

Approximation géométrique d'ensembles aléatoires convexes par des zonotopes : application au modèle Booléen.

Saïd Rahmani

► To cite this version:

Saïd Rahmani. Approximation géométrique d'ensembles aléatoires convexes par des zonotopes : application au modèle Booléen.. Autre. Université de Lyon, 2017. Français. NNT : 2017LYSEM019 . tel-03425089

HAL Id: tel-03425089 https://theses.hal.science/tel-03425089

Submitted on 10 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°d'ordre NNT : 2017LYSEM019

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée au sein de

l'École des Mines de Saint-Étienne

École Doctorale N° 488 Sciences, Ingénierie, Santé

Spécialité de doctorat : IMAGE, VISION, SIGNAL.

Soutenue publiquement le 10/07/2017, par :

Saïd RAHMANI

APPROXIMATION GÉOMÉTRIQUE D'ENSEMBLES ALÉATOIRES CONVEXES PAR DES ZONOTOPES : APPLICATION AU MODÈLE BOOLÉEN.

Devant le jury composé de :

| Frédéric GRUY | Professeur, École Nationale Supérieure des Mines, Saint-Étienne, France | Président |
|-----------------------------|---|--------------------------|
| Pierre CALKA | Professeur, Université de Rouen, Saint-Étienne-du- Rouvray, France | Rapporteur |
| David COUPIER | Maître de Conférences HdR, Université Lille 1, Villeneuve d'Ascq, France | Rapporteur |
| Katja SCHLADITZ | Docteur, Fraunhofer-ITWM, Kaiserslautern, Germany | Examinatrice |
| María A. HERNÁNDEZ CIFRE | Professeur associé, Universidad de Murcia, Murcia, Spain | Examinatrice |
| Johan DEBAYLE | Maître de Recherche, École Nationale Supérieure des Mines, Saint-Étienne, France | Directeur de thèse |
| Jean-Charles PINOLI | Professeur, École Nationale Supérieure des Mines, Saint-Étienne, France | Co-directeur de thèse |

SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX MECANIQUE ET INGENIERIE GENIE DES PROCEDES SCIENCES DE LA TERRE SCIENCES ET GENIE DE L'ENVIRONNEMENT

Responsables :

K. Wolski Directeur de rechercheS. Drapier, professeurF. Gruy, Maître de rechercheB. Guy, Directeur de rechercheD. Graillot, Directeur de recherche

Spécialités doctorales

MATHEMATIQUES APPLIQUEES INFORMATIQUE SCIENCES DES IMAGES ET DES FORMES GENIE INDUSTRIEL MICROELECTRONIQUE

Responsables

O. Roustant, Maître-assistant O. Boissier, Professeur JC. Pinoli, Professeur X. Delorme, Maître assistant Ph. Lalevée, Professeur

do do t (titulain EMSE : Enseign nts charch oh/ coh nicác à dini th à . 1917 d'ı . HDR)

| ABSI | Nabil | CR | Génie industriel | CMP |
|----------------|---------------|------------------------|--------------------------------------|-------|
| AUGUSTO | Vincent | CR | Image, Vision, Signal | CIS |
| AVRIL | Stéphane | PR2 | Mécanique et ingénierie | CIS |
| BADEL | Pierre | MA(MDC) | Mécanique et ingénierie | CIS |
| BALBO | Flavien | PR2 | Informatique | FAYOL |
| BASSEREAU | Jean-François | PR | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| BATTON-HUBERT | Mireille | PR2 | Sciences et génie de l'environnement | FAYOL |
| BEIGBEDER | Michel | MA(MDC) | Informatique | FAYOL |
| BLAYAC | Sylvain | MA(MDC) | Microélectronique | CMP |
| BOISSIER | Olivier | PR1 | Informatique | FAYOL |
| BONNEFOY | Olivier | MA(MDC) | Génie des Procédés | SPIN |
| BORBELY | Andras | MR(DR2) | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| BOUCHER | Xavier | PR2 | Génie Industriel | FAYOL |
| BRODHAG | Christian | DR | Sciences et génie de l'environnement | FAYOL |
| BRUCHON | Julien | MA(MDC) | Mécanique et ingénierie | SMS |
| CAMEIRAO | Ana | MA(MDC) | Génie des Procédés | SPIN |
| CHRISTIEN | Frédéric | PR | Science et génie des matériaux | SMS |
| DAUZERE-PERES | Stéphane | PR1 | Génie Industriel | CMP |
| DEBAYLE | Johan | MR | Sciences des Images et des Formes | SPIN |
| DEGEORGE | Jean-Michel | MA(MDC) | Genie industriel | Fayol |
| DELAFUSSE | David | PRO | Sciences et genie des materiaux | SIMS |
| DELORME | Christenha | MA(MDC) | Genie industriei | FAYOL |
| DIENIZIAN | Thierry | | Science et génie des metérious | CMP |
| DOLICE | Sandrine | PP2 | Sciences de gestion | FAVOI |
| DRAPIER | Sylvain | PR1 | Mécanique et ingénierie | SMS |
| FAUCHEU | Jenny | MA(MDC) | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| FAVERGEON | Loïc | CR | Génie des Procédés | SPIN |
| FEILLET | Dominique | PR1 | Génie Industriel | CMP |
| FOREST | Valérie | MA(MDC) | Génie des Procédés | CIS |
| FRACZKIEWICZ | Anna | DR | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| GARCIA | Daniel | MR(DR2) | Sciences de la Terre | SPIN |
| GAVET | Yann | MA(MDC) | Sciences des Images et des Formes | SPIN |
| GERINGER | Jean | MA(MDC) | Sciences et génie des matériaux | CIS |
| GOEURIOT | Dominique | DR | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| GONDRAN | Natacha | MA(MDC) | Sciences et génie de l'environnement | FAYOL |
| GONZALEZ FELIU | Jesus | MA(MDC) | Sciences économiques | FAYOL |
| GRAILLOT | Didier | DR | Sciences et génie de l'environnement | SPIN |
| GROSSEAU | Philippe | DR | Génie des Procédés | SPIN |
| GRUY | Frédéric | PR1 | Génie des Procédés | SPIN |
| GUY | Bernard | DR | Sciences de la Terre | SPIN |
| HAN | Woo-Suck | MR | Mécanique et ingénierie | SMS |
| HERRI | Jean Michel | PR1 | Génie des Procédés | SPIN |
| KERMOUCHE | Guillaume | PR2 | Mécanique et Ingénierie | SMS |
| KLOCKER | Helmut | DR | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| LAFOREST | Valérie | MR(DR2) | Sciences et génie de l'environnement | FAYOL |
| LERICHE | Rodolphe | CR | Mécanique et ingénierie | FAYOL |
| MALLIARAS | Georges | PRI | Microélectronique | CMP |
| MOLIMARD | Jerome | PR2 | Mecanique et ingenierie | CIS |
| NEUDEDT | Gilles | CR | Genie des Procedes | FAVOI |
| NIKOLOVSKI | Jean-Pierre | Ingénieur de recherche | Mécanique et ingénierie | CMP |
| NORTIER | Patrice | PP 1 | Génie des Procédés | SPIN |
| O CONNOR | Rodney Philin | MA(MDC) | Microélectronique | CMP |
| OWENS | Rosin | MA(MDC) | Microélectronique | CMP |
| PERES | Véronique | MR | Génie des Procédés | SPIN |
| PICARD | Gauthier | MA(MDC) | Informatique | FAYOL |
| PIJOLAT | Christophe | PR0 | Génie des Procédés | SPIN |
| PINOLI | Jean Charles | PR0 | Sciences des Images et des Formes | SPIN |
| POURCHEZ | Jérémy | MR | Génie des Procédés | CIS |
| ROUSSY | Agnès | MA(MDC) | Microélectronique | CMP |
| ROUSTANT | Olivier | MA(MDC) | Mathématiques appliquées | FAYOL |
| SANAUR | Sébastien | MA(MDC) | Microélectronique | CMP |
| STOLARZ | Jacques | CR | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| TRIA | Assia | Ingénieur de recherche | Microélectronique | CMP |
| VALDIVIESO | François | PR2 | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| VIRICELLE | Jean Paul | DR | Génie des Procédés | SPIN |
| WOLSKI | Krzystof | DR | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| XIE | Xiaolan | PR1 | Génie industriel | CIS |
| YUGMA | Gallian | CR | Génie industriel | CMP |

À mes parents.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Johan Debayle, pour la confiance et la liberté qu'il m'a accordées dans ce travail doctoral, pour ses multiples enseignements et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. Tout au long de ces années, il s'est toujours montré disponible et a su orienter mes recherches en me guidant et en m'encourageant. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié ses qualités pédagogiques et scientifiques ainsi que la bienveillance et la patience qu'il a manifestées à mon égard.

Mes remerciements s'adressent également à mon co-directeur de thèse Jean-Charles Pinoli pour sa disponibilité, sa sympathie, ses nombreux conseils et ses encouragements. La grande expérience de la recherche dont il dispose nous a notamment permis de trancher différentes questions.

Ces deux personnes m'ont ouvert les portes du monde de la recherche, j'ai beaucoup appris à leurs côtés, je leur adresse ma gratitude pour tout cela.

Je souhaite aussi remercier les membres du jury de la soutenance pour l'attention qu'ils ont portée à mon travail ainsi que pour la pertinence de leurs observations. Je remercie Frédéric Gruy pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance. Je remercie également Pierre Calka et David Coupier d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, Maria Hernandez Cifre et Katja Schladitz d'avoir examiné ce travail. Par leurs jugements, analyses, remarques et suggestions, ils ont tous contribué à enrichir et ouvrir de nombreuses perspectives sur ces travaux de thèse et je leur en suis reconnaissant. Je remercie en particulier Katja Schladitz de m'avoir accueilli chaleureusement au Fraunhofer ITWM.

D'autre part je souhaite remercier les membres de l'équipe « Mathematical Imaging and Pattern Analysis » (MIPA), Yan Gavet, Frédéric Gruy, Klervi Rannou, Solmaz Boroomandi-Barati, Victor Rabiet, pour leurs réponses à mes nombreuses questions et sollicitations, pour leurs sympathie et pour toutes les discutions enrichissantes que nous avons partagées.

Je remercie également les membre du centre SPIN pour leurs encouragements, leur bonne humeur et la bonne ambiance dans laquelle ils m'ont permis de travailler. Je remercie en particulier Carole Bigouraux et Jérôme Mancuso pour leur disponibilité et leur efficacité. D'une manière plus générale, mes remerciements s'adressent à tous les membres l'EMSE que j'ai eu le plaisir de côtoyer, je souhaite à chacun beaucoup de bonheur.

Je remercie ma compagne pour m'avoir accompagné et soutenu tout au long de cette thèse. Je remercie également ma belle-famille pour son soutien et ses encouragements.

Je remercie enfin ma famille, mes parents et mes deux sœurs, pour m'avoir poussé dans cette voie et pour tout leurs efforts et sacrifices à mon égard. C'est à eux que je dois cet accomplissement, je leur dédie ce travail.

Table des matières

| 1 | 1 Introduction | | | | |
|----|----------------|--|----|--|--|
| | 1.1 | Contexte | 5 | | |
| | 1.2 | Problématique et objectifs | 5 | | |
| | 1.3 | Principales contributions | 6 | | |
| | 1.4 | Plan détaillé | 7 | | |
| Ι | CO | NCEPTS NÉCESSAIRES | 9 | | |
| 2 | Géo | métrie intégrale | 13 | | |
| | 2.1 | Définitions et généralités | 13 | | |
| | 2.2 | Mesures géométriques | 17 | | |
| | 2.3 | Caractéristiques géométriques et morphologiques | 24 | | |
| 3 | Géo | métrie aléatoire | 37 | | |
| | 3.1 | Rappels de probabilités | 37 | | |
| | 3.2 | Théorie des ensembles aléatoires | 43 | | |
| | 3.3 | Processus ponctuel | 52 | | |
| | 3.4 | Les modèles germes-grains | 56 | | |
| II | LI | E MODÈLE BOOLÉEN | 59 | | |
| 4 | Éta | t de l'art sur le modèle Booléen | 63 | | |
| | 4.1 | Généralités sur le Modèle Booléen | 63 | | |
| | 4.2 | Caractéristiques globales du modèle Booléen 2D | 68 | | |
| | 4.3 | Caractéristiques intrinsèques du modèle Booléen 2D | 75 | | |
| | 4.4 | Modèle Booléen 2-D à grains paramétrés | 79 | | |
| 5 | \mathbf{Sim} | ulation de modèle Booléen et estimations | 81 | | |
| | 5.1 | Simulation de modèle Booléen | 81 | | |
| | 5.2 | Estimations des caractéristiques du modèle | 84 | | |

| 6 | Syn | thèse et objectifs | 89 |
|---|-----|--------------------|----|
| | 6.1 | Synthèse | 89 |
| | 6.2 | Objectifs | 90 |

III VARIATIONS GÉOMÉTRIQUES ET MORPHOLOGIQUES D'UNCONVEXE ALÉATOIRE91

| 7 | Var | iations géométriques d'un convexe aléatoire | 95 |
|---|--|--|-----|
| | 7.1 | Expression des variations géométriques par le <i>n</i> -variogramme | 95 |
| | 7.2 | Variations géométriques et diamètre de Féret dans le plan | 104 |
| | 7.3 | Synthèse | 109 |
| 8 | B Description des convexes aléatoires symétriques par des zonotopes aléatoires 1 | | |
| | 8.1 | Introduction | 111 |
| | 8.2 | Approximation de convexes symétriques par des zonotopes | 112 |
| | 8.3 | Zonotopes aléatoires et diamètre de Féret | 122 |
| | 8.4 | Description des convexes aléatoires symétriques par des zonotopes aléatoires via | |
| | | leurs diamètres de Féret | 135 |
| | 8.5 | Synthèse | 140 |
| | | | |

IV APPLICATION AU MODÈLE BOOLÉEN 141

| 9 Estimation des variations géométriques du grain du modèle Booléen | | | 145 |
|---|------|---|-----|
| | 9.1 | Estimation du <i>n</i> -variogramme moyen du grain | 145 |
| | 9.2 | Estimation des variations géométriques d'ordre 2 du grain | 152 |
| | 9.3 | Synthèse | 160 |
| 10 | Des | cription morphologique du grain du modèle Booléen | 163 |
| | 10.1 | Modèle Booléen à grains convexes | 163 |
| | 10.2 | Modèle Booléen de zonotopes | 166 |
| | 10.3 | Synthèse | 170 |
| V | C | ONCLUSIONS ET PERSPECTIVES | 173 |

| Conclusions | 177 |
|-------------------------------------|-----|
| 11.1 Contributions | 177 |
| 11.2 Publications et communications | 178 |
| 11.3 Limites | 179 |
| Perspectives | 181 |
| 12.1 Perspectives applicatives | 181 |
| 12.2 Perspectives théoriques | 182 |

| LISTES ET NOMENCLATURE DES SYMBOLES | 183 |
|-------------------------------------|-----|
| Liste des figures | 187 |
| Liste des tableaux | 189 |
| Liste des notations | 191 |
| BIBLIOGRAPHIE | 201 |

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

Les processus industriels mettant en jeu des milieux granulaires (population de particules : poudres [1], cristaux [2], fibres [3, 4]...) font l'objet d'un intérêt croissant pour différentes applications (pharmacie, nucléaire, matériau, agronomie...) depuis ces dernières années. La caractérisation géométrique de telles particules est alors requise afin d'améliorer la connaissance et la maîtrise de ces processus [5, 6, 7]. Par exemple, certains principes actifs présents dans les médicaments sont des cristaux et la qualité de ces médicaments est intimement liée aux caractéristiques géométriques de ces cristaux (dimension, forme, quantité...). Il est donc nécessaire de maîtriser les processus de cristallisation en solution. Pour ce faire, différentes méthodes en-ligne peuvent être utilisées [8, 9, 10]. D'une manière générale, toutes les méthodes en ligne, exception faite des méthodes FBRM [10] et de spectroscopie acoustique [2, 11], ne peuvent pas évaluer la distribution granulométrique des particules au delà d'un certain taux de solides. De plus, elles ne permettent de caractériser les particules qu'indirectement. En effet, ces méthodes impliquent généralement la formulation d'hypothèses fortes relatives à la forme des particules étudiées. En revanche, l'acquisition d'images 2-D permet une visualisation directe des particules projetées, donnant ainsi accès à la fois à la taille et à la forme des particules projetées [12, 13, 14] (voir figure 1.1). Malgré cette visualisation, des méthodes avancées de traitement et d'analyse d'image s'avèrent nécessaires [15, 16, 17]. Cependant, lorsque le taux de solide est assez élevé, ces méthodes sont moins efficaces [18]. Une alternative consiste donc à utiliser des modèles géométriques aléatoires afin de représenter et caractériser ces milieux granulaires.

1.2 Problématique et objectifs

À partir de telles données, la géométrie aléatoire fournit des outils pour modéliser et caractériser ces images de milieux granulaires [19, 20, 21, 22]. En effet, le modèle germes-grains (union d'ensembles compacts aléatoires) est adapté à la représentation d'une population de particules



FIGURE 1.1 – Exemples d'acquisitions d'images 2-D de cristaux d'oxalate d'amonium (à gauche) et d'acide citrique (à droite).

projetées. Un modèle germes-grains est définie par :

$$\Xi = \bigcup_{x_i \in \Phi} x_i + \Xi_i,$$

où Φ est un processus ponctuel qui décrit la position des particules et les ensembles aléatoires Ξ_i sont des compacts aléatoires représentant les particules. Ainsi, en supposant les Ξ_i indépendants et identiquement distribués, la distribution géométrique des particules est représentée par la distribution de Ξ_0 . L'objectif étant alors d'estimer cette distribution à partir des données accessibles : des réalisations du modèle dans une fenêtre bornée (des images).

Le modèle germes-grains le plus élémentaire est le modèle Booléen [23]. Lorsque le grain primaire est convexe, il existe différentes méthodes de la littérature (intensités, contraste minimum...) qui permettent d'estimer les espérances de certaines caractéristiques géométriques du grain primaire (fonctionnelles de Minkowski, diamètre de Féret). Cependant, ces quantités ne suffisent pas à complètement caractériser la distribution des grains. En effet, de fortes hypothèses concernant la forme du grain primaire sont souvent émises (grains homothétiques, grains déterministes...).

Ainsi, l'objectif de cette thèse consiste à caractériser la géométrie et la morphologie du grain primaire du modèle Booléen sans émettre d'hypothèses concernant sa forme (à l'exception de la convexité).

1.3 Principales contributions

L'approche proposée dans cette thèse fournit donc des outils permettant de caractériser la morphologie d'une population de particules via un modèle géométrique aléatoire. Lorsque des images 2-D de milieux granulaires (satisfaisant aux hypothèses du modèle Booléen) sont considérées, cette approche permet de décrire la population des particules projetées (tâche généralement difficile à réaliser avec les méthodes classiques d'analyse d'image). Plus particulièrement, pour un convexe aléatoire X, une généralisation du covariogramme géométrique moyen [24] est introduite : le *n*-variogramme moyen $\mathbb{E}[\nu_d(\bigcap_{i=1}^n X + x_i)]$. Pour un convexe K, des relations permettant d'exprimer le moment d'ordre n du volume du dilaté $\mathbb{E}[\nu_d(X \oplus K)^n]$ à partir du *n*-variogramme du dilaté $X \oplus K$ seront établies. En dimension 2, pour n'importe quelle jauge convexe K, ces relations permettent d'exprimer les moments du vecteur aléatoire ${}^t(A(X), W(X, K))$ composé de l'aire de X et de l'aire mixte entre X et K. Au delà des considérations du problème des moments [25] (voir 3.1.12, p.40), ces moments permettent de totalement caractériser la distribution de X. Le choix de la jauge K révèle alors différentes caractéristiques géométriques de X. En particulier, en choisissant une boule, les fonctionnelles de Minkowski du grain sont exprimées. En choisissant un zonotope (chapitre 8) comme jauge, les moments du processus aléatoire du diamètre de Féret (chapitre 7) sont exprimés.

Le processus du diamètre de Féret d'un convexe aléatoire X permet alors de construire différentes approximations de X sous formes de zonotopes aléatoires réguliers. Ces zonotopes aléatoires réguliers peuvent être décrits par les longueurs de leurs côtés $\alpha =^t (\alpha_1, \dots \alpha_N)$. Des relations permettant d'exprimer les moments des vecteurs des côtés α des approximations de X à partir de ceux du diamètre de Féret de X sont alors donnés.

Enfin, des relations permettant d'estimer le *n*-variogramme du grain primaire du modèle Booléen sont établies. Ces relations conduisent donc à des estimateurs des variations géométriques du grain (i.e les moments de ${}^{t}(A(X), W(X, K))$). Les propriétés de ces estimateurs sont discutées et leurs qualités sont évaluées par simulation. Ces estimations fournissent alors une description morphologique du grain primaire via ses approximations sous forme de zonotopes aléatoires.

