



HAL
open science

Spectroscopie et thermométrie d'ions uniques Sr^+ capturés dans des micropièges surfaciques aspects théoriques et expérimentaux

Vincent Tugaye

► **To cite this version:**

Vincent Tugaye. Spectroscopie et thermométrie d'ions uniques Sr^+ capturés dans des micropièges surfaciques aspects théoriques et expérimentaux. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Cité, 2020. Français. NNT : 2020UNIP7236 . tel-03421162

HAL Id: tel-03421162

<https://theses.hal.science/tel-03421162>

Submitted on 9 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Paris

École doctorale n° 564 : Physique en Île-de-France

Laboratoire Matériaux et Phénomènes Quantiques, CNRS UMR 7162

Spectroscopie et thermométrie d'ions uniques $^{88}\text{Sr}^+$ capturés dans des micropièges surfaciques aspects théoriques et expérimentaux

Par Vincent TUGAYÉ

Thèse de doctorat de Physique

Dirigée par Luca GUIDONI

présentée et soutenue publiquement le 3 Décembre 2020

Devant un jury composé de :

M. Luca GUIDONI,	Chargé de recherche HDR, MPQ	Directeur de thèse
M. Laurent HILICO,	Professeur, LKB	Président du jury
Mme Laurence PRUVOST,	Directrice de recherche, LAC	Examinatrice
Mme Caroline CHAMPENOIS,	Chargée de recherche HDR, PIM	Rapporteuse
M. David LUCAS,	Professor, Clarendon Laboratory	Rapporteur



Except where otherwise noted, this work is licensed under
<https://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Titre Spectroscopie et thermométrie d'ions uniques $^{88}\text{Sr}^+$ capturés dans des micropièges surfaciques : aspects théoriques et expérimentaux

Résumé Si les ions piégés sont une plateforme de choix pour la mise en pratique des idées issues du domaine du calcul quantique, de nombreuses limitations techniques demeurent. L'une d'elle, le chauffage anormal, limite les possibilités de la technologie des micropièges surfaciques, un outil qui pourrait simplifier le problème de la mise à l'échelle de la plateforme.

Ce manuscrit expose les outils théoriques et expérimentaux développés au cours de cette thèse pour mesurer ce phénomène. Nous présenterons aussi l'application de ces méthodes à la spectroscopie de précision.

Ces méthodes reposent sur deux outils en particulier : une technique d'acquisition séquentielle de la fluorescence d'un unique ion en interaction avec plusieurs lasers conçue pour contrôler l'effet des absorptions/emission de photons sur le mouvement de l'ion, et une méthode de résolution des équations de Bloch optiques permettant de faire le lien entre le mouvement de l'ion et son niveau de fluorescence, sans recourir à une approximation adiabatique.

Mots clefs ions piégés, équations de Bloch optiques, spectroscopie sur raie large, chauffage anormal

Title Spectroscopy and thermometry of single $^{88}\text{Sr}^+$ ions captured in micro-fabricated surface traps : theoretical and experimental aspects

Abstract Trapped ions are a very promising platform for implementing the ideas of the field of quantum computing, but quite a few technical limitations have yet to be overcome. One of them, the anomalous heating phenomenon, limits the prospects of the micro-fabricated surface traps, a powerful tool that could help scaling up the platform.

This memoir presents the theoretical and experimental tools that I developed in order to measure this effect, as well as a few applications of the method designed to the precision spectroscopy of dipole-allowed transitions.

These tools are : a sequential acquisition technique designed to control the effect of the emission/absorption of photons on the movement of the ion in interaction with a set of lasers, and a method of resolution of the optical Bloch equations that allows us to link the photon scattering rate of the ion to its state of motion in the absence of adiabatic approximation.

Keywords trapped ions, optical Bloch equations, spectroscopy of dipole-allowed transitions, anomalous heating

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Contexte	4
1.1.1	Information quantique	4
1.1.2	Calcul quantique	5
1.2	Plan de thèse	13
2	Dispositif expérimental	15
2.1	Principes théoriques du piégeage et du refroidissement	16
2.1.1	Piège de Paul et pseudo-potentiel	16
2.1.2	Refroidissement laser	21
2.2	Les pièges	25
2.2.1	géométrie	25
2.2.2	compensation de l'excès de micro-mouvement	26
2.2.3	calcul des potentiels	29
2.3	Sources laser	31
2.3.1	contrôle et orientation des faisceaux	33
2.3.2	stabilisation en fréquence	34
2.4	Comptage des photons	39
2.4.1	Optiques de collection	40
2.4.2	Séquenceur-compteur	41
2.4.3	asservissement en intensité des faisceaux	41
2.5	Contrôle du champ magnétique	42
2.5.1	alignement du champ magnétique sur une direction	44
2.5.2	amplitude du champ	46
2.5.3	zéro du champ	47
2.6	conclusion du chapitre	48
3	Equations de Bloch	49
3.1	Equation de Linblad	49
3.2	Présentation du système étudié	51
3.2.1	Niveaux d'énergie et Effet Zeeman	51
3.2.2	Règles de sélection	52

3.2.3	émission spontanée	54
3.3	Méthodes de résolution des OBE	55
3.3.1	Régime permanent des OBE pour un système multiplement connecté	56
3.3.2	Désaccords dépendants du temps	64
3.3.3	Régime transitoire	65
3.4	Ion en mouvement et effets mécaniques de la lumière sur l'ion	67
3.4.1	Rappels sur l'oscillateur harmonique quantique	68
3.4.2	Calcul des déformations des formes de raie pour une distribution thermique	69
3.4.3	Effets mécaniques dans l'approximation semi-classique	71
3.5	conclusion du chapitre	76
4	Résultats Expérimentaux	77
4.1	Rapport de branchement	77
4.2	Fréquence de la transition de refroidissement	77
4.2.1	Modèle semi-analytique du repompage incohérent	80
4.2.2	estimation des effets mécaniques	84
4.2.3	effet systématique d'un glissement des paramètres d'acquisition	86
4.2.4	mesure de la fréquence de transition	88
4.2.5	résumé des résultats	91
4.3	Mesures de température	92
4.3.1	Thermométrie par résonance grise	95
4.3.2	Réglage des séquences d'acquisition	99
4.3.3	Pièges raides	101
4.3.4	signal à bruit	103
4.3.5	erreurs systématiques	104
4.3.6	résumé des résultats	111
5	Conclusion générale	112
A	calcul des potentiels des pièges planaires	114
A.1	calcul du potentiel pour une électrode papillon	115
A.2	passage à une électrode polygonale	117
B	cavité de transfert de cohérence	120

C	calcul de la forme de raie en repompage incohérent	122
C.1	Découplage des équations de Bloch pour chaque sous système	122
C.2	Effet du champ magnétique	124
C.3	Effet des états noirs	125
D	OBE pour un ion en mouvement	127
E	Code de construction du système des OBE	131
E.1	exemple	131
E.2	code	134
F	Article BRTC	143
G	Article thermométrie par résonance noire	152

1 Introduction

1.1 Contexte

1.1.1 Information quantique

La théorie classique de l'information de Shannon est à son cœur un formalisme de description des télécommunications, du codage d'un message, de sa transmission et de son décodage. La brique de base généralement utilisée pour encoder un message est le bit : une quantité binaire dont chaque état peut être représenté par un symbole 0 ou 1. L'information ici n'est pas synonyme de contenu mais de diversité des messages, diversité dont la mesure se fait en nombre de bits requis pour reproduire aussi fidèlement que possible les messages pouvant être émis. Dans le cas le plus simple (une série de messages aléatoires indépendants identiquement distribués), cette quantité peut être reliée à l'entropie de Shannon via le théorème du codage de source [76].

Par analogie on peut vouloir mesurer la diversité d'information quantique contenue dans les états produits par un système quantique en prenant comme brique de base le qubit : un système quantique à deux états $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Cette fois le nombre minimal de qubits requis est reliée à l'entropie de Von Neumann de l'opérateur densité décrivant la source quantique considérée : c'est le théorème de codage quantique de Schumacher [73].

Cette information est très différente de l'information classique et ce pour trois raisons liées aux postulats de la mécanique quantique.

En effet un ensemble de n qubits peut être représenté par une direction dans un espace de Hilbert de dimension 2^n pour un état pur, ou pour un état mélangé, par un opérateur hermitien positif agissant sur cet espace : l'opérateur densité. Un qubit est une grandeur continue, contrairement à l'information classique qui est discrète. La densité de l'information requise pour décrire numériquement un état quantique arbitraire à un niveau de précision donné croît exponentiellement avec le nombre de qubits requis pour le représenter. En un sens la densité d'information pouvant être codée sur n qubit est notablement supérieure à celle pouvant être codée sur n bits.

En revanche la mesure de l'état d'un qubit, c'est à dire l'extraction d'une information classique concernant son état, décrit de manière générale via le formalisme des POVM (positive-operator valued measure), altère de manière irréversible l'état du système entier via un processus intrinsèquement aléatoire [58]. Contrairement à l'information classique qui peut être lue et copiée à loisir, en l'absence d'hypothèses très restrictives sur la nature de l'information quantique consi-

dérée, la fidélité d'une opération de clonage ou de tomographie de l'information quantique est bornée par une limite strictement inférieure à un [71].

Mais le point le plus étonnant est la notion d'intrication. Prenons le cas d'un d'un système comprenant deux qubits a et b entre les mains respectives de deux expérimentateurs Alice et Bob. Supposons que le système soit dans un état dit maximalement intriqué $|0_a1_b\rangle - |1_a0_b\rangle$. Pour un tel état, en l'absence d'information sur les mesures de Bob, quel que soit la base de mesure choisie par Alice, la probabilité de trouver un état ou un autre est de $1/2$. En revanche, à transformation unitaire identique sur la base de mesure des qubit a et b , si l'on répète l'expérience plusieurs fois, la comparaison des mesures d'Alice et Bob présente des anti-corrélations parfaites. Ainsi l'information classique que l'on peut extraire de chaque qubit pris isolément ne renseigne en rien sur l'information quantique portée par le système : sans faire interagir les deux qubits, à un degré de précision donné, seule la réunion des résultats et des réglages des mesures d'Alice et Bob permettent de caractériser complètement cet état. Ces propriétés particulières de l'intrication n'ont aucun équivalent classique : comme le montre le paradoxe EPR [30] pour reproduire les résultats de la mécanique quantique dans un formalisme compatible avec le réalisme local il est nécessaire de faire appel à des variables cachées, mais la violation des inégalités de Bell [3] montre qu'une telle entreprise est vaine, à moins de faire appel à la notion fort peu physique de probabilité négative [2].

1.1.2 Calcul quantique

L'étude de l'information quantique, et des systèmes quantiques en général, ne se prête donc pas facilement à l'usage des moyens conventionnels de calcul. Non seulement en raison du nombre potentiellement très important de paramètres en jeu dans la description classique de l'état quantique du système, mais aussi si l'on cherche à simuler sur une machine classique les résultats d'une mesure effectuées sur un système quantique sans passer par l'écriture de la distribution de probabilité sous-jacente, un problème posé sous le nom d'échantillonnage quantique [59].

En dehors de quelques cas particuliers ou le théoricien, guidé par les résultats expérimentaux, est capable de dériver une approximation à partir des principes fondamentaux de la mécanique quantique, de nombreuses systèmes échappent à notre compréhension [55] : "Nous avons réussi à réduire tous les phénomènes physiques ordinaires à une théorie du tout, minimaliste et vérifiée, pour découvrir que cela ne nous a en rien avancé sur bien des sujets de grande importance".

Si l'on souhaite persister sur cette voie, il faudrait faire appel à une machine exploitant elle

même les propriétés de l'information quantique. En théorie, de nombreuses applications seraient possibles dans le domaine de la chimie quantique, de la matière condensée et même de la physique des hautes énergies ou la cosmologie [35], que ce soit sur une machine programmable, ou un appareil dédié.

Ce qui est aujourd'hui une faiblesse pourrait devenir une force : la quantité d'information que l'on peut stocker et traiter en parallèle sur un état quantique n'a pas d'équivalent classique. À ceci près qu'extraire une information pertinente d'un état quantique de grande dimension demande un certain degré d'inventivité, et la capacité à préserver la cohérence d'un système quantique de taille importante malgré les inévitables couplages avec l'environnement. Parmi les problèmes pour lesquels un avantage théorique a été démontré on peut citer :

- l'algorithme de Shor [78] pour la factorisation de deux grands nombres premiers,
- l'algorithme de Grover [39] pour la recherche d'un élément dans une base de donnée non structurée,
- l'algorithme HHL [1] pour l'estimation d'observables liées à un vecteur $|\vec{x}\rangle$ solution d'un système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$.

En termes de relation entre la taille et le nombre de ressources à engager pour résoudre le problème (mémoire et temps), il existe un seuil au delà duquel un calculateur quantique implémentant ces algorithmes est capable de battre les meilleurs super calculateurs classiques. Il faut néanmoins garder à l'esprit que pour une application donnée, cet avantage n'est que théorique, car non seulement ce seuil peut tout à fait se trouver bien au delà des limites de fonctionnement d'une telle machine, mais les preuves de complexité font parfois appel à des suppositions qui ne seront pas forcément réalisables en pratique.

Plusieurs paradigmes pour la conception d'une telle machine ont été développés depuis, avec par exemple le formalisme des "circuits logiques" quantiques [27], le calcul basé sur la mesure [16], ou le calcul adiabatique quantique [4]. Dans tous les cas il s'agit à partir d'un état de départ de faire évoluer de manière contrôlée le système vers un état voulu sur lequel la mesure d'une observable bien choisie permet d'obtenir la réponse au problème que l'on se pose, seul l'état de départ et le mode d'action sur le système change :

circuit logique quantique : en partant d'un registre de qubits initialisés dans l'état $|0\dots 0\rangle$, l'état final est obtenu en appliquant une série de "portes logiques" quantiques qui correspondent en pratique à un ensemble d'opérations unitaires élémentaires.

le calcul basé sur la mesure : l'état initial ici appartient à une classe d'états massivement intriqués connus sous le nom de cluster state construit sur un réseau de qubits de dimension au moins deux. La manipulation de cet état correspond à une séquence d'opérations de mesure sur une partie des qubits d'observables qui dépendent des résultats de l'étape précédente. À la fin de cette séquence les qubits restants sont, à des transformations locales près, dans l'état final recherché.

calcul adiabatique quantique : L'état initial est le niveau fondamental d'un hamiltonien facile à émuler sur la machine. La manipulation se fait en assurant l'évolution adiabatique de l'hamiltonien initial vers un hamiltonien final dont l'état fondamental correspond à l'état recherché.

Mais de multiples barrières s'opposent à la réalisation pratique de ce projet, que l'on peut résumer par les critères de DiVincenzo [29], initialement pensés pour le modèle de circuit logique quantique mais également applicables aux autres approches. En effet l'implémentation pratique de la notion de calcul quantique passe par :

- l'isolation d'un système dont on connaît bien la dynamique quantique qui servira de brique de base pour la construction d'un qubit,
- la capacité à n'importe quel moment d'initialiser chaque qubit dans un état spécifique servant de point de départ aux calculs,
- la capacité à manipuler l'état quantique de chaque qubit indépendamment des autres et à maîtriser les interactions entre deux qubits ou plus,
- la capacité de mesurer un qubit arbitraire sans perturber le reste du système,
- la capacité d'assurer des durées de cohérence longues devant le temps de manipulation des qubits.

Toute machine quantique étant intrinsèquement analogique, ces critères ne peuvent être atteints qu'à un degré de précision limité. Le nombre de qubits et d'opérations qui peuvent être effectués se trouve alors limité non pas par le temps de calcul nécessaire, mais par le nombre d'opérations que l'on peut faire avant que l'accumulation des erreurs ne rendent la sortie tout à fait aléatoire. Ce point est extrêmement important si l'on veut démontrer l'intérêt d'un algorithme quantique : il faut prendre garde à ce que les gains obtenus par l'utilisation de ressources quantiques ne soient pas repris par l'exigence d'assurer un niveau de fiabilité raisonnable.

Cet horizon peut néanmoins être repoussé, d'une part en concevant les algorithmes de sorte à contenir la propagation des erreurs, et d'autre part en réduisant la probabilité de certaines classes d'erreurs. Pour cela on peut faire appel à des techniques de découplage dynamique pour compenser le bruit dû à l'environnement et/ou encoder l'information quantique sur des états composites peu sensibles aux bruits attendus. Mais la technique la plus prometteuse est la correction d'erreur quantique [28]. De manière analogue à l'information classique, il est possible de réduire l'impact d'une large classe d'erreurs à un niveau arbitrairement bas en augmentant la redondance du système, à condition que l'on sache remplir les critères de Di Vincenzo sous un seuil d'imprécision donné. L'ordre de grandeur des seuils que l'on peut trouver dans la littérature oscille entre 10^{-4} et 10^{-2} , en fonction des hypothèses sur la nature du bruit, du choix du code correcteur évalué et du nombre de qubits mis en jeu [25]. Notons qu'en procédant ainsi on peut être rattrapé par une autre classe d'erreurs [85], le processus de mise à l'échelle d'un ordinateur quantique est donc loin d'être trivial. Par ailleurs pour de multiples algorithmes les estimations du nombre de qubits requis pour résoudre un problème utile sont bien au delà de l'état de l'art. Par exemple pour briser la méthode de chiffrement RSA-2048 avec l'algorithme de Shor, les estimations les plus optimistes impliquent un nombre de qubits physiques de l'ordre de la dizaine de millions [36].

Pour faire le lien avec le champ des télécommunications quantiques, Di Vincenzo ajoute deux autres critères [29] :

- la capacité de convertir les qubits stationnaires en qubits volants et inversement,
- la capacité à transférer fidèlement les qubits volants entre deux endroits

À ce jour, les seuls qubits volants disponibles sont tous encodés dans une des propriétés de la lumière, tel que la polarisation, la vorticalité, le temps d'arrivée ou la fréquence d'une impulsion, avec pour des raisons pratiques une forte emphase sur les longueurs d'onde télécom [33]. Malgré la faible interaction entre les photons et leur environnement, le transport de ces qubits est une opération délicate. Pour augmenter la portée, le débit et la fiabilité des communications quantiques il faut à minima disposer de mémoires quantiques performantes, idéalement disposant de capacités de calcul quantique rudimentaires [37].

De multiples supports ont été proposés pour tenter de répondre à ces critères, mais jusqu'ici seul deux ont réussi à surmonter l'étape des démonstrations de principe de ces cinq critères à un degré de précision suffisant pour espérer pouvoir implémenter la correction d'erreur quantique : les ions piégés [20] et les circuits supraconducteurs [51].

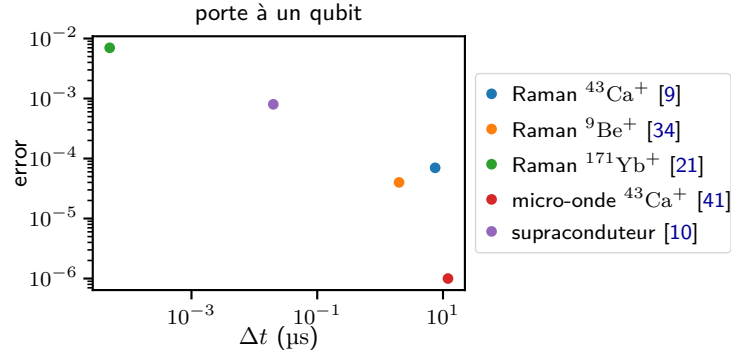


FIGURE 1 – Ordre de grandeur des performances en terme de vitesse et d’infidélité des portes à un qubit pour diverses implémentations. On peut noter que le contrôle micro-onde des qubits basés sur des ions piégés permet d’atteindre le plus bas taux d’erreur de toutes les technologies.

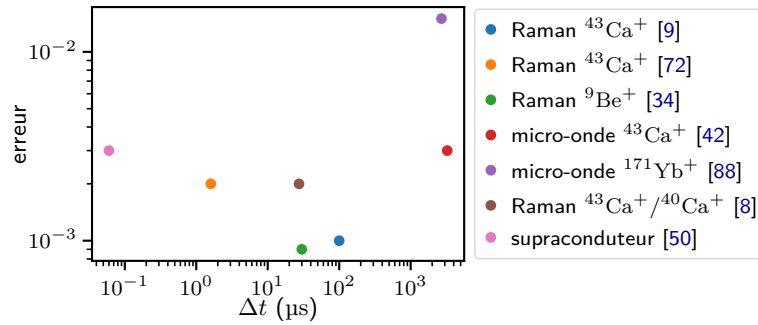


FIGURE 2 – Ordre de grandeur des performances en terme de vitesse et d’infidélité des portes à deux qubit pour diverses implémentations. On peut noter que pour la plateforme "ion piégés", et plus encore pour le contrôle micro-onde, les temps requis pour effectuer une opération à deux qubits sont nettement plus élevés que pour une opération à un qubit.

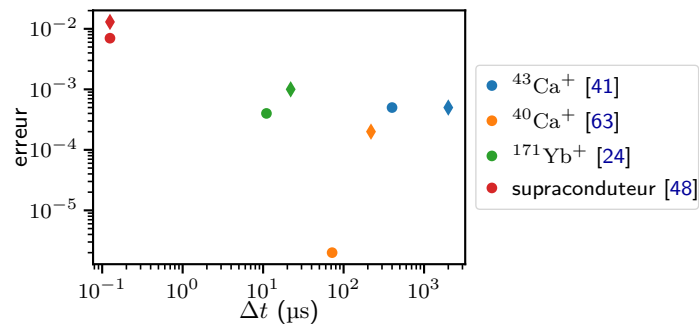


FIGURE 3 – Ordre de grandeur des performances en terme de vitesse et d’infidélité de la mesure d’un qubit pour diverses implémentations et en fonction de son état $|0\rangle$ (ronds) ou $|1\rangle$ (losanges) dans la base de mesure.

De ces deux plateformes les ions piégés présentent, au niveau des démonstrations de principe,

les meilleures performances du point de vue de la précision des opérations de manipulation comme on peut le voir dans les figures 1,2 et 3, au prix d'une fréquence d'horloge bien plus basse. Grossièrement cette différence fait passer l'ordre de grandeur des estimations les plus optimistes de temps requis pour réaliser l'algorithme de Shor sur un nombre de 2048 bits d'une dizaine d'heures pour les qubits supraconducteurs [36] à un mois pour les ions piégés [57]. Le tableau 1 montre néanmoins que l'écart en terme de précision entre les ions piégés et les qubits supraconducteurs se réduit si l'on regarde les performances des processeurs quantiques basés sur ces technologies. Notons qu'avec la démonstration de principe d'une interface ion-photon [53], les ions piégés pourraient devenir le lien entre le calcul quantique de haute fidélité et les communications quantiques. Cela nécessiterait néanmoins l'amélioration de la collection des photons émis par l'ion, par exemple à l'aide d'une cavité [82].

	IonQ [90]	Sycamore [7]
Nombre de qubit	11	53
topologie	linéaire	surfacique
connectivité	totale	plus proches voisins
erreurs de préparation et mesure	0.7 %	3.8 %
erreurs portes à un qubit	0.5 %	0.16 %
erreurs portes à deux qubits	2.5 %	0.62 %
durée porte à deux qubits	$\sim 200 \mu\text{s}$	$\sim 60 \text{ ns}$

TABLEAU 1 – Comparaison de deux processeurs quantiques à part entière, avec d'un côté IonQ qui utilise des qubits hyperfins ramans construits sur une chaîne d'ions $^{161}\text{Yb}^+$, et de l'autre Sycamore, qui utilise des qubits supraconducteurs arrangés selon un réseau à deux dimensions.

Notons malgré tout que cela est encore insuffisant pour pouvoir faire une démonstration de l'avantage des techniques de correction d'erreur avec un nombre limité de qubits [14] : en utilisant le code de surface, il faudrait plus d'une centaine de qubits pour bénéficier du seuil à 1 % d'erreur souvent cité dans la littérature [25]. Pour autant on a pu récemment assister à la première démonstration basée sur la technologie des qubits supraconducteurs du potentiel du calcul quantique par ce qui a été appelé la suprématie quantique [7], c'est à dire la résolution d'un problème inaccessible par un ordinateur classique indépendamment de son utilité pratique. Un objectif qui pourrait ne pas avoir été tout à fait atteint puisque le temps de calcul classique requis pour simuler le système choisi pourrait être réduit de l'estimation initiale de 10000 ans à quelques jours par l'utilisation d'un algorithme classique plus sophistiqué que celui envisagé initialement [66], ce qui reste nettement plus long que les quelques minutes de l'approche

quantique sans pour autant être prohibitif. Ce résultat permet néanmoins d'espérer à plus ou moins court terme de voir apparaître les premières applications pratiques des systèmes présents mis à l'échelle de 50-100 qubits, sans pour autant implémenter la correction d'erreur quantique [67].

Pour les ions, la question de la mise à l'échelle des démonstrations de principe est un peu moins avancée que pour les qubits supraconducteurs. Les pièges de Pauls utilisés pour confiner les ions fonctionnent grâce à un jeu d'électrodes alimentées par une tension radio fréquence de sorte à générer une force pondéromotrice confinante. Les ions, refroidis par laser, forment alors des structures régulières dont la forme dépend de la géométrie du potentiel, en général des chaînes. Plus la taille de ces chaînes augmente plus il devient difficile d'assurer la précision des opérations à plusieurs qubits. Cela contribue au décalage entre les démonstrations de principe effectuées sur un petit nombre d'ions, et les tentatives de construction de processeurs quantiques basés sur la technologie des ions piégés, comme on peut le voir en comparant les données du tableau 1 à celles des figures 1,2 et 3.

Mais grâce à la technologie des pièges de Paul surfaciques micro-fabriqués ce problème pourrait être résolu. En approchant les ions du piège, il devient possible de manipuler le potentiel de piègeage en jouant sur les tensions statiques d'un grand nombre d'électrodes. Sur ce type de piège il devient possible de déplacer, permuter, fusionner ou séparer les chaînes d'ions [86],[70],[49]. Cette technique permet aussi de concevoir des géométries de piègeage non triviales, en particulier on peut créer des intersections entre plusieurs voies, ce qui permet d'augmenter relativement facilement la dimension du réseau d'ions [91]. Le problème de la perte de précision des opérations avec l'augmentation de la taille des chaînes d'ion est ainsi contourné, au prix du temps nécessaire pour effectuer ces opérations en limitant les effets sur la température des ions. Intuitivement, on peut voir que la vitesse maximale de ces opérations est limitée par la fréquence séculaire des oscillations de l'ion dans le piège. Pour augmenter cette vitesse à tension constante il faut rapprocher l'ion de la surface du piège. Les technologies de micro fabrication permettent aussi d'intégrer les optiques à la surface du piège, dans l'espoir d'améliorer la stabilité mécanique du dispositif, d'améliorer la collection des photons diffusés par les ions lors des opérations de lecture de l'état des qubits, et de diminuer les couplages parasites entre les qubits et les champs de contrôle.

Pour les ions piégés, les qubits sont construits entre deux niveaux d'énergie internes de longue durée de vie, comme par exemple deux sous niveaux Zeeman ou hyperfin du fondamental, ou un état du fondamental et un niveau métastable. Si cette dernière implémentation permet une

lecture rapide de l'état de l'ion, elle est néanmoins limitée du point de vue du temps de cohérence du qubit, en raison de l'émission spontanée, mais aussi à cause des contraintes sur le bruit de phase du laser utilisé pour manipuler le qubit. Pour les deux autres implémentations la manipulation peut se faire via une transition Raman à deux photons via une paire de faisceaux lasers issus de la même source, ou pour les qubits hyperfins via un champ microonde présentant un fort gradient, ce qui supprime tout risque d'émission spontanée, la sélectivité de l'adressage étant assurée en utilisant des champs évanescents, ce qui impose de rapprocher les ions des électrodes. Les qubit hyperfins peuvent de plus être rendu insensibles au premier ordre aux fluctuations du champ magnétique ce qui permet d'atteindre des temps de cohérence de l'ordre de la minute [41] sans l'utilisation de blindage magnétique ou de techniques de découplage dynamique. La durée de vie propre des niveaux utilisés n'est alors plus un facteur limitant, et le bruit de phase de l'oscillateur local est plus simple à limiter. L'homogénéité de la structure des ions pose néanmoins un problème de diaphonie (crosstalk) : les opérations de refroidissement et de lecture de l'état d'un qubit sont toutes deux source de diffusion d'un nombre important de photons qui peuvent être absorbés par des qubits dédiés au calcul. Pour limiter sensiblement ce problème on peut utiliser un piège multi-espèces : en jouant sur les différences entre les fréquences de transition on peut réduire considérablement le couplage entre les ions de refroidissement/lecture et ceux encodant les qubits [11]. La fidélité et la rapidité des opérations de lecture devient alors conditionnée par la fidélité des opérations de couplage de l'état quantique du qubit de calcul et de mesure. La mesure d'un qubit selon cette méthode étant non destructive, il est possible d'améliorer la fidélité de la mesure en la répétant [46].

L'interaction entre les qubits passe en général par le couplage des états internes avec l'état du mouvement des ions, à ce titre il est important de garder la température de ions suffisamment faible pour que la décohérence du mouvement n'affecte pas la qualité des portes à deux qubits ou plus. La vitesse de ces opérations est limitée par la fréquence séculaire des oscillations de l'ion dans le piège : une transition trop rapide complexifie l'opération en augmentant le nombre de niveaux d'énergie du mouvement à prendre en compte.

On a vu que plusieurs pistes d'amélioration des qubits basés sur les ions piégés passent par un rapprochement des ions de la surface du piège, malheureusement la proximité avec les électrodes expose les ions à des fluctuations électromagnétiques qui ont pour effet d'exciter le mouvement des ions de manière incohérente, ce qui affecte à la fois la fidélité des portes quantiques, mais aussi la durée de vie des ions dans le piège. Le taux de chauffage associé à ce processus est nettement supérieur à ce que les sources de bruit connues comme le bruit Johnson, les collisions

avec les gaz résiduels, ou les bruits techniques [17], ce qui lui vaut la dénomination de "chauffage anormal". La dépendance de ce taux de chauffage avec la distance à la surface du piège d semble suivre approximativement une loi en $1/d^4$ [15],[74],[26],[44] ce qui nullifie les avantages pouvant être obtenus en rapprochant l'ion de la surface. Plusieurs techniques ont été développées pour réduire ce taux de chauffage : le nettoyage de la surface par bombardement ionique in-situ [43] et ex-situ [75], le nettoyage plasma in situ [60], le nettoyage in-situ par laser pulsé [5], ou l'opération cryogénique du piège [54],[19]. Mais à ce jour aucune étude n'a étudié la dépendance du taux de chauffage avec la distance au piège après nettoyage in-situ. C'est autour de cet objectif que ma thèse s'est construite.

1.2 Plan de thèse

La mesure de la température d'un ion peut se faire par plusieurs méthodes, la plus simple, la thermométrie par refroidissement Doppler [31], consiste après préparation, à déduire la température de l'ion de l'évolution moyenne de sa fluorescence lors de son refroidissement, ce qui permet de mesurer des températures supérieures à quelques Kelvin. La sensibilité et la précision de cette technique se sont néanmoins montrées insuffisantes pour la tâche à accomplir : pour mesurer les plus faibles taux de chauffages il aurait été nécessaire d'attendre plusieurs minutes par séquence pour avoir un signal exploitable, ce qui rend la mesure sensible aux collisions avec les gaz résiduels.

Dans le cadre de ma thèse j'ai donc développé une méthode alternative de complexité comparable, mais nettement plus précise et sensible : cette méthode permet de mesurer des températures dans une gamme allant de quelques dixièmes à quelques centaines de milli-Kelvin. La précision de cette méthode a été démontré en mesurant la température d'un ion après refroidissement Doppler et en comparant avec la valeur théorique. Les taux de chauffage mesurés par la première technique mentionnée sont nettement surestimés comparés à ceux obtenus par cette nouvelle méthode.

Cette technique repose sur deux outils : une technique d'acquisition séquentielle de la fluorescence de l'ion qui permet de minimiser l'effet de la mesure de la fluorescence sur le mouvement de l'ion, et la modélisation de l'effet du mouvement sur la fluorescence moyenne de l'ion. Deux outils qui trouvent également leur utilité dans le domaine de la spectroscopie de l'ion.

Le déroulement de ce manuscrit est construit autour de trois parties. La première décrit les outils expérimentaux utilisés dans le piégeage des ions, en se concentrant sur les techniques

utilisées au cours de cette thèse. La seconde partie décrit le modèle de l'interaction ions-lasers que j'ai déployé pour répondre aux problématiques exposées dans la troisième partie. Partie qui regroupe les résultats expérimentaux obtenus au cours de cette thèse, et que l'on peut regrouper en deux axes : les mesures spectroscopiques, et les mesures de température.

2 Dispositif expérimental

Une expérience d'ions piégés peut être découpée schématiquement en plusieurs sous modules. Tout d'abord il faut un piège, placé dans une enceinte à vide. En effet, l'objectif étant de manipuler un ion à l'équilibre, il faut minimiser les collisions avec les gaz résiduels, ce qui impose de travailler à des pressions inférieures à 10^{-10} mbar. Les pièges utilisés sont des pièges de Paul, le fonctionnement de ces pièges requiert une tension radio-fréquence (RF) relativement élevée (~ 200 V crête à crête), les fréquences utilisées sont dans la gamme 10-100 MHz. Un certain nombre de tensions statiques faiblement bruitées sont également nécessaires pour contrôler le champ électrique statique.

Il faut également un moyen de créer des ions. Dans notre expérience nous utilisons des ions $^{88}\text{Sr}^+$. Pour cela on utilise un four constitué d'un filament et d'un pépite de strontium pour créer une vapeur atomique neutre. Ces atomes sont ensuite ionisés au centre du piège en utilisant un processus de photo-ionisation qui fait intervenir deux lasers continus à deux longueurs d'onde différentes (461nm et 405 nm)

En plus des lasers de photo-ionisation, il faut un certain nombre de faisceaux laser pour refroidir puis manipuler l'état interne de l'ion. Les fréquences et intensités de ces lasers sont des paramètres clé, il faut donc les contrôler et les stabiliser.

Le signal expérimental auquel nous nous intéressons est la fluorescence de l'ion. Il faut donc un système optique pour collecter les photons diffusés par l'ion. On peut alors soit prendre l'image de l'ion sur une caméra, soit exploiter uniquement son intensité en régime de comptage à l'aide d'un photo multiplicateur (PM) et d'un compteur. Par ailleurs les expériences sur un ion piégé individuel requièrent en général de répéter un grand nombre de fois des phases de refroidissement, préparation et mesure. Cela nécessite l'utilisation de séquences en temps réel pour contrôler l'état des lasers de manipulation de l'ion et l'acquisition des signaux.

Enfin, il faut contrôler le champ magnétique statique car c'est un paramètre important de la dynamique interne de l'ion.

Dans notre groupe nous disposons de trois chambres à vide. La première contient un piège de Paul linéaire 3D macroscopique (distance ion-électrode ~ 5 mm), les deux autres contiennent des pièges de Paul surfacique miniature (distance ion-électrode ~ 100 μm). La dernière enceinte a été montée au cours de ma thèse pour permettre le nettoyage in situ des pièges par bombardement ionique [43], ce qui n'était pas possible auparavant.

2.1 Principes théoriques du piégeage et du refroidissement

Dans nos dispositifs expérimentaux le piégeage et le refroidissement des ions sont assurés par deux méthodes distinctes. Pour confiner les ions nous utilisons des pièges de Paul, pour refroidir les ions, nous utilisons le refroidissement laser.

2.1.1 Piège de Paul et pseudo-potentiel

Pour confiner un ion dans une région de l'espace on a besoin d'une force de la forme $F_i = -k_i r_i$ où $k_i > 0$ et i désigne une coordonnée cartésienne de l'espace (x, y, z) . Si cette force dérive d'un champ électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$ elle doit vérifier la relation $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, et par conséquent $k_x + k_y + k_z = 0$. On ne peut donc pas utiliser de champ statique pour piéger un ion selon toutes les directions de l'espace.

Pour contourner ce problème on peut utiliser un champ électrique oscillant. En alternant les directions piégeantes et anti-piégeantes on peut montrer que pour un choix judicieux d'amplitude et fréquence l'effet global du potentiel est confinant. C'est le principe des pièges de Paul [64].

Pour mieux décrire la physique des pièges de Paul on peut faire appel au concept de force pondéromotrice. Prenons une force de la forme :

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_0(\vec{r}) + \text{Re} \left[\vec{F}_1(\vec{r}) e^{i\Omega t} \right] \quad (1)$$

où \vec{F}_1 est un vecteur complexe encodant l'amplitude et la phase du potentiel RF en chaque point de l'espace.

Par exemple au voisinage de la zone de piégeage d'un piège de Paul :

$$\begin{aligned} \vec{F}_0 &= -eR_0 \vec{r} \\ \vec{F}_1 &= -eR_{RF} \vec{r} \end{aligned}$$

Où les matrices R_0 et R_{RF} sont symétriques de trace nulle, mais ne sont pas forcément co-

diagonalisables. Par exemple pour un piège linéaire ces matrices sont données par :

$$R_0 = \begin{bmatrix} r_x & r_{xy} & 0 \\ r_{xy} & r_y & 0 \\ 0 & 0 & r_z \end{bmatrix} \quad R_{RF} = r_{RF} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où $r_x + r_y + r_z = 0$. Dans un tel piège le confinement selon l'axe z est assuré par le champ statique, le confinement radial étant assuré par le champ RF. Le terme croisé r_{xy} étant en général non nul les matrices R_0 et R_{RF} ne sont donc pas co-diagonalisables. Les termes r_x, r_y, r_z et r_{xy} dépendent à la fois des tensions statiques appliquées aux électrodes du piège, mais aussi de la géométrie des électrodes. De même r_{RF} est proportionnel à la tension RF appliquée aux électrodes du piège, et de leur géométrie.

On peut chercher une solution approchée aux équations du mouvement sous la forme de la somme d'un terme de déplacement lent de la position moyenne de l'ion sur lequel vient se superposer une oscillation forcée à la fréquence Ω :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \text{Re} \left[\vec{r}_1 e^{i\Omega t} \right] \quad (2)$$

Où l'on suppose que \vec{r}_0 et \vec{r}_1 sont pratiquement constants à l'échelle d'une période de la RF. Si l'on peut de plus négliger \vec{r}_1 vis à vis de l'échelle des variations de \vec{F}_0 et \vec{F}_1 alors on peut écrire au premier ordre :

$$\begin{aligned} \vec{F}_0(\vec{r}) &\approx \vec{F}_0(\vec{r}_0) + \left(\vec{\nabla} \vec{F}_0(\vec{r}_0) \right) \cdot \text{Re} \left[\vec{r}_1 e^{i\Omega t} \right] \\ \vec{F}_1(\vec{r}) e^{i\Omega t} &\approx \vec{F}_1(\vec{r}_0) e^{i\Omega t} + \left(\vec{\nabla} \vec{F}_1(\vec{r}_0) \right) \cdot \text{Re} \left[\vec{r}_1 e^{i\Omega t} \right] e^{i\Omega t} \\ &\approx \vec{F}_1(\vec{r}_0) e^{i\Omega t} + \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{F}_1(\vec{r}_0) \right) \cdot \left(\vec{r}_1^* + \vec{r}_1 e^{2i\Omega t} \right) \end{aligned}$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$m \ddot{\vec{r}} = m \ddot{\vec{r}}_0 + m \text{Re} \left[\left(\ddot{\vec{r}}_1 + i\Omega \dot{\vec{r}}_1 - \Omega^2 \vec{r}_1 \right) e^{i\Omega t} \right] = \vec{F} \quad (3)$$

$$(4)$$

moyennée sur une période on obtient :

$$m\ddot{\vec{r}}_0 \approx \vec{F}_0(\vec{r}_0) + \frac{1}{2} \text{Re} \left[\left(\vec{\nabla} \vec{F}_1(\vec{r}_0) \right) \cdot \vec{r}_1^* \right] \quad (5)$$

En multipliant par $e^{-i\Omega t}$ avant de moyenner sur une période de la RF, et en négligeant les variations spatiales du potentiel statique $\vec{\nabla} \vec{F}_0$ devant $m\Omega^2$ on obtient :

$$m\Omega^2 \vec{r}_1 \approx \vec{F}_1(\vec{r}_0) \quad (6)$$

D'où :

$$m\ddot{\vec{r}}_0 \approx \vec{F}_0(\vec{r}_0) - \frac{1}{2m\Omega^2} \text{Re} \left[\left(\vec{\nabla} \vec{F}_1(\vec{r}_0) \right) \cdot \vec{F}_1^*(\vec{r}_0) \right] \quad (7)$$

$$\approx \vec{F}_0(\vec{r}_0) - \frac{1}{4m\Omega^2} \vec{\nabla} \|\vec{F}_1(\vec{r}_0)\|^2 \quad (8)$$

On voit apparaître le concept de pseudo-potentiel $\phi = \frac{\|\vec{F}_1(\vec{r}_0)\|^2}{4m\Omega^2}$. Au voisinage d'un minimum d'amplitude RF, on obtient alors une position d'équilibre stable, quel que soit la charge de la particule.

Appliqué à un piège linéaire on obtient pour le pseudo-potentiel :

$$\phi = \frac{e^2 r_{RF}^2}{4m\Omega^2} (x^2 + y^2)$$

Ce pseudo-potentiel est radialement isotrope, le terme r_{xy} présent dans le potentiel statique peut donc être éliminé par un choix approprié des axes x et y .

Notons que aux variations de \vec{r}_1 près, ce pseudo potentiel correspond à l'énergie cinétique moyenne due au micro-mouvement : $E_{c1} = m\|\dot{\vec{r}}_1\|^2\Omega^2/4 = \phi$. En l'absence de potentiel statique, l'énergie cinétique moyenne totale est donc constante.

En introduisant les matrices de paramètres sans dimensions suivantes :

$$\begin{aligned} \tau &= \Omega t / 2 \\ A &= \frac{4eR_0}{m\Omega^2} \\ Q &= \frac{2eR_{RF}}{m\Omega^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Sous réserve que les approximations faites pour dériver l'expression du pseudo potentiel soient valides ($\|A\|, \|Q\|^2 \ll 1$), la trajectoire de l'ion au voisinage de la zone de piégeage d'un piège

de Paul est alors déterminée par les équations suivantes :

$$\vec{r}(\tau) = \left(\mathbb{1} + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[Qe^{2i\tau}] \right) \vec{r}_0(\tau) \quad (10)$$

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{d\tau^2} + \left(A + \frac{1}{2}Q^2 \right) \vec{r}_0 = 0 \quad (11)$$

La résolution de ces équations donne un mouvement séculaire harmonique sur lequel se superpose un micro-mouvement à la fréquence de la RF dont l'amplitude est modulée par l'oscillation séculaire.

À une dimension, les matrices R_0 , $R_{RF,A}$ et Q deviennent des scalaires r_x , r_{RF} , a et q . Le mouvement de l'ion est alors décrit par l'équation :

$$\begin{aligned} x(\tau) &= X_0 \cos(\beta\tau + \varphi) \left(1 + \frac{q}{2} \cos(2\tau) \right) \\ \beta &= \sqrt{a + q^2/2} \end{aligned} \quad (12)$$

Comme on peut le voir sur la figure 4, lorsque le pseudo potentiel domine le potentiel statique la modulation de la vitesse par le micro-mouvement est d'amplitude comparable aux variations séculaires de la vitesse.

Il faut néanmoins se rappeler qu'en général la direction du micro-mouvement n'est pas forcément la même que celle des axes propres du piège. Par exemple pour $r_x = r_y = -r_{xy}$ le micro-mouvement est orthogonal aux axes propres du piège.

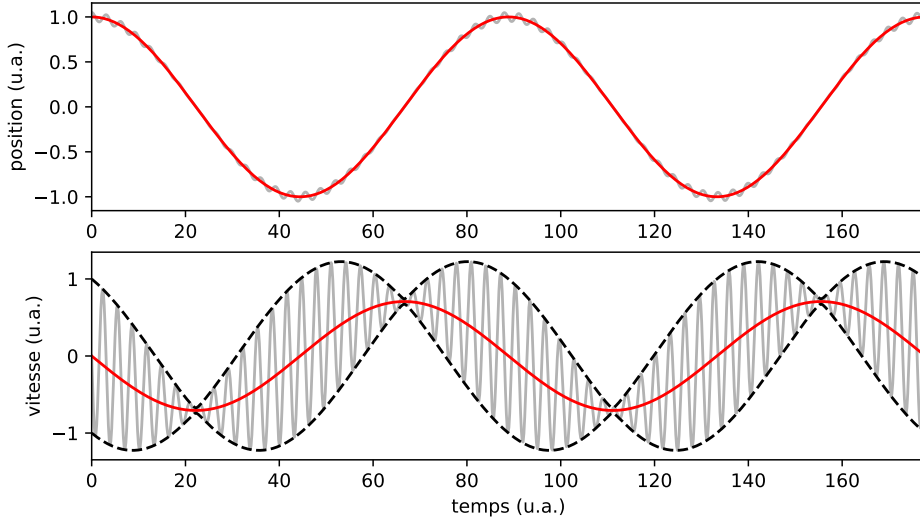


FIGURE 4 – Position et vitesse de l’ion sous l’approximation (12) en une dimension en l’absence de champs statiques pour $q = 0.05$. Les lignes rouges donnent la valeur moyenne et les lignes grises donnent la valeur exacte. Notons que l’amplitude de modulation de la vitesse par le micro-mouvement est du même ordre de grandeur que l’amplitude de la vitesse séculaire.

Notons par ailleurs qu’en présence d’un champ statique extérieur \vec{E}_0 constant, la position de la zone de piègeage est décalée. Le champ RF n’est alors pas nul au niveau de la position de piègeage et l’ion même à son minimum d’énergie totale subit une oscillation forcée à la fréquence de la RF, on parle alors d’excès de micro-mouvement.

Par exemple à une dimension, $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$ le décalage est de :

$$\Delta x_0 = -\frac{E_0}{r_x + \frac{er_{RF}^2}{2m\Omega^2}} \quad (13)$$

plus l’amplitude de la RF est forte moins le déplacement est important, cela peut être utilisé pour minimiser l’excès de micro-mouvement [38].

Par ailleurs l’amplitude de l’oscillation forcée est de :

$$x_1 = \frac{q}{2} \Delta x_0 \quad (14)$$

$$= \frac{2E_0}{r_{RF}} \frac{1}{1 + \frac{2m\Omega^2 r_x}{er_{RF}^2}} \quad (15)$$

$$= \frac{2E_0}{r_{RF}} \frac{1}{1 + 2\frac{a}{q^2}} \quad (16)$$

Si le confinement est dominé par le pseudo potentiel ($a \ll q^2$) alors $x_1 \approx 2E_0/r_{RF}$: l’amplitude

du micro-mouvement diminue avec l'augmentation de la tension de la RF.

Si les conditions nécessaires à l'utilisation de l'approximation du pseudo potentiel ne sont pas vérifiées, il faut revenir aux équations du mouvement, que l'on peut mettre sous la forme des équations de Mathieu :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} + (A - 2Q \cos(2\tau)) \vec{r} = 0 \quad (17)$$

La solution générale de ces équations peut s'obtenir à partir du théorème de Floquet sous la forme d'une série dont les coefficients peuvent être calculés via une relation de récurrence [56].

2.1.2 Refroidissement laser

Nous avons vu comment créer un potentiel capable de confiner un ion ou un ensemble d'ions dans une région déterminée de l'espace. Mais la vitesse des ions chargés au centre du piège peut être considérable, pour les manipuler il faut les ralentir.

Dans le cas où l'on dispose d'une transition permise et cyclante entre deux états électroniques de l'ion, on peut utiliser le refroidissement dit Doppler. Cette technique exploite la dépendance du nombre de photons absorbés par l'ion avec la vitesse de l'ion due au décalage Doppler de la fréquence du laser qui adresse la transition. En effet, à cause de l'effet Doppler, sur une oscillation de l'ion dans le piège, pour un choix de la fréquence du laser sur le "rouge" de la transition, plus de photons sont absorbés lorsque la vitesse de l'ion s'oppose à la direction de propagation du laser que lorsque les deux sont orientés dans le même sens. Par conséquent, par conservation de la quantité de mouvement, l'effet net du recul induit par l'absorption des photons tend à ralentir l'ion.

Lors du refroidissement Doppler, le caractère aléatoire et discret de l'absorption des photons ainsi que le recul encaissé par l'ion lors de l'émission des photons spontanés provoquent une fluctuation de la vitesse de l'ion. L'énergie de l'ion tend vers un régime stochastique décrit par une distribution thermique. On peut alors définir la température d'un ion unique en interaction avec le laser.

Considérons le cas d'un ion avec une transition à deux niveaux de fréquence ν_{eg} excitée par un laser de fréquence ν et d'intensité I . Le profil de fluorescence, c'est à dire l'expression du taux de diffusions des photons en fonction du désaccord $\Delta = \nu - \nu_{eg}$, s'écrit sous la forme :

$$S = \frac{1}{2\tau} \frac{s}{1 + s + \Delta^2/\gamma^2} \quad (18)$$

Où τ est la durée de vie de l'état excité, et γ est la demie largeur à mi-hauteur de la transition à faible saturation. Dans ce cas particulier $\gamma = \frac{1}{2\tau}$, mais il existe des transition plus complexes pour lesquelles certains mécanismes élargissent la forme de raie. Dans cette expression s est le paramètre de saturation, il est proportionnel à l'intensité du laser utilisé pour refroidir la transition : $s = I/I_{sat}$ où I_{sat} est en général de l'ordre de quelques milli-watts par centimètre carré. Ce paramètre a deux effets : il fixe la fluorescence à désaccord nul et il élargit la résonance. En effet le profil de fluorescence peut se réécrire sous la forme :

$$S = \frac{1}{2\tau} \frac{s}{1+s} \frac{1}{1 + \Delta^2/\gamma_{eff}^2} \quad (19)$$

$$\gamma_{eff} = \gamma\sqrt{1+s} \quad (20)$$

Pour un ion en mouvement à la vitesse \vec{v} , et un vecteur d'onde du laser de refroidissement \vec{k} , le décalage Doppler modifie la valeur du désaccord vu par l'ion : $\Delta' = \Delta - \vec{k} \cdot \vec{v}$.

Par ailleurs pour chaque cycle d'absorption/émission spontanée de photon, la quantité de mouvement de l'ion \vec{p} est modifiée en moyenne d'une quantité $\hbar\vec{k}$, les contributions des photons émis se moyennant à zéro.

On peut alors écrire la force due aux absorptions de photons :

$$\vec{F} = \frac{\hbar\vec{k}}{2\tau} \frac{s}{1+s} \frac{1}{1 + (\Delta - \vec{k} \cdot \vec{v})/\gamma_{eff}^2} \quad (21)$$

$$\approx \frac{\hbar\vec{k}}{2\tau} \frac{s}{1+s} \frac{1}{1 + \Delta^2/\gamma_{eff}^2} \left(1 + \frac{2\Delta/\gamma_{eff}}{1 + \Delta^2/\gamma_{eff}^2} \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{\gamma_{eff}} \right) \quad (22)$$

On voit apparaitre deux contributions toutes deux proportionnelles à la fluorescence : la pression de radiation, et un terme en $\vec{k} \cdot \vec{v}$ qui correspond à un terme de friction/amplification à la base du refroidissement/chauffage Doppler. Dans la mesure où la pression de radiation ne fait que déplacer la position de piégeage de l'ion, on peut retrancher ce terme pour ce qui va suivre.

Ainsi la variation d'énergie cinétique de l'ion sur l'axe, E_c , s'écrit :

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} = \frac{S}{\hbar\gamma_{eff}} \frac{2\Delta/\gamma_{eff}}{1 + \Delta^2/\gamma_{eff}^2} (\hbar\vec{k} \cdot \vec{v})^2 \quad (23)$$

Si les fréquences des trois axes du piège sont suffisamment différentes alors sur des durées de l'ordre de grandeur du temps caractéristique du refroidissement, on peut écrire $\langle v_i v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$: les projections du mouvement de l'ion sur les différents axes sont dé-corrélées. L'énergie

cinétique moyenne sur l'axe $i = x, y, z$, $E_i = \frac{1}{2}m \langle v_i^2 \rangle$ vérifie alors :

$$\frac{dE_i}{dt} = \frac{SE_r f_i}{\hbar \gamma_{eff}} \frac{8\Delta/\gamma_{eff}}{1 + \Delta^2/\gamma_{eff}^2} E_i \quad (24)$$

où l'on a introduit l'énergie de recul $E_r = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$ et le paramètre $f_i = k_i^2/k^2$ qui caractérise la projection du vecteur \vec{k} sur l'axe i . Pour un ion $^{88}\text{Sr}^+$ et sur la transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$, $E_r/h = 12.7$ kHz.

Pour un ion piégé dans un potentiel harmonique la pression de radiation décale la position de piégeage de l'ion sans modifier son énergie moyenne. Aux intensités utilisées ce décalage est en général négligé. Pour un paramètre de saturation $s = 0.1$ et un désaccord $\Delta = \gamma$

$$\vec{E}_0 \approx s \frac{\hbar \vec{k}}{4e\tau} \approx 0.03 \text{ V/m} \quad (25)$$

Plus le piège est lâche, plus les effets seront marqués. Pour une fréquence séculaire de 100 kHz, un ion strontium et un faisceau orienté selon l'axe, le déplacement induit est de 75 nm ce qui est indétectable avec notre dispositif. Si le faisceau est orienté selon un axe pour lequel le confinement est assuré par le pseudo-potentiel, l'amplitude x_1 de l'excès de micro-mouvement induit est donné par la formule :

$$x_1 \approx \frac{2E_0}{r_{RF}} \quad (26)$$

où $r_{RF} \sim 4.5 \times 10^6 \text{ V/m}^2$ ($q \sim 0.1, \Omega \sim 10 \text{ MHz}$) soit $kx_1\Omega \approx 2\pi \times 0.3 \text{ MHz}$. On verra dans la partie 2.2.2 page 2.2.2 que ce résidu est tout juste à limite de ce que l'on peut mesurer.

En revanche les fluctuations de cette pression de radiation ainsi que le recul induit par l'émission de photons spontanés contribuent à augmenter l'énergie cinétique moyenne de l'ion selon un taux constant R . Dans la limite des faibles intensités R peut s'écrire [47] :

$$R_i = E_r S(f_i + f_{si}) \quad (27)$$

où f_{si} est un facteur géométrique rendant compte des directions d'émission des photons spontanés, pour une transition isotrope $f_{si} = 1/3$.

À plus haute intensité il faut rendre compte de la statistique non poissonnienne des émissions

de photons par l'ion [22] en modifiant le coefficient f_i d'un facteur $1 + Q$ où :

$$Q = \frac{\delta\bar{N}^2 - (\delta\bar{N})^2}{\delta\bar{N}} - 1 \quad (28)$$

$$= \frac{2\Omega^2(4\Delta^2 - 3\Gamma^2)}{(2\Omega^2 + 4\Delta^2 + \Gamma^2)^2} \quad (29)$$

et δN désigne le nombre de photons absorbés sur une durée δt .

En terme de température $T_i = 2E_i/k_b$ cela donne :

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{T_i}{\tau_{Di}} + D_i \quad (30)$$

$$\tau_{Di} = \frac{\hbar\gamma_{eff}}{8f_i E_r S} \left(\frac{\Delta}{\gamma_{eff}} + \frac{\gamma_{eff}}{\Delta} \right) \quad (31)$$

$$D_i = 2 \frac{E_r}{k_b} S(f_i + f_{si}) \quad (32)$$

La température Doppler limite est alors donnée par :

$$k_b T_{i,lim} = D_i \tau_{D,i} = \frac{f_i + f_{si}}{f_i} \frac{\hbar\gamma_{eff}}{4} \left(\frac{\Delta}{\gamma_{eff}} + \frac{\gamma_{eff}}{\Delta} \right) \quad (33)$$

Les largeurs naturelles des transitions utilisées sont de l'ordre de 20 MHz. Le paramètre γ associé est alors de l'ordre de 10 MHz ce qui donne une température limite Doppler de l'ordre de 0.5 mK obtenue pour $\Delta = \gamma_{eff}$. Le temps caractéristique du refroidissement Doppler est quand à lui inférieur à 1 ms pour les paramètre typiques de refroidissement.

Notons que pour refroidir sur tous les axes avec un seul laser de refroidissement il faut que celui-ci ait une projection sur chaque axe propre du potentiel de piégeage. Si deux axes sont dégénérés il est impossible de refroidir l'ion sur tous les axes.

Nous ne nous en servons pas, mais il est possible d'atteindre des températures plus basses en utilisant une autre technique de refroidissement laser : le refroidissement par bande latérale [87]. En choisissant une transition fine devant la séparation en énergie des niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique, il devient possible d'exciter sélectivement des transitions de la forme $|g, n\rangle \rightarrow |e, n-1\rangle$, ce qui permet de refroidir l'ion en suivant le processus représenté dans la figure 5. La température limite est alors donnée par les excitations hors résonance, qui peuvent être inhibées en diminuant la fréquence de Rabi, au prix d'une dynamique plus lente.

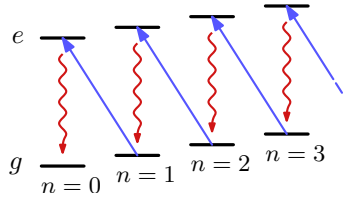


FIGURE 5 – Principe du refroidissement par bandes latérales.

2.2 Les pièges

Nous avons vu comment piéger un ion dans une région de l'espace à l'aide d'un champ électromagnétique oscillant à des fréquences RF ($\sim 10 - 100$ MHz), et comment ce piégeage peut être décrit par un pseudo-potentiel. Nous avons également vu comment refroidir l'ion à des températures de l'ordre de 0.5 mK en utilisant la technique du refroidissement Doppler. Il nous faut maintenant parler de l'implémentation pratique de ces techniques, et notamment de la géométrie des pièges utilisés et du contrôle des tensions de piégeage.

