



**HAL**  
open science

## Risque de crédit et interdépendance

Mustapha Hjirt

► **To cite this version:**

Mustapha Hjirt. Risque de crédit et interdépendance. Gestion et management. Université Panthéon-Sorbonne - Paris I, 2021. Français. NNT : 2021PA01E010 . tel-03407792

**HAL Id: tel-03407792**

**<https://theses.hal.science/tel-03407792>**

Submitted on 28 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Université Paris I Panthéon-Sorbonne**  
**École doctorale des sciences de gestion**  
LABORATOIRE DE RATTACHEMENT : PRISM SORBONNE

**Thèse**

Pour l'obtention du grade de docteur en sciences de gestion présentée publiquement  
le 3 Février 2021 par

**MUSTAPHA HJIRT**

sous la direction du professeur Jean-Paul LAURENT

---

---

# Risque de Crédit et Interdépendance

---

---

## **JURY**

**Jean-Paul LAURENT** (Directeur de thèse)  
Professeur, Université Paris I Panthéon-Sorbonne

**Idriss TCHAPDA DJAMEN** (Invité)  
Responsable de la thèse CIFRE, BNP PARIBAS

**Frédéric VRINS** (Rapporteur)  
Professeur, Université catholique de Louvain

**Areski COUSIN** (Rapporteur)  
Professeur, Université de Strasbourg

**Yannick MALEVERGNE** (Président du jury)  
Professeur, Université Paris I Panthéon-Sorbonne

## REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier tout d'abord Idriss TCHAPDA de m'avoir donné la chance de faire une thèse CIFRE au sein de BNP Paribas, et pour la confiance qu'il m'a accordé tout au long de ce parcours. Je remercie également mes amis El mostafa Hariss et Amine El Mahrous pour m'avoir permis de rencontrer Idriss pour la première fois et ainsi prendre ce chemin chez BNP Paribas. Je remercie monsieur Jean-Paul Laurent pour son encadrement et tout le temps qu'il m'a accordé lors de ces années de thèse, ce fut un plaisir pour moi de partager toutes ces heures de discussion. Je remercie les rapporteurs de cette thèse, les professeurs Areski Cousin et Frédéric Vrins pour leur fine lecture qui m'a permis d'améliorer certains aspects de la thèse. Je voudrais également remercier les professeurs et les doctorants du pôle finance et notamment mes amis des laboratoires PRISM et LABEX pour leur soutien. Sans oublier mes collègues et amis du marché saint honoré, je pense à Farouk, Christine, Sandrine, Bénédicte, Didier, Jean, Robben, Floriane, Mourad, Sami, Timothé, Anne, Olivier, Fréd et Mohamed. Je remercie également ma nouvelle équipe STMM pour leur encouragement et notamment Damien Hecquet et Antoine Bezat pour m'avoir donné la possibilité de finaliser ma thèse dans de bonnes conditions. Pour finir, je remercie ma famille de m'avoir toujours soutenu depuis le Maroc, je pense à mes parents, mes frères Khalid, Said et Mohamed, et mes soeurs Fatima et Zahra. Un grand merci à ma femme qui a su m'épauler et m'encourager formidablement pour aller jusqu'au bout de mes objectifs. Je remercie mes amis du Maroc aussi pour leur fort soutien, je pense à Khalid, Boujemaa, les deux Mohamed, Faycal, Amine, Abdelilah et d'autres. Je dédie finalement cette thèse tout particulièrement à mes parents et ma femme.

## INTRODUCTION

La stabilité du système économique-financier mondial est un problème d'enjeu majeur, dont le maintien est indispensable pour une économie mondiale viable. Celui-ci peut être vu comme un agrégat de plusieurs systèmes économique-financiers locaux<sup>1</sup> connectés via différents canaux. Ces systèmes locaux ont presque la même structure, à savoir une économie qui se finance via un réseau de banques, et des marchés qui sont tous contrôlés par une banque centrale et des organismes chargés par l'état pour veiller sur le respect de la réglementation en vigueur. Les banques ont une place centrale dans ce schéma, ce qui rend le système très sensible à leurs actions et état de santé. Celles-ci jouent un rôle essentiel dans l'économie réelle, notamment son alimentation en liquidité. La stabilité des plus grandes d'entre elles relève donc de la stabilité politique du pays, la zone ou la région dans laquelle elles concentrent leurs activités, d'où la nécessité d'une réglementation qui limite les prises de risque que prennent ces institutions. En outre, le stress d'une grande banque dans un système se transmet à d'autres banques via leurs interactions dans le marché interbancaire. Cette propagation est susceptible de contribuer grandement à l'effondrement des marchés, et impacter sévèrement l'économie réelle qui à son tour contribue au déclin des banques qui manquent de plus en plus de liquidité. Par conséquent, les banques refusent de se prêter mutuellement par manque de confiance en leur solvabilité, ce qui nécessite l'intervention de la banque centrale pour arrêter cette dégradation en chaîne en prenant des mesures souvent coûteuses comme l'injection de la liquidité dans les banques.

L'union européenne a un système économique-financier avec sa propre banque centrale BCE (Banque Centrale Européenne) pour la zone euro, ainsi que sa propre autorité bancaire ABE (ou EBA pour European Banking Authority). Les banques de la zone euro sont soumises à la BCE et la réglementation européenne en plus de celle en vigueur au niveau mondial, à savoir la réglementation baloise. De même, aux États-Unis le système en place repose sur une banque centrale dite réserve fédérale ou FED (Federal Reserve), dont le but est de maintenir la stabilité du système économique-financier américain auquel l'économie mondiale est dépendante. Ce

---

1. La localisation ici désigne un pays ou une zone.

---

qui met en évidence la centralité des banques américaines au niveau local et global du système. La crise de 2008 a été révélatrice de cette forte centralité des banques américaines, mais aussi une démonstration de la particularité du rôle de la banque centrale. En effet, bien que cette crise soit financière, elle s'est suivie d'une crise de liquidité, par conséquent la FED doit fournir la liquidité nécessaire pour stabiliser le système. Or la majorité des grandes banques faisaient face à de grandes difficultés de liquidité, la FED s'est retrouvée obligée d'abandonner une des grandes banques, à savoir Lehman Brothers. La doctrine Too Big To Fail (TBTF)<sup>2</sup> était à ce jour entretenue par différents sauvetages de grandes institutions financières en dépit des critiques qu'elle a engendré par le passé. A titre d'exemples, le sauvetage de Continental en 1984, le renflouement de First Republic et le sauvetage de Long Term Capital Management, avec l'intervention de la banque centrale de New York en 1988. Malgré cette doctrine, la grande banque Lehman Brothers dépose le bilan, ce qui déclenche un cataclysme financier et économique par effet de contagion, à cause de la grande taille et la forte connectivité de cette banque. Cet événement marque le début d'un grand changement au niveau de la réglementation, qui se matérialise principalement par un durcissement des règles du jeu dont le but est de protéger l'économie et sa croissance.

La centralité du réseau des grandes banques dans le système est à double tranchant. D'une part, celles-ci contribuent à la stabilité économique et financière via les différents services dont les sociétés nationales et internationales ont besoin, et en soutenant leurs filiales dans les pays émergents ce qui contribue à leur stabilité. Elles contribuent également à la diversification des risques liés à leurs flux d'actifs, ou même à la résolution efficace des institutions défaillantes. A titre d'exemples, l'achat de Bear Stearns par JP Morgan, et l'acquisition de First Republic par NCNB Corporation. D'autre part, leur taille, complexité et interdépendance font d'elles des entités dont la liquidation du bilan en cas de défaut peut ébranler le marché financier. En outre, la similarité de ces institutions (elles font face à des risques corrélés) accentue la dégradation du réseau interbancaire en situation de stress. Il convient de mentionner que même avant la crise de 2008, la réglementation avait fait des progrès en matière de gestion des risques, via les accords de Bâle qui ont donné Bâle I et Bâle II<sup>3</sup>. Néanmoins, le secteur bancaire fût toujours sous réglementé, et

---

2. Le concept du Too Big To Fail repose sur l'idée qu'une grande banque très connectée à l'économie ne peut faire défaut en raison des répercussions graves que cela peut engendrer suite à un effet de contagion. Pour une vue globale sur cette doctrine et son histoire, les lecteurs intéressés peuvent se référer à l'article de C. Moenninghoff et A. Weiandi [144].

3. Bâle I introduit un seuil minimal de fonds propres (ratio Cooke supérieur à 8%), et Bâle II instaure une surveillance interne des risques au sein des banques avec accent mis sur la transparence, en plus des exigences en fonds propres affinées par l'intégration du risque opérationnel et la notion du Tier1 (fonds propres durs).

---

la doctrine TBTF contribuait par la « garantie » qu'elle offrait aux grands risques encouru par les banques. De plus, les banques de grande taille bénéficiaient de coûts bas de refinancement grâce aux notes élevées attribuées par les agences de notation, qui prenaient le soutien de l'état en considération<sup>4</sup>. La réglementation déjà en place en 2008 se concentrait sur les exigences en fonds propres en tenant en compte les risques de crédit, de marché et les risques opérationnels. Cependant, la volonté bien claire du G20 de l'arrêt des opérations de sauvetage des banques nouvellement dites systémiques, en introduisant dans Bâle III (BRI 2010 ;[145–147]) des marges de sécurité sur les fonds propres et de méthodes de provisionnement ainsi que l'inclusion de surcharges en capital pour répondre aux risques systématiques et à l'interdépendance financière. Dans le même cadre, une centralisation des échanges des dérivés de gré à gré et leur compensation dans des chambres de compensation est lancée. Le principal objectif de Bale III est donc de renforcer la sûreté des banques parallèlement à une réduction de la propagation d'un risque systémique dans le système financier aux niveaux local et global. Outre les exigences en matière de fonds propres, le Conseil de Stabilité Financière (CSF)<sup>5</sup> propose un cadre complet permettant une résolution rapide et efficace des grandes institutions financières en cas de défaut. Dans cette dynamique, aux États-Unis la réforme Dodd-Frank Act<sup>6</sup> prévoit dans le titre II une procédure de liquidation ordonnée (OLA)<sup>7</sup> des grandes institutions financières, et désigne la Federal Deposit Insurance Corporation FDIC<sup>8</sup> comme autorité responsable de ces plans de résolution. Cette dernière propose une approche dite Single Point Of Entry (SPOE) qui vise à concentrer le risque de défaut sur la maison mère, dont le défaut ne devrait pas interrompre l'activité de ses filiales par la suite. En Europe, L'EBA est mandatée sous la Bank Recovery and Resolution Directive (BRRD)<sup>9</sup> pour le développement de standards techniques et directives sur la résolution des banques, dans le but de maintenir la stabilité financière et la réduction de l'engagement des états européens dans des plans de sauvetage. L'objectif est aussi d'éviter le scénario

---

4. Pour plus d'information sur le rôle des agences de notation dans le niveau de confiance dans les grandes banques, nous envoyons le lecteur à l'article de R.Bertrand [143]

5. Le Conseil de stabilité financière est un organisme international qui surveille et formule des recommandations sur le système financier mondial. Il a été créé après le sommet du G20 à Londres en avril 2009 en tant que successeur du Forum de stabilité financière.

6. La loi Dodd-Frank, ou Dodd–Frank Wall Street Reform and Consumer Protection Act en anglais, est une loi du Congrès des États-Unis adoptée en 2010. Elle est le principal volet législatif de la réforme du marché financier engagée durant la présidence de Barack Obama à la suite de la crise des subprimes et la crise financière et économique qui s'en est ensuivie.

7. OLA pour Orderly Liquidation Authority en anglais, est une politique qui permet la liquidation des institutions financières systémiques.

8. La Federal Deposit Insurance Corporation est une agence indépendante du gouvernement des États-Unis dont la principale responsabilité est de garantir les dépôts bancaires faits aux États-Unis jusqu'à concurrence de 250 000 dollars.

9. La BRRD est une directive adoptée en 2014 qui impose aux banques d'avoir des plans de résolution ou de liquidation en cas défaut comme pour OLA aux États-Unis.

---

de crise de la zone euro, principalement causée par le renflouement de certaines banques européennes. Nous avons donc une tendance à réduire l'interdépendance entre les différentes structures du système, notamment entre l'état et le système bancaire.

D'autres aspects de cette réduction de l'interdépendance s'est faite naturellement, comme par exemple la disparition des prêts en blanc à long-terme dans le marché interbancaire et le développement des REPO<sup>10</sup> qui servent aux banques comme moyen de refinancement à court-terme en échangeant des bons du trésor principalement. Ces bons du trésor garantissent un risque minimal dans ces transactions, via la transmission du risque à la banque centrale, et donc une sorte d'indépendance des banques qui utilisent ce genre de transactions. Cela rappelle le concept graphique d'indépendance conditionnelle, qui se schématise comme l'enlèvement du noeud séparateur de deux entités, ce qui les rend indépendantes l'une de l'autre. Cela renforce donc l'idée d'une structure de dépendance dans laquelle les parties du contrat sont connectés uniquement via la banque, qui annule le risque de contrepartie en par sa position centrale. Dans le cas d'un échange de bons entre plusieurs banques, la structure est forcément centralisée par la banque centrale, et par indépendance conditionnelle ce réseau est étoilé<sup>11</sup>. Ce qui suggère des intuitions graphiques dans la modélisation de ces structures d'interdépendance.

Les bons du trésor sont massivement achetés avec d'autres actifs par la banque centrale pour injecter de la liquidité dans les banques, et ainsi relancer l'économie dans une politique appelée Assouplissement Quantitatif ou Quantitative Easing (QE)<sup>12</sup>. Celle-ci a été utilisée pendant presque 10 ans par la FED afin d'alimenter le marché en liquidité après la crise de 2008. Cependant, cette politique a contribué à la disparition du marché des REPO aux États-Unis, et a augmenté considérablement le déficit du pays. Afin de baisser celui-ci, la FED a mis fin à cette politique en diminuant son bilan, jusqu'à septembre 2019 où le marché des REPO connaîtra un pique historique dû à une baisse des excès de réserves des banques de manière plus rapide que prévue, et donc une hausse des taux sur les REPO. Par conséquent, la FED agit très rapidement en revenant à sa politique d'assouplissement en affirmant que ce n'est qu'une mesure provisoire par manque d'acheteurs. On parle officiellement de certains *primary dealers* (grandes banques prêteuses) avaient peu de liquidités disponibles

---

10. Un repo, dont les noms juridiques en français sont notamment pension livrée ou pension de titres, est la contraction utilisée aux États-Unis pour l'expression "Sale and Repurchase Agreement", ou accord de rachat ou opération de pension, importants instruments financiers du marché monétaire

11. Un réseau étoilé est un réseau avec un noeud central et des noeuds satellites qui ne sont connectés que via le centre.

12. Le terme assouplissement quantitatif - traduction de l'anglais de Quantitative easing (QE) - désigne un type de politique monétaire dite « non conventionnelle » consistant pour une banque centrale à racheter massivement des titres de dettes aux acteurs financiers, notamment des bons du trésor ou des obligations d'entreprise, et dans certaines circonstances des titres adossés à des actifs comme des titres hypothécaires.

---

puisqu'ils devaient payer les taxes fédérales et/ou faire face à des appels de marge suite à l'envolée du prix du pétrole ; et d'autres ne voulaient ou ne pouvaient pas participer pour des raisons inconnues. En effet, deux des plus grands prêteurs américains (JP Morgan et Bank of America) ont retiré vraisemblablement une grande quantité de liquidité du marché, et une enquête est lancée par la FED sur cette affaire. Ce qui nous pousse encore à s'interroger sur le rôle de la réglementation, qui régit cette partie du système économique-financier, à maintenir une structure organisationnelle dans laquelle l'état n'est pas fortement interdépendant de ses grandes banques.

Ces problématiques d'interdépendance dans le système économique-financier sont largement abordées en littérature d'économie financière, dans laquelle l'utilisation des modèles graphiques s'est popularisée au début des années deux-mille après les travaux de X.Freixas, B.Parigi et J.C.Rochet [148], F.Allen et D.Gale [150] et en 2001 par R.Lagunoff et S.Schreft [149]. Ces travaux étudient sous certaines hypothèses les effets liés aux prêts interbancaires face à un événement systémique. Ils considèrent en général deux structures de réseau interbancaire, une dans laquelle chaque couple de banques sont connectées, et une deuxième qui met un intermédiaire central aux banques. Donc l'étude se restreint à deux topologies connues de graphes, à savoir les réseaux complet et étoilé. D'autres travaux complémentaires sont apparus, notamment S. Vivier-Lirimont [151] et S. Vivier-Lirimont et A.Granik [152] qui étendent l'approche d'Allen et Gale pour démontrer qu'en absence de banque centrale, les banques ont intérêt à agir en commun de manière à réduire le montant des réserves liquides et à augmenter le montant des investissements en actif de long terme d'une part. D'autre part, S. Vivier-Lirimont et A.Granik [152] étudient l'effet de la topologie du réseau sur sa capacité distributive du risque face à un stress. Ils s'intéressent pour cela à des réseaux symétriques dits  $k$ -réguliers, ce qui veut dire que chaque banque est connectée à  $k$  autres banques dans le réseau. Il s'agit alors d'étudier l'effet du degré de connexion du réseau sur sa capacité à absorber ou diffuser un stress.

L'interdépendance est un phénomène général qui n'est pas restreint qu'aux réseaux financiers. En effet, l'économie est elle-même une structure d'interdépendance dans laquelle les entreprises sont reliées par des liens économiques (comme des relations commerciales ou de concurrence) ou capitalistiques (comme des relations maison mère et filiales). Les banques sont donc exposées à un risque de crédit qui peut être amplifié par les effets d'interdépendance. Un portefeuille de crédit d'une banque peut donc être vu comme un réseau de firmes connectées via différents types de relations, dont la taille est beaucoup plus large que celle d'un réseau interbancaire ; ce qui rend sa modélisation plus complexe. En effet, ces réseaux économiques suivent d'une part la conjoncture et ses aléas, et sont sensibles aux différentes interactions des entités



---

qui les constituent. L'effet de la topologie de tels réseaux sur le risque de crédit des banques, car des réseaux concentrés en un cluster d'entités peut engendrer en cas d'un défaut une perte non seulement sur l'entité en faillite, mais également sur toutes les entités qui lui sont connectées, et donc une concentration de l'exposition sur ce cluster. D'autre part, le degré de connexion d'un réseau (comme pour le cas symétrique des réseaux  $k$ -réguliers) est un facteur déterminant dans la propagation des risques si nous négligeons les types de relations tels que la concurrence.

En Europe, dans le cadre de la loi Capital Requirements Regulation (CRR)<sup>13</sup>, l'EBA a mis en place des directives appelées Large Exposures, dont l'objectif est de limiter la taille de l'exposition de la banque à une contrepartie ou à un groupe de contreparties connectées. Cette taille est limitée à 10% du capital de la banque, ce qui permet de contenir la perte maximale en cas d'une contagion de défaut sur ce groupe de clients connectés. L'identification de ces groupes repose sur des liens qui peuvent être capitalistiques ou économiques. Elle est décrite dans des directives publiées pour la première fois en 2016 [1]. Les entités assez connectées constituent ce qu'on appelle un *Single Risk*, cette notion désigne un groupe d'entités très connectées dont le défaut total peut être provoqué par le défaut d'une de ses entités. La part de 10% représente la valeur maximale de la concentration, car l'exposition sur un groupe est considérée comme une exposition sur une seule entité, ce qui révèle une dualité concentration et contagion.

La taille des réseaux économiques est un facteur important dans cette structure sur plusieurs plans. D'une part, si le degré de connexion d'un réseau augmente avec sa taille, alors plus le réseau devient grand plus il est susceptible de transmettre le risque. Des réseaux dans lesquels chaque entité est connectée à une portion fixe du réseau en est un exemple. D'autre part, même pour des réseaux dont le degré de connexion est fixe (comme  $\mathbb{Z}^d$ ), la taille du réseau peut agir sur la manifestation d'un phénomène critique dit changement de phase. Ce phénomène stipule l'existence d'un seuil d'interdépendance dans un réseau à partir duquel le défaut d'une entité peut entraîner le défaut du réseau en entier avec une probabilité qui tend vers 1 quand la taille du réseau tend vers l'infini. Les modèles de percolation<sup>14</sup> sont des modèles graphiques qui peuvent naturellement expliquer la manifestation instantanée du changement de phase dans un système. La percolation peut également être représentée sous d'autres formalismes équivalents, comme par exemple via des modèles de

---

13. Règlement sur les exigences de fonds propres en français, est une loi de l'UE qui vise à réduire la probabilité d'insolvabilité des banques; CRR/575/2013.

14. La théorie de la percolation est une branche de la physique statistique et mathématique qui s'intéresse aux caractéristiques des milieux aléatoires, plus précisément aux ensembles de sommets connectés dans un graphe aléatoire. Cette théorie s'applique notamment en science des matériaux pour formaliser les propriétés d'écoulement dans les milieux poreux et pour la modélisation de phénomènes naturels, comme les incendies et leur propagation.

---

type Ising<sup>15</sup>. Malgré toute l'attention que portent des physiciens et mathématiciens à ces modèles, ceux-ci restent sous exploités dans l'étude de l'interdépendance dans des problématiques financières ou en lien avec le risque de défaut. Les travaux de K. Kitsukawa, S. Mori et M. Hisakado [89] traitent la problématique de dépendance en crédit via un modèle d'Ising, mais ceux-ci adoptent un point de vue "écono-physique" sans évoquer les aspects économiques et financiers. Les articles de Molins, J. and E. Vives [45, 46] traitent le risque de contagion par un modèle d'Ising simplifié. Ils se restreignent, tout comme dans les travaux de F.Allen et D.Gale [150], aux réseaux complets et étoilés, avec d'autres hypothèses d'homogénéité. Bien que ces hypothèses réduisent la portée de ces études, ils concluent néanmoins que dans un réseau très connecté, tel qu'un réseau complet, un changement de phase peut apparaître par concentration du risque. Ce phénomène est en fait semblable aux défauts en cascade sans présinaux qui frappent l'économie en périodes de crise, ce qui représente un des atouts majeurs de ce genre de modèles. Ce point de vue suit la même intuition de certains économistes, comme An.Haldane [13], qui stipule que la connectivité est bonne pour une économie, mais un excès de connectivité peut être néfaste en cas du défaut d'une des entités les plus centrales du réseau économique. Cette intuition a été confirmée lors de la crise de 2008 par plusieurs études empiriques, comme ceux de S. Azizpour, K. Geisecke et G. Shwenkler [30] et de S. Das, D. Duffie, N. Kapadia et L. Saita [29], qui rejettent l'hypothèse qu'un choc macroéconomique est à lui seul capable d'engendrer des défauts en cluster.

En risque de crédit, l'appréciation du risque de défaut ou de dégradation d'une entité se fait via des notes, qui reflètent le niveau de confiance de la banque en cette transaction. La note attribuée est fondée sur une connaissance de l'entité, de son bilan, de ses activités et parfois même, selon la politique de notation, ses relations de support ou l'existence de garants qui couvrent une part du risque. Certaines politiques de notation sont plus conservatrices que d'autres, selon la nature du métier sur lequel elles sont positionnées. A titre d'exemple, une politique de notation LBO (Leverage Buyout)<sup>16</sup> est beaucoup plus conservatrice qu'une politique standard de notation corporate. En effet, une entreprise financée par une acquisition par l'emprunt se retrouve avec un ratio dette sur fonds propres élevé, ce qui rend le financement de ces activités risqué. La BCE a émis des directives qui visent à définir de manière

---

15. Le modèle d'Ising est un modèle de physique statistique. Il a été utilisé pour modéliser différents phénomènes dans lesquels des effets collectifs sont produits par des interactions locales entre particules à deux états. Notamment l'explication des changements de phase dans certains matériaux magnétiques à partir d'un seuil de température auquel ils sont exposés.

16. acquisition par l'emprunt de sorte que l'entreprise ainsi financée se retrouve avec un Leverage mesuré le ratio dette sur fonds propres élevé. C'est ce qui rend le financement de ces activités risqués. L'enjeu de la réglementation pour le LBO vise principalement à éviter que les conditions d'octroi de crédit ne s'assouplissent.

---

cohérente ce qu'est une transaction à effet de levier, établir des normes en matière de risk management et de reporting de ces transactions. Le risque sur les portefeuilles LBO est donc beaucoup plus important par la nature même de cette activité, ce qui exige une politique de notation stricte, que ce soit pour une première note ou une migration vers une autre note. Les matrices de probabilités de transition d'une note vers une autre reflètent le comportement global du portefeuille, mais surtout illustrent de manière subtile comment les notes sont attribuées. En effet, une "bonne" politique de notation devrait produire des matrices qui classifient le risque, ce qui est formalisé par la notion de monotonie de ces matrices. Une politique conservatrice n'est donc pas forcément une politique qui attribue des notes assez basses, mais plutôt une politique qui suit le risque de telle manière à éviter des très grandes dégradations des entités dans le futur ; ce qui mène vers une bonne classification du risque dans un sens que nous allons discuter plus loin. Donc si les notes prennent en compte tous les paramètres intrinsèques et les interactions d'une entité, alors sous cette philosophie les matrices empiriques devraient être monotones, ce qui n'est pas le cas en réalité. Les banques utilisent des procédures qui permettent de maintenir au moins la colonne de défaut monotone, afin d'avoir une classification du risque même partielle qui garantit la cohérence des résultats d'un calcul des fonds propres ou d'un test de résistance. Ces tests de résistance sont appelés *Stress – Tests*<sup>17</sup>, et nous y prêterons attention dans le chapitre 1 en expliquant leur importance d'un point de vue réglementaire, leur déroulement, leurs problématiques de modélisation ainsi que certains exemples de pratiques courantes dans ces exercices.

L'interdépendance est une problématique omniprésente sur toutes les échelles du système économique-financier. Cependant, la compréhension de ses mécanismes à l'échelle de l'économie réelle et l'exposition des banques au risque de concentration qu'il génère demeure une problématique ouverte. On s'intéresse dans cette thèse à cette problématique en se concentrant sur le risque de défaut et sa propagation dans un réseau économique. On étudie également le lien entre le conservatisme des politiques de notation des banques et la classification du risque par le prisme de la monotonie des matrices de transition<sup>18</sup>. Comme discuté dans le paragraphe précédent, les politiques de notation doivent également prendre en compte les risques de concentration et de contagion ; on s'intéresse donc au risque de défaut dans un cadre d'entités connectées ou interdépendantes. Le chapitre 1 est consacré à une introduction de ces problématiques en discutant les pratiques internes des banques en

---

17. Un stress-test est un test de résistance bancaire qui vise à simuler des situations de stress selon des scénarios de différentes sévérités, afin de voir si la banque est suffisamment capitalisée pour supporter ces derniers.

18. La monotonie d'une matrice de transition est définie par une décroissance de toutes les probabilités de downgrade quand la note s'améliore, ce qui veut dire qu'une note  $i$  est plus risquée qu'une note  $i - 1$  où la meilleur note possible est 1.

---

terme de modélisation. On y discute également les tests de résistance ou stress-tests bancaires, les modèles utilisés dans ceux-ci ainsi que la littérature sur ses modèles. Une partie est consacrée à la comparaison entre les stress-tests Européens et Américains dont les réglementations sont assez différentes. On y explicite les contributions de cette thèse sur chaque problématique, les extensions possibles de nos travaux ainsi que les problèmes qui complèteront certains développements théoriques que nous avons pu réaliser.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude de la monotonie des matrices de transition et son lien avec la notion de conservatisme des politiques de notation. En effet, les problématiques de notation sont associées à celle de l'appréciation du risque de crédit et sa classification, en se basant sur les données intrinsèques de l'emprunteur d'une part, et des liens économiques et capitalistiques de celui-ci d'autre part. Toutefois, les politiques de notation ne prennent pas le même niveau de recule sur ces aspects d'interdépendance, et donc certaines négligent ainsi une partie de l'information nécessaire pour mieux appréhender le risque de crédit. Les matrices de transitions estimées sur le périmètre d'une politique de notation sont alors une donnée qui encode le comportement propre à cette politique, via sa classification du risque associé à chaque note ; ce qui est représenté par la notion des matrices de transition. On développe une méthode de calcul des matrices monotones de transition, en utilisant une projection orthogonale sur le convexe fermé des matrices de transition monotones. Cela suggère d'interpréter la distance entre la matrice empirique et sa projection monotone comme un défaut de monotonie. Celui-ci est nul si et seulement si la matrice empirique est bien monotone, ce qui caractérise le niveau de monotonie de la matrice empirique. Nous comparons trois estimateurs différents de matrices de transition en terme de défaut de monotonie sur plusieurs périodes en utilisant des données de notation d'une banque européenne, et nous constatons d'une part que dans les trois cas nous avons de très grandes hausses de défaut de monotonie en périodes de crise. Ce qui signifie que les matrices de transition estimées en périodes de crise violent beaucoup de contraintes de monotonie. Comme l'échelle de notation est la même pour chaque sous-portefeuille associé à une politique de notation, nous justifions comment le défaut de monotonie peut être un indicateur de "performance" d'une politique. D'autre part, on constate que sur chaque période, l'estimation du générateur de transition<sup>19</sup> produit des matrices avec le moins de défaut de monotonie. Cependant, il existe une notion de monotonie du générateur équivalente à la monotonie de sa matrice de transition, ce qui suggère de la même manière que pour les matrices de transition une projection du générateur sur l'ensemble des générateurs monotones.

---

19. Le générateur de transition est la matrice formée par les intensités de transition dans une période donnée. Ces intensités sont définies comme les dérivées des probabilités de transition par rapport au temps. Dans le cadre d'un processus de notation Markovien homogène, l'exponentiel matriciel de ce générateur donne une matrice de transition.

---

Cette méthode produit non seulement des matrices monotones, car on démontre que les matrices produites sont strictement monotones. En fait, la projection directe de la matrice de transition empirique donne une matrice monotone de la frontière de l'ensemble, qui est une surface définie par des cas d'égalités des inégalités de monotonie. Par conséquent, cela produit des matrices avec parfois des probabilités de défaut égales pour des notes différentes, d'où l'importance d'une matrice strictement monotone qui classe strictement le risque. Les observations du défaut de monotonie dans le temps laissent penser qu'une matrice de transition en période de stress ne peut pas être monotone. Cette intuition est fautive, car la construction des matrices de transition conditionnelles aux facteurs exogènes (macroéconomiques en pratique) via une matrice moyenne (Through The Cycle) conserve la monotonie à travers le cycle comme nous le démontrerons dans le chapitre 2. Cela veut dire qu'à travers une matrice moyenne TTC monotone, il est possible d'avoir des matrices positionnées en bas de cycle sans qu'elles perdent leur monotonie. Finalement, nous comparons deux politiques de notation l'une plus conservatrice que l'autre, et on constate que la politique conservatrice produit des matrices avec un défaut de monotonie inférieur que celle de qu'une politique de notation "corporate" standard.

Pour les problématiques d'interdépendance, on développe dans les chapitres qui suivent un modèle général de défaut qui tient en compte l'interdépendance entre les entités d'un réseau économique. Celui-ci repose sur des idées empruntées à la physique statistique, à savoir le modèle d'Ising et plus généralement les champs de Markov. Ce style de modèles attire l'attention de plusieurs chercheurs de différentes disciplines, notamment en biologie, traitement d'image et sociologie, par sa simplicité et la complexité des phénomènes qui peuvent être modélisés. Depuis quelques années, la recherche mathématique fondamentale s'intéresse à ces modèles, notamment celui d'Ising, dit *ferromagnétique* <sup>20</sup>, qui est dans la classe des modèles les plus simples. En effet, ce modèle possède des propriétés combinatoires, géométriques, analytiques très riches, et admet des représentations équivalentes en étude de la percolation et des marches aléatoires. Les développements sur ce sujet ont fait progresser le domaine des probabilités et ont valu la médaille Fields à Stanislav Smirnov et Wendelin Werner. Dans le modèle d'Ising les états sont binaires, ce qui servira d'états de défaut et de survie dans notre contexte. Toutefois, il ne prend en charge qu'un seul type d'interaction, alors qu'en réalité les entités interagissent différemment. Dans le chapitre 3, nous faisons donc une extension du modèle d'Ising de telle sorte que les interactions soient représentées par des fonctions, dites de couplage, propres à chaque interaction.

---

20. En physique statistique, un modèle d'Ising ferromagnétique donne une distribution des états possible sur des matériaux aimantés de telle sorte que les interaction entre ses particules favorise d'avoir le même état du moment magnétique ou spin.

---

De cette manière, on introduit de l'asymétrie dans un modèle en principe symétrique (le réseau est non orienté), ce qui couvre des comportements d'interaction entre maison mère et filiale, ou plus généralement une interaction entre deux entités de tailles très différentes. L'objectif est de comprendre, sous la structure de dépendance de ce modèle, les phénomènes que génère l'interdépendance décrits précédemment de manière théorique. On parvient à prouver plusieurs résultats mathématiques en utilisant des techniques de courants aléatoires, qui contribuent à la confirmation de la bonne articulation du modèle avec des phénomènes de transmission du risque. Nous illustrons cela avec des exemples numériques de propagation du risque dans un réseau pour différentes configurations, ce qui permet de voir l'effet des relations de concurrence ou de support et leur symétrie sur la transmission. Ces exemples montrent que la propagation s'atténue pour certains réseaux, alors qu'elle continue sous une forme ondulatoire sa propagation dans le cas d'un réseau fortement concurrentiel. Un résultat d'atténuation exponentielle de la propagation pour les réseaux économiques cohérents a été donc démontré, qui confirme par ailleurs ces observations expérimentales. Nous étudions aussi, sur des réseaux cohérents, la sensibilité d'un groupe d'entités à la dégradation d'une entité ou d'un groupe dans le réseau, et nous arrivons à prédire la sensibilité de la probabilité de certains événements aux différentes entités du réseau. De la même manière, on arrive à décrire la sensibilité aux intensités des interactions que nous appellerons connectivités. Certains de ces résultats sont des conséquences de résultats déjà établis dans le cadre du modèle d'Ising, que nous prolongeons à notre cadre. D'autres résultats ont nécessité la démonstration de certaines inégalités de corrélation non existantes dans la littérature de la mécanique statistique, et constituent l'une des contributions les plus intéressantes de ce chapitre. Un des résultats théoriques établis parmi les plus importants, est celui dans lequel on démontre que la corrélation de défaut entre deux groupes d'entités dans un réseau cohérent n'est nulle que si ces deux groupes ne sont pas connectés par un chemin dans le réseau. Ce résultat montre que cette corrélation de défaut issue du modèle ne dépend que des interactions entre les entités, et donc propre aux interactions que nous appelons alors corrélation *propre*<sup>21</sup>. Ces corrélations sont sensibles aux facteurs exogènes uniquement via les paramètres intrinsèques de chaque entité, ainsi la matrice de corrélation décrit comment la structure de dépendance véhicule les effets exogènes dans le réseau économique. Ceci permet d'intégrer les facteurs exogènes dans le modèle de manière indépendante des interactions, et ouvre la voie pour des applications aux tests de résistance bancaires (ou stress-tests). Nous pouvons ainsi confirmer l'intuition d'Andrew Haldane sur l'excès de connectivité associé à des phénomènes

---

21. La notation de corrélation propre renforce l'idée de la séparation entre chocs exogènes qu'un réseau économique peut subir, et les interactions dans celui-ci qui contribuent à l'absorber ou le propager selon la structure de dépendance. Donc la dénomination *propre* vient du fait que cette corrélation est associée uniquement aux interactions.

---

critiques comme les défauts simultanés, apparaissant brusquement en périodes de crise.

Bien que ce modèle soit très riche, il soulève cependant plusieurs questions quand à son insertion opérationnelle. En effet, hormis les problématiques de capacité de calcul, l'absence d'observations de défaut simultanés rend la calibration très difficile. Nous traitons cette problématique dans le chapitre 4, on discute différentes alternatives de calibration par un changement des états défaut/survie par deux catégories de notes dites bonnes et mauvaises pour investissement et non-investement grade. On démontre que la calibration du modèle via un maximum de vraisemblance est équivalent à une calibration via les moments d'ordre au plus deux ; nous calibrons le modèle via des probabilités marginales et jointes issues d'une copule gaussienne afin de les comparer. On trouve que le modèle demeure plus conservateur que la copule gaussienne en donnant une queue de distribution plus épaisse. Cela est lié aux moments d'ordre supérieur qui sont différents, au fait que le modèle prend en compte les interactions. En effet, la probabilité jointe de défaut issue de la copule gaussienne ne dépend que du couple en question, alors que celle issue du modèle dépend de toutes les entités du réseau. On observe également que l'existence de phénomènes critiques est due à l'excès de connectivité d'un réseau complet, à savoir le passage d'une perte de 0 à 100% de défaut suite à une perturbation infinitésimale. Ce phénomène se produit par ailleurs dans notre modèle de manière plus rapide que celle du modèle à copule gaussienne. Cela est dû à la prise en compte de toutes les relations possibles dans le réseau ; dont le nombre est maximal dans le cas complet.

On peut donc s'interroger sur l'effet du nombre de connections de chaque entité sur la distribution des pertes, notamment sa queue de distribution, la transmission du risque, ainsi que sur l'apparition des phénomènes critiques en cas de forte connectivité. Nous étudions cette question dans le chapitre 5 en s'intéressant à des réseaux symétriques et homogènes avec un même degré de connexion pour chaque entité (comme étudié en économie financière dans les réseaux  $k$ -réguliers par S. Vivier-Lirimont [151]). On suppose que les relations dans ce réseau central sont des relations de support positif<sup>22</sup>, et on rajoute à chaque entité de ce réseau un paquet d'entités satellites qui représente les relations hors le réseau central régulier. Cela permet d'étudier en particulier l'effet d'une concurrence externe sur un réseau de support, et comment le degré de connexion de celui-ci peut propager ce risque exogène au réseau. On obtient une formule semi-fermée<sup>23</sup> de la distribution des pertes dans ce cadre,

---

22. Une relation de support positif entre deux entités est une relation selon laquelle leur corrélation de défaut est positive, et que plus elles sont connectées plus elles sont sensibles l'une à l'autre.

23. Une formule semi-fermée est une formule qui présente une simplification majeure d'une expression coûteuse en calculs, dont des termes restent encore assez coûteux.

---

dont le terme semi-fermé est une fonction qui encode les propriétés combinatoires du réseau ; ce qui rend son calcul explicite très difficile. Nous étudions théoriquement et numériquement les effets de ces réseaux externes sur le réseau de support, en prêtant une attention particulière à l'effet de la concurrence externe. La connectivité d'une entité du réseau de support à ses concurrents externes, leur nombre et leur probabilités intrinsèques de défaut constituent des variables auxquelles le réseau de support est sensible avec un niveau qui varie selon son degré de connexion, sa connectivité et sa taille. Pour un degré de connexion maximal (réseau complet), on donne une formule exacte et on démontre par la suite que la distribution large pool (grand volume ou grand nombre d'entités) est une distribution de Dirac sur la perte 0. Cela signifie qu'un tel réseau de support devient de plus en plus résistant grâce à sa taille, en partie grâce au nombre de relations de support qui accroît de manière quadratique. Pour un degré de connexion de deux, chaque entité a deux voisins, et quand la taille du réseau devient infinie, le degré de connexion reste fixe contrairement au cas précédent. Nous donnons une formule fermée de la distribution des pertes, toutefois nous n'arrivons pas encore à calculer son équivalent asymptotique, qui a priori ressemble à celui du cas d'indépendance, à savoir une loi normale, via les résultats numériques que nous obtenons. Pour le cas général d'un degré de connexion arbitraire, il est très difficile d'exprimer la partie semi-fermée de la formule établie de la distribution des pertes explicitement comme réalisé pour les degrés deux et maximal. En effet, pour faire cela pour le degré deux, nous avons dû résoudre des problèmes de dénombrement non triviaux, et qui se compliquent beaucoup plus dans le cas d'un degré arbitraire. Cependant, nous avons étudié la possibilité de faire un développement limité de cette formule dont chaque degré requiert le dénombrement d'un certain nombre de courants aléatoires sur le réseau ; mais qui demeure moins complexe que la résolution du problème principal. Nous donnons également un encadrement du degré de développement nécessaire pour une erreur d'approximation arbitraire. Nous étudions donc l'effet du degré de connexion du réseau sur la propagation du risque de manière numérique. On constate que plus le degré est comparable à la taille du réseau, plus la distribution des pertes se concentre en une distribution de Dirac en 0, en revanche si le degré est négligeable devant la taille du réseau, alors la distribution suit une loi normale.

Il est connu que ce type de modèles à champs aléatoires est très coûteux en calcul, ce qui entrave son utilisation pratique. Dans le but de parer à ces problèmes de calcul, nous démontrons qu'il est possible d'encadrer la distribution des pertes sur un réseau quelconque par celles de deux réseaux symétriques et homogènes ; que nous savons par ailleurs exprimer par des formules moins coûteuses en calculs, ce qui permet entre autres de réduire le temps de calcul. Toutefois, nous n'avons pas



---

encore développé un moyen de construction de ces réseaux symétriques. En outre, nous démontrons que si un réseau ressemble à un arbre par blocs<sup>24</sup>, alors on peut réduire la complexité des calculs de manière exponentielle, et donc se ramener à une complexité beaucoup plus faible en fonction du nombre de blocs. Plusieurs questions restent encore en suspens, comme le comportement large pool d'un réseau de support de degré arbitraire et l'expression exacte de la distribution des pertes. Nous avons cependant pu calculer la formule exacte pour certains degrés de connexion, et nous avons même une formule générale conjecturée et vérifiée numériquement dont nous avons pas encore établi une preuve rigoureuse. Finalement, Le chapitre 6 est dédié à l'exposition de certains travaux futurs et des extensions possibles de nos travaux. Nous y discutons le risque de concentration du point de vue du modèle de l'interdépendance et les premiers résultats obtenus d'une part, et une extension du modèle au cas multipériodique.

---

24. Nous entendons par arbre par blocs, un graphe avec des blocs ou clusters connectés par l'intermédiaire d'une entité de chaque bloc.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Table des matières</b>	<b>xviii</b>
<b>1 Risque de crédit, stress test et problématiques de la thèse</b>	<b>1</b>
1.1 Notions de risque de crédit . . . . .	2
1.1.1 La notion du défaut . . . . .	2
1.1.2 Le risque de crédit . . . . .	4
1.1.3 Notation et score . . . . .	5
1.1.4 Modèles factoriels de défaut et de migration . . . . .	7
1.1.5 Modèles Markoviens et estimation des matrices de migration . . . . .	10
1.2 Les stress tests bancaires . . . . .	13
1.2.1 Nature et structure des stress tests . . . . .	13
1.2.2 Plausibilité et choix des scénarios . . . . .	16
1.2.3 Reverse stress tests . . . . .	17
1.2.4 Prise de décision et effets de second ordre . . . . .	18
1.3 Les stress tests en Europe et aux États unis . . . . .	19
1.3.1 Évolution des stress tests après la crise des subprimes . . . . .	19
1.3.2 Comparaison entre les approches européennes et américaines . . . . .	25
1.4 Monotonie des matrices de transition . . . . .	29
1.4.1 Problématique . . . . .	29
1.4.2 Contributions du chapitre 2 : . . . . .	30
1.5 Interdépendance et contagion . . . . .	31
1.5.1 Problématique . . . . .	31
1.5.2 Contributions . . . . .	35
<b>2 Monotonie des matrices de transition</b>	<b>40</b>
2.1 Introduction . . . . .	41
2.2 Matrices de transition monotones . . . . .	42
2.2.1 Notion de monotonie et projection monotone. . . . .	42
2.2.2 Résultats numériques . . . . .	43
2.3 Monotonie des générateurs . . . . .	48
2.4 Notion de $l$ -monotonie des matrices de transition . . . . .	51

2.5	Stabilité de la monotonie . . . . .	53
2.5.1	Stabilité par rapport au positionnement dans le cycle macroéconomique. . . . .	53
2.5.2	Stabilité par rapport au changement de l'échelle de notation. . . . .	54
2.6	Conclusion . . . . .	55
2.7	Annexes . . . . .	57
2.7.1	Annexe A : Reformulation du problème d'optimisation . . . . .	57
2.7.2	Annexe B : Exemple d'estimation du générateur d'une matrice. . . . .	58
2.7.3	Annexe C : Preuves . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Champs de Markov et modélisation de l'interdépendance</b>	<b>63</b>
3.1	Notions : théorie des graphes et champs de Markov . . . . .	66
3.1.1	Exemples de champs de Markov : . . . . .	69
3.2	Le modèle . . . . .	71
3.2.1	Formalisme mathématique . . . . .	72
3.2.2	Sensibilité aux paramètres . . . . .	73
3.2.3	Effets de premier et second ordre . . . . .	81
3.2.4	Sensibilité aux probabilités intrinsèques et les types de relations . . . . .	86
3.2.5	Exemples de relations . . . . .	88
3.2.6	Influence du réseau sur le comportement d'un couple : la relation équivalente. . . . .	91
3.3	Courants aléatoires et représentation du modèle . . . . .	99
3.3.1	L'entité fantôme . . . . .	100
3.3.2	Représentation du modèle . . . . .	101
3.3.3	Exemples de courants aléatoires sur des réseaux simples . . . . .	104
3.4	Analyse des fonctions de corrélation sur les réseaux économiques cohérents . . . . .	107
3.5	Applications en risque de crédit : déformation de la distribution des pertes . . . . .	112
3.6	Propagation des chocs macroéconomiques locaux dans un réseau . . . . .	121
3.7	Le concept de phénomène critique et son adaptation aux réseaux économiques . . . . .	127
3.8	Conclusion et perspectives . . . . .	132
3.9	Annexes : . . . . .	135
3.9.1	Preuves des propriétés élémentaires . . . . .	135
3.9.2	Preuves utilisant des courants aléatoires . . . . .	140
<b>4</b>	<b>Problématiques de calibration</b>	<b>153</b>
4.1	Introduction . . . . .	154
4.2	Inférence du modèle d'interdépendance . . . . .	155
4.2.1	Maximum de vraisemblance . . . . .	155
4.2.2	Maximum de pseudo-vraisemblance . . . . .	157
4.2.3	Application . . . . .	159
4.3	Calibration par moments d'ordre 1 et 2 . . . . .	161

4.3.1	Cas de deux entités sous relation de support . . . . .	161
4.3.2	Cas d'un réseau homogène de 10 entités sous relations de support . . . . .	171
4.4	Calibration par les moments d'ordre 1 et le moment maximal dans un réseau homogène de 10 entités . . . . .	173
4.5	Conclusion . . . . .	175
<b>5</b>	<b>Réseaux de support et leur comportement en très grande taille.</b>	<b>176</b>
5.1	Introduction . . . . .	177
5.2	Réseaux de support complets . . . . .	179
5.2.1	Effet de la concurrence externe : distribution des pertes et effet de volume.	179
5.2.2	Extension au cas de relations satellites arbitraires . . . . .	190
5.3	Réseaux de support réguliers : effet du degré de connexion. . . . .	206
5.3.1	Comportement en fortes connectivités . . . . .	209
5.3.2	Comportement au voisinage des faibles connectivités . . . . .	210
5.3.3	Comportement en volume infini . . . . .	218
5.3.4	Analyse numérique . . . . .	224
5.4	Les réseaux de grande taille . . . . .	228
5.4.1	Problème de réduction des calculs . . . . .	228
5.4.2	Comportement en volume infini . . . . .	231
5.5	Conclusion et perspectives . . . . .	233
5.6	Preuves . . . . .	236
5.6.1	Preuves des propositions . . . . .	236
5.6.2	Preuves des lemmes : . . . . .	249
5.6.3	Preuve des corollaires . . . . .	252
5.6.4	Preuves des théorèmes . . . . .	253
<b>6</b>	<b>Extensions et perspectives</b>	<b>259</b>
6.1	Modèle multi-périodes . . . . .	259
6.2	Allocation dans un portefeuille de crédit avec interdépendance sous contraintes. .	261
6.3	Concentration et l'interdépendance . . . . .	263
	<b>Bibliographie</b>	<b>274</b>

## RISQUE DE CRÉDIT, STRESS TEST ET PROBLÉMATIQUES DE LA THÈSE

Ce chapitre est consacré à l'introduction de certaines notions en risque de crédit, en particulier les tests de résistance bancaires appelés stress tests. Nous faisons une revue de la littérature sur les modèles de défaut en risque de crédit, en se concentrant sur ceux qui utilisent une structure de dépendance. Nous y abordons également l'évolution de la réglementation, notamment celle qui régit ces exercices de stress test depuis la crise de 2008 ; nous faisons une comparaison entre les stress tests Européens et Américains. Nous expliquons enfin le positionnement de la thèse, ses motivations et les contributions faites sur chaque des problématiques traitées.

**Mots-clés** : Risque de crédit, Stress-test, modélisation des migrations et du défaut.

### Sommaire

1.1	Notions de risque de crédit	2
1.1.1	La notion du défaut	2
1.1.2	Le risque de crédit	4
1.1.3	Notation et score	5
1.1.4	Modèles factoriels de défaut et de migration	7
1.1.5	Modèles Markoviens et estimation des matrices de migration	10
1.2	Les stress tests bancaires	13
1.2.1	Nature et structure des stress tests	13
1.2.2	Plausibilité et choix des scénarios	16
1.2.3	Reverse stress tests	17

1.2.4	Prise de décision et effets de second ordre . . . . .	18
1.3	Les stress tests en Europe et aux États unis . . . . .	19
1.3.1	Évolution des stress tests après la crise des subprimes . . . . .	19
1.3.2	Comparaison entre les approches européennes et américaines . . . . .	25
1.4	Monotonie des matrices de transition . . . . .	29
1.4.1	Problématique . . . . .	29
1.4.2	Contributions du chapitre 2 : . . . . .	30
1.5	Interdépendance et contagion . . . . .	31
1.5.1	Problématique . . . . .	31
1.5.2	Contributions . . . . .	35

---

## 1.1 Notions de risque de crédit

Il convient de noter que la majorité des éléments de rappel est extraite de Gourieroux et Tiomo [135] qui propose une revue des approches classiques de modélisation du risque de crédit.

### 1.1.1 La notion du défaut

La solvabilité d'une entreprise est sa capacité à rembourser l'intégralité de ses engagements en cas de liquidation totale. Elle dépend de la qualité de ses actifs, particulièrement de la facilité avec laquelle ceux-ci peuvent être liquidés, et du montant de ses engagements (dettes). La solvabilité correspond au rapport Dettes / Actif net, et peut également être mesurée par le rapport Dettes / Capitaux propres.

Dans le cas d'une banque, les dettes sont essentiellement constituées des dépôts à vue. Les actifs financiers sont constitués des crédits octroyés. La solvabilité d'une banque est définie par sa capacité à faire face aux demandes de retrait de ses exposants. Cela fait partie de la responsabilité des autorités de tutelle de s'assurer que les banques sont bien aptes à faire face à leurs obligations. Le capital d'une banque est la seule protection contre les pertes susceptibles de survenir. Ce principe est retenu par les autorités de tutelle qui imposent un niveau minimal de capital.

La défaillance d'une entreprise exprime un état d'insolvabilité constaté à une échéance donnée. Celui-ci engage l'entreprise dans un processus économique, juridique, voire judiciaire, impliquant un ou plusieurs prêteurs. Il existe cependant, avant la cessation des paiements et son éventuelle conséquence judiciaire le dépôt de bilan, une période de vulnérabilité durant laquelle les créanciers, les actionnaires ou les régulateurs peuvent être alertés des difficultés rencontrées par l'entreprise et mettre oeuvre des mesures de prévention (provision ou renégociation de dette, notamment). Le Comité de Bâle définit le défaut de la façon suivante (Article 178 de la Capital Requirement Regulation (CRR), Juin 2013) :

- l'établissement estime que, sauf recours à des mesures telles que la réalisation de la garantie, le débiteur ne pourra probablement pas s'acquitter intégralement de ses obligations de crédit envers lui, son entreprise mère ou l'une de ses filiales ;
- l'arriéré du débiteur sur une obligation de crédit significative envers l'établissement, son entreprise mère ou l'une de ses filiales est supérieur à 90 jours. Les autorités compétentes peuvent remplacer le délai de 90 jours par 180 jours pour les expositions garanties par des biens immobiliers résidentiels ou commerciaux des Petites et Moyennes Entreprise (PME) dans la catégorie des expositions sur la clientèle de détail, ainsi que pour les expositions sur les entités du secteur public.

La définition du défaut laisse une certaine latitude au prêteur, ainsi, la première condition peut conduire à un défaut sans qu'il y ait de retard de paiement de la part du débiteur. En pratique, la banque pourrait considérer qu'il y a défaut si les provisions introduites pour couvrir ce risque potentiel dépassent un certain seuil. Les agences de notation (Moody's, Standard Poor's, et Fitch, principalement) ne peuvent évidemment utiliser une définition à la latitude partielle du prêteur. Chez Moody's par exemple, un débiteur est considéré en défaut lorsque l'un des trois événements suivants se produit :

1. un défaut ou un retard de paiement des intérêts ou du principal (incluant les retards de paiement ayant fait l'objet d'une négociation) ;
2. une faillite du débiteur ;
3. une modification du contrat initial où le débiteur donne au détenteur du titre de créance de nouvelles valeurs dans le but de diminuer ses obligations financières, ou bien où la modification a pour but apparent d'aider l'emprunteur à éviter le défaut de paiement.

Il existe aussi des définitions de la défaillance spécifiques de chaque organisme prêteur, banque ou institution de crédit. Ainsi certaines institutions financières considèrent une contrepartie en défaut dès qu'elle est classée dans la catégorie des "clients douteux" selon des règles et conditions précisées par des normes internes. Ceci est dû à l'interprétation laissée aux établissements bancaires quant aux critères de définition des signes d'une absence probable de paiement ou encore des modalités de comptabilisation des arriérés de paiements. Clairement révélée lors des études d'impact (QIS)<sup>1</sup> menées par l'autorité bancaire européenne (ABE)<sup>2</sup>, cette hétérogénéité des approches entraîne nécessairement une grande variabilité des résultats de classification en défaut entre les banques de l'Union Européenne

L'Autorité Bancaire Européenne a publié en septembre 2016 ses orientations finales relatives à la définition du défaut (EBA/GL/2016/07). L'objectif du régulateur est d'harmoniser la définition du défaut parmi les institutions financières en Europe, dont l'hétérogénéité jusqu'à présent a entraîné des différences importantes en matière d'exigences en capital. Ces orientations

---

1. Quantitative Impact Study.

2. ABE ou EBA désigne l'Autorité Bancaire Européenne.

définissent de manière très détaillée les critères communs d'identification, de comptabilisation et de traitement des situations de défaut de paiement avec un accent particulier sur les besoins de mise en place d'une gouvernance claire, cohérente et effective. Les banques de leur côté doivent adopter et implémenter ces nouvelles règles avant leur entrée en vigueur le premier janvier 2021.

### 1.1.2 Le risque de crédit

Le risque de crédit est le risque de perte inhérent au défaut d'un emprunteur par rapport au remboursement de ses dettes (obligations, prêts bancaires, créances commerciales...). Ce risque se décompose en risque de défaut qui intervient en cas de manquement ou retard de la part de l'emprunteur sur le paiement du principal et/ou des intérêts de sa dette, risque sur le taux de recouvrement en cas de défaut, et risque de dégradation de la qualité du portefeuille de crédit. Il s'agit de la forme la plus ancienne du risque sur les marchés des capitaux. Il existe divers types de risques de crédit distingués selon les instruments financiers considérés.

- Instruments où des mécanismes de remboursement sont prévus dans le contrat : L'exemple le plus simple est celui des crédits classiques. Le risque se révèle en cas de non-exécution d'un paiement prévu : non-exécution d'un paiement à la date d'échéance, paiement partiel à la date d'échéance, ou report d'un paiement prévu, ou de défaut d'une contrepartie : incapacité d'une contrepartie à respecter certaines de ses obligations, nécessité pour une contrepartie de reporter certaines de ses obligations, ou encore incapacité d'une contrepartie de continuer à émettre des produits de crédit.
- Instruments dont les dates de paiement et(ou) les montants ne sont pas connus a priori : Le risque peut exister pour des instruments à vue, des crédits à taux variable, des instruments ne portant que sur l'intérêt, des instruments rachetables.
- Produit dont le paiement est fonction de certaines conditions : De tels actifs sont par exemple les options, les swaps de crédit relatifs à des entreprises, ou le crédit bail. Le risque provient du risque de défaut d'une contrepartie, et non du risque de défaut sur l'instrument lui-même.
- Devise : La dévaluation d'une devise peut être considérée comme une forme de risque de crédit. Lorsqu'un émetteur promet de verser à un prêteur des montants précis dans une devise déterminée à des dates futures prédénies, on suppose de façon implicite que la devise conservera sa valeur (ou au moins ne chutera pas en deçà d'une valeur plancher présumée raisonnable). Cependant, compte tenu de la période parfois longue d'application de produits du crédit, on peut assister à une détérioration soutenue de la valeur de devise dans les pays les moins développés, mais aussi dans des pays industrialisés, ceci au détriment des créanciers. La dévaluation d'une devise constitue une question complexe, qui est habituellement abordée de façon distincte dans le cadre du risque de taux de change.



- Décotes : Les décotes, bien qu'elles ne constituent pas un défaut au plan technique, ont un effet négatif sur la valeur marchande de l'instrument en rendant le placement moins attrayant au plan commercial et en laissant supposer une probabilité accrue de défaut à une date ultérieure. Au niveau du portefeuille, une décote peut, théoriquement, être compensée par une appréciation simultanée d'un autre instrument. Cependant, il peut exister une forte contagion des décotes rendant très probable la survenance simultanée de décotes multiples (corrélation de décote). Au niveau du portefeuille, la diversification peut atténuer, mais non éliminer complètement ces risques. Sur les marchés financiers où les instruments de crédit sont cotés régulièrement, le risque de défaut est souvent évalué par les différentiels de taux (ou spreads), qui traduisent en termes monétaires la vraisemblance de non-remboursement. L'évolution incertaine de ces différentiels constitue aussi une forme de risque de crédit, qui influe sur la valeur de marché de ces titres. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire que le défaut se réalise pour que le risque de crédit affecte négativement la valeur d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs.
- Lignes de crédit : Enfin, le risque associé à une ligne de crédit accordée à une entreprise ou à un particulier (carte de crédit) et non encore pleinement utilisée. Dans une mauvaise situation financière, l'emprunteur peut accroître l'utilisation de sa ligne et donc l'exposition à la date de défaut. Le risque passe par l'augmentation endogène de cette exposition.

### 1.1.3 Notation et score

La notation est l'évaluation du risque de non-paiement en temps et en heure de la totalité du principal et des intérêts relatifs à une obligation financière. Formellement, il s'agit d'une évaluation de la probabilité de défaillance à un certain horizon. On distingue généralement les notations présentées de façon quantitative (score), de celles présentées de façon qualitative (notation). Un exemple de score est l'estimation d'une probabilité de défaillance à un certain horizon, à valeurs entre 0 et 100%. Des notations peuvent se déduire de scores sous jacents, en constituant des classes de scores, la notation la plus élevée étant attribuée si la probabilité de défaillance estimée est par exemple inférieure à 0.3 %, et ainsi de suite... Pour une note qualitative, l'échelle de notation comporte généralement entre 8 et 10 échelons, chaque échelon représente un niveau de risque subdivisé à des niveaux encore plus granulaires qui représentent les notes. Les agences de notation telles que Moody's, S&P ou Fitch ont des échelles de notation différentes, dont la correspondance est représentée dans le tableau 1.1. En pratique, les institutions financières associent à chaque note une probabilité de défaut calculée via l'historique de notation (dites de backtesting) sur différents horizons. En cas de manque de données, celles-ci se réfèrent aux probabilités de défaut fournies par les agences de notation dans les cas où les clients sont des institutions déjà notées par ces agences. Les banques adoptent dans leurs approches internes un système de notation plus granulaire, qui repose sur une classification plus fine des risques ; ce qui forme une échelle de notes qui peut compter jusqu'à 30 notes. Ces notes sont attribuées en

général par des méthodes dites jugement d'expert, qui reposent sur une connaissance approfondie des bilans, des projets et sur une comparaison avec les notations des agences.

Les politiques de notation internes peuvent être très différentes, dont les méthodes peuvent aller d'un avis d'experts uniquement jusqu'à des modèles qui intègrent l'état macroéconomique du secteur d'activité; comme elles peuvent adopter des niveaux de conservatismes très différents. Certaines politiques de notation tiennent en compte également la dépendance à d'autres contreparties ou la concurrence dans le marché, comme par exemple celles en vigueur sur es portefeuilles de LBO (Levraged Buyout).

Signification de la note	Moody's	S&P	Fitch
Première qualité	Aaa	AAA	AAA
Haute qualité	Aa1	AA+	AA+
	Aa2	AA	AA
	Aa3	AA-	AA-
Qualité moyenne supérieure	A1	A+	A+
	A2	A	A
	A3	A-	A-
Qualité moyenne inférieure	Baa1	BBB+	BBB+
	Baa2	BBB	BBB
	Baa3	BBB-	BBB-
Spéculatif	Ba1	BB+	BB+
	Ba2	BB	BB
	Ba3	BB-	BB-
Très spéculatif	B1	B+	B+
	B2	B	B
	B3	B-	B-
Risque élevé	Caa1	CCC+	CCC
Ultra spéculatif	Caa2	CCC	
Défaut avec possibilité de retour en sain	Caa3	CCC-	
	Ca	CC	CC
	Défaut sélectif	C	C/CI/R
SD			RD
Défaut			D

TABLE 1.1 – Table de notation pour différentes agences

La granularité des échelles de notation internes fournit une classification plus précise du risque. Toutefois, les banques se confrontent à un manque de données à l'issue de l'utilisation de ces notations, et donc se ramènent à des échelles moins granulaires qui agrègent plusieurs notations. De cette manière, elles constituent des échantillons plus acceptables d'un point de vue statistique qui serviront à analyser le comportement des portefeuilles d'une part, et calibrer des modèles et faire des projections d'autre part.

### 1.1.4 Modèles factoriels de défaut et de migration

Les modèles factoriels ou structurels sont des modèles qui découlent de la nécessité de relier les probabilités de défaut ou les matrices de transition aux facteurs macroéconomiques. Introduits par Tobin [131] et popularisés par Black et Scholes [132] puis Merton [133], ces modèles reposent sur la définition de seuils de la valeur de l'actif du bilan à partir desquels une contrepartie change de notation ou en particulier fait défaut. Ces modèles sont très populaires auprès des banques pour leur simplicité analytique d'une part, et pour leur facilité à calibrer en utilisant des données historiques de notation d'autre part. En outre, ces modèles permettent d'exprimer les probabilités de migration ou de défaut conditionnellement à la position dans le cycle macroéconomique. Cela donne la possibilité de faire des prévisions et des d'implémenter des stress-tests en prenant des positions basses dans le cycle.

#### 1.1.4.1 Modèle de défaut

Le modèle de Vasicek [21], est un modèle factoriel des plus populaires dans les banques, et qu'on appelle souvent modèle Bâlois. Il permet de relier à la fois le risque idiosyncratique  $\epsilon_i$  et le risque systémique  $Z_t$  d'une firme  $i$  avec sa valeur  $V_{i,t}$  à un instant  $t$  sous la forme suivante :

$$V_{i,t} = \sqrt{1 - \rho_i} \epsilon_{i,t} + \sqrt{\rho_i} Z_t$$

Où  $Z_t$  et  $\epsilon_{i,t}$  sont indépendants et suivent une loi normale centrée réduite, et  $\rho_i \in [0, 1[$  représente la corrélation au risque systémique ; par conséquent  $V_{i,t}$  suit une loi normale centrée réduite.

Le défaut d'une firme  $i$  est donc conditionné par l'existence d'un seuil  $\gamma_i$  tel que  $V_{i,t} < \gamma_i$ , ce qui veut dire que la firme  $i$  ne peut plus rembourser sa dette. Par conséquent, on peut écrire une probabilité de défaut conditionnelle au facteur commun  $Z_t$  comme suite :

$$\mathbb{P}(V_{i,t} < \gamma_i | Z_t) = \mathbb{P}\left(\epsilon_{i,t} < \frac{\gamma_i - \sqrt{\rho_i} Z_t}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right) = \Phi\left(\frac{\gamma_i - \sqrt{\rho_i} Z_t}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right) \quad (1.1)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale. D'autre part, le seuil  $\gamma_i$  peut être déterminé en prenant la moyenne de ces probabilités de défaut par rapport à  $Z_t$ , ce qui donne par la loi des espérances itérées

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Z_t}[\mathbb{P}(V_{i,t} < \gamma_i | Z_t)] &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(V_{i,t} < \gamma_i | Z_t = z) \phi(z) dz \\ &= \mathbb{P}(V_{i,t} < \gamma_i) \\ &= PD_i \end{aligned}$$

où  $\phi$  représente la densité de la loi de  $Z_t$ , à savoir celle d'une loi normale centrée réduite. Donc

$$PD_i = \mathbb{P}(V_{i,t} < \gamma_i) = \Phi(\gamma_i)$$

Par conséquent,  $\gamma_i = \Phi^{-1}(PD_i)$  et  $PD_i$  représente la probabilité de défaut inconditionnelle de  $i$ . Comme cette probabilité ne dépend que de la firme et du temps, alors elle représente une

probabilité de défaut à partir d'un rating qui est, dans ce cas, celui de l'entité  $i$ . Par conséquent, il convient de noter celle-ci  $PD(r)$  où  $r$  est le rating de l'entité  $i$ , ce qui classe les entités du portefeuille par rating. Nous appelons cette probabilité de défaut TTC (Trough The Cycle), car elle représente une moyenne sur le cycle macroéconomique. Cependant, la probabilité de défaut conditionnelle est appelée PIT (Pointed In Time) par son aspect "ponctuel" dans le temps via une position dans le cycle  $Z_t = z$ .

On fixe une période  $t$  et on s'affranchit de noter le temps dans les variables (uni-période). La perte totale sur un portefeuille de crédit constitué de  $N$  firmes s'écrit alors

$$L = \sum_{i=1}^N \underbrace{\left( \sum_{j=1}^{n_i} EAD_j LGD_j \right)}_{=c_i} \mathbb{1}_{\{V_i < \gamma_i\}}$$

où  $n_i$  représente le nombre de facilités sur la firme  $i$ , et :

- $EAD_j$  : (Exposition At Default) pour la facilité  $j$ .
- $LGD_j$  : (Loss Given Default) pour la facilité  $j$ .
- $\mathbb{1}_{\{V_i < \gamma_i\}}$  : Indicatrice de défaut de la firme  $i$ .

Quelque soit ces paramètres (pas forcément homogènes), la perte moyenne conditionnelle s'écrit sous la forme :

$$\mathbb{E}[L|Z] = \sum_{i=1}^N c_i \Phi \left( \frac{\gamma_i - \sqrt{\rho_i} Z}{\sqrt{1 - \rho_i}} \right)$$

et qu'on considérant que les  $V_i$  sont conditionnellement indépendants, on a

$$\mathbb{V}[L|Z] = \sum_{i=1}^N c_i^2 \Phi \left( \frac{\gamma_i - \sqrt{\rho_i} Z}{\sqrt{1 - \rho_i}} \right) \left( 1 - \Phi \left( \frac{\gamma_i - \sqrt{\rho_i} Z}{\sqrt{1 - \rho_i}} \right) \right)$$

Pour ce qui est de la distribution inconditionnelle, Gordy [114] démontre, en utilisant l'hypothèse de granularité infinie<sup>3</sup>, que asymptotiquement la perte espérée conditionnelle peut s'écrire sous la forme :

$$q_\alpha[L] \sim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N c_i \Phi \left( \frac{\gamma_i - \sqrt{\rho_i} \Phi^{-1}(1 - \alpha)}{\sqrt{1 - \rho_i}} \right) \quad (1.2)$$

en particulier, le capital économique est donnée par  $q_{99.9\%}(L)$ . La différence entre les deux quantités de cette formule est dû au défaut de diversification du portefeuille. En d'autres termes, si un portefeuille est assez large tel que le taux d'exposition sur chaque facilité de crédit est presque nul, alors la VaR de la perte totale devient égale à la somme des VaR des pertes marginales.

3. Cette hypothèse stipule que la concentration sur ce portefeuille est presque nulle, ce qu'on peut exprimer formellement comme

$$\sum_{i=1}^N w_i^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

où  $w_i$  est le pourcentage d'EAD attribué à l'entité  $i$ . La formulation mathématique utilisée par Gordy est cependant différente, celle-ci suppose que  $w_i = O\left(\frac{1}{N^{0.5+\epsilon}}\right)$ .

Les banques calibrent le facteur  $Z$  et  $\rho$  annuellement via des méthodes d'estimation selon les données disponibles. En effet, on note  $R$  le nombre de classes de ratings dans un portefeuille de crédit, et soient  $n_r(t)$  et  $d_r(t)$  respectivement le nombre de clients dans le rating  $i$  et le nombre de défauts observés dans la période  $t$ . La vraisemblance suivante

$$\mathcal{L}(Z_t, \rho | d(t)) = \prod_{r=1}^R \binom{n_r(t)}{d_r(t)} \Phi \left( \frac{\gamma_r - \sqrt{\rho} Z_t}{\sqrt{1-\rho}} \right)^{d_r(t)} \left( 1 - \Phi \left( \frac{\gamma_r - \sqrt{\rho} Z_t}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right)^{n_r(t) - d_r(t)} \quad (1.3)$$

où  $d(t) := (d_1(t), \dots, d_R(t))$ .

Les banques utilisent en général une maximisation de cette vraisemblance pour chaque période  $t$ , avec un  $\rho$  qui garantit la contrainte  $Var(Z) \approx 1$ . Cela fournit une trajectoire de  $Z$  qui représente le cycle économique et un  $\rho$  constant. Il est possible, en cas de disponibilité de données, d'utiliser un  $\rho_r$  par classe de notes, ce qui permet d'établir une structure de dépendance plus fine. Il est également possible de calibrer les  $Z = (Z_t)_t$  et  $\rho$  de manière jointe en maximisant la vraisemblance complète suivante sous contrainte de normalité :

$$\mathcal{L}(Z, \rho | d) = \prod_t \mathcal{L}(Z_t, \rho | d(t)) \quad (1.4)$$

Après cette calibration, les analystes essaient d'expliquer la trajectoire de  $Z$  obtenue par des facteurs macroéconomiques (GDP, taux de chômage, PIB,...) selon les portefeuilles étudiés. Les économistes de leur part fournissent des projections des facteurs macroéconomiques de différentes sévérités pour certains exercices de stress-test, ce qui permet de construire des projections de  $Z$  selon différents scénarios. La trajectoire de  $Z$  projetée dans le futur constitue donc un scénario macroéconomique, auquel sont associés des paramètres du risque et un capital économique décrivant son impact. La sélection des scénarios se fait de différentes manières selon le type de l'exercice. Pour des stress-tests réglementaires, les scénarios sont imposés, alors que dans un exercice de nature interne, les scénarios sont générés de manière quantitative. Les méthodes quantitatives reposent sur les techniques de choix de modèles comme la BACE<sup>4</sup> (Bayesian averaging of classical estimates), le critère d'information d'Akaike et le BIC<sup>5</sup> (Bayesian Information Criterion). L'idée consiste à considérer toutes les combinaisons de  $l \leq L$  facteurs où  $L$  est fixe, et utiliser les critères que nous venons de citer pour sélectionner un modèle en pénalisant par le nombre de facteurs.

### 1.1.4.2 Modèle de migration

Le modèle de transition structurel reprend le même principe que celui du défaut présenté ci-dessus. Comme il est développé dans les travaux de B.Huajian Yang and Z.Du [22] et P.Miu, B.Ozdemir [23], on définit des seuils de transition vers un niveau de notation plus bas quand

4. TTT Cette technique fournit une estimation comme une moyenne pondérée des des estimation par moindres carrés sur toutes les combinaisons possibles des différents facteurs macroéconomiques considérés.

5. C'est un critère d'information dérivé du critère d'Akaike.

la valeur  $V_i$  de l'entité  $i$  est en dessous d'un seuil. En effet, définit les seuils de migration  $b_{k,1} < \dots < b_{k,N} = +\infty$  tels qu'une entité  $i$  passe d'une note  $k$  à une note moins bonne que  $j$  dans la période  $t$  si et seulement si  $V_i(t) < b_{i,N-j+1}$ . Cela nous définit alors des probabilités conditionnelles  $t_{ij}(Z_t)$  d'aller d'une note  $i$  vers une note en dessous de  $j$  par

$$t_{ij}(Z_t) = \mathbb{P}(V_i(t) \leq b_{i,N-j+1} | Z_t) = \Phi\left(\frac{b_{i,N-j+1} - \sqrt{\rho_i} Z_t}{\sqrt{1-\rho_i}}\right)$$

Par conséquent, nous avons une matrice de transition conditionnelle  $P(Z_t)$  dont les coefficients s'expriment par

1.  $p_{i,N}(Z_t) = t_{iN}(Z_t) = \Phi\left(\frac{b_{i,1} - \sqrt{\rho_i} Z_t}{\sqrt{1-\rho_i}}\right)$ .
2. Pour  $1 \leq j < N$ ,  $p_{i,j}(Z_t) = t_{ij}(Z_t) - t_{i,j+1}(Z_t) = \Phi\left(\frac{b_{i,N-j+1} - \sqrt{\rho_i} Z_t}{\sqrt{1-\rho_i}}\right) - \Phi\left(\frac{b_{i,N-j} - \sqrt{\rho_i} Z_t}{\sqrt{1-\rho_i}}\right)$ .

Sous ce schéma, la calibration des seuils  $b_{ij}$  se fait de manière naturelle par passage aux matrices de transition inconditionnelles. En effet, pour tout  $i, j$ , la probabilité de transition s'écrit

$$p_{ij}(Z_t) = \mathbb{P}(b_{i,N-j} \leq V_i(t) \leq b_{i,N-j+1} | Z_t)$$

donc la probabilité inconditionnelle est donnée par

$$p_{ij} = \mathbb{E}_Z(\mathbb{P}(b_{i,N-j} \leq V_i(t) \leq b_{i,N-j+1} | Z_t))$$

Or  $\mathbb{E}_Z\left(\Phi\left(\frac{b_{ij} - \sqrt{\rho_i} Z_t}{\sqrt{1-\rho_i}}\right)\right) = \Phi(b_{ij})$  pour tout  $i, j$ , alors pour  $j < N$  on a  $p_{ij} = \Phi(b_{i,N-j+1}) - \Phi(b_{i,N-j})$ , et  $p_{iN} = \Phi(b_{i,1})$ . Par la suite, les seuils s'écrivent comme  $b_{ij} = \Phi^{-1}(\sum_{k \geq j} p_{ik})$  où  $\sum_{k \geq j} p_{ik}$  est la probabilité inconditionnelle de migrer vers une note plus basse que  $j$ , ce qui représente  $\mathbb{E}_Z(t_{ij}(Z))$ . Le facteur  $Z$  peut se calibrer via la même méthode de maximum de vraisemblance vu dans la section précédente, car le modèle de transition coïncide avec le modèle de défaut.

## 1.1.5 Modèles Markoviens et estimation des matrices de migration

### 1.1.5.1 Modèle à temps discret (Cohorte)

Soit  $(X_n)_n$  un processus de notation dans  $\{1, \dots, N\}$  à temps discret, on suppose qu'il est Markovien<sup>6</sup> (La note présente ne dépend que de la note passée). Pour estimer les probabilités de transition  $p_{ij}$  sur une période donnée, on maximise la vraisemblance multinomiale suivante

$$\mathcal{L}(P) = \prod_{i,j} p_{ij}^{N_{ij}}$$

où  $N_{ij}$  est le nombre de transitions de  $i$  vers  $j$ , et on note  $N_i = \sum_{j=1}^N N_{ij}$ . L'estimateur qui maximise cette vraisemblance est alors donné par

$$\hat{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i}$$

6. Le processus  $(X_n)_n$  est de Markov si et seulement si  $\mathbb{P}(X_n | X_{n-1}, \dots, X_1) = \mathbb{P}(X_n | X_{n-1})$ .

Cette méthode d'estimation est appelée Cohorte, et elle est très utilisée au sein des banques sur des historiques de notation internes ou externes provenant d'agences de notation comme Moody's et S&P. Cependant, cet estimateur produit des matrices avec beaucoup de coefficients nuls quand les périodes ne sont pas assez grandes, à cause du manque d'observations. De plus, celui-ci ne capte pas les transitions intermédiaires avant migration vers une note à cause de son caractère discret. Une solution à ce problème est le modèle à temps continu.

### 1.1.5.2 Modèle homogène à temps continu

On considère un processus de notation  $(X_t)_t$  à temps continu à valeur dans  $\{1, \dots, N\}$ , et on suppose que c'est une chaîne de Markov<sup>7</sup> homogène<sup>8</sup>. On considère la variable aléatoire  $S_i$  définie comme le temps passé dans une note  $i$  avant migration, il est connu que cette variable suit une loi exponentielle grâce à la propriété de Markov (voir Norris [128]). On note  $\lambda_i$  le paramètre de cette loi, alors la probabilité qu'une migration de  $i$  apparaisse dans une période  $\delta t$  s'écrit

$$\mathbb{P}(X_{t+\delta t} \neq i | X_t = i) = \lambda_i \delta t + o(\delta t)$$

par homogénéité on définit alors pour tout  $i \neq j$  l'intensité

$$\lambda_{ij} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X_{\delta t} = j | X_0 = i)}{\delta t}$$

D'autre part, en considérant les probabilités de saut de  $i$  vers  $j$  définies par  $\mathbb{P}(X_{t+\delta t} = j | X_t = i, X_t \neq i)$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+\delta t} = j | X_t = i, X_t \neq i) &= \frac{\mathbb{P}(X_{t+\delta t} = j | X_t = i)}{\mathbb{P}(X_{t+\delta t} \neq i | X_t = i, X_t \neq i)} \\ &= \frac{\lambda_{ij} \delta t + o(\delta t)}{\lambda_i \delta t + o(\delta t)} \end{aligned}$$

donc en tendant  $\delta t$  vers 0, on obtient

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \mathbb{P}(X_{t+\delta t} = j | X_t = i, X_t \neq i) = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}$$

Or  $\sum_{j \neq i} \mathbb{P}(X_{t+\delta t} = j | X_t = i, X_t \neq i) = 1$ , alors  $\lambda_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$  pour tout  $i$ . On définit alors le générateur infinitésimal de  $(X_t)_t$  par

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & -\lambda_2 & \dots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \dots & -\lambda_N \end{pmatrix}$$

On note  $P(t, s)$  la matrice de transition dans la période  $[t, s]$ , on a alors

$$P(t, t + \delta t) = I + \Lambda \delta t + o(\delta t)$$

7. Une chaîne de Markov  $(X_t)_t$  à temps continu vérifie la propriété  $\mathbb{P}(X_{s+t} | X_u; u \leq s) = \mathbb{P}(X_{s+t} | X_s)$ .

8. Une chaîne de Markov  $(X_t)_t$  est homogène si  $\mathbb{P}(X_{s+t} | X_s) = \mathbb{P}(X_t | X_0)$  pour tout  $t$ .

donc si  $s - t = m\delta t$ , alors on peut écrire  $P(t, s) = (I + \delta t \Lambda)^m + o(\frac{\delta t}{m})$ . En tendant le nombre de pas  $m$  vers l'infini, on a

$$P(t, s) = \exp((s - t)\Lambda)$$

Donc estimer les coefficients du générateur permettrait d'estimer la matrice de transition. On suppose qu'on dispose sur une période  $T$  des observations de transitions. Alors la vraisemblance d'observer une transition de  $i$  vers  $j$  à un instant  $t_1$ , suivie d'une transition de  $j$  vers  $k$  à  $t_2$ , ect s'écrit comme un produit  $\exp(-\lambda_i(t_2 - t_1))\lambda_{ij} \exp(-\lambda_j(t_3 - t_2))\lambda_{jk} \dots$ , donc on a

$$\mathcal{L}(\Lambda) = \prod_{i=1}^N \prod_{i \neq j} \lambda_{ij}^{N_{ij}} \exp(-\lambda_i R_i(T))$$

où  $N_{ij}$  est le nombre de transitions de  $i$  vers  $j$  dans cette période, et  $R_i(T) = \int_0^T \mathbb{1}(X_s = i) ds$ . L'estimateur de vraisemblance dérivé est alors donné par

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{N_{ij}}{R_i(T)}$$

Comme pour la méthode cohorte, certaines intensités vont être nulles sur des petites périodes, mais l'application de l'exponentielle matricielle comble ces valeurs nulles. Cela vient des puissances successives du générateurs dont les coefficients encodent toutes les intensités de transition en passant par un nombre de notes intermédiaires.

### 1.1.5.3 Modèle non-homogène à temps continu

On supprime maintenant l'hypothèse d'homogénéité de la chaîne de Markov  $((X_t)_t)$  faite dans la section précédente, donc la matrice de transition  $P(t, s)$  ne dépend pas que de  $s - t$ , mais de toute la période  $[t, s]$ . De la meme manière, on définit les intensités

$$\alpha_{ij}(t) := \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X_{t+\delta t} = j | X_t = i)}{\delta t}$$

pour tout  $i \neq j$  et  $\alpha_i(t)$  l'intensité de la probabilité de sortie de la note  $i$  au voisinage de  $t$ . En utilisant les memes arguments que pour le cas homogène, on a

$$\alpha_i(t) = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}(t)$$

On définit les intensités cumulées  $A_{ij}(t) := \int_0^t \alpha_{ij}(s) ds$  et  $A_{ii}(t) := -\sum_{j \neq i} A_{ij}(t)$  pour tout  $t$  et  $i \neq j$ . La matrice  $P(t, s)$  vérifie les équations différentielles de Kolmogorov suivantes

— Équation *Forward* :

$$\frac{\partial P(t, s)}{\partial s} = P(t, s)A(s)$$

— Équation *Backward* :

$$\frac{\partial P(t, s)}{\partial t} = A(t)P(t, s)$$



où  $A(t) = (A_{ij}(t))_{i,j}$ . Ce système d'équations admet une solution qui ne s'exprime pas sous forme exponentielle comme pour le cas homogène, mais nécessite l'introduction du produit intégral  $\mathcal{P}$  qui est une version continue du produit. Cette solution s'écrit alors

$$P(t, s) = \mathcal{P}_{u \in ]t, s]}(I + dA(u))$$

On peut estimer sur un échantillon d'historique de notation les intensités cumulées en se référant à l'estimateur de Nelson-Aalen [129, 130] suivant

$$\hat{A}_{ij}(t) = \sum_k \frac{1}{Y_i(T_{ij}(k))}$$

où les  $T_{ij}(1) < T_{ij}(2) < \dots$  sont les instants de saut dans le processus de transition  $N_{ij}(t) = \{s \leq t | X_{s^-} = i, X_s = j\}$  pour tout  $i \neq j$ , et  $Y_i(T_{ij}(k))$  le nombre d'entités dans le rating  $i$  à l'instant  $T_{ij}(k)$ . De cette façon, on obtient l'estimateur d'Aalen-Johansen suivant

$$\hat{P}(t, s) = \prod_{k=1}^m (I + \Delta \hat{A}(T_k))$$

où les  $T_i$  sont les instants de saut du rating  $i$  dans  $]s, t]$ , et  $\Delta \hat{A}(T_k) = \hat{A}(T_k) - \hat{A}(T_{k-1})$  qui s'exprime comme

$$\Delta \hat{A}(T_k) = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta N_1(T_k)}{Y_1(T_k)} & \frac{\Delta N_{12}(T_k)}{Y_1(T_k)} & \cdots & \frac{\Delta N_{1N}(T_k)}{Y_1(T_k)} \\ \frac{\Delta N_{21}(T_k)}{Y_2(T_k)} & -\frac{\Delta N_2(T_k)}{Y_2(T_k)} & \cdots & \frac{\Delta N_{2N}(T_k)}{Y_2(T_k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta N_{N1}(T_k)}{Y_N(T_k)} & \frac{\Delta N_{N2}(T_k)}{Y_N(T_k)} & \cdots & -\frac{\Delta N_N(T_k)}{Y_N(T_k)} \end{pmatrix}$$

Il est possible d'exprimer la matrice  $\hat{P}(t, s)$  sous forme exponentielle à condition que toutes les matrices  $\Delta \hat{A}(Y_k)$  commutent deux à deux. En effet, si  $A, B$  sont deux matrices de transition qui commutent, alors leurs générateurs  $\Lambda_A$  et  $\Lambda_B$  commutent également via les équations de Kolmogorov, par conséquent on a  $AB = \exp(\Lambda_A + \Lambda_B)$ . Donc on appliquant cela sur toutes les estimations, on a  $\hat{P}(t, s) = \exp(\int_s^t \Lambda_{I + \Delta \hat{A}(u)} du)$ . Toutefois, cette condition n'est jamais vérifiée, et forcer les matrices à avoir cette propriété est très coûteux en terme d'erreur et de calculs.

## 1.2 Les stress tests bancaires

### 1.2.1 Nature et structure des stress tests

Un test de résistance bancaire, ou « stress test », est un exercice consistant à simuler des conditions économiques et financières extrêmes, mais plausibles, afin d'en étudier les conséquences sur les banques et de mesurer leur capacité de résistance à de telles situations. Ces tests sont menés par les banques centrales (et superviseurs) ou par les banques elles mêmes, on parle respectivement de stress-tests réglementaires et internes. Les stress-tests ont été mis en place par les banques centrales et les autorités de supervision bancaire vers la fin des années 1990.

Dès cette époque, les crises bancaires et financières, devenues plus fréquentes qu'auparavant, et notamment la crise asiatique de 1997, avaient mis en évidence le rôle de la détérioration des facteurs macroéconomiques (évolution de la consommation et des investissements, taux de chômage, inflation. . .) dans le déclenchement des crises bancaires. Ces facteurs n'étaient pas suffisamment pris en compte à cette époque dans les méthodes de régulation et de supervision bancaires (ratios prudentiels, contrôle interne des risques, suivi individuel des établissements financiers par les autorités de supervision comme par les agences de notation).

Un stress-test vise en outre à mesurer l'impact du choc macroéconomique sur les volumes et les risques de crédit portés par les banques, sur la valeur de leurs actifs et bien évidemment leur ratio de solvabilité, ce type de stress-tests sont dits macroéconomiques. Un stress test doit ainsi mettre à l'épreuve la capacité des banques à affronter des cataclysmes économiques. Dans ce cas, les banques doivent réagir aux résultats non favorables, soit en augmentant leurs fonds propres, soit en opérant à des restructurations (réductions des engagements de crédits par exemple).

Le stress test est un exercice qui dépend de la structure qui l'applique, du choix des outils utilisés pour la modélisation et des données disponibles pour calibrer les modèles et construire les scénarios. Par conséquent, la structure des exercices de stress-test diffère d'une institution à une autre. Cependant, les stress-tests reposent en général sur quatre piliers, à savoir le choix des scénarios, le choix des modèles, le calcul d'impact et son analyse, et enfin la prise de décision et prise en compte des effets de second ordre. La figure 1.1 schématise l'intégration de ces piliers dans le processus d'un stress-test. Les modèles utilisés dans les stress-tests peuvent contenir selon la nature de l'exercice une modélisation de la contagion, comme par exemple dans un stress-test interbancaire réalisé par la banque centrale, ou la prise en compte de l'interdépendance en risque de crédit.

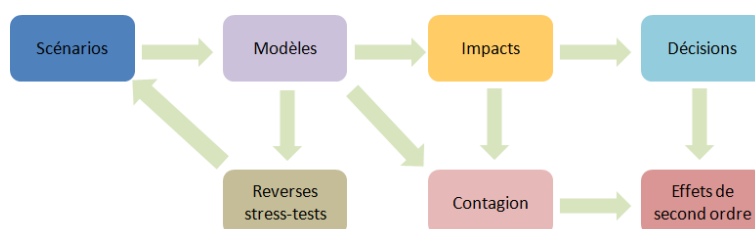


FIGURE 1.1 – Structure des stress-tests

Un stress-test consiste à définir plusieurs scénarios de différents horizons (en général d'un an à 10 ans) qui peuvent être historiques ou hypothétiques. Les scénarios historiques sont des scénarios économiques qui se sont déjà produits, comme des anciennes crises, alors que les scénarios hypothétiques sont des scénarios imaginés par des économistes et des experts. Les scénarios hypothétiques doivent être plausibles, dans la mesure où leurs probabilités de réalisation ne soient pas extrêmement faibles, et leur construction devrait obéir à une logique économique rigoureuse. Les scénarios doivent être de différentes sévérités, on parle en général de scénario *Favorable*, de

*base* ou *baseline* et *adverse* dans un ordre croissant de sévérité. Un scénario favorable reflète une économie en bonne santé, et le scénario de base reflète un état neutre de l'économie, alors que l'adverse doit représenter une économie en mauvaise santé. Les scénarios dits macroéconomiques sont construits via des hypothèses sur les facteurs macroéconomiques, comme le PIB ou le taux de chômage, en fonction des portefeuilles stressés. Pour des scénarios adverses, on suppose en général un fort ralentissement de la croissance, une hausse du chômage, une chute des marchés boursiers ou une hausse des crédits non remboursés. Les stress-tests se déroulent sous deux schémas différents, *Bottom – up* (du bas vers le haut) ou *Top – down* (du haut vers le bas). Le principe d'un stress-test Top-down est d'appliquer sur un ensemble d'institutions financières des scénarios, en utilisant les données agrégées de celles-ci, afin d'analyser leur résistance à des scénarios catastrophes. Cette approche est dite aussi macro-prudentielle, elle est appliquée en général par les banques centrales et les superviseurs sur les grandes institutions financières. Il en découle également une analyse de la stabilité financière, en analysant les effets de contagion susceptibles de transmettre une forte dégradation ou un éventuel défaut d'une institution. Plusieurs modèles sont utilisés sur les réseaux financiers, afin de tenir en compte l'interdépendance générée par les inter-expositions entre les banques. Celles-ci s'intéressent également à ce genre d'approche, afin de s'assurer de leur résilience face au défaut d'une banque à laquelle elles sont reliées. Gouriéroux, C., Héam, J.C., et Monfort, A [137] utilisent un modèle qui connecte les bilans des banques d'un réseau via les interexpositions, et les pourcentages de d'actifs détenus croisés. Dans la même optique, Amini, H., Cont R., and Minca, A [37] s'intéressent à la stabilité des réseaux financiers face à un choc macroéconomique, ils analysent la taille des clusters de défaut formés par des dépendances entre les bilans des différents membres du réseau.

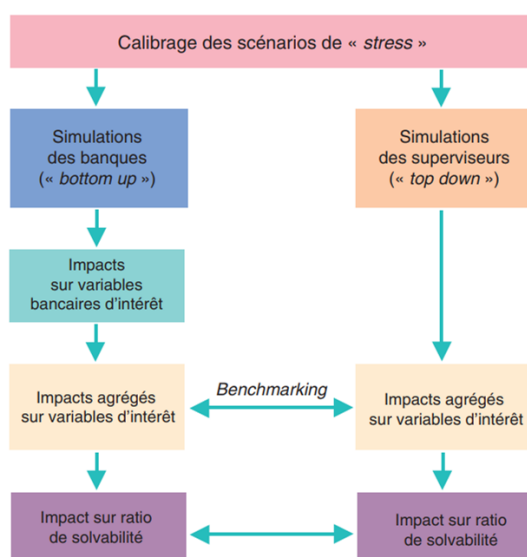


FIGURE 1.2 – Les différences de structure entre les stress-tests bottom-up et top-down

Les stress tests Bottom-up sont des approches beaucoup plus fines, qui peuvent atteindre le niveau facilité en cas de disponibilité des données, et permettent à la banque de stresser ses portefeuilles pour avoir une vision d'ensemble sur sa résilience en agréant ses résultats. Cette approche est clairement plus précise qu'un stress-test Top-down, et donne une vision plus précise sur les activités les plus vulnérables en cas d'une crise. En revanche, l'approche Bottom-up nécessite beaucoup plus de données (données sur chaque facilité par client). De plus, elle génère une grande complexité opérationnelle, quant à l'agrégation des scénarios, qui sont principalement développés indépendamment les uns des autres sur chaque segment du portefeuille, et des résultats qui provient de modèles différents. Bien que les stress-tests bottom-up et top-down soient radicalement différents, ils constituent l'un pour l'autre un moyen de vérification et comparaison des résultats comme le montre la figure 1.2.

Les superviseurs bancaires évaluent et mesurent régulièrement les risques qui pèsent sur chaque banque. Cette activité essentielle est menée en Europe au titre du « processus de surveillance et d'évaluation prudentielle » (Supervisory Review and Evaluation Process, SREP<sup>9</sup>) qui s'inscrit au pilier 2 de la réglementation Bâloise. Le SREP fait la synthèse des constats établis par les autorités prudentielles au cours d'une année et impose aux banques certaines améliorations. Pour cette raison, des stress-tests sont mis en œuvre afin de tester la conformité des banques aux exigences réglementaires en terme de capital dans le cadre de l'ICAAP<sup>10</sup> (Internal Capital Adequacy Assessment Process), ainsi qu'aux exigences en terme de liquidité dans le cadre de l'ILAAP<sup>11</sup> (Internal liquidity Adequacy Assessment Process). Ce processus va encore plus loin en examinant le modèle d'activité, en d'autres termes, les superviseurs évaluent la soutenabilité de la structure de chaque banque, en d'autres termes, la diversité de leurs activités. Ainsi, une banque se concentrant sur les activités maritimes et pétrolières serait très vulnérable face à un ralentissement des échanges commerciaux mondiaux ou à des prêts risqués accordés aux chantiers navals ou des compagnies pétrolières. Le superviseur examine également la gouvernance et la gestion des risques, en analysant la structure organisationnelle des banques, notamment leurs organes de direction, et vérifient si leur gestion des risques est adéquate.

### 1.2.2 Plausibilité et choix des scénarios

La plausibilité des scénarios est une des bases d'un stress-test réaliste et irréprochable. Les guides de bonnes pratiques destinés aux régulateurs et aux institutions financières indiquent que le scénario considéré doit être à la fois sévère et plausible (voir [142]). En cas d'une modélisation adéquate, un scénario plausible donnerait des résultats qui reflètent la vraie capacité

---

9. Le concept de SREP a été introduit pour la première fois en 2004 avec les accords de Bâle II définis par le Comité de Bâle sur le contrôle bancaire. Une mise à jour des règles a été mise en œuvre dans l'Union européenne en 2006 et appliquée par les différentes autorités de surveillance nationales depuis lors.

10. Processus de contrôle de la solvabilité des banques sous bâle III.

11. Processus de contrôle du ratio de liquidité LCR mis en place sous bâle III.

de résistance de la banque quelque soit sa sévérité. La plausibilité des scénarios est une notion qui n'a pas de cadre théorique bien défini, car dans la littérature elle prend plusieurs formes comme une probabilité, une entropie, ou parfois une distance d'un espace de scénarios défini de manière géométrique. Les stress-tests dits de première génération reposent sur la donnée d'un scénario comme un point<sup>12</sup> à qui on associe un risque, alors que les stress-tests dits de deuxième génération utilisent un scénario probabiliste. Selon T.Breuer et I.Csiszar [6], les stress tests de première génération qui se basaient sur l'approche ponctuelle, ne respectaient pas les exigences requises par Bâle II. En effet, Bâle II exige que les scénarios doivent être sévères et plausibles, donc choisir un point ne donne aucune garantie sur la plausibilité du scénario d'un point de vue quantitatif. Dans des travaux antérieurs, T.Breuer et Krenn [134] définissent les scénarios comme étant des réalisations d'une distribution elliptique, ce qui permet de borner les possibilités des différentes composantes du scénario. Avoir un ensemble de scénarios borné permet de calculer le maximum de la fonction des pertes qu'on lui associe, et de déterminer le scénario dit *worstcase* ou catastrophique. Ils définissent la plausibilité du scénario comme étant sa distance de Mahalanobis du scénario moyen, ce qui leur permet de trouver le *worstcase* en maximisant la fonction de perte sous la contrainte d'un niveau de plausibilité donné. T.Breuer et I.Csiszar [6], définissent quant à eux le scénario comme une distribution dont la plausibilité est mesurée via son entropie relative à une distribution de référence. Donc la recherche du *worstcase* revient à la recherche de la distribution sous laquelle l'espérance de la perte est maximale, sous contrainte d'une entropie relative qui ne dépasse pas un certain niveau.

La plausibilité des scénarios et son lien avec Bâle III comme étant une réglementation plus contraignante est discutée dans les travaux de C.Schmieder, C.Puhr et M.Hasan [10]. Sur des réglementations plus locales, comme discuté dans l'article de la réserve fédérale [12], on s'intéresse également à l'impact de la projection des scénarios et leur plausibilité. Une des difficultés de simuler des scénarios extrêmes réside dans leur rareté, M.Kalkbrener et N.Packham [7] et M.Kalkbrener et N.Packham [8] s'intéressent aux queues de distributions des scénarios, ils fournissent une manière de calculer les probabilités de pertes sous scénarios très rares en utilisant des méthodes asymptotiques.

### 1.2.3 Reverse stress tests

Contrairement aux stress-tests, un reverse stress test est un exercice qui permet de chercher les scénarios qui produisent un niveau de perte donné. Un reverse stress test fait le chemin inverse d'un stress-test, d'où sa dénomination. Celui-ci fait partie des outils stratégiques de pilotage et de gestion des risques de la banque en lien avec son business model. En effet, les décisions du management d'une banque peuvent parfois conduire vers des prises de risque, donc en les considérant comme des scénarios stratégiques possibles, on peut via un reverse stress-test savoir quelles sont les décisions à prendre ou à éviter. Bien que les reverse stress-tests sont des

---

12. On désigne par un point un vecteur de valeurs de facteurs macroéconomiques.

exercices séparés des stress-tests, ils restent complémentaires dans la mesure où ils apportent des réponses sur les scénarios plausibles et sévères qui génèrent un certain niveau de risque. Le reverse stress test trouve tout son intérêt dans la possibilité qu'il offre aux banques et aux régulateurs de confirmer ou redéfinir les scénarios adverses. En outre, les régulateurs demandent aux banques de justifier la sévérité des scénarios des stress tests internes, ce qui pourrait être l'une des utilisations des reverse stress tests.

Le régulateur anglais FSA (Financial Services Authority) exige que les grandes banques anglaises utilisent les résultats des reverse stress-tests comme étant un outil de pilotage et de prise de décision complémentaire aux stress-tests (voir [86]). Il considère également que l'utilisation de cet outil pour piloter les stratégies et définir les business models comme partie intégrante du processus de gouvernance et par suite un facteur important des exigences qualitatives requises. Il existe peu d'approches pour faire des reverse stress-tests, P. Grundke [77, 79, 80] propose un processus de reverse stress-test par étapes : la première étape consiste à résoudre un problème d'inversion d'un modèle à facteur afin de calculer des scénarios macroéconomiques et leurs probabilités de réalisation. La deuxième étape est une sélection des scénarios les plus probables, la troisième est une application de l'ACP (Analyse de composantes principales) afin de réduire la dimension des facteurs macroéconomiques et finalement l'estimation du risque de modèle associé à cette approche. Toujours dans l'optique des scénarios macroéconomique, J. Skoglund et W.Chen [81] utilisent la théorie de l'information, notamment l'entropie de Kullback, pour extraire des facteurs macroéconomiques ceux qui expliquent un niveau de perte donné. Une autre approche de A.Abdymomunov, S.Blei et B.Ergashev [83], cherche le scénario qui produit le maximum de pertes sous des contraintes de plausibilité. Ces contraintes de plausibilité sont définies comme la fréquence d'occurrence des scénarios.

### 1.2.4 Prise de décision et effets de second ordre

L'évolution de la réglementation ces dernières années a donné aux stress-tests une importance majeure dans le secteur bancaire. En effet, réussir les stress-tests réglementaires sur les plans qualitatifs et quantitatifs est devenu indispensable pour les banques afin d'éviter les pénalités imposées par le superviseur. Ces pénalités peuvent prendre la forme d'un surplus de RWA, des restrictions sur des décisions internes comme la distribution des dividendes, le payout aux actionnaires et les rémunérations. Ce qui a un impact profond sur la banque dans son ensemble, car cela peut parfois agir sur les parts variables des salaires des employés. Par conséquent, le "top management" des banques a commencé à s'intéresser sérieusement aux contraintes qualitatives des stress-tests qui étaient encore considérées il y a quelques années comme résiduelles. L'impact d'un scénario constitue un output très important, mais son interprétation et ce qui en résulte au niveau décisionnel sont aussi au même niveau d'importance, et ils sont regardés de près par le superviseur. Les décisions prises varient entre vente d'actions, réduction d'activité, arrêt

d'activité..., selon la sévérité d'un scénario, celle de son impact et des contraintes réglementaires. Aux Etats-Unis, CCAR<sup>13</sup> constitue aujourd'hui une contrainte très pesante sur les banques, dès son entrée en vigueur des banques ont renoncé à certaines activités. En d'autres termes, après avoir testé un scénario très adverse, ces banques en sont arrivés à la conclusion qu'il fallait beaucoup plus de capital pour se couvrir. Par conséquent, ils renoncent aux activités sur lesquels les stress tests indiquent un besoin considérable de capital (voir [76] pour plus de détails).

Les décisions prises par les banques (vente d'actifs, arrêt d'une activité,...) ont souvent un effet de second ordre, qu'on appelle aussi en anglais *feedback – effect* ou *knock – on*. En général, l'effet de second ordre ne peut s'expliquer que par les répercussions d'une décision. En effet, un effet de second ordre ne provient pas nécessairement d'une décision prise dans la banque, mais peut être également un effet de propagation du risque par effet de contagion. Un des cas les plus concrets d'un effet de second ordre est celui d'une banque qui veut acheter des options pour se couvrir d'un risque imminent, sauf que le risque a été perçu par d'autres banques qui veulent se couvrir de la même manière. Cela entraîne une hausse du prix de l'option, et la banque se retrouve face à une perte supplémentaire causée par la hausse des prix, qui est une conséquence d'un scénario de détérioration. Toutefois, cet effet de second ordre n'est pas la conséquence d'une décision faite par la banque, mais une combinaison de décisions des banques suite à un choix économique. Donc il est extrêmement compliqué de comprendre les retombées d'une situation de stress, notamment quand elle implique plusieurs acteurs de marché. Les effets de second ordre résultants d'une décision de la banque suite à des résultats de stress-tests sont également très difficiles à prédire. Ce qui explique la littérature inexistante sur ce sujet.

## **1.3 Les stress tests en Europe et aux États unis**

### **1.3.1 Évolution des stress tests après la crise des subprimes**

En 2004, le comité de Bâle a mis en place les accords de Bâle II afin d'améliorer et compléter celles de Bâle I, qui n'a pas pu empêcher des crises entre 1995 et 1998 (Crise mexicaine, crise asiatique, faillite LTCM). Le pilier 2 des accords de Bâle II exige une supervision avec des échanges réguliers entre les banques et le superviseur, cela se matérialise notamment par des tests de résistance qui défient les banques sur plusieurs niveaux face à des scénarios de crise. Les stress-tests effectués avant la crise des subprimes en 2008 n'avaient pas décelé la gravité de la crise bancaire imminente dont les premiers signes ont été remarqués par très peu d'institutions financières qui s'intéressaient aux crédits immobiliers. Les notes très favorables fournies par les agences de notation, et les risques insensés pris par les banques faute des faibles exigences en capital de Bâle I ont amplifié les retombées de cette crise. Après le choc lié à la faillite de la banque Lehmann Brothers en septembre 2008, un test de résistance à grande échelle

---

13. Comprehensive Capital Analysis and Review est un dispositif mis en place par la FED afin d'assurer la supervision des grandes banques et institutions financières.

a été effectué, dont les résultats sont publiés en mai 2009, aux États-Unis par le Gouvernement et la Banque Centrale des États-Unis (la FED), afin d'apaiser les investisseurs et rassurer les actionnaires, ce qui a donné une importance jamais connue auparavant aux stress-tests bancaires. Ce stress test a été opéré sur les 19 banques les plus importantes, 9 de ces banques soumises à l'exercice sont apparues suffisamment capitalisées. Les autorités ont exigé aux 10 banques sous capitalisées de se couvrir à hauteur de 75 milliards de dollars pour l'ensemble d'entre elles. Des critiques ont été portées notamment sur l'insuffisante sévérité des scénarios appliqués et des enchaînements retenus dans le scénario adverse. Les grandes banques américaines testées ont pu, dans une certaine mesure, négocier leurs résultats avec les autorités, néanmoins la transparence donnée à ces résultats ont cependant eu des effets positifs. Ils ont également aidé à dissiper la méfiance généralisée des banques sur leur état de santé et à redonner vie au marché interbancaire des prêts indispensables au fonctionnement normal d'un système bancaire.

En 2010, un test de résistance a été réalisé en Europe afin d'apaiser les inquiétudes liées à la crise et à la santé du système bancaire. Il a étudié la capacité de résistance de 91 grandes banques européennes à deux scénarios négatifs. L'un correspond à une détérioration de l'économie pendant deux années consécutives, et l'autre incluant en plus un choc sur une dette souveraine. Quatre banques françaises ont été testées : BNP Paribas, Crédit agricole, BPCE et Société Générale. Les résultats ont été publiés en juillet 2010, et ils étaient positifs pour les banques françaises testées. Au niveau européen, sept établissements se sont révélés défaillants et trois n'ont supporté les chocs que de justesse, toutefois, ce test a été critiqué pour son "indulgence" au niveau de la sévérité des scénarios. De plus, il n'a pas apporté plus d'information que les notes attribuées par les agences de notation, puisque la fragilité des sept banques ayant échoué au stress test était connue. Ce résultat ne concernait pas les investisseurs et n'a donc pas eu l'effet rassurant escompté. En outre, en juillet 2010, plusieurs banques ayant passé les tests avec succès ont ensuite connu de graves difficultés, notamment les banques irlandaises qui ont dû être recapitalisées par l'État. Ce qui a eu de graves répercussions sur le déficit public irlandais qui est passé de 14 % du PIB en 2009 à 32 % en 2010, en entraînant un rebond de la crise de la dette souveraine dans la zone Euro.

Malgré les résultats décevants des stress tests de 2010, les dirigeants européens se sont mis d'accord sur le lancement d'une nouvelle série de stress-tests en 2011 sous le contrôle de la nouvelle Autorité Bancaire Européenne EBA en place depuis le 1er janvier 2011. Pour se constituer une crédibilité et justifier son utilité, l'EBA a durci les contraintes réglementaires. Le test a été fondé sur des hypothèses plus pessimistes quant à la conjoncture économique. Les hypothèses retenues prévoyaient une baisse de 0,4 % du produit intérieur brut (PIB) de la zone euro pour 2011 et 0 % en 2012, une chute de 15 % des Bourses européennes, un taux de chômage moyen supérieur à 10 %; et des ratios de solvabilité plus stricts étaient exigés. Les banques ont également dû détailler, pour la première fois, leur exposition au risque dit



"souverain", c'est-à-dire les montants de dette publique de pays en difficulté qu'elles ont accumulés. Toutefois, celles-ci ont refusé de tester l'hypothèse de défaillance d'un État souverain, estimant que cette hypothèse n'était pas plausible. Résultat, les quatre principales banques françaises (BNPP, Société Générale, BPCE et Crédit Agricole) ont passé l'examen avec succès, alors que 8 banques européennes ont échoué. Il s'agit de cinq banques espagnoles, de deux banques grecques et d'une banque autrichienne. Pour être sécurisées, elles ont dû rapidement augmenter leurs fonds propres (à hauteur de 2,5 milliards d'euros). A cela s'ajoute le cas litigieux de la banque allemande régionale de Hesse-Thuringe (Helaba) qui a refusé que l'on publie ses résultats, après avoir contesté la méthodologie de l'EBA. En outre, 16 banques n'ont réussi l'examen que de justesse, par conséquent elles devaient également annoncer des mesures de redressement. La Grèce (2 banques en échec et 2 banques fragiles sur 6 testées), qui n'arrive plus à financer sa dette publique auprès des investisseurs privés, a dû trouver des ressources supplémentaires pour réaliser cette consolidation bancaire. Le système bancaire espagnol (12 banques en échec ou fragiles sur 25 testées) apparaît également encore loin d'être totalement assaini. Par contre, le test a été positif pour les banques de l'Italie, du Portugal et de l'Irlande, et d'autres pays actuellement au cœur de la crise de la dette publique européenne.

Dans la même période (2010), la FED n'a pas opté pour un stress-test, mais ce n'était pour les banques qu'une question de temps avant l'entrée en vigueur de la grande réforme annoncée par le président Obama, pour promouvoir la stabilité financière des États-Unis, en améliorant la "responsabilisation" et la transparence dans le système financier. Ainsi mettre fin au TBTF<sup>14</sup>, pour protéger le contribuable américain en mettant aussi fin aux sauvetages financiers (ending bailouts), pour protéger le consommateur des pratiques de services financiers abusifs. Cette réforme est appelée DFA<sup>15</sup>, et vise à grandement contraindre les grandes banques américaines dites BHC<sup>16</sup>. En effet, le DFA exige beaucoup plus que la réglementation qui l'a précédé au niveau du capital (règle Volcker : seulement 3% de leurs fonds propres dans l'investissement du capital et les hedge funds) avec plus de contrôle et d'interrogation par la FED, ainsi que l'instauration de stress-tests annuels dits DFAST<sup>17</sup>. Les banques étaient dans une période de préparation à ces stress-tests, en adoptant une stratégie de recapitalisation et de restructuration de leurs processus internes qui seront testés sous CCAR<sup>18</sup> qui était en préparation pour une éventuelle entrée en vigueur en 2011. L'objectif de celui-ci est de sonder la politique interne, et

---

14. Too Big To Fail : C'est un concept économique qui décrit la situation d'une banque ou toute autre institution financière dont la faillite aurait des conséquences systémiques désastreuses sur l'économie et qui par conséquent se retrouve renflouée par les pouvoirs publics dès lors que ce risque de faillite est avéré.

15. Dodd-Frank Act ou Dodd-Frank Wall Street Reform and Consumer Protection Act, est une loi du Congrès des États-Unis adoptée en 2010. Elle est le principal volet législatif de la réforme du marché financier engagée durant la présidence de Barack Obama à la suite de la crise des subprimes et la crise financière et économique qui s'en est ensuivie.

16. Bank Holding Company : banques à plus de 10 milliards de dollars d'actifs

17. Dodd-Frank Act Stress Tests

18. Comprehensive Capital Analysis and Review : C'est une réglementation mise en place par la réserve fédérale US afin de réglementer, mesurer et superviser les grandes banques et les institutions financières.

le business plan des BHC à plus de 50 milliards de dollars d'actifs sous des scénarios de stress qualitatifs définis par la FED. Les banques doivent répondre aux exigences de CCAR en envoyant les résultats des stress-tests appliqués sous les scénarios élaborés par la FED. Les banques qui ont entre 10 et 50 milliards d'actifs sont soumis seulement au DFAST, au delà de ce seuil, il faut répondre à la fois au CCAR et au DFAST.

En 2011 et 2013, les grands établissements financiers européens et américains ont été soumis à un nouveau stress-test avec des résultats plus satisfaisants en moyenne, à l'exception de certaines banques espagnoles et grecques. De son côté la FED a mené un nouveau stress test (sous DFAST et CCAR) sur les 18 plus grandes banques américaines. Ces banques représentent à elles seules plus de 70 % des actifs bancaires du pays. La banque centrale américaine a choisi des conditions extrêmes pour mieux tester ces banques : taux de chômage de 12 %, chute des actions de 50 % et recul du PIB de 5 %. L'objectif principal est d'analyser le ratio de fonds propres durs, c'est-à-dire le rapport entre les fonds propres de la banque et ses engagements pondérés des risques ( de crédits, de marché et opérationnel), qui doit être supérieur à 5 %. Il en résulte que sur les 18 banques testées, seule une a échoué. Il s'agit de Ally Financial qui était en cours de restructuration sous la tutelle de l'État américain. Les autres banques obtiennent un ratio de fonds propres largement supérieur à 5 %, donc supérieur au ratio observé à la fin de l'année 2008.

Dans le cadre de la préparation à la mise en place de l'Union bancaire européenne, la BCE a procédé entre mars et octobre 2014 à une revue de la qualité des actifs ainsi qu'à un stress-test des quelques 130 plus grandes banques européennes qui passeront sous sa supervision directe à partir du 4 novembre 2014. L'objectif de cet exercice, qui portait sur la situation de ces établissements de crédit au 31 décembre 2013, était de procéder à un examen détaillé à l'ensemble des banques visées afin de s'assurer qu'aucune d'entre elles ne recelait d'actifs de mauvaise qualité, qui auraient pu être dissimulés. Au cas d'une forte dégradation de la situation économique dans la zone euro, leurs fonds propres seraient suffisants pour leur permettre de supporter les pertes qui en résulteraient. Les superviseurs ont ainsi vérifié que les banques parviendraient à maintenir un niveau de fonds propres durs minimum de 5,5% du montant de leurs actifs pondérés des risques en cas de crise économique. Les banques ont été testées sur deux scénarios, dont le premier est : deux années de récession dans l'Union européenne (-0,7% en 2014 et -1,5% en 2015), et le deuxième scénario consiste à une année de stagnation (+0,1%). Dans cette vision pessimiste, le taux de chômage atteindrait 13% en 2016, contre 10,1% dans le scénario baseline, et les prix de l'immobilier baisserait en moyenne de 21,2%. L'Europe se trouverait en 2016 aux portes de la déflation, avec un indice des prix passant de +1,1% en 2014 à 0% en 2016. Dans ce scénario catastrophique, les banques doivent affronter une hausse des taux obligataires souverains et privés, qui les contraindrait à faire de lourdes provisions pour dépréciation d'actifs financiers. En outre, il y aura une forte détérioration de la qualité du crédit, et une hausse des coûts de refinancement.

Les résultats des stress-tests ont révélé que 25 des 130 établissements de crédit européens n'avaient pas suffisamment de fonds propres pour répondre aux exigences prédéfinis par la BCE. Toutefois, l'analyse a été faite à la date du 31/12/2013. 12 banques concernées avaient procédé entre temps à une augmentation de capital pour environ 15 milliards d'euros au total. Il ne restait donc plus que 13 établissements européens pour lesquels des recapitalisations sont nécessaires pour environ 10 milliards d'euros. Les banques italiennes se sont particulièrement distinguées lors de ces stress-tests : sur les 25 ayant échoué à la date du 31/12/2013, 9 sont italiennes et sur les 13 restantes après les opérations de recapitalisation intervenues en 2014, on en dénombre encore 4 (Monte Paschi di Siena, Banca Carige, Banca Popolare di Milano et Banca Popolare di Vicenza). Avec un ratio de fonds propres durs de 11,5 % à fin 2013 dans le cadre du scénario baseline et de 9% dans celui du scénario adverse, les banques françaises ont quant à elles réalisé presque un sans faute. Seule la Caisse de Refinancement de l'Habitat, établissement de crédit refinançant des prêts bancaires au logement, affichait un manque de fonds propres de 124 millions d'euros. Mais, ayant procédé en 2014 à une augmentation du capital de 250 millions d'euros, elle respecte désormais les normes exigées.

L'année 2014 a également été l'année de la publication de la nouvelle norme comptable IFRS9<sup>19</sup> qui remplacera progressivement la norme IAS39<sup>20</sup> pour une implémentation complète en 2018. Cette norme est vue comme une approche logique et unique pour la classification et l'évaluation des actifs financiers qui reflète le modèle économique dans lequel ils sont gérés, ainsi que leurs flux de trésorerie contractuels. Celle-ci diffère principalement de IAS39 par l'intégration d'un nouveau modèle de dépréciation des actifs financiers. En effet, IAS39 se basait sur une évaluation à juste valeur des actifs financiers, ce qui a été un facteur accélérateur de la crise de 2008 d'après le rapport [87] (daté du 13 octobre 2009) envoyé au ministre de l'économie, d'où l'intervention du G20 pour demander une réforme de la règle IAS39. L'entrée en vigueur de cette nouvelle norme a mené plusieurs banques à commencer son implémentation dès l'année 2015. Des stress-tests ont été développés également dans ce cadre, afin de comprendre les impacts de cette norme, sous des scénarios de crise, sur le bilan de la banque. L'année 2015 a été une année de répit pour les banques européennes. Les banques européennes n'ont pas été soumises à des stress-tests, les prochains n'étant prévus qu'en 2016. L'année 2015 a été aussi une année de gloire pour les grandes banques américaines qui ont toutes réussi les stress-tests effectués par la FED. Dans le pire scénario retenu - 383 milliards de dollars de pertes de crédits et chômage à 10% - le ratio CET1 des 34 banques testées tomberait de 12,5% à 9,2%, malgré cela les banques ont été jugées suffisamment capitalisées pour absorber ce choc.

---

19. International Financial Reporting Standards 9 : C'est un ensemble de normes comptables qui présente un modèle logique de classement des actifs financiers, fondé sur les caractéristiques des flux de trésorerie et le modèle économique dans lequel l'actif est détenu.

20. International Accounting Standard 39 : Elle traite de la comptabilisation et de l'évaluation des instruments financiers, et elle est entrée en application le 1er janvier 2001

En 2016, 33 banques américaines dont 8 sont des filiales étrangères ont été soumises à un stress-test. L'exercice de Stress Test a débuté le 1er janvier 2016 et les résultats ont été publiés fin juin 2016. Les projections sont réalisées selon 3 scénarios – baseline, adverse et fortement adverse - sur 9 trimestres, entre le Q4 2015 et le Q1 2018. Les pires scénarios se résument dans le tableau 1.3.1 ci-dessous :

**Table.1**

Ce tableau montre en détail les hypothèses faites pour la construction des scénarios adverses et extrêmes.

Source [3]

	PIB	Chômage	Inflation	Actions	Taux d'intérêt
Adverse	-2,8% en Q2 2016 puis remontée	Pic à 7,5% en 2017 puis baisse	Déflation de -0,9% en 2016 puis retour de l'inflation	Baisse de 5000 pts du Down Jones en 2017	Taux court terme nuls sur toute la période
Fortement adverse	-7,5% en Q2 2016 puis remontée	Pic à 10%, en 2017 puis baisse	Inflation croissante	Baisse de 10 000 pts du Down Jones en 2017	Taux court terme négatifs sur toute la période

Résultats : toutes les banques ont réussi le test quantitatif, hormis les filiales de Santander et Deutsche Bank qui échouent, avec un avis sous réserve pour Morgan Stanley.

En Europe, la BCE et l'EBA ont mis en place un stress-test des banques européennes en Q1 2016. 51 banques européennes (dont 6 groupes français), représentant près de 70% des actifs du secteur bancaire européen, ont pris part à l'exercice de stress-test EBA [4]. Par ailleurs, dans le cadre MSU<sup>21</sup>, la BCE a mené en parallèle son propre exercice de stress-test, sur une soixantaine d'institutions significatives de la zone Euro, sur la base d'une méthodologie identique à celle de l'EBA. Les résultats du stress test ont été utilisés par le MSU dans l'exercice SREP 2016 de détermination des surcharges éventuelles en capital.

L'EBA a opté pour deux scénarios de 3 ans (2016-2018), un scénario baseline et un scénario adverse dont les hypothèses sont représentés dans le tableau ci-dessous :

**Table.2**

Ce tableau montre en détail les hypothèses faites pour la construction du scénario adverse. Source [4]

21. Mécanisme de Supervision Unique : système de supervision bancaire européen. Il est composé de la BCE et des autorités nationales de supervision des pays participants, dont les objectifs sont : d'assurer la sauvegarde et la solidité du système bancaire européen, renforcer l'intégration et la stabilité financières et garantir la cohérence de la supervision bancaire

Facteurs(en %)	2016	2017	2018
Inflation	-0.5	0.5	1
Croissance	-0.6	-1.1	0.6
Chômage	10.5	10.6	11.1
Immobilier résidentiel	-8.7	-4.3	-1.5
Immobilier commercial	-1.7	-4.4	-3.9
Souverain 10 ans	1.6	2	2
Euribor 3 Mois	0.3	0.3	0.1

Les dispositions transitoires de Bâle III dans certains pays ont amplifié l'impact des stress-tests, puisque la fin de la période transitoire coïncide avec l'horizon des stress tests (2016-2018). On observe que la qualité et le niveau des fonds propres ont progressé, ce qui constitue un indicateur clair d'une plus forte stabilité et d'une meilleure résilience du système bancaire européen comparé à 2014.

Pour la France, le scénario adverse conduit à une baisse de 316 bps de capital CET1 à horizon 2018. Malgré un écart qui s'accroît, les résultats des banques françaises confirment la qualité de leurs actifs et leur capacité de résistance à des chocs sévères.

### 1.3.2 Comparaison entre les approches européennes et américaines

L'EBA conduit un stress-test pour mesurer la résistance des grandes banques européennes sous 2 scénarios, un scénario baseline et un autre adverse. Comme présenté dans la section 2 (voir tableau 1.3.1), nous avons un seul scénario adverse en plus du baseline. Contrairement à l'EBA, la FED utilise 3 scénarios, un baseline, un adverse et un scénario extrême, visant à donner plus de crédibilité au stress-tests américains, et à fortiori, aux banques américaines qui doivent être capables d'absorber des chocs largement plus violents que ceux testés par l'EBA ou la BCE, mais dans les faits les stress-tests américains sont parfois vu comme étant moins transparents que leurs homologues européens. La figure 1.3 ci-dessous montre la différence entre les chocs macroéconomiques exercés par la BCE et la FED.