Ces travaux de thèse ont pu être valorisées à travers différentes publications qui sont listées dans la section 11.2.

1.4 Plan détaillé

Ce manuscrit est organisé en 5 parties, le contenu de ces parties est résumé ici.

Partie I CONCEPT NÉCESSAIRES :

Cette partie organisée en deux chapitres à pour objectif d'introduire les concepts de géométrie intégrale et aléatoire qui seront utilisés dans le développement de cette thèse. Dans le chapitre 2 des rappels de topologie et de théorie de la mesure seront d'abord présentés. Les principaux outils de la géométrie intégrale seront alors introduits. Le chapitre 3 sera alors dévoué à la géométrie intégrale. Des rappels de probabilités seront tout d'abord présentés. La théorie des ensembles aléatoires sera alors introduite. Les propriétés et caractéristiques des ensembles aléatoires seront ensuite discutées. Enfin les

processus ponctuels ainsi que les modèles germes-grains seront présentés.

Partie II LE MODÈLE BOOLÉEN :

Cette partie organisée en trois chapitres à pour objectif d'étudier des méthodes de caractérisations du grain du modèle Booléen. L'état de l'art sur ces méthodes sera réalisé dans le chapitre 4. En particulier, les différentes techniques d'estimations des caractéristiques globales et intrinsèques du modèle seront présentées. Les méthodes de caractérisations morphologiques du grain seront alors discutées. Par la suite ces méthodes seront testées par simulation dans le chapitre 5. Enfin, le chapitre chapitre 6 fera la synthèse de l'état de l'art et présentera les différents objectifs de cette thèse.

Partie III VARIATIONS GÉOMÉTRIQUES ET MORPHOLOGIQUES D'UN CONVEXE ALÉA-TOIRE :

Cette partie organisée en deux chapitres à pour objectif d'étudier les variations géométriques et morphologiques des convexes aléatoires. Dans un premier temps, le chapitre 7 montrera comment les variations géométriques d'un convexe aléatoire X sont obtenues à partir des *n*-variogrammes de ses dilatés. En dimension 2, pour n'importe quelle jauge convexe K, ces relations permettent d'exprimer les moments du vecteur aléatoire ${}^{t}(A(X), W(X, K))$ composé des volumes mixtes de X et K. Ces moments seront par la suites exploités dans le chapitre 8, ils permettront de définir et de caractériser différentes approximations du grain primaire sous formes de zonotopes aléatoires.

Partie IV APPLICATION AU MODÈLE BOOLÉEN :

Cette partie organisée en deux chapitres à pour objectif d'appliquer les résultats de la partie précédente au grain primaire du modèle Booléen. En particulier, le chapitre 9 montrera comment le *n*-variogramme du grain primaire du modèle Booléen peut être estimé. En dimension 2 et à l'ordre 2, la qualité de l'estimation des variations géométriques du grain sera évaluée par simulation. Enfin, le chapitre chapitre 10 discutera de l'estimation des approximations du grain sous forme de zonotopes. Le cas des modèles Booléens de zonotopes sera alors particulièrement étudié.

Partie V CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES :

Dans cette partie, les différentes contributions de cette thèses seront présentées. Enfin, les perspectives applicatives et théoriques de ces travaux seront discutées.

Première partie CONCEPTS NÉCESSAIRES

Table des matières

| 2 | Gé | Géométrie intégrale | | | | |
|---|-----|---------------------|--|----|--|--|
| | 2.1 | Défini | tions et généralités | 13 | | |
| | | 2.1.1 | Rappels de topologie | 13 | | |
| | | 2.1.2 | Morphologie mathématiques | 15 | | |
| | 2.2 | Mesur | res géométriques | 17 | | |
| | | 2.2.1 | Rappel de théorie de la mesure | 17 | | |
| | | 2.2.2 | Fonctionnelles géométriques et fonctionnelles de Minkowski | 20 | | |
| | | 2.2.3 | Volumes mixtes et formule de Steiner-Minkowski | 22 | | |
| | 2.3 | Carac | téristiques géométriques et morphologiques | 24 | | |
| | | 2.3.1 | Forme d'un sous ensemble de \mathbb{R}^d | 25 | | |
| | | 2.3.2 | Quelques caractéristiques en dimension arbitraire | 25 | | |
| | | 2.3.3 | Caractéristiques du plan | 29 | | |
| 3 | Gé | Géométrie aléatoire | | | | |
| | 3.1 | Rappe | els de probabilités | 37 | | |
| | | 3.1.1 | Espace probabilisé, variables aléatoires et lois | 37 | | |
| | | 3.1.2 | Caractérisation des variables aléatoires réelles et vectorielles | 39 | | |
| | 3.2 | Théor | ie des ensembles aléatoires | 43 | | |
| | | 3.2.1 | Définitions et premières propriétés | 43 | | |
| | | 3.2.2 | Caractéristiques des ensembles aléatoires | 46 | | |
| | | 3.2.3 | Caractéristiques géométriques des convexes aléatoires | 49 | | |
| | 3.3 | Proces | ssus ponctuel | 52 | | |
| | | 3.3.1 | Définitions et généralités | 52 | | |
| | | 3.3.2 | Caractéristiques des processus ponctuels | 52 | | |
| | | 3.3.3 | Processus ponctuels usuels | 54 | | |
| | 3.4 | Les m | odèles germes-grains | 56 | | |
| | | 3.4.1 | Le modèle germes-grains | 56 | | |
| | | 3.4.2 | Le modèle Booléen | 57 | | |

Chapitre 2

Géométrie intégrale

La géométrie intégrale parfois appelée géométrie convexe est un domaine des mathématiques qui consiste à décrire les propriétés géométriques d'objets de \mathbb{R}^d , $d \ge 1$ par des moyens analytiques. Généralement ces objets sont des unions de convexes compacts, ce qui est toujours le cas en analyse d'images : une image numérique étant une union finie de pixels (convexes et compacts). La mesure de Lebesgue n'est pas adaptée à la géométrie d'un objet. En effet une parcelle de surface dans \mathbb{R}^3 est un objet de mesure de Lebesgue nul, pourtant il existe des mesures la caractérisant (courbure, surface...). La géométrie intégrale consiste donc en des mesures de paramètres géométriques et morphologiques tels que les facteurs de forme, le périmètre, la surface, le volume, la courbure... ce qui conduit à introduire d'autres mesures sur \mathbb{R}^d .

Les notions introduites dans ce chapitre seront toujours dans l'espace euclidien \mathbb{R}^d , parfois nous nous limiterons au cas planaire.

2.1 Définitions et généralités

Ici nous allons introduire le cadre de la géométrie intégrale, pour ce faire, quelques rappels de topologie seront d'abord énoncés.

2.1.1 Rappels de topologie

Définition 2.1.1 (Topologie). Soit E un ensemble, on dit que $\tau \subset \mathcal{P}(E)$ (un ensemble de parties de E) est une topologie sur E si elle vérifie les axiomes suivants :

- i. l'ensemble vide et E appartiennent à τ ,
- ii. toute réunion d'éléments de τ appartient à τ ,
- iii. toute intersection finie d'éléments de τ appartient à τ .

On dira que (E, τ) est un espace topologique, les éléments de τ seront appelés des ouverts et leurs complémentaires des fermés.

Les exemples de topologie les plus simples sur un ensemble E sont la topologie grossière $\tau = \{\emptyset, E\}$ et la topologie discrète $\tau = \mathcal{P}(E)$. On parle aussi de topologie engendrée par un ensemble de parties $T \subset \mathcal{P}(E)$, il s'agit de la plus petite topologie (au sens de l'inclusion) contenant T.

Définition 2.1.2 (Topologie usuelle sur \mathbb{R}^d). La topologie usuelle sur \mathbb{R}^d , $d \ge 1$ est définie comme la topologie engendrée par les pavés $]a_1, b_1[\times \cdots]a_d, b_d[$ où ${}^t(a_1, \cdots a_d) \in \mathbb{R}^d$ et ${}^t(b_1, \cdots b_d) \in \mathbb{R}^d$.

Définition 2.1.3 (Connexité). Soit X une partie de \mathbb{R}^d , $d \ge 1$.

- X sera dite simplement connexe si pour toute paire d'ouverts disjoints (U_1, U_2) tel que $X \subset U_1 \cup U_2$ on a $X \subset U_1$ ou $X \subset U_2$.
- X sera dite connexe par arc si pour toute paire (x, y) d'éléments de X il existe un arc continu $c: [0, 1] \rightarrow X$ tel que c(0) = x et c(1) = y.

Rappelons que la connexité par arcs implique la connexité simple et que la réciproque est fausse [26]. De manière intuitive dire qu'un ensemble est connexe revient à dire qu'il est en un morceau.

Définition 2.1.4 (Convexité). Une partie X de \mathbb{R}^d est dite convexe si toute paire (x, y) d'éléments de X, le segment $[x, y] = \{tx + (1 - t)y, t \in [0, 1]\}$ est inclus dans X.

Notons que tout convexe est connexe par arcs et que la convexité est stable par intersection. De manière intuitive, dire qu'un ensemble est convexe signifie qu'il n'a ni creux ni trous.

Définition 2.1.5 (Enveloppe convexe). Pour toute partie X de \mathbb{R}^d on appelle enveloppe convexe de X le convexe conv $(X) \supset X$ définit comme le plus petit convexe contenant X.

L'enveloppe convexe d'une partie $X \subset \mathbb{R}^d$ est toujours bien définie puisque \mathbb{R}^d est un convexe et que conv(X) peut être construit comme l'intersection de tous les convexes contenants X.

Définition 2.1.6 (Conpacité). Une partie X de \mathbb{R}^d , $d \ge 1$ est dite compacte si tout recouvrement de X par des ouverts contient un sous recouvrement fini. On notera \mathfrak{K} l'ensemble des compacts de \mathbb{R}^d .

Remarquons que \mathfrak{K} est stable par réunions finies et par intersections.

Définition 2.1.7 (Corps convexes). Une partie X de \mathbb{R}^d , $d \ge 1$ sera appelée corps convexe si elle est compacte convexe et d'intérieur non vide.

Proposition 2.1.1 (Compacts de \mathbb{R}^d). Les ensembles compacts de \mathbb{R}^d , $d \ge 1$ sont exactement les fermés bornés.

Il existe plusieurs définitions équivalentes de la compacité sur un espace métrique, l'une d'entre elles consiste à dire qu'un ensemble X est compact si toute suite convergente d'éléments de Xadmet sa limite dans X.

Définition 2.1.8 (Anneau des convexes). On notera \mathbb{K} l'ensemble des compacts convexes de \mathbb{R}^d . On appellera anneau des convexes l'ensemble suivant :

$$\mathfrak{R} := \{ X = \bigcup_{i=1}^{n} K_i | n \in \mathbb{N}, \ K_i \in \mathbb{K} \}.$$

Notons que $(\mathfrak{R}, \cup, \cap)$ est muni d'une structure d'anneau non unitaire, bien que certaines définitions puissent être énoncées dans un cadre plus général, elles seront souvent introduites sur l'anneau des convexes. Dans ce contexte, nous introduirons certaines mesures géométriques. Pour ce faire, nous introduirons tout d'abord certaines opérations classiques de morphologie mathématiques.

2.1.2 Morphologie mathématiques

On introduit ici quelques opérations relatives à la morphologie des ensembles [27] les notations sont "usuelles" dans ce domaine.

Définition 2.1.9 (Opérations morphologiques usuelles). Soient X et Y deux sous-ensembles $de \mathbb{R}^d$.

Multiplication par un scalaire : Soit $c \in \mathbb{R}$, le produit extérieur de X par c est défini comme : $cX = \{cx | x \in X\}$. Dans le cas particulier où c = -1 on notera $\breve{X} = cX = -X =$ $\{-x | x \in \mathbb{R}^d\}$ et cette opération sera appelée réflexion. Lorsque $X = \breve{X}$, on dira que X est symétrique. En effet, ceci se traduit par le fait que X est invariant par symétrie centrale.

Translation : On appelle ensemble translaté de X par un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ l'ensemble :

$$X_v := X + v = \{v + x | x \in X\}.$$

Addition de Minkowski : On appelle somme Minkowski de X et de Y l'ensemble :

$$X \oplus Y := \{x + y | x \in X, y \in Y\}.$$

Soustraction de Minkowski : On appelle soustraction Minkowski de Y à X l'ensemble :

$$X \ominus Y := \bigcap_{y \in Y} X_y.$$

Notons tout d'abord que l'addition de Minkowski de X et Y peut s'écrire $X \oplus Y = \bigcup_{y \in Y} X_y$, il s'agit d'une opération commutative. En revanche, \ominus n'est pas commutative et n'est pas l'opération inverse de \oplus , nous avons les propriétés suivantes.

Proposition 2.1.2 (Propriétés des opérations de Minkowski). Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des parties de \mathbb{R}^d et u un vecteur de \mathbb{R}^d alors :

- i. $X_u = X \oplus \{u\}.$
- ii. \oplus est commutative.
- *iii.* $X \oplus Y = \{x | X \cap (\check{Y})_x \neq \emptyset\}.$
- *iv.* $X \oplus (Y_1 \cup Y_2) = (X \oplus Y_1) \cup (X \oplus Y_2).$
- v. $X \oplus B = (X^c \oplus Y)^c$.
- vi. Si $X_1 \subset X_2$ alors $X_1 \oplus Y \subset X_2 \oplus Y$.
- vii. en général \ominus n'est pas l'opération inverse de \oplus mais nous avons : $(X \ominus \check{Y}) \oplus Y \subseteq X \subseteq (X \oplus \check{Y}) \ominus Y$.

Proposition 2.1.3 (Stabilité des opérations morphologiques). L'addition et la soustraction de Minkowski sont des lois de composition interne sur les classes : des convexes, des connexes, \Re , \mathbb{K} et \Re .

Cette proposition stipule simplement que l'addition ou la soustraction de Minkowski de deux éléments d'une des classes citées reste dans la même classe. Ces opérations sont donc utilisées pour traiter ou analyser la morphologie d'un ensemble (ou d'une image binaire). On utilise souvent un ensemble de base connue appelé *élément structurant* ou *jauge*. En général, l'élément structurant choisi est une boule ou un segment.

Définition 2.1.10 (Transformation morphologiques usuelles). Soient X une partie de \mathbb{R}^d et Y un élément structurant.

Dilatation : La dilatation de X par Y est définie comme la transformation :

$$\delta_Y(X) := X \oplus \check{Y},$$

si B est la boule unité et $r \in \mathbb{R}_+$ un réel positif, la dilatation $\delta_{rB}(X)$ est alors appelée ensemble r-parallèle de X.

Érosion : L'érosion de X par Y est définie comme la transformation :

$$\epsilon_Y(X) := A \ominus \check{Y}.$$

Ouverture : L'ouverture de X par Y définie comme la transformation :

$$A_Y := (X \ominus \check{Y}) \oplus Y.$$

Fermeture : La fermeture de X par Y définie comme la transformation :

$$A^Y := (X \oplus \breve{Y}) \ominus Y.$$

La dilatation de X par Y peut être explicitée comme $\delta_Y(X) = \{x + y | x \in X, y \in \check{Y}\} = \{x - y | x \in X, y \in Y\}$. La dilatation $X \to \delta_Y(X)$ consiste à déplacer Y sur chaque point u de l'espace et à tester si ce nouvel ensemble Y_u intersecte X, si oui on ajoute ce nouveau point à X. En effet $X \oplus \check{Y} = \{u \in \mathbb{R}^d | X \cap Y_u \neq \emptyset\}$.

L'érosion de X par Y peut être explicitée comme $X \ominus \check{Y} = \{u \in \mathbb{R}^d | Y_x \subset X\}$. L'érosion $X \to X \ominus \check{Y}$ consiste à déplacer Y sur chaque point x de l'espace et à tester si ce nouvel ensemble Y_x est inclus dans X, sinon on enlève ce point à X.

L'ouverture et la fermeture sont en général utilisées pour nettoyer une image de petits défauts (voir [27, 28]).

L'addition de Minkowski, permet d'introduire une distance sur \mathfrak{K} , on parle de la distance Hausdorff.

Définition 2.1.11 (distance Hausdorff). Soient X et Y deux compacts de \mathbb{R}^d on appelle Distance de Hausdorff la quantité :

$$d_H(X,Y) := \min\{r \in \mathbb{R}_+ | Y \subset X \oplus B(0,r) \text{ et } X \subset Y \oplus B(0,r)\},\$$

où B(0,r) désigne la boule de \mathbb{R}^d de rayon r.

On vérifie facilement que d_H est une distance sur \mathfrak{K} , nous discuterons de son expression plus loin. L'anneau des convexes \mathfrak{R} muni de la distance de Hausdorff a donc une structure d'espace métrique, c'est dans ce contexte que nous introduirons certaines mesures géométriques, bien qu'elles puissent être définies de manière plus générale. Notons que les transformations introduites plus haut sont continues sur l'anneau des convexes vis à vis de la distance de Hausdorff.

2.2 Mesures géométriques

Afin d'étudier les fonctionnelles géométriques des parties de \mathbb{R}^d , il est nécessaire de rappeler quelques propriétés des mesures.

2.2.1 Rappel de théorie de la mesure

Définition 2.2.1 (Tribu). Soit E un ensemble, on appelle tribu ou σ -algèbre sur E un ensemble \mathcal{M} de partie de E qui satisfait les axiomes suivants :

- i. \mathcal{M} est non vide.
- ii. M est stable par passage au complémentaire.
- iii. \mathcal{M} est stable par union dénombrable.

On dira qu'un élément de \mathcal{M} est un ensemble mesurable, et que (E, \mathcal{M}) est un espace mesurable.

Notons qu'une tribu est stable par intersection dénombrable, et que $\{\emptyset, E\}$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des tribus sur E.

Définition 2.2.2 (**Tribu engendrée**). Soient E un ensemble et \mathcal{F} un ensemble de partie de E, on appelle alors tribu engendrée par \mathcal{F} la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu sur E contenant \mathcal{F} .

Définition 2.2.3 (Tribu Borélienne). Soit (E, τ) un espace topologique, on appelle tribu borélienne la tribu $\mathcal{B}(E)$ la tribu engendrée par les ouverts de E.

Définition 2.2.4 (Mesure). Soit (E, \mathcal{M}) un espace mesurable, on appelle mesure sur E toute application $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ satifaisant les propriétés suivantes :

- i. $\mu(\emptyset) = 0.$
- ii. Additivité dénombrable : pour toute famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables disjoints :

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(X_n).$$

On dit que (E, \mathcal{M}, μ) est un espace mesuré. On dit que μ est une mesure finie si $\mu(E)$ est finie, et que μ est σ -finie s'il existe un recouvrement dénombrable de E par des ensembles mesurables de mesure finie.

Proposition 2.2.1 (Propriétés d'une mesure). Soit (E, \mathcal{M}, μ) est un espace mesuré, alors μ vérifie les propriétés suivantes :

Monotonie : $\forall X, Y \in \mathcal{M}, X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y).$ **Sous-additivité** : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables, alors :

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_n)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(X_n).$$

Continuité croissante : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables croissante pour l'inclusion (ie $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \subset X_{n+1}$), alors :

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_n) = \lim_{N\to+\infty}\mu(X_n).$$

Continuité décroissante : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables décroissante pour l'inclusion (ie $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} \subset X_n$), alors :

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}X_n) = \lim_{N\to+\infty}\mu(X_n).$$

Définition 2.2.5 (Mesure de Lebesgue). Il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, notée ν_d tel que pour tout $(a_1, \cdots a_d) \in \mathbb{R}^d$ et tout $(b_1, \cdots b_d) \in \mathbb{R}^d$, on ait :

$$\nu_d([a_1, b_1] \times \cdots [a_d, b_d]) = \prod_{i=1}^d |b_i - a_i|.$$

Notons que la mesure de Lebesgue est σ -finie, il s'agit de la longueur sur \mathbb{R} et de l'aire sur \mathbb{R}^2 .

Définition 2.2.6 (Fonctionnelle géométrique). On dira qu'une application $\phi : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle géométrique sur \mathbb{R}^d si $\phi(\emptyset) = 0$.

Notons que toute mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est une fonctionnelle géométrique et que la réciproque est fausse. Cependant, les fonctionnelles géométriques ont pour ambition de "mesurer" les ensembles afin de fournir des informations sur leurs géométries. C'est pourquoi, elles seront aussi appelées mesures géométriques ou par abus de langage, mesures.

Définition 2.2.7 (Propriétés des fonctionnelles géométriques). Soit ϕ une fonctionnelle géométrique sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, certaines propriétés sont définies ci-dessous sur \mathbb{K} (l'ensemble des compacts convexes de \mathbb{R}^d).