2.2.1 géométrie

Au cours de cette thèse j'ai principalement travaillé sur des pièges de Paul linéaires surfaciques tels que schématisés dans la figure 6. Le terme linéaire signifie que le confinement RF n'est effectif que dans deux directions de l'espace, le confinement sur la dernière direction étant assuré par un champ statique. Le terme surfacique signifie que toutes les électrodes sont situées dans un même plan.

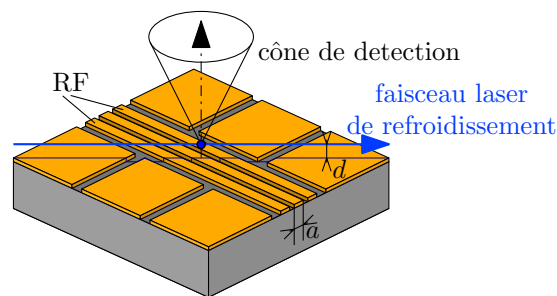


FIGURE 6 – Schéma d'un piège de Paul linéaire surfacique dit à cinq fils en référence aux cinq zones définies par les électrodes RF, l'électrode centrale et les deux groupes d'électrodes de part et d'autre des électrodes RF et de. La distance de l'ion au piège d est directement reliée à la taille de l'électrode centrale a . En première approximation $a \approx d$. Les autres électrodes permettent d'assurer le confinement selon l'axe du piège et de contrôler les champs statiques et l'orientation des axes du piège.

Pour pouvoir refroidir l'ion sur tous les axes avec un seul faisceau il faut que sa direction de propagation ait une composante selon chaque axe propre du potentiel de piégeage. Sous les

contraintes imposées par la géométrie planaire cela n'est possible que si la symétrie du potentiel autour de l'axe du piège est brisée.

De plus, en raison de la présence de champs électriques statiques parasites, la position de piègeage de l'ion peut se trouver désalignée vis à vis du zéro du champ radio fréquence. Cela provoque un excès de micro-mouvement de l'ion. Il est donc primordial de compenser ces champs parasites pour ramener l'ion au zéro du champ RF.

Pour ce faire on utilise sept électrodes en plus des électrodes RF sur lesquelles on peut appliquer une tension statique de sorte à contrôler le champ électrique au niveau du nœud de la RF, ainsi que les axes propres du potentiel statique et son anisotropie.

La tension RF est délivrée par un générateur RF branché sur un amplificateur. Un circuit résonant permet de faire l'adaptation d'impédance entre le piège (d'impédance tendant vers le circuit ouvert) et l'amplificateur (d'impédance de sortie 50 Ω).

La fréquence Ω_{RF} et l'amplitude V_{RF} de la tension RF appliquée sur les électrodes du piège dépendent de la distance à la surface du piège visée d , et de la raideur et profondeur de piègeage souhaitée [45]. En pratique, pour $d \sim 100 \mu\text{m}$, Ω_{RF} et V_{RF} sont respectivement de l'ordre de 10 MHz et 100 V.

2.2.2 compensation de l'excès de micro-mouvement

principe : Pour aligner la position d'équilibre de l'ion sur le nœud du champ RF on mesure la corrélation entre la fluorescence de l'ion et la phase de la RF. En effet, en présence d'un mouvement forcé de l'ion, la fluorescence se voit modulée par l'effet Doppler. En mesurant le délai entre la détection d'un photon et le début d'une période de la RF on peut construire un histogramme de corrélation permettant de mettre en évidence cette modulation [13].

La fréquence du signal RF utilisé pour piéger l'ion est de l'ordre de quelques dizaines de MegaHertz, par conséquent il faut pouvoir mesurer des délais de l'ordre de la nanoseconde. Pour cela on utilise un TDC pour time to digital converter, un dispositif électronique permettant de mesurer le délai entre deux signaux logiques.

Le modèle utilisé est un GP22 monté sur une platine de test conçue par le fabricant. La puce est pilotée via une interface SPI par un micro-contrôleur Arduino qui calcule aussi l'histogramme des corrélations. Ce micro-contrôleur est piloté via le réseau ethernet depuis une interface graphique codée dans le langage python permettant de régler les paramètres de l'acquisition. j'ai entièrement pris en charge l'écriture du code de l'Arduino et de l'interface graphique.

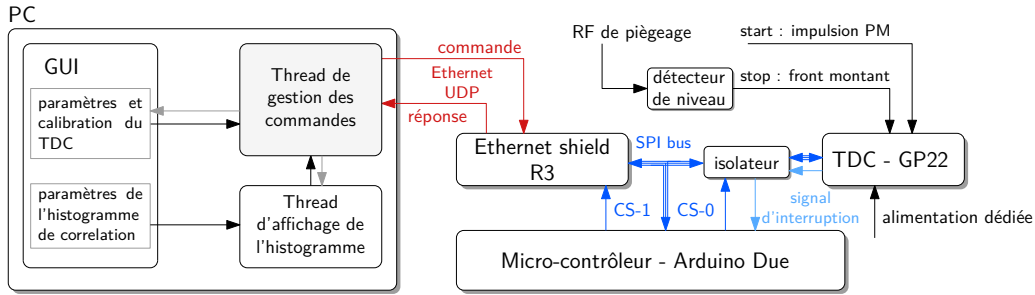


FIGURE 7 – Schématisation du dispositif d’acquisition de l’histogramme de corrélation. L’interface graphique permet de configurer le TDC, de lancer les commandes de calibration du TDC et d’acquérir les données soit sous la forme d’une série de points, soit sous la forme d’un histogramme de corrélation. La communication avec le micro-contrôleur se fait via une thread spécifique pour éviter de bloquer l’interface graphique lors de l’acquisition des données. Par ailleurs, l’interface graphique permet d’acquérir et d’afficher des histogrammes de corrélation en mode continu. Un récent développement effectué avec mon successeur permet d’automatiser le processus de compensation.

Pour annuler l’excès de micro-mouvement selon la direction du faisceau de refroidissement il faut déplacer l’ion selon les directions radiales du piège de sorte à obtenir un histogramme de corrélation plat. Si l’on néglige le micro-mouvement selon l’axe du piège, il faut alterner entre deux faisceaux pour annuler tout l’excès de micro-mouvement, l’un des deux devant avoir une composante selon la normale au piège.

Pour déplacer l’ion il faut être capable de générer des champs électriques statiques sans modifier les autres paramètres du potentiel de piègeage au niveau du zéro de la RF. La technique utilisée pour calculer les tensions à appliquer sur les électrodes sous cette contrainte est détaillée dans la sous-partie suivante.

performances : Il est utile d’explorer d’un point de vue théorique la dépendance du signal de corrélation avec les paramètres du faisceau de refroidissement (paramètre de saturation, désaccord à résonance) et la fréquence de la RF de piègeage.

Pour cela j’ai utilisé un modèle d’ion à deux niveaux, le lien avec l’ion $^{88}\text{Sr}^+$ pouvant se faire à partir du modèle décrit dans la partie 4.2.1 page 80. Ce modèle est très similaire à un ion à deux niveaux mais il rend compte de la présence de sous-niveaux Zeeman et des états métastables $D_{3/2}$ et $D_{5/2}$.

Les résultats de cette étude sont présentés dans la figure 8.

On peut voir que la fluorescence de l’ion dépend à la marge de l’amplitude du micro-mouvement, mais le signal est un ordre de grandeur inférieur à celui observable en acquérant un histogramme de corrélation.

Le signal à bruit de la mesure de la modulation se calcule en supposant une statistique poissonnienne du nombre de photons détectés. Dans ces conditions le signal est proportionnel à l'amplitude de modulation du nombre de photons détectés par seconde et le bruit est proportionnel à la racine carrée du nombre de photons diffusés par seconde. À faible amplitude de modulation Doppler δ_D , le SNR peut s'écrire :

$$SNR = \alpha \frac{|F_1(\delta_D)|}{\sqrt{F_0}} \sqrt{TC\Delta t} \quad (34)$$

où α est une constante liée aux modalités de calcul de l'histogramme de corrélation et d'extraction de la modulation, $|F_1(\delta_D)|$ représente l'amplitude absolue de la modulation de la fluorescence de l'ion, $\sqrt{F_0}$ correspond à la fluorescence moyenne de l'ion, TC au taux de collection, et Δt à la durée de l'acquisition.

Il faut noter qu'en pratique les caractéristiques techniques du TDC limitent les performances que l'on peut atteindre. D'une part car la vitesse d'acquisition est limitée à 10 kHz, mais aussi car la réponse du TDC n'est pas tout à fait égale pour tous les délais, ce qui laisse un résidu de modulation de l'ordre de 2 – 3% dans l'histogramme de corrélation sans rapport avec la situation physique de l'ion. Il est donc difficile de supprimer l'amplitude du décalage Doppler dû au micro-mouvement en dessous de 0.5 MHz.

Les paramètres optimaux d'acquisition dépendent sensiblement de la fréquence du micro-mouvement. Le désaccord optimal du faisceau de refroidissement est de l'ordre de cette fréquence. Le paramètre de saturation optimal est le résultat d'un compromis entre l'amplitude de la fluorescence et la largeur de la résonance. Pour une fréquence du micro-mouvement Ω_{RF} élevée par rapport à la largeur naturelle de la résonance γ , la demi-largeur effective de la résonance $\gamma_{eff} = \gamma\sqrt{1+s}$ pour un paramètre de saturation optimal semble vérifier $2\gamma_{eff} \sim \Omega_{RF}$. En effet pour $\Omega_{RF} = 40$ et 80 MHz respectivement, les valeurs optimales de s sont approximativement de 5.7 et 20 ce qui correspond à des largeurs effectives $2\gamma_{eff} = 50$ et 90 MHz.

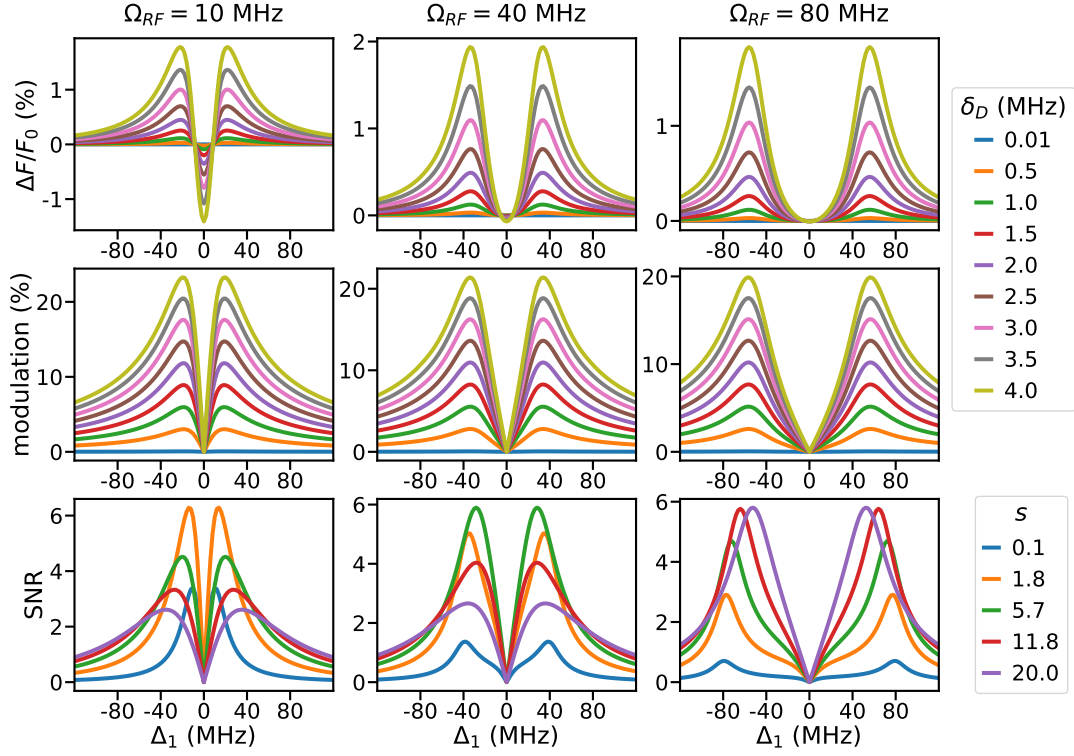


FIGURE 8 – Calcul de l’effet de l’excès de micro-mouvement sur la fluorescence de d’un ion à deux niveaux pour trois valeurs de fréquence RF Ω_{RF} , avec $\Gamma = 20$ MHz. δ_D correspond à l’amplitude du décalage Doppler associé au micro-mouvement, Δ_1 et s correspondent aux désaccord et au paramètre de saturation du faisceau de refroidissement.

La première ligne donne la déformation du spectre de fluorescence moyenne de l’ion relativement à un spectre pour un ion au repos pour plusieurs valeurs de δ_D et la valeur quasi-optimale de s associée à la fréquence Ω_{RF} considérée (de gauche à droite $s = 1.8, 5.7, 20$).

La seconde donne l’amplitude du signal de modulation de l’histogramme de corrélation pour plusieurs valeurs de δ_D , et de gauche à droite $s = 1.8, 5.7, 20$.

La troisième ligne donne le signal à bruit, pour $\delta_D = 0.5$ MHz et pour plusieurs valeurs de s . Le SNR est calculé selon la formule (34) pour un temps d’acquisition de une seconde et un taux de collection de 2×10^{-3} et en supposant $\alpha = 1$.

2.2.3 calcul des potentiels

Pour régler les tensions du piège, on utilise une méthode de matrice de transfert [6]. Le potentiel statique au niveau du zéro du champ RF peut s’écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 V_0 = & E_x x + E_y y + E_z z + \\
 & R_x x^2 + R_y y^2 + R_z z^2 + \\
 & 2R_{xy} xy + 2R_{yz} yz + 2R_{zx} zx
 \end{aligned}$$

Où $R_x + R_y + R_z = 0$. Les coefficients E_i , R_z , $d = R_x - R_y$ et R_{ij} sont reliés par un jeu de relations linéaires aux tensions de chaque électrodes V_k où k va de 1 à N le nombre d'électrodes. Ces relations peuvent s'écrire sous forme matricielle $P = MV$ où $P = (E_x, E_y, E_z, R_z, d, R_{xy}, R_{yz}, R_{zx})$ et $V = (V_1, \dots, V_N)$. En résolvant ce système linéaire, on peut alors contrôler chacun des paramètres du potentiel statique indépendamment les uns des autres.

Pour calculer les coefficients de la matrice M, il faut calculer le potentiel généré par chaque électrode. Pour cela on a recours à un modèle simplifié où chaque électrode est insérée dans un plan de masse infini [45]. En effet, dans le cas des électrodes de forme rectangulaire, on dispose d'une formule analytique qui évite le recours à une modélisation par éléments finis :

$$V(\vec{r}) = U(\vec{r} - \vec{r}_1) - U(\vec{r} - \vec{r}_2) + U(\vec{r} - \vec{r}_3) - U(\vec{r} - \vec{r}_4) \quad (35)$$

$$U(\vec{r}) = \frac{V_0}{2\pi} \arctan\left(\frac{xz}{yr}\right)$$

Au cours de ma thèse j'ai démontré qu'il est possible de dériver une expression analytique similaire pour le potentiel d'une électrode polygonale insérée dans un plan de masse infini. Le détail de cette formule et sa démonstration se trouve dans l'annexe A page 114.

2.3 Sources laser

Nous avons vu les aspects pratiques liés au contrôle des pièges à ion, dont notamment la compensation du micro-mouvement et le calcul des tension à appliquer aux électrodes du piège en fonction des paramètres de piégeage voulus (raideurs, anisotropie et rotation du potentiel de piégeage et champs de compensation).

Il nous faut parler maintenant des lasers utilisés pour refroidir l'ion, et plus généralement pour exciter les transitions de l'ion.

Les expériences d'ions piégés que j'ai mené au cours de ma thèse nécessitent l'emploi de diverses sources laser qui peuvent être regroupées en trois catégories : photo-ionisation, refroidissement et repompage. Un dernier laser, non utilisé au cours de ma thèse permet de faire de la lecture d'états quantiques par shelving [61]. Les transitions et lasers correspondants sont présentées dans la figure 9 et le tableau 2.

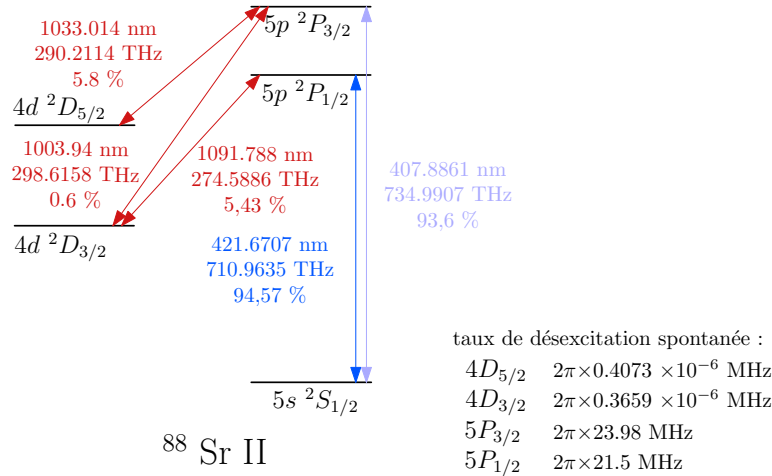


FIGURE 9 – Transitions des niveaux de l'ion $^{88}\text{Sr}^+$ utilisées dans cette thèse. Sont données les fréquences et les probabilités de branchement de chaque transition ainsi que les taux de désexcitation spontanée de chaque niveau d'énergie [52].

atome	transition	λ (nm)	modèle
$^{88}\text{Sr}^+$	$5s\ ^2S_{1/2} \rightarrow 5p\ ^2P_{1/2}$	422	Toptica DL 100
	$5s\ ^2S_{1/2} \rightarrow 5p\ ^2P_{3/2}$	407	Toptica DL Pro
	$4d\ ^2D_{3/2} \rightarrow 5p\ ^2P_{1/2}$	1092	Koheras Adjustik Y10
	$4d\ ^2D_{5/2} \rightarrow 5p\ ^2P_{3/2}$	1033	Koheras Adjustik Y10
	$4d\ ^2D_{3/2} \rightarrow 5p\ ^2P_{3/2}$	1004	Toptica DL Pro
^{88}Sr	$5s^2\ ^1S_0 \rightarrow 5s5p\ ^1P_1$	461	Toptica DL Pro
	$5s5p\ ^1P_1 \rightarrow (4d^2 + 5p^2)\ ^1D_2$	405	diode laser libre

TABLEAU 2 – Modèle des lasers disponibles, longueur d'onde et transition associée

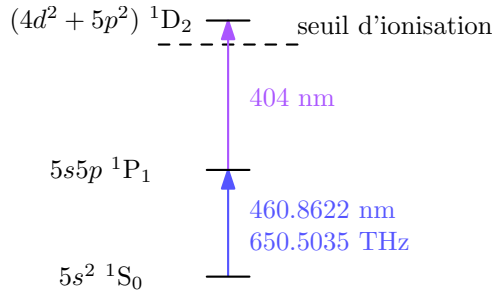


FIGURE 10 – Schéma des couplages pour la photoionisation de strontium

photo-ionisation : pour produire les ions strontium 88 on utilise un schéma de photo-ionisation continue [18] : un premier laser à 461 nm excite les atomes de strontium sur la transition $5s^2 \ ^1S_0 \rightarrow 5s5p \ ^1P_1$ de fréquence 650.503 46 THz de largeur naturelle 32 MHz, élargie et décalée via l'effet Doppler par la dispersion thermique des vitesses au sein de la vapeur de Strontium. À partir de cet état, un autre laser de longueur d'onde 404 nm transfère la population électronique vers l'état auto-ionisant $(4d^2 + 5p^2) \ ^1D_2$ via une transition de largeur de l'ordre de 900 GHz. L'atome relaxe alors vers un ion $^{88}\text{Sr}^+$ et un électron.

refroidissement : Dans notre expérience, le refroidissement de l'ion $^{88}\text{Sr}^+$ se fait sur la transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$ à 422 nm. l'émission de photons spontanés se fait alors de manière isotrope.

repompeurs : En raison de la présence de niveaux méta-stables $D_{3/2}$ et $D_{5/2}$ de durée de vie proche de la seconde, on a également besoin de lasers repompeurs. En effet, sans repompage on se retrouverait dans une situation de pompage optique vers l'état $D_{3/2}$ ce qui conduirait à une diminution drastique du nombre de photons diffusés.

Pour recycler la population électronique piégée dans le niveau $D_{3/2}$ deux méthodes représentées sur la figure 11 sont possibles. On peut exciter la transition $D_{3/2} \rightarrow P_{1/2}$ à 1092 nm ce qui donne lieu à des phénomènes de light-shift et de résonances noires, on parle alors de repompage cohérent. L'autre option étant d'exciter les transitions $D_{3/2} \rightarrow P_{3/2}$ à 1004 nm et $D_{5/2} \rightarrow P_{3/2}$ à 1033 nm pour fermer le cycle de fluorescence via une désexcitation spontanée depuis le niveau $P_{3/2}$, on parle alors de repompage incohérent.

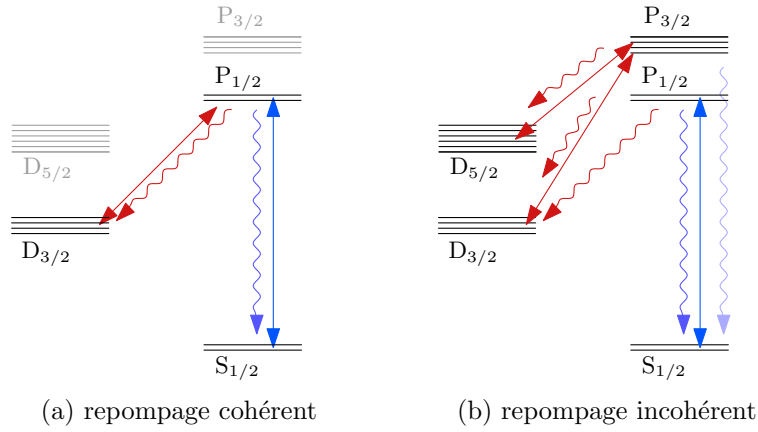


FIGURE 11 – Schémas des couplages en refroidissement Doppler. La présence du niveaux métastables $D_{3/2}$ impose l'utilisation de lasers de repompage pour fermer les cycles de fluorescence de l'ion sur la transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$. La méthode présentée dans la figure (a) peut donner lieu à des résonances noires avec le laser de refroidissement (repompage cohérent). La méthode présentée dans la figure (b) permet de retrouver une forme de raie similaire à un système à deux niveaux, comme on le verra dans la partie 4.2.1 page 80

2.3.1 contrôle et orientation des faisceaux

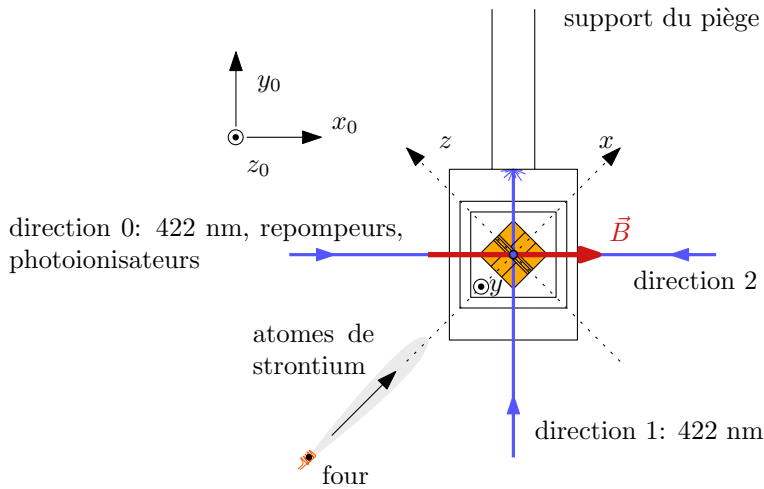


FIGURE 12 – Orientation des faisceaux vis à vis des axes du piège et du champ magnétique en opération normale. Un accès supplémentaire selon l'axe z du piège est disponible.

Pour contrôler l'extinction des faisceaux, on utilise une série de modulateurs acousto-optiques (AOM) en configuration de double passage. Pour chaque longueur d'onde, et à partir de la source laser associée, on peut utiliser ces modulateurs pour générer autant de faisceaux que nécessaire au fonctionnement des trois enceintes de piégeage de la salle. Par ailleurs, les AOM sont également utilisés pour contrôler finement l'intensité des faisceaux à 422 nm et les infrarouges ainsi que la fréquence des faisceaux à 422 nm. La plage d'accordabilité requise pour les

faisceaux infrarouges est trop large pour utiliser directement les AOM, on agit donc directement sur la source laser pour ajuster la fréquence de ces lasers, en utilisant une cavité externe et le faisceau à 422 nm comme référence pour calibrer l'amplitude de ces changements.

Pour stabiliser le pointage des faisceaux, nous utilisons des fibres optiques pour les acheminer au plus près des pièges. La polarisation des faisceaux est purifiée via un cube polarisant (PBS) en sortie de fibre.

la stabilisation de l'intensité des faisceaux après le PBS se fait en modulant l'intensité du signal envoyé aux AOM en fonction de l'intensité d'un faisceau secondaire obtenu grâce à une réflexion sur une lame de verre mesurée à l'aide d'une photodiode.

2.3.2 stabilisation en fréquence

La stabilisation en fréquence des lasers repose sur plusieurs dispositifs. Le laser de refroidissement est stabilisé en fréquence sur la transition $5sS_{1/2}(F = 2) \rightarrow 6pP_{1/2}(F' = 3)$ de l'atome ^{85}Rb par absorption saturée, qui se trouve à environ 440 MHz de la transition de refroidissement. La dérive en fréquence des lasers repompeurs est corrigée via une cavité de transfert de cohérence réglée sur le laser à 422 nm. La longueur d'onde du laser à 461 nm est réglée manuellement sur le signal de fluorescence d'un jet de strontium sans être activement stabilisée.

lasers à 422 nm : L'absorption saturée est une technique de spectroscopie permettant d'asservir la fréquence d'un laser sur une transition atomique en s'affranchissant de l'élargissement Doppler. L'avantage majeur de cette technique comparé à l'asservissement sur une cavité ultra-stable, outre sa relative simplicité, est qu'elle donne une référence absolue de la fréquence du laser, ce qui permet de relier la fréquence de transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$ de l'ion $^{88}\text{Sr}^+$ à celle de la transition $5sS_{1/2}(F = 2) \rightarrow 6pP_{1/2}(F' = 3)$ de l'atome ^{85}Rb .

Pour cela on utilise un schéma pompe-sonde où les deux faisceaux sont contra-propageant. Pour un atome se déplaçant à la vitesse \vec{v} , les fréquences effectives pour la pompe et la sonde s'écrivent :

$$\begin{aligned} f_{pompe} &= f - \vec{k} \vec{v} \\ f_{sonde} &= f + \vec{k} \vec{v} \end{aligned}$$

Les deux faisceaux ne peuvent donc être simultanément à résonance que pour une seule classe de vitesse. La pompe étant saturante, le spectre d'absorption de la sonde moins intense présente

un pic de transmission pour $f = f_a$ où f_a est la fréquence de la transition.

La largeur de ce pic est essentiellement déterminée par la largeur naturelle de la transition, éventuellement élargie par la puissance de la pompe.

Notons que si deux transitions de fréquences f_a et f_b venant du même état fondamental coexistent on peut obtenir un signal d'absorption saturée à la fréquence $\frac{f_a+f_b}{2}$, c'est ce que l'on appelle un croisement de raie (crossover). En effet, pour les classes de vitesse $\pm \frac{v_a-v_b}{2}$, la pompe en saturant la transition a ou b dépeuple le niveau fondamental ce qui diminue l'absorption de la sonde sur la transition b ou a respectivement.

Pour verrouiller la fréquence du laser sur la transition on a recours à une technique de démodulation. En modulant la fréquence de la pompe indépendamment de celle de la sonde à l'aide d'un modulateur acousto-optique (AOM) et en démodulant par une technique de détection synchrone, on peut obtenir un signal d'erreur utilisable dans un schéma d'asservissement PID. Une autre méthode de modulation consiste à moduler le champ magnétique au sein de la cellule de rubidium. Cela se traduit via l'effet Zeeman par une modulation de la fréquence de transition ce qui est équivalent à moduler la fréquence des deux faisceaux en même temps. L'avantage de cette méthode est qu'elle implique un montage optique plus simple et moins onéreux, l'inconvénient est que la référence de fréquence obtenue est plus sensible à un éventuel champ magnétique statique résiduel.

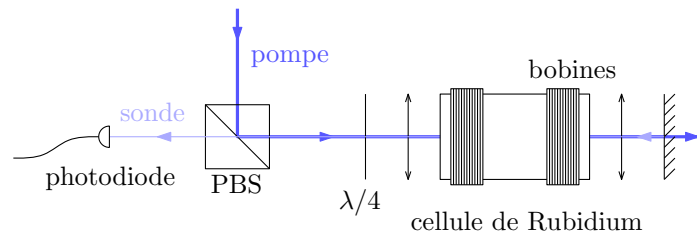


FIGURE 13 – Implémentation de l'absorption saturée par modulation du champ magnétique.

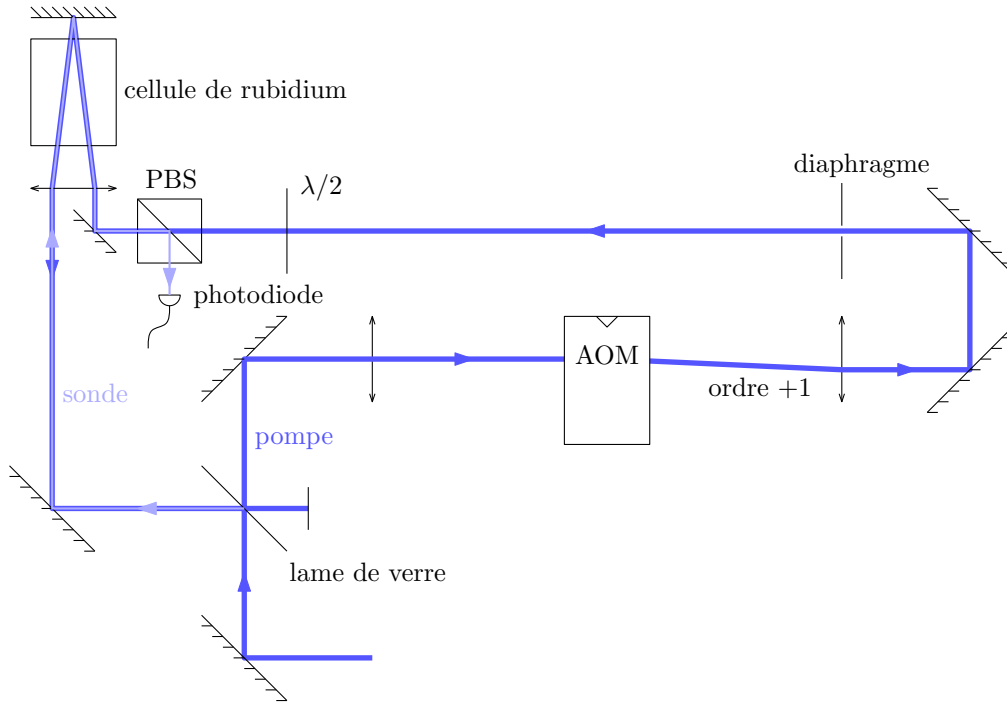


FIGURE 14 – Implémentation de l’absorption saturée par modulation de la fréquence de la pompe.

Nous disposons de deux sources laser à 422 nm l’une étant verrouillée à une fréquence de 710 962 401 328(40) kHz sur la transition $5sS_{1/2}(F = 2) \rightarrow 6pP_{1/2}(F' = 3)$ de l’atome ^{85}Rb [77], en utilisant la modulation de champ magnétique et en rétroagissant sur la tension du contrôleur piezo-électrique de la diode. La seconde est asservie à une fréquence de 710 962 342 621(40) kHz sur le croisement de transition $5sS_{1/2}(F = 2) \rightarrow 6pP_{1/2}(F' = 2 + 3)$ de l’atome ^{85}Rb [77], en modulant la fréquence du faisceau pompe à l’aide d’un AOM fonctionnant à une fréquence $f_{mod} = 130$ MHz et en rétroagissant sur le courant de la diode en plus de la tension du contrôleur piezo-électrique.

En théorie, les deux faisceaux lasers se retrouvent ainsi décalés en fréquence de $f_b = (f_{mod} - 117.36(7))/2 = 6.293(35)$ MHz. En les superposant sur une photodiode on obtient un signal de battement tel que celui représenté sur la figure 15 dont les caractéristiques spectrales nous renseignent sur la performance relative de nos asservissement.

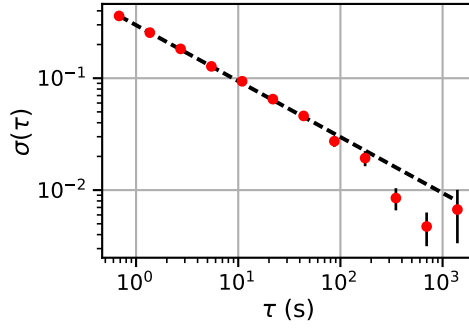


FIGURE 16 – Variance d’Allan de la fréquence moyenne du battement calculée avec l’estimateur (36) à partir de spectres mesurés avec un analyseur de spectre.

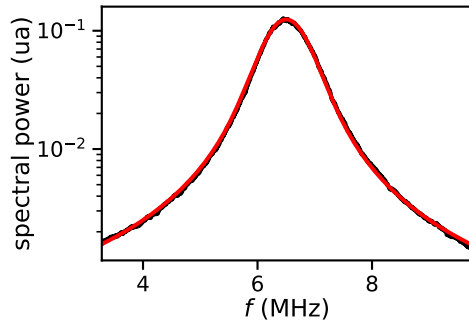


FIGURE 15 – Spectre du battement entre les deux lasers à 422 nm. La courbe rouge est un ajustement avec un profil de Voigt. La fréquence centrale est de 6.501(3) MHz, la demi-largeur à mi-hauteur totale est de 0.48 MHz avec une contribution gaussienne de 0.3 MHz et une contribution lorentzienne de 0.28 MHz.

La position de la fréquence du battement est stable sur une plage d’une heure comme le montre le calcul de la variance d’Allan représenté sur la figure 16. Le calcul à été fait à partir d’une série de spectres acquis sur une période de deux heures à une fréquence de 1.5 Hz. La fréquence moyenne du battement f_0 est estimée en calculant la moyenne des fréquences explorées f pondérées par l’intensité du signal correspondant S_f mis au carré :

$$\hat{f}_0 = \frac{\sum f S_f^2}{\sum S_f^2} \quad (36)$$

Avec cet estimateur la fréquence obtenue en ajustant la moyenne des spectres avec un profil de Voigt et celle obtenue en moyennant chaque estimation de la fréquence moyenne du battement sont compatibles.

En revanche la fréquence moyenne du battement varie d’un jour à l’autre par sauts de l’ordre de 50 kHz. Il y a donc un effet systématique qui décale significativement la fréquence d’un ou des deux lasers vis à vis de la fréquence de transition attendue.

La dépendance de la position de cette fréquence centrale avec la fréquence de modulation de la pompe (en MHz) suit une loi :

$$f_b = a(f_{mod} - f_0) \quad (37)$$

avec $a = 0.524(2)$ et $f_0 = 117.46(5)$ MHz : le second laser contribue donc au décalage de la fréquence du battement vis à vis de la valeur théorique. Ce décalage est probablement dû au fond du signal d'absorption : même en ne modulant que la pompe, la démodulation au premier ordre introduit dans le signal la dérivée du fond.

La différence entre la valeur mesurée de f_{mod} pour laquelle les fréquences des deux faisceaux sont égales vis à vis de la valeur théorique est de 0.10(9) MHz : à priori les effets systématiques affectant un des faisceaux affectent l'autre de la même manière à 100 kHz près.

lasers infrarouges : Pour corriger la dérive en fréquence des lasers infrarouges, on utilise une cavité de transfert de cohérence. Il s'agit d'une cavité résonnante en anneau de finesse de l'ordre de 100 pour tous les lasers dont on balaye la longueur à l'aide d'un contrôleur piezo-électrique. Pour chaque laser, la puissance transmise ou réfléchi par la cavité est mesurée par une photodiode et numérisée à l'aide d'une carte d'acquisition. Les acquisitions sont déclenchées sur le signal de balayage de la cavité.

On obtient alors pour chaque laser un système de pics dont la position dépend sensiblement de la fréquence du laser.

La série de pics associée au laser à 422 nm fournit une calibration de la réponse du piezo, et permet de suivre l'éventuelle dérive de la longueur de la cavité.

On peut donc à partir de là asservir la fréquence des lasers en stabilisant la positions des pics des autres lasers vis à vis d'une trace de référence.

Pour une cavité en espace libre, il est nécessaire de prendre en compte les variations journalières des indices de l'air, principalement dues aux variations de pression. Plus précisément il faut rendre compte des changement de dispersion qui modifient le chemin optique pour le laser maître et les lasers esclaves de manière différentes. La méthode la plus efficace pour s'affranchir de ce problème serait de placer la cavité sous vide au prix d'une certaine lourdeur expérimentale, tant en terme d'encombrement que de simplicité des réglages. Mais on peut aussi à partir de la mesure de la pression, température et humidité dans la cavité calculer ou calibrer les variations de la dispersion. Dans notre expérience j'ai mis en place cette méthode en utilisant la formule d'Edlén [83] pour le calcul de la dispersion.

Ce système, comme on le voit sur la figure 17 permet de réduire la dérive en fréquence à des vitesses de l'ordre de 100 kHz/h, moyennant quelques corrections liées aux variations journalières des indices optiques de l'air sans lesquelles les variations seraient de l'ordre du MHz par heure.

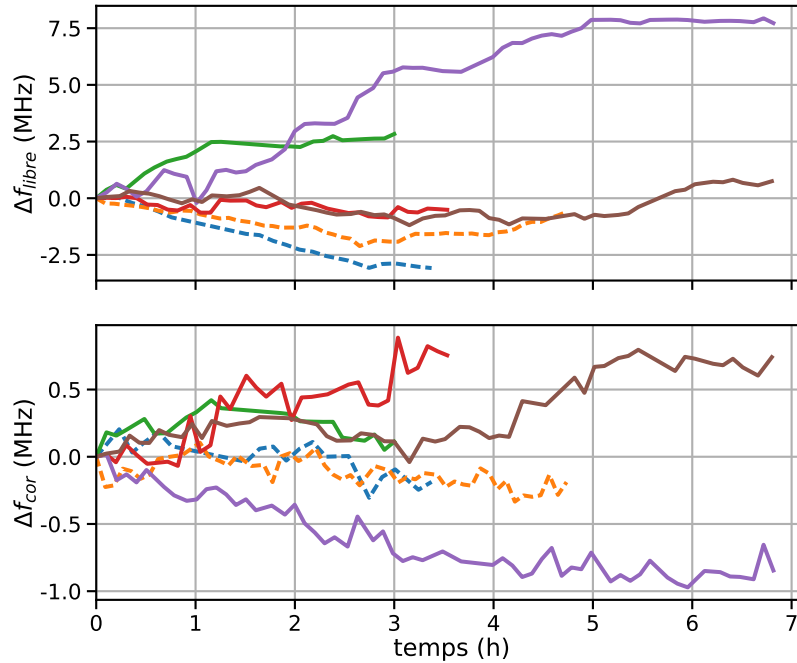


FIGURE 17 – Dérive au cours du temps de la fréquence du laser infrarouge à 1092 nm sans correction de la dérive des indices de l'air Δf_{libre} et avec Δf_{cor} . Les courbes en pointillé correspondent à des mesures où la fréquence du laser est laissée à dériver, la trajectoire corrigée étant calculée après coup, les courbes pleines correspondent à des mesures pour lesquelles la fréquence du laser est corrigée, la trajectoire libre étant calculée après coup. Les non-linéarités de la réponse du contrôleur piezo-électrique de balayage de la longueur de la cavité sont ignorées, ce qui peut potentiellement expliquer la dérive résiduelle. La méthode employée pour mesurer la dérive du laser infrarouge est détaillée page 46.

La bande passante de l'asservissement est limitée par la fréquence de balayage de la cavité, soit quelques Hz. La rétroaction se fait via les contrôleurs piezo-électrique des lasers.

Le détail du calcul de la rétroaction à partir des traces de transmission des lasers se trouve en annexe B page 120.

2.4 Comptage des photons

Nous avons vu comment piéger l'ion, et quels lasers sont utilisés pour exciter les transitions de l'ion, avec une attention particulière portée au verrouillage de fréquence des lasers. Il nous faut maintenant parler du dispositif de collection et de comptage des photons diffusés par l'ion.

2.4.1 Optiques de collection

La large majorité des signaux dans des expériences d'ion piégés dérivent du comptage des photons diffusés par l'ion. Dans notre montage pour compter ces photons on a recours à un photo multiplicateur (PM). Pour limiter la détection de photons de fond (non diffusés par l'ion), on utilise une méthode filtrage spatiale : on fait l'image de l'ion sur un diaphragme derrière lequel se trouve le PM.

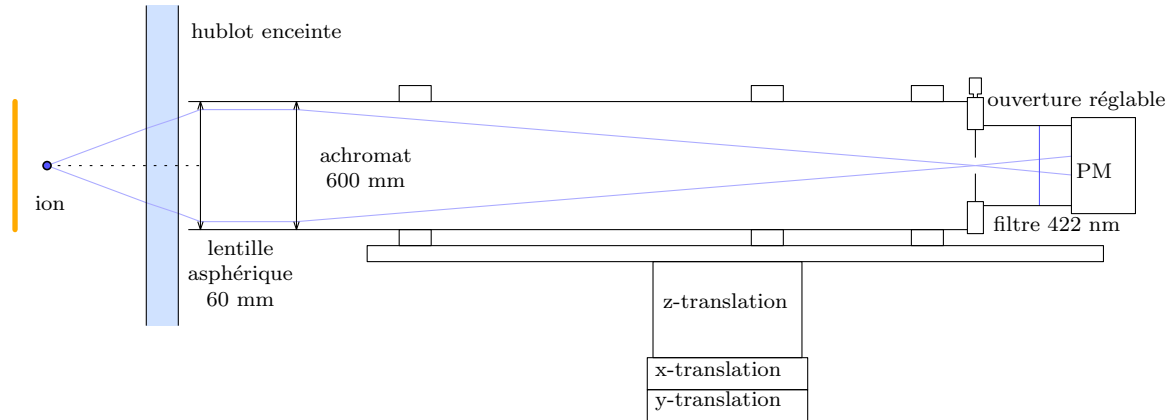


FIGURE 18 – Schéma des optiques de collection sur la nouvelle enceinte.

Pour pouvoir ajuster les signaux expérimentaux par des lois théoriques il est primordial de connaître avec précision l'efficacité de collection globale du système de comptage. Pour la mesurer, on utilise une technique séquentielle [68]. On prépare l'ion froid dans le niveau métastable $D_{3/2}$ en excitant la transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$ puis on excite la transition $D_{3/2} \rightarrow P_{1/2}$, un unique photon est alors émis sur la transition $P_{1/2} \rightarrow S_{1/2}$. En répétant la mesure un grand nombre de fois on obtient directement la probabilité de détection des photons. Les efficacités de collection typiques sont de $8.2(2) \times 10^{-3}$ pour la nouvelle enceinte et de $1.95(5) \times 10^{-3}$ pour l'ancienne.

2.4.2 Séquenceur-compteur

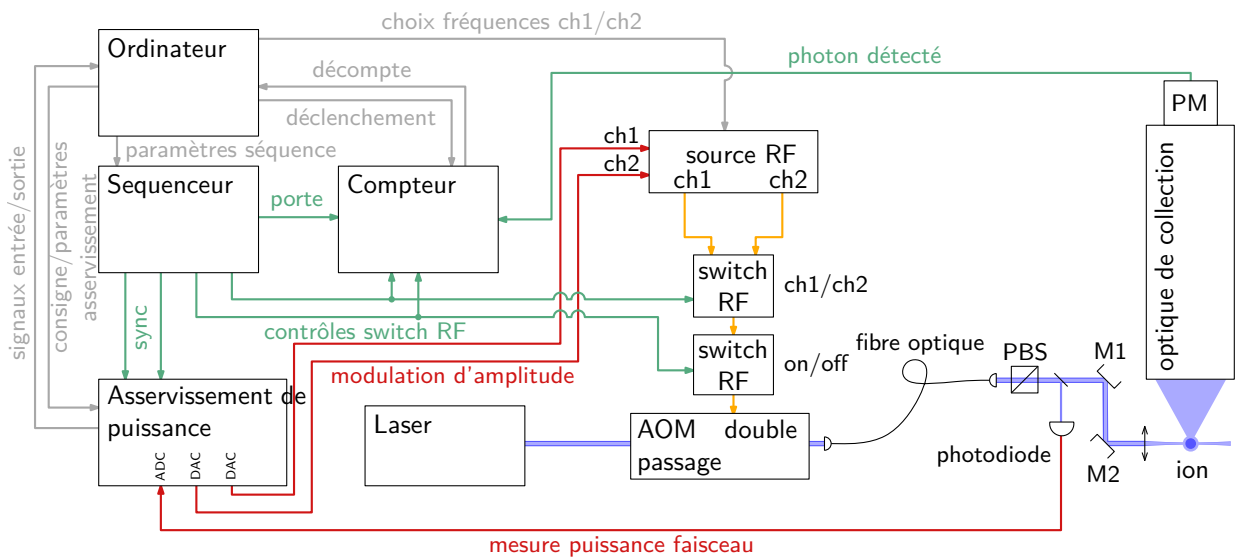


FIGURE 19 – Schéma du montage séquenceur-compteur-asservissement en puissance des faisceaux pour un laser. En gris sont représentés les signaux émis sur le réseau local, en vert les signaux logiques, en jaune les signaux RF, en rouge les signaux analogiques de faible fréquence, en bleu le faisceau laser. Voir le texte pour les explications.

Une expérience d'ion piégé implique l'utilisation de méthodes séquentielles temps réel : il faut alterner entre phases de refroidissement, préparation et mesure de durées fixes. Les phases de mesure doivent être synchronisées avec le comptage des photons, dans la mesure ou leur durée peut être de l'ordre de la dizaine de micro-seconde cela requiert une électronique adaptée.

Dans notre montage nous utilisons une paire de micro-contrôleurs Arduino. Le premier micro-contrôleur sert de séquenceur : il pilote un certain nombre d'interrupteur rapides RF permettant de choisir entre un certain nombre de configurations des lasers en interaction avec l'ion. Le second micro-contrôleur sert de compteur, il peut opérer selon deux modes, un mode de comptage cumulé et un mode de mesure des temps d'arrivée des photons. Dans les deux cas le comptage est autorisé par un signal de porte logique généré par le séquenceur. Dans le premier mode les différentes phases des séquences sont différenciées par l'état des sorties du séquenceur connectées au compteur.

2.4.3 asservissement en intensité des faisceaux

Les variations de puissance des faisceaux sont compensées en modulant l'amplitude du signal des AOM de sorte à fixer la puissance des faisceaux après le PBS représenté sur la figure 19. Une partie des faisceaux est prélevée après le PBS à l'aide d'une lame de verre épaisse avant

d'être envoyée sur une photodiode. Le signal de la photodiode est alors envoyé sur l'entrée ADC d'un micro-contrôleur Arduino dont la sortie analogique est utilisée pour moduler l'amplitude du signal des sources RF utilisées pour alimenter les AOM. Le micro-contrôleur ajuste alors sa sortie en fonction de l'entrée pour maintenir un niveau stable défini par l'utilisateur via un schéma d'asservissement proportionnel intégral. Du fait de la nature séquentielle des acquisitions, la puissance visée des faisceaux dépend de la phase de la séquence utilisée. Pour chaque puissance il faut un signal logique allant du séquenceur aux modules d'asservissement pour synchroniser les asservissements avec les séquences.

Pour verrouiller l'intensité des faisceaux au niveau de l'ion il faudrait asservir le pointé des faisceaux, ce qui peut se faire en motorisant les miroirs $M1$ et $M2$ de la figure 19. Ce travail, non effectué pendant ma thèse, est actuellement en cours.

2.5 Contrôle du champ magnétique

Nous avons vu comment l'on acquière la fluorescence de l'ion via une méthode séquentielle de sorte à minimiser l'impact de la mesure sur l'état du mouvement de l'ion. Il nous reste à parler du contrôle du champ magnétique statique dans lequel l'ion est plongé, et qui définit l'axe de quantification.

En effet, les niveaux d'énergie de l'ion tel que présentés dans la figure 11 sont dégénérés. Ils se décomposent en plusieurs sous-états définis par un nombre magnétique m . Cette dégénérescence est levée en présence d'un champ magnétique par l'effet Zeeman. En fonction de l'état de polarisation des lasers vis à vis de l'axe de quantification imposé par le champ magnétique, diverses transitions entre les sous-états respectifs des niveaux électroniques adressés par les lasers sont excités. Cela s'exprime sous la forme de règles de sélection qui découlent de la conservation du moment orbital total de l'ensemble photon/ion lors d'un événement d'absorption.

Si nous considérons un champ magnétique aligné selon l'axe z , on est alors amené à définir trois états de polarisation identifiés par les vecteurs :

$$\vec{e}_0 = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_{\pm 1} = \mp(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y)/\sqrt{2} \quad (38)$$

Ces polarisations portent les noms σ^\pm pour $\vec{e}_{\pm 1}$, les deux polarisations circulaires dans le plan orthogonal au champ magnétique, et π pour \vec{e}_0 , la polarisation linéaire colinéaire au champ magnétique

Les polarisations σ^\pm transportent un moment cinétique ± 1 , et ne peuvent donc exciter que

des transitions $m \rightarrow m \pm 1$ où m est le nombre magnétique du niveau inférieur considéré, $-J < m < J$ où J est le moment cinétique total du niveau. La polarisation π transporte un moment cinétique nul et ne peut donc exciter que des polarisations $m \rightarrow m$.

Le faisceau n'étant pas forcément aligné avec le champ magnétique exprimer la polarisation du faisceau dans cette base demande quelques efforts.

On note α l'angle entre le faisceau et le champ magnétique, et on choisi le vecteur \vec{e}_y de sorte à ce qu'il soit orthogonal à la direction de propagation du faisceau tel que représenté sur la figure 20.

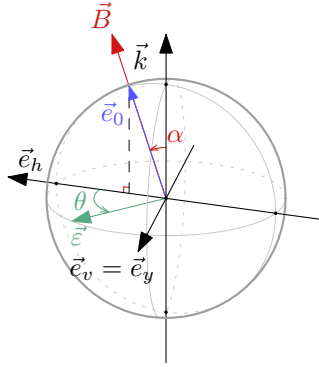


FIGURE 20 – Notations et choix de base pour l'écriture de la polarisation $\vec{\varepsilon}$ du faisceau dans la base $(\vec{e}_{+1}, \vec{e}_0, \vec{e}_{-1})$

Si on défini les polarisations horizontales et verticales du faisceau \vec{e}_h et $\vec{e}_v = \vec{e}_y$ on peut écrire la polarisation du faisceau sous la forme :

$$\vec{\varepsilon} = e^{i\theta} \cos(\phi) \vec{e}_d - e^{-i\theta} \sin(\phi) \vec{e}_g$$

$$\vec{e}_d = (+\vec{e}_h - i\vec{e}_v)/\sqrt{2}, \quad \vec{e}_g = (-\vec{e}_h - i\vec{e}_v)/\sqrt{2}$$

Où \vec{e}_d et \vec{e}_g correspondent aux polarisations circulaires droite et gauche.

ϕ et θ définissent l'état de polarisation du faisceau sur la sphère de Poincaré. En particulier ϕ définit l'ellipticité de la polarisation du faisceau et θ l'orientation du grand axe de l'ellipse de polarisation vis à vis de la projection du champ magnétique dans le plan orthogonal à la direction de propagation du faisceau. Le tableau 3 donne quelques exemples de polarisation particulières.

α	θ	ϕ	$\vec{\varepsilon}$
0	0	0	$\vec{e}_d = \vec{e}_{-1}$
0	0	$\pi/2$	$-\vec{e}_g = -\vec{e}_{+1}$
0	0	$\pi/4$	$\vec{e}_h = \vec{e}_x$
0	$\pi/2$	$\pi/4$	$\vec{e}_v = \vec{e}_y$
$\pi/2$	0	$\pi/4$	$\vec{e}_h = \vec{e}_0$
$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/4$	$\vec{e}_v = \vec{e}_y$

TABLEAU 3 – exemple de polarisations pour diverses valeurs de l'angle entre le faisceau et le champ magnétique α , de l'orientation de l'ellipse de polarisation ε et de l'ellipticité de la polarisation ϕ .

La polarisation du faisceau dans la base $(\vec{e}_{+1}, \vec{e}_0, \vec{e}_{-1})$ s'écrit alors :

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha/2)^2 \cos(\phi)e^{i\theta} - \cos(\alpha/2)^2 \sin(\phi)e^{-i\theta} \\ \sin(\alpha) \left(\sin(\phi)e^{-i\theta} + \cos(\phi)e^{i\theta} \right) / \sqrt{2} \\ \cos(\alpha/2)^2 \cos(\phi)e^{i\theta} - \sin(\alpha/2)^2 \sin(\phi)e^{-i\theta} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Pour contrôler le champ on utilise trois paires de bobines, une pour chaque direction de l'espace. Le réglage fin de la direction du champ magnétique ne peut être obtenu que en utilisant l'ion unique comme sonde. Pour cela on utilise les techniques suivantes :

2.5.1 alignement du champ magnétique sur une direction

Pour aligner le champ magnétique sur un axe on dispose de deux méthodes : l'alignement sur la polarisation d'un repompeur et l'alignement sur le faisceau de refroidissement. Dans les deux cas il s'agit de minimiser la fluorescence de l'ion en exploitant les règles de sélection des transitions atomiques vis à vis de la polarisation du laser d'excitation.

Pour la première méthode, en alignant le champ magnétique sur la polarisation du repompeur, on supprime les couplage de la forme $|J, m = -J\rangle \rightarrow |J' = J - 1, m = -J + 1\rangle$ et $|J, m = J\rangle \rightarrow |J' = J - 1, m = J - 1\rangle$ où J désigne l'amplitude du moment angulaire total du niveau concerné et m le nombre magnétique des sous-niveaux Zeeman concernés. On se retrouve alors dans une situation de pompage optique et la fluorescence de l'ion s'annule comme on peut le voir sur la figure 21. Il faut noter que dans le cas particulier où la polarisation du repompeur est elliptique il existe deux directions du champ magnétique aboutissant à une situation de pompage optique : seule une des deux composantes σ^+ ou σ^- de la polarisation peut être annulée simultanément.

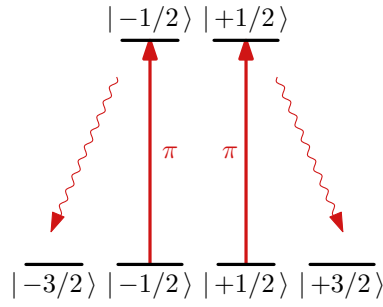


FIGURE 21 – Sur une transition de type $J \rightarrow J + 1$ les états de plus grand nombre magnétique ne sont plus couplés si le repompeur est polarisé π .

La seconde méthode nécessite de régler le laser à 422 nm en polarisation circulaire. En alignant le champ magnétique sur le faisceau on annule la composante π de la polarisation ce qui laisse un des sous états du fondamental non couplé au niveau excité. On se retrouve alors également en situation de pompage optique comme on peut le voir sur la figure 22. Si la polarisation du laser n'est pas parfaitement circulaire il est impossible d'annuler la fluorescence de l'ion, mais l'alignement du champ magnétique sur la direction de propagation du laser correspond tout de même à un minimum de fluorescence de l'ion.

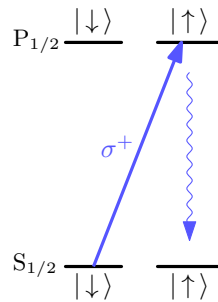


FIGURE 22 – Pour une polarisation purement circulaire du faisceau bleu, l'alignement du champ magnétique sur la direction de propagation annule toute composante π de la polarisation du faisceau ce qui donne une situation de pompage optique.

La précision de cette méthode est limitée par le nombre de photons diffusés venant parasiter la mesure de la fluorescence de l'ion et le temps d'accumulation des photons que l'on est prêt à accepter pour effectuer les réglages. Même dans des conditions dégradées d'acquisition, avec un fond de photons diffusés à la surface du piège important, on peut facilement atteindre une précision de l'ordre du degré comme on peut le voir sur la figure 23. En général la stabilité des moyens de réglage de la polarisation est le facteur limitant dans l'annulation de la fluorescence. Notons qu'augmenter la puissance du faisceau d'excitation n'augmente plus la sensibilité à l'alignement au delà d'un certain stade.