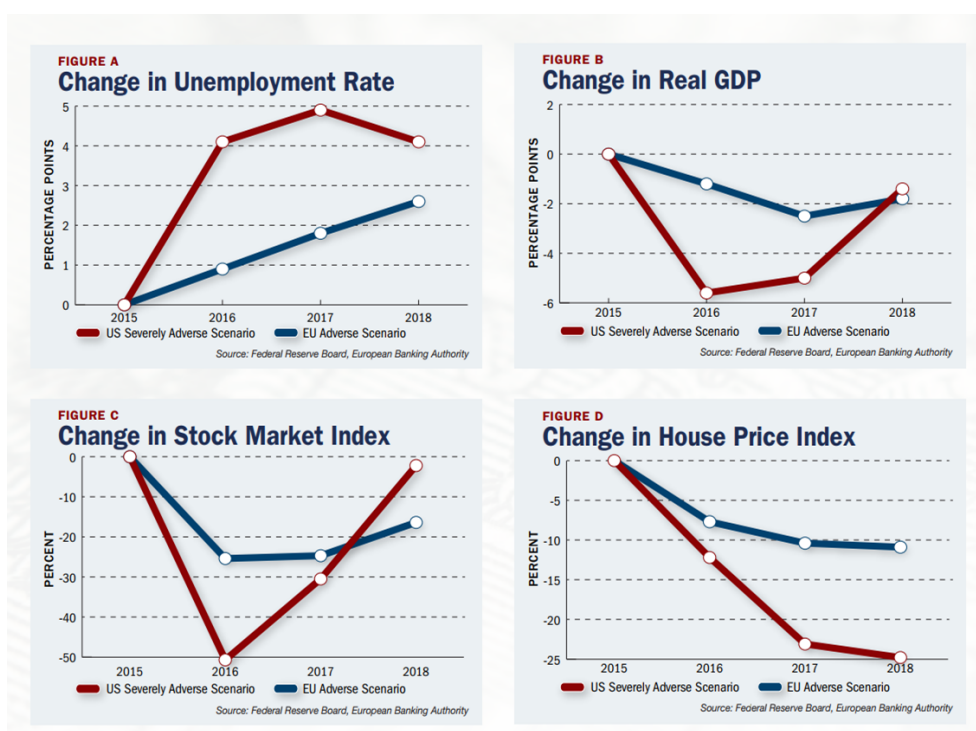


FIGURE 1.3 – Les différences de sévérité entre les scénarios US et UE des stress-tests de 2016

On remarque que les chocs macroéconomiques américains sont 2 à 3 fois plus violents que ceux européens.

En Europe, la banque d'Angleterre (BOE : Bank Of England), dont la PRA (Prudential Regulatory Authority) fait partie, fait exception au niveau du choix des scénarios autant qu'en réglementation. La BOE utilise 3 types de scénarios, Baseline, annuel cyclique (ACS), bisannuel exploration (BES).

Le scénario annuel cyclique (ACS) représente non pas une projection, mais plutôt un risque issu de la queue de distribution, ce qui implique qu'il est plausible et suffisamment sévère pour mesurer la résistance du système bancaire anglais (d'après le rapport officiel de la BOE sur le stress-test de 2017 [17]). Par exemple une récession (-4.7% sur le UK GDP), une hausse des taux d'intérêts ou une chute de l'immobilier, ces scénarios sont économiques et sur un horizon d'un an. L'un des objectifs de l'ACS est de mesurer le niveau de capitalisation des banques afin de jauger leur capacité à absorber des chocs macroéconomiques.

Le scénario bisannuel d'exploration (BES) est destiné à examiner les réponses de la banque à des problématiques à long terme, qui pourrait porter sur des hypothèses de rentabilité, de compétitivité ou même une faible croissance sur un horizon de 5 ans.

En Suisse, la SNB (Swiss National Bank) utilise 4 scénarios adverses en plus du scénario

baseline pour faire des stress-tests. Le scénario baseline stipule une vision optimiste sur l'économie de la suisse et de la zone euro. Le premier scénario adverse est de nature macroéconomique, et suppose généralement une récession, une augmentation de la dette de la zone euro, ... ; le second scénario adverse se positionne en situation de crise de l'ordre de la crise de 1990. Le troisième scénario est scénario de contagion dans lequel on suppose que les États-Unis rentre en profonde récession, avec une transmission aux pays européens. Le quatrième scénario est fait pour analyser l'impact d'une renormalisation de la politique globale du système monétaire.

La SNB adopte en 2016 une nouvelle approche dite *building – blocks*, qui remplace l'approche classique *Top – down* pour ses nombreux inconvénients. Le principe de cette approche est de décomposer le portefeuille en blocs de business/type de risque, sur lesquels on applique des modèles qui leurs sont adaptés. Pour finir avec une agrégation des résultats obtenues sur chaque bloc. Un traitement différent est réservé aux G-SIBs<sup>22</sup> selon la nouvelle réglementation TBTF1/2<sup>23</sup> afin de prendre en compte la taille, l'importance économique et stratégique de ces banques.

### Table.3

Différences entre les stress-tests Européens et Américains

---

22. Les (G-SIBs) ou global systemically important banks, est une liste de grande banques pour lesquels les 3% de capital minimal réglementaire en Bâle III est estimé pas assez conservateur par la comité de Bâle en 2013 (voir [18]), et qui seront traités autrement que les banques normale via une réglementation dédiée, vu que leur dégradation perturbe le système bancaire en entier.

23. TBTF1 désigne la réglementation too big to fail initialement adoptée en 2012 pour une phase de transition qui devait durer jusqu'à fin 2018. TBTF1 est restée en vigueur jusqu'à fin juin 2016 pour céder sa place à TBTF2 qui prendra effet jusqu'à fin 2019.

## CHAPITRE 1. RISQUE DE CRÉDIT, STRESS TEST ET PROBLÉMATIQUES DE LA THÈSE

	Scénarios	Processus	Exigences
FED	3 scénarios : Baseline, Adverse, Extrême.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La FED lance ses propres simulations pour les pertes, le revenu net, le bilan, RWA et le niveau de capital.</li> <li>• Les projections de pertes n'intègrent pas les effets spécifiques de chaque banque.</li> <li>• Les projections du revenu net est basé sur une approche top-down qui n'est pas assez granulaire.</li> <li>• L'approche avancée pour RWA n'est pas autorisée (approche standard).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bilan statique.</li> <li>• Les projections de pertes n'intègrent pas les effets spécifiques de chaque banque.</li> <li>• Les projections du revenu net est basé sur une approche top-down qui n'est pas assez granulaire.</li> <li>• L'approche avancée pour RWA n'est pas autorisée (approche standard).</li> </ul>
EBA	2 scénarios : Baseline et Adverse.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Développer des méthodologies appliquées par toutes les banques.</li> <li>• Les banques projettent leur revenus nets.</li> <li>• Estimation l'impact des scénarios sur l'RWA.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Floor de capital non définit.</li> <li>• L'output des stress-tests doit être l'input de l'évaluation du processus ainsi que pour la revue du superviseur.</li> <li>• CET1 à 5.5% minimum</li> </ul>
BOE	3 scénarios : Baseline, Adverse annuel cyclique et Adverse bisannuel d'exploration.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Développer des méthodologies appliquées par toutes les banques.</li> <li>• Les banques projettent leur revenus nets.</li> <li>• Estimation l'impact des scénarios sur l'RWA.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bilan dynamique.</li> <li>• CET1 à 4.5% minimum.</li> </ul>
SNB	5 scénarios : Baseline, 4 adverses dont 2 sont extrêmes.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Considération des actifs domestiques seulement pour les 2 plus grandes banques.</li> <li>• Estimation l'impact des scénarios sur le CET1/RWA.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bilan statique.</li> <li>• CET1 à 7% minimum.</li> </ul>



## 1.4 Monotonie des matrices de transition

### 1.4.1 Problématique

La monotonie des matrices de transition est un ensemble de contraintes que les matrices estimées doivent vérifier pour qu'elles soient *classifiantes* du risque. On entend par classifiantes le fait qu'elles attribuent un niveau de risque décroissant par rapport à la qualité de la note, ce qui veut que si  $i$  est une note plus risquée que  $j$ , alors la probabilité de dégradation à partir de  $i$  est supérieure à celle de  $j$ . Soit  $P$  une matrice de transition de taille  $N \times N$ , alors on dit qu'elle est monotone si et seulement si pour tout  $i, j$  tel que  $i < N$  on a

$$\sum_{k \geq j} p_{i,k} \leq \sum_{k \geq j} p_{i+1,k}$$

Autrement dit, la probabilité de se dégrader à partir de la note  $i$  vers une note en dessous de  $j$  est inférieure de celle à partir de  $i + 1$ . En particulier, pour  $j = N$ , on a une croissance des probabilités de défaut en partant de la meilleur note vers le défaut.

Les matrices estimées sur les historiques de notation ne sont jamais monotones en pratique, car ces matrices traduisent ce qui a été uniquement observé. En effet, les politiques de notation des banques ou des agences de notation reposent sur des critères qualitatifs et des jugements d'experts qui ne sont pas forcément efficaces dans la classification du risque. Donc des notes favorables sont alors attribuées à des firmes dont le niveau du risque réel est bien plus important, donc quand des difficultés financières de ces firmes font surface, on leur attribue des notes plus basses ce qui se traduit par une grande mobilité sur les données. Par conséquent, les inégalités de monotonie ci-dessus ne sont pas toutes vérifiées, encore moins dans les périodes de crise où on observe des défauts de firmes ayant de très bonnes notes. En outre, la fréquence de revue des notes pour certaines politiques n'est pas suffisante pour une mise à jour régulière de l'appréciation du risque, et ainsi des transitions de notes à longueurs modérées. Les notes attribuées par les agences de notation sont souvent un sujet de débat pour l'ambiguïté qui entoure les politiques auxquelles elles obéissent. En effet, les agences sont censées attribuer des notes à des firmes qui paient pour ce service d'une part, et qui peuvent aller vers un concurrent qui donne des notes plus favorables d'autre part. Cela alimente des hypothèses de conflit d'intérêts. Les banques de leur côté ont plusieurs politiques internes qui correspondent à des portefeuilles de crédit différents. Certaines politiques sont plus conservatrices que d'autres en fonction de la réglementation, du secteur d'activité et de la nature du business. Cela produit une grande variabilité dans les notes historiques de la banque, qu'on utilise de manière agrégées afin d'avoir suffisamment de données pour faire des estimations de matrices de transition. Ces matrices sont utilisées pour effectuer des stress-tests et des projections, notamment via des matrices TTC ou inconditionnelles positionnées dans le cycle macroéconomique via les méthodes citées 1.1.4.2. Pour avoir une vision réaliste du risque, les banques essaient d'estimer des matrices de transition TTC monotones avant passage au *pointed in time* PIT. La littérature sur ce sujet est assez pauvre,

et très peu d'articles abordent cette problématique en risque de crédit. D. Tasche [118, 119] s'est intéressé à l'estimation des probabilités de défaut sous contrainte de monotonie, en proposant une méthode dite Quasi Moment Matching qui utilise une transformation logistique d'un estimateur. Dans le cadre de l'étude des matrices de transition sur des petites périodes, Moody's Analatics [127] propose une méthode qui calcule ces matrices via la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes de monotonie. Comme nous allons le voir dans le chapitre 2, la monotonie de la matrice de transition est équivalente à celle de son générateur infinitésimal dans un sens similaire à celui des matrices de transition. L'approche qui consiste à contraindre un problème d'optimisation est utilisée également par A.Kreinin et al [124] pour chercher un générateur monotone qui induit une matrice de transition proche d'une matrice donnée. Celle-ci est reprise dans des travaux plus récents par M.Hughes et al [126] cette fois sous des contraintes de monotonie de la matrice de transition.

#### 1.4.2 Contributions du chapitre 2 :

Dans le chapitre 2, on aborde cette problématique de monotonie d'un point de vue géométrique qui ne diffère pas beaucoup des méthodes citées ci-dessus. Nous démontrons qu'il existe une matrice monotone unique qui approche une matrice empirique donnée en exploitant la convexité et la compacité de l'ensemble des matrices monotones, et on définit cette matrice optimale comme la projection orthogonale de la matrice empirique sur celui-ci. Nous transportons ce concept aux générateurs en définissant la projection orthogonale monotone d'un générateur empirique. On dérive de ce formalisme une notion de défaut de monotonie qui représente la distance entre la matrice empirique et sa projetée, et on calcule cette quantité sur une trajectoire de matrices estimées sur les données d'une grande banque européenne via les trois estimateurs définis précédemment. On en déduit qu'en période de crise, tous les estimateurs produisent des matrices loin de la monotonie dans le sens de la distance que nous venons de définir. En outre, on voit clairement que l'estimateur via le modèle Markovien à temps continu homogène présente moins de défaut de monotonie par rapport aux autres. On applique ensuite la technique de projection du générateur, que l'on compare avec la méthode de projection de la matrice en terme de défaut de monotonie, et on trouve qu'elles produisent presque les mêmes matrices, à la différence que la projection du générateur fournit des matrices de transition strictement monotones après application de l'exponentielle. On utilise alors cette approche pour comparer deux politiques de notation avec deux niveaux de conservatisme assez différents. On trouve que la politique conservatrice produit des matrices avec beaucoup moins de défaut de monotonie que celle qui ne l'est pas. On en déduit que le défaut de monotonie permet de jauger le niveau d'erreur de notation commis par une politique de notation.

Afin de mieux quantifier cette erreur de monotonie, on introduit la notion de profondeur de monotonie qui permet d'approcher une matrice empirique par une matrice partiellement mono-

tone, dans le sens où elle respecte certaines inégalités de monotonie. En comparant le défaut de monotonie sur une trajectoire de matrices estimées via des intensités, on trouve que les erreurs de notations sont concentrées dans les bonnes notes. Autrement dit, les politiques de notation en vigueur attribuent des notes assez hautes à des firmes dont le niveau de risque réel mérite une note plus basse. On démontre finalement que le positionnement dans le cycle d'une matrice TTC via le modèle décrit dans 1.1.4.2 est une transformation qui conserve la monotonie. Par conséquent, l'utilisation d'une matrice TTC monotone produit des matrices PIT dont la monotonie est garantie.

## 1.5 Interdépendance et contagion

### 1.5.1 Problématique

En risque de crédit, l'interdépendance constitue une partie importante et non encore bien maîtrisée de la mesure du risque. La contagion est un mécanisme de transmission du risque d'un pays, une banque ou d'une compagnie vers une autre, via les liens capitalistiques, macroéconomiques ou microéconomiques qui les unissent par leur interdépendance.

La crise de 2008 été révélatrice de l'ampleur de la contagion, des défauts en cascade de groupes d'affaires ou de sociétés liées économiquement ont été constatés. En effet, S.R.Das, D.Duffie, N.Kapadia et L.Saita, [29] ou S.Azizpour et K.Giesecke [30] mènent des études empiriques qui démontrent que l'hypothèse selon laquelle les défauts observés sont indépendants conditionnellement à la position dans le cycle est rejetée. Cela a fait réagir les banques centrales et les superviseurs, qui ont commencé à insister sur l'analyse et la modélisation des dépendances entre les clients d'un portefeuille en risque de crédit. Aujourd'hui, en Europe l'EBA suit avec intérêt les progrès réalisés en mesure du risque de contagion, et elle publie des Guidelines [24, 25] pour aider les banques à mieux appréhender ce type de risque. L'EBA propose une approche très conservatrice qui consiste à définir sous certaines conditions un groupe d'entités d'un portefeuille comme étant connectées et constituent ce qu'ils appellent un *single risk*. Cette dénomination signifie que le risque de défaut d'une des entités du groupe est le même que celui d'un défaut simultané de toutes les entités, ce qui implique de prendre comme exposition sur ce groupe la somme de toutes les expositions ; ce qui est très coûteux en capital.

La recherche en risque de contagion est de plus en plus grandissante, mais le premier cadre théorique qui a connu une grande popularité est celui de M.Davis et V.Lo [26]. Il propose un modèle qui utilise des variables binaires de défaut  $Z_i$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\} = V$  l'ensemble des entités, qui valent 1 en cas de défaut de  $i$  et 0 sinon. Il introduit ensuite pour tout  $i, j \in V$  tels que  $i \neq j$  des variables de Bernoulli  $X_i, Y_{ij}$  indépendantes de paramètres  $p, q$  tels que

$$Z_i = X_i + (1 - X_i) \left( 1 - \prod_{i \neq j} (1 - X_j Y_{ji}) \right)$$

L'idée consiste à définir les variables  $X_i$  comme intrinsèques dans le sens où  $X_i = 1$  signifie le défaut de  $i$ , et  $X_i = 0$  signifie qu'elle ne l'est pas, mais elle peut quand même faire défaut par infection ; ce qui se traduirait par  $Z_i = 1$ . Les variables  $Y_{ij}$  sont dites variables *d'infection*, et qui sont définies par  $Y_{ij} = 1$  si le défaut de  $i$  affecterait  $j$ , et  $Y_{ij} = 0$  sinon. De cette façon, on peut obtenir une expression explicite de la distribution des pertes  $N = \sum_{i \in V} Z_i$  comme suite

$$\mathbb{P}(N = k) = C_n^k \alpha_{k,n}(p, q)$$

où

$$\alpha_{k,n}(p, q) = p^k (1-p)^{n-k} (1-q)^{k(n-k)} + \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i p^i (1-p)^{n-i} (1-(1-q)^i)^{k-i} (1-q)^{i(n-k)}$$

D. Rullière, D. Dorobantu et A. Cousin [27] font une extension multipériodes du modèle de Davis et Lo en introduisant le temps de la manière suivante :

$$Z_i(t) = Z_i(t-1) + (1 - Z_i(t-1))(X_i(t) + (1 - X_i(t))(1 - \prod_{i \neq j} (1 - X_j(t)Y_{ji}(t))), \text{ pour tout } i \in V$$

$$Z_i(0) = X_i(0) + (1 - X_i(0))(1 - \prod_{i \neq j} (1 - X_j(0)Y_{ji}(0)))$$

où  $Z_i(t) = 1$  signifie que  $i$  est déclaré en défaut en fin de la période  $t - 1$ . Sous cette dynamique, il est possible de décrire dans le temps le phénomène de propagation de défaut via les variables d'infection  $Y_{ij}(t)$ . Ainsi ils calculent la distribution de  $N(t) = \sum_{i \in V} Z_i(t)$  dans le temps, des probabilités conditionnelles de défaut sachant le défaut d'un cluster d'entités du réseau. Plusieurs extensions et applications sont apparues par la suite, comme celle de A.Sakata, M.Hisakado et S.Mori [138] ou celle de D.Rosch and B.Winterfeldt [38].

Il existe également des approches structurelles pour la modélisation de la contagion en risque de crédit, comme par exemple C.Zhou [139] qui propose un modèle simple qui capte la corrélation de défaut entre deux entités. Ce modèle se base sur l'équation

$$\begin{pmatrix} d \ln(V_1) \\ d \ln(V_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} dz_1 \\ dz_2 \end{pmatrix}$$

où  $V_1$  et  $V_2$  sont les valeurs des deux entités dont  $\mu_1, \mu_2$  sont drift,  $z_1, z_2$  sont deux mouvements Browniens indépendants et  $\Omega$  est une matrice telle que

$$\Omega \Omega^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

où  $\rho = Cor(d \ln(V_1), d \ln(V_2))$ . La deuxième hypothèse du modèle est que le défaut d'une firme est déclenché après que sa valeur passe en dessous d'un seuil, qui est relié via la première équation aux paramètres des deux firmes. D.Egloff et M.Vanini [48] développent un modèle structurel qui consiste à rajouter des termes dits de microstructures qui relient les variables représentants le risque idiosyncratique  $\epsilon_i$  entre elles. De cette façon, ils distinguent la dépendance systématique causée par l'environnement macro-économique et les microstructures indépendantes des

variables systémiques (comme dans le modèle de Vasicek). Il en résulte une équation matricielle qui encode les deux types de dépendance, et rend possible la compréhension de l'impact des microstructures sur le risque de crédit. D'autres approches utilisent des intensités pour capter la contagion, R.Jarrow et F.Yu [141] et P.J.Schönbucher [140] utilisent des sauts d'intensité de transition en cas du défaut d'une entité, via une relation affine entre celles-ci et les indicatrices de défaut. J.P. Laurent, A. Cousin, J.D. Fermanian [31] tiennent compte de la contagion dans un but de couverture des tranches de CDO. Ils utilisent une dépendance entre l'intensité de pré-défaut et les indicatrices de défaut de toutes les entités sous certaines hypothèses de Markov et d'homogénéité sur le nombre de défauts.

La littérature dans les modèles graphiques est assez riche, et donne lieu à d'innombrables possibilités de modélisations. Toutefois, cette littérature est concentrée sur la modélisation des réseaux financiers, et très peu d'articles traitent du risque de contagion dans un portefeuille de crédit. L'EBA a utilisé des modèles graphiques dans son exercice de stress-test macroprudentiel (voir [44]) pour modéliser l'impact de la contagion sur les réseaux interbancaires, en s'appuyant sur les travaux de M.Gross et C.Kok [66]; qui utilisent des simulations de réseaux aléatoires. Toujours sur des réseaux financiers, L.Eisenberg and T.H.Noë [54] s'intéressent à l'interdépendance entre les membres d'une chambre de compensation en analysant des flux sur le réseau qu'elles définissent. Il existe cependant des méthodes graphiques plus exotiques, comme les modèles de percolation utilisés par D.S.Callaway et al [59]; T.R.Hurd et J.Gleeson [60] pour modéliser l'effet critique de la connectivité sur le réseau quand elle dépasse un seuil donné. Cette notion est très étudiée en physique, car elle a des propriétés qui expliquent les changements de phase de la matière, et elle a un lien profond avec un modèle qui provient de la physique également, à savoir le modèle d'Ising.

Les modèles cités jusqu'à présent n'ont pas cette propriété dite de changement de phase qui représente des situations dans lesquels l'état des membres d'un réseau tendent vers le même état quand la connectivité entre eux dépasse un certain seuil de manière immédiate. Cette propriété est susceptible d'expliquer certaines intuitions d'économistes comme A.Haldane [105] qui parle de l'excès d'interdépendance ou de connectivité qui conduit vers des défauts simultanés. Le modèle d'Ising fait partie d'une famille de modèles de Gibbs sur un réseau, qui consiste à considérer un champs de Markov<sup>24</sup>  $X = (X_i)_{i \in V}$  sur un réseau non-orienté  $G = (V, M)$  à valeur dans  $\Omega^{|V|}$  tel que la distribution

$$\mathbb{P}(X) = \frac{\exp(\mathcal{H}(X))}{Z}$$

où  $Z$  est une constante de normalisation, et  $\mathcal{H} : \Omega^{|V|} \rightarrow \mathbb{R}$  appelé Hamiltonien. Le modèle d'Ising

---

24. Un champs de Markov est une extension spatiale du concept de chaîne de Markov, qui se définit de manière analogue comme suite :

$$\mathbb{P}(X_i | X_j; j \in V \setminus \{i\}) = \mathbb{P}(X_i | X_j; j \in N(i))$$

Ce qui veut dire que l'état d'un noeud ne dépend conditionnellement que de ceux de ses voisins directs.

se caractérise par un Hamiltonien  $\mathcal{H}$  défini sur  $\{-1, 1\}^{|V|}$  par

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{i \in V} B_i x_i + \sum_{i < j} m_{ij} x_i x_j$$

où les  $B_i$  sont des constantes, et les  $m_{ij}$  sont les coefficients de la matrice des poids  $M$ . Donc la constante de normalisation appelée fonction de partition s'exprime par

$$Z = \sum_{x \in \{-1, 1\}^{|V|}} \exp(\mathcal{H}(x))$$

En considérant que le réseau  $G$  représente un portefeuille de crédit, et que les états du défaut sont représentés par le champs de Markov  $X = (X_i)_{i \in V}$  tel que  $X_i = -1$  si  $i$  est en défaut, et 1 sinon. J.Molins et E.Vives [45, 46] modélisent la contagion sur un portefeuille de crédit. Ils considèrent deux types de réseaux simples, à savoir les réseaux complets et étoilés. Sous la symétrie de ces réseaux, et les hypothèses additionnelles d'homogénéité et  $B_i = B$  et  $m_{ij} = m$ , ils expriment la distribution des pertes explicitement. Les cas étudiés dans ces travaux sont très restrictifs, cependant ils donnent une idée sur la façon avec laquelle la distribution des pertes se déforme en fonction de la topologie du réseau et son niveau de connexion. Le changement de phase est interprété dans ces travaux comme une explication possible des défauts simultanés sans pré-signaux alarmants observés en période de crise. I.O.Filiz et al [47] utilisent également le modèle d'Ising sur des réseaux de structure arbitraire, en donnant une version multipériode qui permet de faire de la valorisation des tranches de CDO. Ils considèrent un cas particulier de topologie en s'intéressant à des réseaux étoilés par blocs, et expriment la distribution des pertes sur celui-ci de manière explicite. En outre, ils démontrent par des arguments de géométrie algébrique que la calibration des  $B_i$  et des  $m_{ij}$  est toujours possible par la donnée des moments de premier et deuxième ordre<sup>25</sup>. Bien que ces travaux couvrent des topologies de réseau plus larges contrairement aux travaux de Molins et Vives, ils sont contraints tout de même à deux types d'interactions symétriques  $X_i X_j$  et  $-X_i X_j$  par l'expression du Hamiltonien du modèle d'Ising. En effet, les interactions entre deux entités peuvent représenter une relation maison-mère et filiale, une interaction économique ou commerciale entre deux acteurs du marché ou une interaction entre deux concurrents. Certaines interactions ne sont pas symétriques, car le défaut par exemple d'une maison-mère entraîne forcément le défaut des filiales, alors que l'inverse n'est pas forcément vrai. Il est donc clair que c'est l'une des limites du modèle d'Ising, qui impose une structure de dépendance restreinte à deux types d'interactions possibles. Ces restrictions ont pour cause l'origine physique du modèle, car les deux types d'interactions représentent schématiquement l'attraction et la répulsion entre deux particules, dont les états binaires sont les états de leurs spins.

Les quelques rares travaux n'utilisant pas des champs de Markov et qui font apparaître des phénomènes de changement de phase sont ceux de K.Giesecke et S.Weber [116]. Ils utilisent un

25. On entend par les moments de premier ordre les espérances  $\mathbb{E}(X_i)$  ou les probabilités de défaut  $\mathbb{P}(X_i = -1)$ . Les moments de deuxième ordre sont les espérances  $\mathbb{E}(X_i X_j)$  ou les probabilités de défauts joints  $\mathbb{P}(X_i = X_j = -1)$ .

modèle dit *voter* qui considère une économie constituée d'une infinité de contreparties représentée par un réseau  $\mathbb{Z}^d$ . La structure du réseau impose à chaque entité un nombre de voisins égal à  $2d$ , qui interagissent selon les besoins de liquidité. Ils introduisent le temps en supposant que les entités interagissent après un temps d'attente qui suit une loi exponentielle, ce qui donne des propriétés de Markov au processus qui décrit l'état de liquidité de chaque entité. De ces éléments, ils arrivent à exprimer la distribution des pertes asymptotiques en cas d'un grand nombre d'entités dans le réseau. Contrairement aux travaux présentés sur le modèle d'Ising, ceux-ci permettent d'étudier les distributions *large pool*<sup>26</sup> d'une part, et de l'effet du degré de connexion  $2d$  sur la diffusion de la dégradation d'autre part.

### 1.5.2 Contributions

On développe dans cette thèse un modèle d'interdépendance, en utilisant une extension du modèle d'Ising. On s'intéresse par la suite à plusieurs problématiques via ce modèle, y compris l'effet du degré de connexion sur la propagation du risque et l'apparence des changements de phase, et l'étude des distributions *large pool* pour certains réseaux.

#### 1.5.2.1 Chapitre 3 :

Dans ce chapitre, on introduit notre modèle en considérant le Hamiltonien défini sur  $\{-1, 1\}^{|V|}$  par

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{i \in V} B_i x_i + \sum_{i \sim j} m_{ij} \delta_{ij}(x_i, x_j)$$

où les  $\delta_{ij}$  sont des fonctions de  $\{-1, 1\}^2$  dans  $\mathbb{R}$  qu'on appelle relations. Pour des relations  $\delta_{ij} = X_i X_j$  on se ramène clairement au modèle d'Ising, nous avons donc une extension de celui-ci. Les paramètres  $B_i$  sont calibrés en considérant le cas d'indépendance  $M = 0$  et la probabilité de défaut, dite intrinsèque<sup>27</sup>,  $p_i = \mathbb{P}(X_i = -1)$  où la mesure est définie par  $\mathbb{P}(x) = \frac{\exp(\mathcal{H}(x))}{Z}$ . On en déduit que  $B_i = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{p_i} - 1\right)$ , où la probabilité de défaut intrinsèque  $p_i$  est supposée représenter l'état de santé de  $i$  indépendamment de ses relations exogènes. On suppose alors que cette probabilité est régie par des facteurs macroéconomiques  $Y$ , et donc la mesure  $\mathbb{P}$  est considérée conditionnelle à ces facteurs. Sous ce schéma, nous avons donc un modèle qui sépare les effets macroéconomiques sur un réseau des effets microstructurelles, décrits par les liens capitalistiques et économiques qui relient les différentes entités d'un portefeuille de crédit, ou une économie de manière générale.

Les relations sont des fonctions qui encodent le comportement propre à l'interaction de chaque couple d'entités connectées. Cette façon d'intégrer différents types d'interaction nous permet d'aller au delà des limites d'un modèle d'Ising classique, et donne plus de degré de liberté au

26. L'expression *Large pool* est utilisée pour désigner les portefeuilles de très grande taille.

27. Cette dénomination vient du cas d'indépendance, qui suppose que toutes les entités sont deux à deux non connectées.

modèle, ce qui génère une grande richesse en terme de comportements possibles. On établit sous ce formalisme comment certaines classes de relations influencent le comportement global du réseau. On démontre ainsi plusieurs résultats théoriques quand le réseau ne contient pas de relations de concurrence. Certains de ces résultats sont une extension de résultats de mécanique statistique sur le modèle d'Ising, comme par exemple l'inégalité GKS ( $Cov(\prod_{i \in A} X_i, \prod_{i \in B} X_i) \geq 0$  pour tout  $A, B \subset V$ ), l'atténuation exponentielle de la covariance  $Cov(X_i, X_j)$  en fonction de la distance entre  $i$  et  $j$ , ou les inégalités de Griffiths. Ces résultats sont nécessaires pour mieux comprendre les variations des probabilités de défaut d'une entité, d'un cluster par rapport aux connectivités  $m_{ij}$  et les probabilité intrinsèques de défaut  $p_i$ . Toutefois, ces résultats théoriques ne suffisent pas pour prédire les variations de la covariance ou la corrélation de défaut par rapport aux  $m_{ij}$  et  $p_i$ . Nous démontrons alors de nouvelles inégalités qui, à notre meilleure connaissance, n'existent pas dans la littérature, et qui nous ont permis d'aller plus loin dans notre analyse de la covariance et la corrélation. Ces inégalités peuvent s'avérer très utiles en mécanique statistique dans le cadre d'un modèle d'Ising ferromagnétique<sup>28</sup>, et constituent une de nos contributions à cette littérature.

Une autre contribution de ce chapitre est l'introduction de la notion de relation équivalente. Celle-ci permet une compréhension plus profonde de l'impact du réseau entier sur une relation, et donc de voir comment une relation peut changer de type en passant par exemple d'une relation de support à une relation de concurrence suite à l'influence externe. De plus, cette notion nous permettra plus loin de démontrer des résultats théoriques sur la possibilité d'encadrement de la distribution des pertes sur un portefeuille de crédit par des distributions de réseaux homogènes que nous savons exprimer explicitement. Nous analysons également via cette notion l'effet de la concurrence sur les changements de type de relation quand deux entités ont des partenaires économiques qui sont concurrents. On en déduit qu'il existe des seuils de connectivité à partir desquels la relation entre deux entités peut être insensible à toute influence externe, ou bien la relation devient par des effets de compensation presque inexistante.

La notion de Single Risk introduite par l'EBA et le changement de phase traité dans les travaux sur le modèle d'Ising en risque de crédit sont deux faces de la même pièce dans le cadre de ce modèle. En effet, ce modèle en tant qu'une extension du modèle d'Ising fait apparaître les phénomènes de changement de phase. Nous formalisons cela par l'existence des seuils de connectivités  $M$  à partir desquels l'état du système peut basculer de  $(1, \dots, 1)$  à  $(-1, \dots, -1)$  avec une certitude de  $\alpha$ . Ce qui veut dire passer d'une perte de 0% à 100% en prenant comme métrique la  $VaR_\alpha(L)$  où  $L$  est la fonction des pertes agrégées. Quand  $\alpha = 99.9\%$ , ceci correspond en risque de crédit à un capital économique susceptible de passer sous une petite perturbation de 0 à 100%, synonyme de scénario catastrophique pour une banque. Cela coïncide avec l'approche de l'EBA

28. C'est le modèle qui suppose que toutes les interactions sont attractives, donc les connectivités sont positives. Il détient son nom de l'étude des ferromagnétisme comme phénomène physique via le modèle d'Ising.



sur les portefeuilles *Large Exposure*<sup>29</sup> qui stipule qu'en cas de détection d'une interdépendance, le risque considéré est celui d'une perte maximale sur les entités concernées.

### 1.5.2.2 Chapitre 4 :

L'article de I.O.Filiz et al [47] démontre que la calibration du modèle d'Ising est possible via la donnée des moments de premier et deuxième ordre ; ce qui est valable aussi pour notre modèle. On s'intéresse dans ce chapitre aux problématiques de calibration, et on propose différentes manières de calibration selon la disponibilité des données. Compte tenu de la complexité calculatoire du modèle, le maximum de vraisemblance n'est certainement pas un bon candidat pour la calibration du modèle sur un portefeuille assez large. On propose alors une méthode qui se base sur une pseudo-vraisemblance, dont l'expression ne fait apparaître que des probabilités conditionnelles moins coûteuses en calcul. En outre, nous proposons une manière d'utiliser les historiques de notation pour calibrer à la fois les relations et les connectivités sous certaines hypothèses via cette méthode. Toutefois, on démontre que le maximum de vraisemblance est équivalent à une calibration via les moments de premier et deuxième ordre. Donc en cas de manque de données, nous discutons la calibration via des probabilités marginales et jointes de défaut issues d'une copule Gaussienne. On observe que même en effectuant ce *mapping* des deux modèles, notre approche reste plus conservatrice par rapport au modèle Gaussien. Il est clair que les deux modèles sont conceptuellement très différents, d'une part les probabilités de défauts joints du modèle Gaussien ne dépendent que des deux entités en question, alors que celle produite par notre modèle reste sensible à tout le réseau. D'autre part, le modèle Gaussien prend en compte deux types d'interaction associées au signe des corrélations entre les entités.

### 1.5.2.3 Chapitre 5 :

Nous abordons dans ce chapitre l'étude des réseaux symétriques et homogènes, et l'expression de la distribution des pertes de manière explicite. Ainsi qu'à la possibilité d'encadrer la distribution des pertes d'un réseau général par celles de deux réseaux homogènes et symétriques que nous savons exprimer. Les travaux de K.Giesecke et al [30] portent sur des réseaux homogènes d'un degré de connexion  $2d$ . L'effet de celui-ci apparaît clairement dans la distribution des pertes, mais sans avoir un effet qui change le comportement global du système. Cela est dû au fait que le réseau considéré  $\mathbb{Z}^d$  est ouvert, c'est pour cette raison que nous portons une attention particulière aux réseaux fermés homogènes et réguliers (ou symétriques) avec un degré de connexion fixe  $d$ . Nous commençons tout d'abord par étudier les réseaux complets (degré de connexion maximal) de support dont les entités possèdent des réseaux satellites de concurrence. On démontre que le nombre d'entités de ce réseau contribue directement dans l'augmentation de la connectivité du réseau, ce qui conduit vers un single risk. Ce phénomène peut donc conduire à une diffusion

<sup>29</sup>. Ce sont des portefeuilles contenant des facilités à grand volume, sur lesquels un défaut peut engendrer des pertes très importantes.

totale du risque en cas du défaut de l'une des entités à cause de la concurrence. On s'intéresse de manière générale à ce phénomène sur les réseaux de degré de connexion  $d$ , et on exprime de manière semi-fermée la distribution des pertes. On trouve que l'effet du degré est encodé dans une fonction  $\phi_d$  assez difficile à exprimer explicitement, mais qu'on arrive à expliciter pour certains degrés. En effet, l'expression de cette fonction passe par la résolution de plusieurs problèmes de coloriage de graphes assez difficiles, que nous avons pu résoudre dans le cas  $d = 2$ . On propose également une façon d'approcher cette fonction par une série entière dont les coefficients résultent de la résolutions de problèmes combinatoires. En outre, on donne une borne supérieur de l'ordre du développement de Taylor nécessaire pour avoir une erreur d'approximation  $\epsilon$  arbitraire, en fonction des différents paramètres.

A l'aide de l'expression de la distribution des pertes, on étudie le comportement large pool pour un degré de connexion  $d$ . On constate qu'il existe un degré de connexion à partir duquel l'augmentation du nombre d'entités du réseau mène vers un single risk. En effet, si la taille du réseau tend vers l'infini alors que le degré  $d$  est fixe, alors la distribution des pertes est distribuée normalement comme dans le cas d'indépendance. Alors que si le degré  $d$  est égal à  $|V| - 1$  (réseau complet), il tend également vers l'infini en large pool, ce qui est équivalent à avoir des connectivités infinies. Par conséquent, le système tend rapidement vers un single risk dans le cas d'un réseau de relations de support, et 50% uniquement des entités survivent dans le cas d'un réseau de concurrence. Pour les problèmes du temps de calcul, on démontre un résultat qui permet de réduire les calculs de manière exponentielle dans le cas des réseaux arbres par blocs. Nous utilisons ce résultat également pour démontrer la possibilité d'encadrer de manière optimale la distribution des pertes d'un réseau par celles d'un réseau symétrique et homogène dont les expressions sont simples. Ce qui démontre qu'il est possible de réduire le temps de calcul très considérablement à condition de connaître les deux réseaux dont nous démontrons l'existence.

#### 1.5.2.4 Chapitre 6 :

On expose dans ce chapitre certaines idées d'application du modèle sur la concentration et une extension multi-périodes comme des perspectives possibles. On définit un indice de concentration qui généralise celui l'indice de concentration HHI très utilisé en risque de crédit, en introduisant la matrice de corrélation issue de la mesure définie dans notre modèle d'interdépendance. Pour montrer l'intérêt de cet indice, on démontre qu'il tient en compte les phénomènes d'excès de connectivité, en ayant la possibilité de prendre des valeurs proches même en cas d'un HHI minimal. En considérant un exemple de réseau de cinq entités, on calcule cet indice sur toutes les configurations possibles du réseau en utilisant uniquement deux relations élémentaires, à savoir de support et concurrence. On constate que la concurrence pourrait avoir un effet diversificateur du risque en cas d'une distribution appropriée dans le réseau. Toutefois, sous certaines configurations la concurrence peut être nocive, ce qui relève plusieurs questions intéressantes sur la meilleure distribution possible d'un nombre de relations de concurrences fixes, et comment

celle-ci impacte la santé du portefeuille.

Pour l'extension du modèle aux multi-périodes, on introduit une chaîne de Markov de champs de Markov dont les états sont tous les états possibles du réseau. Ce qui nous permet de calculer des probabilités de transition entre un état du réseau et un autre, par conséquent une possibilité de faire des projections. Cette technique repose sur la jonction des réseaux à deux instants  $t$  et  $t + 1$  de telle manière à ce que le champs joint  $(X_t, X_{t+1})$  sur le réseau résultant soit de Markov. De cette manière, on peut définir la distribution jointe, et ainsi en déduire les probabilités conditionnelles de transition.

## MONOTONIE DES MATRICES DE TRANSITION

Ce chapitre est consacré à la notion de monotonie des matrices de transition de rating. On développe une technique de calcul de la meilleure matrice monotone qui approche une matrice empirique donnée, et on étudie le défaut de monotonie de certains estimateurs. On interprète l'erreur de cette approximation comme une mesure du défaut de monotonie associé de la matrice, et comme le défaut de la politique de notation dans le cas d'un portefeuille homogène en politique de notation. On démontre également certains résultats sur la stabilité de la monotonie des matrices de transition, dont les répercussions pratiques sont importantes.

**Mots-clés** : Matrices de transition, Politiques de notation, Monotonie.

### Sommaire

2.1	Introduction	41
2.2	Matrices de transition monotones	42
2.2.1	Notion de monotonie et projection monotone.	42
2.2.2	Résultats numériques	43
2.3	Monotonie des générateurs	48
2.4	Notion de $l$ -monotonie des matrices de transition	51
2.5	Stabilité de la monotonie	53
2.5.1	Stabilité par rapport au positionnement dans le cycle macroéconomique.	53
2.5.2	Stabilité par rapport au changement de l'échelle de notation.	54
2.6	Conclusion	55
2.7	Annexes	57
2.7.1	Annexe A : Reformulation du problème d'optimisation	57
2.7.2	Annexe B : Exemple d'estimation du générateur d'une matrice.	58

## 2.1 Introduction

L'estimation des matrices de transition est un sujet très important en risque de crédit, auquel plusieurs travaux ont été dédiés et ont produits plusieurs estimateurs comme discuté en introduction. Cependant, ces estimateurs génèrent des matrices empiriques qui reflètent uniquement les observations sur une période donnée, et donc on peut trouver des probabilités de downgrade d'un rating faible inférieur à celle d'un rating fort. On constate ce phénomène surtout en périodes de crise, car des entités AAA ou AA<sup>+</sup> font défaut sans passer par des downgrades, par conséquent les matrices sont biaisées. Dans les papiers de D. Tasche [118, 119] on trouve une méthode d'estimation des probabilités de défaut uniquement dite QMM (Quasi Moment Matching), mais qui produit des probabilités monotones. Cette méthode se base sur une fonction de type  $x \mapsto \frac{1}{1+\exp(g(x))}$  où  $g$  est une fonction croissante par rapport au rating (plus le rating est faible, plus l'entité est risquée). Ce type de transformation garantit une décroissance des probabilités de défaut, et des valeurs entre 0 et 1. De plus, la calibration d'une fonction paramétrique  $g$  ne présente pas de difficultés, ce qui rend cette approche très populaire auprès des banques, qui l'utilisent pour affiner ou idéaliser leurs courbes de défaut.

La notion de monotonie ne concerne pas uniquement la colonne de défaut dans la matrice de transition, mais requiert la monotonie de toutes les probabilités de downgrade, y compris celles de défaut. Ces conditions de monotonie sont souvent intégrées dans les contraintes de certains problèmes d'optimisation. En effet, dans les problématiques de calcul des matrices de transition dites haute-fréquence, qui sont des matrices sur de très petites périodes qu'on estime via des matrices de transition annuelles. Moody's Analytics dans [127] traite cette question en cherchant des matrices hautes fréquences dont une puissance est très proche d'une matrice de transition annuelle donnée sous contraintes de monotonie. Cette même approche est utilisée par A.Kreinin et al [124] dans la recherche d'un générateur infinitésimal associé à une matrice de transition donnée. La monotonie est une notion assez vaste et s'exprime de manières différentes sous d'autres formalismes (voir D.Jarrow et al [121]), comme par exemple l'ordre stochastique des processus qui a des implications importantes sur le comportement des files d'attente comme démontré dans les résultats de H.B.Yu [125].

Dans ce chapitre, nous allons discuter la notion de monotonie de manière générale, en étudiant différents estimateurs et leur défaut de monotonie. on développe une approche géométrique qui permet de calculer la matrice monotone la plus proche d'une matrice empirique, dont le défaut de monotonie est défini comme la distance de sa matrice monotone la plus proche. Il convient de citer un travail récent de M.Hughes et al [126] qui emploie les même techniques que nous pour approcher des matrices de transition par d'autres monotones, il est important de mentionner que

nos travaux ont été développés indépendamment et avant toute publication de ceux de M.Hughes et al[126]. Nous comparons sur un portefeuille de crédit, d'une grande banque européenne, le défaut de monotonie de certaines politiques de notation. En effet, le défaut de monotonie jauge les erreurs d'appréciation du risque d'une contrepartie dans une politique de notation donnée. Cela permet de définir une mesure qui permet d'évaluer à quel point une politique de notation classifie le risque.

En risque de crédit, les banques utilisent souvent des échelles de notation qui agrègent certaines notes pour avoir une vision plus "macro" sur le portefeuille de crédit. Nous démontrons que la monotonie d'une matrice obtenue sur une échelle est héritée par la matrice de transition obtenue après transformation de l'échelle de notation. Nous démontrons également que le passage d'une matrice inconditionnelle (Through The Cycle) à une matrice conditionnelle via un modèle de type Vasicek est une transformation qui conserve la monotonie. Donc si une banque utilise une matrice de transition inconditionnelle monotone, alors les matrices de transition conditionnelles seraient monotones quel que soit la position dans le cycle.

## 2.2 Matrices de transition monotones

### 2.2.1 Notion de monotonie et projection monotone.

Soit  $P$  une matrice carrée de taille  $N \times N$ , on dit que  $P$  est stochastique si la somme de ses lignes sont toutes égales à 1, et on note  $\mathfrak{S}_N$  l'ensemble des matrices stochastiques de taille  $N$ . Les matrices de transition sont alors des matrices stochastiques, et on définit leur monotonie de la manière suivante :

**Définition 2.1.** Soit  $P \in \mathfrak{S}_N$ , on dit que  $P$  est monotone si et seulement si

$$\forall i \leq N - 1 \text{ et } k \leq N, \sum_{j \geq k} p_{i,j} \leq \sum_{j \geq k} p_{i+1,j}$$

On note  $\mathcal{A}_N$  le sous-ensemble de  $\mathfrak{S}_N$  des matrices monotones.

On considère une échelle de notes  $R = \{1, \dots, N\}$  où  $N$  représente le défaut, et une chaîne de Markov  $(X_t)_t$  sur  $R$ . Soit  $P(s, t)$  la matrice de transition du processus  $(X_t)_t$  de la période  $[s, t]$ , on a donc pour tout  $i, j \in R$ ,  $p_{ij}(s, t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_s = i)$ . La définition précédente est donc équivalente à

$$\forall i, k \in R, \mathbb{P}(X_t \geq k | X_s = i) \leq \mathbb{P}(X_t \geq k | X_s = i + 1)$$

ce qui veut dire que la probabilité de faire un downgrade depuis un rating  $i$  est moins importante que celle d'un rating  $i + 1$ . Donc  $i + 1$  est plus risqué que  $i$  dans ce sens, ce qui induit une classification du risque. On peut exprimer la condition de monotonie de manière matricielle comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 2.1.** Soit  $P \in \mathfrak{S}_N$ , et  $T \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  une matrice triangulaire inférieure définie par  $t_{i,j} = 1$  si  $j \leq i$  et  $t_{i,j} = 0$  sinon. Alors

$$P \in \mathcal{A}_N \text{ si et seulement si } T^{-1}PT \geq 0$$

*Démonstration.* Il suffit de prendre la matrice  $T$  et développer coefficient par coefficient l'assertion  $T^{-1}PT \geq 0$  pour trouver toutes les contraintes de monotonie.  $\square$

Cette écriture est assez pratique d'un point de vu informatique, car elle permet assez rapidement de vérifier la monotonie d'une matrice de transition. De plus, les coefficients de la matrice  $TPT^{-1}$  donnent un bon moyen de connaître les inégalités de monotonie violées et aussi mesurer le défaut de monotonie via le nombre de coefficients négatifs. On muni  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  de la norme quadratique usuelle  $\|\cdot\|_2$ , si on se donne une matrice empirique, on peut se demander quelle est sa distance de  $\mathcal{A}_N$ . Si elle est monotone, alors forcément cette distance est nulle, sinon celle-ci peut représenter une mesure du défaut de monotonie, sous condition qu'elle soit bien définie. On exploitant la géométrie de  $\mathcal{A}_N$ <sup>1</sup>, on démontre dans le théorème suivant que cette distance est bien définie.

**Théorème 2.1.** Soit  $M \in \mathfrak{S}_N$  une matrice de transition, le problème

$$\min_{P \in \mathcal{A}_N} \|M - P\|_2$$

admet une unique solution qu'on note  $P_{\mathcal{A}_N}(M)$ . On appelle  $P_{\mathcal{A}_N}(M)$  la projection monotone de  $M$ , et la distance  $d(M, \mathcal{A}_N) = \|M - P_{\mathcal{A}_N}(M)\|_2$  défaut de monotonie de  $M$ .

*Démonstration.* Voir 2.7.3.1  $\square$

Nous avons donc une matrice monotone  $P_{\mathcal{A}_N}(M)$  optimale (dans le sens de la distance usuelle) qui approche la matrice empirique  $M$ . Le problème de ce théorème est un problème d'optimisation quadratique qu'on peut exprimer dans une forme standard (voir annexe A), ce qui facilite son implémentation.

## 2.2.2 Résultats numériques

On utilise un historique de rating mensuel entre 2004 et 2015 de plus de 31000 clients d'une grande banque européenne. Pour avoir plus d'observations, on agrège les notes de telle sorte à en avoir 12, avec 1 représentant AAA, AA<sup>+</sup> et 12 représentant le défaut. En utilisant la méthode Cohorte sur la période 01/01/2004 – 01/01/2005 on estime la matrice de transition  $M$  suivante :

1. On démontre que cet ensemble est un convexe fermé, ce qui garantit l'existence et l'unicité.

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	86.57%	8.87%	0.47%	1.97%	0.89%	0.15%	0.12%	0.94%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%
2	5.23%	83.23%	6.11%	2.17%	1.43%	0.94%	0.59%	0.30%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
3	1.04%	12.05%	74.61%	5.62%	2.37%	3.18%	0.68%	0.41%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%
4	0.34%	2.51%	11.46%	77.87%	4.07%	2.64%	0.55%	0.20%	0.21%	0.11%	0.02%	0.00%
5	0.12%	0.51%	3.25%	14.64%	71.60%	7.74%	1.40%	0.61%	0.02%	0.01%	0.10%	0.00%
6	0.09%	0.12%	0.44%	2.01%	8.07%	81.84%	5.22%	1.52%	0.32%	0.16%	0.20%	0.00%
7	0.05%	0.06%	0.07%	0.54%	1.30%	10.08%	79.66%	6.36%	1.16%	0.17%	0.50%	0.05%
8	0.01%	0.02%	0.19%	0.36%	0.45%	2.94%	11.58%	80.75%	1.73%	0.81%	1.06%	0.09%
9	0.00%	0.00%	0.34%	0.05%	0.48%	2.02%	6.98%	8.69%	74.08%	5.36%	1.96%	0.03%
10	0.00%	0.00%	0.01%	0.02%	0.08%	1.39%	3.02%	0.71%	1.83%	81.09%	11.41%	0.44%
11	0.00%	0.00%	0.01%	0.04%	0.20%	0.09%	0.62%	1.25%	1.10%	2.70%	91.49%	2.49%
12	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%

FIGURE 2.1 – La matrice  $M$

On calcule sa projection monotone  $P_{\mathcal{A}_{12}}(M)$  en utilisant le procédé décrit dans l'annexe A et on obtient :

$P_{\mathcal{A}(M)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	86.62%	8.92%	0.51%	2.02%	0.94%	0.20%	0.16%	0.64%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2	5.19%	83.18%	6.06%	2.13%	1.38%	0.90%	0.52%	0.41%	0.07%	0.07%	0.05%	0.04%
3	1.07%	12.08%	74.64%	5.64%	2.40%	3.01%	0.52%	0.41%	0.07%	0.07%	0.05%	0.04%
4	0.25%	2.43%	11.38%	77.78%	3.99%	2.76%	0.67%	0.32%	0.21%	0.12%	0.05%	0.04%
5	0.09%	0.47%	3.21%	14.60%	71.56%	7.71%	1.36%	0.58%	0.10%	0.10%	0.18%	0.04%
6	0.09%	0.12%	0.44%	2.01%	8.06%	81.84%	5.22%	1.51%	0.32%	0.16%	0.20%	0.04%
7	0.09%	0.09%	0.10%	0.53%	1.29%	10.07%	79.65%	6.35%	1.15%	0.16%	0.49%	0.04%
8	0.03%	0.04%	0.21%	0.35%	0.45%	2.94%	11.58%	80.75%	1.73%	0.81%	1.06%	0.06%
9	0.00%	0.00%	0.28%	0.06%	0.48%	2.02%	6.98%	8.69%	74.08%	5.37%	1.97%	0.06%
10	0.00%	0.00%	0.03%	0.05%	0.11%	1.38%	3.01%	0.70%	1.82%	81.08%	11.40%	0.43%
11	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.18%	0.10%	0.63%	1.25%	1.11%	2.71%	91.50%	2.50%
12	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%

FIGURE 2.2 – La matrice  $P_{\mathcal{A}_{12}}(M)$

On constate que la projection monotone de  $M$  donne des probabilités de défaut qui ne sont pas forcément strictement monotones, cela est dû au fait que la projection  $P_{\mathcal{A}_{12}}(M)$  est atteinte sur  $\partial\mathcal{A}_N$  la frontière de  $\mathcal{A}_N$ . Celle-ci est définie par certains cas d'égalité des inégalités qui caractérisent la monotonie de la matrice, et dans ce cas en particulier on a  $p_{2,12} = \dots = p_{7,12}$  et  $p_{8,12} = p_{9,12}$ . Nous allons traiter plus loin qu'en passant par le générateur, et en "idéalisant" celui-ci dans un sens que nous allons définir, on peut approcher notre matrice par une matrice strictement monotone. D'autre part, on peut utiliser une technique simple qui se base sur la convexité de  $\mathcal{A}_N$ . En effet, si on prend une matrice  $P_0$  strictement monotone, alors pour tout  $P \in \partial\mathcal{A}_N$ , la suite  $(P_n)_n$  définie par  $P_n = \frac{1}{n}P_0 + \frac{n-1}{n}P$  est toujours dans  $S\mathcal{A}_N := \mathcal{A}_N \setminus \partial\mathcal{A}_N$  comme le montre la figure 2.3. De plus,  $(P_n)_n$  tend vers  $P$ , ce qui veut dire qu'on peut approcher la matrice  $P$  à souhait par la suite  $(P_n)_n$ . Pour un choix convenable de  $P_0$ , il est possible de rendre la matrice  $P$  strictement monotone avec une erreur fixée.

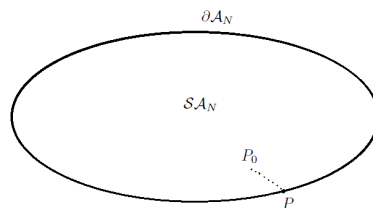


FIGURE 2.3 – Approximation par la suite  $(P_n)_n$ .



On s'interroge maintenant sur l'impact de cette "idéalisaton" de la matrice  $M$ , notamment à quel point les coefficients de la matrice sont modifiés. Naturellement, on calcule la différence  $M - P_{\mathcal{A}_{12}}(M)$  comme représenté ci-dessous :

M-P_A(M)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-0.05%	-0.05%	-0.05%	-0.05%	-0.05%	-0.05%	-0.05%	0.30%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%
2	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.07%	-0.12%	-0.06%	-0.06%	-0.05%	-0.04%
3	-0.03%	-0.03%	-0.03%	-0.03%	-0.03%	0.18%	0.16%	0.00%	-0.06%	-0.06%	-0.04%	-0.04%
4	0.09%	0.09%	0.09%	0.09%	0.09%	-0.12%	-0.12%	-0.12%	0.00%	0.00%	-0.03%	-0.04%
5	0.03%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	-0.08%	-0.08%	-0.08%	-0.04%
6	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.04%
7	-0.03%	-0.03%	-0.03%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%
8	-0.02%	-0.02%	-0.02%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.03%
9	0.00%	0.00%	0.06%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.03%
10	0.00%	0.00%	-0.02%	-0.02%	-0.02%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%
11	0.00%	0.00%	0.01%	0.03%	0.03%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%
12	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

FIGURE 2.4 –  $M - P_{\mathcal{A}_{12}}(M)$

On constate que la probabilité la plus impactée est celle de la transition  $1 \rightarrow 8$  avec une différence de 0.3%. On considère la norme  $\|M\|_{\infty} = \sup_{i,j} |m_{i,j}|$ , donc  $\|M - P_{\mathcal{A}_{12}}(M)\|_{\infty}$  représente la plus grande erreur de monotonie dans les coefficients de la matrice  $M$ . On utilise cette norme car elle permet d'avoir une idée plus claire des décalages maximaux des coefficients, et donc facilement interprétables, contrairement à la norme euclidienne qui donne une moyenne quadratique. On estime la matrice de transition sur les périodes annuelles suivantes

$$t_1 = [01/01/2004, 01/01/2005], t_2 = [02/01/2004, 02/01/2005], \dots, t_{121} = [01/01/2014, 01/01/2015]$$

La figure suivante montre les variations de l'erreur  $\|M - P_{\mathcal{A}_{12}}(M)\|_{\infty}$  sur toutes ces périodes.

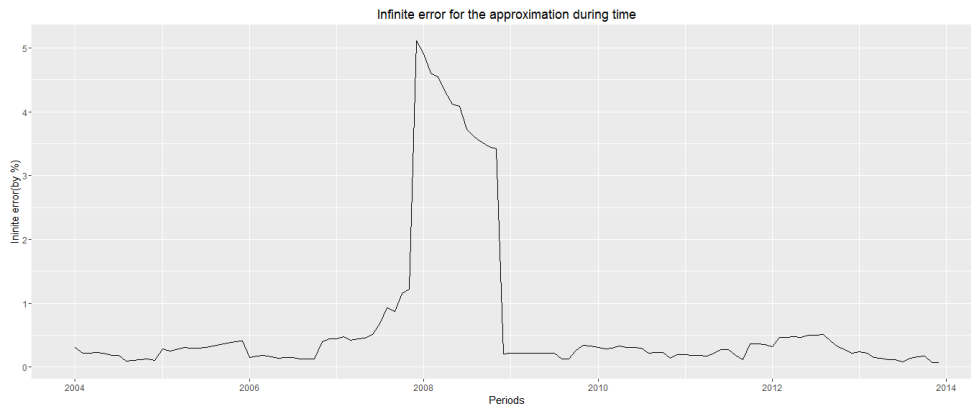


FIGURE 2.5 – Déviations maximales des coefficients de la matrice  $M$ .

On constate clairement que l'erreur est toujours en dessous de 0.5% sauf en période de crise, où nous avons des sauts d'erreurs qui atteignent 5% en 2008. D'un point de vue géométrique, cela veut dire que la matrice  $M$  s'est éloignée du convexe de matrices monotones, et donc son défaut de monotonie augmente drastiquement. Ceci est la résultante des notes très favorables attribuées à certaines contreparties du portefeuille avant la crise et qui ont brusquement diminuées lors de la

crise. Les politiques de notation sont souvent reposent en général sur des avis d'experts, avec une vision très qualitative qui produit une appréciation partielle du risque de défaut. Beaucoup des défauts ou dégradations observés en période de crise ont pour origine le défaut ou la dégradation d'un groupe d'affaires qui entraîne le défaut ou la dégradation des filiales, ou une contagion purement économique qui se propage par effet d'interdépendance.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les estimateurs utilisés en pratique sont en effet des estimateurs par maximum de vraisemblance. Donc pour produire des matrices monotones, il est possible de contraindre le problème de maximisation de la vraisemblance avec les inégalités de monotonie. En d'autres termes, l'estimateur  $\hat{P}$  de ces matrices monotones est la solution du problème de maximum de vraisemblance

$$\max_{P \in \mathcal{G}_N} L(P)$$

où  $L(P) = \prod_{i,j} P_{ij}^{N_{ij}(T)}$  est la vraisemblance cohorte comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent. On applique cette méthode en estimant des matrices monotones sur les périodes  $(t_k)_k$ , et on s'intéresse au défaut de monotonie de l'estimateur par vraisemblance, qu'on définit comme  $\|P - \hat{P}\|$  où  $P$  la matrice empirique. Celle-ci est la matrice qui maximise la vraisemblance  $L(P)$  sans contraintes de monotonie. Donc cette quantité présente l'écart entre la matrice estimée en maximisant la vraisemblance avec et sans contraintes. On compare cette quantité avec le défaut de monotonie  $\|P - P_{\mathcal{M}_N}(P)\|$  comme il est présenté dans la figure 2.6. On constate que la méthode de vraisemblance donne des matrices monotones éloignées des matrices empiriques par rapport à la méthode de projection. De plus, en périodes de crise cet écart entre les deux méthodes devient plus important, ce qui veut dire que les matrices estimées sur cette période sont assez différentes des matrices empiriques ; par conséquent ne reflètent pas précisément la réalité du portefeuille.

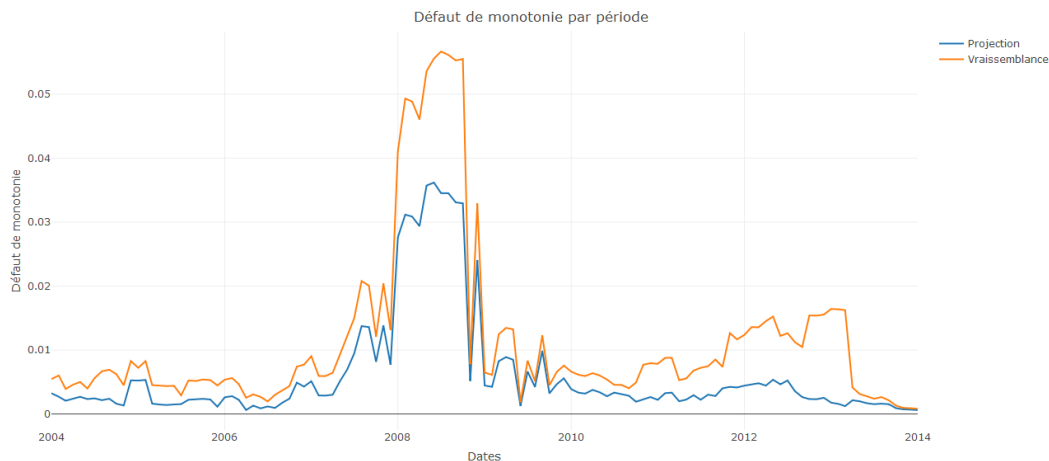


FIGURE 2.6 – Déficit de monotonie des matrices estimées par maximum de vraisemblance, et celles obtenues par projection, normalisés par  $\sqrt{N}$ .

Nous savons déjà que la méthode de projection produit des matrices monotones optimales, donc il été attendu que le défaut de monotonie de la méthode de vraisemblance soit plus grand que celui atteint par la méthode de projection.

On estime maintenant des matrices de transition annuelles sur les périodes  $(t_k)_k$  en utilisant trois estimateurs différents. Le premier est par la méthode cohorte, le deuxième en estimant le générateur infinitésimal et le troisième est celui d'Aalen-Johansen<sup>2</sup>. La figure 2.7 nous montre comment le défaut de monotonie normalisé<sup>3</sup> varie par rapport aux périodes  $(t_k)_k$ . Il est clair que l'estimateur d'Aalen-Johansen est celui qui produit les matrices les moins monotones, suivi de la méthode cohorte qui produit des matrices beaucoup plus proches de la monotonie. La meilleure méthode est alors d'estimer le générateur et puis calculer la matrice de transition, car celle-ci donne les matrices les plus proches de la monotonie.

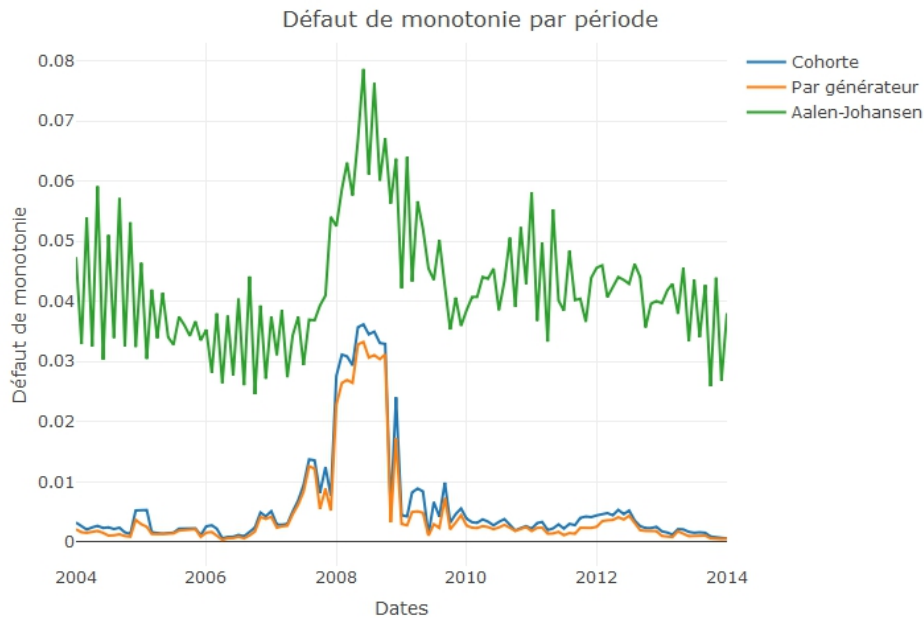


FIGURE 2.7 – Défaut de monotonie normalisé par période.

Il est important de mentionner que le défaut de monotonie est influencé par le choix de l'estimateur, donc pour comparer des politiques de notation ou des agences de notation en utilisant le défaut de monotonie, il est nécessaire d'utiliser le même estimateur ; et de préférence en utilisant un modèle à temps continu homogène. Nous allons voir dans la prochaine section qu'il est possible de transférer les contraintes de monotonie de la matrices de transition au générateur.

2. Nous avons expliqué ces estimateurs dans le chapitre précédent.
3. On désigne par défaut de monotonie normalisé la quantité

$$\frac{d(M, \mathcal{A}_N)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} (m_{ij} - (P_{\mathcal{A}_N}(M))_{ij})^2}{N}}$$

Donc il est possible d'appliquer la méthode de projection sur les générateurs, et ainsi obtenir des matrices de transition monotones.

### 2.3 Monotonie des générateurs

Soit  $P(\tau)$  une matrice de transition dans une période  $\tau$  issue d'une chaîne de Markov homogène  $(X_t)_t$  à valeurs dans l'ensemble des notes  $R = \{1, \dots, N\}$ . On sait qu'il existe un générateur infinitésimal  $\Lambda$  tel que

$$P(\tau) = \exp(\tau\Lambda)$$

On définit la monotonie du générateur comme suite :

**Définition 2.2.** Soit  $\Lambda$  un générateur infinitésimal de taille  $N$ . On dit que  $\Lambda$  est monotone, si et seulement si :

$$\forall i \neq k + 1, \sum_{j \geq k} \lambda_{i,j} \leq \sum_{j \geq k} \lambda_{i+1,j}$$

et on note  $\mathcal{Q}_N$  l'ensemble de ces générateurs.

D.Jarrow et al [121], montre en utilisant les travaux de W.J.Anderson [120] l'équivalence entre la notion de monotonie de la matrice de transition avec celle son générateur infinitésimal. Donc  $P(\tau)$  est monotone si et seulement si  $\Lambda$  l'est aussi dans le sens de la définition ci-dessus.

On peut de la même manière que pour les matrices de transition prouver l'existence et l'unicité d'un générateur monotone qui approche un générateur empirique de manière optimale au sens de la distance usuelle ; et qu'on note  $P_{\mathcal{Q}_N}(\Lambda)$ . On peut alors se demander s'il est préférable d'utiliser un générateur monotone pour avoir une matrice de transition monotone, ou plutôt "monotoniser" la matrice directement. La deuxième réponse est la bonne, car si  $P(\tau) = \exp(\tau\Lambda)$  est non-monotone, la matrice  $\exp(\tau P_{\mathcal{Q}_N}(\Lambda)) \in \mathcal{A}_N$  et par conséquent

$$d(P(\tau), \mathcal{A}_N) = \|P_{\mathcal{A}_N}(P(\tau)) - P(\tau)\|_2 \leq \|\exp(\tau P_{\mathcal{Q}_N}(\Lambda)) - P(\tau)\|_2$$

Pour mieux voir la différence entre les deux méthodes, on représente dans la figure 2.8 le défaut de monotonie sur les périodes  $(t_k)_k$  en ayant projeté le générateur avant d'appliquer l'exponentiel matriciel, et le défaut de monotonie sur la matrice de transition.

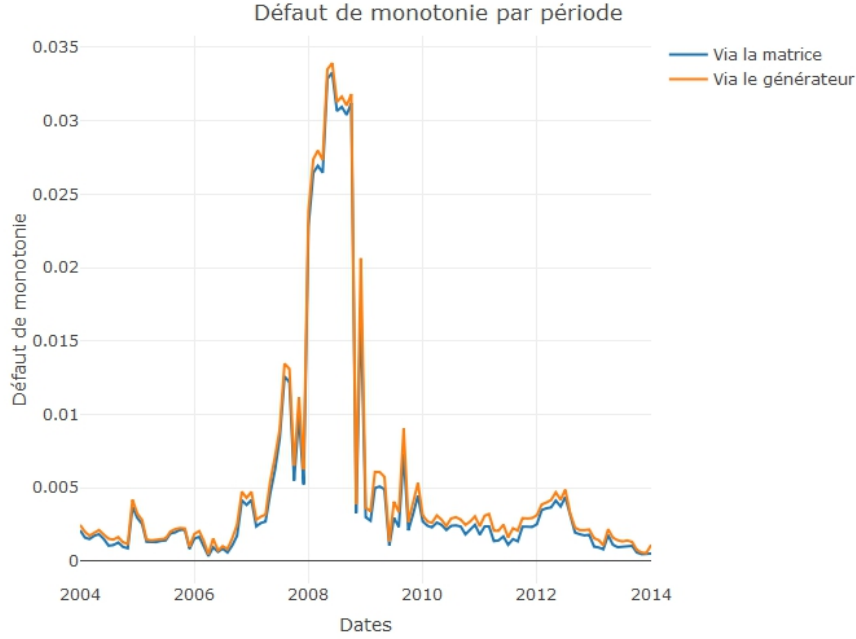


FIGURE 2.8 – Défaut de monotonie par période par projection de la matrice (bleu) et par projection du générateur (orange).

On constate que les deux défauts de monotonie  $d(P(t_k), \mathcal{A}_N)$  et  $\min_{Q \in \mathcal{Q}_N} \|\exp(Q) - P(t_k)\|$  sont presque identiques, et respectent l'inégalité ci-dessus. Nous avons également estimé sur toutes les périodes une différence moyenne  $\frac{\|P_{\mathcal{A}_N}(P(\tau)) - \exp(\tau P_{\mathcal{Q}_N}(\Lambda))\|}{\sqrt{N}}$  à 0.0009, donc l'égalité

$$P_{\mathcal{A}_N}(P(\tau)) \approx \exp(\tau P_{\mathcal{Q}_N}(\Lambda))$$

est presque vérifiée. Toutefois, cette égalité n'est pas vraie, car la matrice  $P_{\mathcal{A}_N}(P(\tau))$  n'est pas strictement monotone contrairement à la matrice  $\exp(\tau P_{\mathcal{Q}_N}(\Lambda))$  qui l'est toujours comme le montre le lemme suivant :

**Lemme 2.1.** *Soit  $\Lambda$  un générateur associé à une chaîne de Markov irréductible et apériodique, s'il est monotone alors pour tout  $\tau > 0$ , la matrice  $\exp(\tau \Lambda)$  est strictement monotone.*

Ce lemme n'est pas difficile à prouver en se basant sur la proposition 2.1 et le théorème 1.4 de A.Keilson et al [122]. En effet, celui-ci prouve l'existence de  $k > 0$  tel que  $\Lambda^k$  soit strictement monotone, ce qui donne immédiatement celle de l'exponentiel matriciel.

En calculant les matrices de transition empiriques, on trouve que leurs graphes d'états sont toujours fortement connectés<sup>4</sup>, car le défaut n'est en réalité pas absorbant, et on observe des retours en sain après un certain temps en défaut grâce à des restructurations de la dette,

4. Cela veut dire que chaque deux états sont connectés par un chemin, ce qui induit la propriété d'irréductibilité et d'apériodicité.

ou des paiements. D'autre part, on a  $\exp(\Lambda) = \sum_{k \geq 0} \frac{\Lambda^k}{k!}$ , alors d'après ce lemme un générateur monotone produit une matrice strictement monotone. En tenant en compte que la distance  $\frac{\|P_{\mathcal{A}_N}(P(\tau)) - \exp(P_{\mathcal{Q}_N}(\Lambda))\|}{\sqrt{N}}$  est très petite, il est légitime de penser que  $\exp(\tau P_{\mathcal{Q}_N}(\Lambda))$  est la meilleur projection strictement monotone de la matrice empirique  $P(\tau)$ . Nous n'avons pas de preuve mathématique de cette affirmation, car plusieurs obstructions s'y opposent, à savoir le problème d'unicité du générateur associé à une matrice. En effet, la fonction exponentielle matricielle n'est pas bijective sur  $\mathcal{A}_N$ , donc faire correspondre un générateur optimal à une matrice de transition optimale n'est pas possible. Le problème de surjectivité est étudié par R.B.Isael et al [123], il donne en particulier une condition suffisante pour l'existence d'un générateur pour une matrice de transition  $P$ , à savoir que  $\rho(P - I) < 1$ <sup>5</sup>. D'après le théorème de Perron-Frobenius, toute matrice de transition  $P$  donne un rayon spectral  $\rho(P - I)$  strictement inférieur à 1, donc l'existence du générateur est assurée.

Si on ne dispose pas d'historique de notations pour estimer un générateur, mais que nous disposons uniquement d'une matrice de transition  $P$  que nous désirons "monotoniser", alors il faudrait calculer d'abord son générateur  $\Lambda$  en se basant sur les méthodes de R.B.Isael et al [123]; et ensuite calculer  $P_{\mathcal{Q}_N}(\Lambda)$  pour en déduire la matrice de transition strictement monotone qui approche  $P$  (voir exemple de l'annexe B).

On applique ce procédé sur deux sous-portefeuilles LBO<sup>6</sup> et PGNC<sup>7</sup>, en estimant les générateurs sur les périodes  $(t_k)_k$ , avec lesquels on calcule les matrices de transition  $\exp(P_{\mathcal{Q}_N}(\Lambda))$ . La figure 2.9 représente le défaut de monotonie des matrices de transitions sur les deux politiques de notation (qu'on appelle défaut de monotonie de la politique de notation). On constate que la politique LBO a un défaut de monotonie plus bas que celui de PGNC, ce qui veut dire que les matrices de transition issues de cette politique violent moins d'inégalités de monotonie que celles de PGNC.

5.  $\rho(A)$  est le module de la plus grande valeur propre de  $A$ , qu'on appelle rayon spectral de  $A$ .

6. Leveraged Buyout : Ces portefeuilles concernent les opérations d'acquisition par effet de levier (crédit) dont le collatéral est souvent les actions de la compagnie. La politique de notation sur ce portefeuille est assez conservatrice vu les volumes qui sont en jeu.

7. Politique Générale de Notation Corporate : C'est une politique standard utilisée dans le cadre de la notation des contreparties corporates.

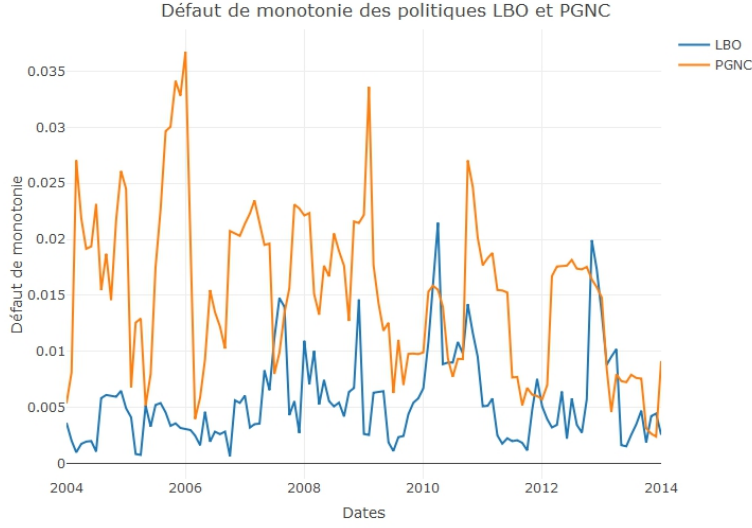


FIGURE 2.9 – Défaut de monotonie des politiques LBO et PGNC.

Dans le sens de la monotonie, la politique LBO classe donc mieux le risque que PGNC, et vu les valeurs faibles du défaut de monotonie même en période de crise, il est clair que cette politique est assez conservatrice. Ceci est en fait vrai, car le développement des activités de LBO au sein des principaux établissements bancaires a suscité une interrogation sur la capacité des banques à gérer les nouveaux risques engendrés par la sophistication croissante de ce marché ; ce qui explique cette prudence des établissements.

## 2.4 Notion de $l$ -monotonie des matrices de transition

Nous avons vu jusqu'à présent que le défaut de monotonie est toujours présent dans les matrices empiriques estimées sur toutes les périodes, en particulier en périodes de crise. L'objectif maintenant est de déterminer sur quels types de notes les politiques de notation "commettent le plus d'erreur" d'appréciation du risque. Pour répondre à cette question, nous allons introduire la notion de  $l$ -monotonie afin de caractériser le nombre de contraintes respectées par une matrice empirique.

Soit  $P$  une matrice stochastique, on dit que  $P$  est  $l$ -monotone si et seulement si :

$$\forall i \in \{1, \dots, N-1\}, \forall k \in \{N-l+1, \dots, N\}, \sum_{j \geq k} p_{i,j} \leq \sum_{j \geq k} p_{i+1,j}$$

Ce qui veut dire qu'une matrice 1-monotone est une matrice dont la colonne de défaut est monotone, et  $N$ -monotone veut dire monotone au sens défini précédemment.

On note  $\mathcal{A}_N^l$  l'ensemble des matrices  $l$ -monotones. On a alors

$$\mathcal{A}_N = \mathcal{A}_N^N, \mathcal{A}_N^N \subset \mathcal{A}_N^{N-1} \subset \dots \subset \mathcal{A}_N^1 \text{ et } \mathcal{A}_N = \bigcup_{l=1}^N \mathcal{A}_N^l$$

donc on a de plus

$$d(P, \mathcal{A}_N^1) \leq d(P, \mathcal{A}_N^2) \leq \dots \leq d(P, \mathcal{A}_N^N)$$

où  $d(P, \mathcal{A}_N^l) = \min_{M \in \mathcal{A}_N^l} \|P - M\|_2$  pour tout  $l \in \{1, \dots, N\}$ , et on appelle le maximal pour lequel une matrice  $P$  est  $l$ -monotone, *profondeur* de monotonie de  $P$ . La dénomination de profondeur vient du fait que les ensembles de monotonie sont emboîtés comme il est illustré dans la figure ci-dessous.

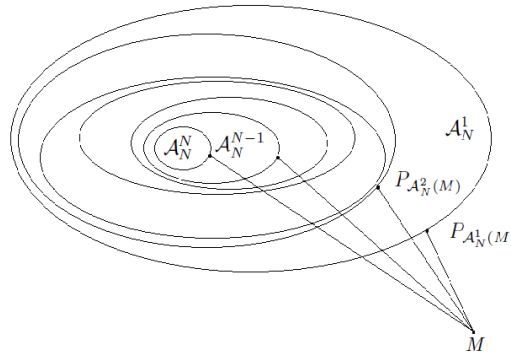


FIGURE 2.10 – Projections de  $M$  sur plusieurs niveaux de profondeur.

Comme il est illustré géométriquement dans cette figure, le défaut de monotonie devient de plus en plus grand quand la profondeur de monotonie augmente. Mais la question qui se pose, est de savoir si cette croissance du défaut de monotonie est uniforme, ou il existe des sauts pour certaines notes? Pour répondre à cette question, on utilise le même procédé que dans la section précédente en traçant sur les périodes  $t_1, \dots, t_{121}$  les fonctions

$$\phi_l : t \mapsto \|M(t) - P_{\mathcal{A}_N^l}(M(t))\|_\infty$$

pour tout  $l \leq N = 12$ . La figure 2.11 représente ces variations pour chaque niveau de profondeur  $l$



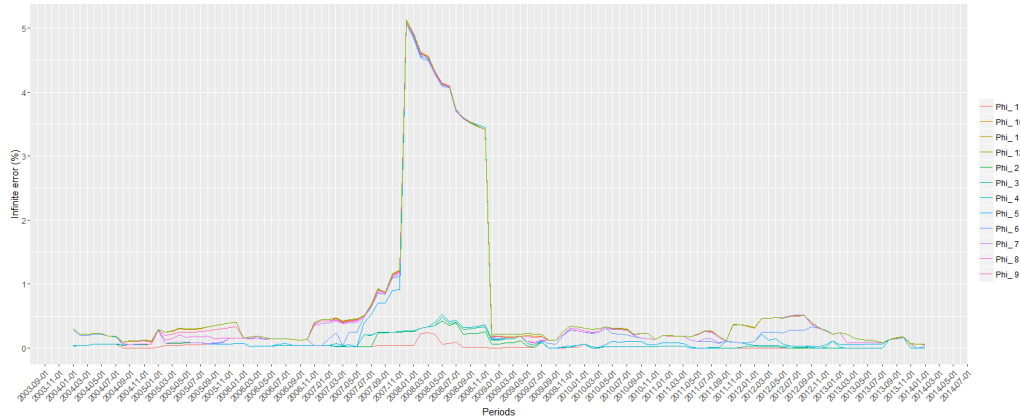


FIGURE 2.11 – Déviations maximales des coefficients de la matrice  $M(t)$  pour chaque niveau de profondeur.

Pour des profondeurs inférieures à 5, les courbes sont toutes en dessous de 0.5% même en périodes de crise, et vérifient de plus l'ordre  $\phi_1 \leq \dots \leq \phi_5$ . On observe qu'à partir de la profondeur 6 l'erreur devient plus importante en période de crise comme nous l'avons constaté pour la monotonie dans la section précédente. Ce qui signifie que sur les notes au-dessus de 5 (de 4 à 1) il y avait beaucoup d'erreur de notation, car ce sont ces notes qui éloignent le plus la matrice  $M(t)$  de la monotonie pour toute période  $t$ . Donc l'attribution de notes très favorables sans conservatisme fait qu'en périodes de crise les entités ayant ces notes font des dégradations importantes ou des défauts, ce qui génère des matrices empiriques fortement non-monotones.

## 2.5 Stabilité de la monotonie

La monotonie est une propriété stable sous certaines transformations comme la puissance, le produit ou la moyenne ( voir A.Keilson et al [122] pour plus de détails ). Dans cette section, nous allons démontrer sa stabilité sous deux transformations très différentes.

### 2.5.1 Stabilité par rapport au positionnement dans le cycle macroéconomique.

Dans le cadre des stress-tests de crédit, une des pratiques internes des banques est d'utiliser des matrices de transition conditionnelles à la position dans le cycle. Cette approche est une extension du modèle de Vasicek au probabilités de transition, qui contient plusieurs variantes d'extension ; comme celle présentée dans le chapitre précédent 1.1.4.2. Soit  $P^o$  une matrice de transition inconditionnelle<sup>8</sup> (Through The Cycle) de taille  $N \times N$ , et on définit  $\tilde{P}(Z)$  la matrices des probabilités cumulées de la même taille, et conditionnelles à la variable latente  $Z$ . En d'autre

8. Cette matrice représente la moyenne des probabilités de transition, qu'on calcule habituellement en moyennant sur les matrices empiriques sur une période.

termes, pour tout  $i, j$  la probabilité  $\tilde{P}_{ij}$  est la probabilité de transition de  $i$  vers une note plus basse ou égale à  $j$ . Un des modèles très utilisés est celui qui considère que pour tout  $i \neq N$  on a pour tout  $j$

$$\tilde{P}_{ij}(Z) = \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(\sum_{k \geq j} P_{ik}^o) - \sqrt{\rho} Z}{\sqrt{1 - \rho}} \right)$$

et  $\tilde{P}_{Nj}(Z)$  est égale à 0 si  $j \leq N - 1$  et 1 sinon.

Il est clair que pour  $j = N$  on retrouve le modèle de Vasicek pour les probabilités de défaut. On voit également que ce modèle reprend la même technique du modèle 1.1.4.2 mais en prenant comme seuils de transition  $b_{ij} = \Phi^{-1}(\sum_{k \geq j} P_{ik}^o)$ .

On peut donc en déduire les probabilités de transition conditionnelles  $p_{ij}(Z)$  en utilisant le fait que pour tout  $i, j \neq N$

$$p_{ij}(Z) = \tilde{P}_{ij}(Z) - \tilde{P}_{i,j+1}(Z)$$

Ce qui nous donne une matrice de transition conditionnelle  $P(Z)$  à partir de la matrice  $P^o$ . De plus, nous avons la propriété de stabilité suivante :

**Proposition 2.2.** *Si  $P^o$  est monotone, alors  $P(Z)$  l'est aussi.*

*Démonstration.* Voir 2.7.3.2. □

Il alors évident que pour avoir des matrices conditionnelles monotones sous ce modèle, il suffit d'utiliser une matrice TTC monotone.

## 2.5.2 Stabilité par rapport au changement de l'échelle de notation.

Il est courant en risque de crédit de faire des changements d'échelle de notation, en agrégeant des notes pour s'adapter à certaines contraintes pratiques. A titre d'exemple, dans le cadre de la norme comptable IFRS9 les banques utilisent des états dits *stages* qui agrègent des notes, et s'intéressent aux changements des stages qui ont un impact sur le bilan de la banque en terme de provisions. Ces matrices de transition entre stages sont déduites des matrices de transition normales, et donc si celle-ci est monotone, alors qu'en est-il de la matrice de changement de stage? On démontre dans cette section que quelque soit le changement d'échelle choisi, si la matrice d'origine est monotone, alors la matrice induite hérite de cette monotonie.

Soit  $P$  une matrice de transition sur les états  $\{1, \dots, N\}$ . Soit  $\{\bar{1}, \dots, \bar{r}\}$  une partition de  $\{1, \dots, N\}$  telle que  $\forall i = 1, \dots, r$ , on a  $\bar{i} \neq \emptyset$ , les éléments de chaque  $\bar{i}$  sont consécutifs et  $\cup_{i=1}^r \bar{i} = \{1, \dots, N\}$ . Soit  $\tilde{P}$  la matrice de transition obtenue sur l'échelle  $\{\bar{1}, \dots, \bar{r}\}$ . On a alors le théorème suivant :

**Théorème 2.2.** *Soit  $P$  une matrice de transition, et  $\tilde{P}$  sa matrice associée pour un changement d'échelle de notation, alors*

1.  $P \in \mathcal{A}_N \Rightarrow \tilde{P} \in \mathcal{A}_r$ .
2.  $P \in S\mathcal{A}_N \Rightarrow \tilde{P} \in S\mathcal{A}_r$ .

*Démonstration.* Voir 2.7.3.3. □

Donc la monotonie est conservée par agrégation des notes en plus de la stabilité par positionnement dans le cycle. En pratiques, les banques utilisent des matrices de transition TTC pour pouvoir faire des projections via une dépendance à une variable latente de position dans le cycle, alors stresser les matrices avant ou après changement de l'échelle des notes n'enlève pas la monotonie.

## 2.6 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre certaines problématiques sur la monotonie des matrices de transition. Nous avons utilisé comme technique une approximation de la matrice empirique par sa matrice monotone la plus proche pour la norme usuelle. Cette approche a l'avantage de fournir une unique solution au problème d'approximation, qui est meilleure que la matrice estimée par maximum de vraisemblance sous contraintes de monotonie en terme de distance de la matrice empirique. Toutefois, cette méthode produit des matrices qui ne sont pas strictement monotones, ce qui signifie qu'elle attribue le même niveau de risque à des notes différentes. Pour résoudre ce problème, nous avons eu recours à la monotonisation du générateur infinitésimal avant d'appliquer l'exponentiel matriciel. Nous avons démontré que de cette façon, la matrice de transition obtenue a un défaut de monotonie très proche de celui de la projection monotone de la matrice empirique, avec une monotonie qui est stricte. Cette mesure de défaut de monotonie qui découle naturellement de cette approche, s'interprète comme l'erreur de notation d'une ou plusieurs politiques de notation dans un portefeuille de crédit. En s'en sert pour faire une comparaison entre les différents estimateurs qu'on utilise en pratique, et on en déduit que le modèle de transition d'une chaîne de Markov homogène produit les matrices de transition dont le défaut de monotonie est le moins élevé.

En se basant sur ce modèle, on estime le défaut de monotonie dans le temps sur deux sous-portefeuilles LBO et corporate. Compte tenu du fait que la politique de notation LBO est beaucoup plus conservatrice que les autres, la comparaison entre les deux défauts de monotonie confirme cela, car les matrices de transition de la politique LBO violent beaucoup moins de contraintes de monotonie. Nous pensons que le défaut de monotonie vient des phénomènes négligés par les politiques de notation, comme par exemple l'interdépendance entre les entités d'un portefeuille qui peut se transformer à de la contagion en situation de stress. Or la politique LBO étudiée est l'une des rares à appliquer des dégradations simultanées ou mettre en défaut des groupes en entier d'entités très interdépendantes, alors cela permet de se couvrir de ce genre de risque. Ces effets d'interdépendance font l'objet des chapitres suivants, dont nous étudions l'impact sur les probabilités de défaut, en prenant en compte un large spectre de relations d'interdépendance possibles.

Nous avons également introduit une notion de profondeur de monotonie qui se traduit par

le nombre de colonnes des matrices qui vérifient les contraintes de monotonie. Nous avons pu implémenter la même méthode de projection en contrôlant la profondeur de celle-ci, donc on peut monotoniser les matrices de transition à un niveau souhaité. En outre, on compare le défaut de monotonie des matrices sur différentes profondeurs afin de déterminer sur quelles notes on commet plus d'erreurs de notation. On en déduit que les inégalités de monotonie qui sont violées sont surtout celles qui concernent les notes au dessus de 5, à savoir les notes dites d'investissement. Cela veut dire que empiriquement nous avons observé plusieurs migrations d'une bonne note vers des notes très mauvaises. Deux explications sont alors possibles, soit la politique de notation n'est pas assez conservatrice sur ce portefeuille, soit elle ne revoit pas la note de manière assez régulière afin de s'assurer d'une appréciation dynamique du risque. Nous nous sommes restreints dans cette étude à l'utilisation d'une norme usuelle, en regardant également comment les variations de l'erreur avec la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Cependant, nous comptons dans la version article de ce chapitre compléter cette étude en regardant les solutions du problème sous différentes normes, comme celle de Mahalanobis ou une autre norme qui n'est pas forcément quadratique.

## 2.7 Annexes

### 2.7.1 Annexe A : Reformulation du problème d'optimisation

Soit  $M$  une matrice de transition empirique. Notre objectif est de reformuler le problème d'optimisation suivant comme un problème quadratique sous contraintes.

$$\min_{P \in \mathcal{A}_N} \|M - P\|_2 \quad (2.1)$$

Soit  $P \in \mathcal{A}_N$ , on a

$$\begin{aligned} \|M - P\|_2^2 &= \sum_{i,j=1}^N (m_{i,j} - p_{i,j})^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^N m_{i,j}^2 + \sum_{i,j=1}^N p_{i,j}^2 - 2 \sum_{i,j=1}^N m_{i,j} p_{i,j} \end{aligned}$$

Donc le problème (2.1) peut être réécrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(p_{1,1}, p_{2,1}, \dots, p_{N,1}, p_{1,2}, \dots, p_{N,N}) \in [0,1]^{N^2}} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N p_{i,j}^2 - \sum_{i,j=1}^N m_{i,j} p_{i,j} \\ \forall i, k, \sum_{j \geq k} p_{i,j} \leq \sum_{j \geq k} p_{i+1,j} \\ \forall i, \sum_{j=1}^N p_{i,j} = 1 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

On désire alors le reformuler sous la forme standard d'un problème d'optimisation quadratique comme suite

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{X=(p_{1,1}, p_{2,1}, \dots, p_{N,1}, p_{1,2}, \dots, p_{N,N})^T \in [0,1]^{N^2}} \frac{1}{2} X^T H X - X^T h \\ A X \leq b \\ B X = c \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Dans notre cas on a  $H = I_{N^2}$  et  $h = (m_{1,1}, \dots, m_{N,1}, \dots, m_{N,N})^T \in \mathbb{R}^{N^2}$ . Donc

$$\forall i, \sum_{j \geq k} p_{i,j} \leq \sum_{j \geq k} p_{i+1,j} \Leftrightarrow A_k X \leq 0_{N-1}$$

où

$$A_k = \begin{pmatrix} 0_N & 0_N & \dots & 0_N & e_1 - e_2 & \dots & e_1 - e_2 \\ 0_N & 0_N & \dots & 0_N & e_2 - e_3 & \dots & e_2 - e_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_N & 0_N & \dots & 0_N & e_{N-1} - e_N & \dots & e_{N-1} - e_N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N-1, N^2}(\mathbb{R})$$

et  $0_N = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$ , et  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$  les vecteurs de la base canonique. Les vecteurs  $0_N$  apparaissent  $k-1$  fois dans la matrice  $A_k$ , car par exemple on a

$$A_1 = \begin{pmatrix} e_1 - e_2 & \dots & e_1 - e_2 & \dots & e_1 - e_2 \\ e_2 - e_3 & \dots & e_2 - e_3 & \dots & e_2 - e_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{N-1} - e_N & \dots & e_{N-1} - e_N & \dots & e_{N-1} - e_N \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0_N & e_1 - e_2 & \dots & e_1 - e_2 & \dots & e_1 - e_2 \\ 0_N & e_2 - e_3 & \dots & e_2 - e_3 & \dots & e_2 - e_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0_N & e_{N-1} - e_N & \dots & e_{N-1} - e_N & \dots & e_{N-1} - e_N \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 0_N & 0_N & \dots & 0_N & e_1 - e_2 \\ 0_N & 0_N & \dots & 0_N & e_2 - e_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_N & 0_N & \dots & 0_N & e_{N-1} - e_N \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire la matrice  $A$  du problème par blocs comme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N(N-1), N^2}(\mathbb{R})$$

et le vecteur de bornes  $b$  est égale à

$$0_{N^2} = (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{N^2}$$

En outre, les contraintes  $\forall i, \sum_{j=1}^N p_{i,j} = 1$  peuvent être encodées dans  $BX = c$  en prenant

$$B = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_1 & \dots & e_1 \\ e_2 & \dots & e_2 & \dots & e_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_N & \dots & e_N & \dots & e_N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N, N^2}(\mathbb{R})$$

et

$$c = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$$

Cette reformulation du problème (2.3) nous permet d'utiliser les outils informatiques adaptés, à savoir les fonction d'optimisation sur R ou python qui prennent le problème sous ce format.

### 2.7.2 Annexe B : Exemple d'estimation du générateur d'une matrice.

On se donne une matrice empirique  $M$  estimée via la méthode cohorte, donc qui n'est pas induite d'un générateur.

CHAPITRE 2. MONOTONIE DES MATRICES DE TRANSITION

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	87,21%	8,14%	0,00%	2,33%	1,16%	0,00%	0,00%	1,16%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
2	5,95%	82,94%	5,16%	2,78%	1,98%	0,79%	0,40%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
3	0,72%	15,27%	70,41%	6,92%	2,15%	3,82%	0,48%	0,24%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
4	0,26%	1,72%	13,77%	76,16%	4,64%	2,38%	0,53%	0,13%	0,26%	0,13%	0,00%	0,00%
5	0,11%	0,32%	2,23%	18,09%	68,94%	8,30%	1,38%	0,43%	0,00%	0,00%	0,21%	0,00%
6	0,09%	0,09%	0,23%	1,45%	9,94%	80,77%	5,25%	1,31%	0,38%	0,23%	0,23%	0,00%
7	0,00%	0,06%	0,06%	0,17%	1,03%	10,68%	79,68%	6,20%	1,44%	0,17%	0,46%	0,06%
8	0,00%	0,00%	0,18%	0,35%	0,18%	2,45%	10,42%	82,66%	1,75%	0,96%	1,05%	0,00%
9	0,00%	0,00%	0,44%	0,00%	0,44%	1,31%	8,30%	7,86%	75,55%	4,37%	1,75%	0,00%
10	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,90%	3,15%	0,45%	2,25%	86,04%	6,76%	0,45%
11	0,00%	0,00%	0,26%	0,00%	0,26%	0,00%	0,53%	1,32%	1,06%	2,38%	91,80%	2,38%
12	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%

FIGURE 2.12 – La matrice empirique  $M$ .

On constate que cette matrice a des coefficients nuls partout, et qui viole plusieurs conditions de monotonie. On attribue à cette matrice le générateur  $G = \log(M)$  défini par

$$\log(M) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(M - I)^n}{n}$$

Celui-ci existe pour les raisons citées dans la section 3, et il contient certains coefficients non diagonaux négatifs comme on peut le constater dans la figure ci-dessous :

G	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-0,139269	0,094571	-0,004606	0,025482	0,012956	-0,001318	-0,001033	0,013521	-0,000150	-0,000078	-0,000078	0,000000
2	0,068991	-0,193942	0,062867	0,028929	0,023030	0,006780	0,004227	-0,000732	-0,000083	-0,000029	-0,000039	0,000000
3	0,003209	0,192588	-0,355847	0,085410	0,022733	0,045880	0,004039	0,002459	-0,000258	-0,000120	-0,000096	0,000000
4	0,002185	0,007715	0,179484	-0,281027	0,057753	0,023574	0,004904	0,000829	0,003269	0,001499	-0,000182	0,000000
5	0,000874	0,000619	0,013701	0,237249	-0,375464	0,103101	0,014369	0,004129	-0,000668	-0,000321	0,002442	-0,000031
6	0,000997	0,000677	0,000754	0,006440	0,127604	-0,220948	0,062309	0,013410	0,004038	0,002530	0,002238	-0,000050
7	-0,000084	0,000584	0,000295	0,000256	0,006574	0,129010	-0,233420	0,073446	0,017043	0,001125	0,004591	0,000580
8	-0,000019	-0,000226	0,001800	0,003884	0,000096	0,022514	0,124228	-0,194243	0,020464	0,010563	0,011125	-0,000187
9	-0,000017	-0,000449	0,005570	-0,000960	0,004486	0,009365	0,097710	0,093578	-0,279320	0,052208	0,018180	-0,000351
10	0,000000	0,000000	-0,000182	-0,000050	-0,000846	0,008501	0,035706	0,002531	0,026585	-0,151398	0,075197	0,003963
11	0,000000	-0,000243	0,003149	-0,000426	0,003162	-0,000841	0,004376	0,014338	0,011998	0,026275	-0,086542	0,024763
12	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

FIGURE 2.13 – Le générateur de  $M$  défini par  $G = \log(M)$ .

Ces valeurs négatives ont pour origine les valeurs nulles de la matrice  $M$ , et ils sont très faibles à tel point qu'on peut les considérer comme nuls. On calcule la projection monotone  $P_{\mathcal{Q}_N}(M)$  et on obtient :

P_QN(G)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-0,139052	0,094789	0,000000	0,025700	0,013174	0,000000	0,000000	0,005390	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	0,068467	-0,194467	0,062342	0,028404	0,022506	0,006255	0,001103	0,002008	0,000995	0,001049	0,000821	0,000517
3	0,004223	0,193601	-0,354833	0,086424	0,023746	0,040346	0,001103	0,002008	0,000953	0,001091	0,000821	0,000517
4	0,000519	0,004894	0,176663	-0,283847	0,054932	0,027301	0,008631	0,003823	0,003758	0,001988	0,000821	0,000517
5	0,000519	0,000808	0,012662	0,236211	-0,376502	0,102063	0,013331	0,003823	0,001531	0,001878	0,003158	0,000517
6	0,000519	0,000808	0,001408	0,006234	0,127399	-0,221154	0,062104	0,013205	0,003833	0,001968	0,003158	0,000517
7	0,000335	0,000992	0,001408	0,002228	0,005922	0,128358	-0,234072	0,072795	0,016391	0,000830	0,004296	0,000517
8	0,000335	0,000139	0,002165	0,002323	0,001158	0,022299	0,124013	-0,194458	0,020249	0,010348	0,010910	0,000517
9	0,000000	0,000000	0,002640	0,000000	0,003481	0,009638	0,097984	0,093851	-0,279046	0,052481	0,018454	0,000517
10	0,000000	0,000000	0,001345	0,001211	0,000415	0,007921	0,035127	0,001952	0,026005	-0,151977	0,074618	0,003383
11	0,000000	0,000000	0,001345	0,000000	0,001625	0,000000	0,004680	0,014642	0,012301	0,026579	-0,086239	0,025066
12	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

FIGURE 2.14 – La projection monotone  $P_{\mathcal{Q}_N}(G)$  du générateur  $G$ .

Ce générateur est bien monotone, mais pas strictement monotone comme on peut le constater sur la dernière colonne. Toutefois, en calculant son exponentielle, on obtient une matrice strictement monotone comme il est le cas pour la matrice obtenue ci-dessous :

exp(P_QN(G))	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	87,30%	8,07%	0,43%	2,34%	1,17%	0,13%	0,05%	0,47%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%
2	5,83%	83,09%	4,99%	2,75%	1,90%	0,75%	0,15%	0,21%	0,09%	0,10%	0,08%	0,05%
3	0,87%	14,85%	71,17%	6,78%	2,20%	3,30%	0,25%	0,22%	0,10%	0,11%	0,09%	0,05%
4	0,12%	1,70%	12,97%	76,38%	4,29%	2,68%	0,82%	0,39%	0,31%	0,19%	0,10%	0,05%
5	0,06%	0,30%	2,39%	17,18%	69,60%	7,98%	1,35%	0,43%	0,18%	0,18%	0,29%	0,06%
6	0,05%	0,10%	0,28%	1,63%	9,55%	81,02%	5,13%	1,30%	0,37%	0,20%	0,32%	0,06%
7	0,04%	0,10%	0,15%	0,32%	1,08%	10,38%	79,89%	6,03%	1,36%	0,15%	0,44%	0,06%
8	0,03%	0,04%	0,20%	0,23%	0,26%	2,49%	10,20%	82,80%	1,71%	0,94%	1,03%	0,07%
9	0,00%	0,03%	0,22%	0,07%	0,36%	1,39%	8,18%	7,74%	75,86%	4,31%	1,77%	0,08%
10	0,00%	0,01%	0,12%	0,12%	0,10%	0,87%	3,06%	0,43%	2,17%	86,05%	6,66%	0,40%
11	0,00%	0,01%	0,12%	0,02%	0,14%	0,07%	0,57%	1,34%	1,07%	2,40%	91,85%	2,41%
12	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%

 FIGURE 2.15 – La matrice de transition strictement monotone  $\exp(P_{\mathcal{Q}_N}(G))$ .

## 2.7.3 Annexe C : Preuves

### 2.7.3.1 Preuve du théorème 2.1

Soit  $\mathcal{A}_N := \{P \in \mathfrak{S}_N \mid \forall i, k \ L_{i,k}(P) \leq L_{i+1,k}(P)\}$  où  $L_{i,k}(P) := \sum_{j \geq k} p_{i,j}$ , on commence par démontrer le lemme suivant :

**Lemme 2.2.** *L'ensemble  $\mathcal{A}_N$  est un compact convexe de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ .*

*Preuve.* Pour tout  $i \neq k$  on considère l'application  $\Phi_{i,k}$  de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  qui associe à  $P$  la différence  $L_{i+1,k}(P) - L_{i,k}(P)$ . Ces applications sont continues, donc  $\Phi_{i,k}^{-1}([0, +\infty[)$  est fermé pour tout  $i \neq k$ . D'autre part, on a

$$\mathcal{A}_N = \mathfrak{S}_N \cap (\bigcap_{k \neq i} \Phi_{i,k}^{-1}([0, +\infty[))$$

or  $i \in \{1, \dots, N\}$  l'ensemble  $L_{i,1}^{-1}(1)$  est fermé et  $\mathfrak{S}_N = \bigcap_{i=1}^N L_{i,1}^{-1}(1) \cap [0, 1]^{N^2}$ , alors  $\mathfrak{S}_N$  est fermé et borné dans  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , donc c'est un compact.

Soient  $t \in [0, 1]$  et  $P_1, P_2 \in \mathcal{A}_N$ . Comme les fonctions  $L_{i,k}$  sont linéaires, alors  $tP_1 + (1-t)P_2 \in \mathcal{A}_N$ , d'où la convexité.  $\square$

Maintenant on passe à la preuve du théorème.

Existence : L'application  $P \mapsto \|M - P\|_2$  est polynomiale en les coefficients de  $P$ , donc elle est continue. De plus, d'après le lemme  $\mathcal{A}_N$  est un compact, alors  $P \mapsto \|M - P\|_2$  est bornée sur  $\mathcal{A}_N$  et atteint ses bornes. D'où l'existence.

Unicité : L'unicité est directement déduite de la convexité de  $\mathcal{A}_N$  d'après le lemme.

### 2.7.3.2 Preuve de la proposition 2.2.

Soit  $P^o$  une matrice de transition inconditionnelle monotone. Par définition, on a pour tout  $i, j$

$$\sum_{k \geq j} P_{ik}^o \leq \sum_{k \geq j} P_{i+1,k}^o$$

or  $\Phi$  est croissante, alors pour tout  $\rho \in [0, 1]$  et  $Z$ , on a

$$\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\sum_{k \geq j} P_{ik}^o) - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right) \leq \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\sum_{k \geq j} P_{i+1,k}^o) - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$



donc  $P_{ij}(Z) \leq P_{i+1,j}(Z)$ . Or  $P_{ij}(Z) = \sum_{k \geq j} p_{ik}$ , alors la matrice  $P = (p_{ij})$  est monotone ; d'où le résultat.

### 2.7.3.3 Preuve du théorème 2.2.

Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles bornées de  $\mathbb{R}$ . On note  $A \triangleright B$  ssi  $\max(A) \leq \min(B)$ ,  $A \triangleright_s B$  ssi  $\max(A) < \min(B)$  et  $\mathcal{M}(A)$  l'ensemble des barycentres de  $A$ . On a alors le lemme suivant :

**Lemme 2.3.** *Si  $A$  et  $B$  sont finis, alors :*

1.  $A \triangleright B \Rightarrow \mathcal{M}(A) \triangleright \mathcal{M}(B)$ .
2.  $A \triangleright_s B \Rightarrow \mathcal{M}(A) \triangleright_s \mathcal{M}(B)$ .

*Preuve.* 1. Soient  $A = \{a_1, \dots, a_{|A|}\}$  et  $B = \{b_1, \dots, b_{|B|}\}$  tels que  $a_1 \leq \dots \leq a_{|A|} \leq b_1 \leq \dots \leq b_{|B|}$ , ce qui est équivalent à  $A \triangleright B$ .

Soit  $(x, y) \in \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(B)$ , il existe deux vecteurs  $\lambda \in [0, 1]^{|A|}$  et  $\mu \in [0, 1]^{|B|}$  tels que  $x = \sum_{k=1}^{|A|} \lambda_k a_k$  et  $y = \sum_{k=1}^{|B|} \mu_k b_k$  avec  $\sum_{k=1}^{|A|} \lambda_k = \sum_{k=1}^{|B|} \mu_k = 1$ . Donc  $x \in [a_1, a_{|A|}]$  et  $y \in [b_1, b_{|B|}]$ , par suite  $x \leq y$  pour tout  $(x, y) \in \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(B)$ . Cela veut dire que  $\mathcal{M}(A) \triangleright \mathcal{M}(B)$ .

2. Même preuve avec  $a_1 \leq \dots \leq a_{|A|} < b_1 \leq \dots \leq b_{|B|}$ . □

**Preuve du théorème :**

1. Soit  $P \in \mathcal{A}_N$ . On note

$$p_{i, \cup_{j=k}^r \bar{j}} := \sum_{j \geq \min(\bar{k})} p_{i,j}$$

on a alors  $\forall i \in \{1, \dots, N-1\}$ ,  $p_{i, \cup_{j=k}^r \bar{j}} \leq p_{i+1, \cup_{j=k}^r \bar{j}}$ .

On écrit  $\tilde{P}_{\bar{i}, \bar{j}}$  comme une moyenne des probabilités  $p_{i, \bar{j}}$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\bar{i}, \bar{j}} &= \mathbb{P}[X_t \in \bar{j} | X_{t-1} \in \bar{i}] \\ &= \frac{\mathbb{P}[X_t \in \bar{j} \cap X_{t-1} \in \bar{i}]}{\mathbb{P}[X_{t-1} \in \bar{i}]} \\ &= \frac{\sum_{i \in \bar{i}} \mathbb{P}[X_t \in \bar{j} \cap X_{t-1} = i]}{\mathbb{P}[X_{t-1} \in \bar{i}]} \\ &= \sum_{i \in \bar{i}} p_{i, \bar{j}} \lambda_i \end{aligned}$$

où pour tout  $i$  on a  $\lambda_i = \frac{\mathbb{P}[X_{t-1}=i]}{\mathbb{P}[X_{t-1} \in \bar{i}]}$  qui vérifient  $\sum_{i \in \bar{i}} \lambda_i = 1$ .

Soient  $i, k \in \{1, \dots, r\}$  tels que  $i \neq r$ . On a

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq k} \tilde{P}_{\bar{i}, \bar{j}} &= \sum_{j \geq k} \sum_{i \in \bar{i}} p_{i, \bar{j}} \lambda_i \\ &= \sum_{i \in \bar{i}} \sum_{j \geq k} p_{i, \bar{j}} \lambda_i \\ &= \sum_{i \in \bar{i}} \sum_{j \geq k} p_{i, \bar{j}} \lambda_i \\ &= \sum_{i \in \bar{i}} p_{i, \cup_{j=k}^r \bar{j}} \lambda_i \end{aligned}$$

d'où  $\forall i, k \quad \sum_{j \geq k} \tilde{P}_{\bar{i}, \bar{j}} \in \mathcal{M}(\{p_{i, \cup_{j=k}^r \bar{j}} | i \in \bar{i}\})$ . En outre, on a  $\{p_{i, \cup_{j=k}^r \bar{j}} | i \in \bar{i}\} \triangleright \{p_{i, \cup_{j=k}^r \bar{j}} | i \in \bar{i} + 1\}$ , donc d'après le lemme on a

$$\mathcal{M}(\{p_{i, \cup_{j=k}^r \bar{j}} | i \in \bar{i}\}) \triangleright \mathcal{M}(\{p_{i, \cup_{j=k}^r \bar{j}} | i \in \bar{i} + 1\})$$

D'où  $\tilde{P} \in \mathcal{A}_N$  on a

$$\sum_{j \geq k} \tilde{P}_{\bar{i}, \bar{j}} \leq \sum_{j \geq k} \tilde{P}_{\bar{i}+1, \bar{j}}$$

ce qui prouve la monotonie de  $\tilde{P}$ .

2. La même preuve pour les inégalités strictes.

## CHAMPS DE MARKOV ET MODÉLISATION DE L'INTERDÉPENDANCE

Dans ce chapitre nous introduisons un modèle général d'interdépendance dans un réseau économique en utilisant une distribution de Gibbs. Celui-ci permet de prendre en compte un large spectre de relations, comme des relations maison filiale, concurrence ou des relations de support. Nous explorons certaines propriétés du modèle ainsi construit, et nous démontrons via des techniques de courants aléatoires des résultats théoriques sur une classe de réseaux, comme l'atténuation exponentielle de la propagation d'un choc macro-économique local, ou la prédiction de la sensibilité d'un événement sur le réseau par rapport à ses différents paramètres. Nous introduisons également de nouvelles inégalités de corrélation, afin de prédire les variations des corrélations en fonction des caractéristiques du réseau. Finalement, nous discutons comment la considération de l'interdépendance change les paramètres du risque de crédit, via les déformations que subit la distribution des pertes sous une structure de dépendance donnée.

**Mots-clés :** Risque de crédit, Contagion, Champs de Markov , Courants aléatoires.

### Sommaire

3.1	Notions : théorie des graphes et champs de Markov	66
3.1.1	Exemples de champs de Markov :	69
3.2	Le modèle	71
3.2.1	Formalisme mathématique	72
3.2.2	Sensibilité aux paramètres	73
3.2.3	Effets de premier et second ordre	81
3.2.4	Sensibilité aux probabilités intrinsèques et les types de relations	86
3.2.5	Exemples de relations	88

3.2.6	Influence du réseau sur le comportement d'un couple : la relation équivalente. . . . .	91
3.3	Courants aléatoires et représentation du modèle . . . . .	<b>99</b>
3.3.1	L'entité fantôme . . . . .	100
3.3.2	Représentation du modèle . . . . .	101
3.3.3	Exemples de courants aléatoires sur des réseaux simples . . . . .	104
3.4	Analyse des fonctions de corrélation sur les réseaux économiques cohérents . . .	<b>107</b>
3.5	Applications en risque de crédit : déformation de la distribution des pertes . . .	<b>112</b>
3.6	Propagation des chocs macroéconomiques locaux dans un réseau . . . . .	<b>121</b>
3.7	Le concept de phénomène critique et son adaptation aux réseaux économiques .	<b>127</b>
3.8	Conclusion et perspectives . . . . .	<b>132</b>
3.9	Annexes : . . . . .	<b>135</b>
3.9.1	Preuves des propriétés élémentaires . . . . .	135
3.9.2	Preuves utilisant des courants aléatoires . . . . .	140

---

## Introduction

Le défaut est le sujet central du risque de crédit, son étude et sa modélisation est d'un enjeu majeur à la fois pour les banques et les régulateurs. Bien que sa modélisation fait toujours l'objet de plusieurs études, elle demeure assez difficile du fait de la rareté des observations de défaut. Comme évoqué en introduction, la crise de 2008 a dévoilé l'incompréhension du défaut, et a mis en évidence, via des observations de défauts en cascade, le rôle des mécanismes de l'interdépendance dans la propagation de la crise dans l'économie. Ce phénomène de contagion est alors devenu l'un des sujets les plus importants dans l'étude de la stabilité financière et économique. Les banques, en tant qu'entités centrales du système et emprunteuses de l'économie réelle, sont exposées aux risques associés à leur interdépendance avec les institutions financières du système. Celles-ci sont également sensibles aux risques de concentration et de défaut associées à l'interdépendance des entités qui constituent leurs portefeuilles de crédit. En risque de crédit, la réglementation européenne s'intéresse aux aspects d'interdépendance, notamment sur les portefeuilles de crédit avec des expositions larges. En effet, l'autorité bancaire européenne (EBA) a mis en place des directives sur ce qu'elle appelle Large Exposures, qui visent à identifier le risque de concentration sur un groupe d'entités interconnectées (EBA/GL/2016;[1]). L'article 178 du CRR (Capital Requirement Regulation) limite l'exposition à 10% sur un groupe de clients connectés. Ce dispositif ne repose pas sur une modélisation quantitative du problème, mais plutôt sur une caractérisation qualitative d'un groupe connecté de clients sur plusieurs critères. Ces derniers portent sur les types de relations et la structure du groupe, à savoir le nombre de relations qui le constituent et si les relations sont économiques ou capitalistiques. Toutefois, il existe certains modèles qui permettent d'intégrer l'effet de l'interdépendance sur la distribution des pertes d'un portefeuille. Comme discuté dans la revue de littérature du chapitre 1, ces modèles ne prennent pas en compte

la particularité des liens entre les différentes entités du portefeuille.

La classe des modèles qui nous intéresse est celle utilisant les champs de Markov, plus précisément des modèles empruntés à la physique comme celui d'Ising. J.Molins et E.Vives [45, 46] utilisent ce modèle dans deux papiers pour étudier les portefeuilles de crédit homogènes, notamment leur distribution de pertes sur deux types de réseaux assez simples. Ils démontrent que ce modèle est "optimal" dans le sens du principe d'entropie maximale<sup>1</sup>. Ensuite, ils relient de manière qualitative la contagion observée en période de crise au phénomène de changement de phase en mécanique statistique. Par analogie, ils mettent en exergue le rôle de celui-ci dans l'apparition des défauts simultanés de manière brusque et sans signaux alarmants en période de crise. Malgré les nombreuses analyses pertinentes de ces travaux, ceux-ci restent restreints à deux types de réseaux très particuliers, sur lesquels le modèle d'Ising s'exprime de manière assez simple. De la même manière, K.Kitsukawa et al. [89] proposent un modèle d'Ising pour modéliser l'interdépendance en crédit, en donnant une application en valorisation des tranches de CDO (Credit Default Swap). Malheureusement ce papier présente les choses d'un angle purement "éconophysique", sans mise en avant de l'interprétation économique et financière des paramètres du modèle. Les travaux I.O. Filiz et al. [47] proposent un modèle d'Ising avec une extension multipériodique, qu'ils appliquent principalement dans la valorisation des CDO. De plus, ils démontrent par des arguments de géométrie algébrique que le modèle se calibre de manière unique via la donnée des probabilités marginales et doubles de défaut. Un des avantages de ce type de modèles réside dans ses propriétés dites critiques, qui correspondent en économie à l'existence d'un niveau d'interdépendance critique à partir duquel il y a un risque de contagion. Cela rejoint l'intuition de l'économiste Britannique A.Haldane [103], qui considère que l'interdépendance positive en économie est bénéfique tant qu'elle ne dépasse pas un seuil qui peut mener à une contagion. Il explique ce phénomène en faisant une analogie avec les réseaux électriques sécurisés par des connexions afin de garantir une alimentation en électricité. Ces connexions peuvent générer en cas d'excès un risque de dysfonctionnement du réseau électrique global par propagation d'un incident de forte amplitude. Ceci montre l'intérêt de ce type de modèles pour les économistes, car celui-ci fournit un cadre dans lequel l'existence de phénomènes critiques est possible. Toutefois, le modèle d'Ising classique demeure insuffisant pour décrire toute la richesse des relations possibles dans un réseau économique. En effet, le modèle d'Ising considère que les entités du réseau interagissent uniquement de deux manières, soit une connexion positive ou négative. Ceci s'interprète soit par une relation de support ou de concurrence, car la connexion positive est synonyme d'intérêts communs, alors que c'est l'inverse pour le cas négatif. Les relations économiques sont cependant beaucoup plus complexes, et nécessitent beaucoup plus de degrés de liberté dans leur modélisation comme l'asymétrie. Cette problématique fait l'objet des travaux développés dans ce chapitre, dont le but est de construire un modèle général d'interdépendance

---

1. Le principe d'entropie maximale donne la meilleure distribution dont les moments sont fixes qui maximise l'entropie, voir [45].

applicable en risque de crédit.

Nous allons construire dans ce chapitre un nouveau modèle d'interdépendance, qui permet de prendre en considération les particularités des relations entre les entités d'un réseau économique. Nous utilisons une distribution de Gibbs dont le Hamiltonien contient d'une part une partie intrinsèque à chaque entité, et d'autre part des fonctions de couplage qui permettent d'associer à chaque couple un mode d'interaction qui lui est propre. Nous consacrons la première section du chapitre aux rappels, notations et notions nécessaires pour l'introduction et l'étude du modèle. Dans la deuxième section, des propriétés élémentaires du modèle seront démontrées, et nous y expliquons la philosophie derrière cette approche tout en mettant en exergue son apport à la modélisation des différents types d'interactions entre deux entités. Nous démontrons plusieurs résultats mathématiques sur les effets de l'interdépendance sur les probabilités de défaut marginales et jointes, ainsi que sur la formation de clusters. Nous montrons comment ces résultats s'articulent de manière très cohérente, et donnent beaucoup d'information sur la sensibilité de chaque entité à son environnement. Nous utilisons par la suite ces sensibilités pour distinguer les effets de premier et de second ordre, en particulier la sensibilité d'une entité aux voisins directs et indirects.

Ensuite, nous introduisons dans la troisième section la notion de courant aléatoire et ses propriétés qui nous permettront d'établir des résultats théoriques sur certaines classes de réseaux dans la quatrième section. Ces résultats ont nécessité la démonstration de certaines nouvelles inégalités de corrélation en utilisant le formalisme des courants. Nous consacrons la cinquième section aux applications du modèle en risque de crédit, en particulier à l'étude de la déformation de la distribution des pertes, et son impact sur les paramètres classiques du risque. Nous discutons les phénomènes de propagation du risque dans un réseau dans la section 6. Nous étudions les modes de propagations possibles d'un choc macroéconomique local sur différentes configurations d'un réseau, ainsi que l'atténuation de celui-ci par effet de distance. Nous discutons dans la section 7 l'apparition des phénomènes critiques, que nous définissons d'une manière rigoureuse, et beaucoup plus adaptée à notre contexte que la définition classique de la mécanique statistique.

### 3.1 Notions : théorie des graphes et champs de Markov

Le but de cette section est d'introduire certaines notions dont nous aurons besoin dans la suite du chapitre :

**Définition 3.1. (Graphe pondéré non-orienté)**

Soit  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , et  $M = (m_{u,v})_{u,v \in V}$  une matrice telle que :

- $\forall u, v \in V, m_{u,v} \geq 0$  et  $m_{u,u} = 0$  ;
- $\forall u, v \in V, m_{u,v} = m_{v,u}$ .