 $additivité: \phi sur est dite C-additive si:$

$$\forall X, Y \in \mathbb{K}, \ \phi(X \cup Y) = \phi(X) + \phi(Y) - \phi(Y \cap X).$$

Continuité: ϕ est dite continue (vis à vis de la distance de Hausdorff) si pour toute suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de convexes compacts convergente vers un convexe compact Y, on a :

$$\lim_{n \to \infty} \phi(Y_n) = \phi(Y).$$

Invariance par isométrie : ϕ *est dite invariante par isométrie si :*

$$\forall X \in \mathbb{K}, \ \forall g \in \mathcal{G}, \ \phi(X) = \phi(gX).$$

Où \mathcal{G} désigne le groupe des isométries de \mathbb{R}^d Homogénéité de degré $k : \phi$ est dite homogène de degré $k \in \mathbb{N}$ si :

$$\forall X \in \mathbb{K}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \phi(\lambda X) = \mid \lambda \mid^k \phi(X).$$

Croissance : ϕ est dite croissante si :

$$\forall X, Y \in \mathbb{K} \ X \subseteq Y \Rightarrow \phi(X) \le \phi(Y).$$

L'invariance par isométrie signifie que la mesure de X ne dépend pas du choix du système de coordonnées. La C-additivité est une notion similaire à l'additivité simple (ie : additivité sur les unions disjointes finies) mais uniquement sur les convexes compacts. Ces notions ne sont pourtant pas équivalentes, la différence symétrique de compacts n'étant pas nécessairement compacte. En revanche, les compacts convexes de \mathbb{R}^d étant boréliens, toute mesure sur ($\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) est C-additive.

Les propriétés de C-additivité, d'invariance par isométrie et de continuité ci-dessus sont des propriétés souhaitables lorsque l'on désire caractériser la géométrie d'un compact. En effet, il est souhaitable de ne pas distinguer des objets isométriques et de pouvoir mesurer l'union de deux compacts convexes joints sans mesurer deux fois leur intersections. L'intérêt de la continuité est évident, il est souhaitable que deux convexes compacts proches aient des mesures proches.

Nous allons définir une première fonctionnelle permettant de caractériser les propriétés topologiques des éléments de \Re , il s'agit de la caractéristique d'Euler [29].

Définition 2.2.8 (Caractéristique d'Euler-Poincaré). Le nombre d'Euler-Poincaré ou nombre de connectivité, généralement noté χ est une mesure de comptage sur \Re , définie de la manière suivante :

$$\forall X \in \mathbb{K}, \ \chi(X) = 0 \ si \ X = \emptyset \ et \ \chi(X) = 1 \ sinon.$$

Cette définition s'étend ensuite sur \mathfrak{R} par C-additivité : pour $X = \bigsqcup_{i=1}^{n} K_i$ nous avons :

$$\chi(X) = \sum_{i=1}^{n} \chi(K_i) - \sum_{i < j} \chi(K_i \cap K_j) + \dots + (-1)^{n+1} \chi(K_1 \cap \dots \cap K_n)$$

De manière plus explicite, en dimension 2, le nombre d'Euler $\chi(X)$ d'un compact X correspond à son nombre de composantes connexes moins son nombre de trous (voir [27]).

2.2.2 Fonctionnelles géométriques et fonctionnelles de Minkowski

Définition 2.2.9 (Fonctionnelles de Minkowski). Soit $X \in \mathbb{K}$, les fonctionnelles de Minkowski de X sont définies de la manière suivante :

$$W_s^{(d)}(X) = \int_{\mathcal{G}} \chi(X \cap gE_s) dg, \ \forall s = 0, \cdots d - 1.$$
$$W_d^{(d)}(X) = \int_{\mathcal{G}} \chi(X \cap gx) dg, \ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Où dg est la densité cinématique et E_s est un hyperplan de dimension s de \mathbb{R}^d [27]. La normalisation est choisie de sorte que $W_s^{(d)}(B_d(r)) = \omega_d r^{d-s}$ où $\omega_d = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$ est le volume de la boule unité en dimension d.

Ces fonctionnelles sont alors étendues à la classe \Re par C-additivité.

Affin d'alléger les notations, les fonctionnelles de Minkowski $W_s^{(d)}$, $s = 0, \dots d$ seront parfois notées W_s , $s = 0, \dots d$, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés. Remarquons que $W_d^{(d)}$ coïncide avec la mesure de Lebesgue ν_d : il s'agit du volume *d*-dimensionnel. Les Fonctionnelles de Minkowski peuvent être définies sur une classe plus large de partie de \mathbb{R} , via les mesures de Hausdorff [30].

Selon les auteurs, ces fonctionnelles sont parfois normalisées, on parle de *fonctionnelles de Minkowski normalisées* :

$$M_s^{(d)} := \frac{\omega_{d-s}}{\omega_d \omega_s} W_s^{(d)}, \ s = 0, \cdots d.$$

ou de volumes intrinsèques :

$$V_s^{(d)} := \binom{d}{s} \frac{W_{d-s}^{(d)}}{\omega_{d-s}}, \ s = 0, \cdots d.$$

Afin d'alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés, pour $s = 0, \dots d$, les fonctionnelles $W_s^{(d)}, M_s^{(d)}$ et $V_s^{(d)}$ seront parfois respectivement notées W_s, M_s et V_s . Les fonctionnelles de Minkowski constituent une famille de mesures permettant de mesurer beaucoup de caractéristiques géométriques des objets. En dimensions 2 et 3 elles correspondent, à une constante près, à des caractéristiques géométriques bien connues telles que : le volume, la surface, la courbure moyenne, l'aire, le périmètre ou encore le nombre d'Euler (voir tableaux 2.1 et 2.2). En pratique, on sera souvent amené à travailler avec leur densité, c'est-à-dire que l'on parlera en terme de fonctionnelles de Minkowski par unité de volume d-dimensionnel.

| Fonctionnelles géométriques classiques | Fonctionnelles de Minkowski | Fonctionnelles de Minkowski normalisées | Volumes intrinsèques |
|--|--------------------------------|---|-------------------------|
| Aire A | W_0 | M_0 | V_2 |
| Périmètre U | $2W_1$ | $2\pi M_1$ | $2V_1$ |
| Nombre d'Euler χ | $\frac{1}{\pi}W2$ | M_2 | V_0 |

TABLE 2.1 – Différentes normalisations des fonctionnelles de Minkowski 2-D.

| Fonctionnelles géométriques classiques | Fonctionnelles de Minkowski | Fonctionnelles de Minkowski normalisées | Volumes intrinsèques |
|--|--------------------------------|---|-------------------------|
| volume V | W ₀ | M_0 | V_3 |
| Surface S | $3W_1$ | $8M_1$ | $2V_2$ |
| Courbure moyenne <i>H</i> | $3W_2$ | $2\pi^2 M_2$ | πV_1 |
| Nombre d'Euler χ | $\frac{3}{4\pi}W_3$ | $\frac{4\pi}{3}M_3$ | V_0 |

TABLE 2.2 – Différentes normalisations des fonctionnelles de Minkowski 3-D.

Proposition 2.2.2 (Formule de Steiner). Soient $X \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{R}_+$ et *B* la boule unité de \mathbb{R}^d , alors le volume d-dimensionnel de l'ensemble r-parallèle de X peut s'écrire :

$$W_0^{(d)}(X \oplus rB) = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} W_k^{(d)}(X) r^k.$$
 (2.1)

Notons que cette expression polynomiale permet de calculer aisément les fonctionnelles de Minkowski d'un convexe compact X à partir de la mesure de Lebesgue de ses ensembles r-parallèles (pour différentes valeurs de r). La formule de Steiner peut aussi s'exprimer via les fonctionnelles géométriques usuelles, par exemple pour d = 2:

$$A(X \oplus rB) = A(X) + rU(X) + \pi r^2, \qquad (2.2)$$

et pour d = 3,

$$V(X \oplus rB) = V(X) + rS(X) + r^{2}H + \frac{4\pi}{3}r^{3}.$$
(2.3)

Proposition 2.2.3 (Régularité des fonctionnelles de Minkowski). Sur la classe \mathbb{K} , les fonctionnelles de Minkowski sont :continues, invariantes par isométries, C-additives, croissantes et homogènes (pour $s = 0, \dots d$ la fonctionnelle de rang s est homogène de degrés s).

De plus, la continuité et la croissance ne se transfèrent pas à la classe \mathfrak{R} . En effet, sur \mathfrak{R} les fonctionnelles de Minkowski sont seulement : invariantes par isométries, C-additive et homogènes.

Des contre-exemples pour la continuité et la croissance se construisent facilement à partir d'ensembles non convexes : considérer par exemple, en dimension 2, le périmètre du secteur angulaire de rayon 1 et d'angle $[0, 2\pi - \frac{2\pi}{n}], n \in \mathbb{N}^*$ (voir [30]).

THÉORÈME 2.1 (Théorème de Hadwiger [31, 32, 33])

Soit ϕ une fonctionnelle géométrique sur \mathbb{K}^d , qui est C-additive, invariante par isométrie et continue, alors :

$$\exists a_0, \cdots a_d \in \mathbb{R}, \ \forall X \in \mathbb{K}, \ \phi(X) = \sum_{k=0}^d a_k W_k^{(d)}(X).$$
(2.4)

Hadwidger a mis en évidence que les fonctionnelles de Minkowski forment une base de mesures géométriques parmi celles qui sont C-additives, invariantes par isométries et continues. Ce résultat est fondamental en géométrie intégrale puisqu'il permet d'affirmer que les fonctionnelles de Minkowski forment un système complet de mesures morphologiques.

En contre partie, ce théorème met en évidence un problème : celui de devoir travailler avec des mesures qui ne sont pas parmi les fonctionnelles C-additives, invariantes par isométries et continues. En effet, les fonctionnelles de Minkowski sont insuffisantes pour caractériser des objets. En dimension 2 par exemple, l'aire et le périmètre ne permettent pas de discriminer des objets, pas même des convexes.

Il est difficile de concevoir travailler avec des fonctionnelles non C-additives ou discontinues, c'est pourquoi on considèrera plutôt des mesures qui ne sont pas invariantes par isométries, telles que les volumes mixtes [34].

2.2.3 Volumes mixtes et formule de Steiner-Minkowski

Soit X un convexe de \mathbb{R}^d , $d \ge 1$, la formule de Steiner montre que le volume $\nu_d(X \oplus rB)$, r > 0de X dilaté par une boule est un polynôme en r dont les coefficients sont à une constante près, les fonctionnelles de Minkowski. Cette formule soulève la question du développement du volume $\nu_d(X \oplus rK)$ où K est un convexe quelconque, ce qui conduit à introduire les volumes mixtes [35].

THÉORÈME 2.2 (Théorème de Steiner-Minkowski [36])

Soient K_1 et K_2 deux convexes compacts de \mathbb{R}^d , $d \ge 1$, et r_1, r_2 deux réels positifs, alors :

i. $\nu_d(r_1K_1 \oplus r_2K_2)$ est un polynôme homogène de degrés d en r_1, r_2 à coefficients positifs. Il s'écrit :

$$\nu_d(r_1K_1 \oplus r_2K_2) = \sum_{k=1}^d \binom{d}{k} W_{k,d-k}^{(d)}(K_1, K_2) r_1^k r_2^{d-k}.$$
(2.5)

ii. Les coefficients $W_{k,d-k}^{(d)}(K_1,K_2)$ sont appelés volumes mixtes et satisfont :

$$W_{d,0}^{(d)}(K_1, K_2) = W_0^{(d)}(K_1) \text{ et } W_{0,d}^{(d)}(K_1, K_2) = W_0^{(d)}(K_2),$$

$$\forall \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}_+, \forall k = 0, \cdots d, \ W_{k,d-k}^{(d)}(\lambda_1 K_1, \lambda_2 K_2) = \lambda_1^k \lambda_2^{d-k} W_{k,d-k}^{(d)}(K_1, K_2).$$

Lorsque il n'y a pas d'ambiguïté, nous utiliserons la notation $W_{k,d-k}$ au lieu de $W_{k,d-k}^{(d)}$

Remarque 2.2.1. Il existe une définition plus générale des volumes mixtes. En effet, le résultat s'entend à une famille de n convexes compacts $K_1, \dots K_n$. Le volume $\nu_d(\bigoplus_{i=1}^n r_i K_i)$ admet l'expression polynomiale :

$$\nu_d(\bigoplus_{i=1}^n r_i K_i) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n, |k| = n} \frac{d!}{k!} W_{k_1, \cdots k_n}^{(d), (n)}(K_1, \cdots K_n) r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n}$$

 $O\hat{u} \mid k \mid = k_1 + \cdots + k_n \text{ et } k! = k_1! \cdots + k_n!$ Les coefficients $W_{k_1, \cdots, k_n}^{(d), (n)}(K_1, \cdots, K_n)$ sont positifs et satisfont les conditions d'homogénéité précitées, ils sont parfois appelés volumes mixtes. Notons que ces coefficients peuvent toujours s'écrire comme des combinaisons linéaires des volumes mixtes deux à deux $W_{k,d-k}^{(d)}$. Ces quantités ne seront pas utilisées par la suite, c'est pourquoi lorsque l'on parlera de volumes mixtes nous ferons toujours référence aux volumes mixtes deux à deux $W_{k,d-k}^{(d)}$, $k = 1, \cdots d$.

THÉORÈME 2.3 (Inégalités de Alexandrov-Fenchel [29])

Soit K_1, K_2 deux convexes compacts, notons $w_k = W_{k,d-k}^{(d)}(K_1, K_2), \ k = 1, \dots d$, alors : *i.* pour $k = 1, \dots d - 1$, $w_k^2 \ge w_{k+1} w_{k-1}$.
(2.6)

ii. De plus, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$,

 $\exists x \in \mathbb{R}^d, \ K_1 = \lambda K_2 + x \Leftrightarrow \forall k = 1, \cdots d, \ w_k = \lambda w_{k-1},$ (2.7)

autrement dit, $K_1 = \lambda K_2$ à translations près si et seulement si $\forall k = 1, \dots d - 1, w_k = \lambda w_{k-1}$.

Reprenons les notations de la propriété ci dessus, et supposons que $\forall k = 0, \dots d - 1, w_k \neq 0$, alors :

$$\frac{w_d}{w_{d-1}} \le \dots \le \frac{w_1}{w_0},$$

donc :

$$(\frac{w_d}{w_{d-1}})^{d-1} \le \frac{w_{d-1}}{w_0},$$

ce qui conduit à :

$$w_{d-1}^d \ge w_d^{d-1} w_0,$$

il s'agit de l'inégalité isopérimétrique généralisée, en prenant $K_2 = B$ on obtient l'inégalité isopérimétrique classique.

Proposition 2.2.4 (Inégalité isopérimétrique [29]). Soient K un convexe compact de \mathbb{R}^d et B la boule unité de \mathbb{R}^d , alors :

$$W_1^{(d)}(K)^d \ge W_0^{(d)}(K)^{d-1} W_0^{(d)}(B).$$
(2.8)

De plus, il y a égalité si et seulement si K est une boule.

Notons, que pour un convexe compact X de \mathbb{R}^2 il s'agit de l'inégalité bien connue [30] :

$$U(X)^2 \ge 4\pi A(X).$$
 (2.9)

L'égalité ayant lieu seulement si X est un disque. Dans certains cas, si des informations sont connues sur X, il est possible d'obtenir des inégalités plus restrictives [37, 38] (voir l'exemple 2.2.1 ci dessous).

Exemple 2.2.1 (Inégalité dans un rectangle). Soit X un rectangle du plan de côtés (x, y), alors U(X) = 2(x + y) et A(X) = xy de plus :

$$4(x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow 4(x^2+y^2) \ge 8A(X),$$

or $U(X)^2 - 8A(X) = 4(x^2 + y^2)$ ce qui conduit à :

$$U(X)^2 \ge 16A(X).$$
 (2.10)

De nombreuses caractéristiques morphologiques sont obtenues à partir de telles inégalités. Par exemple, en dimension deux, le facteur de forme $\frac{4\pi A(X)}{U(X)^2} \in [0, 1]$. Par la suite, des caractéristiques géométriques et morphologiques seront introduites.

2.3 Caractéristiques géométriques et morphologiques

On entend par caractéristique géométrique toute quantité décrivant des propriétés d'un élément de \mathfrak{R} , en d'autres termes il s'agit d'une application de \mathfrak{R} vers un espace E. En pratique E est un espace de descripteurs, il peut s'agir de \mathbb{R}_+ ou encore d'un espace fonctionnel. Parmi les caractéristiques géométriques, certaines sont relatives à l'orientation, la taille ou la forme des ensembles. Par la suite, on adoptera une terminologie adaptée à ces notions, après les avoir définies.

2.3.1 Forme d'un sous ensemble de \mathbb{R}^d

Considérons deux carrés du plan X et Y orientés et localisés différemment, respectivement de côté x et y. On s'accorde à dire que X et Y ont même forme, et ce , quelles que soient leurs orientations, positions ou dimensions x, y. Ainsi, la notion de forme est définie à similitude près. En d'autres termes, si on note \mathcal{R}_1 la relation suivante sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{R}, \ X\mathcal{R}_1 Y \Leftrightarrow \exists s \text{ une similitude telle que } X = s(Y).$$
(2.11)

La relation \mathcal{R}_1 est une relation d'équivalence, de sorte que l'ensemble quotient $\mathfrak{R}/\mathcal{R}_1$ constitue l'espace des formes [39]. Remarquons que pour cette définition deux rectangles du plan n'ont pas nécessairement la même forme.

De plus, cette définition permet de définir facilement la notion de taille. En effet, choisissons une base de représentants pour les classes de \mathcal{R}_1 (par exemple des représentants de volume unitaire), si on note \tilde{X} le représentant de la classe de X alors toutes les similitudes s telles que $X = s(\tilde{X})$ ont même rapport, la taille se définit alors comme ce rapport.

Notons que l'orientation d'un ensemble X ne peut être définie par le même procédé. En effet toute similitude s satisfaisant $X = s(\tilde{X})$ s'écrit s = k.f + t où k est le rapport de s, t un vecteur et f une isométrie vectorielle. D'une part, f n'est pas définie de manière unique, et d'autre part le nombre d'isométries f satisfaisant s = k.f + t avec $X = s(\tilde{X})$ dépend de la forme de X (considérer le cas du disque et celui du carré dans le plan).

La notion de forme introduite au sens \mathcal{R}_1 ne tient pas compte de la taille des objets. Cependant, selon le contexte applicatif, il est parfois nécessaire d'introduire la notion de forme en tenant compte de la taille des objets. Ce qui conduit à considérer la relation \mathcal{R}_2 :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{R}, \ X\mathcal{R}_2Y \Leftrightarrow \exists f \text{ une isométrie tel que } X = f(Y).$$
(2.12)

Définition 2.3.1 (Caractéristiques morphologiques). On appelle caractéristique morphologique toute application de \Re invariante par isométrie.

Notons qu'avec cette définition toute caractéristique géométrique est une caractéristique morphologique.

2.3.2 Quelques caractéristiques en dimension arbitraire

Rappelons tout d'abord que les fonctionnelles de Minkowski introduites précédemment forment une base de caractéristiques morphologiques C-additive et continue. Ces caractéristiques morphologiques ne suffisent pas à caractériser les objets de \Re . Nous allons introduire ici certaines caractéristiques géométriques qui nous seront utiles par la suite : le covariogramme géométrique et la fonction d'appui.

Définition 2.3.2 (Covariogramme géométrique). Soit $K \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ de mesure de Lebesque finie, on appelle covariogramme géométrique ou covariogramme de K l'application :

$$g_K: \begin{vmatrix} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u & \longmapsto & g_K(u) = \nu_d(K \cap (K-u)). \end{vmatrix}$$

Remarquons que pour $K \in \mathfrak{R}$ le covariogramme géométrique est toujours bien défini puisque $\nu_d(K) < +\infty$. Le covariogramme géométrique parfois appelé *covariance ensembliste* [40] coïncide avec l'auto-corrélation de la fonction indicatrice de K:

$$g_K = \mathbf{1}_K * \mathbf{1}_{-K}, \tag{2.13}$$

de sorte que :

$$g_K(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_K(x) \mathbf{1}_K(x-u) dx.$$
(2.14)

Le covariogramme est donc une caractéristique géométrique invariante par translations et réflexions. Ce dernier fait l'objet de nombreux travaux, on peut notamment citer la conjecture de Matheron [41].

Définition 2.3.3 (Conjecture de Matheron : Le Problème du covariogramme). Soit K un corps convexe (i.e convexe compact d'intérieur non vide) de \mathbb{R}^d , le covariogramme de K permet-il de déterminer K à translations et réflexions près ?

Cette question reste ouverte dans le cas général. Des réponses partielles furent apportées, en effet G.Bianchi prouve le résultat en dimension deux [42] et en dimension 3 pour les polytopes [43], cependant le résultat est faux en général [41].

