



HAL
open science

Multifractalité des paquets d'ondes à la transition métal/isolant d'Anderson

Panayotis Akridas-Morel

► **To cite this version:**

Panayotis Akridas-Morel. Multifractalité des paquets d'ondes à la transition métal/isolant d'Anderson. Matière Condensée [cond-mat]. Sorbonne Université, 2020. Français. NNT : 2020SORUS260 . tel-03414934

HAL Id: tel-03414934

<https://theses.hal.science/tel-03414934>

Submitted on 4 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT SORBONNE UNIVERSITÉ

Spécialité : Physique

École doctorale n°564 : Physique en Île-de-France

réalisée

sous la direction de Dominique Delande

présentée par

Panayotis Akridas–Morel

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR

Sujet de la thèse :

Multifractalité des paquets d'ondes à la transition métal/isolant d'Anderson

soutenue publiquement le 8 décembre 2020

devant le jury composé de :

M. Nicolas Cherroret	Invité
M. Dominique Delande	Directeur de thèse
M. Jean-Claude Garreau	Examinateur
M. Bertrand Georgeot	Rapporteur
M ^{me} Annick Lesne	Présidente
M ^{me} Cécile Monthus	Examinatrice
M. Tommaso Roscilde	Rapporteur

Table des matières

1	Introduction	1
2	Désordre et localisation	5
2.1	Notion de désordre	6
2.1.1	Définition de quelques concepts fondamentaux	6
2.1.2	Grandeurs caractéristiques	10
2.1.3	Limite de la théorie semi-classique	11
2.2	Localisation d'Anderson à une dimension	13
2.2.1	Matrice de diffusion	13
2.2.2	Transmission et localisation à une dimension	15
2.2.3	Modèles de désordre	21
3	La transition d'Anderson	23
3.1	Transitions de phase et groupe de renormalisation	24
3.1.1	Généralités sur les transitions de phase	24
3.1.2	Échec du champ moyen et groupe de renormalisation	28
3.1.3	Le cas de la transition métal–isolant d'Anderson	31
3.2	Loi d'échelle à un paramètre	32
3.2.1	Loi d'échelle pour la conductance	33
3.2.2	Forme globale de la fonction de Callan–Symanzik	34
3.3	La question des fluctuations	37
3.3.1	À la recherche de la loi d'échelle à un paramètre	37
3.3.2	La loi d'échelle à un paramètre retrouvée	40
3.4	Classes d'universalité	40
3.5	Théorie auto-cohérente de Vollhardt et Wölfle	41
3.5.1	Cadre théorique : propagateur et fonction de Green	41
3.5.2	Fonction de Green moyennée sur les réalisations du désordre	42
3.5.3	Théorie auto-cohérente	43

4	Introduction au concept de multifractalité	45
4.1	Structure fractale et invariance d'échelle	46
4.2	Quelques notions sur les fractals	48
4.2.1	Invariance d'échelle et dimension fractale	48
4.2.2	Dimension fractale : généralisation	49
4.2.3	Irrégularité	50
4.2.4	Aspects pratiques	50
4.3	Multifractalité	51
4.3.1	Approche intuitive : les diamants sur Terre	51
4.3.2	Exemple mathématique	52
4.3.3	Analyse multifractale : formalisme général	58
4.3.4	Synthèse	66
4.4	Multifractalité et modèle d'Anderson	67
4.4.1	Prédictions théoriques : approximation parabolique et relation de symétrie	67
4.4.2	Observations numériques et expérimentales	69
5	Kicked rotor et localisation d'Anderson	73
5.1	Dynamique classique du kicked rotor	75
5.2	Dynamique quantique	76
5.2.1	Opérateur d'évolution	77
5.2.2	Périodicité spatiale et théorème de Bloch	77
5.2.3	Simulation numérique	79
5.2.4	Localisation dynamique	79
5.3	Transition d'Anderson et kicked rotor quasi périodique (KRQP)	84
5.3.1	Kicked rotor quasi périodique à trois fréquences	85
5.3.2	Kicked pseudo-rotor	87
5.3.3	Le problème du « dépliement-repliement »	91
5.3.4	Interprétation physique d'une simulation du KRQP	92
5.3.5	Lien avec l'expérience	94
6	Multifractalité des fonctions d'onde du KRQP	95
6.1	Pertinence et spécificités de l'analyse multifractale pour le KRQP	96
6.1.1	Conséquence de l'étude des paquets d'ondes	96
6.1.2	Le KRQP : un système unidimensionnel	97
6.2	Théorie auto-cohérente et anisotropie	98
6.2.1	Rappel sur la théorie auto-cohérente isotrope	99
6.2.2	Théorie auto-cohérente isotrope en dimension trois	99
6.2.3	Rôle de l'anisotropie	103
6.3	Théorie auto-cohérente et KRQP	105
6.3.1	Théorie auto-cohérente pour le kicked pseudo-rotor	105

6.3.2	Prédiction du propagateur en intensité du KRQP	106
6.4	Déviaton à la théorie auto-cohérente et multifractalité	107
6.4.1	Le « petit pic »	108
6.4.2	Loi d'échelle de Wegner et multifractalité	108
6.4.3	Diagramme de Chalker	113
6.5	Analyse globale de la multifractalité : dynamique critique du KRQP	118
6.6	Analyse multifractale des paquets d'ondes du KRQP	122
6.6.1	Méthodologie	122
6.6.2	Premiers résultats	126
6.7	Validité du diagramme de Chalker	130
6.7.1	Méthode : analyse multifractale fine	131
6.7.2	Variation de la taille des paquets d'ondes analysés	131
6.7.3	Évolution de la multifractalité avec le temps au point critique	136
6.8	Conclusion	137
7	Paquets d'ondes multifractals	143
7.1	Outils pour l'étude du propagateur en intensité	145
7.1.1	Propriétés du propagateur en intensité	145
7.1.2	Outils pour les transformées de Fourier	147
7.2	Généralités sur le propagateur replié	148
7.2.1	Démarche générale	148
7.2.2	Une anisotropie sans influence	150
7.3	Région non multifractale : fonction d'Airy	150
7.3.1	Comportement à petite distance et aux temps longs	151
7.3.2	Résultat exact : fonction d'Airy	153
7.3.3	Le propagateur comme solution d'une équation de diffusion fractionnaire	156
7.4	Région multifractale : fonction de Fox	158
7.4.1	Comportement à petite distance et aux temps longs	158
7.4.2	Détermination exacte du propagateur	161
7.5	Calcul des moments	162
7.6	Synthèse des prédictions théoriques	163
7.6.1	Expressions utilisées pour la suite	164
7.6.2	Comportement des deux solutions à l'origine	164
7.7	Détermination numérique de D_2	164
7.7.1	Domaine de validité du propagateur	165
7.7.2	Première méthode	165
7.7.3	Seconde méthode	166
7.8	Conclusion sur la détermination de D_2	170
8	Conclusion	171

A	Fonctions spéciales	175
A.1	Fonction d’Airy	175
A.2	Fonctions de Mittag-Leffler	175
A.3	Fonctions de Wright	177
A.3.1	Définition	177
A.3.2	Lien avec la fonction d’Airy	177
A.4	Fonctions de Fox	178
A.5	Fonctions de Fox utilisées dans ce manuscrit	179
A.5.1	Fonction de Fox pour la région [2] non multifractale	180
A.5.2	Lien entre la fonction de Fox et la fonction d’Airy	180
A.5.3	Fonction de Fox pour la région [5] multifractale	181
B	Équations de diffusion fractionnaires en espace et en temps	182
B.1	Opérateurs fractionnaires	183
B.1.1	Opérateur pour le temps	183
B.1.2	Dérivée fractionnaire en espace de Riesz–Feller	185
B.2	Équation de diffusion fractionnaire	186
B.2.1	Transformées de Laplace et Fourier de diffusion fractionnaire	186
B.2.2	Solution générale	187
B.3	Cas du propagateur en intensité	187
	Bibliographie	189

Table des figures

2.1	Oscillations de Bloch d’atomes de césium	12
2.2	Représentation schématique de la matrice de diffusion	14
2.3	Chaîne unidimensionnelle d’impuretés	16
3.1	Diagramme de phase pression–température de l’eau.	25
3.2	Opalescence critique	27
3.3	Loi d’échelle à un paramètre	36
4.1	Fonction de Weierstrass	47
4.2	Agrandissement de la fonction de Weierstrass	47
4.3	Exemple mathématique d’une mesure multifractale	53
4.4	Exposant de masse τ pour l’exemple mathématique	55
4.5	Spectre de multifractalité pour la mesure binomiale	57
4.6	Lissage de la mesure μ à l’intérieur d’un carré	59
4.7	Interprétation d’un spectre de multifractalité	65
4.8	États propres multifractals	68
4.9	Comparaison de deux spectres de multifractalité à la transition d’Anderson .	71
5.1	Comparaison des dynamiques classique et quantique du kicked rotor	85
5.2	Densité de probabilité moyenne du kicked rotor	86
5.3	Modulation de la force des kicks pour un système quasi périodique	87
5.4	<i>Mapping</i> entre le KRQP et le kicked pseudo-rotor	89
6.1	Résolution numérique de l’équation auto-cohérente	102
6.2	Comparaison des propagateurs en intensité du KRQP à trois fréquences obtenus par une simulation numérique, une expérience et la prédiction théorique . . .	107
6.3	Simulation numérique de l’évolution temporelle du KRQP	109
6.4	Simulation numérique de l’évolution temporelle du KRQP après un changement d’échelle	110
6.5	Diagramme de Chalker	114
6.6	Diagramme de Chalker simplifié	118

6.7	Moments de l'impulsion	119
6.8	Coefficients directeurs	120
6.9	Pertinence de l'analyse des moments de l'impulsion	121
6.10	Logarithme du taux de participation inverse généralisé	125
6.11	Comparaison de la moyenne d'ensemble et de la moyenne géométrique	128
6.12	Spectre de multifractalité du KRQP au point critique	129
6.13	Test de la parabolicité du spectre de multifractalité	130
6.14	Étude de la multifractalité pour le KRQP dans la phase isolante	133
6.15	Analyse multifractale fine au point critique du KRQP	134
6.16	Analyse multifractale fine dans le régime métallique	135
6.17	Analyse multifractale fine dans les régimes critique et métallique	137
6.18	Évolution de la multifractalité due aux fluctuations des paquets d'ondes en fonction de leur largeur	138
6.19	Agrandissement de la figure 6.18	139
6.20	Évolution des fluctuations avec le temps au point critique	140
6.21	Diagramme de Chalker établi pour le KRQP	141
7.1	Étapes de calcul pour obtenir le propagateur unidimensionnel après repliement	149
7.2	Contour d'intégration pour la transformée de Fourier du propagateur dans la région [2] non multifractale	154
7.3	Déformation du contour d'intégration pour la transformée de Fourier du pro- pagateur dans la région [2] non multifractale	155
7.4	Comparaison simulation/ <i>fit</i> pour la méthode 1	167
7.5	Fonction servant à interpoler les régions auto-cohérente et multifractale	168
7.6	Comparaison simulation/ <i>fit</i> pour la méthode 2	169

Remerciements

La tradition voudrait que je remercie l'ensemble des personnes ayant contribué de près ou de loin à ces travaux de recherche. J'estime que pour une thèse au long court semée d'embûches scientifiques et personnelles, l'exercice des remerciements devient impossible. Je m'excuse donc par avance si tout le monde n'est pas explicitement remercié.

Je tiens tout d'abord à remercier l'ensemble des membres du jury qui sans exception a lu avec attention le manuscrit. Après un travail d'aussi longue durée la considération apportée à mon travail m'a beaucoup touché.

Sans l'aide d'Olivier Giraud ce travail aurait très certainement pris une tournure différente et les résultats scientifiques pertinents seraient bien moins importants.

Nicolas Cherroret a également joué un rôle crucial durant cette thèse. Son intérêt pour mon sujet et ses nombreuses questions m'ont permis d'acquérir plus de rigueur et de soulever des zones d'ombres. Sa relecture attentive et pointilleuse du manuscrit m'ont également beaucoup apporté.

Il est également d'usage de remercier son directeur de thèse et ce peu importe le bon ou mauvais déroulement de ces années de recherche. À cette politesse je préfère peindre avec sincérité la relation qui s'est établie entre Dominique Delande et moi-même.

La première qualité que j'ai su apprécier chez Dominique est sa grande disponibilité : il a toujours été présent pour me guider dans mes recherches et m'aider à la moindre difficulté scientifique. Pour autant la collaboration a pu être difficile par moments : je n'ai sans doute pas suffisamment suivi ses conseils et bien souvent je redoutais de discuter avec lui par peur de dire des bêtises ou de présenter des résultats faux qui lui sauteraient aux yeux. Je pourrais donc difficilement dire que je suis « né scientifiquement » durant la thèse et le fossé intellectuel qui me séparait de Dominique m'a semblé s'agrandir jour après jour.

Malgré cet échec relatif, les nombreuses discussions avec Dominique n'ont pas été vaines puisqu'il m'a réconcilié avec la programmation et m'a appris à faire de la physique et non plus simplement des calculs. Bref, à son contact la formule « science sans conscience n'est que ruine de l'âme » a pris tout son sens.

Il existe beaucoup d'excellents physiciens mais rares sont ceux qui, comme Dominique, font autorité dans leur domaine et savent faire preuve d'autant d'humanité. Sans ces qualités, mon travail n'aurait jamais abouti.

Chapitre 1

Introduction

EN 1905, Einstein [Ein05] expliquait théoriquement les observations de Brown [Bro66] sur le mouvement aléatoire d'une particule de pollen dans l'eau, phénomène désormais plus connu sous le nom de mouvement brownien (pour plus de précisions à la fois historiques et physiques sur le sujet, nous renvoyons le lecteur à la référence [Dup07]). *A priori*, la trajectoire du pollen devrait être balistique, mais la présence d'un grand nombre de molécules d'eau autour du pollen rend son mouvement diffusif. Pour être plus précis, cela signifie que si l'on note $x(t)$ la position de la particule à l'instant t , alors aux temps longs — c'est-à-dire le temps typique d'observation de l'œil humain dans un microscope — l'écart quadratique de la position, $(\Delta x)^2(t) \doteq [x(t) - x(0)]^2$, suit en moyenne la loi $\langle (\Delta x)^2 \rangle_t = 2Dt$, où D est la constante de diffusion.

L'explication du mouvement brownien constitue une avancée importante en physique. En effet, pour expliquer ce phénomène, Einstein a abandonné la description déterministe du mouvement de la particule à l'aide de la mécanique classique pour lui préférer une approche probabiliste. Bien que les prédictions d'Einstein soient correctes, le raisonnement probabiliste est déconcertant puisque normalement l'approche par les équations de Hamilton devrait nous permettre d'expliquer le mouvement de la particule de pollen. En fait, même si nous étions en mesure de résoudre les équations décrivant la position et la vitesse de la particule de pollen et des différentes molécules d'eau (qui sont au nombre de 10^{23} environ), les travaux initiés par Poincaré [Che12] sur la dynamique d'un système composé de N corps permettent de penser que le pollen dans l'eau est un système chaotique. Soulignons qu'un tel système est par construction déterministe mais qu'une variation même infime de la position et de la vitesse des molécules d'eau aboutit à une trajectoire totalement différente du pollen. Le caractère chaotique de ce système et le fait qu'il possède un grand nombre de degrés de liberté nous permettent de voir le mouvement brownien de manière probabiliste, c'est-à-dire comme une particule se déplaçant dans un potentiel désordonné et fluctuant dans le temps. Pour un potentiel désordonné donné, on perd le caractère diffusif du mouvement puisque la particule suit une unique trajectoire déterministe sur laquelle $(\Delta x)^2(t)$ fluctue de manière considérable.

Si on moyenne sur une famille de trajectoires initialement localisées près de l'origine et pour peu que la dynamique soit suffisamment chaotique, on retrouve une dynamique de diffusion chaotique aux temps longs. La même caractéristique s'obtient en réalisant une moyenne de configuration sur les réalisations du désordre. Cette moyenne signifie qu'en résolvant les équations de Hamilton N fois pour un potentiel choisi aléatoirement à chaque réalisation, on retrouve en moyenne un mouvement diffusif.

Que se passe-t-il si, au lieu d'observer une particule classique dans un environnement désordonné, on regarde une particule quantique ? C'est la question que s'est posée Anderson [And58] en 1958 dans le cas d'un électron se propageant dans un désordre statique. On pourrait penser que l'électron aura un mouvement diffusif. En réalité, Anderson a montré qu'à trois dimensions, en augmentant petit à petit l'intensité du désordre, il s'opère une transition entre une phase métallique où les états propres de l'électron sont délocalisés, et une phase isolante où ses états propres sont localisés. Dans des termes moins techniques, pour de « faibles désordres », on observera que l'électron peut se déplacer — comme une particule classique — dans l'ensemble du milieu de façon diffusive, alors que pour un système suffisamment désordonné, l'électron ne pourra visiter qu'une petite partie du milieu. La phase localisée¹ est le résultat des interférences quantiques qui inhibent la diffusion et vont en quelque sorte confiner l'électron dans une région de taille ξ , appelée longueur de localisation. Le système considéré étant constitué d'un seul électron se déplaçant dans un système à température nulle, ce passage d'un état métallique à un état isolant constitue un exemple de transition de phase quantique appelée communément transition d'Anderson. En plus de l'intensité du désordre, ce phénomène est gouverné par l'énergie E de l'électron. On peut donc agir indépendamment sur deux paramètres du système pour observer la transition. Dans un système de physique du solide, il est difficile de contrôler précisément le désordre, en revanche on peut agir sur l'énergie de Fermi de l'électron. Pour une intensité fixée de désordre, on peut passer d'un isolant à un métal lorsque l'énergie de Fermi atteint la valeur critique E_c , appelée seuil de mobilité (*mobility edge* en anglais). Les travaux théoriques, numériques et expérimentaux permettent de conclure que la transition d'Anderson est une transition continue caractérisée par une divergence en loi de puissance de la longueur de localisation : $\xi \sim (E_c - E)^{-\nu}$, où ν est un exposant, souvent appelé **exposant critique**, qui caractérise cette classe de transition.

À l'approche du point critique d'une transition de phase, un système classique présente une structure fractale, c'est-à-dire qu'il est statistiquement auto-similaire. En d'autres termes, la simple observation du système ne permet pas de savoir si on le regarde à une petite ou à une grande échelle. Cette géométrie fractale se retrouve d'ailleurs sur la trajectoire de la particule de pollen. On peut se demander si, comme dans le cas classique, des structures fractales sont présentes pour un système désordonné quantique, et sur quelles grandeurs peuvent se manifester de telles propriétés. Il a été montré qu'à la transition d'Anderson les

1. Dans la suite de ce manuscrit et par abus de langage, nous parlerons souvent de « phase délocalisée » pour désigner en réalité la phase métallique, et de « phase localisée » pour désigner la phase isolante.

fonctions d'ondes sont multifractales. Le concept de multifractalité étant assez complexe, il sera expliqué plus en détail au fil de ce manuscrit. Les deux idées à retenir dans un premier temps sont que premièrement, à la différence d'une structure fractale caractérisée par une seule dimension, une fonction d'onde multifractale est décrite par un ensemble continu de dimensions ; deuxièmement, le concept de multifractalité est un outil adapté à la description des grandes fluctuations statistiques des fonctions d'onde.

L'objet principal de cette thèse sera de rendre compte de la multifractalité des fonctions d'onde à la transition d'Anderson, non pas en étudiant directement un système à proprement parler désordonné mais à l'aide d'un système quantique équivalent appelé *kicked rotor* (rotateur pulsé en français). Le *kicked rotor* est particulièrement intéressant car il permet une observation relativement aisée du phénomène de localisation. Par ailleurs, avec des modifications modérées des paramètres du système, il rend aussi possible l'étude et l'observation de la transition d'Anderson.

Nous avons conscience que, dès l'introduction, nous avons introduit de nouveaux concepts et discuté de phénomènes assez différents et complexes. Pour l'instant, nous n'avons donné de références bibliographiques qu'à des notions qui ne seront pas développées plus en avant dans ce manuscrit. Par ailleurs, le sujet de cette thèse fait appel à des domaines assez divers allant du chaos quantique à la multifractalité, en passant par la localisation d'Anderson. Chacun de ces sujets, esquissés dans l'introduction, fait l'objet de nombreux travaux. Pour des raisons évidentes, tous ces sujets ne pourront pas être développés en détail. Néanmoins, pour des raisons pédagogiques, il nous a semblé nécessaire d'expliquer les phénomènes mis en jeu, et de souligner les liens entre la transition d'Anderson et les autres transitions de phase. Ainsi, après avoir introduit le phénomène de localisation d'Anderson dans le chapitre 2, puis la transition d'Anderson dans le chapitre 3, nous détaillerons davantage le concept de multifractalité dans le chapitre 4 qui n'évoquera que très peu les phénomènes physiques qui nous intéressent pour la suite de ce manuscrit. Ce choix est volontaire, la multifractalité se révèle suffisamment complexe comme sujet pour mériter qu'on s'y attarde un peu plus. En dédiant un chapitre à cette notion, le lecteur non-initié pourra ainsi avoir une vision relativement détaillée du sujet et, qui plus est, aborder les différents concepts sous un angle différent de celui, assez restreint, de la multifractalité à la transition d'Anderson. Quant au lecteur averti, il pourra ne pas lire ce chapitre. Nous poursuivrons le manuscrit avec le chapitre 5, dans lequel nous expliquerons comment il est possible d'étudier la localisation et la transition d'Anderson à l'aide du *kicked rotor*. Dans le chapitre 6 nous présenterons alors une application de l'analyse multifractale au cas du *kicked rotor*, puis, dans le chapitre 7, nous verrons comment extraire l'essentiel de l'information sur la multifractalité de manière relativement simple.

Chapitre 2

Désordre et localisation

Sommaire

2.1	Notion de désordre	6
2.1.1	Définition de quelques concepts fondamentaux	6
2.1.2	Grandeurs caractéristiques	10
2.1.3	Limite de la théorie semi-classique	11
2.2	Localisation d’Anderson à une dimension	13
2.2.1	Matrice de diffusion	13
2.2.2	Transmission et localisation à une dimension	15
2.2.3	Modèles de désordre	21

LA PHYSIQUE des systèmes désordonnés est un sujet vaste allant de l’étude des noyaux d’atomes complexes au trafic routier, en passant par le modèle d’Ising. Un cas particulier qui va nous intéresser dans ce chapitre est celui des systèmes désordonnés électroniques qui ont vu un regain d’intérêt au XX^e siècle s’expliquant par les avancées dans le domaine de la physique mésoscopique. Même si nous allons revenir sur le terme « mésoscopique » dans ce chapitre, donnons-en une première définition. La physique mésoscopique recouvre les phénomènes où les interférences quantiques sont importantes, c’est-à-dire pour lesquels on ne peut plus négliger le caractère ondulatoire de la matière. L’émergence de ce domaine de la physique a permis l’observation de phénomènes surprenants tels que l’effet Aharonov–Bohm [AB59; Web+85], voire inattendus avec les fluctuations universelles de conductance [LSF87] et les effets Hall quantiques [KDP80; TSG82; Lau83].

Parmi ces phénomènes, la localisation d’Anderson est sans doute l’un de ceux qui a connu ces dernières années les plus grandes avancées expérimentales grâce aux atomes froids. En effet, ceux-ci permettent de reproduire les systèmes mésoscopiques de physique du solide mais souvent avec un meilleur contrôle des paramètres intervenants dans le système.

Après avoir introduit quelques notions sur les systèmes désordonnés, le principal objet de ce chapitre sera d'expliquer la localisation d'Anderson. Comme nous allons le voir, ce phénomène repose sur la nature ondulatoire des électrons, et est donc observable pour tout type d'onde. Par souci de clarté, nous restreindrons la discussion aux seuls électrons dans les solides et renvoyons le lecteur aux références [AM04] et [She06] pour un exposé plus général.

2.1 Notion de désordre

2.1.1 Définition de quelques concepts fondamentaux

Dans les deux parties suivantes, nous souhaiterions revenir sur deux concepts qui forment la clef de voûte de la physique des systèmes désordonnés : la notion de désordre et celle de moyenne.

Notion de désordre

La notion de désordre concerne un grand nombre de systèmes : un gaz est plus désordonné qu'un liquide, qui est lui-même plus désordonné qu'un solide. Ayant fait le choix de restreindre la discussion aux électrons, nous regarderons le concept de désordre dans les solides ou plus exactement les cristaux présentant des défauts.

Un solide parfaitement ordonné peut être vu comme une mosaïque, c'est-à-dire qu'il est caractérisé par une double régularité. La première est dite **structurelle** parce qu'elle concerne la structure chimique du matériau idéalisé : on considère que le solide est constitué d'un seul groupement d'atomes répété à l'infini. La seconde régularité est qualifiée de **géométrique** car elle est relative à la distance entre deux groupements d'atomes. En définitive, cet ordre géométrique est caractérisé par le réseau du cristal qui spécifie quelle distance sépare les groupements d'atomes dans les trois directions de l'espace. En poursuivant le parallèle avec une mosaïque, la régularité structurelle signifie que le motif sur les tesselles est toujours le même, tandis que la régularité géométrique signifie que toutes les tesselles sont arrangées de manière régulière dans l'espace.

On peut donc introduire du désordre soit en changeant sur certains sites plus ou moins nombreux le type d'atomes présents (on parle alors de « défaut ponctuel »), soit en brisant les symétries du solide (on parle alors de « défaut géométrique »). Exposé de cette façon, il pourrait sembler compliqué d'obtenir un solide désordonné. En réalité c'est le contraire qui se produit : aucun solide réel n'est parfaitement ordonné. Les solides usuels comportent toujours des impuretés : certaines ajoutées intentionnellement pour modifier les propriétés physiques du matériau — comme dans le cas des semi-conducteurs dopés ou des alliages — et d'autres présentes naturellement.

Deux échantillons solides distincts présentent des désordres microscopiquement différents. Pourtant, il arrive fréquemment que des quantités macroscopiques, comme par exemple la

conductance électrique d'un échantillon, soient très proches pour des désordres microscopiquement différents, et ne dépendent que de quantités macroscopiques, comme la concentration d'impuretés. Il est tentant de vouloir décrire globalement l'ensemble de ces configurations de désordre macroscopiquement équivalentes, mais microscopiquement différentes. On choisit alors d'ignorer les détails microscopiques pour se concentrer sur les propriétés statistiques du désordre, que l'on caractérisera par diverses fonctions de corrélation. Deux configurations de désordre statistiquement équivalentes seront appelées deux **réalisations**. Tout l'enjeu de la physique statistique est de décrire ce qui dépend de la réalisation du désordre et ce qui n'en dépend pas, ou peu.

Notion de moyenne

Commençons par nous poser une question assez simple mais néanmoins essentielle : que signifie, dans le contexte des systèmes désordonnés, que l'observable X a pour valeur x ? Plus précisément, si je répète l'expérience, vais-je toujours mesurer **en moyenne** la même valeur ? Et, finalement, quel sens donner à la notion de moyenne ?

Ces différentes questions sont au premier abord relativement basiques, mais il nous a semblé essentiel de revenir dessus, car, comme nous le verrons aux chapitres 4 et 6, l'analyse multifractale consiste à pousser plus loin l'analyse statistique des observables.

On peut voir la mesure d'une observable X dans un système physique comme une suite (x_n) de N variables aléatoires. Pour les systèmes désordonnés, ces mesures peuvent avoir lieu en un même point du système mais pour différents temps, en différents endroits de l'échantillon au même instant, ou encore sur différentes réalisations du désordre. Les (x_n) peuvent être indépendants c'est-à-dire que, par exemple, la probabilité que la valeur x_2 soit mesurée est indépendante du fait que la valeur x_1 ait été mesurée précédemment. Dans le cas contraire, nous dirons que les (x_n) sont corrélées. Dans un système désordonné, N mesures de l'observable X aboutiront à N valeurs différentes. Pour tirer une information de cette suite de mesures, on représente la densité de probabilité p ou, dans le cas discret, l'histogramme (normalisé). Dans les cas « usuels », la densité de probabilité caractérise totalement la suite (x_n) . Comme nous allons le voir dans la suite, cette distribution de probabilité contient parfois trop d'informations, dans le sens où seuls deux paramètres suffisent à caractériser les mesures. Ces deux paramètres sont la valeur moyenne \bar{x} (ou espérance pour être plus précis)

$$\bar{x} \doteq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

et la variance

$$V \doteq \sigma^2 \doteq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2,$$

où σ désigne l'écart-type.

Lors d'une expérience ou d'une simulation numérique, on se contente généralement de donner la valeur moyenne et l'écart-type. Ceci se justifie par le théorème central limite qui nous dit que si (x_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, de moyenne μ et de variance σ^2 **finie**, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{S_N - N\mu}{\sqrt{N\sigma^2}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

où $S_N = x_1 + \dots + x_N$ et $P(a \leq x \leq b)$ désigne la probabilité pour que la variable aléatoire X prenne une valeur x comprise entre les réels a et b . Il s'agit d'une version « simplifiée » de ce théorème puisque nous n'avons pas réellement défini la notion de convergence ici. Pour un exposé plus rigoureux, nous renvoyons à la référence [App08].

Ce théorème signifie que, lorsque l'on répète la mesure de l'observable X , la distribution de la nouvelle variable aléatoire $y_N \doteq \sqrt{N} \left(\frac{1}{N}S_N - \mu\right)$ tend (dans la limite d'un grand nombre de mesures) vers une distribution normale de moyenne nulle et de variance σ^2 . Pour rappel, la distribution de la loi normale, également appelée gaussienne, de moyenne μ et variance σ^2 est :

$$p_{\text{normale}}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (2.1)$$

Une particularité de cette loi normale est qu'il suffit de deux paramètres, à savoir la moyenne et la variance, pour totalement la caractériser. Ainsi, lorsque les hypothèses du théorème central limite sont vérifiées, la connaissance de ces deux grandeurs suffit à comprendre les phénomènes physiques mis en jeu dans le système étudié. Ceci est cependant loin d'être toujours le cas. Par exemple, une variable aléatoire qui suit une loi de Cauchy–Lorentz ne permet pas d'appliquer le théorème central limite puisque pour cette loi la variance n'est pas définie.

Moyenne et valeur la plus probable

Une dernière notion essentielle dans la physique des systèmes désordonnés est celle de **valeur la plus probable** qui correspond au maximum de la distribution de probabilité. En d'autres termes, il s'agit de la valeur qui a le plus de chance d'être mesurée au cours d'une expérience ou d'une simulation. De part l'utilisation importante du théorème central limite, cette notion est souvent éclipsée car, pour la loi normale, la valeur la plus probable et la valeur moyenne sont égales.

Cette distinction est apparente dans la loi log-normale, dont la distribution est donnée par

$$\tilde{p}_{\text{LN}}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma_{\text{LN}}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu_{\text{LN}})^2}{2\sigma_{\text{LN}}^2}\right], \quad (2.2)$$

où μ_{LN} est la moyenne de la variable aléatoire X et σ_{LN} son écart-type. Pour cette loi, la valeur moyenne est donnée par $\langle X \rangle = \exp(\mu_{\text{LN}} + \sigma_{\text{LN}}^2/2)$ alors que la valeur la plus probable est $X_{\text{m}} = \exp(\mu_{\text{LN}} - \sigma_{\text{LN}}^2)$. Ainsi, dès que $\sigma_{\text{LN}}^2 \gg 1$, la différence entre valeur moyenne et valeur la plus probable est significative.

Une autre forme de cette distribution que nous utiliserons plus loin fait appel à la variable $\ln x$. Dans ce cas, la distribution de $\ln x$ est normale et s'écrit :

$$p_{\text{LN}}(\ln x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2.3)$$

où, cette fois, μ désigne la moyenne de $\ln x$ et σ son écart-type.

De manière plus générale, on peut distinguer trois comportements sous l'effet d'une moyenne sur le désordre d'une observable dans la limite thermodynamique [Luc92] :

- les observables **auto-moyennantes**, pour lesquelles les valeurs mesurées tendent vers une limite notée $\langle x \rangle$ dans la suite, et dont la variance relative tend vers zéro. Ce cas est un prolongement du théorème central limite.
- la **convergence en loi** : la densité de probabilité tend vers une loi limite différente d'une gaussienne ou d'une distribution de Dirac.
- le cas où l'observable possède une **loi large**. Dans ce cas, les fluctuations relatives croissent sans limite avec la taille du système, ce qui signifie en particulier que la valeur la plus probable peut être différente de la valeur moyenne puisque celle-ci peut être « dominée par des configurations très improbables du désordre » [Luc92]. Par exemple, c'est le cas d'un produit de variables aléatoires gaussiennes.

Désordre et moyenne dans un système physique

La notion de moyenne dans le contexte des simulations numériques et dans celui des expériences peut différer. En effet, au cours d'une simulation il est possible de mesurer une observable pour une configuration précise et reproductible du désordre. Dans le cas d'une expérience, la moyenne sur le désordre est difficile à contrôler. Dans la plupart des cas, un moyennage peut même être imposé par les conditions de l'expérience. Par exemple, le système peut être excité dans une superposition d'états dont l'évolution est indépendante et dont les contributions à l'observable étudiée vont s'ajouter comme dans le cas de l'évolution des paquets d'ondes dans les systèmes atomiques désordonnés. Le système de détection peut également induire un moyennage automatique du désordre. C'est par exemple le cas lorsque les diffuseurs sont en mouvement et que la détection se fait sur un temps long à l'échelle de ce mouvement. Enfin, pour des diffuseurs statiques enfin, une résolution spatiale imparfaite du système de détection peut aussi conduire à un moyennage.

Une autre difficulté concerne le contrôle du désordre dans un système physique. En physique du solide, il est possible de varier la concentration d'impuretés d'un échantillon,

mais les propriétés statistiques précises du désordre sont rarement connues. C'est l'une des raisons pour laquelle, ces dernières années, beaucoup d'expériences sur les systèmes quantiques désordonnés ont tendance à être effectuées sur des gaz atomiques (ultra-)froids plutôt que sur des échantillons solides. Dans ces systèmes, les paramètres qui caractérisent la statistique du désordre sont en général mieux contrôlés.

Notons pour terminer que pour observer *stricto sensu* une transition de phase telle que décrite dans l'introduction 1, il est nécessaire de se placer dans la limite thermodynamique où le nombre de particules N_p et le volume V du système tendent vers l'infini, en conservant le rapport N_p/V constant. Bien que cette limite théorique soit inatteignable lors d'une simulation numérique ou d'une expérience, en pratique, on utilise une procédure dite de *finite size scaling* qui permet en quelque sorte de corriger l'erreur due à la taille finie du système.

2.1.2 Grandeurs caractéristiques

Intéressons-nous maintenant à la propagation des électrons dans les métaux désordonnés. Comme expliqué dans l'introduction de ce chapitre, les phénomènes dus à la nature ondulatoire des électrons, et en particulier la localisation d'Anderson, ne sont observables que dans le régime dit mésoscopique.

Pour définir ce régime, il est nécessaire d'introduire un certain nombre de grandeurs caractéristiques. Certaines de ces grandeurs sont intrinsèques, c'est-à-dire indépendantes de la présence de désordre : il s'agit de la longueur d'onde de Fermi λ_F (de l'ordre de l'Ångström), qui n'est autre que la longueur d'onde d'un électron de la surface de Fermi, et la taille L du système. Par ailleurs, il existe trois autres grandeurs importantes dans ce type de système, qui elles dépendent du désordre : le libre parcours moyen élastique ℓ , le libre parcours moyen de transport ℓ_B et la longueur de cohérence de phase L_ϕ .

Le **libre parcours moyen élastique** représente physiquement la distance moyenne parcourue par un électron avant que celui-ci ne soit diffusé par une impureté du solide. Cette longueur dépend des détails microscopiques du désordre — taille des diffuseurs, fonctions de corrélation du potentiel de désordre, etc. Cependant, dans un milieu dilué, c'est-à-dire tel que $n^{-1/3} \gg \sqrt{\sigma_{\text{eff}}}$ où σ_{eff} est la section efficace des diffuseurs et n leur densité, on peut dériver une formule donnant ℓ en fonction des détails microscopiques du désordre [AM04] :

$$\ell = \frac{1}{n\sigma_{\text{eff}}}. \quad (2.4)$$

Une autre longueur caractéristique, qui est parfois confondue avec la précédente, est le **libre parcours moyen de transport** ℓ_B , où l'indice B fait référence à Boltzmann. Physiquement, elle caractérise la distance après laquelle l'onde a oublié sa direction initiale de propagation. Cette longueur peut être plus petite, égale ou plus grande que le libre parcours moyen élastique. Très souvent, la diffusion se fait préférentiellement vers l'avant, ce qui fait que plusieurs diffusions sont nécessaires pour perdre la mémoire de la direction initiale de

propagation ; le libre parcours moyen de transport est alors plus grand que le libre parcours moyen élastique. On pourra trouver une définition plus précise dans la référence [AM04]. Cette longueur caractéristique a toute son importance puisqu'elle permet de remonter à la constante de diffusion D_B par la relation :

$$D_B = \frac{v_F \ell_B}{d}, \quad (2.5)$$

où v_F est la vitesse des électrons au niveau de Fermi et d la dimension du système. La relation (2.5) découle d'une équation de Boltzmann qui, dans l'approximation d'un milieu dilué, aux temps longs et aux distances grandes devant le libre parcours moyen de transport, prend la forme d'une équation de diffusion.

L'existence de la **longueur de cohérence de phase** repose sur le fait qu'il n'est pas possible de connaître exactement le hamiltonien d'un système quantique puisque celui-ci est toujours plus ou moins perturbé par l'environnement extérieur. Ainsi, même si nous sommes capables de résoudre l'équation de Schrödinger pour cet hamiltonien, après un temps τ_ϕ appelé temps de cohérence de phase, les phénomènes interférentiels seront détruits par les autres degrés de liberté auxquels est couplé le système et qui ne sont pas pris en compte dans le hamiltonien. Dans les métaux, l'interaction des électrons avec les vibrations collectives du réseau cristallin, décrites par un gaz de phonons, ou avec les autres électrons, conduit à l'existence d'un temps de cohérence de phase fini. Pour un électron ayant un mouvement diffusif, on peut définir la longueur de cohérence de phase par $L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$ où D est le coefficient de diffusion défini à l'équation (2.5).

Un système sera dans le régime mésoscopique s'il vérifie :

$$L < L_\phi. \quad (2.6)$$

2.1.3 Limite de la théorie semi-classique

Une question fondamentale de la physique du solide est de savoir ce qui distingue un métal d'un isolant. À température nulle, la fonction d'onde des électrons de la surface de Fermi est localisée pour un isolant alors qu'elle sera étendue pour un métal. Il en résulte qu'un métal aura une conductivité σ_{DC} ¹ non nulle, alors que pour un isolant $\sigma_{DC} = 0$. En revanche, à température finie, la distinction n'est pas aussi facile puisque des états localisés peuvent mener à une conductivité non nulle sous l'effet des phonons². Comment peut-on passer à température nulle d'un métal à un isolant ? Deux processus peuvent expliquer ce passage. Dans un système parfait c'est-à-dire sans désordre, Mott [Mot49] a montré que les interactions électron-électron peuvent mener à une telle transition. Dans un système sans interactions électron-électron, Anderson [And58] a été le premier à souligner que l'on pouvait passer d'un

1. σ_{DC} est la conductivité DC, c'est-à-dire la conductivité statique ou à fréquence nulle.

2. On parle de *hopping conductivity* en anglais.

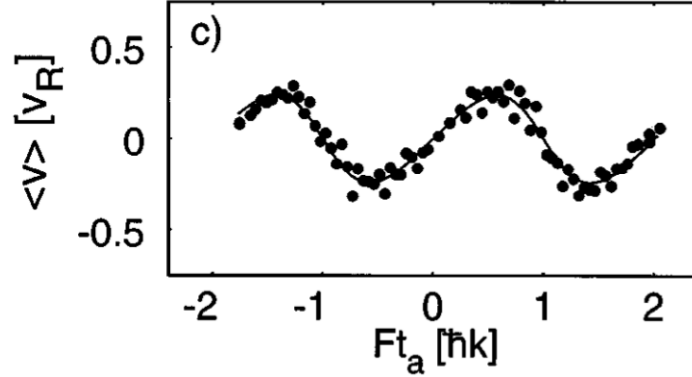


Figure 2.1 Oscillations de Bloch d'atomes de césium dans un potentiel optique périodique sous l'effet d'une force constante, d'après Dahan et coll. [Ben+96]. La figure représente la valeur moyenne de la vitesse $\langle v \rangle$ en fonction du temps. La ligne continue représente la prédiction théorique et les points correspondent aux données expérimentales.

métal à un isolant sous l'effet du désordre. C'est ce dernier cas qui va nous intéresser dans la suite du manuscrit.

En l'absence de désordre, le théorème de Bloch [Blo29] prédit que les fonctions d'onde des électrons de conduction sont étendues dans le cristal. Une conséquence de ce théorème est l'existence des oscillations de Bloch : sous l'effet d'une force extérieure, la vitesse moyenne des électrons oscille. Comme en témoigne la figure 2.1, ce phénomène a été observé par Dahan et coll. [Ben+96] sur des atomes de césium et constitue un exemple d'effet purement quantique non intuitif, où la cohérence de la fonction d'onde de la particule joue un rôle crucial. Dès que l'on introduit du désordre dans ce solide, la diffusion des électrons sur les impuretés et les défauts du cristal devient possible. Cela a un effet radical sur le phénomène d'oscillations de Bloch : au-delà du temps moyen élastique (temps moyen entre deux diffusions élastiques sur les impuretés), le mouvement moyen devient diffusif. La théorie semi-classique de Bloch–Boltzmann décrit ce phénomène à faible désordre. Si l'on considère des électrons de charge e et de masse **effective** m^* se déplaçant dans un solide, la formule de Drude nous indique alors que la conductivité σ est donnée par

$$\sigma = \frac{ne^2\tau_B}{m^*},$$

où n est la densité d'électrons et τ_B le temps moyen de transport. La formule de Drude n'est valable que lorsque la longueur d'onde de Fermi λ_F est plus petite que le libre parcours moyen élastique ℓ : $\lambda_F = 2\pi/k_F \ll \ell$, où k_F est le rayon de la sphère de Fermi. Cette dernière condition est équivalente à

$$k_F\ell \gg 1. \tag{2.7}$$

Que se passe-t-il si le désordre est fort, c'est-à-dire si à la place de (2.7) on a $k_F \ell < 1$? Dans ce cas, les interférences ne sont plus négligeables, et de nouveaux effets sont susceptibles d'apparaître. L'un de ces effets auxquels nous allons nous intéresser par la suite est la localisation d'Anderson qui survient typiquement lorsque

$$k_F \ell \approx 1, \tag{2.8}$$

condition connue sous le nom de « critère de Ioffe–Regel » [IR60].

2.2 Localisation d'Anderson à une dimension

Dans cette partie nous souhaitons étudier l'effet des impuretés sur la propagation d'un électron dans un fil afin de relier des propriétés microscopiques caractérisant le milieu à des grandeurs mesurables. Ce but est facilement atteignable en raison de la géométrie unidimensionnelle du problème.

2.2.1 Matrice de diffusion

Pour simplifier le problème, nous considérons que le spin de l'électron ne peut être modifié et qu'aucun champ magnétique n'est présent. Il est possible de fabriquer un tel fil quantique en confinant les électrons dans le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ à l'aide d'un potentiel adapté et en les laissant libres selon la direction \mathbf{u}_x . En raison du confinement, seuls certains modes pourront exister dans le fil : notre système est donc l'analogue quantique d'un guide d'onde. Dans le contexte des fils quantiques, le terme « canal de conduction » est en général préféré à celui de « mode ». À partir de maintenant nous ne considérerons qu'un seul canal, restriction qui simplifie les notations et qui n'est pas gênante pour la compréhension du phénomène de localisation. Notons qu'au sens strict, le terme de fil quantique est quelque peu ambigu lorsqu'on ne considère qu'un seul mode. En toute rigueur on parle plutôt de chaîne.

Nous souhaitons étudier un modèle de fil unidimensionnel désordonné où les impuretés sont modélisées par des diffuseurs ponctuels répartis aléatoirement le long du fil en des positions x_i . Le hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{p^2}{2m} + v \sum_i \delta(x - x_i),$$

où $v > 0$ est une constante qui caractérise le potentiel.

Du fait de la propagation libre de l'électron selon \mathbf{u}_x , la fonction d'onde ψ_G d'un électron d'énergie $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ et de vecteur d'onde k à gauche d'une impureté aura pour expression :

$$\psi_G(x, t) = ae^{ikx} + be^{-ikx}, \tag{2.9}$$

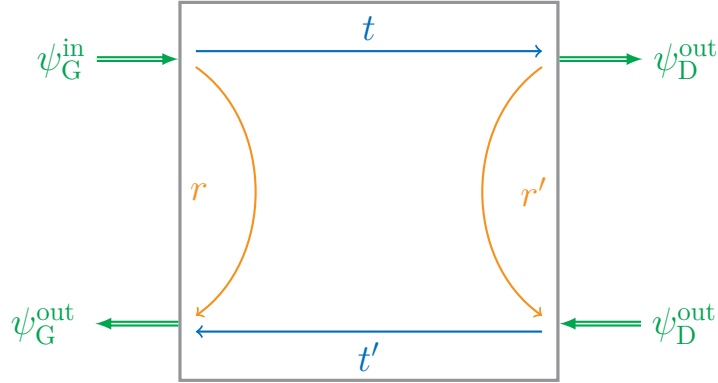


Figure 2.2 Représentation schématique des différentes composantes de la fonction d'onde d'un électron diffusé par un obstacle (rectangle). Cet obstacle est caractérisé par quatre coefficients $\{t, r, t', r'\}$ qui décrivent comment les différentes composantes de la fonction d'onde sont transmises et réfléchies. Voir le corps du texte et en particulier l'équation (2.11) pour comprendre comment sont reliés ces coefficients aux composantes de la fonction d'onde. Cette figure est fortement inspirée de [MD11].

tandis que sa fonction d'onde ψ_D à droite de l'impureté s'écrira

$$\psi_D(x, t) = ce^{ikx} + de^{-ikx}, \quad (2.10)$$

où les coefficients $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{C}^4$ représentent les amplitudes de probabilité.

Que se passe-t-il lorsque l'électron est diffusé par l'impureté ? Ce processus physique peut être décrit par la matrice de diffusion S (la notation provient de l'anglais *scattering*), qui relie les amplitudes de probabilité sortantes et entrantes. Mathématiquement, et en utilisant les mêmes notations que précédemment (voir les équations (2.9) et (2.10)), cette relation s'exprime par :

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S(E) = \begin{pmatrix} r(E) & t'(E) \\ t(E) & r'(E) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

avec $\{r, t, r', t'\} \in \mathbb{C}^4$. En toute généralité, la matrice S dépend de l'énergie E de l'électron, mais dans la suite nous n'y ferons plus mention.

Les différents coefficients $\{r, t, r', t'\}$ ne sont pas indépendants les uns des autres : pour que le phénomène de diffusion soit correctement décrit par la matrice S , le courant de probabilité entre la gauche et la droite doit être conservé (absence de phénomène dissipatif). Cette condition s'écrit ici $A + D = B + C$, où les lettres majuscules représentent le module carré du nombre noté en lettre minuscule (par exemple $A \doteq |a|^2$ ou $R \doteq |r|^2$). Un calcul relativement simple montre que cette dernière égalité est vérifiée si et seulement si la matrice de diffusion est unitaire, c'est-à-dire si $S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbb{1}$, où S^\dagger désigne la matrice adjointe de S , et $\mathbb{1}$ est la

matrice identité de taille (2×2) . Exprimée à l'aide des coefficients de la matrice de diffusion, cette condition est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} R + T = R' + T' = 1 \\ R + T' = R' + T = 1 \\ \bar{r}t' + r'\bar{t} = 0 \\ r\bar{t}' + \bar{r}'t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = R' \\ T = T' = 1 - R \\ \bar{r}t' + r'\bar{t} = 0 \\ r\bar{t}' + \bar{r}'t = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

où le nombre noté \bar{z} correspond au complexe conjugué du nombre $z \in \{r, t, r', t'\}$.

Par ailleurs, si nous sommes en présence d'un système invariant par renversement du temps, alors les fonctions d'ondes conjuguées de (2.9) et (2.10) sont également solutions de l'équation de Schrödinger. En exprimant cette condition à l'aide de la matrice de diffusion, un calcul montre que dans ce cas \mathbf{S} vérifie $\mathbf{S}^\top = \mathbf{S}$, où \mathbf{S}^\top est la matrice transposée de \mathbf{S} . Cette relation matricielle est équivalente à avoir $t = t'$. Alors que la conservation du flux de probabilité est valable pour tous les systèmes, l'invariance par renversement du temps est une symétrie qui est, par exemple, vérifiée en l'absence de champ magnétique. Comme nous le verrons dans le chapitre 3, les symétries du système jouent un rôle fondamental pour la transition d'Anderson. Elles sont en revanche d'une importance moindre pour le phénomène de localisation à une dimension, cas qui nous intéresse dans le chapitre présent.

2.2.2 Transmission et localisation à une dimension

En ajoutant plusieurs impuretés, l'approche par la matrice de diffusion devient compliquée et on lui préfère la matrice de transfert. En effet, l'inconvénient de la matrice de diffusion est de relier les amplitudes entrantes et sortantes, de sorte qu'en ajoutant même une seule impureté à notre système on ne peut pas simplement multiplier les deux matrices de diffusion des deux impuretés. Au contraire, la matrice de transfert relie les amplitudes à droite avec celles de gauche et peut ainsi être multipliée aisément un grand nombre de fois. La matrice de transfert, notée \mathbb{T} (à ne pas confondre avec la probabilité de transmission T), s'obtient en exprimant les composantes entrantes et sortantes de la fonction d'onde à droite en fonction des composantes entrantes et sortantes de la fonction d'onde à gauche :

$$\begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} = \mathbb{T} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

avec

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1/\bar{t} & -\bar{r}/\bar{t} \\ -r/t & 1/t \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

expression obtenue en utilisant le système (2.12) et la relation $t = t'$ valable pour un système invariant par renversement du temps.

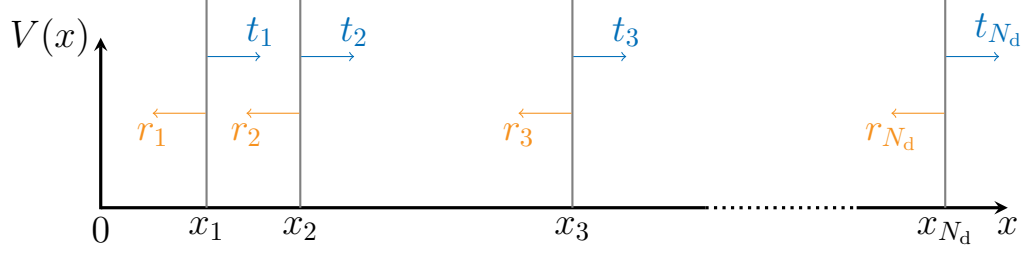


Figure 2.3 Chaîne unidimensionnelle de N_d impuretés : ici le désordre est lié à la position aléatoire x_i des impuretés, alors que la barrière de potentiel est toujours la même. On qualifie cette situation de modèle de Kronig–Penney **désordonné**. À chaque barrière de potentiel i est associé un coefficient de réflexion r_i et un coefficient de transmission t_i . La question est de savoir quelle va être la probabilité de transmission d'un électron incident décrit par une onde plane.

Désormais, on peut étudier un ensemble de N_d diffuseurs, tels que représentés schématiquement sur la figure 2.3. Lorsque l'espacement entre deux barrières de potentiel consécutives est une constante, on parle de modèle de Kronig–Penney. Ce qui nous intéresse, c'est d'étudier l'effet du désordre. Celui-ci peut être introduit en choisissant de manière aléatoire la position x_i de l'impureté i . Dans ce cas, le modèle de Kronig–Penney est qualifié de désordonné. Un autre choix possible aurait été de maintenir un écart fixe entre les impuretés mais de choisir de manière aléatoire la hauteur des barrières de potentiel.

Étudions d'abord le cas de deux défauts respectivement caractérisés par des coefficients de réflexion r_1, r_2 et des coefficients de transmission t_1, t_2 . Entre les deux événements de diffusion, l'électron se propage librement ce qui ne permet pas de multiplier directement les deux matrices de transfert correspondant à chaque impureté : entre deux matrices de transfert, il faut insérer une matrice diagonale décrivant la propagation d'une onde plane vers la droite et d'une autre vers la gauche. En tenant compte de cette propagation, la matrice de transfert du système contenant deux impuretés s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^{(2)} &\doteq \begin{pmatrix} 1/\bar{t} & -\bar{r}/\bar{t} \\ -r/t & 1/t \end{pmatrix} = \mathbb{T}_2 \begin{pmatrix} e^{ikx} & 0 \\ 0 & e^{-ikx} \end{pmatrix} \mathbb{T}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1/\bar{t}_2 & -\bar{r}_2/\bar{t}_2 \\ -r_2/t_2 & 1/t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ikx} & 0 \\ 0 & e^{-ikx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\bar{t}_1 & -\bar{r}_1/\bar{t}_1 \\ -r_1/t_1 & 1/t_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où \mathbb{T}_i est la matrice de transfert pour l'impureté i , et $x \doteq x_2 - x_1$ est la distance séparant les deux défauts. En définitive, en effectuant le produit des trois matrices, et en identifiant le terme de la dernière ligne et de la dernière colonne avec l'inverse de l'amplitude de transmission t , on obtient :

$$t = \frac{\bar{t}_1 t_2 e^{i\phi}}{1 - \bar{r}_1 r_2 e^{2i\phi}},$$

où $\phi \doteq kx$ est la phase accumulée entre les deux diffuseurs. Ce qui nous intéresse ici, c'est la probabilité de transmission

$$T^{(2)} \doteq |t|^2 = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos 2\phi}, \quad (2.15)$$

avec $T_i \doteq |t_i|^2$ la probabilité de transmission après l'obstacle i et $R_i \doteq |r_i|^2$ la probabilité de réflexion devant l'obstacle i .

Moyenne d'ensemble

À présent, discutons d'un point de vue physique l'expression (2.15) de la probabilité de transmission d'un fil contenant deux impuretés. Dans notre modèle, le désordre est lié à la position aléatoire des impuretés. Comme nous allons le voir dans la suite, ce modèle minimaliste suffit néanmoins à expliquer le comportement d'un fil dans les deux régimes qui nous intéressent.

Pour une réalisation donnée du désordre, c'est-à-dire si l'on connaît la position des deux défauts, la probabilité de transmission possède une valeur précise. Au contraire, lors d'une expérience, sauf cas particulier, la transmission mesurée est moyennée sur les réalisations du désordre, et ce quelque soit le régime. Considérons, par exemple, une observable Y qui, théoriquement et pour une configuration donnée du désordre, prend une valeur y fonction de la position des deux défauts : $y = f(x_1, x_2)$. Alors la valeur mesurée expérimentalement devra être comparée à la valeur moyenne de Y :

$$\langle Y \rangle \doteq \iint p(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

où les bornes d'intégration dépendent de la géométrie du système étudié et où la fonction p est la densité de probabilité des positions x_1 et x_2 des défauts.

Dans la suite de notre étude, on se restreint au cas d'un milieu dilué, c'est-à-dire pour lequel la longueur d'onde de Fermi de l'électron est très petite devant l'espacement entre les deux défauts : $x \gg \lambda_F$. Cette condition permet de passer d'une moyenne sur les positions des défauts à une moyenne sur la phase $\phi = 2k_F x$ de densité uniforme sur $[0, 2\pi]$. Ainsi, dans la suite, les seules moyennes auxquelles nous serons confrontés seront du type

$$\langle Y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi, \quad (2.16)$$

où, par un abus de notation, nous avons à nouveau noté f la fonction qui donne la valeur prise par l'observable Y pour une configuration donnée du désordre soit : $y = f(\phi)$.

Nous avons établi de manière assez générale la marche à suivre sans pour autant répondre à la question la plus épineuse : quelle est l'observable — fonction de Y — vérifiant la propriété

d'auto-moyennage? Nous allons voir dans la suite que dans le régime classique il s'agit simplement de la transmission. Dans le régime mésoscopique par contre, la transmission perd son caractère auto-moyennant, et l'observable pertinente devient le logarithme de la transmission.

Régime classique

Si l'on applique l'équation (2.16) au cas de la probabilité de transmission $T^{(2)}$ pour deux diffuseurs (formule (2.15)), on trouve :

$$\langle T^{(2)} \rangle = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2}. \quad (2.17)$$

Ce résultat nous permet de remonter à l'expression de la résistance adimensionnée du fil contenant deux diffuseurs. En effet, le formalisme de Landauer–Büttiker — voir [Imr97] pour plus de détails sur ce formalisme — permet de montrer que la résistance $\langle \rho \rangle$ du fil est donnée par

$$\langle \rho \rangle = \frac{\langle R \rangle}{\langle T \rangle} = \frac{1 - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}. \quad (2.18)$$

En injectant l'expression (2.17) dans la dernière formule (2.18), on aboutit à la formule

$$\langle \rho \rangle = \rho_1 + \rho_2, \quad (2.19)$$

où $\rho_i = R_i/T_i$ est la résistance associée au défaut i . Le même résultat est obtenu si l'on traite le système classiquement. En effet, en physique classique, aucune phase n'est associée à l'électron se déplaçant dans le fil. Alors, la probabilité de transmission totale est obtenue en sommant seulement les probabilités des différents processus possibles, c'est-à-dire en additionnant la probabilité qu'il y ait transmission sans réflexion ($T_1 T_2$) ou transmission avec une réflexion ($T_1 T_2 R_1 R_2$) ou transmission avec deux réflexions ($T_1 T_2 R_1^2 R_2^2$) etc. On arrive finalement à l'expression suivante pour la transmission classique :

$$T_{\text{cl}} = T_1 T_2 + T_1 T_2 R_1 R_2 + T_1 T_2 R_1^2 R_2^2 + \dots = T_1 T_2 (1 + R_1 R_2 + R_1^2 R_2^2 + \dots). \quad (2.20)$$

En identifiant dans l'équation (2.20) la somme infinie des termes d'une suite géométrique, on retrouve le résultat (2.17). On peut facilement généraliser l'équation (2.19) au cas de N_d diffuseurs possédant tous la même résistance ρ_d . On a alors

$$\langle \rho \rangle_{\text{cl}} = N_d \rho_d. \quad (2.21)$$

En utilisant la formule de Landauer (2.18) et le résultat précédent (2.21), on trouve que, dans le régime classique, la probabilité de transmission moyenne d'un fil composé de N_d diffuseurs est donnée par

$$\langle T \rangle = \frac{T_d}{T_d + (1 - T_d) N_d}, \quad (2.22)$$

où T_d est la probabilité de transmission d'un diffuseur pris individuellement. Ce qu'il faut retenir du résultat (2.22) est le comportement de la probabilité de transmission moyenne dans la limite thermodynamique ($N_d \rightarrow \infty$) :

$$\langle T \rangle \sim \frac{1}{N_d}. \quad (2.23)$$

Dans la limite thermodynamique, la transmission décroît comme l'inverse du nombre de diffuseurs, c'est-à-dire comme l'inverse de la longueur du système. Ceci n'est rien d'autre que la loi d'Ohm, associée au mouvement diffusif de l'électron (marche au hasard aux temps longs).

Régime quantique et fluctuations

Dans la partie précédente, en moyennant directement la probabilité de transmission après chaque processus de diffusion sur une impureté nous avons retrouvé la propriété d'additivité des résistances en série pour un système classique. Ce résultat s'explique simplement par le fait que moyennner à chaque étape revient implicitement à ajouter de manière incohérente des résistances en série, c'est-à-dire à éliminer *de facto* le terme de phase. Pour traiter un conducteur dans le régime mésoscopique, il faut au contraire sommer de manière cohérente les différentes combinaisons de transmission/réflexion. Le calcul de la résistance moyenne du fil dans ce cas est néanmoins délicat. En effet, pour trois diffuseurs il nécessite un moyennage peu aisé sur deux angles ϕ_{12} et ϕ_{23} , et sa difficulté augmente avec le nombre de diffuseurs. Comme cela a été fait au début de l'étude de la localisation d'Anderson dans les années 1960 à 1980, on pourrait s'affranchir de la difficulté que pose le cas de N_d défauts en établissant une théorie d'échelle pour la résistance du fil ou, dit autrement, en trouvant une équation différentielle qui décrit comment se comporte la résistance moyenne du fil lorsque ce dernier s'allonge. Cette approche de théorie d'échelle sur la résistance moyenne est fructueuse dans le sens où elle explique de manière relativement simple le phénomène de localisation. Malheureusement, elle ne prédit pas la bonne longueur de localisation, mais surtout, elle considère implicitement que la résistance est une variable auto-moyennante. En réalité, comme montré dans la référence [And+80], la résistance pour un conducteur mésoscopique n'est pas auto-moyennante, et les auteurs proposent de considérer le logarithme de la probabilité de transmission : $\ln T$, quantité appelée coefficient d'extinction. En effet, une fois moyennée sur la phase ϕ , celle-ci vérifie

$$\langle \ln T \rangle = \ln T_1 + \ln T_2,$$

du fait que

$$\int_0^{2\pi} \ln \left(1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \phi \right) d\phi = 0,$$

comme on peut s'en convaincre en utilisant le théorème des résidus. De plus, cette équation se généralise à plus de deux diffuseurs, nous fournissant une observable additive. Cela permet de déduire qu'un fil de taille L contenant N_d défauts caractérisés par la probabilité de transmission T_d a pour coefficient d'extinction

$$\langle \ln T \rangle = N_d \ln T_d,$$

où nous avons noté T la probabilité de transmission pour un fil avec N_d diffuseurs. Dans la mesure où $0 < T < 1$, cette dernière équation peut se réécrire

$$\exp(\langle \ln T \rangle) = \exp(-L/\xi_{\text{loc}}), \quad (2.24)$$

avec $\xi_{\text{loc}} \doteq -L/(N_d \ln T_d)$, la longueur de localisation. Ainsi, dans la limite d'un fil très long, la transmission typique $T_m \doteq \exp(\langle \ln T \rangle)$ tend exponentiellement vers zéro, ce qui est une caractéristique univoque du phénomène de localisation d'Anderson dans des systèmes unidimensionnels.

Le raisonnement précédent peut être généralisé en regardant comment se comporte un fil de longueur L si on lui ajoute un fil « court » dont le canal de transport possède une probabilité de transmission proche de un. On obtient alors une équation de Fokker–Planck qui permet de calculer exactement la distribution du **logarithme** de la probabilité de transmission T du fil, et en particulier d'obtenir les fluctuations de cette grandeur. La résolution de cette équation [MD11] montre que la distribution P de la variable $\ln T$ est approximativement donnée par

$$P(\ln T, t) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp \left[-\frac{(\ln T + t)^2}{4t} \right], \quad (2.25)$$

où $t \doteq L/\xi$ a été supposé très grand devant un. La distribution (2.25) est similaire à une distribution log-normale (voir la partie 2.1.1 et en particulier l'équation (2.3)) dont l'écart-type σ est relié à la valeur moyenne t par la relation $\sigma = \sqrt{2t}$. La variable aléatoire $\ln x$ est donc auto-moyennante puisque $\sigma/\mu \sim 1/t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Il est également possible de calculer les différents moments de T . On trouve [Abr81] :

$$\langle T^n \rangle = \frac{\pi^{3/2} \Gamma^2(n - 1/2)}{2\Gamma^2(n)} t^{-3/2} e^{-t/4}, \quad (2.26)$$

avec Γ la fonction d'Euler. À ce stade, il est important de noter que l'équation précédente nous montre que les moments de tout ordre décroissent exponentiellement avec t (c'est-à-dire dans la limite thermodynamique), en revanche, les fluctuations relatives divergent :

$$\frac{\text{Var}(T)}{\langle T \rangle^2} \propto t^{3/2} e^{t/4}, \quad (2.27)$$

c'est-à-dire que T n'est pas une variable auto-moyennante.

Une généralisation de cette approche à plusieurs canaux de transport aboutit à l'équation de Dorokhov–Mello–Pereyra–Kumar [Dor82 ; MPK88] (voir également l'article [Bee97] pour une présentation plus moderne) dite équation DMPK.

Conclusion

Nous avons vu qu'à une dimension, la résistance classique était additive, tandis que dans le régime mésoscopique, la quantité pertinente était le coefficient d'extinction car la résistance n'est pas auto-moyennante. On peut caractériser la différence entre les régimes classique et quantique de manière plus mathématique : décrire le régime classique revient à faire un **produit de moyennes** de variables aléatoires, alors que décrire le régime quantique nécessite de **moyenner un produit** de variables aléatoires. Dans l'exemple ci-dessus, cela se traduit simplement par le fait que du point de vue statistique, il y a une grande différence entre calculer $\langle \rho \rangle_{\text{cl}} = (1 - \langle T \rangle) / \langle T \rangle$ et calculer $\langle \rho \rangle = \langle (1 - T) / T \rangle$. Dans la première situation, la moyenne ne concerne que T , alors que dans le régime quantique elle fait intervenir un quotient de nombres aléatoires.

2.2.3 Modèles de désordre

À l'heure actuelle, il n'existe pas de généralisation rigoureuse de l'équation DMPK à des dimensions supérieures à un. Pour étudier l'effet du désordre sur des systèmes électroniques plus grands, il faut en général recourir à des simulations numériques. Un modèle historiquement important permettant d'accéder facilement à la physique des systèmes désordonnés bidimensionnels et tridimensionnels est le modèle de liaisons fortes dû à Anderson [And58]. Ce modèle décrit la dynamique d'un électron dans un cristal à température nulle et en l'absence d'interactions électron-électron par le hamiltonien

$$\widehat{H} = \sum_i \epsilon_i |i\rangle \langle i| + t \sum_{\langle i,j \rangle} |i\rangle \langle j|, \quad (2.28)$$

où $|i\rangle$ est l'orbitale décrivant l'électron sur le site i , t désigne l'amplitude de transition du site i au site j , et $\sum_{\langle i,j \rangle}$ représente la somme sur les sites premiers plus proches voisins. L'énergie ϵ_i de l'électron sur le site i considéré est une variable aléatoire avec une densité de probabilité p définie, qui a pour but de décrire le désordre dans le système. Par ailleurs, les différents ϵ_i doivent être tirés indépendamment les uns des autres. Dans son article fondateur, Anderson [And58] a pour sa part pris les énergies aléatoires dans l'intervalle $[-W/2; W/2]$ où W désigne l'amplitude du désordre. Une autre possibilité est de choisir pour distribution celle de Cauchy–Lorentz :

$$p(\epsilon) = \frac{W}{\pi(\epsilon^2 + W^2)}.$$

On parle alors de modèle de Lloyd [[Ll69](#)].

Le premier modèle à avoir été étudié est celui d'Anderson qui a montré qu'à trois dimensions, il existait des états localisés à fort désordre uniquement, alors que le système restait diffusif à faible désordre, suggérant l'existence d'une transition de phase. C'est cette dernière qui sera discutée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

La transition d'Anderson

Sommaire

3.1	Transitions de phase et groupe de renormalisation	24
3.1.1	Généralités sur les transitions de phase	24
3.1.2	Échec du champ moyen et groupe de renormalisation	28
3.1.3	Le cas de la transition métal–isolant d’Anderson	31
3.2	Loi d’échelle à un paramètre	32
3.2.1	Loi d’échelle pour la conductance	33
3.2.2	Forme globale de la fonction de Callan–Symanzik	34
3.3	La question des fluctuations	37
3.3.1	À la recherche de la loi d’échelle à un paramètre	37
3.3.2	La loi d’échelle à un paramètre retrouvée	40
3.4	Classes d’universalité	40
3.5	Théorie auto-cohérente de Vollhardt et Wölfle	41
3.5.1	Cadre théorique : propagateur et fonction de Green	41
3.5.2	Fonction de Green moyennée sur les réalisations du désordre	42
3.5.3	Théorie auto-cohérente	43

COMME expliqué au chapitre 2, à température nulle et si l’on néglige les interactions entre électrons, les fonctions d’onde d’un système désordonné peuvent être localisées. Nous avons vu qu’à une dimension, le phénomène de localisation était la règle. En revanche, à partir de trois dimensions il existe une amplitude de désordre critique pour laquelle on passe d’états localisés à des états étendus. Avec le vocabulaire de la matière condensée, on parle de transition métal–isolant. S’agit-il pour autant d’une transition de phase ?

C’est à cette question que nous allons tenter de répondre dans la suite de ce chapitre. Pour cela, nous allons d’abord rappeler quelques éléments sur les transitions de phase et le groupe

de renormalisation, pour ensuite exposer une approche phénoménologique de la transition d'Anderson, à savoir la théorie d'échelle à un paramètre. Enfin, nous esquisserons une théorie un peu plus quantitative de la transition d'Anderson : la théorie auto-cohérente de Vollhardt et Wölfle. Celle-ci nous sera utile à la compréhension du chapitre 6 sur la statistique des fonctions d'onde au point critique.