On appelle le couple  $G = (V, M)$  un *graphe pondéré non-orienté*, dont  $V$  est l'ensemble des noeuds et  $M$  la matrice des poids. Les couples de noeuds dans  $E(V) := \{(u, v) \in V^2 \mid m_{u,v} \neq 0\}$  sont appelés arêtes et on dit que les noeuds d'une arête sont *connectés*. On notera parfois les arêtes de  $E(V)$  simplement  $e$  (pour *edge*) afin de simplifier les notations. On note de plus  $N(u)$  l'ensemble des noeuds connectés à  $u$  qu'on appelle ensemble des voisins de  $u$ ; on dit qu'un graphe  $G = (V, M)$  est complet si tout les noeuds sont deux à deux connectés. Autrement dit, pour tout  $i \in V$ ,  $N(i) = V \setminus \{i\}$  ou également les coefficients de  $M$  sont strictement positifs.

**Définition 3.2. (Chemins et connexité)** Soit  $G = (V, M)$  un graphe pondéré non-orienté, on appelle chemin entre deux noeuds  $u$  et  $v$  toute suite de noeuds  $\gamma = (u_i)_{i \in \{0, \dots, p\}}$  dans  $V$  telle que pour tout  $j$ ,  $(u_j, u_{j+1}) \in E(V)$ ,  $u_0 = u$  et  $u_p = v$ . On dit que  $u$  est connecté à  $v$  par le chemin  $\gamma$ , et  $p$  est appelé *longueur du chemin*  $\gamma$ . Noter que si  $p = 1$  alors  $u \in N(v)$ .

Si tous les noeuds de  $G$  sont deux à deux connectés par un chemin, alors  $G$  est dit *connexe*.

**Définition 3.3. (Clique)** On appelle clique d'ordre  $k$  ou  $k$ -clique d'un graphe pondéré non-orienté  $G = (V, M)$  tout sous ensemble  $C \subset V$  dont le graphe induit est complet de cardinal  $k$ . On note  $Cl_k(G)$  l'ensemble des cliques d'ordre  $k$  de  $G$ , et  $Cl(G) := \cup_k Cl_k(G)$  l'ensemble des cliques de  $G$ .

Prenons comme exemples les graphes  $K_{3,3}$  et  $K_5$  dont la représentation est donnée par la figure suivante :

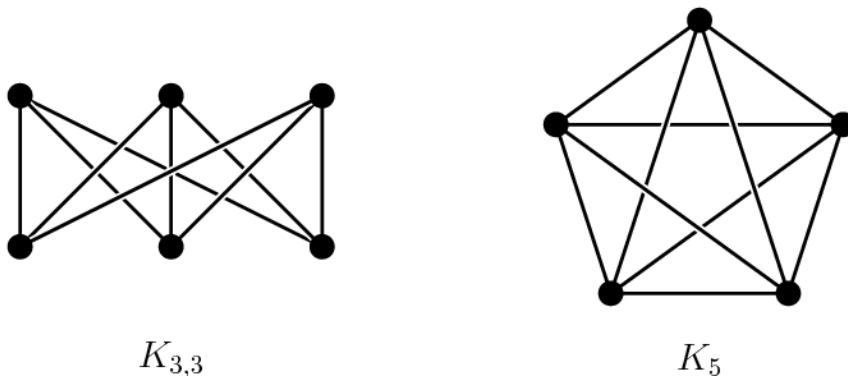


FIGURE 3.1 – Les graphes  $K_{3,3}$  et  $K_5$ .

Le graphe  $K_5$  est complet, par conséquent on peut en extraire tous les  $k$ -cliques pour  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  qui représentent respectivement les points, les arêtes, les triangles, les carrés et  $K_5$  en entier. En revanche,  $K_{3,3}$  ne contient que des 1-cliques et des 2-cliques.

Soit  $G = (V, M)$  un graphe pondéré non-orienté, et  $X = (X_i)_{i \in V}$  une collection de variables aléatoires  $X_i$  à valeur dans  $\Omega$  de loi  $P_i$ . On note  $\mathbb{P}_G = \otimes_{i \in V} P_i$  la loi jointe de  $X$  dans  $\Omega^V := \prod_{i \in V} \Omega$ , et  $X$  est appelé champs aléatoire sur  $G$ .

**Définition 3.4.**  $X$  est dit champs de Markov dans  $G = (V, M)$  si et seulement si pour tout  $x \in \Omega^V$

$$\mathbb{P}_G(X_i = x_i | (X_j = x_j)_{j \in V \setminus \{i\}}) = \mathbb{P}_G(X_i = x_i | (X_j = x_j)_{j \in N(i)}) \quad (3.1)$$

Cette définition est tiré de la propriété du plus proche voisin, et qui est une extension spatiale de la propriété de chaîne de Markov. Il existe cependant d'autres définitions comme :

1. Propriété couple : Pour tout couple de noeuds non-connectés  $u, v \in V$  on a :

$$X_u \perp X_v | (X_j)_{j \in V \setminus \{u, v\}}$$

Ce qui veut dire que les variables  $X_u, X_v$  sont indépendantes conditionnellement à toutes les variables indexées par les autres noeuds.

2. Propriété locale : Pour tout  $u \in V$  :

$$X_u \perp (X_j)_{j \in V \setminus (u \cup N(u))} | (X_j)_{j \in N(u)}$$

Cela veut dire que la variable  $X_u$  est indépendante avec toute variable  $X_v$  non voisine conditionnellement aux variables voisines.

3. Propriété globale : Pour toute parties  $A, B \subset V$  :

$$(X_u)_{u \in A} \perp (X_v)_{v \in B} | (X_j)_{j \in S}$$

où tout chemin qui relie un élément de  $A$  à un élément de  $B$  passe par  $S$ .

La propriété globale est plus forte que la propriété locale, qui est à son tour plus forte que la propriété couple. De plus, les trois propriétés sont équivalentes si et seulement si la distribution  $\mathbb{P}_G$  est strictement positive (voir [90] pour plus de détails), et dans ce cas nous avons la propriété de factorisation suivante :

$$\mathbb{P}_G(x) = \prod_{C \in Cl(G)} \phi_C(x_C) \quad (3.2)$$

pour tout  $x \in \Omega^V$  où  $\phi_C$  est une fonction qui ne dépend que du clique  $C$ .

**Théorème 3.1. (Hammersley-Clifford)** Soit  $X$  un champs aléatoire sur  $G$  tel que  $\mathbb{P}_G$  soit strictement positive.  $X$  est un champs de Markov si et seulement si

$$\mathbb{P}_G(X = x) = \frac{\exp(\mathcal{H}_G(x))}{Z_G}$$

où  $\mathcal{H}_G : \Omega^V \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction Hamiltonien du plus proche voisin<sup>2</sup> et

$$Z_G = \sum_{l \in \Omega^V} \exp(\mathcal{H}_G(l))$$

est la fonction de normalisation.

2. Dans la littérature cette fonction est définie comme  $-\mathcal{H}_G$ , et le signe - est mis dans un soucis d'interprétation physique.



**Remarque :** On peut remarquer qu'un champs aléatoire  $X$  sur un graphe complet  $G$  vérifie directement l'équation 3.1 and 3.2, par conséquent tout champs sur  $G$  est de Markov si sa distribution est positive.

Suivant la propriété de factorisation 3.2, le Hamiltonien  $\mathcal{H}_G$  peut se décomposer comme suite :

$$\mathcal{H}_G = \sum_{k=1}^n \sum_{C \in \mathcal{C}l_k(G)} h_C \quad (3.3)$$

où  $h_C$  est une fonction qui ne dépend que du clique  $C$ . Cette décomposition suggère que le comportement d'un tel système s'explique via les interactions locales sur chaque clique, cependant la majorité des modèles connues utilisent uniquement les cliques d'ordre un et deux.

### 3.1.1 Exemples de champs de Markov :

**Modèle d'Ising :** Le modèle d'Ising est un modèle de spin issue de la physique, dont les états des noeuds sont dans  $\Omega = \{-1, 1\}$ , et de Hamiltonien

$$\mathcal{H}_G(X) = \sum_{i \in V} h_i X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} J_{ij} X_i X_j$$

où les  $h_i$  et  $J_{ij}$  sont ses paramètres. Quand les  $J_{ij}$  sont tous positifs (resp. négatifs), on parle d'un modèle ferromagnétique (resp. anti-ferromagnétique).

**Le modèle de Potts :** Le modèle de Potts est une extension du modèle d'Ising aux états multiples sur  $\Omega = \{1, \dots, n\}$ , et il est défini par le Hamiltonien

$$\mathcal{H}_G(X) = \sum_{i \in V} h_i X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} J_{ij} X_i X_j$$

Il est également utilisé en physique, mais aussi en traitement d'image. Ce modèle pourrait être utilisé pour prendre en compte les changements de qualité de crédit et la dépendance du réseau dans ces changements, dont les états seront les notes de crédit.

**Le modèle  $O(n)$  :** Le modèle  $O(n)$  est également une extension des deux derniers modèles aux états continues sur la sphère  $\Omega = \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ . Son Hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H}_G(X) = \sum_{(i,j) \in E(V)} J_{ij} X_i \cdot X_j$$

où  $X \cdot Y$  est le produit scalaire euclidien. Ce modèle est invariant par rotation, ce qui veut dire que pour toute rotation  $r \in O(n)$  du groupe des rotation de  $\mathbb{R}^n$ , on a  $\mathcal{H}_G(r(X)) = \mathcal{H}_G(X)$ , qui est une conséquence de l'invariance du produit scalaire par rotation, i.e  $r(X_i) \cdot r(X_j) = X_i \cdot X_j$ . Si  $n = 2$ , on parle du modèle  $XY$ , et quand  $n = 3$ , il s'agit du modèle d'Heisenberg.

On remarque que ces modèles sont écrit comme une somme sur les 1-cliques et 2-cliques avec des fonctions  $h_C$  de la forme  $J_C \prod_{i \in C} X_i$  où  $J_C$  est un paramètre constant pour tout  $C$  au plus

d'ordre 2. Cela revient en effet à expliquer le système global uniquement avec les propriétés locales (1-cliques) et les interactions simples deux à deux (2-cliques). Mais il est à noter qu'il n'y a aucune obstruction théorique pour écrire un modèle qui décrit un système via toutes les interactions possibles, à savoir les interactions à 3, à 4 ou plus, avec un Hamiltonien de la forme :

$$\mathcal{H}_G(X) = \sum_{k=1}^n \sum_{C \in Cl_k(G)} J_C X_C \quad (3.4)$$

où  $X_C := \prod_{i \in C} X_i$  avec  $X = (X_i)_{i \in V} \in \{-1, 1\}^n$ , ou plus simplement encore

$$\mathcal{H}_G(X) = \sum_{A \subset V} J_A X_A$$

Les modèles de ce type possèdent des propriétés assez pratiques, en particulier l'expression de la sensibilité de la mesure  $\mathbb{P}_G$  aux  $J_A$ . En effet, on a pour tout événement  $\mathcal{E}$  et  $A \subset V$

$$\partial_{J_A} \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) = Cov_G(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}, X_A) \quad (3.5)$$

où  $Cov_G$  est la covariance selon la mesure  $\mathbb{P}_G$ . En particulier, pour tout  $B \subset V$  nous avons

$$\partial_{J_A} \mathbb{E}_G(X_B) = Cov_G(X_B, X_A)$$

où  $\mathbb{E}_G$  est l'espérance selon la mesure  $\mathbb{P}_G$ . Il est très difficile de prédire en général le signe de ces dérivées, cependant dans le cas où  $J_A \geq 0$  pour tout  $A \subset V$  le signe est toujours positif. Ce résultat provient d'une des inégalités dites GKS (pour R.B.Griffiths, D.G.Kelly et S.Sherman [96, 97]) qui s'expriment de la façon suivante :

**Théorème 3.2. (GKS)** *On suppose que pour tout  $A \subset V$ , on a  $J_A \geq 0$ . Alors, pour tout  $A, B \subset V$ , nous avons les inégalités suivantes :*

1.  $\mathbb{E}_G(X_A) \geq 0$ ,
2.  $\mathbb{E}_G(X_A X_B) \geq \mathbb{E}_G(X_A) \mathbb{E}_G(X_B)$ .

La deuxième inégalité de ce théorème donne automatiquement le signe de la dérivée  $\partial_{J_A} \mathbb{E}_G(X_B) \geq 0$ . La preuve donnée par GKS à ces inégalités est assez élémentaire, néanmoins il existe plusieurs démonstrations beaucoup plus conceptuelles, dont nous allons en présenter une en particulier plus loin. Cette dernière découle de manière évidente d'une reformulation du modèle via ce qu'on appelle les courants aléatoires (voir section 3.3).

Le modèle décrit par le Hamiltonien 3.4 fait intervenir des interactions d'ordre supérieur à 2, mais en pratique, que ce soit en physique ou en traitement d'image, nous ne disposons d'aucun moyen de mesure ou juste de quantification d'une interaction à trois ou plus, d'où la forme des Hamiltoniens des modèles d'Ising, Potts et Heisenberg. Si on considère un champs à deux états avec un modèle à deux cliques comme celui d'Ising, alors on a l'inégalité FKG (pour C.M.Fortuin, P.W.Kasteleyn et J.Ginibre [95]).

**Théorème 3.3. (FKG)**

Soit  $G$  un réseau muni d'un modèle d'Ising tel que  $h_i, J_{ij} \geq 0$  pour tout  $i, j \in V$ , alors pour tout couple de fonctions croissantes<sup>3</sup>  $(f, g)$ , la covariance  $Cov_G(f(X), g(X))$  est positive.

Le résultat de ce théorème est équivalent à dire, dans un vocabulaire probabiliste, que  $X$  est positivement associé. L'association négative selon laquelle nous considérons des corrélations négatives est un sujet relativement sous développé dans la littérature, car il est considéré comme un sujet difficile. Cependant, plusieurs résultats intéressants sur le sujet sont trouvés, notamment l'existence d'inégalités de concentration pour ces variables (D. Wajc [156]), des applications en échantillonnage sans remplacement (J-D.Kumar et F.Proshan [154]), ou des résultats analytiques sur la convergence de certaines limites de suites faisant intervenir des variables négativement associées (Yu. Miao, W.Xu, S. Chen et A.Adler [155]). Nous donnons une preuve de ce théorème dans un cas plus général que celui du modèle d'Ising, en se basant sur des arguments classiques ; voir 3.9.1.4. Nous utilisons l'inégalité Ahlswede–Daykin dans notre démonstration, ou l'inégalité des quatre fonctions, celle-ci repose sur une hypothèse qui généralise la log-supermodularité d'une fonction<sup>4</sup>. Il est également possible de donner une preuve en utilisant uniquement le fait que  $\mathbb{P}_G$  est log-supermodulaire ou distribution  $MTP_2$ <sup>5</sup> (voir Karlin, S. and Rinott, Y. [40]). L'inégalité FKG permet de compléter les inégalités GKS aux fonctions croissantes, car les fonctions  $X_A$  ne sont pas forcément monotones. Nous allons étendre ce résultat plus loin à un modèle plus général, que nous allons utiliser pour démontrer certains résultats sur les phénomènes de clustering.

### 3.2 Le modèle

On considère une économie constituée de  $n$  entités qui interagissent via des liens économiques, capitalistiques ou commerciaux. Cette économie peut représenter un portefeuille de crédit ou un réseau interbancaire. Nous désirons construire dans cette section un modèle qui parvient à capter les effets des interactions entre les entités sur l'économie considérée, ainsi que la sensibilité du système globale à l'état intrinsèque de chaque entité. Dans un contexte de risque de crédit, nous cherchons à retranscrire mathématiquement la notion de Single Risk introduite par l'EBA, que nous allons définir rigoureusement dans la dernière section de ce chapitre. Nous allons voir que le modèle permet de mesurer la contribution de l'interdépendance au risque de crédit à travers le grossissement de la queue de distribution, ainsi que sur différents paramètres du risque.

3. Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}$  et  $n \geq 1$ , on définit un ordre partiel sur  $\Omega^V$  tel que  $x \leq y$  si et seulement si  $x_i \leq y_i$  pour tout  $i$ . On dit qu'une fonction  $f : \Omega^V \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante si  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .

4. Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite supermodulaire, si

$$f(x) + f(y) \leq f(x \vee y) + f(x \wedge y) \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

On dit qu'elle est log-supermodulaire si son logarithme est supermodulaire.

5. Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite Multiplicative Totally Positive of order two ou  $MTP_2$  si elle est log-supermodulaire, et on dit qu'une distribution  $P$  est  $MTP_2$  si sa densité sta

### 3.2.1 Formalisme mathématique

Soit  $V$  l'ensemble des  $n$  entités de l'économie, pour tout  $i \in V$ , soit  $X_i$  une variable aléatoire à valeur dans  $\Omega = \{-1, 1\}$  qui vaut -1 en cas de défaut de l'entité  $i$ , et 1 sinon, et on note  $X = (X_i)_{i \in V}$  la collection de ces variables qui est à valeur dans  $\Omega^V := \Omega^n$ . On considère cette économie comme un réseau  $G = (V, M)$  non-orienté pondéré par une matrice  $M$  que nous appellerons matrice de connectivité, dont chaque coefficient  $m_{ij}$  représente l'intensité du lien qui relie les entités  $i$  et  $j$ . Cette quantité est vue également comme une capacité du canal de risque qui relie  $i$  et  $j$ , et nous l'appellerons connectivité entre  $i$  et  $j$ . Nous supposons que  $X$  est un champs de Markov dont la mesure  $\mathbb{P}_G$  s'écrit

$$\mathbb{P}_G(X = x) = \frac{\exp(\mathcal{H}_G(x))}{Z_G}$$

pour tout  $x \in \Omega^V$  où  $\mathcal{H}_G$  est un Hamiltonien de la forme 3.4 qui ne prend en compte que les cliques d'ordre un et deux, et que nous exprimons sous la forme :

$$\mathcal{H}_G(X) = \sum_{i \in V} B_i X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(X_i, X_j) \quad (3.6)$$

où  $B_i$  sont des paramètres que nous appellerons *résistances*, et qui décrivent les propriétés intrinsèques des entités. Les  $\delta_{ij}$  sont des fonctions qui ne dépendent que du couple  $(X_i, X_j)$ , qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\delta_{ij}(X_i, X_j) = a_{ij} X_i + b_{ij} X_j + c_{ij} X_i X_j + d_{ij}$$

et que nous appelons *fonctions de couplage* ou plus simplement *relations*. Contrairement aux modèles présentés dans les exemples de la section précédente, ces fonctions contiennent des parties "individuelles"  $a_{ij} X_i$  et  $b_{ij} X_j$  que nous introduisons afin de donner un degré de liberté supplémentaire au modèle. L'objectif de ceux-ci est de capter l'asymétrie des relations que certaines entités peuvent avoir, comme une relation maison mère-filiale, ou simplement des relations économiques de type fournisseur unique-client. Il est alors important de noter que  $\delta_{ij}$  n'est pas forcément symétrique bien que le réseau soit non-orienté. De plus, la constante  $d_{ij}$  n'intervient pas car elle se simplifie dans l'expression de la mesure  $\mathbb{P}_G$ .

Si la matrice  $M$  est nulle, ce qui signifie une indépendance des entités du réseau, alors

$$\mathbb{P}_{G,M=0}(X = x) = \prod_{i \in V} \frac{\exp(B_i x_i)}{\exp(B_i) + \exp(-B_i)}$$

où  $\frac{\exp(B_i x_i)}{\exp(B_i) + \exp(-B_i)}$  est la probabilité marginale

$$\mathbb{P}_{G,M=0}(X_i = x_i) = \sum_{\substack{l \in \Omega^V \\ l_i = x_i}} \mathbb{P}_{G,M=0}(l)$$

On note alors  $p_i := \mathbb{P}_{G,M=0}(X_i = -1) = \frac{\exp(-B_i)}{\exp(B_i) + \exp(-B_i)}$  la probabilité marginale de défaut de  $i$  en cas d'indépendance, et nous l'appellerons probabilité de défaut *intrinsèque*. Ce qui signifie

que c'est la probabilité de défaut de  $i$  en supposant que la matrice  $M$  est nulle, qui représente uniquement la santé de l'entité relative à sa position dans son secteur d'activité. Les résistances peuvent alors s'écrire comme  $B_i = \frac{1}{2} \ln(\frac{1}{p_i} - 1)$ . Nous supposons que cette probabilité ne dépend que de la valeur de l'entité  $i$  et qu'elle est conditionnelle à des facteurs exogènes. De même, les relations ainsi que les connectivités peuvent dépendre de la position au cycle. En effet, les entités peuvent en situation de stress être plus dépendantes/connectées les unes aux autres, ce qui signifie dans notre philosophie une augmentation des  $m_{ij}$ . Les entités peuvent également changer la façon avec laquelle elles interagissent, ce qui est synonyme de changement de relation  $\delta_{ij}$ . Prenons à titre d'exemple les relations qui régissent les groupes d'affaires, en situation de stress il n'est surprenant de voir des changements de comportement de la maison mère dans ses relations avec ses filiales. Car il est possible que des filiales soient "sacrifiées" dans le but de la survie du groupe. Donc la mesure  $\mathbb{P}_G$  est en fait une mesure conditionnelle  $\mathbb{P}_G(\cdot|Z)$  aux facteurs exogènes  $Z$ , mais nous allons conserver la notation sans conditionnement en guise de simplification.

Le choix des relations  $\delta_{ij}$  devrait se faire via la comparaison de ses valeurs. En effet, si nous avons par exemple  $\delta_{ij}(-1, -1) > \delta_{ij}(1, -1)$ , alors cela veut dire que la nature de l'interaction entre  $i$  et  $j$  favorise un état de double défaut au défaut de l'entité  $j$  seulement. Cela conditionne alors l'évolution des probabilités marginales et jointes par rapport aux  $p_i$  et  $m_{ij}$ ; cela ne veut pas forcément dire que leurs probabilités suivent la même inégalité ( $\mathbb{P}_G(-1, -1) \geq \mathbb{P}_G(1, -1)$ ), car les paramètres  $B_i$  jouent aussi un rôle de "résistance" à ces facteurs d'interdépendance. Ces résistances ont pour but de garder les mêmes probabilités d'états en cas d'indépendance. Car ce rapport de force entre ce qui est intrinsèque et ce qui provient des interactions se joue dans la comparabilité entre la partie intrinsèque du Hamiltonien et la partie de couplage. En effet, si les entités ont des probabilités intrinsèques de défaut très faibles, alors leurs résistances seront très fortes et le terme de couplage  $\sum_{i \in V} m_{ij} \delta_{ij}(X_i, X_j)$  va être assez faible comparé à  $\sum_{i \in V} B_i X_i$  pour des connectivités  $m_{ij}$  suffisamment faibles; par la suite les entités seront presque insensibles aux interactions, et garderont quasiment les mêmes probabilités de défaut. En revanche, si les interactions sont assez fortes, les entités ne pourront pas "résister" aux effets de la dépendance et par la suite leurs probabilités de défaut sous la mesure  $\mathbb{P}_G$  changeront considérablement, d'où la dénomination de résistance donnée aux termes  $B_i$ .

Nous allons noter par la suite  $T$  la collection de relations  $(\delta_{ij})_{(i,j) \in E(V)}$ . Nous appellerons *réseau économique* le réseau  $G$  muni de  $T$  qu'on note comme un triplet  $G = (V, M, T)$ .

### 3.2.2 Sensibilité aux paramètres

On s'intéresse maintenant à la sensibilité du modèle aux paramètres  $p_i, m_{ij}$  et  $\delta_{ij}$ . Soit  $G = (V, M, T)$  un réseau économique, nous avons vu que les relations  $\delta_{ij}$  s'écrivent comme une combinaison de  $X_i, X_j$  et  $X_i X_j$  à coefficients  $a_{ij}, b_{ij}$  et  $c_{ij}$ . Nous allons noter désormais ces

coefficients comme des opérateurs tels que

$$a(\delta_{ij}) = a_{ij}, \quad b(\delta_{ij}) = b_{ij} \text{ et } c(\delta_{ij}) = c_{ij} \quad (3.7)$$

Ces coefficients caractérisent la relation, et décrivent ses effets unilatéraux et bilatéraux sur ses parties. En effet, le coefficient  $a_{ij}$  s'exprime

$$a_{ij} = \frac{\delta_{ij}(1,1) + \delta_{ij}(1,-1) - \delta_{ij}(-1,-1) - \delta_{ij}(-1,1)}{4}$$

Celui-ci est interprétée comme le *gain* unilatéral de  $i$  via sa relation avec  $j$ , car la décomposition  $a_{ij}X_i + b_{ij}X_j + c_{ij}X_iX_j + d_{ij}$  fait agir  $a_{ij}$  sur la partie sur la partie intrinsèque en l'intégrant dans la résistance ( $B_i$  est remplacé par  $B_i + a_{ij}m_{ij}$ ). Donc si le signe de  $a_{ij}$  est positif, alors celui ci contribue à augmenter la résistance et donc diminuer la probabilité de défaut, et inversement sinon. Le coefficient  $b_{ij}$  s'exprime de manière similaire

$$b_{ij} = \frac{\delta_{ij}(1,1) + \delta_{ij}(-1,1) - \delta_{ij}(-1,1) - \delta_{ij}(-1,-1)}{4}$$

et de la même manière, il représente le gain unilatéral de  $j$  de cette relation. Le coefficient  $c_{ij}$  s'exprime quand à lui s'exprime

$$c_{ij} = \frac{\delta_{ij}(1,1) + \delta_{ij}(-1,-1) - \delta_{ij}(1,-1) - \delta_{ij}(-1,1)}{4}$$

Celui ci peut également être interprété comme le gain bilatéral de  $i$  et  $j$  dans cette relation. Si celui-ci est positif, alors les deux entités bénéficient mutuellement de cette relation, sinon leur relation est interprétée comme une concurrence comme nous allons l'expliquer dans la suite.

**Remarques :**

- Le gain de  $i$  dans cette relation peut être vu comme ce que  $j$  apporte à  $i$  dans cette relation, donc on peut par convention écrire  $a(\delta_{ij}) = b(\delta_{ji})$  même si les indices  $ij$  et  $ji$  sont identiques par non orientation du graphe.
- Les signes de ces coefficients définissent les classes de relations possibles. Donc nous avons  $3^3 - 1$  classes de relations possibles, en supprimant le cas où les trois coefficients sont nuls. Par conséquent, nous avons 26 comportements possibles, que nous allons répartir sur trois types de relations comme nous allons le voir en fin de section.

Pour simplifier certaines formules, on utilisera par la suite la notation en opérateur de ces coefficients.

**Proposition 3.1.** *Soient deux sous réseaux  $G_1 = (V_1, M_1, T_1)$  et  $G_2 = (V_2, M_2, T_2)$  de  $G$ , tels que pour tout  $(i, j) \in V_1 \times V_2$ , on ait  $m_{ij}c(\delta_{ij}) = 0$ . Alors pour tout  $x \in \Omega^V$*

$$\mathbb{P}_G(X = x) = \mathbb{P}_{G_1}((X_i = x_i)_{i \in V_1}) \mathbb{P}_{G_2}((X_i = x_i)_{i \in V_2})$$

où  $\mathbb{P}_{G_i}$  est la mesure induite par  $\mathbb{P}_G$  sur le réseau  $G_i$ .

*Démonstration.* Voir 3.9.1.1. □

Si en particulier la matrice s'écrit comme  $M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$  où  $M_i$  est la matrice correspondante au sous réseau  $G_i$ , alors l'hypothèse de la proposition est vérifiée, donc la mesure se décompose comme la proposition l'indique. Cela veut dire que si le réseau  $G$  est composé de deux réseaux indépendants, alors la mesure  $\mathbb{P}_G$  n'est que le produit des deux mesures correspondantes à ceux-ci. Par extension, la mesure  $\mathbb{P}_G$  peut se décomposer selon le nombre de composantes connexes du réseau. Si en revanche le réseau est connecté, et donc  $G_1$  et  $G_2$  sont liés, alors l'hypothèse de la proposition est vérifiée si et seulement si pour tout  $(i, j) \in V_1 \times V_2$ ,  $c(\delta_{ij}) = 0$ , donc la mesure  $\mathbb{P}_G$  se décompose comme dans la proposition. Mais à la différence du cas précédent, chacune des deux mesures  $\mathbb{P}_{G_i}$  dépend des connectivités des liens qui séparent les deux sous réseaux via les coefficients  $m_{ija}(\delta_{ij})$  et  $m_{ijb}(\delta_{ij})$ .

La sensibilité de  $\mathbb{P}_G$  aux probabilités intrinsèques peut être exprimé via l'équation 3.5 comme suite :

$$\partial_{p_i} \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) = - \frac{\text{Cov}_G(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}, X_i)}{2p_i(1-p_i)} \quad (3.8)$$

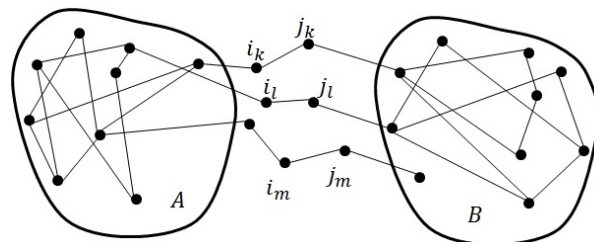
en particulier pour tout  $i, j \in V$ ,

$$\partial_{p_j} \mathbb{P}_G(X_i = -1) = \frac{\text{Cov}_G(X_i, X_j)}{4p_j(1-p_j)} \quad (3.9)$$

Or la covariance peut être écrite comme

$$\text{Cov}_G(X_i, X_j) = 4(\mathbb{P}_G(X_i = X_j = -1) - \mathbb{P}_G(X_i = -1)\mathbb{P}_G(X_j = -1)) \quad (3.10)$$

alors si  $i$  et  $j$  font partie de deux sous réseaux de  $G$  séparés par des relations qui vérifient l'hypothèse de la proposition précédente, alors par décomposition de la mesure  $\text{Cov}_G(X_i, X_j) = 0$ ; par conséquent la sensibilité  $\partial_{p_i} \mathbb{P}_G(X_j = x_j)$  est nulle. De manière générale, si deux sous réseaux  $A$  et  $B$  ne sont connectés que via des chemins qui passent par des liens  $(i_k, j_k)$  tels que  $c(\delta_{i_k j_k}) = 0$  (voir figure ci-dessous), alors il existe une partition du réseau  $G$  en deux sous réseaux  $G_A$  et  $G_B$  qui respectivement contiennent  $A$  et  $B$ . Donc en appliquant la proposition précédente, on en déduit que  $\text{Cov}_G(X_A, X_B) = 0$ . La réciproque de ce résultat sera démontrée plus loin sous certaines hypothèses.



Remarquons que si  $\partial_{p_j} \mathbb{P}_G(X_i = -1) \geq 0$ , alors  $Cov_G(X_i, X_j) \geq 0$ , par conséquent on a via 3.10

$$\mathbb{P}_G(X_i = -1 | X_j = -1) \geq \mathbb{P}_G(X_i = -1) \quad (3.11)$$

Cette inégalité peut être établie sans passer par la covariance, en regardant uniquement cette sensibilité au voisinage de  $p_j = 1$ . Plus généralement, la proposition suivante donne le comportement de la mesure  $\mathbb{P}_G$  quand les probabilités intrinsèques prennent des valeurs extrêmes.

**Proposition 3.2.** Soient  $G = (V, M, T)$  un réseau économique et  $i \in V$  une entité, on a les égalités suivantes :

$$\forall x \in \Omega^V, \lim_{p_i \rightarrow 1} \mathbb{P}_G(X = x) = \mathbb{P}_G(X = x | X_i = -1) \text{ et } \lim_{p_i \rightarrow 0} \mathbb{P}_G(X = x) = \mathbb{P}_G(X = x | X_i = 1)$$

En particulier,  $\lim_{p_i \rightarrow 1} \mathbb{P}_G(X_i = -1) = 1$  et  $\lim_{p_i \rightarrow 0} \mathbb{P}_G(X_i = 1) = 1$ .

*Démonstration.* Voir 3.9.1.3 □

Si  $\partial_{p_j} \mathbb{P}_G(X_i = -1) \geq 0$ , alors de cette proposition on peut déduire directement que

$$\lim_{p_j \rightarrow 1} \mathbb{P}_G(X_i = -1) = \mathbb{P}_G(X_i = -1 | X_j = -1) \geq \mathbb{P}_G(X_i = -1)$$

Si deux entités du réseau sont séparées uniquement par  $i$ , alors par la propriété de Markov, celles-ci deviennent indépendantes (voir figure 3.2), et la mesure peut se décomposer conditionnellement au défaut de  $i$ . Cela revient à dire que la mesure ne prend plus en compte l'entité  $i$  après son défaut, et le Hamiltonien de celle-ci est associé à un réseau qui ne contient pas l'entité  $i$ .

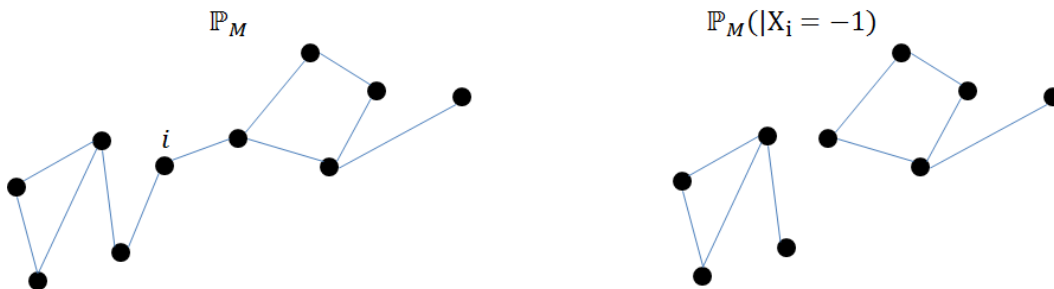


FIGURE 3.2 – Effet du défaut de  $i$  sur le réseau.

En pratique, une probabilité de défaut de 1 n'existe pas. Toutefois, des probabilités économiques très élevées peuvent être synonymes de défaut, et par la suite peuvent être considérées comme étant égales à 1. Dans un exercice de stress-test, il est tout à fait plausible de prendre comme scénario le défaut d'une entité ou plus. Il est alors possible d'après la proposition précédente de prendre des probabilités intrinsèques égales à 1, ce qui revient à conditionner par des défauts. D'autre part, cette proposition représente une confirmation de la bonne articulation du modèle, et qu'il n'y a pas de restrictions particulières à faire sur les valeurs des probabilités



intrinsèques.

Nous avons vu via la proposition 3.1 comment des valeurs nulles de connectivités peuvent jouer sur la réductibilité de la mesure, mais l'équation 3.5 nous donne beaucoup plus d'information sur la sensibilité aux connectivités. En effet, d'après cette équation on a pour tout événement  $\mathcal{E}$ , et tout  $i, j \in V$

$$\partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) = \text{Cov}_G(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}, \delta_{ij}(X_i, X_j)) \quad (3.12)$$

Cette formule décrit alors la sensibilité de la mesure  $\mathbb{P}_G$  à  $m_{ij}$  sous forme d'une covariance avec la relation  $\delta_{ij}$  (voir 3.9.1.2 pour la preuve). En particulier, on a pour tout  $k \in V$

$$\partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(X_k = -1) = -\frac{1}{2} \text{Cov}_G(X_k, \delta_{ij}(X_i, X_j))$$

Il est alors possible de prédire le signe de cette dérivée dans certains cas, en particulier lorsque  $a(\delta_{ij}), b(\delta_{ij}), c(\delta_{ij}) \geq 0$  et  $B_i \geq 0$  pour tout  $i, j \in V$ . En effet, sous ces conditions l'inégalité GKS 3.2 affirme que les termes  $\text{Cov}_G(X_k, X_i)$ ,  $\text{Cov}_G(X_k, X_j)$  et  $\text{Cov}_G(X_k, X_i X_j)$  sont positifs, par la suite  $\text{Cov}_G(X_k, \delta_{ij}(X_i, X_j)) \geq 0$ ; par conséquent

$$\partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(X_k = -1) \leq 0$$

Cela veut dire que si toutes les probabilités intrinsèques de défaut sont inférieurs à 50% ( $B_i \geq 0$ ), et que les gains unilatéraux et bilatéraux sont positifs, alors l'augmentation de la connectivité entre deux entités du réseau fait diminuer les probabilités marginales de défaut. En d'autres termes, plus deux entités sont connectées via une telle relation, plus le réseau économique est résilient. De la même manière, la sensibilité aux probabilités intrinsèques de  $\mathbb{P}_G$  est décrite par la covariance comme l'exprime l'équation 3.9. Donc sous les mêmes conditions, l'inégalité GKS 3.2 implique que l'augmentation de la probabilité intrinsèque d'une entité dans le réseau affecte tout le réseau. Ceci se matérialise par l'augmentation de toutes les probabilités marginales de défaut. Nous avons donc une propagation du risque dans le réseau, qui a pour origine la dégradation subie par une entité à cause d'un choc macro-économique, cela est synonyme de contagion<sup>6</sup>. On peut alors se poser des questions sur l'amplitude de cette propagation ainsi que son atténuation en traversant le réseau économique. Il est connu que dans un modèle d'Ising ferromagnétique cette propagation diminue de manière exponentielle, nous allons démontrer plus loin que ceci s'étend à notre modèle de manière générale.

Quand les coefficients  $a(\delta_{ij}), b(\delta_{ij}), c(\delta_{ij})$  et les  $B_i$  sont positifs pour tout  $i, j \in V$ , on peut utiliser plusieurs outils de la mécanique statistique sans contraintes supplémentaires; comme les inégalités GKS, ou l'inégalité FKG que nous allons voir par la suite. On remarque que l'inégalité GKS nous donne en particulier  $\mathbb{E}_G(X_i) \geq 0$ , donc  $\mathbb{P}_G(X_i = -1) \leq 0.5$ . Donc même si  $p_i = 50\%$ , on

6. Nous avons supposé que les  $p_i$  dépendent de la position au cycle des entités, donc celle-ci peut les faire augmenter ou baisser.

aura toujours  $\mathbb{P}_G(X_i = -1) \leq 50\%$ . Un réseau économique  $G = (V, M, T)$  est appelé *cohérent* si les résistances  $(B_i)_i$ , termes unilatéraux et bilatéraux de ses relations sont tous positifs.

**Théorème 3.4.** (*FKG généralisé*)

Soit  $G$  un réseau économique cohérent, alors pour tout couple de fonctions croissantes<sup>7</sup>  $(f, g)$ , la covariance  $Cov_G(f(X), g(X))$  est positive. En plus, si on remplace la croissance de  $f$  par une décroissance, alors  $Cov_G(f(X), g(X))$  est négatif.

*Démonstration.* Voir 3.9.1.4. □

Ce résultat est une généralisation de l'inégalité FKG 3.3 que nous avons introduit. Soient  $A, B \subset V$ ,  $f(X) = \prod_{i \in A} \frac{1+X_i}{2}$  et  $g(X) = \prod_{i \in B} \frac{1+X_i}{2}$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  représentent les indicatrices de survie des groupes  $A$  et  $B$ , de plus elles sont croissantes, donc d'après l'inégalité FKG on a

$$\mathbb{P}_G(X_i = 1, \forall i \in A \cup B) \geq \mathbb{P}_G(X_i = 1, \forall i \in A) \mathbb{P}_G(X_i = 1, \forall i \in B) \quad (3.13)$$

ce qu'on peut écrire autrement

$$\mathbb{P}_G(X_i = 1, \forall i \in A \cup B | X_i = 1, \forall i \in B) \geq \mathbb{P}_G(X_i = 1, \forall i \in A)$$

Donc la survie d'un groupe dans le réseau augmente la chance de survie de tout autre groupe. Soient  $f(X) = \prod_{i \in A} \frac{1-X_i}{2}$  et  $g(X) = \prod_{i \in B} \frac{1-X_i}{2}$ , ces deux fonctions sont les indicatrices de défaut de  $A$  et  $B$  respectivement. Remarquons que ces deux fonctions sont décroissantes, donc sous hypothèse de cohérence, on a également

$$\mathbb{P}_G(X_i = -1, \forall i \in A \cup B) \geq \mathbb{P}_G(X_i = -1, \forall i \in A) \mathbb{P}_G(X_i = -1, \forall i \in B) \quad (3.14)$$

ce qui généralise l'inégalité 3.11 dans le cas cohérent. D'autre part, d'après 3.8 nous avons

$$\partial_{p_i} \mathbb{P}_G\left(\prod_{i \in A} \frac{1+X_i}{2} = 1\right) = -\frac{1}{4p_i(1-p_i)} Cov_G\left(X_i, \prod_{i \in A} \frac{1+X_i}{2}\right)$$

Comme  $C_A : X \mapsto \prod_{i \in A} \frac{1+X_i}{2}$  et  $X \mapsto X_i$  sont croissantes, alors d'après FKG plus la probabilité de défaut intrinsèque de  $i$  augmente, plus la probabilité de survie de tout group  $A$  du réseau diminue. De la même façon, l'indicatrice de défaut du groupe  $A$  s'écrit comme une fonction  $D_A : X \mapsto \prod_{i \in A} \frac{1-X_i}{2}$  décroissante ( car chaque fonction  $\frac{1-X_i}{2}$  est décroissante et positive), donc  $\partial_{p_i} \mathbb{P}_G(D_A = 1) \geq 0$  d'après FKG. Cela veut dire que l'augmentation de la probabilité de défaut de  $i$  augmente la probabilité de défaut de tout groupe  $A$  du réseau.

7. Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}$  et  $n \geq 1$ , on définit un ordre partiel sur  $\Omega^V$  tel que  $x \leq y$  si et seulement si  $x_i \leq y_i$  pour tout  $i$ . On dit qu'une fonction  $f : \Omega^V \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante si  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .

On peut également étudier la formation de clusters de même état dans le réseau en considérant  $S_A := \prod_{(i,j) \in E(A)} \frac{1+X_i X_j}{2}$  la fonction caractéristique d'avoir un cluster  $A$ <sup>8</sup>, qu'on peut développer de cette manière  $\frac{1}{2^{|E(A)|}} (1 + \sum_{(i,j) \in E(A)} \alpha_{ij} X_i X_j)$  où les coefficients  $\alpha_{ij}$  est le nombre d'apparition du binôme  $X_i X_j$  dans le développement de  $S_A$ . Alors d'après l'inégalité GKS 3.2, on a

$$\partial_{p_i} \mathbb{P}_G(S_A = 1) = -\frac{1}{2^{E(A)+1} p_i (1-p_i)} \sum_{(k,l) \in E(V)} a_{kl} \text{Cov}_G(X_i, X_k X_l) \leq 0$$

Donc la probabilité d'avoir un cluster diminue quand l'une des entités se dégrade. D'autre part,

$$\partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(S_A = 1) = \frac{1}{2^{E(A)}} \sum_{(k,l) \in E(V)} a_{kl} \text{Cov}_G(\delta_{ij}(X_i, X_j), X_k X_l)$$

Comme  $\text{Cov}_G(\delta_{ij}(X_i, X_j), X_k X_l) \geq 0$  d'après l'inégalité GKS, alors il en résulte que  $\partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(S_A = 1) \geq 0$ . Donc la probabilité de formation d'un cluster  $A$  augmente quand la connectivité dans le réseau augmente.

Il est plus difficile de prédire, même dans le cas des réseaux cohérents, le signe de la sensibilité des probabilités de défaut d'un groupe  $A \subset V$  aux  $m_{ij}$ . En effet, on a

$$\partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(D_A = 1) = \text{Cov}_G(\delta_{ij}(X_i, X_j), \prod_{i \in A} \frac{(1-X_i)}{2}) \quad (3.15)$$

Or  $\delta_{ij}$  n'est pas nécessairement monotone, ni le signe de  $c_{ij} \text{Cov}_G(X_i X_j, \prod_{i \in A} \frac{(1-X_i)}{2})$  n'est connu, alors les inégalités GKS et FKG deviennent inutiles. Cela nous impose d'avoir recours à des outils plus sophistiqués pour étudier ces sensibilités, à savoir les courants aléatoires, comme nous allons le voir plus loin. Ces outils nous permettront également de démontrer des inégalités de corrélation qui permettent d'étudier la sensibilité de la covariance  $\text{Cov}_G(X_i, X_j)$  et la corrélation  $\text{Cor}_G(X_i, X_j)$  aux paramètres  $p_k$  et  $m_e$ , pour tout  $k \in V$  et  $e \in E(V)$ .

Nous avons vu que le conditionnement par le défaut d'une entité  $j$  fait augmenter ou diminuer la probabilité marginale de défaut d'une entité  $i$ , selon le signe de la covariance  $\text{Cov}_G(X_i, X_j)$ . On peut alors s'interroger sur la sensibilité de la probabilité  $\mathbb{P}_G(X_i = -1 | X_j = -1)$  à  $p_i$  et  $m_{ij}$ . Si le réseau  $G$  contient uniquement les deux entités  $i$  et  $j$ , alors

$$\mathbb{P}_G(X_i = -1 | X_j = -1) = \frac{1}{1 + \exp(2B_i + m_{ij}(\delta_{ij}(1, -1) - \delta_{ij}(-1, -1)))}$$

nous avons donc une probabilité décroissante en  $B_i$ , donc croissante en  $p_i$  quelque soit la relation  $\delta_{ij}$  et la connectivité. Pour la sensibilité à  $m_{ij}$  nous avons trois cas :

8. Cette fonction n'est pas optimale, car elle fait apparaître toutes les arêtes alors que nous pouvons utiliser beaucoup moins pour caractériser un cluster. En effet, pour trois entités  $i, j, k$ , la fonction  $S_{ijk} = \frac{(1+X_i X_j)(1+X_j X_k)}{4}$  caractérise bien le cluster  $\{i, j, k\}$ , car celle-ci est égale à 1 si et seulement si  $X_i X_j = 1$  et  $X_j X_k = 1$ , ce qui est équivalent à  $X_i = X_j = X_k$ . En général, nous avons besoin de  $|A| - 1$  arêtes pour caractériser le cluster  $A$ .

- Si  $\delta_{ij}(1, -1) > \delta_{ij}(-1, -1)$ , alors  $\mathbb{P}_G(X_i = -1|X_j = -1)$  est décroissante en  $m_{ij}$ , ce qui veut dire que plus les deux entités sont connectées, plus le défaut de  $j$  va avoir un effet positif sur  $i$ . Cela est dû à la nature de la relation qui favorise l'état  $(1, -1)$  par rapport à  $(-1, -1)$ ; autrement dit, la relation  $\delta_{ij}$  est telle que la probabilité que  $i$  survive et  $j$  soit en défaut est plus grande que la probabilité d'un défaut joint. D'autre part, l'inégalité  $\delta_{ij}(1, -1) > \delta_{ij}(-1, -1)$  est équivalente à  $a_{ij} > c_{ij}$ , si de plus  $c_{ij} \geq 0$  alors  $\partial_{p_j} \mathbb{P}_G(X_i = -1) \geq 0$  (comme nous allons montrer dans la section qui suit) et donc  $i$  se dégrade suite à la dégradation de  $j$  avec une vitesse de moins en moins importante quand la connectivité augmente. Par conséquent, on a

$$p_i > \mathbb{P}_G(X_i = -1|X_j = -1) > \mathbb{P}_G(X_i = -1)$$

Donc  $i$  profite de cette relation même en cas de défaut de  $j$ . De la même manière, la sensibilité de  $j$  au défaut de  $i$  est régie par le signe de la différence  $b_{ij} - c_{ij} = \delta_{ij}(-1, 1) - \delta_{ij}(-1, -1)$ .

- $\delta_{ij}(1, -1) < \delta_{ij}(-1, -1)$ , alors cette fois-ci la probabilité  $\mathbb{P}_G(X_i = -1|X_j = -1)$  est croissante par rapport à la connectivité. Donc si de plus  $c_{ij} \geq 0$  alors

$$\mathbb{P}_G(X_i = -1|X_j = -1) > p_i \geq \mathbb{P}_G(X_i = -1)$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une probabilité  $p_j^*$  intrinsèque de  $j$  pour laquelle  $p_i = \lim_{p_j \rightarrow p_j^*} \mathbb{P}_G(X_i = -1)$ . Par conséquent, cette relation profite à  $i$  tant que la probabilité de défaut intrinsèque de  $j$  est inférieur au seuil  $p_j^*$ .

- Si  $\delta_{ij}(1, -1) = \delta_{ij}(-1, -1)$ , alors clairement  $\mathbb{P}_G(X_i = -1|X_j = -1)$  est constante et égale à  $p_i$ . Donc  $i$  est insensible au défaut de  $j$ , et si de plus  $c_{ij} > 0$  alors

$$\mathbb{P}_G(X_i = -1|X_j = -1) = p_i \geq \mathbb{P}_G(X_i = -1)$$

Dans ce cas  $i$  profite de la relation avec  $j$  jusqu'à son défaut.

Pour les probabilités de défaut conditionnelles à la survie de  $j$ , la même méthode s'applique pour déterminer sa sensibilité à la connectivité. En effet,

$$\mathbb{P}_G(X_i = -1|X_j = 1) = \frac{1}{1 + \exp(2B_i + m_{ij}(\delta_{ij}(1, 1) - \delta_{ij}(-1, 1)))}$$

On voit donc clairement que l'évolution de ces probabilités dépend de la différence  $\delta_{ij}(1, 1) - \delta_{ij}(-1, 1)$  de la même manière qu'au cas précédent.

Maintenant que nous avons étudié le cas de deux entités, est-il possible de généraliser ce résultat à un réseau quelconque? A-t-on toujours une sensibilité de  $\mathbb{P}_G(X_i = -1|X_j = -1)$  régie par la quantité  $\delta_{ij}(1, -1) - \delta_{ij}(-1, -1)$ ? La réponse est étonnamment oui, comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 3.3.** *Soient  $G = (V, M, T)$  un réseau économique, et  $i, j \in V$  différents. On a les sensibilités suivantes :*

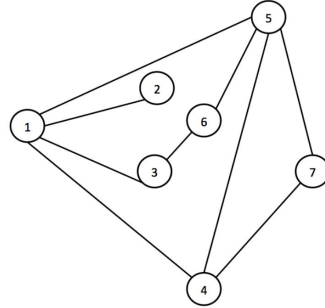
1.  $\partial_{p_i} \mathbb{P}_G(X_i = -1|\mathcal{E}) = \frac{\mathbb{P}_G(X_i = -1|\mathcal{E}) - \mathbb{P}_G(X_i = -1|\mathcal{E})^2}{p_i - p_i^2}$  pour tout évènement  $\mathcal{E}$  sur  $G$ .
2.  $\partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(X_i = -1|X_j = -1) = -2(a_{ij} - c_{ij})(\mathbb{P}_G(X_i = -1|X_j = -1) - \mathbb{P}_G(X_i = -1|X_j = -1)^2)$ .

*Démonstration.* Voir 3.9.1.5. □

Le premier point de cette proposition nous montre en particulier que quelque soit les relations de  $i$  dans le réseau, sa probabilité de défaut conditionnelle au défaut de  $j$  est croissante par rapport à sa probabilité intrinsèque. Le deuxième point nous montre que la sensibilité de cette probabilité à  $m_{ij}$  ne dépend, comme dans le cas de deux entités, que de la différence  $a_{ij} - c_{ij} = \frac{\delta_{ij}(1,-1) - \delta_{ij}(-1,-1)}{2}$  quelque soit les autres relations avec le reste du réseau. Si le gain unilatéral de  $i$  est nul, ce qui veut dire  $a_{ij} = 0$ , alors la sensibilité à la connectivité ne dépend que du signe de  $c_{ij}$ . Cela signifie que le défaut de  $i$  conditionnellement à celui de  $j$  augmente avec la connectivité si et seulement si son gain bilatéral ou mutuel est positif. D'autre part, par la convention  $a(\delta_{ij}) = b(\delta_{ji})$ , évoquée au début de la section, on a  $\partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(X_j = -1|X_i = -1) \propto -2(b_{ij} - c_{ij})$ , donc nous n'avons aucune obstruction pour un comportement différent du côté de  $j$ . Si nous n'avons pas de gain bilatéraux, à savoir  $a_{ij} = b_{ij} = 0$ , alors la relation devient symétrique, et donc les sensibilités aux défaut également; ces derniers ne dépendent que du signe de  $c_{ij}$ .

### 3.2.3 Effets de premier et second ordre

On s'intéresse maintenant aux effets du réseau sur la probabilité d'un évènement  $\mathcal{E}$  localisé sur un sous-ensemble  $U \subset V$ . Cet évènement peut être le défaut d'une entité  $i \in V$  ( $U = \{i\}$ ), la formation d'un cluster sur une partie  $A$  (pour tout  $i, j \in A$ ,  $X_i = X_j$ ) et donc  $U = A$ , ou le défaut d'un cluster  $A \subset V$  ( $U = A$ ). Nous allons dans cette sous-section isoler les effets directs sur cet évènement, à savoir l'effet des entités  $j \in N(i)$  pour tout  $i \in U$ , et les effets indirectes sur  $U$ . Ceux-ci peuvent représenter l'effet des entités de  $U$  sur elles mêmes, les effets simultanés d'entités extérieures à  $U$  ou l'effet d'entités éloignées de  $U$  via des entités intermédiaires. Pour mieux illustrer cela, prenons l'exemple d'un réseau de 7 entités qu'on note  $G_7$  comme représenté dans la figure 3.3 ci-dessous. Soit  $\mathcal{E} = \{X_1 = -1\}$  l'évènement du défaut de l'entité 1, sa probabilité fait intervenir toutes les relations de 1, à savoir avec les entités 2, 3, 4 et 5. Les effets de ces dernières sont directs, et ils sont appelés effets de premier ordre. La probabilité de défaut de 1 fait aussi intervenir les effets des entités 6 et 7 qui agissent indirectement sur celle-ci via 5 et 4 pour l'entité 7, et via 5 et 3 pour l'entité 6. Celles-ci peuvent également agir sur 1 via des chemins de longueurs supérieurs à 2. On caractérise donc l'ordre d'un effet par la longueur du chemin qu'il traverse. Donc l'effet des voisins de 1 est de premier ordre s'il est direct, et si celui-ci passe par un intermédiaire devient d'ordre 2. Par exemple, l'effet de 6 sur 1 via 5 ou 3 est de second ordre, alors que via le chemin (5,7,4,1) il est d'ordre 4. L'entité 1 peut également agir sur elle même via son influence sur ses voisins, qui à leur tour impactent 1, et cet effet est de second ordre.


 FIGURE 3.3 – Graphe  $G_7$ .

Il est possible de faire la même chose pour l'évènement  $\mathcal{E} = \{X_5 = X_6 = -1\}$  qui est localisé en  $U = \{5, 6\}$ . Les effets de premier ordre seront alors ceux des voisins de 5 et 6 ( $\{1, 3, 4, 7\}$ ), et ceux du second ordre seront celles de 5 et 6 sur elles mêmes, les effets simultanés de 1 et 4 sur  $U$  et les effets de 2 et 3 via les entités intermédiaires voisines de  $U$ .

Soit un réseau économique  $G = (V, M, T)$  tel que les connectivités  $M$  soient faibles. Intuitivement, les effets d'ordres supérieurs à deux seront très faibles, et donc pourraient être considérés comme négligeables. Cette intuition rappelle le principe d'un développement limité à l'ordre 2 d'une fonction à plusieurs variables. En effet, soit  $\mathcal{E}$  un évènement sur le réseau  $G$ . On remplace les notations  $\mathbb{P}_G$ ,  $\mathbb{E}_G$  et  $Cov_G$  par  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{E}$  et  $Cov$  quand  $M = 0$ , alors via la formule de Taylor généralisée<sup>9</sup>, on a

$$\mathbb{P}_G(\mathcal{E}) = \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{E}) + \sum_{e \in E(V)} \partial_{m_e | M=0} \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) m_e}_{d_0 \mathbb{P}_G(\mathcal{E})(M)} + \underbrace{\sum_{e, f \in E(V)} \frac{1}{(1 + \mathbb{1}_{e=f})!} \partial_{m_e} \partial_{m_f | M=0} \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) m_e m_f}_{d_0^2 \mathbb{P}_G(\mathcal{E})(M)} + O(\|M\|^2)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne. Notre objectif est d'étudier sous quelles conditions l'effet de premier ordre d'une relation  $\delta_e$  sur une arête  $e \in E(V)$  peut être nul, positif ou négatif sur l'ensemble  $U$  des entités concernées par l'évènement  $\mathcal{E}$ . Pour les effets de second ordre, nous désirons également caractériser l'annulation des effets croisés de deux relations  $\delta_e$  et  $\delta_f$  où  $e$  et  $f$  sont deux arêtes au moins adjacentes<sup>10</sup> de  $E(V)$ . L'idée est d'écrire chaque coefficient  $\partial_{m_{ij} | M=0} \mathbb{P}_G(\mathcal{E})$  comme une forme linéaire en  $(a(\delta_{ij}), b(\delta_{ij}), c(\delta_{ij}))$ , et également le coefficient  $\partial_{m_{ij}} \partial_{m_{kl} | M=0} \mathbb{P}_G(\mathcal{E})$  comme une forme bilinéaire en  $(a(\delta_{ij}), b(\delta_{ij}), c(\delta_{ij}))$  et  $(a(\delta_{kl}), b(\delta_{kl}), c(\delta_{kl}))$ . Donc le noyau de la forme linéaire caractérise les relations qui n'ont aucun impact directe sur les entités de  $U$ , tandis que le noyau de la forme bilinéaire caractérise les relations dont les effets combinés s'annulent.

9. La formule de Taylor pour une fonction  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  au voisinage de  $a$  s'écrit

$$f(x) = \sum_{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \{1, \dots, n\}^p} \frac{\partial_{x|x=a}^\alpha f}{\alpha!} (x-a)^\alpha + O(\|x\|^n)$$

où  $\partial_{x|x=a}^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_p}^{\alpha_p} f(a)$ ,  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_p!$ , et  $(x-a)^\alpha = \prod_i (x_i - a_i)^{\alpha_i}$ .

10. Deux arêtes  $e = (i, j)$  et  $f = (k, l)$  sont au moins adjacentes si  $i = k$  ou  $j = l$ .

**Effets de premier ordre :** Le terme du premier ordre est la différentielle  $d_0\mathbb{P}_G(\mathcal{E}) : M \mapsto d_0\mathbb{P}_G(\mathcal{E})(M)$  au voisinage de 0, et on associe celui-ci à l'effet de l'interdépendance de premier ordre sur la probabilité de l'évènement  $\mathcal{E}$ . Soit  $e = (i, j) \in E(V)$ , on a

$$\begin{aligned}\partial_{m_{ij}}\mathbb{P}_G(\mathcal{E}) &= \text{Cov}_G(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}, \delta_{ij}) \\ &= (\mathbb{E}_G(\delta_{ij}|\mathcal{E}) - \mathbb{E}_G(\delta_{ij}))\mathbb{P}_G(\mathcal{E})\end{aligned}\tag{3.16}$$

Donc

$$\partial_{m_{ij}|M=0}\mathbb{P}_G(\mathcal{E}) = (\mathbb{E}(\delta_{ij}|\mathcal{E}) - \mathbb{E}(\delta_{ij}))\mathbb{P}(\mathcal{E})$$

Si l'évènement est localisé dans une partie  $U$  du graphe, alors  $\mathbb{E}(\delta_e|\mathcal{E}) - \mathbb{E}(\delta_e) \neq 0$  si et seulement si  $e \cap U \neq \emptyset$  car la mesure utilisée  $\mathbb{P}$  est celle de l'indépendance. Ce qui veut dire que cette quantité s'annule quand aucun des sommets de  $e$  n'est pas dans  $U$ , ce qui élimine systématiquement les effets d'ordre supérieur à 1. Pour mieux illustrer cela, prenons un évènement local comme le défaut de  $i \in V$ . On a pour tout  $e \in E(V)$ ,  $\mathbb{E}(\delta_e|X_i = -1) - \mathbb{E}(\delta_e) \neq 0$  si et seulement si  $e = (i, k)$  pour  $k \in N(i)$ . Soit  $k \in N(i)$ , en écrivant  $\delta_{ik} = a(\delta_{ik})X_i + b(\delta_{ik})X_k + c(\delta_{ik})X_iX_k$  on a

$$\mathbb{E}(\delta_{ik}|X_i = -1) - \mathbb{E}(\delta_{ik}) = -2(1 - p_i)(a(\delta_{ik}) + (1 - 2p_k)c(\delta_{ik}))$$

Donc

$$\partial_{m_{ik}|M=0}\mathbb{P}_G(X_i = -1) = -2(1 - p_i)p_i(a(\delta_{ik}) + (1 - 2p_k)c(\delta_{ik}))\tag{3.17}$$

On en déduit l'expression de la différentielle de premier ordre

$$d_0\mathbb{P}_G(X_i = -1)(M) = -2p_i(1 - p_i) \sum_{k \in N(i)} (a(\delta_{ik}) + (1 - 2p_k)c(\delta_{ik}))m_{ik}\tag{3.18}$$

Donc les relations qui interviennent sont sans surprise celles associées aux voisins  $j \in N(i)$ . Chacun de ces voisins agit sur  $i$  en faisant augmenter ou baisser sa probabilité marginale de défaut selon le signe de la quantité  $a(\delta_{ij}) + (1 - 2p_j)c(\delta_{ij})$ . On remarque que le coefficient  $p_i(1 - p_i)$  est croissant pour  $p_i \leq 0.5$ , donc plus la probabilité intrinsèque de  $i$  augmente plus l'amplitude de l'effet d'interdépendance augmente. On peut confondre une relation  $\delta_{ij}$  au vecteur  $v(\delta_{ij}) := (a(\delta_{ij}), b(\delta_{ij}), c(\delta_{ij}))$ , on peut donc écrire cette différentielle d'une manière plus géométrique

$$d_0\mathbb{P}_G(X_i = -1)(M) = -2p_i(1 - p_i) \sum_{k \in N(i)} v(\delta_{ik})^T q_{ik} m_{ik}\tag{3.19}$$

où  $q_{ik} = (1, 0, 1 - 2p_k)$ . Par conséquent,

*Une relation  $\delta_{ij}$  n'agit pas au premier ordre si et seulement si  $v(\delta_{ij}) \perp q_{ij}$ .*

Ces relations forment donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 engendré par  $(0, 1, 0)$  et  $(1 - 2p_j, 0, -1)$ . En d'autres termes, toute relation  $\delta_{ij}$  dont l'effet de premier ordre est nul est une combinaison linéaire des deux relations

$$\delta_{ij}^1 = X_j \text{ et } \delta_{ij}^2 = (1 - 2p_j)X_i - X_iX_j$$

La relation  $\delta_{ij}^1$  n'est constitué que par le terme du grain de  $j$ , ce qui veut dire que  $j$  "profite" de la relation sans que  $i$  y soit sensible. La relation  $\delta_{ij}^2$  s'interprète quand à elle comme une relation de concurrence (car le coefficient de  $X_i X_j$  est négatif comme nous allons l'expliquer dans la section qui suit). Cette concurrence est compensée par un gain unilatéral de  $i$  donné par  $a(\delta_{ij}^2) = (1 - 2p_j)X_i$  tant que  $p_j < 50\%$ , ce qui annule l'effet de premier ordre de  $j$  sur  $i$ . Par conséquent, toute combinaison de ces deux relations donnerai une relation  $\delta_{ij}$  dont l'effet de premier ordre est nul pour toute connectivité  $m_{ij}$  suffisamment faible.

**Effets de second ordre :** La différentielle  $d_0^2 \mathbb{P}_G(\mathcal{E})$  est associée aux effets de second ordre, et on démontre que

$$d_0^2 \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) : M \mapsto \sum_{e,f \in E(V)} (Cov(\delta_e, \delta_f | \mathcal{E}) - Cov(\delta_e, \delta_f)) \mathbb{P}(\mathcal{E}) m_e m_f \quad (3.20)$$

En effet, soient  $e = (i, j), f = (k, l) \in E(V)$ , on a d'après 3.12

$$\begin{aligned} \partial_{m_{ij}} \partial_{m_{kl}} \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) &= \partial_{m_{ij}} Cov_G(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}, \delta_{kl}) \\ &= \partial_{m_{ij}} (\mathbb{E}_G(\delta_{kl} | \mathcal{E}) \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) - \mathbb{E}_G(\delta_{kl}) \mathbb{P}_G(\mathcal{E})) \\ &= \partial_{m_{ij}} \mathbb{E}_G(\delta_{kl} | \mathcal{E}) \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) + \mathbb{E}_G(\delta_{kl} | \mathcal{E}) \partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) - \partial_{m_{ij}} \mathbb{E}_G(\delta_{kl}) \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) - \mathbb{E}_G(\delta_{kl}) \partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) \\ &= (\mathbb{E}_G(\delta_{kl} \delta_{ij} | \mathcal{E}) - \mathbb{E}_G(\delta_{ij} | \mathcal{E}) \mathbb{E}_G(\delta_{kl} | \mathcal{E})) \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) - (\mathbb{E}_G(\delta_{kl} \delta_{ij}) - \mathbb{E}_G(\delta_{ij}) \mathbb{E}_G(\delta_{kl})) \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) \\ &= (Cov_G(\delta_{ij}, \delta_{kl} | \mathcal{E}) - Cov_G(\delta_{ij}, \delta_{kl})) \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Donc

$$\partial_{m_{ij}} \partial_{m_{kl}} \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) = (Cov(\delta_{ij}, \delta_{kl} | \mathcal{E}) - Cov(\delta_{ij}, \delta_{kl})) \mathbb{P}(\mathcal{E}) \quad (3.22)$$

ce qui donne l'expression 3.20. Si l'évènement  $\mathcal{E}$  est restreint à une partie  $U$  du réseau, alors la quantité  $Cov(\delta_e, \delta_f | \mathcal{E}) - Cov(\delta_e, \delta_f)$  est non nulle, si et seulement si  $U \cap (e \cup f) \neq \emptyset$ . On note  $C_{e,f} := (Cov(\delta_e, \delta_f | \mathcal{E}) - Cov(\delta_e, \delta_f)) \mathbb{P}_G(\mathcal{E})$ , et on prend le cas de l'évènement de défaut de  $i \in V$  (donc  $U = \{i\}$ ). Les arêtes  $e, f$  qui n'annulent pas le coefficient  $C_{e,f}$  vérifient soit  $e = f = (i, j)$ , soit  $e = (i, j)$  et  $f = (j, k)$  ou  $e = (i, j)$  et  $f = (i, k)$ , et on a

$$d_0^2 \mathbb{P}_G(X_i = -1)(M) = \sum_{j \in N(i)} C_{ij,ij} m_{ij}^2 + \sum_{j \in N(i)} \sum_{k \in N(j) \setminus i} C_{ij,jk} m_{ij} m_{jk} + \sum_{j \in N(i)} \sum_{k \in N(i) \setminus j} C_{ij,ik} m_{ij} m_{ik} \quad (3.23)$$

où le coefficient  $C_{ij,ij}$  codifie l'effet de second ordre de  $i$  sur lui même via  $j$ , dont le calcul donne

$$C_{ij,ij} = -4(1 - p_i)(p_i a_{ij}^2 + p_i(1 - 2p_j)^2 c_{ij}^2 + 4p_j(1 - p_j) b_{ij} c_{ij} + 2p_i(1 - 2p_j) a_{ij} c_{ij})$$

Le coefficient  $C_{ij,jk}$  pour  $k \in N(j) - i$  encode l'effet de  $k$  sur  $i$  via  $j$ , donc c'est l'effet des voisins de second ordre (les voisins des voisins). Celui-ci s'exprime explicitement comme

$$C_{ij,jk} = -4p_j(1 - p_j)(b_{ij} a_{ik} + (1 - 2p_i) c_{ij} a_{jk} + 2(1 - 2p_i)(1 - p_k) c_{ij} c_{jk} + b_{jk} c_{ij} - b_{ij} b_{jk})$$



Le coefficient  $C_{ij,ik}$  représente l'effet simultané de deux relations de  $i$ , et celui-ci s'écrit

$$C_{ij,ik} = -4p_i(1-p_i)(a_{ik}a_{ij} + (1-2p_j)(1-2p_k)c_{ij}c_{ik} + (1-2p_k)a_{ij}c_{ik} + (1-2p_j)a_{ik}c_{ij})$$

Ces coefficients admettent également une écriture géométrique de la manière suivante :

$$C_{ij,ij} = v(\delta_{ij})^T Q_{ij,ij} v(\delta_{ij}), C_{ij,ik} = v(\delta_{ij})^T Q_{ij,ik} v(\delta_{ik}) \text{ et } C_{ij,jk} = v(\delta_{ij})^T Q_{ij,jk} v(\delta_{jk})$$

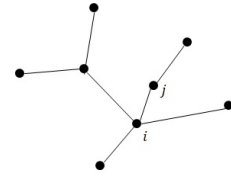
où

$$Q_{ij,ij} = \begin{pmatrix} p_i & 0 & p_i(1-2p_j) \\ 0 & 0 & 2p_j(1-p_j) \\ p_i(1-2p_j) & 2p_j(1-p_j) & 0 \end{pmatrix}, Q_{ij,ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-2p_k \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-2p_j & 0 & (1-2p_j)(1-2p_k) \end{pmatrix}$$

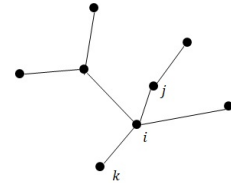
et

$$Q_{ij,jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-2p_k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2(1-2p_j)(1-p_k) \end{pmatrix}$$

La première forme bilinéaire associée à  $Q_{ij,ij}$  est symétrique, car la configuration selon laquelle  $i$  est sensible à lui même via  $j$  est symétrique. Par conséquent, cet effet est annulé si et seulement si  $v(\delta_{ij}) \in \text{Ker}(Q_{ij,ij})$ . Or  $\det(Q_{ij,ij}) = -4p_j p_j^2 (1-p_j)^2$ , alors l'effet de  $i$  sur lui même via  $j$  ne s'annule que si on conditionne par le défaut ou la survie de  $j$  ( $p_j \rightarrow 0, 1$ ).



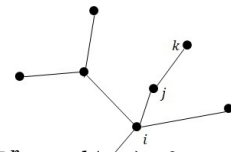
La forme bilinéaire associée à  $Q_{ij,ik}$  est clairement dégénérée<sup>11</sup> car elle est de rang 1 pour  $p_j \neq 0.5$ , donc on peut trouver une relation  $ik$  telle que pour toute relation  $ij$  on ait  $C_{ij,ik} = 0$ . Ce qui veut que qu'il existe une relation  $\delta_{ik}$  qui annule l'effet de toute autre relation  $\delta_{ij}$  par composition. Pour faire cela il suffit donc de calculer le noyau de  $Q_{ij,ik}$ , dont la dimension est égale à 2, et on a



$$\text{Ker}(Q_{ij,ik}) = \text{vect}((0, 1, 0); (1-2p_k, 0, -1))$$

Par conséquent, toute combinaison des deux relations  $\delta_{ik}^1 = X_k$  et  $\delta_{ik}^2 = (1-2p_k)X_i - X_i X_k$  annule les effets des autres relations de  $i$ .

Pour la dernière configuration  $ij, jk$ , la forme bilinéaire de  $Q_{ij,jk}$  encode l'effet de  $k$  sur  $i$  via  $j$ . On remarque que cette forme est non dégénérée pour  $p_k \neq 50\%$ , car  $\det(Q_{ij,jk}) = 2p_k - 1$ . Donc il n'est pas possible de choisir une relation  $\delta_{ij}$  qui bloque tous les effets des voisins de  $j$  sur  $i$ . Cependant, il est possible



11. Une forme bilinéaire  $b$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  est dégénérée s'il existe  $x \neq 0$  tel que pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  on a  $b(x, y) = 0$ , et on définit donc le noyau de  $b$  comme l'ensemble de ces  $x$ .

d'annuler l'effet de  $k$  sur  $i$  en choisissant des relations intermédiaires  $ij$  et  $jk$  orthogonales selon la forme bilinéaire de  $Q_{ij,jk}$ . Si on fixe  $\delta_{jk}$ , alors la relation  $\delta_{ij}$  qui bloque l'effet de  $k$  via  $j$  est toute relation du noyau  $\text{Ker}(x \mapsto x^T Q_{ij,jk} v(\delta_{jk}))$ . Comme

$$\text{Ker}(x \mapsto x^T Q_{ij,jk} v(\delta_{jk})) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} b(\delta_{kl}) - a(\delta_{kl}) \\ c(\delta_{kl})(1 - 2p_k) \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ b(\delta_{kl}) + 2c(\delta_{kl})(1 - 2p_j)(1 - p_k) \\ b(\delta_{kl}) - a(\delta_{kl}) \end{pmatrix} \right)$$

Donc toute relation  $\delta_{ij}$  combinaison des deux relations représentées par les vecteurs générateurs du noyau annule l'effet de  $k$ , et cela pour tout  $m_{ij}$  et  $m_{kl}$ .

Il est possible de généraliser cette analyse à tout événement  $\mathcal{E}$ , en trouvant des 1-formes et 2-formes<sup>12</sup>  $q_e$  et  $Q_{e,f}$  pour tout  $e, f \in E(V)$  qui décrivent les effets de premier et de second ordre. Celles-ci permettent de caractériser les effets directs et indirects des entités du réseau sur la probabilité d'un événement  $\mathcal{E}$ . On peut aussi aller plus loin en développant  $\mathbb{P}_G(\mathcal{E})$  à des ordres supérieurs, ce qui fera apparaître des différentielles  $d_0^k \mathbb{P}_G(\mathcal{E})$  qui s'expriment sous la forme

$$d_0^k \mathbb{P}_G(\mathcal{E})(M) = \sum_{e_1, \dots, e_k \in E(V)} H(v(\delta_{e_1}), \dots, v(\delta_{e_k})) m_{e_1} \dots m_{e_k}$$

où  $H$  est une  $k$ -forme linéaire qui encode les effets d'ordre  $k$  sur l'évènement  $\mathcal{E}$ .

L'avantage de cette approche se matérialise bien sur les ordres 1 et 2 par la simplicité de la représentation géométrique qu'elle offre. Toutefois, une représentation géométrique devient beaucoup moins évidente pour les ordres supérieurs, outre le fait que cela fonctionne uniquement pour des connectivités faibles. Comme nous allons voir dans le chapitre 5, il existe une variante non linéaire de ces résultats, qui apparaît de manière naturelle quand une entité possède plusieurs relations susceptibles de se compenser entre elles.

### 3.2.4 Sensibilité aux probabilités intrinsèques et les types de relations

A la différence d'un modèle d'Ising classique, nous avons remplacé les fonctions de couplage usuelles par des fonctions plus riches  $\delta_{ij}$  comme expliqué précédemment. L'idée est d'encoder dans ces relations tous les comportements possibles que peuvent avoir deux entités reliés dans un réseau économique. Ces comportements peuvent représenter des relations de support, de concurrence ou simplement des relations économiques. Nous supposons dans ce modèle que l'état du système s'explique uniquement par les états intrinsèques et les relations deux à deux. Donc nous allons considérer un réseau économique dans lequel deux entités  $i, j$  seront isolées, ce qui veut dire qu'elles sont seules voisines l'une à l'autre. Nous rappelons que nous avons déjà utilisé cette méthode en isolant les cliques d'ordre 1 afin de définir les  $B_i$  au début de la section, alors nous procédons de même pour définir les relations en isolant les cliques d'ordre 2. Cela revient

12. Les  $k$ -formes sont les formes  $k$ -linéaires.

donc à considérer les sous réseaux  $G_{ij} = (\{i, j\}, M_{ij}, \delta_{ij})$  tels que

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & m_{ij} \\ m_{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce réseau, la mesure  $\mathbb{P}_{G_{ij}}$  s'exprime très simplement sous la forme :

$$\mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = x_i, X_j = x_j) = \frac{\exp(B_i x_i + B_j x_j + m_{ij} \delta_{ij}(x_i, x_j))}{\sum_{(l_i, l_j) \in \Omega^2} \exp(B_i l_i + B_j l_j + m_{ij} \delta_{ij}(l_i, l_j))}$$

On peut en déduire par un calcul simple que

$$\partial_{p_j} \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = -1) \propto e^{4m_{ij}c(\delta_{ij})} - 1 \quad (3.24)$$

A partir de cette équation on voit d'abord que le signe de la dérivée ne dépend que de la partie mutuelle de la relation, et nous distinguons trois cas :

- $c(\delta_{ij}) > 0$  : Dans ce cas, le signe de  $\partial_{p_j} \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = -1)$  est positif, donc si l'une des entités se dégrade alors l'autre se dégrade également avec des taux d'augmentation de la probabilité de défaut qui peuvent être différents. Ceux-ci dépendent de l'asymétrie de la relation et les résistances (probabilités intrinsèques) que nous n'avons pas explicité dans la formule 3.24. De même si l'état de l'une des deux entités s'améliore, alors cela profite également à l'autre entité. Nous appelons ce type de relations *support*, et il modélise les liens économiques, ou capitalistiques dans lesquels deux contreparties sont liées et dépendent l'une de l'autre. A titre d'exemple, le cas d'une relation maison mère avec une filiale importante, et certains cas de relations fournisseur-client obéissent au même type de relations.
- $c(\delta_{ij}) < 0$  : A l'inverse du cas précédent, nous avons  $\partial_{p_j} \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = -1) \leq 0$ , cela veut dire que la dégradation d'une entité profite à l'autre par une diminution de la probabilité marginale de défaut. Donc on dit que cette relation est une *concurrence*, et elle modélise les relations économiques dans lesquels deux entités ont des intérêts opposés.
- $c(\delta_{ij}) = 0$  : Dans ce cas, nous avons  $\partial_{p_j} \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = -1) = 0$ , ce qui nous fait revenir à la proposition 3.1, qui prédit que l'état de  $i$  ne dépend pas de celui de  $j$ , et on a la décomposition suivante

$$\mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = x_i, X_j = x_j) = \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = x_i) \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_j = x_j)$$

Il faut noter que chacune des probabilités dans le coté droit de l'équation ci-dessus dépend toujours de  $m_{ij}$ , de la façon suivante :

$$\mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = x_i) \propto \exp(B_i x_i + a_{ij} x_i) \text{ et } \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_j = x_j) \propto \exp(B_j x_j + b_{ij} x_j)$$

Ce type de relations est alors utile pour modéliser des liens économiques dans lesquels chaque entité ne dépend pas systématiquement de sa voisine, mais dépend uniquement des flux générés par la relation qui les relie. Ces derniers sont conditionnés par les coefficients  $a(\delta_{ij}), b(\delta_{ij})$  et la connectivité. Cette relation sera alors appelée relation *détachée* ou *purement économique*.

Les relations régissent la sensibilité de chaque entité à l'état intrinsèque de ses voisines via les valeurs des coefficients mutuels  $c(\delta_{ij})$ , alors que les coefficients  $a(\delta_{ij}), b(\delta_{ij})$  contrôlent une partie de la sensibilité aux connectivités. Ces derniers contrôlent également l'asymétrie de la relation. Pour mieux voir cela, considérons un réseau économique  $G = (V, M, T)$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G(X) &= \sum_{i \in V} B_i X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i \in V} B_i X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} a_{ij} X_i + m_{ij} b_{ij} X_j + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} c_{ij} X_i X_j \\ &= \sum_{i \in V} B_i(M, T) X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} c_{ij} X_i X_j \end{aligned}$$

où  $B_i(M, T) := B_i + C_i(M, T)$ , et  $C_i(M, T)$  est une fonction qui dépend des coefficients de  $X_i$  dans le binôme  $\sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij}(a_{ij} X_i + b_{ij} X_j)$ . A travers cette écriture, on se ramène à un modèle avec des relations symétriques comme dans un modèle d'Ising, mais dont les paramètres intrinsèques  $B_i(M, T)$  dépendent des connectivités et des coefficients  $a(\delta_{ij}), b(\delta_{ij})$ . Donc le signe de ces derniers régit la sensibilité de la mesure  $\mathbb{P}_G$  aux connectivités. Le rôle de ces coefficients se voit plus nettement dans le cas des relations purement économiques ( $c(\delta_{ij}) = 0$ ). En effet, bien que les termes de couplage sont annulés, il reste des termes de la relation et la connectivité qui font varier les probabilités marginales. Si toutes les relations sont de ce type, alors on aura d'après la proposition 3.1 une décomposition complète de la mesure dans laquelle chaque entité à une probabilité intrinsèque  $p_i(M, T) = \frac{1}{1 + \exp(2B_i(M, T))}$ . Cette probabilité augmente par rapport à  $m_{ij}$  quand  $a(\delta_{ij}), b(\delta_{ij})$  sont négatifs, et diminue quand ils sont positifs.

### 3.2.5 Exemples de relations

Considérons quelques exemples de relations dont nous allons analyser les propriétés.

— Support mutuel ( $SM$ ) : Soit  $\delta_{ij}$  une relation qui vérifie

$$\delta_{ij}(-1, -1) = \delta_{ij}(1, 1) > \delta_{ij}(1, -1) = \delta_{ij}(-1, 1)$$

cette relation est alors de support, car  $c(\delta_{ij}) > 0$ . On peut démontrer aisément que dans ce cas les fonctions  $m_{ij} \mapsto \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = -1), \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_j = -1)$  sont décroissantes (comme le montre la figure 3.4 pour le cas d'absence de gains unilatéraux,  $a(\delta_{ij}) = b(\delta_{ij}) = 0$ ), donc les entités sont positivement sensibles à l'augmentation de la connectivité. De plus, les valeurs de la relation favorisent les configurations  $(X_i, X_j)$  de même états par rapport aux autres, de telle manière à annuler ces derniers en extrême connectivité comme l'exprime la limite suivante

$$\lim_{m_{ij} \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = -1, X_j = 1) + \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = 1, X_j = -1) = 0$$

Dans ce cas les entités  $i$  et  $j$  auront presque sûrement les mêmes états, le défaut/ la survie de l'un entraîne presque sûrement le défaut/ la survie de l'autre. Ce phénomène de dépendance extrême sera discuté dans la dernière section de ce chapitre, et qui sera appelé *Single Risk* ou *CoRisk*.

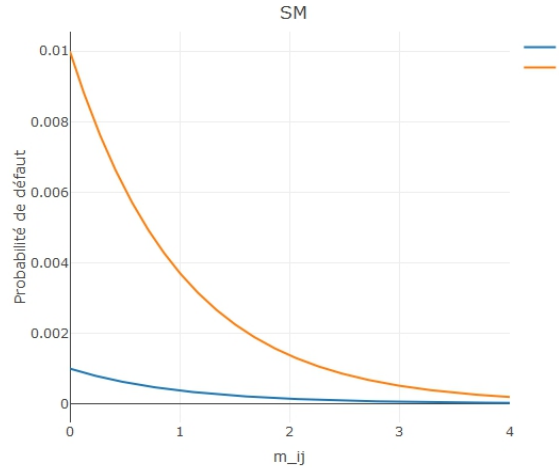


FIGURE 3.4 – Probabilités de défaut pour  $p_i = 0.1\%$ ,  $p_j = 1\%$  et  $\delta_{ij}(\pm 1, \pm 1) = 1$ ,  $\delta_{ij}(\mp 1, \pm 1) = 0$

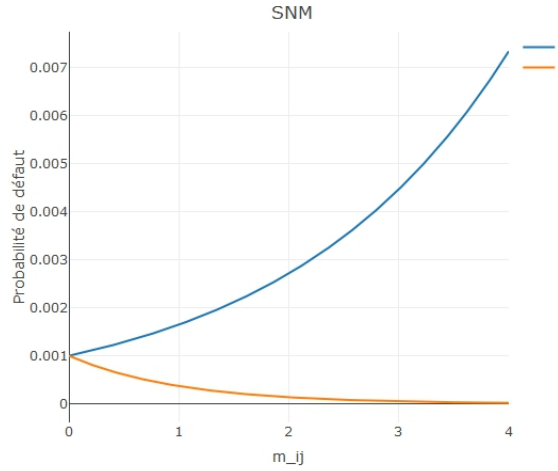
— Support non mutuel (*SNM*) : Soit  $\delta \in ]1, 2[$ , on considère la relation suivante

$$\delta_{ij}(-1, -1) = \delta_{ij}(1, 1) = 1, \delta_{ij}(1, -1) = 0 \text{ and } \delta_{ij}(-1, 1) = \delta^+$$

On a  $4c(\delta_{ij}) = 2 - \delta^+ > 0$ , donc la relation est de support. Comme  $\delta^+ > 1$  alors on peut démontrer que  $m_{ij} \mapsto \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = -1)$  est croissante alors que  $m_{ij} \mapsto \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_j = -1)$  décroît comme le montre la figure 3.5. En outre, on a

$$\lim_{m_{ij} \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = -1, X_j = 1) = 1$$

Ce qui vient du fait que l'état  $(X_i = -1, X_j = 1)$  est le plus favorisé entre les quatre états possibles. Bien que cette relation soit de support, l'augmentation de la connectivité n'est pas forcément en faveur des deux entités. Cette relation décrit alors une relation de support dans laquelle une entité survit en "consommant" sa voisine. En effet, ce comportement est typique d'une maison mère qui peut sacrifier une filiale pour sa propre survie en période de crise. Comme évoqué précédemment, les relations dépendent de la situation économique globale du secteur d'activité des entités, ce qui conditionne la manière avec laquelle elle peuvent se comporter les unes envers les autres. Par conséquent, une maison mère peut changer son comportement et passer d'une relation de support mutuel à une relation comme *SNM* quand elle se trouve en difficulté.


 FIGURE 3.5 – Probabilités de défaut pour  $p_i = p_j = 0.1\%$  et  $\delta = 1.5$ 

Ce comportement se voit également dans les gains unilatéraux, en effet  $a(\delta_{ij}) = -\frac{\delta^+}{4}$  et  $b(\delta_{ij}) = \frac{\delta^+}{4}$ . On voit donc que  $i$  perd unilatéralement, ce qui fait baisser sa résistance équivalente  $B_i(M, T)$ , alors que  $j$  a un gain positif, ce qui fait augmenter sa résistance équivalente  $B_j(M, T)$ . Par conséquent, le fait que la connectivité augmente accentue les variations de ces résistances, ce qui a un impact direct sur les probabilités de défaut marginales comme transparait dans un la figure ci-dessus.

- Concurrence mutuelle ( $CM$ ) : A l'inverse de la relation  $SM$ , nous considérons une relation qui vérifie

$$\delta_{ij}(1, 1) = \delta_{ij}(-1, -1) < \delta_{ij}(-1, 1) = \delta_{ij}(1, -1)$$

cette relation est clairement une concurrence. Et contrairement aux cas précédents fait accroître les probabilités de défaut marginales par rapport à  $m_{ij}$ , et on a

$$\lim_{m_{ij} \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = -1, X_j = 1) + \mathbb{P}_{G_{ij}}(X_i = 1, X_j = -1) = 1$$

Cela veut dire que dans une telle relation de concurrence, l'augmentation de la connectivité est synonyme d'augmentation de la concurrence, ce qui fragilise les entités comme le montre les figures 3.6 et 3.7. L'augmentation de la concurrence n'est que le résultat de la diminution des parts de marché ou la dégradation du secteur d'activité des entités, ce qui va de pair avec la dégradation des entités. Quand cette connectivité est extrême, seulement une des deux entités va survivre comme le montre la limite ci-dessus.

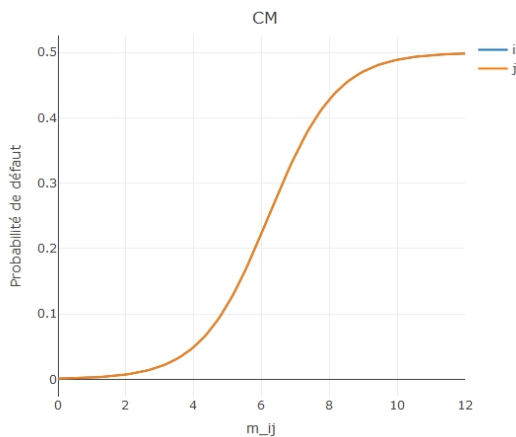


FIGURE 3.6 – Probabilités de défaut pour  $p_i = 0.1\%$ ,  $p_j = 0.1\%$  et  $\delta_{ij}(\pm 1, \pm 1) = 0$ ,  $\delta_{ij}(\mp 1, \pm 1) = 1$

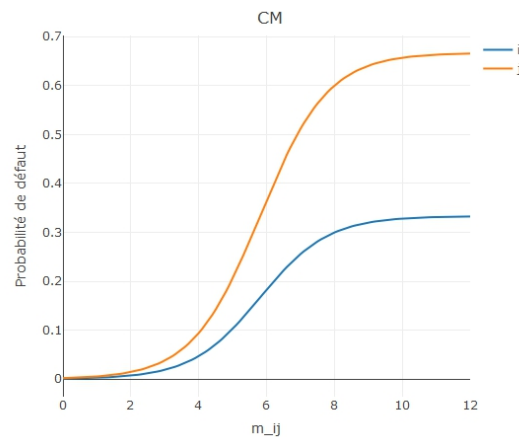


FIGURE 3.7 – Probabilités de défaut pour  $p_i = 0.1\%$ ,  $p_j = 0.2\%$  et  $\delta_{ij}(\pm 1, \pm 1) = 0$ ,  $\delta_{ij}(\mp 1, \pm 1) = 1$

En outre, on remarque d'après les graphiques ci-dessus que lorsque les probabilités intrinsèques de défaut sont égales, les deux entités ont les mêmes probabilités marginales de défaut, et ils se stabilisent à partir d'un seuil. Alors que quand il n'est pas le cas, l'entité la plus faible (Celle qui a la plus grande probabilité intrinsèque) va se dégrader beaucoup plus que l'autre ; et les probabilités vont se stabiliser sur des valeurs strictement inférieures à 1 à partir du même seuil. Cela est dû à la symétrie de la relation considérée qui suppose que les rapports de force entre les deux entités sont égaux. Donc c'est la résistance de chaque entité qui régit le taux d'augmentation de la probabilité de défaut.

Il est possible de construire une relation de concurrence dans laquelle les rapports de force sont différents. Il suffit alors d'introduire de l'asymétrie dans la relation en supposant par exemple que  $\delta_{ij}(-1, 1) < \delta_{ij}(1, -1)$ , ce qui favorise la survie de l'entité  $i$  par rapport à celle de  $j$  pour une connectivité assez grande.

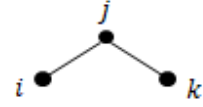
Ces exemples montrent toute la richesse que l'introduction des relations  $\delta_{ij}$  génère, ainsi que toutes les possibilités offertes par cette approche dans la modélisation de l'interdépendance. Les relations définissent comment deux entités vont évoluer si celles-ci sont isolées, mais en présence d'autres relations elles peuvent se comporter différemment selon la configuration du réseau. Nous verrons dans la suite comment un réseau peut perturber une relation entre deux entités, via la notion de relation équivalente que nous introduisons dans la section qui suit.

### 3.2.6 Influence du réseau sur le comportement d'un couple : la relation équivalente.

Dans un réseau économique, l'état d'un couple d'entités en relation dépend du réseau en entier. En effet, si deux entités sont connectées par l'intermédiaire d'une ou plusieurs entités, ce lien indirecte a un effet considérable sur leurs états. En présence de relations de différents types,

la relation entre deux entités devient plus compliquée et peut changer subitement. Prenons par exemple le cas d'un réseau économique de trois entités  $i, j$  and  $k$ , on pose  $\Delta_{ij} := 4c(\delta_{ij})$ .

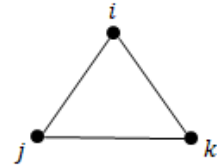
**Cas non complet :** Dans ce cas, on suppose que  $i, k$  ne sont pas connectés directement. En calculant la sensibilité  $\partial_{p_i} \mathbb{P}_G(X_k = -1)$ , on a



$$Cov_G(X_i, X_k) \propto \partial_{p_i} \mathbb{P}_G(X_k = -1) \propto (e^{\Delta_{ij} m_{ij}} - 1)(e^{\Delta_{jk} m_{jk}} - 1) \quad (3.25)$$

Donc si les deux relations sont de support, alors  $i$  et  $k$  vont se comporter comme dans une relation de support, car  $\Delta_{ij}, \Delta_{jk} > 0$  et donc  $Cov_G(X_i, X_k) > 0$ . Si l'une des relations est une concurrence, alors  $Cov_G(X_i, X_k) < 0$  et par conséquent  $i$  et  $k$  se comporteront comme des concurrents. Finalement, Si l'une des relations est purement économique, alors  $Cov_G(X_i, X_k) = 0$ , donc  $i$  et  $k$  seront également dans une relation détachée.

**Cas complet :** Si  $i, j$  et  $k$  sont toutes connectées, alors les calculs deviennent subitement beaucoup plus complexes. Pour analyser l'interaction entre  $i$  et  $j$ , il faut tenir en compte tous les paramètres de  $k$ , en écrivant  $Cov_G(X_i, X_k) \propto \mathbb{P}_G(X_i = X_k = -1) - \mathbb{P}_G(X_i = -1)\mathbb{P}_G(X_k = -1)$  on peut développer chacun des termes et simplifier pour obtenir



$$Cov_G(X_i, X_k) \propto \partial_{p_i} \mathbb{P}_G(X_k = -1) \propto e^{m_{ik}\Delta_{ik} + m_{jk}\Delta_{jk} + m_{ij}\Delta_{ij}} + e^{m_{ik}\Delta_{ik}} - e^{m_{jk}\Delta_{ij}} - e^{m_{ij}\Delta_{ij}} e^{-2B_j}(e^{m_{ik}\Delta_{ik}} - 1)e^{\alpha_{ij} + \alpha_{jk}} + e^{2B_j}(e^{m_{ik}\Delta_{ik}} - 1)e^{\beta_{ij} + \beta_{jk}} \quad (3.26)$$

où  $\alpha := m \cdot (\delta \cdot (-1, -1) - \delta \cdot (-1, 1))$  et  $\beta := m \cdot (\delta \cdot (1, 1) - \delta \cdot (1, -1))$ .

Cette formule se ramène à celle du cas précédent quand  $m_{ik}\Delta_{ik} = 0$ , sauf que cette fois-ci  $i$  et  $k$  peuvent être connectés via une relation purement économique. On voit aussi que si  $i$  et  $k$  sont en relation de support, alors si l'une des deux relations est de concurrence, pour une connectivité assez forte on peut rendre la covariance négative. En d'autres termes, si  $i$  se supporte avec  $j$  mais en concurrence avec  $k$ , et  $k$  se supporte avec  $j$ , alors il est possible que la relation de concurrence de  $i$  avec  $k$  rend  $i$  et  $k$  comme des concurrents vu que  $k$  supporte le concurrent de  $i$ . De la même manière, on peut avoir un changement du signe de la covariance de  $i$  et  $k$  quand ils sont en concurrence.

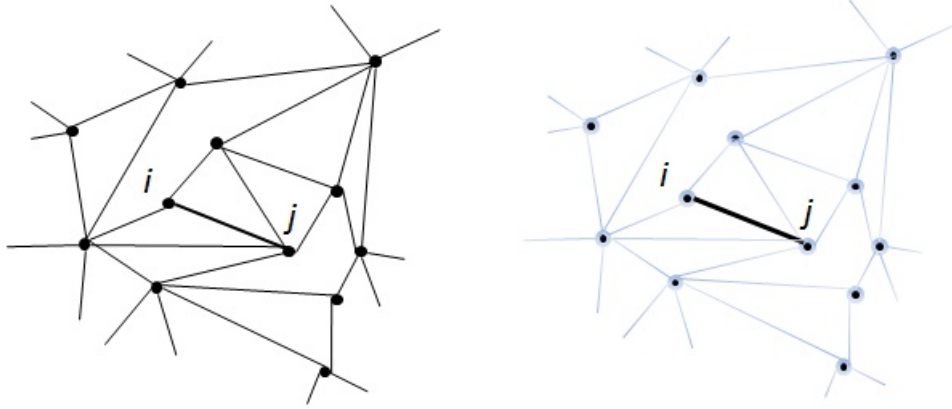
Il est donc possible de trouver des relations entre  $i$  et les autres entités auxquelles elle est connectée qui annulent la covariance sans que celles-ci soient purement économiques. Si un réseau économique  $G = (V, M, T)$  est tel que toutes les covariances sont nulles, alors on dit qu'il est *équilibré*, et la matrice  $M$  est appelée sa position d'équilibre. A titre d'exemple, un réseau dont toutes les relations sont purement économiques est un réseau équilibré pour toute matrice de connectivité  $M$ , alors qu'un réseau dont toutes les probabilités de défaut intrinsèques sont inférieurs à 50%, dont les relations sont de support n'a aucune position d'équilibre comme nous



allons voir plus loin.

Soient  $G = (V, M, T)$  un réseau économique, et  $i, j \in V$  deux entités. On sait calculer les probabilités jointes  $\mathbb{P}_G(X_i, X_j)$ , ainsi que la covariance  $\text{Cov}_G(X_i, X_j)$  qui dépendent non seulement des entités  $i$  et  $j$ , mais aussi des autres entités du réseau. L'idée est de voir le réseau  $G$  comme un réseau trivial de deux entités  $i, j$  qu'on note  $\mathcal{G}_{ij}$  comme le montre la figure 3.2.6 de telle sorte que

$$\mathbb{P}_G(X_i = x_i, X_j = x_j) = \mathbb{P}_{\mathcal{G}_{ij}}(X_i = x_i, X_j = x_j) \quad (3.27)$$



Donc on dispose d'une relation  $D_{ij}$  sur  $\mathcal{G}_{ij}$  qui résume l'effet du réseau  $G$  sur le lien entre  $i$  et  $j$ . Nous avons alors un Hamiltonien qui s'écrit

$$\mathcal{H}_{\mathcal{G}_{ij}}(X_i, X_j) = B_i X_i + B_j X_j + \hat{m}_{ij} D_{ij}(X_i, X_j)$$

où  $\hat{m}_{ij} := m_{ij} \mathbb{1}_{m_{ij} \neq 0} + \mathbb{1}_{m_{ij} = 0}$ . Ce qui veut dire que cette connectivité est égale à  $m_{ij}$  quand  $i$  et  $j$  sont connectés et 1 sinon. Donc  $D_{ij}$  serait notre nouvelle relation que nous appellerons relation *équivalente*.

On suppose que  $i$  et  $j$  sont connectés. L'équation 3.27 implique le système d'équations

$$\begin{cases} 2B_i + m_{ij}(D_{ij}(1, 1) - D_{ij}(-1, 1)) &= \ln\left(\frac{\mathbb{P}_G(X_i=1, X_j=1)}{\mathbb{P}_G(X_i=-1, X_j=1)}\right) \\ 2B_j + m_{ij}(D_{ij}(1, 1) - D_{ij}(1, -1)) &= \ln\left(\frac{\mathbb{P}_G(X_i=1, X_j=1)}{\mathbb{P}_G(X_i=1, X_j=-1)}\right) \\ -2B_j + m_{ij}(D_{ij}(-1, -1) - D_{ij}(-1, 1)) &= \ln\left(\frac{\mathbb{P}_G(X_i=-1, X_j=-1)}{\mathbb{P}_G(X_i=-1, X_j=1)}\right) \\ -2B_i + m_{ij}(D_{ij}(-1, -1) - D_{ij}(1, -1)) &= \ln\left(\frac{\mathbb{P}_G(X_i=-1, X_j=-1)}{\mathbb{P}_G(X_i=1, X_j=-1)}\right) \end{cases}$$

Comme  $c(\delta_{ij}) = \frac{\delta_{ij}(1,1) + \delta_{ij}(-1,-1) - \delta_{ij}(1,-1) - \delta_{ij}(-1,1)}{4}$ , alors le coefficient  $c$  de la fonction de couplage  $D_{ij}$  peut s'écrire :

$$c(D_{ij}) = \frac{1}{4m_{ij}} \ln\left(\frac{\mathbb{P}_G(1,1)\mathbb{P}_G(-1,-1)}{\mathbb{P}_G(-1,1)\mathbb{P}_G(1,-1)}\right) \quad (3.28)$$

Le rapport  $\frac{\mathbb{P}_G(1,1)\mathbb{P}_G(-1,-1)}{\mathbb{P}_G(-1,1)\mathbb{P}_G(1,-1)}$  n'apparaît pas par hasard dans l'expression ci-dessus. En effet, on a

$$\begin{aligned} \langle X_i, X_j \rangle_G &\propto \mathbb{P}_G(X_i = X_j = -1) - \mathbb{P}_G(X_i = -1)\mathbb{P}_G(X_j = -1) \\ &= \mathbb{P}_G(X_i = X_j = -1)\mathbb{P}_G(X_i = X_j = 1) - \mathbb{P}_G(X_i = -1, X_j = 1)\mathbb{P}_G(X_i = 1, X_j = -1) \end{aligned}$$

Donc

$$\langle X_i, X_j \rangle_G \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}_G(1,1)\mathbb{P}_G(-1,-1)}{\mathbb{P}_G(-1,1)\mathbb{P}_G(1,-1)} \geq 1$$

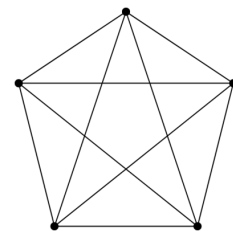
D'où la corrélation  $\langle X_i, X_j \rangle_G$  et le coefficient  $c(D_{ij})$  ont le même signe.

Il est important de mentionner que le coefficient  $c(D_{ij})$  ne dépend pas des probabilités intrinsèques de  $i$  et  $j$ . En effet, dans le produit  $\mathbb{P}_G(1,1)\mathbb{P}_G(-1,-1)$  les paramètres  $B_i, B_j$  se simplifient, et on a  $\mathbb{P}_G(1,1)\mathbb{P}_G(-1,-1) = e^{m_{ij}(\delta_{ij}(1,1)+\delta_{ij}(-1,-1))} A_{ij}$  où  $A_{ij}$  ne dépend pas de  $B_i, B_j, \delta_{ij}$  et  $m_{ij}$ . De la même manière, on a  $\mathbb{P}_G(-1,1)\mathbb{P}_G(1,-1) = e^{m_{ij}(\delta_{ij}(1,-1)+\delta_{ij}(-1,1))} B_{ij}$ , donc

$$c(D_{ij}) = c(\delta_{ij}) + \frac{1}{4m_{ij}} \ln\left(\frac{A_{ij}}{B_{ij}}\right) \quad (3.29)$$

Le coefficient  $c$  de la relation équivalente  $D_{ij}$  dépend des paramètres du réseau sauf  $p_i$  et  $p_j$ , et on peut déjà voir qu'il est égal à  $c(\delta_{ij})$  en deux situations. La première situation est quand le couple  $i, j$  est isolé du reste du réseau, et la deuxième c'est quand  $m_{ij}$  tend vers  $+\infty$ . Donc les deux situations sont équivalentes en terme de leur effet sur le comportement du couple  $i$  et  $j$ . En fait, quand  $m_{ij}$  est assez grand le coefficient  $c(D_{ij})$  devient presque égal à  $c(\delta_{ij})$ , et donc le couple se comporte comme s'ils sont seuls dans le réseau car ils sont tellement connectés qu'ils en deviennent insensibles aux effets externes. Cela a été expliqué autrement dans l'introduction du modèle comme une négligence des termes de couplage devant  $m_{ij}\delta_{ij}$ , ce qui rend le modèle sur le réseau  $G$  équivalent à un modèle sur le réseau  $G_{ij}$ .

Pour comprendre l'effet des autres caractéristiques du réseau sur le comportement du couple  $i, j$ , on considère dans un premier temps un réseau économique constitué de 5 entités de même probabilité intrinsèques  $p$ ; qui sont toutes connectées via une même relation de type  $SM$  telle que  $\delta(1,1) = 2$  et  $\delta(1,-1) = 1$ . Soient  $i, j$  deux entités du réseau, si on fait varier  $m_{ij}$  et  $p$  en fixant les autres connectivités, alors la figure 3.9 nous montre que d'une part le coefficient  $c(D_{ij})$  reste positif, et qu'il diminue par rapport à  $m_{ij}$  pour tout  $p$ . Cela veut dire que pour toute valeur de  $p$ , quand  $m_{ij}$  est très grand le comportement du couple  $i, j$  n'est pas influencé par le reste du réseau comme le prédit la formule 3.29. Quand la connectivité est faible, on peut voir que le comportement du couple  $i, j$  devient très sensible aux variations des probabilités de défaut des autres entités du réseau. En outre, le coefficient  $c(D_{ij})$  atteint son maximum en  $p = 50\%$ , ce qui veut dire qu'en cas d'incertitude totale dans le réseau les entités  $i, j$  ont tendance à se supporter, en dépit de leurs états propres vu que  $c(\delta_{ij})$  ne dépend pas de  $p_i, p_j$ .



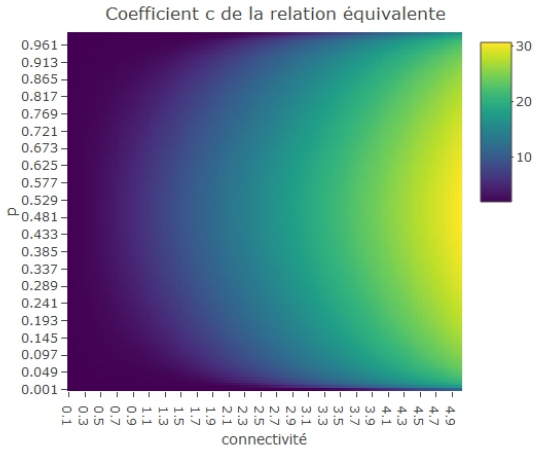


FIGURE 3.8 – Cas d'un réseau de support mutuel :  $c(D_{ij})$  en fonction de  $p$  et de la connectivité des autres entités du réseau.

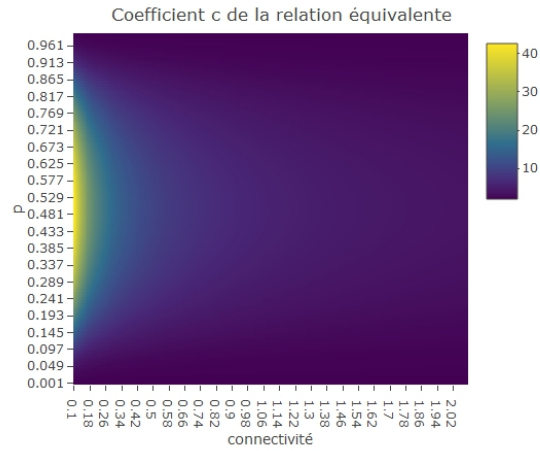
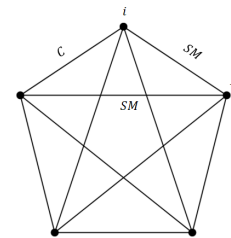


FIGURE 3.9 – Cas d'un réseau de support mutuel :  $c(D_{ij})$  en fonction de  $p$  et de  $m_{ij}$ .

Si on fixe  $m_{ij}$  et on varie les autres connectivités uniformément, alors comme le montre la figure 3.8 pour un niveau de  $p$  fixe, plus les autres entités sont connectées plus  $c(D_{ij})$  augmente. Cela peut sembler presque contradictoire, car en suivant l'intuition du cas précédent, on s'attend à ce que l'augmentation des connectivités dans le réseau fasse disparaître l'effet de  $m_{ij}$  et par la suite faire diminuer  $c(D_{ij})$ . Mais c'est bien le cas car le terme  $m_{ij}\delta_{ij}$  dans le Hamiltonien sera négligeable devant les autres termes de couplage, ce qui rend imperceptible l'effet de la relation entre  $i$  et  $j$ . L'explication de ce phénomène réside dans la topologie du réseau, en effet on supposant que le réseau est complet, alors  $i$  et  $j$  sont connectés indirectement via plusieurs chemins possibles. Or ces chemins ont une forte connectivité, alors  $i$  et  $j$  deviennent fortement connectés. Si nous avons une topologie dans laquelle  $i$  et  $j$  sont connectés directement, mais aussi indirectement via des chemins assez longs, alors l'effet de propagation est moins important que dans un réseau complet, par conséquent le coefficient  $c(D_{ij})$  augmente moins fortement en fonction des connectivités.

On peut se demander comment ce comportement serait influencé en présence de la concurrence

dans le réseau. Afin de répondre à cette question, on considère le réseau précédent, et on garde les paramètres du couple  $i, j$  tout en considérant que  $i$  a des concurrents dans le réseau, qui sont en relation de support avec  $j$ . Les figures 3.11 et 3.10 montrent comment le coefficient  $c(D_{ij})$  varie quand  $i$  a un/deux concurrents qui supportent  $j$ . On constate que la présence de la concurrence perturbe la relation entre  $i$  et  $j$ , la figure 3.10 montre que le couple se supporte de moins en moins quand la concurrence de  $i$  devient de plus en plus intense. Comme le concurrent de  $i$  se supporte avec  $j$ , alors  $j$  se détache de  $i$



car  $c(D_{ij})$  tend vers 0, par conséquent la relation équivalente entre  $i$  et  $j$  devient purement économique.

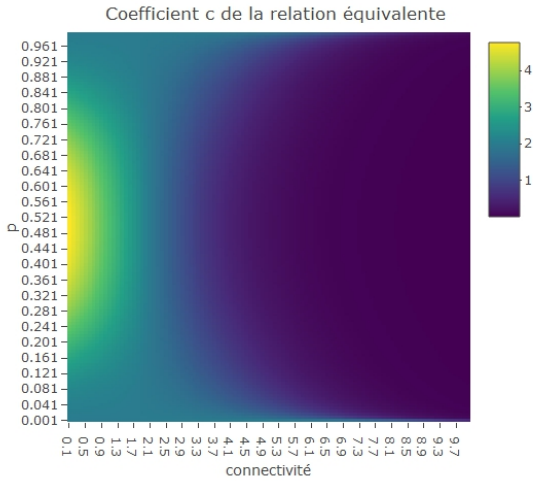


FIGURE 3.10 – Cas où  $i$  a un concurrent qui supporte  $j$  :  $c(D_{ij})$  en fonction de  $p$  et des connectivités des relations de concurrence.

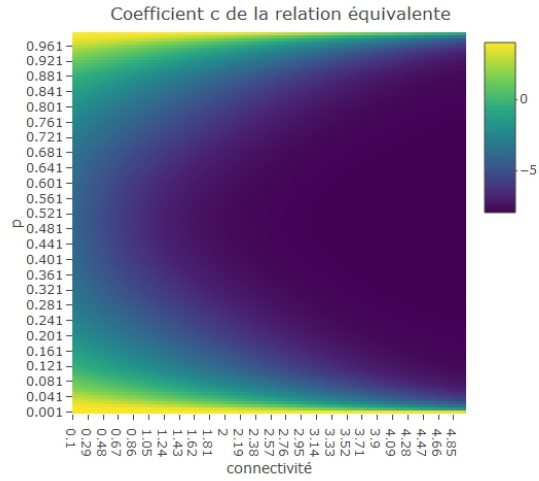


FIGURE 3.11 – Cas où  $i$  a deux concurrents qui supportent  $j$  :  $c(D_{ij})$  en fonction de  $p$  et des connectivités des relations de concurrence.

La figure 3.11 montre que si  $i$  a 2 concurrents qui sont en support avec  $j$ , alors très rapidement  $j$  bascule du côté des concurrents et se comporte comme un concurrent de  $i$ . En revanche, si les entités du réseau sont presque sûrement en défaut ou ils ont des très faibles probabilités de défaut intrinsèques alors  $i, j$  reprennent une relation de support. Le même phénomène se produit si on fait varier uniquement les probabilités de défaut  $p_c$  des entités concurrentes avec  $i$ . En effet, les figures 3.12 et 3.13 montrent qu'en cas d'une relation de concurrence, l'augmentation de la probabilité de défaut du concurrent de  $i$  fait augmenter la chance que  $i, j$  se détachent. Cela résulte de la dégradation que subie  $j$  par contagion quand le concurrent de  $i$  se dégrade ; comme ceci profite à  $i$ , donc à  $j$  par relation de support, alors ceci crée un équilibre entre ces effets opposés et rend  $j$  insensible à  $i$ .

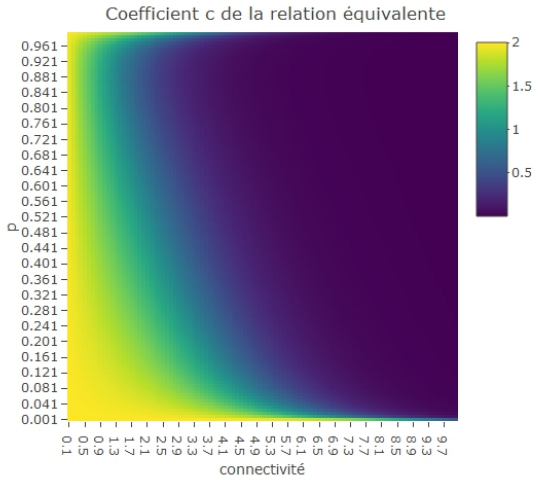


FIGURE 3.12 – Cas où  $i$  a un concurrent qui supporte  $j$  :  $c(D_{ij})$  en fonction de  $p_c$  et des connectivités des relations de concurrence.

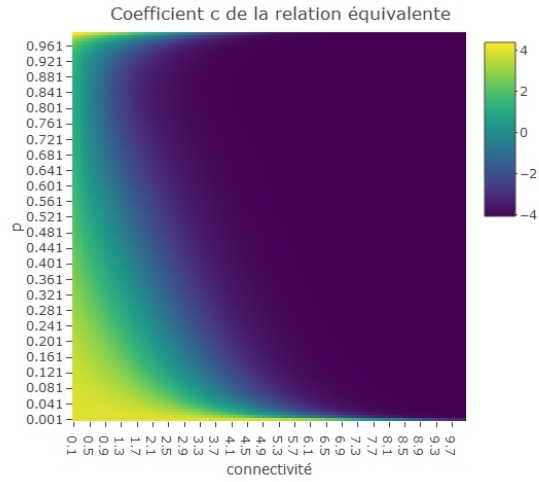


FIGURE 3.13 – Cas où  $i$  a deux concurrents qui supportent  $j$  :  $c(D_{ij})$  en fonction de  $p_c$  et des connectivités des relations de concurrence.

Dans le cas où  $i$  a deux concurrents, la figure 3.13 montre le même phénomène que dans le cas d'un concurrent, sauf que dans ce cas  $i$  et  $j$  peuvent aller au delà d'un détachement et se comporter même comme des concurrents pour .

Pour mieux comprendre l'effet de la concurrence sur une relation, on peut regarder comment un couple en relation  $SM$  est sensible à des relations de concurrence externes ou communes. Si  $i, j$  sont dans un réseau où la concurrence est présente sans qu'ils aient des concurrents, la figure 3.14 indique que plus ces concurrences sont intenses, plus leur relation se renforce. Il en est de même pour l'augmentation des probabilités de défaut des entités en concurrence. D'autre part, la figure 3.15 représente le cas où  $i$  et  $j$  ont deux concurrents communs partenaires dans le réseau. Celle-ci indique les variations par rapport aux connectivités des relations de concurrence ; et aux probabilités de défaut  $p_c$  des entités concurrentes. On observe alors que  $i$  et  $j$  se supportent encore plus que le cas précédent, ce qui est intuitif comme comportement. En effet, plus un couple est en concurrence avec un groupe d'entités, plus il devient soudé pour faire face à cette concurrence.

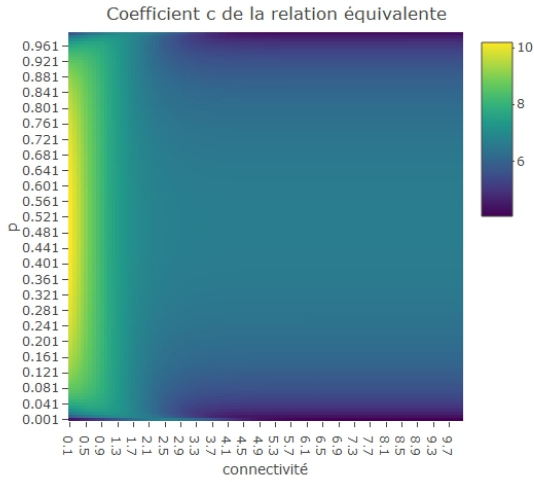


FIGURE 3.14 – Cas de présence de concurrence dans le réseau tel que  $i$  et  $j$  ne soient concernés par celle-ci :  $c(D_{ij})$  en fonction de  $p_c$  et des connectivités des relations de concurrence.

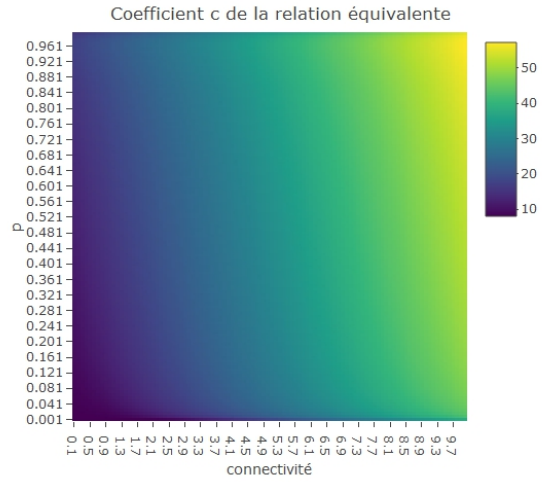


FIGURE 3.15 – Cas de présence de concurrence dans le réseau tel que  $i$  et  $j$  aient des concurrents communs :  $c(D_{ij})$  en fonction de  $p_c$  et des connectivités des relations de concurrence.

Nous avons jusqu'à présent analysé l'effet du réseau sur le comportement d'un couple d'entités via le coefficient de leur relation équivalente  $c(D_{ij})$ . Toutefois, ce coefficient ne représente que la partie symétrique d'une relation, contrairement à  $a(D_{ij})$  et  $b(D_{ij})$  qui encodent l'asymétrie de la relation. Comme on a

$$a(\delta_{ij}) = \frac{\delta_{ij}(1,1) + \delta_{ij}(-1,1) - \delta_{ij}(1,-1) - \delta_{ij}(-1,-1)}{4} \quad \text{et} \quad b(\delta_{ij}) = \frac{\delta_{ij}(1,1) + \delta_{ij}(1,-1) - \delta_{ij}(-1,1) - \delta_{ij}(-1,-1)}{4}$$

on peut écrire, comme pour  $c(d_{ij})$ , ces coefficients pour la relation équivalente comme suite :

$$a(D_{ij}) = a(\delta_{ij}) + \frac{1}{4m_{ij}} \ln\left(\frac{A'_{ij}}{C'_{ij}}\right) \quad \text{et} \quad b(D_{ij}) = b(\delta_{ij}) + \frac{1}{4m_{ij}} \ln\left(\frac{A''_{ij}}{C''_{ij}}\right) \quad (3.30)$$

où les termes dans le logarithme ne dépendent pas du couple. Ces coefficients obéissent aux mêmes règles de variation que  $c(D_{ij})$  quand  $m_{ij}$  varie, mais changent différemment quand les variations sont asymétriques. Pour mieux illustrer cela, revenons au cas où  $i$  a un concurrent en relation de support avec  $j$ . Les figures 3.16 et 3.16 montrent que  $a(D_{ij})$  diminue quand la connectivité avec le concurrent augmente, et qu'il augmente quand l'entité concurrente s'affaiblit, alors que  $b(D_{ij})$  se varie exactement dans le sens opposé.

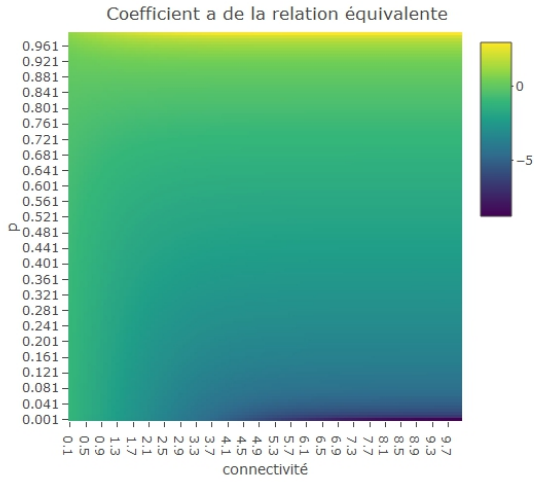


FIGURE 3.16 – Cas où  $i$  a un concurrent qui supporte  $j$  :  $a(D_{ij})$  en fonction de  $p_c$  et des connectivités des relations de concurrence.

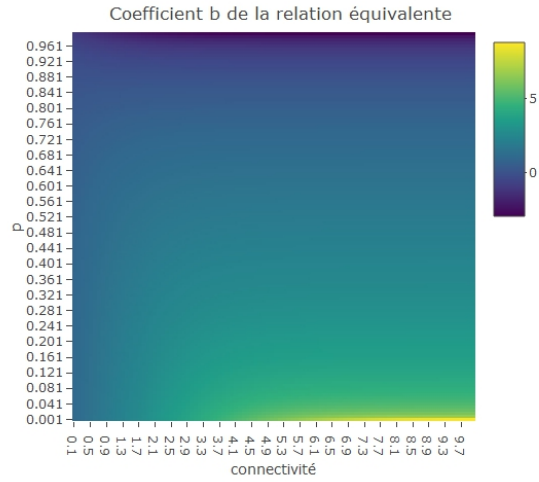


FIGURE 3.17 – Cas où  $i$  a un concurrent qui supporte  $j$  :  $b(D_{ij})$  en fonction de  $p_c$  et des connectivités des relations de concurrence.

Cela montre que le coefficient  $a(D_{ij})$  traduit comment la relation de concurrence agit unilatéralement sur  $i$ , et  $b(D_{ij})$  exprime la même chose pour  $j$ . De plus, ces coefficients contribuent positivement dans les résistances  $B_i(M, T) := B_i + \sum_{j \in N(i)} m_{ij} a(\delta_{ij})$ , donc font augmenter ou diminuer les probabilités marginales de défaut. Par conséquent, l'effet de la dégradation de l'entité concurrente va profiter à  $i$  contrairement à  $j$ , or  $i$  est en relation de support avec  $j$ , alors cela va profiter par effet de second ordre à  $j$ . Comme  $j$  est directement connecté au concurrent de  $i$ , alors l'effet de dégradation serait plus fort et donc la probabilité marginale de défaut de  $j$  va augmenter.

