$.

Ces moments triplement joints s'expriment par définition via \mathbb{T} et \mathbb{P}_Φ , les coefficients de Kramers-Moyal apparaissent alors en utilisant la définition (A.14) au premier ordre en dt . En ne gardant que l'ordre $o(dt)$ dans le résultat final, et en passant à la limite $dt \rightarrow 0$ pour faire apparaître l'opérateur dérivé, il vient finalement $\forall t \geq t_0$ et $\forall k, \ell \geq 1$:

$$\frac{d\langle R^k(t) V^\ell(t) \rangle}{dt} = k \langle R^{k-1}(t) V^{\ell-1}(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\ell} \binom{\ell}{n} \langle R^k(t) V^{\ell-n}(t) K_n(v, t) \rangle. \quad (\text{A.22})$$

Annexe B

Moment d'ordre 4 du processus de Campbell en jeu

Sommaire

I.	Rappels de la problématique	206
II.	Transformation de la problématique	206
III.	Calcul d'un moment joint d'ordre 4 d'un processus de Poisson . . .	207
IV.	Résultat final	208

Cette annexe appuie les développements de la sous-partie II.2 du chapitre 3. Certains calculs n'ont pas été exhibés dans ce chapitre afin d'en alléger la lecture. Plus de détails et des éléments de preuve peuvent être trouvés ici. Il est certain que ces calculs ne sont pas originaux, car les notions en jeu sont connues et maîtrisées depuis les travaux de Campbell [330, 331] et ceux de Slutsky [332], mais aucune référence n'a été trouvée. Il convient donc de justifier le calcul (3.9) utilisé dans la sous-partie II.2 du chapitre 3.

Sa lecture requiert des connaissances sur les processus de Poisson et les processus définis par transformation linéaire d'un autre processus, en particulier sur le processus de Campbell.

I. Rappels de la problématique

Soit i un processus de Campbell de réponse h donnée par (3.1) à des impulsions de Poisson I de densité homogène ν

$$I(t) = F_0 \sum_k \delta(t - t_k), \quad (\text{B.1})$$

où F_0 est une constante introduite pour l'homogénéité de l'équation. Il s'agit de calculer l'auto-covariance du processus z de réalisations

$$z(t; t_a) = i(t)i(t + t_a), \quad (\text{B.2})$$

où $t_a \geq 0$ est un paramètre.

Notons \hat{H} , l'opérateur convolution avec h , de sorte que pour une fonction à deux variables, par exemple,

$$\hat{H}_{t_1} \{f(t_1, t_2)\}_t := f(t_1; t_2) *_{t_1} h(t_1)[t], \quad (\text{B.3})$$

où : $*$ signifie l'opération de convolution par rapport à la variable t_1 , et où t_2 a été séparé de t_1 par un point virgule pour signifier qu'il est un paramètre dans l'opération, et non une variable, et où $[t]$ signifie que le résultat de la convolution $*$ est pris en $t_1 = t$.

Le processus de Campbell s'écrit :

$$i(t) = \hat{H}_{t_1} \{I(t_1)\}_t. \quad (\text{B.4})$$

Alors, avec la commutation (i.e. inversion de l'ordre d'application) de l'espérance et des opérateurs linéaires $\hat{H}_{t_i} \{\dots\}$, où $i = 1, 2, 3, 4$, quitte à en changer l'ordre, il vient :

$$\langle z(t; t_a)z(t + \tau; t_a) \rangle = \hat{H}_{t_1} \left\{ \hat{H}_{t_2} \left\{ \hat{H}_{t_3} \left\{ \hat{H}_{t_4} \left\{ \langle I_1 I_2 I_3 I_4 \rangle_{t+t_a+\tau} \right\}_{t+\tau} \right\}_{t+t_a} \right\}_t \right\}, \quad (\text{B.5})$$

où : $I_i := I(t_i)$, il faut donc calculer le moment joint d'ordre 4 du train d'impulsion de Poisson I :

$$\langle I_1 I_2 I_3 I_4 \rangle.$$

II. Transformation de la problématique

Par définition I est la dérivée du processus de Poisson n de densité homogène ν , ses réalisations s'écrivent

$$I(t) := \hat{d}_t \{n(t')\}_t, \quad (\text{B.6})$$

où \hat{d}_t est l'opérateur (linéaire) dérivée par rapport à t . Avec un point de vue classique, la réalisation $n(t)$ du processus de Poisson représente le nombre de photons localisés dans la durée

$[0, t]$. Dans (B.6) l'intensité I s'exprime en photon par seconde. Par commutativité de l'espérance et de l'opérateur dérivé

$$\langle I_1 I_2 I_3 I_4 \rangle = \hat{d}_{t'_1} \left\{ \hat{d}_{t'_2} \left\{ \hat{d}_{t'_3} \left\{ \hat{d}_{t'_4} \left\{ \langle n_1 n_2 n_3 n_4 \rangle \right\}_{t_4} \right\}_{t_3} \right\}_{t_2} \right\}_{t_1} . \quad (\text{B.7})$$

Il faut et suffit donc de calculer $\langle n_1 n_2 n_3 n_4 \rangle$, où $n_i = n(t'_i)$ est une variable poissonnienne de paramètre $\nu t'_i$.

III. Calcul d'un moment joint d'ordre 4 d'un processus de Poisson

Pour mener le calcul de $\langle n_1 n_2 n_3 n_4 \rangle$, il faut commencer par remarquer que si $t'_1 < t'_2 < t'_3 < t'_4$, alors $n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_2$, et $n_4 - n_3$ sont des V.A. poissonniennes indépendantes, de paramètre respectifs $\nu t'_1, \nu(t'_2 - t'_1), \nu(t'_3 - t'_2)$, et $\nu(t'_4 - t'_3)$. De plus l'ordering inverse $t'_4 < t'_3 < t'_2 < t'_1$ doit donner le même résultat pour $\langle n_4 n_3 n_2 n_1 \rangle$. La stratégie est donc de mener le calcul pour $t'_1 < t'_2 < t'_3 < t'_4$, en exploitant les variables poissonniennes indépendantes "cachées", et la symétrie de renversement du temps, puis d'affiner le résultat en fonction des cas où un couple ou deux couples de (t'_i) sont égaux c'est à dire :

- $t'_1 = t'_2 = t'_3 = t'_4$ i.e. $\langle n_1 n_2 n_3 n_4 \rangle = \langle n_1^4 \rangle$
- $t'_2 = t'_3 = t'_4$ i.e. $\langle n_1 n_2 n_3 n_4 \rangle = \langle n_1 n_2^3 \rangle$
- $t'_1 = t'_2 = t'_3$ i.e. $\langle n_1 n_2 n_3 n_4 \rangle = \langle n_1^3 n_4^3 \rangle$
- $t'_1 = t'_2$ i.e. $\langle n_1 n_2 n_3 n_4 \rangle = \langle n_1^2 n_3 n_4 \rangle$
- $t'_2 = t'_3$ i.e. $\langle n_1 n_2 n_3 n_4 \rangle = \langle n_1 n_2^2 n_4 \rangle$
- $t'_3 = t'_4$ i.e. $\langle n_1 n_2 n_3 n_4 \rangle = \langle n_1 n_2 n_3^2 \rangle$
- $t'_1 = t'_2$ et $t'_3 = t'_4$ i.e. $\langle n_1 n_2 n_3 n_4 \rangle = \langle n_1^2 n_3^2 \rangle$

Après le développement de $n_1(n_2 - n_1)(n_3 - n_2)(n_4 - n_3)$, le moment recherché s'exprime en fonction de moments joints à trois V.A., et du produit de quatre moments d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \langle \prod_{i=1}^4 n_i \rangle &= \langle n_1 \rangle \langle n_2 - n_1 \rangle \langle n_3 - n_2 \rangle \langle n_4 - n_3 \rangle + \langle n_1 n_2 n_3^2 \rangle + \langle n_1 n_2^2 n_4 \rangle - \langle n_1 n_2^2 n_3 \rangle \\ &\quad + \langle n_1^2 n_3 n_4 \rangle - \langle n_1^2 n_3^2 \rangle - \langle n_1^2 n_2 n_4 \rangle + \langle n_1^2 n_2 n_3 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Avec les moments joint à trois VA, il faut réitérer la stratégie qui vise à faire apparaître des VA poissonniennes indépendantes, afin de ramener le calcul à un simple calcul de moments d'une VA poissonnienne. Il faut prendre garde à toujours se référer à la même date et à ne pas réécrire la réalisation correspondante. Le choix est ici t'_1 et n_1 n'est pas modifiée. Par exemple :

$$n_1 n_2 n_3^2 = n_1 (n_2 - n_1 + n_1) (n_3 - n_2 + n_2)^2, \quad (\text{B.9})$$

après quelques développements il vient

$$\begin{aligned} \langle n_1 n_2 n_3^2 \rangle &= \langle n_1^4 \rangle + \langle n_1^3 \rangle (2 \langle n_3 - n_2 \rangle + 3 \langle n_3 - n_2 \rangle^2) \\ &\quad + \langle n_1^2 \rangle \left(3 \langle (n_2 - n_1)^2 \rangle + 4 \langle n_3 - n_2 \rangle \langle n_2 - n_1 \rangle + \langle (n_3 - n_2)^2 \rangle \right) \\ &\quad + \langle n_1 \rangle \left(2 \langle (n_2 - n_1)^2 \rangle \langle n_3 - n_2 \rangle + \langle (n_3 - n_2)^2 \rangle \langle n_2 - n_1 \rangle + \langle (n_2 - n_1)^3 \rangle \right). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Les moments d'ordre $m \geq 1$ d'une VA poissonnienne se calculent sans difficultés.

En procédant de même pour les autres termes de (B.8), et en tenant compte de la symétrie par renversement du temps, le résultat s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \prod_{i=1}^4 n_i \rangle &= \nu^4 t'_1 t'_2 t'_3 t'_4 \\ &+ 3\nu^3 \cdot \min(t'_1, t'_4) t'_2 t'_3 + 2\nu^3 \cdot \min(t'_2, t'_3) t'_1 t'_4 + \nu^3 \cdot \max(t'_2, t'_3) t'_1 t'_4 \\ &+ 4\nu^2 \cdot \min(t'_1, t'_4) \cdot \min(t'_2, t'_3) + 2\nu^2 \cdot \min(t'_1, t'_4) \cdot \max(t'_2, t'_3) + \nu^2 t'_1 t'_4 \\ &+ \nu \cdot \min(t'_1, t'_4). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Les différents cas où des (t'_i) sont égaux entre eux sont calculés selon les mêmes principes. Il se trouve que l'application de la formule (B.11) permet de tous les retrouver, par conséquent le résultat (B.11) est le résultat final quelque soient t_1, t_2, t_3, t_4 positifs.

IV. Résultat final

Il faut ensuite injecter le résultat (B.11) dans (B.7). Il faut également noter que :

$$\hat{d}_y \{ \min(x, y) \} = \Theta(x - y)$$

où Θ est la distribution de Heaviside, et :

$$\hat{d}_x \{ \Theta(x - y) \} = \delta(x - y). \quad (\text{B.12})$$

où δ est la distribution de Dirac. Les dérivées successives, au sens des distributions, ne posent pas de difficultés, et $\forall(t_1, t_2, t_3, t_4) \geq 0$,

$$\langle c(t_1)c(t_2)c(t_3)c(t_4) \rangle = \nu^4 + \nu^3 [3\delta(t_1 - t_4) + \delta(t_2 - t_3)] + 2\nu^2 \delta(t_1 - t_4)\delta(t_2 - t_3) \quad (\text{B.13})$$

Les actions successives des opérateurs linéaires $\hat{H}_{t_i} \{ \dots \}$ sont traitées au sens des distributions, et après quelques manipulations

$$\forall \tau \geq 0, \quad \langle z(t; t_a) z(t + \tau; t_a) \rangle = e^4 \left(\nu^4 + 2\nu^3 f_i \exp(-f_i \tau) + \frac{\nu^2 f_i^2}{2} \exp(-2f_i \tau) \right). \quad (\text{B.14})$$

Le résultat (B.14) dépend uniquement de τ , et ne dépend pas du paramètre t_a , comme attendu avec la stationnarité au sens large (i.e. : du deuxième ordre). La covariance C_{zz} est obtenue en soustrayant $\langle z(t; \tau) \rangle^2$ à (B.14). Ce terme vaut

$$\langle z(t; \tau) \rangle^2 = \langle i(t) i(t + \tau) \rangle^2 = (C_{ii}(\tau) + \langle i \rangle)^2,$$

où C_{ii} est donnée par (3.7), et où $\langle i \rangle = e\nu$. Ainsi

$$\forall \tau \geq 0, \quad C_{zz}(\tau) = e^4 \nu^3 f_i \exp(-f_i \tau) + \frac{e^4 \nu^2 f_i^2}{4} \exp(-2f_i \tau), \quad (\text{B.15})$$

et la dépendance en τ sous forme d'exponentielle décroissante assure

$$\lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} C_{zz}(\tau) d\tau \right) = 0. \quad (\text{B.16})$$

Conclusion. Le processus de Campbell i défini par (3.8), ou (B.4) dans cette annexe, est ergodique en covariance.

Annexe C

Fiche technique du corrélogramme

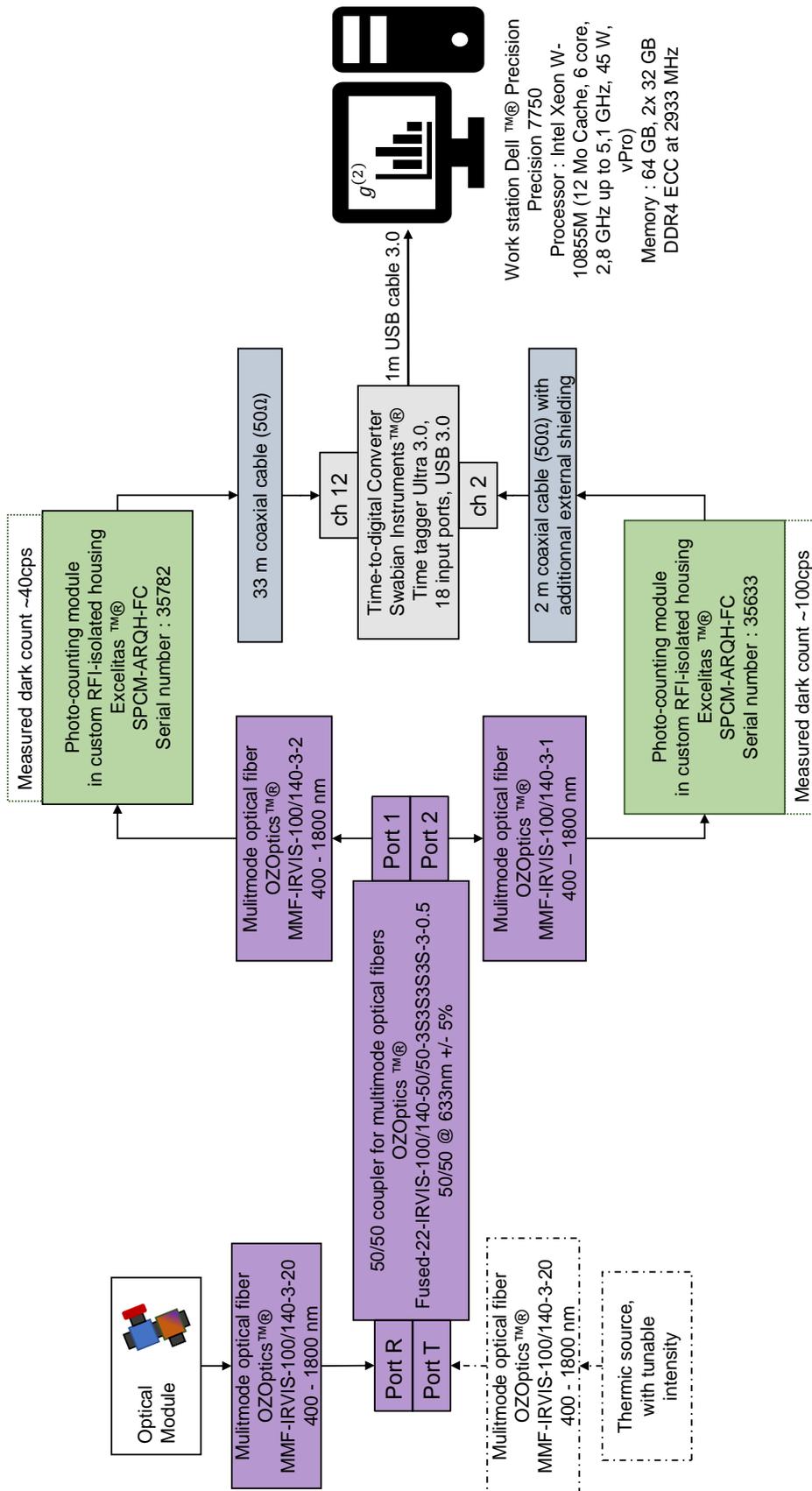


FIGURE C.1 – Fiche technique du corréloètre.

Annexe D

Éléments sur P Cygni et sa raie $H\alpha$

Sommaire

I.	Quelques éléments sur l'étoile P Cygni et sa variabilité	212
I..1	Localisation dans le diagramme d'Hertzsprung-Russell	212
I..2	Variabilité séculaire et sphéricité de l'enveloppe de vent	213
I..3	Variabilité spectro-photométrique à plus "court terme"	214
II.	Quelques éléments sur l'origine de la raie $H\alpha$	216
II..1	Sur la modélisation de l'enveloppe de vent	216
II..2	Sur le mécanisme de radiation $H\alpha$	217
II..3	Sur la formation de la raie d'émission $H\alpha$	218

Cette annexe donne quelques éléments sur l'étoile P Cygni et sa variabilité, ainsi que sur l'origine de sa raie $H\alpha$. Les développements sont purement qualitatifs et avant tout destinés au lecteur non astrophysicien ou non familier avec les systèmes étoiles-enveloppe de vent stellaire. Cette annexe a un rôle important pour la suite du chapitre 4 car elle justifie que la variabilité de P Cygni est à priori négligeable sur l'échelle de temps de la campagne de mesure (environ une semaine), et renseigne sur le spectre de la raie d'émission en $H\alpha$.

I. Quelques éléments sur l'étoile P Cygni et sa variabilité

L'article [333] fait référence dans la présentation des principales caractéristiques de P Cyg (HD 193237, HR 7763, HIP 100044).