Proposition 2.3.1 (Propriétés du covariogramme géométrique). Soit K une partie de \mathbb{R}^d de mesure finie et g_K son covariogramme géométrique, alors :

- *i.* g_K est paire *i.e* $\forall u \in \mathbb{R}^d$, $g_K(u) = g_K(-u)$,
- *ii.* $\forall u \in \mathbb{R}^d, g_K(u) \le g_K(0) = \nu_d(K),$
- *iii.* $\int_{\mathbb{R}^d} g_K(u) du = \nu_d(K)^2$,
- $iv. \ \forall r \in \mathbb{R}_+ \ , \forall u \in \mathbb{R}^d, \ \frac{dg_K(ru)}{dr} = -\nu_{d-1}((K \cap (K+ru)) \mid_{u^{\perp}}),$
- v. g_K est une application lipschitzienne uniformément continue sur \mathbb{R}^d de limite nulle lorsque $||u|| \to \infty$.

Les preuves des trois premiers points sont triviales, celle du quatrième peut être trouvée dans [44] et celle du dernier dans [24].

En dimension 2 le covariogramme est souvent exprimé en coordonnées polaires, ce changement de coordonnées permet en particulier de calculer le covariogramme isotropisé [45]. **Définition 2.3.4** (Covariogramme isotropisé). Soit K une partie de \mathbb{R}^d de mesure finie et g_K son covariogramme géométrique, on appelle covariograme isotropisé $\bar{g}_K(r)$, $r \in \mathbb{R}$ la moyenne de $g_K(ru)$ sur toutes les directions possibles $u \in S^{d-1}$, i.e :

$$\bar{g}_K(r) = \int_{u \in S^{d-1}} g_K(ru) U(du), \qquad (2.15)$$

où U désigne la distribution uniforme sur S^{d-1} .

Le covariogramme isotropisé \bar{g}_K révèle d'importantes caractéristiques de K. En effet, nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}_{+}} \bar{g}_{K}(r) dr = \nu_{d}(K)^{2}, \qquad (2.16)$$

 et

$$\frac{d\bar{g}_K(r)}{dr}|_{r=0^+} = 2W_1(K).$$
(2.17)

Exemple 2.3.1 (Covariogramme isotropisé d'objets usuels). Considérons quelques objets usuels du plan (d = 2), un disque et un rectangle :

- soit K un disque de rayon R, alors :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \ \bar{g}_K(r) = \mathbf{1}_{[0,R]}(r)(2\pi R^2 \arccos(\frac{r}{2R}) - \frac{r}{2}\sqrt{4R^2 - r^2}), \tag{2.18}$$

— soit K un rectangle d'aire A et de ratio $\beta \geq 1$,

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \ \bar{g}_K(r) = \frac{A}{\pi} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) (\pi - 2x - \frac{2x - x^2}{\beta}$$
(2.19)

$$+\frac{A}{\pi}\mathbf{1}_{]1,\beta]}(x)(2\arcsin(\frac{1}{x})-\frac{1}{\beta}-2(x-u))$$
(2.20)

$$+\frac{A}{\pi}\mathbf{1}_{]\beta,\sqrt{\beta^{2}+1}}(x)(2\arcsin(\frac{\beta-uv}{x^{2}})+2u+\frac{2v-1-x^{2}}{\beta}-\beta) \quad (2.21)$$

avec
$$x = \frac{r\sqrt{\beta}}{\sqrt{A}}, \ , u = \sqrt{x^2 - 1} \ et \ v = \sqrt{x^2 - \beta^2}.$$
 (2.22)

Notons que si K est un carré de côté c l'expression du covariogramme se simplifie :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \ \bar{g}_K(r) = \frac{c^2}{\pi} \{ \mathbf{1}_{[0,c]}(r)(\pi - r\frac{4c - r}{c^2})$$
(2.23)

$$+\mathbf{1}_{]c,\sqrt{2}c]}\left(r(2\arcsin(2\frac{c^2}{r^2}-1)+4\sqrt{\frac{r^2}{c^2}-1-2-\frac{r}{c}}\right).$$
(2.24)

Définition 2.3.5 (Fonction d'appui d'un compact). soit K un compact non vide de \mathbb{R}^d , on appelle la fonction d'appui de K l'application $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_K(u) = \sup\{\langle x, u \rangle | x \in K\},$$
(2.25)

 $o\dot{u} < .,. > d\acute{e}signe$ le produit scalaire euclidien.

La compacité de K ainsi que le fait qu'il soit non vide assurant l'existence de la borne supérieure.

De plus si K est convexe cette fonction caractérise complètement K [29], en effet nous avons les propriétés suivantes.

Proposition 2.3.2 (Propriétés de la fonction d'appui). Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact non vide, et f_K sa fonction d'appui, alors :

- *i.* f_K est positivement homogène : $\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall u \in \mathbb{R}^d, f_K(ru) = rf_K(u).$
- *ii.* f_K est sous-additive : $\forall u \in \mathbb{R}^d$, $\forall v \in \mathbb{R}^d$, $f_K(u+v) \leq f_K(u) + f_K(v)$.
- iii. f_K est additive vis a vis de l'addition de Minkowski i.e :soient K_1, K_2 deux compacts non vides, alors $f_{K_1 \oplus K_2} = f_{K_1} + f_{K_2}$.
- iv. Soit s be une similate vectorielle et $b \in \mathbb{R}^d$ alors $f_{s(K)+b}(x) = f_K(s(x)) + \langle x, b \rangle$.
- v. L'envelope convexe de K coincide avec avec l'intersection des demi-espaces délimités par f_K :

$$conv(K) = \bigcap_{u \in \mathbb{R}^d} \{ v \in \mathbb{R}^d | \langle v, u \rangle \leq f_K(u) \}.$$
(2.26)

- vi. Si $0 \in K$ alors $f_X \ge 0$.
- vii. Soient K_1, K_2 deux compacts non vides, alors $d_H(K_1, K_2) = ||f_{K_1} f_{K_2}||_{\infty}$ où d_H désigne la distance de Hausdorff et $||.||_{\infty}$ la norme uniforme sur la boule unité.

Les points i et il relatent la convexité de la fonction d'appui. D'autre part l'expression (2.26)permet la construction de l'enveloppe convexe de K à partir de la fonction d'appui. En particulier si K est convexe, elle caractérise complètement K.

Notons que d'après i, f_K peut être complètement déterminé par sa donnée sur la sphère unité S^{d-1} , c'est pourquoi elle est parfois définie uniquement sur S^{d-1} . La fonction d'appui f_K d'un compact K dans une direction $u \in S^{d-1}$ consiste donc en une mesure au pied à coulisse de K, dans la direction u en partant de l'origine (voir Figure 2.1).



FIGURE 2.1 – Fonction d'appui du compact K de \mathbb{R}^2 évalué dans la direction $u \in S^1$.

2.3.3 Caractéristiques du plan

Ici, nous allons décrire certaines caractéristiques géométriques et morphologiques des compacts du plan, nous nous limiterons parfois aux ensembles convexes.

2.3.3.1 Fonction d'appui et diamètre de Féret

La fonction d'appui étant complètement déterminée sur la sphère unité, elle se définit de manière polaire dans \mathbb{R}^2 .

Définition 2.3.6 (Fonction d'appui polaire). Soit X un compact non vide de \mathbb{R}^2 , notons $u_{\theta} = {}^t (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle fonction d'appui polaire de X ou plus simplement fonction d'appui de X l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$h_X(\theta) = f_X(u_\theta) \tag{2.27}$$

Définition 2.3.7 (Diamètre de Féret [46]). Soit X un compact non vide de \mathbb{R}^2 on appelle diamètre de Féret de X l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$H_X(\theta) = h_X(\theta) + h_X(\theta + \pi).$$
(2.28)

Notons tout d'abord que le diamètre de Féret d'un compact X dans une direction θ est toujours positif. Il s'agit de la distance entre les deux tangentes de X orientées par θ (voir Figure 2.2). D'autre part, en remarquant l'égalité $h_X(\theta + \pi) = h_{\check{X}}(\theta)$, il peut s'écrire :

$$H_X(\theta) = h_X(\theta) + h_{\breve{X}}(\theta). \tag{2.29}$$

En conséquence, si X est un compact convexe symétrique (i.e X = -X) alors $H_X = 2h_X$ et donc le diamètre de Féret de X détermine complètement X. De manière plus générale, le diamètre de Féret d'un compact convexe X coincide avec la fonction support de son symétrisé $\frac{1}{2}(X \oplus \breve{X})$, et caractérise donc complètement le symétrisé $\frac{1}{2}(X \oplus \breve{X})$.



FIGURE 2.2 – Diamètre de Féret d'un compact X sans la direction θ .
Proposition 2.3.3 (Propriétés du diamètre de Féret). Soient X et Y deux compacts non vides, alors :

i. Le diamètre de Féret est additif vis à vis de l'addition de Minkowski :

$$H_{X\oplus Y} = H_X + H_Y.$$

ii. Le diamètre de Féret est homogène de degré 1 :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \ H_{rX} = |r|H_X.$$

iii. Soit R_{η} la rotation vectorielle d'angle η et $b \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ H_{R_{\eta}(X)+b}(\theta) = H_X(\theta+\eta).$$

iv. Le diamètre de Féret est π -périodique :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ H_X(\theta + \pi) = H_X(\theta).$$

v. Supposons que X et Y soient convexes et symétriques, alors :

$$H_X \leq H_Y \Leftrightarrow X \subseteq Y.$$

vi. Pour tout $\theta, \beta \in [0, 2\pi]$,

$$H_X(\theta + \beta) \le H_X(\theta) + 2|\sin(\frac{\beta}{2})|H_X(\theta + \frac{\beta + \pi}{2}).$$
(2.30)

Preuve.

- 1,2,3. D'après la relation (2.29), les trois premiers points se déduisent directement de la proposition 2.3.2.
 - 4. la relation $\forall \theta \in \mathbb{R}, \ h_{\breve{X}}(\theta) = h_X(\theta + \pi)$ prouve la π -périodicité.
 - 5. En raison de la symétrie de X et Y, si $H_X \leq H_Y$ alors $h_X \leq h_Y$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $f_X(x) \leq f_Y(x)$ alors $\{y \in \mathbb{R}^2 | \langle y, x \rangle \leq f_X(x)\} \subseteq \{y \in \mathbb{R}^2 | \langle y, x \rangle \leq f_Y(x)\}$ et donc $X \subset Y$ d'après la proposition 2.3.2 v. Supposons que $X \subset Y$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\{\langle s, x \rangle | s \in X\} \subset \{\langle s, x \rangle | s \in Y\} \Rightarrow f_X(x) \leq f_Y(x) \Rightarrow h_X \leq h_Y \Rightarrow H_X \leq H_Y$.
 - 6. Pour tout $(\theta, \beta) \in \mathbb{R}^2$, notons $\alpha = \beta + \pi$, $x = t(-\sin(\theta), \cos(\theta)), z = t(-\sin(\theta + \alpha), \cos(\theta + \alpha))$ et y = z + x, alors :

$$f_X(y-x) \le f_X(-x) + f_X(y),$$

$$h_X(\theta + \alpha) \le h_X(\theta + \pi) + f_X(y),$$

et:

$$\| y \| = \sqrt{(\sin(\theta) + \sin(\theta + \alpha))^2 + (\cos(\theta) + \cos(\theta + \alpha))^2},$$

$$= \sqrt{(2 + 2(\sin(\theta)\sin(\theta + \alpha) + \cos(\theta)\cos(\theta + \alpha)))},$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos(\alpha)},$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{2\cos^2(\frac{\alpha}{2})},$$

$$= 2|\cos(\frac{\alpha}{2})|,$$

$$= 2|\sin(\frac{\beta}{2})|.$$

D'après la formule d'Euler :

$$\sin(\theta) + \sin(\theta + \alpha) = 2\sin(\theta + \frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2}),$$

$$\cos(\theta) + \cos(\theta + \alpha) = 2\cos(\theta + \frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2}),$$

et en prenant $\eta \in \mathbb{R}$ tel que $y = \parallel y \parallel^t (-\sin(\eta), \cos(\eta)),$ nous avons :

$$\sin(\eta) = \frac{2\sin(\theta + \frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})}{\parallel y \parallel},$$

$$\cos(\eta) = \frac{2\cos(\theta + \frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})}{\parallel y \parallel}.$$

Soit s le signe de $\cos(\frac{\alpha}{2})$ alors $\sin(\eta) = s\sin(\theta + \frac{\alpha}{2})$ et $\cos(\eta) = s\cos(\theta + \frac{\alpha}{2})$. Finalement, $\eta \in \{\theta + \frac{\beta + \pi}{2}, \theta + \frac{\beta + \pi}{2} + \pi\}$ et donc :

$$h_X(\theta + \beta - \pi) \le h_X(\theta + \pi) + 2|\sin(\frac{\beta}{2})|h_X(\eta).$$

Ce résultat est vrai pour tout convexe compact non vide X, et donc en particulier pour $Y = \frac{1}{2}(X \oplus \breve{X})$. Or $h_Y = H_X$ donc d'après la π -périodicité du diamètre de Féret :

$$\forall \theta, \beta \in [0, 2\pi], \ H_X(\theta + \beta) \le H_X(\theta) + 2|\sin(\frac{\beta}{2})|H_X(\theta + \frac{\beta + \pi}{2}).$$

| г | | |
|---|---|--|
| L | | |
| L | _ | |
| | | |

Les fonctionnelles de Minkowski d'un convexe compact peuvent, dans certain cas, s'exprimer à partir de la fonction d'appui ou du diamètre de Féret. En particulier, nous avons :

THÉORÈME 2.4 (Formule de Cauchy [47])

Soit X un convexe compact non vide, alors :

$$U(X) = \int_0^{2\pi} h_X(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} H_X(\theta) d\theta.$$
(2.31)

Lorsque le convexe compact X est suffisament régulier, son aire peut s'exprimer à partir de sa fonction support [48], nous avons :

Proposition 2.3.4 (aire et fonction d'appui). Soit X un convexe compact non vide dont le bord est C^2 , alors :

$$A(X) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_X(\theta) - h'_X(\theta)^2 d\theta.$$
 (2.32)

Remarquons que le diamètre de Féret n'est pas une caractéristique morphologique. En effet, il n'est pas invariant par isométrie. Cependant, ses maximas $diam(X) := \max_{\theta \in \mathbb{R}}(H_X(\theta))$ et $\min_{\theta \in \mathbb{R}}(H_X(\theta))$ le sont, ils sont d'ailleurs souvent utilisés pour construire des caractéristiques morphologiques.

2.3.3.2 Caractéristiques morphologiques et facteurs de formes

De nombreuse caractéristiques morphologiques peuvent être obtenues à partir de caractéristiques morphologiques. En effet, en jouant sur les degrés d'homogénéité de caractéristiques morphologiques il est possible de construire, par ratio ou produit, des quantités invariantes par homothétie. Par exemple, le ratio $\frac{4\pi A(X)}{U(X)^2}$ pour un compact X tel que $U(X) \neq 0$. Lorsque X est convexe ce ratio est compris entre 0 et 1, on parle parfois de facteur de forme dans ce cas.

Soit X un compact connexe, notons r(X) le rayon du plus grand disque inclus dans X et R(X) celui du plus petit le contenant. Plusieurs facteurs de formes peuvent être définis, pour les ensembles connexes à partir des caractéristiques morphologiques r, R, A, P, diam, et $\min_{\theta \in \mathbb{R}}(H_{\cdot}(\theta))$ à valeur dans [0, 1]. A partir de ces facteurs de formes, il est possible de définir des diagrammes de formes [30]. Les diagrammes de formes consistent en une étude simultanée de deux facteurs de formes il consiste donc en caractéristiques à valeur $[0, 1]^2$, ils permettent souvent de discriminer des formes [30]. Cependant, il ne permettent pas de caractérister l'espace des formes, pas même pour les convexes. Pour ce faire, il nous faut considérer des caractéristiques à valeurs dans un espace fonctionnel tel que la fonction support, ou encore l'aire mixte.

2.3.3.3 Caractérisation des convexes

Définition 2.3.8 (Aire mixte). Soient X et Y deux convexes compacts, l'aire mixte de X et Y est le volume mixte $W_{1,1}^{(2)}(X,Y)$. Afin d'alléger les notations nous la désignerons par W(X,Y). L'aire mixte s'exprime donc :

$$W(X,Y) = \frac{1}{2}(A(X \oplus Y) - A(X) - A(Y)).$$
(2.33)

Notons que certains auteurs note l'aire mixte A(X, Y), ici nous utiliserons toujours la notation W(X, Y). Rappelons quelques propriétés de l'aire mixte :

Proposition 2.3.5 (Propriétés de l'aire mixte). Soient X et Y deux convexes compacts, alors :

- *i.* l'aire mixte est positive $W(X, Y) \ge 0$,
- ii. l'aire mixte est symétrique W(X, Y) = W(Y, X),
- iii. l'aire mixte est invariante par translations $\forall t \in \mathbb{R}^2$, W(X, t+Y) = W(Y, X),
- iv. l'aire mixte est positivement homogène $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, W(r_1X, r_2Y) = r_1r_2W(X, Y),$
- v. l'aire mixte est additive, $\forall Z\mathbb{K}, W(X, Y \oplus Z) = W(X, Y) + W(X, Z).$

Ces propriétés se déduisent directement des propriétés des volumes mixtes, c'est pourquoi la preuve est omise.

THÉORÈME 2.5 (Caractérisation des convexes par l'aire mixte)

Soit X un convexe compact, alors l'application $W(X, .) : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$ caractérise X à translations près. Autrement dit, si X et Y sont convexes et compacts :

$$[\forall K \in \mathbb{K}, \ W(X, K) = W(Y, K)] \Leftrightarrow [\exists t \in \mathbb{R}^2, \ X = Y + t].$$
(2.34)

Preuve. Soient X et Y deux convexes compacts, supposons que $\forall K \in \mathbb{K}$, W(X, K) = W(Y, K), alors W(X, Y) = W(Y, Y) et W(Y, X) = W(X, X). D'autre part, puisque X est convexe $X \oplus X = 2X$ et donc :

$$W(X, X) = \frac{1}{2} (A(X \oplus X) - 2A(X)),$$

= $\frac{1}{2} (4A(X) - 2A(X)),$
= $A(X).$

L'égalité W(Y,Y) = A(Y) est obtenue de la même manière. Finalement nous avons W(X,Y) = A(X) = A(Y), donc d'après le Théorème 2.3 nous avons l'égalité à translations près. La réciproque est triviale puisque l'aire mixte est invariante par translations.

L'aire mixte permet donc de caractériser les convexes compacts, elle peut donc être reliée à la fonction d'appui via la proposition suivante [49, 48].

Proposition 2.3.6 (Aire mixte et fonction d'appui). Soient X et Y deux convexes compacts non vides dont le bord est C^1 par morceaux, alors :

$$W(X,Y) = \int_0^{2\pi} h_X(\theta) h_Y(\theta) - h'_X(\theta) h'_Y(\theta) d\theta$$
(2.35)

La relation (2.35) exprime l'aire mixte à partir de la fonction d'appui. Cependant, l'opération inverse consistant à exprimer la fonction d'appui à partir de l'aire mixte n'est pas directe.

En pratique, l'aire mixte est plus facilement accessible que la fonction d'appui. En effet, l'aire mixte est obtenue par des opérations simples : dilatation et mesure d'aire. Cependant, il s'agit d'une information difficile à interpréter. En effet, lorsque l'on cherche à étudier la morphologie d'un convexe compact X, l'application $W(X, .) : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$ caractérise X, pourtant son interprétation n'est pas directe. L'enjeu consiste donc à choisir des éléments structurants $K_i, i \in I$ de \mathbb{K} de sorte que $W(X, K_i), i \in I$ soit une information exploitable. Par exemple, si on note B la boule unité, alors $W(X, B) = \frac{1}{2}U(X)$.

THÉORÈME 2.6 (diamètre de Féret et aire mixte)

Soient X un convexe compact non vide, $\theta \in \mathbb{R}$ et S_{θ} un segment unitaire dirigé par θ , alors :

$$W(X, S_{\theta}) = \frac{1}{2} H_X(\theta) \tag{2.36}$$

La preuve de ce théorème est facilement établie par un simple dessin Figure 2.3. En effet, l'aire mixte correspond à la surface de la partie la grise, par un simple découpage on remarque que cette surface est égale à celle du parallélogramme $[x_+, x_-] \oplus S_{\theta}$.



FIGURE 2.3 – Dilatation d'un convexe compact X par un segment S_{θ} dirigé par θ avec la représentation de l'aire mixte $W(X, S_{\theta})$ et de ses points tangents.