Les relations équivalentes permettent alors d'avoir une vision globale sur le comportement d'un couple d'entités au sein d'un réseau, et ainsi comprendre les perturbations que leur relation peut subir. Nous avons vu à travers cette notion comment des relations peuvent changer de type pour certaines valeurs de connectivités. Ceci rend la prédiction de ces types de relations équivalentes très difficile, qui est identique à celle de prédire le signe de la covariance entre deux entités. Toutefois, cette notion permet de mieux conceptualiser les effets externes à un couple sur leur relation, et permet de simplifier la démonstration certains résultats théoriques comme nous allons le voir plus loin dans cette thèse.

### 3.3 Courants aléatoires et représentation du modèle

Dans cette section nous allons introduire une notion très puissante appelée courant aléatoire. Celle-ci permet de représenter le modèle sous un formalisme différent, mais adapté pour établir un certain nombre de résultats théoriques inaccessibles via le formalisme classique. Les courants aléatoires sont apparus pour la première fois dans les travaux d'Aizenman [91] dans un but

complètement technique, à savoir la démonstration d'un certain nombre de résultats sur le modèle d'Ising ferromagnétique<sup>13</sup>. Ces résultats furent grandement utiles à la compréhension du ferromagnétisme, en particulier les phénomènes de changement de phase qui sont au centre de la recherche en mécanique statistique.

Nous allons suivre dans l'introduction de cette notion le même schéma qu'utilisent la quasi-totalité des ouvrages modernes sur le sujet<sup>14</sup>. Nous aurons besoin d'introduire dans un premier temps la notion d'entité fantôme ou ghost comme appelée dans la littérature.

### 3.3.1 L'entité fantôme

Soit  $G = (V, M, T)$  un réseau économique, l'idée de l'entité fantôme consiste à interpréter les résistances  $B_i$  des entités comme étant le résultat de l'interaction avec une entité imaginaire. Cette entité peut être interprétée dans notre contexte comme l'économie entière. En effet, nous stipulons que les probabilités intrinsèques de défaut sont conditionnelles aux facteurs macroéconomiques, donc les résistances le sont également, par la suite ils résultent de la sensibilité de chaque entité à l'économie. Pour tout  $i, j \in V$ , on note

$$J_{i\mathfrak{g}} := B_i(M, T) \text{ et } J_{ij} := m_{ij}c(\delta_{ij})$$

Le Hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H}_G(X) = \sum_{i \in V} J_{i\mathfrak{g}} X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} J_{ij} X_i X_j$$

Cette écriture permet de voir  $\mathfrak{g}$  comme une entité imaginaire connectée aux entités  $V$ , et dont l'état  $X_{\mathfrak{g}} = 1$ . En effet, on considère la mesure  $\mathbb{P}_{G_{\mathfrak{g}}}$  sur le réseau  $G_{\mathfrak{g}} := (V_{\mathfrak{g}}, \mathcal{J}, T_{\mathfrak{g}})$  où  $V_{\mathfrak{g}} := V \cup \{\mathfrak{g}\}$ ,  $T_{\mathfrak{g}} = (x_i x_j)_{i,j \in V_{\mathfrak{g}}}$  et  $\mathcal{J} := (J_{ij})_{i,j \in V_{\mathfrak{g}}}$ , dont le Hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H}_{G_{\mathfrak{g}}}(X) := \sum_{(i,j) \in E(V_{\mathfrak{g}})} J_{ij} X_i X_j$$

13. Il existe d'autres représentations du modèle d'Ising, nous citons en particulier la représentation en marches aléatoires, en lignes aléatoires, en cluster aléatoires et les représentations dites haute/basse-température. Nous renvoyons les lecteurs intéressés à l'article de H.Duminil-Copin [94], ou pour plus de détails à son livre [94].

14. Les papiers dans lesquels cette notion a été introduite sont souvent très difficiles d'accès et ne traitent pas celle-ci comme une notion mais une simple technique. Le lecteur intéressé peut se référer au livre de S.Friedli et Y.Velenik [103] qui introduit le sujet de manière conceptuelle et beaucoup plus accessible.



On a donc pour tout  $x \in \Omega^V$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{G_g}((X_i)_{i \in V} = x | X_g = 1) &= \frac{\mathbb{P}_{G_g}(X = x)}{\mathbb{P}_{G_g}(X_g = 1)} \\
 &= \frac{\exp\left(\sum_{(i,j) \in E(V_g)} J_{ij} x_i x_j\right)}{\sum_{\substack{L \in \Omega^{V_g} \\ L_g = 1}} \exp\left(\sum_{(i,j) \in E(V_g)} J_{ij} L_i L_j\right)} \\
 &= \frac{\exp\left(\sum_{i \in V} J_{ig} X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} J_{ij} x_i x_j\right)}{\sum_{L \in \Omega^V} \exp\left(\sum_{i \in V} J_{ig} L_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} J_{ij} L_i L_j\right)} \\
 &= \mathbb{P}_G((X_i)_{i \in V} = x)
 \end{aligned}$$

Comme le montre le calcul, la mesure  $\mathbb{P}_G$  résulte de  $\mathbb{P}_{G_g}$  en conditionnant par l'évènement  $X_g = 1$ , synonyme de "fonctionnement du système" auquel le réseau économique  $G$  appartient. Si en revanche  $X_g = -1$ , alors cela veut dire l'effondrement total de l'économie, donc toutes les entités du réseau seront en défaut, et on a

$$\mathbb{P}_{G_g}((X_i)_{i \in V} = x | X_g = -1) = \mathbb{1}_{(-1, \dots, -1)}(x)$$

Nous allons noter par la suite

$$\mathbb{P}_G(X = x) = \frac{\exp\left(\sum_{(i,j) \in E(V_g)} J_{ij} x_i x_j\right)}{\sum_{L \in \Omega^V} \exp\left(\sum_{(i,j) \in E(V_g)} J_{ij} L_i L_j\right)} \quad (3.31)$$

Ce qui revient à considérer l'état de  $g$  toujours égal à 1.

### 3.3.2 Représentation du modèle

**Définition 3.5.** Un courant aléatoire dans le réseau  $G = (V, M, T)$  est défini comme une collection  $n = (n_{ij})_{(i,j) \in E(V_g)}$  d'entiers naturels. On dit que  $i \in V$  est une *source* du courant  $n$  si la quantité  $X(n, i) := \sum_{j \in V_g} n_{ij}$  est impaire, et on note l'ensemble des sources  $\partial n$ .

Soit  $A \subset V$ , nous rappelons la notation suivante  $X_A := \prod_{i \in A} X_i$ . En posant  $Z_G(X_A) := \sum_{L \in \{-1, 1\}^V} L_A \exp(\mathcal{H}_G(L))$  on peut écrire

$$\mathbb{E}_G(X_A) = \frac{Z_G(X_A)}{Z_G(X_\emptyset)} \quad (3.32)$$

En développant cette écriture, on obtient une formule qui fait apparaître les courants aléatoires, celle-ci représentera la formulation désirée. En effet,

$$\begin{aligned}
 Z_G(X_A) &:= \sum_{L \in \{-1,1\}^V} L_A \exp(\mathcal{H}_G(L)) \\
 &= \sum_{L \in \{-1,1\}^V} L_A \exp\left(\sum_{(i,j) \in E(V_g)} J_{ij} L_i L_j\right) \\
 &= \sum_{L \in \{-1,1\}^V} L_A \prod_{(i,j) \in E(V_g)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(J_{ij} L_i L_j)^n}{n!} \\
 &= \sum_{L \in \{-1,1\}^V} \prod_{i \in V} L_i^{\mathbb{1}(i \in A)} \sum_{n \in \mathbb{N}^{E(V_g)}} \prod_{(i,j) \in E(V_g)} \frac{(J_{ij} L_i L_j)^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}^{E(V_g)}} \underbrace{\prod_{(i,j) \in E(V_g)} \frac{(J_{ij})^{n_{ij}}}{n_{ij}!}}_{=w_G(n)} \sum_{L \in \{-1,1\}^V} \prod_{i \in V} L_i^{\mathbb{1}(i \in A) + X(n,i)}
 \end{aligned}$$

où  $w_G(n) := \prod_{(i,j) \in E(V_g)} \frac{(J_{ij})^{n_{ij}}}{n_{ij}!}$  serait appelé poids du courant  $n$ , qu'on notera simplement  $w(n)$  en guise de simplification.

D'autre part, pour tout  $i \in V$ , on note  $L(i) \in \{-1,1\}^V$  la configuration obtenue en inversant l'état de  $i$  dans la configuration  $L$ . Les contributions de  $L$  et  $L(i)$  dans  $\sum_{L \in \{-1,1\}^V} \prod_{i \in V} L_i^{\mathbb{1}(i \in A) + X(n,i)}$  se suppriment quand  $\mathbb{1}(i \in A) + X(n,i)$  est impair, donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^{E(V_g)}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{L \in \{-1,1\}^V} \prod_{i \in V} L_i^{\mathbb{1}(i \in A) + X(n,i)} &= \prod_{i \in A} (1 + (-1)^{1+X(n,i)}) \prod_{i \in V \setminus A} (1 + (-1)^{X(n,i)}) \\
 &= 2^{|V|} \prod_{i \in A} \mathbb{1}[1 + X(n,i) \text{ even}] \prod_{i \in V \setminus A} \mathbb{1}[X(n,i) \text{ even}] \\
 &= \begin{cases} 2^{|V|} & \text{if } \partial n = A \\ 0 & \text{else} \end{cases}
 \end{aligned}$$

D'où

$$Z_G(X_A) = 2^{|V|} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^{E(V_g)} \\ \partial n = A}} w(n)$$

et en guise de simplicité, on note  $Z_G(X_A) = 2^{|V|} \sum_{\partial n = A} w(n)$ . En faisant de même pour le dénominateur de 3.32, on obtient pour tout  $A \subset V$

$$\mathbb{E}_G(X_A) = \frac{\sum_{\partial n = A} w(n)}{\sum_{\partial n = \emptyset} w(n)} \quad (3.33)$$

Comme cette formule fait intervenir une somme sur les courants aléatoires, celle-ci est appelée représentation en courants aléatoires du modèle.

On pose  $\hat{n} := \{(i, j) \in E(V_{\mathfrak{g}}); n_{ij} \geq 1\}$ , pour toute partie  $E$  de  $E(V)$ , on note  $G(E)$  le sous graphe de  $G$  dont l'ensemble des arêtes est  $E$ . Pour toute partie  $A \subset V$ , on considère les ensembles suivants

$$\mathfrak{F}_A := \{E \subset E(V_{\mathfrak{g}}); \forall C \text{ composante connexe de } G(E), |A \cap C| \text{ pair} \} \text{ si } |A| \text{ est pair}$$

et

$$\mathfrak{F}_A := \{E \subset E(V_{\mathfrak{g}}); \forall C \text{ composante connexe de } G(E), |(A \cup \mathfrak{g}) \cap C| \text{ pair} \} \text{ si } |A| \text{ est impair}$$

Si  $A$  est un singleton, alors l'évènement  $\{n \in \mathfrak{F}_{\{i\}}\}$  est équivalent à dire que  $i$  est connecté à  $\mathfrak{g}$  via un chemin dont les arêtes sont dans  $\hat{n}$ , et on note  $\{i \xrightarrow{n} \mathfrak{g}\}$ . Si  $A$  est une paire, alors  $\{n \in \mathfrak{F}_{\{i,j\}}\}$  veut dire que  $i, j$  sont dans la même composante connexe de  $G(\hat{n})$ , donc connectés par un chemin dont les arêtes sont dans  $\hat{n}$  et on note cette fois-ci  $\{i \xrightarrow{n} j\}$ . Nous avons alors le lemme suivant :

**Lemme 3.1. (Switching lemma)**

Pour toutes parties  $A, B \subset V$ , et toute fonction  $f : \mathbb{N}^{E(V_{\mathfrak{g}})} \mapsto \mathbb{C}$ , on a l'équation suivante :

$$\sum_{\substack{\partial n_1 = A \\ \partial n_2 = B}} f(n_1 + n_2) w(n_1) w(n_2) = \sum_{\substack{\partial n_1 = \emptyset \\ \partial n_2 = A \Delta B}} f(n_1 + n_2) w(n_1) w(n_2) \mathbb{1}(\widehat{n_1 + n_2} \in \mathfrak{F}_A)$$

où  $A \Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B)$  est la différence symétrique de  $A$  et  $B$ .

Ce lemme joue un rôle central en théorie des courants aléatoires, et permet comme son nom l'indique de faire un changement de variable qui simplifie énormément les calculs comme nous allons voir par la suite. Il est introduit dans le papier de Griffith [92], et popularisé par Aizenman dans [91].

Soit  $A \subset V$ , on définit la mesure  $\mathbb{P}_G^A$  sur l'ensemble des courants aléatoires  $n$  tels que  $\partial n = A$  comme suit :

$$\mathbb{P}_G^A(m) := \frac{w(m)}{\sum_{\partial n = A} w(n)}$$

Comme  $w(n)$  n'est pas toujours positif, alors cette mesure n'est bien définie que sur les réseaux pour lesquels  $J_{ij}$  est non négatif pour tout  $(i, j) \in E(V_{\mathfrak{g}})$ . Cela veut dire que  $c(\delta_{ij})$  et  $B_i(M, T)$  doivent être positifs, donc cette mesure se définit sans peine sur les réseaux cohérents auxquels nous allons nous restreindre. On suppose que  $G = (V, M, T)$  est un réseau économique cohérent, donc  $\mathbb{P}_G^A$  est une mesure de probabilité, et on a les formules suivantes

**Proposition 3.4.** Soient  $A, B \subset V$ , On a

1.  $\mathbb{E}_G(X_A)^2 = \mathbb{P}_G^{\emptyset} \otimes \mathbb{P}_G^{\emptyset}(\widehat{n_1 + n_2} \in \mathfrak{F}_A)$ .
2.  $\frac{\mathbb{E}_G(X_A) \mathbb{E}_G(X_B)}{\mathbb{E}_G(X_A X_B)} = \mathbb{P}_G^{\emptyset} \otimes \mathbb{P}_G^{A \Delta B}(\widehat{n_1 + n_2} \in \mathfrak{F}_A)$

*Démonstration.* Voir 3.9.2.1. □

Ces formules montrent clairement comment la représentation en courants aléatoires traduit les événements sur les noeuds du réseau à des événements sur les arêtes. De plus, elle fournit une formule simple de la covariance qui permet de montrer très facilement les inégalités GKS. En effet, on a

$$Cov_G(X_A, X_B) = \mathbb{E}_G(X_A X_B) \mathbb{P}_G^{\emptyset} \otimes \mathbb{P}_G^{A\Delta B}(\widehat{n_1 + n_2} \notin \mathfrak{F}_A) \quad (3.34)$$

et comme  $\mathbb{E}_G(X_A)$  est positif d'après la représentation 3.33 pour tout  $A \subset V$ , alors

$$Cov_G(X_A, X_B) \geq 0$$

Donc les inégalités GKS découlent directement de ces formules. Ces équations peuvent être écrites via d'autres mesures de probabilités. Soit  $n$  un courant aléatoire, pour tout  $e \in E(V_G)$ , on associe à  $n_e$  une distribution de Poisson  $\mathbb{Q}_e$  de paramètre  $J_e$ , ce qui induit une distribution de  $n$  dans l'espace des courants aléatoires sans contraintes sur les sources  $\mathbb{Q}_G := \otimes_{e \in E(V)} \mathbb{Q}_e$  définie par

$$\mathbb{Q}_G(n) = w_G(n) \exp\left(-\sum_{e \in E(V_G)} J_e\right) \quad (3.35)$$

Donc pour tout  $A \subset V$

$$\mathbb{E}_G(X_A) = \frac{\mathbb{Q}_G(\partial n = A)}{\mathbb{Q}_G(\partial n = \emptyset)} \quad (3.36)$$

On note  $\mathbb{Q}_G^{(2)} := \mathbb{Q}_G \otimes \mathbb{Q}_G$ , alors le lemme 3.1 peut être réécrit comme

$$\mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = A, \partial n_2 = B) = \mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = A\Delta B, \partial n_2 = \emptyset, n_1 + n_2 \in \mathfrak{F}_A) \quad (3.37)$$

il en advient que les équation de la proposition 3.4 s'écrivent

$$\mathbb{E}_G(X_A)^2 = \frac{\mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = A, \partial n_2 = \emptyset, n_1 + n_2 \in \mathfrak{F}_A)}{\mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = \emptyset, \partial n_2 = \emptyset)} \quad (3.38)$$

$$\frac{\mathbb{E}_G(X_A)\mathbb{E}_G(X_B)}{\mathbb{E}_G(X_A X_B)} = \frac{\mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = A\Delta B, \partial n_2 = \emptyset, n_1 + n_2 \in \mathfrak{F}_A)}{\mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = \emptyset, \partial n_2 = \emptyset)} \quad (3.39)$$

Cette écriture peut se révéler très utile dans certains contextes pour manipuler les courants aléatoires, elle sera notamment utilisée dans les démonstrations de 3.5 et 3.2.

### 3.3.3 Exemples de courants aléatoires sur des réseaux simples

**Cas de trois entités :** On considère le réseau économique  $G = (\{i, j, k\}, M, T)$ . L'objectif est d'expliciter  $Cov_G(X_i, X_j)$  en tirant profit du formalisme des courants aléatoires. La formule 2 de

la proposition 3.4 nous donne

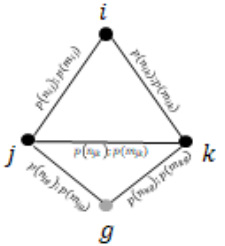
$$\begin{aligned}
 \text{Cov}_G(X_i, X_j) &= \mathbb{E}_G(X_i X_j) \mathbb{P}_G^\emptyset \otimes \mathbb{P}_G^{(i,j)}(\widehat{n_1 + n_2} \notin \mathfrak{F}_i) \\
 &= \frac{\sum_{\substack{\partial n_1 = \{i,j\} \\ \partial n_2 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)}{\sum_{\substack{\partial n_1 = \emptyset \\ \partial n_2 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)} \frac{\sum_{\partial n_1 = \{i,j\}} w(n_1)w(n_2) \mathbb{1}[\widehat{n_1 + n_2} \notin \mathfrak{F}_i]}{\sum_{\substack{\partial n_1 = \{i,j\} \\ \partial n_2 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)} \\
 &= \frac{\sum_{\substack{\partial n_1 = \{i,j\} \\ \partial n_2 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2) \mathbb{1}[\widehat{n_1 + n_2} \notin \mathfrak{F}_i]}{\sum_{\substack{\partial n_1 = \emptyset \\ \partial n_2 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Comme  $\sum_{\substack{\partial n_1 = \emptyset \\ \partial n_2 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2) = (\sum_{\partial n_1 = \emptyset} w(n_1))^2$  alors

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}_G(X_i, X_j) &\propto \sum_{\substack{\partial n = \{i,j\} \\ \partial m = \emptyset}} w(n)w(m) \mathbb{1}[\widehat{n + m} \notin \mathfrak{F}_i] \\
 &= \sum_{\substack{\partial n = \{i,j\} \\ \partial m = \emptyset}} \frac{J_{ij}^{n_{ij}+m_{ij}} J_{ik}^{n_{ik}+m_{ik}} J_{jk}^{n_{jk}+m_{jk}} J_{ig}^{n_{ig}+m_{ig}} J_{jg}^{n_{jg}+m_{jg}} J_{kg}^{n_{kg}+m_{kg}}}{n_{ij}!n_{kj}!n_{ik}!n_{ig}!n_{jg}!n_{kg}!m_{ij}!m_{kj}!m_{ik}!m_{ig}!m_{jg}!m_{kg}!}} \mathbb{1}[i \xrightarrow{n+m} g]
 \end{aligned}$$

Il faut maintenant trouver tous les couples  $(n, m)$  de courants qui vérifient les conditions dans l'équation ci-dessus. On note  $p(n_{ij})$  la parité de  $n_{ij}$  qu'on notera sous forme de classe  $\{\bar{1}, \bar{0}\}$ . Pour simplifier les calculs, on utilisera les diagrammes suivants

$$\sum_{\substack{\partial n = \{i,j\} \\ \partial m = \emptyset \\ n_e = p(n_e)(\text{mod } 2) \\ m_e = p(m_e)(\text{mod } 2)}} \frac{J_{ij}^{n_{ij}+m_{ij}} J_{ik}^{n_{ik}+m_{ik}} J_{jk}^{n_{jk}+m_{jk}} J_{ig}^{n_{ig}+m_{ig}} J_{jg}^{n_{jg}+m_{jg}} J_{kg}^{n_{kg}+m_{kg}}}{n_{ij}!n_{kj}!n_{ik}!n_{ig}!n_{jg}!n_{kg}!m_{ij}!m_{kj}!m_{ik}!m_{ig}!m_{jg}!m_{kg}!}} \mathbb{1}[i \xrightarrow{n+m} g] =$$



$$\tag{3.41}$$

Si une arrête n'a comme poids que 0, alors elle ne sera pas dessinée dans le diagramme.

On a alors les sommes partielles possibles qui s'écrivent

$$Cov_G(X_i, X_j) \propto$$

On remarque que seules les configurations dans lesquelles  $i$  et  $j$  ne sont pas connectés directement ou indirectement à l'entité fantôme sont retenues. De plus, chaque diagramme représente la somme partielle qui correspond a une classe de ces configurations. Ces sommes partielles ont l'avantage d'avoir des expressions fermées comme le montre cet exemple :

$$= \sum_{\substack{u_{ij}, u_{ik}, u_{jk} \geq 0 \\ v_{ij}, v_{ik}, v_{jk} \geq 0}} \frac{J_{ij}^{2u_{ij}+2v_{ij}} J_{ik}^{2u_{ik}+1+2v_{ik}} J_{jk}^{2u_{jk}+1+2v_{jk}}}{(2u_{ij})!(2v_{ij})!(2u_{ik}+1)!(2v_{ik})!(2u_{jk}+1)!(2v_{jk})!}$$

$$= \cosh(J_{ij})^2 \sinh(J_{ik}) \cosh(J_{ik}) \sinh(J_{jk}) \cosh(J_{jk})$$

En exprimant de la même manière toutes les autres sommes, on obtient

$$Cov_G(X_i, X_j) \propto \sinh(J_{ij})^2 \sinh(J_{ik}) \cosh(J_{ik}) \sinh(J_{jk}) \cosh(J_{jk}) + \cosh(J_{ij}) \sinh(J_{ij}) \cosh(J_{ik})^2 \cosh(J_{jk})^2$$

$$+ \sinh(J_{ij}) \cosh(J_{ij}) \sinh(J_{ik})^2 \sinh(J_{jk})^2 + \sinh(J_{ij})^2 \sinh(J_{ik}) \cosh(J_{ik}) \sinh(J_{jk}) \cosh(J_{jk})$$

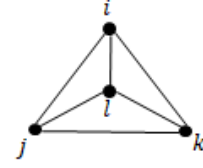
$$+ \sinh(J_{ij}) \cosh(J_{ij}) \cosh(J_{kg})^2$$

Pour simplifier cette expression, on considère  $f$  une fonction à valeur réelles, et on notera  $[f]$  sa fonction signe ( $f = [f]h$  avec  $h$  une fonction positive). Si on a ( $J_{ig}, J_{jg}, J_{kg} \geq 0$ ), alors

$$Cov_G(X_i, X_j) \propto [J_{ij}] + [J_{ik}][J_{kj}] \tag{3.42}$$

Donc le signe de la covariance dépendra des types de relations ainsi que leurs connectivités. D'autre part, ce polynôme formel en  $[J_e]$  est irréductible, donc ne permet pas d'étudier le signe de la covariance via les signes de monômes comme il est le cas en existence d'indépendance conditionnelle dans le réseau.

**Cas de 4 entités :** On considère cette fois-ci le réseau économique  $G = ((i, j, k, l), M, T)$ . En utilisant la technique du diagramme introduite dans le cas précédent, on peut décomposer  $\sum_{\substack{\partial n = \{i, j\} \\ \partial m = \emptyset}} w(n)w(m) \mathbb{1}[\widehat{n+m} \notin \mathfrak{F}_{\{i\}}]$  en somme



de diagrammes dont les sommes partielles correspondantes s'expriment de manière élémentaire. Toutefois, nous avons dans ce cas 64 configurations possibles dans lesquelles l'entité  $g$  est isolée, et 12 autres configurations avec connexion à  $g$ , que nous n'allons pas exprimer. En revanche, si  $J_{ug} \geq 0$  pour  $u = i, j, k, l$  on peut exprimer le signe de la corrélation comme suite

$$\begin{aligned} Cov_G(X_i, X_j) \propto & [J_{ij}] + [J_{ik}][J_{kj}] + [J_{il}][J_{lj}] + [J_{il}][J_{lk}][J_{kj}] + [J_{il}][J_{lk}][J_{lj}] \\ & + [J_{ik}][J_{kl}][J_{li}][J_{ij}] + [J_{jk}][J_{kl}][J_{lj}][J_{ji}] + [J_{ik}][J_{kl}][J_{li}][J_{ik}][J_{kj}] \end{aligned} \quad (3.43)$$

On voit que dans ce cas nous avons beaucoup plus de complexité que le cas précédent. Des chemins possibles entre  $i$  et  $j$  qui passent 2 fois par  $i$  ou  $j$  figurent, ce qui rend la prévision du signe de la covariance beaucoup plus difficile. Il est possible en détaillant les calculs de trouver des simplifications entre les fonctions qui décrivent ces chemins, ce qui donnera une meilleure formule. Mais il est déjà clair à travers cette formule que la covariance est positive en cas d'absence de concurrence dans le réseau.

### 3.4 Analyse des fonctions de corrélation sur les réseaux économiques cohérents

En physique statistique, la recherche tourne autour du modèle d'Ising ferromagnétique. Celui-ci correspond au cas dans lequel les interactions ont des coefficients de couplage positifs, ce qui rend les réseaux cohérents similaires à ce cas. De cette similarité résulte la possibilité d'établir des propriétés connues comme la décente exponentielle de la covariance. Ce résultat est dû séparément à Aizenman, Barsky, McBryan, Jay, McCoy et T. Wu. [98–100], mais également à Lee-Yang [102]<sup>15</sup>, et il est généralisé en 2008 par Duminil-Copin, Goswami et Raoufi sur les réseaux  $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 2$  [101]. Il faut noter que le modèle est différent de celui d'Ising et produit des propriétés plus complexes, nous allons voir qu'il est possible d'avoir certains résultats dans les réseaux cohérents qui ne sont pas vrais dans un modèle d'Ising ferromagnétique.

**Théorème 3.5.** Soit  $G = (V, M, T)$  un réseau économique cohérent. Pour tout  $i, j \in V$ , il existe  $c > 0$  tel que

$$Cov_G(X_i, X_j) \leq \exp(-c\gamma_{ij})$$

où  $\gamma_{ij}$  est la longueur du chemin entre  $i$  et  $j$ .

15. Il utilise un modèle d'Ising à variable complexe qui vérifie certaines conditions d'holomorphicité qui permettent d'établir rapidement non seulement la décente exponentielle, mais également plusieurs résultats très utiles dans cette théorie.

*Démonstration.* Voir 3.9.2.5. □

Ce théorème affirme que la sensibilité d'une entité à une autre diminue de manière exponentielle en fonction du nombre d'entités intermédiaires qui les relie. La constante  $c$  dépend des  $B_i$  et des connectivités du réseau (voir démonstration en annexes).

Soit  $i, j, k, s \in V$  tels que  $i \neq j$ . Notre objectif maintenant est de prédire le signe des quantités  $\partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(X_k = X_s = -1)$ ,  $\partial_{p_i} \text{Cov}_G(X_k, X_s)$  et  $\partial_{m_{ij}} \text{Cov}_G(X_k, X_s)$  comme annoncé dans la section sur les sensibilités aux paramètres. Nous aurons besoin dans un premier temps du lemme de Griffiths [92] souvent appelé inégalité GHS pour Griffith, Hurst et Sherman :

**Lemme 3.2.** Soit  $G = (V, M, T)$  un réseau économique cohérent, pour tout  $i, j, k \in V$  on a

$$\text{Cov}_G(X_i, X_j X_k) \leq \mathbb{E}_G(X_k) \text{Cov}_G(X_i, X_j) + \mathbb{E}_G(X_j) \text{Cov}_G(X_i, X_k)$$

*Démonstration.* Voir 3.9.2.3. □

Cette inégalité représente également un résultat connu sur les fonctions dites d'Ursell<sup>16</sup>. On peut rétablir certaines inégalités à partir de ce lemme. En effet, on a

$$\partial_{p_i} \mathbb{P}_G(X_k = X_s = -1) = -\frac{1}{8p_i(1-p_i)} (\text{Cov}_G(X_i, X_k X_s) - \text{Cov}_G(X_i, X_k) - \text{Cov}_G(X_i, X_s))$$

Comme  $\mathbb{E}_G(X_i) \leq 1$  pour tout  $i \in V$ , alors le 3.2 implique

$$\text{Cov}_G(X_i, X_s X_k) \leq \text{Cov}_G(X_i, X_s) + \text{Cov}_G(X_i, X_k)$$

D'où

$$\partial_{p_i} \mathbb{P}_G(X_k = X_s = -1) \geq 0$$

Ce qui veut dire que la dégradation d'une entité du réseau fait augmenter toutes les probabilités de défaut des couples du réseau. D'autre part, on a

$$\partial_{p_i} \text{Cov}_G(X_k, X_s) = -\frac{1}{2p_i(1-p_i)} (\text{Cov}_G(X_i, X_k X_s) - \mathbb{E}_G(X_k) \text{Cov}_G(X_i, X_s) - \mathbb{E}_G(X_s) \text{Cov}_G(X_i, X_k)) \quad (3.44)$$

Donc d'après le lemme 3.2 on a

$$\partial_{p_i} \text{Cov}_G(X_k, X_s) \geq 0$$

ce qui veut dire que la covariance entre les entités augmente quand l'une d'elles se dégrade, ce qui est en accord avec les résultats numériques sur les relations équivalentes. En d'autres termes, cette inégalité montre que la dégradation d'une entité dans le réseau pousse les entités  $k$  et  $s$  à se supporter d'avantage.

Ce lemme n'est malheureusement pas suffisant pour étudier les fonctions évoquées ci-dessus. En

---

16. Les fonction d'Ursell sont définies par  $u_k(X_1, \dots, X_k) = \frac{\partial^k}{\partial B_1 \dots \partial B_k} \ln(Z_G)$ , et le lemme 3.2 correspond à  $u_3 \leq 0$ . voir [103]



effet, ces quantités font apparaître des moments de degré 4, alors que le lemme précédent s'arrête à ceux de degré 3. Cependant il existe des inégalités dans la littérature qui font apparaître ces moments, notamment l'inégalité de J.L. Lebowitz [103] qui prédit que la fonction d'Ursell  $u_4$  est positive. Mais ces inégalités ne permettent pas non plus de prédire le signe des quantités étudiées. Nous démontrons des inégalités plus fortes qui permettent de résoudre le problème. Ces inégalités constituent une des contributions de cette thèse dans l'étude des inégalités de corrélation des modèles graphiques, et pourraient être appliquées également en mécanique statistique.

**Lemme 3.3.** *Soit  $G = (V, M, T)$  un réseau économique cohérent, pour tout  $i, j, k, s \in V$  tels que  $i \neq j$ , on a*

1. *Si  $(k, s) \neq (i, j)$  et  $(j, i)$ , alors*

$$Cov_G(X_i X_j, X_k X_s) \leq \mathbb{E}_G(X_k) Cov_G(X_i X_j, X_s) + \mathbb{E}_G(X_s) Cov_G(X_i X_j, X_k)$$

2. *Si  $(k, s) = (i, j)$  ou  $(j, i)$ , alors*

$$Cov_G(X_i X_j, X_k X_s) \geq \mathbb{E}_G(X_k) Cov_G(X_i X_j, X_s) + \mathbb{E}_G(X_s) Cov_G(X_i X_j, X_k)$$

3. *On a de plus,*

$$Cov_G(X_i X_j, X_i X_j) \leq Cov_G(X_i X_j, X_i) + Cov_G(X_i X_j, X_j)$$

*Démonstration.* Voir 3.9.2.4. □

La première et la troisième inégalité de ce lemme nous donne pour tout  $i, j, k, s \in V$  tels que  $i \neq j$  :

$$Cov_G(X_i X_j, X_k X_s) \leq Cov_G(X_i X_j, X_k) + Cov_G(X_i X_j, X_s) \quad (3.45)$$

ce qui est équivalent à  $Cov_G(X_i X_j, D_{k,s}) \leq 0$ . Comme  $Cov_G(X_i, D_{k,s}), Cov_G(X_j, D_{k,s}) \leq 0$  d'après l'inégalité FKG, alors

$$\partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(X_k = X_s = -1) \leq 0$$

ce qui donne le premier résultat désiré. On en déduit que les probabilités de double défaut diminuent, tout comme les probabilités marginales, quand la connectivité dans le réseau augmente. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \partial_{m_{ij}} Cov_G(X_k, X_s) &= a(\delta_{ij})(Cov_G(X_i, X_k X_s) - \mathbb{E}_G(X_k) Cov_G(X_i, X_s) - \mathbb{E}_G(X_s) Cov_G(X_i, X_k)) \\ &\quad + b(\delta_{ij})(Cov_G(X_j, X_k X_s) - \mathbb{E}_G(X_k) Cov_G(X_j, X_s) - \mathbb{E}_G(X_s) Cov_G(X_j, X_k)) \\ &\quad + c(\delta_{ij})(Cov_G(X_i X_j, X_k X_s) - \mathbb{E}_G(X_k) Cov_G(X_i X_j, X_s) - \mathbb{E}_G(X_s) Cov_G(X_i X_j, X_k)) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Donc si  $(k, s) \neq (i, j)$ , les deux premiers termes de cette dérivée sont négatifs d'après 3.2, et le lemme 3.3 montre que le troisième terme l'est aussi. D'où

$$\forall (k, s) \neq (i, j), \partial_{m_{ij}} Cov_G(X_k, X_s) \leq 0$$

Ce résultat indique que l'augmentation de la connectivité entre deux entités  $i, j$  du réseau fait diminuer la covariance entre les autres. Ceci est le résultat de l'affaiblissement de la relation équivalente entre celles-ci, dont l'origine est l'affaiblissement du terme  $m_{ks}\delta_{ks}$  devant  $m_{ij}\delta_{ij}$  dans le Hamiltonien. On peut également déduire de cette inégalité que la covariance décroît en nombre d'entités dans le réseau. En effet, on considère deux entités  $v$  du réseau  $G$ , et  $G_v$  le réseau obtenu en supprimant tout les lien de  $v$ . Comme la covariance  $Cov_G(X_k, X_s)$  décroît en fonction des  $m_{lv}$  pour tout  $k, s \neq v$  et  $l \in V$ , alors

$$Cov_G(X_k, X_s) \leq Cov_{G_v}(X_k, X_s)$$

d'où la décroissance de la covariance par rapport au nombre d'entités dans le réseau.

Contrairement au cas précédent, la quantité  $\partial_{m_{ij}} Cov_G(X_i, X_j)$  change de signe quand  $a(\delta_{ij})$  et  $b(\delta_{ij})$  sont strictement positifs. En revanche, si  $a(\delta_{ij}) = b(\delta_{ij}) = 0$  alors

$$\partial_{m_{ij}} Cov_G(X_i, X_j) = -c(\delta_{ij})(Cov_G(X_i, X_j) + \sigma_{X_i} \sigma_{X_j})(Cov_G(X_i, X_j) - \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}) \quad (3.47)$$

Comme  $Cov_G(X_i, X_j) \leq \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}$  d'après l'inégalité de Cauchy-Shwarz, et  $Cov_G(X_i, X_j) + \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \geq 0$ , alors

$$\partial_{m_{ij}} Cov_G(X_i, X_j) \geq 0$$

Donc si la relation ne change pas les résistances  $B_i(M, T)$ , alors la covariance augmente si la relation sans parties unilatérales  $\delta_{ij}$  est de support et diminue si elle est de concurrence.

Nous allons maintenant nous intéresser à la corrélation et ses variations. A notre meilleur connaissance, cette quantité n'est pas étudiée dans la littérature de mécanique statistique, ni dans les quelques articles de finance qui appliquent ce type de modèles. En effet, les physiciens ne s'intéressent pas à la corrélation linéaire pour des états binaires ou discrets de manière générale, alors que celle-ci est très importante dans l'étude du risque de défaut. Il est par ailleurs plus difficile d'étudier la corrélation que la covariance, car elle s'écrit comme rapport un  $\langle X_i, X_j \rangle_G = \frac{Cov_G(X_i, X_j)}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}}$ , dont les termes ont généralement les mêmes variations. En effet, on a

$$\partial_{p_i} \sigma_{X_j}^2 = \frac{1}{2p_i(1-p_i)} \mathbb{E}_G(X_j) Cov_G(X_i, X_j) \geq 0$$

comme la covariance s'accroît avec  $p_i$  alors on ne peut pas prédire facilement les variations du rapport. De la même manière, la covariance et  $\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}$  varient dans le même sens, d'où l'obligation de calculer la dérivée de la corrélation.

Pour résoudre ce problème, nous introduisons à nouveau une inégalité de corrélation assez générale qui fait apparaître les variances, et donc plus adaptée à l'étude de la corrélation.

**Lemme 3.4.** Soit  $G = (V, M, T)$  un réseau économique cohérent, on a

$$\sigma_{X_i}^2 \sigma_{X_j}^2 Cov_G(X_A, X_i X_j) \leq \sigma_{X_j}^2 Cov_G(X_i X_j, X_i) Cov_G(X_A, X_i) + \sigma_{X_i}^2 Cov_G(X_i X_j, X_j) Cov_G(X_A, X_j)$$

pour tout  $A \subset V$  et  $i, j \notin A$ .

*Démonstration.* Voir 3.9.2.6. □

Soient  $i, j, k \in V$ , en dérivant le log-corrélation par rapport à  $p_k$  on obtient

$$\begin{aligned} \partial_{p_k} \ln(\langle X_i, X_j \rangle_G) = & - \frac{\sigma_{X_i}^2 \sigma_{X_j}^2 \text{Cov}_G(X_k, X_i X_j) + \sigma_{X_j}^2 (\sigma_{X_i}^2 \mathbb{E}_G(X_j) - \text{Cov}_G(X_i, X_j) \mathbb{E}_G(X_i)) \text{Cov}_G(X_k, X_i)}{2p_k(1-p_k) \text{Cov}_G(X_i, X_j) \sigma_{X_i}^2 \sigma_{X_j}^2} \\ & - \frac{\sigma_{X_i}^2 (\sigma_{X_j}^2 \mathbb{E}_G(X_i) - \text{Cov}_G(X_i, X_j) \mathbb{E}_G(X_j)) \text{Cov}_G(X_k, X_j)}{2p_k(1-p_k) \text{Cov}_G(X_i, X_j) \sigma_{X_i}^2 \sigma_{X_j}^2} \end{aligned}$$

Comme

$$\sigma_{X_j}^2 \mathbb{E}_G(X_i) - \text{Cov}_G(X_i, X_j) \mathbb{E}_G(X_j) = -\text{Cov}_G(X_i X_j, X_i)$$

alors

$$\begin{aligned} \partial_{p_k} \langle X_i, X_j \rangle_G \propto & -\sigma_{X_i}^2 \sigma_{X_j}^2 \text{Cov}_G(X_k, X_i X_j) + \sigma_{X_j}^2 \text{Cov}_G(X_i X_j, X_i) \text{Cov}_G(X_k, X_i) \\ & + \sigma_{X_i}^2 \text{Cov}_G(X_i X_j, X_j) \text{Cov}_G(X_k, X_j) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Donc d'après le lemme précédent pour  $A = \{k\}$ , on a

$$\partial_{p_k} \langle X_i, X_j \rangle_G \geq 0$$

Donc au même titre que la covariance, la corrélation augmente quand les probabilités  $p_i$  augmentent. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \partial_{m_{ij}} \langle X_k, X_s \rangle_G \propto & \sigma_{X_k}^2 \sigma_{X_s}^2 \text{Cov}_G(\delta_{ij}(X_i, X_j), X_k X_s) - \sigma_{X_s}^2 \text{Cov}_G(X_k X_s, X_k) \text{Cov}_G(\delta_{ij}(X_i, X_j), X_k) \\ & - \sigma_{X_k}^2 \text{Cov}_G(X_k X_s, X_s) \text{Cov}_G(\delta_{ij}(X_i, X_j), X_s) \end{aligned} \quad (3.49)$$

En développant les termes de  $\delta_{ij}$ , les coefficients de  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  sont négatifs via le lemme 3.4 pour  $A = \{i\}$  et  $A = \{j\}$  respectivement, et le coefficient de  $c_{ij}$  est également négatif via le même lemme pour  $A = \{i, j\}$ . D'où

$$\forall (k, s) \neq (i, j), \partial_{m_{ij}} \langle X_k, X_s \rangle_G \leq 0$$

Pour le cas  $(k, s) = (i, j)$ , la corrélation n'est pas monotone comme nous allons pu le vérifier numériquement sur certains cas de réseaux cohérents ; ce qui rend son étude assez complexe.

Pour finir, nous énonçons un théorème sur les cas d'égalité  $\text{Cov}_G(X_i, X_j) = 0$ . En fait, la proposition 3.1 montre que cette covariance peut être nulle si la relation qui relie  $i$  et  $j$  est purement économique ou les chemins qui les relient passent par des relations purement économiques. Donc le théorème qui suit donne en particulier une réciproque dans le cas des réseaux économiques cohérents. Nous savons que dans ces réseaux, l'inégalité FKG est vérifiée 3.4, donc  $X$  est positivement associé. Dans ce cadre, Lebowitz [153] a démontré que si  $A, B \subset V$  sont disjoints, alors

$$(X_i)_{i \in A} \perp (X_i)_{i \in B} \Leftrightarrow \text{Cov}(X_u, X_v) = 0 \text{ pour tout } u \in A, v \in B.$$

Nous remplaçons dans notre théorème les covariances nulles pour  $u \in A, v \in B$  par l'équation  $Cov_G(X_A, X_B) = 0$  où  $X_A := \prod_{i \in A} X_i$ , et l'assertion de droite par une condition plus large. Contrairement aux techniques qui se basent sur les fonctions d'Usell utilisées par Lebowitz, nous utilisons le courants aléatoires pour prouver le résultat suivant :

**Théorème 3.6.** *Soient  $G = (V, M, T)$  un réseau économique cohérent, et  $A, B \subset V$ . Si  $Cov_G(X_A, X_B) = 0$  alors soit  $A$  et  $B$  sont séparés par des chemins qui passent par des relations purement économiques, soit il n'existe aucun chemin qui les relie.*

*Démonstration.* Voir 3.9.2.2. □

Une première implication de ce théorème concerne l'équilibre dans les réseaux cohérents. En effet, il en résulte qu'un réseau cohérent est équilibré si et seulement si toutes ses relations sont purement économiques. D'autre part, ce théorème montre de manière générale que les événements sur une partie du réseau n'ont aucun impact sur les sous-réseaux desquels elle est séparée par des relations purement économiques. Ces relations agissent comme des canaux qui coupent toute transmission du risque, et gardent les parties séparées sensibles à leurs propres connectivités d'une part, et d'autre part aux connectivités de ces relations purement économiques. Ces relations constituent donc des "ponts économiques" entre les parties du réseau qu'elles séparent, et leurs connectivités agissent sur l'état de chacune de ces parties.

### 3.5 Applications en risque de crédit : déformation de la distribution des pertes

Nous avons jusqu'à présent analysé les réseaux économiques cohérents, dans lesquels la concurrence est inexistante. Malgré la simplicité apparente de ces réseaux, les résultats mathématiques établis ont nécessité l'utilisation de certains outils largement non élémentaires. L'état de l'art en mathématique ou en physique statistique aujourd'hui ne permet pas malheureusement d'étudier des réseaux économiques généraux. Toutefois, considérer des réseaux cohérents n'est pas sans intérêts pratiques, car ceux-ci représentent une grande classe de réseaux économiques que nous retrouvons souvent au coeur de plusieurs problématiques. En effet, ces réseaux peuvent être utilisés dans les problématiques de notation des groupes d'affaires, ou la notation des entités d'un groups d'affaire en tenant en compte leurs interdépendances. En fait, les banques se basent sur les relations de support positif de leurs clients afin de bien jauger leur capacité à honorer leurs engagements. Les notes attribuées prennent donc en compte la santé des entités garantes ou des maisons mères, qui diffèrent des notes intrinsèques appelées "*standalone grades*". Certaines politiques de notation ne prennent pas seulement les relations de support en considération, mais aussi les relations de concurrence qui reflètent la position de l'emprunteur dans le marché. L'utilisation de notre modèle pourrait servir dans ce contexte pour l'appréciation du risque de crédit en considérant l'interdépendance. Une des problématiques centrales en risque de crédit

est la déformation de la distribution des pertes et son impact sur le capital économique, dont l'importance dans les exercices de stress-tests est de plus en plus grandissante pour les banques et le régulateur. Dans cette section, nous allons discuter les variations des pertes agrégées ainsi que les problématiques de notation sous l'effet de l'interdépendance.

On considère un portefeuille de crédit constitué de 10 entités. En guise de simplification, on considère que les facilités des entités sont homogènes en maturité, en probabilités de défaut (probabilité de 1%), en perte en cas de défaut (*LGD*) ainsi qu'en montant d'exposition au défaut (*EAD*) (que nous prenons tous égaux à 1). On considère ce portefeuille comme un réseau économique  $G = (V, M, T)$ , et nous analysons, sous différentes configurations les paramètres du risque usuels comme la VaR, la perte moyenne *EL* (Expected Loss), la perte moyenne non-attendues *UL* (unexpected Loss)<sup>17</sup> ainsi que la perte extrême moyenne *ES* (Expected shortfall)<sup>18</sup>. On suppose que les probabilités de défaut intrinsèques sont liées au cycle économique par une variable latente  $Z$ <sup>19</sup>. On utilisera trois valeurs de ce facteur qui représentent trois scénarios, favorable pour  $Z = 2$ , central pour  $Z = 1$  et sévère pour  $Z = -3$ . Ces valeurs ne sont pas arbitrairement choisies, car le facteur est calibré, comme expliqué dans le chapitre 1, sur chaque période sur des données de la banque. Cela permet de connaître la magnitude de chaque valeur (par exemple  $Z = -3$  est équivalent à la crise de 2008) en l'associant à la période dans laquelle elle se réalise.

**Cas d'un portefeuille positivement connecté :** On considère que toutes les entités sont connectées via des relations de type *SM* telles que  $\delta_{ij}(1, 1) = 3$  et  $\delta_{ij}(1, -1) = 1$  pour tout  $i, j \in V$ , avec la même connectivité  $m$ . La figure 3.18 montre comment les paramètres du risque évoluent en fonction de la connectivité  $m$  pour 3 scénarios macro-économiques de différentes sévérités. On constate que le risque diminue de manière générale via la décroissance de l'EL, la VaR, l'UL et l'ES quand la connectivité augmente. Cela signifie qu'une telle configuration du réseau/portefeuille ne présente pas elle-même de risque pour les banques. Celle-ci fait diminuer très considérablement le capital économique donné par la VaR, et les risques pondérés RWA<sup>20</sup> qui s'écrivent en terme de l'UL. Cela reste vrai pour tous les scénarios, et la sévérité des chocs macroéconomiques ne fait que "retarder" la diminution par rapport à la connectivité.

17.  $EL(L) = VaR_\alpha(L) - \mathbb{E}_G(L)$ .

18.  $ES(L) = \mathbb{E}_G(L | L \geq VaR_\alpha(L)) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_\theta(L) d\theta$ .

19. On utilise ici un modèle de Merton avec une corrélation réglementaire uniforme pour toutes les entités de 15%, appliqué sur des probabilités TTC (through the cycle) de 1%.

20. Risk-Weighted Assets (RWA), ou actifs à risques pondérés ou encore actifs pondérés par le risque, correspondent au montant minimum de capital requis au sein d'une banque ou d'autres institutions financières en fonction de leur niveau de risque. Ce montant se calcule sur la base d'un pourcentage des actifs, pondérés par le risque.

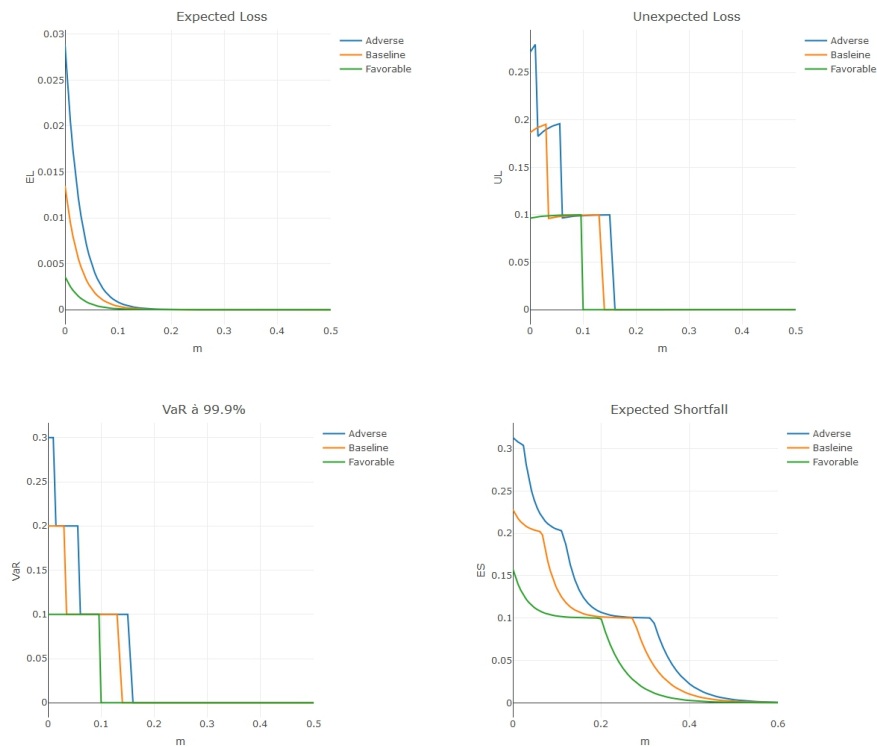


FIGURE 3.18 – Évolution des paramètres du risque dans le cas d'un réseau de support mutuel complet.

La diminution rapide de ces paramètres vient de celle des probabilités marginales de défaut  $\mathbb{P}_G(X_i = -1)$ , et la très faible augmentation des probabilités jointes de défaut, ce qui rend la queue de distribution des pertes de plus en plus faible. Cette forte diminution est également due à la forte connexion du réseau, car le réseau est complet, donc chaque entité est supportée par toutes les entités du réseau. Pour mieux voir l'effet de ce degré de connexion, on suppose que chaque entité du réseau est connectée à seulement 4 entités des 9 restantes (réseau 4-régulier). La figure 3.19 montre que le support mutuel est moins présent et la diminution par rapport à  $m$  est moins forte. On observe que pour un scénario de faible sévérité le capital économique est de 30% pour  $m = 0.6$ , alors que dans le cas précédent il été déjà à 0 pour  $m = 0.3$ . On en déduit que la diminution du degré de connexion fait diminuer la capacité du réseau à absorber le risque.

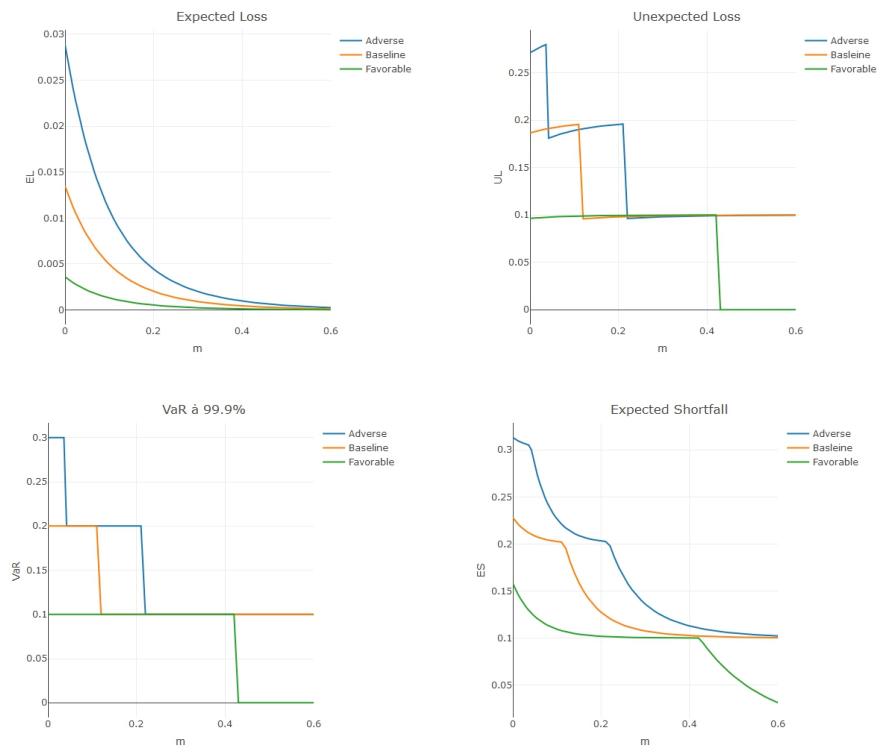


FIGURE 3.19 – Évolution des paramètres du risque dans le cas d'un réseau de support mutuel non complet.

**Cas d'un portefeuille avec des relations de support non-mutuel :** On s'intéresse maintenant à des relations de support non mutuelles (SNM). On suppose que toutes les entités du réseau sont connectées via la relation définie par  $\delta_{ij}(1, 1) = 2$ ,  $\delta_{ij}(-1, -1) = 3$ ,  $\delta_{ij}(-1, 1) = 1$  et  $\delta_{ij}(1, -1) = 0$ . La figure 3.20 montre que dans ce cadre les paramètres du risque diminuent quand la connectivité augmente jusqu'à un certain seuil à partir duquel ils augmentent brusquement. Nous avons alors un changement de comportement assez surprenant qui se produit à partir d'une valeur critique de connectivité  $m = 0.5$ . D'autre part, la forme de l'évolution de l'EL témoigne de celle des probabilités marginales  $\mathbb{P}_G(X_i = -1)$ , et donc chaque entité converge vers un état de défaut quand la connectivité tend vers l'infini. La nature de la relation considérée est responsable de ce phénomène, car chaque entité fournit un support "coûteux" qui se traduit par une augmentation de sa probabilité de défaut. Si on regarde de près cette relation, on a  $a(\delta_{ij}) = -1$  et  $b(\delta_{ij}) = 0$ , donc s'aperçoit que la relation pénalise l'entité  $i$ , car la résistance  $B_i(M, T)$  contient le terme  $-m_{ij}a(\delta_{ij})$  qui la fait diminuer. Mais comme chaque entité est elle-même supportée de la même manière, alors sa probabilité de défaut diminue jusqu'à ce que la connectivité soit suffisamment forte pour que la diminution de  $B_i(M, T)$  prend le dessus sur le support. On en déduit que lorsqu'une relation de support a un coût, le système peut avoir deux régimes selon le niveau de connectivité. Il est donc clair qu'un tel segment d'un portefeuille est assez risqué pour une banque,

car il peut brusquement changer de profil du risque si la connectivité augmente en période de stress. De plus, ce seuil de connectivité critique est plus facilement atteignable en bas de cycle comme le montre la figure pour les scénarios adverses.

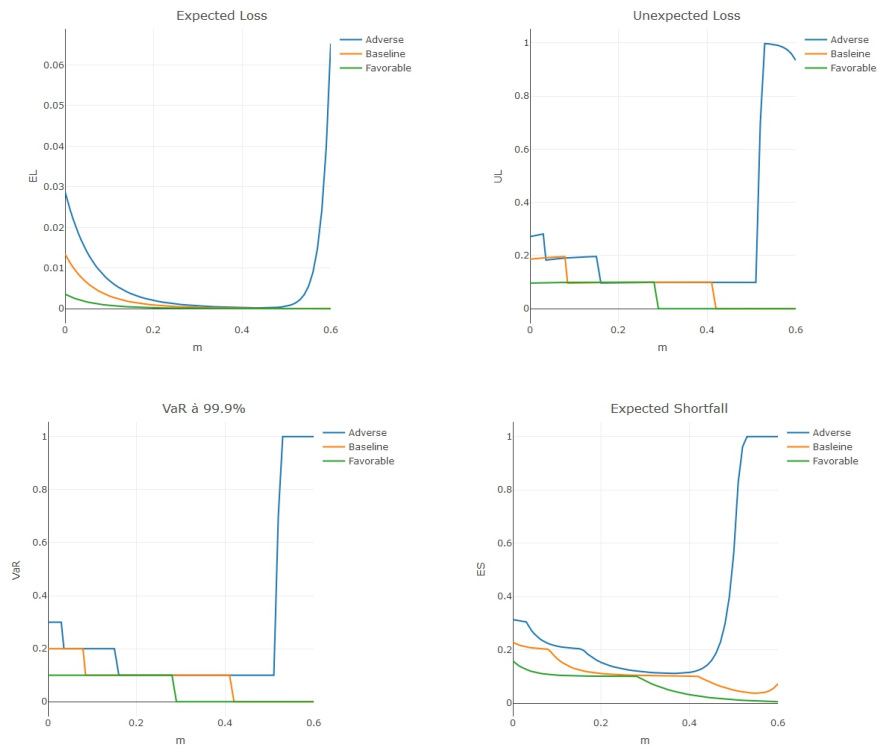


FIGURE 3.20 – Évolution des paramètres du risque dans le cas d'un réseau de support non-mutuel complet.

Ce type de configurations produit des changements de comportement, et fait augmenter le risque très rapidement quand la connectivité est suffisamment forte. Certaines idées de stress-test pratiquées dans les banques consistent à "compresser" plusieurs événements économiques dans une période courte. Cette intuition vient de la rapidité des événements en période de crise, potentiellement causée par les effets d'interdépendance forte. Le changement de comportement observé dans notre cas semble bien expliquer l'apparition de ces phénomènes rares en périodes de crise, comme des défauts multiples sans pré-signaux, qui se produisent dans des périodes assez courtes.

**Cas des portefeuilles avec des relations de concurrence :** Cette fois-ci on s'intéresse à la concurrence dans un portefeuille de crédit. On suppose que toutes les entités de  $G$  sont connectées les unes aux autres via la même relation de concurrence définie par  $\delta_{ij} = -2X_i X_j$ , avec une connectivité uniforme  $m$ . La figure 3.21 montre une augmentation de l'EL, la Var et l'ES avec la connectivité, qui deviennent stationnaires en 0.5 pour une connectivité assez forte pour tous les



scénarios. En revanche, l'UL du portefeuille diminue de manière forte après quelques fluctuations quand la connectivité augmente. En outre, plus le scénario est sévère plus l'UL diminue, ce qui résulte de la stationnarité précoce de la VaR et l'EL pour les scénarios adverses.

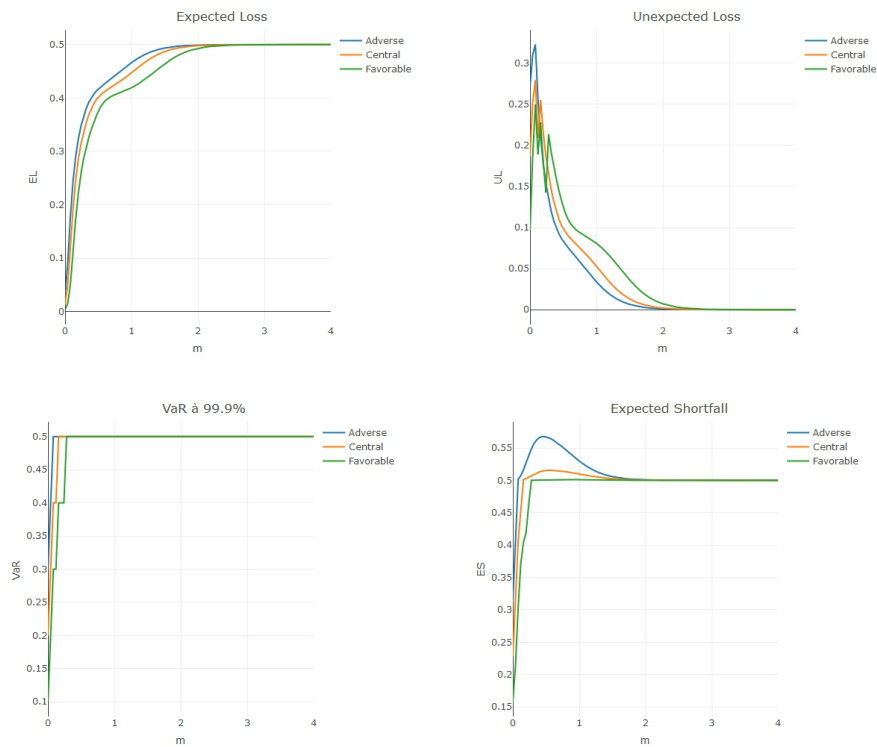


FIGURE 3.21 – Évolution des paramètres du risque dans le cas d'un réseau de concurrence complet.

Ce comportement peut sembler contre-intuitif à première vue, car l'augmentation de la concurrence (qui se traduit par celle de la connectivité dans ce contexte) veut dire une diminution des parts du marché pour chaque entité, et donc une dégradation s'en suit. Mais la subtilité de ce cas réside dans les symétries qu'il présente en terme de connectivité, de types de relations, de probabilités de défaut intrinsèques et en topologie du réseau. En effet, par définition la concurrence dégrade les entités quand la connectivité augmente, or la dégradation de chaque entité profite à ses concurrents, alors il y a un effet de compensation, ce qui justifie le comportement stationnaire. D'autre part, la borne supérieure de 50% des pertes vient du fait qu'on ne peut pas avoir plus de 5 défauts sur 10. En effet, le défaut d'une entité profite aux autres entités, et plus il y a de défauts, plus cela profite aux entités restantes. Par symétrie, quand le nombre de défauts atteint 5, la moitié du marché occupé par les entités en défaut est récupérée par celles qui restent, ce qui les rend "moins concurrentes".

La symétrie de cette configuration de concurrence est alors une obstruction à la formation d'un

cluster de défaut dont la taille dépasse la moitié du réseau, mais celle-ci n'empêche pas la distribution d'être plus concentrée dans les événements extrêmes. En effet, en regardant la skewness<sup>21</sup> et le kurtosis<sup>22</sup> de la distribution comme le montre la figure 3.22, on remarque que la skewness devient très négative à partir d'un certain rang de connectivité. Ceci revient à dire que la distribution continue à devenir plus concentrée à droite de la médiane, et donc les défauts multiples deviennent de plus en plus probables. En outre, le kurtosis continue d'augmenter également malgré la stationnarité, et devient infiniment plus grand que 3 (Kurtosis de la loi normale), ce qui veut dire que la distribution se concentre beaucoup plus autour de sa moyenne.

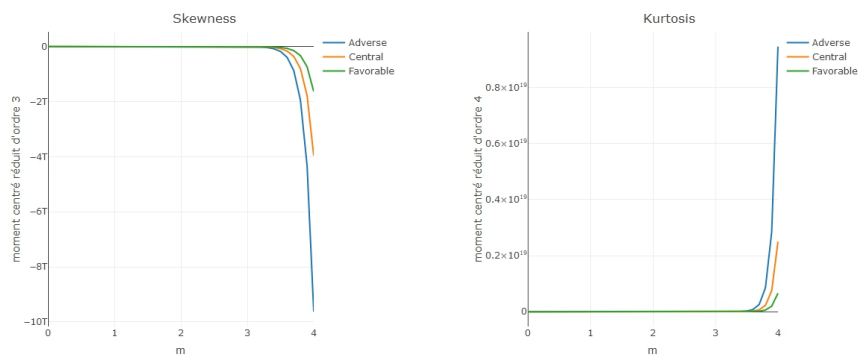


FIGURE 3.22 – Évolution de la skewness et le kurtosis dans le cas d'un réseau de concurrence complet.

Pour mieux voir l'effet de la concurrence sur un portefeuille, on considère des cas où la symétrie est brisée. On garde le même réseau, et on suppose qu'une entité notée 1, rentre dans une concurrence avec ses voisins plus fortement que dans le reste du réseau. La connectivité  $m_c$  de ces relations vérifie alors  $m \leq m_{1j} = m_c$  où  $m$  est la connectivité dans le reste du réseau. En faisant varier  $m_c$  entre  $m = 1$  et l'infini, on obtient les variations dans figure 3.23.

21. La skewness ou l'asymétrie de la distribution d'une variable aléatoire  $X$  est définie par le moment centré  $\mathbb{E}((X - \mu)^3)$ . Celui-ci est positive si la queue de droite (à valeurs hautes) est plus longue ou grosse, et négative si la queue de gauche (à valeurs basses) est plus longue ou grosse.

22. Il est aussi appelé coefficient d'aplatissement de la distribution d'une variable aléatoire  $X$ , et il mesure la répartition des masses de probabilité autour de leur centre, et il est calculé via le moment centré  $\mathbb{E}((X - \mu)^4)$ .

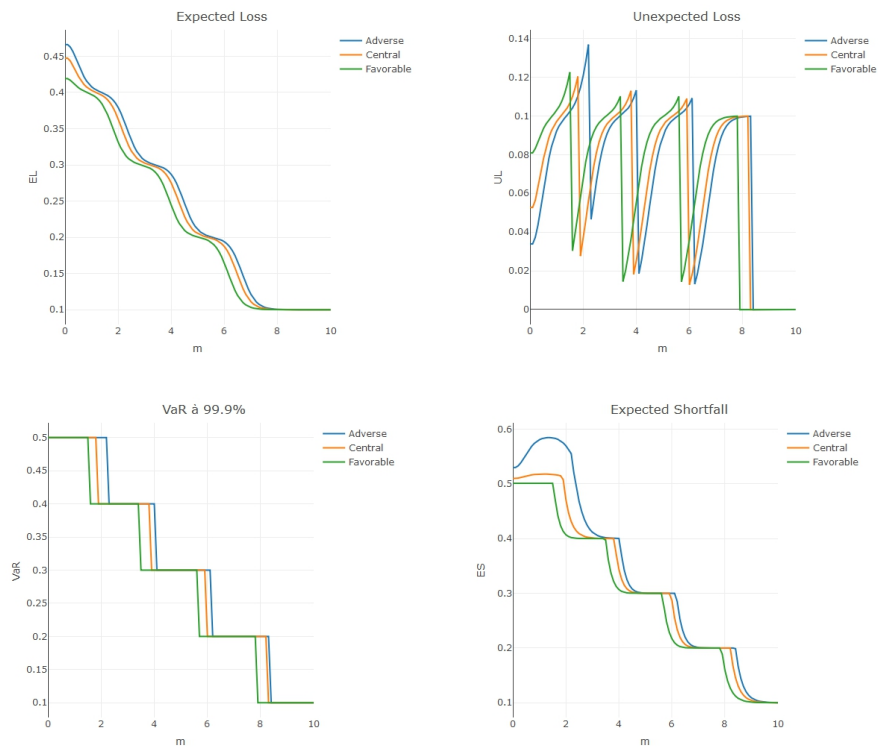


FIGURE 3.23 – Évolution des paramètres du risque dans le cas d'un réseau de concurrence (Une entité vs tout le réseau).

On constate que cette fois-ci le risque diminue dans toutes ses composantes de manière graduelle sauf pour l'UL, donc le RWA fluctue avant de diminuer brusquement vers 0. De plus, la figure 3.24 met en évidence le défaut de l'entité 1 quand la concurrence avec le reste du réseau dépasse un certain seuil, alors que ce dernier en profite en diminuant sa probabilité de défaut. Comme les expositions sont égales, la diminution des probabilités de défaut des 9 entités restantes fait diminuer les paramètres du risque même si 1 fait défaut. Si 1 avait une exposition très grande par rapport aux autres (concentration du risque), alors dans ce cas les paramètres du risque augmenteraient fortement.

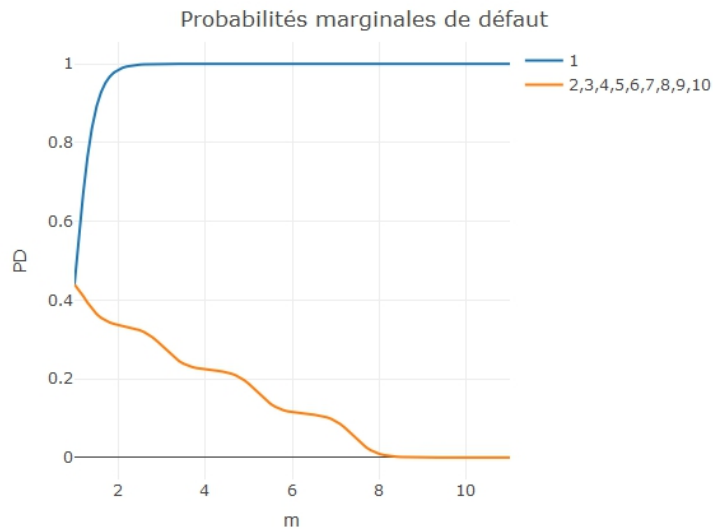


FIGURE 3.24 – Évolution des  $\mathbb{P}_G(X_i = -1)$  dans le cas d'un réseau de concurrence (Une entité vs tout le réseau).

Si on répète cette opération en faisant augmenter cette fois-ci la concurrence entre un cluster de 2, 3 ou 4 entités avec le reste du réseau, la diminution des probabilités de défaut de celui-ci s'accroît. Le cluster contient au plus 4 entités qui sont en infériorité numérique par rapport au cluster des entités restantes qui contient au moins 6 entités. Comme le montre la figure 3.25 le cluster en infériorité numérique fait défaut contrairement au cluster adversaire. En revanche, si les clusters ont la même taille, alors la symétrie change le comportement global ; et on revient au premier cas stationnaire bien que les connectivités ne soient pas uniformes partout dans le réseau.

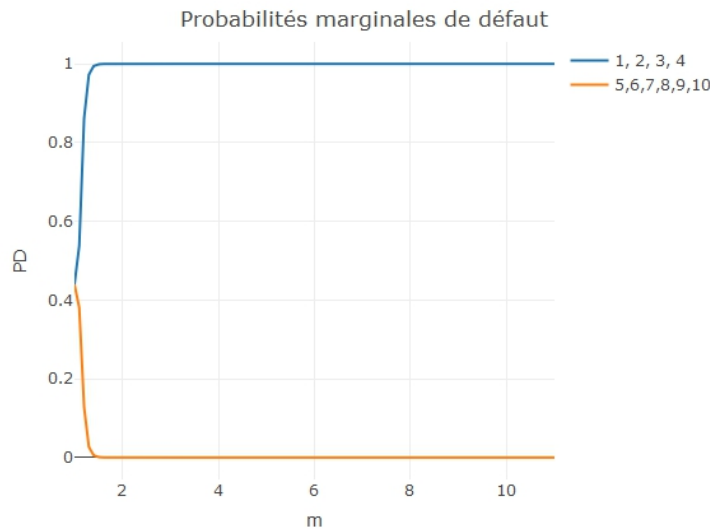


FIGURE 3.25 – Évolution des  $\mathbb{P}_G(X_i = -1)$  dans le cas d'un réseau de concurrence (4 entités vs 6 entités).

On en déduit que la concurrence joue un rôle très bénéfique en terme de risque de crédit, car elle constitue une diversification du risque de la banque dans ses portefeuilles de crédit. Cela constitue donc une manière de diminution du capital économique, en prenant en compte la concurrence dans chaque secteur d'activité, ce qui aura un impact direct sur le bilan de la banque avec les nouvelles normes comptables IFRS9.

**Remarque :** Certains de ces résultats présentent des comportements assez étranges voir extrêmes. Cela ne veut pas dire que le modèle présente un problème, car nous avons délibérément pris des valeurs de connectivité assez grandes pour montrer comment le modèle fonctionne. En effet, comme nous allons voir plus loin, il existe un seuil de connectivité à partir duquel le modèle se comporte de manière étrange. Ce comportement est appelé changement de phase ou état critique, et se traduit dans notre contexte par un excès de connectivité qui rend les entités du réseau très reliées à tel point qu'un défaut puisse entraîner le défaut de tout le réseau.

### 3.6 Propagation des chocs macroéconomiques locaux dans un réseau

Nous avons démontré que la propagation d'un choc macro-économique local dans un réseau cohérent s'atténue de manière exponentielle. Nous allons analyser ce phénomène pour des réseaux non cohérents, en particulier des réseaux dans lesquels la cohérence est présente. On utilise comme dans la partie précédente un modèle à facteur qui relie les probabilités intrinsèques à la

position dans le cycle. On considère un réseau  $G$  de 21 entités dont la topologie est représentée par la figure 3.26

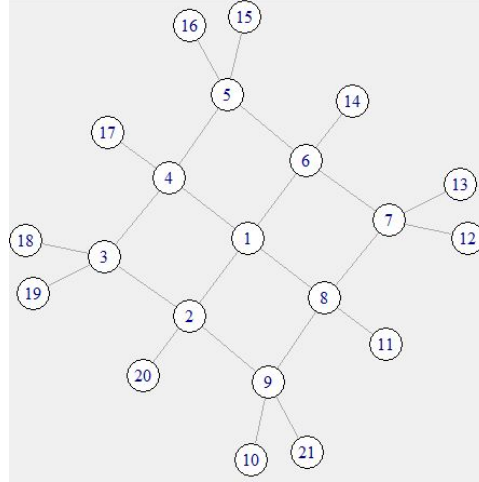


FIGURE 3.26 – Le réseau  $G$ .

Chacune des entités de  $G$  a une probabilité intrinsèque qui s'écrit

$$p_j(Z_j = z_j) := \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(PD_j) - \rho_j z_j}{\sqrt{1 - \rho_j^2}} \right)$$

où  $Z_j$  est la position au cycle de  $j$ ,  $\rho_j$  la corrélation de la valeur de  $j$  à  $Z_j$  et  $PD_j$  la probabilité de défaut de  $j$  moyenne ou TTC (through the cycle). Donc la sensibilité d'une entité  $i$  à la position au cycle de  $j$  peut s'exprimer de cette façon

$$\partial_{z_j} \mathbb{P}_G(X_i = -1) = - \frac{\sqrt{2\pi(1 - \rho_j^2)} e^{\frac{(\Phi^{-1}(PD_j) - \rho_j z_j)^2}{2(1 - \rho_j^2)}}}{4\rho_j p_j (1 - p_j)} \text{Cov}_G(X_i, X_j)$$

Cette formule nous indique que cette sensibilité est exponentielle, mais diminue de manière exponentielle en fonction de la distance dans un réseau cohérent via le théorème 3.5. La topologie du réseau  $G$  a été choisi ainsi pour mieux voir le phénomène de propagation. En effet, nous avons une entité centrale 1 qui a des voisins d'ordre 1, 2 et 3, en choquant l'entité 1 on peut alors mieux voir la symétrie de la propagation d'une part et l'atténuation par effet de distance d'autre part. En outre, les entités périphériques sont connectées via des chemins de longueurs entre 2 et 6, donc en choquant une entité périphérique on peut voir la portée de la propagation du stress. On prend  $PD_i = 1\%$ ,  $\rho_i = 15\%$  et  $Z_i = 1$  pour tout  $i$ , et on applique pour un choc macroéconomique en prenant  $Z_j = -3$  qui a une magnitude équivalente à celle observée dans la crise de 2008.

**Exemple de réseaux de support :** On suppose que les entités de  $G$  sont toutes connectées via des relations de support, avec une connectivité uniforme  $m = 1$ . Dans le cas où toutes les relations sont de support mutuel ( $SM$ ), la figure 3.27 montre comment des chocs macroéconomiques locaux sur les entités 1, 5 et 21 se propagent.

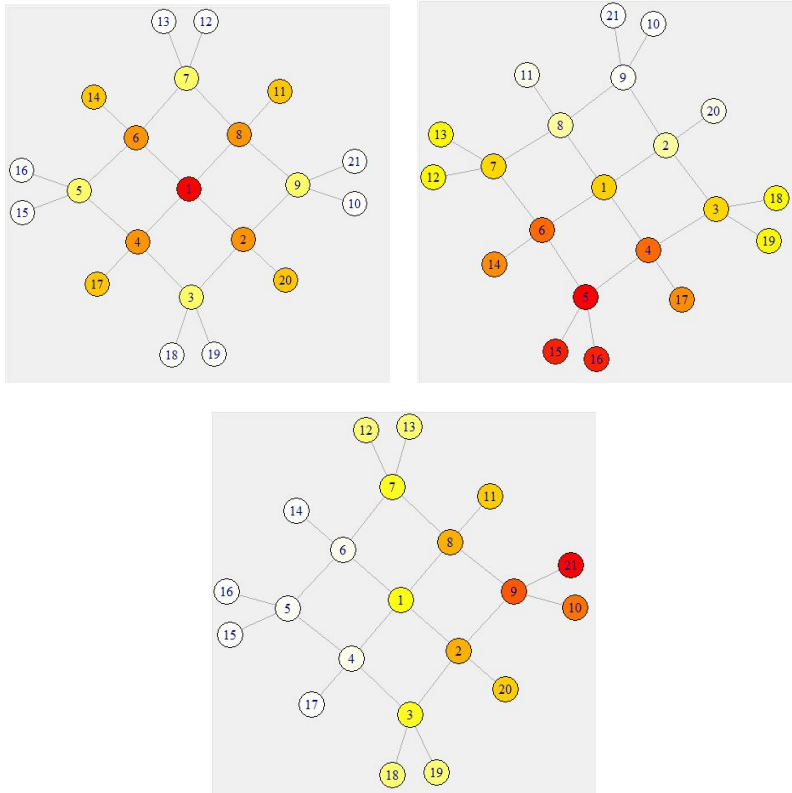


FIGURE 3.27 – Propagation d'un choc local dans un réseau cohérent. (Ces trois réseaux sont les mêmes malgré le changement de position causé par des l'algorithme de dessin)

Les couleurs dans les graphes indiquent les valeurs de  $-\partial_{z_j} \mathbb{P}_G(X_i = -1)$  pour  $j \in \{1, 5, 21\}$  et  $i \in \{1, \dots, 21\}$ . La figure en haut à gauche montre la propagation du choc appliqué en 1, on observe que les entités voisines 2, 4, 6 et 8 sont les plus impactées, suivies par les connexions de second ordre 11, 14, 17 et 20 puis par 3, 5, 7 et 9 qui sont également de second ordre. Celles-ci sont moins impactées que 11, 14, 17 et 20 car elles ont plus de relations de support, ce qui montre que le degré de connection de chaque entité rentre dans l'atténuation de la propagation du choc. Enfin, les entités périphériques sont les moins impactées vu qu'elles sont de distance 3 de 1, ce qui implique une atténuation forte. La figure en haut à droite représente la propagation d'un choc qui se propage depuis l'entité 5 ; On remarque que 15 et 16 sont très fortement impactées car elles sont directement liées à 5 et n'ont aucun autre support. Les entités 4 et 6 sont directement connectées à 5 mais sont moins impactées que 15 et 16 vu qu'elles ont d'autres relations de support. Elles sont suivies par 14 et 17 qui sont à distance 2 de l'origine du choc, qui est transmis

par 4 et 6. Ensuite les entités à distance 3 de l'origine du choc (7, 1 et 3) sont impactées de manière presque équitable, qui elles mêmes transmettent le risque à 12, 13, 18, 19 via 7 et 3. Les entités 2 et 8 sont atteintes via 1, et elles sont moins impactées que 12, 13, 18, 19, car elles ont des relations de support supplémentaires. Enfin, la propagation continue jusqu'à 9, 11, 20, 10 et 21 qui sont les moins impactés par effet d'atténuation. En appliquant le choc à l'entité 21 comme il est le cas dans le graphe en bas, on peut garantir la plus longue propagation possible dans ce réseau. Nous avons dans ce cas la même symétrie que dans les cas précédent sauf, à l'exception de l'entité 10 qui est liée à 21 de manière indirecte.

Ces graphes mettent en évidence la propagation et sont atténuation exponentielle, car les quantités  $|\partial_{z_j} \mathbb{P}_G(X_i = -1)|$  diminuent en moyenne de manière à chaque pas supplémentaire de la source du choc d'approximativement  $10^{-2}$ . La symétrie observée dans cette propagation est principalement due à la symétrie des relations  $SM$ . Pour mieux voir le rôle de la symétrie des relations dans la propagation, on considère les relations de support asymétriques définies par

$$\delta_{ij}(X_i, X_j) = -X_i + X_i X_j$$

et on suppose que les entités du réseau sont connectées via ces relations. Cette relation est un support dans lequel l'entité  $i$  telle que  $i < j$  supporte  $j$ , avec une pénalisation de  $i$  (coût de support ou gain unilatéral négatif). La figure 3.28 montre que le choc reçu par l'entité 1 se propage de manière asymétrique dans le reste du réseau. En effet, on remarque que 2 est plus impacté que 4, 6 et 8, car 2 supporte 3, 9 et 20 alors que 8, 6 et 4 sont supportés respectivement par 7, 5 et 3. Donc plus l'entité à un indice petit, plus elle doit supporter d'autres entités, et plus elle est pénalisée, ce qui justifie l'asymétrie observée. Nous avons vu dans la section précédente que pour des relations de ce type, le risque augmente brutalement à partir d'un certain seuil de connectivité. Donc si la connectivité augmente suffisamment dans le réseau, la propagation va devenir très forte par effet d'interdépendance et sont atténuation diminuera fortement, ce qui est susceptible de faire augmenter les pertes espérées très considérablement.



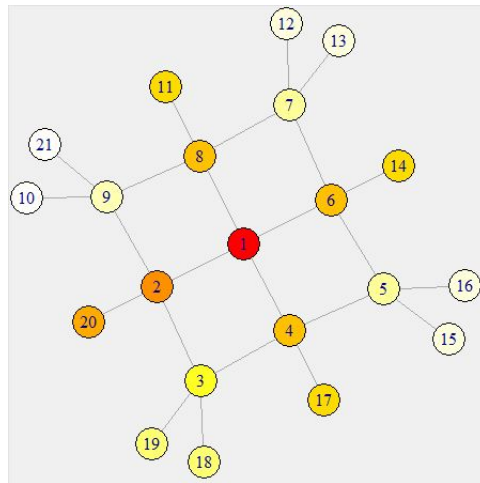


FIGURE 3.28 – Propagation d'un choc local dans un réseau avec des relations de support non mutuelles.

Cette configuration de relations donne en fait un réseau non-cohérent, et donc nous n'avons pas forcément une atténuation exponentielle comme dans le cas des réseaux cohérents. De plus, la figure montre qu'elle ne l'est pas vu que l'entité 20 est plus impactée que 4 alors que celle-ci est directement connectée à la source du stress. Nous avons alors un contre exemple du théorème 3.5.

**Exemple de réseaux avec concurrence :** Nous allons maintenant nous intéresser à des réseaux contenant de la concurrence. On suppose dans un premier temps que les entités du réseau  $G$  sont connectées via des relations  $SM$ , sauf l'entité 1 qui est en relation de concurrence avec ses voisins via la relation symétrique  $\delta_{ij}(X_i, X_j) = -2X_i X_j$ . La figure 3.29 montre la propagation d'un choc macroéconomique reçu par 1 dans le reste du réseau. Les couleurs chaudes représentent la dégradation alors que celles froides représentent l'inverse.

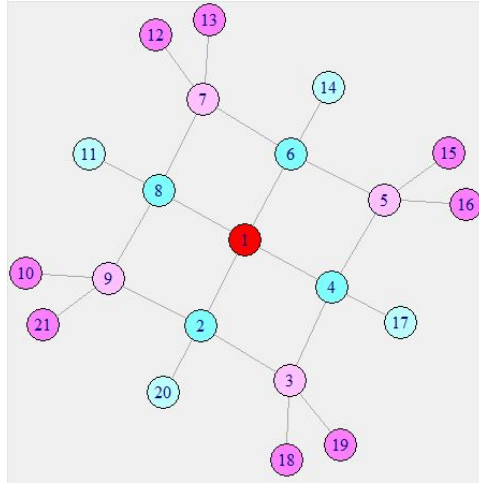


FIGURE 3.29 – Propagation d'un choc local sur un concurrent central.

On constate que l'entité 1 se dégrade, alors que ses concurrents directs 2, 4, 6 et 8 en profitent. De plus, les autres entités du réseau en profitent également car elles sont en relation de support avec les concurrents de  $i$ . On constate également qu'il n'y a pas de décente exponentielle du choc, car les quantités  $|\partial_{z_1} \mathbb{P}_G(X_i = -1)|$  ne diminuent pas exponentiellement par rapport à la distance, mais plutôt de manière linéaire.

On suppose maintenant que toutes les relations de  $G$  sont des concurrences symétriques comme nous les avons définis ci-dessus. La figure 3.30 de gauche nous montre comment un choc reçu par 1 se propage dans le réseau, et celle de droite nous montre la même chose pour un choc reçu par l'entité périphérique 21.

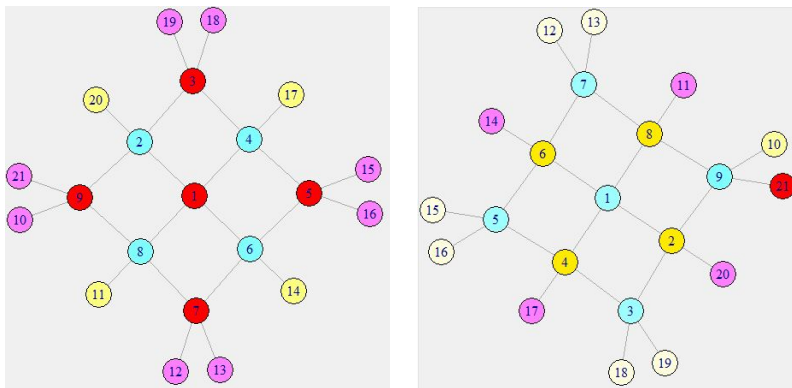


FIGURE 3.30 – Propagation d'un choc local dans un réseau de concurrence. (Ces trois réseaux sont les mêmes malgré le changement de position causé par des l'algorithme de dessin)

Les deux figures mettent en évidence que d'une part, le choc change d'effet en fonction de la parité de la distance. En effet, dans la figure de gauche, les concurrents de 1 profitent de sa dégradation alors que les concurrents de ces concurrents se dégradent. De la même manière, les

entités à distance 3 de 1 profitent de ce choc local. Le même phénomène se produit quand le choc est reçu par l'entité 21 comme le montre la figure de droite.

On en déduit que le modèle réplique les phénomènes de propagation et permet de voir comment la concurrence inverse le risque, et produit une propagation alternée ou ondulatoire dans le réseau. Dans le cas des réseaux cohérents, le théorème 3.5 est bien vérifié, alors que si le réseau n'est pas cohérent le modèle produit une propagation qui ne s'atténue pas de manière exponentielle. Donc les réseaux de support absorbent bien les chocs exogènes, alors que les réseaux de concurrence propagent ceux-ci plus loin en créant plus d'incertitude et de désordre. Néanmoins, nous avons vu que cet effet alterné de propagation du risque profite à 50% des entités du réseau alors qu'au même temps qu'il dégrade la moitié restante. Ce montre que la concurrence joue un rôle dans la diversification du risque.

### 3.7 Le concept de phénomène critique et son adaptation aux réseaux économiques

L'étude des phénomènes critiques est de motivation tout d'abord physique, celle-ci vient de la volonté d'expliquer des changements brusques de l'état de la matière sous l'effet de la température. L'introduction du modèle d'Ising pour étudier ce phénomène a été le sujet de milliers d'articles de recherche depuis son introduction par Wilhelm Lenz en 1920, qui est le directeur de thèse d'Ising; c'est d'ailleurs pour cette raison que le modèle est appelé parfois de Lenz-Ising. Mais la dénomination de "modèle d'Ising" est créée par Rudolph Peierls en référence à la thèse de d'Ernst Ising en 1925. La thèse d'Ising est consacrée à l'étude du modèle en dimension 1, dans laquelle il démontre l'absence de transition de phase. Quelques années plus tard, Peierls [163] utilise une approche devenue très célèbre<sup>23</sup>, avec laquelle il étudie le modèle bidimensionnel, et prouve l'existence de transition de phase dans la limite thermodynamique<sup>24</sup>; ce travail amorça le développement de la théorie moderne des phénomènes critiques. En physique statistique, on s'intéresse à des réseaux bidimensionnels dits doublement périodiques, ce qui veut dire des réseaux carrés dont les bords en face sont recollés. Cela signifie d'un point de vue topologique de "quotienter" un réseau comme  $\mathbb{Z}^2$  par la relation d'équivalence qui égalise les états des bords, ce qui est en fait un plongement dans le tore de dimension 2 noté  $\mathbb{T}^2$  comme il est montré dans la figure 3.31. Les mathématiciens de leur côté s'intéressent au problème dans ses formes les plus générales, en particulier ils s'intéressent aux réseaux réguliers de  $\mathbb{Z}^d$  avec des conditions aux bords périodiques (Donc un plongement dans le tore  $\mathbb{T}^d$ ), positives, négatives ou libres<sup>25</sup>.

23. C'est en fait un argument utilisé par Peierls nommé "argument de Peierls", qui utilise la symétrie du modèle par permutation des états. Cet argument reste valable dans des cadres beaucoup plus généraux que celui du modèle d'Ising.

24. La limite thermodynamique désigne quand le nombre de particules est infini.

25. Les conditions de bord positives ou négatives consistent à dire que les noeuds au bords du réseau sont connectés à un réseau extérieur dont l'état est +1 ou -1. En revanche, la condition libre consiste à dire qu'il n'y a aucune

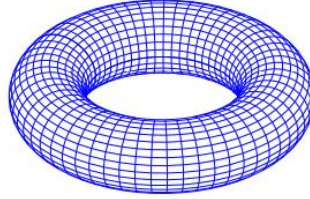


FIGURE 3.31 – Réseau doublement périodique plongé dans un tore de dimension 2.

La définition mathématique du changement de phase repose sur une quantité physique dite *l'énergie libre*, qui se définit dans notre cadre comme

$$F(m, B) = \lim_{|V| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|V|} \log(Z_G)$$

où  $G$  est homogène en connectivité  $m$  et en résistance  $B$ , et tend vers un réseau infini dans le sens de Van Hove<sup>26</sup>. Sans rentrer dans les interprétations physiques, les propriétés analytiques de cette fonction décrivent les phénomènes critiques sur le réseau. En effet, les irrégularités de cette fonction montrent certains comportements brutaux, et donc nous parlons de phénomène critique d'ordre  $k$  en cas d'une singularité d'ordre  $k$ . Donc sans souci de classification de ces phénomènes, on peut s'intéresser au caractère analytique de ces fonctions, à savoir leur développabilité en série entière; c'est le célèbre théorème du cercle de Lee-Yang [102]. Hormis son existence garantie, l'énergie libre a une propriété d'invariance par rapport aux conditions de bord, et des propriétés analytiques comme la convexité qui permettent de démontrer l'unicité de la mesure  $\mathbb{P}_G$  en volume infini, ce qui est par ailleurs équivalent à l'absence de phénomène critique. Pour mieux voir cela, prenons le cas d'un réseau unidimensionnel, donc qui peut être vu comme une ligne avec  $n$  entités ou un cercle (qui est aussi le tore  $\mathbb{T}^1$ ) sur lequel nous avons  $n$  entités pour le cas périodique. La thèse d'Ising [162] repose sur le calcul explicite de  $F$  en dimension 1 dans le cas d'un réseau ligne, ce qui donne le même résultat pour le réseau périodique par invariance par rapport aux conditions de bord. Il considère un réseau  $G$  ligne de  $n$  entités avec le Hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H}_G(X) = B \sum_{i \in V} +m \sum_{i \sim i+1} X_i X_{i+1}$$

où  $i \sim i+1$  désigne que l'entité  $i$  est connecté à  $i+1$ , et  $X_0$  est considéré par convention égal à  $X_n$  pour la condition de périodicité. La fonction de partition  $Z_G$  peut être écrite comme suite :

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{l \in \Omega^n} \exp(\mathcal{H}_G(l)) \\ &= \sum_{l_1 = \pm 1} \dots \sum_{l_n = \pm 1} \prod_{i=1}^n \exp(ml_{i-1}l_i + Bl_i) \end{aligned} \tag{3.50}$$

interaction avec l'extérieur.

26. Ce qui veut que le bord devient négligeable quand le réseau devient très grand, et donc quand  $\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \frac{|\partial G|}{|V|} = 0$ .

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} A_{++} & A_{+-} \\ A_{-+} & A_{--} \end{pmatrix}$  indexée par les états  $+$  et  $-$  telle que

$$A_{l_i, l_j} = \exp(ml_{i-1}l_i + Bl_i)$$

Cette matrice est appelée matrice de transfert, et elle vérifie d'après 3.50 l'égalité

$$Z_G = \text{Tr}(A^n)$$

En calculant les valeurs propres de cette matrice, on a

$$\lambda_+ = e^m ch(B) + \sqrt{e^{2m} ch^2(B) - 2sh(2m)} \text{ et } \lambda_- = e^m ch(B) - \sqrt{e^{2m} ch^2(B) - 2sh(2m)}$$

Ces valeurs propres vérifient pour  $m > 0$  l'inégalité  $\lambda_+ > \lambda_- \geq 0$ , et donc en écrivant

$$Z_G = \lambda_+^n \left(1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^n\right)$$

On obtient pour tout  $m > 0$  l'expression de l'énergie libre

$$F(m, B) = \log \lambda_+ = e^m ch(B) + \sqrt{e^{2m} ch^2(B) - 2sh(2m)}$$

La régularité de cette fonction est le principal argument d'absence de changement de phase. En 1936, Peierls [163] démontre que le changement de phase en dimension supérieures ( $d \geq 2$ ) existe quand  $B = 0$ , et réfute ainsi la conjecture d'Ising qui prédit une absence de transition de phase. Motivé par ces résultats, le prix Nobel de chimie Lars Onsager [157] donne la formule exacte de l'énergie libre en 1944 pour le cas périodique, celle-ci exprime comme

$$F(m, 0) = -\log(2) - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(ch^2(2m) - sh(2m)(\cos(\phi) + \cos(\theta))) d\phi d\theta$$

L'étude des singularités de cette fonction donne l'existence d'un phénomène critique pour  $m_c = \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2}$ . La figure 3.32 montre les configurations dans un tel réseau en fonction de  $m$  et pour  $B = 0$ . En cas d'indépendance  $m = 0$ , le réseau ne comporte aucun ordre, tandis que pour  $m = \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2} - 0.01$  la configuration devient un peu plus ordonnée et des petits clusters se forment. Pour  $m = \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2}$ , nous avons une coexistence de clusters de différents états, ceux-ci apparaissent de manière brutale. Pour  $m = \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2} + 0.01$  nous n'avons plus de coexistence, et seul un état  $1$  ou  $-1$  domine le réseau. Cela veut dire que pour  $m > m_c = \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2}$ , cette ambiguïté du choix de l'un des deux états s'interprète par la non unicité de la mesure en volume infini ; la connectivité  $m_c$  est dite alors critique.

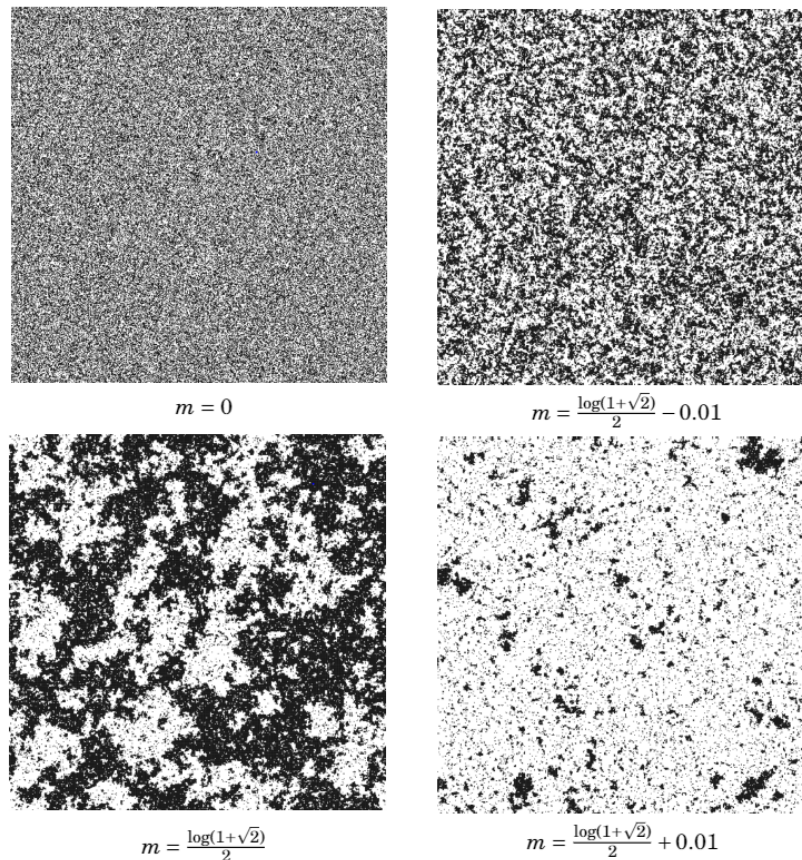


FIGURE 3.32 – Phénomène de changement de phase en dimension 2 sur un réseau de grande dimension plongé dans le tore  $\mathbb{T}^2$  déplié. Cette simulation é été réalisée en utilisant le simulateur disponible sur l’adresse suivante : <https://mattbierbaum.github.io/ising.js/>.

Le calcul de cette connectivité critique en dimension repose soit sur un calcul explicite de l’énergie libre, ou bien sur la dualité de Kramers-Wannier [161] qui relie deux représentations différentes du modèle via la symétrie de l’énergie libre, ce qui permet facilement de déterminer la constante  $m_c$  (voir [104] pour une introduction plus accessible).

Ces concepts permettent de définir de manière rigoureuse les phénomènes critiques, et ouvrent la voie vers des développements de techniques qui donnent des résultats riches en information. Toutefois, la criticalité semble restreinte au volume infini, ce qui constitue un obstacle pour l’étude de ce phénomène sur des réseaux finis ou de degré variable (la dimension  $d$  est toujours constante). De plus, il est connu que dans un modèle d’Ising avec champs magnétique strictement positif ( $B_i > 0$  pour tout  $i$ ) que la mesure en volume infini existe et qu’elle est unique, par conséquent nous n’avons pas de phénomènes critiques. Ces résultats nous serviront donc pour étudier les portefeuilles très large ou Large pool comme nous allons voir dans le chapitre 5. Nous proposons donc une définition adaptée aux réseaux économiques de taille finie qui admet un sens

en risque de crédit, à savoir celui de la notion Single Risk, dans le sens des directives de l'EBA, discutée précédemment.

**Définition 3.6.** Soit  $G = (V, M, T)$  un réseau économique, on dit qu'il y a un phénomène critique, s'il existe une matrice de connectivité  $M_c$  telle que

$$\forall \epsilon > 0, \text{ il existe } M > M_c \text{ tel que } \mathbb{P}_G(1, \dots, 1) + \mathbb{P}_G(-1, \dots, -1) > 1 - \epsilon.$$

où  $M > M_c$  est l'ordre partiel usuel.

Cette définition veut dire qu'un système est critique s'il existe un niveau de connectivité à partir duquel les seuls états possibles dans le réseau sont soit le défaut soit la survie de l'ensemble des entités. Cette notion coïncide avec celle du single risk de l'EBA, car ce dernier envisage la possibilité d'un défaut simultané d'un groupe d'entités assez connectées. Pour mieux illustrer cela, considérons un réseau économique complet de 10 entités, avec des relations  $\delta_{ij} = X_i X_j$  (SM). On suppose que toutes les entités ont la même probabilité intrinsèque, et que les connectivités sont uniformes sur le réseau. On considère la fonction de taux de perte sur ce réseau, particulièrement sa  $VaR_{95\%}$ . La figure 3.33 nous montre les différentes valeurs de cette quantité en fonction de la probabilité intrinsèque et la connectivité.

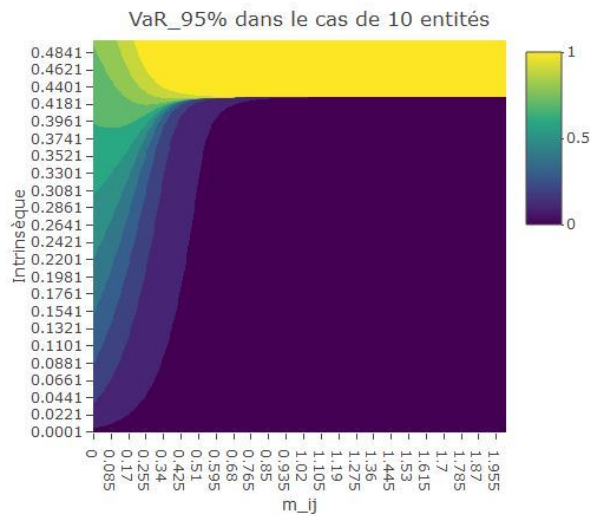


FIGURE 3.33 –  $VaR_{95\%}$  du taux de perte en fonction de  $m_{ij}$  et la probabilité intrinsèque  $p_i$ .

On constate qu'il existe une valeur de  $m$  à partir de laquelle une forte augmentation de la probabilité de défaut peut faire passer le réseau d'une perte de 0% à 100%. L'absence des zones colorées associées aux pertes intermédiaires à partir de la connectivité critique se traduit par une forte probabilité de défaut ou survie simultanés ; donc via la définition précédente nous avons bien un phénomène critique.

### 3.8 Conclusion et perspectives

Nous avons introduit dans ce chapitre un modèle graphique d'interdépendance qui produit une distribution jointe de défaut, celle-ci intègre à la fois les propriétés intrinsèques des entités et leurs interactions. Ce modèle a également une structure de dépendance reliée à la position au cycle macro-économique pour chaque entité, ce qui permet d'appliquer des chocs exogènes localement (niveau entité ou cluster) ou globalement (niveau réseau). Ce modèle se distingue des autres modèles de contagion de la littérature par sa capacité à intégrer différents types d'interactions, notamment par l'introduction de la notion de relation. Celle-ci donne beaucoup plus de degrés de liberté par rapport à un modèle d'Ising classique, et permet ainsi de compléter les comportements possibles entre deux entités d'un réseau. Le modèle peut être vu comme un modèle d'Ising modifié dont les  $B_i$  varient en fonction des caractéristiques des liens qu'une entité a avec ses voisins, ce qui sort déjà du cadre d'un modèle d'Ising. Cette représentation formelle par un modèle d'Ising à été faite en exploitant le développement quadratique de la relation, dont les coefficients déterminent la nature de la relation. Ceci nous a permis entre autres de dégager trois types de relations en fonction du signe du coefficients  $c(\delta_{ij})$  qui nous dit si la relation est de support, de concurrence ou purement économique. Chacun de ces types contient 4 classes différentes de relations caractérisées par les signes du couple  $(a(\delta_{ij}), b(\delta_{ij}))$ ; ceux-ci déterminent comment chacune des entités de la relation y contribue individuellement, par le biais de l'augmentation ou la diminution de sa résistance équivalente  $B_i(M, T)$ . Nous avons donc une zoologie de relations beaucoup plus riche de ce que propose un modèle d'Ising classique, et donc une capacité à intégrer et capter un large spectre de comportements possibles.

Tout comme le modèle d'Ising, notre modèle exprime la sensibilité de la probabilité d'un évènement aux différents paramètres sous forme d'une covariance. En particulier, la sensibilité d'une entité à l'état de santé d'une autre est principalement mesuré par la covariance entre leurs indicatrices de défaut. Ces covariances encodent la dépendance propre créée par les connexions directes ou indirectes établies entre les entités et les relations correspondantes, cela indépendamment de la structure de dépendance avec le cycle macro-économique. En d'autres termes, la covariance entre deux entités est nulle si nous n'avons aucun lien direct ou indirect entre elles. Plus généralement, nous avons démontré qu'il existe des configurations de relations sur le réseau de telle manière à ce que la covariance soit nulle même en existence d'un lien direct. Ceci est la motivation principale pour l'introduction des relation équivalentes qui traduisent comment la configuration du réseau peut perturber une relation, en la faisant changer de nature; en particulier la rendre purement économique, ce qui induit une covariance nulle. En outre, nous avons vu que la covariance entre les indicatrices de défaut permet de connaître la nature de la relation équivalente, et jauger ainsi comment le réseau perturbe les relations. Nous avons démontré que cette covariance s'atténue de manière exponentielle dans des réseaux cohérents en tirant profit des techniques utilisés en mécanique statistique, à savoir la représentation par des



courants aléatoires. Ce résultat est faux dans des réseaux non-cohérents, comme nous l'avons vu dans un réseau de concurrence, en analysant la propagation d'un choc macro-économique. Ce phénomène est particulièrement intéressant, et nous incite à penser qu'il existe plusieurs modes de propagation possibles analogues à la diffusion de chaleur, ou de la propagation d'une onde. En effet, le cas cohérent présente une atténuation analogue à celle de la diffusion de la chaleur dans un solide, alors que le cas de concurrence donne lieu à une propagation ondulatoire. Il existe cependant des outils graphiques qui permettent de retranscrire ces phénomènes continus dans un réseau, avec des versions discrètes des opérateurs différentiels tels que le Laplacien, la divergence ou le gradient. Cela représente une des problématiques que nous désirons traiter après la thèse, notamment une caractérisation des modes de transmission possibles.

Sur les phénomènes de clustering, nous avons démontré que deux parties du réseau peuvent être indépendantes tout comme deux entités, s'il n'y a pas de chemins qui les relient ou quand tous ces chemins traversent une relation purement économique. Ce résultat élémentaire admet une réciproque moins évidente, que nous avons pu démontrer en utilisant les courants aléatoires, et qui ne marche qu'en cas des réseaux cohérents. En outre, nous avons établi comment les probabilités de formation d'un cluster homogène (défaut ou non-défaut) sont sensibles à la santé d'une entité ou à la connectivité d'un lien dans le réseau. Ces sensibilités s'expriment comme des combinaisons linéaires de covariances de produits des indicatrices, et qui ne sont pas évidents à étudier en présence de coefficients négatifs. Pour aller plus loin, nous avons étudié dans le cas cohérent la sensibilité même de la covariance et de la corrélation par rapport aux paramètres du modèle, en démontrant des lemmes qui comblent ce que les inégalités classiques comme GKS, FKG ou même celle de Lebowitz ne peuvent pas faire. Toutefois, ces travaux restent assez restreints aux réseaux cohérents, et l'un de nos objectifs futurs est de généraliser ces résultats à des classes de réseaux plus larges, en tirant profit des différents outils de la mécanique statistique.

Nous avons vu dans les exemples comment ce modèle change la mesure du risque de crédit, et comment la nature des relations peut impacter profondément la distribution des pertes. Nous avons souvent pris comme exemple les relations  $SM$ , car elles ont un caractère conservateur en attribuant aux états  $(1, 1)$  et  $(-1, -1)$  le même poids. Cette equi-pondération mène les entités d'un réseau avec des relations de ce type vers le phénomène de criticalité ou de changement de phase quand la connectivité devient assez grande, par conséquent la distribution des pertes devient concentrée en 0 et 100% de pertes. Ce phénomène est particulièrement important d'un point de vue réglementaire, car il constitue ce que l'EBA appelle *Single Risk*, et qui impose une couverture du risque en envisageant un défaut total du réseau. En pratique, il est préférable dans un souci de conservatisme de prendre des relations comme  $SM$  pour modéliser l'interdépendance entre les entités d'un groupe d'affaire ou simplement des partenaires. Nous avons relié ce phénomène au concept de changement de phase en discutant les travaux d'Ising, Peierls et Onsagers, et nous

avons adopté une définition plus adapté à notre cadre.

### 3.9 Annexes :

#### 3.9.1 Preuves des propriétés élémentaires

##### 3.9.1.1 Preuve de la proposition 3.1.

Si les sous-réseaux  $G_1 = (V_1, M_1, T_1)$  et  $G_2 = (V_2, M_2, T_2)$  sont tels que  $m_{ij}c(\delta_{ij}) = 0$  pour tout  $(i, j) \in V_1 \times V_2$ , alors

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{l \in \Omega^V} \exp \left( \sum_{i \in V} B_i(M, T)l_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij}c(\delta_{ij})l_i l_j \right) \\ &= \sum_{l \in \Omega^V} \exp \left( \sum_{i \in V_1} B_i(M_1, T_1)l_i + \sum_{i \in V_2} B_i(M_2, T_2)l_i + \sum_{(i,j) \in E(V_1)} m_{ij}\delta_{ij}(l_i, l_j) + \sum_{(i,j) \in E(V_2)} m_{ij}c(\delta_{ij})l_i l_j \right) \\ &= \prod_{k=1,2} \underbrace{\sum_{(l_i)_{i \in V_k} \in \Omega^{V_k}} \exp \left( \sum_{i \in V_k} B_i(M_k, T_k)l_i + \sum_{(i,j) \in E(V_k)} m_{ij}c(\delta_{ij})l_i l_j \right)}_{=Z_{G_k}} \end{aligned}$$

D'où

$$Z_G = Z_{G_1} Z_{G_2}$$

D'autre part, pour tout  $X \in \Omega^V$

$$\exp \left( \sum_{i \in V} B_i(M, T)X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij}c(\delta_{ij})X_i X_j \right) = \prod_{k=1,2} \exp \left( \sum_{i \in V_k} B_i(M_k, T_k)X_i + \sum_{(i,j) \in E(V_k)} m_{ij}c(\delta_{ij})X_i X_j \right)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_G(X) &= \frac{\exp \left( \sum_{i \in V} B_i(M, T)X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij}c(\delta_{ij})X_i X_j \right)}{Z_G} \\ &= \prod_{k=1,2} \frac{\exp \left( \sum_{i \in V_k} B_i(M_k, T_k)X_i + \sum_{(i,j) \in E(V_k)} m_{ij}c(\delta_{ij})X_i X_j \right)}{Z_{G_k}} \\ &= \mathbb{P}_{G_1}((X_i)_{i \in V_1}) \mathbb{P}_{G_2}((X_i)_{i \in V_2}) \end{aligned}$$

Cette preuve montre l'utilité de l'écriture du Hamiltonien comme dans un modèle d'Ising.

##### 3.9.1.2 Preuve des formules 3.8 et 3.12

Soit  $\mathcal{E}$  un évènement sur  $G$  et  $i \in V$ . Pour tout  $l \in \Omega^V$ , on a

$$\begin{aligned} \partial_{B_i} \mathbb{P}_G(X = l) &= \frac{l_i \exp(\mathcal{H}_G(l))}{Z_G} - \frac{\exp(\mathcal{H}_G(l)) \partial_{B_i} Z_G}{Z_G^2} \\ &= l_i \mathbb{P}_G(X = l) - \mathbb{P}_G(X = l) \underbrace{\frac{\partial_{B_i} Z_G}{Z_G}}_{=E_G(X_i)} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \partial_{B_i} \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) &= \sum_{l \in \Omega^V} \mathbb{1}_{\mathcal{E}}(l) \partial_{B_i} \mathbb{P}_G(X = l) \\
 &= \sum_{l \in \Omega^V} \mathbb{1}_{\mathcal{E}}(l) l_i \mathbb{P}_G(X = l) - \sum_{l \in \Omega^V} \mathbb{1}_{\mathcal{E}}(l) \mathbb{E}_G(X_i) \mathbb{P}_G(X = l) \\
 &= \mathbb{E}_G(\mathbb{1}_{\mathcal{E}} X_i) - \mathbb{E}_G(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}) \mathbb{E}_G(X_i) \\
 &= \text{Cov}_G(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}, X_i)
 \end{aligned}$$

Or  $\partial_{p_i} B_i = \frac{1}{2p_i(1-p_i)}$ , alors

$$\partial_{p_i} \mathbb{P}_G(X \in \mathcal{E}) = \frac{1}{2p_i(1-p_i)} \text{Cov}_G(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}, X_i)$$

Pour la formule 3.12, on a

$$\partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(X = x) = \delta_{ij}(x_i, x_j) \mathbb{P}_G(X = x) - \mathbb{E}_G(\delta_{ij}(x_i, x_j)) \mathbb{P}_G(X = x) \quad (3.51)$$

Comme  $\mathbb{P}_G(\mathcal{E}) = \sum_{l \in \Omega^V} \mathbb{1}_{\mathcal{E}}(l) \mathbb{P}_G(X = l)$ , alors

$$\begin{aligned}
 \partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) &= \sum_{l \in \Omega^V} \delta_{ij}(l_i, l_j) \mathbb{1}_{\mathcal{E}}(l) \mathbb{P}_G(X = l) - \mathbb{E}_G(\delta_{ij}(X_i, X_j)) \mathbb{P}_G(X \in \mathcal{E}) \\
 &= \mathbb{E}_G(\mathbb{1}_{\mathcal{E}} \delta_{ij}(X_i, X_j)) - \mathbb{E}_G(\delta_{ij}(X_i, X_j)) \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) \\
 &= \text{Cov}_G(\mathbb{1}_{\mathcal{E}}, \delta_{ij}(X_i, X_j))
 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

### 3.9.1.3 Preuve de la proposition 3.2 :

Soit  $i \in V$ . Pour calculer la limite quand  $p_i \rightarrow 0$ , nous allons changer de variable en calculant la limite quand  $B_i \rightarrow +\infty$ . on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_G(X = x) &= \frac{\exp(B_i x_i + \sum_{j \neq i} B_j x_j + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(x_i, x_j))}{\sum_{l \in \Omega^V} \exp(B_i l_i + \sum_{j \neq i} B_j l_j + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(l_i, l_j))} \\
 &= \frac{\exp(B_i x_i + C_G(x))}{\sum_{\substack{l \in \Omega^V \\ l_i = x_i}} \exp(B_i x_i + C_G(l)) + \sum_{\substack{l \in \Omega^V \\ l_i = -x_i}} \exp(-B_i x_i + C_G(l))} \\
 &= \frac{\exp(C_G(x))}{\sum_{\substack{l \in \Omega^V \\ l_i = x_i}} \exp(C_G(l)) + \sum_{\substack{l \in \Omega^V \\ l_i = -x_i}} \exp(-2B_i x_i + C_G(l))}
 \end{aligned}$$

où  $C_G(X) := \sum_{j \neq i} B_j X_j + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(X_i, X_j)$ . Donc

$$\begin{aligned} \lim_{B_i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_G(X = x; X_i = 1) &= \frac{\exp(C_G(x))}{\sum_{\substack{l \in \Omega^V \\ l_i = 1}} \exp(C_G(l))} \\ &= \frac{\exp(B_i + C_G(x))}{\sum_{\substack{l \in \Omega^V \\ l_i = 1}} \exp(B_i + C_G(l))} \\ &= \frac{\exp(B_i + C_G(x))}{Z_G} \frac{Z_G}{\sum_{\substack{l \in \Omega^V \\ l_i = 1}} \exp(B_i + C_G(l))} \\ &= \frac{\mathbb{P}_G(X = x; X_i = 1)}{\mathbb{P}_G(X_i = 1)} \end{aligned}$$

D'où  $\lim_{B_i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_G(X = x; X_i = 1) = \mathbb{P}_G(X = x; X_i = 1 | X_i = 1)$ . En utilisant la même technique pour  $X_i = -1$ , on obtient la formule désirée. Le cas où  $p_i \rightarrow 1$  correspond au changement de variable  $B_i \rightarrow -\infty$ , de la même manière on obtient la limite quand  $p_i$  tend vers 1.

### 3.9.1.4 Preuve du théorème 3.4

Soient  $f, g$  deux fonctions croissantes, nous allons montrer que  $\text{Cov}_G(f(X), g(X))$  est positif dans le cas d'un réseau cohérent. Par bilinéarité de la covariance, on peut supposer sans perte de généralité que  $f, g \geq 0$ . Nous aurons besoin de l'inégalité des quatre fonctions suivante générale suivante :

**Lemme 3.5. (Ahlsvede-Daykin)** Soit  $\Omega$  un sous ensemble fini de  $\mathbb{R}$ . On définit pour tout  $x, y \in \Omega^n$  les opérations,  $x \vee y = (x_i \vee y_i)_i$  et  $x \wedge y = (x_i \wedge y_i)_i$  tels que  $x_i \wedge y_i = \min(x_i, y_i)$  et  $x_i \vee y_i = \max(x_i, y_i)$ .

Soient  $f_1, \dots, f_4$  des fonctions booléennes telles que

$$f_1(x)f_2(y) \leq f_3(x \wedge y)f_4(x \vee y), \forall x, y \in \Omega^n$$

Soit  $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$  une mesure produit  $\sigma$ -finie sur  $B(\Omega^n)$ . On a ,

$$\mathbb{E}_\mu(f_1)\mathbb{E}_\mu(f_2) \leq \mathbb{E}_\mu(f_3)\mathbb{E}_\mu(f_4)$$

*Démonstration.* Voir [39] □

L'idée est de choisir convenablement des fonctions  $f_1, \dots, f_4$  sur  $\Omega^n = \{-1, 1\}^n$  de telle sorte qu'elles vérifient la condition du lemme, afin d'utiliser l'inégalité des quatre fonctions pour prouver notre résultat. Pour tout  $i$ , soit  $\mu_i$  une mesure telle que  $\mu_i(X_i = -1) = p_i$ , et  $P = \frac{d\mathbb{P}_M}{d\mu}$  la dérivée de Radon-Nikodym de  $\mathbb{P}_G$  par rapport à  $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ . On choisit les fonctions suivantes

$$f_1 = Pf, f_2 = Pg, f_3 = P \text{ et } f_4 = Pfg$$

Maintenant il suffit de vérifier la condition du lemme pour tout  $x, y$  :

$$P(x)P(y)f(x)g(y) \leq P(x \wedge y)P(x \vee y)f(x \vee y)g(x \vee y)$$

La croissance des fonctions  $f$  et  $g$  nous donne

$$x, y \leq x \vee y \Rightarrow f(x)g(y) \leq f(x \vee y)g(x \vee y)$$

donc il ne reste qu'à prouver l'inégalité

$$P(x)P(y) \leq P(x \wedge y)P(x \vee y)$$

celle-ci est équivalente

$$\sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij}(\delta_{ij}(x_i, x_j) + \delta_{ij}(y_i, y_j)) \leq \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij}(\delta_{ij}(x_i \vee y_i, x_j \vee y_j) + \delta_{ij}(x_i \wedge y_i, x_j \wedge y_j)) \quad (3.52)$$

car pour tout  $A \subset \Omega^n$  on a  $\mathbb{P}_G(X \in A) = \mathbb{E}_\mu(P1_A)$ , en particulier,  $\mathbb{P}_G(x) = P(x)\mu(x)$ .

D'autre part, on pose

$$\Delta_{ij}(x, y) = \delta_{ij}(x_i \vee y_i, x_j \vee y_j) + \delta_{ij}(x_i \wedge y_i, x_j \wedge y_j) - \delta_{ij}(x_i, x_j) - \delta_{ij}(y_i, y_j)$$

donc

$$\Delta_{ij}(x, y) = \begin{cases} \delta_{ij}(1, 1) + \delta_{ij}(-1, -1) - \delta_{ij}(1, -1) - \delta_{ij}(-1, 1) = 4c(\delta_{ij}) & \text{si } x_i x_j = y_i y_j = x_i y_i = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or le réseau est cohérent, alors  $\Delta_{ij}(x, y) \geq 0$  pour tout  $i, j \in V$ , donc

$$\sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \Delta_{ij}(x, y) \geq 0$$

ce qui équivalent à 3.52, d'où la condition

$$f_1(x)f_2(y) \leq f_3(x \wedge y)f_4(x \vee y), \forall x, y \in \Omega^n$$

Alors d'après le lemme précédant

$$\mathbb{E}_G(f)\mathbb{E}_G(g) = \mathbb{E}_\mu(f_1)\mathbb{E}_\mu(f_2) \leq \mathbb{E}_\mu(f_3)\mathbb{E}_\mu(f_4) = \mathbb{E}_G(fg)$$

et par suite  $\text{Cov}_G(f(X), g(X)) \geq 0$ .

Si  $f$  ou  $g$  est décroissante, alors il suffit de la multiplier par -1 pour se ramener à l'inégalité précédente, ce qui donne  $\text{Cov}_G(f(X), g(X)) \leq 0$ . De la même manière, si  $f$  et  $g$  sont les deux décroissantes, alors on a  $\text{Cov}_G(f(X), g(X)) \geq 0$ .