I.1 Localisation dans le diagramme d'Hertzsprung-Russell

P Cyg a été établie comme une étoile similaire au type Wolf-Rayet à la fin des années 1930 [334, 335] grâce à l'analyse des profils de raies d'émission qui ont permis de conclure quant à l'existence d'une enveloppe de vent en expansion autour du noyau. P Cyg est une étoile de quelques dizaines de masses solaires ($37M_{\odot}$ [147]), sa position dans le diagramme d'Hertzsprung-Russell (suivant les paramètres trouvés dans [147]) est donnée figure D.1. P Cygni est la voisine

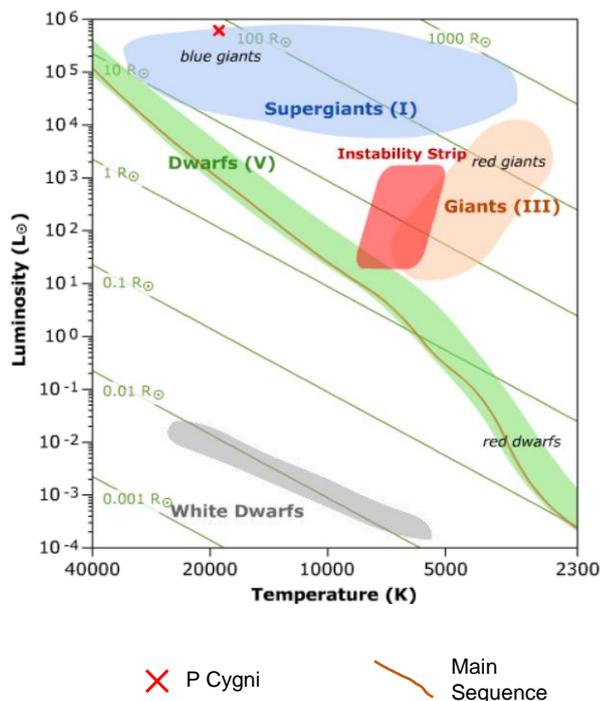


FIGURE D.1 – Position de P Cygni dans le diagramme d'Hertzsprung-Russell (suivant les paramètres trouvés dans [147] : $T_{\text{eff}} = 18700\text{K}$, $L_* = 610000L_{\odot}$). Généré avec l'application NAAP labs v1.1, <https://astro.unl.edu/nativeapps/>.

d'étoiles supergéantes O3If/WN6, Ofpe/WN9, B[e], d'étoiles variables bleues lumineuses (VBL) et d'étoiles de type Wolf-Rayet (WR). Ces trois catégories (supergéantes, VBL, et WR) représentent trois phases distinctes de l'évolution stellaire. Il est accepté que les étoiles massives de type spectral O évoluent en étoile de type Wolf-Rayet [336], mais les étapes intermédiaires de l'évolution, notamment avant et après le stade VBL, ne sont pas encore comprises malgré d'importants travaux [337, 338]. P Cyg est communément classée au stade évolutif des variables

bleues lumineuses, depuis [339, 340, 341], malgré sa variabilité spectro-photométrique exceptionnelle qui peut être de quelques jours [342], alors que les variations spectro-photométriques des VBL apparaissent plutôt sur une année ou une dizaine d'année [343]. Ceci confère donc à P Cyg une propriété qui la démarque des autres VBL, c'est la première étoile dont les variations photométriques, à l'échelle de l'année (ou moins), sont directement liées à son évolution stellaire [333]. P Cyg constitue avec η Car, AG Car et S Dor, des étoiles clés pour comprendre la transition évolutive des étoiles massives O vers les étoiles de types Wolf-Rayet [333].

I.2 Variabilité séculaire et sphéricité de l'enveloppe de vent

La variabilité sur le très long terme, ~ 100 ans, fut expliquée de manière phénoménologique par la présence de *geysers astrophysiques* [343]. C'est une des caractéristiques que P Cyg partage avec plusieurs autres VBL, dont η Car [111]. En particulier, P Cyg a connu des éruptions géantes au cours desquelles sa luminosité a augmenté d'une ou deux magnitudes, voir figure D.2, et au cours desquelles une quantité de matière de masse comprise entre une et deux masses solaires, a été éjectée [344, 343]. C'est un point commun avec η Car [111], et ce sont les deux seules VBL

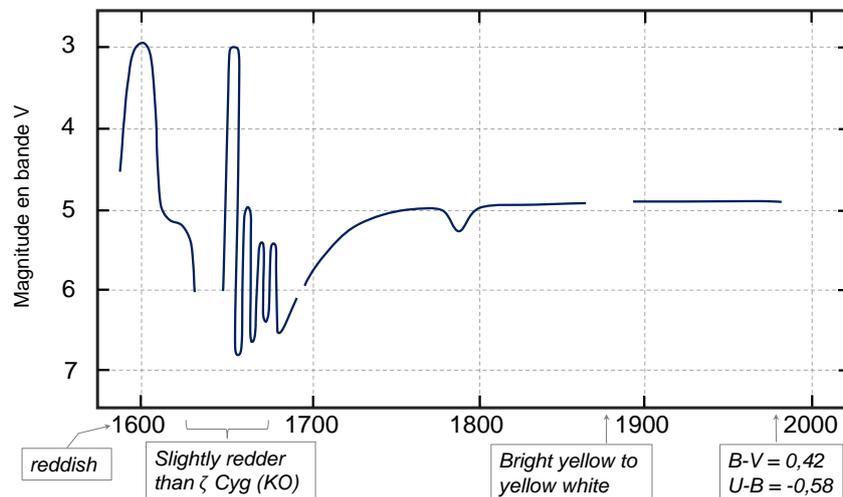


FIGURE D.2 – Variabilité de la magnitude m_{vis} de P Cyg basée sur des recherches historiques. Figure reproduite à partir de la figure 1 dans [344].

à posséder cette caractéristique. Ces explosions si violentes font de η Car et de P Cyg des VBL particulières, si bien que la question de les placer à ce stade d'évolution stellaire se pose [333]. Les mécanismes physiques expliquant ces explosions géantes restent encore inconnus [333, 343]. Surtout, il n'est pas dit qu'ils soient les mêmes pour P Cyg et η Car. En effet, l'observation des enveloppes de P Cyg et de η Car révèle des différences significatives [345] : tandis que l'enveloppe de η Car est similaire de celle des autres VBL, celle de P Cyg possède une enveloppe en bonne approximation à symétrie sphérique [345]. La symétrie sphérique de l'enveloppe de vent a également été établie expérimentalement plus récemment. Une mesure interférométrique et spectroscopique en $H\alpha$ a été réalisée de 2005 à 2008 [346] permettant de caractériser la forme de l'enveloppe, et aucune asymétrie n'a été trouvée. Ensuite, une autre analyse spectroscopique en $H\alpha$ fut menée sur quatre ans de 2006 à 2010 [347], et confirme également la forme sphérique de l'enveloppe. Enfin, une mesure interférométrique à plusieurs lignes de base menée en août 2010 et en septembre 2011 [348] ne relève également aucune asymétrie de l'enveloppe. La symétrie sphérique a quelque fois été contestée par l'expérience. D'abord en 1991, suite à la première mesure de spectro-polarimétrie linéaire, la symétrie sphérique de l'enveloppe est mise en défaut

et plusieurs modèle d’enveloppe sont proposés [349]. Ensuite, en 1997 une analyse basée sur une mesure interférométrique a mis en évidence une différence de phase entre deux sous-intervalles de la zone d’absorption sur le flan de la raie d’émission H α , section 4.2 de [350]. Ceci indique un décentrage de l’enveloppe autour de P Cyg, ou la présence d’une sous nébuleuse, situé à quelques rayons stellaires du noyau [350].

Le prochain paragraphe survole les variabilités spectro-photométriques si particulières de P Cyg sur des échelles de temps plus courtes, i.e. < 100ans.

I.3 Variabilité spectro-photométrique à plus “court terme”

La variabilité photométrique de P Cyg s’exprime sur au moins trois échelles de temps et de luminosité. La variabilité spectrale de P Cyg en H α a été exhibée sur deux échelles de temps. Comme expliqué précédemment, la variabilité spectro-photométrique de P Cyg est différente des autres VBL. La variabilité photométrique de P Cyg et la variation spectrale en H α sont corrélées sur au moins une échelle de temps [351, 352]. Les mécanismes d’instabilités dynamiques de l’enveloppe de vent, ou de l’étoile elle même, à l’origine de ces variabilités spectro-photométriques ne font pas encore consensus [353].

TABLE D.1 – Trois échelles de variabilités photométriques reconnues sur P Cyg. La première colonne donne l’échelle de temps caractéristique, la deuxième donne la variation en magnitude (bande UBV), la troisième indique si la variabilité est corrélée ou non avec la variabilité spectrale, enfin la quatrième colonne donne l’origine de la variabilité (quand elle est connue).

photométrique	Δt	Δm_{vis}	(photo, spectro)	origine
<i>micro-variabilité</i>	17,3 jours	0,1	?	?
<i>macro-variabilité</i>	$60 \leq 100 \leq 130$ jours	0,2	-1	éjection de blobs de matière?
<i>variabilité de type S Doradus</i>	7,4 ans	0,1	+1	éjection de matière accentuée

La variabilité photométrique de P Cyg dans les bandes UBV, a été caractérisée par [351] sur une période de 13,8 ans de 1985 à 1999. Les résultats dévoilent une variation de la magnitude de P Cyg de 0,1 mag dans les bandes photométriques UBV avec une pseudo-période de 7,4 ans. Ce phénomène semble être une phase récurrente [351]. Cette observation suggère que P Cyg ait un comportement similaire aux étoiles variables de type S Doradus faiblement actives [354]. Cette variabilité photométrique de faible magnitude et sur le long terme, typique des étoiles variables S Doradus, est aussi soulignée dans [353]. Deux variabilités photométriques sur des pseudo-périodes beaucoup plus courtes ont également été observées par exemple dans [355], et dans [353]. La première est qualifiée de *micro-variabilité de type P-Cygni*, de pseudo-période estimée à 17,3 jours et stable sur 6,5 ans, elle engendre une variation de magnitude de 0,1 [353]. La cause n’est pas encore identifiée [353]. La deuxième variabilité photométrique s’étale sur une pseudo-période moyenne de 100 jours, elle engendre des variations de magnitude de l’ordre de 0,2, elle n’est pas stable (pseudo-période de valeurs comprises entre 60 et 130 jours) [353]. Cette variabilité photométrique serait corrélée à l’apparition de zones d’absorption dans les spectres

mesurés par le satellite IUE (*International Ultraviolet Explorer*) dues à des éjections de matières récurrentes [356]. Dans ce qui suit et dans la table D.1 cette variabilité est qualifiée de *macro-variabilité*.

Quasi-simultanément aux observations photométriques, une série de mesures du spectre autour de la raie d'émission $H\alpha$ a été effectuée sur une durée de 4 ans de 1990 à 1994 [352]. La série de mesure révèle une variabilité de la largeur de raie $H\alpha$ d'environ 30\AA sur le long terme ($\geq 1,64$ ans) [352, 351] en accord avec les résultats obtenus dans [349, 342]. Cette variabilité spectrale est corrélée avec la variabilité photométrique dans la bande V, (variabilité "long terme", de type variable S Doradus) [351]. Cette constatation suggèrerait que l'augmentation de la luminosité de P Cyg, durant sa phase de variation typique des étoiles de type S Doradus, soit accompagnée d'une augmentation du taux d'éjection de matière depuis le noyau [351]. Sur le court terme une variation du profil de raie $H\alpha$ existerait également : une variation comprise entre 5 et 10\AA sur une pseudo-période de 40 à 60 jours a été observée [352]. Cette *micro-variabilité spectrale* n'est pas clairement reliée à la micro-variabilité photométrique de pseudo période 17,3 jours. Elle a par contre été mesurée comme étant anti-corrélée à la macro-variabilité photométrique [352]. Cette observation impliquerait que ce soit un changement dans le continuum rayonné par l'étoile elle même qui provoque une variabilité spectrale en $H\alpha$ [352]. Si la micro-variabilité photométrique peut s'expliquer par des éjections de matière récurrente, la micro-variabilité spectrale peine à trouver une explication qui fasse l'unanimité. Dans les faits, elle a tendance à apparaître de manière récurrente après une durée comprise entre 3 et 4 mois [352], ceci a laissé penser [354] à un mécanisme d'oscillation de relaxation de l'opacité basé sur [357, 358, 359], mais cette instabilité, avec la température de P Cyg, donnerait une micro-variabilité spectrale avec une échelle de temps beaucoup plus courte (~ 1 jour) [353]. Les micro-variabilités spectrale et photométrique pourraient aussi être engendrées par des oscillations gravitationnelles internes à l'étoile [360]. Pour les étoiles de type O (plus chaudes que P Cyg), cette variation du profil de raie $H\alpha$, corrélée avec une variabilité photométrique, pour un système étoile - enveloppe de vent stellaire est causée par une variation du taux d'éjection de masse depuis le noyau [361, 362]. Ce serait aussi le cas pour les variables B super-géantes [363]. Il n'est pas certain que cela puisse s'appliquer à P Cyg, mais c'est un scénario considéré [351]. Les figures D.3 et D.5 présentent la mesure du spectre autour de $\lambda_{H\alpha}$ avec 21 ans d'écart. Cela donne un exemple concret de la variabilité spectrale en $H\alpha$ sur le "long terme". En 2018, l'intensité de la raie a augmenté de 40% de la valeur de 1997 : elle vaut cette fois 21 fois le continuum.

TABLE D.2 – Deux échelles de variabilités spectrales en $H\alpha$ reconnues sur P Cyg. La première colonne donne l'échelle de temps caractéristique, la deuxième donne la variation de la largeur caractéristique $\sigma_{H\alpha}$ du profil de raie $H\alpha$, la troisième indique si la variabilité est corrélée ou non avec la variabilité photométrique, enfin la quatrième colonne donne une cause possible de la variabilité.

spectrale $H\alpha$	Δt	$\Delta\sigma_{H\alpha}$	\langle photo, spectro \rangle	origine
<i>micro-variabilité</i>	40-60 jours	$5\text{-}6\text{\AA}$	+1 (S Doradus)	oscillation de relaxation ? oscillation gravitationnelles internes ?
<i>variabilité long terme</i>	$\geq 1,64$ an	30\AA	-1 (macro-var.) ? (micro-var.)	éjection de blobs de matière ?

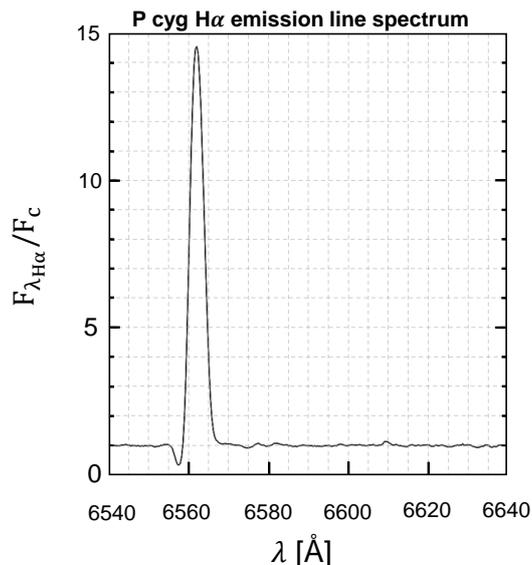


FIGURE D.3 – Spectre de P Cyg dans l’intervalle de longueur d’onde autour de $\lambda_{H\alpha}$ mesuré en 1997 voir [350] pour plus de détails. Ce spectre est à comparer avec la mesure 21 ans plus tard figure D.5.

II. Quelques éléments sur l’origine de la raie $H\alpha$

P Cyg éjecte de la matière à partir de son noyau. Cette éjection de matière prend la forme d’une enveloppe de vent avec une vitesse terminale, notée v_∞ ci-après, de quelques centaines de km.s^{-1} , mesurée pour la première fois par [364] à une valeur de 185km.s^{-1} . Cette enveloppe, de densité non-homogène dans l’espace à cause de l’éjection de matière, est constituée de plusieurs éléments chimiques, voir table 1 dans [333] : Hydrogène, Hélium, Carbone, Azote, Oxygène, Magnésium, Aluminium, Silicium, Soufre, Nickel, Calcium, Fer. Le continuum d’énergie rayonné par le noyau ionise en partie, et jusqu’à une certaine distance (correspondant à une certaine vitesse), ces éléments chimiques. Le fait que la zone de matière ionisée soit de taille finie, est dû à la compétition entre la photo-ionisation et la recombinaison.

II.1 Sur la modélisation de l’enveloppe de vent

Cette enveloppe de vent est dans une bonne approximation sphérique, voir la discussion du premier paragraphe de la sous-section I. La modélisation de la formation de raies spectrales dans cette enveloppe de vent est un problème de transfert radiatif. Elle repose sur les travaux précurseurs de [365, 366, 367, 368, 369, 370] qui utilisaient une description à symétrie sphérique idéalisée :

- l’étoile est un corps noir
- la vitesse dépend de la distance radiale en loi de puissance d’exposant β
- le vent est isotherme à la même température que la photosphère de l’étoile
- le taux d’éjection de matière, noté \dot{M} ci-après, est constant
- le vent est totalement ionisé
- il y a quasi-équilibre thermodynamique localement (loi de Kirchhoff valable)
- l’opacité associée à la radiation $H\alpha$ est beaucoup plus grande que celle associée au reste du continuum, en conséquence de quoi le transfert radiatif de ces deux composantes du rayonnement est découplé

- le transfert radiatif de la radiation $H\alpha$ se traite avec l'approximation de Sobolev (si la taille typique des variations des grandeurs macroscopiques [comme la densité] est très grande devant la longueur typique de l'agitation thermique, et si la vitesse du vent est très petite devant la vitesse de la lumière, le problème de transfert radiatif se ramène à un problème local : en un point du vent ionisé une unique fréquence est émise)

Plus récemment, une modélisation du transfert radiatif adaptée aux situations de non-équilibre thermodynamique local dans les enveloppes de vent (tentative qui avait déjà été commencée auparavant, voir par exemple [371]), et non restreinte par l'approximation de Sobolev, s'est développée [372]. Elle repose toujours sur une description à symétrie sphérique. Elle permet d'inclure des phénomènes physiques jusqu'alors ignorés comme la dissolution des niveaux d'énergie, la diffusion d'électrons avec une redistribution de leur température, l'influence de résonances dans les sections efficaces de photo-ionisation, l'ionisation Auger par rayon X, et l'obscurcissement ("line-blanketing" en anglais) du spectre par la présence de plusieurs raies d'absorption trop faibles et trop rapprochées pour être résolues individuellement. (L'énergie absorbée doit être réémise, lorsque cela se fait à des énergies plus faibles la partie rouge ou infrarouge du spectre apparaîtra plus intense relativement à la partie violette ou UV du spectre). Ce code CMFGEN permet de reproduire fidèlement le profil de raie P Cyg observé [373, 374].

Le profil de densité de la matière éjectée (toutes espèces chimiques confondues) est donné figure D.4, à côté du profil de vitesse du vent.