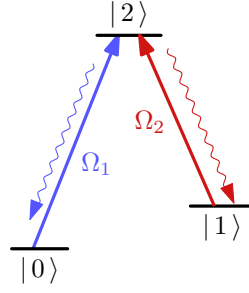


FIGURE 24 – Système à trois niveaux couplé en Λ

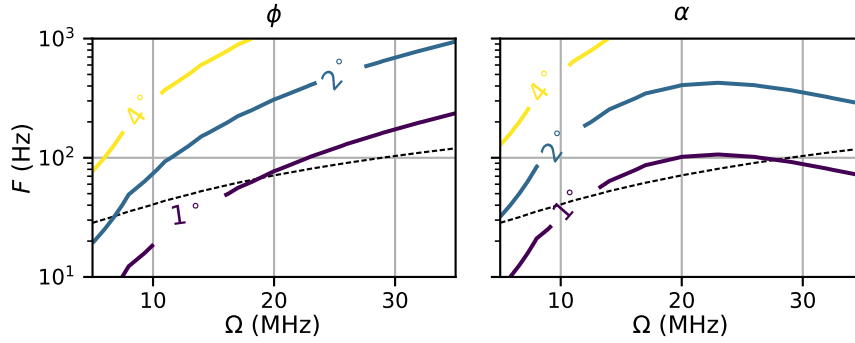


FIGURE 23 – Défaut de polarisation sur l'ellipticité du faisceau ϕ et sur l'alignement du faisceau avec le champ magnétique α en fonction du résidu de fluorescence F et de la fréquence de Rabi du faisceau bleu Ω . La courbe en pointillés noirs délimite la frontière en dessous de laquelle le rapport signal à bruit passe en dessous de un, pour un temps d'accumulation d'une seconde, en supposant un fond à laser éteint de 500 Hz et une augmentation linéaire du fond avec l'intensité du faisceau bleu à raison de 5 kHz de fond pour une fréquence de rabi de 20 MHz. Les calculs sont effectués pour un taux de collection de 8.5×10^{-3} , un champ magnétique de 3.9 MHz et un désaccord à résonance nul.

2.5.2 amplitude du champ

Pour mesurer l'amplitude du champ magnétique on exploite un phénomène dit de résonance noire : dans un système à trois niveaux couplé en Λ tel que représenté sur la figure 24, lorsque les désaccords associés aux deux transitions sont nuls, il existe une combinaison linéaire d'états fondamentaux non couplés à l'état excité. Dans ces conditions l'ion ne peut pas diffuser de photons.

En effet dans un tel système l'hamiltonien prend la forme :

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega_1 e^{i\varphi_1(t)} \\ 0 & 0 & \Omega_2 e^{i\varphi_2(t)} \\ \Omega_1 e^{-i\varphi_1(t)} & \Omega_2 e^{-i\varphi_2(t)} & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

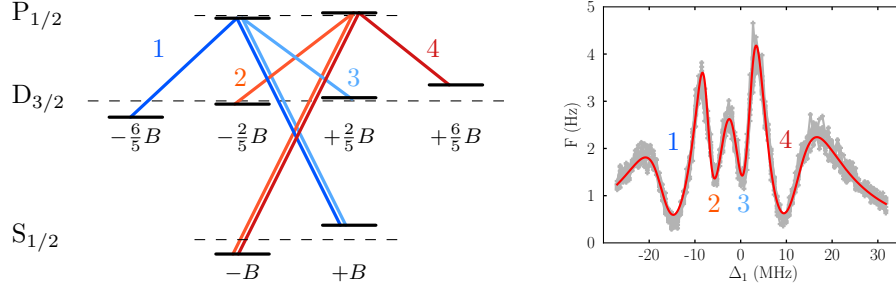


FIGURE 25 – Résonances noires en repompage cohérent et effet Zeeman. Les quatre chemins d’excitation représentés sur le schéma de niveaux correspondent à une chute de fluorescence dans le spectre représenté à droite. La courbe rouge est un ajustement des données représentées en gris. L’écartement des chutes de fluorescence dépend de l’amplitude du champ magnétique, leur position relativement au maximum de fluorescence dépend principalement du désaccord du laser infrarouge, leur largeur dépend de l’amplitude des fréquences de Rabi, leur contraste dépend de la température de l’ion, et du bruit de phase relatif des lasers bleu et infrarouge.

Pour :

$$|\psi\rangle(t) \propto \frac{1}{\Omega_1}|0\rangle - \frac{1}{\Omega_2}e^{i(\varphi_1(t)-\varphi_2(t))}|1\rangle \quad (41)$$

on constate que $H|\psi\rangle = 0$. Sous la condition d’accord de phase $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, $|\psi\rangle$ est alors un état stationnaire du système étudié. Sur un spectre de fluorescence cela se traduit par l’apparition de chutes brutale de la fluorescence lorsque la condition d’accord de phase est vérifiée comme on le voit sur la figure 25 obtenue en excitant les transitions $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$ et $D_{3/2} \rightarrow P_{1/2}$ à l’aide de lasers polarisés linéairement alignés sur le champ magnétique. La position de chacune des quatre résonances noires est liée au décalage Zeeman des niveaux d’énergie du Strontium et donc au champ magnétique. En ajustant le spectre avec un modèle théorique qui sera présenté dans la partie 3 page 49 on peut alors remonter à l’amplitude du champ magnétique ainsi qu’au désaccord du laser infrarouge et aux fréquences de Rabi des lasers.

Notons que si cette méthode est simple à mettre en œuvre avec les moyens dont l’équipe dispose, elle est néanmoins limitée dans la plage des champs quelle permet de mesurer : il faut pouvoir résoudre les résonances noires pour obtenir une valeur fiable, et même si la taille des résonances noires peut être réduite en baissant la puissance des faisceaux d’excitation, ce qui diminue le signal, on est contraint par les fluctuations des désaccords liées au mouvement de l’ion via l’effet Doppler et le jitter des lasers.

2.5.3 zéro du champ

À champ magnétique nul et polarisations constantes, l’ion $^{88}\text{Sr}^+$ ne peut diffuser de photons. En effet, il devient alors impossible d’exciter les transitions $D_{3/2} \rightarrow P_{1/2}$ et $D_{5/2} \rightarrow P_{3/2}$. En effet,

quel que soit l'état de polarisation du laser adressant la transition $D_{3/2} \rightarrow P_{1/2}$ ou $D_{5/2} \rightarrow P_{3/2}$, on peut choisir l'axe de quantification de sorte à ce que l'une des composantes σ^+ ou σ^- soit annulée.

On peut alors vérifier que l'on a bien trouvé le zéro du champ en changeant la polarisation du repompeur : si la fluorescence reste nulle, le champ magnétique est nul.

2.6 conclusion du chapitre

Nous avons au sein de cette partie traité des sujets suivants :

- le piégeage de l'ion grâce à des pièges de Paul linéaires et la modélisation de ces pièges via l'approximation du pseudo-potentiel.
- Le refroidissement Doppler des ions.
- le contrôle des paramètres du potentiel de piégeage (raideur, anisotropie, rotation des axes propres et champs de compensation) via une méthode de matrice de transfert basée sur le calcul analytique du potentiel associé à chaque électrode du piège.
- la compensation de l'excès de micro-mouvement par mesure de la corrélation entre la fluorescence de l'ion et la tension de piégeage RF, et l'optimisation des paramètres d'acquisition pour cette tâche.
- les lasers utilisés pour exciter les transitions de l'ion $^{88}\text{Sr}^+$, les techniques de verrouillage de fréquence utilisée (absorption saturée pour le laser de refroidissement, et cavité de transfert de cohérence pour les lasers infrarouge).
- la méthode séquentielle d'acquisition de la fluorescence de l'ion utilisée pour minimiser l'effet du recul des photons absorbés/diffusés sur les données accumulées.
- le contrôle des fréquences, intensités et de l'allumage/extinction des lasers utilisés au sein des séquences via des modulateurs acousto-optiques (AOM).
- le contrôle de l'orientation du champ magnétique vis à vis des faisceaux et la mesure de l'amplitude du champ magnétique.

Il nous faut maintenant traiter des outils théoriques que j'ai utilisé pour interpréter les résultats des expériences menées.

3 Equations de Bloch

Cette partie traite du problème de la modélisation de l'interaction entre un ion piégé et le champ électromagnétique créé par les lasers utilisés pour le manipuler. Plusieurs approches sont possibles en fonction de la complexité du phénomène que l'on souhaite modéliser.

Par exemple, si l'on s'intéresse à l'évolution des états internes de l'ion, on peut recourir aux équations de Bloch Optique (OBE) [40]. Il s'agit de recourir au formalisme de la matrice densité pour décrire l'évolution de l'état interne de l'ion en ignorant l'état précis du champ électromagnétique. Dans ce modèle, l'interaction avec les lasers dérive alors directement de l'équation de Schrödinger alors que l'émission spontanée est décrite par des termes de relaxation appropriés. Cette approche est particulièrement bien adaptée à la modélisation des expériences d'ions piégés dans la mesure où les signaux étudiés sont en général une moyenne d'un nombre total de photons diffusés sur un grand nombre de réalisations.

Pour ce qui est de la prise en compte des degrés de liberté mécaniques de l'ion, cette approche est néanmoins limitée. En effet, dans l'approximation de confinement harmonique et dans le formalisme quantique complet, l'espace étudié devient un produit tensoriel entre l'espace des états internes de l'ion et celui des états de l'oscillateur harmonique quantique. Pour un nombre de niveaux n de l'oscillateur harmonique pris en compte, la taille de la matrice densité se voit multipliée par un facteur n^2 . Nous verrons par la suite que cette difficulté peut néanmoins être contournée dans certaines situations en décrivant le mouvement de manière semi-classique.

Une approche alternative est basée sur la méthode des trajectoires quantiques (wavefunction Monte Carlo) [62]. L'état de l'atome est décrit par une fonction d'onde dont l'évolution est donnée par l'équation de Schrödinger entrecoupée de saut quantiques dûs à l'émission spontanée vus comme des phénomènes de mesure de l'état interne de l'ion. En simulant un grand nombre de trajectoires, on peut reconstruire la statistique complète des émissions de photons spontanés et même calculer les effets induits par l'impulsion des photons sur le mouvement de l'ion. Nous ne poursuivrons pas cette approche dans la suite du manuscrit.

Nous allons maintenant présenter le formalisme des équations de Bloch optique et le système lié à l'ion $^{88}\text{Sr}^+$ au quel nous nous restreindrons.

3.1 Equation de Linblad

L'évolution dans le temps d'un système quantique isolé est décrite par une transformation unitaire dérivant de l'équation de Schrödinger. Dans le cas d'un système en interaction

avec l'environnement (même idéalisé) la taille du système rend difficile ou inintelligible toute modélisation complète du problème. En effet, la taille de l'espace de Hilbert à considérer croît exponentiellement avec le nombre de degrés de liberté attribués à l'environnement.

Il est alors nécessaire de se focaliser sur l'évolution du système, sans se préoccuper des corrélations avec l'environnement. Cela peut se faire via le formalisme de la matrice densité : il s'agit d'étudier la trace partielle de la matrice densité du système complet prise sur les degrés de liberté environnementaux. Par exemple pour un ion en interaction avec des lasers, la trace est prise sur l'état des modes électromagnétiques du vide.

Moyennant certaines approximations sur l'influence du couplage avec l'environnement sur les états propres du système, et la mémoire de l'environnement vis à vis de la fréquence des phénomènes d'interaction il est possible de dériver une équation linéaire décrivant l'évolution de la trace partielle de la matrice densité : l'équation de Lindblad [65].

Pour écrire cette équation il faut introduire un certain nombre de notations :

- ρ : la trace partielle de la matrice densité du système prise sur les degrés de liberté environnementaux.
- $|p\rangle$: les états internes du système étudié, c'est à dire les états propres de l'hamiltonien du système découplé de l'environnement.
- H : l'hamiltonien effectif du système. Cet hamiltonien porte sur les états internes du système étudié. Il s'agit d'un hamiltonien effectif car il comprend des termes dérivés de l'interaction avec l'environnement. Par exemple pour un ion, ce terme comprend l'interaction avec les lasers.
- Γ_{fi} : la densité de probabilité pour le système de sauter spontanément de l'état i vers l'état f . Pour un ion ces sauts correspondent généralement à l'émission spontanée, mais on peut également décrire l'absorption de photons émis par une source incohérente avec de tels termes.

Avec ces notations, l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= \frac{i}{\hbar}[\rho, H] + \mathcal{L}[\rho] \\
\mathcal{L}[\rho] &= \sum_{f,i} C_{fi}^\dagger \rho C_{fi} - \frac{1}{2}(C_{fi}^\dagger C_{fi} \rho + \rho C_{fi}^\dagger C_{fi}) \\
C_{fi} &= \sqrt{\Gamma_{fi}} |f\rangle \langle i| \\
H(t) &= \sum_{p,q} \hbar V_{pq}(t) |p\rangle \langle q|
\end{aligned} \tag{42}$$

L'opérateur \mathcal{L} porte le nom d'opérateur de Linblad. Les opérateurs C_{fi} sont les opérateurs de saut associés aux taux Γ_{fi} . Pour mieux comprendre ces termes, calculons les éléments de matrice $\mathcal{L}[\rho]_{pq} = \langle p | \mathcal{L}[\rho] | q \rangle$:

$$\mathcal{L}[\rho]_{pq} = \begin{cases} -\sum_f \Gamma_{fp} \rho_{pp} + \sum_i \Gamma_{pi} \rho_{ii} & \text{si } p = q \\ -\sum_f \frac{1}{2}(\Gamma_{fp} + \Gamma_{fq}) \rho_{pq} & \text{sinon} \end{cases} \tag{43}$$

On voit ici que l'effet de \mathcal{L} peut se décomposer en deux contributions : les transferts de population par sauts spontanés, et la décohérence induite par le phénomène.

Dans la partie suivante nous allons appliquer cette approche au système que nous voulons étudier : un ion en interaction avec des lasers. Dans ce cadre l'équation de Linblad est également appelée équation de Bloch Optique (OBE).

3.2 Présentation du système étudié

3.2.1 Niveaux d'énergie et Effet Zeeman

Avant de décrire l'interaction lumière matière, il faut rappeler la structure des niveaux d'énergie des ions manipulés. Dans le cadre de cette thèse il s'agit d'ions $^{88}\text{Sr}^+$, les transitions manipulées sont présentées dans la figure 9 page 31. Cet ion n'a qu'un seul électron dans sa couche externe et ne présente pas de structure hyperfine.

Un niveau d'énergie particulier de l'ion est caractérisé par trois nombres quantiques :

- le moment orbital : l
- le spin : $S = 1/2$
- le moment angulaire total : J

Chaque niveau d'énergie se décompose en sous états de nombre magnétique m , où m est compris entre $-J$ et J par pas de un. Sous l'effet d'un champ magnétique extérieur \vec{B} , l'effet Zeeman décale en énergie ces sous niveaux d'une quantité :

$$\begin{aligned}\Delta E_m &= g\mu_B B_{ext} \times m \\ \Delta \nu_m &= g \frac{\mu_B}{h} B_{ext} \times m \\ g &= 1 + 2(g_S - 1) \frac{J - l}{2l + 1}\end{aligned}\tag{44}$$

Où g est le facteur de Landé du niveau considéré, $g_S \approx 2$ est le rapport gyromagnétique de l'électron, μ_B est le magnéton de Bohr et h est la constante de Planck. Pour les applications numériques $\mu_B/h = 14 \text{ MHz/mT}$.

3.2.2 Règles de sélection

L'hamiltonien V décrivant l'interaction entre un atome à un électron à la position \vec{r}_0 et l'onde électromagnétique $\vec{E}(t, \vec{r}) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{\varepsilon}$ s'écrit, dans l'approximation dipolaire [40] :

$$\begin{aligned}V &= -\vec{D} \vec{E}(\vec{r}_0) \\ \vec{D} &= e(\vec{r}_0 - \vec{r})\end{aligned}\tag{45}$$

Où dans l'expression de l'opérateur moment dipolaire \vec{D} , \vec{r}_0 est la position du noyau et e est la charge élémentaire. E_0, ω, \vec{k} et $\vec{\varepsilon}$ sont respectivement l'amplitude, la pulsation, le vecteur d'onde et la polarisation de l'onde.

Calculons les éléments de matrice de cet Hamiltonien dans la base des états propres de l'hamiltonien atomique que l'on notera $|p\rangle$. Dans la représentation en interaction vis à vis des états internes de l'ion :

$$\langle p | V | q \rangle = \frac{E_0}{2} \langle p | \vec{D} \vec{\varepsilon} | q \rangle \left[e^{i(\delta_{pq}^+ t - \vec{k} \cdot \vec{r}_0)} + e^{i(\delta_{pq}^- t + \vec{k} \cdot \vec{r}_0)} \right]\tag{46}$$

Où les désaccords δ_{pq}^\pm pour deux niveaux p et q d'énergies E_p et E_q sont donnés par :

$$\delta_{pq}^\pm = \frac{E_q - E_p}{\hbar} \pm \omega\tag{47}$$

Il faut noter que sur ces deux désaccords, et pour $E_p > E_q$, seul δ_{pq}^+ peut être proche de zéro, δ_{pq}^- étant alors automatiquement de l'ordre de deux fois la fréquence de la transition excitée

(soit plusieurs centaines de TeraHertz). La contribution du terme δ_{pq}^- se moyenne alors à zéro et est donc négligée : c'est l'approximation de l'onde tournante.

La fréquence de Rabi du couplage entre un état $|a, J, m\rangle$ et un état $|b, J', m'\rangle$ s'écrit alors :

$$\Omega_{ab, JJ'}^{mm'} = \langle a, J, m | \vec{D} \cdot \vec{\epsilon} | b, J', m' \rangle \frac{E_0}{\hbar}$$

Le théorème de Wigner-Eckart nous permet de décomposer cette expression sous la forme suivante :

$$\Omega_{ab, JJ'}^{mm'} = \frac{\mu_{ab} E_0}{\hbar} \sum_{q=-1,0,1} \langle J', m', 1, q | J, m \rangle \times \varepsilon_q \quad (48)$$

$$= \Omega_{ab} \sum_{q=-1,0,1} \langle J', m', 1, q | J, m \rangle \times \varepsilon_q \quad (49)$$

Où les facteurs $\langle J', m', 1, q | J, m \rangle$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan, et μ_{ab} le moment dipolaire de la transition ne dépend pas de m , m' ou q et :

$$\begin{aligned} \vec{e}_0 &= \vec{e}_z, \quad \vec{e}_{\pm 1} = \mp(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y)/\sqrt{2} \\ \varepsilon_q &= \vec{\epsilon} \cdot \vec{e}_q, \quad q = -1, 0, 1 \end{aligned} \quad (50)$$

Les vecteurs \vec{e}_q sont associées aux polarisations du champ vis à vis de l'axe de quantification, défini par le champ magnétique :

- σ^\pm pour $\vec{e}_{\pm 1}$, les deux polarisations circulaires dans le plan orthogonal au champ magnétique
- π for \vec{e}_0 , la polarisation linéaire colinéaire au champ magnétique

Cette relation exprime la conservation du moment angulaire total de l'ion et des photons :

$$\langle J', m', 1, q | J, m \rangle \neq 0 \text{ impose } m = m' + q.$$

Notons également que pour un laser à résonance et $E_p > E_q$, seul le désaccord δ_{pq}^+ contribue significativement à la dynamique des états internes de l'ion : c'est l'approximation de l'onde tournante.

Si l'on autorise plusieurs lasers à exciter la même transition, l'hamiltonien du système peut alors s'écrire sous la forme :

$$H_{pq}(t) = \sum_{\delta_{pq}} \hbar \Omega_{pq}(\delta_{pq}) e^{i\delta_{pq}t} \quad (51)$$

où les δ_{pq} sont en nombre fini et H étant hermitien, les fréquence de Rabi Ω_{pq} , et les désaccords δ_{pq} doivent vérifier :

$$\begin{aligned}\delta_{qp} &= -\delta_{pq} \\ [\Omega_{pq}(\delta_{pq})]^* &= \Omega_{qp}(\delta_{qp})\end{aligned}\tag{52}$$

Les couplages entre niveaux peuvent être représentés sous la forme d'un graphe ou chaque niveau est représenté par un trait horizontal, et chaque couplage induit par le champ électromagnétique à un désaccord donné est représenté par une flèche.

3.2.3 émission spontanée

Les taux d'émission spontanée peuvent être calculés grâce à la règle d'or de Fermi. Pour un état $|i, J, m\rangle$ pouvant se désexciter vers un état $|f, J, m\rangle$, le taux de désexcitation spontané est proportionnel à $|\langle J', m', 1, q | \vec{D} | J, m \rangle|^2$ et donc en vertu du théorème de Wigner-Eckart :

$$\Gamma_{fi, J'J}^{m', m} = \Gamma_{fi} \sum_{q=-1}^1 |\langle J', m', 1, q | J, m \rangle|^2\tag{53}$$

En espace libre dans le vide :

$$\Gamma_{fi} = \frac{\omega^3 |\mu_{fi}|^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}\tag{54}$$

Pour une transition permise, si on fait la somme sur tout les états finaux on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma_{fi}^m &= \Gamma_{fi} \sum_{m'} \sum_{q=-1}^1 |\langle J', m', 1, q | J, m \rangle|^2 \\ &= \Gamma_{fi} \langle J, m | \left(\sum_{m'} \sum_{q=-1}^1 |J', m', 1, q\rangle \langle J', m', 1, q| \right) | J, m \rangle \\ &= \Gamma_{fi}\end{aligned}$$

Par conséquent, tous les sous états d'un même niveau ont la même durée de vie.

3.3 Méthodes de résolution des OBE

Nous avons vu comment écrire les équations de Bloch Optiques pour un atome à plusieurs niveaux couplés par de multiples lasers, il nous faut maintenant parler de la résolution de ces équations.

L'équation de Linblad est une équation linéaire dont les coefficients dépendent du temps. Pour la résoudre l'idéal est d'éliminer les dépendances temporelles par un changement de base approprié. Par exemple pour un Hamiltonien de la forme (qui suppose l'approximation de l'onde tournante) :

$$H_{pq}(t) = \hbar\Omega_{pq}e^{i\delta_{pq}t}$$

on peut chercher une solution des OBE en posant :

$$\rho_{pq} = \sigma_{pq}e^{i\Delta_{pq}t} \quad (55)$$

$$\Delta_{pq} = \begin{cases} \delta_{pq} & \text{si } \Omega_{pq} \neq 0 \\ \delta_{pk} + \delta_{kq} & \text{sinon} \end{cases} \quad (56)$$

Injecté dans les OBE on obtient alors :

$$(\dot{\sigma}_{pq} + i\Delta_{pq}\sigma_{pq})e^{i\Delta_{pq}t} = i \sum_k \Omega_{pk}\sigma_{kq}e^{i(\delta_{pk}+\Delta_{kq})t} - \sigma_{pk}\Omega_{kq}e^{i(\Delta_{pk}+\delta_{kq})t} \quad (57)$$

$$\dot{\sigma}_{pq} + i\Delta_{pq}\sigma_{pq} = i \sum_k \Omega_{pk}\sigma_{kq} - \sigma_{pk}\Omega_{kq} \quad (58)$$

Notons que pour que la définition de Δ_{pq} contraint les configurations de lasers possibles : par exemple pour un atome à trois niveaux si les trois transitions $0 \rightarrow 1$, $0 \rightarrow 2$ et $1 \rightarrow 2$ sont excitées, alors la définition de Δ_{pq} impose la relation $\delta_{01} = \delta_{02} + \delta_{21}$. Ce type de système est dit *multiplément connecté*. En pratique cette limitation pose rarement de problèmes, mais dans le cas contraire il faut utiliser une méthode plus sophistiquée telle que l'approche développée par D.Stacey et collaborateurs [81].

Appliqué au cas simple d'un atome à deux niveaux couplé par deux lasers de désaccords Δ_a et Δ_b et fréquences de Rabi Ω_a et Ω_b , cette méthode consiste à poser des cohérences sous la forme :

$$\rho_{01} = u_{01}e^{i\Delta_a t} + v_{01}e^{i\Delta_b t} \quad (59)$$

De sorte à obtenir pour les cohérences :

$$(u_{01} + i\Delta_a u_{01} - i\Omega_a(\rho_{11} - \rho_{00}))e^{i\Delta_a t} + (v_{01} + i\Delta_b v_{01} - i\Omega_b(\rho_{11} - \rho_{00}))e^{i\Delta_b t} = 0$$

et pour les populations :

$$\dot{\rho}_{00} = i \operatorname{Im}[\Omega_a u_{10}] + i \operatorname{Im}[\Omega_b v_{10}] + i \operatorname{Im}[\Omega_a v_{10} e^{i\delta t}] + i \operatorname{Im}[\Omega_b u_{10} e^{-i\delta t}]$$

Où $\delta = \Delta_a - \Delta_b$ et où l'on a omis les termes liés à l'émission spontanée. Sous réserve que $1/\delta$ soit faible devant les temps caractéristiques d'évolution du système on peut négliger les termes en $e^{i\delta t}$ qui se moyennent à zéro au cours de l'évolution du système. On obtient alors les équations suivantes :

$$u_{01} = i\Omega_a(\rho_{11} - \rho_{00}) - (\Gamma/2 + i\Delta_a)u_{01} \quad (60)$$

$$v_{01} = i\Omega_b(\rho_{11} - \rho_{00}) - (\Gamma/2 + i\Delta_b)v_{01} \quad (61)$$

$$\dot{\rho}_{00} = i \operatorname{Im}[\Omega_a u_{01}^*] + i \operatorname{Im}[\Omega_b v_{01}^*] + \Gamma\rho_{11} \quad (62)$$

Dans la suite je propose une re-formulation et extension de cette méthode permettant de simplifier sa mise en œuvre sur des systèmes plus complexes et d'obtenir des solutions approchées à une précision aussi élevée que voulue.

3.3.1 Régime permanent des OBE pour un système multiplement connecté

Plutôt que de restreindre le changement de variable aux cohérences, on l'applique à tous les termes de la matrice densité en cherchant une solution stationnaire des OBE sous la forme d'une série trigonométrique, ce qui revient à résoudre les OBE dans le domaine fréquentiel :

$$\rho(t) = \sum_{\Delta} \sigma(\Delta) e^{i\Delta t} \quad (63)$$

Il s'agit d'un développement en série de Fourier généralisé au cas où les fréquences Δ ne sont pas de la forme $n\omega$, n entier. Pour l'instant les fréquences Δ associées à des termes $\sigma(\Delta) \neq 0$ sont inconnues : il nous faut déduire le support spectral de la matrice densité de l'écriture des OBE dans le domaine fréquentiel. Notons que cette méthode recouvre le cas où le système est simplement connecté.

La transformation requise pour passer de la représentation temporelle à la représentation fré-

quentielle a la forme suivante :

$$F[\rho](\Delta) = \sigma(\Delta) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(t) e^{-i\Delta t} dt \quad (64)$$

Pour rappel, les OBE s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{i}{\hbar} [\rho, H] + \mathcal{L}[\rho] \\ H_{pq}(t) &= \sum_{\delta_{pq}} \hbar \Omega_{pq}(\delta_{pq}) e^{i\delta_{pq}t} \end{aligned}$$

Notons que cette forme permet de se passer de l'approximation de l'onde tournante, même si cela n'est pas forcément utile.

$\mathcal{L} \circ F = F \circ \mathcal{L}$, on peut donc omettre l'opérateur de Lindblad de la dérivation qui suit.

L'équation (42) sous la transformation F s'écrit alors :

$$i\Delta \sigma_{pq}(\Delta) = i \sum_k \sum_{\delta_{kq}} \sigma_{pk}(\Delta + \delta_{kq}) \Omega_{kq}(\delta_{kq}) - \sum_{\delta_{pk}} \Omega_{pk}(\delta_{pk}) \sigma_{kq}(\delta_{kp} + \Delta) \quad (65)$$

Où l'on a utilisé les propriétés suivantes de l'opérateur F :

$$F[\dot{\rho}](\Delta) = i\Delta \sigma(\Delta) \quad (66)$$

$$F[\rho e^{i\delta t}](\Delta) = \sigma(\Delta - \delta) \quad (67)$$

Ainsi que les relations :

$$\begin{aligned} \delta_{qp} &= -\delta_{pq} \\ [\Omega_{pq}(\delta_{pq})]^* &= \Omega_{qp}(\delta_{qp}) \end{aligned} \quad (68)$$

À ce système, il faut ajouter la relation de normalisation de la matrice densité : $\text{Tr}[\rho] = 1$. dans le domaine fréquentiel cela donne :

$$\sum_p \sigma_{pp}(\Delta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (69)$$

Ces équations permettent de déduire le support fréquentiel de σ : en dehors des termes reliés aux populations moyennes, $\sigma(\Delta) = 0$.

En partant de la valeur moyenne des populations $\sigma_{pp}(0)$ et en imposant les règles de chaîne suivantes, comparable à la relation (56) :

$$\begin{aligned}\Delta'_{pk} &= \Delta_{pq} + \delta_{qk} \\ \Delta'_{kq} &= \delta_{kp} + \Delta_{pq}\end{aligned}\tag{70}$$

On obtient alors le système linéaire (infini si le système est multiplement connecté) suivant :

$$i \sum_k \left[\sum_{\delta_{kq}} \sigma_{pk}(\Delta'_{pk}) \Omega_{kq}(\delta_{kq}) - \sum_{\delta_{pk}} \Omega_{pk}(\delta_{pk}) \sigma_{kq}(\Delta'_{kq}) \right] = i \Delta_{pq} \sigma_{pq}(\Delta_{pq})\tag{71}$$

la solution de ce système linéaire permet alors de trouver le régime permanent de l'équation (42) :

$$\rho_{0,pq}(t) = \sum_{\Delta_{pq}} \sigma_{pq}(\Delta_{pq}) e^{i \Delta_{pq} t}\tag{72}$$

En pratique, si le système est multiplement connecté, comme dans les exemples de la figure 26, il faut tronquer la matrice des équations (71) pour pouvoir calculer une solution approchée.

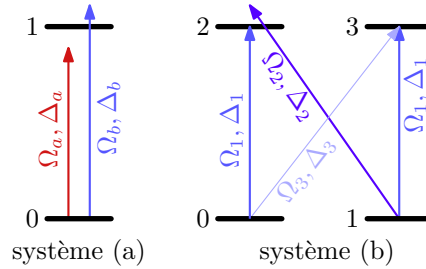


FIGURE 26 – Exemples de systèmes multiplement connectés, soit parce que deux lasers de désaccords différents excitent la même transition, comme c'est le cas pour le système (a) à gauche, soit à cause de la présence d'un cycle dans le graphe des couplages formé par des lasers de paramètres indépendants, comme c'est le cas avec les trois lasers du système (b). Le système (a) correspond à la situation traitée dans l'article de Stacey et al. ; le système (b) trouvera son utilité dans l'estimation des erreurs systématiques associées à la méthode de thermométrie présentée dans le chapitre 4.3.1.

Pour mieux se représenter cette opération, on peut décrire le système sous la forme d'un graphe, tel que celui représenté dans la figure 27.

Chaque équation du système (71) peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{(p,q,\Delta_{pq})} L_{(p,q,\Delta_{pq}),(r,s,\Delta_{rs})} \sigma_{rs}(\Delta_{rs}) = 0\tag{73}$$

Chaque élément $\sigma_{pq}(\Delta_{pq})$ du développement en série trigonométrique de la matrice densité, et chaque ligne du système ainsi réécrit est défini par un triplet (p, q, Δ_{pq}) . À ce triplet (p, q, Δ_{pq}) on associe un sommet du graphe.

Pour chaque terme $\sigma_{rs}(\Delta_{rs})$ associé à un coefficient non nul $L_{(p,q,\Delta_{pq}), (r,s,\Delta_{rs})}$, on fait correspondre une arrête orientée allant du sommet (r, s, Δ_{rs}) au sommet (p, q, Δ_{pq}) .

On peut étendre le système terme à terme en parcourant le graphe dans le sens des arrêtes sans repasser deux fois par la même arrête, et en démarrant à partir des sommets associés aux valeurs moyennes des populations, et en mettant à jour la liste des arrêtes à chaque pas.

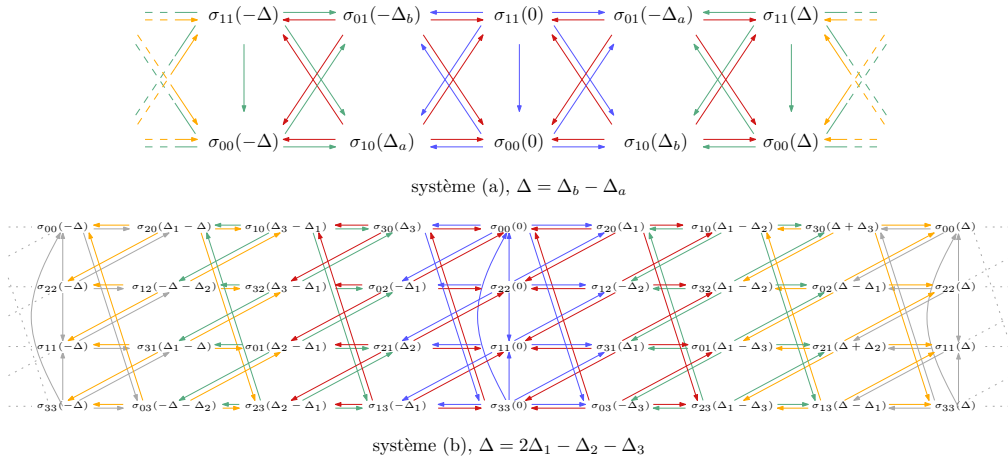


FIGURE 27 – Représentation sous forme de graphe des termes non nuls du système des OBE pour les systèmes (a) et (b) de la figure 26 (les termes diagonaux ne sont pas représentés). Les couleurs des arrêtes distinguent les coefficients obtenus à chaque étape de construction du système avec la correspondance couleur/étape suivante : bleu/1, rouge/2, vert/3, jaune/4, gris/5.

Plus précisément, on initialise L à :

$$L_{(0,0,0),(p,p,0)}^{(0)} = 1 \quad (74)$$

tous les autres termes étant nuls, et pour lister les sommets (r, s, δ') liés à (p, q, δ) , et les coefficients $L_{(p,q,\Delta_{pq}), (r,s,\Delta_{rs})}$ qui sont associés à chaque arrête, on d'applique la procédure suivante :

Procédure Extension((p, q, δ))

Données :

- $\delta_{B,k}$: l'amplitude du décalage Zeeman du niveau k
- Γ_{fi} : le taux de désexcitation spontanée du niveau i vers le niveau f
- $\Omega_{pq}(\delta)$: la fréquence de Rabi du couplage $p \rightarrow q$ de désaccord δ

Résultat : Liste des sommets (r, s, Δ_{rs}) liés à (p, q, δ) et coefficients $L_{(p,q,\Delta_{pq}),(r,s,\Delta_{rs})}$ associés à chaque arrête.

/ On calcule le désaccord modifié de l'effet Zeeman */*

$$\Delta = \delta + \delta_{B,p} - \delta_{B,q}$$

$$L_{(p,q,\delta),(p,q,\delta)} += -i\Delta$$

/ On calcule la contribution de l'émission spontanée : */*

si $p = q$ alors

/ On a affaire à une population */*

On calcule le terme $\gamma = -\sum_r \Gamma_{rq}$

$L_{(q,q,\delta),(q,q,\delta)} += \gamma$ **pour chaque niveau r faire**

si q peut se désexciter vers r ($\Gamma_{rq} \neq 0$) alors

(q, q, δ) est relié à (r, r, δ)

$$L_{(r,r,\delta),(q,q,\delta)} += \Gamma_{rq}$$

sinon

/ On a affaire à une cohérence */*

On calcule le terme $\gamma = -\sum_r \Gamma_{rq} - \sum_s \Gamma_{ps}$

$$L_{(p,q,\delta),(p,q,\delta)} += \gamma/2$$

/ On calcule la contribution des couplages cohérents : */*

pour r couplé à p faire

pour δ' tel que $\Omega_{pr}(\delta') \neq 0$ faire

(p, q, δ) est relié à $(r, q, \delta - \delta')$

$$L_{(r,q,\delta-\delta'),(p,q,\delta)} += i\Omega_{pr}(\delta')^*$$

pour s couplé à q faire

pour δ' tel que $\Omega_{qs}(\delta') \neq 0$ faire

(p, q, δ) est relié à $(p, s, \delta + \delta')$

$$L_{(p,s,\delta+\delta'),(p,q,\delta)} += -i\Omega_{qs}(\delta')$$

Pour tronquer on peut par exemple décider de s'arrêter après avoir parcouru l arrêtes, c'est la solution retenue dans le programme présenté dans l'annexe E page 131 mettant en œuvre cette méthode.

Il faut néanmoins noter qu'une méthode plus sophistiquée de troncature pourrait permettre de rendre les calculs plus rapides, mais aussi de mieux contrôler l'erreur commise en tronquant le système.

Il faut également noter que cette opération n'est pas anodine : les relations (69) sont impliquées par l'équation (71), mais en tronquant le système, on peut briser ces relations.

En effet, si l'on est amené à tronquer un terme de la forme $\sigma_{nn}(\Delta)$ les termes $-\Gamma_{np}\sigma_{pp}(\Delta)$ dans $\mathcal{L}[\sigma]_{pp}(\Delta)$ et $\Gamma_{np}\sigma_{pp}(\Delta)$ dans $\mathcal{L}[\sigma]_{nn}(\Delta)$ ne se compensent plus. Les équations (71) et (43) sous leur forme tronquée impliquent alors :

$$i\Delta \sum_p \sigma_{pp}(\Delta) = - \sum_p \Gamma_{np}\sigma_{pp}$$

Où la somme sur p porte sur les termes de population retenus dans le système tronqué.

Pour résoudre ce problème il faut omettre $\Gamma_{np}\sigma_{pp}(\Delta)$ de la somme $\sum_f \Gamma_{fp}\sigma_{pp}(\Delta)$ dans le premier terme de l'équation (43) lors de l'écriture du système tronqué.

Pour écrire le système sous forme matricielle il faut alors choisir un ordre sur les sommets du graphe (p, q, δ) . Dans le le programme présenté dans l'annexe E page 131 l'ordre retenu est tel que $(p, q, \delta) < (r, s, \delta')$ si (p, q, δ) est obtenu à une itération antérieure à celle où (r, s, δ') a été obtenu.

Cela revient à mettre les éléments du développement en polynôme trigonométrique des éléments de la matrice densité sous la forme d'un vecteur $\vec{\sigma}$, où chaque indice k correspond une paire d'états p_k et q_k et une fréquence δ_k de sorte que $\vec{\sigma}_k = \sigma_{p_k q_k}(\delta_k)$. Le système des OBE tronqué après N itérations s'écrit alors :

$$L^{(N)} \vec{\sigma}^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (75)$$

exemples d'application : Prenons les deux exemples de la figure 26. Pour le système (a) on considère un atome à deux niveaux, le niveau excité étant de durée de vie $1/(2\pi\Gamma)$. Pour le système (b) on considère un ion à deux niveaux d'énergie $S_{1/2}$ et $P_{1/2}$ dans un champ magnétique

d'amplitude B . Les lasers 1,2 et 3 sont polarisés π, σ^+ et σ^- respectivement. Le niveau $P_{1/2}$ étant de durée de vie $1/2\pi\Gamma$. Les fréquences de Rabi ne sont pas corrigées des coefficients de Clebsch–Gordan.

Les calculs sont effectués avec les paramètres suivants :

système (a) : $\Omega_a, \Omega_b, \Delta_b, \Gamma = 7, -7, 0, 20$ MHz

les paramètres sont choisis pour avoir une interférence destructive pour $\Delta_a = 0$.

système (b) : $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Delta_2, \Delta_3, B, \Gamma = 8\sqrt{2}, 8, 8, -4, 4, 2, 20$ MHz

les paramètres sont choisis pour que le système soit dans une condition de résonance noire pour $\Delta_1 = 0$. Il faut noter que la condition de résonance noire dépend non seulement des désaccords des lasers, mais aussi de leur amplitude et de leur phase [32].

Les éléments du développement en polynôme trigonométrique des éléments de la matrice densité sont alors mis sous la forme d'un vecteur $\vec{\sigma}$, où chaque indice k correspond une paire d'états p_k et q_k et une fréquence δ_k de sorte que $\vec{\sigma}_k = \sigma_{p_k q_k}(\delta_k)$.

Le choix spécifique de cette indexation utilisé par la suite suit l'ordre d'apparition des éléments $\sigma_{pq}(\Delta_{pq})$ dans la construction du système des OBE.

Le système peut alors s'écrire sous forme matricielle : $L^{(N)}\vec{\sigma}^{(N)} = 0$ où N désigne le nombre d'itérations faites lors de la construction du système, sauf mention contraire $N = 20$ dans les calculs.

La résolution de cette équation est faite numériquement en utilisant la librairie `scipy` du langage `python` sans chercher à tirer avantage de la structure de la matrice $L^{(N)}$.

Sur la figure 28 On peut noter que la vitesse de convergence de l'amplitude des coefficients vers zéro est d'autant plus rapide que le désaccord résiduel $\Delta = |\Delta_b - \Delta_a|$ pour le système (a) et $\Delta = |\Delta_2 + \Delta_3 - 2\Delta_1|$ pour le système (b) est grand.

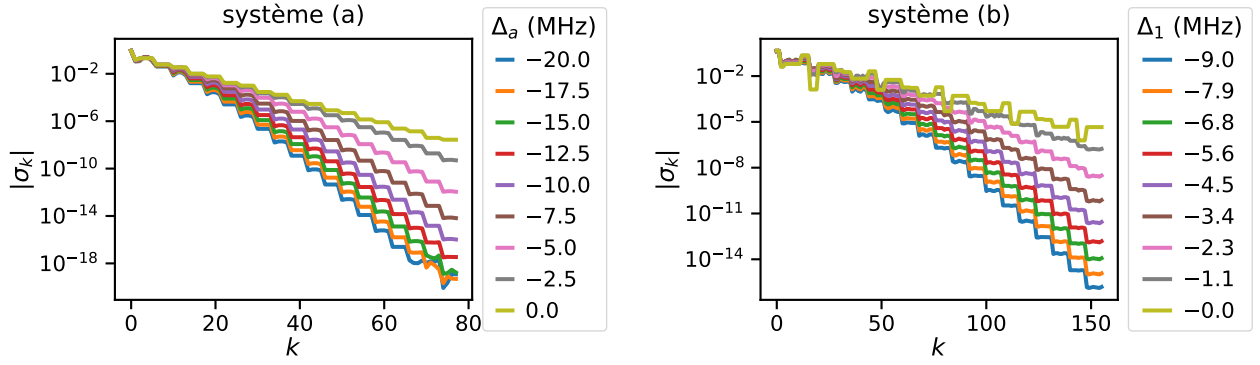


FIGURE 28 – amplitude des coefficients du développement en polynôme trigonométrique des éléments de la matrice densité en fonction de son indice k dans le vecteur $\vec{\sigma}$ pour plusieurs choix de désaccords Δ_a et Δ_1 .

On peut ainsi par exemple calculer les coefficients du développement en polynôme trigonométrique de la fluorescence de l'ion en fonction du temps, comme on peut le voir sur la figure 29. Comme prévu la fluorescence pour $\Delta = 0$ tombe à zéro. Pour le système (b) la différence marquée entre la fluorescence à $t = 0$ et la fluorescence moyenne révèle la dépendance de la condition de résonance noire sur la phase relative des lasers.

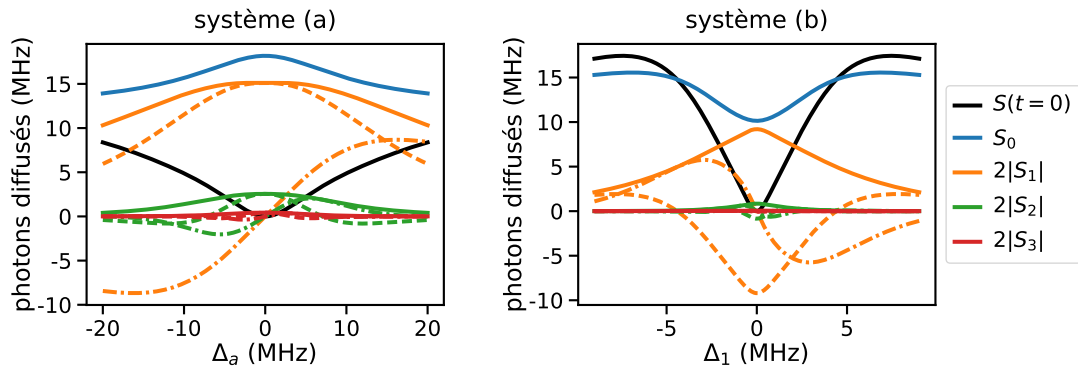


FIGURE 29 – Coefficients du développement en polynôme trigonométrique de la fluorescence $S(t) = \sum_n S_n e^{i2n\pi\Delta t}$ et fluorescence à $t = 0$. Les traits interrompus correspondent à deux fois la partie réelle des coefficient S_n et les traits mixtes à deux fois la partie imaginaire.

$\Delta = \Delta_b - \Delta_a$ pour le système (a) et $\Delta = 2\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3$ pour le système (b).

On constate que les divers couplages imposés à l'atome interfèrent temporellement, ce qui se traduit par des oscillations de la fluorescence à la fréquence Δ . En particulier pour $\Delta = 0$, et pour le choix spécifique des phases et amplitudes des fréquences de Rabi, la fluorescence tombe à zéro.

Pour les cas présentés, comme on peut le voir sur la figure 30, la convergence des solutions approchées à indice dans le développement donné est exponentielle. On peut aussi voir que l'erreur relative sur les derniers termes obtenus est du même ordre de grandeur quel que soit le

nombre d'itération N effectuées dans la construction du système, et diminue exponentiellement au fur et à mesure que l'on remonte vers les premiers termes du développement. Dit autrement, l'erreur relative commise sur la détermination d'un élément σ_{pq} (Δ_{pq} diminue exponentiellement avec la distance aux termes tronqués sur la représentation sous forme de graphe des OBE telles que celles présentées dans la figure 27.

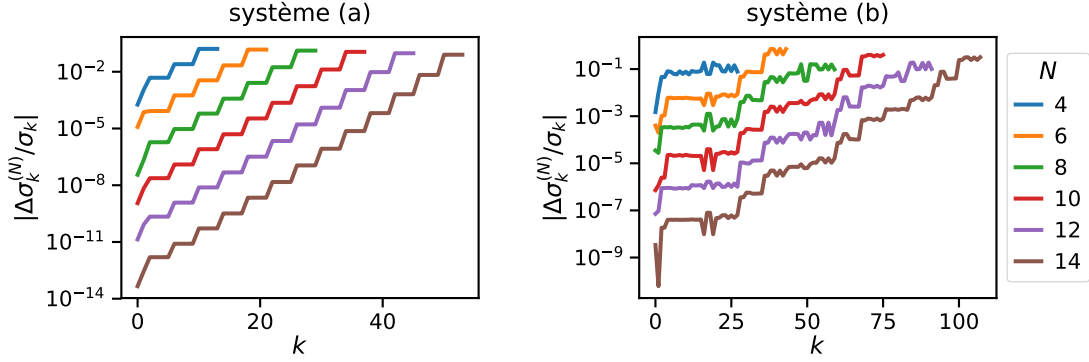


FIGURE 30 – Erreur relative sur la détermination des coefficients du développement en polynôme trigonométrique de la matrice densité en fonction de son indice k dans le vecteur $\vec{\sigma}^{(N)}$, pour plusieurs choix du nombre d'itérations N utilisées pour construire le système des OBE. La solution calculée à partir du système à 20 itérations est utilisée comme référence. Le calcul est effectué pour $\Delta_a = -3$ MHz et $\Delta_1 = 1$ MHz. On peut constater la convergence exponentielle des solution approchées à indice donné, et l'atténuation de l'erreur relative due à la troncation au fur et à mesure que l'on remonte vers les faibles indices.

3.3.2 Désaccords dépendants du temps

Si l'amplitude des fréquences de Rabi est constante et que le système est simplement connecté on peut simplifier la résolution des OBE en reportant la dépendance temporelle sur les désaccords. En effet dans ce cas précis l'hamiltonien du système s'écrit sous la forme :

$$H_{pq}(t) = \Omega_{pq} e^{i\varphi_{pq}(t)} \quad (76)$$

$$\Omega_{pq} = \Omega_{qp}^* \quad (77)$$

$$\varphi_{qp}(t) = -\varphi_{pq}(t) \quad (78)$$

Pour transférer toute la dépendance temporelle sur les désaccords on cherche une solution de la forme $\rho_{pq} = s_{pq} e^{i\varphi_{pq}(t)}$. Où pour deux niveaux non directement connectés on utilise les règles de chaîne $\varphi_{pq} = \varphi_{pk} + \varphi_{kq}$ pour définir chaque terme de phase.

Injecté dans les OBE cette expression donne :

$$\begin{aligned} \dot{s}_{pq} e^{i\varphi_{pq}(t)} + i\dot{\varphi}_{pq} s_{pq} e^{i\varphi_{pq}(t)} &= i \sum_k \Omega_{pk} s_{kp} e^{i(\varphi_{pk}(t) + \varphi_{kq}(t))} - s_{pk} \Omega_{kq} e^{i(\varphi_{pk}(t) + \varphi_{kq}(t))} \\ &= i \sum_k \Omega_{pk} s_{kq} e^{i\varphi_{pq}(t)} - s_{pk} \Omega_{kq} e^{i\varphi_{pq}(t)} \end{aligned}$$

Les désaccords sont alors donnés par :

$$\Delta_{pq}(t) = \dot{\varphi}_{pq}(t) \quad (79)$$

Et les OBE deviennent :

$$\dot{s}_{pq} + i\Delta_{pq}(t) s_{pq} = i \sum_k \Omega_{pk} s_{kp} - s_{pk} \Omega_{kq} \quad (80)$$

Supposons que $\dot{\varphi}_{pq}(t)$ puisse s'exprimer sous la forme d'un polynôme trigonométrique :

$$\Delta_{pq}(t) = \sum_n \delta_{pq,n}(\omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (81)$$

où les fréquences ω_n sont en nombre fini. Cette forme se retrouve par exemple dans le cas d'un ion en oscillation dans le piège, avec ou sans micro-mouvement, dans le cadre de l'approximation semi-classique et en négligeant l'impulsion des photons absorbés, un cas traité en détail dans l'annexe D page 127.

Pour résoudre cette équation on peut chercher une solution de la forme :

$$s = \sum_{\Delta} \sigma(\Delta) e^{i\Delta t} \quad (82)$$

On obtient alors une équation :

$$i\Delta \sigma_{pq}(\Delta) + \sum_n i\delta_{pq,n} \sigma_{pq}(\Delta - \omega_n) = i \sum_k \Omega_{pk} \sigma_{kp}(\Delta) - \sigma_{pk}(\Delta) \Omega_{kq} \quad (83)$$

Les fréquences Δ sont donc de la forme $\sum_n m_n \omega_n$, m_n entier.

3.3.3 Régime transitoire

En plus de la solution stationnaire des OBE, nous avons besoin de savoir sur quelles échelles de temps le régime transitoire prend fin. En effet dans nos acquisitions de la fluorescence de

l'ion on est amenés à alterner entre phases de refroidissement et phases de mesure, il est donc primordial de savoir au bout de quel intervalle de temps la fluorescence de l'ion a atteint son régime stationnaire.

Pour obtenir cette information nous utilisons une approche inspirée du théorème de Floquet en cherchant une solution à l'équation (42) sous la forme :

$$\rho(t) = \rho_\lambda(t)e^{\lambda t} \quad (84)$$

Où λ est un nombre complexe. Le temps caractéristique du transitoire est alors donnée par $1/\text{Re}[\lambda]$. Inséré dans l'équation (42) cela donne :

$$\dot{\rho}_\lambda + \lambda\rho_\lambda = \frac{i}{\hbar}[\rho_\lambda, H(t)] + \mathcal{L}[\rho_\lambda]$$

Dans le domaine fréquentiel, en récrivant l'équation (71) sous forme matricielle $L\vec{\sigma} = 0$ on obtient la relation :

$$L\vec{\sigma}_\lambda = \lambda\vec{\sigma}_\lambda \quad (85)$$

On se ramène alors à étudier les valeurs propres de L .

Une première chose à remarquer est que si $\vec{\sigma}_\lambda$ est une solution et qu'il existe un cycle dans le graphe des couplages de désaccord cumulé Δ alors $\sigma(\delta) = \sigma_\lambda(\delta + \Delta)$ est vecteur propre de L associé à la valeur propre $\lambda + i\Delta$. En effet, le support de σ_λ noté Sp est alors invariant par translation d'une quantité Δ . Par conséquent :

$$\begin{aligned} \rho_\lambda e^{\lambda t} &= e^{\lambda t} \sum_{\delta \in Sp} \sigma_\lambda(\delta) e^{i\delta t} \\ &= e^{\lambda t} \sum_{\delta \in Sp} \sigma_\lambda(\delta + \Delta) e^{i(\delta + \Delta)t} \\ &= e^{(\lambda + i\Delta)t} \sum_{\delta \in Sp} \sigma_\lambda(\delta + \Delta) e^{i\delta t} \\ &= e^{(\lambda + i\Delta)t} \sum_{\delta \in Sp} \sigma(\delta) e^{i\delta t} \\ \rho_\lambda e^{\lambda t} &= \rho_{\lambda + i\Delta} e^{(\lambda + i\Delta)t} \end{aligned}$$

Notons que les deux matrices ρ_λ et $\rho_{\lambda + i\Delta}$ sont associées à la même solution de l'équation (42), pour une matrice densité de taille $N \times N$ on s'attend à avoir N^2 classes de valeurs propres invariantes par translation d'une quantité $i\Delta$ où $\Delta \in Sp$. Mais comme on travaille avec des

systèmes tronqués, la rupture de l'invariance par translation est brisée puisque l'on restreint le support du spectre, ce qui crée des valeurs propres aberrantes. La figure 31 illustre ce phénomène.

Interpréter les résultats peut donc être délicat, en particulier dans le cas où le support du spectre a plus d'un générateur et où le support du spectre de la matrice densité est dense : les valeurs aberrantes ne sont plus confinés aux extrémités des classes de valeur propre, mais se retrouvent tout autour des valeurs approchées.

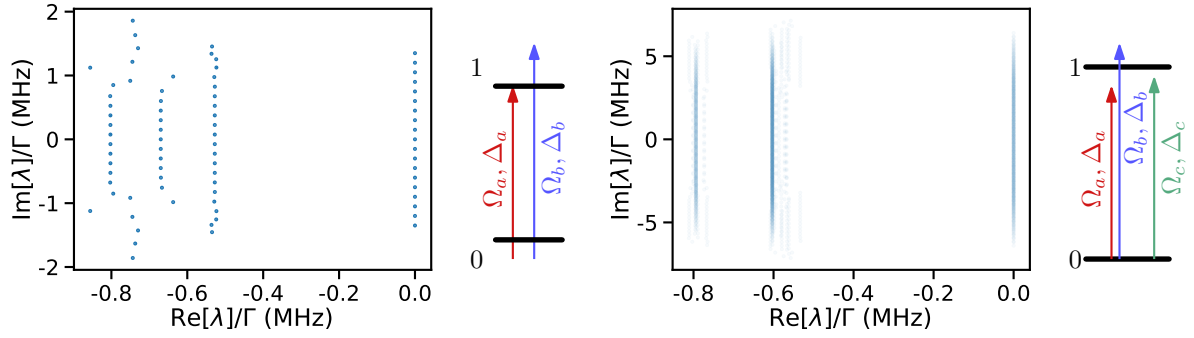


FIGURE 31 – Valeurs propres λ des matrices L pour un système à deux niveaux couplés par deux lasers (à gauche) et trois lasers (à droite).

Les paramètres utilisés sont à gauche : $\Gamma = 20$ MHz, $\Omega_a, \Omega_b = -7, 7$ MHz et $\Delta_a, \Delta_b = -3, 0$ MHz. Et à droite : $\Gamma = 20$ MHz, $\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c = 5, 7, 5$ MHz et $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c = 5, 10\sqrt{2}, 10$ MHz. Dans le premier cas le support du spectre des solution est invariant par translation de $\Delta_a - \Delta_b = 3$ MHz. Dans le second cas le support du spectre est invariant par translation de $\Delta_a - \Delta_b = 5$ MHz et $\Delta_b - \Delta_c = 10(\sqrt{2} - 1)$ MHz : le support du spectre est dense dans \mathbb{R} .

Dans le second cas, les points sont dessinés avec une transparence partielle pour pouvoir distinguer les quatre classes de valeurs propres attendues, la ligne centrale plus sombre que les lignes latérales contient deux classes de même partie réelle.

La partie réelle de ces classes de valeur propres nous renseignent sur les temps caractéristiques d'évolution des états internes de l'ion, et donc sur la plage de validité des approximations adiabatiques que l'on peut être amené à faire pour simplifier la résolution des OBE lorsque les dépendances temporelles ne peuvent pas être facilement éliminées.

3.4 Ion en mouvement et effets mécaniques de la lumière sur l'ion

Jusqu'ici, les degrés mécaniques de l'ion n'ont pas été explicités et on a ignoré l'effet de l'impulsion des photons sur l'énergie cinétique de l'ion.

L'objectif de cette partie est d'une part de calculer la forme des spectres de fluorescence de l'ion pour une température donnée, et d'autre part d'être capable de calculer un ordre de grandeur du temps caractéristique de refroidissement/chauffage de l'ion sous l'effet de l'absorption des

photons.

3.4.1 Rappels sur l'oscillateur harmonique quantique

Je rappelle ici les principales propriétés de l'oscillateur harmonique quantique que le lecteur retrouvera dans la référence [12]. L'objectif étant de définir la distribution d'énergie et de vitesse de l'ion, y compris pour des températures proches du régime quantique. On néglige ici le micro-mouvement, pour voir comment la modulation de la tension de piègeage se décrit au niveau quantique, le lecteur pourra consulter la référence [56], en effet, algébriquement la description quantique du piègeage RF est très similaire à celle du piègeage harmonique.

opérateurs d'échelle L'hamiltonien de l'oscillateur harmonique quantique à une dimension s'écrit :

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \\ &= \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (86)$$

Où m est la masse de la particule piégée et ω la fréquence des oscillations, a^\dagger et a sont les opérateurs création et annihilation. Les opérateurs position x et quantité de mouvement p sont reliés à a^\dagger et a par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \Delta x_0(a^\dagger + a) & \Delta x_0 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \\ p &= i\Delta p_0(a^\dagger - a) & \Delta p_0 &= \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \end{aligned} \quad (87)$$

Δx_0 et Δp_0 donnent la dispersion en position et en quantité de mouvement de la fonction d'onde de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique quantique.