Remarque 2.3.1. Cette relation est très importante, car elle permet une interprétation linéaire de l'aire mixte entre un convexe X et une somme de Minkowski de segments. En effet, en notant S_{θ} la rotation d'angle θ du segment $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, pour $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$:

$$A(X \oplus \alpha_1 S_{\theta_1} \oplus \alpha_2 S_{\theta_2}) = A(X \oplus \alpha_1 S_{\theta_1}) + 2W(X \oplus \alpha_1 S_{\theta_1}, \alpha_2 S_{\theta_2})$$

= $A(X) + \alpha_1 H_X(\theta_1) + \alpha_2 H_{X \oplus \alpha_1 S_{\theta_1}}(\theta_2)$
= $A(X) + \alpha_1 H_X(\theta_1) + \alpha_2 H_X(\theta_2) + \alpha_2 H_{\alpha_1 S_{\theta_1}}(\theta_2)$

Cependant $\alpha_2 H_{\alpha_1 S_{\theta_1}}(\theta_2) = W(\alpha_1 S_{\theta_1}, S_{\theta_2}) = A(\alpha_1 S_{\theta_1} \oplus \alpha_2 S_{\theta_2}), donc$

$$W(X, \alpha_1 S_{\theta_1} \oplus \alpha_2 S_{\theta_2}) = \frac{1}{2} (\alpha_1 H_X(\theta_1) + \alpha_2 H_X(\theta_2))$$

Ce résultat se généralise à toute somme finie de segments $\forall n \ge 1, \forall i = 1, \dots, \alpha_i \in \mathbb{R}_+, \theta_i \in \mathbb{R}$:

$$W(X, \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i S_{\theta_i}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i H_X(\theta_i)$$
(2.37)

La relation (2.37) présente un certain type de linéarité intéressant. Cette relation permettra par la suite d'établir différentes approximations et estimations.

Chapitre 3

Géométrie aléatoire

La géométrie aléatoire est un domaine mathématique qui regroupe un ensemble de techniques visant à décrire de manière probabiliste des données de type géométrique. La géométrie aléatoire possède un large champ d'applications, en effet de nombreuses structures géométriques courantes (matériaux, agrégats, suspensions, mosaïques...) présentent une hétérogénéité qui peut être appréhendée d'un point de vue probabiliste [50].

Dans ce chapitre nous présenterons tout d'abord quelques rappels de probabilités, puis la théorie des ensembles aléatoires. Nous aborderons ensuite certains types d'ensemble aléatoire, les processus ponctuels puis les modèles germes-grains. Les enjeux applicatifs des modèles germes-grains seront alors discutés.

3.1 Rappels de probabilités

Nous rappellerons ici quelques éléments de probabilités et de statistiques (voir [51] pour un exposé plus complet) qui nous seront utiles par la suite.

3.1.1 Espace probabilisé, variables aléatoires et lois

Définition 3.1.1 (Espace probabilisé). Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable, on muni (Ω, \mathcal{A}) d'une mesure \mathbb{P} finie de masse totale 1 (i.e $\mathbb{P}(\Omega) = 1$). Une telle mesure est appelée mesure de probabilité ou probabilité, on dira alors que le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

En pratique, tout les objets considérés le seront dans un même espace probabilisé, c'est pourquoi on parle de l'espace probabilisé ou de l'univers probabilisé conventionnellement noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \Omega$ est appelé univers et ses sous ensembles événements, la tribu \mathcal{A} considérée sera en général la tribu discrète $\mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 3.1.2 (Variable aléatoire). Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé, (E, \mathcal{M}) un espace mesurable. On appelle variable aléatoire toute application X mesurable de (Ω, \mathcal{A}) à valeurs dans (E, \mathcal{M}) . On dira que X est une variable aléatoire (v.a) à valeurs (E, \mathcal{M}) . Toutes les variables aléatoires sont considérées sur l'univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, il s'agit donc de l'espace dont dépendent les expériences aléatoires, c'est pourquoi on ne cherche jamais à expliciter cet espace. D'un point de vue intuitif, il s'agit de l'ensemble de tout ce qui est possible, ce dont tout dépend. Une variable aléatoire sera donc caractérisée via la mesure de probabilité \mathbb{P} , dans l'espace où elle prend ses valeurs.

Définition 3.1.3 (Loi d'une variable aléatoire). Soit X une variable aléatoire sur (E, \mathcal{M}) , considérons $P_X : A \in \mathcal{M} \mapsto \mathbb{P}(X^{-1}(A)) \in [0,1]$ la mesure image de \mathbb{P} par X. P_X est une mesure de probabilité sur (E, \mathcal{M}) , elle fait donc de (E, \mathcal{M}, P_X) un espace probabilisé. La mesure P_X sera appelé loi ou distribution de X.

Soit X une variable aléatoire à valeurs (E, \mathcal{M}) , la loi de X ne suffit pas à décrire X, en effet si Y est une autre variable aléatoire telle que $P_X = P_Y$ cela n'entraîne pas X = Y. Cependant, la variable aléatoire X représente une expérience aléatoire dont l'issue est incertaine. La loi P_X de X est une mesure qui quantifie sa probabilité ("chance") de présence sur l'ensemble des issues possibles E, c'est donc **tout ce que l'on peut et veut savoir** sur la variable aléatoire X.

Définition 3.1.4 (Égalités de variables aléatoires). Soient X et Y deux variables aléatoires sur (E, \mathcal{M}) , plusieurs types d'égalités entre X et Y peuvent être considérés :

- i) Égalité partout : $X = Y \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega, \ X(\omega) = Y(\omega).$
- *ii)* Égalité presque partout ou presque sûrement : $X \stackrel{p.s}{=} Y \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = Y) = 1$.
- iii) Égalité en loi ou en distribution : $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y \Leftrightarrow P_X = P_Y$.

Les différentes égalités sont présentées de la plus forte à la moins forte, en effet $i \Rightarrow ii \Rightarrow iii$. Des notions de convergence se rapportent alors à chacun de ces types d'égalités.

Définition 3.1.5 (Variables aléatoires indépendantes). Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires respectivement à valeurs dans $(E_i, \mathcal{M}_i)_{i \in I}$, les v.a $(X_i)_{i \in I}$ seront dites indépendantes si :

$$\forall (A_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i, \ \mathbb{P} \bigcap_{i \in I} (X_i^{-1}(A_i)) = \prod_{i \in I} P_{X_i}(A_i).$$

Les variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$ seront dites deux à deux indépendantes si tout couple de v.a extrait de $(X_i)_{i \in I}$ est indépendant.

Définition 3.1.6 (Vecteur aléatoire). Soient $n \in \mathbb{N}$ * et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires respectivement à valeurs (E_i, \mathcal{M}_i) . On dit que la variable aléatoire $X : \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) :=^t$ $(X_1(\omega), \cdots X_n(\omega))$ à valeur dans $(\prod_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n (\mathcal{M}_i))$ est un vecteur aléatoire. Le vecteur aléatoire X est alors noté $X =^t (X_1, \cdots X_n)$, et ses composantes $X_1, \cdots X_n$ sont appelées les marginales de X.

Un vecteur aléatoire $X = {}^t (X_1, \dots, X_n)$ est donc une variable à valeur dans un espace produit, en général l'espace considéré est \mathbb{R}^n . Cette définition permet de s'intéresser conjointement aux composantes X_1, \dots, X_n de X. **Proposition 3.1.1** (Loi conjointe et lois marginales). Soit $X = {}^t (X_1, \dots X_n)$ un vecteur aléatoire, alors :

- i) La loi conjointe $P_X := P_{(X_1, \dots, X_n)}$ détermine de manière unique les lois marginales P_{X_i} , $i = 1, \dots, n$ la réciproque est fausse en général.
- ii) Si les variables aléatoires marginales $X_1, \dots X_n$ sont indépendantes alors les lois marginales $P_{X_i}, i = 1, \dots n$ déterminent de manière unique la loi conjointe qui est alors la mesure produit $P_X = \bigotimes_{i=1}^n P_{X_i}.$

Définition 3.1.7 (**Processus aléatoire**). Soient T un ensemble quelconque qui sera appelé espace d'indices et (E, \mathcal{M}) un espace mesurable qui sera appelé espace de valeurs. On appelle processus aléatoire (ou processus stochastique) toute famille de variables aléatoires $(X(t))_{t\in T}$ à valeurs dans (E, \mathcal{M}) . On dira que $(X(t))_{t\in T}$ est un processus aléatoire à valeurs dans (E, \mathcal{M}) .

Un processus aléatoire constitue donc une généralisation du concept de vecteur aléatoire, il peut être noté $(X(t))_{t\in T}, (X_t)_{t\in T} X$ ou encore $\{X(t,\omega)|t\in T, \omega\in\Omega\}$ pour mettre en avant le fait qu'il s'agit d'une application $T \times \Omega \to E$. Afin d'étudier les propriétés d'un processus aléatoire, des hypothèses sur la nature topologique de l'espace de valeurs sont souvent émises [52], ici nous supposerons que l'espace de valeurs est \mathbb{R} muni de la tribu borélienne.

Notons qu'un processus aléatoire est parfois appelé *champ aléatoire*, la terminologie se référant à ce que représente l'espace d'indices. Pour un espace d'indice réel on parle souvent de processus alors que pour un espace d'indice vectoriel on parle plutôt de champ. Le terme *mesure aléatoire* est aussi employé lorsque le processus possède une structure de mesure vis à vis de son espace d'indice.

Un processus aléatoire peut être vu comme une variable aléatoire à valeurs E^T , les réalisations de cette variable seront appelées trajectoires du processus et on dira que la distribution de cette variable est la *distribution du processus X*. Ainsi, la représentation en processus permet de décrire les propriétés de ses trajectoires relativement à son espace d'indice.

Définition 3.1.8 (Lois finies dimensionnelles). Soit $\{X(t,\omega)|t \in T, \omega \in \Omega\}$ un processus aléatoire à valeurs réelles. On appelle lois finies dimensionnelles de X les lois des vecteurs extraits ${}^{t}(X(t_1), \cdots X(t_n))$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Les moments des lois finies dimensionnelles d'un processus aléatoire réel révèlent d'importantes caractéristiques du processus. Par exemple, la fonction de moyenne $t \in T \mapsto \mathbb{E}[X(t)]$ ou encore la fonction d'auto-covariance $(t_1, t_2) \in T^2 \mapsto \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] - \mathbb{E}[X(t_1)]\mathbb{E}[X(t_2)]$. De plus en vertu du théorème d'extension de Kolmogorov [52], nous avons la caractérisation suivante.

Proposition 3.1.2 (Caractérisation d'un processus aléatoire réel). Soit X un processus aléatoire à valeurs réelles, alors la distribution de X est entièrement caractérisée par les loi finies dimensionnelles de X.

3.1.2 Caractérisation des variables aléatoires réelles et vectorielles

Nous nous intéresserons ici aux variables aléatoires réelles et vectorielles (i.e à valeurs \mathbb{R}^d , $d \ge 1$).

Définition 3.1.9 (Variable aléatoire réelle intégrable). Soit X une variable aléatoire réelle (v.a.r), X sera dite intégrable si :

$$\int_{\Omega} |X(\omega)| \mathbb{P}(d\omega) < +\infty.$$

Définition 3.1.10 (**Espérance d'une variable aléatoire réelle**). Soit X une variable aléatoire réelle intégrable, on appelle espérance de X la quantité réelle :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega).$$

L'existence de $\mathbb{E}[X]$ est assurée par l'intégrabilité de X, la convergence absolue impliquant la convergence. Notons tout de même que pour une variable aléatoire p.s positive non nécessairement intégrable, l'espérance peut être définie à valeurs $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. C'est pourquoi on note souvent $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$ pour désigner l'intégrabilité d'une variable X. L'espérance constitue une forme linéaire sur l'espace des v.a.r intégrables, elle s'exprime via la loi de la variable considérée par la formule de transfert :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x P_X(dx).$$
(3.1)

Définition 3.1.11 (Espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et moments). Soit $p \in \mathbb{N}^*$, l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est défini comme l'ensemble des v.a.r dont la puissance p est intégrable, i.e.:

$$L^{p}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \{ X : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbb{E}[|X^{p}|] < +\infty \}.$$

Soit X une variable aléatoire réelle et $p \in \mathbb{N}$, le moment d'ordre p de X est défini, lorsqu'il existe par :

$$m_p := \mathbb{E}[X^p].$$

Notons que $m_0 = 1$ et que si $p \ge 1$, m_p existe si et seulement si $X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. De plus, pour $1 \le p \le q \ L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \supseteq L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, cette inclusion étant due à la finitude de la mesure \mathbb{P} . De sorte que si une v.a.r X admet un moment d'ordre p alors elle possède des moments d'ordre inférieur $k \le p$.

Compte tenu de la formule de transfert (3.1), les moments d'une variable aléatoire ne dépendent que de sa loi, c'est pourquoi on parle souvent de moments de la loi (ou plus généralement de moments d'une mesure). Les moments d'une variable aléatoire sont donc des statistiques décrivant des caractéristiques de sa distribution. Pour répondre à cet objectif, les moments de la variable centré $X - m_1$ ou de la variable centrée réduite $\frac{X-m_1}{\sqrt{m_2}}$ sont souvent considérés. Par exemple la variance Var(X) d'une variable X est le moment d'ordre 2 de la variable centrée. Ainsi, les moments d'ordre 1, 2, 3 et 4 caractérisent respectivement la moyenne, la dispersion, l'asymétrie et l'aplatissement d'une distribution.

Définition 3.1.12 (Le problème des moments). Soient I un intervalle réel et $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une

suite de réels. Existe-t-il une mesure positive μ de support I satisfaisant :

$$m_k = \int_I x^k \mu(dx),$$

et le cas échéant, est-t-elle unique ? Ce problème porte le nom de problème des moments de Hamburger si $I = \mathbb{R}$, de Stieltjes si $I = \mathbb{R}_+$ et de Hausdorff si I est compact.

Notons que la question d'existence revient à se demander s'il existe une variable aléatoire Xayant pour moments la suite $\frac{m_k}{m_0}$ (ce qui équivaut à une condition de positivité sur les matrices de Hankel de la suite $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, voir [53]), la mesure μ satisfaisant le problème étant alors m_0P_X . Pour le problème de Hausdorff, si la mesure existe, elle est unique. La question de l'unicité s'avère plus délicate pour les problèmes de Stieltjes et de Hamburger (condition de Carleman ou de Krein [53]). Du point de vue d'une v.a.r, la question de l'existence ne se pose donc pas et la question de l'unicité devient très intéressante, le problème des moments est alors reformulé.

Définition 3.1.13 (Le problème des moments pour une v.a.r). Soient X une variable aléatoire possédant des moments de tout ordre. Sous quelles conditions les moments $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de X caractérisent totalement la distribution de X ?

Une variable aléatoire dont les moments caractérisent totalement la distribution sera dite Mdéterminée, elle sera dite M-indéterminée dans le cas contraire.

Pour cette nouvelle formulation du problème, la discussion autour du type du problème (Hamburger, Stieltjes ou Hausdorff) dépend alors du support de la distribution P_X de la variable Xconsidérée (i.e de la structure de son image $X(\Omega)$). Les différentes conditions de M-détermination en fonction du support de la loi (voir [54]) sont listées dans la proposition suivante.

Proposition 3.1.3 (Conditions de *M*-détermination d'une v.a.r). Soit X une variable aléatoire réelle, alors :

- i) Condition de Cramer : si la fonction génératrice des moments $t \mapsto \mathbb{E}[e^{\langle t, X \rangle}]$ existe dans une boule ouverte non vide contenant 0, alors : tous les moments de X existent et X est M-déterminée (cette propriété reste valable pour un vecteur aléatoire X est à valeur \mathbb{R}^d).
- *ii)* Condition de Carleman pour le problème de Hamburger : X est M-déterminée si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{m_{2k}})^{\frac{1}{2k}} = +\infty.$$
(3.2)

 iii) Condition de Carleman pour le problème de Stieltjes : supposons que X soit presque sûrement positive, alors : X est M-déterminée si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{m_k})^{\frac{1}{2k}} = +\infty.$$
(3.3)

iv) Si X est presque sûrement bornée (i.e $\exists C > 0$, $\mathbb{P}(|X| \leq C) = 1$) alors X est M-déterminée.

v) Si Y est une v.a.r positive M-déterminée telle que $|X| \leq Y$ alors X est M-déterminée.

Lorsque la fonction génératrice des moments est bien définie (condition de Cramer) la question de la M-détermination est triviale puisque la loi est obtenue par transformée de Fourrier inverse de la fonction génératrice des moments. En contrepartie, dès lors que la fonction génératrice des moments n'existe pas la question de la M-détermination devient plus délicate, la condition de Carleman prend tout son sens. Notons qu'il existe une condition de M-indétermination pour les v.a.r à densité (condition de Krein [54]).

Définition 3.1.14 (Moments d'un vecteur aléatoire). Soient $X = {}^t (X_1, \dots X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs \mathbb{R}^n , lorsque les espérances $\mathbb{E}[X_i]$; $i = 1, \dots n$ existent, on appelle espérance du vecteur aléatoire X, le vecteur $\mathbb{E}[X] = {}^t (\mathbb{E}[X_1], \dots \mathbb{E}[X_n])$.

Soit $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, supposons que $\mathbb{E}[|X^k|] < \infty$ où X^k désigne $X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$, on appelle alors moments d'indice k et d'ordre $|k| = \sum_{i=1}^n k_i$ de X la quantité suivante :

$$m_k = \mathbb{E}[X^k]. \tag{3.4}$$

Les moments d'un vecteur aléatoire jouent un rôle similaire à ceux d'une variable réelle, ils constituent des statistiques décrivant des propriétés de la distribution du vecteur aléatoire. Les moments d'ordre 2 révèlent par exemple la dispersion ainsi que la dépendance des composantes. En effet, ils se réfèrent à la matrice covariance $Cov(X) = \mathbb{E}[X^tX] - \mathbb{E}[X]^t\mathbb{E}[X]$. Ainsi le problème des moments se formule de la manière suivante pour un vecteur aléatoire.

Définition 3.1.15 (Le problème des moments pour un vecteur aléatoire). Soit $X =^t (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n possédant des moments de tout multi-indice et de tout ordre. Sous quelles conditions les moments $(m_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ de X caractérisent totalement la distribution de X ?

Un vecteur aléatoire dont les moments caractérisent totalement la distribution sera dit Mdéterminé, il sera dit M-indéterminé dans le cas contraire.

Notons tout d'abord que la condition de Cramer reste valable dans le cas vectoriel. De plus, la question de la M-détermination d'un vecteur aléatoire se transfère à ses loi marginales [54], nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1 (Conditions de M-détermination d'un vecteur aléatoire [54])

- Soit $X = {}^t (X_1, \cdots X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs \mathbb{R}^n , alors :
- i) Si toutes les marginales X_i sont M-déterminées, alors X est M-déterminé.
- ii) Supposons que les composantes de X soient indépendantes, alors X est M-déterminé si et seulement si toutes ses marginales le sont.

Notons que pour un processus aléatoire à valeurs réelles, la question de la M-détermination se ramène alors à celle de ses loi finies dimensionnelles. Donc d'après ce théorème, la distribution d'un processus aléatoire X(.,.) à valeurs réelles est M-déterminé si ses marginales X(t,.) le sont.

3.2 Théorie des ensembles aléatoires

Nous présenterons dans cette section quelques éléments de la théorie des ensembles aléatoires, les fondements de cette théorie ont été mis en place dans les année 60 par Choquet puis poursuivis par Matheron et Kendall [55] [56],[57]. Cette théorie trouve de nombreux champs d'application tels que : l'analyse d'image [23], la science des matériaux [22], la biologie [58, 59] ou encore l'agronomie [60].

3.2.1 Définitions et premières propriétés

Notons \mathbb{F} l'ensemble des fermés d'un espace de Hausdorff localement compact, ici nous prendrons toujours \mathbb{R}^d . Les ensembles aléatoires seront définis comme des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{F} , ce qui nécessite d'introduire une tribu appropriée sur \mathbb{F} , Kendall [61] et Matheron [62] ont introduit la tribu suivante :

$$\mathfrak{F} = \sigma\{\{F \in \mathbb{F} \mid F \cap K \neq \emptyset\}, K \in \mathfrak{K}\}.$$
(3.5)

Où \mathfrak{K} désigne toujours l'ensemble des compactes de \mathbb{R}^d . Notons que \mathfrak{F} est la tribu Borélienne de \mathbb{F} pour une certaine topologie connue sous le nom de *Fell topologie*[63].

Définition 3.2.1 (Ensemble aléatoire). On appelle ensemble fermé aléatoire (random closed set) ou plus simplement ensemble aléatoire, toute application mesurable de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeur dans $(\mathbb{F}, \mathfrak{F})$.