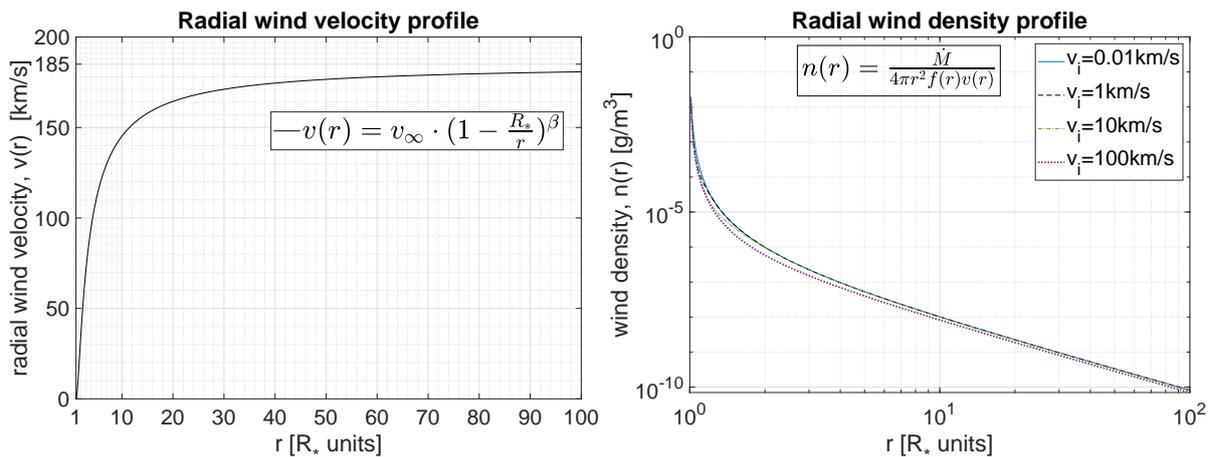
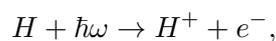


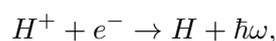
FIGURE D.4 – À gauche : Profil radial de la vitesse du vent. Les paramètres du modèle CMFGEN sont déduits du spectre observé figure D.5 : $\beta = 2,3$; $R_* = 75R_\odot$; $v_\infty = 185\text{km.s}^{-1}$ [147]. À droite le profil radial de la densité (toutes espèces chimiques confondues) déduit de l'équation de continuité impliquant \dot{M} et $v(r)$. Le facteur correctif $f(r) = f_\infty + (1 - f_\infty) \exp(-v(r)/v_i)$ permet de considérer une agglomération de matière à une distance donnée (correspondant à une vitesse v_i) près de l'étoile. Le paramètre $f_\infty = 0,5$ [147] a été déduit du modèle CMFGEN.

II.2 Sur le mécanisme de radiation $H\alpha$

Le mécanisme de création de radiation $H\alpha$ est rappelé sommairement ci-après. L'hydrogène est ionisée par photo-ionisation selon la réaction



où le quanta d'énergie radiative $\hbar\omega$ est supérieur à l'énergie d'ionisation de l'hydrogène $E_0 \simeq 13,6\text{eV}$. Ce qui correspond à des longueurs d'ondes inférieures à la limite de Lyman $\lambda < \lambda_{\text{Ly}} \simeq 91,2\text{nm}$. La réaction inverse de recombinaison



crée les cascades vers l'état fondamental, dans lesquelles la transition responsable de l'émission $H\alpha$ apparaît avec une probabilité non-négligeable. Elle a lieu entre le niveaux d'énergie de nombre quantique $n = 3$ vers celui de nombre quantique $n = 2$.

II.3 Sur la formation de la raie d'émission $H\alpha$

Le profil de la raie d'émission $H\alpha$ peut s'expliquer qualitativement sans entrer dans la complexité des calculs de transfert radiatif. Il faut d'abord remarquer que le profil de la raie d'émission en $H\alpha$ possède une zone d'absorption sur le flan du profil de raie d'émission, dans sa partie *bleue* (i.e. : vers les longueurs d'ondes plus courtes par rapport à la longueur d'onde $H\alpha$), voir figure D.5. Cette particularité a valu au profil de cette raie une appellation *profil de raie de*

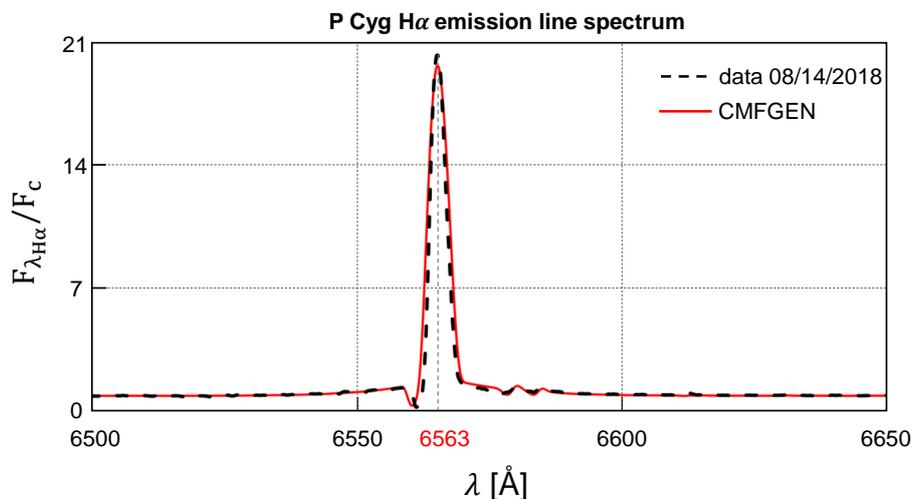


FIGURE D.5 – Comparaison du spectre mesuré le 14 août 2018 par J.Guarro i Flò, avec une résolution de masse $\Delta m/m = 9000$ [201], et du spectre généré par le modèle CMFGEN. A titre de comparaison voir la figure D.3.

type P Cygni. Dans tous les profils de raies dans le visible ce profil est présent [333]. Il peut s'expliquer qualitativement à l'aide de la figure D.6.

Dans toute l'explication qualitative qui suit, l'effet Doppler-Fizeau est considéré de manière non-relativiste, s'appliquant dans le référentiel local d'un observateur supposé inertiel.

La zone *bleue* dans le profil de raie (longueurs d'onde plus petites que 656,3nm) est la résultante de deux contributions.

Premièrement, l'absorption du continuum rayonné par P Cyg dans la zone \mathcal{Z}_3 , potentiellement délimitée par une distance radiale r_{\max} (correspondant à une vitesse de vent v_{\max}), inférieure à r_{∞} (correspondant à la vitesse terminale v_{∞}). Il faut en effet que la densité de matière reste suffisante pour que la probabilité d'absorption soit haute. (Si $r_{\max} < r_{\infty}$, la partie restante de l'enveloppe de vent, de volume négligeable devant \mathcal{Z}_3 , rayonne en direction de l'observateur \mathcal{O} , y compris en $H\alpha$). Cette absorption s'effectue en particulier pour la contribution $H\alpha$ du continuum, déplacée spectralement pour \mathcal{O} à cause de l'effet Doppler-Fizeau engendré par la gamme de vitesses de vent de \mathcal{Z}_3 . Ces vitesses sont comprises entre 0 et $-v_{\max}$, relativement à \mathcal{O} . Le sens du vent est vers \mathcal{O} , le déplacement spectral engendré par l'effet Doppler-Fizeau est vers le *bleu*, relativement à 656,3nm. Cette absorption du continuum, donc en particulier de la longueur d'onde $H\alpha$, a uniquement lieu pour les longueurs d'onde déplacées spectralement (vers le *bleu*) par la gamme de vitesses présente dans cette zone \mathcal{Z}_3 . Le reste du continuum (vers le rouge) est

\mathcal{O} n'en perçoit donc aucune contribution directe. Ce continuum ionise cependant l'hydrogène, et de manière similaire à ce qu'il se passe dans les zones \mathcal{Z}'_2 et \mathcal{Z}_2 . La seule différence est que le vent est cette fois dirigé à l'opposé de \mathcal{O} . Par conséquent, le déplacement en longueur d'onde de l'émission $H\alpha$ s'effectue vers le *rouge* selon la gamme de vitesses présente dans ces zones. Cette contribution $H\alpha$ perçue par \mathcal{O} vers le *rouge*, s'ajoute à la contribution du continuum non absorbée dans \mathcal{Z}_3 qui s'avère être aussi dans le *rouge* relativement à $H\alpha$.

En résultante, la partie *rouge* du profil de raie correspond à une émission $H\alpha$ déplacée par effet Doppler vers le rouge pour \mathcal{O} , superposée au continuum non absorbé par \mathcal{Z}_3 .

Le profil de raie *de type P-Cygni* figure D.5, ou D.3, s'explique ainsi qualitativement.

Annexe E

Photo du montage avec le LAF

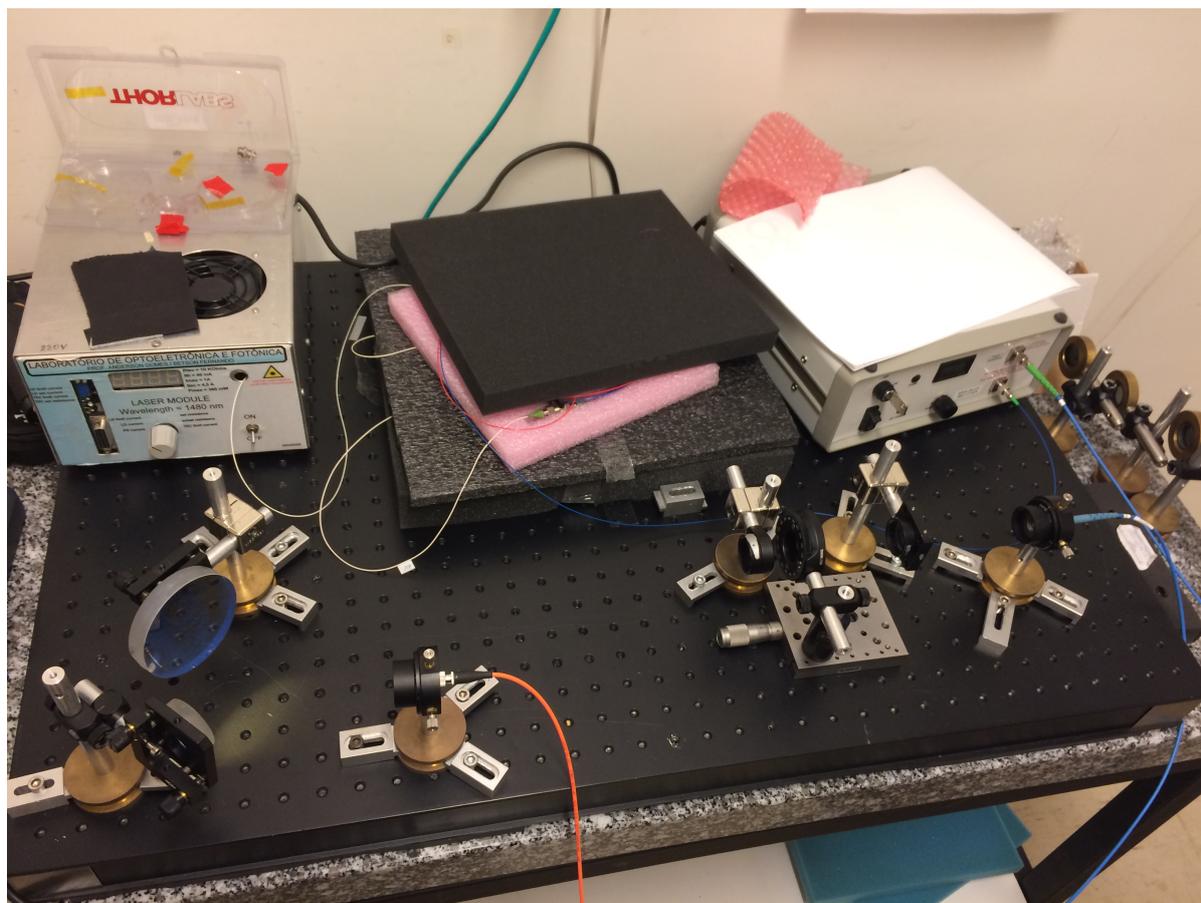


FIGURE E.1 – Photo du montage réalisé pour mesurer $g^{(2)}(\tau)$ avec le laser aléatoire fibré.

Liste des publications

- Siciak A, Orozco L, et al. A comparison of $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, and $g^{(2)}(\tau)$ for radiation from harmonic oscillators in Brownian motion with a coherent background. *Physica Scripta*. 2020 sep ;95(10) :104001.
- Rivet JP, Siciak A, de Almeida ESG, Vakili F, Domiciano de Souza A, Fouché M, et al. Intensity interferometry of P Cygni in the Ha emission line : towards distance calibration of LBV supergiant stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2020 02 ;494(1) :218-217.

Table des figures

1	Résumé synoptique du plan général de la dissertation. Les différentes problématiques P1, P2, et P3, abordées dans chaque partie sont notifiées.	6
2	Comparaison imagée du nombre de photons présents dans une durée égale à la résolution minimale δt_s de la détection, pour une radiation dans le visible et pour une radiation radio, de même intensité.	9
3	Années charnières dans les travaux d’HBT.	10
4	Figure adaptée de [45]. Calcul de la dépendance du RSB de la mesure de $g^{(2)}(0, D_{\text{opt}}(T))$, pour une heure d’observation d’une cible disque circulaire uniforme de longueur d’onde $\lambda_{\text{eff}} = 540$, située au zénith de l’observateur, pour un corrélomètre à deux miroirs circulaires de diamètre optimal $D_{\text{opt}}(T)$ pour chaque température corps noir T , sans fond d’éclairement parasite, avec les paramètres de résolution temporelle donnés dans la section 4 de [45]. La température de 10^5K est cinq fois plus grande que la valeur maximale de la plage de températures représentées. Le “Weigelt blob” B d’Eta Car est décrit figure 6 de l’Introduction.	14
5	Schématisation d’un corrélomètre stellaire opérant en configuration $g^{(2)}(\tau, \rho)$. Les détails sont donnés dans la légende de la figure 4.1.	16
6	Schéma d’un mécanisme de laser astrophysique construit sur l’exemple d’“ η Carinae”. Figure adaptée de [105]. La température de surface T_s de l’étoile η Car est comprise entre 36000K et 41000K [106, 107, 108]. Les parties du milieu interstellaire sont appelées Weigelt “blob” du nom du découvreur [109]. Ici il s’agit du Weigelt “blob” B, sphère d’un rayon estimé à 10^{17}m [110]. La température de surface du blob, est comprise entre 12000K et 18000K [105, 111], pour des densités variant de 10^{13} à 10^{16} particules par m^{-3} [111]. La dispersion moyenne des vitesses dans ce milieu interstellaire est de l’ordre de 10kms^{-1} [111]. La distance d_{s-im} est évaluée à $10^{18,3}\text{m}$ [112]. L’énergie radiative d’ η Car provoque une transition Lyman- α des atomes d’hydrogène du milieu neutre [105]. Cette radiation Lyman- α , d’une part ionise les atomes de Fer pour créer des ions Fer II, et d’autre part s’élargit suffisamment en fréquence, après une certaine distance de propagation dans le milieu d’hydrogène et d’ions Fer II, pour pouvoir amener ces ions Fe II dans leur état excité sp^4G^0 [105]. Ce mécanisme se répète et l’inversion de population est maintenue, une transition laser apparaît alors à 999,7nm [105].	18
7	Schématisation de quelques processus de radiation, et de l’impossibilité qu’a l’observateur de les distinguer par la seule donnée du spectre (dont $g^{(1)}$ est la transformée de Fourier). Figure adaptée de [119].	20
8	Graphe de $g^{(1)}(0, \rho)$ pour plusieurs profils d’intensité de type assombrissement centre-bord. Le comportement des différents degré de cohérence diffère significativement pour $\rho > \rho_c$	23
9	Schémas de principe d’un laser conventionnel (à gauche) et d’un laser aléatoire (à droite). Figure adaptée de [148].	26

10 Un principe de mesure de $g^{(1)}(\tau)$ dans le domaine visible, à l'aide d'un interféromètre de Michelson de miroirs M1 et M2. "BS" signifie "beam splitter". La translation ΔL du miroir permet de scanner $\tau = 2\Delta L/c$, où c est la vitesse de propagation de la radiation. 31

11 Un exemple d'espace des phases $(\hat{q}, \hat{p}) \equiv (q, p)$, aussi appelé diagramme phaseur à la pulsation centrale du champ, pour un champ non-comprimé et un champ comprimé. La dispersion dans l'espace des phases est uniforme pour le champ non-comprimé. 33

12 Un principe de mesure de $g^{(3/2)}(\tau)$ dans le domaine visible. Il est supposé que $\langle A(t) \rangle = 0$. La moyenne non nulle est créée via une radiation cohérente d'amplitude complexe $E_\beta \exp(i\phi)$ qui se superpose à \mathcal{E} en BS₁. BS₂ envoie une partie de l'intensité, avec une probabilité η , de la radiation vers un détecteur homodyne équilibré où \mathcal{E}_{lo} s'y superpose. Le photo-courant résultant $i_h(t)$ est proportionnel à l'intensité de la ϕ -quadrature du champ si $\theta = \phi$. BS₂ envoie l'autre partie de l'intensité, avec une probabilité $1 - \eta$, vers un détecteur dont le photo-courant $i_t(t)$ déclenche le corrélateur. Le courant $i_h(t)$ est acquis seulement s'il y a une fluctuation dans $i_t(t)$ 34

13 Un principe de corrélogramme d'intensité dans le domaine visible. "BS" signifie "beam splitter", son ratio en intensité est " $\eta/1 - \eta$ ". La fonction $g^{(2)}(\tau)$ est proportionnelle à la corrélation des photo-courants i_1 et i_2 35

14 Résumé synoptique des liens entre les chapitres de cette partie I, et de ses liens avec les autres parties de la dissertation. 40

1.1 Schématisation du principe de modélisation de la vitesse du mouvement brownien. V_α représente une composante du vecteur vitesse relative à l'observateur, et les (τ_i) représentent les temps d'attente entre deux collisions successives. Le modèle a) permet de décrire la distribution des temps d'attente entre chaque collisions, les changements de vitesse, et l'amortissement durant τ_i . Le modèle b) permet de décrire la distribution des temps d'attentes entre chaque collisions, les changements de vitesse, et suppose que V_α n'a pas le temps d'être amortie durant les τ_i . Avec b), V_α constitue un *Processus Markovien à Saut avec un Continuum d'Etat* (PMSCE), voir sous-partie II.2. 44

1.2 Résumé des notions essentielles à ce chapitre détaillées dans l'annexe A. 45

1.3 Modèle cinétique des cubes durs. Les particules sont en mouvement par rapport à l'observateur \mathcal{O} . Les variations de vitesses, notées $\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z$, ne sont engendrées que selon l'axe de la collision, à savoir \vec{e}_x , ou \vec{e}_y , ou \vec{e}_z 46

1.4 Définition du cylindre de collision d'axe \vec{e}_α de longueur $d\ell$ et de volume $(\varrho + \varrho_0)^2 \cdot d\ell$. 49

1.5 Exemple de résultat de la génération Monte-Carlo de la loi exponentielle (1.15) de W par la méthode de l'inverse, pour 100000 tirages. Les paramètres microphysiques sont précisés en figure 1.6. 51

1.6 Graphe de $P_{j|W}$ pour plusieurs valeurs de v_α . Les paramètres microphysiques sont tels que : $\mu = 10^{-3}$, $m_0 = 60,23 \cdot 10^{-27}$ kg (gaz d'Argon 36), $\varrho = 100\varrho_0$, et $\varrho_0 = 0,3$ nm. La température et la pression sont standards : $T = 300$ K, et $P = 1,013$ bar. Le comportement est consistant avec la relaxation vers l'équilibre canonique : lorsque $v_\alpha > \langle V_\alpha \rangle = 0$, le saut en vitesse a une plus grande probabilité d'avoir une valeur ramenant V_α vers 0. Lorsque $v_\alpha = 0$, les incréments positifs sont équiprobables aux incréments négatifs, assurant le maintien en moyenne autour de 0. 52