Les valeurs et vecteurs propres de H sont données par les états de Fock :

$$\begin{aligned} |n\rangle &= a^{\dagger n}|0\rangle \\ H|n\rangle &= (n + 1/2)\hbar\omega|n\rangle \end{aligned}$$

opérateurs déplacement les opérateurs déplacement s'écrivent :

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \quad (88)$$

où α est un nombre complexe : $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$. Ces opérateurs permettent de construire les états cohérents :

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (89)$$

Ces états, introduits par Glauber, sont une sorte de transcription quantique du mouvement classique. En effet, on peut vérifier que les valeurs moyennes de la position et de l'impulsion d'un état cohérent correspondent exactement à celles données par la résolution des équations du mouvement pour un oscillateur harmonique classique :

$$|\alpha\rangle(t) = e^{\frac{i}{2}\hbar\omega t} |\alpha e^{i\omega t}\rangle \quad (90)$$

$$\langle \alpha | x | \alpha \rangle(t) = 2\Delta x_0 \operatorname{Re}[\alpha] = 2\Delta x_0 |\alpha| \sin(\omega t + \varphi) \quad (91)$$

$$\langle \alpha | p | \alpha \rangle(t) = 2\Delta p_0 \operatorname{Im}[\alpha] = 2\Delta p_0 |\alpha| \cos(\omega t + \varphi) \quad (92)$$

Par ailleurs, avec les notations des équations (87) l'extension spatiale du paquet d'onde d'un état cohérent est donnée à chaque instant par :

$$\langle \alpha | x^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | x | \alpha \rangle^2 = \Delta x_0^2 \quad (93)$$

$$\langle \alpha | p^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | p | \alpha \rangle^2 = \Delta p_0^2 \quad (94)$$

3.4.2 Calcul des déformations des formes de raie pour une distribution thermique

La matrice densité de l'état thermique de l'oscillateur harmonique s'écrit sur la base des états de Fock :

$$\rho_{th} = \sum_n \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{1+n}} |n\rangle \langle n| \quad (95)$$

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \approx \frac{k_B T}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

Où \bar{n} est le nombre moyen de quantas de vibration à la température T . L'approximation est valable à un pour cent près pour $\frac{k_B T}{\hbar\omega} \gtrsim 3$.

À faible fréquence séculaire devant le temps caractéristique d'évolution de l'état interne de l'ion, on peut supposer que l'état interne suit l'état stationnaire vis à vis des désaccords affectés par l'effet Doppler :

$$\rho(t) = \rho_0(\Delta_{pq} - \vec{k}_{pq} \cdot \vec{v}(t))$$

à partir de là, on peut calculer la forme de raie effective F_{th} par convolution avec la distribution de vitesse de l'ion $P(\vec{v})$:

$$F_{th} = \int F(\vec{v})P(\vec{v})d\vec{v} \quad (96)$$

Pour un état thermique de l'oscillateur harmonique :

$$P(v)dv = \sum_n \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{1+n}} |\psi(mv)|^2 \quad (97)$$

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta p_0} 2^n n!} H_n \left(\frac{p}{\sqrt{2}\Delta p_0} \right) e^{-\frac{p^2}{4\Delta p_0^2}} \quad (98)$$

En utilisant la formule du noyau de Mehler [89] on obtient :

$$P(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta v_{th}}} e^{-\frac{v^2}{2\Delta v_{th}^2}} \quad (99)$$

$$\Delta v_{th}^2 = (2\bar{n} + 1)\Delta p_0^2/m^2 = (\bar{n} + 1/2)\hbar\omega/m \quad (100)$$

Où Δv_{th} est la variance de la distribution de vitesse de l'ion.

Pour $\frac{k_B T}{\hbar\omega} \gtrsim 3$ on peut faire l'approximation $\bar{n} + 1/2 \approx \frac{k_B T}{\hbar\omega}$ et $\Delta v_{th} \approx \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$.

Pour des fréquences d'oscillation comparables au temps caractéristique d'évolution des états internes de l'ion on ne peut plus procéder ainsi car l'approximation adiabatique ne tient plus.

Pour un ion unique, on peut contourner cette limitation en écrivant la distribution thermique de l'oscillateur harmonique sur la base des états cohérents :

$$\rho_{th} = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \frac{1}{\bar{n}} e^{-\frac{n_\alpha}{\bar{n}}} \quad (101)$$

$$n_\alpha = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^2$$

Dans la mesure où l'extension spatiale du paquet d'onde pour un état cohérent est négligeable devant la longueur d'onde on peut dans les OBE remplacer l'opérateur position x par sa valeur moyenne. En effet pour un ion $^{88}\text{Sr}^+$ et les pièges utilisés, les fréquences de piégeage sont au moins de l'ordre de 100 kHz, par conséquent $\eta = k\Delta x_0 = \frac{\hbar k}{2\Delta p_0} = \sqrt{\frac{E_r}{\hbar\omega}} < 0.056 \times 2\pi$.

En négligeant l'effet sur la trajectoire de l'ion des absorptions/diffusion de photons, on peut utiliser la technique présentée dans la partie D page 127 pour calculer la fluorescence moyenne de l'ion $F(n_\alpha)$ sur une oscillation séculaire d'amplitude $2\Delta x_0\sqrt{\bar{n}_\alpha}$.

Pour obtenir la fluorescence pour une distribution thermique F_{th} , il ne reste plus qu'à moyenner $F(n_\alpha)$ en utilisant la distribution ci dessus :

$$F_{th} = \int_0^\infty \frac{F(n_\alpha)}{\bar{n}} e^{-\frac{n_\alpha}{\bar{n}}} dn_\alpha \quad (102)$$

où on a utilisé la relation $d^2\alpha = |\alpha|d|\alpha|d\phi = \frac{1}{2}dn_\alpha d\phi$.

Notons que le résultat obtenu diffère de celui de la méthode adiabatique : en traitant le mouvement de l'ion de manière semi-classique, on néglige l'incertitude quantique sur la vitesse de l'ion. La bonne façon de rendre compte de l'effet de cette incertitude sur la fluorescence n'est pas évidente. Une façon de le faire est de substituer $\bar{n} + 1/2$ à \bar{n} dans l'équation ci dessus. En effet on peut facilement montrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi v_0^2 n_0}} e^{-\frac{v^2}{v_0^2 n_0}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \delta(v_0 \sqrt{n} \cos(\phi) - v) \frac{1}{n_0} e^{-\frac{n}{n_0}} d\phi dn \quad (103)$$

Avec $n_0 = \bar{n} + 1/2$ et $v_0 = 2\Delta p_0/m$ on retombe bien sur la même distribution de vitesse.

L'énergie de l'ion pour un état cohérent du mouvement vérifie $E_\alpha = (n_\alpha + 1/2)\hbar\omega$. Pour $n_\alpha \gg 1/2$ l'équation (102) peut se réécrire :

$$F_{th} = \int_0^\infty \frac{F(E_\alpha)}{k_B T} e^{-\frac{E_\alpha}{k_B T}} dE_\alpha \quad (104)$$

En pratique l'évaluation des intégrales des équations (96), avec la distribution de vitesse (100), et (102) se fait numériquement, par exemple en utilisant respectivement les formules de quadrature de Gauss-Hermite et de Gauss-Legendre.

Ces techniques sont au cœur des résultats de la partie 4.3.1 page 95 qui traite d'une technique de thermométrie basée sur l'élargissement Doppler d'une résonance noire. C'est grâce à ces modèles que l'on peut faire le lien entre la fluorescence de l'ion et sa température.

3.4.3 Effets mécaniques dans l'approximation semi-classique

Nous avons vu plus haut que le mouvement de l'ion affecte la forme du spectre de fluorescence. Mais l'interaction entre l'ion et le champ électromagnétique affecte l'état du mouvement, lors d'une phase de mesure il faut alors prendre garde à ce que cela ne modifie pas trop la fluorescence moyenne. Comme nous l'avons vu dans la partie 2.1.2 page 21 sur le refroidissement Doppler

il faut prendre en compte au premier ordre deux contributions : le recul aléatoire des photons et une composante réactive assimilable à un coefficient d'amortissement ou d'amplification. De cette seconde composante on peut calculer un temps caractéristique qui nous permettra de calibrer la durée des phases de mesures ou d'étendre la modélisation du refroidissement Doppler à des structures de niveau plus complexes.

Pour estimer ce temps caractéristique nous allons recourir au théorème d'Ehrenfest :

$$\frac{d \langle A(\vec{p}, \vec{r}) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{i}{\hbar} [A, H] \right\rangle \quad (105)$$

Où A est une observable et H est l'hamiltonien du système. Appliqué à l'énergie cinétique, et pour un hamiltonien de la forme $H = p^2/2m + V(x)$ cela donne :

$$\frac{1}{2m} \frac{d \langle p^2 \rangle}{dt} = \frac{1}{2im\hbar} \langle [H, p^2] \rangle \quad (106)$$

$$= \frac{1}{2im\hbar} (p^2 H - p H p + p H p - H p^2) \quad (107)$$

$$= \frac{1}{2im\hbar} \langle p[H, p] + [H, p]p \rangle \quad (108)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \vec{v} \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle \quad (109)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad (110)$$

Dans le cas qui nous intéresse on souhaite calculer l'impact de l'interaction avec le champ électromagnétique qui est décrite par le terme $V = \hbar\Omega_{eg} e^{i\delta_{eg}t} e^{i\vec{k}_{eg} \cdot \vec{r}} |e\rangle\langle g| + \text{h.c.}$

On obtient donc :

$$\frac{d \langle E \rangle}{dt} = \hbar \vec{k}_{eg} \cdot \frac{1}{2} \langle \vec{v} V' + V' \vec{v} \rangle \quad (111)$$

$$V' = i\Omega_{eg} e^{i\delta_{eg}t} e^{i\vec{k}_{eg} \cdot \vec{r}} |e\rangle\langle g| + \text{h.c.} \quad (112)$$

En toute rigueur pour utiliser ce résultat il faut connaître la matrice densité complète du système, degrés internes et degrés mécaniques inclus. Néanmoins on peut montrer que la longueur de cohérence spatiale de l'ion est rendue négligeable devant la longueur d'onde du laser excitant la transition par les processus de diffusion successifs [22]. Dans ces conditions la distribution spatiale de l'ion peut s'écrire comme un mélange statistique de paquets d'ondes localisés similaire à l'état thermique décrit dans l'équation 101. Si l'on néglige la nature stochastique des

événements d'absorption/émission de photons, le mouvement de l'ion peut alors être décrit de manière classique, tant dans les OBE que dans l'expression du théorème d'Ehrenfest.

En procédant ainsi on peut écrire :

$$\frac{dE}{dt} = -2\hbar \vec{k}_{eg} \cdot \vec{v} \operatorname{Im} \left[\Omega_{eg} e^{i\delta_{eg}t} e^{i\vec{k}_{eg} \cdot \vec{r}} \rho_{ge}(t) \right] \quad (113)$$

Si l'on néglige le temps caractéristique de la dynamique interne de l'ion τ vis à vis de la période d'oscillation de l'ion dans le piège T ($\tau \ll T$), on peut calculer la matrice densité des états internes de l'ion ρ à partir des OBE en régime stationnaire en utilisant les techniques présentée dans l'annexe D page 127 ce qui donne la formule :

$$\frac{dE}{dt} = -2\hbar \vec{k}_{eg} \cdot \vec{v} \operatorname{Im} [\Omega_{eg} s_{ge}(t)] \quad (114)$$

À une dimension $v(t) = \sqrt{2E/m} \cos(\omega t)$, $s(t) = \sum_n \sigma_n e^{in\omega t}$ cela donne moyenné sur une période :

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = -2\sqrt{EE_r} \operatorname{Im} [\Omega_{eg} (\sigma_{ge,+1} + \sigma_{ge,-1})] \quad (115)$$

Prenons un exemple : le schéma de repompage incohérent évoqué dans la partie 2.3 page 31 et traité de manière plus détaillé dans la partie 4.2.1 page 80. Dans cette configuration le spectre obtenu est une lorentzienne, comme pour un système à deux niveaux, mais de largeur et maximums différents du fait de la présence du champs magnétique, de la structure des sous états Zeeman, et des niveaux métastables. la configuration des lasers est reproduit dans la figure 32 ci dessous :

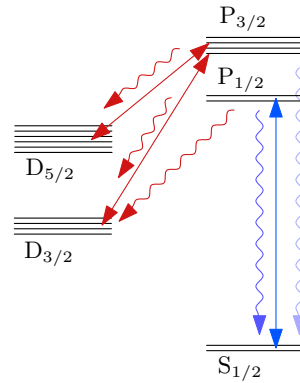


FIGURE 32 – Principe du repompage incohérent, la polarisation de chaque faisceau n'a de composante que sur σ^\pm .

Une manière simple d'estimer le temps caractéristique de refroidissement Doppler dans cette configuration est d'adapter le calcul pour un système à deux niveaux de la partie 2.1.2 page 21 en calculant les paramètres de la forme de raie avec le modèle présenté dans l'annexe 4.2.1 page 80. En procédant ainsi on ignore l'effet du repompage, dans la mesure où pour 1 photon diffusé sur la transition $P_{1/2} \rightarrow D_{3/2}$, 17 ont été absorbés sur la transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$, et que l'impulsion des photons infrarouges est de l'ordre de la moitié de celle des photons bleu, on s'attend à ce que l'effet soit de l'ordre de $1/17/2 \approx 3\%$. Cette estimation grossière est compatible avec les résultats présentés dans la figure 33 obtenus à partir de l'équation 114. La différence entre les deux estimations dépend de la configuration des lasers, et en particulier du choix des désaccords des lasers repompeurs, l'effet étant d'autant plus prononcé que l'on approche de la résonance, que la fréquence de Rabi du laser bleu est élevée, et que le taux de repompage effectif Γ_r est faible. Le paramètre Γ_r caractérise la vitesse à laquelle l'ion sort des états métastables, on peut montrer qu'il ne dépend pour un ion au repos que de la configuration des lasers de repompage et du champ magnétique.

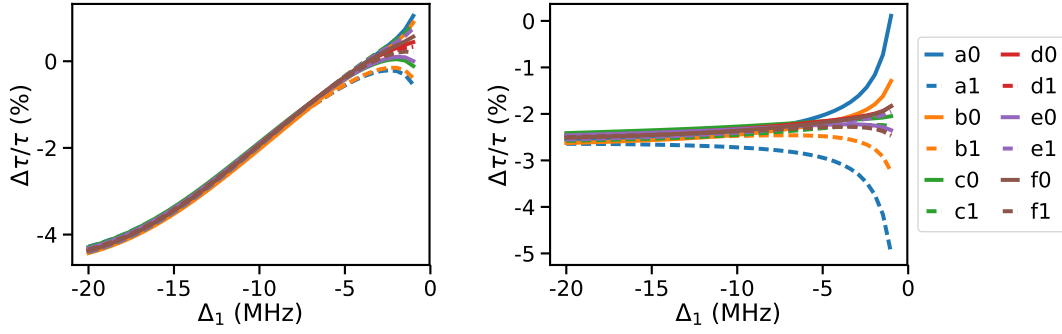


FIGURE 33 – Estimation de l’erreur commise sur le temps de refroidissement Doppler en fonction du désaccord du laser de refroidissement Δ_1 en adaptant le calcul pour un système à deux niveaux à une configuration de repompage incohérent pour une série de paramètres des lasers de repompage présentés dans le tableau 4. la fréquence de Rabi du laser de refroidissement est de 4 MHz à gauche et 12 MHz à droite. le champ magnétique est de 2×10^{-4} T, et la direction de propagation des lasers est à 45° de l’axe concerné.

	Ω_{r1}	Ω_{r2}	Δ_{r1}	Δ_{r2}	Γ_r
a0	8.86	-10.0	20	5	1.81
a1	-8.86	10.0	20	5	1.81
b0	5.86	-20.2	20	15	2.36
b1	-5.86	20.2	20	15	2.36
c0	6.35	-19.2	40	10	3.82
c1	-6.35	19.2	40	10	3.82
d0	7.66	-39.4	40	30	4.53
d1	-7.66	39.4	40	30	4.53
e0	7.26	-33.4	60	20	5.30
e1	-7.26	33.4	60	20	5.30
f0	11.9	-60.5	60	50	5.60
f1	-11.9	60.5	60	50	5.60

TABLEAU 4 – Paramètres des lasers repompeurs et taux de repompage effectif, en MHz. Les indices r1 et r2 correspondent respectivement au laser excitant la transition $D_{3/2} \rightarrow P_{3/2}$ et $D_{5/2} \rightarrow P_{3/2}$.

3.5 conclusion du chapitre

Nous avons au sein de cette partie traité des sujets suivants :

- le formalisme des équations de Bloch Optique (OBE) et leur écriture dans le cas de l'ion $^{88}\text{Sr}^+$.
- une méthode de calcul de l'état stationnaire et du régime transitoire des OBE adaptée au cas de systèmes simplement ou multiplement connectés.
- l'adaptation du formalisme des OBE à un ion en mouvement, et comment en tirer une estimation des temps caractéristique de refroidissement Doppler

Nous pouvons maintenant parler des résultats expérimentaux qui seront analysés grâce aux techniques présentées dans ce chapitre.

4 Résultats Expérimentaux

Cette section regroupe les résultats obtenus par la mise en application des dispositifs expérimentaux décrits dans la partie 2 page 15, dont en particulier la technique d’acquisition séquentielle, et des modèles issus de la partie 3 page 49 permettant d’analyser les données. Sont présentés en premier les mesures du rapport de branchement des transitions $P_{1/2} \rightarrow S_{1/2}$ et $P_{1/2} \rightarrow D_{3/2}$, et la mesure de la fréquence de la transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$ de l’ion $^{88}\text{Sr}^+$, suivis de la technique de mesure de la température de l’ion par résonances noires.

4.1 Rapport de branchement

Un ion dans l’état $P_{1/2}$ peut se désexciter par émission spontanée selon deux chemins $P_{1/2} \rightarrow S_{1/2}$ et $P_{1/2} \rightarrow D_{3/2}$ avec une probabilité respective p et $1 - p$. Si seule la transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$ est excitée, pour un ion préparé dans le niveau $S_{1/2}$ le rapport de branchement $BR = p/(1 - p)$ donne une mesure du nombre moyen de photons émis sur la transition $P_{1/2} \rightarrow S_{1/2}$ avant que l’ion ne tombe dans le niveau méta-stable $D_{3/2}$. Inversement pour un ion dans le niveau $D_{3/2}$ excité sur la transition $D_{3/2} \rightarrow P_{1/2}$, un seul photon est émis sur la transition $P_{1/2} \rightarrow S_{1/2}$ ce qui permet de mesurer le taux de collection des photons. Compter ces photons permet de mesurer efficacement à la fois le taux de collection et le rapport de branchement en répétant la séquence un grand nombre de fois. Cette technique mise en œuvre pour la première fois dans un autre groupe sur l’ion $^{40}\text{Ca}^+$ [68] a été déployée dans notre groupe au début de ma thèse et a donné lieu à une publication reproduite en fin de manuscrit page 143. Cette mesure a justifié le développement de la technique d’acquisition séquentielle. Mes contributions principales ont été la calibration des paramètres de l’expérience via la méthode présentée dans la section 2.5.2 page 46 et l’estimation des erreurs systématiques à l’aide du modèle des OBE que j’avais implémenté, via une intégration numérique du système d’équation différentielles.

4.2 Fréquence de la transition de refroidissement

La mesure la plus précise de la fréquence de transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$ de l’ion $^{88}\text{Sr}^+$ date de 1938 [84] : 710 962.70(16) GHz. On peut également trouver dans la référence [80] une mesure de l’écart entre la transition $5s^2S_{1/2}(F = 2) \rightarrow 6p^2P_{1/2}(F' = 3)$ de l’atome ^{85}Rb et la transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$ de l’ion $^{88}\text{Sr}^+$ donnée à 440 MHz sans que l’incertitude ne soit donnée, cette mesure n’étant pas le sujet de l’article. On peut donc donner la meilleure estimation à 710 962 841(10) MHz

Avec les techniques développées dans notre groupe, j'ai amélioré la précision de cette mesure, la fréquence obtenue est de 710 962 838.05(10) MHz. L'incertitude de cette mesure est limitée par la précision de la référence de fréquence utilisée, avec une meilleure référence il est possible de mesurer la fréquence de la transition avec une incertitude de l'ordre de 10 kHz.

Pour mesurer la fréquence d'une transition dans un atome à deux niveaux il faut essentiellement mesurer la fluorescence en fonction de la fréquence du laser qui adresse la transition, ce qui suppose que l'on a un moyen précis de mesurer la fréquence du laser. Dans notre cas, le laser est asservi sur la transition $5sS_{1/2}(F = 2) \rightarrow 6pP_{1/2}(F' = 3)$ de l'atome ^{85}Rb , la fréquence de cette transition est de 710 962 401.328(40) MHz [77]. En raison de l'absence de blindage magnétique et d'une démodulation à la même fréquence que la modulation (au lieu de trois fois), les performances de notre montage d'absorption saturée ne sont pas optimales, cela entache donc notre référence d'une incertitude que l'on estime être de l'ordre de 100 kHz.

Par ailleurs on a vu dans la partie 2.1.2 page 21 que pour un désaccord sur le bleu de la résonance, l'interaction avec le laser contribue à chauffer l'ion. Pour limiter la déformation du spectre induite par les échanges d'impulsion avec les photons absorbés et émis, il faut adopter un schéma d'acquisition séquentiel en alternant entre phase de refroidissement et phase de mesure. La séquence exacte utilisée pour mesurer les spectres est représentée par le chronogramme de la figure 34. Le choix de la durée de ces phases est le résultat d'un compromis entre la limitation de la déformation du spectre et le temps d'acquisition nécessaire pour atteindre l'incertitude sur la fréquence de transition visée.

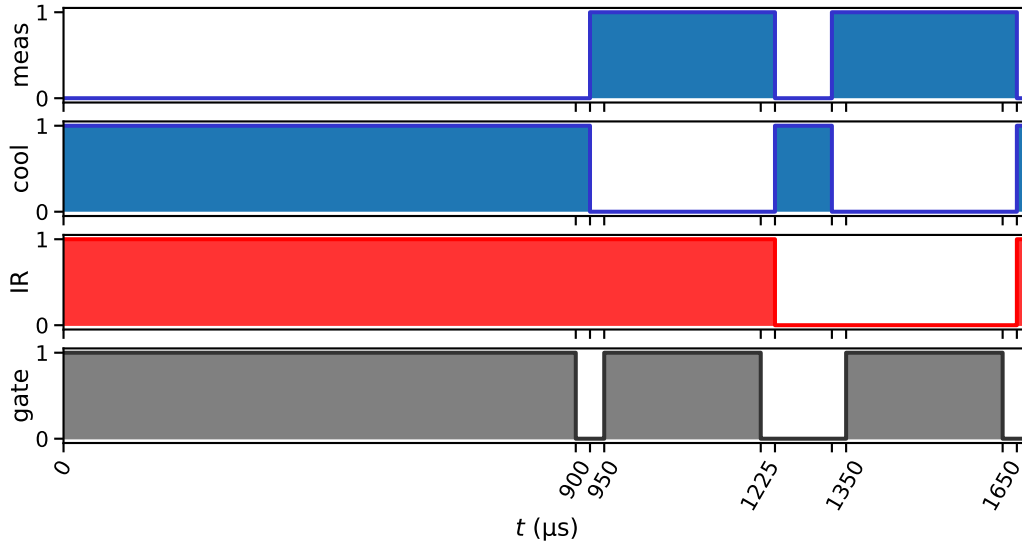


FIGURE 34 – Séquence d’acquisition d’un point sur le spectre. "meas" désigne l’état du faisceau de mesure, "cool" l’état du faisceau de refroidissement, "IR" l’état des repompeurs, "gate" l’activation du comptage des photons. On distingue quatre phases : une phase de refroidissement de 900 μs , une phase de mesure du signal de 275 μs , une phase de pompage optique de l’ion dans le niveau métastable $D_{3/2}$ de 100 μs , une phase de mesure du bruit de fond de 275 μs . Chaque phase est entrecoupée de délais de 25 μs pour assurer le bon fonctionnement de l’asservissement en intensité des faisceaux et pour éliminer le régime transitoire de la phase de mesure. Chaque séquence est répétée 500 fois pour chaque point du spectre.

De plus, la structure de l’ion $^{88}\text{Sr}^+$ est plus complexe qu’un simple système à deux niveaux : les niveaux $S_{1/2}$ et $P_{1/2}$ présentent chacun deux sous niveaux Zeeman qui rendent la forme de raie de la transition sensible au champ magnétique statique dans lequel l’ion est plongé ainsi qu’à la polarisation du laser d’excitation. Enfin la présence de l’état métastable $D_{3/2}$ requiert un système de repompage pour maintenir la fluorescence de l’ion. Pour limiter l’effet sur le centre de raie d’un déplacement lumineux AC, nous avons utilisé le schéma de repompage incohérent présenté en détail dans la figure 35. En effet les calculs numériques effectués en résolvant de manière approchée les OBE pour un système multiplement connecté montrent qu’avec cette méthode et pour des conditions d’acquisition typiques, l’erreur commise sur la détermination du centre de raie est inférieure à 6 kHz.

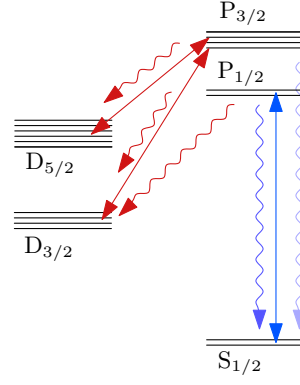


FIGURE 35 – Principe du repompage incohérent, la polarisation de chaque faisceau n'a de composante que sur σ^\pm .

Tous ces potentiels effets systématiques peuvent être modélisés de manière semi-analytique ce qui permet de les évaluer lors de la mesure de la fréquence de transition.

4.2.1 Modèle semi-analytique du repompage incohérent

Pour un atome à deux niveaux la forme de raie de la transition est donnée par :

$$\rho_{0,ee} = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{\Delta^2 + \gamma^2 + \Omega^2} \quad (116)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{s}{1 + s + \Delta^2/\gamma^2} \quad (117)$$

$$s = \frac{\Omega^2}{\gamma^2} \quad (118)$$

où Ω et Δ désignent la fréquence de Rabi et le désaccord du laser d'excitation et γ est la demie largeur naturelle de la transition. Les conventions observées ici diffèrent de celles utilisées dans la partie précédente : pour alléger les notations, les fréquences de Rabi sont plus grandes d'un facteur $\sqrt{2}$.

Mesurer la fréquence de cette transition revient alors à mesurer la position en fréquence du maximum de fluorescence de l'ion en fonction du désaccord.

Néanmoins, la transition entre les niveaux d'énergie S_{1/2} et P_{1/2} implique plus que deux états : il faut rendre compte des sous-niveaux Zeeman. Par ailleurs, la présence du niveau métastable D_{3/2} couplé par émission spontanée au niveau P_{1/2} complique également le système.

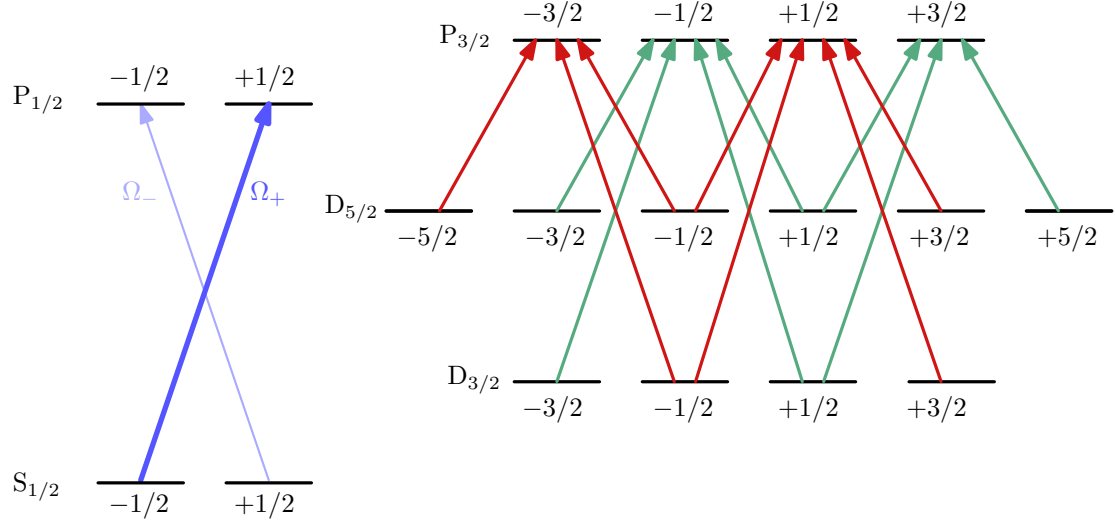


FIGURE 36 – schéma des couplages cohérents pour le repompage incohérent

Pour contourner cette difficulté, on peut utiliser le schéma de repompage dit incohérent présenté dans la figure 36. En effet, pour ce schéma de repompage, la population totale dans le premier niveau excité $P_{1/2}$ est donnée par :

$$\rho_{ee} = \frac{\frac{1}{2}\Omega^2}{(\Delta - \delta_B)^2 + \gamma_{eff}^2 + \frac{1}{2}\Omega^2(2 + \frac{\Gamma_{ed}}{\Gamma_r})} \quad (119)$$

$$\Omega^2 = \frac{2}{\frac{1}{\Omega_+^2} + \frac{1}{\Omega_-^2}} \quad (120)$$

$$P = \frac{\Omega_+^2 - \Omega_-^2}{\Omega_+^2 + \Omega_-^2} \quad (121)$$

$$\delta_B = \frac{4}{3}PB \quad (122)$$

$$\gamma_{eff}^2 = \frac{\Gamma_e^2}{4} + (1 - P^2)\delta_B^2 \quad (123)$$

$$\Gamma_r = \frac{\rho_{e'e'}}{\rho_{e'e'} + \rho_{dd} + \rho_{d'd'}}\Gamma_{ge'} \quad (124)$$

Avec :

- Δ : le désaccord à résonance à champ magnétique nul
- B : l'amplitude du champ magnétique multipliée par $\mu_B/h = 14 \text{ MHz/mT}$.
- Ω_{\pm} : les fréquences de Rabi associées aux transitions $|S_{1/2, \pm 1/2}\rangle \rightarrow |P_{1/2, \mp 1/2}\rangle$.
- Γ_{ed} : le taux de désexcitation spontané sur la transition $P_{1/2} \rightarrow D_{3/2}$.
- Γ_e : le taux de désexcitation spontané du niveau $P_{1/2}$.

- $\rho_{e'e'}, \rho_{dd}, \rho_{d'd'}$: les populations totales dans les niveaux $P_{3/2}, D_{3/2}, D_{5/2}$

Dans cette expression Γ_r ne dépend ni de Δ ni de Ω_{\pm} sous réserve que les polarisations soient bien celles présentées dans la figure 36. La dérivation de cette formule et la justification théorique de cette affirmation se trouvent dans l'annexe C page 122.

Cette formule peut s'écrire sous une forme analogue à l'expression (21) page 22 :

$$s = \frac{\Omega^2(2 + \frac{\Gamma_{ed}}{\Gamma_{gr}})}{\gamma_{eff}^2} \quad (125)$$

$$\rho_{ee} = \frac{1}{2 + \frac{\Gamma_{ed}}{\Gamma_{gr}}} \frac{s}{1 + s + (\Delta - \delta_B)^2 / \gamma_{eff}^2} \quad (126)$$

On voit alors que la limite de population dans l'état excité à saturation est inférieure à 1/2 et que la saturation est atteinte un peu plus vite qu'en l'absence de niveaux méta-stables. Dans la mesure où Γ_r est indépendant de Δ et qu'il ne joue un rôle important qu'à fort paramètre de saturation, l'influence des éventuelles variations des paramètres des lasers de repompage sur la mesure de la fréquence de transition est négligeable, et ce d'autant plus que ce problème, commun à tous les paramètres, peut être atténué comme on le verra dans la sous-partie 4.2.3. En effet l'impact de la dérive des lasers infrarouges passe par une variation du paramètre Γ_r au cours du temps. Pour une dérive linéaire lors de l'acquisition séquentielle d'un spectre, cela se traduit par une dépendance fictive de Γ_r avec Δ , d'autant plus forte que le balayage du spectre est lent. Pour une vitesse de balayage du spectre de δ (en MHz/s) :

$$\Delta = t\delta \quad (127)$$

$$\Gamma_r = \Gamma_{r0}(1 + \varepsilon t) \quad (128)$$

$$= \Gamma_{r0} \left(1 + \varepsilon \frac{\Delta}{\delta} \right) \quad (129)$$

Où ε est une constante.

Pour se faire une idée de l'ordre de grandeur de cette perturbation on peut faire un développement limité de la formule (126) à proximité de la résonance $\Delta^2 / \gamma_{eff}^2 \ll 1$ et faible paramètre de saturation $s \ll 1$:

$$\rho_{ee} \approx \frac{\Omega^2}{\gamma_{eff}^2} \left(1 - s - \frac{\Delta^2}{\gamma_{eff}^2} \right) \quad (130)$$

$$s \approx \frac{\Omega^2}{\gamma_{eff}^2} \left(2 + \frac{\Gamma_{ed}}{\Gamma_{r0}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\delta} \Delta \right) \right) \quad (131)$$

Le maximum apparent de la résonance est alors décalé d'une quantité :

$$\Delta f \approx \frac{\Omega^2 \Gamma_{ed} \varepsilon}{2 \Gamma_{r0} \delta} \quad (132)$$

Pour utiliser cette formule il nous faut un ordre de grandeur de ε . Pour estimer ce paramètre il faut estimer la dérive des fréquences de Rabi et des désaccords des lasers infrarouges :

- la figure 39 permet d'inférer la dérive de la fréquence de Rabi du faisceau bleu, avec une durée d'acquisition totale de l'ordre de dix heures, on obtient une dérive de la fréquence de Rabi l'ordre du pourcent par heure.
- La figure 17 donne une dérive du désaccord du faisceau à 1092 nm, non utilisé ici, de l'ordre du Méga-Hertz par heure.

À supposer que ces dérives sont du même ordre de grandeur pour tous les faisceaux, on peut estimer leur impact sur Γ_r en résolvant les OBE en choisissant des paramètres compatibles avec la valeur mesurée expérimentalement de $\Gamma_r = 4$ MHz, ce qui nous fait retomber sur une dérive de l'ordre du pourcent par heure au pire.

Avec les paramètres correspondant aux conditions d'acquisition : $\Omega, \Gamma_r, \Gamma_{ed} = 2.4, 4, 1.2$ MHz et $\delta = 4$ MHz/s, cela donne un décalage par spectre de l'ordre du Hertz.

On voit aussi dans cette formule que le champ magnétique a deux effets :

- il élargit la résonance,
- dans le cas où la polarisation est elliptique, il décale le centre de raie

Ce dernier point est gênant pour notre mesure. En effet il est difficile de purifier la polarisation de sorte à avoir $P < 3\%$. Pour un domaine de valeurs typiques du champ magnétique $B = 1 - 6$ MHz l'incertitude induite peut aller de 30 à 240 kHz, trop proche de l'incertitude visée. Pour contourner ce problème, on peut mesurer un spectre pour un champ magnétique B et un autre pour $-B$. À polarisation constante, la fréquence de la transition est alors donnée par la moyenne des deux fréquences centrales obtenues. En pratique cette inversion est entachée d'une incertitude ΔB , la fréquence de transition mesurée est alors affectée d'une erreur :

$$\frac{4}{3} P \Delta B \quad (133)$$

En utilisant la méthode de la partie 2.5.2 page 46, j'ai mesuré l'amplitude du champ magnétique convertie en décalage de fréquence en fonction du courant dans les bobines de contrôle, ce qui aboutit à la relation suivante :

$$B = g(I_z - I_{z0}) \quad (134)$$

Où $g = 1.66(5)$ MHz/A et $I_{z0} = 1.70(5)$ A.

On peut alors estimer l'incertitude sur l'inversion du champ magnétique : $\Delta B = g\Delta I_0 = 83$ kHz. L'erreur induite sur la fréquence de transition est alors au pire de l'ordre de 3 kHz.

4.2.2 estimation des effets mécaniques

Pour estimer les déformations de la forme de raie par les effets mécaniques des absorptions-diffusions de photons, nous allons utiliser le modèle de la partie 2.1.2 page 21 donnant à une dimension l'équation (32) :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T}{\tau} + D \quad (135)$$

Ce modèle n'est valable que dans la limite des faibles températures, mais en première approximation on peut l'utiliser pour donner une borne supérieure à la déformation des spectres. En effet, à haute température le chauffage Doppler devient moins efficace.

Dans la séquence présentée dans la figure 34 trois phases on un effet significatif sur la température de l'ion :

- la phase de refroidissement Doppler de durée t_c à désaccord Δ_c et paramètre de saturation s_c , associés à un temps caractéristique τ_c et un taux de chauffage radiatif D_c ,
- la phase de mesure du spectre de durée t_m à désaccord Δ et paramètre de saturation s , associés à un temps caractéristique τ et un taux de chauffage radiatif D ,
- entre les deux une phase de durée t_i a lieu pour éliminer le régime transitoire de l'acquisition. les paramètres de cette phase sont les mêmes que ceux de la phase de mesure.

Notons respectivement T_0, T_1 et T_2 les températures après la phase de refroidissement, après la phase intercalaire et après la phase de mesure. Au bout d'un certain nombre de cycles, ces

températures vérifient :

$$T_0 = T_2 e^{t_c/\tau_c} + D_c \tau_c (e^{t_c/\tau_c} - 1) \quad (136)$$

$$T_1 = T_0 e^{t_i/\tau} + D\tau (e^{t_i/\tau} - 1) \quad (137)$$

$$T_2 = T_1 e^{t_m/\tau} + D\tau (e^{t_m/\tau} - 1) \quad (138)$$

$$= T_0 e^{(t_m+t_i)/\tau} + D\tau (e^{(t_m+t_i)/\tau} - 1) \quad (139)$$

par conséquent :

$$a = e^{(t_m+t_i)/\tau} \quad , \quad b = e^{t_c/\tau_c} \quad (140)$$

$$T_0 = \frac{D\tau b(a-1) + D_c \tau_c (b-1)}{1-ab} \quad (141)$$

$$(142)$$

Pour passer en dimension trois il suffit de faire ce calcul pour chaque axe, le désaccord Doppler $\delta_D = -\vec{k}\vec{v}$ suit alors une distribution gaussienne d'écart type :

$$\gamma_D = k \sqrt{\frac{k_b T}{m}} \quad (143)$$

$$T = \sqrt{f_x T_x^2 + f_y T_y^2 + f_z T_z^2} \quad (144)$$

La fluorescence moyenne de l'ion à la température T , $F(T)$ est donnée par un profil de Voigt de paramètres γ_{eff} pour la contribution lorentzienne et γ_D pour la contribution gaussienne. Pour calculer le nombre moyen de photons par seconde émis lors de la phase de mesure il ne reste plus qu'à calculer numériquement l'intégrale :

$$\langle F \rangle = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} F(T(t)) dt \quad (145)$$

$$= \frac{\tau}{t_m} \int_{T_1}^{T_2} \frac{F(T)}{D\tau + T} dT \quad (146)$$

En ajustant les spectres simulés ainsi obtenus on peut estimer l'erreur commise sur la détermination de la fréquence de la transition. On voit dans la figure 37 que la plage des désaccords explorés joue un rôle important sur l'erreur finale. En effet la déformation sur le côté bleu de la résonance conduit à une diminution suivie d'une augmentation de la fluorescence, en englobant les deux parties, les deux parties se compensent partiellement lors de la procédure d'ajustement.

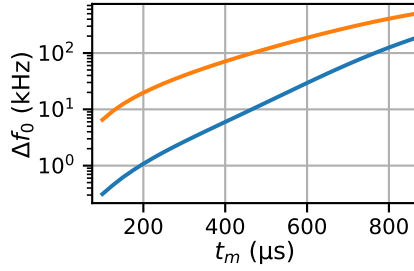


FIGURE 37 – Erreur induite par les effets mécaniques théoriques. En bleu l’ajustement du spectre se fait sur la plage ± 20 MHz, en orange sur la plage ± 5 MHz.

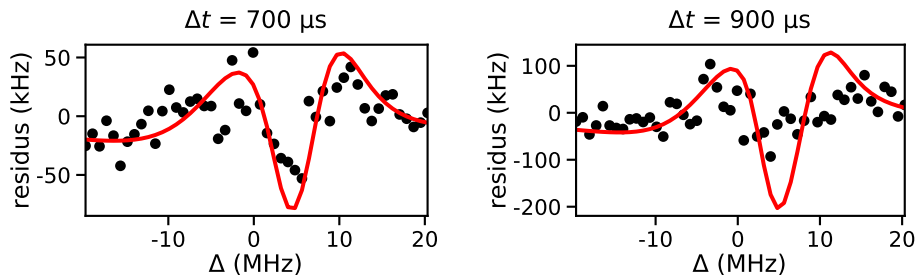


FIGURE 38 – Résidus d’ajustement par une lorentzienne de spectres expérimentaux pour un temps d’exposition Δt de $700 \mu\text{s}$ et $900 \mu\text{s}$, comparaison avec le résidu théorique dû aux effets mécaniques (ligne rouge) : augmenter la durée d’exposition conduit à surestimer les effets mécaniques.

Pour tester les limites de ce modèle j’ai acquis un spectre avec un temps d’acquisition légèrement trop élevé (700 et $900 \mu\text{s}$). La forme des résidus de l’ajustement est en bon accord avec la théorie. Néanmoins, la théorie tend à surestimer l’erreur induite par la déformation des spectres à mesure que le temps d’acquisition augmente comme on peut le voir sur la figure 38. Cela est prévisible : l’approximation linéaire ne tient plus pour de telles températures.

Pour le temps d’acquisition retenu pour faire la mesure ($300 \mu\text{s}$) on trouve une erreur systématique de -1.6 kHz sur la détermination de la fréquence centrale.

4.2.3 effet systématique d’un glissement des paramètres d’acquisition

À l’échelle de quelques spectres les paramètres d’acquisition peuvent varier cela a un effet sur la forme de raie comme on peut le voir sur la figure 39. Les mesures effectuées montrent que la largeur de la transition γ est globalement stable : le paramètre de saturation utilisé est suffisamment faible pour que les effets d’élargissement du spectre par l’intensité soit négligeable. En revanche l’amplitude de la raie de fluorescence varie au cours du temps. Cette dérive peut avoir un impact sur la mesure du centre de raie.

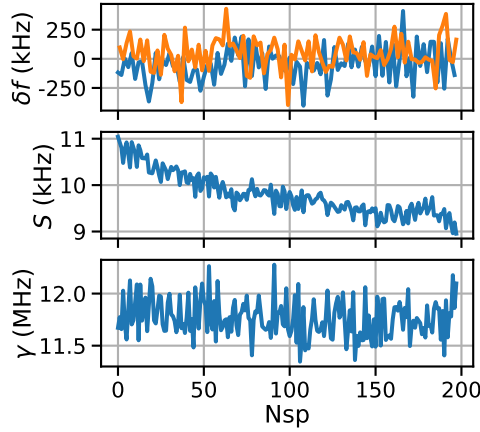


FIGURE 39 – évolution des paramètres de l’ajustement des raies de fluorescence d’un spectre à l’autre avec en bleu le décalage du centre de raie pour les spectres à $-B$ et en orange pour les spectres à $+B$.

Modélisons la situation : on suppose qu’à $t = 0$ la fréquence est à résonance, l’acquisition du spectre se fait par pas de δf tous les δt . Au voisinage du maximum du spectre on peut modéliser l’amplitude de la fluorescence S par une fonction affine :

$$S(t) = S_0(1 + at/\delta t) = S_0(1 + af/\delta f) \quad (147)$$

Le maximum du spectre se calcule en annulant la dérivée du taux de fluorescence F :

$$F(f) = \frac{S(f)\gamma^2}{f^2 + \gamma^2} \quad (148)$$

$$F'(f) = \frac{S_0\gamma^2}{f^2 + \gamma^2} af/\delta f - 2\frac{S_0\gamma^2 f}{(f^2 + \gamma^2)^2}(1 + af/\delta f) \quad (149)$$

Soit après transformations :

$$f^2 + 2f\frac{\delta f}{a} - \gamma^2 = 0 \quad (150)$$

Si la dérive est lente, on obtient au premier ordre un décalage de la position du maximum de :

$$\Delta f_1 = \frac{a\gamma^2}{2\delta f} \quad (151)$$

Pour mesurer la fréquence de la transition on a besoin d’effectuer la mesure avec deux champs magnétiques $+B$ et $-B$. En alternant entre les deux champs magnétiques et en inversant le

sens de balayage (le signe de δf) on peut réduire cette erreur à l'expression suivante :

$$\Delta f_2 = \frac{(a' - a)\gamma^2}{2\delta f} \quad (152)$$

Où a' et a sont les taux de variation de l'amplitude de la résonance sur le spectre à $-B$ et $+B$. Avec cette technique le décalage induit est négligeable : avec les données de la figure 39 on peut en utilisant un filtre de Savitzky-Golay estimer la dérivée a ce qui donne un écart d'au plus une dizaine de kHz sans inversion du sens de balayage et inférieur au kHz avec inversion du sens de balayage comme on peut le voir sur la figure 40.

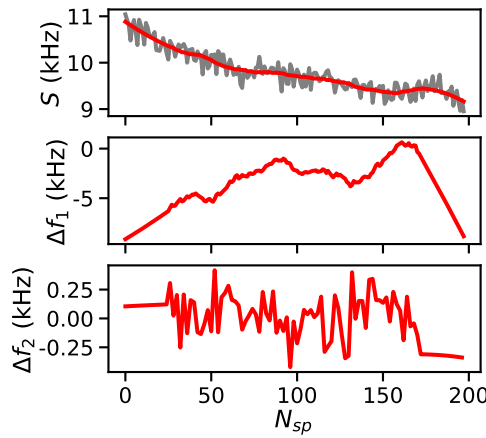


FIGURE 40 – Estimation de l'erreur systématique induite par la dérive de l'amplitude de la raie de fluorescence S . Δf_1 est calculée pour un balayage en fréquence non alterné, Δf_2 pour un balayage en fréquence alterné. La dérivée numérique est calculée à l'aide d'un filtre numérique de Savitzky-Golay d'ordre 2 avec une fenêtre de 51 points.

En revanche, l'inversion du balayage affecte l'estimation du résidu de polarisation d'une erreur systématique, le décalage apparent dû à la dérive des paramètres étant alors indistinguable de celui dû au résidu de polarisation et à l'inversion du champ magnétique. Pour s'en débarrasser on peut utiliser un ordre aléatoire d'acquisition des points de chaque spectre, ce qui a pour effet de transférer l'erreur systématique due à la dérive des paramètres sur l'erreur statistique.

4.2.4 mesure de la fréquence de transition

La mesure de la fréquence de transition a été faite à partir de 200 spectres séparés en deux orientations du champ magnétique, une inversion du champ étant effectuée entre chaque spectre. Les paramètres de l'acquisition sont les suivants :

- taux de collection : $1.95(5) \times 10^{-3}$

- efficacité de repompage : $\Gamma_r = 4.0(5)$ MHz
- amplitude du champ magnétique : $B = -2.16(6)$ MHz
- paramètre de saturation en phase de mesure : $s = 0.11 - 0.09$
- paramètre de saturation en phase de refroidissement : $s_c = 0.29$
- désaccord en phase de refroidissement : $\Delta_c = -12.76$ MHz

Un échantillon des spectres obtenus est présenté dans la figure 41.

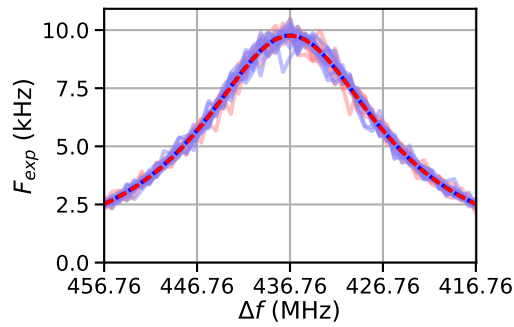


FIGURE 41 – Exemples de spectres utilisés pour mesurer la fréquence de transition. Les courbes roses et bleu pale correspondent à des spectres acquis pour une amplitude du champ magnétique de $+B$ et $-B$ respectivement. Les traits pointillés correspondent aux ajustements par des lorentziennes des données présentées. Δf désigne le décalage en fréquence induit par le montage d'AOM en double passage utilisé pour générer le faisceau sonde, F_{exp} le nombre de photons diffusés par l'ion détectés par seconde.

Pour ces paramètres la largeur théorique de la transition est de $11.6(1)$ MHz, à comparer avec la valeur mesurée : $11.74(7)$ MHz. L'écart moyen entre la position de la résonance pour le champ magnétique $+B$ et $-B$ est de $91(10)$ kHz, soit un défaut de polarisation de $1.6(2)\%$. L'incertitude due au défaut d'inversion du champ magnétique est donc de 2 kHz.

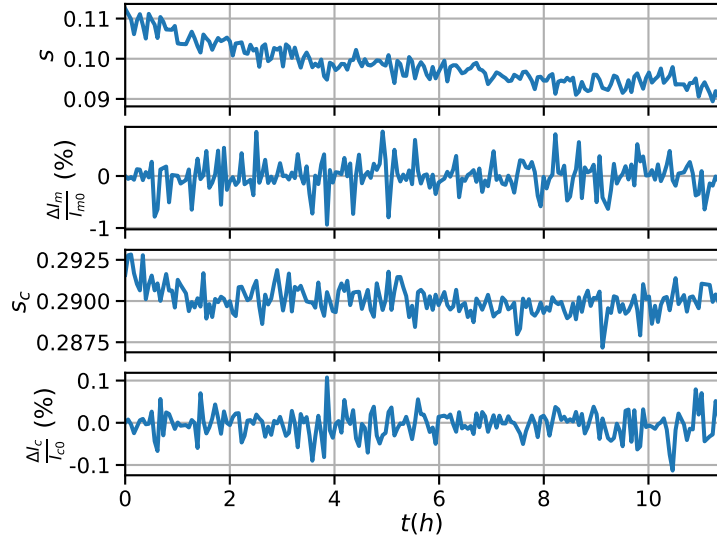


FIGURE 42 – Variations des paramètres de saturation lors de la phase de refroidissement s_c , et lors de la phase de mesure s , comparés aux variations relatives des consignes des asservissements en intensité des faisceaux de refroidissement I_c , et mesure I_m vis à vis de leurs valeurs de consigne I_{c0} et I_{m0} respectivement. L'efficacité de repompage est supposée constante.

Le champ couvert par le paramètre de saturation est due à une instabilité des paramètres au cours de l'acquisition de la série de spectres. Plus précisément, dans la mesure où la largeur de la résonance est stable au cours de l'acquisition, l'origine de cette instabilité ne peut trouver son origine que dans une instabilité du faisceau bleu malgré le bon fonctionnement apparent de l'asservissement en intensité. Cette instabilité peut être une instabilité du pointé du faisceau ou bien une instabilité du mode du laser. Les faisceaux de refroidissement et de mesure étant alignés selon deux directions différentes, on peut différencier les situations : dans le second cas les paramètres de saturation de la phase de refroidissement et de la phase de mesure seraient impactés en proportions égales, or ce n'est pas le cas comme on peut le voir sur la figure 42. On a donc principalement affaire à une dérive du pointé du faisceau de mesure.

Néanmoins le calcul de la variance d'Allan glissante présenté dans la figure 43 présente une anomalie. Si on néglige cette anomalie, on obtient un écart de $436.764(12)$ MHz entre la fréquence du faisceau asservi sur la transition $5sS_{1/2}(F = 2) \rightarrow 6pP_{1/2}(F' = 3)$ de l'atome ^{85}Rb et celle de la transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$ du $^{88}\text{Sr}^+$, après correction des effets systématiques connus compilés dans le tableau 5.

Effet	amplitude	incertitude
déplacement lumineux	0	6 kHz
champ magnétique	0	2 kHz
effets mécaniques	-1.6 kHz	0.5 kHz
instabilité paramètres	< 0.1 kHz	
total	± 1.6 kHz	6 kHz

TABLEAU 5 – Bilan des erreurs systématiques

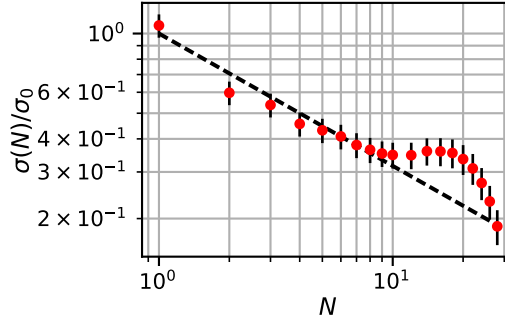


FIGURE 43 – Deviation d’Allan glissante $\sigma(N)$ normalisée par l’écart type σ_0 des valeurs mesurées de f_0 en fonction du nombre de points consécutifs N utilisés pour mesurer f_0 .

4.2.5 résumé des résultats

Grâce à notre méthode d’acquisition séquentielle, et à la modélisation du repompage incohérent, nous avons démontré une amélioration d’un facteur cent de la précision de la mesure de la fréquence de la transition de refroidissement du $^{88}\text{Sr}^+$. La fréquence obtenue est de 710 962 838.05(10) MHz contre 710 962 841(10) MHz pour la précédente estimation.

L’estimation des erreurs systématiques montre que nous sommes actuellement limités par la qualité de notre référence de fréquence, la technique pouvant théoriquement atteindre une précision de l’ordre de 10 kHz si l’on fait abstraction de ce problème technique.

4.3 Mesures de température

La mesure de la température de l'ion par ajustement d'un spectre de fluorescence élargi est une méthode facile à mettre en œuvre mais limitée dans la gamme de températures qu'elle permet de mesurer par la largeur de la raie.

Pour être applicable, il faut néanmoins que l'amplitude de l'effet Doppler $k\Delta v_{th}$ soit comparable à la largeur de la résonance γ , soit :

$$\frac{4\pi^2 k_b T}{m\lambda^2 \gamma^2} \sim 1 \quad (153)$$

où λ est la longueur d'onde du laser excitant la transition et m la masse de l'ion. En effet si la température est trop faible, la forme de raie ne sera pas affectée, si la température est trop forte, le signal de fluorescence sera trop faible.

Par exemple pour un ion $^{88}\text{Sr}^+$ et sur la transition de refroidissement, $\lambda = 422 \text{ nm}$, $m = 88 \text{ ua}$, $\gamma \approx 2\pi \times 10 \text{ MHz}$, l'ordre de grandeur des températures mesurables est donc de 2 K.

Pour étendre la gamme de sensibilité de ce type de mesure vers les hautes températures on peut utiliser la totalité de l'évolution temporelle de la fluorescence de l'ion pendant le refroidissement pour estimer l'énergie de départ de l'ion, une solution proposée sous le nom de thermométrie par refroidissement Doppler [31], [79]. Cette technique permet de mesurer des températures supérieures où égales à un Kelvin. Un exemple de réalisation de cette technique pour la mesure d'un taux de chauffage est présenté dans la figure 44.

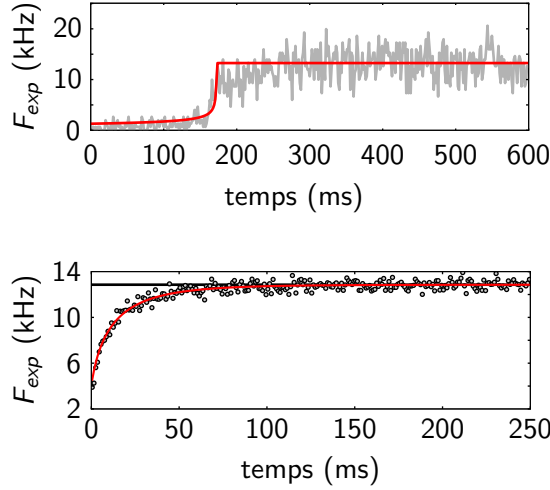


FIGURE 44 – Exemple de signaux de thermométrie par refroidissement Doppler pour un ion laissé dans le noir pendant plusieurs secondes. La courbe du haut représente une réalisation d’un cycle de mesure. En fonction de l’énergie initiale de l’ion la remontée de la fluorescence de l’ion se fait plus ou moins tard. La courbe du bas donne la fluorescence de l’ion moyennée sur un grand nombre de réalisations, ce qui permet de mesurer une température et donc un taux de chauffage.

L’application de cette technique à la mesure d’un taux de chauffage est néanmoins limitée par les collisions entre l’ion et les gaz résiduels, ce qui affecte la précision des mesures.

Pour mesurer des températures plus basses il faut une raie plus fine, mais aucune transition facilement exploitable n’existe pour l’ion strontium. Cela peut néanmoins être contourné en exploitant le phénomène de résonance noire, qui a déjà été évoqué dans la partie 2.5.2 page 46, et illustrée avec la figure 25 reproduite ci-dessous.

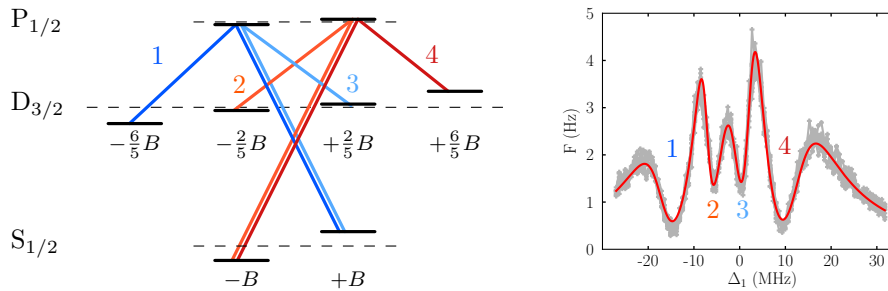


FIGURE 45 – Résonances noires en repompage cohérent et effet Zeeman. Les quatre chemins d’excitation représentés sur le schéma de niveaux correspondent à une chute de fluorescence dans le spectre représenté à droite. La courbe rouge est un ajustement des données représentées en gris. L’écartement des chutes de fluorescence dépend de l’amplitude du champ magnétique, leur position relativement au maximum de fluorescence dépend principalement du désaccord du laser infrarouge, leur largeur dépend de l’amplitude des fréquences de Rabi, leur contraste dépend de la température de l’ion, mais aussi du bruit de phase relatif des lasers bleu et infrarouge.