Les notions d'ensembles compacts aléatoires, d'ensembles convexes aléatoires et d'ensembles convexes compacts aléatoires peuvent être introduites par une construction similaire en remplaçant respectivement \mathbb{F} par l'ensemble des compacts \mathfrak{K} , par l'ensemble des convexes ou encore \mathbb{K} . Cependant, on préfère introduire ces notions avec la formulation plus faible suivante :

Définition 3.2.2 (Compacité et convexité des ensembles aléatoires). Soit X un ensemble aléatoire, X sera dit compact (resp) convexe (resp) convexe et compact s'il est presque sûrement compact (resp) convexe (resp) convexe et compact. Par abus de langage, on désignera par convexe aléatoire un ensemble aléatoire presque sûrement convexe et compact.

Soit X un ensemble aléatoire, notons que la mesure image P_X , fait de $(\mathbb{F}, \mathfrak{F}, P_X)$ un espace probabilisé. Une caractéristique importante d'un ensemble aléatoire X est sa fonction indicatrice 1_X [55]. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1_X(x) dx = \int_X 1 dx = \nu_d(X), \tag{3.6}$$

et en vertu du théorème de Fubini nous avons le théorème de Robbins [23].

Proposition 3.2.1 (Théorème de Robbins). La mesure de Lebesgue d'un ensemble aléatoire X est une variable aléatoire réelle, dont l'espérance est :

$$\mathbb{E}[\nu_d(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(x \in X) dx.$$
(3.7)

Des résultats similaires pour les moments d'ordre supérieur existent, en particulier :

$$\mathbb{E}[\nu_d(X)^2] = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(\{x, y\} \subset X) dx dy.$$
(3.8)

Des résultats similaires pour les moments d'ordre supérieur de la (d-1)-ième fonctionnelle de Minkowski $W_{d-1}^{(d)}(X)$ sont proposés dans [64], [65].

La distribution P_X d'un ensemble aléatoire X joue un rôle similaire à celle d'une variable aléatoire réelle. Cependant, la distribution P_X définie sur \mathfrak{F} s'avère difficile à exploiter, c'est pourquoi un ensemble aléatoire sera plutôt décrit par une capacité [66, 67]. Choquet et Matheron ont introduit cette notion sous la forme d'une fonction connue sous le nom de *capacité de Choquet* ou *Capacité fonctionnelle* ou encore *capacité d'impact (hitting functional)*, l'idée étant de caractériser un ensemble aléatoire par la donnée de sa probabilité de présence dans chaque lieu de l'espace.

Définition 3.2.3 (**Capacité fonctionnelle**). Soit X un ensemble aléatoire, on appelle capacité fonctionnelle de X l'application $T_X : \mathfrak{K} \to [0, 1]$ définie par :

$$T_X(K) = \mathbb{P}(\{X \cap K \neq \emptyset\}). \tag{3.9}$$

Proposition 3.2.2 (Propriétés de la capacité fonctionnelle). Soient X un ensemble aléatoire et T_X sa capacité fonctionnelle, alors :

i. T_X est C-additive :

$$\forall K_1, K_2 \in \mathfrak{K}, \ T_X(K_1 \cup K_2) = T_X(K_1) + T_X(K_2) - T_X(K_1 \cap K_2).$$

- *ii.* $T_X(\emptyset) = 0$ *et* $\forall K \in \mathfrak{K}, \ 0 \le T_X(K) \le 1$.
- *iii.* T_X est supérieurement semi-continue. ie : $K_n \downarrow K \Rightarrow T_X(K_n) \downarrow T_X(K)$.
- iv. T_X est complètement alternative : soient $n \in \mathbb{N}$ et $\forall K, K_1, ..., K_n \in \mathfrak{K}$ on définit

$$S_n(K; K_1, ..., K_n) = S_{n-1}(K; K_1, ..., K_{n-1}) - S_n(K \cup K_n; K_1, ..., K_{n-1}),$$

avec $S_0 = 1 - T_X(K)$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall K, K_1, \dots K_n \in \mathfrak{K}, \ S_n(K; K_1, \dots, K_n) \ge 0.$$

Notons que $S_n(K; K_1, ..., K_n) = \mathbb{P}(X \cap K = \emptyset | X \cap K_i \neq \emptyset \, \forall i = 1...n).$

THÉORÈME 3.2 (Théorème de Choquet-Kendall-Matheron)

Soit T une application $\mathfrak{F} \to [0,1]$ qui vérifie les propriétés ii), iii) et iv) ci dessus, alors il existe un ensemble aléatoire X tel que $T = T_X$.

D'autre part la capacité fonctionnelle détermine de manière unique la distribution d'un

ensemble aléatoire. En d'autre termes, si X_1 et X_2 sont deux ensembles aléatoires alors :

$$T_{X_1} = T_{X_2} \Leftrightarrow P_{X_1} = P_{X_2}.$$

Ce théorème est aussi très souvent appelé théorème de Choquet (voir [68] pour une preuve). Il établit une correspondance biunivoque entre les applications $\mathfrak{F} \to [0, 1]$ satisfaisant les propriétés ii), iii), iv) et les distributions d'ensembles aléatoires. Ce qui signifie que la capacité fonctionnelle détient toute l'information nécessaire à l'étude d'un ensemble aléatoire, c'est un équivalent de la distribution, ce qui en fait un outil fondamental de la géométrie aléatoire. Nous allons énoncer quelques propriétés classiques des ensembles aléatoires (voir [55] pour un énoncé plus complet).

Définition 3.2.4 (Indépendance). Deux ensembles aléatoires X_1 et X_2 seront dits indépendants si :

$$\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{F}, \mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\mathbb{P}(X_2 \in A_2).$$

Notons que d'apres le théorème de Choquet, cette condition est équivalente à :

$$\forall K_1, K2 \in \mathfrak{K}, \mathbb{P}(X_1 \cap K_1 \neq \emptyset, X_2 \cap K_2 \neq \emptyset) = T_{X_1}(K1)T_{X_2}(K_2)$$

Définition 3.2.5 (Stationnarité). Un ensemble aléatoire X sera dit stationnaire s'il est invariant par translation, ie :

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \forall K \in \mathfrak{K}, T_X(K) = T_X(K_y).$$

Définition 3.2.6 (Isotropie). Un ensemble aléatoire X sera dit isotrope s'il est invariant par isométrie vectorielle, ie :

$$\forall l \in GL(\mathbb{R}^d), \forall K \in \mathfrak{K}, \ T_X(K) = T_{l(X)}(K).$$

Définition 3.2.7 (Ergodicité). Soient $A \in \mathfrak{F}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, considérons l'ensemble des translatés $A_x := \{F_x | F \in A\}$, un ensemble aléatoire X sera dit ergodique si :

$$\forall A \in \mathfrak{F}, \forall x \in \mathbb{R}^d, \ [P_X((A \setminus A_x) \cup (A_x \setminus A)) = 0 \Rightarrow P_X(A) \in \{0, 1\}].$$

Proposition 3.2.3 (Propriété de mélange). Une condition suffisante pour qu'un ensemble aléatoire X soit ergodique est :

$$\forall A, B \in \mathfrak{F} \forall x \in \mathbb{R}^d, P_X(A \cap B_x) \to P_X(A)P_X(B_x) \text{ lorsque } \| x \| \to \infty.$$

Cette condition est connue sous le nom de Propriété de mélange (mixing property, [55]).

Dire qu'un ensemble aléatoire est ergodique revient à dire que ses propriétés locales (i.e dans une partie bornée de \mathbb{R}^d) ne dépendent pas de ses propriétés à l'infini. En pratique, ceci signifie que ses propriétés probabilistes peuvent être déduites à partir d'une de ses réalisations restreinte à une fenêtre d'observation suffisamment étendue.

Il a été précédemment énoncé que la capacité fonctionnelle d'un ensemble aléatoire suffit à le caractériser, malheureusement cette dernière n'est pas toujours accessible. En particulier dans le cas du grain primaire d'un modèle germes-grains (voir section 3.4), c'est pourquoi nous aurons souvent recours à d'autres descripteurs.

3.2.2 Caractéristiques des ensembles aléatoires

Nous introduirons ici les caractéristiques des ensembles aléatoires qui nous seront utiles par la suite. Certaines notions importantes telles que : la distribution de Palm [23], les mesures aléatoires de courbures [69], la visibilité [19], ou encore la variation spécifique [70], ne seront pas abordées ici.

Définition 3.2.8 (Fonction de couverture spatiale). Soit X un ensemble aléatoire de \mathbb{R}^d , on appelle fonction de couverture spatiale de X l'application p_X définie en $x \in \mathbb{R}^d$ comme :

$$p(X,x) := \mathbb{P}(x \in X). \tag{3.10}$$

Notons que p(X, .) est la densité spatiale de $\mathbb{E}[\nu_d(X)]$, en effet en vertu du théorème de Robbins (proposition 3.2.1), nous avons :

$$\mathbb{E}[\nu_d(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} p(X, x) dx,$$

de sorte que p(X, .) puisse être décrite comme l'espérance du volume de X par unité de volume. En d'autre termes, la mesure $\Lambda : B \mapsto \Lambda(B) = \mathbb{E}[\nu_d(X \cap B)]$ (intensité de la mesure aléatoire $\nu_d(X \cap .)$, voir [23]) où B désigne n'importe quel borélien de \mathbb{R}^d est à densité, de densité p(X, .). Ainsi une définition équivalente de la fonction de couverture spatiale est :

$$p(X,x) := \mathbb{E}[\nu_d(X \cap C_x)], \tag{3.11}$$

où C_x est le cube unité de \mathbb{R}^d centré en x.

Définition 3.2.9 (Fraction de volume). Soit X un ensemble aléatoire stationnaire de \mathbb{R}^d , on appelle fraction de volume la quantité :

$$p_X := p(X, 0). \tag{3.12}$$

Les autres volumes intrinsèques d'un ensemble aléatoire peuvent être appréhendés en termes de densité vis à vis de l'espace [23].

Définition 3.2.10 (Fractions de volumes intrinsèques). Soient X un ensemble aléatoire de \mathbb{R}^d stationnaire et ergodique et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de convexes de limite \mathbb{R}^d , pour $k = 0, \dots d$, on appelle

k-ième fraction de volume intrinsèque de X la quantité :

$$v_k(X) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}[V_k(X \cap W_n)]}{\nu_d(W_n)}.$$
(3.13)

Les fractions de volumes intrinsèques de X correspondent donc aux volumes intrinsèques de X par unité de volume.

Notons que ces fractions de volumes intrinsèques peuvent être décrites comme les densités des volumes intrinsèques, ou encore comme les intensités des mesures aléatoires $K \mapsto V_k(X \cap K)$, c'est pourquoi elles sont aussi appelées *intensités* ou *densités* de volumes intrinsèques. En dimension deux, ces densités seront plutôt exprimées à partir des fonctionnelles géométriques classiques : aire, périmètre et nombre d'Euler.

Définition 3.2.11 (Fraction d'aire, fraction de périmètre et nombre spécifique de connectivité). Soit X un ensemble aléatoire de \mathbb{R}^2 stationnaire et ergodique. La fraction de volume de X sera appelée fraction d'aire et sera toujours notée p_X (ou p lorsque qu'il n'y a pas d'ambiguïté). On appellera fraction de périmètre la quantité $L_A := 2v_1$ et nombre spécifique de connectivité la quantité $\chi_A := v_0$.

Notons que la fraction d'aire, la fraction de périmètre et le nombre spécifique de connectivité sont respectivement l'aire, le périmètre et le nombre d'Euler par unité d'aire.

Définition 3.2.12 (Fonction de distribution des contacts). Soient X un ensemble aléatoire de \mathbb{R}^d stationnaire ne remplissant pas presque sûrement l'espace (i.e. $p_X < 1$) et K un compact non vide contenant l'origine $0 \in K$. On appelle fonction de distribution des contacts (contact distribution function) de X relativement à la jauge K l'application $Cont_K(X,.)$: $\mathbb{R}_+ \to [0,1]$ définie par :

$$Cont_K(X, r) := \mathbb{P}(0 \in X \oplus r\breve{K} \mid 0 \notin X), \ r \ge 0,$$

$$(3.14)$$

 $o\dot{u}\ \breve{K}=-K.$

Notons que la fonction de distribution des contacts s'écrit de manière équivalente ([57]):

$$Cont_K(X,r) := 1 - \frac{1 - T_X(rK)}{1 - p_X}, \ r \ge 0.$$
 (3.15)

Considérons la variable aléatoire $R = inf\{s \ge 0 | X \cap sK \ne \emptyset\}$ alors $Cont_K(X, r) = \mathbb{P}(R \le r | 0 \notin X)$ où encore il s'agit de la probabilité conditionnelle que $rB \cap X$ soit non vide, conditionnée par $o \notin X$. De plus, la fonction de distribution des contacts est continue à droite et vérifie :

$$Cont_K(X, 0) = 0 \text{ et } Cont_K(X, +\infty) = 1,$$
 (3.16)

où $Cont_K(X, +\infty)$ désigne la limite (lorsque elle existe) de $Cont_K(X, .)$. Elle exprime donc la fonction de répartition du premier contact (voir [55]). La jauge K est en général choisie convexe, par exemple un segment unitaire ou la boule unité, dans ces cas on parle respectivement de fonction de distribution des contacts linéiques ou sphériques [71].

Définition 3.2.13 (Covariance d'un ensemble aléatoire). Soit X un ensemble aléatoire de \mathbb{R}^d , on appelle covariance de X l'application $Cov_X : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ définie par :

$$Cov_X(x,y) := \mathbb{P}(\{x,y\} \subset X). \tag{3.17}$$

La covariance s'écrit de manière équivalente :

$$Cov_X(x,y) = \mathbb{P}(0 \in (X-x) \cap (X-y)), \tag{3.18}$$

$$= p(X, x) + p(X, y) - T(\{x, y\}).$$
(3.19)

De plus, cette quantité tient son nom de son lien avec la fonction d'auto-covariance k(.,.) du champs aléatoire $\{\mathbf{1}_X, x \in \mathbb{R}^d\}$. En effet, pour $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$Cov_X(x,y) = k(x,y) - p(X,x)p(X,y).$$
 (3.20)

Proposition 3.2.4 (Propriétés de la covariance). Soient X un ensemble aléatoire de \mathbb{R}^d et Cov_X sa covariance, alors pour $x, y \in \mathbb{R}^d$:

- i) La covariance satisfait $Cov_X(0) = p_X$.
- ii) Si X est stationnaire, $Cov_X(x, y)$ ne dépend que du vecteur différence v := x y, on notera alors $Cov_X(x, y) = Cov_X(0, v) := Cov_X(v)$. De sorte que $Cov_X(v)$ soit la fraction de volume de $X \cap (X - v)$, i.e :

$$Cov_X(v) = \mathbb{P}(0 \in (X - x) \cap (X - y)), \tag{3.21}$$

$$=p_{X\cap(X-v)},\tag{3.22}$$

$$= 2p_X - T_X(\{0, v\}). \tag{3.23}$$

- iii) Si X est isotrope, $Cov_X(x, y)$ ne dépend que d'une des positions x ou y et de la norme de v := x y.
- iv) Si X est stationnaire et isotrope, $Cov_X(x, y)$ ne dépend que de la norme du vecteur différence r := ||x y||, on notera alors $Cov_X(r) := Cov_X(x, y)$.
- v) Si X est stationnaire et satisfait la propriété de mélange, alors :

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} Cov_X(v) = p_X^2.$$
(3.24)

La démonstration de ces propriétés est omise (voir [55] pour une preuve), on se contentera de discuter du point v. Soit X un ensemble aléatoire de \mathbb{R}^d stationnaire qui satisfait la propriété de mélange, remarquons que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^d, \ T_X(\{0, v\}) = 1 - \mathbb{P}(\{0 \notin X\} \cap \{v \notin X\}),$$

puisque X satisfait la propriété de mélange :

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} \mathbb{P}(\{0 \notin X\} \cap \{v \notin X\}) = \lim_{\|v\|\to+\infty} \mathbb{P}(0 \notin X)\mathbb{P}(v \notin X),$$
$$= \lim_{\|v\|\to+\infty} (1 - p(X, 0))(1 - p(X, v)).$$

Donc par stationnarité de X :

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} Cov_X(v) = 2p_X - \lim_{\|v\|\to+\infty} T_X(\{0,v\}),$$

= $2p_X - 1 + (1 - p_X)^2,$
= $p_X^2.$

Dans ce contexte cette limite peut être interprétée de la manière suivante. Rappelons que la covariance de X est la probabilité que deux points x et y appartiennent à X, dès lors que ces deux points sont suffisamment éloignés, les événements $\{x \in X\}$ et $\{y \in X\}$ deviennent indépendants. En pratique, cette interprétation permet de juger si une fenêtre d'observation est suffisamment étendue pour étudier un ensemble aléatoire stationnaire satisfaisant la propriété de mélange.

Définition 3.2.14 (Fonction de *n***-variance**). Soient X un ensemble aléatoire de \mathbb{R}^d et $n \in \mathbb{N}^*$, on appellera *n*-variance (*n* points probability function) de X l'application $\mathscr{C}^{(n)} : \mathbb{R}^{d \times n} :\to [0, 1]$ définie par :

$$\forall x_1, \cdots x_n \in \mathbb{R}^d, \ \mathscr{C}_X^{(n)}(x_1, \cdots x_n) := \mathbb{P}(\{x_1, \cdots x_n\} \subset X).$$
(3.25)

Avec cette définition, $\mathscr{C}_X^{(1)}$ désigne la fonction de couverture spatiale p(X, .) de X et $\mathscr{C}_X^{(2)}$ sa covariance. La *n*-variance généralise le concept de covariance, elle s'écrit de manière équivalente :

$$\forall x_1, \cdots x_n \in \mathbb{R}^d, \ \mathscr{C}_X^{(n)}(x_1, \cdots x_n) := \mathbb{P}(0 \in \bigcap_{i=1}^n (X - x_i)).$$
(3.26)

Elle satisfait des propriétés de symétrie évidentes, ainsi que les inégalités :

$$\forall k \le n, \forall x_1, \cdots x_n \in \mathbb{R}^d, \ \mathscr{C}_X^{(k)}(x_1, \cdots x_k) \ge \mathscr{C}_X^{(n)}(x_1, \cdots x_n).$$

De plus, si X est stationnaire, la *n*-variance ne dépend que des n-1 vecteurs différences $v_i := x_{i+1} - x_i$ pour $i = 1, \dots n-1$.

3.2.3 Caractéristiques géométriques des convexes aléatoires

Rappelons qu'un convexe aléatoire désigne un ensemble aléatoire presque sûrement convexe et compact. Les caractéristiques géométriques des ensembles convexes et compacts introduites au chapitre précédent peuvent être étendues aux convexes aléatoires. En effet, si f est une caractéristique géométrique et X un ensemble aléatoire, f(X) est la variable aléatoire définie pour presque tout $\omega \in \Omega$ par $\omega \mapsto f(X(\omega))$. Une telle définition s'étend donc à tout $\omega \in \Omega$, en prenant par exemple pour $f(X(\omega))$ n'importe quel élément de l'image de f si $(X(\omega))$ n'est pas convexe et compact. Le choix est sans conséquence pour la loi de f(X), c'est pourquoi les caractéristiques géométriques des convexes aléatoires seront toujours considérées comme des variables aléatoires définies partout.

En particulier les fonctionnelles de Minkowski d'un convexe aléatoire X de \mathbb{R}^d sont les variables aléatoires réelles et positives $W_k(X)$, $k = 0, \dots d$. Notons tout de même que $W_d(X)$ est une variable aléatoire constante égale au volume de la boule unité de \mathbb{R}^d (voir sous-section 2.2.2). En dimension deux, on préfèrera souvent utiliser les caractéristiques usuelles : aire A(X) et périmètre U(X). Soient $K \in \mathbb{K}$ et X un convexe aléatoire, $X \oplus K$ est aussi un convexe aléatoire de sorte que la formule de Steiner définissent les volumes mixtes $W_{k;d-k}(X,K)$, $k = 0, \dots d$ comme des variables aléatoires réelles et positives. Ces variables permettent de complètement caractériser la distribution de X à translation près d'après les inégalités de Alexandrov-Fenchel (Théorème 2.3). Cependant de telles quantités sont souvent difficiles à exploiter, par exemple les espérances des volumes mixtes ne sont d'aucune aide pour caractériser un convexe aléatoire invariant par rotation, comme le précise le théorème suivant.