1.7 Majoration de $\Psi(j|v_\alpha)$ par la fonction $\beta(j|v_\alpha)$ donnée par (1.22) pour différentes valeurs de v_α . Les paramètres microphysiques sont identiques à ceux de la figure 1.6. 53

1.8	Exemple de résultat de la génération Monte-Carlo pour 100000 tirages de J par la méthode du rejet avec (1.22). Les paramètres microphysiques sont les mêmes que ceux de la figure 1.6.	54
1.9	Simulations d'une composante V_α sur plusieurs échelles de temps. "HO" est l'acronyme pour "Harmonic Oscillator", oscillateur harmonique, en anglais.	59
1.10	Exemple de trajectoire brownienne de $\mathcal{P}(m)$ (appelée "Harmonic Oscillator" dans le titre) à l'échelle microscopique. Les sauts sont visibles.	62
1.11	Exemple de trajectoire brownienne de $\mathcal{P}(m)$ à l'échelle macroscopique.	63
1.12	Relaxation vers l'équilibre canonique pour la première composante de \vec{V} . La vitesse initiale vaut un peu plus que 4 fois σ_v , et ainsi (1.42) est valide dans le régime transitoire. L'évolution attendue pour $\langle V_\alpha \rangle$ est donnée par (1.34) avec γ donné par (1.62).	64
1.13	Relaxation vers l'équilibre canonique pour la première composante de \vec{V} . La vitesse initiale vaut ici un peu plus de 136 fois σ_v . Dans le régime transitoire l'hypothèse (1.42) n'est pas valide avec une telle vitesse initiale, et donc l'expression obtenue (1.62) pour γ est une approximation discutable ; c'est pourquoi la simulation ne reproduit pas parfaitement l'évolution (1.34).	64
1.14	Comportement à l'échelle cinétique.	65
1.15	Contour de l'histogramme du module de \vec{V} , pour plus d'un million d'échantillons Monte-Carlo.	65
2.1	Modélisation de la situation physique envisagée. Le modèle des cubes durs analysé au chapitre précédent est utilisé pour modéliser le transport des particules $(\mathcal{P}(m))_\ell$. L'observateur \mathcal{O} reçoit le champ provenant des deux zones représentées.	70
2.2	Milieu interstellaire Weigelt blob B dans le voisinage (à $10^{18,3}\text{m}$ [112]) d' η Car. C'est en bonne approximation une sphère de rayon estimé à 10^{17}m [110]. La température de surface du blob, est comprise entre 12000K et 18000K [105, 111], pour des densités variant de 10^{13} à 10^{16} particules par m^{-3} [111]. La dispersion moyenne des vitesses dans ce milieu interstellaire est de l'ordre de 10kms^{-1} [111].	71
2.3	Principe de l'expérience menée dans [61], correspondant à la situation étudiée ici théoriquement.	73
2.4	Sauts de phases dans un seul oscillateur brownien. Les dates de sauts de phase correspondent aux dates de saut de vitesse. Exemple tiré de la simulation Monte-Carlo détaillée en IV.. L'appellation "HO" est utilisée pour "Harmonic Oscillator" qui désigne une particule $\mathcal{P}(m)$ par abus de langage.	74
2.5	40002 réalisations Monte-Carlo des quadratures $\Re\{A_{\text{Ri}}(t)\}$ et $\Im\{A_{\text{Ri}}(t)\}$ résultantes de la simulation Monte-Carlo IV.. L'ellipse de la corrélation ϵ_1 (qui contient théoriquement $\approx 39,4\%$ de la probabilité totale) et l'ellipse d'égale densité ϵ_2 d'ordre 2 (qui contient théoriquement $\approx 86,5\%$ de la probabilité totale) y sont représentées.	76
2.6	Effets des sauts de phase dus aux collisions élastiques dans un oscillateur brownien. L'appellation "HO" est utilisée pour "Harmonic Oscillator" qui désigne une particule $\mathcal{P}(m)$ par abus de langage.	82
2.7	Contour de l'histogramme des $\omega_\ell(t)$ superposée à la densité théorique \mathcal{P}_Ω attendue. La simulation Monte-Carlo comporte 1 162 170 réalisations. La pulsation centrale ω_0 est fixée arbitrairement (tirage au sort) à $6900 + 11,92731\text{GHz}$	84
2.8	Intensité à l'échelle cinétique (ns) de \mathcal{E}_{Ri} pour $\sigma_v\tau_c \gg \lambda_0$ (à gauche) et pour $\sigma_v\tau_c \ll \lambda_0$ (à droite). La pulsation $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ est 10^6 fois plus importante pour le cas de gauche.	84
2.9	Fonction de corrélation $g^{(1)}(\tau)$ pour $\sigma_v\tau_c \gg \lambda_0$ (en haut) et $\sigma_v\tau_c \ll \lambda_0$ (en bas), pour un champ ricien avec $s = 1$. Le nombre de réalisations Monte-Carlo est d'un peu plus d'un million, l'accord entre la théorie et la simulation est parfait.	87

2.10 Fonction de corrélation $g^{(3/2)}(\tau)$ pour $\sigma_v\tau_c \gg \lambda_0$ (en haut) et $\sigma_v\tau_c \ll \lambda_0$ (en bas), pour un champ ricien avec $s = 1$. Le nombre de réalisations Monte-Carlo est d'un peu plus d'un million, l'accord entre la théorie et la simulation est parfait. 88

2.11 Fonction de corrélation $g^{(2)}(\tau)$ pour $\sigma_v\tau_c \gg \lambda_0$ (en haut) et $\sigma_v\tau_c \ll \lambda_0$ (en bas), pour un champ ricien avec $s = 1$. Le nombre de réalisations Monte-Carlo est d'un peu plus d'un million, l'accord entre la théorie et la simulation est parfait. 89

3.1 Tension en sortie du module photo-compteur (SPCM-ARQH fabriqué par Excelitas, voir annexe C) utilisé dans [100, 101, 147]. Cette tension est proportionnelle à la réponse impulsionnelle h de la photo-détection. 93

3.2 Rappel de la figure 10 de l'Introduction. 98

3.3 Rappel du principe de mesure considéré pour $g^{(3/2)}$, voir légende de la figure 12. Cas où la radiation incidente n'est pas ricienne naturellement. 100

3.4 Rappel de la figure 13. 101

3.5 Principe de mesure de $\langle i_1(t)i_2(t + \tau) \rangle$ par conditionnement, valide si $\nu_1 \ll f_i$. A chaque $i_{1,k}$, $k = 0, 1, \dots, n_s$, non nul, quitte à placer un seuil, une acquisition de i_2 est lancée pour une durée de $N.\tau_{\text{cor,h}}$. L'échantillonnage s'opère avec une résolution Δt_{sam} . Soit l'intégrale de i_2 sur la durée infinitésimale Δt_{sam} donne une valeur $i_2(\tau_\ell)$. Soit un histogramme, de résolution Δt_{sam} , est construit. Dès qu'il y a une valeur de i_2 non nulle dans un τ_ℓ , quitte à mettre un seuil, la barre τ_ℓ de l'histogramme est incrémentée de 1. 107

3.6 Graphe du rapport du RSB en $\tau = 0$ de la mesure de $g^{(3/2)}$ sur celui de la mesure de $g_{\text{Ri}}^{(2)}$, pour estimation continue de la corrélation, et lorsque la résolution temporelle de h limite la mesure, i.e. $\sigma_h \sim f_i^{-1} \gg \sigma_\tau \sim \sqrt{\tau_c^2 + \sigma_\omega^{-2}}$ 111

3.7 Graphe du rapport du RSB en $\tau = 0$ de la mesure de $g_a^{(3/2)}$ sur celui de la mesure de $g_{\text{Ra}}^{(2)}$, pour estimation continue de la corrélation, et lorsque la résolution temporelle de h limite la mesure $\sigma_h \gg \sigma_\tau$, lorsque $\sigma_h \sim \sigma_\tau$, et lorsque h ne limite pas la mesure $\sigma_h \ll \sigma_\tau$. Le curseur en pointillé indique un paramétrage de ν_β dix fois plus grand que ν_0 113

3.8 Graphe du rapport du RSB en $\tau = 0$ de la mesure de $g_{\text{Ri,a}}^{(2)}$ sur celui de la mesure de $g_{\text{Ra}}^{(2)}$, pour estimation continue de la corrélation, lorsque la résolution temporelle de h limite la mesure $\sigma_h \gg \sigma_\tau$, lorsque $\sigma_h \sim \sigma_\tau$, et lorsque h ne limite pas la mesure $\sigma_h \ll \sigma_\tau$. Le curseur en pointillé indique un paramétrage de ν_β dix fois plus grand que ν_0 113

4.1 Schéma de principe du corrélomètre stellaire, permettant une mesure de $g^{(2)}(\tau)$. 121

4.2 Schéma du montage télescope artificiel-module optique réalisé et réglé en laboratoire. La partie du montage concernant la caméra de guidage, voir la figure 4.3, n'est pas représentée ici afin de ne pas alourdir le schéma. 122

4.3 Vue éclatée du module optique couplé au télescope, courtoisie de Jean-Pierre Rivet. 123

4.4 Réponse impulsionnelle globale R_δ , divisée par sa valeur en zéro $1/\sigma(\nu)\sqrt{2\pi}$ (pour des raisons de présentation), mesurée pour différentes densités de photo-événements ν , de 0,99Mcps à 17,5Mcps, autour de la date qui correspond physiquement à un délai nul. La réponse R_δ idéale est représentée par la flèche rouge (distribution de Dirac). Les trois courbes avec les largeurs les plus grandes, qui se distinguent clairement, correspondent à des $\nu \geq 8\text{Mcps}$, pour lesquels R_δ est un profil de Voigt avec une composante lorentzienne de faible largeur devant la largeur de la composante gaussienne. 125

- 4.5 Evolution de la largeur à mi-hauteur $2\sigma\sqrt{2\ln(2)}$ de la réponse impulsionnelle avec la densité de photo-événements. Les points en bleu représentent les données expérimentales avec leurs barres d'erreur (résultat de l'écart-type du fit gaussien sur la fonction $g^{(2)}(\tau)$ mesurée). Le modèle déduit par fit (méthode des moindres carrés, algorithme type 'Trust-Region') est une somme de deux exponentielles. Les paramètres sont : $a = 0,9500$; $b = -0,9835$; $c = 1,196$; $d = 0,03633$. Les résultats du fit sont très bons : SSE= 0,0031 ; le modèle est approprié pour la prédiction, R-square= 0,9947 ; le modèle explique 99,5% des variations observées. 126
- 4.6 Exemple de réponse impulsionnelle non normalisée mesurée dans le régime de très basse intensité pour un RSB de 25. Les impulsions de la DLI sont espacées de 100ns (environ 10 fois le temps mort de la détection) et atténuée de sorte que $\nu = 360\text{cps}$ (au moins trois fois le ν obtenu dans le noir total). Le fit gaussien est très bon : SSE de 0,009 et un R-square de 0,992. 127
- 4.7 Écart-type de la réponse impulsionnelle à basse intensité en fonction de ν . L'échelle des abscisses est logarithmique. L'écart-type σ est déduit d'un fit gaussien (avec la même méthode que pour la figure 4.5) sur la fonction $g^{(2)}$ mesurée. 128
- 4.8 Evolution de l'écart-type de R_δ en fonction de l'énergie présente dans les impulsions. L'échelle des abscisses est logarithmique. Pour un ν donné correspondant à plusieurs couples $(n_{pp}, 1/T)$ l'écart-type σ ne change pas, aux barres d'erreur près (non représentées, verticalement : $\pm 40\text{ps}$, horizontalement $\pm 8\%$ de n_{pp}). Exemple. Le ν correspondant à une cadence de 100kHz avec $3,5 \cdot 10^4$ photons par impulsions, correspond aussi à une cadence de 1MHz avec $3,5 \cdot 10^3$ photons par impulsions, et l'écart-type σ est bien le même pour ces deux couples $(n_{pp}, 1/T)$ correspondant à ce ν 129
- 4.9 Evolution de la largeur à mi-hauteur $2\sigma\sqrt{2\ln(2)}$ résultant du fit gaussien de R_δ en fonction des multiples kT pour $\nu = 3.1742\text{Mcps}$. Il n'y a aucune tendance, et l'écart-type de cette série de mesure est de 7ps, inférieur à l'incertitude du fit de R_δ 130
- 4.10 Influence du seuil de comptage d'un photo-événement du convertisseur temps-digital, sur l'écart-type σ , pour ν autour de 4Mcps. Les barres d'erreur verticales indiquent l'incertitude du fit gaussien, les barres d'erreur horizontales indiquent l'écart-type associé à la valeur moyenne ν 131
- 4.11 Influence de la longueur des câbles coaxiaux sur σ pour ν autour de 3Mcps. Les barres d'erreur verticales indiquent l'incertitude du fit gaussien, les barres d'erreur horizontales indiquent l'écart-type associé à la valeur moyenne ν 131
- 4.12 Le graphe donne la convolution (4.7) pour quelques valeurs $\epsilon_1, \epsilon_2 \geq 1$, avec $\tau_c = \sigma_\omega^{-1}$. La définition choisie pour la constante τ_{cor} est donnée par (4.21), c'est la largeur à mi-hauteur de $g^{(1)}(\tau)$ pour le champ considéré. 133
- 4.13 Le graphe donne la valeur en $\tau = 0$ (4.14) moins un, qui est appelé le *contraste*, pour $\epsilon_1 \in [0.01, 100]$, et pour différents ϵ_2 (relativement à ϵ_1). Les échelles des abscisses et des ordonnées sont logarithmiques. 134
- 4.14 Le graphe donne la convolution (4.7) pour quelques valeurs $\epsilon_1, \epsilon_2 \ll 1$, avec $\tau_c = \sigma_\omega^{-1}$. La définition choisie pour la constante τ_{cor} est défini par (4.21) comme la largeur à mi-hauteur de $g^{(1)}(\tau)$ pour le champ considéré. Une constante de temps plus pertinente, dans ce cas où (4.16) est une bonne approximation, est σ 135
- 4.15 Données expérimentales de la mesure 1, fittées par (4.16). 138
- 4.16 A gauche, superposition du spectre mesuré par J.Guarro i Flò [201] et du spectre du filtre de largeur 1nm (donnée du constructeur Alluxa). A droite, spectre résultant (après filtrage). Le fit gaussien est bon (R-square de 86%, SSE de $5 \cdot 10^{-6}$). 140

4.17 Résultat de la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sur la raie $H\alpha$ de P Cyg, après 14,5 heures d’acquisition. A gauche résultats brut de $g^{(2)} * R_\delta[\tau]$ (courbe rouge) superposés à une acquisition (courbe noire) au même flux avec une radiation au temps de cohérence non résolu par le corrélogramme. Cette acquisition (courbe noire) permet de corriger la mesure des corrélations parasites, voir la figure de droite sur laquelle le fit gaussien est réalisé et C_1 est déduit. 141

4.18 Résultat du fit de la courbe de visibilité via (4.36). 143

5.1 Procédé de fabrication des réseaux de Bragg le long de la fibre, avec des périodes spatiales aléatoires. Figure adaptée de [210]. 150

5.2 Un mécanisme d’excitation des modes “lasers” permettant de reproduire le spectre observé, figure adaptée de [211]. La sous-figure a) représente l’amplitude b_m des modes “laser” m (une couleur correspond à un mode) localisés en une position ξ (normalisée à la longueur totale de la cavité de sous-réseaux de Bragg). Un mode laser s’active par effet de seuil, et reste actif durant une durée finie, plus petite que le temps de vie d’un niveau excité du milieu actif (observation expérimentale) [211]. La durée d’activation des modes est représentée en sous-figure b). Un mode “laser” peut être actif simultanément à d’autres modes ou non, et durant son activation son amplitude peut présenter des sauts. 151

5.3 Schématisation des lois de probabilité de l’intensité I d’un laser aléatoire unidimensionnel, figure adaptée de [216]. L’axe des abscisses est la taille L de la cavité (quasi-) unidimensionnelle, l’axe des ordonnées est la longueur de gain l_a qui dépend de l’énergie apportée par la pompe dans le milieu actif. Loin du seuil laser pour un mode donné, l’intensité suit une loi normale \mathcal{N} . Au voisinage du seuil elle suit une loi α -stable de Lévy \mathcal{S}_α d’exposant $1/2 < \alpha \leq 1$ en dessous du seuil, $1 < \alpha < 2$ au dessus du seuil. Le seuil laser dépend du mode [204], c’est pourquoi la figure est rigoureusement pertinente pour un seul mode laser m 152

5.4 Montage expérimental réalisé pour mesurer $g^{(2)}(\tau)$ sur l’intensité émise par le LAF (nommé “System” sur la figure). Le filtre spectral centré sur 780 nm est retiré lorsque le LAF est au-dessus de son seuil. L’analyseur de spectre (mentionné en sous-partie II.2) est toujours utilisé avant doublage. Une photo du montage est donnée en annexe E. 154

5.5 Spectres mesurés pour les différentes sources, avant et après amplification. . . . 156

5.6 Spectres mesurés au dessus du seuil pour différentes valeur du paramètre de pompe (dont l’unité est inconnue). Les premières courbes (en vert) pour lesquelles la raie d’émission a une faible intensité, relativement aux autres valeurs, sont zoomées en figure 5.7. 157

5.7 Spectres mesurés pour différentes valeurs du paramètre de pompe r (dont l’unité est inconnue) juste au dessus (avec le pas de réglage accessible) du seuil du LAF. Ces valeurs de r proches du seuil du LAF par valeurs supérieures, sont sujettes à un phénomène d’hystérésis dont l’origine n’est pas comprise à ce jour, et ont donc un sens uniquement pour cette figure. Le spectre en dessous du seuil est plat, avec une puissance autour -38,3dBm pour la valeur d’amplification utilisée ici. 157

5.8 Spectre mesuré de la raie d’émission du LAF. L’échantillonnage de l’analyseur de spectre optique est de 0,001 nm pour la moyenne de 100 spectres mesurés successivement sur un intervalle de moins de 0,5 nm, et dans une durée de moins de 0,1 s. Les spectres mesurés à deux instants de dates différentes, sont affichés pour rendre compte de la variabilité spectrale de \mathcal{E}_{eff} . L’échantillonnage pour ces deux spectres est de 0,005 nm. 158