Bien évidemment, ce manuscrit ne se propose pas de faire un cours sur ces sujets : nous renvoyons le lecteur intéressé vers la bibliographie non exhaustive citée dans ce chapitre.

3.1 Transitions de phase et groupe de renormalisation

La première difficulté qui se présente lorsqu'on essaie de comprendre la nature de la transition d'Anderson est qu'il ne s'agit pas d'une transition de phase thermodynamique. En effet, ce que nous qualifierons dans cette thèse de « phase isolante » et « phase métallique » ne sont pas des phases au sens thermodynamique du terme puisque la transition n'est pas gouvernée par des paramètres tels que la pression, la densité et la température. Malgré ces différences, nous allons voir dans ce chapitre que la transition d'Anderson présente de nombreuses similitudes avec les transitions de phase habituelles. C'est pourquoi il nous a semblé utile de faire un bref rappel des phénomènes physiques mis en jeu lors d'une transition de phase thermodynamique.

3.1.1 Généralités sur les transitions de phase

Intuitivement, une transition de phase n'est ni plus ni moins qu'un changement d'état de la matière. Avec cette définition peu rigoureuse, on constate que ce phénomène est omniprésent dans la nature : il suffit pour cela de regarder le cycle de l'eau sur Terre au cours duquel l'eau est présente dans trois états distincts, à savoir les phases solide, liquide et gazeuse. Le passage d'un état à un autre s'obtient en modifiant par exemple la température T ou la pression P . Sur la figure 3.1, les trois phases de l'eau sont rapportées en fonction de ces deux paramètres.

Remarquons tout d'abord une particularité de ce diagramme de phases : la courbe séparant la phase liquide de la phase gazeuse présente un point de terminaison appelé point critique au-delà duquel rien ne permet de distinguer l'eau sous sa forme gazeuse de sa forme liquide. Il s'agit là d'une particularité qu'on n'observe pas sur les autres frontières entre les phases. Ce diagramme va nous permettre par ailleurs de distinguer deux types de transitions. Dans le premier cas, qui constitue le cas usuel, la transition entre deux états s'effectue par un échange d'énergie (absorption ou libération) entre l'eau et l'environnement. Par exemple, lors du passage de l'état solide à l'état liquide, l'eau va absorber une certaine quantité d'énergie appelée chaleur latente de fusion (à pression et température constantes) que l'on peut voir comme la quantité d'énergie qu'il est nécessaire d'apporter à la glace pour briser les liaisons intermoléculaires et ainsi obtenir un liquide. Une transition de phase au cours de

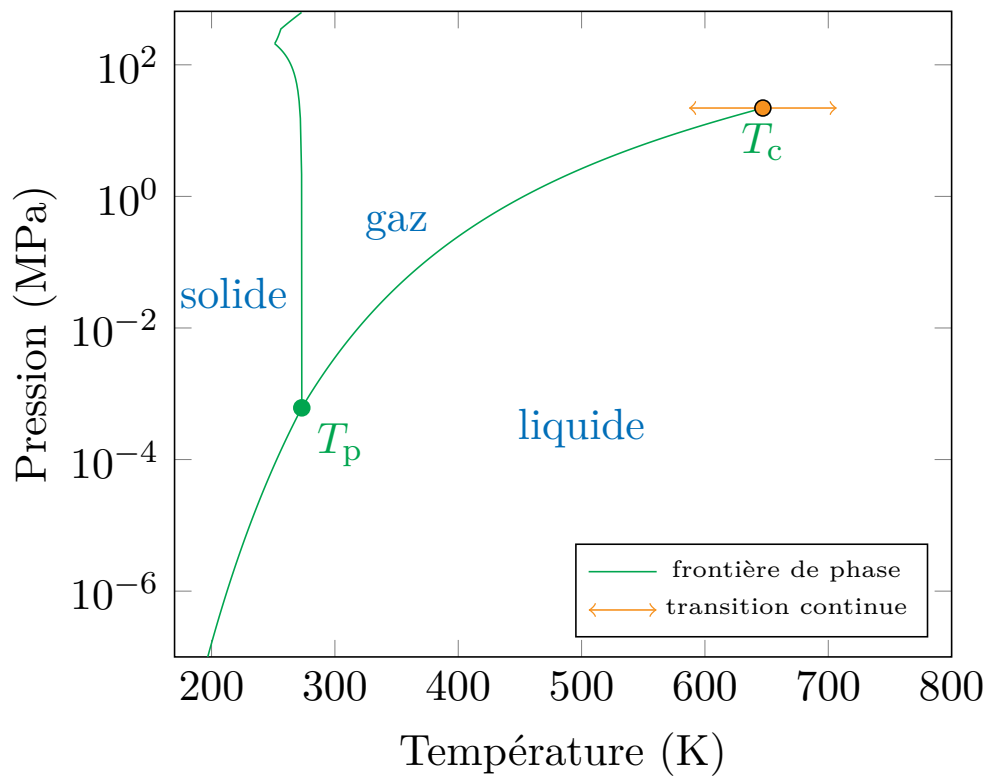


Figure 3.1 Diagramme de phase pression–température de l’eau.

laquelle intervient une telle énergie est appelée transition discontinue car, à la température de transition, la dérivée partielle de l'énergie libre du système par rapport à la température est discontinue. Dans le cas de la transition liquide–gaz, un second type de transition est envisageable au cours de laquelle aucune chaleur latente n'intervient. Celle-ci s'observe en se plaçant à la pression critique P_c , puis en diminuant lentement la température. Lorsque la température du système atteint la température critique T_c , un passage de l'état liquide à l'état gazeux s'opère, mais cette fois-ci sans libération d'énergie. Cette transition est qualifiée de continue car, à la température critique, la dérivée de l'énergie libre par rapport à la température est une fonction continue.

La distinction entre ces deux types de transitions peut sembler anecdotique, d'autant plus que la transition continue ne s'obtient que si l'on passe par le point critique. En réalité, cette distinction est fondamentale car les transitions continues se caractérisent par un comportement spécifique de certaines observables, qui, de plus, est universel, et que l'on explique dans le cadre d'une théorie des champs renormalisée.

Pour insister sur l'importance des transitions de phase continues, revenons d'abord à l'expérience de variation de température à P_c fixée : au cours de celle-ci un nouveau phénomène, visible à l'œil nu, se manifeste. Au point critique, on peut observer dans le système une sorte de brouillard au niveau du ménisque séparant le liquide du gaz et qui n'apparaît pas si l'on effectue une transition discontinue. Ce phénomène est illustré sur la figure 3.2 dans le cas d'un mélange binaire. Il porte le nom d'opalescence critique, et a été découvert par Andrews [And69] puis, expliqué par Smoluchowski [Smo08] et Einstein [Ein10] en termes de fluctuations importantes de densité : le système n'est plus homogène, comme c'est le cas pour le gaz, mais des régions de forte densité coexistent avec des régions de faible densité. Ces régions ayant une taille de l'ordre de la longueur d'onde de la lumière, celle-ci y est fortement diffusée et le milieu apparaît opaque.

Les fluctuations de densité peuvent être caractérisées à l'aide d'une longueur de corrélation ξ qui diverge à l'approche du point critique, avec un exposant critique $\nu > 0$: $\xi(T) \sim |T - T_c|^{-\nu}$. Notons également qu'au voisinage de la transition il se produit un ralentissement de la dynamique, avec un temps de retour à l'équilibre τ qui diverge avec un second exposant critique noté z : $\tau \sim \xi^z$.

Au voisinage de la transition, d'autres quantités ont un comportement en loi de puissance. Dans la suite, nous n'en introduirons que deux qui seront importantes pour la transition d'Anderson. La première est le paramètre d'ordre ϕ , grandeur (scalaire, vectorielle, etc.) qui quantifie la différence d'ordre entre les deux phases étudiées. Par exemple, pour la transition liquide–gaz, ce paramètre est donné par la différence de densité entre le liquide et le gaz :

$$\phi(\mathbf{x}, T) \doteq \rho_L(\mathbf{x}, T) - \rho_G(\mathbf{x}, T), \quad (3.1)$$

où, à une température et pour une phase données, $\rho(\mathbf{x}) \doteq \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$. De manière générique, on notera β l'exposant qui caractérise le comportement du paramètre d'ordre à proximité de

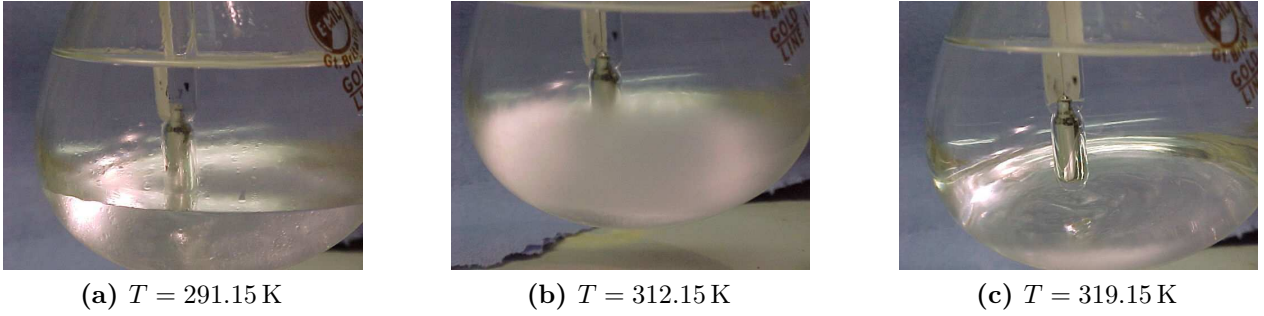


Figure 3.2 Mélange binaire composé d'hexane et de méthanol passant par le point critique [Pod]. Un tel mélange ne subit pas un passage de l'état liquide à l'état gazeux, mais d'un « état » avec deux liquides non miscibles (figure 3.2a) à un état constitué d'un seul liquide (figure 3.2c). Au point critique (figure 3.2b), on observe le phénomène d'opalescence critique : la densité du système n'est plus homogène. Au contraire, celui-ci est constitué de régions de forte et faible densité.

la température critique

$$\Phi(T) \doteq \langle \phi(\mathbf{x}, T) \rangle \sim |T - T_c|^\beta, \quad (3.2)$$

où $\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle$ désigne la moyenne spatiale du paramètre d'ordre.

La seconde quantité qui nous intéresse est la fonction de corrélation densité–densité que l'on définit par

$$C(\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}) \doteq \langle [\rho(\mathbf{x}) - \overline{\rho(\mathbf{x})}] [\rho(\mathbf{y}) - \overline{\rho(\mathbf{y})}] \rangle = \langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{y}) \rangle - \langle \rho(\mathbf{x}) \rangle \langle \rho(\mathbf{y}) \rangle, \quad (3.3)$$

où, pour des raisons de lisibilité, nous notons $\overline{\rho(\mathbf{x})} \doteq \langle \rho(\mathbf{x}) \rangle$. En dehors du point critique, cette fonction de corrélation est celle prédite par Ornstein et Zernike [CL95] :

$$C(\mathbf{r}) \sim \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|}{\xi}\right). \quad (3.4)$$

En revanche, exactement au point critique, cette forme de fonction de corrélation ne permet pas d'expliquer la divergence de certaines quantités thermodynamiques. Pour rendre compte de la physique qui apparaît au point de transition, il est nécessaire d'introduire une forme algébrique caractérisée par un nouvel exposant critique η :

$$C(\mathbf{r}) \sim |\mathbf{r}|^{-(d-2+\eta)}, \quad (3.5)$$

avec $\eta < 2$. La décroissance algébrique des corrélations confirme que les fluctuations deviennent très importantes au point critique. Par ailleurs, l'amplitude de ces fluctuations dépend de la dimension d du système.

Dans la suite, nous serons également amenés à rencontrer le facteur de structure S qui est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation :

$$S(\mathbf{q}) \doteq \int C(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \, d\mathbf{q}. \quad (3.6)$$

En dehors du point critique, le facteur de structure prend la forme suivante :

$$S(\mathbf{q}) \sim \frac{1}{1 + (|\mathbf{q}|\xi)^2}, \quad (3.7)$$

tandis qu'au point de transition on a

$$S(\mathbf{q}) \sim |\mathbf{q}|^{-2+\eta}. \quad (3.8)$$

Au chapitre 6, nous verrons lors de l'étude de la multifractalité au voisinage de la transition d'Anderson des comportements critiques très semblables sur des grandeurs caractérisant le transport quantique.

L'intérêt d'une description en termes de lois d'échelle et d'exposants critiques est qu'elle englobe dans une même classe des systèmes microscopiquement différents, mais où les processus physiques ou chimiques sont similaires. Ainsi, le comportement de l'eau au point critique est similaire à celui du mélange hexane–méthanol observé la figure 3.2 où le phénomène d'opalescence critique se manifeste. Cette notion d'universalité est assez naturelle lorsque les systèmes partagent le même paramètre d'ordre. Mais elle devient encore plus féconde lorsque l'on compare deux systèmes physiques sans relation, comme par exemple la transition entre un système ferromagnétique et paramagnétique et celle entre un liquide et un gaz [CL95], toutes deux caractérisées par des lois d'échelles. *A priori*, rien ne permet d'affirmer qu'ils vont être dans la même classe d'universalité ; une analyse des propriétés de symétries et des mécanismes microscopiques à l'œuvre, ou alternativement une mesure des exposants critiques, permet souvent de montrer/comprendre les similarités entre systèmes différents.

3.1.2 Échec du champ moyen et groupe de renormalisation

Nous venons de décrire les transitions de phase de manière qualitative en introduisant un ensemble d'exposants critiques caractérisant la divergence en loi de puissance de certaines quantités telles que la longueur de corrélation ξ ou la fonction de corrélation. Un enjeu de la physique du XX^e siècle a été de déterminer ces exposants pour différentes classes d'universalité. Les premières méthodes apparues sont celles du champ moyen, en particulier la théorie de Ginzburg–Landau dans laquelle le paramètre d'ordre joue le rôle d'un champ. Elle est qualifiée de champ moyen parce qu'elle ne permet pas de prendre en compte les fluctuations du paramètre d'ordre autour de sa moyenne¹. Au voisinage du point critique, la longueur de

1. La littérature à ce sujet est importante. Nous citerons les références [CL95 ; Gol92] qui sont pédagogiques et relativement modernes.

corrélation diverge, de sorte que les différents degrés de liberté sont infiniment couplés. Ce phénomène est mal décrit par le champ moyen, tout du moins pour des dimensions inférieures à une dimension dite critique supérieure et notée d_c .

Bien que les théories de champ moyen permettent de mieux comprendre l'importance des fluctuations du paramètre d'ordre au point critique ainsi que le caractère universel et générique de celles-ci, les valeurs prédites des exposants critiques diffèrent des valeurs expérimentales (pour des dimensions de systèmes inférieures à d_c). En développant une théorie des champs renormalisée pour la physique statistique, Kadanoff puis Wilson [Kad+67 ; Wil75] ont réussi à calculer les exposants critiques de certains modèles. Dans la suite, nous souhaiterions exposer cette théorie de manière assez générale puisque, comme nous le verrons, elle permet de mieux comprendre la transition d'Anderson.

Nous avons vu précédemment qu'à l'approche d'une transition de phase continue, les différents degrés de liberté du système interagissent entre eux sur des échelles allant d'une échelle microscopique a (le pas du réseau par exemple) à la taille L du système. En définitive, il est difficile de décrire tous ces degrés de liberté sur des échelles aussi grandes. La proposition faite par Wilson pour remédier à ce problème consiste, en suivant Le Bellac [Le 02], « à réduire systématiquement le nombre de degrés de liberté en intégrant sur les fluctuations de courte longueur d'onde ». Pour réaliser ce programme, la principale idée du groupe de renormalisation est de relier, par une transformation, un système et ses constantes de couplage, décrits à une certaine échelle, à un autre système équivalent, décrit à une autre échelle avec des constantes de couplage renormalisées. Cette transformation s'opère en deux étapes : une première que nous appellerons dilution des degrés de liberté (*coarse graining*), suivie d'un changement d'échelle du système (*rescaling*).

Pour rendre le concept de renormalisation plus concret, considérons une action générale de la forme $S[\phi] \doteq \sum_{i=1}^N K_i \mathcal{O}_i[\phi]$ où ϕ est un champ (scalaire, grassmannien, etc.), les K_i sont les constantes de couplage et les \mathcal{O}_i sont un ensemble d'opérateurs. Regardons maintenant plus en détail les deux étapes du groupe de renormalisation.

Dilution ou élimination des modes rapides

Il existe de nombreuses manières de réaliser cette étape. Dans l'espace réel et pour un modèle sur réseau, on peut procéder au regroupement des champs par blocs et à la sommation de ces blocs pour définir un nouveau champ Φ' sur un réseau dilué. Dans l'espace de Fourier, on subdivise en général le champ initial Φ en une composante variant lentement, $\tilde{\Phi}_s$, et une composante aux fluctuations rapides (courte portée), $\tilde{\Phi}_f$. Étant donné la description faite précédemment d'une transition continue, on est en droit de penser que celle-ci sera dominée par des effets de longue portée, et l'on décide donc d'intégrer les fluctuations rapides. Plus exactement, on définit un *cut-off* Λ dans l'espace réciproque, caractérisé par le vecteur d'onde

\mathbf{q} tel que

$$\tilde{\Phi}_s(\mathbf{q}) = \begin{cases} \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) & \text{si } 0 < |\mathbf{q}| < \frac{\Lambda}{b} \\ 0 & \text{si } \frac{\Lambda}{b} < |\mathbf{q}| < \Lambda \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\tilde{\Phi}_f(\mathbf{q}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < |\mathbf{q}| < \frac{\Lambda}{b} \\ \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) & \text{si } \frac{\Lambda}{b} < |\mathbf{q}| < \Lambda \end{cases} \quad (3.10)$$

où $b > 1$ représente un coefficient de dilution. En intégrant sur les fluctuations rapides, on passe de N degrés de liberté à $N' \doteq N/b^d$ degrés de liberté décrits par une nouvelle action $S'[\Phi_s] \doteq \sum_i K'_i \mathcal{O}'_i[\Phi_s]$ qui ne dépend que de Φ_s , et où de nouveaux opérateurs sont susceptibles d'apparaître.

Rescaling

Puisqu'à l'étape précédente nous avons dilué des degrés de liberté, il est nécessaire de compenser cette dilution par un changement d'échelle des distances puis des champs :

$$\mathbf{q}' = b\mathbf{q} ; \Phi' = b^{d_\Phi} \Phi, \quad (3.11)$$

où d_Φ est la dimension du champ Φ . Ceci permet de retrouver l'intervalle initial de l'impulsion, à savoir $0 < |\mathbf{q}'| < \Lambda$. À la fin, on obtient une nouvelle action $S'[\Phi] = \sum_i K'_i \mathcal{O}'_i[\Phi]$ qui est entièrement déterminée par la transformation des constantes de couplage

$$\mathbf{K}(b) = R_b(\mathbf{K}), \quad (3.12)$$

où $\mathbf{K}(b)$ désigne le vecteur composé des différentes constantes de couplage K_i renormalisées, et R_b est une transformation qui relie les constantes de couplage initiales aux constantes de couplage renormalisées, éventuellement de manière non linéaire. Physiquement, R_b ne fait que décrire l'effet d'une dilatation sur le hamiltonien d'origine. L'existence d'une famille de paramètres K_i décrivant la physique à différentes échelles et d'une fonction R_b permettant de relier ces différentes échelles n'a rien d'évident et dépend du système étudié. C'est une hypothèse de base de la théorie d'échelle, bien souvent impossible à démontrer.

Flot de renormalisation et fonction β

Jusqu'à présent, nous avons présenté une transformation en deux étapes du groupe de renormalisation : nous avons regardé comment évoluait notre système décrit par l'action S lorsque celui-ci changeait d'échelle. Ce changement d'échelle est caractérisé par le paramètre b . On voudrait désormais itérer ces transformations : à la manière d'un système dynamique [Ott02],

on va étudier une « trajectoire » du groupe de renormalisation dans l'espace des constantes de couplage. Dans le cadre du groupe de renormalisation, cette trajectoire est appelée **flot**. Pour l'étudier, on va faire une transformation infinitésimale : au lieu de prendre b quelconque, on choisit $b = 1 + \delta l$ avec $\delta l \ll 1$. Une trajectoire du groupe de renormalisation est alors solution de l'équation de Gell-Mann et Low. Pour une unique constante de couplage K cette équation s'écrit :

$$\frac{dK}{d \ln b} = \beta(K) \tag{3.13}$$

avec $\beta(K) \doteq \lim_{\delta l \rightarrow 0} \frac{R_b(K) - K}{\delta l}$ la fonction de Callan–Symanzik, que l'on peut voir comme une équation d'évolution de la constante de couplage g lorsque le paramètre d'échelle $b = 1 + \delta l$ change.

À nouveau, comme pour un système dynamique, nous allons nous intéresser aux points fixes du groupe de renormalisation : nous cherchons l'ensemble des points $\{\mathbf{K}^*\}$ pour lesquels le flot de renormalisation est « stationnaire ». Ces points vérifient donc $\beta(\mathbf{K}^*) = 0$. Le schéma de transformation de la longueur de corrélation, $\xi(K) = \xi(K)/b$, implique qu'à un point fixe K^* la longueur de corrélation est soit nulle soit infinie. Les points fixes correspondant à une longueur de corrélation nulle sont appelés triviaux car peu intéressants pour le problème qui nous intéresse ici. En revanche, ce sont les points fixes pour lesquels la longueur de corrélation sera infinie qui vont être importants puisqu'ils sont la marque d'une transition de phase continue. Enfin, l'analyse de la fonction β de Gell-Mann et Low au voisinage du point fixe avec une longueur de corrélation infinie permet de trouver les exposants critiques caractérisant la transition [Gol92].

Ayant rappelé les concepts essentiels du groupe de renormalisation, nous allons à présent les appliquer au cas de la transition d'Anderson.

3.1.3 Le cas de la transition métal–isolant d'Anderson

Jusqu'ici, nous nous sommes intéressés aux transitions de phase continues gouvernées par la température. Il est possible d'observer ce même type de transition pour un système quantique à température nulle et où un autre paramètre caractérisant les fluctuations quantiques est modifié. On parle alors de transition de phase quantique dont la transition d'Anderson est un exemple. Comme nous l'avons déjà expliqué, il est possible de passer d'un isolant à un métal en modifiant l'intensité du désordre ou l'énergie des électrons. Actuellement, tout porte à croire que la transition d'Anderson est continue. En particulier, près du point critique, elle est caractérisée par la divergence de la longueur de localisation (dans la phase isolante) : $\xi \sim (E_c - E)^{-\nu}$; ainsi que par l'annulation du coefficient de diffusion (dans la phase métallique) : $D \sim (E - E_c)^s$.

Nous avons vu qu'une signature des transitions thermodynamiques continues était les fluctuations du paramètre d'ordre. Dans l'exemple de l'eau, il s'agit de fluctuations de densité

de particules. Comme on l'a vu, on peut les caractériser à l'aide de la fonction de corrélation $C(\mathbf{r})$ qui, au point critique, diverge en loi de puissance selon $C(\mathbf{r}) \sim |\mathbf{r}|^{-(d-2+\eta)}$. Dans la suite, nous souhaiterions caractériser également la transition d'Anderson à l'aide de fonctions de corrélation, et déterminer l'exposant η . De plus, nous voudrions tenir compte de la dynamique de cette transition qui devrait se caractériser par un ralentissement critique.

Comme nous le verrons dans le chapitre 6, une quantité intéressante à étudier pour la transition d'Anderson est la densité d'états non locale

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) \doteq \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{x}) \psi_{\alpha}^*(\mathbf{y}) \delta(E - E_{\alpha}), \quad (3.14)$$

où $\psi_{\alpha}(\mathbf{x})$ désigne l'état propre d'énergie propre E_{α} au point \mathbf{x} et $\psi_{\alpha}^*(\mathbf{y})$ est la fonction d'onde conjuguée au point \mathbf{y} pour la même énergie propre. D'un point de vue théorique, cette quantité semble pertinente puisque la densité d'états locale $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}, E)$ joue l'analogie d'un paramètre d'ordre pour cette transition [MF94]. À la manière de la transition liquide-gaz au point critique, nous allons donc regarder les corrélations de la densité d'états non locale :

$$C(\mathbf{r}, E, \omega) \doteq \left\langle \rho \left(x, y, E - \hbar \frac{\omega}{2} \right) \rho^* \left(x, y, E + \hbar \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle, \quad (3.15)$$

où les crochets $\langle \dots \rangle$ désignent ici une moyenne sur les configurations du désordre. Nous avons introduit dans cette définition une différence d'énergie entre la première et la seconde densité afin de rendre compte des corrélations temporelles. Une grande partie de cette thèse reposera sur la discussion de cette fonction de corrélation ou de sa transformée de Fourier, appelée facteur de structure dynamique. Ceci s'explique par le lien que nous établirons dans la partie 6.4.2 entre l'exposant η qui caractérise le comportement de ces corrélations à la transition et le caractère multifractal des fonctions d'onde.

3.2 Loi d'échelle à un paramètre

La nature de la transition d'Anderson, à savoir si elle est discontinue ou continue, a longtemps fait débat, et la question ne semble pas totalement tranchée dans la communauté. Pour l'instant, exposons la description la plus communément admise et sans doute la mieux vérifiée à l'heure actuelle : la théorie d'échelle à un paramètre.

La principale idée de cette dernière est de se demander s'il est possible de trouver une fonction $\beta(\mathbf{K})$ pour le problème de la localisation. Trouver une telle fonction sans théorie microscopique sous-jacente est une tâche complexe, puisqu'en général \mathbf{K} est une famille de paramètres. Il serait donc nécessaire de trouver toutes les constantes de couplage du système, puis de comprendre comment chacune d'elle se comporte sous une étape du groupe de renormalisation.

En se basant sur des travaux d'Edwards et Thouless [ET72; Tho72], Abrahams et coll. [Abr+79] ont trouvé phénoménologiquement une telle fonction β . L'idée consiste à

se demander comment se comporte un système électronique désordonné lorsque l'on double sa taille. Les états propres du système doublé vont être composés d'une combinaison linéaire des états propres du système initial. Cette combinaison linéaire est *a priori* déterminée par deux paramètres, l'intégrale de recouvrement des états propres et la densité d'états. Thouless montra tout d'abord que l'intégrale de recouvrement dépendait de la sensibilité du système aux conditions aux bords. Enfin, il trouva que ces deux paramètres étaient reliés linéairement à la conductance sans dimension $g = (\hbar/e^2)G$, où G est la conductance du système.

En résumé, selon Thouless, un seul paramètre, à savoir la conductance adimensionnée g , contrôle la nature des états propres lorsque la taille du système est doublée. Il semble donc légitime de choisir g comme « constante de couplage », et de voir comment se comporte g non plus en doublant la taille du système mais en l'augmentant de façon infinitésimale. C'est cette idée qui a amené Abrahams et coll. à définir la fonction β par la relation

$$\beta(g) = \frac{\partial \ln g}{\partial \ln L}(L). \quad (3.16)$$

Soulignons dès à présent une difficulté qui apparaît ici : comme nous l'avons vu au chapitre précédent (voir 2.2.2), la transmission, reliée à la conductance par la formule de Landauer-Büttiker [Imr97], n'est pas une grandeur auto-moyennante. Construire une théorie d'échelle sur une telle grandeur semble donc discutable. Nous reviendrons plus en détail sur ce point dans la partie 3.3.

3.2.1 Loi d'échelle pour la conductance

L'approche de Abrahams et coll. consiste à regarder comment se comporte la conductance lors d'un changement d'échelle du type $L \xrightarrow{b} L/b$, où b est le facteur de dilution. En particulier, pour la longueur de localisation, on aura la transformation $\xi \xrightarrow{b} b^{-1}\xi$. Or, comme expliqué dans l'introduction, à la transition d'Anderson, la longueur de localisation diverge selon

$$\xi \sim \varepsilon^{-\nu}, \quad (3.17)$$

où $\varepsilon \doteq (E_c - E)/E_c$ est la différence d'énergie adimensionnée, avec E l'énergie des électrons et E_c l'énergie critique pour laquelle la transition s'opère. Ce comportement en loi d'échelle peut se transcrire à l'énergie selon :

$$\varepsilon \sim \xi^{-1/\nu}. \quad (3.18)$$

Ainsi, par un changement d'échelle on s'attend au comportement suivant de l'énergie

$$\varepsilon \xrightarrow{b} b^{1/\nu}\varepsilon. \quad (3.19)$$

Ce comportement d'une longueur et d'une énergie par un changement d'échelle nous permet de conclure que, de manière générale, un changement d'échelle aura l'incidence suivante sur la conductance :

$$g(L/b, b^{1/\nu}\varepsilon) = b^{d_g} g(L, \varepsilon), \quad (3.20)$$

où d_g caractérise la manière dont la conductance se comporte lors d'un changement d'échelle. En utilisant l'hypothèse qu'à la transition, la conductance adimensionnée est un point fixe, donc invariante d'échelle, on conclut que $d_g = 0$. Ceci permet d'écrire $g(L, \varepsilon) = g(L/b, b^{1/\nu}\varepsilon)$, relation vérifiée pour tout changement d'échelle b . En particulier, on peut choisir une échelle de taille de référence $L_0 = L/b$ et écrire : $g(L, \varepsilon) = g(L_0, (L/L_0)^{1/\nu}\varepsilon)$.

Un développement limité autour de $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire à proximité du point de transition, permet d'écrire que la conductance aura pour forme

$$g(L, \varepsilon) \approx g_c + \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1/\nu} \varepsilon \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(L_0, 0) \quad (3.21)$$

où $g_c = g(L_0, 0)$ est la conductance critique au point fixe. Cette dépendance en L permet de calculer la fonction β :

$$\beta(g) \approx \frac{1}{\nu g_c} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1/\nu} \varepsilon \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(L_0, 0) \quad (3.22)$$

ou encore

$$\beta(g) \approx \frac{g - g_c}{\nu g_c}. \quad (3.23)$$

On en déduit que ν est directement relié à la dérivée logarithmique de β par rapport à g évaluée au point critique :

$$\frac{1}{\nu} = \left. \frac{\partial \beta}{\partial \ln g} \right|_{g_c}. \quad (3.24)$$

Un raisonnement analogue sur les lois d'échelle du côté diffusif de la transition permet de montrer la relation de Wegner [Weg76] $s = \nu(d - 2)$, où s est l'exposant critique caractérisant l'annulation du coefficient de diffusion à l'approche du point critique et d est la dimension du système.

3.2.2 Forme globale de la fonction de Callan–Symanzik

À l'aide de la connaissance du comportement asymptotique de β et au voisinage de la transition, nous sommes capables de prédire la forme globale de β . Ainsi, dans le régime

métallique correspondant à $g \gg 1$, on s'attend naturellement à ce que le milieu suive la loi d'Ohm

$$g = \frac{\hbar\sigma}{e^2} L^{d-2}, \quad (3.25)$$

où σ est la conductivité du milieu. On en déduit que la fonction d'échelle β sera une constante dans ce régime :

$$\beta(g) = d - 2. \quad (3.26)$$

Comme expliqué à la partie 2.2.2), dans le régime isolant, la transmission typique $T_m \doteq \exp(\langle \ln T \rangle)$ décroît exponentiellement sur une distance caractéristique ξ . Cette propriété se manifeste également sur la conductance, résultant en un comportement logarithmique de β dans le régime $g \ll 1$:

$$\beta(g) \sim \ln g. \quad (3.27)$$

L'hypothèse de loi d'échelle consiste à admettre que l'on peut relier ces deux comportements asymptotiques de manière continue et monotone. En particulier, à trois dimensions, β passe par $\ln g_c$ (point fixe instable sous le flot de renormalisation) et la pente de β en ce point est reliée à l'exposant critique ν , voir l'équation (3.23). Sur la figure 3.3, nous avons tracé qualitativement la fonction β à partir des arguments exposés précédemment. Il s'agit d'une courbe approximative puisque la forme exacte n'est aujourd'hui pas connue en dimension plus grande que un.

Comment lire cette figure ? Au regard de ce que nous avons dit sur le groupe de renormalisation dans la partie 3.1.2, cette figure peut s'interpréter comme un système dynamique où les flèches n'indiquent pas l'écoulement du temps mais l'accroissement de la taille du système étudié : c'est ce que nous avons appelé le flot de renormalisation. Ainsi, on peut distinguer essentiellement deux comportements. Un premier pour les dimensions un et deux, pour lesquelles le flot converge asymptotiquement vers les faibles conductances, c'est-à-dire que le système tend à devenir localisé dans la limite thermodynamique. Le second comportement concerne les dimensions supérieures ou égales à trois. En effet, deux régimes sont possibles dans ce cas : soit au départ la conductance est faible (désordre fort) et le système va alors tendre vers un isolant, soit la conductance dépasse le seuil critique g_c et le système sera un conducteur. Ces deux régimes sont séparés par un point fixe instable (le flot de renormalisation s'écarte de ce point) pour lequel la fonction β s'annule. Ce point marque la divergence d'une longueur de corrélation (ou de localisation dans le cas d'un isolant) qui indique l'existence d'une transition de phase quantique continue.

Notons que la théorie d'échelle à un paramètre permet aussi de connaître la dimension critique inférieure du problème de la transition métal-isolant, c'est-à-dire la dimension au-delà de laquelle on observe effectivement une transition. D'après la figure 3.3, on voit immédiatement que cette dimension vaut deux.

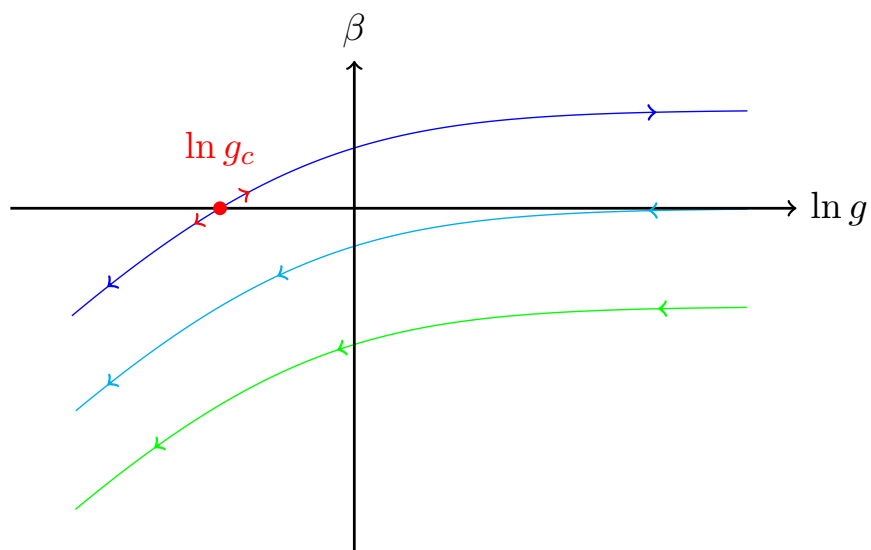


Figure 3.3 Fonction β pour la loi d'échelle à un paramètre. En dimension un (courbe verte) et deux (courbe bleue), le système est toujours localisé dans la limite thermodynamique puisque le flot de renormalisation (flèches sur la figure) va vers le régime localisé. À partir de la dimension trois (courbe violette), il existe un régime métallique et un régime isolant séparés par un point fixe instable (indiqué en rouge) qui marque l'existence d'une transition de phase quantique du second ordre.

Pour finir, remettons ce travail dans un cadre plus historique. La théorie d'échelle à un paramètre n'est en fait pas vraiment une théorie mais plutôt une approche phénoménologique s'appuyant sur des lois d'échelle. En effet, elle discute de la fonction β sans s'appuyer sur une théorie de champ sous-jacente. Malgré tout, si l'on se replace à la date d'écriture de l'article établissant cette approche, c'est-à-dire 1979, soit 21 ans après l'article d'Anderson mais seulement 8 ans après la compréhension des phénomènes critiques par le groupe de renormalisation due à Wilson, on comprend à quel point elle a été novatrice et fructueuse. Sur un plan quantitatif, notons qu'il faudra attendre 1981 [PS81a ; PS81b ; MK81] pour avoir la première détermination numérique de l'exposant critique à trois dimensions.

3.3 La question des fluctuations

On pourrait résumer l'importance des fluctuations au point critique de la transition d'Anderson à la question de savoir quelle définition exacte de la conductance adimensionnée g doit être prise dans la théorie d'échelle à un paramètre. *A priori*, plusieurs choix sont possibles : il peut s'agir de la conductance moyenne ou, mieux, de la conductance typique qui, comme l'étude du chapitre 2 le suggère, est une quantité auto-moyennante en dimension un. Pour discuter de cette question, dans une première partie, nous nous attacherons à déconstruire la théorie d'échelle à un paramètre puis, dans un second temps, nous vérifierons la robustesse de celle-ci à partir de résultats numériques.

3.3.1 À la recherche de la loi d'échelle à un paramètre

Du fait des fluctuations importantes, la conductance ne semble pas être une variable appropriée pour la théorie d'échelle à un paramètre. La première idée qui vient à l'esprit, avant d'abandonner cette théorie, est de se demander s'il n'existerait pas une bonne variable qui vérifie la loi d'échelle à un paramètre. Anderson et coll. ont montré [And+80] qu'une variable plus adaptée serait

$$\langle f \rangle \doteq \left\langle \ln \left(1 + \frac{1}{g} \right) \right\rangle, \quad (3.28)$$

puisque celle-ci vérifie la propriété d'additivité et surtout est auto-moyennante en dimension un, comme vu à la section 2.2.2. Pour rappel de la partie 2.1.1, une variable est auto-moyennante si ses fluctuations relatives tendent vers zéro dans la limite thermodynamique.

Malgré ces caractéristiques, f vérifie-t-elle une loi d'échelle à un paramètre ? En nous basant sur l'article [CRS88] de Cohen et coll., nous allons montrer dans la suite que ce n'est en toute rigueur pas le cas.

Cas unidimensionnel

Pour prouver cette dernière affirmation, nous considérons un fil désordonné comme celui traité dans la partie 2.2.2 et nous remarquons tout d'abord que la conductance g est reliée à la probabilité de transmission T par

$$\frac{1}{g} = -1 + \frac{1}{T}. \quad (3.29)$$

On en déduit que $f = -\ln T$, c'est-à-dire que f n'est rien d'autre que ce que nous avons appelé coefficient d'extinction. En utilisant les résultats de la partie 2.2.2, et en particulier le résultat (2.15), on trouve que la loi de composition de la variable f dans le cas de deux impuretés est donnée par :

$$f_{12} = f_1 + f_2 + X_{1,2}, \quad (3.30)$$

avec $X_{1,2} \doteq \ln(1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \theta)$ où, pour rappel, R_i est la probabilité de réflexion associée au défaut i , et ϕ est un terme de phase aléatoire. Il est alors possible de généraliser le calcul de la partie 2.2.2 au-delà de l'hypothèse de désordre faible. On trouve que le coefficient d'extinction pour n défauts s'exprime en fonction du coefficient d'extinction pour $n-1$ défauts noté f_{n-1} , du coefficient d'extinction du n -ième défaut γ_n et d'un terme analogue au terme $X_{1,2}$ mais pour le cas de n impuretés et que l'on note $X_{n-1,n}$. Finalement on a :

$$f_n = f_{n-1} + \gamma_n + X_{n-1,n} \quad (3.31)$$

avec

$$X_{n-1,n} = \ln \left[1 + (1 + e^{-\gamma_n}) (1 + e^{-f_{n-1}}) - 2\sqrt{(1 + e^{-\gamma_n}) (1 + e^{-f_{n-1}})} \cos \theta_n \right]. \quad (3.32)$$

Insistons ici sur le fait que le terme f_n est bien différent de γ_n . En effet, alors que f_n fait référence au coefficient d'extinction d'une chaîne désordonnée de n défauts, γ_n est le coefficient d'extinction du n -ième défaut qui est complètement indépendant des autres défauts. Une conséquence de cette distinction est que, pour simuler numériquement cette chaîne désordonnée, on doit tenir compte de trois variables aléatoires : pour une unique chaîne désordonnée et pour chaque défaut rajouté, on tire au hasard une probabilité de réflexion dans l'intervalle $[0, 1]$ ainsi qu'une phase accumulée dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Enfin, on réitère ce processus pour un grand nombre de chaînes. Comme les f_n sont des variables auto-moyennantes, alors elles seront d'ordre n à grand n et donc $e^{-f_{n-1}} \ll 1$, d'où :

$$X_{n-1,n} \simeq \ln \left[1 + (1 + e^{-\gamma_n}) - 2\sqrt{1 + e^{-\gamma_n}} \cos \theta_n \right] \quad (3.33)$$

qui est indépendant de f_{n-1} . On peut remonter à la distribution du coefficient d'extinction en remarquant que γ_n , θ_n et f_{n-1} sont indépendants : il est donc possible d'appliquer le théorème

central limite qui nous dit que la distribution des f est gaussienne :

$$P_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\text{Var}(f_n)}} \exp \left[-\frac{(f - \bar{f}_n)^2}{2\text{Var}(f_n)} \right], \quad (3.34)$$

avec

$$\bar{f}_n = n\langle\gamma_n\rangle, \quad (3.35)$$

du fait que la moyenne du terme $X_{n-1,n}$ est nulle. La variance s'écrit quant à elle

$$\begin{aligned} \text{Var}(f_n) = n \left\{ \langle\text{Var}(\gamma_n)\rangle \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \ln^2 [1 + (1 - e^{-\langle\gamma_n\rangle}) + 2 \cos \theta \sqrt{1 - e^{-\langle\gamma_n\rangle}}] \rangle d\theta \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Dans les équations (3.35) et (3.36), nous avons distingué les trois moyennes : celle sur l'ensemble des chaînes désordonnées est notée $\overline{\dots}$, la moyenne arithmétique sur les coefficients d'extinction des défauts est notée avec les crochets $\langle \dots \rangle$ et enfin la moyenne sur la phase accumulée est directement exprimée en fonction de son expression intégrale.

La conclusion de ce calcul est qu'à une dimension et pour des désordres forts, la distribution du coefficient d'extinction (3.34), du fait qu'elle est gaussienne, est caractérisée uniquement par deux paramètres que sont \bar{f}_n et $\text{Var}(f_n)$. En particulier ces deux paramètres sont indépendants puisque $\text{Var}(f_n)$ ne s'exprime pas simplement en fonction de \bar{f}_n . Ainsi, même en ayant recours à une bonne variable qui est additive et auto-moyennante, la loi d'échelle à un paramètre se révèle en toute rigueur injustifiée dans le cas unidimensionnel. En réalité, le calcul de la partie 2.2.2 a montré que, pour de **faibles** désordres ($\langle\gamma_n\rangle \ll 1$ et $X \simeq 4\langle\gamma_n\rangle \cos^2 \theta$), on retrouve $\text{Var}(f_n) \simeq 2n\langle\gamma_n\rangle = 2\bar{f}_n$ ce qui montre que dans cette limite un seul paramètre est suffisant.

Dimensions supérieures

Le calcul des cumulants c_n de la distribution de conductance par Altshuler et coll. [AKL89], au seuil de la transition et en dimension $d = 2 + \epsilon$, conduit à :

$$c_n(L) = \begin{cases} \epsilon^{n-2} & \text{si } n \leq n_0 \approx \frac{1}{\epsilon}, \\ \left(\frac{L}{\ell}\right)^{\epsilon n^2 - 2n} & \text{si } n > n_0. \end{cases} \quad (3.37)$$

En plus de la taille du système, on voit apparaître le libre parcours moyen ℓ . Cette dépendance supplémentaire suggère qu'un seul paramètre est insuffisant pour élaborer une théorie d'échelle. Par ailleurs, Cohen et coll. [CRS88] ont utilisé une procédure de renormalisation dans l'espace réel afin de montrer que deux paramètres étaient également nécessaires, non seulement au point critique, mais aussi dans le régime métallique et le régime isolant.

3.3.2 La loi d'échelle à un paramètre retrouvée

Les arguments exposés ci-dessus suggèrent l'invalidité de la loi d'échelle à un paramètre dans la limite d'un désordre fort. Ils indiquent par ailleurs qu'il faudrait la remplacer par une loi tenant compte de deux paramètres. En fait, les derniers travaux sur la question laissent penser que la loi d'échelle à un paramètre reste valable en dimension trois et à la transition, autrement dit à fort désordre. Pour justifier ceci, mentionnons que le fait que les cumulants de l'équation (3.37) dépendent de deux longueurs caractéristiques n'est pas incompatible avec une loi d'échelle à un paramètre. En effet, l'extension à trois dimensions du calcul des cumulants en prenant $\epsilon = 1$ est très délicate puisque le développement en ϵ est faite pour $\epsilon \ll 1$. Par ailleurs, ni la distribution déterminée par Shapiro [Sha90], ni les cumulants d'Altshuler et coll. ne sont en accord avec les résultats numériques [SO97 ; Mar99]. Plus récemment, une étude [SMO03] numérique approfondie de la statistique de la conductance pour le modèle d'Anderson a montré que la loi d'échelle à un paramètre était viable même si l'on peut éventuellement critiquer ce travail du fait que les tailles de systèmes sont au maximum de $18 \times 18 \times 18$.

3.4 Classes d'universalité

La loi d'échelle à un paramètre suggère que la transition d'Anderson est du second ordre et ne serait donc caractérisée que par la longueur de corrélation. La transition serait donc universelle, c'est-à-dire indépendante des détails microscopiques du modèle tels que la distribution des impuretés ou encore le type de réseau étudié. Il est cependant nécessaire de préciser ce caractère universel. Si en effet l'exposant critique ν est universel, il n'en va pas de même pour toutes les quantités physiques décrivant la transition. En particulier, l'intensité du désordre nécessaire pour observer la transition dépend des détails microscopiques. En revanche l'exposant critique ne dépend que des symétries du hamiltonien, telle que l'invariance par renversement du temps. Il existe trois principales classes de symétries (pour des détails sur les autres classes et suivant une classification plus complète, nous renvoyons à [EM08]) selon la classification de Wigner–Dyson :

- classe orthogonale, correspondant à une invariance par renversement du temps et pour des spins entiers ;
- classe unitaire, où l'invariance par renversement du temps est brisée ;
- classe symplectique, s'il y a invariance par renversement du temps et que le système est composé de spins demi-entiers avec dégénérescence de Kramers.

Selon la classe à laquelle appartiendra le hamiltonien, l'exposant critique ne sera pas le même. En particulier, à deux dimensions dans la classe symplectique, il existe une transition métal–isolant, ce qui n'est pas le cas pour les autres classes.

3.5 Théorie auto-cohérente de Vollhardt et Wölfle

La théorie d'échelle à un paramètre semble donc être un outil utile dans la mesure où elle relie l'exposant critique à l'inverse de la pente de la fonction $\beta(g)$ au point critique. En revanche, cette théorie ne fait aucune prédiction sur l'exposant η qui caractérise le comportement de la fonction de corrélation densité–densité (voir l'équation (3.5)). Cette faiblesse s'explique par le fait que cette théorie ne décrit pas les fluctuations. Or, la fonction de corrélation est intrinsèquement une mesure de ces dernières. Dans cette partie, nous allons exposer brièvement la théorie auto-cohérente de la localisation, qui est en quelque sorte une théorie de champ moyen pour la localisation d'Anderson et un prolongement à vocation semi-quantitative de la théorie d'échelle. Elle va donc nous permettre d'aller plus loin que cette dernière et de décrire ultérieurement les fluctuations.

3.5.1 Cadre théorique : propagateur et fonction de Green

Il est tout d'abord nécessaire de définir les briques fondamentales de la théorie. Considérons pour cela un hamiltonien de la forme générale

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + V(\widehat{r}), \quad (3.38)$$

où m est la masse de la particule se déplaçant dans le potentiel aléatoire V . En mécanique quantique, on définit l'opérateur d'évolution $U(t_{\text{fin}}, t_{\text{ini}})$ comme étant l'opérateur unitaire qui permet de décrire l'évolution du vecteur d'état $|\phi\rangle$ de l'instant t_{ini} à l'instant t_{fin} :

$$|\phi(t_{\text{fin}})\rangle = U(t_{\text{fin}}, t_{\text{ini}})|\phi(t_{\text{ini}})\rangle. \quad (3.39)$$

L'opérateur d'évolution vérifie l'équation différentielle

$$[i\hbar\partial_t - \widehat{H}(t)] U(t, t_0) = 0. \quad (3.40)$$

On peut désormais définir le propagateur $K(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)$:

$$K(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0) \doteq \langle \mathbf{r}|U(t, t_0)|\mathbf{r}_0\rangle \theta(t - t_0). \quad (3.41)$$

On peut donc interpréter le propagateur comme étant l'amplitude de probabilité de trouver le système au point \mathbf{r} au temps t sachant qu'il était en \mathbf{r}_0 au temps t_0 . Par ailleurs, tout comme pour l'opérateur d'évolution, le propagateur vérifie une équation différentielle

$$[i\hbar\partial_t - \widehat{H}(t)] K(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0) = i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t - t_0), \quad (3.42)$$

où $\widehat{H}(t)$ est écrit en représentation position.

À ce stade, nous avons tous les outils pour définir la fonction de Green. On se place dans le cas où le hamiltonien est indépendant du temps et où l'opérateur d'évolution dépend de la différence des temps $t - t_0$. On choisit par commodité $t_0 = 0$, ce qui permet d'écrire le propagateur seulement en fonction du hamiltonien :

$$K(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0 = 0) = K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \langle \mathbf{r} | \exp(-i\widehat{H}t/\hbar) | \mathbf{r}_0 \rangle \theta(t - t_0). \quad (3.43)$$

On peut alors définir la fonction de Green retardée comme étant la transformée de Fourier (par rapport à la variable de temps t) du propagateur :

$$G^{\text{R}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; E) = -\frac{i}{\hbar} \int K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) \exp(iEt/\hbar) dt. \quad (3.44)$$

La fonction $G^{\text{R}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, E)$ est appelée fonction de Green car elle vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(E - \widehat{H} + i0)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, E) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.45)$$

La notation $E + i0$ signifie qu'il faut en fait considérer une énergie avec une partie imaginaire positive $E + i\eta$ de façon à assurer la convergence de l'intégrale et prendre ensuite la limite $\eta \rightarrow 0$. La fonction de Green avancée correspond à un propagateur avancé, c'est-à-dire non nul uniquement pour $t < t_0$, et s'obtient comme solution de la même équation différentielle avec cette fois-ci η négatif tendant vers zéro, ce que l'on note habituellement $E - i0$.

3.5.2 Fonction de Green moyennée sur les réalisations du désordre

Pour rendre un peu plus concrètes ces dernières quantités, regardons-les dans deux situations. Le cas le plus simple est le cas libre, c'est-à-dire lorsque $V = 0$. Le calcul de la fonction de Green à trois dimensions dans un milieu infini donne :

$$G_0^{\text{R,A}}(r, E) = -\pi\rho_0 \frac{\exp(\pm i\sqrt{2mE}r/\hbar)}{\sqrt{2mE}r}, \quad (3.46)$$

où $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ et $\rho_0 = m\sqrt{2mE}/2\pi^2\hbar^3$ est la densité d'états libre par unité de volume.

Que deviennent ces fonctions de Green quand on branche le désordre ? En se plaçant à faible désordre, c'est-à-dire $kl \gg 1$ ($k = \sqrt{2mE}/\hbar$ le vecteur d'onde et ℓ le libre parcours moyen élastique), on peut montrer [AM04] que les fonctions de Green moyennées sur les réalisations du désordre s'écrivent

$$\overline{G}^{\text{R,A}}(r, E) = G_0^{\text{R,A}}(r, E) \exp\left(-\frac{r}{2\ell}\right), \quad (3.47)$$

où $\overline{\dots}$ désigne la moyenne sur les réalisations du désordre.

3.5.3 Théorie auto-cohérente

On souhaiterait désormais avoir accès à la probabilité $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$ pour qu'une particule (quantique) d'énergie E , dans un milieu désordonné, parte d'un point \mathbf{r}_0 et arrive après un certain temps au point \mathbf{r} . On considère que cette particule est décrite par un paquet d'onde de largeur en énergie σ_E . La transformée de Fourier de cette probabilité (par rapport au temps) s'écrit simplement en fonction du produit des fonctions de Green moyennées sur les réalisations du désordre :

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) = \frac{1}{2\pi\rho_0\hbar} \overline{G^{\text{R}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, E)G^{\text{A}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, E - \hbar\omega)}. \quad (3.48)$$

Cette définition ne vaut que pour les temps longs, en particulier il faut que les fréquences ω soient petites devant la largeur en énergie σ_E du paquet d'onde : $\omega \ll \sigma_E$.

Telle que définie, cette probabilité est difficile à calculer en général, en raison de la moyenne sur le désordre qui englobe le produit des deux fonctions de Green. Le calcul est néanmoins possible dans la limite de faible désordre ($k\ell \gg 1$) et dans la limite hydrodynamique, c'est-à-dire aux temps longs et grandes distances. On a alors $P = P_{\text{d}}$, où P_{d} vérifie l'équation de diffusion

$$(-i\omega - D_{\text{B}}\Delta_{\mathbf{r}})P_{\text{d}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (3.49)$$

avec un coefficient de diffusion $D_{\text{B}} = v\ell_{\text{B}}/d$ où $v = \hbar k/m$ est la vitesse de la particule, $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ son vecteur d'onde et ℓ_{B} le libre parcours moyen de transport. La transformée de Fourier de l'équation (3.49) s'écrit

$$P(q, \omega) = \frac{1}{-i\omega + D_{\text{B}}q^2}. \quad (3.50)$$

L'équation (3.49) décrit un processus **classique** où l'onde et son conjugué suivent le même chemin de diffusion multiple dans le désordre. À ce titre, elle décrit la diffusion d'une particule classique dans un système désordonné (dilué) à l'approximation hydrodynamique. Comme expliqué au chapitre 2 sur le modèle de Krönig–Penney, la propagation d'une particule quantique dans un milieu désordonné peut être « stoppée » par les interférences qui vont avoir pour effet de localiser la particule. En augmentant la force du désordre, il va donc être nécessaire d'introduire d'autres processus plus complexes qui vont avoir pour effet de diminuer la constante de diffusion D_{B} sans pour autant l'annuler. Ce phénomène est appelé **localisation faible**, par opposition à la localisation forte dite aussi d'Anderson pour laquelle on observe l'annulation du coefficient de diffusion. Dans le régime de localisation faible, le coefficient de diffusion D_{B} est renormalisé à une valeur $D(\omega)$ dépendant de la fréquence et donnée par

$$\frac{1}{D(\omega)} = \frac{1}{D_{\text{B}}} + \frac{1}{\pi\rho_0\hbar D_{\text{B}}} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{-i\omega + D_{\text{B}}q^2}, \quad (3.51)$$

où le second terme correspond aux boucles pour lesquelles la particule multiplement diffusée revient au voisinage de sa position initiale. L'équation (3.51) ne permet néanmoins pas d'expliquer la localisation d'Anderson. Pour cela, Vollhardt et Wölfle [VW80] ont eu l'idée de remplacer dans l'équation (3.51) la constante de diffusion D_B de l'intégrande par $D(\omega)$, ce qui revient à renormaliser la probabilité de retour à l'origine en utilisant une description auto-cohérente :

$$\frac{1}{D(\omega)} = \frac{1}{D_B} + \frac{1}{\pi\rho_0\hbar D_B} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{-i\omega + D(\omega)q^2}. \quad (3.52)$$

Cette équation n'admet pas de dérivation microscopique mais comme nous le verrons dans la partie 6.2, sa résolution permet de montrer l'existence du phénomène de localisation en dimensions un et deux, ainsi que l'existence d'une transition métal–isolant en dimension trois. Toutefois, l'exposant critique prédit en dimension trois est $\nu = 1$, différent de l'exposant « exact » $\nu \approx 1.57$ obtenu numériquement.

Insistons pour terminer sur le fait que la dépendance en fréquence qui apparaît dans l'expression (3.52) pour $D(\omega)$ est précisément à l'origine du phénomène de localisation. De manière analogue, décrire un système désordonné à l'aide d'une fonction de corrélation statique (équation (3.3)) uniquement s'avère insuffisant si le désordre est fort. Dans la suite de ce manuscrit, nous serons ainsi amenés à tenir compte du comportement en loi d'échelle associé à la fréquence.

Chapitre 4

Introduction au concept de multifractalité

Sommaire

4.1	Structure fractale et invariance d'échelle	46
4.2	Quelques notions sur les fractals	48
4.2.1	Invariance d'échelle et dimension fractale	48
4.2.2	Dimension fractale : généralisation	49
4.2.3	Irrégularité	50
4.2.4	Aspects pratiques	50
4.3	Multifractalité	51
4.3.1	Approche intuitive : les diamants sur Terre	51
4.3.2	Exemple mathématique	52
4.3.3	Analyse multifractale : formalisme général	58
4.3.4	Synthèse	66
4.4	Multifractalité et modèle d'Anderson	67
4.4.1	Prédictions théoriques : approximation parabolique et relation de symétrie	67
4.4.2	Observations numériques et expérimentales	69

C'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l'on regardait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque l'expérience peut les suggérer.

Jean PERRIN, *Les atomes*.

4.1 Structure fractale et invariance d'échelle

AVANT de présenter le concept central de multifractalité, nous souhaiterions revenir sur la notion plus intuitive de structure fractale. Nous donnons dans le corps du texte quelques définitions incontournables et nous renvoyons le lecteur intéressé et curieux aux références citées plus bas.

Le premier objet mathématique pouvant être qualifié de fractal est apparu au XIX^e siècle, lorsque Weierstrass s'est demandé s'il était possible de construire une courbe continue mais non dérivable en tout point. Il trouva (voir [Wik15] pour quelques références historiques) comme exemple la fonction W définie par

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

avec b un entier impair, a un réel tel que $0 < a < 1$ et $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Cette fonction est représentée sur les figures 4.1 et 4.2.

Ce n'est que dans les années 1970 que Mandelbrot [Man82] introduisit le concept unificateur de « fractal¹ » pour désigner ce type d'objet géométrique qui présente une invariance d'échelle, c'est-à-dire qu'en agrandissant une partie de la courbe, on retrouve la figure initiale. Entre autre, il remarqua que ces objets se retrouvent à de multiples endroits : dans la nature avec les côtes de la Grande-Bretagne [Man67], en physique avec le mouvement brownien et la turbulence [LLG03], en économie avec l'évolution temporelle d'un indice boursier [MS95], etc. De manière générale, on distingue deux types d'invariances d'échelle :

- le premier est appelé invariance d'échelle **stricte** et correspond au cas des fractals déterministes, c'est-à-dire qui se construisent par répétition d'un motif initial. On peut citer par exemple l'ensemble triadique de Cantor, le flocon de von Koch, ou encore le triangle de Sierpinski. Un autre exemple, qui lui existe à l'état naturel, est le chou romanesco.

1. Les concepts de dimension fractionnaire (et non fractale) et d'auto-similarité apparurent dès les années 1967.

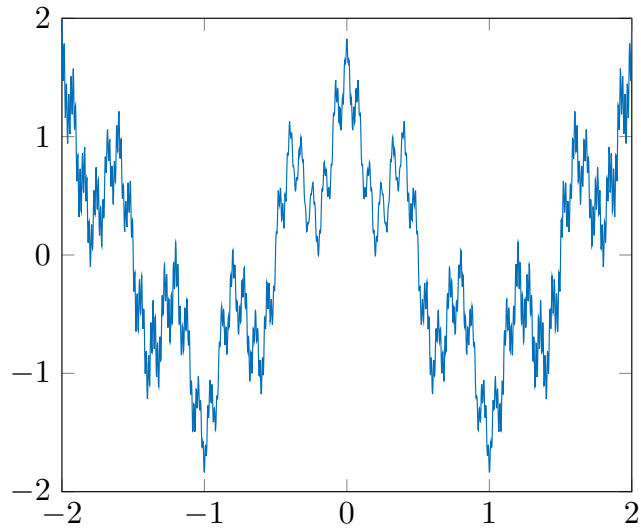


Figure 4.1 Représentation graphique de la fonction de Weierstrass pour $a = 0.5$, $b = 5$ et une somme réalisée sur cent termes. On peut voir que les lignes sont très fracturées mais sur certains intervalles la fonction semble être dérivable. Cette impression est due au fait qu'il y a un nombre fini de points, et que la somme est tronquée au lieu d'être infinie.

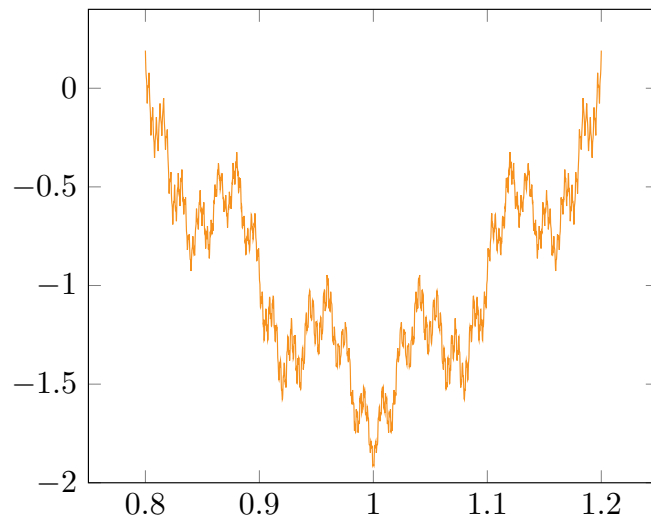


Figure 4.2 Agrandissement de la fonction de Weierstrass sur l'intervalle $[0.8, 1.2]$. On voit apparaître la même structure que celle de la figure 4.1, caractéristique de l'invariance d'échelle. Il est important de noter par ailleurs que si nous avons choisi de zoomer sur une autre région, nous aurions à nouveau obtenu la même structure invariante d'échelle.

- le second est qualifié d'invariance d'échelle **statistique**. Dans ce cas, la courbe n'est pas strictement auto-similaire : on ne retrouve la même structure irrégulière qu'en moyenne. Pour être plus précis, dans ce cas, l'objet fractal n'est pas construit par répétition d'un motif mais est déterminé par une loi de probabilité ou un phénomène chaotique. C'est le cas de la plupart des fractals existants dans la nature.

En somme, en s'inspirant de Mandelbrot [Man82] et en suivant la référence [Gou92], on peut définir un objet fractal comme « un ensemble qui présente des irrégularités à toutes les échelles. » Cette définition reste cependant trop vague puisqu'elle ne nous permet pas de caractériser distinctement un fractal. Pour cela, il est nécessaire de faire appel à la notion de dimension fractale.

4.2 Quelques notions sur les fractals

Nous allons maintenant caractériser plus précisément un objet fractal. Cette caractérisation pourra sembler abstraite en première lecture parce que nous avons choisi une présentation plus détaillée et rigoureuse que celle faite par les physiciens. Ce choix a été néanmoins adopté pour que l'analyse multifractale présentée ultérieurement paraisse plus claire et ne constitue pas une simple curiosité mathématique détachée de tout concept physique.

4.2.1 Invariance d'échelle et dimension fractale

En physique, le caractère fractal d'une quantité se traduit en particulier par son invariance d'échelle. Pour fixer les idées, notons $Q(L)$ une caractéristique d'un système de taille L : si l'on applique un facteur d'échelle (dilatation ou contraction) $b > 0$ au système, on dit que la fonction Q est invariante d'échelle de paramètre p si

$$\forall b > 0, Q(bL) = b^p Q(L). \quad (4.1)$$

Un objet est dit fractal si cette invariance d'échelle est **anormale**, c'est-à-dire si le paramètre p n'est pas la dimension de l'espace considéré.

Dans ce manuscrit, nous nous intéresserons surtout à des quantités fractales définies sur un ensemble statistique et qu'on appellera génériquement **mesure**², notée μ . L'invariance d'échelle concernera dans ce cas les différents moments $\langle \mu^q \rangle$ de cette mesure, où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne obtenue en répétant le processus physique sur l'ensemble statistique considéré. Pour une mesure fractale, l'équation (4.1) se généralise selon

$$\langle \mu^q(bL) \rangle \sim b^{q d_F} \langle \mu(L) \rangle, \quad (4.2)$$

2. Pour simplifier, une mesure est une fonction qui à un ensemble associe un nombre réel positif. On trouvera dans [App08] une définition plus précise.

où d_F est appelée **dimension fractale**.

Pour illustrer cette propriété, imaginons une abeille qui se déplace aléatoirement selon un mouvement brownien dans un espace à trois dimensions. Ce mouvement étant diffusif, la distance L parcourue par l'abeille à l'instant t est $\langle L(t) \rangle \sim t^{1/2}$. Si périodiquement cette abeille dépose un grain de pollen identique sur sa trajectoire, la masse de l'amas total de pollen déposé est proportionnel au temps, $M(t) \sim t$. En exprimant la masse non plus comme une fonction du temps mais comme une fonction de la distance parcourue, on voit que la masse de l'amas croît en moyenne selon

$$\langle M(L) \rangle \sim L^2. \quad (4.3)$$

La masse moyenne ne croît donc plus comme le cube de la taille de l'amas de pollen, résultat auquel on s'attendrait à trois dimensions. La dimension fractale vaut dans ce cas $d_F = 2$.

En évaluant l'équation (4.2) pour $q = 1$ et en réinjectant le résultat dans (4.2), on obtient la loi

$$\langle \mu^q(\varepsilon) \rangle \sim b^{(q-1)d_F} \langle \mu(\varepsilon) \rangle, \quad (4.4)$$

avec $\varepsilon \doteq bL$. Nous réutiliserons cette expression dans la partie 4.3.2 pour définir les dimensions généralisées dans le cas des mesures multifractales.

Dans le modèle d'Anderson, discuté à la partie 4.4, le rôle de la mesure sera joué par le module carré d'un état propre. Le cœur de ce manuscrit sera de voir qu'au voisinage de la transition d'Anderson les moments du module carré des états propres auront un comportement en loi d'échelle **non linéaire** avec q , propriété que nous qualifierons de multifractalité.

4.2.2 Dimension fractale : généralisation

La manière la plus simple d'étudier une fonction invariante d'échelle consiste donc à déterminer sa dimension fractale d_F . Dans l'exemple de la partie 4.2.1, on voit que d_F est le coefficient directeur de la droite $\ln \langle M \rangle$ en fonction de $\ln L$. Cette méthode peut être généralisée à la situation où le fractal est un ensemble de points, comme par exemple l'ensemble de Cantor. On introduit alors le nombre minimal d'objets de taille ε nécessaire pour recouvrir totalement l'ensemble fractal. Par exemple, pour reprendre le cas de l'abeille, on peut envisager de partitionner l'espace à l'aide de cubes de côté ε . Si l'on note $N(\varepsilon)$ le nombre d'objets nécessaires, on définit alors la dimension fractale par

$$d_F = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (4.5)$$

Cette définition est une généralisation rigoureuse de l'approche intuitive exposée dans la partie 4.2.1. Notons que la définition (4.5) n'est pas l'unique façon de définir une dimension fractale. Pour plus de détails on pourra consulter [Fal90; Tri08].

4.2.3 Irrégularité

La propriété d'invariance d'échelle discutée ci-dessus ne suffit pas à caractériser complètement certains objets fractals. Par exemple, les fonctions puissance sont bien invariantes d'échelle (au sens de l'équation (4.1)) mais n'ont aucunement un caractère fractal. Une courbe ne sera considérée comme fractale qu'à condition qu'elle soit très irrégulière en plus d'être invariante d'échelle.

Afin de décrire les propriétés d'irrégularité d'une fonction g (que nous supposons continue), nous utiliserons l'exposant de Hölder, défini localement en un point x_0 comme le plus grand réel $\gamma(x_0)$ tel que :

$$|g(x) - g(x_0)| \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} c(x_0)|x - x_0|^{\gamma(x_0)}. \quad (4.6)$$

Lorsque $\gamma(x_0) \geq 1$, la fonction est dérivable en x_0 et l'objet associé est régulier. Si au contraire $\gamma(x_0) \in [0, 1[$ alors la fonction est non dérivable en x_0 : c'est le critère d'irrégularité pour un fractal. Par exemple, lorsque la fonction g décrit la hauteur d'une surface en croissance, l'irrégularité va en fait caractériser la rugosité de cette surface. Mentionnons à titre de remarque que dans la situation où les irrégularités sont temporelles au lieu d'être spatiales, l'exposant de Hölder est appelé exposant de Hurst [Mea11].

