



**HAL**  
open science

# Dynamique non-linéaire et cascade en turbulences : turbulence hydrodynamique, turbulence d'ondes, et turbulence intégrable

Annette Cazaubiel

► **To cite this version:**

Annette Cazaubiel. Dynamique non-linéaire et cascade en turbulences : turbulence hydrodynamique, turbulence d'ondes, et turbulence intégrable. Physique [physics]. Université Paris Cité, 2020. Français. NNT : 2020UNIP7234 . tel-03416953

**HAL Id: tel-03416953**

**<https://theses.hal.science/tel-03416953>**

Submitted on 5 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Spécialité : Physique

École doctorale n°564: Physique en Île-de-France

réalisée

au Laboratoire Matière et Systèmes Complexes

sous la direction de Eric Falcon

présentée par

**Annette Cazaubiel**

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Sujet de la thèse :

**Dynamique non-linéaire et cascade en turbulences :  
turbulence hydrodynamique, turbulence d'ondes, et  
turbulence intégrable**

soutenue le 15 décembre 2020

devant le jury composé de :

M.	Pierre-Philippe CORTET	CR CNRS à l'Université Paris Saclay	Rapporteur
M.	Thierry DAUXOIS	DR CNRS à l'ENS de Lyon	Rapporteur
M.	Stephan FAUVE	Pr à L'ENS de Paris	Président du jury
M <sup>me</sup>	Bérengère DUBRULLE	DR CNRS au CEA Paris-Saclay	Examinatrice
M.	Christophe JOSSERAND	DR CNRS à l'École Polytechnique	Examineur
M.	Eric FALCON	DR CNRS à l'Université de Paris	Directeur de thèse



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I Turbulence hydrodynamique 3D</b>	<b>9</b>
<b>1 Outils théoriques de la turbulence hydrodynamique</b>	<b>11</b>
1.1 Principe général de la turbulence : la cascade de Richardson . . . . .	11
1.2 Description statistique des écoulements turbulents . . . . .	13
1.2.1 Moyennes, moments, fonctions de structure . . . . .	13
1.2.2 Homogénéité, isotropie et stationnarité . . . . .	14
1.2.3 Décomposition de Reynolds . . . . .	14
1.2.4 Analyse spectrale . . . . .	16
1.3 Théorie de Kolmogorov . . . . .	17
1.3.1 Hypothèses . . . . .	17
1.3.2 Échelles caractéristiques . . . . .	17
1.3.3 Analyse dimensionnelle dans la gamme inertielle . . . . .	19
1.3.4 Loi des 4/5 . . . . .	20
1.3.5 Taux de dissipation $\epsilon$ . . . . .	20
<b>2 Turbulence hydrodynamique 3D forcée par des particules magnétiques</b>	<b>21</b>
2.1 Contexte . . . . .	21
2.2 Dispositif expérimental . . . . .	22
2.2.1 Description du montage . . . . .	22
2.2.2 Instruments de mesure . . . . .	23
2.3 Mécanisme du forçage par des particules magnétiques . . . . .	27
2.3.1 Dynamique d'une particule . . . . .	27
2.3.2 Dynamique d'un ensemble de particules . . . . .	30
2.4 Caractérisation de la turbulence . . . . .	31
2.4.1 Fluctuations de vitesses . . . . .	32
2.4.2 Fonctions d'autocorrélation et échelles intégrales . . . . .	34
2.4.3 Spectres d'énergie . . . . .	34
2.4.4 Fonctions de structure . . . . .	38
2.4.5 Taux de dissipation $\epsilon$ . . . . .	41
2.4.6 Nombres de Reynolds, échelle de Taylor et échelle de Kolmogorov . . . . .	42
2.4.7 Tableau des données caractéristiques de l'écoulement . . . . .	42

2.5	Conclusion et perspectives . . . . .	42
<b>II</b>	<b>Turbulence d'ondes de surface gravito-capillaires</b>	<b>45</b>
<b>3</b>	<b>Théorie de la turbulence d'ondes</b>	<b>47</b>
3.1	Théorie des ondes de surface hydrodynamiques . . . . .	47
3.1.1	Équations de Navier-Stokes . . . . .	47
3.1.2	Relation de dispersion linéaire des ondes de surface . . . . .	48
3.1.3	Énergie et spectre des ondes . . . . .	49
3.1.4	Mécanismes de dissipation linéaire des ondes de surface . . . . .	51
3.1.5	Modes propres d'un bassin . . . . .	51
3.2	Théorie de la turbulence d'ondes faible . . . . .	53
3.2.1	Principe et hypothèses . . . . .	53
3.2.2	Mécanisme de transfert d'énergie : interactions à N-ondes . . . . .	53
3.2.3	Équation cinétique . . . . .	54
3.2.4	Solutions à flux constant . . . . .	56
3.2.5	Analyse dimensionnelle . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Turbulence d'ondes de surface en hypergravité</b>	<b>59</b>
4.1	Contexte . . . . .	59
4.2	Dispositif expérimental . . . . .	61
4.2.1	La centrifugeuse de grand diamètre de l'ESA (LDC) . . . . .	61
4.2.2	La cuve à ondes . . . . .	64
4.3	Résultats . . . . .	64
4.3.1	Signaux de hauteur des vagues . . . . .	65
4.3.2	Spectres des ondes . . . . .	65
4.3.3	Fréquence de transition . . . . .	65
4.3.4	Exposants du spectre . . . . .	68
4.3.5	Expériences de déclin . . . . .	68
4.3.6	Séparation des échelles de temps . . . . .	70
4.3.7	Contribution des interactions à 3 et à 4 ondes . . . . .	73
4.3.8	Flux d'énergie des ondes . . . . .	74
4.4	Conclusion et perspectives . . . . .	74
4.5	Article publié dans <i>Physical Review Letters</i> . . . . .	77
<b>III</b>	<b>Turbulence intégrable et solitons</b>	<b>87</b>
<b>5</b>	<b>De la turbulence d'ondes à la turbulence intégrable</b>	<b>89</b>
<b>6</b>	<b>Coexistence de solitons et d'événements extrêmes pour des ondes de surface en eau profonde</b>	<b>91</b>
6.1	Contexte . . . . .	91
6.2	Dispositif expérimental . . . . .	92
6.3	Résultats obtenus . . . . .	92
6.4	Conclusion et perspectives . . . . .	95

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	iii
6.5 Article publié dans <i>Physical Review Fluids</i> . . . . .	96
<b>Conclusion</b>	<b>121</b>
<b>Annexe</b>	<b>125</b>
Article publié dans <i>Review of Scientific Instruments</i> . . . . .	126
Article publié dans <i>Euro Physics Letters</i> . . . . .	136
<b>Bibliographie</b>	<b>143</b>



## Liste de publications

### Turbulence d'ondes

1. E. Falcon, G. Michel, G. Prabhudesai, A. Cazaubiel, M. Berhanu, N. Mordant, S. Aumaître et F. Bonnefoy, *Saturation of the Inverse Cascade in Surface Gravity-Wave Turbulence*, Physical Review Letter 125, 134501 (2020) [1]

2. A. Cazaubiel, S. Mawet, A. Darras, G. Grosjean, J. J. W. A van Loon, S. Dorbolo et E. Falcon, *Observation of wave Turbulence on the Surface of a Fluid in a High-Gravity Environment*, Physical Review Letters 123, 244501 (2019) [2]

3. G. Michel, B. Semin, A. Cazaubiel, F. Haudin, T. Humbert, S. Lepot, F. Bonnefoy, M. Berhanu et E. Falcon, *Self-similar gravity wave spectra resulting from the modulation of bound waves*, Phys. Rev. Fluids 3, 054801 (2018) [3]

### Turbulence intégrable

4. G. Michel, F. Bonnefoy, G. Ducrozet, G. Prabhudesai, A. Cazaubiel, F. Copie, A. Tikan, P. Suret, S. Randoux et Eric Falcon, *Emergence of Peregrine solitons in integrable turbulence of deep water gravity waves*, Phys. Rev. Fluids 5, 082801(R) (2020) [4]

5. F. Bonnefoy, P. Suret, A. Tikan, F. Copie, P. Suret, G. Ducrozet, G. Prabhudesai, G. Michel, A. Cazaubiel, E. Falcon, G. El, S. Randoux, *From modulational instability to focusing dam breaks in water waves*, Physical Review Fluids 5, 034802 (2020) [5]

6. A. Cazaubiel, G. Michel, S. Lepot, B. Semin, S. Aumaître, M. Berhanu, F. Bonnefoy et E. Falcon, *Coexistence of solitons and extreme events in deep water surface waves*, Physical Review Fluids 3, 114802 (2018) [6]

### Milieu granulaire en impesanteur

7. S. Aumaître, R. P. Behringer, A. Cazaubiel, E. Clément, J. Crassous, D. J. Durian, E. Falcon, S. Fauve, D. Fischer, A. Garcimartín, Y. Garrabos, M. Hou, X. Jia, C. Lecoutre, S. Luding, D. Maza, M. Noirhomme, E. Opsomer, F. Palencia, T. Pöschel, J. Schockmel, M. Schröter, M. Sperl, R. Stannarius, N. Vandewalle et P. Yu, *An instrument for studying granular media in low-gravity environment*, Review of Scientific Instruments 89, 075103 (2018) [7]

8. M. Noirhomme, A. Cazaubiel, A. Darras, E. Falcon, D. Fischer, Y. Garrabos, C. Lecoutre-Chabot, S. Merminod, E. Opsomer, F. Palencia, J. Schockmel, R. Stannarius et N. Vandewalle, *Threshold of gas-like to clustering transition in driven granular media in low-gravity environment*, EPL (Europhysics Letters) 123, 14003 (2018) [8]

### Travaux menés avant la thèse

#### Interactions entre ondes

9. A. Cazaubiel, F. Haudin, E. Falcon et M. Berhanu, *Forced three-wave interactions of capillary-gravity surface waves*, Physical Review Fluids 4, 074803 (2019) [9]

10. F. Haudin, A. Cazaubiel, L. Deike, T. Jamin, E. Falcon et M. Berhanu, *Experimental study of three-wave interactions among capillary-gravity surface waves*, Physical Review E 93, 043110 (2016) [10]





# Introduction





Le mot « turbulence » est un terme très large qui permet de désigner dans le langage courant un état d'agitation désordonnée. Il vient du latin *turba* pouvant vouloir dire désordre, confusion ou foule. La première utilisation du mot turbulence pour caractériser l'écoulement d'un fluide nous vient de Léonard de Vinci qui fit les premières observations expérimentales de turbulence hydrodynamique au début du XVI<sup>e</sup> siècle [11]. Il conjecture qu'un écoulement peut devenir désordonné et présenter un grand nombre de tourbillons d'échelles variées, et il sépare déjà l'écoulement entre une partie moyenne et une partie fluctuante. Cette séparation anticipe de près de quatre siècles la décomposition de Reynolds qui écrit les variables d'un écoulement turbulent, notamment la vitesse, comme la somme de leur champ moyen et de leur champ fluctuant. Par ailleurs, Osborne Reynolds a relancé l'étude de la turbulence hydrodynamique avec ses fameuses expériences d'écoulement dans une conduite cylindrique en 1883 [12]. Il définit alors un écoulement turbulent, comme un écoulement où les forces inertielles sont grandes devant les forces visqueuses, et introduit le nombre de Reynolds comme le rapport entre ces forces. En 1922, Lewis Richardson revient quant à lui sur l'importance des tourbillons conjecturée par Léonard de Vinci. Il introduit la notion de cascade turbulente : les tourbillons de grandes tailles sont instables et transfèrent de l'énergie vers les petits tourbillons. L'énergie « cascade » ainsi de proche en proche d'une grande échelle de forçage vers une petite échelle où l'énergie est dissipée. La théorie de la turbulence connaît une grande avancée avec les travaux de Kolmogorov dans les années 1940 [13, 14]. Kolmogorov fait l'hypothèse que la statistique des petites échelles d'un écoulement turbulent a un caractère universel : elle est la même pour tout écoulement turbulent si le nombre de Reynolds est suffisamment élevé. Sa théorie se fonde sur l'analyse dimensionnelle et sur des hypothèses d'invariance d'échelle. Elle permet d'obtenir différentes lois sur la statistique de l'écoulement notamment sur le spectre de l'énergie cinétique turbulente. La théorie de la turbulence laisse encore beaucoup de questions ouvertes, en particulier la question de la fermeture des équations découlant de la décomposition de Reynolds.

Depuis les années 1960, et les travaux fondateurs de Zakharov et Newell [15, 16], le mot « turbulence » peut aussi désigner un champ d'ondes aléatoires non-linéaires en interaction.

On parle alors de « turbulence d’ondes ». De manière analogue à la turbulence hydrodynamique, il y a un transfert d’énergie ou une cascade d’une échelle de forçage (généralement une grande échelle) vers une échelle de dissipation (généralement une petite échelle). Le transfert d’énergie se fait également de proche en proche par interactions non-linéaires résonnantes entre les ondes. Toutefois, contrairement à la théorie de la turbulence de Kolmogorov, la théorie de la turbulence d’ondes se fonde sur la dérivation analytique d’une équation cinétique fermée en faisant l’hypothèse que la non linéarité est faible et la taille du système infinie. La théorie de la turbulence d’ondes a été depuis appliquée à de nombreux domaines de la physique impliquant des ondes [17, 18]. Les résultats d’expériences de turbulence d’ondes ne sont pas toujours en accord avec la théorie, en particulier en turbulence d’ondes de surface de gravité [19–23], où la plupart des expériences de laboratoire ne retrouvent pas le spectre prédit.

Dans les années 1970, Vladimir Zakharov a également développé la théorie dite de la « turbulence intégrable » [24]. Un ensemble d’ondes stochastiques faiblement non-linéaires, régi par une équation intégrable peut atteindre un état stationnaire où des structures cohérentes (par exemple des solitons) émergent du fond d’ondes aléatoires et coexistent avec ces dernières. Cet état est appelé la turbulence intégrable. Il n’y a alors aucune interaction résonante entre les ondes contrairement à la turbulence d’ondes et aussi aucun transfert d’énergie entre les échelles, et donc aucune cascade turbulente. La turbulence intégrable peut être également appliquée à divers domaines de la physique, comme les ondes de plasma [25] ou les ondes optiques [26–28]. Une de ses manifestations est le « gaz de solitons » [29, 30].

Ces différentes turbulences sont des sujets très actifs en recherche, dont la compréhension s’affine d’année en année grâce à des travaux théoriques, des simulations numériques ou des expériences de laboratoire. Nous présenterons dans cette thèse trois études expérimentales de trois systèmes de turbulence : i) turbulence hydrodynamique homogène isotrope, ii) turbulence d’ondes de surface gravito-capillaires et iii) turbulence intégrable d’ondes de gravité en eau profonde. Au sein de chacune de ces parties, nous introduirons le contexte propre à chacune de ces thématiques liées à la turbulence.

Dans la **première partie**, nous étudierons la turbulence hydrodynamique engendrée par un nouveau dispositif que nous avons mis en place au laboratoire. Nous avons placé dans un fluide incompressible de petites particules magnétiques, mises en mouvement de manière erratique par un champ magnétique alternatif. Le mouvement des particules force le fluide en volume de manière aléatoire en temps et en espace, ce qui le différencie des forçages déterministes (par exemple : des pâles en rotation) utilisés habituellement en turbulence. Nous caractérisons ce mécanisme de forçage non trivial et étudions l’écoulement turbulent ainsi engendré. Grâce à des mesures locales de vélocimétrie laser Doppler (LDV) et spatiales par vélocimétrie par images de particules (PIV), nous montrons que l’écoulement obéit aux petites échelles aux principales lois de Kolmogorov pour la turbulence isotrope et présentons les premiers résultats sur les grandes échelles de l’écoulement.

Dans la **seconde partie**, nous présenterons des expériences de turbulence d’ondes à la surface d’un fluide menées dans la grande centrifugeuse de l’ESA, nous permettant d’augmenter la gravité effective jusqu’à 20 fois la gravité terrestre. Nous élargissons ainsi la gamme inertielle de la turbulence d’ondes de surface de gravité. Nous montrons notamment que les effets de taille finie modifient le type d’interactions résonnantes en jeu et devraient ainsi être pris en compte par la théorie pour une meilleure description de la turbulence d’ondes.

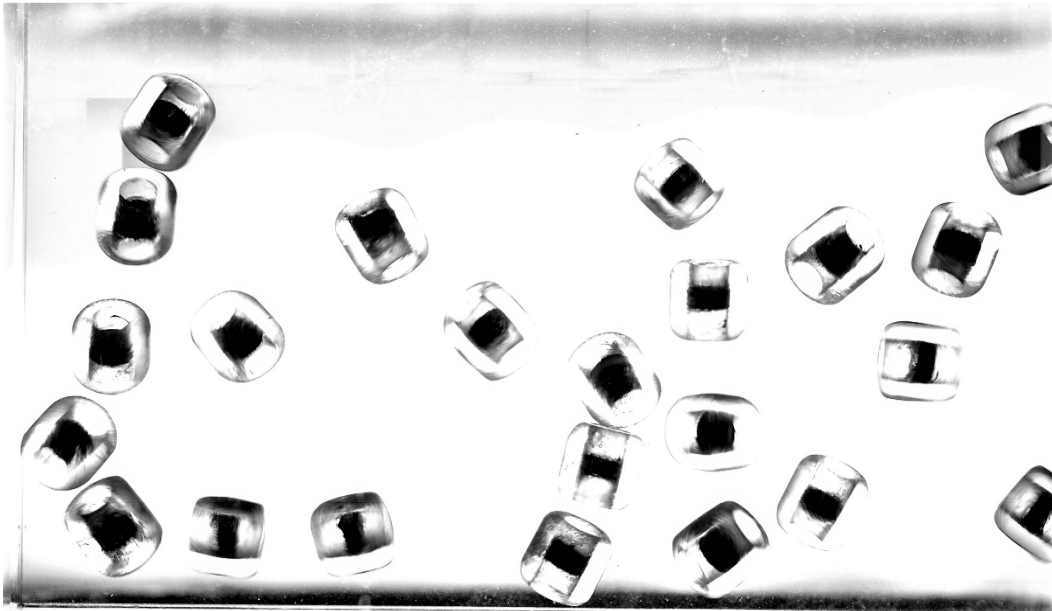
Dans la **troisième partie**, nous étudierons la propagation unidirectionnelle d’ondes de

gravité aléatoires en eau profonde. Nous montrons que des structures cohérentes émergent du fond d'ondes stochastiques, comme prédit par la théorie de la turbulence intégrable. Nous caractérisons la formation, les propriétés et la dynamique de deux types de structures cohérentes détectées : les solitons et les événements extrêmes. Nous étudions également les propriétés statistiques du champ d'ondes, qui possède une distribution à queue lourde et un spectre en loi de puissance. Nous comparons ces résultats avec la théorie de la turbulence intégrable pour l'équation de Schrödinger non-linéaire et si la plupart de nos observations sont prédites par la théorie, nous observons des déviations qui proviennent d'effets non-linéaires d'ordre supérieur propres à la propagation d'ondes hydrodynamiques.



Première partie

# Turbulence hydrodynamique 3D







# 1 – Outils théoriques de la turbulence hydrodynamique

La partie qui suit présente une brève introduction à la théorie de la turbulence hydrodynamique tridimensionnelle et présente les outils théoriques que nous utiliserons dans le chapitre 2. Elle s'appuie sur le livre de Stephen B. Pope [31], le livre de Geneviève Comte-Bellot et Christophe Bailly [32] et sur le cours de Pierre Sagaut [33].

## 1.1 Principe général de la turbulence : la cascade de Richardson

Considérons un fluide incompressible de densité  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ , soumis à une pression  $p$  et à une force extérieure  $\mathcal{F}$ . On désigne par  $\mathbf{u}$  le vecteur vitesse de l'écoulement. Les équations de Navier-Stokes de l'écoulement s'écrivent :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathcal{F}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

La première équation découle du caractère incompressible du fluide.

Le terme de gauche de la seconde équation représente la dérivée particulaire du champ de vitesse dans le fluide qui est composée de la somme de la variation locale du champ de vitesse et d'un terme d'advection. Le terme de droite comprend les forces de pression, les forces extérieures (par exemple la force de gravité) ainsi que les effets de la dissipation visqueuse dans le fluide.

Le terme d'advection ou d'inertie  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  est non-linéaire, c'est sa non-linéarité qui est à l'origine du transfert d'énergie entre échelles sur lequel se fonde la théorie de la turbulence. En effet, si l'on prend l'équation de convection la plus simple : l'équation de Burgers sans viscosité qui décrit la convection unidimensionnelle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\tag{1.2}$$

avec pour condition initiale à  $t = 0$  :

$$u(x, 0) = A \cos(kx).\tag{1.3}$$

On peut obtenir la vitesse à l'instant  $\Delta t$  par un développement de Taylor en utilisant (1.2) :

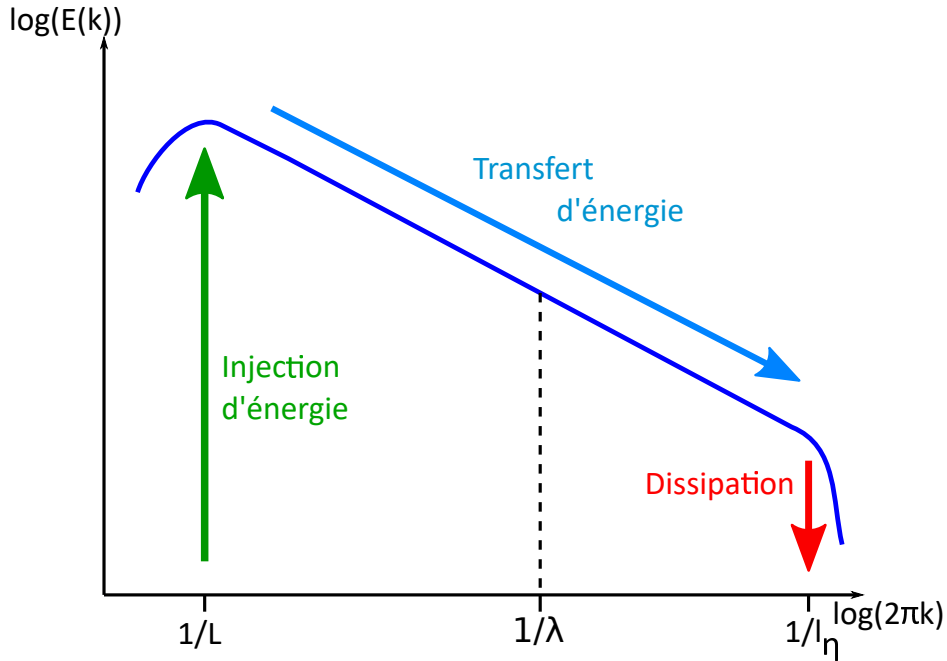


FIG. 1.1 Illustration de la cascade de Richardson par le spectre d'énergie typique d'un écoulement turbulent.

$$u(x, \Delta t) = A \cos(kx) + \Delta t \frac{A^2 k}{2} \sin(2kx) + \dots \quad (1.4)$$

On observe immédiatement l'apparition des harmoniques d'ordre supérieur, il y a eu transfert d'énergie vers un nombre d'onde  $k$  plus grand, donc vers une échelle plus petite.

Lorsqu'on prend en compte la viscosité, cette dernière tend à s'opposer à l'inertie, à réduire les inhomogénéités du champ de vitesse, à rendre l'écoulement laminaire. Pour évaluer qui de l'inertie ou de la viscosité domine dans (1.1), on introduit un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}{\nu \nabla^2 \mathbf{u}} \sim \frac{UL}{\nu}, \quad (1.5)$$

avec  $U$  et  $L$  la vitesse et la longueur typique de l'écoulement. Lorsque  $Re \gg 1$ , l'écoulement est turbulent (en pratique, pour les expériences de Reynolds dans un tube, lorsque  $Re$  devient supérieur à 4000 [31]).

Le nombre de Reynolds diminue lorsqu'on va vers les petites échelles, le transfert d'énergie va donc être limité par la dissipation visqueuse lorsque  $Re$  s'approche de 1. On appelle échelle de Kolmogorov, la petite échelle de taille typique  $l_\eta$  pour laquelle  $Re = 1$ . Dans un écoulement turbulent, on injecte généralement de l'énergie à une grande échelle  $L$ , cette énergie va être transférée vers les petites échelles jusqu'à l'échelle de Kolmogorov, à partir de laquelle la viscosité domine et où l'énergie est alors dissipée (voir Fig. 1.1). Ce mécanisme est appelé cascade turbulente ou cascade de Richardson, en hommage à Lewis Fry Richardson qui a décrit qualitativement le phénomène pour la première fois en 1922. Il conjecture en effet que

le transfert d'énergie est local dans l'espace des échelles et se fait par une cascade de proche en proche jusqu'à l'échelle de dissipation visqueuse.

## 1.2 Description statistique des écoulements turbulents

La non linéarité des équations de Navier-Stokes rend les écoulements turbulents imprédictibles aux temps longs. Un petit écart aux conditions initiales va avoir tendance à s'amplifier avec le temps. Ainsi, bien que l'équation de Navier-Stokes soit déterministe, il convient d'adopter une description statistique des champs turbulents.

### 1.2.1 Moyennes, moments, fonctions de structure

Soit  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  la vitesse instantanée à un instant  $t$  en un point  $\mathbf{x}$  de l'écoulement. La moyenne de  $\mathbf{u}$ , notée  $\langle \mathbf{u} \rangle$  est définie comme une moyenne d'ensemble sur un grand nombre  $N$  de réalisations indépendantes de la même expérience :

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \mathbf{u}^{(l)}(\mathbf{x}, t), \quad (1.6)$$

où  $\mathbf{u}^{(l)}$  représente la  $l$ -ième réalisation indépendante de  $\mathbf{u}$ .

On peut également définir la moyenne temporelle de  $\mathbf{u}$  sur une durée  $2a$  :

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle_a = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \mathbf{u}(\mathbf{x}, t + s) ds. \quad (1.7)$$

Pour quantifier les fluctuations autour de la moyenne, on calcule la variance  $V$  de la variable  $\mathbf{u}$  de la manière suivante :

$$V(\mathbf{u}) = \langle (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle)^2 \rangle. \quad (1.8)$$

Il est usuel d'utiliser l'écart type  $\sigma_{\mathbf{u}} \equiv \sqrt{V(\mathbf{u})}$  car celui-ci a la même dimension que la variable d'origine  $\mathbf{u}$ .

La variance est par définition le moment d'ordre 2 de  $\mathbf{u}$ , le moment d'ordre  $q$  est égal à  $\langle (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle)^q \rangle$ .

On définit  $\delta u_i(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) \equiv u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{x}, t)$ , l'incrément de la composante  $u_i$  de la vitesse entre deux points séparés par  $\mathbf{r}$ . La fonction de structure d'ordre  $p$ ,  $S_p$  de  $u_i$  est par définition le moment d'ordre  $p$  de l'incrément  $\delta u_i$  :

$$S_p(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) \equiv \langle \delta u_i(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t)^p \rangle \quad (1.9)$$

En turbulence, il est utile de calculer également le tenseur des corrélations de vitesse en deux point  $\mathcal{R}_{ij}$  et le tenseur de Reynolds  $R_{ij}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r}, t) &\equiv \langle [u_i(\mathbf{x}, t) - \langle u_i(\mathbf{x}, t) \rangle] [u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \langle u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle] \rangle, \\ R_{ij} &= \mathcal{R}_{ij}(\mathbf{r} = 0), \end{aligned} \quad (1.10)$$

où  $u_i$  et  $u_j$  sont les composantes du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  suivant les direction  $i$  et  $j$ .

### 1.2.2 Homogénéité, isotropie et stationnarité

Un écoulement est dit homogène, lorsque les moments d'ordre 2 ou supérieur de son champ de vitesse sont invariants par translation. Lorsqu'un écoulement est homogène les fonctions de structure  $S_p$  et le tenseur  $\mathcal{R}_{ij}$  sont indépendants de la position  $\mathbf{x}$ .

Un écoulement est dit isotrope, lorsque les moments d'ordre 2 ou supérieur de son champ de vitesse sont invariants par translation, rotation ou symétrie axiale. Lorsque l'écoulement est isotrope les fonctions de structure  $S_p$  et le tenseur  $\mathcal{R}_{ij}$  sont indépendants de  $\mathbf{x}$  et de la direction du vecteur  $\mathbf{r}$ , ils ne dépendent que de  $r = \|\mathbf{r}\|$  et du temps  $t$ .

Un écoulement est dit stationnaire lorsque les moments d'ordre 2 ou supérieur de son champ de vitesse sont invariants par la transformation  $t \rightarrow t + t'$ . Lorsque l'écoulement est stationnaire les fonctions de structure  $S_p$  et le tenseur  $\mathcal{R}_{ij}$  sont indépendants du temps  $t$ .

Si on considère une durée  $a$  suffisamment longue, si l'écoulement est stationnaire la moyenne temporelle devient indépendante de  $a$  égale à la moyenne d'ensemble et on a alors :

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle = \lim_{a \rightarrow \infty} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle_a. \quad (1.11)$$

### 1.2.3 Décomposition de Reynolds

La décomposition de Reynolds consiste à exprimer les variables de l'écoulement en la somme de leur moyenne et de leur fluctuation (notée avec un prime), en particulier le vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle + \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t). \quad (1.12)$$

#### a) Équation du champ moyen

Si on effectue la moyenne des équations (1.1), on obtient les équations suivantes pour le champ moyen :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle &= 0, \\ \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle &= -\frac{1}{\rho} \nabla \langle p \rangle + \nu \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle + \langle \mathcal{F} \rangle. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Écrivons maintenant ces équations suivant la coordonnée  $i$ , en adoptant la convention de sommation sur les indices répétés :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} + \langle \mathcal{F}_i \rangle \end{aligned} \quad (1.14)$$

Si on remplace chaque terme dans le produit moyenné par sa décomposition de Reynolds, il vient :

$$\langle u_i u_j \rangle = \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + R_{ij}, \quad (1.15)$$

où  $R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$  est le tenseur de Reynolds. On obtient alors :

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} + \langle \mathcal{F}_i \rangle - \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1.16)$$

Le terme provenant de la turbulence est le tenseur de Reynolds  $R_{ij}$ , il traduit le transfert de quantité de mouvement par les fluctuations de vitesse.

### b) Équations du champ fluctuant

Pour obtenir les équations du champ fluctuant, on applique la décomposition de Reynolds (1.12) dans les équations de Navier-Stokes (1.1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i \langle u_j \rangle + u'_j \langle u_i \rangle + u'_i u'_j - R_{ij}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mathcal{F}'_i. \end{aligned} \quad (1.17)$$

À partir des équations (1.16) et (1.17), on peut obtenir l'équation d'évolution de l'énergie cinétique moyenne du champ fluctuant :  $K' = \frac{1}{2} \rho (\langle u_1'^2 \rangle + \langle u_2'^2 \rangle + \langle u_3'^2 \rangle)$  :

$$\frac{\partial K'}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial K'}{\partial x_i} = -\rho R_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_i u'_j \rangle + \langle \mathcal{F}'_i u'_i \rangle - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle p' u'_j \rangle + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} K' - \epsilon, \quad (1.18)$$

où :

- $\frac{\partial K'}{\partial t}$  est la variation temporelle de l'énergie cinétique turbulente fluctuante,
- $\langle u_i \rangle \frac{\partial K'}{\partial x_i}$  est l'apport d'énergie cinétique par la vitesse moyenne,
- $-\rho R_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}$  est en général l'apport d'énergie cinétique par interaction du champ fluctuant avec l'écoulement moyen,
- $-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_i u'_j \rangle$  est le transfert d'énergie cinétique par les fluctuations de vitesses,
- $\langle \mathcal{F}'_i u'_i \rangle$  est la puissance des fluctuations de la force extérieure
- $-\frac{\partial}{\partial x_j} \langle p' u'_j \rangle$  est le transfert d'énergie cinétique par l'interaction entre la pression et la vitesse,
- $\nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} K'$  est le transfert d'énergie cinétique par viscosité,
- $-\epsilon = -\nu \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle$  est la perte d'énergie par dissipation en chaleur.

### 1.2.4 Analyse spectrale

Pour caractériser un écoulement turbulent, il est important de pouvoir évaluer le rôle des différentes échelles en jeu. Il nous faut pour cela réaliser une analyse spectrale. La transformée de Fourier d'une variable réelle  $f(x)$  est définie par les relations :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \\ \hat{f}(k) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned} \quad (1.19)$$

où  $k$  est le nombre d'onde.

À partir du tenseur des corrélations de vitesses  $R_{ij}$ , on peut définir le tenseur spectral des corrélations de vitesse  $\Phi_{ij}$  par transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} R_{i,j}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} R_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (1.20)$$

À partir du tenseur  $\Phi_{ij}$ , on peut définir la densité spectrale d'énergie cinétique fluctuante (qu'on peut également appeler spectre d'énergie).

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \delta(|\mathbf{k}| - k). \quad (1.21)$$

Le spectre d'énergie  $E(k, t)$  donne la répartition de l'énergie cinétique fluctuante entre les différentes échelles.

$$K' = \int_0^{\infty} E(k) dk. \quad (1.22)$$

Il est utile pour analyser des données expérimentales de calculer  $E_{ij}(k_1)$  le spectre unidimensionnel suivant la direction  $k_1$ . Celui-ci a pour expression :

$$E_{ij}(k_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(r_1) e^{ik_1 r_1} dr_1. \quad (1.23)$$

Souvent, expérimentalement, on n'a accès qu'au signal temporel de la vitesse en un point. Il est donc utile de définir la densité spectrale de puissance temporelle  $\Phi_{11}(f)$  telle que :

$$\langle u_1'^2 \rangle = \int_0^{\infty} \Phi_{11}(f) df. \quad (1.24)$$

L'hypothèse de Taylor dite de la turbulence gelée permet de passer de  $E_{11}(k)$  à  $\Phi_{11}(f)$  en présence d'un écoulement moyen [34], grâce au changement de variable suivant :

$$k_1 = 2\pi f / \langle u_1 \rangle \text{ soit } dk_1 = (2\pi / \langle u_1 \rangle) df, \quad (1.25)$$

il vient alors :

$$\langle u_1'^2 \rangle = \int_0^{\infty} \frac{\langle u_1 \rangle}{2\pi} \Phi_{11}(f = k_1 \langle u_1 \rangle / 2\pi) dk_1, \quad (1.26)$$

on en déduit donc :

$$2E_{11}(k_1) = \frac{\langle u_1 \rangle}{2\pi} \Phi_{11}(f). \quad (1.27)$$

## 1.3 Théorie de Kolmogorov

Les bases de la théorie de la turbulence ont été posées par le mathématicien Andreï Kolmogorov dans les années 1940. Nous allons présenter brièvement les principaux résultats ici qui reposent sur différentes hypothèses d'invariance d'échelle [13, 14, 35, 36].

### 1.3.1 Hypothèses

#### a) Isotropie

La première hypothèse de la théorie de Kolmogorov est l'isotropie de l'écoulement. Cette hypothèse est en général fautive à grande échelle, les plus grands tourbillons étant perturbés par les conditions aux limites. Cependant lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment grand, les petites échelles deviennent statistiquement isotropes.

Lorsque l'écoulement est isotrope, les expressions des moments statistiques peuvent être simplifiées. On peut notamment montrer que le tenseur des corrélations en deux points prend la forme suivante :

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{3} \langle u_i^2 \rangle \left( g(r, t) \delta_{ij} + [f(r, t) - g(r, t)] \frac{r_i r_j}{r^2} \right), \quad (1.28)$$

où  $f(r, t)$  et  $g(r, t)$  sont des fonctions scalaires sans dimension, respectivement les coefficients de corrélation des vitesses longitudinales et transverses, avec  $f(r = 0) = g(r = 0) = 1$ ,  $f, g \leq 1$  et  $g = f + \frac{1}{2} r df/dr$  [37].

L'équation d'évolution de l'énergie cinétique fluctuante (1.17) est fortement simplifiée, de nombreux termes s'annulent et on a :

$$\frac{DK'}{Dt} = -\epsilon + \langle \mathcal{F}'_i u'_i \rangle. \quad (1.29)$$

Le taux de dissipation  $\epsilon$  est donc une variable très importante pour caractériser un écoulement isotrope, sur laquelle est fondée une grande partie de la théorie de Kolmogorov.

#### b) Similarité

En plus de l'hypothèse d'isotropie, Kolmogorov fait les deux hypothèses suivantes [13] :

1. Pour les petites échelles ( $r \ll L$ ), la statistique des mouvements turbulents est universelle (indépendante du mécanisme de forçage) et est fixée par la viscosité cinématique  $\nu$  et par le taux de dissipation de l'énergie fluctuante  $\epsilon$ .
2. On appelle gamme inertielle l'intervalle situé entre l'échelle de dissipation et l'échelle de forçage ( $\eta \ll r \ll L$ ). Dans la gamme inertielle la statistique des mouvements turbulents est universelle et est uniquement fixée par  $\epsilon$ .

### 1.3.2 Échelles caractéristiques

Pour caractériser un écoulement turbulent, il est important de définir ses échelles caractéristiques, notamment pour définir les bornes de la gamme inertielle. Comme l'écoulement est isotrope, ces échelles sont les mêmes dans les trois directions de l'espace.



### a) Échelle intégrale

On considère la fonction d'autocorrélation spatiale de la composante  $u$  de la vitesse de l'écoulement dans la direction  $x$  :

$$\rho_u(r_x) = \left\langle \frac{\langle u(x,t)u(x+r_x,t) \rangle_x}{\langle u(x,t)^2 \rangle_x} \right\rangle_t \quad (1.30)$$

L'échelle intégrale de  $u$  dans la direction  $x$  est définie par :

$$L_{u,x} = \int_0^\infty \rho_u(r_x) dr_x. \quad (1.31)$$

$L_{u,x}$  est l'échelle intégrale longitudinale, comme l'écoulement est isotrope, on a :  $L_{u,x} = L_{v,y} = L_{w,z} = L_l$ . On peut définir de la même manière l'échelle intégrale transverse  $L_t = L_{u,y}$ .  $L_l$  et  $L_t$  peuvent être également calculées à partir des fonctions  $f$  et  $g$  :

$$\begin{aligned} L_l &= \int_0^\infty f(r) dr, \\ L_t &= \int_0^\infty g(r) dr. \end{aligned} \quad (1.32)$$

On peut en déduire que  $L_t = \frac{1}{2}L_l$ .

$L_{u,x}$  évalue la distance suivant la direction  $x$  sur laquelle les fluctuations de la vitesse  $u$  sont corrélées de manière significative. L'échelle intégrale correspond à la plus grande échelle de la gamme inertielle (voir Fig. 1.1).

### b) Échelle de Taylor

La fonction  $f$  définie pour l'équation (1.28) est une fonction paire de l'espace, comme de plus  $f(r=0) = 1$ . Au voisinage de  $r = 0$ ,  $f(r)$  peut s'écrire :

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{\lambda_f^2}, \quad (1.33)$$

où  $\lambda_f$  est alors définie comme l'échelle de Taylor longitudinale. On a donc  $\lambda_f$  par  $\lambda_f \equiv \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}d^2f/dr^2|_{r=0}}}$ . L'échelle de Taylor transverse est définie par  $\lambda_g \equiv \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}d^2g/dr^2|_{r=0}}}$ . Ces deux échelles sont reliées entre elles par la relation :  $\lambda_f = \sqrt{2}\lambda_g$ , lorsque l'écoulement est isotrope.  $\lambda_g$  est reliée au taux de dissipation  $\epsilon$  par la relation :

$$\epsilon = 15\nu \frac{\langle u'^2 \rangle}{\lambda_g^2}. \quad (1.34)$$

Les échelles de Taylor ont été définies par Taylor lors des premières études en turbulence isotrope [38] en 1935. Il interpréta  $\lambda_g$  comme la taille des plus petits tourbillons, responsables de la dissipation visqueuse. Cette supposition s'est avérée être fautive, car  $u'$  n'est pas la vitesse caractéristique des petits tourbillons. La dissipation visqueuse a lieu à l'échelle de Kolmogorov, que l'on va définir dans le paragraphe suivant. L'échelle de Taylor n'a donc pas d'interprétation physique claire, c'est une échelle intermédiaire dans la gamme inertielle (voir Fig. 1.1). Elle est toutefois encore beaucoup utilisée. Notamment, on utilise souvent le nombre de Reynolds à l'échelle de Taylor  $Re_\lambda = \frac{u'\lambda_g}{\nu}$  pour comparer les expériences entre elles.

### c) Échelle de Kolmogorov

La dernière échelle est l'échelle de Kolmogorov : c'est la plus petite échelle de la cascade turbulente, celle à laquelle a lieu la dissipation visqueuse (voir Fig. 1.1). Elle est construite par analyse dimensionnelle. En utilisant  $\nu$ , la viscosité du fluide (de dimension  $L^2.T^{-1}$ ) et  $\epsilon$ , le flux d'énergie cinétique entre les échelles (de dimension  $L^2.T^{-3}$ ), on peut définir une échelle de longueur  $\eta$ , une échelle de temps  $\tau_\eta$  et une échelle de vitesse  $u_\eta$  [13] :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}, \quad \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2}, \quad u_\eta = (\nu\epsilon)^{1/4}. \quad (1.35)$$

Comme précisé dans le paragraphe 1.1, le nombre de Reynolds à cette échelle vérifie bien  $Re_\eta = \frac{\eta u_\eta}{\nu} = 1$ . Cette échelle est donc bien l'échelle de Kolmogorov à laquelle les effets non-linéaires et visqueux sont égaux.

### d) Lien entre les différentes échelles

Les relations entre les trois différentes échelles sont inscrites ci-dessous [39] :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_g}{L} &= \sqrt{15/Re_L}, \\ \frac{\eta}{\lambda_g} &= \frac{Re_L^{-1/4}}{\sqrt{15}}, \\ \frac{\eta}{L} &= Re_L^{-3/4}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

## 1.3.3 Analyse dimensionnelle dans la gamme inertielle

La théorie de Kolmogorov se fonde sur l'analyse dimensionnelle à partir des deux hypothèses de similarité [13].

La fonction de structure d'ordre 2  $S_2(r) = \langle \delta u(r)^2 \rangle$  a pour dimension  $[L^2.T^{-2}]$ , dans la zone inertielle, elle ne dépend que de  $r$  (de dimension  $[L]$ ) et de  $\epsilon$  de dimension  $[L^2.T^{-3}]$ . Par analyse dimensionnelle, on obtient :

$$S_2 = C_2 \epsilon^{2/3} r^{2/3}, \quad (1.37)$$

où  $C_2 \approx 2.0$  est une constante sans dimension, dont la valeur est issue d'études expérimentales [40].

On trouve de la même manière la densité spectrale de puissance  $E(k)$ , sa dimension est  $E(k) = [L^3][T^{-2}]$ , on a donc :

$$E(k) = K_0 \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad k_\eta = \pi/\eta \gg k \gg k_L = \pi/L \quad (1.38)$$

où  $K_0 = 1.5 \pm 0,1$  est la constante de Kolmogorov, dont la valeur a été trouvée expérimentalement [40]. Ce spectre est le spectre de Kolmogorov-Obukov.

Le spectre unidimensionnel longitudinal  $E_{11}(k_1)$  a la même forme :

$$E_{11}(k_1) = C \epsilon^{2/3} k_1^{-5/3}, \quad (1.39)$$

avec  $C = \frac{18}{55}K_0 \approx 0.49$  [31]. De la même manière, on a la relation entre le spectre transverse  $E_{22}(k_1)$  et  $E_{11}(k_1)$  :

$$E_{22}(k_1) = \frac{4}{3}E_{11}(k_1). \quad (1.40)$$

### 1.3.4 Loi des 4/5

Si la théorie de la turbulence se fonde sur l'analyse dimensionnelle, la fonction de structure d'ordre 3 peut être trouvée de manière exacte dans la zone inertielle à partir d'une équation gouvernant les corrélations doubles trouvée par Kármán et Howarth [37] et des hypothèses de la théorie de Kolmogorov :

$$S_3(r) = -\frac{4}{5}\epsilon r. \quad (1.41)$$

### 1.3.5 Taux de dissipation $\epsilon$

Comme on a pu le voir la variable qui permet de déterminer la statistique d'un écoulement dans la zone inertielle est le taux de dissipation  $\epsilon$ . Il est aussi égal au flux d'énergie cinétique à travers les échelles dans la gamme inertielle, c'est pourquoi on le retrouve dans toutes les équations de cette partie. Il est donc particulièrement intéressant de retrouver sa valeur expérimentale, ce qui peut être fait de différentes manières suivant qu'on mesure le champ de vitesse localement ou spatialement.

Si le champ de vitesse est mesuré spatialement :

1. On peut trouver  $\epsilon$  en utilisant sa définition  $\epsilon \equiv \nu \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle$ . Pour la turbulence homogène et isotrope, cette expression se simplifie en :

$$\epsilon = 15\nu \left\langle \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \quad (1.42)$$

2.  $\epsilon$  peut être également trouvé à partir du spectre spatial en utilisant les équations (1.38) ou (1.39).
3. Enfin, il est possible d'obtenir le taux de dissipation  $\epsilon$  à partir des fonctions de structure  $S_2$  et  $S_3$ , en effet d'après (1.37) et (1.41), on a :

$$\epsilon = \left( \frac{S_2(r)}{C_2} \right)^{3/2} \frac{1}{r} = -\frac{5}{4} \frac{S_3(r)}{r}. \quad (1.43)$$

Ces méthodes ne sont pas possibles, si on ne mesure le champ de vitesse qu'en un point selon une composante en fonction du temps. Toutefois en utilisant l'hypothèse de Taylor de turbulence gelée :  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{\langle u \rangle} \frac{\partial u}{\partial t}$ , on peut obtenir une estimation de  $\epsilon$  par les méthodes suivantes :

1. À partir de l'équation (1.42) et l'hypothèse de la turbulence gelée pour évaluer  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ .
2. À partir du spectre temporel  $\Phi_{11}(f)$  en utilisant les équations (1.27) et (1.39), on obtient :

$$\Phi_{11}(f) = \frac{4\pi}{\langle u_1 \rangle} C \epsilon^{2/3} \left( \frac{2\pi f}{\langle u_1 \rangle} \right)^{-5/3}. \quad (1.44)$$

# 2 – Turbulence hydrodynamique 3D forcée par des particules magnétiques

## 2.1 Contexte

La turbulence hydrodynamique intervient dans la plupart des écoulements géophysiques ou astrophysiques, ainsi que dans de nombreux procédés industriels. L'étude de la turbulence homogène et isotrope est particulièrement intéressante, parce que cet écoulement contient certaines hypothèses de la turbulence qui permettent d'obtenir des expressions relativement simples dans l'espace physique, par exemple l'équation de Karman-Howarth qui gouverne les corrélations doubles des vitesses en deux points, l'équation de Lin qui gouverne le spectre  $E(\mathbf{k}, t)$  et l'analyse d'invariance d'échelle de la théorie de Kolmogorov.

Le montage expérimental le plus usuel pour engendrer la turbulence consiste en une grille placée au début d'une veine d'essai. Les barreaux créent des sillages qui vont se mélanger et créer en aval de la grille une turbulence homogène. La turbulence de grille est isotrope et homogène dans les plans parallèles à la grille [32]. Toutefois la turbulence décline en aval de la grille et reste de ce fait anisotrope en trois dimensions.

Ces dernières décennies, de nouveaux dispositifs expérimentaux visant à générer une turbulence homogène et isotrope dans toutes les directions ont été mis en œuvre. L'écoulement est engendré de façon déterministe à grande échelle par un forçage localisé spatialement : par des grilles oscillantes [41, 42], des structures contrarotatives [43–45], plusieurs ventilateurs [46] ou via plusieurs jets [47, 48]. La plupart de ces systèmes obtiennent une bonne homogénéité et une bonne isotropie du champ de vitesse, certains ont un champ moyen négligeable. Toutefois le forçage reste localisé spatialement.

Numériquement, les modélisations de turbulence forcée (i.e. avec un terme de forçage continu en opposition avec la turbulence en déclin) se sont longtemps appuyées sur un forçage spectral, c'est-à-dire en ajoutant une force externe aux équations de Navier-Stokes pour tous les nombres d'ondes  $\mathbf{k}$  contenus dans une sphère (voir notamment [49]). Dans les années 2000, le forçage linéaire a été introduit [50, 51], où le terme de forçage est isotrope dans l'espace réel proportionnel à la vitesse de l'écoulement. Bien que plus proche des systèmes expérimentaux, ce forçage n'est pas localisé spatialement, contrairement à la plupart des expériences réalisées jusqu'ici en turbulence homogène isotrope. Utiliser un forçage homogène isotrope sur tout le volume et non déterministe permettrait de diminuer fortement les biais lors des comparaisons numérique/expériences, mais aussi de pouvoir mieux étudier expérimentalement la turbulence en regard des modèles théoriques. Cependant, un forçage homogène en volume au sein du fluide était difficile à obtenir jusqu'alors.

Récemment, nous avons développé une nouvelle technique de forçage de la turbulence où le fluide est forcé en volume, aléatoirement en espace et en temps, en utilisant des particules magnétiques de petites tailles, contrôlées à distance [52, 53]. Pour cela, un champ magnétique oscillant pilote aléatoirement le degré de liberté de rotation de chaque particule (petits aimants encapsulés); les collisions entre particules ou avec les parois du récipient leur conférant alors un mouvement erratique de translation. Un tel forçage en volume favorise l’homogénéité du champ de vitesse [53].

En matière molle, les milieux granulaires dilués constitués de particules magnétiques de taille centimétrique, soumis à un champ magnétique alternatif, ont été utilisés pour des expériences en 2D [54, 55] ou en 3D [52] pour tester les théories des gaz granulaires dissipatifs. Ce type de forçage a également été utilisé pour étudier la formation de motifs de particules magnétiques en suspension à la surface d’un fluide [56, 57] et pour étudier la conversion d’énergie mécanique en chaleur pour un système granulaire au sein d’un gaz ou d’un liquide [58, 59].

Ce type de forçage vient d’être utilisé pour la turbulence bidimensionnelle : l’écoulement est généré par des colloïdes magnétiques à la surface libre du fluide et soumis à un champ magnétique alternatif [60]. Malgré le faible nombre de Reynolds obtenu ( $\approx 30$ ), le champ de vitesse montre une cascade inverse d’énergie en  $k^{-5/3}$  comme attendu théoriquement pour la turbulence 2D, de façon cohérente avec d’autres systèmes de turbulence 2D dans des écoulements bulleux [61, 62] ou dans de fine couche conductrice forcée par un champ électromagnétique [63]. Ainsi, un forçage aléatoire dans le volume semble favoriser une forme de turbulence à bas nombre de Reynolds en 2D. Notre dispositif nous permettra d’étudier cette turbulence à Reynolds modéré en 3D.

La turbulence 3D transfère de l’énergie des grandes vers les petites échelles. Si les petites échelles ont été beaucoup étudiées dans de nombreux contextes et sont relativement bien connues [36], on connaît en revanche peu de choses sur les grandes échelles [64–66]. Ce mécanisme de forçage permettra également d’étudier les grandes échelles en turbulence hydrodynamique définies comme les échelles plus grandes que celles du forçage.

## 2.2 Dispositif expérimental

### 2.2.1 Description du montage

Un montage similaire à celui décrit dans cette partie a été utilisé dans [53]. Un schéma et une photo montrent ce dispositif Fig. 2.1 et 2.3. Une cuve carrée de côté  $a = 11.5$  cm est remplie d’eau distillée jusqu’à une hauteur  $h = 9$  cm. La cuve est fermée en haut par un couvercle transparent. Le couvercle est légèrement plus petit que la cuve ( $a' = 11$  cm) et s’enfonce un peu dans l’eau, le trop plein d’eau se répartit sur les bords du couvercle ce qui permet d’empêcher la présence de bulles d’air sous le couvercle. On introduit  $N$  particules magnétiques dans la cuve. Nous avons utilisé deux types de particules magnétiques différentes. Les premières ont été fabriquées au laboratoire et sont décrites dans [53]. Elles sont constituées d’un aimant cylindrique de néodyme (NdFeB, N52, 0.5 cm de diamètre 0.2 cm d’épaisseur) encastré et aligné axialement dans un cylindre de plexiglas fait maison ( $d = 1$  cm de diamètre extérieur, 0.25 cm d’épaisseur, et  $L = 1$  cm de long) (voir Fig. 2.3). Les secondes sont des micro-barreaux Fisher d’agitation magnétique en Téflon (PTFE) cylindrique de 3 mm de diamètre et de 8 mm de long. Les caractéristiques des aimants sont

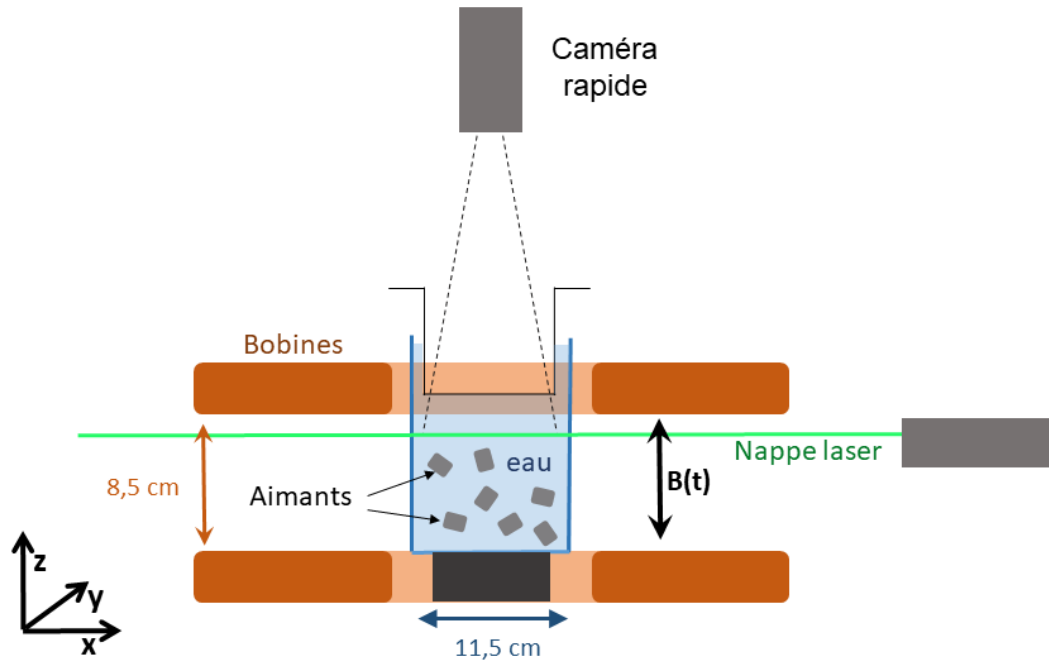


FIG. 2.1 Schéma du dispositif expérimental monté pour les mesures de PIV.

listées dans le tableau 2.4. On présente dans la suite les résultats d'expériences réalisées avec les particules magnétiques fabriquées au laboratoire, des résultats similaires ont été obtenus avec les particules plus petites en PTFE.

La cuve est placée entre deux bobines coaxiales, de diamètre intérieur (extérieur) 18 cm (40 cm) distantes de 8.5 cm, alimentées par un courant alternatif. Les bobines sont alimentées par un amplificateur de puissance 2 kW, créant un courant entre 0 et 9 A, pouvant passer du continu à l'alternatif à une fréquence entre 0 et 30 kHz. Les bobines génèrent ainsi par induction un champ magnétique oscillant  $B(t)$ . Les bobines sont dans une disposition de Helmholtz, ce qui assure l'homogénéité du champ  $B$  avec une variation maximale de 5%.  $B$  a été mesuré à l'aide d'une sonde à effet Hall, il varie entre 0 et 207 G pour  $f = 50$  Hz. Ce champ va mettre en mouvement les particules magnétiques de façon erratique (voir le paragraphe 2.3). L'écoulement au sein du fluide est ainsi forcé en volume de manière aléatoire en temps et en espace.

### 2.2.2 Instruments de mesure

#### a) Vélométrie laser Doppler (LDV)

Le dispositif de vélocimétrie laser Doppler ou LDV (Dantex, Flow Explorer 1D, 35mW BSAF 30) permet de mesurer le champ de vitesse de l'écoulement en un point suivant une direction de manière non intrusive. L'axe de la LDV est placé suivant  $Oy$  de la Fig. 2.1. Onensemence le liquide avec de fines particules de verre creuses recouvertes d'une pellicule

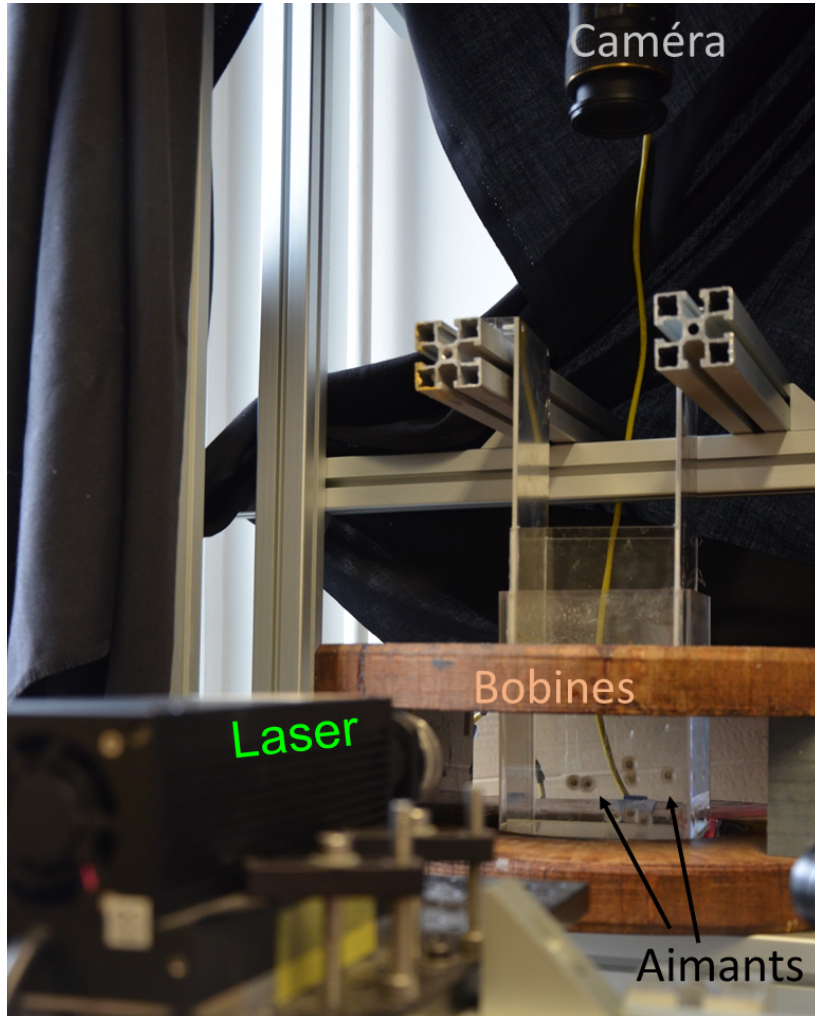


FIG. 2.2 Photo d'une expérience réalisée avec 10 aimants.

argentée de  $10 \mu\text{m}$  de diamètre, et de densité proche de l'eau. Un faisceau laser est scindé en deux, le point de mesure se trouve dans le liquide à l'intersection de deux faisceaux laser. Chaque mesure est effectuée deux fois une première fois avec les faisceaux dans le plan  $Oxy$  et une seconde fois dans le plan  $Oyz$  pour mesurer la composante suivant  $x$  et la composante suivant  $z$  de la vitesse. L'un des deux faisceaux passe dans une cellule de Bragg et voit sa fréquence décalée de  $f_d \approx 40 \text{ MHz}$ . Les deux faisceaux laser se croisent suivant un angle  $\varphi = 13.4^\circ$  (voir Fig. 2.5). Ils interfèrent et forment des franges d'interférences allongée selon l'axe  $Oy$  qui défilent à la fréquence  $f_d$ . L'interfrange  $i$  suit la relation suivante :

$$i = \frac{\lambda}{2 \sin(\varphi/2)} \quad (2.1)$$

où  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$  est la longueur d'onde du faisceau laser Hélium-Néon. Les particules présentes dans le liquides sont réfléchissantes et suivent l'écoulement. Lorsqu'une particule passe dans la zone de mesure (de volume  $90 \times 90 \times 90 \text{ mm}^3$ , la première dimension étant alignée avec l'axe du laser) elle traverse les franges d'interférence et émet un scintillement détecté

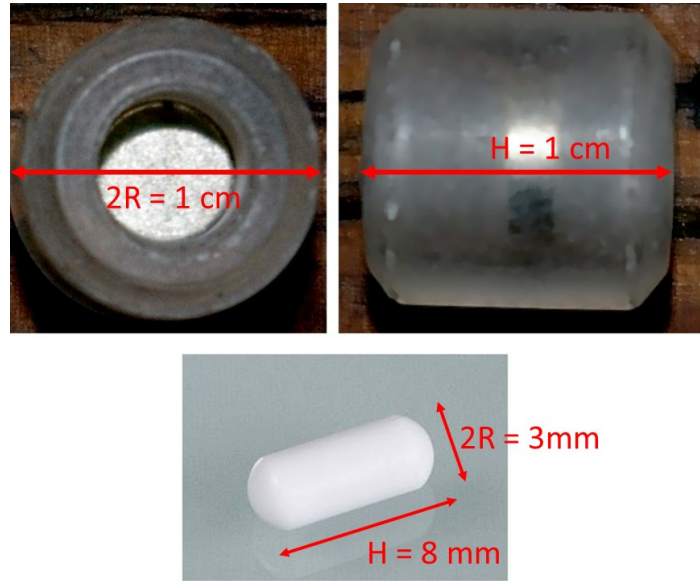


FIG. 2.3 Photo des aimants utilisés. Haut : aimants fabriqués au laboratoire. Bas : Barreau magnétique de chez Fisher.

Type de particules	Nombre maximal	Masse $m$ (g)	diamètre $2R$ (mm)	hauteur $H$ (mm)	Moment d'inertie $I$ (kg.m <sup>2</sup> )	Moment magnétique (A.m <sup>2</sup> )
Laboratoire	60	1	10	10	$1.4 \times 10^{-8}$	$1.55 \times 10^{-2}$
Commerce	1200	0.4	3	8	$2.4 \times 10^{-9}$	$\approx 5 \times 10^{-4}$

FIG. 2.4 Tableau des caractéristiques principales des particules magnétiques.

par un photomultiplicateur placé sur l'axe  $y$ . La fréquence  $f_s$  du scintillement dépend de la composante suivant  $x$  (ou  $z$ ) de la vitesse de la particule. Pour des franges fixes,  $f_s$  est égale à  $\frac{\|v_y\|}{i}$  pour des franges fixes. La cellule de Bragg et le décalage en fréquence du deuxième faisceau induit un défilement des franges d'interférence qui permet de lever l'ambiguïté sur le signe de la composante de la vitesse, car  $f_s = f_d - v_y/i$ , si les franges défilent dans le sens des  $x$  (ou  $z$ ) croissant et que  $f_d > v_x$  (ou  $z$ )/ $i$ . Ainsi la LDV nous donne accès à la composante suivant  $x$  (ou  $z$ ) de la vitesse de l'écoulement en un point.

Il faut noter que la fréquence d'échantillonnage de la LDV n'est pas fixe, car une mesure est prise à chaque passage d'une particule au croisement des deux faisceaux. Lorsque la vitesse de l'écoulement local est importante, un grand nombre de particules passe au point de mesure, ce qui crée un biais statistique en faveur des grandes vitesses. Pour le corriger, le signal est reconstruit avec une fréquence d'échantillonnage fixe par interpolation linéaire des points de mesure bruts.

Par rapport à la PIV, présentée dans le paragraphe suivant, la LDV a l'avantage d'être plus simple d'utilisation. Les données sont en effet plus légères et faciles à traiter.



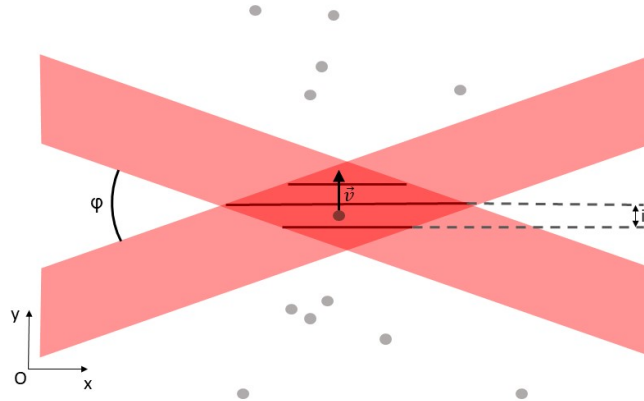


FIG. 2.5 Schéma de principe de fonctionnement de la LDV. Deux faisceaux laser se croisent et forment un réseau de franges d'interférence. Des particules présentes dans le volume (disques gris) traversent et réfléchissent les franges, on peut retrouver une composante de leur vitesse à partir de leur fréquence de scintillement.