- 5.9 Spectre du LAF amplifié, avant doublage en fréquence, mesuré avec l'analyseur de spectre sur la totalité de l'intervalle de longueurs d'ondes accessibles. "RFL" est l'acronyme de *Random Fiber Laser* en anglais, et "OSA" est l'acronyme de *Optical Spectrum Analyser* en anglais. La raie du LAF est visible autour de 1542 nm. Le gain d'amplification paramétré est propre à la mesure présentée sur cette figure. La partie du spectre dans un intervalle de 1 nm autour de $2 \times 780 = 1560$ nm est sans structure fine sous le seuil du LAF. 159
- 5.10 Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sur le LAF en dessous du seuil après amplification, doublage en fréquence, et filtrage spectral par une porte centrée sur 780 nm de largeur 1 nm. L'autre graphe est la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour un laser conventionnel (émettant à 1550 nm) après amplification et doublage en fréquence (et sans filtrage spectral). Ces deux mesures ont été effectuées avec un même ν et une même valeur de gain d'amplification. L'origine du plateau dans la mesure de $g^{(2)}$ sur le LAF au dessus du seuil n'est pas encore comprise. 162
- 5.11 Évolution de C_1 au voisinage du seuil du laser fibré aléatoire. En dessous du seuil (filtre centré à 780 nm de largeur 1 nm présent) $C_1 > 0$ et donc $\ln(1 - C_1) < 0$. Les incertitudes en dessous du seuil sont celles du fit gaussien. Au dessus du seuil (aucun filtre spectral), $C_1 \rightarrow 0$ et donc $\ln(1 - C_1) < 0 \rightarrow 0$. De plus, au dessus du seuil il n'y a plus de structure particulière dans $g^{(2)} * R_\delta$, les incertitudes correspondent au bruit de grenaille, et sont très similaires à celles du fit (à 1% près). Les incertitudes sont ensuite propagées à travers la forme fonctionnelle $\ln(1 - x)$ 165
- 5.12 Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour \mathcal{E}_{rfl} en dessous du seuil du LAF. La zone en pointillés noirs correspond à l'intervalle de délais de la figure 5.10. Les "pics" centrés en -240 ns, -40 ns, et +30 ns sont dus à des réflexions parasites au sein du corrélogramme. . . 166
- 5.13 Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour \mathcal{E}_{rfl} au dessus du seuil du LFA. L'axe des ordonnées est non-normalisé. La zone en pointillés noirs correspond à l'intervalle de délais de la figure 5.10. Il n'y a plus aucune structure dans cette zone au dessus du seuil, voir figure 5.14. L'apparition d'une structure en cloche de largeur de plusieurs centaines de microsecondes est observée. 166
- 5.14 Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour \mathcal{E}_{rfl} au dessus du seuil du LFA. Résultat à comparer directement avec celui de la figure 5.10. 167
- 5.15 Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour \mathcal{E}_{rfl} au voisinage du seuil du LAF, et pour une échelle de temps de l'ordre de la centaine de microsecondes. Le paramètre r est appelé par abus de langage le paramètre de pompe, en réalité c'est une constante qui lui est proportionnelle. La structure fine qui se dessine en haut du lobe central (i.e., centré sur $\tau = 0$) correspond en fait aux pics de corrélations parasites présentés par exemple figure 5.13. 168
- 5.16 Mesure de $g^{(2)}(\tau)$ pour \mathcal{E}_{rfl} bien au dessus du seuil du LFA. Le paramètre r est proportionnel au paramètre de pompe. Les pics de corrélations parasites sont moins visibles que sur la figure 5.15 car l'amplitude du lobe central a plus que doublée. 169
- 5.17 Valeurs de $g^{(2)} * R_\delta[0]$ pour 5 acquisitions indépendantes, de même durée (1minute), réalisées à des dates différentes. Le premier point au dessus du seuil (accessible avec le pas de réglage disponible) est le premier point de mesure affiché. 170

5.18	Évolution de la largeur à mi-hauteur du lob central de $g^{(2)}(\tau)$ pour \mathcal{E}_{eff} au dessus du seuil. Les paramètres du fit sont : $a = 0,04821 \pm 0,0500$, $b = -2,055 \pm 0,444$, $c = 1,231 \pm 0,306$. Le modèle de fit est très bon R-square= 94,7%, malgré des écarts au modèle, localisés, significatifs SSE= 7,4. Le modèle de fit exponentiel a pour paramètres : $d = 26,44$, $e = 16,61$, et $c = 1,533$. Le modèle est moins bon : R-square= 94,2%, et le modèle est moins pertinent pour la prédiction : SSE=8,1.	171
5.19	Évolution du nombre des pseudo-oscillations présentes dans la fenêtre temporelle avec r (comptées uniquement pour $\tau > 0$). Aucune tendance particulière n'est à relever.	171
5.20	Résumé synoptique des étapes de calculs à effectuer. Les étiquettes $(a.i)_i$, $(b.i)_i$, et $(c.i)_i$ constituent les différentes étapes. Elles sont expliquées dans le texte de la sous-partie V.2.	185
5.21	kappa-densité d'une composante u_α du vecteur vitesse \vec{u} , pour une dispersion $\sigma_u = 300\text{m.s}^{-1}$. Le cas $\kappa_0 \rightarrow +\infty$ correspond à la densité normale donnée par l'équilibre thermodynamique canonique de Boltzmann-Gibbs (pour des interactions qui ne dépendent pas de la vitesse et un traitement classique des mouvements de translation).	189
5.22	kappa-densité de la norme de la vitesse, pour une dispersion $\sigma_u = 300\text{m.s}^{-1}$ et trois degré de liberté. Le cas $\kappa_0 \rightarrow +\infty$ correspond à la distribution maxwellienne des vitesses.	190
5.23	Nébuleuse du crabe. Crédits pour l'image rayon-X : NASA/CXC/ASU/J. Hester et al.. Crédits pour l'image optique : NASA/HST/ASU/J. Hester et al.	194
A.1	Résumé des notions essentielles au chapitre 1 détaillées dans cette l'annexe.	198
C.1	Fiche technique du corrélogramme.	210
D.1	Position de P Cygni dans le diagramme d'Hertzprung-Russell (suivant les paramètres trouvés dans [147] : $T_{\text{eff}} = 18700\text{K}$, $L_* = 610000L_\odot$. Généré avec l'application NAAP labs v1.1, https://astro.unl.edu/nativeapps/).	212
D.2	Variabilité de la magnitude m_{vis} de P Cyg basée sur des recherches historiques. Figure reproduite à partir de la figure 1 dans [344].	213
D.3	Spectre de P Cyg dans l'intervalle de longueur d'onde autour de $\lambda_{\text{H}\alpha}$ mesuré en 1997 voir [350] pour plus de détails. Ce spectre est à comparer avec la mesure 21 ans plus tard figure D.5.	216
D.4	A gauche : Profil radial de la vitesse du vent. Les paramètres du modèle CMFGEN sont déduits du spectre observé figure D.5 : $\beta = 2,3$; $R_* = 75R_\odot$; $v_\infty = 185\text{km.s}^{-1}$ [147]. A droite le profil radial de la densité (toutes espèces chimiques confondues) déduit de l'équation de continuité impliquant \dot{M} et $v(r)$. Le facteur correctif $f(r) = f_\infty + (1 - f_\infty) \exp(-v(r)/v_i)$ permet de considérer une agglomération de matière à une distance donnée (correspondant à une vitesse v_i) près de l'étoile. Le paramètre $f_\infty = 0,5$ [147] a été déduit du modèle CMFGEN.	217
D.5	Comparaison du spectre mesuré le 14 août 2018 par J.Guarro i Flò, avec une résolution de masse $\Delta m/m = 9000$ [201], et du spectre généré par le modèle CMFGEN. A titre de comparaison voir la figure D.3.	218
D.6	Schéma du système "étoile - enveloppe de vent stellaire" accepté pour P Cyg.	219
E.1	Photo du montage réalisé pour mesurer $g^{(2)}(\tau)$ avec le laser aléatoire fibré.	222

Liste des tableaux

1	Quelques différences pratiques entre le domaine radio et le domaine visible.	9
2	Modernisation des tests pour les corrélogrammes stellaires en laboratoire.	12
3	Comment différencier une radiation chaotique classique de deux types de radiations non-classiques : une radiation chaotique comprimée, et une radiation cohérente.	21
4	Comparaison de l'interférométrie d'amplitude classique (IAC) et des corrélogrammes stellaires (CS) pour l'imagerie astronomique dans le domaine visible avec des bases kilométriques. L'échelle des contraintes opto-mécaniques est notée $\ell_{\text{opt-mec}}$	24
5	Comparaison des résolutions temporelles, et de l'efficacité quantique, du photomultiplicateur (RCA type 6342A) utilisé par HBT, et de la photo-diode à avalanche ultra-rapide présente dans le module photo-compteur (Excelitas SPCM-ARQH) utilisé dans le corrélogramme développé.	25
6	Comparaison des résolutions temporelles des corrélogrammes stellaires de Narrabi (1968)(d'acronyme CSN), et de Calern (2020) (d'acronyme CSC). Pour le CSC, la valeur σ est précisément déterminée au chapitre 4. Pour le CSN la valeur prise est l'inverse de la bande passante de 60MHz indiquée dans, par exemple, [36] section 12.8.	26
7	Résumé des définitions des fonctions de corrélation et de leurs densités spectrales respectives : le spectre, le spectre de compression, et le spectre d'intensité. Le champ possède une amplitude complexe $A = \langle A \rangle + \delta A$, avec $\langle A \rangle = E_\beta \exp(i\phi)$	36
1.1	Notations, unités, et appellation des paramètres microphysiques.	47
2.1	Expressions des fonctions de corrélations pour un champ Rayleigh (connu) et pour un champ ricien (nouveau). Le facteur s est donné par (2.22).	80
3.1	Expressions des rapports signal sur bruit (RSB) de $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$ dans le cas où $\nu_0 + \nu_\beta \ll f_i$ mesure non limitée par la détection, avec la méthode d'estimation continue	105
3.2	Expressions des rapports signal sur bruit (RSB) de $g^{(3/2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$ dans le cas où $\nu_0 + \nu_\beta \ll f_i$, mesure non limitée par la détection, avec la méthode d'estimation conditionnelle	109
4.1	Résultats pour trois figures de mérite du fit gaussien de $g^{(2)}$. Le fit est réalisé avec la méthode des moindres carrés. Les mesures sont réalisées dans les mêmes conditions expérimentales. A chaque fois le fit est très bon, en moyenne sur les trois mesures : SSE=3.10 ⁻⁶ , R-square : 85%.	137

4.2	Conditions d'observation pour les 4 nuits de mesure de $g^{(2)}(\tau)$ sur la raie H α de P Cyg du 1er au 6 août 2018. "Début" et "Fin" indiquent respectivement la date UTC (Universal Time Coordinate) de début d'observation et la date de fin. Le paramètre a est l'intervalle de masse d'air durant la nuit. La dernière colonne donne le <i>seeing</i> (grandeur exprimant le niveau de dégradation des images astronomiques sous l'effet de la turbulence atmosphérique). Cette quantité, qui s'exprime en secondes d'arc, est mesurée en temps réel sur le site de Calern par l'instrument GDIMM [197, 198] de la station CATS (Calern Atmospheric Turbulence Station)[199]. Les chiffres du <i>seeing</i> sont les médianes sur la durée d'observation.	139
4.3	Conditions d'observation pour les 3 nuits de mesure de $g^{(2)}(\tau, \rho)$ sur la raie H α de P Cyg du 7 au 10 août 2018. Les indications concernant les 4 colonnes du tableau sont identiques à celles données en table 4.2.	141
4.4	Résumé des résultats de la mesure de C_1 pour la configuration $g^{(2)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau, \rho/\lambda_{\text{eff}})$.	143
5.1	Constantes de temps constatées dans la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ au dessus du seuil du LAF.	167
D.1	Trois échelles de variabilités photométriques reconnues sur P Cyg. La première colonne donne l'échelle de temps caractéristique, la deuxième donne la variation en magnitude (bande UBV), la troisième indique si la variabilité est corrélée ou non avec la variabilité spectrale, enfin la quatrième colonne donne l'origine de la variabilité (quand elle est connue).	214
D.2	Deux échelles de variabilités spectrales en H α reconnues sur P Cyg. La première colonne donne l'échelle de temps caractéristique, la deuxième donne la variation de la largeur caractéristique $\sigma_{\text{H}\alpha}$ du profil de raie H α , la troisième indique si la variabilité est corrélée ou non avec la variabilité photométrique, enfin la quatrième colonne donne une cause possible de la variabilité.	215

Bibliographie

- [1] Binet G. Traitement numérique du signal. 1st ed. Paris : Ellipses ; 2013.
- [2] Tisserand E, Pautex JF, Schweitzer P. Analyse et traitement des signaux. 2nd ed. Paris : Dunod ; 2008.
- [3] Max J, Lacoume JL. Méthodes et techniques de traitement du signal. 5th ed. Paris : Dunod ; 2000.
- [4] Rosencher E. Passé, présent, et futur du Radar ; 2020. <https://www.college-de-france.fr/site/mathias-fink/symposium-2009-05-11-10h00.htm>. Page consultée le 2 novembre 2020.
- [5] Kovalev VA, Eichinger WE. Elastic Lidar : Theory, Practice, and Analysis Methods. 1st ed. New Jersey : Wiley ; 2004.
- [6] Diu B, Guthmann C, Lederer D, Roulet B. Physique Statistique. 1st ed. Paris : Hermann ; 2001.
- [7] Nicolis G. Dynamique chimique, thermodynamique, cinétique et mécanique statistique. 1st ed. Paris : Dunod ; 2005.
- [8] Yvon J. La théorie statistique des fluides et l'équation d'état. vol. 203. Hermann & cie ; 1935.
- [9] Balescu R. Statistical Dynamics. London : Imperial College Press (distributed by World Scientific Publishing CO.) ; 1997.
- [10] Prigogine I. Non-equilibrium statistical mechanics. New-York : Interscience, republished by Dover Publications in 2017 ; 1962.
- [11] Rax JM. Mécanique analytique. 1st ed. Paris : Dunod ; 2020.
- [12] Titulaer UM, Glauber RJ. Correlation Functions for Coherent Fields. Phys Rev. 1965 Nov ;140 :B676–B682.
- [13] Titulaer UM, Glauber RJ. Density Operators for Coherent Fields. Phys Rev. 1966 May ;145 :1041–1050.
- [14] Mandel L, Wolf E. Optical Coherence and Quantum Optics. New York : Cambridge University Press ; 1995.
- [15] Glauber RJ. The Quantum Theory of Optical Coherence. Phys Rev. 1963 Jun ;130 :2529–2539.
- [16] Cahill KE, Glauber RJ. Density operators for fermions. Phys Rev A. 1999 Feb ;59 :1538–1555.
- [17] Kiesel H, Renz A, Hasselbach F. Observation of Hanbury Brown–Twiss anticorrelations for free electrons. Nature. 2002 ;418(6896) :392–394.
- [18] Akhmerov AR, Nilsson J, Beenakker CWJ. Electrically Detected Interferometry of Majorana Fermions in a Topological Insulator. Phys Rev Lett. 2009 May ;102 :216404.
- [19] Wiedemann UA, Heinz U. Particle interferometry for relativistic heavy-ion collisions. Physics Reports. 1999 ;319(4-5) :145–230.

- [20] Weiner RM. Introduction to Bose-Einstein Correlations and Subatomic Interferometry. Wiley; 2000.
- [21] Jeltens T, McNamara JM, Hogervorst W, Vassen W, Krachmalnicoff V, Schellekens M, et al. Comparison of the Hanbury Brown–Twiss effect for bosons and fermions. *Nature*. 2007;445(7126) :402–405.
- [22] Bauer W, Gelbke C, Pratt S. Hadronic interferometry in heavy-ion collisions. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*. 1992;42(1) :77–98.
- [23] Sinyukov YM, Lednický R, Akkelin SV, Pluta J, Erazmus B. Coulomb corrections for interferometry analysis of expanding hadron systems. *Physics Letters B*. 1998;432(3) :248 – 257.
- [24] Alexander G. Bose-Einstein and Fermi-Dirac interferometry in particle physics. *Rep Prog Phys*. 2003;66 :481–522.
- [25] Einstein A. Determination of the statistical values of observations concerning quantities subject to irregular fluctuations. *Archives de Sciences Physiques et Naturelles*. 1914;37.
- [26] Wiener N. Generalized harmonic analysis. *Acta mathematica*. 1930;55 :117–258.
- [27] Bochner S. Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Akademische Verlagsgesellschaft; 1932.
- [28] Khintchine A. Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. *Mathematische Annalen*. 1934;109(1) :604–615.
- [29] Doob JL. The Brownian Movement and Stochastic Equations. *Annals of Mathematics*. 1942;43(2) :351–369.
- [30] Doob JL. The Elementary Gaussian Processes. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1944;15(3) :229–282.
- [31] Landau LD, Lifchitz EM. *Physique statistique*. 4th ed. Paris : Mir - Ellipses; 1994.
- [32] Goodman JW. *Statistical optics*. Wiley Classic Library Editions. John Wiley & Sons; 2000.
- [33] Mandel L, Wolf E. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press; 1995.
- [34] Foellmi C. Intensity interferometry and the second-order correlation function in astrophysics. *Astronomy & Astrophysics*. 2009;507(3) :1719–1727.
- [35] Le Bellac M. *Physique quantique-Fondements Tome 2 : Applications et exercices corrigés*. 3rd ed. EDP sciences, CNRS éditions; 2013.
- [36] Hanbury Brown R. *The Intensity Interferometer*. London : Taylor and Francis Ltd.; 1974.
- [37] Hanbury Brown R. *Boffin : A personal story of the early days of radar, radio astronomy and quantum optics*. Bristol : Adam Hilger. 1991;.
- [38] Brown RH, Jennison R, Gupta MD. Apparent angular sizes of discrete radio sources : observations at Jodrell Bank, Manchester. *Nature*. 1952;170(4338) :1061–1063.
- [39] Mills B. Apparent angular sizes of discrete radio sources : Observations at Sydney. *Nature*. 1952;170(4338) :1063–1064.
- [40] Smith F. Apparent angular sizes of discrete radio sources : observations at Cambridge. *Nature*. 1952;170(4338) :1065–1065.
- [41] Brown RH, Twiss RQ. LXXIV. A new type of interferometer for use in radio astronomy. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1954;45(366) :663–682.
- [42] Richard Thompson A, Moran JM, Swenson Jr GW. *Interferometry and synthesis in radio astronomy*. 3rd ed. Springer Nature; 2017.