Comme nous l'avons fait pour la dimension fractale, on peut généraliser la notion d'exposant de Hölder au cas d'une mesure sur un ensemble quelconque. À ce stade, discuter de l'irrégularité d'une mesure peut sembler abstrait mais cela nous sera utile dans la suite pour introduire le concept de multifractalité, qui ne prend son sens que dans le cadre des mesures. D'autre part, étudier un ensemble fractal peut se révéler difficile alors qu'analyser une mesure sur cet ensemble l'est moins. En s'inspirant de la définition (4.6) relative aux fonctions, on définit l'exposant de Hölder local d'une mesure μ sur un ensemble E en introduisant une boule fermée $B_\varepsilon(x_0)$ de centre $x_0 \in E$ et de rayon ε tendant vers 0 :

$$\gamma(x_0) \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mu[B_\varepsilon(x_0)]}{\ln \varepsilon}. \quad (4.7)$$

4.2.4 Aspects pratiques

Pour l'instant, nous nous sommes attachés à mettre la notion d'objet fractal sur des bases solides. Les différentes définitions exposées peuvent donner le sentiment que l'étude de tels objets est compliquée. D'un point de vue numérique, déterminer la dimension fractale est cependant assez simple si l'on fait abstraction de la simulation qui aboutit aux données à analyser. En effet, il suffit de découper le système en N sous-systèmes de taille caractéristique ε pour différentes valeurs de ε . Puis, pour remonter à d_F , on calcule le coefficient directeur de la régression linéaire reliant les différents points de coordonnées $(\ln \varepsilon, \ln N)$.

On voit d'ores et déjà que cette méthode n'est pas valable pour une valeur quelconque de ε : la taille des boîtes doit être comprise entre une valeur microscopique ℓ et une valeur

macroscopique L :

$$\ell \ll \varepsilon \ll L.$$

Cette restriction est intuitive lorsque ε s'approche de L puisque, à mesure que la taille des boîtes augmente, le caractère fractal du système sera de moins en moins sondé. D'un point de vue mathématique, cette restriction s'explique simplement par le fait que la dimension fractale est définie dans la limite thermodynamique, c'est-à-dire $L \rightarrow \infty$. Si l'on pouvait se placer dans une telle situation, il n'y aurait alors plus de restriction supérieure sur la valeur de ε . La limite thermodynamique n'est cependant jamais atteinte en pratique, et la condition ci-dessus permet alors d'éviter des effets de taille finie. En pratique, il faudra donc faire une régression linéaire seulement pour certaines tailles de boîte. On retrouvera également cette restriction dans le cas des mesures multifractales.

4.3 Multifractalité

Pour certains phénomènes complexes comme l'agrégation limitée par diffusion [WS81 ; BS95] (DLA, pour *diffusion limited aggregation*, qui est un modèle de croissance de forme) ou encore la turbulence en hydrodynamique [PV87], la détermination d'une seule dimension fractale n'est pas suffisante pour caractériser le phénomène. Il est alors nécessaire d'introduire un ensemble continu de dimensions fractales.

Pour être plus précis, un phénomène physique caractérisé par une loi de probabilité³ sera dit « multifractal » si plusieurs dimensions fractales sont nécessaires pour décrire le comportement en loi d'échelle de cette loi. À ce stade, signalons qu'en toute rigueur, on ne peut pas qualifier un ensemble de multifractal, le concept de multifractalité se rapportant à la **mesure** portée par cet ensemble. Nous verrons néanmoins par la suite quelle interprétation géométrique donner à la multifractalité.

Par souci de clarté, avant de voir en quoi la multifractalité est un bon outil pour caractériser les fonctions d'ondes à la transition d'Anderson, nous allons exposer deux exemples de mesures multifractales. Le premier se résumera à une approche intuitive et qualitative, tandis que le second sera basé sur la construction mathématique explicite d'une telle mesure.

4.3.1 Approche intuitive : les diamants sur Terre

Nous commençons ici par un exemple intuitif de mesure multifractale [Man89 ; Gou92]. Pour cela, intéressons-nous à la distribution des diamants à la surface de la Terre. Tous les diamants ne font pas la même taille et n'ont donc pas la même valeur (en supposant qu'ils aient tous la même pureté). Il est donc assez naturel de dire que la répartition des diamants

3. D'un point de vue mathématique, une loi de probabilité est un cas particulier de mesure.

est inhomogène, c'est-à-dire qu'il y a des petites régions assez rares où les diamants sont gros, et que sur toute la Terre on trouve des diamants à l'état de trace. À chacune de ces tailles de diamants, on peut associer une dimension fractale qui sera proche de zéro pour les petites régions et proche de deux pour les diamants à l'état de trace. Entre ces deux cas extrêmes, il existe tout une palette de diamants de différentes tailles dont la répartition est également caractérisée par une dimension fractale différente. Ainsi, en s'intéressant à la taille des diamants, notre mesure ici, on voit apparaître une multitude de dimensions fractales caractérisant complètement la distribution des diamants.

4.3.2 Exemple mathématique

Construction de la mesure binomiale

Ici, on s'attache à construire un exemple complet de mesure multifractale appelée mesure binomiale. Il s'agit sans doute de l'exemple le plus clair et simple trouvé dans la littérature [Tél88; Gou92]. À la manière d'un fractal, cette mesure va se construire de manière itérative.

On considère pour cela un histogramme de hauteur un sur l'intervalle $[0, 1]$. À la première étape de notre construction, on découpe l'histogramme en trois sous-intervalles de même longueur et de hauteurs respectives $\{a, b, a\}$, telles que $2a + b = 1$. À l'étape suivante, chacun des trois intervalles est à nouveau divisé en trois et les hauteurs sont elles aussi redistribuées de la même manière. On aura donc, de gauche à droite, la liste suivante des hauteurs de rectangle :

$$\{a^2, ab, a^2, ab, b^2, ab, a^2, ab, a^2\}.$$

Ce processus est illustré sur la figure 4.3. En résumé, à l'étape n , il y aura 3^n intervalles avec $n + 1$ hauteurs de rectangle différentes. Il y a donc une dégénérescence des hauteurs : à l'étape n , il y aura k rectangles différents avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. La hauteur du rectangle k est : $h(k, n) = a^k b^{n-k}$. Une hauteur donnée apparaîtra un nombre de fois donné par :

$$N(k, n) = 2^k \binom{n}{k}. \tag{4.8}$$

Dit de manière plus technique, h constitue une mesure dont le support, l'intervalle $[0, 1]$, est non fractal. On voit que la notion de dimension fractale n'a plus réellement d'intérêt ici puisque le support de la mesure, c'est-à-dire les différents sous-intervalles de longueur $\varepsilon = 3^{-n}$, ne présente pas de structure irrégulière. Pourtant, si l'on ne s'intéresse plus directement aux différents intervalles mais à la hauteur des rectangles sur ceux-ci, on voit apparaître des irrégularités. Celles-ci seront correctement décrites à l'aide de l'analyse multifractale.

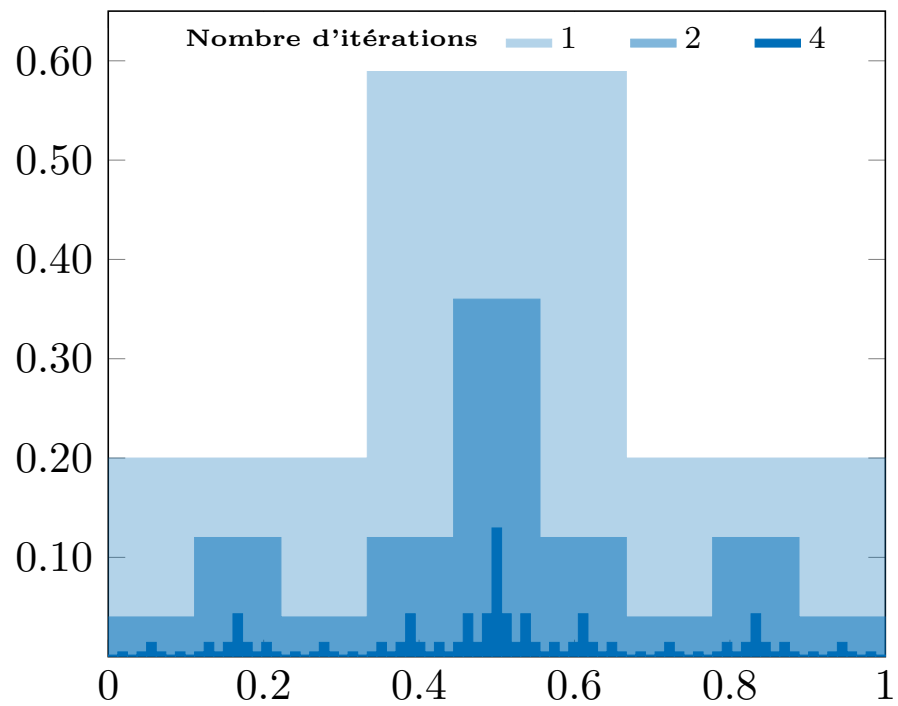


Figure 4.3 Représentation de la mesure (hauteur) h pour une, deux et quatre itérations avec $a = 1/5$ et $b = 3/5$. On comprend intuitivement que la figure formée par un tel processus après un grand nombre d'itérations présentera des **variations de hauteur importantes**. L'analyse multifractale nous fournit un outil adapté pour traiter ces différentes échelles.

Aspects statistiques : moments de la mesure

La figure 4.3, qui illustre la répartition des rectangles selon le processus décrit précédemment, est relativement complexe. Pour rendre compte des irrégularités qu'elle met en évidence, nous allons adopter un point de vue statistique. L'approche la plus simple consiste à regarder les **moments des hauteurs**

$$P_q(n) \doteq \langle h^q(k, n) \rangle \doteq \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^n N(k, n) h^q(k, n). \quad (4.9)$$

La connaissance de ces moments permet de remonter à la distribution des hauteurs. Comme nous connaissons le nombre d'apparitions de chaque type de rectangle, on en déduit facilement

$$P_q(n) = 3^{-n} \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} a^{qk} b^{q(n-k)}. \quad (4.10)$$

On reconnaît dans cette expression la formule du binôme de Newton, ce qui nous permet d'écrire

$$P_q(n) = \left(\frac{2a^q + b^q}{3} \right)^n = \left[\frac{2a^q + (1 - 2a)^q}{3} \right]^n.$$

En définitive, si l'on souhaite exprimer les moments en fonction de la distance $\varepsilon = 3^{-n}$ entre le milieu de deux intervalles, on obtient

$$P_q(\varepsilon) = \varepsilon^{\tau(q)+1}, \text{ avec } \tau(q) = -\log_3(2a^q + b^q), \quad (4.11)$$

où \log_3 désigne le logarithme en base 3 et la fonction $\tau(q)$ est appelée **exposant de masse**, représenté pour différentes valeurs du paramètre a sur la figure 4.4. Pour $a = b = 1/3$, τ est linéaire en q de pente $d_F = 1$, signifiant simplement que la figure n'a aucun caractère fractal, et tous les rectangles ont alors la même hauteur. Le point essentiel est que pour les autres valeurs de a les moments ne varient plus linéairement avec q : c'est l'une des caractéristiques d'une mesure multifractale.

Une particularité de cet exemple est que, par construction, l'aire totale des rectangles à chaque étape n'est pas conservée. Cette non-conservation a pour conséquence la présence du 1 dans l'exposant de ε dans l'équation (4.11). Si on avait imposé la conservation de l'aire, on aurait obtenu $P_q(\varepsilon) = \varepsilon^{\tau(q)}$. En comparant cette expression avec la loi (4.4) attendue pour une mesure fractale, on définit par analogie, pour le cas multifractal, la notion de **dimensions fractales généralisées**

$$D_q \doteq \frac{\tau(q)}{q-1}. \quad (4.12)$$

Ces quantités joueront un rôle très important dans la suite de ce manuscrit.

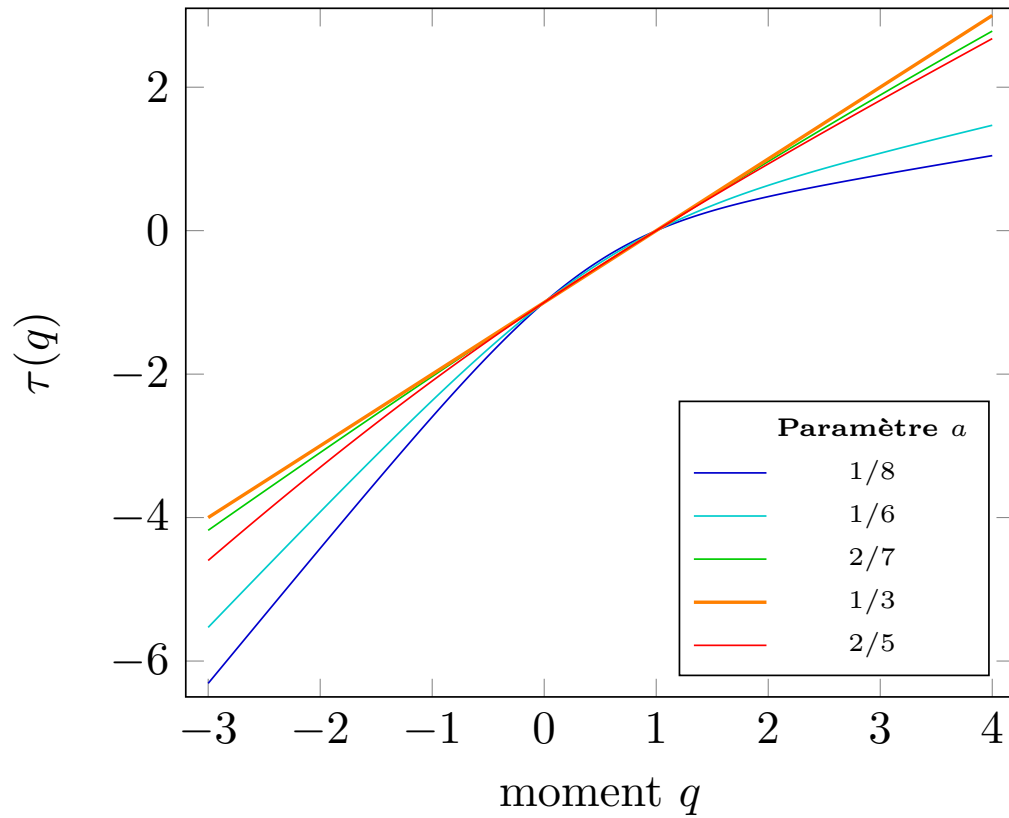


Figure 4.4 Exposant de masse $\tau(q)$ caractérisant le comportement « anormal » en loi d'échelle des moments P_q de la mesure binomiale h . La fonction est représentée pour cinq valeurs différentes du paramètre a caractérisant la mesure. Excepté pour $a = 1/3$, τ n'est pas linéaire en q , comportement caractéristique d'une mesure multifractale.

Aspects géométriques : ensembles fractals

Dans cette partie, nous souhaiterions adopter un point de vue géométrique, et plus particulièrement caractériser les segments qui portent une même hauteur de rectangle. En adaptant la définition (4.5) de la dimension de fractale à cet exemple, les segments de longueur $\varepsilon = 3^{-n}$ jouent le rôle des « boîtes » et on obtient donc

$$d_F(k, n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(k, n)}{\ln \varepsilon} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3 N(k, n)}{n}.$$

L'utilisation de la formule de Stirling ($\ln n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln n$) permet de trouver une forme asymptotique de cette dimension :

$$d_F(\rho) \sim -\rho \log_3 \frac{\rho}{2} + (\rho - 1) \log_3(1 - \rho), \quad (4.13)$$

où $\rho \doteq k/n$. Ainsi, les différentes hauteurs $h(k, n)$ s'étendent sur des ensembles fractals de dimensions différentes et données par l'équation (4.13).

Il est également possible de s'intéresser à l'exposant de Hölder de h sur l'intervalle k . D'après la définition (4.7) et du fait que, par construction, $2a + b = 1$, on a :

$$\gamma(\rho) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln h(k, n)}{n \ln 3} \sim -\rho \log_3 a + (\rho - 1) \log_3(1 - 2a). \quad (4.14)$$

On peut donner à l'exposant de Hölder une interprétation géométrique et le relier à la dimension fractale en procédant de la manière suivante. Intéressons-nous aux ensembles F_α constitués des intervalles pour lesquels $\gamma(\rho) = \alpha$. On note M_α le nombre d'intervalles appartenant à F_α . Par construction, $M_\alpha = N(k, n)$ où $\alpha = h(k, n)$. Par exemple, après $n = 2$ itérations, α pourra prendre trois valeurs $\alpha \in \{a^2, ab, b^2\}$ et il existera donc trois ensembles F_α avec respectivement $M_\alpha \in \{4, 4, 1\}$, suivant l'équation (4.8). Le **spectre de multifractalité** $f(\alpha)$ est la fonction qui caractérise le comportement en loi d'échelle du nombre d'intervalles pour une valeur de α donné. De manière formelle, cette définition s'écrit

$$f(\alpha) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\alpha}{\ln \varepsilon}. \quad (4.15)$$

L'équation (4.15) montre que le spectre de multifractalité est en fait la dimension fractale d_F non plus exprimée en fonction du paramètre ρ comme dans l'équation (4.13) mais en fonction de l'exposant de Hölder donné par (4.14), i.e. $f(\alpha) = d_M(\gamma^{-1}(\alpha))$. Dans ce cas précis, d'après l'équation(4.14), la relation entre ρ et γ est simplement linéaire et on a :

$$\rho = c_1 \alpha + c_2, \text{ avec } c_1 \doteq \frac{1}{\log_3(1 - 2a) - \log_3 a} \text{ et } c_2 \doteq \frac{\log_3(1 - 2a)}{\log_3(1 - 2a) - \log_3 a}. \quad (4.16)$$

Finalement, pour cette mesure, le spectre de multifractalité représenté sur la figure 4.5 a pour expression

$$f(\alpha) = (c_1 \alpha + c_2 - 1) \log_3(1 - c_1 \alpha - c_2) - (c_1 \alpha + c_2) \log_3 \left(\frac{c_1 \alpha + c_2}{2} \right). \quad (4.17)$$

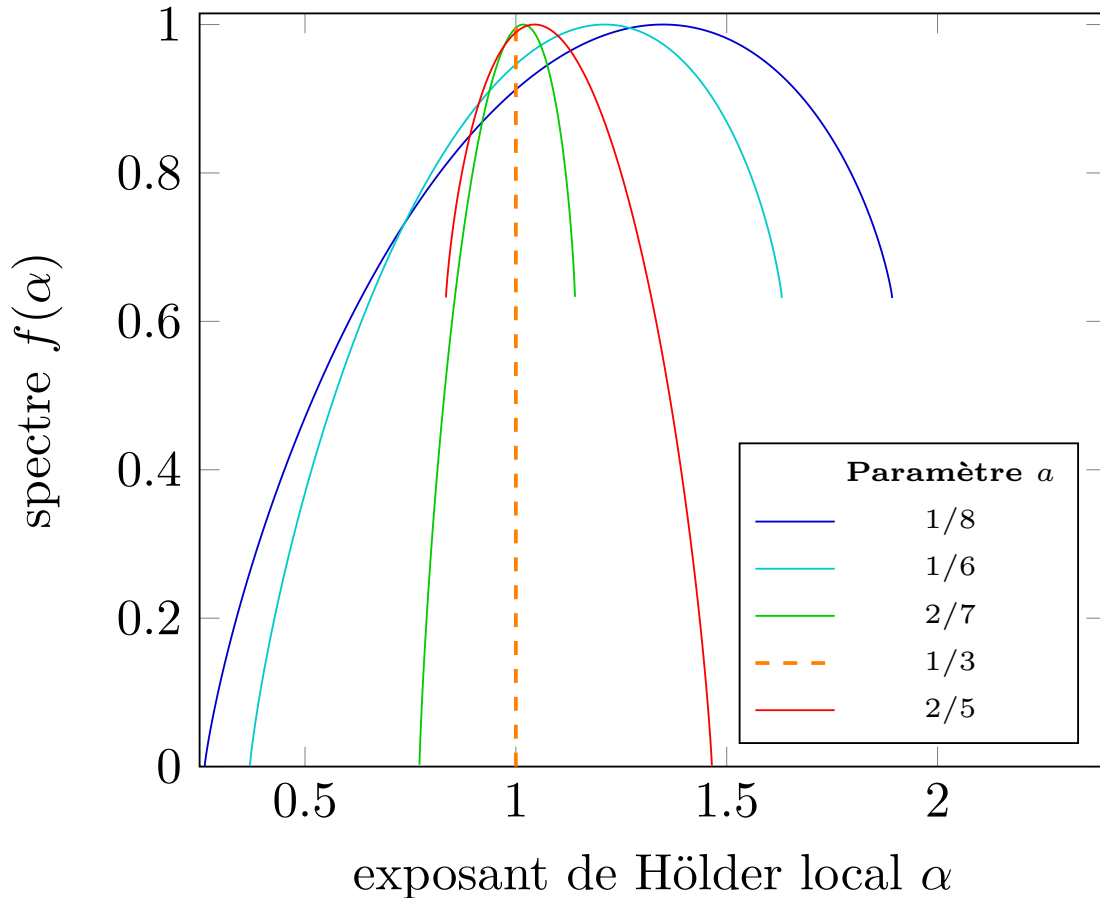


Figure 4.5 Le spectre de multifractalité f , tel que défini par l'équation (4.15), est représenté pour quatre valeurs différentes du paramètre a . Pour $a = 1/3$, le spectre se réduit à un pic en $\alpha = 1$, caractéristique d'une mesure non multifractale. Si pour cette valeur de a , la mesure avait été « simplement » fractale, le spectre serait à nouveau un pic mais pour une valeur différente de $\alpha = 1$. Pour les trois autres valeurs de a , le spectre de multifractalité prend tout son sens puisqu'il permet de lire la dimension fractale du nombre d'intervalles sur lesquels la mesure présente la même singularité. Les points de terminaisons (intervalle de définition de α) dépendent du paramètre a . Si $a < 1/3$ alors α est dans $[-c_1/c_2; (1 - c_1)/c_2]$; si $a = 1/3$ la mesure ne présente pas un caractère fractal; si $a > 1/3$, α est dans $[(1 - c_1)/c_2; -c_1/c_2]$. Dans tous les cas (sauf $a = 1/3$), $f(-c_1/c_2) = 0$ et $f[(1 - c_1)/c_2] = \ln(2)/\ln(3)$.

Synthèse

Dans cette partie, nous avons construit explicitement une mesure relativement simple dont la caractérisation passe par une analyse des moments. Une procédure similaire peut être appliquée au modèle d'Anderson, comme nous le verrons à la fin de ce chapitre. Elle a l'avantage d'impliquer naturellement l'ensemble des moments de la mesure considérée, et pas seulement sa moyenne et sa variance ce qui, comme nous l'avons illustré dans la partie 2.2.2, est essentiel dans les problèmes de localisation. Par ailleurs, dans cette analyse nous avons mis en évidence le caractère multifractal des moments, en introduisant les notions de dimension fractale généralisée et d'exposant de masse (point de vue **statistique**).

Dans un second temps, nous avons introduit le concept de spectre de multifractalité à partir d'une approche **géométrique**. Dans la suite, nous allons généraliser l'analyse multifractale à une mesure quelconque et montrer que les points de vue statistique et géométrique sont intimement liés. Plus précisément, nous verrons que l'exposant de masse τ est la transformée de Legendre du spectre de multifractalité f .

4.3.3 Analyse multifractale : formalisme général

Exposant de masse

Nous considérons à présent un système de taille L^d sur lequel se déroule un certain processus physique caractérisé par une mesure notée μ . Si le système peut être discrétisé à l'aide d'un réseau, alors à chaque nœud i de ce réseau, la mesure prend la valeur μ_i . Par ailleurs, nous nous intéressons à des phénomènes physiques susceptibles de varier avec le choix des conditions initiales ou avec la réalisation du désordre. Pour un désordre donné et indexé par k , la mesure sur le site i aura pour valeur $\mu_{i,k}$. Pour les systèmes qui nous intéresseront par la suite, le module carré de la fonction d'onde constituera la mesure.

Dans le but d'étudier les propriétés multifractales de cette mesure, on introduit les moments de celle-ci :

$$P_q^{(k)}(L) \doteq \sum_{i=1}^{N_s} \mu_{i,k}^q, \quad (4.18)$$

où N_s est le nombre total de sites du réseau. Il s'agit de moments généralisés puisque q est un nombre réel.

La possibilité de considérer des moments d'ordre négatif pose cependant problème, car ceux-ci sont susceptibles de diverger, rendant l'analyse multifractale caduque. Pour remédier à cela, on lisse la mesure sur une échelle de taille l (voir la figure 4.6). Ainsi, pour chaque réalisation du désordre k , on définit la mesure $\tilde{\mu}$ à l'intérieur du cube \mathcal{C}_j de taille l^d par

$$\tilde{\mu}_{j,k} \doteq \sum_{i \in \mathcal{C}_j} \mu_{i,k}, \quad (4.19)$$

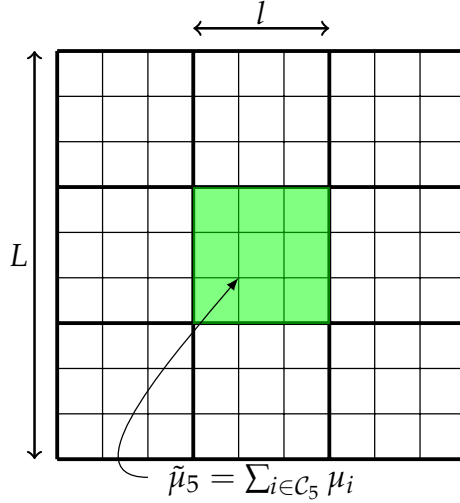


Figure 4.6 Le système de taille $L \times L$ est divisé en carrés plus petits de côtés de longueur l . À l'intérieur d'un carré, la mesure est lissée selon l'équation (4.19). Par exemple, sur cette figure, la mesure lissée dans le cinquième carré est obtenue en sommant la mesure initiale sur les neuf sites en vert.

avec $j \in \llbracket 1, N_c \rrbracket$ et où N_c désigne le nombre de cubes nécessaires au recouvrement du système considéré. Ce nombre dépend évidemment de la taille des cubes utilisés pour paver le système. Avec cette redéfinition de la mesure, les nouveaux moments s'écrivent

$$\tilde{P}_q^{(k)}(l, L) \doteq \sum_{j=1}^{N_c} (\tilde{\mu}_{j,k})^q. \quad (4.20)$$

Désormais et par souci de concision, nous omettons le tilde qui permettait de faire la distinction entre les anciennes et les nouvelles quantités. Dans la suite, nous nous intéressons au comportement moyen des moments. À cet effet, on définit la moyenne sur le désordre :

$$\langle P_q(l, L) \rangle \doteq \frac{1}{N_d} \sum_k^{N_d} P_q^{(k)}(l, L), \quad (4.21)$$

où N_d est le nombre de réalisations du désordre. Désormais, les moments ne dépendent que du rapport $\varepsilon \doteq l/L$. Comme vu dans l'exemple de la mesure binomiale, on a typiquement un comportement de la forme :

$$\langle P_q(\varepsilon) \rangle \sim \varepsilon^{\tau(q)}, \quad (4.22)$$

où la fonction τ est l'**exposant de masse**. Lorsque cet exposant varie de manière **non linéaire** avec q , la mesure est dite multifractale, et on peut définir des **dimensions généra-**

lisées (parfois nommées dimensions de Rényi) :

$$D_q \doteq \frac{\tau(q)}{q-1}. \quad (4.23)$$

Pour une mesure strictement fractale, toutes les dimensions généralisées sont égales à la dimension fractale de la mesure. Une dernière quantité importante est la dimension anormale

$$\Delta_q \doteq \tau(q) - d(q-1) = (D_q - d)(q-1). \quad (4.24)$$

Cet exposant indique à quel point la mesure dévie d'une mesure non fractale (pour laquelle $\Delta_q = 0$) et sera utilisé au chapitre 6 dans le contexte de la transition d'Anderson.

Moyenne arithmétique et moyenne géométrique

Jusqu'ici, nous avons considéré la moyenne arithmétique des moments. Or, il est également possible de regarder leur moyenne géométrique : $\langle \ln P_q(\varepsilon) \rangle$. Lorsque la distinction sera nécessaire nous noterons τ^{ens} l'exposant de masse associé à la moyenne arithmétique, et τ^{typ} celui pour la moyenne géométrique. Le choix de ces notations prend tout son sens au regard de l'étude de la chaîne de diffuseurs discutée dans la partie 2.2.2, où nous avons distingué valeur moyenne et valeur la plus probable qui, sauf cas particuliers, sont distinctes. Déterminer τ^{typ} est donc pertinent en vue d'une comparaison entre la théorie et une simulation. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 6. Dans la suite de cette partie, qui reste généraliste, τ désignera indifféremment τ^{ens} ou τ^{typ} .

Forme, valeurs remarquables et interprétations

La définition de l'exposant de masse $\tau(q)$ restreint ses valeurs ainsi que celles de D_q et Δ_q lorsque $q = 0$ et $q = 1$. Nous les résumons dans le tableau ci-dessous.

Moment	Exposant de masse	Dimension généralisée	Dimension anormale
	$\tau(q)$	D_q	Δ_q
$q = 0$	$-d_{\text{F}}$	d_{F}	$d - d_{\text{F}}$
$q = 1$	0	D_{I}	0

Ici, nous avons distingué d qui est la dimension euclidienne et d_{F} qui est une dimension fractale. Ces deux dimensions peuvent être différentes, mais une mesure est tout à fait susceptible d'être multifractale avec $d_{\text{F}} = d$, comme dans l'exemple de la mesure binomiale (voir la partie 4.3.2) où $d_{\text{F}} = d = 1$, ou encore dans le cas des états propres d'un système quantique désordonné à la transition d'Anderson [VRR08].

Une deuxième valeur importante est la dimension d'information $D_I \doteq D_1$. Elle s'obtient par un passage à la limite dans les définitions (4.22) et (4.23) :

$$D_I \doteq D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \langle P_q(\varepsilon) \rangle}{\ln \varepsilon}. \quad (4.25)$$

En échangeant les deux limites dans l'équation (4.25) et en utilisant la définition (4.21) de la valeur moyenne des moments, la dimension d'information s'écrit

$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{q-1} \ln \left\langle \sum_{i=1}^{N_c} \mu_i^q \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)},$$

avec $S(\varepsilon) \doteq -\langle \sum_{i=1}^{N_c} \mu_i \ln \mu_i \rangle$ et où nous avons utilisé la condition de normalisation $\sum_i \mu_i = 1$ et la règle de L'Hôpital [Rud76, chapitre 5] pour calculer la limite sur q . On voit que $S(\varepsilon)$ est l'entropie de Shannon associée à la mesure, ce qui explique le nom de cette dimension.

Une dernière dimension remarquable est celle obtenue pour $q = 2$. Cette dimension est essentielle dans le cadre de cette thèse puisqu'elle est directement reliée aux corrélations. Or, nous avons vu au chapitre 3 et en particulier dans la partie 3.1.1 qu'une transition de phase continue, telle que la transition d'Anderson, est caractérisée par la divergence des corrélations du paramètre d'ordre selon une loi de puissance faisant intervenir l'exposant critique ν . Avant d'expliquer lien entre l'analyse multifractale et la divergence de la fonction de corrélation dans le cadre de la transition d'Anderson, nous montrons ce lien dans un cas plus simple. On considère pour cela un processus physique qui répartit N_p particules sur une surface en des points de coordonnées \mathbf{x}_i , avec $i \in \llbracket 1, N_p \rrbracket$. Dans l'objectif de réaliser une statistique, on répète ce processus un certain nombre de fois. De manière analogue à ce que nous avons fait au chapitre 3 (voir en particulier la partie 3.1.1), on s'intéresse à la densité de particules

$$\rho(\mathbf{x}) \doteq \sum_{i=1}^{N_p} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i),$$

et plus particulièrement aux corrélations de celle-ci :

$$\langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{y}) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{j \neq i}^{N_p} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j) \right\rangle,$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne une moyenne réalisée en répétant le processus physique. Ces corrélations permettent de déterminer le nombre de paires de particules dont la distance relative est inférieure à l . Une telle intégrale de corrélation s'écrit :

$$C_I(l) \doteq \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq l} \langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{y}) \rangle \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{j \neq i}^{N_p} \langle \Theta(l - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \rangle,$$

où Θ désigne la fonction de Heaviside. Il est possible d'estimer C_I en divisant la surface en carrés de taille l . Si l'on note μ_k le nombre moyen de particules dans le carré d'indice k , alors C_I vaut approximativement

$$C_I \approx \sum_{k=1}^{N_c} \mu_k^2, \quad (4.26)$$

avec N_c le nombre de carrés nécessaires pour recouvrir l'ensemble des particules. Il s'agit là d'une estimation, puisque deux particules voisines (c'est-à-dire telles que $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| < l$) mais présentes dans deux carrés différents ne seront pas comptabilisées avec l'expression (4.26) alors qu'elles devraient l'être. Cette approximation n'est cependant pas très gênante puisque nous nous intéressons au comportement moyen en loi d'échelle de cette fonction. En notant $\langle \dots \rangle_c$ la moyenne réalisée sur les carrés, l'intégrale de corrélation devient

$$C_I \approx N_c \langle \mu^2 \rangle_c.$$

Pour finir, nous faisons une hypothèse du type ergodique : on suppose que la moyenne sur les carrés est équivalente à celle sur les ensembles statistiques. On peut ainsi écrire

$$\langle \mu^2 \rangle_c = \langle \mu^2 \rangle = N_c^{-1} \langle P_2(l) \rangle \sim N_c^{-1} l^{\tau(2)} = N_c^{-1} l^{D_2},$$

où nous avons utilisé l'équation (4.20), la définition (4.22) de l'exposant de masse τ et la définition (4.23) de la dimension fractale généralisée D_q . La dimension généralisée associée au moment d'ordre $q = 2$ décrit donc ici le comportement en loi d'échelle de l'intégrale des corrélations de positions :

$$C_I \sim l^{D_2}.$$

En généralisant l'argument précédent aux autres moments, on comprend que pour $q > 0$, D_q nous indiquera le comportement en loi d'échelle des corrélations à q points.

Cette interprétation de D_2 a été établie à l'origine dans le domaine du chaos et plus particulièrement dans l'étude des attracteurs étranges [GP83 ; PV87]. Nous verrons dans la partie 6.4.2, que cette interprétation est transposable à l'étude de la transition d'Anderson.

Spectre de multifractalité

Le calcul des moments de la mesure constitue un point de vue qui peut être complété par l'étude du spectre de multifractalité. Une définition rigoureuse du spectre de multifractalité repose sur l'analyse **locale** de la mesure ainsi que sur la notion de dimension de Hausdorff. Dans l'idéal, il faudrait donc étudier la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points où la mesure présente (localement) un certain exposant de Hölder. Une telle démarche aboutit à ce que Falconer [Fal90] appelle un spectre fin de multifractalité et que Harte [Har01] qualifie

d'analyse locale. À moins de connaître analytiquement la mesure, ce type d'analyse ne nous est cependant pas accessible en général. C'est la raison pour laquelle, nous nous contentons ici de présenter une version « grossière » [Fal90] ou sur réseau [Har01] de l'analyse multifractale.

La démarche générale consiste à s'intéresser aux ensembles K formés par les cubes de côté l à l'intérieur desquels l'exposant de Hölder est compris dans un certain intervalle

$$K_\delta(l, \alpha) \doteq \left\{ \text{cubes } \mathcal{C}(l) : \alpha - \delta < \frac{\ln \mu[\mathcal{C}(l)]}{\ln l} \leq \alpha + \delta \right\}.$$

On note $N_\delta(l, \alpha)$ le cardinal d'un tel ensemble K et on définit le spectre de multifractalité par la fonction

$$f(\alpha) \doteq - \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(l, \alpha)}{\ln l}. \quad (4.27)$$

De manière moins formelle, le spectre de multifractalité caractérise l'invariance d'échelle de N .

Il est possible de donner une interprétation statistique du spectre de multifractalité. En effet, si l'on note \mathcal{P} la distribution des α , le nombre de cubes s'écrit

$$N(l, \alpha) = l^{-d_F} \mathcal{P}(\alpha). \quad (4.28)$$

De par la définition du spectre de multifractalité, on en déduit

$$\mathcal{P}(\alpha) \sim l^{d_F - f(\alpha)}. \quad (4.29)$$

Transformée de Legendre et valeur remarquable du spectre

L'exposant de masse τ et le spectre de multifractalité f sont reliés par une transformée de Legendre. En effet, par définition des ensembles K , dans le cube \mathcal{C} de taille l^d , la mesure a un comportement en loi d'échelle donné par α :

$$\mu[\mathcal{C}(l)] \sim l^\alpha. \quad (4.30)$$

On peut ainsi estimer les moments P_q à l'aide de α :

$$\langle P_q(l) \rangle = \sum_{j=1}^{N_c} \mu_j^q \sim \sum_{j=1}^{N_c} l^{\alpha q}. \quad (4.31)$$

À nouveau, nous avons fait l'hypothèse que la moyenne sur les cubes est équivalente à celle sur les ensembles statistiques. Ensuite, nous remplaçons la somme sur les cubes par une intégrale sur α . En suivant la définition (4.27) du spectre de multifractalité, pour une valeur donnée de α , il existe $N_\delta(l, \alpha) \sim l^{-f(\alpha)}$ cubes. On peut donc écrire les moments sous la forme

$$\langle P_q(l) \rangle \sim \int l^{\alpha q - f(\alpha)} d\alpha. \quad (4.32)$$

Pour évaluer cette intégrale nous **supposons** que la fonction $\mathcal{L}(\alpha) \doteq \alpha q - f(\alpha)$ admet un minimum unique, ou de manière équivalente que f est concave. Cette hypothèse permet d'utiliser la méthode de Laplace [Erd56] : dans la limite $l \rightarrow 0$, l'intégrale est dominée par le **minimum** de $\mathcal{L}(\alpha) \doteq \alpha q - f(\alpha)$, atteint au point noté α_q . Le comportement en loi d'échelle des moments devient donc

$$\langle P_q(l) \rangle \sim l^{\alpha_q q - f(\alpha_q)}, \quad (4.33)$$

que l'on peut identifier avec la définition de l'exposant de masse pour obtenir la relation

$$\tau(q) = \mathcal{L}(\alpha_q) \doteq \alpha_q q - f(\alpha_q). \quad (4.34)$$

L'utilisation de la méthode de Laplace suppose que le point α_q au voisinage duquel est fait le développement limité à l'ordre deux est tel que $\mathcal{L}'(\alpha_q) = 0$, où \mathcal{L}' désigne la dérivée première de la fonction \mathcal{L} . Cette condition peut être simplifiée et s'écrire $q = f'(\alpha_q)$, expression que l'on utilise dans la relation (4.34) pour aboutir au lien suivant entre α_q et l'exposant de masse :

$$\alpha_q = \tau'(q). \quad (4.35)$$

Les relations précédentes permettent d'interpréter une partie du spectre de multifractalité à l'aide des valeurs remarquables pour les moments d'ordre zéro et un. De par le lien entre q et la dérivée du spectre f , à $q = 0$ est associé une certaine valeur de α notée α_0 et pour laquelle le spectre atteint un maximum. La valeur prise par le spectre en ce point correspond à la dimension d_F du support de la mesure :

$$f(\alpha_0) = -\tau(0) = d_F.$$

Malgré la notation, d_F n'est pas forcément une dimension strictement fractale. Dans l'exemple de la mesure binomiale discuté dans la partie 4.3.2, $d_F = 1$, ce qui correspond effectivement au maximum observé sur la figure 4.5. Par ailleurs, on peut vérifier explicitement que, pour cette mesure binomiale, le spectre de multifractalité (4.11) est bien la transformée de Legendre du spectre de masse (4.17). Enfin, pour $q = 1$, on a $f(\alpha_1) = \alpha_1$.

Sur la figure 4.7, nous avons synthétisé les différentes informations auxquelles donne accès le spectre de multifractalité. En particulier, nous avons indiqué quelques points remarquables. Les équations de passage entre f et τ dans les deux sens peuvent par ailleurs être résumées par :

$$\begin{aligned} \alpha_q &= \tau'(q) \\ f(\alpha_q) &= q\tau'(q) - \tau(q) \end{aligned} \quad (4.36)$$

et inversement

$$\begin{aligned} \tau'(q) &= \alpha_q \\ \tau(q) &= q\alpha_q - f(\alpha_q). \end{aligned} \quad (4.37)$$

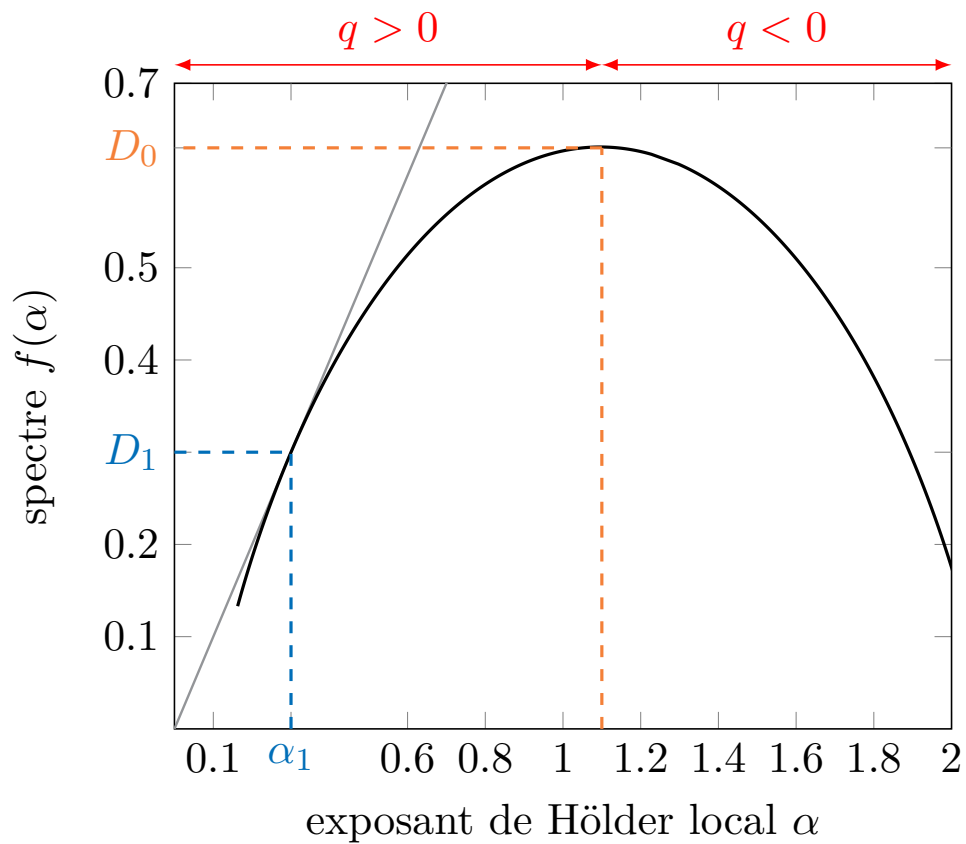


Figure 4.7 Interprétation d'un spectre de multifractalité. De manière générale, $f(\alpha)$ nous donne le comportement en loi d'échelle du nombre de points où $\mu \sim l^\alpha$. Le maximum du spectre atteint en α_0 permet de distinguer les moments positifs à gauche et négatifs à droite. En α_0 , le spectre f indique la dimension $D_0 = d_M$ éventuellement fractale du système étudié (support de la mesure). Un second point remarquable est α_1 pour lequel $f(\alpha_1) = \alpha_1 = D_1$ c'est-à-dire la dimension d'information (4.25). En ce point, la pente de la tangente vaut un.

Détermination numérique du spectre de multifractalité

Le lien que nous venons de présenter entre l'exposant de masse et le spectre suggère qu'il est assez simple de déterminer ce dernier une fois que l'analyse des moments a été faite. Même si cette méthode est très pratique, elle n'est cependant pas extrêmement fiable. En effet, chaque valeur de $\tau(q)$ calculée numériquement est affectée d'une incertitude, et – les mêmes réalisations de désordre étant utilisées pour les différentes valeurs de q – les incertitudes sont corrélées, ce qui rend l'estimation de la transformée de Legendre très délicate. Mais il est possible d'estimer **directement** le spectre de multifractalité à partir des moments de la mesure [CJ89]. En utilisant la définition de l'exposant de masse et la relation $\alpha_q = \tau'(q)$, un calcul simple montre que

$$\alpha_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} \frac{\sum_i \mu_i^q \ln \mu_i}{\sum_i \mu_i^q},$$

où les sommations sur les indices i vont de 1 au nombre de cubes N_c . En faisant de même pour la fonction f , on trouve

$$f(\alpha_q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} \frac{1}{\sum_i \mu_i^q} \sum_i \mu_i^q \ln \left(\frac{\mu_i^q}{\sum_j \mu_j^q} \right).$$

4.3.4 Synthèse

Pour conclure cette partie, nous résumons les différentes notions abordées. Pour caractériser une mesure multifractale, deux approches sont possibles : l'une reposant sur l'exposant de masse τ qui s'obtient par une procédure de comptage de boîtes mais qui n'a pas une interprétation physique simple. La seconde approche, qui fait appel à la notion de spectre de multifractalité est, quant à elle, légèrement plus compliquée à mettre en œuvre mais possède une interprétation simple en terme de dimension fractale. Enfin, nous avons vu que τ et f sont reliées par une transformée de Legendre.

Par ailleurs, nous voudrions poser la question suivante : en quoi la multifractalité d'une mesure est-elle révélatrice des grandes fluctuations d'une quantité physique ? La compréhension du spectre de multifractalité permet de répondre à cette question. En effet, le spectre de multifractalité nous informe sur la dimension fractale de l'ensemble des points où la mesure est caractérisée par le même exposant de Hölder. En d'autres termes, le spectre nous indique la dimension fractale de certains ensembles de niveaux. Plus la mesure à analyser fluctue, plus de nombreux ensembles de niveaux avec des dimensions fractales différentes existeront. Les grandes fluctuations vont se traduire par un élargissement du spectre. À l'inverse, une mesure uniformément distribuée ne présentera qu'un seul et même ensemble de niveau caractérisé par une seule dimension. Le spectre résultant sera un pic.

4.4 Multifractalité et modèle d'Anderson

Un exemple de phénomène physique caractérisé par une mesure multifractale est le point critique de la transition métal–isolant d'Anderson. Comme expliqué tout au long de ce chapitre, il faut trouver la quantité pertinente qui présente une structure multifractale. Dans notre cas, la bonne mesure est le module carré d'un état propre pour une réalisation du désordre : $\mu_i = |\psi_i|^2$, où ψ_i est l'état propre (de l'électron par exemple) sur le site i du réseau pour une seule réalisation du désordre. La structure spatiale d'un état propre au point critique est représentée sur la figure 4.8. Elle met en évidence la propriété d'invariance d'échelle, comme nous l'avons vu, Une autre quantité intéressante dans l'étude de la multifractalité dans le modèle d'Anderson est $P_2 = \sum_i |\psi_i|^4$. Cette quantité est appelée « taux de participation inverse » (traduction de *inverse participation ratio* abrégé en IPR) et correspond à l'inverse de la longueur sur laquelle se développe la fonction d'onde. Elle a été introduite en chimie par Bell et Dean [BD70] dans un contexte tout autre que celui de la localisation. De manière évidente, les $P_q = \sum_i |\psi_i|^{2q}$, pour q quelconque, seront appelés les taux de participation inverses généralisés (gIPR ou IPRs). Nous mentionnons cela car, même si nous n'utiliserons que très peu cette terminologie, il est utile de la connaître pour comprendre les articles auxquels nous faisons référence.

La multifractalité des états propres a été observée numériquement pour la première fois par Aoki [Aok86]. Par la suite Castellani et Peliti [CP86] ont été les premiers à faire le lien entre la multifractalité et les exposants critiques calculés par Wegner [Weg80 ; Weg89] avant les travaux d'Aoki.

4.4.1 Prédictions théoriques : approximation parabolique et relation de symétrie

À l'aide du modèle σ non linéaire, Wegner [Weg87] a calculé les dimensions anormales Δ_q (voir l'équation (4.24)) pour l'ensemble orthogonal en dimension $2 + \epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$:

$$\Delta_q = q(1 - q)\epsilon + \frac{\zeta(3)}{4}q(q - 1)(q^2 - q + 1)\epsilon^4 + O(\epsilon^5), \quad (4.38)$$

où ζ est la fonction de Riemann [WW62, chapitre 13], en particulier $\zeta(3) \approx 1.2$. Si on ne garde que le premier ordre du développement, on se trouve dans l'approximation dite parabolique. Dans ce régime, toutes les quantités telles que $\tau(q)$, D_q ou $f(\alpha)$ sont des polynômes de degré au plus 2, ce qui simplifie un certain nombre de calculs. Étant donné que la transition d'Anderson a lieu dans un milieu non fractal de dimension d , dans le cadre de cette approximation, le spectre de multifractalité devient

$$f_{\text{AP}}(\alpha) = d - \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{4(\alpha_0 - d)}, \quad (4.39)$$

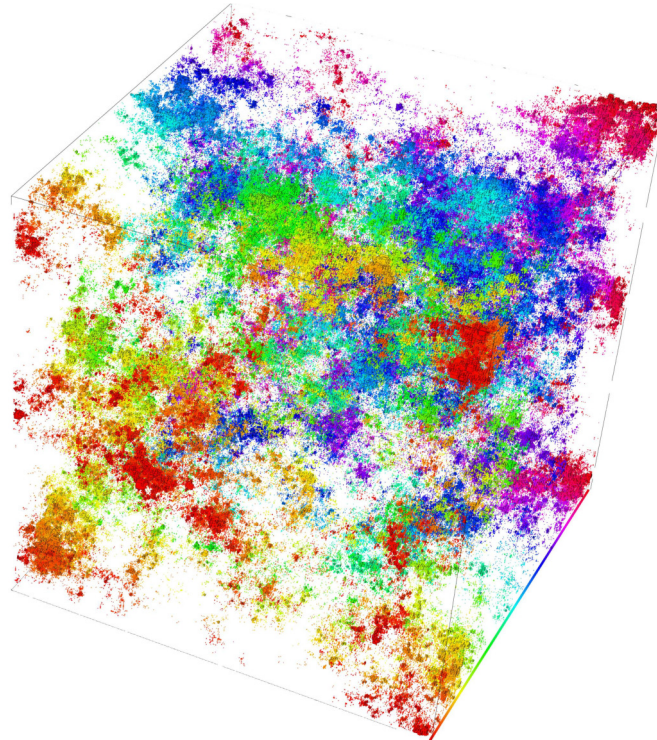


Figure 4.8 Simulation numérique d'états propres du modèle d'Anderson pour un système de taille $L = 240$ au voisinage du point critique (figure issue de l'article [VRR08]). On observe sur cette figure que ces états propres occupent l'ensemble du système avec cette particularité que des régions où la probabilité de présence de l'électron est élevée (rouge) coexistent avec des régions où la probabilité est extrêmement faible (bleu). Cette coexistence est une manifestation des grandes fluctuations à toutes les échelles.

avec $\alpha_0 = d + \epsilon$. Ainsi, à trois dimensions et, en s'autorisant à prendre $\epsilon = 1$, on s'attend à ce que le maximum du spectre soit atteint pour $\alpha_0 = 4$. C'est effectivement ce que l'on observe sur la courbe noire de la figure 4.9, qui représente le spectre de multifractalité obtenu par une simulation numérique des états propres du modèle d'Anderson au point critique de la transition métal–isolant.

Les exposants de masse correspondants deviennent

$$\tau(q) \approx d(q - 1) - \epsilon q(q - 1), \quad (4.40)$$

et

$$D_q = d - \epsilon q. \quad (4.41)$$

Pour $q = 2$, ce développement prédit $D_2^{\text{th}} = 1$ valeur éloignée de $D_2 = 1.26$, mesurée au chapitre 7.

L'approximation parabolique est importante puisque, d'une part, le spectre est alors déterminé par un seul paramètre, α_0 , et il est alors possible de remonter à la distribution des $\alpha = \frac{\ln |\psi|^2}{\ln \varepsilon}$, où ε est le rapport de la taille de boîte l sur la taille du système L . Dans le cadre de l'approximation parabolique, la distribution des α est une loi normale, ce qui implique une distribution log-normale pour la probabilité de présence $|\psi|^2$ [Jan94]. En particulier la valeur la plus probable de α est α_0 , ce qui implique que la densité la plus probable va être proportionnelle à $L^{-\alpha_0}$, soit approximativement $1/L^4$ en dimension 3, alors que c'est $1/L^3$ pour un système non multifractal. Il s'agit là d'une manifestation assez spectaculaire des grandes fluctuations au point critique.

Une autre propriété du spectre est son caractère symétrique. Dans le cadre du modèle σ non linéaire, Mirlin et coll. [Mir+06] ont montré de manière générale que :

$$\Delta_q = \Delta_{1-q}. \quad (4.42)$$

Cette propriété ne semble pas avoir une origine physique évidente même si elle semble être le pendant d'une relation de bilan détaillé pour un système désordonné [MBC09]. Elle est valable au-delà de l'approximation parabolique ; par exemple, l'expansion (4.38) vérifie cette symétrie. Pour le spectre de multifractalité, la propriété de symétrie s'écrit :

$$f(2d - \alpha) = f(\alpha) + d - \alpha. \quad (4.43)$$

4.4.2 Observations numériques et expérimentales

Le caractère symétrique et parabolique du spectre de multifractalité ont été récemment testés numériquement et expérimentalement. En diagonalisant le modèle d'Anderson pour de grandes tailles de système et en faisant une analyse très détaillée de la multifractalité, le groupe de R. A. Römer a montré que le spectre de multifractalité ne se réduit pas à un

pic mais est bien une courbe concave dont le maximum n'est pas atteint en $\alpha = d = 3$ mais $\alpha_0 = 4.07$, ce qui correspond à peu près à la prédiction faite par l'approximation parabolique et le modèle σ non linéaire. Il a par ailleurs confirmé la symétrie (4.43) pour un certain intervalle de moments q , mais a en revanche infirmé la propriété de parabolicité du spectre [VRR08; RVR08]. Par ailleurs, une collaboration entre R. A. Römer et K. Slevin a permis de montrer qu'il était possible de remonter à l'exposant critique ν de la transition sans avoir à définir de conductance, mais seulement en faisant une analyse multifractale de la densité de probabilité de l'amplitude des états propres [Rod+10; Rod+11]. Pour finir sur les recherches numériques, mentionnons que les travaux cités dans ce paragraphe ne sont pas pionniers en leur matière. Par le passé, d'autres groupes [PJ91; HK98] ont travaillé sur le sujet, mais d'une part les tailles de systèmes et le nombre de configurations du désordre étaient moins importants, et d'autre part ils n'ont pas calculé explicitement le spectre mais se sont plutôt limités à l'étude de D_2 (la dimension fractale généralisée pour $q = 2$).

Du côté expérimental, Faez et coll. [Fae+09] ont observé la multifractalité des ondes sonores près de la transition d'Anderson. En particulier, ils ont confirmé la propriété de symétrie. Bien que nous allons y revenir dans le chapitre 6, évoquons les spécificités de cette expérience. Tout d'abord, l'expérience est réalisée en trois dimensions, mais il s'agit d'une expérience de transmission. Cette particularité fait que le signal récolté n'est que bidimensionnel. Concrètement, cela a pour effet que le maximum du spectre de multifractalité est $f(\alpha_0) = 2$ au lieu de $f(\alpha_0) = 3$ comme ce serait le cas pour une analyse en volume. Une autre conséquence est que le décalage prédit et observé pour le maximum du spectre va être atténué : à la transition métal–isolant, le maximum du spectre est ainsi obtenu pour $\alpha_0 \approx 2.22$ au lieu de $\alpha_0 = d + \epsilon = 4$. D'autre part, comme expliqué dans l'article, la principale étude de la multifractalité n'a pas été strictement faite au point de transition mais à son voisinage. Malgré ces deux particularités, cette expérience vient confirmer la propriété de symétrie du spectre.

Sur la figure 4.9, nous avons synthétisé les spectres numérique et expérimental de ces travaux.

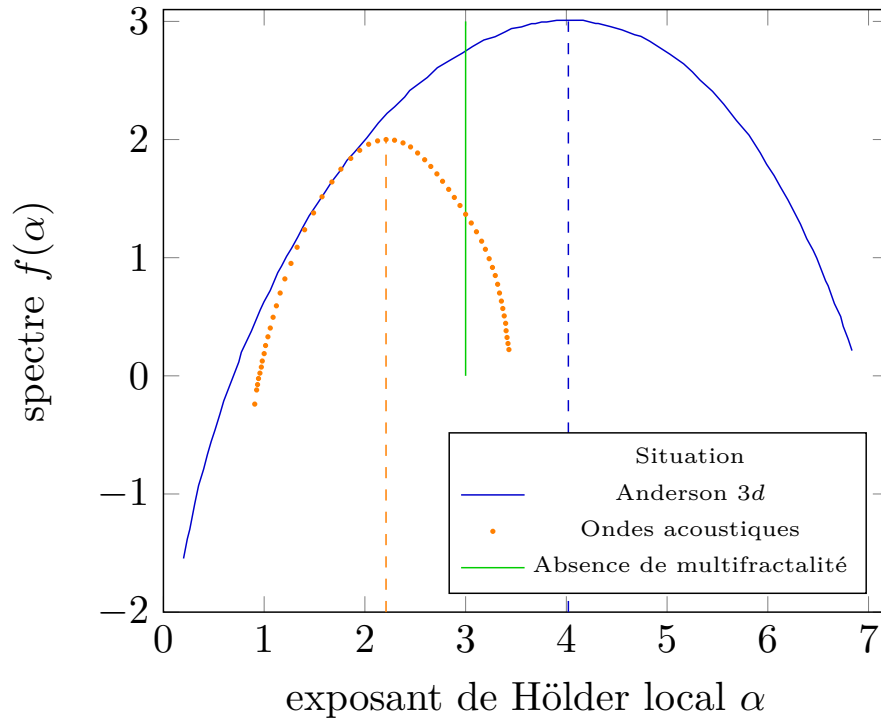


Figure 4.9 Spectre de multifractalité à la transition d'Anderson dans trois « situations » différentes. Dans le premier cas [VRR08 ; RVR08], le spectre est obtenu par l'analyse d'états propres du modèle d'Anderson tridimensionnel (courbe continue bleue) tandis que le deuxième cas [Fae+09] repose sur l'étude d'ondes acoustiques **transmises** par un milieu désordonné (courbe en pointillés orange). Contrairement à l'étude numérique et du fait de la configuration expérimentale, l'intensité des ondes acoustiques n'est collectée que selon deux directions de l'espace. De ce fait, et comme nous l'avons expliqué dans ce chapitre, le maximum du spectre de multifractalité correspond à la dimension du support de la mesure, soit $d = 3$ pour la simulation et $d = 2$ pour l'expérience. Une autre caractéristique remarquable est que le maximum du spectre n'est pas atteint pour $\alpha_0 = d$. Au contraire, celui-ci est plus ou moins décalé. Ce décalage est de l'ordre de un pour les simulations mais n'est plus que d'environ 0.2 pour l'expérience. Cette différence s'explique par le fait que le milieu traversé par les ondes acoustiques est tridimensionnel mais le signal récolté est « bidimensionnel ». Cette réduction du nombre de dimensions efface une partie des fluctuations et atténue donc la multifractalité. Le pic vert correspond au spectre **théorique** obtenu en l'absence de multifractalité. Évidemment, une simulation numérique n'aboutira pas à un tel spectre : celui-ci présentera toujours une certaine largeur. En revanche, pour la transition d'Anderson, un spectre même étroit mais non centré sur la dimension du support sera une marque du caractère multifractal de la mesure.

Chapitre 5

Kicked rotor et localisation d'Anderson

Sommaire

5.1	Dynamique classique du kicked rotor	75
5.2	Dynamique quantique	76
5.2.1	Opérateur d'évolution	77
5.2.2	Périodicité spatiale et théorème de Bloch	77
5.2.3	Simulation numérique	79
5.2.4	Localisation dynamique	79
5.3	Transition d'Anderson et kicked rotor quasi périodique (KRQP)	84
5.3.1	Kicked rotor quasi périodique à trois fréquences	85
5.3.2	Kicked pseudo-rotor	87
5.3.3	Le problème du « dépliement-repliement »	91
5.3.4	Interprétation physique d'une simulation du KRQP	92
5.3.5	Lien avec l'expérience	94

DURANT de nombreuses années, les observations numériques mais surtout expérimentales de la transition d'Anderson se sont révélées difficiles. D'un point de vue numérique, la diagonalisation de grandes matrices ainsi que la prise en compte des effets de taille finie ont été les deux principaux obstacles à la détermination correcte de l'exposant critique : il faut presque attendre les années 2000, soit près de quarante ans après l'article fondateur d'Anderson [And58], pour avoir une détermination précise et sans ambiguïté de l'exposant critique ν tel que défini au chapitre 3. On s'accorde désormais [SO99; LGD09; SO14] sur la valeur de $\nu = 1.571 \pm 0.008$. Du côté expérimental, les difficultés sont encore plus grandes. La première idée qui vient à l'esprit est d'essayer de reproduire le modèle d'Anderson en

physique du solide (voir [EM08] pour une revue des expériences dans ce type de système). Malheureusement, il est impossible de négliger les interactions électron–électron qui modifient sensiblement la transition observée et en particulier l’exposant critique apparemment mesuré. En effet de telles expériences aboutissent à un exposant de l’ordre de 1 [Kat+87 ; WPL99]. Comme la localisation d’Anderson est un phénomène interférentiel observable pour tout type d’onde, la seconde idée serait d’utiliser des ondes classiques pour lesquelles les interactions n’existent pas. Là encore l’expérience n’est pas facile puisque le désordre nécessaire pour observer la localisation est compliqué à réaliser. Par ailleurs, le phénomène d’absorption est délicat à distinguer de celui de la localisation sur le profil d’intensité [Sch+99]. Plusieurs groupes ont cru observer la localisation d’Anderson de la lumière dans un milieu diffusant tridimensionnel, mais toutes ses observations ont finalement été invalidées, voir [SP16] pour une discussion plus détaillée.

On voit qu’avec des ondes électroniques et classiques, la caractérisation de la transition d’Anderson est à l’heure actuelle un échec. Il est donc nécessaire d’avoir recours à un autre type d’ondes pour lesquelles les interactions seraient négligeables voire inexistantes, où le désordre serait facilement contrôlable, et avec lesquelles il est possible de caractériser les différents régimes de transport. Les atomes froids constituent un système adapté pour réaliser ce type d’expérience. L’idée de base est de préparer un condensat de Bose–Einstein dans le régime dilué pour éviter les interactions et de le laisser s’étaler dans un potentiel spatialement désordonné (*speckle*). Dans le cas unidimensionnel, la localisation d’Anderson a été très clairement observée et caractérisée [Bil+08 ; Roa+08]. L’expérience à trois dimensions est beaucoup plus difficile [Jen+12 ; Kon+11 ; Sem+15]. Dans [Jen+12], les deux régimes de transport localisé et diffusif n’ont pas été clairement observés. Dans l’expérience [Kon+11], la durée beaucoup trop courte de l’expérience empêche de caractériser correctement une éventuelle localisation, et le seuil de mobilité rapporté est beaucoup trop élevé pour être crédible. Dans l’expérience [Sem+15] le seuil de mobilité a été mesuré, mais pas l’exposant critique, et le seuil de mobilité est aussi très significativement supérieur aux prédictions théoriques [DO14 ; POD17], ce qui laisse dubitatif sur l’interprétation des mesures.

Une approche alternative, beaucoup moins stricte sur les conditions à respecter pour la préparation du gaz atomique froid, a donc été développée. Elle utilise un *kicked rotor* [Cas+79] (ou rotateur pulsé en français), système classiquement chaotique qui « imite » le modèle d’Anderson. Cela a permis la première observation du phénomène de localisation à une dimension [Moo+94] ainsi que la mesure de l’exposant critique à trois dimensions [Cha+08]. Il faut noter toutefois que dans ces expériences la localisation se fait dans l’espace des impulsions et non plus dans l’espace réel comme pour le modèle original d’Anderson. Pour cette raison, on appelle ce phénomène localisation dynamique. Notons cependant que, malgré l’appellation différente, la localisation dans l’espace réel ou dans celui des impulsions est provoquée dans les deux cas par un phénomène d’interférence [FGP82].

Dans la suite, nous allons présenter tout d’abord le kicked rotor périodique qui a permis l’observation de la localisation dynamique, et montrer son équivalence avec la localisation

d'Anderson. Puis, en généralisant le kicked rotor à une excitation quasi périodique judicieusement choisie, nous verrons comment observer la transition d'Anderson en dimension trois de manière claire et précise.

5.1 Dynamique classique du kicked rotor

Classiquement, on peut voir un kicked rotor comme un pendule rigide périodiquement soumis à une force de gravitation infiniment forte, et ce pendant une durée infiniment brève. C'est la raison pour laquelle ce système porte le nom de kicked rotor. Même si cela peut prêter à confusion, nous choisissons de noter x l'**angle** que fait le pendule avec la direction verticale, et p le moment conjugué — la vitesse angulaire. En unités adimensionnées, le hamiltonien de ce système s'écrit

$$H = \frac{p^2}{2} + \mathcal{K} \cos x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n). \quad (5.1)$$

Le second terme du hamiltonien représente les kicks subis par le système, et \mathcal{K} est donc la force du kick. Dans ce hamiltonien, nous avons choisi de prendre la période T entre deux kicks comme unité de temps.

La périodicité temporelle nous permet d'adopter un point de vue stroboscopique pour passer des équations de Hamilton à l'application dite standard ou de Chirikov [Chi79 ; Cas+79]

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + \mathcal{K} \sin x_n \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Cette application relie l'impulsion p_n et l'angle x_n juste avant le n -ième kick à ces mêmes quantités juste avant le $(n + 1)$ -ième kick. L'étude numérique [Gre79] de l'application (5.2) montre que pour $\mathcal{K} > 10$, le système est presque totalement chaotique [Ott02]. Pour faire simple, cela signifie que deux points très proches dans l'espace des phases ne vont pas le rester après un certain temps mais seront au contraire très éloignés dans cet espace. On peut également comprendre la notion de chaos par le fait qu'une connaissance même très précise des conditions initiales ne permet pas de prédire l'angle et l'impulsion du rotor après un temps grand devant la période des kicks. Pour une étude plus détaillée de l'application standard, nous renvoyons vers la référence [Izr90].

Une autre propriété essentielle du kicked rotor est que, pour $\mathcal{K} \gg 1$, le mouvement du système est **diffusif** dans l'espace des impulsions. En effet, en moyenne on aura [Cas+79]

$$\overline{p^2}(t) \simeq \frac{\mathcal{K}^2}{2} t, \quad (5.3)$$

équation qui caractérise un mouvement diffusif dans l'espace des impulsions, avec un coefficient de diffusion proportionnel à \mathcal{K}^2 . Ici, la moyenne notée $\overline{\cdot}$ est réalisée en considérant plusieurs trajectoires aux conditions initiales différentes, par exemple pour différents choix d'angle initial x_0 . L'application standard (5.2) permet de montrer assez simplement ce résultat en réécrivant la première équation portant sur l'impulsion

$$p_n = p_0 + \mathcal{K} \sum_{i=0}^{n-1} \sin x_i. \quad (5.4)$$

Une fois élevée au carré, cette dernière équation s'écrit

$$(p_n - p_0)^2 = \mathcal{K}^2 \sum_{i,j=0}^{n-1} \sin x_i \sin x_j.$$

On peut estimer cette somme dans la limite $\mathcal{K} \gg 1$. Alors, les p_n prennent de grandes valeurs et x_{n+1} devient très éloigné de x_n ; leurs sinus sont alors essentiellement décorrélés. La moyenne sera donc non nulle seulement pour les termes de même indice :

$$\overline{(p_n - p_0)^2} \simeq \frac{\mathcal{K}^2}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \sin^2 x_i dx_i = \frac{\mathcal{K}^2}{2} n,$$

ce qui permet de retrouver le comportement diffusif du kicked rotor classique (résultat (5.3)) avec un coefficient de diffusion $D_{\text{KR}} = \mathcal{K}^2/4$. Il était possible d'avoir une intuition du mouvement diffusif du kicked rotor à partir de l'équation (5.4). En effet, toujours dans la limite $\mathcal{K} \gg 1$, $p_n - p_0$ s'exprime comme la somme d'un grand nombre de variables aléatoires qui aboutit à une distribution gaussienne de l'impulsion d'après le théorème central limite. Bien sûr ce calcul est approximatif et une meilleure estimation du coefficient de diffusion existe dans la littérature [LL83].

5.2 Dynamique quantique

Nous avons vu que la dynamique classique du kicked rotor suivait une **diffusion chaotique** pour $\mathcal{K} \gg 1$. Que devient cette diffusion dans le cas quantique ? Remarquons tout d'abord que ce problème est analogue à celui que s'est posé Anderson en 1958 [And58]. En effet, une particule dans un milieu aléatoire aura tendance à avoir un mouvement diffusif et sera localisée dans la version quantique du problème à une dimension. Ici aussi, le kicked rotor décrit un système unidimensionnel qui est classiquement diffusif dans l'espace des impulsions. Dans la version quantique du kicked rotor, on s'attend donc assez naturellement à observer de la localisation, et ce toujours dans l'espace des impulsions. Dans cette partie, nous allons essayer de donner plus de rigueur à ces arguments.