## b) Vélocimétrie par images de particules (PIV)

### Principe général

Afin d'avoir une mesure spatiale de l'écoulement dans le fluide, on utilise la vélocimétrie par images de particules (PIV). On ensemence le liquide avec des particules de polyamide de  $50 \mu\text{m}$  de diamètre, diffusant la lumière. Le fluide est éclairé par une nappe laser sur une tranche horizontale (voir Fig. 2.1). Une caméra rapide Phantom V10 (2Mpixel-1kHz), placée verticalement (donc perpendiculairement à la nappe laser) au-dessus de la cuve filme le mouvement des particules éclairées par la nappe laser (voir Fig. 2.1). Le champ de vitesse est déterminé à partir du déplacement local des particules entre deux images successives.

Pour traiter les images, on utilise l'outil PIVlab de Matlab [67]. Cet outil procède de la manière suivante. Les images enregistrées par la caméra sont découpées en zone d'évaluation carrées (par exemple de 32 par 32 pixels). On calcule alors pour chaque zone la fonction de corrélation croisée spatiale 2D entre deux images successives. La position du maximum de la fonction de corrélation donne le déplacement moyen des particules contenues dans la zone. Pour obtenir une meilleure résolution, on réduit de manière itérative les zones d'évaluation (par exemple 16 pixels puis 8 pixels de côté). Pour maximiser le nombre de particules en commun entre deux fenêtres d'évaluation, la fenêtre de 16 pixels de la deuxième image est traduite par rapport à la première image du déplacement calculé sur la fenêtre de 32 pixels qui la contient.

### Mise en place

Le principal obstacle à la mise en place de la PIV pour mesurer le champ de vitesse dans la cuve est la présence des aimants dans le volume. En effet les aimants peuvent passer dans la nappe laser ou même dans le champ de vision entre la caméra et la nappe laser et ainsi fausser la mesure.

Pour contourner ce problème, on s'est efforcé de limiter le nombre de particules passant dans le champ de la caméra, en plaçant la nappe laser assez haut dans la cuve. En effet, les particules magnétiques sont soumises au champ de pesanteur et sont donc moins nombreuses dans la partie haute de la cuve. De cette manière, le passage d'un aimant est un événement rare, qu'il est facile de détecter. Lorsqu'un aimant passe, une partie importante de l'image est uniforme, et PIVlab est incapable de mesurer la vitesse dans cette zone. On ne prend alors pas en compte ces images dans les traitements.

Malgré ces précautions, le passage des aimants dans la nappe laser limite les paramètres pour lesquelles on peut faire des mesures de l'écoulement précises avec la PIV. Il faut que le passage d'un aimant reste un événement rare ce qui n'est pas le cas, lorsque le nombre d'aimants est trop important ou que l'intensité du champ magnétique est trop élevée.

Les mesures de PIV sont réalisées 10 fois sur un intervalle de temps de  $\mathcal{T} = 13$  s, afin d'obtenir une bonne convergence statistique. La fenêtre de la caméra a pour dimension  $2400 \times 1800$  pixels dans le plan  $Oxy$  (la première direction correspond à  $x$ ). Un pixel sur l'image mesure 0.05 mm. Les plus petites fenêtres de calcul de l'algorithme de PIV font 16 pixels, on obtient donc une résolution spatiale de 0.8 mm.

## 2.3 Mécanisme du forçage par des particules magnétiques

Pour pouvoir caractériser le forçage de l'écoulement, on s'intéresse dans cette partie à la dynamique des particules magnétiques dans le champ alternatif  $B$ . Comme cela va être décrit ci-dessous, celle-ci est très riche et mériterait toute une thèse, nous allons nous contenter ici de présenter un modèle simple et quelques résultats pertinents dans la gamme de paramètres qui nous intéresse.

### 2.3.1 Dynamique d'une particule

#### a) Équation du mouvement

Les aimants sont forcés en rotation par le champ magnétique  $B$ , le mouvement de rotation est transformé en translation lorsqu'il y a un choc entre deux particules ou avec une paroi.

Considérons un aimant seul et négligeons le champ de pesanteur. Soit  $\theta$  l'angle entre le moment magnétique  $\mathbf{m}$  de la particule magnétique et le champ magnétique vertical  $\mathbf{B} = B(t) \sin(\omega t) \mathbf{e}_z$ , avec  $\omega = 2\pi f$  et  $f$  la fréquence de forçage (voir Fig. 2.6). En négligeant la dissipation, on obtient par le théorème du moment angulaire :

$$I\ddot{\theta} = mB \sin(\omega t) \sin[\theta(t)] \quad (2.2)$$

où  $\dot{\theta} = d\theta/dt$ ,  $I = m(3R^2 + H^2)/12 = 1.4 \times 10^{-8} \text{kg.m}^2$  est le moment d'inertie de la particule cylindrique. On peut ajouter un terme de dissipation visqueuse à cette équation

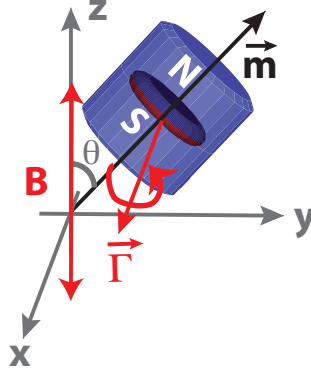


FIG. 2.6 Schéma d'un aimant encapsulé dans un champ magnétique alternatif  $\mathbf{B}$ .

qui dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement. Si on suppose qu'on est dans un régime turbulent, on obtient alors [53] :

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} |\dot{\theta}| = \frac{mB}{I} \sin(\omega t) \sin[\theta(t)], \quad (2.3)$$

avec  $\lambda = \pi \rho C_r R^5 / I = 0.007$ , le coefficient d'amortissement où  $C_r = 0.01$  le coefficient de traînée rotationnelle, sa valeur étant supposée être celle pour une sphère de rayon  $R$  (notre particule a un rapport d'aspect de 1) au sein d'un écoulement turbulent [68].

### b) Solutions

L'équation (2.2) est non intégrable, et de multiples solutions existent, certaines périodiques d'autres chaotiques [69]. Le terme de gauche de l'équation (2.2) peut être décomposé en deux champs contra-rotatifs :  $mB \sin(\omega t) \sin[\theta(t)] = mB/2 [\cos(\theta(t) - \omega t) - \cos(\omega t + \theta(t))]$ . Si l'on ne prend en compte qu'un seul champ l'équation est intégrable et, suivant les conditions initiales, l'aimant oscille (à sa fréquence propre  $f_0$ ) ou effectue des rotations uniformes (à une fréquence différente). C'est l'interaction avec le second champ qui sert de perturbation et peut rendre erratique les mouvements de l'aimant [70]. La fréquence propre de l'aimant dans le champ magnétique  $B$  est égale à  $f_0 = 2\pi\omega_0$  avec  $\omega_0 = \sqrt{mB/(2I)}$ . L'apparition de mouvements erratiques est contrôlée par le paramètre de stochasticité  $s = 2\omega_0/\omega$  [69]. Si  $s \ll 1$ , un mouvement périodique est prédit, l'aimant décrit des oscillations ou des rotations uniformes. Lorsque  $s$  croît, un mouvement rotationnel chaotique (avec changements de sens de rotation imprédictibles) est prévu [69]. Il faut noter que  $s$  peut être vu comme la racine carrée du rapport entre l'énergie dipolaire magnétique de la particule,  $E_d = mB$ , et son énergie de rotation à la fréquence du champ  $E_{\text{rot}} = I\omega^2/2$ ,  $s = \sqrt{E_d/E_{\text{rot}}}$ . Nous utiliserons plutôt le paramètre  $q = mB/(\omega^2 I)$ , par la suite qui est relié à  $s$  par  $s = \sqrt{2q}$ .

### c) Simulations numériques

Nous avons résolu numériquement l'équation (2.3) sous forme d'un système dynamique à deux degrés de liberté :

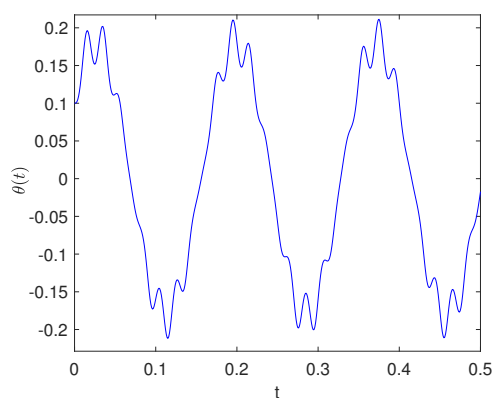
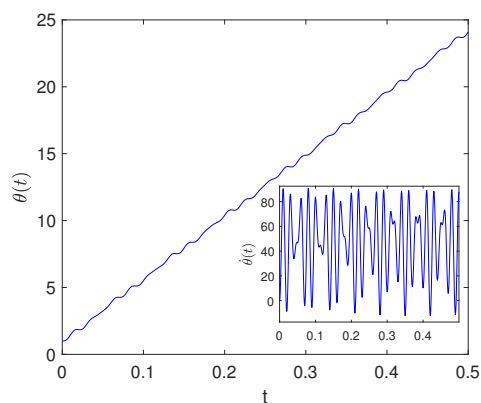
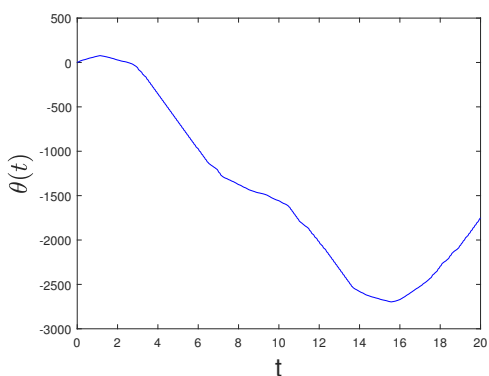
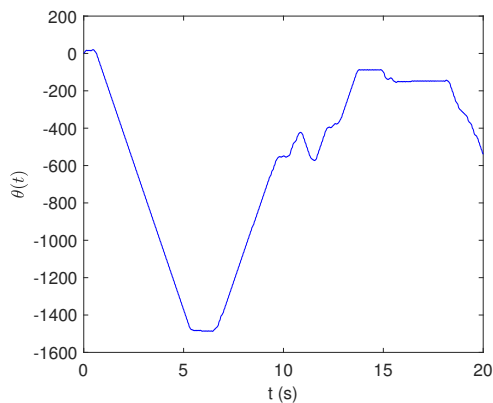
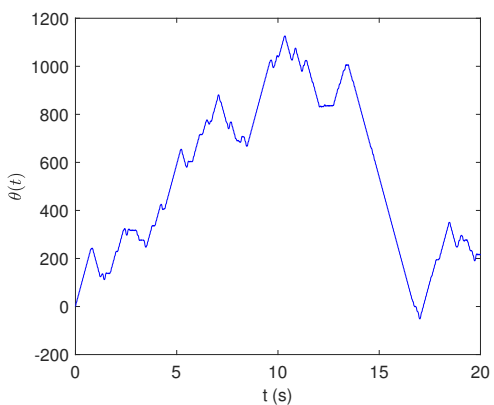
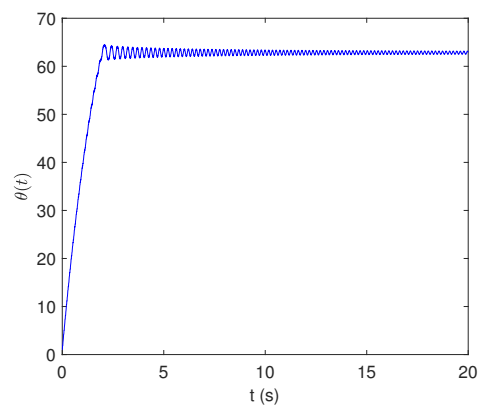
(a)  $B = 150$  G,  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{\theta} = 0$ .(b)  $B = 150$  G,  $\theta(0) = 1$ ,  $\dot{\theta} = 0$ .(c)  $B = 270$  G,  $\theta(0) = 1$ ,  $\dot{\theta} = 0$ .(d)  $B = 350$  G,  $\theta(0) = 1$ ,  $\dot{\theta} = 0$ .(e)  $B = 500$  G,  $\theta(0) = 1$ ,  $\dot{\theta} = 0$ .(f)  $B = 150$  G,  $\theta(0) = 1$ ,  $\dot{\theta} = 0$ .

FIG. 2.7  $\theta(t)$  pour différentes valeurs de  $B$ ,  $\lambda$  et des conditions initiales à  $f = 50$  Hz calculé par simulations numériques. (a) : petites oscillations de l'aimant à une fréquence proche de  $f_0$ . (b) : rotations dépendants du temps, dont on peut voir les différentes contributions en fréquence en traçant  $\dot{\theta}(t)$  (voir inset). (c) : rotations avec renversement soudains à  $t \approx 15$  s. (d) : mouvement erratique. (e) : mouvement chaotique. (f) : rotation amortie par dissipation visqueuse pour  $\lambda = 0.07$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \dot{\theta}, \\ \frac{d\dot{\theta}}{dt} &= -\lambda\dot{\theta}|\dot{\theta}| + \frac{mB}{I} \sin(\omega t) \sin[\theta(t)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec  $\lambda = 0.007$ , et  $m$  et  $I$  correspondant aux aimants fabriqués au laboratoire (voir le tableau 2.4).

La résolution se fait facilement, sous Matlab avec le solver ode45 pour ce système d'équations différentielles ordinaires (ODE). On retrouve par les simulations numériques les solutions (oscillations, rotations, mouvement erratique, chaos) prédites théoriquement. Différentes évolutions de  $\theta(t)$  pour différentes valeurs des conditions initiales, du champ magnétique  $B$  et de  $\lambda$  sont montrées sur la Fig. 2.7.

Pour de petites valeurs de  $\theta(0)$ , l'aimant oscille à une fréquence proche de  $f_0$  ( $3f_0^2/2f$ ), quel que soit la valeur du champ magnétique (voir Fig. 2.7a).

Pour des grandes valeurs des conditions initiales  $[\theta(t=0), \dot{\theta}(t=0)]$ , nous trouvons que l'aimant effectue des rotations  $q = s^2/2 < 0.24$  (voir Fig. 2.7b), pour  $q > 0.24$ , les rotations de l'aimant subissent des renversements soudains (voir Fig. 2.7c), et pour  $q > 0.33$  le mouvement devient erratique (voir Fig. 2.7d : mouvement un peu erratique et Fig. 2.7e : mouvement chaotique).

Lorsqu'on ajoute le terme de dissipation, les rotations sont amorties, comme on peut le voir sur la Fig. 2.7f.

La Fig. 2.8 montre les fréquences principales de la rotation de l'aimant divisées par la fréquence du champ magnétique en fonction de  $q$  pour différentes valeurs de  $f$  et  $B$ . Toutes les courbes numériques se superposent parfaitement quels que soient les paramètres, lorsque les mouvements sont périodiques (pour  $q < 0.24$ ), les courbes deviennent plus bruitées quand des renversements soudains apparaissent (pour  $0.24 < q < 0.33$ ), il devient difficile distinguer les pics du spectre et donc de définir les fréquences principales du mouvement de l'aimant quand celui devient erratique (pour  $q > 0.33$ ).

### 2.3.2 Dynamique d'un ensemble de particules

Maintenant qu'on a pu décrire la dynamique d'un aimant, il s'agit d'analyser les propriétés du « gaz granulaire » formé de plusieurs particules magnétiques qui constitue le forçage de notre écoulement.

Le même système expérimental avait déjà été décrit pour  $N$  particules dans l'air [52]. Il y est notamment montré expérimentalement que la vitesse typique des particules  $V_p$  augmente avec le champ magnétique  $B$ , suivant la loi  $V_p \sim N^0 B^{1/2}$ . Cette loi provient de l'équilibre entre l'énergie magnétique des particules  $mB$  et l'énergie cinétique de translation dissipée lors des collisions, soit  $V^2 \sim mB$  [52]. Le champ magnétique  $B$  apparaît donc comme l'analogue de la température thermodynamique pour un gaz moléculaire et serait une forme de température granulaire pour le gaz granulaire [52].

Dans l'eau, la dissipation est plus forte et il a été trouvé expérimentalement que  $V_p$  varie en  $V_p \sim N^0 B^{1/3}$ , indépendamment de  $N$  et du volume [53]. La différence entre les deux lois de puissance provient de la dissipation visqueuse turbulente additionnelle. En effet, dans le liquide, la dissipation visqueuse agit significativement lors du mouvement des particules et modifie donc le bilan de puissance. La puissance magnétique injectée dans le fluide peut être

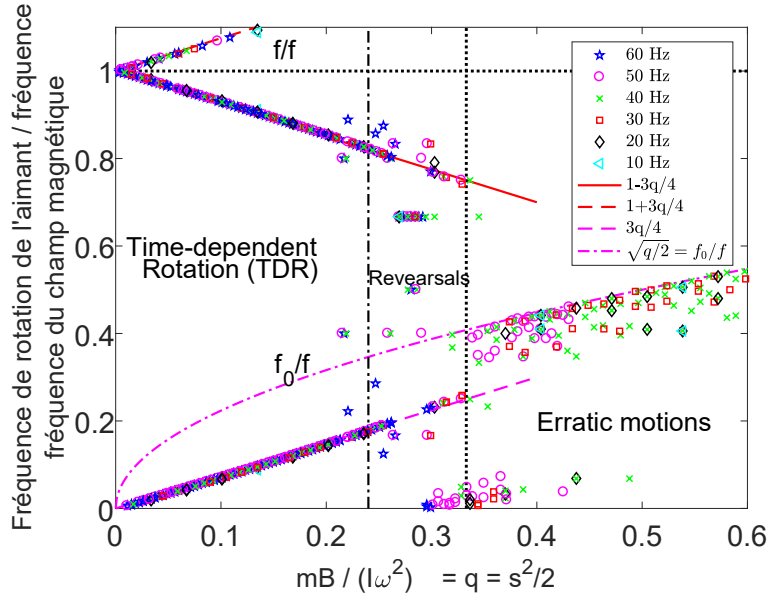


FIG. 2.8 Résultats des simulations numériques avec pour conditions initiales  $[\theta(0) = 1, \dot{\theta}(0) = 0]$ , avec la dissipation  $\lambda = 0.007$ . La fréquence de rotation des aimants est déduite des trois premiers maxima du spectre de  $\dot{\theta}(t)$ . Les lignes en pointillés noirs montrent les transitions vers des renversements imprédictibles du sens de rotations puis à un mouvement complètement erratique.

estimée par la relation :  $P_{\text{inj}} = NmB\omega/2$ , ce qui est cohérent avec la puissance totale dissipée dans le fluide trouvée expérimentalement  $P_{\text{diss}}^{\text{exp}} \sim NB$  [53]. La puissance est dissipée dans le fluide par différents mécanismes :

- les collisions, on peut montrer que la puissance dissipée par les collisions est :  $P_{\text{coll}}^{\text{diss}} \sim NV_p^3 \sim NB$ , en bon accord avec les résultats expérimentaux,
- les frottements visqueux lors des mouvements translationnels :  $P_{\text{trans}}^{\text{diss}} \sim NV_p^3 \sim NB$ , comme trouvé expérimentalement,
- les frottements visqueux lors des mouvements de rotation :  $P_{\text{rot}}^{\text{diss}} \sim N\omega^3$ , ce qui diffère des résultats expérimentaux.

Il semblerait donc que la puissance dissipée par rotations soit négligeable devant les puissances dissipées par translation et collisions. La puissance totale dissipée mesurée thermiquement est de l'ordre de 4 Watt pour  $N=60$ ,  $B=200$  G et  $V_p=1$  m/s [52].

## 2.4 Caractérisation de la turbulence

Dans le paragraphe précédent, on a pu explorer la dynamique des aimants qui constitue le forçage de l'écoulement turbulent. Il s'agit maintenant d'étudier le mouvement du fluide engendré par un ensemble de particules magnétiques. Peut-on dire qu'il est turbulent et quelles sont les caractéristiques d'une turbulence ainsi engendrée ?

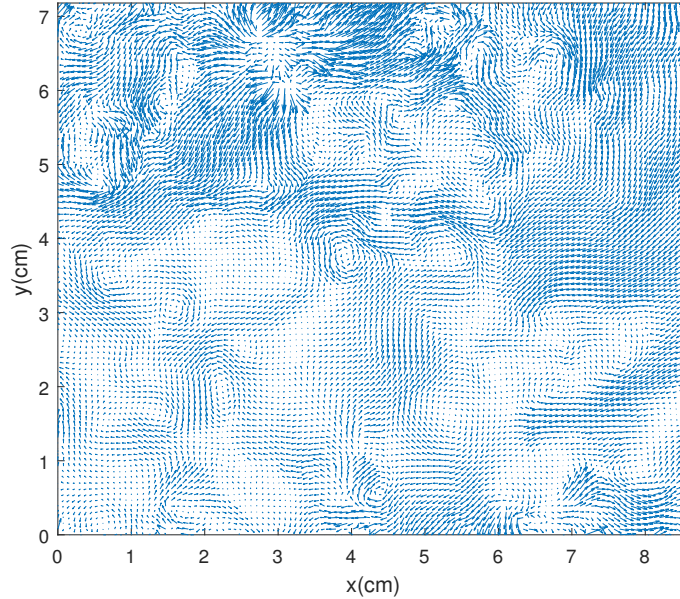


FIG. 2.9 Exemple de champ de vitesse instantané mesuré à la PIV. Les bords de la cuve se trouvent en  $x = 0$ , en  $x = 11$  cm, en  $y = 0$  cm et en  $y = 11$  cm.

Dans la partie suivante, les mesures de PIV ont été réalisées dans le plan horizontal  $Oxy$  à la hauteur  $h = 7$  cm (dans la partie haute de la cuve). Les résultats des mesures de PIV sont présentés pour des paramètres de forçage fixés :  $N = 10$  aimants,  $f = 50$  Hz et  $B = 115$  G. Des mesures de LDV ont été effectuées en complément pour étudier la variation des propriétés de l'écoulement avec les paramètres de forçage.

### 2.4.1 Fluctuations de vitesses

On note  $u(x, y, z, t)$ ,  $v(x, y, z, t)$  et  $w(x, y, z, t)$  les vitesses instantanées locales suivant les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ , où  $Oz$  est l'axe vertical.  $\langle u \rangle$ ,  $\langle v \rangle$  et  $\langle w \rangle$  représentent les moyennes temporelles respectivement de  $u$ ,  $v$  et  $w$ . Les fluctuations de vitesse sont estimées par les écart types temporels des vitesses de l'écoulement :  $\sigma_u = \sqrt{\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2}$ ,  $\sigma_v = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}$  et  $\sigma_w = \sqrt{\langle w^2 \rangle - \langle w \rangle^2}$ .  $\langle \cdot \rangle$  représente ici la moyenne sur le temps,  $\sigma = \sqrt{(\sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \sigma_w^2)/3}$  représente l'écart type de la vitesse dans les trois dimensions.

#### a) Mesures spatiales dans le plan $Oxy$

Une image typique de profil horizontal instantané obtenu à partir de deux images successives avec la PIV est montré en Fig. 2.9.

La Fig. 2.10 montre le profil horizontal des vitesses moyennes et des écarts-types des vitesses suivant  $x$  et  $y$ . Les vitesses moyennes sont très petites devant les fluctuations des vitesses de l'écoulement et représentent typiquement 11 % de l'écart type du champ de vitesse, il est donc raisonnable de négliger l'écoulement moyen. On a de plus  $\sigma_x \approx \sigma_y \approx C^{te}$  lorsqu'on est loin des bords de la cuve. Le moment d'ordre 2 de la vitesse de l'écoulement

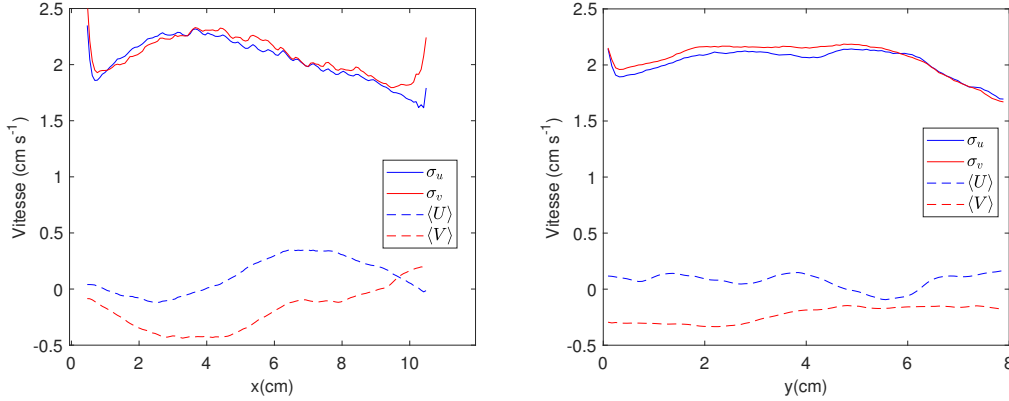


FIG. 2.10 Vitesses moyennes et écarts types des vitesses en fonction de  $x$  (gauche) et de  $y$  (droite).

semble donc invariant par translation et par rotation dans le plan  $O_{xy}$ , le champ de vitesse semble donc isotrope dans le plan horizontal. Par la suite, les calculs seront effectués en excluant les bords pour pouvoir considérer l'écoulement homogène et isotrope dans le plan  $Oxy$ .

#### b) Mesures locales des composantes $x$ et $z$

Grâce aux mesures de LDV, on a pu mesurer la vitesse de l'écoulement en un point, en faisant varier les paramètres expérimentaux. Les mesures sont effectuées suivant  $x$ , puis suivant  $z$ . Comme on a montré dans le paragraphe précédent que l'écoulement était isotrope dans le plan  $Oxy$ , on a :  $\sigma_u \approx \sigma_v$ , et on peut obtenir  $\sigma$  en un point par la formule  $\sigma \approx \sqrt{(2\sigma_u^2 + \sigma_w^2)/3}$ .

La Fig. 2.11 montre comment  $\sigma$ ,  $\sigma_u$  et  $\sigma_w$  varient en fonction de  $N$ ,  $B$  et  $f$ , lorsque les autres paramètres sont fixés. On observe tout d'abord que la composante verticale  $\sigma_w$  de l'écart type la vitesse est à peu près égale à la composante horizontale  $\sigma_u$ , elle est toutefois toujours légèrement supérieure de l'ordre de 17 %. Ceci peut être expliqué par le fait que le mouvement des particules magnétiques qui forcent l'écoulement a tendance à privilégier la direction verticale, à cause du champ de gravité. Des mesures de PIV seraient nécessaires pour vérifier l'homogénéité et l'isotropie du champ de vitesse en trois dimensions. Expérimentalement, d'après la Fig. 2.11,  $\sigma$  dépend de  $N$ ,  $B$  et  $f$  suivant la relation :

$$\sigma \sim N^{1/2} B^{1/3} f^{1/3}. \quad (2.5)$$

Cette relation peut être retrouvée en considérant que l'énergie cinétique du fluide  $E_{\text{fluide}}$  est égale à l'énergie injectée par les  $N$  particules magnétiques, donc  $N$  fois l'énergie cinétique d'une particule  $E_{\text{part}}$ . D'après le paragraphe 2.3.2, la vitesse des particules dans l'eau dépend de  $N$  et  $B$  suivant la relation  $V_p \sim N^0 B^{1/3}$ , si on équilibre de plus la puissance injectée et la puissance dissipée dans le fluide, on peut en déduire que  $V_p \sim \omega^{1/3}$ . On obtient ainsi :

$$\sigma \sim \sqrt{E_{\text{fluide}}} \sim \sqrt{N E_{\text{part}}} \sim \sqrt{N} V_p \sim N^{1/2} B^{1/3} f^{1/3}. \quad (2.6)$$



On confirme ainsi de manière indirecte, le raisonnement du paragraphe 2.3.2 en retrouvant les mêmes dépendances en  $N$  et en  $B$  expérimentalement que dans [53] et en montrant de plus que  $V_p$  varie en  $f^{1/3}$ .

### 2.4.2 Fonctions d'autocorrélation et échelles intégrales

Pour caractériser l'écoulement, on cherche la plus grande échelle de la cascade turbulente : l'échelle intégrale comme définie en (1.31).

Pour ce faire, on calcule les fonctions d'autocorrélation  $\rho$  du champ de vitesse (voir (1.30) du chapitre 1) :

$$\rho_u(r_x) = \left\langle \frac{\langle u(x, t)u(x + r_x, t) \rangle_x}{\langle u(x, t)^2 \rangle_x} \right\rangle \quad (2.7)$$

Les fonctions d'autocorrélations sont tracées en Fig. 2.12. Elles sont décroissantes et tendent vers zéro, comme attendu théoriquement. Toutefois, on observe quelques variations, notamment suivant l'axe  $x$ , où la fonction  $\rho_u$  croit pour  $r_x > 0.04$ , dues au manque de statistiques des données à grande échelle. En effet, plus l'échelle est petite, plus le nombre de points sur lequel est effectuée la moyenne est grand, ainsi la convergence des données à grande échelle est difficile à obtenir.

On peut déduire de la Fig. 2.12 les échelles intégrales  $L$  par la formule suivante (voir (1.31) du chapitre 1) :

$$L_{u,x} = \int_0^\infty \rho_u(r_x) dr_x \quad (2.8)$$

On obtient  $L_{u,x} = 0.84$  cm,  $L_{u,y} = 0.66$  cm,  $L_{v,y} \approx 1.09$  cm et  $L_{v,x} \approx 0.57$  cm. Ces longueurs sont de **l'ordre de la taille d'un aimant**. On définit  $L_l = (L_{u,x} + L_{v,y})/2 = 0.965$  cm l'échelle intégrale longitudinale, et  $L_t = (L_{u,y} + L_{v,x})/2 = 0.615$  cm l'échelle intégrale transverse. Le rapport  $L_l/L_t \approx 1.6$  est proche de la valeur 2 prédite théoriquement pour la turbulence homogène et isotrope (voir le paragraphe 1.3.2 de la partie théorique) [31].

### 2.4.3 Spectres d'énergie

#### a) Spectres spatiaux

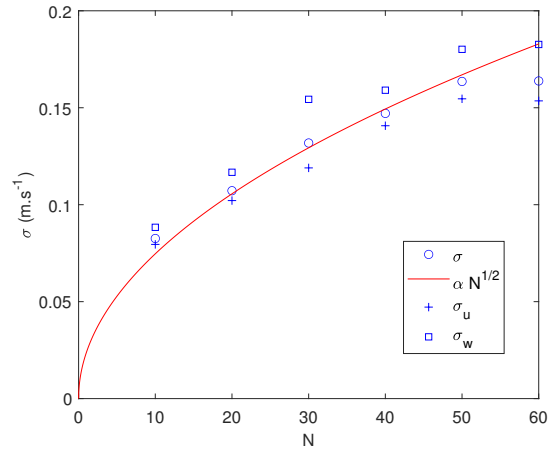
Calculons maintenant les densités spectrales spatiales unidimensionnelles de puissance des composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse suivant la direction  $x$ ,  $E_{uu}(k_x)$  et  $E_{vv}(k_x)$  à partir des mesures de PIV :

$$\begin{aligned} E_{uu}(k_x) &= \frac{1}{\pi} \int \langle u(x)u(x + r_x) \rangle_x e^{-ik_x r_x} dr_x, \\ E_{vv}(k_x) &= \frac{1}{\pi} \int \langle v(x)v(x + r_x) \rangle_x e^{-ik_x r_x} dr_x. \end{aligned} \quad (2.9)$$

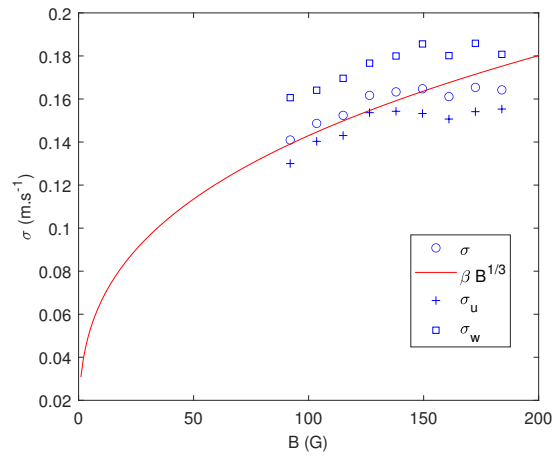
Le spectre tridimensionnel  $E(k)$  peut être retrouvé à partir de  $E_{uu}$  et  $E_{vv}$  pour la turbulence isotrope à partir de l'équation suivante [31, 39] :

$$E(k) = -k \frac{d}{dk} \left( \frac{1}{2} E_{uu}(k) + E_{vv}(k) \right). \quad (2.10)$$

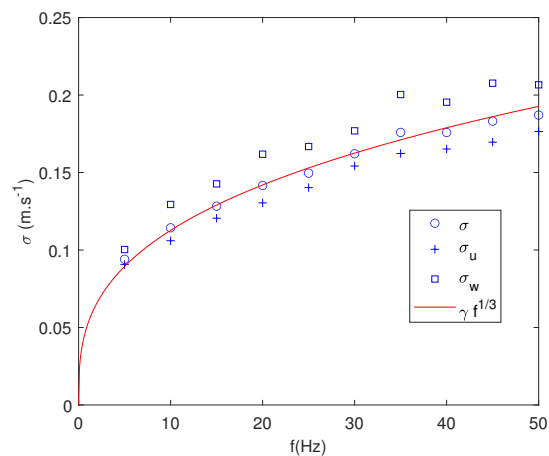
Le spectre  $E_{uu}$  (respectivement  $E_{vv}$ ,  $E$ ) est tracé en bleu (respectivement en rouge, en vert) en repère log-log sur la Fig. 2.13.



(a)



(b)



(c)

FIG. 2.11 (a) :  $\sigma$ ,  $\sigma_u$  et  $\sigma_w$  mesurés à la LDV au centre de la cuve en  $h = 3.5$  cm en fonction du nombre  $N$  d'aimants pour  $B = 161$  G et  $f = 30$  Hz, la courbe rouge est le meilleur ajustement de  $\sigma$  en  $N^{1/2}$ . (b) : en fonction du champ magnétique  $B$  pour  $N = 60$  et  $f = 30$  Hz, la courbe rouge est le meilleur ajustement de  $\sigma$  en  $B^{1/3}$ . (c) : en fonction de  $f$  pour  $N = 60$  et  $B = 161$  G, la courbe rouge est le meilleur ajustement de  $\sigma$  en  $f^{1/3}$ .

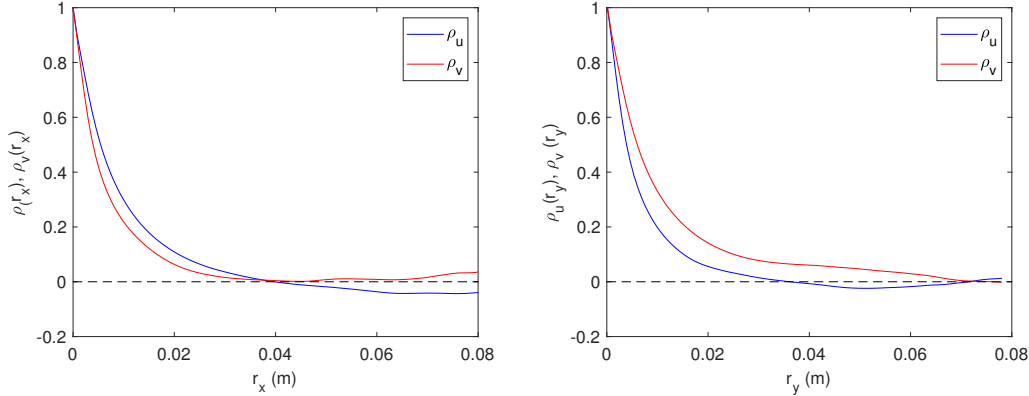


FIG. 2.12 Gauche : Fonctions d'autocorrélation suivant  $O_x$  des composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse. Droite : Fonctions d'autocorrélation suivant  $O_y$  des composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse.

Les spectres décroissent suivant la loi de puissance d'exposant  $-\frac{5}{3}$  prédite théoriquement par Kolmogorov pour la turbulence hydrodynamique 3D (voir les équations (1.38), (1.39) et (1.40)). La ligne pointillée bleue de la Fig. 2.13 représente l'ajustement du spectre longitudinal  $E_{uu}$  en  $k^{-5/3}$ .  $E_{uu}$  suit très bien la loi sur une décade environ.

Par des considérations de projection pour un écoulement isotrope, les relations suivantes entre les différents spectres dans la gamme inertielle peuvent être obtenues [31] :

$$\begin{aligned} E_{vv}(k_x) &= \frac{4}{3}E_{uu}(k_x), \\ E(k) &= \frac{55}{18}E_{uu}(k). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les droites en pointillés rouges et verts sur la Fig. 2.13 sont déduites de la ligne pointillée bleue par ces relations. Les spectres  $E_{vv}$  et  $E$  suivent bien ces droites, même s'ils sont plus arrondis que  $E_{uu}$ , ce qui n'est pas étonnant, comme nous le verrons dans la suite, le nombre de Reynolds de l'écoulement est plutôt modéré. Les spectres de notre écoulement ont donc bien la signature de la turbulence isotrope.

Toutefois, il faut noter que la loi de puissance d'exposant  $-\frac{5}{3}$  commence avant l'échelle intégrale longitudinale,  $L_l$ , qui devrait être la grande échelle de la cascade turbulente. Le spectre tridimensionnel atteint son maximum pour un nombre d'onde correspondant à une échelle, notée  $L_f$  ( $L_f \approx 5$  cm) de l'ordre de 5 fois plus grande que l'échelle intégrale. L'énergie ne semble donc pas être contenue à l'échelle des aimants mais à une échelle plus grande probablement liée aux mouvements de translation des aimants dans le fluide. Sur la gamme de paramètres que nous avons pu explorer avec la PIV,  $L_f$  ne semble pas changer significativement, il faudrait effectuer cette étude en changeant le nombre d'aimants, leur taille ou encore la taille du système pour savoir ce qui fixe cette échelle.

Pour des échelles plus grandes que  $L_f$ ,  $E(k)$  est croissant, comme on peut s'y attendre pour les grandes échelles de la turbulence 3D à l'équilibre statistique [36, 64, 65, 71]. Toutefois nous ne disposons pas d'assez de points à grande échelle pour conclure quant à une éventuelle loi de puissance en  $k^2$ .

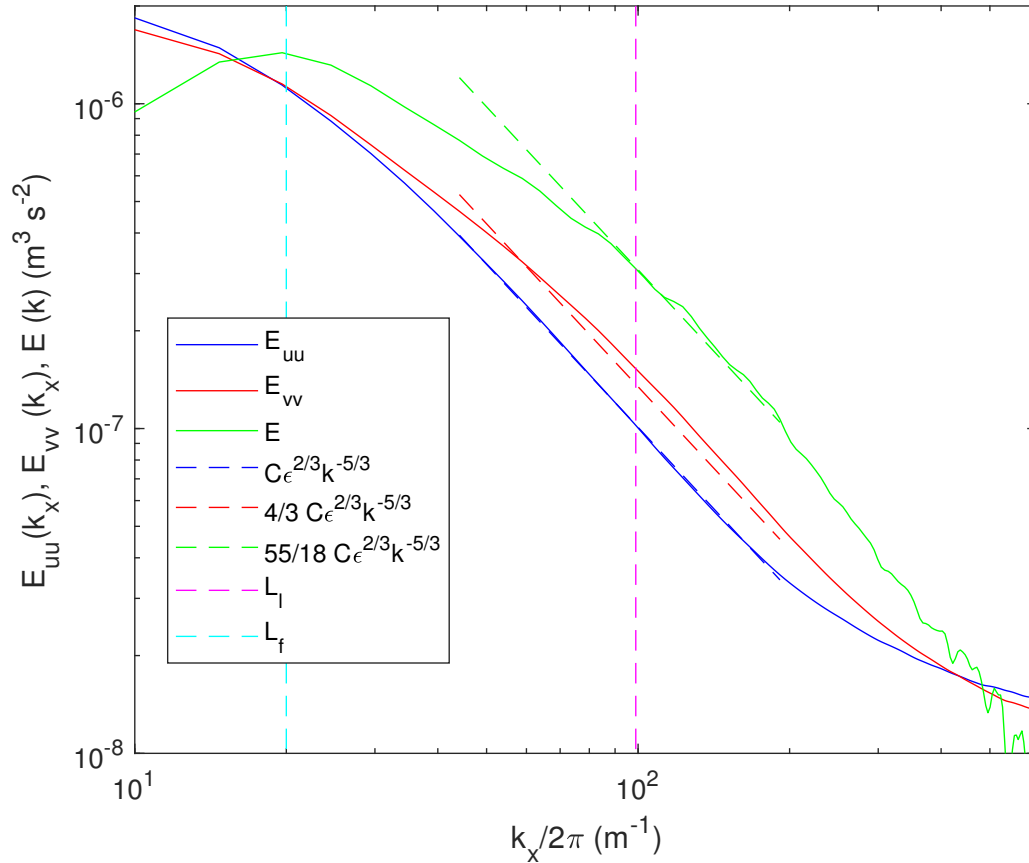


FIG. 2.13 Densité spectrale de puissance unidimensionnelle des composantes de vitesse  $u$ ,  $E_{uu}(k_x)$  (en bleu) et  $v$ ,  $E_{vv}(k_x)$  (en rouge) suivant la direction  $x$  et spectre tridimensionnel  $E(k)$  calculé à partir de l'équation (2.10) (en vert). La ligne en pointillés roses représente l'échelle spatiale longitudinale,  $L_l$  qui se trouve après le début de la loi de puissance en  $-\frac{5}{3}$ , celle en pointillés cyan marque le maximum de  $E(k)$ . L'ajustement en  $k^{-5/3}$  est fait pour le spectre longitudinal  $E_{uu}$  (pointillés bleus), la droite en pointillés rouges (respectivement verts) est déduite à partir de la loi  $E_{vv} = 4/3 E_{uu}$  (respectivement  $E = 55/18 E_{uu}$ ) prédite dans la gamme inertielle pour la turbulence isotrope [31].

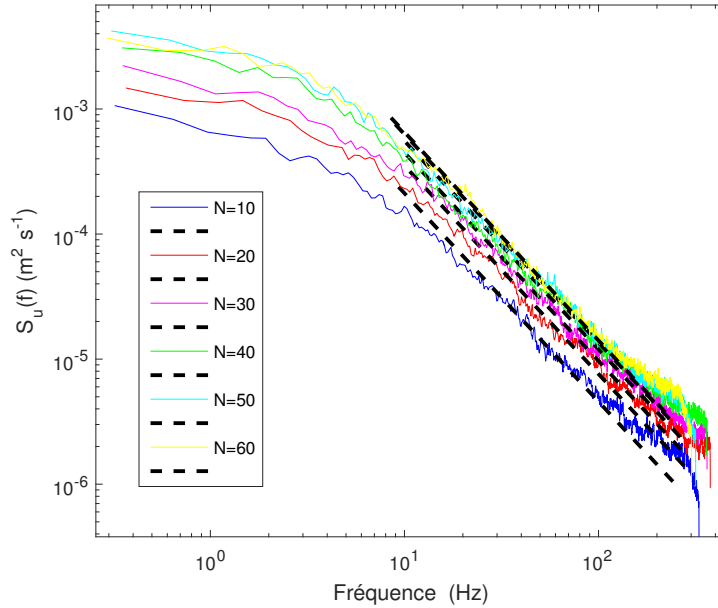


FIG. 2.14 Spectres temporels de la vitesse en un point pour différentes valeurs de  $N$ , avec  $B = 161$  G et  $f = 30$  Hz. Les droites noires montrent des ajustements en loi de puissance d'exposant  $-5/3$ .

### b) Spectres temporels

Grâce aux mesures de LDV, on peut obtenir les densités spectrales temporelles de puissance de l'écoulement en faisant varier les différents paramètres de forçage. Si la théorie de Kolmogorov n'offre pas de prédiction pour les spectres temporels de la turbulence isotrope, d'après le modèle de Tennekes [72], les petits tourbillons sont advectés par les grands tourbillons, par conséquent les fluctuations temporelles des vitesses dans la gamme inertielle sont similaires aux fluctuations spatiales des vitesses. Le spectre temporel prédit doit donc décroître donc en  $f^{-5/3}$ . Cette hypothèse est l'analogue de l'hypothèse de la turbulence gelée de Taylor, pour le cas de la turbulence sans écoulement moyen.

Expérimentalement, on obtient bien des spectres en loi de puissance de la fréquence d'exposant  $-5/3$  sur plus d'une décade de temps pour une large gamme des paramètres de forçage. En effet, les spectres temporels pour différentes valeurs du nombre d'aimants,  $N$ , sont montrés sur la Fig. 2.14. L'aire sous les spectres est proportionnelle à  $\sigma^2$  et d'après (2.5) doit être proportionnelle à  $N$ . Les spectres redimensionnés par  $N$  se superposent bien, comme on peut le voir en Fig. 2.15. De la même manière, si on fait varier le champ magnétique  $B$ , les spectres augmentent en  $B^{2/3}$  comme attendu, et se superposent si on les redimensionnent (voir Fig. 2.16).

#### 2.4.4 Fonctions de structure

On peut calculer les fonctions de structure d'ordre 2 du champ de vitesse à partir des mesures de PIV et de l'équation (1.9) :

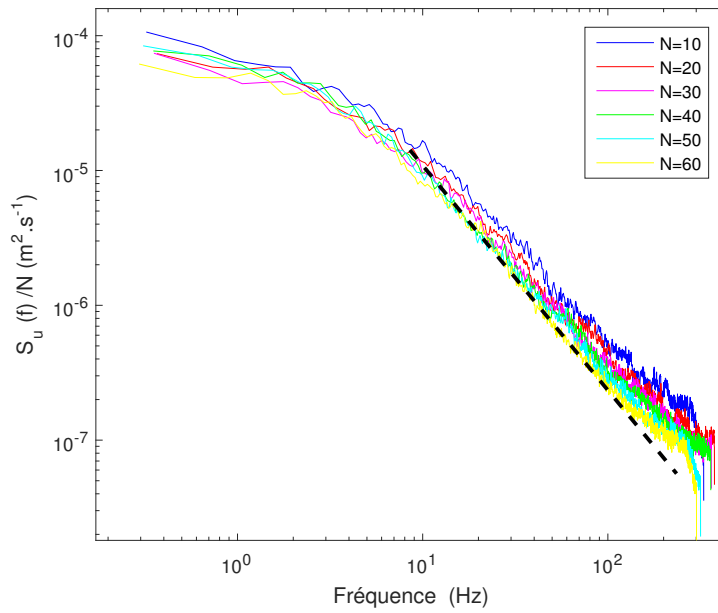


FIG. 2.15 Spectres temporels de la vitesse en un point redimensionnés par  $N$ , avec  $B = 161$  G et  $f = 30$  Hz.

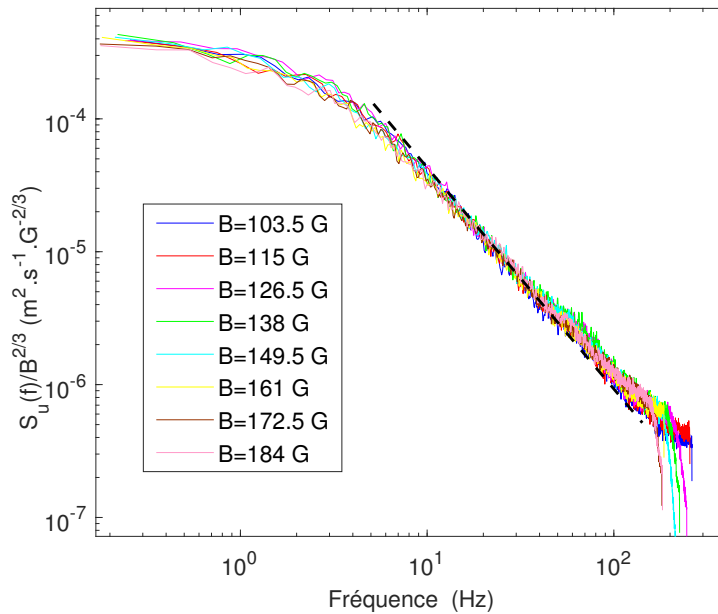


FIG. 2.16 Spectres temporels de la vitesse en un point redimensionnés par  $B^{2/3}$ , avec  $N = 60$  et  $f = 30$  Hz.

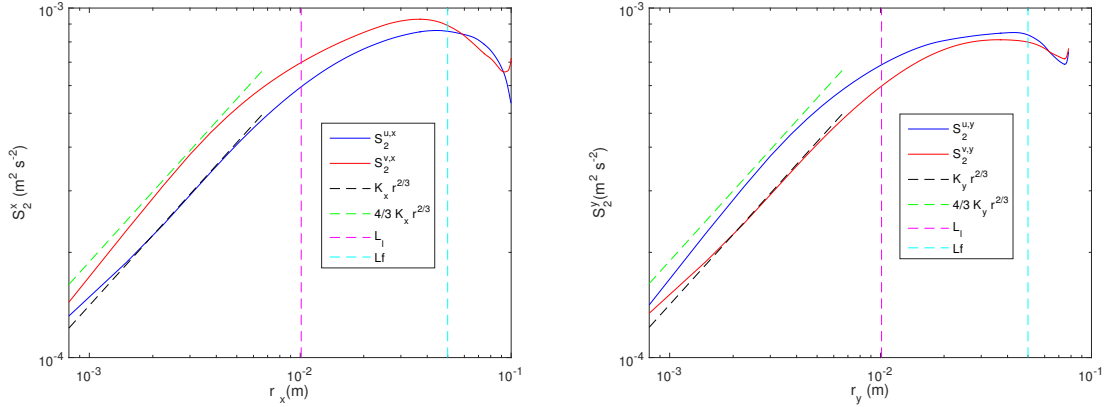


FIG. 2.17 Fonctions de structure d'ordre deux  $S_2$  de l'écoulement. Gauche : Fonctions de structure suivant l'axe  $x$  des composantes  $u$  (en bleu) et  $v$  (en rouge) de la vitesse. Droite : Fonctions de structure suivant l'axe  $y$  des composantes  $u$  (en bleu) et  $v$  (en rouge) de la vitesse.  $L_l$ , échelle intégrale longitudinale (pointillés roses),  $L_f$ , échelle du maximum du spectre (pointillés cyan).

$$S_2^{u,x}(r, t) = \langle [u(x+r, t) - u(x, t)]^2 \rangle. \quad (2.12)$$

On calcule ainsi  $S_2^{u,x}$ ,  $S_2^{u,y}$ ,  $S_2^{v,x}$  et  $S_2^{v,y}$  qui sont tracées sur la Fig. 2.17. Jusqu'à l'échelle intégrale  $L_l$ , ces fonctions de structure augmentent en  $r^{2/3}$  comme prévu par la théorie de Kolmogorov pour la turbulence isotrope [14]. On ajuste les fonctions de structure longitudinales avec cette prédiction (pointillés noirs sur la Fig. 2.17). On trouve ainsi  $K_x = S_2^{u,x}/r_x^{2/3} = 1.4 \pm 0.1 \times 10^{-2} \text{m}^{4/3} \text{s}^{-2} \approx K_y = S_2^{v,y}/r_y^{2/3}$ . Comme pour les spectres il existe une relation théorique simple entre les fonctions de structure transverses et longitudinales :  $S_2^t = \frac{4}{3} S_2^l$ , les droites en pointillés verts sont déduites par cette relation des lignes pointillées noires. On a un bon accord entre expérience et théorie pour la turbulence isotrope jusqu'à l'échelle intégrale longitudinale,  $L_l$ . Entre  $L_l$  et l'échelle  $L_f$  (trouvée à partir du maximum du spectre), les fonctions de structure  $S_2$  sont toujours croissantes mais ne suivent plus tout à fait la loi en  $r^{2/3}$ . À partir de  $r = L_f$ , les fonctions de structure  $S_2$  décroissent, il est possible que ce soit lié à l'équilibre statistique des grandes échelles.

De la même manière, on peut calculer les fonctions de structure d'ordre 3,  $S_3$ , de l'écoulement :

$$S_3^{u,x}(r, t) = \langle [u(x+r, t) - u(x, t)]^3 \rangle. \quad (2.13)$$

$S_3^{x,u}$  et  $S_3^{y,v}$  sont tracées en Fig. 2.18. Les fonctions de structure d'ordre 3 sont des moments d'ordre 3 qui nécessitent plus de données pour être vraiment convergées statistiquement. C'est pourquoi, dans la gamme inertielle,  $S_3^{x,u}$  et  $S_3^{y,v}$  ne sont pas monotones, décroissantes, mais croissent à partir de  $r \approx 6$  mm. Toutefois, les valeurs pour les plus petites échelles sont les plus convergées statistiquement, et pour  $r$  petit,  $S_3^{x,u}$  et  $S_3^{y,v}$  sont proches et semblent décroître linéairement avec  $r$  (comme attendu). Par ajustement linéaire, on trouve  $K_3 = -S_3^{x,u}/r \approx -S_3^{y,v}/r \approx 6.5 \pm 0.3 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-3}$ . Des données supplémentaires seraient nécessaires pour bien vérifier la loi des 4/5 (voir Eq. (1.41)) dans toute la gamme inertielle.

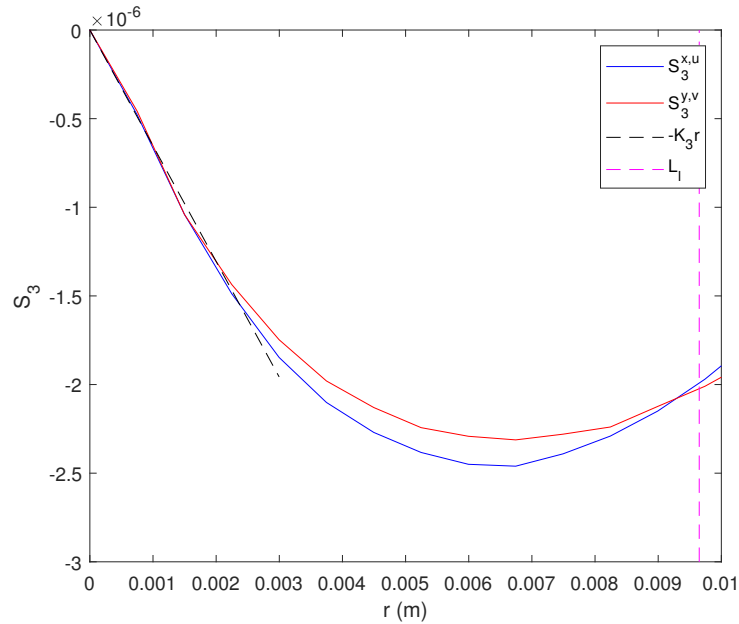


FIG. 2.18 Fonction de structure d'ordre 3 : suivant la direction  $x$  (en bleu avec ajustement linéaire en pointillés noirs), suivant la direction  $y$  (en rouge, l'ajustement linéaire est confondu avec celui de la direction  $x$ ).

### 2.4.5 Taux de dissipation $\epsilon$

Le taux de dissipation  $\epsilon$  est lié au flux d'énergie injectée à l'échelle de forçage, cascade à travers les échelles et finalement dissipée à l'échelle de Kolmogorov et peut être retrouvé de différentes manières comme indiqué dans le paragraphe 1.3.5.

- Une première estimation de  $\epsilon$  peut être obtenue à partir de la relation (1.42) :  $\epsilon_1 \approx 1.1 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-3}$ .
- Il peut être également déduit de la loi de puissance du spectre spatial longitudinal d'après la relation (1.39). Grâce à l'ajustement fait dans le paragraphe 2.4.3, on obtient  $\epsilon_{\text{spectre}} \approx 9.2 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-3}$ .
- Sa valeur peut être également trouvée à partir des fonctions de structure d'ordre 2 et 3 d'après les équations (1.43). On obtient ainsi à partir des fonctions de structure d'ordre 2 :  $\epsilon_{S_2} = (K_x/C_2)^{3/2} \approx (K_y/C_2)^{3/2} = 6.0 \pm 0.1 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-3}$ . De la même manière, à partir des fonctions de structure d'ordre 3 :  $\epsilon_{S_3} = 5/4 K_3 \approx 8.2 \pm 0.5 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-3}$ .

Ces différentes valeurs de  $\epsilon$  semblent cohérentes entre elles, elles sont du même ordre de grandeur, même si certains écarts apparaissent, probablement dus au fait que les données ne sont pas assez convergées statistiquement.

Cette étude pourrait être poursuivie en calculant  $\epsilon$  à différents paramètres de forçage, le taux de dissipation pourrait alors être tracé en fonction des fluctuations de la vitesse de l'écoulement.



Grandeur	Valeur
Fluctuations de vitesse $\sigma$	$\approx 2$ cm/s
Taille du système $L$	11.5 cm
Longueur intégrale longitudinale $L_l$	$\approx 1$ cm
Longueur intégrale transverse $L_t$	$\approx 0.6$ cm
Longueur de Taylor $\lambda_g$	$\approx 3$ mm
Longueur de Kolmogorov $\eta$	$\approx 0.2-0.3$ mm
Nombre de Reynolds turbulent $Re_L$	$\approx 200$
Nombre de Reynolds de Taylor $Re_\lambda$	$\approx 55$
Taux de dissipation $\epsilon$	$\approx 1 - 9 \times 10^{-4} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$

FIG. 2.19 Résumé des grandeurs caractéristiques de la turbulence engendrée par les particules magnétiques pour  $N = 10$ ,  $f = 50$  Hz et  $B = 115$  G.

### 2.4.6 Nombres de Reynolds, échelle de Taylor et échelle de Kolmogorov

À partir de l'échelle intégrale et de l'écart type des vitesses, on peut calculer le nombre de Reynolds turbulent :

$$Re_L = \frac{\sigma L_l}{\nu} \approx 200. \quad (2.14)$$

On peut déduire l'échelle de Taylor  $\lambda_g$  et l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  à partir de  $Re_L$  et  $L_l$  en utilisant les équations (1.36). L'échelle de Taylor est alors égale à  $\lambda \approx 2.7$  mm. L'échelle de Kolmogorov trouvée ainsi est  $\eta_{Re} \approx 0.18$  mm. L'échelle de Kolmogorov peut être également déterminée directement à partir de sa définition (1.35), en prenant  $\epsilon = \epsilon_{\text{spectre}}$ , on trouve ainsi  $\eta \approx 0.3$  mm, ce qui est cohérent avec la valeur  $\eta_{Re}$ .

On peut déduire de  $\lambda_g$  le nombre de Reynolds à l'échelle de Taylor :

$$Re_\lambda = \frac{\sigma \lambda_g}{\nu} \approx 55. \quad (2.15)$$

La valeur de  $Re_\lambda$  trouvée ici paraît faible comparée aux expériences menées précédemment en turbulence isotrope [42–45, 47, 48]. L'observation de spectre en loi de puissance d'exposant  $-5/3$  bien définis sur une décade d'espace et de temps à un nombre de Reynolds aussi modéré semble particulièrement remarquable. Il faut toutefois noter que la cascade turbulente commence à une échelle  $L_f$  supérieure à l'échelle intégrale  $L_l$  trouvée à partir des fonctions d'autocorrélations. Si on remplace dans les calculs précédents  $L_l$  par  $L_f$ , on obtient  $Re_\lambda \approx 275$ , ce qui est une valeur raisonnable pour un nombre de Reynolds d'écoulement turbulent.

### 2.4.7 Tableau des données caractéristiques de l'écoulement

Les grandeurs caractéristiques principales de l'écoulement pour les paramètres de forçage  $N = 10$  aimants,  $f = 50$  Hz et  $B = 115$  G sont inscrites dans le tableau de la Fig. 2.19.

## 2.5 Conclusion et perspectives

Nous avons mis en place une toute nouvelle méthode pour forcer la turbulence hydrodynamique 3-D. L'écoulement est forcé aléatoirement en espace et en temps dans le volume du

fluide grâce à des aimants et à un champ magnétique alternatif.

Nous avons pu montrer par un modèle et des simulations numériques que le forçage lui-même possédait une dynamique très riche. Le mouvement des aimants dans le fluide mériterait une étude expérimentale approfondie. Il serait en effet intéressant de filmer le mouvement d'un ou plusieurs aimants, de suivre la position et la direction des aimants afin de vérifier la validité du modèle.

Grâce à des mesures locales et spatiales du champ de vitesse, les caractéristiques principales de l'écoulement engendré ont pu être déterminées. Par des mesures de PIV effectuées dans un plan horizontal, nous avons mis en évidence l'homogénéité et l'isotropie du champ de vitesse dans le plan  $Oxy$ . Il serait intéressant de réaliser des mesures verticales, pour quantifier l'homogénéité du champ de vitesse verticale ainsi que l'isotropie en trois dimensions de l'écoulement. Nous avons mis en évidence que les fonctions de structure d'ordre deux suivent la loi des  $2/3$  de Kolmogorov dans la gamme inertielle et que les fonctions de structure d'ordre trois semblent décroître linéairement en bon accord avec la loi des  $4/5$ . Nous retrouvons des spectres spatiaux et temporels en loi de puissance d'exposant  $-5/3$  sur une décade.

À partir des spectres spatiaux unidimensionnels, nous avons pu calculer le spectre spatial en trois dimensions en supposant l'écoulement isotrope. Celui-ci croît à grande échelle, toutefois nous avons été limités dans nos expériences par la taille de la cuve pour obtenir loi prédite en  $k^2$  pour le spectre à grande échelle [71]. Il serait intéressant de poursuivre l'étude des grandes échelles de la turbulence avec ce système, en s'efforçant d'agrandir la gamme entre l'échelle de forçage  $L_f$  et la taille du système en changeant le nombre d'aimants, la taille des aimants ou la taille du système.

Une des caractéristiques les plus remarquables de la turbulence à petites échelles est son intermittence : l'observation d'une statistique s'éloignant de plus en plus d'une gaussienne, lorsqu'on considère des échelles de plus en plus petites pour les fluctuations. Ce phénomène, mis en évidence par Batchelor et Townsend en 1949 [73], a depuis été observé expérimentalement et numériquement (voir par exemple [74]). L'intermittence se caractérise également par une déviation des exposants des fonctions de structure d'ordre élevé par rapport aux prédictions de Kolmogorov ( $S_p^u(r) = \langle \delta u(r)^p \rangle \sim r^{\zeta_p}$  avec  $\zeta_p$  une fonction linéaire de  $p$ ), différents modèles phénoménologiques permettent de prendre en compte cet écart [75, 76]. Il serait intéressant d'effectuer une étude de l'intermittence dans notre système de turbulence forcée en volume, il faudrait pour cela effectuer des mesures répétées afin d'avoir une bonne estimation des fonctions de structure d'ordre élevé et de pouvoir les comparer aux différents modèles.

Par ailleurs, la polyvalence du forçage donne plus de liberté que les forçages usuels déterministes pour étudier les propriétés spatiales ou temporelles du forçage. Une transition d'un forçage aléatoire en espace et en temps vers un forçage aléatoire uniquement en espace pourra être étudiée, ainsi que son influence sur la dynamique à grande échelle.



## Deuxième partie

# Turbulence d'ondes de surface gravito-capillaires





# 3 – Théorie de la turbulence d'ondes

## 3.1 Théorie des ondes de surface hydrodynamiques

Dans cette partie, nous présenterons une brève introduction de la théorie de la turbulence d'ondes appliquée aux ondes de surface hydrodynamiques. Nous nous appuyerons sur les thèses de Luc Deike [77], Quentin Aubourg [78] et Roumaïssa Hassaini [79].

### 3.1.1 Équations de Navier-Stokes

Pour obtenir la relation de dispersion des ondes de surface, il faut d'abord partir des équations fondamentales de l'hydrodynamique : les équations de Navier-Stokes (1.1), écrites dans le chapitre 1, pour un fluide incompressible. Considérons cette fois-ci deux fluides non miscibles et l'interface les séparant. Le premier fluide est un liquide (typiquement l'eau) de densité très supérieure à celle du second, un gaz (typiquement l'air). Écrivons maintenant les équations de Navier-Stokes pour le liquide, de densité  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \frac{\gamma}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{n}) \delta_S \mathbf{n} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

avec  $\mathbf{u}(x, y, z)$  le vecteur vitesse d'une particule fluide,  $p$  la pression,  $g$  l'accélération de pesanteur,  $\gamma$  la tension de surface,  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à l'interface et  $\delta_S$  la fonction égale à 1 sur la surface et 0 dans le volume du fluide. On pose  $z$  la direction verticale et  $(x, y)$  le plan de l'interface au repos entre les fluides. On note que  $\nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \kappa$ , avec  $R_1$  et  $R_2$  les deux rayons de courbure et donc  $\kappa$  la courbure de l'interface. Pour  $\mathbf{u} = 0$ , on retrouve la loi de Laplace, avec un saut de pression au passage de la surface  $p_1 - p_2 = \frac{\gamma}{\rho} (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$ .