THÉORÈME 3.3 (Formule de Steiner généralisée)

Soit X un convexe aléatoire invariant par rotations, supposons que ses fonctionnelles de Minkowski admettent des moments d'ordre 1. ie : $\mathbb{E}[W_k(X)] < \infty, \ k = 0, \dots d$. Alors :

$$\forall K \in \mathfrak{K}, \quad \mathbb{E}[\nu_d(X \oplus K)] = \frac{1}{\omega_d} \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} \mathbb{E}[W_k(X)] W_{d-k}(K), \quad (3.27)$$

où ω_d désigne le volume d-dimensionnel de la boule unité. De plus en prenant K = B(0, r)nous avons :

$$\mathbb{E}[\nu_d(X \oplus B(0,r))] = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} \mathbb{E}[W_k(X)]r^k.$$
(3.28)

Notons que la formule de Steiner généralisée aux convexes aléatoires montre que les volumes mixtes satisfont :

$$\mathbb{E}[W_{k,d-k}(X,K)] = \frac{1}{\omega_d} \mathbb{E}[W_k(X)], \ k = 0, \cdots d.$$
(3.29)

Des caractéristiques de type fonctionnelles telles que le covariogramme géométrique ou la fonction d'appui, peuvent aussi être utilisées pour décrire un convexe aléatoire X. Notons que de telles caractéristiques peuvent être vues comme des variables aléatoires à valeurs fonctionnelles ou des processus aléatoires à valeurs réelles. Ces caractéristiques sont souvent difficiles à exprimer, c'est pourquoi on se limite souvent à leurs espérances.

Définition 3.2.15 (Covariogramme géométrique moyen). Soit X un compact aléatoire satisfaisant $\mathbb{E}[\nu_d(X)] < \infty$, on appelle covariogramme géométrique moyen de X l'espérance de son covariogramme géométrique. En d'autres termes, le covariogramme géométrique moyen de X est l'application $\gamma_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\gamma_X(u) := \mathbb{E}[\nu_d(X \cap (X - u))]. \tag{3.30}$$

Proposition 3.2.5 (Propriétés du covariogramme géométrique moyen). Soient X un compact aléatoire satisfaisant $\mathbb{E}[\nu_d(X)] < \infty$ et γ_X son covariogramme géométrique moyen, alors :

- *i*) $\forall u \in \mathbb{R}^d, \ \gamma_X(u) \leq \gamma_X(0) = \mathbb{E}[\nu_d(X)].$
- ii) γ_X est paire.

$$iii) \ \forall u \in \mathbb{R}^d, \ \gamma_X(u) = \int_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(\{x \in X\} \cap \{x + u \in X\}) dx$$

iv)

$$\int_{u\in\mathbb{R}^d}\gamma_X(u)du = \mathbb{E}[\nu_d(X)^2].$$
(3.31)

- v) Si $\mathbb{E}[\nu_d(X)] > 0$ alors, γ_X est définie positive.
- vi) γ_X est uniformément continue sur \mathbb{R}^d et de limite nulle lorsque $||u|| \to +\infty$.

Au même titre que les moments de variables aléatoires réelles sont des réels, il est souhaitable d'avoir une définition ensembliste des moments d'un ensemble aléatoire. Dans cette optique, plusieurs auteurs [72, 73, 66] ont développé des notions de moyennes à valeurs ensembliste telle que la moyenne d'Aumann.

Définition 3.2.16 (Moyenne d'Aumann). Soit X un convexe aléatoire, supposons que l'espérance de sa fonction d'appui existe (ie $\forall u \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}[h_X(u)] < \infty$), alors l'application $u \mapsto \mathbb{E}[h_X(u)]$ est la fonction d'appui d'un convexe aléatoire **E**X que l'on appelle moyenne d'Aumann. En d'autre termes, la moyenne d'Aumann de X est définie comme l'unique ensemble **E**X vérifiant :

$$\forall u \in S^d, \ h_{\mathbf{E}X}(u) = \mathbb{E}[h_X(u)]. \tag{3.32}$$

 $\mathbf{E}X$ peut être construit comme :

$$\mathbf{E}X = \bigcap_{u \in S^d} \{ x \in \mathbb{R}^d | \langle x, u \rangle \leq \mathbb{E}[h_X(u)] \}.$$
(3.33)

Notons qu'il existe une définition de la moyenne d'Aumman pour les ensembles aléatoires non nécessairement convexes aussi connue sous le nom de moyenne de sélection (selection expectation voir [23]). En général, la moyenne d'Aumman ne permet pas d'obtenir des informations sur la morphologie de X, c'est une caractéristique liée en partie à la morphologie de X et en partie à sa variation selon les directions de l'espace. En effet, si X est un convexe aléatoire isotrope alors $\mathbf{E}X$ est le disque de \mathbb{R}^d ayant pour diamètre l'espérance de la fonction de largeur (diamètre de Féret) de X. Cependant, pour un convexe aléatoire X, la morphologie de $\mathbf{E}X$ peut être utilisée pour quantifier l'anisotropie moyenne de X, c'est à dire comment X s'étend en moyenne, dans les différentes directions de l'espace. La moyenne d'Aumman ne suffit tout de même pas à quantifier l'anisotropie d'un convexe aléatoire, puisque elle reste limitée par son ordre. En effet, si $\mathbf{E}X$ est un disque, cela n'implique pas que X soit isotrope.

3.3 Processus ponctuel

3.3.1 Définitions et généralités

Un processus ponctuel ou champ ponctuel aléatoire (point process) est un ensemble aléatoire défini pour représenter un nuage de points répartis aléatoirement dans \mathbb{R}^d . Les processus ponctuels constituent un ingrédient fondamental de la géométrie aléatoire, ils servent soit directement de modèles pour de nombreuses applications, soit ils sont utilisés afin de construire des modèles géométriques aléatoires (modèle germes-grains, tesselation...).

Définition 3.3.1 (processus ponctuel). Un processus ponctuel Φ sur \mathbb{R}^d est une variable aléatoire à valeur dans $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$, où \mathcal{N} est l'ensemble des $\phi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- i) ϕ est localement fini : $\forall B \subset \mathbb{R}^d$ borné $\phi \cap B$ est un ensemble fini. ϕ est donc au plus dénombrable. on notera $\phi = \{x_0, x_1...\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,
- *ii)* ϕ *est simple* : $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$.

Nous dirons souvent que ϕ est une séquence, on notera $\phi(B) = card(\phi \cap B)$ pour $B \in \mathbb{R}^d$.

La distribution P_{Φ} d'un processus ponctuel se définit donc par $P_{\Phi}(Y) = \mathbb{P}(\Phi \in Y)$ pour $Y \in \mathfrak{N}$.

Définition 3.3.2 (Stationarité et isotropie). Soit Φ un processus ponctuel sur \mathbb{R}^d , on dira que :

- i) Φ est stationnaire ou homogène si, quel que soit $x \in \mathbb{R}^d$ le processus translaté $\Phi_x = \{x_n + x\}_{n \in \mathbb{N}}$ a même distribution que Φ (ie : $P_{\Phi} = P_{\Phi_x}$).
- ii) Φ est isotrope si pour toute isométrie vectorielle r les processus ponctuels Φ et $r(\Phi)$ ont même distribution (ie : $P_{\Phi} = P_{r(\Phi)}$).

3.3.2 Caractéristiques des processus ponctuels

La distribution d'un processus ponctuel peut être déterminée par différentes quantités. En effet, la probabilité de manquement $\mathbb{P}(\Phi(K) = 0) = 1 - T_{\Phi}(K)$ évaluée sur les compacts suffit à caractériser la distribution de Φ (théorème de Rényi, voir [74]). D'autre part, les lois finies dimensionnelles de la mesure aléatoire $B \mapsto \Phi(B)$ caractérisent la distribution de Φ . Autrement dit, les lois des vecteurs aléatoires ${}^t(\Phi(B_1), \cdots \Phi(B_k))$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $B_1, \cdots B_k$ des boréliens, caractérisent la distribution de Φ . Les moments de ces vecteurs aléatoires sont alors utilisés pour définir des caractéristiques du processus ponctuel Φ .

Définition 3.3.3 (La mesure d'intensité). La mesure d'intensité Λ_{Φ} d'un processus ponctuel Φ , est une mesure sur (\mathbb{R}^d , $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ définie comme l'espérance de la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de points de Φ dans chaque borélien. C'est à dire que pour tout borélien B de \mathbb{R}^d on définit $\Lambda_{\Phi}(B)$ comme le nombre moyen de points de Φ contenu dans B:

$$\Lambda_{\Phi}(B) := \mathbb{E}(\Phi(B)) = \int \phi(B) P_{\Phi}(d\phi).$$
(3.34)

La mesure d'intensité Λ_{Φ} d'un processus ponctuel Φ , est donc l'analogue de l'espérance d'une variable aléatoire réelle.

Définition 3.3.4 (La fonction d'intensité). Soit Λ_{Φ} la mesure d'intensité d'un processus ponctuels Φ . Si Λ_{Φ} a une densité $\lambda_{\Phi} : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \lambda_{\Phi}(x)$ on dit que λ_{Φ} est la fonction d'intensité de Φ .

Lorsqu'elle existe, la fonction d'intensité $\Lambda_{\Phi}(x)$ d'un processus ponctuel Φ évaluée en $x \in \mathbb{R}^d$ correspond à la probabilité infinitésimale que Φ possède un point en x. En d'autres termes, pour tout borélien $B \in \mathbb{R}^d$:

$$\Lambda_{\Phi}(B) = \int_{B} \lambda_{\Phi}(x) dx. \tag{3.35}$$

Proposition 3.3.1 (Intensité d'un processus ponctuel stationnaire). Soit Φ un processus ponctuel stationnaire, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que :

$$\Lambda_{\Phi}(B) = \lambda \nu_d(B). \tag{3.36}$$

La constante λ (souvent supposée finie) sera appelée intensité de Φ , on la notera parfois λ_{Φ} .

L'intensité λ est donc le nombre moyen de points de Φ par unité de volume. Remarquons que si la fonction d'intensité $\lambda_{\Phi}(x)$ d'un processus ponctuel Φ stationnaire existe alors elle est constante et égale à l'intensité λ de Φ (d'où la notation $\lambda_{\Phi} := \lambda$).

Définition 3.3.5 (La mesure du moment). La mesure du moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ d'un processus ponctuel Φ noté $\mu_{\Phi}^{(n)}$ est une mesure sur \mathbb{R}^{nd} définie par :

$$\mu_{\Phi}^{(n)}(B_1 \times \cdots B_n) = \mathbb{E}[\Phi(B_1) \cdots \Phi(B_n)], \qquad (3.37)$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x_1,\cdots,x_n\in\Phi}\mathbf{1}_{B_1}(x_1)\cdots\mathbf{1}_{B_n}(x_n)\right],\tag{3.38}$$

où $B_1, \cdots B_n$ désignent des boréliens de \mathbb{R}^d .

Notons que pour $B_1 = \cdots = B_n = B$ nous avons $\mu_{\Phi}^{(n)}(B^n) = \mathbb{E}[\Phi(B)^n]$, d'où le nom de cette mesure.

_

Définition 3.3.6 (La mesure factorielle du moment). La mesure factorielle du moment d'ordre n d'un processus ponctuel Φ noté $\alpha_{\Phi}^{(n)}$ est définie comme suit :

$$\alpha_{\Phi}^{(n)}(B_1 \times \cdots B_n) = \mathbb{E}\left[\sum_{x_1, \cdots, x_n \in \Phi}^{\neq} \mathbf{1}_{B_1}(x_1) \cdots \mathbf{1}_{B_n}(x_n)\right],$$
(3.39)

où $B_1, \dots B_n$ désignent des boréliens de \mathbb{R}^d et \sum^{\neq} la somme sur tous les n-uplets de points distincts de Φ . Si $\alpha_{\Phi}^{(n)}$ est à densité $\rho_{\Phi}^{(n)}$ cette densité sera appelée densité produit d'ordre n de Φ .

Notons que pour $B_1 = \cdots = B_n = B$ nous avons :

$$\alpha_{\Phi}^{(n)}(B^n) = \mathbb{E}[\Phi(B)(\Phi(B) - 1) \cdots (\Phi(B) - n + 1)], \qquad (3.40)$$

d'où le nom de cette mesure. La mesure factorielle du moment $\alpha_{\Phi}^{(n)}(B_1 \times \cdots \otimes B_n)$ évaluée en $B_1 \times \cdots \otimes B_n$ ne tient pas compte des points contenus dans les intersections entre les boréliens B_i , i =

 $1, \dots n$ contrairement à la mesure du moment. Donc si les boréliens B_i , $i = 1, \dots n$ sont deux à deux disjoints :

$$\alpha_{\Phi}^{(n)}(B_1 \times \cdots B_n) = \mu_{\Phi}^{(n)}(B_1 \times \cdots B_n).$$
(3.41)

En particulier, à l'ordre 2, la mesure du moment et la mesure factorielle du moment sont reliées par la relation :

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \ \alpha_{\Phi}^{(2)}(B_1 \times B_2) = \mu_{\Phi}^{(2)}(B_1 \times B_2) - \Lambda_{\Phi}(B_1 \cap B_2).$$
(3.42)

Supposons que $\alpha_{\Phi}^{(n)}$ soit localement finie et absolument continue vis-à-vis de la mesure de Lebesgue, alors la densité produit d'ordre n de Φ existe. Remarquons que $\rho_{\Phi}^{(1)}$ est la fonction d'intensité de Φ et que si Φ est stationnaire $\rho_{\Phi}^{(2)}(x_1, x_2)$ ne dépend que du vecteur $x_1 - x_2$, si de plus Φ est isotrope $\rho_{\Phi}^{(2)}(x_1, x_2)$ ne dépend que de la norme de $x_1 - x_2$. De plus, la densité produit d'ordre 2 s'interprète comme la probabilité infinitésimale d'avoir deux points issus de Φ , un dans la voisinage de x_1 et l'autre dans le voisinage de x_2 .

Définition 3.3.7 (La fonction de corrélation des paires). Soit Φ un processus ponctuel, si la fonction d'intensité $\lambda_{\Phi}(x)$ et la densité produit d'ordre 2, $\rho_{\Phi}^{(2)}$ de Φ existent toutes deux, on appelle fonction de corrélation des paires de Φ l'application g_{Φ} définie par :

$$g(x_1, x_2) = \frac{\rho_{\Phi}^{(2)}(x_1, x_2)}{\lambda_{\Phi}(x_1)\lambda_{\Phi}(x_2)}.$$
(3.43)

Notons que si Φ est stationnaire $g_{\Phi}(x_1, x_2)$ ne dépend que du vecteur $v = x_1 - x_2$ on note alors $g_{\Phi}(x_1, x_2) = g(v)$, si de plus Φ est isotrope $g_{\Phi}(x_1, x_2)$ ne dépend que de la norme $r = ||x_1 - x_2||$ on note alors $g_{\Phi}(x_1, x_2) = g_{\Phi}(r)$.

La fonction de corrélation des paires est une caractéristique qui normalise la densité produit d'ordre 2. Comme son nom l'indique elle décrit la corrélation des positions d'une paire de points et permet de caractériser l'agrégation ou la répulsion des points. Par exemple, pour un processus ponctuel stationnaire et isotrope, l'inégalité $g_{\Phi}(r) > 1$ met en évidence une agrégation à l'échelle spatiale r et l'inégalité $g_{\Phi}(r) < 1$ une répulsion à l'échelle spatiale r. D'autres caractéristiques, qui ne seront pas présentées ici permettent de décrire les phénomènes d'agrégation, telles que les fonctions de Ripley (voir [75]).

3.3.3 Processus ponctuels usuels

Il existe trois opérations principales sur les processus ponctuels, l'amincissement (*thin-ning*), l'agrégation (*clustering*) et superposition. Ces opérations sont généralement utilisées pour construire des processus complexes à partir de processus plus simples. Nous nous limiterons ici à une présentation succinte de ces opérations (voir [23] pour plus de détails).

Définition 3.3.8 (Superposition). La superposition de deux processus ponctuels Φ_1 et Φ_2 consiste en leur réunion, il s'agit du processus $\Phi_s := \Phi_1 \cup \Phi_2$.

La mesure d'intensité de la superposition Φ_s s'exprime par $\Lambda_{\Phi_s} = \Lambda_{\Phi_1} + \Lambda_{\Phi_1}$.

Définition 3.3.9 (Agrégation). L'agrégation d'un processus ponctuel Φ consiste à remplacer chaque point aléatoire $x \in \Phi$ par un agrégat N_x . Les agrégats $(x + N_x)_{x \in \Phi}$ sont eux-mêmes des processus ponctuels i.i.d, finis et presque sûrement distincts. La réunion des agrégats constitue alors le processus ponctuel agrégé $\Phi_c := \bigcup_{x \in \Phi} (x + N_x)$.

L'amincissement Φ_a d'un processus ponctuel Φ consiste à utiliser une procédure pour supprimer des points de Φ . L'amincissement Φ_a est un sous ensemble de Φ , on parle d'amincissement indépendant lorsque la procédure de rejet est indépendante du processus Φ . La plus simple forme d'amincissement indépendant consiste en le p(x)-amincissement présenté ci-dessous.

Définition 3.3.10 (p(x)-amincissement). Soit $p : x \in \mathbb{R}^d \mapsto p(x) \in [0,1]$ une application que l'on appelle probabilité de conservation. Le p(x)-Amincissement Φ_a d'un processus ponctuel Φ consiste à préserver un point x de Φ avec la probabilité p(x).

La mesure d'intensité du p(x)-Amincissement Φ_a d'un processus ponctuel Φ s'exprime par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \ \Lambda_{\Phi_a}(B) = \int_B p(x)\Lambda_{\Phi}(dx).$$
(3.44)

Définition 3.3.11 (Processus ponctuel de Poisson). Soit Λ une mesure positive diffuse sur \mathbb{R}^d , on appelle processus ponctuel de Poisson de mesure d'intensité Λ tout processus ponctuel Φ vérifiant les conditions suivantes :

i. Pour tout borélien B, $\Phi(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\Lambda(B)$, *i.e* $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = \frac{\Lambda(B)^k}{k!} \exp(-\Lambda(B))$.

ii. Pour toute famille $(B_k)_{1 \le k \le n}$ de boréliens disjoints les variables $\Phi(B_k)$ sont indépendantes.

Si $\lambda(x)$ es la densité de Λ on dira aussi que Φ est un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\lambda(x)$.

La condition ii) appelée propriété d'indépendance des dispersions (independent scatering) dénote le caractère spatial complètement aléatoire de Φ (purely random property voir [55][p 42]), signifiant l'absence d'interaction spatiale. De plus, si Φ est stationnaire, la condition i) assure que Φ est uniformément répartie dans l'espace.

Proposition 3.3.2 (Propriétés du processus ponctuel de Poisson). Soit Φ un processus ponctuel de Poisson de fonction d'intensité Λ , alors :

i) La capacité de Choquet de Φ s'exprime :

$$T_{\Phi}(K) = 1 - \exp(-\Lambda(K)). \tag{3.45}$$

ii) Si Φ_a est un p(x)-amincissement de Φ , alors Φ_a est un processus ponctuel de Poisson de fonction d'intensité $\lambda_{\Phi_a}(x) = p(x)\lambda_{\Phi}(x)$.

- *iii)* La superposition de processus ponctuels de Poisson indépendant est un processus ponctuel de Poisson.
- iv) La fonction de corrélation des paires g_{Φ} de Φ est identiquement égale à 1, i.e $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $g_{\Phi}(x_1, x_2) = 1$.

Les propriétés du processus de Poisson font de lui un des plus simples processus ponctuels. Notons que l'égalité $g_{\Phi} = 1$ fait du processus ponctuel de Poisson une sorte de frontière entre processus agrégatifs et processus répulsifs.

Il existe de nombreux autres types de processus ponctuels définis pour modéliser des situations agrégatives, répulsives ou d'une plus grande variabilité (voir [74, 23]). Nous nous contenterons de citer les plus populaires. Le processus de Neyman-Scott est un processus agrégatif construit comme l'agrégation d'un processus de Poisson. Le processus ponctuel de Cox, aussi appelé processus de Poisson doublement stochastique, est construit de la même manière qu'un processus de Poisson, seulement sa mesure d'intensité est une mesure aléatoire.

3.4 Les modèles germes-grains

Dans cette section nous présenterons très rapidement les modèles germes-grains et introduirons le modèle Booléen qui fera ensuite l'objet d'un chapitre à part entière. Nous discuterons des principaux intérêts et enjeux applicatifs de ces modèles.

3.4.1 Le modèle germes-grains

Définition 3.4.1 (Le modèle germes-grains). Soient $\Phi = \{x_i\}_{i \in I \subset \mathbb{N}}$ un processus ponctuel et $\{\Xi_i\}_{i \in I \subset \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles aléatoires compacts. On appelle modèle germes-grains l'ensemble aléatoire :

$$\Xi := \bigcup_{x_i \in \Phi} x_i + \Xi_i. \tag{3.46}$$

Le processus Φ est appelé processus des germes x_i , et les compacts aléatoires Ξ_i les grains.

Le terme grain est emprunté à la métallographie, il est cependant à considérer dans un sens plus large au regard des applications visées (grain d'un matériau, particules d'une suspension, cellules en biologie ou plantes en agronomie). En pratique, des hypothèses réductrices provenant de l'application considérée sont souvent émises : grains i.i.d, grains convexes, grains de forme connue, indépendance entre germes et grains, etc.