Pour cela nous allons d'abord écrire l'opérateur d'évolution qui nous permettra de faire une simulation relativement légère du kicked rotor quantique. Nous montrerons ainsi qu'il y a bien une localisation dite dynamique ou, pour reprendre le terme historique, qu'il y a « suppression de la diffusion classique. » Enfin, pour confirmer qu'il s'agit bien du même phénomène, nous établirons une équivalence entre le kicked rotor périodique et le modèle d'Anderson.

5.2.1 Opérateur d'évolution

Le hamiltonien quantique du kicked rotor dépend explicitement du temps et ne possède donc pas d'états stationnaires. En revanche, il est possible d'étudier le kicked rotor sur une période : en intégrant l'équation de Schrödinger associée, on aboutit à l'opérateur d'évolution **sur une période** U qui n'est autre que le produit non commutatif de l'opérateur de propagation libre et de l'opérateur de kick

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{K} \cos X\right), \quad (5.5)$$

où P est l'opérateur impulsion et X l'opérateur position. Les propriétés de groupe [Le 07, chapitre 4] de l'opérateur d'évolution et la périodicité temporelle du hamiltonien nous permettent de connaître l'opérateur d'évolution après n kicks en fonction du même opérateur sur une seule période :

$$U(n) = U^n.$$

Ainsi, en choisissant un état initial $|\Psi_0\rangle$, cette dernière relation permet de connaître l'état du système après n kicks sans avoir à résoudre directement l'équation de Schrödinger :

$$|\Psi(n)\rangle = U^n |\Psi_0\rangle.$$

5.2.2 Périodicité spatiale et théorème de Bloch

Le terme de potentiel

$$V(X, t) \doteq \mathcal{K} \cos X \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n),$$

est 2π -périodique pour la variable d'espace et le hamiltonien complet est donc invariant par translation spatiale de 2π . Comme nous allons le montrer, cette symétrie nous permet d'utiliser le théorème de Bloch et finalement de simplifier la propagation d'un état initial.

Il est facile d'exploiter cette symétrie en se ramenant à l'étude de l'opérateur de translation T_a défini par son action sur une fonction g :

$$T_a g(x) = g(x - a), \quad (5.6)$$

où a désigne la longueur de la translation. Pour un cristal, cette longueur correspond au pas du réseau, alors que pour le kicked rotor, où aucun réseau n'existe, $a = 2\pi$ est simplement la périodicité de la fonction cosinus. Nous nous restreignons par la suite au seul cas du kicked rotor.

L'opérateur $T_{2\pi}$ commute avec l'opérateur d'évolution : on peut donc résoudre l'équation de Schrödinger séparément dans chaque sous-espace propre de $T_{2\pi}$. L'opérateur $T_{2\pi}$ étant unitaire, son spectre est formé par les nombres complexes de module un : $\lambda_q = e^{-2i\pi q}$. Dans la suite, nous noterons $\tilde{\Psi}_q(x)$ une fonction propre quelconque de l'opérateur de translation, de sorte que :

$$T_{2\pi}\tilde{\Psi}_q(x) = e^{-2i\pi q}\tilde{\Psi}_q(x). \quad (5.7)$$

On peut manifestement restreindre q à l'intervalle $[0, 1[$ puisque $q' \doteq q + j$, avec $j \in \mathbb{Z}$ correspond à la même valeur propre. Cet intervalle correspond à ce que l'on qualifie de première zone de Brillouin en physique du solide. De par l'équation aux valeurs propres (5.7) et la définition (5.6) de l'opérateur de translation, on en déduit le théorème de Bloch selon lequel $\tilde{\Psi}_q$ peut s'écrire

$$\tilde{\Psi}_q(x) = e^{iqx}\tilde{\psi}_q(x),$$

avec $\tilde{\psi}_q(x) = \tilde{\psi}_q(x - 2\pi)$. La quantité $\hbar q$ est appelée quasi-impulsion car elle possède les bonnes dimensions mais ne correspond pas pour autant à l'impulsion de la particule soumise à un tel potentiel. En effet, la fonction $\tilde{\psi}_q(x)$ n'est pas nécessairement une onde plane d'impulsion fixée. En revanche, étant 2π -périodique, elle peut être développée en série de Fourier sur la base propre discrète des ondes planes, états propres notés $|m\rangle$ de l'opérateur impulsion :

$$P|m\rangle = \hbar m|m\rangle,$$

de fonction d'onde spatiale $\langle x|m\rangle = e^{imx}/\sqrt{2\pi}$.

Le théorème de Bloch permet de décomposer un état initial quelconque comme une combinaison linéaire d'états $\tilde{\Psi}_q$ pour q variant dans la première zone de Brillouin. Les états de q différents étant orthogonaux, on peut écrire l'évolution temporelle de chaque composante indépendamment. Cette dernière est plus simple si l'on utilise les vecteurs $\tilde{\psi}_q$ correspondant à une condition aux bords périodique. Le seul prix à payer est la modification de l'impulsion par $\hbar q$, conduisant au hamiltonien suivant gouvernant la dynamique de $\tilde{\psi}_q$:

$$H = \frac{(p + \hbar q)^2}{2} + \mathcal{K} \cos x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n),$$

légèrement différent dans chaque sous-espace de q donné.

5.2.3 Simulation numérique

En utilisant les résultats des deux dernières parties relatifs à la périodicité spatiale et à l'itération de l'opérateur d'évolution, nous allons montrer deux stratégies possibles pour simuler numériquement le kicked rotor.

La première méthode repose sur la transformée de Fourier rapide (abrégié en FFT pour *Fast Fourier Transform*) et peut être décomposée en quatre étapes que l'on répète selon le nombre de kicks. Partant d'un état initialement étroit dans l'espace des impulsions, on réalise les quatre opérations suivantes :

1. une FFT pour passer de l'espace des p à l'espace des x où l'opérateur de kick est diagonal ;
2. une application de l'opérateur de kick ;
3. une FFT inverse pour repasser dans la représentation impulsion où l'opérateur de propagation libre est diagonal ;
4. une application de l'opérateur de propagation libre.

La complexité de l'algorithme de FFT [CT65] utilisé est $\mathcal{O}(N \ln N)$ par kick, où N désigne la taille du système, c'est-à-dire le nombre de valeurs de m incluses dans la base utilisée.

La seconde méthode consiste à calculer les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution dans la base propre de l'opérateur impulsion. Par définition on a

$$\begin{aligned} U_{mn} &= \langle m | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{(P + \hbar q)^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{K} \cos X\right) | n \rangle \\ &= i^{n-m} \exp\left[-i\hbar \frac{(m+q)^2}{2}\right] J_{n-m}\left(\frac{\mathcal{K}}{\hbar}\right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

où J_{n-m} est la fonction de Bessel d'ordre $(n - m)$. Les fonctions de Bessel décroissent exponentiellement avec $|n - m|$ [AS68], et deviennent très petites pour $|n - m| \approx \mathcal{K}/\hbar$. En représentation matricielle, cela signifie que les éléments de matrice décroissent autour de la diagonale : on peut tronquer la matrice, qui devient alors une matrice-bande. La complexité de cet algorithme est $\mathcal{O}(N\mathcal{K}/\hbar)$ par kick.

En conclusion, selon le nombre de kicks souhaité et la valeur du rapport \mathcal{K}/\hbar , il faudra privilégier une méthode ou l'autre. Nous verrons plus loin que dans notre cas très spécifique, la seconde méthode est privilégiée.

5.2.4 Localisation dynamique

Nous allons montrer dans cette partie en quoi le kicked rotor est pertinent pour étudier la localisation d'Anderson. Plus spécifiquement, nous allons voir pourquoi le phénomène de localisation dynamique n'est rien d'autre que celui de la localisation d'Anderson, à ceci près qu'il se manifeste dans l'espace des impulsions.

La périodicité temporelle du hamiltonien va nous permettre d'utiliser le théorème de Floquet, et de montrer que l'équation aux valeurs propres satisfaite par les états de Floquet, écrite dans l'espace des impulsions, est analogue à l'équation aux valeurs propres d'un modèle d'Anderson.

Périodicité temporelle et théorème de Floquet

Nous avons montré précédemment que l'analyse de la dynamique quantique du kicked rotor était facilitée par l'étude de l'opérateur d'évolution sur une période. Comme l'opérateur de translation, l'opérateur d'évolution est unitaire, et il est par ailleurs périodique en temps. En suivant la même démarche que dans la partie 5.2.2 relative au théorème de Bloch, on montre que les états propres de l'opérateur d'évolution du kicked rotor, vérifiant

$$U|\Phi_j\rangle = e^{-iE_j/\hbar}|\Phi_j\rangle, \quad (5.9)$$

où $E_j \in [0, 2\pi\hbar[$ est appelée quasi-énergie, peuvent s'écrire :

$$|\Phi_j\rangle = e^{-iE_j t/\hbar}|\phi_j\rangle,$$

où $|\phi_j(t)\rangle = |\phi_j(t+1)\rangle$. Ce résultat constitue le théorème de Floquet et les $|\Phi_j\rangle$ sont appelés états de Floquet. Ce théorème peut être vu comme l'analogue du théorème de Bloch pour les hamiltoniens périodiques en temps.

En conclusion, si l'on considère un état initial quelconque $|\Psi_0\rangle$, celui-ci peut-être décomposé sur la base formée par les états de Floquet $|\Phi_j\rangle$ selon

$$|\Psi_0\rangle = \sum_j c_j |\Phi_j\rangle,$$

avec $c_j \doteq \langle \Phi_j | \Psi_0 \rangle$. Son évolution temporelle après n kicks est donnée par :

$$|\Psi(n)\rangle = \sum_j c_j e^{-inE_j/\hbar} |\Phi_j\rangle.$$

Analogie avec un modèle d'Anderson

La démarche générale pour montrer cette correspondance consiste à décomposer un état de Floquet donné d'énergie E_j dans la base $\{|m\rangle\}$ des états propres de l'opérateur d'impulsion. Nous insistons donc sur le fait que deux indices j et m interviendront.

L'équation aux valeurs propres (5.9) que vérifie **un unique** état de Floquet peut se réécrire, compte tenu de (5.5) :

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\frac{(P + \hbar q)^2}{2} - E_j \right] \right\} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{K} \cos X \right) |\Phi_j\rangle = |\Phi_j\rangle. \quad (5.10)$$

Le produit de l'opérateur de propagation libre et du facteur de phase $\exp(-iE_j/\hbar)$ peut être décomposé de la façon suivante :

$$U_{\text{kick}} = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\frac{(P + \hbar q)^2}{2} - E_j \right] \right\} = \frac{1 - iV^{[j]}(P)}{1 + iV^{[j]}(P)},$$

où

$$V^{[j]}(P) \doteq \tan \left\{ \frac{1}{2\hbar} \left[\frac{(P + \hbar q)^2}{2} - E_j \right] \right\}.$$

L'opérateur $V^{[j]}(P)$ est diagonal dans la base propre de l'opérateur impulsion $\{|m\rangle\}$:

$$V_m^{[j]} = \langle m|V^{[j]}(P)|m\rangle = \tan \left[\frac{(m + q)^2\hbar}{4} - \frac{E_j}{2\hbar} \right]. \quad (5.11)$$

De la même manière, on écrit l'opérateur de kick sous la forme

$$\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{K} \cos X \right) = \frac{1 - it(X)}{1 + it(X)} \quad \text{où} \quad t(X) \doteq \tan \left(\frac{\mathcal{K}}{2\hbar} \cos X \right). \quad (5.12)$$

En insérant ces décompositions dans l'équation (5.10), on trouve après une manipulation algébrique élémentaire que l'état

$$|\chi_j\rangle = \frac{1}{1 + it(X)} |\Phi_j\rangle$$

vérifie l'équation :

$$[V^{[j]}(P) + t(X)]|\chi_j\rangle = 0. \quad (5.13)$$

On peut alors décomposer l'état $|\chi_j\rangle$ dans la base propre de l'opérateur impulsion :

$$|\chi_j\rangle = \sum_m a_m |m\rangle.$$

L'opérateur t étant spatialement périodique, on peut le décomposer en série de Fourier :

$$t(X) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} t_l e^{ilX},$$

de sorte que l'équation (5.13) devient

$$\sum_m V_m^{[j]}(P) a_m |m\rangle + \sum_{l \in \mathbb{Z}, m} t_l a_m e^{ilX} |m\rangle = 0.$$

e^{ilX} est l'opérateur de translation de $l\hbar$ dans l'espace des impulsions. On en déduit :

$$\sum_m V_m^{[j]} a_m |m\rangle + \sum_{l \in \mathbb{Z}, m} t_l a_m |m+l\rangle = 0,$$

qui peut se réécrire :

$$V_m^{[j]} a_m + \sum_{l \in \mathbb{Z}^*} t_l a_{m-l} = -t_0 a_m. \quad (5.14)$$

L'équation (5.14) peut être interprétée comme une équation de Schrödinger indépendante du temps pour un modèle de liaisons fortes dans l'espace des impulsions où l'indice m fait référence au site du réseau, $V_m^{[j]}$ est l'énergie sur site et t_l est le terme de saut (*hopping*) entre sites distants de l .

Les énergies sur site, qui ont pour expression

$$V_m^{[j]} = \tan \left[\frac{\hbar(m+q)^2}{4} - \frac{E_j}{2\hbar} \right],$$

constituent une suite de nombres pseudo aléatoires à condition que $\hbar/4$ ne soit pas un multiple rationnel de 2π — dans le cas où \hbar/π est rationnel, la séquence V_m est rigoureusement périodique. La séquence pseudo aléatoire est facile à caractériser dans la mesure où le théorème d'équipartition modulo un [AA67] de Bohl–Serpinskii–Weyl nous assure que l'argument de la fonction tangente est uniformément distribué sur l'intervalle $[0, \pi]$. On en déduit ainsi que les énergies sur site sont distribuées selon une loi de Cauchy–Lorentz :

$$\rho(V) = \frac{1}{\pi(1+V^2)}. \quad (5.15)$$

On peut noter que ces énergies :

- sont statistiquement invariantes par translation (la distribution est identique sur tous les sites) ;
- ont exactement la même distribution quels que soient le vecteur de Bloch q et la quasi-énergie E_j de l'état de Floquet.

Tous les états de Floquet seront donc localisés avec la **même** longueur de localisation dans l'espace des impulsions et que cette longueur de localisation sera indépendante du centre de localisation. L'essentiel à retenir ici est que quelle que soit l'impulsion initiale et le vecteur de Bloch, la même dynamique moyenne sera observée.

Discussion de l'équivalence des deux modèles

Cette dernière observation a des conséquences expérimentales et numériques **importantes**. En effet, l'équation aux valeurs propres (5.14) concerne un unique état de Floquet (indice

[j]). Or, l'état initial que l'on souhaite propager dans une simulation numérique ou dans une expérience n'est typiquement pas un état de Floquet, mais une onde plane, donc une combinaison linéaire d'états de Floquet faisant intervenir différentes réalisations du désordre. Chaque état de Floquet est individuellement localisé, mais du fait que les énergies sur sites V_m suivent une distribution de Cauchy–Lorentz **indépendante** de la quasi-énergie, tous ces états de Floquet ont la **même longueur de localisation** ; l'état final, superposition cohérente d'états de Floquet, sera également localisé, avec cette même longueur de localisation. De même, si, comme dans une expérience, l'on part d'un paquet d'ondes initial localisé spatialement, il comprendra une distribution de vecteurs de Bloch q qui correspondent là encore à des réalisations différentes du désordre mais ayant les **mêmes propriétés statistiques**. En ce sens, le système effectuera « automatiquement correctement » une moyenne sur les configurations du désordre.

Le caractère pseudo-aléatoire (au lieu de réellement aléatoire) des énergies sur site n'est en fait qu'un détail dans la mesure où, dans une expérience, le désordre est difficile à contrôler. D'autres aspects posent néanmoins problème. Tout d'abord, alors que le modèle d'Anderson autorise des sauts entre sites plus proches voisins, l'équation (5.14) permet des sauts infiniment longs. Il a été montré [And58] que le phénomène de localisation persistait pour un tel modèle à condition que $\sum_l |t_l|^2$ converge. Transposé au kicked rotor et à l'aide de l'égalité de Parseval [App08], cette convergence des coefficients de Fourier requiert que $K/\hbar < \pi$. En effet, en-deçà de cette valeur, l'opérateur $t(X)$ (5.12), est parfaitement « mou » et ses composantes de Fourier décroissent très vite, rendant la somme convergente ; pour $K/\hbar > \pi$, l'argument de la fonction tangente peut-être égal à $\pi/2$, et l'opérateur t devient singulier. Il faudrait également $K \gg 1$ pour que le système classique soit diffusif. Ces deux conditions sont difficilement conciliables. En réalité, la divergence qui apparaît lorsque $K/\hbar \simeq \pi$ est un artefact de calcul qui provient du choix de décomposition de l'opérateur de kick avec l'introduction de la fonction tangente. Il est possible de choisir une décomposition différente [She86] pour laquelle cette singularité n'apparaît plus et permettant de retrouver un modèle ressemblant au modèle d'Anderson, le prix à payer étant un désordre non diagonal. On peut d'ailleurs observer que l'opérateur d'évolution sur une période (5.8) — dont les états propres sont les états de Floquet — n'est pas singulier quand $K/\hbar = \pi$.

Par ailleurs, l'équation (5.14) n'est pas *stricto sensu* un modèle d'Anderson, dans la mesure où ce dernier considère des énergies sur sites uniformément distribuées alors que la séquence des V_m suit une distribution de Cauchy–Lorentz (5.15). Dans ce cas on parle alors plutôt de modèle de Lloyd [Llo69 ; Luc92]. Ceci est sans conséquence sur le fait que les états propres sont génériquement localisés.

Même s'il n'existe pas de preuve rigoureuse montrant que le kicked rotor est équivalent au modèle d'Anderson, aucune étude expérimentale, théorique ou numérique n'a mis à jour de telles différences. Au contraire, du côté de la théorie, il a été montré que la théorie des champs décrivant le kicked rotor était un modèle σ non linéaire supersymétrique analogue à celui de la localisation [AZ96 ; TA10]. Par ailleurs, comme nous allons le voir dans la suite,

l’extension à trois dimensions du kicked rotor présente une transition métal–isolant avec le même exposant critique qui se révèle être par ailleurs universel — voir la partie 5.3 pour une bibliographie détaillée.

Brève étude numérique

Une grande partie de ce manuscrit repose sur l’analyse de fonctions d’onde du kicked rotor dans une version modifiée. Avant d’étudier celles-ci, nous souhaiterions appuyer les arguments précédents à l’aide de simulations numériques montrant le phénomène de localisation d’Anderson dans l’espace des impulsions.

En premier lieu, on constate sur la figure 5.1 que les dynamiques classique et quantique sont différentes, comme dans le problème d’un électron dans un potentiel désordonné. La dynamique classique, montrée sur la figure 5.1a, est caractéristique d’un mouvement diffusif comme nous l’avons expliqué en 5.1. En revanche, dans le cas quantique, figure 5.1b, on peut distinguer deux régimes : un premier de $t = 0$ à un temps caractéristique t_{loc} , appelé temps de localisation, durant lequel la dynamique est diffusive ; un second qui apparaît pour $t \gg t_{\text{loc}}$ et dans lequel la dynamique du paquet d’onde est gelée. Comment se caractérise ce phénomène dans l’espace des impulsions ?

Pour répondre à cette dernière question, nous avons réalisé la simulation numérique du kicked rotor (quantique). Sur la figure 5.2, les densités moyennes du kicked rotor ont été représentées pour l’instant initial et après 500 kicks, temps supérieur au temps de localisation $t_{\text{loc}} \simeq 50$. Au temps final, la densité moyenne est approximativement exponentiellement localisée :

$$\langle |\Psi(p)|^2 \rangle \sim \exp\left(-\frac{|p|}{\xi}\right),$$

où ξ est la longueur de localisation dans l’espace des impulsions. On peut estimer la longueur et le temps de localisation pour le kicked rotor en raisonnant sur les temps et les distances caractéristiques intervenants dans ce système [Del01]. On trouve alors

$$\xi \approx \frac{K^2}{4\hbar} \quad \text{et} \quad t_{\text{loc}} \approx \frac{K^2}{4\hbar^2}. \tag{5.16}$$

5.3 Transition d’Anderson et kicked rotor quasi périodique (KRQP)

Le kicked rotor périodique étudié précédemment est un modèle unidimensionnel très intéressant pour étudier la localisation d’Anderson tant sur le plan expérimental que numérique. Néanmoins, sous cette forme, il ne permet pas d’étudier la transition d’Anderson qui a lieu à partir de trois dimensions.

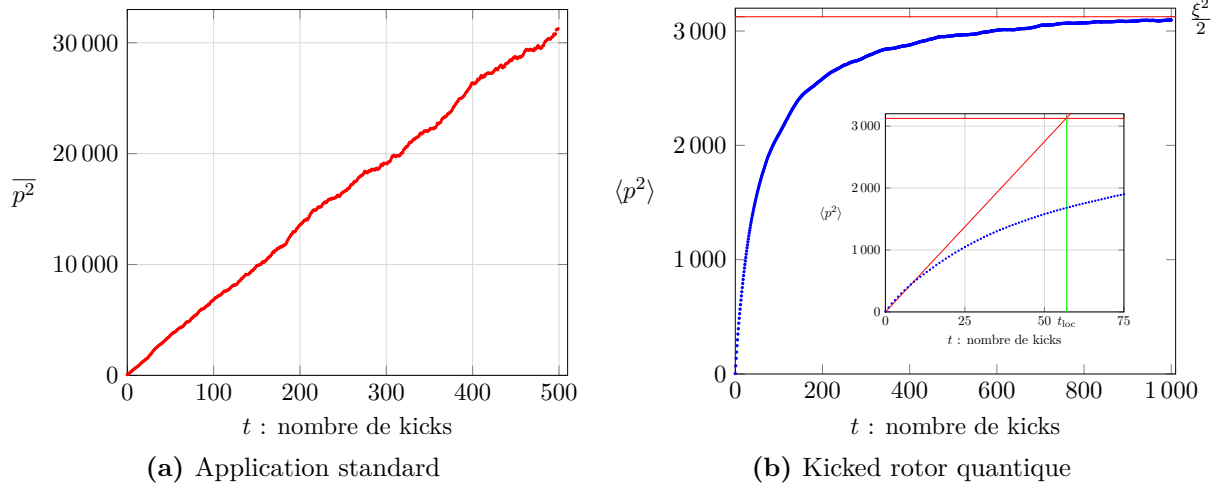


Figure 5.1 Comparaison des dynamiques classique et quantique du kicked rotor périodique. Dans le cas classique (a), l'impulsion initiale p_0 est toujours nulle, et l'on choisit aléatoirement un angle initial dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. La dynamique est ensuite déterminée à l'aide de l'application standard (5.2). Ici, la moyenne est donc faite en considérant plusieurs angles initiaux. Pour le kicked rotor quantique (b), $\langle p^2 \rangle$ désigne l'extension moyenne de la densité de probabilité dans l'espace des impulsions — espace où se produit la localisation d'Anderson. La moyenne est désormais réalisée en choisissant aléatoirement différents vecteurs de Bloch q dans l'intervalle $[0, 1[$, correspondant à la première zone de Brillouin. Alors que la dynamique classique est diffusive, le transport quantique est arrêté après un temps caractéristique t_{loc} . En effet, $\langle p^2 \rangle$ atteint une valeur asymptotique. Le temps de localisation est de l'ordre de $t_{loc} \simeq 50$ kicks. [Simulation pour 1 000 réalisations du désordre avec $K = 11.6$ et $\hbar = 1$.]

5.3.1 Kicked rotor quasi périodique à trois fréquences

La première idée qui vient à l'esprit pour étudier la transition avec le même type de système est d'utiliser la généralisation à trois dimensions du kicked rotor. Avec cette approche, tous les avantages d'un système unidimensionnel sont perdus : la conception de l'expérience sera au moins aussi difficile que celle consistant à réaliser le modèle d'Anderson avec un condensat de Bose–Einstein, et les calculs numériques seront beaucoup plus longs. Pour pallier cette difficulté, l'idée repose sur le constat suivant : dans le kicked rotor, les rôles joués par le temps et l'espace ont été échangés puisque la localisation s'observe désormais dans l'espace des impulsions. *A priori*, on peut donc généraliser le kicked rotor à trois dimensions en ajoutant des « dimensions temporelles ». Concrètement, cet ajout est obtenu en modulant les kicks avec deux autres fréquences incommensurables. De par cette modulation, ce nouveau système est appelé kicked rotor quasi périodique (on devrait d'ailleurs plutôt l'appeler kicked rotor

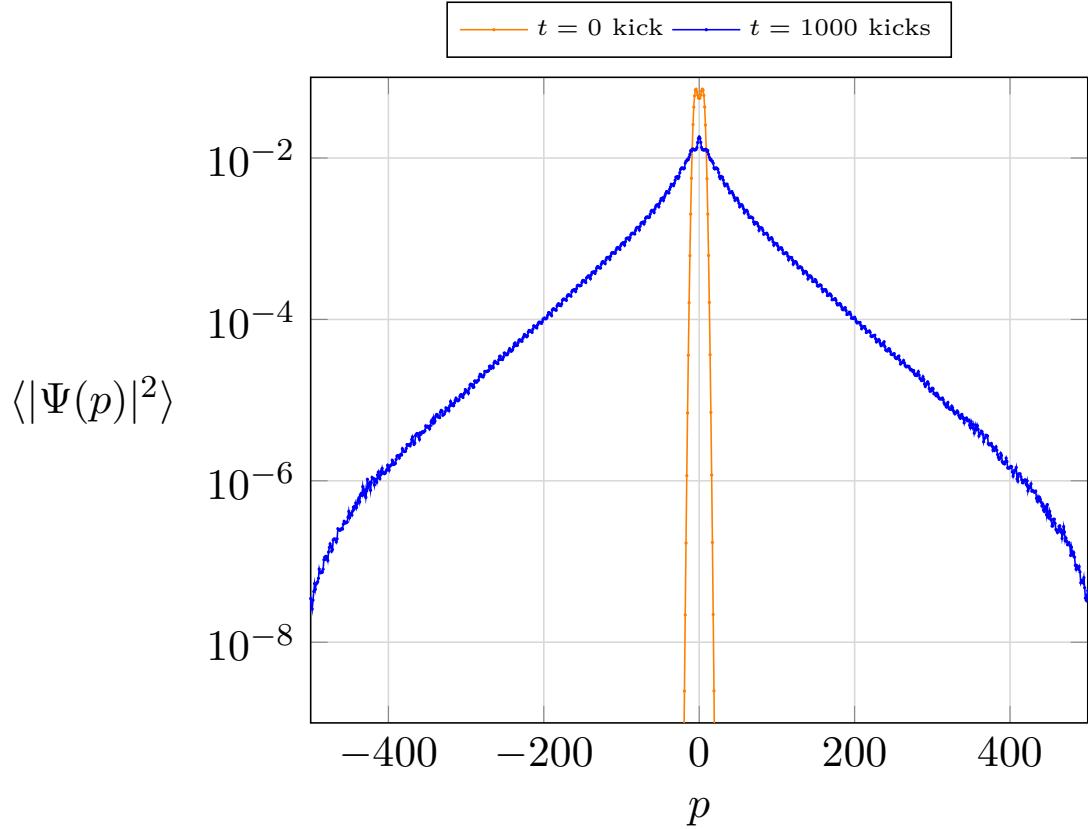


Figure 5.2 Densité de probabilité moyenne du kicked rotor périodique dans l'espace des impulsions pour $t = 0$ kick (points orange) et $t = 500$ kicks (points bleus). La densité finale à $t = 500 \gg t_{\text{loc}}$ est exponentiellement localisée, comme l'atteste la quasi-linéarité dans cette échelle semi-logarithmique. Les petites déviations à grand $|p|$ disparaissent quand le temps augmente. On note aussi que la forme n'est pas parfaitement exponentielle au voisinage de $p = 0$, un phénomène bien connu dans les systèmes unidimensionnels, prédit correctement par Gogolin [GMR75 ; Gog76], mais sans grande importance pour le kicked rotor. Les paramètres sont les mêmes que ceux de la figure 5.1.

pseudo-périodique) et son hamiltonien s'écrit :

$$H_{\text{qp}} = \frac{P^2}{2} + \mathcal{K}(t) \cos X \sum_n \delta(t - n), \quad (5.17)$$

avec

$$\mathcal{K}(t) = K [1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t + \phi_2) \cos(\omega_3 t + \phi_3)].$$

Le terme $\mathcal{K}(t)$, qui classiquement correspond à la force des kicks, dépend désormais du temps. Les trois fréquences 2π (pour les kicks eux-mêmes), ω_2 et ω_3 (pour la modulation d'amplitude)

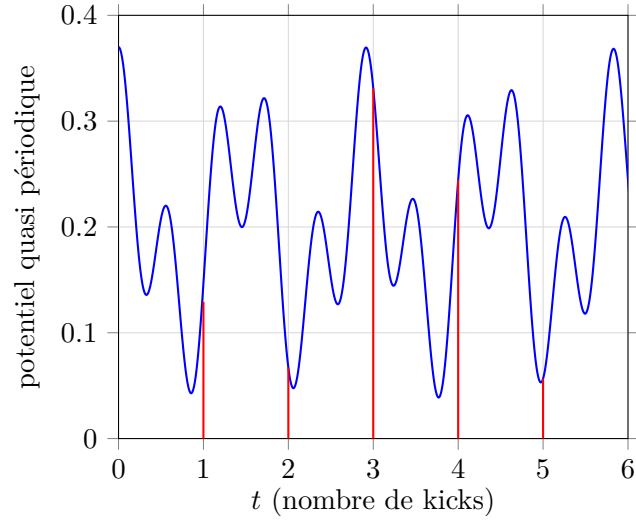


Figure 5.3 Modulation de la force des kicks (barres verticales en rouge) par la fonction $t \mapsto 0.2 + \varepsilon \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_3 t)$ avec $\omega_2 = 2\pi\sqrt{881}$, $\omega_3 = 2\pi\sqrt{4721}$ et $\varepsilon = 0.17$. Contrairement au cas périodique, ici les kicks n'ont pas tous la même amplitude.

doivent être incommensurables, c'est-à-dire qu'aucun de leurs rapports ne doit être rationnel. Dans le cas contraire, on retrouve un système quasi périodique à deux quasi-périodes ou même un système strictement périodique si les trois rapports sont rationnels.

5.3.2 Kicked pseudo-rotor

Présentation du modèle

Le hamiltonien (5.17) décrivant le kicked rotor quasi périodique (KRQP) est strictement unidimensionnel. Même si les arguments énoncés précédemment suggèrent que dans un tel système la transition d'Anderson devrait être observée, on ne peut pas établir un lien direct entre ce modèle quasi périodique et un modèle d'Anderson tridimensionnel. Pour montrer cette équivalence, nous allons plutôt faire appel à un dernier système réellement tridimensionnel appelé kicked pseudo-rotor, dont le hamiltonien s'écrit :

$$H_{\text{pseudo}} = \frac{P_1^2}{2} + \omega_2 P_2 + \omega_3 P_3 + K \cos X_1 [1 + \varepsilon \cos X_2 \cos X_3] \sum_n \delta(t - n), \quad (5.18)$$

où deux nouvelles dimensions d'espace x_2 et x_3 apparaissent explicitement — p_2 et p_3 étant les moments conjugués respectifs. Ce système est qualifié de « pseudo-rotor » dans la mesure où seule la première composante du terme cinétique correspond à un rotor. Nous avons choisi

cette nouvelle dénomination au lieu de « pseudo kicked rotor » présente auparavant dans la littérature car elle est plus proche de la réalité.

Mapping avec le kicked rotor quasi périodique

Soulignons que le kicked pseudo-rotor sert seulement d'intermédiaire de calcul et, en pratique, n'est jamais expérimenté ou simulé. En effet, il est assez simple de relier la dynamique du kicked pseudo-rotor et celle du KRQP [Lem09 ; Lem+09].

Pour montrer cette équivalence des dynamiques, nous posons exceptionnellement $\hbar = 1$ et nous choisissons comme état initial du kicked pseudo-rotor :

$$\Psi_0(\mathbf{x}) = \psi_0(x_1)\delta(x_2 - \phi_2)\delta(x_3 - \phi_3), \quad (5.19)$$

où $\psi_0(x_1)$ est un état initial **quelconque** pour le KRQP. La dynamique de cet état est régie par l'opérateur d'évolution sur un kick

$$\mathcal{U}_{\text{pseudo}} = e^{-iK \cos X_1 [1 + \varepsilon \cos X_2 \cos X_3]} e^{-i(P_1^2/2 + \omega_2 P_2 + \omega_3 P_3)}. \quad (5.20)$$

Ainsi, après un kick l'état deviendra :

$$\begin{aligned} \Psi_1(\mathbf{x}) &= \mathcal{U}_{\text{pseudo}} \Psi_0(\mathbf{x}) \\ &= e^{-iK \cos x_1 [1 + \varepsilon \cos(\phi_2 + \omega_2) \cos(\phi_3 + \omega_3)] - iP_1^2/2} \times \\ &\quad \psi_0(x_1)\delta(x_2 - \phi_2 - \omega_2)\delta(x_3 - \phi_3 - \omega_3), \end{aligned} \quad (5.21)$$

soit

$$\Psi_1(\mathbf{x}) = \psi_1(x_1)\delta(x_2 - \phi_2 - \omega_2)\delta(x_3 - \phi_3 - \omega_3), \quad (5.22)$$

avec

$$\psi_1(x_1) \doteq e^{-iK \cos x_1 [1 + \varepsilon \cos(\phi_2 + \omega_2) \cos(\phi_3 + \omega_3)] - iP_1^2/2} \psi_0(x_1). \quad (5.23)$$

Il est désormais plus facile de voir l'évolution de cet état initial après t kicks. En effet, comme dans le cas du kicked rotor il suffira d'appliquer t fois l'opérateur d'évolution. Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{U}^t \Psi_0(\mathbf{x}) \\ &= \psi(x_1, t)\delta(x_2 - \phi_2 - \omega_2 t)\delta(x_3 - \phi_3 - \omega_3 t), \end{aligned} \quad (5.24)$$

où

$$\psi(x_1, t) \doteq \prod_{\tau=1}^t \left[e^{-iK \cos x_1 [1 + \varepsilon \cos(\phi_2 + \omega_2 \tau) \cos(\phi_3 + \omega_3 \tau)]} e^{-iP_1^2/2} \right] \psi_0(x_1). \quad (5.25)$$

Si l'on s'intéresse maintenant à la dynamique du KRQP, celle-ci est régie par l'opérateur d'évolution qui dépend explicitement du temps. D'après le hamiltonien (5.17), on en déduit que l'opérateur d'évolution de ce système entre deux kicks est

$$\mathcal{U}_{\text{qp}}(t) = e^{-iK \cos X [1 + \varepsilon \cos(\phi_2 + \omega_2 t) \cos(\phi_3 + \omega_3 t)]} e^{-iP^2/2}. \quad (5.26)$$

En prenant toujours pour état initial $\psi_0(x)$, l'état final du kicked rotor quasi périodique est obtenu en appliquant t fois l'opérateur d'évolution :

$$\tilde{\psi}(x, t) = \prod_{\tau=1}^t \mathcal{U}_{\text{qp}}(\tau) \psi_0(x). \quad (5.27)$$

Ainsi, l'évolution du KRQP (5.27) et celle du kicked pseudo-rotor (5.25) sont exactement les mêmes.

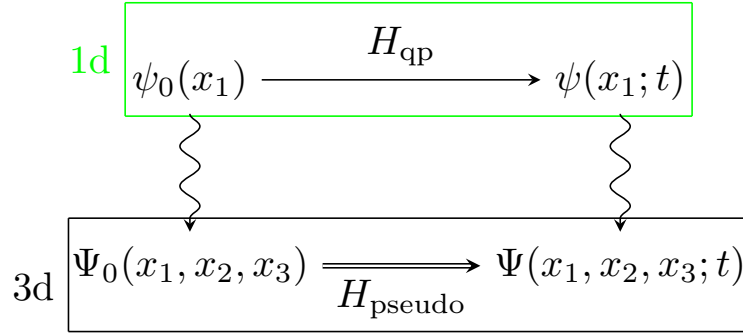


Figure 5.4 Diagramme représentant le *mapping* du kicked rotor quasi périodique unidimensionnel à trois fréquences vers le kicked pseudo-rotor tridimensionnel. La dynamique du premier système étant régie par le hamiltonien H_{qp} alors que la dynamique du second est régie par H_{pseudo} .

Mapping avec le modèle d'Anderson

Le pseudo-rotor étant temporellement périodique, on peut lui appliquer le théorème de Floquet. La démarche que nous allons suivre désormais n'est qu'une généralisation de celle effectuée dans la partie 5.2.4.

L'état de Floquet du kicked pseudo-rotor $|\Phi_j\rangle^{\text{pr}}$ d'énergie E_j vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\frac{(P_1 + \hbar q)^2}{2} + \omega_2 P_2 + \omega_3 P_3 - E_j \right] \right\} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} K \cos X [1 + \varepsilon \cos X_2 \cos X_3] \right\} |\Phi_j\rangle^{\text{pr}} = |\Phi_j\rangle^{\text{pr}}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

En décomposant les deux opérateurs agissant sur l'état de Floquet, on obtient que l'état :

$$|\chi_j\rangle^{\text{pr}} = \frac{1}{1 + it^{\text{pr}}(\mathbf{X})} |\Phi_j\rangle^{\text{pr}}, \quad (5.29)$$

où

$$t^{\text{pr}}(\mathbf{X}) = \tan \left\{ \frac{K}{2\hbar} \cos X [1 + \varepsilon \cos X_2 \cos X_3] \right\}, \quad (5.30)$$

vérifie l'équation

$$[V^{[j]\text{pr}}(\mathbf{P}) + t^{\text{pr}}(\mathbf{X})] |\chi_j\rangle^{\text{pr}} = 0, \quad (5.31)$$

avec

$$V^{[j]\text{pr}} = \tan \left\{ \frac{1}{2\hbar} \left[\frac{(P_1 + \hbar q)^2}{2} + \omega_2 P_2 + \omega_3 P_3 - E_j \right] \right\}. \quad (5.32)$$

À nouveau, on décompose l'état $|\chi_j\rangle^{\text{pr}}$ dans la base $\{|\mathbf{m}\rangle\} \doteq \{|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \otimes |m_3\rangle\}$:

$$|\chi_j\rangle^{\text{pr}} = \sum_{\mathbf{m}} a_{\mathbf{m}} |\mathbf{m}\rangle. \quad (5.33)$$

Puis, en décomposant en série de Fourier l'opérateur t^{pr} , l'équation (5.29) devient :

$$V_{\mathbf{m}}^{[j]\text{pr}} a_{\mathbf{m}} + \sum_{\mathbf{l} \neq (0,0,0)} t_{\mathbf{l}}^{\text{pr}} a_{\mathbf{m}-\mathbf{l}} = -t_{(0,0,0)}^{\text{pr}} a_{\mathbf{m}}. \quad (5.34)$$

Les énergies sur site ont désormais pour expression

$$V_{\mathbf{m}}^{[j]\text{pr}} = \tan \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{(m_1 + q)^2 \hbar}{2} + \omega_2 m_2 + \omega_3 m_3 - \frac{E_j}{\hbar} \right] \right\}, \quad (5.35)$$

avec $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$; tandis que les termes de saut sont donnés par les composantes du développement en série de Fourier triple de l'opérateur :

$$\begin{aligned} t^{\text{pr}}(\mathbf{X}) &= \tan \left[\frac{K}{2\hbar} \cos X_1 (1 + \varepsilon \cos X_2 \cos X_3) \right] \\ &= \sum_{\mathbf{l}} t_{\mathbf{l}}^{\text{pr}} e^{il_1 X_1} e^{il_2 X_2} e^{il_3 X_3}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

avec $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$. En tant que coefficients de Fourier d'une fonction anisotrope, les termes de saut sont également anisotropes et le kicked pseudo-rotor peut donc être *mappé* sur un modèle d'Anderson tridimensionnel **anisotrope**. La dynamique classique du kicked pseudo-rotor demeure chaotiquement diffuse et anisotrope, comportement caractérisé par un tenseur de

diffusion classique diagonal dont les composantes peuvent être calculées [Lem+10a] en suivant la même approche qu'à la partie 5.1 :

$$\mathcal{D}_{11} \approx \frac{K^2}{4} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{22} = \mathcal{D}_{33} \approx \left(\frac{K\varepsilon}{4}\right)^2. \quad (5.37)$$

D'après l'équation (5.35), les paramètres ω_2 , ω_3 et π doivent clairement être incommensurables pour que le caractère quasi périodique et donc « tridimensionnel » soit préservé. D'autre part, il est nécessaire que ces nombres soient également incommensurables avec \hbar afin que la séquence (5.35) soit pseudo aléatoire, et donc que l'on puisse observer la transition d'Anderson. Dans le cas contraire, la séquence est périodique et tous les états sont délocalisés. Avec ces hypothèses, l'argument de la fonction tangente dans l'équation (5.35) sont répartis uniformément modulo π et la distribution statistique des énergies sur site est donnée par :

$$\rho(V) = \frac{1}{\pi(1 + V^2)}. \quad (5.38)$$

5.3.3 Le problème du « dépliement-repliement »

Au premier abord, le *mapping* entre un modèle unidimensionnel et un problème tridimensionnel possédant un espace de Hilbert beaucoup plus grand peut sembler étrange. Nous discutons maintenant les particularités de ce que nous qualifions de « dépliement » d'un espace unidimensionnel vers un espace tridimensionnel et comment il est possible de « replier » le pseudo-rotor tridimensionnel vers le système initial unidimensionnel.

Dans la partie précédente, nous avons montré comment le *mapping* envoyait une solution quelconque de l'équation de Schrödinger du KRQP unidimensionnel vers une solution de l'équation de Schrödinger du kicked pseudo-rotor (tridimensionnel). Cependant, ce *mapping* n'est pas bijectif puisque seuls les états très particuliers sont concernés : ces derniers sont parfaitement localisés en x_2 et x_3 à tout instant, comme spécifié par l'équation (5.24). Selon les directions conjuguées p_2 et p_3 , cela correspond à une onde plane complètement délocalisée. Si on s'intéresse à la dynamique d'un paquet d'onde du KRQP initialement localisé autour de $p_1 \approx 0$, la correspondance pour le kicked pseudo-rotor sera de partir d'un plan $p_1 \approx 0$ (mais complètement délocalisé dans les directions transverses p_2 et p_3) et de regarder comment ce plan « s'élargit » vers une tranche, tout en restant parfaitement uniformément délocalisé dans les deux directions transverses. Cette configuration est en quelque sorte analogue à une expérience de transport dans une géométrie *slab*.

Si l'on s'intéresse uniquement à la transition localisé-délocalisé, la dynamique selon les directions transverses p_2 et p_3 où l'état est déjà initialement totalement délocalisé ne sont pas importantes. En regardant uniquement selon la direction p_1 , on saura alors si le système est dans le régime localisé ou diffusif. Cette information est également contenue dans les états de Floquet du kicked pseudo-rotor, qui se *mappingent* sur un modèle d'Anderson. Mais

ces états propres ne sont pas localisés selon les variables x_2, x_3 (et pas non plus localisés en p_2, p_3). En principe, on peut reconstruire la dynamique d'un état initial quelconque par combinaison linéaire des états de Floquet. C'est en particulier le cas pour un état du type (5.19) : la combinaison linéaire sera très compliquée, mais les équations nous garantissent que, à tout instant, la combinaison des différents états de Floquet avec leur facteurs de phase, reconstituera un état parfaitement localisé en x_2, x_3 , du type (5.24).

Cela signifie que, même si les états de Floquet du kicked pseudo-rotor ont des propriétés de multifractalité très intéressantes, lorsqu'ils sont combinés pour produire un état (5.24), beaucoup de fluctuations pourront être perdues dans l'opération de « repliement » $3d \rightarrow 1d$. Nous verrons au chapitre 6 que ce repliement a en effet des conséquences majeures sur le spectre de multifractalité.

5.3.4 Interprétation physique d'une simulation du KRQP

L'équivalence entre le KRQP et le modèle d'Anderson tridimensionnel n'est pas suffisante en soi pour se lancer directement dans l'étude de la transition. Il serait en effet nécessaire de confirmer certains points. Tout d'abord, il faudrait vérifier pour quelles valeurs de K et ε la dynamique classique du KRQP est « totalement » chaotique et s'il y a bien diffusion. Sans cette vérification, on pourrait effectivement étudier un système « classiquement » localisé. Une seconde vérification importante concerne la classe de symétrie du KRQP. Si l'on n'est pas certain de cette classe et qu'une transition du type Anderson est observée, il est difficile de comparer les résultats. Par exemple, on pourrait tout à fait imaginer que le KRQP décrit une transition d'Anderson en présence d'un champ magnétique, dans ce cas on mesurerait un exposant critique différent de celui prédit pour la classe usuelle dite orthogonale. Ces vérifications ont été effectuées par G. Lemarié [Lem09; Lem+10a], et montrent que le KRQP est un système adapté à l'étude de la transition d'Anderson.

Le kicked rotor constitue donc un système adapté à l'étude de la transition d'Anderson **dans l'espace des impulsions**. Sur la figure 5.5, nous montrons qu'en modifiant le paramètre K , on observe différentes dynamiques de part et d'autre du point critique $K_c \approx 8.096$. Si $K < K_c$, de manière similaire au kicked rotor périodique, le système est localisé après un certain temps : il s'agit du régime isolant où

$$\langle p^2(t) \rangle \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \text{cte.} \quad (5.39)$$

Lorsque $K > K_c$, alors le système est dans le régime diffusif puisque $\langle p^2(t) \rangle \sim t$. Avec le vocabulaire de la matière condensée, ce régime correspond à une phase métallique. Au point critique, la dynamique moyenne est sous-diffusive, avec plus précisément (voir la partie 6.3.1) $\langle p^2(t) \rangle \sim t^{2/3}$.

Il existe cependant une différence : pour le KRQP, la distribution du « désordre » (5.38) est fixe, indépendante de tous les paramètres. En conséquence, la transition pour le KRQP ne

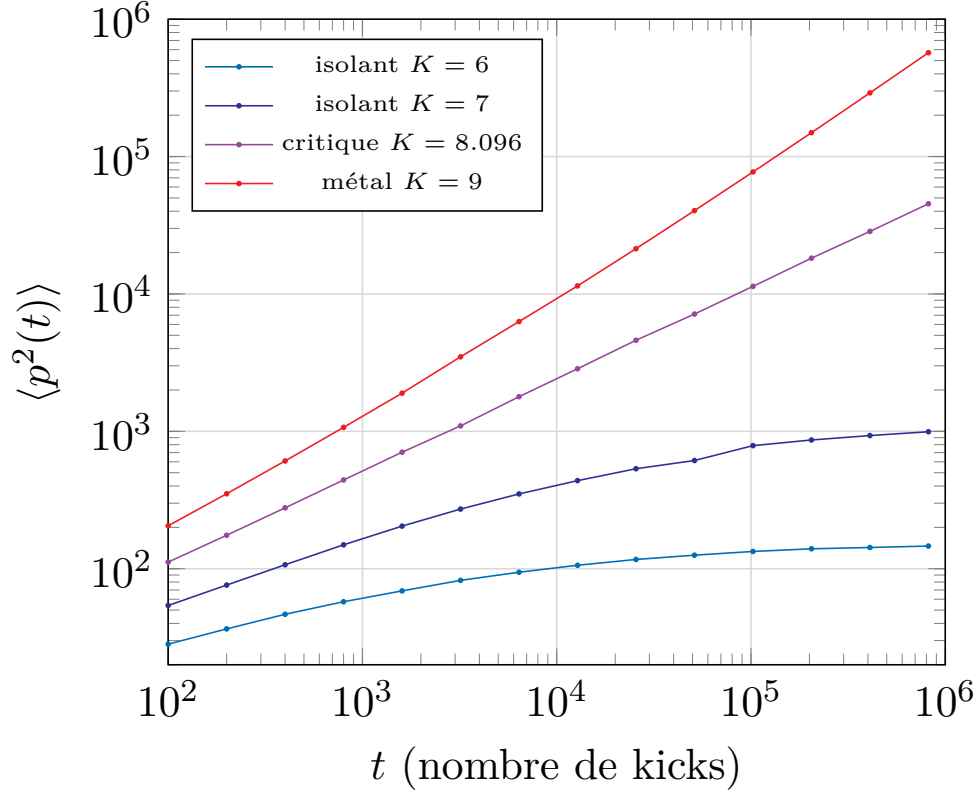


Figure 5.5 Manifestation de trois dynamiques différentes pour le KRQP. En augmentant le paramètre K , on peut passer d'un régime localisé (isolant) à un régime diffusif (métal). Entre ces deux phases, il existe un régime dit critique correspondant à la transition d'Anderson et qui, dans le cas du KRQP, est observé lorsque $K \simeq 8.096$ et en fixant les autres paramètres ($\varepsilon, \omega_2, \omega_3, \hbar$). [Simulations pour 10 000 réalisations du désordre avec $\hbar = 3.53992327519309$, $\varepsilon = 0.4544$, $\omega_2 = 2.67220902067$ et $\omega_3 = 2.01719090925$.]

peut être observée qu'en modifiant les paramètres intervenants dans le terme de saut entre sites (voir l'équation (5.36)). Cela revient donc à étudier un modèle d'Anderson où l'intensité du désordre est fixée, mais l'amplitude de saut ajustable.

Mentionnons aussi que ces résultats sont confirmés théoriquement puisque la théorie des champs du KRQP [Tia11 ; TA12] est celle d'un modèle σ non linéaire supersymétrique tout comme le modèle d'Anderson.

En dépit de l'équivalence du KRQP avec le modèle d'Anderson, deux différences peuvent être avantageusement exploitées.

En premier lieu, le KRQP est unidimensionnel mais simule une dynamique temporelle tridimensionnelle. Pour le simuler numériquement, il suffit de travailler sur des fonctions d'onde unidimensionnelle que l'on propage par une suite de kicks et de propagations libres. Par

rapport au kicked rotor, la complexité du calcul est quasiment identique, la seule différence étant que chaque kick possède une amplitude différente. Ceci allège considérablement les simulations numériques – et aussi l’expérience! – tout en permettant d’observer la transition entre deux régimes.

Le second avantage du KRQP est que les états de Floquet – pour des valeurs fixées des paramètres K , \hbar et ε – sont soit tous localisés soit tous étendus. Autrement dit, dans ce système il n’y a pas de seuil de mobilité comme pour un modèle d’Anderson. Ceci est dû au fait que la distribution statistique des énergies sur site est indépendante de la quasi-énergie de Floquet. En conséquence, un état initial peut être écrit comme une combinaison linéaire d’états de Floquet, qui auront tous exactement les mêmes propriétés de localisation. Le même type de simulation pour le modèle d’Anderson fera intervenir des états propres d’énergies différentes dont certains seront localisés et d’autres étendus, rendant l’analyse des résultats bien plus complexe.

5.3.5 Lien avec l’expérience

Dans une expérience, le hamiltonien du KRQP pour lequel deux *kicks* infiniment brefs sont séparés d’une période T s’écrit :

$$H_{\text{exp}} = \frac{P^2}{2M} + V_0 \cos(2kX) [1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t + \phi_2) \cos(\omega_3 t + \phi_3)] \sum_n \delta(t' - nT) \quad (5.40)$$

où $V_0 \cos(2kX)$ caractérise l’onde stationnaire de vecteur d’onde k à laquelle est soumis le centre de masse X d’un atome de masse M . En rendant le hamiltonien précédent adimensionné, on peut retrouver celui de l’équation (5.17) utilisé pour simuler numériquement le KRQP. Les nouvelles variables adimensionnées étant :

$$x = 2kX ; p = \frac{2kT}{M} P ; t = \frac{t'}{T} ; K = \frac{4k^2 T^2}{M} V_0 ; H_{\text{qp}} = \frac{4k^2 T^2}{M} H_{\text{exp}} \quad (5.41)$$

l’équation de Schrödinger associée s’écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_{\text{qp}} \psi, \quad (5.42)$$

avec H_{qp} le hamiltonien (5.17) du KRQP et

$$\hbar = \frac{4k^2 T}{M} \hbar \quad (5.43)$$

une constante de Planck effective dont la valeur (de l’ordre de l’unité) peut être modifiée dans l’expérience comme dans les simulations.

Chapitre 6

Multifractalité des fonctions d'onde du KRQP

Sommaire

6.1	Pertinence et spécificités de l'analyse multifractale pour le KRQP	96
6.1.1	Conséquence de l'étude des paquets d'ondes	96
6.1.2	Le KRQP : un système unidimensionnel	97
6.2	Théorie auto-cohérente et anisotropie	98
6.2.1	Rappel sur la théorie auto-cohérente isotrope	99
6.2.2	Théorie auto-cohérente isotrope en dimension trois	99
6.2.3	Rôle de l'anisotropie	103
6.3	Théorie auto-cohérente et KRQP	105
6.3.1	Théorie auto-cohérente pour le kicked pseudo-rotor	105
6.3.2	Prédiction du propagateur en intensité du KRQP	106
6.4	Déviation à la théorie auto-cohérente et multifractalité	107
6.4.1	Le « petit pic »	108
6.4.2	Loi d'échelle de Wegner et multifractalité	108
6.4.3	Diagramme de Chalker	113
6.5	Analyse globale de la multifractalité : dynamique critique du KRQP	118
6.6	Analyse multifractale des paquets d'ondes du KRQP	122
6.6.1	Méthodologie	122
6.6.2	Premiers résultats	126
6.7	Validité du diagramme de Chalker	130
6.7.1	Méthode : analyse multifractale fine	131
6.7.2	Variation de la taille des paquets d'ondes analysés	131

6.7.3	Évolution de la multifractalité avec le temps au point critique . . .	136
6.8	Conclusion	137

CE NOUVEAU chapitre est l’occasion d’utiliser les outils présentés dans les chapitres 4 et 5 traitant respectivement de la multifractalité et du modèle du kicked rotor quasi périodique — KRQP — à « trois dimensions »¹. La problématique est donc la suivante : l’analyse multifractale des fonctions d’onde du KRQP est-elle pertinente comme pour le modèle d’Anderson [VRR08 ; RVR08] ?

6.1 Pertinence et spécificités de l’analyse multifractale pour le KRQP

Habituellement, la multifractalité est directement étudiée sur les états propres du système [Aok83 ; CK07 ; VRR08] car ce sont ces derniers qui concentrent les propriétés intrinsèques du système. Dans une perspective expérimentale, la mesure des états propres semble terriblement délicate alors que la dynamique temporelle d’un système désordonné est relativement facile à étudier : il « suffit » de préparer le hamiltonien adéquat puis d’effectuer les mesures après un certain temps. Comme nous le verrons dans ce chapitre et dans le chapitre 7, les mesures à différents instants permettent de remonter à l’essentiel des propriétés des états propres et donc à la multifractalité éventuelle. Étudier la dynamique des paquets d’ondes du KRQP soulève deux problèmes :

- i. les paquets d’ondes conservent-ils les fluctuations nécessaires à l’émergence de propriétés multifractales ?
- ii. le caractère unidimensionnel du KRQP est-il sans conséquence sur l’analyse multifractale ?

6.1.1 Conséquence de l’étude des paquets d’ondes

Un paquet d’ondes étant une combinaison linéaire d’états propres, on s’attend intuitivement à ce que les fluctuations spatiales — et donc les propriétés de multifractalité — des paquets d’ondes soient fortement atténuées par rapport à celles des états propres puisque ces mêmes fluctuations devraient être gommées à la suite d’une moyenne sur les états propres. Cette intuition est cependant naïve dans la mesure où les simulations numériques de Martin [Mar+10] et García-Mata [Gar+12 ; Dub+14] sur la dynamique de paquets d’ondes montrent que l’analyse multifractale demeure pertinente.

Par ailleurs, en dehors de modèles exactement solubles, l’analyse multifractale est souvent réalisée sur des signaux qui fluctuent dans le temps et l’espace. Dans ce cas, l’analyse sera

1. Plus exactement, il s’agit d’un KRQP à trois fréquences incommensurables, chacune d’elles jouant le rôle d’une nouvelle dimension dans l’espace des impulsions.

d'autant plus précise que le temps de propagation sera important. En particulier, pour des systèmes désordonnés, le « signal » initial doit s'être propagé suffisamment longtemps pour subir les effets du désordre.

Enfin et comme nous le verrons dans le chapitre 7, beaucoup de propriétés dynamiques de transport conservent une empreinte forte de la multifractalité sous-jacente [Cha90 ; EK93 ; BHS96 ; HK99 ; Kra+10 ; Kra+12].

En définitive, le choix d'étudier les paquets d'ondes plutôt que les états propres a une conséquence modérée sur l'analyse multifractale et présente même un avantage du point de vue expérimental et numérique.

6.1.2 Le KRQP : un système unidimensionnel

Le KRQP présente de nombreux avantages pour étudier la transition d'Anderson. Pour autant, est-il judicieux de chercher des indices de multifractalité sur des paquets d'ondes unidimensionnels ?

Les expériences apportent un début de réponse à cette question. En effet, les mesures de **transmission** d'ondes sonores à travers un milieu désordonné de Faez et coll. [Fae+09] ou celles de densité locale d'états dans un solide désordonné au point critique de Richardella et coll. [Ric+10] sont venues confirmer les propriétés multifractales de systèmes dont les caractéristiques tridimensionnelles ne sont pas conservées. Autrement dit, dans ces expériences sur des systèmes tridimensionnels l'analyse multifractale portait sur des signaux ne dépendant que de deux variables d'espace.

Néanmoins ces signaux bidimensionnels ne retiennent qu'une partie des fluctuations et le spectre de multifractalité obtenue est nécessairement modifié. À titre de comparaison, l'analyse multifractale sur les états propres [VRR08 ; RVR08] aboutit à un spectre de multifractalité centré en $\alpha_0 \approx 3 + 1$, tandis que le spectre des ondes sonores [Fae+09] atteint son maximum en $\alpha_0 \approx 2 + 0.2$. Par ailleurs, le spectre pour l'expérience des ondes sonores s'étend sur un intervalle moins large que dans le cas des états propres. Ces changements sur le spectre viennent confirmer l'atténuation des fluctuations. Pour rappel, en l'absence de multifractalité le spectre se résumerait à un pic en $\alpha_0 = d$ où d correspond au nombre de variables d'espace des fonctions étudiées, soit 3 pour les états propres et 2 pour les ondes sonores transmises. En présence de multifractalité, le centre et l'étendue du spectre sont des signatures de l'importance des fluctuations. Observer un spectre de multifractalité à la fois moins excentré et moins large pour les ondes sonores que pour les états propres est la preuve indéniable que les fluctuations sont moins importantes. Malgré le caractère tridimensionnel du milieu étudié, la mesure des ondes sonores dans un plan orthogonal à la direction de propagation ne permet en revanche pas de rendre compte de l'intégralité des fluctuations.

Le cas du KRQP est analogue à l'expérience de transmission d'ondes sonores dans la mesure où les paquets d'ondes ne dépendent que d'une seule variable d'espace. En revanche, le KRQP reste un système unidimensionnel du début à la fin et donc aucune mesure de

transmission n'est réalisée. Cette analogie suggère donc que l'analyse multifractale d'un système tel que le KRQP aboutira à un spectre très légèrement excentré et plus étroit.

Cependant et comme expliqué dans le chapitre 5 (partie 5.3.3) la dynamique du KRQP peut être reconstruite par combinaison linéaire d'états propres de l'opérateur d'évolution d'un kicked pseudo-rotor **tridimensionnel**. La multifractalité devrait donc se manifester au voisinage du point critique dans ces deux systèmes *kickés* : à trois dimension pour le pseudo-rotor et à une dimension pour le KRQP. Une fonction d'onde de ce dernier système s'obtient donc en « repliant » la combinaison linéaire des états propres du pseudo-rotor. Autrement dit, cette même fonction d'onde n'est pas mesurée, comme dans une expérience de transmission, selon une unique direction mais est obtenue en **sommant** selon les deux autres directions la fonction d'onde tridimensionnelle.

Ce phénomène que nous qualifierons par la suite de **repliement** — sommation sur deux des trois variables d'espace — ne dépend pas de notre volonté ou ne provient pas d'une contrainte expérimentale, il est intrinsèque au modèle du KRQP. Nous verrons plus loin qu'il a des conséquences considérables sur la multifractalité : certaines limiteront l'analyse multifractale directe faite dans ce chapitre sans pour autant effacer toute trace de multifractalité, comme nous le verrons dans le chapitre 7.

Pour contourner le phénomène de repliement, il serait possible d'analyser directement des états de Floquet du kicked pseudo-rotor tridimensionnel. Du fait de l'équivalence avec un modèle d'Anderson anisotrope — voir la section 5.3.2 — on s'attend naturellement à des propriétés très analogues à celles du modèle d'Anderson. Nous avons amorcé cette étude dans le cas d'un kicked pseudo-rotor bidimensionnel, mais elle s'est révélée numériquement très délicate, et nous n'avons pas poursuivi dans cette voie.

Dans ce chapitre, nous montrerons dans un premier temps l'intérêt et l'importance de l'étude de la multifractalité pour comprendre la dynamique du KRQP. Puis nous mettrons en place une analyse multifractale telle que décrite dans le chapitre 4. Dans un troisième temps, nous montrerons qu'une analyse multifractale « fine » permet de tenir compte du repliement, phénomène non pris en compte dans les travaux précédents [Fae+09; Mar+10; Gar+12].

6.2 Théorie auto-cohérente et anisotropie

L'objectif de cette partie est de montrer qu'il est possible d'adapter la théorie auto-cohérente au cas du KRQP. Dans un premier temps, nous rappellerons en quoi consiste la théorie auto-cohérente dans le cas de milieux isotropes. Le KRQP étant équivalent à un modèle d'Anderson **anisotrope**, nous montrerons que la théorie auto-cohérente peut être adaptée pour tenir compte de l'anisotropie qui est sans conséquence sur les propriétés critiques du système. En raison de l'équivalence du modèle d'Anderson anisotrope avec le KRQP, nous pourrions alors donner une expression du propagateur en intensité pour ce même système.

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous prendrons $\hbar = 1$.

6.2.1 Rappel sur la théorie auto-cohérente isotrope

Dans le chapitre 3, nous avons exposé le principe de la théorie auto-cohérente de Vollhardt et Wölfle [VW80]. Pour rappel, celle-ci prédit qu'un système désordonné en dimension d avec désordre statique statistiquement homogène et isotrope suit une équation de diffusion généralisée dont le coefficient de diffusion D dépend de la fréquence ω :

$$[-i\omega + D(\omega)\mathbf{q}^2] P(\mathbf{q}, \omega) = 1. \quad (6.1)$$

Cette description en terme de diffusion est valable aux temps longs et aux grandes distances :

$$(\omega\tau, |\mathbf{q}|\ell) \ll 1, \quad (6.2)$$

où τ est le temps de *scattering* et ℓ le libre parcours moyen de transport. Le coefficient de diffusion est obtenu en résolvant l'équation auto-cohérente

$$\frac{1}{D(\omega)} = \frac{1}{D_B} + \frac{1}{\pi\rho_0 D_B} \int \frac{1}{-i\omega + D(\omega)\mathbf{q}^2} \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}, \quad (6.3)$$

où, pour $d = 3$, $D_B = \frac{k\ell}{3m}$ désigne la constante de diffusion dans l'approximation de Boltzmann — interférences négligées — et $\rho_0 = \frac{mk}{2\pi^2}$ la densité d'états pour un système sans désordre. En dimension $d \geq 2$, l'intégrale de l'équation auto-cohérente (6.3) est divergente en raison des grandes valeurs de $|\mathbf{q}|$. Cette divergence est néanmoins artificielle dans la mesure où un *cut-off* $q_M \sim 1/\ell$ peut être introduit. Sa valeur précise influence quantitativement les résultats, mais ni l'existence ni les propriétés d'échelle des différents régimes ne sont modifiées dans la mesure où ce choix est compatible avec l'approximation de diffusion $|\mathbf{q}|\ell \ll 1$.

6.2.2 Théorie auto-cohérente isotrope en dimension trois

À trois dimensions, l'équation auto-cohérente (6.3) devient

$$\frac{1}{D(\omega)} = \frac{1}{D_B} + \frac{1}{2\pi^3\rho_0 D_B} \int_0^{q_M} \frac{q^2}{-i\omega + D(\omega)q^2} dq. \quad (6.4)$$

L'intégrale restante possède à présent une expression analytique conduisant à :

$$\frac{D(\omega)}{D_B} = 1 - \frac{1}{2\pi^3\rho_0 D_B} \left[q_M - \sqrt{\frac{-i\omega}{D(\omega)}} \arctan \left(\sqrt{\frac{D(\omega)}{-i\omega}} q_M \right) \right]. \quad (6.5)$$

On peut introduire une nouvelle longueur caractéristique

$$\tilde{L}_\omega \doteq \sqrt{\frac{D(\omega)}{-i\omega}} \quad (6.6)$$

pour finalement écrire :

$$\frac{D(\omega)}{D_B} = 1 - \frac{q_M}{2\pi^3\rho_0 D_B} \left[1 - \frac{1}{\tilde{L}_\omega q_M} \arctan(\tilde{L}_\omega q_M) \right]. \quad (6.7)$$

Le comportement précis de $D(\omega)$ pouvant être relativement compliqué, nous distinguerons deux régimes : les grandes et les petites fréquences.

Grandes fréquences — Temps courts

Dans ce premier régime ($\omega\tau \gg 1$), l'intégrale dans l'équation (6.4) et qui rend compte des interférences est négligeable. Aux temps courts, la dynamique est diffusive comme pour un système classique et donc

$$D(\omega) = D_B = \frac{\ell^2}{3\tau}. \quad (6.8)$$

Petites fréquences — Temps longs

A priori, d'après l'équation (6.5), $D(\omega)$ devrait être complexe. Nous montrerons dans la partie 7.1.1 que $D(i\omega)$ est une grandeur réelle, propriété utilisée pour représenter graphiquement $D(i\omega)$.

Pour $\omega\tau \ll 1$, le terme provenant des interférences est essentiel et le *cut-off* q_M doit être précisé. Nous choisissons $q_M\ell = \pi/3$, valeur cohérente avec l'approximation hydrodynamique et qui a le mérite de simplifier les expressions finales. D'autres choix sont possibles mais ils modifieraient seulement les facteurs numériques dans les équations sans changer la physique.

Ce choix de *cut-off* permet de simplifier l'équation (6.7) :

$$\frac{D(i\omega)}{D_B} = 1 - \frac{1}{(k\ell)^2} \left[1 - \frac{3\ell}{\pi\tilde{L}_{i\omega}} \arctan\left(\frac{\pi\tilde{L}_{i\omega}}{3\ell}\right) \right]. \quad (6.9)$$

Dans la limite hydrodynamique $\omega\tau \ll 1$, on a toujours $\ell \ll \tilde{L}_{i\omega}$ de sorte que la fonction \arctan tend vers $\pi/2$ et l'équation (6.9) devient

$$\frac{1}{D(i\omega)} \left[1 - \frac{1}{(k\ell)^2} + \frac{3}{2k^2\ell\tilde{L}_{i\omega}} \right] - \frac{1}{D_B} = 0, \quad (6.10)$$

soit finalement :

$$\frac{D_B}{D(i\omega)} \left[1 - \frac{1}{(k\ell)^2} + \frac{\sqrt{27\omega\tau/4}}{(k\ell)^2} \sqrt{\frac{D_B}{D(i\omega)}} \right] = 1. \quad (6.11)$$

Cette dernière équation, cubique en $\sqrt{D_B/D(i\omega)}$, admet une solution exacte dépendant uniquement du produit $k\ell$, mais dont l'expression générale n'est pas très éclairante. Trois régimes vont nous intéresser par la suite :

- A** ($k\ell > 1$) : où le désordre est faible et la diffusion doit être prépondérante. Le coefficient de diffusion sera noté $D_{>}$.
- B** ($k\ell < 1$) : où le désordre est fort et le phénomène dominant est la localisation. Le coefficient de diffusion sera noté $D_{<}$.
- C** ($k\ell = 1$) : d'après le critère de Ioffe–Regel, il s'agit du régime critique. Le coefficient de diffusion y sera noté D_c .

Régime A diffusif

Dans le régime A, la diffusion est le phénomène prépondérant ($\tilde{L}_{i\omega} \gg \ell$) et le préfacteur du terme $D_B/(k\ell)^2$ est très proche de 1. On a donc :

$$\frac{D_{>}}{D_B}(i\omega \rightarrow 0) = 1 - \frac{1}{(k\ell)^2}. \quad (6.12)$$

Cette expression nous montre que la constante de diffusion D_B est réduite par les interférences : il s'agit du phénomène de localisation faible.