On néglige à présent la viscosité et on suppose l'écoulement irrotationnel. On peut alors définir le potentiel de vitesse tel que :  $\nabla \phi = \mathbf{u}$ . On suppose de plus la surface libre ( $p = 0$  dans l'air) et  $z = 0$  au niveau de la surface au repos, et on obtient alors [80] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 &= \frac{p}{\rho} - gz + \frac{\gamma}{\rho} \kappa, \\ \nabla^2 \phi &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

On définit  $\eta(x, y, z, t)$  l'interface entre les deux fluides comme montré Fig. 3.1.  $\eta$  peut se déduire à partir de l'équation (3.2) et des conditions aux limites. Au fond, en  $z = -h$ , en présence d'une paroi solide la vitesse s'annule. À la surface libre, la pression s'annule,

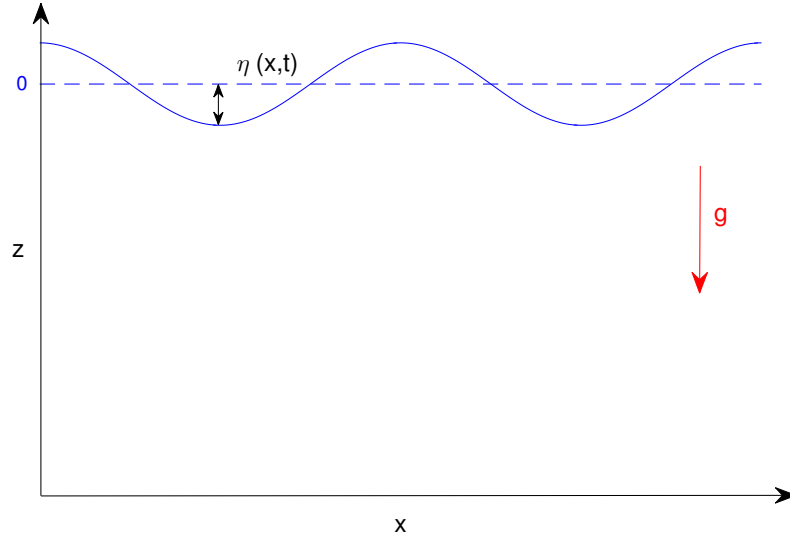


FIG. 3.1 Schéma d'une onde de surface.

$p|_{z=\eta} = 0$  (contrainte dynamique), et on a égalité des vitesses transverses à l'interface  $\frac{D\eta}{Dt} = v|_{z=\eta}$  (contrainte cinématique). On obtient donc les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= 0, \text{ en } z = -h, \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + gz - \frac{\gamma}{\rho}\kappa &= 0, \text{ en } z = \eta, \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0, \text{ en } z = \eta. \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.1.2 Relation de dispersion linéaire des ondes de surface

Lorsque les ondes sont de faible amplitude, les équations précédentes peuvent être linéarisées. La courbure linéarisée a pour expression  $\kappa = \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}$ . Les relations (3.2) deviennent :

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= 0, \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{p}{\rho} - gz + \frac{\gamma}{\rho} \left( \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

On linéarise de même les conditions aux limites (3.3) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=-h} &= 0, \\ \frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_{z=0} + gz - \frac{\gamma}{\rho} \left( \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=0} &= \frac{\partial\eta}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

On cherche des solutions sous formes d'ondes de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$

$$\begin{aligned}\phi &= \Phi(z)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \\ \eta &= \eta_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}.\end{aligned}\quad (3.6)$$

On injecte cette solution dans l'équation de Laplace  $\nabla^2\phi = 0$ , et on obtient :

$$\Phi'' - k^2\Phi = 0, \quad (3.7)$$

avec  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . On a donc :

$$\Phi(z) = \phi_0 \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)}. \quad (3.8)$$

En injectant (3.6) et (3.8) dans les conditions aux limites (3.5), on obtient alors :

$$\begin{aligned}-i\omega\eta_0 &= k\phi_0 \tanh(kh), \\ -i\omega\phi_0 + g\eta_0 + k^2\frac{\gamma}{\rho}\eta_0 &= 0.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Il en découle immédiatement que  $\omega$  et  $k$  sont liés par la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right) \tanh(kh). \quad (3.10)$$

Dans les systèmes considérés dans les parties suivantes, on sera toujours en régime d'eau profonde, avec  $kh \gg 1$ . Dans cette limite,  $\tanh(kh) \rightarrow 1$ , et la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3. \quad (3.11)$$

En égalisant les termes de gravité et de capillarité dans la relation de dispersion, on obtient la fréquence de transition gravito-capillaire :

$$f_{gc} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\rho}{\gamma}\right)^{1/4} g^{3/4}. \quad (3.12)$$

Par exemple, pour des ondes à l'interface entre l'eau pure et l'air, la fréquence de transition entre les régimes capillaire et gravitaire est égale à :  $f_{gc}^{\text{eau/air}} \approx 13$  Hz.

Pour  $f \ll f_{gc}$ , le terme  $\frac{\gamma}{\rho}k^3$  est négligeable, le régime de gravité domine et a pour relation de dispersion :  $\omega^2 = gk$ . De la même manière si  $f \gg f_{gc}$ , le régime de capillarité domine et sa relation de dispersion est  $\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho}k^3$ .

### 3.1.3 Énergie et spectre des ondes

L'énergie cinétique des ondes pour un domaine considéré s'écrit :

$$E_c = \frac{\rho}{2} \int dx dy dz |\nabla\phi|^2. \quad (3.13)$$

L'énergie potentielle fait intervenir deux termes : l'énergie de gravité qui a pour expression :

$$E_g = \frac{\rho}{2} \int dx dy g\eta^2, \quad (3.14)$$



et l'énergie de surface qui s'écrit au premier ordre, pour une onde harmonique

$$E_S \approx \frac{1}{2} \int dx dy \gamma k^2 \eta^2. \quad (3.15)$$

Si on passe maintenant dans l'espace de Fourier avec  $\eta_{\mathbf{k}}$  la transformée de Fourier spatiale 2D de la hauteur des ondes :

$$\eta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \int dx dy \eta(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)}, \quad (3.16)$$

Les termes d'énergie potentielle dans l'espace de Fourier s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} E_g &= \frac{\rho}{2} \int d\mathbf{k} g \eta_{\mathbf{k}}^2 \\ E_S &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \gamma k^2 \eta_{\mathbf{k}}^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pour faire le lien avec les expériences, il est utile de passer à une dimension. On peut grâce à l'égalité de Parseval ( $\int \eta_{\mathbf{k}}^2 d\mathbf{k} = \int \eta_k^2 dk$ ), écrire les mêmes relations en 1D :

$$\begin{aligned} E_g &= \frac{\rho}{2} \int dk g \eta_k^2 \\ E_S &= \frac{1}{2} \int dk \gamma k^2 \eta_k^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

On définit la densité spectrale d'énergie par unité de masse et de surface des ondes de gravité  $E_k^g$  et celle des ondes capillaires  $E_k^c$ , comme suit :

$$\begin{aligned} E_k^g &= \frac{1}{2L_x L_y} g |\eta_k|^2, \\ E_k^c &= \frac{\gamma}{2L_x L_y \rho} k^2 |\eta_k|^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

où  $L_x$  et  $L_y$  sont les dimensions typiques du bassin.

Il est important de noter que les spectres 1D et 2D sont liés par  $|\eta_k|^2 = 2\pi k |\eta_{\mathbf{k}}|^2$ . Ce résultat est obtenu en utilisant  $d\mathbf{k} = k dk d\theta$ , puis en intégrant sur les angles  $\theta$  en supposant le système isotrope ( $d\mathbf{k} = 2\pi k dk$ ).

Expérimentalement, on mesure la densité spectrale de puissance de hauteurs des ondes, définie par :

$$S_\eta(k) = \frac{1}{L_x L_y} |\eta_k|^2, \quad (3.20)$$

$S_\eta(k)$  est relié au spectre d'énergie par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E_k^g &= \frac{1}{2} g S_\eta^g(k), \\ E_k^c &= \frac{\gamma}{2\rho} k^2 S_\eta^c(k). \end{aligned} \quad (3.21)$$

On peut passer dans le domaine fréquentiel avec  $E_k dk = E_\omega d\omega$  et  $S_\eta(k) dk = S_\eta(\omega) d\omega$ , il vient naturellement :

$$\begin{aligned} E_\omega^g &= \frac{1}{2} g S_\eta^g(\omega), \\ E_\omega^c &= \frac{\gamma}{2\rho} k^2 S_\eta^c(\omega). \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.1.4 Mécanismes de dissipation linéaire des ondes de surface

Les mécanismes de dissipation des ondes sont décrits de manière détaillée dans la thèse de Luc Deike [77].

Supposons que l'amplitude d'une onde harmonique dissipée linéairement a la forme suivante :

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \eta_0 e^{-t/\tau_{\text{diss}}} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}, \quad (3.23)$$

avec  $\tau_{\text{diss}}$  le taux de dissipation linéaire, indépendant de l'amplitude  $\eta$  de l'onde.

La dissipation linéaire des ondes se fait principalement en couche limite soit par les parois, le fond et les bords de la cuve, soit par la surface libre. Dans les expériences décrites dans ce manuscrit, le fond est considéré comme infini ( $kh \gg 1$ ) et la dissipation par les parois est négligeable par rapport à celle par la surface libre, on ne prendra donc en compte que la dissipation par l'interface avec l'air.

La formule classique de dissipation des ondes dans une fine couche limite sous la surface libre nous donne [77, 81] :

$$1/\tau_{\text{diss}}^\nu = 2\nu k^2 \quad (3.24)$$

Toutefois, lorsque la surface est polluée, ce qui arrive très couramment lors des expériences, la présence de tensioactifs crée un film inextensible sur la surface qui atténue les ondes et la dissipation s'écrit alors [77, 82] :

$$1/\tau_{\text{diss}}^S = \frac{(\omega\nu)^{1/2}k}{2\sqrt{2}}. \quad (3.25)$$

### 3.1.5 Modes propres d'un bassin

Les effets de taille finie peuvent jouer un rôle important dans l'étude expérimentale de la turbulence d'ondes. Un bassin fermé va en particulier présenter des modes propres qui dépendent de sa taille et de sa géométrie. Les modes propres d'un bassin dans deux géométries vont être déterminés ici comme dans la thèse de Luc Deike [77].

#### a) Géométrie rectangulaire

Soit un bassin rectangulaire fermé, défini par  $0 < x < l$  et  $0 < y < L$ . Les conditions aux limites s'écrivent alors :

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial\phi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial\phi}{\partial y} \right|_{y=L} = 0. \quad (3.26)$$

Cette contrainte appliquée à l'espace de Fourier implique une discrétisation des modes, le vecteur d'ondes s'écrit en effet :

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y) = \left( \frac{m\pi}{l}, \frac{n\pi}{L} \right), \quad \text{avec } n, m \in \mathbb{N}. \quad (3.27)$$

La norme du vecteur d'onde de modes propres d'un bassin rectangulaire est donc :

$$k = \sqrt{\left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2}. \quad (3.28)$$

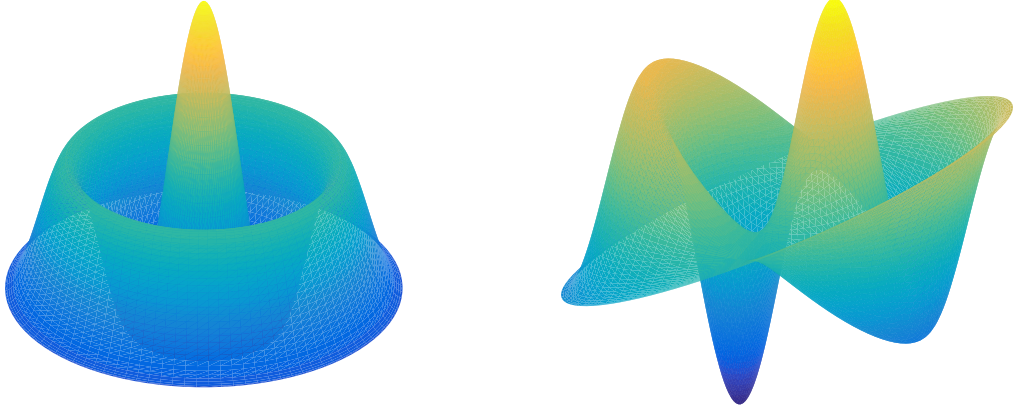


FIG. 3.2 Troisième mode propre symétrique (gauche) et antisymétrique (droite) d'un bassin cylindrique.

### b) Géométrie cylindrique

Considérons à présent un bassin cylindrique de rayon  $R$ . On note  $(r, \theta)$  les coordonnées cylindriques en prenant pour origine le centre du bassin. Les conditions aux limites sont donc :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_r = R = 0, \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial r} \right|_r = R = 0. \quad (3.29)$$

Les solutions pour la hauteur des ondes peuvent s'écrire sous forme de fonction de Bessel [81] :

$$\eta(r, \theta, t) = A_s J_s(kr) \cos(r\theta) \cos(\omega t), \quad (3.30)$$

avec  $s = 0$  ou  $1$ , l'ordre de la fonction de Bessel de première espèce et  $A_s$  une constante réelle.

Il découle des conditions aux bords [81] :

$$J'_s(kR) = 0, \quad (3.31)$$

avec ' dénotant la dérivation.

Les modes propres sont les zéros des fonctions de Bessel.  $s = 0$  correspond aux modes symétriques, les premiers modes propres symétriques sont donnés par :

$$\frac{kR}{\pi} = 1.2197, 2.2330, 3.2383... \quad (3.32)$$

Les modes antisymétriques sont donnés par  $s = 1$ , les premiers modes sont :

$$\frac{kR}{\pi} = 0.586, 1.697, 2.717... \quad (3.33)$$

Les troisièmes modes propres symétriques et anti-symétriques sont représentés sur la Fig. 3.2.

## 3.2 Théorie de la turbulence d'ondes faible

Nous allons présenter brièvement dans cette partie les bases de la théorie de la turbulence faible [17, 18].

### 3.2.1 Principe et hypothèses

#### a) Turbulence et turbulence d'ondes

La théorie de la turbulence d'ondes tient son nom de la turbulence hydrodynamique présentée dans le chapitre 1. En effet, comme en turbulence, le système est dans un état aléatoire que la théorie va décrire de manière statistique. Une séparation entre l'échelle de forçage et l'échelle de dissipation est supposée, un flux d'énergie est transféré entre les échelles de proche en proche. Une cascade d'énergie analogue à celle de la turbulence hydrodynamique est présente, bien que le mécanisme de transfert d'énergie soit différent. Les spectres des ondes sont auto-similaires dans la gamme inertielle et peuvent être retrouvés par analyse dimensionnelle [17, 18, 83].

Toutefois à la différence de la turbulence classique, la théorie de la turbulence d'ondes s'appuie sur l'hypothèse que les non-linéarités mises en jeu sont faibles. On peut ainsi obtenir une équation cinétique pour l'amplitude des ondes et lui trouver des solutions exactes pour l'expression du spectre des ondes [17, 18].

#### b) Hypothèses

La théorie dite de la turbulence faible s'appuie sur plusieurs hypothèses importantes.

Il faut tout d'abord faire l'hypothèse que le système est homogène, isotrope et infini. Cette hypothèse n'est évidemment jamais vérifiée expérimentalement, mais on cherchera toujours à s'en approcher. Le plus souvent les systèmes étudiés sont de dimension grande devant les longueurs d'onde considérées et l'homogénéité et l'isotropie du champ d'ondes peuvent être favorisées par un forçage adapté. Le rôle des effets de tailles finies est une question ouverte de la turbulence d'ondes [22, 84–87]

De plus, on doit faire l'hypothèse que les non-linéarités sont faibles pour pouvoir appliquer la méthode perturbative présentée dans les sections qui suivent et dériver l'équation cinétique. La non-linéarité des ondes sera quantifiée dans les sections suivantes par la cambrure des ondes  $\varepsilon \equiv k_{\max}\eta$  ( $k_{\max}$  étant le nombre d'onde du maximum du spectre) et on doit avoir  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour obtenir les équations fondamentales de la turbulence faible.

La dernière hypothèse est la séparation d'échelle entre le temps caractéristique de propagation linéaire des ondes  $\tau_{\text{lin}} = 1/\omega$ , le temps caractéristique des interactions non-linéaires entre ondes  $\tau_{NL}$ , dont l'expression dépend du type d'ondes en interaction dans le système, et le temps caractéristique de dissipation des ondes  $\tau_{\text{diss}}$ , qui a été présenté en section 3.1.4. On doit avoir  $\tau_{\text{lin}}(k) \ll \tau_{NL}(k) \ll \tau_{\text{diss}}(k)$  à toutes les échelles  $k$  ou  $\omega$  de la gamme inertielle.

### 3.2.2 Mécanisme de transfert d'énergie : interactions à N-ondes

La brique élémentaire de la turbulence d'ondes est l'interaction résonnante entre ondes. C'est par ce mécanisme de base que les ondes échangent de l'énergie entre elles et remplissent

le spectre d'énergie à toutes les échelles. Pour que  $N$  ondes interagissent entre elles, les conditions suivantes sur leurs pulsations et leurs nombres d'ondes doivent être vérifiées :

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \pm \dots \pm \mathbf{k}_N &= 0, \\ \omega_1 \pm \omega_2 \pm \dots \pm \omega_N &= 0,\end{aligned}\tag{3.34}$$

$\omega_i = \omega(k_i)$  et  $k_i = \|\mathbf{k}_i\|$  étant reliés par la relation de dispersion.

Comme la théorie de la turbulence faible se fonde sur un développement perturbatif en  $\varepsilon$ , la valeur de  $N$  doit être la plus petite possible. En effet,  $N$  est lié au degré des non-linéarités des équations d'ondes : si les non-linéarités sont quadratiques,  $N = 3$ , si elles sont cubiques  $N = 4$  et ainsi de suite. Certains types d'interactions et donc certaines valeurs de  $N$  peuvent être également interdites pour des raisons géométriques. Cela peut être vu graphiquement [18, 88]. Prenons, par exemple, des ondes dont la relation de dispersion a la forme :

$$\omega = ak^b\tag{3.35}$$

D'après 3.34, les interactions à 3 ondes ne sont possibles que si l'équation  $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)$  a une solution, c'est-à-dire si la surface  $\omega(k_x, k_y)$  (en bleu sur la Fig. 3.3) a une intersection non vide avec une même surface tracée (en rouge) dans un repère dont l'origine se trouve sur  $\omega(k_x, k_y)$ . On peut voir sur la Fig. 3.3 que ceci n'est possible que si  $b > 1$ . En particulier, pour les ondes de surface, on n'aura pas d'interactions résonnantes à 3 ondes en régime de gravité ( $b = 1/2$ ), mais elles seront permises pour les ondes capillaires ( $b = 3/2$ ).

### 3.2.3 Équation cinétique

La dérivation suivante s'appuie sur les livres de Zakharov [17], de Nazarenko [18] et sur l'article de revue de Newell [89]. Pour obtenir l'équation cinétique de Zakharov, on part de l'équation du Hamiltonien dans l'espace de Fourier :  $i\frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial a_{\mathbf{k}}^*}$ , avec  $H$ , le hamiltonien du système,  $a_{\mathbf{k}}$  les variables canoniques associées aux amplitudes complexes des ondes dans l'espace de Fourier. Si on fait ensuite un développement perturbatif du Hamiltonien, en utilisant l'hypothèse de séparation d'échelle  $\tau_{lin} \ll \tau_{NL}$ , on obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned}i\frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial a_{\mathbf{k}}^*} = \omega a_{\mathbf{k}} + \varepsilon \int V_{k,k_1,k_2} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \\ &+ \varepsilon^2 \int W_{k,k_1,k_2,k_3} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 + \dots,\end{aligned}\tag{3.36}$$

où  $V_{k,k_1,k_2}$  est le coefficient d'interaction à 3 ondes et  $W_{k,k_1,k_2,k_3}$  le coefficient d'interaction à 4 ondes. Comme  $\varepsilon \ll 1$  on s'arrêtera au plus petit coefficient non nul de ce développement perturbatif. Comme vu dans la section 3.2.2,  $N = 3$  pour les ondes capillaires et  $N = 4$  pour les ondes de gravité.

L'équation obtenue nous renseigne sur la dynamique des ondes. La théorie de la turbulence faible nous permet d'obtenir des équations statistiques, plus appropriées pour décrire un système stochastique. Pour ce faire, on cherche l'expression du moment d'ordre deux de la variable canonique  $\langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'} \rangle$ .  $\langle \cdot \rangle$  représentant la moyenne statistique sur les réalisations. Celle-ci peut être obtenue de deux manières différentes. La première s'appuie sur l'hypothèse de phase aléatoire : il faut supposer que la phase et l'amplitude des ondes sont quasi-gaussiennes [18].

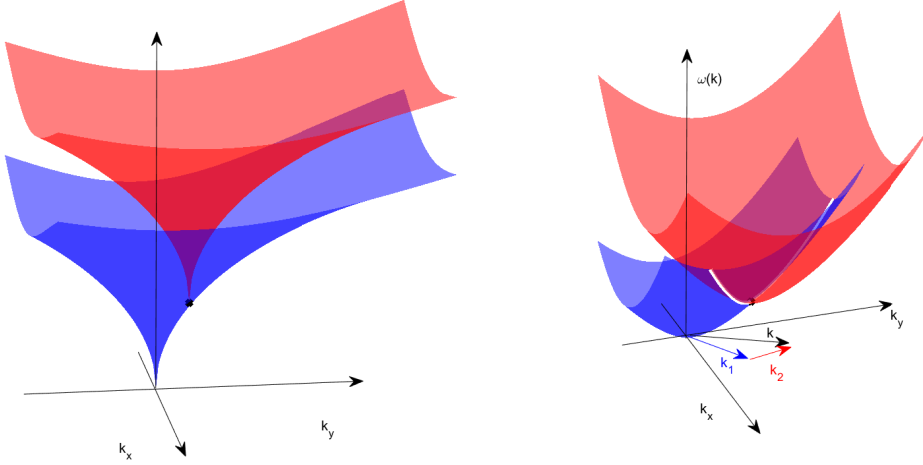


FIG. 3.3 Surfaces  $\omega(k_x, k_y)$  pour les ondes de surface de gravité (à gauche,  $\omega \sim k^{1/2}$ ) et de capillarité (à droite,  $\omega \sim k^{3/2}$ ). On observe que les surfaces n'ont aucune intersection pour les ondes de gravité, mais se coupent suivant la courbe blanche pour les ondes capillaires.

La seconde utilise la hiérarchie des cumulants des variables canoniques [90]. Les cumulants  $R_n$  d'ordre  $n$  sont liés aux moments  $M_n$  d'ordre  $n$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 M_1 &= 0, \\
 M_2(\mathbf{r}) &= \langle \eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = R_2(\mathbf{r}) \\
 M_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= R_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
 M_4(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') &= R_4(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') + R_2(\mathbf{r})R_2(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') + R_2(\mathbf{r}')R_2(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}) + R_2(\mathbf{r}'')R_2(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Soit  $Q_n$  le cumulant dans l'espace de Fourier, on a alors :

$$\begin{aligned}
 Q_2(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}) &= \langle a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}_1} \rangle \\
 Q_3(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) &= \langle a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}_1}a_{\mathbf{k}_2} \rangle \\
 Q_4(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) &+ \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)Q_2(\mathbf{k}_1)Q_2(\mathbf{k}_3) \\
 + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3)Q_2(\mathbf{k}_2)Q_2(\mathbf{k}_3) &+ \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)Q_2(\mathbf{k}_2)Q_2(\mathbf{k}_3) = \langle a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}_1}a_{\mathbf{k}_2}a_{\mathbf{k}_3} \rangle
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

On doit ensuite utiliser l'hypothèse d'homogénéité pour supposer que la moyenne statistique est équivalente à la moyenne spatiale. En multipliant l'équation (3.36) par le facteur  $a_{\mathbf{k}} \dots a_{\mathbf{k}_n}$ , puis en moyennant spatialement, l'équation pour le cumulant d'ordre  $m$  fait alors

intervenir le cumulatif d'ordre  $n$  supérieur ( $n > m$ ) :

$$\frac{\partial Q_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m)}{\partial t} = f(\{Q_n\}, t). \quad (3.39)$$

En s'appuyant sur l'hypothèse de séparation d'échelle entre le temps des interactions lentes non-linéaires et le temps des oscillations rapides des ondes linéaires, on peut développer en série chaque cumulatif  $Q_m$  en fonction de  $\varepsilon$  :

$$Q_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) = q_0^{(m)} + \varepsilon q_1^{(m)} + \varepsilon^2 q_2^{(m)} + \varepsilon^3 q_3^{(m)} + \dots \quad (3.40)$$

Contrairement à la turbulence classique, on peut montrer la fermeture asymptotique du système, grâce à de longs calculs lorsqu'on injecte (3.40) dans (3.39) et à deux hypothèses principales : la taille infinie du système et la faible non-linéarité. Les moments d'ordre impairs sont trouvés alors nuls et tous les moments d'ordre pair s'écrivent en fonction de  $Q_2$ . Le spectre d'action d'ondes est défini de la manière suivante :

$$n_{\mathbf{k}} = \langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* \rangle = Q_2. \quad (3.41)$$

On obtient alors l'équation cinétique qui décrit l'évolution aux temps longs du spectre d'action d'ondes  $n_{\mathbf{k}}$  :

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = S_t(n_{\mathbf{k}}), \quad (3.42)$$

avec  $S_t(n_{\mathbf{k}})$ , l'intégrale de collision. Ce terme permet de prendre en compte l'évolution du spectre pour le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  sous l'effet des interactions résonnantes.

L'équation cinétique a pour expression dans le cas d'interactions à 3 ondes (cas des ondes capillaires) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 4\pi\varepsilon^2 \int |V_{k,k_1,k_2}|^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} & \left[ \left( \frac{1}{n_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} \right) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) + \right. \\ & \left. \left( \frac{1}{n_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} + \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} \right) \delta(\omega_1 - \omega - \omega_2) + \right. \\ & \left. \left( \frac{1}{n_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} \right) \delta(\omega_2 - \omega_1 - \omega) \right] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Dans le cas des interactions à 4 ondes (cas des ondes de gravité) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 4\pi\varepsilon^4 \int |W_{k,k_1,k_2,k_3}|^2 n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) & \left[ \frac{1}{n_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_3}} \right] \\ & \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3, \end{aligned} \quad (3.44)$$

où  $V$  et  $W$  sont les coefficients d'interaction à trois ondes et à quatre ondes [18, 91, 92].

### 3.2.4 Solutions à flux constant

On s'intéresse aux solutions stationnaires à flux constant de l'équation cinétique 3.42. Par analogie aux spectres de Kolmogorov décrits en sections 1.3, ces solutions sont appelées

les spectres de Kolmogorov-Zakharov. En effet, comme pour la turbulence classique, on a un flux d'énergie constant entre une source d'énergie et un puits d'énergie. L'équation cinétique ayant été obtenue sans source ou puits d'énergie, en pratique cela suppose qu'une séparation d'échelle existe entre la source et le puits dans l'espace de Fourier. Le régime inertiel se situe dans l'intervalle entre ces deux échelles. L'énergie totale des ondes est alors conservée et s'écrit :

$$E = \int E_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = \int E_k dk. \quad (3.45)$$

Par définition des variables canoniques, l'énergie est liée à l'action d'ondes  $n_k$  par :

$$E_k = \omega(k)n_k. \quad (3.46)$$

D'autres quantités peuvent être conservées comme l'action totale  $\mathcal{N} = \int n_k dk$  dans le cas où  $N$  est pair.

Le flux d'énergie  $\epsilon$  est défini par le bilan suivant :

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon}{\partial k} = 0. \quad (3.47)$$

Les solutions de (3.42) cherchées sont à flux d'énergie  $\epsilon$  constant à travers les échelles et stationnaire, elles doivent donc annuler le terme de collision de l'équation cinétique 3.42. Elles peuvent être trouvées par un développement mathématique (la transformation de Zakharov) [17, 18] :

$$n_k = c\epsilon^{1/(N-1)}k^{-\alpha}, \quad (3.48)$$

où  $N$  est le type d'interactions dominant dans le système,  $c$  et  $\alpha$  sont des constantes dépendant du système considéré. Ces solutions furent découvertes en premier en turbulence d'ondes par Zakharov en 1965 [93], et par Zakharov et Filonenko pour la turbulence d'ondes capillaires en 1966-1967 [15] et pour les ondes de gravité en eau profonde [94].

### 3.2.5 Analyse dimensionnelle

Nous allons présenter ici une méthode d'analyse dimensionnelle permettant de trouver les spectres de Kolmogorov-Zakharov sous certaines conditions. Cette méthode est présentée par Zakharov dans [17] et retrouvée dans [18, 83].

#### a) Cascade directe d'énergie

Considérons des ondes se propageant à 2 dimensions suivant la relation de dispersion (3.35) :  $\omega = ak^b$ .  $a$  a pour dimension  $[L^b T^{-1}]$ . La dimension de la densité d'énergie  $E_k$ , normalisée par unité de surface et de densité, est  $[L^4 T^{-2}]$ . Le flux d'énergie  $\epsilon$  a pour dimension d'après l'équation (3.47)  $[L^3 T^{-3}]$ . Pour un système dominé par les interactions à  $N$  ondes, le flux d'énergie est proportionnel à la puissance  $N - 1$  de la densité spectrale d'énergie (et donc  $E_k \sim \epsilon^{\frac{1}{N-1}}$ ) [83, 95], il vient donc la relation suivante :

$$E_k \sim \epsilon^{\frac{1}{N-1}} a^\xi k^\zeta, \quad (3.49)$$

avec  $\xi = 2 - 3/(N - 1)$  et  $\zeta = 2b - 4 + (3 - 3b)/(N - 1)$ .



### Ondes de gravité en eau profonde

Appliquons ce résultat aux ondes de gravité. On a  $b = 1/2$ ,  $N = 4$  et  $a = \sqrt{g}$ . On obtient donc en utilisant les équations (3.49), (3.21) et (3.22) les spectres suivants pour la cascade directe d'ondes de gravité :

$$\begin{aligned} E_k^g &= \epsilon^{1/3} g^{1/2} k^{-5/2}, \\ S_k^g &= \epsilon^{1/3} g^{-1/2} k^{-5/2}, \\ S_\omega^g &= \epsilon^{1/3} g \omega^{-4}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

### Ondes capillaires

Cherchons maintenant le spectre de la turbulence d'ondes capillaires. On a cette fois  $b = 3/2$ ,  $N = 3$  et  $a = (\gamma/\rho)^{3/2}$ . On obtient donc de la même manière que pour les ondes de gravité :

$$\begin{aligned} E_k^c &= \epsilon^{1/2} \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/4} k^{-7/4}, \\ S_k^c &= \epsilon^{1/2} \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{-3/4} k^{-15/4}, \\ S_\omega^c &= \epsilon^{1/2} \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/6} \omega^{-17/6}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

#### b) Cascade inverse d'action d'ondes

Lorsque que  $N$  est pair, l'action d'onde totale  $\mathcal{N} = \int n_k dk$  est conservée. On peut alors introduire le flux d'action d'onde  $Q$  de la même manière que le flux d'énergie :

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial k} = 0. \quad (3.52)$$

On a alors une cascade inverse dont le spectre est une solution stationnaire à flux d'action d'onde constant. La dimension de  $Q$  est  $[L^3 T^{-2}]$  (car  $[Q] = [\epsilon]/[\omega]$ ). Le spectre d'énergie de la cascade inverse s'écrit :

$$E_k = Q^{\frac{1}{N-1}} a^\xi k^\zeta, \quad (3.53)$$

où  $\xi = 2 - 2/(N - 1)$  et  $\zeta = 2b - 4 + (3 - 2b)/(N - 1)$ .

### Ondes de gravité

Pour les ondes de surface, la cascade inverse n'existe pas pour les ondes capillaires, car  $N$  est impair. En revanche, une cascade inverse est prédite pour les ondes de gravité en eau profonde. Les spectres de cascade inverse associés ont alors pour expression :

$$\begin{aligned} E_k &= Q^{1/3} g^{2/3} k^{-7/3}, \\ S_k^i &= Q^{1/3} g^{-1/3} k^{-7/3}, \\ S_\omega^i &= Q^{1/3} g \omega^{-11/3}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

# 4 – Turbulence d’ondes de surface en hypergravité

## 4.1 Contexte

La turbulence d’ondes de gravité est d’une grande importance en océanographie, elle est toutefois encore bien incomprise. Si certaines mesures effectuées à la surface des océans [96,97] mènent à des spectres d’ondes semblant en bon accord avec la théorie de la turbulence faible de Zakharov [94], des spectres de formes différentes ont également été obtenus à partir d’autres mesures *in situ* [98,99]. La forme du spectre des ondes semblent dépendre en effet de nombreux paramètres difficilement contrôlables *in situ*, comme la direction ou la force du vent. Les simulations numériques et les expériences en laboratoire sont donc des approches complémentaires des mesures océanographiques pour comprendre la turbulence d’ondes. Le spectre du champ d’ondes prédit par la théorie de la turbulence faible a pu être retrouvé par des simulations [100], toutefois estimer numériquement la dissipation par les structures non-linéaires locales reste un défi. Il est donc important de comparer les résultats numériques avec les résultats expérimentaux. La plupart des expériences de laboratoire sur la turbulence d’ondes de gravité ne sont pas en accord avec la théorie de la turbulence faible de Zakharov [19–23].

Plusieurs hypothèses peuvent expliquer ce désaccord. La dissipation, négligée dans la théorie, pourrait avoir une influence via des capillarités parasites ou des déferlements. Des transferts d’énergie non purement résonnants et non pris en compte théoriquement pourraient avoir lieu. La théorie a lieu dans un système de taille infinie, ce qui n’est évidemment pas le cas des expériences de laboratoire, les effets de taille finie pourraient donc être importants. Le champ d’ondes est également supposé parfaitement homogène et isotrope dans la théorie, ce qui est difficile à reproduire expérimentalement. La théorie de la turbulence faible n’est valable que pour des ondes faiblement non-linéaires, or des non linéarités d’ordres supérieurs pourraient jouer un rôle dans la dynamique des ondes et expliquer ce désaccord entre théorie et expérience. Récemment, il a été montré expérimentalement que ce désaccord proviendrait de la modulation des ondes liées (i. e. de harmoniques se propageant à la vitesse du fondamental) [3,101].

Les paramètres pertinents de la turbulence d’ondes de gravité dépendent fortement de l’accélération de gravité  $g^*$  :

1. Elle apparaît dans la relation de dispersion des ondes linéaires en eau profonde (3.11) qui relie la pulsation des ondes  $\omega$  au vecteur d’ondes  $k$  :  $\omega = \sqrt{g^*k + \frac{\gamma}{\rho}k^3}$ , avec  $\gamma$  la tension de surface et  $\rho$  la densité du fluide.

2. Elle apparaît dans l'expression de la fréquence de transition entre les régimes de turbulence d'ondes capillaires et de gravité (3.12) :  $f_{gc} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\rho}{\gamma}\right)^{1/4} g^{*3/4}$ .  $f_{gc}$  est de l'ordre de 13 Hz pour des ondes à la surface de l'eau sur terre.
3. L'échelle de temps des interactions non-linéaires entre ondes de gravité  $\tau_{NL}$  dépend également de  $g^*$ , selon [89] :

$$\tau_{NL}^G \sim \epsilon^{-2/3} k^{-3/2} g^{*1/2}, \quad (4.1)$$

avec  $\epsilon$  le flux d'énergie.

Pour que la condition de faible non-linéarité de la théorie soit vérifiée, une séparation d'échelle est nécessaire entre  $\tau_{NL}$ , le temps non-linéaire, et  $\tau_L = 1/\omega \sim 1/\sqrt{gk}$ , le temps linéaire. Le rapport entre  $\tau_L$  et  $\tau_{NL}^G$  rend compte de l'intensité des non-linéarités. Il faut donc :

$$NL = \tau_L/\tau_{NL}^G \sim \epsilon^{2/3} k^1 g^{-1} \ll 1. \quad (4.2)$$

Comme  $NL$  est croissant avec  $k$  (et  $f$ ), l'hypothèse de faible non-linéarité sera rompue à petites échelles. Cette rupture a lieu pour  $NL \sim 1$  soit à la fréquence  $f_r \sim g^* \epsilon^{-1/3}$ . L'échelle de rupture de la turbulence faible sera donc d'autant plus petite que  $g^*$  est grand.

4. Pour les ondes de surface, la turbulence faible n'est plus valable à partir du flux d'énergie critique  $\epsilon_c \sim \left(\frac{\gamma g^*}{\rho}\right)^{3/4} \approx 4.4 \times 10^{-3} m^3 s^{-3}|_{1g}$  à la fréquence de transition  $f_{gc}$  [102]. Ce flux critique croît d'une décade si  $g^*$  est augmenté d'un facteur 20.

Les dépendances de ces paramètres avec  $g^*$  sont favorables à l'étude de la turbulence d'ondes dans un environnement de haute gravité. Notamment si on peut augmenter  $g^*$  d'un facteur 20,  $f_{gc}$  et  $\epsilon_c$  augmenteront d'une décade. Le rapport  $\frac{\rho}{\gamma}$  étant à peu près le même pour la plupart des fluides, pour faire varier  $f_{gc}$  et augmenter la gamme inertielle des ondes de gravité, changer  $g^*$  paraît être une bonne solution. Il est donc pertinent de faire varier  $g^*$  pour étudier la turbulence d'ondes de surface. Il s'agit maintenant de se demander comment faire varier  $g$ . En effet, dans la plupart des expériences  $g^*$  n'est pas un paramètre mais une constante égale à l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre  $g \approx 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ . Il n'est pas évident de faire varier la gravité effective dans un système expérimental, il faut pour cela se placer dans un référentiel en accélération par rapport au référentiel terrestre.

Si l'on veut diminuer, voire annuler,  $g^*$ , il faut que le référentiel dans lequel on réalise nos expériences soit en chute libre. Ainsi l'accélération d'entraînement compense exactement l'accélération de gravité et l'on se trouve ainsi en impesanteur. La solution la plus simple est donc de placer le dispositif expérimental en hauteur et de le laisser tomber dans le vide. C'est le principe des tours d'impesanteur ou tube d'impesanteur. Il en existe une dizaine dans le monde qui sont encore utilisées à des fins scientifiques. Par exemple, il y a à Brème, une tour dans laquelle se trouve un tube d'impesanteur de 120 m, doté d'une catapulte qui permet de réaliser des expériences à moins de  $10^{-6}g$  pendant 9,3 s [103]. Une photographie de la tour d'impesanteur de Brème est montrée en Fig. 4.1. Si l'on veut augmenter un peu le temps d'impesanteur, il est possible d'effectuer des vols paraboliques. Un avion enchaîne une trentaine de trajectoires en forme de paraboles au cours desquelles il sera en chute libre

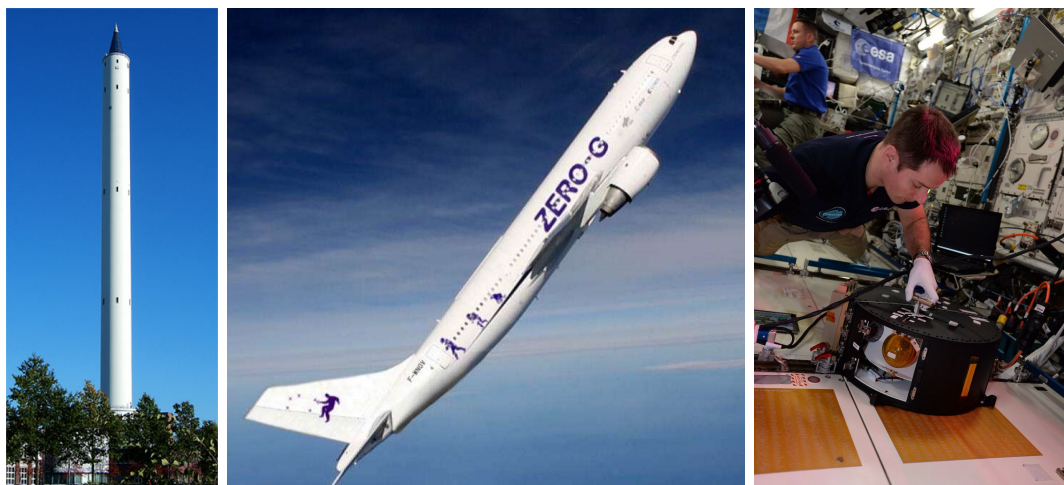


FIG. 4.1 Gauche : Tour d'impesanteur de l'université de Brème. Centre : Airbus A310 Zero-G de Novespace à l'entrée de la parabole ©Novespace. Droite : Thomas Pesquet réalisant les expériences Fluidics à bord de la station spatiale internationale ©CNES/ESA.

(à moins de  $10^{-2}g$ ) pendant une vingtaine de secondes pour chaque parabole. On peut voir une photographie de l'avion Zero-G de la compagnie Novespace entrant dans une parabole sur la Fig. 4.1. Des expériences permettant d'observer de la turbulence d'ondes purement capillaires sans effet d'ondes de gravité sur plus de deux décades ont été réalisées dans des vols paraboliques [104]. Pour obtenir des temps plus longs en micro-gravité, une solution est de placer notre expérience en orbite, dans la station spatiale internationale, dans le cadre du projet Fluidics [105].

Si au contraire, on veut augmenter le niveau de gravité, le plus simple est de se placer dans un référentiel en rotation uniforme par rapport au référentiel terrestre. En effet, l'accélération centrifuge s'ajoutera à  $g$ , créant ainsi une gravité effective,  $g^*$ , supérieure. De nombreux biologistes utilisent des centrifugeuses pour étudier l'effet de la gravité sur le vivant. Un fluide en rotation dans un bassin cylindrique de 10 cm de rayon à 100 tr/min permettrait d'atteindre  $100g$ , avec un important gradient radial de gravité conduisant à une courbure parabolique de la surface du liquide. Pour s'affranchir de cet effet, nous avons utilisé la grande centrifugeuse de l'Agence spatiale européenne (ESA), décrite dans la section suivante. Nous avons pu mener des expériences d'ondes de surface avec un niveau de gravité variant de  $1g$  à  $20g$ .

## 4.2 Dispositif expérimental

### 4.2.1 La centrifugeuse de grand diamètre de l'ESA (LDC)

La centrifugeuse de grand diamètre (Large Diameter Centrifuge ou LDC) de l'ESA est constituée de longs bras au bout desquels se balancent librement des « gondoles » (voir Fig. 4.2). Les bras de rayon  $r = 4$  m sont mis en rotation par un moteur Siemens de 22 KW à une vitesse angulaire  $\Omega$  afin de créer un champ d'accélération centrifuge à l'intérieur de la gondole, où sont menées les expériences.  $\Omega$  peut atteindre jusqu'à 67 tr/min, ce qui



FIG. 4.2 Photographie de la LDC de l'ESA au repos (haut) en mouvement (bas), pour une gravité effective au fond de la gondole  $g^* \approx 20g$

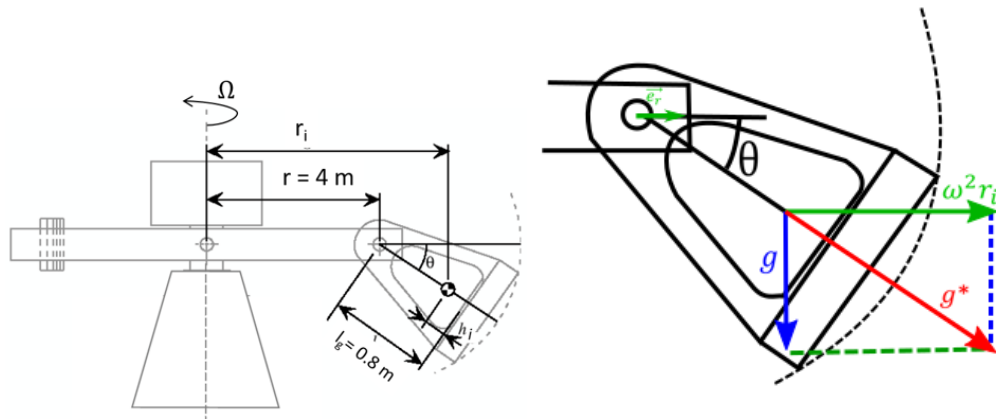


FIG. 4.3 Gauche : Schéma explicatif du fonctionnement de la grande centrifugeuse de l'ESA (LDC). Les bras de rayon,  $r = 4$  m, tournent à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour d'un axe vertical. L'expérience est située dans une gondole au bout d'un des bras. Les gondoles font  $l_g = 0.8$  m de haut, l'expérience est placée à une hauteur  $h_i$  du fond de la gondole. Le rayon effectif ou la distance de notre expérience à l'axe de rotation est alors  $r_i = r + (l_g - h_i)\cos\theta$ . Droite : Schéma d'une gondole de la LDC. La gravité apparente  $\vec{g}^*$  est égale à la somme vectorielle de la gravité terrestre  $\vec{g}$  et de l'accélération centrifuge  $\Omega^2 r_i \vec{e}_r$ .

correspond à 101 km/h au bout des bras, à 4 m de l'axe de rotation. Le temps minimal pour atteindre l'accélération maximale (correspondant à  $20g$  au bout des bras) est 1 min.

L'articulation entre le bras de la centrifugeuse et la gondole est libre, l'axe de la gondole fait un angle  $\theta$  avec l'horizontale. La gondole s'aligne naturellement avec la gravité apparente  $\vec{g}^* = \vec{g} + \Omega^2 r_i \vec{e}_r$ , où  $\vec{g}$  est la gravité terrestre et  $r_i$  est la distance entre l'axe et le point de l'expérience (voir Fig. 4.3).

Dans la LDC, on peut faire varier la gravité apparente  $g^* = \sqrt{g^2 + (\Omega^2 r_i)^2}$  entre  $1g$  et  $20g$ . L'augmentation de la gravité apparente  $g^*$  en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  est représentée sur la Fig. 4.4 à gauche. Comme la gondole s'aligne avec  $\vec{g}^*$ , l'angle  $\theta$  de la gondole en vol avec l'horizontal décroît lorsque la vitesse  $\Omega$  augmente,  $\theta = \arctan(\Omega^2 r_i / g)$ . Comme on peut le voir en Fig. 4.4 à droite,  $\theta$  décroît très fortement avec  $g^*$  :  $\theta = 90^\circ$  à  $1g$  et il est inférieur à  $12^\circ$  lorsque  $g^* > 5g$  (voir aussi Fig. 4.2 bas).

La centrifugeuse repose sur un bloc de béton très lourd antisismique. Elle est pilotable facilement par l'intermédiaire d'une interface LabView depuis une salle de contrôle située à proximité.

La centrifugeuse peut avoir deux ou quatre bras avec 2 gondoles par bras. Lors de notre campagne de mesure, nous étions les seuls à réaliser des expériences. La LDC n'était donc équipée que de 2 bras, et de quatre gondoles. Le dispositif expérimental était placé dans une des gondoles et la gondole opposée était lestée pour équilibrer la structure.

La campagne s'est déroulée à l'European Space Research and Technology Center (ESTEC) de l'ESA à Noordwijk an Zee au Pays-Bas du 12 au 16 novembre 2018, en collaboration avec une équipe de l'Université de Liège ayant déjà utilisé cet instrument pour des expériences sur des gouttes en Leidenfrost [106] et J. J. W. van Loon détaché de l'Université d'Amsterdam pour la gestion de la LDC.

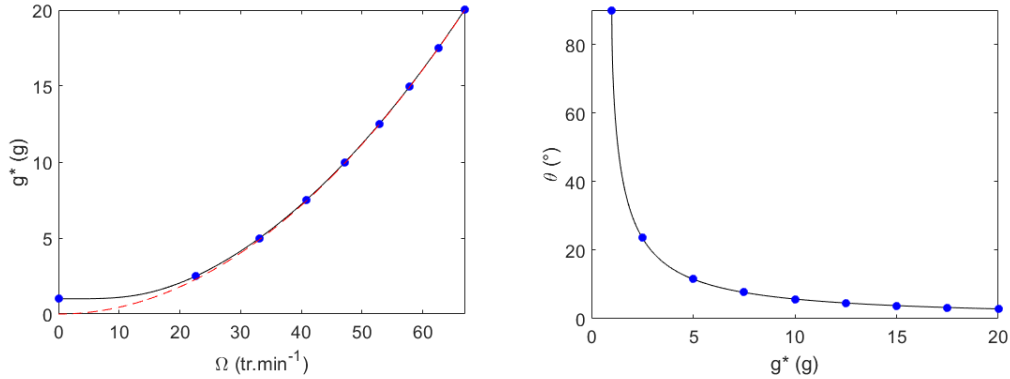


FIG. 4.4 Gauche : Accélération théorique  $g^* = \sqrt{g^2 + (\Omega^2 r_i)^2}$  dans la gondole en fonction de la vitesse de rotation (en g). En trait plein noir,  $g^*$ , gravité effective dans la gondole. En pointillés rouges : accélération centrifuge  $\Omega^2 r_i$ . On notera que la gravité terrestre devient négligeable devant l'accélération centrifuge à partir de  $\Omega > 25$  tr/min. Droite : Angle théorique  $\theta$  que fait la gondole avec l'horizontale en fonction de la gravité apparente  $g^*$ .

#### 4.2.2 La cuve à ondes

À l'intérieur de la gondole est placée une cuve cylindrique de diamètre  $D = 23$  cm (voir Fig. 4.5). En bas de la gondole est situé un réservoir rempli d'eau distillée (de densité  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup> et de tension de surface mesurée  $\gamma = 75.2 \pm 0.3$  mN/m) relié par un tube et une pompe à la cuve. Au début de chaque expérience la cuve est vide. Nous mettons en route la centrifugeuse. Une fois la gravité apparente  $g^*$  prescrite obtenue, la pompe se met en marche et remplit la cuve d'eau distillée jusqu'à une hauteur  $h = 6,5$  cm. On évite ainsi les rotations éventuelles du fluide au sein de la cellule lors de l'augmentation de l'accélération. Le processus est contrôlé par une caméra placée à l'intérieur de la gondole. La profondeur du liquide,  $h$ , est choisie de façon à être toujours en régime d'ondes en eau profonde, c'est-à-dire la longueur d'onde  $\lambda$  est telle que  $\lambda \ll 2\pi h$ .

Les ondes de surface sont engendrées grâce à un batteur rectangulaire, plat fixé au fond par une articulation de type volet (« flap »). Un servomoteur impose au batteur un forçage en bruit blanc de bande spectrale étroite (entre 3 et 5 Hz), et d'amplitude d'écart type  $\sigma_A < 2.2$  cm. La déformation de la surface  $\eta(t)$  est mesurée localement au centre de la cuve pendant  $\mathcal{T} = 1000$  s avec une sensibilité de  $10 \mu\text{m}$ , grâce à une sonde capacitive fabriquée au laboratoire [19]. La cambrure typique des ondes est inférieure à 0.1. Lorsque le batteur est à l'arrêt, la surface du fluide est parfaitement parallèle au fond de la gondole, comme attendu. Nous n'observons pas d'effet de la force de Coriolis sur les ondes, car la vitesse de la centrifugeuse est grande par rapport à la vitesse des ondes.

### 4.3 Résultats

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'un article publié dans *Physical Review Letters* [2] et reproduit en section 4.5. Nous présentons ici les principaux résultats.

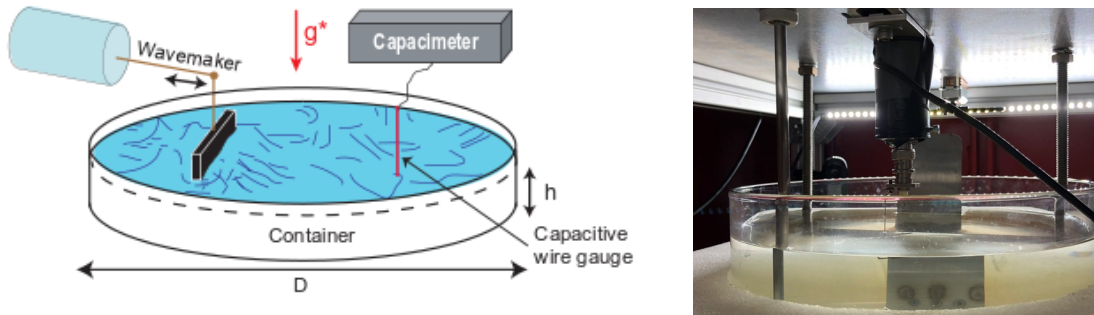


FIG. 4.5 Gauche : Schéma du dispositif expérimental à l'intérieur de la gondole. Droite : Photographie de la cuve prise du fond de la gondole.

### 4.3.1 Signaux de hauteur des vagues

Le signal de déformation de la surface en fonction du temps  $\eta(t)$  est tracé Fig. 4.6 pour différentes valeurs de gravité  $g^*$  à forçage fixé. L'amplitude des ondes est indépendante de la gravité apparente  $g^*$ , comme montré sur la Fig. 4.7 à gauche, mais dépend linéairement de l'amplitude du forçage  $\sigma_A$  comme attendu (voir la Fig. 4.7 à droite). En revanche, on peut observer sur la Fig. 4.6 que la fréquence des ondes augmente avec  $g^*$  bien que le batteur impose toujours la même fréquence entre 3 et 5 Hz au système.

### 4.3.2 Spectres des ondes

La Fig. 4.8 montre les densités spectrales de puissance de la déformation de la surface pour les deux valeurs extrêmes de l'accélération de gravité :  $g^* = 1g$  et  $g^* \approx 20g$ . Pour  $g^* = 1g$ , on observe deux décroissances du spectre en lois de puissance correspondant au régime de turbulence d'ondes de gravité et de capillarité, comme déjà rapporté précédemment [19]. À  $19.4g$ , les mêmes lois de puissance sont obtenues, mais la fréquence de transition  $f_{gc}$  entre les régimes est augmentée d'une décade comme attendu théoriquement.

On remarque qu'à  $19.4g$ , les fréquences de forçage ont également augmenté. Cet effet est visible sur la Fig. 4.9, représentant le spectre de spectre à différentes amplitudes de forçage à  $19.4g$ . On remarque que les pics du spectre correspondent aux premiers modes propres du bassin, calculés à partir des équations (3.32) et (3.33). Cette observation peut être expliquée par le fait que la longueur d'onde augmente avec  $g^*$  pour une fréquence de forçage donnée (voir l'équation (3.10)). Lorsque la longueur d'onde du forçage devient comparable aux modes propres du bassin ceux-ci sont excités et deviennent le forçage de la cascade turbulente. Ce phénomène est mis en évidence sur la Fig. 4.10, qui montre la fréquence du maximum du spectre en fonction de  $g^*$ . Jusqu'à  $g^* = 7.5g$  celle-ci se trouve dans la zone de forçage. À partir de  $g^* = 10g$  elle correspond au troisième mode propre symétrique  $k_{D/3}$ .

### 4.3.3 Fréquence de transition

La fréquence de transition,  $f_{gc}$ , entre le régime de gravité et de capillarité est déduite des spectres pour  $g^*$  variant de  $1g$  à  $19.4g$  et est tracée sur la Fig. 4.11. Elle augmente fortement (d'une décade) avec la gravité apparente avec un très bon accord avec la valeur théorique de l'équation (3.12), sans paramètre ajustable indépendamment de l'amplitude du forçage.



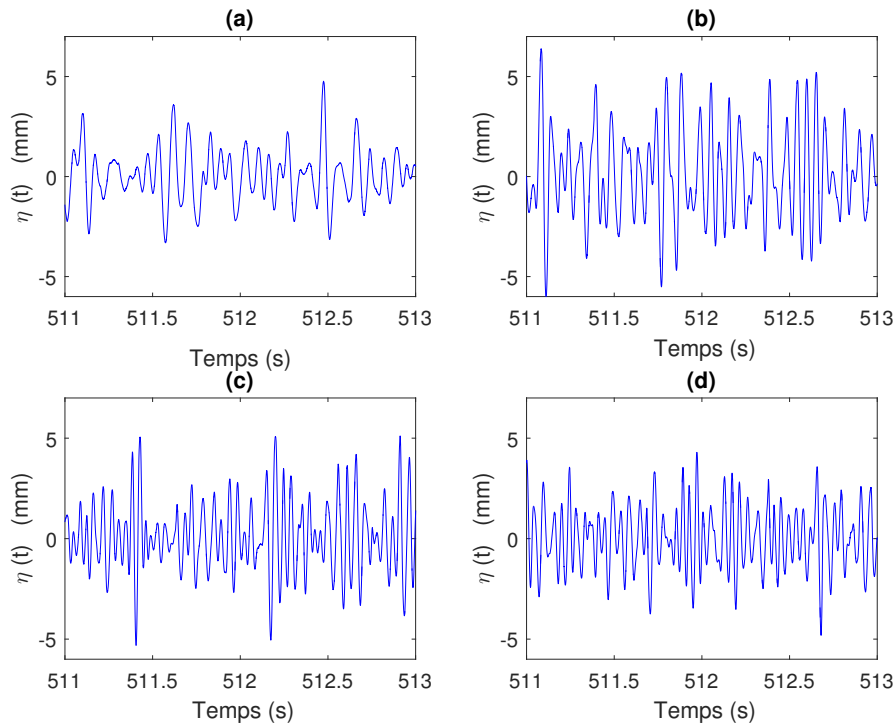


FIG. 4.6 Signal de déformation de la surface  $\eta(t)$  pour  $g^* =$  (a)  $7.5g$ ; (b)  $12.5g$ ; (c)  $17.5g$ ; (d)  $19.4g$ .

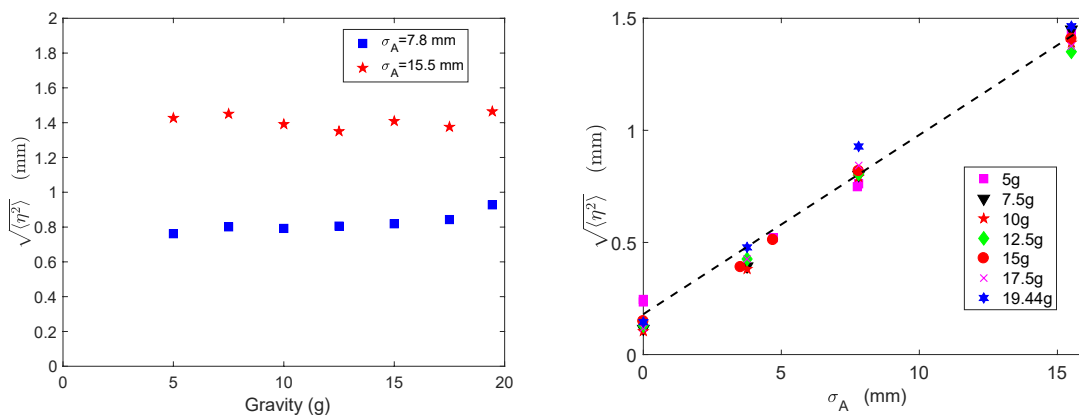


FIG. 4.7 Gauche : Écart type de la hauteur  $\eta$  des ondes en fonction de  $g^*$  pour deux amplitudes de forçage. Droite : Écart type de la hauteur  $\eta$  des ondes en fonction de l'amplitude du forçage pour différentes valeurs de  $g^*$ .

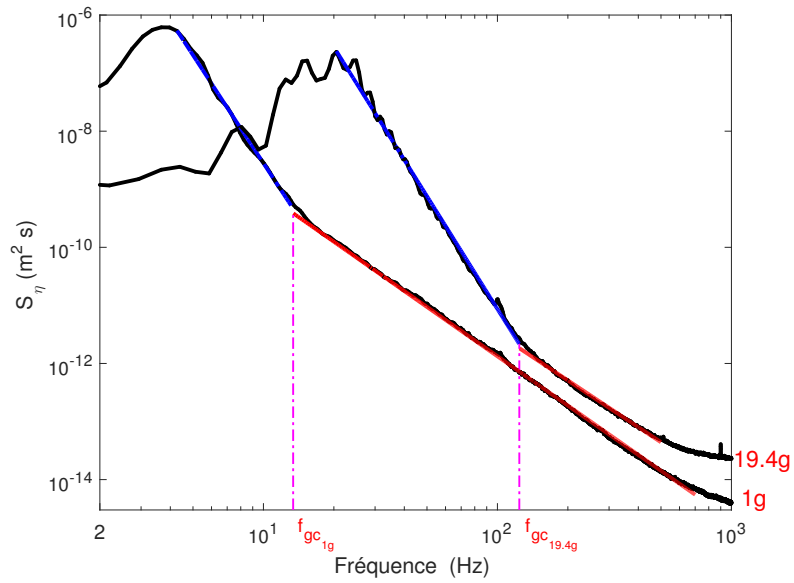


FIG. 4.8 Densité spectrale de puissance  $S_\eta(f)$  de la déformation de la surface pour  $g^* = 1g$  et  $19.4g$  ( $\sigma_A = 15,5$  mm). Les lignes pointillées représentent les meilleurs ajustements en lois de puissance des régimes de gravité (en bleu) et de capillarité (en rouge).

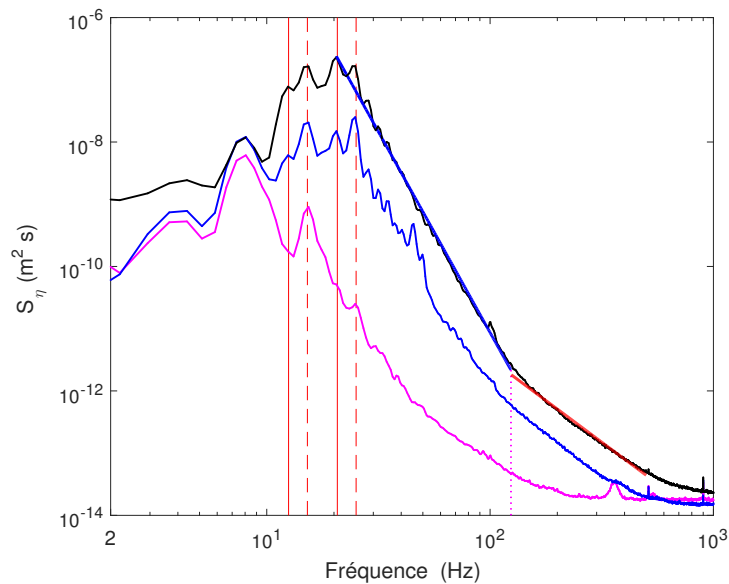


FIG. 4.9 Densité spectrale de puissance  $S_\eta(f)$  de la déformation de la surface libre  $S_\eta$  à différentes amplitudes de forçage  $\sigma_A = 0, 3.7$  et  $15.5$  mm (du bas vers le haut) pour  $g^* = 19.4g$ . Les lignes rouges en trait plein (en pointillés) verticales correspondent aux premiers modes symétriques (antisymétriques) propres du bassin (voir la section 3.1.5)

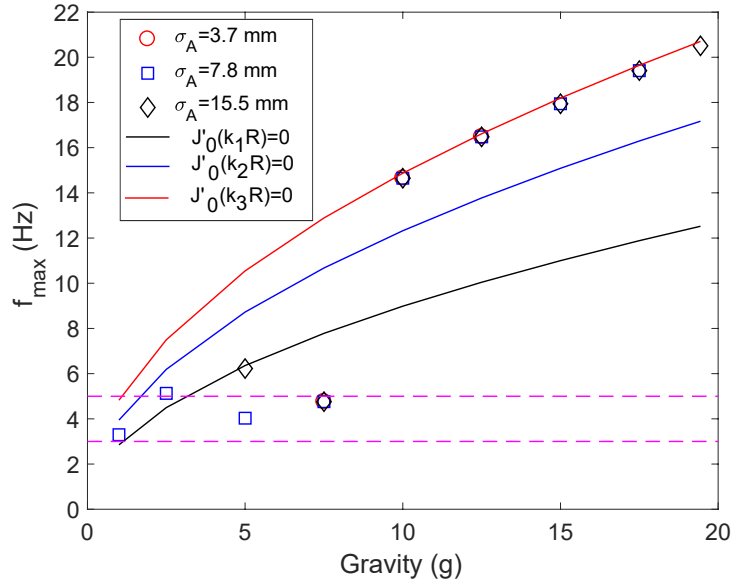


FIG. 4.10 Fréquence maximale du spectre (symboles) en fonction de  $g^*$ . Les pointillés roses délimitent la gamme de forçage, les traits pleins correspondent aux fréquences théoriques des premiers modes propres symétriques (voir légende).

À noter qu'un écart apparaît à fort  $g^*$  et petit forçage, car la non-linéarité est faible et les lois de puissance moins bien définies.

#### 4.3.4 Exposants du spectre

Les exposants des lois de puissance des spectres dans les deux régimes sont montrés sur la Fig. 4.12 en fonction de  $g^*$ . En rouge, l'exposant du régime capillaire  $\alpha_c$  est indépendant de  $g^*$  et sa valeur moyenne  $\langle \alpha_c \rangle \approx -2.6$  (en pointillés rouges) est proche de la valeur théorique  $-17/6 \approx 2.8$  de la théorie de la turbulence faible,  $S_\eta \sim \epsilon^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/6} f^{-17/6}$  (en trait plein rouge, voir l'équation (3.51) [15]). L'exposant du régime de gravité  $\alpha_g$  ne dépend pas non plus de la gravité apparente  $g^*$ , en revanche sa valeur moyenne  $\langle \alpha_g \rangle \approx -6,4$  (en pointillés bleus) diffère significativement de la prédiction théorique  $-4$  de la turbulence faible  $S_\eta \sim \epsilon^{1/3} g f^{-4}$  (en trait plein bleu, voir l'équation (3.50) [94]). Cet écart entre théorie et expériences pour la turbulence d'ondes de gravité avait déjà été observé à  $1g$  dans des bassins de tailles différentes (0.5 - 50 m) [19–23]. Il a été récemment montré que cet écart serait dû à la modulation de structures non-linéaires cohérentes (les ondes liées) [3, 101].