- [43] Radhakrishnan V. Noise and interferometry. In : Synthesis Imaging in Radio Astronomy II. vol. 180; 1999. p. 671.
- [44] Hanbury Brown R, Twiss RQ. Interferometry of the intensity fluctuations in light - I. Basic theory : the correlation between photons in coherent beams of radiation. Proc R Soc Lond A. 1957;242 :300.
- [45] Brown RH, Twiss RQ, Lovell ACB. Interferometry of the intensity fluctuations in light III. Applications to astronomy. Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences. 1958;248(1253) :199–221.
- [46] Hanbury Brown R, Twiss RQ. Correlation Between Photons in Two Coherent Beams of Light. Nature. 1956;177 :27.
- [47] Hanbury Brown R, Twiss RQ. Interferometry of the Intensity Fluctuations in Light II. An Experimental Test of the Theory for Partially Coherent Light. Proc R Soc Lond A. 1958;243 :291.
- [48] Hanbury Brown R, Twiss RQ. A Test of a New Type of Stellar Interferometer on Sirius. Nature. 1956;178(4541) :1046–1048.
- [49] Brown RH, Twiss R. Interferometry of the intensity fluctuations in light IV. A test of an intensity interferometer on Sirius A. Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences. 1958;248(1253) :222–237.
- [50] Hanbury Brown R, Davis J, Allen LR. The Stellar Interferometer at Narrabri Observatory—I : A Description of The Instrument and the Observational Procedure. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1967 12;137(4) :375–392.
- [51] Hanbury Brown R, Davis J, Allen LR, Rome JM. The Stellar Interferometer at Narrabri Observatory—II : The Angular Diameters of 15 Stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1967 12;137(4) :393–417.
- [52] Hanbury Brown R. Stellar Interferometer at Narrabri Observatory. Nature. 1968;218(5142) :637–641.
- [53] Hanbury Brown R, Davis J, Allen LR. The Angular Diameters of 32 Stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1974 04;167(1) :121–136.
- [54] Siegert A. On the fluctuations in signals returned by many independently moving scatterers. Radiation Laboratory, Massachusetts Institute of Technology. 1943 ;.
- [55] Voigt H, Hess S. Comparison of the intensity correlation function and the intermediate scattering function of fluids : a molecular dynamics study of the Siegert relation. Physica A : Statistical Mechanics and its Applications. 1994;202(1-2) :145–164.
- [56] Mandel L, Wolf E. Correlation in the fluctuating outputs from two square-law detectors illuminated by light of any state of coherence and polarization. Physical Review. 1961;124(6) :1696.
- [57] Glauber RJ. Quantum theory of optical coherence : selected papers and lectures. Weinheim : John Wiley & Sons; 2007.
- [58] Glauber RJ. Photon Correlations. Phys Rev Lett. 1963 Feb;20(3) :84–86.
- [59] Klauder JR, Sudarshan EC. Fundamentals of quantum optics. New York : W.A. Benjamin, Inc. ; 1968.
- [60] Dussaux A, Passerat de Silans T, Guerin W, Alibert O, Tanzilli S, Vakili F, et al. Temporal intensity correlation of light scattered by a hot atomic vapor. Phys Rev A. 2016 Apr;93 :043826.
- [61] Tan PK, Kurtsiefer C. Temporal intensity interferometry for characterization of very narrow spectral lines. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2017 04;469(2) :1617–1621.

- [62] Dravins D, Lagadec T, Nuñez PD. Long-baseline optical intensity interferometry-Laboratory demonstration of diffraction-limited imaging. *Astronomy & Astrophysics*. 2015;580 :A99.
- [63] Nuñez PD, Holmes R, Kieda D, Rou J, LeBohec S. Imaging submilliarcsecond stellar features with intensity interferometry using air Cherenkov telescope arrays. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2012;424(2) :1006–1011.
- [64] Nunez PD, Holmes R, Kieda D, LeBohec S. High angular resolution imaging with stellar intensity interferometry using air Cherenkov telescope arrays. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2012;419(1) :172–183.
- [65] Pilyavsky G, Mauskopf P, Smith N, Schroeder E, Sinclair A, van Belle GT, et al. Single-Photon Intensity Interferometry (SPIIFy) : utilizing available telescopes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2017 02;467(3) :3048–3055.
- [66] Eisaman MD, Fan J, Migdall A, Polyakov SV. Invited review article : Single-photon sources and detectors. *Review of scientific instruments*. 2011 ;82(7) :071101.
- [67] Tan PK, Yeo GH, Poh HS, Chan AH, Kurtsiefer C. Measuring temporal photon bunching in blackbody radiation. *The Astrophysical Journal Letters*. 2014;789(1) :L10.
- [68] Phillips DT, Kleinman H, Davis SP. Intensity-Correlation linewidth measurement. *Phys Rev*. 1967;153 :113–115.
- [69] Goldberger ML, Lewis HW, Watson KM. Intensity-Correlation Spectroscopy. *Phys Rev*. 1966;142 :25 – 32.
- [70] Tan PK, Chan AH, Kurtsiefer C. Optical intensity interferometry through atmospheric turbulence. *MNRAS*. 2016;457(4) :4291.
- [71] Dravins D, Lagadec T. Stellar intensity interferometry over kilometer baselines : Laboratory simulation of observations with the Cherenkov Telescope Array. In : *Optical and Infrared Interferometry IV*. vol. 9146. International Society for Optics and Photonics; 2014. p. 91460Z.
- [72] Acharya B, Actis M, Aghajani T, Agnetta G, Aguilar J, Aharonian F, et al. Introducing the CTA concept. *Astroparticle physics*. 2013;43 :3–18.
- [73] CTA. Cherenkov Telescope Array, Exploring the Universe at the Highest Energies; 2021. <https://www.cta-observatory.org/>. Page consultée le 11 janvier 2021.
- [74] Le Bohec S, Holder J. Optical intensity interferometry with atmospheric Cerenkov telescope arrays. *The Astrophysical Journal*. 2006;649(1) :399.
- [75] LeBohec S, Barbieri C, de Wit WJ, Dravins D, Feautrier P, Foellmi C, et al. Toward a revival of stellar intensity interferometry. In : *Optical and infrared interferometry*. vol. 7013. International Society for Optics and Photonics; 2008. p. 70132E.
- [76] Dravins D, LeBohec S, Jensen H, Nuñez PD, Consortium C, et al. Optical intensity interferometry with the Cherenkov Telescope Array. *Astroparticle Physics*. 2013;43 :331–347.
- [77] Dravins D, LeBohec S, Jensen H, Nuñez PD. Stellar intensity interferometry : Prospects for sub-milliarcsecond optical imaging. *New Astronomy Reviews*. 2012;56(5) :143–167.
- [78] Kieda DB, Anton G, Barbano A, Benbow W, Carlile C, Daniel M, et al. Astro2020 white paper state of the profession : Intensity interferometry. *arXiv preprint arXiv :190713181*. 2019;.
- [79] Trippe S, Kim JY, Lee B, Choi C, Oh J, Lee T, et al. Optical multi-channel intensity interferometry-or : How to resolve O-stars in the Magellanic clouds. *arXiv preprint arXiv :14107432*. 2014;.

- [80] Nunez PD, Domiciano de Souza A. Capabilities of future intensity interferometers for observing fast-rotating stars : imaging with two-and three-telescope correlations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015 ;453(2) :1999–2005.
- [81] Rou J, Nuñez PD, Kieda D, LeBohec S. Monte Carlo simulation of stellar intensity interferometry. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2013 ;430(4) :3187–3195.
- [82] Dravins D, LeBohec S. Toward a diffraction-limited square-kilometer optical telescope : Digital revival of intensity interferometry. In : *Extremely Large Telescopes : Which Wavelengths? Retirement Symposium for Arne Ardeberg*. vol. 6986. International Society for Optics and Photonics ; 2008. p. 698609.
- [83] VERITAS. Very Energetic Radiation Imaging Telescope Array System ; 2021. <https://veritas.sao.arizona.edu/>. Page consultée le 11 mars 2021.
- [84] Nuñez PD. Ph.D. Thesis [Thesis]. The University of Utah. Salt Lake City, USA ; 2012.
- [85] Matthews N, Kieda D, LeBohec S. Development of a digital astronomical intensity interferometer : laboratory results with thermal light. *Journal of Modern Optics*. 2018 ;65(11) :1336–1344.
- [86] Matthews N, Clarke O, Snow S, LeBohec S, Kieda D. Implementation of an intensity interferometry system on the StarBase observatory. In : *Optical and Infrared Interferometry and Imaging VI*. vol. 10701. International Society for Optics and Photonics ; 2018. p. 107010W.
- [87] LeBohec S, Adams B, Bond I, Bradbury S, Dravins D, Jensen H, et al. Stellar intensity interferometry : Experimental steps toward long-baseline observations. In : *Optical and Infrared Interferometry II*. vol. 7734. International Society for Optics and Photonics ; 2010. p. 77341D.
- [88] Rivet JP, Vakili F, Lai O, Vernet D, Fouché M, Guerin W, et al. Optical long baseline intensity interferometry : prospects for stellar physics. *Experimental Astronomy*. 2018 ;46(3) :531–542.
- [89] INAF. Asiago astronomical observatory, Astronomical observatory of Padova ; 2021. <http://www.oapd.inaf.it/index.php/en/asiago-site.html?jjj=1615467655671>. Page consultée le 11 mars 2021.
- [90] Dravins D, Barbieri C, Da Deppo V, Faria D, Fornasier S, Fosbury R, et al. QuantEYE quantum optics instrumentation for astronomy. OWL Instrument Concept Study. ESO document OWL-CSR-ESO-00000-0162. 2005 ;.
- [91] Barbieri C, Dravins D, Occhipinti T, Tamburini F, Naletto G, Da Deppo V, et al. Astronomical applications of quantum optics for extremely large telescopes. *Journal of Modern Optics*. 2007 ;54(2-3) :191–197.
- [92] Barbieri C, Naletto G, Occhipinti T, Tamburini F, Giro E, D'onofrio M, et al. The optomechanical design of AquEYE, an instrument for astrophysics on its shortest timescales at the Asiago Observatory. *Mem SA It Suppl*. 2007 ;11 :190.
- [93] Naletto G, Barbieri C, Occhipinti T, Tamburini F, Billotta S, Cocuzza S, et al. Very fast photon counting photometers for astronomical applications from QuantEYE to AquEYE. In : *Photon Counting Applications, Quantum Optics, and Quantum Cryptography*. vol. 6583. International Society for Optics and Photonics ; 2007. p. 65830B.
- [94] Naletto G, Barbieri C, Occhipinti T, Capraro I, Di Paola A, Facchinetti C, et al. Iqueye, a single photon-counting photometer applied to the ESO new technology telescope. *Astronomy & Astrophysics*. 2009 ;508(1) :531–539.

- [95] Zampieri L, Naletto G, Barbieri C, Verroi E, Barbieri M, Ceribella G, et al. Aqueye+ : a new ultrafast single photon counter for optical high time resolution astrophysics. In : Photon Counting Applications 2015. vol. 9504. International Society for Optics and Photonics ; 2015. p. 95040C.
- [96] Zampieri L, Naletto G, Barbieri C, Barbieri M, Verroi E, Umbriaco G, et al. Intensity interferometry with Aqueye+ and Iqueye in Asiago. In : Optical and Infrared Interferometry and Imaging V. vol. 9907. International Society for Optics and Photonics ; 2016. p. 99070N.
- [97] NOAO. Kitt Peak National Observatory ; 2021. <https://www.noao.edu/kpno/>. Page consultée le 11 mars 2021.
- [98] Lai O, Guerin W, Vakili F, Kaiser R, Rivet JP, Fouché M, et al. Intensity Interferometry revival on the Côte d'Azur. In : Proc. SPIE. vol. 10701 of Optical and Infrared Interferometry and Imaging VI ; 2018. p. 1070121.
- [99] Abe L, Bendjoya P, Rivet JP. OCA - Centre Pédagogique Planète et Univers (C2PU) ;. <https://www.oca.eu/fr/c2pu-accueil>. Page consultée le 11 mars 2021.
- [100] Guerin W, Dussaux A, Fouché M, Labeyrie G, Rivet JP, Vernet D, et al. Temporal intensity interferometry : photon bunching in three bright stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2017 10 ;472(4) :4126–4132.
- [101] Guerin W, Rivet JP, Fouché M, Labeyrie G, Vernet D, Vakili F, et al. Spatial intensity interferometry on three bright stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2018 07 ;480(1) :245–250.
- [102] Letokhov VS. Noncoherent feedback in space masers and stellar lasers. In : Amazing light. Springer ; 1996. p. 409–443.
- [103] Johansson S, Letokhov V. Astrophysical lasers and nonlinear optical effects in space. New Astronomy Reviews. 2007 ;51(5-6) :443–523.
- [104] Letokhov VS, Johansson S. Astrophysical Lasers. Oxford University Press ; 2009.
- [105] Johansson S, Letokhov VS. Laser action in a gas condensation in the vicinity of a hot star. Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. 2002 ;75(10) :495–498.
- [106] Verner E, Bruhweiler F, Gull T. The binarity of η Carinae revealed from photoionization modeling of the spectral variability of the weigelt blobs B and D. The Astrophysical Journal. 2005 ;624(2) :973.
- [107] Teodoro M, Damineli A, Sharp R, Groh JH, Barbosa CL. Near-infrared integral field spectroscopy of the Homunculus nebula around η Carinae using Gemini/cirpass. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2008 ;387(2) :564–576.
- [108] Mehner A, Davidson K, Ferland GJ, Humphreys RM. High-excitation emission lines near Eta Carinae, and its likely companion star. The Astrophysical Journal. 2010 ;710(1) :729.
- [109] Weigelt G, Ebersberger J. Eta Carinae resolved by speckle interferometry. Astronomy and Astrophysics. 1986 ;163 :L5.
- [110] van Boekel R, Kervella P, Schöller M, Herbst T, Brandner W, de Koter A, et al. Direct measurement of the size and shape of the present-day stellar wind of η Carinae. Astronomy & Astrophysics. 2003 ;410(3) :L37–L40.
- [111] Davidson K, Humphreys RM. Eta Carinae and its environment. Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 1997 ;35(1) :1–32.
- [112] Davidson K, Ebbets D, Weigelt G, Humphreys RM, Hajian AR, Walborn NR, et al. HST/FOS spectroscopy of Eta Carinae : the star itself, and ejecta within 0.3 arcsec. The Astronomical Journal. 1995 ;109 :1784–1796.
- [113] Rybicki GB, Lightman AP. Radiative processes in astrophysics. John Wiley & Sons ; 2008.

- [114] McKee CF, Ostriker JP. A theory of the interstellar medium-Three components regulated by supernova explosions in an inhomogeneous substrate. *The Astrophysical Journal*. 1977 ;218 :148–169.
- [115] Belorizky E, Gorecki W. Introduction à la mécanique statistique. La collection Grenoble Sciences. Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble ; 1992.
- [116] Bonnet G. Sur les corrélateurs utilisant la quantification des signaux. École d'été OTAN-Marine nationale, Grenoble. 1964 ;p. 14–26.
- [117] Bonnet G. Corrélateurs hybrides a échantillonnage. In : *Annales des Télécommunications*. vol. 24. Springer ; 1969. p. 252–260.
- [118] van Kampen NG. Stochastic processes in physics and chemistry. 3rd ed. Amsterdam : Elsevier ; 2007.
- [119] Dravins D. Photonic astronomy and quantum optics. In : *High time resolution astrophysics*. Springer ; 2008. p. 95–132.
- [120] Arecchi FT. Measurement of the statistical distribution of Gaussian and laser sources. *Physical Review Letters*. 1965 ;15(24) :912.
- [121] Morgan B, Mandel L. Measurement of photon bunching in a thermal light beam. *Physical Review Letters*. 1966 ;16(22) :1012.
- [122] Arecchi F, Gatti E, Sona A. Time distribution of photons from coherent and Gaussian sources. *Physics Letters*. 1966 ;20(1) :27–29.
- [123] Carmichael H. An open systems approach to quantum optics. Springer ; 1993.
- [124] Davidovich L. Sub-Poisson photon statistics. In : *Quantum fluctuations*. vol. 7 ; 1995. p. 215–266.
- [125] Boas DA, Campbell LE, Yodh AG. Scattering and Imaging with Diffusing Temporal Field Correlations. *Phys Rev Lett*. 1995 Aug ;75 :1855–1858.
- [126] Foster GT, Orozco LA, Castro-Beltran HM, Carmichael HJ. Quantum State Reduction and Conditional Time Evolution of Wave- Particle Correlations in Cavity QED. *Phys Rev Lett*. 2000 ;85 :3149.
- [127] Gerber S, Rotter D, Slodicka L, Eschner J, Carmichael HJ, Blatt R. Intensity-Field Correlation of Single-Atom Resonance Fluorescence. *Phys Rev Lett*. 2009 May ;102 :183601.
- [128] Magde D, Elson E, Webb WW. Thermodynamic Fluctuations in a Reacting System—Measurement by Fluorescence Correlation Spectroscopy. *Phys Rev Lett*. 1972 Sep ;29 :705–708.
- [129] Eloy A, Yao Z, Bachelard R, Guerin W, Fouché M, Kaiser R. Diffusing-wave spectroscopy of cold atoms in ballistic motion. *Phys Rev A*. 2018 Jan ;97 :013810.
- [130] Lavrinovich NN, Letokhov VS. Detection of narrow "laser" lines masked by spatially inhomogeneous broadening in radiation emitted from stellar atmospheres. *Soviet Journal of Quantum Electronics*. 1976 sep ;6(9) :1061–1064.
- [131] Johansson S, Letokhov V. Possibility of measuring the width of narrow Fe II astrophysical laser lines in the vicinity of η Carinae by means of Brown–Twiss–Townes heterodyne correlation interferometry. *New Astronomy*. 2005 ;10(5) :361–369.
- [132] Johnson MA, Betz AL, Townes CH. 10- μ m Heterodyne Stellar Interferometer. *Phys Rev Lett*. 1974 Dec ;33 :1617–1620.
- [133] Gay J, Journet A. An infrared astrometric interferometer. *Space Science Reviews*. 1975 ;17 :687–688.
- [134] Gay J, Rabbia Y. Heterodyne Interferometry in InfraRed at OCA-Calern Observatory in the seventies. In : *Proceedings of Haute Provence Observatory Colloquium*. vol. 23 ; 2013. p. 27.

- [135] Shao M, Colavita M. Long-baseline optical and infrared stellar interferometry. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 1992 ;30(1) :457–498.
- [136] Lawson P. Principles of long baseline stellar interferometry. JPL ; 2000.
- [137] Labeyrie A, Lipson SG, Nisenson P. An introduction to optical stellar interferometry. Cambridge University Press ; 2006.
- [138] Berger JP, Malbet F, Baron F, Chiavassa A, Duvert G, Elitzur M, et al. Imaging the heart of astrophysical objects with optical long-baseline interferometry. *The Astronomy and Astrophysics Review*. 2012 ;20(1) :53.
- [139] Davis J. In : Lagrange AM, Mourard D, Léna P, editors. *Observing with Optical/Infrared Long Baseline Interferometers*. Dordrecht : Springer Netherlands ; 1997. p. 49–79.
- [140] Garcia EV, Muterspaugh MW, van Belle G, Monnier JD, Stassun KG, Ghasempour A, et al. VISION : A six-telescope fiber-fed visible light beam combiner for the navy precision optical interferometer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*. 2016 ;128(963) :055004.
- [141] Gomes N, Garcia PJ, Thiébaud É. Assessing the quality of restored images in optical long-baseline interferometry. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2017 ;465(4) :3823–3839.
- [142] Tango W, Twiss R. Diffraction effects in long path interferometers. *Applied optics*. 1974 ;13(8) :1814–1819.
- [143] Tan PK, Chan AH, Kurtsiefer C. Optical intensity interferometry through atmospheric turbulence. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2016 ;457(4) :4291–4295.
- [144] Becker W. *Advanced time-correlated single photon counting techniques*. Springer, Berlin, Heidelberg ; 2005.
- [145] RCA. Datasheet PMT 6342A RCA ; 2021. <https://frank.pocnet.net/sheets/079/6/6342A.pdf>. Page consultée le 7 mars 2021.
- [146] Excelitas. Datasheet SPCM-ARQH ; 2021. <https://www.excelitas.com/fr/product-category/single-photon-counting-modules>. Page consultée le 9 mars 2021.
- [147] Rivet JP, Siciak A, de Almeida ESG, Vakili F, Domiciano de Souza A, Fouché M, et al. Intensity interferometry of P Cygni in the H α emission line : towards distance calibration of LBV supergiant stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2020 02 ;494(1) :218–227.
- [148] Wiersma DS. The smallest random laser. *Nature*. 2000 ;406(6792) :133–135.
- [149] Wiersma DS. The physics and applications of random lasers. *Nature physics*. 2008 ;4(5) :359–367.
- [150] Cao H. Review on latest developments in random lasers with coherent feedback. *Journal of Physics A : Mathematical and General*. 2005 ;38(49) :10497.
- [151] Dravins D, Germanà C. Photon correlation spectroscopy for observing natural lasers. *AIP Conf Proc*. 2008 ;6 :6852.
- [152] Zaitsev O, Deych L, Shuvayev V. Statistical properties of one-dimensional random lasers. *Physical review letters*. 2009 ;102(4) :043906.
- [153] Lepri S. Fluctuations in a diffusive medium with gain. *Physical review letters*. 2013 ;110(23) :230603.
- [154] Ignesti E, Tommasi F, Fini L, Lepri S, Radhalakshmi V, Wiersma DS, et al. Experimental and theoretical investigation of statistical regimes in random laser emission. *Physical Review A*. 2013 ;88(3) :033820.