Régime B localisé

Dans le régime B, la localisation est importante. On suppose donc

$$D_{<}(i\omega \rightarrow 0) \rightarrow 0. \quad (6.13)$$

Dans ce cas, le terme multiplicatif devant $1/D_{<}(i\omega)$ dans l'équation (6.10) doit s'annuler, de sorte que la longueur \tilde{L}_ω tend vers une valeur finie, appelée longueur de localisation et notée ξ . On obtient :

$$D_{<}(i\omega \rightarrow 0) = \omega\xi^2, \quad \text{avec} \quad \xi \doteq \frac{3\ell}{2[1 - (k\ell)^2]}. \quad (6.14)$$

Régime C critique

Enfin dans le régime C correspondant à $k\ell = 1$, la solution de l'équation (6.11) est élémentaire :

$$\frac{D_c(i\omega \rightarrow 0)}{D_B} = \left(\frac{3\ell}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{\omega}{D_B}\right)^{1/3} = \left(\frac{27\omega\tau}{4}\right)^{1/3}. \quad (6.15)$$

En définitive, nous avons établi qu'à trois dimensions la théorie auto-cohérente prédisait **correctement** trois régimes différents pour le coefficient de diffusion. Deux d'entre eux correspondent à des phases de la matière à savoir un métal et un isolant. Le troisième régime est qualifié de critique puisqu'il correspond à une transition entre ces deux phases. Les résultats précédents sont résumés dans le tableau 6.1.

Une prédiction **cruciale** de la théorie auto-cohérente est le comportement algébrique fractionnaire au point critique $D(i\omega) \sim \omega^{1/3}$. Dans la partie 6.5, nous verrons que les

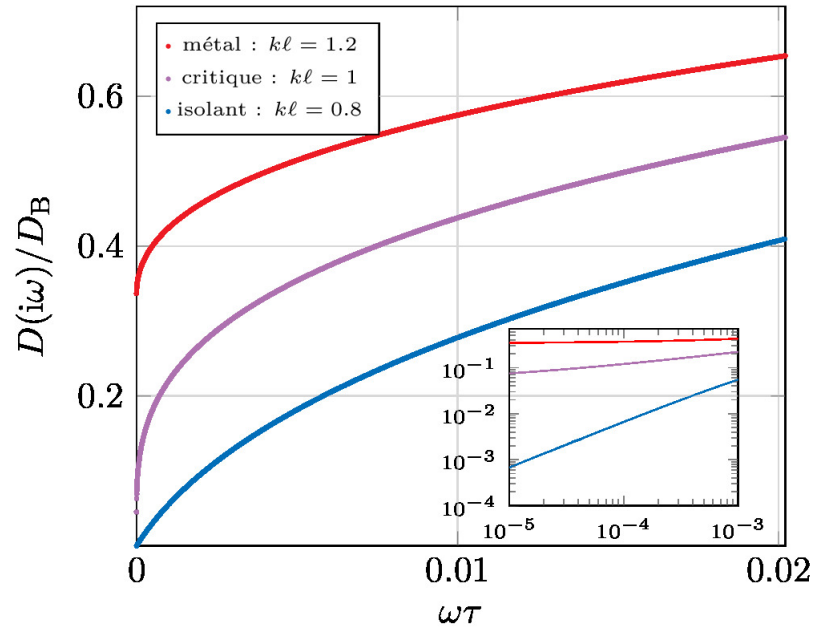


Figure 6.1 Résolution numérique de l'équation auto-cohérente (6.10) pour trois intensités de désordre (produit $k\ell$) différentes. Chacune correspond à un régime spécifique : phase métallique ($k\ell = 1.2$), régime critique ($k\ell = (k\ell)_c = 1$) et phase isolante ($k\ell = 0.8$). Sur l'axe des ordonnées, D_B désigne la constante de diffusion du métal et, sur l'axe des abscisses, τ est le temps de *scattering*. Pour les grandes valeurs de ω (temps courts), les coefficients de diffusion des trois phases sont similaires. C'est le comportement aux petits ω (temps longs) qui permet de différencier les trois phases. Cette différence est particulièrement visible sur la figure en échelle logarithmique où la pente révèle à quelle puissance est élevée la fréquence ω .

Régime	Paramètre $k\ell$	Coefficient de diffusion $D(i\omega \rightarrow 0)/D_B$
A : métallique	$k\ell \gg 1$	$1 - \frac{1}{(k\ell)^2}$
B : isolant	$k\ell \ll 1$	$\left(\frac{27\omega\tau}{4}\right) \frac{1}{[1-(k\ell)^2]^2}$
C : critique	$k\ell = 1$	$\left(\frac{27\omega\tau}{4}\right)^{1/3}$

Tableau 6.1 Résumé des différents régimes du coefficient de diffusion $D(i\omega)$ tels que prédits par la théorie auto-cohérente à trois dimensions dans la limite des temps longs ($\omega \rightarrow 0$). La constante D_B désigne la constante de diffusion classique, à savoir sans terme interférentiel. Cette théorie ne rend pas compte du caractère multifractal des fonctions d'onde, tâche réalisée par Chalker [Cha90] et dont les résultats sont synthétisés dans le tableau 6.2.

résultats numériques confirment de manière éclatante cette prédiction, même en présence de multifractalité. Par ailleurs, à la manière d'une théorie de champ moyen, la théorie auto-cohérente permet de calculer l'exposant critique ν caractérisant la divergence de la longueur de localisation à l'approche du point critique en fonction de l'écart au point critique. Ainsi, à partir de l'équation (6.14), on peut voir que dans le régime **B** :

$$\xi \sim \frac{1}{(k\ell)_c - k\ell}. \quad (6.16)$$

L'exposant critique prédit par la théorie auto-cohérente est donc $\nu = 1$, résultat qui n'est pas en accord avec les calculs numériques ($\nu = 1.57$) discutés dans le chapitre 3. Cette différence est un indice supplémentaire de la pertinence de l'analyse des fluctuations au voisinage de la transition d'Anderson.

6.2.3 Rôle de l'anisotropie

Dans la partie 5.3.2, nous avons montré que le KRQP est équivalent à un modèle d'Anderson anisotrope. Dans cette partie nous vérifierons que dans le cadre de la théorie auto-cohérente, l'anisotropie ne modifie pas les propriétés critiques de la transition.

En présence d'anisotropie, le propagateur en intensité suit toujours une équation de diffusion où le coefficient de diffusion est remplacé par un tenseur de diffusion \mathbf{D} symétrique. Dans la base rendant diagonale ce tenseur, le propagateur s'écrit

$$P(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{-i\omega + \sum_j \mathcal{D}_{jj}(\omega) q_j^2}, \quad (6.17)$$

où les composantes du tenseur de diffusion sont données par l'équation auto-cohérente

$$\frac{1}{\mathcal{D}_{jj}(\omega)} = \frac{1}{\mathcal{D}_{jj}} + \frac{1}{\pi\rho_0\mathcal{D}_{jj}} \int \frac{1}{-i\omega + \sum_j \mathcal{D}_{jj}(\omega) q_j^2} \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}, \quad (6.18)$$

avec \mathcal{D} le tenseur de diffusion de Boltzmann dont les composantes ont été données à l'équation (5.37). Cette équation peut également s'écrire :

$$\frac{\mathcal{D}_{jj}(\omega)}{\mathcal{D}_{jj}} = 1 - \frac{\mathcal{D}_{jj}(\omega)}{\pi\rho_0\mathcal{D}_{jj}} \int \frac{1}{-i\omega + \sum_j \mathcal{D}_{jj}(\omega)q_j^2} \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}. \quad (6.19)$$

En suivant une démarche similaire au cas isotrope, on définit les *cut-off*

$$q_j^M = \frac{\pi}{3\sqrt{3\tau_j\mathcal{D}_{jj}}}, \quad (6.20)$$

où τ_j est le temps de *scattering* selon l'axe j . Le changement de variable

$$Q_j = \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{jj}(\omega)}{-i\omega}} q_j \quad (6.21)$$

permet de réécrire l'intégrale précédente en faisant disparaître l'anisotropie du noyau :

$$\frac{\mathcal{D}_{jj}(\omega)}{\mathcal{D}_{jj}} = 1 - \frac{(-i\omega)^{d/2-1}\mathcal{D}_{jj}(\omega)}{\pi\rho_0\mathcal{D}_{jj}\sqrt{\det\mathcal{D}(\omega)}} \int_0^{Q_j^M(\omega)} \frac{1}{1+Q^2} \frac{d^d\mathbf{Q}}{(2\pi)^d}, \quad (6.22)$$

où les *cut-off* deviennent

$$Q_j^M(\omega) = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{jj}(\omega)}{-3i\omega\tau_j\mathcal{D}_{jj}}}. \quad (6.23)$$

En faisant l'hypothèse que les temps de *scattering* sont les mêmes dans toutes les directions, les *cut-off* deviennent isotropes. Ainsi, à trois dimensions, cette hypothèse nous permet de passer d'une intégrale sur un parallélépipède à une intégrale sur une sphère de rayon $Q^M(\omega) \doteq \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{jj}(\omega)}{-3i\omega\tau\mathcal{D}_{jj}}}$. L'équation (6.22) peut donc s'écrire à trois dimensions :

$$\frac{\mathcal{D}_{jj}(\omega)}{\mathcal{D}_{jj}} = 1 - \frac{1}{\pi\rho_0} \sqrt{\frac{-i\omega}{\det\mathcal{D}(\omega)}} \frac{\mathcal{D}_{jj}(\omega)}{\mathcal{D}_{jj}} \int_0^{Q^M(\omega)} \frac{Q^2}{1+Q^2} \frac{dQ}{(2\pi)^3}. \quad (6.24)$$

En intégrant et en utilisant le fait que $\mathcal{D}_{jj}(\omega)$ est proportionnel au tenseur de diffusion de Boltzmann, on trouve finalement

$$\frac{\mathcal{D}_{jj}(\omega)}{\mathcal{D}_{jj}} = 1 - \frac{1}{2\pi^2\rho_0\sqrt{3\tau}\det\mathcal{D}} \left[1 - \frac{3}{\pi} \sqrt{\frac{-3i\omega\tau\mathcal{D}_{jj}}{\mathcal{D}_{jj}(\omega)}} \arctan\left(\frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{jj}(\omega)}{-3i\omega\tau\mathcal{D}_{jj}}}\right) \right]. \quad (6.25)$$

Cette dernière équation pour les composantes du tenseur de diffusion est en tout point similaire à l'équation (6.5) pour la théorie auto-cohérente isotrope. En présence d'anisotropie

les composantes du tenseur de diffusion suivent donc la même équation que le coefficient de diffusion dans le cas isotrope. Par conséquent, au point critique d'un modèle d'Anderson anisotrope, on devrait toujours observer de la sous-diffusion dans les trois directions de l'espace puisque, par analogie avec le cas isotrope, les solutions de l'équation (6.25) ont un comportement en $\omega^{1/3}$.

Le KRQP à trois fréquences incommensurables étant équivalent à un modèle d'Anderson tridimensionnel **anisotrope**, il aura donc les mêmes propriétés critiques préservant ainsi le caractère multifractal des fonctions d'onde.

6.3 Théorie auto-cohérente et KRQP

Dans cette partie, nous allons montrer qu'il est possible de calculer le propagateur en intensité du KRQP au point critique. Ce calcul se base sur la théorie auto-cohérente pour le kicked pseudo-rotor et mène à une expression analytique pour le propagateur en intensité du KRQP.

6.3.1 Théorie auto-cohérente pour le kicked pseudo-rotor

Pour commencer, rappelons que le phénomène de localisation se produit désormais dans l'espace des impulsions et non plus dans l'espace réel comme pour le modèle d'Anderson. Ainsi, l'équation vérifiée par le propagateur en intensité P_{pseudo} du kicked pseudo-rotor n'est plus en \mathbf{q} mais en \mathbf{x} :

$$[-i\omega + \sum_j x_j^2 \mathcal{D}_{jj}(\omega)] P_{\text{pseudo}}(\mathbf{x}, \omega) = 1, \quad (6.26)$$

où le coefficient de diffusion D est désormais remplacé par un **tenseur** de diffusion \mathcal{D} qui tient compte du caractère anisotrope du kicked pseudo-rotor.

D'après l'équation (6.25), la théorie auto-cohérente pour un système anisotrope prédit un tenseur de diffusion dépendant de la densité d'états ρ_0 . Comme montré dans [Alt93; Lem09], pour le KRQP, l'expression auto-cohérente du tenseur de diffusion est :

$$\frac{1}{\mathcal{D}_{jj}(\omega)} = \frac{1}{\mathcal{D}_{jj}} \left(1 + \frac{2\hbar^d}{\pi} \int \frac{1}{-i\omega + \sum_j \mathcal{D}_{jj}(\omega) x_j^2} \frac{d^d \mathbf{x}}{(2\pi)^d} \right). \quad (6.27)$$

L'équation auto-cohérente pour le tenseur de diffusion du kicked pseudo-rotor n'est donc pas fondamentalement modifiée par rapport à l'expression initiale 6.18. Les deux principaux changements sont d'une part le remplacement de la densité d'état par $\frac{1}{2\hbar^d}$ et d'autre part l'échange des rôles de \mathbf{q} et \mathbf{x} puisque la localisation se manifeste désormais dans l'espace des impulsions.

Il importe de garder ici explicitement la dépendance en la constante de Planck \hbar . En effet, comme discuté dans la partie 5.3.5, lors des expériences sur le kicked rotor atomique, la constante de Planck effective — souvent notée $\tilde{\hbar}$ dans la littérature — est facilement ajustable en modifiant l'intervalle de temps entre les kicks, voir l'équation (5.43). Il convient alors d'utiliser l'équation (6.27) en remplaçant \hbar par $\tilde{\hbar}$.

6.3.2 Prédiction du propagateur en intensité du KRQP

La théorie auto-cohérente pour le pseudo-rotor et l'état initial du KRQP nécessaire au *mapping* entre ces deux systèmes nous permettent de prédire analytiquement l'expression du propagateur en intensité du KRQP.

En effet, le KRQP, système unidimensionnel, est équivalent au pseudo-rotor, système tridimensionnel, à condition de choisir pour état initial (voir la section 5.3.2 et l'équation (5.19)) :

$$\Psi(x_1, x_2, x_3, t = 0) = \psi(x_1, t = 0) \delta(x_2 - \phi_2) \delta(x_3 - \phi_3), \quad (6.28)$$

où $\psi(x_1, t = 0)$ est un état initial quelconque du KRQP. Ce terme de source correspond à un état parfaitement localisé dans l'espace des positions selon les directions 2 et 3. On peut également voir cet état initial comme une « onde plane » mais dans l'espace des impulsions et toujours selon les mêmes directions.

Du fait de cet état initial, le propagateur en intensité P_{qp} du KRQP vérifie :

$$P_{\text{qp}}(q_1, t) = \int \frac{e^{i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)}}{-i\omega + \sum_j x_j^2 \mathbf{D}_{jj}(\omega)} \delta(x_2) \delta(x_3) dx_1 dx_2 dx_3 d\omega. \quad (6.29)$$

L'intégration sur les variables x_2 et x_3 est immédiate et aboutit à :

$$P_{\text{qp}}(p, t) = \int \frac{e^{i(px - \omega t)}}{-i\omega + x^2 \mathbf{D}_{11}(\omega)} dx d\omega. \quad (6.30)$$

Ce type d'intégrale peut être calculé analytiquement dans le plan complexe — voir le chapitre 7 pour une dérivation — et conduit à

$$P_{\text{qp}}(p, t) = \frac{3}{2} \left(3\rho^{3/2}t\right)^{-1/3} \text{Ai}\left[\left(3\rho^{3/2}t\right)^{-1/3} |p|\right], \quad (6.31)$$

où Ai désigne la fonction d'Airy [AS68] (voir aussi l'annexe A.1) et ρ est relié au paramètre critique $\Lambda_c \doteq \lim_{t \rightarrow \infty} \langle p^2(t) \rangle / t^{2/3}$ via $\rho = \Gamma(2/3)\Lambda_c/3$ avec Γ la fonction Gamma d'Euler.

Au point critique, le propagateur en intensité du KRQP est donc décrit par une fonction d'Airy. La simulation numérique et l'expérience [Lem+10b] sont en accord avec cette prédiction, à condition de se souvenir que la théorie auto-cohérente a été construite dans l'approximation hydrodynamique, c'est-à-dire pour des temps de propagation supérieurs au temps de *scattering* et des distances supérieures au libre parcours moyen.

Pour conclure, insistons sur le fait que ce résultat est propre à notre modèle : un calcul similaire pour un modèle purement tridimensionnel ne ferait pas intervenir la fonction d'Airy.

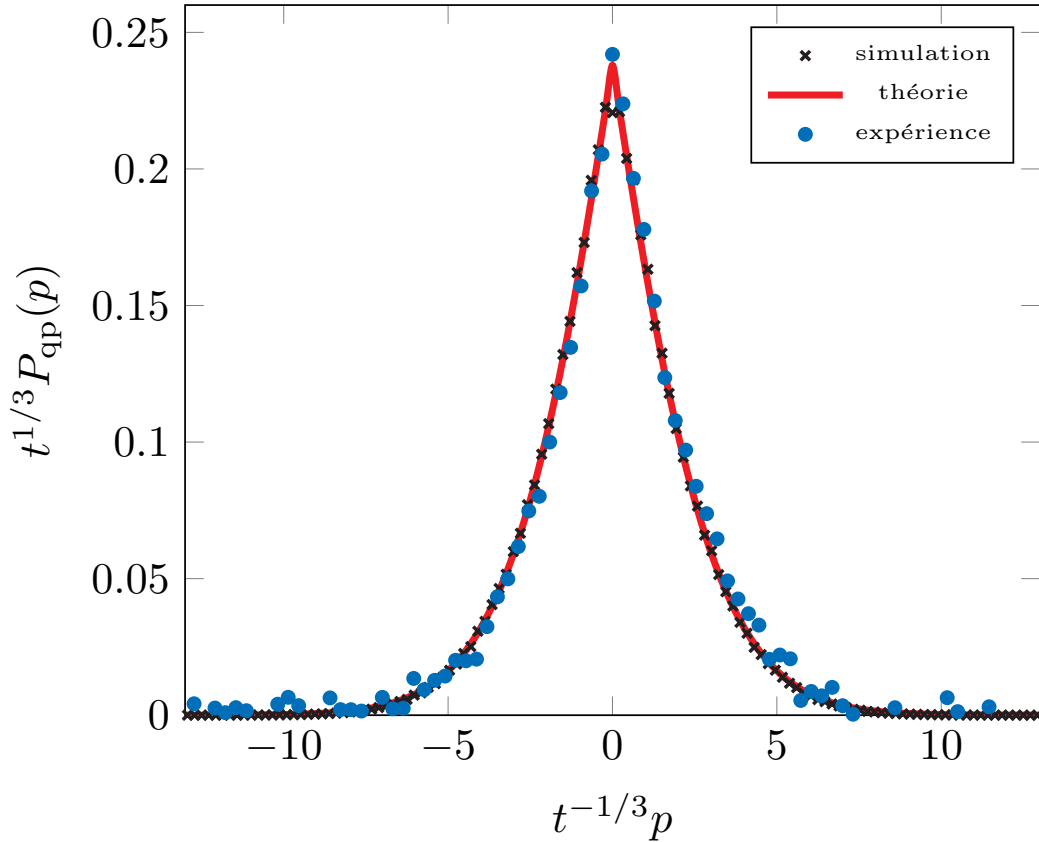


Figure 6.2 Comparaison des propagateurs en intensité P_{qp} du KRQP à trois fréquences obtenus par une simulation numérique, une expérience réalisée à Lille (groupe de J.-C. Garreau et P. Szriftgiser, PhLAM) et la prédiction théorique — fonction d’Airy (6.31). Les différentes données correspondent à un temps de propagation d’une centaine de kicks. Les données sont représentées après un changement d’échelle qui permet une meilleure comparaison. Dans les ailes du propagateur, on observe de petites déviations entre la théorie et l’expérience. Celles-ci ne proviennent pas d’un défaut de la théorie mais de problèmes de décohérence dans l’expérience étudiés en détails par G. Lemarié [Lem09, chapitre 4].

6.4 Déviation à la théorie auto-cohérente et multifractalité

L’objectif de cette partie est en premier lieu de montrer que la théorie auto-cohérente échoue à décrire l’intégralité du propagateur en intensité. Nous introduirons ensuite le diagramme de Chalker qui prédit un comportement différent du coefficient de diffusion selon la région considérée. Cette étape sera essentielle puisque par la suite nous vérifierons numériquement la validité de ce diagramme puis, dans le chapitre 7, nous utiliserons ce diagramme pour

expliquer les déviations à la théorie auto-cohérente et extraire la dimension généralisée D_2 pour le KRQP.

6.4.1 Le « petit pic » : un indice numérique de multifractalité

Numériquement, le propagateur en intensité P_{qp} correspond à la densité de probabilité — dans l’espace des impulsions — pour un état initial piqué en $p = 0$ et après moyenne sur les configurations du désordre. La figure 6.3 montre une légère déviation à la théorie auto-cohérente pour les temps longs.

Ce désaccord peut être souligné en remarquant que d’après l’expression (6.31) le changement d’échelle $p \mapsto t^{-1/3}p$ laisse la fonction $t^{1/3}P_{\text{qp}}$ invariante : dans l’hypothèse où la fonction d’Airy décrirait correctement le propagateur en intensité pour les distances supérieures au libre parcours moyen, après changement d’échelle, l’ensemble des données pour différents temps de propagation devraient se superposer. Comme en témoigne la figure 6.4, les prédictions théoriques diffèrent de la simulation numérique pour les petites valeurs de p .

En traçant la fonction d’Airy pour 10^6 kicks, on voit très nettement se détacher un pic au centre dont la structure est différente du pic d’Airy. Derrière ce pic qui nous intéresse, deux phénomènes sont à distinguer. Tout d’abord, pour les très petites impulsions, c’est-à-dire typiquement inférieures ou de l’ordre du libre parcours moyen, la théorie auto-cohérente n’est plus valable puisque, depuis le début, nous nous sommes placés dans l’approximation hydrodynamique. Dans le système étudié, le libre parcours moyen est de l’ordre [Lem09] de $K/\hbar \sim 2$. Pour un temps de propagation de l’ordre de 10^6 kicks, les déviations à l’approximation hydrodynamique ne seront visibles que pour $t^{-1/3}p \ll 0.02$. Pour les impulsions intermédiaires à savoir supérieures au libre parcours moyen mais inférieures à \tilde{L}_ω , défini à l’équation (6.6), la théorie auto-cohérente devrait être encore valable. Or nous voyons sur ces données que ce n’est pas le cas puisque un pic croît très clairement au-dessus de la prédiction auto-cohérente — fonction d’Airy. Dans la suite de ce manuscrit nous qualifierons cette déviation de « petit pic » et notre objectif sera de le décrire.

Dans un premier temps, nous allons montrer en quoi ce petit pic est lié à la multifractalité des fonctions d’onde. Puis nous verrons qu’il est possible d’expliquer cette déviation en faisant une hypothèse de loi d’échelle sur le coefficient de diffusion.

Bien que pour le KRQP, la localisation ait lieu dans l’espace des impulsions et que la limite hydrodynamique corresponde alors aux grandes impulsions, dans la suite de ce chapitre nous considérerons que la localisation a lieu dans l’espace réel et ce afin que la notion de limite hydrodynamique reste cohérente entre le manuscrit et les articles cités.

6.4.2 Loi d’échelle de Wegner et multifractalité

Au chapitre 4, nous avons montré en toute généralité que les corrélations de densité sont directement reliées à la multifractalité et notamment à la dimension généralisée $D_2 = \tau(2)$,

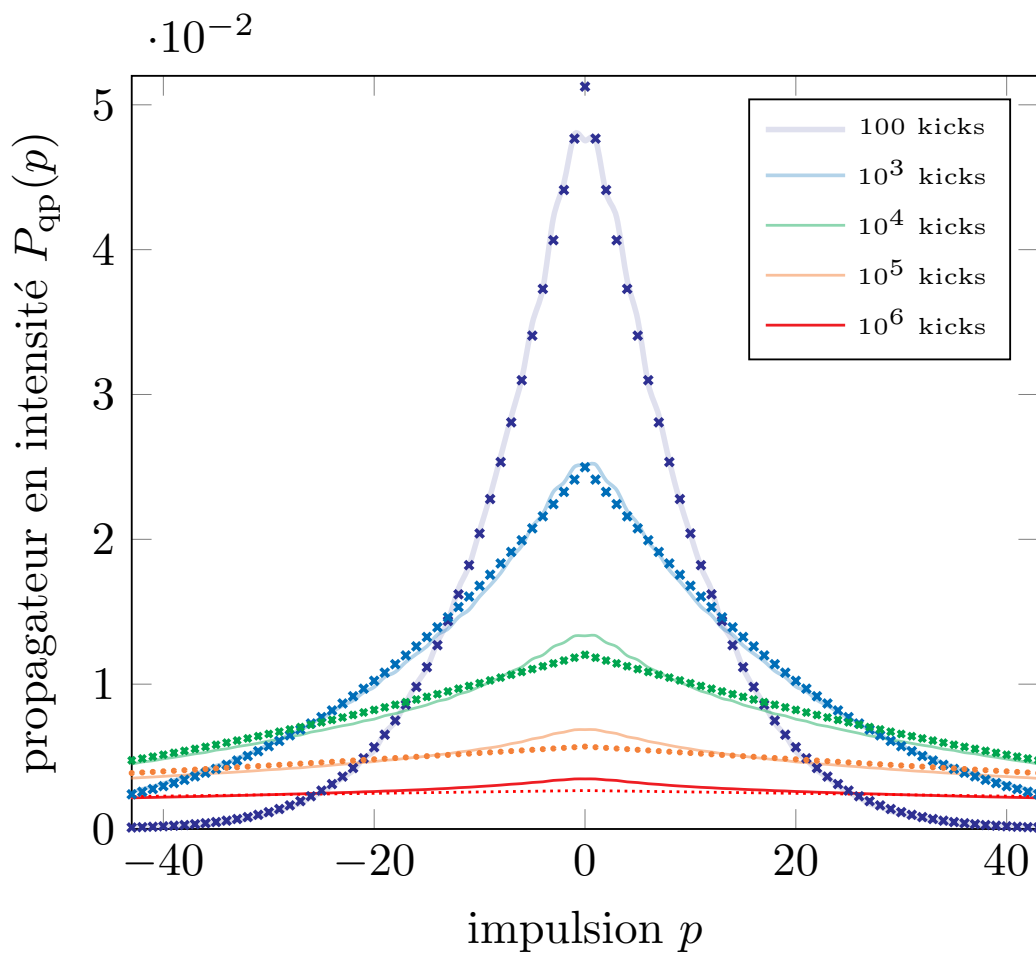


Figure 6.3 Comparaison de la simulation numérique (ligne continue) du KRQP au point critique avec la prédiction auto-cohérente (pointillés) — équation (6.31) — au point critique de la transition d'Anderson [$K = 8.096$, $\varepsilon \approx 0.45$, 12 000 réalisations du désordre] pour différents temps de propagation.

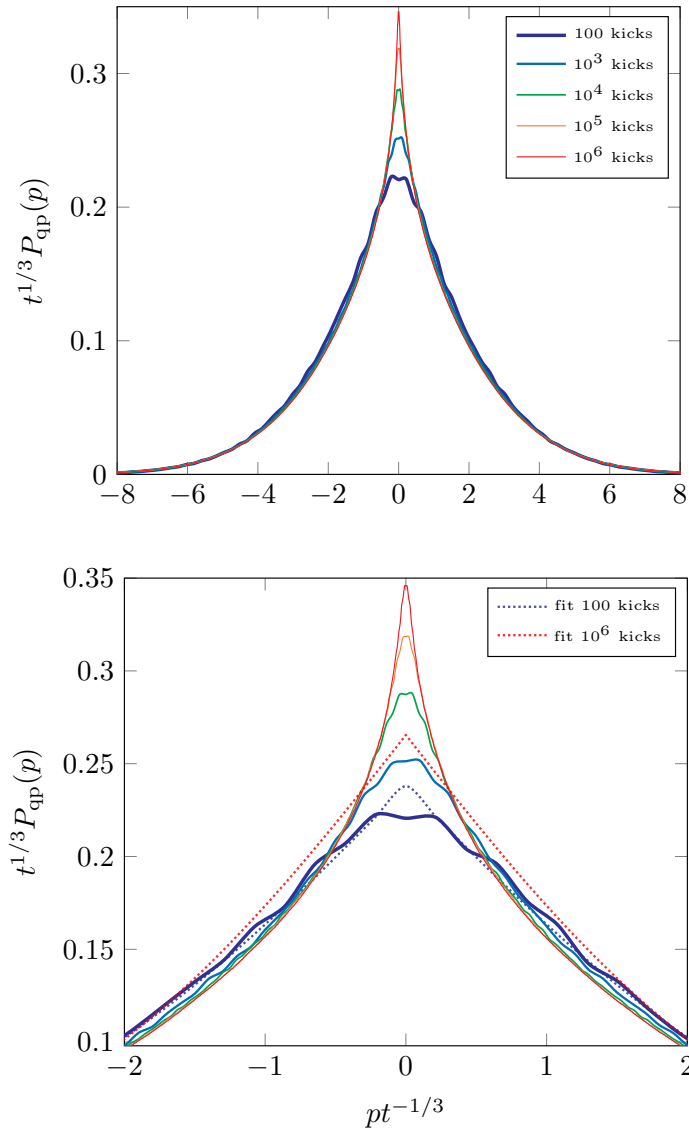


Figure 6.4 Comparaison de la simulation numérique (ligne continue) du KRQP au point critique avec la prédiction auto-cohérente (pointillés) — équation (6.31) — au point critique de la transition d'Anderson [$K = 8.096$, $\varepsilon \approx 0.45$, 12 000 réalisations du désordre] pour différents temps de propagation et après changement d'échelle. Dans les ailes du propagateur visibles sur la figure du haut le changement d'échelle et donc la forme prédite théoriquement est en accord avec les simulations. La figure du bas montre quant à elle une déviation nette entre la prédiction auto-cohérente (fonction d'Airy *rescalée*) et les simulations pour les petites impulsions. Les propriétés du petit pic apparaissant autour de $p=0$ sont directement reliées à la multifractalité et discutées au chapitre 7.

où τ désigne l'exposant de masse. Pour des raisons pratiques et pédagogiques, nous allons à nouveau établir ce lien dans le cadre plus restreint de la transition d'Anderson. Nous montrerons ainsi que la multifractalité des états propres ψ_i se manifeste également sur les paquets d'onde Φ , répondant ainsi à la première question posée à la section 6.1.

Dans le contexte des systèmes désordonnés, la multifractalité va se traduire par un *scaling* anormal de la fonction de corrélation densité–densité :

$$C(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \doteq \langle n(\mathbf{x}, t)n(\mathbf{x}', t') \rangle, \quad (6.32)$$

où $n(\mathbf{x}, t)$ est la densité de probabilité $|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2$ au point \mathbf{x} et à l'instant t . Les crochets $\langle \dots \rangle$ désignent toujours une moyenne sur les réalisations du désordre qui rend C invariante par translation dans le temps et l'espace ainsi qu'isotrope. En définitive C ne sera fonction que de la distance $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ et l'on pourra prendre $t' = 0$.

Dans le régime qui nous intéresse, à savoir pour les petites distances et les temps longs, Wegner [Weg85] a montré que les corrélations suivaient une loi de puissance caractérisée par un exposant $\eta > 0$:

$$C(r, t \rightarrow \infty) \sim \left(\frac{r}{\xi} \right)^{-\eta}, \quad (6.33)$$

où ξ est une longueur caractéristique.

En décomposant le paquet d'ondes $\Phi(t = 0)$ sur les états propres ψ_i (d'énergie E_i) du système $|\Phi(t=0)\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle$, la fonction de corrélation non moyennée $n(\mathbf{r}, t)n(\mathbf{0}, 0)$ s'écrit :

$$n(\mathbf{r}, t)n(\mathbf{0}, 0) = \sum_{i,j,k,l} c_i c_j^* c_k c_l^* \psi_i(\mathbf{0}) \psi_j^*(\mathbf{0}) \psi_k(\mathbf{r}) \psi_l^*(\mathbf{r}) e^{-i(E_k - E_l)t}. \quad (6.34)$$

Pour peu que le paquet d'ondes soit suffisamment large en énergie pour contenir beaucoup de contributions d'états propres différents, une approche statistique standard est possible. Les coefficients c_i dépendent sensiblement du paquet d'ondes initial et peuvent être typiquement pris comme des variables aléatoires complexes avec une distribution gaussienne. Lorsque l'on moyenne sur les propriétés du paquet d'ondes initial, le théorème de Wick montre que seules les contributions où l'on apparie un coefficient c avec un c^* survivent. Il y a deux sortes de contributions :

— pour $i = j, k = l$, la contribution à la fonction de corrélation moyenne s'écrit :

$$\left\langle \sum_{i,k} |c_i|^2 |\psi_i(\mathbf{0})|^2 |c_k|^2 |\psi_k(\mathbf{r})|^2 \right\rangle \quad (6.35)$$

qui n'est autre que le produit des densités moyennes $\langle n(\mathbf{0}) \rangle \langle n(\mathbf{r}) \rangle$ et ne présente aucune singularité à petit r .

— pour $i = l, j = k$, la contribution s'écrit :

$$\left\langle \sum_{i,j} |c_i|^2 |c_j|^2 \psi_i(\mathbf{0}) \psi_i^*(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{0}) \psi_j^*(\mathbf{r}) e^{-i(E_j - E_i)t} \right\rangle. \quad (6.36)$$

À la limite des temps longs, tous les termes oscillants $e^{-i(E_j - E_i)t}$ se moyennent à 0, sauf les termes $i = j$, ce qui constitue l'approximation diagonale. Dans cette approximation, la contribution devient :

$$\left\langle \sum_j |c_j|^4 |\psi_j(\mathbf{0})|^2 |\psi_j(\mathbf{r})|^2 \right\rangle. \quad (6.37)$$

Finalement, à petite distance r , on a :

$$C(r, t \rightarrow \infty) \sim \langle |\psi_j(\mathbf{0})|^2 |\psi_j(\mathbf{r})|^2 \rangle, \quad (6.38)$$

ce qui établit un lien direct entre les corrélations spatiales des paquets d'ondes aux temps longs et les corrélations spatiales des états propres.

Ces corrélations pour les états propres peuvent être reliées à la dimension généralisée D_2 déterminée par le calcul des moments généralisés pour $q = 2$ définis à la partie 4.3.3. Ici, c'est la densité $|\psi_j|^2$ des états propres qui jouera le rôle de la mesure à analyser. En adaptant la définition (4.20) des moments P_q pour $q = 2$ et pour la mesure $\mu = |\psi_j|^2$, on obtient :

$$\langle P_{q=2}(l) \rangle \doteq \sum_{i=1}^{N_c} \left(\int_{\mathcal{C}_i(l)} |\psi_j(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^2, \quad (6.39)$$

où $\mathcal{C}_i(l)$ fait référence au cube d'indice i dont la longueur d'un côté vaut l et N_c désigne le nombre de cubes nécessaire pour recouvrir le système.

La moyenne $\langle \dots \rangle$ utilisée ici porte sur les cubes tandis que dans la fonction de corrélation C de l'équation (6.32) il s'agit d'une moyenne sur les réalisations du désordre. Nous supposons que ces deux moyennes sont équivalentes (hypothèse du type ergodique). Dès lors, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \langle P_{q=2}(l) \rangle &= N_c \left\langle \left(\int_{[0,l]^d} |\psi_j(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^2 \right\rangle \\ &= \left(\frac{L}{l} \right)^d \int_{[0,l]^d} \int_{[0,l]^d} \langle |\psi_j(\mathbf{x})|^2 |\psi_j(\mathbf{y})|^2 \rangle d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

En changeant de variables, et de par l'invariance par translation, on fait apparaître une intégrale dans un cube des corrélations de paquets d'ondes :

$$\langle P_{q=2}(l) \rangle = L^d \int_{[0,l]^d} \langle |\psi_j(\mathbf{0})|^2 |\psi_j(\mathbf{r})|^2 \rangle d\mathbf{r}. \quad (6.41)$$

Le *scaling* des moments de l'équation (6.41) s'écrit :

$$\langle P_{q=2}(l) \rangle \sim \int_{[0,l^d]} \sum_{\alpha} \langle |\psi_j(\mathbf{0})|^2 |\psi_j(\mathbf{r})|^2 \rangle d\mathbf{r}. \quad (6.42)$$

Enfin, en utilisant le résultat (6.33) dû à Wegner nous aboutissons à :

$$\langle P_{q=2}(l) \rangle \sim \int_{[0,l^d]} \left(\frac{r}{\xi} \right)^{-\eta} d^d \mathbf{r} \sim l^{d-\eta}. \quad (6.43)$$

En comparant ce résultat à la définition (4.22) de l'exposant de masse $\tau(2)$ et donc à la dimension généralisée $D_2 = \tau(2)$, on arrive à la relation :

$$\boxed{\eta = d - D_2}. \quad (6.44)$$

En définitive, nous venons de montrer que le *scaling* anormal de la fonction de corrélation spatiale des paquets d'onde est une manifestation du caractère multifractal des états propres.

6.4.3 Diagramme de Chalker

Dans la partie 6.4.1, nous avons vu qu'aux petites distances et aux temps longs le propagateur en intensité était mal décrit par la fonction d'Airy : un petit pic se détache très nettement du pic d'Airy. Par ailleurs, Wegner a montré que le *scaling* de la fonction de corrélation densité–densité était anormal, résultat lié à la multifractalité des états propres comme expliqué dans la partie 6.4.2.

Le propagateur $P(q, \omega)$ est lié au coefficient de diffusion par :

$$P(q, \omega) = \frac{1}{-i\omega + D(q, \omega)q^2}. \quad (6.45)$$

Dans le cadre de la théorie auto-cohérente discutée dans les parties 3.5 et 6.2, le coefficient de diffusion ne dépend que de ω et de la dimension du système, ce qui ne laisse aucune place pour prendre en compte la multifractalité.

En suivant Chalker [Cha90], nous allons montrer qu'en modifiant $D(q, \omega)$ de manière appropriée, il est à la fois possible de préserver la loi d'échelle à un paramètre et de tenir compte de la multifractalité.

Cette démarche et le « diagramme de Chalker » associé, montré sur la figure 6.5, sont des **éléments essentiels** de base pour notre travail et seront abondamment utilisés pour interpréter nos résultats numériques dans la suite de ce chapitre ; dans le chapitre 7, nous étudierons comment ce diagramme permet d'interpréter quantitativement le « petit pic » en terme d'exposant multifractal.

Nous allons tout d'abord présenter et analyser ce diagramme [Cha90] qui, à différents régimes, associe un coefficient de diffusion différent. Comme dans le cas de la théorie auto-cohérente de la section 6.2, les effets d'anisotropie n'introduisent que des complications sans grand intérêt, nous nous limiterons donc au cas d'un système désordonné de dimension d statistiquement homogène et isotrope.

Le diagramme est montré sur la figure 6.5 où à chacune des régions numérotées de [1] à [5] correspond une expression différente du coefficient de diffusion.

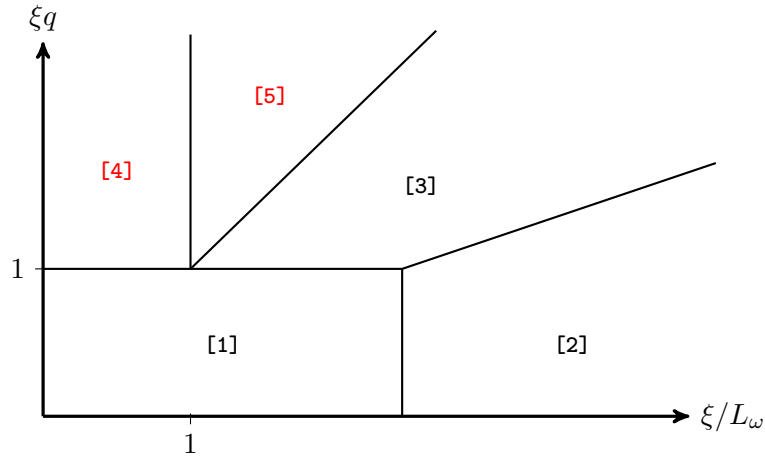


Figure 6.5 Diagramme de Chalker [Cha90]. Ce diagramme est divisé en cinq régions correspondant à des comportements différents du coefficient de diffusion. On peut regrouper ces régions en deux groupes selon que le coefficient de diffusion possède un caractère multifractal (en rouge) ou non (en noir). Pour voir l'expression exacte du coefficient de diffusion dans les différents régimes, se reporter au tableau 6.2 et à la discussion dans le texte.

C'est un diagramme dans le plan (ω, q) . Il est plus simple de définir une longueur caractéristique :

$$L_\omega \doteq \left(\frac{1}{\rho\omega} \right)^{1/d}, \quad (6.46)$$

où ρ est la densité d'états par unité de volume. Physiquement, L_ω est la taille du système telle que l'écart moyen entre deux niveaux d'énergie consécutifs est égal à ω .

Une seconde longueur caractéristique cruciale est la longueur de corrélation ξ du système. Dans le régime localisé, c'est la longueur de localisation définie à l'équation (6.14). Dans le régime diffusif, elle est simplement définie par :

$$\xi = \left(\frac{1}{\rho D_B} \right)^{\frac{1}{d-2}} \quad (6.47)$$

où D est le coefficient de diffusion aux temps longs et aux grandes distances.

Du côté localisé de la transition d'Anderson, ξ diverge comme $(E_c - E)^{-\nu}$, où E est l'énergie, E_c l'énergie critique et ν l'exposant critique. Du côté diffusif, D tend vers 0 comme $(E - E_c)^s$, avec $s = (d - 2)\nu$, de sorte que la longueur de corrélation ξ diverge des deux côtés de la transition comme $|E - E_c|^{-\nu}$.

Nous avons donc trois longueurs importantes dans le système :

- ξ , la longueur de corrélation ;
- L_ω , la longueur caractéristique « temporelle » ;
- $1/q$, la longueur caractéristique « spatiale ».

Pour préserver la loi d'échelle à un paramètre, il est nécessaire que le coefficient de diffusion *scale* avec les rapports entre ces longueurs, d'où le choix :

- en abscisse ξ/L_ω . Du fait que $1/L_\omega \propto \omega^{1/d}$, on aurait pu tout aussi bien choisir $(\xi/L_\omega)^d \propto \omega$.
- en ordonnée $q\xi$.

Il faut toutefois noter qu'il existe une autre longueur caractéristique microscopique, le libre parcours moyen ℓ , qui brise la loi d'échelle à un paramètre. Il est donc nécessaire de se placer dans le régime où $\ell \ll (\xi, L_\omega, 1/q)$, c'est-à-dire d'exclure les temps très courts et les très petites distances. En particulier, $\ell \ll \xi$ implique que toute la discussion a lieu au voisinage du point critique de la transition d'Anderson.

Notons enfin que la longueur caractéristique \tilde{L}_ω définie à l'équation (6.6), a le même scaling que L_ω au voisinage du point critique, voir l'équation (6.46) — leur rapport *scale* comme $(k\ell)^{4/3} \sim O(1)$ en dimension 3 — de sorte qu'elle est ici redondante.

Sur ces cinq régions, les régions **[1]** à **[3]** sont exemptes de multifractalité et le coefficient de diffusion *scale* normalement en $D \sim \lambda^{2-d}$ où λ est la longueur caractéristique pour la région étudiée. À petites distances ($1 \ll q\xi$), les régions **[4]** et **[5]** devront rendre compte de la multifractalité par l'intermédiaire de la dimension D_2 .

Région [1]

La région **[1]** correspond aux grandes distances ($q\xi \ll 1$) et aux temps longs ($\xi \ll L_\omega$). La longueur de cohérence ξ est la plus courte et c'est elle qui impose la dynamique aux temps longs, qui est soit localisée, soit diffusif (voir la discussion de la partie 6.2). Par exemple, du côté diffusif de la diffusion on a :

$$\frac{D}{D_B} \sim \left(\frac{\ell}{\xi}\right)^{d-2}, \quad (6.48)$$

expression indépendante de q et ω .

Région [2]

Si l'on reste dans le régime des grandes distances mais que les temps deviennent courts ($\xi \gg L_\omega$), on se déplace horizontalement vers la droite dans le diagramme et on arrive dans la région [2]. Alors, la longueur pertinente est L_ω et le comportement du coefficient de diffusion devient :

$$\frac{D(\omega)}{D_B} \sim \left(\frac{\ell}{L_\omega}\right)^{d-2} \sim (\omega\tau)^{(d-2)/d}. \quad (6.49)$$

En dimension trois, le coefficient de diffusion est bien le même que pour la théorie auto-cohérente, voir tableau 6.1, et en dimension d le *scaling* est identique à celui trouvé par Wegner [Weg85].

Il s'agit de la région critique [MDS16] où le temps est trop court pour que le système « sache » où il se situe par rapport à la transition d'Anderson.

Région [4]

Le passage de la région [1] à [4] se fait en préservant les temps longs $\xi \ll L_\omega$ et en diminuant les distances $q\xi \gg 1$, c'est-à-dire en se déplaçant verticalement vers le haut à partir de la région [1]. À cette échelle, la multifractalité doit être prise en compte et les calculs de Wegner discutés dans la section 6.4.2 assurent que le *scaling* de la fonction de corrélation est :

$$C(r, \omega \rightarrow 0) \sim r^{D_2-d}, \quad (6.50)$$

soit :

$$C(q, \omega \rightarrow 0) \sim P_{\text{qp}}(q, \omega \rightarrow 0) \sim q^{-D_2}, \quad (6.51)$$

et le comportement en loi d'échelle du coefficient de diffusion doit être $D(q, \omega) \sim q^{D_2-2}$.

L'expression finale du coefficient de diffusion est déterminée en s'assurant qu'à la frontière $q\xi = 1$ il y a continuité, condition remplie si

$$\frac{D(q, \omega)}{D_B} \sim \left(\frac{\ell}{\xi}\right)^{d-2} (q\xi)^{D_2-2} = (q\ell)^{d-2} (q\xi)^{D_2-d}. \quad (6.52)$$

Dans cette région, le coefficient de diffusion prend une dépendance non triviale de q , au-delà de la théorie auto-cohérente.

Région [5]

En se déplaçant horizontalement depuis la région [4], on atteint la région [5] où $(\xi/L_\omega, q\xi) \gg 1$ (temps courts et petites distances) et dans laquelle la multifractalité demeure importante. Comme pour la région [2], la longueur caractéristique n'est plus ξ mais

L_ω . Ainsi, le coefficient de diffusion dans la région [5] est obtenu en remplaçant ξ par L_ω dans (6.52) :

$$\frac{D(q, \omega)}{D_B} \sim (q\ell)^{d-2} (qL_\omega)^{D_2-d} \sim (q\ell)^{D_2-2} (\omega\tau)^{(d-D_2)/d}. \quad (6.53)$$

Région [3]

La discussion précédente s'est concentrée sur les régimes des paramètres $q\xi$ et ξ/L_ω , mais pas sur les valeurs relatives de L_ω et $1/q$. Chalker propose d'intercaler entre les régions [2] et [5], toutes deux aux temps courts tels que $\xi/L_\omega \gg 1$, une région [3] lorsque $qL_\omega \geq 1$ et où le coefficient de diffusion est non multifractal et *scale* comme :

$$\frac{D(q, \omega)}{D_B} \sim (q\ell)^{d-2}. \quad (6.54)$$

La séparation entre les régions [2] et [3] n'est pas précisément donnée.

En fait, tous les résultats numériques discutés dans la suite de ce chapitre ainsi que dans le chapitre 7 se comprennent très bien sans recourir à cette région [3]. Nous ferons donc l'hypothèse hardie — mais simple — que cette région n'existe simplement pas.

Nous avons résumé ces cinq régimes dans le tableau 6.2.

Régime	Régime temporel	Régime spatial	$D(q, i\omega)/D_B$	Région
isolant ou conducteur	$\xi/L_\omega \ll 1$	$q\xi \ll 1$	$\left(\frac{\ell}{\xi}\right)^{d-2}$	[1]
		$q\xi \gg 1$	$(q\ell)^{d-2}(q\xi)^{D_2-d}$	[4]
Critique	$\xi/L_\omega \gg 1$	$qL_\omega \ll 1$	$(\omega\tau)^{(d-2)/d}$	[2]
		$q^{-1} \sim L_\omega$	$(q\ell)^{d-2}$	[3]
		$qL_\omega \gg 1$	$(q\ell)^{D_2-2}(\omega\tau)^{(d-D_2)/d}$	[5]

Tableau 6.2 Résumé des différents régimes du coefficient de diffusion réduit D/D_B du diagramme de Chalker (en dimension d et avec D_B la constante de diffusion de Boltzmann). Les régions en rouge sont celles où se manifeste la multifractalité et caractérisées par la dimension D_2 .

Au point critique, la longueur de corrélation ξ diverge et devient infinie, ne laissant alors que deux longueurs caractéristiques : L_ω et $1/q$. Les régions [1] et [4] disparaissent donc, et on a alors un diagramme de Chalker simplifié représenté sur la figure 6.6, où subsistent principalement les régions [2] et [5], entre lesquelles pourrait s'intercaler l'hypothétique région [3]. En supposant qu'elle n'existe pas — ce que nous ferons dans la suite — la transition entre les régions [2] et [5] a lieu pour $qL_\omega \sim 1$.

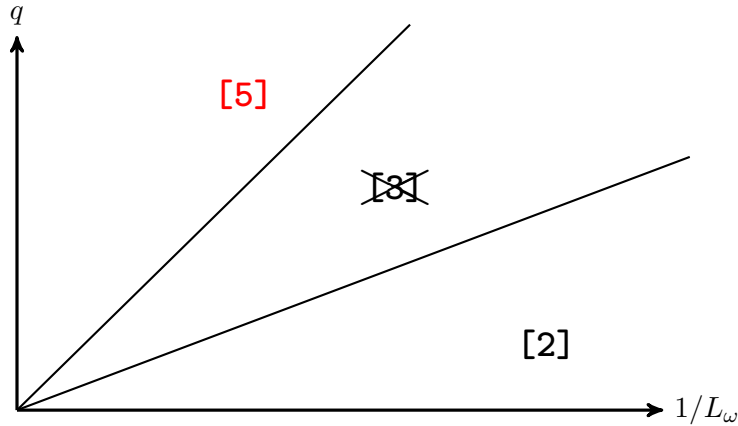


Figure 6.6 Diagramme de Chalker simplifié [Cha90] au point critique de la transition d'Anderson ($\xi \rightarrow \infty$). À la différence de l'article d'origine et de la figure 6.5, seules les zones [2] et [5] apparaissent. La région [3] présente dans le diagramme d'origine (voir figure 6.5) a été barrée car l'analyse des paquets d'ondes à la partie 6.7 et dans le chapitre 7 n'en révèle pas l'utilité.

6.5 Analyse globale de la multifractalité : dynamique critique du KRQP

L'idée générale derrière cette première étude est de savoir si la multifractalité a un impact sur l'extension moyenne du paquet d'ondes dans l'espace des impulsions, espace dans lequel se produit la localisation pour les systèmes périodiquement *kickés*.

Cette analyse sur des systèmes *kickés* se révèle intéressante pour plusieurs raisons. Tout d'abord, des études similaires [OK97] ont été menées pour les systèmes désordonnés du type modèle d'Anderson au point critique : les simulations numériques montrent que les moments pairs de l'extension moyenne du paquet d'ondes se comportent en

$$\langle r^k \rangle(t) \sim t^{k/3}. \quad (6.55)$$

Autrement dit, la multifractalité n'aurait aucun effet sur l'extension moyenne du paquet d'ondes.

La seconde raison beaucoup plus fondamentale est que cette étude permet de confirmer la loi d'échelle à un paramètre. En effet, en dimension d , on peut rapidement se convaincre du fait que seul un propagateur de la forme

$$P_{\text{qp}}(x, t) = t^{-1/d} h(|x|t^{-1/d}), \quad (6.56)$$

avec h une fonction à déterminer, possède des moments vérifiant le *scaling* (6.55).

Ici nous nous proposons de vérifier numériquement la validité de l'expression (6.55) pour $k \in \{2, \dots, 12\}$, analyse très simple puisqu'il suffit d'extraire de la figure 6.7 le coefficient directeur m_k de $3/k \ln \langle p^k \rangle$ en fonction de $\ln t$ et de le comparer à l'unité comme cela est fait sur la figure 6.8.

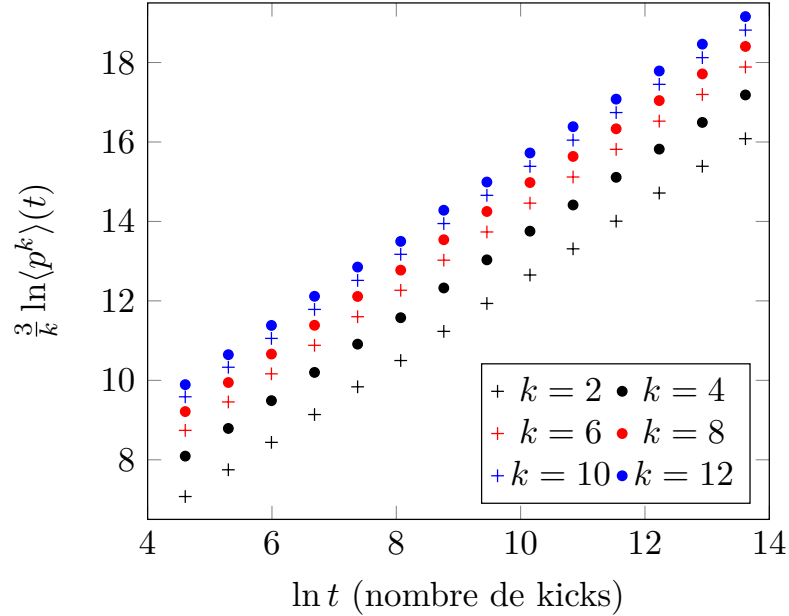


Figure 6.7 Représentation de $3/k \ln \langle p^k \rangle(t)$ (p est l'impulsion et k le moment) pour le KRQP à la transition métal–isolant d'Anderson ($K = K_c = 8.096$) pour 14 temps différents pris entre $t_{\text{ini}} = 100$ kicks et $t_{\text{fin}} = 819\,200$ kicks.

Les résultats sont cependant délicats à analyser. En effet, en considérant les quatorze temps répartis entre $t_{\text{ini}} = 100$ kicks et $t_{\text{fin}} = 819\,200$ kicks, on peut penser que des déviations significatives sont observées. En choisissant pour temps initial des temps supérieurs à 100 kicks, on constate un accord entre la prédiction théorique et le calcul numérique. Ces déviations infimes confirment que la multifractalité ne se manifeste que pour les petites impulsions $|p|$, dont la contribution aux moments positifs est faible.

Enfin, l'analyse globale de multifractalité pourrait être faussée pour des raisons numériques car notre système est de longueur finie L : au-delà de cette distance $|\psi|^2 < 10^{-15}$ et les simulations ne sont pas suffisamment précises pour estimer correctement les ailes du paquet d'ondes. Or pour les grandes valeurs de k , la contribution des ailes de la fonction à intégrer — $p^k |\psi(p)|^2$ — augmentera avec k . La question est donc de savoir si la contribution des ailes

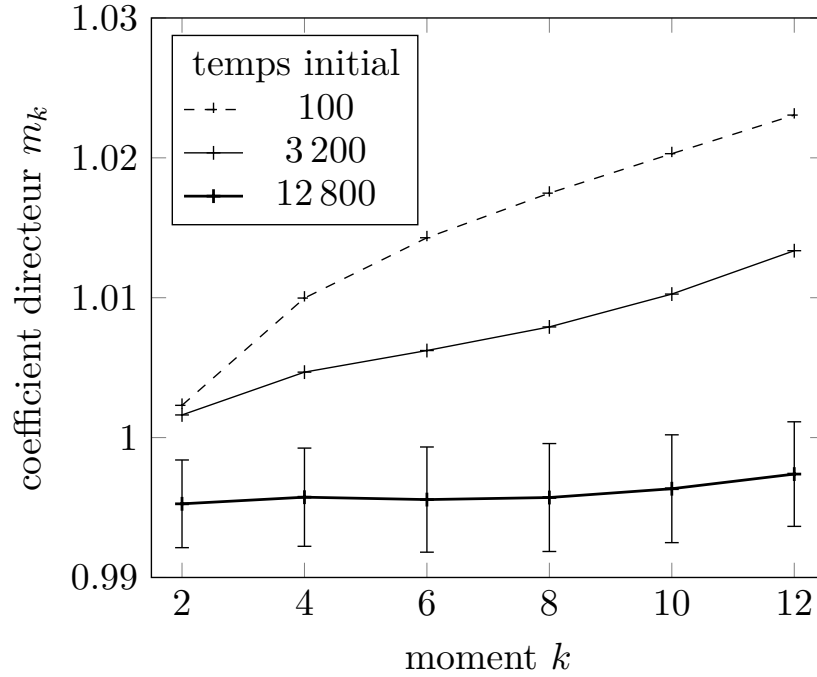


Figure 6.8 Coefficients directeurs extraits de la figure 6.7 : la théorie et les simulations numériques sur le modèle d'Anderson prédisent un coefficient directeur $m_k = 1$. Pour faire les régressions linéaires et extraire le coefficient directeur, tous les temps n'ont pas été utilisés : le temps t_{ini} correspond au temps initial utilisé tandis que le temps final n'est jamais modifié ($t_{\text{fin}} = 819\,200$ kicks). Ainsi, en tenant compte du moment calculé après 100 kicks, on observe des déviations : le coefficient directeur est légèrement différent de 1. En retirant les premiers temps, on observe que le coefficient directeur est très proche de l'unité.

dans un système idéalement infini n'est pas sous estimé : a-t-on toujours

$$\mathcal{A}_k(L) \doteq 2 \int_{L/2}^{\infty} p^k \overline{|\psi(p)|^2} dp \ll \langle p^k \rangle ? \quad (6.57)$$

D'après la théorie auto-cohérente établie pour ce système, nous savons que le paquet d'ondes moyen est bien décrit par la fonction d'Airy, équation (6.31) :

$$\overline{|\psi(p)|^2} = \frac{3}{2} \kappa^{-1/3} \text{Ai} \left[\kappa^{-1/3} |p| \right]. \quad (6.58)$$

avec $\kappa = 3\rho^{3/2}t$.

moment k	R_k
2	7.751×10^{-10}
4	1.651×10^{-8}
6	1.798×10^{-7}
8	1.254×10^{-6}
10	6.272×10^{-6}
12	2.408×10^{-5}

Figure 6.9 Évolution du rapport R_k en fonction du moment k pour le KRQP au voisinage du point critique $K = K_c = 8.096$ et pour 819 200 kicks. Les autres paramètres sont toujours les mêmes. Le rapport est toujours très inférieur aux barres d'erreurs ce qui prouve que l'analyse précédente est correcte.

En utilisant le développement asymptotique de la fonction d'Airy puis celui de la fonction Gamma incomplète [AS68] (fonction qui apparaît à la suite d'un changement de variable) on obtient l'estimation suivante (dans la limite $L \rightarrow \infty$) :

$$\mathcal{A}_k(L) \simeq \frac{3}{2\sqrt{\pi\mathcal{F}(L)}} \exp\left\{-\frac{2}{3}\mathcal{F}(L)\right\} \left(\frac{L}{2}\right)^k, \quad (6.59)$$

avec

$$\mathcal{F}(L) \doteq \sqrt{\frac{1}{\kappa} \left(\frac{L}{2}\right)^3}. \quad (6.60)$$

D'après le raisonnement précédent, pour vérifier si une possible erreur numérique intervient, nous avons regardé le rapport :

$$R_k \doteq \frac{\mathcal{A}_k(L)}{\langle p^k \rangle}. \quad (6.61)$$

Les moyennes figurant au numérateur et au dénominateur n'ont pas le même sens : $|\overline{\psi}|^2$ désigne le paquet d'ondes moyen obtenu après 10 000 réalisations du désordre, tandis que $\langle p^k \rangle = \int_{-L/2}^{L/2} p^k |\overline{\psi(p)}|^2 dp$.

On rapporte les valeurs de R_k dans le tableau 6.9. Comme indiqué en légende de ce tableau, on observe que R est petit devant les barres d'erreur : $R \ll 7 \times 10^{-3}$.

En conclusion, nous avons montré qu'en plus d'être légitime, nos calculs numériques sont cohérents avec les observations réalisées sur les systèmes désordonnés traditionnels. Mais surtout, nous confirmons la loi d'échelle à un paramètre. En évaluant les moments positifs nous avons en particulier vérifié que le coefficient de diffusion est celui prédit par la théorie auto-cohérente.

6.6 Analyse multifractale des paquets d'ondes du KRQP

6.6.1 Méthodologie

Au chapitre 4, nous avons vu que l'analyse multifractale reposait sur la définition d'une mesure. Pour le système qui nous intéresse dans ce manuscrit, la mesure est la densité de probabilité obtenue après un certain temps de propagation (nombre de kicks) et pour une réalisation du désordre tandis que le groupe de Römer analyse directement les états propres [RVR08 ; VRR08]. Dans notre cas, ce choix différent de mesure vient du fait que dans l'expérience réalisée au PhLam de Lille dans le groupe de Jean-Claude Garreau et Pascal Sznitgiser, ce sont les modules carrés des fonctions d'onde qui sont mesurables. Par ailleurs, numériquement il est plus rapide de propager un état initial que de diagonaliser une matrice.

Une application stricte du formalisme multifractal exposé au chapitre 4 suggère qu'il suffit de procéder aux étapes suivantes :

- i. Calculer les taux de participations inverses généralisés P_q à partir de l'équation (4.18) et ce pour différentes longueurs de segments l ;
- ii. Extraire la pente de $\ln\langle P_q \rangle(l)$ afin d'obtenir l'exposant de masse $\tau(q)$;
- iii. Effectuer une transformée de Legendre de τ pour aboutir au spectre de multifractalité $f(\alpha)$.

Dans le cas présent, après moyenne sur les réalisations du désordre, les taux de participations inverses généralisés pour un système de taille L ont pour expression :

$$\langle P_q(L) \rangle \doteq \left\langle \sum_{i=1}^{N_s} |\psi_i|^{2q} \right\rangle, \quad (6.62)$$

où ψ_i est la fonction d'onde sur l'un des N_s sites pour **une réalisation** du désordre et après un certain nombre de kicks. L'application *stricto sensu* de cette formule n'est pas adaptée pour les moments $q < 0$. En effet, dans les ailes, la densité de probabilité peut devenir extrêmement petite entraînant de grandes valeurs pour les moments négatifs. C'est pourquoi nous sommes amenés à subdiviser le système initial de longueur L en N segments de longueur l . Nous définissons ensuite une mesure de « maillage grossier » (*coarse-grained*) sur le k -ième segment par :

$$\mu_k(l) = \sum_{j=1}^l |\psi_{kl+j}|^2, \quad k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket. \quad (6.63)$$

Pour les moments positifs, ce problème ne se pose évidemment pas puisque la densité de probabilité ne prend pas de valeurs arbitrairement grandes du fait de la normalisation.

Néanmoins, pour les moments positifs, nous avons conservé la procédure de lissage décrite précédemment.

En définitive, la formule utilisée pour calculer les taux de participation inverses généralisés est :

$$\langle P_q(L) \rangle \doteq \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^l |\psi_{kl+j}|^{2q} \right\rangle, \quad (6.64)$$

avec :

- L la longueur initiale du système ;
- l la longueur d'un segment utilisé pour le lissage ;
- $N \doteq \frac{L}{l}$ le nombre de segments nécessaire pour recouvrir le système initial ;
- ψ_i la fonction d'onde du KRQP sur le site i à un instant donné et pour une seule réalisation du désordre.

Une distinction cruciale doit ici être faite entre les systèmes désordonnés usuels et le KRQP. En effet, ce qui intervient dans le taux de participation inverse généralisé de l'équation (6.64), ce sont les modules carrés de la fonction d'onde **unidimensionnelle** du KRQP. A cause du repliement $3d \rightarrow 1d$, ces taux n'ont aucun rapport avec ceux des états propres (de Floquet) du kicked pseudo-rotor tridimensionnel. Les dimensions multifractales que nous allons extraire sont donc radicalement différentes de celles du modèle d'Anderson tridimensionnel. Pour bien marquer cette différence, nous utiliserons une notation différente : D_q se référera aux dimensions multifractales des systèmes tridimensionnels et \mathcal{D}_q se référera au KRQP unidimensionnel. En particulier, nous nous concentrerons dans ce chapitre sur la dimension \mathcal{D}_2 . Au contraire, dans le chapitre 7, nous montrerons que l'analyse du petit pic permet de déterminer directement D_2 .

Calcul précis de l'exposant de masse τ

Les trois étapes décrites précédemment ne résument pas la totalité du travail effectué. La méthode utilisée lors de cette thèse a été adaptée.

En pratique, au cours des simulations numériques, pour des raisons d'approximations numériques, il n'est pas pertinent de garder l'intégralité du paquet d'ondes en mémoire : lorsque le système sera de longueur L alors au minimum $|\psi|^2 \sim 10^{-15}$. Par la suite, nous effectuerons l'analyse multifractale sur un nombre restreint de sites. La longueur de ce système tronqué sera notée \mathcal{L} . Une première question qui vient à l'esprit est de savoir si l'analyse sera indépendante de \mathcal{L} . Nous verrons plus loin que ce n'est pas le cas.

Pour une valeur donnée de \mathcal{L} , est-il pertinent d'extraire une pente en considérant toutes les longueurs l de segment possibles ? Là encore la réponse est non. En effet, comme on peut le constater sur la figure 6.10, lorsque la longueur du segment est très petite ($l \sim 1$ soit $\ln N \sim 7.6$) ou très grande ($l \sim \mathcal{L}$ soit $\ln N \sim 1.4$), $\ln \langle P_q \rangle$ s'incurve significativement aux

extrémités. Ces déviations à la linéarité sont d'autant plus manifestes pour les moments $|q|$ d'ordre élevé.

Notre étude suggère que pour obtenir un exposant de masse sur un intervalle large, il faudrait ignorer les cinq premières et les cinq dernières longueurs de segment. Néanmoins exclure uniquement la première et la dernière longueur de segment ($N \sim 6$ et $N \sim \mathcal{L}/2$) est suffisant pour accéder à la dimension fractale \mathcal{D}_2 avec une barre d'erreur pertinente.

En définitive, ces modifications mineures permettent de tenir compte des temps de propagation finis.

Nous avons également essayé une méthode consistant à ne conserver que les longueurs de segments pour lesquelles $\chi^2 \approx 1$. Physiquement, cela revient à chercher l'intervalle sur lequel $\ln\langle P_q \rangle$ est le plus proche d'une droite. Cette approche s'est révélée inefficace puisque pour chaque valeur de q et de taille de système \mathcal{L} , les intervalles de longueurs de segment différaient. En particulier, la dimension \mathcal{D}_2 extraite était trop fluctuante en fonction de \mathcal{L} pour dégager un comportement global.

Les barres d'erreur

Le repliement intervenant dans le KRQP rend le calcul des barres d'erreur particulièrement important. En effet, ce phénomène atténue une partie des fluctuations et la dimension \mathcal{D}_2 se rapproche de la valeur qu'elle aurait en l'absence de multifractalité c'est-à-dire $\mathcal{D}_2 = 1$. Pour déterminer si nous sommes réellement en présence de multifractalité, il est nécessaire d'estimer avec précision les barres d'erreur. Aux différents étapes de l'analyse multifractale, nous n'utiliserons pas la même méthode.

Plus précisément, les barres d'erreur pour $\ln\langle P_q \rangle$ sont obtenues par propagation des erreurs et moyenne sur les réalisations du désordre : $N_d = 10\,000$. Ce nombre de réalisations du désordre reste le même dans tout ce chapitre.

En revanche, les barres d'erreur relatives à $\tau(q)$ ne sont pas obtenues par propagation des erreurs. En effet, une telle méthode aboutit à des barres d'erreur qui ne rendent pas compte des fluctuations observées. Par exemple, pour différentes forces de kick K ou pour différentes longueurs effectives \mathcal{L} , les fluctuations observées sur \mathcal{D}_2 sont plus importantes que les barres d'erreurs ainsi obtenues.

La principale source d'incertitude lors du calcul de l'exposant de masse $\tau(q)$ vient de l'incurvation de $\ln\langle P_q \rangle$ aux petites et grandes tailles de segment l . Nous avons donc choisi de calculer le coefficient directeur sur différents intervalles c'est-à-dire pour différentes combinaisons de longueurs de segments : la valeur minimale obtenue constituera la borne inférieure de la barre d'erreur tandis que la valeur maximale sera la borne supérieure de la barre d'erreur. Insistons sur le fait que nous n'avons jamais considéré d'intervalles contenant la plus petite ou la plus grande longueur de segment. Évidemment, cette méthode rend les barres d'erreur asymétriques.