#### 4.3.5 Expériences de déclin

Afin de déterminer les différentes échelles de temps du problème, nous avons réalisé des expériences de déclin. Une fois le régime stationnaire de turbulence atteint le batteur est arrêté au temps  $t = 0$ , la décroissance de la hauteur des vagues est alors enregistrée pendant  $\mathcal{T} = 15$  s. Ces expériences sont répétées automatiquement jusqu'à 330 fois pour améliorer les statistiques, et les résultats sont moyennés. Ces expériences automatiques ont été réalisées

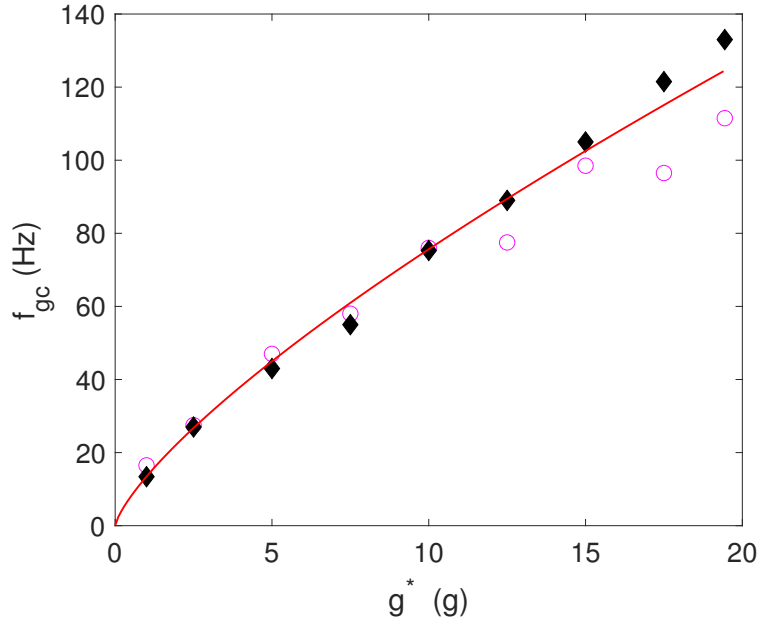


FIG. 4.11  $f_{gc}$  en fonction de  $g^*$ , la valeur théorique de l'Eq. 3.12 est tracée en rouge. Amplitude de vibration :  $\sigma_A = 3.7$  (cercles ouverts) et 15,5 (losanges pleins) mm.

les nuits de notre semaine de mesure. Le signal typique de décroissance du signal pour 15g est montré en Fig. 4.13.

Le déclin temporel du spectre est tracé en Fig. 4.14 pour  $g^* = 15g$ . Au cours du déclin, les spectres sont calculés sur de petits intervalles de temps  $\delta t$ . On observe une décroissance autosimilaire du spectre avec conservation des lois de puissance, sur une durée assez courte pour le régime de gravité, et nettement plus longue pour le régime capillaire. Cette décroissance auto-similaire a été prédite théoriquement [17] et ne dépend pas de  $g^*$  : les valeurs des exposants du régime stationnaire sont conservées au début du régime de déclin (voir la Fig. 4.15).

L'évolution temporelle des différents modes de Fourier est montrée en Fig. 4.16. On observe premièrement une décroissance rapide en loi de puissance du temps pendant les deux premières secondes du déclin. Cette décroissance rapide est due aux effets non-linéaires, mais les lois de puissance ne sont pas, comme attendu théoriquement, en  $t^{-1/2}$  pour le régime de gravité [107] et  $t^{-1}$  pour le régime de capillarité [108]. Cette observation sera discutée plus loin.

Dans un second temps, les modes de Fourier subissent une décroissance lente exponentielle ( $2 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$ ) du fait de la dissipation linéaire visqueuse du mode grande échelle. En effet, chaque mode de Fourier est trouvé décroître avec le même taux, correspondant à la dissipation visqueuse du mode propre principal du bassin  $\omega(k_{d/3})$  (voir les ronds noirs sur la Fig. 4.16). Si l'on compare la décroissance de l'énergie totale des ondes (calculé comme  $\sigma_\eta^2$  sur la Fig. 4.16), on remarque qu'une majeure partie de l'énergie des ondes est contenue dans ce mode du bassin qui joue le rôle d'une source d'énergie qui entretient la cascade turbulente. Ainsi, contrairement à ce qui est attendu pour une décroissance d'ondes linéaires

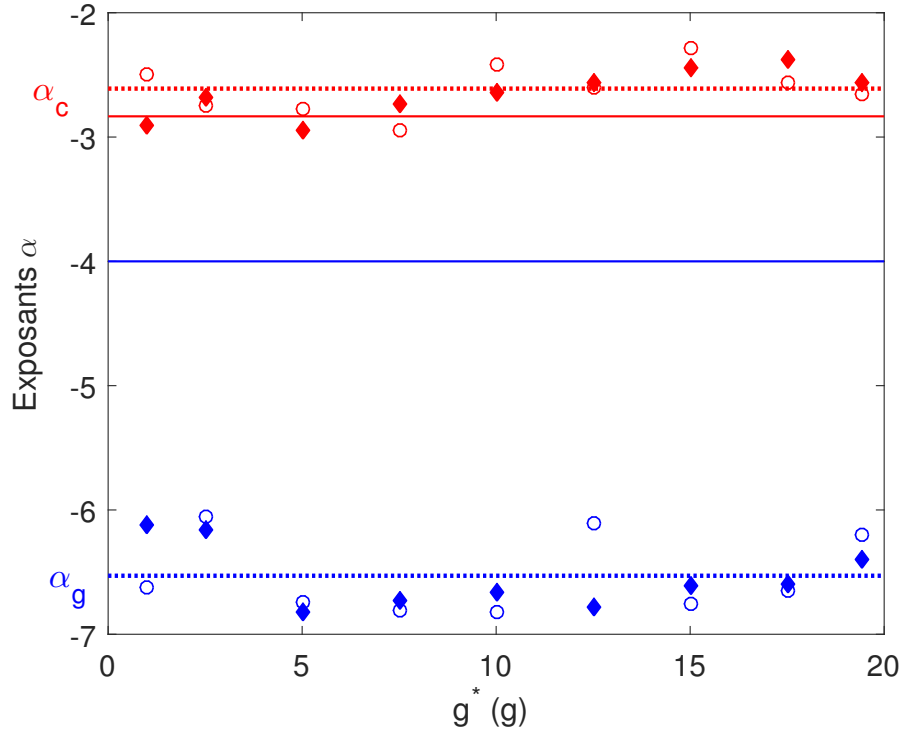


FIG. 4.12 Exposants  $\alpha$  des lois de puissance du spectre des ondes pour le régime capillaire (rouge) et le régime de gravité (bleu) en fonction de  $g^*$ . Les traits pleins correspondent aux prédictions théoriques de la turbulence faible, les pointillés sont les moyennes des valeurs expérimentales.

sans interactions, les hautes fréquences ne sont pas amorties plus rapidement que les basses fréquences par viscosité. Ceci est dû à l'action combinée d'un transfert d'énergie cumulatif du mode grande échelle et du transfert par les interactions non-linéaires. Pour  $t \geq 10$  s, le niveau des ondes a rejoint le niveau de bruit (voir Fig. 4.13) et il n'est plus possible de discerner un déclin.

### 4.3.6 Séparation des échelles de temps

À partir du déclin des modes de Fourier, il est possible de calculer les différentes échelles de temps en jeu dans notre système, et donc de vérifier l'hypothèse de séparation des échelles de temps de la théorie de la turbulence faible  $\tau_{\text{lin}}(f) \ll \tau_{\text{nl}}(f) \ll \tau_{\text{diss}}(f)$  (voir le paragraphe 3.2.1 de la partie théorique). Le temps de propagation linéaire  $\tau_{\text{lin}} = 1/f$  doit être petit devant le temps caractéristique des interactions non-linéaires  $\tau_{\text{nl}}$  qui doit être petit devant le temps nécessaire pour que les ondes se dissipent  $\tau_{\text{diss}}$ .

On peut déduire  $\tau_{\text{diss}}(f)$  de la décroissance exponentielle de la Fig. 4.16. Pour chaque mode de Fourier  $f^*$ , on ajuste la courbe  $S_\eta(f^*, t)\delta f$  entre 2 et 10 s avec une exponentielle décroissante de forme  $Ae^{-t/\tau_{\text{diss}}}$  (traits noirs de la Fig. 4.16). On obtient ainsi  $\tau_{\text{diss}}(f)$ , re-

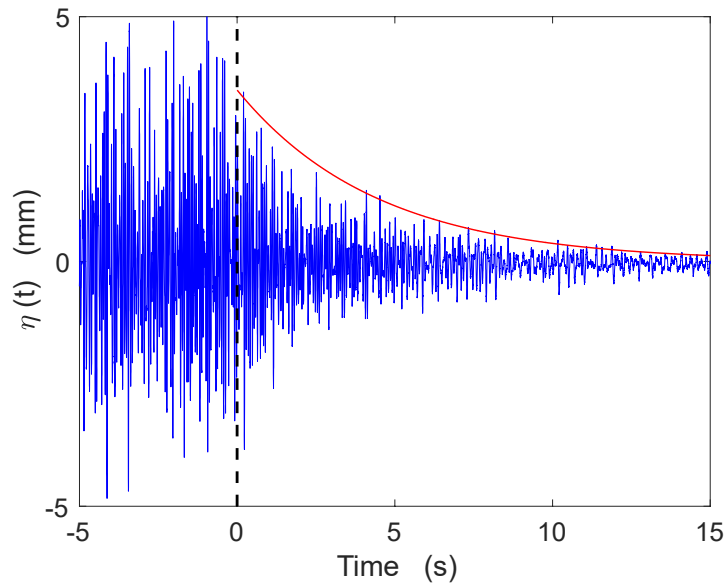


FIG. 4.13 Hauteur des ondes en régime de déclin pour  $g^* = 15g$ . Le batteur est arrêté à  $t = 0$ . La courbe rouge montre une décroissance exponentielle.

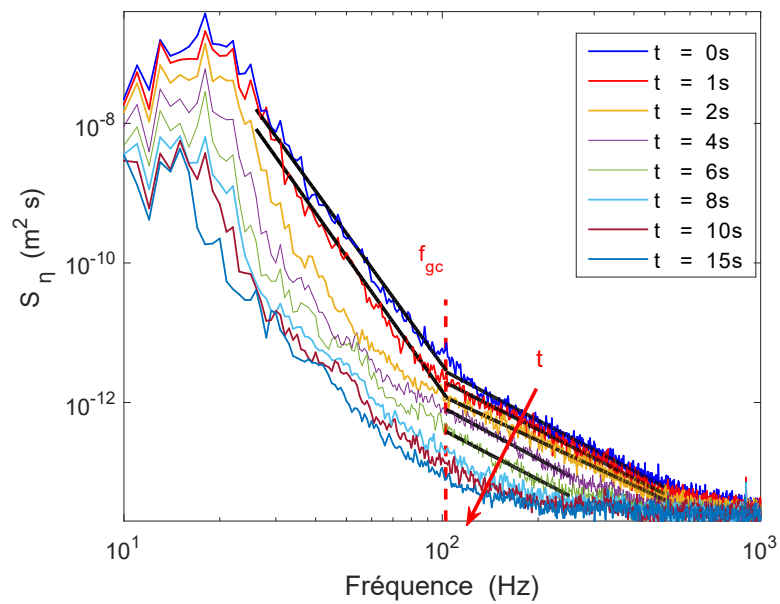


FIG. 4.14 Déclin temporel du spectre pour  $g^* = 15g$ .

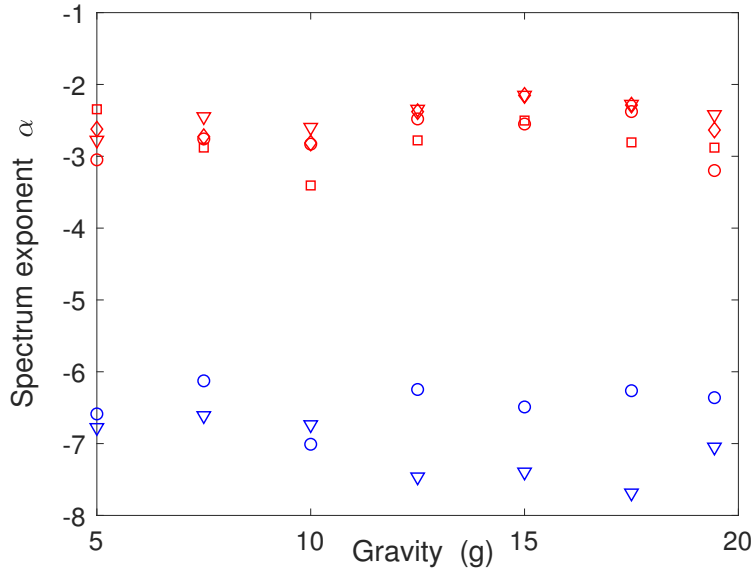


FIG. 4.15 Exposants du spectre des ondes dans le régime capillaire (rouge) et dans le régime de gravité (bleu) en fonction de la gravité au début du déclin pour  $t = (^\circ) 0, (\nabla) 1, (\diamond) 2$  et  $(\square) 4$  s.

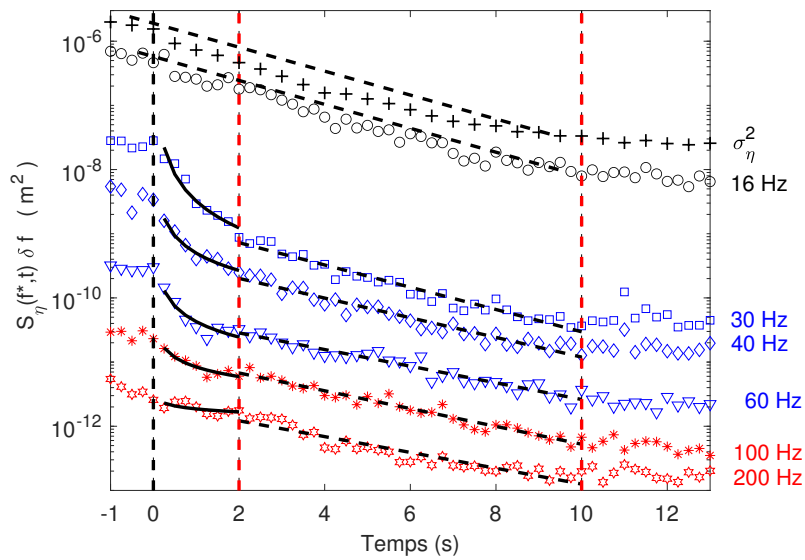


FIG. 4.16 Déclin en semilog de l'énergie des ondes  $\sigma_\eta^2$  (+) et des différents modes de Fourier  $S_\eta(f^*, t)\delta f$  à différentes fréquences  $f^*$  correspondant au mode principal du bassin (ronds noirs), au régime de gravité (en bleu), au régime de capillarité (en rouge).

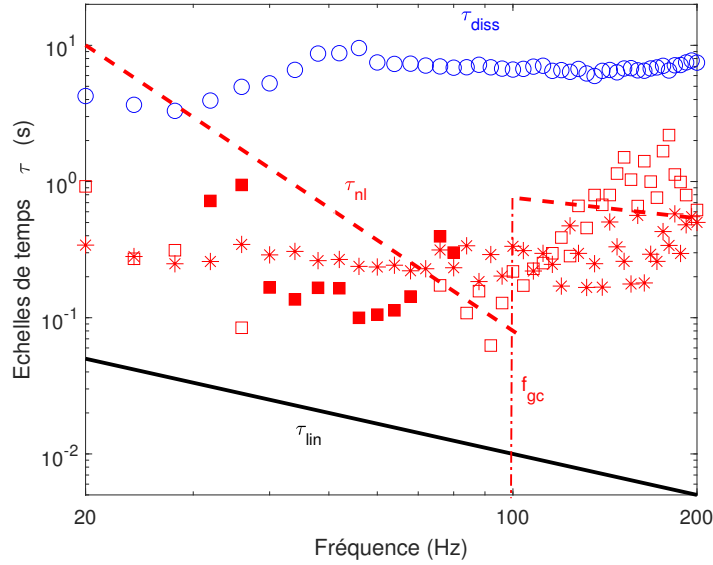


FIG. 4.17 Temps caractéristique en fonction de la fréquence. En noir :  $\tau_{\text{lin}} = 1/f$ . En bleu :  $\tau_{\text{diss}}$ . En rouge :  $\tau_{\text{nl}}$ .

présenté par des ronds bleus sur la Fig. 4.17 pour  $g^* = 15g$ . On remarque que  $\tau_{\text{diss}}$  dépend peu de  $f$ , et reste du même ordre de grandeur que le temps de dissipation par couche limite visqueuse du mode principal du bassin  $\tau_{\text{diss}} = 2\sqrt{2}/\left[k_{D/3}\sqrt{\nu\omega(k_{D/3}, g^*)}\right]$  ( $\approx 6$  s pour  $15g$ ) [77, 81].

Le temps des interactions non-linéaires  $\tau_{\text{nl}}(f)$  peut être lui calculé à partir de la décroissance rapide en loi de puissance des modes de Fourier. On ajuste dans un premier temps, chaque mode  $S_\eta(f^*, t)\delta f$  sur une décade de temps ( $0.2 \leq T \leq 2$  s) selon la loi de puissance  $A(t/\tau_{\text{nl}})^{-\beta}$  (voir Fig. 4.16). On obtient les valeurs de  $\tau_{\text{nl}}(f)$  représentées par des étoiles rouges sur la Fig. 4.17. À  $g^*$  fixé, la séparation d'échelle de temps est bien vérifiée pour tout  $f$  comme montré en Fig. 4.17.

Toutefois les valeurs de  $\beta$  ne correspondent pas aux valeurs attendues théoriquement pour des interactions à trois ondes en régime de capillarité ( $\beta = -1$ ) [108] et pour des interactions à quatre ondes en régime de gravité ( $\beta = -1/2$ ) [107]. Nous allons essayer d'en comprendre les raisons dans le paragraphe suivant.

### 4.3.7 Contribution des interactions à 3 et à 4 ondes

Supposons que l'énergie,  $E_f$ , d'un mode de Fourier décroît en suivant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dE_f}{dt} = -aE_f(t) - bE_f(t)^2 - cE_f(t)^3, \quad (4.3)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des valeurs réelles positives dépendant de  $f$ .



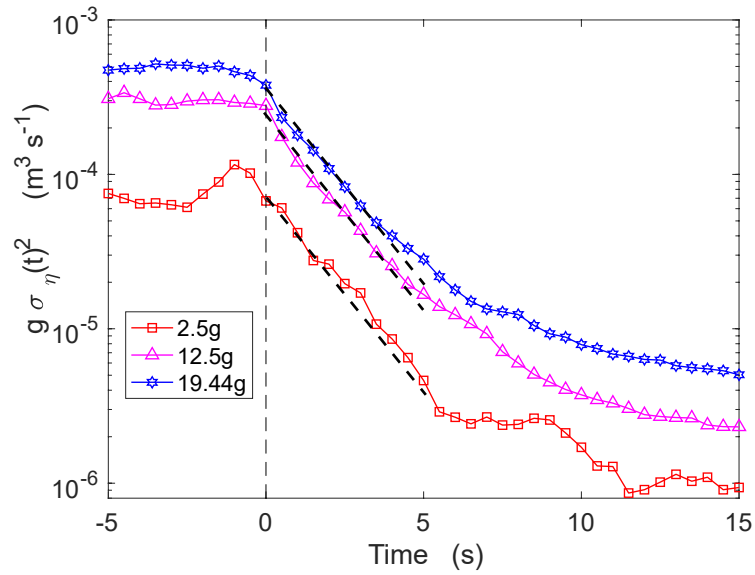
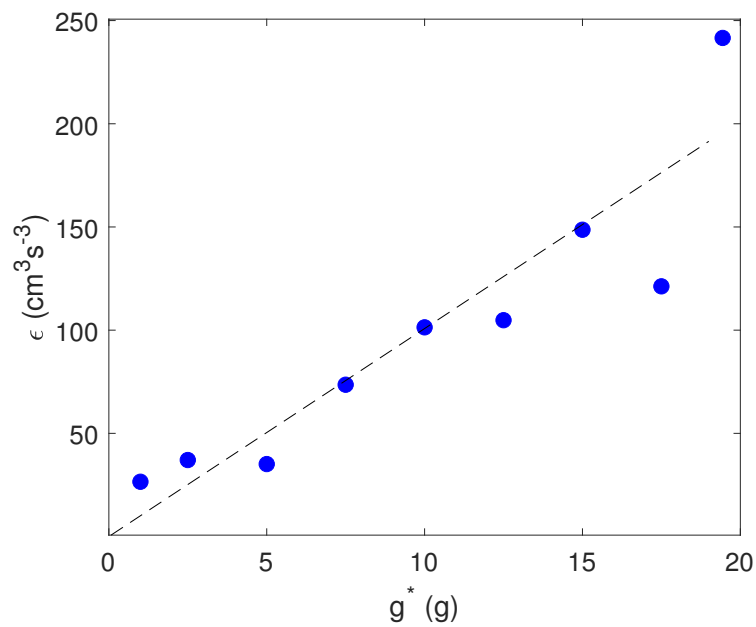
Si l'on prend un unique coefficient non nul ( $a$ ,  $b$  ou  $c$ ), on retrouve les solutions usuelles : l'exponentielle décroissante de la dissipation linéaire  $E_f(t)/E_f(0) = e^{-t/\tau_{\text{diss}}}$  ( $a \neq 0$ ), les lois de puissance en  $t^{-1}$  des interactions non-linéaires à 3 ondes ( $b \neq 0$ ) et en  $t^{-1/2}$  des interactions à 4 ondes ( $c \neq 0$ ), respectivement  $E_f(t)/E_f(0) = (1 + t/\tau_{\text{NL}})^{-1}$  et  $E_f(t)/E_f(0) = (1 + 2t/\tau_{\text{NL}})^{-1/2}$  [22]. Puisqu'aucune des lois de puissance  $t^{-1}$  et  $t^{-1/2}$  n'est obtenu expérimentalement, il est nécessaire de prendre en compte les trois coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  non nuls. On fixe  $a = 1/\tau_{\text{diss}}$ , à la valeur trouvée expérimentalement indépendante de  $f$ . Les valeurs de  $\tau_{\text{NL}}$  correspondant à des interactions à trois ondes ( $1/b$ ) sont représentées par des carrés pleins, celles correspondant à des interactions à 4 ondes ( $1/c$ ) sont représentées par des carrés vides Fig. 4.17. Dans la gamme de fréquence correspondant au régime capillaire ( $f > f_{gc}$ ), les interactions à 4 ondes dominant ( $c \neq 0$ ), alors que les interactions à 3 ondes sont négligeables ( $b \approx 0$ ), contrairement aux prédictions théoriques. En revanche pour le régime de gravité ( $f < f_{gc}$ ), les interactions à 3 ondes dominant ( $b \neq 0$ ) alors que les interactions à 4 ondes sont négligeables ( $c \approx 0$ ). Les interactions à 3 ondes sont impossibles pour des ondes de gravité d'après la théorie de la turbulence faible, mais peuvent théoriquement avoir lieu dans des cuves cylindriques si les modes propres axisymétriques sont importants [109]. En géométrie cylindrique, cet effet de taille finie implique la conservation d'une nouvelle quantité : le pseudo-moment angulaire. Les modes propres axisymétriques du bassin étant importants dans notre étude, ils modifient le mécanisme d'interaction pour les ondes de gravité et probablement aussi celui des ondes de capillarité. La modification des mécanismes d'interactions non-linéaires par les effets de taille finie mériteraient une étude plus approfondie, avec notamment des mesures spatio-temporelles, comme réalisées en géométrie rectangulaire [110].

### 4.3.8 Flux d'énergie des ondes

À partir des mesures de déclin, on peut également évaluer le flux d'énergie  $\epsilon$  de la cascade turbulente [22]. L'énergie des ondes, en ne prenant en compte que les ondes de gravité, a pour expression  $E(t) = g^* \sigma_\eta^2$ . En utilisant le bilan d'énergie sans forçage en négligeant la dissipation on obtient :  $\epsilon = -g^* d\sigma_\eta^2/dt|_{t=0}$ . Sur la Fig. 4.18 est tracé  $g\sigma_\eta^2$  en fonction du temps au début du déclin pour différentes valeurs de  $g^*$ . On peut déduire  $\epsilon$  de la formule ci-dessus et de la pente de la courbe à  $t = 0$ , cette pente ne dépend pas de  $g^*$ . On trouve donc que  $\epsilon$  croît linéairement, comme attendu avec  $g^*$  (voir Fig. 4.19) et qu'il est inférieur de deux ordres de grandeur au flux critique, rendant caduque la turbulence faible  $\epsilon_c \sim \left(\frac{\gamma g^*}{\rho}\right)^{3/4} \approx 800g^{3/4} \text{ cm}^3\text{s}^{-3}$  quel que soit le niveau de gravité.

## 4.4 Conclusion et perspectives

Nous avons pu observer pour la première fois la turbulence d'ondes gravito-capillaires dans un environnement de haute gravité. Ce dispositif est particulièrement adapté à l'étude des ondes de gravité, car leur gamme inertielle et le flux d'énergie critique sont significativement augmentés. Nous avons pu observer dans les deux régimes des spectres en loi de puissance, dont les exposants sont indépendants du niveau de gravité. La fréquence de transition entre ondes capillaires et ondes de gravité suit bien la prédiction théorique et augmente d'une décade lorsque la gravité effective est multipliée par 20. La séparation des échelles de temps requise par la turbulence faible est bien vérifiée expérimentalement à l'aide

FIG. 4.18 Déclin de l'énergie des ondes pour différentes valeurs de  $g^*$ FIG. 4.19 Flux d'énergie des ondes  $\epsilon$  en fonction de  $g^*$

d'expériences non stationnaires. Nous avons également pu mettre en évidence l'importance des modes propres grande échelle du bassin circulaire, qui jouent un rôle important dans la dynamique en modifiant notamment le type d'interactions non-linéaires en jeu.

Il serait intéressant de compléter cette étude avec des mesures spatiales du champ d'ondes que l'on pourrait par exemple effectuer par Diffusion Light Photography (DLP) [111]. Cela nous permettrait de calculer la bicohérence (corrélation normalisée d'ordre 3 de la hauteur des vagues) pour mettre en évidence le rôle des interactions à trois ondes et la tricohérence (corrélation normalisée d'ordre 4 de la hauteur des vagues) pour mettre en évidence le rôle des interactions à quatre ondes [23,112,113]. Il serait également intéressant d'étudier comment les interactions résonnantes entre ondes, briques élémentaires de la turbulence d'ondes, décrites dans [9,10] peuvent être modifiées par le niveau de gravité.

Ce dispositif expérimental paraît également prometteur pour étudier les grandes échelles (les échelles plus grandes que celle du forçage) de la turbulence d'ondes de surface. Une cascade inverse est attendue pour les ondes de gravité. Lors d'une campagne d'expériences dans le grand bassin de l'École Centrale de Nantes, à laquelle j'ai participé, la cascade inverse d'ondes de gravité a été observée pour la première fois [1] avec un bon accord avec la prédiction théorique de la turbulence faible. Le transfert d'action d'ondes vers les grandes échelles (cascade inverse) s'arrête cependant lorsque des crêtes très marquées apparaissent à la surface de l'eau, faisant perdre localement de l'énergie aux ondes [1]. Un état de condensat n'est donc pas atteint (empilement de l'action d'ondes à grande échelle du fait des effets de tailles finie) comme attendu théoriquement. Le fait que la cascade inverse sature plutôt du fait de l'apparition de structures non-linéaires dissipatives pourrait permettre d'interpréter d'autres systèmes impliquant des cascades inverses, comme les ondes de plasma dans le vent solaire [114,115], les ondes dans les fluides quantiques [116] ou les ondes élastiques dans les plaques minces dans lesquelles des structures cohérentes ont été obtenues numériquement limitant la dynamique de la cascade inverse [117]. Il serait donc très intéressant de comparer les résultats de la cascade inverse en grand bassin rectangulaire [1], avec des mesures d'une éventuelle cascade inverse dans un bassin circulaire au sein de la centrifugeuse.

**4.5 Article publié dans *Physical Review Letters***

## Wave Turbulence on the Surface of a Fluid in a High-Gravity Environment

A. Cazaubiel,<sup>1</sup> S. Mawet,<sup>2</sup> A. Darras,<sup>2,3</sup> G. Grosjean,<sup>2</sup> J. J. W. A. van Loon,<sup>4,5</sup> S. Dorbolo,<sup>2</sup> and E. Falcon<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>Université de Paris, Univ Paris Diderot, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75 013 Paris, France<sup>2</sup>CESAM-GRASP, Département de Physique B5a, Université de Liège, FNRS—B-4000 Liège, Belgium<sup>3</sup>Experimental Physics, Saarland University, D-66123 Saarbrücken, Germany<sup>4</sup>Gravity Simulation Laboratory, ESTEC, ESA, 2201 AZ Noordwijk, Netherlands<sup>5</sup>ACTA, VU University, 1081 LA Amsterdam, Netherlands (Received 24 April 2019; revised manuscript received 12 July 2019; published 10 December 2019)

We report on the observation of gravity-capillary wave turbulence on the surface of a fluid in a high-gravity environment. By using a large-diameter centrifuge, the effective gravity acceleration is tuned up to 20 times Earth's gravity. The transition frequency between the gravity and capillary regimes is thus increased up to one decade as predicted theoretically. A frequency power-law wave spectrum is observed in each regime and is found to be independent of the gravity level and of the wave steepness. While the timescale separation required by weak turbulence is well verified experimentally regardless of the gravity level, the nonlinear and dissipation timescales are found to be independent of the scale, as a result of the finite size effects of the system (large-scale container modes) that are not taken currently into account theoretically.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.244501

*Introduction.*—Wave turbulence concerns the study of random nonlinear waves in interaction. Although this phenomenon occurs in various situations (ocean surface waves, plasma waves, hydroelastic or elastic waves, internal waves, or gravitational waves), it is far from being completely understood [1–6]. For instance, most laboratory experiments on gravity wave turbulence are not in agreement with weak turbulence theory [7–11]. Several reasons are given such as the roles of the dissipation, of the strong nonlinear waves, or of the basin finite size that are usually not taken into account theoretically. The goal here is to better study gravity wave turbulence by tuning the natural key parameter seldom modified until now, the gravity field.

In this Letter we describe a unique experimental setup that is designed to build and study hydrodynamic wave turbulence on the surface of a fluid in hypergravity conditions in a laboratory. The relevant parameters of wave turbulence depend strongly on the gravity acceleration  $g^*$  at different levels. First, it appears in the dispersion relation of linear waves  $\omega(k, g^*) = \sqrt{g^*k + (\gamma/\rho)k^3}$  (with  $\omega = 2\pi f$  the wave angular frequency,  $k$  its wave number,  $\rho$  the fluid density, and  $\gamma$  its surface tension). Second, it appears in the transition frequency between the capillary and gravity wave turbulence regimes [7]

$$f_{gc} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\rho}{\gamma} \right)^{1/4} g^{*3/4}. \quad (1)$$

Third, the timescale of nonlinear interactions between gravity waves,  $\tau_{nl}^g \sim \varepsilon^{-2/3} k^{-3/2} g^{*1/2}$ , is assumed slow compared to the linear wave period  $\tau_{lin} = 1/f$ , to require a weak nonlinearity  $\sim \tau_{lin}/\tau_{nl}^g \sim \varepsilon^{2/3} k^1/g^* \ll 1$  ( $\varepsilon$  being the

energy flux) [4]. As nonlinearity increases with the scale  $k$ , breaking of weak turbulence for gravity waves is expected to occur at small scale ( $k_c^g \sim g^*/\varepsilon^{2/3}$ ), and even smaller with higher  $g^*$ . Another relevant theoretical parameter is the critical energy flux  $\varepsilon_c = (\gamma g^*/\rho)^{3/4}$  breaking the weak turbulence at the transition scale [12]. Such dependences of these parameters on  $g^*$  are in favor of the study of wave turbulence in a high-gravity level.

Tuning the gravity level, e.g., from 1 to 20 times Earth's acceleration  $g$ , will thus increase  $f_{gc}$  and  $\varepsilon_c$  up to a factor 10, these two parameters being hardly modified differently since  $(\rho/\gamma)$  is roughly constant for most usual fluids. This is also an astute solution, not reported so far, to expand significantly in laboratory the inertial range of observation of gravity wave turbulence. The latter is usually limited (1 decade at most) at large scales by the forcing ( $\sim$ Hz due to wave maker limitations) and at small scales by the capillary regime near  $f_{gc}$  ( $\simeq$  the ten of Hz for most fluids at  $1g$ ). Tuning the gravity homogeneously is nevertheless far from being simple. Indeed, quickly rotating a liquid in a small-size container generates a high centrifugal acceleration but with a radial gradient of effective gravity leading to a parabolic curvature of the liquid surface. To circumvent this effect, we use a large-scale centrifuge with a free swinging gondola that generates an effective gravity still perpendicular to the liquid surface at rest. Note that tuning to low- $g$  values was performed to observe pure capillary wave turbulence on more than 2 decades with no effect of gravity waves during parabolic flights ( $10^{-2}g$ ) [13] or on-board the International Space Station ( $10^{-5}g$ ) [14].

Here, we report the observation of surface wave turbulence in hypergravity,  $f_{gc}$  being increased up to one decade.

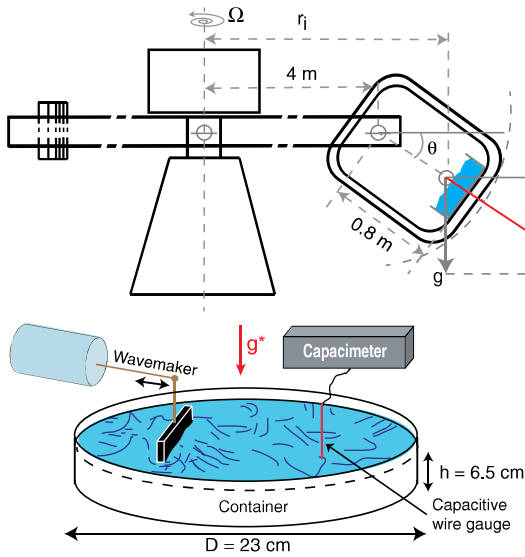


FIG. 1. Experimental setup. Top: schema of the large diameter centrifuge showing the generation of an apparent gravity normal to the fluid surface. Bottom: experimental setup inside the gondola. See movies in Supplemental Material [20].

We also show that finite size effects modify the usual energy transfer mechanism (nonlinear wave interactions); finite size effects having rarely been addressed experimentally [10,15] compared to numerical or theoretical studies [16–19].

*Experimental setup.*—Experiments were performed in the European Space Agency’s Large Diameter Centrifuge (LDC), an 8 m diameter four-arm centrifuge with two free-swinging gondola on each arm (see top of Fig. 1). The gondola containing the experiment is locked at the end of an arm, and a counterweight is placed on the other end. The maximum angular velocity  $\Omega$  of the centrifuge is 67 rpm (i.e., 101 km/h at the arm’s end, 4 m from the axis). Because of centrifugal acceleration, the apparent gravity is  $\vec{g}^* = \vec{g} + \Omega^2 r_i \vec{e}_r$ , with  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup> Earth’s gravitational acceleration,  $r_i$  the radius to the point of interest. The range of effective gravity  $g^* = \sqrt{g^2 + (\Omega^2 r_i)^2}$  is 1 to 20 times Earth’s gravity. The angle  $\theta = \arctan(\Omega^2 r_i / g)$  of the rotating gondola (with respect to the horizontal) decreases strongly from 90° when  $\Omega$  increases and is less than 12° when  $g^* > 5g$ . The experimental setup placed in the gondola bottom consists of a cylindrical container, 23 cm in diameter, filled with distilled water (density  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup> and surface tension  $\gamma = 74$  mN/m) up to a depth  $h = 6.5$  cm to reach a deep water regime ( $\lambda \ll 2\pi h$ ). Surface waves are generated by a rectangular flap wave maker driven by a servomotor moving according to a random noise forcing of narrow bandwidth (3 to 5 Hz) and of rms amplitude,  $\sigma_A < 2.2$  cm. The wave height  $\eta(t)$  is monitored at a given location by a homemade capacitive wire gauge during  $T = 1000$  s with a 10  $\mu$ m sensitivity [7]. Typical wave steepness is less than 0.1. The fluid is filled in the container

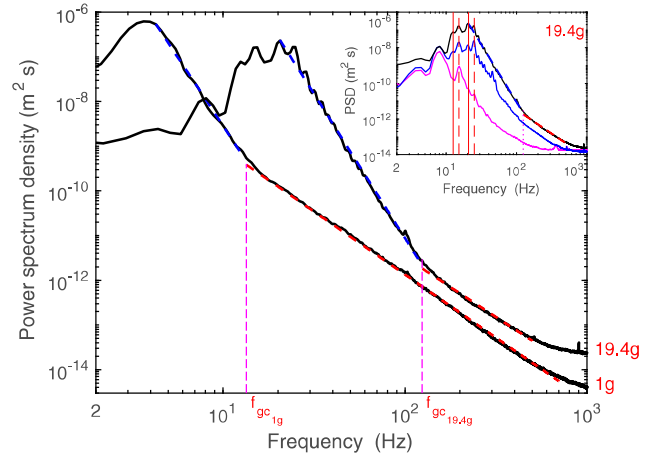


FIG. 2. Power spectrum density (PSD) of the wave height  $\eta(t)$  for 1g and 19.4g. Dashed lines display best power-law fits for (blue) gravity and (red) capillary regimes. Vertical dash-dotted lines correspond to  $f_{gc}(g^*)$  of Eq. (1).  $\sigma_A = 15.5$  mm. Inset: PSD for different vibration amplitudes  $\sigma_A = 0, 3.7$  and 15.5 mm (bottom to top).  $g^* = 19.4g$ . Vertical solid (dashed) lines are the first axisymmetrical  $m = 0$  (nonaxisymmetrical  $m = 1$ ) basin mode solutions of  $J'_m(k_n D/2) = 0$ , with  $J'_m(\cdot)$  the derivative of the  $m$ th order Bessel function of the first kind [21].

once the prescribed acceleration is reached to avoid a possible fluid rotation, as controlled by an on-board camera in the gondola. During stationary rotation but with no wave forcing, the free surface of the fluid remains perfectly parallel to the container bottom, as expected. No Coriolis force effect is observed on the wave field since the wave velocities are much smaller than the centrifuge velocity.

*Wave spectrum.*—For a fixed  $g^*$ , the temporal evolution of the wave height  $\eta(t)$  is erratic and its rms value,  $\sigma_\eta = \sqrt{\langle \eta^2 \rangle_t}$  of few mm, increases linearly with the forcing amplitude  $\sigma_A$  regardless of  $g^*$ . The spectrum of  $\eta(t)$  is shown in Fig. 2 for two different apparent gravities, 1g and close to 20g. At 1g, we observe two frequency power-law regimes corresponding to the gravity and capillary wave turbulence regimes as already reported previously [7]. For a gravity close to 20g, the power-law regimes are still observed and the transition frequency  $f_{gc}$  between both regimes increases significantly of 1 decade as expected (see below). Consequently, the inertial range of the gravity regime has been also extended to reach roughly 1 decade. Nevertheless, note that the maximum of the spectrum occurs at a higher frequency at high- $g$  level. This comes from the gravity dependence of the dispersion relation. Indeed, the forcing frequency bandwidth at 1g corresponds to wavelengths  $\lambda$  less than the container diameter  $D$ , whereas at high  $g^*$  it corresponds to  $\lambda > D$ , the maximum of the spectrum being then related to the first eigenmodes of a cylindrical basin (notably  $\lambda \sim D/3$ ), as shown in the inset of Fig. 2.

*Transition frequency.*—The transition frequency  $f_{gc}$  between gravity and capillary wave turbulence regimes

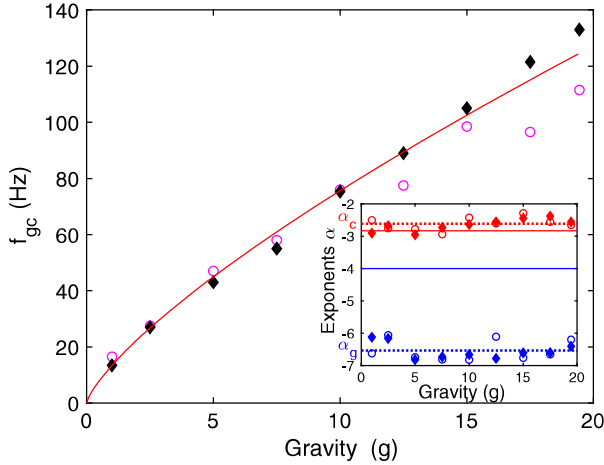


FIG. 3. Transition frequency  $f_{gc}$  between gravity and capillary wave turbulence regimes versus  $g^*$ . Vibration amplitude:  $\sigma_A = 3.7$  (open circles) and  $15.5$  mm (solid diamonds). Solid line is the prediction of Eq. (1). Inset: Frequency power-law exponents  $\alpha$  of the wave spectrum for capillary (red) and gravity (blue) regimes. Dotted lines: mean values  $\langle\alpha_c\rangle_{g^*}$  and  $\langle\alpha_g\rangle_{g^*}$ . Solid lines: weak turbulence predictions (see text).

is inferred from the wave spectrum, and is plotted in Fig. 3 versus  $g^*$  for two forcing amplitudes.  $f_{gc}$  is found to increase strongly with  $g^*$  by 1 decade in very good agreement with the prediction of Eq. (1) with no fitting parameter. The frequency power-law exponents of the spectrum in both regimes are reported in the inset of Fig. 3 as a function of  $g^*$ . They are found to be independent of  $g^*$  and of the wave steepness within the range of parameters. In the capillary regime, the experimental exponent value  $\alpha_c \simeq -2.6$  (red dotted line) is in good agreement with the prediction  $-17/6 \simeq -2.8$  (red solid line) of the weak turbulence spectrum  $S_\eta^c \sim \varepsilon^{1/2}(\gamma/\rho)^{1/6} f^{-17/6}$  [22]. In the gravity regime, one has  $\alpha_g \simeq -6.4$  (blue dotted line) that differs significantly from weak turbulence prediction  $S_\eta^g \sim \varepsilon^{1/3} g f^{-4}$  (blue solid line) [23] as reported earlier at  $1g$  in different basin sizes (0.5–50 m) [7–11]. This departure has been recently shown to be related to the modulation of coherent nonlinear structures (bound waves) [24]. We also compute the probability density functions of  $\eta(t)$ . They are found to be independent of  $g^*$  for the same forcing amplitude, and to be roughly described by a Tayfun distribution (the first nonlinear correction to a Gaussian) as a confirmation of weak nonlinearity of the wave field (see Supplemental Material [20]).

*Decay experiments.*—We now present nonstationary experiments to obtain estimations of the nonlinear and dissipation timescales of wave turbulence, and of the mean energy flux cascading through the scales. Once a stationary wave turbulence is reached, we stop the wave maker at time  $t = 0$ , and the temporal decay of the wave height is recorded during  $\mathcal{T} = 15$  s. The experiment is automatically iterated up to 330 times to improve statistics and results are averaged.

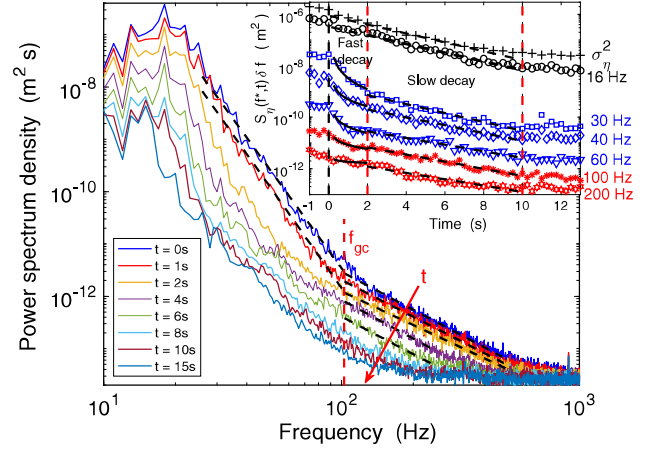


FIG. 4. Temporal decay of the wave spectrum  $S_\eta(f, t)$  for  $15g$ . Inset: semilogy plot of the decay of wave energy  $\sigma_\eta^2$  (+), and of the Fourier modes  $S_\eta(f^*, t)\delta f$  at different frequencies  $f^*$  corresponding either to the main container mode (open circles), the gravity regime (blue symbols), or the capillary regime (red symbols). Dashed vertical lines delimit the fast power-law decay (solid-line fits) and then the slow exponential decay (dashed-line fits).  $\sigma_A = 15.5$  mm.

For  $g^* = 15g$ , the temporal decay of the spectrum is shown in Fig. 4, the spectrum being computed over short-time intervals  $\delta t$ . The power laws are found to be conserved at the very beginning of the decay in the gravity regime and over a much longer duration in the capillary regime, before vanishing in favor of a purely dissipative regime. When iterating this experiment for different  $g^*$ , we found that this self-similar decay in the first moments is independent of the gravity level (see Supplemental Material [20]). This self-similar decay of the wave spectrum has been predicted theoretically [2] and observed at  $1g$  either in the gravity regime [10] or in the capillary regime [25].

The temporal evolution of the amplitude of the Fourier modes inferred from the decaying spectrum is then shown in the inset of Fig. 4. First, a fast time power-law decay is observed ( $t \leq 2$  s) due to nonlinear mechanisms but that differs from  $t^{-1/2}$  (predicted for pure 4-wave interactions) in the gravity regime [26] and from  $t^{-1}$  (for pure 3-wave interactions) in the capillary regime [27] (see discussion below). Then, a slow exponential decay is observed ( $2 \leq t \leq 10$  s) due to a viscous linear damping of a large-scale mode. Indeed, each Fourier mode is found to decay exponentially with the same rate given by the viscous damping of the main container mode  $\omega(k_{D/3})$  (see open circle symbols). When compared to the total wave energy decay [computed from the wave variance decay  $\sigma_\eta^2$  (+ symbols)], most of the energy is contained at this large scale mode and plays the role of an energy source which sustains the turbulent cascade. We emphasize that this dynamics is different from the decay of noninteracting waves where high frequencies are usually damped faster by

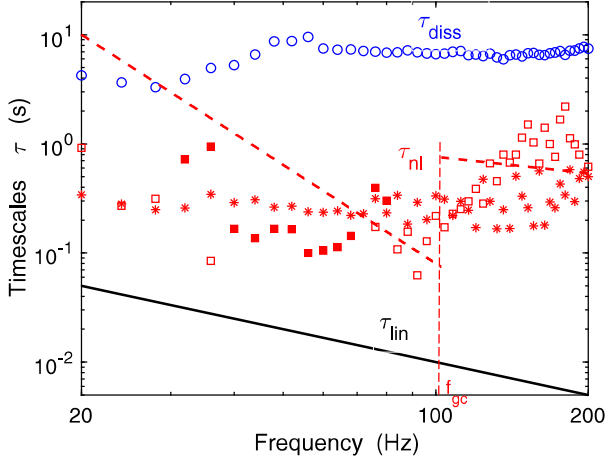


FIG. 5. Wave turbulence timescale separation for  $g^* = 15g$ . Solid line: linear timescale  $\tau_{\text{lin}} = 1/f$ . Nonlinear timescale  $\tau_{\text{nl}}$  estimated from the fast decay power-law fit of Fig. 4 (\*) or from the phenomenological model of Eq. (2)  $1/b$  (solid square) and  $1/c$  (open square). Dashed red lines are predictions of  $\tau_{\text{nl}}$  in the capillary and gravity regimes with constants chosen to  $c_g = c_c = 1$ . Open circle indicates dissipation timescale,  $\tau_{\text{diss}}$ , estimated from the slow decay of Fig. 4.  $\sigma_A = 15.5$  mm.

linear viscosity than low ones. Here, it is due both to cumulative energy transfer from the large-scale mode and to transfer by nonlinear interactions.

*Timescale separation.*—Let us now verify the weak turbulence theory assumption of a timescale separation  $\tau_{\text{lin}}(f) \ll \tau_{\text{nl}}(f) \ll \tau_{\text{diss}}(f)$  between the linear propagation time  $\tau_{\text{lin}} = 1/f$ , the nonlinear interaction time  $\tau_{\text{nl}}$ , and the dissipation time  $\tau_{\text{diss}}$ .  $\tau_{\text{nl}}(f)$  is obtained by a power-law fit of the fast decay on 1 decade in time (0.2 to 2 s) of each Fourier mode, and  $\tau_{\text{diss}}(f)$  by an exponential fit of the slow decay. For a fixed  $g^*$ , the timescale separation is well verified as shown in Fig. 5. More surprisingly,  $\tau_{\text{nl}}$  (\*) and  $\tau_{\text{diss}}$  (open circles) are found to be roughly independent of the scale  $f$ , contrary to weak turbulence predictions in the gravity ( $\tau_{\text{nl}}^g = c_g \varepsilon^{-2/3} g^2 f^{-3}$ ) and capillary [ $\tau_{\text{nl}}^c = c_c \varepsilon^{-1/2} (\rho/\gamma)^{-1/2} f^{-1/2}$ ] regimes (see dashed lines in Fig. 5,  $\varepsilon$  being estimated experimentally as below). This departure is ascribed to the finite size effects of the system. Indeed,  $\tau_{\text{diss}}$  is of the same order of magnitude as the linear viscous dissipation by surface boundary layer of the main container mode  $\tau_{\text{diss}} = 2\sqrt{2}/[k_{D/3}\sqrt{\nu\omega(k_{D/3}, g^*)}]$  [21,25] ( $\approx 6$  s for  $15g$ ), whereas the nonlinear interactions are modified by this container mode (see below). The timescales  $\tau_{\text{diss}}$  and  $\tau_{\text{nl}}$  are also roughly independent of  $g^*$  (see Supplemental Material [20]).

*3- and 4-wave interactions contributions.*—Assume a wave energy decay at the Fourier mode  $f$  as

$$\frac{dE_f(t)}{dt} = -aE_f(t) - bE_f^2(t) - cE_f^3(t) \quad (2)$$

with  $a$ ,  $b$ , and  $c$  positive values depending on  $f$ . The first term on the right-hand side corresponds to a usual viscous linear dissipation, the second and third terms modeling the nonlinear transfer from 3- and 4-wave interactions, respectively. Considering only one nonzero coefficient,  $a$ ,  $b$ , or  $c$ , leads to usual decaying solutions:  $E_f(t)/E_f(0) = \exp[-t/\tau_{\text{diss}}]$ ,  $[1 + t/\tau_{\text{nl}}^c(f)]^{-1}$  and  $[1 + 2t/\tau_{\text{nl}}^g(f)]^{-1/2}$ , for only dissipation ( $a \neq 0$ ), only 3-wave interactions ( $b \neq 0$ ), and only 4-wave interactions ( $c \neq 0$ ), respectively [10]. Since no power law in  $t^{-1/2}$  or  $t^{-1}$  is found experimentally in the fast decay, we have to take into account in Eq. (2) the three nonzero coefficients at the same time. Fixing the viscous dissipation time  $1/a$ , independently of  $f$  as found experimentally, and fitting each experimental Fourier mode by time-power laws gives the nonlinear timescales for 3-wave interactions,  $1/b$  (solid squares), and for 4-wave ones,  $1/c$  (open squares), versus  $f$  as shown in Fig. 5. In the capillary regime, we find that 4-wave interactions take place ( $c \neq 0$ ) and 3-wave interactions are negligible ( $b \approx 0$ ), contrary to weak turbulence predictions. In the gravity regime, we find that 3-wave interactions occur ( $c \approx 0$ ,  $b \neq 0$ ). Although forbidden by weak turbulence theory for plane gravity waves, 3-wave interactions are authorized theoretically in cylindrical containers where axisymmetric eigenmodes are important [28]. Indeed, axisymmetric modes imply a new conserved quantity (angular pseudomomentum) [28]. The large-scale axisymmetric modes being important in our study, they thus modify the type of interaction mechanism for gravity waves, and probably change the one for capillary waves. Such finite size effects on the wave interactions would deserve further studies with more accurate space-time measurements.

*Energy flux.*—One can finally estimate the mean cascading energy flux  $\varepsilon$  from the wave energy decay [10]. Indeed, the wave energy (neglecting capillary waves) is  $E(t) = g^* \sigma_\eta^2$ , and the power budget (assuming no forcing and dissipation in the inertial range) then reads  $dE(t)/dt = -\varepsilon$ , quantities being per unit surface and fluid density. Combining the two expressions then leads to  $\varepsilon = -g^* d\sigma_\eta^2(t)/dt|_{t=0}$ . Thus, experimentally from the tangent at  $t = 0$ ,  $\varepsilon$  is found to increase linearly with the apparent gravity  $g^*$  as expected, and is found to be 2 orders of magnitude smaller than the critical flux breaking weak turbulence,  $(\gamma g^*/\rho)^{3/4} \approx 800 g^{3/4} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-3}$ , regardless of the value of  $g^*$  (see Supplemental Material [20]).

*Conclusion.*—In this Letter, we reported the first observation of gravity-capillary wave turbulence in a high-gravity environment. This specific setup favors the study of gravity wave turbulence in the laboratory by extending significantly its inertial range and the critical energy flux. We observe power-law wave spectra in both regimes independent of the gravity level. The timescale separation required by weak turbulence is verified experimentally by means of nonstationary experiments. We also showed that large-scale



container modes play an important role by notably modifying the type of nonlinear interactions. Tuning the gravity field appears to be a promising solution to study in laboratory the large-scale properties (i.e., larger than the forcing scale) of gravity wave turbulence. More generally, identifying the different scenarios (inverse cascade, statistical equilibrium, condensate) governing large-scale properties of turbulent flows is of primary interest [29] in wave turbulence [30–32] and 3D turbulence [33–35]. Our approach could be applied in different fields involving wave turbulence with finite size effects such as Rossby inertial waves (limited by the finite diameter of the planets), long internal waves in the oceans, or plasma waves in tokamaks.

We thank the European Space Agency (ESA) for the access to the LDC facility through the proposal CORA-GBF-2018. We thank M. Mélard for his technical help on the experimental setup. SD and AD were funded by FNRS. Part of this was supported by FRS-FNRS PPOPOFF C-15/17 (ULg), FWB, and “*Primes de soutien aux promoteurs de doctorat*” (University of Liège), the French National Research Agency (ANR DYSTURB Project No. ANR-17-CE30-0004), and a grant of the Simons Foundation/MPS No. 651463 (Wave Turbulence).

\*eric.falcon@univ-paris-diderot.fr

- [1] E. Falcon, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **13**, 819 (2010).
- [2] V. E. Zakharov, V. S. L’vov, and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence* (Springer, Berlin, 1992).
- [3] S. Nazarenko, *Wave Turbulence* (Springer, Berlin, 2011).
- [4] A. C. Newell and B. Rumpf, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **43**, 59 (2011).
- [5] *Advances in Wave Turbulence*, edited by V. Shrira and S. Nazarenko (World Scientific, Singapore, 2013), Vol. 83.
- [6] E. Falcon, Wave turbulence: A set of stochastic nonlinear waves in interaction, in *Proceedings of the 5th ICAND 2018*, edited by V. In, P. Longhini, and A. Palacios (Springer Nature, New York, 2019), Chap. 25.
- [7] E. Falcon, C. Laroche, and S. Fauve, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 094503 (2007).
- [8] P. Denissenko, S. Lukaschuk, and S. Nazarenko, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 014501 (2007).
- [9] P. Cobelli, A. Przadka, P. Petitjeans, G. Lagubeau, V. Pagneux, and A. Maurel, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 214503 (2011).
- [10] L. Deike, B. Miquel, P. Gutiérrez, T. Jamin, B. Semin, M. Berhanu, E. Falcon, and F. Bonnefoy, *J. Fluid Mech.* **781**, 196 (2015).
- [11] Q. Aubourg, A. Campagne, C. Peureux, F. Ardhuin, J. Sommeria, S. Viboud, and N. Mordant, *Phys. Rev. Fluids* **2**, 114802 (2017).
- [12] A. C. Newell and V. E. Zakharov, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1149 (1992).
- [13] C. Falcón, E. Falcon, U. Bortolozzo, and S. Fauve, *Europhys. Lett.* **86**, 14002 (2009).
- [14] M. Berhanu, E. Falcon, G. Michel, C. Gissinger, and S. Fauve, *Europhys. Lett.* (to be published).
- [15] R. Hassaini and N. Mordant, *Phys. Rev. Fluids* **3**, 094805 (2018).
- [16] V. E. Zakharov, A. O. Korotkevich, A. N. Pushkarev, and A. I. Dyachenko, *JETP Lett.* **82**, 487 (2005).
- [17] S. Nazarenko, *J. Stat. Mech.* (2006) L02002.
- [18] V. S. L’vov and S. Nazarenko, *Phys. Rev. E* **82**, 056322 (2010).
- [19] Y. Pan and D. K. P. Yue, *J. Fluid Mech.* **816**, R1 (2017).
- [20] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.123.244501> for movies and further data analyses.
- [21] H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed. (Dover University Press, New York, 1916).
- [22] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko, *J. Appl. Mechanics Tech. Phys.* **8**, 37 (1967).
- [23] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko, *Sov. Phys. Dokl.* **11**, 881 (1967); V. E. Zakharov and M. M. Zaslavsky, *Izv. Acad. Sci., USSR, Atmos. Oceanic Phys. (Engl. Transl.)* **18**, 747 (1982).
- [24] G. Michel, B. Semin, A. Cazaubiel, F. Haudin, T. Humbert, S. Lepot, F. Bonnefoy, M. Berhanu, and E. Falcon, *Phys. Rev. Fluids* **3**, 054801 (2018).
- [25] L. Deike, M. Berhanu, and E. Falcon, *Phys. Rev. E* **85**, 066311 (2012).
- [26] R. Bedard, S. Lukaschuk, and S. Nazarenko, *JETP Lett.* **97**, 459 (2013).
- [27] G. E. Falkovich, I. Y. Shapiro, and L. Shtilman, *Europhys. Lett.* **29**, 1 (1995).
- [28] G. Michel, *Phys. Rev. Fluids* **4**, 012801(R) (2019).
- [29] A. Alexakis and L. Biferale, *Phys. Rep.* **767–769**, 1 (2018).
- [30] S. Y. Annenkov and V. I. Shrira, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 204501 (2006); A. O. Korotkevich, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 074504 (2008).
- [31] L. Deike, C. Laroche, and E. Falcon, *Europhys. Lett.* **96**, 34004 (2011).
- [32] G. Michel, F. Pétrélis, and S. Fauve, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 144502 (2017).
- [33] H. Xia, D. Byrne, G. Falkovich, and M. Shats, *Nat. Phys.* **7**, 321 (2011).
- [34] V. Dallas, S. Fauve, and A. Alexakis, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 204501 (2015).
- [35] E. Falcon, J.-C. Bacri, and C. Laroche, *Phys. Rev. Fluids* **2**, 102601(R) (2017).

# Supplemental Material

## “Hypergravity Wave Turbulence”

A. Cazaubiel,<sup>1</sup> S. Mawet,<sup>2</sup> A. Darras,<sup>2,3</sup> G. Grosjean,<sup>2</sup> J. J. W. A. van Loon,<sup>4,5</sup> S. Dorbolo,<sup>2</sup> and E. Falcon<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Université de Paris, Univ Paris Diderot, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75 013 Paris, France*  
<sup>2</sup>*GRASP, Département de Physique B5a, Université de Liège, FNRS - B-4000 Liège, Belgium*  
<sup>3</sup>*Experimental Physics, Saarland University, D-66123 Saarbrücken, Germany*  
<sup>4</sup>*Gravity Simulation Laboratory, ESTEC, ESA, Noordwijk, The Netherlands*  
<sup>5</sup>*ACTA, VU University, Amsterdam, The Netherlands*

In this Supplemental Material, we present movies (§1) and additional data analyses related to the observation of gravity-capillary wave turbulence on the surface of a fluid in a hyper-gravity environment: Wave spectrum and wave distribution (§2), non-stationary wave turbulence (§3), timescale separation (§4), and mean energy flux (§5). Notations as in the aforementioned paper.

### 1. MOVIES

- LDC.mp4 (90s - 14.5Mo): ESA Large Diameter Centrifuge (LDC) accelerating from 1g to 18g. The angle of the swinging gondola in flight with horizontal decreases rapidly from 90° to 3°.
- 7.5gLow.mp4 (32s - 5 Mo): Running experiment inside the gondola for an apparent gravity of 7.5g.

### 2. WAVE SPECTRUM AND WAVE DISTRIBUTION

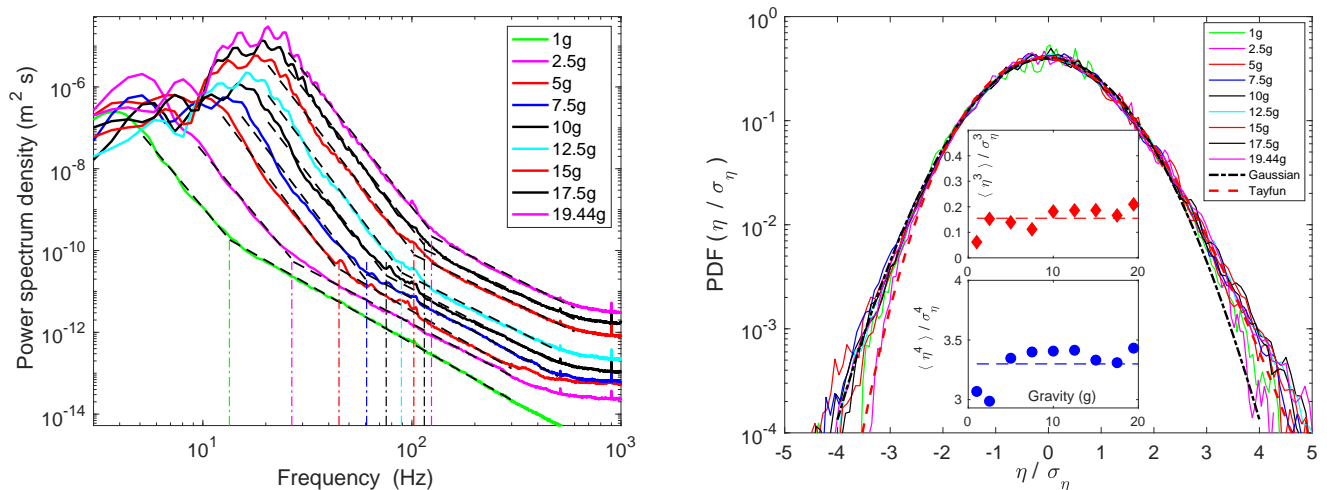


FIG. 1: **(Left)** Power spectrum density (PSD) of wave height  $\eta(t)$  for gravity levels  $g^*$  ranging from 1g to 19.4g. Curves have been shifted vertically for clarity. Dashed lines display best power-law fits for gravity and capillary wave turbulence regimes. Same forcing amplitude  $\sigma_A = 15.5$  mm. Vertical dash-dotted lines correspond to the transition frequencies  $f_{gc}(g^*)$  between the two regimes.  $f_{gc}$  is found to strongly increase with  $g^*$  by 1 decade, as expected by Eq. (1) of the main manuscript.

**(Right)** Probability distribution functions (PDF) of normalized wave height  $\eta(t)/\sigma_\eta$  for different  $g^*$  and for  $\sigma_A = 15.5$  mm.  $\sigma_\eta \equiv \sqrt{\langle \eta(t)^2 \rangle_t}$  is the rms value of  $\eta(t)$ . Black dash-dotted line displays a Gaussian of zero mean and unit standard deviation. Red dashed line shows a Tayfun distribution for a wave steepness of 0.08. Bottom inset: Flatness  $F = \langle \eta^4 \rangle / \langle \eta^2 \rangle^2$  vs.  $g^*$ . Top inset: Skewness  $S = \langle \eta^3 \rangle / \langle \eta^2 \rangle^{3/2}$  vs.  $g^*$ . A weak asymmetry  $\langle S \rangle_{g^*} = 0.16$  (--- in top inset) and a weak Kurtosis  $\langle F \rangle_{g^*} = 3.3$  (--- in bottom inset), are observed as expected for a weakly nonlinear wave field. Let us remind that normal distribution would lead to  $S = 0$  and  $F = 3$ .