**3.9.1.5 Preuve de la proposition 3.3**

1. On a  $\partial_{p_i} \mathbb{P}_G(X_i = -1) = \frac{Cov_G(X_i, X_i)}{4p_i(1-p_i)}$ , donc

$$\partial_{p_i} \mathbb{P}_G(X_i = -1) = \frac{\mathbb{P}_G(X_i = -1) - \mathbb{P}_G(X_i = -1)^2}{p_i(1-p_i)}$$

On peut démontrer qu'il est possible de remplacer la mesure  $\mathbb{P}_G$  par  $\mathbb{P}_G(\cdot|\mathcal{E})$ , mais cette méthode est beaucoup plus longue à justifier que le calcul direct. Nous procédons donc au calcul de cette sensibilité, soit  $\mathcal{E}$  un événement sur  $G$ . On a

$$\begin{aligned} \partial_{p_i} \mathbb{P}_G(X_i = -1, \mathcal{E}) &= -\frac{1}{4p_i(1-p_i)} Cov_G(X_i, (1-X_i)\mathbb{1}_{\mathcal{E}}) \\ &= -\frac{1}{4p_i(1-p_i)} (\mathbb{E}_G(X_i \mathbb{1}_{\mathcal{E}}) - \mathbb{P}_G(\mathcal{E})\mathbb{E}_G(X_i) - \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) + \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_i \mathbb{1}_{\mathcal{E}})) \end{aligned}$$

on a également

$$\begin{aligned} \partial_{p_i} \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) &= -\frac{1}{2p_i(1-p_i)} Cov_G(X_i, \mathbb{1}_{\mathcal{E}}) \\ &= -\frac{1}{2p_i(1-p_i)} (\mathbb{E}_G(X_i \mathbb{1}_{\mathcal{E}}) - \mathbb{P}_G(\mathcal{E})\mathbb{E}_G(X_i)) \end{aligned}$$

Or  $\mathbb{E}_G(X_i \mathbb{1}_{\mathcal{E}}) = \mathbb{P}_G(\mathcal{E})\mathbb{E}_G(X_i|\mathcal{E})$  et  $\mathbb{P}_G(X_i = -1, \mathcal{E}) = \mathbb{P}_G(\mathcal{E}) - \mathbb{E}_G(X_i \mathbb{1}_{\mathcal{E}})$  alors la dérivée

$$\partial_{p_i} \mathbb{P}_G(X_i = -1|\mathcal{E}) = \frac{\mathbb{P}_G(X_i = -1, \mathcal{E})}{\mathbb{P}_G(\mathcal{E})} = \frac{1}{4p_i(1-p_i)} (1 - \mathbb{E}_G(X_i|\mathcal{E}))^2$$

comme  $1 - \mathbb{E}_G(X_i|\mathcal{E})^2 = 4(\mathbb{P}_G(X_i = -1|\mathcal{E}) - \mathbb{P}_G(X_i = -1|\mathcal{E})^2)$ , alors on a le résultat.

2. Nous savons que  $\partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(X_i = -1) = -\frac{1}{2} Cov_G(X_i, \delta_{ij}(X_i, X_j))$ , donc

$$\partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(X_i = -1) = -\frac{1}{2} (a_{ij} Cov_G(X_i, X_i) + b_{ij} Cov_G(X_i, X_j) + c_{ij} Cov_G(X_i, X_i X_j))$$

D'autre part, on a  $Cov_G(X_i, X_i) = 1 - \mathbb{E}_G(X_i)^2$ , et  $Cov_G(X_i, X_i X_j) = \mathbb{E}_G(X_j) - \mathbb{E}_G(X_i)\mathbb{E}_G(X_i X_j)$ .

Donc d'après la proposition 3.2, on a

$$\lim_{p_j \rightarrow 1} Cov_G(X_i, X_i) = 1 - \mathbb{E}_G(X_i|X_j = -1)^2 \text{ et } \lim_{p_j \rightarrow 1} Cov_G(X_i, X_i X_j) = -1 + \mathbb{E}_G(X_i|X_j = -1)^2$$

De plus, on a  $\lim_{p_j \rightarrow 1} Cov_G(X_i, X_j) = 0$ , par conséquent

$$\lim_{p_j \rightarrow 1} \partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(X_i = -1) = -\frac{1}{2} (a_{ij} - c_{ij}) (1 - \mathbb{E}_G(X_i|X_j = -1)^2)$$

Or la fonction paramétrique  $(p_j, m_{ij}) \mapsto \mathbb{P}_G(X_i = -1)$  est continue et que sa dérivée par rapport à  $m_{ij}$  est continue en  $p_j = 1$ , alors on peut intervertir la limite et la dérivée, ce qui donne d'après 3.2 l'égalité  $\lim_{p_j \rightarrow 1} \partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(X_i = -1) = \partial_{m_{ij}} \mathbb{P}_G(X_i = -1|X_j = -1)$ , ce qui termine la démonstration.

### 3.9.2 Preuves utilisant des courants aléatoires

#### 3.9.2.1 Preuve de la proposition 3.4

Soient  $A, B \subset V$ . En utilisant le lemme de switching pour  $f = 1$  and  $A = B$ , et la représentation 3.33 on a

1.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_G(X_A)^2 &= \frac{\sum_{\partial n=A} w(n)}{\sum_{\partial n=\emptyset} w(n)} \cdot \frac{\sum_{\partial n=A} w(n)}{\sum_{\partial n=\emptyset} w(n)} \\
 &= \frac{\sum_{\substack{\partial n_1=A \\ \partial n_2=A}} w(n_1)w(n_2)}{\sum_{\substack{\partial n_1=\emptyset \\ \partial n_2=\emptyset}} w(n_1)w(n_2)} \\
 &= \frac{\sum_{\substack{\partial n_1=\emptyset \\ \partial n_2=\emptyset}} w(n_1)w(n_2) \mathbb{1}(\widehat{n_1 + n_2} \in \mathfrak{F}_A)}{\sum_{\substack{\partial n_1=\emptyset \\ \partial n_2=\emptyset}} w(n_1)w(n_2)} \\
 &= \mathbb{P}_G^\emptyset \otimes \mathbb{P}_G^\emptyset(\widehat{n_1 + n_2} \in \mathfrak{F}_A)
 \end{aligned}$$

2. De la même manière, d'après la représentation en courants aléatoires on a,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_G(X_A)\mathbb{E}_G(X_B) &= \frac{\sum_{\substack{\partial n_1=A \\ \partial n_2=B}} w(n_1)w(n_2)}{\sum_{\substack{\partial n_1=\emptyset \\ \partial n_2=\emptyset}} w(n_1)w(n_2)} \\
 &= \frac{\sum_{\substack{\partial n_1=\emptyset \\ \partial n_2=A\Delta B}} w(n_1)w(n_2) \mathbb{1}(\widehat{n_1 + n_2} \in \mathfrak{F}_A)}{\sum_{\substack{\partial n_1=\emptyset \\ \partial n_2=\emptyset}} w(n_1)w(n_2)} \\
 &= \frac{\sum_{\substack{\partial n_1=\emptyset \\ \partial n_2=A\Delta B}} w(n_1)w(n_2) \mathbb{1}(\widehat{n_1 + n_2} \in \mathfrak{F}_A)}{\sum_{\substack{\partial n_1=\emptyset \\ \partial n_2=A\Delta B}} w(n_1)w(n_2)} \cdot \frac{\sum_{\substack{\partial n_1=\emptyset \\ \partial n_2=A\Delta B}} w(n_1)w(n_2)}{\sum_{\substack{\partial n_1=\emptyset \\ \partial n_2=\emptyset}} w(n_1)w(n_2)} \\
 &= \mathbb{P}_G^\emptyset \otimes \mathbb{P}_G^{A\Delta B}(\widehat{n_1 + n_2} \in \mathfrak{F}_A) \frac{\sum_{\partial n=A\Delta B} w(n)}{\sum_{\partial n=\emptyset} w(n)} \\
 &= \mathbb{P}_G^\emptyset \otimes \mathbb{P}_G^{A\Delta B}(\widehat{n_1 + n_2} \in \mathfrak{F}_A) \underbrace{\mathbb{E}_G(X_{A\Delta B})}_{=\mathbb{E}_G(X_A X_B)}
 \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.



### 3.9.2.2 Preuve du théorème 3.6

Soient  $A, B \subset V$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $A$  et  $B$  sont connexes (en un seul morceau). En effet, si  $A_c$  est une composante connexe de  $A$  non connectée au reste du réseau, alors  $\mathbb{P}_G = \mathbb{P}_{G_{A_c}}$  où  $G_{A_c}$  est le réseau de noeuds  $A_c$ , ce qui donne la même chose si  $A$  est connexe. On notera  $i \sim j$  le lien entre  $i$  et  $j$ , et on suppose que les chemins entre les éléments de  $A$  et deux  $B$  ne passent pas par des relations purement économiques.

- Si  $\langle X_A, X_B \rangle_G = 0$  et  $A \cap B = \emptyset$  tels que  $A$  and  $B$  ne soient pas séparés par des relation purement économiques. On suppose par l'absurde qu'il existe un chemin entre  $A$  et  $B$ , en d'autres termes, il existe  $(i_0, i_2, \dots, i_m)$  tel que  $i_k \sim i_{k+1}$  pour tout  $k \in \{0, m-1\}$ ,  $i_0 = a \in A$  et  $i_m = b \in B$ .

On a

$$1 - \frac{\mathbb{E}_G(X_A)\mathbb{E}_G(X_B)}{\mathbb{E}_G(X_A X_B)} = \mathbb{P}_G^\emptyset \otimes \mathbb{P}_G^{A\Delta B}(\widehat{n_1 + n_2} \notin \mathfrak{F}_A) = 0 \Leftrightarrow \langle X_A, X_B \rangle_G = 0$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{\substack{\partial n_1 = \emptyset \\ \partial n_2 = A\Delta B}} w(n_1)w(n_2)\mathbb{1}(\widehat{n_1 + n_2} \notin \mathfrak{F}_A) = 0 \quad (3.53)$$

L'idée est de trouver un couple de courants  $n_1, n_2$  qui vérifie

$$\partial n_1 = \emptyset, \partial n_2 = A\Delta B, \widehat{n_1 + n_2} \notin \mathfrak{F}_A \text{ et } w(n_1)w(n_2) \neq 0$$

pour avoir une contradiction avec 3.53.

— Si  $|A|$  est impair, alors on choisit  $n_1 = (0)_{i \sim j}$ . Comme  $A$  est connecté, alors il existe un chemin  $(j_k j_{k+1})_{k=1, \dots, |A|-2}$  qui traverse toutes les entités de  $A \setminus \{a\}$  une seule fois. On choisit alors

$$n_{2, j_k j_{k+1}} = \mathbb{1}[k \text{ impair}], n_{2, i_g} = \mathbb{1}[i \in B \cup \{a\}]$$

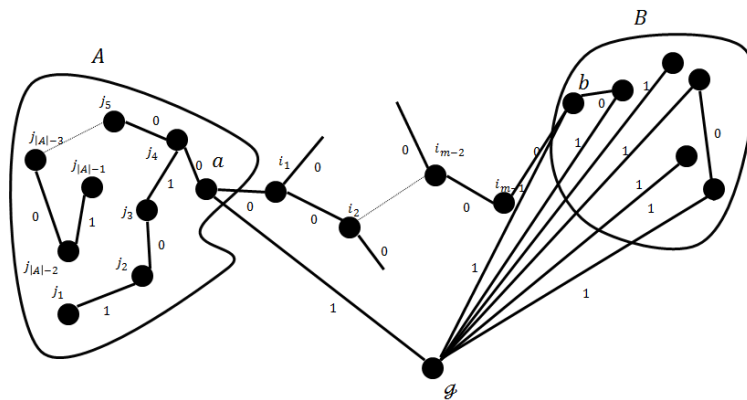


FIGURE 3.34 – Courant  $n_2$ .

On a clairement  $X(n_2, i) = \mathbb{1}[i \in A \cup B]$ , car toutes les entités de  $A \cup B$  sont connectées à une unique entité via les arêtes de  $\widehat{n_2}$ . Par conséquent,  $\partial n_2 = A\Delta B$  and  $\partial n_1 = \emptyset$ .

D'autre part, on a

$$\widehat{n_1 + n_2} = \{j_k \sim j_{k+1}\}_{k=1,3,\dots,|A|-2} \cup \{a \sim g\} \cup \{i \sim g\}_{i \in B}$$

ce qui définit un sous-réseau  $G(\widehat{n_1 + n_2}) = (A \cup B \cup g, N)$  qui a  $\frac{|A|-1}{2}$  composantes connexes (comme montre la figure 3.35), car il est défini via les arêtes de valeur non nulles de  $n_1 + n_2$ .

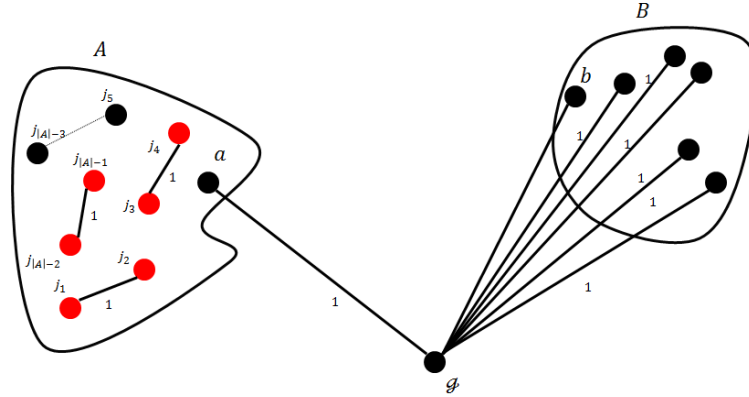


FIGURE 3.35 – Le chemin  $G(\widehat{n_1 + n_2})$ .

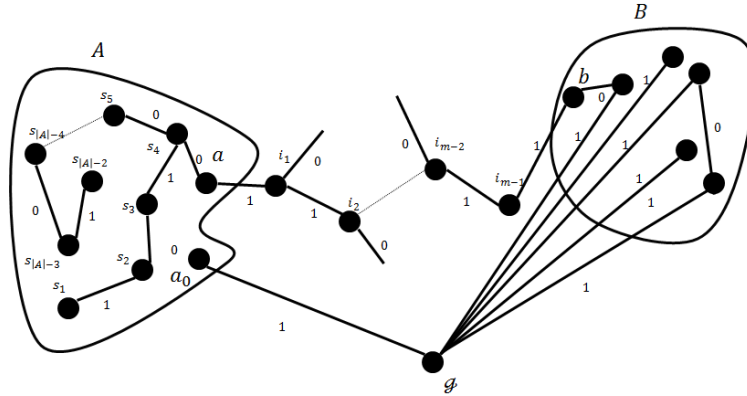
Sachant que  $G(\widehat{n_1 + n_2})$  admet  $C = (\{j_1, j_2\})$  comme composante connexe où  $j_1$  et  $j_2$  sont un couple isolé, alors  $|C \cap (A \cup g)|$  ne peut pas être impair, d'où  $\widehat{n_1 + n_2} \notin \mathfrak{F}_A$ . De plus, on a

$$w(n_1) = 1 \text{ et } w(n_2) = \prod_{i \in B \cup \{a\}} J_{ig} \prod_{k=1}^{\frac{|A|-1}{2}} J_{j_{2k-1}j_{2k}} \neq 0$$

ce qui contredit 3.53.

- Si  $|A|$  est pair, on choisit encore  $n_1 = 0$ . Soit  $a_0 \in A$  tel que  $A \setminus \{a, a_0\}$  reste connexe, alors il existe un chemin  $(s_k s_{k+1})_{k=0,\dots,|A|-2}$  qui traverse les entités de  $A \setminus \{a, a_0\}$ . Soit  $n_2$  tel que (voir figure 3.36)

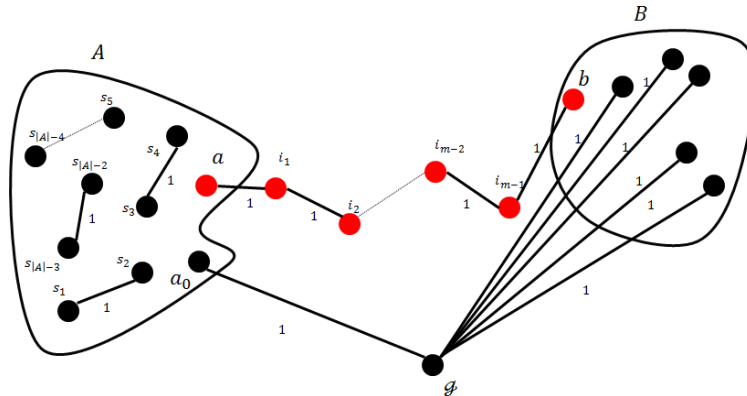
$$n_{2,ig} = \mathbb{1}[i \in B \setminus \{b\} \cup \{a_0\}], n_{2,s_k s_{k+1}} = \mathbb{1}[k \text{ impair}] \text{ and } n_{2,i_k i_{k+1}} = 1$$


 FIGURE 3.36 – Le courant  $n_2$ .

On peut voir que si  $i \in A \cup B$ ,  $X(n_2, i) = 1$  et 0 sinon, alors  $\partial n_2 = A \cup B$ . Donc,

$$\widehat{n_1 + n_2} = \{i \sim g\}_{i \in B \setminus \{b\} \cup \{a_0\}} \cup \{i_k i_{k+1}\}_{k=0, \dots, m-1} \cup \{s_k \sim s_{k+1}\}_{k=1, 3, \dots, |A|-3}$$

Ceci induit alors un sous réseau  $G(\widehat{n_1 + n_2})$  comme le montre la figure 3.37 ci-dessous :


 FIGURE 3.37 – Le réseau  $G(\widehat{n_1 + n_2})$ .

En désigne dans cette figure en rouge la composante connexe de celui-ci dont l'intersection avec  $A$  est  $\{a\}$ . Donc  $\widehat{n_1 + n_2} \notin \mathfrak{F}_A$ . De plus, on a

$$w(n_1)w(n_2) = \prod_{\substack{i \sim g \\ i \in \{a_0\} \cup B \setminus \{b\}}} J_{i g} \prod_{k=0}^{m-1} J_{i_k i_{k+1}} \prod_{k=1}^{\frac{|A|}{2}-1} J_{s_{2k-1} s_{2k}} \neq 0$$

Donc nous avons encore une fois un couple de courants qui contredit 3.53.

En conclusion, si  $A \cap B = \emptyset$  alors

$$\langle X_A, X_B \rangle_G = 0 \Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont séparés par deux sous-réseaux indépendants.}$$

Pour le cas  $A \cap B \neq \emptyset$ , on peut se ramener au cas précédant en prenant  $A \setminus B$  et  $B \setminus A$  et en considérant deux courants  $n_1, n_2$  tels que  $\partial n_1 = \emptyset$ ,  $\partial n_2 = A \setminus B \cup B \setminus A = A \Delta B$  et  $\widehat{n_1 + n_2} \notin \mathfrak{F}_A$  pour garantir  $\langle X_A, X_B \rangle_G \neq 0$ . De cette façon on obtient  $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \langle X_A, X_B \rangle_G \neq 0$ , ce qui termine la démonstration du théorème.

### 3.9.2.3 Preuve du lemme 3.2

Pour prouver ce lemme, nous allons utiliser les courants aléatoires et notamment la représentation via la mesure  $\mathbb{Q}_G$ . Nous avons alors

$$\text{Cov}_G(X_i, X_j X_k) = \frac{\mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = \{i, j, k\}, \partial n_2 = \emptyset, i \xrightarrow{\eta_1 + \eta_2} \mathfrak{g})}{\mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = \emptyset, \partial n_2 = \emptyset)} \quad (3.54)$$

Les conditions sur  $n_1$  et  $n_2$  dans le numérateur de cette formule impliquent que  $i$  devrait être connecté soit à  $j$  soit à  $k$  via  $\widehat{n_1 + n_2}$ . En effet, si une entité est une source de ce courant (elle dans  $\partial(n_1 + n_2)$ ) qui n'est pas connectée  $\mathfrak{g}$  dans  $G(\widehat{n_1 + n_2})$ , alors pour des raisons de parité des  $X(\cdot, n_k)$  elle ne peut pas être connectée aux deux entités qui restent. Soit  $C_{n_1+n_2}(i)$  la composante connexe de  $i$  dans  $G(n_1 + n_2)$ , on considère le cas où  $j \in C_{n_1+n_2}(i)$ . On a alors  $k$  est connecté à  $\mathfrak{g}$  puisque c'est une source isolée des autres sources. On peut alors décomposer le numérateur de la formule 3.54 en conditionnant par l'évènement  $\mathcal{E}_C := \{C_{n_1+n_2}(i) = C\}$  où  $C$  est un ensemble connexe contenant  $j$  mais pas  $k$ . En effet, la frontière de  $C$  sépare les évènements sur  $C$  de ceux sur  $G \setminus C$  et les rend indépendant via la mesure utilisée. Par conséquent, on a

$$\mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = \{i, j, k\}, \partial n_2 = \emptyset, i \xrightarrow{\eta_1 + \eta_2} \mathfrak{g} | \mathcal{E}_C) = \mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = \{i, j\}, \partial n_2 = \emptyset, i \xrightarrow{\eta_1 + \eta_2} \mathfrak{g} | \mathcal{E}_C) \mathbb{Q}_{G \setminus C}^{(2)}(\partial n_1 = \{k\}, \partial n_2 = \emptyset) \quad (3.55)$$

D'autre part, si  $G'$  est un sous réseau de  $G$  avec une matrice de connectivités  $J'$ , alors  $G'$  pourrait être obtenu  $G$  en prenant  $J_e = 0$  pour  $e \in E(V \setminus V')$ , par la suite  $J \geq J' \geq 0$ . En outre,  $\partial_{B_i} \mathbb{E}_G(X_A) = \text{Cov}_G(X_A, X_i) \geq 0$  by GSK 3.2 pour tout  $A \subset V$ , donc  $\mathbb{E}_G(X_A) \geq \mathbb{E}_{G'}(X_A)$ . En particulier, on a

$$\mathbb{E}_C(X_k) \leq \mathbb{E}_G(X_k) \quad (3.56)$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{G \setminus C}^{(2)}(\partial n_1 = \{k\}, \partial n_2 = \emptyset) &= \mathbb{E}_C(X_k) \mathbb{Q}_{G \setminus C}^{(2)}(\partial n_1 = \emptyset, \partial n_2 = \emptyset) \\ &\leq \mathbb{E}_G(X_k) \mathbb{Q}_{G \setminus C}^{(2)}(\partial n_1 = \emptyset, \partial n_2 = \emptyset) \\ &\leq \mathbb{E}_G(X_k) \end{aligned}$$

Donc de 3.55 et l'inégalité précédente on déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = \{i, j, k\}, \partial n_2 = \emptyset, i \xrightarrow{\eta_1 + \eta_2} \mathfrak{g}, j \in C_{n_1+n_2}(i)) &= \sum_{\substack{C \subset G \\ j \in C, k \notin C}} \mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = \{i, j, k\}, \partial n_2 = \emptyset, i \xrightarrow{\eta_1 + \eta_2} \mathfrak{g}, \mathcal{E}_C) \\ &\leq \mathbb{E}_G(X_k) \sum_{\substack{C \subset G \\ j \in C, k \notin C}} \mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = \{i, j\}, \partial n_2 = \emptyset, i \xrightarrow{\eta_1 + \eta_2} \mathfrak{g}, \mathcal{E}_C) \\ &\leq \mathbb{E}_G(X_k) \mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = \{i, j\}, \partial n_2 = \emptyset, i \xrightarrow{\eta_1 + \eta_2} \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

En utilisant les même arguments sur le cas  $k \in C_{n_1+n_2}(i)$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = \{i, j, k\}, \partial n_2 = \emptyset, i \xrightarrow{\eta_1+n_2} \mathfrak{g}) &\leq \mathbb{E}_G(X_k) \mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = \{i, j\}, \partial n_2 = \emptyset, i \xrightarrow{\eta_1+n_2} \mathfrak{g}) \\ &+ \mathbb{E}_G(X_j) \mathbb{Q}_G^{(2)}(\partial n_1 = \{i, k\}, \partial n_2 = \emptyset, i \xrightarrow{\eta_1+n_2} \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

### 3.9.2.4 Preuve du lemme 3.3

1. Soient  $i, j, k, s \in V$  tels que  $(k, s) \neq (i, j)$ . On a d'après la représentation en courants aléatoires et le lemme 3.1 les formules suivantes :

$$\begin{aligned} Cov_G(X_i X_j, X_k X_s) &= \frac{\sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, k, s\} \\ \partial n_2 = \emptyset}} w(n_1) w(n_2) \mathbb{1}[k \xrightarrow{\eta_1+n_2} s]}{\sum_{\partial n_1 = \partial n_2 = \emptyset} w(n_1) w(n_2)} \\ \mathbb{E}_G(X_s) Cov_G(X_i X_j, X_k) &= \frac{\sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, k\} \\ \partial n_2 = \emptyset \\ \partial n_3 = \{s\}}} w(n_1) w(n_2) w(n_3) \mathbb{1}[k \xrightarrow{\eta_1+n_2} \mathfrak{g}]}{\sum_{\partial n_1 = \partial n_2 = \partial n_3 = \emptyset} w(n_1) w(n_2) w(n_3)} \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}_G(X_k) Cov_G(X_i X_j, X_s) = \frac{\sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, s\} \\ \partial n_2 = \emptyset \\ \partial n_3 = \{k\}}} w(n_1) w(n_2) w(n_3) \mathbb{1}[s \xrightarrow{\eta_1+n_2} \mathfrak{g}]}{\sum_{\partial n_1 = \partial n_2 = \partial n_3 = \emptyset} w(n_1) w(n_2) w(n_3)}$$

La première inégalité du lemme est alors équivalente à

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, s\} \\ \partial n_2 = \emptyset \\ \partial n_3 = \{k\}}} w(n_1) w(n_2) w(n_3) \mathbb{1}[s \xrightarrow{\eta_1+n_2} \mathfrak{g}] + \sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, k\} \\ \partial n_2 = \emptyset \\ \partial n_3 = \{s\}}} w(n_1) w(n_2) w(n_3) \mathbb{1}[k \xrightarrow{\eta_1+n_2} \mathfrak{g}] \\ \geq \sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, s, k\} \\ \partial n_2 = \partial n_3 = \emptyset}} w(n_1) w(n_2) w(n_3) \mathbb{1}[s \xrightarrow{\eta_1+n_2} k] \end{aligned} \tag{3.57}$$

Pour prouver 3.57, nous allons utiliser des techniques de combinatoire sur des multi-graphes comme celles utilisées dans la preuve du lemme 3.1. A tout courant  $n$  on associe un multi-graphe  $G_n$  tel que pour tout  $e \in E(V_{\mathfrak{g}})$ ,  $n_e$  est le nombre t'arêtes entre les noeuds de l'arrête  $e$ , donc les sources  $\partial n$  sont les noeuds possédant un nombre impair de connexions dans  $G_n$ . Afin de comparer les deux termes de l'inégalité en question, notre stratégie consiste à fixer  $n_1 + n_3$  et  $n_2$

et décomposer le terme de droite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, s, k\} \\ \partial n_2 = \partial n_3 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)w(n_3) \mathbb{1}[s \xrightarrow{\eta+n_2} k] &= \sum_{C \subset V_g} \sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, s, k\} \\ \partial n_2 = \partial n_3 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)w(n_3) \mathbb{1}[s \notin C_{n_1+n_2}(k) = C \ni g] \\
 &+ \sum_{C \subset V_g} \sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, s, k\} \\ \partial n_2 = \partial n_3 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)w(n_3) \mathbb{1}[s, g \notin C_{n_1+n_2}(k) = C]
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

où  $C \subset V_g$  sont connexes car ils sont des composantes connexes de  $k$ . On fixe alors une telle composante  $C$ , on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, s, k\} \\ \partial n_2 = \partial n_3 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)w(n_3) \mathbb{1}[g, s \notin C_{n_1+n_2}(k) = C] &= \sum_{\substack{\partial n_2 = \emptyset \\ \partial m = \{i, j, k, s\}}} \sum_{n_1+n_3=m} w(n_1)w(n_2)w(n_3) \mathbb{1}[g, s \notin C_{n_1+n_2}(k) = C] \\
 &= \sum_{\substack{\partial n_2 = \emptyset \\ \partial m = \{i, j, k, s\}}} \sum_{n_1+n_3=m} w(m)w(n_2) \prod_e \frac{m_e}{n_{1,e}! n_{3,e}!} \mathbb{1}[g, s \notin C_{n_1+n_2}(k) = C] \\
 &= \sum_{\substack{\partial n_2 = \emptyset \\ \partial m = \{i, j, k, s\}}} w(m)w(n_2) |N_m(\{s, g\}, C, n_2)|
 \end{aligned}$$

la quantité suivante  $\sum_{n_1+n_3=m} \prod_e \frac{m_e}{n_{1,e}! n_{3,e}!}$  représente le nombre de sous-graphes de  $G_m$  de sources  $\{i, j, k, s\}$ , et  $N_m(\{s, g\}, C, n_2)$  est l'ensemble des sous-graphes de  $G_m$  de mêmes sources et dont la composante connexe de  $k$  est égale à  $C$  et ne contient ni  $s$  ni l'entité fantôme  $g$ .

On remarque que pour tout  $C$  et  $n_2$ , l'évènement  $\{g, s \notin C_{n_1+n_2}(k) = C\}$  est inclus dans  $\{g \notin C_{n_1+n_2}(k) = C\}$ , donc  $|N_m(\{s, g\}, C, n_2)|$  est majoré par  $|N_m(\{g\}, C, n_2)|$ . D'où

$$\sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, s, k\} \\ \partial n_2 = \partial n_3 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)w(n_3) \mathbb{1}[g, s \notin C_{n_1+n_2}(k) = C] \leq \sum_{\substack{\partial n_2 = \emptyset \\ \partial m = \{i, j, k, s\}}} w(m)w(n_2) |N_m(\{g\}, C, n_2)| \tag{3.59}$$

Soit  $K$  un sous graphe de  $N_m(\{s, g\}, C, n_2)$ , on peut écrire  $m = n_1 + n_3 = n'_1 + n'_3$  où les courants  $n'_1$  et  $n'_3$  vérifient  $\partial n'_1 = \{i, j, k\}$  et  $\partial n'_3 = \{s\}$  sans avoir changé  $C$ , ce qui vient de l'indépendance de  $C$  des conditions de parité. Cela définit alors une injection de  $n \mapsto n'$  de  $N_m(\{s, g\}, C, n_2)$  vers l'ensemble des sous-graphes de  $G_m$  qui vérifient ces nouvelles conditions. Ce qui donne une majoration du terme de droite de l'inégalité 3.59, et par suite

$$\sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, s, k\} \\ \partial n_2 = \partial n_3 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)w(n_3) \mathbb{1}[g, s \notin C_{n_1+n_2}(k) = C] \leq \sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, k\} \\ \partial n_2 = \emptyset \\ \partial n_3 = \{s\}}} w(n_1)w(n_2)w(n_3) \mathbb{1}[g \notin C_{n_1+n_2}(k) = C] \tag{3.60}$$

Pour la deuxième somme partielle du terme de droite de 3.58, on peut appliquer la même technique en procédant à quelques changements qui ramène à celle-ci. En effet, on a

$$\{s \notin C_{n_1+n_2}(k) = C \ni g\} = \{k \notin C_{n_1+n_2}(s) = C', k \xrightarrow{n_1+n_2} g\} \subset \{k, g \notin C_{n_1+n_2}(s) = C'\}$$

donc on a la majoration suivante :

$$\sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, s, k\} \\ \partial n_2 = \partial n_3 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)w(n_3)\mathbb{1}[s \notin C_{n_1+n_2}(k) = C \ni g] \leq \sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j, s, k\} \\ \partial n_2 = \partial n_3 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)w(n_3)\mathbb{1}[k, g \notin C_{n_1+n_2}(s) = C'] \quad (3.61)$$

ce qui nous permet de majorer le terme de droite en permutant  $k$  et  $s$ . En sommant les termes des inégalités 3.60 et 3.61 sur  $C$  et  $C'$  respectivement on déduit l'inégalité 3.57, ce qui prouve la première inégalité du lemme.

2. Soient  $i, j \in V$ , on pose  $\alpha_i := \mathbb{E}_G(X_i)$ ,  $\alpha_j := \mathbb{E}_G(X_j)$  et  $\alpha_{ij} := \mathbb{E}_G(X_i X_j)$ . La deuxième inégalité du lemme peut s'écrire

$$1 - \alpha_{ij}^2 - \alpha_i(\alpha_i - \alpha_j \alpha_{ij}) - \alpha_j(\alpha_j - \alpha_i \alpha_{ij}) \leq 0$$

ce qui est équivalent à l'inégalité de Cauchy-Schwartz  $Cov_G(X_i, X_j) = \alpha_{ij} - \alpha_i \alpha_j \leq \sqrt{(1 - \alpha_i^2)(1 - \alpha_j^2)}$ , ce qui prouve sa véracité.

3. En utilisant les même notations que dans l'inégalité précédente, notre troisième inégalité s'écrit

$$1 - \alpha_{ij}^2 - (\alpha_i - \alpha_j \alpha_{ij}) - (\alpha_j - \alpha_i \alpha_{ij}) \geq 0$$

Comme le terme de gauche se factorise de cette manière  $(1 - \alpha_{ij})(\alpha_{ij} - \alpha_i - \alpha_j + 1)$ , et  $\mathbb{E}_G((1 - X_i)(1 - X_j)) = \alpha_{ij} - \alpha_i - \alpha_j + 1 \geq 0$ , alors l'inégalité est vraie.

### 3.9.2.5 Preuve de la décente exponentielle de la covariance 3.5

En utilisant la représentation en courants, on a pour tout  $i$  et  $j$  :

$$Cov_G(X_i, X_j) = \frac{\sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j\} \\ \partial n_2 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)\mathbb{1}[\widehat{n_1 + n_2} \notin \mathfrak{F}_{\{i\}}]}{\sum_{\substack{\partial n_1 = \emptyset \\ \partial n_2 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)}$$

La cohérence nous donne  $J_e \geq 0$  pour tout  $e \in E(V_g)$ , et par conséquent  $w(n) \geq 0$ . D'autre part, on a  $\{\widehat{n_1 + n_2} \notin \mathfrak{F}_{\{i\}}\} = \{i \xrightarrow{\eta_1 + \eta_2} g\} \subset \{i \xrightarrow{\eta_1} g\} = \{\widehat{n_1} \notin \mathfrak{F}_{\{i\}}\}$ , donc

$$\sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j\} \\ \partial n_2 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)\mathbb{1}[\widehat{n_1 + n_2} \notin \mathfrak{F}_{\{i\}}] \leq \sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j\} \\ \partial n_2 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2)\mathbb{1}[\widehat{n_1} \notin \mathfrak{F}_{\{i\}}]$$

d'où la majoration

$$Cov_G(X_i, X_j) \leq \frac{\sum_{\partial n_1 = \{i, j\}} w(n_1)\mathbb{1}[\widehat{n_1} \notin \mathfrak{F}_{\{i\}}]}{\sum_{\partial n_1 = \emptyset} w(n_1)} = \frac{A(\{i, j\})}{A(\emptyset)}$$

On considère pour toute partie  $C \subset V$  connexe les événements suivants,

$$\mathcal{A}_C := \{n_{ij} = 0; \forall i \in C \text{ et } j \notin C\}$$

$$\mathcal{B}_C := \{\partial n = \{i, j\}\} \cap \{k \xrightarrow{n} i, \forall k \in C\} \cap \{k \xrightarrow{n} j, \forall k \in C\} \cap \{k \not\xrightarrow{n} g, \forall k \in C\}$$

on note  $n|_C$  la restriction  $(n_{ij})_{(i,j) \in E(C)}$  de  $n = (n_{ij})_{(i,j) \in E(V)}$  sur  $C$ , et  $n_{I \sim J} := (n_{ij})_{i \in I, j \in J}$ . On décomposant le terme  $A(\{i, j\})$  comme suit :

$$\begin{aligned} A(\{i, j\}) &= \sum_{\partial n = \{i, j\}} w(n) \mathbb{1}[i \not\xrightarrow{n} g] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^{E(V_g)}} w(n) \mathbb{1}[i \not\xrightarrow{n} g] \mathbb{1}[\partial n = \{i, j\}] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^{E(V_g)}} w(n) \sum_{\substack{C \subseteq V \\ i, j \in C}} \mathbb{1}[k \xrightarrow{n|_C} i, k \xrightarrow{n|_C} j, \forall k \in C] \mathbb{1}[k \not\xrightarrow{n|_C} g, \forall k \in C] \mathbb{1}[\partial n = \{i, j\}] \mathbb{1}[\mathcal{A}_C] \\ &= \sum_{\substack{C \subseteq V \\ i, j \in C}} \sum_{n \in \mathbb{N}^{E(V_g)}} w(n) \mathbb{1}[k \xrightarrow{n|_C} i, k \xrightarrow{n|_C} j, \forall k \in C] \mathbb{1}[k \not\xrightarrow{n|_C} g, \forall k \in C] \mathbb{1}[\partial n = \{i, j\}] \mathbb{1}[\mathcal{A}_C] \end{aligned}$$

Or  $i, j \in C$ , alors

$$\{\partial n = \{i, j\}\} = \{\partial n|_C = \{i, j\}\} \text{ et } \partial n_{V \setminus C} = \emptyset \text{ et } \partial n_{V \setminus C \sim C} = \emptyset$$

Donc

$$\begin{aligned} A(\{i, j\}) &= \sum_{\substack{C \subseteq V \\ i, j \in C}} \sum_{n \in \mathbb{N}^{E(V_g)}} w(n) \mathbb{1}[n \in \mathcal{A}_C] \mathbb{1}[\partial n_{V \setminus C} = \emptyset \text{ et } \partial n_{V \setminus C \sim C} = \emptyset] \mathbb{1}[n \in \mathcal{B}_C] \\ &= \sum_{\substack{C \subseteq V \\ i, j \in C}} \sum_{n \in \mathbb{N}^{E(V_g)}} \prod_{(i, j) \in E(V_g)} \frac{j^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \mathbb{1}[n \in \mathcal{A}_C] \mathbb{1}[\partial n_{V_g \setminus C} = \emptyset \text{ et } \partial n_{V \setminus C \sim C} = \emptyset] \mathbb{1}[n \in \mathcal{B}_C] \\ &= \sum_{\substack{C \subseteq V \\ i, j \in C}} \sum_{n \in \mathbb{N}^{E(V_g)}} \prod_{(i, j) \in E(C)} \frac{j^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \prod_{(i, j) \in E(V_g \setminus C)} \frac{j^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \mathbb{1}[\partial n_{V \setminus C} = \emptyset] \mathbb{1}[n \in \mathcal{B}_C] \\ &= \sum_{\substack{C \subseteq V \\ i, j \in C}} |V \setminus C| |C| \sum_{\substack{n|_C \in \mathbb{N}^{E(C)} \\ n_{V \setminus C} \in \mathbb{N}^{E(V_g \setminus C)}}} w(n|_C) w(n_{V \setminus C}) \mathbb{1}[\partial n_{V \setminus C} = \emptyset] \mathbb{1}[n|_C \in \mathcal{B}_C] \\ &= \sum_{\substack{C \subseteq V \\ i, j \in C}} |V \setminus C| |C| \underbrace{\sum_{n|_C \in \mathbb{N}^{E(C)}} w(n|_C) \mathbb{1}[n|_C \in \mathcal{B}_C]}_{=Q_C(\mathcal{B}_C)} \underbrace{\sum_{n_{V \setminus C} \in \mathbb{N}^{E(V_g \setminus C)}} w(n_{V \setminus C}) \mathbb{1}[\partial n_{V \setminus C} = \emptyset]}_{=Q_{V \setminus C}(\partial n = \emptyset)} \end{aligned}$$

Pour décomposer cette fois-ci le terme  $A(\emptyset)$ , on pose d'abord  $\mathcal{C}_C := \{\partial n = \emptyset\} \cap \{k \xrightarrow{n} i \text{ ou } k \xrightarrow{n} j\}$



$j, \forall k \in C$ , on a

$$\begin{aligned}
 A(\emptyset) &= \sum_{\partial n = \emptyset} w(n) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}^{\mathcal{E}(V_g)}} w(n) \mathbb{1}[\partial n = \emptyset] \sum_{\substack{C \subseteq V \\ i, j \in C}} \mathbb{1}[k \xrightarrow{n} i \text{ ou } k \xrightarrow{n} j, \forall k \in C] \mathbb{1}[n \in \mathcal{A}_C] \\
 &= \sum_{\substack{C \subseteq V \\ i, j \in C}} \sum_{n \in \mathbb{N}^{\mathcal{E}(V_g)}} w(n) \mathbb{1}[n \in \mathcal{C}_C] \mathbb{1}[n \in \mathcal{A}_C] \\
 &= \sum_{\substack{C \subseteq V \\ i, j \in C}} \sum_{n \in \mathbb{N}^{\mathcal{E}(V_g)}} \prod_{(i, j) \in \mathcal{E}(C)} \frac{j_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \prod_{(i, j) \in \mathcal{E}(V \setminus C)} \frac{j_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \mathbb{1}[n \in \mathcal{C}_C] \\
 &= \sum_{\substack{C \subseteq V \\ i, j \in C}} |V \setminus C| |C| \underbrace{\sum_{n_{|C} \in \mathbb{N}^{\mathcal{E}(C)}} w(n_{|C}) \mathbb{1}[n_{|C} \in \mathcal{C}_C]}_{=Q_C(\mathcal{C}_C)} \underbrace{\sum_{n_{|V \setminus C} \in \mathbb{N}^{\mathcal{E}(V_g \setminus C)}} w(n_{|V \setminus C}) \mathbb{1}[\partial n_{|V \setminus C} = \emptyset]}_{=Q_{V \setminus C}(\partial n = \emptyset)}
 \end{aligned}$$

Si on arrive à prouver qu'il existe  $c > 0$  tel que  $\forall C \subseteq V$ ,

$$\frac{Q_C(\mathcal{B}_C)}{Q_C(\mathcal{C}_C)} \leq \exp(-c|C|)$$

alors en utilisant le fait que  $|C| \geq \gamma(i, j)$  on obtient

$$\frac{Q_C(\mathcal{B}_C)}{Q_C(\mathcal{C}_C)} \leq \exp(-c\gamma(i, j)) \quad (3.62)$$

ce qui résout le problème vu que  $A(i, j)$  and  $A(\emptyset)$  contiennent les mêmes termes.

Soit  $n$  un courants sur  $C$  tel que  $\partial n = \{i, j\}$  et  $i \xrightarrow{n} g$ . On associe à  $n$  l'ensemble de courants

$$\mathcal{F}_n := \{m = n + \sum_{k \in C} 2r_k \mathbb{1}[e = (k, g)] + \mathbb{1}[e = (i, g)] + \mathbb{1}[e = (j, g)], r_k \in \mathbb{N}, \forall k \in C\}$$

Chaque courant  $m$  de  $\mathcal{F}_n$  vérifie  $\partial m = \emptyset$ , et connecte tout élément de  $C$  à  $i$  ou  $j$ , donc  $m \in \mathcal{C}_C$ . De plus, la collection des ensembles  $(\mathcal{F}_n)_n$  est disjointe. En effet, si  $m \in \mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}_{n'}$  alors

$$n - n' = \sum_{k \in C} 2(r_k - r'_k) \mathbb{1}[e = (k, g)]$$

et donc  $n - n' = 0$  sur les arêtes  $e \notin C \sim g$ , or  $n_{kg} = n'_{kg} = 0$  pour tout  $k \in C$ , alors  $n = n'$ , d'où la disjonction.

On considère maintenant les sommes partielles sur chaque ensemble  $\mathcal{F}_n$ , on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{F}_n} w(\mathbf{m}) &= \sum_{(r_k)_{k \in C} \in \mathbb{N}^{|C|}} \prod_{e \in E(C)} \frac{J_e^{n_e}}{n_e!} \prod_{k \in C} \frac{J_{kg}^{n_{kg}}}{n_{kg}!} \\
 &= \prod_{e \in E(C)} \frac{J_e^{n_e}}{n_e!} \sum_{(r_k)_{k \in C} \in \mathbb{N}^{|C|}} \frac{J_{ig}^{2r_i+1}}{(2r_i+1)!} \frac{J_{jg}^{2r_j+1}}{(2r_j+1)!} \prod_{k \in C \setminus \{i,j\}} \frac{J_{kg}^{2r_k}}{(2r_k)!} \\
 &= \prod_{e \in E(C)} \frac{J_e^{n_e}}{n_e!} \sinh(J_{ig}) \sinh(J_{jg}) \prod_{C \setminus \{i,j\}} \cosh(J_{kg}) \\
 &= w(n) \sinh(J_{ig}) \sinh(J_{jg}) \prod_{C \setminus \{i,j\}} \cosh(J_{kg})
 \end{aligned}$$

Par convexité de la fonction  $w \mapsto \ln(\sinh(x))$  on a

$$\sinh(J_{ig}) \sinh(J_{jg}) \geq \sinh\left(\frac{J_{ig} + J_{jg}}{2}\right)^2 = e^{2 \ln(\sinh(\frac{J_{ig} + J_{jg}}{2}))}$$

On peut démontrer aisément l'existence de  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \geq 0$ ,  $\cosh(x) \geq e^\alpha$ , donc

$$\prod_{k \in C \setminus \{i,j\}} \cosh(J_{kg}) \geq e^{(|C|-2)\alpha \min_k(J_{kg})}$$

Or  $c(M, T) = \min(\ln(\sinh(\frac{J_{ig} + J_{jg}}{2})), \min_{k \neq i,j}(\alpha J_{kg})) > 0$ , alors

$$\sinh(J_{ig}) \sinh(J_{jg}) \prod_{C \setminus \{i,j\}} \cosh(J_{kg}) \geq e^{2|C| \min_{k \in C}(J_{kg})} = \exp(-c(M, T)|C|)$$

En remarquant que  $\mathcal{C}_C = \cup_{n \in \mathcal{B}_C} \mathcal{F}_n$ , on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned}
 Q_C(\mathcal{B}_C) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_C} w(\mathbf{n}) \\
 &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_C} \frac{\sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{F}_n} w(\mathbf{m})}{\sinh(J_{ig}) \sinh(J_{jg}) \prod_{C \setminus \{i,j\}} \cosh(J_{kg})} \\
 &\leq \exp(-c|C|) \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_C} \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{F}_n} w(\mathbf{m}) \\
 &\leq \exp(-c|C|) \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_C} w(\mathbf{n}) \\
 &\leq \exp(-c\gamma(i, j)) Q_C(\mathcal{C}_C)
 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne l'inégalité désirée 3.62, d'où

$$\text{Cov}_G(X_i, X_j) \leq \exp(-c\gamma(i, j))$$

### 3.9.2.6 Preuve du lemme 3.4

1. Soient  $i, j \in V$  et  $A \subset V$  tels que  $i, j \notin A$ , la première inégalité du lemme est évidente quand  $i = j$ , on suppose donc que  $i \neq j$ . La technique de "clustering" utilisée dans le lemme 3.2 est inefficace dans ce cas, car la variance décroît ( $\sigma_{C, X_i}^2 \geq \sigma_{G, X_i}^2$  pour toute partie  $C \subset V$ ) contrairement à l'espérance ( $\mathbb{E}_C(X_k) \leq \mathbb{E}_G(X_k)$ ), et donc on ne peut pas majorer les sommes partielles. Nous allons à nouveau utiliser la méthode des multi-graphes employée dans la preuve du lemme 3.3, mais cette fois-ci avec deux clusters fixés. D'après la proposition 3.4 on a

$$\sigma_{X_i}^2 = 1 - \mathbb{E}_G(X_i)^2 = \frac{\sum_{\partial n_1 = \partial n_2 = \emptyset} w(n_1)w(n_2) \mathbb{1}[i \xrightarrow{n_1+n_2} g]}{\sum_{\partial n_1 = \partial n_2 = \emptyset} w(n_1)w(n_2)}$$

$$\text{Cov}_G(X_i X_j, X_i) = \frac{\sum_{\substack{\partial n_1 = \{i, j\} \Delta \{i\} = \{j\} \\ \partial n_2 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2) \mathbb{1}[i \xrightarrow{n_1+n_2} g]}{\sum_{\partial n_1 = \partial n_2 = \emptyset} w(n_1)w(n_2)}$$

et

$$\text{Cov}_G(X_i X_j, X_A) = \frac{\sum_{\substack{\partial n_1 = A \Delta \{i, j\} \\ \partial n_2 = \emptyset}} w(n_1)w(n_2) \mathbb{1}[i \xleftarrow{n_1+n_2} j]}{\sum_{\partial n_1 = \partial n_2 = \emptyset} w(n_1)w(n_2)}$$

En multipliant par les termes de l'inégalité en question par  $(\sum_{\partial n = \emptyset} w(n))^6$ , on peut l'exprimer de la manière suivante :

$$A_1 = \sum_{\substack{\partial n_1 = A \cup \{i, j\} \\ \forall p \in \{2, \dots, 6\}; \partial n_p = \emptyset}} \prod_{p=1}^6 w(n_p) \mathbb{1}[i \xleftarrow{n_1+n_2} j] \mathbb{1}[i \xrightarrow{n_3+n_4} g] \mathbb{1}[j \xrightarrow{n_5+n_6} g] \leq$$

$$A_2 = \sum_{\substack{\partial n_1 = A \cup \{i\}, \partial n_3 = \{j\} \\ \forall p \in \{2, 4, 5, 6\}; \partial n_p = \emptyset}} \prod_{p=1}^6 w(n_p) \mathbb{1}[i \xrightarrow{n_1+n_2} g] \mathbb{1}[i \xrightarrow{n_3+n_4} g] \mathbb{1}[j \xrightarrow{n_5+n_6} g] + \quad (3.63)$$

$$A_3 = \sum_{\substack{\partial n_1 = A \cup \{j\}, \partial n_3 = \{i\} \\ \forall p \in \{2, 4, 5, 6\}; \partial n_p = \emptyset}} \prod_{p=1}^6 w(n_p) \mathbb{1}[j \xrightarrow{n_1+n_2} g] \mathbb{1}[j \xrightarrow{n_3+n_4} g] \mathbb{1}[i \xrightarrow{n_5+n_6} g]$$

Pour prouver que  $A_1 \leq A_2 + A_3$ , on décompose  $A_1$  en "conditionnant" par les évènements  $j, g \notin C_{n_1+n_2}(i)$  or  $j \notin C_{n_1+n_2}(i) \ni g$  qui constituent l'évènement  $\{i \xrightarrow{n_1+n_2} j\}$  comme vu précédemment. On a

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sum_{C, C'} \sum_{\substack{\partial n_1 = A \cup \{i, j\} \\ \forall p \in \{2, \dots, 6\}; \partial n_p = \emptyset}} \underbrace{\prod_{p=1}^6 w(n_p) \mathbb{1}[j, g \notin C_{n_1+n_2}(i) = C] \mathbb{1}[g \notin C_{n_3+n_4}(i) = C'] \mathbb{1}[j \xrightarrow{n_5+n_6} g]}_{=B_1(C, C')} \\
 &+ \sum_{C, C'} \sum_{\substack{\partial n_1 = A \cup \{i, j\} \\ \forall p \in \{2, \dots, 6\}; \partial n_p = \emptyset}} \underbrace{\prod_{p=1}^6 w(n_p) \mathbb{1}[i \notin C_{n_1+n_2}(j) = C, i \xrightarrow{n_1+n_2} g] \mathbb{1}[g \notin C_{n_3+n_4}(j) = C'] \mathbb{1}[i \xrightarrow{n_5+n_6} g]}_{=B_2(C, C')}
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Pour deux composantes fixes  $C, C'$ , on considère les sommes partielles pour  $m = n_1 + n_3, n_2$  et  $n_4$  fixes. Soit  $N_m(\{j, g\}, C, C', n_2, n_4)$  l'ensemble des sous-graphes du multi-graphe  $G_m$  qui vérifient  $j, g \notin C_{n_1+n_2}(i) = C$  et  $g \notin C_{n_3+n_4}(i) = C'$ . Par le même raisonnement que dans la preuve du lemme 3.3, cet ensemble est inclus dans  $N_m(\{g\}, C, C', n_2, n_4)$ . Donc

$$\begin{aligned}
 B_1(C, C') &= \sum_{\substack{\partial m = A \cup \{i, j\}, \partial n_2 = \partial n_4 = \emptyset \\ \partial n_5 = \partial n_6 = \emptyset}} w(m) \prod_{p \neq 1, 3} w(n_p) |N_m(\{j, g\}, C, C', n_2, n_4)| \mathbb{1}[j \xrightarrow{n_5+n_6} g] \\
 &\leq \sum_{\substack{\partial m = A \cup \{i, j\}, \partial n_2 = \partial n_4 = \emptyset \\ \partial n_5 = \partial n_6 = \emptyset}} w(m) \prod_{p \neq 1, 3} w(n_p) |N_m(\{g\}, C, C', n_2, n_4)| \mathbb{1}[j \xrightarrow{n_5+n_6} g]
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Soit  $K$  un sous-graphe de  $N_m(\{g\}, C, C', n_2, n_4)$ , comme utilisé dans la preuve de 3.3, on écrit  $m = n'_1 + n'_3$  tel que  $\partial n'_1 = A \Delta \{i\}$  et  $\partial n'_3 = \{j\}$  (ce qui donne en conséquence  $\partial m = (A \Delta i) \Delta \{j\} = A \cup \{i, j\}$ ) sans changer les composantes  $C$  et  $C'$ . Comme  $n \mapsto n'$  définit une injection, on a

$$B_1(C, C') \leq \sum_{\substack{\partial n_1 = A \Delta \{i\}, \partial n_3 = \{j\} \\ \forall p \in \{2, 4, 5, 6\}; \partial n_p = \emptyset}} \prod_{p=1}^6 w(n_p) \mathbb{1}[g \notin C_{n_1+n_2}(i) = C] \mathbb{1}[g \notin C_{n_3+n_4}(i) = C'] \mathbb{1}[j \xrightarrow{n_5+n_6} g] \tag{3.66}$$

D'autre part, l'évènement  $\{i \notin C_{n_1+n_2}(j) = C, i \xrightarrow{n_1+n_2} g\}$  est inclus dans  $\{i, g \notin C_{n_1+n_2}(j) = C\}$ , donc

$$B_2(C, C') \leq \sum_{\substack{\partial n_1 = A \Delta \{i, j\} \\ \forall p \in \{2, \dots, 6\}; \partial n_p = \emptyset}} \prod_{p=1}^6 w(n_p) \mathbb{1}[i, g \notin C_{n_1+n_2}(j) = C] \mathbb{1}[g \notin C_{n_3+n_4}(i) = C'] \mathbb{1}[i \xrightarrow{n_5+n_6} g]$$

En appliquant la même technique en permutant  $i$  et  $j$ , on obtient, comme pour  $B_1(C, C')$ , l'inégalité

$$B_2(C, C') \leq \sum_{\substack{\partial n_1 = A \cup \{j\}, \partial n_3 = \{i\} \\ \forall p \in \{2, 4, 5, 6\}; \partial n_p = \emptyset}} \prod_{p=1}^6 w(n_p) \mathbb{1}[g \notin C_{n_1+n_2}(j) = C] \mathbb{1}[g \notin C_{n_3+n_4}(j) = C'] \mathbb{1}[i \xrightarrow{n_5+n_6} g] \tag{3.67}$$

En sommant les deux termes des inégalités 3.66 et 3.67 sur  $C, C'$  on obtient  $A_1 \leq A_2 + A_3$ , ce qui termine la démonstration.

## PROBLÉMATIQUES DE CALIBRATION

On étudie dans ce chapitre la calibration du modèle introduit dans le chapitre précédent via différentes méthodes. On s'intéresse particulièrement à la calibration des relations par maximum de pseudo-vraisemblance qui permet de capter l'asymétrie des relations, que nous implémentons sur un segment d'un portefeuille de crédit. On étudie également la calibration via des moments d'ordre un et deux, notamment via des moments issues d'une copule Gaussienne. On compare par la suite les deux approches, et on en déduit que le modèle d'interdépendance est plus conservateur en mettant en exergue les points de différence entre les deux approches qui font la différence.

**Mots clés :** Maximum de vraisemblance, Pseudo-vraisemblance, Copule Gaussienne.

### Sommaire

4.1	Introduction . . . . .	154
4.2	Inférence du modèle d'interdépendance . . . . .	155
4.2.1	Maximum de vraisemblance . . . . .	155
4.2.2	Maximum de pseudo-vraisemblance . . . . .	157
4.2.3	Application . . . . .	159
4.3	Calibration par moments d'ordre 1 et 2 . . . . .	161
4.3.1	Cas de deux entités sous relation de support . . . . .	161
4.3.2	Cas d'un réseau homogène de 10 entités sous relations de support . . . . .	171
4.4	Calibration par les moments d'ordre 1 et le moment maximal dans un réseau homogène de 10 entités . . . . .	173
4.5	Conclusion . . . . .	175

## 4.1 Introduction

La calibration du modèle d'Ising est un problème important en statistique, qui consiste à estimer les paramètres du modèle en partant d'observations. Cependant, deux obstructions techniques font la difficulté de ce problème, à savoir la disponibilité des données, et le temps de calcul si les données sont disponibles. Dans le cadre du modèle d'Ising, ce problème de calibration est appelé "problème inverse d'Ising" et il apparaît dans plusieurs disciplines. Ces deux dernières décennies, plusieurs observables microscopiques sont devenues accessibles, mesurables, notamment en biologie où le modèle d'Ising est utilisé dans la reconstruction des structures de neurones ou de gènes. Plusieurs travaux sont alors apparues pour la résolution de ce problème de calibration de différentes manières, dont la pertinence réside principalement dans la rapidité des calculs. En effet, les modèles de champs de Gibbs requièrent beaucoup de calculs, et donc une approche standard de maximum de vraisemblance n'est pas pratique à partir d'un réseau de taille 20.

En risque de crédit, les observations de défaut sont très rares, et ne suffisent pas pour calibrer les modèles. Il est alors impossible d'utiliser des données historiques de défaut pour calibrer un modèle de type Ising. Toutefois, en disposant d'un historique de notations assez large, il est possible de considérer un champs de Gibbs dont les états -1 représentent non pas le défaut mais un état de non-investissement<sup>1</sup>, et donc 1 représente l'inverse. De cette manière, il est possible d'avoir suffisamment d'observations pour calibrer le modèle via un maximum de vraisemblance. Pour palier au problème de capacité de calcul que pose l'utilisation de la vraisemblance, des méthodes qui utilisent une pseudo-vraisemblance sont développées. Celles-ci consistent à utiliser des probabilités conditionnelles moins coûteuses en calculs, ce qui permet de passer d'une complexité algorithmique exponentielle à une polynomiale. En effet, la complexité exponentielle vient des probabilités qui nécessitent le calcul de la constante de normalisation, ce qui est évité par l'utilisation des probabilité conditionnelles. Cette méthode a été introduite par Julian Besag en 1974 [109], et popularisée via plusieurs travaux relativement récents en physique [108, 110]. De plus, le maximum de pseudo-vraisemblance a l'avantage de converger vers un maximum de vraisemblance quand le nombre d'observations tend vers l'infini. Plusieurs approches sont développées sur la base de la pseudo-vraisemblance dans l'inférence du modèle d'Ising, notamment celle de P. Ravikumar et al [113]. Celle-ci consiste à régulariser le problème d'optimisation de la pseudo-vraisemblance via une  $l_1$ -contrainte sur des réseaux de grande dimension, et fournit une condition sur le nombre d'observations, le nombre de noeuds et la taille maximale du voisinage de chaque entité pour laquelle l'estimation des paramètres du modèle est consistante. En cas d'absence d'observations, il est possible de calibrer un tel modèle en utilisant les moments de degré 1 et 2. En effet, [47] démontrent que le modèle est calibrable de manière unique étant données les probabilités marginales et jointes de défaut de chaque du réseau considéré. Comme

1. Un état de non-investissement est une note en dessous de la note BB, il représente un état de difficulté de la firme.

nous allons le voir dans la suite, cette approche a un lien avec le maximum de vraisemblance.

Dans ce chapitre, nous allons utiliser ces méthodes pour calibrer notre modèle, et nous allons discuter et comparer celles-ci pour déterminer lesquelles d'entre elles sont les plus adaptées à un modèle asymétrique comme le notre. La première section est consacrée aux méthodes de d'inférence par vraisemblance, et la deuxième aux méthodes de calibration par moments. Nous utiliserons dans cette dernière des probabilités issues d'une copule Gaussienne avec une matrice de corrélations et des probabilités marginales qui varient. Nous nous en servirons par la suite afin de comparer la structure de dépendance de notre modèle avec celle d'un modèle de copule Gaussienne.

## 4.2 Inférence du modèle d'interdépendance

On considère des observations  $D = (X^t)_{1 \leq t \leq n}$  i.i.d d'un champs de Gibbs  $X = (X_i)_{i \in V}$  sur un réseau économique  $G = (V, M, T)$ . L'objectif est d'estimer les paramètres  $m_{ij}$ ,  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  et  $c_{ij}$  de chaque relation en supposant que les probabilités intrinsèques  $(p_i^t)_{i \in V}$  sont connues à tout instant  $t$ .

### 4.2.1 Maximum de vraisemblance

Nous allons présenter dans cette section deux façons de calibrer le modèle. La première concerne une calibration des relations étant données les observations  $D$ . L'idée est de normaliser les relations pour réduire le nombre de paramètres, en remplaçant les  $m_{ij}a_{ij}$ ,  $m_{ij}b_{ij}$  et  $m_{ij}c_{ij}$  de chaque relation par des  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  et  $c_{ij}$  qui incorporent les  $m_{ij}$ . Les paramètres à calibrer sont donc les coefficients des relations  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  et  $c_{ij}$  dont le nombre total est de  $3C_{|V|}^2$ . Pour la deuxième approche, nous cherchons à calibrer les probabilités intrinsèques et les connectivités via un maximum de vraisemblance. Cela suppose donc des relations fixes, le nombre de paramètres est donc de  $|V| + C_{|V|}^2$ .

#### 4.2.1.1 Estimation des relations

Tout d'abord, on suppose que les relations sont *unitaires*, ce qui veut dire que  $c_{ij} := c(\delta_{ij}) \in \{-1, 0, 1\}$ . Sous cette hypothèse, on peut remplacer  $m_{ij}\delta_{ij}$  dans le Hamiltonien par  $\delta_{ij}$ , et estimer seulement  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  et  $c_{ij}$ , puis en extraire  $m_{ij}$  en prenant  $\hat{m}_{ij} = |c(\delta_{ij})|$ , et par la suite  $\hat{\delta}_{ij} := \frac{\delta_{ij}}{\hat{m}_{ij}}$ . On note la collections des relations estimées  $\hat{T}$ . La vraisemblance du modèle s'écrit de la manière suivante :

$$\mathcal{L}(T) = \prod_t \mathbb{P}_G(X^t) \quad (4.1)$$

donc

$$\ln(\mathcal{L}(T)) = \sum_t \mathcal{H}_G(X^t) - n \ln(Z_G)$$

où

$$\mathcal{H}_G(X) = \sum_{i \in V} B_i X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} a_{ij} X_i + b_{ij} X_j + c_{ij} X_i X_j$$

et  $Z_G$  est la fonction de normalisation. En dérivant par rapport aux paramètres de la relation, on a pour tout  $(i, j) \in E(V)$  :

$$\begin{aligned} \partial_{a_{ij}} \ln(\mathcal{L}(T)) &= \sum_t X_i^t - n \partial_{a_{ij}} \ln(Z_G) \\ &= \sum_t X_i^t - n \frac{\sum_l l_i \exp(H_G(l))}{Z_G} \\ &= \sum_t X_i^t - n \mathbb{E}_G(X_i) \end{aligned} \quad (4.2)$$

De la même façon, on a

$$\partial_{b_{ij}} \ln(\mathcal{L}(T)) = \sum_t X_j^t - n \mathbb{E}_G(X_j) \quad (4.3)$$

et

$$\partial_{c_{ij}} \ln(\mathcal{L}(T)) = \sum_t X_i^t X_j^t - n \mathbb{E}_G(X_i X_j) \quad (4.4)$$

Les deux premières formules définissent les mêmes équations quand  $(i, j)$  varie dans  $E(V)$ , donc nous avons plus d'inconnues que d'équations indépendantes. Il est alors clair que l'utilisation du maximum de vraisemblance ne marche pas dans le cas où les relations sont asymétriques ( $a_{ij} \neq b_{ij}$ ). On suppose alors dans la suite que toutes les relations sont symétriques, donc elles s'écrivent sous la forme  $\delta_{ij}(X_i, X_j) = a_{ij}(X_i + X_j) + c_{ij} X_i X_j$ . Les paramètres à estimer sont donc les  $a_{ij}$  et les  $c_{ij}$  pour  $(i, j) \in E(V)$ , qui sont les solutions du système d'équations

$$\forall (i, j) \in E(V), \quad \frac{\sum_t X_i^t}{n} = \mathbb{E}_G(X_i) \text{ et } \frac{\sum_t X_i^t X_j^t}{n} = \mathbb{E}_G(X_i X_j)$$

La vraisemblance  $\mathcal{L}$  est une fonction concave et de Hessienne semi-définie négative (voir [112]), ce qui garantit l'unicité de la solution quand elle existe d'une part ; et permet l'application la méthode d'apprentissage des machines de Boltzman (voir [111]).

#### 4.2.1.2 Estimation des probabilités intrinsèques et des connectivités

On suppose cette fois-ci que les relations sont connues, et que les probabilités intrinsèques ne varient pas. On cherche à estimer les autres paramètres du modèle, à savoir  $B = (B_i)_{i \in V}$  et la matrice  $M$ , dont le Hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H}_G(X) = \sum_{i \in V} B_i X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(X_i, X_j)$$

En dérivant le log-vraisemblance  $\mathcal{L}(B, M)$  par rapport aux  $B_i$  et  $m_{ij}$ , on obtient pour tout  $(i, j) \in E(V)$



$$\partial_{B_i} \ln(\mathcal{L}(B, M)) = \sum_t X_i^t - n \mathbb{E}_G(X_i)$$

et

$$\partial_{m_{ij}} \ln(\mathcal{L}(B, M)) = \sum_t \delta_{ij}(X_i^t, X_j^t) - n \mathbb{E}_G(\delta_{ij}(X_i, X_j))$$

les paramètres à estimer  $\hat{B}_i$  et  $\hat{m}_{ij}$  sont la solution du système d'équations :

$$\forall (i, j) \in E(V), \frac{\sum_t X_i^t}{n} = \mathbb{E}_G(X_i) \text{ et } \frac{\sum_t \delta_{ij}(X_i^t, X_j^t)}{n} = \mathbb{E}_G(\delta_{ij}(X_i, X_j)) \quad (4.5)$$

Il est clair que le maximum de vraisemblance ne fonctionne que sur des paramètres symétriques comme les  $m_{ij}$ , donc cette méthode a l'avantage, étant données des relations fixes  $T = (\delta_{ij})_{(i,j)}$ , d'estimer les intensités  $m_{ij}$  de celles-ci en préservant leur asymétrie. Il est donc préférable d'associer à chaque couple une relation bien choisie, qui peut être asymétrique, et estimer les paramètres du modèle en résolvant le système 4.5. Si certains  $\hat{m}_{ij}$  sont négatifs, alors la relation associée au couple  $(i, j)$  devrait être remplacée par la relation  $-\delta_{ij}$ , ce qui permet de rendre  $\hat{m}_{ij}$  positifs par homogénéité.

### 4.2.2 Maximum de pseudo-vraisemblance

Les méthodes d'estimation qui utilisent le maximum de vraisemblance sont beaucoup trop coûteuses en calculs pour qu'elles soient utilisées en pratique. Ce problème vient principalement du calcul des moments qui nécessite à chaque fois le calcul de la fonction de normalisation  $Z_G$ . D'autre part, les probabilités conditionnelles issues du modèle ne font pas apparaître  $Z_G$ , et nécessitent en général beaucoup moins de calculs ; en particulier la probabilité  $\mathbb{P}_G(X_i | (X_j)_{j \in V \setminus i})$  qui peut s'écrire comme une fonction logistique de la manière suivante :

$$\mathbb{P}_G(X_i | (X_j)_{j \in V \setminus i}) = \frac{1}{1 + \exp(-2B_i X_i - 2 \sum_{j \neq i} m_{ij} \delta_{ij}(X_i, X_j))}$$

A partir de ces probabilités conditionnelles on peut écrire la pseudo-vraisemblance qui correspond aux observations  $D$  qui se définit comme suit :

$$\mathcal{L}_p = \prod_t \prod_{i \in V} \mathbb{P}_G(X_i^t | (X_j^t)_{j \in V \setminus i}) \quad (4.6)$$

Cette approche introduite par Julian Besag [109] fournit des estimations qui tendent vers celles du maximum de vraisemblance quand le nombre d'observations  $n$  tend vers l'infini, d'où la nécessité d'avoir suffisamment de données. Comme pour le cas de la vraisemblance, nous allons discuter par la suite la calibration des relations et celles des paramètres dans le cas où les relations sont fixées.

#### 4.2.2.1 Estimation des relations

Nous allons appliquer la même technique que dans la section précédente, en estimant des relations unitaires pour en tirer également les connectivités. On dérive alors le log-pseudo-vraisemblance  $\ln(\mathcal{L}_p(T))$  par rapport aux différents paramètres :

$$\begin{aligned}\partial_{a_{ij}} \ln(\mathcal{L}_p(T)) &= \sum_t \sum_k \partial_{a_{ij}} \ln(\mathbb{P}_G(X_k^t | (X_s^t)_{s \in V \setminus k})) \\ &= \sum_t \partial_{a_{ij}} \ln(\mathbb{P}_G(X_i^t | (X_j^t)_{j \in V \setminus i})) + \partial_{a_{ij}} \ln(\mathbb{P}_G(X_j^t | (X_k^t)_{k \in V \setminus j}))\end{aligned}$$

Car  $\mathbb{P}_G(X_i^t | (X_j^t)_{j \in V \setminus i})$  et  $\mathbb{P}_G(X_j^t | (X_k^t)_{k \in V \setminus j})$  sont les seuls qui contiennent le coefficient  $a_{ij}$ . D'autre part, on a

$$\partial_{a_{ij}} \ln(\mathbb{P}_G(X_i^t | (X_k^t)_{k \in V \setminus i})) = \frac{2X_i^t}{1 + \exp(2B_i^t X_i^t + 2 \sum_{k \neq i} \delta_{ik}(X_i^t, X_k^t))}$$

et

$$\partial_{a_{ij}} \ln(\mathbb{P}_G(X_j^t | (X_k^t)_{k \in V \setminus j})) = \frac{2X_j^t}{1 + \exp(2B_j^t X_j^t + 2 \sum_{k \neq j} \delta_{jk}(X_j^t, X_k^t))}$$

Donc

$$\partial_{a_{ij}} \ln(\mathcal{L}_p(T)) = \sum_t \frac{2X_i^t}{1 + \exp(2B_i^t X_i^t + 2 \sum_{k \neq i} \delta_{ik}(X_i^t, X_k^t))} + \frac{2X_j^t}{1 + \exp(2B_j^t X_j^t + 2 \sum_{k \neq j} \delta_{jk}(X_j^t, X_k^t))} \quad (4.7)$$

De la même manière, on a

$$\partial_{b_{ij}} \ln(\mathcal{L}_p(T)) = \sum_t \frac{2X_j^t}{1 + \exp(2B_i^t X_i^t + 2 \sum_{k \neq i} \delta_{ik}(X_i^t, X_k^t))} + \frac{2X_j^t}{1 + \exp(2B_j^t X_j^t + 2 \sum_{k \neq j} \delta_{jk}(X_j^t, X_k^t))} \quad (4.8)$$

et

$$\partial_{c_{ij}} \ln(\mathcal{L}_p(T)) = \sum_t \frac{2X_i^t X_j^t}{1 + \exp(2B_i^t X_i^t + 2 \sum_{k \neq i} \delta_{ik}(X_i^t, X_k^t))} + \frac{2X_i^t X_j^t}{1 + \exp(2B_j^t X_j^t + 2 \sum_{k \neq j} \delta_{jk}(X_j^t, X_k^t))} \quad (4.9)$$

On remarque d'abord que cette approche est plus adaptée à notre modèle, car contrairement à la vraisemblance, les dérivées par rapport à  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  ne définissent pas les mêmes équations, ce qui permet d'estimer des relations même asymétriques. Les relations  $\hat{T}$  sont alors estimées via les coefficients  $\hat{a}_{ij}$ ,  $\hat{b}_{ij}$  et  $\hat{c}_{ij}$  qui annulent les dérivées 4.7, 4.8 et 4.9.

#### 4.2.2.2 Estimation des probabilités intrinsèques et des connectivités

On suppose cette fois-ci que les relations  $T$  sont connues, et que les probabilités marginales ainsi que la matrice  $M$  sont invariants dans le temps. Pour estimer ceux-ci, nous appliquons la même stratégie que dans la section précédente en estimant  $B = (B_i)_{i \in V}$  et  $M$  qui maximisent

$\mathcal{L}_p(B, M)$ . Il faut alors chercher l'unique couple  $(\hat{B}, \hat{M})$  qui annule pour tout  $(i, j) \in E(V)$  les dérivées suivantes :

$$\partial_{B_i} \ln(\mathcal{L}_p(B, M)) = \sum_t \frac{2X_i^t}{1 + \exp(2B_i X_i^t + 2 \sum_{k \neq i} m_{ik} \delta_{ik}(X_i^t, X_k^t))} \quad (4.10)$$

et

$$\partial_{m_{ij}} \ln(\mathcal{L}_p(B, M)) = \sum_t \frac{2\delta_{ij}(X_i^t, X_j^t)}{1 + \exp(2B_i X_i^t + 2 \sum_{k \neq i} m_{ik} \delta_{ik}(X_i^t, X_k^t))} \quad (4.11)$$

### 4.2.3 Application

#### 4.2.3.1 Méthodologie et data

Nous disposons d'un historique mensuel de notations de 2004 à 2018 d'un portefeuille de crédit, d'une banque européenne, de plus de 31000 entités de différents secteurs, zones et politiques de notation. Comme les observations de défaut sont rares et en plus des états absorbants, alors nous allons considérer deux états *investment grades* et *non-investment grades* qui correspondent à des bonnes et mauvaises notes. L'idée est de dire que les relations et les connectivités sont des invariants par rapport aux états choisis, ce que veut dire que le couple  $(M, T)$  ne dépend pas du choix du champs  $X = (X_i)_{i \in V}$  à valeurs dans  $\{-1, 1\}^V$  où  $G = (V, M, T)$  représente le portefeuille. Nous allons donc changer uniquement les probabilités intrinsèques en remplaçant celles d'être en mauvais rating par celles de défaut. On dit alors que le couple  $(M, T)$  est *universel*.

En guise de simplification, on se restreint à un sous portefeuille de 20 entités d'un même secteur d'activité qu'on considère comme un réseau  $G = (V, M, T)$  complet. Il est plus facile de calibrer le modèle quand on connaît les relations, mais comme nous n'avons pas cette information, nous allons essayer de calibrer les relations comme décrit dans la section précédente. Quant à la calibration sur tout le portefeuille, nous avons encore quelques optimisations d'algorithmes à faire, chose qui sera présentée sans doute dans la version papier de ce chapitre.

#### 4.2.3.2 Résultats

On utilise l'hypothèse d'universalité, et on attribue à chaque entité sa probabilité d'être non-investement qui remplacera sa probabilité intrinsèque de défaut. On utilise le maximum de pseudo-vraisemblance pour calibrer les coefficients  $a, b$  et  $c$  de chaque relation, et on en déduit la matrice  $M$  en utilisant l'unitarité des relations. En suite, on réutilise le couple  $(M, T)$  en revenant aux états de défaut pour calculer les paramètres du risque ( $VaR_\alpha, ES_\alpha$  et  $EL$ ). En appliquant cela, le modèle détecte beaucoup de relations de concurrence, ce qui n'est pas surprenant vu que les entités font partie du même secteur. La figure 4.1 nous montre que toutes les entités ont au moins trois concurrents, et au maximum 13 concurrents. Nous avons également 4 entités qui ont plus de 9 relations de concurrence, et 7 entités qui ont 7 concurrents, qui est d'ailleurs le cas le plus fréquent.

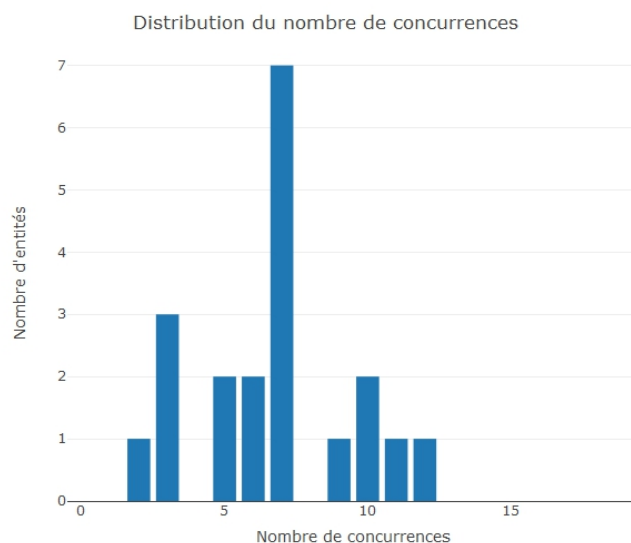


FIGURE 4.1 – Distribution du nombre de concurrences

En regardant la distribution des pertes dans le cas d'indépendance et avec les paramètres calibrés comme représenté dans la figure 4.2, on constate une grande augmentation des pertes. En effet, nous avons une moyenne qui passe de 2.92% à 28.93%, ce qui correspond au deux pics des distributions. De plus, le capital économique donné par  $VaR_{99.9\%}$  passe de 20% à 35%, et les pertes inattendues donnée par  $ES_{99.9\%}$  passe 22.1% à 35.5%. Ce fort impact vient de la concurrence concentrée dans 4 quatre entités dont les probabilités de défaut augmentent très considérablement.

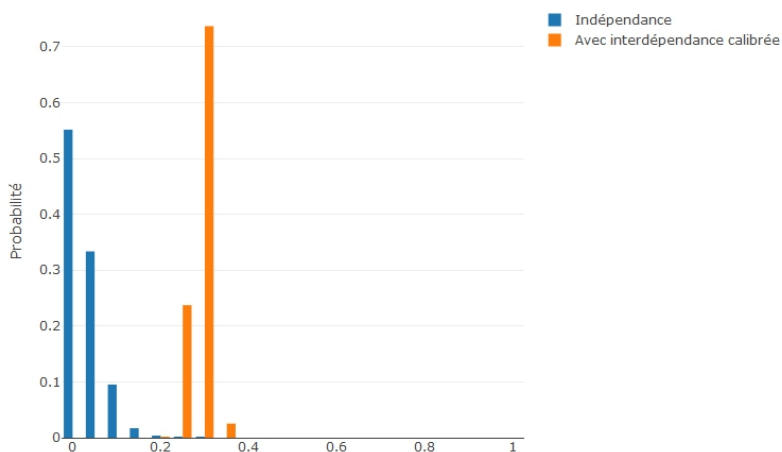


FIGURE 4.2 – Distribution des pertes

Il est vrai que la concurrence a un effet de diversification du portefeuille, mais si sa dis-

tribution dans le réseau n'est pas équilibrée, alors certaines entités seront très affaiblies, ce qui augmentera les pertes espérées. L'exemple étudié nous montre que ce phénomène est assez présent dans des secteurs d'activité, sous réserve que les relations trouvées sont les seules qui maximisent la vraisemblance. En effet, la pseudo-vraisemblance n'est pas forcément concave, donc le maximum trouvé est a priori local, et donne des résultats qui peuvent être différents de ceux qu'on obtiendrait en choisissant un autre maximum. Cependant, cet exemple met en exergue l'impact qu'aurait la prise en compte de l'interdépendance quand nous avons une concurrence concentrée sur une partie du portefeuille.

### 4.3 Calibration par moments d'ordre 1 et 2

Nous avons vu dans la section précédente que la calibration par maximum de vraisemblance consiste à résoudre un système d'équation 4.5 qui égalise les moments empiriques aux moments issus du modèle. Nous avons alors une sorte d'équivalence entre le maximum de vraisemblance et la calibration par moments d'ordre 1 et 2. Toutefois, l'approche maximum de vraisemblance nécessite des données historiques sur les changements d'états des entités du réseau étudié, mais ces données servent uniquement à calculer les moments empiriques. Par conséquent, des données sur les moments d'ordre 1 et 2 suffisent pour calibrer notre modèle. Dans cette section, nous allons traiter ce cas en utilisant des probabilités marginales et jointes de défaut issues d'un modèle à copule Gaussienne, afin de calibrer à la fois les probabilités intrinsèques et les connectivités.

#### 4.3.1 Cas de deux entités sous relation de support

Nous traitons le cas simple de deux entités, qu'on suppose connectés via une relation  $SM$  telle que

$$\delta_{ij}(1, 1) = \delta_{ij}(-1, -1) = 1 \text{ et } \delta_{ij}(1, -1) = \delta_{ij}(-1, 1) = 0 \quad (4.12)$$

Nous avons alors un réseau  $G = (\{i, j\}, M, T)$  de deux entités, avec  $T$  contenant uniquement la relation  $\delta_{ij}$  et  $M = m_{ij}$ . On considère les valeurs  $V_i, V_j$  des deux entités  $i, j$  données par le modèle à facteur sous la forme

$$V_k = \sqrt{\rho}Z + \sqrt{1 - \rho}\epsilon_k, \quad k \in \{i, j\}$$

où  $Z$  et les  $\epsilon_k$  sont des variables normales standards latentes iid. On suppose que les probabilités marginales moyennes de défaut sont  $P_i$  et  $P_j$ , en utilisant l'indépendance conditionnelle à  $Z$  de  $V_i$  et  $V_j$  on peut exprimer la probabilité jointe de défaut comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\rho(V_i < \Phi^{-1}(P_i), V_j < \Phi^{-1}(P_j)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}_\rho(V_i < \Phi^{-1}(P_i), V_j < \Phi^{-1}(P_j) | Z = z) d\Phi(z) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}_\rho(V_i < \Phi^{-1}(P_i) | Z = z) \mathbb{P}_\rho(V_j < \Phi^{-1}(P_j) | Z = z) d\Phi(z) \end{aligned} \quad (4.13)$$

avec  $\mathbb{P}_\rho(V_k < \Phi^{-1}(P_k) | Z = z) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(P_k) - \rho z}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right)$ .

On se donne une corrélation  $\rho$  et des probabilités marginales  $P_i, P_j$ , notre objectif est de calculer les probabilités intrinsèques  $p_i$  et  $p_j$  et la connectivité  $m_{ij}$  par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_G(X_i = X_j = -1) = \mathbb{P}_\rho(V_i < \Phi^{-1}(P_i), V_j < \Phi^{-1}(P_j)) \\ \mathbb{P}_G(X_i = -1) = P_i \\ \mathbb{P}_G(X_j = -1) = P_j \end{cases} \quad (4.14)$$

Nous allons faire cette calibration pour toutes les valeurs du triplet  $(P_i, P_j, \rho)$ , et nous allons étudier la fonction  $(P_i, P_j, \rho) \mapsto (p_i, p_j, m_{ij})$ . Il faut noter que la corrélation maximale  $\rho$  dépend des valeurs de  $P_i$  et  $P_j$ , en effet la corrélation  $\rho$  s'écrit

$$\rho = \frac{\mathbb{P}_\rho(V_i < \Phi^{-1}(P_i), V_j < \Phi^{-1}(P_j)) - P_i P_j}{\sqrt{P_i(1 - P_i)P_j(1 - P_j)}}$$

Comme  $0 \leq \mathbb{P}_\rho(V_i < \Phi^{-1}(P_i), V_j < \Phi^{-1}(P_j)) \leq \min(P_i, P_j)$ , alors

$$\rho_{\min} = \frac{-P_i P_j}{\sqrt{P_i(1 - P_i)P_j(1 - P_j)}} \leq \rho \leq \frac{\min(P_i, P_j) - P_i P_j}{\sqrt{P_i(1 - P_i)P_j(1 - P_j)}} = \rho_{\max}$$

Donc si  $\rho_{\max} = 1$  si et seulement si  $P_i = P_j$  et  $\rho_{\min} = -1$  si et seulement si  $P_i + P_j = 1$ . Cela veut dire que la corrélation de défaut ne peut être égale à 1 que si  $i$  et  $j$  ont la même probabilité de défaut, et qu'elle ne peut être égale à -1 que si le défaut de l'un est équivalent à la survie de l'autre. Ces corrélations négatives représentent des cas de concurrences que nous n'allons pas traiter, et nous allons nous contenter de la calibration sur des corrélations positives.

#### •Le cas homogène :

On suppose que  $P_i = P_j = P$ , ce qui nous permet de faire varier la corrélation de 0 à 1.

La résolution du système 4.14 pour toutes les valeurs de  $(P, \rho) \in [0, 1]^2$  nous définit une fonction  $(p, \rho) \mapsto (p_i = p_j, m_{ij})$ , ce qui veut dire que nous avons deux fonctions  $m_{ij}(P, \rho)$  et  $p_i(P, \rho)$  que nous devons étudier. On désire de plus qu'il y ait correspondance entre  $\rho = 0$  et  $m_{ij} = 0$ , ainsi qu'entre  $\rho = 1$  et  $m_{ij} = +\infty$ . On en déduit via le système que

$$p_i(P, 0) = P \text{ et } p_i(P, 1) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{P} - 1 + 1}}$$

La figure 4.3 ci-dessous représente le graphe de la fonction  $m_{ij}$  en fonction de  $P$  et  $\rho$ , et la figure 4.4 représente des coupes sur la variables  $P$ .

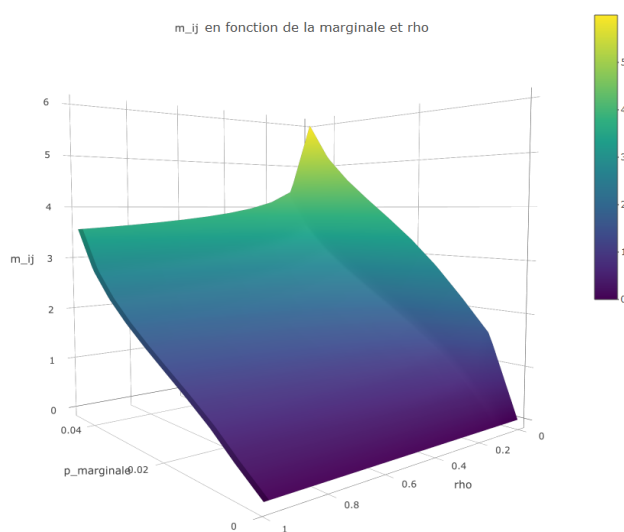


FIGURE 4.3 –  $m_{ij}$  en fonction de  $\rho$  et  $P$ .

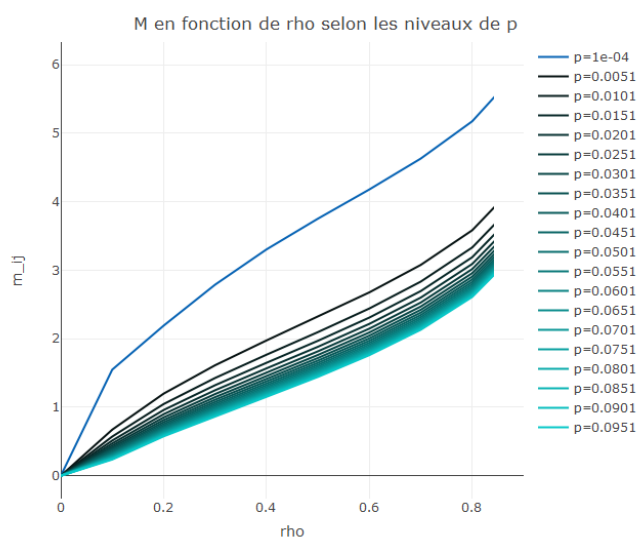


FIGURE 4.4 –  $m_{ij}$  en fonction de  $\rho$  pour différents niveaux de  $P$ .

On peut déduire des deux figures que plus la corrélation  $\rho$  augmente, plus la connectivité  $m_{ij}$  augmente pour un niveau de probabilité marginale  $P$  fixe, ce qui est naturellement attendu comme résultat pour la relation considérée. Tandis que pour une corrélation  $\rho$  fixe, on remarque que  $m_{ij}$  décroît en fonction de  $P$ . Donc la dégradation des entités dans le modèle à copule Gaussienne se traduit par une diminution de la connectivité dans notre modèle quand la corrélation est fixée. Ce comportement vient de la nature de la relation  $SM$  qui fait baisser les probabilités de défaut  $\mathbb{P}_G(X_k = -1)$  pour  $k = i, j$  quand la connectivité augmente. En outre, quand une entité est de

plus en plus systémique (augmentation de  $\rho$  dans le modèle à copule) cela se traduit dans notre modèle par une augmentation de la connectivité si la probabilité marginale  $P$  est fixée. D'autre part, les figures 4.5 et 4.6 représentent l'évolution de la probabilité intrinsèque de défaut  $p_i$  en fonction de  $(P, \rho)$ . On constate que  $p_i$  est croissante par rapport à  $\rho$  et  $P$ , ce qui veut dire que pour un  $P$  fixe, plus une entité est systémique plus sa probabilité intrinsèque est grande dans notre modèle. Cela confirme l'intuition d'une probabilité intrinsèque de défaut qui est reliée au cycle macroéconomique.

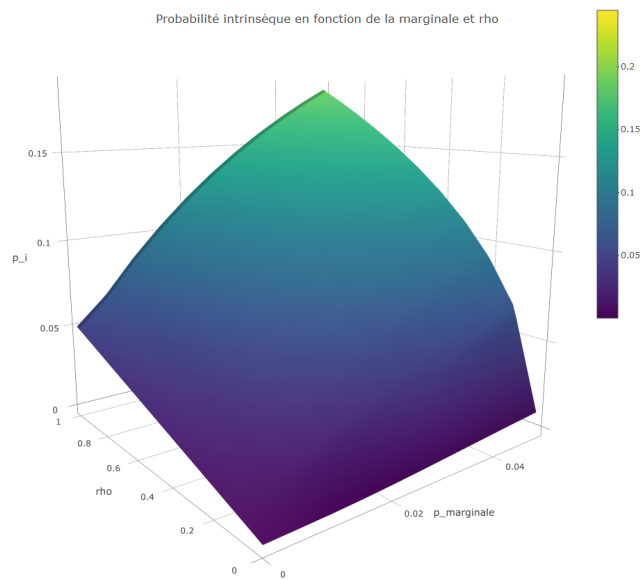


FIGURE 4.5 –  $p_i$  en fonction de  $\rho$  et  $P$ .



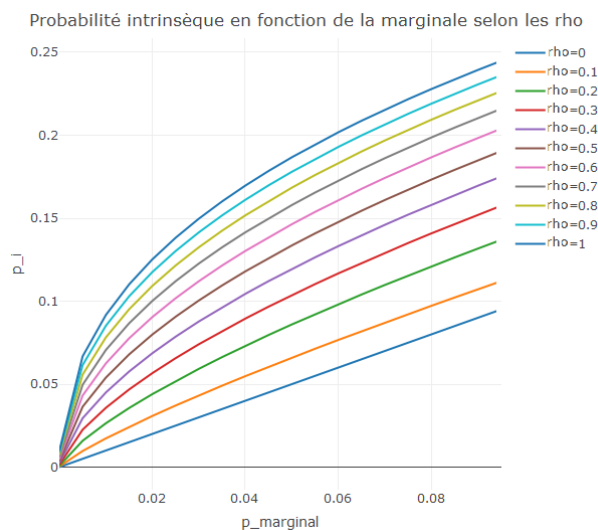


FIGURE 4.6 –  $p_i$  en fonction de  $P(p_{\text{marginal}})$  pour différents niveaux de corrélation.

Il reste maintenant à comparer la corrélation  $\rho$  avec celle produite par le modèle  $\langle X_i, X_j \rangle_G$ . La figure 4.7 nous les variations de  $\langle X_i, X_j \rangle_G$  par rapport à  $\rho$  pour des niveaux fixes de  $P$ . On constate que celle-ci augmente par rapport à  $\rho$  et  $P$ , ceci vient de l'augmentation des probabilités intrinsèques qui font augmenter à leur tour la corrélation  $\langle X_i, X_j \rangle_G$  comme vu dans le chapitre précédent.

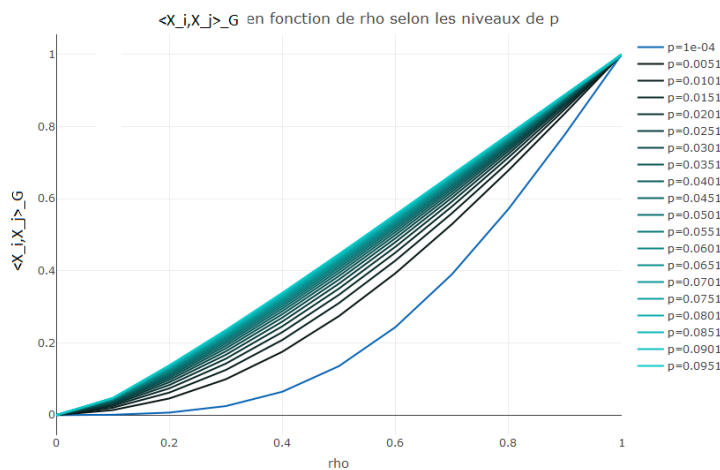


FIGURE 4.7 – la corrélation  $\langle X_i, X_j \rangle_G$  en fonction de  $\rho$  pour différents niveaux de  $P$ .

On constate également que l'augmentation de  $\langle X_i, X_j \rangle_G$  par rapport à  $P$  se fait de manière de plus en plus stationnaire. En effet, quand  $P$  devient assez grand, nous obtenons une droite  $\langle X_i, X_j \rangle_G \approx \rho$  et par conséquent les corrélations des deux modèles deviennent presque égales.

•Le cas hétérogène :

Quand les deux entités n'ont pas forcément du même niveau de risque, alors nous perdons l'hypothèse  $P_i = P_j$ . Nous faisons alors la calibration en faisant varier le triplet  $(P_i, P_j, \rho)$  tel que

$$\rho \leq \frac{\min(P_i, P_j) - P_i P_j}{\sqrt{P_i(1 - P_i)P_j(1 - P_j)}}$$

Nous aurons en conséquence une fonction  $(P_i, P_j, \rho) \mapsto (p_i, p_j, m_{ij})$  qui nous définit trois paramétrisations  $p_i(P_i, P_j, \rho)$ ,  $p_j(P_i, P_j, \rho)$  et  $m_{ij}(P_i, P_j, \rho)$  qui vérifient les conditions initiales

$$p_i(P_i, P_j, 0) = P_i, p_j(P_i, P_j, 0) = P_j \text{ et } m_{ij}(P_i, P_j, 0) = 0$$

La résolution du système pour  $P_i, P_j \in [0.01\%, 10\%]$  et  $\rho \in [0, 1]$ <sup>2</sup> nous donne la fonction  $(\rho, P_i) \mapsto p_i$  de la probabilité intrinsèque de  $i$  pour des  $P_j$  qui varient comme dans la figure 4.9. On constate que  $p_i$  est croissante par rapport à  $P_i$ , ce que nous constatons également dans la figure 4.8 qui montre des coupes dans la surface pour des niveaux de  $(P_j, \rho)$  différents.

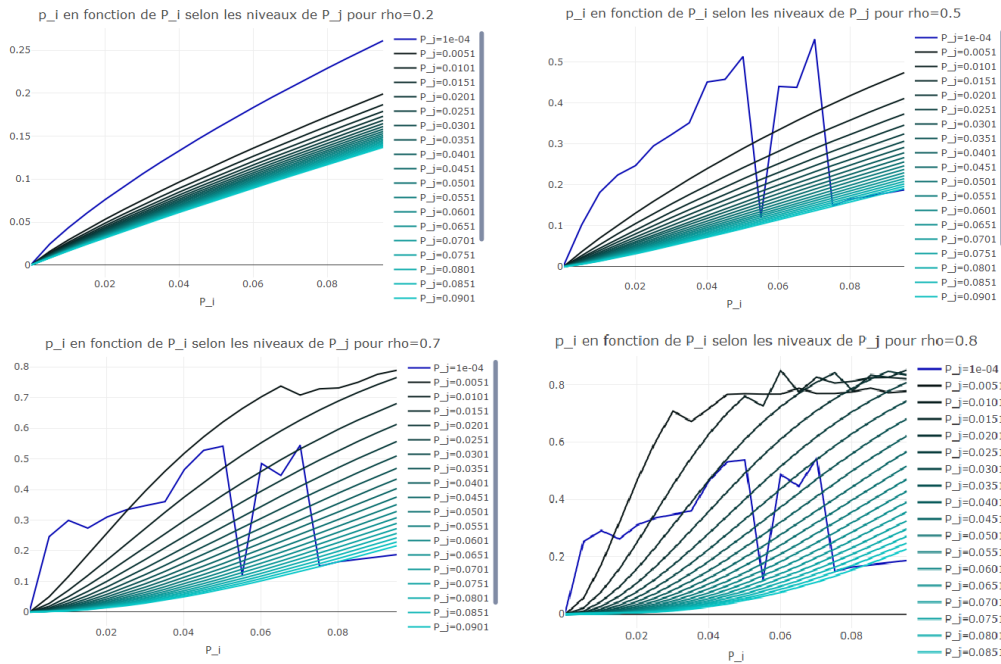


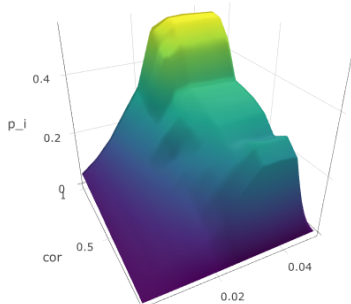
FIGURE 4.8 – La probabilité intrinsèque  $p_i$  en fonction de  $P_i$  selon les niveaux de  $(P_j, \rho)$ .

On constate dans la figure 4.8 que les irrégularités des courbes apparaissent de plus en plus "tôt" quand la corrélation  $\rho$  augmente. Cela est dû au dépassement de  $\rho_{\max}$  par  $\rho$  pour certains

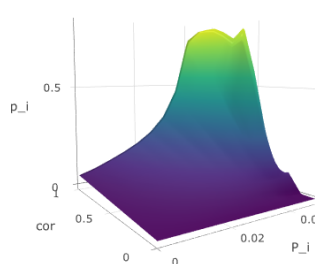
2. Bien que  $\rho$  soit majoré par une fonction de  $P_i$  et  $P_j$ , nous faisons la calibration pour des valeurs entre 0 et 1 afin de montrer comment le modèle réagit au dépassement de  $\rho_{\max}$ .

couples de  $(P_i, P_j)$ , ce qui confirme que la calibration n'est pas possible pour des valeurs de  $\rho$  au dessus de  $\rho_{\max}$ .

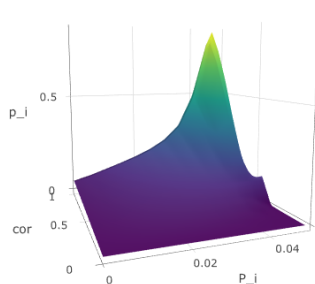
Probabilité intrinsèque en fonction de  $P_i$  et rho pour  $P_j=1e-04$



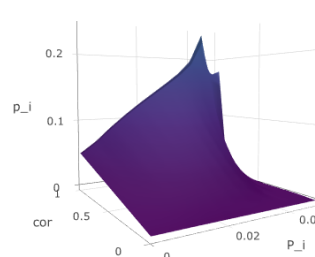
Probabilité intrinsèque  $p_i$  en fonction de  $P_i$  et rho pour  $P_j=0.0101$



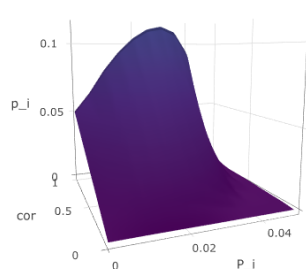
Probabilité intrinsèque  $p_i$  en fonction de  $P_i$  et rho pour  $P_j=0.0201$



Probabilité intrinsèque  $p_i$  en fonction de  $P_i$  et rho pour  $P_j=0.0451$



Probabilité intrinsèque  $p_i$  en fonction de  $P_i$  et rho pour  $P_j=0.0701$



Probabilité intrinsèque  $p_i$  en fonction de  $P_i$  et rho pour  $P_j=0.0951$

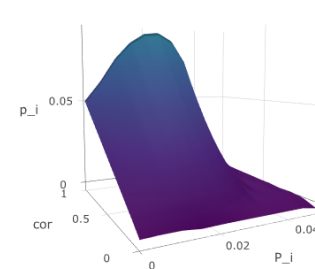


FIGURE 4.9 – Les nappes de la probabilité intrinsèque  $p_i$  en fonction de  $(\rho, P_i)$  selon les niveaux de  $P_j$ .

Nous constatons également que pour tous les niveaux de  $P_j$  la probabilité intrinsèque  $p_i$  est croissante par rapport à  $\rho$  comme le montre la figure 4.8. On en déduit comme dans le cas homogène que plus une entité est systémique, plus sa probabilité intrinsèque de défaut est grande.

Pour la fonction  $(P_i, P_j, \rho) \mapsto m_{ij}$ , la figure 4.10 nous donne les nappes  $(P_i, P_j) \mapsto m_{ij}$  pour

des niveaux différents de  $\rho$ . On constate tout d'abord qu'il y a une symétrie par rapport au plan  $P_i = P_j$ , ce qui résulte de la symétrie de la relation  $SM$ . De plus, plus le niveau de  $\rho$  est élevé plus les valeurs de  $m_{ij}$  sont également élevées, notamment sur le plan  $P_i = P_j$ . Cette maximalité qu'atteint la connectivité sur le plan médian vient du fait que l'égalité  $P_i = P_j$  permet d'avoir un  $\rho$  qui peut atteindre 1, et par conséquent le  $m_{ij}$  correspondant peut prendre de très grandes valeurs. Nous observons également des irrégularités dans les nappes qui correspondent aux valeurs du couple  $(P_i, P_j)$  pour lesquels le niveau de  $\rho$  dépasse  $\rho_{\max}$ . De plus, on observe qu'au voisinage de  $(P_i, P_j) = (0, 0)$ , la connectivité  $m_{ij}$  est très grande pour n'importe quel niveau de  $\rho$ . Ceci est attendu car des probabilités marginales faibles dans une relation  $SM$  correspondent à une forte connectivité.

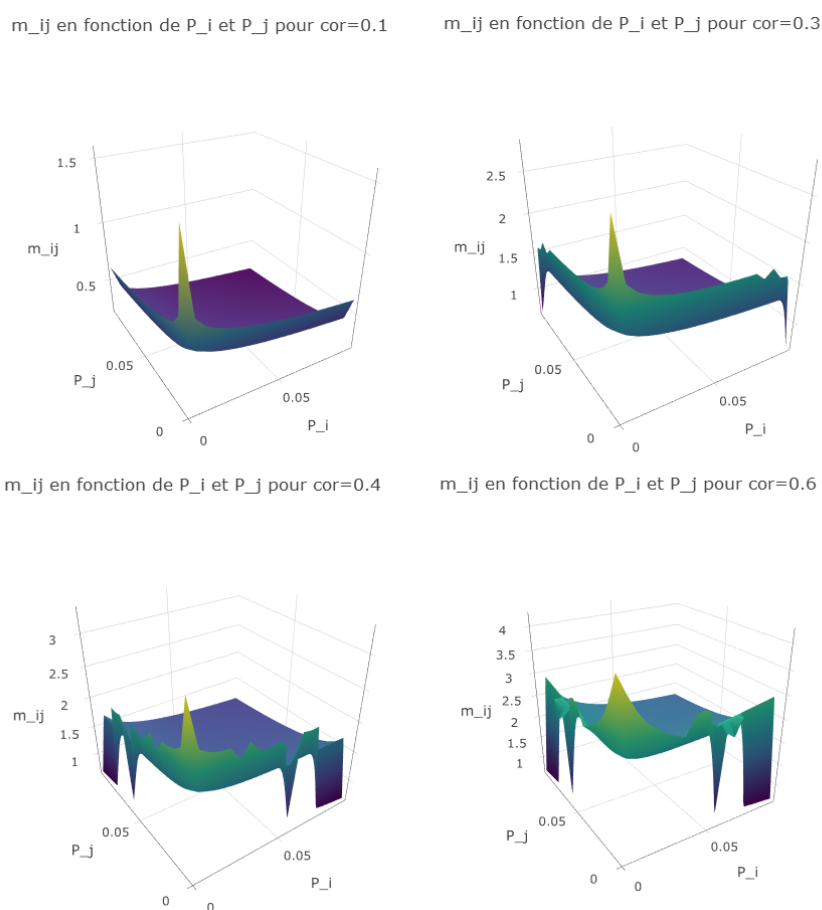


FIGURE 4.10 – Les nappes de  $m_{ij}$  en fonction de  $(P_i, P_j)$  selon les niveaux de  $\rho$

Nous nous intéressons maintenant à l'évolution de la corrélation de défaut  $\langle X_i, X_j \rangle_G$  par rapport à  $\rho$ . La figure 4.11 nous montre ces évolutions pour des niveaux de  $(P_i, P_j)$  fixes. La première chose qui découle des ces graphiques est la correspondance

$$\langle X_i, X_j \rangle_G = 1 \leftrightarrow P_i = P_j \text{ et } \rho = 1$$

On constate qu'à chaque fois une seule courbe atteint la valeur de 1 pour  $\rho = 1$ , cette courbe correspond au cas où  $P_i = P_j$ . Nous avons également la corrélation de défaut  $\langle X_i, X_j \rangle_G$  qui est croissante par rapport à  $\rho$ , ce qui découle naturellement de la croissance de  $\langle X_i, X_j \rangle_G$  par rapport à  $M$  et celle de  $M$  par rapport à  $\rho$  dans le cas d'une relation *SM*.

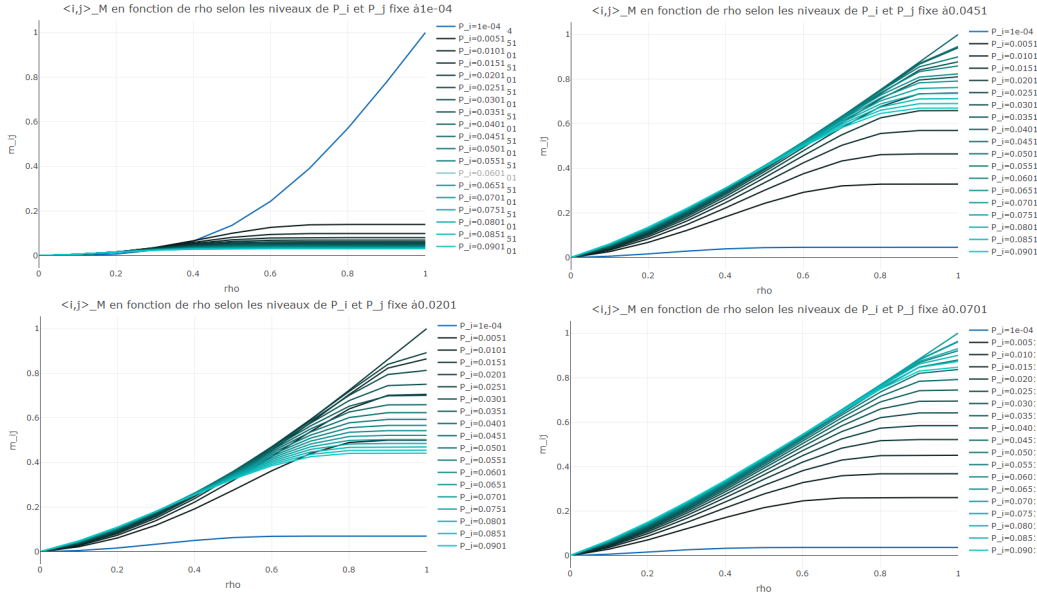


FIGURE 4.11 – Corrélation de défaut  $\langle X_i, X_j \rangle_G$  par rapport à  $\rho$  et les niveaux de  $(P_i, P_j)$ .

De ces analyses on déduit que le "mapping" entre le modèle à copule Gaussienne et notre modèle s'effectue sans peine pour la relation *SM*, ce qui montre que pour ce type de relations la calibration du modèle par un modèle Gaussien est toujours possible. La calibration du modèle peut également se faire pour d'autres relations, à savoir celles dans lesquelles les probabilités marginales de défaut ont la même monotonie par rapport à la connectivité. Donc une relation comme *SNM* que nous avons vu dans le chapitre précédent ne permet pas une calibration via les premiers moments du modèle Gaussien. Cela est une conséquence de la monotonie des probabilités  $P_i$  et  $P_j$  par rapport à  $\rho$  qui est toujours la même quand  $\rho$  est positif. La calibration avec les probabilités du modèle Gaussien est également possible quand la relation est de concurrence, car il suffit de considérer les corrélation  $\rho$  négatives. Ceci est exclusivement vrai pour le cas de deux entités. En effet, notre modèle prend en compte les effets de second ordre, ce qui peut générer, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, des perturbations sous lesquels une relation de concurrence peut devenir de support. Comme ceci n'est pas le cas dans le modèle Gaussien, car les probabilités jointes qu'il produit ne dépendent que du couple en question et non pas du réseau en entier, alors la calibration entre les deux modèles n'est pas possible.

Intéressons nous maintenant aux variations de la VaR par rapport à  $(P_i, P_j, \rho)$ , qui pour un

$(P_i, P_j)$  fixe, donne un niveau d'expected loss fixe

$$\mathbb{E}_G(L) = \frac{EAD_i LGD_i P_i + EAD_j LGD_j P_j}{EAD_i LGD_i + EAD_j LGD_j}$$

Pour simplifier, on considère que  $P_i = P_j = P$  et  $EAD_i LGD_i = EAD_j LGD_j$ . Comme nous n'avons que deux entités, alors la perte peut prendre trois valeurs 0, 0.5 ou 1 qui correspondent aux non-défaut, un défaut et deux défauts. La figure 4.12 nous montre la VaR à 95% en fonction de  $(P, \rho)$  pour les deux modèles.

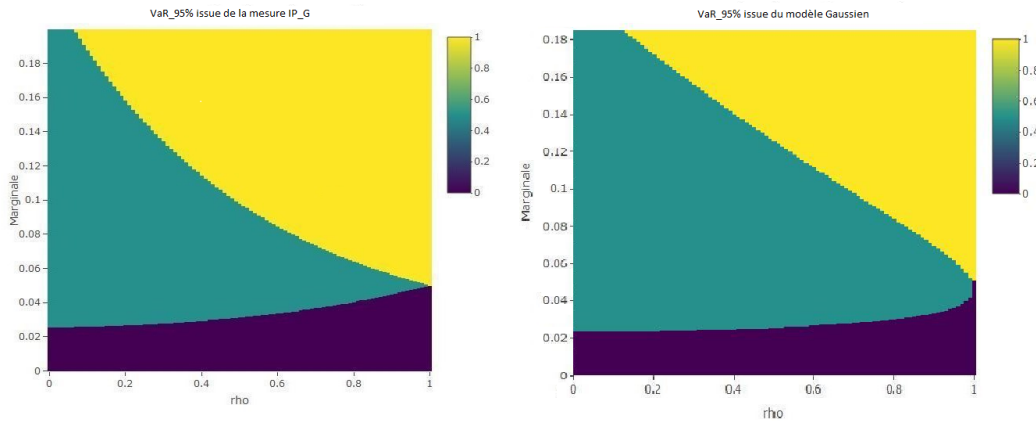


FIGURE 4.12 –  $VaR_{95\%}$  en fonction de  $(P, \rho)$  pour les deux modèles.

Les zones sombres de la figure de gauche de 4.12 correspond à la région  $VaR_{95\%}(L) = 0$ , alors que celle verte et jaune correspond respectivement à  $VaR_{95\%}(L) = 0.5$  et  $VaR_{95\%}(L) = 1$ . Ce qui veut dire que plus le couple  $(P, \rho)$  est grand plus la VaR est élevée. Pour  $P$  fixe ( $EL_G$  fixe), on peut remarquer que l'augmentation de  $\rho$  fait augmenter la VaR au même titre que  $m_{ij}$ , sauf pour des valeurs de  $P$  inférieures à  $P^* = 5\%$ . Car  $P^*$  est la probabilité maximale à partir de laquelle la probabilité de survie du couple est supérieure à 95% pour tout  $\rho$ , ce qui produit une  $VaR_{95\%}$  nulle. Pour  $3\% < P \leq P^*$ , la probabilité marginale est telle que la VaR est égale à 50% jusqu'à un seuil qui dépend de  $\rho$  à partir duquel la VaR devient nulle, car à partir de ce seuil la probabilité de non-défaut augmente brusquement et dépasse 95%; ce seuil est caractérisé par la courbe qui sépare la partie violette de la partie verte. Finalement, pour  $P > 5\%$ , nous avons une VaR qui commence à 50% jusqu'à un seuil à partir duquel nous avons une probabilité de double défaut qui devient supérieure à 5%. La figure de droite de 4.12 représente également la VaR sous la copule Gaussienne, nous constatons une similitude avec la figure à gauche, ce qui veut dire qu'après calibration la mesure  $\mathbb{P}_G$  produit une VaR qui ressemble à celle du modèle Gaussien. Il est aussi remarquable que la probabilité à partir de laquelle on peut passer de 0% à 100% pour  $\rho = 1$  est égale à  $P^*$  comme pour le cas de la mesure  $\mathbb{P}_G$ . Toutefois, nous remarquons que la région jaune pour la mesure  $\mathbb{P}_G$  est plus large que celle pour la mesure Gaussienne, donc notre mo-

dèle est plus conservateur que le modèle Gaussien bien que les relations soient de support mutuel.

La figure 4.13 représente la VaR pour la mesure  $\mathbb{P}_G$  en fonction de  $(p_i, m_{ij})$ . On remarque que pour des valeurs assez grandes de  $m_{ij}$ , la VaR est égale à 0 ou 100%. De plus, la probabilité intrinsèque critique est  $p_i^* = 18\%$ , ce qui correspond dans le modèle Gaussien au couple  $(P^*, \rho) = (5\%, 1)$ <sup>3</sup>, ce qui explique la valeur de  $P^*$ .

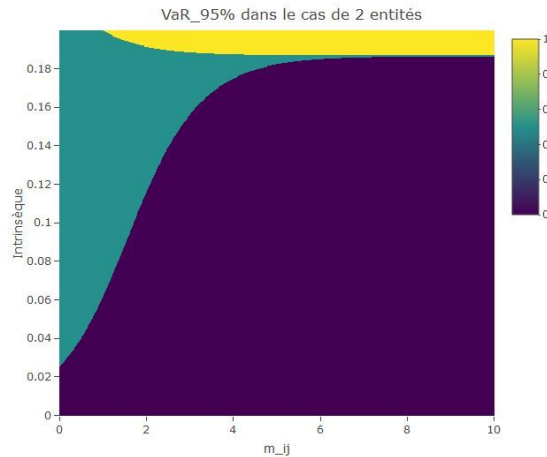


FIGURE 4.13 –  $VaR_{95\%}$  en fonction de  $(p_i, m_{ij})$

### 4.3.2 Cas d'un réseau homogène de 10 entités sous relations de support

Cette fois-ci nous disposons d'un réseau  $G = (V, M, T)$  de 10 entités connectées via des relations  $SM$ . Nous allons appliquer la même méthode que dans la section précédente en calibrant les  $p_i$  et la matrice  $M$  pour différentes valeurs des  $P_i$  et de  $\rho$ . Il s'agit alors de résoudre le système

$$\forall (i, j) \in E(V), \begin{cases} \mathbb{P}_G(X_i = X_j = -1) &= \mathbb{P}_\rho(V_i < \Phi^{-1}(P_i), V_j < \Phi^{-1}(P_j)) \\ \mathbb{P}_G(X_i = -1) &= P_i \end{cases}$$

En guise de simplification, on se restreint au cas homogène  $P_i = P$  pour tout  $i \in V$ . Les résultats sur l'évolution de  $(p_i, m_{ij})$  en fonction de  $(P, \rho)$  restent similaires à ceux obtenues dans le cas précédent (croissance de  $p_i$  par rapport à  $P$  et  $\rho$ , et la croissance de  $m_{ij}$  par rapport à  $\rho$ ). Nous avons également les distributions de la VaR en fonction de  $\rho$  et  $P$  pour la mesure  $\mathbb{P}_G$  et le modèle Gaussien qui sont similaires comme le montre la figure 4.14

3. On obtient cette valeur en utilisant la formule  $p_i = \frac{1}{1 + (\frac{1}{P_i} - 1)^{\frac{1}{2}}}$

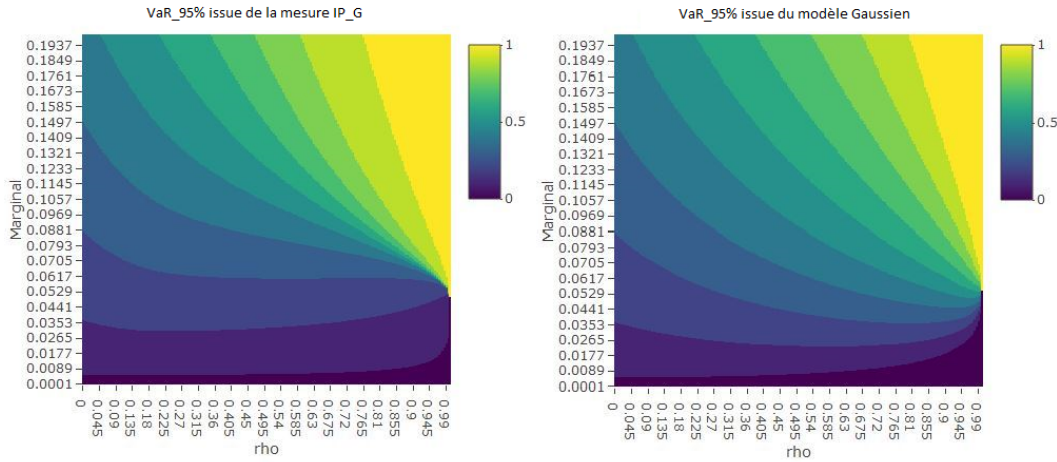


FIGURE 4.14 –  $VaR_{95\%}$  en fonction de  $(P, \rho)$  dans le cas de 10 entités.

Comme pour le cas de deux entités, le modèle Gaussien produit des zones de pertes moins larges que celles produites par notre modèle, notamment les zones de pertes extrêmes. Donc à nouveau le modèle Gaussien est moins conservateur que notre modèle. La probabilité marginale critique  $P^*$  est presque égale à 5% dans les deux modèles, ce qui correspond à une probabilité intrinsèque d'environ 42% comme le montre la figure 4.15.

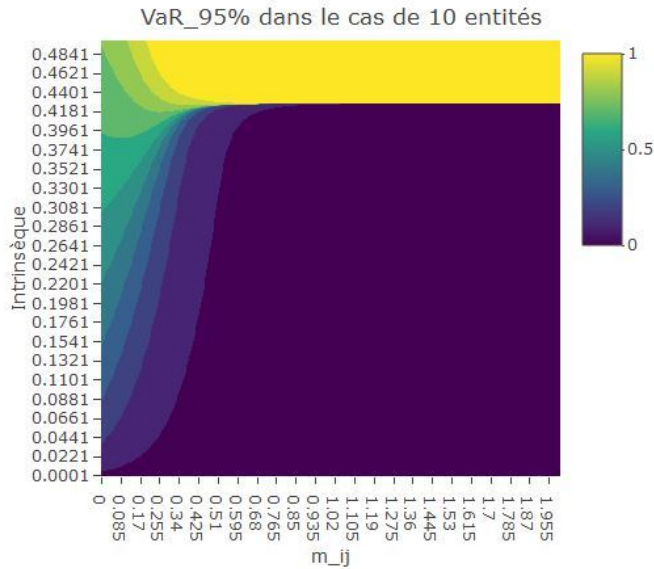


FIGURE 4.15 –  $VaR_{95\%}$  en fonction de  $(p_i, m_{ij})$  dans le cas de 10 entités.

L'effet de la taille d'un réseau sur les classes du risque est très important, car ils impactent la connectivité critique et la probabilité intrinsèque critique. En effet, on suppose que le réseau  $G$  est constitué de  $n$  entités connectées via une relation  $SM$  avec une même connectivité  $m$  et



probabilité intrinsèque  $p$ . Comme par définition de  $SM$

$$\delta_{ij}(1, 1) = \delta_{ij}(-1, -1) > \delta_{ij}(-1, 1), \delta_{ij}(1, -1)$$

alors on a les limites suivantes :

$$P_- = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_G(-1, \dots, -1) = \frac{e^{-nB}}{e^{-nB} + e^{nB}} \text{ et } P_+ = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_G(1, \dots, 1) = \frac{e^{nB}}{e^{-nB} + e^{nB}} \quad (4.15)$$

où  $B = \frac{1}{2} \ln(\frac{1}{p} - 1)$ . On constate que la somme de ces deux limites est égale à 1, donc pour une très forte connectivité, les entités ne peuvent être que dans le même état. Par conséquent, la  $Var_\alpha(L)$  de la perte passe de 0 à 100% quand  $P_- \geq \alpha$ , donc la probabilité critique  $p^*$  vérifie l'équation  $P_- = \alpha$ , ce qui donne  $p^* = \frac{1}{1 + (\frac{1}{\alpha} - 1)^{\frac{1}{n}}}$ . En particulier, pour  $n = 10$  et  $\alpha = 95\%$  on a approximativement  $p^* = 42\%$ .