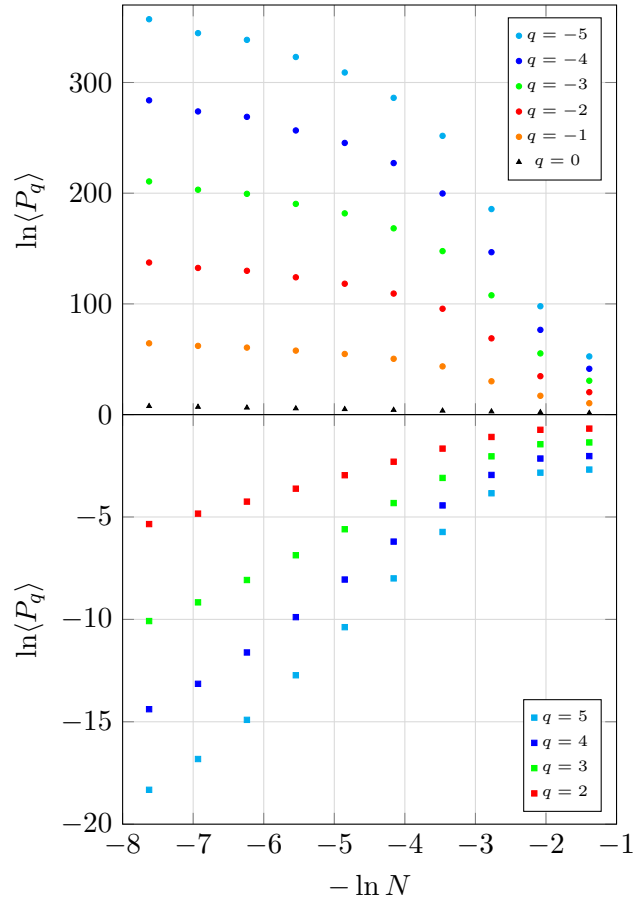


Figure 6.10 Logarithme du taux de participation inverse généralisé moyen $\ln\langle P_q \rangle$ en fonction du logarithme du rapport de la longueur d'un segment sur la taille du système : $N \doteq L/l$ (sur cette figure le système n'a pas été tronqué) pour le KRQP à trois fréquences incommensurables au point critique [$K = 8.096$]. Sur cette figure, nous présentons seulement les valeurs entières de q . L'analyse multifractale complète se fait en revanche pour q réel. Lorsque $q < 0$, on observe d'importantes déviations à la ligne droite pour les petites et les très grandes longueurs de segments (N grand et N très petit). Pour les $q > 0$ cette déviation intervient essentiellement lorsque l devient grand. En excluant ces déviations de la régression linéaire, pour un même moment q , les points sont bien alignés et il est donc possible d'extraire un coefficient directeur et une barre d'erreur de façon pertinente.

Paramètres de H_{qp}	Valeur utilisée
temps de propagation (kicks)	819 200
\bar{k}	3.53992327519309
ω_2	2.67220902067011
ω_3	2.01719090924681
N_d	10 000

Tableau 6.3 Résumé des paramètres utilisés dans ce manuscrit **pour les trois régimes** du KRQP à trois fréquences. Le hamiltonien H_{qp} est défini à l'équation (5.17). Pour changer de régime, nous n'intervenons que sur les paramètres K et ε .

6.6.2 Premiers résultats

Dans cette partie, nous allons simplement utiliser la méthode précédente pour effectuer une analyse multifractale « naïve ». Pour l'instant, il s'agit pour nous de « reproduire » et comparer nos résultats aux travaux précédents sur la multifractalité dans le modèle d'Anderson [VRR08 ; RVR08 ; Fae+09].

D'après nos observations numériques et le cadre théorique exposé à la partie 6.2, la multifractalité devrait se manifester aux temps longs et à petite distance et ceci seulement au point critique. Comme pour le kicked rotor la localisation est dynamique, c'est-à-dire dans l'espace des impulsions, dans la suite nous dirons donc que nous travaillons aux petites impulsions (grandes distances). C'est guidé par ces observations que nous nous sommes attachés à étudier la multifractalité à 819 200 kicks. Ce choix de temps de propagation s'explique d'une part par l'observation claire de déviations pour ce temps mais aussi parce qu'il permet d'effectuer une statistique importante et donc réduire le bruit. En réalité, notre méthode de calcul des barres d'erreur pour τ a révélé que le choix de $N_d = 10\,000$ réalisations du désordre était trop grand. Il serait donc envisageable d'obtenir des résultats plus précis en augmentant le nombre de kicks (de l'ordre de la dizaine de millions) et en diminuant le nombre de réalisations du désordre et ce dans un temps raisonnable. Pour le point critique nous avons choisi $K = K_c = 8.096$ et $\varepsilon = 0.4544$. Les autres paramètres sont désormais fixés et prennent les valeurs indiquées dans le tableau 6.3.

Moyenne d'ensemble et moyenne typique

Pour commencer cette étude, nous voudrions poser la question de la moyenne à utiliser pour étudier l'exposant de masse τ . En effet, comme expliqué dans le chapitre 2, deux moyennes sont pertinentes : la moyenne arithmétique (ou d'ensemble) et la moyenne géométrique. Dans

le premier cas, nous distinguerons donc

$$\tau^{\text{ens}}(q) \doteq - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle P_q \rangle}{\ln N} \quad \text{et} \quad \tau^{\text{typ}}(q) \doteq - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle \ln P_q \rangle}{\ln N}. \quad (6.65)$$

D'après l'inégalité de Jensen [Rud87], on doit avoir $\ln \langle P_q \rangle \geq \langle \ln P_q \rangle$ et donc $\tau^{\text{ens}} \leq \tau^{\text{typ}}$. Ici, ces deux quantités ne sont égales que pour $q \in \{0; 1\}$, c'est-à-dire lorsque les moments P_q sont constants. Néanmoins, comme en témoigne la figure 6.11 et comme cela a été vérifié dans l'article [EM08], dans un certain intervalle de q , les deux exposants sont approximativement égaux. Dans le cas particulier du KRQP, cette égalité permet de nous restreindre à la moyenne arithmétique qui est plus rapide à calculer.

Parabolicité du spectre de multifractalité

Dans cette étude préliminaire, nous avons également calculé le spectre de multifractalité. En plus de la méthode par transformée de Legendre, une autre méthode a été décrite dans la référence [VRR08]. Cette dernière présente l'avantage de donner une méthode précise pour évaluer les barres d'erreurs ce qui n'est pas le cas avec la transformée de Legendre. En revanche la seconde technique est plus longue à implémenter et plus gourmande en temps de calcul. Pour des raisons qui vont apparaître clairement dans la suite de cette partie, l'étude précise des spectres de multifractalité n'était pas nécessaire dans notre système.

Nous pouvons observer sur la figure 6.12 que ce spectre est moins large que ceux de la figure 4.9 sans être extrêmement étroit, et surtout son maximum n'est pas atteint pour $\alpha_0 = d = 1$ (absence totale de multifractalité) mais $\alpha_0 \approx 1.026$. Ces deux différences montrent que les fonctions d'onde du KRQP sont bien multifractales.

Tout d'abord, le caractère unidimensionnel du système étudié tend à diminuer les fluctuations réduisant ainsi la multifractalité, c'est ce qui explique que le spectre est nettement moins large : les valeurs extrêmement petites ou grandes de $|\psi|^2$ sont atténuées du fait que, lors du repliement, une somme est effectuée selon les deux autres directions. Cette « géométrie » particulière a également pour effet de moins décaler le maximum du spectre de multifractalité. En effet alors que pour le modèle d'Anderson $\alpha_0 \approx d + 1$, nous observons $\alpha_0 \approx d + 0.03$. Cet écart est à rapprocher de celui observé pour des ondes sonores dans un milieu désordonné où déjà on observait $\alpha_0 \approx d + 0.2$, mais dans un régime où une seule dimension est « repliée ».

Comme expliqué au chapitre 4, un spectre parabolique est caractérisé par une seule quantité notée α_0 . Pour le KRQP, modèle unidimensionnel, si le spectre est parabolique, il aura pour expression :

$$f_{\text{AP}}(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{4(\alpha_0 - 1)}. \quad (6.66)$$

Sur la figure 6.12, nous montrons le spectre de multifractalité obtenu numériquement ainsi que son approximation parabolique.

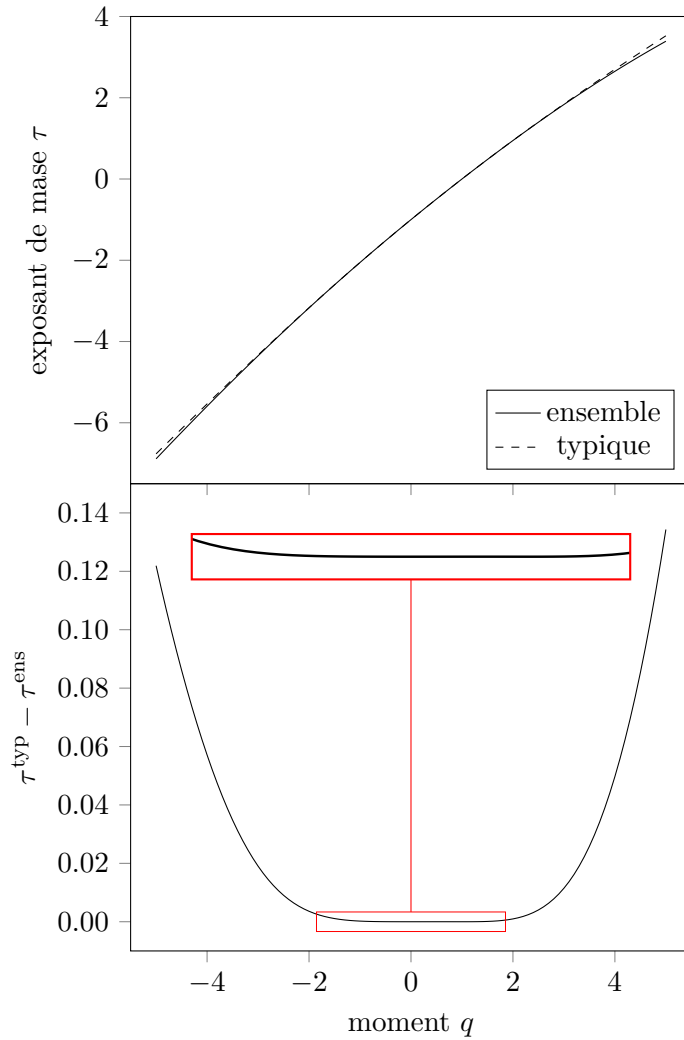


Figure 6.11 Comparaison de l'exposant de masse τ pour la moyenne d'ensemble τ^{ens} et la moyenne géométrique τ^{typ} . Les simulations ont été faites au point critique du KRQP. La taille tronquée est $\mathcal{L} = 4096$, la longueur du premier segment est $l_{\text{min}} = 15$ et la longueur du dernier segment est $l_{\text{max}} = 36$.

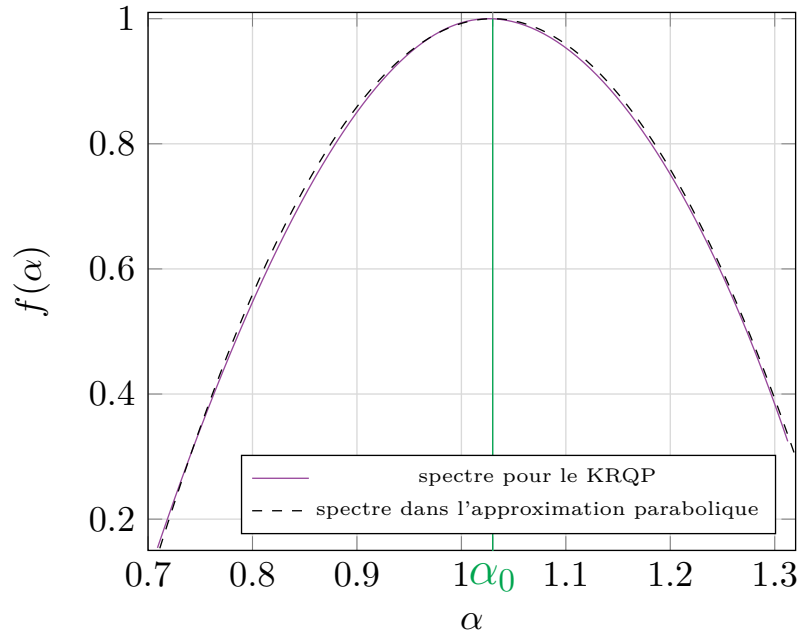


Figure 6.12 Spectre de multifractalité du KRQP au point critique. Ce type de spectre est la preuve qu'à la transition d'Anderson, les fonctions d'onde du KRQP sont multifractales. Dans le cas contraire, nous observerions un spectre beaucoup plus étroit. Par ailleurs, le fait que le maximum du spectre ne soit pas atteint pour $\alpha = d$ mais $\alpha = \alpha_0 \approx 1.03$ est une seconde caractéristique d'un processus multifractal. Enfin, dans le cas du KRQP l'approximation parabolique selon laquelle le spectre de multifractalité est correctement décrit par une parabole est bien vérifiée.

En cas de parabolicité du spectre, l'exposant de masse sera lui aussi parabolique. Une transformation de Legendre du spectre conduit à :

$$\tau_{\text{AP}}(q) = (d - \alpha_0)(q - 1) \left(q + \frac{d}{d - \alpha_0} \right), \quad (6.67)$$

ce qui permet également de connaître l'exposant anormal :

$$\Delta_{\text{AP}}(q) = (d - \alpha_0)(q - 1)q. \quad (6.68)$$

Une manière simple de tester l'approximation parabolique est donc de regarder si la quantité

$$\delta(q) \doteq \frac{\Delta(q)}{q(1 - q)} \quad (6.69)$$

est proche d'une constante. En effet, dans le cas de l'approximation parabolique $\delta(q) = \alpha_0 - d$.

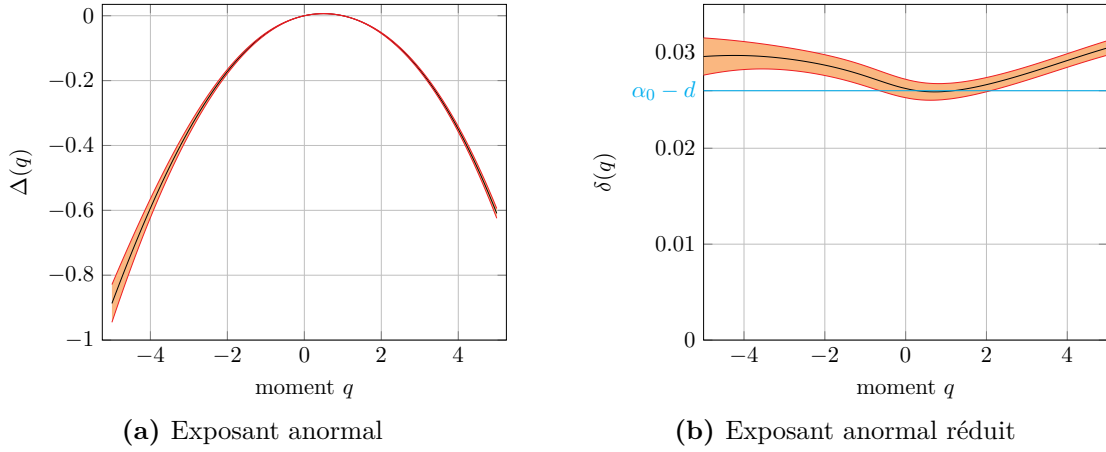


Figure 6.13 Ces deux figures permettent de voir si, au point critique, le spectre de multifractalité et donc l'exposant anormal Δ du KRQP sont proches d'une parabole. En particulier, la dimension réduite δ doit être une constante valant $\alpha_0 - d$ si cette approximation est vérifiée. Pour le KRQP cette approximation est appropriée.

Caractériser ces différentes quantités par α_0 , revient à ne connaître que la dimension généralisée \mathcal{D}_2 , puisque, dans le cadre de l'approximation parabolique, on a d'après l'équation (6.67) :

$$\alpha_0 = \frac{3d - \mathcal{D}_2}{2}. \quad (6.70)$$

Si cette approximation se révèle correcte, alors l'exposant de masse s'écrit également :

$$\tau_{\text{AP}}(q) = \frac{\mathcal{D}_2 - d}{2}(q - 1) \left(q + \frac{2d}{\mathcal{D}_2 - d} \right). \quad (6.71)$$

Dans le cas du KRQP, nous avons $d = 1$. Alors que pour le modèle d'Anderson exact [VRR08 ; RVR08] on observe une nette déviation à la parabolicité, dans notre système, comme on peut le voir sur la figure 6.13, δ dévie légèrement d'une constante.

L'accord de notre spectre avec une parabole permet de limiter l'étude de la multifractalité au seul \mathcal{D}_2 et donc de s'affranchir du calcul du spectre complet de multifractalité.

6.7 Validité du diagramme de Chalker

Jusqu'à présent l'analyse multifractale s'est montrée limitée par le fait que le KRQP est un système unidimensionnel. Dans cette dernière partie du chapitre, nous allons présenter et

utiliser une nouvelle méthode que nous nommerons « analyse multifractale fine ». Celle-ci permettra de vérifier l'existence des différentes régions du diagramme de Chalker présenté à la partie 6.4.3. En fixant dans un premier temps l'extension du paquet d'ondes puis le temps de propagation, nous nous déplacerons dans ce diagramme.

6.7.1 Méthode : analyse multifractale fine

L'analyse multifractale réalisée dans la partie 6.6 nous a montré que la connaissance de α_0 était suffisante en raison de la parabolicité du spectre de multifractalité. Par ailleurs, sur la figure 6.11, nous avons observé que la moyenne utilisée (arithmétique ou géométrique) influençait très peu l'exposant de masse. Désormais, nous n'utiliserons plus que la **moyenne arithmétique** sans y faire référence dans les notations.

À la différence des états propres qui sont en moyenne uniformément distribués dans l'espace, les paquets d'ondes obtenus à partir d'un état initial localisé n'ont pas une densité moyenne uniforme ce qui fait par exemple que les queues contribuent très peu aux P_q pour $q > 0$ et grand. Pour tenter de prendre en compte cet effet, nous avons décidé de décomposer la densité de probabilité en deux composantes : une partie moyenne notée \bar{n} et une partie fluctuante notée δn_i avec i une réalisation du désordre. Numériquement, ces deux contributions sont très simples à obtenir :

$$\bar{n} \doteq \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} n_i \quad \text{et} \quad \delta n_i \doteq \frac{n_i}{\bar{n}}. \quad (6.72)$$

Par la suite, l'analyse multifractale portant sur la moyenne sera qualifiée de multifractalité d'enveloppe et le α_0 issue de cette analyse sera noté α_0^{env} , tandis que le terme provenant des fluctuations s'écrira α_0^{flu} . Le terme d'enveloppe ne contient pas une information pertinente puisque la densité moyenne est constituée d'une combinaison d'états propres décrite par la fonction d'Airy. Comme nous le verrons, l'analyse de cette composante est néanmoins nécessaire pour bien comprendre l'origine de la multifractalité. En résumé, la distinction des termes d'enveloppe et de fluctuation nous permettra de connaître l'origine de la multifractalité observée : est-elle simplement due à l'enveloppe ou caractérise-t-elle réellement les fluctuations ?

6.7.2 Variation de la taille des paquets d'ondes analysés

Dans un premier temps, nous avons fixé le temps en simulant le KRQP sur 819 200 kicks dans les deux phases et au point critique. Dans un second temps, nous avons effectué l'analyse fine sur l'intégralité des fonctions d'onde et, petit à petit, nous avons retiré les ailes des fonctions d'onde pour nous concentrer sur la partie centrale. Nous ne faisons donc jamais varier la taille du système L mais en revanche nous modifions la longueur \mathcal{L} sur laquelle porte l'analyse fine.

En définitive, ces deux méthodes combinées permettent de se déplacer dans le diagramme de Chalker. En effet, ayant fixé le temps de propagation dans le diagramme de Chalker nous sommes à une abscisse donnée ($\propto L_{\omega=1/t}^{-1}$), puis en augmentant la taille effective \mathcal{L} ($\propto 1/q$), nous nous déplaçons de haut en bas.

Régime localisé/isolant

Dans le régime localisé et pour $\mathcal{L} \ll \sqrt{\langle p^2 \rangle}$, on constate sur la figure 6.14 que la multifractalité provient essentiellement des fluctuations puisque $\alpha_0^{\text{env}} \approx 1$. En revanche, à mesure que \mathcal{L} augmente, la multifractalité d'enveloppe devient plus importante et la multifractalité due aux seules fluctuations se distingue de la multifractalité des paquets d'ondes d'origine, c'est-à-dire avant décomposition en deux termes.

Ce changement s'explique intuitivement par la contribution plus importante des ailes des paquets d'ondes lorsque $\mathcal{L} \gg \sqrt{\langle p^2 \rangle}$. Or ces mêmes ailes sont très bien décrites par la théorie auto-cohérente. Si nous n'avions pas distingué les différentes contributions, nous aurions conclu que dans ce régime, les ailes des paquets d'ondes contribuent fortement à la multifractalité. Notre analyse fine montre que ceci est faux. En particulier, α_0^{fl} semble tendre vers une valeur asymptotique à mesure que \mathcal{L} augmente.

Si nous revenons au diagramme de Chalker, figure 6.5, en travaillant à un temps fixé et augmentant la taille \mathcal{L} , nous avons suivi le chemin **[4]** \rightarrow **[1]**. Étant donné notre méthode d'analyse, ce passage n'est pas abrupt : à mesure que \mathcal{L} augmente, la région **[1]** aura un poids plus important que la région **[4]** dont la contribution ne disparaîtra jamais.

Ce nouveau résultat est important à deux titres. En premier lieu, il confirme l'existence de la région **[4]** prédisant de la multifractalité dans le régime isolant aux temps longs. Cette région avait déjà été mise en évidence par Cuevas et Kravtsov [CK07] sur des matrices aléatoires tronquées. Enfin, notre analyse fine a validé le diagramme de Chalker pour les temps longs en dehors du point critique.

Point critique

Au voisinage de la transition, la longueur de localisation diverge et sur le diagramme de Chalker nous sommes donc infiniment loin sur l'axe des abscisses et des ordonnées. Autrement dit, les régions **[1]** et **[4]** ne peuvent pas être explorées et se réduisent à un point. Là encore, en augmentant \mathcal{L} nous nous déplacerons du haut vers le bas sur le diagramme simplifié, figure 6.6, en suivant le chemin **[5]** \rightarrow **[3]** \rightarrow **[2]** ou directement **[5]** \rightarrow **[2]** si la région **[3]** n'existe pas.

Lorsque $\mathcal{L} \ll \sqrt{\langle p^2 \rangle}$, on observe clairement sur la figure 6.15 que la multifractalité des paquets d'ondes provient du terme de fluctuation. Ce résultat est en accord avec nos attentes puisque, pour ces tailles de paquet d'ondes, nous analysons essentiellement le pic central qui contribue beaucoup aux fluctuations. À mesure que \mathcal{L} augmente, c'est-à-dire lorsque le

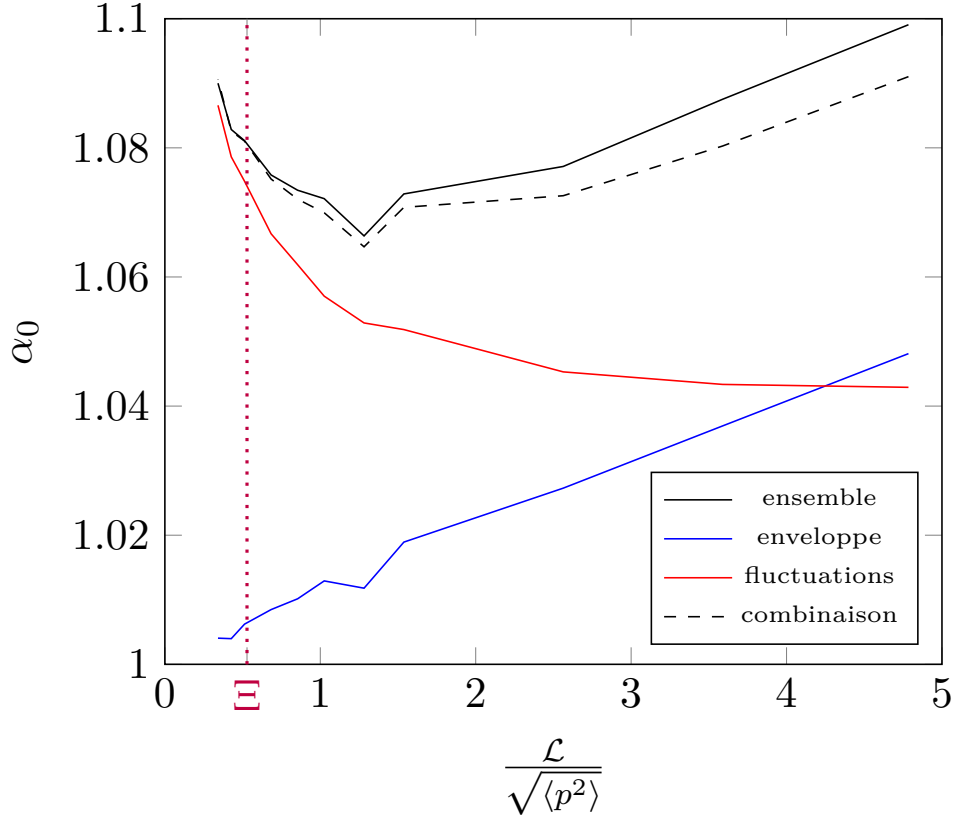


Figure 6.14 Étude de la multifractalité pour le KRQP dans la phase **isolante** $K = 7.5$. La figure représente α_0 en fonction du rapport $\mathcal{L}/\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ où \mathcal{L} est la largeur des paquets d'ondes étudiés et $\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ l'extension moyenne — dans l'espace des impulsions — des paquets d'ondes. La valeur de α_0 est obtenue à l'aide de l'analyse multifractale fine. La courbe en pointillés, dénommée *combinaison*, correspond à $\alpha_0^{\text{env}} + \alpha_0^{\text{flu}} - 1$. Pour cette simulation, la longueur de localisation vaut $\xi \approx 37$. Sur la figure nous notons $\Xi \doteq \xi/\sqrt{\langle p^2 \rangle} \approx 0.53$.

poins des ailes est plus important, le terme d'enveloppe contribue significativement et la multifractalité provenant des fluctuations seules se distingue de la multifractalité du paquet d'ondes pris dans son ensemble.

Lorsque les paquets d'ondes étudiés sont étroits, il est clair que nous validons la zone [5] puisque la multifractalité due aux fluctuations y domine. En augmentant la largeur nous devrions également passer par les régions [3] et [2] dans lesquelles aucun exposant multifractal n'intervient. Nous observons effectivement une diminution puis une stabilisation de la multifractalité provenant des fluctuations. Ce comportement valide l'existence de la région [2]. Le fait qu'il n'y ait pas de palier intermédiaire, mais que α_0^{flu} évolue de manière

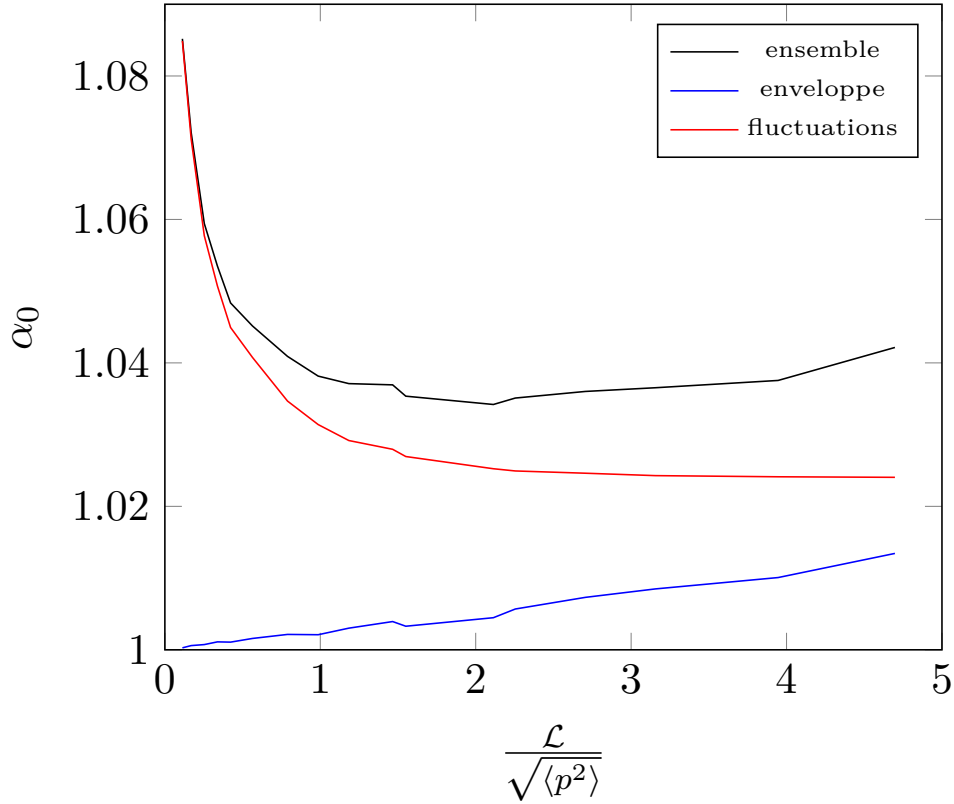


Figure 6.15 Évolution de α_0 en fonction de la taille des paquets d’ondes considérés pour le KRQP au point critique K_c .

très molle en fonction de \mathcal{L} va dans le sens d’une transition progressive entre seulement deux régimes limites, et donc plutôt vers la non existence de la région [3].

Un second point crucial à retenir est que la procédure de décomposition des paquets d’ondes en deux termes permet d’obtenir une mesure plus précise de α_0 . Le fait d’étudier des densités de probabilité qui ont subi un repliement a pour effet de fortement effacer les fluctuations. Nous avons désormais une méthode qui permet de faire une analyse réellement plus fine même si elle ne donne pas accès à la valeur de α_0 pour un système tridimensionnel.

Cet effet de repliement étant intrinsèque au modèle étudié, il est *a priori* difficile de s’en affranchir. En revanche cette analyse fine ouvre des portes intéressantes pour l’étude de la multifractalité sur des paquets d’ondes auxquels les expérimentateurs ont accès.

Système étudié	dimension d	α_0	$\alpha_0 - d$
Modèle d'Anderson [Rod+11]	3	4.048	1.048
Ondes sonores [Fae+09]	2	2.2	0.2
KRQP	1	1.03	0.03

Tableau 6.4 Synthèse de l'analyse multifractale pour différents systèmes correspondant à des géométries différentes. Dans les trois cas, une transition métal–isolant caractérisée par le même exposant critique est observée. En revanche, la géométrie influence la signature de la multifractalité : la différence $\alpha_0 - d$ devient de plus en plus ténue à mesure que l'on projette sur les autres dimensions.

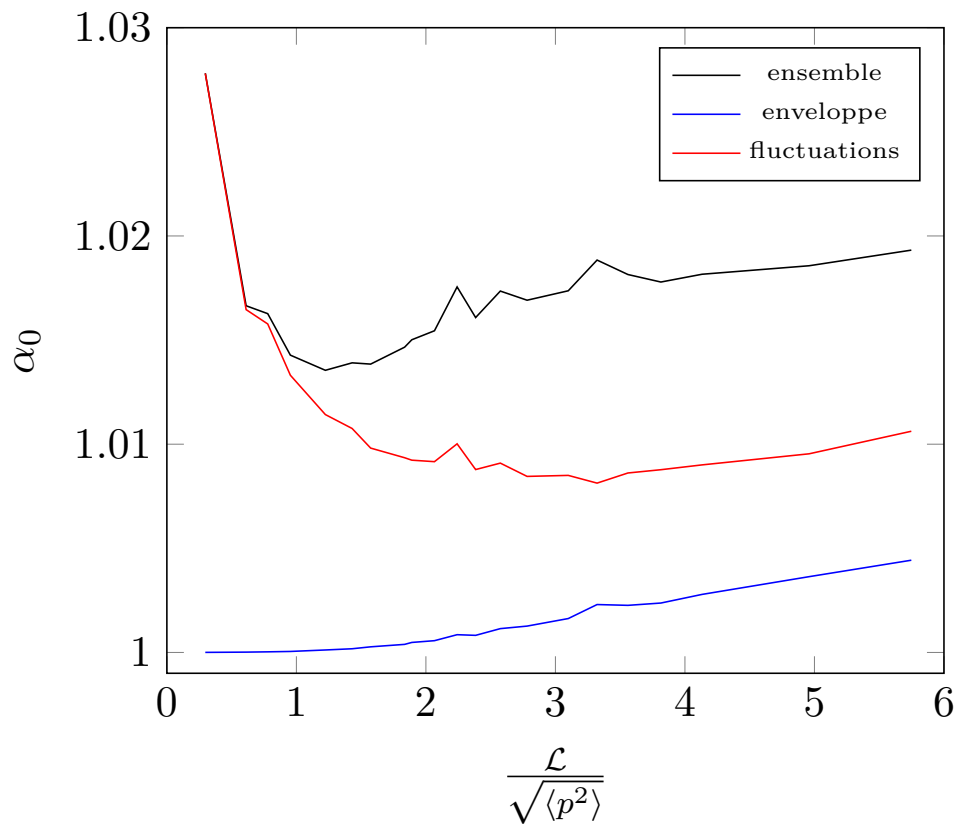


Figure 6.16 Analyse multifractale fine dans le régime **métallique** ($K = 9$).

Régime diffusif/métallique

À première vue, la figure 6.16 suggère que le comportement de α_0 est similaire à celui observé au point critique (figure 6.15). Si l'on compare plus attentivement, comme cela est fait sur la figure 6.17, deux différences notables émergent. Tout d'abord, la multifractalité dans le régime métallique est moins présente qu'au point critique. Ceci nous montre qu'il est impossible de distinguer ces deux régimes uniquement à l'aide d'une analyse multifractale « canonique ». Les valeurs proches de α_0 dans ces deux régimes proviennent du phénomène de repliement. Les données numériques permettent cependant d'observer un comportement différent de α_0 lorsque la taille des paquets d'onde étudiés augmente. Dans le régime diffusif, on constate une légère augmentation de α_0^{flu} alors qu'au point critique celle-ci atteint un plateau. Ceci confirme qu'au point critique l'essentiel des fluctuations se retrouvent sur des tailles de paquets d'ondes de l'ordre de la longueur de localisation, alors que dans le régime métallique celles-ci sont présentes sur la totalité du paquet d'ondes.

Synthèse

Si, comme sur la figure 6.18, on superpose les différents α_0^{flu} pour les régimes localisé et critique, on observe alors qu'aux petites distances les courbes sont presque confondues puis, à mesure que la taille \mathcal{L} des paquets d'ondes augmente, les différentes courbes se différencient.

Cette superposition s'explique par le fait qu'aux très petites distances, la contribution principale provient des régions [4] et [5] où le scaling de $D(q, \omega)$ avec q et ω ne dépend pas de la distance au point critique. Ce n'est que lorsque $\mathcal{L} > \xi$ (régime $q\xi < 1$), que les régions [1] et [2] entrent en jeu, ce qui implique que le régime localisé se différencie du régime critique où [1] et [2] ne contribuent jamais.

6.7.3 Évolution de la multifractalité avec le temps au point critique

Dans cette dernière partie, nous regardons comment évolue la multifractalité lorsque la taille des paquets d'ondes est fixée et que le temps de propagation augmente : dans le diagramme de Chalker simplifié, figure 6.6, on se déplace de la droite (temps courts) vers la gauche (temps longs). Étant au point critique nous devrions donc passer des régions [5] à [2]. Quand les résultats sont représentés en fonction de $\mathcal{L} \sim 1/q$ comme sur la figure 6.20, nous avons un ensemble de trajectoires verticales (variation de q) à des abscisses (L_ω) différentes. Le changement de régime s'effectue quand $\mathcal{L} \approx L_\omega$, comme prévu par le diagramme de Chalker simplifié. Une fois de plus, le comportement mou semble plutôt en faveur de deux régimes limites seulement, et donc en faveur de l'inexistence de la région [3].

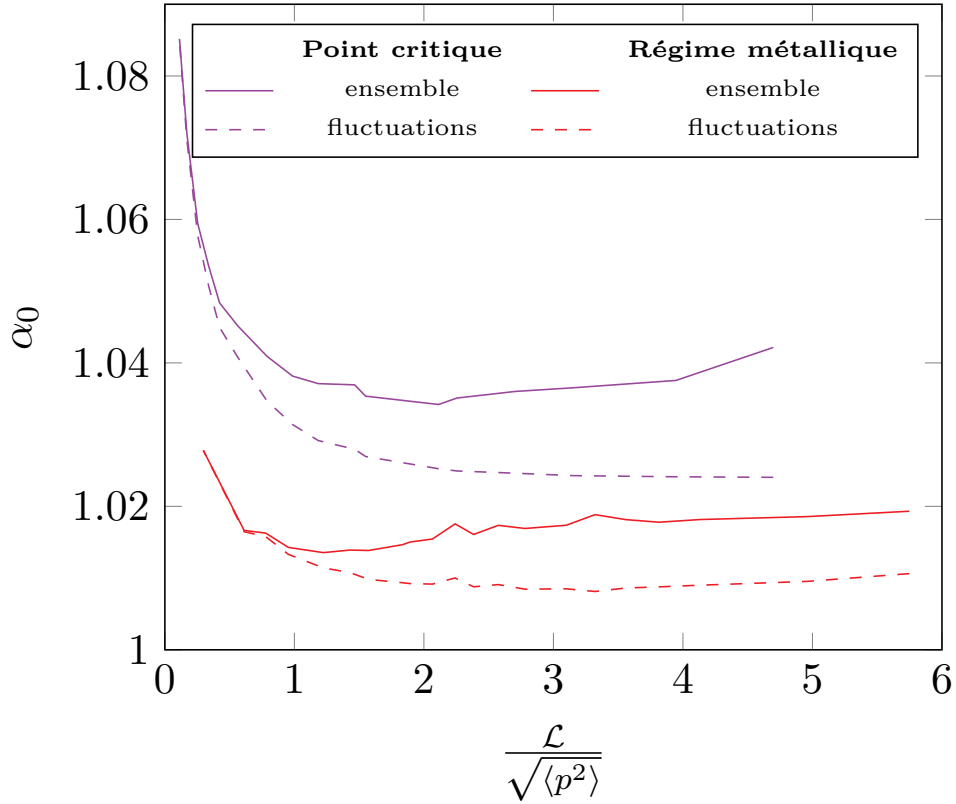


Figure 6.17 Comparaison de l'analyse multifractale fine dans les régimes critique ($K = 8.096$) et métallique ($K = 9$). Ce type d'analyse permet de mettre en évidence que dans le régime métallique la multifractalité est moins importante qu'au point critique. Par ailleurs, alors qu'au point critique le caractère multifractal des paquets d'ondes semble se stabiliser à mesure que l'on analyse des tailles plus grandes, dans le régime métallique, la multifractalité d'ensemble et celle due aux fluctuations augmentent.

6.8 Conclusion

Ce chapitre a montré que l'étude de la multifractalité des paquets d'ondes du KRQP est pertinente puisque le maximum du spectre n'est pas atteint pour $\alpha = 1$ c'est-à-dire la dimension du KRQP mais $\alpha_0 \approx 1.03$. Par ailleurs, le spectre étant quasiment parabolique, la multifractalité se ramène à l'étude de α_0 .

Le calcul de α_0^{flu} c'est-à-dire le α_0 directement extrait de l'analyse des fluctuations des paquets d'ondes, et non plus seulement de leur valeur moyenne, a permis de tester la validité du diagramme de Chalker. La figure 6.21 résume l'ensemble des résultats de ce chapitre et, à la différence du diagramme de Chalker, la région **[3]** n'y apparaît pas. Deux hypothèses sont possibles :

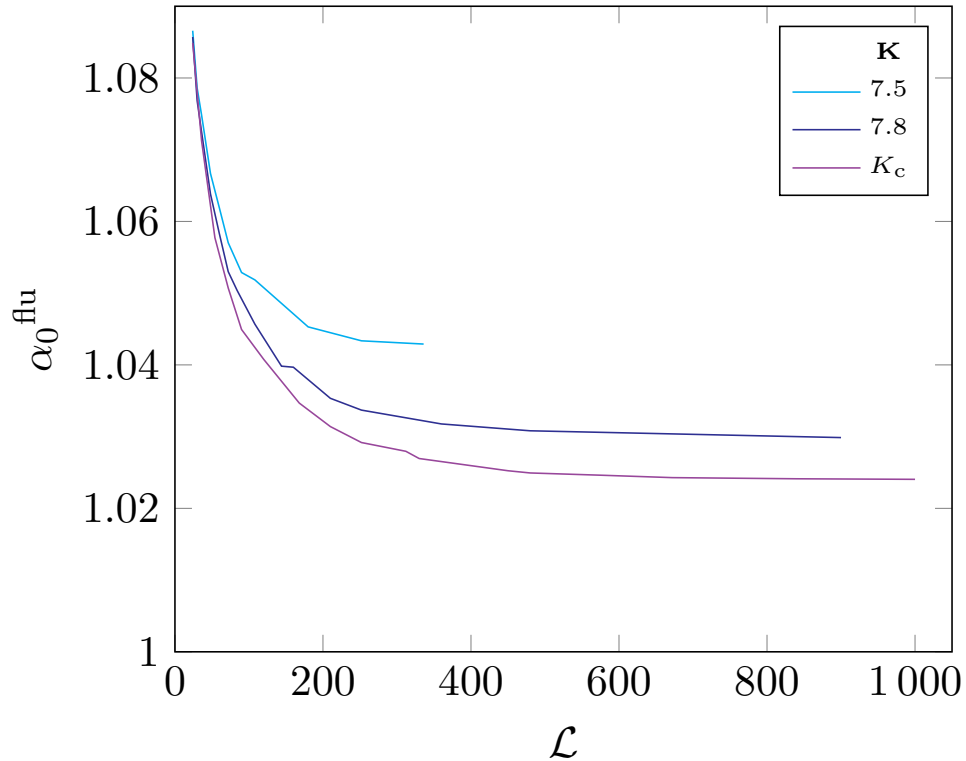


Figure 6.18 Évolution de α_0^{flu} en fonction de la largeur \mathcal{L} des paquets d'ondes étudiés à mesure que l'on se rapproche du point critique en venant du côté localisé ($K = 7.5$ et $K = 7.8$). Le temps de propagation est de 819 200 kicks.

- i. la région [3] est fermée comme la région [1] ;
- ii. cette région est inexistante.

Son absence est la plus probable dans la mesure où l'analyse fine des régimes critiques à largeur fixe (chemin horizontal [5] \rightarrow [2]) ne permet de distinguer que deux zones : une première où la région [5] prédomine et une seconde où la région [2] contribue fortement à atténuer la multifractalité.

L'obtention de ce nouveau diagramme constitue une étape essentielle pour le chapitre 7. En effet dans ce dernier chapitre, nous verrons comment exploiter le diagramme de la figure 6.21 pour déterminer directement la dimension multifractale D_2 du problème tridimensionnel à partir de paquets d'ondes moyens unidimensionnels.

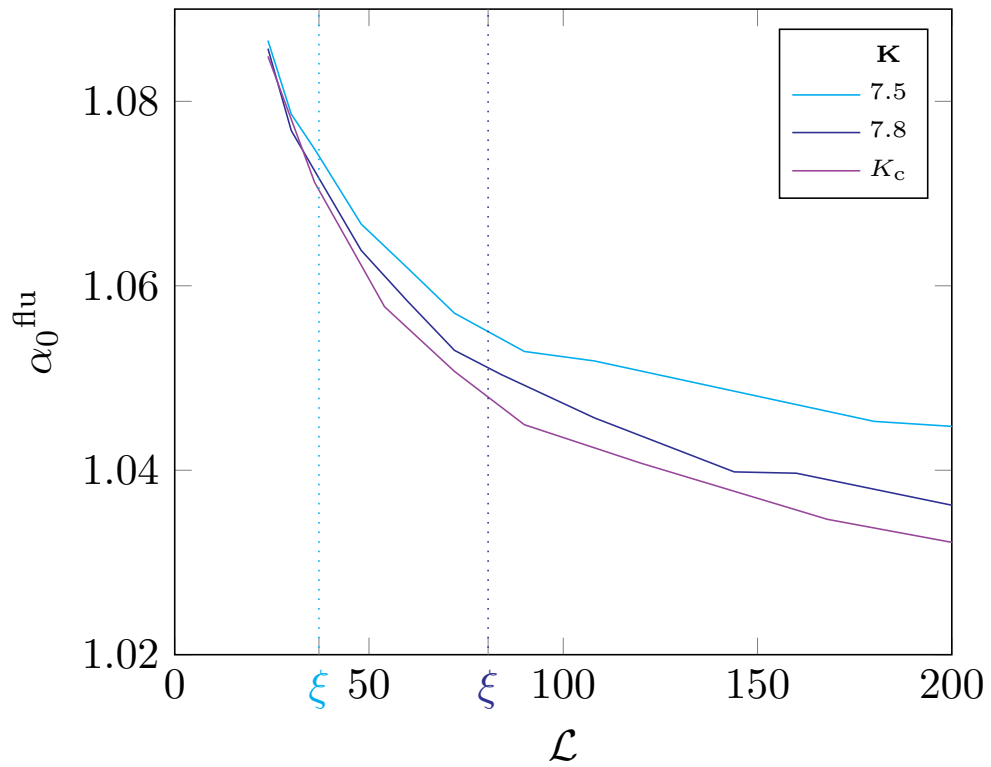


Figure 6.19 Agrandissement de la figure 6.18. Ici, ξ désigne la longueur de localisation du système. Pour $K = 7.5$, $\xi \approx 37$ et pour $K = 7.8$, $\xi \approx 81$. On peut voir que pour les petites tailles de paquets d'onde les α_0^{flu} sont proches.

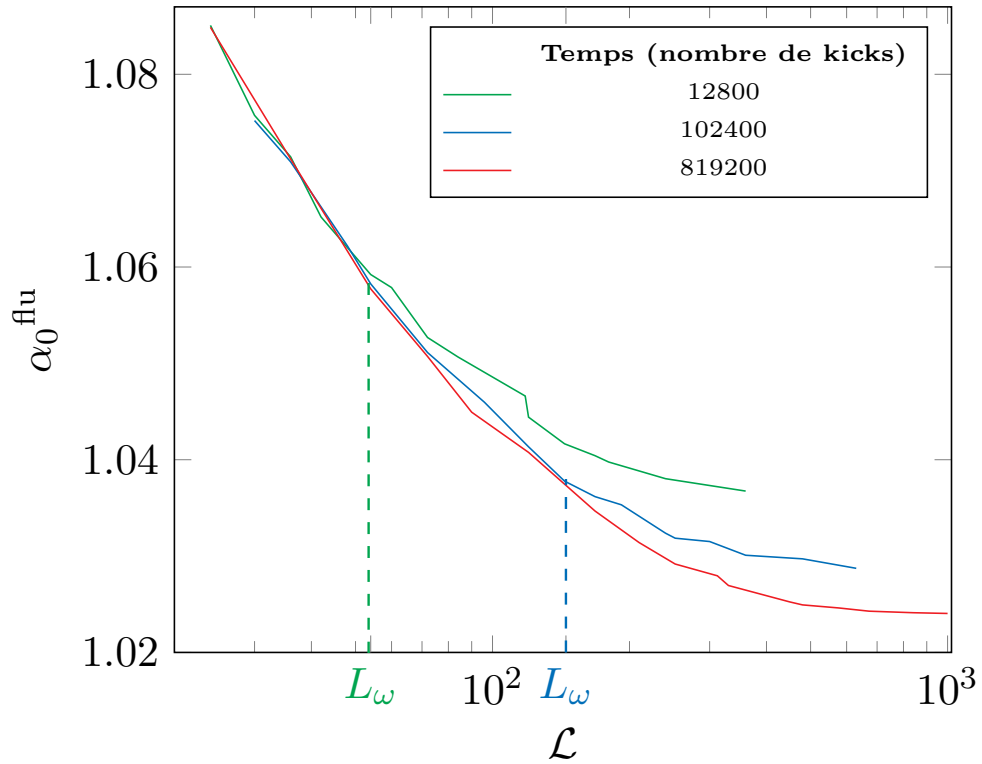


Figure 6.20 Évolution de α_0^{flu} avec le temps au point critique. En pointillé est indiqué l'extension moyenne du paquet d'ondes suivant le temps de propagation : pour des tailles de paquet d'ondes inférieures à cette extension, α_0^{flu} est indépendant du temps de propagation et l'on se situe dans la région [5] du diagramme ; lorsque l'on dépasse une distance de l'ordre de L_ω , les courbes se différencient, marquant ainsi l'entrée dans la région [2].

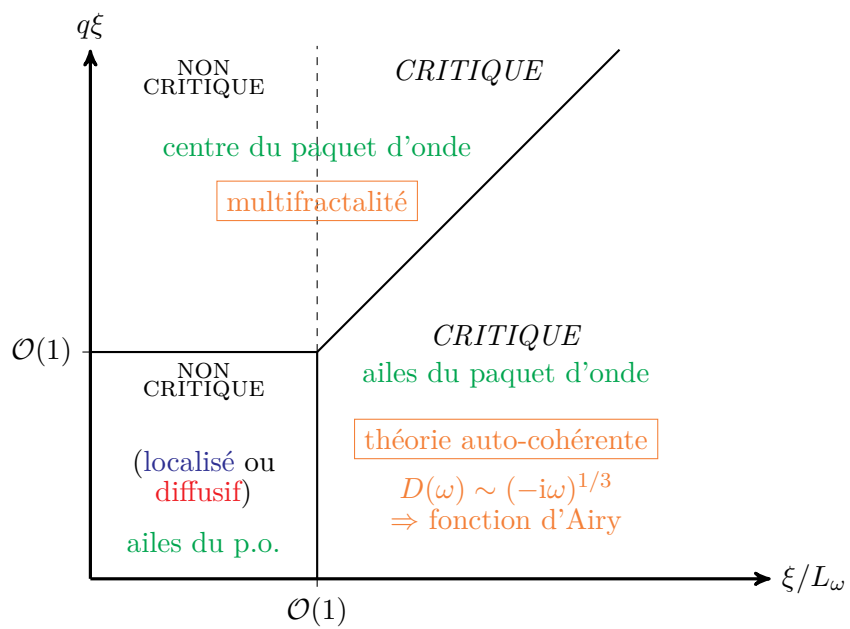


Figure 6.21 Diagramme du type Chalker (voir [Cha90] et figure 6.5) établi pour le KRQP à l'aide de l'analyse multifractale fine.

Chapitre 7

Paquets d'ondes multifractals

Sommaire

7.1 Outils pour l'étude du propagateur en intensité	145
7.1.1 Propriétés du propagateur en intensité	145
7.1.2 Outils pour les transformées de Fourier	147
7.2 Généralités sur le propagateur replié	148
7.2.1 Démarche générale	148
7.2.2 Une anisotropie sans influence	150
7.3 Région non multifractale : fonction d'Airy	150
7.3.1 Comportement à petite distance et aux temps longs	151
7.3.2 Résultat exact : fonction d'Airy	153
7.3.3 Le propagateur comme solution d'une équation de diffusion fractionnaire	156
7.4 Région multifractale : fonction de Fox	158
7.4.1 Comportement à petite distance et aux temps longs	158
7.4.2 Détermination exacte du propagateur	161
7.5 Calcul des moments	162
7.6 Synthèse des prédictions théoriques	163
7.6.1 Expressions utilisées pour la suite	164
7.6.2 Comportement des deux solutions à l'origine	164
7.7 Détermination numérique de D_2	164
7.7.1 Domaine de validité du propagateur	165
7.7.2 Première méthode	165
7.7.3 Seconde méthode	166
7.8 Conclusion sur la détermination de D_2	170

AU CHAPITRE 6, l'analyse multifractale du kicked rotor quasi périodique (KRQP) a notamment permis de valider l'essentiel du diagramme de Chalker. Pour rappel, Chalker rend compte des propriétés de multifractalité des fonctions d'onde au voisinage du point critique en proposant différentes expressions du coefficient de diffusion. Plus précisément, il fait trois hypothèses :

- i. le coefficient de diffusion ne dépend pas seulement de ω mais aussi de \mathbf{q} ;
- ii. dans certains régimes d'approximation, la dépendance en \mathbf{q} et ω fait directement intervenir la dimension multifractale D_2 ;
- iii. le propagateur respecte la loi d'échelle à un paramètre.

Dans le chapitre 6, nous avons également montré qu'une l'analyse multifractale « canonique » des paquets d'ondes du KRQP ne permettait pas de déterminer la dimension multifractale D_2 du système simulé, à savoir un modèle d'Anderson anisotrope. Cette impossibilité provient du caractère unidimensionnel du KRQP : il est certes possible d'observer une transition métal-isolant et d'en déterminer l'exposant critique (expérimentalement et numériquement), mais à un instant donné, les fonctions d'onde analysées ne dépendent que d'une seule dimension. Comme expliqué en détail au chapitre 5 et plus particulièrement dans la partie 5.3.3, le KRQP peut être *mappé* sur un système tridimensionnel, le kicked pseudo-rotor, à condition de choisir pour ce dernier système un état initial localisé selon une direction de l'espace des impulsions p_1 mais délocalisé selon les deux autres directions de l'espace des impulsions p_2 et p_3 . En définitive, le KRQP est l'équivalent d'un système tridimensionnel pour lequel on aurait projeté la fonction d'onde selon les directions 2 et 3. Nous avons nommé ce phénomène « repliement ».

Dans ce chapitre nous nous proposons de déterminer numériquement D_2 en combinant les hypothèses de Chalker sur le coefficient de diffusion avec le phénomène de repliement. Les *ansatz* de Chalker relatifs au coefficient de diffusion permettent d'obtenir une expression analytique du propagateur dans l'espace où la localisation est observée. En « repliant » le propagateur, autrement dit en l'intégrant selon les deux autres directions, l'expression du propagateur sera obtenue dans les régions **[2]** (non multifractale) et **[5]** (multifractale) du diagramme de Chalker. Nous verrons par ailleurs que les expressions exactes du propagateur unidimensionnel peuvent être obtenues en établissant un parallèle avec les équations de diffusion fractionnaires, analogie totalement nouvelle et qui fera l'objet d'un article futur.

Enfin, les prédictions théoriques nous permettront d'exploiter les résultats numériques à l'état brut, c'est-à-dire sans analyse multifractale, pour déterminer D_2 .

7.1 Outils pour l'étude du propagateur en intensité

7.1.1 Propriétés du propagateur en intensité

Le propagateur tridimensionnel $P_{3D}(\mathbf{q}, \omega)$, dont l'expression est

$$\boxed{P_{3D}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{-i\omega + D(\mathbf{q}, \omega)\mathbf{q}^2}}, \quad (7.1)$$

suit des propriétés physiques dont les conséquences mathématiques permettront de calculer rigoureusement le propagateur du KRQP dans la région [2], $P_{1D}^{[2]}(x, t)$, et la région [5], $P_{1D}^{[5]}(x, t)$. Ces propriétés sont les suivantes :

- i. l'isotropie ;
- ii. l'invariance par translation ;
- iii. l'unitarité ;
- iv. la causalité ;
- v. le caractère réel du propagateur.

Isotropie et invariance par translation

Après moyenne sur le désordre, l'isotropie et l'invariance par translation¹ impliquent que le propagateur ne dépend que de la norme $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Dans l'espace réciproque, le propagateur ne sera alors fonction que de $q = |\mathbf{q}|$. Ces deux propriétés entraînent la parité du propagateur dans l'espace des positions et des impulsions :

$$P_{3D}(\mathbf{r}, t) = P_{3D}(r, t) \quad \text{et} \quad P_{3D}(\mathbf{q}, t) = P_{3D}(q, t). \quad (7.2)$$

Pour rappel, dans le cas du KRQP :

- l'isotropie n'est pas pleinement vérifiée puisque le hamiltonien du KRQP présente un terme noté ε et caractérisant l'anisotropie dans le modèle d'Anderson associé (voir la partie 5.3) ;
- la localisation est dynamique c'est-à-dire dans l'espace des impulsions.

Dans la partie 7.2.2, nous reviendrons sur l'anisotropie du KRQP et nous verrons notamment que celle-ci est sans conséquence pour la mesure de D_2 .

1. Pour une unique réalisation du désordre, ces propriétés sont fausses.

Unitarité et causalité

L'unitarité du propagateur traduit la conservation de la probabilité totale : à tout instant $t \geq 0$ le propagateur intégré sur tout l'espace vaut un.

À titre de rappel, une fonction f du temps t est causale si $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et $f(t)$ non-nulle pour $t \geq 0$. Pour que le propagateur soit causal, il faut donc que le coefficient de diffusion $D(q, \omega)$ — intervenant au dénominateur du propagateur — n'ait pas de pôle dans le demi-plan supérieur du plan complexe ($\text{Im } \omega > 0$).

Les propriétés de causalité et d'unitarité assurent qu'à tout instant t , le propagateur intégré sur l'ensemble du volume est une fonction de Heaviside notée Θ :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} P_{3\text{D}}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \Theta(t). \quad (7.3)$$

Dans l'espace réciproque, cette dernière équation devient

$$P_{3\text{D}}(\mathbf{q} = 0, \omega) = -\frac{1}{i\omega}. \quad (7.4)$$

Caractère réel

Pour assurer le caractère réel du propagateur, celui-ci doit être égal à son conjugué hermitique, condition qui, dans l'espace réciproque, devient

$$P_{3\text{D}}(q^*, \omega^*) = P_{3\text{D}}^*(q, -\omega), \quad (7.5)$$

du fait de la parité du propagateur. Le caractère réel de $P_{3\text{D}}$ a les mêmes conséquences sur le coefficient de diffusion qui doit vérifier

$$D(q^*, \omega^*) = D^*(q, -\omega). \quad (7.6)$$

Si q et ω sont réels, la relation précédente indique que le coefficient de diffusion $D(q, i\omega)$ est réel.

L'ensemble de ces propriétés nous permettent de décomposer le propagateur en deux contributions correspondant à $\omega > 0$ et $\omega < 0$:

$$P_{3\text{D}}(\mathbf{r}, t) = P_{3\text{D}}^+(\mathbf{r}, t) + P_{3\text{D}}^-(\mathbf{r}, t), \quad (7.7)$$

avec

$$\boxed{P_{3\text{D}}^+(\mathbf{r}, t) \doteq \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \frac{e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)}}{-i\omega + D(q, \omega)\mathbf{q}^2} d^3\mathbf{q} d\omega,} \quad (7.8)$$

et $P_{3\text{D}}^-(\mathbf{r}, t) \doteq [P^+(\mathbf{r}, t)]^*$. Nos calculs peuvent à présent se restreindre à $P_{3\text{D}}^+$.

7.1.2 Outils pour les transformées de Fourier

Pour déterminer les expressions du propagateur en intensité dans les régions [2] et [5], deux transformées de Fourier particulières sont calculées dans cette partie afin d'alléger les calculs ultérieurs. La première transformée de Fourier porte sur ω et la seconde sur \mathbf{q} .

Premier résultat : transformée de Fourier $\omega \leftrightarrow t$

Dans un premier temps, nous souhaiterions calculer

$$\mathcal{F}_\beta(t) \doteq \int_0^\infty \omega^{\beta-1} e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{avec } 0 < \beta < 1, \quad (7.9)$$

intégrale apparaissant lors de la transformée de Fourier sur ω du propagateur. En effectuant le changement de variable $u = \omega t$, puis en séparant les parties réelle et imaginaire, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\beta(t) &= t^{-\beta} \int_0^\infty u^{\beta-1} \cos u d\omega - it^{-\beta} \int_0^\infty u^{\beta-1} \sin u du \\ &= t^{-\beta} \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \Gamma(\beta) - it^{-\beta} \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \Gamma(\beta), \end{aligned} \quad (7.10)$$

soit en simplifiant

$$\boxed{\mathcal{F}_\beta(t) = \Gamma(\beta) e^{-i\pi\beta/2} t^{-\beta}.} \quad (7.11)$$

Deuxième résultat : transformée de Fourier $\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{r}$

Nous aurons également besoin d'une intégrale intervenant lors de la transformée de Fourier sur \mathbf{q} du propagateur :

$$\mathfrak{F}_\beta(r) \doteq \iiint_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{q}|^{\beta-2} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{q} \quad \text{avec } r = |\mathbf{r}|. \quad (7.12)$$

Pour $\beta = 0$, on reconnaît la transformée de Fourier du potentiel de Coulomb qui vaut $\frac{2\pi^2}{r}$. On suppose désormais $\beta \neq 0$:

$$\mathfrak{F}_\beta(r) = 2\pi \int_0^\infty dq \int_0^\pi d\theta q^\beta e^{iqr \cos \theta} \sin \theta. \quad (7.13)$$

On effectue alors le changement de variable $u = qr$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\beta(r) &= 2\pi \frac{1}{r} \int_0^\infty du \int_0^\pi d\theta \left(\frac{u}{r}\right)^\beta e^{iu \cos \theta} \sin \theta \\ &= 4\pi r^{-(\beta+1)} \int_0^\infty u^{\beta-1} \sin u du \\ \mathfrak{F}_\beta(r) &= 4\pi \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \Gamma(\beta) r^{-(\beta+1)}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

résultat qui n'est pas valable pour $\beta = 0$ en raison de la singularité de la fonction Γ en ce point. En revanche, un développement limité en β de $\mathfrak{F}_\beta(r)$ permet de retrouver le préfacteur $2\pi^2$ de la transformée de Fourier du potentiel coulombien.

Nous arrivons finalement à l'expression :

$$\boxed{\mathfrak{F}_\beta(r) = \frac{2\pi}{r} \times \begin{cases} \pi, & \text{si } \beta = 0; \\ 2 \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \Gamma(\beta)r^{-\beta}, & \text{si } \beta > 0. \end{cases}} \quad (7.15)$$

7.2 Généralités sur le propagateur replié

Disposant de tous les outils, nous pouvons à présent déterminer l'expression du propagateur en intensité dans les régions [2] et [5] pour un système replié. Pour cela, nous utiliserons d'une part les propriétés énoncées précédemment et d'autre part le coefficient de diffusion proposé par Chalker spécifique de la région étudiée.

La démarche à suivre pour parvenir au propagateur replié étant similaire pour les deux régions, nous exposons dans la partie suivante les différentes étapes à suivre.

Régime spatial	$D(q, i\omega)/D_B$	Région
$qL_\omega \ll 1$	$(\omega\tau)^{1/3}$	[2]
$qL_\omega \gg 1$	$(q\ell)^{D_2-2} (\omega\tau)^{1-D_2/3}$	[5]

Tableau 7.1 Coefficient de diffusion $D(q, i\omega)$ en dimension trois et au voisinage du point critique ($\xi \rightarrow \infty$). En se plaçant près de la transition, les régions [1] et [4] du diagramme de Chalker 6.5 ne sont plus pertinentes, puisqu'on a toujours $\xi \gg 1/q, L_\omega$. Dans la région [2], le choix du *cut-off* dans la théorie auto-cohérente permet d'utiliser directement l'expression donnée par le tableau. Dans la région [5] — *ansatz* de Chalker — seul le comportement en loi d'échelle est connu.

7.2.1 Démarche générale

Pour une région donnée du diagramme de Chalker, le calcul du propagateur en intensité $P_{1D}(x, t)$ pour le KRQP — ou de manière générale pour un système tridimensionnel subissant un repliement selon deux directions — peut se décomposer en deux étapes :

- i. calculer la transformée de Fourier ($\{\mathbf{q}, \omega\} \leftrightarrow \{\mathbf{r}, t\}$) de $P_{3D}(\mathbf{q}, \omega)$ définie par l'équation (7.1) à l'aide d'un développement asymptotique;
- ii. replier le propagateur $P_{3D}(\mathbf{r}, t)$ en l'intégrant selon les deux autres directions — variables y et z — pour ainsi aboutir au propagateur $P_{1D}(x, t)$ d'un système replié.

Formellement, cette dernière étape s'écrit :

$$P_{1D}(x, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} P_{3D}(x, y, z, t) dy dz, \quad (7.16)$$

mais le même résultat peut être obtenu en réalisant la transformée de Fourier du propagateur $P_{3D}(\mathbf{q}, \omega)$ selon le plan $q_y = q_z = 0$:

$$\begin{aligned} P_{1D}(x, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{3D}(q_x, q_y = 0, q_z = 0, \omega) e^{i(q_x x - \omega t)} dq_x d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(q_x x - \omega t)}}{-i\omega + D(q_x, \omega) q_x^2} dq_x d\omega. \end{aligned} \quad (7.17)$$

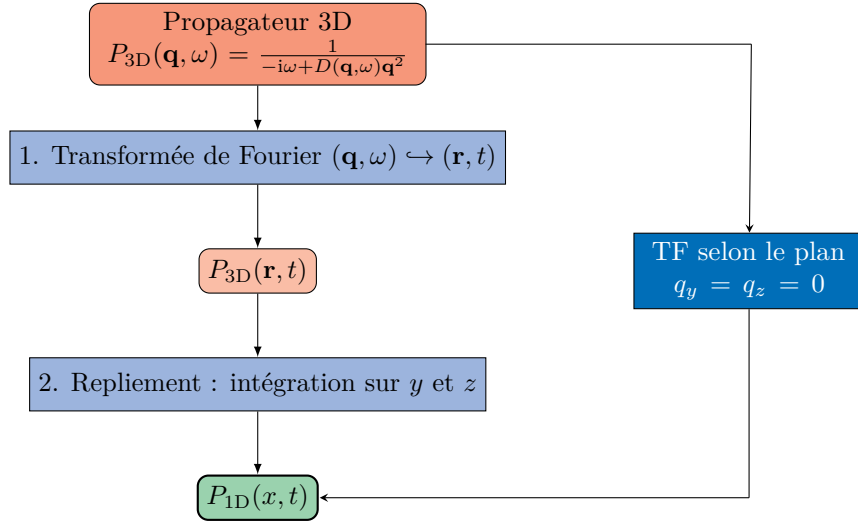


Figure 7.1 Succession des étapes de calcul pour passer du propagateur tridimensionnel P_{3D} dans l'espace (\mathbf{q}, ω) vers le propagateur après repliement dans l'espace (x, t) d'un système unidimensionnel. Ce dernier peut s'obtenir par deux cheminements différents : la première, en deux étapes, fait explicitement intervenir le repliement comme une intégration sur y et z tandis que le second procédé se résume à faire la transformée de Fourier sur le propagateur dans l'espace (\mathbf{q}, ω) selon le plan d'équation $q_y = q_z = 0$.

Ces deux étapes de calcul seront répétées dans les régions [2] et [5] en utilisant le coefficient de diffusion correspondant et rappelé dans le tableau 7.1. Pour la région [2] (partie 7.3) et la région [5] (partie 7.4) nous réaliserons ce programme de manière approximative pour que le rôle du repliement soit explicite puis nous montrerons comment une expression exacte du propagateur peut être trouvée.

Ce programme de calcul simple suppose cependant que le système initial — avant repliement — soit isotrope, hypothèse qui n'est pas vérifiée au sens strict dans le cas du KRQP.

En effet, dans ce cas précis et comme expliqué dans la partie 5.3.2 du chapitre 5, le kicked pseudo-rotor tridimensionnel — système initial déplié — est *mappé* sur un modèle d'Anderson anisotrope.

Dans un premier temps, il nous faut donc étudier les conséquences de l'anisotropie du système initial sur le système replié.

7.2.2 Une anisotropie sans influence

La question de l'anisotropie du kicked pseudo-rotor a déjà été traitée dans la partie 6.2.3 où nous avons montré que pour en tenir compte, le coefficient de diffusion devait être remplacé par un tenseur dont les trois composantes conservaient une expression en tout point similaire à celle du coefficient de diffusion pour un système isotrope. En particulier, le comportement sous-diffusif en $\omega^{1/3}$ des trois composantes du tenseur était préservé. Par ailleurs, les expériences comme les simulations montrent que l'anisotropie n'a pas d'effet sur les propriétés critiques. L'ensemble de ces arguments permettent donc d'affirmer que dans la région [2], l'anisotropie du kicked pseudo-rotor, est sans importance.

Un dernier argument permet d'affirmer cette fois que les régions [2] et [5] ne sont pas influencées par l'anisotropie du système. En effet, le système étudié au final, à savoir le KRQP, est obtenu par repliement du kicked pseudo-rotor selon deux directions. Par conséquent, des trois composantes du tenseur de diffusion, une seule subsiste puisque le système est « regardé » selon le plan $q_y = q_z = 0$.

L'anisotropie n'a donc aucun impact sur la mesure de D_2 dans le KRQP.