La résonance noire utilisée dans cet exemple utilise les transitions $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$ excitée par un

laser à 422 nm et $D_{3/2} \rightarrow P_{1/2}$ excitée par un laser à 1092 nm.

Une première utilisation de cette technique avec les transitions équivalentes pour l'ion ^{40}Ca a été réalisée dans le groupe de Mainz [69]. Cette implémentation souffre néanmoins des fluctuations de fréquence relatives des lasers infrarouge et bleu, dont l'effet sur la forme de raie est analogue à celui de la température, et qui est difficile à maîtriser (il faudrait recourir à un peigne de fréquence [23]).

Une implémentation alternative permet néanmoins de contourner cette difficulté : comme présenté dans la figure 46, en jouant sur les règles de sélection en polarisation, on peut construire un pseudo-système en Λ entre le premier niveau excité et le fondamental. Pseudo-système au sens où un tel système se comporte approximativement comme un système en Λ , à ceci près que la résonance noire obtenue est nécessairement imparfaite : on obtient une résonance grise. Les deux faisceaux indépendants nécessaires à la réalisation de cette configuration peuvent être dérivés à partir de la même source en utilisant deux modulateurs acousto-optiques (AOM), ce qui annule les fluctuations de fréquences relatives des deux faisceaux.

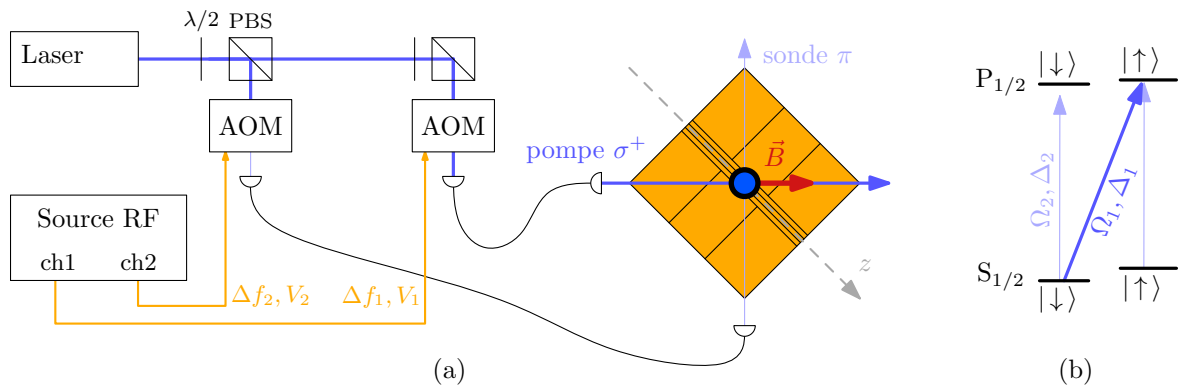


FIGURE 46 – (a) configuration des lasers utilisée pour former un pseudo système en Λ et (b) graphe des couplages associé. La fréquence et la puissance des deux faisceaux peuvent être ajustées indépendamment en utilisant deux modulateurs acousto-optiques (AOM) à partir d'une unique source laser. Le couplage entre le niveau $|S_{1/2}, \uparrow\rangle$ et $|P_{1/2}, \uparrow\rangle$ brise la situation de résonance noire, qui n'est par conséquent que partielle. Il faut alors faire un compromis entre amplitude et contraste du signal, en jouant sur l'intensité du faisceau sonde.

En pratique, comme on le voit sur la figure 47, la structure des niveaux de l'ion $^{88}\text{Sr}^+$ est plus complexe que cela : il faut rendre compte des niveaux métastables $D_{3/2}$ et $D_{5/2}$. Pour cela on peut s'inspirer des résultats de la partie précédente et utiliser un schéma de repompage incohérent, et approximer la situation en remplaçant les niveaux métastables et $P_{3/2}$ par un état fictif de nombre quantique $J = 3/2$ qui se dés-excite vers le niveau fondamental avec un taux effectif Γ_r , comparable à celui qui apparait dans l'équation (124) page 81. Les valeurs typiques

de Γ_r s'étalent de 2 à 4 MHz.

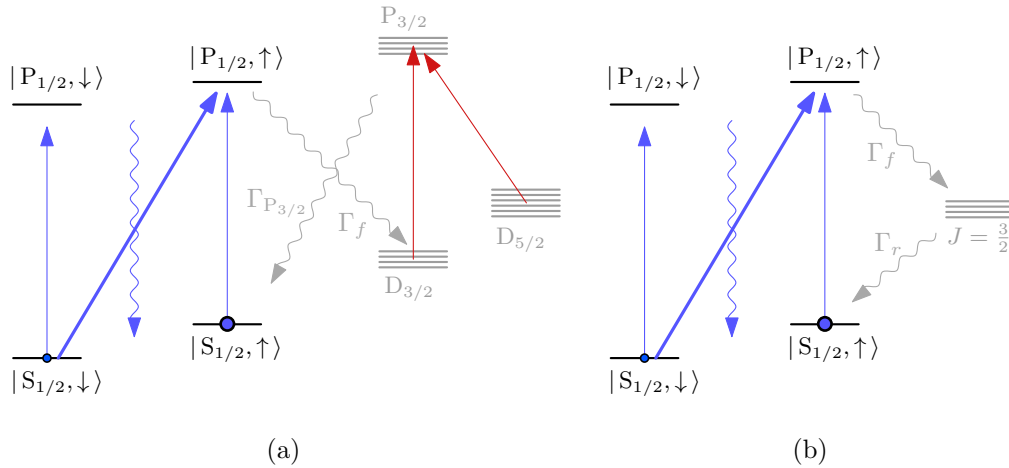


FIGURE 47 – (a) En raison de la structure des niveaux de l’ion $^{88}\text{Sr}^+$, le piégeage de population dans les états métastables $D_{3/2}$ et $D_{5/2}$ est évité en excitant les transitions $D_{3/2} \rightarrow P_{3/2}$ et $D_{5/2} \rightarrow P_{3/2}$. De cette manière aucun couplage cohérent n’est créé entre ces niveaux et les niveaux $S_{1/2}$ et $P_{1/2}$. (b) Approximation de la structure des niveaux dans laquelle les niveaux $D_{3/2}$ et $D_{5/2}$ et $P_{3/2}$ sont remplacés par un unique niveau de nombre quantique $J = 3/2$ qui se dés-excite vers le niveau $S_{1/2}$ avec un taux effectif Γ_r .

L’implémentation et la démonstration de cette technique a donné lieu à la publication d’un article reproduit en annexe page 152. Avant quelques compléments concernant notamment le domaine d’applicabilité, les principaux résultats de cet article sont résumés dans la suite de ce manuscrit.

4.3.1 Thermométrie par résonance grise

Pour un ion au repos la forme de raie associée à la configuration 46 dépend essentiellement de quatres paramètres :

- Ω_1 : la fréquence de Rabi du faisceau pompe polarisé σ ,
- Ω_2 : la fréquence de Rabi du faisceau sonde polarisé π ,
- Δ_1 : le désaccord du faisceau pompe, déterminé à partir de la référence de fréquence sur laquelle le faisceau bleu est asservi,
- B : l’amplitude du champ magnétique,

Pour calculer cette forme de raie, il suffit de résoudre les OBE. La figure 48 montre l’effet des fréquences de Rabi sur la forme de raie :

- Ω_1 : affecte principalement le contraste et la largeur de la résonance grise,
- Ω_2 : affecte principalement le contraste de la résonance grise et l'amplitude du signal, mais aussi dans une moindre mesure sa position.

La figure 49 montre que le contraste est fixé par le ratio Ω_2/Ω_1 .

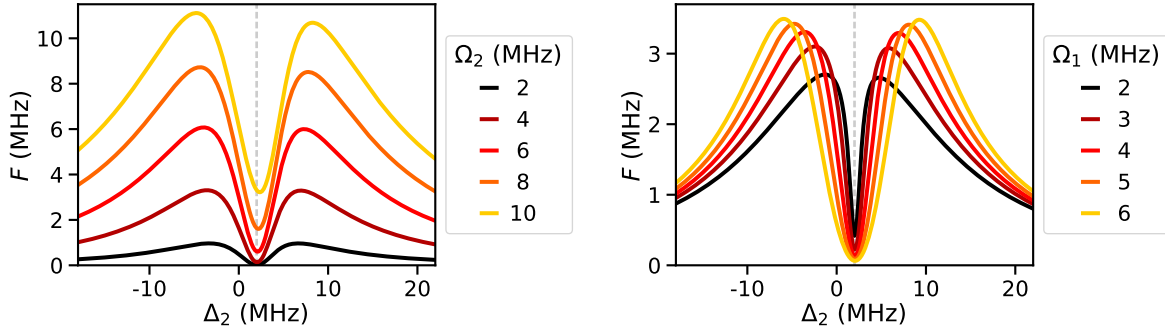


FIGURE 48 – Effet des la fréquences de Rabi de la sonde et de la pompe sur la forme du spectre de fluorescence F fonction du désaccord du faisceau sonde Δ_2 . Les paramètres hors mention contraire de la légende sont donnés par : $\Delta_1, \Omega_1, \Omega_2 = -2, 12, 4$ MHz et $B = 1.43 \times 10^{-4}$ T ce qui donne un décalage Zeeman de 4 MHz entre les deux niveaux fondamentaux.

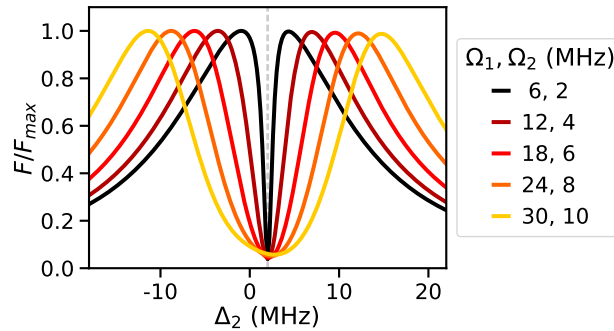


FIGURE 49 – Forme du spectre de fluorescence F normalisé par son maximum F_{max} en fonction des fréquences de Rabi à $\Omega_2/\Omega_1 = 3$ fixé. Les paramètres sont donnés par : $\Delta_1 = -2$ MHz et $B = 1.43 \times 10^{-4}$ T ce qui donne un décalage Zeeman de 4 MHz entre les deux niveaux fondamentaux.

On peut ainsi adapter la forme de raie à la gamme de températures que l'on souhaite mesurer. Plus de détails sont donnés dans les compléments.

Pour rendre compte du mouvement de l'ion on utilise les techniques présentées dans la partie 3.4.2 page 69. Dans l'article, le piège utilisé avait une fréquence séculaire de 100 kHz, on a donc eu recours à l'approximation adiabatique. Les limites de cette approximation font partie des compléments qui suivent cette partie.

L'effet de la température de l'ion T_z selon l'axe sondé z joue sur le contraste de la résonance grise, comme on le voit sur la figure 50.

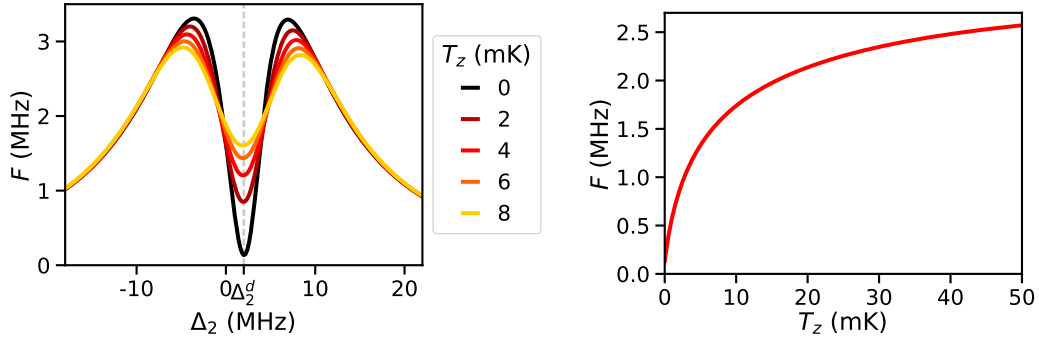


FIGURE 50 – À gauche, effet de la température T_z selon l'axe z de la figure 46 sur la fluorescence de l'ion F . À droite, fluorescence de l'ion calculée au centre de la résonance noire ($\Delta_2 = \Delta_2^d = 2$ MHz) en fonction de la température de l'ion selon l'axe z . Les paramètres choisis sont donnés par : $\Delta_1, \Omega_1, \Omega_2 = -2, 4, 12$ MHz et $B = 1.43 \times 10^{-4}$ T ce qui donne un décalage Zeeman de 4 MHz entre les deux niveaux fondamentaux.

Pour acquérir un spectre expérimental on a recours à la même technique d'acquisition séquentielle que pour la mesure de la fréquence de la transition de refroidissement présentée dans la partie 2.4.2 page 41. À partir d'un seul spectre expérimental, comme celui de la figure 51 on peut donc déduire la valeur des paramètres libres Ω_1, Ω_2, B et T_z .

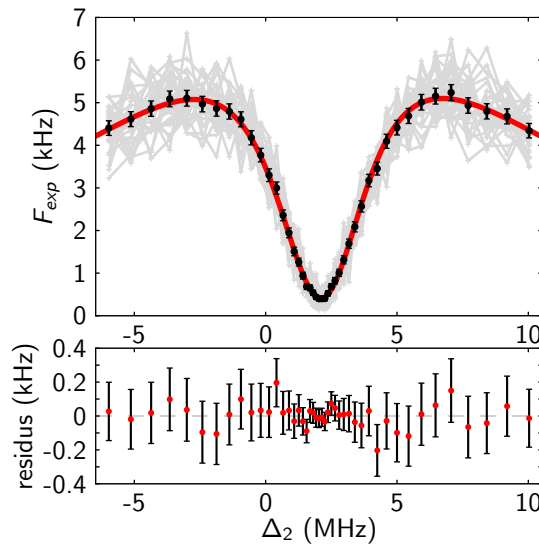


FIGURE 51 – Spectre expérimental de fluorescence (points noirs). Le désaccord de la pompe est de $\Delta_1 = -3.7$ MHz et l'ion est refroidi à une température sub-Doppler dans une phase où le désaccord de la sonde est fixé à $\Delta_2 = 1.7$ MHz. Les paramètres libres, obtenus par ajustement des données expérimentales (ligne rouge), sont : $\Omega_1, \Omega_2 = -10.7(1), 3.78(1)$ MHz, $B = 2.06(1) \times 10^{-4}$ T et $T_z = 0.128(7)$ mK. Les incertitudes ne rendent pas compte des erreurs systématiques.

La donnée des paramètres Ω_1 , Ω_2 et B permettent d'inverser la relation entre la température et la fluorescence telle que mesurée au fond de la résonance grise, ce qui permet de mesurer le taux de chauffage du piège. Pour cela il suffit de refroidir l'ion, puis d'éteindre les lasers de refroidissement pour le laisser chauffer pour une durée déterminée, avant de mesurer la fluorescence de l'ion au fond de la résonance grise. La figure 52 donne un exemple de réalisation de cette technique.

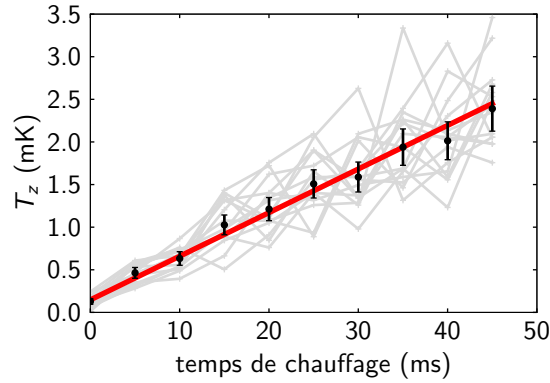


FIGURE 52 – Température calculée à partir de la fluorescence moyenne de l'ion en fonction du temps de chauffage (points noirs). Le taux de chauffage du piège, donné par la pente de la régression linéaire (ligne rouge), est de $52(1)$ mK.

Pour s'assurer de l'exactitude des températures mesurées avec cette méthode j'ai mesuré la température de l'ion après refroidissement Doppler en fonction du désaccord du faisceau de refroidissement. La figure 53 montre le résultat de cette mesure et la comparaison avec les prédictions théoriques telles qu'elles sont exposées dans la partie 2.1.2. Cette mesure démontre que la précision de la méthode de thermométrie par résonance grise peut atteindre les 0.1 mK.

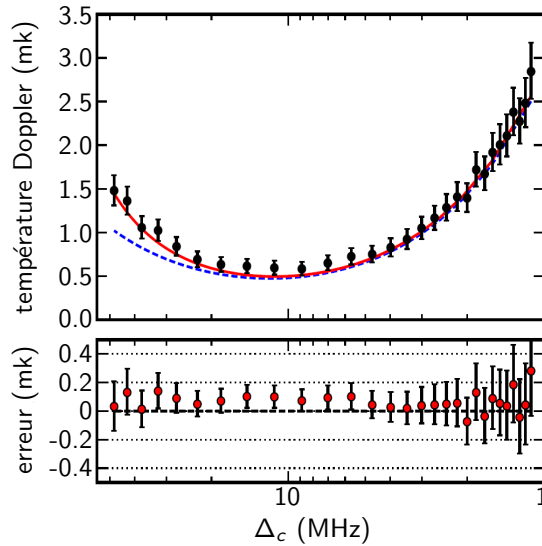


FIGURE 53 – Température calculée à partir de la fluorescence moyenne de l’ion en fonction du désaccord du faisceau de refroidissement Doppler Δ_c . Les mesures sont faites à faible saturation du faisceau de refroidissement. Les lignes rouge/bleue correspondent à la température théorique attendue avec/sans prise en compte de la contribution du taux de chauffage du piège (voir la figure 52).

4.3.2 Réglage des séquences d’acquisition

Pour choisir les paramètres des séquences d’acquisition il faut contrôler le temps laissé à l’ion pour sortir du régime transitoire entre la phase de refroidissement et la phase de mesure de la fluorescence, ainsi que le temps d’acquisition pour limiter les effets mécaniques des lasers sur le mouvement de l’ion. Cela peut se faire de manière empirique en testant plusieurs configurations jusqu’à ce qu’aucun effet ne soit mesurable, mais avoir une estimation théorique reste rassurant. Les figures 54 et 55 montrent respectivement les estimations obtenues avec les techniques de la partie 3 pages 65 et 71.

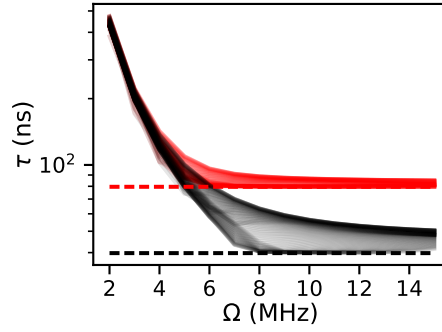


FIGURE 54 – Temps caractéristique du transitoire des OBE en fonction des fréquences de Rabi $\Omega_1 = 3\Omega$ et $\Omega_2 = \Omega$, pour deux valeurs du taux effectif de repompage Γ_r , 4 MHz en rouge et 2 MHz en noir. Plusieurs valeurs du désaccord du faisceau sonde sont testées (entre -10 et 10 MHz de la résonance noire). Les traits pointillés donnent le temps caractéristique de désexcitation des états noirs : aux hautes intensités la dynamique est dominée par les états noirs.

Le temps caractéristique du transitoire est aux faibles fréquences de Rabi dominé par ces mêmes fréquences de Rabi, et pour la gamme explorée reste inférieur à $0.5 \mu\text{s}$. Le temps minimum permis par notre séquenceur limite donc la séquence d'acquisition plus que la dynamique interne de l'ion.

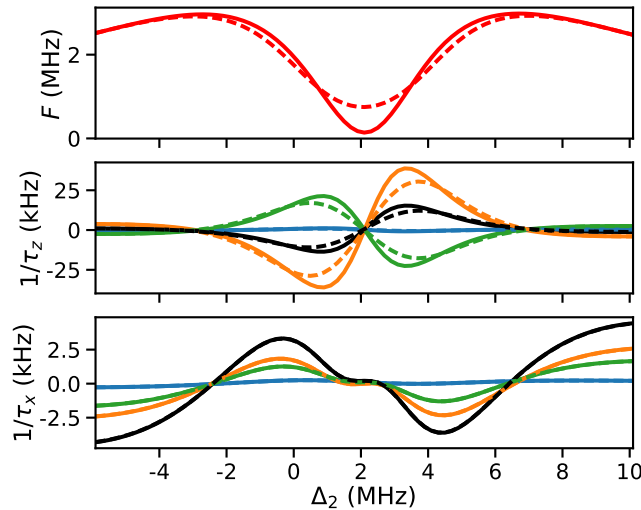


FIGURE 55 – Fluorescence moyenne F d'un ion en oscillation à une énergie $k_B \times 0.01 \text{ mK}$ (trait plein) et $k_B \times 1 \text{ mK}$ (trait pointillé). Inverse des temps caractéristiques du refroidissement/chauffage Doppler τ_z et τ_x pour les paramètres de la figure 51 et pour deux valeurs de l'énergie de l'ion $k_B \times 0.01 \text{ mK}$ (trait plein) et $k_B \times 1 \text{ mK}$ (trait pointillé). Avec en bleu, orange et vert, les contributions respectives des transitions $|S_{1/2}, -1/2\rangle \rightarrow |P_{1/2}, -1/2\rangle$, $|S_{1/2}, -1/2\rangle \rightarrow |P_{1/2}, +1/2\rangle$, et $|S_{1/2}, +1/2\rangle \rightarrow |P_{1/2}, +1/2\rangle$, et en noir la somme de ces contributions.

La problématique des effets mécaniques est dominé par le refroidissement/chauffage sur l'axe

sonde z . Pour les paramètres du spectre de calibration 51 le temps caractéristique minimum de refroidissement/chauffage Doppler est de l'ordre de $100 \mu\text{s}$ atteint pour un désaccord du faisceau sonde coïncidant avec le point le moins sensible à l'amplitude du mouvement du spectre. Ce désaccord se situe au niveau du point d'inflexion de la résonance noire. Cela est en accord avec les paramètres de séquences choisis empiriquement, avec une phase d'acquisition typique de l'ordre de $80 \mu\text{s}$. On peut aussi noter que si cette configuration permet de refroidir sur l'axe z , cela s'accompagne d'un réchauffement sur l'axe x .

4.3.3 Pièges raides

Dans le modèle donné dans l'article on a supposé que la période des oscillations de l'ion dans le piège est lente devant les temps caractéristiques associés à la dynamique des états internes de l'ion. Dans le cas où un seul ion est pris en considération on peut modéliser l'élargissement Doppler avec une autre technique ne demandant pas cette approximation, ce qui permet de calculer une température pour un piège raide et même de prendre en compte l'effet d'un éventuel micro-mouvement intrinsèque sur la forme de raie. Pour cela on a recours aux équations présentées dans la partie 3.3.2 page 64 et plus particulièrement à celles de l'annexe D page 127. Comme on le voit sur la figure 56 l'augmentation de la fréquence séculaire de l'ion diminue la sensibilité de la mesure, par ailleurs le micro-mouvement intrinsèque n'a que peu d'effet à haute fréquence RF, et un effet faible à basse fréquence RF.

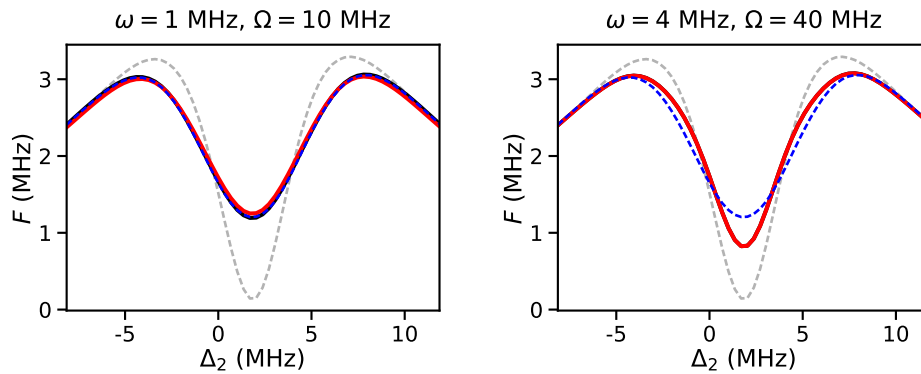


FIGURE 56 – Comparaison des formes de raies à la résonance noire entre un piège lâche et un piège raide avec et sans micro-mouvement. ω et Ω désignent les fréquences séculaires du mouvement et la fréquence de la RF (et donc du micro mouvement). En pointillé gris, la forme de raie à température nulle, En pointillé bleu, la forme de raie calculée avec le modèle adiabatique sans micro mouvement, en noir la forme de raie à $T = 4\text{mK}$ sans micro mouvement, en rouge la forme de raie à $T = 4\text{mK}$ avec micro mouvement. Les paramètres choisis pour le calcul sont : $B_z, \Gamma_r, \Delta_2, \Omega_1, \Omega_2 = -2.8, 2, -3.8, 4, 12$ MHz. Les contributions statiques au potentiel de confinement sont nulles : seul le pseudo potentiel est considéré.

Ajuster des données obtenues pour un piège raide avec le modèle adiabatique est donc source d'erreurs systématiques. L'ampleur de ces erreurs dépend du choix des fréquences de Rabi des faisceaux pompes et sondes, comme on le voit sur la figure 57 : plus les intensités des faisceaux pompes et sondes utilisées sont faibles, plus on est sensible à la fréquence séculaire des oscillations dans le piège.

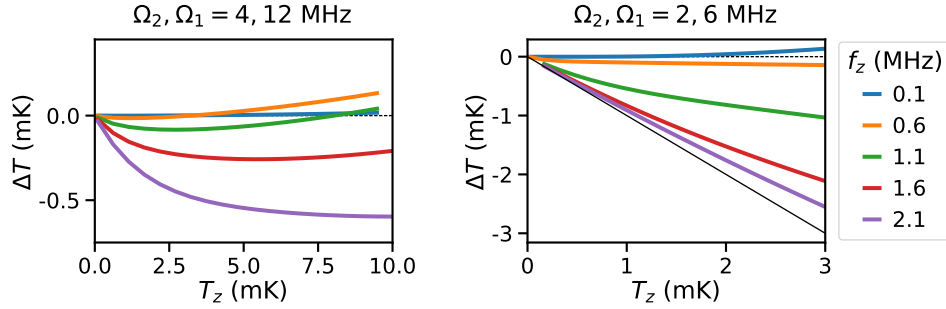


FIGURE 57 – Erreur sur la température entre le modèle adiabatique et le modèle dynamique en fonction de la fréquence séculaire et de la température sur l'axe d'oscillation de l'ion, et pour deux couples de fréquences de Rabi des faisceaux sonde et pompe.

Pour tester le modèle de piège raide, le même type de mesures que dans l'article a été effectuée sur l'axe x du piège en inversant la direction de propagation du faisceau pompe. Les résultats, présentés dans la figure 58, montrent que le modèle peut être utilisé pour mesurer des températures et des taux de chauffage sur des pièges raides.

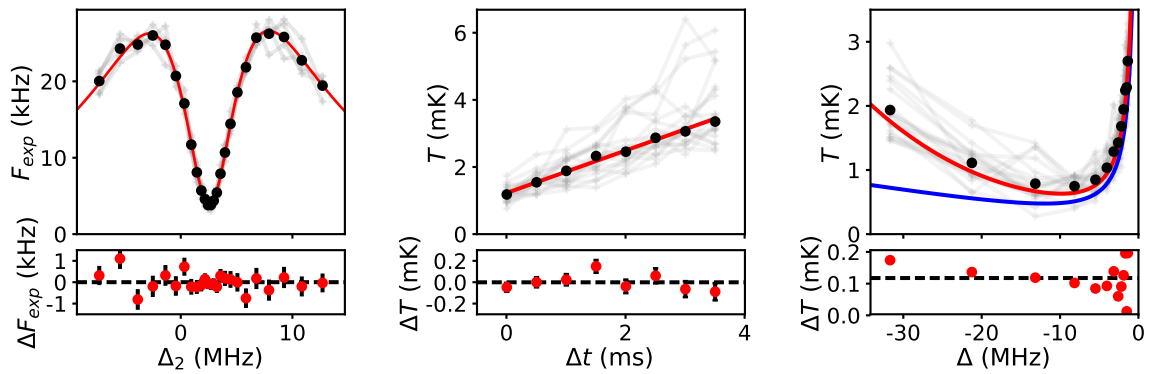


FIGURE 58 – De gauche à droite : ajustement du spectre de calibration, estimation du taux de chauffage et mesure de la température Doppler limite comparée à la théorie avec taux de chauffage (courbe rouge) et sans (courbe bleue). Les mesures sont faites sur l'axe x avec une fréquence du champ RF de confinement de 40 MHz et une fréquence séculaire de l'ordre de 3 MHz. Chaque courbe grise correspond à une série de données, les points noirs sont obtenus en prenant la moyenne de toutes les séries.

4.3.4 signal à bruit

On a vu dans l'article que l'on pouvait modifier la largeur de la résonance noire pour mieux l'adapter à la gamme de températures que l'on souhaite mesurer. Concrètement, pour bien choisir les paramètres de mesure il faut calculer le signal à bruit en fonction des paramètres de mesure et de la température.

Le nombre total de photons accumulés ne suit pas exactement une loi de poisson, malgré la stabilité de cette dernière par sommation. En effet il faut prendre en compte le caractère aléatoire de l'ensemble des énergies explorées sur toutes les itérations de la séquence d'acquisition.

Si on note N_E le nombre de photons mesurés sur un cycle de la séquence de mesure pour une énergie mécanique de l'ion E , alors en vertu de la stabilité de la loi de poisson par sommation N_E suit une loi de poisson de paramètre $\langle N_E \rangle$. Mais sur les multiples réalisations de la séquence de mesure, E prend plusieurs valeurs de manière aléatoire avec une densité de probabilité $p(E)$. Pour calculer l'espérance et la variance de N_E on peut utiliser les théorèmes de l'espérance et de la variance totale :

$$\mathbb{E}[N_E] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_E|E]] = \mathbb{E}[\langle N_E \rangle] = \int_0^\infty \langle N_E \rangle p(E) dE \quad (154)$$

$$\mathbb{V}[N_E] = \mathbb{E}[\mathbb{V}[N_E|E]] + \mathbb{V}[\mathbb{E}[N_E|E]] \quad (155)$$

$$= \mathbb{E}[\langle N_E \rangle] + \mathbb{V}[\langle N_E \rangle] \quad (156)$$

Notons F_{exp} la fluorescence moyenne de l'ion mesurée sur M cycles de la séquence d'acquisition, TC le taux de collection et Δt la durée de la phase de mesure. Pour $\alpha = 1/TC\Delta t$ et $F_E = \alpha \langle N_E \rangle$ la fluorescence moyenne de l'ion pour une énergie mécanique E alors :

$$\mathbb{V}[F_{exp}] = \frac{\alpha^2}{M} (\mathbb{E}[\langle N_E \rangle] + \mathbb{V}[\langle N_E \rangle]) \quad (157)$$

$$= \frac{1}{M} (\alpha \mathbb{E}[F_E] + \mathbb{V}[F_E]) \quad (158)$$

Notons $F(T) = \mathbb{E}[F_E] = \mathbb{E}[F_{exp}]$ et $S(T) = \mathbb{V}[F_E]$. On voit apparaître deux régimes limite : pour α élevé devant S/F le bruit est poissonnien, pour α faible devant S/F , le bruit est dominé par les fluctuations de l'échantillonnage de la distribution d'énergie. Comme on peut le voir sur la figure 59, pour des paramètres typiques d'acquisition, la variance du bruit d'échantillonnage est logiquement nulle aux basses températures, et ne dépasse pas les 50% de celle du bruit de comptage des photons, ce qui se traduit par une augmentation de 20% de l'écart type du bruit

total.

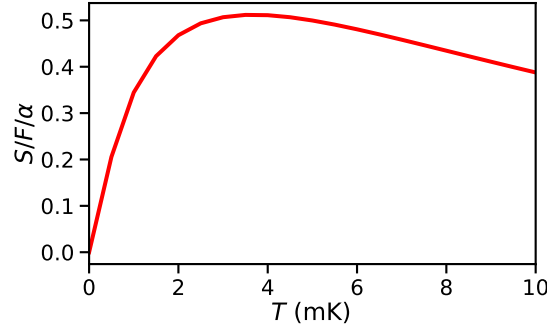


FIGURE 59 – évolution de la quantité $S/F/\alpha$ en fonction de la fluorescence. α est calculé pour $TC = 8.5 \times 10^{-3}$ et $\Delta t = 200 \mu\text{s}$, les autres paramètres sont : $B_z, \Gamma_r, \Delta_2, \Omega_1, \Omega_2 = -2.8, 2, -3.8, 4, 12 \text{ MHz}$

Le rapport signal à bruit sur la température inférée à partir des mesures de fluorescence est donné au premier ordre par :

$$\frac{T}{\Delta T} = TF'(T) \sqrt{\frac{M}{\alpha F(T) + S(T)}} \quad (159)$$

Pour se représenter ce que cela implique en termes expérimentaux, et se faire une idée du champ maximal d'applicabilité de la méthode, on peut se référer à la figure 60.

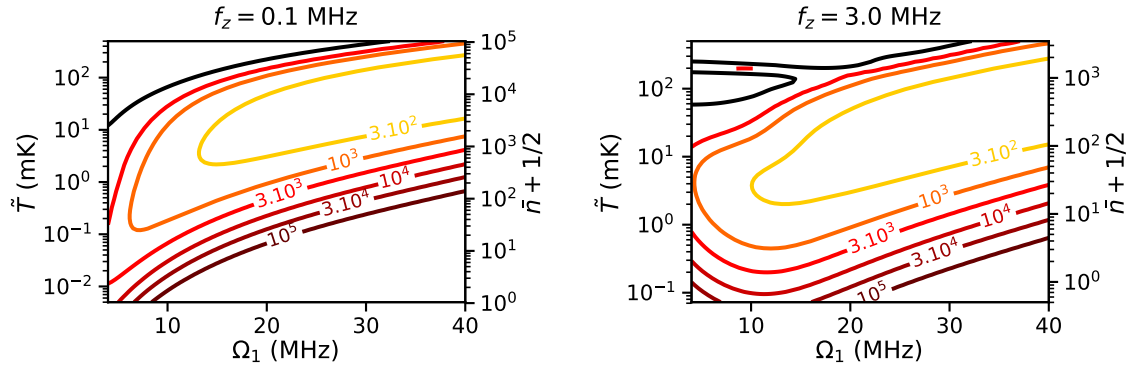


FIGURE 60 – Nombre de cycles d'acquisition nécessaires pour atteindre un rapport signal à bruit de dix sur la détermination de la température approximative de l'ion $k_B \bar{T} = hf_z(\bar{n} + 1/2)$. Le taux de collection et la durée de la phase d'acquisition sont respectivement égaux à $8.5 \cdot 10^{-3}$ et $200 \mu\text{s}$.

4.3.5 erreurs systématiques

Le modèle utilisé pour estimer les températures à partir de la fluorescence de l'ion se base sur un certain nombre de suppositions qui ne sont pas parfaitement vérifiées en situation expérimentale.

Les erreurs induites par ces écarts sur l'estimation de la température doivent être estimées. La liste des sources d'erreur est la suivante :

- L'erreur sur la calibration des paramètres du spectre se propage sur la détermination de la température à partir de la fluorescence à la résonance noire.
- Le taux de collection et le centre de la transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$ doivent être estimés indépendamment ce qui ne peut se faire qu'à un niveau de précision donné.
- Le remplacement des niveaux $D_{3/2}, D_{5/2}$ et $P_{3/2}$ par un niveau virtuel de moment total $J = 3/2$ et taux de désexcitation spontanée Γ_r est dans cette situation une approximation.
- La température sur l'axe orthogonal à l'axe principal n'est pas nulle ce qui n'est pas sans effets sur la forme de raie et l'estimation des paramètres.
- Le résidu d'excès de micro-mouvement peut conduire à sur-estimer la température.
- La polarisation et l'alignement des faisceaux sonde et pompe peuvent être imparfaits.

La figure 61 donne un exemple d'une telle erreur systématique pour un défaut d'alignement du faisceau pompe de 10° . Ce défaut conduit à une distorsion nette du spectre à paramètres fixés, mais reste tout à fait ajustable en jouant sur tous les paramètres simultanément. La température obtenue est en revanche tout à fait inexacte, ce qui se retranscrit après dans les mesures de température à partir de la fluorescence de l'ion.

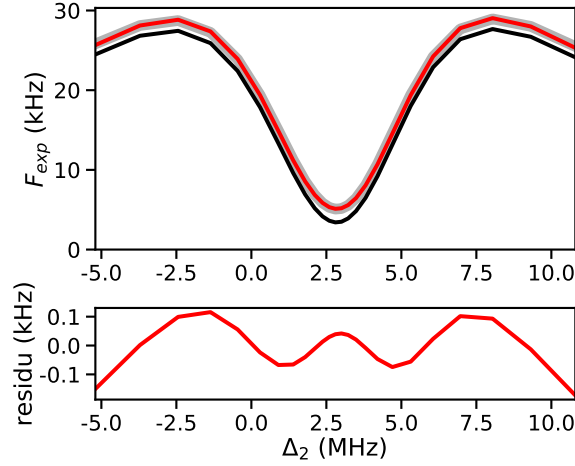


FIGURE 61 – Déformation du spectre de fluorescence expérimental de l’ion due à un défaut dans l’alignement du faisceau pompe, le taux de collection des photons est pris à $8.5e - 3$. La ligne noire correspond au spectre sans défaut, calculé pour les paramètres suivants : $\Delta_1, \Omega_1, \Omega_2 = -5, 12, 4$ MHz, $B = 2.8 \times 10^{-4}$ T et $T_z = 0.56$ mK.

La ligne grise correspond au même jeu de paramètres mais avec un défaut dans l’alignement du faisceau pompe de 10° . La ligne rouge est un ajustement du spectre déformé, qui donne le jeu de paramètres libres suivants : $\Omega_1, \Omega_2 = 11.6, 4.15$ MHz, $B = 2.8 \times 10^{-4}$ T et $T_z = 0.86$ mK. Les résidus de l’ajustement sont au mieux comparables au bruit statistique d’acquisition, et sont donc difficilement détectables, comme on peut le voir sur les figures 51 et 58.

L’impact de ces erreurs sur la mesure du taux de chauffage du piège H doit être distinguée de l’erreur absolue sur la température $\Delta T = T_{est} - T$. En effet pour une température initiale et finale T_i et T_f l’erreur relative sur la détermination du taux de chauffage peut s’écrire en première approximation :

$$\frac{\Delta H}{H} \approx -\frac{\Delta T_f - \Delta T_i}{T_f - T_i} \quad (160)$$

Si les variations de l’erreur sont négligeables vis à vis de la gamme de température couverte, l’erreur sur le taux de chauffage le sera aussi.

Ce qui suit est une série d’estimations de ces erreurs systématiques calculées pour le modèle adiabatique.

Calibration des spectres : La précision relative de la mesure est très sensible à la calibration de la fréquence de Rabi du faisceau sonde, et elle l’est d’autant plus que la température est élevée comme on peut le voir sur la figure 62. La fréquence de Rabi du faisceau pompe entache également la mesure d’une erreur relative sur la température, mais celle ci est quasiment constante si on ignore les températures basses comme on peut le voir sur la figure 63. Baisser

le ratio Ω_2/Ω_1 décale la plage de mesure fiable vers les températures basses. Augmenter Ω_2 à Ω_2/Ω_1 constant décale la plage de mesure vers les hautes températures en diminuant légèrement l'amplitude de la plage de mesure.

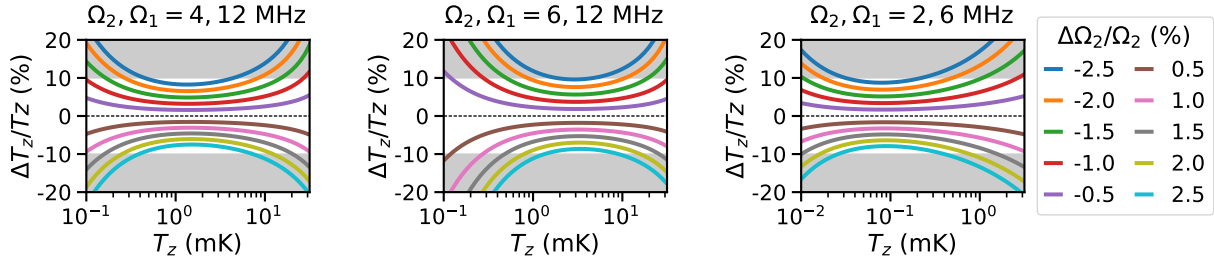


FIGURE 62 – Erreur systématique relative sur la mesure de la température due aux incertitudes de calibration de la fréquence de Rabi du faisceau sonde.

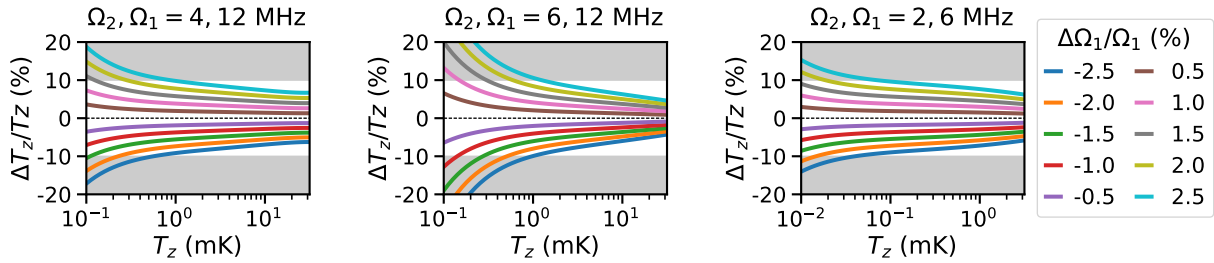


FIGURE 63 – Erreur systématique relative sur la mesure de la température due aux incertitudes de calibration de la fréquence de Rabi du faisceau pompe.

Taux de collection, fréquence de la transition et température sur l'axe $\vec{k}_1 + \vec{k}_2$:
 Augmenter Ω_2/Ω_1 amplifie l'erreur. Baisser Ω_2 à Ω_2/Ω_1 constant diminue l'erreur. L'effet sur la mesure du taux de chauffage est négligeable

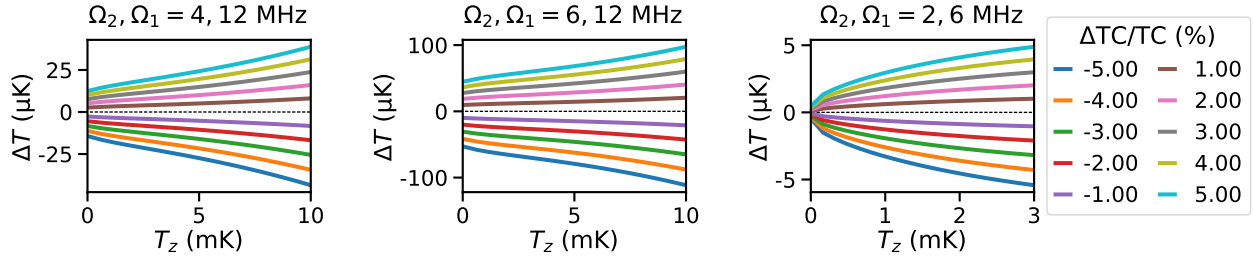


FIGURE 64 – Erreur systématique due à l'incertitude sur le taux de collection.

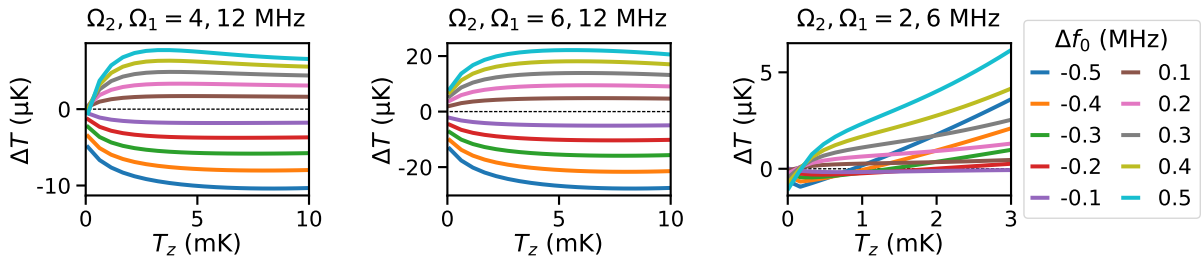


FIGURE 65 – Erreur systématique due à l'incertitude sur la fréquence de la transition.

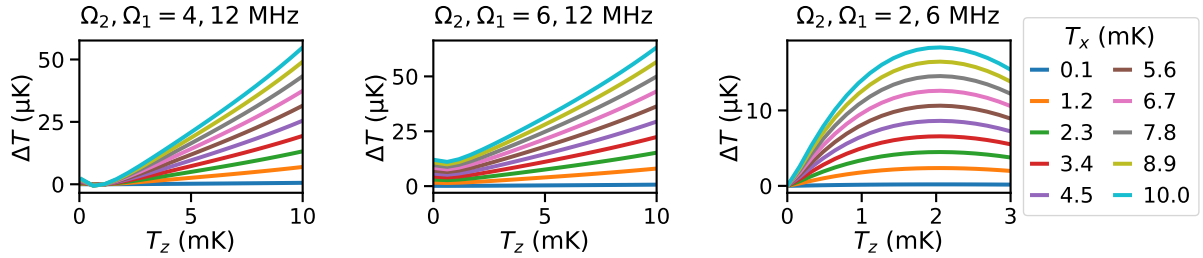


FIGURE 66 – Erreur systématique due à la température sur l'axe non sondé

Paramètre Γ_r : Dans l'annexe C page 122 on montre que dans le cas précis où les transitions $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}, D_{3/2} \rightarrow P_{3/2}$ et $D_{5/2} \rightarrow P_{3/2}$ sont excitées par des faisceaux ne présentant pas de composante π en polarisation, alors les niveaux $D_{3/2}, D_{5/2}, P_{3/2}$ peuvent être remplacés par un niveau équivalent de moment $J = 3/2$ et de fréquence de désexcitation Γ_r , paramètre indépendant de la transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$. La démonstration repose sur l'isolement de quatre groupes de niveaux, chaque groupe n'étant relié à un autre que par l'émission spontanée. Pour le schéma de couplage utilisé pour mesurer une température, la démonstration ne tient pas car les deux niveaux fondamentaux et les deux premiers niveaux excités sont tous couplés les uns aux autres de manière cohérente. On peut montrer que d'une part le paramètre Γ_r , calculé avec la formule (124) n'est plus une constante et d'autre part que la valeur moyenne de ce paramètre n'ajuste pas correctement les spectres. Néanmoins, comme on le voit sur la figure 67, l'effet sur l'estimation de la température reste négligeable.

Augmenter Ω_2/Ω_1 amplifie l'erreur. Baisser Ω_2 à Ω_2/Ω_1 constant diminue l'erreur. L'effet sur la mesure du taux de chauffage est négligeable.

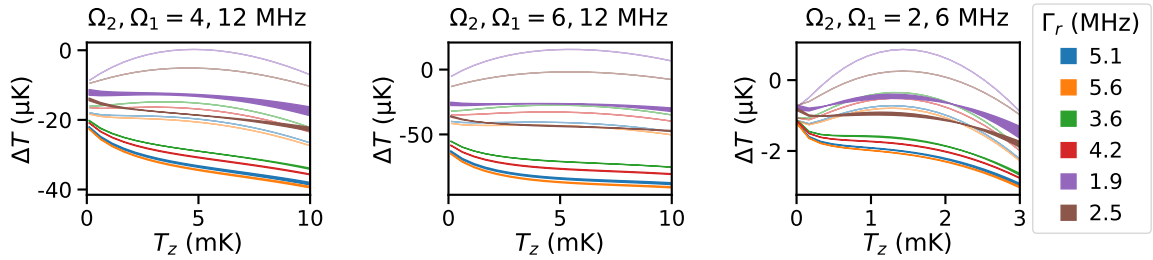


FIGURE 67 – Erreur systématique due à l'approximation du mécanisme de repompage des niveau métastables pour plusieurs jeux de paramètres des lasers repompeurs et pour deux choix de $\Gamma_{r,eff}$: 2 MHz en couleur vive et 6 MHz en couleur pastel. Les fréquences de Rabi des repompeurs sont choisis de sorte à obtenir plusieurs valeurs de Γ_r , les désaccords associés sont choisi de sorte à maximiser la valeur de Γ_r . Pour chaque valeur de Γ_r deux choix optimaux des désaccords sont utilisés, l'écart entre les deux courbes de fluorescence est couvert par le trait correspondant.

Polarisation : Avec les notations du paragraphe 2.5 page 42 la polarisation voulue du faisceau sonde est définie par les angles : $\alpha_1 = 90^\circ, \theta_1 = 0^\circ, \phi_1 = 90^\circ$, et pour le faisceau pompe : $\alpha_2 = 0^\circ, \phi_2 = 0^\circ$.

Pour une erreur inférieure à cinq degrés sur l'alignement de la polarisation des faisceaux on peut obtenir une mesure d'une température de l'ordre du milli-Kelvin avec une précision de l'ordre de 10 %. Pour mesurer des températures de l'ordre du dixième de milli-Kelvin au même degré de précision on peut baisser la puissance des faisceaux pompe et sonde.

Ce degré de précision sur l'alignement et la polarisation du faisceau pompe est facilement atteignable si l'on se réfère à la figure 23 page 46. L'alignement du faisceau sonde est néanmoins plus hasardeux, sans pour autant rendre la mesure impossible.

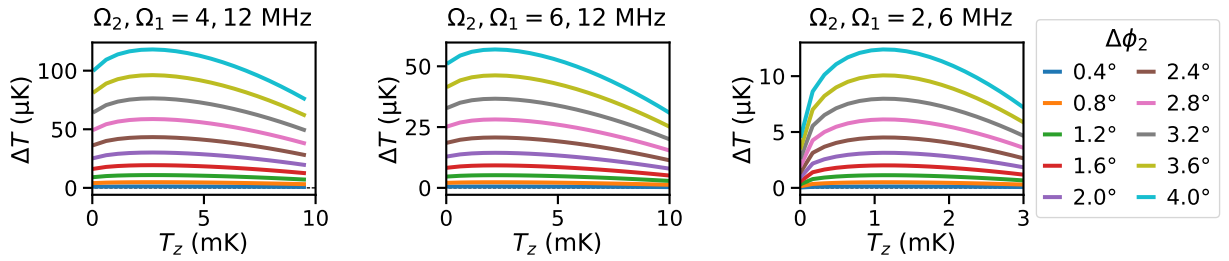


FIGURE 68 – Erreur systématique due aux défauts d'alignement du faisceau pompe

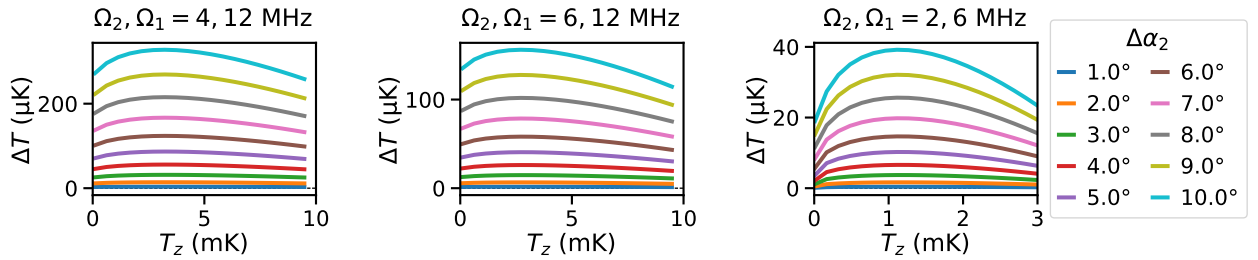


FIGURE 69 – Erreur systématique due aux défauts de polarisation du faisceau pompe

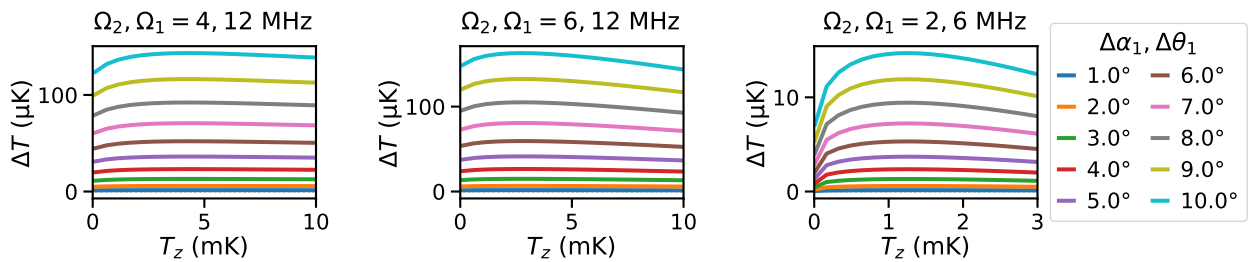


FIGURE 70 – Erreur systématique due aux défaut d'alignement de la polarisation du faisceau sonde avec le champ magnétique.

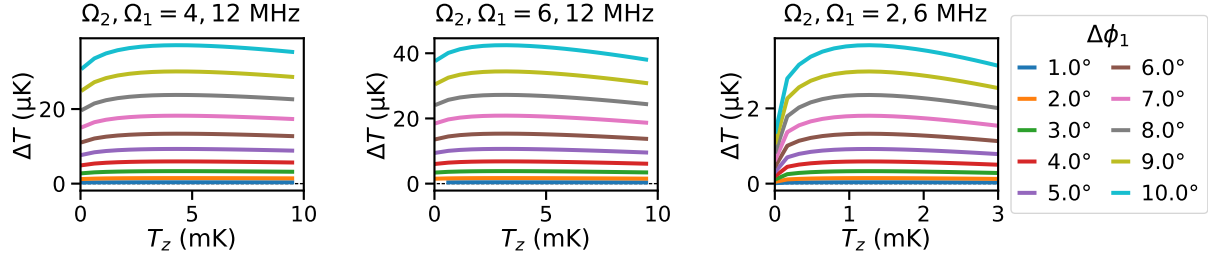


FIGURE 71 – Erreur systématique due à l’ellipticité résiduelle du faisceau sonde.

Ces calculs montrent qu’une grande attention doit être portée à la calibration des fréquences de Rabi des faisceaux pompes et sondes. La stabilité mécanique du montage peut donc rapidement devenir un problème limitant en terme de robustesse la méthode.

Les effets systématiques liés à la polarisation provoquent une surestimation systématique de la température dont l’ordre de grandeur peut aller jusqu’à 0.1 mK pour un choix de fréquence de Rabi des faisceaux pompe et sonde $\Omega_1, \Omega_2 = 4, 12$ MHz , et un mauvais réglage des polarisations et de l’alignement de faisceaux. Cette erreur peut néanmoins être modérée en affinant la raie, du moins tant que l’approximation adiabatique tient.

Les autres effets systématiques dépendent faiblement de la température et n’affectent pas la mesure à plus de quelques dizaines de micro-Kelvin. Ils peuvent également être être modérée en affinant la raie.

4.3.6 résumé des résultats

Nous avons conçu et démontré une technique de thermométrie adaptée au régime du milli-Kelvin. L’exactitude à 0.1 mK de cette technique a été démontrée par comparaison à la théorie du refroidissement Doppler. Les outils théoriques de la partie 3 ont été utilisés pour préciser et repousser les limites théoriques de cette méthode, avec en particulier la démonstration de l’application de cette technique à un piège raide, et l’estimation de l’exactitude et de la précision de cette méthode en fonction des paramètres de l’acquisition.

5 Conclusion générale

Le domaine du calcul quantique est en pleine expansion, mais pour que les promesses deviennent des réalités un grand nombre d'obstacles doivent encore être levés. Pour la plateforme ions piégés, un des facteurs limitant est issu de la difficulté de la mise à l'échelle des démonstrations de principe sans pour autant perdre en fiabilité. Une des voies explorées, les pièges de surface micro-fabriqués offre un nombre important d'avantages théoriques, mais souffre de limitations pratiques liées au problème du taux de chauffage anormal. Si il a été démontré que ce taux de chauffage peut être réduit *via* différentes techniques de nettoyage [43], [60],[5], ou l'opération cryogénique du piège [54],[19], comprendre l'origine ce problème apparaît encore comme une nécessité si l'on veut pouvoir pleinement profiter des opportunités que la technologie des pièges surfaciques micro-fabriqués offrent. L'objectif initial de cette thèse, étudier la dépendance de l'ampleur de ce taux de chauffage avec la distance de l'ion à la surface du piège après nettoyage in-situ par bombardement ionique n'a pas pu être complété. En effet l'enceinte initiale s'est révélée être inadaptée au nettoyage du piège, les angles d'attaque accessibles étant trop rasants. L'équipe a donc dû monter et tester une nouvelle enceinte ce qui n'a pas laissé assez de temps pour remplir l'objectif initial. Les mesures de taux de chauffage en fonction de la distance de l'ion à la surface du piège, déjà entamées, reviendront donc à mon successeur, grâce aux outils développés au cours de ma thèse. En effet, au début de ma thèse, la mesure du taux de chauffage ne pouvait se faire avec les moyens disponibles que par la technique de thermométrie par refroidissement Doppler [31], une technique malheureusement pas assez sensible pour mesurer les taux de chauffage de nos pièges. J'ai donc conçu et déployé une nouvelle méthode de mesure de la température des ions, basée sur deux transitions différentes du niveau fondamental vers le premier niveau excité qui donnent lieu à une situation de résonance noire. Cette méthode permet de mesurer de manière absolue la température d'ion dans un domaine allant de quelques dixièmes de mK à quelques centaines de mK. L'acquisition des données repose sur une technique d'acquisition séquentielle développée par l'équipe au début de ma thèse à laquelle j'ai contribué. L'analyse des données repose sur la modélisation de la relation entre le mouvement de l'ion et son niveau de fluorescence via la résolution des équations de Bloch optiques, grâce à des méthodes numériques que j'ai développé au cours de ma thèse qui permettent d'élargir sensiblement l'étendue des régimes modélisables facilement par ces équations. Si ces méthodes ont fait leurs preuves sur le plan pratique, de nombreuses améliorations pourraient être apportées, tant en terme de vitesse que de contrôle de l'erreur.