### 3. DECAY OF WAVE TURBULENCE

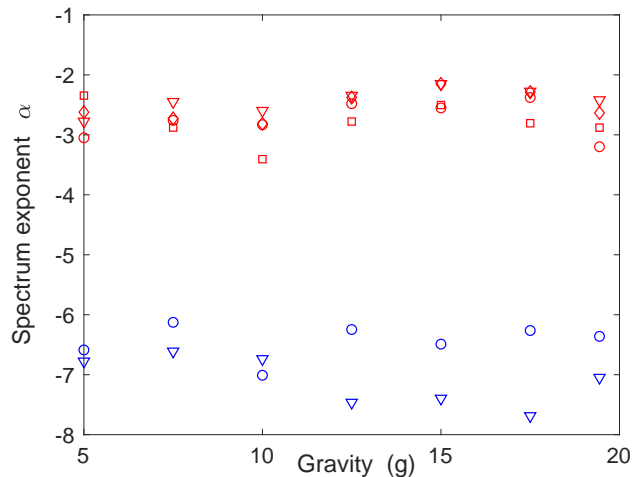


FIG. 2: Frequency power-law exponents  $\alpha$  of the wave spectrum of the Fig. 4 of the main manuscript for capillary (red) and gravity (blue) wave turbulence regimes, during the beginning of the decay:  $t = (\circ) 0$ ,  $(\nabla) 1$ ,  $(\diamond) 2$  and  $(\square) 4$  s.

### 4. WAVE TURBULENCE TIMESCALE SEPARATION

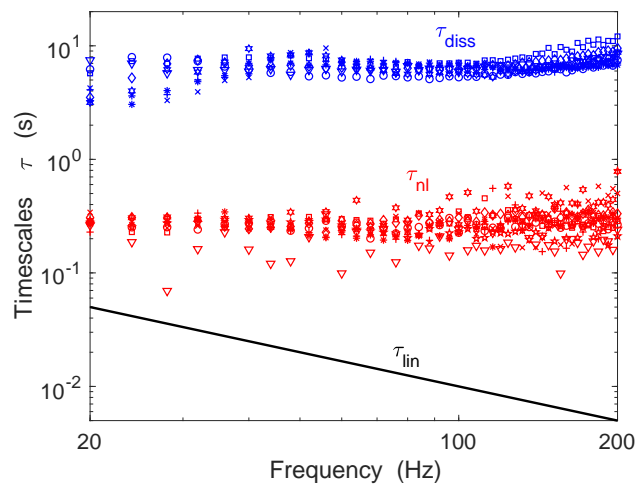


FIG. 3: Wave turbulence timescale separation for different gravity levels  $g^* = (\circ) 1g$ ,  $(\nabla) 2.5g$ ,  $(\square) 5g$ ,  $(\diamond) 7.5g$ , (hexagram)  $10g$ ,  $(*) 12.5g$ ,  $(+)$   $15g$ ,  $(\times)$   $17.5g$ ,  $(\star) 19.4g$ . (Black solid line) Linear propagation timescale  $\tau_{\text{lin}} = 1/f$ . (Red symbols) Nonlinear interaction timescale  $\tau_{\text{nl}}$  estimated from the fast decay. (Blue symbols) Dissipation timescale,  $\tau_{\text{diss}}$ , estimated from the slow decay. Same forcing amplitude  $\sigma_A = 15.5$  mm.

## 5. MEAN ENERGY FLUX

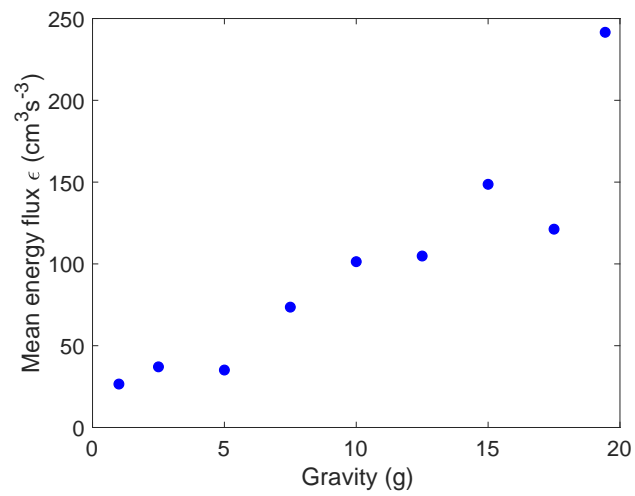


FIG. 4: Mean cascading energy flux  $\epsilon$ , estimated experimentally from the wave energy decay, as a function of the apparent gravity  $g^*$ . Same forcing amplitude  $\sigma_A = 15.5$  mm.  $\epsilon$  is found to increase linearly with  $g^*$ , and to be 2 orders of magnitude smaller than the critical flux breaking weak turbulence,  $(\gamma g^* / \rho)^{3/4} \simeq 800 g^{*3/4} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-3}$ , regardless of the value of  $g^*$ .



## Troisième partie

# Turbulence intégrable et solitons





## 5 – De la turbulence d’ondes à la turbulence intégrable

Nous avons défini dans la partie précédente la notion de turbulence d’ondes qui s’applique quand un grand nombre d’ondes isotropes, aléatoires et non-linéaires sont en interactions résonnantes et transfèrent de l’énergie d’une échelle de forçage vers une échelle de dissipation. La théorie de la turbulence faible, développée dans les années 1960 [15, 118], donne une équation cinétique qui permet d’obtenir des prédictions analytiques pour le spectre des ondes en régime stationnaire (voir chapitre 3). Ces prédictions ont été appliquées à de nombreux domaines de la physique impliquant des ondes [17, 18], des ondes gravitationnelles [119] aux ondes inertielles [120].

Lorsque la propagation des ondes a lieu dans une direction privilégiée (i.e. dans une géométrie quasi-unidimensionnelle), l’ordre dominant des interactions résonnantes peut être modifié (par exemple, pour les ondes de gravité bidirectionnelles les interactions à 5 ondes dominant [121]), ou alors les interactions résonnantes deviennent impossibles mais un transfert d’énergie entre échelles subsiste du fait de l’élargissement non-linéaire de la relation de dispersion (interactions quasi-résonantes). Des simulations numériques directes ont récemment montré l’existence de turbulence d’ondes capillaires colinéaires (i.e. quasi-1D) où les interactions quasi-résonantes à 4 ondes dominant [122].

Lorsque le champ d’ondes est unidirectionnel et que la bande spectrale des ondes est étroite, les interactions résonnantes entre ondes sont impossibles. Pour des ondes de faible amplitude, l’enveloppe des ondes obéit à une équation intégrable : l’équation de Schrödinger non-linéaire. Cette équation est bien connue, dans le cadre de la propagation d’une condition initiale déterministe : par exemple une onde plane qui se propage est instable vis à vis d’une perturbation lentement modulée, c’est ce qu’on appelle l’instabilité modulationnelle qui a été mise en évidence par Benjamin et Feir en 1967 [123]. Elle possède aussi des solutions localisées spatialement (notamment les solitons enveloppes et les solitons noirs [124]) et des solutions localisées à la fois en espace et en temps (par exemple le soliton Peregrine [125], le breather Kuznetsov-Ma [126, 127], ou le breather Akhmediev [128, 129] observées expérimentalement [130, 131]). La dynamique d’un ensemble d’ondes stochastiques régi par cette équation a été beaucoup moins abordée. En effet, les paquets d’ondes aléatoires régis par cette équation peuvent atteindre un état stationnaire où des structures cohérentes émergent du fond d’ondes stochastique et où aucun flux de quantité conservée ne cascade à travers les échelles [24, 132]. Cet état est appelé turbulence intégrable. Comme la turbulence d’ondes, la turbulence intégrable peut être étudiée dans de nombreux domaines de la physique des ondes de plasma [25] aux ondes optiques [26–28].



## Dérivation de l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLSE)

Ce paragraphe s'appuie sur un développement effectué dans le livre de Gregory Falkovitch [133] qui part de l'équation du Hamiltonien (3.36) pour des ondes non-linéaires en interaction et la simplifie dans le cas où les interactions résonnantes sont impossibles.

Considérons un paquet d'ondes quasi-monochromatiques faiblement non-linéaires se propageant dans une seule direction. Les nombres d'ondes  $\mathbf{k}$  se trouvent donc dans une bande étroite  $\Delta k$  autour d'un mode principal  $k_0$ , ce qui rend impossible les interactions résonnantes entre ondes. Ainsi de nombreux termes s'annulent dans l'équation (3.36) et on obtient :

$$i \frac{\partial a_k}{\partial t} = \omega a_k + \varepsilon^2 \int W_{k,k_1,k_2,k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \delta(k_2 + k_3 - k_1 - k) dk_1 k_2 k_3, \quad (5.1)$$

$a_{\mathbf{k}}$  sont les variables canoniques associées aux amplitudes complexes des ondes dans l'espace de Fourier et  $W_{k,k_1,k_2,k_3}$  est le coefficient d'interaction à 4 ondes.

On décompose le nombre d'onde  $k = k_0 + q$ , avec  $|q| \ll k_0$ , et on développe la relation de dispersion :

$$\omega(k) = \omega(k_0) + q \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} + \frac{1}{2} q^2 \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0}. \quad (5.2)$$

Soit  $A_q$  l'enveloppe temporelle de  $a_k$  :  $a_k(t) = A_q(t) e^{-i\omega_0 t}$ . Si on prend à la fois la limite  $k \rightarrow k_0$  et qu'on suppose la non linéarité petite dans l'équation (3.36), on peut prendre le coefficient d'interaction  $W_{k,k_1,k_2,k_3}$  égal à sa valeur en  $k_0$  [133], qu'on notera  $W$ . L'équation du Hamilton (5.1) devient alors :

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - q \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} - \frac{1}{2} q^2 \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0} \right] A_q = W \int A_1^* A_2 A_3 \delta(q + q_1 - q_2 - q_3) dq_1 dq_2 dq_3 \quad (5.3)$$

L'enveloppe réelle  $A$  suit alors l'équation de Schrödinger non-linéaire [118, 134] :

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial t} + c_g \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) - P \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - Q |A|^2 A = 0, \quad (5.4)$$

où  $c_g = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0}$  est la vitesse de groupe des ondes,  $P = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0}$ , le paramètre dispersif et  $Q = W$ , le paramètre non-linéaire. La valeur explicite de  $Q$  est trouvée directement lors de la dérivation classique de NLSE [124, 135] :  $Q = - \left. \frac{\partial \omega}{\partial |A|^2} \right|_{A_0=0}$ . Dans le cas des ondes de gravité en eau profonde, on a  $c_g = \omega_0 / (2k_0)$ ,  $P = -\omega_0 / (8k_0^2)$  et  $Q = -\omega_0 k_0^2 / 2$ .

L'équation de Schrödinger non-linéaire est intégrable et peut être résolue par transformée de diffusion inverse (« Inverse Scattering Transform » ou IST) [134]. Lorsqu'un ensemble d'ondes aléatoires de bande étroite est décrit par NLSE, sa dynamique peut atteindre un état stationnaire, sans transfert d'énergie à travers les échelles, qui est alors appelé turbulence intégrable [24, 132].

# 6 – Coexistence de solitons et d'événements extrêmes pour des ondes de surface en eau profonde

Le sujet de ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans *Physical Review Fluids*. Pour éviter les redondances, nous introduisons seulement le contexte et les principaux résultats obtenus. Plus de détails pourront être consultés en section 6.5.

## 6.1 Contexte

Comme indiqué dans le chapitre précédent, la théorie de la turbulence intégrable combine une approche statistique avec la propriété d'intégrabilité d'une équation ayant des solutions solitoniques (l'équation de Schrödinger non-linéaire, l'équation de Korteweg-de Vries) [24, 132]. Même sans terme de dissipation ou de forçage dans ces équations, des conditions initiales aléatoires ne conduisent pas généralement à l'équilibre thermique [136]. À la place, un grand nombre de structures cohérentes non-linéaires (telles que des solitons) émergent à partir des ondes incohérentes et cet état statistique est appelé turbulence intégrable.

Dans le contexte des ondes à la surface d'une fluide, l'équation de Korteweg-de Vries (KdVE) décrit les longues ondes unidirectionnelles en eau peu profonde, alors que l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLSE) décrit des paquets d'ondes non-linéaires unidirectionnelles à la surface d'un fluide en eau profonde. Dans le régime d'eau peu profonde, en plus des confirmations numériques [137], des vérifications expérimentales directes de la turbulence intégrable ont été obtenues récemment dans des expériences de terrain [138, 139] et de laboratoire [29, 140]. Pour des ondes de gravité aléatoires en eau profonde, une statistique non-gaussienne de la hauteur des vagues est alors prédite à partir de l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLSE) avec des conditions initiales aléatoires [141] et a été observée expérimentalement [142–146] et retrouvée par des simulations numériques (DNS) d'ondes aléatoires [147, 148]. Des mesures temporelles *in situ* dans l'océan ont été comparées aux prédictions de NLSE pour chercher la présence d'éventuels solitons qui pouvaient être liés à l'apparition de vagues d'amplitude extrême [131]. Ces vagues extrêmes qui peuvent apparaître à partir d'un fond d'ondes aléatoires sont appelées vagues scélérates, et ont beaucoup été examinées [131, 142, 143, 149, 150]. Bien que toutes ces études expérimentales n'aient pas été explicitement comparées aux prédictions de la turbulence intégrable, la statistique des ondes aléatoires unidirectionnelles est relativement bien décrite par l'équation de Schrödinger non-linéaire. Cependant, les structures cohérentes du régime de turbulence intégrable

n'ont jamais été identifiées dans des signaux expérimentaux et les écarts aux prédictions théoriques au sein de systèmes réels (avec notamment présence de fortes non linéarités et de dissipation) ont été très peu examinées. Nous étudions ici expérimentalement la dynamique et la statistique d'une onde porteuse modulée aléatoirement en phase et en amplitude se propageant unidirectionnellement en eau profonde pour comparer avec les prédictions de la turbulence intégrable dans le cadre de l'équation de NLS.

## 6.2 Dispositif expérimental

Les expériences sont réalisées dans le grand bassin à houles (50 m de long  $\times$  30 m de large  $\times$  5 m de profondeur) de l'Ecole Centrale de Nantes. Le batteur génère mécaniquement une onde porteuse, quasi-1D et monochromatique, modulée aléatoirement en phase et en amplitude. Les paramètres sont choisis de telle sorte que notre système expérimental vérifie en première approximation les hypothèses de faible non-linéarité, de bande spectrale étroite et de conservation de l'énergie de la turbulence intégrable (NLSE).

Les expériences ont été réalisées pendant une semaine de campagne de mesures à Nantes, durant laquelle d'autres mesures ont été réalisées pour évaluer l'importance des ondes liées dans les spectres des ondes de gravité [3].

## 6.3 Résultats obtenus

Les résultats principaux obtenus sont les suivants :

1. Nous avons observé l'apparition de **solitons** au sein d'un ensemble d'ondes aléatoires unidirectionnelles.
  - (a) La présence de **solitons enveloppes** est détectée de manière automatique dans les signaux temporels de hauteur des vagues (voir Fig. 6.1). Le nombre de solitons augmente avec la distance de propagation : ils ne sont pas présents dans le forçage mais émergent du fond d'ondes stochastiques et ne se déforment plus après être apparus. Leur nombre diminue lorsqu'on augmente la cambrure des vagues, car lorsque la non-linéarité est trop forte l'équation de Schrödinger non-linéaire n'est plus valide.
  - (b) Nous avons également pu détecter des **solitons Peregrine** apparaissant soudainement puis disparaissant (double localisation en espace et en temps voir Fig. 6.2). Nous avons pu observer une signature expérimentale d'un Peregrine : un saut de phase de  $\pi$  dans les signaux temporels des ondes lorsque l'amplitude de l'enveloppe est nulle, au point séparant les « ailes » du lobe central du soliton Peregrine. En hydrodynamique, le soliton Peregrine (ou « Peregrine breather ») avait déjà été mis en évidence lorsque la solution asymptotique était directement injectée par le batteur [130, 151, 152], celle-ci pouvant être perturbé par du vent [153] ou intégré aux conditions initiales d'un champ d'ondes stochastiques [154]. L'apparition d'un soliton Peregrine est un événement beaucoup plus rare qu'un soliton enveloppe dans nos signaux temporels, son émergence depuis un fond d'ondes stochastiques et la signature particulière du saut de phase de  $\pi$  n'avaient été reportés jusqu'ici qu'en optique [26, 27, 155].

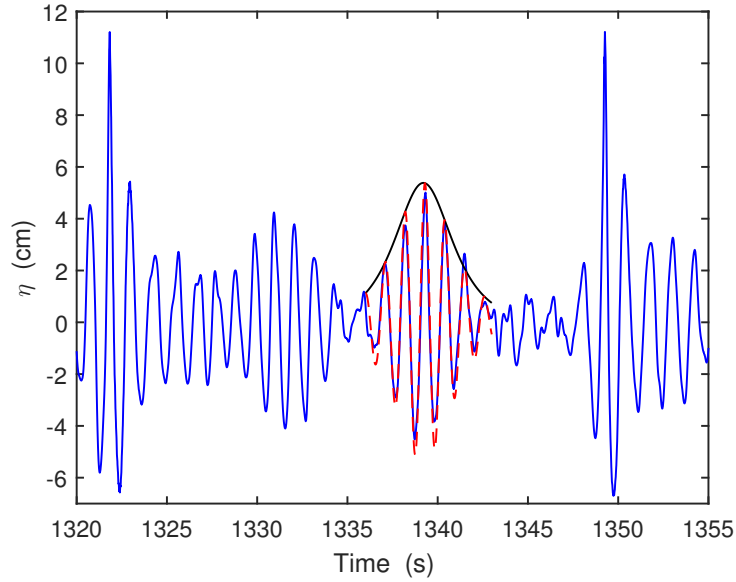


FIG. 6.1 Signal temporel de soliton enveloppe détecté à  $x = 29.8$  m du batteur (en bleu). Enveloppe (en noir) et signal théorique (en pointillés rouges) de la forme théorique d'un soliton enveloppe solution de NLSE.

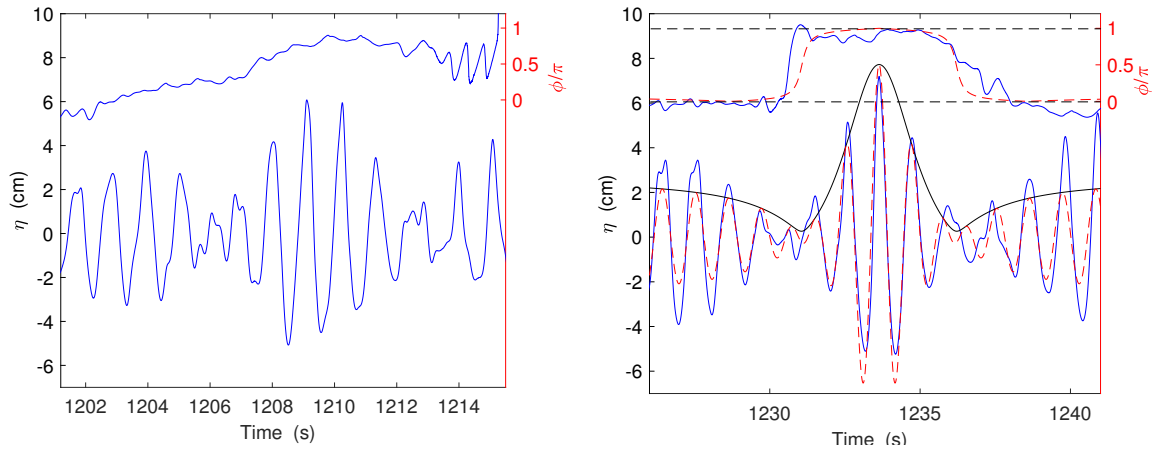


FIG. 6.2 Gauche : Signal temporel proche du batteur (à  $x=3.4$  m). Haut : phase redimensionnée  $\phi/\pi$  du signal. Droite : Même partie du signal enregistrée à l'avant dernière sonde ( $x=24.9$  m) montrant une structure similaire à un soliton Peregrine. Profil théorique (en pointillés rouges) et enveloppe (en noir) d'un soliton Peregrine. Haut : Phase redimensionnée  $\phi/\pi$  du signal montrant un saut de phase de  $\pi$  lorsque l'enveloppe s'annule, comme prédit théoriquement pour un soliton Peregrine.

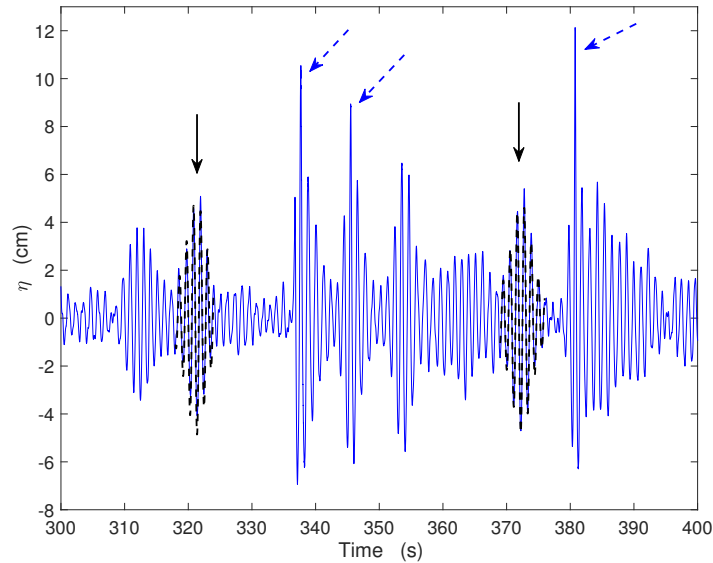


FIG. 6.3 Exemple de signal temporel à la dernière sonde  $x = 29.8$  m, montrant la coexistence de solitons (flèches noires, forme théorique en pointillés noirs) et d'événements extrêmes (flèche en pointillés bleus). La forme des événements extrêmes est fortement asymétrique.

- (c) Depuis, nous avons mené d'autres campagnes de mesure dans le bassin à traction de 140 m de long de l'École Centrale de Nantes, et nous avons pu réaliser une étude systématique de l'émergence des solitons Peregrine à partir d'un fond d'ondes stochastiques et de leur rôle sur l'évolution des paramètres statistiques comme le Kurtosis [4].
2. Nous avons observé un autre type de structures cohérentes localisées : les événements extrêmes, apparaissant du champ d'ondes incohérents. Leur apparition est prédite par la théorie de la turbulence intégrable [24]. Les structures les plus extrêmes de notre champ d'ondes sont trop non-linéaires pour obéir à l'équation de Schrödinger non-linéaire. Elles se caractérisent par un front très raide suivie par une lente décroissance de l'enveloppe au cours du temps (voir Fig.6.3). Leur nombre augmente naturellement avec la propagation et la non linéarité.
  3. Enfin, nous avons étudié le spectre du champ d'ondes dans ce régime statistique de turbulence intégrable. À basse fréquence, un élargissement asymétrique du pic du spectre est observée et est bien décrit en prenant en compte sa première correction d'ordre supérieur à NLSE (modèle de Dysthe) [144, 156]. À haute fréquence, le spectre est continu et montre une loi de puissance en fréquence en  $f^{-4.5 \pm 0.5}$ . Ceci est lié à la signature spectrale des harmoniques du fondamental et à celle des événements extrêmes. En effet le spectrogramme montre que le mécanisme de transfert d'énergie dans les échelles provient de la forte raideur des événements extrêmes. Comme ces derniers sont riches en harmoniques, ce spectre en loi de puissance vient probablement de la lente modulation des harmoniques (ondes liées) du champ d'ondes, dont on sait qu'elle a

pour conséquence un spectre continu en loi de puissance entre  $f^{-4}$  et  $f^{-5}$  [3]. Dans un cas limite, si ces événements extrêmes s'approchent de structures cohérentes singulières 1D, alors leur spectre est prédit en  $f^{-4}$  [157].

La plupart de ces observations sont compatibles avec la théorie de la turbulence intégrable NLS, même si certains écarts (spectres en loi de puissance, événement extrêmes asymétriques) résultent d'effets propres aux ondes hydrodynamiques.

## 6.4 Conclusion et perspectives

Nous avons pu reporter la première observation d'un état statistique d'un champ unidimensionnel d'ondes de gravité en eau profonde où des structures cohérentes émergent d'un fond d'ondes stochastiques. Cet état est prédit théoriquement dans le cadre de la turbulence intégrable gouvernée par l'équation de Schrödinger non-linéaire [24]. Nous avons pu caractériser cet état, étudier l'apparition des structures cohérentes en fonction des différents paramètres de forçage et leur effet sur la statistique des ondes et notamment sur le spectre des ondes.

D'autres campagnes de mesure sur la turbulence intégrable auxquelles j'ai participé ont depuis été réalisées à l'École Centrale de Nantes, en collaboration avec des expérimentateurs de l'Université de Lille, spécialistes de la turbulence intégrable dans des fibres optiques. Lors de trois campagnes de mesures en 2019, au sein du canal à traction de 150 m de long, plus adapté à l'étude de l'évolution de trains d'ondes unidimensionnels, nous avons abordé différents aspects liés à la turbulence intégrable :

1. Comme évoqué ci-dessus, nous avons obtenu la première observation de l'émergence de solitons Peregrine au sein d'un ensemble d'ondes aléatoires hydrodynamique 1D [6] nous avons effectué une étude quantitative de leur apparition et leur effet sur la statistique du champ d'ondes, notamment sur le Kurtosis [4]. Cela permet de montrer qu'un ensemble de vagues aléatoires peut engendrer des vagues scélérates, le Peregrine étant le prototype de cette dernière. De plus, lorsque la cambrure des vagues augmente, ces événements s'éloignent de la forme du soliton Peregrine prévue par NLSE, qui ne serait qu'un cas particulier parmi un modèle plus large [158]. Ces résultats ont été relayés par une Actualité Scientifique du CNRS et par d'autres médias.
2. Nous avons pu observer expérimentalement un gaz de solitons hydrodynamiques en eau profonde et montrer par une analyse spectrale non-linéaire (IST) le rôle des non-linéarités d'ordres supérieurs sur la dynamique des ondes [30]. Le gaz de solitons est l'une des manifestations de la turbulence intégrable Cette expérience a permis ainsi de caractériser comment la dynamique s'écarte de l'intégrabilité lorsque la non linéarité augment trop (i.e. lorsque la cambrure augmente suffisamment).
3. Nous avons pu étudier l'évolution non-linéaire d'un paquet d'ondes avec une enveloppe de forme rectangulaire. Nous avons montré qu'en fonction des paramètres initiaux, le paquet d'ondes n'était pas toujours désintégré par l'instabilité de Benjamin-Feir (ou instabilité modulationnelle) mais montrait une modulation fortement non-linéaire se propageant depuis les extrémités du paquet d'ondes vers son centre à vitesse finie. Nous avons identifié cette structure comme un cas particulier d'onde de choc dispersif (dit de

dambreak dispersif) en bon accord avec le scénario théorique attendu [5]. Ces résultats ont été notifiés comme Editor's Suggestion dans la revue *Phys. Rev. Fluids*.

4. Enfin, en utilisant un réseau de 20 sondes résistives équidistantes dans le canal de 150 m de long, il a également été possible de mettre en évidence le spectre spatio-temporel des ondes et la relation de dispersion expérimentale des ondes non-linéaires aléatoires 1D. Du fait de la non linéarité, nous observons un élargissement et un décalage du minimum de la relation de dispersion de l'enveloppe des ondes comme attendu pour NLSE :  $k(\omega, A) = \omega^2/g - 2k_0^3 \langle |A|^2 \rangle = \omega^2/g - 2\omega_0^2 \epsilon^2/g$ , avec  $\omega_0^2 = gk_0$ . Pour des cambrures plus fortes ( $\epsilon = k_0 \sqrt{\langle |A|^2 \rangle} < 0.1$ ), un écart apparaît qui pourrait être décrit par une équation d'ordre plus élevé comme l'équation de Dysthe. Cette étude est en cours de rédaction [159].

Il serait également intéressant d'engendrer un train d'ondes unidimensionnel au début du grand bassin de l'École Centrale de Nantes sur une petite largeur et d'étudier comment en passant en deux dimensions en se propageant, le régime de turbulence intégrable transiterait vers un régime de turbulence d'ondes.

## 6.5 Article publié dans *Physical Review Fluids*

**Coexistence of solitons and extreme events in deep water surface waves**A. Cazaubiel,<sup>1</sup> G. Michel,<sup>2</sup> S. Lepot,<sup>3</sup> B. Semin,<sup>2</sup>  
S. Aumaître,<sup>3</sup> M. Berhanu,<sup>1</sup> F. Bonnefoy,<sup>4</sup> and E. Falcon<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>*Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75 013 Paris, France*<sup>2</sup>*Ecole Normale Supérieure, LPS, UMR 8550 CNRS, F-75 205 Paris, France*<sup>3</sup>*CEA-Saclay, Sphynx, DSM, URA 2464 CNRS, F-91 191 Gif-sur-Yvette, France*<sup>4</sup>*Ecole Centrale de Nantes, LHEEA, UMR 6598 CNRS, F-44 321 Nantes, France*

(Received 26 June 2018; published 13 November 2018)

We study experimentally, in a large-scale basin, the propagation of unidirectional deep water gravity waves stochastically modulated in phase. We observe the emergence of nonlinear localized structures that evolve on a stochastic wave background. Such a coexistence is expected by the integrable turbulence theory for the nonlinear Schrödinger equation (NLSE), and we report the first experimental observation in the context of hydrodynamic waves. We characterize the formation, the properties, and the dynamics of these nonlinear coherent structures (solitons and extreme events) within the incoherent wave background. The extreme events result from the strong steepening of wave train fronts, and their emergence occurs after roughly one nonlinear length scale of propagation (estimated from the NLSE). Solitons arise when nonlinearity and dispersion are weak, and of the same order of magnitude as expected from the NLSE. We characterize the statistical properties of this state. The number of solitons and extreme events is found to increase all along the propagation, the wave-field distribution has a heavy tail, and the surface elevation spectrum is found to scale as a frequency power law with an exponent  $-4.5 \pm 0.5$ . Most of these observations are compatible with the integrable turbulence theory for the NLSE although some deviations (e.g., power-law spectrum, asymmetrical extreme events) result from effects proper to hydrodynamic waves.

DOI: [10.1103/PhysRevFluids.3.114802](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.3.114802)**I. INTRODUCTION**

When many random and weakly nonlinear dispersive waves propagate and interact with one another, several statistically stationary states are theoretically predicted, such as weak wave turbulence, statistical equilibrium, or integrable turbulence. Weak wave turbulence describes an ensemble of nonlinear waves undergoing resonant interactions. These energy transfers between spatial and temporal scales lead generally to a cascade of wave energy from a large (forcing) scale to a small (eventually dissipative) one. This phenomenon occurs in various situations ranging from spin waves in solids, internal or surface waves in oceanography, to plasma waves in astrophysics (for reviews, see [1–4]). The theory of weak wave turbulence, developed in the 1960s [5–7], leads to analytical predictions on the wave energy spectrum in a stationary state, and has since been applied in almost all domains of physics involving waves [2,3]. In the past decade, an important experimental effort has been devoted to test the domain of validity of weak turbulence theory on different wave systems (e.g., hydrodynamics, optics, hydroelastic or elastic waves) [8]. In the

\*eric.falcon@univ-paris-diderot.fr



absence of an inverse cascade, it also predicts the equipartition of energy at scales larger than the forcing one, which was recently observed experimentally [9].

The theory of integrable turbulence combines the above statistical approach together with the property of integrability of an equation showing soliton solutions [e.g., the Korteweg–de Vries equation (KdVE) or the nonlinear Schrödinger equation (NLSE)] [10,11]. Even though no dissipation or forcing term is part of such equations, random initial conditions generally do not relax toward thermal equilibrium [12]. Instead, the emergence and the dynamics of a large number of nonlinear coherent structures (such as solitons or breathers) from the incoherent waves forms a statistical state, called integrable turbulence. It has been encountered in various situations ranging from plasma waves [13] to optical waves [14–18]. This state is different from the wave turbulence one, since no resonant wave interaction occurs, and no constant flux of a conserved quantity cascades through the scales [11].

In the context of surface waves on a fluid, the KdVE describes unidirectional long waves in shallow water, whereas the NLSE describes unidirectional nonlinear wave packets of arbitrary depth (although the nature of the solutions in the shallow and deep water limits strongly differs; see, e.g., [19]). In the shallow water regime, beyond numerical confirmations [20], direct experimental verifications of integrable turbulence were obtained recently in field experiments [21,22] and in the laboratory [23,24]. For deep water gravity waves, the development of modulational instability is predicted to generate a state intermediate between weak turbulence and the superposition of weakly interacting solitons [11]. The statistics of such state have been the subject of several experiments, in which the waves are forced with noise. Non-Gaussian statistics of the wave height were observed to emerge from such a random forcing [25–29] as predicted theoretically from the NLSE with random initial conditions [30]. Direct numerical simulations of random waves with the NLSE have been reported also [31,32]. Time series from field measurements in the ocean were compared to the NLSE to search for solitons and their possible link with extreme wave appearance [33]. The highest waves that may appear in a chaotic wave field, called rogue waves, are indeed a question of intense debate [25,31,33–36]. Although not all of these experimental studies were explicitly compared against the predictions of integrable turbulence, the NLSE roughly captures the reported wave statistics of unidirectional random waves. However, neither the identification of the coherent structures involved in the integrable turbulence regime, nor the deviation of real systems from these predictions, have been experimentally studied. Such deviations should be more easily highlighted in hydrodynamics than in nonlinear optics, since more approximations are needed to reduce the dynamics to the NLSE.

Here, we study experimentally the propagation of a unidirectional deep water carrier wave stochastically modulated in phase. Waves of narrow spectral bandwidth are generated at one end of the tank, and the evolution of the statistical properties of the wave field is measured along the propagation. The range of parameters and the design of the experiment are set to observe solitons governed by the NLSE, the linear (dispersive) and nonlinear timescales of propagation being controllable experimentally and chosen to be of the same order of magnitude. We show that a spontaneous formation of coherent localized structures, such as solitons and extreme events, occurs from the initial incoherent waves. We characterize the emergence, the properties, and the dynamics of these solitons and extreme events immersed in a sea of smaller stochastic waves. Such a coexistence between erratic waves and coherent structures is expected from NLSE integrable turbulence [11], and has been reported in optics [18]. After one and a half times the nonlinear length scale of propagation, we observe a heavy-tailed (distance independent) distribution of the wave field statistics, as expected by integrable turbulence, and the emergence of extreme events. The experimental wave spectrum is then found to follow a frequency power law with an exponent  $-4.5 \pm 0.5$ , and we show that this feature traces back to the strong steepening of the waves. This power-law spectrum, as well as the occurrence of highly asymmetrical extreme events, is not described by the NLSE but comes from the specific features of hydrodynamics waves. For instance, the spectrum exponent is probably related to the random modulation of the harmonics (bound waves) of the wave field.

The article is organized as follows. We first recall some theoretical results of the one-dimensional (1D) NLSE for deep water waves. Then, we give estimates of the typical propagation timescales of the problem. We describe the experimental setup, then the experimental results, before discussing our results with respect to the integrable turbulence theory.

## II. 1D NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION FOR DEEP WATER WAVES

In a deep water regime ( $kh \gg 1$ ), the dispersion relation of linear gravity waves reads

$$\omega_{\text{lin}}(k) = \sqrt{gk}, \quad (1)$$

with the fluid depth  $h$ , the acceleration of gravity  $g$ , the wave number  $k = 2\pi/\lambda$ , the angular frequency  $\omega = 2\pi f$ , the frequency  $f$ , and wavelength  $\lambda$  of the wave.

Assume a linear monochromatic wave of wave number  $k_0$  and angular frequency  $\omega_0 \equiv \omega_{\text{lin}}(k_0)$ . Its phase velocity  $c = \omega_0/k_0 = \sqrt{g/k_0}$  thus increases as the square root of its wavelength, the group velocity being  $c_g = d\omega_0/dk_0 = c/2$ . When the wave amplitude  $a$  is not much smaller than  $\lambda$ , nonlinear terms in the Euler equations have to be taken into account. The dispersion relation of a progressive periodic wave (the so-called Stokes wave) then reads [37]

$$\omega(k) = \omega_{\text{lin}}(k) \left[ 1 + \frac{k^2 a^2}{2} + O(k^4 a^4) \right]. \quad (2)$$

Consider a 1D nonlinear wave train with a complex envelope  $A$  slowly varying in time  $T$  and space  $X$  with respect to the carrier wave ( $\omega_0, k_0$ ), i.e.,

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} [A(X, T) e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} + \text{c.c.}]. \quad (3)$$

Here,  $X = \epsilon x$  and  $T = \epsilon t$ , where  $\epsilon \ll 1$  is a dimensionless parameter enforcing the slow space and time modulation, and c.c. denotes the complex conjugate. The small parameter  $\epsilon$  is chosen to also be the steepness of the carrier, i.e.  $\epsilon = k_0 \sqrt{\langle |A|^2 \rangle}$ , with  $\langle \cdot \rangle$  a time average. Substituting  $a$  by  $A$  in the dispersion relation of the Stokes wave leads to

$$\omega(k) = \omega_{\text{lin}}(k) \left( 1 + \frac{k^2 |A|^2}{2} \right). \quad (4)$$

Now, expanding Eq. (4) into a Taylor series expansion about  $k_0$ , and about the initial amplitude  $A_0 \equiv A(0, 0) = 0$ , leads to [38]

$$\omega(k, |A|^2) - \omega_0 = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0} (k - k_0)^2 + \left. \frac{\partial \omega}{\partial |A|^2} \right|_{|A_0|^2} (|A|^2 - |A_0|^2). \quad (5)$$

Using the notations  $\Omega = \omega - \omega_0$  and  $K = k - k_0$ , the dispersion relation of the modulated wave reads

$$\Omega(K, |A|^2) = c_g K + P K^2 - Q |A|^2, \quad (6)$$

valid in the vicinity of  $\omega_0$  and  $k_0$ , with  $c_g \equiv \partial \omega / \partial k|_{k=k_0}$ ,  $P \equiv \partial^2 \omega / 2 \partial k^2|_{k=k_0}$ , and  $Q \equiv -\partial \omega / \partial |A|^2|_{A_0=0}$ . All these parameters are known using the nonlinear dispersion relation (4). Following [38], we use the properties of the Fourier transforms for the envelope ( $K = -i\epsilon \partial / \partial X$ ,  $\Omega = -i\epsilon \partial / \partial T$ ), substitute these relationships in Eq. (6), and apply the resulting operator to  $A$ . At order  $O(\epsilon^2)$  in dispersive and nonlinear terms, the wave train envelope  $A$  is then governed by the NLSE [39,40]

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial t} + c_g \frac{\partial A}{\partial x} \right) - P \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - Q |A|^2 A = 0, \quad (7)$$

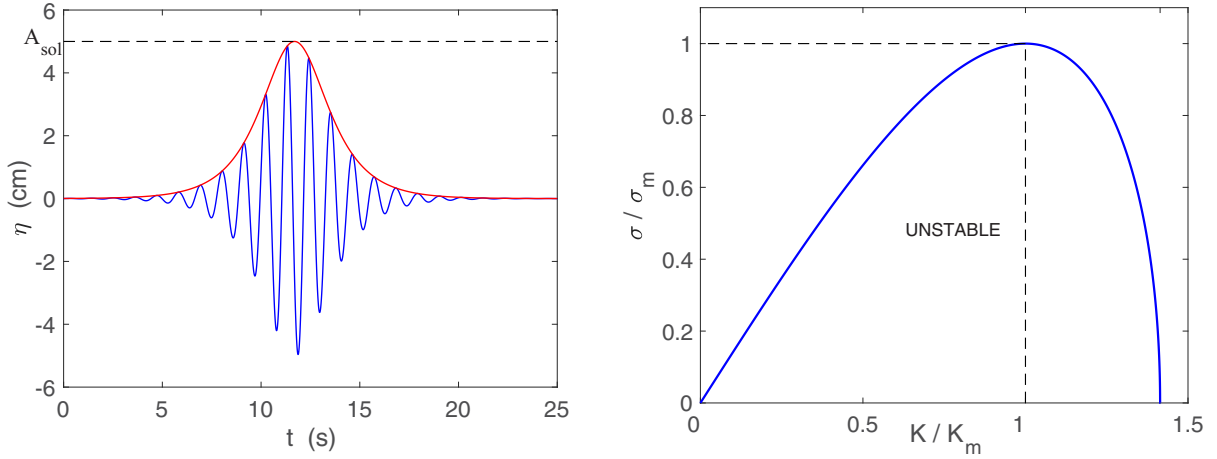


FIG. 1. Left: Theoretical envelope soliton  $\eta_{\text{sol}}(t)$  of Eq. (8) with  $f_0 = 0.9$  Hz,  $x = 10$  m, and  $A_{\text{sol}} = 5$  cm. The red solid line shows the envelope of the solution. Right: Dimensionless growth rate of the Benjamin-Feir instability,  $\sigma/\sigma_m$ , versus dimensionless wave number  $K/K_m$ . Unstable modes are found below the solid line.

with  $c_g = \omega_0/(2k_0)$  the group velocity of the wave packet,  $P = -\omega_0/(8k_0^2)$  the dispersive parameter, and  $Q = -\omega_0 k_0^2/2$  the nonlinear one. Note that the variables  $X$  and  $T$  have been put in lower case in Eq. (7) for easier reading thereafter. This equation is integrable, and an inverse scattering transform (IST) can solve Eq. (7) [40].

In the deep water regime, the product of the dispersive and nonlinear terms,  $PQ$ , is always positive. This regime, called the focusing or anormal regime in optics, selects a type of solutions of Eq. (7). The latter admits an envelope soliton solution (a sech-shaped pulse), spatially localized, and the corresponding wave profile is of the form [38,41]

$$\eta_{\text{sol}}(x, t) = A_{\text{sol}} \operatorname{sech} \left[ \sqrt{2} k_0^2 A_{\text{sol}} (x - c_g t) \right] \cos \left[ \omega_0 \left( 1 + \frac{k_0^2 A_{\text{sol}}^2}{4} \right) t - k_0 x \right]. \quad (8)$$

$A_{\text{sol}}$  being the maximum of the envelope soliton. Its full width at half maximum (FWHM) is then

$$L_{\text{sol}} = \sqrt{2} \operatorname{arcsech}(1/2) / (A_{\text{sol}} k_0^2). \quad (9)$$

This envelope soliton is shown in Fig. 1(left). It was first observed in deep water [42] and then in nonlinear electrical transmission lines [43]. Since then, others soliton solutions of the focusing NLSE, localized in both the space and time domains, have been derived [44] (such as the Peregrine soliton [45], Kuznetsov-Ma breathers [46,47], and Akmediev breathers [48,49]) and observed experimentally [50,51]. For instance, the Peregrine soliton reads [50]

$$\eta_p(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ A_p \exp \left( -\frac{i k_0^2 A_p^2 \omega_0 t}{2} \right) \left[ 1 - \frac{4(1 - i k_0^2 A_p^2 \omega_0 t)}{1 + [2\sqrt{2} k_0^2 A_p (x - c_g t)]^2 + k_0^4 A_p^4 \omega_0^2 t^2} \right] \times \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)] \right\}, \quad (10)$$

$A_p$  being the maximum of the Peregrine soliton. Its maximum amplification, which occurs at  $x = 0$  and  $t = 0$ , is a factor of 3 higher than the background carrier wave. Its dynamics was first reported in nonlinear fibers [52], then in water wave tanks [50] and plasmas [53]. Moreover, Eq. (7) also admits constant envelope solutions which correspond to uniform sinusoidal wave train solution of constant

amplitude  $a_0$  with the leading order correction to the angular frequency introduced in Eq. (2),

$$\eta(x, t) = a_0 \cos \left[ \omega_0 \left( 1 + \frac{k_0^2 a_0^2}{2} \right) t - k_0 x \right], \quad (11)$$

which may be modulationally unstable if  $\Omega^2 = (K^2 - 2a_0^2 Q/P)P^2 K^2 < 0$ , that is for  $0 < |K| < |K_c| \equiv a_0 \sqrt{2Q/P} = 2\sqrt{2}a_0 k_0^2$ . The maximum growth rate of the instability is achieved when  $\partial\Omega^2/\partial K = 0$ , that is for  $K_m = a_0 \sqrt{Q/P} = K_c/\sqrt{2} = 2a_0 k_0^2$  [38]. The growth rate  $\sigma = -\Omega^2$  is maximum for  $\sigma_m = a_0^2 Q = \omega_0 (a_0 k_0)^2 / 2$ . Figure 1(right) shows the theoretical growth rate of the instability  $\sigma/\sigma_m$  vs  $K/K_m$ . In frequency space, with the use of the group velocity, the instability occurs for  $0 < \Omega < \sqrt{2}\omega_0 a_0 k_0$  [54]. The quasiplane wave instability with respect to slowly modulating perturbation is due to the interplay between nonlinearity and dispersion. It was first discovered by Lighthill [55], and called modulation instability, but it is often referred to as the Benjamin-Feir instability since it was Benjamin and Feir who first applied it to surface waves in the limit of vanishing steepness ( $a_0 k_0 \rightarrow 0$ ) [56]. Several experiments performed in deep water have successfully verified this instability prediction [56–60]. In the Fourier space, the modulation instability consists of a pair of sideband components growing around the angular frequency of the carrier wave  $\omega_0$ .

Let us now introduce the linear and nonlinear propagation timescales. Balancing the first and last terms of Eq. (7), the nonlinear timescale reads

$$T_{nl} = \frac{1}{QA_0^2} = \frac{2}{\omega_0 \epsilon^2}, \quad (12)$$

where  $\epsilon \equiv k_0 |A_0|$  corresponds to the steepness of the carrier. Balancing the first and third terms of Eq. (7), the linear or dispersive timescale reads

$$T_{lin} = \frac{\Delta L^2}{2P} = \frac{4 \frac{k_0^2}{\Delta k^2}}{\omega_0}, \quad (13)$$

where  $\Delta L$  is the typical size of a modulation (i.e., the half-width of a Gaussian envelope at an amplitude of  $|A_0|/\sqrt{e}$ );  $\Delta k = 1/\Delta L$  thus stands for the typical spectral bandwidth of the modulation. The factor 1/2 in Eq. (13) comes from the dispersion-induced spreading of a Gaussian pulse governed by Eq. (7) with  $Q = 0$  [61]. Using Eqs. (12) and (13), the ratio of both times thus reads

$$\frac{T_{lin}}{T_{nl}} = \frac{2\epsilon^2}{(\Delta k/k_0)^2}. \quad (14)$$

This ratio gives the degree of nonlinearity of the wave propagation. It is also related to the Benjamin-Feir index (BFI) of the modulation instability, defined as  $\text{BFI}_k \equiv 2\epsilon/(\Delta k/k_0)$  for random waves of narrow spectral bandwidth [62]. It quantifies the ratio between the wave steepness to the normalized spectral width of the initial condition. When  $\text{BFI}_k > 1/\sqrt{2}$ , the modulation instability at the most unstable wave number occurs. Indeed, in this case one has  $\Delta k < 2\sqrt{2}A_0 k_0^2$ , as found above for a monochromatic wave. In the frequency space, the BFI reads  $\text{BFI}_\omega = \epsilon/(\Delta\omega/\omega_0)$  [63], and the instability occurs for  $\text{BFI}_\omega > 1/\sqrt{2}$ , that is  $\Delta\omega < 2\omega_0 A_0 k_0$ . For narrow spectral bandwidth processes and from Eq. (3), the relation between the random surface elevation  $\eta$  and its envelope is  $\langle |A|^2 \rangle = 2\langle \eta^2 \rangle \equiv 2\sigma_\eta^2$ , with  $\sigma_\eta$  the rms value of  $\eta(t)$ , and  $\langle \cdot \rangle$  an average over time. This leads to the use of  $\epsilon = \sqrt{2}\epsilon_\eta$  in the above definitions of BFI, as used in experiments [25,30], with  $\epsilon_\eta \equiv k_0 \sigma_\eta$  the initial steepness.

The characteristic length scales of the problem are related to the typical timescales by the group velocity:  $L_{lin} = c_g T_{lin} = 2k_0/\Delta k^2$  and  $L_{nl} = c_g T_{nl} = 1/(k_0 \epsilon^2)$ . Finally, note that the typical timescale of the carrier modulation is related to the nonlinear timescale of the problem. Indeed, one has  $\Omega_m = 1/T_{nl}$ , with  $\Omega_m$  the modulation frequency at the maximum growth rate of the modulation

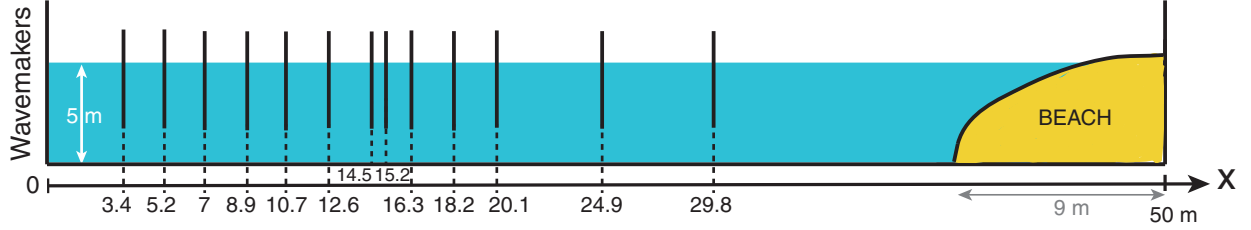


FIG. 2. Sketch of a vertical section of the wave basin facility at Ecole Centrale de Nantes and locations of the resistive probes.

instability. The corresponding wave number  $K_m$  is also related to the inverse of the width of the envelope soliton of Eq. (8).

### III. EXPERIMENTAL SETUP

The experimental setup is shown in Fig. 2 and is similar to the one described in Ref. [64]. Experiments are carried out in a large-scale wave basin (50 m long  $\times$  30 m wide  $\times$  5 m deep) at Ecole Centrale de Nantes. At one end of the basin is a wavemaker made of 48 independently controlled flaps, whereas an absorbing sloping beach strongly reduces wave reflections at the opposite end. We mechanically generate a 1D monochromatic carrier wave randomly modulated in phase and in amplitude. The carrier frequency is set to  $f_0 = 0.9$  Hz corresponding, using Eq. (1), to a wavelength of  $\lambda_0 = 1.9$  m in a deep water regime ( $k_0 h \approx 16$ ). The period of the carrier,  $T_0 = 1/f_0$ , is 1.1 s. The modulation of this carrier is slow compared to  $T_0$ , i.e., of narrow frequency spectral bandwidth  $\Delta f$  (with  $\Delta f/f_0 < 0.26$ ). More precisely, the wavemaker is driven to reproduce the wave profile  $\eta(x=0, t) = \eta_0(t)$  in front of it ( $x=0$ ) with the prescribed wave steepness using the Fourier modes

$$\eta_0(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n), \quad (15)$$

where  $f_n = n/\theta$  is the frequency of the  $n$ th Fourier mode and  $\phi_n$  is a phase chosen randomly from a uniform distribution in the interval  $[0, 2\pi]$ . The fundamental period of the Fourier series is  $\theta = 2048$  s and  $N$  is the number of wave components. The Fourier mode amplitude spectrum  $a_n$  is chosen to be a narrow-banded Gaussian spectrum centered on  $f_0$  given by

$$a_n = A \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{f_n - f_0}{\Delta f / (2\sqrt{2} \ln 2)} \right)^2 \right], \quad (16)$$

where  $\Delta f$  is the full width of this spectrum at half maximum and  $A$  a scale factor. The latter is adjusted so the standard deviation wave elevation  $\eta_0(t)$  is  $\epsilon_\eta / (\sqrt{2} k_0)$ .

The control parameters are the initial carrier wave steepness  $\epsilon_\eta \in [0.08, 0.14]$  and the bandwidth  $\Delta f \in [0.047, 0.24]$  Hz that are varied in these ranges. A linear frame supports an array of 12 resistive wave probes at distance  $x$  from the wavemaker with  $x = 3.4, 5.2, 7, 8.9, 10.7, 12.6, 14.5, 16.3, 18.2, 20.1, 24.9,$  and  $29.8$  m. Their vertical resolution is approximately 0.1 mm and their frequency resolution is close to 20 Hz, the sampling frequency being 250 Hz. A few additional probes are also present normal to the basin length to check that the wave field presents no significant evolution along the transverse direction. The surface elevation,  $\eta(t)$ , is recorded at each probe during  $\mathcal{T} = 2000$  s. We checked that the computed wave spectrum has converged statistically by computing it over the first and second halves of the signal duration  $\mathcal{T}$ . Note also that  $\mathcal{T}$  is much greater than the autocorrelation time of the noise,  $\mathcal{T} \gg (\Delta f)^{-1}$ . Typically, the wave amplitudes are of the order of few cm. Viscous dissipation is weak at these frequencies, the main damping mechanism being the beach, which absorbs more than 90% of the incident energy. In a first

approximation, our experimental setup can be thus considered to satisfy the conservative hypothesis of the NLSE. Note that the NLSE hypothesis of slow time modulation is also verified experimentally ( $0.05 \leq \Delta f/f_0 \leq 0.26$ ).

#### IV. TIMESCALE ESTIMATIONS

Before describing the results, let us compute some typical timescales of this experiment. Consider first the parameters involved in the NLSE (7): The group velocity is  $c_g = \omega_0/(2k_0) = 0.87$  m/s, the dispersive parameter is  $P = -0.06$  Hz m<sup>2</sup>, and the nonlinear one is  $Q = -30$  Hz/m<sup>2</sup>. Second, we estimate the dispersive and nonlinear propagation times. Using Eq. (12), and  $\epsilon = \sqrt{2}\epsilon_\eta$ , the nonlinear propagation time reads

$$T_{nl} = 1/(\omega_0\epsilon_\eta^2) \in [9, 27.6] \text{ s}, \quad (17)$$

corresponding to a nonlinear length of  $L_{nl} \in [7.8, 24]$  m. Using Eq. (13),  $\Delta\omega/\omega_0 = \Delta k/(2k_0)$ , and  $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ , the dispersive timescale reads

$$T_{lin} = \omega_0/(\Delta\omega)^2 \in [2.5, 64.6] \text{ s}, \quad (18)$$

corresponding to a dispersive length of  $L_{lin} \in [2.2, 56]$  m. Both  $L_{nl}$  and  $L_{lin}$  fit the length of the basin. Note that, for a fixed carrier wave frequency  $\omega_0$ , varying the initial wave steepness  $\epsilon_\eta$  modifies  $T_{nl}$ , whereas varying the spectral bandwidth  $\Delta\omega \equiv 2\pi\Delta f$  modifies  $T_{lin}$ . Using Eq. (14), the propagation time ratio is inferred as  $T_{lin}/T_{nl} = \epsilon_\eta^2/(\Delta\omega/\omega_0)^2$ . In the following, we define the square root of this quantity as the parameter quantifying the nonlinearity-to-dispersion ratio,

$$\tau \equiv \sqrt{T_{lin}/T_{nl}} = \epsilon_\eta/(\Delta\omega/\omega_0). \quad (19)$$

The nonlinearity ( $\epsilon_\eta$ ) and dispersion ( $\Delta\omega/\omega_0$ ) are controllable parameters in this experiment. To observe coherent structures such as solitons governed by the NLSE, nonlinear and dispersive effects have to be balanced (i.e.,  $\tau \sim 1$ ). The parameter ranges are thus similar, as evidenced by the values of  $\tau \in [0.3, 2.6]$ .

Since  $\tau = \text{BFI}_\omega/\sqrt{2}$ , the modulation instability, at the most unstable wave number, occurs for a pure monochromatic wave when  $\tau > 1/2$ . The instability occurs when  $\Delta f < 2f_0\epsilon_\eta \in [0.14, 0.25]$  Hz. Note that the amplitude of the most unstable perturbation grows, during its propagation over a distance  $L$ , at most by a factor  $\exp[(\omega_0\epsilon_\eta)^2 2L/g] \simeq 3$  [56,59]. Finally, balancing directly the dispersive and nonlinear terms (i.e., the third and fourth ones) in Eq. (7) leads to the typical length  $L_{sol}$  of envelope solitons [65]

$$L_{sol} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{arcsech}(1/2)}{k_0\epsilon_\eta}, \quad (20)$$

as found in Eq. (9),  $L_{sol}$  being the full width at half maximum of a sech pulse. This leads to solitons of typical length of 5 m ( $L_{sol} \in [4, 7.2]$  m) and duration of 5 s ( $T_{sol} = L_{sol}/c_g \in [4.6, 8.3]$  s). Solitons have thus typically 4 to 8 carrier periods. The distance between the first and last probes in the basin is  $L_{max} = 26.5$  m. It is thus possible to follow such structures on propagation distances up to roughly 7 times its size, at best. To sum up, Table I shows the different scales of the problem for parameter sets used in the experiments.

#### V. EXPERIMENTAL RESULTS

We generate unidirectional sinusoidal waves (of frequency  $f_0$ ) subject to a slow and random phase modulation of the carrier ( $\Delta f/f_0 < 0.26$ ). Figure 3 shows the temporal evolutions of the wave height,  $\eta(t)$ , recorded by the probes located at different distances  $x$  from the wavemaker. Close to the wavemaker, the signal  $\eta(t)$  is reminiscent of the forcing one standing for propagating wave packets of gentle amplitudes. As the distance increases, two main observations are reported. First, fronts of some wave packets steepen strongly leading to extreme events of large amplitude

TABLE I. Theoretical time and length scales for three different  $\epsilon_\eta$  at fixed  $\Delta f = 0.05$  Hz. Carrier wave:  $T_0 = 1.1$  s,  $\lambda_0 = 1.9$  m.

$\epsilon_\eta$	$\frac{T_{\text{lin}}}{\omega_0}$ $\frac{1}{(\Delta\omega)^2}$ (s)	$\frac{T_{\text{nl}}}{1}$ $\frac{1}{\omega_0\epsilon_\eta^2}$ (s)	$\frac{\tau}{\epsilon_\eta}$ $\frac{1}{(\Delta\omega/\omega_0)}$	$\frac{L_{\text{lin}}}{g}$ $\frac{1}{2(\Delta\omega)^2}$ (m)	$\frac{L_{\text{nl}}}{1}$ $\frac{1}{2k_0\epsilon_\eta^2}$ (m)	$\frac{L_{\text{sol}}}{1.86}$ $\frac{1}{2k_0\epsilon_\eta}$ (m)	$\frac{L_{\text{max}}}{L_{\text{nl}}}$
0.08	10.3	27.6	0.61	9	24	7.14	1.10
0.12	10.3	12.3	0.92	9	10.6	4.76	2.48
0.14	10.3	9	1.07	9	7.8	4.08	3.38

in the signal (see the top curve in Fig. 3). To quantify this strong steepening of the wave front, we arbitrarily define an event to be extreme when its local slope  $|d\eta/dt| > 4\sigma_{d\eta/dt}$ , with  $\sigma_{d\eta/dt} \equiv \sqrt{\langle (d\eta/dt)^2 \rangle}$  being the rms value of the wave slope (see Sec. VB). During their propagation, other wave packets develop into solitons and then propagate with no deformation (see the two top curves). These pulses are found to be well described by the envelope soliton profile of Eq. (8) with no fitting parameter (once its maximum amplitude is fixed); see the superimposed dashed lines in Fig. 3. Finally, other wave packets in the signal spread gently during their propagation due to dispersion. All these wave packets propagate with the linear group velocity  $c_g$  (see the red dashed line), the nonlinear correction being less than 1% for this chosen wave steepness in Fig. 3. In Fig. 4(left), we report all the experimental runs in a phase diagram showing the coexistence of stochastic waves with envelope solitons and/or extreme events as a function of the nonlinearity-to-dispersion ratio  $\tau$  and the dimensionless distance  $x/L_{\text{nl}}$ . The emergence of extreme events occurs after roughly one nonlinear length scale of propagation. Envelope solitons arise only in an area where nonlinearity and dispersion are weak (but finite), and of the same order of magnitude as expected from the NLSE. Indeed, when the steepness is too weak, or the modulation spectral width too large, no solitons are observed. Note that, according to the value of  $\epsilon_\eta$ , the last probe is located in this diagram at different values of  $x/L_{\text{nl}}$ , since  $L_{\text{nl}}$  depends on  $\epsilon_\eta$ . Superimposed symbols, for the same set

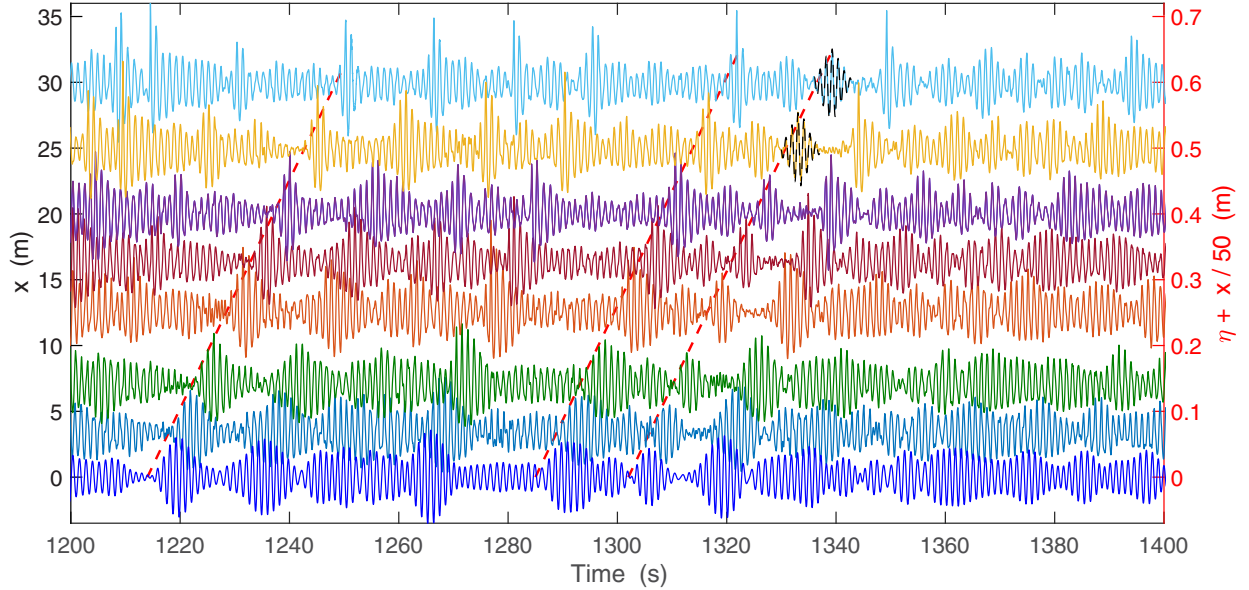


FIG. 3. Experimental evolution along the basin length  $x$  of the wave height  $\eta(t)$  recorded at different probe locations (from bottom to top:  $x = 0, 3.4, 7, 12.6, 16.3, 20.1, 24.9,$  and  $29.8$  m).  $\tau = 0.44$  ( $\epsilon_\eta = 0.08$  and  $\Delta f = 0.16$  Hz). Dashed (red) lines have a slope corresponding to the group velocity  $c_g$ . The dashed (black) line on top of the two upper curves is the theoretical shape of the envelope soliton of Eq. (8).

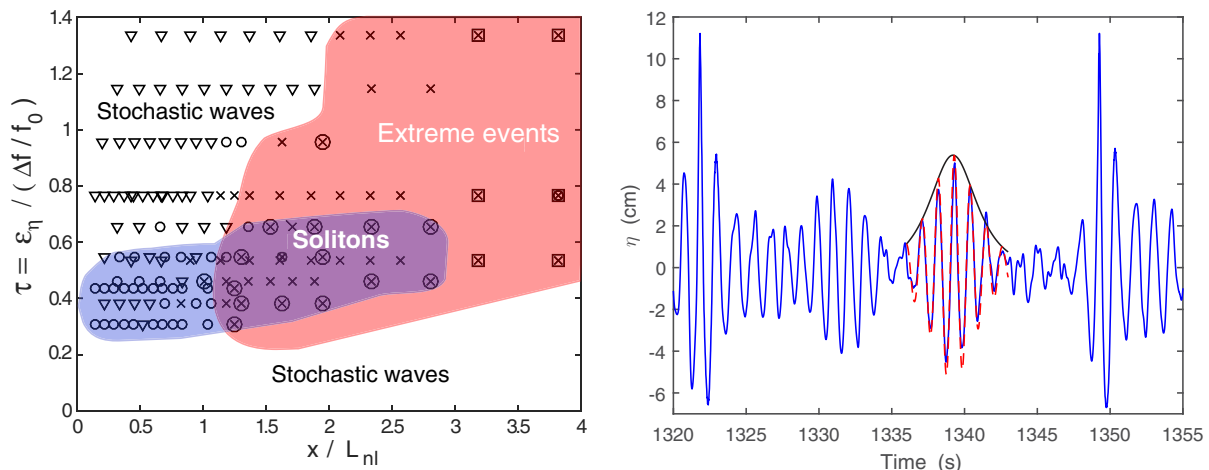


FIG. 4. Phase diagram of stochastic waves (white area) coexisting with envelope solitons (violet area) and/or extreme events (orange area) as a function of the nonlinearity-to-dispersion ratio  $\tau$  and the dimensionless distance  $x/L_{nl}$ . Each performed run is displayed by a symbol corresponding to the observation of ( $\nabla$ ) only stochastic waves, ( $\circ$ ) envelope solitons, and ( $\times$ ) extreme events coexisting with stochastic waves.  $\square$  indicates the coexistence with few spilling breakers (less than 10%) in time series. Right: Typical envelope soliton detected at  $x = 29.8$  m (zoom in of a part of the top curve in Fig. 3),  $\tau = 0.44$  ( $\epsilon_\eta = 0.08$ ,  $\Delta f = 0.16$  Hz). (—) Detected envelope. (- - -) Theoretical shape of NLS envelope soliton from Eq. (8).

of parameters, mean that different coherent structures coexist in a same time series. Two nearby symbols obtained for two different sets of parameters mean that different behaviors are detected in the two corresponding time series. For  $\tau > 1.5$ , extreme events are no longer observed since the spectral width is too small to significantly modulate the carrier wave [not shown in Fig. 4(left)]. Note also that after  $3L_{nl}$  of propagation few spilling breakers occur in time series (less than 10% of extreme events). Thus, when nonlinearity and dispersion are weak and of the same order, we observe a superposition of many interacting coherent structures such as solitons and extreme events within a sea of random wave packets. We characterize below in detail these coherent structures.