#### 4.4 Calibration par les moments d'ordre 1 et le moment maximal dans un réseau homogène de 10 entités

Dans cette section, nous allons faire une calibration via les probabilités marginales de défaut et la probabilité de défaut du réseau entier. Nous nous plaçons dans un réseau  $G = (V, M, T)$  de 10 entités dont toutes les relations sont  $SM$  comme définit dans 4.12; avec des connectivités égales à  $m$  et des probabilités intrinsèques  $p_i$  toutes égales à  $p$ . Comme réalisé dans la section précédente, l'objectif est de calculer pour différentes valeurs de  $(P, \rho)$  les paramètres  $(p, m)$  solutions du système d'équations

$$\begin{cases} \mathbb{P}_G(X = (-1, \dots, -1)) &= \mathbb{P}_\rho((V_i < \Phi^{-1}(P))_{i \in \{1, \dots, 10\}}) \\ \mathbb{P}_G(X_i = -1) &= P \end{cases}$$

La figure 4.16 nous montre les variations de  $m$  en fonction de  $\rho$  pour différentes valeurs de  $P$ . On voit que la connectivité  $m$  diminue en fonction de  $P$  et devient stationnaire à partir d'un certain rang de  $P$ , et qu'elle augmente en fonction de  $\rho$  comme dans les calibrations précédentes. La figure 4.17 montre que  $p$  augmente en fonction de  $P$  et  $\rho$ , qui devient stationnaire quand  $\rho$  se rapproche de 1. Nous avons donc les mêmes variations de  $p$  et  $m$  en fonction de  $(P, \rho)$  que dans la section précédente.

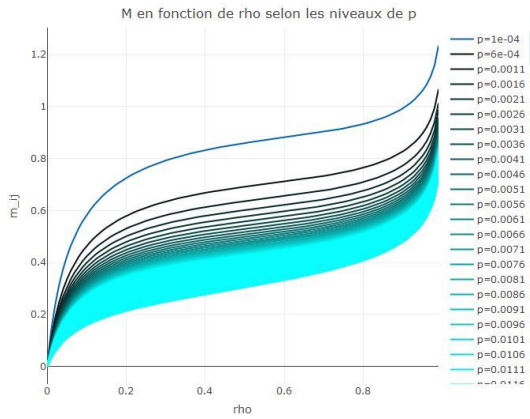


FIGURE 4.16 –  $m_{ij}$  en fonction de  $(P, \rho)$  pour différents niveaux de  $p$ .

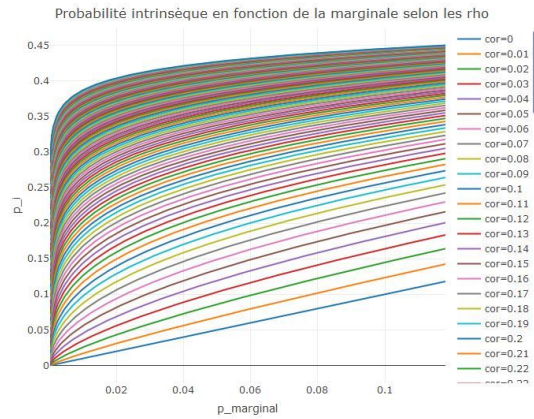


FIGURE 4.17 –  $p$  en fonction de  $(P, \rho)$  pour différents niveaux de  $\rho$ .

Pour ce qui est de la  $VaR_{95\%}$ , la figure 4.18 représente la VaR pour la mesure  $\mathbb{P}_G$  (figure à gauche) et celle issue du modèle Gaussien. Nous constatons comme dans le cas précédent que les probabilités marginales critiques sont identiques, à savoir  $P^* = 5\%$  et que la zone du défaut du réseau (zone jaune) est plus importante pour la mesure  $\mathbb{P}_G$ , ce qui confirme une fois de plus le caractère conservateur du modèle même s'il est calibré au modèle Gaussien. On remarque en outre que via cette calibration, notre modèle est encore plus conservateur que celui obtenu via la calibration de la section précédente.

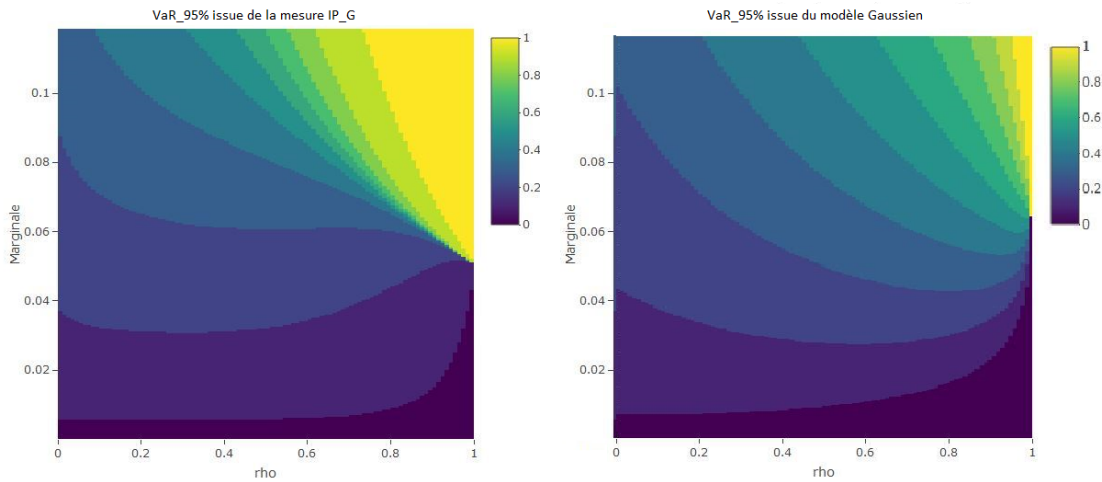


FIGURE 4.18 –  $VaR_{95\%}$  en fonction de  $(P, \rho)$  pour le modèle Gaussien (à droite) et pour la mesure  $\mathbb{P}_G$  (à gauche).

## 4.5 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre le problème de calibration du modèle via différentes approches. Nous en avons déduit que parmi les méthodes d'inférence, le maximum de pseudo-vraisemblance est celle qui est la plus adaptée aux contraintes pratiques du modèle. Nous avons vu que la vraisemblance ne permet pas de capturer l'asymétrie introduite dans notre approche d'une part, et qu'elle est assez limitée dû aux problèmes liés à la complexité calculatoire. La pseudo-vraisemblance s'adapte à l'asymétrie des relations, et donc permet en cas de disponibilité des données de calibrer les relations via les coefficients  $a(\delta_{ij})$ ,  $b(\delta_{ij})$  et  $c(\delta_{ij})$ . De plus, celle-ci a l'avantage de s'exprimer via des probabilités conditionnelles qui rendent le problème d'optimisation similaire à celui d'une régression logistique, ce qui réduit drastiquement le temps de calculs. Pour implémenter l'approche de pseudo-vraisemblance, nous avons exploité un historique de notation d'une grande banque européenne, en utilisant deux états différents que le défaut et la survie. Ces deux états agrègent les bons et les mauvais ratings, et donc permettent d'avoir plus d'observations. Nous avons utilisé les relations calibrées dans le cas des états de défaut par hypothèse d'universalité du couple  $(M, T)$ , et nous avons comparé le profil du risque obtenu sous ces paramètres avec celui du cas d'indépendance. Nous avons remarqué une hausse très considérable de la perte moyenne, dû à la configuration des relations sur le réseau qui favorisent le défaut de certaines entités. Toutefois, le maximum de pseudo-vraisemblance trouvé peut être local, et il est possible dans ce cas de trouver d'autres maximum locaux qui décrivent des réseaux avec des profils de risque différents.

Nous avons également vu que la calibration via une vraisemblance est équivalente à une calibration par les moments d'ordre un et deux. Donc en cas de manque de données, cette approche pourrait être intéressante si on dispose des probabilités marginales et jointes de défaut. Nous avons exploré cela en utilisant des probabilités issues d'une copule Gaussienne; en calibrant les paramètres du modèle pour des relations simples de type  $SM$ . En effet, le modèle Gaussien est symétrique, donc sa calibration pour toute corrélation  $\rho$  avec notre modèle via les deux premiers moments n'est pas possible si les relations considérées sont asymétriques. Nous avons également étudié comment la probabilité intrinsèque et la connectivité calibrées réagissent aux variations de la probabilité marginale et la corrélation dans le modèle Gaussien. On observe une cohérence entre les deux modèles, mais on s'aperçoit, en comparant le risque induit des deux structures de dépendance, que notre modèle demeure plus conservateur malgré que les premiers moments sont identiques. Cela provient d'un aspect fondamental qui distingue le modèle, à savoir que les probabilités jointes issues de la mesure  $\mathbb{P}_G$  dépendent du réseau en entier contrairement à celles obtenues du modèle Gaussien.

Cette étude est encore loin de fournir une réponse au problème de calibration du modèle, cependant elle dévoile certains aspects rassurants pour la mise en pratique de cette approche pour le moins différente.

## RÉSEAUX DE SUPPORT ET LEUR COMPORTEMENT EN TRÈS GRANDE TAILLE.

**D**ans ce chapitre, nous analysons certains réseaux réguliers et homogènes, sur lesquels on peut exprimer la distribution des pertes de manière explicite. Le but est de voir comment la topologie d'un tel réseau économique, le degré de connexion, les connectivités, les types de relations et la taille, agissent sur la distribution des pertes et les mesures du risque. Nous étudions comment le risque se diffuse ainsi que l'apparition des phénomènes critiques en fonction du degré de connexion du réseau, et comment la distribution large pool se comporte asymptotiquement. Nous développons des méthodes combinatoires afin d'approcher certaines formules semi-fermées pour un souci de réduction des calculs d'une part. Et d'autre part, on démontre qu'il est possible d'utiliser des réseaux réguliers et homogènes pour approcher des réseaux qu'il ne sont pas, de telle manière à encadrer leurs distributions de pertes. Cet encadrement démontre la possibilité de réduire les calculs dans le cas d'un grand portefeuille de crédit, et permet d'établir des extensions des résultats obtenus sur le comportement en volume infini dans le cas régulier.

**Mots clés :** Réseaux régulier et homogènes, degré de connexion, volume infini, effet des réseaux externes, phénomènes critiques.

---

### Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	177
5.2	Réseaux de support complets . . . . .	179
5.2.1	Effet de la concurrence externe : distribution des pertes et effet de volume. . . . .	179

5.2.2	Extension au cas de relations satellites arbitraires . . . . .	190
5.3	Réseaux de support réguliers : effet du degré de connexion. . . . .	<b>206</b>
5.3.1	Comportement en fortes connectivités . . . . .	209
5.3.2	Comportement au voisinage des faibles connectivités . . . . .	210
5.3.3	Comportement en volume infini . . . . .	218
5.3.4	Analyse numérique . . . . .	224
5.4	Les réseaux de grande taille . . . . .	<b>228</b>
5.4.1	Problème de réduction des calculs . . . . .	228
5.4.2	Comportement en volume infini . . . . .	231
5.5	Conclusion et perspectives . . . . .	<b>233</b>
5.6	Preuves . . . . .	<b>236</b>
5.6.1	Preuves des propositions . . . . .	236
5.6.2	Preuves des lemmes : . . . . .	249
5.6.3	Preuve des corollaires . . . . .	252
5.6.4	Preuves des théorèmes . . . . .	253

---

## 5.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la calibration du modèle d'interdépendance soulève un certain nombre de problématiques associées à l'absence de données ou la capacité de calcul sur des réseaux de grande taille. Comme vu dans le chapitre 3, le modèle possède toutefois une certaine maniabilité mathématique qui permet d'étudier des réseaux de grande taille sous des hypothèses de régularité. Cela permet donc d'étudier la déformation de la distribution des pertes d'un portefeuille de crédit sous les effets de l'interdépendance. Les hypothèses de régularité portent sur l'homogénéité en probabilité de défaut intrinsèque et en connectivité, ainsi que sur la symétrie du réseau associé au portefeuille de crédit. En considérant un tel réseau économique est régulier, il devient alors possible d'étudier en particulier le comportement de la distribution des pertes de celui-ci quand sa taille est très grande. En risque de crédit, l'effet du grand volume est utilisé pour justifier une diversification du risque, et donc un risque de concentration très faible. Cette hypothèse de diversification par effet de volume est connue sous le nom de *granularité infinie*, et elle est introduite par Gordy [114] pour l'étude du capital économique. Il s'appuie sur des travaux comme ceux de C.Gouriéroux, J.P.Laurent, O.Scaillet [165], et R.Martin et T.Wilde [166]. Cette approche fournit une formule explicite approchée du capital économique d'un portefeuille infiniment granulaire, ou en d'autres termes un équivalent asymptotique quand le nombre d'entités est très grand. Les travaux de Gordy vont plus loin en rajoutant un terme de correction de premier ordre au développement asymptotique du capital, dit ajustement de granularité ou *Granularity Adjustment*. Cette correction permet de déterminer le montant de réserves pour couvrir les effets, non complètement diversifiés, des risques individuels spécifiques. Les simplifications qu'offre cette approche dans le calcul du risque de crédit lui ont attribué une

certaine popularité non seulement dans les banques, mais également auprès du régulateur (voir [115]). Comme discuté dans la section 7 du chapitre 3, un réseau favorisant l'apparition d'un phénomène critique a tendance à concentrer le risque. En effet, quand la connectivité atteint un certain seuil critique, le défaut d'une entité augmente très considérablement la probabilité d'un défaut collectif de toutes les entités du réseau. Par conséquent, la concentration ne tend pas vers 0, mais devient égale à 1. Donc si un segment assez large d'un portefeuille de crédit favorise l'apparition d'un phénomène critique, alors l'hypothèse de granularité infinie devient inadéquate. Nous allons illustrer ce contre exemple par la suite en étudiant la distribution des pertes sur un réseau complet en volume infini.

L'utilisation des modèles graphiques pour étudier des réseaux réguliers de grande taille en risque de crédit est utilisée dans les travaux de K.Giesecke et S.Weber [116]. Ils s'appuient sur un modèle dit *voter* introduit par R.A. Holley et T.M. Liggett [117], construit sur un réseau  $\mathbb{Z}^d$  où  $d$  représente le degré de connexion du réseau ; donc chaque entité admet  $2d$  voisins. En utilisant ce modèle Giesecke et Weber partent d'une boîte de  $n$  entités  $\Lambda_n$  de  $\mathbb{Z}^d$  pour expliciter la distribution des pertes asymptotique quand  $n \rightarrow +\infty$ . Ils démontrent une convergence vers une loi normale de la distribution des pertes à constantes près qui dépendent du degré  $d$ . Ce recours aux réseaux  $\mathbb{Z}^d$  rappelle ce qui se fait en mécanique statistique, notamment dans l'étude du modèle d'Ising en volume infini. Dans ce domaine, l'utilisation des boîtes  $\Lambda_n$  avant passage à la limite est une technique très utilisée pour démontrer l'existence de la mesure en volume infini. De plus, ces réseaux bénéficient d'une géométrie exploitable et une invariance par translation qui facilite l'obtention de certains résultats théoriques. Cependant, si on désire étudier des réseaux finis dont le degré de connexion  $d$  est susceptible varier en fonction de la taille, nous ne pouvons plus utiliser des techniques similaires. En effet, si nous voulons étudier un réseau de grande taille dont chaque entité est connectée à la moitié des entités, alors le degré  $d = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , par conséquent le réseau  $\mathbb{Z}^d$  n'est plus fixe.

Les travaux de J.Molins et E.Vives [45, 46], et D.Egloff [48] exploitent l'hypothèse de régularité pour exprimer la distribution des pertes analytiquement dans le cas des réseaux complets et étoilés dans un modèle d'Ising. Toutefois, ils ne s'intéressent pas à la distribution des pertes en volume infini pour les topologies considérées. A notre meilleure connaissance, l'étude des distributions de pertes en volume infini via le modèle d'Ising est une voie non encore explorée dans la littérature. Dans ce chapitre nous allons étudier l'effet du degré de connexion sur la transmission du risque dans un réseau de support. Nous démontrons également des formules fermées et semi-fermées des distributions de pertes pour les réseaux réguliers de degré  $d$ . Nous utilisons ensuite ces formules dans certains cas pour étudier les phénomènes critiques d'une part, et la distribution de perte en volume infini d'autre part. Nous discutons également la problématique de calcul sur des réseaux non-réguliers, et on démontre que pour une certaine classe de réseaux non-régulier qu'il est possible de réduire le temps de calcul de manière très

considérable. En outre, nous étudions la possibilité d'encadrer la distribution des pertes par celle de deux réseaux réguliers, et nous démontrons l'existence d'un tel encadrement.

## 5.2 Réseaux de support complets

Dans cette section nous considérons un portefeuille de crédit contenant un segment dans lequel les entités sont en relations de support, et dont le réseau économique associé est très connecté. Nous allons donc nous intéresser dans cette section au cas extrême, à savoir celui d'un réseau complet, mais celui-ci est supposé au centre d'un réseau économique plus grand.

### 5.2.1 Effet de la concurrence externe : distribution des pertes et effet de volume.

On considère un réseau économique  $G_n = (V, M, T)$  de taille  $n$ , homogène en probabilité de défaut intrinsèque, en relations et en connectivité ( $m_{ij} = m$  et  $p_i = p$  pour tout  $(i, j) \in E(V)$ ). Nous considérons le réseau complet, dont les relations sont toutes de support et de la forme  $\delta_{ij} = X_i X_j$ . Afin d'étudier comment ce réseau absorbe ou propage un stress qui provient de l'extérieur, on suppose que chaque entité  $i \in V$  est connectée à un réseau satellite de concurrents externes comme le montre la figure 5.1. Pour tout  $i \in V$ , on note  $V_i$  l'ensemble des concurrents de  $i$ , et on suppose que  $V_i$  est de taille  $s$  (on a la même taille afin de garder la symétrie), que pour tout  $(i, j) \in V \times V_i$  on a  $\delta_{ij} = -X_i X_j$ ,  $m_{ij} = m_0$  et que les probabilités intrinsèques de ces concurrents sont égales à  $p_0$ .

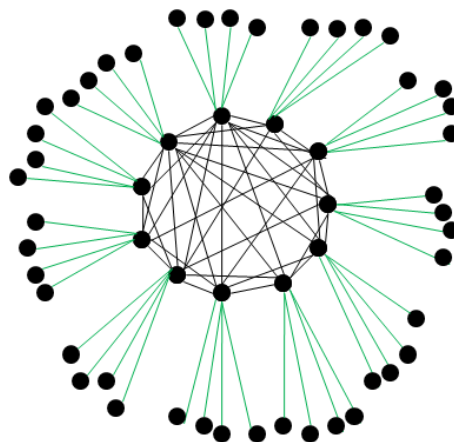


FIGURE 5.1 – Réseau central complet avec des réseaux satellites de concurrence.

On note alors  $G_{s,n} = (V \cup_{i=1}^n V_i, M_{s,n}, T_{s,n})$  le réseau économique total où

$$M_{s,n} = \begin{pmatrix} M & m_0 E_1 & m_0 E_2 & \dots & m_0 E_n \\ m_0 E_1 & I_s & 0_s & \dots & 0_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_0 E_n & 0_s & 0_s & \dots & I_s \end{pmatrix}$$

avec  $E_i$  la matrice dont la  $i^{\text{ème}}$  ligne est égale à  $(1, \dots, 1)$  et le reste est nul.  $T_{s,n}$  désigne la famille de toutes les relations de  $G_{s,n}$ .

Notre objectif est d'étudier la distribution des pertes sur un segment d'un portefeuille de crédit dont le réseau associé est  $G_n$ . En considérant que le portefeuille est homogène en *LGD* et en *EAD*, la distribution des pertes sur  $G_n$  est la même que celle du taux de défaut  $N_V$ . Cela revient à calculer la probabilité suivante

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) = \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} \sum_{l(1), \dots, l(n) \in \Omega^s} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(l, l(1), \dots, l(n))$$

où  $\mathcal{A}_{k,n} := \{l \in \Omega^V \mid \sum_{i \in V} l_i = n - 2k\}$ , donc chaque élément de cet ensemble correspond à une configuration d'états de taille  $n$  qui contient  $k$  défauts. Nous avons alors la formule explicite suivante :

**Proposition 5.1.** *Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on a*

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) = \frac{C_n^k (1 + e^{-2m_0 - 2B_0})^{ks} (1 + e^{2m_0 - 2B_0})^{(n-k)s} e^{-2(B-m_0s)k + 2m(C_k^2 + C_{n-k}^2)}}{\sum_{j=0}^n C_n^j (1 + e^{-2m_0 - 2B_0})^{js} (1 + e^{2m_0 - 2B_0})^{(n-j)s} e^{-2(B-m_0s)j + 2m(C_j^2 + C_{n-j}^2)}}$$

pour tout  $s \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Voir 5.6.1. □

De cette proposition on peut déduire en particulier les formules de la distribution des pertes étudiés par J.Molins et E.Vives [45, 46]. En effet, pour le réseau étoilé, il suffit de prendre  $n = 1$ , et on

obtient donc la probabilité de défaut de l'unique entité centrale avec  $s$  entités concurrentes

$$\mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = 1) = \frac{e^{-2B+2sm_0}(1 + e^{-2m_0-2B_0})^s}{e^{-2B+2sm_0}(1 + e^{-2m_0-2B_0})^s + (1 + e^{2m_0-2B_0})^s}$$

Il est clair que si  $m_0 > 0$ , alors

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = 1) = 1$$

Donc une entité qui fait face à un très grand nombre de concurrents fait défaut presque sûrement quelque soit sa probabilité intrinsèque de défaut, celle des concurrents et la connectivité de

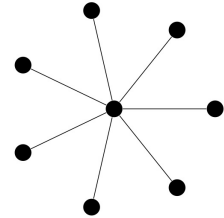


FIGURE 5.2 –  $G_{s,1}$ .



la relation de concurrence. D'autre part, quand la connectivité  $m_0$  est assez grande, alors la probabilité  $\mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = 1)$  tend vers  $\frac{1}{1+e^{2B-2sB_0}}$ . Si toutes les entités satellites font défaut, alors la probabilité de défaut de l'entité centrale devient

$$\lim_{p_0 \rightarrow 1} \mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = 1) = \frac{1}{1 + e^{2B+2sm_0}}$$

comme  $\frac{1}{1+e^{2B+2sm_0}} < p$ , alors l'entité centrale bénéficie de ces défauts de plus en plus quand  $s$  et  $m_0$  augmentent.

On peut également se ramener au cas d'un réseau de support complet sans relations de concurrence en prenant  $s = 0$  ou  $m_0 = 0$ , et on a pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}_{G_{0,n}}(N_V = \frac{k}{n}) = \frac{C_n^k e^{(n-2k)B+m(k(k-1)+(n-k)(n-1-k))}}{\sum_{j=0}^n C_n^j e^{(n-2j)B+m(j(j-1)+(n-j)(n-1-j))}} \quad (5.1)$$

Cette configuration est très intéressante, car les entités du réseau sont très connectées entre elles et donc les effets de contagion sont très présents malgré le support mutuel. On s'intéresse donc au comportement de ce système en forte connectivité. Pour  $m$  assez grand, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{G_{0,n}}(N_V = \frac{k}{n}) &= \frac{C_n^k e^{(n-2k)B+m(k(k-1)+(n-k)(n-1-k))}}{\sum_{j=0}^n C_n^j e^{(n-2j)B+m(j(j-1)+(n-j)(n-1-j))}} \\ &= \frac{C_n^k e^{(n-2k)B}}{\sum_{j=0}^n C_n^j e^{(n-2j)B+2m(j-k)(j+k-n)}} \\ &\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{1+e^{-2nB}} & \text{si } k = 0 \\ \frac{e^{-2nB}}{1+e^{-2nB}} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

car  $(j-k)(j+k-n) \leq 0$  pour tout  $0 \leq j \leq n$  si et seulement si  $j \in \{0, n\}$ . Donc nous constatons que seules des pertes de 0 ou 100% est possible, par conséquent nous avons un phénomène critique d'après la définition 5.27 du chapitre 3. Donc le risque n'est pas diversifiable sur ce réseau, par conséquent en cas d'une forte exposition sur un segment du portefeuille, dont le réseau associé est complet et fortement connecté, l'hypothèse de granularité infinie n'est plus valable. On peut se demander si la présence de la concurrence externe empêchera le réseau central  $G_n$  de se comporter ainsi. La réponse est non, car d'après la proposition précédente on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) &= \frac{C_n^k (1 + e^{-2m_0 - 2B_0})^{ks} (1 + e^{2m_0 - 2B_0})^{(n-k)s} e^{-(2B - 2m_0s)k + 2m(C_k^2 + C_{n-k}^2)}}{\sum_{j=0}^n C_n^j (1 + e^{-2m_0 - 2B_0})^{js} (1 + e^{2m_0 - 2B_0})^{(n-j)s} e^{-(2B - 2m_0s)j + 2m(C_j^2 + C_{n-j}^2)}} \\
&= \frac{C_n^k \theta^{ks} e^{-2Bk}}{\sum_{j=0}^n C_n^j \theta^{js} e^{-2Bj + 2m(j-k)(j+k-n)}} \\
&\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{1 + \theta^{ns} e^{-2nB}} & \text{si } k = 0 \\ \frac{\theta^{ns} e^{-2nB}}{1 + \theta^{ns} e^{-2nB}} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

où  $\theta = \frac{e^{2m_0 + e^{-2B_0}}}{1 + e^{2m_0 - 2B_0}}$ . Donc nous avons toujours une concentration du risque sur un segment du portefeuille avec une telle structure de dépendance. Il convient de noter que si  $0 < k < n$  alors il existe au moins un  $0 < j < n$  tel que  $(j - k)(j + k - n) > 0$ , donc la probabilité  $\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n})$  tend au moins exponentiellement vers 0 quand  $m$  tend vers l'infini. On en déduit que

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) = O(e^{-Am}) \text{ Pour } A > 0 \tag{5.3}$$

Donc pour un tel réseau, un phénomène critique peut survenir très vite quand la connectivité augmente.

### 5.2.1.1 Comportement en volume infini

Regardons maintenant comment la distribution des pertes sur le réseau  $G_{s,n}$  se comporte quand  $n$  ou  $s$  devient très grand. Nous avons vu qu'une forte connectivité conduit de manière exponentielle à une concentration du risque, mais est-il possible que la taille du réseau soit un élément clé pour parer l'effet d'hyperconnectivité et l'apparition de phénomènes critiques? La proposition suivante :

#### Proposition 5.2.

Soient  $m, m_0 \geq 0$  et  $B, B_0 > 0$ , on note  $\theta = \frac{e^{2m_0 + e^{-2B_0}}}{1 + e^{2m_0 - 2B_0}}$ . Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  on a

1.  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) = \delta_n(k) \mathbb{1}(m_0 > 0) + \mathbb{P}_{G_{0,n}}(N_V = \frac{k}{n}) \mathbb{1}(m_0 = 0)$ ;
2. Si  $B > \frac{s}{2} \log(\theta)$ , alors  $\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) \sim_{n \rightarrow +\infty} \delta_0(k) \mathbb{1}(m > 0) + \phi(k) \mathbb{1}(m = 0)$ ;
3. Si  $B < \frac{s}{2} \log(\theta)$ , alors  $\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) \sim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(k) \mathbb{1}(m > 0) + \phi(k) \mathbb{1}(m = 0)$ ;
4. Si  $B = \frac{s}{2} \log(\theta)$ , alors  $\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) \sim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2} \delta_0(k) + \frac{1}{2} \delta_n(k)) \mathbb{1}(m > 0) + \phi(k) \mathbb{1}(m = 0)$ .

où  $\delta_a$  est l'impulsion de Dirac en  $a$  et  $\phi$  est la densité de la loi normale de moyenne  $\mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = 1)$  et de variance  $\frac{\mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = 1)(1 - \mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = 1))}{n}$ .

*Démonstration.* Nous démontrons dans 5.6.1.2 un cas plus général. □

Le premier point de cette proposition nous montre que si le nombre de concurrents externes par entité devient très grand, alors la probabilité de défaut de toutes les entités centrales devient très importante. Ce qui généralise ce que nous avons vu dans le cas du réseau étoilé. Si le nombre de concurrents est suffisamment faible tel que  $B > \frac{s}{2} \log(\theta)$ , alors le deuxième point affirme que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}} = \delta_{(1, \dots, 1, \dots)}$$

Donc le seul état possible est la survie de tout le réseau. La condition  $B > \frac{s}{2} \log(\theta)$  peut également s'écrire  $p < \frac{1}{1+\theta^s}$ , et donc nous avons donc une probabilité intrinsèque de défaut limite au dessus de laquelle le réseau central devient vulnérable aux effets de volume. Si  $B < \frac{s}{2} \log(\theta)$ , alors cette fois-ci nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}} = \delta_{(-1, \dots, -1, \dots)}$$

Ce qui veut dire que le nombre de concurrents est assez élevé pour que l'effet de volume soit un vecteur de propagation du risque de chaque entité dans le reste du réseau. Si  $B = \frac{s}{2} \log(\theta)$ , alors nous avons une situation d'incertitude en volume infini via la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}} = \frac{1}{2} \delta_{(1, \dots, 1, \dots)} + \frac{1}{2} \delta_{(-1, \dots, -1, \dots)}$$

On peut remarquer que la fonction  $\theta$  est décroissante en  $p_0$ , et croissante en  $m_0$ , par conséquent il est possible d'avoir pour un faible nombre de concurrents  $s$  l'inégalité  $B < \frac{s}{2} \log(\theta)$  pour une faible probabilité  $p_0$  et une forte connectivité. On peut déduire de cette proposition que l'effet du volume même dans un réseau de support peut être négatif d'un point de vue risque. Car en présence d'une concurrence qui fragilise les différentes entités de ce réseau, la complétude du réseau diffuse le risque plus qu'elle l'absorbe. Si le réseau central n'est pas connecté ( $m = 0$ ), alors la loi de  $N_V$  devient équivalente à une loi normale de moyenne moyenne  $\mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = 1)$  et de variance  $\frac{\mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V=1)(1-\mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V=1))}{n}$  comme le montre la figure 5.3. Car quand  $m = 0$  le réseau  $G_{s,n}$  devient composé de  $n$  réseaux étoilés  $G_{s,1}$ .

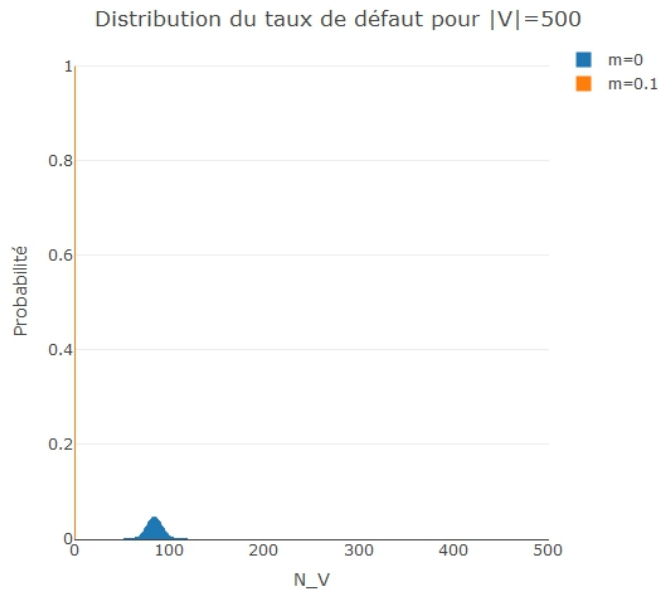


FIGURE 5.3 – Distribution du taux de défaut  $N_V$  quand  $n = 500$ , pour  $m_0 = 0.1$ ,  $s = 20$  et  $p = p_0 = 2\%$ .

Il est donc clair qu’une diversification du risque sur un segment d’un portefeuille de crédit n’est pas toujours garantie quand le réseau associé est du même type que  $G_{s,n}$ . De plus, un très grand volume n’est pas toujours une solution, car le comportement dans ce cas dépend du rapport de force entre chaque entité et ses concurrentes.

### 5.2.1.2 Analyse numérique

Pour mieux voir comment  $N_V$  se comporte, nous allons analyser comment le réseau central réagit à la concurrence externe. En regarde les variations de la distribution des pertes de celui-ci par rapport a sa taille  $n$  et au nombre de concurrents  $s$ , mais aussi en fonction des connectivités  $m$  et  $m_0$  et des probabilités intrinsèques de défaut  $p$  et  $p_0$ .

La figure 5.4 représente les variations de  $VaR_{95\%}(N_V)$  en fonction de la taille  $n$  du réseau  $V$  et  $s$  le nombre de concurrents par entité de  $V$ . On observe tout d’abord que nous avons des passages de 0 à 1 à partir d’un certain seuil de  $s$ , celui-ci représente la valeur critique du nombre d’entités concurrents, et elle dépend de  $n$ ,  $m$  et  $m_0$ . Ce phénomène est dû à la complétude du réseau qui devient très pénalisante pour ses entités quand elles deviennent assez nombreuses (plus d’entités plus de connexions). Donc comme les entités centrales sont fortement connectées, alors la diffusion du risque se fait de manière très rapide sans aucune atténuation par effet de distance. L’augmentation du nombre de concurrents  $s$  fait donc grossir la queue de distribution des pertes  $N_V$  brusquement quand le réseau est fortement connecté. Les figures (a) et (b) montrent que pour le même niveau de  $m_0$ , nous avons le même seuil de  $s$  à partir duquel  $VaR_{95\%}(N_V)$  passe de 0 à 1 quand  $n$  est assez grand, à savoir  $s = 40$ . En comparant ces deux figures, on constate

que l'augmentation de  $m$  élimine de plus en plus les états intermédiaires entre 0 et 1. Donc l'augmentation de la connectivité  $m$  agit comme l'augmentation du nombre d'entités  $n$ , cette dualité n'est vraie que quand le réseau est proche de la complétude en terme de connexion. Les figures (c) et (d) montrent qu'il en ait de même pour  $s$  et  $m_0$  qui font tous les deux tendre  $N_V$  vers des états de pertes extrêmes. Donc en augmentant simultanément  $m$  et  $m_0$  ou  $s$  et  $n$  rend le système critique dans le sens où la perte ne peut être que 0 ou 1.

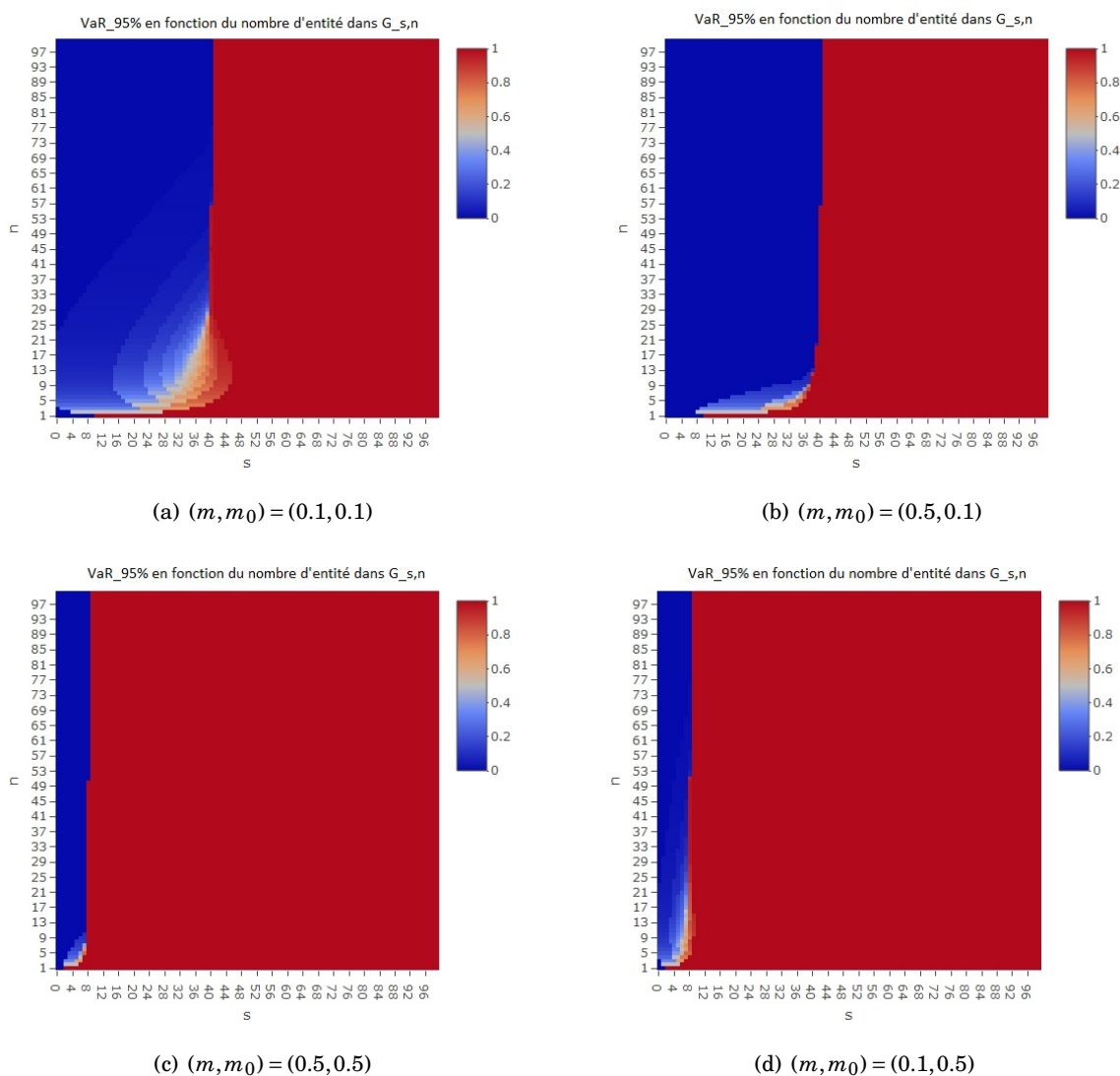


FIGURE 5.4 – Variations de la VaR à 95% en fonction de la taille du réseau.

Pour étudier encore plus cette dualité connectivité-nombre de connexions, nous regardons les variations de  $VaR_{95\%}(N_V)$  en fonction de  $m$  et  $m_0$  présentées dans la figure 5.5. On remarque tout d'abord qu'à l'instar des variations par rapport à  $n$  et  $s$  nous avons un phénomène de criticalité à partir d'un certain niveau de connectivité  $m^*$  qui devient de plus en plus précoce

quand  $n$  augmente. Nous avons également une connectivité critique  $m_0^*$  qui diminue quand  $s$  augmente. La seule différence avec les variations par rapport à  $n$  et  $s$  est que le nombre d'états possibles de  $N_V$  reste fixe car  $n$  est fixé dans chaque cas. Par conséquent, les zones de pertes intermédiaires se réduisent quand  $m$  augmente pour toutes les valeurs de  $n$  et  $s$ . En comparant les figures de gauche (a,c et e) avec celles de droite (b,d et f) on constate que  $m^*$  ne dépend pas de  $s$ , ni de  $m_0^*$  qui lui dépend de  $s$ , ce qui veut dire que le couple  $(n, m)$  seul définit la susceptibilité du réseau central à diffuser le risque. On peut en déduire que si le nombre d'entités centrales augmente considérablement, alors la topologie complète du réseau fait augmenter le degré de connexion ; et compresse les états des pertes intermédiaires de  $N_V$  dans les petites valeurs de  $m$  bien que leur nombre augmente avec  $n$ . Par la suite une simple augmentation de la concurrence externe rapproche l'état du réseau central d'un état de perte totale.

Malgré le fait que les relations sont de support, on voit clairement que l'augmentation de la connexion dans un réseau fait grossir brusquement la queue de la distribution des pertes. Il est alors important que des systèmes très connectés comme les groupes d'affaires ou les chambres de compensation prennent en considération les effets néfastes d'un excès d'interdépendance. Donc en périodes de stress, il serait préférable pour les groupes d'affaires de réduire l'interdépendance entre les filiales.

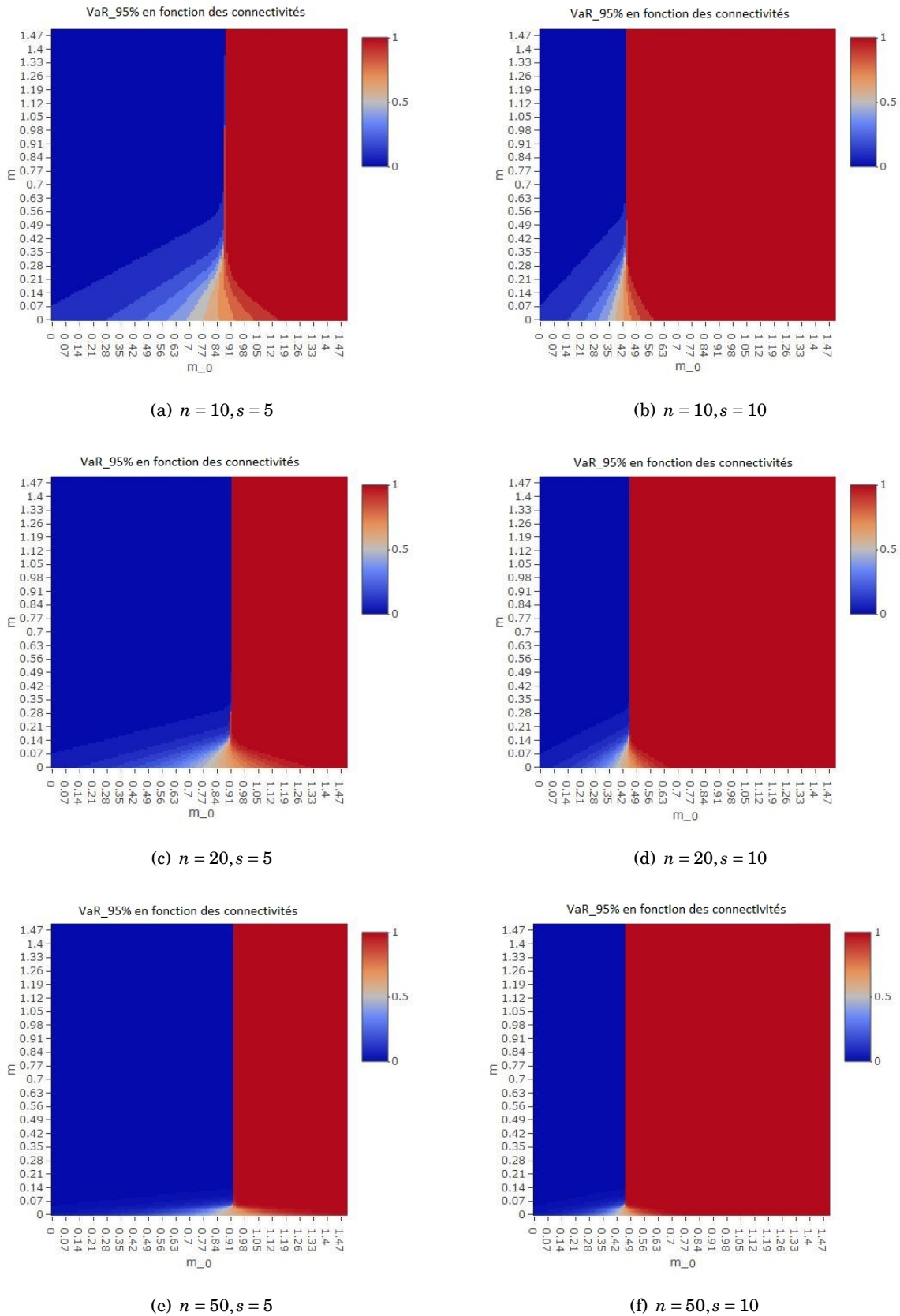


FIGURE 5.5 – VaR à 95% pour différentes tailles du réseau central  $V$  et différentes valeurs de  $\delta^+$ ,  
comme fonction de  $m$  et  $m_c$

Jusqu'à présent nous avons étudié les variations de la queue de distribution des pertes en fixant les probabilités intrinsèques  $p$  et  $p_0$  à 2%. Nous avons vu dans le chapitre 3 qu'une augmentation de la probabilité intrinsèque de défaut d'une entité fait augmenter ou baisser la probabilité marginale de défaut des ses voisins selon les types de relation qui les relie. Dans notre cas, une diminution de  $p$  va profiter aux entités du réseau central en faisant baisser leurs probabilités de défaut, tandis que les entités concurrentes vont être impactées négativement par une augmentation de la probabilité de défaut. Dans l'autre sens, une diminution de  $p_0$  va faire augmenter les probabilités marginales de défaut des entités centrales.

La figure 5.6 représente les variations de  $VaR_{95\%}(N_V)$  en fonction de  $p$  et  $p_0$  pour différentes valeurs de  $(n, s)$  et  $(m, m_0) = (0.1, 0.1)$ . On remarque d'abord que pour tout  $p$  l'augmentation de  $p_0$  fait diminuer le risque en allant vers les zones où les pertes sont moins importantes ; car la dégradation des entités périphériques profite au réseau central dû à la relation de concurrence. De même, pour tout  $p_0$  l'augmentation de  $p$  fait augmenter le risque en allant vers les zones des pertes importantes, et que plus  $p_0$  est petit plus il est facile d'avoir de grandes pertes. En comparant les figures de gauche avec celles de droite, on s'aperçoit que l'augmentation du nombre  $s$  de concurrents par entité rend les probabilités critiques  $p^*$  à partir desquelles on passe à une zone de pertes extrêmes plus facilement atteignables. D'autre part, l'augmentation de la taille du réseau central  $n$  fait disparaître les zones des pertes intermédiaires. En effet, dans la figure (a) nous avons toutes les 11 zones qui correspondent à  $n = 10$ , alors que dans la figure (c) on ne voit que 6 premières zones et un condensé des zones restantes avant la zone rouge de perte totale. Finalement dans la figure (e) il n'y a plus que les zones de 0 et 100% de pertes alors qu'il y en a 51, ce qui est dû à l'augmentation de la connexion dans le réseau central qui le rend critique. Donc dans un tel réseau critique, une petite dégradation des entités ou une amélioration des entités concurrentes peut mettre le réseau entier en défaut.



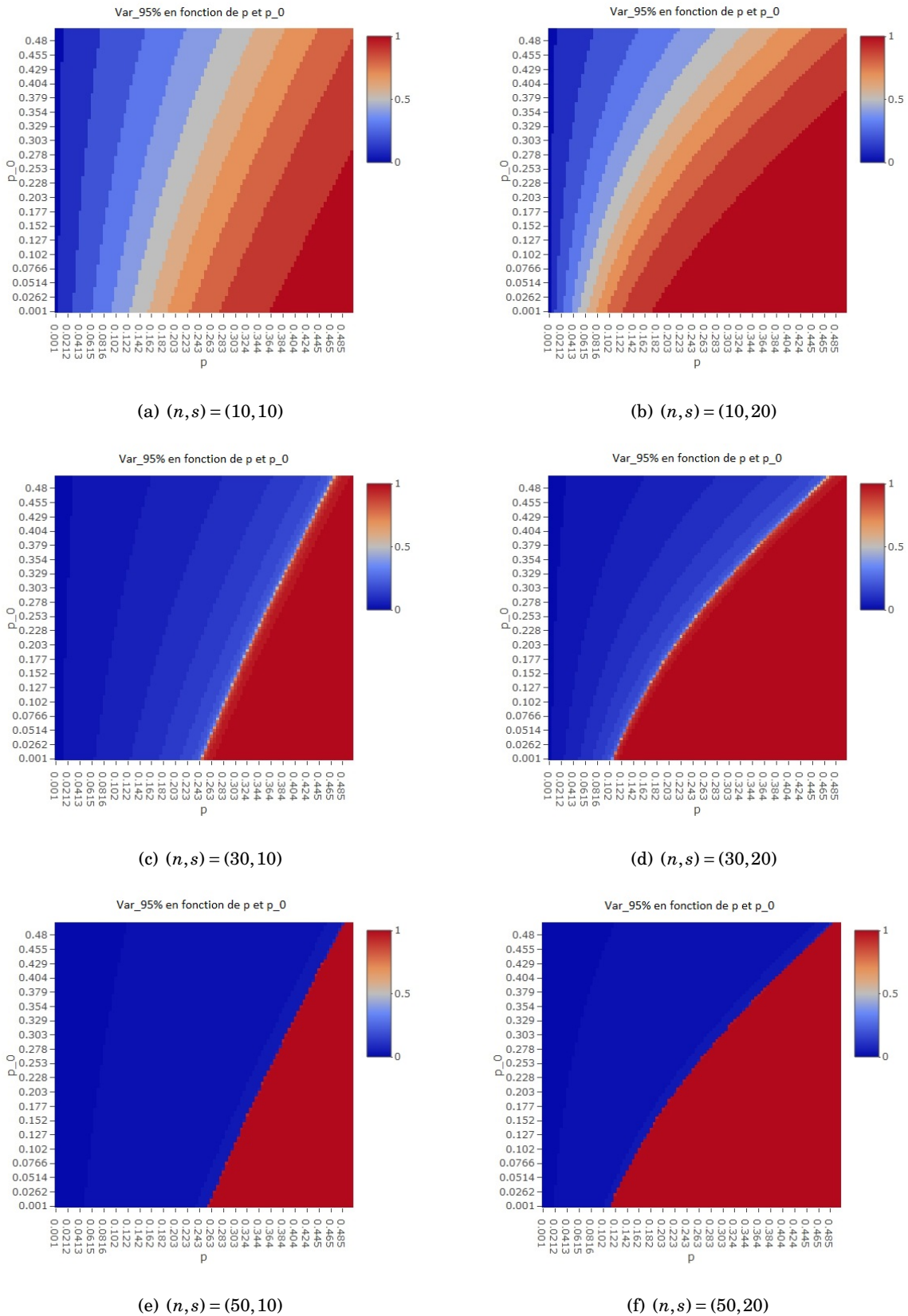


FIGURE 5.6 – VaR à 95% pour un réseau central de taille  $n = 10$  et un degré de concurrence externe  $s_c = 10$ , comme fonction de  $p$  et  $p_0$  189

La figure 5.7.(a) montre que si on fait augmenter  $m_0$ , alors l'état du réseau devient de plus en plus critique quand la concurrence s'améliore (décroissance de  $p_0$ ), et donc une augmentation de la probabilité de défaut  $p$  assez faible peut mener à un défaut du réseau central. Si on augmente également  $m$  comme dans la figure (b), alors la situation devient encore plus critique, car nous n'avons plus de passage par des pertes intermédiaires, mais un passage brutal de 0 à 100% de pertes.

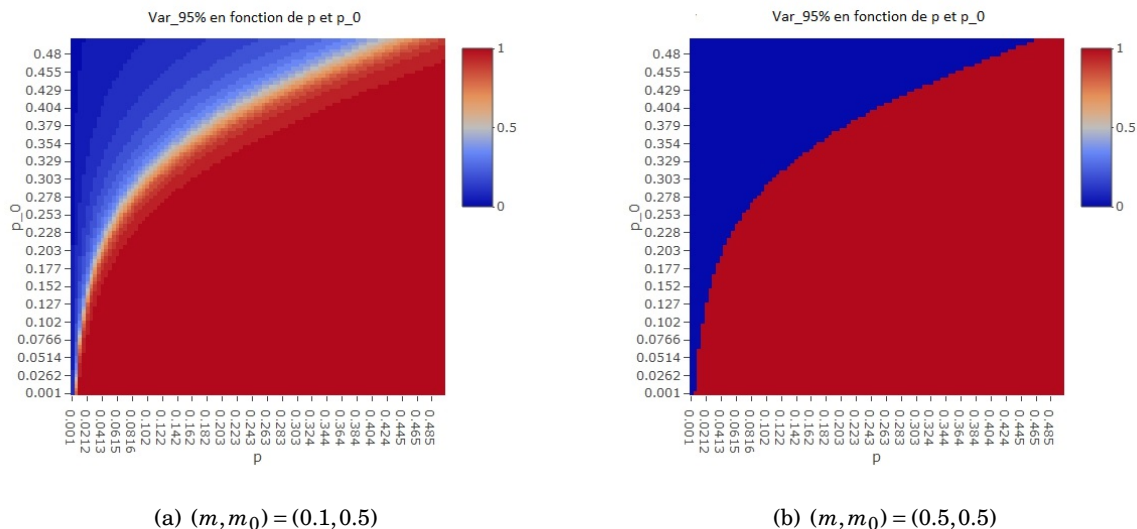


FIGURE 5.7 – VaR à 95% pour un réseau central de taille  $n = 30$  et un degré de concurrence externe  $s = 10$ , comme fonction de  $p$  et  $p_0$

On peut alors conclure que dans un réseau complet, le nombre d'entités joue le même rôle que la connectivité dans la transmission du risque exogène à celui-ci ; et que l'augmentation du nombre d'entités dans une telle topologie ne renforce pas forcément le réseau. Comme dans la section précédente, on considère que

## 5.2.2 Extension au cas de relations satellites arbitraires

L'objectif de cette section est d'étendre l'étude dans la section précédente en permettant aux réseaux satellites de contenir toute sorte de relations. L'idée est de comparer les différents effets simultanés de ces relations sur le réseau central. Nous avons vu dans la section 6 du chapitre 3 que les effets de second ordre de deuxième espèce peuvent s'annuler au voisinage de 0. Nous allons voir par la suite que certaines relations peuvent avoir des effets exactement opposés de telle manière à ne pas avoir d'impact.

On considère alors un réseau  $G_{s,n}$ , où  $s = (s_1, \dots, s_q) \in \mathbb{N}^q$ , constitué d'un réseau central  $G_n = (V, M, T)$  complet de  $n$  entités, de telle sorte que chaque entité  $i \in V$  est reliée à des entités satellites  $V_i$  avec  $s_j$  relations identiques qu'on note  $r_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, q\}$  comme le montre la figure 5.8. Chaque type de relation  $r_j$  est caractérisée par ces coefficients et elle s'exprime de la

manière suivante

$$\delta_{il}(X_i, X_l) = a_j X_i + b_j X_l + c_j X_i X_l$$

où l'entité de gauche  $i \in V$  et  $l \in V_i$ . De plus, on suppose que chaque entité satellite reliée au réseau central par une relation de type  $r_j$  a une probabilité intrinsèque  $p_j$  et une connectivité  $m_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, q\}$ . Le réseau central est également homogène avec une connectivité  $m$  et les mêmes probabilités intrinsèques de défaut  $p$ . On note  $v := |V_i| = \sum_{i=1}^q s_i$ , nous avons donc un réseau  $G_{s,n} = (V \cup_{i \in V} V_i, M_{s,n}, T_{s,n})$  tel que

$$M_{s,n} = \begin{pmatrix} M & F_1 & F_2 & \dots & F_n \\ F_1 & I_v & 0_v & \dots & 0_v \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_n & 0_v & 0_v & \dots & I_v \end{pmatrix} \text{ où } F_i = \begin{pmatrix} 0_{s_1} & \dots & 0_{s_q} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ m_1 u_{s_1} & \dots & m_q u_{s_q} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0_{s_1} & \dots & 0_{s_q} \end{pmatrix} \text{ de taille } n \times v \text{ et } u_i = \underbrace{(1, \dots, 1)}_i.$$

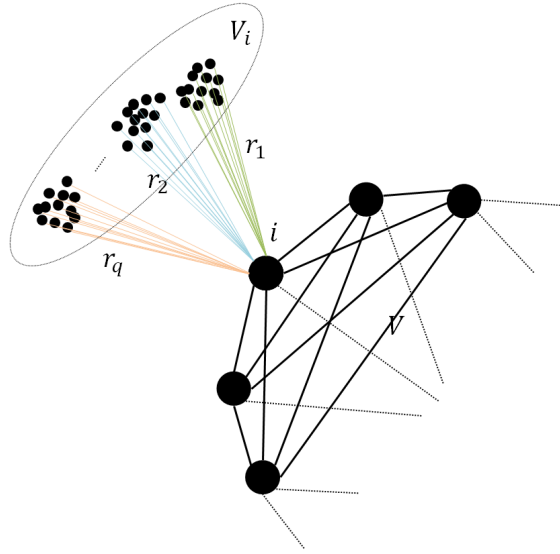


FIGURE 5.8 – Le réseau  $G_{s,n}$ .

Comme dans le cas précédent, on note  $N_A$  le taux de défaut ou le taux de perte dans le sous-réseau  $A \subset V$ . La proposition 5.1 se prolonge au résultat suivant :

**Proposition 5.3.** *Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on a*

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) = \frac{C_n^k \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{k s_j} e^{B(n-2k)+2m(C_k^2+C_{n-k}^2)}}{\sum_{l=0}^n C_n^l \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{l s_j} e^{B(n-2l)+2m(C_l^2+C_{n-l}^2)}}$$

où pour tout  $j \in \{1, \dots, q\}$ ,  $\theta_{r_j} = \frac{1+e^{-2(B_j+(c_j-b_j)m_j)}}{e^{2m_j(a_j+c_j)} + e^{-2(B_j+(a_j-b_j)m_j)}}$ .

*Démonstration.* Voir 5.6.1.1. □

Les fonctions  $\theta_{r_j}$  représentent l'influence des entités reliées au réseau central via les relations  $r_j$ , et quand  $m_j$  est nul pour  $j \in \{1, \dots, q\}$ , alors  $\theta_{r_j} = 1$ , ce qui signifie qu'il n'y a plus d'influence. Le terme  $e^{B(n-2k)+2m(C_k^2+C_{n-k}^2)}$  représente la contribution du réseau central dans la distribution des pertes. Remarquons que si une relation  $r_j$  est la concurrence  $\delta_{kl} = -X_k X_l$  utilisée dans la section précédente, la constante  $\theta_{r_j} = \theta = \frac{e^{2m_0} + e^{-2B_0}}{1 + e^{2m_0 - 2B_0}}$ .

On remarque que s'il existe  $I \subset \{1, \dots, q\}$  tel que  $\prod_{i \in I} \theta_{r_i}^{s_i} = 1$ , alors la distribution des pertes ne dépendra pas des relations  $r_i$  pour  $i \in I$ , ce qui veut dire que les effets de ces relations s'annulent mutuellement. Pour le cas de deux relations  $r_i, r_j$ , l'équation  $\theta_{r_i} \theta_{r_j} = 1$  est plus forte que  $\theta_{r_i}^{s_i} \theta_{r_j}^{s_j} = 1$ . La première équation rappelle deux relations opposées quelque soit leurs multiplicités  $s_{r_i}, s_{r_j}$ . Comme les deux fonctions  $\theta_{r_i}$  et  $\theta_{r_j}$  sont des fonctions de  $m_i$  et  $m_j$ , alors la première équation implique que les coefficients non triviaux du développement limité au second ordre en  $(m_i, m_j)$  au voisinage de  $(0, 0)$  de leur produit sont nuls. Ces annulations impliquent les conditions "d'orthogonalité" des relations  $\delta_i, \delta_j$  discutées dans le chapitre 3 section 3.2.3. Donc les équations de compensation des effets de relations de type  $\prod_{i \in I} \theta_{r_i} = 1$  généralisent les conditions d'annulations des  $|I|$ -formes linéaires  $d_0^{|I|} \mathbb{P}_G$  définies dans le chapitre 3 section 3.2.3.

Nous avons vu dans la section précédente que lorsque la connectivité devient très grande, les seules pertes possibles sont 0 ou 100% avec des probabilités explicites 5.2. En fait, cette situation est conservée en présence de relations autres que la concurrence dans les réseaux satellites. En effet, on a

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{1 + \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{n s_j} e^{-2nB}} & \text{si } k = 0 \\ \frac{\prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{n s_j} e^{-2nB}}{1 + \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{n s_j} e^{-2nB}} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous avons donc  $\mathbb{P}_{G_{s,n}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \lambda_n \delta_{(1, \dots, 1)} + (1 - \lambda_n) \delta_{(-1, \dots, -1)}$ , où  $\lambda_n = \frac{1}{1 + \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{n s_j} e^{-2nB}}$ . Par conséquent, pour tout  $i, j \in V$ , on a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(X_i = -1) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(X_i = X_j = -1) = 1 - \lambda_n$$

Or  $\text{Cov}_{G_{s,n}}(X_i, X_j) = 4(\mathbb{P}_{G_{s,n}}(X_i = X_j = -1) - \mathbb{P}_{G_{s,n}}(X_i = 1)\mathbb{P}_{G_{s,n}}(X_j = -1))$ , alors

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \text{Cov}_{G_{s,n}}(X_i, X_j) = 4\lambda_n(1 - \lambda_n) \text{ et } \lim_{m \rightarrow +\infty} \text{Cor}_{G_{s,n}}(X_i, X_j) = 1 \quad (5.4)$$

La valeur de la corrélation de défaut illustre l'effet de la criticalité sur l'impossibilité d'annuler la concentration du risque associé à une exposition sur un tel réseau. Cependant, les cas  $\lambda_n = 0$  ou 1 constituent des singularités, qui ne sont atteintes que pour un volume infini ( $n \rightarrow +\infty$ ); cela fait l'objet de la sous-section qui suit.

### 5.2.2.1 Comportement en volume infini

Pour la relation de concurrence considérée dans la section précédente on a  $\theta > 1$ . Cette inégalité n'est pas vraie pour toutes les relations, et donc il est possible d'avoir des relations telles que  $\theta_{r_i} \leq 1$ . En particulier, si  $m_j > 0$ , alors

$$\theta_{r_j} = 1 \Leftrightarrow a_j + c_j = 0 \text{ ou } b_j - a_j = \frac{B_j}{m_j}$$

Donc contrairement à la proposition 5.1, le comportement en volume infini devient différent, car il dépend des valeurs des fonctions  $\theta_{r_j}$ , et on a le résultat suivant :

**Proposition 5.4.** *Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on a*

1. *Pour tout  $j \in \{1, \dots, q\}$ , on a*

- Si  $\theta_{r_j} < 1$ ,  $\lim_{s_j \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) = \delta_0(k) \mathbb{1}(m_j > 0) + \mathbb{P}_{G_{n,(s_1, \dots, s_j=0, \dots, s_q)}}(N_V = \frac{k}{n}) \mathbb{1}(m_j = 0)$ .
- Si  $\theta_{r_j} > 1$ ,  $\lim_{s_j \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) = \delta_n(k) \mathbb{1}(m_j > 0) + \mathbb{P}_{G_{n,(s_1, \dots, s_j=0, \dots, s_q)}}(N_V = \frac{k}{n}) \mathbb{1}(m_j = 0)$ .
- *S'il existe des relations  $(r_i)_{i \in I}$  telles que  $\theta_{r_j}^{s_j} \prod_{i \in I} \theta_{r_i}^{s_i} = 1$ , en particulier  $\theta_{r_j} = 1$ , alors la probabilité  $\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n})$  est constante par rapport  $s_j$ .*

2. *Pour tout  $s \in \mathbb{N}^q$ , on a*

- Si  $B > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$ , alors  $\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) \sim_{n \rightarrow +\infty} \delta_0(k) \mathbb{1}(m > 0) + \phi(k) \mathbb{1}(m = 0)$
- Si  $B < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$ , alors  $\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) \sim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(k) \mathbb{1}(m > 0) + \phi(k) \mathbb{1}(m = 0)$
- Si  $B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$ , alors  $\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) \sim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2} \delta_0 + \frac{1}{2} \delta_n) \mathbb{1}(m > 0) + \phi(k) \mathbb{1}(m = 0)$

où  $\phi$  est la densité de la loi normale de moyenne  $\mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = 1)$  et de variance  $\frac{\mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = 1)(1 - \mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = 1))}{n}$ .

*Démonstration.* Voir 5.6.1.2. □

On peut déduire de ce résultat que si pour une relation  $r_j$  on a  $\theta_{r_j} > 1$ , alors cette relation est "mauvaise" pour le groupe central  $V$ , et que plus celui-ci entretient des relations de ce type, plus son état se dégrade. En revanche, l'inégalité  $\theta_{r_j} < 1$  signifie que cette relation est "bonne" pour le réseau central, et  $\theta_{r_j} = 1$  veut dire que cette relation n'a aucun impact.

Prenons maintenant deux relations de support  $SNM$  ( voir 3.2.5 ) que nous appellerons  $SNM^+$  et  $SNM^-$  définies respectivement par

$$\delta_{ij}^+(\pm 1, \pm 1) = 1, \delta_{ij}^+(1, -1) = \delta^+ \text{ et } \delta_{ij}^+(-1, 1) = 0$$

$$\delta_{ij}^-(\pm 1, \pm 1) = 1, \delta_{ij}^-(-1, -1) = 0 \text{ et } \delta_{ij}^-(-1, 1) = \delta^-$$

où  $i \in V$  et  $j \in V_i$ . Les paramètres  $\delta^+$  et  $\delta^-$  sont dans  $[0, 2[$  pour que les relations soient de support, car  $c(\delta_{ij}^\pm) = 2 - \delta^\pm$ . La relation  $SNM^+$  est une relation dans laquelle l'entité centrale  $i \in V$  est supportée par l'entité satellite  $j \in V_i$  de telle sorte que  $j$  se dégrade quand  $m_{ij}$  augmente. Alors que dans la relation  $SNM^-$  les rôles s'inversent, et c'est  $i \in V$  qui supporte ses entités

satellites  $j \in V_i$  ce qui la fait dégrader quand  $m_{ij}$  augmente. On note  $\theta_p$  et  $\theta_m$  les fonctions  $\theta$  correspondantes aux relations  $SNM^+$  et  $SNM^-$  respectivement, on a

$$\theta_p = \frac{1 + e^{(1-\delta^+)m_p - 2B_p}}{e^{m_p(1-\delta^+)} + e^{-\delta^+m_p - 2B_p}} \text{ et } \theta_m = \frac{1 + e^{m_m - 2B_m}}{e^{m_m} + e^{\delta^-m_m - 2B_m}}$$

On peut facilement démontrer pour tout  $B_p, B_m, m_p, m_m > 0$  que  $\theta_p < 1$  et  $\theta_m > 1$ , ce qui veut dire que la relation  $SNM^+$  est "bonne" en terme de quantité pour le réseau central, contrairement à  $SNM^-$ . Nous allons analyser dans la sous-section qui suit comment ces relations agissent sur la distribution des pertes.

Le deuxième point de cette proposition est assez similaire à celui de 5.1, à l'exception de la comparaison entre  $B$  et  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$ . Cette comparaison se ramène à celle de la probabilité intrinsèque de défaut  $p$  des entités centrales et la probabilité  $p_\theta = \frac{1}{1 + \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{s_j}}$ . La probabilité  $p_\theta$  représente la valeur maximale de la probabilité intrinsèque de défaut  $p$  pour laquelle l'effet du grand volume n'est pas négative. Si les relations sont fixes, alors cela nécessite avoir des connectivités  $(m_j^*)_{j \in \{1, \dots, q\}}$  qui minimisent  $\prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{s_j}$ <sup>1</sup>. Donc pour de telles connectivités (si celles-ci existent), l'inégalité  $B > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$  est facile à obtenir, et donc le risque sur un segment d'un portefeuille d'une telle structure est minimal par effet de volume. Si dans un tel segment nous avons une configuration des relations satellites et de connectivités pour lesquelles le produit  $\prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{s_j}$  est assez grand, alors les paquets de relations de chacune des entités centrales les rends fragiles. En effet, dans ce cas l'inégalité  $B \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$  devient vraisemblable si la résistance  $B$  n'est pas suffisamment grande, donc l'effet de volume peut provoquer une perte  $N_V = 100\%$  avec une probabilité très élevée.

Pour les cas  $B \neq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$  avec  $m > 0$ , nous avons  $\lambda_n \rightarrow 0$  ou  $1$ , donc on a une covariance nulle d'après 5.4 car les probabilités de défaut sont toutes nulles ou égales à 1. Si  $B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$ , alors  $\lambda_n \rightarrow \frac{1}{2}$ , par conséquent la covariance  $4\lambda_n(1 - \lambda_n)$  quand  $m \rightarrow +\infty$  devient maximale, et toutes les probabilités de défaut (marginales ou multiples) sont égales à  $\frac{1}{2}$ . La quantité  $B - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$  représente la résistance équivalente de chaque entité du réseau central en imaginant que nous ne percevons que les effets des réseaux satellites et que le réseau  $G_{s,n}$  est ramené au réseau  $G_n$ . Par conséquent, si cette quantité est nulle, les travaux de Peierls [163] discutés dans le chapitre 3 3.7 sur les réseaux de degré fixe on peut imaginer qu'il existe un changement de phase. Cependant, nous avons bien l'unicité de la limite de la mesure en volume infini d'après la proposition précédente, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de changement de phase dans le sens de la mécanique statistique.

Il est possible exprimer les probabilités marginales ou bivariées de défaut des entités du réseau central, ou même de celles des entités des réseaux satellites. La proposition suivante nous donne ces probabilités de manière explicite. Celle-ci repose sur les mêmes technique de calcul de

1. Ce produit est une fonction bornée en  $(m_j)_{j \in \{1, \dots, q\}}$ , mais, mais nous avons aucune garantie sur l'existence d'un minimum.

la distribution des pertes, mais les formules restent assez compliquées à exploiter. Nous avons vu qu'il est possible d'analyser ces formules en volume infini via les résultats précédents, donc ces formules sont données à titre illustratif.

**Proposition 5.5.**

Soient  $n > 1$  et  $s \in \mathbb{N}^q$ ,

1. Pour tout  $i \in V$ , on a

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}}(X_i = -1) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{s_j(k+1)} e^{B(n-2k-2)+2m(C_k^2+C_{n-k-1}^2+k)}}{\sum_{l=0}^n C_n^l \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{s_j l} e^{B(n-2l)+2m(C_l^2+C_{n-l}^2)}}$$

2. Pour tout  $(i, j) \in E(V)$ , on a

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}}(X_i = X_j = -1) = \frac{\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{s_j(k+2)} e^{B(n-2k-4)+2m(C_k^2+C_{n-k-2}^2+2k+1)}}{\sum_{l=0}^n C_n^l \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{s_j l} e^{B(n-2l)+2m(C_l^2+C_{n-l}^2)}}$$

*Démonstration.* Voir 5.6.1.3. □

L'effet du volume dans un réseau complet est dû au nombre de relations qui grandit linéairement avec  $n$ . En effet, la partie de couplage du modèle s'écrit  $2m(C_k^2 + C_{n-k-1}^2)$ , donc augmente de manière quadratique par rapport à  $n$ . Ceci crée une hyperconnectivité qui rend le réseau central très sensible à toute variation de l'état de santé de chacune de ses entités, et donc sensible aux perturbations des réseaux satellites. Un des modèles de spin utilisés dans l'étude des réseaux complets est le modèle de Curie-Weiss dont la partie de couplage est normalisée par  $n$ . De manière générale, la normalisation se fait par le degré du réseau, pour plus d'informations sur ce modèle, voir le livre de S. Friedli et Y. Velenik [104]. Pour affiner davantage l'étude de ce phénomène, on s'intéressera plus loin aux réseaux réguliers d'un degré de connexion  $d$  et leur comportement en volume infini.

**5.2.2.2 Analyse numérique :**

Dans la section précédente, nous avons analysé numériquement l'effet de la concurrence externe sur le réseau central, l'objectif est de ré-appliquer la même méthodologie d'analyse sur plusieurs relations externes. La ligne directrice est de faire confronter des relations dont les effets sur le réseau central sont opposés, c'est à dire dont les fonctions  $\theta$  n'ont pas la même position par rapport à 1.

**A- Effet des réseaux externes  $SNM^-$  :** On suppose que les réseaux satellites sont reliés uniquement via les relations  $SNM^-$  au réseau central. Ces relations sont pénalisantes pour les entités centrales du fait du support coûteux qu'elles portent à leurs entités satellites, la proposition 5.4 nous indique qu'un nombre important de ces relations dégrade très considérablement le

réseau central. La figure 5.9 nous montre que l'effet du nombre des relation  $SNM^-$  est similaire à celui des relations de concurrence, comme vu précédemment dans la figure 5.4, même si elles sont de support. Quand on fait augmenter  $\delta^-$ , l'effet de support "négatif" pour les entités centrales s'accroît, ce qui veut dire que  $\delta^-$  traduit le coût du support que chaque entité centrale apporte. En effet, la figure (b) met en évidence le fait qu'il devient suffisant d'avoir un nombre faible d'entités à supporter de la part des entités centrales pour que les pertes soient très élevées. En outre, les états intermédiaires disparaissent pour un nombre important d'entités centrales, ce qui mène également vers des situations de passage d'une perte de 0 à 100% à partir d'un seuil de nombre d'entités supportées qui diminue quand  $\delta^-$  augmente. Cet effet s'accroît d'avantage si on fait augmenter  $m$  et  $m_m$ , car d'une part l'augmentation de  $m_m$  va rendre l'effet plus intense, et celle de  $m$  va disperser la dégradation de chaque entité centrale aux autres.

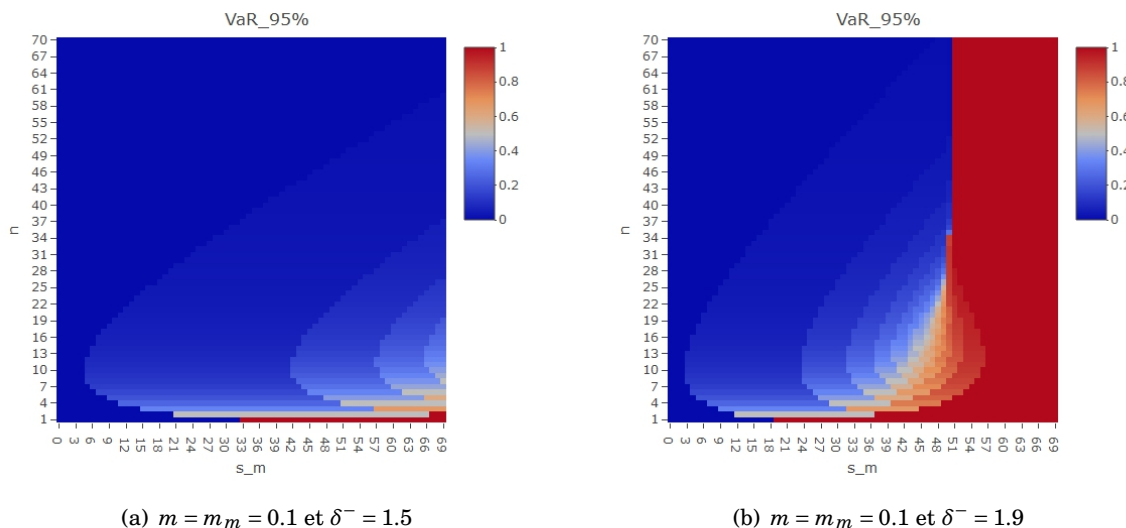


FIGURE 5.9 –  $VaR_{95\%}$  en fonction de la taille de  $V$  et  $s_m$  et différentes valeurs de  $\delta^-$  pour  $p = p_m = 1\%$ .

Les variations de  $VaR_{95\%}(N_V)$  par rapport à  $(m, m_m)$  sont similaires à celles dans le cas de la concurrence. La figure 5.10 indique la disparition des états intermédiaires après augmentation de  $m$ , et que le seuil de  $m_m$  à partir duquel on peut passer de 0 à 100% de pertes devient plus proche quand  $s_m$  et le coût  $\delta^-$  augmentent. En plus, si on fait augmenter la taille  $n$  du réseau central, alors les états intermédiaires disparaissent pour des connectivités  $m$  très faibles, du fait de l'augmentation de le degré de connexion dans le réseau.



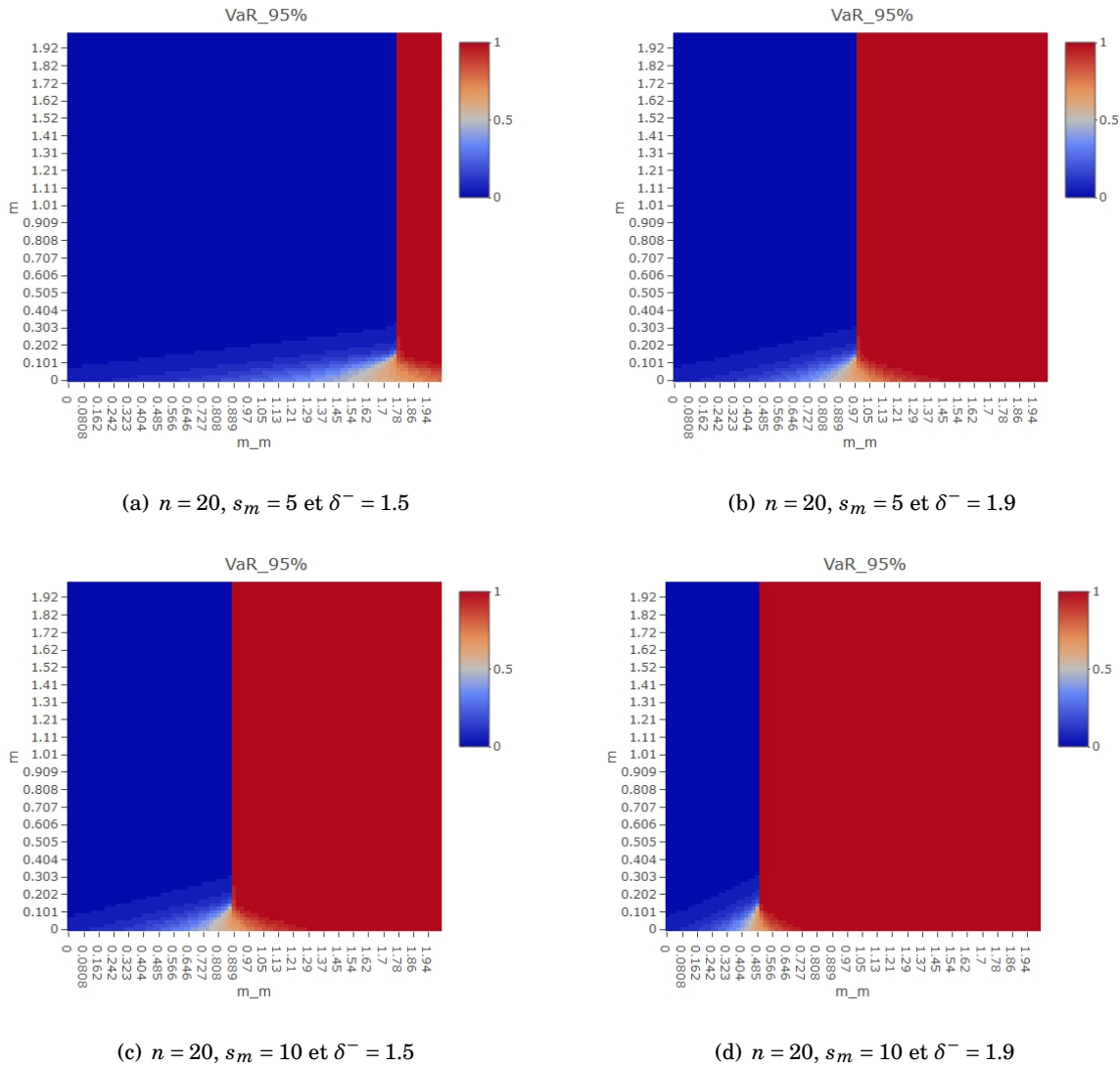


FIGURE 5.10 –  $VaR_{95\%}$  en fonction de  $m$  et  $m_m$  et différentes valeurs de  $\delta^-$  pour  $p = p_m = 1\%$ .

Analysons maintenant les variations de  $VaR_{95\%}(N_V)$  en fonction de  $(p, p_m)$ . La figure 5.11 montre que l'augmentation de la probabilité de la probabilité  $p_m$  fait augmenter la perte (les lignes de niveau sont inclinées vers la droite), car  $SNM^-$  est une relation de support, et donc  $\mathbb{P}_{G_{s,n}}(X_i = -1)$  augmente pour tout  $i \in V$  et par la suite la perte sur  $V$  augmente. Toutefois, on remarque que l'augmentation de  $\delta^-$  diminue cet effet d'inclinaison des zones de pertes qui deviennent presque horizontales (voir figures pour lesquels  $\delta^- = 1.9$ ). Ce phénomène vient du fait que plus  $\delta^-$  se rapproche de 2, plus la relation se rapproche d'une relation purement économique, car  $c(\delta_{ij}) = 2 - \delta^-$  pour tout  $i \in V$  et  $j \in V_i$ . D'autre part, l'augmentation de  $\delta^-$  provoque également une augmentation des pertes dans le réseau central qui s'accroît d'avantage quand  $n$  augmente comme le montrent les figures (e) et (f); ceci fait également réduire les zones de pertes intermédiaires.

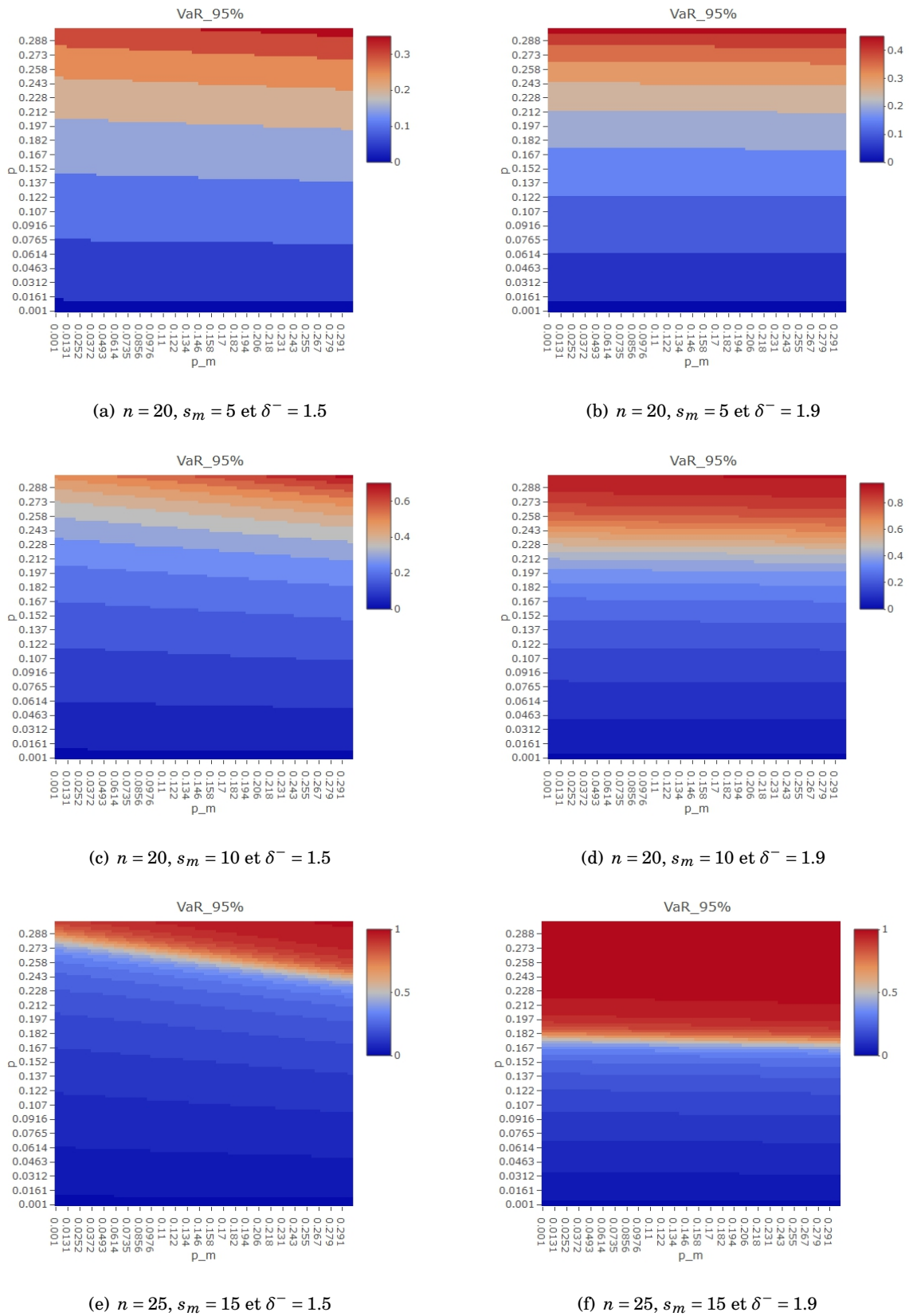


FIGURE 5.11 –  $VaR_{95\%}$  en fonction de  $p$  et  $p_m$  et différentes valeurs de  $\delta^-$  pour  $m = m_m = 1\%$ .

Nous avons alors une relation de support qui agit négativement sur l'entité qui supporte, qui à son tour transmet cette difficulté à supporter à tout le réseau central. Par effet d'excès de degré de connexion dans un réseau complet, cette transmission rend le coût du support encore plus important au niveau du réseau central, et fait grossir la queue de la distribution des pertes.

**B- Relations externes  $SNM^+$  vs  $C$  :** Nous allons voir maintenant comment les effets opposés des deux relations  $SNM^+$  et  $C$  se confrontent. On suppose alors que les réseaux satellites ne sont peuplés que par des entités concurrentes et d'autres qui supportent celles du réseau central. Le support dont bénéficie le réseau central devrait baisser la perte alors que celui des entités concurrentes devrait l'augmenter. Nous allons donc analyser l'effet du nombre de ces entités satellites, leurs connectivités avec le réseau central ainsi que leurs probabilités de défaut intrinsèques sur la santé globale du réseau central.

La figure 5.12 nous montre comment le nombre de relations de concurrence et de support positif agit sur la distribution des pertes. La figure (a) montre que plus le nombre de concurrents est grand, plus la VaR de la perte sur le groupe  $V$  a tendance à se situer dans les zones de grandes pertes, contrairement au nombre de relations de support qui fait diminuer les pertes. On observe qu'il y a en général des frontières droites entre les différentes zones de pertes, ce qui veut dire que la VaR ne dépend que de  $s_c - s_p$ . Dans le cas de la figure (a), on peut déterminer à partir de quel seuils de  $s_c - s_p$  on passe d'une région à une autre en se basant sur les valeurs de  $s_c$  quand  $s_p = 0$ . Si on augmente  $\delta^+$ , alors on observe comme dans la figure (b) que les frontières entre les zones de pertes deviennent droites par morceaux, tout en augmentant la taille des zones de faibles pertes et en diminuant les zones de fortes pertes. Cela confirme l'aspect positif de la relation  $SNM^+$  pour un  $\delta^+$  important.

Les figures (c), (d), (e) et (f) confirment le même phénomène pour des tailles du réseaux  $V$  plus importantes, mais nous remarquons également que les zones de pertes intermédiaires sont de plus en plus réduites quand  $n$  augmente.

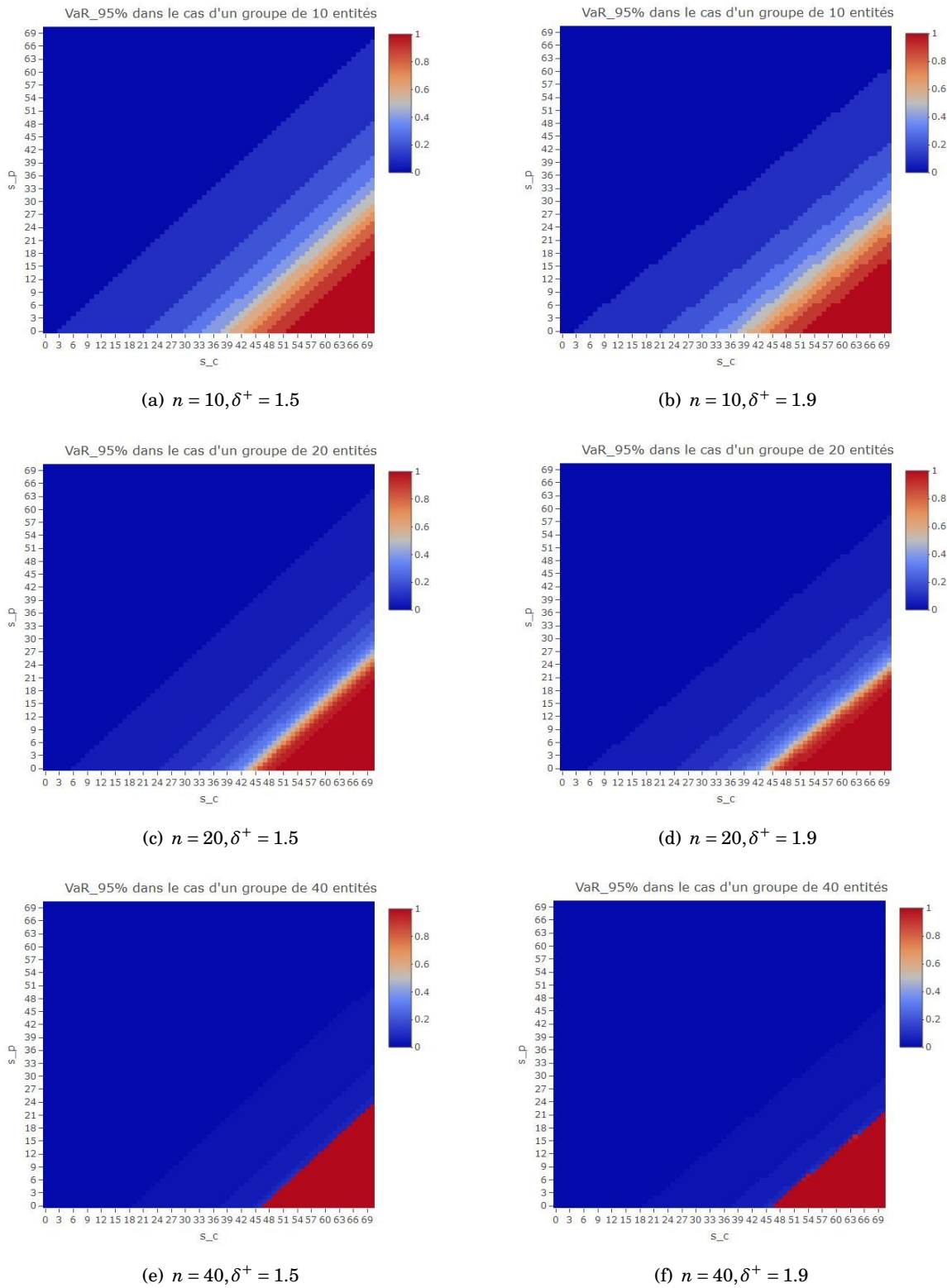


FIGURE 5.12 –  $VaR_{95\%}$  pour différentes tailles du réseau central  $V$  et différentes valeurs de  $\delta^+$ , comme fonction de  $s_p$  et  $s_c$  pour  $p = p_m = 1\%$  et  $m = m_m = 1\%$ .

La figure 5.13 met encore plus le point sur la disparition des zones de pertes intermédiaires quand  $n$  augmente considérablement. Ce qui revient comme nous l'avons expliqué précédemment à l'augmentation du degré de connexion dans le réseau par complétude de ce dernier.

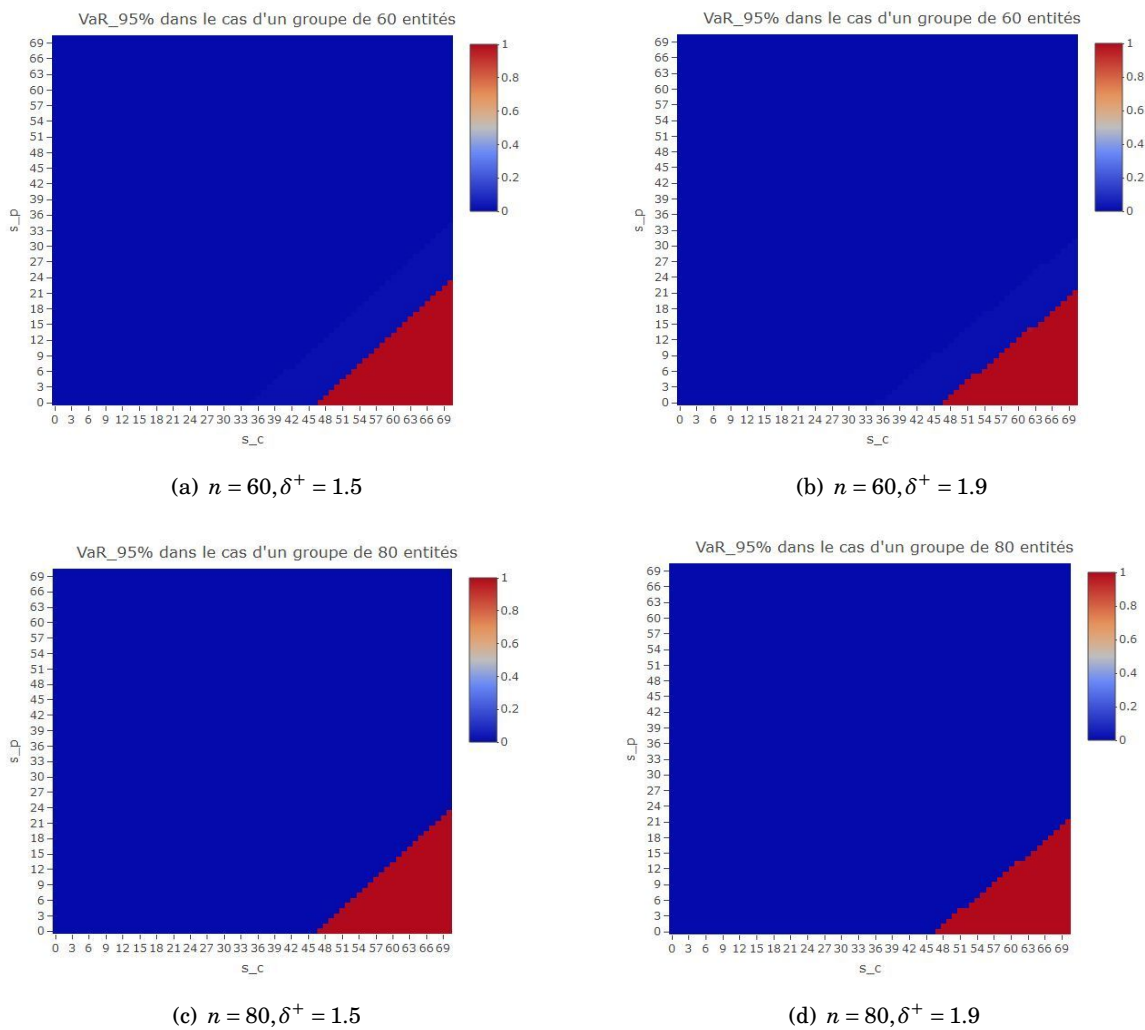


FIGURE 5.13 –  $VaR_{95\%}$  pour différentes tailles du réseau central  $V$  et différentes valeurs de  $\delta^+$ , comme fonction de  $s_p$  et  $s_c$  pour  $p = p_m = 1\%$  et  $m = m_m = 1\%$ .

Pour ce qui est des variations par rapport aux connectivités, la figure 5.14 nous montre que ces variations sont similaires à celles par rapport à  $s_p$  et  $s_c$ .

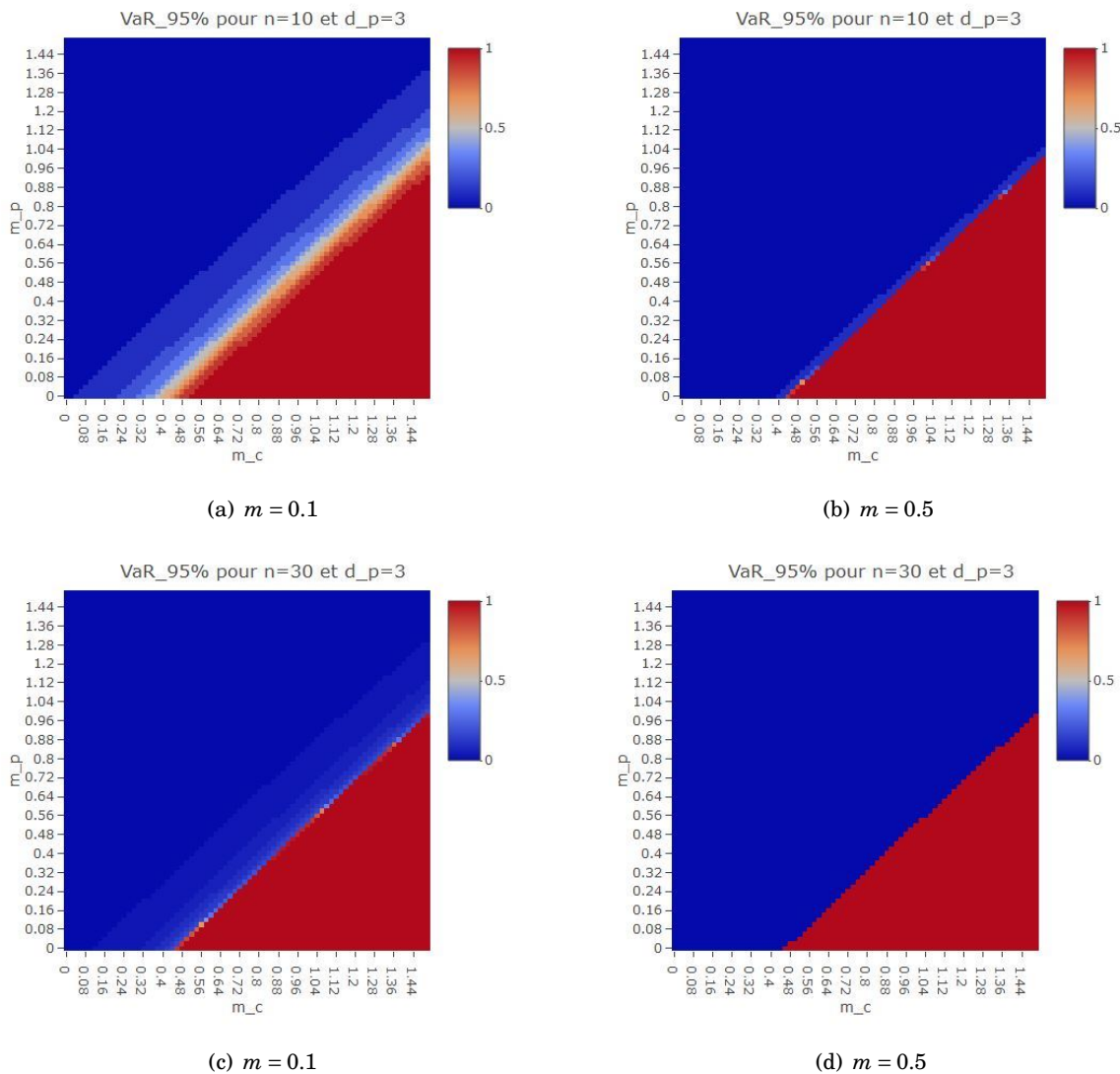


FIGURE 5.14 – VaR à 95% pour les réseaux centraux large pool pour différentes valeurs de  $\delta^+$ , comme fonction de  $m_p$  et  $m_c$  pour  $s_p = s_c = 5$ .

Les figures (a), (b), (c) et (d) nous indiquent que le fait d’augmenter la taille du réseau central  $n$  simultanément avec sa connectivité  $m$  nous conduit rapidement vers une disparition des pertes intermédiaires. En effet, sur la figure (d) on voit que pour  $n = 30$  et  $m = 0.5$  on a cet état critique du réseau, alors que pour  $m = 0.1$  on a besoin de  $n = 80$  pour l’atteindre comme le montre bien la figure 5.13. Cela est dû encore une fois au degré de connexion du réseau qui est maximal vu sa complétude, ce qui nous mène à étudier le même phénomène dans des réseaux avec des degrés de connexion moins importants, comme il est l’objet de la prochaine section.

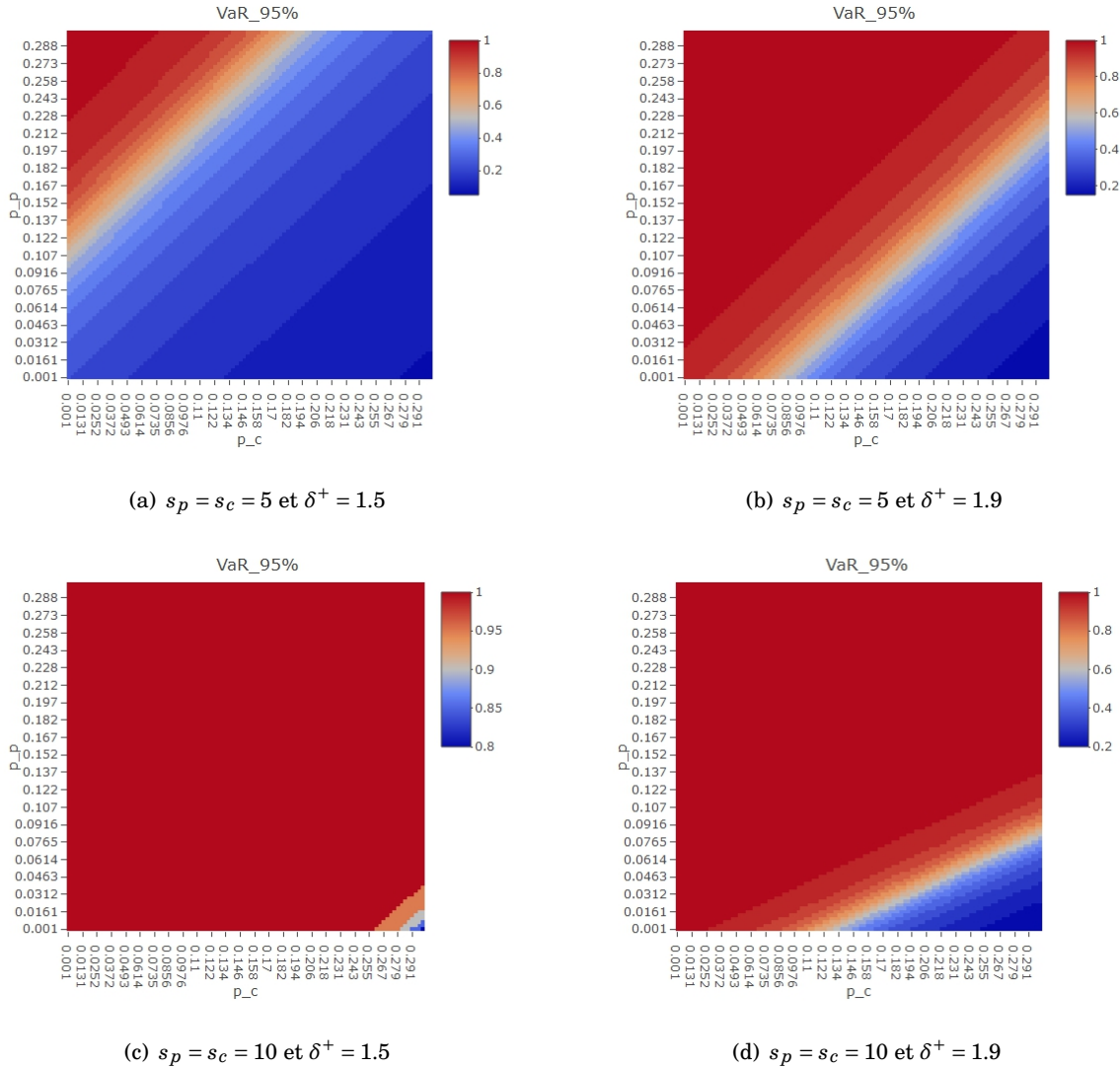


FIGURE 5.15 –  $VaR_{95\%}$  en fonction de  $(p_p, p_c)$ ,  $(s_p, s_c)$  et  $\delta^+$  pour  $m = m_p = m_c = 0.1$ .

Nous avons alors un phénomène de conflit de relations dont les effets sur les entités centrales sont opposés. On déduit des différentes analyses que si les entités qui supportent se dégradent, alors ceci dégrade le réseau central par effet de contagion d’une part, et laisse la place à la concurrence qui dégrade le réseau central d’avantage. Comme nous l’avons expliqué analytiquement, le produit  $\theta_p^{s_p} \theta_c^{s_c}$  joue un rôle essentiel dans l’effet combiné des deux relation par le fait de sa valeur par rapport à 1. Comme

$$\theta_p^{s_p} \theta_c^{s_c} = \left( \frac{1 + e^{(1-\delta^+)m_p - 2B_p}}{e^{m_p(1-\delta^+)} + e^{-\delta^+m_p - 2B_p}} \right)^{s_p} \left( \frac{e^{m_c} + e^{-2B_c}}{1 + e^{m_c - 2B_c}} \right)^{s_c}$$

alors on peut voir à titre d’exemple que l’augmentation de  $B_p$  fait diminuer ce produit. Donc si  $B_p$  est suffisamment grand, ce qui dépend des paramètres de la relation de concurrence, alors ce

produit devient inférieur à 1, ce qui veut dire que l'effet positif de la relation de support l'emporte sur celui de la concurrence. Il est alors intéressant pour les banques de regarder les différentes relations dans leurs portefeuilles de crédit; et le produit des fonctions  $\theta$  correspondantes pour déterminer si le portefeuille contient suffisamment de poids de bonnes relations pour limiter les pertes.

**C- Relations externes  $SNM^+$  vs  $SNM^-$  :** Cette fois ci nous allons analyser les effets opposés qu'un réseau  $V$  de 20 entités subit en ayant des relations externes  $SNM^+$  et  $SNM^-$ . Comme nous l'avons vu dans le cas précédent, les variations par rapport au nombre de relations et par rapport à la connectivité sont similaires par effet de complétude du réseau. Donc on s'intéresse uniquement aux variations de  $Var_{95\%}(N_V)$  par rapport au nombre de relations.

La figure 5.16 représente les variations  $Var_{95\%}(N_V)$  pour  $V$  contenant 20 entités. On constate que plus le nombre de relations  $SNM^-$  est grand devant celui de  $SNM^+$ , plus les pertes sont importantes. En outre, quand  $\delta^+$  ou  $\delta^-$  augmentent, alors ils font l'effet de leurs relations respectives. La figure 5.17 représente les surfaces de  $\theta_p^{s_p} \theta_m^{s_m}$  en fonction de  $(s_p, s_m)$  pour différentes valeurs du couple  $(\delta^+, \delta^-)$ . On remarque que ce produit est en dessous de 1 dans les mêmes zones dans lesquels la  $Var_{95\%}(N_V)$  atteint des niveaux de pertes assez grands, de plus le fait d'augmenter  $\delta^+$  ou  $\delta^-$  fait incliner la surface vers l'axe des  $s_m$  ou celui des  $s_p$ . Ceci produit alors l'effet de réduction de la zone des pertes extrêmes comme on le voit sur la figure 5.16. Donc cela confirme bien le rôle du produit  $\theta_p^{s_p} \theta_m^{s_m}$  dans l'impact du mélange de relations sur le réseau central.



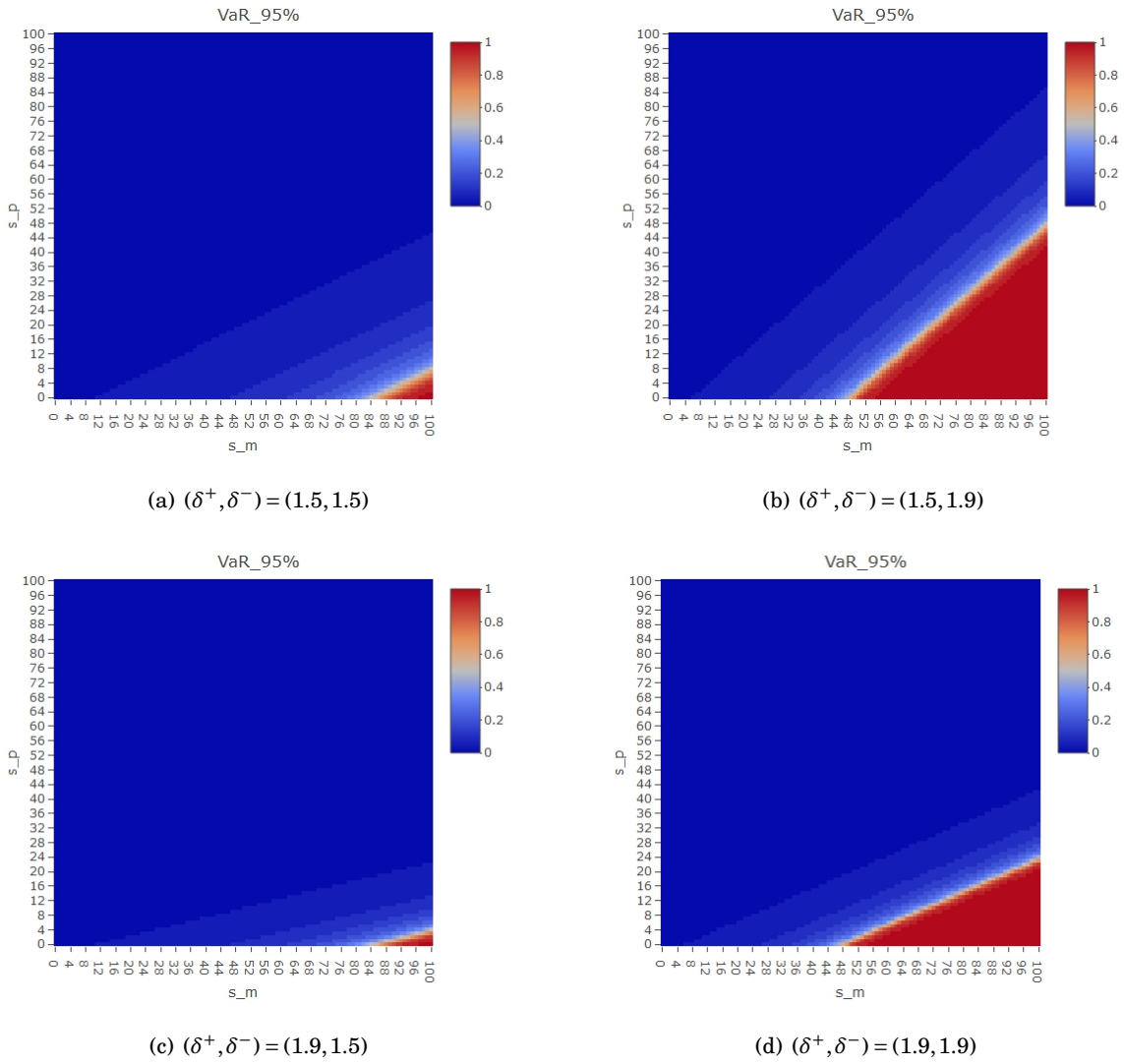


FIGURE 5.16 –  $VaR_{95\%}$  pour un réseau central de taille  $n = 20$  et différentes valeurs de  $(\delta^+, \delta^-)$ , comme fonction de  $s_p$  et  $s_m$  pour  $p = p_p = p_m = 1\%$ .

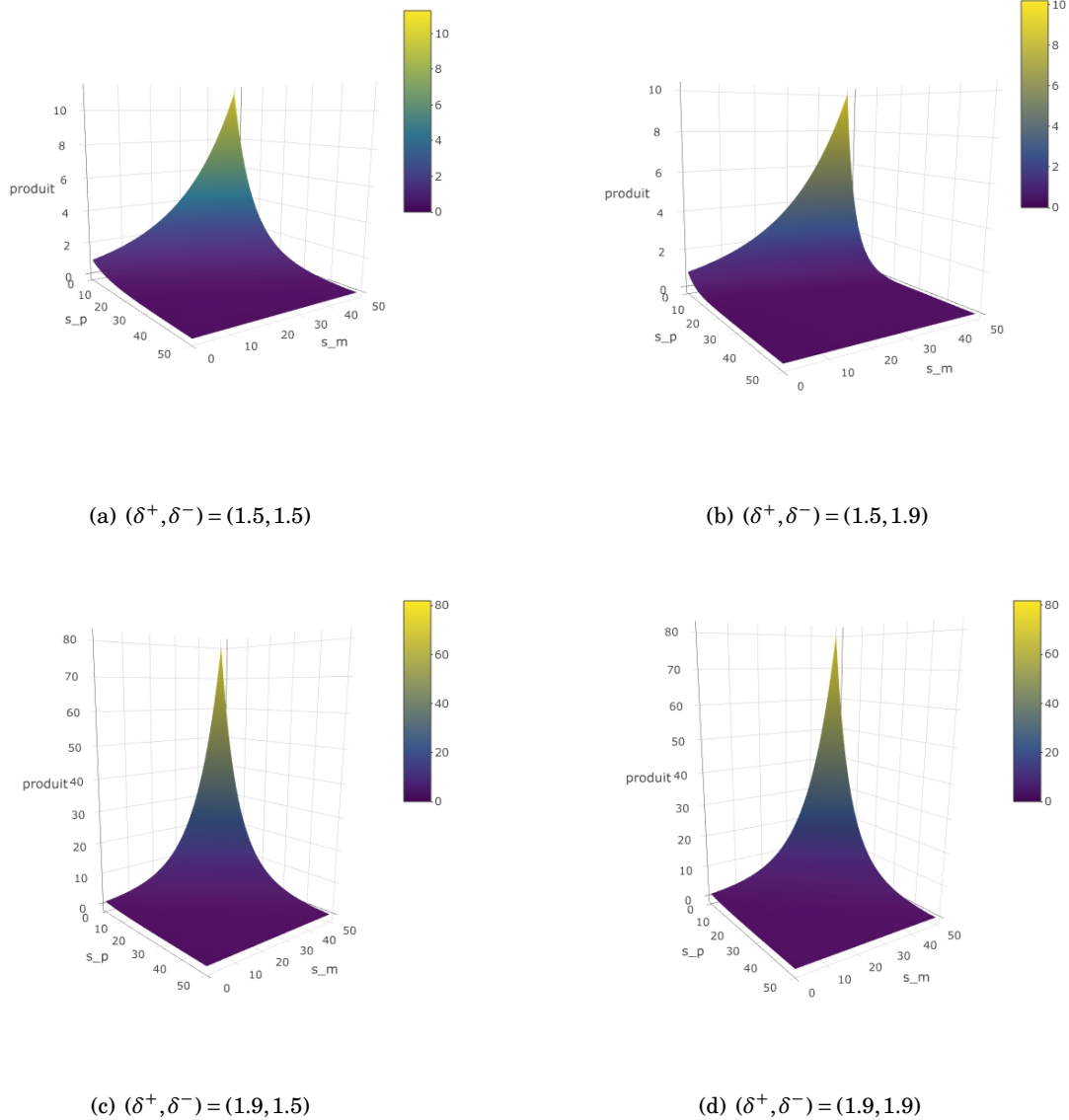


FIGURE 5.17  $-\theta_p^{s_p} \theta_m^{s_m}$  comme fonction de  $s_p$  et  $s_m$ , pour différentes valeurs de  $(\delta^+, \delta^-)$ , et pour  $p = p_p = p_m = 1\%$ .

### 5.3 Réseaux de support réguliers : effet du degré de connexion.

L'objectif de cette section est d'étudier les réseaux de support connectés à des réseaux satellites, mais à la différence du cas précédent, ces réseaux centraux ne seront pas complets. On se donne un réseau central  $G_n(d) = (V, M, T)$  de  $n$  entités et un entier naturel  $d \leq n - 1$  de telle sorte que pour tout  $i \in V$ , le nombre de voisins  $N(i)$  est fixe et égal à  $d$  que nous appelons degré de connexion. Cela veut dire que chaque entité de  $V$  est connectée à exactement  $d$  autres entités

de  $V$ , et le cas  $d = n - 1$  correspond à la complétude du réseau. L'idée est de reproduire l'étude faite dans la section précédente en prenant en compte le degré de connexion  $d$  et son effet sur la propagation du risque ou du support qui vient des réseaux satellites propres à chaque entité de  $V$ . Il est important de mentionner que dans un réseau de taille  $n$  impaire, les degrés de connexion possibles  $d$  sont les degrés pairs. En guise de simplification, et sans perte de généralité des résultats qu'on obtiendra, on s'intéresse uniquement aux degrés pairs peu importe la parité de  $n$ , donc on suppose que  $d$  est pair. Comme discuté dans la section 7 du chapitre 3, si le degré  $d$  est constant par rapport à  $n$ , alors on peut les considérer pour  $n = N^d$  pour un certain  $N \in \mathbb{N}^*$  le réseau  $G_n(d)$  comme doublement périodique, et donc comme un réseau sur le tore  $\mathbb{T}^d$ . Pour  $d = 2$ , nous avons vu que l'utilisation de la matrice de transfert permet via ses valeurs propres d'expliciter assez facilement la fonction  $Z_G$ . Cela permet uniquement d'étudier l'énergie libre, ainsi que les phénomènes critiques. Cependant, notre objectif est d'étudier la distribution des pertes, ce qui nécessite le calcul des quantités  $\sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} \mathbb{P}_G(l)$ . L'utilisation dans le cas  $d = 2$  des matrices de transfert n'est pas adaptée pour le calcul de celles-ci, ce qui nécessiterait le recours à de méthodes combinatoires comme nous allons voir par la suite. La littérature sur l'expression du modèle de manière plus simple dans le cas bidimensionnel périodique est très large, notamment sur la technique introduite par Kac et Ward [164]. Cette technique repose sur l'exploitation de la géométrie du réseau et du tore  $\mathbb{T}^2$  et l'utilisation de méthodes de cohomologie<sup>2</sup>. Ces techniques permettent d'exprimer la fonction de partition  $Z_G$  via des matrices dites de Kac-Ward. Ces méthodes sont très techniques, et ne sont pas adaptées à des réseaux dont le degré varie en fonction de la taille. Pour  $d \geq 2$  constant, le problème devient beaucoup plus compliqué, et l'utilisation des matrices de transfert ni de celles de Kac-Ward n'est possible. Nous allons donc étudier le problème sous un angle différent, qui est plus conforme à nos motivations.

Comme dans la section précédente, on suppose pour tout  $i \in V$  a un réseau satellite  $V_i$  constitué de  $s$  entités indépendantes dont  $s_j$  sont connectées à  $i$  via une relation  $r_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, q\}$  où  $q$  est le nombre de relations différentes. Nous avons alors un réseau  $G_{s,n}(d) := (V \cup_{i \in V} V_i, M_{s,n}(d), T_{s,n}(d))$  comme le montre la figure suivante :

---

2. La cohomologie est un ensemble d'invariants topologiques associés à un espace, qui encode l'information de l'espace dans des structures de groupe, de module ou d'espace vectoriel. Il existe plusieurs types de cohomologie, comme la cohomologie galoisienne construite sur des structures de corps, la cohomologie de De Rham construite via les formes différentielles sur une variété différentielle, et plusieurs d'autres cohomologies construites pour répondre à des besoins techniques en mathématiques.

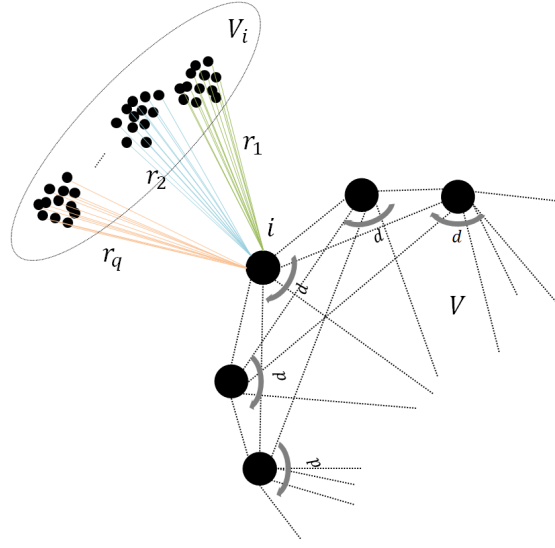


FIGURE 5.18 – Le réseau  $G_{s,n}(d)$ .

On garde les mêmes notations, les mêmes hypothèses de symétrie<sup>3</sup> et d'homogénéité<sup>4</sup> que la section précédente. On s'intéresse à la distribution des pertes  $N_V$  sur  $V$ , et nous avons le résultat suivant :

**Proposition 5.6.** *Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  et  $d \leq n - 1$ , on a*

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}(d)}(N_V = \frac{k}{n}) = \frac{\prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{k s_j} \phi_k^{(d)}(m) e^{B(n-2k)}}{\sum_{l=0}^n \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{l s_j} \phi_l^{(d)}(m) e^{B(n-2l)}}$$

où pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\phi_k^{(d)}(m) = \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} e^{m \sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j}$ . De plus, pour tout  $d \leq n - 1$  et tout  $k \leq n$ ,  $\phi_k^{(n-d)}(m) = e^{m(2C_k^2 + C_{n-k}^2 - C_n^2)} \phi_k^{(d)}(-m)$  et  $\phi_{n-k}^{(d)}(m) = \phi_k^{(d)}(m)$  pour tout  $m > 0$ .

*Démonstration.* Voir 5.6.1. □

Si on suppose l'absence de réseaux satellites, alors  $G_{s,n}(d) = G_n(d)$ , et on a

$$\mathbb{P}_{G_n(d)}(N_V = \frac{k}{n}) = \frac{\phi_k^{(d)}(m) e^{B(n-2k)}}{\sum_{l=0}^n \phi_l^{(d)}(m) e^{B(n-2l)}}$$

ce qui donne une expression semi-fermée de la distribution des pertes pour le réseau de degré  $d$ . Cette expression de la distribution des pertes nous montre comment le degré de connexion dans un réseau change la distribution des pertes, ce qui s'exprime explicitement tout comme pour

3. Pour tout  $(i, j) \in E(V)$ ,  $m_{ij} = m$ , et pour toute entité satellite reliée à  $i \in V$  avec une relation  $r_j$ , la connectivité de sa relation est  $m_j$ .