- [155] Uppu R, Mujumdar S. Exponentially tempered Lévy sums in random lasers. *Physical review letters*. 2015;114(18) :183903.
- [156] Lima BC, Gomes AS, Pincheira PI, Moura AL, Gagné M, Raposo EP, et al. Observation of Lévy statistics in one-dimensional erbium-based random fiber laser. *JOSA B*. 2017;34(2) :293–299.
- [157] Cao H, Ling Y, Xu J, Cao C, Kumar P. Photon statistics of random lasers with resonant feedback. *Physical Review Letters*. 2001;86(20) :4524.
- [158] Siciak A, Orozco L, et al. A comparison of $g^{(1)}(\tau)$, $g^{(3/2)}(\tau)$, and $g^{(2)}(\tau)$ for radiation from harmonic oscillators in Brownian motion with a coherent background. *Physica Scripta*. 2020 sep;95(10) :104001.
- [159] Yurke B, Stoler D. Measurement of amplitude probability distributions for photon-number-operator eigenstates. *Phys Rev A*. 1987 Aug;36 :1955–1958.
- [160] Vogel W. Squeezing and anomalous moments in resonance fluorescence. *Phys Rev Lett*. 1991 Oct;67 :2450–2452.
- [161] Vyas R, Singh S. Higher-Order Nonclassical Effects in a Parametric Oscillator. 2000;62 :0338033.
- [162] Carmichael HJ, Castro-Beltran HM, Foster GT, Orozco LA. Giant Violations of Classical Inequalities through Conditional Homodyne Detection of the Quadrature Amplitudes of Light. *Phys Rev Lett*. 2000;85 :1855.
- [163] Wiseman H. Weak values, quantum trajectories, and the cavity-QED experiment on wave-particle correlation. *Physical Review A*. 2002;65(3) :032111.
- [164] Kofman A, Ashhab S, Nori F. Nonperturbative theory of weak pre-and post-selected measurements. *Physics Reports*. 2012 Nov;520(2) :43–133.
- [165] Carmichael HJ, Foster GT, Reiner JE, Orozco LA, Rice PR. Intensity-Field Correlations of Non- Classical Light. In : Wolf E, editor. *Progress in Optics*. vol. 46. Amsterdam : Elsevier ; 2004. p. 355.
- [166] Glauber RJ, Orozco LA, Vogel K, Schleich WP, Walther H. Field fluctuations measured by interferometry. *Physica Scripta*. 2010 sep;T140 :014002.
- [167] Kimble H. COURSE 10 : Quantum fluctuations in quantum optics - squeezing and related phenomena. *Les Houches LIII*. 1990 ;.
- [168] Denisov A, Castro-Beltran H, Carmichael H. Time-asymmetric fluctuations of light and the breakdown of detailed balance. *Physical review letters*. 2002;88(24) :243601.
- [169] Lacoume JL, Amblard PO, Comon P. *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*. MASSON ; 1997.
- [170] Glauber RJ. In : DeWitt C, Blandin A, Cohen-Tannoudji C, editors. *Quantum Optics and Electronics (Les Houches 1964)*. New York : Gordon and Breach ; 1965. p. 63.
- [171] Gillespie DT. *Markov processes : an introduction for physical scientists*. Elsevier ; 1991.
- [172] Stoehr J. *Méthodes de Monte-Carlo – Cours M1*; 2021. https://www.ceremade.dauphine.fr/~stoehr/M1_Monte_Carlo/Cours_Monte_Carlo.pdf. Chapitre 2.
- [173] Python. *Python 2.7*; 2020. <https://www.python.org/downloads/release/python-2718/>. Page consultée le 16 novembre 2020.
- [174] Gull T, Ishibashi K, Davidson K, Collins N. STIS Observations of the Eta Carinae Central Source and Weigelt Blobs BD. In : *Eta Carinae and Other Mysterious Stars : The Hidden Opportunities of Emission Spectroscopy*. vol. 242; 2001. p. 391.
- [175] Davidson K, Ebbets D, Johansson S, Morse JA, Hamann FW, Balick B, et al. HST/GHRS observations of the compact slow ejecta of Eta Carinae. *The Astronomical Journal*. 1997;113 :335–345.

- [176] Johansson S, Letokhov V. Radiative cycle with stimulated emission from atoms and ions in an astrophysical plasma. *Physical review letters*. 2003 ;90(1) :011101.
- [177] Johansson S, Letokhov V. Astrophysical laser operating in the O i 8446-Å line in the Weigelt blobs of η Carinae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2005 ;364(2) :731–737.
- [178] Loudon R. *The quantum theory of light*. Oxford Science Publications ; 1973.
- [179] Isserlis L. On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables. *Biometrika*. 1918 ;12(1/2) :134–139.
- [180] Wick GC. The Evaluation of the Collision Matrix. *Phys Rev*. 1950 Oct ;80 :268–272.
- [181] Risken H. *The Fokker-Planck Equation, Methods of Solution and Applications*. 2nd ed. Berlin Heidelberg New–York : Springer ; 1996.
- [182] Thorne A. *Spectrophysics*. Springer Netherlands ; 1988.
- [183] Szeifert T, Humphreys RM, Davidson K, Jones TJ, Stahl O, Wolf B, et al. HST and groundbased observations of the Hubble-Sandage variables in M 31 and M 33. *Astronomy and Astrophysics*. 1996 ;314 :131–145.
- [184] Papoulis A, Pillai SU. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. 4th ed. McGraw Hill ; 2002.
- [185] Carmichael HJ, Brecha RJ, Rice PR. Quantum Interference and Collapse of the Wavefunction in Cavity QED. 1991 ;82 :73.
- [186] Brecha RJ, Rice PR, Xiao M. N Two-Level Atoms in a Driven Optical Cavity : Quantum Dynamics of Forward Photon Scattering for Weak Incident Fields. 1999 ;59 :2392.
- [187] Foster GT, Smith WP, Reiner JE, Orozco LA. Time-Dependent Electric Field Fluctuations at the Subphoton Level. *Phys Rev A*. 2002 ;66 :033807.
- [188] Pierce JR. Physical Sources of Noise. *Proceedings of the IRE*. 1956 ;44(5) :601–608.
- [189] Gardiner CW. *Handbook of stochastic methods*. 3rd ed. Springer ; 2003.
- [190] Tango WJ, Twiss R. IV Michelson Stellar Interferometry. In : *Progress in optics*. vol. 17. Elsevier ; 1980. p. 239–277.
- [191] Rice SO. Mathematical analysis of random noise. *Bell System Technical Journal*. 1944 ;23(3) :282–332.
- [192] Weisstein EW. Edgeworth Series ; 2020. <https://mathworld.wolfram.com/EdgeworthSeries.html>. A Wolfram Web Resource.
- [193] Foster GT, Mielke SL, Orozco LA. Intensity Correlations in Cavity QED. *Phys Rev A*. 2000 ;61 :053821.
- [194] Carmichael HJ, Nha H. Vacuum fluctuations and the conditional homodyne detection of squeezed light. *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*. 2004 jul ;6(8) :S645–S651.
- [195] Crowther PA. Physical properties of Wolf-Rayet stars. *Annu Rev Astron Astrophys*. 2007 ;45 :177–219.
- [196] Lamers H, Cassinelli J. *Introduction to stellar winds*. Cambridge : Cambridge University Press ; 1999.
- [197] Ziad A, Borgnino J, Dali Ali W, Berdja A, Maire J, F M. Temporal characterization of atmospheric turbulence with the Generalized Seeing Monitor instrument. *J Opt*. 2012 ;14 :045705.
- [198] Aristidi E, Fantei-Caujolle Y, Ziad A, Dimur C, Chabé J, Roland B. A new generalized differential image motion monitor. *Proc SPIE*. 2014 ;9145 :91453G.

- [199] Chabé J, Ziad A, Fanteï-Caujolle Y, Aristidi E, Renaud C, Blary F, et al. The Calern atmospheric turbulence station. *Proc SPIE*. 2016 ;9906 :99064Z 9.
- [200] Scuderi S, Bonanno G, Di Benedetto R, Spadaro D, Panagia N. H-alpha observations of early-type stars. *The Astrophysical Journal*. 1992 ;392 :201–208.
- [201] ARAS. Spectral database ; 2020. <http://www.astrosurf.com/aras/>. Page consultée le 3 décembre 2020.
- [202] Mandel L. V fluctuations of light beams. In : *Progress in optics*. vol. 2. Elsevier ; 1963. p. 181–248.
- [203] Lizárraga N, Puente N, Chaikina E, Leskova T, Méndez E. Single-mode Er-doped fiber random laser with distributed Bragg grating feedback. *Optics express*. 2009 ;17(2) :395–404.
- [204] Burin A, Ratner MA, Cao H, Chang S. Random laser in one dimension. *Physical review letters*. 2002 ;88(9) :093904.
- [205] Turitsyn SK, Babin SA, El-Taher AE, Harper P, Churkin DV, Kablukov SI, et al. Random distributed feedback fibre laser. *Nature photonics*. 2010 ;4(4) :231–235.
- [206] Florescu L, John S. Photon statistics and coherence in light emission from a random laser. *Physical Review Letters*. 2004 ;93(1) :013602.
- [207] Wiersma DS, Lagendijk A. Light diffusion with gain and random lasers. *Physical Review E*. 1996 ;54(4) :4256.
- [208] Letokhov V. Generation of light by a scattering medium with negative resonance absorption. *Sov Phys JETP*. 1968 ;26 :835–840.
- [209] Johansson S, Letokhov V. Astrophysical lasers and nonlinear optical effects in space. *New Astronomy Reviews*. 2007 ;51(5-6) :443–523.
- [210] Gagné M, Kashyap R. Demonstration of a 3 mW threshold Er-doped random fiber laser based on a unique fiber Bragg grating. *Optics express*. 2009 ;17(21) :19067–19074.
- [211] Bliokh Y, Chaikina E, Vatnik I, Churkin D. Temporal variation of the spectrum of a continuously pumped random fiber laser : phenomenological model. *JOSA B*. 2019 ;36(2) :408–414.
- [212] Andreassen J, Asatryan A, Botten L, Byrne M, Cao H, Ge L, et al. Modes of random lasers. *Advances in Optics and Photonics*. 2011 ;3(1) :88–127.
- [213] Pendry JB. Symmetry and transport of waves in one-dimensional disordered systems. *Advances in Physics*. 1994 ;43(4) :461–542.
- [214] Sheng P. *Introduction to wave scattering, localization and mesoscopic phenomena*. vol. 88. 2nd ed. Berlin : Springer Science & Business Media ; 2006.
- [215] Jiang X, Soukoulis C. Time dependent theory for random lasers. *Physical review letters*. 2000 ;85(1) :70.
- [216] Lepri S, Cavalieri S, Oppo GL, Wiersma DS. Statistical regimes of random laser fluctuations. *Physical Review A*. 2007 ;75(6) :063820.
- [217] Shen YR. *The Principles of Nonlinear Optics*. Wiley classics library. San Francisco : Wiley ; 2002.
- [218] Hache F. *Optique non linéaire*. SAVOIRS ACTUELS. EDP Sciences ; 2017.
- [219] Boyd RW. *Nonlinear optics*. 3rd ed. Elsevier ; 2008.
- [220] Qu Y, Singh S. Measurements of photon statistics in second-harmonic generation. *Physical Review A*. 1995 ;51(3) :2530.
- [221] Allevi A, Bondani M. Direct detection of super-thermal photon-number statistics in second-harmonic generation. *Optics letters*. 2015 ;40(13) :3089–3092.

- [222] Friberg S, Mandel L. Coherence properties of the linear photon amplifier. *Optics Communications*. 1983 ;46(2) :141–148.
- [223] Diament P, Teich MC. Evolution of the statistical properties of photons passed through a traveling-wave laser amplifier. *IEEE Journal of quantum electronics*. 1992 ;28(5) :1325–1334.
- [224] Montroll EW, Weiss GH. Random walks on lattices. II. *Journal of Mathematical Physics*. 1965 ;6(2) :167–181.
- [225] Montroll EW. Random Walks on Lattices. III. Calculation of First-Passage Times with Application to Exciton Trapping on Photosynthetic Units. *Journal of Mathematical Physics*. 1969 ;10(4) :753–765.
- [226] Montroll EW, Scher H. Random walks on lattices. IV. Continuous-time walks and influence of absorbing boundaries. *Journal of Statistical Physics*. 1973 ;9(2) :101–135.
- [227] Kenkre V, Montroll E, Shlesinger M. Generalized master equations for continuous-time random walks. *Journal of Statistical Physics*. 1973 ;9(1) :45–50.
- [228] Weiss GH. Aspects and Applications of the Random Walk. *Random Materials and Processes*. Amsterdam : North-Holland ; 1994.
- [229] Klafter J, Sokolov IM. First steps in random walks : from tools to applications. New York : Oxford University Press ; 2011.
- [230] Wyss W. The fractional diffusion equation. *Journal of Mathematical Physics*. 1986 ;27(11) :2782–2785.
- [231] Schneider WR, Wyss W. Fractional diffusion and wave equations. *Journal of Mathematical Physics*. 1989 ;30(1) :134–144.
- [232] Metzler R, Klafter J. The random walk’s guide to anomalous diffusion : a fractional dynamics approach. *Physics reports*. 2000 ;339(1) :1–77.
- [233] Zaslavsky GM. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics reports*. 2002 ;371(6) :461–580.
- [234] Metzler R, Klafter J. The restaurant at the end of the random walk : recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. *Journal of Physics A : Mathematical and General*. 2004 ;37(31) :R161.
- [235] Lemieux PA, Durian DJ. Investigating non-Gaussian scattering processes by using nth-order intensity correlation functions. *J Opt Soc Am A*. 1999 Jul ;16(7) :1651–1664.
- [236] Lesne A, Laguës M. Invariance d’échelle. Des changements d’états à la turbulence. 1st ed. Echelles. Paris : Belin ; 2003.
- [237] Klages (Editor) R, Radons (Editor) G, Sokolov (Editor) IM. Anomalous transport : foundations and applications. Weinheim : John Wiley & Sons ; 2008.
- [238] Isichenko MB. Percolation, statistical topography, and transport in random media. *Rev Mod Phys*. 1992 Oct ;64 :961–1043.
- [239] Shlesinger MF, Zaslavsky GM, Klafter J. Strange kinetics. *Nature*. 1993 ;363(6424) :31–37.
- [240] Bouchaud JP, Georges A. Anomalous diffusion in disordered media : statistical mechanisms, models and physical applications. *Physics reports*. 1990 ;195(4-5) :127–293.
- [241] Shlesinger M, West B, Klafter J. Lévy dynamics of enhanced diffusion : Application to turbulence. *Physical Review Letters*. 1987 ;58(11) :1100.
- [242] Goldenfeld N, Kadanoff LP. Simple lessons from complexity. *science*. 1999 ;284(5411) :87–89.
- [243] Richardson LF. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proceedings of the Royal Society of London Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. 1926 ;110(756) :709–737.

- [244] Bouchaud JP, Georges A, Koplik J, Provata A, Redner S. Superdiffusion in random velocity fields. *Physical review letters*. 1990;64(21) :2503.
- [245] del Castillo-Negrete D, Carreras B, Lynch V. Fractional diffusion in plasma turbulence. *Physics of Plasmas*. 2004;11(8) :3854–3864.
- [246] Vasyliunas VM. A survey of low-energy electrons in the evening sector of the magnetosphere with OGO 1 and OGO 3. *Journal of Geophysical Research*. 1968;73(9) :2839–2884.
- [247] Montgomery MD, Bame S, Hundhausen A. Solar wind electrons : Vela 4 measurements. *Journal of Geophysical Research*. 1968;73(15) :4999–5003.
- [248] Feldman W, Asbridge J, Bame S, Montgomery M, Gary S. Solar wind electrons. *Journal of Geophysical Research*. 1975;80(31) :4181–4196.
- [249] Shrauner A, Feldman W. Electromagnetic ion-cyclotron wave growth rates and their variation with velocity distribution function shape. *Journal of Plasma Physics*. 1977;17(1) :123–131.
- [250] Lui A, Krimigis S. Energetic ion beam in the Earth s magnetotail lobe. *Geophysical Research Letters*. 1983;10(1) :13–16.
- [251] Pilipp W, Miggenrieder H, Mühlhäuser KH, Rosenbauer H, Schwenn R, Neubauer F. Variations of electron distribution functions in the solar wind. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*. 1987;92(A2) :1103–1118.
- [252] Williams D, Mitchell D, Christon S. Implications of large flow velocity signatures in nearly isotropic ion distributions. *Geophysical research letters*. 1988;15(4) :303–306.
- [253] Christon S, Mitchell D, Williams D, Frank L, Huang C, Eastman T. Energy spectra of plasma sheet ions and electrons from 50 eV/e to 1 MeV during plasma temperature transitions. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*. 1988;93(A4) :2562–2572.
- [254] Maksimovic M, Pierrard V, Riley P. Ulysses electron distributions fitted with Kappa functions. *Geophysical research letters*. 1997;24(9) :1151–1154.
- [255] Leubner M. Energetic tail evolution of auroral electron spectra. *Physics and Chemistry of the Earth, Part C : Solar, Terrestrial & Planetary Science*. 2001;26(1-3) :61–64.
- [256] Zouganelis I. Measuring suprathermal electron parameters in space plasmas : Implementation of the quasi-thermal noise spectroscopy with kappa distributions using in situ Ulysses/URAP radio measurements in the solar wind. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*. 2008;113(A8).
- [257] Leubner M. Consequences of entropy bifurcation in non-Maxwellian astrophysical environments. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2008;15(4) :531–540.
- [258] Pierrard V, Lazar M. Kappa distributions : Theory and applications in space plasmas. *Solar Physics*. 2010;267(1) :153–174.
- [259] Livadiotis G, McComas D. Invariant kappa distribution in space plasmas out of equilibrium. *The Astrophysical Journal*. 2011;741(2) :88.
- [260] Kadomtsev B, Pogutse O. Collisionless relaxation in systems with Coulomb interactions. *Physical Review Letters*. 1970;25(17) :1155.
- [261] Dupree TH. Theory of phase space density granulation in plasma. *The Physics of Fluids*. 1972;15(2) :334–344.
- [262] Krommes JA, Oberman C. Anomalous transport due to long-lived fluctuations in plasma Part 1. A general formalism for two-time fluctuations. *Journal of Plasma Physics*. 1976;16(2) :193–227.
- [263] Krommes JA, Oberman C. Anomalous transport due to long-lived fluctuations in plasma Part 2. Hydrodynamic contributions to transport in two-dimensional, strongly magnetized systems. *Journal of Plasma Physics*. 1976;16(2) :229–260.