### A. Solitons

A typical profile of a soliton within the signal  $\eta(t)$  is shown in Fig. 4(right) for the same experimental parameters as in Fig. 3. Its profile is found to be in good agreement with the envelope soliton profile of Eq. (8) with no fitting parameter (once its maximum amplitude is given). These solitons are observed with almost no deformation at least over two or three consecutive probes. To automatically detect the presence of envelope solitons within the temporal signal, we use a Hilbert transform and a thresholding method. The local maxima of the signal envelope are then detected and compared with the theoretical soliton profile, the fit being considered successful when the correlation is better than 80%. The widths  $L_{sol}$  of the solitons detected within a single temporal signal are shown in Fig. 5(left) as a function of their maximum amplitude  $A_{sol}$ . We found that the taller the soliton is, the narrower it is, with the data being well described by the NLSE prediction of Eq. (9) with no fitting parameter.

Figure 5(right) shows the number  $N_{sol}$  of detected envelope solitons as a function of the dimensionless distance  $x/L_{nl}$  for different nonlinearity-to-dispersion ratios  $\tau$ . Regardless of this value,  $N_{sol}$  is found to increase with the distance, showing thus that solitons are not present within the forcing, but emerge from the evolutions of wave packets during their propagation. Fewer solitons are detected as  $\tau$  increases since the wave steepness  $\epsilon_\eta$  has to be weak enough for the NLSE to be valid. Note that ten solitons are typically detected within a temporal signal, corresponding thus to a cumulated duration of 4% of the latter.



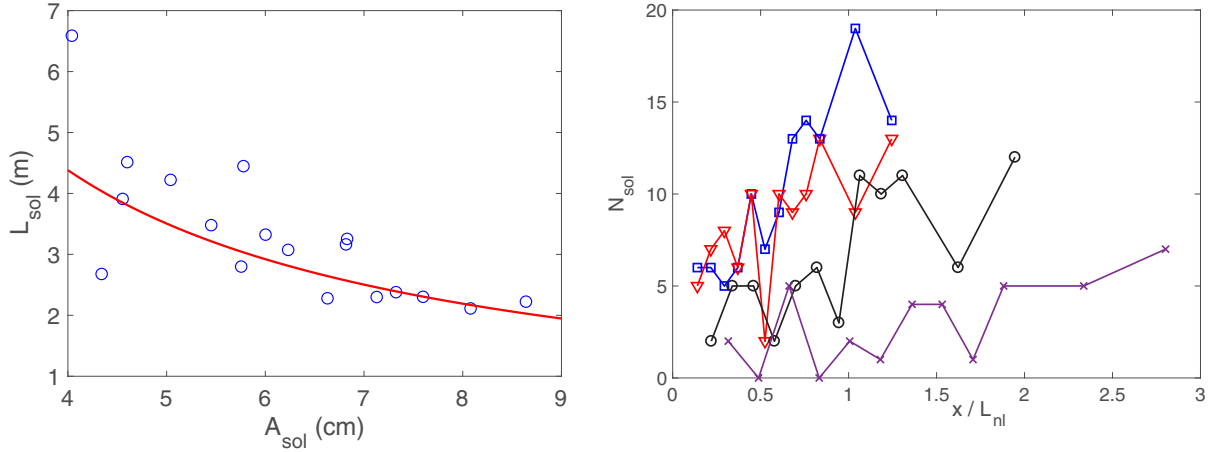


FIG. 5. Left: Full width (at half maximum) of detected solitons as a function of their maximum amplitude,  $A_{\text{sol}}$ .  $x = 29.8$  m.  $\tau = 0.55$  ( $\epsilon_\eta = 0.1$ ,  $\Delta f = 0.16$  Hz). (—) Theoretical prediction from Eq. (9) with no fitting parameter. Right: Number of detected solitons as a function of the dimensionless distance  $x/L_{nl}$  for different ratios  $\tau = (\square)$  0.30 ( $\epsilon_\eta = 0.08$ ,  $\Delta f = 0.24$  Hz), ( $\nabla$ ) 0.44 ( $\epsilon_\eta = 0.08$ ,  $\Delta f = 0.16$  Hz), ( $\circ$ ) 0.55 ( $\epsilon_\eta = 0.1$ ,  $\Delta f = 0.16$  Hz), and ( $\times$ ) 0.65 ( $\epsilon_\eta = 0.12$ ,  $\Delta f = 0.16$  Hz).

Another type of solitonic structure may appear in our time series. Indeed, Fig. 6(right) shows a pulse with a profile in good agreement with the Peregrine soliton of Eq. (10), both for its phase and envelope, with no fitting parameter (once its maximum amplitude is given). Although occurring much more rarely than the envelope soliton in our time series, this structure similar to a Peregrine breather can be observed on a single probe emerging spontaneously from the noisy background. This structure, localized in time and space, is naturally not visible close to the wavemaker [see Fig. 6(left)]. Once it has been observed [see Fig. 6(right)], its amplitude recorded at the next probe decreases significantly. A signature of the Peregrine soliton is the  $\pi$  jump of its phase across the zero amplitude domains separating the “wings” and the central lobe of the Peregrine soliton [66]. We indeed report in Fig. 6(right) this characteristic  $\pi$ -phase jump at times where the amplitude falls to zero. As far as we know, this striking signature of the Peregrine soliton has been reported only in

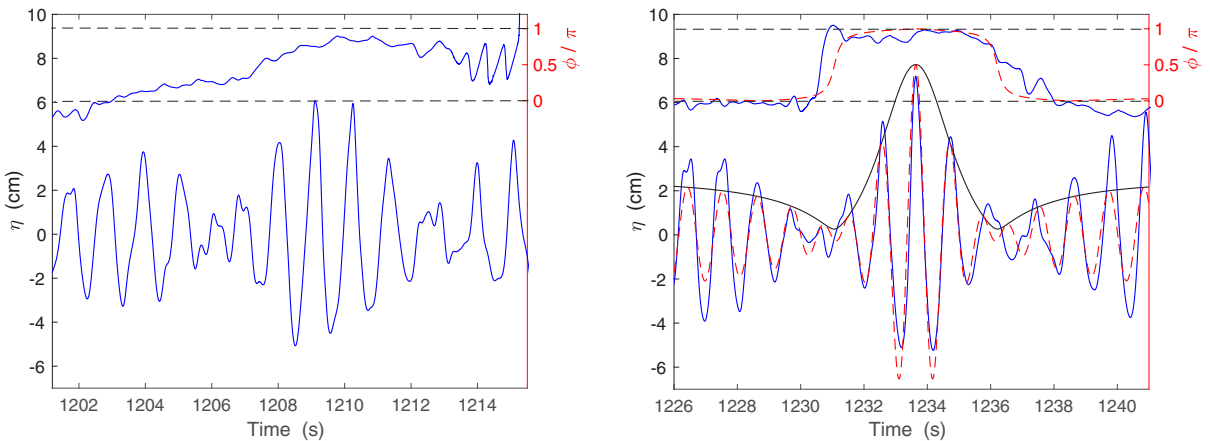


FIG. 6. Left: Wave height signal recorded close to the wavemaker at the first probe ( $x = 3.4$  m).  $\tau = 0.3$  ( $\epsilon_\eta = 0.08$ ,  $\Delta f = 0.24$  Hz). Top: Rescaled phase  $\phi/\pi$  of the signal. Right: Same part of the signal recorded at the second last probe ( $x = 24.9$  m) showing a structure similar to a Peregrine soliton. Theoretical temporal profile (---) and envelope (—) of a Peregrine soliton from Eq. (10) with  $f_0 = 0.9$  Hz,  $x = 0$ , and  $k_0 A_p = \epsilon_\eta$ . Top: (—) Rescaled phase of the signal showing a  $\pi$  jump at times where the envelope falls to zero as predicted (---) by Eq. (10).

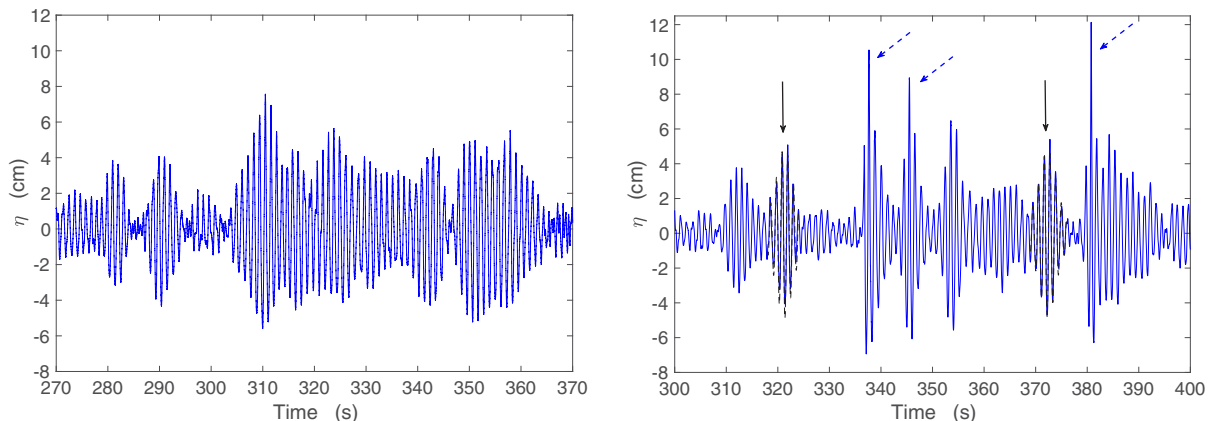


FIG. 7. Left: Wave height signal recorded close to the wavemaker at the first probe ( $x = 3.4$  m).  $\tau = 0.55$  ( $\epsilon_\eta = 0.1$ ,  $\Delta f = 0.16$  Hz). Right: Same part of the signal recorded at the last probe ( $x = 29.8$  m) showing coexistence of two envelope solitons (see full arrows) and three extreme events (see dashed arrows). (---) Theoretical shape of the soliton from Eq. (8).

optics [66], but not for water waves. In hydrodynamics, the Peregrine breather was observed when the wavemaker is forced by deterministic initial conditions (i.e., injecting the asymptotic Peregrine solution [50,67,68] that can be perturbed by an applied wind [69]), by a periodic forcing (Stokes wave field) randomly noised [70], or with a forcing consisting in the Peregrine solution embedded in a stochastic wave field [71]. To our knowledge, the emergence of a Peregrine soliton occurring from a fully stochastic forcing, as observed here, has been reported only in optics [17,18]. It is clear that further detailed investigations are needed to fully characterize this emerging localized structure, e.g., performing nonlinear spectral analysis [72], and to track it in a longer basin to reach a statistical quantification of its evolution and occurrences.

In the future, a local IST processing will be applied to our time series to precisely identify and classify the different types of coherent structures [73]. Note that other methods could be applied to find hierarchic solutions of the NLSE such as the direct method (Hirota method), the Bäcklund transformations, or the Darboux transformations [74,75].

Let us now have a look at the temporal evolution of the wave height, recorded at the first and the last probes, in the reference frame moving with the group velocity  $c_g$ . Close to the wavemaker [Fig. 7(left)], the wave amplitude is slowly modulated, leading to wave trains of erratic amplitudes and widths. Far from the wavemaker, steep events of large amplitude have emerged (see dashed arrows) as well as envelope solitons (see solid arrows) well described by the prediction of Eq. (8).

## B. Extreme events

We characterize now the extreme events detected above. By zooming in on such a structure as in Fig. 8(left), one observes a very steep gravity wave front of very high amplitude [more than  $6\sigma_\eta$  here]. This very steep propagative pulse followed by a slow decrease of the envelope, is thus highly asymmetrical with respect to time. This observation is magnified by superimposing on the same figure the wave local slope  $d\eta/dt$  [computed from the differential of  $\eta(t)$ ]. It shows an intense and short peak occurring on the forward face of the wave close to the maximum. After the main peak, a radiative tail follows over typically 5 to 10 periods. These steep events are found to occur randomly in the signal and have erratic amplitudes (see below). The short oscillations of very small amplitudes visible on the wave slope signal is an experimental artifact due to the probe mechanical resonance ( $\sim 20$  Hz) after the passage of the front. Finally, note that for high enough wave steepnesses ( $\epsilon_\eta \geq 0.12$ ), less than 10% of extreme events correspond to the early stage of gentle spilling breakers (the formation of a bulge in the profile on the forward face of the wave) [76,77]. However, most of the results presented here are related to the dynamics of wave train steepening and solitons,

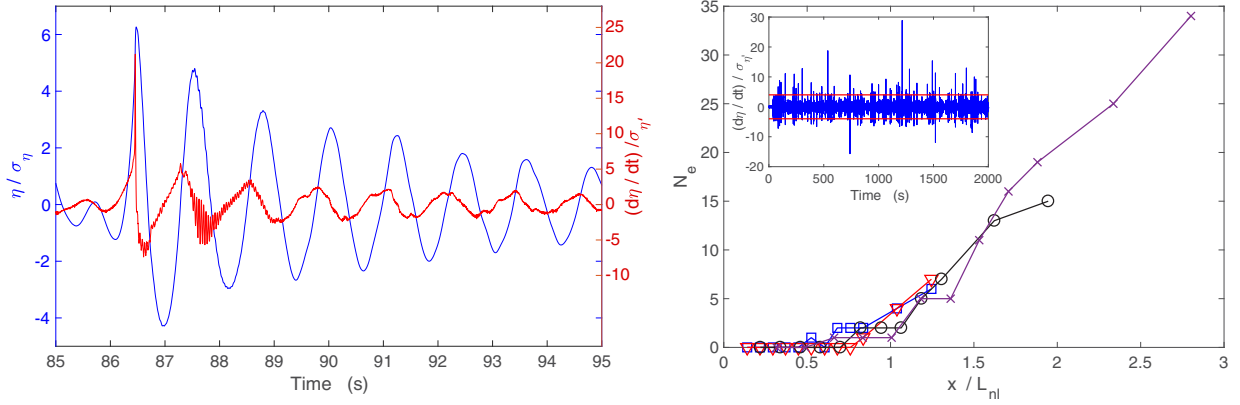


FIG. 8. Left: A typical extreme event as function of time at  $x = 29.8$  m. The wavefront is the left-hand side. The normalized wave height  $\eta(t)/\sigma_\eta$  is on the left-hand-side axis, and the normalized wave local slope  $(d\eta/dt)/\sigma_\eta$  is on the right-hand-side axis.  $\tau = 0.44$  ( $\epsilon_\eta = 0.08$ ,  $\Delta f = 0.16$  Hz).  $\sigma_\eta = 2.1$  cm. Right: Number  $N_e$  of extreme events detected as a function of the dimensionless distance  $x/L_{nl}$  for different ratios  $\tau$  (same symbols as in Fig. 5). Inset: Typical temporal signal of the wave local slope for  $\tau = 0.65$  ( $\epsilon_\eta = 0.12$ ,  $\Delta f = 0.16$  Hz) at  $x = 29.8$  m. Solid lines correspond to  $\pm 4\sigma_{d\eta/dt}$ .

for which dispersion and nonlinearity are of the same order of magnitude and weak enough to be described by the NLSE.

In order to quantify the number of extreme events, we arbitrary choose a criterion on the local wave slope,  $|d\eta/dt| > 4\sigma_{d\eta/dt}$ , instead of the usual one on the amplitude ( $4\sigma_\eta$  or twice the significant wave height). Indeed, we want to characterize quantitatively the extreme events with very steep fronts, such as the one in Fig. 7(left), that contribute significantly to the high frequency part of the wave spectrum (see below). Note that 100% of these detected events have an amplitude larger than  $3\sigma_\eta$ , and 70% to 85% (depending on the forcing parameters) larger than  $4\sigma_\eta$ . As shown in the inset of Fig. 8(right), peaks of very high amplitudes occur randomly in the wave slope signal, most of them being larger than  $\pm 4\sigma_{d\eta/dt}$ . Typically, the cumulated duration of these extreme events is 10% of the signal duration. The number  $N_e$  of extreme events detected with this thresholding method is shown in Fig. 8(right) as a function of the distance for different nonlinearity-to-dispersion ratios  $\tau$ .  $N_e$  is found to increase from zero with the distance, showing thus that these extreme events result from the steepening and merging of the wave trains during their propagation.  $N_e$  is also found to be independent of  $\tau$  within our range, when rescaling the propagating distance  $x$  by the nonlinear length scale  $L_{nl}$ , based on the NLSE. The onset of occurrence of such steep coherent structures seems thus to be well described by the NLSE. Moreover,  $N_e$  increases linearly with this rescaled distance once the wave field has propagated more than roughly one nonlinear propagation length scale. Finally, we checked that the same qualitative results are found when varying the above thresholding criterion in the range  $(\pm 3\sigma_{d\eta/dt}, \pm 6\sigma_{d\eta/dt})$ .

### C. Wave spectrum

When dispersive and nonlinear effects are of the same order of magnitude, the above experimental results show the presence of solitons (solutions of the NLSE), emerging from the initial random forcing conditions, as well as strong steepening of some wave train fronts, both coherent structures occurring randomly in the incoherent wave field. To quantify the spectral content of such an erratic signal  $\eta(t)$  as displayed in the top inset of Fig. 9, we compute its time-frequency spectrum  $S_\eta(f, t)$ . To wit, a short-time Fourier transform of  $\eta(t)$  is computed by fast-Fourier transforms of overlapping windowed signal segments (using the Spectrogram function from MATLAB software). The wave spectrum is thus reached at each time over a short time interval. The wave spectrum as a function of time and frequency is shown in Fig. 9. As expected, its main contributions are related to the random forcing band near  $f_0$  and its corresponding harmonics ( $nf_0$  with  $n = 2$  and

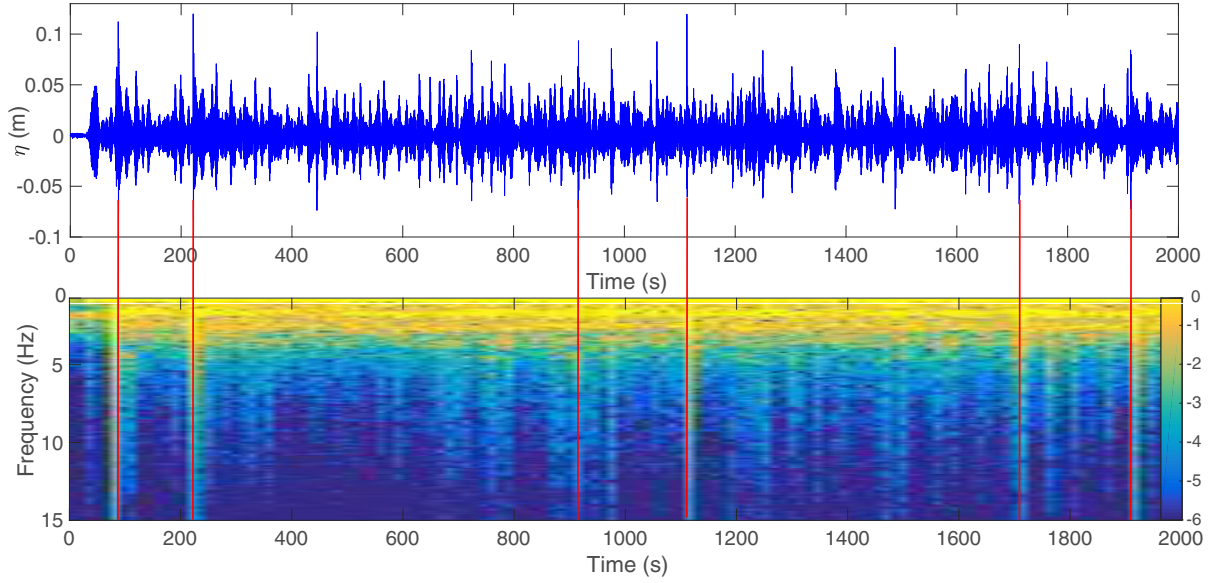


FIG. 9. Top: Temporal wave height signal for  $\tau = 0.44$  ( $\epsilon_\eta = 0.08$ ,  $\Delta f = 0.16$  Hz).  $x = 29.8$  m. Bottom: Time-frequency spectrum  $S_\eta(f, t)$  of the corresponding wave height  $\eta(t)$ . The color bar is a logarithmic scale of the spectrum amplitude. Large amplitude events of the wave signal correspond to maxima of the spectrum at high frequencies (see solid lines).

3). More interesting is the spectral signature of extreme events. Each intense peak within the wave signal gives a continuous high frequency contribution to the spectrum. Some of these similarities are emphasized by solid lines in Fig. 9. Extreme events thus contain high frequencies due to their steep profile.

Figure 10(left) shows the spectra averaged over time of a wave field recorded at the first probe, close to the wavemaker, and also at the last probe far from the wavemaker [see insets of Fig. 10(left)]. Here again, close to the wavemaker, a discrete spectrum with main contributions related to the forcing domain near  $f_0$  and its corresponding harmonics ( $nf_0$  visible up to  $n = 5$ ). Far

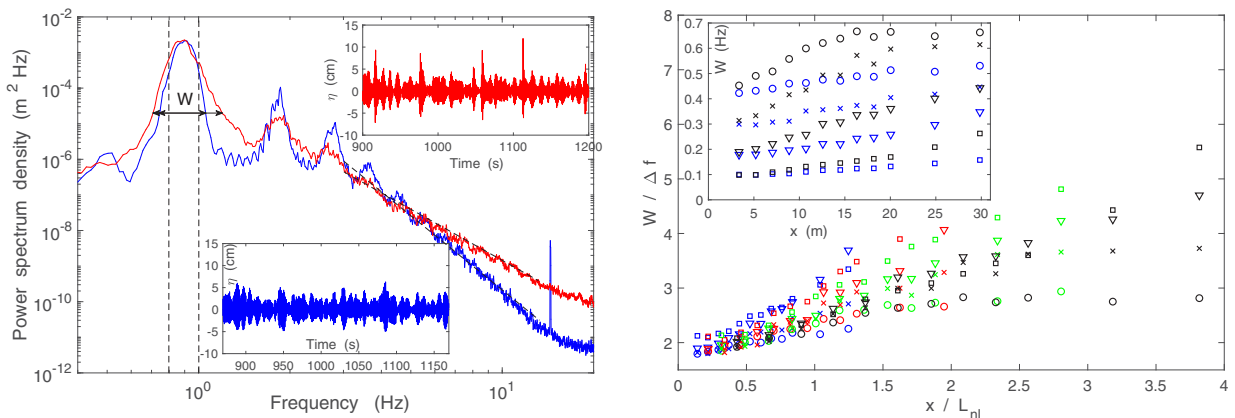


FIG. 10. Left: Power spectrum density of  $\eta(t)$  recorded close to [ $x = 3.4$  m (blue)] and far from [ $x = 29.8$  m (red)] the wavemaker. Dashed lines have slopes  $\alpha = -6.4$  (blue) and  $\alpha = -4.5$  (red).  $\tau = 0.44$ . Vertical dashed lines correspond to theoretical satellites of the Benjamin-Feir instability,  $\pm c_g K_c / (2\pi) \simeq \pm 0.1$  Hz. Inset: show the corresponding temporal wave height signals close to (bottom) and far from (top) the wavemaker. Right: Dimensionless width  $W/\Delta f$  of the main peak of the spectrum (at one hundredth of its maximum amplitude) as a function of  $x/L_{nl}$ .  $\Delta f = (\circ) 0.1$ ,  $(\times) 0.07$ ,  $(\nabla) 0.04$ , and  $(\square) 0.02$  Hz.  $\epsilon_\eta =$  (blue) 0.08, (red) 0.1, (green) 0.12, (black) 0.14. Inset: Unrescaled curve  $W$  vs  $x$ . Same symbols as in the main figure.

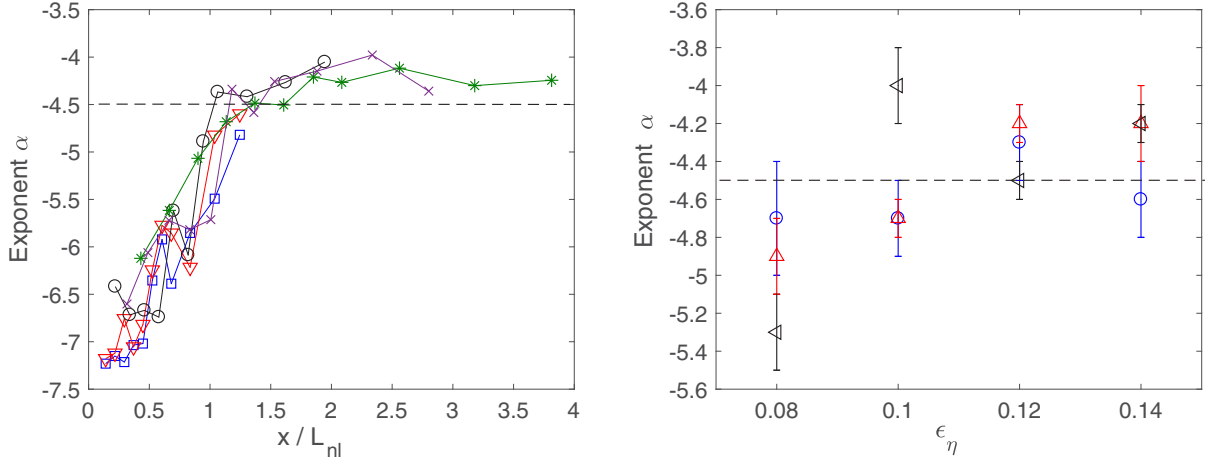


FIG. 11. Left: Exponent  $\alpha$  of the wave spectrum in  $f^\alpha$  as a function of dimensionless distance  $x/L_{nl}$  for different ratios  $\tau$  (same symbols as in Fig. 5). Right: Exponent  $\alpha$  as a function of the wave steepness for different modulation bandwidths  $\Delta f = 0.09$  ( $\circ$ ),  $0.16$  ( $\triangle$ ),  $0.24$  ( $\diamond$ ) Hz at  $x/L_{nl} > 1.2$ . Dashed lines show the 1D wave turbulent prediction  $-9/2$ .

from the wavemaker, the high frequency components of the spectrum, as well as frequency domains between successive harmonics, have strongly increased, to the detriment of harmonics amplitudes. It thus leads to a monotonic spectrum that is found to decrease as a frequency power law of the form  $f^{-4.5}$ . Extreme events emerging during the propagation [see top inset of Fig. 10(left)] thus populate the high frequencies of the spectrum. Consequently, far enough from the wavemaker ( $x/L_{nl} > 1.5$ ), nonlinear effects are sufficient to generate extreme events (resulting from the front steepening) that significantly contribute to the building of the high frequency part of the spectrum. Indeed, steep extreme events are known to be rich in harmonics. In the low-frequency part, the spectrum develops a visible asymmetry and a broadening of the main peak near  $f_0$  with the propagation distance, as also observed in Ref. [26]. Indeed, the width  $W$  of the main peak increases linearly with the distance  $x$  as shown in the inset of Fig. 10(right). These data roughly collapse on a single curve by plotting the dimensionless width  $W/\Delta f$  vs the dimensionless distance  $x/L_{nl}$  [see Fig. 10(right)]. This broadening is known to be well described by the NLSE, in contrast to the asymmetry that is captured by a higher (fourth) order extension of the NLSE (Dysthe model) to account for finite spectrum width [27].

Let us now further characterize the high-frequency part of the spectrum. A frequency-power law spectrum  $\sim f^\alpha$  is observed regardless the values of our parameters ( $\epsilon_\eta$  and  $\Delta f$ ) except for a too slow modulation ( $\Delta f \leq 0.05$ ). The evolution of the spectrum exponent  $\alpha$  with the distance for different  $\tau$  ratios is shown in Fig. 11(left).  $\alpha$  is found to be independent of  $\tau$  in this range of parameters, when rescaling the propagating distance  $x$  by the nonlinear length scale  $L_{nl}$ , based on the NLSE. At short distances, random steepenings of wave trains and solitons do not have enough time to emerge in the wave field, and the high frequency part of the spectrum is very steep in order to connect the noise level. When the wave field propagates over more than one and a half times the nonlinear propagation length scale ( $x/L_{nl} > 1.5$ ), the exponent is roughly found to be constant near  $\alpha \simeq -4.2$  as a result of the wave steepening as underlined above. Note that this power-law spectrum could be also ascribed as a signature of a 1D gravity wave turbulence phenomenon. Indeed, the prediction of 1D unidirectional gravity wave turbulence is  $\alpha = -9/2$  [78–80]. However, the use of a beach as an efficient damping mechanism inhibits the occurrence of resonant interactions driven by reflected waves. Moreover, the carrier wave propagates during roughly 40 periods until it reaches the beach, which is too short to develop nonlinear interactions required by wave turbulence. Besides, the high-frequency part of the experimental spectrum has been shown above to be a consequence of the strong steepening of wave trains that are not taken into account by either weak turbulence or by the NLSE. Indeed, the numerical spectrum of a 1D random wave field described by the NLSE

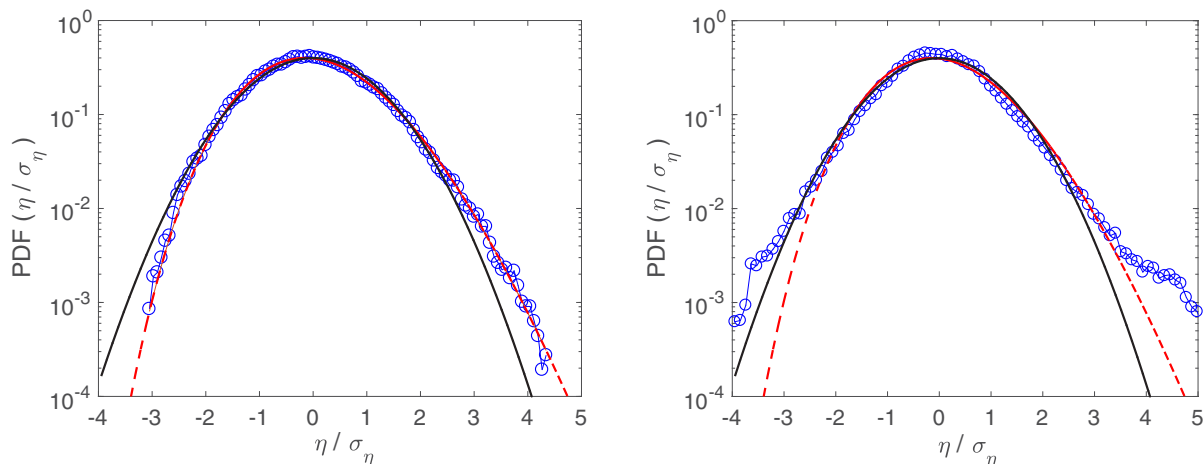


FIG. 12. Probability density function (PDF) of normalized wave height  $\eta/\sigma_\eta$  recorded at the first (left) and last (right) probes ( $x = 3.4$  m and  $x = 29.8$  m, respectively).  $\tau = 0.55$  ( $\epsilon_\eta = 0.1$ ,  $\Delta f = 0.16$  Hz). Solid lines display a Gaussian of zero mean and unit standard deviation. Dashed lines show a Tayfun distribution for a wave steepness of 0.1.

is exponential near the carrier frequency and display peaks near its harmonics [27]. Here, the 1D random wave field has a continuous power-law spectrum. The detected extreme events resulting from strong wave steepening carry intrinsically numerous harmonics. The observed power-law scaling thus arises probably from the slow random frequency modulation of the harmonics (bound waves) of the wave field, that is known to generate a continuous power-law spectrum between  $f^{-5}$  and  $f^{-4}$  [81]. In a limit case, if the extreme events tend to display very sharp wave crests (cusps), and are assumed to propagate without deformation (i.e.,  $\omega \sim k$ ), the spectrum of such singularities is predicted to scale as  $f^{-4}$  [82], not far from the experimental results. Finally, the exponent  $\alpha$  is shown in Fig. 11(right) as a function of the forcing strength (the initial wave steepness  $\epsilon_\eta$ ).  $\alpha$  is found to be roughly constant,  $-5 < \alpha < 4$ , with respect to  $\epsilon_\eta$  within the experimental estimation accuracy, showing thus its independence from  $\epsilon_\eta$  for our range. To sum up, this power-law spectrum not described by the NLSE arises probably from the random modulation of the harmonics (bound waves) of the carrier wave.

#### D. Wave field statistics

The statistical properties of wave fields in integrable turbulence governed by the focusing NLSE have been experimentally studied recently in optics, and show the emergence of heavy-tailed statistics [12,17,18]. In hydrodynamics, non-Gaussian wave statistics have been observed experimentally during the propagation of unidirectional gravity waves forced with random initial conditions in a deep water regime [25–29], as predicted theoretically by using the NLSE with random initial forcing [30]. However, it has not been related to the integrable turbulence in the hydrodynamics case. Here, we discuss the wave field statistics obtained in our experiment.

Figure 12 shows the typical probability density function (PDF) of normalized wave height  $\eta/\sigma_\eta$ , recorded at the first and last probes. Close to the wavemaker, the PDF is found to be asymmetric since large crests are more probable than deep troughs as a consequence of the nonlinear effects that are well described by the Tayfun distribution (the first nonlinear correction to a Gaussian) [83] (see dashed lines). This PDF asymmetry is routinely observed in laboratory experiments [25,84] and in oceanography [85]. Far from the wavemaker, the PDF departs from the Tayfun distribution near  $3\sigma_\eta$ , meaning that high amplitude events are more probable. Such a heavy-tailed distribution was already reported experimentally [24–28] and could be related to rogue wave formation in ocean [25,31,33–36].

In optics, the statistics of the power fluctuations of light are measured (i.e., the square of the wave envelope) instead of the wave displacement. To be able to compare with these results, we compute

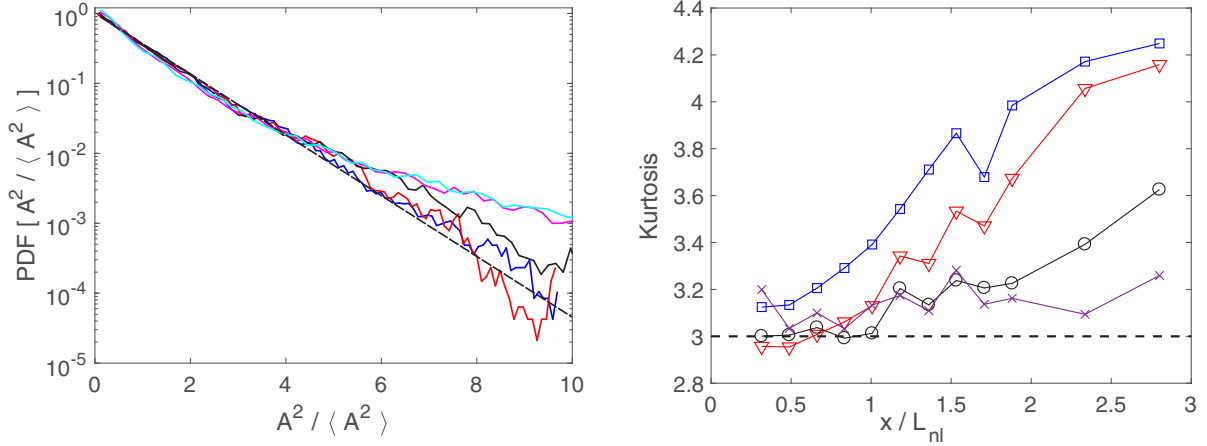


FIG. 13. Left: Probability density function (PDF) of the square of the wave envelope,  $A^2/\langle A^2 \rangle$ , at different distances  $x/L_{nl} = 0.22, 0.58, 0.82, 1.62,$  and  $1.94$  (from bottom to top).  $L_{nl} = 15.34$  m.  $\tau = 0.55$  ( $\epsilon_\eta = 0.1$ ,  $\Delta f = 0.16$  Hz). Dashed line: Exponential (Rayleigh) distribution. Right: Kurtosis of  $\eta(t)$  as a function of the dimensionless distance  $x/L_{nl}$  for constant  $\epsilon_\eta = 0.12$  and different  $\Delta f = 0.05$  ( $\times$ ),  $0.09$  ( $\circ$ ),  $0.16$  ( $\nabla$ ), and  $0.24$  Hz ( $\square$ ) (i.e.,  $\tau = 2.29, 1.15, 0.65,$  and  $0.46$  respectively). The dashed line displays Gaussian value ( $K = 3$ ).

the Hilbert transform of  $\eta(t)$  to obtain the envelope  $A(t)$ . Note that if the statistics of random independent fluctuations, say  $\eta(t)$ , follows a normal law, then an exponential (Rayleigh) distribution results for the wave envelope  $A(t) = |\eta(t)|$  or for the “power”  $A^2$  [86]. The PDF of the square of the wave envelope,  $A^2/\langle A^2 \rangle$ , is plotted in Fig. 13(left) at different propagation distances.  $\langle \cdot \rangle$  stands for a temporal average. As the wave field moves away from the wavemaker, the PDFs evolve from an exponential distribution (plotted as a dashed line) to a heavy-tailed distribution. For instance, power fluctuations ten times greater than the mean power have a probability, far from the wavemaker, 30 times greater than that close to the wavemaker. More precisely, we find that for  $x/L_{nl} > 1.6$  the wave system reaches a statistical stationary state in which the PDF no longer changes with distance [see the top two curves in Fig. 13(left)], the power spectrum of waves being also independent of the distance [see Fig. 11(left)]. Similar results for the distance independent PDF have been observed in experiments with optics fibers governed by the focusing NLSE (7) as well as in numerical simulations of this equation in the context of integrable turbulence [12,17,18]. This statistical stationary state is stated to be determined by the interaction of coherent nonlinear structures [12]. However, the mechanisms in integrable turbulence that lead to the establishment of this stationary state with such statistical properties independent of distance (or time) are an open question.

We compute now the skewness,  $S \equiv \langle \eta^3 \rangle / \langle \eta^2 \rangle^{3/2}$ , and the kurtosis,  $K \equiv \langle \eta^4 \rangle / \langle \eta^2 \rangle^2$ , of the wave height statistics, quantifying its asymmetry and its flatness, respectively. For a Gaussian distribution, one has  $S = 0$  and  $K = 3$ . At small distance,  $S$  is nonzero, confirming the asymmetry observed on the PDFs. This asymmetry  $S \simeq 0.3$  is found to be roughly constant regardless of the propagation distance  $x$  and the nonlinearity-to-dispersion ratio  $\tau$ . Figure 13(right) shows the Kurtosis as a function of the dimensionless distance  $x/L_{nl}$  for different modulation bandwidths  $\Delta f$  (i.e., different  $\tau$ ) at fixed initial steepness  $\epsilon_\eta$ . Consistently with the PDF observations,  $K$  is found to increase with the distance regardless of the forcing parameters [either increasing  $\Delta f$  or  $\epsilon_\eta$  (not shown here) and keeping the other one constant]. Similar observations have been done in Ref. [25].  $K$  increases strongly once one nonlinear propagation distance is reached. This is consistent with the fact that, during the wave propagation, more and more coherent structures (such as strong steepening of the wave trains) are generated [see Fig. 8(right)] and interact with the residual random wave field. However, when the nonlinearity-to-dispersion ratio  $\tau$  is of the order of 0.5–0.6 (a value for which solitons and extreme events coexist [see Fig. 4(left)]), a beginning of saturation of  $K$  is observed with distance for  $x/L_{nl} > 2$  [see the top curves in Fig. 13(right)]. This regime in which

statistical properties of waves become independent of the distance is consistent with the above PDF observations, and is also in agreement with experiments performed in a much longer basin showing that the NLSE reproduces well this kurtosis behavior [26,27,29]. The most efficient initial condition of the random wave field to form a sea state with numerous and intense extreme events (i.e., large  $K$ ) is thus a weak enough (but finite) dispersion (i.e., dimensionless spectral width) of the order of twice the nonlinearity (steepness) of the wave field.

## VI. CONCLUSION

In nonlinear physics, when nonlinearity is comparable to or exceeds dispersion, different structures may appear, such as conservative (like solitons) or dissipative structures resulting from finite-time singularities of the nondissipative equations (such as shocks or wave-breaking) [87]. Identifying such structures and the role they play in determining different stationary statistical states remains to be investigated in most turbulent systems.

Here, we report the experimental observation of a statistical state for unidirectional propagation of gravity waves in a deep water regime where coherent structures coexist with smaller stochastic waves. Such a state is predicted theoretically by NLSE integrable turbulence [11], but had never been observed before in this context. The nonlinearity ( $\epsilon_\eta$ ) and dispersion ( $\Delta\omega/\omega_0$ ) are controllable in our experiment, and are chosen to be similar in order to observe solitons governed by the NLSE. The nonlinearity-to-dispersion ratio  $\tau \equiv \epsilon_\eta/(\Delta\omega/\omega_0)$  is varied from 0.3 to 2.6. We have characterized the emergence, the properties, and the evolution of these nonlinear coherent structures (solitons and extreme events) within the incoherent wave background. The emergence of extreme events resulting from the strong steepening of wave train fronts occurs after roughly one nonlinear length scale of propagation (estimated from the NLSE). Envelope solitons and Peregrine solitons are also observed emerging from the stochastic background. Solitons arise when nonlinearity and dispersion are weak (but finite), and of the same order of magnitude, as expected from the NLSE. The numbers of envelope solitons and extreme events are found to increase all along the propagation. When the nonlinear distance of propagation is reached, the wave spectrum is found to scale at high frequencies as  $\omega^{-4.5 \pm 0.5}$ . This scaling is robust regardless of the variation of our parameter ranges. Although, this spectrum scaling could be compatible with the prediction of 1D gravity wave turbulence in  $\omega^{-9/2}$  [78–80], the transfer mechanism toward small scales is not due to wave interactions, but is shown in the spectrogram to be ascribed to the strong wave steepening leading to the presence of extreme events. Since the latter carry numerous harmonics, this power-law scaling arises probably from the slow random frequency modulation of the harmonics (bound waves) of the wave field that is known to generate a continuous power-law spectrum between  $\omega^{-5}$  and  $\omega^{-4}$  [81]. In a limit case, if these extreme events tend toward 1D singular coherent structures, their spectrum is predicted to scale as  $\omega^{-4}$  [82]. The wave field statistics is also reported, revealing a heavy-tailed distribution that becomes independent of the distance after few nonlinear length scales of propagation. To sum up, most of these observations are compatible with the integrable turbulence theory for the NLSE, but some deviations are also observed (e.g., the power-law spectrum) related to the strongly asymmetrical extreme events that exist in hydrodynamics. This hydrodynamics system is thus a good candidate to question the departure from the integrable turbulence theory in real systems (e.g., how the coherent structures close to integrability are deformed by bound waves). In the future, we plan to apply a local IST processing to identify and classify the different types of coherent structures in our time series and their respective contributions to integrable turbulence [73].

## ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the French National Research Agency (ANR DYSTURB Project No. ANR-17-CE30-0004). We thank S. Randoux and P. Suret for fruitful discussions.



- [1] E. Falcon, Laboratory experiments on wave turbulence, *Discrete Contin. Dyn. Syst. B* **13**, 819 (2010).
- [2] V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence* (Springer, Berlin, 1992).
- [3] S. Nazarenko, *Wave Turbulence* (Springer, Berlin, 2011).
- [4] A. C. Newell and B. Rumpf, Wave turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **43**, 59 (2011).
- [5] K. Hasselmann, On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum Part 1. General theory, *J. Fluid Mech.* **12**, 481 (1962).
- [6] D. J. Benney and A. C. Newell, The propagation of non-linear wave envelopes, *J. Math. Phys.* **46**, 363 (1967).
- [7] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko, Energy spectrum for stochastic oscillations of the surface of liquid, *Sov. Phys. Dokl.* **11**, 881 (1967).
- [8] *Advances in Wave Turbulence*, edited by V. Shrira and S. Nazarenko, World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, Vol. 83 (World Scientific, Singapore, 2013).
- [9] G. Michel, F. Pétrélis, and S. Fauve, Observation of Thermal Equilibrium in Capillary Wave Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 144502 (2017).
- [10] V. E. Zakharov, Kinetic equations for solitons, *Sov. Phys. JETP* **33**, 538 (1971).
- [11] V. E. Zakharov, Turbulence in integrable systems, *Stud. Appl. Math.* **122**, 219 (2009).
- [12] S. Randoux, P. Walczak, M. Onorato, and P. Suret, Nonlinear random optical waves: Integrable turbulence, rogue waves and intermittency, *Physica D* **333**, 323 (2016).
- [13] A. S. Kingsep, L. I. Rudakov, and R. N. Sudan, Spectra of Strong Langmuir Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 1482 (1973).
- [14] A. Schwache and F. Mitschke, Properties of an optical soliton gas, *Phys. Rev. E* **55**, 7720 (1997); F. Mitsche, I. Halam, and A. Schwache, Soliton gas, *Chaos Solitons Fractals* **10**, 913 (1999).
- [15] S. Randoux, P. Walczak, M. Onorato, and P. Suret, Intermittency in Integrable Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 113902 (2014).
- [16] S. Toenger, T. Godin, C. Billet, F. Dias, M. Erkintalo, G. Genty, and J. M. Dudley, Emergent rogue wave structures and statistics in spontaneous modulation instability, *Sci. Rep.* **5**, 10380 (2015).
- [17] P. Walczak, S. Randoux, and P. Suret, Optical Rogue Waves in Integrable Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 143903 (2015).
- [18] P. Suret, R. El Koussaifi, A. Tikan, C. Evain, S. Randoux, C. Szwaj, and S. Bielawski, Single-shot observation of optical rogue waves in integrable turbulence using time microscopy, *Nat. Commun.* **7**, 13136 (2016).
- [19] A. Chabchoub, O. Kimmoun, H. Branger, N. Hoffmann, D. Proment, M. Onorato, and N. Akhmediev, Experimental Observation of Dark Solitons on the Surface of Water, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 124101 (2013).
- [20] A. R. Osborne, Behavior of Solitons in Random-Function Solutions of the Periodic Korteweg–de Vries Equation, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3115 (1993).
- [21] A. R. Osborne, E. Segre, G. Boffetta, and L. Cavaleri, Soliton Basis States in Shallow-Water Ocean Surface Waves, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 592 (1991).
- [22] A. Costa, A. R. Osborne, D. T. Resio, S. Alessio, E. Chrivì, E. Saggese, K. Bellomo, and C. E. Long, Soliton Turbulence in Shallow Water Ocean Surface Waves, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 108501 (2014).
- [23] S. Perrard, L. Deike, C. Duchêne, and C. T. Pham, Capillary solitons on a levitated medium, *Phys. Rev. E* **92**, 011002(R) (2015).
- [24] R. Hassaini, and N. Mordant, Transition from weak wave turbulence to soliton gas, *Phys. Rev. Fluids* **2**, 094803 (2017).
- [25] M. Onorato, A. R. Osborne, M. Serio, L. Cavaleri, C. Brandini, and C. T. Stansberg, Observation of strongly non-Gaussian statistics for random sea surface gravity waves in wave flume experiments, *Phys. Rev. E* **70**, 067302 (2004); M. Onorato, A. Osborne, M. Serio, and L. Cavaleri, Modulational instability and non-gaussian statistics in experimental random water-wave trains, *Phys. Fluids* **17**, 078101 (2005).
- [26] L. Shemer and A. Sergeeva, An experimental study of spatial evolution of statistical parameters in a unidirectional narrow-banded random wavefield, *J. Geophys. Res.* **114**, C01015 (2009).

- [27] L. Shemer, A. Sergeeva, and A. Slunyaev, Applicability of envelope model equations for simulation of narrow-spectrum unidirectional random wave field evolution: Experimental validation, *Phys. Fluids* **22**, 016601 (2010).
- [28] L. Shemer, A. Sergeeva, and D. Liberzon, Effect of the initial spectrum on the spatial evolution of statistics of unidirectional nonlinear random waves, *J. Geophys. Res.* **115**, C12039 (2010).
- [29] R. El Koussaifi, A. Tikan, A. Toffoli, S. Randoux, P. Suret, and M. Onorato, Spontaneous emergence of rogue waves in partially coherent waves: A quantitative experimental comparison between hydrodynamics and optics, *Phys. Rev. E* **97**, 012208 (2018).
- [30] P. A. E. M. Janssen, Nonlinear four-wave interactions and freak waves, *J. Phys. Oceanogr.* **33**, 863 (2003).
- [31] M. Onorato, A. R. Osborne, M. Serio, and S. Bertone, Freak Waves in Random Oceanic Sea States, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5831 (2001); M. Onorato, A. R. Osborne, and M. Serio, Extreme wave events in directional, random oceanic sea states, *Phys. Fluids* **14**, L25 (2002).
- [32] K. B. Dysthe, K. Trulsen, H. E. Krogstad, and H. Socquet-Juglard, Evolution of a narrow-band spectrum of random surface gravity waves, *J. Fluid Mech.* **478**, 1 (2003).
- [33] A. Slunyaev, Nonlinear analysis and simulations of measured freak wave time series, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25**, 621 (2006)
- [34] J. M. Soto-Crespo, N. Devine, and N. Akhmediev, Integrable Turbulence and Rogue Waves: Breathers or Solitons? *Phys. Rev. Lett.* **116**, 103901 (2016).
- [35] A. R. Osborne, M. Onorato, and M. Serio, Nonlinear Fourier analysis of deep-water, random surface waves: Theoretical formulation and experimental observations of rogue waves, in *14th Proceedings of the Hawaiian Winter Workshop, Honolulu, Hawaii*, edited by P. Müller and D. Henderson (University of Hawaii Pub., 2005).
- [36] A. L. Islas and C. M. Schober, Predicting rogue waves in random oceanic sea states, *Phys. Fluids* **17**, 031701 (2005).
- [37] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (John Wiley & Sons, New York, 1974).
- [38] M. Remoissenet, *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments*, 3rd. Ed (Springer, Berlin, 1999).
- [39] D. J. Benney and A. C. Newell, The propagation of nonlinear waves envelope, *J. Math. Phys.* **46**, 133 (1967).
- [40] V. E. Zakharov, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190 (1968).
- [41] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *Sov. Phys. JETP* **34**, 62 (1972).
- [42] H. C. Yuen and B. C. Lake, Nonlinear deep water waves: Theory and experiment, *Phys. Fluids* **18**, 956 (1975).
- [43] T. Yagi and A. Noguchi, Experimental studies on modulation instability by using nonlinear transmission lines, *Electron. Commun. Jpn. A* **59**, 1 (1976); Gyromagnetic nonlinear element and its application as a pulse-shaping transmission line, *Electron. Lett.* **13**, 683 (1977).
- [44] A. Chabchoub and R. H. J. Grimshaw, The hydrodynamic Nonlinear Schrödinger Equation: Space and time, *Fluids* **1**, 23 (2016).
- [45] D. H. Peregrine, Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions, *J. Aust. Math. Soc. Ser. B, Appl. Math.* **25**, 16 (1983).
- [46] E. Kuznetsov, Solitons in a parametrically unstable plasma, *Sov. Phys. Dokl.* **22**, 507 (1977).
- [47] Y. C. Ma, The perturbed plane-wave solutions of the cubic Schrödinger equation, *Stud. Appl. Math.* **60**, 43 (1979).
- [48] N. N. Akhmediev, V. M. Eleonskii, and N. E. Kulagin, Generation of periodic trains of picosecond pulses in an optical fiber: Exact solutions, *Sov. Phys. JETP* **62**, 894 (1985).
- [49] N. Akhmediev, V. M. Eleonskii, and N. E. Kulagin, Exact solutions of the first order of nonlinear Schrödinger equation, *Theor. Math. Phys. (USSR)* **72**, 809 (1987).
- [50] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, and N. Akhmediev, Rogue wave observation in a water wave tank, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 204502 (2011).
- [51] A. Slunyaev, G. F. Clauss, M. Klein, and M. Onorato, Simulations and experiments of short intense envelope solitons of surface water waves, *Phys. Fluids* **25**, 067105 (2013); A. Slunyaev, M. Klein, and

- G. F. Clauss, Laboratory and numerical study of intense envelope solitons of water waves: Generation, reflection from a wall, and collisions, *ibid.* **29**, 047103 (2017).
- [52] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, and J. M. Dudley, The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics, *Nat. Phys.* **6**, 790 (2010).
- [53] H. Bailung, S. K. Sharma, and Y. Nakamura, Observation of Peregrine Solitons in a Multicomponent Plasma with Negative Ions, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 255005 (2011).
- [54] Since  $\Omega/K = c_g = \omega_0/(2k_0)$ , one uses  $\Omega/\omega_0 = K/(2k_0)$  in the condition for modulation.
- [55] M. J. Lighthill, Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive systems, *J. Inst. Math. Appl.* **1**, 269 (1965).
- [56] T. B. Benjamin and J. E. Feir, The disintegration of wave trains on deep water Part 1. Theory, *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967).
- [57] B. M. Lake, H. C. Yuen, H. Rungaldier, and W. E. Ferguson, Nonlinear deep water waves: Theory and experiment. 2. Evolution of a continuous wave train, *J. Fluid Mech.* **83**, 49 (1977).
- [58] M. S. Longuet-Higgins, Modulation of the amplitude of steep wind waves, *J. Fluid Mech.* **99**, 705 (1980).
- [59] W. K. Melville, The instability and breaking of deep-water waves, *J. Fluid Mech.* **115**, 165 (1982).
- [60] M. Y. Su, Evolution of groups of gravity waves with moderate to high steepness, *Phys. Fluids* **25**, 2167 (1982).
- [61] For a Gaussian pulse,  $|A(\xi, 0)| = A_0 \exp(-\xi^2/2L_0^2)$  with  $L_0$  its half-width (at an amplitude of  $A_0/\sqrt{e}$ ), the spatial dispersion of the Gaussian wave packet at time  $T$ , governed by Eq. (7) with  $Q = 0$ , reads  $L(T) = L_0 \sqrt{1 + (T/T_{\text{lin}})^2}$  with the typical dispersion time  $T_{\text{lin}} = L_0^2/(2P)$  [38]. Although it is broadening, the pulse energy  $\int_{-\infty}^{+\infty} |A(\xi, T)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |A(\xi, 0)|^2 d\xi$  is conserved during the propagation, as well as its Gaussian shape.
- [62] A. Chabchoub, B. Kibler, C. Finot, G. Millot, M. Onorato, J. Dudley, and A. Babanin, The nonlinear Schrödinger equation and the propagation of weakly nonlinear waves in optical fibres and on the water surface, *Ann. Phys. (NY)* **361**, 490 (2015).
- [63] In the reference frame moving at the group velocity  $c_g$ , one has  $\Delta\omega = c_g \Delta k$ , with  $c_g = \omega_0/(2k_0)$  leading to  $\Delta\omega/\omega_0 = \Delta k/(2k_0)$ , and the expression of  $\text{BFI}_\omega$  from  $\text{BFI}_k$ .
- [64] F. Bonnefoy, F. Haudin, G. Michel, B. Semin, T. Humbert, S. Aumaître, M. Berhanu, and E. Falcon, Observation of resonant interactions among surface gravity waves, *J. Fluid Mech.* **805**, R3 (2016).
- [65] To be consistent with the estimate of  $T_{\text{lin}}$ , the full width at half maximum of the wave packet,  $L$ , is defined in Eq. (7) by  $2\beta/L^2 \equiv \partial^2/\partial x^2$ , with  $\beta$  depending on its shape (e.g.,  $\beta = 2 \operatorname{arcsech} 1/2$  for a sech pulse,  $\beta = 2\sqrt{2 \ln 2}$  for Gaussian). If  $L$  is the half width of a Gaussian at a  $1/\sqrt{e}$  amplitude, then  $\beta = 1$ .
- [66] A. Tikan *et al.*, Universality of the Peregrine Soliton in the Focusing Dynamics of the Cubic Nonlinear Schrödinger Equation, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 033901 (2017); A. Tikan, S. Bielawski, C. Szwej, S. Randoux, and P. Suret, Single-shot measurement of phase and amplitude by using a heterodyne time-lens system and ultrafast digital time-holography, *Nat. Photon.* **12**, 228 (2018).
- [67] L. Shemer and L. Alperovich, Peregrine breather revisited, *Phys. Fluids* **25**, 051701 (2013).
- [68] G. Dong, B. Liao, Y. Ma, and M. Perlin, Experimental investigation of Peregrine breather of gravity waves on finite water depth, *Phys. Rev. Fluids* **3**, 064801 (2018).
- [69] A. Chabchoub, N. Hoffmann, H. Branger, C. Kharif, and N. Akhmediev, Experiments on wind-perturbed rogue wave hydrodynamics using the Peregrine breather model, *Phys. Fluids* **25**, 101704 (2013).
- [70] A. Chabchoub, G. Genty, J. M. Dudley, B. Kibler, and T. Waseda, Experiments on spontaneous modulation instability in hydrodynamics, in *Proceedings of The Twenty-Seventh (2017) International Ocean and Polar Engineering Conference*, San Francisco (ISOPE, Cupertino, 2017), ISOPE-I-17-582, pp. 420–424.
- [71] A. Chabchoub, Tracking Breather Dynamics in Irregular Sea Sstate Conditions, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 144103 (2016).
- [72] S. Randoux, P. Suret, A. Chabchoub, B. Kibler, and G. El, Nonlinear spectral analysis of Peregrine solitons observed in optics and in hydrodynamic experiments, *Phys. Rev. E* **98**, 022219 (2018).
- [73] S. Randoux, P. Suret, and G. El, Inverse scattering transform analysis of rogue waves using local periodization procedure, *Sci. Rep.* **6**, 29238 (2016).

- [74] E. Infeld and G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos* (Cambridge Univ. Press, New York, 2nd ed., 2002).
- [75] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, and J. M. Soto-Crespo, Rogue waves and rational solutions of the nonlinear Schrödinger equation, [Phys. Rev. E \*\*80\*\*, 026601 \(2009\)](#).
- [76] J. H. Duncan, H. Qiao, V. Philomin, and A. Wenz, Gentle spilling breakers: Crest profile evolution, [J. Fluid Mech. \*\*379\*\*, 191 \(1999\)](#) and references therein.
- [77] E. Falcon, S. G. Roux, and C. Laroche, On the origin of intermittency in wave turbulence, [Europhys. Lett. \*\*90\*\*, 34005 \(2010\)](#).
- [78] V. Zakharov, F. Dias, and A. Pushkarev, One-dimensional wave turbulence, [Phys. Rep. \*\*398\*\*, 1 \(2004\)](#).
- [79] A. Dyachenko, Y. Lvov, and V. Zakharov, Five-wave interaction on the surface of deep fluid, [Physica D \*\*87\*\*, 233 \(1995\)](#).
- [80] C. Connaughton, S. Nazarenko, and A. C. Newell, Dimensional analysis and weak turbulence, [Physica D \*\*184\*\*, 86 \(2003\)](#).
- [81] G. Michel, B. Semin, A. Cazaubiel, F. Haudin, T. Humbert, S. Lepot, F. Bonnefoy, M. Berhanu, and E. Falcon, Self-similar gravity wave spectra resulting from the modulation of bound waves, [Phys. Rev. Fluids \*\*3\*\*, 054801 \(2018\)](#).
- [82] E. A. Kuznetsov, Turbulence spectra generated by singularities, [JETP Lett. \*\*80\*\*, 83 \(2004\)](#); S. Nazarenko, S. Lukaschuk, S. McLelland, and P. Denissenko, Statistics of surface gravity wave turbulence in the space and time domains, [J. Fluid Mech. \*\*642\*\*, 395 \(2010\)](#).
- [83] M. A. Tayfun, Narrow-band nonlinear sea waves, [J. Geophys. Res. \*\*85\*\*, 1548 \(1980\)](#).
- [84] E. Falcon, C. Laroche, and S. Fauve, Observation of Gravity-Capillary Wave Turbulence, [Phys. Rev. Lett. \*\*98\*\*, 094503 \(2007\)](#); E. Falcon and C. Laroche, Observation of depth-induced properties in wave turbulence, [Europhys. Lett. \*\*95\*\*, 34003 \(2011\)](#); B. Issenmann and E. Falcon, Gravity wave turbulence revealed by horizontal vibrations of the container, [Phys. Rev. E \*\*87\*\*, 011001\(R\) \(2013\)](#).
- [85] G. Z. J. Forristall, Wave crest distributions: Observations and second-order theory, [J. Phys. Oceanogr. \*\*30\*\*, 1931 \(2000\)](#).
- [86] M. Evans, N. Hastings, and B. Peacock, *Statistical Distributions*, 3rd ed. (John Wiley & Sons, New York, 2000).
- [87] G. Falkovich, Lecture course for the Warwick Summer School, July 2006 (unpublished).



# Conclusion



Nous nous sommes intéressés au cours de cette thèse à trois systèmes physiques non-linéaires en régime de turbulence : la turbulence hydrodynamique tridimensionnelle, la turbulence d'ondes à la surface d'un fluide et la turbulence intégrable d'ondes de gravité en eau profonde.

1. Dans la première partie, nous avons mis en place un nouveau dispositif de forçage pour la turbulence hydrodynamique. Des particules magnétiques placées dans le volume du fluide sont soumises à un champ magnétique alternatif. Nous montrons à partir d'un modèle simple et de simulations que la dynamique d'une particule dans un champ alternatif est très riche, gouvernée par une équation non intégrable dont les solutions vont du mouvement périodique au chaos. Nous étudions le champ de vitesse de l'écoulement ainsi forcé. Le forçage aléatoire en espace et en temps permet de favoriser une bonne homogénéité et une bonne isotropie du champ de vitesse dans le fluide. Nous retrouvons les principales prédictions de la théorie de Kolmogorov pour les petites échelles de la turbulence. Notamment les spectres spatiaux et temporels décroissent en loi de puissance d'exposant  $-5/3$  et la fonction de structure d'ordre deux varie en  $r^{-2/3}$ .
2. En utilisant la grande centrifugeuse de l'Agence Spatiale Européenne (ESA), nous avons réalisé des expériences de turbulence d'ondes gravito-capillaires en faisant varier la gravité effective jusqu'à 20 fois la gravité terrestre. Dans les régimes de gravité et de capillarité, nous observons des spectres en loi de puissance dont les exposants ne dépendent pas du niveau de gravité. Nous montrons que la fréquence de transition entre les deux régimes suit bien la courbe théorique attendue, elle augmente d'une décade lorsque la gravité effective est multipliée par 20. La gamme inertielle du régime de gravité est ainsi élargie. Nous avons vérifié la séparation d'échelle de temps requise par la théorie de turbulence faible expérimentalement en réalisant des expériences non-stationnaires. Nous avons montré que les modes propres grande échelle du bassin jouaient un rôle important dans la dynamique des ondes en modifiant notamment le type d'interaction non-linéaire en jeu.
3. Enfin, dans la troisième partie, nous avons étudié la propagation d'ondes aléatoires unidirectionnelles dans le grand bassin de l'École Centrale de Nantes. Des structures cohérentes émergent et coexistent avec le fond d'ondes stochastiques, comme prédit dans le cadre de la turbulence intégrable. Nous avons identifié deux types de structures : les solitons (Peregrine et enveloppe - solutions de l'équation de Schrödinger non-linéaire), et les événements extrêmes. Nous avons étudié le rôle de ces structures cohérentes dans la statistique de la turbulence intégrable. Notamment le spectre des ondes est continu en loi de puissance en  $f^{-4.5 \pm 0.5}$ , dû à la présence d'harmoniques du fondamental (ondes liées) et d'événements extrêmes.



Ces études de systèmes turbulents offrent toutes les trois des perspectives expérimentales intéressantes :

1. Les grandes échelles de la turbulence pourront être plus amplement étudiées en utilisant notre système de turbulence forcée par des particules magnétiques. On pourra notamment faire varier les différents paramètres de forçage, en particulier la taille des particules magnétiques pour élargir la gamme des grandes échelles. Des études en régime instationnaire en déclin pourront également être menées.
2. Les grandes échelles de la turbulence sont aussi peu abordées expérimentalement. La cascade inverse de turbulence d'ondes de gravité vient d'être observée pour la première fois en grand bassin [1]. Des structures non-linéaires dissipatives provoquent la saturation de cette dernière. Un environnement de haute gravité permettrait d'étudier la cascade inverse dans un bassin plus petit où des mesures spatiales du champ d'ondes pourraient être mises en place afin de caractériser les structures non-linéaires impliquées dans la saturation de la cascade inverse.
3. Finalement, étudier la propagation d'un train d'ondes aléatoires unidirectionnel débouchant dans un environnement bidimensionnel permettrait de caractériser comment lorsque les interactions résonantes deviennent possibles, un champ d'ondes peut passer d'un régime de turbulence intégrable à un régime de turbulence d'ondes.