Parallèlement à ces activités, ces outils ont aussi été mobilisés dans deux expériences de spectroscopie : la mesure du taux de branchement des transitions $P_{1/2} \rightarrow S_{1/2}$ et $P_{1/2} \rightarrow D_{3/2}$ de l'ion $^{88}\text{Sr}^+$ et la mesure de la fréquence de la transition $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$. En particulier le modèle des équations de Bloch optiques a permis de calibrer les paramètres expérimentaux et d'estimer les erreurs systématiques qui entachent ces mesures. La seconde mesure gagnerait néanmoins à être répétée de sorte à tester sa reproductibilité, et à mieux contrôler et réduire l'incertitude liée à la référence de fréquence qui domine malheureusement le résultat final à ce jour.

A calcul des potentiels des pièges planaires

Pour une électrode polygonale de sommets $(\overrightarrow{OM}_k = \vec{r}_k = (x_k, 0, z_k))_{0 \leq k < N}$ incluse dans un plan de masse infini, la potentiel électrostatique généré dans le demi-espace supérieur se calcule à l'aide des formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{x + iz}{r + y} \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
 Z_k &= Z(\vec{r} - \vec{r}_k) \quad , \quad r_k = r(\vec{r} - \vec{r}_k) \\
 \alpha_k &\equiv (\vec{e}_x, \widehat{M_k M_{k-1}}) [\pi] \quad , \quad M_{-1} = M_{N-1} \quad , \quad M_N = M_0 \\
 V_k &= \arg \left(1 - (Z_k e^{-i\alpha_k})^2 \right) - \arg \left(1 - (Z_k e^{-i\alpha_{k+1}})^2 \right) \\
 &= \text{Im} \left[\log \left(1 - Z_k e^{-i\alpha_k} \right) + \log \left(1 + Z_k e^{-i\alpha_k} \right) - \log \left(1 - Z_k e^{-i\alpha_{k+1}} \right) - \log \left(1 + Z_k e^{-i\alpha_{k+1}} \right) \right] \\
 V &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} V_k
 \end{aligned} \tag{161}$$

Le champ électrique est donné par $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ soit :

$$\begin{aligned}
 E_{0,k} &= \frac{1}{r_k + y} \left(\frac{1}{e^{i\alpha_k} + Z_k} - \frac{1}{e^{i\alpha_k} - Z_k} - \frac{1}{e^{i\alpha_{k+1}} + Z_k} + \frac{1}{e^{i\alpha_{k+1}} - Z_k} \right) \\
 E_{x,k} &= E_{0,k} \left(\frac{x - x_k}{r_k} Z_k - 1 \right) \\
 E_{y,k} &= E_{0,k} \left(\frac{y}{r_k} + 1 \right) Z_k \\
 E_{z,k} &= E_{0,k} \left(\frac{z - z_k}{r_k} Z_k - i \right) \\
 \vec{E} &= \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \vec{E}_k \right]
 \end{aligned} \tag{162}$$

Où Im désigne l'opérateur partie imaginaire et \arg l'opérateur argument d'un nombre complexe. La dérivation de ces formules découle d'une décomposition du potentiel dans le plan en sous potentiels représentés figure 72 pour lesquels on peut facilement obtenir une expression analytique.

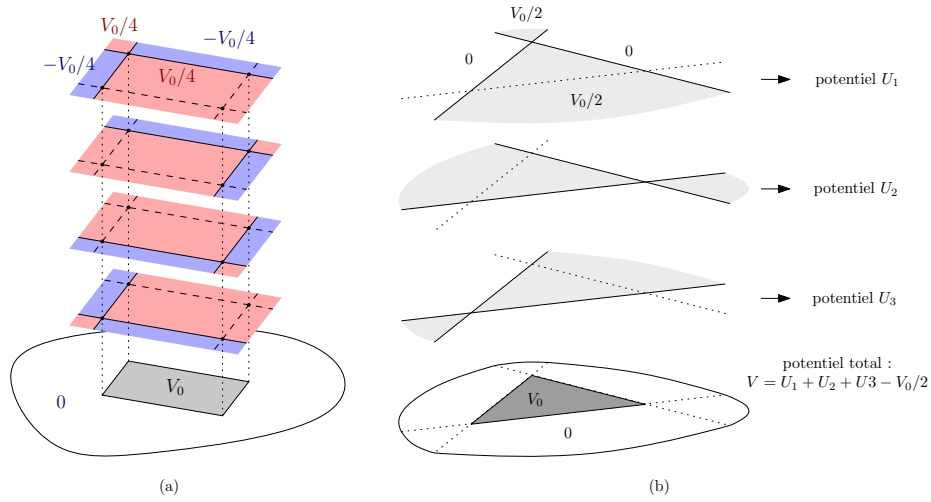


FIGURE 72 – décomposition des électrodes en potentiels papillons pour une électrode rectangulaire (a) et triangulaire (b).

A.1 calcul du potentiel pour une électrode papillon

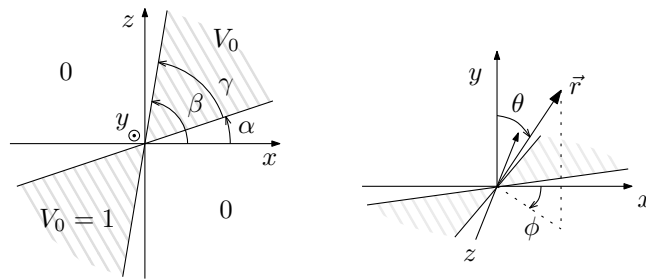


FIGURE 73 – notations pour le calcul du potentiel généré par une électrode papillon

On cherche à résoudre l'équation de Laplace $\nabla^2 V_{\alpha\beta} = 0$ pour les conditions aux limites représentée figure 73 :

$$V_{\alpha\beta}(r, \pi/2, \phi) = \begin{cases} 1, & \alpha < \phi < \beta \text{ ou } \alpha + \pi < \phi < \beta + \pi \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $\gamma \equiv \beta - \alpha [2\pi] \in]0, \pi[$ pour éviter le recouvrement des deux ailes.

Ce problème est invariant par dilatation de centre O , on peut donc chercher une solution sans dépendance en r : $V_{\alpha\beta} \equiv V_{\alpha\beta}(\theta, \phi)$. Par ailleurs la périodicité en θ du problème nous incite à effectuer une décomposition supplémentaire avant de recourir à la méthode de séparation des

variables pour calculer le potentiel :

$$V_{\alpha\beta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n g_n(\theta) e^{in\phi} \quad (163)$$

$$g_n(\pi/2) = 1 \quad (164)$$

Où les coefficients c_n sont obtenus par développement en série de Fourier des conditions aux limites :

$$c_{2n} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-2in\phi} d\phi \quad (165)$$

$$= \frac{1}{2in\pi} (e^{-2in\alpha} - e^{-2in\beta}) \quad (166)$$

$$c_{2n+1} = 0 \quad (167)$$

Et $U_n = g_n(\theta) e^{in\phi}$ est une solution de l'équation de Laplace :

$$\begin{aligned} \nabla^2 U_n &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{(r \sin(\theta))^2} \left[\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial U_n}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 U_n}{\partial \phi^2} \right] \\ &= 0 + \frac{e^{in\phi}}{(r \sin(\theta))^2} \left[\sin(\theta) \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{dg_n}{d\theta} \right) - n^2 g_n \right] = 0 \end{aligned} \quad (168)$$

Pour résoudre cette equation, on effectue le changement de variable :

$$u(\theta) = \tan(\theta/2) \quad (169)$$

$$\sin(\theta) \frac{d \cdot}{d\theta} = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \frac{du}{d\theta} \frac{d \cdot}{du} \quad (170)$$

$$= \frac{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{2 \cos^2(\theta/2)} \frac{d \cdot}{du} \quad (171)$$

$$= u \frac{d \cdot}{du} \quad (172)$$

$$(173)$$

l'équation (168) devient alors :

$$u \frac{d}{du} \left(u \frac{dg_n}{du} \right) - n^2 g_n = 0 \quad (174)$$

de solutions triviales :

$$g_n = au^n + b/u^n \quad (175)$$

Les conditions au limites $u(0) = 0$ et $u(\pi/2) = 1$, imposent donc :

$$U_n = \tan(\theta/2)^{|n|} e^{in\phi} \quad (176)$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} Z &= \tan(\theta/2)e^{i\phi} \\ &= \frac{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{2 \cos(\theta/2)^2} e^{i\phi} \\ &= \frac{\sin(\theta)e^{i\phi}}{1 + \cos(\theta)} \\ Z &= \frac{x + iz}{r + y} \end{aligned} \quad (177)$$

Pour obtenir :

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta} &= \frac{\beta - \alpha}{\pi} - \frac{1}{2i\pi} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(Ze^{-i\alpha})^2}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(Ze^{-i\beta})^2}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(Z^*e^{i\alpha})^2}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(Z^*e^{-i\beta})^2}{n} \right] \\ &= \frac{\beta - \alpha}{\pi} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\log \left(1 - (Ze^{-i\alpha})^2 \right) - \log \left(1 - (Ze^{-i\beta})^2 \right) \right] \\ V_{\alpha\beta} &= \frac{\beta - \alpha}{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\arg \left(1 - (Ze^{-i\alpha})^2 \right) - \arg \left(1 - (Ze^{-i\beta})^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (178)$$

A.2 passage à une électrode polygonale

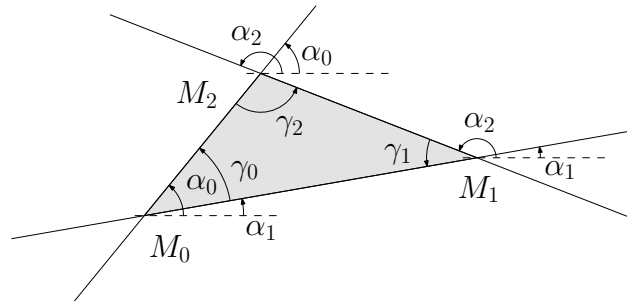


FIGURE 74 – notations pour l'écriture du potentiel généré par une électrode triangulaire en tant que somme de potentiels papillons.

Considérons un triangle direct de sommets (M_0, M_1, M_2) inclus dans le plan (xOz) , en utilisant les notations de la figure 74 on peut écrire :

$$Z_k = Z(x - x_k, y, z - z_k) \quad (179)$$

$$V_k = \arg \left(1 - (Z_k e^{-i\alpha_k})^2 \right) - \arg \left(1 - (Z_k e^{-i\alpha_{k+1}})^2 \right) \quad (180)$$

$$\alpha_k \equiv (\vec{e}_x, \widehat{M_k M_{k-1}}) [\pi], \quad M_{-1} = M_2, \quad M_3 = M_0 \quad (181)$$

$$V = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2}{2\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^2 V_k \quad (182)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^2 V_k \quad (183)$$

Cette formule se généralise aisément à un polygone à N sommets :

$$V = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} V_k$$

$$Z_k = Z(x - x_k, y, z - z_k) \quad (184)$$

$$\alpha_k \equiv (\vec{x}, \widehat{M_k M_{k-1}}) [\pi], \quad M_{-1} = M_{N-1}, \quad M_N = M_0$$

$$V_k = \left[\arg \left(1 - (Z_k e^{-i\alpha_k})^2 \right) - \arg \left(1 - (Z_k e^{-i\alpha_{k+1}})^2 \right) \right]$$

En effet, en utilisant les notations de la figure 75 on voit qu'en collant un triangle sur le côté d'un polygone à N sommets, on peut généraliser la formule à un polygone à $N + 1$ sommets :

$$V = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N-2} \left(V_k + V_N \right) \quad (185)$$

$$+ \arg \left(1 - (Z_0 e^{-i\alpha_0})^2 \right) - \arg \left(1 - (Z_0 e^{-i\beta})^2 \right) \quad (186)$$

$$+ \arg \left(1 - (Z_0 e^{-i\beta})^2 \right) - \arg \left(1 - (Z_0 e^{-i\alpha_1})^2 \right) \quad (187)$$

$$+ \arg \left(1 - (Z_{N-1} e^{-i\alpha_{N-1}})^2 \right) - \arg \left(1 - (Z_{N-1} e^{-i\beta})^2 \right) \quad (188)$$

$$+ \arg \left(1 - (Z_{N-1} e^{-i\beta})^2 \right) - \arg \left(1 - (Z_{N-1} e^{-i\alpha_N})^2 \right) \quad (189)$$

$$V = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^N V_k \quad (190)$$

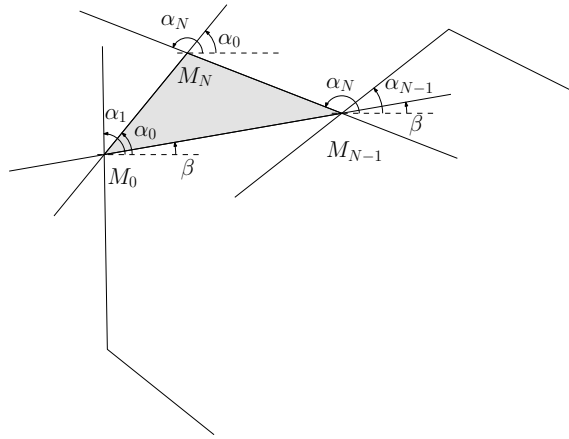


FIGURE 75 – Notations pour la démonstration par récurrence de la formule (184)

B cavité de transfert de cohérence

Dans cette annexe, je vais présenter en détail comment on calcule la dérive en fréquence des lasers lockés sur la cavité de transfert de cohérence à partir des données expérimentales.

Pour rappel, le fonctionnement de l'asservissement repose sur l'acquisition de l'intensité transmise ou réfléchie par la cavité en fonction du voltage appliqué à un actionneur piezo-électrique permettant de faire varier la longueur de la cavité. En effet, les variations relatives de la position de ces pics renseigne sur la dérive relative en fréquence des lasers concernés.

Considérons un laser de longueur d'onde λ_0 et notons n_0 l'indice optique de l'air pour cette longueur d'onde. Si on note le chemin optique du faisceau : $L_0 = n_0 L$, les maxima de transmission de la cavité se produisent pour : $\frac{L_0}{\lambda_0} \in \mathbb{N}$.

On note p_k la position des pics sur la trace acquise, et p_{ref} la position du milieu de la trace. On peut alors modéliser la réponse relative de la cavité au balayage du piezo sous la forme :

$$L_0(p) = L_{0,ref} + \lambda_0 P(p - p_{ref})$$

Où P est un polynôme d'interpolation. Le choix du degré de P dépend du niveau de non linéarité de la réponse de l'actionneur piezo-électrique de la cavité.

Numérotions les positions p_k des pics de la première trace obtenue de 0 à K . Sans perte de généralité on peut supposer que $P(p_0 - p_{ref}) = 0$. Dans ces conditions $L_{0,ref}$ est un multiple entier de λ_0 , $L_{0,ref} = m\lambda_0$ et :

$$L_0(p_k) - L_{0,ref} = \lambda_0 P_0(p_k - p_{ref}) = k\lambda_b$$

Soit :

$$P_0(p_k - p_{ref}) = k \tag{191}$$

Cela nous permet d'ajuster les coefficients de P sur les données expérimentales.

Au temps t' , la longueur moyenne de la cavité peut avoir changée ainsi que la longueur d'onde du laser, mais si l'on peut identifier les pics de la trace au temps t avec ceux de la trace au temps t' alors on peut écrire $L_0(p_k) = L'_0(p'_k)$ et donc $L_{0,ref}/\lambda_0 = L'_{0,ref}/\lambda'_0$ soit $L'_{0,ref} - L_{0,ref} = \frac{\delta\lambda_0}{\lambda_0} L_{0,ref}$.

Par conséquent :

$$\Delta L_0 = L'_0(p_{ref}) - L_0(p_{ref}) = \frac{\delta\lambda_0}{\lambda_0} L_{0,ref} + \lambda_0 [P'_0(0) - P_0(0)] \tag{192}$$

Dans cette équation ΔL_0 est une inconnue mais si l'on dispose de deux lasers, on peut écrire :

$$L_1(p_{ref}) = \frac{n_1}{n_0} L_0(p_{ref}) \quad (193)$$

$$\Delta L_1 = \frac{n'_1}{n'_0} L'_0(p_{ref}) - \frac{n_1}{n_0} L_0(p_{ref}) \quad (194)$$

$$\approx (\Delta n_1 - \Delta n_0) L + \Delta L_0 \quad (195)$$

Si le premier laser est stable en fréquence on peut alors écrire :

$$\frac{\delta \lambda_1}{\lambda_1} = (\Delta n_0 - \Delta n_1) + \frac{\lambda_1}{L} [P'_1(0) - P_1(0)] - \frac{\lambda_0}{L} [P'_0(0) - P_0(0)] \quad (196)$$

C calcul de la forme de raie en repompage incohérent

Dans cette annexe nous allons démontrer la formule (119) page 81.

Les taux de désexcitation spontanée des états $P_{1/2}$ et $P_{3/2}$ sont notés Γ_1 et Γ_2 .

les populations ρ_{pp} sont notée directement p où $p \in \{g_0, g_1, e_0, e_1, g'_0, \dots\}$

Les probabilité de branchement $\alpha, \beta, p = p_0 + p_1 + p_2$ vérifient $\alpha + \beta + p = 1$. Par ailleurs, $q = q_0 + q_1$

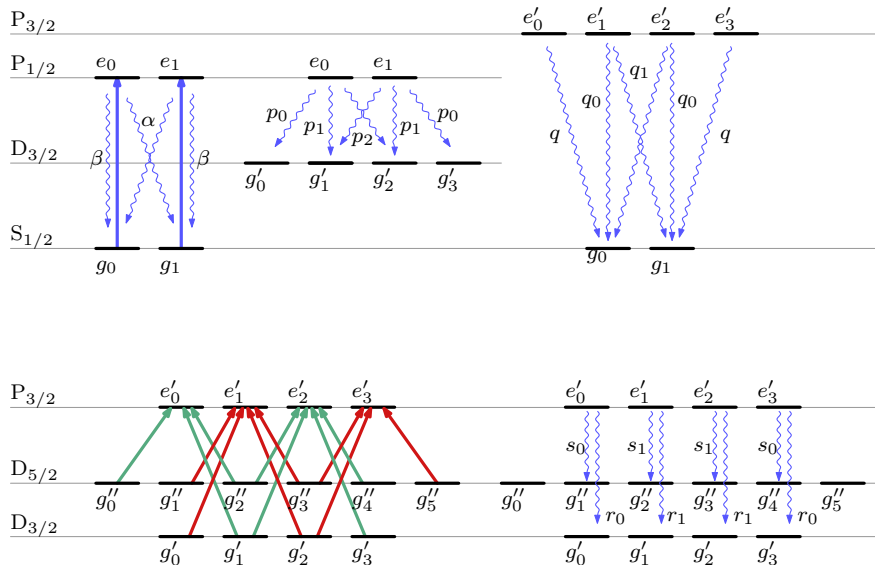


FIGURE 76 – notations

C.1 Découplage des équations de Bloch pour chaque sous système

On voit que l'on a quatre groupes de sous-états Zeeman couplés uniquement par l'émission spontanée :

- $G_0 = e_0, g_0$
- $G_1 = e_1, g_1$
- $R_0 = g'_0, g'_2, g''_0, g''_2, e'_1, e'_3$
- $R_1 = g'_1, g'_3, g''_1, g''_3, e'_0, e'_2$

Le bilan des OBE pour chacun de ces groupes donne :

$$G_0 : \Gamma_1(\alpha(e_0 - e_1) + pe_0) = \Gamma_2(qe'_0 + q_0e'_1 + q_1e'_2) \quad (197)$$

$$G_1 : \Gamma_1(\alpha(e_1 - e_0) + pe_1) = \Gamma_2(qe'_3 + q_0e'_2 + q_1e'_1) \quad (198)$$

$$R_0 : \Gamma_1((p_0 + p_2)e_0 + p_1e_1) = \Gamma_2((s_0 + r_0)(e'_0 - e'_3) + (s_1 + r_1)(e'_2 - e'_1) + qe'_0 + (q_0 + q_1)e'_2) \quad (199)$$

$$R_1 : \Gamma_1((p_0 + p_2)e_1 + p_1e_0) = \Gamma_2((s_0 + r_0)(e'_3 - e'_0) + (s_1 + r_1)(e'_1 - e'_2) + qe'_3 + (q_0 + q_1)e'_1) \quad (200)$$

En manipulant ces équations selon les opérations suivantes : $G_0 - G_1, R_0 - R_1, G_0 - R_0$ on obtient les relations suivantes :

$$\Gamma_1(2\alpha + p)(e_0 - e_1) = \Gamma_2(q(e'_3 - e'_0) + (q_0 - q_1)(e'_2 - e'_1)) \quad (201)$$

$$\Gamma_1 p_0(e_0 - e_1) = \Gamma_2((2s_0 + 2r_0 + q)(e'_0 - e'_3) + (2s_1 + 2r_1 + q)(e'_2 - e'_1)) \quad (202)$$

$$\Gamma_1(\alpha + p_1)(e_0 - e_1) = \Gamma_2((s_0 + r_0)(e'_3 - e'_0) + (q_0 - s_1 - r_1)(e'_1 - e'_2)) \quad (203)$$

Il s'agit d'un système linéaire à trois inconnues $(e_0 - e_1)$, $(e'_0 - e'_3)$ et $(e'_2 - e'_1)$. Ce système est non dégénéré, par conséquent l'unique solution est triviale :

$$e_0 = e_1 = e \quad (204)$$

$$e'_0 = e'_3 = e'_a \quad (205)$$

$$e'_1 = e'_2 = e'_b \quad (206)$$

En utilisant la relation obtenue en calculant $G_0 + G_1$ on obtient :

$$\Gamma_1 p(e_0 + e_1) = \Gamma_2 q(e'_0 + e'_3 + e'_1 + e'_2) \quad (207)$$

$$\Gamma_1 p e = \Gamma_2 q(e'_a + e'_b) \quad (208)$$

Les termes d'émission spontanée concernant les populations des états g_0 et g_1 s'écrivent alors :

$$g_0 : \Gamma_1(\alpha e_1 + \beta e_0) + \Gamma_2(qe'_0 + q_0e'_1 + q_1e'_2) = \Gamma_1(\alpha + \beta)e + \Gamma_2(qe'_a + (q_0 + q_1)e'_b) = \Gamma_1 e \quad (209)$$

$$g_1 : \Gamma_1(\alpha e_0 + \beta e_1) + \Gamma_2(qe'_3 + q_0e'_2 + q_1e'_1) = \Gamma_1(\alpha + \beta)e + \Gamma_2(qe'_a + (q_0 + q_1)e'_b) = \Gamma_1 e \quad (210)$$

De même on peut éliminer toute référence à e_0 et e_1 dans les bilans d'émission spontanée des groupes R_0 et R_1 .

On peut alors découpler les équations régissant chacun des sous groupes G_0, G_1, R_0, R_1 : la matrice densité est diagonale par bloc dans cette base et les OBE sont découplées entre chaque bloc. En particulier les groupes G_1 et G_0 vérifient les OBE d'un système à deux niveaux de paramètres respectifs :

$$G_0 : \Delta + \delta, \Omega_-, \Gamma_1 \quad (211)$$

$$G_1 : \Delta - \delta, \Omega_+, \Gamma_1 \quad (212)$$

La solution stationnaire des OBE est alors de la forme :

$$\rho = \begin{bmatrix} b\rho_B & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{R_0} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{R_1} \end{bmatrix} \quad (213)$$

$$\rho_B = \begin{bmatrix} (1-a)\rho_0(\Delta + \delta, \Omega_-, \Gamma_1) & 0 \\ 0 & a\rho_0(\Delta - \delta, \Omega_+, \Gamma_1) \end{bmatrix} \quad (214)$$

$$(215)$$

C.2 Effet du champ magnétique

On va recombinaer les groupes G_1 et G_2 pour calculer ρ_B , la matrice densité du système si $D_{3/2}$ n'était pas couplé à $P_{1/2}$ via l'émission spontanée.

On part de la relation $e_0 = e_1$:

$$(1-a)\rho_{0,ee}(\Delta + \delta, \Omega_-) = a\rho_{0,ee}(\Delta - \delta, \Omega_+) \quad (216)$$

$$a = \frac{\rho_{0,ee}(\Delta + \delta, \Omega_-)}{\rho_{0,ee}(\Delta + \delta, \Omega_-) + \rho_{0,ee}(\Delta - \delta, \Omega_+)} \quad (217)$$

Soit pour $\rho_{B,ee} = \rho_{B,e_0e_0} + \rho_{B,e_1e_1}$:

$$\rho_{B,ee} = \frac{2\rho_{0,ee}(\Delta - \delta, \Omega_+)\rho_{0,ee}(\Delta + \delta, \Omega_-)}{\rho_{0,ee}(\Delta + \delta, \Omega_-) + \rho_{0,ee}(\Delta - \delta, \Omega_+)} \quad (218)$$

$$= \frac{2}{1/\rho_{0,ee}(\Delta + \delta, \Omega_-) + 1/\rho_{0,ee}(\Delta - \delta, \Omega_+)} \quad (219)$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{(\Delta + \delta)^2 + \gamma^2}{\Omega_-^2} + \frac{(\Delta - \delta)^2 + \gamma^2}{\Omega_+^2}} \quad (220)$$

On introduit alors les paramètres :

$$\Omega^2 = \frac{2}{\frac{1}{\Omega_+^2} + \frac{1}{\Omega_-^2}} \quad (221)$$

$$P = \frac{\Omega_-^2 - \Omega_+^2}{\Omega_+^2 + \Omega_-^2} = \left(\frac{1}{\Omega_+^2} - \frac{1}{\Omega_-^2} \right) \frac{\Omega^2}{2} \quad (222)$$

Pour pouvoir écrire :

$$\rho_{B,ee} = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{\Delta^2 + \delta^2 - 2P\Delta\delta + \gamma^2 + \Omega^2} \quad (223)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{(\Delta - P\delta)^2 + (1 - P^2)\delta^2 + \gamma^2 + \Omega^2} \quad (224)$$

$$\rho_{B,ee} = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{(\Delta - \delta_B)^2 + \gamma_{eff}^2 + \Omega^2} \quad (225)$$

$$\delta_B = P\delta \quad (226)$$

$$\gamma_{eff}^2 = (1 - P^2)\delta^2 + \gamma^2 \quad (227)$$

C.3 Effet des états noirs

On peut maintenant finir le calcul en calculant b . Pour cela on part de la relation $p\Gamma_1e = q\Gamma_2e'$ et on introduit le paramètre :

$$\Gamma_r = \frac{e'_a + e'_b}{\rho_D} q\Gamma_2 \quad (228)$$

Où ρ_D est la somme des populations dans les niveaux $D_{3/2}, D_{5/2}$ et $P_{3/2}$. La relation $\text{Tr}[\rho] = 1$

permet alors d'écrire pour $\rho_{ee} = e_0 + e_1 = b\rho_{B,ee}$:

$$1 - b = \rho_D = b \frac{p\Gamma_1}{\Gamma_r} \rho_{B,ee} \quad (229)$$

$$\rho_{ee} = \frac{\rho_{B,ee}(\Delta, \Omega, \Gamma, B)}{1 + \frac{p\Gamma_1}{\Gamma_r} \rho_{B,ee}(\Delta, \Omega, \Gamma, B)} \quad (230)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\Omega^2}{(\Delta - \delta_B)^2 + \gamma_{eff}^2 + \frac{1}{2}\Omega^2(2 + \frac{p\Gamma_1}{\Gamma_r})} \quad (231)$$

Ce qui clôt la démonstration.

D OBE pour un ion en mouvement

À une dimension, au premier ordre en q , pour ω la fréquence du mouvement séculaire et Ω la fréquence de la tension de piégeage RF, pour des oscillations d'amplitude X_0 et un décalage par rapport au point de compensation δ_X , on peut écrire (cf equation (12) page 19) :

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\Omega}{2} \sqrt{a + \frac{q^2}{2}} \\ x(t) &= (\delta_X + X_0 \cos(\omega t + \varphi)) \left(1 + \frac{q}{2} \cos(\Omega t)\right) \\ &= \delta_X \left(1 + \frac{q}{2} \cos(\Omega t)\right) + X_0 \left[\cos(\omega t + \varphi) + \frac{q}{4} \cos((\omega + \Omega)t + \varphi) + \frac{q}{4} \cos((\omega - \Omega)t + \varphi)\right] \\ v(t) &= -\delta_X \frac{q}{2} \Omega \sin(\Omega t) + X_0 \left[\omega \sin(\omega t + \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{4} (\omega + \Omega) \sin((\omega + \Omega)t + \varphi) + \frac{q}{4} (\omega - \Omega) \sin((\omega - \Omega)t + \varphi)\right]\end{aligned}$$

Où a et q définis dans l'équation (9) page 18 sont des paramètres sans dimensions caractérisant l'amplitude des champs statiques et RF respectivement.

Le désaccord affecté par l'effet Doppler s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\Delta_{pq}(t) &= \delta_{pq,0} + \\ &\quad \frac{1}{2i} k_{pq,x} \delta_X \Omega \frac{q}{2} [e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}] + \\ &\quad \frac{1}{2i} k_{pq,x} X_0 \omega \left[e^{i(\omega t + \varphi)} - e^{-i(\omega t + \varphi)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{4} \left(1 + \frac{\Omega}{\omega}\right) (e^{i((\omega + \Omega)t + \varphi)} - e^{-i((\omega + \Omega)t + \varphi)}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{4} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right) (e^{i((\omega - \Omega)t + \varphi)} - e^{-i((\omega - \Omega)t + \varphi)}) \right]\end{aligned}$$

En pratique $a \ll q \ll 1$: le confinement RF domine les champs statiques, et donc $\Omega \approx 2\sqrt{2}\omega/q$. Par conséquent l'amplitude de la contribution du micro-mouvement à la modulation du désaccord est du même ordre de grandeur que celle du mouvement séculaire.

On souhaite utiliser les équations de la partie 3.3.2 page 64 pour calculer la matrice densité de l'ion en mouvement dans le piège. Ces équations peuvent se ramener à un système linéaire $L\vec{\sigma} = \vec{u}$ où L est tiré de l'équation (83) page 65, $\vec{\sigma}$ est une forme vectorisée des coefficients du développement en polynôme trigonométrique de la matrice densité, et \vec{u} est tiré des conditions de normalisation (69) page 57.

Les fréquences à prendre en compte dans le développement en série trigonométrique de la

$$K_{pq} = k_{pq,x} \quad (235)$$

avec L_0 la matrice $R \times R$ du système au repos et Id la matrice identité de taille R . Les matrices B sont de taille $R(2M + 1)$. Notons que les blocs B ne sont pas inversibles car $\vec{k}_{pp} = 0$. En revanche les blocs D_n le sont en prenant en compte la condition de normalisation (69) page 57. Il est probable que cette structure très particulière puisse être exploitée pour accélérer les calculs, de plus un schéma itératif permettrait d'estimer l'erreur commise lors de l'approximation. En effet comme on le voit sur la figure 77 la solution à N bandes latérales est une bonne approximation de la solution à $N + 1$ bandes latérales, on peut aussi noter sur cette figure que la convergence est exponentielle, la vitesse de convergence dépend néanmoins de l'énergie du mouvement. Mais pour l'instant le programme de résolution du système linéaire ne prend qu'un nombre de bandes fixé et il n'y a pas de contrôle de l'erreur due à la troncature du système réel.

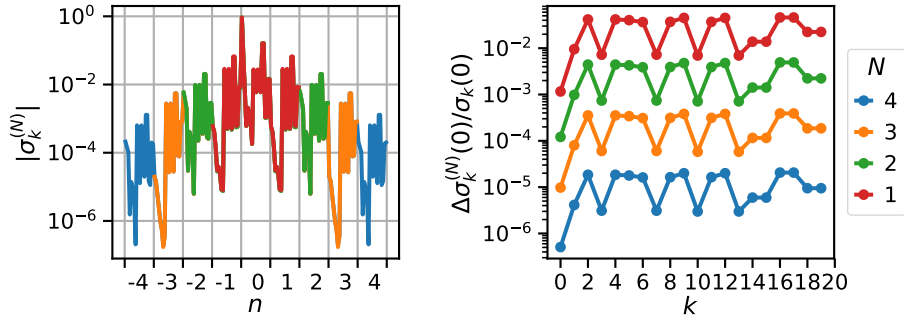


FIGURE 77 – À gauche module des éléments de l'estimation la décomposition spectrale de la matrice densité $\sigma_k^{(N)}$ pour un ion en mouvement et plusieurs nombre de bandes latérales prise en compte N , groupés par numéro de bande latérale n . À droite le module de l'erreur commise en tronquant le système des OBE sur l'estimation de la valeur moyenne des coefficients la matrice densité en fonction de leur index k dans la forme vectorisée de la matrice densité. La configuration utilisée correspond à celle présentée dans la figure 46 page 94.

Les temps caractéristique de l'évolution des états interne de l'ion, évalués à partir des résultats de la partie 3.3.3 page 65 est peu affectée par le mouvement, comme on peut le voir sur la figure 78.

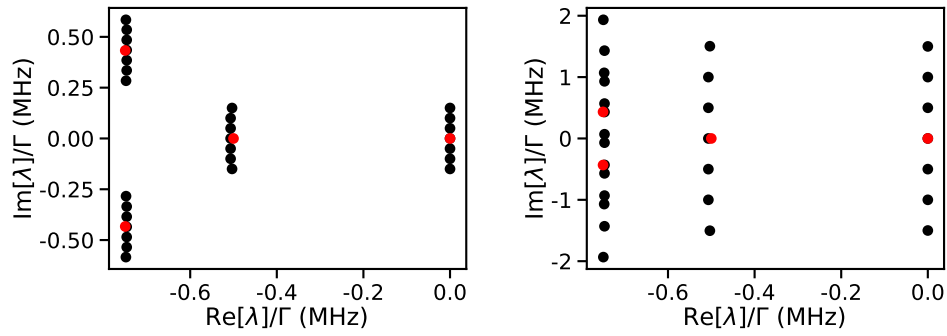


FIGURE 78 – Valeurs propres λ des matrices L pour un atome à deux niveaux en mouvement harmonique dans le piège à une fréquence de 1 MHz à gauche et 10 MHz à droite. Les points rouges correspondent à un ion au repos. Les paramètres utilisés sont : $\Gamma, \Omega, \Delta = 20, 10, 0$ MHz. L'énergie du mouvement est de $kb \times 5$ mK. La partie réelle des groupes de valeurs propres donnent les temps caractéristique d'évolution des états internes de l'ion, on note que le mouvement de l'ion n'a que très peu d'effet sur eux.

E Code de construction du système des OBE

Cette section reproduit le code utilisé pour construire la matrice des équations de Bloch Optique tel que décrites dans la partie 3 page 49, et explique succinctement la façon de l'utiliser l'aide d'un exemple basé sur la configuration présentée dans la figure 79.

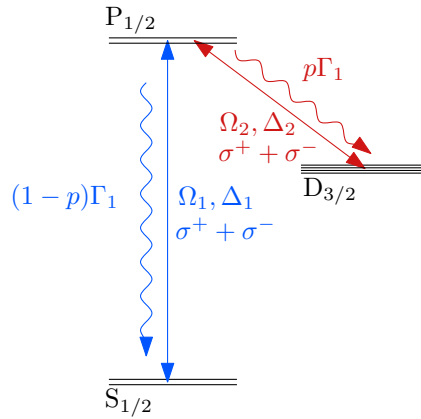


FIGURE 79 – Configuration et niveaux utilisés dans l'exemple.

E.1 exemple

Le code utilise plusieurs librairies standard de `python` ainsi qu'un module que j'ai écrit au cours de ma thèse :

```
import numpy as np #numeric calculus
import sympy as sy #symbolic calculus
import OBE #stores the ion structure and calculate the system matrix
```

La première étape est de définir les niveaux et les symboles qui permettent de caractériser le système :

```
levels_names = ['S1/2', 'P1/2', 'D3/2']
levels_degeneracies = [2,2,4]
levels_l = [0,1,2]

Delta1, Delta2 = sy.symbols('Delta_1 Delta2', real=True)
Omega1, Omega2 = sy.symbols('Omega_1 Omega_2')
Gamma1 = sy.symbols('Gamma_1', real=True)
p = sy.symbols('p', real=True)

B = sy.Symbol('B', real = True)
```

Il faut ensuite enregistrer dans un objet OBE la structure de l'ion étudié pour la configuration de lasers choisie :

```

Sr = OBE.OBE(levels_names,degeneracies,levels_l)

Sr.sp_decay('P1/2', 'S1/2',p*Gamma1,1)
Sr.sp_decay('P1/2', 'D3/2', (1-p)*Gamma1,1)

Sr.laser('P1/2', 'S1/2',Delta1,np.array([Omega1,0,Omega1]))
Sr.laser('P1/2', 'D3/2',Delta2,np.array([Omega2,0,Omega2]))

Sr.Zeeman(B)

```

On peut alors afficher le détail de la structure de l'ion à l'aide de la commande `print(Sr)` :

```

levels
name, degeneracy, l
S1/2          2  0
P1/2          2  1
D3/2          4  2

states :
['S1/2,-1/2', 'S1/2,+1/2', 'P1/2,-1/2', 'P1/2,+1/2',
 'D3/2,-3/2', 'D3/2,-1/2', 'D3/2,+1/2', 'D3/2,+3/2']

decay channels :
P1/2,-1/2 S1/2,-1/2 Gamma1*p/3
P1/2,-1/2 S1/2,+1/2 2*Gamma1*p/3
P1/2,-1/2 D3/2,-3/2 Gamma1*(-p + 1)/2
P1/2,-1/2 D3/2,-1/2 Gamma1*(-p + 1)/3
P1/2,-1/2 D3/2,+1/2 Gamma1*(-p + 1)/6
P1/2,+1/2 S1/2,-1/2 2*Gamma1*p/3
P1/2,+1/2 S1/2,+1/2 Gamma1*p/3
P1/2,+1/2 D3/2,-1/2 Gamma1*(-p + 1)/6
P1/2,+1/2 D3/2,+1/2 Gamma1*(-p + 1)/3
P1/2,+1/2 D3/2,+3/2 Gamma1*(-p + 1)/2

coherent couplings :
S1/2,-1/2 P1/2,+1/2 -Delta1 -sqrt(6)*conjugate(Omega1)/6
S1/2,+1/2 P1/2,-1/2 -Delta1 sqrt(6)*conjugate(Omega1)/6
P1/2,-1/2 S1/2,+1/2 Delta1 sqrt(6)*Omega1/6
P1/2,-1/2 D3/2,-3/2 Delta2 Omega2/2
P1/2,-1/2 D3/2,+1/2 Delta2 sqrt(3)*Omega2/6
P1/2,+1/2 S1/2,-1/2 Delta1 -sqrt(6)*Omega1/6
P1/2,+1/2 D3/2,-1/2 Delta2 sqrt(3)*Omega2/6
P1/2,+1/2 D3/2,+3/2 Delta2 Omega2/2
D3/2,-3/2 P1/2,-1/2 -Delta2 conjugate(Omega2)/2
D3/2,-1/2 P1/2,+1/2 -Delta2 sqrt(3)*conjugate(Omega2)/6

```

```
D3/2,+1/2 P1/2,-1/2 -Delta2 sqrt(3)*conjugate(Omega2)/6
D3/2,+3/2 P1/2,+1/2 -Delta2 conjugate(Omega2)/2
```

Zeeman shifts :

```
S1/2,-1/2 -B
S1/2,+1/2 B
P1/2,-1/2 -B/3
P1/2,+1/2 B/3
D3/2,-3/2 -6*B/5
D3/2,-1/2 -2*B/5
D3/2,+1/2 2*B/5
D3/2,+3/2 6*B/5
```

Ces informations sont stockées dans divers attributs de l'objet Sr :

On peut alors lancer la construction du système à l'aide des commandes suivantes :

```
#permanently fixed values
default = {Gamma1:21.58,
           p : 0.94498,}

#variable values
variables = (Delta1,Delta2,Omega1,Omega2,B)

#number of iterations to build up the system
Ni =5

Sr.compute_system(Ni,variables,default)
```

Après quoi on peut calculer la matrice densité pour n'importe quel choix de paramètres Delta1 ,Delta2, Omega1 ,Omega2, yB, et extraire les populations qui nous intéressent avec le code suivant :

```
d1,d2,O1,O2,Bz = 0,0,5,12,3
sig = Sr.solve_system(d1,d2,O1,O2,Bz)

#sub population indexes of the 'P1/2' level in sig
iP = Sr.get_index('P1/2',0)
#sub population indexes of the 'S1/2' level in sig
iS = Sr.get_index('S1/2',0)
#sub population indexes of the 'D3/2' level in sig
iD = Sr.get_index('D1/2',0)

P = np.real(np.sum(sig[iP])) #population of the 'P1/2' level
S = np.real(np.sum(sig[iS])) #population of the 'S1/2' level
D = np.real(np.sum(sig[iD])) #population of the 'D3/2' level
```

E.2 code

Le code complet du module OBE est reproduit ci dessous.

```
from __future__ import print_function, division
from collections import defaultdict
```

```
import numpy as np
import sympy as sy
import scipy as sc
import scipy.linalg as li
```

```
from sympy.physics.quantum.cg import CG
```

```
I = sy.I
pi = np.pi
```

Les librairies et fonctions utilisées sont chargées ici, la fonction `CG` calcule les coefficients de Clebsch-Gordan.

```
class OBE:
```

```
    def __init__(self, levels_names, levels_degeneracies, Levels_l):
```

```
        """
```

```
        define the levels of the atom/ion by giving their degeneracies and orbital
        momentum. The names will be used as keys for use in other methods.
```

```
        """
```

```
        N_states = np.sum(levels_degeneracies)
```

```
        self.levels_table = [(name,d,l) for name,d,l in zip(levels_names,
                                                            levels_degeneracies,
                                                            Levels_l)]
```

```
        self.levels_names = {levels_names[k] : k for k in range(len(levels_names))}
```

```
        states_table = []
```

```
        subpop = {}
```

```
        k = 0
```

```
        for name, d in zip(levels_names, levels_degeneracies):
```

```
            if d%2:
```

```
                states_table += [{"0:s},{1:+.0f}"].format(name,m-(d-1)/2)
                                for m in range(d)]
```

```
            else:
```

```
                states_table += [{"0:s},{1:+.0f}/2"].format(name,2*m-d+1)
                                for m in range(d)]
```

```
            subpop[name] = [k+m for m in range(d)]
```

```
            k += d
```

```

self.states_table = states_table
self.subpop = subpop

self.N_states = N_states

self.d = np.array(levels_degeneracies)
self.l = np.array(Levels_l)
self.J = (self.d-1)/sy.S(2)

self.shift = np.zeros(N_states)

self.coherent_coupling = {i:{j:defaultdict(lambda:0)
                             for j in range(N_states)}}
                             for i in range(N_states)}
self.decay_channels = np.zeros((N_states,N_states),dtype=object)
self.decoherence = np.zeros((N_states,N_states),dtype = object)

# to be initialized latter
self.detunings_symbols = set()
self.spectral_support = None
self.nodes_index = None
self.row_indexes = None
self.column_indexes = None
self.V = None
self.values = None
self.subs = None
self.args = None
self.system_size = None

```

Cette partie correspond à l'initialisation des attributs des objets de la classe OBE dont des éléments permettant de gérer les questions d'indexation comme :

levels_names : dictionnaire donnant l'indice correspondant à un sous-niveau dans les listes et matrices stockant les facteurs de Landé associés (**shift**) et les taux de désexcitation spontané (**decay_channel**).

coherent_coupling : une structure stockant des couplages entre les sous niveau au format : $\text{coherent_coupling}[i][j][d] = \Omega$, avec Ω la fréquence de Rabi du couplage entre l'état i et j de désaccord d .

nodes_index : dictionnaire permettant de trouver l'index d'un élément dans la forme vectorisée du développement en polynôme trigonométrique de la matrice densité de l'ion. Pour obtenir l'indice de l'élément $\sigma_{pq}(\delta)$ le format de clé est **(p,q,delta)**.

row_indexes,column_indexes,values : structure stockant les éléments non nuls de la matrice des OBE L sous la forme d'un triplet de coordonnées :

`value(*arg)[i] = L[row_indexes[i],column_indexes[i]]` où `*arg` représente les arguments de la fonction `value` (désaccords, fréquences de Rabi ...), les doublons sont sommés.

Il faut noter que certaines structures ont été modifiées pour adapter une première version du code qui ne permettait pas de gérer le cas des systèmes multiplement connectés, aux dépends de l'homogénéité et de la simplicité du code.

```
def __str__(self):

    print("levels\name, degeneracy, l")
    msg = "{0:8s} {1:7d} {2:2d}"
    for entry in self.levels_table:
        print(msg.format(*entry))

    print("\nstates :")
    print(self.states_table, end = "\n\n")

    print("decay channels :")
    for i in range(self.N_states):
        for f in range(self.N_states):
            Gam = self.decay_channels[f,i]
            if Gam :
                print(self.states_table[i],self.states_table[f],Gam)

    print("\ncoherent couplings :")
    for p in self.coherent_coupling :
        for q in self.coherent_coupling[p] :
            for d in self.coherent_coupling[p][q] :
                print([self.states_table[p],self.states_table[q],
                    d,self.coherent_coupling[p][q][d]])

    print("\nZeeman shifts :")
    for p in range(self.N_states):
        print(self.states_table[p],self.shift[p])
    return ''
```

cette méthode est responsable du formatage de la commande `print(self)`

```
def CgT(self,k,level1,level2):
    """
    Compute algebraic Clebsh gordan coeff table for transition through coupling
    of order k from level2 to level1 <k,q,J2,m2/J1,m1>
        k = 0 : for two level system
        k = 1 : dipolar transition
        k = 2 : quadrupolar transition
    """
```

```

J1 = self.J[level1]
J2 = self.J[level2]

d1 = self.d[level1]
d2 = self.d[level2]

return np.array([[CG(k,q,J1,m1-(d1-1)/sy.S(2),J2,m2-(d2-1)/sy.S(2)).doit()
                 for m2 in np.arange(0,d2)]
                 for m1 in np.arange(0,d1)]
                 for q in np.linspace(-k,k,2*k+1)])

def Zeeman(self,B):
    """
    Calculate the Zeeman shift for each level.
    B is in Bohr magneton divided by h units
    """
    J = self.J
    d = self.d
    l = self.l

    g = 1+2*(2-1)*(J-1)/(2*l+1)

    delta = B*g

    self.shift = np.hstack([delta[k]*(np.arange(d[k])-(d[k]-1)/sy.S(2))
                            for k in range(len(J))])

def sp_decay(self,initial,final,rate,order):
    """
    Add a spontaneous decay channel between initial and final levels
    """
    ln = self.levels_names

    i = ln[initial]
    f = ln[final]

    p = np.sum(self.d[0:i])
    q = np.sum(self.d[0:f])

    C = self.CgT(order,f,i)

    self.decay_channels[q:q+self.d[f],p:p+self.d[i]] = np.sum(C**2*rate,axis=0)

def laser(self,upper_level,lower_level,detuning,rabi_vector):
    """
    Add a coherent coupling between upper_level and lower_level.
    The choice of the upper_level and lower_level impacts the detuning sign
    convention.
    """
    k = len(rabi_vector)

    ln = self.levels_names

```

```

u1 = ln[upper_level]
l1 = ln[lower_level]

d1 = self.d[u1]
d2 = self.d[l1]
p = np.sum(self.d[0:u1])
q = np.sum(self.d[0:l1])

C = self.CgT(k//3,u1,l1)

Cb = np.sum(C*rabi_vector.reshape((k,1,1)),axis = 0)
Cbdag = np.conjugate(Cb).transpose()

self.detunings_symbols |= detuning.free_symbols

for i in range(d1):
    for j in range(d2):
        if Cb[i,j] != 0:
            self.coherent_coupling[p+i][q+j][detuning] += Cb[i,j]/2
            self.coherent_coupling[q+j][p+i][-detuning] += Cbdag[j,i]/2

def compute_system(self,length,args,subs = None,modules = None):
    """
    Compute the matrix of the numerical Bloch Optical Equation for length
    iterations.
    Matrix coefficients are stored in the coordinate format:
        M[row_indexes[k],column_indexes[k]] = values[k]
    if two entries have the same row and column indexes they are implicitly
    summed.
    The result is stored in two arrays self.row_indexes and self.column_indexes
    as well as a lambda function self.values taking the arguments in the order
    of the args tuple and returning the values array.
    the modules argument can be used to implement special functions such as
    bessel functions in the definition of the matrix elements.
    """

    if subs is None:
        subs = {}
    if modules is None:
        modules = []

    lexOrder = sorted(list(self.detunings_symbols),key = str)

    def key_node(node):
        """
        assuming that detunings are made up of linear combination
        of sympy symbols, we order them in lexicographic order
        with priorities given by the lexOrder list.
        For instance :
            LexOrder = [Delta1,Delta2,omega]
            Delta1-omega < Delta1 < Delta1 + omega
        """

```

```

        Delta2-Delta1+omega < Delta1-Delta2-omega
        ...
        This way we can ensure consistency in the vectorization
        of the system
        """
        if node[2] == 0:
            return (node[0],node[1])+tuple(0 for d in lexOrder)
        coeff = node[2].as_coefficients_dict()
        return (node[0],node[1])+tuple(coeff[d] for d in lexOrder)

N_states = self.N_states

#first equation :
#the sum of the mean value of the populations is equal to one
row_indexes = [(0,0,0) for k in range(N_states)]
column_indexes = [(k,k,0) for k in range(N_states)]
values = [sy.S(1) for k in range(N_states)]

nodes = []
groups_indexes = []
population_nodes = set()
previous_nodes = set()
unprocessed_nodes = [(k,k,0) for k in range(N_states)]
next_nodes = set()

print("> System expansion")
for l in range(length) :
    print("    iteration {0:d}/{1:d}".format(l+1,length))
    nodes += unprocessed_nodes
    groups_indexes.append(len(row_indexes))

    population_nodes|={node for node in unprocessed_nodes
                        if node[0] == node[1]}
    for node1 in unprocessed_nodes:
        f1,i1,d1 = node1

        #detuning
        Delta = d1 + self.shift[f1]-self.shift[i1]
        if Delta :
            row_indexes.append(node1)
            column_indexes.append(node1)
            values.append(-I*Delta)
        #spontaneous decay
        if f1 == i1:

            Gamma_i1 = -np.sum(self.decay_channels[:,i1])

            for f2 in range(N_states):
                node2 = (f2,f2,d1)
                Gamma = self.decay_channels[f2,i1]

        #cut off the system

```



```

    if l == length - 1 and not node2 in population_nodes:
        Gamma = 0
        Gamma_i1 += Gamma

    if Gamma:
        next_nodes.add(node2)
        row_indexes.append(node2)
        column_indexes.append(node1)
        values.append(Gamma)

    if Gamma_i1:
        row_indexes.append(node1)
        column_indexes.append(node1)
        values.append(Gamma_i1)

else :
    Gamma = -np.sum(self.decay_channels[:,i1]+
                    self.decay_channels[:,f1])/2

    if Gamma:
        row_indexes.append(node1)
        column_indexes.append(node1)
        values.append(Gamma)

#coherent coupling
for f2 in self.coherent_coupling[f1]:
    for d2 in self.coherent_coupling[f1][f2]:
        node2 = (f2,i1,d1-d2)
        Omega = np.conjugate(self.coherent_coupling[f1][f2][d2])
        next_nodes.add(node2)
        row_indexes.append(node2)
        column_indexes.append(node1)
        values.append(I*Omega)

for i2 in self.coherent_coupling[i1]:
    for d2 in self.coherent_coupling[i1][i2]:
        node2 = (f1,i2,d1+d2)
        Omega = self.coherent_coupling[i1][i2][d2]
        next_nodes.add(node2)
        row_indexes.append(node2)
        column_indexes.append(node1)
        values.append(-I*Omega)

#we extract the new nodes to process for the next iteration
next_nodes = next_nodes.difference(previous_nodes,
                                   set(unprocessed_nodes),
                                   population_nodes)

previous_nodes = unprocessed_nodes
unprocessed_nodes = sorted(list(next_nodes),key = key_node)
next_nodes = set()

print("> building sparse matrix function")
#conversion of the node names to integer indexes.

```

```

self.spectral_support = {(node[0],node[1]) : [] for node in nodes}
for node in nodes:
    self.spectral_support[(node[0],node[1])].append(node[2])

cut = len(nodes)
nodes += list(unprocessed_nodes)
self.nodes_index = {node : k for k,node in enumerate(nodes)}

print("    row index substitution")
row_indexes = np.array([self.nodes_index[node1]
                        for node1 in row_indexes])
print("    column index substitution")
column_indexes = np.array([self.nodes_index[node2]
                            for node2 in column_indexes])
subs = {p : subs[p] for p in subs if not p in args}
print("    default values substitution")
values = np.array([v.subs(subs).evalf() for v in values])

M = row_indexes < cut

self.row_indexes = row_indexes[M]
self.column_indexes = column_indexes[M]
values = values[M]

N_equations = np.max(self.column_indexes)+1

#vector such as M_ij rho(node_j) = V_i
self.V = np.zeros(N_equations)
self.V[self.nodes_index[(0,0,0)]] = 1

print("    function building")
self.values = sy.lambdify(args,values,modules = ["numpy",]+modules)
self.subs = subs
self.args = args

self.system_size = (N_equations,N_equations)
msg = "Done\n"
msg+= "matrix size : {0[0]:d}x{0[1]:d}\n"
msg+= "number of matrix coefficients : {1:d}\n"
print(msg.format(self.system_size,self.row_indexes.size))

```

C'est là que le système des OBE est construit, la transformation de la liste symbolique des coefficients de la forme vectorisée du développement en polynôme trigonométrique de la matrice densité passe par la fonction `lambdify` de `sympy`. Cette fonction est simple d'utilisation mais peu performante, un gain de temps peut être réalisé ici si cela se révèle être nécessaire à l'avenir.

```

def solve_system(self,*args):
    """
    Solve the OBE for the given set of arguments

```

```

the order and nature of the arguments is stored in the self.args tuple
"""

S = sc.sparse.coo_matrix((self.values(*args),
                          (self.row_indexes,self.column_indexes)),
                          shape = self.system_size).toarray()

V = self.V

sol = li.lstsq(S,V,lapack_driver = 'gelsy',
               overwrite_a = True,overwrite_b = True,
               check_finite = False)[0]

return sol

def get_index(self,level,frequency):
    """
    get the node indexes for the substates populations of given level at
    the given frequency.
    """
    i = [self.nodes_index[(k,k,frequency)]]
        for k in self.subpop[level]
        if (k,k,frequency) in self.nodes_index]
    return np.array(i)

```

Precision measurement of the branching fractions of the $5p\ ^2P_{1/2}$ state in $^{88}\text{Sr}^+$ with a single ion in a microfabricated surface trap

Jean-Pierre Likforman, Vincent Tugayé,^{*} Samuel Guibal, and Luca Guidoni[†]*Université Paris-Diderot, Sorbonne Paris Cité, Laboratoire Matériaux et Phénomènes Quantiques, UMR 7162 Centre National de la Recherche Scientifique, F-75205 Paris, France*

(Received 24 November 2015; revised manuscript received 29 March 2016; published 10 May 2016)

We measured the branching fractions for the decay of the $5p\ ^2P_{1/2}$ state of $^{88}\text{Sr}^+$ by applying a recently demonstrated photon-counting sequential method [M. Ramm, T. Pruttivarasin, M. Kokish, I. Talukdar, and H. Häffner, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 023004 (2013)] to a single ion laser cooled in a microfabricated surface trap. The branching fraction for the decay into the $5s\ ^2S_{1/2}$ ground level was found to be $p = 0.9449(5)$. This result is in good agreement with recent theoretical calculations but disagrees with previous experimental measurements, however affected by a one-order-of-magnitude larger uncertainty. This experiment demonstrates that microtrap technology is also applicable in the domain of precision measurements and spectroscopy.