7.3 Région [2] non multifractale : fonction d'Airy

Dans cette région, le coefficient de diffusion est indépendant de q et *scale* comme $(-i\omega\tau)^{1/3}$. Son expression exacte dépend du choix de *cut-off*, ainsi dans la partie 6.2.1, pour un système isotrope, nous avons pris $q_M = \frac{\pi}{3\ell}$ comme *cut-off* aboutissant au coefficient de diffusion :

$$\frac{D(i\omega)}{D_B} = \left(\frac{27}{4}\omega\tau\right)^{1/3}. \quad (7.18)$$

Le coefficient multiplicatif 27/4 dépend explicitement du *cut-off* choisi. Pour ne pas alourdir les calculs, nous avons choisi de prendre simplement :

$$\frac{D^{[2]}(i\omega)}{D_B} = (\omega\tau)^{1/3}, \quad (7.19)$$

le choix du *cut-off* se réduisant à un simple coefficient multiplicatif pour D_B .

Nous allons voir dans cette partie que ce coefficient de diffusion mène à une expression du propagateur faisant intervenir la fonction d'Airy, résultat déjà montré par G. Lemarié

dans [Lem09]. En revanche, la partie aboutissant au même résultat en résolvant une équation de diffusion fractionnaire est nouvelle.

7.3.1 Comportement à petite distance et aux temps longs

Étape 1 : transformées de Fourier

En suivant le programme exposé à la partie 7.2.1, il s'agit donc de déterminer le comportement asymptotique de :

$$P_{3D}^+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r}-\omega t)}}{-i\omega + D_B(-i\omega\tau)^{1/3}\mathbf{q}^2} d^3\mathbf{q} d\omega, \quad (7.20)$$

pour les petites distances et les temps longs. Nous commençons par calculer la transformée de Fourier $\omega \leftrightarrow t$:

$$P_{3D}^+(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega + D_B(-i\omega\tau)^{1/3}\mathbf{q}^2} d\omega, \quad (7.21)$$

expression que l'on peut écrire

$$P_{3D}^+(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{2\pi D_B \tau^{1/3} \mathbf{q}^2} \int_0^{\infty} \frac{(-i\omega)^{-1/3} e^{-i\omega t}}{1 + (D_B \tau^{1/3} \mathbf{q}^2)^{-1} (-i\omega)^{2/3}} d\omega. \quad (7.22)$$

Dans la limite des temps longs, le dénominateur de l'intégrande étant proche de un, asymptotiquement on arrive à :

$$P_{3D}^+(\mathbf{q}, t) \approx \frac{1}{2\pi D_B (-i\tau)^{1/3} \mathbf{q}^2} \int_0^{\infty} \omega^{-1/3} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (7.23)$$

où l'intégrale correspond au premier résultat de la partie 7.1.2 pour $\beta = 2/3$. La transformée sur ω conduit donc à :

$$P_{3D}^+(\mathbf{q}, t) \approx \frac{\Gamma(2/3)}{2\pi D_B} \frac{\mathbf{q}^{-2}}{(-i\tau t^2)^{1/3}}. \quad (7.24)$$

Il reste à présent la transformée de Fourier sur \mathbf{q} , qui d'après le second résultat de la partie 7.1.2 donne immédiatement :

$$P_{3D}^+(\mathbf{r}, t) \approx \frac{(\sqrt{3} + i)\Gamma(2/3)}{16\pi^2 D_B \tau^{1/3}} \frac{t^{-2/3}}{r}. \quad (7.25)$$

Finalement, en ajoutant le complexe conjugué, on trouve l'expression asymptotique du propagateur en intensité pour un système tridimensionnel :

$$P_{3D}^{[2]}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\sqrt{3}\Gamma(2/3)}{8\pi^2 D_B \tau^{1/3}} \frac{t^{-2/3}}{r}, \quad \text{pour } t \text{ grand et } r \text{ petit}. \quad (7.26)$$

Étape 2 : repliement

Pour connaître le propagateur en intensité $P_{1D}^{[2]}$ du KRQP, il est nécessaire de replier le propagateur $P_{3D}^{[2]}$, autrement dit d'intégrer selon les directions y et z . En suivant le programme énoncé dans la partie 7.2.1, nous aurions dû calculer :

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} P_{3D}^{[2]}(x, y, z, t) dy dz \sim t^{-2/3} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dy dz. \quad (7.27)$$

Cette intégrale est manifestement divergente en raison des grandes valeurs de $|y|$ et $|z|$. Cette apparente contradiction avec les simulations numériques s'explique par le fait que le propagateur tridimensionnel obtenu en (7.26) n'est valable que pour t grand et r **petit**. L'application *stricto sensu* du repliement ne peut donc pas se faire directement sur le propagateur asymptotique obtenu précédemment.

La méthode la plus simple consiste alors à :

- i. calculer la contribution à l'origine $P_{1D}^{[2]}(x = 0, t)$;
- ii. replier le terme d'ordre 1 d'un développement limité de $P_{3D}^{[2]}(x, y, z, t)$ autour de l'origine $x = 0$.

La première étape consiste à appliquer la formule (7.17) :

$$P_{1D}^{[2]}(x = 0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{3D}^{[2]}(q_x, q_y = 0, q_z = 0, t) dq_x = \frac{1}{2\Gamma(2/3)} \left(\sqrt{D_B^3 \tau t} \right)^{-1/3}. \quad (7.28)$$

La second étape revient à calculer la dérivée première — par rapport à x — du propagateur tridimensionnel

$$\frac{\partial}{\partial x} P_{3D}^{[2]}(x, y, z, t) = -\frac{\sqrt{3}\Gamma(2/3)}{8\pi^2 D_B \tau^{1/3}} \frac{x t^{-2/3}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (7.29)$$

expression dont l'intégrale de repliement est à présent convergente et conduit à

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} P_{3D}^{[2]}(x, y, z, t) dy dz = -\frac{\sqrt{3}\Gamma(2/3)}{4\pi D_B \tau^{1/3}} t^{-2/3} \text{signe}(x). \quad (7.30)$$

Le terme d'ordre un est donc :

$$-\frac{\sqrt{3}\Gamma(2/3)}{4\pi D_B \tau^{1/3}} t^{-2/3} |x|. \quad (7.31)$$

La somme des deux termes conduit finalement à petite distance et aux temps longs à

$$P_{1D}^{[2]}(x; t) \approx t^{-1/3} \left(A_2 - B_2 |x| t^{-1/3} \right), \quad (7.32)$$

avec

$$A_2 \doteq \frac{\sqrt{3}\Gamma(1/3)}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{D_B \tau^{1/3}}} \quad \text{et} \quad B_2 \doteq \frac{\sqrt{3}\Gamma(2/3)}{4\pi} \frac{1}{D_B \tau^{1/3}}. \quad (7.33)$$

Bilan

À petits x , le propagateur (7.32) du système replié est composé de **deux** termes :

- i. l'un en $t^{-1/3}$ et correspondant à la contribution à $x = 0$;
- ii. l'autre en $-|x|t^{-2/3}$ issu du repliement du propagateur tridimensionnel à petits x .

L'expression finale et à retenir pour la suite est :

$$P_{\text{1D}}^{[2]}(x; t) \sim A_2 t^{-1/3} \mathcal{N}^{[2]}(xt^{-1/3}), \text{ avec } \mathcal{N}^{[2]}(u) \doteq 1 - \frac{8\pi}{3\Gamma(1/3)}|u|, \quad (7.34)$$

qui est explicitement invariante d'échelle.

7.3.2 Résultat exact : fonction d'Airy

Nous allons à présent montrer qu'il est possible de trouver la forme exacte du propagateur pour le système replié dans le régime [2]. La démarche consiste simplement à calculer la transformée de Fourier sur ω et \mathbf{q} du propagateur (7.1) selon le plan d'équation $q_y = q_z = 0$, qui revient au final à calculer l'expression (7.17).

On effectue d'abord l'intégrale sur q :

$$\begin{aligned} P_{\text{1D}}^{[2]}(x, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iqx}}{-i\omega + D_B \tau^{1/3} (-i\omega)^{1/3} q^2} dq \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho (-i\omega)^{1/3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iqx}}{\rho^{-1} (-i\omega)^{2/3} + q^2} dq, \end{aligned} \quad (7.35)$$

avec $\rho = D_B \tau^{1/3}$. Pour $x > 0$ cette intégrale peut être évaluée en s'intéressant à :

$$\mathcal{I}^+(x) = \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{izx}}{\rho^{-1} (-i\omega)^{2/3} + z^2} dz, \quad (7.36)$$

où le contour d'intégration \mathcal{C} de la figure 7.2 est constitué de l'intervalle $[-R; R]$ et du demi-cercle supérieur de rayon R : $\mathcal{C}^+ = \{R e^{i\theta}; \theta \in [0; \pi]\}$. La fonction à intégrer possède un seul pôle dans le demi-plan supérieur en $z_0 = i\rho^{-1/2} (-i\omega)^{1/3}$, donc par le théorème des résidus, on a :

$$\mathcal{I}^+(x) = \pi \sqrt{\rho} (-i\omega)^{-1/3} \exp \left[-\rho^{-1/2} (-i\omega)^{1/3} x \right]. \quad (7.37)$$

Dans la limite $R \rightarrow \infty$ et d'après le second lemme de Jordan, l'intégrale sur \mathcal{C}^+ tend vers zéro. Il reste donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{izx}}{\rho^{-1} (-i\omega)^{2/3} + z^2} dz = \pi \sqrt{\rho} (-i\omega)^{-1/3} \exp \left[-\rho^{-1/2} (-i\omega)^{1/3} x \right]. \quad (7.38)$$

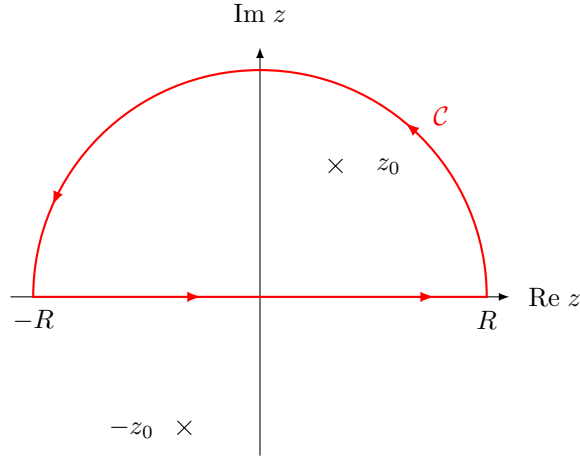


Figure 7.2 Contour d'intégration pour la transformée de Fourier ($q \leftrightarrow x$). Ce premier contour d'intégration \mathcal{C} est utilisé pour calculer la contribution à $x > 0$ de la transformée de Fourier sur q du propagateur valable dans le région [2]. Un raisonnement similaire pour $x < 0$ conduit à l'expression exacte (7.39) du propagateur (replié) en intensité du KRQP dans cette région caractérisée par l'absence de multifractalité. Les deux pôles du propagateur sont en $\pm z_0 = \pm i\rho^{-1/2}(-i\omega)^{1/3}$.

Un raisonnement similaire pour $x < 0$ conduit finalement à l'expression :

$$P_{\text{1D}}^{[2]}(x, \omega) = \frac{1}{2}\rho^{-1/2}(-i\omega)^{-2/3}\exp\left[-\rho^{-1/2}(-i\omega)^{1/3}|x|\right]. \quad (7.39)$$

Il reste à effectuer la transformée de Fourier sur ω :

$$P_{\text{1D}}^{[2]}(x, t) = \frac{1}{4\pi}\rho^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}(-i\omega)^{-2/3}\exp\left[-(-i)^{1/3}\rho^{-1/2}\omega^{1/3}|x| - i\omega t\right] d\omega. \quad (7.40)$$

En posant $u = \rho^{-1/2}(-i\omega)^{1/3}$ puis en échangeant les bornes d'intégration on obtient :

$$P_{\text{1D}}^{[2]}(x, t) = \frac{3}{4i\pi}\int_{\infty e^{-i\pi/6}}^{\infty e^{5i\pi/6}}\exp\left[(z\sqrt{\rho})^3 t - z|x|\right] dz. \quad (7.41)$$

Pour retrouver exactement une des expressions intégrales de la fonction d'Airy, on s'intéresse momentanément aux deux intégrales suivantes :

$$F^\pm(x, t) \doteq \int_{\mathcal{C}^\pm} f(z) dz \quad \text{avec} \quad f(z) \doteq \exp\left[(z\sqrt{\rho})^3 t - z|x|\right], \quad (7.42)$$

où \mathcal{C}^+ est le contour (en pointillés rouges sur la figure 7.3) se situant dans le second quadrant et composé de l'intervalle $[0, iR]$, l'arc de cercle $\{Re^{i\theta}; \theta \in [\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}]\}$ et du segment $[Re^{5i\pi/6}; 0]$

refermant le contour. Le contour \mathfrak{C}^- est le symétrique (en bleu sur la figure 7.3) de \mathfrak{C}^+ par rapport à l'origine du repère : il est donc dans le quatrième quadrant et composé du segment $[0, -iR]$, l'arc de cercle $\{Re^{i\theta}; \theta \in [-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}]\}$ et du segment $[Re^{-i\pi/6}; 0]$. Ces deux contours sont représentés sur la partie droite de la figure 7.3.

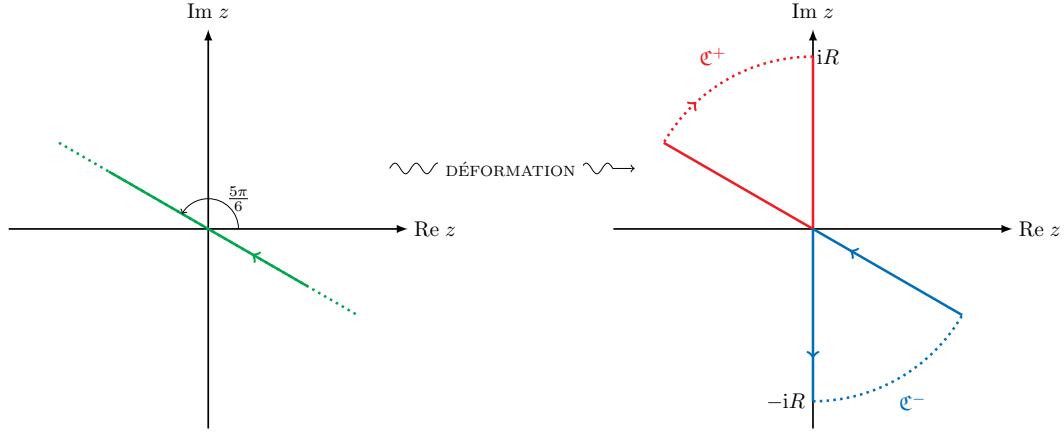


Figure 7.3 Déformation du contour d'intégration pour la transformée de Fourier $\omega \leftrightarrow t$. Représentation de la modification du contour nécessaire pour retrouver une expression intégrale connue de la fonction d'Airy. La figure de gauche représente en vert l'intervalle d'intégration initial apparaissant dans l'équation (7.41) à savoir $[\infty e^{-i\pi/6}; \infty e^{5i\pi/6}]$, les pointillés indiquant le caractère infini de ce segment. La partie droite de la figure représente les deux contours d'intégration utilisés pour arriver à l'intégrale (7.45). Les intégrales sur les arcs (en pointillés sur la figure) composant \mathfrak{C}^+ et \mathfrak{C}^- sont nulles dans la limite $R \rightarrow \infty$ d'après le second lemme de Jordan.

L'intégrande $f(z)$ étant analytique dans les contours fermés \mathfrak{C}^\pm , d'après le théorème de Cauchy les intégrales F^\pm sont nulles :

$$\int_{\mathfrak{C}^+} f(z) dz = \int_{\mathfrak{C}^-} f(z) dz = 0. \quad (7.43)$$

Par ailleurs, si l'on décompose ces intégrales selon les différentes parties de \mathfrak{C}^\pm on arrive à :

$$\int_0^{iR} f(z) dz + \int_{Re^{5i\pi/6}}^0 f(z) dz = \int_0^{-iR} f(z) dz + \int_{Re^{-i\pi/6}}^0 f(z) dz, \quad (7.44)$$

car d'après le second lemme de Jordan, dans la limite $R \rightarrow \infty$, les intégrales sur les arcs de cercle sont nulles. Ainsi, dans la limite $R \rightarrow \infty$ et en remplaçant par l'expression de l'intégrande, la relation précédente (7.44) devient :

$$\int_{\infty e^{-i\pi/6}}^{\infty e^{5i\pi/6}} \exp [(z\sqrt{\rho})^3 t - z|x|] dz = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp [(z\sqrt{\rho})^3 t - z|x|] dz. \quad (7.45)$$

Cette égalité montre donc que le propagateur (7.41) peut finalement s'écrire :

$$P_{1D}^{[2]}(x, t) = \frac{3}{4i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp \left[(z\sqrt{\rho})^3 t - z|x| \right] dz. \quad (7.46)$$

On reconnaît désormais l'une des expressions intégrales de la fonction d'Airy [AS68, éq 10.4.32] :

$$\boxed{P_{1D}^{[2]}(x, t) = \frac{3}{2} \left(3\sqrt{D_B^3 \tau t} \right)^{-1/3} \text{Ai} \left[\left(3\sqrt{D_B^3 \tau t} \right)^{-1/3} |x| \right]}, \quad (7.47)$$

expression qui est bien normalisée puisque $\int_0^\infty \text{Ai}(x) dx = \frac{1}{3}$.

Moments du propagateur dans la région [2]

La solution exacte permet de calculer les moments du propagateur :

$$\begin{aligned} \langle x^k \rangle(t) &\doteq 2 \int_0^\infty x^k P_{1D}(x; t) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(2/3)} \left(3\sqrt{D_B^3 \tau t} \right)^{-1/3} \int_0^\infty x^k \text{Ai} \left[\left(3\sqrt{D_B^3 \tau t} \right)^{-1/3} x \right] dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(2/3)} \left(3\sqrt{D_B^3 \tau t} \right)^{k/3} \int_0^\infty x^k \text{Ai}(x) dx. \end{aligned} \quad (7.48)$$

D'après [VS, éq 3.83], on a :

$$\int_0^\infty x^k \text{Ai}(x) dx = \frac{3^{-(k+3)/3} \Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{k+3}{3}\right)}. \quad (7.49)$$

Ainsi les moments de $P_{1D}^{[2]}(x; t)$ sont :

$$\langle x^k \rangle = \frac{(k-1)!}{\Gamma(2/3)\Gamma(k/3)} \left(\sqrt{D_B^3 \tau t} \right)^{k/3} \sim t^{k/3}. \quad (7.50)$$

Ce dernier calcul est en accord avec les résultats numériques obtenus dans la partie 6.5 du chapitre 6. Cette cohérence entre le calcul et les simulations sera à nouveau étudiée lorsque nous calculerons les moments du propagateur pour la région [5].

7.3.3 Le propagateur comme solution d'une équation de diffusion fractionnaire

Nous allons montrer que le propagateur du système replié est solution d'une équation de diffusion fractionnaire en temps. Ce constat est essentiel pour connaître l'expression exacte du

propagateur dans la région **[5]**. L'objet de cette thèse n'étant pas d'étudier ce type d'équation différentielle, nous renvoyons le lecteur aux annexes B et B.3 pour les détails techniques.

De manière générale, une équation de diffusion fractionnaire en temps peut s'écrire :

$$\left[D_t^{\mu,\nu} - K \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] u(x, t) = 0, \quad (7.51)$$

où $D_t^{\mu,\nu}$ représente la dérivée généralisée fractionnaire en temps de Riemann–Liouville d'ordre μ et de type ν dont nous donnons une définition en annexe B.1.1, K étant l'analogie du coefficient de diffusion. Dans le cas de la région **[2]**, et contrairement à ce que nous verrons dans la partie 7.4.2 pour la région **[5]**, l'équation différentielle est non fractionnaire en espace.

En prenant pour conditions aux bords $u(\pm\infty, t) = 0$ et comme condition initiale $u(x, 0) = \delta(x)$, la solution générale de ce type d'équation différentielle est [\[Tom+12\]](#) :

$$u(x, t) = \frac{1}{2|x|} t^{-(1-\nu)(1-\mu)} H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{|x|}{\sqrt{Kt^\mu}} \left| \begin{matrix} (1, \frac{1}{2}) & (1 - (1-\nu)(1-\mu), \frac{\mu}{2}) & (1, \frac{1}{2}) \\ (1, 1) & (1, \frac{1}{2}) & (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right], \quad (7.52)$$

où H est la fonction de Fox dont la définition est donnée en annexe A.4. La transformée de Fourier en espace et en temps d'une telle équation conduit à :

$$u(q, \omega) = \frac{(-i\omega)^{-\nu(1-\mu)}}{(-i\omega)^\mu + K|q|^2}. \quad (7.53)$$

En comparant avec l'expression du propagateur dans la région **[2]** :

$$P_{1D}^{[2]}(q, \omega) = \frac{1}{-i\omega + D_B \tau^{1/3} (-i\omega)^{1/3} q^2} = \frac{(-i\omega)^{-1/3}}{(-i\omega)^{2/3} + D_B \tau^{1/3} q^2}, \quad (7.54)$$

on identifie les paramètres de l'équation différentielle : $\mu = 2/3$, $\nu = 1$ et $K = D_B \tau^{1/3}$. Le propagateur est donc solution de :

$$\left[D_t^{\frac{2}{3},1} - K \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] P_{1D}(x; t) = 0, \quad (7.55)$$

et la solution de cette équation différentielle est donnée par (7.52) :

$$P_{1D}^{[2]}(x, t) = \frac{1}{2|x|} H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{|x|t^{-1/3}}{\sqrt{D_B \tau^{1/3}}} \left| \begin{matrix} (1, \frac{1}{2}) & (1, \frac{1}{3}) & (1, \frac{1}{2}) \\ (1, 1) & (1, \frac{1}{2}) & (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right]. \quad (7.56)$$

La répétition du terme $(1, 1/2)$ dans la fonction de Fox permet de simplifier celle-ci et d'aboutir finalement à [\[MPS05\]](#) :

$$P_{1D}^{[2]}(x, t) = \frac{1}{2|x|} H_{1,1}^{1,0} \left[\frac{|x|t^{-1/3}}{\sqrt{D_B \tau^{1/3}}} \left| \begin{matrix} (1, \frac{1}{3}) \\ (1, 1) \end{matrix} \right. \right]. \quad (7.57)$$

Or, dans ce cas précis, on montre en annexe A.5.2 que :

$$H_{1,1}^{1,0} \left[z \begin{vmatrix} (1, \frac{1}{3}) \\ (1, 1) \end{vmatrix} \right] = 3^{2/3} z \text{Ai}(3^{-1/3} z), \quad (7.58)$$

égalité également présente dans [MPS05]. L'expression du propagateur se ramène donc à l'expression déjà démontrée (7.47), à savoir :

$$P_{1D}^{[2]}(x, t) = \frac{3}{2} \left(3\sqrt{D_B^3 \tau t} \right)^{-1/3} \text{Ai} \left[\left(3\sqrt{D_B^3 \tau t} \right)^{-1/3} |x| \right]. \quad (7.59)$$

7.4 Région [5] multifractale : fonction de Fox

Dans la région [5] du diagramme de Chalker, le raisonnement suivi pour la région [2] est en tout point similaire. Dans un premier temps, nous allons réaliser le développement asymptotique du propagateur tridimensionnel puis nous regarderons l'effet du repliement. Dans ce régime, le repliement a des conséquences importantes pour la suite. Enfin nous verrons que, dans ce régime, le propagateur unidimensionnel du système replié suit une équation de diffusion fractionnaire en temps **et** en espace pour laquelle une expression exacte existe.

Dans ce régime, Chalker propose le coefficient de diffusion suivant

$$D^{[5]}(\mathbf{q}, i\omega) = D_B (|\mathbf{q}| \ell)^{D_2-2} (\omega \tau)^{1-D_2/3}, \quad (7.60)$$

qui permet de rendre compte de la multifractalité par l'intermédiaire de la dimension généralisée D_2 .

7.4.1 Comportement à petite distance et aux temps longs

Étape 1 : transformées de Fourier

Nous devons donc calculer le propagateur

$$P_{3D}^+(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega + D_B (|\mathbf{q}| \ell)^{D_2-2} (-i\omega \tau)^{1-D_2/3} \mathbf{q}^2} d\omega. \quad (7.61)$$

Nous souhaitons un comportement asymptotique du propagateur et les préfacteurs ne seront pas importants à ce stade. Par ailleurs, nous obtiendrons ces préfacteurs lors de l'identification du propagateur à une solution d'une équation de diffusion fractionnaire.

Ainsi, en procédant au changement de variable $u = \omega t$ on obtient :

$$P_{3D}^+(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{2\pi t} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-iu}}{-i\frac{u}{t} + D_B \ell^{D_2-2} (-i\frac{u\tau}{t})^{1-D_2/3} |\mathbf{q}|^{D_2}} du. \quad (7.62)$$

À nouveau, comme dans la région [2], nous pouvons factoriser le dénominateur :

$$P_{3\text{D}}^+(\mathbf{q}, t) \sim \frac{|\mathbf{q}|^{-D_2}}{t} \int_0^\infty \frac{e^{-iu}}{\left(-i\frac{u}{t}\right)^{1-D_2/3} \left[1 + \frac{\ell^2}{D_B} (|\mathbf{q}|\ell)^{-D_2} \left(-i\frac{u}{t}\right)^{D_2/3-1}\right]} du. \quad (7.63)$$

Puis en supposant $|\mathbf{q}|$ grand et comme $P_{3\text{D}}^{[5]}$ a le même comportement asymptotique que $P_{3\text{D}}^+$, on arrive à :

$$P_{3\text{D}}^{[5]}(\mathbf{q}, t) \sim (|\mathbf{q}|t^{1/3})^{-D_2}. \quad (7.64)$$

Enfin, pour obtenir le propagateur dans l'espace (\mathbf{r}, t) , on calcule :

$$P_{3\text{D}}^{[5]}(\mathbf{r}, t) \sim t^{-D_2/3} \int_0^\infty |\mathbf{q}|^{-D_2} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{q}. \quad (7.65)$$

La dernière intégrale correspond à \mathfrak{F}_{2-D_2} calculé dans la partie 7.1.2. On a donc :

$$P_{3\text{D}}^{[5]}(r, t) \sim r^{D_2-3} t^{-D_2/3}. \quad (7.66)$$

La conséquence importante de ce calcul est que la dimension D_2 intervient directement dans le propagateur tridimensionnel, autrement dit avant repliement. Nous verrons dans la suite qu'une fois replié, la **contribution principale** du propagateur à petite distance ne dépendra plus de D_2 .

Étape 2 : effet du repliement

Pour voir l'effet du repliement sur le propagateur $P_{3\text{D}}^{[5]}(r, t)$, nous procédons de la même manière que pour la région [2] :

- i. calculer $P_{1\text{D}}^{[5]}(x=0, t)$;
- ii. regarder les déviations autour de $x=0$.

Le calcul de la contribution à $x=0$ pour les régions [2] et [5] ne sont pas pour autant transposables : le poids du régime [5] n'intervient de manière significative que sur une région d'une longueur de l'ordre de L_ω . Par conséquent, le calcul de cette contribution doit tenir compte de cette limite supérieure et a pour expression :

$$P_{1\text{D}}^{[5]}(x=0, t) \sim t^{-D_2/3} \int_0^{L_\omega^{-1}} q^{-D_2} dq \sim t^{-D_2/3} L_\omega^{D_2-1}, \quad (7.67)$$

où la borne supérieure d'intégration est **l'inverse** de L_ω puisque l'intégration est faite dans l'espace réciproque. Pour que l'intégrale (7.67) converge, il est nécessaire d'avoir $D_2 > 1$,

hypothèse qui sera vérifiée dans les résultats numériques. Enfin, par définition $L_\omega \sim \omega^{-1/3}$, autrement dit cette longueur se comporte en $t^{1/3}$. On obtient donc :

$$P_{1D}^{[5]}(x=0, t) \sim t^{-D_2/3} t^{(D_2-1)/3} = t^{-1/3}. \quad (7.68)$$

Contrairement à l'expression du propagateur tridimensionnel, la contribution à l'origine du propagateur replié ne fait pas intervenir la dimension D_2 . Un calcul « naïf », c'est-à-dire ne tenant pas compte de l'étendue de la région [5], aurait au contraire conduit à un comportement en $t^{-D_2/3}$.

À présent, pour calculer l'intégrale de repliement directement selon y et z , la même démarche que pour la région [2] mène à :

$$\frac{\partial}{\partial x} P_{3D}^{[5]}(x, y, z, t) \sim x(x^2 + y^2 + z^2)^{(D_2-5)/2} t^{-D_2/3}. \quad (7.69)$$

Après repliement et changement de variable on obtient

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} P_{3D}^{[5]}(x, y, z, t) dy dz \sim t^{-D_2/3} |x|^{D_2-2} \text{signe}(x). \quad (7.70)$$

Le terme d'ordre un est donc en :

$$t^{-D_2/3} |x|^{D_2-1}. \quad (7.71)$$

La somme des deux termes calculés prédit que dans la région [5] le comportement asymptotique du propagateur en intensité replié est :

$$P_{1D}^{[5]} \sim t^{-1/3} (A_5 - B_5 |xt^{-1/3}|^{D_2-1}), \quad (7.72)$$

où les constantes A_5 et B_5 sont inconnues à ce stade.

Bilan

À nouveau, dans la région [5] deux termes contribuent principalement au propagateur :

- i. un premier en tout point similaire à celui de la région [2] et qui en particulier est indépendant de D_2 ;
- ii. le second terme qui à nouveau fait intervenir le produit $|x|t^{-1/3}$ mais à présent élevé à la puissance $D_2 - 1$.

C'est ce second terme qui nous permettra de déterminer numériquement la valeur de D_2 pour le kicked pseudo-rotor malgré l'analyse des fonctions d'ondes du système replié à savoir le KRQP. L'expression utilisée pour la détermination numérique sera la suivante :

$$P_{1D}^{[5]}(x; t) \sim t^{-1/3} \mathcal{N}^{[5]}(xt^{-1/3}), \quad \text{avec} \quad \mathcal{N}^{[5]}(u) = A_5 - B_5 |u|^{D_2-1}. \quad (7.73)$$

Comme dans la région [2] non multifractale, cette expression est explicitement invariante d'échelle.

7.4.2 Détermination exacte du propagateur

De manière similaire à ce que nous avons remarqué pour le propagateur $P_{1D}^{[2]}(x; t)$ dans la région [2] non multifractale, le propagateur dans la région [5] est solution d'une équation de diffusion fractionnaire. Alors que dans la région [2] l'équation différentielle ne faisait intervenir qu'une dérivée fractionnaire en temps, dans la région [5] une dérivée fractionnaire en espace est nécessaire.

Dans le cas général, cette équation différentielle peut s'écrire :

$$\left[D_t^{\mu, \nu} - K \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} \right] P_{1D}^{[5]}(x, t) = 0, \quad (7.74)$$

où $D_t^{\mu, \nu}$ désigne la dérivée généralisée fractionnaire en temps de Riemann–Liouville d'ordre μ et de type ν , $\partial^\alpha / \partial |x|^\alpha$ représente la dérivée fractionnaire en espace de Riesz–Feller d'ordre α et K est la généralisation du coefficient de diffusion. Pour une définition de ces opérateurs nous renvoyons à l'annexe B. Pour $\alpha = 2$ et $\mu = \nu = 1$ on retrouve une équation de diffusion standard.

L'expression du propagateur dans l'espace réciproque (q, ω) permet d'identifier de manière précise les ordres et le type des opérateurs différentiels (voir l'annexe B.3). Ainsi dans la région [5] la valeur des différents paramètres est rapportée dans le tableau 7.2.

α	μ	ν	K
D_2	$\frac{D_2}{3}$	1	$\frac{D_B \tau}{\ell^2} \left(\frac{\ell}{\tau^{1/3}} \right)^{D_2}$

Tableau 7.2 Valeurs des paramètres des opérateurs différentiels dans le cas de la région [5]. Celles pour la région [2] s'obtiennent en prenant $D_2 = 2$.

Ayant identifié les différents paramètres, on trouve dans la littérature [Tom+12] la solution de cette équation, qui dans notre cas s'écrit :

$$P_{1D}^{[5]}(x; t) = \frac{1}{D_2 |x|} H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{|x| t^{-1/3}}{K^{1/D_2}} \left| \begin{array}{ccc} \left(1, \frac{1}{D_2}\right) & \left(1, \frac{1}{3}\right) & \left(1, \frac{1}{2}\right) \\ (1, 1) & \left(1, \frac{1}{D_2}\right) & \left(1, \frac{1}{2}\right) \end{array} \right. \right], \quad (7.75)$$

où H désigne la fonction de Fox dont la définition est donnée dans l'annexe A.4.

On remarquera que si $D_2 = 2$, on retrouve la fonction de Fox (7.57) intervenant dans l'expression du propagateur de la région [2].

Propriétés de la solution exacte

De la solution (7.75) découle un développement à petite distance. Toujours en nous référant à [Tom+12, éq. (40)], on trouve pour $|x|t^{-1/3} \ll K^{1/D_2}$:

$$P_{1D}^{[5]}(x; t) \sim t^{-1/3} \left[A_5 - B_5 |xt^{-1/3}|^{D_2-1} \right], \quad (7.76)$$

avec

$$A_5 \doteq \frac{K^{-1/D_2}}{D_2 \sin(\pi/D_2) \Gamma(2/3)} \quad \text{et} \quad B_5 \doteq -\frac{\Gamma(D_2/3) \sin(\pi D_2/3)}{2\pi K \Gamma(D_2) \cos(\pi D_2/2)}. \quad (7.77)$$

Ce développement à petite distance qui vient confirmer notre calcul asymptotique est essentiel pour deux raisons :

- i. il permettra dans la partie 7.7 de déterminer numériquement la dimension fractale D_2 pour un système replié comme le KRQP ;
- ii. il montre que la hauteur du petit pic décroît en $t^{-1/3}$ donc, contrairement au cas du propagateur d'un système tridimensionnel — voir l'équation (7.66) — cette décroissance est indépendante de la dimension D_2 .

Il permet enfin de déterminer A_5 et B_5 qui demeuraient inconnus jusqu'à présent.

7.5 Calcul des moments

Les deux parties précédentes nous ont permis d'obtenir des expressions analytiques du propagateur pour les régions [2] et [5] du diagramme de Chalker. Ici nous allons montrer que ces prédictions permettent de calculer les moments.

De manière générale, pour $k > 0$, les moments $\langle x^k \rangle$ sont définis par :

$$\langle x^k \rangle \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} x^k P(x, t) dx, \quad (7.78)$$

où P est le propagateur. Dans notre cas le propagateur est $P_{1D}^{[5]}$ pour une région de largeur $2L_\omega$ et $P_{1D}^{[2]}$ pour les parties extérieures. Le calcul des moments doit donc s'écrire :

$$\langle x^k \rangle = 2 \int_0^{L_\omega} x^k P_{1D}^{[5]}(x, t) dx + 2 \int_{L_\omega}^{+\infty} x^k P_{1D}^{[2]}(x, t) dx, \quad (7.79)$$

où nous avons utilisé la parité de l'intégrande pour limiter les intervalles d'intégration. Cette formule peut également s'écrire :

$$\frac{\langle x^k \rangle}{2} = \int_0^{L_\omega} x^k P_{1D}^{[5]}(x, t) dx + \int_0^{+\infty} x^k P_{1D}^{[2]}(x, t) dx - \int_0^{L_\omega} x^k P_{1D}^{[2]}(x; t) dx. \quad (7.80)$$

soit asymptotiquement :

$$\langle x^k \rangle(t) \sim \int_0^{L_\omega} x^k [P_{1D}^{[5]}(x, t) - P_{1D}^{[2]}(x, t)] dx + \int_0^{+\infty} x^k P_{1D}^{[2]}(x, t) dx. \quad (7.81)$$

Or, comme montré dans la section 7.3.2, le dernier terme de l'expression précédente est en $t^{k/3}$ et il nous reste à évaluer la première intégrale :

$$\begin{aligned} \langle x^k \rangle &\sim \int_0^{L_\omega} x^k [P_{1D}^{[5]}(x, t) - P_{1D}^{[2]}(x, t)] dx \\ &\sim \int_0^{L_\omega} x^k \left\{ x^{-1} H_{3,3}^{2,1} [xt^{-1/3}] - t^{-1/3} \text{Ai} [xt^{-1/3}] \right\} dx. \end{aligned} \quad (7.82)$$

Après un changement de variable et du fait que $L_\omega \sim t^{1/3}$ on trouve finalement :

$$\boxed{\langle x^k \rangle(t) \sim t^{k/3},} \quad (7.83)$$

comportement qui est en accord avec nos résultats de la partie 6.5. Ce résultat s'explique par le fait que les régions **[2]** et **[5]** respectent la loi d'échelle à un paramètre et ce en présence ou non de multifractalité. Les déviations aux temps courts observés numériquement pourraient provenir de la région **[4]** qui viole cette loi d'échelle.

7.6 Synthèse des prédictions théoriques

À ce stade, de nombreuses formules ont été présentées. Nous rappelons les deux résultats essentiels à la détermination numérique de D_2 réalisée dans la partie 7.7. La description complète du propagateur en intensité doit tenir compte de trois « ingrédients » :

- i. la loi d'échelle à un paramètre ;
- ii. la prédiction auto-cohérente du coefficient de diffusion ;
- iii. l'*ansatz* de Chalker relatif au coefficient de diffusion permettant de rendre compte de la multifractalité.

Ces trois outils, à l'aide des résultats sur les équations de diffusion fractionnaire, permettent de prédire l'expression du propagateur en intensité dans l'espace (x, t) d'un système **replié générique**. Pour les grandes distances — région **[2]** — on obtient une expression faisant intervenir la fonction d'Airy et trouvée pour la première fois dans [Lem09 ; Lem+10b] :

$$\boxed{P_{1D}^{[2]}(x; t) = \frac{3}{2} \left(3\sqrt{D_B^3 \tau t} \right)^{-1/3} \text{Ai} \left[\left(3\sqrt{D_B^3 \tau t} \right)^{-1/3} |x| \right].} \quad (7.84)$$

À petite distance — région [5] — l'expression devient :

$$P_{1D}^{[5]}(x; t) = \frac{1}{D_2|x|} H_{3,3}^{2,1} \left[\left(\frac{\ell^2}{D_B \tau} \right)^{1/D_2} \frac{|x|t^{-1/3}}{\ell \tau^{-1/3}} \left| \begin{array}{ccc} \left(1, \frac{1}{D_2}\right) & \left(1, \frac{1}{3}\right) & \left(1, \frac{1}{2}\right) \\ (1, 1) & \left(1, \frac{1}{D_2}\right) & \left(1, \frac{1}{2}\right) \end{array} \right. \right], \quad (7.85)$$

dont une forme approchée utile pour la détermination numérique de D_2 est donnée par :

$$P_{1D}^{[5]}(x; t) \sim t^{-1/3} \left[A_5 - B_5 \left(|x|t^{-1/3} \right)^{D_2} \right]. \quad (7.86)$$

7.6.1 Expressions utilisées pour la suite

Une dernière remarque s'impose : ces deux résultats pour les régions [2] et [5] ne sont pas exacts et en particulier les constantes $A_{2,5}$ et $B_{2,5}$ ne sont certainement pas exactes dans la mesure où ces équations ont été résolues avec des conditions aux bords spécifiques.

Autrement dit, une résolution complète du problème devrait tenir compte du poids plus ou moins important de la région [5] ce qui permettrait de savoir en quel point et de quelle manière se réalise le passage de la fonction de Fox à la fonction d'Airy. C'est entre autre pour cette raison que la détermination numérique de D_2 se fera à l'aide de l'expression approchée du propagateur dans la région [5] et non de la fonction de Fox.

7.6.2 Comportement des deux solutions à l'origine

Pour $x = 0$, les expressions asymptotiques du propagateur dans les régions [2] et [5] n'ont pas nécessairement le même comportement selon la valeur de D_2 .

Pour la région [2] non multifractale et donc indépendante de D_2 , le propagateur est continu mais non dérivable en $x = 0$.

Pour la région [5] le même comportement est observé à condition que $1 < D_2 < 2$. Si $D_2 < 1$ alors le propagateur divergerait et à l'opposé, pour $D_2 > 2$, le propagateur serait continu et dérivable une fois. Dans ce dernier cas de figure, la région [5] serait fortement masquée par la fonction d'Airy et la dimension D_2 serait alors plus délicate à déterminer.

7.7 Détermination numérique de D_2

Dans cette dernière partie, nous déterminerons la dimension D_2 à partir des données numériques et en s'aidant du propagateur en intensité pour les régions [2] et [5] dont les expressions respectives sont données par les équations (7.84) et (7.86).

Trois méthodes numériques sont envisageables :

- i. réaliser la régression non linéaire du petit pic — partie centrale du propagateur en intensité — à l'aide de l'expression (7.86) relative à la région [5] uniquement ;

- ii. calculer la transformée de Fourier ($\{q, \omega\} \leftrightarrow \{x, t\}$) du propagateur à partir du coefficient de diffusion pour les **deux régions** — théorie auto-cohérente pour la région [2] et *ansatz* de Chalker pour la région [5] — puis déterminer pour quelle valeur de D_2 les données numériques sont le mieux modélisées ;
- iii. déterminer l'expression complète du coefficient de diffusion en calculant directement la transformée de Fourier ($\{x, t\} \leftrightarrow \{q, \omega\}$) du propagateur.

Parmi ces trois méthodes seules les deux premières donnent des résultats probants et cohérents à l'heure actuelle. La troisième méthode devrait pouvoir être utilisée mais le rapport signal sur bruit ne permettait pas une exploitation des résultats. Dans la suite, nous détaillerons donc les deux premières méthodes mais étudierons avant tout le domaine de validité des expressions utilisées, question importante pour la mise en œuvre des deux méthodes.

7.7.1 Domaine de validité du propagateur

Les données numériques montrent que le petit pic se distingue de la composante décrite par la fonction d'Airy seulement pour des temps de propagation suffisamment longs. Pour un nombre de kicks trop petit, le régime [5] contribue peu et la détermination de D_2 devient impossible à notre connaissance.

Le temps n'est pas la seule limite de validité des expressions du propagateur en intensité. Pour des distances inférieures au libre parcours moyen ℓ , on voit clairement que le petit pic cesse de croître.

Les expressions utilisées dans la suite pour déterminer D_2 doivent donc se faire dans la limite hydrodynamique :

- i. temps longs ;
- ii. distances supérieures au libre parcours moyen.

Les temps longs sont relativement faciles à atteindre. Pour tenir compte de la limite de validité spatiale, en dessous du libre parcours moyen le propagateur a été multiplié par une gaussienne dans l'espace réciproque. Ce choix, certes arbitraire, ne concerne qu'un intervalle très restreint et n'affecte pas sensiblement les résultats.

7.7.2 Première méthode

Cette première méthode consiste à utiliser le développement asymptotique calculé dans la partie 7.4 :

$$P_{\text{qp}}^{[5]}(x; t) = t^{-1/3} \left(A_5 - B_5 |xt^{-1/3}|^{D_2-1} \right). \quad (7.87)$$

Le *fit* est facilité en utilisant la variable $\mathcal{P} \doteq xt^{-1/3}$ et peut donc être directement réalisé sur la fonction :

$$t^{1/3} P_{\text{qp}}^{[5]}(\mathcal{P}, t) = A_5 - B_5 |\mathcal{P}|^{D_2-1} \quad (7.88)$$

Temps t (nombre de kicks)	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	4×10^8
D_2	1.37	1.33	1.31	1.28	1.26	1.26	1.26
$\Delta(D_2)$	0.15	0.05	0.04	0.03	0.02	0.02	0.02

Tableau 7.3 Valeurs de la dimension multifractale D_2 obtenues à partir d'une régression de la forme asymptotique. La dernière ligne indique l'incertitude associée à la mesure de D_2 . Celle-ci n'est pas d'ordre statistique mais reflète les écarts obtenus selon la méthode employée (*cut-off* ou convolution). Sur la figure 7.4, nous utiliserons la simulation réalisée à $t = 10^6$ kicks.

qui ne dépend pas explicitement du temps.

Cette expression n'étant valable que pour la région [5], elle ne se manifeste donc que sur la partie centrale du paquet d'ondes moyen. Dès lors, le *fit* se limite à un certain intervalle. La dimension D_2 ainsi obtenue est la plus précise pour $|\mathcal{P}| < 2.25$. De légères variations de cet intervalle modifient faiblement la valeur de D_2 .

En résumé, la détermination de D_2 consiste à éliminer les $|\mathcal{P}| > 2.25$ pour ne pas tenir compte du régime [2] (fonction d'Airy) et à convoluer la fonction servant de modèle par une gaussienne pour tenir compte de la physique en-dessous du libre parcours moyen. La figure 7.4 ainsi que le tableau 7.3 résumant l'ensemble des résultats témoignent du bon accord entre la prédiction théorique et les simulations numériques.

Pour les temps longs, on observe que $D_2 = 1.26 \pm 0.02$, valeur en complet accord avec celle trouvée pour le modèle d'Anderson [HK99].

7.7.3 Seconde méthode

Cette dernière méthode utilise directement les expressions du coefficient de diffusion dans les régimes [2] et [5]. Après une transformée de Fourier nous obtenons le propagateur global c'est-à-dire :

- pour les régions [2] et [5] ;
- à tous les temps.

L'avantage de cette méthode est de tenir compte à la fois des régimes [2] et [5] : l'intervalle sur lequel le propagateur est décrit par la forme $P_{1D}^{[5]}(x; t)$ n'est pas explicitement restreint mais tient compte de la qualité de la régression par la fonction d'Airy dans les « ailes » du paquet d'ondes moyen.

À l'heure actuelle, la limite de cette méthode vient de notre méconnaissance du coefficient de diffusion complet. En effet, celui-ci est connu pour la région [2] et un *ansatz* a été donné par Chalker pour la région [5]. En revanche, l'expression exacte du coefficient pour la région [5] et la jonction des régions [2] et [5] sont inconnues. Autrement dit, les expressions pour

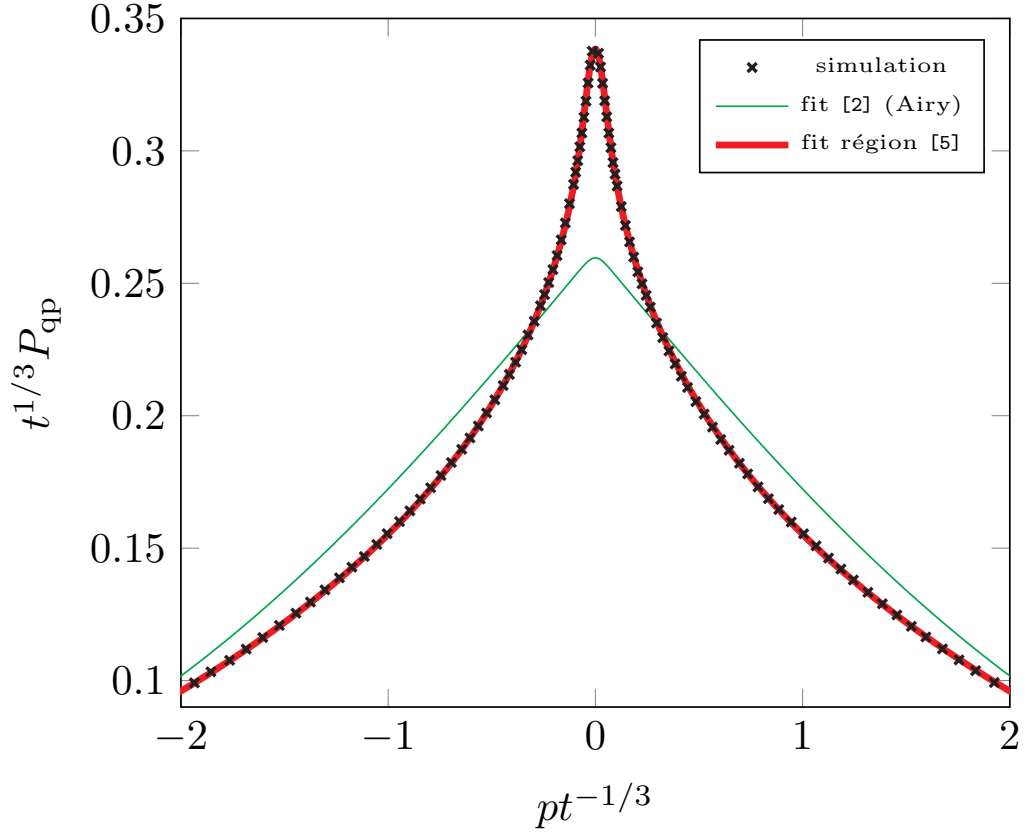


Figure 7.4 Comparaison du propagateur en intensité (KRQP à $t = 10^6$ kicks au point critique) obtenue par une simulation numérique (croix noires) avec le *fit* (équation (7.86)) réalisé à partir de l'*ansatz* de Chalker pour le coefficient de diffusion dans la région [5] (voir partie 7.4). Le *fit* pour le petit pic est fait à l'aide de la méthode 1. La courbe verte correspond à la prédiction auto-cohérente c'est-à-dire dans la région [2] du diagramme de Chalker dont l'expression du propagateur est donnée à l'équation (7.84). Comme expliqué dans la partie 6.4, cette prédiction ne rend pas compte du petit pic apparaissant aux faibles valeurs de $|p|$: seule la multifractalité permet de prédire correctement ce petit pic.

les régimes [2] et [5] sont asymptotiques et le passage de l'une à l'autre de ces régions reste inconnu.

Dans la suite, le point de transition entre ces deux régions sera noté x_0 et constituera l'un des paramètres de la régression. Pour interpoler les deux régimes asymptotiques, nous utiliserons la fonction suivante et représentée sur la figure 7.5 :

$$f(x) = \left[1 + \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\gamma(d-D_2)} \right]^{-1/\gamma}. \quad (7.89)$$

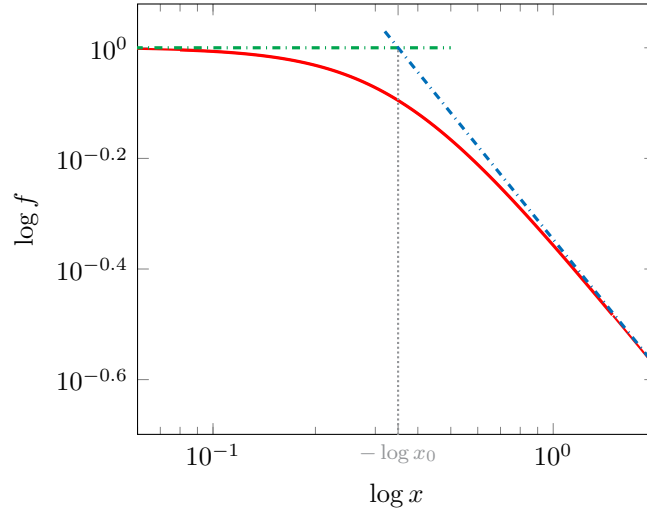


Figure 7.5 Représentation graphique de la fonction f définie à l'équation (7.89) et utilisée pour interpoler les régimes [2] et [5] du coefficient de diffusion.

Dans l'état actuel de nos connaissances, ce choix de fonction est arbitraire et d'autres choix restent possibles. En faisant intervenir la fonction f , la forme générale du coefficient de diffusion est

$$D(q, i\omega) = \frac{3}{2^{2/3}} D_B (\omega\tau)^{1/3} f(qL_{i\omega}), \quad (7.90)$$

où γ est un autre paramètre qui rend compte de la manière de relier les deux régimes asymptotiques.

En résumé, cette régression dépend de cinq paramètres que l'on peut regrouper en trois familles :

microscopique : ce sont le coefficient de diffusion D_B dans la phase métallique et le temps de *scattering* τ ;

multifractalité : la dimension D_2 qui est la valeur cherchée et qui décrit la multifractalité du propagateur en intensité ;

fit : ce sont les paramètres qui décrivent la transition entre les deux régimes asymptotiques à savoir x_0 et γ .

Pour obtenir les meilleurs résultats possibles, la régression a été réalisée trois fois :

- i. une première fois en laissant libres les cinq paramètres précédents ;
- ii. une seconde fois en fixant $\gamma = 3$, valeur pour laquelle l'itération précédente était la plus stable ;

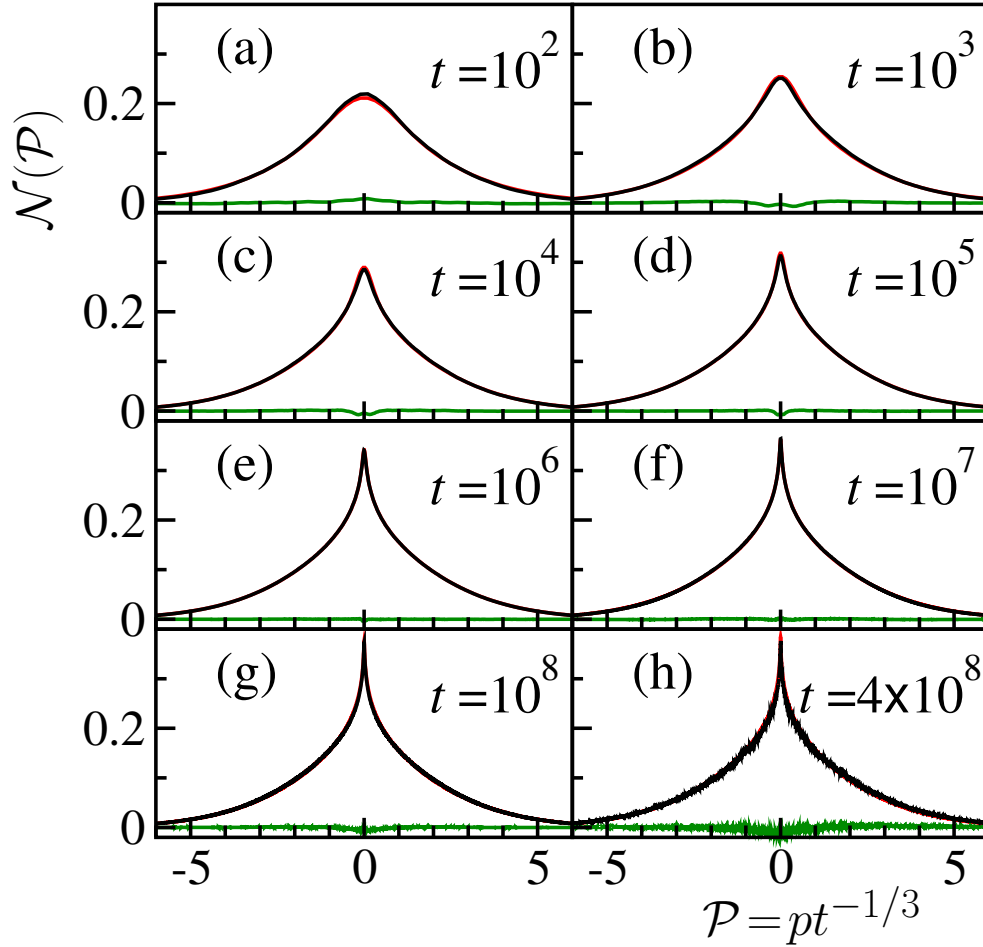


Figure 7.6 Comparaison du propagateur en intensité obtenu par une simulation numérique (courbe noire) avec le *fit* (courbe rouge) obtenu par la méthode 2. La courbe verte correspond aux résidus. La difficulté à distinguer la courbe rouge de la courbe noire et la faible amplitude des résidus témoignent de la qualité du *fit* sur des temps de propagation écartés de plus de six ordres de grandeur, avec une expression unique du coefficient de diffusion $D(q, \omega)$. La figure est issue de l'article publié dans *Physical Review A* [ACD19]

iii. une dernière fois en fixant $x_0 = 0.3$ selon les mêmes critères que pour γ .

Cette méthode contient plus de paramètres libres lors de la première itération mais les résultats obtenus au temps longs sont plus précis que la méthode 1 d'un facteur 2. La figure 7.6 témoigne de la fiabilité de cette méthode. Ainsi, pour des temps allant **jusqu'à** $t = 4 \times 10^8$ kicks, on trouve :

$$\boxed{D_2 = 1.24 \pm 0.01.} \quad (7.91)$$

Il est important de noter que l'analyse fait ici intervenir tous les temps de mesure, c'est-à-dire qu'une seule expression du coefficient de diffusion $D(q, \omega)$ permet de reproduire la propagation pour des temps variant de plus de 6 ordres de grandeur.

L'ensemble de ces résultats ont fait l'objet d'un article dans *Physical Review A* [[ACD19](#)].

7.8 Conclusion sur la détermination de D_2

Malgré les difficultés posées par le système étudié, à savoir son caractère unidimensionnel et son anisotropie, nous avons montré la possibilité de déterminer numériquement la dimension multifractale D_2 et de retrouver les résultats des travaux [[VRR08](#); [RVR08](#)] précédents portant sur les états propres du modèle d'Anderson tridimensionnel. Une analyse multifractale canonique des états de Floquet (tridimensionnels) du kicked pseudo-rotor permettrait de confirmer que le spectre est identique à celui du modèle d'Anderson.

Pour autant, cette dimension peut-elle être mesurée expérimentalement ? Les temps de propagation utilisés dans cette étude ne sont actuellement pas atteignables expérimentalement. Actuellement la durée de l'expérience est de l'ordre de 10^3 kicks [[Man+15](#)], temps pour lequel la dimension multifractale pourrait être extraite. Cependant les simulations numériques ayant été réalisées sur un très grand nombre de configurations du désordre, la mesure expérimentale nécessitera que l'expérience soit facilement reproductible et de manière stable.

Sur le plan purement théorique, nous avons trouvé une expression exacte du propagateur pour la région [[5](#)]. Cette solution exacte à une équation différentielle fractionnaire est encourageante pour une étude numérique et théorique plus poussée. Enfin, elle pourrait faciliter l'analyse des résultats expérimentaux.

Chapitre 8

Conclusion

L'ENSEMBLE de ces travaux nécessite d'être mis en perspective pour en comprendre l'intérêt. Depuis plusieurs années maintenant, les atomes froids constituent un support particulièrement adapté à l'étude de systèmes désordonnés. Deux approches ont été privilégiées : une première directement basée sur la propagation d'ondes de matière atomiques dans un potentiel désordonné ; une seconde simulant un modèle d'Anderson anisotrope par l'intermédiaire du kicked rotor quasi périodique — KRQP — étudié dans ce manuscrit. La première approche a permis l'observation de la localisation d'Anderson en dimension 1 [Bil+08 ; Roa+08] et 3 [Kon+11 ; Jen+12 ; Sem+15] tandis que la seconde s'est attachée à mesurer les propriétés critiques (exposant et universalité) de la transition d'Anderson en dimension trois [Lem+09 ; LGD09].

Bien que prometteuses, ces deux approches n'ont pas encore permis de montrer expérimentalement le caractère multifractal des fonctions d'ondes à la transition, tandis qu'un autre dispositif reposant sur des ondes sonores a pu caractériser la multifractalité de ces ondes par l'intermédiaire du spectre de multifractalité [Fae+09].

L'idée principale de cette thèse a donc été d'étudier théoriquement et numériquement la pertinence d'une analyse multifractale des fonctions d'ondes du KRQP.

Les recherches se sont essentiellement articulées autour de deux axes :

- i. le premier, développé dans le chapitre 6, a consisté à extraire le maximum d'information du spectre de multifractalité pour notamment confirmer le diagramme de Chalker ;
- ii. le second, objet du chapitre 7, a exploité le diagramme de Chalker pour déterminer numériquement la dimension multifractale D_2 .

Une première spécificité du KRQP est que l'on étudie des paquets d'ondes et non des états propres comme c'est souvent le cas dans les études sur la multifractalité. Cela nécessite des adaptations — voir par exemple au chapitre 6 la séparation de la composante de « multifractalité d'enveloppe » — mais ne semble nullement problématique, comme le montre le chapitre 7 où la dimension multifractale D_2 des états propres est simplement extraite du comportement moyen d'un paquet d'ondes.

Une seconde spécificité est que le KRQP est un système unidimensionnel. Cela constitue une limite à l’obtention d’un spectre multifractal exploitable, c’est-à-dire comparable aux simulations numériques sur les états propres tridimensionnels [VRR08 ; RVR08] et à la théorie [EM08]. En effet, dans le cadre de la transition d’Anderson, le caractère multifractal des ondes s’explique par les fluctuations **spatiales** importantes qui, dans le cas du KRQP, sont gommées par le repliement, c’est-à-dire le passage d’un système tridimensionnel *mappé* sur un modèle d’Anderson anisotrope vers le KRQP unidimensionnel. Malgré ces limites, le chapitre 6 a montré la pertinence de l’analyse multifractale pour le KRQP en calculant une dimension effective notée \mathcal{D}_2 — très différente de la dimension D_2 du modèle d’Anderson tridimensionnel — extraite à partir des paquets d’ondes unidimensionnels. Dans un second temps, l’étude détaillée de la dimension \mathcal{D}_2 , se fondant directement sur les fluctuations des paquets d’ondes, nous a permis de valider l’essentiel du diagramme de Chalker [Cha90]. Dans ce même chapitre, une analyse détaillée de la dynamique du KRQP a permis de confirmer la loi d’échelle à un paramètre au point critique.

En confirmant le diagramme de Chalker et surtout en montrant que l’essentiel de la multifractalité se situe au centre du profil de densité, nous avons pu déterminer numériquement [ACD19] la dimension généralisée D_2 dans le chapitre 7. L’hypothèse initiale, déjà mentionnée par G. Lemarié [Lem09] et selon laquelle le « petit pic » qui se détachait du pic d’Airy provenait de la multifractalité a donc été vérifiée. Un dernier résultat présent dans cette thèse est le fait qu’au point critique, le propagateur suit finalement une équation de diffusion fractionnaire pour les deux régions du diagramme de Chalker étudiées.

À ce titre, le travail effectué durant cette thèse ouvre un champ de recherches à la fois théoriques, numériques et expérimentales. D’un point de vue expérimental, se pose la question de savoir si la dimension D_2 pourrait être mesurée ? Comme vu dans le chapitre 7, les temps de propagation utilisés pour observer le pic dû à la multifractalité sont difficilement atteignables expérimentalement. Une première piste de travail consisterait à évaluer le temps de propagation nécessaire pour extraire expérimentalement la dimension D_2 . Les temps de propagations nécessaires à l’obtention du petit pic dépendent-ils de la force du désordre et de l’anisotropie ? Une autre question ouverte concerne l’universalité du spectre de multifractalité du système « replié » unidimensionnel, à savoir dépend-il de paramètres microscopiques ? Plus généralement, nous ignorons aujourd’hui comment calculer les propriétés du système unidimensionnel à partir de celles du système tridimensionnel.

Un autre avantage du KRQP est qu’il est généralisable à d’autres dimensions, autrement dit en faisant dépendre les kicks de d fréquences incommensurables, nous sommes en mesure d’étudier la transition d’Anderson (exposant critique, universalité et multifractalité) en dimension d .

Enfin, le fait que le propagateur soit solution d’une équation de diffusion fractionnaire ouvre d’autres possibilités théoriques. Les pistes les plus simples consisteraient à résoudre cette équation pour la région [4] où la multifractalité persiste dans les régimes isolant et métallique. Un autre enjeu serait de construire une équation de diffusion fractionnaire — et

ses solutions — qui englobera de manière simple les différents régimes du diagramme de Chalker.

Annexe A

Fonctions spéciales

A.1 Fonction d'Airy

La fonction d'Airy notée $\text{Ai}(x)$ est définie par [AS68] :

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt. \quad (\text{A.1})$$

Une autre forme utile dans la suite est le développement [VS, éq (2.36)] :

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{3^{2/3}\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right) \sin\left(\frac{2}{3}(n+1)\pi\right) (3^{1/3}x)^n. \quad (\text{A.2})$$

En particulier on a :

$$3^{2/3}\text{Ai}(3^{-1/3}x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right) \sin\left(\frac{2}{3}(n+1)\pi\right) x^n. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Fonctions de Mittag-Leffler

Définition

Les fonctions de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}$ sont définies pour $z \in \mathbb{C}$ par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \beta > 0. \quad (\text{A.4})$$

Dans la suite, nous nous intéresserons surtout à $E_{\alpha}(x) \doteq E_{\alpha,1}(x)$ où $x \in \mathbb{R}$.

Pour x réel, ce qui est le cas dans le présent manuscrit, la transformée de Mellin [MPG07] des fonctions de Mittag–Leffler est donnée par la formule suivante [Gor+14, éq. (4.10.3)] :

$$\mathcal{M} [E_{\alpha,\beta}(-x); s] = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)}, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1. \quad (\text{A.5})$$

Par la suite nous aurons besoin de la transformée de Mellin de $E_{\alpha/3}[-K|q|^\alpha]$ qui peut se calculer par un changement de variable ou grâce aux propriétés de la transformée de Mellin. On trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} [E_{\alpha/3}(-K|q|^\alpha); s] &= \frac{1}{\alpha} \mathcal{M} \left[E_{\alpha/3} \left(-(K^{1/\alpha}|q|)^\alpha \right); \frac{s}{\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{\Gamma(s/\alpha)\Gamma(1-s/\alpha)}{\Gamma(1-s/3)} K^{-s/\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Intégrale utile pour la transformée de Fourier

On considère l'intégrale suivante qui apparaîtra dans la partie B.3 :

$$I_c(x) = \int_0^\infty E_{\alpha/3}(-K|q|^\alpha) \cos(qx) \, dq. \quad (\text{A.7})$$

Pour calculer I_c , il est nécessaire de distinguer le cas $x = 0$ du cas $x \neq 0$. On s'intéresse d'abord au cas $x = 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} I_c(0) &= \int_0^\infty E_{\alpha/3,1}[-K|q|^\alpha] \, dq = \frac{K^{-1/\alpha}}{\alpha} \int_0^\infty E_{\alpha/3}[-|Q|] Q^{1/\alpha-1} \, dQ \\ &= \frac{K^{-1/\alpha}}{\alpha} \mathcal{M} [E_{\alpha/3}(-|Q|); s = 1/\alpha] \\ &= \frac{K^{-1/\alpha}}{\alpha} \frac{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha)}{\Gamma(1-1/3)}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Au final,

$$I_c(0) = \frac{K^{-1/\alpha}}{\alpha} \frac{\pi}{\Gamma(2/3) \sin(\pi/\alpha)} \quad (\text{A.9})$$

Pour le cas $x \neq 0$, on utilise l'identité de Parseval :

$$\int_0^\infty f(q)g(q) \, dq = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s)g^*(1-s) \, ds, \quad (\text{A.10})$$

où f^* (respectivement g^*) est la transformée de Mellin de f (respectivement g) et γ est un nombre déterminé par les conditions d'existence de la transformée de Mellin [MPG07]. Dans le cas de I_c ,

$$f(q) = E_{\alpha/3}(-K|q|^\alpha) \quad \text{et} \quad f^*(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{\Gamma(s/\alpha)\Gamma(1-s/\alpha)}{\Gamma(1-s/3)} K^{-s/\alpha}, \quad (\text{A.11})$$

et

$$g(q) = \cos(qx) \quad \text{et} \quad g^*(s) = x^{-s} \mathcal{M}[\cos q; s] = x^{-s} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right). \quad (\text{A.12})$$

L'intégrale devient donc :

$$I_c(x) = \frac{1}{\alpha x} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s/\alpha)\Gamma(1-s/\alpha)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s/3)} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \left(\frac{K^{1/\alpha}}{x}\right)^{-s} ds. \quad (\text{A.13})$$

Enfin, en utilisant la formule de réflexion de la fonction Γ [AS68, éq. (6.1.17)], on aboutit à :

$$I_c(x) = \frac{1}{\alpha x} \frac{1}{2i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s/\alpha)\Gamma(1-s/\alpha)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s/3)\Gamma(1-s/2)\Gamma(s/2)} \left(\frac{K^{1/\alpha}}{x}\right)^{-s} ds. \quad (\text{A.14})$$

A.3 Fonctions de Wright

A.3.1 Définition

En suivant [MSH10, éq. (1.124)], on définit la fonction de Wright par :

$$\phi(a, b, z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n! \Gamma(an + b)}, \quad a \in \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad b, z \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.15})$$

A.3.2 Lien avec la fonction d'Airy

Considérons la fonction de Wright de paramètres $a = -1/3$ et $b = 2/3$. Pour $z = -x \in \mathbb{R}$, on a par définition :

$$\phi\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -x\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n}{n! \Gamma\left(-\frac{n}{3} + \frac{2}{3}\right)}, \quad (\text{A.16})$$

soit

$$\phi\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -x\right) = \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{1+n}{3}\right) \sin\left((n+1)\frac{\pi}{3}\right) x^n. \quad (\text{A.17})$$

Or pour $n \in \mathbf{N}$, on a : $(-1)^n \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right)$, donc :

$$\phi\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -x\right) = \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \Gamma\left(\frac{(1+n)\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2}{3}(n+1)\pi\right) x^n. \quad (\text{A.18})$$

On reconnaît la relation (A.3), soit finalement :

$$\phi\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -x\right) = 3^{2/3} \text{Ai}(3^{-1/3}x). \quad (\text{A.19})$$

A.4 Fonctions de Fox

Définition générale

Les fonctions de Fox H [Fox61] constituent une généralisation des fonctions de Meijer. En suivant [MSH10] nous les définissons de la manière suivante :

$$\begin{aligned} H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{array}{cccc} (a_1, A_1) & (a_2, A_2) & \dots & (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1) & (b_2, B_2) & \dots & (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] \\ = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s)} z^{-s} ds, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

avec $0 \leq m \leq q$ et $0 \leq n \leq p$. Les termes en minuscules peuvent être complexes : $\{a_j, b_j\} \in \mathbf{C}$; tandis que les termes en majuscules sont nécessairement des réels positifs : $\{A_j, B_j\} \in \mathbf{R}_+$. Le contour \mathcal{L} utilisé est discuté en détail dans la référence [MSH10], nous détaillerons le contour d'intégration pour les deux seules fonctions de Fox utiles dans ce manuscrit.