# Annexe



# Comportement des milieux granulaires en impesanteur

Durant cette thèse, j'ai participé au projet VIPGRAN (Vibration Induced Phenomena in Granular matter), une collaboration internationale financée par l'Agence Spatiale Européenne (ESA) pour étudier les milieux granulaires en micro-gravité.

L'instrument conçu pour cette étude a été décrit dans l'article [7] publié dans *Review of Scientific Instruments* et reproduit ci-dessous. Ce dispositif expérimental modulable et complètement automatisé a été conçu pour étudier des milieux granulaires vibrés en 2D et en 3D dans des environnements de basse gravité tel que les vols paraboliques depuis 2015 ou la station spatiale internationale (ISS), pour fin 2022. J'ai réalisé deux campagnes de vols en micro-gravité dans l'avion Zero-G de Novespace (en avril 2017 et en mai 2018), et participé à différentes réunions en amont de ces expériences (Bordeaux mars 2017, Paris avril 2018 et Liège février 2019) ainsi qu'à une formation préalable sur l'instrument à Modène (Italie). Grâce à un dispositif d'injection de billes (« bead feeder »), l'instrument permet d'effectuer des expériences sur une large gamme de fraction volumique granulaire d'un régime dilué à un régime dense (jusqu'à 60%). Le milieu granulaire est forcé par deux parois mobiles opposées auxquelles peuvent être imposées des stimuli sélectionnés (sinusoïdes, impulsion unique, rampe quasistatique, ...). Deux caméras permettent de filmer le système dans deux plans perpendiculaires. Des accéléromètres et des capteurs d'impact sont placés sur les parois mobiles. Les paramètres de contrôle des expériences sont le volume de la cellule, le nombre de particules, l'amplitude et la fréquence du forçage appliqué. Notre dispositif nous permet d'examiner de nombreuses questions ouvertes en lien avec les gaz granulaires, la ségrégation, la convection et le transport de grains en basse gravité [7] (voir <https://spacegrains.org/>).

Un milieu granulaire fortement excité subit une transition d'une phase gazeuse à un amas lorsqu'on augmente la densité des particules. Grâce à cet instrument, l'origine de la transition du régime « gazeux » au régime d'amas de particules a été expliquée [8]. Ces résultats ont été publiés dans *Europhysics Letters* et reproduit ci-dessous. Nous avons mis en évidence trois régimes dynamiques différents : gaz granulaire, amas et amas rebondissant. En faisant varier les paramètres dans une très large gamme, nous avons pu obtenir le diagramme de phase expérimental des différents régimes en très bon accord avec le modèle théorique [8].

**Article publié dans *Review of Scientific Instruments***

## An instrument for studying granular media in low-gravity environment

S. Aumaître,<sup>1,2</sup> R. P. Behringer,<sup>3</sup> A. Cazaubiel,<sup>4</sup> E. Clément,<sup>5</sup> J. Crassous,<sup>6</sup> D. J. Durian,<sup>7</sup> E. Falcon,<sup>4,a)</sup> S. Fauve,<sup>8</sup> D. Fischer,<sup>9</sup> A. Garcimartín,<sup>10</sup> Y. Garrabos,<sup>11</sup> M. Hou,<sup>12</sup> X. Jia,<sup>13</sup> C. Lecoutre,<sup>11</sup> S. Luding,<sup>14</sup> D. Maza,<sup>10</sup> M. Noirhomme,<sup>15</sup> E. Opsomer,<sup>15,b)</sup> F. Palencia,<sup>11</sup> T. Pöschel,<sup>16</sup> J. Schockmel,<sup>15</sup> M. Sperl,<sup>17</sup> R. Stannarius,<sup>9</sup> N. Vandewalle,<sup>15,c)</sup> and P. Yu<sup>14</sup>

<sup>1</sup>*SPEC, DSM, CEA-Saclay, CNRS URA 2464, F-91191 Gif-sur-Yvette, France*

<sup>2</sup>*Laboratoire de Physique, ENS Lyon, UMR-CNRS 5672, F-69007 Lyon, France*

<sup>3</sup>*Department of Physics, Duke University, Durham, North Carolina 27708-0305, USA*

<sup>4</sup>*Université Paris Diderot, SPC, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75013 Paris, France*

<sup>5</sup>*PMMH, ESPCI, UMR 7636 CNRS, F-75005 Paris, France*

<sup>6</sup>*Université Rennes 1, IPR, UMR 6251 CNRS, F-35042 Rennes, France*

<sup>7</sup>*University of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania 19104-6396, USA*

<sup>8</sup>*École Normale Supérieure, LPS, CNRS, UMR 8550, F-75005 Paris, France*

<sup>9</sup>*IEP, Otto von Guericke Universität, D-39106 Magdeburg, Germany*

<sup>10</sup>*DFMA, Universidad de Navarra, E-31080 Pamplona, Spain*

<sup>11</sup>*CNRS, ICMCB, Université de Bordeaux, UMR 5026, F-33600 Pessac, France*

<sup>12</sup>*Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*

<sup>13</sup>*Institut Langevin, ESPCI Paris, PSL, CNRS, F-75005 Paris, France*

<sup>14</sup>*MSM, University of Twente, 7500 AE Enschede, The Netherlands*

<sup>15</sup>*GRASP, Institute of Physics B5a, University of Liège, B-4000 Liège, Belgium*

<sup>16</sup>*Friedrich-Alexander Universität, IMS, D-91052 Erlangen, Germany*

<sup>17</sup>*Institut für Materialphysik im Weltraum, DLR, D-51170 Köln, Germany*

(Received 9 April 2018; accepted 12 June 2018; published online 5 July 2018)

A new experimental facility has been designed and constructed to study driven granular media in a low-gravity environment. This versatile instrument, fully automatized, with a modular design based on several interchangeable experimental cells, allows us to investigate research topics ranging from dilute to dense regimes of granular media such as granular gas, segregation, convection, sound propagation, jamming, and rheology—all without the disturbance by gravitational stresses active on Earth. Here, we present the main parameters, protocols, and performance characteristics of the instrument. The current scientific objectives are then briefly described and, as a proof of concept, some first selected results obtained in low gravity during parabolic flight campaigns are presented. *Published by AIP Publishing.* <https://doi.org/10.1063/1.5034061>

### I. INTRODUCTION

Granular systems belong to a particular class of materials since grains may exhibit solid, fluid, or gaseous behaviors. Although nearly 80% of the products used in industry are powders and grains, many fundamental questions concerning their rheology and their dynamics are still unsolved.<sup>1</sup> Space exploration (such as regolith on asteroid surfaces, powder propellants of rockets, or planetary rings dynamics) and space exploitation (such as asteroid mining) will also face major challenges concerning the handling of granular materials in low-gravity environments.<sup>2–4</sup> For example, nobody knows how to perform a simple operation like sieving in space, whereas several month efforts failed to free NASA's Mars Exploration Rover Spirit from a Martian sand trap in 2010. Therefore, it is of primary interest to better understand the flow and the dynamics of granular media in low-gravity conditions.

On Earth, when granular matter is subjected to vibrations, liquid-like behavior occurs such as convective flow<sup>5</sup> or surface

waves.<sup>6</sup> For strong enough forcing, gas-like behavior, with particular modes of momentum and energy transport,<sup>7</sup> arises where particles move erratically in response to the vibrations and the dissipative nature of collisions. When the density of particles increases within such a granular gas, the formation of a dense cluster of particles is observed due to inelastic collisions.<sup>8–10</sup> This cluster formation constitutes one of the most astonishing properties of granular matter under vibrations. When the forcing is stopped, numerical simulations have shown the formation of density gradients during the cooling (instability of the homogeneous cooling state)<sup>11</sup> as well as inelastic collapse (particles undergoing an infinite number of collisions in finite time).<sup>12</sup> However, several phenomena occurring on Earth (such as sedimentation, convection, and confinement pressure due to the weight of grains) disappear in low gravity, thus leading to strongly different behavior for granular matter.

Generally, ground based experiments are perturbed by anisotropy induced by gravity and by the friction force which acts on all the particles and which is far from being negligible. A low-gravity environment is, thus, needed for dilute regimes of vibrated granular medium because it is the only way to achieve an experimental situation in which inelastic collisions are the only interaction mechanism. First,

<sup>a)</sup>Electronic mail: [eric.falcon@univ-paris-diderot.fr](mailto:eric.falcon@univ-paris-diderot.fr)

<sup>b)</sup>Electronic mail: [eric.opsomer@uliege.be](mailto:eric.opsomer@uliege.be)

<sup>c)</sup>Electronic mail: [nvandewalle@uliege.be](mailto:nvandewalle@uliege.be)

experiments investigating the dynamics of these granular gases were conducted in the late nineties on a MiniTexus sounding rocket.<sup>9</sup> More recently, gases of rod-shaped particles have been studied on a REXUS flight<sup>13</sup> and in the ZARM Drop Tower in Bremen.<sup>14</sup> For dense regimes, a low-gravity environment is also needed to better understand the rheology,<sup>15</sup> sound propagation,<sup>16</sup> and jamming transition<sup>17</sup> of dense granular media without confinement pressure of grains due to their own weight.

In order to address fundamental questions and potential applications regarding grains in a low-gravity environment, in 2011, the European Space Agency (ESA) created a Topical Team<sup>18</sup> on the subject. Its objective is to perform unique measurements on granular gas, convection, segregation, sound propagation, and jamming in granular materials subjected to vibrations without the symmetry breaking influence of gravity. In collaboration with DTM Technologies™ (Modena, Italy), the Topical Team designed the VIP-Gran-PF instrument (short for Vibration-Induced Phenomena in Granular Matter in Parabolic Flights) whose modular design allows us to investigate both dilute and dense granular regimes.

This paper is organized as follows. Section II describes the experimental instrument and its performance. Section III presents the current scientific objectives and, as a proof of concept, some selected results obtained with this facility during four ESA parabolic flight campaigns (PFCs) onboard a modified Airbus A310 Zero-G aircraft. Finally, we draw our conclusions and perspectives in Sec. IV.

## II. INSTRUMENT DESCRIPTION AND PERFORMANCE

The setup of the VIP-Gran instrument is displayed in Fig. 1. The basic principle of the experiment consists of a closed cell containing particles, in which two opposite walls of the cell are pistons vibrating either in-phase or out-of-phase motions. Control parameters are the number of particles, the cell length (volume), the amplitude, and the frequency of vibrations. Different interchangeable cells can be used depending on the scientific objective. Accelerometers are screwed in the shaft of each vibrating piston. Impact sensors are also implemented to measure the collision statistics of particles impacting on the pistons. Two cameras allow quantitative measurements including particle tracking in dilute regimes and correlations between particle displacements.

We describe below in detail the five major components of the setup: (A) interchangeable experimental cells to be filled with granular material; (B) a bead feeder that allows adding particles into the cells during the experiment; (C) the driving mechanism that allows the energy injection, the control of the volume, and the confining pressure; (D) the accelerometers and impact sensors; and (E) two high resolution speed cameras to capture relevant data during the experiments and the illuminations.

### A. Experimental cells

An experimental cell is a closed cuboidal container of  $60 \times 30 \times h$  mm<sup>3</sup> that can be filled by granular material

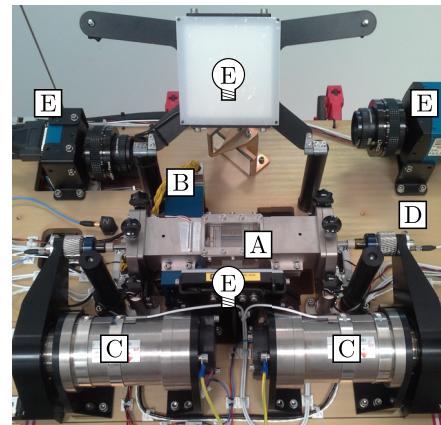
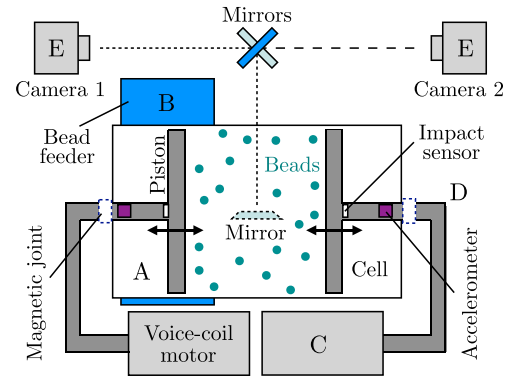


FIG. 1. For letters A, B, C, D, and E, refer to the main text. Top: Sketch (top view) of the VIP-Gran instrument. Two opposite walls, driven by voice coil motors, inject mechanical energy into the experimental cell containing a granular medium. Two cameras track grains or visualize the system from the bottom and from the side. Accelerometers and impact sensors are mounted on the shafts of the pistons respectively to control the energy injection in the system and to measure the collision statistics of the granular medium with the pistons. Bottom: Picture of the instrument built by DTM Technologies for parabolic flight experiments.

(spherical and/or aspherical particles). The top, bottom, and lateral sides of the cells are made of transparent polycarbonate, 8 mm in thickness. The two opposite walls of the cell are connected magnetically to linear voice-coil motors and act as pistons. The average distance,  $L$ , between the pistons can be adjusted in order to control the accessible volume of the system. Initially, a three-dimensional (3D) container ( $h = 30$  mm) and a quasi two-dimensional (2D) container ( $h = 5$  mm) were developed. A sketch describing these cells is given in Figs. 2(a) and 2(b). Different modifications can be applied to the cells in order to conduct particular experiments. For instance, placing additional walls within the container, as in Figs. 2(c) and 2(d), to create compartments can lead to trapping. Changing the curvature, or the roughness, of the pistons as in Figs. 2(e) and 2(f) can modify the energy injection into the system. Different physical phenomena and properties can then be investigated in low gravity within specific interchangeable cells: the out-of-equilibrium stationary states of diluted granular medium in cells (a) and (b), handling of grains in cells (c) and (d), rheology in a cell (e) or sound propagation in granular media under weak applied confinement in a modified cell (a), and behaviors of the rheology of wet grains in a sealed cell (f). Some cells, such as (e) and (f), are in development. Therefore, we limit

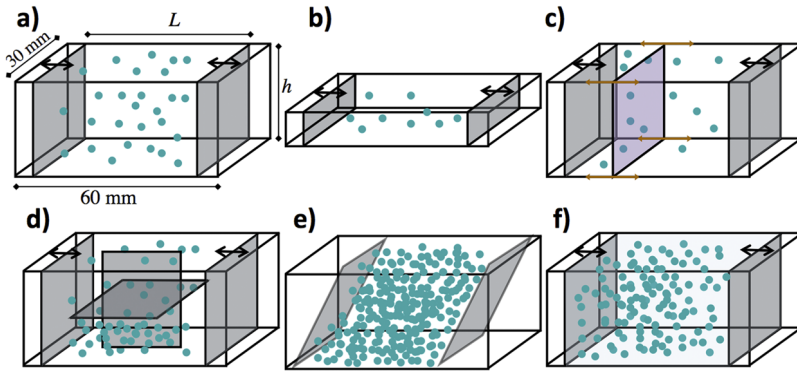


FIG. 2. Sketches of the experimental cells used in VIP-Gran-PF. Parameter  $L$  is tunable, thanks to the two mobile gray walls that act as pistons. The height  $h$  is 30 mm for 3D cells and 5 mm in the case of the quasi 2D cells: (a) 3D cell, (b) quasi-2D cell, (c) 3D cell with a free moving wall, (d) 3D partitioned cell, (e) 3D shear cell, and (f) 3D wet cell. Cells can easily be exchanged, thanks to a magnetic joint connection with the kinematic chain (see Fig. 1).

the discussion herein below to the use of the 3D cell (a) and the quasi 2D one (b).

## B. Bead feeder

The experimental cells described in Sec. II A can be filled by spherical particles of different materials (bronze, steel, aluminum, glass, polyamide, etc.) and different diameters; see Table I. Moreover, cylindrical steel rods were also tested. Granular matter can either be placed directly into the cells before the experiment or be injected into them during the experimental runs using the bead feeder (see Fig. 3). The barrel of the bead feeder is divided into eight chambers, each able to contain either 1000 small (1 mm) or 250 large (2 mm) spherical particles. Thanks to a motorized linear rail slide system, each chamber can be positioned in front of the entry hole of the experimental cell. A piston then injects the particles. Note that the bead feeder does not allow extracting grains which means that, to start over again with new initial filling conditions, the cell has to be exchanged.

## C. Driving mechanism

Two opposite walls of the cell are vibrating pistons (see Fig. 1). They are moved by using two linear voice-coil motors driven by a selected vibration stimulus (sine, single-pulse, quasi-static ramp, etc.). The forcing amplitude,  $A$ , of the piston is in the range [0.2, 25] mm (peak-to-peak), and its forcing frequency,  $f$ , in the range [1, 50] Hz. Note that the piston acceleration is limited to  $5g$  ( $g$  being the acceleration of Earth

gravity), meaning that some  $A, f$  combinations are not possible. For sine vibrations, pistons can oscillate either in-phase or out-of-phase. Both pistons are controlled in displacement with an accuracy of  $10 \mu\text{m}$  at an acquisition rate of 1000 Hz. Since the vibrating walls of each cell are connected to the linear motors via magnetic joints mounted on both shafts (see Fig. 1), the cells can be changed on the instrument. A cooling fan is positioned on the back of each motor to keep the temperature constant.

## D. Sensors and acquisition

Several sensors are installed in the instrument: accelerometers, impact sensors, linear positioning sensors, and temperature sensors. The two mono-axial accelerometers are screwed into the shaft of each vibrating piston to measure the piston's accelerations (8 kHz sampling frequency). One triaxial accelerometer is fixed on the breadboard, far away from the cell, in order to measure the ambient acceleration in response to the aircraft motions (1 kHz sampling rate). For 3D cells, the impact sensors are rectangular-shaped piezoelectric films mounted behind each vibrating piston, their axis being collinear with the vibration axis. Thanks to a 2 MHz sampling rate, each sensor is able to resolve the collision of a bead impacting on the piston wall. Such a contact lasts a few microseconds since the typical velocity of beads is of the order of few m/s at most. The two linear sensors for controlling the piston displacements are acquired at a 3 MHz sampling rate. Four temperature sensors are used to detect, at

TABLE I. Table of the experimental parameters of the VIP-Gran instrument. In each row, the description and the typical range of values are given for the different parameters. Note that  $L$  and  $h$  are defined in Fig. 2(a).

Symbol	Description	Value
$N$	Number of particles	...
$R$	Radius of the particles	1–5 mm
$L$	Distance between pistons	2–60 mm
$h$	Height of the cell	5 or 30 mm
$V$	Volume of the system	0.3–54 cm <sup>3</sup>
$\phi$	Packing fraction	0%–60%
$A$	Amplitudes of pistons	0–5 mm
$f$	Frequencies of pistons	0–50 Hz
$\varphi$	Phase shifts of pistons	0– $\pi$

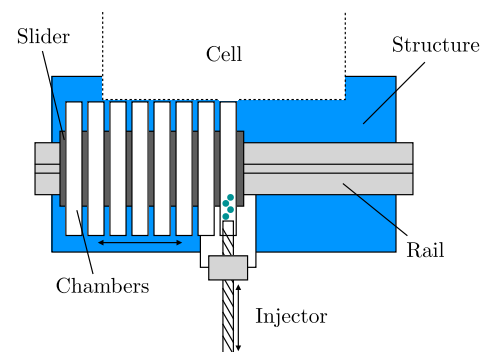


FIG. 3. Sketch of the bead feeder located below the cell. This device is used for the controlled injection of additional granular material into an experimental cell. It corresponds to letter B in Fig. 1.



a 1 Hz sampling rate, any abnormal overheating of the experiment cell, of each linear motors, and of the ambient air, to be able to promptly switch off the motors in order to cool them down. The onboard workstation, data acquisition system (interfaced by National Instruments cards), and electronics thus enable, for each parabola, high-frequency acquisitions of both video images and sensor signals as well as programming the required experiment profiles (piston frequency and amplitude and oscillation type). The time-tagging of acceleration data and impact force sensor data is synchronized with image acquisition and piston displacement (with a precision of  $10^{-6}$  s).

### E. Video cameras and illuminations

The instrument enables the observation of the experiment by means of two high-speed cameras of frame 1000 fps with a resolution of  $1024 \times 1024$  pixels (Mikrotron EoSens 4CXP). The camera frame rate can be chosen down to 1 fps if low-speed acquisition is needed notably for experiments regarding dense regime. Observations are made in two perpendicular directions, perpendicular to the vibration axis. This corresponds to a bottom observation and a side-view observation in Fig. 1. The depth of field is selectable, whereas the field of view covers the full cell during vibrations. At full rates and resolution, 1.4 TBytes of video data are recorded by using both cameras during 31 parabolas (22 s each) of each flight. For each observation direction, the cell is illuminated from the back, corresponding to the two sides perpendicular to the field of view (see Figs. 1 and 4). Note that illuminator 2 on the top of Fig. 1 should be located on the top of the cell but has been turned over to enable the picture. In this open position, this illuminator masks the mirrors to obtain the required optical path between the cameras and the cell (see the top view of Fig. 1). Each illumination is individually switchable, and its intensity adjustable. The light from the light-emitting diode (LED) is diffused and uniform along all field of view. Straight light coming from outside the

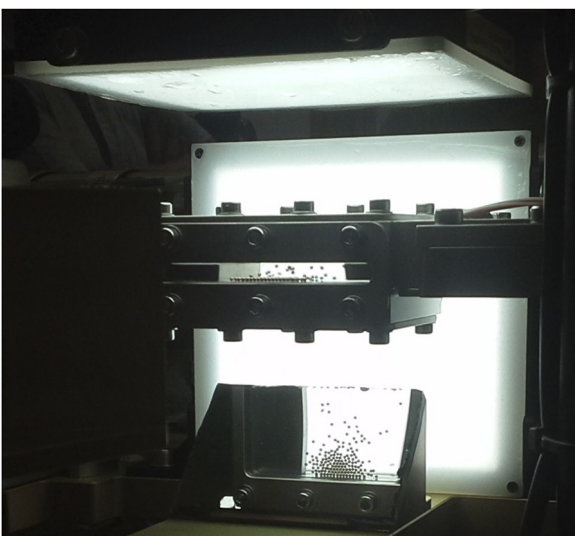


FIG. 4. Snapshot of the quasi-two-dimensional cell in front of the diffuse LED illumination (this image was taken on Earth). On the bottom, one can see the mirror enabling to take pictures from the bottom angle.

instrument, reflections on cell glass walls, and bright spots on particles are minimized. We can select which illumination and which camera should be activated (one of them or both).

### F. Experimental rack in the aircraft

A photo of the experimental rack mounted in the aircraft is displayed in Fig. 5. The rack is made of the Bosch Rexroth aluminum profiles, and the instrument baseplate is made of aluminum. The total mass of the experimental rack is 176 kg (100 kg for the payload, 76 kg for the structure). The rack dimensions are  $1.1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  and 0.67 m in height. Reinforcement bars of the rack in the aircraft main direction and in the perpendicular direction would resist in the case of a hard landing of 9g and 3g, respectively.

### G. Low-gravity conditions

The VIP-Gran-PF instrument was used during five ESA Parabolic Flight Campaigns (PFC63 to PFC67) from November 2015 to November 2017. The first PFC has been dedicated to the testing of the instrument and the other ones to scientific issues. A low-gravity environment (about  $\pm 5 \times 10^{-2}g$ ) is repetitively achieved by flying with the specially modified

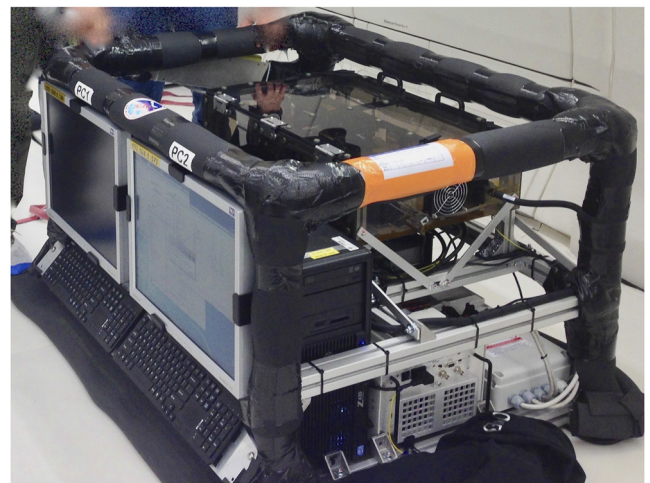
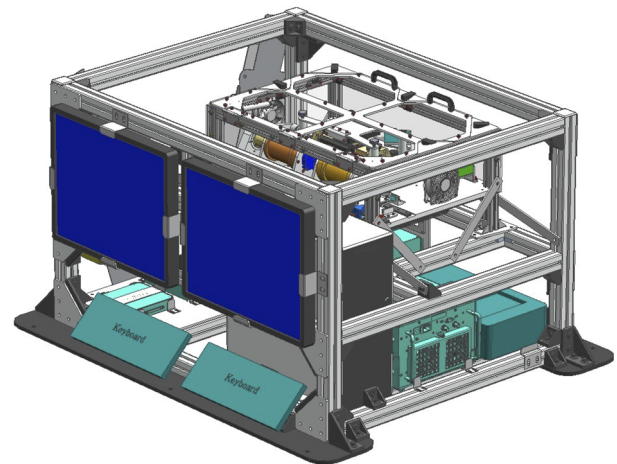


FIG. 5. Top: Drawing of the instrument rack by DTM Technologies. Bottom: Picture of the rack onboard the aircraft.

Airbus A310 Zero-G aircraft of Novespace<sup>19</sup> through a series of parabolic trajectories which result in low-gravity periods, each of 22 s. A flight campaign lasts 3 days with 31 low-gravity parabolas per day.

## H. Experimental parameters

Different experiments are performed with various forcing parameters and filling (the number of beads and/or the type of bead). Since the grains cannot be removed automatically from the cell, the different experiments should be classified according to increasing filling parameters. An overview of all relevant experimental parameters for the performed experiments can be found in Table I.

## III. SCIENTIFIC APPLICATIONS

The VIP-Gran-PF instrument is used since mid-2015. A wide variety of experimental situations can be studied in low-gravity conditions from dilute granular systems to dense assemblies. Several fundamental questions are notably addressed as follows:

- (1) How a granular gas (which is intrinsically dissipative due to inelastic collisions) deviates from the elastic limit of an ideal gas when dissipation increases?
- (2) What is the phase diagram of dynamical states of such an out-of-equilibrium dissipative gas?
- (3) What is the segregation mechanism in granular media composed of two types of particle species in low gravity?
- (4) What is the behavior of a granular medium near the jamming transition (transition from fluid to solid) without confinement pressure of grains due to their own weight?
- (5) How does sound propagate in dense granular media under low confining pressure (i.e., lower than the one provided by gravity near unjamming)?
- (6) Does a dense granular medium display large-scale convection-like dynamics, like on Earth, when subjected to a thermal gradient-like forcing (i.e., two vibrating walls with different velocities)?

Some of these questions have been addressed in numerical studies but never performed in experiments. Valuable experimental data will therefore be collected, for the first time ever, with the VIP-Gran instrument.

Since these open questions concern different experimental topics, numbers of particles, protocols, and time scales, different interchangeable cells are used to address them. As a proof of concept of the instrument, we will describe below some selected results obtained with this facility during ESA parabolic flight campaigns: (A) granular gas dynamics, (B) clustering, and (C) segregation, convection, and transport.

### A. Granular gas dynamics

A granular gas displays striking properties compared to molecular gas: cluster formation at high enough density,<sup>8,9</sup>

anomalous scalings of pressure<sup>8</sup> and collision frequency,<sup>20</sup> and non-Gaussian distribution of particle velocity.<sup>10,21</sup> These differences are mainly ascribed to the dissipation occurring during inelastic collisions between particles. Continuous injection of energy is thus necessary to sustain a stationary state in this dissipative out-of-equilibrium system. This is usually performed experimentally by vibrating a container wall or the whole container. For such a boundary-forced system, the particle velocity distribution is not Gaussian as for an ideal gas, but a stretched exponential, and is density dependent.<sup>21</sup> However, a spatially homogeneous forcing of a dilute granular gas leads to several major experimental differences (no cluster formation, exponential tail of the velocity distribution independent of the density).<sup>22</sup>

Here, we study with the VIP-Gran facility the analog of the dynamics of Brownian particles moving in thermalized fluids. To wit, we placed three large intruders in a driven granular gas of smaller beads that act as a surrounding fluid (see Fig. 6). Experiments were carried out in the quasi 2D cell in order to allow an easy tracking of the intruders by using the cameras. Thanks to image processing, we followed the

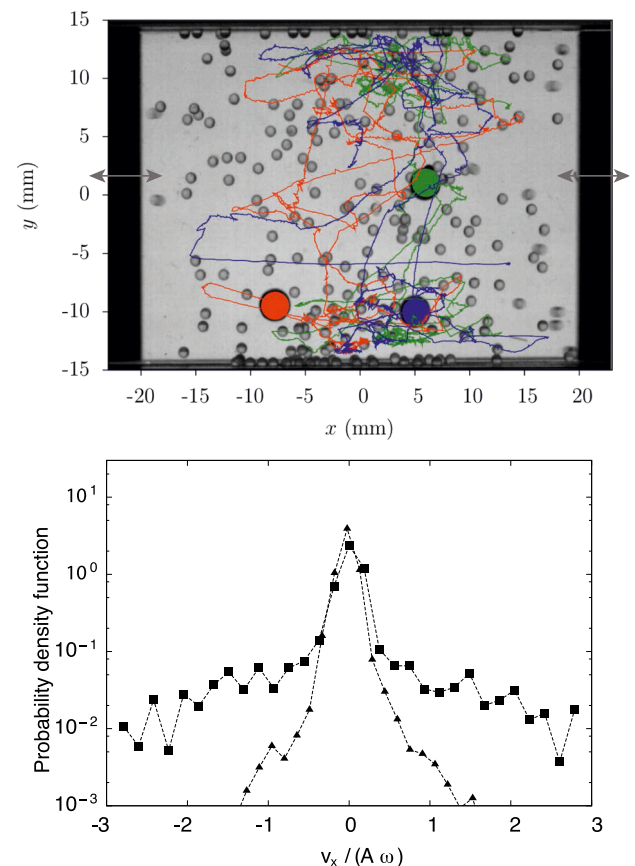


FIG. 6. Top: View of three large aluminum particles (5 mm in diameter, 176.6 mg in mass) immersed in a surrounding gas of thermalized small glass beads (1 mm in diameter, 4.08 mg in mass) in the quasi 2D cell. Both pistons (left and right black parts) vibrate sinusoidally in phase opposition. Each large particle is highlighted in a color (either orange, blue, or green), as well as its respective trajectories. Bottom: PDF of the normalized velocities (along the  $x$  axis) of the intruders for (■) low and (▲) high numbers of small particles ( $N_s = 50$  and  $N_s = 300$ , respectively). Snapshot is taken from parabolic flight campaign ESA PFC66. Parameter range of the experiment:  $f = 15$  Hz,  $A = 5$  mm, packing fraction of small particles  $\phi \in [1\%, 2.5\%]$ , and  $L = 45$  mm.

motion of the large particles for different numbers of small ones and different driving parameters. Figure 6 displays the trajectories of the three intruders obtained with our tracking. We then infer the mean square displacements of the intruders and the Probability Density Function (PDF) of their velocities  $v_x$  along the  $x$  axis normalized by the piston velocity  $A\omega$  (with  $\omega = 2\pi f$ ). We observe a non-Gaussian distribution with heavy tails for high velocities. This tail vanishes as the number of small particles increases due to the dynamical confinement of large particles by small ones. In another set of experiments, we experimentally study how a granular gas deviates from the quasi-elastic limit (ideal gas) when dissipation increases in the system. One way to do that is to increase the volume of the container at a constant particle density all things being equal, as it was shown numerically.<sup>23</sup> By varying some parameters of the experiment (particle number and volume of the cell), one observes how the granular system deviates or tends to the quasi-elastic limit (not shown here).

## B. Granular clustering

The transition from a gaseous regime to a cluster of particles for a high enough density has been evidenced in a low-gravity experiment almost 20 years ago.<sup>9</sup> Numerical simulations have then reproduced this observation with the same parameters as in the experiment.<sup>24</sup> However, the parameters triggering this transition are far to be fully understood. By comparing the propagation time between two collisions and the relaxation time due to dissipative collisions, a 2D theoretical model based on an energetic approach predicts the marginal curve of the phase diagram separating gas- and solid-like regimes.<sup>25</sup> Here, with the VIP-Gran facility, we study the clustering transition in 3D to obtain the full experimental phase diagram and to compare it with the predictions. Control parameters are the number of beads  $N$ , the mean distance  $L$  between vibrating pistons, the amplitude  $A$ , and frequency  $f$  of the

forcing. The packing fraction is then defined as  $\phi = N\mathcal{V}_g/V \sim N/L$ , where  $\mathcal{V}_g$  is the volume of a single grain and  $V$  the cell volume. Different parabolic flight campaigns have been performed to cover the whole range of parameters. By means of the two perpendicular fields of view, and of image processing, the local density of particles and their velocities have been inferred in the 3D cell. As an example, Fig. 7 shows snapshots taken during PFC63 and PFC64. As one can see, starting from a gaseous regime, a cluster can be triggered by either increasing the packing fraction  $\phi$  for a fixed volume (left column) or by increasing the volume for a fixed value of  $\phi$  (right column). A regime of gas is discriminated from a cluster regime when the density distribution on both fields of view is found to be uniform (gas) or nonuniform (cluster). Moreover, from all the PFC data, we have obtained the full experimental phase diagram (not shown here). It is found to be well described by the model,<sup>25</sup> except for strongly diluted and dense cases where additional phenomena are observed. The corresponding data will be deeply described elsewhere.

Another set of experiments performed within our facility concerns aspherical particle dynamics. In a dilute regime, its dynamics has been already studied in low-gravity showing non-Gaussian velocity distributions and non-equipartition.<sup>13</sup> Here, we use granular materials composed of rods presenting an aspect ratio of about 5. By increasing the packing fraction, we observe for the first time in low-gravity the transition between a gas-like and a cluster regime of rods, as displayed in Fig. 8. The corresponding data will be deeply described elsewhere.

## C. Granular segregation, convection, and transport

Here we give a few last examples of scientific applications that have been investigated with the VIP-Gran facility: Granular segregation, convection, and transport of particles in a partitioned cell under low gravity.

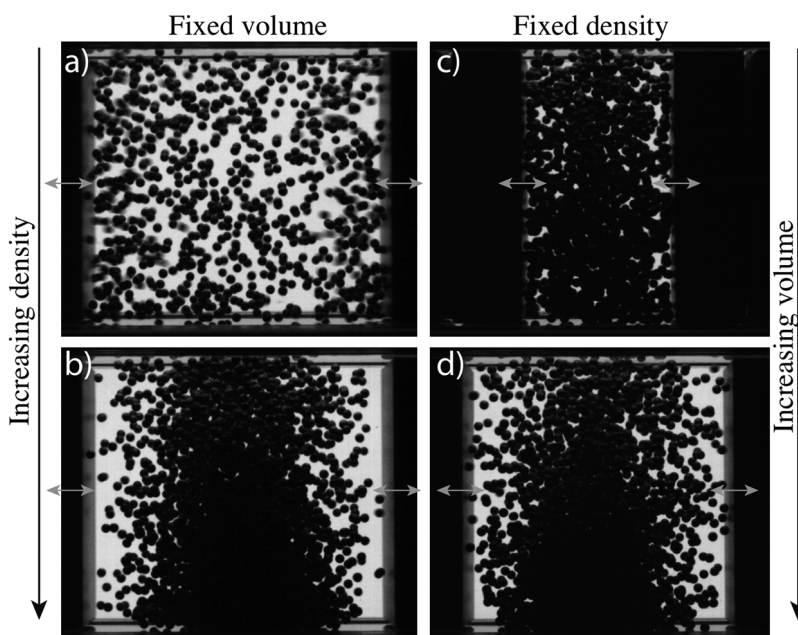


FIG. 7. Transition from a gas-like to a cluster regime of particles in low gravity in the 3D cell. Starting from a gaseous regime [(a) and (c)], a cluster can be obtained [(b) and (d)] by either (left row—PFC63) increasing the density  $\phi = [1\% (a) \text{ and } 4\% (b)]$  for a fixed volume ( $L = 40$  mm) or by (right row—PFC64) increasing  $L = [12.5$  mm (c) and 27.5 mm (d)] for a fixed value of  $\phi = 6.5\%$ . Both pistons (black parts) vibrate sinusoidally in phase opposition. Snapshots were taken during parabolic flight campaigns ESA PFC63 and PFC64 using the following forcing parameters:  $f = 20$  Hz and  $A = 2$  mm.

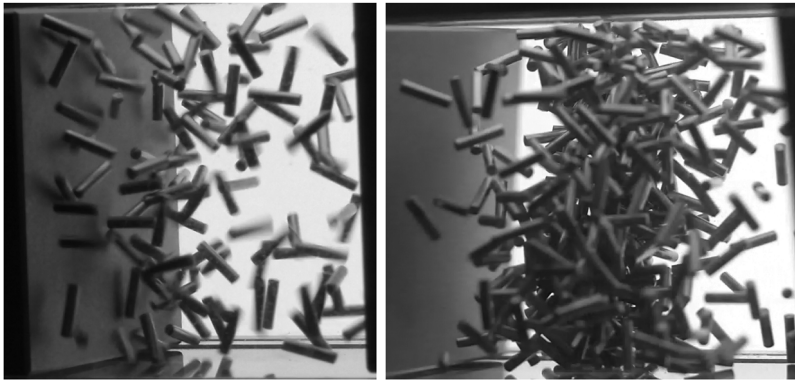


FIG. 8. Transition from a gas-like to a cluster regime of rods in low-gravity, when the packing fraction increases from 1% (left) to 3% (right). Experiments were performed in the 3D cell during the parabolic flight campaign ESA PFC66. Driving parameters and length in these snapshots are  $f = 15$  Hz,  $A = 5$  mm, and  $L = 40$  mm. Stainless steel rods (issued from bearings) are 1 mm in diameter and 4.3 mm in length.

### 1. Segregation

On Earth, segregation of a granular medium composed of different particle species is well-known (and often called the Brazil nut effect) and is due to different mechanisms related to gravity, either convection by friction of particles on boundaries<sup>26</sup> or percolation of small particles beneath large ones.<sup>27</sup> In reduced gravity conditions, the segregation mechanism is unknown and the relevant control parameters are not yet established.<sup>3</sup> The origin of large-scale particle segregation observed on the asteroid regolith surfaces is a matter of intense debate.<sup>28,29</sup> Recently, collisional segregation has been proposed in this context<sup>29</sup> since a loose granular bed plays the role of impact absorbers either with gravity<sup>30</sup> or in the absence of gravity.<sup>31</sup>

Here, with the VIP-Gran facility, a mixture of small and large grains is subjected to vibrations in low gravity. Depending of the number  $N_s$  of small particles and the number  $N_l$  of large ones, different dynamics have been observed in the quasi 2D cell. In a dilute case, both particle types behave like gases homogeneously distributed [Fig. 9(a)]. When additional small beads are injected into the cell, large beads are then forced to the cluster in a strip in the center of the cell, thus leading to segregation [Fig. 9(b)]. This effect is due to the dissipative nature of collisions. For high enough fillings (of both particle types), we observed for the first time in low gravity a pattern in the center of the cell, constituted of alternative strips of small and large particles,<sup>32</sup> as it was predicted numerically<sup>33,34</sup> and theoretically.<sup>35</sup>

### 2. Convection

On Earth, convection in granular media is related to a spatial gradient of kinetic energy that, combined with gravity, produces a buoyancy-like force. When dissipation is large enough, this force can trigger the convection.<sup>7,36</sup> This mechanism should not be confused with air effect triggering convection rolls for submillimeter particles<sup>5,37</sup> or with convection induced by particle friction on boundaries for submillimetric particles.<sup>3,26,38</sup> In low-gravity conditions, with no boundary or air effect, convection has only been observed numerically.<sup>33</sup> With the VIP-Gran facility, one can apply different phases and velocities on each of the pistons to mimic a thermal-like gradient forcing. The corresponding cold and hot walls are expected to drive the system into a convective-like motion due to the generated spatial gradients of the

kinetic energy.<sup>39</sup> Such large-scale convective motions have been observed in the 3D cell, during PFC experiments, within a mixture of large and small beads. However, the impact of the  $g$ -jitters on the phenomenon must still be clarified. This coarsening dynamics and the appearance of vortex-like structures will be further analyzed. In future, much longer experiments with a better level of low gravity will thus be performed in space (see Sec. III D).

### 3. Handling a granular medium in low gravity

On Earth, pouring a granular material is an easy way to handle it. In the absence of gravity, applying vibrations

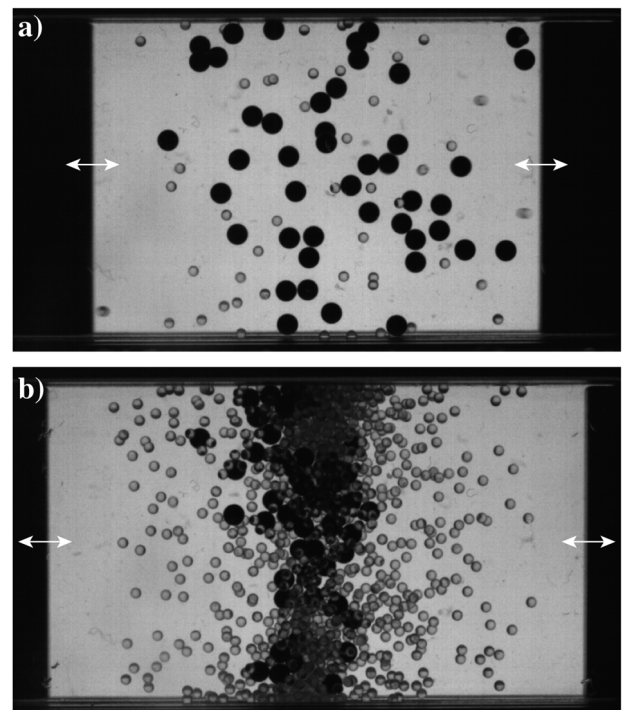


FIG. 9. Segregation of a mixture of large bronze and small glass beads in the 3D cell. In a dilute case ( $N_L = 50$ ,  $N_S = 50$ ), both particle types behave like a gas homogeneously distributed in the cell. (a) With additional small particles ( $N_L = 50$ ,  $N_S = 1000$ ), the latter force the large particles to accumulate in a stripe at the center of the cell, thus inducing segregation. (b) Both pistons (black parts) vibrates sinusoidally in phase opposition. Snapshots were taken during parabolic flight campaign ESA PFC65 with forcing parameters  $f = 15$  Hz and  $A = 5$  mm.

to the medium within partitioned cells with slits is a technique to manipulate it. However, the mechanisms leading to the exchange of particles between the compartments are poorly understood in the absence of gravity.<sup>40–43</sup> Within a box made of two connected compartments, the separation of a granular system into a cold and dense region on the one hand and a hot and dilute part on the other hand is usually called the Maxwell Demon experiment. On Earth, the apparent intrusion of a Maxwell Demon has been investigated theoretically,<sup>44</sup> experimentally,<sup>45</sup> and numerically.<sup>46</sup> The particle fluxes between compartments are related to the ratio between the gravitational potential energy of particles and the granular temperature both taken at the altitude of the slit.<sup>40</sup> In a low gravity, this control parameter of the phase separation does not hold up. Thus, investigations in low-gravity experiments involving compartmented systems are foreseen for next PFCs within the VIP-Gran facility. This study will be complementary to the Chinese SJ-10 satellite mission<sup>47</sup> and will be guided by previous numerical simulations with mono-disperse<sup>42</sup> or bi-disperse<sup>43</sup> particles in compartmented systems in the absence of gravity.

#### D. Future experiments in the International Space Station

The VIP-Gran facility was selected in early 2017 for flying on the International Space Station (ISS) in 2019. The ISS version of the instrument is currently in development. Excellent low-gravity conditions ( $\sim 10^{-5}g$ ) are indeed needed to avoid  $g$ -jitters, as observed in previous PFC notably for cooling and convection experiments. Long time duration experiments ( $\gg 22$  s of PFC) are also needed to perform numerous iterative experiments to reach statistically convergent observations or for phenomena with long transients. Since the beginning of the project, the VIP-Gran instrument has been conceived for an ISS usage and, accordingly, its design was orientated toward versatility, full automatization, and modularity through interchangeable cells. Several experiments not discussed here are planned with the ISS version of the instrument, such as dynamics of granular cooling (when the forcing is stopped),<sup>48</sup> sound propagation, and rheology near the onset of jamming in dense granular media.

#### IV. CONCLUSION

To summarize, we have presented an experimental setup dedicated to the study of granular media in a low-gravity environment in three or two dimensions. This instrument is capable of conducting experiments over a large range of granular packing fractions from diluted to dense regimes (up to approximately 60%). The forcing mechanism is composed by two opposite walls of the cell driven by selected stimuli (sine, single-pulse, quasi-static ramp, etc.). The setup is instrumented by means of high-speed cameras in two perpendicular fields of view and accelerometers and impact sensors that allow us to infer quantitative measurements. The cell volume, the number of particles, and the amplitude, frequency, and phase of the driving are control parameters. Our preliminary results with modular geometries, based on

different interchangeable cells, demonstrate the versatility of our setup. Our system thus provides a unique facility to perform experiments on granular media in reduced gravity conditions. Several open questions are currently investigated with this facility related to granular gases, segregation, convection, and transport of grains in a low gravity. Original scientific contributions as well as new applications for space exploration are thus expected.

An updated version of this facility is currently in development for the International Space Station to obtain excellent low-gravity conditions and a long duration of experimentations to study, notably, the cooling of a granular gas, convection, sound propagation in dense granular media under a ultra-low applied pressure, and rheology near the onset of the jamming transition without the confinement pressure of grains due to their weight.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We thank M. Braibanti, O. Minster, and V. Köhne from ESA for fruitful discussions and for the flight opportunity. VIP-Gran-PF was built by DTM Technologies<sup>TM</sup> (Modena, Italy). We thank A. Pellegrini, L. Recanatesi, and D. Santachiara for their experimental support on PFC64. We thank the support of Novespace during parabolic flight campaigns (PFC64 to PFC67). E.O. thanks Prodex (Belpo) for financial support. Y.G., C.L., and F.P. thank P. Evesque for collaboration and thank CNES for both financial support and access to their PFC. This work was funded by ESA Topical Team No. 4000103461, CCN1, and CCN2.

<sup>1</sup>B. Andreotti, Y. Forterre, and O. Pouliquen, *Granular Media: Between Fluid and Solid* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013); J. Duran, *Sands, Powders, and Grains* (Springer-Verlag, New York, 2000); P. Coussot, *Rheometry of Pastes, Suspensions, and Granular Materials: Applications in Industry and Environment* (John Wiley and Sons, 2005).

<sup>2</sup>F. Spahn, J. Schmidt, and M. Sremcevic, *Lect. Notes Phys.* **557**, 507 (2000).

<sup>3</sup>C. Güttler, I. von Borstel, R. Schräpler, and J. Blum, *Phys. Rev. E* **87**, 044201 (2013).

<sup>4</sup>See <http://www.planetaryresources.com> for Planetary Resources, Inc. (formerly Arkyd Astronautics) is an american start-up company aiming a profit-making mining of near earth asteroids.

<sup>5</sup>C. Laroche, S. Douady, and S. Fauve, *J. Phys.* **50**, 699 (1989).

<sup>6</sup>S. Fauve, S. Douady, and C. Laroche, *J. Phys. Colloq.* **50**, C3-187 (1989); F. Melo, P. Umbanhowar, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 172 (1994).

<sup>7</sup>S. McNamara and S. Luding, *Phys. Rev. E* **58**, 813–822 (1998).

<sup>8</sup>E. Falcon, S. Fauve, and C. Laroche, *Eur. Phys. J. B* **9**, 183 (1999).

<sup>9</sup>E. Falcon, R. Wunenburger, P. Evesque, S. Fauve, C. Chabot, Y. Garrabos, and D. Beysens, *Phys. Rev. Lett.* **83**(2), 440 (1999).

<sup>10</sup>S. Luding, R. Cafiero, and H. J. Herrmann, “Driven granular gases,” in *Granular Gas Dynamics*, Lecture Notes in Physics, Vol. 624, edited by T. Pöschel and N. Brilliantov (Springer Verlag, Berlin, 2003).

<sup>11</sup>S. McNamara, *Phys. Fluids A* **5**, 3056 (1993); I. Goldhirsch and G. Zanetti, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1619 (1993); N. Brilliantov, C. Salueña, T. Schwager, and T. Pöschel, *ibid.* **93**, 134301 (2004); S. Luding and H. J. Herrmann, *Chaos* **9**(3), 673–681 (1999); S. Miller and S. Luding, *Phys. Rev. E* **69**(3), 031305 (2004); S. Gonzalez, A. R. Thornton, and S. Luding, *Eur. Phys. J.: Spec. Top.* **223**(11), 2205–2225 (2014).

<sup>12</sup>S. McNamara and W. R. Young, *Phys. Fluids A* **4**, 496 (1992); S. Luding and S. McNamara, *Granular Matter* **1**(3), 113–128 (1998).

<sup>13</sup>K. Harth, U. Kornek, T. Trittel, U. Strachauer, S. Höme, K. Will, and R. Stannarius, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 144102 (2013); K. Harth, T. Trittel, K. May, S. Wegner, and R. Stannarius, *Adv. Space Res.* **55**, 1901 (2015).

<sup>14</sup>K. Harth, T. Trittel, S. Wegner, and R. Stannarius, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 214301 (2018).

- <sup>15</sup>G. Bossis, Y. Grasselli, and O. Volkova, *J. Phys.: Condens. Matter* **16**(18), 3279 (2004).
- <sup>16</sup>C. H. Liu and S. R. Nagel, “Sound in sand,” *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2301 (1992); X. Jia, C. Caroli, and B. Velicky, *ibid.* **82**, 1863 (1999); B. Gilles and C. Coste, *ibid.* **90**, 174302 (2003); S. Wildenberg, Y. Yang, and X. Jia, *Granular Matter* **17**, 419 (2015); S. Wildenberg, A. Tourin, and X. Jia, *Europhys. Lett.* **115**, 34005 (2016); R. K. Shrivastava and S. Luding, *Nonlin. Processes Geophys.* **24**, 435–454 (2017); A. Merkel and S. Luding, *Int. J. Solids Struct.* **106-107**, 91–105 (2017); O. Mouraille and S. Luding, *Ultrasonics* **48**, 498–505 (2008).
- <sup>17</sup>T. S. Majmudar and R. P. Behringer, *Nature* **435**, 1079 (2005); T. S. Majmudar, M. Sperl, S. Luding, and R. P. Behringer, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 058001 (2007); R. Harich, T. Darnige, E. Kolb, and E. Clément, *Europhys. Lett.* **96**, 54003 (2011); D. Bi, J. Zhang, B. Chakraborty, and R. P. Behringer, *Nature* **480**, 355 (2011); J. Ren, J. A. Dijksman, and R. P. Behringer, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 018302 (2013); H. Mizuno, L. E. Silbert, and M. Sperl, *ibid.* **116**, 068302 (2016); S. Luding, *Nat. Phys.* **12**, 531–532 (2016); N. Kumar and S. Luding, *Granular Matter* **18**, 58 (2016).
- <sup>18</sup>See <http://www.spacegrains.org> for latest news on VIP-Gran.
- <sup>19</sup>Airbus A310 Zero-G is managed and operated by the French company Novespace from the Bordeaux-Mérignac airport (France).
- <sup>20</sup>E. Falcon, S. Aumaître, P. Evesque, F. Palencia, C. Lecoutre-Chabot, S. Fauve, D. Beysens, and Y. Garrabos, *Europhys. Lett.* **74**, 830 (2006).
- <sup>21</sup>F. Rouyer and N. Menon, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3676 (2000); W. Losert, D. G. W. Cooper, J. Delour, A. Kudrolli, and J. P. Gollub, *Chaos* **9**, 682 (1999); J. S. Olafsen and J. S. Urbach, *Phys. Rev. E* **60**, R2468(R) (1999); A. Kudrolli and J. Henry, *ibid.* **62**, R1489 (2000); J. S. van Zon, J. Krefl, D. I. Goldman, D. Miracle, J. B. Swift, and H. L. Swinney, *ibid.* **70**, 040301(R) (2004); H.-Q. Wang, K. Feitosa, and N. Menon, *ibid.* **80**, 060304(R) (2009); S. Tatsumi, Y. Murayama, H. Hayakawa, and M. Sano, *J. Fluid Mech.* **641**, 521 (2009); S. E. Episov and T. Pöschel, *J. Stat. Phys.* **86**, 1385 (1997); C. Scholz and T. Pöschel, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 198003 (2017).
- <sup>22</sup>E. Falcon, J.-C. Bacri, and C. Laroche, *Europhys. Lett.* **103**, 64004 (2013); *Phys. Rev. Fluids* **2**, 102601(R) (2017).
- <sup>23</sup>S. Aumaître, J. Farago, S. Fauve, and S. McNamara, *Eur. Phys. J. B* **42**, 255 (2004).
- <sup>24</sup>E. Opsomer, F. Ludewig, and N. Vandewalle, *Phys. Rev. E* **84**, 051306 (2011); *J. Phys.: Conf. Ser.* **327**, 012035 (2011).
- <sup>25</sup>E. Opsomer, F. Ludewig, and N. Vandewalle, *Europhys. Lett.* **99**, 40001 (2012).
- <sup>26</sup>J. B. Knight, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3728 (1993); R. Khosropour, J. Zirinsky, H. K. Pak, and R. P. Behringer, *Phys. Rev. E* **56**, 4467 (1997).
- <sup>27</sup>J. C. Williams, *Powder Technol.* **52**, 245 (1976); A. Rosato, K. J. Strandburg, F. Prinz, and R. H. Swendsen, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1038 (1987); H. M. Jaeger, S. R. Nagel, and R. P. Behringer, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1259 (1996).
- <sup>28</sup>N. Murdoch, P. Sánchez, S. R. Schwartz, and H. Miyamoto, in *Asteroids IV*, edited by M. Patrick, F. W. DeMeo, and W. F. Bottke (University of Arizona Press, Tucson, AZ, 2015), p. 767.
- <sup>29</sup>T. Shinbrot, T. Sabuwala, T. Siu, M. Vivar Lazo, and P. Chakraborty, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 111101 (2017).
- <sup>30</sup>F. Pacheco Vázquez and S. Dorbolo, *Sci. Rep.* **3**, 2158 (2013).
- <sup>31</sup>S. McNamara and E. Falcon, *Powder Technol.* **182**, 232 (2008).
- <sup>32</sup>E. Opsomer, M. Noirhomme, N. Vandewalle, E. Falcon, and S. Merminod, *npj Microgravity* **3**, 1 (2017).
- <sup>33</sup>S. Luding, O. Strauss, and S. McNamara, “Segregation of polydisperse granular media in the presence of a temperature gradient,” in *IUTAM Symposium on Segregation in Granular Flows 297-303*, edited by A. D. Rosato and D. L. Blackmore (Kluwer Academic Publishers, 2000).
- <sup>34</sup>E. Opsomer, N. Vandewalle, M. Noirhomme, and F. Ludewig, *Eur. Phys. J. E* **37**, 115 (2014).
- <sup>35</sup>D. Serero, S. H. Noskowitz, M. L. Tan, and I. Goldhirsch, *Eur. Phys. J.: Spec. Top.* **179**, 221 (2009).
- <sup>36</sup>R. Ramírez, D. Risso, and P. Cordero, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1230 (2000); R. D. Wildman, J. M. Huntley, and D. J. Parker, *ibid.* **86**, 3304 (2001); E. Khain and B. Meerson, *Phys. Rev. E* **67**, 021306 (2003); D. Paolotti, A. Barrat, U. Marini Bettolo Marconi, and A. Puglisi, *ibid.* **69**, 061304 (2004).
- <sup>37</sup>H. K. Pak and R. P. Behringer, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1832 (1993); K. Kumar, E. Falcon, K. M. S. Bajaj, and S. Fauve, *Physica A* **270**, 97 (1999); A. Garcimartín, J. M. Pastor, R. Arévalo, and D. Maza, *Eur. Phys. J.: Spec. Top.* **146**, 331 (2007).
- <sup>38</sup>N. Murdoch, B. Rozitis, K. Nordstrom, S. F. Green, P. Michel, T.-L. de Lophem, and W. Losert, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 018307 (2013).
- <sup>39</sup>P. Eshuis, K. van der Weele, M. Alam, H. J. van Gerner, M. van der Hoef, H. Kuipers, S. Luding, D. van der Meer, and D. Lohse, *Granular Matter* **15**(6), 893–911 (2013).
- <sup>40</sup>N. Isert, C. C. Maaß, and C. M. Aegerter, *Eur. Phys. J. E* **28**, 205 (2009).
- <sup>41</sup>J. J. Brey, F. Moreno, R. García-Rojo, and M. J. Ruiz-Montero, *Phys. Rev. E* **65**, 011305 (2001).
- <sup>42</sup>Y. Li, M. Hou, and P. Evesque, *J. Phys.: Conf. Ser.* **327**, 012034 (2011); E. Opsomer, M. Noirhomme, N. Vandewalle, and F. Ludewig, *Phys. Rev. E* **88**, 012202 (2013); M. Noirhomme, E. Opsomer, N. Vandewalle, and F. Ludewig, *Eur. Phys. J. E* **38**, 9 (2015).
- <sup>43</sup>W. Wang, Z. Zhou, J. Zong, and M.-Y. Hou, *Chin. Phys. B* **26**, 044501 (2017).
- <sup>44</sup>J. Eggers, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5322 (1999).
- <sup>45</sup>K. van der Weele, D. van der Meer, M. Versluis, and D. Lohse, *Europhys. Lett.* **53**, 328 (2001).
- <sup>46</sup>A. Barrat and E. Trizac, *Mol. Phys.* **101**, 1713 (2003); M. Hou, H. Tu, R. Liu, Y. Li, K. Yu, P.-Y. Lai, and C. K. Chan, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 068001 (2008); S. Shah, Y. C. Li, F. F. Cui, Q. Zhang, P. Evesque, and M. Hou, *Chin. Phys. Lett.* **29**, 034501 (2012).
- <sup>47</sup>M. Hou, private communication (2018).
- <sup>48</sup>C. C. Maaß, N. Isert, G. Maret, and C. M. Aegerter, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 248001 (2008); Y. Grasselli, G. Bossis, and G. Goutallier, *Europhys. Lett.* **86**, 60007 (2009); S. Tatsumi, Y. Murayama, H. Hayakawa, and M. Sano, *J. Fluid Mech.* **641**, 521 (2009); D. Heißelmann, J. Blum, H. J. Fraser, and K. Wolling, *Icarus* **206**, 424 (2010); K. Harth, T. Trittel, S. Wegner, and R. Stannarius, *EPJ Web Conf.* **140**, 04008 (2017).

**Article publié dans *Euro Physics Letters***

# Threshold of gas-like to clustering transition in driven granular media in low-gravity environment

M. NOIRHOMME<sup>1(a)</sup>, A. CAZAUBIEL<sup>2</sup>, A. DARRAS<sup>1</sup>, E. FALCON<sup>2</sup>, D. FISCHER<sup>3</sup>, Y. GARRABOS<sup>4</sup>,  
C. LECOUTRE-CHABOT<sup>4</sup>, S. MERMINOD<sup>2</sup>, E. OPSOMER<sup>1</sup>, F. PALENCIA<sup>4</sup>, J. SCHOCKMEL<sup>1</sup>, R. STANNARIUS<sup>3</sup>  
and N. VANDEWALLE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Group for Research and Applications in Statistical Physics (GRASP), CESAM Research Unit, Physics Department, B5a, University of Liège - B-4000 Liège, Belgium*

<sup>2</sup> *Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, UMR 7057 CNRS - F-75013 Paris, France*

<sup>3</sup> *Institute of Physics, Otto von Guericke University - D-39106 Magdeburg, Germany*

<sup>4</sup> *Institut de Chimie et de la Matière Condensée de Bordeaux (ICMCB)-UPR 9048 CNRS F-33608 Pessac, France*

received 30 May 2018; accepted in final form 17 July 2018

published online 13 August 2018

PACS 45.70.-n – Granular systems

PACS 45.70.Qj – Pattern formation

**Abstract** – Strongly driven granular media are known to undergo a transition from a gas-like to a cluster regime when the density of particles is increased. However, the main mechanism triggering this transition is not fully understood so far. Here, we investigate experimentally this transition within a 3D cell filled with beads that are driven by two face-to-face vibrating pistons in low gravity during parabolic flight campaigns. By varying large ranges of parameters, we obtain the full phase diagram of the dynamical regimes reached by the out-of-equilibrium system: gas, cluster or bouncing aggregate. The images of the cell recorded by two perpendicular cameras are processed to obtain the profiles of particle density along the vibration axis of the cell. A statistical test is then performed on these distributions to determinate which regime is reached by the system. The experimental results are found in very good agreement with theoretical models for the gas-cluster transition and for the emergence of the bouncing state. The transition is shown to occur when the typical propagation time needed to transmit the kinetic energy from one piston to the other is of the order of the relaxation time due to dissipative collisions.

Copyright © EPLA, 2018

**Introduction.** – When submitted to an external energy input, confined granular matter exhibits different dynamics depending on the filling and forcing conditions of the system [1]. These different dynamical regimes can be classified into three categories called “solid” [2–4], “liquid” [5] or “gas”, in analogy to the classical counterpart. This letter is focused on very dilute systems with strong enough forcing, where particles can move erratically and have a gas-like behavior. However, such a granular gas displays properties strikingly different from those of a molecular gas: anomalous scalings of pressure [6] and collision frequency [7], and non-Gaussian distribution of particle velocity [8]. These differences are mainly attributed to the dissipation occurring during inelastic collisions between particles. Continuous injection of energy is thus

necessary to sustain a stationary state in this dissipative out-of-equilibrium system. This is usually performed experimentally by vibrating a container wall or the whole container. When the forcing is stopped, numerical simulations have shown the formation of density gradients during the cooling (instability of the homogeneous cooling state) [9] as well as inelastic collapse (particles undergoing an infinite number of collisions in finite time) [10]. The predicted duration of the cooling phase [11] has been tested experimentally with success [12]. Due to the dissipative character of the collisions, increasing the density within a driven granular gas, and thus the number of collisions, will lead to an increase of the energy dissipation in the system. A cluster formation can then occur at high enough density despite the continuous energy injection. Such a transition from a gaseous regime to a cluster of particles when the density increases has been

<sup>(a)</sup>E-mail: mnoirhomme@uliege.be



established almost 20 years ago [6,13,14]. The parameters triggering this transition are far from being fully understood even though this observation has been reproduced numerically [15].

On Earth, experiments are biased by gravity-induced anisotropy and by the friction forces that act on all the particles composing the system. Low-gravity environment is thus needed for granular gases in order to obtain an experimental situation for which inelastic collisions are the only interaction mechanism between particles. For instance, the cluster formation was first observed experimentally on Earth in 3D [6] and 2D [13], and has then been more clearly demonstrated in low gravity in 3D [14]. More recently, a Topical Team of the European Space Agency (ESA) has designed an instrument called VIP-Gran (for Vibrated Induced Phenomena in Granular matter) [16]. It aims to study the dynamics and statistical mechanics of driven granular systems in low-gravity environment from dilute to dense regimes [17].

In this work, we study experimentally the transition from a granular gas to a clustered state in low gravity using the 3D VIP-Gran facility. The full experimental phase diagram is then obtained for large ranges of experimental parameters. These results are compared with numerical and theoretical work predicting the marginal curve of the phase diagram separating the gas- and liquid-like regimes [18]. Good agreement is found during this comparison showing that this transition is governed by the interplay between inertia (propagation time between collisions) and inelasticity (relaxation time due to dissipative collisions). This work follows the footsteps of Sack *et al.* [19] and Falcon *et al.* [14] where the authors have observed similar granular states in different geometries and for different excitations.