DOI: [10.1103/PhysRevA.93.052507](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.052507)

I. INTRODUCTION

Atomic spectroscopy data provide, from a historical point of view, one of the most important experimental inputs that triggered the development of quantum mechanics (e.g., Ångström measurements of Balmer series of the hydrogen atom). Later on, precision measurements of the characteristic features of atomic transitions (i.e., transition frequencies, levels lifetimes, and branching fractions) allowed for the development of theoretical methods that now aim at a complete understanding of atomic level structures, at least in the simpler cases [1]. The comparison between theory and experiments is then necessary to test these models that are essential for addressing some fundamental questions like parity nonconservation or the search for the electron electric dipole moment [2]. Precise knowledge of atomic properties is also very important for astronomical and cosmological studies [3] in which easily identified atomic lines give precious information about celestial objects. Finally, the advent of optical clocks (that display improved performances with respect to atomic microwave clocks that define the time unit) [4] requires precise models in order to obtain reliable evaluations of systematic frequency shifts that affect accuracy (e.g., blackbody radiation shift [5]). In the case of alkaline-earth elements, the singly ionized state is particularly interesting because theoretical calculations are more precise in the presence of a single valence electron. Singly ionized alkaline-earth elements are also a system of choice for trapped ion based quantum information experiments [6] and are among the species used for precision clocks [4]. Therefore, several experimental techniques have been developed that allow for internal and motional quantum state control [6–8]. By restricting ourselves to the case of heavier alkaline-earth elements (i.e., species with D metastable states), these techniques have been recently applied to obtain precision measurements of spectroscopical quantities on laser-cooled $^{40}\text{Ca}^+$ ions [9–12], $^{138}\text{Ba}^+$ ions [13–15], and $^{88}\text{Sr}^+$ ions [16–19]. In this paper we present the

precision measurement of the branching fractions for the decay of the $5p\ ^2P_{1/2}$ state of $^{88}\text{Sr}^+$. In particular, we measured the probability p and $1 - p$ for the decay of the $5p\ ^2P_{1/2}$ to the $5s\ ^2S_{1/2}$ and $4d\ ^2D_{3/2}$ states to be, respectively, $p = 0.9449(5)$ and $1 - p = 0.0551(5)$. This result can also be expressed in terms of branching ratio $B = \frac{p}{1-p}$ as $B = 17.14(16)$, affected by a fractional uncertainty of 1×10^{-2} .

Experimental spectroscopy concerning Sr ions has been addressed in several papers, the results of which are compiled in the reference [20]. The experimental transition probabilities A_{SP} and A_{PD} for the $5s\ ^2S_{1/2} \rightarrow 5p\ ^2P_{1/2}$ ($\nu = 711$ THz, $\lambda = 422$ nm) and $4d\ ^2D_{3/2} \rightarrow 5p\ ^2P_{1/2}$ ($\nu = 275$ THz, $\lambda = 1092$ nm) transitions listed in this compilation (and in the NIST database [21]) are obtained taking into account measurements of the branching fractions and of the lifetime $\tau_{P_{1/2}}$. Lifetime and branching fractions of the $^{88}\text{Sr}^+ 5p\ ^2P_{1/2}$ level were measured in 1967 by Gallagher in an Argon discharge by Hanle-effect spectroscopy [22]. The lifetime of the $5p\ ^2P_{1/2}$ level was later measured with increased precision with the fast ion-beam technique [23,24]. The NIST database is then based on the two measurements $B = 13.4(2.0)$ [22] and $\tau_{P_{1/2}} = 7.39(7)$ ns [24]. A more recent, albeit quite indirect, experimental measurement of A_{SP} is also given in Ref. [25].

Theoretical works on $^{88}\text{Sr}^+$ are largely motivated by the use the dipole-forbidden “clock” $5s\ ^2S_{1/2} \rightarrow 4d\ ^2D_{5/2}$ Sr^+ transition ($\nu = 446$ THz, $\lambda = 674$ nm) as a secondary frequency standard [16,17,26]. Indeed, in 2006 the International Committee for Weights and Measures included this transition among the recommended secondary representation of the second [27]. The need of exactitude, proper to frequency standards, enforces the accurate calculation of blackbody frequency shift. In order to calculate such a shift, precise determinations of dipole moments of low-lying transition are needed. Such kinds of calculations for $^{88}\text{Sr}^+$ have been performed with increasing precision during recent years [28–32]. Several of these results are resumed and compared in Ref. [5]. Another theoretical calculation of dipole moments can be found in a more recent paper devoted to the estimation of parity nonconservation effects in $^{87}\text{Sr}^+$ and $^{137}\text{Ba}^+$ [33].

The paper is organized as follows. In Sec. II we present the experimental setup and give some details concerning

^{*} Also at Département de Physique, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Université de Lyon, 46 Avenue d’Italie, F-69364 Lyon, France.

[†]luca.guidoni@univ-paris-diderot.fr

the surface trap and the implementation of the sequential method. We present the results in Sec. III, and we discuss the systematic errors and describe the techniques used to determine their contributions to the final result. Finally, in Sec. IV we compare the result to the literature and briefly discuss possible improvements.

II. EXPERIMENTAL METHODS

A. Trapping, cooling, and laser locking

The experiments are based on a symmetric five-wires surface trap [34] with a nominal ion-surface distance $d = 110 \mu\text{m}$ (see Fig. 1). The original purpose of this trap is the study of the anomalous heating problem and it is optimized for single-ion operation. The trap is microfabricated in a cleanroom with standard photolithographic techniques on a silica substrate. The $5\text{-}\mu\text{m}$ -thick gold electrodes are obtained by electroplating [35] with an interelectrode distance of $5 \mu\text{m}$ in the central region of the trap. The chip is glued on a ceramic holder and bonded with $20\text{-}\mu\text{m}$ -diameter gold wires. Filtered static voltages (dc) provided by a DAC computer card (Measurement Computing PCI-DAS) feed the ceramic holder through *in vacuo* screened kapton wires. The trap is driven with a radio-frequency (rf) voltage amplitude $V_{\text{rf}} \sim 150 \text{ V}$ at a frequency of 33.2 MHz and typically displays radial frequencies in the $1.5\text{--}2\text{-MHz}$ range and an axial frequency of $\simeq 200 \text{ kHz}$ for Sr^+ . The trapping potential is tailored (e.g., tilted) by the application of a set of static voltages to the dc electrodes calculated with the matrix approach developed in Ref. [35]. The matrix is derived by the analytical calculation of the electrostatic potential generated by each electrode [36]. The stray electric fields are compensated for using a rf correlation technique [37] adapted to surface traps [35]. We

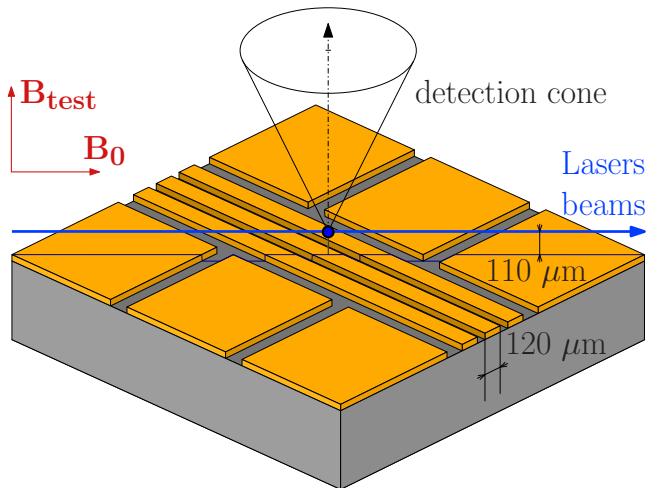


FIG. 1. Schematic view of the surface ion trap. Cooling, repumping, and photoionizing laser beams propagate parallel to the trap surface aligned at 45° with respect to the trap axis. During normal operation, a magnetic field \mathbf{B}_0 of the order of $1 \times 10^{-4} \text{ T}$ defines a quantization axis parallel to the propagation direction of laser beams. While testing systematic effects possibly induced by polarization sensitivity in the detection chain, the magnetic field (B_{test}) has the same amplitude as \mathbf{B}_0 but its direction is orthogonal to the trap surface.

estimate the uncompensated excess micromotion amplitude considering that the sensitivity for a null position is 1 V/m along the transverse direction parallel to the trap surface and 25 V/m in the direction orthogonal to the trap. The corresponding excess micromotion amplitudes are 1 and 12 nm along the parallel and orthogonal directions, respectively (in terms of peak velocity components 0.2 and 2.5 m/s , respectively). Micromotion is neither expected nor detected along the trap axis.

Sr^+ ions are loaded from an oven containing a strontium dendrite (Aldrich, 99.9% pure). Neutral atoms are ionized by driving a two-photon transition towards a self-ionizing level [38]. The photoionizing laser pulses are issued from a frequency doubled Ti:sapphire oscillator (Tsunami, Spectra-Physics) with a central frequency of 695 THz ($\lambda = 431 \text{ nm}$) and a pulse duration of $\simeq 100 \text{ fs}$.

Single trapped $^{88}\text{Sr}^+$ ions are Doppler cooled using the $711\text{-THz } 5s^2S_{1/2} \rightarrow 5p^2P_{1/2}$ optical transition (see Fig. 2). This transition is driven using laser light generated by a commercial extended-cavity GaN laser diode (Toptica DL100). The laser frequency is locked to an atomic reference, taking advantage of the near coincidence ($\nu_{\text{Sr}^+} - \nu_{\text{Rb}} \simeq 440 \text{ MHz}$) between the $^{88}\text{Sr}^+ 5s^2S_{1/2} \rightarrow 5p^2P_{1/2}$ and the $^{85}\text{Rb } 5s^2S_{1/2}(F=2) \rightarrow 6p^2P_{1/2}(F'=3)$ transitions [39]. The $710\,962\,401\,328(40)\text{-kHz}$ absolute frequency of this ^{85}Rb transition has been recently measured by the frequency-comb technique [40]. The electronic signal for laser locking is obtained using a saturated-absorption setup, based on a rubidium cell heated to 100° C . The detuning of the cooling beam with respect to the $5s^2S_{1/2} \rightarrow 5p^2P_{1/2}$ transition is controlled using an acousto-optic modulator (AOM) in a double-pass geometry driven at a frequency around 220 MHz . Disregarding the power used for frequency and intensity stabilization, up to $500 \mu\text{W}$ are available at the output of a single-mode polarization-maintaining optical fiber.

A commercial fiber laser (Koheras Adjustik Y10) drives the $4d^2D_{3/2} \rightarrow 5p^2P_{1/2}$ 275-THz “repumping” transition (see

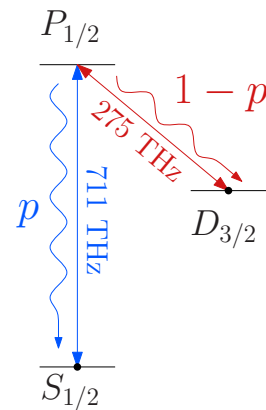


FIG. 2. Low-energy levels of $^{88}\text{Sr}^+$. Two laser sources are used to produce fluorescence cycles of $^{88}\text{Sr}^+$: a cooling laser at 711 THz (421.7 nm) and a repumping laser at 275 THz (1092 nm). Starting in the $5p^2P_{1/2}$ energy level, the electronic excitation can relax either to the ground state (with a probability p) or to the metastable state $4d^2D_{3/2}$ (with probability $1 - p$).

Fig. 2) to avoid the accumulation of the ions into the metastable $4d^2D_{3/2}$ state during the cooling process. This laser has a nominal linewidth of 70 kHz and is stabilized against long-term drifts by a transfer-lock technique using a scanning ring cavity referenced to the stabilized 711-THz laser diode [41,42]. The feedback loop of the lock is, in our case, relatively slow (bandwidth $\simeq 3$ Hz) [43].

During normal operation a magnetic field \mathbf{B}_0 with a magnitude of the order of 1×10^{-4} T defines a quantization axis parallel to the substrate making an angle of 45° with the trap axis. The repumping and cooling laser beams propagate along this quantification axis and their linear polarization is parallel to the trap surface (see Fig. 1). This configuration prevents the ions from being optically pumped into a metastable dark state by the repumping laser alone [44].

Spontaneously emitted 711-THz (“blue”) photons are collected by a large-aperture pair of achromatic lenses (Thorlabs AC508-075-A), spatially filtered with a $150\text{-}\mu\text{m}$ -diameter pinhole, spectrally filtered by an interference filter (Thorlabs FB420-10, 10-nm bandwidth) and detected by a photon-counting photomultiplier head (PMT). We used two different PMT heads in distinct experimental runs (Hamamatsu model H7828 or H10682-210). The measured global detection efficiency ϵ of the setup is $\epsilon \simeq 1.0 \times 10^{-3}$ with the first head and $\epsilon \simeq 1.4 \times 10^{-3}$ with the second head (see below for the description of the measurement technique). The logical pulses at the output of the detector are counted and accumulated by a stand alone microcontroller-based gated counter and transferred to the computer that controls the experiment.

Laser beams impinging on the ion are switched on and off using AOMs in a double-pass geometry driven through rf switches (Mini-Circuits ZYSWA-2-50DR) and then injected in single mode polarization maintaining optical fibers. The measured characteristic switching times for the cooling and repumping beams are shorter than 20 and 80 ns, respectively. A better than -77-dB extinction ratio has been measured on the repumping beam using a lock-in amplifier: as discussed below such a figure is of importance for the estimate of systematic errors. The intensity of the two laser beams impinging on the ion is actively stabilized as described below. At the output of each optical fiber the beam passes through a polarizer and is then sampled by a beam splitter and measured by a photodetector. A gateable servo loop with 10-kHz bandwidth acts on the rf amplitude that drives the AOM in order to keep the measured intensity constant (residual fluctuation smaller than 5%). Active intensity stabilization allows us to improve the control on resonant Rabi frequencies Ω_1 and Ω_2 associated to cooling and repumping beams, respectively. As explained below, resonant Rabi frequencies, together with respective detunings δ_1 and δ_2 , determine the time evolution of the atomic density matrix. In particular, the knowledge of these experimental parameters is needed in order to evaluate systematic errors. We evaluate the resonant Rabi frequencies of cooling and repumping beams by analyzing a fluorescence spectrum obtained in a sequential way, similar to the technique described in Ref. [45]. In particular we scan a probe beam at 711 THz in the presence of the repumping beam at 275 THz slightly detuned with respect to the resonance ($\delta_2 \simeq 0$). In this situation several dark resonances are present in the spectrum [46] that contain information about the parameters

of both lasers. The acquired spectrum is then fitted with the solution of optical Bloch equations (OBEs, see below) that allows us to retrieve four free parameters: $\Omega_1, \Omega_2, \delta_1$, and the magnetic field magnitude. For this analysis, the measurement of the collection efficiency ϵ helps to reduce uncertainties on the determinations of Rabi frequencies. The details of this spectroscopic technique, beyond the scope of this paper, will be given elsewhere. Please note that δ_2 is shifted to $\delta_2 \simeq 2\pi \times 80$ MHz during the measurement of branching fractions. A fully automated procedure is able to detect an ion loss during the data acquisition: in this case a new ion is automatically reloaded. This procedure allowed us to compress the effective time needed in order to achieve a low statistical uncertainty.

B. Sequential acquisition

We use a sequential technique largely inspired by the one applied for the first time by Ramm and coworkers in order to measure the branching fractions of the $4p^2P_{1/2}$ state in $^{40}\text{Ca}^+$ [11]. The same principle has been used more recently for the measurement of branching fractions of the $6p^2P_{1/2}$ state in $^{138}\text{Ba}^+$ [15]. The main differences here, apart from the ion species, are the single-ion operation and the trap technology (microfabricated surface trap versus mechanically assembled macrotraps) that are adopted for practical reasons. Briefly, in our experiment a single $^{88}\text{Sr}^+$ ion is first Doppler cooled and then prepared in the ground state by switching off the cooling beam while the repumping beam stays on.

A first counting window is then opened during which the cooling beam drives the $5s^2S_{1/2} \rightarrow 5p^2P_{1/2}$ transition in the absence of the repumping beam. In this phase the ion should scatter an average number of N_b blue photons ending up in the $4d^2D_{3/2}$ long-lived metastable state [lifetime $\tau_D = 435(4)$ ms [47]]. A second counting window is then opened during which the repumping beam drives the $4d^2D_{3/2} \rightarrow 5p^2P_{1/2}$ transition in the absence of the cooling beam. In this phase the ion should scatter a single $N_r = 1$ blue photon ending up in the ground state, closing in this way a detection loop. In the absence of photon losses (i.e., for a perfect detection efficiency $\epsilon = 1$) the probability p ($1 - p$) for the decay of the $5p^2P_{1/2}$ to the $5s^2S_{1/2}$ ($4d^2D_{3/2}$) state is obtained by measuring $\frac{N_b}{N_b + N_r}$ ($\frac{N_r}{N_b + N_r}$). This relationship still holds in case of imperfect collection efficiency ($\epsilon < 1$) because the correction is a common-mode factor for both measurements (e.g., $\frac{\epsilon N_b}{\epsilon N_b + \epsilon N_r} \equiv \frac{N_b}{N_b + N_r}$). The method is based on the assumption that this behavior is quite robust against variations of experimental conditions (e.g., Rabi frequencies drifts) [11]. Repeated counts of the number of scattered photons during the counting windows and an independent measurement of the background counts N_b^B and N_r^B associated to each phase (laser photons scattered by trap surfaces, residual ambient light, and photodetector dark counts) allow for the measurement of the branching fractions. Without considering the systematic effects, the uncertainty is dominated by the statistical error on N_r . A typical chronogram used in the experiment is represented in Fig. 3. In an experiment we acquire many bunches consisting of several hundred sequential acquisitions of N_b and N_r together with the measurements of corresponding backgrounds and we transfer the corresponding

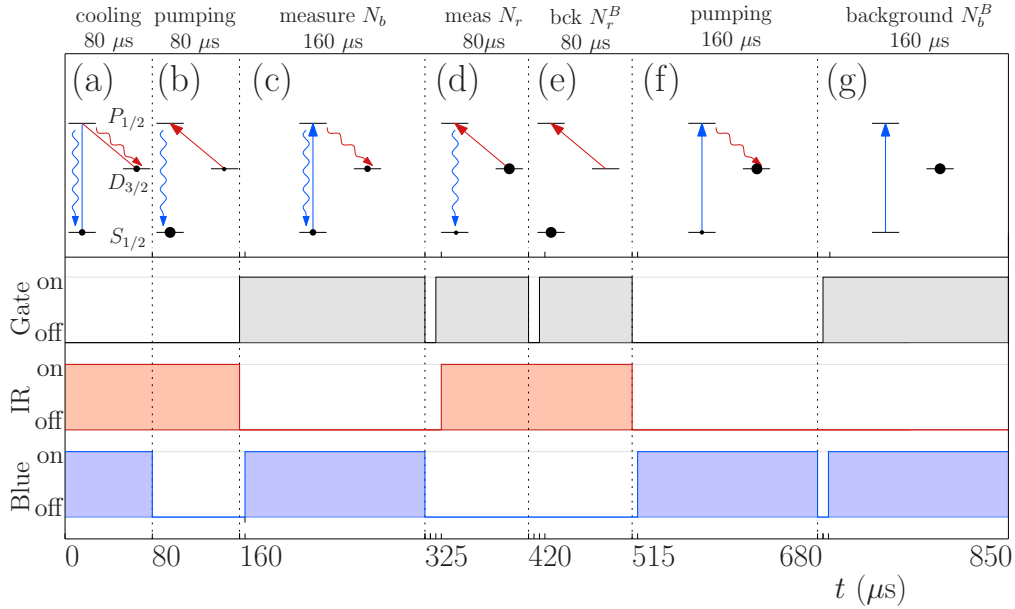


FIG. 3. Typical acquisition sequence used in a single detection cycle. (a) Laser cooling ($80 \mu\text{s}$, both lasers turned on). (b) Optical pumping in the ground state ($80 \mu\text{s}$, 711-THz laser turned off). (c) Measurement of N_b blue photons ($160 \mu\text{s}$, 711-THz laser turned on, 275-THz laser turned off). (d) Measurement of N_r blue photons ($80 \mu\text{s}$, 711-THz laser turned off, 275-THz laser turned on). (e) Measurement of the background signal N_r^B associated with phase (d) ($80 \mu\text{s}$, 711-THz laser turned off, 275-THz laser turned on). (f) Optical pumping in the metastable $4d^2D_{3/2}$ state to prepare the measurement of the background signal N_b^B associated with phase (c) ($160 \mu\text{s}$, 711-THz laser turned on, 275-THz laser turned off). (g) Measurement of the background signal N_b^B associated with phase (c) ($160 \mu\text{s}$, 711-THz laser turned on, 275-THz laser turned off). This sequence of duration $850 \mu\text{s}$ is typically repeated $\simeq 50 \times 10^6$ times. This sequence has been used for the third acquisition run (see Sec. III).

sums of detected photons to the computer. We checked that the measured averaged pulse durations associated to a chronogram are nominal (i.e., identical to the programmed value) within the resolution of the instrument we used (± 4 ns, with a Tektronix 3032B oscilloscope, 300-MHz bandwidth). The amplitude of the time jitter associated to the pulses is lower than 40 ns.

III. RESULTS

A typical acquisition run consists of $\geq 50 \times 10^6$ sequence cycles that correspond to a “net” acquisition time of the order of 15–20 h. We performed three such runs with different Rabi frequencies and timings in order to check experimentally the estimations of systematics that are based on the resolution of optical Bloch equations, as explained below. The first acquisition run was based on a sequence with a N_b counting window of $80 \mu\text{s}$ and we used a H7828 PMT. The raw results of the first acquisition (sum of all detected photons in 54 272 970 cycles) are $N_b = 1\,295\,709$, $N_r = 105\,439$, $N_b^B = 342\,349$, and $N_r^B = 50\,418$. In the second acquisition run we increased the N_b counting window up to $160 \mu\text{s}$, still using H7828 PMT. The raw results for the second run of 111 200 000 cycles are $N_b = 3\,521\,973$, $N_r = 244\,082$, $N_b^B = 1\,657\,903$, and $N_r^B = 136\,141$. The third acquisition run used an optimized timing for the sequence (with respect to systematic errors presented below) and a photon counter with increased performances (Hamamatsu H10682-210, with higher quantum efficiency and shorter dark time). The time windows of this sequence are those shown in Fig. 3. The raw results for the third run of

63 400 000 cycles are $N_b = 2\,844\,886$, $N_r = 93\,465$, $N_b^B = 1\,368\,075$, and $N_r^B = 7292$. Without taking into account the systematic effects (see below) and assuming a Poisson statistics for the photon counting these results give $p = 0.9454(6)$ [$B = 17.33(20)$], $p = 0.9453(5)$ [$B = 17.27(17)$], and $p = 0.9449(3)$ [$B = 17.14(11)$] for the first, second, and third run, respectively. Let us note that these three results are mutually compatible. The acquisitions also allow for the evaluation of the average detection efficiency of the setup: we obtained $\epsilon = 1.01 \times 10^{-3}$ for the first run, $\epsilon = 0.97 \times 10^{-3}$ for the second run, and $\epsilon = 1.36 \times 10^{-3}$ for the third run.

Systematic effects

Several systematic effects may affect the raw results presented above.

We consider first the residual birefringence of the detection chain that could induce a polarization-sensitive detection efficiency altering the isotropic behavior of the $5s^2S_{1/2} \rightarrow 5p^2P_{1/2}$ transition [11]. This effect can be estimated by repeating the experiment with a different orientation of magnetic field in order to evaluate it at the level of the statistical uncertainty of the final result. We acquired the same amount of data in the same condition as the first run with a magnetic field \mathbf{B}_{test} which has the same magnitude as \mathbf{B}_0 but is orthogonal to the trap plane (see Fig. 1). This orientation of the quantification axis allows us to test the detection direction along which, according to the emission diagram of a $J = 1/2 \rightarrow J' = 1/2$ transition [48], we expect a maximum of sensibility to a possible polarization unbalance of emitted

photons. The raw results are in this case $N_b = 1\,671\,954$, $N_r = 114\,967$, $N_b^B = 478\,305$, and $N_r^B = 46\,035$, which give $p = 0.9454(5)$, perfectly compatible with the results obtained with an orthogonal orientation of magnetic field. We can therefore put an upper limit of 5×10^{-4} to this effect, in terms of uncertainty on p .

Collisions and off-resonant excitations of the $4d^2D_{5/2}$ long-lived metastable state can also be a source of systematic shifts. In order to evaluate these effects we performed a detailed study of collision events in our experimental setup [9]. As detailed below, these phenomena show up either as a permanent loss of the ion or as a reversible loss of fluorescence that can be measured during the cooling phase. The finite lifetime of the ion in the trap (permanent loss) does not affect directly the measurements because we filter out the acquisitions in which the ion is not present. On the other hand the events displaying a reversible loss of fluorescence may induce a systematic shift. Let us first remark that the data acquired during an integer number of whole cycles in the absence of fluorescence do not shift the value of p : these data correspond to a detection efficiency $\epsilon = 0$ and as long as a N_r cycle is coupled to a N_b cycle the value of p is unaffected by ϵ . However, each reversible collision event can unbalance two acquisition cycles: first when the ion “disappears” and then when it “reappears.” The upper limit of the systematic shift induced by this phenomenon can be estimated by assuming that a maximum unbalance is produced for each collision: no counts during an acquisition phase (e.g., N_r) and a maximal excess count in the corresponding background phase (e.g., N_r^B). Considering this the “worst case” assumption, the knowledge of collision rates (see below) allows us to evaluate this upper limit to the systematic shift: in terms of p this shift is bounded by 10^{-7} (see Table I).

In order to characterize the collisions in our trap we followed a method similar to that exposed in Ref. [9]: we recorded the fluorescence of a single ion during a total time of 43 h with time bins of 5 ms. A first result of this study is

TABLE I. Systematic errors estimations on the branching fraction p calculated using the solutions of the OBE that describe the time evolution of the atomic density matrix during an acquisition sequence as a function of experimentally determined parameters (i.e., driving lasers parameters with nominal values $\Omega_1 = 2\pi \times 8.7$ MHz, $\Omega_2 = 2\pi \times 18$ MHz, $\delta_1 = -2\pi \times 27.5$ MHz, $\delta_2 = 2\pi \times 80$ MHz, and $B = 10^{-4}$ T). The uncertainties on the systematic errors are calculated considering a (conservative) $^{+20\%}_{-20\%}$ uncertainty on Rabi frequencies. The measured value for the dead time of the photodetection chain is used ($\tau_{PM} = 30 \pm 2$ ns).

Effect	Systematic shift on p	
Collisions	$<1 \times 10^{-7}$	
PM dead time	4.3×10^{-6}	$+1.8 \times 10^{-6}$ -1.5×10^{-6}
$D_{3/2}$ lifetime and finite windows	0.4×10^{-6}	-0.4×10^{-6} $+1.9 \times 10^{-6}$
Laser leaks	1×10^{-8}	$\pm 1 \times 10^{-8}$
Timing precision	0	$\pm 2 \times 10^{-6}$
Total	5×10^{-6}	$+4 \times 10^{-6}$ -3×10^{-6}

a measurement of the lifetime of the cooled ion in the trap. Without taking into account extrinsic events (e.g., delocking of a laser frequency or accidental switching off), we had to reload a total number of 99 ions, which gives an average lifetime of 1560 s. The distribution of observed lifetimes is compatible with an exponential distribution. During the total acquisition time we also observed events displaying an abrupt disappearance of the fluorescence that is later recovered also abruptly. Following Ref. [9] it is possible to attribute these events to two kinds of phenomena depending on their duration. In a first case, nonresonant optical pumping and/or fine-structure-changing collisions can bring the ion in the $4d^2D_{5/2}$ state. These events should display a duration distributed exponentially with the lifetime $\tau_{D_{5/2}} = 390.8$ ms of the $4d^2D_{5/2}$ state [18]. On the other hand, some of the very short dark periods are likely to be the consequence of smaller perturbations by large impact-parameter collisions. This interpretation is supported by the analysis of the histogram of the time durations of the events reported in Fig. 4, in which the two classes of events clearly separate into one fraction following an exponential distribution characterized by $\tau_{D_{5/2}}$ (the lifetime is not an adjustable parameter for the fit displayed with a continuous line) and another fraction, accumulated around the origin, that contributes for 54% of the events. Let us note that the average time that separates these events (1800 and 1520 s for the long- and short-lived events, respectively) is of the same order of magnitude as what has been observed by Barton and coworkers under similar pressure conditions [9]. Contrary to the case of Ref. [9], we do not observe events displaying gradual reappearance of the fluorescence (within our resolution). A possible explanation of this behavior resides in the lower depth of the pseudopotential well in our surface trap. This characteristic may not allow an ion that reaches

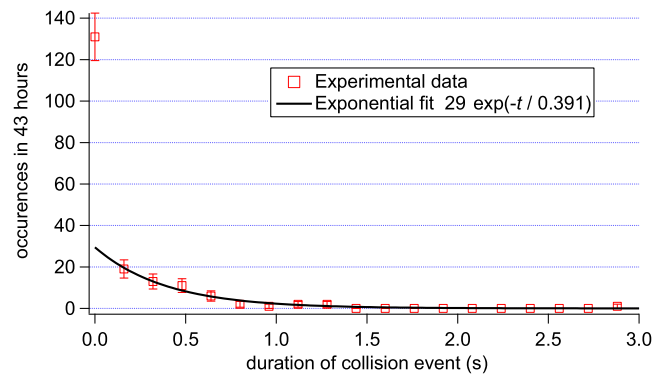


FIG. 4. Histogram of time durations of collision events observed during 43 h of operation in the surface trap. Each event is characterized by an abrupt disappearance of the fluorescence that reappears later in time. The fluorescence is acquired with an integration time of 5 ms and, within this resolution, the reappearance of the fluorescence is also abrupt. The solid line is a fit of the experimental data (with the exclusion of the shortest time bin of the histogram) with an exponential distribution characterized by an imposed decay time $\tau_{D_{5/2}} = 390.8$ ms (fixed parameter) and an amplitude on the first bin (adjustable parameter) of 29 events. The statistical weights of the populations associated to the two classes in this bimodal histogram are 54% for the short-lived events and 46% for the exponentially distributed events, respectively.

high temperatures to stay trapped and be recooled with long characteristic times.

Other systematic effects arise from the dead time of the photomultiplier, the finite lifetime of the $4d^2D_{3/2}$ state, the finiteness of the durations of acquisition windows, and the finiteness of the extinction ratio of AOM switching. All these effects can be evaluated by solving the OBE that describe the time evolution of the atomic density matrix during an acquisition sequence as a function of driving lasers parameters (i.e., $\Omega_1, \Omega_2, \delta_1, \delta_2$ as defined in Sec. I, where the indices 1 and 2 refer to the cooling and repumping laser, respectively). We numerically solve the OBE including all the Zeeman sublevels involved in the experiment (i.e., eight sublevels) and taking into account the effect of magnetic field B and laser polarizations. This multilevel approach allows us to better estimate the characteristic times associated to optical pumping in the experimental conditions. The nominal driving lasers parameters (measured in the experiment) are $\Omega_1 = 2\pi \times 8.7$ MHz, $\Omega_2 = 2\pi \times 18$ MHz, $\delta_1 = -2\pi \times 27.5$ MHz, $\delta_2 = 2\pi \times 80$ MHz, and $B = 10^{-4}$ T. We feed the OBE with the raw branching fraction $p = 0.9449$ from our experiments as a best first-order approximation to calculate systematic shifts. The results presented below are obtained for the sequence of the third experimental run displayed in the Fig. 3.

The photodetector dead time induces an underestimation of the counts accumulated during the N_b counting window. To estimate the systematic shift associated with the dead time $\tau_{PM} = 30 \pm 2$ ns of the detection chain (photomultiplier and photon counter), we use the time-dependent solution of the OBE to calculate the conditional probability q that, following a first detection event, another photoelectron is emitted within a τ_{PM} time window. Since we know that after the emission of a photon the ion is in the ground state, the probability q is given by the following expression:

$$q = 1 - \exp\left(-\int_0^{\tau_{PM}} \varepsilon A_{SP} \sigma_{PP}(t) dt\right), \quad (1)$$

where A_{SP} is the transition probability for the $5s^2S_{1/2} \rightarrow 5p^2P_{1/2}$ transition and $\sigma_{PP}(t)$ is the level $5p^2P_{1/2}$ population at time t . By neglecting losses of more than one photon and the contribution of the background photons, the total number of undetected photons in the measurement of N_b photons is then qN_b . In the nominal experimental conditions of the third acquisition run $q = 8.4 \times 10^{-5}$. This underestimation of N_b induces a systematic shift of $(4.3_{-1.5}^{+1.8}) \times 10^{-6}$ on p (see Table I). The uncertainty is evaluated by assuming a (very conservative) relative uncertainty of 20% on Ω_1 , the parameter that mostly affects this systematic shift.

The finite lifetime of the $4d^2D_{3/2}$ state and the finite duration of the sequence time windows modify the average number of photons detected in each measurement phase with respect to the ideal case (infinite lifetime, infinite detection, and preparation windows). We can identify two main physical mechanisms responsible for this shift: the state preparation errors and the imperfect shelving in the metastable state that ends up with the ion in the fluorescence cycle during a measurement window. By comparing the average photon numbers obtained by solving the OBE (that take into account the experimental window durations and the lifetime

$\tau_D = 435(4)$ ms measured in Ref. [47]) with the ideal case we obtain an estimate of the systematic shift associated to these effects in our experimental conditions. The estimated contribution to the systematic shift that affects p is $(0.4_{-1.9}^{+0.4}) \times 10^{-6}$ (see Table I). As in the case of the effect of τ_{PM} , the uncertainty that affects this shift is evaluated by assuming a relative uncertainty of 20% on Ω_1 , which is the parameter that mainly affects the shift.

The last class of systematic shifts that we estimate with the OBE are those induced by the imperfect extinctions of the two lasers. This shift is obtained by comparing the results of the OBE that describe the experiments with perfect extinction to the case in which the extinction ratio is fixed to -77 dB as measured in the experiment. The estimated contribution of the imperfect extinction to the systematic shift that affects p is $(1 \pm 1) \times 10^{-8}$ (see Table I), dominated by the repumping beam leaks.

It is interesting to note that some effects partially cancel because they affect in a similar (albeit not identical) way signal and background. As an example, this is the case for the errors due to the relaxation of the shelved electronic excitation during the measurement of N_b and N_b^B . The compensation is not perfect because the two measurements do not start with the ion in the same electronic state. However, the transient dynamics in a typical experiment only covers a small fraction of the respective acquisition windows.

Let us finally remark that a hypothetical correlated time-duration unbalance between the phases of N_b and N_b^B (dominant contribution) in the sequential acquisition, within the limits of our negative check (i.e., 8 ns), would originate a systematic shift on p of $\simeq \pm 2 \times 10^{-6}$.

The summary of systematic errors is reported in Table I. These errors are about two orders of magnitude smaller than the statistical uncertainty; the final result for the branching fraction p is then $p = 0.9449(5)$ [$B = 17.14(16)$].

IV. DISCUSSION

In this section we discuss how our experimental determination of B compares to other experimental results and theoretical calculations present in the literature. First, we compare in Fig. 5 the experimental determination of B obtained by Gallagher [22] with our result. As in the case of Ca^+ studied in Ref. [10], there is no agreement between our data and Gallagher's experiments (performed in an argon discharge).

We can also compare these results to the theoretical estimates of $B = A_{SP}/A_{PD}$ that can be obtained starting from the calculated transition probabilities. The three points on the bottom of Fig. 5 (open symbols) have been calculated (with their error bars, whenever applicable) starting from data in Refs. [5,32,33]. As outlined in Ref. [32], there is no agreement between recent theoretical calculations and the experimental determination of B by Gallagher. This contrasts with the present experimental determination that is indeed compatible, within the smaller error bar, with the calculations of Refs. [5,32].

By using the lifetime $\tau_P = 7.39(7)$ ns measured by Pinnington and coworkers [24], the determinations of p can be also recast in terms of transition probabilities $A_{SP} = p/\tau_P$ and

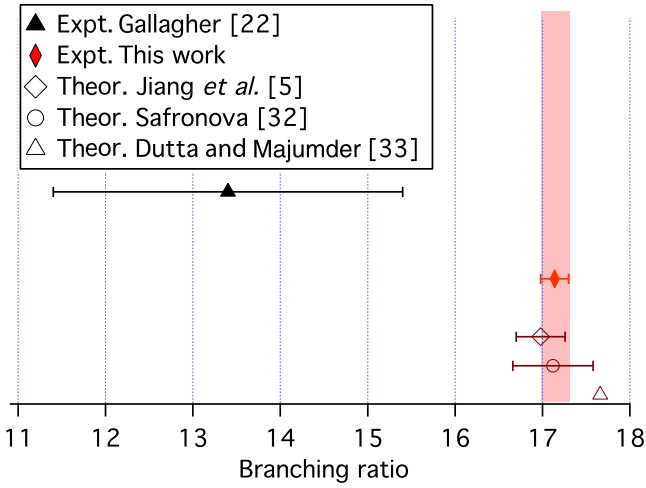


FIG. 5. Comparison of our measurement of the branching ratio B (filled diamond, red) with other experimental measurements or theoretical calculations. Vertical axis separation is used to offset the data from different works. The error bars (whenever present) represent the standard error associated to the determination of B . Reference [33] does not give information about standard error.

$A_{PD} = (1 - p)/\tau_P$. This is the strategy adopted in order to compile the NIST database [20,21] that takes advantage of the relatively small uncertainty on τ_P . In such a way it is possible to directly test the experimental determinations against the original quantities calculated in theoretical papers. In Fig. 6 we plot a compilation of the experimental determinations of A_{SP} and the theoretical calculations of the same quantity. All the determinations are compatible within the uncertainties attributed to measurements or calculations; let us note that the error bar associated to the present work is dominated by the uncertainty that affects τ_P . We included in this compilation the results of Ref. [25], even though the method for the

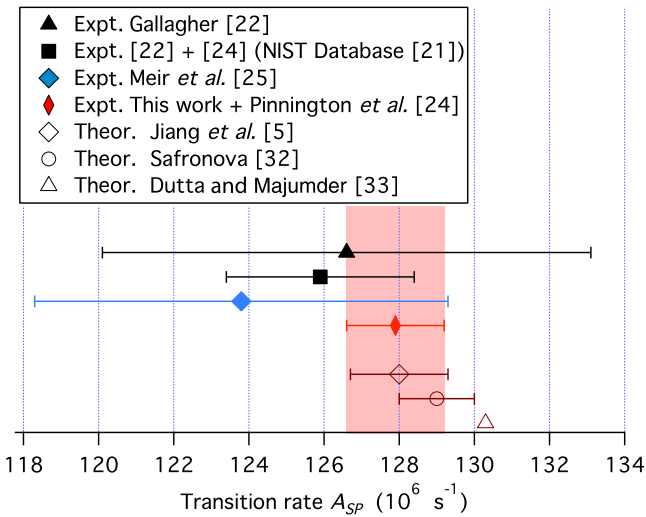


FIG. 6. Comparison of measurements and calculations of the transition probability A_{SP} . Vertical axis separation is used to offset different measurements. In this work we obtain $A_{SP} = 127.9(1.3) \times 10^6 \text{ s}^{-1}$.

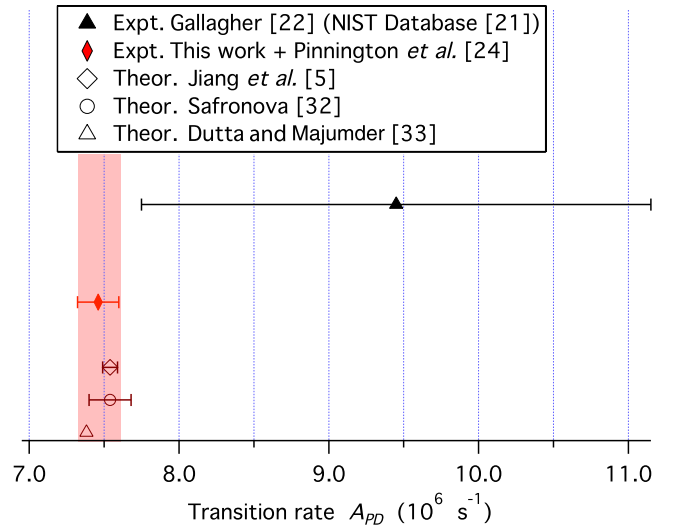


FIG. 7. Comparison of measurements and calculations of the transition probability A_{PD} . Vertical axis separation is used to offset different measurements. In this work we obtain $A_{PD} = 7.46(14) \times 10^6 \text{ s}^{-1}$.

determination of A_{SP} was in this case quite indirect and the exact value of A_{SP} not crucial for their study.

In Fig. 7 we present the compilation concerning the transition probabilities A_{PD} . The error bar associated to the present work is in this case dominated by the uncertainty that affects B . It is interesting to note that our work brings back in agreement theory and experimental observations, in a similar way to what is discussed in Ref. [12] for $^{40}\text{Ca}^+$.

It is interesting to analyze the limitations of this method and the possible improvements that could reduce the uncertainty of the present result. Photon counting statistical uncertainty (dominated by the relatively low total number of photons detected during the N_r measurement phase) gives the largest contribution to our error bar. A longer acquisition time will obviously improve the precision of the measurement. Another effective approach is to increase the number of ions addressed in the experiment and/or the collection efficiency [11]. With this approach the systematic shift induced by the detector dead time may become larger than the statistical error and then a careful characterization of the detection chain is compulsory [15]. An effective way to mitigate this problem is to introduce more phases in the sequences in which the Rabi frequency Ω_1 is increased by steps [11]. Systematic shift uncertainty could in any case eventually limit the precision of the measurement of p .

We used our approach based on the solution of the OBE to reduce the systematic shift in the third experimental run down to a target value of $\simeq 5 \times 10^{-6}$ (i.e., two orders of magnitudes lower than our statistical error). The measured dead time of the detection chain gives a systematic shift on p of 4.3×10^{-6} for our nominal driving lasers parameters ($\Omega_1 = 2\pi \times 8.7 \text{ MHz}$, $\Omega_2 = 2\pi \times 18 \text{ MHz}$, $\delta_1 = -2\pi \times 27.5 \text{ MHz}$, $\delta_2 = 2\pi \times 80 \text{ MHz}$, and $B = 10^{-4} \text{ T}$). This systematic shift increases with Ω_1 as shown in Fig. 8. On the other hand the systematic shift on p induced by the finite lifetime of the $4d^2D_{3/2}$ state and the finite duration of the sequence time windows can be reduced by increasing the N_b measurement-window

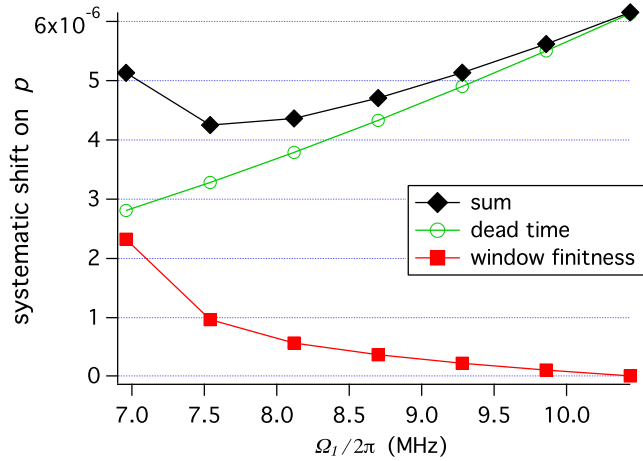


FIG. 8. Systematic shifts affecting p as a function of the Rabi frequency of the cooling laser Ω_1 as calculated solving the OBE for the sequence presented in Fig. 3. Red filled squares: contribution induced by the finite lifetime of the $4d^2D_{3/2}$ state and the finite duration of the sequence time windows. Green open circles: contribution induced by the dead time of the photodetection chain. Black filled diamonds: sum of the two contributions.

duration. We fixed this window duration at $160 \mu\text{s}$ such that its contribution to the systematic shift becomes lower than the contribution of dead time (lower curve of Fig. 8). It is interesting to note that with these parameters these two contributions to the systematic shift have an opposite slope as a function of Ω_1 . This introduces some extra robustness against the fluctuations of this parameter that maximally affect

the systematic shift uncertainty (sum of the contributions, upper curve of Fig. 8). Such a kind of optimization could be adapted to multi-ion and multi-intensity experiments in order to minimize the contribution of the systematic shift uncertainty.

In conclusion we measured the branching fractions for the decay of the $5p^2P_{1/2}$ state of $^{88}\text{Sr}^+$: the probabilities p and $1-p$ for the decay of the $5p^2P_{1/2}$ to the $5s^2S_{1/2}$ and $4d^2D_{3/2}$ states are, respectively, $p = 0.9449(5)$ and $0.0551(5)$, with a fractional uncertainty on p of 5×10^{-4} . In terms of branching ratio the result is $B = 17.14(16)$, affected by a fractional uncertainty of 1×10^{-2} . This result can be compared to previous experimental determinations and to theoretical calculations: when considering the branching ratio and the transition probability A_{PD} our work brings back in agreement theory and experimental observations and constitutes an important check for the validity of recent theories. Finally, this experiment demonstrates the applicability of microtrap technology in the domain of precision measurements and spectroscopy.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank A. Anthore for enlightening discussions concerning trap fabrication; C. Manquest and S. Suffit for their help in cleanroom processes; and M. Apfel, P. Lepert, and M. Nicolas for technical support. We also thank B. Szymanski for fruitful discussions and help in the early stages of the experiment. This study was partly funded by Conseil Régional, Île-de-France through the DIM Nano-k (projects DEQULOT and EXPLOR@ION). V.T. thanks the Ecole Normale Supérieure de Lyon for financial support in the form of a fourth year study project.

-
- [1] M. S. Safronova and W. R. Johnson, in *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, edited by P. R. B. Ennio Arimondo and C. C. Lin (Academic, New York, 2008), Vol. 55, pp. 191–233.
- [2] C. S. Wood, S. C. Bennett, D. Cho, B. P. Masterson, J. L. Roberts, C. E. Tanner, and C. E. Wieman, *Science* **275**, 1759 (1997); J. Ginges and V. Flambaum, *Phys. Rep.* **397**, 63 (2004).
- [3] M. A. Bautista, T. R. Gull, K. Ishibashi, H. Hartman, and K. Davidson, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **331**, 875 (2002).
- [4] H. S. Margolis, *Contemp. Phys.* **51**, 37 (2010).
- [5] D. Jiang, B. Arora, M. S. Safronova, and C. W. Clark, *J. Phys. B* **42**, 154020 (2009).
- [6] R. Blatt and D. Wineland, *Nature (London)* **453**, 1008 (2008).
- [7] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King, and D. M. Meekhof, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* **103**, 259 (1998).
- [8] H. Häffner, C. Roos, and R. Blatt, *Phys. Rep.* **469**, 155 (2008).
- [9] P. A. Barton, C. J. S. Donald, D. M. Lucas, D. A. Stevens, A. M. Steane, and D. N. Stacey, *Phys. Rev. A* **62**, 032503 (2000).
- [10] R. Gerritsma, G. Kirchmair, F. Zähringer, J. Benhelm, R. Blatt, and C. F. Roos, *Eur. Phys. J. D* **50**, 13 (2008).
- [11] M. Ramm, T. Pruttivarasin, M. Kokish, I. Talukdar, and H. Häffner, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 023004 (2013).
- [12] M. Hettrich, T. Ruster, H. Kaufmann, C. F. Roos, C. T. Schmiegelow, F. Schmidt-Kaler, and U. G. Poschinger, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 143003 (2015).
- [13] N. Kurz, M. R. Dietrich, G. Shu, R. Bowler, J. Salacka, V. Mirgon, and B. B. Blinov, *Phys. Rev. A* **77**, 060501 (2008).
- [14] C. Aucher, T. W. Noel, M. R. Hoffman, S. R. Williams, and B. B. Blinov, *Phys. Rev. A* **90**, 060501 (2014).
- [15] D. De Munshi, T. Dutta, R. Rebhi, and M. Mukherjee, *Phys. Rev. A* **91**, 040501 (2015).
- [16] H. S. Margolis, G. P. Barwood, G. Huang, H. A. Klein, S. N. Lea, K. Szymaniec, and P. Gill, *Science* **306**, 1355 (2004).
- [17] G. P. Barwood, H. S. Margolis, G. Huang, P. Gill, and H. A. Klein, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 133001 (2004).
- [18] V. Letchumanan, M. A. Wilson, P. Gill, and A. G. Sinclair, *Phys. Rev. A* **72**, 012509 (2005).
- [19] W. E. Lybarger, J. C. Berengut, and J. Chiaverini, *Phys. Rev. A* **83**, 052509 (2011).
- [20] D. P. J. E. Sansonetti, *J. Phys. Chem. Ref. Data* **41**, 013102 (2012).
- [21] A. Kramida, Y. Ralchenko, J. Reader, and NIST-ASD-Team (2015), National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD.
- [22] A. Gallagher, *Phys. Rev.* **157**, 24 (1967).

- [23] P. Kuske, N. Kirchner, W. Wittmann, H. Andrä, and D. Kaiser, *Phys. Lett. A* **64**, 377 (1978).
- [24] E. H. Pinnington, R. W. Berends, and M. Lumsden, *J. Phys. B* **28**, 2095 (1995).
- [25] Z. Meir, O. Schwartz, E. Shahmoon, D. Oron, and R. Ozeri, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 193002 (2014).
- [26] A. A. Madej, J. E. Bernard, P. Dubé, L. Marmet, and R. S. Windeler, *Phys. Rev. A* **70**, 012507 (2004).
- [27] CIPM, Recommendation 1 (CI-2006), International Committee for Weights and Measures, report of the 95th meeting, 2006 (unpublished).
- [28] M. Poirier, *Zeitschrift für Physik D* **25**, 117 (1993).
- [29] E. Biémont, J. Lidberg, S. Mannervik, L.-O. Norlin, P. Royen, A. Schmitt, W. Shi, and X. Tordoir, *Eur. Phys. J. D* **11**, 355 (2000).
- [30] B. K. Sahoo, M. R. Islam, B. P. Das, R. K. Chaudhuri, and D. Mukherjee, *Phys. Rev. A* **74**, 062504 (2006).
- [31] J. Mitroy, J. Y. Zhang, and M. W. J. Bromley, *Phys. Rev. A* **77**, 032512 (2008).
- [32] U. I. Safronova, *Phys. Rev. A* **82**, 022504 (2010).
- [33] N. N. Dutta and S. Majumder, *Phys. Rev. A* **90**, 012522 (2014).
- [34] J. Chiaverini, R. B. Blakestad, J. Britton, J. D. Jost, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri, and D. J. Wineland, *Quantum Inf. Comput.* **5**, 419 (2005).
- [35] D. T. C. Allcock, J. A. Sherman, D. N. Stacey, A. H. Burrell, M. J. Curtis, G. Imreh, N. M. Linke, D. J. Szwer, S. C. Webster, A. M. Steane *et al.*, *New J. Phys.* **12**, 053026 (2010).
- [36] M. G. House, *Phys. Rev. A* **78**, 033402 (2008).
- [37] D. J. Berkeland, J. D. Miller, J. C. Bergquist, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *J. Appl. Phys.* **83**, 5025 (1998).
- [38] S. Removille, R. Dubessy, Q. Glorieux, S. Guibal, T. Coudreau, L. Guidoni, and J.-P. Likforman, *Appl. Phys. B* **97**, 47 (2009); E. Kirilov and S. Putterman, *Eur. Phys. J. D* **54**, 683 (2009).
- [39] A. Madej, L. Marmet, and J. Bernard, *Appl. Phys. B* **67**, 229 (1998); A. G. Sinclair, M. A. Wilson, and P. Gill, *Opt. Commun.* **190**, 193 (2001).
- [40] A. Shiner, A. Madej, P. Dubé, and J. Bernard, *Appl. Phys. B* **89**, 595 (2007).
- [41] J. H. T. Burke, O. Garcia, K. J. Hughes, B. Livedalen, and C. A. Sackett, *Rev. Sci. Instrum.* **76**, 116105 (2005).
- [42] N. Seymour-Smith, P. Blythe, M. Keller, and W. Lange, *Rev. Sci. Instrum.* **81**, 075109 (2010).
- [43] B. Dubost, R. Dubessy, B. Szymanski, S. Guibal, J.-P. Likforman, and L. Guidoni, *Phys. Rev. A* **89**, 032504 (2014).
- [44] D. J. Berkeland and M. G. Boshier, *Phys. Rev. A* **65**, 033413 (2002).
- [45] A. Gardner, K. Sheridan, W. Groom, N. Seymour-Smith, and M. Keller, *Appl. Phys. B* **117**, 755 (2014).
- [46] I. Siemers, M. Schubert, R. Blatt, W. Neuhauser, and P. E. Toschek, *Europhys. Lett.* **18**, 139 (1992).
- [47] S. Mannervik, J. Lidberg, L.-O. Norlin, P. Royen, A. Schmitt, W. Shi, and X. Tordoir, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 698 (1999).
- [48] G. Grynberg, A. Aspect, and C. Fabre, *Introduction to Quantum Optics: From the Semi-Classical Approach to Quantized Light*, 1st ed. (Cambridge University, Cambridge(UK), 2010).

Absolute single-ion thermometry

Vincent Tugayé, Jean-Pierre Likforman, Samuel Guibal, and Luca Guidoni*

Université Paris–Diderot, Sorbonne Paris Cité, Laboratoire Matériaux et Phénomènes Quantiques, UMR 7162 CNRS, F-75205 Paris, France



(Received 27 September 2018; published 11 February 2019)

We describe and experimentally implement a single-ion local thermometry technique with absolute sensitivity adaptable to all laser-cooled atomic ion species. The technique is based on the velocity-dependent spectral shape of a quasi-dark resonance tailored by two driving fields in a $J \rightarrow J$ transition such that the two fields can be derived from the same laser source, leading to a negligible relative phase shift. We validated the method and tested its performance in an experiment on a single $^{88}\text{Sr}^+$ ion cooled in a surface radio-frequency trap. We first applied the technique to characterize the heating rate of the surface trap. We then measured the stationary temperature of the ion as a function of cooling laser detuning in the Doppler regime. The results agree with theoretical calculations, with an absolute error smaller than $100 \mu\text{K}$ at $500 \mu\text{K}$, in a temperature range between 0.5 and 3 mK and in the absence of adjustable parameters. This simple-to-implement and reliable method opens the way to fast absolute measurements of single-ion temperatures in future experiments dealing with heat transport in ion chains or thermodynamics at the single-ion level.

DOI: [10.1103/PhysRevA.99.023412](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.99.023412)

Laser-cooled trapped ions offer the opportunity for a precise quantum control at the single-particle level [1] that triggered the development of ion-based platforms dedicated to quantum information processing [2,3]. Cold-ion-based systems have also been proposed and applied for testing thermodynamics in the quantum regime [4,5] and quantum heat transport in network chains [6–9]. The latter application needs the development of thermometry techniques effective for characterizing in a short time the velocity distribution of a single-ion that possibly interacts with a rich environment. Since the first demonstrations of laser cooling of trapped ions [10,11], experimental thermometry tools have been developed together with theoretical models predicting stationary temperatures, for instance, in the case of Doppler cooling [12,13]. Among the thermometry techniques we can distinguish between three main families.

In a first approach the spatial distribution of a single ion in a trap is measured by acquiring a time-averaged image of its fluorescence. The knowledge of the stiffness of the trap and the measurement of the spot size allow for the retrieval of the ion energy distribution. This technique, introduced in early experiments [14], has been implemented to reach milli-Kelvin sensitivity [15,16] and to measure anomalous heating in a surface trap [17]. Spatial thermometry is only adapted to single-ion experiments and the limited knowledge of the point spread function of the imaging system affects both the accuracy and the precision of the method, which reaches its best performances in shallow traps.

A second family of thermometry techniques exploits the sensitivity to the ion motional state of the optically addressed narrow vibrational transitions in a trap (either quadrupole- or Raman-addressed). This technique has been introduced by Monroe and co-workers [18] and allows for the measurement

of the average vibrational occupation number \bar{n} in a given vibrational mode. Sideband spectroscopy has been used for the first studies of the heating rates associated with ion traps [19]; it addresses relatively low temperature ranges ($\bar{n} < 5$), but can be extended towards higher temperatures by measuring collapses and revivals of vibrational populations [20–22]. While extremely powerful, these techniques are only able to characterize normal modes of oscillation sequentially; this limitation may be a serious drawback for experiments that involve measurements of many vibrational modes.

The third approach to thermometry, which we address here, is based on the modifications of the photon scattering rate induced by the Doppler effect and has been used in the first demonstrations of laser cooling of ions [10,11]. More recently this approach has been exploited by recording and analyzing the transient photon scattering rate during the Doppler cooling of an ion (Doppler recooling technique [23,24]). This technique has been extended to ions with richer level structures (e.g., Ca^+ and Sr^+), either using incoherent repumping schemes [25] or including the multilevel structure in the analysis of transient photon scattering [22,26]. The relatively large linewidth of the usual cooling transitions ($\simeq 2\pi \times 20 \text{ MHz}$) implies that Doppler recooling thermometry can only address the measurement of relatively high temperatures ($T > 1 \text{ K}$) with a millisecond characteristic time. However, multilevel ions addressed by at least two laser beams may also display the so-called “dark resonance” phenomenon [27,28] that may originate spectral features with narrow linewidths [29]. These dark resonances depend on the motional state and may indeed be used for cooling the ions below the Doppler limit [30–34], for evaluating the ion excess micromotion [35], and for thermometry purposes [36,37]. The main advantage of cooling and thermometry methods based on dark resonances is their ability to address (or sense) all vibrational modes without the need of multiplexing. In the case of thermometry this ability allows for a fast probing of the velocity distribution of a single

*luca.guidoni@univ-paris-diderot.fr

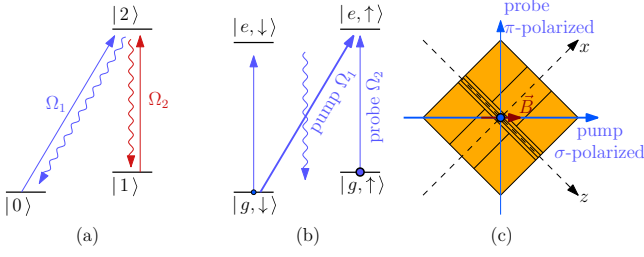


FIG. 1. (a) Energy level structure of a Λ system that allows for the presence of a dark state. (b) Quasi- Λ system considered in this paper. (c) Pump and probe beam geometry with respect to the trap axes.

ion that may be interacting with rich environments (Coulomb crystals or thermal baths) [37].