4. Même probabilités de défaut intrinsèques  $p$  pour les entité centrales, et pour les entités satellites  $p_j$  pour  $j \in \{1, \dots, q\}$ .

les réseaux satellites par l'introduction d'une fonction  $\phi_k^{(d)}$ . Nous n'avons pas de formule fermée générale de cette fonction, cependant il est possible d'exprimer  $\phi_k^{(2)}$  dont la formule dépend de la résolution exacte d'un problème de dénombrement ; à savoir un problème assez difficile de coloriage d'un graphe comme nous allons le voir plus loin. Il est également facile à remarquer que si  $d = n - 1$ , ce qui veut dire que le graphe est complet, alors pour tout  $l \in \mathcal{A}_{k,n}$ , la somme  $\sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j$  est constante et égale à  $2m(C_k^2 + C_{n-k}^2 - \frac{n(n-1)}{4})$ , et donc  $\phi_k^{(n-1)}(m) = C_n^k e^{2m(C_k^2 + C_{n-k}^2 - \frac{n(n-1)}{4})}$ , ce qui nous ramène à la formule de la section précédente. En outre, le lemme nous fournit une symétrie supplémentaire au niveau du degré qui nous permet de faire des calculs uniquement pour les degrés inférieurs à  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Nous disposons également d'une symétrie par rapport à  $k$  qui, donc on peut restreindre les calculs aux valeurs de  $k$  inférieurs à  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , ce qui réduit considérablement les calculs dans le cas des degrés assez grands.

### 5.3.1 Comportement en fortes connectivités

Nous avons vu dans les sections précédentes que quand la connectivité  $m$  dans le réseau central devient forte, alors la distribution des pertes se concentre sur les pertes de 0 et 100%. Ce comportement ne dépend pas du niveau de connexion du réseau, sauf pour la vitesse de convergence quand  $m$  devient grand. Nous allons montrer que cela est vrai pour tout degré  $d$  en utilisant la comparaison des fonctions  $\phi_k^{(d)}$ .

Pour tout  $m > 0$ , on a

$$\phi_0^{(d)}(m) = \phi_n^{(d)}(m) = e^{\frac{ndm}{2}}$$

D'autre part, pour tout  $k \neq 0, n$  on a  $\forall l \in \mathcal{A}_{k,n}$ , on a  $\sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j < \frac{nd}{2}$ . Par conséquent, pour tout  $k \neq 0, n$ ,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\phi_k^{(d)}(m)}{\phi_0^{(d)}(m)} = 0$ , d'où

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}(d)}(N_V = 0) = \frac{e^{nB}}{\sum_{l=0}^n \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{l s_j} \frac{\phi_l^{(d)}(m)}{\phi_0^{(d)}(m)} e^{B(n-2l)}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{e^{nB}}{e^{nB} + \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{n s_j} e^{-nB}}$$

De la même manière, on a

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}(d)}(N_V = 1) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{n s_j} e^{-nB}}{e^{nB} + \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{n s_j} e^{-nB}}$$

Or la somme de ces deux limites est 1, alors pour tout  $k \neq 0, n$  on a  $\mathbb{P}_{G_{s,n}(d)}(N_V = \frac{k}{n}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ . Ce résultat est le même que celui du cas complet, donc les limites ne dépendent pas du degré de connexion du réseau. En outre, la fonction  $\phi_n^{(d)}(m)$  prend de plus en plus des exposants plus grands de la forme  $e^{Am}$  avec  $A \in \mathbb{Z}$  quand  $d$  augmente. Donc plus le degré  $d$  est grand, plus la vitesse de convergence de la limite est forte. Donc le degré  $d$  joue un rôle d'accélérateur pour

l'arrivée à l'état critique en cas d'un réseau de support. On voit également que ces limites sont les mêmes quantités  $\lambda_n$  et  $1 - \lambda_n$  trouvées dans 5.2, et dont le comportement en volume infini dépend de la comparaison entre  $B$  et  $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$ .

### 5.3.2 Comportement au voisinage des faibles connectivités

L'inconvénient de la proposition précédente 5.6 réside dans la fonction  $\phi_k^{(d)}$  qui n'est pas adaptée aux calculs sur des réseaux de très grandes tailles. En effet, pour  $l \in \mathcal{A}_{k,n}$  l'expression  $\sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j$  n'est pas constante et dépend du choix de  $l$ , donc le calcul de  $\phi_k^{(d)}$  nécessite de traverser à chaque fois l'ensemble  $\mathcal{A}_{k,n}$  qui contient  $C_n^k$  éléments; ce qui reste assez coûteux en calculs malgré que  $C_n^k$  est largement inférieure à  $2^n$ . Cependant, on peut utiliser des approximations de cette fonction pour des valeurs assez faibles de  $m$  comme nous montre la proposition qui suit.

**Proposition 5.7.** *Pour tout  $k \in \{0, n\}$  et  $d \leq n - 1$ , la fonction  $\phi_k^{(d)}$  se développe en série entière :*

$$\phi_k^{(d)}(m) = \sum_{r \geq 0} a_r m^r$$

$$\text{dont les coefficients s'écrivent } a_r = \sum_{\substack{S \in \mathbb{N}^{E(V)} \\ \sum_{(i,j) \in E(V)} S_{ij} = r}} \frac{C_{k,n}(S)}{\prod_{(i,j) \in E(V)} S_{ij}!} \text{ avec } C_{k,n}(S) := \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} \prod_{i \in V} l_i^{\sum_{j \in N(i)} S_{ij}}.$$

*Démonstration.* Voir 5.6.1.4. □

Nous disposons alors d'une formule qui fait apparaître des courants aléatoires  $S$  comme nous avons vu dans la section 4 du chapitre 3. Celle-ci peut servir à faire des développements limités pour des valeurs faibles de  $m$ , dont les coefficients  $a_r$  sont calculables analytiquement. On notera  $p(S)$  le coefficient multinomial  $\frac{1}{\prod_{(i,j) \in E(V)} (S_{ij}!)}$ , afin de calculer chaque coefficient  $a_r$ , il faut d'abord trouver tous les courants  $S$  sur le réseau central  $G_n(d)$  qui vérifient  $\sum_{(i,j) \in E(V)} S_{ij} = r$ .

- Pour  $r = 0$ , le courant nul est le seul qui vérifie  $\sum_{(i,j) \in E(V)} S_{ij} = 0$ , et on a  $a_0 = \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} 1 = C_n^k$ .
- Pour  $r = 1$ , les courants  $S(e) = (\mathbb{1}(e = (i, j)))_{(i,j) \in E(V)}$  pour tout  $e \in E(V)$  sont les seuls dont la somme est 1. Donc

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{\substack{S \in \mathbb{N}^{E(V)} \\ \sum_{(i,j) \in E(V)} S_{ij} = 1}} p(S) C_{k,n}(S(i, j)) \\ &= \sum_{(i,j) \in E(V)} \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} l_i l_j \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} l_i l_j &= \sum_{\substack{l \in \mathcal{A}_{k,n} \\ l_i = l_j = -1}} l_i l_j + \sum_{\substack{l \in \mathcal{A}_{k,n} \\ l_i = l_j = 1}} l_i l_j + \sum_{\substack{l \in \mathcal{A}_{k,n} \\ l_i = -l_j = -1}} l_i l_j + \sum_{\substack{l \in \mathcal{A}_{k,n} \\ -l_i = l_j = -1}} l_i l_j \\
 &= \sum_{l \in \mathcal{A}_{k-2,n-2}} 1 + 2 \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n-2}} 1 + \sum_{l \in \mathcal{A}_{k-1,n-2}} -1 \\
 &= C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-2} - 2C_{n-2}^{k-1}
 \end{aligned}$$

D'où

$$a_1 = \frac{nd}{2} (C_{n-2}^k - 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2})$$

— Pour  $r = 2$ , les courants dont la somme est égale à 2 sont les courants  $S(i, j) = (2\mathbb{1}(e = (i, j)))_{e \in E(V)}$  pour tout  $(i, j) \in E(V)$ ,  $S(i, j, p, q) = (\mathbb{1}(e = (i, j)) + \mathbb{1}(e = (p, q)))_{e \in E(V)}$  pour tout  $(i, j), (p, q) \in E(V)$  tels que  $i, j \neq p, q$ ; et  $S(i, j, p) = (\mathbb{1}(e = (i, j)) + \mathbb{1}(e = (i, p)))_{e \in E(V)}$  pour tout  $(i, j) \in E(V)$  et  $p \in N(i) \setminus \{j\}$ , on a alors

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \sum_{e=(i,j) \in E(V)} p(S(e)) \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} 1 + \sum_{\substack{(i,j),(p,q) \in E(V) \\ i,j \neq p,q}} p(S(i, j, p, q)) C_{k,n}(S(i, j, p, q)) \\
 &+ \sum_{(i,j) \in E(V)} \sum_{p \in N(i) \cup N(j) \setminus \{i,j\}} p(S(i, j, p)) C_{k,n}(S(i, j, p)).
 \end{aligned}$$

Il s'agit cette fois-ci de calculer  $C_{k,n}(S(i, j, p, q)) = \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} l_i l_j l_p l_q$ . On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} l_i l_j l_p l_q &= \sum_{\substack{l \in \mathcal{A}_{k,n} \\ l_q = l_p = -1}} l_i l_j l_p l_q + \sum_{\substack{l \in \mathcal{A}_{k,n} \\ l_q = -l_p = 1}} l_i l_j l_p l_q + \sum_{\substack{l \in \mathcal{A}_{k,n} \\ -l_q = l_p = 1}} l_i l_j l_p l_q + \sum_{\substack{l \in \mathcal{A}_{k,n} \\ l_q = l_p = 1}} l_i l_j l_p l_q \\
 &= \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n-2}} l_i l_j + \sum_{l \in \mathcal{A}_{k-2,n-2}} l_i l_j - 2 \sum_{l \in \mathcal{A}_{k-1,n-2}} l_i l_j
 \end{aligned}$$

Comme

$$C_{k,n}(S(i, j)) = \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} l_i l_j = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-2} - 2C_{n-2}^{k-1}$$

alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} l_i l_j l_p l_q &= C_{n-4}^k + C_{n-4}^{k-2} - 2C_{n-4}^{k-1} + C_{n-4}^{k-2} + C_{n-4}^{k-4} - 2C_{n-4}^{k-3} - 2(C_{n-4}^{k-1} + C_{n-4}^{k-3} - 2C_{n-4}^{k-2}) \\
 &= C_{n-4}^k - 4C_{n-4}^{k-1} + 6C_{n-4}^{k-2} - 4C_{n-4}^{k-3} + C_{n-4}^{k-4}
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \sum_{e \in E(V)} \frac{1}{2!} C_n^k + \sum_{\substack{(i,j),(p,q) \in E(V) \\ i,j \neq p,q}} \frac{1}{1!1!} (C_{n-4}^k - 4C_{n-4}^{k-1} + 6C_{n-4}^{k-2} - 4C_{n-4}^{k-3} + C_{n-4}^{k-4}) \\
 &+ \sum_{(i,j) \in E(V)} \sum_{p \in N(i) \cup N(j) \setminus \{i,j\}} \frac{1}{1!1!} (C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-2} - 2C_{n-2}^{k-1})
 \end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement

$$a_2 = \frac{nd}{2}C_n^k + \frac{nd}{2}\left(\frac{nd}{2} - 2d + 1\right)(C_{n-4}^k - 4C_{n-4}^{k-1} + 6C_{n-4}^{k-2} - 4C_{n-4}^{k-3} + C_{n-4}^{k-4}) + n\frac{d(d-1)}{2}(C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-2} - 2C_{n-2}^{k-1})$$

On remarque d'après ces premiers calculs que les valeurs des coefficients  $a_r$  font apparaître dans les sommes les sources  $\partial S$  d'un courant  $S^5$ , et leur nombre détermine la valeur de certaines sommes partielles. En effet, soit  $r \in \mathbb{N}$ , on note pour tout  $q \in \{0, \dots, n\}$ ,

$$\mathfrak{S}_r(q) := \{S \in \mathbb{N}^{E(V)} \mid \sum_{(i,j) \in E(V)} S_{ij} = r \text{ et } |\partial S| = q\}$$

il est clair que  $\cup_{q=0}^n \mathfrak{S}_r(q)$  est une partition de l'ensemble des courants de somme  $r$ , donc

$$\begin{aligned} a_r &= \sum_{q=0}^n \sum_{S \in \mathfrak{S}_r(q)} p(S) C_{k,n}(S) \\ &= \sum_{q=0}^n C_{k,n}(S) \sum_{S \in \mathfrak{S}_r(q)} p(S) \end{aligned} \quad (5.5)$$

car  $C_{k,n}(S)$  ne dépend que du nombre de sources  $q$  de  $S$ . On note alors  $A_q(n, k) := C_{k,n}(S)$  et on a le lemme suivant :

**Lemme 5.1.** *Pour tout  $k, q \leq n$ ,*

1.  $A_q(n, k) = \sum_{i=0}^q (-1)^i C_{n-q}^{k-i} C_q^i$ ;
2. si  $q$  est impair ou  $q > 2r$ , alors  $\mathfrak{S}_r(q) = \emptyset$  pour tout  $r \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Voir 5.6.2.1 □

Nous avons donc une formule semi-fermée des coefficients  $a_r$ , et il ne reste que le calcul des  $\sum_{S \in \mathfrak{S}_r(q)} p(S)$  que nous ne savons pas exprimer de manière simple. Cependant, le calcul de celles-ci ne présente pas de complexité calculatoire majeure pour des valeurs de  $r$  assez faibles ; ce qui peut, pour des valeurs faibles de  $m$ , donner de très bonnes approximations de  $\phi_k^{(d)}$  à partir d'un certain ordre.

En utilisant la formule 5.5, et en dénombrant pour  $r = 3$  les courants de  $\mathfrak{S}_r(q)$ , on obtient

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{nd}{4}\left(\frac{d}{2} - 1\right)A_0(n, k) + \left(\frac{nd}{2 \cdot 3!} + n\frac{3d(d-1)}{4} + \frac{nd}{4}\left(\frac{nd}{2} - 3d + 1\right)\right)A_2(n, k) \\ &\quad + \left(nC_d^3 + \frac{nC_d^2}{6!}\left(\frac{nd}{2} - 3d + 1\right)\right)A_4(n, k) + \frac{nd}{2}\left(\frac{nd}{2} - 2d + 1\right)\left(\frac{nd}{2} - 4d + 2\right)A_6(n, k) \end{aligned}$$

La question qui se pose maintenant est quel est l'ordre minimal du développement limité nécessaire pour une précision  $\epsilon$  donnée ? Comme le calcul des  $\phi_k^{(d)}(m)$  est coûteux, il serait alors difficile de déterminer l'ordre minimal d'un point de vue informatique. Toutefois, il est possible d'être conservateur en donnant une majoration de l'ordre minimal. L'idée est alors

5. Cette notion a été définie dans la section 3.3



de majorer l'erreur d'approximation par une fonction assez "maniable" qui dépend de l'ordre d'approximation  $N$ , qui va être majorée par  $\epsilon$ . Le lemme suivant fournit cette majoration de l'erreur d'approximation pour un ordre  $N$  :

**Lemme 5.2.** *Pour tout  $n, N \geq 0$ , et tout degré pair  $d \leq n - 1$  et  $m > 0$ , on a*

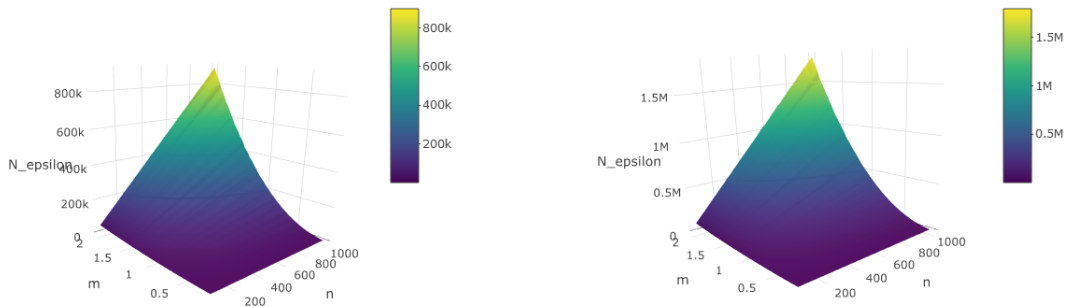
$$\max_{0 \leq k \leq n} |\phi_k^{(d)}(m) - \sum_{r=0}^N a_r m^r| \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} e^{\frac{ndm}{2}} \frac{(mnd)^{N+1}}{2^{N+1}(N+1)!}$$

*Démonstration.* Voir 5.6.2.2. □

Soit  $\epsilon > 0$ , on note

$$N_\epsilon(m, n, d) := \min\{N \in \mathbb{N} \mid C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} e^{\frac{ndm}{2}} \frac{(mnd)^{N+1}}{2^{N+1}(N+1)!} \leq \epsilon\}$$

Ce nombre est alors une majoration de l'ordre minimal pour une approximation de précision  $\epsilon$ , et la figure 5.19 nous donne ses valeurs en fonction de  $(n, d, m)$  pour un quart de degré de connexion  $d = 2\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$  et pour une demi connexion  $d = 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ . Pour les degrés supérieurs, il suffit d'utiliser la formule de symétrie de la proposition 5.6.



(a) Réseau connecté à 25%.

(b) Réseau connecté à 50%.

FIGURE 5.19 –  $N_\epsilon(m, n, d)$  en fonction de  $(n, d, m)$  pour  $\epsilon = 10^{-6}$ .

On peut clairement voir que l'augmentation du degré  $d$ , de la connectivité  $m$  ou de la taille  $n$  fait augmenter l'ordre  $N_\epsilon(m, n, d)$ . En effet, dans la figure (a), pour  $m = 1$  l'augmentation de  $n$  de 200 à 1000 fait passer  $N_\epsilon(m, n, d)$  de 10000 à 200000, ce qui veut dire qu'il faut calculer les 200K premiers coefficients  $a_r$  si  $m = 1$  pour avoir une approximation de  $\phi_k^{(d)}$ . Ceci vient de la valeur de  $m$  qui est assez forte pour un développement limité au voisinage de 0. De même dans la figure (b), si le degré  $d$  est égale à  $2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ , alors les valeurs de  $N_\epsilon(m, n, d)$  sont en moyenne deux fois plus grandes que si  $d = 2\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ . On constate également que  $N_\epsilon(m, n, d)$  augmente de manière linéaire en

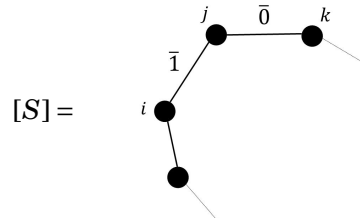
fonction de  $n$ , alors qu'il augmente de manière exponentielle en fonction de  $m$ .

Comme les valeurs de  $N_\epsilon(m, n, d)$  sont assez grandes, alors pour pouvoir utiliser cette approximation pour des valeurs de  $m$  non faibles, il faudrait avoir une formule fermée ou un algorithme suffisamment rapide pour calculer les quantités  $\sum_{S \in \mathfrak{S}_r(q)} p(S)$  pour tout  $r$  et  $q \leq 2r$ . D'autre part, l'origine de la grande valeur de l'ordre minimal de la majoration "un peu grossière" de l'erreur, qui est tout à fait améliorable comme indiqué dans la démonstration du lemme. En effet, nous faisons cette majoration pour avoir une fonction simple (sans intégrales), et nous prenons la valeur maximale de l'erreur pour  $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , alors qu'on pourrait faire dépendre cette borne de  $k$ , et par la suite on aura un ordre plus précis  $N_\epsilon(n, k, d, m)$ . Un des objectifs post-thèse est de développer d'avantage cette technique en s'intéressant aux valeurs de  $\sum_{S \in \mathfrak{S}_r(q)} p(S)$ .

**Le cas  $d = 2$  :** Pour donner un aperçu sur l'une des façons de dénombrer les éléments de  $\mathfrak{S}_r(q)$ , on considère l'exemple d'un réseau  $G_n(d)$  dont le degré  $d = 2$ , qui est représentable par un polygone de  $n$  cotés. Donc un courant  $\mathfrak{S}_r(q)$  sur ce réseau consiste à associer une valeur entière à chaque coté du polygone de telle sorte que la somme des valeurs soit  $r$ , et le nombre de sommets dont la somme des valeurs des ses deux cotés est un nombre impair est égal à  $q$ . On fait appel aux diagrammes 3.41 que nous avons utilisé dans la section 3. On définit  $\mathfrak{R}$  la relation d'équivalence sur l'ensemble des courants suivante :

$$\forall S, S' \in \mathfrak{S}_r(q), S \mathfrak{R} S' \Leftrightarrow \forall (i, j) \in E(V), S_{ij} \text{ et } S'_{ij} \text{ ont la même parité.}$$

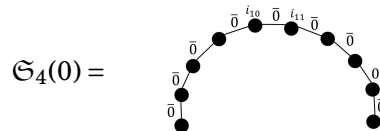
On notera les classes d'équivalence comme un diagramme de la manière suivante :



Finalement, on notera formellement l'ensemble  $\mathfrak{S}_r(q)$  comme une somme  $\mathfrak{S}_r(q) = \sum_{S \in \mathfrak{S}_r(q)} [S]$ .

Calculons maintenant  $\mathfrak{S}_4(q)$ ,

— Pour  $q = 0$ ,



Cette expression veut dire que les courants de  $\mathfrak{S}_4(0)$  sont ceux de coefficients pairs (pour le nombre de sources  $q$  soit nul) de somme égale à 4. Donc ces courants sont les  $n$  courants dont un seul coefficient est non nul il est égal à 4, et les  $n(n - 1)$  courants dont seuls deux coefficients sont égaux à 2, par conséquent  $|\mathfrak{S}_4(0)| = n^2$ . D'autre part, on a

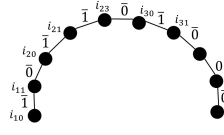
$$\sum_{S \in \mathfrak{S}_4(0)} p(S) = \frac{n(n - 1)}{2!2!} + \frac{n}{4!}$$



$n(n-2)^2$  possibilité pour ce premier cas ; alors que pour (1,3) et sa permutation, on a seulement  $2 \times n(n-2)$  possibilités. La deuxième somme elle nous donne une classe de courants dans laquelle on a une ligne de trois impairs et un impair sur une arête non adjacente. Donc le seul choix possible pour avoir une somme égale à 4 est de prendre que des 1 dans les coefficients ( $S = (0, \dots, 1, 1, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ). Le nombre de possibilités pour positionner la ligne de trois arêtes est  $n$ , ce qui laisse  $n-5$  façons de placer le dernier 1 sur une arête non adjacente, ce qui donne  $n(n-5)$  possibilités dans cette classe. La dernière somme propose une classe de courants dans laquelle nous avons deux lignes non adjacentes de deux arêtes avec des coefficients impairs chacune comme le montre le diagramme. Nous avons pareillement une seule solution  $(0, \dots, 1, 1, 0, \dots, 1, 1, \dots, 0)$ , et donc nous avons  $n$  possibilités pour positionner la première ligne (1,1) et  $n-7$  possibilités pour positionner la deuxième de telle manière à ne pas avoir d'adjacence ; donc  $n(n-7)$  en total. Par conséquent, on a  $|\mathfrak{S}_4(4)| = n(n-2)^2 + 2n(n-2) + n(n-5) + n(n-7)$  et

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}_4(4)} p(S) = \frac{n(n-2)^2}{1!1!2!} + \frac{2n(n-2)}{1!3!} + \frac{n(n-5)}{1!1!1!1!} + \frac{n(n-7)}{1!1!1!1!}$$

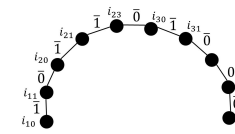
— Pour  $q = 6$ ,

$$\mathfrak{S}_4(6) = \sum_{\substack{i_{20} \neq i_{21} \neq i_{22} \\ (i_{20}, i_{21}), (i_{21}, i_{22}) \in E(V) \\ (i_{10}, i_{11}), (i_{30}, i_{31}) \in E(V)}} \text{Diagramme}$$


Cette fois-ci nous avons une seule classe possible, celle-ci contient que les courants formés par une ligne de deux arêtes avec deux coefficients impairs, et deux arêtes non adjacentes portant des coefficients impairs afin d'avoir 6 sources comme le montre le diagramme. On a donc  $n$  manières de placer la ligne (1,1) et  $n-4$  pour placer la première arête avec un coefficient 1, ce qui laisse à la troisième arête  $n-7$  positions possibles pour ne pas avoir d'adjacence, donc  $|\mathfrak{S}_4(6)| = n(n-4)(n-7)$  et

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}_4(6)} p(S) = \frac{n(n-4)(n-7)}{1!1!1!1!}$$

— Pour  $q = 8$ ,

$$\mathfrak{S}_4(8) = \sum_{\substack{i_{10} \neq i_{11} \neq i_{20} \neq i_{21} \neq i_{31} \neq i_{40} \\ (i_{20}, i_{21}), (i_{40}, i_{41}) \in E(V) \\ (i_{10}, i_{11}), (i_{30}, i_{31}) \in E(V)}} \text{Diagramme}$$


Pour ce dernier cas, il faut disperser toutes les arêtes de telle sorte à ne pas avoir d'adjacence pour garantir 2 sources pour chaque arête portant un coefficient impair. Donc les courants n'ont que des coefficients égaux à 1 ( $S = (0, \dots, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ ), et nous avons  $n$  manière de placer la première arête de coefficient 1,  $n-3$  pour la deuxième,  $n-6$  pour la troisième et  $n-9$  pour la dernière. D'où  $|\mathfrak{S}_4(8)| = n(n-3)(n-6)(n-9)$  et

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}_4(8)} p(S) = \frac{n(n-3)(n-6)(n-9)}{1!1!1!1!}$$

On peut donc en déduire que

$$a_4 = A_0(n, k) \left( \frac{n(n-1)}{4} + \frac{n}{4!} \right) + A_2(n, k) \left( \frac{n(n-2)}{2} + \frac{4n}{3} \right) + A_4(n, k) \left( \frac{n(n-2)^2}{2} + \frac{n(n-2)}{3} + 2n(n-6) \right) \\ + A_6(n, k)n(n-4)(n-7) + A_8(n, k)n(n-3)(n-6)(n-9)$$

Donc le calcul des coefficients  $a_r$  via cette méthode consiste à résoudre des problèmes de combinatoire sur le graphe, mais il peut aussi être vu comme un problème d'arithmétique combinatoire, car nous comptons les manières avec lesquels un entier  $r$  se décompose en somme de pairs et impairs. Il est également possible de trouver la formule exacte de  $\phi_k^{(d)}$  pour certains degrés, en résolvant certains problèmes de dénombrement de coloriage d'un graphe pour un nombre chromatique  $2^6$ . Nous allons voir cela par la suite en calculant la formule exacte de  $\phi_k^{(2)}$ .

**Calcul explicite de  $\phi_k^{(2)}$  :** Le calcul de  $\phi_k^{(2)}$  repose sur la connaissance de  $\sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j$  pour  $l \in \mathcal{A}_{k,n}$ . Donc il s'agit de décomposer  $\mathcal{A}_{k,n}$  à des sous-ensembles sur lesquels la somme  $\sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j$  est constante. On pose  $N_2(l) := \sum_{(i,j) \in E(V)} \frac{l_i l_j + 1}{2}$ ,  $N_2^+(l) = \sum_{\substack{(i,j) \in E(V) \\ l_i = l_j = 1}} \frac{1 + l_i l_j}{2}$  et  $N_2^-(l) = \sum_{\substack{(i,j) \in E(V) \\ l_i = l_j = -1}} \frac{1 + l_i l_j}{2}$ , donc pour tout  $l$  on a  $N_2(l) = N_2^+(l) + N_2^-(l)$ . Soit  $l \in \mathcal{A}_{k,n}$  tel que  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , on peut écrire autrement

$$N_2^+(l) = \sum_{\substack{(i,j) \in E(V) \\ l_i = 1}} \frac{l_j + l_i}{2} \text{ et } N_2^-(l) = - \sum_{\substack{(i,j) \in E(V) \\ l_i = -1}} \frac{l_j + l_i}{2}$$

Donc

$$N_2^+(l) - N_2^-(l) = \sum_{\substack{(i,j) \in E(V) \\ l_i = 1}} \frac{l_j + l_i}{2} + \sum_{\substack{(i,j) \in E(V) \\ l_i = 1}} \frac{l_j + l_i}{2} \\ = \sum_{(i,j) \in E(V)} \frac{l_j + l_i}{2} \\ = \sum_{i \in V} l_i = n - 2k$$

D'où

$$N_2(l) = n - 2k + 2N_2^-(l)$$

Par suite la somme  $\sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j$  est complètement déterminée par la valeur de  $N_2^-(l)$ . On pose  $B_{k,n}(s) := \{l \in \mathcal{A}_{k,n} \mid N_2^-(l) = s\}$  et on note son cardinal  $b_{k,n}(s)$  pour tout  $s$  de  $I_k$  l'ensemble des valeurs possibles de  $N_2^-(l)$ , autrement dit  $I_k = N_2^-(\mathcal{A}_{k,n})$ . On a alors le résultat suivant :

**Proposition 5.8.** *Soit  $k \leq n$ ,*

1. *Si  $k = 0$ , alors  $I_k = \{0\}$  et  $b_{0,n}(s) = 1$ .*

---

6. Cela consiste à dénombrer le nombre de façons avec lesquels on peut colorer un graphe sous certaines contraintes, avec un nombre de couleurs appelé nombre chromatique.

2. Si  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , alors  $I_k = \{0, \dots, k-1\}$  et  $\forall s \in I_k$ ,  $b_{k,n}(s) = \frac{n}{k} C_k^s C_{n-k-1}^{k-s-1}$ .
3.  $\phi_k^{(2)}(m) = \sum_{s \in I_k} b_{k,n}(s) e^{m(n-4k+4s)}$  pour tout  $m \geq 0$ .

*Démonstration.* Voir 5.6.1.5. □

La proposition suivante montre que  $N_2(l)$  prend  $k$  valeurs différentes avec un nombre d'occurrences  $b_{k,n}(s)$ . La difficulté réside dans le dénombrement du nombre de fois qu'une valeur de  $N_2(l)$  apparaisse, qui revient à dénombrer le nombre de façons de colorer les noeuds du graphe  $G_n(2)$  de telle sorte que les noeuds de la même couleur soient adjacents (voir preuve 5.6.1.5). D'autre part, cette formule nous permet d'écrire explicitement la distribution des pertes en présence des réseaux satellites de la manière suivante :

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}(2)}(N_V = \frac{k}{n}) = \frac{\prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{k s_j} \sum_{s \in I_k} b_{k,n}(s) e^{(n-2k)B + (n-4k+4s)m}}{\sum_{l=0}^n \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{l s_j} \sum_{s \in I_l} b_{l,n}(s) e^{(n-2l)B + (n-4l+4s)m}} \quad (5.6)$$

Nous avons donc une formule fermée qui nous permettra de voir numériquement comment le taux de perte se comporte dans le cas d'un réseau de degré de connexion  $d = 2$  avec un grand nombre d'entités. Cependant, elle demeure compliquée pour être utilisée dans l'étude du comportement en volume infini. De plus, il est possible d'éviter le calcul du dénominateur de cette formule en utilisant l'expression  $Z_{G_n(2)} = \lambda_+^n + \lambda_-^n$  démontrée dans 3.7.

### 5.3.3 Comportement en volume infini

#### 5.3.3.1 Cas du réseau $G_{s,n}(2)$ :

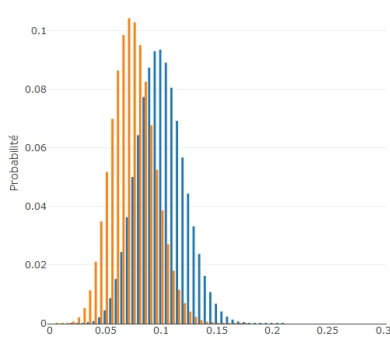
Nous utilisons la formule 5.6 pour calculer la distribution des pertes pour un nombre d'entité assez grand. On suppose dans un premier temps qu'il n'y a pas de réseaux satellites. Comme le montre la figure 5.20, en augmentant la taille du réseau  $G_n(2)$ , la distribution des pertes ressemble de plus en plus à celle du cas d'indépendance pour des valeurs de  $m$  assez faibles. Cela laisse penser qu'en volume infini le réseau  $G_n(2)$  se comporte comme un réseau indépendant par l'effet de la taille qui rend les entités insensibles les unes aux autres pour des valeurs faibles de  $m$ . Cependant, il est évident que deux entités voisines ne seront pas insensibles l'une à l'autre si  $m$  n'est pas faible, et donc la probabilité de défaut de chaque entité ne tend pas vers  $p$ . Autrement dit, pour tout  $i \in V$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n(2)}(X_i = -1) \neq p$$

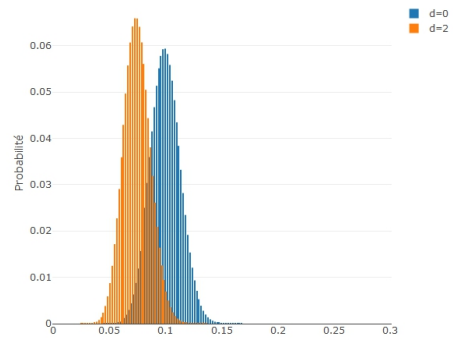
En effet, la figure 5.21 représente la perte moyenne en fonction de la taille du réseau pour  $p = 30\%$ <sup>7</sup> et  $m = 0.02$ , et on peut voir que la moyenne oscille autour d'une valeur de 0.293 qui est bien inférieure à 0.3. De plus, pour certaines valeurs de la taille, et de manière périodique,

7. Cette valeur est choisie uniquement pour faciliter les calculs et illustrer plus facilement la convergence de la perte moyenne.

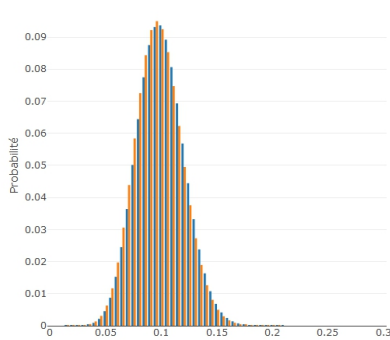
nous avons des moyennes égales à 0.293 ; et pour d'autres nous avons une croissance avec une convergence. Cela suggère que nous avons plusieurs valeurs d'adhérence, et donc pas d'existence de la mesure en très grand volume. Pourtant, cette limite existe bel et bien par l'absence de phénomène critique en dimension 1 comme expliqué dans 3.7.



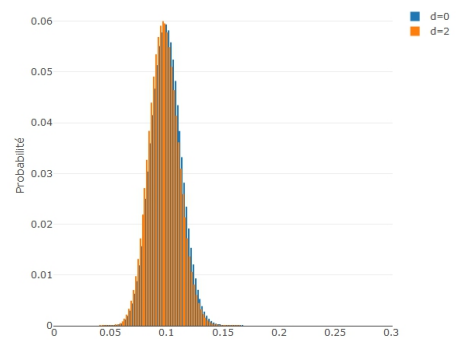
(a)  $n = 500$  et  $m = 0.1$



(b)  $n = 1000$  et  $m = 0.1$



(c)  $n = 500$  et  $m = 0.01$



(d)  $n = 1000$  et  $m = 0.01$

FIGURE 5.20 – Distribution des pertes  $N_V$  du réseau  $G_n(2)$ .

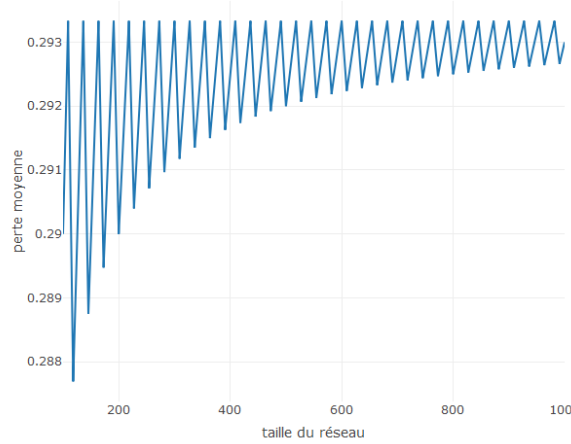


FIGURE 5.21 – Perte moyenne en fonction de la taille du réseau.

Pour pouvoir étudier ce phénomène, nous reprenons la technique des matrices de transferts utilisée par Ising pour expliciter la fonction de partition  $Z_{G_n(2)}$ . Nous rappelons que cette matrice s'exprime comme

$$A = \begin{pmatrix} A_{++} & A_{+-} \\ A_{-+} & A_{--} \end{pmatrix}$$

où  $A_{l_i, l_j} = \exp(ml_i l_j + B_j)$ . Les valeurs propres  $\lambda_+ > \lambda_-$  de  $A$  nous donne l'expression de  $Z_{G_n(2)}$  par  $\text{Tr}(A^n) = \lambda_+^n + \lambda_-^n$ . La matrice de changement de base pour laquelle  $A = P^{-1}DP$  est égale à

$$P = \begin{pmatrix} e^{-m+B} & e^{-m+B} \\ e^{m+B} - \lambda_+ & e^{m+B} - \lambda_- \end{pmatrix}$$

avec  $D = \text{diag}(\lambda_+, \lambda_-)$ ,  $\lambda_+ = e^m ch(B) + \sqrt{e^{2m} ch^2(B) - 2sh(2m)}$  et  $\lambda_- = e^m ch(B) - \sqrt{e^{2m} ch^2(B) - 2sh(2m)}$ . Nous avons alors le résultat suivant :

**Proposition 5.9.** *Pour tout  $n > 1$ , et  $i \neq j \in V$ , on a*

$$\mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i) = \frac{\text{Tr}(D^n K^+)}{\lambda_+^n + \lambda_-^n} \text{ et } \mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i X_j) = \frac{\text{Tr}(K^- D^{\gamma_{ij}} K^- D^{n-\gamma_{ij}})}{\lambda_+^n + \lambda_-^n}$$

où  $K^+ = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P$ ,  $K^- = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$  et  $\gamma_{ij}$  la distance entre  $i$  et  $j$  dans le réseau.

*Démonstration.* Voir 5.6.1.6. □

Nous avons donc des formules qui donnent une expression beaucoup plus simple que celle obtenue via le calcul de  $\phi_k^{(2)}$ . Cependant, en utilisant les matrices de transfert, il est très difficile d'avoir une expression de la distribution des pertes. On peut simplifier d'avantage ces formules, et on a le corollaire suivant :



**Corollaire 5.1.** *Pour tout  $n > 1$ , et  $i \neq j \in V$ , on a*

$$\mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i) = \frac{2e^B sh(B)}{\det(P)} \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\lambda_+^n + \lambda_-^n} \text{ et } \mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i X_j) = \frac{1}{\det(P)^2} \left( (e^{2B} - 1)^2 + 4 \frac{\lambda_+^{\gamma_{ij}} \lambda_-^{n-\gamma_{ij}} + \lambda_+^{n-\gamma_{ij}} \lambda_-^{\gamma_{ij}}}{\lambda_+^n + \lambda_-^n} e^{2B-4m} \right)$$

*Démonstration.* Voir 5.6.3.1. □

On voit à travers ces formules que l'étude du volume infini devient très accessible, et on peut même étudier la covariance et la corrélation en explicitant leurs formules exactes grâce à ce corollaire. On peut déduire également pour tout  $i \in V$

$$\mathbb{P}_{G_n(2)}(X_i = -1) = \frac{1}{2} - \frac{e^B sh(B)}{\det(P)} \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\lambda_+^n + \lambda_-^n} \quad (5.7)$$

et pour tout  $i \neq j \in V$ ,

$$\mathbb{P}_{G_n(2)}(X_i = X_j = -1) = \frac{1}{4 \det(P)^2} \left( (e^{2B} - 1)^2 + 4 \frac{\lambda_+^{\gamma_{ij}} \lambda_-^{n-\gamma_{ij}} + \lambda_+^{n-\gamma_{ij}} \lambda_-^{\gamma_{ij}}}{\lambda_+^n + \lambda_-^n} e^{2B-4m} - 4 \det(P) e^{2B} sh(B) \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\lambda_+^n + \lambda_-^n} \right) \quad (5.8)$$

Si  $m = 0$ , alors  $\lambda_+ = e^B + e^{-B}$  et  $\lambda_- = 0$ , et on trouve pour tout  $B$

$$\mathbb{P}_{G_n(2)}(X_i = -1) = p \text{ et } \mathbb{P}_{G_n(2)}(X_i = X_j = -1) = p^2$$

Si  $B = 0$ , alors pour tout  $m > 0$  on a  $\lambda_+ = e^m + e^{-m}$  et  $\lambda_- = e^m + e^{-m}$ , par conséquent on trouve

$$\mathbb{P}_{G_n(2)}(X_i = -1) = p = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}_{G_n(2)}(X_i = X_j = -1) = \frac{\lambda_+^{\gamma_{ij}} \lambda_-^{n-\gamma_{ij}} + \lambda_+^{n-\gamma_{ij}} \lambda_-^{\gamma_{ij}}}{4(\lambda_+^n + \lambda_-^n)}$$

Donc si la résistance  $B$  est nulle ( $p = \frac{1}{2}$ ) alors la probabilité de défaut de chaque entité est également égale à  $\frac{1}{2}$  comme si elles sont disconnectées. Cependant, les probabilités jointes se comportent différemment, et ne dépendent que de la connectivité  $m$  et la distance entre les entités.

On suppose maintenant que des réseaux satellites sont présents, et on considère le réseau  $G_{s,n}(2)$  en gardant les mêmes notations utilisées précédemment. Comme chaque entité du réseau central est indépendamment connectée à ses satellites, alors il est possible de se ramener au réseau  $G_n(2)$  en remplaçant les résistances  $B$  par  $B - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$ . Donc les résultats 5.9 et 5.1 restent valables en remplaçant  $B$  par  $B_s = B - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$ . L'annulation de la résistance  $B_s$  ne vaut pas dire forcément que la résistance de  $B$  est très faible (probabilité de défaut  $p$  forte), mais cela peut être également causé par des relations externes, dont les indices  $\theta_{r_j}$  sont inférieurs à 1 comme discuté dans la section précédente. Donc si par exemple nous avons suffisamment de relations de concurrence externes telles que  $B_s = 0$ , alors  $\mathbb{P}_{G_{s,n}(2)}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ . Les effets des relations externes ont un impact très important quand le réseau devient très grand comme prouvé dans 5.2 pour le cas d'un réseau complet. Le résultat suivant montre partiellement comment le réseau  $G_{s,n}(2)$  se comporte en volume infini.

**Proposition 5.10.** *Pour tout  $i \neq j \in V$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}(2)}(X_i = -1) = \frac{1}{2} - \frac{2e^m sh(B_s)}{\sqrt{e^{2m} ch^2(B_s) - 2sh(2m)}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}(2)}(X_i = X_j = -1) = \frac{1}{4 \det(P_s)^2} \left( (e^{2B_s} - 1)^2 + \left( \frac{\lambda_-^s}{\lambda_+^s} \right)^{\gamma_{ij}} e^{2B_s - 4m} - 4 \det(P_s) e^{2B_s} sh(B_s) \right)$$

*De plus, nous avons la covariance et la corrélation vérifient*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Cov_{G_{s,n}(2)}(X_i, X_j) = \frac{1}{\det(P_s)^2} \left( \frac{\lambda_-^s}{\lambda_+^s} \right)^{\gamma_{ij}} e^{2B_s - 4m}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Cor_{G_{s,n}(2)}(X_i, X_j) = \frac{e^{-2m}}{e^{2m} ch(2B_s) - 2sh(2m)} \left( \frac{\lambda_-^s}{\lambda_+^s} \right)^{\gamma_{ij}}$$

où  $P_s$ ,  $\lambda_+^s$  et  $\lambda_-^s$  sont la matrice de passage et les valeurs propres quand on remplace  $B$  par  $B_s = B - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$ .

*Démonstration.* Voir 5.6.1.7. □

Il est clair de cette proposition que la corrélation ne s'annule que si  $\lambda_-^s = 0$ , ce qui est équivalent à l'annulation de  $m$ . De plus, le terme  $\left( \frac{\lambda_-^s}{\lambda_+^s} \right)^{\gamma_{ij}} < 1$  nous donne explicitement la descente exponentielle établie dans le chapitre 3.

Si la distance  $\gamma_{i,j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , alors la corrélation devient nulle. Ce qui veut dire que si la distance entre  $i$  et  $j$  dépend linéairement de  $n$ , ce qui peut correspondre à des positions aux antipodes pour lesquelles  $\gamma_{ij} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , alors l'effet de l'éloignement annule la sensibilité de  $i$  à  $j$ .

On en déduit alors que dans le réseau  $G_{s,n}(2)$  l'effet du volume ne produit pas de phénomène critique comme dans le cas complet. Par suite, si un segment d'un portefeuille de crédit dont le réseau associé est  $G_{s,n}(2)$  est assez large, la corrélation de défaut est très petite par rapport à 1. Cela se traduit par une faible dépendance si la connectivité  $m$  est raisonnable, et donc une faible concentration du risque.

### 5.3.3.2 Le cas général de $G_{s,n}(d)$ pour $d > 2$ :

L'étude des réseaux  $G_n(d)$  pour  $d > 2$  en mécanique statistique reste un sujet très ouvert. Nous rappelons que Onsager [157] a pu calculer la fonction de partition  $Z_{G_n(4)}$  pour  $B = 0$ , mais la méthode qu'il utilise est connue par sa grande complexité. Cependant, des alternatives sont apparues dans les années 60 qui proposent des méthodes relativement plus faciles d'accès, et qui reposent sur une écriture des matrices de transfert en terme des opérateurs de Pauli. Ces opérateurs sont des écritures matricielles des états 1 et -1, ce qui permet de mieux manipuler la fonction de partition quand celles-ci subissent une transformation en fermion dite de Jordan-Wigner. Nous n'allons pas explorer ces méthodes pour étudier le réseau  $G_n(4)$  vu leur complexité et le peu d'information qu'on peut en tirer pour calculer une distribution des pertes. On se contente donc de renvoyer le lecteur intéressé aux travaux de T. D. Schultz, D. C. Mattis, et E.

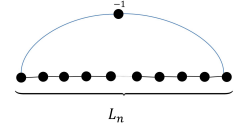
H. Lieb [167]. Concernant le comportement de la mesure  $\mathbb{P}_{G_n(4)}$ , nous avons très peu de choses, et un des résultats sur cette problématique est le Théorème d'Aizenman-Higuchi [158, 159] qui nous donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n(4)} = \lambda \mathbb{P}_{G_\infty^c(4)}^+ + (1 - \lambda) \mathbb{P}_{G_\infty^c(4)}^-$$

où  $\lambda \in [0, 1]$  et  $\mathbb{P}_{G_\infty^c(4)}^\pm$  représente la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  pour un réseau  $G_n^c(4)$  carré avec des conditions aux bords  $\pm$ .

**Remarques :**

1- La méthode combinatoire utilisée dans la section pour calculer la fonction  $\phi_k^{(2)}$  est susceptible d'être prolongée au cas général. En effet, dans la preuve de la proposition 5.6 nous utilisons le dénombrement des configurations  $l \in \mathcal{A}_{k,n}$  pour lesquelles on a  $s$  adjacence dans  $G_n(2)$ . Cela revient à dénombrer de telles configurations sur un réseau  $L_n$  avec des conditions au bords -1 comme le montre la figure ci-contre. Le nombre de configurations  $u_{k,n}(s)$  vérifie une équation (voir 5.5) de type



$$u_{q+1,n}(s) = 2u_{q,n-1}(s-1) + \sum_{i_1+j_1=n-1} \sum_{i_2+j_2=q} \sum_{i_3+j_3=s} u_{i_2,i_1}(i_3)u_{j_2,j_1}(j_3)$$

En considérant la fonction holomorphe  $f(z_1, z_2, z_3) = \sum_{i,j,k} u_{i,j,k} z_1^i z_2^j z_3^k$  définie sur un domaine  $\mathcal{D}$ , l'équation précédente peut être réécrite sous la forme

$$f(z_1, z_2, z_3)^2 = \frac{1}{z_1} (f(z_1, z_2, z_3) - \frac{1}{1-z_2}) - 2z_3 f(z_1, z_2, z_3)$$

et on démontre par la suite que

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{D}, f(z_1, z_2, z_3) = \frac{1 - 2z_1 z_2 z_3 - \sqrt{(1 - 2z_1 z_2 z_3)^2 - \frac{4z_1 z_2^2}{1-z_2}}}{2z_1 z_2}$$

En développant en série cette fonction, on retrouve les coefficients  $u_{k,n}(s)$  avec lesquels nous calculons  $b_{k,n}(s)$ . Nous travaillons actuellement sur une généralisation de cette approche en essayant de ramener, dans le cas général, le problème à la résolution d'une équation de récurrence de ce type, et ainsi utiliser des fonctions holomorphes à plusieurs variables pour en déduire l'expression. Cependant, cela relève plusieurs défis combinatoires que nous n'avons pu résoudre en entier durant cette thèse, mais ceux-ci représentent un des objectifs post-thèse. L'importance de cette problématique réside dans l'expression d'une distribution des pertes explicitement pour tout degré  $d$ , mais également dans le rôle qu'elle peut jouer dans plusieurs disciplines.

2- Nous avons vu comment l'utilisation de la matrice de transfert  $A$  pour  $d = 2$  permet d'écrire la fonction de répartition de manière la trace de la matrice  $A^n$ . Il est cependant possible d'étendre cette approche aux cas non homogène. En effet, si on a un réseau  $G_2$  de degré de

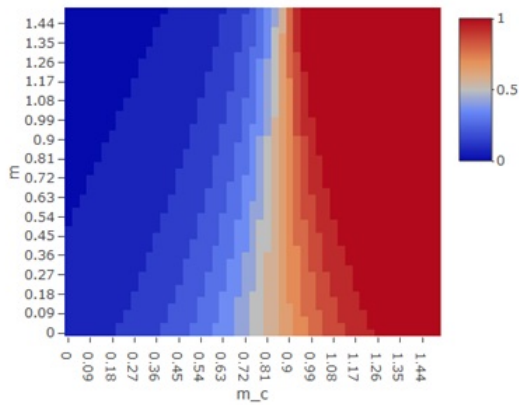
connexion 2 non homogène en résistance et en connectivité, alors on aura non pas une matrice de transfert  $A$ , mais des matrices de transfert  $A_1, \dots, A_n$  telles que pour tout  $i \in V = \{1, \dots, n\}$ , on a  $A_i(l_{k-1}, l_k) = \exp(B_k l_k + m_{k-1,k} l_{k-1} l_k)$  pour tout  $l \in \Omega^n$  vérifiant  $l_0 = l_n$ . Par conséquent, la fonction de partition s'écrit

$$Z_{G_2} = \text{Tr}(A_1 \dots A_n)$$

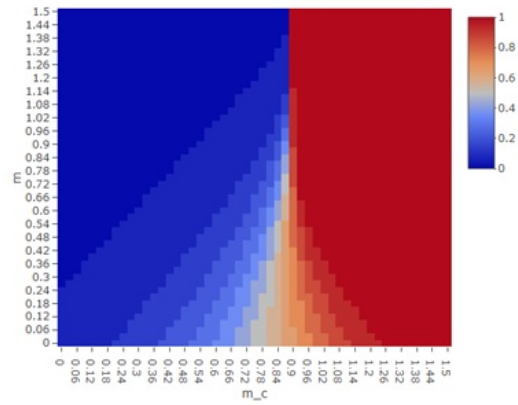
Comme les matrices  $A_i$  ne commutent pas forcément, alors le calcul explicite de cette trace devient très difficile. L'étude des valeurs propres du produit d'un grand nombre de matrices est un sujet assez récent, notamment pour le cas des matrices aléatoires. L'utilisation de connectivités aléatoires mène également à ce sujet, car les matrices  $A_i$  deviennent aléatoires. Nous appelons un modèle d'Ising avec de telles connectivités "modèle d'Ising désordonné", dont l'utilisation dans l'étude des réseaux économiques serait une alternative quand la calibration des connectivités sur un portefeuille de crédit n'est pas possible. Ce sujet fait également partie de notre thème de recherche d'après thèse.

### 5.3.4 Analyse numérique

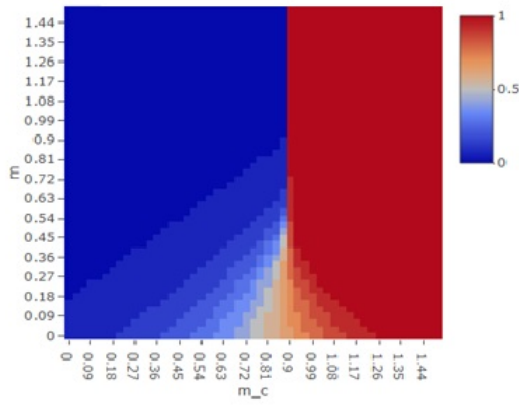
Nous allons maintenant analyser l'effet du degré de connexion sur un réseau  $G_{5,14}(d)$  homogène de 14 entités centrales avec un degré de connexion  $d$ , avec 5 relations de concurrence externes pour chaque entité (même relation de concurrence considérée précédemment), ce qui constitue un réseau de 70 entités. On suppose de plus que toutes les entités ont une probabilité de défaut de 1%, et on note  $m$  la connectivité dans le réseau central et  $m_c$  la connectivité de chaque relation de concurrence.



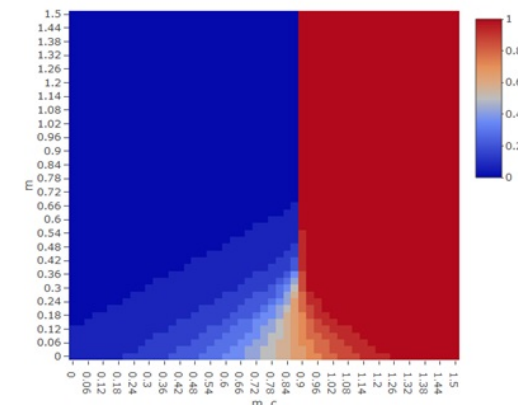
(a)  $d = 2$



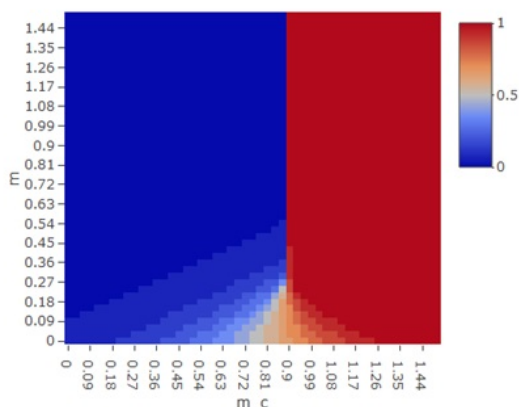
(b)  $d = 4$



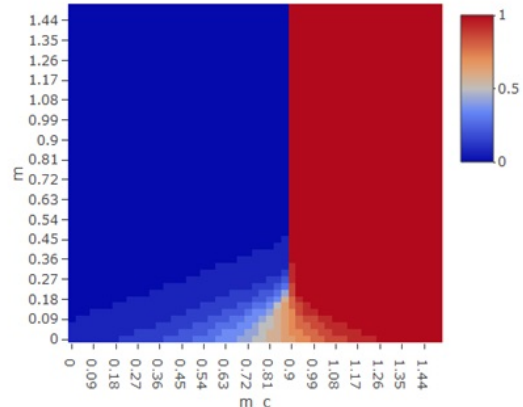
(c)  $d = 6$



(d)  $d = 8$



(e)  $d = 10$



(f)  $d = 12$

FIGURE 5.22 –  $\text{VaR}_{95\%}(L)$  en fonction de  $m$  et  $m_c$  pour chaque degré de connexion  $d$

La figure 5.22 représente  $VaR(N_V)$  à 95% pour chaque degré de connectivité  $d$  en fonction de  $(m, m_c)$ . On constate que plus le degré  $d$  augmente plus les zones de pertes intermédiaires se réduisent, et que la connectivité critique  $m^*$  à partir de laquelle on peut passer de 0 à 100% de pertes diminue en fonction de  $d$ . Ce phénomène confirme les remarques faites dans le cas des réseaux complets, à savoir la relation entre la taille du réseau et la haute connectivité qui mène à des états critiques. En effet, dans le cas complet le réseau a tendance à diffuser le risque dans tout le réseau même pour de faibles connectivités ; alors que dans le cas d'un réseau de degré fixe l'augmentation de la taille n'affecte pas la connexion. La figure 5.23 nous montre comment la  $VaR_{95\%}(N_V)$  varie en fonction de la taille  $n$  du réseau central et la taille des réseaux satellites quand le degré  $d$  est égal à 2. Contrairement au cas complet (voir figure 5.4) l'augmentation de  $n$  ne conduit pas vers un état critique, car celle-ci fait augmenter le nombre d'états possibles de  $N_V$  sans qu'ils se contractent par effet "d'hyper-connectivité".

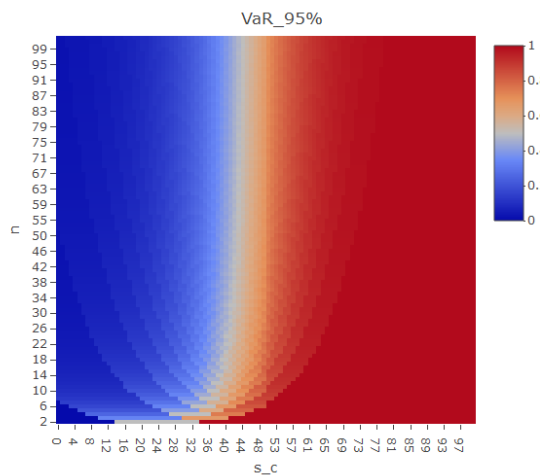
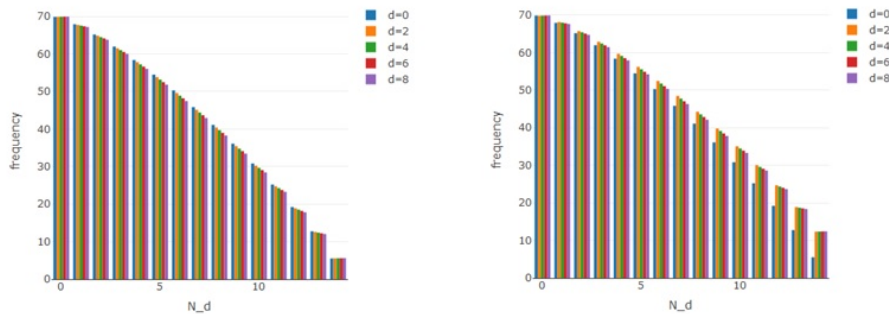


FIGURE 5.23 –  $VaR_{95\%}(N_V)$  en fonction  $(n, s_c)$ .

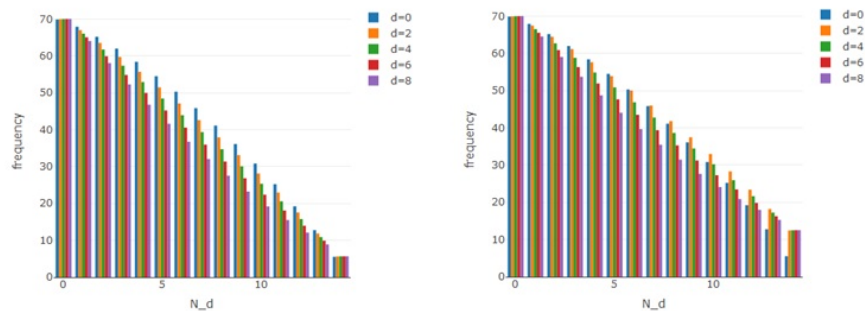
D'autre part, la figure 5.24 représente  $\log(\mathbb{P}_{G_{s_c, n}}(N_V = \frac{k}{n})) + C$ <sup>8</sup>. Les figures de gauche de (a) et (b) correspondent à un réseau sans concurrents satellites pour chaque degré  $d$ , et celle de droite correspond au cas où nous avons 5 concurrents par entité. On constate qu'en absence de concurrence, plus le degré augmente plus les probabilités de défaut simultané et de survie simultané augmentent alors que celles des défauts intermédiaires diminuent pour  $m \in \{0.1, 0.5\}$ . Tandis qu'en présence des concurrents les probabilités de pertes augmentent ou diminuent par rapport à  $d$  selon la valeur de  $m$ . En outre, on observe que le degré  $d = 2$  représente le cas où les probabilités sont maximales, ce qui s'explique par le fait que ce degré n'est pas assez suffisant pour que les relations de support réduisent le risque, et donc il ne fait que créer des canaux de

8. Nous rappelons que nous utilisons le logarithme de la distribution pour réduire les grandes différences de probabilités qui rendent les figures illisibles, et l'addition d'une constante permet de rendre toutes les quantités positives.

transmission du stress qui vient de la concurrence. Cette hypothèse est renforcée par le fait que l'augmentation de  $m$  ne fait qu'empirer les choses comme le montre la figure de droite de (b).



(a) log-distribution des pertes pour  $m = m_c = 0.1$  et un nombre de concurrents par entité nul dans la figure de gauche, et 5 pour la figure de droite.



(b) log-distribution des pertes pour  $m = 0.5, m_c = 0.1$  et un nombre de concurrents par entité nul dans la figure de gauche, et 5 pour la figure de droite.

FIGURE 5.24 –

Regardons maintenant comment la perte moyenne (EL) se comporte en fonction du degré, on s'attend à ce que la moyenne suit ce qui a été constaté sur la VaR, comme l'augmentation des pertes intermédiaires pour  $d = 2$  ou un effet de contagion dû à des degrés de connexion  $d$  assez grands. La figure 5.25 représente les variations de l'EL en fonction  $m$  et  $m_c$  pour différents degrés. On remarque d'abord que plus  $m_c$  est grand plus l'EL converge vers 100%, de plus on observe que nous avons un seuil  $m_c^*$  tel que pour tout  $m_c < m_c^*$  l'augmentation du degré  $d$  fait baisser l'EL alors que pour  $m_c > m_c^*$  l'augmentation du degré  $d$  fait accroître l'EL.

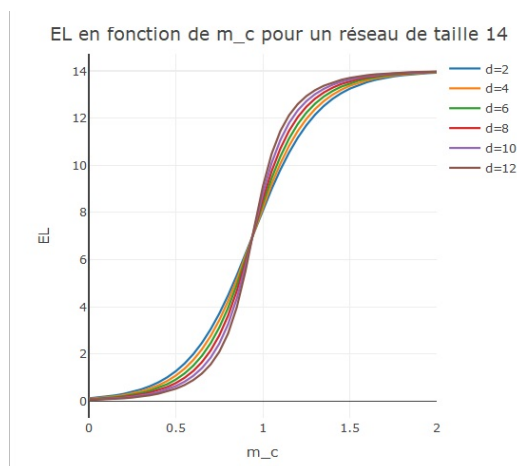


FIGURE 5.25 – Sensibilité de l’EL aux degré de connexion  $d$

On en déduit alors qu’à partir d’un seuil de stress, il est préférable que le réseau soit le moins connecté possible pour éviter toute diffusion du risque.

## 5.4 Les réseaux de grande taille

L’utilisation du modèle pour tenir en compte l’interdépendance en risque de crédit repose sur la capacité à faire des calculs sur de grands portefeuilles. Nous savons que l’application de notre approche à des réseaux dont la taille dépasse 30 entités devient numériquement difficile, toutefois il est possible de se ramener à des calculs moins coûteux sur de grands réseaux. En effet, les réseaux économiques associés à des portefeuilles de crédit peuvent être considérés comme peu connectés, en les réarrangeant par secteurs d’activité ou selon des segments plus fins. De cette manière, il est possible de réduire le calcul considérablement. D’autre part, on se demande s’il est possible d’exploiter les résultats sur les réseaux réguliers homogènes étudiés dans ce chapitre, dans le but d’étudier des réseaux non-réguliers. Nous allons s’intéresser dans cette section à ces problématiques, et nous allons voir qu’il est possible d’étendre certains résultats sur le comportement en volume infini à des réseaux non-réguliers.

### 5.4.1 Problème de réduction des calculs

On se donne un réseau économique  $G = (V, M, T)$  de support avec des probabilités de défaut intrinsèques  $(p_i)_{i \in V}$  et des relations  $\delta_{ij}$  pas forcément égales. Chaque entité  $i \in V$  fait partie d’un réseau externe  $G_i = (V_i, M_i, T_i)$  de telle sorte que pour tout  $i \neq j \in V$ ,  $G_i$  n’est pas connecté à  $G_j$  que par l’intermédiaire du réseau central  $G$ , donc à travers les chemins entre  $i$  et  $j$  dans  $G$ . On notera alors  $\mathcal{G} = (V = V \cup \bigcup_{i \in V} V_i, \mathcal{M}, \mathcal{T})$  le réseau économique total.



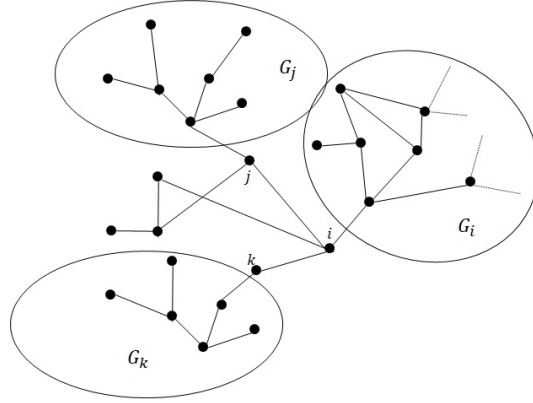


FIGURE 5.26 – Le réseau  $\mathcal{G}$ .

On rappelle que l'objectif est d'étudier la distribution des pertes sur  $G$  en tenant compte des réseaux satellites  $G_i$ , en utilisant un encadrement par des distributions de pertes associées à des réseaux homogènes et symétriques sur lesquels celles-ci s'expriment explicitement. La première technique que nous allons utiliser consiste à réduire l'étude à des réseaux relativement simples. En effet, le théorème suivant nous montre que l'étude peut se ramener à l'encadrement des réseaux  $G_i$  et  $G$  de manière séparée par des réseaux homogènes symétriques. Soit  $X \in \Omega^{\mathcal{V}}$ , on note  $X_{|V} := (X_i)_{i \in V}$ .

**Théorème 5.1.**

Pour tout  $X \in \Omega^{\mathcal{V}}$ , on a

$$\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(X_{|V}) = \mathbb{P}_G^*(X_{|V})$$

où  $\mathbb{P}_G^*$  est la mesure sur le réseau  $G$  dont les probabilités intrinsèques sont  $\mathbb{P}_{G_i}(X_i = -1)$ . En particulier, pour tout événement  $\mathcal{E}$  localisé dans  $U \subset V$ , on a  $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}_G^*(\mathcal{E})$ .

*Démonstration.* Voir 5.6.4.1. □

Ce théorème permet de résoudre plusieurs problèmes techniques liés à la capacité de calcul et la mémoire. En effet, si le réseau  $\mathcal{G}$  est de taille 10000, alors il est pratiquement impossible de stocker les états de  $X$ , outre la complexité qui devient extrêmement grande. Le calcul de  $Z_{\mathcal{G}}$  nécessite en réalité  $2^{|\mathcal{V}|}$  opérations, alors qu'en calculant les probabilités  $\mathbb{P}_{G_i}(X_i = -1)$  et  $G$  sur les sous-réseaux  $G_i$  puis  $Z_G$  nous avons  $\sum_{i \in V} 2^{|V_i|} + 2^{|\mathcal{V}|}$  opérations. Comme  $|\mathcal{V}| = \sum_{i \in V} |V_i|$ , alors le gain de la réduction des opérations est  $\frac{2^{\sum_{i \in V} |V_i|}}{2^{|\mathcal{V}|} + 2^{\sum_{i \in V} |V_i|}}$ ; celui-ci peut atteindre de très grandes valeurs quand les sous réseaux sont suffisamment grands. Pour mieux illustrer cela, on suppose que les sous-réseaux  $G$  et les  $G_i$  ont la même taille  $N$ , alors le ratio est égal à  $\frac{2^{N^2-N}}{N+1}$ ; donc si  $N = 10$  alors le nombre d'opérations se divise par  $10^{26}$ . De manière générale, si les sous-réseaux  $G_i$  sont encore décomposables de la même manière, alors le nombre d'opération se réduit encore plus. Donc il s'agit de trouver une structure arborée par bloc sur  $\mathcal{G}$  pour rendre le procédé décrit

récuratif.

Nous ne chercherons pas à décomposer les réseaux satellites  $G_i$  dans ce chapitre, mais nous allons nous contenter d'encadrer les probabilités de défaut  $\mathbb{P}_{G_i}(X_i = -1)$  par d'autres issues de réseaux étoilés et homogènes dont les centres sont les  $i$ . On associe à l'espace des fonctions  $\mathcal{F}(\Omega^n, \mathbb{R})$  la norme  $\|\cdot\|$  définie par  $\|f\| = \left(\sum_{l \in \Omega^n} f(l)^2\right)^{\frac{1}{2}}$  pour tout  $f \in \mathcal{F}(\Omega^n, \mathbb{R})$ . On dit qu'un réseau  $G'$  est une approximation  $\|\cdot\|$ -optimale de  $G$  si et seulement si  $\|\mathcal{H}_G - \mathcal{H}_{G'}\|$  est minimal.

**Lemme 5.3.**

Pour tout réseau  $G = (V, M, T)$  et tout  $i \in V$ , il existe deux réseaux étoilés  $G_1 = (V, M_0, T_1)$  et  $G_2 = (V, M_0, T_2)$  centrés en  $i$  et dans lesquels seules les relations sont changées telles que

$$\mathbb{P}_{G_1}(X_i = -1) \leq \mathbb{P}_G(X_i = -1) \leq \mathbb{P}_{G_2}(X_i = -1)$$

où  $(M_0)_{ij} = m_{ij}$  pour tout  $j \in N(i)$  et  $T_1, T_2$  deux collections de relations. De plus, ces deux réseaux peuvent être choisis homogènes tels que l'encadrement soit  $\|\cdot\|$ -optimal.

*Démonstration.* Voir 5.6.2.3. □

Ce lemme montre qu'il est possible de trouver un encadrement optimal dans le sens où les distributions des réseaux étoilés sont les plus proches possibles de la vraie distribution. Comme le calcul de la norme  $\|\cdot\|$  est assez coûteux, alors cette technique est utilisable que pour des réseaux  $G_i$  de tailles raisonnables, sinon il est préférable de renoncer à l'optimalité. En outre, la construction de ces deux réseaux étoilés dans la démonstration se fait de manière récursive, donc il est possible d'en tirer un moyen algorithmique pour la construction de ceux-ci en pratique.

Pour l'encadrement de la distribution des pertes de  $G$  nous ne disposons pas pour le moment d'un moyen efficace pour construire des réseaux dont les distributions des pertes encadrent celle de  $G$ . Néanmoins, on arrive à démontrer l'existence de réseaux homogènes d'un degré arbitraire qui donnent l'encadrement comme le montre le lemme suivant :

**Lemme 5.4.** Pour tout réseau économique de support<sup>9</sup>  $G = (V, M, T)$ , il existe deux réseaux  $G_1(d)$  et  $G_2(d)$  de support homogènes et symétriques de degré de connexion  $d \leq |V| - 1$  tels que l'inégalité

$$\mathbb{P}_{G_1(d)}\left(N_V = \frac{k}{|V|}\right) \leq \mathbb{P}_G\left(N_V = \frac{k}{|V|}\right) \leq \mathbb{P}_{G_2(d)}\left(N_V = \frac{k}{|V|}\right)$$

soit  $\|\cdot\|$ -optimale pour tout  $1 \leq k \leq |V|$ .

*Démonstration.* Voir 5.6.2.4. □

Ce lemme argumente donc l'existence de mesures qui permettent un encadrement explicite de la distribution des pertes d'un réseau de support arbitraire. Bien qu'il ne fournisse pas de moyen de construction, ce lemme est d'une grande importance théorique pour l'analyse en volume infini comme nous allons le montrer par la suite.

9. Un réseau de support est un réseau cohérent dont toutes les relations sont de support.

### 5.4.2 Comportement en volume infini

On considère un réseau économique de support  $G$ , et on suppose qu'il est régulier de degré  $D$  (sans qu'il soit homogène en  $B_i$  et  $m_{ij}$ ). Le lemme précédent nous donne l'existence de deux réseaux  $G_1(d)$  et  $G_2(d)$  qui vérifient l'encadrement de la distribution des pertes. Par construction de ceux-ci (voir preuve du lemme), le degré  $d$  serait égal à  $D$ . En particulier, si  $G$  est complet, alors il existe un réseau complet  $G(|V| - 1)$  homogène en probabilités intrinsèques et en connectivités tel que pour tout  $1 \leq k$  on ait

$$\mathbb{P}_G(N_V = \frac{k}{|V|}) \leq \mathbb{P}_{G(|V|-1)}(N_V = \frac{k}{|V|})$$

Or d'après le proposition 5.4, on a  $\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G(|V|-1)}(N_V = \frac{k}{|V|}) = \delta_0(k)$ , alors tout  $1 \leq k$

$$\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_G(N_V = \frac{k}{|V|}) = 0$$

Par conséquent,  $\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_G(N_V = 0) = 1$ , ce qui démontre le théorème suivant

**Théorème 5.2.** *Si le réseau  $\mathcal{G}$  est composé d'un réseau économique de support complet  $G = (V, M, T)$ , et des réseaux satellites  $G_i$  tels que pour tout  $i \in V$  on ait  $\mathbb{P}_{G_i}(X_i = -1) < \frac{1}{2}$ , alors pour tout  $X \in \Omega^V$*

$$\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{\mathcal{G}}(X) = \delta_{(1, \dots, 1, \dots)}$$

où  $\delta$  est l'impulsion de Dirac sur  $\Omega^{\mathbb{N}}$ .

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser le théorème 5.1 pour se ramener aux réseaux  $G$  sans satellites et dont les probabilités intrinsèques de défaut sont données par  $\mathbb{P}_{G_i}(X_i = -1)$ . Les arguments dits ci-dessus nous permettent alors de conclure.  $\square$

Ce théorème généralise 5.4 par l'utilisation du lemme 5.4 à tout réseau de support complet. Nous avons dans la proposition 5.2 que si les résistances s'annulent ou deviennent négatives à cause des réseaux externes, alors le comportement en volume infini change. En fait, on peut généraliser de la même manière le théorème précédent en supprimant toutes contraintes sur les réseaux satellites. Pour cela, nous démontrons un résultat assez précis qui permet de déterminer la distribution en volume infini en fonction du taux des résistances négatives dans le réseau; et il est donné dans la proposition suivante :

**Proposition 5.11.** *Soit  $G_n = (V, M, T)$  un réseau économique complet avec des relations  $\delta_{ij} = X_i X_j$  homogène en connectivité ( $m_{ij} = m$ ). Si nous avons  $q_n$  résistances négatives ou nulles  $B_q$  dans  $G_n$  et  $n - q_n$  résistances positives  $B_p$ , alors*

$$\mathbb{P}_{G_n}(N_V = \frac{r}{n}) = \frac{\sum_{k_q=0}^r C_{q_n}^{k_q} C_{n-q_n}^{r-k_q} e^{-2(r-k_q)B_p - 2k_q B_q + m(r(r-1) + (n-r)(n-1-r))}}{\sum_{k=0}^n \sum_{k_q=0}^k C_{q_n}^{k_q} C_{n-q_n}^{k-k_q} e^{-2(k-k_q)B_p - 2k_q B_q + m(k(k-1) + (n-k)(n-1-k))}}$$

De plus, il existe  $\lambda_q \in [0, 1]$  qui vérifie

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_n}{n} < \frac{B_p}{B_p - B_q}$  ou  $q_n = \frac{B_p}{B_p - B_q} n + o(n)$ , alors  $\lambda_q = 0$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_n}{n} > \frac{B_p}{B_p - B_q}$  alors  $\lambda_q = 1$ .
- Sinon  $q_n = \frac{B_p}{B_p - B_q} n + o(\frac{1}{n})$ , et on a  $\lambda_q \neq 0, 1$ . En particulier,  $\lambda_q = \frac{1}{2}$  si  $q_n = \frac{B_p}{B_p - B_q} n + o(1)$ .

tel que on ait la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n} = \lambda_q \delta_{(1, \dots, 1, \dots)} + (1 - \lambda_q) \delta_{(-1, \dots, -1, \dots)}$$

où  $\delta$  est l'impulsion de Dirac sur  $\Omega^{\mathbb{N}}$ .

*Démonstration.* Voir 5.6.1.8. □

Ce résultat nous montre que si le nombre d'entités est très grand dans un réseau complet, alors peu importe les résistances, la distribution devient concentrée sur les états d'une perte totale ou une zéro perte. Ceci est bien évidemment dû au grand degré de connexion du réseau qui est ici maximal. Toutefois, le résultat nous donne les deux probabilités correspondantes en fonction du taux d'entités proches du défaut si on considère un système de notation dans lequel -1 vaut dire note faible. Ce résultat nous permet d'étendre le théorème 5.2 de la manière suivante :

**Théorème 5.3.** Soit  $\mathcal{G}$  un réseau constitué d'un réseau économique de support complet  $G = (V, M, T)$  avec un réseau satellites  $G_i$  pour chaque entité  $i \in V$ . On note  $Q_G$  le nombre d'entités du réseau  $G$  exposées à des mauvais réseaux satellites, i.e  $Q_G := \{i \in V \mid \mathbb{P}_{G_i}(X_i = -1) \leq \frac{1}{2}\}$ . Si  $B_p$  et  $b_p$  sont la plus grande et la plus petite résistance positive dans  $G$  et  $B_q$  et  $b_q$  la plus grande et la plus petite résistance négative, alors il existe  $\lambda_Q \in [0, 1]$  tel que on ait pour tout  $X \in \Omega^V$  la limite suivante :

$$\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{\mathcal{G}}(X) = \lambda_Q \delta_{(1, \dots, 1, \dots)} + (1 - \lambda_Q) \delta_{(-1, \dots, -1, \dots)}$$

et qui vérifie

- Si  $\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \frac{Q_G}{|V|} < \frac{B_p}{B_p - B_q}$  alors  $\lambda_Q = 0$ .
- Si  $\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \frac{Q_G}{|V|} > \frac{b_p}{b_p - b_q}$  alors  $\lambda_Q = 1$ .
- Sinon,  $\lambda_Q \neq 0, 1$ .

où  $\delta$  est l'impulsion de Dirac sur  $\Omega^{\mathbb{N}}$ .

*Démonstration.* Voir 5.6.4.2 □

Ce théorème nous montre tout d'abord que pour un quelconque réseau de support complet, la distribution des pertes en volume infini est toujours concentrée en 0 et 100% avec des propositions qui dépendent de l'effet des réseaux satellites sur les entités de  $G$ .

Pour le cas d'un réseau non-complet et non symétrique, nous ne savons que l'existence de réseaux d'un degré  $d$  dont les distributions des pertes encadrent celle du réseau de support  $G$ . Nous avons vu dans le cas  $d = 2$  qu'il est difficile de décrire complètement la distribution des pertes en

volume infini, ce qui montre qu'il est difficile d'étendre le théorème précédent aux cas des réseaux réguliers. Cependant, il est possible de prouver l'existence de la limite dans le cas général en s'appuyant sur les résultats de la mécanique statistique sur le modèle d'Ising. Nous avons donc le théorème suivant :

**Théorème 5.4.**

Soit  $G = (V, M, T)$  est un réseau économique cohérent, alors la mesure  $\mathbb{P}_G$  existe quand  $|V| \rightarrow +\infty$ .

*Démonstration.* Voir 5.6.4.3 □

Ce théorème nous garantis alors l'existence de la mesure  $\mathbb{P}_{G_n(d_n)}$  quand  $n \rightarrow +\infty$  pour toute suite de degrés  $d_n \leq n - 1$ . Il est certain que la limite dépend du taux de connexion  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n}{n-1}$  comme il est le cas pour le taux  $\frac{q_n}{n}$  des entités faibles ( $B \leq 0$ ). Mais il est certain que celui-ci ne suffit pas pour décrire la distribution en entier. En effet, dans le cas d'indépendance et pour tout  $d_n$  constant, le taux de connexion est nul, toutefois les distributions en volume infini sont différentes.

Pour finir, il convient de noter qu'il est possible d'étendre l'étude des réseaux de support réguliers à celle des réseaux réguliers pour des relations symétriques de la forme  $\delta_{ij} = bX_i + bX_j + cX_iX_j$  pour tout  $b, c \in \mathbb{R}$ . En fait, nous avons regardé uniquement le cas  $b = 0$  et  $c = 1$  qui restreint aux réseaux de support. Cependant, le hamiltonien d'un réseau  $G_n(d)$  ayant ces relations peut s'écrire

$$\mathcal{H}_{G_n(d)} = \sum_{i \in V} (B + mbd)X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} cmX_iX_j$$

ce qui permet d'exprimer la distribution des pertes sur ce réseau en remplaçant  $m$  dans les termes de couplage par  $cm$  et les  $B$  dans la partie intrinsèque par  $B + bdm$ . On obtient donc l'expression

$$\mathbb{P}_{G_n(d)}(N_V = \frac{k}{n}) = \frac{\phi_k^{(d)}(cm)e^{(B+bdm)(n-2k)}}{\sum_{l=0}^n \phi_l^{(d)}(cm)e^{(B+bdm)(n-2l)}}$$

ce qui permet d'utiliser tout les résultats établit sur le comportement en volume infini.

## 5.5 Conclusion et perspectives

Nous avons vu dans ce chapitre comment les hypothèses de symétrie et d'homogénéité permettent d'avoir une idée sur le comportement d'un réseau économique de support. Ces hypothèses relèvent les effets de la topologie du réseau sur la distribution des pertes, notamment via les fonctions  $\phi_k^{(d)}$  dont l'expression explicite s'est révélée comme un problème très difficile. L'effet de la topologie du réseau se résume en effet dans le degré  $d$ , qui conditionne la façon avec laquelle le risque est distribué aux entités. Nous avons vu que pour le cas  $d = 2$ , nous avons pu exprimer

explicitement ces fonctions, ce qui nous a permis d'étudier numériquement la distribution des pertes pour des réseaux très larges. Nous avons utilisé les méthodes basées sur la matrice de transfert afin d'écrire explicitement les probabilités marginales et doubles de défaut, ainsi que la corrélation. Nous en avons déduit les formules explicites en volume infini de celles-ci, mais ces méthodes ne permettent pas de comprendre la distribution des pertes en entier. Nous avons discuté en détail le cas  $d = n - 1$  comme une entrée en matière pour la simplicité du calcul de la distribution des pertes. En analysant la  $VaR$  de la perte numériquement, on s'est aperçu que le support positif dans les réseaux est à effets opposés. En effet, plus le degré de connexion augmente, plus les entités ont du support et plus les probabilités de perte diminuent. Mais d'un autre côté un niveau de connexion élevé entraîne une diffusion du risque dans le réseau et ainsi l'existence d'un état critique ; à savoir un passage directe de 0 à 100% des pertes. Donc si ce degré de connexion augmente avec le nombre d'entités, alors il devient un des vecteurs de contagion, comme il est le cas pour un réseau complet. Nous avons vu qu'il est très difficile de décrire cela sur des réseaux de degré arbitraire, et même pour un degré 2 la distribution des pertes est difficile à comprendre théoriquement. Bien que nous disposons d'une formule fermée dans le cas  $d = 2$ , nous n'avons pas pu déterminer le comportement asymptotique de la distribution des pertes en entier à cause des oscillations de la moyenne. Toutefois, l'existence d'une limite est assurée comme nous l'avons démontré dans le cas des réseaux cohérents en toute généralité.

Nous avons démontré la possibilité de se servir des distributions de pertes sur les réseaux réguliers et homogènes pour encadrer celles des réseaux non-homogènes. Nous avons utilisé pour cela la notion de relation équivalente introduite dans le chapitre 3 ainsi que les variations par rapport aux probabilités intrinsèques et les connectivités. Toutefois, ceci ne représente qu'une démonstration d'existence, et ne fournit presque aucun moyen de calcul de ces réseaux homogènes qui servent d'encadrement. Cependant, pour l'aspect pratique de cette technique, nous comptons bien développer dans le futur un moyen algorithmique d'encadrement en exploitant la même récursion employée dans la démonstration du lemme 5.3. Cette méthode permettrait de réduire le temps de calcul sur de grands portefeuilles en exploitant les expressions fermées des encadrements. Cela rend possible une meilleure appréhension du risque en tenant en compte l'interdépendance sur des groupes d'affaires, des holdings ou des segments connectés de portefeuilles de grande taille. En outre, nous avons pu démontrer un théorème qui permet de réduire exponentiellement les calculs quand le réseau contient des branches par bloc, celui-ci nous a également servi dans la démonstration de l'existence de l'encadrement homogène. D'autre part, grâce à ces techniques d'encadrement, nous avons pu généraliser les résultats en volume infini obtenus sur des réseaux réguliers à des réseaux de support quelconques.

Nous avons donné dans ce chapitre quelques réponses aux questions de comportement en volume infini, mais nous en avons soulevé plus que nous en avons résolu. Les questions qui restent ouvertes dans ce chapitre vont sans doute faire partie des sujets qui vont alimenter

nos travaux futurs, en priorité les expressions explicites des fonctions  $\phi_k^{(d)}$  et le comportement asymptotique de la distribution des pertes sur des réseaux réguliers.

## 5.6 Preuves

### 5.6.1 Preuves des propositions

#### 5.6.1.1 Preuves des propositions 5.3, 5.6 et 5.1

Pour expliciter la formule de la distribution des pertes, il faut d'abord expliciter celle de la fonction de partition  $Z_{G_{s,n}(d)}$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, q\}$  on notera  $l^j(i)$  la configuration du réseau externe en relation  $r_j$  avec  $i$  et  $l$  la configuration du réseau central. On notera également  $V_i(r_j)$  l'ensemble des entités connectées avec  $i$  via une relation  $r_j$ . On a d'une part

$$\mathcal{H}_{G_{s,n}(d)}(l, (l^j(i))_{1 \leq j \leq q}) = \sum_{i \in V} B l_i + \sum_{j=0}^q \sum_{i \in V} \sum_{u=0}^{s_j} B_j l_u^j(i) + m \sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j + \sum_{j=0}^q m_j \sum_{i \in V} \sum_{u \in V_i(r_j)} \delta_{iu}(l_i, l_u^j(i))$$

où  $\delta_{iu}(l_i, l_u^j(i)) = a_j l_i + b_j l_u^j(i) + c_j l_i l_u^j(i)$  pour tout  $j \in \{1, \dots, q\}$ . D'autre part, on a

$$\begin{aligned} Z_{G_{s,n}(d)} &= \sum_{l \in \{-1,1\}^n} \prod_{j=1}^q \prod_{i \in V} \sum_{l^j(i) \in \{-1,1\}^{s_j}} \exp(\mathcal{H}_{G_{s,n}(d)}(l, (l^j(i))_{1 \leq j \leq q})) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} \prod_{j=1}^q \prod_{i \in V} \sum_{k_j(i)=0}^{s_j} \sum_{l^j(i) \in \mathcal{A}_{k_j(i), s_j}} \exp(\mathcal{H}_{G_{s,n}(d)}(l, (l^j(i))_{1 \leq j \leq q})) \end{aligned}$$

Soient  $k \leq n$ ,  $i \in V$ ,  $l \in \mathcal{A}_{k,n}$  et  $(l^j(i))_{1 \leq j \leq q} \in \prod_{j=1}^q \mathcal{A}_{k_j(i), s_j}$ . Comme  $l \in \mathcal{A}_{k,n}$  alors  $\sum_{i \in V} l_i = (n - 2k)$ , de la même manière on a  $\sum_{u \in V_i(r_j)} l_u^j(i) = (s_j - 2k_j(i))$ . Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i \in V} \sum_{u \in V_i(r_j)} \delta_{iu}(l_i, l_u^j(i)) &= \sum_{i \in V} \sum_{u \in V_i(r_j)} a_j l_i + b_j l_u^j(i) + c_j l_i l_u^j(i) \\ &= s_j a_j \sum_{i \in V} l_i + b_j \sum_{i \in V} (s_j - 2k_j(i)) + c_j \sum_{i \in V} (s_j - 2k_j(i)) l_i \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{G_{s,n}(d)}(l, (l^j(i))_{1 \leq j \leq q}) &= (n - 2k)B + m \sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j + \sum_{j=1}^q B_j \sum_{i \in V} (s_j - 2k_j(i)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^q m_j (n - 2k) s_j a_j + b_j (s_j - 2k_j(i)) + c_j (s_j - 2k_j(i)) l_i \\ &= (n - 2k)B + m \sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j + \sum_{j=1}^q s_j (n B_j + n m_j b_j + (n - 2k) m_j (a_j + c_j)) \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^q \sum_{i \in V} (B_j + m_j b_j + m_j c_j l_i) k_j(i) \end{aligned}$$



D'où pour tout  $l \in \mathcal{A}_{k,n}$

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{i \in V \\ 1 \leq j \leq q}} \sum_{k_j(i)=0}^{s_j} \sum_{l^j(i) \in \mathcal{A}_{k_j(i), s_j}} \exp(\mathcal{H}_{G_{s,n}(d)}(l, (l^j(i))_{1 \leq j \leq q})) &= e^{(n-2k)B+m \sum_{(i,j)} l_i l_j} \prod_{j=1}^q e^{s_j(nB_j+nm_j b_j+(n-2k)m_j(a_j+c_j))} \\ &\times \prod_{i \in V} \sum_{k_j(i)=0}^{s_j} C_{s_j}^{k_j(i)} e^{-2(B_j+m_j b_j+m_j c_j)l_i k_j(i)} \\ &= e^{(n-2k)B+m \sum_{(i,j)} l_i l_j} \prod_{j=1}^q e^{s_j(nB_j+nm_j b_j+(n-2k)m_j(a_j+c_j))} \\ &\times \prod_{i \in V} (1 + e^{-2(B_j+m_j b_j+m_j c_j)l_i})^{s_j} \end{aligned}$$

Or pour tout  $j \leq q$  et tout  $l \in \mathcal{A}_{k,n}$ , on a

$$\prod_{i \in V} (1 + e^{-2(B_j+m_j b_j+m_j c_j)l_i})^{s_j} = (1 + e^{-2(B_j+m_j b_j-m_j c_j)l_i})^{k s_j} (1 + e^{-2(B_j+m_j b_j+m_j c_j)l_i})^{(n-k)s_j}$$

alors

$$\begin{aligned} Z_{G_{s,n}(d)} &= \sum_{k=0}^n \phi_k^{(d)}(m) e^{(n-2k)B} \prod_{j=1}^q e^{s_j(nB_j+nm_j b_j+(n-2k)m_j(a_j+c_j))} (1 + e^{-2(B_j+m_j b_j-m_j c_j)l_i})^{k s_j} (1 + e^{-2(B_j+m_j b_j+m_j c_j)l_i})^{(n-k)s_j} \\ &= C \sum_{k=0}^n \phi_k^{(d)}(m) e^{(n-2k)B} \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{k s_j} \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend pas de  $k$ ,  $\theta_{r_j}$  est la fonction définie dans la proposition.

Comme pour tout  $k \leq n$ ,

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}(d)}(N_V = \frac{k}{n}) = \frac{\sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} \prod_{j=1}^q \prod_{i \in V} \sum_{k_j(i)=0}^{s_j} \sum_{l^j(i) \in \mathcal{A}_{k_j(i), s_j}} \exp(\mathcal{H}_{G_{s,n}(d)}(l, (l^j(i))_{1 \leq j \leq q}))}{Z_{G_{s,n}(d)}}$$

alors  $\mathbb{P}_{G_{s,n}(d)}(N_V = \frac{k}{n}) = \frac{C \phi_k^{(d)}(m) e^{(n-2k)B} \prod_{j=1}^q \theta_{r_j}^{k s_j}}{Z_{G_{s,n}(d)}}$ . En simplifiant par la constante  $C$  on obtient la formule désirée.

Montrons maintenant les formules de symétrie de  $\phi_k^{(d)}$ . Soit  $d \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  pair,  $k \leq n$  et  $l \in \mathcal{A}_{k,n}$ , et on note  $E_d(V)$  l'ensemble des arêtes quand le degré de connexion du réseau  $G_n(d)$ . Le calcul de la somme  $\sum_{(i,j) \in E_d(V)} l_i l_j$  peut se faire en sommant sur tous les couples  $(i,j)$  en supposant que le réseau est complet et puis enlever la somme  $\sum_{(i,j) \in E_{n-d}(V)} l_i l_j$  qui correspond aux connexions rajoutées. Donc  $\sum_{(i,j) \in E_d(V)} l_i l_j = \sum_{(i,j) \in E_{n-1}(V)} l_i l_j - \sum_{(i,j) \in E_{n-d}(V)} l_i l_j$ , or

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in E_{n-1}(V)} l_i l_j &= 2 \sum_{(i,j) \in E_{n-1}(V)} \frac{l_i l_j + 1}{2} - \sum_{(i,j) \in E_{n-1}(V)} 1 \\ &= 2(C_k^2 + C_{n-k}^2) - C_n^2 \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{(i,j) \in E_d(V)} l_i l_j = 2(C_k^2 + C_{n-k}^2) - C_n^2 - \sum_{(i,j) \in E_{n-d}(V)} l_i l_j$$

D'où

$$\phi_k^{(d)}(m) = e^{m(2(C_k^2 + C_{n-k}^2) - C_n^2)} \phi_k^{(n-d)}(-m)$$

D'autre part, on remarque que si  $l \in \mathcal{A}_{k,n}$ , alors  $-l \in \mathcal{A}_{n-k,n}$ . Comme  $\sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j = \sum_{(i,j) \in E(V)} (-l_i)(-l_j)$ , alors par changement de variable  $\phi_k^{(d)} = \phi_{n-k}^{(d)}$ , ce qui termine la démonstration.

Le résultat suivant généralise les propositions 5.1 et 5.3, car il suffit de prendre que des relations externes de concurrence pour la première, et un degré  $d = n - 1$  pour la deuxième.

### 5.6.1.2 Preuve de la proposition 5.4

Soient  $k \leq n$  et  $s \in \mathbb{N}^q$ .

1. Soit  $j \leq q$  tel que la relation  $r_j$  ait une fonction  $\theta_j \leq 1$ . Alors pour tout  $0 < l \leq n$ , si  $m_j \neq 0$  on a  $\lim_{s_j \rightarrow +\infty} \theta_j^{l s_j} = 0$ . Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \lim_{s_j \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) &= \lim_{s_j \rightarrow +\infty} \frac{C_n^k e^{(n-2k)B + 2m(C_k^2 + C_{n-k}^2)}}{\sum_{l=0}^n C_n^l \prod_{j=1}^q \theta_j^{(l-k)s_j} e^{(n-2k)B + 2m(C_l^2 + C_{n-l}^2)}} \\ &= \delta_0(k) \end{aligned}$$

si en revanche  $m_j = 0$ , alors  $\theta_j = 1$  et donc le nombre  $s_j$  disparaît de la distribution, et on a donc un réseau central avec  $s_j = 0$  connexion avec des relations  $r_j$ , d'où le résultat.

Si  $\theta_j > 1$ , ce qui veut dire que  $m_j \neq 0$ , alors pour tout  $0 < l \leq n$ ,  $\lim_{s_j \rightarrow +\infty} \theta_j^{l s_j} = +\infty$ , par conséquent

$$\begin{aligned} \lim_{s_j \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) &= \lim_{s_j \rightarrow +\infty} \frac{C_n^k e^{(n-2k)B + 2m(C_k^2 + C_{n-k}^2)}}{\sum_{l=0}^n C_n^l \prod_{j=1}^q \theta_j^{(l-k)s_j} e^{(n-2k)B + 2m(C_l^2 + C_{n-l}^2)}} \\ &= \delta_n(k) \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.

2. Il est possible de se ramener au cas d'un réseau sans satellites en remplaçant la probabilité intrinsèque  $p$  de  $i \in V$  par sa probabilité marginale de défaut dans son réseau satellite. Par conséquent, en remplaçant donc la résistance  $B$  de  $i \in V$  par  $B - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$  on se ramène à un réseau sans réseaux satellites. Toutefois, la distribution  $\mathbb{P}_{G_{s,n}}$  reste la même car  $B$  contient l'information nécessaire sur les réseaux satellites.

Pour le comportement asymptotique quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , si  $m = 0$ , alors chaque entité du réseau a une probabilité de défaut égale à  $\mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = \frac{1}{1})$ , et

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) = C_n^k \mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = \frac{1}{1})^k \mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = \frac{1}{1})^{n-k}$$

Or d'après le théorème central limite, on sait que la moyenne de variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  suit asymptotiquement une loi normale de moyenne  $p$  et de variance  $\frac{p(1-p)}{2}$ , alors pour  $n$  assez grand  $N_V$  qui a une loi normale de moyenne  $\mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = \frac{1}{2})$  et de variance  $\frac{\mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = \frac{1}{2})(1 - \mathbb{P}_{G_{s,1}}(N_V = \frac{1}{2}))}{n}$ .

Si  $m > 0$ , alors pour tout  $n$  on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = 0) &= \frac{\exp(nB + 2mC_n^2)}{\sum_{k=0}^n C_n^k \exp((n-2k)B + 2m(C_k^2 + C_{n-k}^2))} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^n C_n^k \exp(-2kB + m(k(k-1) + (n-k)(n-k-1) - n(n-1)))} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^n C_n^k \exp(-2kB + m(2k^2 - 2nk))} \\ &\geq \frac{1}{\sum_{k=0}^n C_n^k \exp(2km(k-n) - 2kB)} \end{aligned}$$

D'autre part, si  $B \geq 0$  (ce qui est équivalent au cas  $B > \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \theta_j \log(\theta_{r_j})$ ), alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{2km(k-n) - 2kB} &= 1 + e^{-2nB} + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k e^{2km(k-n) - 2kB} \\ &\leq 1 + e^{-2nB} + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k e^{2k(k-n)m} \\ &\leq 1 + e^{-2nB} + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k e^{2\frac{n}{2}(\frac{n}{2} - n)m} \\ &\leq 1 + e^{-2nB} + 2^n e^{-\frac{m}{2}n^2} \end{aligned}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n e^{-\frac{m}{2}n^2} = 0$  alors si  $B > 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = 0) \geq 1$ , par suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) = \delta_0(k)$$

Si en revanche  $B = 0$  (ce qui est équivalent au cas  $B = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \theta_j \log(\theta_{r_j})$ ), alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = 0) \geq \frac{1}{2}$ . Or

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = 1) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n C_n^k \exp(2mk(k-n))}$$

alors par changement de variable on retrouve le cas la probabilité  $\mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = 0)$ , donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = 1) \geq \frac{1}{2}$  et par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) = 0.5\delta_0(k) + 0.5\delta_n(k)$$

Si  $B < 0$  (ce qui est équivalent au cas  $B > \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \theta_j \log(\theta_{r_j})$ ), alors on peut sans calculer exploiter la symétrie du modèle par transposition des états. En effet, en changeant les états

$X_i$  par  $-X_i$ , la relation de support choisie  $\delta_{ij} = X_i X_j$  est invariante, alors que la partie intrinsèque du hamiltonien devient  $-B \sum_{i \in V} X_i$ . Donc en prenant  $B' = -B$  on se ramène au cas précédent, en ayant l'état 1 pour le défaut et -1 pour la survie. Par conséquent, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}}(N_V = \frac{k}{n}) = \delta_n(k)$$

Ce qui termine la démonstration.

### 5.6.1.3 Preuve de la proposition 5.5

1. Soient  $\alpha \in V$  et  $s \in \mathbb{N}^q$ , on a

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}}(X_\alpha = -1) = \frac{\sum_{\substack{l \in \{-1,1\}^n \\ l_\alpha = -1}} \prod_{j=1}^q \prod_{i \in V} \sum_{l^j(i) \in \{-1,1\}^{s_j}} \exp(\mathcal{H}_{G_{s,n}}(l, (l^j(i))_{1 \leq j \leq q}))}{Z_{G_{s,n}}}$$

Nous avons vu comment le calcul de  $Z_{G_{s,n}}$  se fait dans le cas général, donc nous allons appliquer le même principe pour le numérateur. Comme  $l_\alpha$  est fixé à -1, alors la somme porte sur les  $n - 1$  termes restants, donc nous allons sommer sur  $l \in \{-1,1\}^{n-1}$  en fixant  $l_\alpha = -1$  dans le Hamiltonien. On a donc pour tout  $(l_i)_{i \in V \setminus \alpha} \in \mathcal{A}_{k,n-1}$ ,  $\sum_{i \in V} B l_i = B l_\alpha + B \sum_{i \in V \setminus \alpha} l_i = B(n - 2 - 2k)$ . De plus, comme le réseau est complet, alors

$$\sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j = - \sum_{i \in N(\alpha)} l_i + \sum_{(i,j) \in E(V \setminus \alpha)} l_i l_j = -(n - 1 - k) + 2C_k^2 + 2C_{n-1-k}^2 - C_{n-1}^2$$

La somme  $\sum_{j=1}^q \sum_{i \in V} B_j l_u^j(i)$  elle dépend pas de  $l_\alpha$ , et elle garde la même valeur  $\sum_{j=1}^q \sum_{i \in V} B_j (s_j - 2k_j(i))$  pour tout  $l^j(i) \in \mathcal{A}_{k_j(i), s_j}$  que dans la preuve de la proposition ???. En revanche, la somme  $\sum_{j=1}^q m_j \sum_{i \in V} \sum_{u \in V_i(r_j)} \delta_{iu}(l_i, l_u^j(i))$  dépend de  $l_\alpha$ , donc on aura

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q m_j \sum_{i \in V} \sum_{u \in V_i(r_j)} \delta_{iu}(l_i, l_u^j(i)) &= \sum_{j=1}^q m_j \sum_{u \in V_i(r_j)} \delta_{\alpha u}(-1, l_u^j(\alpha)) + \sum_{j=1}^q m_j \sum_{i \in V \setminus \alpha} \sum_{u \in V_i(r_j)} \delta_{iu}(l_i, l_u^j(i)) \\ &= \sum_{j=1}^q m_j (-s_j a_j + (b_j - c_j)(s_j - 2k_j(\alpha))) \\ &+ \sum_{j=1}^q m_j \sum_{i \in V \setminus \alpha} (s_j a_j l_i + b_j (s_j - 2k_j(i)) + c_j l_i (s_j - 2k_j(i))) \\ &= \sum_{j=1}^q m_j s_j (-a_j + b_j - c_j) - 2 \sum_{j=1}^q m_j (b_j - c_j) k_j(\alpha) \\ &+ \sum_{j=1}^q m_j s_j ((n - 1 - k)(a_j + c_j) + (n - 1)b_j) - 2 \sum_{j=1}^q m_j \sum_{i \in V \setminus \alpha} (b_j + c_j l_i) k_j(i) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{l \in \{-1,1\}^n \\ l_\alpha = -1}} \prod_{j=1}^q \prod_{i \in V} \sum_{l^j(i) \in \{-1,1\}^{s_j}} e^{\mathcal{H}_{G_{s,n}}(l, (l^j(i))_{1 \leq j \leq q; i \in V})} &= \sum_{l \in \{-1,1\}^{n-1}} \prod_{j=1}^q \prod_{i \in V} \sum_{l^j(i) \in \{-1,1\}^{s_j}} e^{\mathcal{H}_{G_{s,n}}(l_\alpha = -1, l, (l^j(i))_{1 \leq j \leq q; i \in V})} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n-1}} \prod_{j=1}^q \prod_{i \in V} \sum_{l^j(i) \in \{-1,1\}^{s_j}} e^{\mathcal{H}_{G_{s,n}}(l_\alpha = -1, l, (l^j(i))_{1 \leq j \leq q; i \in V})} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k e^{(n-2-2k)B+m(-(n-1-k)+2C_k^2+2C_{n-1-k}^2-C_{n-1}^2)} \\
&\times \sum_{k_j(\alpha)=0}^{s_j} C_{s_j}^{k_j(\alpha)} e^{\sum_{j=1}^q m_j(s_j((n-2-k)(a_j+c_j)+nb_j)-2(b_j-c_j)k_j(\alpha))} \\
&\times \prod_{j=1}^q \prod_{i \in V \setminus \alpha} \sum_{k_j(i)=0}^{s_j} C_{s_j}^{k_j(i)} e^{B_j(s_j-2k_j(i))-2m_j(b_j+c_j)k_j(i)} \\
&= C \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k e^{(n-2-2k)B+m(k+2C_k^2+2C_{n-1-k}^2)} \prod_{k=1}^q \theta_j^{(k+1)s_j}
\end{aligned}$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend pas de  $k$  et qui contient tous les termes résiduels.

Comme vu précédemment  $Z_{G_{s,n}} = C \sum_{k=0}^n C_n^k e^{(n-2k)B+m(2C_k^2+2C_{n-k}^2)} \prod_{k=1}^q \theta_j^{ks_j}$ , donc

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}}(X_\alpha = -1) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k e^{(n-2-2k)B+m(k+2C_k^2+2C_{n-1-k}^2)} \prod_{k=1}^q \theta_j^{(k+1)s_j}}{\sum_{k=0}^n C_n^k e^{(n-2k)B+m(2C_k^2+2C_{n-k}^2)} \prod_{k=1}^q \theta_j^{ks_j}}$$

2. Soient  $\alpha, \beta \in V$ , on a

$$\mathbb{P}_{G_{s,n}}(X_\alpha = X_\beta = -1) = \frac{\sum_{\substack{l \in \{-1,1\}^n \\ l_\alpha = l_\beta = -1}} \prod_{j=1}^q \prod_{i \in V} \sum_{l^j(i) \in \{-1,1\}^{s_j}} \exp(\mathcal{H}_{G_{s,n}}(l, (l^j(i))_{1 \leq j \leq q}))}{Z_{G_{s,n}}}$$

Donc en procédant de la même manière, on somme sur  $l \in \{-1,1\}^{n-2}$  en décomposant en une somme sur  $k \in \{0, n-2\}$  et  $l \in \mathcal{A}_{k,n-2}$ . Donc on aura  $\sum_{i \in V} B l_i = -2B + (n-2-2k)B = (n-4-2k)B$ , et

$$\sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j = l_\alpha l_\beta - \sum_{i \in N(\alpha) \setminus \beta} l_i - \sum_{i \in N(\beta) \setminus \alpha} l_i + \sum_{(i,j) \in E(V \setminus \alpha, \beta)} l_i l_j$$

Donc  $\sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j = 1 - 2(n-2-2k) + 2C_k^2 + 2C_{n-2}^2 - C_{n-2}^2$ , et en effectuant les mêmes changements que pour la première formule, on trouve

$$\sum_{\substack{l \in \{-1,1\}^n \\ l_\alpha = l_\beta = -1}} \prod_{j=1}^q \prod_{i \in V} \sum_{l^j(i) \in \{-1,1\}^{s_j}} \exp(\mathcal{H}_{G_{s,n}}(l, (l^j(i))_{1 \leq j \leq q})) = C \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k e^{(n-4-2k)B+m(1+2k+2C_k^2+2C_{n-2-k}^2)} \prod_{k=1}^q \theta_j^{(k+2)s_j}$$

Ce qui donne le résultat après simplifications des termes constants.

### 5.6.1.4 Preuve de la proposition 5.7

En utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle, on a

$$\begin{aligned}\phi_k^{(d)}(m) &= \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} e^{m \sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j} \\ &= \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} \sum_{r \geq 0} \left( \sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j \right)^r \frac{m^r}{r!}\end{aligned}$$

Or par la formule du multinôme on a pour tout  $r \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}\left( \sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j \right)^r &= \sum_{\substack{S \in \mathbb{N}^{E(V)} \\ \sum_{(i,j)} S_{ij} = r}} \frac{r!}{\prod_{(i,j)} (S_{ij})!} \prod_{(i,j)} (l_i l_j)^{S_{ij}} \\ &= \sum_{\substack{S \in \mathbb{N}^{E(V)} \\ \sum_{(i,j)} S_{ij} = r}} \frac{r!}{\prod_{(i,j)} (S_{ij})!} \prod_{i \in V} l_i^{\sum_{j \in N(i)} S_{ij}}\end{aligned}$$

Donc

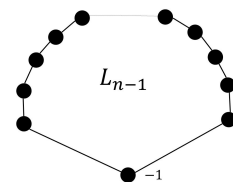
$$\phi_k^{(d)}(m) = \sum_{r \geq 0} \sum_{\substack{S \in \mathbb{N}^{E(V)} \\ \sum_{(i,j)} S_{ij} = r}} \frac{1}{\prod_{(i,j)} (S_{ij})!} \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} \prod_{i \in V} l_i^{\sum_{j \in N(i)} S_{ij}} m^r$$

En notant  $a_r = \sum_{\substack{S \in \mathbb{N}^{E(V)} \\ \sum_{(i,j)} S_{ij} = r}} \frac{1}{\prod_{(i,j)} (S_{ij})!} \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} \prod_{i \in V} l_i^{\sum_{j \in N(i)} S_{ij}}$  pour tout  $r \geq 0$ , on a le résultat voulu.

### 5.6.1.5 Preuve de la proposition 5.8

1. Si  $k = 0$ , alors nous avons une seule configuration possible, à savoir  $l = (1, \dots, 1)$ ; or  $N_2^-(l) = 0$ , alors  $I_k = \{0\}$  et  $b_{0,n}(s) = 0$ .
2. Si  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , alors les valeurs possibles de  $N_2^-$  peuvent aller de 0 à  $k - 1$ . En effet, si  $l \in \mathcal{A}_{k,n}$  est la configuration dans laquelle les sommets ayant des états -1 sont séparés au moins par un sommet d'état opposé 1, ce qui est possible car  $2k \leq n$ ; donc  $N_2^-(l) = 0$ . Si  $l$  est la configuration dans laquelle les sommets ayant l'état -1 sont tous alignés, alors  $N_2^-(l)$  prend sa valeur maximale  $k - 1$ . Donc pour avoir les valeurs intermédiaires de  $N_2^-(l)$  il suffit de détacher un sommet de la configuration précédente, et donc on aura  $k - 1$  sommets qui sont connectés l'un à l'autre et un sommet d'état -1 entre deux autres sommets d'états 1; donc  $N_2^-$  prend la valeur  $k - 2$  pour cette configuration. En répétant cette opération, on construit des configurations avec lesquels on obtient les valeurs  $k - 2, \dots, 1$  de  $N_2^-$  de manière successive; par conséquent  $I_k = \{0, \dots, k - 1\}$ .

Soit  $s \in I_k$ , le nombre  $b_{k,n}(s)$  correspond au nombre de manières avec lesquels on peut attribuer l'état -1 à  $k$  sommets du polygone  $G_n(2)$  à  $n$  sommets de telle sorte que  $s$  couples de sommets avec l'état -1 soient adjacents. Nous avons d'abord  $n$  manières de positionner un -1 sur un des sommets, on choisit

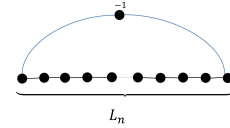


un sommet  $i$  et donc il reste  $k - 1$  états -1 à distribuer sur le sous réseau  $L_{n-1}$  constitué des  $n - 1$  sommets qui restent comme le montre la figure ci-contre. On notera donc  $u_{k,n}(s)$  le nombre de façons avec lesquels on peut distribuer  $k$  états -1 aux sommets de  $L_n$  de telle sorte qu'on ait  $s$  sommets adjoints d'état -1. On a  $n$  manières de choisir le premier sommet avec un état -1 dans  $G_n(2)$ , ce qui nous laisse  $u_{k-1,n-1}(s)$  façons pour remplir le reste du réseau avec des états -1 de telle sorte à avoir une configuration de  $B_{k,n}(s)$ , or procéder de cette manière nous fait couvrir une même configuration de  $B_{k,n}(s)$   $k$  fois, alors

$$b_{k,n}(s) = \frac{n}{k} u_{k-1,n-1}(s) \quad (5.9)$$

donc il s'agit de calculer  $u_{k,n}(s)$ . Il est important de bien garder à l'esprit que le réseau  $L_n$  a deux sommets qui sont attachés à un sommet externe d'état -1. Donc attribuer à l'un des deux sommets extrêmes

un état -1 nous donne déjà une adjacence d'états -1, tandis que l'attribution de -1 à un sommet au milieu n'est pas suffisant pour avoir une première adjacence. Considérons le cas  $s = 0$ , alors  $u_{1,n}(0)$  représente le nombre de manières de choisir un sommet de  $L_n$  sans avoir d'adjacence des états -1.



Donc il s'agit de choisir l'un des sommets sauf les deux qui sont reliés au sommet externe d'état -1, donc on a  $u_{1,n}(0) = n - 2$  façons de le faire. Pour  $u_{2,n}(0)$  il s'agit de placer deux états -1 sans avoir d'adjacence, donc les deux sommets extrêmes ne sont pas permis et nous avons alors  $C_{n-2} - (n - 3)$  couples possibles; donc  $u_{2,n}(0) = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$ . On remarque que  $u_{k,n}(0)$  peut être un polynôme en  $n$  de degré  $k$ , ceci est comme nous le démontrons de manière plus générale dans le lemme suivant :

**Lemme 5.5.**

Pour tout  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  et  $s \in I_k$ , il existe un polynôme  $P_{k,s}$  de degré  $k - s$  tel que  $u_{k,n}(s) = P_{k,s}(n)$ , dont les  $k - s$  racines sont  $k + 1, \dots, 2k - s$ .

*Preuve.* On démontre ce résultat par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 1$ , on a  $I_k = \{0\}$ , donc  $u_{k,n}(s) = n - 2$  est un polynôme de degré  $k$ . On suppose ceci vrai pour tout  $k \leq q$ , donc  $u_{k,n}(s) = P_{k,s}(n)$  pour tout  $k \leq q$ . D'autre part, si on veut placer  $q + 1$  états -1 sur les sommets de  $L_n$ , soit on choisit le premier sommet parmi les deux extrêmes, ce qui nous fait déjà une adjacence avec le sommet externe, et placer ensuite les  $k - 1$  états -1 sur les  $n - 1$  sommets qui restent de telle manière à obtenir  $s - 1$  adjacence. Ceci revient donc à  $2u_{k-1,n-1}(s - 1)$  états possibles. Soit on choisit un sommet au milieu, ce qui découpe le graphe  $L_n$  en deux sous graphes  $L_{n-1-p}$  et  $L_p$ , et donc nous avons  $\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{r=0}^s u_{j,p}(r) u_{q-j,n-1-p}(s - r)$  façons de leur attribuer les  $k - 1$  états -1 qui restent de telle manière à obtenir  $s$  adjacences. Donc

$$u_{q+1,n}(s) = 2u_{q,n-1}(s - 1) + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^q \sum_{r=0}^s u_{j,p}(r) u_{q-j,n-1-p}(s - r)$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$u_{q+1,n}(s) = 2P_{q,s-1}(n-1) + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^q \sum_{r=0}^s P_{j,r}(p) P_{q-j,s-r}(n-1-p)$$

Comme  $\deg(P_{j,r}P_{q-j,s-r}) = \deg(P_{j,r}) + \deg(P_{q-j,s-r}) = q-s$ , alors il existe un polynôme  $Q_{q,s}$  de degré  $q+1-s$  tel que  $Q_{k,s}(n) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^q \sum_{r=0}^s P_{j,r}(p) P_{q-j,s-r}(n-1-p)$ . Donc  $u_{q+1,n}(s) = P_{q+1,n}(s)$  où  $P_{q+1,s} = 2P_{q,s-1} + Q_{q,n}$  qui est un polynôme de degré  $q+1-s$ . Pour les racines, nous procédons également par récurrence en utilisant l'égalité  $P_{q+1,s} = 2P_{q,s-1} + Q_{q,n}$ . En effet, par hypothèse de récurrence les racines  $q+2, \dots, 2q-s$  de  $P_{q,s}$  annulent  $Q_{q,n}$  via l'égalité  $Q_{k,s}(n) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^q \sum_{r=0}^s P_{j,r}(p) P_{q-j,s-r}(n-1-p)$ . le polynôme  $Q_{q,n}$  admet également  $2q+1-s$  et  $2q+2-s$  comme racines, et par hypothèse de récurrence  $P_{q,s-1}(X-1)$  admet pour racines  $q+2, \dots, 2q+2-s$ . Donc les  $q+1-s$  racines de  $P_{q+1,s}$  sont  $q+2, \dots, 2q+2-s$ ; ce qui termine la démonstration.  $\square$

Soit  $n = 2k - s$ , on a  $u_{k,2k-s}(s) = 0$ , car en remplissant  $L_{2k-s}$  de  $k$  états -1 le nombre minimal d'adjacence qu'on aura est  $s+1$ . Donc pour  $n = 2k - s + 1$ , on a  $u_{k,2k-s+1}(s) \neq 0$ , ce qui veut dire que  $2k - s + 1$  est la taille minimale  $n$  de  $L_n$  pour laquelle  $u_{k,n}(s) \neq 0$ . Donc  $u_{k,k+1}(s) = u_{k,k+2}(s) = \dots = u_{k,2k-s}(s) = 0$ , ce qui justifie autrement que  $k+1, \dots, 2k-s$  sont les  $k-s$  racines de  $P_{k,s}$ . On a par conséquent,

$$P_{k,s} = \alpha(k,s)(X-k-1)\dots(X-2k+s)$$

où  $\alpha(k,s)$  est une constante. Pour calculer  $\alpha(k,s)$  il suffit de calculer  $P_{k,s}(2k-s+1)$ , car  $\alpha(k,s) = \frac{P_{k,s}(2k-s+1)}{(k-s)!}$ , ce qui veut dire qu'il faut calculer  $u_{k,2k-s+1}(s)$ . Comme la taille de  $L_{2k-s+1}$  est minimale, alors il n'y a que  $k+1$  arêtes possibles sur lesquels on peut placer des couples d'état -1, donc  $u_{k,2k-s+1}(s) = C_{k+1}^s$ . Par conséquent,  $\alpha(k,n) = \frac{C_{k+1}}{(k-s)!}$ ; donc

$$P_{k,n}(n) = u_{k,n}(s) = \frac{C_{k+1}}{(k-s)!} (n-k-1)\dots(n-2k+s)$$

d'où d'après 5.9 on a

$$b_{k,n}(s) = \frac{n}{k} C_k^s C_{n-k-1}^{k-1-s}$$

Ce qui termine la démonstration.

3. Soient  $m \geq 0$ , et  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , comme  $\mathcal{A}_{k,n} = \bigcup_{s \in I_k} B_{k,n}(s)$  est une partition, alors

$$\begin{aligned} \phi_k^{(2)}(m) &= \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} e^{m \sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j} \\ &= \sum_{s \in I_k} \sum_{l \in B_{k,n}(s)} e^{m(2N_2(l)-n)} \\ &= \sum_{s \in I_k} \sum_{l \in B_{k,n}(s)} e^{m(2n-4k+4s-n)} \\ &= \sum_{s \in I_k} b_{k,n}(s) e^{m(n-4k+4s)} \end{aligned}$$

d'où le résultat.



### 5.6.1.6 Preuve de la proposition 5.9

Soit  $i \in V$ . On reprenant la technique avec la matrice de transfert  $A$  (voir section 7 du chapitre 3), on a sous l'hypothèse de périodicité ( $l_0 = l_n$ ),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i) &= \frac{1}{Z_{G_n(2)}} \sum_{l_1=\pm 1} \dots \sum_{l_n=\pm 1} l_i \prod_{j=1}^n e^{ml_{j-1}l_j + Bl_j} \\ &= \frac{1}{Z_{G_n(2)}} \sum_{l_1=\pm 1} \dots \sum_{l_n=\pm 1} l_i \prod_{j=1}^n A_{l_{j-1}, l_j} \\ &= \frac{1}{Z_{G_n(2)}} \text{Tr}(A^{i-1}KA^{n-i+1})\end{aligned}$$

où  $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Or  $\text{Tr}(A^{i-1}KA^{n-i+1}) = \text{Tr}(A^n K)$ ,  $Z_{G_n(2)} = \lambda_+^n + \lambda_-^n$  et  $A = P^{-1}DP$ , alors on a

$$\mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i) = \frac{\text{Tr}(D^n P^{-1}KP)}{\lambda_+^n + \lambda_-^n}$$

Ce qui prouve la première égalité. Soit maintenant  $i \neq j \in V$ , on choisi une numérotation des entités telle que  $j = i + r$  avec  $r > 0$ . On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i X_{i+r}) &= \frac{1}{Z_{G_n(2)}} \sum_{l_1=\pm 1} \dots \sum_{l_n=\pm 1} l_i l_{i+r} \prod_{k=1}^n e^{ml_{k-1}l_k + Bl_k} \\ &= \frac{1}{Z_{G_n(2)}} \sum_{l_1=\pm 1} \dots \sum_{l_n=\pm 1} l_i l_{i+r} \prod_{k=1}^n A_{l_{k-1}, l_k} \\ &= \frac{1}{Z_{G_n(2)}} \text{Tr}(A^{i-1}KA^{r-i+1}KA^{n-i-r+1}) \\ &= \frac{1}{Z_{G_n(2)}} \text{Tr}(KA^r KA^{n-r}) \\ &= \frac{1}{Z_{G_n(2)}} \text{Tr}(KP^{-1}D^r P KP^{-1}D^{n-r} P) \\ &= \frac{1}{Z_{G_n(2)}} \text{Tr}(K^- D^r K^- D^{n-r})\end{aligned}$$

Or  $r$  représente la distance  $\gamma_{ij}$  entre les deux entités  $i$  et  $j$ , alors on obtient la deuxième égalité.