**Setup.** – The setup of the VIP-Gran instrument has been extensively described in [17]. We only recall here its main features regarding the experiments discussed in this work. As sketched in fig. 1, it consists of a cell of dimension  $60 \times 30 \times 30$  mm where the energy is injected into the system by two oscillating pistons, separated by an average distance  $L$ . The latter can be tuned to control the accessible volume of the cell. The two opposite pistons, moved by linear voice-coil motors, are driven sinusoidally in phase opposition with the same frequency  $f$  and amplitude  $A$ . The vibration axis is perpendicular to the moving walls (see fig. 1). The cell is filled with  $N$  bronze beads of diameter  $d = 1$  mm, either manually or automatically using a bead-feeding device [17]. Experimental data are acquired using two high-speed cameras of maximal frame rates  $f_c = 1000$  fps with a resolution of  $1024 \times 900$  pixels. Visualizations of the cell are obtained in the two directions perpendicular to the vibration axis (see fig. 1). During one period of vibration  $T = 1/f$  (with a frequency  $f$  at most equal to 20 Hz), the number of recorded images is  $f_c T$ , that is 50 images at least. The control parameters are the number of beads  $N$ , the mean distance  $L$  between vibrating

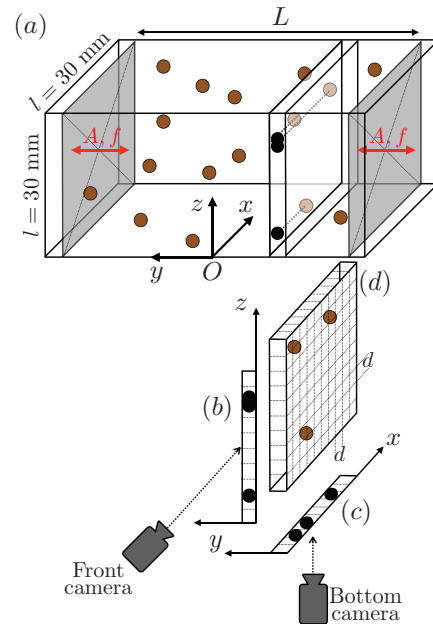


Fig. 1: (Color online) (a) Sketch of the experimental VIP-Gran cell. The oscillating pistons are colored in light grey. The recorded images of the cell are numerically divided in slices of width  $d$  along the  $y$ -axis (axis of vibration). Front (b), bottom (c) and side (d) views of the slice are sketched. The front and bottom views are the two accessible shadow profiles while the side view is an arbitrary distribution which could have generated these observations. The link between the measured shadow and the possible number of particles in the slices is explained in the main text. (d) Each slice is divided into rows and columns of dimension  $d$  into the  $x$  and  $z$  directions.

pistons, the amplitude  $A$  and frequency  $f$  of the forcing. The distance between the walls oscillates as a consequence between  $L - 2A$  and  $L + 2A$ . The packing fraction is then defined as  $\Phi = N\mathcal{V}_g/V$ , where  $\mathcal{V}_g = \pi d^3/6$  is the volume of a single grain,  $V = l^2(L + 2A)$  the maximum cell volume, and  $l = 30$  mm. We focus here on dilute regimes with  $\Phi < 10\%$ . All relevant experimental parameters are listed in table 1. The filling parameters were chosen according to numerical simulations predicting the transition from a gaseous state to a clustered state in the VIP-Gran cell [18]. Moreover, since these simulations do not predict a qualitative change with vibration frequency [20],  $f$  will not be varied systematically here. To cover the whole ranges of experimental parameters, five ESA Parabolic Flight Campaigns (PFCs #63 to 67) were performed on board of a specially modified Airbus A310 Zero-G aircraft of Novespace through a series of parabolic trajectories which result in low-gravity periods, each of approximately 22 s. Low-gravity environment is about  $\pm 0.05g$ . Each PFC lasts 3 days with 31 low-gravity parabolas per day. Among the 465 parabolas performed, 114 were dedicated to the present study.

**Results.** – The raw data of the experiments consist of two sequences of greyscale pictures of the cell, taken

Table 1: Parameters of each experiment performed during ESA parabolic flight campaigns #63 to 67. Each set of parameters was precisely chosen in order to reach different regimes of the phase diagram displayed in fig. 3.

PFC	#runs	$L$ (mm)	$A$ (mm)	$f$ (Hz)	$N$	Symbol
63	25	40.0	[1.0; 1.4; 1.8; 2.0; 2.5]	20	[250; 750; 1250; 1750; 2750]	□
64	15	[12.5; 20.0; 27.5]	[0.5; 1.0; 1.5; 2.0; 2.5]	20	[1611; 2578; 3545]	△
65	15	[30.0; 35.0; 40.0]	[2.0; 2.5; 3.0; 3.5; 4.0]	15	[2578; 3008; 3438]	◇
66	12	40.0	[4.0; 5.0]	15	[2578; 3438; 4297; 5157; 6016; 6875]	○
67	30	[20.0; 25.0; 30.0; 35.0; 40.0]	3.0	15	[250; 500; 1000; 1500; 2000; 2500]	◇

by both high-speed cameras. About 40000 images are recorded for one single parabola, and of the order of 4.5 millions for all parabolae. As displayed in fig. 2, three typical dynamical granular regimes are observed in our experiment depending on the number  $N$  of particles in the cell. A granular gas regime is observed for very dilute densities (fig. 2(a)) where particles are homogeneously distributed within the entire cell. When the density is increased, we observe a cluster of particles almost static in the middle of the cell, the cluster being surrounded by lower particle density regions (see fig. 2(b)). In these regions, the particles have fast velocities and transmit the kinetic energy from the pistons to the cluster where it is mainly dissipated. The third observed regime consists in a cluster of all particles that bounces periodically from one piston to the other one (fig. 2(c)), as previously observed [21]. We called this regime afterwards “bouncing aggregate”. The period of oscillation of the latter is subharmonics, *i.e.*, twice the piston period. This regime occurs when the vibration amplitude exceeds a critical fraction of the cell size (see below). For the corresponding time evolutions, see supplementary slow-down videos `gas.mp4`, `cluster.mp4` and `bouncing.mp4`. By using image processing tools, we will now infer from these images the spatial density profiles for these three regimes.

**Image processing.** – For each low-gravity phase, we wait a few seconds ( $50T$ ) before recording data, in order to reach a stationary state within the granular medium. From there on, data is recorded during  $100T$  (between 5 and 7 s). This corresponds to the middle of the parabola duration, when the fluctuations of gravity, called  $g$ -jitters, are the weakest. In order to obtain some quantitative data from the pictures, we performed image analysis using the open-access software FIJI [22]. First, we applied a threshold on the pictures, coloring each pixel either black (corresponding to the shadow coming from the presence of one or more grains) or white (reporting no particle between the light and the camera), depending on their grey level. The second step consists in dividing the constant free zone of the system into slices along the vibration axis ( $y$ -axis) (see fig. 1). Each slice has a width  $d$ , the particle diameter, and is located at the dimensionless position  $y \in [(-L/2 + A)/Ld; (L/2 - A)/Ld]$ .

The aim of the image processing described in this section is to reconstruct the average 3D density profile of

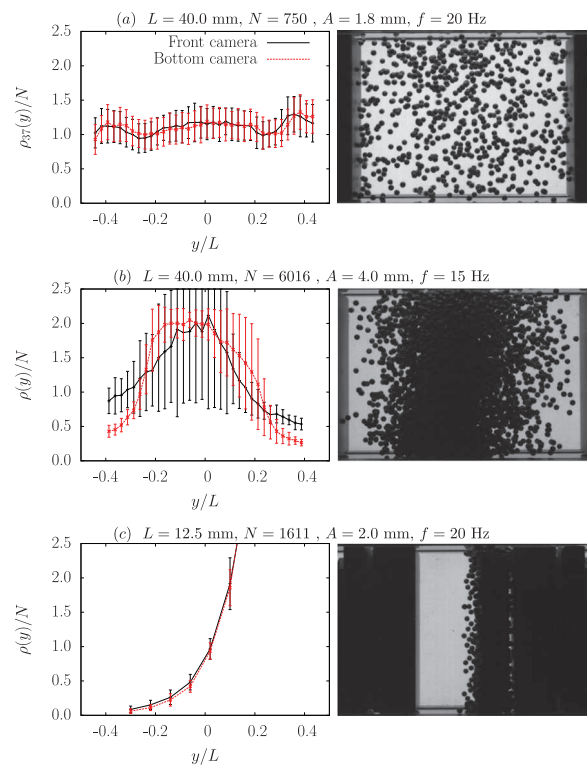


Fig. 2: (Color online) Right: different dynamical regimes for different experimental parameters  $L$ ,  $N$ ,  $A$ , and  $f$ : granular gas (a), cluster (b), and bouncing aggregate (c). The picture come from the front camera. Left: corresponding average density profiles  $\rho(y)$  of the system obtained from the image processing (see text). The red (respectively, black) curves are inferred from images from the bottom (respectively, front) camera. For the granular gases and the clusters, the average density profiles are very stable over time. It is not the case for the bouncing aggregate for which the position of the peak in the average density profile varies over time.

the system using the 2D pictures. In the following, the processing will be detailed only for the bottom camera images, *i.e.*, in the  $(x, y)$ -direction. The processing in the other direction is exactly the same. First, we divided the considered slice into columns of width  $d$ . This implies a division of the  $(x, y)$ -plane in squares of area  $d^2$ . An example of the division of a slice is given in fig. 1. By assuming a uniform distribution of the grains in the slice, the probability of the presence of one of those grains in a specific

column is  $p = d/l$ . If the slice contains  $N_y$  particles, the probability  $P(X = n)$  of finding  $n$  grains in the column is given by the binomial distribution

$$P(X = n) = \binom{N_y}{n} p^n (1-p)^{N_y-n}, \quad (1)$$

where  $X$  is the random variable representing the number of grains in a column, and  $\binom{N_y}{n} = N_y!/[n!(N_y-n)!]$  the binomial coefficient. By equaling  $X = 0$  (*i.e.*, by focusing on the light transmitted through the system), the number of particles in the slice can be isolated. One obtains

$$N_y = \frac{\ln(1-s_x)}{\ln(1-d/l)}, \quad (2)$$

where  $s_x$ , the shadow density measured by the bottom camera, is given by the number of black pixels in the  $(x, y)$ -plane divided by the total number of pixels in the surface  $ld$ . See the supplementary material [Supplementarymaterial.pdf](#) for more details.

Note again that the main hypothesis is that the particles are uniformly distributed in each slice. This assumption seems reasonable if there is no external residual acceleration in the system. In addition, note that the number  $N_y$  of particles in a slice is undetermined, from eq. (2), for  $s_x = 1$ . This extreme value is mostly unreached, except for a few pictures given by the bottom camera, for parabolas where the  $g$ -jitters were significant. In these cases, the maximal number of grains in the considered slice was fixed at 300. This value corresponds to the detection of a single white pixel in  $s_x$ . Finally, the normalized distribution of the number of grains in the slices  $N_y/N$  as a function of  $y$  can be found for each image provided by the cameras. We have averaged the distributions coming from all the pictures determined by a fixed piston phase in order to obtain  $f_c/f$  different distributions.

**Statistical analysis.** – The average density profiles of the system are shown in fig. 2, for different parabolas (corresponding to different parameters listed in table 1). For the gaseous state, the distribution is approximatively uniform (see fig. 2(a)). By contrast, when a clustered state is reached, the resulting distribution exhibits systematically a peak. If the cluster is stabilized in the middle of the cell, the position of the resulting peak in the distribution is stable over the time, too (see fig. 2(b)). However, in the case of the bouncing aggregate, the bulk moves from one piston to the other one. Consequently, the position of the resulting measured peak varies over the time (see fig. 2(c)). Note that we found nearly always differences between the distributions obtained from the two different cameras. Actually, the  $g$ -jitters tend to gather the grains close to the bottom of the cell, making the  $z$ -distribution more uniform than the  $x$ -distribution over the  $y$ -axis. In the cluster regime, the error bars in the distributions are also larger for the  $z$ -distribution than for the  $x$  one, due to prevailing  $g$ -jitters in the  $z$ -direction.

In order to extract the state of the system from the averaged distributions coming out of our image processing, we use the one-sample Kolmogorov-Smirnov (KS) test [15,18]. This KS test consists in comparing the measured cumulated distributions with a theoretical one. In analogy with classical gases, we assume that a granular gas is characterized by a uniform distribution of the position of the particles in the cell. In the KS test, the comparison between two distributions is performed by measuring the maximal distance separating the measured cumulated distribution, noted  $F(y)$ , computed using the corresponding average density profile  $\rho(y)/N$ , and the theoretical cumulated distribution, noted  $U(y)$ . This distance is defined as

$$D = \sup_{|y| \leq L/2-A} |F(y) - U(y)|. \quad (3)$$

Then, we compared  $D$  to a given threshold-value  $K_\alpha$  coupled to the number of classes characterizing the distributions, noted  $k$ . Following our division of the cell into slices, this number of classes is simply given by  $k = L/d$ . Concerning the threshold  $K_\alpha$ , its value depends on the level of significance of the test,  $\alpha$ , which has been fixed at 0.01 in order to follow previous works [15,18]. The KS test of eq. (2) allows us to consider that the system has reached a clustered state as soon as the condition  $D > K_\alpha/\sqrt{k}$  is fulfilled. On the other hand, as long as the threshold is not crossed, the grains can be considered as uniformly distributed in the cell and the system is considered in a gaseous phase. We applied the KS test on each averaged distribution  $F(y)$  (corresponding to each different piston phase) obtained from the image processing. We found two final averaged values of the maximal distances  $D_x$  and  $D_z$  for all averaged distributions  $F(y)$  coming from each camera. These values  $D_x$  and  $D_z$  are two statistical characterizations of the averaged distribution of the position of the particles along the vibration axis for a given set of parameters. For each parabola of each PFC, we calculated  $D_x$  and  $D_z$  and compared the obtained values to the related threshold. The state of the system can be deduced from  $D_x$  and  $D_z$ . We detected a gaseous regime (see the red symbols in the phase diagram of fig. 3) if the conditions  $D_x \leq K_\alpha/\sqrt{k}$  and  $D_z \leq K_\alpha/\sqrt{k}$  are fulfilled. Otherwise, the system is considered as clustered (see the green symbols in fig. 3). We reported these comparisons in the phase diagram shown in fig. 3.

**Phase diagram.** – In fig. 3, we plot the typical length scale of the system  $\delta$ , normalized by the particle radius,  $R$ , as a function of the packing fraction  $\phi$ . More precisely,  $\delta$  is the mean distance that  $N$  particles achieve when they pass across a constraint free distance  $(L-2A)$ . This mean value is numerically calculated and is tabulated as a function of the chosen experimental parameter set ( $L$  and  $A$ ) [18]. The horizontal axis reports the mean packing fraction of the system,

$$\Phi = N \frac{4\pi R^3}{3(L+2A)l^2}.$$

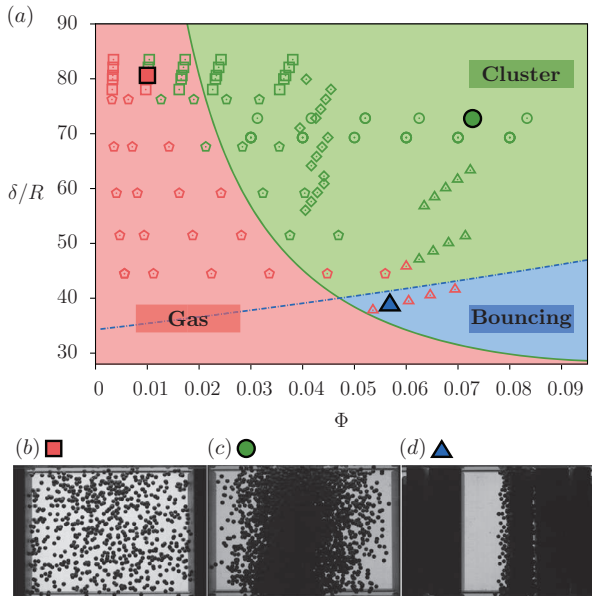


Fig. 3: (Color online) (a) Phase diagram of the dynamical regimes, observed in the PFC experiments, as a function of the dimensionless system size,  $\delta/R$ , and the packing fraction,  $\phi$ . The experimental parameters and corresponding symbols are listed in table 1. Granular gas (red), cluster (green), and bouncing (blue) regimes are detected with a statistical test (see text). The theoretical solid line is from eq. (4) with  $C_0 = 1$ ,  $R_0 = 2$ , and  $\epsilon = 0.9$ . The dashed line corresponds to the right-hand term of eq. (5). Bottom: typical front views of the cell showing gas (b), cluster (c) and bouncing (d) regimes corresponding to the plain symbols in (a).

The instrument geometry limits the accessible region of the phase diagram to  $30 < \delta/R < 90$ . All experiments performed during PFCs are represented by symbols which correspond to sets of parameters listed in table 1. The solid curve plotted in the phase diagram is the theoretical frontier separating the gaseous regime from the cluster one. This marginal curve comes from a theoretical model comparing the decay time of energy in the system (Haff time [11]) and the time needed for a particle to cross the whole cell in response to an energy impulse coming from the pistons (propagation time), that is [18]

$$\frac{\delta}{R} = \frac{1}{3\Phi} \frac{\ln \left[ 1 + \frac{C_0}{\epsilon(1+\epsilon)(1-3R_0\Phi)} \right]}{\ln(1/\epsilon)}, \quad (4)$$

where  $\epsilon$  is the restitution coefficient of the particles and  $C_0$  and  $R_0$  are two adjustable parameters whose values have been evaluated with the help of numerical simulations. The theoretical model of eq. (4) is found to be in good agreement with most experiments (see fig. 3). However, for  $\Phi < 3\%$  and  $\delta/R \gtrsim 75$ , the agreement is not so good (see top left-hand side in fig. 3). This corresponds to experiments performed with a large cell in a diluted regime where the cluster formation is probably induced by  $g$ -jitters. Indeed, as soon as a cluster is formed (*e.g.*, by a tiny variation of  $g$ ), its destruction is very hard to

be done since it is located far from the oscillating pistons. The model which considers a uniform distribution of the positions of the particles as initial condition is consequently less adapted in this region of the phase diagram than in others.

The bouncing regime has been only observed for a very narrow cell ( $\delta/R \sim 38$ , or  $L \sim 12.5d$ ), and has been previously reported numerically for the same configuration as ours [15]. For a configuration where the whole container is vibrated, the condition to observe a bouncing aggregate is predicted theoretically to be  $A > (L - e)/\pi$ ,  $e$  being the aggregate thickness [19,21,23]. This means that the cluster center of mass follows the container oscillations when the amplitude of vibration is larger than a fraction of the free space ( $L - e$ ) between the cluster and the container walls. By adapting this model to our configuration (container walls vibrated in phase opposition), we find that the bouncing regime occurs within a bounded region by the following conditions:

$$\left( \frac{\pi + 2\Phi/\phi_{\text{RLP}}}{1 - \Phi/\phi_{\text{RLP}}} - 2 \right) < \frac{L}{A} < \left( \frac{2\pi + 2\Phi/\phi_{\text{RLP}}}{1 - \Phi/\phi_{\text{RLP}}} - 2 \right), \quad (5)$$

where  $\phi_{\text{RLP}} = 0.59$  is the density of a random loose packing pile [24]. Only the upper limit of eq. (5) is visible in fig. 3 (see dashed line separating the cluster region from the bouncing one). Even though the agreement with the single experimental point is good, more experiments are needed to confirm this theory. Finally, note that the analogous of a triple point ( $\delta_t/R$ ,  $\Phi_t$ ) can be defined by the intercept of the two marginal curves within the phase diagram, *i.e.*, by balancing eq. (4) with the right-hand term in eq. (5).

**Conclusion.** – We have experimentally investigated the gas-like to clustering transition in a driven granular media in 3D low-gravity environment. Experimental parameters have been exhaustively varied (number of particles, cell size, and vibrational parameters). We have observed three dynamical regimes: Granular gas, cluster and bouncing aggregate. These regimes have been characterized by means of two perpendicular cameras leading to the spatial distribution of particles within the cell. We transformed the shadow density measured on each image into profiles of particle density along the vibration axis of the cell. Then, a statistical Kolmogorov-Smirnov test has been performed to compare these experimental distributions with uniform ones in order to deduce the state reached by the system (gas, cluster or bouncing aggregate). The results of these tests were reported in a phase diagram and confronted with theoretical models for the gas-cluster transition and the emergence of the bouncing aggregate. The experimental results are in excellent agreement with the theoretical predictions, except for large and diluted systems where the  $g$ -jitters, as small as they can be, have probably a non-negligible impact on the final state of the system. To reach a high level of low-gravity conditions ( $\sim 10^{-5}g$ ) where  $g$ -jitters are negligible,

the VIP-Gran instrument is currently in development for the International Space Station. We have thus shown that the gas to clustering transition occurs when the typical propagation time between two collisions is of the order of the relaxation time due to dissipative collisions. This study could lead to applications for space exploration (*e.g.*, handling a granular medium in low gravity by applying vibrations) or to a better understanding of the dynamics of planetary rings in astrophysics.

\*\*\*

We thank M. BRAIBANTI, O. MINSTER and V. KOEHNE from ESA for fruitful discussions and for the flight opportunity. VIP-Gran-PF was built by DTM Technologies<sup>TM</sup> (Modena, Italy). We acknowledge A. PELLEGRINI, L. RECANATESI, and D. SANTACHIARA from DTM, T. TRITTEL, University of Magdeburg, for technical support, and M. HOU for discussions. We acknowledge the support of Novespace during PFC63 to PFC67, and partial financial support by CNES. This work was funded by ESA Topical Team No. 4000103461.

## REFERENCES

- [1] DE GENNES P. G., *Rev. Mod. Phys.*, **57** (1985) 827.
- [2] LIU A. J. and NAGEL S. R., *Nature*, **396** (1998) 21.
- [3] CORWIN E. I., JAEGER H. M. and NAGEL S. R., *Nature*, **435** (2005) 1075.
- [4] MAJMUDAR T. S. and BEHRINGER R. P., *Nature*, **435** (2005) 1079; REN J., DIJKSMAN J. A. and BEHRINGER R. P., *Phys. Rev. Lett.*, **110** (2013) 018302.
- [5] JAEGER H. M., LIU C. and NAGEL S. R., *Phys. Rev. Lett.*, **62** (1988) 1.
- [6] FALCON E., FAUVE S. and LAROCHE C., *Eur. Phys. J. B*, **9** (1999) 183.
- [7] FALCON E., AUMAÎTRE S., EVESQUE P., PALENCIA F., LECOUTRE-CHABOT C., FAUVE S., BEYSENS D. and GARRABOS Y., *EPL*, **74** (2006) 830.
- [8] PUGLISI A., LORETO V., MARCONI U. M. B., PETRI A. and VULPIANI A., *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 3848; LOSERT W., COOPER D. G. W., DELOUR J., KUDROLI A. and GOLLUB J. P., *Chaos*, **9** (1999) 682; OLAFSEN J. S. and URBACH J. S., *Phys. Rev. E*, **60** (1999) R2468(R); ROUYER F. and MENON N., *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2000) 3676; VAN ZON J. S., KREFT J., GOLDMAN D. I., MIRACLE D., SWIFT J. B. and SWINNEY H. L., *Phys. Rev. E*, **70** (2004) 040301(R); HARTH K., KORNEK U., TRITTEL T., STRACHAUER U., HÖME S., WILL K. and STANNARIUS R., *Phys. Rev. Lett.*, **110** (2013) 144102; SCHOLZ C. and PÖSCHEL T., *Phys. Rev. Lett.*, **118** (2017) 198003.
- [9] MCNAMARA S., *Phys. Fluids*, **5** (1993) 3056; GOLDHIRSCH I. and ZANETTI G., *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993) 1619; BRILLIANTOV N., SALUEÑA C., SCHWAGER T. and PÖSCHEL T., *Phys. Rev. Lett.*, **93** (2004) 134301.
- [10] MCNAMARA S. and YOUNG W. R., *Phys. Fluids A*, **4** (1992) 496.
- [11] HAFF P. K., *J. Fluid Mech.*, **134** (1983) 401.
- [12] MAASS C. C., ISERT N., MARET G. and AEGERTER C. M., *Phys. Rev. Lett.*, **100** (2008) 248001; GRASELLI Y., BOSSIS G. and GOUTALLIER G., *EPL*, **86** (2009) 60007; TATSUMI S., MURAYAMA Y., HAYAKAWA H. and SANO M., *J. Fluid Mech.*, **641** (2009) 521; HARTH K., TRITTEL T., WEGNER S. and STANNARIUS R., *Phys. Rev. Lett.*, **120** (2018) 214301.
- [13] KUDROLI A., WOLPERT M. and GOLLUB J. P., *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 1383.
- [14] FALCON E., WUNENBURGER R., ÉVESQUE P., FAUVE S., CHABOT C., GARRABOS Y. and BEYSENS D., *Phys. Rev. Lett.*, **83** (1999) 440.
- [15] OPSOMER E., LUDEWIG F. and VANDEWALLE N., *Phys. Rev. E*, **84** (2011) 051306.
- [16] See <https://spacegrains.org>.
- [17] AUMAÎTRE S., BEHRINGER R. P., CAZAUBIEL A., CLÉMENT E., CRASSOUS J., DURIAN D. J., FALCON E., FAUVE S., FISCHER D., GARCIMARTÍN A., GARRABOS Y., HOU M., JIA X., LECOUTRE C., LUDING S., MAZZA D., NOIRHOMME M., OPSOMER E., PALENCIA F., PÖSCHEL T., SCHOCKMEL J., SCHRÖTER M., SPERL M., STANNARIUS R., VANDEWALLE N. and YU P., *Rev. Sci. Instrum.*, **89** (2018) 075103.
- [18] OPSOMER E., LUDEWIG F. and VANDEWALLE N., *EPL*, **99** (2012) 40001.
- [19] BANNERMAN M. N., KOLLMER J. E., SACK A., HECKEL M., MUELLER P. and PÖSCHEL T., *Phys. Rev. E*, **84** (2011) 011301; SACK A., HECKEL M., KOLLMER J. E., ZIMMER F. and PÖSCHEL T., *Phys. Rev. Lett.*, **111** (2013) 018001; KOLLMER J. E., TUPY M., HECKEL M., SACK A. and PÖSCHEL T., *Phys. Rev. Appl.*, **3** (2015) 024007.
- [20] OPSOMER E., PhD Thesis, Univ. Liège (2014).
- [21] KOLLMER J. E., SACK A., HECKEL M. and PÖSCHEL T., *New J. Phys.*, **15** (2013) 093023.
- [22] SCHINDELIN J., ARGANDA-CARRERAS I., FRISE E., KAYNIG V., LONGAIR M., PIETZSCH T., PREIBISCH S., RUEDEL C., SAALFELD S., SCHMID B., TINEVEZ J.-Y., WHITE D. J., HARTENSTEIN V., ELICEIRI K., TOMANCAK P. and CARDONA A., *Nat. Methods*, **9** (2012) 676.
- [23] GILET T., VANDEWALLE N. and DORBOLO S., *Phys. Rev. E*, **79** (2009) 055201(R).
- [24] O'HERN C. S., LANGER S. A., LIU A. J. and NAGEL S. R., *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002) 075507; ONODA G. Y. and LINIGER E. G., *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 2727; JERKINS M., SCHRÖTER M., SWINNEY H. L., SENDEN T. J., SAADATFAR M. and ASTE T., *Phys. Rev. Lett.*, **101** (2008) 018301.

# Bibliographie

- [1] E. FALCON, G. MICHEL, G. PRABHUDESAI, A. CAZAUBIEL, M. BERHANU, N. MORDANT, S. AUMAÎTRE & F. BONNEFOY ; «Saturation of the Inverse Cascade in Surface Gravity-Wave Turbulence» ; *Physical Review Letters* **125**, p. 134 501 (2020). 1, 76, 122
- [2] A. CAZAUBIEL, S. MAWET, A. DARRAS, G. GROSJEAN, J. J. W. A. VAN LOON, S. DORBOLO & E. FALCON ; «Wave Turbulence on the Surface of a Fluid in a High-Gravity Environment» ; *Phys. Rev. Lett.* **123**, p. 244 501 (2019). 1, 64
- [3] G. MICHEL, B. SEMIN, A. CAZAUBIEL, F. HAUDIN, T. HUMBERT, S. LEPOT, F. BONNEFOY, M. BERHANU & E. FALCON ; «Self-similar gravity wave spectra resulting from the modulation of bound waves» ; *Phys. Rev. Fluids* **3**, p. 054 801 (2018). 1, 59, 68, 92, 95
- [4] G. MICHEL, F. BONNEFOY, G. DUCROZET, G. PRABHUDESAI, A. CAZAUBIEL, F. COPIE, A. TIKAN, P. SURET, S. RANDOUX & E. FALCON ; «Emergence of Peregrine solitons in integrable turbulence of deep water gravity waves» ; *Phys. Rev. Fluids* **5**, p. 082 801 (2020). 1, 94, 95
- [5] F. BONNEFOY, A. TIKAN, F. m. c. COPIE, P. SURET, G. DUCROZET, G. PRABHUDESAI, G. MICHEL, A. CAZAUBIEL, E. FALCON, G. EL & S. RANDOUX ; «From modulational instability to focusing dam breaks in water waves» ; *Phys. Rev. Fluids* **5**, p. 034 802 (2020). 1, 96
- [6] A. CAZAUBIEL, G. MICHEL, S. LEPOT, B. SEMIN, S. AUMAÎTRE, M. BERHANU, F. BONNEFOY & E. FALCON ; «Coexistence of solitons and extreme events in deep water surface waves» ; *Phys. Rev. Fluids* **3**, p. 114 802 (2018). 1, 95
- [7] S. AUMAÎTRE, R. P. BEHRINGER, A. CAZAUBIEL, E. CLÉMENT, J. CRASSOUS, D. J. DURIAN, E. FALCON, S. FAUVE, D. FISCHER, A. GARCIMARTÍN, Y. GARRABOS, M. HOU, X. JIA, C. LECOUTRE, S. LUDING, D. MAZA, M. NOIRHOMME, E. OPSOMER, F. PALENCIA, T. PÖSCHEL, J. SCHOCKMEL, M. SPERL, R. STANNARIUS, N. VANDEWALLE & P. YU ; «An instrument for studying granular media in low-gravity environment» ; *Review of Scientific Instruments* **89**, p. 075 103 (2018). 1, 125
- [8] M. NOIRHOMME, A. CAZAUBIEL, A. DARRAS, E. FALCON, D. FISCHER, Y. GARRABOS, C. LECOUTRE-CHABOT, S. MERMINOD, E. OPSOMER, F. PALENCIA, J. SCHOCKMEL, R. STANNARIUS & N. VANDEWALLE ; «Threshold of gas-like to clustering transition in

- driven granular media in low-gravity environment» ; *EPL (Europhysics Letters)* **123**, p. 14 003 (2018). 1, 125
- [9] A. CAZAUBIEL, F. HAUDIN, E. FALCON & M. BERHANU ; «Forced three-wave interactions of capillary-gravity surface waves» ; *Phys. Rev. Fluids* **4**, p. 074 803 (2019). 1, 76
- [10] F. HAUDIN, A. CAZAUBIEL, L. DEIKE, T. JAMIN, E. FALCON & M. BERHANU ; «Experimental study of three-wave interactions among capillary-gravity surface waves» ; *Phys. Rev. E* **93**, p. 043 110 (2016). 1, 76
- [11] I. MARUSIC & S. BROOMHALL ; «Leonardo da Vinci and Fluid Mechanics» ; *Annual Review of Fluid Mechanics* **53** (2021). 5
- [12] O. REYNOLDS ; «III. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels» ; *Proceedings of the Royal Society of London* **35**, p. 84–99 (1883). 5
- [13] KOLMOGOROV ; «The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers» ; *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* **434**, p. 9–13 (1941). 5, 17, 19
- [14] KOLMOGOROV ; «Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence» ; *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* **434**, p. 15–17 (1941). 5, 17, 40
- [15] V. E. ZAKHAROV & N. N. FILONENKO ; «Weak turbulence of capillary waves» ; *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **8** (1967). 5, 57, 68, 89
- [16] D. J. BENNEY & A. C. NEWELL ; «Sequential Time Closures for Interacting Random Waves» ; *Journal of Mathematics and Physics* **46**, p. 363–393 (1967). 5
- [17] V. E. ZAKHAROV, V. S. L'VOV & G. FALKOVICH ; *Kolmogorov spectra of turbulence 1. Wave turbulence* ; Springer Series in Nonlinear Dynamics (Springer-Verlag) (1992). 6, 53, 54, 57, 69, 89
- [18] S. NAZARENKO ; *Wave Turbulence* ; Lecture Notes in Physics 825 ; 1<sup>re</sup> édition (Springer-Verlag Berlin Heidelberg) (2011). 6, 53, 54, 56, 57, 89
- [19] E. FALCON, C. LAROCHE & S. FAUVE ; «Observation of Gravity-Capillary Wave Turbulence» ; *Phys. Rev. Lett.* **98**, p. 094 503 (2007). 6, 59, 64, 65, 68
- [20] P. DENISSENKO, S. LUKASCHUK & S. NAZARENKO ; «Gravity Wave Turbulence in a Laboratory Flume» ; *Physical Review Letters* **99** (2007). 6, 59, 68
- [21] P. COBELLI, A. PRZADKA, P. PETITJEANS, G. LAGUBEAU, V. PAGNEUX & A. MAUREL ; «Different Regimes for Water Wave Turbulence» ; *Physical Review Letters* **107** (2011). 6, 59, 68

- [22] L. DEIKE, B. MIQUEL, P. GUTIÉRREZ, T. JAMIN, B. SEMIN, M. BERHANU, E. FALCON & F. BONNEFOY ; «Role of the basin boundary conditions in gravity wave turbulence» ; *Journal of Fluid Mechanics* **781** (2015). 6, 53, 59, 68, 74
- [23] Q. AUBOURG, A. CAMPAGNE, C. PEUREUX, F. ARDHUIN, J. SOMMERIA, S. VIBOUD & N. MORDANT ; «Three-wave and four-wave interactions in gravity wave turbulence» ; *Phys. Rev. Fluids* **2**, p. 114802 (2017). 6, 59, 68, 76
- [24] V. E. ZAKHAROV ; «Turbulence in Integrable Systems» ; *Studies in Applied Mathematics* **122**, p. 219–234 (2009). 6, 89, 90, 91, 94, 95
- [25] A. S. KINGSEP, L. I. RUDAKOV & R. N. SUDAN ; «Spectra of Strong Langmuir Turbulence» ; *Phys. Rev. Lett.* **31**, p. 1482–1484 (1973). 6, 89
- [26] P. WALCZAK, S. RANDOUX & P. SURET ; «Optical Rogue Waves in Integrable Turbulence» ; *Phys. Rev. Lett.* **114**, p. 143903 (2015). 6, 89, 92
- [27] P. SURET, R. EL KOUSSAIFI, A. TIKAN, C. EVAIN, S. RANDOUX, C. SZWAJ & S. BIELAWSKI ; «Single-shot observation of optical rogue waves in integrable turbulence using time microscopy» ; *Nature Communications* **7**, p. 13136 (2016). 6, 89, 92
- [28] A. SCHWACHE & F. MITSCHKE ; «Properties of an optical soliton gas» ; *Phys. Rev. E* **55**, p. 7720–7725 (1997). 6, 89
- [29] R. HASSAINI & N. MORDANT ; «Transition from weak wave turbulence to soliton gas» ; *Phys. Rev. Fluids* **2**, p. 094803 (2017). 6, 91
- [30] P. SURET, A. TIKAN, F. BONNEFOY, F. COPIE, G. DUCROZET, A. GELASH, G. PRABHUDESAI, G. MICHEL, A. CAZAUBIEL, E. FALCON, G. EL & S. RANDOUX ; «Nonlinear spectral synthesis of soliton gas in deep-water surface gravity waves» ; (2020) ; [2006.16778](#). 6, 95
- [31] S. B. POPE ; *Turbulent Flows* (Cambridge University Press) (2000). 11, 12, 20, 34, 36, 37
- [32] G. COMTE-BELLOT & B. CHRISTOPHE ; *Turbulence* (CNRS editions) (2003). 11, 21
- [33] P. SAGAUT ; «Turbulence : une introduction» ; (2013). 11
- [34] G. I. TAYLOR ; «The Spectrum of Turbulence» ; *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **164**, p. 476–490 (1938). 16
- [35] L. LANDAU & E. LIFSHITZ ; *Fluid Mechanics : Volume 6* ; v. 6 (Elsevier Science) (2013). 17
- [36] U. FRISCH ; *Turbulence : The Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press) (1995). 17, 22, 36
- [37] T. DE KARMAN & L. HOWARTH ; «On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence» ; *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences* **164**, p. 192–215 (1938). 17, 20



- [38] G. I. TAYLOR; «Statistical theory of turbulence»; *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **151**, p. 421–444 (1935). 18
- [39] P. A. DAVIDSON; *Turbulence : an introduction for scientists and engineers*; 2<sup>e</sup> édition (Oxford University Press) (2015). 19, 34
- [40] S. G. SADDOUGH & S. V. VEERAVALLI; «Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number»; *Journal of Fluid Mechanics* **268**, p. 333–372 (1994). 19
- [41] A. SRDIC, H. J. S. FERNANDO & L. MONTENEGRO; «Generation of nearly isotropic turbulence using two oscillating grids»; *Experiments in Fluids* **20**, p. 395–397 (1996). 21
- [42] E. VILLERMAUX, B. SIXOU & Y. GAGNE; «Intense vortical structures in grid-generated turbulence»; *Physics of Fluids* **7**, p. 2008–2013 (1995). 21, 42
- [43] M. GUALA, A. LIBERZON, K. HOYER, A. TSINOBER & W. KINZELBACH; «Experimental study on clustering of large particles in homogeneous turbulent flow»; *Journal of Turbulence* **9**, p. N34 (2008). 21, 42
- [44] S. FAUVE, C. LAROCHE & B. CASTAING; «Pressure fluctuations in swirling turbulent flows»; *J. Phys. II France* **3**, p. 271–278 (1993). 21, 42
- [45] S. DOUADY, Y. COUDER & M. E. BRACHET; «Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence»; *Phys. Rev. Lett.* **67**, p. 983–986 (1991). 21, 42
- [46] M. BIROUK, B. SARH & I. GÖKALP; «An Attempt to Realize Experimental Isotropic Turbulence at Low Reynolds Number»; *Flow, Turbulence and Combustion* **70**, p. 325–348 (2003). 21
- [47] W. HWANG & J. EATON; «Creating homogeneous and isotropic turbulence without a mean flow»; *Experiments in Fluids* **36**, p. 444–454 (2004). 21, 42
- [48] G. BELLANI & E. A. VARIANO; «Homogeneity and isotropy in a laboratory turbulent flow»; *Experiments in Fluids* **55**, p. 1646 (2014). 21, 42
- [49] T. ISHIHARA, T. GOTOH & Y. KANEDA; «Study of High–Reynolds Number Isotropic Turbulence by Direct Numerical Simulation»; *Annual Review of Fluid Mechanics* **41**, p. 165–180 (2009). 21
- [50] T. LUNDGREN; «Linearly forced isotropic turbulence»; Annual Research Briefs-2003 p. 461 (2003). 21
- [51] C. ROSALES & C. MENEVEAU; «Linear forcing in numerical simulations of isotropic turbulence : Physical space implementations and convergence properties»; *Physics of Fluids* **17**, p. 095106 (2005). 21
- [52] E. FALCON, J.-C. BACRI & C. LAROCHE; «Equation of state of a granular gas homogeneously driven by particle rotations»; *EPL (Europhysics Letters)* **103**, p. 64004 (2013). 22, 30, 31

- [53] E. FALCON, J.-C. BACRI & C. LAROCHE; «Dissipated power within a turbulent flow forced homogeneously by magnetic particles»; *Phys. Rev. Fluids* **2**, p. 102 601 (2017). 22, 28, 30, 31, 34
- [54] M. BOLOGA, S. SYUTKIN & V. SERDITOV; «Velocity distribution of particles upon magnetic liquefaction in a variable field»; *Magnetohydrodynamics* **18**, p. 24 (1982). 22
- [55] M. SCHMICK & M. MARKUS; «Gaussian distributions of rotational velocities in a granular medium»; *Phys. Rev. E* **78**, p. 010 302 (2008). 22
- [56] A. SNEZHKO, I. S. ARANSON & W.-K. KWOK; «Structure Formation in Electromagnetically Driven Granular Media»; *Phys. Rev. Lett.* **94**, p. 108 002 (2005). 22
- [57] A. SNEZHKO, I. S. ARANSON & W.-K. KWOK; «Dynamic self-assembly of magnetic particles on the fluid interface : Surface-wave-mediated effective magnetic exchange»; *Phys. Rev. E* **73**, p. 041 306 (2006). 22
- [58] Y. A. BUEVICH, S. SYUTKIN & V. TETYUKHIN; «Theory of a developed magnetofluidized bed»; *Magnetohydrodynamics* **20**, p. 333–338 (1985). 22
- [59] M. BOLOGA, V. ZAMOREV & S. SYUTKIN; «Quelques lois du dégagement dissipatif de chaleur dans les systèmes à fluidisation magnétique. I. Résultats expérimentaux»; *Magnetohydrodynamics* p. 29–34 (1986). 22
- [60] G. KOKOT, S. DAS, R. G. WINKLER, G. GOMPPER, I. S. ARANSON & A. SNEZHKO; «Active turbulence in a gas of self-assembled spinners»; *Proceedings of the National Academy of Sciences* **114**, p. 12 870–12 875 (2017). 22
- [61] A. ESMAEELI & G. TRYGGVASON; «An inverse energy cascade in two-dimensional low Reynolds number bubbly flows»; *Journal of Fluid Mechanics* **314**, p. 315–330 (1996). 22
- [62] M. LANCE & J. BATAILLE; «Turbulence in the liquid phase of a uniform bubbly air–water flow»; *Journal of Fluid Mechanics* **222**, p. 95 (1991). 22
- [63] G. BOFFETTA & R. E. ECKE; «Two-Dimensional Turbulence»; *Annual Review of Fluid Mechanics* **44** (2012). 22
- [64] V. DALLAS, S. FAUVE & A. ALEXAKIS; «Statistical Equilibria of Large Scales in Dissipative Hydrodynamic Turbulence»; *Phys. Rev. Lett.* **115**, p. 204 501 (2015). 22, 36
- [65] A. ALEXAKIS & L. BIFERALE; «Cascades and transitions in turbulent flows»; *Physics Reports* **767-769**, p. 1 – 101 (2018). Cascades and transitions in turbulent flows. 22, 36
- [66] A. ALEXAKIS & M.-E. BRACHET; «On the thermal equilibrium state of large-scale flows»; *Journal of Fluid Mechanics* **872**, p. 594–625 (2019). 22

- [67] W. THIELICKE & E. STAMHUIS; «PIVlab – Towards User-friendly, Affordable and Accurate Digital Particle Image Velocimetry in MATLAB»; *Journal of Open Research Software* (2014). 26
- [68] O. SAWATZKI; «Das Strömungsfeld um eine rotierende Kugel»; *Acta Mechanica* **9**, p. 159–214 (1970). 28
- [69] CROQUETTE, V. & POITOU, C.; «Cascade of period doubling bifurcations and large stochasticity in the motions of a compass»; *J. Physique Lett.* **42**, p. 537–539 (1981). 28
- [70] H. MEISSNER & G. SCHMIDT; «A simple experiment for studying the transition from order to chaos»; *American Journal of Physics* **54**, p. 800–804 (1986). 28
- [71] R. H. KRAICHNAN; «Helical turbulence and absolute equilibrium»; *Journal of Fluid Mechanics* **59**, p. 745–752 (1973). 36, 43
- [72] H. TENNEKES; «Eulerian and Lagrangian time microscales in isotropic turbulence»; *Journal of Fluid Mechanics* **67**, p. 561–567 (1975). 38
- [73] G. K. BATCHELOR & TOWNSEND; «The nature of turbulent motion at large wavenumbers»; *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **199**, p. 238–255 (1949). 43
- [74] A. ARNÈODO, R. BENZI, J. BERG, L. BIFERALE, E. BODENSCHATZ, A. BUSSE, E. CALZAVARINI, B. CASTAING, M. CENCINI, L. CHEVILLARD, R. T. FISHER, R. GRAUER, H. HOMANN, D. LAMB, A. S. LANOTTE, E. LÉVÈQUE, B. LÜTHI, J. MANN, N. MORDANT, W.-C. MÜLLER, S. OTT, N. T. OUELLETTE, J.-F. PINTON, S. B. POPE, S. G. ROUX, F. TOSCHI, H. XU & P. K. YEUNG; «Universal Intermittent Properties of Particle Trajectories in Highly Turbulent Flows»; *Phys. Rev. Lett.* **100**, p. 254504 (2008). 43
- [75] B. DUBRULLE; «Intermittency in fully developed turbulence : Log-Poisson statistics and generalized scale covariance»; *Phys. Rev. Lett.* **73**, p. 959–962 (1994). 43
- [76] Z.-S. SHE & E. LEVEQUE; «Universal scaling laws in fully developed turbulence»; *Phys. Rev. Lett.* **72**, p. 336–339 (1994). 43
- [77] L. DEIKE; *Etudes expérimentales et numériques de la turbulence d’ondes de surface*; Thèse de doctorat ; Université Paris Diderot (2013). 47, 51, 73
- [78] Q. AUBOURG; *Étude expérimentale de la turbulence d’ondes à la surface d’un fluide. La théorie de la turbulence faible à l’épreuve de la réalité pour les ondes de capillarité et gravité*; Thèse de doctorat ; Université Grenoble Alpes (2016). 47
- [79] R. HASSAINI; *Etude de la turbulence d’ondes élastiques et gravito-capillaires : de l’idéal théorique aux conditions réelles ?*; Thèse de doctorat ; Université Grenoble Alpes (2018). 47
- [80] F. DIAS & C. KHARIF; «Non linear gravity and capillary-gravity waves»; *Annual Review of Fluid Mechanics* **31**, p. 301–346 (1999). 47

- [81] S. H. LAMB; *Hydrodynamics*; Cambridge Mathematical Library; 6<sup>e</sup> édition (Cambridge University Press) (1975). 51, 52, 73
- [82] L. DEIKE, M. BERHANU & E. FALCON; «Decay of capillary wave turbulence»; *Phys. Rev. E* **85**, p. 066 311 (2012). 51
- [83] C. CONNAUGHTON, A. C. NEWELL & Y. POMEAU; «Non-stationary spectra of local wave turbulence»; *Physica D: Nonlinear Phenomena* **184**, p. 64–85 (2003). 53, 57
- [84] Y. PAN & D. K. P. YUE; «Understanding discrete capillary-wave turbulence using a quasi-resonant kinetic equation»; *Journal of Fluid Mechanics* **816**, p. R1 (2017). 53
- [85] S. NAZARENKO; «Sandpile behaviour in discrete water-wave turbulence»; *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2006**, p. L02 002–L02 002 (2006). 53
- [86] B. ISSENMANN & E. FALCON; «Gravity wave turbulence revealed by horizontal vibrations of the container»; *Phys. Rev. E* **87**, p. 011 001 (2013). 53
- [87] R. HASSAINI & N. MORDANT; «Confinement effects on gravity-capillary wave turbulence»; *Phys. Rev. Fluids* **3**, p. 094 805 (2018). 53
- [88] A. A. VEDENOV; *Theory of a Weakly Turbulent Plasma*; p. 229–276 (Springer US, Boston, MA) (1967). 54
- [89] A. C. NEWELL & B. RUMPF; «Wave Turbulence»; *Annual Review of Fluid Mechanics* **43**, p. 59–78 (2011). 54, 60
- [90] A. NEWELL, S. NAZARENKO & L. BIVEN; «Wave turbulence and intermittency»; *Physica D: Nonlinear Phenomena* **152-153**, p. 520–550 (2001). 55
- [91] K. HASSELMANN; «On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum Part 1. General theory»; *Journal of Fluid Mechanics* **12**, p. 481 (1962). 56
- [92] V. KRASITSKII; «On the canonical transformation of the theory of weakly nonlinear waves with nondecay dispersion law»; *Sov. Phys. JETP* **98**, p. 1644–1655 (1990). 56
- [93] V. E. ZAKHAROV; «Weak turbulence in media with a decay spectrum»; *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **6**, p. 22–24 (1965). 57
- [94] V. E. ZAKHAROV & N. FILONENKO; «Energy spectrum for stochastic oscillations of the surface of a liquid»; **170**, p. 1292–1295 (1966). 57, 59, 68
- [95] R. H. KRAICHNAN; «Inertial-Range Spectrum of Hydromagnetic Turbulence»; *The Physics of Fluids* **8**, p. 1385–1387 (1965). 57
- [96] M. A. DONELAN, J. HAMILTON & W. H. HUI; «Directional Spectra of Wind-Generated Waves»; *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **315**, p. 509–562 (1985). 59
- [97] A. BENETAZZO, F. FEDELE, G. GALLEGRO, P.-C. SHIH & A. YEZZI; «Offshore stereo measurements of gravity waves»; *Coastal Engineering* **64**, p. 127 – 138 (2012). 59

- [98] P. A. HWANG, D. W. WANG, E. J. WALSH, W. B. KRABILL & R. N. SWIFT ; «Airborne Measurements of the Wavenumber Spectra of Ocean Surface Waves. Part I : Spectral Slope and Dimensionless Spectral Coefficient\*» ; *Journal of Physical Oceanography* **30**, p. 2753–2767 (2000). 59
- [99] L. ROMERO & W. K. MELVILLE ; «Airborne Observations of Fetch-Limited Waves in the Gulf of Tehuantepec» ; *Journal of Physical Oceanography* **40**, p. 441–465 (2010). 59
- [100] S. I. BADULIN, A. N. PUSHKAREV, D. RESIO & V. E. ZAKHAROV ; «Self-similarity of wind-driven seas» ; *Nonlinear Processes in Geophysics* **12**, p. 891–945 (2005). 59
- [101] A. CAMPAGNE, R. HASSAINI, I. REDOR, J. SOMMERIA, T. VALRAN, S. VIBOUD & N. MORDANT ; «Impact of dissipation on the energy spectrum of experimental turbulence of gravity surface waves» ; *Phys. Rev. Fluids* **3**, p. 044 801 (2018). 59, 68
- [102] A. C. NEWELL & V. E. ZAKHAROV ; «Rough sea foam» ; *Physical Review Letters* **69** (1992). 60
- [103] P. VON KAMPEN, T. KÖNEMANN & H. J. RATH ; «The Drop Tower Bremen -An Overview» ; 38th COSPAR Scientific Assembly **38**, p. 4 (2010). 60
- [104] C. FALCÓN, E. FALCON, U. BORTOLOZZO & S. FAUVE ; «Capillary wave turbulence on a spherical fluid surface in low gravity» ; *EPL (Europhysics Letters)* **86**, p. 14 002 (2009). 61
- [105] M. BERHANU, E. FALCON, G. MICHEL, C. GISSINGER & S. FAUVE ; «Capillary wave turbulence experiments in microgravity» ; *EPL (Europhysics Letters)* **128**, p. 34 001 (2020). 61
- [106] L. MAQUET, M. BRANDENBOURGER, B. SOBAC, A.-L. BIANCE, P. COLINET & S. DORBOLO ; «Leidenfrost drops : Effect of gravity» ; *EPL (Europhysics Letters)* **110** (2015). 63
- [107] S. N. R. BEDARD, S. Lukaschuk ; «Non-stationary regimes of surface gravity wave turbulence» ; *JETP Letters* **97**, p. 459–465 (2013). 69, 73
- [108] G. E. FALKOVICH, I. Y. SHAPIRO & L. SHTILMAN ; «Decay Turbulence of Capillary Waves» ; *Europhysics Letters (EPL)* **29**, p. 1–6 (1995). 69, 73
- [109] G. MICHEL ; «Three-wave interactions among surface gravity waves in a cylindrical container» ; *Phys. Rev. Fluids* **4**, p. 012 801 (2019). 74
- [110] R. HASSAINI & N. MORDANT ; «Confinement effects on gravity-capillary wave turbulence» ; *Phys. Rev. Fluids* **3**, p. 094 805 (2018). 74
- [111] W. B. WRIGHT, R. BUDAKIAN & S. J. PUTTERMAN ; «Diffusing Light Photography of Fully Developed Isotropic Ripple Turbulence» ; *Phys. Rev. Lett.* **76**, p. 4528–4531 (1996). 76

- [112] Q. AUBOURG & N. MORDANT; «Investigation of resonances in gravity-capillary wave turbulence»; *Phys. Rev. Fluids* **1**, p. 023 701 (2016). 76
- [113] M. BERHANU, E. FALCON & L. DEIKE; «Turbulence of capillary waves forced by steep gravity waves»; *Journal of Fluid Mechanics* **850**, p. 803–843 (2018). 76
- [114] A. KATZ & V. KONTOROVICH; «Drift stationary solutions in the weak turbulence theory»; *JETP Lett* **14**, p. 265–267 (1971). 76
- [115] Y.-Y. TSAI, M.-C. CHANG & L. I; «Observation of multifractal intermittent dust-acoustic-wave turbulence»; *Phys. Rev. E* **86**, p. 045 402 (2012). 76
- [116] A. N. GANSHIN, V. B. EFIMOV, G. V. KOLMAKOV, L. P. MEZHOV-DEGLIN & P. V. E. MCCLINTOCK; «Observation of an Inverse Energy Cascade in Developed Acoustic Turbulence in Superfluid Helium»; *Phys. Rev. Lett.* **101**, p. 065 303 (2008). 76
- [117] G. DÜRING, C. JOSSERAND & S. RICA; «Self-similar formation of an inverse cascade in vibrating elastic plates»; *Phys. Rev. E* **91**, p. 052 916 (2015). 76
- [118] D. J. BENNEY & A. C. NEWELL; «Sequential Time Closures for Interacting Random Waves»; *Journal of Mathematics and Physics* **46** (1967). 89, 90
- [119] S. GALTIER & S. V. NAZARENKO; «Turbulence of Weak Gravitational Waves in the Early Universe»; *Phys. Rev. Lett.* **119**, p. 221 101 (2017). 89
- [120] E. MONSALVE, M. BRUNET, B. GALLET & P.-P. CORTET; «Quantitative experimental observation of weak inertial-wave turbulence»; (2020); [2010.15563](#). 89
- [121] A. DYACHENKO, Y. LVOV & V. ZAKHAROV; «Five-wave interaction on the surface of deep fluid»; *Physica D: Nonlinear Phenomena* **87**, p. 233 – 261 (1995). Proceedings of the Conference on The Nonlinear Schrodinger Equation. 89
- [122] E. KROCHURIN, G. RICARD, N. ZUBAREV & E. FALCON; «Numerical simulation of colinear capillary-wave turbulence»; soumis à *JETP Letters* **7** (2020). 89
- [123] T. B. BENJAMIN & J. E. FEIR; «The disintegration of wave trains on deep water Part 1. Theory»; *Journal of Fluid Mechanics* **27**, p. 417–430 (1967). 89
- [124] M. PEYRARD & T. DAUXOIS; *Physique des solitons* (EDP Sciences) (2012). 89, 90
- [125] D. H. PEREGRINE; «Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions»; *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics* **25**, p. 16–43 (1983). 89
- [126] E. A. KUZNETSOV; «Solitons in a parametrically unstable plasma»; *Sov. Phys. Dokl.* **236**, p. 575–577 (1977). 89
- [127] Y.-C. MA; «The Perturbed Plane-Wave Solutions of the Cubic Schrödinger Equation»; *Studies in Applied Mathematics* **60**, p. 43–58. 89

- [128] N. AKHMEDIEV, V. ELEONSKII & N. KULAGIN; «Generation of periodic trains of picosecond pulses in an optical fiber : exact solutions»; *Sov. Phys. JETP* **62**, p. 894–899 (1985). 89
- [129] N. AKHMEDIEV, V. ELEONSKIJ & N. KULAGIN; «Exact solutions of the first order nonlinear Schroedinger equation»; *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika* **72**, p. 183–196 (1987). 89
- [130] A. CHABCHOUB, N. P. HOFFMANN & N. AKHMEDIEV; «Rogue Wave Observation in a Water Wave Tank»; *Phys. Rev. Lett.* **106**, p. 204 502 (2011). 89, 92
- [131] A. SLUNYAEV; «Nonlinear analysis and simulations of measured freak wave time series»; *European Journal of Mechanics - B/Fluids* **25**, p. 621 – 635 (2006)Rogue waves. 89, 91
- [132] V. ZAKHAROV; «Kinetic equation for solitons»; *Sov. Phys. JETP* **33**, p. 538–540 (1971). 89, 90, 91
- [133] G. FALKOVICH; *Fluid Mechanics*; 2<sup>e</sup> édition (Cambridge University Press) (2018). 90
- [134] V. E. ZAKHAROV; «Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid»; *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **9** (1968). 90
- [135] M. REMOISSENET; *Waves called solitons : concepts and experiments* (Springer Science & Business Media) (2013). 90
- [136] S. RANDOUX, P. WALCZAK, M. ONORATO & P. SURET; «Nonlinear random optical waves : Integrable turbulence, rogue waves and intermittency»; *Physica D: Nonlinear Phenomena* **333**, p. 323–335 (2016). 91
- [137] A. R. OSBORNE; «Behavior of solitons in random-function solutions of the periodic Korteweg–de Vries equation»; *Phys. Rev. Lett.* **71**, p. 3115–3118 (1993). 91
- [138] A. R. OSBORNE, E. SEGRE, G. BOFFETTA & L. CAVALERI; «Soliton basis states in shallow-water ocean surface waves»; *Phys. Rev. Lett.* **67**, p. 592–595 (1991). 91
- [139] A. COSTA, A. R. OSBORNE, D. T. RESIO, S. ALESSIO, E. CHRIVÌ, E. SAGGESE, K. BELLOMO & C. E. LONG; «Soliton Turbulence in Shallow Water Ocean Surface Waves»; *Phys. Rev. Lett.* **113**, p. 108 501 (2014). 91
- [140] S. PERRARD, L. DEIKE, C. DUCHÊNE & C.-T. PHAM; «Capillary solitons on a levitated medium»; *Phys. Rev. E* **92**, p. 011 002 (2015). 91
- [141] P. A. E. M. JANSSEN; «Nonlinear Four-Wave Interactions and Freak Waves»; *Journal of Physical Oceanography* **33**, p. 863–884 (2003). 91
- [142] M. ONORATO, A. R. OSBORNE, M. SERIO, L. CAVALERI, C. BRANDINI & C. T. STANSBERG; «Observation of strongly non-Gaussian statistics for random sea surface gravity waves in wave flume experiments»; *Phys. Rev. E* **70**, p. 067 302 (2004). 91

- [143] M. ONORATO, A. R. OSBORNE, M. SERIO & L. CAVALERI; «Modulational instability and non-Gaussian statistics in experimental random water-wave trains»; *Physics of Fluids* **17**, p. 078 101 (2005). 91
- [144] L. SHEMER & A. SERGEEVA; «An experimental study of spatial evolution of statistical parameters in a unidirectional narrow-banded random wavefield»; *Journal of Geophysical Research* **114** (2009). 91, 94
- [145] L. SHEMER, A. SERGEEVA & D. LIBERZON; «Effect of the initial spectrum on the spatial evolution of statistics of unidirectional nonlinear random waves»; *Journal of Geophysical Research: Oceans* **115** (2010). 91
- [146] R. EL KOUSSAIFI, A. TIKAN, A. TOFFOLI, S. RANDOUX, P. SURET & M. ONORATO; «Spontaneous emergence of rogue waves in partially coherent waves : A quantitative experimental comparison between hydrodynamics and optics»; *Phys. Rev. E* **97**, p. 012 208 (2018). 91
- [147] M. ONORATO, A. R. OSBORNE, M. SERIO & S. BERTONE; «Freak Waves in Random Oceanic Sea States»; *Phys. Rev. Lett.* **86**, p. 5831–5834 (2001). 91
- [148] K. B. DYSTHE, K. TRULSEN, H. E. KROGSTAD & H. SOCQUET-JUGLARD; «Evolution of a narrow-band spectrum of random surface gravity waves»; *Journal of Fluid Mechanics* **478**, p. 1–10 (2003). 91
- [149] J. M. SOTO-CRESPO, N. DEVINE & N. AKHMEDIEV; «Integrable Turbulence and Rogue Waves : Breathers or Solitons?»; *Phys. Rev. Lett.* **116**, p. 103 901 (2016). 91
- [150] A. L. ISLAS & C. M. SCHOBER; «Predicting rogue waves in random oceanic sea states»; *Physics of Fluids* **17**, p. 031 701 (2005). 91
- [151] L. SHEMER & L. ALPEROVICH; «Peregrine breather revisited»; *Physics of Fluids* **25**, p. 051 701 (2013). 92
- [152] G. DONG, B. LIAO, Y. MA & M. PERLIN; «Experimental investigation of the Peregrine Breather of gravity waves on finite water depth»; *Phys. Rev. Fluids* **3**, p. 064 801 (2018). 92
- [153] A. CHABCHOUB, N. HOFFMANN, H. BRANGER, C. KHARIF & N. AKHMEDIEV; «Experiments on wind-perturbed rogue wave hydrodynamics using the Peregrine breather model»; *Physics of Fluids* **25**, p. 101 704 (2013). 92
- [154] A. CHABCHOUB; «Tracking Breather Dynamics in Irregular Sea State Conditions»; *Phys. Rev. Lett.* **117**, p. 144 103 (2016). 92
- [155] A. TIKAN, S. BIELAWSKI, C. SZWAJ, S. RANDOUX & P. SURET; «Single-shot measurement of phase and amplitude by using a heterodyne time-lens system and ultrafast digital time-holography»; *Nature Photonics* **12**, p. 228–234 (2018). 92



- [156] L. SHEMER, A. SERGEEVA & A. SLUNYAEV; «Applicability of envelope model equations for simulation of narrow-spectrum unidirectional random wave field evolution : Experimental validation»; *Physics of Fluids* **22**, p. 016 601 (2010). 94
- [157] E. A. KUZNETSOV; «Turbulence spectra generated by singularities»; *JETP Letters* **80**, p. 83–89 (2004). 95
- [158] M. BERTOLA & A. TOVBIS; «Universality for the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation at the Gradient Catastrophe Point : Rational Breathers and Poles of the Truncated Solution to Painlevé I»; *Communications on Pure and Applied Mathematics* **66**, p. 678–752 (2013). 95
- [159] A. TIKAN, F. BONNEFOY, G. MICHEL, G. PRABHUDESAI, A. CAZAUBIEL, F. COPIE, E. FALCON, S. RANDOUX & P. SURET; «Dispersion relation for unidirectional surface gravity waves»; 22e Rencontres du Non-Linéaire; p. 187 (2019). 96



---

## Dynamique non-linéaire et cascade en turbulences : turbulence hydrodynamique, turbulence d'ondes, et turbulence intégrable

---

**Résumé** : Les modèles de turbulence tendent à prédire l'évolution statistique d'un champ régi par une équation non-linéaire avec des termes de forçage et de dissipation. Pour la turbulence hydrodynamique, le champ de vitesse est gouverné par l'équation de Navier-Stokes. Pour décrire un champ d'ondes aléatoires faiblement non-linéaires en interaction, la théorie de la turbulence d'ondes permet d'obtenir des prédictions sur de nombreuses quantités statistiques. Lorsqu'un champ d'ondes stochastiques obéit à une équation intégrable, on parle de turbulence intégrable. Ces différentes « turbulences » restent des défis théoriques. Afin de mieux les comprendre, il est nécessaire de confronter ces théories à des expériences de laboratoire. Nous avons mené dans cette thèse des études expérimentales sur trois systèmes non-linéaires turbulents. Nous avons mis en place au laboratoire un nouveau dispositif pour engendrer la turbulence hydrodynamique tridimensionnelle. En utilisant des particules magnétiques de petites tailles contrôlées à distance, nous arrivons à forcer le fluide en volume, aléatoirement en espace et en temps. Nous présentons dans cette thèse les principales caractéristiques de la turbulence à petites échelles ainsi engendrée. En utilisant la centrifugeuse de l'ESA, nous avons pu mener des expériences de turbulence d'ondes à la surface d'un fluide en faisant varier la gravité effective jusqu'à 20 fois la gravité terrestre. Nous avons pu notamment montrer l'importance des effets de taille finie du système dans les expériences de turbulence d'ondes. Enfin, en utilisant le grand bassin de l'École Centrale de Nantes, nous avons étudié la propagation unidimensionnelle d'ondes de gravité aléatoires en eau profonde, et la statistique de l'émergence de structures localisées non-linéaires telles que des solitons évoluant sur un fond d'ondes stochastiques.

**Mots clés** : Mécanique des fluides, turbulence, turbulence d'ondes, turbulence intégrable, systèmes non-linéaires, solitons, expériences

---

## Nonlinear dynamics and cascade in turbulences : hydrodynamic turbulence, wave turbulence, and integrable turbulence

---

**Abstract**: The models of turbulence tend to predict the statistical evolution of a field governed by a nonlinear equation with terms of forcing and dissipation. For hydrodynamic turbulence the velocity field is governed by the Navier-Stokes equation. The theory of wave turbulence gives us predictions for various statistical quantities describing a weakly nonlinear stochastic wave field in interaction. When a stochastic wave field is governed by an integrable equation, we talk about integrable turbulence. These different "turbulences" are still theoretical challenges. To better understand them, it is necessary to confront these theories with laboratory experiments. We performed during this thesis experimental studies of three nonlinear turbulent systems. We set up a new system to generate tridimensional hydrodynamic turbulence. Using small-sized magnetic particles remotely controlled by a magnetic field, we can force the fluid in volume randomly in space and time. We present in this thesis the main characteristics of the generated small-scale turbulence. By using the centrifuge of ESA, we performed experiments of wave turbulence by varying the effective gravity up to 20 times the earth gravity. We showed notably the importance of the finite size effects in wave turbulence experiments. Finally, in the large-scale basin of the Ecole Centrale de Nantes, we studied the unidimensional propagation of random deep water gravity waves, and the emergence of nonlinear localized structures such as solitons evolving on a background of stochastic waves.

**Keywords** : Fluid mechanics, turbulence, wave turbulence, integrable turbulence, non-linear systems, experiments, solitons