- [264] Krommes JA, Oberman C, Kleva RG. Plasma transport in stochastic magnetic fields. Part 3. Kinetics of test particle diffusion. *Journal of plasma physics*. 1983;30(1) :11–56.
- [265] Chechkin AV, Gonchar VY, Szydlowski M. Fractional kinetics for relaxation and superdiffusion in a magnetic field. *Physics of Plasmas*. 2002;9(1) :78–88.
- [266] Moradi S, del Castillo-Negrete D, Anderson J. Charged particle dynamics in the presence of non-Gaussian Lévy electrostatic fluctuations. *Physics of Plasmas*. 2016;23(9) :090704.
- [267] Cadavid A, Lawrence J, Ruzmaikin A. Anomalous diffusion of solar magnetic elements. *The Astrophysical Journal*. 1999;521(2) :844.
- [268] Cordes JM, Lazio TJW. Anomalous radio-wave scattering from interstellar plasma structures. *The Astrophysical Journal*. 2001;549(2) :997.
- [269] Boldyrev S, Gwinn C. Scintillations and Lévy flights through the interstellar medium. *The Astrophysical Journal*. 2003;584(2) :791.
- [270] Boldyrev S, Gwinn CR. Lévy model for interstellar scintillations. *Physical review letters*. 2003;91(13) :131101.
- [271] Tsallis C. Introduction to nonextensive statistical mechanics : approaching a complex world. Springer Science & Business Media ; 2009.
- [272] Livadiotis G. Kappa distributions : Theory and applications in plasmas. Elsevier ; 2017.
- [273] Balescu R. Anomalous transport in turbulent plasmas and continuous time random walks. *Physical Review E*. 1995;51(5) :4807.
- [274] del Castillo-Negrete D, Carreras B, Lynch V. Nondiffusive transport in plasma turbulence : a fractional diffusion approach. *Physical review letters*. 2005;94(6) :065003.
- [275] del Castillo-Negrete D. Fractional diffusion models of nonlocal transport. *Physics of plasmas*. 2006;13(8) :082308.
- [276] Bian N, Browning P. Particle acceleration in a model of a turbulent reconnecting plasma : a fractional diffusion approach. *The Astrophysical Journal Letters*. 2008;687(2) :L111.
- [277] Uchaikin VV, Sibatov RT. Fractional kinetics in space : Anomalous transport models. Singapore : World Scientific ; 2017.
- [278] Tzoufras M, Tableman A, Tsung F, Mori W, Bell A. A multi-dimensional Vlasov-Fokker-Planck code for arbitrarily anisotropic high-energy-density plasmas. *Physics of Plasmas*. 2013;20(5) :056303.
- [279] Livadiotis G, McComas D. Understanding kappa distributions : A toolbox for space science and astrophysics. *Space Science Reviews*. 2013;175(1-4) :183–214.
- [280] Gell-Mann M, Tsallis C. Nonextensive entropy : interdisciplinary applications. Oxford University Press ; 2004.
- [281] Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of statistical physics*. 1988;52(1) :479–487.
- [282] Tsallis C. Nonadditive entropy : The concept and its use. *The European Physical Journal A*. 2009;40(3) :257–266.
- [283] Tanaka M. Meaning of an escort distribution and τ -transformation. In : *Journal of Physics : Conference Series*. vol. 201. IOP Publishing ; 2010. p. 012007.
- [284] Tsallis C, Plastino AR, Alvarez-Estrada RF. Escort mean values and the characterization of power-law-decaying probability densities. *Journal of mathematical physics*. 2009;50(4) :043303.
- [285] Umarov S, Tsallis C, Steinberg S. On a q-central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics. *Milan journal of mathematics*. 2008;76(1) :307–328.

- [286] Plastino A, Plastino A. Non-extensive statistical mechanics and generalized Fokker-Planck equation. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*. 1995 ;222(1-4) :347–354.
- [287] Leubner M. Core-halo distribution functions : A natural equilibrium state in generalized thermostatics. *The Astrophysical Journal*. 2004 ;604(1) :469.
- [288] Livadiotis G. Thermodynamic origin of kappa distributions. *EPL (Europhysics Letters)*. 2018 ;122(5) :50001.
- [289] Milovanov A, Zelenyi L. Functional background of the Tsallis entropy : " coarse-grained" systems and " kappa" distribution functions. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2000 ;7(3/4) :211–221.
- [290] Livadiotis G, McComas D. Beyond kappa distributions : Exploiting Tsallis statistical mechanics in space plasmas. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*. 2009 ;114(A11).
- [291] Abe S, Martinez S, Pennini F, Plastino A. Nonextensive thermodynamic relations. *Physics Letters A*. 2001 ;281(2-3) :126–130.
- [292] Tsallis C, Levy SVF, Souza AMC, Maynard R. Statistical-Mechanical Foundation of the Ubiquity of Lévy Distributions in Nature. *Phys Rev Lett*. 1995 Nov ;75 :3589–3593.
- [293] Tsallis C, Levy SVF, Souza AMC, Maynard R. Statistical-Mechanical Foundation of the Ubiquity of the Lévy Distributions in Nature. *Phys Rev Lett*. 1996 Dec ;77 :5442–5442.
- [294] Treumann RA. Theory of super-diffusion for the magnetopause. *Geophysical research letters*. 1997 ;24(14) :1727–1730.
- [295] Tsallis C, Bukman DJ. Anomalous diffusion in the presence of external forces : Exact time-dependent solutions and their thermostatical basis. *Physical Review E*. 1996 ;54(3) :R2197.
- [296] Tsallis C, Mendes R, Plastino AR. The role of constraints within generalized nonextensive statistics. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*. 1998 ;261(3-4) :534–554.
- [297] Daróczy Z. Generalized information functions. *Information and control*. 1970 ;16(1) :36–51.
- [298] Treumann R, Jaroschek C. Gibbsian theory of power-law distributions. *Physical review letters*. 2008 ;100(15) :155005.
- [299] Hasegawa A, Mima K, Duong-van M. Plasma distribution function in a superthermal radiation field. *Physical Review Letters*. 1985 ;54(24) :2608.
- [300] Leubner M. Wave induced suprathermal tail generation of electron velocity space distributions. *Planetary and Space Science*. 2000 ;48(2-3) :133–141.
- [301] Leubner M. Fundamental issues on kappa-distributions in space plasmas and interplanetary proton distributions. *Physics of Plasmas*. 2004 ;11(4) :1308–1316.
- [302] Shizgal BD. Suprathermal particle distributions in space physics : Kappa distributions and entropy. *Astrophysics and Space Science*. 2007 ;312(3) :227–237.
- [303] Scudder JD, Olbert S. A theory of local and global processes which affect solar wind electrons 1- The origin of typical 1 AU velocity distribution functions-Steady state theory. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*. 1979 ;84(A6) :2755–2772.
- [304] Scudder JD, Olbert S. A theory of local and global processes which affect solar wind electrons 2- Experimental support. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*. 1979 ;84(A11) :6603–6620.
- [305] Summers D, Thorne RM. The modified plasma dispersion function. *Physics of Fluids B : Plasma Physics*. 1991 ;3(8) :1835–1847.
- [306] Livadiotis G. Using kappa distributions to identify the potential energy. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*. 2018 ;123(2) :1050–1060.
- [307] Livadiotis G, McComas D. Measure of the departure of the q-metastable stationary states from equilibrium. *Physica Scripta*. 2010 ;82(3) :035003.

- [308] Livadiotis G, McComas D. Exploring transitions of space plasmas out of equilibrium. *The Astrophysical Journal*. 2010;714(1) :971.
- [309] Nicolaou G, Livadiotis G, Wicks RT. On the determination of kappa distribution functions from space plasma observations. *Entropy*. 2020;22(2) :212.
- [310] Livadiotis G. Theoretical aspects of Hamiltonian kappa distributions. *Physica Scripta*. 2019;94(10) :105009.
- [311] Rax JM. *Physique des plasmas : Cours et applications*. Paris : Dunod ; 2005.
- [312] Abe S. Correlation induced by Tsallis' nonextensivity. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*. 1999;269(2) :403–409.
- [313] Shats M, Punzmann H. *Lecture Notes on Turbulence and Coherent Structures in Fluids, Plasmas and Nonlinear Media*. 1st ed. Singapore : World Scientific ; 2006.
- [314] Similon P, Sudan R. Plasma turbulence. *Annual review of fluid mechanics*. 1990;22(1) :317–347.
- [315] Novikov EA, Stewart RW. *Izv Akad Nauk SSSR Geophys*. 1964;245(3).
- [316] Novikov EA. Infinitely divisible distributions in turbulence. *Physical Review E*. 1994;50(5) :R3303.
- [317] Krommes JA, Ottaviani M. Long-time tails do not necessarily imply self-organized criticality or the breakdown of the standard transport paradigm. *Physics of Plasmas*. 1999;6(10) :3731–3734.
- [318] Jha R, Kaw P, Kulkarni D, Parikh J, Team A. Evidence of Lévy stable process in tokamak edge turbulence. *Physics of Plasmas*. 2003;10(3) :699–704.
- [319] Uchaikin VV. Subordinated Lévy–Feldheim motion as a model of anomalous self-similar diffusion. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*. 2002;305(1-2) :205–208.
- [320] Uchaikin V. Anomalous diffusion and fractional stable distributions. *Journal of experimental and theoretical physics*. 2003;97(4) :810–825.
- [321] Collier MR. On generating kappa-like distribution functions using velocity space Lévy flights. *Geophysical research letters*. 1993;20(15) :1531–1534.
- [322] Zaburdaev V, Denisov S, Klafter J. Lévy walks. *Reviews of Modern Physics*. 2015;87(2) :483.
- [323] Coffey WT, Kalmykov YP. *The Langevin Equation : with applications to stochastic problems in physics, chemistry and electrical engineering*. 4th ed. Singapore : World Scientific ; 2017.
- [324] Dunkel J, Hänggi P. Relativistic Brownian motion. *Physics Reports*. 2009;471(1) :1–73.
- [325] Caubet JP. Le mouvement brownien relativiste. In : *Le Mouvement Brownien Relativiste*. Springer ; 1976. p. 132–179.
- [326] Debbasch F, Mallick K, Rivet JP. Relativistic Ornstein–Uhlenbeck Process. *Journal of Statistical Physics*. 1997;88(3) :945–966.
- [327] Jackson JD. *Classical electrodynamics*. 3rd ed. New-York : John Wiley and Sons ; 1999.
- [328] Shklovskii I. On the Nature of the Crab Nebula's Optical Emission. In : *Doklady Akad. Nauk SSSR*. vol. 90 ; 1953. p. 983.
- [329] Stoyan R, Binnewies S, Friedrich S. *Atlas of the Messier objects : highlights of the deep sky*. Cambridge University Press ; 2008.
- [330] Campbell NR. Discontinuities in light emission. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1909;15(117).
- [331] Campbell NR. The study of discontinuous phenomena. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1909;15(300).

- [332] Slutsky E. Uber stochastische asymptoten und grenzwerte. *Metron*. 1925 ;5(3) :3–89.
- [333] Israelian G, De Groot M. P cygni : an extraordinary luminous blue variable. *Space Science Reviews*. 1999 ;90(3) :493–522.
- [334] McCrea W. Emissionslinien als Begleiter von Absorptionslinien in Sternspektren. *Zeitschrift für Physik*. 1929 ;57(5-6) :367–379.
- [335] Beals C. *MNR A. S.* 1930 ;90 :202.
- [336] Maeder A, Meynet G. Grids of evolutionary models of massive stars with mass loss and overshooting-Properties of Wolf-Rayet stars sensitive to overshooting. *Astronomy and Astrophysics*. 1987 ;182 :243–263.
- [337] Humphreys RM, Davidson K. The most luminous stars. *Science*. 1984 ;223(4633) :243–249.
- [338] Maeder A, Meynet G. Grids of evolutionary models from 0.85 to 120 solar masses-Observational tests and the mass limits. *Astronomy and Astrophysics*. 1989 ;210 :155–173.
- [339] Conti PS. Basic observational constraints on the evolution of massive stars. In : *Symposium-International Astronomical Union*. vol. 105. Cambridge University Press ; 1984. p. 233–254.
- [340] Humphreys RM. What are LBVs?-Their characteristics and role in the upper H-R diagram. *International Astronomical Union Colloquium*. 1989 ;113 :1–14.
- [341] Lamers H, De Groot M. Observed evolutionary changes in the visual magnitude of the luminous blue variable P Cygni. *Astronomy and Astrophysics*. 1992 ;257 :153–162.
- [342] Scuderi S, Bonanno G, Spadaro D, Panagia N, Lamers H, De Koter A. Properties and variability of the stellar wind from P Cygni. *The Astrophysical Journal*. 1994 ;437 :465–475.
- [343] Humphreys RM, Davidson K. The luminous blue variables : Astrophysical geysers. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*. 1994 ;106(704) :1025.
- [344] de Groot M. The most luminous stars in the universe. *Irish Astronomical Journal*. 1988 ;18 :163–170.
- [345] Nota A, Livio M, Clampin M, Schulte-Ladbeck R. Nebulae around luminous blue variables : a unified picture. *The Astrophysical Journal*. 1995 ;448 :788.
- [346] Balan A, Tycner C, Zavala R, Benson J, Hutter D, Templeton M. The spatially resolved H α -emitting wind structure of P Cygni. *The Astronomical Journal*. 2010 ;139(6) :2269.
- [347] Richardson ND, Morrison ND, Gies DR, Markova N, Hesselbach EN, Percy J. The H α Variations of the Luminous Blue Variable P Cygni : Discrete Absorption Components and the Short S Doradus-phase. *The Astronomical Journal*. 2011 ;141(4) :120.
- [348] Richardson N, Schaefer G, Gies D, Chesneau O, Monnier J, Baron F, et al. The H-band emitting region of the luminous blue variable P Cygni : Spectrophotometry and interferometry of the wind. *The Astrophysical Journal*. 2013 ;769(2) :118.
- [349] Taylor M, Nordsieck K, Schulte-Ladbeck R, Bjorkman K. A study of the asymmetric wind of P Cygni. *The Astronomical Journal*. 1991 ;102 :1197–1206.
- [350] Vakili F, Mourard D, Bonneau D, Morand F, Stee P. Subtle structures in the wind of P Cygni. *Astronomy and Astrophysics*. 1997 ;323 :183–188.
- [351] Markova N, Morrison N, Kolka I, Markov H. P Cygni in a short S Doradus phase. Spectroscopic and photometric evidences. *Astronomy & Astrophysics*. 2001 ;376(3) :898–906.
- [352] Markova, N , Scuderi, S , de Groot, M , Markov, H , Panagia, N . Simultaneous H α and photometric observations of P Cygni. *A&A*. 2001 ;366(3) :935.
- [353] De Groot M, Sterken C, Van Genderen A. Cyclicities in the light variations of S Doradus stars-III. P Cygni. *Astronomy & Astrophysics*. 2001 ;376(1) :224–231.

- [354] Van Genderen A. S Doradus variables in the Galaxy and the Magellanic Clouds. *Astronomy & Astrophysics*. 2001 ;366(2) :508–531.
- [355] Percy, J R , Attard, A , Szczesny, M . Photometric variability of P Cygni : 1985-1993. *Astron Astrophys Suppl Ser*. 1996 ;117(2) :255.
- [356] Israelian G, De Groot M, Parker JW, Sterken C. The variable mass loss of the peculiar supergiant P Cygni. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1996 ;283(1) :119–136.
- [357] Stothers RB, Chin CW. A Period-Luminosity Relation for the Slow Variations of Luminous Blue Variables. *The Astrophysical Journal Letters*. 1995 ;451(2) :L61.
- [358] Stothers RB, Chin CW. Evolution of massive stars into luminous blue variables and Wolf-Rayet stars for a range of metallicities : Theory versus observation. *The Astrophysical Journal*. 1996 ;468 :842.
- [359] Stothers RB. A Semiempirical Test for Dynamical Instability in Luminous Blue Variables. *The Astrophysical Journal*. 1999 ;516(1) :366.
- [360] Lamers H, Bastiaanse M, Aerts C, Spoon H. Periods, period changes and the nature of the microvariations of Luminous Blue Variables. *Astronomy and Astrophysics*. 1998 ;335 :605–621.
- [361] Puls J, Kudritzki RP, Herrero A, Pauldrach A, Haser S, Lennon D, et al. O-star mass-loss and wind momentum rates in the Galaxy and the Magellanic Clouds Observations and theoretical predictions. *Astronomy and Astrophysics*. 1996 ;305 :171.
- [362] Kudritzki RP, Puls J. Winds from hot stars. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 2000 ;38(1) :613–666.
- [363] Haucke, M , Cidale, L S , Venero, R O J , Curé, M , Kraus, M , Kanaan, S , et al. Wind properties of variable B supergiants - Evidence of pulsations connected with mass-loss episodes. *A&A*. 2018 ;614.
- [364] Meaburn J, Lopez J, Barlow M, Drew J. The expansion of the outer circumstellar shell of P Cygni. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1996 ;283(3) :L69–L71.
- [365] Holzer T, Axford W. The theory of stellar winds and related flows. *Annual review of Astronomy and Astrophysics*. 1970 ;8(1) :31–60.
- [366] Castor JJ. Spectral line formation in Wolf-Rayet envelopes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1970 07 ;149(2) :111–127.
- [367] Castor J, Lamers H. An atlas of theoretical P Cygni profiles. *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 1979 ;39 :481–511.
- [368] Cassinelli JP. Stellar winds. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 1979 ;17(1) :275–308.
- [369] Panagia N. Radio and infrared properties of young stars. In : *Galactic and Extragalactic Star Formation*. Springer ; 1988. p. 25–52.
- [370] Kudritzki RP. The atmospheres of hot stars : modern theory and observation. *Max Planck Institut fur Astrophysik Report*. 1988 ;380.
- [371] Gabler R, Gabler A, Kudritzki R, Puls J, Pauldrach A. Unified NLTE model atmospheres including spherical extension and stellar winds-Method and first results. *Astronomy and Astrophysics*. 1989 ;226 :162–182.
- [372] Hillier DJ, Miller DL. The treatment of non-LTE line blanketing in spherically expanding outflows. *The Astrophysical Journal*. 1998 ;496(1) :407.
- [373] Najarro F, Hillier D, Stahl O. A spectroscopic investigation of P Cygni. I. H and HeI lines. *Astronomy and Astrophysics*. 1997 ;326 :1117–1134.
- [374] Najarro F. Spectroscopy of P Cygni. In : *P Cygni 2000 : 400 years of progress*. vol. 233 ; 2001. p. 133.