### 5.6.1.7 Preuve de la proposition 5.10 :

D'après le corollaire 5.1, on a pour tout  $i \in V$ ,

$$\mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i) = \frac{2e^B \text{sh}(B)}{\det(P)} \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\lambda_+^n + \lambda_-^n}$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i) = \frac{2e^B \text{sh}(B)}{\det(P)}$ , en développant alors  $(P)$  on obtient la formule voulu pour  $s = 0$ . Il suffit donc de remplacer  $B$  par  $B_s = B - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q s_j \log(\theta_{r_j})$ , ce qui nous fait un passe de  $G_n(2)$  à

$G_{s,n}(2)$  comme expliqué. Or  $\mathbb{E}_{G_{s,n}(2)}(X_i) = 1 - 2\mathbb{P}_{G_{s,n}(2)}(X_i = -1)$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}(2)}(X_i = -1) = \frac{1}{2} - \frac{2e^m sh(B_s)}{\sqrt{e^{2m} ch^2(B_s) - 2sh(2m)}}$$

De la même manière pour la deuxième formule, on se restreint au réseau  $G_n(2)$  et puis on remplace  $B$  par  $B_s$ . On a d'après le corollaire 5.1, pour tout  $i \neq j \in V$ ,

$$\mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i X_j) = \frac{1}{\det(P)^2} ((e^{2B} - 1)^2 + 4 \frac{\lambda_+^{\gamma_{ij}} \lambda_-^{n-\gamma_{ij}} + \lambda_+^{n-\gamma_{ij}} \lambda_-^{\gamma_{ij}}}{\lambda_+^n + \lambda_-^n} e^{2B-4m})$$

Donc par passage à la limite on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i X_j) = \frac{1}{\det(P)^2} ((e^{2B_s} - 1)^2 + 4 \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{\gamma_{ij}} e^{2B_s-4m})$$

D'autre part,  $\mathbb{P}_{G_n(2)}(X_i = X_j = -1) = \frac{1}{4}(1 - 2\mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i) + \mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i X_j))$ . Par conséquent, en remplaçant  $B$  par  $B_s$  on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_{s,n}(2)}(X_i = X_j = -1) = \frac{1}{4 \det(P_s)^2} ((e^{2B_s} - 1)^2 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{\gamma_{ij}} e^{2B_s-4m} - 4 \det(P_s) e^{2B_s} sh(B_s))$$

Comme la covariance s'écrit

$$Cov_{G_{s,n}(2)}(X_i, X_j) = 4(\mathbb{P}_{G_{s,n}(2)}(X_i = X_j = -1) - \mathbb{P}_{G_{s,n}(2)}(X_i = -1)\mathbb{P}_{G_{s,n}(2)}(X_j = -1))$$

Alors le calcul direct via les deux premières formules nous donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Cov_{G_{s,n}(2)}(X_i, X_j) = \frac{1}{\det(P_s)^2} \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{\gamma_{ij}} e^{2B_s-4m}$$

Comme  $Cor_{G_{s,n}(2)}(X_i, X_j) = \frac{Cov_{G_{s,n}(2)}(X_i, X_j)}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}}$ , où  $\sigma_{X_i}^2 = 4\mathbb{P}_{G_{s,n}(2)}(X_i = -1)(1 - \mathbb{P}_{G_{s,n}(2)}(X_i = -1))$ , alors le calcul direct nous donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Cor_{G_{s,n}(2)}(X_i, X_j) = \frac{e^{-2m}}{e^{2m} ch(2B_s) - 2sh(2m)} \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{\gamma_{ij}}$$

Ce qui termine la démonstration.

### 5.6.1.8 Preuve de la proposition 5.11

On suppose que nous avons  $q_n$  entités dans le réseau  $G_n$  dont la résistance est égale à  $B_q \leq 0$ , et  $n - q_n$  dont la résistance est  $B_p > 0$ . Soit  $k \leq n$ , on note  $I_q$  l'ensemble des entités de résistance négatives ou nulles, on a

$$Z_{G_n} = \sum_{k=0}^n \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} e^{\sum_{i \in I_q} B_q l_i + \sum_{i \in V \setminus I_q} B_p l_i + 2m(C_k^2 + C_{n-k}^2)}$$

Or distribuer  $k$  états -1 sur  $n$  revient à en distribuer  $k_q$  sur les entités de  $I_q$  et  $k - k_q$  sur ceux de  $V \setminus I_q$ , alors

$$\begin{aligned} Z_{G_n} &= \sum_{k=0}^n \sum_{k_q=0}^k \sum_{l \in \mathcal{A}_{k_q, q_n}} \sum_{l' \in \mathcal{A}_{k-k_q, n-q_n}} e^{\sum_{i \in I_q} B_q l_i + \sum_{i \in V \setminus I_q} B_p l'_i + 2m(C_k^2 + C_{n-k}^2)} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{k_q=0}^k C_{q_n}^{k_q} C_{n-q_n}^{k-k_q} e^{(q_n - 2k_q)B_q + (n - q_n - 2(k - k_q))B_p + 2m(C_k^2 + C_{n-k}^2)} \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}_{G_n}(N_V = \frac{r}{n}) = \frac{\sum_{k_q=0}^r C_{q_n}^{k_q} C_{n-q_n}^{r-k_q} e^{(q_n - 2k_q)B_q + (n - q_n - 2(r - k_q))B_p + 2m(C_r^2 + C_{n-r}^2)}}{Z_{G_n}}$$

Par conséquent, en simplifiant par les termes constants on obtient

$$\mathbb{P}_{G_n}(N_V = \frac{r}{n}) = \frac{\sum_{k_q=0}^r C_{q_n}^{k_q} C_{n-q_n}^{r-k_q} e^{-2k_q B_q - 2(r - k_q)B_p + 2m(C_r^2 + C_{n-r}^2)}}{\sum_{k=0}^n \sum_{k_q=0}^k C_{q_n}^{k_q} C_{n-q_n}^{k-k_q} e^{-2k_q B_q - 2(k - k_q)B_p + 2m(C_k^2 + C_{n-k}^2)}}$$

Pour tout  $k \leq n$ , on note  $u_k = \sum_{k_q=0}^k C_{q_n}^{k_q} C_{n-q_n}^{k-k_q} e^{-2k_q B_q - 2(k - k_q)B_p}$ , on a donc

$$\mathbb{P}_{G_n}(N_V = \frac{0}{n}) = \frac{u_0}{\sum_{k=0}^n u_k e^{2mk(k-n)}}$$

D'autre part,  $u_0 = 1$  et  $u_n = e^{-2(n - q_n)B_p - 2q_n B_q}$ , donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k e^{2mk(k-n)} &= 1 + u_n + \sum_{k=1}^{n-1} u_k e^{2mk(k-n)} \\ &= 1 + e^{-2(n - q_n)B_p - 2q_n B_q} + \sum_{k=1}^{n-1} u_k e^{2mk(k-n)} \\ &\leq 1 + e^{-2(n - q_n)B_p - 2q_n B_q} + e^{-\frac{m}{2}n^2} \sum_{k=1}^{n-1} u_k \end{aligned}$$

Or pour tout  $k \leq n$  on a  $u_k \leq \sum_{k_q=0}^k C_{q_n}^{k_q} C_{n-q_n}^{k-k_q} e^{-2k_q B_q}$  car  $B_p$  est positif, et comme  $B_q \leq 0$ , alors

$$u_k \leq \sum_{k_q=0}^k C_{q_n}^{k_q} C_{n-q_n}^{k-k_q} e^{-2k_q B_q} = C_n^k e^{-2k B_q}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k e^{2mk(k-n)} &= 1 + e^{-2(n - q_n)B_p - 2q_n B_q} + e^{-\frac{m}{2}n^2} \sum_{k=1}^{n-1} u_k \\ &\leq 1 + e^{-2(n - q_n)B_p - 2q_n B_q} + e^{-\frac{m}{2}n^2} (1 + e^{-2B_q})^n \end{aligned}$$

comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{m}{2}n^2} (1 + e^{-2B_q})^n = 0$ , alors

$$\sum_{k=0}^n u_k e^{2mk(k-n)} = 1 + e^{-2(n - q_n)B_p - 2q_n B_q} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où

$$\mathbb{P}_{G_n}(N_V = \frac{0}{n}) \geq \frac{1}{1 + e^{-2(n-q_n)B_p - 2q_n B_q} + o(\frac{1}{n})}$$

En utilisant la même technique, on démontre que

$$\mathbb{P}_{G_n}(N_V = \frac{n}{n}) \geq \frac{e^{-2(n-q_n)B_p - 2q_n B_q}}{1 + e^{-2(n-q_n)B_p - 2q_n B_q} + o(\frac{1}{n})}$$

— Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_n}{n} < \frac{B_p}{B_p - B_q}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2(n-q_n)B_p - 2q_n B_q} = +\infty$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n}(N_V = \frac{n}{n}) \geq 1$$

et par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n} = \delta_{(-1, \dots, -1)}$ .

— Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_n}{n} > \frac{B_p}{B_p - B_q}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2(n-q_n)B_p - 2q_n B_q} = 0$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n}(N_V = \frac{0}{n}) \geq 1$$

et de même  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n} = \delta_{(1, \dots, 1)}$ .

— Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_n}{n} = \frac{B_p}{B_p - B_q}$ , alors  $\frac{q_n}{n} = \frac{B_p}{B_p - B_q} + \epsilon_n$  avec  $\epsilon_n$  tend vers 0 à l'infini. Donc  $-2(n - q_n)B_p - 2q_n B_q = 2(B_p - B_q)n\epsilon_n$ .

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\epsilon_n = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n}(N_V = \frac{0}{n}), \mathbb{P}_{G_n}(N_V = \frac{n}{n}) \geq \frac{1}{2}$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n} = \frac{1}{2}\delta_{(1, \dots, 1)} + \frac{1}{2}\delta_{(-1, \dots, -1)}$$

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\epsilon_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n}(N_V = \frac{n}{n}) \geq 1$ , d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n} = \delta_{(-1, \dots, -1)}$$

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\epsilon_n = L$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n}(N_V = \frac{0}{n}) \geq \frac{1}{1 + e^L} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n}(N_V = \frac{n}{n}) \geq \frac{e^L}{1 + e^L}$$

Or  $\frac{e^L}{1 + e^L} + \frac{1}{1 + e^L} = 1$ , alors il existe  $\lambda_q \in ]0, 1[$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n} = \lambda_q \delta_{(1, \dots, 1)} + (1 - \lambda_q) \delta_{(-1, \dots, -1)}$$

Donc pour toute suite  $(q_n)_n$  telle que  $q_n \leq n$  on a le résultat voulu.

## 5.6.2 Preuves des lemmes :

### 5.6.2.1 Preuve du lemme 5.1

1. Par définition, on a  $A_q(n, k) = \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} \prod_{j \in I} l_j$  qui ne dépend que de  $|I| = q$ , donc pour simplifier on choisi  $I = \{1, \dots, q\}$ . Nous allons procéder à une démonstration par récurrence sur  $q$ . Pour  $q = 0$  on a  $A_0(n, k) = \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} 1 = C_n^k$  ce qui est vrai. On suppose le résultat pour tout  $q \leq p$  et démontrons le pour  $q = p + 1$ . On a

$$\begin{aligned}
 A_{p+1}(n, k) &= \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} l_1 \dots l_{p+1} \\
 &= \sum_{\substack{l \in \mathcal{A}_{k,n} \\ l_{p+1}=1}} l_1 \dots l_p - \sum_{\substack{l \in \mathcal{A}_{k,n} \\ l_{p+1}=-1}} l_1 \dots l_p \\
 &= \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n-1}} l_1 \dots l_p - \sum_{l \in \mathcal{A}_{k-1,n-1}} l_1 \dots l_p \\
 &= \sum_{i=0}^p (-1)^i C_{n-1-p}^{k-i} C_p^i - \sum_{i=0}^p (-1)^i C_{n-1-p}^{k-1-i} C_p^i \\
 &= C_{n-1-p}^k + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i-1} C_{n-1-p}^{k-i-1} C_p^{i-1} - \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i C_{n-1-p}^{k-i-1} C_p^{i-1} - (-1)^p C_{n-1-p}^{k-1-p} \\
 &= C_{n-1-p}^k + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i-1} C_{n-1-p}^{k-i-1} (C_p^{i-1} + C_p^i) - (-1)^p C_{n-1-p}^{k-1-p} \\
 &= C_{n-1-p}^k + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i-1} C_{n-1-p}^{k-i-1} C_{p+1}^{i+1} - (-1)^p C_{n-1-p}^{k-1-p}
 \end{aligned}$$

D'où  $A_{p+1}(n, k) = \sum_{i=0}^{p+1} C_{n-1-p}^{k-i} C_{p+1}^i$ , ce qui termine la démonstration.

2. Comme le réseau est de degré  $d$  pair, alors pour tout courant  $S \in \mathbb{N}^{E(V)}$  le nombre de sources  $|\partial S|$  est pair. Donc si  $q$  est impair, alors l'ensemble des courants  $\mathfrak{S}_r(q)$  est vide.

### 5.6.2.2 Preuve du lemme 5.2

Soient  $m > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ , d'après la formule de Taylor-Laplace on a

$$\phi_k^{(d)}(m) - \sum_{r=0}^N a_r m^r = \frac{1}{N!} \int_0^m (m-t)^N \frac{\partial^{N+1} \phi_k^{(d)}}{\partial m^{N+1}}(t) dt$$

D'autre part, on a pour tout  $t$

$$\frac{\partial^{N+1} \phi_k^{(d)}}{\partial m^{N+1}}(t) = \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} \left( \sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j \right)^{N+1} e^{t \sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j}$$

or  $|\sum_{(i,j) \in E(V)} l_i l_j| \leq \frac{nd}{2}$  pour tout  $l \in \mathcal{A}_{k,n}$ , alors

$$\begin{aligned} |\phi_k^{(d)}(m) - \sum_{r=0}^N a_r m^r| &\leq \frac{1}{N!} \int_0^m (m-t)^N \left| \frac{\partial^{N+1} \phi_k^{(d)}}{\partial m^{N+1}}(t) \right| dt \\ &\leq \frac{1}{N!} \int_0^m (m-t)^N \sum_{l \in \mathcal{A}_{k,n}} \left(\frac{nd}{2}\right)^{N+1} e^{t \frac{nd}{2}} dt \\ &= \frac{C_n^k \left(\frac{nd}{2}\right)^{N+1}}{N!} \int_0^m (m-t)^N e^{t \frac{nd}{2}} dt \\ &\leq \frac{C_n^k \left(\frac{ndm}{2}\right)^{N+1} e^{\frac{ndm}{2}}}{(N+1)!} \end{aligned}$$

comme pour tout  $k \leq n$ , on a  $C_n^k \leq C_n^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ , alors

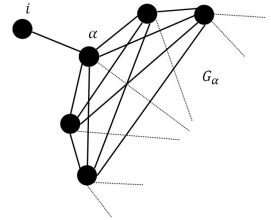
$$\max_{0 \leq k \leq n} |\phi_k^{(d)}(m) - \sum_{r=0}^N a_r m^r| \leq \frac{C_n^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \left(\frac{ndm}{2}\right)^{N+1} e^{\frac{ndm}{2}}}{(N+1)!}$$

Remarque : Il est possible de se contenter d'une majoration  $\frac{C_n^k \left(\frac{nd}{2}\right)^{N+1}}{N!} \int_0^m (m-t)^N e^{t \frac{nd}{2}} dt$ , sachant que  $\int_0^m (m-t)^N e^{t \frac{nd}{2}} dt = -m^{N+1} N! \left( \sum_{j=0}^N \frac{2^j}{(N-j+1)! (mnd)^j} - \frac{2^{N+1} (e^{\frac{ndm}{2}} - 1)}{(mnd)^{N+1}} \right)$ . Cette majoration est plus fine, toutefois pour déterminer le  $N$  minimal qui garantit une précision  $\epsilon$  il faudrait beaucoup plus de calculs que la majoration précédente.

### 5.6.2.3 Preuve du lemme 5.3

Soit  $G = (V, M, T)$  un réseau économique et  $i \in V$ . On démontre ce théorème par récurrence sur le degré de connexion  $n_i := |N(i)|$  de  $i$ , on suppose donc que le résultat est vrai pour tout degré de connexion  $n_i \leq n$ . Si  $n = 1$ , alors  $i$  est connecté à une seule entité  $\alpha$  comme le montre la figure ci-contre,

donc d'après le théorème 5.1 on peut écrire  $\mathbb{P}_G(X_i = -1) = \mathbb{P}_{G'_{i\alpha}}^*(X_i = -1)$  où  $\mathbb{P}_{G'_{i\alpha}}^*(X_i = -1)$  est la probabilité de défaut de  $i$  sur le réseau  $G'_{i\alpha} = (\{i, \alpha\}, m_{i\alpha}, \delta_{i\alpha})$  dont les probabilités intrinsèques de défaut sont  $p_i$  et  $\mathbb{P}_{G_\alpha}(X_\alpha = -1)$  où  $G_\alpha$  est le réseau  $G$  privé de  $i$ . Comme  $G_{i\alpha}$  est étoilé, alors le résultat est vrai pour  $n = 1$ . Supposons que  $n_i = n + 1$  et soit  $j \in N(i)$ , on



considère la relation équivalente  $D_{ij}$  entre  $i$  et  $j$  sur le réseau à deux entités  $\mathcal{G}_{ij} = (\{i, j\}, m_{ij}, D_{ij})$  comme introduit dans la section 3.2.6 du chapitre 3. On note  $G_j = (V \setminus j, M_j, T_j)$  le réseau  $G$  privé de  $j$ , en remplaçant  $p_i$  par  $\mathbb{P}_{G_j}(X_i = -1)$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{G}_{ij}}(X_i = -1)$  on obtient la probabilité de défaut de  $i$  dans le réseau  $G'_{ji}$  dans le quel  $j$  est connecté uniquement à  $i$  et  $i$  est connecté à  $G_j$ . Par conséquent, si  $p_i \leq \mathbb{P}_{G_j}(X_i = -1)$  alors  $\mathbb{P}_G(X_i = -1) = \mathbb{P}_{\mathcal{G}_{ij}}(X_i = -1) \leq \mathbb{P}_{G'_{ji}}(X_i = -1)$  si  $c(D_{ij}) \geq 0$  et l'inverse sinon. Dans le premier cas,  $\mathbb{P}_{\mathcal{G}_{ij}}(X_i = -1) \leq \mathbb{P}_{G'_{ji}}(X_i = -1)$  nous donne donc une majoration de  $\mathbb{P}_G(X_i = -1)$ , pour minorer cette probabilité dans le même structure du réseau  $G'_{ji}$ , on considère les relations dans  $G_j$  entre les entités connectées à  $i$  qui rendent la probabilité de défaut de  $i$  plus élevée que sa probabilité intrinsèque. On peut alors changer ces

relations de telle manière à rendre leur impact sur  $i$  positif, on obtient donc un réseau  $G_j^+$  pour lequel  $\mathbb{P}_{G_j^+}(X_i = -1) \leq p_i$ , et on note  $G_{ji}^+$  le réseau  $G'_{ji}$  dans lequel on remplace  $G_j$  par  $G_j^+$ . Par conséquent, on a

$$\mathbb{P}_{G_{ji}^+}(X_i = -1) \leq \mathbb{P}_G(X_i = -1) = \mathbb{P}_{\mathcal{G}_{ij}}(X_i = -1) \leq \mathbb{P}_{G_{ji}'}(X_i = -1) \quad (5.10)$$

Si  $c(D_{ij}) < 0$  ou  $p_i \geq \mathbb{P}_{G_j}(X_i = -1)$ , les mêmes arguments sont valables, et nous avons donc un encadrement de la probabilité de défaut de  $i$  dans  $G$  par celles sur deux réseaux dans lesquels l'entité  $j$  n'est connectée qu'à  $i$ , leurs connectivités ainsi que leur probabilités intrinsèques sont les mêmes comme le montre la figure suivante

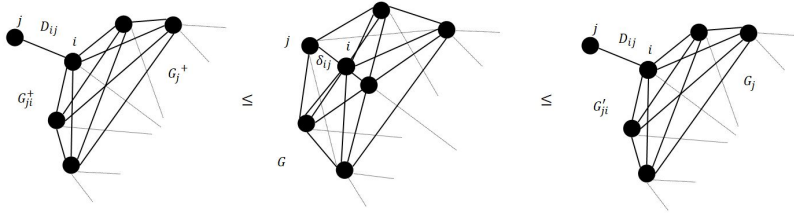


FIGURE 5.27 – Première itération dans l'encadrement du réseau  $G$  par des réseaux dans lesquels  $j$  n'est connecté qu'à  $i$ .

L'idée maintenant est de réduire le nombre de connexions de  $i$  à  $n$  pour pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence, donc nous allons "injecter"  $j$  dans  $i$  par changement de mesure en utilisant le théorème 5.1, donc  $\mathbb{P}_{G_{ji}'}(X_i = -1) = \mathbb{P}_{G_j}^j(X_i = -1)$  et  $\mathbb{P}_{G_{ji}^+}^j(X_i = -1) = \mathbb{P}_{G_{ji}^+}(X_i = -1)$  où ces mesures remplacent  $p_i$  par la probabilité de défaut de  $i$  sur le réseau  $\mathcal{G}_{ij}$ . Or  $i$  est connecté à au plus  $n$  entités de  $G_j$  et  $G_j^+$  alors on a d'après l'hypothèse de récurrence l'existence de deux réseaux étoilés  $G^1$  et  $G^2$  tels quel

$$\mathbb{P}_{G^1}^j(X_i = -1) \leq \mathbb{P}_{G_j}^j(X_i = -1) \text{ et } \mathbb{P}_{G_{ji}^+}^j(X_i = -1) \leq \mathbb{P}_{G^2}^j(X_i = -1) \quad (5.11)$$

où  $G_s^k$  est centré en  $i$  et contient en satellites tous les voisins de  $i$  sauf  $j$ , et  $s$  est le vecteur du nombre de relations de même classe. Or pour  $k = 1, 2$  on peut réécrire  $\mathbb{P}_{G^k}^j(X_i = -1)$  comme une  $\mathbb{P}_{G_k}(X_i = -1)$  où  $G_k$  cette fois-ci contient aussi  $j$ , alors d'après 5.10 et 5.11 on a l'encadrement souhaité par des réseaux étoilés sur lesquels nous avons les mêmes relations, et les mêmes probabilités intrinsèques de défaut ainsi que les mêmes connectivités.

Pour avoir l'optimalité deux réseaux homogènes  $G_1^h$  et  $G_2^h$ , il est possible de choisir le regroupement des classes de relations, des  $p_i$  et des  $m_{ij}$  tels que la norme  $\|\mathcal{H}_{G_k} - \mathcal{H}_{G_k^h}\|$  pour  $k = 1, 2$  soit minimale.

#### 5.6.2.4 Preuve du lemme 5.4

Soit  $G = (V, M, T)$  un réseau économique de support, on peut écrire le hamiltonien de  $G$  sous la forme d'un modèle d'Ising

$$\mathcal{H}_G(\mathbf{X}) = \sum_{i \in V} B_i(M, T) X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} c(\delta_{ij}) X_i X_j$$

où  $B_i(M, T) = B_i + \sum_{j \in N(i)} m_{ij} a(\delta_{ij})$ <sup>10</sup>. Donc en fixant  $M$  on se ramener au cas d'un réseau économique dans lequel les relations sont uniformes de la forme  $X_i X_j$  sans perte de généralité. Soient  $d \leq n-1$ ,  $k \leq n$  et  $A \subset V$  tel que  $|A| = k$ . Nous avons vu que pour tout réseau cohérent  $G'$ , les probabilités  $\mathbb{P}_{G'}(D_A = 1)$  sont croissantes par rapport aux probabilités intrinsèques (décroissantes par rapport aux résistances), donc pour tout réseau  $G(d)$  de degré  $d$  avec des relations  $X_i X_j$ , il existe des résistances  $(B_i^1 = B^1)_{i \in V}$  et  $(B_i^2 = B^2)_{i \in V}$  uniformes pour lesquels on a

$$\mathbb{P}_{G_1(d)}(D_A = 1) \leq \mathbb{P}_G(D_A = 1) \leq \mathbb{P}_{G_2(d)}(D_A = 1) \quad (5.12)$$

où  $\mathbb{P}_{G_2(d)}(D_A = 1)$  (respectivement  $\mathbb{P}_{G_1(d)}(D_A = 1)$ ) contient les résistances  $(B_i^2)_i$  (respectivement  $(B_i^1)_i$ ). Il est donc possible de faire varier uniquement les  $a(\delta_{ij})$  tels que  $B_i^k = B_i(M, T)$  pour  $k = 1, 2$ , et de cette façon les résistances  $B_i$  sont conservées. Par conséquent, nous avons des relations  $T_1 = (\delta_{ij}^1)_{(i,j)}$  et  $T_2 = (\delta_{ij}^2)_{(i,j)}$  qui définissent deux réseaux économiques  $G_1(d)$  et  $G_2(d)$  qui donnent l'encadrement 5.12. Or pour tout  $1 \leq k \leq n$  on a

$$\mathbb{P}_G(N_V = \frac{k}{n}) = \sum_{\substack{A \subset V \\ |A|=k}} \mathbb{P}_G(D_A = 1)$$

alors

$$\mathbb{P}_{G_1(d)}(N_V = \frac{k}{n}) \leq \mathbb{P}_G(N_V = \frac{k}{n}) \leq \mathbb{P}_{G_2(d)}(N_V = \frac{k}{n}) \quad (5.13)$$

Comme les relations ne sont pas homogènes, car ils dépendent des  $B_i$ , alors il suffit de prendre les valeurs des  $a = a(\delta_{ij})$  et  $b = b(\delta_{ij})$  qui vérifient l'inégalité de telle manière à avoir la  $\|\cdot\|$ -optimalité. Leur existence est assurée par le fait que la norme est quadratique, et ceci termine la démonstration.

### 5.6.3 Preuve des corollaires

#### 5.6.3.1 Preuve du corollaire 5.1

D'après la proposition 5.9 on a pour tout  $i \in V$ ,  $\mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i) = \frac{\text{Tr}(D^n K^+)}{\lambda_+^n + \lambda_-^n}$ . D'autre part, on a

$$K^+ = P^{-1} K P = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} e^{-m+B}(2e^{m+B} - \lambda_+ - \lambda_-) & 2e^{-m+B}(e^{m+B} - \lambda_-) \\ 2e^{-m+B}(\lambda_+ - e^{m+B}) & e^{-m+B}(\lambda_+ + \lambda_- - 2e^{m+B}) \end{pmatrix}$$

10. On ne voit que les coefficients  $a(\delta_{ij})$  car on a  $a(\delta_{ij}) = b(\delta_{ji})$ .



or  $\lambda_+ + \lambda_- = 2e^m ch(B)$ , alors

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{pmatrix} K^+\right) = \frac{1}{\det(P)} \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 2\lambda_+^n e^B sh(B) & \times \\ \times & -2\lambda_-^n e^B sh(B) \end{pmatrix}\right) = \frac{2e^B sh(B)}{\det(P)} \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\lambda_+^n + \lambda_-^n}$$

ce qui donne la première formule.

Soient  $i \neq j \in V$ , d'après la proposition 5.9, on a  $\mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i X_j) = \frac{\mathrm{Tr}(K^- D^{\gamma_{ij}} K^- D^{n-\gamma_{ij}})}{\lambda_+^n + \lambda_-^n}$  où

$$K^- = P K P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 - e^{2B} & 2e^{2B-2m} \\ 2e^{-2m} & e^{2B} - 1 \end{pmatrix}$$

En calculant les termes diagonaux de  $K^- D^r K^- D^{n-r}$  on obtient

$$\mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i X_j) = \frac{1}{\det(P)^2 (\lambda_+^n + \lambda_-^n)} \mathrm{Tr} \left( \begin{matrix} \lambda_+^n (e^{2B} - 1)^2 + 4\lambda_+^{n-r} \lambda_-^r e^{2B-4m} & \times \\ \times & \lambda_-^n (e^{2B} - 1)^2 + 4\lambda_+^{n-r} \lambda_-^r e^{2B-4m} \end{matrix} \right)$$

Pour  $r = \gamma_{ij}$ , on obtient le résultat voulu

$$\mathbb{E}_{G_n(2)}(X_i X_j) = \frac{1}{\det(P)^2} \left( (e^{2B} - 1)^2 + 4 \frac{\lambda_+^{\gamma_{ij}} \lambda_-^{n-\gamma_{ij}} + \lambda_+^{n-\gamma_{ij}} \lambda_-^{\gamma_{ij}}}{\lambda_+^n + \lambda_-^n} e^{2B-4m} \right)$$

Ce qui achève la démonstration.

## 5.6.4 Preuves des théorèmes

### 5.6.4.1 Preuve du théorème 5.1

On considère un réseau économique  $\mathcal{G}$  comme défini dans les hypothèses, et on note pour tout  $i \in V$  la mesure sur le réseau satellite  $G_i$  détaché du réseau central  $\mathbb{P}_{G_i}$ . Nous considérons que  $G_i$  contient toujours  $i$ , et on considère la mesure de Gibbs  $\mathbb{P}_G^*$  définie sur  $\Omega^V$  dont le hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H}_G(X) = \sum_{i \in V} B_i^* X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(X_i, X_j)$$

pour tout  $X \in \Omega^V$  où  $B_i^* = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{\mathbb{P}_{G_i}(X_i = -1)} - 1\right)$ . Soit  $u \in V$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_G^*(X) &= \frac{e^{B_u^* X_u + \sum_{i \neq u} B_i^* X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(X_i, X_j)}}{\sum_{l/l_u = X_u} e^{B_u^* X_u + \sum_{i \neq u} B_i^* l_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(l_i, l_j)} + \sum_{l/l_u = -X_u} e^{-B_u^* X_u + \sum_{i \neq u} B_i^* l_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(l_i, l_j)}} \\ &= \frac{e^{2B_u^* X_u + \sum_{i \neq u} B_i^* X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(X_i, X_j)}}{\sum_{l/l_u = X_u} e^{2B_u^* X_u + \sum_{i \neq u} B_i^* l_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(l_i, l_j)} + \sum_{l/l_u = -X_u} e^{\sum_{i \neq u} B_i^* l_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(l_i, l_j)}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Or on peut exprimer  $e^{2B_u^* X_u}$  de la manière suivante

$$e^{2B_u^* X_u} = \frac{\mathbb{P}_{G_u}(X_u = x_u)}{\mathbb{P}_{G_u}(X_u = -x_u)} = \frac{\sum_{L \in \Omega^V / L_u = x_u} e^{\mathcal{H}_{G_u}(L)}}{\sum_{L \in \Omega^V / L_u = -x_u} e^{\mathcal{H}_{G_u}(L)}}$$

où  $\mathcal{H}_{G_u}(L) = \sum_{i \in V_u} B_i L_i + \sum_{(i,j) \in E(V_u)} m_{ij} \delta_{ij}(L_i, L_j)$ , alors la mesure s'écrit pour  $X_u = x_u \in \Omega$  comme suit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_G^*(X) &= \frac{\mathbb{P}_{G_u}(X_u = x_u) e^{\sum_{i \neq u} B_i^* X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(X_i, X_j)}}{\sum_{l/l_u = x_u} \mathbb{P}_{G_u}(X_u = x_u) e^{\sum_{i \neq u} B_i^* l_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(l_i, l_j)} + \sum_{l/l_u = -x_u} \mathbb{P}_{G_u}(X_u = -x_u) e^{\sum_{i \neq u} B_i^* l_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(l_i, l_j)}} \\ &= \frac{\sum_{L \in \Omega^{V_u} / L_u = x_u} e^{\mathcal{H}_{G_u}(L)} e^{\sum_{i \neq u} B_i^* X_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(X_i, X_j)}}{\sum_{l/l_u = x_u} \sum_{L \in \Omega^{V_u} / L_u = x_u} e^{\mathcal{H}_{G_u}(L)} e^{\sum_{i \neq u} B_i^* l_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(l_i, l_j)} + \sum_{l/l_u = -x_u} \sum_{L \in \Omega^{V_u} / L_u = -x_u} e^{\mathcal{H}_{G_u}(L)} e^{\sum_{i \neq u} B_i^* l_i + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(l_i, l_j)}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

En répétant cette opération sur tout  $u \in V$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_G^*(X = (x_i)_{i \in V}) &= \frac{\sum_{\substack{L \in \Omega^{\cup_{i \in V} V_i} \\ \forall i \in V L_i = x_i}} e^{\sum_{i \in V} \mathcal{H}_{G_i}(L|_{V_i}) + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(x_i, x_j)}}{\sum_{l \in \Omega^V} \sum_{\substack{L \in \Omega^{\cup_{i \in V} V_i} \\ \forall i \in V L_i = l_i}} e^{\sum_{i \in V} \mathcal{H}_{G_i}(L|_{V_i}) + \sum_{(i,j) \in E(V)} m_{ij} \delta_{ij}(l_i, l_j)}} \\ &= \frac{\sum_{\substack{L \in \Omega^{\cup_{i \in V} V_i} \\ \forall i \in V L_i = x_i}} e^{\mathcal{H}_{\mathcal{G}}(L)}}{Z_{\mathcal{G}}} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\mathbb{P}_G^*(X = (x_i)_{i \in V}) = \sum_{\substack{L \in \Omega^{\cup_{i \in V} V_i} \\ \forall i \in V L_i = x_i}} \mathbb{P}_{\mathcal{G}}(L)$$

Ce qui démontre le théorème.

### 5.6.4.2 Preuve du théorème 5.3

D'après le théorème 5.1 il est possible de se restreindre au réseau central avec des résistances qui contiennent l'information sur les réseaux satellites. Dans ce cas,  $Q_G$  représente le nombre de résistances négatives dans le réseau central  $G$ .

On considère donc  $G = (V, M, T)$  un réseau économique de support de taille  $|V| = n$  avec des résistances  $(B_i)_{i \in V}$ . On note  $\mathbb{P}_{G, (B_i)_i}$  sa mesure correspondante, et  $\mathbb{P}_{G, B_p, B_q}$  si nous homogénéisons par les plus grandes résistances positives et négatives  $B_p$  et  $B_q$ . De la même manière pour les plus petites résistances, on note la mesure  $\mathbb{P}_{G, b_p, b_q}$ . Par nature des relations de support, la fonction  $\mathbb{P}_{G, (B_i)_i}$  est décroissante en  $B_i$ , donc

$$\mathbb{P}_{G, B_p, B_q}(-1, \dots, -1) \leq \mathbb{P}_{G, (B_i)_i}(-1, \dots, -1) \leq \mathbb{P}_{G, b_p, b_q}(-1, \dots, -1)$$

On suppose que la limite  $\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \frac{Q_G}{|V|}$  existe. Il est possible de choisir la connectivité uniforme sur les mesures  $\mathbb{P}_{G, B_p, B_q}$  et  $\mathbb{P}_{G, b_p, b_q}$  tout en gardant l'inégalité précédente, et donc se ramener aux

mesures  $\mathbb{P}_{G_n, B_p, B_q}$  et  $\mathbb{P}_{G_n, b_p, b_q}$  sur un réseau  $G_n$  homogène en connectivité.

Si on a  $\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \frac{Q_G}{|V|} < \frac{B_p}{B_p - B_q}$ , alors d'après la proposition 5.11 on a  $\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G, B_p, B_q}(-1, \dots, -1) =$

1. Par conséquent,

$$\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G, (B_i)_i}(-1, \dots, -1) = 1$$

et donc  $\lambda_Q = 0$ .

Si  $\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \frac{Q_G}{|V|} > \frac{b_p}{b_p - b_q}$ , la même proposition nous donne  $\lambda_q = 1$ , donc

$$\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G, B_p, B_q}(-1, \dots, -1) = 0$$

par conséquent on a bien une concentration sur l'état de survie de tout le réseau  $G$ , d'où  $\lambda_Q = 1$ .

Si la limite  $\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \frac{Q_G}{|V|}$  diverge, alors il faut procéder différemment. L'idée est d'exploiter le fait que les mesures limites ne dépendent pas des connectivités. Par continuité de la mesure  $\mathbb{P}_G$  par rapport aux connectivités et aux résistances, on peut choisir  $Q_G$  résistances négatives  $B_q$  et  $b_q$  et  $|V| - Q_G$  positives  $B_p, b_p$  telles que  $\frac{B_p}{B_p - B_q} = \frac{b_p}{b_p - b_q}$ , et des connectivités  $m, m'$  telles que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{G_n, m, B_p, B_q}(-1, \dots, -1) &\leq \mathbb{P}_{G, (B_i)_i}(-1, \dots, -1) \leq \mathbb{P}_{G_n, m', b_p, b_q}(-1, \dots, -1) \\ \mathbb{P}_{G_n, m', b_p, b_q}(1, \dots, 1) &\leq \mathbb{P}_{G, (B_i)_i}(1, \dots, 1) \leq \mathbb{P}_{G_n, m, B_p, B_q}(1, \dots, 1) \end{aligned}$$

où les indices  $m, m'$  dans les mesures signifient que le réseau  $G_n$  à une connectivité homogène  $m$  ou  $m'$ . Nous avons vu dans la proposition 5.11 que  $\lambda_q$  ne dépend que de  $\frac{B_p}{B_p - B_q}$ , par conséquent les bornes supérieures et inférieures des inégalités ci-dessus converge vers la même valeur  $\lambda_q$  et  $1 - \lambda_q$ . Ce qui donne

$$\lim_{|V| \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G, (B_i)_i}(-1, \dots, -1) = 1 - \lambda_q \text{ et } \lim_{|V| \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G, (B_i)_i}(1, \dots, 1) = \lambda_q$$

Ce qui montre que la mesure en volume infini se concentre sur les états  $\pm(1, \dots, 1, \dots)$ .

### 5.6.4.3 Preuve du théorème 5.4

On considère une suite  $(G_n)_n$  de réseaux économiques  $((V_n, M_n, T_n))_n$  de tailles  $n$  tels que  $V_n \subset V_{n+1}$ ,  $T_n \subset T_{n+1}$  et  $M_{n+1} = \begin{pmatrix} M_n & \times \\ \times & \times \end{pmatrix}$ . On associe à chaque réseau  $G_n$  la mesure  $\mathbb{P}_{G_n}$  définie sur l'espace  $(\{-1, 1\}^{V_n}, \mathcal{F}_{G_n}, \mathbb{P}_{G_n})$ , et on note  $V_\infty := \bigcup_n V_n$  la limite de  $(V_n)_n$ , et  $\Omega = \{-1, 1\}^{V_\infty}$  l'espace d'état sur le réseau infini  $G_\infty$  qui représente la limite de  $(G_n)_n$ . L'ensemble  $\Omega$  est un compact pour la topologie produit d'après le théorème de Tychonoff<sup>11</sup>, et on aimerait en faire un espace métrique afin d'avoir une notion de convergence et continuité bien définie. On prend alors la

11. Le théorème de Tychonoff : Tout produit dénombrable de compact est un compact.

topologie discrète sur chaque copie de  $\{-1, 1\}$  associée à la métrique  $d_0(x, y) = \mathbb{1}(x \neq y)$ . Comme  $V_\infty$  est dénombrable, alors il existe une bijection  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow V_\infty$ . On définit donc sur  $\Omega$  la métrique

$$d(X, Y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{1}(X_{\phi(k)} \neq Y_{\phi(k)})}{2^k}$$

Soit  $\mathcal{C}(\Omega)$  l'espace des fonctions continue pour la distance  $d$ . Une suite de mesures  $(\mathbb{P}_{G_n})_n$  converge vers une mesure  $\mathbb{P}_{G_\infty}$  si et seulement si

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Omega), \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{G_n}[f] = \mathbb{E}_{G_\infty}[f]$$

et on note

$$\mathbb{P}_{G_\infty} := \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{G_n}$$

L'idée est de démontrer cette convergence pour une classe  $\mathcal{C}_{loc}(\Omega)$  de fonctions dit locales ( $\mathcal{C}(\Omega), \|\cdot\|_\infty$ ) dense dans  $\mathcal{C}(\Omega)$ . Une fonction  $f$  locale sur  $\Omega$  est défini comme une fonction telle qu'il existe un sous-graphe  $G = (V, M) \subset G_\infty$  tel que pour tout  $X \in \Omega$ ,  $f(X)$  ne dépend que de  $X|_G := (X_i)_{i \in V}$ . On note  $\text{supp}(f)$  le support de  $f$ , qui est le plus petit sous ensemble de  $V_\infty$  dont le graphe détermine  $f$ . On a le lemme densité suivant :

**Lemme 5.1.**  $\mathcal{C}_{loc}(\Omega)$  est dense dans  $\mathcal{C}(\Omega)$ .

*Preuve.* Soit  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ ,  $f$  est continue sur le compact  $\Omega$  donc par le théorème de Heine elle est uniformément continue. Cela veut dire que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall X, X' \in \Omega, d(X, X') < \eta \Rightarrow |f(X) - f(X')| < \epsilon$$

La condition  $d(X, X') < \eta$  veut dire qu'il existe  $G \subset G_\infty$  tel que  $X|_G = X'|_G$ , par conséquent

$$\forall \epsilon > 0, \exists G \subset G_\infty, \sup_{X|_G = X'|_G} |f(X) - f(X')| < \epsilon$$

On fixe  $\epsilon > 0$  et  $X' \in \Omega$ , pour tout  $X \in \Omega$  on a  $(X|_G X')|_G = X|_G$  et  $(X|_G X')|_{G_\infty - G} = X'|_{G_\infty - G}$  donc la fonction  $\tilde{f} : X \mapsto f(X|_G X')$  est locale, et vérifie

$$\sup_X |\tilde{f}(X) - f(X')| < \epsilon$$

Ce qui prouve que  $\tilde{f}$  est une approximation locale de  $f$  pour une précision arbitraire  $\epsilon$ , d'où la densité. □

Désormais, le reste de la preuve ressemble au cas d'un modèle d'Ising sur un réseau  $\mathbb{Z}^d$ , car toute la difficulté réside dans le choix d'une métrique adéquate qui permet d'établir cette densité<sup>12</sup>. Pour tout  $A \in V_\infty$ , On définit la fonction  $\sigma_A : X \mapsto \prod_{i \in A} X_i$ . Ces fonctions sont clairement locales, et le lemme suivant nous montre qu'on peut se restreindre à celles-ci.

---

12. Le choix de la distance dans le cas où le degré de connexion  $d$  est fixe est assez naturel, qui est

$$d(X, Y) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} \frac{\mathbb{1}(X_v \neq Y_v)}{2^{\|v\|_1}}$$

**Lemme 5.2.** Soit  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ , alors

$$f = \sum_{A \subset \text{supp}(f)} \hat{f}_A \sigma_A$$

où  $\hat{f}_A = 2^{-|\text{supp}(f)|} \sum_{x \in \{-1,1\}^{\text{supp}(f)}} f(x) \sigma_A(x)$  et  $\sigma_A(x) = \prod_{i \in A} x_i$ .

*Preuve.* Soit  $X \in \Omega$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{A \subset \text{supp}(f)} \hat{f}_A(X) \sigma_A(X) &= 2^{-|\text{supp}(f)|} \sum_{A \subset \text{supp}(f)} \sum_{x \in \{-1,1\}^{\text{supp}(f)}} f(x) \sigma_A(x) \sigma_A(X) \\ &= 2^{-|\text{supp}(f)|} \sum_{x \in \{-1,1\}^{\text{supp}(f)}} f(x) \sum_{A \subset \text{supp}(f)} \sigma_A(x) \sigma_A(X) \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\sum_{A \subset B} \sigma_A(x) \sigma_A(X) = 2^{|B|} \mathbf{1}_{\{x|_B = X|_B\}}$$

Donc par localité de  $f$ , on a

$$\sum_{A \subset \text{supp}(f)} \hat{f}_A(X) \sigma_A(X) = \sum_{x \in \{-1,1\}^{\text{supp}(f)}} f(x) \mathbf{1}_{\{x|_{\text{supp}(f)} = X|_{\text{supp}(f)}\}} = f(X)$$

D'où le résultat. □

Soit  $f$  une fonction locale, pour tout  $X \in \{-1,1\}^{V_{n+1}}$  on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{G_{n+1}}[f] &= \sum_{L|_{V_{n+1} \setminus V_n}} \mathbb{E}_{G_{n+1}}[f \mathbf{1}_{\{L|_{V_{n+1} \setminus V_n}\}}] \\ &= \sum_{L|_{V_{n+1} \setminus V_n}} \mathbb{E}_{G_n}[f] \mathbb{P}_{G_{n+1}}(L|_{V_{n+1} \setminus V_n}) \\ &= \mathbb{E}_{G_n}[f] \mathbb{P}_{G_{n+1}}(L|_{V_{n+1} \setminus V_n} = 1) \end{aligned}$$

Or  $\mathbb{1}(\{L|_{V_{n+1} \setminus V_n} = 1\}) = \frac{1 + L|_{V_{n+1} \setminus V_n}}{2}$ , alors par cohérence des réseaux et l'inégalité GKS, pour tout  $A \subset V_\infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{G_n}[\sigma_A] &= \mathbb{E}_{G_n}[\sigma_A | L|_{V_{n+1} \setminus V_n} = 1] \\ &= \frac{\mathbb{E}_{G_{n+1}}[\sigma_A \mathbb{1}(\{L|_{V_{n+1} \setminus V_n} = 1\})]}{\mathbb{E}_{G_{n+1}}[\mathbb{1}(\{L|_{V_{n+1} \setminus V_n} = 1\})]} \\ &\geq \frac{\mathbb{E}_{G_{n+1}}[\sigma_A] \mathbb{E}_{G_{n+1}}[\mathbb{1}(\{L|_{V_{n+1} \setminus V_n} = 1\})]}{\mathbb{E}_{G_{n+1}}[\mathbb{1}(\{L|_{V_{n+1} \setminus V_n} = 1\})]} \\ &= \mathbb{E}_{G_{n+1}}[\sigma_A] \end{aligned}$$

donc d'après le lemme 5.2 et la linéarité de l'espérance, on a pour toute fonction locale  $\mathbb{E}_{G_{n+1}}[f] \geq \mathbb{E}_{G_n}[f]$ . Donc la suite  $(\mathbb{E}_{G_n}[f])_n$  est décroissante et minorée par 0, donc converge vers une limite finie  $\iota_{G_\infty}(f)$  pour toute fonction  $f$  locale. Par conséquent, on a

$$\forall f \in \mathcal{C}_{loc}(\Omega), \mathbb{E}_{G_\infty}[f] = \iota_{G_\infty}(f)$$

Cela nous définit alors une forme linéaire  $L_\infty : f \mapsto \iota_{G_\infty}(f)$ , celle ci vérifie les conditions du théorème de représentation suivant :

**Théorème 5.5** (Riesz). *Soit  $E$  un espace métrique compact, et  $L$  une forme linéaire continue sur l'espace des fonction continues de  $E$  telle que :*

*i)- $L(1) = 1$ .*

*ii)- $|L(f)| \leq \|f\|_\infty$  alors, il existe une mesure de probabilité unique  $\mu$  telle que*

$$L(f) = \int f d\mu$$

Ce théorème établit alors l'existence d'une mesure  $\mu$  qu'on notera  $\mathbb{P}_{G_\infty}$  telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}_{loc}(\Omega), \mathbb{E}_{G_\infty}(f) := L_\infty(f) = \int f d\mathbb{P}_{G_\infty}$$

Et par densité des fonctions locales dans l'espace des fonctions continues sur  $\Omega$ , alors on a le résultat.

## EXTENSIONS ET PERSPECTIVES

---

**D**ans cette section nous discutons certaines idées qui feront l'objet de recherches futures, et qui sont dans la continuité de ce qui a été développé dans cette thèse. Nous avons déjà pu creuser certaines d'entre elles, comme le modèle multipériode ou les questions de concentration et d'allocation sous les effets de l'interdépendance. **Mots-clés** : Modèle multipériodes, concentration.

---

**Sommaire**

---

6.1	Modèle multi-périodes . . . . .	259
6.2	Allocation dans un portefeuille de crédit avec interdépendance sous contraintes	261
6.3	Concentration et l'interdépendance . . . . .	263

---

**6.1 Modèle multi-périodes**

Nous avons construit dans cette thèse un modèle d'interdépendance sur une seule période, avec une dimension temporelle implicite qu'on peut aisément faire apparaître en faisant varier les paramètres du Hamiltonien dans le temps. Étendre un modèle d'une période à un modèle multi-périodes n'est pas nouveau, et plusieurs papiers l'ont fait pour des modèles classiques. En effet, D. Rullière, D. Dorobantu et A. Cousin [27] ont fait une extension multi-période du fameux modèle de Davis et Lo [26] en introduisant une dynamique (récursion) dans les indicatrices de défaut des différentes entités du réseau. Pour le modèle d'Ising, I.O.Filiz et al [47] fait une extension multi-période du modèle de manière "artificielle", dans le sens où il n'y a aucune dynamique, mais uniquement un calcul de la distribution des pertes en conditionnant par les

défauts passés. Ces extensions sont essentielles pour le pricing des dérivés de crédit, car elles permettent de voir se restreindre à une chaîne de Markov dont les états sont le nombre de défauts, et qui définissent les différentes tranches de CDO. Un de nos objectifs futurs est de faire une extension multi-période de notre modèle, et nous allons présenter brièvement dans cette section la philosophie que nous allons suivre. Introduisons d'abord la notion de jointure de réseaux dont nous aurons besoin dans la suite.

**Définition 6.1.** Soient  $G_1 := (V_1, M_1)$  et  $G_2 := (V_2, M_2)$  deux réseaux, on appelle  $A$ -jonction de  $G_1$  et  $G_2$  le réseau  $G_1 \times_A G_2 := (V_1 \cup V_2, M_1 \times_A M_2)$  où

$$M_1 \times_A M_2 = \begin{bmatrix} M_1 & A \\ A & M_2 \end{bmatrix}$$

et  $A$  est une matrice qui représente les connexions entre  $G_1$  et  $G_2$ .

Cette notion permet de voir un réseau à un instant  $t - 1$  comme relié à lui même mais à l'instant  $t$  comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple :** Soit  $(G_t)_t$  une suite de réseaux  $G_t := (V_t, M_t)$  où  $V_t = \{1, 2, 3\}$ . La  $A$ -jonction de  $G_{t-1}$  et  $G_t$  est le réseau  $G_{t-1} \times_A G_t := (V_{t-1} \cup V_t, M_{t-1} \times_A M_t)$  comme le montre la figure 6.1. On constate que la matrice  $A$  régit la dépendance entre le présent et le passé, car si  $A$  est la matrice nulle, alors le présent serait indépendant du passé. Si  $A$  est diagonale, alors la dépendance entre  $L_t = (l_{1,t}, l_{2,t}, l_{3,t})$  et  $L_{t-1} = (l_{1,t-1}, l_{2,t-1}, l_{3,t-1})$  à valeurs dans  $\Omega^3$  est telle que  $l_{i,t}$  soit indépendant des  $(l_{j,t-1})_{j \neq i}$  conditionnellement à  $l_{i,t-1}$ . Ce qui veut dire l'interdépendance agit instantanément, et que c'est uniquement son effet qui traverse les périodes via les coefficients  $A_{ij}$ .

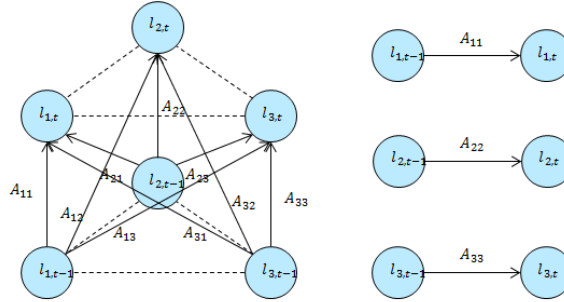


FIGURE 6.1 – Le réseau  $G_{t-1} \times_A G_t$  en deux situations, à gauche quand  $G$  est complètement connecté, à droite quand  $G$  n'est pas connecté et  $A$  est diagonale.

Comme le montre cette figure, il est possible d'avoir une structure de dépendance inter-périodes, dans laquelle l'effet de l'interdépendance passe d'une entité  $i$  à l'instant  $t - 1$  à une entité  $j$  à l'instant  $t$  via le coefficient  $A_{ij}$ . Il faut également noter que si  $X_{t-1}$  et  $X_t$  sont des champs de Markov sur  $G_{t-1}$  et  $G_t$ , alors  $(X_{t-1}, X_t)$  l'est également sur  $G_{t-1} \times_A G_t$ . Donc

$$\mathbb{P}_{G_{t-1} \times_A G_t}(X_{t-1}, X_t) \propto \exp(\mathcal{H}_{G_{t-1} \times_A G_t}(X_{t-1}, X_t))$$



où

$$\mathcal{H}_{G_{t-1} \times A_t G_t}(X_{t-1}, X_t) = \mathcal{H}_{G_{t-1}}(X_{t-1}) + \mathcal{H}_{G_t}(X_t) + \sum_{(i,j) \in V_{t-1} \times V_t} A_{ij} \psi_{ij}(X_{i,t-1}, X_{j,t})$$

Les fonctions  $\psi_{ij}$  régissent la façon avec laquelle les états  $X_{i,t-1}$  et  $X_{j,t}$  sont couplés, et jouent le même rôle que les relations  $\delta_{ij}$ . Si considère une suite temporelle de réseaux économiques  $\mathfrak{G} := (G_t = (V_t, M_t, T_t))_t$  telle que pour tout  $t$  nous avons une jonction  $G_{t-1} \times A_t G_t$  via une matrice  $A_t$ <sup>1</sup>, alors la suite des champs d'états  $(X_t)_t$  sur chaque réseau est clairement un champs de Markov. Cela vient de la structure de réseaux économique induite sur  $\mathfrak{G}$  dont les noeuds sont  $\bigcup_{s \leq t} V_s$ , et du fait que  $X = (X_0, \dots, X_t, \dots)$  est un champs de Markov sur  $\mathfrak{G}$ , ce qui implique que

$$\mathbb{P}_{\mathfrak{G}}(X_t | (X_s)_{s < t}) = \mathbb{P}_{G_{t-1} \times A_t G_t}(X_t | X_{t-1})$$

ce qui nous donne une chaîne de Markov de champs de Markov. On suppose que  $V_t = V$  pour tout  $t$ , si  $A_t$  est diagonale, alors en

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathfrak{G}}[X_t | X_{t-1}] &= \frac{\mathbb{P}_{\mathfrak{G}}[(X_{i,t-1})_i, (X_{i,t})_i]}{\mathbb{P}_{\mathfrak{G}}[(X_{i,t-1})_i]} \\ &= \prod_{k \in V} \frac{\mathbb{P}_{G_{t-1} \times A_t G_t}[X_{k,t}, X_{k,t-1}]}{\mathbb{P}[X_{k,t-1}]} \\ &= \prod_{k \in V} \underbrace{\mathbb{P}_{G_{t-1} \times A_t G_t}[X_{k,t} | X_{k,t-1}]}_{P_k(t)} \end{aligned}$$

où  $P_k(t)$  représente la probabilité de transition de  $k$  à l'instant  $t$  de l'état  $X_{k,t-1}$  à  $X_{k,t}$ . De manière générale, nous avons une matrice de transition  $2^{|V|} \times 2^{|V|}$  à l'instant  $t$  qu'on note  $\mathcal{P}_t$  associée à la chaîne de Markov  $(X_t)_t$  qui vérifie :

$$\pi_t = \pi_{t-1} \cdot \mathcal{P}_t \quad (6.1)$$

où  $\pi_t = (\mathbb{P}_{\mathfrak{G}}[X_t = \omega])_{\omega \in \Omega^{|V|}}$ . L'équation 6.1 permet alors de faire des projections des probabilités de l'état du réseau dans le temps. Nous avons donc un modèle temporel qui s'articule très bien, mais la problématique sur laquelle nous n'avons pas encore avancé est le choix des matrices de jonction et des fonctions  $\psi_{ij}$ ; cela fera l'objet de recherches futures.

## 6.2 Allocation dans un portefeuille de crédit avec interdépendance sous contraintes.

Notre objectif dans cette section est de discuter les problèmes d'allocation d'EAD dans un portefeuille de crédit, en tenant en compte l'interdépendance. On s'intéresse à deux problèmes en particulier, celui de la minimisation de la perte et celui de la minimisation de la VaR. L'idée est d'appliquer le modèle d'interdépendance développé dans cette thèse pour étudier les allocations

1. Tautologiquement on considère que  $\mathfrak{G} = G_0 \times A_1 G_1 \dots \times A_t G_t \times \dots$ , ce qui induit une structure de réseau économique avec un Hamiltonien  $\mathcal{H}_{\mathfrak{G}}(X) = \sum_{s \leq t} \mathcal{H}_{G_s}(X_s) + \sum_{s \leq t} \sum_{(i,j) \in V_{s-1} \times V_s} A_{ij}(s) \psi_{ij}(X_{i,s-1}, X_{j,t})$ .

d'EAD qui minimisent la VaR de la perte ou la perte moyenne. On modélise un portefeuille de crédit comme un réseau économique  $G = (V, M, T)$ , et on se donne un champs de Markov  $X$  de défaut/non-défaut comme défini précédemment, on suppose de plus que la LGD est uniforme, donc on a

$$EL_G(w) = \sum_{i \in V} w_i \mathbb{P}_G(X_i = -1) \quad (6.2)$$

où les  $w = (w_i)_i$  représentent les pourcentages d'EAD attribués aux entités, donc  $w_i = \frac{EAD_i}{\sum_{i \in V} EAD_i}$ . Nous avons vu dans le chapitre 5 que dans les réseaux  $SM$  que l'hyperconnectivité conduit à une situation de Single Risk, donc les défauts sont liés par contagion, et par suite l'exposition sur un client dans du portefeuille est aussi une exposition sur les autres. Donc si un client  $i$  fait défaut, il y aura une perte déterministe  $w_i$  qui correspond à son exposition, et des pertes probabilistes  $(w_{ij})_{j \in V}$  qui correspondent à l'augmentation de la probabilité de défaut, ou même le défaut, des entités voisines impactées par le défaut de  $i$  par effet de contagion. Il est alors important de répartir au maximum l'EAD, en d'autres termes minimiser la concentration pour se couvrir de la propagation du risque. Dans les réseaux concurrentiels, la situation est différente. En effet, nous avons vu que dans ce type de réseaux, les pertes agrégées sont majorées par 50% en cas d'hyperconnectivité. On peut alors se demander comment distribuer l'EAD de manière à ce que la perte espérée ou la VaR soit encore plus basse dans ce cas de figure. Nous comptons étudier les solutions des deux problèmes

$$\min_{\sum_{i \in V} w_i = 1} EL_G(w) \text{ et } \min_{\sum_{i \in V} w_i = 1} VaR_\alpha(L) \quad (6.3)$$

en faisant changer les connectivités, les probabilités intrinsèques ainsi que les relations. Cependant, des problèmes de calcul s'imposent, car si on prend uniquement deux relations, par exemple  $T \in \{SM, C\}^{|E(V)|}$ , alors le nombre de configurations possibles des relations sur le réseau est de  $2^{|E(V)|}$ . Donc il faut trouver une méthode analytique ou semi-analytique pour résoudre ce problème, ce qui constitue l'un des sujets auxquels on s'intéresse activement. On désire également rajouter des contraintes de concentrations aux problèmes, et étudier leurs solutions en fonctions des relations et des connectivités.

On adopte la définition des pertes probabilistes  $(w_{ij})_{j \in N(i)}$  suite au défaut de  $i$  comme étant  $\mathbb{P}_G(X_j = -1 | X_i = -1) - \mathbb{P}_G(X_j = -1)$  pour tout  $i \in V$  et  $j \in N(i)$ , et on note  $W = (w_{ij})_{i,j}$ . Cette matrice encode comment pour une configuration donnée, le défaut d'une entité va impacter le portefeuille de crédit. Il serait également intéressant de l'étudier pour des configurations solutions des problème ci-dessus, afin de voir si ces solutions pourraient être caractérisées par une matrice  $W$ . La première étape de cette étude serait sur des réseaux homogènes (même  $p_i$  et même  $m_{ij}$ ) qui bénéficient de certaines symétries, afin d'utiliser des formules fermées ou semi-fermées qui pourraient donner par la suite des solutions analytiques au problème. Il est clair que ces problèmes relèvent du risque de concentration en portefeuille de crédit, c'est pour cette raison

qu'il fait partie intégrante de l'étude que nous allons faire, comme nous allons expliquer dans la section qui suit.

### 6.3 Concentration et l'interdépendance

La concentration est un sujet qui occupe une place centrale en risque crédit, car il constitue l'un des cibles du dispositif réglementaire de Bâle II. Il existe plusieurs manières de mesurer la concentration, comme l'indice de Gini ou l'indice de Herfindahl-Hirschman  $HHI$  qui bénéficie d'une certaine popularité pour son aspect très élémentaire. En reprenant les notations de la section précédente, celui-ci s'exprime comme  $HHI = \sum_{i \in V} w_i^2$ . Donc il est égale à 1 si et seulement si le volume en entier est mis sur une seule entité, et il admet un minimum  $\frac{1}{|V|}$  pour une équirépartition. Par l'intermédiaire de cet indice on formule l'une des hypothèses "réglementaires" les plus importantes en risque de crédit, à savoir l'hypothèse de granularité infinie. En effet, Gordy et al [114] démontre que pour pouvoir utiliser la formule réglementaire

$$\mathbb{P}(L \leq x) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(x)\sqrt{\rho} - \Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

sur des portefeuilles hétérogènes, alors il faudrait que  $HHI = \sum_{i \in V} w_i^2$  soit presque nul. Le souci cet indice est qu'il ne prend pas en considération l'interdépendance entre les entités du portefeuille, en particulier les phénomènes de contagion. On définit alors un indice de concentration  $C_G(w)$  qui fait intervenir les effets de la structure de dépendance, en modélisant le portefeuille comme un réseau économique  $G = (V, M, T)$ , qui s'exprime par

$$C_G(w) := w^T \text{Cor}_G(X) w$$

où  $\text{Cor}_G(X) := (\text{Cor}_G(X_i, X_j))_{i,j}$  est la matrice de corrélation du champs Markovien  $X = (X_i)_{i \in V}$  sous la mesure  $\mathbb{P}_G$ .

On observe en cas d'indépendance que  $\text{Cor}_G(X) = I_n$ , et donc  $C_G(w) = HHI(w)$ . Cela veut dire que cet indice induit l'indice de concentration HHI usuel en cas d'indépendance, par conséquent il constitue une extension de l'HHI. Nous avons alors la propriété suivante :

**Proposition 6.1.**

1. Pour toute répartition  $w$ , on a  $0 \leq C_G(w) \leq 1$ .
2.  $C_G(w) = 1 \Leftrightarrow \exists I \subset V$  telle que  $\prod_{i \in I} w_i \neq 0$ ,  $\sum_{i \in I} w_i = 1$  et  $\forall (i, j) \in I^2$ ,  $\text{Cor}_G(X_i, X_j) = 1$ .

En particulier, si  $I = \{*\}$  alors  $HHI(w) = 1$  et  $C_G(w) = 1$ .

*Preuve.*

1. Soit  $w$  une répartition. La matrice  $Cor_G(X)$  étant semi-définie positive, alors  $0 \leq w^T Cor_G(X)w$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} w^T Cor_G(X)w &= \sum_{i,j} Cor_G(X_i, X_j)w_iw_j \\ &\leq \sum_{i,j} w_iw_j \\ &= \left(\sum_i w_i\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

2. S'il existe une telle partie  $I \subset V$ , alors on a  $w_{V \setminus I} = (0, \dots, 0)$ , et on peut écrire par réarrangement que  $w = (w_I, 0, \dots, 0)$  et

$$Cor_G(X) = \left( \begin{array}{c|c} J_I & * \\ \hline * & * \end{array} \right)$$

où  $J_I$  est la matrice qui ne contient que des 1 dans ses coefficients et de taille  $|I| \times |I|$ .

Nous avons alors

$$\begin{aligned} C_G(w) &= w_I^T J_I w_I \\ &= \left(\sum_{i \in I} w_i\right)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Réciproquement, si  $C_G(w) = 1$ , alors  $w^T \underbrace{(J - Cor_G(X))}_{=A_G} w = \sum_{i,j} A_{ij}w_iw_j = 0$ . Comme  $A_{ij}, w_i, w_j \geq 0$  alors  $\forall i, j \in V$ ,  $A_{ij}w_iw_j = 0$ . On pose  $H := \{i \in V; w_i = 0\}$ , alors  $\forall i, j \in V \setminus H$ ,  $A_{ij} = 0$ , on note  $I = V \setminus H$ , alors  $I$  vérifie bien  $\forall i, j \in I$ ,  $Cor_G(X_i, X_j) = 1$  et  $\sum_{i \in I} w_i = \sum_{i \in V} w_i = 1$  tel que  $\prod_{i \in I} w_i \neq 0$ , ce qui termine la démonstration. □

Pour être plus précis, cet le rapport  $\frac{C_G(w)}{HHI(w)}$  est compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs propres de la matrice de corrélation. Cette proposition nous montre que l'indice est égal à 1 si et seulement si la répartition est sur un groupe du réseau dont les entités sont parfaitement corrélées. Nous avons alors quelque chose qui complète le  $HHI$ , et qui permet de traduire l'effet de l'interdépendance forte en terme de concentration. Cet indice se décompose de plusieurs manières, comme par exemple

$$C_G(w) = (S_G w)^T (S_G w)$$

où  $S_G$  est la racine carrée de la matrice de corrélation, ce qui ressemble à un  $HHI$  avec une pondération  $S_G w$  et dont la somme n'est pas égale à 1. Nous allons analyser cette pondération par la suite en essayant de comprendre ses variations en fonction des réseaux que nous allons étudier et les effets de connectivité sur ces derniers. Cela revient à chercher les poids dans le cas d'indépendance pour lesquels nous avons le même niveau concentration que dans le cas

d'interdépendance.

On définit également le nombre d'entités équivalentes dans un réseau, comme dans le cas du HHI, par

$$n_G(w) := \frac{1}{C_G(w)}$$

celui-ci atteint en cas d'indépendance est valeur maximale de  $|V|$  pour une équirépartition, et égale à 1 en concentration maximale. A titre d'exemple, nous allons nous intéresser à ces indices sur des réseaux homogènes et complets, afin d'isoler l'effet des types de relation que nous allons faire varier dans  $\{SM, C\}$  qu'on définit par  $X_i X_j$  pour  $SM$  et  $-X_i X_j$  pour  $C$ . Nous savons que simuler toutes les configuration possibles sur le réseau est trop coûteux en calculs ( $2^{\frac{n^2-n}{2}}$  configurations avec  $n := |V|$ ), mais nous allons exploiter la symétrie du problème afin de réduire ce nombre en regardant uniquement les classes d'isomorphies des réseaux<sup>2</sup>. On notera  $n = |V|$  et  $a_n(G)$  le nombre de classes d'isomorphie ou d'équivalence sur le réseau  $G$ .

Nous allons représenter chaque configuration des  $a_n(G)$  classes par un réseau  $Gi$  où  $i = 1, \dots, a_n(G)$ . A chaque configuration  $Gi$  on associe un vecteur  $\pi(Gi) = (\pi_j(Gi))_{0 \leq j \leq n-1}$  tel que  $\pi_j(Gi)$  est le nombre d'entités ayant  $j$  relations de concurrence. Pour illustrer cela, prenons par exemple un réseau de 3 entités. Le nombre de configurations possibles est 8, et le nombre de classes d'équivalence est 4 comme représenté dans la figure ci-dessous :

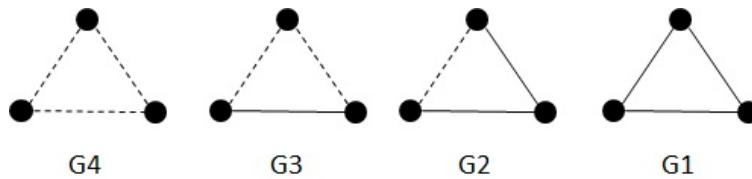


FIGURE 6.2 – Classes d'équivalence des 8 configurations possibles, où les traits en pointillé représentent les relations de concurrence et les traits normaux les relations de support.

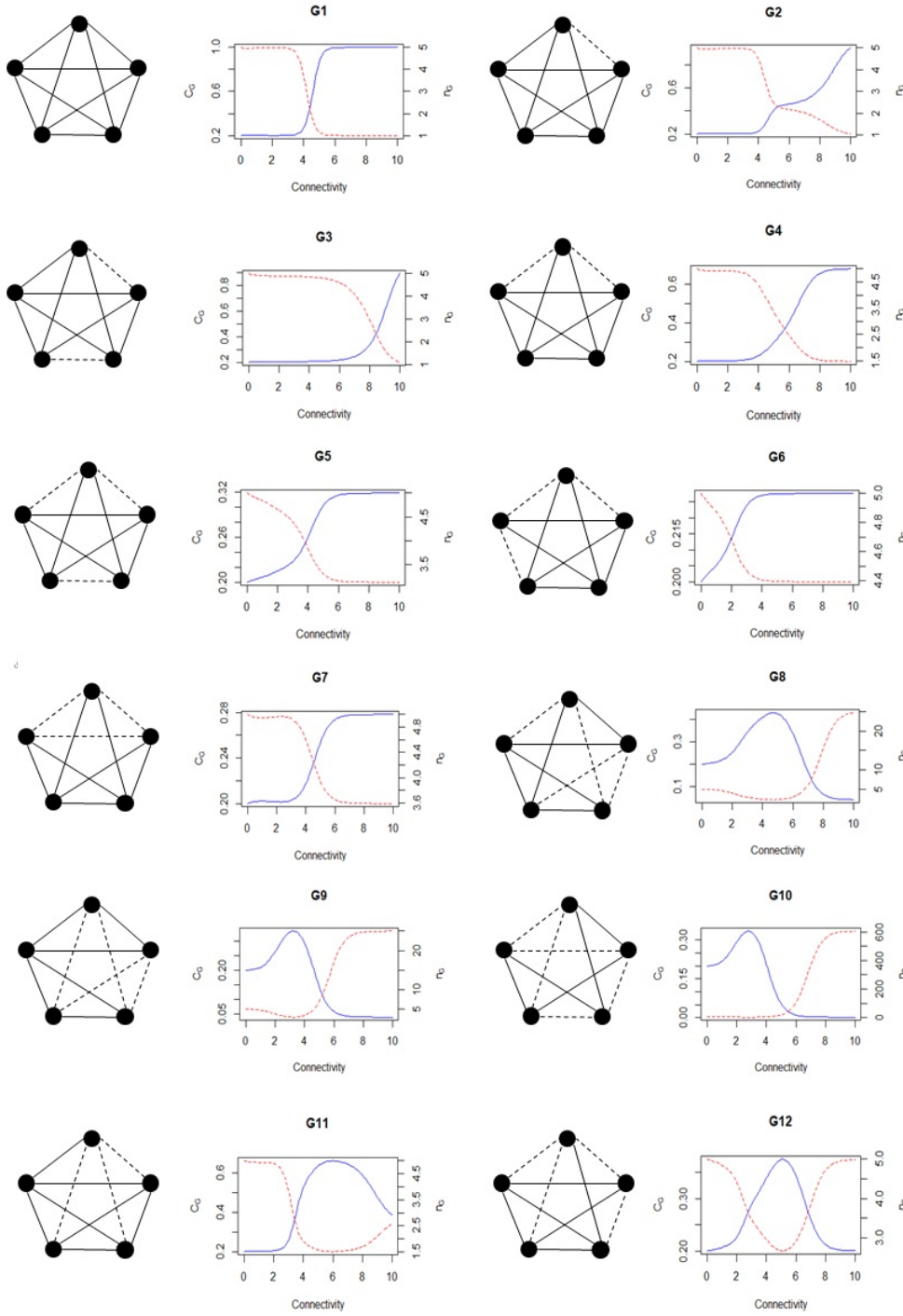
La classe de  $G1$  contient une configuration,  $G2$  contient 3 au même titre que  $G3$  et  $G4$  contient une seule, et on a

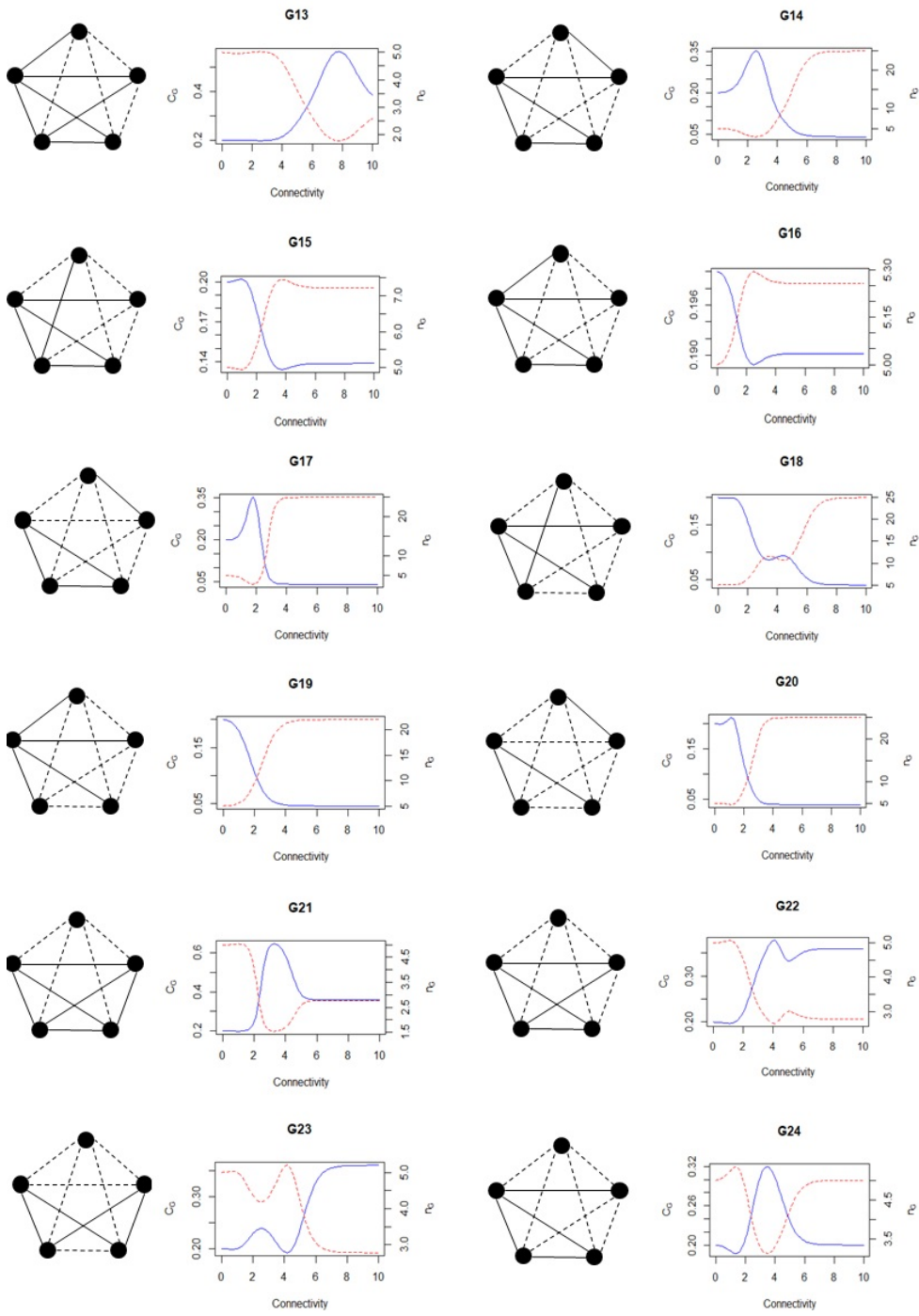
$$\pi(G1) = (3, 0, 0), \pi(G2) = (1, 2, 0), \pi(G3) = (0, 2, 1) \text{ et } \pi(G4) = (0, 0, 3)$$

Pour illustrer la complexité du problème, prenons l'exemple d'un portefeuille homogène en probabilités de défaut intrinsèques ( $p = 1\%$ ) de 5 entités. Alors nous avons  $2^{10}$  configurations possibles du réseau, mais par symétrie on peut réduire ce nombre à  $a_5(G) = 31$  configurations qui constituent les classes d'isomorphie. L'idée est d'analyser la concentration  $C_G(w)$  sur chacune de ces classes en fonction de la connectivité pour une allocation  $w$  fixe. Nous allons prendre dans un premier temps  $w_0$  tel que  $HHI(w_0)$  soit minimal égal à  $\frac{1}{5} = 0.2$ , ce qui veut dire une équirépartition  $w_0 = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$ . L'avantage de ce choix est qu'il nous permet de voir comment la répartition des types de relations et la connectivité vont déformer une équirépartition.

2. Deux réseaux sont isomorphes si on peut déformer l'un pour obtenir l'autre.

Nous mettons en évidence dans la figure 6.3 les différentes configurations  $G_i$  du réseau à leur côté les variations de la concentration  $C_G(w_0)$  et du nombre équivalent  $n_G(w_0)$  en fonction de la connectivité.





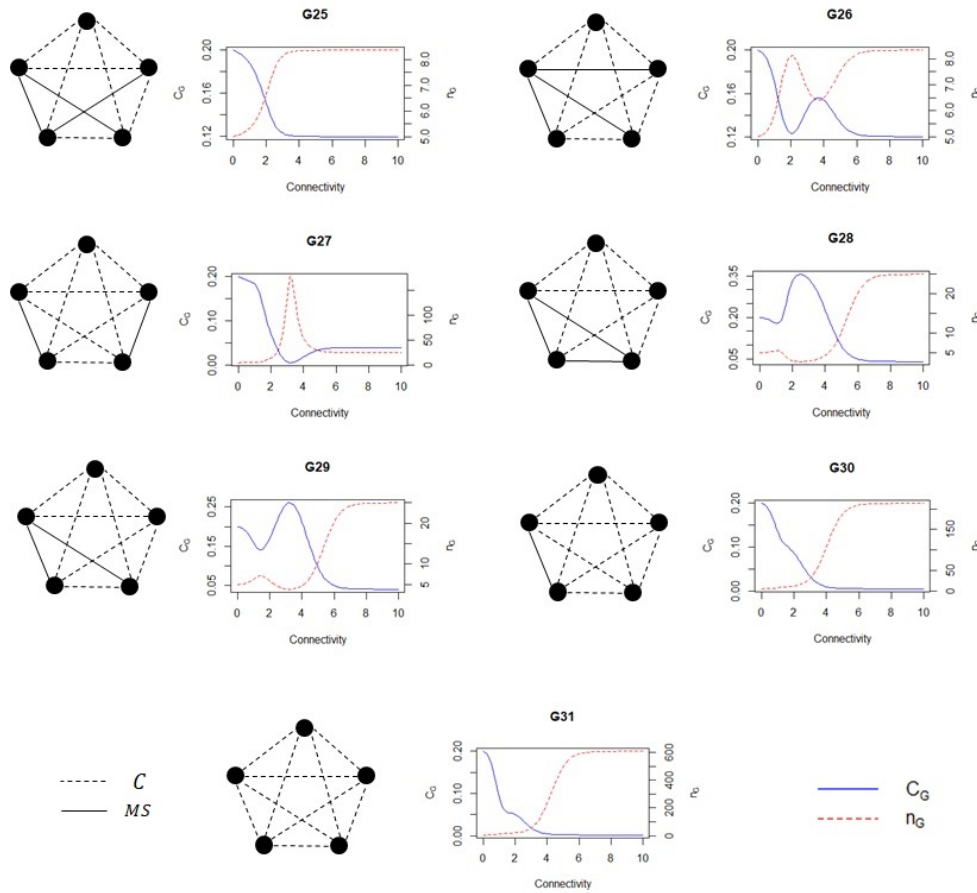


FIGURE 6.3 – Variations de la concentration  $C_G$  et du nombre  $n_G$  en fonction de la connectivité pour chaque classe d'équivalence des configurations possibles du réseau.

On remarque que chaque configuration a son propre comportement en terme de variations de la concentration, et que nous avons des cas de croissance, décroissance, atteinte de la concentration 1 mais aussi des stationnarités. Le premier constat que nous pouvons faire est que plus il y a de relations de concurrence dans un réseau moins la concentration est élevé; donc nous avons bien un effet diversificateur de la concurrence. De plus, pour un même nombre de concurrences, la manière avec laquelle sont distribués peut complètement changer le comportement de la concentration (cas G11 et G7 ont les deux 3 relations de concurrence, le cas G17 et G19 ont les deux 6 relations de concurrence,...). Il est alors évident que le comportement de chaque configuration est intimement lié à son vecteur  $\pi(G_i)$  qui encode la manière avec laquelle la concurrence est concentrée ou non dans le réseau, et on entend par concentrée le fait qu'il y ait une entité ou deux qui sont concurrentes avec beaucoup plus d'entités que les autres. On note  $\alpha(G_i)$  le nombre de relations de concurrence sur le nombre de relations dans le réseau  $G_i$ , qu'on appellera pourcentage de concentration. Comme le représente la tableau suivant, on a une classification des configurations :



Configuration	$\pi(G_i)$	$\alpha(G_i)$	Comportement de la concentration
G1	(5,0,0,0,0)	0,00%	Croissante et atteint 1 en single risk
G2	(3,2,0,0,0)	10,00%	Croissante et atteint 1 en single risk
G3	(1,4,0,0,0)	20,00%	Croissante et atteint 1 en single risk
G4	(2,2,1,0,0)	20,00%	Croissante et stationnaire en 0.68
G5	(0,4,1,0,0)	30,00%	Croissante et stationnaire en 0.31
G6	(1,2,2,0,0)	30,00%	Croissante et stationnaire en 0.22
G7	(2,0,3,0,0)	30,00%	Croissante et stationnaire en 0.27
G8	(0,2,3,0,0)	40,00%	Admet un maximum de 0.42 en $m = 4.2$ et stationnaire en 0.04
G9	(1,0,4,0,0)	40,00%	Admet un maximum de 0.33 en $m = 3$ et stationnaire en 0.04
G10	(0,0,5,0,0)	50,00%	Admet un maximum de 0.331 en $m = 2.5$ et stationnaire en 0.0016
G11	(1,3,0,1,0)	30,00%	Admet un maximum de 0.65 en $m = 6$ et stationnaire en 0.36
G12	(0,3,1,1,0)	40,00%	Admet un maximum de 0.37 en $m = 5$ et stationnaire en 0.2
G13	(1,1,2,1,0)	40,00%	Admet un maximum de 0.56 en $m = 7.6$ et stationnaire en 0.36
G14	(0,1,3,1,0)	50,00%	Admet un maximum de 0.35 en $m = 2.2$ et stationnaire en 0.04
G15	(0,2,1,2,0)	50,00%	Admet un minimum de 0.134 en $m = 3.7$ et stationnaire en 0.138
G16	(1,0,2,2,0)	50,00%	Admet un minimum de 0.189 en $m = 2.5$ et stationnaire en 0.19
G17	(0,0,3,2,0)	60,00%	Admet un maximum de 0.32 en $m = 1.8$ et stationnaire en 0.04
G18	(0,1,1,3,0)	60,00%	Décroissante et stationnaire en 0.04
G19	(1,0,0,4,0)	60,00%	Décroissante et stationnaire en 0.045
G20	(0,0,1,4,0)	70,00%	Décroissante et stationnaire en 0.04
G21	(0,4,0,0,1)	40,00%	Admet un maximum de 0.64 en $m = 3.8$ et stationnaire en 0.199
G22	(0,2,2,0,1)	50,00%	Admet un maximum de 0.64 en $m = 4$ et stationnaire en 0.36
G23	(0,0,4,0,1)	60,00%	Croissante et stationnaire en 0.36
G24	(0,1,2,1,1)	60,00%	Admet un maximum de 0.64 en $m = 3.8$ et stationnaire en 0.2
G25	(0,0,2,2,1)	70,00%	Strictement décroissante et stationnaire en 0.12
G26	(0,1,0,3,1)	70,00%	Décroissante et stationnaire en 0.12
G27	(0,0,0,4,1)	80,00%	Admet un minimum de 0.007 en $m = 3.2$ et stationnaire en 0.04
G28	(0,0,3,0,2)	70,00%	Admet un maximum de 0.36 en $m = 2.2$ et stationnaire en 0.04
G29	(0,0,1,2,2)	80,00%	Admet un maximum de 0.25 en $m = 3$ et stationnaire en 0.04
G30	(0,0,0,2,3)	90,00%	Strictement décroissante et stationnaire en 0.005
G31	(0,0,0,0,5)	100,00%	Strictement décroissante et stationnaire en 0.0016

TABLE 6.1 – Tableau récapitulatif des différentes configurations et leur comportement

Le tableau 6.1 nous montre que la concurrence dans un portefeuille de crédit fait diminuer la concentration ou au moins permet de la majorer par une valeur strictement inférieure à 1. En effet, nous partons d'une distribution equirépartie et nous regardons comment les configurations font grandir ou baisser la concentration, et comment dans des situations de single risk la concentration passe de son niveau minimal à 1 ; mais aussi comment une bonne répartition de la concurrence dans le portefeuille permet de la diminuer la concentration jusqu'à des niveaux parfois très bas. L'indice  $n_G$  nous montre que dans le cas d'une hyperconnectivité, nous passons de 5 entités à 1

(les cas G1 ,G2 et G3), alors que dans les cas G10 et G31 nous passons de 5 clients à 600, ce qui représente une bonne diversification.

Nous avons vu dans les chapitres précédents que la concurrence permet également de majorer les pertes, et qu'un bon portefeuille devrait contenir des concurrents. Mais l'exemple étudié ci-dessus montre que la présence de la concurrence ne suffit pas, car nous avons des cas à 40%, 50% ou même de 60% de pourcentage de concurrence  $\alpha$  (comme G16, G13 G22 ou G23) pour lesquels la concentration augmente considérablement et peut atteindre 64%. L'approche très pratiquée par les banques est d'opérer à une diversification sectorielle, régionale ou industrielle. L'inconvénient de cette approche est qu'on peut avoir des groupes d'affaires bien diversifiés, qui opèrent dans plusieurs secteurs, mais dont les liens capitalistiques qui relient ses filiales peuvent engendrer des effets de contagion dans les périodes de stress. Par conséquent, les expositions sur les filiales de ces groupes d'affaires sont plus ou moins concentrées en un nombre équivalent d'entités inférieur au nombre d'entités du réseau. Donc la question est comment la concurrence devrait-elle être réparti de telle sorte à garantir une bonne diversification du portefeuille? Cette question et tant d'autres fait partie des questions auxquels nous souhaitons répondre dans les travaux post-thèse.

## CONCLUSION

Nous avons exploré dans cette thèse deux problématiques différentes en risque de crédit, à savoir la monotonie des matrices de transition et l'interdépendance dans les portefeuilles de crédit. La première problématique est assez pratique et relève d'un besoin chez les banques, car celles-ci cherchent en général à avoir des matrices monotones. La deuxième problématique quant à elle est beaucoup plus ouverte et transversale, car elle concerne plusieurs problématiques parallèles comme la stabilité financière, ce qui lui donne encore plus d'enjeu. Cependant, nous nous sommes restreints à la modélisation de l'interdépendance en risque de crédit pour mieux adapter et interpréter les notions et les outils introduits.

Sur la première problématique, nous avons pu proposer une méthode de projection des matrices empiriques pour résoudre un problème de praticiens, qui est de combler les défauts de monotonie d'une matrice empirique. Nous en avons dérivé une mesure du défaut de monotonie qui a été calculée sur des données internes sur une durée de 10 ans. Cette approche a été approfondie en introduisant la notion de  $k$ -monotonie pour pouvoir détecter les notes qui violent les contraintes de monotonie. Certains problèmes de saturation des contraintes par un effet de bord ont été également résolus, nous avons proposé une approche de projection du générateur infini-tésimal pour garantir une stricte monotonie. Nous avons pu établir également certains résultats théoriques sur la conservation de la monotonie par des transformations souvent appliquées en pratique.

La problématique d'interdépendance a pris beaucoup plus de place dans cette thèse. Le chapitre 3 est consacré à l'introduction du modèle, de l'étude de son articulation mathématique et son interprétation. Ce modèle peut être vu comme une extension du modèle d'Ising, avec l'introduction des relations  $\delta_{ij}$  qui est l'idée qui rend le modèle aussi riche et adapté à des problématiques économiques. Ces relations introduisent une asymétrie qui manque au modèle d'Ising réservé aux structures symétriques, celle-ci est essentielle pour modéliser des relations entre entités de tailles différentes avec un comportement asymétrique. La structure du modèle permet également une intégration des facteurs exogènes, ce qui permet en cas d'application d'un choc local d'observer la diffusion de l'impact sur le réseau. D'autre part, cette structure est adaptée pour faire des stress-tests dont les scénarios peuvent être macroéconomiques ou un événement dans le réseau. Nous avons pu également démontrer un certain nombre de résultats théoriques sur la sensibilité du modèle à la distance de propagation, aux variations des connectivité et aux variations des

probabilités intrinsèques.

Une des caractéristiques les plus importantes de ce modèle est la présence de phénomènes de transition de phase. Ces phénomènes critiques expliquent certains effets de contagion observés en périodes de crise. Nous avons mis en avant, via cette notion, l'importance de la prise en compte de la connectivité des portefeuilles de crédit en prenant certaines configurations très connectées comme dans le chapitre 5. Dans ce même chapitre, nous avons étudié des réseaux par leur degré de connexion et leur résistance à des réseaux satellites constitués de concurrents ou de mauvaises relations. Nous avons pu établir des formules fermées et semi-fermées de la distribution des pertes sur ces réseaux, en donnant le comportement asymptotique en "large pool". Ces résultats ont été par la suite utilisés pour démontrer la possibilité d'encadrer la distribution des pertes d'un réseau arbitraire par celles de deux réseaux réguliers et homogènes. Une étude numérique approfondie a été faite dans le chapitre 5, celle-ci montre en particulier comment le capital économique sur un portefeuille de crédit peut varier très considérablement en fonction des relations et de la structure de dépendance interne du portefeuille. Bien que nous ayons eu des soucis de capacité de calcul, des résultats sur l'effet du degré de connexion sur la propagation du risque et l'apparition des phénomènes critiques ont été obtenus. Cette problématique de complexité exponentielle du modèle a été soulevée plusieurs fois dans cette thèse avec des propositions de solutions différentes. En particulier, nous démontrons dans le chapitre 5 un théorème qui permet de réduire le calcul de manière drastique si le réseau contient des branches arborés. Ce résultat est d'une grande importance pratique, car les réseaux économiques sont en général assez "sparse" et peuvent contenir assez souvent des structures arborées. Cependant, nous avons pu développer un algorithme d'approximation assez rapide qui rend la complexité des calculs polynomiale. A l'heure actuelle, cet algorithme est en phase de test, mais il permet déjà de faire des calculs assez rapides sur des réseaux de taille 100. Ce travail ne fait pas partie de cette thèse vu son état d'avancement au moment de l'écriture du manuscrit, mais il fera l'objet d'un papier.

Nous avons discuté dans le chapitre 4 l'aspect pratique le plus contraignant du modèle, à savoir la calibration. La calibration des modèles à champs n'est pas toujours une tâche facile, du fait des problèmes de calcul et de disponibilité des données. Nous avons pu proposer certaines méthodes de calibration que nous avons appliqué sur des données de notation ou sur des probabilités issues d'une copule Gaussienne selon la disponibilité des observations. Une méthode particulièrement intéressante qui ressort est l'estimation par maximum de pseudo-vraisemblance. Cette méthode à l'avantage de capter l'asymétrie des relations d'une part, et d'être beaucoup moins demandeuse en calcul comme pour une vraisemblance classique. Nous construisons les états observés en considérant les *investissement* et *non – investissement* grades en supposant que les connectivités sont universelles. Cette hypothèse suggère que les connectivités sont uniquement des paramètres topologiques et qu'il ne sont pas contrôlés par la nature des états 1 et -1. Cela permet alors de les calibrer et les utiliser sur des états de défaut non-défaut.

Cette thèse ne fait qu'effleurer l'approche introduite, car le nombre de questions qui restent ouvertes, de perspectives encore inexplorées ou des applications possibles est assez grand par rapport aux pistes explorées. Sans parler des développements possibles sur d'autres problématiques comme la stabilité financière ou celle des chambres de compensation. Il est cependant important de bien maîtriser les techniques de calcul nécessaire pour une utilisation sur de grands réseaux. Cela fait partie des objectifs d'après thèse, des avancées très importantes ont été déjà réalisées sur ce sujet. Ces avancées vont nous permettre de mieux comprendre l'impact de la distribution des relations sur un portefeuille de crédit de taille réaliste, notamment les déformations de la distribution des pertes sans avoir à calculer toutes les pertes possibles. Des projets plus mathématiques sont également prévus, comme la compréhension de la propagation du risque via des équations de chaleur ou d'onde induites du modèle, étudier l'effet du degré de connexion de manière rigoureuse ou encore l'extension du modèle en considérant des connectivités aléatoires ou même des relations aléatoires.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Consultation Paper : On Guidelines on connected clients under Article 4(1)(39) of Regulation (EU) No 575/2013, EBA/CP/2016/09.
- [2] EBF Response to EBA consultation paper on guidelines on Connected Clients EBA/CP/2016/09. EBF022760F.26/10/2016.
- [3] Deloitte. Présentation des résultats Stress Tests US. Juillet 2016. [URL](#)
- [4] EBA. 2016 EU-WIDE STRESS TEST. Juillet 2016. [URL](#)
- [5] ACPR. Analyses et synthèses. Les stress-tests EBA/BCE de 2016. [URL](#)
- [6] T. Breuer, I. Csiszar : Systematic Stress Tests with Entropic Constraints, *Journal of Banking and Finance* 37 (2013),1552-1559
- [7] M. Kalkbrener, N. Packham : Stress testing of credit portfolios in light- and heavy-tailed models (2014).
- [8] N. Packham, M. Kalkbrener, L. Overbeck : Asymptotic behaviour of multivariate default probabilities and default correlations under stress (2015).
- [9] Simon Dubecq : Stress-Test Exercises and the Pricing of Very Long-Term Bonds (2012)
- [10] C.Schmieder, C.Puhr et M.Hasan : Next Generation Balance Sheet Stress Testing, IMF working paper WP/11/38 (2011).
- [11] R.Bookstaber, J.Cetina, G.Feldberg, M.Flood, P.Glasserman : Stress Tests to Promote Financial Stability : Assessing Progress and Looking to the Future, Oce of Financial Research Working Paper (2013).
- [12] Federal Reserve Board (2012), Comprehensive Capital Analysis and Review 2012 : Methodology for Stress Scenario Projections.
- [13] M.Drehmann : Stress Tests : Objectives, Challenges, and Modelling Choices. *Riksbank Economic Review*, 2, pp. 60-92 (2008).

- 
- [14] Marco Sorge : Stress-testing nancial systems : an overview of current methodologies, BIS Working Papers No 165 Monetary and Economic Department (2004).
- [15] Francisco Covas, Bill Nelson. Comparison between United States and European Union Stress Tests. The Clearing House. May 2016.
- [16] Yang, Bill Huajian (2017) : Point-in-time PD term structure models for multi-period scenario loss projection : Methodologies and implementations for IFRS 9 ECL and CCAR stress testing. Journal of Risk Model Validation, Vol. 11, No. 3 (January 2017)
- [17] Bank Of England. Stress testing the UK banking system : key elements of the 2017 stress test. March 2017.
- [18] Global systemically important banks : updated assessment methodology and the higher loss absorbency requirement. Basel Committee on Banking Supervision, July 2013
- [19] Rapport sur la stabilité financière 2016. Banque Nationale Swiss.
- [20] Carlehed, M. and Petrov, A. (2012). A methodology for point-in- time-through-the-cycle probability of default decomposition in risk classification systems. Journal of Risk Model Validation 6, 3-25.
- [21] Vasicek, O. (1991). Probability of loss on loan portfolio. KMV Working Paper, 1–4
- [22] B.Huajian Yang and Z. Du. Stress Testing and Modeling of Rating Migration under the Vasicek ModelFramework - Empirical approaches and technical implementation. June 2015.
- [23] Miu, P, Ozdemir, B. Stress testing probability of default and rating migration rate with respect to Basel II requirements, Journal of Risk Model Validation, Vol. 3 (4) Winter 2009, pp.3-38.
- [24] D.X. Li, On default correlation : A copula function approach, Journal of Fixed Income 9(4) (2000), 43–54. doi :10.3905/jfi.2000.319253.
- [25] P.H. Kupiec, How well does the Vasicek–Basel AIRB model fit the data? Evidence from a long time series of corporate credit rating data, FDICWorking Paper Series, available at : <https://www.fdic.gov/bank/analytical/cfr>
- [26] M. Davis and V. Lo. Infectious defaults. Quantitative Finance, 2001, 1(4) :382-387.
- [27] A.Cousin , D. Rullicre et D. Dorobantu. An Extension of Davis and Lo’s Contagion Model, 2013, Quantitative Finance 13(3), 407-420
- [28] Lucas, D.J, 1995, "Default Correlation and Credit Analysis", Journal of Fixed Income, March 76-87.

- 
- [29] Das, S.R., Duffie, D., Kapadia, N., Saita, L. (2007) Common failings : how corporate defaults are correlated, *Journal of Finance* 62(1), 93-117
- [30] Azizpour, S., Giesecke, K. (2008) Self-exciting corporate defaults : contagion vs. frailty, working paper, Stanford University.
- [31] J.P. Laurent, A. Cousin, J.D. Fermanian. Hedging Default Risks of CDOs in Markovian contagion models, *Quantitative Finance*, 2011.
- [32] Palmer, Edgar M. (1985). *Graphical Evolution : An Introduction to the Theory of Random Graphs*. John Wiley and Sons, NY, NY
- [33] Focardi, S. M. and Fabozzi, F. J. : 2004, A percolation approach to modeling credit risk loss distribution under contagion, *Journal of Risk* 7(1), 7594.
- [34] S. Azizpour, K. Giesecke and G. Schwenkler. Exploring the sources of Default Clustering. Working paper, Stanford University, Stanford, CA, 2008.
- [35] Jordan, M. I. (Ed.). (1999). *Learning in Graphical Models*. MIT Press
- [36] U. Horst. Stochastic cascades, credit contagion, and large portfolio losses. *Journal of economic behavior and organization*. (2006)
- [37] H. Amini, R. Cont and A. Minca, Resilience to contagion in financial networks, working paper. Available at <http://ssrn.com/abstract=1865997> (2010).
- [38] D. Rosch, B. Winterfeldt, Estimating Credit Contagion in a Standard Factor Model. *Risk Journal* (2008).
- [39] Ahlswede, R., Daykin, D. E. (1978). An inequality for the weights of two families of sets, their unions and intersections. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 43(3).
- [40] Karlin, S. and Rinott, Y. (1980). Classes of orderings of measures and related correlation inequalities. I. Multivariate totally positive distributions. *J. Multiv. Anal.*, 10(4) :467–498.
- [41] K. Giesecke and L. Goldberg. A top-down approach to multi-name credit. Working Paper, 2005.
- [42] D. Lando and M.S. Nielsen, Correlation in corporate defaults : Contagion or conditional independence, *Journal of Financial Intermediation* 19(3)(2010), 355–372.
- [43] N. Podlich and M. Wedow, Credit contagion between financial systems, Midwest Finance Association 2012 Annual Meetings paper.



- 
- [44] Stéphane Dees, Jérôme Henry and Reiner Martin. STAMP : Stress-Test Analytics for Macroprudential Purposes in the euro area. BCE February 2017
- [45] Molins, J. and E. Vives (2005). Long range Ising model for credit risk modeling in homogeneous portfolios. AIP Conference Proceedings, 779(1) : 156–161, Granada, Spain.
- [46] J. Molins and E. Vives, «Model Risk on Credit risk». Risk and Decision Analysis 6( 2015/2016) 65-78
- [47] Filiz, I. O., Guo, X., Morton, J. and Sturmfels, « Graphical models for correlated defaults ». Mathematical Finance, 2012, 22 : 621644. doi : 10.1111/j.1467-9965.2011.00499.x (2012).
- [48] Egloff, D, Leippold, M and Vanini, « A simple model of credit contagion », Journal of Banking and Finance », Vol. 31, pages 2,475-92. (2007)
- [49] Gross and Población. The methodology that has been employed to develop the models is known as a Bayesian Averaging of Classical Estimates (BACE) method. (2017)
- [50] Liddle, A. R. (2007). "Information criteria for astrophysical model selection". Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 377 : L74–L78
- [51] Hirotugu Akaike, « Information theory and an extension of the maximum likelihood principle », dans Second International Symposium on Information Theory, 1973, 267-281 p.
- [52] Gaël Hauton et Jean-Cyprien. Héam How to Measure Interconnectedness between Banks, Insurers and Financial Conglomerates?
- [53] Alves, I., Ferrari, S., Franchini, P., Héam, J.-C., Jurca, P., Langfield, S., Laviola, S., Liedorp, F., Sanchez, A., Tavarolo, S., and Vuillemeij, G. (2013). The structure and resilience of the european interbank market. European Systemic Risk Board (ESRB) Occasional Paper, 3.
- [54] Eisenberg, L. and Noe, T. H. (2001). Systemic risk in financial systems. Management Science, 47(2) :236–249.
- [55] C., Gourrieroux, J.C., Heam, and A., Monfort. Bilateral Exposures and Systemic Solvency Risk. Canadian Journal of Economics (2012).
- [56] S. Heise and R. Kuhn. Derivatives and Credit Contagion in Interconnected Networks. The European Physical Journal B : Condensed Matter and Complex Systems, 2012, vol. 85, issue 4, 1-19
- [57] F. Caccioli, M. Shrestha, C. Moore and J. Doyne Farmer. Stability analysis of financial contagion due to overlapping portfolios. Journal of Financial Stability 28, 91-114
- [58] Réka, A. and Barabási A.L. (2002), “Statistical mechanics of complex networks,” Review of Modern Physics, Vol. 74(1), pp. 47–97.

- [59] Callaway, D.S., Newman, M.E.J., Strogatz, S.H. and Watts, D.J. (2000), "Network robustness and fragility : Percolation on random graphs," *Physical Review Letters*, Vol. 85, pp, 5468-5471.
- [60] Hurd, T.R. and Gleeson, J. (2013), "On Watts' Cascade Model with Random Link Weights," *Journal of Complex Networks*, forthcoming.
- [61] Polson, N.G. and Scott, J.G. (2011), "Explosive volatility : A model of financial contagion", working paper.
- [62] Diebold, F.X. and Yilmaz, K. (2011), On the network topology of variance decompositions : Measuring the connectedness of financial firms, PIER Working Paper, No. 31.
- [63] Nier, E., Yang, J. and Yorulmazer, T. (2008), "Network models and financial stability", Bank of England Working Paper, No. 346.
- [64] Upper, C. (2007), "Using counterfactual simulations to assess the danger of contagion in interbank markets", BIS Working Paper, No. 234.
- [65] Degryse H., Elahi, M.A. and Penas, M.F. (2010), "Cross-Border Exposures and Financial Contagion," *International Review of Finance*, Vol. 10(2), pp. 209-240.
- [66] Gross, M. and Kok, C. (2013b), "Assessing retail interest rate dynamics in the euro area – A Bayesian approach with a stress test perspective", ECB Working Paper (forthcoming)
- [67] Gai, P. and Kapadia, S. (2010), "Contagion in Financial Networks", Bank of England Working Paper, No. 383.
- [68] Jackson, M.O. (2010), *Social and Economic Networks*, Princeton University Press, Princeton
- [69] Cohen-Cole, E., Kirilenko A. and Patacchini, E. (2010), Are Networks Priced? Network Topology and Order Trading Strategies in High Liquidity Markets, EIEF Working Paper, No. 1011.
- [70] Acemoglu, D., Ozdaglar, A. a Tahbaz-Salehi, A. (2013), *Systemic Risk and Stability in Financial Networks*, NBER Working Paper, No. 18727.
- [71] Gideon E. Schwarz, « Estimating the dimension of a model », *Annals of Statistics*, vol. 6, no 2, 1978, p. 461-464
- [72] Giese, Guido, "The impact of PD/LGD correlations on credit risk capital," *Risk*, April 2005, pages 79-84.
- [73] Pykhtin, Michael. "Unexpected recovery risk" *Risk*, August 2003, pages 74-78.
- [74] Tasche, Dirk. "The single risk factor approach to capital charges in case of correlated loss given default rates," Working Paper, February 17, 2004.

- [75] Frye, J. and Jacobs, M., "Credit loss and systematic loss given default", *Journal of Credit Risk* (1–32) Volume 8/Number 1, Spring 2012
- [76] Steve Mrlon. In a bind : how CCAR constrains US bank strategy. Fed's stress tests are forcing to cut loan portfolios and trading assets. *Risk journal*. 15/08/2017.
- [77] P.Grundke and K.Pliszka. A macroeconomic reverse stress-test. Discussion paper. Deutsche Bundesbank No 30/2015.
- [78] Druen, J., and Florin, S. (2010). Reverse Stresstests : Stress-Kennzahlen fur die praktische Banksteuerung. *Risiko Manager* , 10 , 1,6-9.
- [79] Grundke, P. (2011). Reverse stress tests with bottom-up approaches. *The Journal of Risk Model Validation*, 5 (1), 71-90.
- [80] Grundke, P. (2012a). Further recipes for quantitative reverse stress testing. *The Journal of Risk Model Validation*, 6 (2), 81-102.
- [81] Skoglund, J., & Chen, W. (2009). Risk contributions, information and reverse stress testing. *The Journal of Risk Model Validation*, 3 (2), 61-77.
- [82] Principles for sound stress testing practices and supervision. Basel Committee on Banking Supervision , May 2009.
- [83] A. Abdymomunov, Sh. Blei, B. Ergashev. Worst-case scenarios as a stress testing tool for risk models. Working paper, june 21 (charlotte : The Federal Reserve Bank of Richmond).
- [84] Guidance on Stress Testing for Banking Organizations with Total Consolidated Assets of More Than 10 \$ Billion. Board of Governors of the Federal Reserve System Federal Deposit Insurance Corporation Office of the Comptroller of the Currency. SR Letter 12-7. May 2012.
- [85] Capital Planning at Large Bank Holding Companies : Supervisory Expectations and Range of Current Practice. August 2013.
- [86] Stress and Scenario Testing. Policy Statement 09/20, Feedback on CP08/24 and final rules. FSA, December 2009.
- [87] D. Marteau, P. Morand. Normes comptables et crise financière, propositions pour une réforme du système de réglutaion compatible. Rapport au Ministre de l'Economie, de l'Industrie et de l'Emploi.
- [88] Griffiths, R.B, Hurst,A.A., Sherman, S : *J. Maths. Phys.* II, 790 (1970).
- [89] K. Kitsukawa, S. Mori and M. Hisakado, Evaluation of tranche in securitization and Long-range Ising model, *physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 1 (2006), 191-206.

- 
- [90] Moussouris, John (1974). "Gibbs and Markov random systems with constraints". *Journal of Statistical Physics*. 10 (1) : 11–33.
- [91] M. Aizenman. Geometric analysis of  $\phi^4$  fields and Ising models. I, II. *Comm. Math. Phys.*, 86(1) :1–48, 1982.
- [92] R. B. Griffiths, C. A. Hurst and S. Sherman. Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field. *J. Mathematical Phys.*, Vol. 11, pp. 790–795, 1970.
- [93] H. Duminil-Copin. Random currents expansion of the Ising model Proceedings of the 7th European Congress of Mathematicians in Berlin (2016)
- [94] H. Duminil-Copin. Graphical representations of lattice spin models Book, Édition spartacus (2015)
- [95] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn, and J. Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Comm. Math. Phys.*, 22 :89–103, 1971.
- [96] R. B. Griffiths. Correlation in Ising ferromagnets I, II. *J. Math. Phys.*, 8 :478–489, 1967.
- [97] D. G. Kelly and S. Sherman. General Griffiths's inequality on correlation in Ising ferromagnets. *J. Math. Phys.*, 9 :466–484, 1968.
- [98] M. Aizenman, D. J. Barsky, and R. Fernandez. The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp. *J. Statist. Phys.*, 47(3-4) :343–374, 1987.
- [99] Oliver A. McBryan and Jay Rosen. Existence of the critical point in  $\phi^4$  field theory. *Comm. Math. Phys.*, 51(2) :97–105, 1976.
- [100] B. McCoy and T. T. Wu. *The Two-Dimensional Ising Model*. Harvard University Press, 1973.
- [101] H. Duminil-Copin, S. Goswami and A. Raoufi. Exponential decay of truncated correlations for the Ising model in any dimension for all but the critical temperature with. Preprint paper.
- [102] T. D. Lee and C. N. Yang. Statistical theory of equations of state and phase transitions. ii. lattice gas and ising model. *Phys. Rev.*, 87(3) :410–419, 1952.
- [103] Joel L. Lebowitz. GHS and other Inequalities. *Commun. math. Phys.* 35, 87—92 (1974)
- [104] S. Friedli and Y. Velenik. *Statistical Mechanics of Lattice Systems : a Concrete Mathematical Introduction*.
- [105] Andrew G Haldane : Rethinking the financial network. BIS Review 53/2009

- 
- [106] B. C. Arnold and D. Strauss. Pseudolikelihood estimation : some examples. *Sankhya : The Indian Journal of Statistics, Series B*, pages 233-243, 1991.
- [107] A. Hyvarinen. Consistency of pseudolikelihood estimation of fully visible Boltzmann machines. *Neural Computation*, 18(10) :2283-2292, 2006.
- [108] A. Mozeika, O. Dikmen, and J. Piili. Consistent inference of a general model using the pseudolikelihood method. *Phys. Rev. E*, 90(1) :010101, 2014.
- [109] J. Besag. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems. *J. R. Stat. Soc. B*, 36(2) :192-236, 1974.
- [110] M. Ekeberg, C. Lovkvist, Y. Lan, M. Weigt, and E. Aurell. Improved contact prediction in proteins : Using pseudolikelihoods to infer Potts models. *Phys. Rev. E*, 87(1) :012707, 2013.
- [111] D. H. Ackley, G. E. Hinton, and T. J. Sejnowski. A learning algorithm for Boltzmann machines. *Cognitive Science*, 9(1) :147-169, 1985.
- [112] HC Nguyen, R Zecchina, J Berg : Inverse statistical problems : from the inverse Ising problem to data science. *Advances in Physics*, 2017 - Taylor Francis
- [113] P. Ravikumar, Martin J. Wainwright and John D. Lafferty. High-Dimensional Ising model selection using  $\ell_1$ -regularized logistic regression. *The Annals of statistics* 2010, Vol. 38, No. 3, 1287-1319.
- [114] M Gordy, E Lutkebohmert. Granularity Adjustment for Regulatory Capital Assessment-*International Journal of Central Banking* 2013.
- [115] Studies on credit risk concentration : An overview of the issues and a synopsis of the results from the Research Task Force project. *Basel Committee on Banking Supervision*, November 2006.
- [116] K. Giesecke, S. Weber. Credit contagion and aggregate losses. *Journal of Economic Dynamics and Control* (2005).
- [117] Holley, Richard A. ; Liggett, Thomas M. (1975). "Ergodic Theorems for Weakly Interacting Infinite Systems and the Voter Model". *The Annals of Probability*. 3 (4) : 643–663. doi :10.1214/aop/1176996306.
- [118] D. Tasche. The art of PD curve calibration. *Journal of Credit Risk* 9 (4), 63-103.
- [119] D. Tasche. Estimating discriminatory power and PD curves when the number of defaults is small. Working paper, *Lloyds Banking Group*, 2009.
- [120] Anderson wj 1991 continuous time markov chains

- 
- [121] Robert A. Jarrow, D. Lando, Stuart M. Turnbull : A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spread. *Review of Financial Studies*, 1997, vol. 10, issue 2, 481-523
- [122] J. Keilson and A. Kester. Monotone matrices and monotone Markov processes. *Stochastic Processes and their Applications* Volume 5, Issue 3, July 1977, Pages 231-241.
- [123] Robert B. Israel Jeffrey S. Rosenthal Jason Z. Wei Finding Generators for Markov Chains via Empirical Transition Matrices, with Applications to Credit Ratings. *Mathematical Finance*, 11(2) : 245-265
- [124] A Kreinin, M Sidelnikova. Regularization Algorithms for Transition Matrices. *Algo Research Quarterly*, 2001.
- [125] Hai-Bo Yu. Stochastic monotonicity and comparability of Markov chains with block-monotone transition matrices and their applications to queueing systems. *Stochastic Models Journal* Volume 33, 2017.
- [126] M. Hughes and R. Werner. Choosing Markovian Credit Migration Matrices by Nonlinear Optimization. *Risks*, 2016.
- [127] Analyzing the Impact of Credit Migration in a Portfolio Setting. *Journal of Banking Finance*, 2011.
- [128] Norris, J. R., 1998. Markov chains. Cambridge University Press.
- [129] O. Aalen. Nonparametric Inference for a Family of Counting Processes. *The Annals of Statistics*. Volume 6, Number 4 (1978), 701-726.
- [130] Nelson, W. (1972). Theory and applications of hazard plotting for censored failure data, *Technometrics* 14, 945-965.
- [131] Tobin, J. (1958). Estimation of relationships for limited dependent variables. *Econometrica*.
- [132] Black, F. and Scholes, M. (1973). The valuation of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*.
- [133] Merton, R. (1974). On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*.
- [134] Breuer, T., Krenn, G., 1999. Stress Testing. Guidelines on Market Risk 5, Oesterreichische Nationalbank, Vienna.
- [135] Gouriéroux, C. and Tiomo, A. (2007). Risque de crédit : une approche avancée. *Economica*.
- [136] Studer, G., 1997. Maximum Loss for Measurement of Market Risk. Dissertation, ETH Zürich, Zürich.

- [137] Gouriéroux, C., Héam, J.C., and Monfort, A. : "Bilateral Exposures and Systemic Solvency Risk", *Canadian Journal of Economics*, 2012.
- [138] Sakata, A., Hisakado, M., Mori, S. (2007) Infectious Default Model with Recovery and Continuous Limits, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 76, No. 5.
- [139] C. Zhou. An analysis of default correlations and multiple defaults. *Review of financial studies*, 14(2) :555–576, 2001.
- [140] Schonbucher, P.J. (2006) Portfolio losses and the term-structure of loss transition rates : a new methodology for the pricing of portfolio credit derivatives, working paper, ETH Zurich.
- [141] Jarrow, R., Yu, F. (2001) Counterparty risk and the pricing of defaultable securities, *Journal of Finance* 56, 1765-1799.
- [142] Claudio Borio, Mathias Drehmann et Kostas Tsatsaronis, « Stress-testing macro stress testing : does it live up to expectations? », *BIS Working Papers*, Bâle, Banque des règlements internationaux, no 369, janvier 2012
- [143] R. Bertrand : Do “too big to fail” expectations boost large banks issuer ratings?" *Systemic Stability Section*. Swiss National Bank.
- [144] Sebastian C. Moenninghoff Axel Wieandt, 2011. "Too big to fail?! Leçons de la crise financière," *Revue d'Économie Financière*, Programme National Persée, vol. 101(1), pages 231-257.
- [145] BRI (2010a), « The Global Crisis and Financial Intermediation in Emerging Market Economies », *Papers*, no 54, décembre.
- [146] BRI (2010b), « Long-Term Issues in International Banking », *Committee on the Global Financial System*, *Papers*, no 41, juillet.
- [147] BRI (2010c), *Basel III : a Global Regulatory Framework for More Resilient Banks and Banking Systems*, décembre.
- [148] X. Freixas, B. Parigi, J.C. Rochet (2000), Systemic Risk, Interbank Relations and Liquidity Provision by the Central Bank, *Journal of Money Credit and Banking*, 32(3/2), pp 611-640.
- [149] R. Lagunoff, S. Schreft, (2001), A Model of Financial Fragility, *Journal of Economic Theory*, 99, pp 220-264.
- [150] F. Allen, D. Gale (2000), Financial Contagion, *Journal of Political Economy*, 108, pp 1-33.
- [151] S. Vivier-Lirimont, Réseau interbancaire et crise de liquidité. *Revue d'économie politique* 2006/4 (Vol. 116), pp 487-500.

- 
- [152] S. Vivier-Lirimont et A. Granik, Une mesure par simulations de l'efficacité de distribution de la liquidité dans les réseaux interbancaires. *Revue d'économie industrielle*, 132 | 4e trimestre 2010 : Varia, p. 85-118.
- [153] Lebowitz, J. L. (1972). Bounds on the correlations and analyticity properties of ferromagnetic Ising spin systems. *Comm. Math. Phys.*, 28(4) :313–321.
- [154] Kumar Joag-Dev and Frank Proschan. Negative Association of Random Variables with Applications. *The Annals of Statistics* Vol. 11, No. 1 (Mar., 1983), pp. 286-295 (10 pages)
- [155] Yu Miao, Wenfei Xu, Shanshan Chen Andre Adler. Some limit theorems for negatively associated random variables. *Proceedings - Mathematical Sciences* volume 124, pages447–456(2014).
- [156] Negative Association - Definition, Properties, and Applications. David Wajc.
- [157] L. Onsager. Crystal statistics, I. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, 65 :117–149, 1944.
- [158] Y. Higuchi. On the absence of non-translation invariant Gibbs states for the two-dimensional Ising model. In *Random fields*, Vol. I, II (Esztergom, 1979), volume 27 of *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, pages 517–534. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [159] M. Aizenman. Translation invariance and instability of phase coexistence in the two-dimensional Ising system. *Comm. Math. Phys.*, 73(1) :83–94, 1980.
- [160] The critical temperature for the Ising model on planar doubly periodic graphs with D. Cimasoni, *EJP* (2013).
- [161] H. A. Kramers and G. H. Wannier. Statistics of the two-dimensional ferromagnet. I. *Phys. Rev.* (2), 60 :252–262, 1941.
- [162] E. Ising. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeit. für Physik*, 31 :253–258, 1925.
- [163] R. E. Peierls. On Ising's ferromagnet model. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 32 :477–481, 1936.
- [164] M. Kac and J. C. Ward, A combinatorial solution of the two-dimensional Ising model. *Physic Review.*, vol. 88, pp. 1332-1337, Dec 1952.
- [165] Gourieroux, C., Laurent, J. P. et O. Scaillet (2000) : Sensitivity Analysis of Value-at-Risk, *Journal of Empirical Finance*, 7, 225-245.
- [166] Martin, R, et T. Wilde (2002) : Unsystematic Credit Risk, November, 123-128.
- [167] T. D. Schultz, D. C. Mattis, and E. H. Lieb. Two-Dimensional Ising model as soluble problem of many fermions. *Review of Modern Physics*. 36, 856 (1964)



## Risque de Crédit et Interdépendance

---

Cette thèse a pour objectif l'étude de certaines problématiques liées au risque de crédit. Ces problématiques se partagent deux thèmes principaux, à savoir la monotonie des matrices de transition, et la modélisation de l'interdépendance en risque de crédit. Le premier thème est motivé par l'idéalisation des matrices empiriques de transition pratiquée par les banques. Nous proposons dans cette thèse une solution optimale qui permet d'approcher une matrice empirique par une matrice monotone et ainsi réaliser une idéalisation de toute la matrice. Nous démontrons également certains résultats théoriques sur la stabilité de la monotonie sous deux types de transformations.

Le deuxième thème de la thèse concerne l'interdépendance en risque de crédit de manière générale, et nous étudions la contagion et sa propagation comme un cas particulier. L'idée consiste à voir un portefeuille de crédit comme étant un réseau dont les nœuds sont les entités du portefeuille connectées via des liens. Nous construisons donc un modèle graphique à champ de Markov capable de tenir compte à la fois des facteurs exogènes et des interactions entre les entités. Sous le formalisme de ce modèle, nous étudions plusieurs aspects d'interdépendance en risque de crédit, notamment l'apparition des phénomènes critiques, l'effet de la topologie du réseau sur les facteurs du risque et la propagation du risque. Nous avons pu apporter sur ces sujets des contributions théoriques en prouvant des théorèmes et des propriétés assez intéressantes, qui permettent de prédire le comportement du portefeuille sous certaines conditions. D'autre part, nous proposons également plusieurs façons de résoudre les problèmes de calcul et de calibration qui rendaient ce type de modèles difficiles d'utilisation en pratique.

---

**Mots clés :** Risque de crédit, Monotonie des matrices de transition, Stress-tests, Interdépendance et contagion, Champ de Markov, Modèle d'Ising.

---

## Credit Risk and Interdependence

---

The aim of this thesis is the study of some important problems in credit risk, namely the monotony of transition matrices and interdependence in credit portfolios. On the first topic, we provide a new way to idealise completely and optimally empirical transition matrices in a geometric fashion. We study the produced monotone matrices through the distance from their associated empirical matrices using historical data. We prove in addition some theoretical results on the stability of monotony under classical transformations.

On the study of interdependence, we introduce a Markov field model on a graphical formalism that takes into account exogenous factors and local interactions between the nodes that represents the firms of a credit portfolio. Our main idea is the introduction of relations that are functions describing the nature of the interaction between two firms. In that scheme, we study how risk parameters can be deformed under a type of relations, the topology of the considered network or a macroeconomic shock that can be local or global. Furthermore, we study numerically how critical phenomenon can arises in some sufficiently connected network configurations. We underline the role of this phenomenon in stress periods, and how contagion in that formalism can explain the observed cluster defaults in such periods. We prove many theoretical results on how risk can spread on certain class of networks, the explicit expression of loss distribution on regular networks and how the later can be used in the study of general large scale networks. We developed in addition some technics to overcome the limits that rise on large scale networks for calibration or default probability computing.

---

**Keywords :** Credit Risk, Transition matrix monotony, Stress-tests, Interdependence and contagion, Markov Fields, Ising model.

---