In this paper we present an implementation of dark-resonance thermometry and demonstrate its ability to measure absolute temperatures (accuracy and precision in the sub-mK range) in the absence of calibrations with other methods. This substantial improvement is obtained by addressing two transitions with two driving fields derived by the same laser source. This configuration eliminates phase stability issues that limited the precision in previous experiments [37]. The fit of the spectral experimental data with the solutions of the optical Bloch equations (OBEs), in the absence of *ad hoc* parameters, allowed us to obtain a measurement of absolute temperatures between 0.2 and 3 mK. We also calculated that the range of applicability is adjustable up to 200 mK. In order to test experimentally this thermometry tool we implemented it with a single Sr^+ ion loaded and cooled in a surface trap. We exploited the measured temperatures to characterize the heating rate of the trap and to verify in an absolute way the theoretical law describing the stationary temperature reached with one-beam Doppler cooling [13]. We also demonstrated that this dark-resonance approach is capable of cooling the ion well in the sub-Doppler regime [down to $T_z = 0.13(1)$ mK] with a mechanism reminiscent of electromagnetically induced transparency (EIT) cooling [30] but in a different regime.

I. THEORY

Let us start considering a three-level atom in a Λ configuration driven by two laser fields with wave vectors \vec{k}_1 and \vec{k}_2 [see Fig. 1(a)]. For an atom at rest, a fluorescence spectrum obtained by scanning the detuning of one beam while keeping the other detuning constant displays a dark resonance: a sharp drop in the scattering rate. This feature is due to the presence of a “dark state”:

$$|\psi_D\rangle(t) \propto \Omega_2|0\rangle - \Omega_1 e^{i\varphi(t)}|1\rangle, \quad (1)$$

where $\varphi(t) = (\Delta_2 - \Delta_1)t + \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ and Δ_i , Ω_i , and $\varphi_i(t)$ are the detunings, the Rabi frequencies, and the phases of the driving fields ($i = 1$ and 2) [38]. As long as φ does not depend on time, $|\psi_D\rangle$ is not coupled to the driving fields: for $\Delta_1 = \Delta_2$ and if $[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)]$ is constant a dark resonance shows up because the electronic population is optically pumped in $|\psi_D\rangle$. For an atom that moves with velocity \vec{v} , the Doppler effect induces an additional detuning, $\delta_i = \vec{k}_i \cdot \vec{v}$

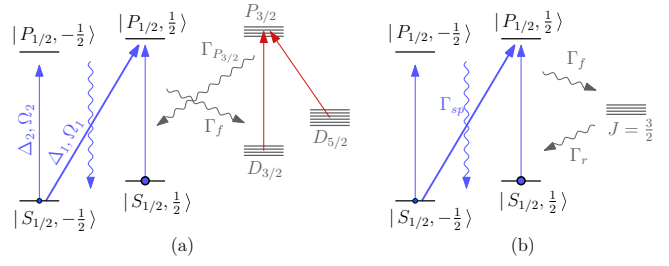


FIG. 2. Incoherent repumping scheme. (a) Considering the level structure of the $^{88}\text{Sr}^+$ ion, population trapping in the metastable level $D_{3/2}$ is avoided by exciting the $D_{3/2} \rightarrow P_{3/2}$ and $D_{5/2} \rightarrow P_{3/2}$ transitions. In this way no coherence is driven between the $S_{1/2}$ or $P_{1/2}$ levels and the other states. (b) Simplified level structure in which the $D_{3/2}$, $D_{5/2}$, and $P_{3/2}$ levels are replaced by a single $J = 3/2$ level that is incoherently populated with a rate Γ_f and decays into the $S_{1/2}$ level with an effective rate Γ_r .

($i = 1$ and 2), giving

$$\dot{\varphi}_{\text{Doppler}} = \delta_2 - \delta_1 = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{v}. \quad (2)$$

Atomic motion along the $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$ direction breaks the dark-state condition and allows us to infer the velocity distribution from the contrast and shape of the dark resonance [36,37].

In a previous implementation of dark-resonance thermometry with $^{40}\text{Ca}^+$ ions, the frequency difference between the two driving lasers was very large (several hundreds of THz). In this situation it may be very challenging to stabilize the relative phase of the driving fields: the contrast and shape of the dark resonance are affected by this technical issue. Phase instability may be taken into account by an *ad hoc* parameter in the OBE but still sets the limit to the precision of the technique [37]. On the contrary, if the two lower levels of the Λ system lie in the ground-state manifold [36], the two driving fields can be derived by the same laser source and their relative phase drift becomes negligible. This is our approach: Here we consider a generalized dark resonance in a quasi- Λ system in which the two lower levels are Zeeman sublevels of the ground state of an ion. As shown in Fig. 1(b) a $J = 1/2 \rightarrow J' = 1/2$ transition is driven by a σ^+ -polarized pump beam and a π -polarized probe beam with Rabi frequencies Ω_1 and Ω_2 , respectively. The quantification axis is imposed by the magnetic field B . In this configuration, there is a residual coupling between the $|g, \downarrow\rangle$ state and the $|e, \downarrow\rangle$ state that shortens the lifetime of $|\psi_D\rangle$ and thus reduces the contrast of the dark resonance. However this is not a limiting factor because the choice of $\Omega_1 > \Omega_2$ allows us to create a state arbitrarily close to a dark state [reduced weight in the first term on the right-hand side of Eq. (1)].

To obtain the theoretical line shape of a fluorescence spectrum for an ion at rest in the configuration of Fig. 1(b), we solve the OBE in the stationary regime within the rotating-wave approximation [39].

In the following we consider the $^{88}\text{Sr}^+$ ion for the calculations but the method may be applied to other level structures. The low-lying energy-level structure of $^{88}\text{Sr}^+$ (including metastable states) is shown in Fig. 2(a). In order to avoid the trapping of electronic population in the metastable $D_{3/2}$ state and the presence of two-colors dark resonances involving $S_{1/2}$

and $P_{1/2}$ states we adopt an incoherent repumping scheme [25]. This can be obtained by addressing the $D_{3/2} \rightarrow P_{3/2}$ and $D_{5/2} \rightarrow P_{3/2}$ transitions with two laser beams.

We obtain the density matrix ρ of the internal states of the ion in the stationary regime by solving the OBE in the form:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \rho] + \mathcal{L}[\rho] = 0. \quad (3)$$

We found that the solution of the complete OBE can be very well approximated by the solution of a simplified system in which the $D_{3/2}$, $D_{5/2}$, and $P_{3/2}$ levels are replaced by a single $J = 3/2$ level that is incoherently populated with a rate Γ_f and decays into the $S_{1/2}$ level with an effective rate Γ_r [see Fig. 2(b)]:

$$\Gamma_r = \frac{\rho_{P_{3/2}}}{\rho_{P_{3/2}} + \rho_{D_{3/2}} + \rho_{D_{5/2}}} \Gamma_{P_{3/2}}. \quad (4)$$

In order to speed up the numerical calculations we used this approximation that also has the advantage of describing the repumping process in terms of the single parameter Γ_r . This parameter can be determined by performing a one-beam Doppler cooling experiment in which we estimate the ion scattering rate at saturation on the $P_{1/2} \rightarrow S_{1/2}$ transition as

$$\rho_{P_{1/2}, \text{sat}} = \frac{1}{2 + \frac{\Gamma_f}{\Gamma_r}}. \quad (5)$$

To write the Hamiltonian \mathcal{H} of the system we set the origin of energies to the $|P_{1/2}, \frac{1}{2}\rangle$ level with a null magnetic field. By adopting the rotating-wave approximation, in the $|S_{1/2}, -\frac{1}{2}\rangle$, $|S_{1/2}, \frac{1}{2}\rangle$, $|P_{1/2}, -\frac{1}{2}\rangle$, $|P_{1/2}, \frac{1}{2}\rangle$ basis, the Hamiltonian then reads as follows:

$$\mathcal{H} = \hbar \begin{bmatrix} -B + \Delta_2 & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{\Omega_2^*}{2} & 0 \\ 0 & B + \Delta_1 & \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Omega_1^*}{2} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{\Omega_2^*}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{\Omega_2}{2} & \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Omega_1}{2} & -\frac{B}{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{\Omega_2}{2} & 0 & \frac{B}{3} + \Delta_1 - \Delta_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

where the Zeeman energy splitting is given in units of frequency: $B = \frac{\mu_B}{\hbar} |\vec{B}|$. The Hamiltonian also depends on the detunings and Rabi frequencies of the pump and probe beams Δ_1 , Ω_1 and Δ_2 , Ω_2 , respectively.

Spontaneous decay is taken into account by the Lindblad operator \mathcal{L} [39]:

$$\mathcal{L}[\rho] = \sum_{f,i} -\frac{1}{2} (C_{fi}^\dagger C_{fi} \rho + \rho C_{fi}^\dagger C_{fi}) + C_{fi} \rho C_{fi}^\dagger, \quad (7)$$

$$C_{fi} = \sqrt{\Gamma_{fi}} |f\rangle \langle i|, \quad (8)$$

where the subscripts i and f represent the initial level and the final level of the specific spontaneous decay channel. The decay rate matrix Γ in the $|S_{1/2}, -\frac{1}{2}\rangle$, $|S_{1/2}, \frac{1}{2}\rangle$, $|P_{1/2}, -\frac{1}{2}\rangle$, $|P_{1/2}, \frac{1}{2}\rangle$, $|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$, $|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$, $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, $|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$ basis reads as

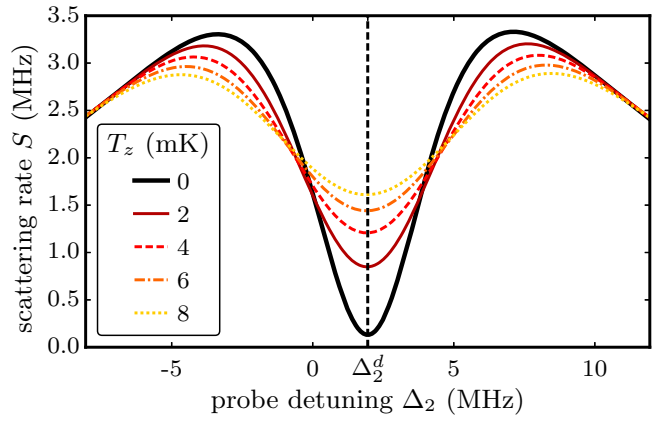


FIG. 3. Calculated fluorescence spectra in the presence of a thermal velocity distribution for a motion along the z axis and for several temperatures T_z . The ion parameters correspond to the $5s^2S_{1/2} \rightarrow 5p^2P_{1/2}$ transition of $^{88}\text{Sr}^+$. The other parameters for the calculation are $\Omega_1 = 12$ MHz, $\Omega_2 = 4$ MHz, $\Delta_1 = -3.7$ MHz, and $B = 2 \times 10^{-4}$ T.

follows:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3}\Gamma_{sp} & \frac{2}{3}\Gamma_{sp} & \Gamma_r & \frac{2}{3}\Gamma_r & \frac{1}{3}\Gamma_r & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\Gamma_{sp} & \frac{1}{3}\Gamma_{sp} & 0 & \frac{1}{3}\Gamma_r & \frac{2}{3}\Gamma_r & \Gamma_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\Gamma_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\Gamma_f & \frac{1}{6}\Gamma_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\Gamma_f & \frac{1}{3}\Gamma_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Gamma_f & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

where Γ_{sp} is the decay rate on the $P_{1/2} \rightarrow S_{1/2}$ transition and Γ_f is the decay rate on the $P_{1/2} \rightarrow D_{3/2}$ transition.

The scattering rate S is given by $S = \Gamma_e \rho_{ee}$, where Γ_e is the inverse of the lifetime of the excited state and ρ_{ee} is the sum of the populations in the excited-state sublevels. As shown in Fig. 3 (solid thick line), a dark resonance occurs in the fluorescence spectrum for $\Delta_2 = \Delta_2^d$ (two-photon resonance condition); the precise value of Δ_2^d depends mainly on the pump detuning Δ_1 and on the Zeeman shifts. We consider then an ion moving in a harmonic potential and, to simplify numerical calculations, we assume that the internal-state evolution is much faster than the ion secular oscillation (weak binding approximation). We describe classically the motional degrees of freedom and we consider a Maxwell-Boltzmann thermal velocity distribution described by the temperature T_z such that $\hbar\omega_z \ll k_B T_z$, where ω_z is the secular frequency along the z axis [Fig. 1(c)]. We also neglect the micromotion in the z direction (ideal linear trap). We then calculate the scattering rate for a moving ion as a two-dimensional convolution of steady-state solutions for an ion at rest with the distribution of velocity-dependent detunings δ_1 and δ_2 . Calculations show that, as expected, the motion along $\vec{k}_1 + \vec{k}_2$ (x direction) does not affect significantly the shape of the fluorescence spectrum.

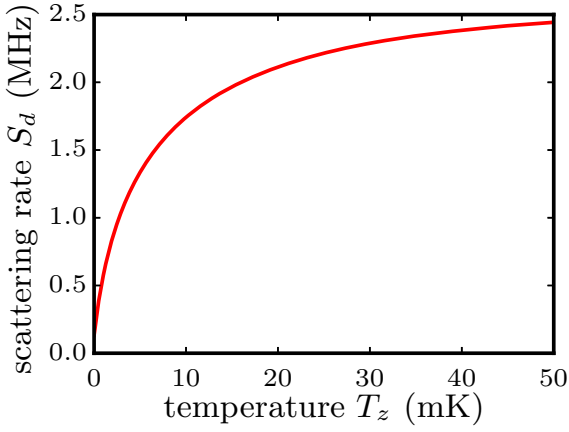


FIG. 4. Calculated scattering rate $S_d(T_z)$ at the center of the dark resonance as a function of the temperature. The parameters used for the calculation are $\Omega_1 = 12$ MHz, $\Omega_2 = 4$ MHz, $\Delta_1 = -3.7$ MHz, $\Delta_2 = 2$ MHz, and $B = 2 \times 10^{-4}$ T.

On the contrary, thermal motion along the $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$ direction (z axis) affects both the contrast and the width of the dark resonance, as can be seen in Fig. 3. The parameters injected in this calculation correspond to the $5s^2S_{1/2} \rightarrow 5p^2P_{1/2}$ transition of the $^{88}\text{Sr}^+$ ion; the beam parameters are set to $\Omega_1 = 12$ MHz, $\Omega_2 = 4$ MHz, and $\Delta_1 = -3.7$ MHz; the magnetic field is $B = 2 \times 10^{-4}$ T. In particular it is possible to calculate with the same set of parameters the scattering rate $S_d = S(\Delta_2 = \Delta_2^d)$ as a function of the temperature T_z . As shown in Fig. 4, S_d is a monotonous function of T_z . Therefore, the knowledge of the parameters Ω_1 , Ω_2 , B , Δ_1 , and $\Delta_2 = \Delta_2^d$ allows us to calculate the inverse function $T_z(S_d)$. In order to access different temperature ranges it is possible to tailor the width of the dark resonance by changing the pump and probe Rabi frequencies, while keeping constant their ratio (that fixes the contrast at zero temperature).

In the following we describe a numerical analysis that allows us to relate the linewidth of the dark resonance, the scattering rate, and the acquisition time necessary to reach a target statistical signal-to-noise ratio (SNR) affecting the temperature measurement. In the thermometry experiments we measure on a photon counter the experimental scattering rate S_{exp} of the photons scattered by the ion addressed by the pump and probe beams. The intrinsic scattering rate S is obtained taking into account the collection efficiency of the setup η (measured independently [40]) as $S_{\text{exp}} = \eta \times S$. We consider an accumulation time τ_{acc} during which we detect N photons. Assuming a Poissonian distribution for N , the mean number of photon counts $\langle N \rangle$ and its variance $(\Delta N)^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ are given by

$$\langle N \rangle = (\Delta N)^2 = \eta S \tau_{\text{acc}}. \quad (10)$$

For a given set of experimental parameters Δ_1 , Ω_1 , Δ_2 , and Ω_2 , the temperature of the ion is a function $T_z(S_d)$ of the scattering rate S_d measured at the center of the dark resonance. Up to the first order of the function $T_z(S_d)$ we can write the

standard variation ΔT_z affecting the temperature as

$$\Delta T_z = \frac{dT_z}{dS_d} \Delta S_d = \frac{dT_z}{dS_d} \sqrt{\frac{S_d}{\eta \tau_{\text{acc}}}}. \quad (11)$$

In terms of the function $S_d(T_z)$ (Fig. 4) we then have

$$\frac{\Delta T_z}{T_z} = \frac{1}{\sqrt{\eta \tau_{\text{acc}}}} \frac{\sqrt{S_d(T_z)}}{T_z S_d'(T_z)}. \quad (12)$$

The numerical calculation of the fractional uncertainty (12) allows us to optimize the experimental parameters in order to measure a given temperature T_z . We found, for example, that a good match between the dark resonance and the thermal Doppler linewidths maximizes the signal-to-noise ratio on T_z . We have also studied the applicability range of the method by imposing (somewhat arbitrarily) a maximum accumulated probing time of $\tau_{\text{acc}} = 20$ s and a target fractional uncertainty of $\Delta T_z/T_z = 1/10$. We obtain an accessible temperature range between 2×10^{-2} and 2×10^2 mK for an experimental parameter set well accessible with standard laser sources. Let us now discuss the origin of systematic errors affecting T_z . The dominant systematic errors affecting the retrieved temperature have their origin in the imperfect ‘‘one shot’’ estimation of the parameters Ω_1 , Ω_2 , and B that describe the line shape of the dark resonance, necessary to parametrize the function $S_d(T_z)$. The statistical error affecting this imperfect estimation can be retrieved from the fitting procedure; nevertheless all the temperatures measured with the same set of parameters display correlated (systematic) errors.

II. EXPERIMENTS

The experiments are realized using single $^{88}\text{Sr}^+$ ions trapped in a symmetric five-wire surface trap [41]. The details concerning the trap design and the experimental setup can be found in Ref. [42].

In brief, we drive the trap with a radio-frequency (rf) voltage oscillating at $2\pi \times 8.9$ MHz and static (dc) voltages leading to secular frequencies $\omega_z/2\pi = 98$ kHz, $\omega_x/2\pi = 510$ kHz, and $\omega_y/2\pi = 370$ kHz. We used a time-correlated single-photon counting technique [43] in order to minimize excess micromotion. Along the x direction we estimate a residual amplitude of $x_0 < 4$ nm (equivalent pseudotemperature $T_x^\mu < 240$ μK). According to the trap field calculations [44], a small rf field component along z exists, leading to a possible excess z micromotion. We estimate that, after compensation, its residual amplitude is $z_0 < 1$ nm (equivalent pseudotemperature $T_z^\mu < 25$ μK). Let us mention that the equivalent pseudotemperature originated by intrinsic (i.e., not excess) micromotion is negligible in the z direction (some thousandth of the secular temperature), while, as expected, it is a conspicuous fraction ($\simeq 80\%$) of secular temperature in the x direction.

We address the $5s^2S_{1/2} \rightarrow 5p^2P_{1/2}$ transition; to avoid optical pumping in the $4d^2D_{3/2}$ we repump the electronic populations with an incoherent scheme [25] that addresses simultaneously the $4d^2D_{3/2} \rightarrow 5p^2P_{3/2}$ and $4d^2D_{5/2} \rightarrow 5p^2P_{3/2}$ transitions. The fluorescence spectra are acquired using a sequential approach to neglect the mechanical effect of the beams during the probing phase [45,46]. We used probing

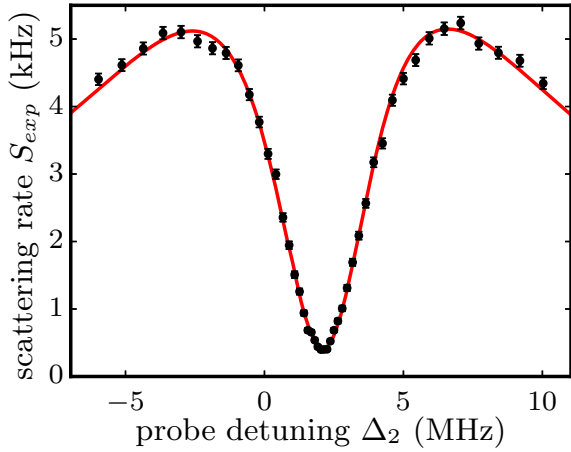


FIG. 5. Averaged experimental fluorescence spectrum (black dots). The pump detuning is $\Delta_1 = -3.7$ MHz and the ion is pre-cooled to a sub-Doppler temperature with a cooling phase in which the probe is tuned to $\Delta_2 = 1.7$ MHz. The free parameters obtained from the numerical fit (red line) are $\Omega_2 = 3.78(1)$ MHz, $\Omega_1 = 10.7(1)$ MHz, $B = 2.06(1) \times 10^{-4}$ T, and ion temperature $T = 0.128(7)$ mK. The uncertainties do not take into account systematic shifts.

phase durations in the range 10–100 μ s such that the number of spontaneous photons emitted during temperature measurements was less than 25. As the recoil temperature for $^{88}\text{Sr}^+$ is $\frac{\hbar^2 k^2}{m_{\text{Sr}} k_B} = 1.22$ μ K, we expect a recoil heating in the tens of micro-Kelvin range. We measure on a photon counter the scattering rate $S_{\text{exp}} = S \times \eta$, where $\eta = 1.95(5) \times 10^{-3}$ is the collection efficiency of the setup and S is the intrinsic scattering rate. The detunings Δ_1 and Δ_2 are imposed by two acousto-optic modulators that shift with a negligible phase noise a common laser beam (that is frequency locked to an atomic reference with a precision better than 100 kHz). As a first check we acquired several fluorescence spectra for different Ω_1 , Ω_2 , and B for an ion cooled close to the Doppler limit. Numerical fits with the solution of the OBE are in excellent agreement with the experimental spectra and the parameters extracted from the fits follow the variations imposed on the experimental parameters and give a constant temperature T_z consistent with the Doppler limit. Let us mention that, as this is a single-ion experiment, the temperature T_z may only be retrieved by averaging over many realizations the velocity-dependent scattering rate S_{exp} . The sequential acquisition that consists of repeated preparation and probing phases allows us to obtain such an averaging. For a fixed set of known parameters Ω_1 , Ω_2 , B , Δ_1 , and $\Delta_2 = \Delta_2^d$, T_z can be retrieved from a measurement of the average scattering rate S_d (see above). In the following we adopt this approach, faster than the acquisition of a full fluorescence spectrum for each temperature. In order to precisely evaluate the Ω_1 , Ω_2 , and B parameters we acquire and fit a preliminary calibration spectrum, such as the one presented in Fig. 5. In this specific case the pump detuning is $\Delta_1 = -3.7$ MHz and the ion is pre-cooled to a sub-Doppler temperature with a cooling phase in which the probe is tuned to $\Delta_2 = 1.7$ MHz. The free parameters obtained from the numerical fit (red line) are

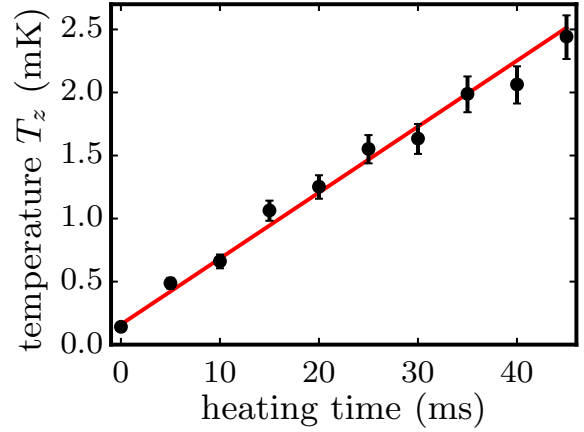


FIG. 6. Averaged retrieved temperature T_z as a function of the heating time (black dots). The heating rate of the trap (slope of the fit, red line) is 52(1) mK/s. Error bars are ± 1 standard deviation (both statistical and systematic).

$\Omega_2 = 3.78(1)$ MHz, $\Omega_1 = 10.7(1)$ MHz, $B = 2.06(1) \times 10^{-4}$ T, and ion temperature $T = 0.128(7)$ mK.

As a first application we have measured the heating rate of the surface trap affecting the motion along the z axis. For that purpose we prepared the ion at an initial temperature T_{in} and then measured its temperature after a heating phase during which laser cooling is switched off. The results of these measurements are shown in Fig. 6 and display the expected linear behavior that allow us to measure a heating rate of 52(1) mK/s. In order to extend the range of these measurements we pre-cooled the ion to a sub-Doppler temperature of $T_{\text{in}} = 0.20(5)$ mK (with our geometry the one-beam Doppler limit for Sr^+ is $T_D = 0.47$ mK), taking advantage of the mechanism reminiscent of the EIT cooling that operates with Δ_2 tuned on the low-frequency side of the dark resonance. This cooling method occurs in a completely different regime with respect to previous realizations of EIT cooling [30]; the complete description of the mechanisms involved is beyond the scope of this paper. To validate the absolute character of this thermometry technique we have measured the ion temperature as a function of the detuning of a Doppler cooling beam at low intensity [16]. Indeed in this regime it is possible to calculate analytical expressions describing both the cooling dynamics and the stationary temperature [13]. The experimental sequence includes two cooling phases. The first step has a duration of 20 ms and is performed at optimal detuning, allowing us to reach a temperature on the order of 0.5 mK with a theoretical characteristic time of 320 μ s. The second cooling step, performed at intensity $I \ll I_{\text{sat}}$ (where I_{sat} is the saturation intensity), has a duration set to ten times the characteristic cooling time as calculated from the theory. The measured temperature of the ion as a function of the cooling beam detuning is shown in Fig. 7 (black dots). In order to compare this result with the theoretical prediction, we acquire an experimental fluorescence spectrum (scattering rate as a function of cooling beam detuning) at the same (low) cooling beam intensity. The sequential character of the acquisition and the incoherent repumping scheme allows us to describe the spectrum in terms of a pure Lorentzian line shape.

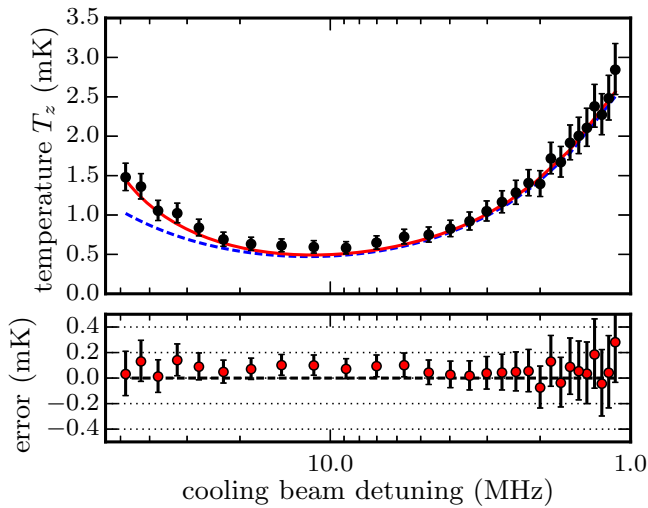


FIG. 7. Averaged retrieved temperature T_z as a function of the Doppler-cooling beam detuning (black dots). Measurements are obtained in the low-intensity regime $I \ll I_{\text{sat}}$. The solid red line (blue dashed line) is the result of a calculation of the stationary temperature including (not including) the trap heating rate (see Fig. 6). The bottom panel of the figure shows the residuals (red dots) with the associated statistical standard deviation.

We then inject the two parameters describing the Lorentzian scattering rate in the theoretical model of Doppler cooling and obtain the stationary temperature as a function of cooling beam detuning (dashed line in Fig. 7), in the absence of adjustable parameters. The discrepancy with the experimental data observed at large detunings is dominated by the effect of the trap heating rate (see above), as shown by the stationary temperature obtained with calculations that include this term (solid line in Fig. 7). The error bars in Fig. 7 (± 1 standard deviation) are calculated taking into account both photon count statistics and calibration uncertainties.

III. CONCLUSION

In conclusion we demonstrated a thermometry technique that we implemented with a single Sr^+ ion loaded and cooled in a surface trap. We applied the technique to characterize the heating rate of the trap and to verify, in an absolute way, the

theoretical law describing the stationary temperature reached with one-beam Doppler cooling. The excellent agreement between the calculations and the experimental measurements over a large range of detunings demonstrates the reliability of the method and opens the way to fast (the probing time in a sequence is on the order of $10 \mu\text{s}$) and directional single-ion absolute thermometry.

Extensions of this work may apply to cases in which nonthermal distributions are expected, as long as we are able to inject the shape and the characteristics of a parametrized velocity distribution in the model (i.e., hypothesis about the shape of the velocity distribution). As an example, by inverting the propagation direction of one beam it would be possible to probe the velocity distribution along the x direction that will contain contributions both from the thermal secular motion and from the intrinsic (nonthermal) micromotion, with similar weight. Let us mention that, if a non-negligible rf field is present, depending on its frequency an analysis beyond the stationary regime (i.e., involving the numerical solution of the time-dependent OBE) will be necessary, without affecting the principles of the technique but beyond the scope of this paper. Nonthermal distributions obtained with sub-Doppler laser cooling should also be measurable with this method, provided that the number of photons scattered during the probing phase induces a recoil heating negligible with respect to the initial temperature. In the particular case of surface traps, information about the velocity distribution along the y direction is not accessible. However in three-dimensional traps this limitation could be easily lifted, allowing for the orientation of the $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$ vector such that a projection exists along all the motional modes of the trap. In the case of nontrivial environments (e.g., thermodynamics of an ion in a linear chain or an ion in contact with atoms) the technique may be applied if spatially resolved single-ion addressing is implemented, at least with one of the two probing beams. The absolute character of the method will probably open interesting perspectives in these fields.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank M. Apfel, P. Lepert, and M. Nicolas for technical support. This study was partly funded by Région Ile-de-France through the DIM Nano-k (DEQULOT grant).

-
- [1] D. J. Wineland, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 1103 (2013).
 - [2] R. Blatt and D. Wineland, *Nature (London)* **453**, 1008 (2008).
 - [3] C. Monroe, R. Raussendorf, A. Ruthven, K. R. Brown, P. Maunz, L.-M. Duan, and J. Kim, *Phys. Rev. A* **89**, 022317 (2014).
 - [4] J. Roßnagel, O. Abah, F. Schmidt-Kaler, K. Singer, and E. Lutz, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 030602 (2014).
 - [5] J. Roßnagel, S. T. Dawkins, K. N. Tolazzi, O. Abah, E. Lutz, F. Schmidt-Kaler, and K. Singer, *Science* **352**, 325 (2016).
 - [6] G.-D. Lin and L.-M. Duan, *New J. Phys.* **13**, 075015 (2011).
 - [7] A. Bermudez, M. Bruderer, and M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 040601 (2013).
 - [8] N. Freitas, E. A. Martinez, and J. P. Paz, *Phys. Scr.* **91**, 013007 (2016).
 - [9] M. Ramm, T. Pruttivarasin, and H. Häffner, *New J. Phys.* **16**, 063062 (2014).
 - [10] W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. Toschek, and H. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 233 (1978).
 - [11] D. J. Wineland, R. E. Drullinger, and F. L. Walls, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1639 (1978).
 - [12] D. J. Wineland and W. M. Itano, *Phys. Rev. A* **20**, 1521 (1979).
 - [13] D. J. Wineland, W. M. Itano, J. C. Bergquist, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. A* **36**, 2220 (1987).

- [14] W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. E. Toschek, and H. Dehmelt, *Phys. Rev. A* **22**, 1137 (1980).
- [15] B. G. Norton, E. W. Streed, M. J. Petrusianas, A. Jechow, and D. Kielpinski, *New J. Phys.* **13**, 113022 (2011).
- [16] S. Knünz, M. Herrmann, V. Batteiger, G. Saathoff, T. W. Hänsch, and T. Udem, *Phys. Rev. A* **85**, 023427 (2012).
- [17] I. A. Boldin, A. Kraft, and C. Wunderlich, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 023201 (2018).
- [18] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, S. R. Jefferts, W. M. Itano, D. J. Wineland, and P. Gould, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4011 (1995).
- [19] Q. A. Turchette, D. Kielpinski, B. E. King, D. Leibfried, D. M. Meekhof, C. J. Myatt, M. A. Rowe, C. A. Sackett, C. S. Wood, W. M. Itano *et al.*, *Phys. Rev. A* **61**, 063418 (2000).
- [20] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1796 (1996).
- [21] K. G. Johnson, B. Neyenhuis, J. Mizrahi, J. D. Wong-Campos, and C. Monroe, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 213001 (2015).
- [22] T. Sikorsky, Z. Meir, N. Akerman, R. Ben-shlomi, and R. Ozeri, *Phys. Rev. A* **96**, 012519 (2017).
- [23] R. J. Epstein, S. Seidelin, D. Leibfried, J. H. Wesenberg, J. J. Bollinger, J. M. Amini, R. B. Blakestad, J. Britton, J. P. Home, W. M. Itano *et al.*, *Phys. Rev. A* **76**, 033411 (2007).
- [24] J. H. Wesenberg, R. J. Epstein, D. Leibfried, R. B. Blakestad, J. Britton, J. P. Home, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer *et al.*, *Phys. Rev. A* **76**, 053416 (2007).
- [25] D. T. C. Allcock, J. A. Sherman, D. N. Stacey, A. H. Burrell, M. J. Curtis, G. Imreh, N. M. Linke, D. J. Szwer, S. C. Webster, A. M. Steane *et al.*, *New J. Phys.* **12**, 053026 (2010).
- [26] Z. Meir, T. Sikorsky, N. Akerman, R. Ben-shlomi, M. Pinkas, and R. Ozeri, *Phys. Rev. A* **96**, 020701 (2017).
- [27] G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, *Il Nuovo Cimento B (1971–1996)* **36**, 5 (1976).
- [28] E. Arimondo and G. Orriols, *Lett. Nuovo Cimento (1971–1985)* **17**, 333 (1976).
- [29] I. Siemers, M. Schubert, R. Blatt, W. Neuhauser, and P. E. Toschek, *Europhys. Lett.* **18**, 139 (1992).
- [30] G. Morigi, J. Eschner, and C. H. Keitel, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4458 (2000).
- [31] C. F. Roos, D. Leibfried, A. Mundt, F. Schmidt-Kaler, J. Eschner, and R. Blatt, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5547 (2000).
- [32] Y. Lin, J. P. Gaebler, T. R. Tan, R. Bowler, J. D. Jost, D. Leibfried, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 153002 (2013).
- [33] R. Lechner, C. Maier, C. Hempel, P. Jurcevic, B. P. Lanyon, T. Monz, M. Brownnutt, R. Blatt, and C. F. Roos, *Phys. Rev. A* **93**, 053401 (2016).
- [34] D. T. C. Allcock, T. P. Harty, M. A. Sepiol, H. A. Janacek, C. J. Ballance, A. M. Steane, D. M. Lucas, and D. N. Stacey, *New J. Phys.* **18**, 023043 (2016).
- [35] C. Lisowski, M. Knoop, C. Champenois, G. Hagel, M. Vedel, and F. Vedel, *Appl. Phys. B* **81**, 5 (2005).
- [36] T. Peters, B. Wittrock, F. Blatt, T. Halfmann, and L. P. Yatsenko, *Phys. Rev. A* **85**, 063416 (2012).
- [37] J. Rossnagel, K. N. Tolazzi, F. Schmidt-Kaler, and K. Singer, *New J. Phys.* **17**, 045004 (2015).
- [38] E. Arimondo, V Coherent population trapping in laser spectroscopy, in *Progress in Optics*, edited by E. Wolf (Elsevier, Amsterdam, 1996), Vol. 35, pp. 257–354.
- [39] C. Cohen-Tannoudji and D. Guery-Odelin, *Advances in Atomic Physics: An Overview* (World Scientific, Singapore, 2011).
- [40] J.-P. Likforman, V. Tugayé, S. Guibal, and L. Guidoni, *Phys. Rev. A* **93**, 052507 (2016).
- [41] J. Chiaverini, R. B. Blakestad, J. Britton, J. D. Jost, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri, and D. J. Wineland, *Quantum Inf. Comput.* **5**, 419 (2005).
- [42] B. Szymanski, R. Dubessy, B. Dubost, S. Guibal, J.-P. Likforman, and L. Guidoni, *Appl. Phys. Lett.* **100**, 171110 (2012).
- [43] D. J. Berkeland, J. D. Miller, J. C. Bergquist, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *J. Appl. Phys.* **83**, 5025 (1998).
- [44] M. G. House, *Phys. Rev. A* **78**, 033402 (2008).
- [45] A. Gardner, K. Sheridan, W. Groom, N. Seymour-Smith, and M. Keller, *Appl. Phys. B* **117**, 755 (2014).
- [46] Z. Meir, O. Schwartz, E. Shahmoon, D. Oron, and R. Ozeri, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 193002 (2014).

Références

- [1] Scott Aaronson. Read the fine print. *Nature Physics*, 11(4) :291–293, apr 2015.
- [2] Samson Abramsky and Adam Brandenburger. The sheaf-theoretic structure of non-locality and contextuality. *New Journal of Physics*, 13(11) :113036, nov 2011.
- [3] Samson Abramsky and Lucien Hardy. Logical Bell inequalities. *Physical Review A*, 85(6), jun 2012.
- [4] Tameem Albash and Daniel A. Lidar. Adiabatic quantum computation. *Reviews of Modern Physics*, 90(1), jan 2018.
- [5] D T C Allcock, L Guidoni, T P Harty, C J Ballance, M G Blain, A M Steane, and D M Lucas. Reduction of heating rate in a microfabricated ion trap by pulsed-laser cleaning. *New J. Phys.*, 13(12) :123023, 2011.
- [6] D. T. C. Allcock, J. A. Sherman, D. N. Stacey, A. H. Burrell, M. J. Curtis, G. Imreh, N. M. Linke, D. J. Szwer, S. C. Webster, A. M. Steane, and D. M. Lucas. Implementation of a symmetric surface-electrode ion trap with field compensation using a modulated Raman effect. *New J. Phys.*, 12(5) :053026, 2010.
- [7] Frank Arute, Arya Kunal, John M. Martinis, and al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, (574) :505–510, 2019.
- [8] C. J. Ballance, V. M. Schäfer, J. P. Home, D. J. Szwer, S. C. Webster, D. T. C. Allcock, N. M. Linke, T. P. Harty, D. P. L. Aude Craik, D. N. Stacey, A. M. Steane, and D. M. Lucas. Hybrid quantum logic and a test of bell’s inequality using two different atomic isotopes. *Nature*, 528(7582) :384–386, dec 2015.
- [9] C. J. Ballance, T. P. Harty, N. M. Linke, M. A. Sepiol, and D. M. Lucas. High-fidelity quantum logic gates using trapped-ion hyperfine qubits. *Physical Review Letters*, 117(6), aug 2016.
- [10] R. Barends, J. Kelly, A. Megrant, A. Veitia, D. Sank, E. Jeffrey, T. C. White, J. Mutus, A. G. Fowler, B. Campbell, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, A. Dunsworth, C. Neill, P. O’Malley, P. Roushan, A. Vainsencher, J. Wenner, A. N. Korotkov, A. N. Cleland, and John M. Martinis. Superconducting quantum circuits at the surface code threshold for fault tolerance. *Nature*, 508(7497) :500–503, apr 2014.

- [11] M. D. Barrett, B. DeMarco, T. Schaetz, V. Meyer, D. Leibfried, J. Britton, J. Chiaverini, W. M. Itano, B. Jelenković, J. D. Jost, C. Langer, T. Rosenband, and D. J. Wineland. Sympathetic cooling of ${}^9\text{be}^+$ and ${}^{24}\text{mg}^+$ for quantum logic. *Phys. Rev. A*, 68 :042302, Oct 2003.
- [12] Michel Le Bellac. *Quantum Physics*. Cambridge University Press, 2011.
- [13] D. J. Berkeland, J. D. Miller, J. C. Bergquist, W. M. Itano, and D. J. Wineland. Minimization of ion micromotion in a paul trap. *Journal of Applied Physics*, 83(10) :5025–5033, 1998.
- [14] A. Bermudez, X. Xu, R. Nigmatullin, J. O’Gorman, V. Negnevitsky, P. Schindler, T. Monz, U. G. Poschinger, C. Hempel, J. Home, F. Schmidt-Kaler, M. Biercuk, R. Blatt, S. Benjamin, and M. Müller. Assessing the progress of trapped-ion processors towards fault-tolerant quantum computation. *Physical Review X*, 7(4), dec 2017.
- [15] Ivan A. Boldin, Alexander Kraft, and Christof Wunderlich. Measuring anomalous heating in a planar ion trap with variable ion-surface separation. *Phys. Rev. Lett.*, 120 :023201, Jan 2018.
- [16] H. J. Briegel, D. E. Browne, W. Dür, R. Raussendorf, and M. Van den Nest. Measurement-based quantum computation. *Nature Physics*, 5(1) :19–26, jan 2009.
- [17] M. Brownnutt, M. Kumph, P. Rabl, and R. Blatt. Ion-trap measurements of electric-field noise near surfaces. *Reviews of Modern Physics*, 87(4) :1419–1482, dec 2015.
- [18] M. Brownnutt, V. Letchumanan, G. Wilpers, R.C. Thompson, P. Gill, and A.G. Sinclair. Controlled photoionization loading of 88sr^+ for precision ion-trap experiments. *Appl. Phys. B*, 87 :411–415, 2007. 10.1007/s00340-007-2624-8.
- [19] C. D. Bruzewicz, J. M. Sage, and J. Chiaverini. Measurement of ion motional heating rates over a range of trap frequencies and temperatures. *Phys. Rev. A*, 91 :041402, Apr 2015.
- [20] Colin D. Bruzewicz, John Chiaverini, Robert McConnell, and Jeremy M. Sage. Trapped-ion quantum computing : Progress and challenges. *Applied Physics Reviews*, 6(2) :021314, 2019.

- [21] W. C. Campbell, J. Mizrahi, Q. Quraishi, C. Senko, D. Hayes, D. Hucul, D. N. Matsukevich, P. Maunz, and C. Monroe. Ultrafast gates for single atomic qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 105(9) :090502, Aug 2010.
- [22] C. Cohen-Tannoudji. Atomic motion in laser light. In J. Dalibard, J.-M. Raymond, and J. Zinn-Justin, editors, *Fundamental Systems in Quantum Optics*. Elsevier Amsterdam, 1992.
- [23] Mathieu Collombon, Gaëtan Hagel, Cyril Chatou, Didier Guyomarc’h, Didier Ferrand, Marie Houssin, Caroline Champenois, and Martina Knoop. Phase transfer between three visible lasers for coherent population trapping. *Optics Letters*, 44(4) :859, feb 2019.
- [24] Stephen Crain, Clinton Cahall, Geert Vrijsen, Emma E. Wollman, Matthew D. Shaw, Varun B. Verma, Sae Woo Nam, and Jungsang Kim. High-speed low-crosstalk detection of a $^{171}\text{Yb}^+$ qubit using superconducting nanowire single photon detectors. *Communications Physics*, 2(1), aug 2019.
- [25] Andrew W. Cross, David P. DiVincenzo, and Barbara M. Terhal. A comparative code study for quantum fault-tolerance. arXiv :0711.1556v2.
- [26] L. Deslauriers, P. C. Haljan, P. J. Lee, K-A. Brickman, B. B. Blinov, M. J. Madsen, and C. Monroe. Zero-point cooling and low heating of trapped $^{111}\text{Cd}^+$ ions. *Phys. Rev. A*, 70(4) :043408, Oct 2004.
- [27] David Elieser Deutsch. Quantum computational networks. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 425(1868) :73–90, sep 1989.
- [28] Simon J Devitt, William J Munro, and Kae Nemoto. Quantum error correction for beginners. *Reports on Progress in Physics*, 76(7) :076001, jun 2013.
- [29] David P. DiVincenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschr. Phys.*, 48(9-11) :771–783, 2000.
- [30] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47(10) :777–780, may 1935.
- [31] R. J. Epstein, S. Seidelin, D. Leibfried, J. H. Wesenberg, J. J. Bollinger, J. M. Amini, R. B. Blakestad, J. Britton, J. P. Home, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, R. Ozeri,

- N. Shiga, and D. J. Wineland. Simplified motional heating rate measurements of trapped ions. *Phys. Rev. A*, 76(3) :033411, Sep 2007.
- [32] Daniel Finkelstein-Shapiro, Simone Felicetti, Thorsten Hansen, Tõnu Pullerits, and Arne Keller. Classification of dark states in multilevel dissipative systems. *Physical Review A*, 99(5), may 2019.
- [33] Fulvio Flamini, Nicolò Spagnolo, and Fabio Sciarrino. Photonic quantum information processing : a review. *Reports on Progress in Physics*, 82(1) :016001, nov 2018.
- [34] J. P. Gaebler, T. R. Tan, Y. Lin, Y. Wan, R. Bowler, A. C. Keith, S. Glancy, K. Coakley, E. Knill, D. Leibfried, and D. J. Wineland. High-fidelity universal gate set for ${}^9\text{Be}^+$ ion qubits. *Physical Review Letters*, 117(6), aug 2016.
- [35] I. M. Georgescu, S. Ashhab, and Franco Nori. Quantum simulation. *Reviews of Modern Physics*, 86(1) :153–185, mar 2014.
- [36] Craig Gidney and Martin Ekerå. How to factor 2048 bit rsa integers in 8 hours using 20 million noisy qubits. arXiv :1905.09749v2.
- [37] Nicolas Gisin and Rob Thew. Quantum communication. *Nature Photonics*, 1(3) :165–171, mar 2007.
- [38] Timm F. Gloger, Peter Kaufmann, Delia Kaufmann, M. Tanveer Baig, Thomas Collath, Michael Johanning, and Christof Wunderlich. Ion-trajectory analysis for micromotion minimization and the measurement of small forces. *Phys. Rev. A*, 92 :043421, Oct 2015.
- [39] Lov K. Grover. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Physical Review Letters*, 79(2) :325–328, jul 1997.
- [40] Gilbert Grynberg, Alain Aspect, and Claude Fabre. *Introduction to Quantum Optics : From the Semi-classical Approach to Quantized Light*. Cambridge University Press, 1st edition, 2010.
- [41] T. P. Harty, D. T. C. Allcock, C. J. Ballance, L. Guidoni, H. A. Janacek, N. M. Linke, D. N. Stacey, and D. M. Lucas. High-fidelity preparation, gates, memory, and readout of a trapped-ion quantum bit. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :220501, Nov 2014.

- [42] T. P. Harty, M. A. Sepiol, D. T. C. Allcock, C. J. Ballance, J. E. Tarlton, and D. M. Lucas. High-fidelity trapped-ion quantum logic using near-field microwaves. *Physical Review Letters*, 117(14), sep 2016.
- [43] D. A. Hite, Y. Colombe, A. C. Wilson, K. R. Brown, U. Warring, R. Jördens, J. D. Jost, K. S. McKay, D. P. Pappas, D. Leibfried, and D. J. Wineland. 100-fold reduction of electric-field noise in an ion trap cleaned with *In Situ* argon-ion-beam bombardment. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :103001, Sep 2012.
- [44] D. A. Hite, K. S. McKay, S. Kotler, D. Leibfried, D. J. Wineland, and D. P. Pappas. Measurements of trapped-ion heating rates with exchangeable surfaces in close proximity. *MRS Advances*, 2(41) :2189–2197, 2017.
- [45] M. G. House. Analytic model for electrostatic fields in surface-electrode ion traps. *Phys. Rev. A*, 78 :033402, Sep 2008.
- [46] D. Hume, T. Rosenband, and D. Wineland. High-fidelity adaptive qubit detection through repetitive quantum nondemolition measurements. *Physical Review Letters*, 99(12), sep 2007.
- [47] Wayne M. Itano and D. J. Wineland. Laser cooling of ions stored in harmonic and penning traps. *Phys. Rev. A*, 25 :35–54, Jan 1982.
- [48] Evan Jeffrey, Daniel Sank, J. Y. Mutus, T. C. White, J. Kelly, R. Barends, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, A. Dunsworth, A. Megrant, P. J. J. O’Malley, C. Neill, P. Roushan, A. Vainsencher, J. Wenner, A. N. Cleland, and John M. Martinis. Fast accurate state measurement with superconducting qubits. *Physical Review Letters*, 112(19), may 2014.
- [49] D. Kaufmann, T. Collath, M. T. Baig, P. Kaufmann, E. Asenwar, M. Johanning, and C. Wunderlich. Thick-film technology for ultra high vacuum interfaces of micro-structured traps. *Appl. Phys. B*, 107(4) :935–943, 2012.
- [50] M. Kjaergaard, M. E. Schwartz, A. Greene, G. O. Samach, A. Bengtsson, M. O’Keeffe, C. M. McNally, J. Braumüller, D. K. Kim, P. Krantz, M. Marvian, A. Melville, B. M. Niedzielski, Y. Sung, R. Winik, J. Yoder, D. Rosenberg, K. Obenland, S. Lloyd, T. P. Orlando, I. Marvian, S. Gustavsson, and W. D. Oliver. A quantum instruction set implemented on a superconducting quantum processor.

- [51] Morten Kjaergaard, Mollie E. Schwartz, Jochen Braumüller, Philip Krantz, Joel I.-J. Wang, Simon Gustavsson, and William D. Oliver. Superconducting qubits : Current state of play. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 11(1) :369–395, mar 2020.
- [52] A. Kramida, Yu. Ralchenko, J. Reader, and NIST-ASD-Team. Nist atomic spectra database (ver. 5.1). National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, Jun 2015.
- [53] Christoph Kurz, Pascal Eich, Michael Schug, Philipp Müller, and Jürgen Eschner. Programmable atom-photon quantum interface. *Physical Review A*, 93(6), jun 2016.
- [54] Jaroslaw Labaziewicz, Yufei Ge, Paul Antohi, David Leibbrandt, Kenneth R. Brown, and Isaac L. Chuang. Suppression of heating rates in cryogenic surface-electrode ion traps. *Phys. Rev. Lett.*, 100(1) :013001, Jan 2008.
- [55] R. B. Laughlin and D. Pines. The theory of everything. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97(1) :28–31, jan 2000.
- [56] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland. Quantum dynamics of single trapped ions. *Rev. Mod. Phys.*, 75(1) :281–324, Mar 2003.
- [57] Bjoern Lekitsch, Sebastian Weidt, Austin G. Fowler, Klaus Mølmer, Simon J. Devitt, Christof Wunderlich, and Winfried K. Hensinger. Blueprint for a microwave trapped ion quantum computer. *Science Advances*, 3(2) :e1601540, feb 2017.
- [58] Göran Lindblad. *Letters in Mathematical Physics*, 47(2) :189–196, 1999.
- [59] A. P. Lund, Michael J. Bremner, and T. C. Ralph. Quantum sampling problems, Boson-Sampling and quantum supremacy. *npj Quantum Information*, 3(1), apr 2017.
- [60] Robert McConnell, Colin Bruzewicz, John Chiaverini, and Jeremy Sage. Reduction of trapped-ion anomalous heating by in situ surface plasma cleaning. *Physical Review A*, 92(2), aug 2015.
- [61] M. J. McDonnell, J.-P. Stacey, S. C. Webster, J. P. Home, A. Ramos, D. M. Lucas, D. N. Stacey, and A. M. Steane. High-efficiency detection of a single quantum of angular momentum by suppression of optical pumping. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :153601, Oct 2004.

- [62] Klaus Mølmer, Yvan Castin, and Jean Dalibard. Monte carlo wave-function method in quantum optics. *J. Opt. Soc. Am. B*, 10(3) :524–538, Mar 1993.
- [63] A. H. Myerson, D. J. Szwer, S. C. Webster, D. T. C. Allcock, M. J. Curtis, G. Imreh, J. A. Sherman, D. N. Stacey, A. M. Steane, and D. M. Lucas. High-fidelity readout of trapped-ion qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :200502, May 2008.
- [64] Wolfgang Paul. Electromagnetic traps for charged and neutral particles. *Rev. Mod. Phys.*, 62(3) :531–540, Jul 1990.
- [65] Philip Pearle. Simple derivation of the lindblad equation. *European Journal of Physics*, 33(4) :805–822, apr 2012.
- [66] Edwin Pednault, John A. Gunnels, Giacomo Nannicini, Lior Horesh, and Robert Wisnieff. Leveraging secondary storage to simulate deep 54-qubit sycamore circuits. arXiv :1910.09534v2.
- [67] John Preskill. Quantum computing in the NISQ era and beyond. *Quantum*, 2 :79, aug 2018.
- [68] Michael Ramm, Thaned Pruttivarasin, Mark Kokish, Ishan Talukdar, and Hartmut Häffner. Precision measurement method for branching fractions of excited $P_{1/2}$ states applied to $^{40}\text{Ca}^+$. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :023004, Jul 2013.
- [69] J Rosnagel, K N Tolazzi, F Schmidt-Kaler, and K Singer. Fast thermometry for trapped ions using dark resonances. *New Journal of Physics*, 17(4) :045004, 2015.
- [70] T. Ruster, C. Warschburger, H. Kaufmann, C. T. Schmiegelow, A. Walther, M. Hettrich, A. Pfister, V. Kaushal, F. Schmidt-Kaler, and U. G. Poschinger. Experimental realization of fast ion separation in segmented paul traps. *Physical Review A*, 90(3), sep 2014.
- [71] Valerio Scarani, Sofyan Iblisdir, Nicolas Gisin, and Antonio Acín. Quantum cloning. *Reviews of Modern Physics*, 77(4) :1225–1256, nov 2005.
- [72] V. M. Schäfer, C. J. Ballance, K. Thirumalai, L. J. Stephenson, T. G. Ballance, A. M. Steane, and D. M. Lucas. Fast quantum logic gates with trapped-ion qubits. *Nature*, 555(7694) :75–78, mar 2018.
- [73] Benjamin Schumacher. Quantum coding. *Physical Review A*, 51(4) :2738–2747, apr 1995.

- [74] J. A. Sedlacek, A. Greene, J. Stuart, R. McConnell, C. D. Bruzewicz, J. M. Sage, and J. Chiaverini. Distance scaling of electric-field noise in a surface-electrode ion trap. *Physical Review A*, 97(2), feb 2018.
- [75] J. A. Sedlacek, J. Stuart, D. H. Slichter, C. D. Bruzewicz, R. McConnell, J. M. Sage, and J. Chiaverini. Evidence for multiple mechanisms underlying surface electric-field noise in ion traps. *Physical Review A*, 98(6), dec 2018.
- [76] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27(3) :379–423, jul 1948.
- [77] A.D. Shiner, A.A. Madej, P. Dubé, and J.E. Bernard. Absolute optical frequency measurement of saturated absorption lines in rb near 422 nm. *Appl. Phys. B*, 89 :595–601, 2007. 10.1007/s00340-007-2836-y.
- [78] P.W. Shor. Algorithms for quantum computation : discrete logarithms and factoring. In *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE Comput. Soc. Press, 1994.
- [79] Tomas Sikorsky, Ziv Meir, Nitzan Akerman, Ruti Ben-shlomi, and Roei Ozeri. Doppler cooling thermometry of a multilevel ion in the presence of micromotion. *Phys. Rev. A*, 96 :012519, Jul 2017.
- [80] A. G. Sinclair, M. A. Wilson, and P. Gill. Improved three-dimensional control of a single strontium ion in an endcap trap. *Opt. Commun.*, 190(1-6) :193 – 203, 2001.
- [81] D N Stacey, D M Lucas, D T C Allcock, D J Szwer, and S C Webster. Optical bloch equations with multiply connected states. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 41(8) :085502, 2008.
- [82] M. Steiner, H. M. Meyer, J. Reichel, and M. Köhl. Photon emission and absorption of a single ion coupled to an optical-fiber cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :263003, Dec 2014.
- [83] Jack A. Stone and Jay H. Zimmerman. Index of refraction of air. NIST ENGINEERING METROLOGY TOOLBOX, 2020. [Online ; accessed 23-September-2020].
- [84] F. J. Sullivan. Strontium lines in arc and solar spectra. *Univ. Pittsburgh. Bull.*, 35 :1–8, 1938.

- [85] Xavier Waintal. What determines the ultimate precision of a quantum computer. *Physical Review A*, 99(4), apr 2019.
- [86] A. Walther, F. Ziesel, T. Ruster, S. T. Dawkins, K. Ott, M. Hettrich, K. Singer, F. Schmidt-Kaler, and U. Poschinger. Controlling fast transport of cold trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :080501, Aug 2012.
- [87] Simon Webster. *Raman Sideband Cooling and Coherent Manipulation of Trapped Ions*. PhD thesis, University of Oxford, Oxford UK, Hilary term 2005.
- [88] S. Weidt, J. Randall, S. C. Webster, K. Lake, A. E. Webb, I. Cohen, T. Navickas, B. Lekitsch, A. Retzker, and W. K. Hensinger. Trapped-ion quantum logic with global radiation fields. *Physical Review Letters*, 117(22), nov 2016.
- [89] Eric Weisstein. Mehler’s hermite polynomial formula. From MathWorld—A Wolfram Web Resource, 2020. [Online ; accessed 23-September-2020].
- [90] K. Wright, K. M. Beck, S. Debnath, J. M. Amini, Y. Nam, N. Grzesiak, J.-S. Chen, N. C. Pienti, M. Chmielewski, C. Collins, K. M. Hudek, J. Mizrahi, J. D. Wong-Campos, S. Allen, J. Apisdorf, P. Solomon, M. Williams, A. M. Ducore, A. Blinov, S. M. Kreikemeier, V. Chaplin, M. Keesan, C. Monroe, and J. Kim. Benchmarking an 11-qubit quantum computer. *Nature Communications*, 10(1), nov 2019.
- [91] Kenneth Wright, Jason M Amini, Daniel L Faircloth, Curtis Volin, S Charles Doret, Harley Hayden, C-S Pai, David W Landgren, Douglas Denison, Tyler Killian, Richard E Slusher, and Alexa W Harter. Reliable transport through a microfabricated x -junction surface-electrode ion trap. *New J. Phys.*, 15(3) :033004, 2013.