En introduisant de nouvelles notations, la définition (A.20) peut s'écrire :

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{array}{c} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds; \quad (\text{A.21})$$

où, en n'indiquant plus la dépendance en s :

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) = \frac{P_{\uparrow}^m P_{\uparrow}^n}{P_{\downarrow}^q P_{\downarrow}^p} \quad (\text{A.22})$$

avec P_{\uparrow}^m (P_{\uparrow}^n) le produit de fonctions Γ figurant à gauche (droite) au numérateur soit :

$$P_{\uparrow}^m(s) \doteq \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \quad \text{et} \quad P_{\uparrow}^n(s) \doteq \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s). \quad (\text{A.23})$$

De manière similaire nous notons P_{\downarrow}^q (P_{\downarrow}^p) le produit à gauche (droite) au dénominateur, soit :

$$P_{\downarrow}^q(s) \doteq \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s) \quad \text{et} \quad P_{\downarrow}^p(s) \doteq \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s). \quad (\text{A.24})$$

Si :

- $n = 0$ alors $P_{\uparrow}^n = 1$,
- $m = q$ alors $P_{\downarrow}^q = 1$,
- $n = p$ alors $P_{\downarrow}^p = 1$.

Dans la référence [MPS05], ces fonctions sont définies différemment.

A.5 Fonctions de Fox utilisées dans ce manuscrit

Comme montré en annexe B.2, la fonction de Fox la plus générale qui apparaît dans le cadre des équations fractionnaires de diffusion suivies par le propagateur en intensité P_{1D} est la suivante :

$$H_{3,3}^{2,1} \left[z \left| \begin{matrix} \left(1, \frac{1}{\alpha}\right) & \left(1, \frac{1}{3}\right) & \left(1, \frac{1}{2}\right) \\ \left(1, 1\right) & \left(1, \frac{1}{\alpha}\right) & \left(1, \frac{1}{2}\right) \end{matrix} \right. \right]. \quad (\text{A.25})$$

avec $\alpha = D_2$ (la dimension fractale déterminée dans le chapitre 7). En reprenant les notations introduites dans la partie A.4, nous avons :

$$P_{\uparrow}^{m=2} = \prod_{j=1}^2 \Gamma(b_j + B_j s) = \Gamma(1 + s)\Gamma(1 + s/\alpha), \quad (\text{A.26})$$

$$P_{\uparrow}^{n=1} = \prod_{j=1}^1 \Gamma(1 - a_j - A_j s) = \Gamma(1 - 1 - s/\alpha) = \Gamma(-s/\alpha), \quad (\text{A.27})$$

$$P_{\downarrow}^{q=3} = \prod_{j=3}^3 \Gamma(1 - b_j - B_j s) = \Gamma(1 - 1 - s/2) = \Gamma(-s/2), \quad (\text{A.28})$$

et

$$P_{\downarrow}^{p=3} = \prod_{j=2}^3 \Gamma(a_j + A_j s) = \Gamma(1 + s/3)\Gamma(1 + s/2). \quad (\text{A.29})$$

On aura donc

$$\mathcal{H}_{3,3}^{2,1}(s) = \frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1+s/\alpha)\Gamma(-s/\alpha)}{\Gamma(-s/2)\Gamma(1+s/3)\Gamma(1+s/2)}. \quad (\text{A.30})$$

La représentation intégrale de la fonction de Fox est alors :

$$\mathbb{H}_{3,3}^{2,1} \left[z \left| \begin{matrix} (1, \frac{1}{\alpha}) & (1, \frac{1}{3}) & (1, \frac{1}{2}) \\ (1, 1) & (1, \frac{1}{\alpha}) & (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1+s/\alpha)\Gamma(-s/\alpha)}{\Gamma(-s/2)\Gamma(1+s/3)\Gamma(1+s/2)} z^{-s} ds \quad (\text{A.31})$$

Dans la région [2] du diagramme de Chalker on a $\alpha = D_2 = 2$ tandis que dans la région [5], D_2 doit être déterminé numériquement.

A.5.1 Fonction de Fox pour la région [2] non multifractale

Dans la région [2] du diagramme de Chalker, nous avons montré que $\alpha = 2$ (dérivée partielle d'ordre 2 pour l'espace) et, pour alléger les notations, nous noterons $\mathbb{H}^{[2]}$ la fonction de Fox associée :

$$\mathbb{H}^{[2]}(z) \doteq \mathbb{H}_{3,3}^{2,1} \left[z \left| \begin{matrix} (1, \frac{1}{2}) & (1, \frac{1}{3}) & (1, \frac{1}{2}) \\ (1, 1) & (1, \frac{1}{2}) & (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}^{[2]}} \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s/3)} z^{-s} ds. \quad (\text{A.32})$$

La fonction de Fox $\mathbb{H}^{[2]}$ possède des pôles en $s_j = -(1+j)$ pour $j \in \mathbb{N}$. On choisit comme contour d'intégration : $\mathcal{L}^{[2]} = \mathcal{L}_{\gamma \pm i\infty}$, c'est-à-dire le contour partant de $\gamma - i\infty$ et allant à $\gamma + i\infty$ avec $\gamma \in]-1, +\infty[$.

On obtient finalement :

$$\mathbb{H}^{[2]}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s/3)} z^{-s} ds = \mathbb{H}_{1,1}^{1,0} \left[z \left| \begin{matrix} (1, \frac{1}{3}) \\ (1, 1) \end{matrix} \right. \right]. \quad (\text{A.33})$$

A.5.2 Lien entre la fonction de Fox et la fonction d'Airy

On se place dans le cas où l'argument de la fonction de Fox est réel : $z = x \in \mathbb{R}$. La représentation intégrale de la fonction de Fox dans la région [2] est :

$$\mathbb{H}^{[2]}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s/3)} x^{-s} ds. \quad (\text{A.34})$$

Soit en effectuant le changement de variable $s = 3\sigma$:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^{[2]}(x) &= \frac{3}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(1+3\sigma)}{\Gamma(1+\sigma)} x^{-3\sigma} d\sigma \\ &= -\frac{3}{2i\pi^2} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(-s)\Gamma(1+3s) \sin(\pi s) x^{-3s} ds. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Constatant qu'il y a des pôles en $s_k = -(k+1)/3$, avec $k \in \mathbb{N}$, on applique le théorème des résidus pour finalement trouver :

$$H^{[2]}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right) x^{n+1}. \quad (\text{A.36})$$

Soit

$$H^{[2]}(x) = \frac{x}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right) (-x)^n, \quad (\text{A.37})$$

que l'on peut écrire :

$$H^{[2]}(x) = \frac{x}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n}{n! \Gamma\left(\frac{2-n}{3}\right)}. \quad (\text{A.38})$$

On reconnaît ici la définition de la fonction de Wright de paramètres $a = -1/3$ et $b = 2/3$, donc :

$$H^{[2]}(x) = x\phi\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -x\right) = 3^{2/3} x \text{Ai}(3^{-1/3}x). \quad (\text{A.39})$$

A.5.3 Fonction de Fox pour la région [5] multifractale

Dans la région [5] où se manifeste la multifractalité les paramètres sont

$$\boxed{\alpha = 3\mu = D_2}. \quad (\text{A.40})$$

Nous considérons donc la fonction de Fox $H^{[5]}$ pour un argument réel :

$$H^{[5]}(x) \doteq H_{3,3}^{2,1} \left[x \left| \begin{matrix} \left(1, \frac{1}{\alpha}\right) & \left(1, \frac{1}{3}\right) & \left(1, \frac{1}{2}\right) \\ (1, 1) & \left(1, \frac{1}{\alpha}\right) & \left(1, \frac{1}{2}\right) \end{matrix} \right. \right], \quad (\text{A.41})$$

dont l'expression intégrale est

$$H^{[5]}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}^{[5]}} \frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1+\frac{s}{\alpha})\Gamma(-\frac{s}{\alpha})}{\Gamma(-\frac{s}{2})\Gamma(1+\frac{s}{3})\Gamma(1+\frac{s}{2})} x^{-s} ds. \quad (\text{A.42})$$

Les pôles de cette fonction se situent en $s_j = -(1+j)$, $\mathfrak{s}_k = -\alpha(1+k)$ et $\sigma_l = \alpha l$. Le contour d'intégration doit séparer les pôles s_j, \mathfrak{s}_k des pôles σ_l avec $j, k, l \in \mathbb{N}$. Il faut donc :

$$1+j \neq -\alpha l \quad \text{et} \quad -\alpha(1+j) \neq \alpha l \quad \text{pour} \quad j, l \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.43})$$

ces deux conditions peuvent s'exprimer :

$$j \neq -(\alpha l + 1). \quad (\text{A.44})$$

Cette condition est toujours vérifiée dans la mesure où $\alpha > 0$.

On peut donc reprendre le même contour d'intégration que précédemment, à savoir : $\mathcal{L}^{[5]} = \mathcal{L}_{\gamma \pm i\infty}$, contour qui part de $\gamma - i\infty$ pour aller à $\gamma + i\infty$ avec $\gamma \in]-\alpha; 0[$.

Annexe B

Équations de diffusion fractionnaires en espace et en temps

L'objectif de cette partie est de définir les différents opérateurs apparaissant dans les équations fractionnaires de diffusion. Dans ce type d'équations différentielles qui s'écrivent de manière générale :

$$D_t^{\mu,\nu} u(x, t) = K \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x, t), \tag{B.1}$$

deux opérateurs apparaissent :

1. l'opérateur différentiel généralisé de Riemann–Liouville $D_t^{\mu,\nu}$ qui agit sur le temps ;
2. l'opérateur différentiel de Riesz–Feller $\partial^\alpha / \partial |x|^\alpha$.

Pour définir l'opérateur différentiel de Riemann–Liouville, il est nécessaire d'introduire la notion d'intégrale fractionnaire qui, comme nous le verrons, est une généralisation de la formule de Cauchy. Puis nous étudierons la transformée de Laplace de cet opérateur, étape essentielle pour étudier les solutions de ces équations différentielles. Dans un second temps nous définirons l'opérateur de Riesz–Feller et enfin nous rappellerons l'expression des équations différentielles fractionnaires en espace et temps pour lesquelles nous donnerons une solution générale.

Les définitions proviennent de [Tom+12] et [MPS05]. Pour un aspect plus historique nous conseillons la référence [Hil08].

B.1 Opérateurs fractionnaires

B.1.1 Opérateur pour le temps

Intégrations successives : formule de Cauchy

Afin d'expliquer l'origine de l'intégrale fractionnaire, nous nous concentrons pour commencer sur le calcul répété de la même intégrale, à savoir :

$$(\mathcal{I}f)(t) \doteq \int_0^t f(\tau) \, d\tau. \quad (\text{B.2})$$

En réitérant l'opération on obtient :

$$(\mathcal{I}^2 f)(t) = \int_0^t \left(\int_0^\tau f(s) \, ds \right) \, d\tau. \quad (\text{B.3})$$

Si l'on applique n fois l'opérateur \mathcal{I} , on devrait a priori calculer n intégrales successives. En réalité, on peut se convaincre sur une fonction simple comme $f(x) = x^k$ que :

$$(\mathcal{I}^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{n-1} \, d\tau. \quad (\text{B.4})$$

Ce résultat dû à Cauchy se démontre facilement par récurrence.

Pour l'instant n est un entier, est-il possible de généraliser la formule de Cauchy (B.4) au cas où n serait remplacé par un réel μ ? Nous allons voir dans la prochaine partie que cette généralisation est possible et constitue l'intégrale fractionnaire de Riemann–Liouville.

Intégrale et dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville

En généralisant la formule de Cauchy (B.4), on définit l'intégrale fractionnaire I_a^μ de Riemann–Liouville d'ordre μ par :

$$\boxed{(I_a^\mu f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\mu-1} \, d\tau} \quad \text{avec } t > a \quad \text{et } \mu > 0. \quad (\text{B.5})$$

Si μ est entier on retrouve la formule de Cauchy et si $\mu = 0$, on a :

$$(I_a^0 f)(t) = f(t). \quad (\text{B.6})$$

Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire

Dans le but de savoir calculer la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville, nous devons d'abord calculer la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire.

On cherche donc à calculer :

$$\mathcal{L}[(I_a^\mu f)(t); s] = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \mathcal{L} \left[\int_a^t f(\tau) (t - \tau)^{\mu-1} d\tau \right]. \quad (\text{B.7})$$

On reconnaît ici la transformée de Laplace du produit de convolution de la fonction f avec $r(t) \doteq (t - \tau)^{\mu-1}$. En utilisant la définition de la transformée de Laplace, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(I_a^\mu f)(t); s] &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \mathcal{L} [(f * r)(t); s] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \mathcal{L}[f(t); s] \mathcal{L}[r(t); s] \\ &= \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu)} s^{-\mu} \mathcal{L}[f(t); s] \\ &= s^{-\mu} \mathcal{L}[f(t); s] \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville

On peut désormais définir la dérivée fractionnaire D^μ d'ordre μ comme la dérivée usuelle d'ordre n pour l'intégrale fractionnaire d'ordre $n - \mu$, soit :

$$(D_a^\mu f)(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n (I_a^{n-\mu} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left[\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n+\mu}} d\tau \right]. \quad (\text{B.9})$$

où $n = \lfloor \mu \rfloor + 1$ avec $\lfloor \mu \rfloor$ la partie entière de μ .

Pour les besoins de ce manuscrit, il faut généraliser cette dernière définition. On définit donc la dérivée généralisée fractionnaire par rapport au temps de Riemann–Liouville d'ordre μ et de type ν :

$$(D_a^{\mu, \nu} f)(t) = \left(I_a^{\nu(1-\mu)} \frac{d}{dt} \left(I_a^{(1-\nu)(1-\mu)} f \right) \right) (t), \quad (\text{B.10})$$

avec $0 \leq \nu \leq 1$ et $0 < \mu < 1$. En remarquant que :

$$\frac{d}{dt} \left(I_a^{(1-\nu)(1-\mu)} f \right) (t) = (D_a^{\mu+\nu+\mu\nu} f) (t), \quad (\text{B.11})$$

la dérivée généralisée de Riemann–Liouville s'écrit :

$$(D_a^{\mu, \nu} f)(t) = \left(I_a^{\nu(1-\mu)} (D_a^{\mu+\nu+\mu\nu} f) \right) (t). \quad (\text{B.12})$$

Contrairement aux apparences, cette dernière relation ne peut pas être simplifiée : l'application de l'opérateur d'intégration fractionnaire sur l'opérateur de dérivation fractionnaire ne redonne pas la fonction f . On peut s'en convaincre avec les intégrales et les dérivées ordinaires.

Dans le chapitre 7, nous n'utilisons en réalité que les dérivées de type $\nu = 1$. La définition (B.10) devient alors :

$$\begin{aligned}
(D_a^{\mu,1} f)(t) &= \left(I_a^{1-\mu} \frac{d}{dt} (I_a^0 f) \right) (t) \\
&= \left(I_a^{1-\mu} \frac{df}{dt} \right) (t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_a^t f'(\tau) (t-\tau)^{-\mu} d\tau.
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Soit en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
(D_a^{\mu,1} f)(t) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\mu)} f(a) (t-a)^{-\mu} - \frac{\mu}{\Gamma(1-\mu)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{-\mu-1} d\tau \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\mu)} f(a) (t-a)^{-\mu} + \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{-\mu-1} d\tau \\
&= (I_a^{-\mu} f)(t) - \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} f(a) (t-a)^{-\mu}.
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Ce type de dérivée se réduit donc à une intégrale fractionnaire d'ordre $-\mu$ auquel on soustrait un terme proportionnel à $f(a)(t-a)^{-\mu}$.

Transformée de Laplace de l'opérateur différentiel

Pour clore cette partie sur la dérivée de Riemann–Liouville, nous calculons la transformée de Laplace de cet opérateur pour $\nu = 1$. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} [(D_0^{\mu,1} f)(t)] &= \mathcal{L} [(I_0^{-\mu} f)(t)] - \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} f(0) \mathcal{L} [t^{-\mu}; s] \\
&= s^\mu \mathcal{L} [f(t); s] - f(0) s^{\mu-1}.
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Dans le cas général, il a été montré [Hil00] que :

$$\mathcal{L} [D_a^{\mu,\nu} f(t)] = s^\mu \mathcal{L} [f(t)] - s^{\nu(\mu-1)} (I_0^{(1-\nu)(1-\mu)} f)(0). \tag{B.16}$$

B.1.2 Dérivée fractionnaire en espace de Riesz–Feller

Pour définir ce dernier opérateur, on considère une fonction f dont la transformée de Fourier est notée \tilde{f} . On définit alors la dérivée fractionnaire de Riesz–Feller d'ordre α et notée $d^\alpha/d|x|^\alpha$ comme étant la transformée de Fourier inverse de $-|q|^\alpha \tilde{f}(q)$:

$$\boxed{\frac{\partial^\alpha}{\partial|x|^\alpha} f(x) = \mathcal{F}^{-1} [-|q|^\alpha \tilde{f}(q)] (x)}. \tag{B.17}$$

B.2 Équation de diffusion fractionnaire

À l'aide des opérateurs différentiels fractionnaires définis précédemment, nous pouvons poser l'équation différentielle fractionnaire de diffusion :

$$\boxed{D_t^{\mu,\nu} u(x, t) = K \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x, t)}, \quad (\text{B.18})$$

où K représente le coefficient de diffusion (dépendant éventuellement de μ et α). Pour $\mu = \nu = 1$ et $\alpha = 2$, on retrouve une équation de diffusion classique. Dans la suite nous allons chercher à résoudre cette équation avec les conditions aux bords :

$$u(\pm\infty, t) = 0, \quad (\text{B.19})$$

et on se restreint à une distribution de Dirac comme condition initiale :

$$\left(I^{(1-\nu)(1-\mu)} u(x, t) \right) (0) = \delta(x). \quad (\text{B.20})$$

B.2.1 Transformées de Laplace et Fourier de diffusion fractionnaire

On peut à présent déterminer l'expression des transformées de Laplace et de Fourier de l'équation différentielle (B.17).

On applique en premier lieu la transformée de Laplace pour le temps. Le terme de gauche dans l'équation (B.17) donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [D_t^{\mu,\nu} u(x, t)] &= s^\mu \mathcal{L} [u(x, t)] - s^{\nu(\mu-1)} \left(I^{(1-\nu)(1-\mu)} u \right) (x, 0) \\ &= s^\mu u(x, s) - s^{\nu(\mu-1)} \left(I^{(1-\nu)(1-\mu)} u \right) (x, 0), \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

et le terme de droite :

$$K \mathcal{L} \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x, t) \right] = K \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} \mathcal{L} [u(x, t)] = K \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x, s). \quad (\text{B.22})$$

Puis en appliquant la transformée de Fourier :

$$s^\mu u(q, s) - s^{\nu(\mu-1)} \mathcal{F} \left[\left(I^{(1-\nu)(1-\mu)} u \right) (x, 0) \right] = -K |q|^\alpha u(q, s). \quad (\text{B.23})$$

Étant donné la condition initiale, on a :

$$\mathcal{F} \left[\left(I^{(1-\nu)(1-\mu)} u \right) (x, 0) \right] = 1. \quad (\text{B.24})$$

L'équation différentielle est donc devenue :

$$s^\mu u(q, s) - s^{\nu(\mu-1)} = -K |q|^\alpha u(q, s), \quad (\text{B.25})$$

soit

$$\boxed{u(q, s) = \frac{s^{\nu(\mu-1)}}{s^\mu + K |q|^\alpha}}. \quad (\text{B.26})$$

B.2.2 Solution générale

En choisissant toujours comme conditions :

$$u(\pm\infty, t) = 0 \quad \text{et} \quad \left(I^{(1-\nu)(1-\mu)} u(x, t) \right) (0) = \delta(x), \quad (\text{B.27})$$

la solution générale de ce type d'équation est [Tom+12, éq. (26)] :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{-(1-\nu)(1-\mu)} E_{\mu, 1-(1-\nu)(1-\mu)} [-K|q|^{\alpha} t^{\mu}] e^{-iqx} dq, \quad (\text{B.28})$$

où E est la fonction (A.4) de Mittag-Leffler généralisée.

Cette solution peut être réécrite à l'aide des fonctions de Fox :

$$u(x, t) = \frac{1}{\alpha|x|} t^{-(1-\nu)(1-\mu)} H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{|x|}{(Kt^{\mu})^{1/\alpha}} \left| \begin{matrix} (1, \frac{1}{\alpha}) & (1 - (1-\nu)(1-\mu), \frac{\mu}{\alpha}) \\ (1, 1) & (1, \frac{1}{\alpha}) \end{matrix} \right. \right] \left(\begin{matrix} (1, \frac{1}{2}) \\ (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right). \quad (\text{B.29})$$

La solution (B.29) admet un développement en série donné par [Tom+12, éq. (39)].

B.3 Cas du propagateur en intensité

Le propagateur étudié dans le chapitre 7 et proposé par Chalker a pour expression dans l'espace réciproque :

$$P_{1D}(q, \omega) = \frac{1}{-i\omega + Kq^{D_2}(-i\omega)^{D_2/3}}, \quad (\text{B.30})$$

forme qui convient aux régions 2 et 5 du diagramme de Chalker à condition de prendre $D_2 = 2$ pour la région 2. Pour montrer que le propagateur P_{1D} étudiée dans le chapitre 7 suit une équation fractionnaire de diffusion, il est nécessaire de comparer l'expression du propagateur P_{1D} avec (B.26). On voit aisément que dans notre cas :

$$\boxed{\nu = 1 \quad \text{et} \quad \alpha = 3\mu = D_2}. \quad (\text{B.31})$$

L'équation de diffusion fractionnaire peut donc s'écrire pour le propagateur en intensité :

$$[D_t^{\alpha/3, 1} - K \frac{\partial^{\alpha}}{\partial |x|^{\alpha}}] P_{1D}(x, t) = 0, \quad (\text{B.32})$$

avec

$$\begin{aligned} D^{\alpha, 1} P_{1D}(x, t) &= \left(I^{1-\alpha/3} \frac{d}{dt} (I^0 P_{1D}) \right) (x, t) \\ &= \left(I^{1-\alpha/3} \frac{d}{dt} P_{1D} \right) (x, t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{3})} \int_0^t \dot{P}_{1D}(x, \tau) (t - \tau)^{-\alpha/3} d\tau. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

En revenant à la définition de l'opérateur différentiel de Riemann–Liouville, le propagateur vérifie :

$$\int_0^t \dot{P}_{1D}(x, \tau)(t - \tau)^{-\alpha/3} d\tau - \Gamma\left(\frac{\alpha}{3}\right) K \frac{\partial}{\partial |x|^\alpha} P_{1D}(x, t) = 0. \quad (\text{B.34})$$

La solution de cette équation est :

$$P_{1D}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha/3} \left[-K(|q|t^{1/3})^\alpha \right] e^{-iqx} dq, \quad (\text{B.35})$$

formule utilisée pour le calcul des moments dans la partie 7.4.2. En utilisant les propriétés de parité des fonctions trigonométriques, on arrive à :

$$P_{1D}(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty E_{\alpha/3} \left[-K(|q|t^{1/3})^\alpha \right] \cos(qx) dq. \quad (\text{B.36})$$

Deux situations sont à distinguer. Premièrement, si $x = 0$

$$P_{1D}(0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty E_{\alpha/3} \left[-K(|q|t^{1/3})^\alpha \right] dq. \quad (\text{B.37})$$

Soit d'après le résultat (A.9) :

$$P_{1D}(0, t) = \frac{K^{-1/\alpha}}{\alpha} \frac{1}{\Gamma(2/3) \sin(\pi/\alpha)} t^{-1/3}. \quad (\text{B.38})$$

Par parité de la fonction \cos , on a : $P_{1D}(x, t) = P_{1D}(-x, t)$. On peut donc se restreindre à l'étude de l'intégrale pour $x > 0$. D'après le résultat (A.14) on a :

$$P_{1D}(x, t) = \frac{1}{\alpha|x|} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s/\alpha)\Gamma(1-s/\alpha)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s/3)\Gamma(1-s/2)\Gamma(s/2)} \left(\frac{K^{1/\alpha}t^{1/3}}{x} \right)^{-s} ds, \quad (\text{B.39})$$

soit en effectuant le changement $\sigma = -s$:

$$P_{1D}(x, t) = \frac{1}{\alpha|x|} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-\sigma/\alpha)\Gamma(1+\sigma/\alpha)\Gamma(1+\sigma)}{\Gamma(1+\sigma/3)\Gamma(1+\sigma/2)\Gamma(-\sigma/2)} \left(\frac{xt^{-1/3}}{K^{1/\alpha}} \right)^{-\sigma} d\sigma, \quad (\text{B.40})$$

que l'on peut exprimer grâce à la fonction de Fox :

$$\begin{aligned} P_{1D}(x, t) &= \frac{1}{\alpha|x|} H^{[5]} \left(\frac{xt^{-1/3}}{K^{1/\alpha}} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha|x|} H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{xt^{-1/3}}{K^{1/\alpha}} \left| \begin{matrix} (1, \frac{1}{\alpha}) & (1, \frac{1}{3}) & (1, \frac{1}{2}) \\ (1, 1) & (1, \frac{1}{\alpha}) & (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right], \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

où ici $\alpha = D_2$ de manière générale et $D_2 = 2$ dans la région [2] non multifractale.

Bibliographie

- [Abr+79] Elihu ABRAHAMS et al. “Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions”. In : *Physical Review Letters* 42.10 (mar. 1979), p. 673-676. DOI : [10.1103/PhysRevLett.42.673](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.42.673).
- [AS68] Milton ABRAMOWITZ et Irene A. STEGUN. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs and mathematical tables*. Corrected ed. University of Oxford Libraries : Dover, 1968. ISBN : 0486612724.
- [Abr81] Alexei A. ABRIKOSOV. “The paradox with the static conductivity of a one-dimensional metal”. In : *Solid State Communications* 37.12 (mar. 1981), p. 997-1000. ISSN : 0038-1098. DOI : [10.1016/0038-1098\(81\)91203-5](https://doi.org/10.1016/0038-1098(81)91203-5).
- [AB59] Yakir AHARONOV et David BOHM. “Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory”. In : *Physical Review* 115.3 (août 1959), p. 485-491. DOI : [10.1103/PhysRev.115.485](https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.485).
- [AM04] Éric AKKERMANS et Gilles MONTAMBAUX. *Physique mésoscopique des électrons et des photons*. Paris : EDP Sciences : CNRS Editions, 2004. ISBN : 9782759802890.
- [ACD19] Panayotis AKRIDAS-MOREL, Nicolas CHERRORET et Dominique DELANDE. “Multifractality of the kicked rotor at the critical point of the Anderson transition”. In : *Physical Review A* 100.4 (oct. 2019), p. 043612. DOI : [10.1103/PhysRevA.100.043612](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.043612).
- [Alt93] Alexander ALTLAND. “Diagrammatic approach to Anderson localization in the quantum kicked rotator”. In : *Physical Review Letters* 71.1 (juil. 1993), p. 69-72. DOI : [10.1103/PhysRevLett.71.69](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.69).
- [AZ96] Alexander ALTLAND et Martin R. ZIRNBAUER. “Field Theory of the Quantum Kicked Rotor”. In : *Physical Review Letters* 77.22 (nov. 1996), p. 4536-4539. DOI : [10.1103/PhysRevLett.77.4536](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.4536).

- [AKL89] Boris L. ALTSHULER, Vladimir E. KRAVTSOV et Igor V. LERNER. “Applicability of scaling description to the distribution of mesoscopic fluctuations”. In : *Physics Letters A* 134.8 (jan. 1989), p. 488-492. ISSN : 0375-9601. DOI : [10.1016/0375-9601\(89\)90691-9](https://doi.org/10.1016/0375-9601(89)90691-9).
- [And58] Philip W. ANDERSON. “Absence of Diffusion in Certain Random Lattices”. In : *Physical Review* 109 (mar. 1958), p. 1492-1505. DOI : [10.1103/PhysRev.109.1492](https://doi.org/10.1103/PhysRev.109.1492).
- [And+80] Philip W. ANDERSON et al. “New method for a scaling theory of localization”. In : *Physical Review B* 22.8 (oct. 1980), p. 3519-3526. DOI : [10.1103/PhysRevB.22.3519](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.22.3519).
- [And69] Thomas ANDREWS. “The Bakerian Lecture: On the Continuity of the Gaseous and Liquid States of Matter”. In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 159 (jan. 1869), p. 575-590. ISSN : 0261-0523, DOI : [10.1098/rstl.1869.0021](https://doi.org/10.1098/rstl.1869.0021).
- [Aok83] Hideo AOKI. “Critical behaviour of extended states in disordered systems”. In : *Journal of Physics C: Solid State Physics* 16.6 (fév. 1983), p. L205-L208. ISSN : 0022-3719. DOI : [10.1088/0022-3719/16/6/007](https://doi.org/10.1088/0022-3719/16/6/007).
- [Aok86] Hideo AOKI. “Fractal dimensionality of wave functions at the mobility edge: Quantum fractal in the Landau levels”. In : *Physical Review B* 33 (mai 1986), p. 7310-7313. DOI : [10.1103/PhysRevB.33.7310](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.33.7310).
- [App08] Walter APPEL. *Mathématiques pour la physique et les physiciens*. H&K éditions, 2008. ISBN : 9782351410394.
- [AA67] Vladimir I. ARNOLD et André AVEZ. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. Gauthier–Villars, 1967.
- [BS95] Albert-László BARABÁSI et H. Eugene STANLEY. *Fractal concepts in surface growth*. Cambridge : Cambridge University Press, 1995. ISBN : 0521483085.
- [Bee97] Carlo W. J. BEENAKKER. “Random-matrix theory of quantum transport”. In : *Reviews of Modern Physics* 69 (3 juil. 1997), p. 731-808. DOI : [10.1103/RevModPhys.69.731](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.69.731).
- [BD70] R. J. BELL et P. DEAN. “Atomic vibrations in vitreous silica”. In : *Discussions of the Faraday Society* 50 (1970), p. 55-61. DOI : [10.1039/DF9705000055](https://doi.org/10.1039/DF9705000055).
- [Ben+96] Maxime BEN DAHAN et al. “Bloch Oscillations of Atoms in an Optical Potential”. In : *Physical Review Letters* 76.24 (juin 1996), p. 4508-4511. DOI : [10.1103/PhysRevLett.76.4508](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.4508).

- [Bil+08] Juliette BILLY et al. “Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder”. In : *Nature* 453.7197 (avr. 2008), p. 891-894. ISSN : 0028-0836. DOI : [10.1038/nature07000](https://doi.org/10.1038/nature07000).
- [Blo29] Félix BLOCH. “Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern”. In : *Zeitschrift für Physik* 52.7-8 (juil. 1929), p. 555-600. ISSN : 0044-3328. DOI : [10.1007/BF01339455](https://doi.org/10.1007/BF01339455).
- [BHS96] Tobias BRANDES, Bodo HUCKESTEIN et Ludwig SCHWEITZER. “Critical dynamics and multifractal exponents at the Anderson transition in 3d disordered systems”. In : *Annalen der Physik* 508.8 (déc. 1996), p. 633-651. ISSN : 1521-3889. DOI : [10.1002/andp.2065080803](https://doi.org/10.1002/andp.2065080803).
- [Bro66] Robert BROWN. “A Brief Account of Microscopical Observations Made in the Months of June, July, and August, 1827, on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies”. In : *The miscellaneous botanical works of Robert Brown*. T. 1. London : Hardwicke, 1866, p. 464-479.
- [Cas+79] Giulio CASATI et al. “Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation”. In : *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*. Sous la dir. de Giulio CASATI et Joseph FORD. T. 93. Lecture Notes in Physics. Berlin/Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1979. Chap. 25, p. 334-352. ISBN : 3540091203.
- [CP86] C. CASTELLANI et L. PELITI. “Multifractal wavefunction at the localisation threshold”. In : *Journal of Physics A: Mathematical and General* 19.8 (juin 1986), p. L429-L432. ISSN : 0305-4470. DOI : [10.1088/0305-4470/19/8/004](https://doi.org/10.1088/0305-4470/19/8/004).
- [Cha+08] Julien CHABÉ et al. “Experimental Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves”. In : *Physical Review Letters* 101.25 (déc. 2008), p. 255702. DOI : [10.1103/PhysRevLett.101.255702](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.255702).
- [CL95] Paul M. CHAIKIN et Tom C. LUBENSKY. *Principles of condensed matter physics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1995. ISBN : 9780521432245.
- [Cha90] John T. CHALKER. “Scaling and eigenfunction correlations near a mobility edge”. In : *Physica A: Statistical and Theoretical Physics* 167.1 (août 1990), p. 253-258. ISSN : 0378-4371. DOI : [10.1016/0378-4371\(90\)90056-X](https://doi.org/10.1016/0378-4371(90)90056-X).
- [Che12] Alain CHENCINER. “Poincaré et les trois corps”. In : *Séminaire Poincaré XVI*. 2012. URL : <http://bourbaphy.fr/novembre2012.html>.
- [CJ89] Ashvin CHHABRA et Roderick V. JENSEN. “Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum”. In : *Physical Review Letters* 62.12 (mar. 1989), p. 1327-1330. DOI : [10.1103/PhysRevLett.62.1327](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.62.1327).

- [Chi79] Boris V. CHIRIKOV. “A universal instability of many-dimensional oscillator systems”. In : *Physics Reports* 52.5 (mai 1979), p. 263-379. ISSN : 0370-1573. DOI : [10.1016/0370-1573\(79\)90023-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(79)90023-1).
- [CRS88] Avraham COHEN, Yehuda ROTH et Boris SHAPIRO. “Universal distributions and scaling in disordered systems”. In : *Physical Review B* 38.17 (déc. 1988), p. 12125-12132. DOI : [10.1103/PhysRevB.38.12125](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.38.12125).
- [CT65] James W. COOLEY et John W. TUKEY. “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series”. In : *Mathematics of Computation* 19.90 (1965), p. 297-301. ISSN : 1088-6842. DOI : [10.1090/S0025-5718-1965-0178586-1](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1965-0178586-1).
- [CK07] Emilio CUEVAS et Vladimir E. KRAVTSOV. “Two-eigenfunction correlation in a multifractal metal and insulator”. In : *Physical Review B* 76.23 (déc. 2007), p. 235119. DOI : [10.1103/PhysRevB.76.235119](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.76.235119).
- [Del01] Dominique DELANDE. “Quantum Chaos in Atomic Physics”. In : *Coherent atomic matter waves*. Sous la dir. de R. KAISER, C. WESTBROOK et F. DAVID. Les Houches - Ecole d’été de Physique Theorique 72. Springer Berlin Heidelberg, 2001. Chap. 6, p. 415-479. ISBN : 9783540410478. DOI : [10.1007/3-540-45338-5](https://doi.org/10.1007/3-540-45338-5).
- [DO14] Dominique DELANDE et Giuliano ORSO. “Mobility Edge for Cold Atoms in Laser Speckle Potentials”. In : *Physical Review Letters* 113.6 (2014), p. 060601. DOI : [10.1103/PhysRevLett.113.060601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.060601).
- [Dor82] O. N. DOROKHOV. “Transmission coefficient and the localization length of an electron in N bound disordered chains”. In : *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 36.7 (oct. 1982), p. 318-321. ISSN : 0021-3640.
- [Dub+14] Remy DUBERTRAND et al. “Two scenarios for quantum multifractality breakdown”. In : *Physical Review Letters* 112.23 (juin 2014), p. 234101. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : [10.1103/PhysRevLett.112.234101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.234101).
- [Dup07] Bertrand DUPLANTIER. “Brownian motion, diverse and undulating”. In : *arXiv:0705.1951* (mai 2007). URL : <http://arxiv.org/abs/0705.1951>.
- [ET72] J. T. EDWARDS et D. J. THOULESS. “Numerical studies of localization in disordered systems”. In : *Journal of Physics C: Solid State Physics* 5.8 (avr. 1972), p. 807-820. ISSN : 0022-3719. DOI : [10.1088/0022-3719/5/8/007](https://doi.org/10.1088/0022-3719/5/8/007).
- [Ein05] Albert EINSTEIN. “Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen”. In : *Annalen der Physik* 322 (1905), p. 549-560. ISSN : 1521-3889.
- [Ein10] Albert EINSTEIN. “Theorie der Opaleszenz von homogenen Flüssigkeiten und Flüssigkeitsgemischen in der Nähe des kritischen Zustandes”. In : *Annalen der Physik* 338.16 (jan. 1910), p. 1275-1298. ISSN : 1521-3889. DOI : [10.1002/andp.19103381612](https://doi.org/10.1002/andp.19103381612).

- [Erd56] Arthur ERDÉLYI. *Asymptotic expansions*. New York : Dover Publications, 1956. ISBN : 0486603180.
- [EK93] Spiros N. EVANGELOU et Dimtris E. KATSANOS. “Multifractal quantum evolution at a mobility edge”. In : *Journal of Physics A: Mathematical and General* 26.23 (1993), p. L1243. DOI : [10.1088/0305-4470/26/23/010](https://doi.org/10.1088/0305-4470/26/23/010).
- [EM08] Ferdinand EVERS et Alexander D. MIRLIN. “Anderson transitions”. In : *Reviews of Modern Physics* 80.4 (oct. 2008), p. 1355. DOI : [10.1103/RevModPhys.80.1355](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1355).
- [Fae+09] Sanli FAEZ et al. “Observation of Multifractality in Anderson Localization of Ultrasound”. In : *Physical Review Letters* 103.15 (oct. 2009), p. 155703. DOI : [10.1103/PhysRevLett.103.155703](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.155703).
- [Fal90] Kenneth J. FALCONER. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. Chichester; New York : Wiley, 1990. ISBN : 0471922870.
- [FGP82] Shmuel FISHMAN, D. R. GREMPEL et R. E. PRANGE. “Chaos, Quantum Recurrences, and Anderson Localization”. In : *Physical Review Letters* 49.8 (août 1982), p. 509. DOI : [10.1103/PhysRevLett.49.509](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.509).
- [Fox61] Charles FOX. “The G and H Functions as Symmetrical Fourier Kernels”. In : *Transactions of the American Mathematical Society* 98.3 (1961), p. 395-429. ISSN : 00029947. DOI : [10.1090/S0002-9947-1961-0131578-3](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1961-0131578-3).
- [Gar+12] Ignacio GARCÍA-MATA et al. “Multifractality of quantum wave packets”. In : *Physical Review E* 86.5 (nov. 2012), p. 056215. DOI : [10.1103/PhysRevE.86.056215](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.056215).
- [GMR75] A. A. GOGOLIN, V. I. MEL’NIKOV et E. I. RASHBA. “Conductivity in a disordered one-dimensional system induced by electron-phonon interaction”. In : *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 42.1 (sept. 1975), p. 168-178.
- [Gog76] Andrei A. GOGOLIN. “Electron density distribution for localized states in a one-dimensional disordered system”. In : *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 44.5 (nov. 1976), p. 1003-1004.
- [Gol92] Nigel GOLDENFELD. *Lectures on phase transitions and the renormalization group*. Reading, Mass. : Addison-Wesley, Advanced Book Program, 1992. ISBN : 9780201554090.
- [Gor+14] Rudolf GORENFLO et al. *Mittag-Leffler functions, Related topics and Applications*. Springer. 2014. ISBN : 9783662523247.
- [Gou92] Jean-François GOUYET. *Physique et structures fractales*. Paris : Masson, 1992. ISBN : 222582777X.

- [GP83] Peter GRASSBERGER et Itamar PROCACCIA. “Characterization of Strange Attractors”. In : *Physical Review Letters* 50.5 (1983), p. 346-349. DOI : [10.1103/PhysRevLett.50.346](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.346).
- [Gre79] John M. GREENE. “A method for determining a stochastic transition”. In : *Journal of Mathematical Physics* 20.6 (juil. 1979), p. 1183-1201. ISSN : 0022-2488, 1089-7658. DOI : [10.1063/1.524170](https://doi.org/10.1063/1.524170).
- [Har01] David. HARTE. *Multifractals: theory and applications*. Boca Raton, FL : Chapman & Hall/CRC, 2001. ISBN : 1584881542.
- [Hil00] Rudolf HILFER. *Applications of fractional calculus in physics*. Scientific, World. 2000. ISBN : 9810234570.
- [Hil08] Rudolf HILFER. “Threefold introduction to fractional derivatives”. In : *Anomalous Transport: Foundations and Applications*. Sous la dir. de Rainer KLAGES, Günter RADONS et Igor M. SOKOLOV. Wiley-VCH, juil. 2008, p. 17-74. ISBN : 9783527407224.
- [HK98] Bodo HUCKESTEIN et Rochus KLESSE. “Diffusion and multifractality at the metal—insulator transition”. In : *Philosophical Magazine B* 77.5 (août 1998), p. 1181-1187. DOI : [10.1080/13642819808205008](https://doi.org/10.1080/13642819808205008).
- [HK99] Bodo HUCKESTEIN et Rochus KLESSE. “Wave-packet dynamics at the mobility edge in two- and three-dimensional systems”. In : *Physical Review B* 59.15 (avr. 1999), p. 9714-9717. DOI : [10.1103/PhysRevB.59.9714](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.59.9714).
- [Imr97] Yoseph IMRY. *Introduction to Mesoscopic Physics*. Mesoscopic physics and nanotechnology. Oxford University Press, USA, 1997. ISBN : 9780195356373.
- [IR60] A. F. IOFFE et A. R. REGEL. “Noncrystalline, Amorphous and Liquid Electronic Semiconductors”. In : *Progress in semiconductors*. Sous la dir. d’Alan F. GIBSON. T. 4. London : Heywood, 1960, p. 237-291.
- [Izr90] Felix M. IZRAILEV. “Simple models of quantum chaos: Spectrum and eigenfunctions”. In : *Physics Reports* 196.5–6 (nov. 1990), p. 299-392. ISSN : 0370-1573. DOI : [10.1016/0370-1573\(90\)90067-C](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90067-C).
- [Jan94] Martin JANSSEN. “Multifractal Analysis of Broadly-Distributed Observables at Criticality”. In : *International Journal of Modern Physics B* 8.8 (1994), p. 943-984. DOI : [10.1142/S021797929400049X](https://doi.org/10.1142/S021797929400049X).
- [Jen+12] F. JENDRZEJEWSKI et al. “Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential”. In : *Nature Physics* 8.5 (mar. 2012), p. 398-403. ISSN : 1745-2473. DOI : [10.1038/nphys2256](https://doi.org/10.1038/nphys2256).

- [Kad+67] L. P. KADANOFF et al. “Static Phenomena Near Critical Points: Theory and Experiment”. In : *Rev. Mod. Phys.* 39.2 (avr. 1967), p. 395-431. DOI : [10.1103/RevModPhys.39.395](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.39.395).
- [Kat+87] Shingo KATSUMOTO et al. “Fine tuning of metal-insulator transition in $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$ using persistent photoconductivity”. In : *Journal of the Physical Society of Japan* 56 (avr. 1987), p. 2259-2262. DOI : [10.1143/JPSJ.56.2259](https://doi.org/10.1143/JPSJ.56.2259).
- [KDP80] K. v. KLITZING, G. DORDA et M. PEPPER. “New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance”. In : *Physical Review Letters* 45.6 (août 1980), p. 494-497. DOI : [10.1103/PhysRevLett.45.494](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.45.494).
- [Kon+11] S. S. KONDOV et al. “Three-Dimensional Anderson Localization of Ultracold Matter”. In : *Science* 334.6052 (oct. 2011), p. 66-68. ISSN : 0036-8075, 1095-9203. DOI : [10.1126/science.1209019](https://doi.org/10.1126/science.1209019).
- [Kra+10] Vladimir E. KRAVTSOV et al. In : *Phys. Rev. B* 82.16 (oct. 2010), p. 161102. DOI : [10.1103/PhysRevB.82.161102](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.82.161102).
- [Kra+12] Vladimir E. KRAVTSOV et al. “Lévy flights and multifractality in quantum critical diffusion and in classical random walks on fractals”. In : *Phys. Rev. E* 86.2 (août 2012), p. 021136. DOI : [10.1103/PhysRevE.86.021136](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.021136).
- [LLG03] Michel LAGUËS, Annick LESNE et Pierre-Gilles de GENNES. *Invariances déchelle : des changements d'états à la turbulence*. Paris, France : Belin, DL 2003, 2003. ISBN : 9782701131757.
- [Lau83] Robert B. LAUGHLIN. “Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations”. In : *Physical Review Letters* 50.18 (mai 1983), p. 1395-1398. ISSN : 0031-9007. DOI : [10.1103/PhysRevLett.50.1395](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.1395).
- [Le 02] Michel LE BELLAC. *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*. Savoirs actuels. Série Physique. Paris : EDP Sciences : Editions du CNRS, 2002. ISBN : 9782868833594.
- [Le 07] Michel LE BELLAC. *Physique quantique*. Les Ulis, France : EDP sciences, 2007. ISBN : 9782868839985.
- [LSF87] P. A. LEE, A. Douglas STONE et H. FUKUYAMA. “Universal conductance fluctuations in metals: Effects of finite temperature, interactions, and magnetic field”. In : *Physical Review B* 35.3 (jan. 1987), p. 1039-1070. DOI : [10.1103/PhysRevB.35.1039](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.35.1039).
- [Lem09] Gabriel LEMARIÉ. “Transition d’Anderson avec des ondes de matière atomiques”. Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, sept. 2009. URL : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00424399>.

- [LGD09] Gabriel LEMARIÉ, Benoît GRÉMAUD et Dominique DELANDE. “Universality of the Anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor”. In : *EPL (Europhysics Letters)* 87.3 (3 août 2009), p. 37007. ISSN : 0295-5075. DOI : [10.1209/0295-5075/87/37007](https://doi.org/10.1209/0295-5075/87/37007).
- [Lem+09] Gabriel LEMARIÉ et al. “Observation of the Anderson metal-insulator transition with atomic matter waves: Theory and experiment”. In : *Physical Review A* 80.4 (oct. 2009), p. 043626. DOI : [10.1103/PhysRevA.80.043626](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.043626).
- [Lem+10a] Gabriel LEMARIÉ et al. “Classical diffusive dynamics for the quasiperiodic kicked rotor”. In : *Journal of Modern Optics* 57.19 (août 2010), p. 1922-1927. DOI : [10.1080/09500340.2010.506009](https://doi.org/10.1080/09500340.2010.506009).
- [Lem+10b] Gabriel LEMARIÉ et al. “Critical State of the Anderson Transition: Between a Metal and an Insulator”. In : *Physical Review Letters* 105.9 (août 2010), p. 090601. DOI : [10.1103/PhysRevLett.105.090601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.090601).
- [LL83] A. J. LICHTENBERG et M. A. LIEBERMAN. *Regular and stochastic motion*. T. 38. Applied Mathematical Science. New-York : Springer New York, 1983. ISBN : 9781475742596. DOI : [10.1007/978-1-4757-4257-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4257-2).
- [Llo69] P. LLOYD. “Exactly solvable model of electronic states in a three-dimensional disordered Hamiltonian: non-existence of localized states”. In : *Journal of Physics C: Solid State Physics* 2.10 (oct. 1969), p. 1717. ISSN : 0022-3719. DOI : [10.1088/0022-3719/2/10/303](https://doi.org/10.1088/0022-3719/2/10/303).
- [Luc92] Jean-Marc LUCK. *Systèmes désordonnés unidimensionnels*. Aléa-Saclay. Gif-sur-Yvette, France : Commissariat à l’énergie atomique, 1992. ISBN : 2727201567.
- [MK81] A. MACKINNON et B. KRAMER. “One-Parameter Scaling of Localization Length and Conductance in Disordered Systems”. In : *Physical Review Letters* 47.21 (nov. 1981), p. 1546-1549. DOI : [10.1103/PhysRevLett.47.1546](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.47.1546).
- [MPG07] Francesco MAINARDI, Gianni PAGNINI et Rudolf GORENFLO. *Mellin transform and subordination laws in fractional diffusion processes*. 2007. arXiv : [math/0702133](https://arxiv.org/abs/math/0702133) [[math.PR](https://arxiv.org/abs/math.PR)].
- [MPS05] Francesco MAINARDI, Gianni PAGNINI et R.K. SAXENA. “Fox H functions in fractional diffusion”. In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 178.1 (2005). Proceedings of the Seventh International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications, p. 321-331. ISSN : 0377-0427. DOI : [10.1016/j.cam.2004.08.006](https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.08.006).
- [Man+15] Isam MANAI et al. “Experimental observation of two-dimensional Anderson localization with the atomic kicked rotor”. In : *Physical Review Letters* 115 (déc. 2015), p. 240603. DOI : [10.1103/PhysRevLett.115.240603](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.240603).

- [Man67] Benoît B. MANDELBROT. “How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension”. In : *Science* 156.3775 (mai 1967), p. 636-638. ISSN : 0036-8075, 1095-9203. DOI : [10.1126/science.156.3775.636](https://doi.org/10.1126/science.156.3775.636).
- [Man82] Benoît B. MANDELBROT. *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco : W.H. Freeman, 1982. ISBN : 9780716711865.
- [Man89] Benoît B. MANDELBROT. “Multifractal measures, especially for the geophysicist”. In : 131 (mar. 1989), p. 5-42. ISSN : 0033-4553, 1420-9136. DOI : [10.1007/BF00874478](https://doi.org/10.1007/BF00874478).
- [MS95] Rosario N. MANTEGNA et H. Eugene STANLEY. “Scaling behaviour in the dynamics of an economic index”. In : *Nature* 376.6535 (juil. 1995), p. 46-49. DOI : [10.1038/376046a0](https://doi.org/10.1038/376046a0).
- [Mar99] Peter MARKOŠ. “Probability Distribution of the Conductance at the Mobility Edge”. In : *Physical Review Letters* 83.3 (juil. 1999), p. 588-591. DOI : [10.1103/PhysRevLett.83.588](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.588).
- [Mar+10] John MARTIN et al. “Multifractal wave functions of simple quantum maps”. In : *Physical Review E* 82.4 (oct. 2010), p. 046206. DOI : [10.1103/PhysRevE.82.046206](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.046206).
- [MSH10] A. M. MATHAI, Ram Kishore SAXENA et Hans J. HAUBOLD. *The H-function*. Springer. 2010. ISBN : 9781441909169.
- [Mea11] Paul MEAKIN. *Fractals, scaling and growth far from equilibrium*. Cambridge nonlinear science series 5. Cambridge : Cambridge University Press, 2011. ISBN : 9780521189811.
- [MPK88] P. MELLO, P. PEREYRA et N. KUMAR. “Macroscopic approach to multichannel disordered conductors”. In : *Annals of Physics* 181.2 (fév. 1988), p. 290-317. ISSN : 00034916. DOI : [10.1016/0003-4916\(88\)90169-8](https://doi.org/10.1016/0003-4916(88)90169-8).
- [MF94] Alexander D. MIRLIN et Yan V. FYODOROV. “Distribution of local densities of states, order parameter function, and critical behavior near the Anderson transition”. In : *Physical Review Letters* 72.4 (jan. 1994), p. 526-529. DOI : [10.1103/PhysRevLett.72.526](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.526).
- [Mir+06] Alexander D. MIRLIN et al. “Exact Relations between Multifractal Exponents at the Anderson Transition”. In : *Physical Review Letters* 97.4 (juil. 2006), p. 046803. DOI : [10.1103/PhysRevLett.97.046803](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.046803).
- [MBC09] Cécile MONTHUS, Bertrand BERCHE et Christophe CHATELAIN. “Symmetry relations for multifractal spectra at random critical points”. In : *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2009.12 (déc. 2009), P12002. DOI : [10.1088/1742-5468/2009/12/p12002](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2009/12/p12002).

- [Moo+94] F. L. MOORE et al. “Observation of Dynamical Localization in Atomic Momentum Transfer: A New Testing Ground for Quantum Chaos”. In : *Physical Review Letters* 73.22 (nov. 1994), p. 2974-2977. DOI : [10.1103/PhysRevLett.73.2974](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.2974).
- [Mot49] Nevill F. MOTT. “The Basis of the Electron Theory of Metals, with Special Reference to the Transition Metals”. In : *Proceedings of the Physical Society. Section A* 62.7 (juil. 1949), p. 416. ISSN : 0370-1298. DOI : [10.1088/0370-1298/62/7/303](https://doi.org/10.1088/0370-1298/62/7/303).
- [MD11] Cord A. MÜLLER et Dominique DELANDE. “Disorder and interference: localization phenomena”. In : sous la dir. de C. Miniatura et AL. T. 91. Lecture Notes of the Les Houches Summer School in Singapore: Ultracold Gases and Quantum Information. Oxford Scholarship, 2011. Chap. 9. DOI : [DOI:10.1093/acprof:oso/9780199603657.003.0009](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199603657.003.0009).
- [MDS16] Cord A. MÜLLER, Dominique DELANDE et Boris SHAPIRO. “Critical dynamics at the Anderson localization mobility edge”. In : *Physical Review A* 94.3 (sept. 2016), p. 033615. DOI : [10.1103/PhysRevA.94.033615](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.033615).
- [OK97] Tomi OHTSUKI et Tohru KAWARABAYASHI. “Anomalous Diffusion at the Anderson Transitions”. In : *Journal of the Physical Society of Japan* 66.2 (1997), p. 314-317. DOI : [10.1143/JPSJ.66.314](https://doi.org/10.1143/JPSJ.66.314).
- [Ott02] Edward OTT. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002. ISBN : 9780521010849.
- [PV87] Giovanni PALADIN et Angelo VULPIANI. “Anomalous scaling laws in multifractal objects”. In : *Physics Reports* 156.4 (1987), p. 147-225. ISSN : 0370-1573. DOI : [10.1016/0370-1573\(87\)90110-4](https://doi.org/10.1016/0370-1573(87)90110-4).
- [POD17] Michael PASEK, Giuliano ORSO et Dominique DELANDE. “Anderson Localization of Ultracold Atoms: Where is the Mobility Edge?” In : *Physical Review Letters* 118.17 (avr. 2017), p. 170403. DOI : [10.1103/PhysRevLett.118.170403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.170403).
- [PS81a] Jean-Louis PICHARD et G. SARMA. “Finite size scaling approach to Anderson localisation”. In : *Journal of Physics C: Solid State Physics* 14.6 (fév. 1981), p. L127. ISSN : 0022-3719. DOI : [10.1088/0022-3719/14/6/003](https://doi.org/10.1088/0022-3719/14/6/003).
- [PS81b] Jean-Louis PICHARD et G. SARMA. “Finite-size scaling approach to Anderson localisation. II. Quantitative analysis and new results”. In : *Journal of Physics C: Solid State Physics* 14.21 (juil. 1981), p. L617. ISSN : 0022-3719. DOI : [10.1088/0022-3719/14/21/004](https://doi.org/10.1088/0022-3719/14/21/004).
- [Pod] Michael de PODESTA. *Critical opalescence*. <https://protonsforbreakfast.wordpress.com/2013/01/14/critical-opalescence>.

- [PJ91] Werner POOK et Martin JANSSEN. “Multifractality and scaling in disordered mesoscopic systems”. In : *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* 82.2 (juin 1991), p. 295-298. ISSN : 0722-3277. DOI : [10.1007/BF01324339](https://doi.org/10.1007/BF01324339).
- [Ric+10] Anthony RICARDELLA et al. “Visualizing Critical Correlations Near the Metal-Insulator Transition in Ga_{1-x}Mn_xAs”. In : *Science* 327.5966 (2010), p. 665-669. ISSN : 0036-8075. DOI : [10.1126/science.1183640](https://doi.org/10.1126/science.1183640).
- [Roa+08] G. ROATI et al. “Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate”. In : *Nature (London)* 453 (juin 2008), p. 895-898. DOI : [10.1038/nature07071](https://doi.org/10.1038/nature07071).
- [RVR08] Alberto RODRIGUEZ, Louella J. VASQUEZ et Rudolf A. RÖMER. “Multifractal analysis of the metal-insulator transition in the three-dimensional Anderson model. II. Symmetry relation under ensemble averaging”. In : *Physical Review B* 78.19 (nov. 2008), p. 195107. DOI : [10.1103/PhysRevB.78.195107](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.195107).
- [Rod+10] Alberto RODRIGUEZ et al. “Critical Parameters from a Generalized Multifractal Analysis at the Anderson Transition”. In : *Physical Review Letters* 105.4 (juil. 2010), p. 046403. DOI : [10.1103/PhysRevLett.105.046403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.046403).
- [Rod+11] Alberto RODRIGUEZ et al. “Multifractal finite-size scaling and universality at the Anderson transition”. In : *Physical Review B* 84.13 (oct. 2011), p. 134209. DOI : [10.1103/PhysRevB.84.134209](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.134209).
- [Rud76] Walter RUDIN. *Principles of mathematical analysis*. 3rd ed. International series in pure and applied mathematics. Previous ed. : 1964. New York ; London : McGraw-Hill, 1976. ISBN : 007054235X.
- [Rud87] Walter RUDIN. *Real and complex analysis*. New York : McGraw-Hill, 1987. ISBN : 0070542341.
- [Sch+99] Frank SCHEFFOLD et al. “Localization or classical diffusion of light?” In : *Nature* 398.6724 (mar. 1999), p. 206-207. ISSN : 0028-0836. DOI : [10.1038/18347](https://doi.org/10.1038/18347).
- [Sem+15] G. SEMEGHINI et al. “Measurement of the mobility edge for 3D Anderson localization”. In : *Nature Physics* 11.7 (juin 2015), p. 554-559. DOI : [10.1038/nphys3339](https://doi.org/10.1038/nphys3339).
- [Sha90] Boris SHAPIRO. “Conductance distribution at the mobility edge”. In : *Physical Review Letters* 65.12 (sept. 1990), p. 1510-1513. DOI : [10.1103/PhysRevLett.65.1510](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.65.1510).
- [She06] Ping SHENG. *Introduction to Wave Scattering: Localization and Mesoscopic Phenomena*. Springer series in materials science. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. ISBN : 9783540291565.

- [She86] D. L. SHEPELYANSKY. “Localization of quasienergy eigenfunctions in action space”. In : *Physical Review Letters* 56.7 (fév. 1986), p. 677-680. DOI : [10.1103/PhysRevLett.56.677](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.677).
- [SP16] Sergey E. SKIPETROV et John H. PAGE. “Red light for Anderson localization”. In : *New Journal of Physics* 18.2 (jan. 2016), p. 021001. DOI : [10.1088/1367-2630/18/2/021001](https://doi.org/10.1088/1367-2630/18/2/021001).
- [SMO03] Keith SLEVIN, Peter MARKOŠ et Tomi OHTSUKI. “Scaling of the conductance distribution near the Anderson transition”. In : *Physical Review B* 67.15 (avr. 2003), p. 155106. DOI : [10.1103/PhysRevB.67.155106](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.67.155106).
- [SO97] Keith SLEVIN et Tomi OHTSUKI. “The Anderson Transition: Time Reversal Symmetry and Universality”. In : *Physical Review Letters* 78.21 (mai 1997), p. 4083-4086. DOI : [10.1103/PhysRevLett.78.4083](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.4083).
- [SO99] Keith SLEVIN et Tomi OHTSUKI. “Corrections to Scaling at the Anderson Transition”. In : *Physical Review Letters* 82.2 (jan. 1999), p. 382-385. DOI : [10.1103/PhysRevLett.82.382](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.382).
- [SO14] Keith SLEVIN et Tomi OHTSUKI. “Critical exponent for the Anderson transition in the three-dimensional orthogonal universality class”. In : *New Journal of Physics* 16.1 (jan. 2014), p. 015012. ISSN : 1367-2630. DOI : [10.1088/1367-2630/16/1/015012](https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/1/015012).
- [Smo08] M. von SMOLUCHOWSKI. “Molekular-kinetische Theorie der Opaleszenz von Gasen im kritischen Zustande, sowie einiger verwandter Erscheinungen”. In : *Annalen der Physik* 330.2 (jan. 1908), p. 205-226. ISSN : 1521-3889. DOI : [10.1002/andp.19083300203](https://doi.org/10.1002/andp.19083300203).
- [Tél88] Tamás TÉL. “Fractals, Multifractals, and Thermodynamics: An Introductory Review”. In : *Zeitschrift für Naturforschung A* 43.12 (déc. 1988), p. 1154-1174. DOI : <https://doi.org/10.1515/zna-1988-1221>.
- [Tho72] D. J. THOULESS. “A relation between the density of states and range of localization for one dimensional random systems”. In : *Journal of Physics C: Solid State Physics* 5.1 (jan. 1972), p. 77-81. ISSN : 0022-3719. DOI : [10.1088/0022-3719/5/1/010](https://doi.org/10.1088/0022-3719/5/1/010).
- [Tia11] Chushun TIAN. “Theory of the Anderson Transition in the Quasiperiodic Kicked Rotor”. In : *Physical Review Letters* 107.7 (nov. 2011), p. 074101. DOI : [10.1103/PhysRevLett.107.074101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.074101).
- [TA10] Chushun TIAN et Alexander ALTLAND. “Theory of localization and resonance phenomena in the quantum kicked rotor”. In : *New Journal of Physics* 12.4 (avr. 2010), p. 043043. ISSN : 1367-2630. DOI : [10.1088/1367-2630/12/4/043043](https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/4/043043).

- [TA12] Chushun TIAN et Alexander ALTLAND. “Field theory of Anderson transition of the kicked rotor”. In : *Physica Scripta* T151 (nov. 2012), p. 014049. DOI : [10.1088/0031-8949/2012/t151/014049](https://doi.org/10.1088/0031-8949/2012/t151/014049).
- [Tom+12] Živorad TOMOVSKI et al. “Generalized space–time fractional diffusion equation with composite fractional time derivative”. In : *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 391.8 (2012), p. 2527-2542. ISSN : 0378-4371. DOI : [10.1016/j.physa.2011.12.035](https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.12.035).
- [Tri08] Claude TRICOT. *Géométries et mesures fractales : une introduction*. Paris : Ellipses, 2008. ISBN : 9782729840457.
- [TSG82] D. C. TSUI, H. L. STORMER et A. C. GOSSARD. “Two-Dimensional Magneto-transport in the Extreme Quantum Limit”. In : *Physical Review Letters* 48.22 (mai 1982), p. 1559-1562. DOI : [10.1103/PhysRevLett.48.1559](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1559).
- [VS] Olivier VALLÉE et Manuel SOARES. *Airy functions and application to physics*. Imperial College Press. ISBN : 1860944787.
- [VRR08] Louella J. VASQUEZ, Alberto RODRIGUEZ et Rudolf A. RÖMER. “Multifractal analysis of the metal-insulator transition in the three-dimensional Anderson model. I. Symmetry relation under typical averaging”. In : *Physical Review B* 78.19 (nov. 2008), p. 195106. DOI : [10.1103/PhysRevB.78.195106](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.195106).
- [VW80] D. VOLLHARDT et P. WÖLFLE. “Diagrammatic, self-consistent treatment of the Anderson localization problem in $d \leq 2$ dimensions”. In : *Physical Review B* 22.10 (nov. 1980), p. 4666-4679. DOI : [10.1103/PhysRevB.22.4666](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.22.4666).
- [WPL99] S. WAFFENSCHMIDT, C. PFLEIDERER et H. v. LÖHNEYSSEN. “Critical Behavior of the Conductivity of Si:P at the Metal-Insulator Transition under Uniaxial Stress”. In : *Physical Review Letters* 83.15 (1999), p. 3005-3008. DOI : [10.1103/PhysRevLett.83.3005](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.3005).
- [Web+85] Richard A. WEBB et al. “Observation of h/e Aharonov–Bohm Oscillations in Normal-Metal Rings”. In : *Physical Review Letters* 54.25 (juin 1985), p. 2696-2699. DOI : [10.1103/PhysRevLett.54.2696](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.2696).
- [Weg76] Franz J. WEGNER. “Electrons in disordered systems. Scaling near the mobility edge”. In : *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter and Quanta* 25.4 (déc. 1976), p. 327-337. ISSN : 0340-224X. DOI : [10.1007/BF01315248](https://doi.org/10.1007/BF01315248).
- [Weg80] Franz J. WEGNER. “Inverse participation ratio in $2+\epsilon$ dimensions”. In : *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter and Quanta* 36.3 (sept. 1980), p. 209-214. ISSN : 0340-224X. DOI : [10.1007/BF01325284](https://doi.org/10.1007/BF01325284).
- [Weg85] Franz J. WEGNER. “Density correlations near the mobility edge”. In : *Localization and metal-insulator transitions*. Sous la dir. de H. FRITZSCHE, D. ADLER et N. F. MOTT. Institute for Amorphous Studies series. Plenum Press, 1985, p. 337-346.

- [Weg87] Franz J. WEGNER. “Anomalous dimensions for the nonlinear σ -model in $2+\epsilon$ dimensions (I)”. In : *Nuclear Physics B* 280 (1987), p. 193-209. ISSN : 0550-3213. DOI : [10.1016/0550-3213\(87\)90144-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(87)90144-1).
- [Weg89] Franz J. WEGNER. “Four-loop-order β -function of nonlinear σ -models in symmetric spaces”. In : *Nuclear Physics B* 316.3 (avr. 1989), p. 663-678. ISSN : 0550-3213. DOI : [10.1016/0550-3213\(89\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90063-1).
- [WW62] Edmund Taylor WHITTAKER et George Neville WATSON. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge : University Press, 1962.
- [Wik15] WIKIPEDIA. *Weierstrass function*. 2015. URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function.
- [Wil75] Kenneth G. WILSON. “The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem”. In : *Rev. Mod. Phys.* 47.4 (oct. 1975), p. 773-840. DOI : [10.1103/RevModPhys.47.773](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.47.773).
- [WS81] T. A. WITTEN et L. M. SANDER. “Diffusion-Limited Aggregation, a Kinetic Critical Phenomenon”. In : *Physical Review Letters* 47.19 (nov. 1981), p. 1400-1403. DOI : [10.1103/PhysRevLett.47.1400](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.47.1400).

Sujet : Multifractalité des paquets d’ondes à la transition métal/isolant d’Anderson

Résumé : En dimension trois, un système quantique désordonné peut présenter une transition entre un état métallique/diffusif à faible désordre et un état isolant/localisé à fort désordre. Au voisinage de cette transition appelée transition d’Anderson, il est connu que les fonctions d’onde des états propres présentent des fluctuations géantes et un caractère multifractal. Dans ce manuscrit, nous utilisons un système spécifique, le rotateur pulsé — également appelé « kicked rotor » — quasi périodique pour étudier les propriétés de multifractalité de paquets d’onde. C’est un système unidimensionnel, donc facile à étudier expérimentalement et à simuler numériquement, mais sa dépendance temporelle est telle qu’il présente une transition d’Anderson aisément contrôlable. Nous étudions numériquement et interprétons théoriquement les propriétés de multifractalité des paquets d’onde au voisinage de la transition d’Anderson. Nous montrons que celles-ci permettent de remonter partiellement aux propriétés de multifractalité des états propres en dimension trois, ouvrant ainsi des perspectives pour une étude expérimentale future.

Mots clés : désordre ; localisation d’Anderson ; transition d’Anderson ; kicked rotor ; fractals ; multifractalité ; équation de diffusion fractionnaire

Subject: Multifractality of wave packets at the metal/insulator Anderson transition

Abstract: In dimension three, a disordered quantum system may have a transition between a metallic/diffusive phase at low disorder and a isolating/localized phase at strong disorder. In the vicinity of this so-called Anderson transition, it is well known that the wavefunctions of eigenstates display giant fluctuations and a multifractal character. In this thesis, we use a specific system, the quasi-periodically kicked rotor, in order to study the multifractal properties of wavepackets. This is a one-dimensional system which can be studied experimentally and for which numerical simulations are easy. The time-dependent character of the Hamiltonian is such that it displays a controlable Anderson transition. We study numerically and interpret theoretically the multifractal properties of wavepackets in the vicinity of the Anderson transition. We show that they make it possible to access the multifractality properties of eigenstates in dimension three, opening the way to a future experiment.

Keywords: disorder; Anderson localization; Anderson transition; kicked rotor; fractals; multifractality; fractional diffusion equation