Notons qu'en toute généralité ce modèle autorise la corrélation entre germes et grains, on parle aussi de processus marqué $\Psi := \{x_i, \Xi_i\}$ (voir [23]). Remarquons que les réalisations d'un modèle couvrent l'anneau des convexes étendu (en choisissant des grains convexes par exemple). Il présente donc de nombreux intérêts applicatifs (analyse d'images, modélisation de matériaux, biologie..), on distingue deux principales utilisations. La première consistant à simuler des structures géométriques complexes qui sont ajustées à des données réelles par des méthodes d'optimisation (les germes et les grains n'ont pas nécessairement de sens physique). La seconde, qui sera celle à laquelle nous nous intéresserons dans cette thèse consiste à modéliser des données par un tel modèle pour ensuite décrire la structure intrinsèque des données considérées (germes et grains).

Nous considèrerons donc que nous disposons de réalisations d'un modèle germes-grains à partir desquelles nous chercherons à décrire les germes et les grains. Malheureusement, ceci n'est pas possible en toute généralité. En effet, pour une même distribution du modèle germes-grains Ξ il existe différentes distributions pour le couple (Φ , { Ξ_i }). Pour répondre à notre objectif il est donc nécessaire d'émettre des hypothèses réductrices sur (Φ , { Ξ_i }) de sorte à ce que la distribution de Ξ détermine de manière unique la distribution de (Φ , { Ξ_i }). On sera donc amené à supposer les grains convexes, identiquement distribués et indépendants des germes. Notons que de telles hypothèses peuvent être faites pour de nombreuses applications, notamment lorsque que les données considérées sont des images de milieux granulaires (réunions de particules projetées s'intersectant). Parmi les modèles satisfaisants ces conditions, nous commencerons par le plus simple d'entre eux : le modèle Booléen.

3.4.2 Le modèle Booléen

Définition 3.4.2 (Le modèle Booléen). Le modèle Booléen Poissonien aussi appelé modèle germes-grains de Poisson est un modèle germes-grains $\Xi = \bigcup_{x_i \in \Phi} \Xi_i + x_i$ dans lesquel les germes et les grains sont indépendant qui satisfait :

- i) Φ est un processus ponctuel de Poisson stationnaire d'intensité λ .
- ii) Les grains Ξ_i sont des convexes aléatoires indépendants et identiquement distribués ie : $T_{\Xi_i} = T_{\Xi_0}$.
- *iii)* $\mathbb{E}\nu_d(\Xi_0 \cap K) < \infty, \forall K \in \mathfrak{K}.$

On appelle x_i les germes, Ξ_i les grains et Ξ_0 le grain primaire, on dira aussi que λ est l'intensité du modèle Booléen.

Notons tout d'abord, qu'il existe une définition du modèle Booléen dans laquelle le processus de Poisson considéré n'est pas stationnaire (voir [76, 77]) on parle dans ce cas de modèle Booléen non-homogène, de tels modèles ne seront pas abordés ici.

Une réalisation d'un modèle Booléen est donc la réunion des réalisations des grains translatés par la réalisation des germes. Le modèle Booléen présente d'intéressantes propriétés. En effet, le modèle Booléen hérite de la stationnarité de Φ , c'est pourquoi il est souvent supposé sans perte de généralité que les grains contiennent l'origine $0 \in \Xi_i$. Le modèle Booléen est isotrope si le grain primaire l'est (la réciproque est fausse [57]). Le modèle Booléen est ergodique, de plus il satisfait à la propriété de mélange (Nguyen et Zessin [78]). En conséquence, ce modèle est particulièrement adapté à l'analyse d'image, puisque ses propriétés peuvent être déduites d'une de ses réalisations restreinte à une fenêtre d'observation suffisamment étendue. De plus, la distribution du modèle Booléen détermine complètement l'intensité λ et la distribution du grain primaire Ξ_0 [79]. De ce fait, l'intensité λ et la distribution du grain primaire Ξ_0 du modèle Booléen peuvent être déduites de réalisations du modèle. Cependant, ceci n'est pas chose aisée, c'est pourquoi des hypothèses portant sur la forme du grain primaire sont souvent émises. Les caractéristiques du modèle sont donc divisées en deux catégories : les caractéristiques globales qui se réfèrent à Ξ et les caractéristiques intrinsèques ou individuelles relatives au grain primaire et aux germes. L'objectif étant alors de déterminer les caractéristiques intrinsèques sur les réalisations de Ξ . Nous présenterons les différentes méthodes de la littérature dans la prochaine partie.

Deuxième partie LE MODÈLE BOOLÉEN

Table des matières

| 4 | Éta | État de l'art sur le modèle Booléen | | | | |
|---|---|--|---|----|--|--|
| | 4.1 Généralités sur le Modèle Booléen | | alités sur le Modèle Booléen | 63 | | |
| | | 4.1.1 | Propriétés du modèle Booléen généralisé | 64 | | |
| | | 4.1.2 | Premières caractéristiques du modèle Booléen généralisé | 66 | | |
| | | 4.1.3 | Densités volumiques du Modèle Booléen | 67 | | |
| | 4.2 | 2 Caractéristiques globales du modèle Booléen 2D | | 68 | | |
| | | 4.2.1 | Premières caractéristiques du modèle Booléen | 68 | | |
| | | 4.2.2 | Estimation des densités volumiques du modèle Booléen | 71 | | |
| | | 4.2.3 | Processus des points tangents et nombre de convexités | 72 | | |
| | | 4.2.4 | Test d'adéquation au modèle Booléen 2D | 74 | | |
| | 4.3 | Carac | téristiques intrinsèques du modèle Booléen 2D | 75 | | |
| | | 4.3.1 | La méthode du contraste minimum | 75 | | |
| | | 4.3.2 | La méthode des intensités | 76 | | |
| | | 4.3.3 | Les méthodes d'estimation de variations géométriques du grain | 77 | | |
| | 4.4 | Modè | le Booléen 2-D à grains paramétrés | 79 | | |
| | | 4.4.1 | Modèle Booléen de disques | 79 | | |
| | | 4.4.2 | Modèle Booléen de grains paramétriques | 80 | | |
| 5 | Simulation de modèle Booléen et estimations 8 | | | | | |
| | 5.1 | Simul | ation de modèle Booléen | 81 | | |
| | | 5.1.1 | Exemples de modèles simulés | 83 | | |
| | 5.2 | Estim | ations des caractéristiques du modèle | 84 | | |
| | | 5.2.1 | Estimations des caractéristiques globales du modèle | 85 | | |
| | | 5.2.2 | Estimations des caractéristiques intrinsèques du modèle | 85 | | |
| 6 | Synthèse et objectifs | | | | | |
| | 6.1 | 6.1 Synthèse | | | | |
| | 6.2 | Objectifs | | 90 | | |

Chapitre 4

État de l'art sur le modèle Booléen

L'objectif de ce chapitre est de présenter les différentes méthodes de la littérature permettant de modéliser une image par un modèle Booléen pour ensuite en caractériser le grain primaire. Nous nous limiterons donc souvent au cas planaire. Ainsi, les propriétés et caractéristiques du modèle seront d'abord présentées dans un cadre général. Dans un second temps nous nous limiterons au cas planaire, nous discuterons des différentes techniques d'estimation des caractéristiques globales et les tests d'adéquation au modèle seront alors présentés. Nous présenterons ensuite les techniques d'estimation des caractéristiques intrinsèques (i.e relatives au grain primaire) à partir des caractéristiques globales. Enfin, nous discuterons de la caractérisation du grain dans les modèles Booléens à grains paramétrés.

4.1 Généralités sur le Modèle Booléen

Rappelons qu'un modèle Booléen Ξ d'intensité $\lambda>0$ est défini par :

$$\Xi = \bigcup_{x_i \in \Phi} x_i + \Xi_i, \tag{4.1}$$

où Φ est processus ponctuel de Poissons stationnaire d'intensité λ dont les éléments x_i sont appelés germes, et les grains Ξ_i sont des convexes aléatoires i.i.d satisfaisant $\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_i \cap K)] < +\infty, \forall K \in \mathfrak{K}$. Rappelons que l'on désigne par *caractéristiques globales* les caractéristiques de l'ensemble aléatoire Ξ . Les *caractéristiques intrinsèques* ou *individuelles* désignent les caractéristiques relatives au grain primaire Ξ_0 et aux germes (i.e.: l'intensité λ et la distribution du grain primaire).

Notons que le modèle Booléen peut être introduit de manière plus générale pour des grains uniquement supposés compacts, la caractérisation d'un tel modèle ne sera pas notre objectif ici. De plus, la majorité des relations introduites seront uniquement valables dans le cas convexe. Cependant les propriétés du modèle généralisé (à grains non supposés convexes) sont parfois utilisées pour établir certaines propriétés du modèle Booléen (à grains convexes), c'est pourquoi nous introduirons certaines propriétés du modèle Booléen généralisé. Ainsi, l'expression *modèle Booléen généralisé* sera utilisée pour le modèle à grains non supposés convexes.

4.1.1 Propriétés du modèle Booléen généralisé

Proposition 4.1.1 (Stationnarité, isotropie et ergodicité). Soit $\Xi = \bigcup_{x_i \in \Phi} x_i + \Xi_i$ un modèle Booléen généralisé d'intensité $\lambda > 0$, alors Ξ est stationnaire, ergodique et satisfait la propriété de mélange [78]. De plus, si le grain primaire Ξ_0 est isotrope alors Ξ est isotrope.

Le modèle Booléen généralisé, satisfait la propriété de mélange, ses propriétés peuvent donc être déduites d'une de ses réalisations restreinte à une fenêtre d'observation suffisamment étendue. De plus, sa distribution détermine complètement l'intensité λ et la distribution du grain primaire Ξ_0 [79], en d'autres termes nous avons la proposition suivante.

Proposition 4.1.2 (Caractérisation du modèle Booléen). Soient $\Xi^{(1)} = \bigcup_{x_i \in \Phi^{(1)}} x_i + \Xi_i^{(1)}$ et $\Xi^{(2)} = \bigcup_{x_i \in \Phi^{(2)}} x_i + \Xi_i^{(2)}$ deux modèles Booléens généralisés d'intensités respectives $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$, alors :

$$[T_{\Xi^{(1)}} = T_{\Xi^{(2)}}] \Leftrightarrow [\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} \ et \ T_{\Xi_0^{(1)}} = T_{\Xi_0^{(2)}}].$$

De ce fait, l'intensité λ et la distribution du grain primaire Ξ_0 du modèle Booléen généralisé peuvent être déduites de réalisations du modèle restreintes à une fenêtre d'observation. Nous présenterons donc en section 4.2 les différents estimateurs des caractéristiques globales et en section 4.3 les méthodes d'estimation des caractéristiques intrinsèques, dans le cas du modèle Booléen à grains convexes.

THÉORÈME 4.1 (Capacité fonctionnelle du modèle Booléen [23])

Soit $\Xi = \bigcup_{x_i \in \Phi} x_i + \Xi_i$ un modèle Booléen généralisé d'intensité λ , alors pour tout compact K: $T_{\Xi}(K) = 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0 \oplus \breve{K})]).$ (4.2)

Preuve. Soit K un compact fixé, considérons le processus ponctuel suivant :

$$\Phi_p = \{ x_n \in \Phi | \Xi_n + x_n \cap K \neq \emptyset \}.$$

Le processus ponctuel Φ_p est un amincissement du processus Φ avec la probabilité de conservation $p(x) = \mathbb{P}((\Xi_n + x) \cap K \neq \emptyset)$, il s'agit donc d'un processus ponctuel de Poisson non stationnaire de mesure d'intensité $\Lambda_{\Phi_p}(B) = \lambda \int_B p(x) dx$ pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. De plus,

$$1 - T_{\Xi}(K) = \mathbb{P}(\Xi \cap K = \emptyset),$$
$$= \mathbb{P}(\Phi_p = \emptyset),$$
$$= \exp(-\Lambda_{\Phi_p}(\mathbb{R}^d)).$$

Ce qui conduit à :

$$T_{\Xi}(K) = 1 - \exp(-\Lambda_{\Phi_p}(\mathbb{R}^d)).$$

Notons de plus que $p(x) = \mathbb{P}((\Xi_n + x) \cap K \neq \emptyset) = \mathbb{P}(x \in \check{\Xi}_0 \oplus K)$ de sorte que :

$$\Lambda_{\Phi_p}(\mathbb{R}^d) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} P(x \in \check{\Xi}_0 \oplus K) dx,$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[1_{\check{\Xi}_0 \oplus K}(x)] dx,$$
$$= \lambda \mathbb{E}[\nu_d(\check{\Xi}_0 \oplus K)].$$

D'où

$$T_{\Xi}(K) = 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}[\nu_d(\dot{\Xi}_0 \oplus K)]).$$

La relation (4.2) s'établit alors en remarquant que : $\nu_d(\breve{\Xi}_0 \oplus K) = \nu_d(-(\breve{\Xi}_0 \oplus K)) = \nu_d(\Xi_0 \oplus \breve{K})$. Notons que la construction introduite dans la preuve de (4.2) peut être réalisée pour d'autres types de modèle germes-grains, ce qui suggère l'existence de formules similaires. En effet, quel que soit le modèle germes-grains considéré, la relation $T_{\Xi}(K) = 1 - \mathbb{P}(\Phi_p = \emptyset)$ reste valable. Ce qui implique que des formules similaires à (4.2) peuvent être établies pour des modèles germes-grains dans lesquels la probabilité $\mathbb{P}(\Phi_p = \emptyset)$ peut être explicitée.

Souvent la notation $\Psi(K) := -\ln(1 - T_{\Xi}(K))$ s'avère utile. La fonctionnelle Ψ s'exprime $\Psi(K) = \lambda \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0 \oplus \check{K})]$ et constitue un équivalent de la capacité de Choquet. La relation (4.2) met en évidence d'importantes propriétés du modèle Booléen généralisé. Elle montre en particulier que le modèle ne dépend pas de la position des germes comme le précise la proposition suivante.

Proposition 4.1.3 (Invariance de la distribution par translation). Soient $\Xi = \bigcup_{x_i \in \Phi} x_i + \Xi_i$ un modèle Booléen généralisé d'intensité λ , et pour chaque grain Ξ_i une position $z_i \in \mathbb{R}^d$ ne dépendant que de Ξ_i . Alors le modèle Booléen $\Xi^* = \bigcup_{x_i \in \Phi} x_i + \Xi_i^*$ où $\Xi_i^* = \Xi_i + z_i$ a même distribution que Ξ . En particulier, $\Phi^* = \{x_i + z_i\}$ est un processus ponctuel de Poisson stationnaire d'intensité λ .

Notons que la structure de modèle Booléen est conservée pour certaines transformations géométriques classiques énoncées dans la proposition suivante.

Proposition 4.1.4 (Stabilité de la structure de modèle Booléen [23]). Soient $\Xi = \bigcup_{x_i \in \Phi} x_i + \Xi_i$ un modèle Booléen généralisé d'intensité λ , alors :

- *Dilatation*: Soit K un compact, alors Ξ ⊕ K est un modèle Booléen généralisé d'intensité λ et de grain primaire Ξ₀ ⊕ K. Notons que si K et les grains sont supposés convexes, alors Ξ ⊕ K est à grains convexes.
- ii. Réunion : Soit Ξ' = ∪_{xi∈Φ'} x'_i + Ξ'_i un autre modèle Booléen généralisé d'intensité λ' indépendant de Ξ, alors Ξ̃ := Ξ ∪ Ξ' est un modèle Booléen d'intensité λ̃ = λ + λ' et dont la distribution du grain primaire est obtenue par mélange de celles des grains primaire de Ξ et Ξ' (i.e. P_{Ξ̃0} = λ/λ P_{Ξ0} + λ'/λ P_{Ξ0}).
- iii. Intersection avec un sous espace affine : Soit L un sous espace affine de \mathbb{R}^d de dimension l, alors $\Xi^{(L)} := \Xi \cap L$ est un modèle Booléen généralisé sur L qui s'identifie à \mathbb{R}^l . Si
de plus Ξ est isotrope et à grains convexes, l'intensité et les volumes intrinsèques moyens du grain primaire $\Xi_0^{(L)}$ de $\Xi^{(L)}$ peuvent être déduits de ceux de Ξ (voir [23]). En particulier, pour un modèle Booléen isotrope du plan, son intersection avec une droite (i.e d = 2 et l = 1), est un modèle Booléen qui a pour intensité $\lambda_1^{(2)} = \frac{\lambda \mathbb{E}[U(\Xi_0)]}{\pi}$ et dont le grain primaire est un segment de longueur moyenne $\mathbb{E}[l(\Xi_0^{(L)})] = \frac{\lambda \mathbb{E}[A(\Xi_0)]}{\lambda_1^{(2)}}$.

Ces propriétés de stabilité de la structure de modèle Booléen permettent d'une part de simuler des modèles de mélanges de particules (stabilité par réunion), et d'autre part d'analyser un modèle Booléen par ses coupes ou ses dilatés. La stabilité par dilatation s'avère très utile, elle permet entre autres de mettre en place des méthodes de contraste minimum (voir section 4.3).

4.1.2 Premières caractéristiques du modèle Booléen généralisé

L'évaluation de la capacité fonctionnelle sur certains types de compacts permet d'exprimer des caractéristiques globales du modèle en fonction de ses caractéristiques intrinsèques. En particulier, la fonction de couverture spatiale $p(\Xi, x) = \mathbb{P}(x \in \Xi)$ de Ξ s'exprime $p(\Xi, x) = T_{\Xi}(\{x\})$. De plus, en raison de la stationnarité de Ξ , la fonction de couverture spatiale $p(\Xi, x)$ est identiquement égale à la fraction volumique $p_{\Xi} := p(\Xi, 0) = T_{\Xi}(\{0\})$, ce qui conduit à :

$$p_{\Xi} = 1 - e^{-\lambda \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)]} \Rightarrow \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)] = \frac{-\ln(1 - p_{\Xi})}{\lambda}.$$
(4.3)

De sorte que la fraction volumique du modèle s'exprime en fonction de l'intensité et du volume moyen du grain primaire.

De plus, la covariance d'un modèle Booléen généralisé s'exprime elle aussi via la capacité fonctionnelle. En effet, le modèle étant stationnaire, pour $u \in \mathbb{R}^d$ la covariance s'exprime :

$$Cov_{\Xi}(u) = 2p_{\Xi} - T_{\Xi}(\{0, u\}),$$

= $2p_{\Xi} - 1 + \exp(-\lambda \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0 \oplus \{0, u\}]),$
= $2p_{\Xi} - 1 + \exp(-\lambda (\mathbb{E}[2\nu_d(\Xi_0] - \nu_d(\Xi_0 \cap (\Xi_0 - u))])),$
= $2p_{\Xi} - 1 + \exp(-\lambda \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0])^2 \exp(\lambda \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0 \cap (\Xi_0 - u))]),$

ce qui conduit à :

$$Cov_{\Xi}(u) = 2p_{\Xi} - 1 + (1 - p_{\Xi})^2 \exp(\lambda \gamma_{\Xi_0}(u)), \ u \in \mathbb{R}^d.$$
 (4.4)

De sorte que la covariance du modèle s'exprime en fonction de l'intensité, de la fraction volumique et du covariogramme géométrique moyen du grain primaire $\gamma_{\Xi_0}(u) = \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0 \cap (\Xi_0 - u))]$. Afin de mettre en évidence ce covariogramme géométrique moyen, on introduit souvent la *fonction de corrélation* du modèle Booléen :

$$q_{\Xi}(u) := 1 + \frac{Cov_{\Xi}(u) - p_{\Xi}^2}{(1 - p_{\Xi})^2}, \ u \in \mathbb{R}^d.$$
(4.5)

De sorte que :

$$\gamma_{\Xi_0}(u) = \frac{\ln(q_{\Xi}(u))}{\lambda}, \ u \in \mathbb{R}^d.$$
(4.6)

Ce covariogramme géométrique moyen révèle certaines caractéristiques géométriques du grain du modèle Booléen généralisé [24] (voir sous-sous-section 4.3.3.1), cependant il s'avèrera d'autant plus utile lorsque que le grain est supposé convexe (voir sous-section 4.4.1 et chapitre 9).

La fonction de distribution des contacts du modèle Booléen généralisé s'exprime elle aussi à partir de la capacité fonctionnelle. En effet, pour une jauge K convexe et compacte :

$$Cont_K(\Xi, r) = 1 - \frac{1 - T_{\Xi}(rK)}{1 - p_{\Xi}}, \ r \ge 0,$$

ce qui conduit à :

$$Cont_K(\Xi, r) = 1 - \exp(-\lambda(\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0 \oplus rK) - \nu_d(\Xi_0)]), \ r \ge 0.$$

$$(4.7)$$

Dans le cas du modèle Booléen à grains convexes, la fonction de distribution des contacts est à l'origine de la méthode du contraste minimum [80]. En effet, en choisissant la boule unité B de \mathbb{R}^d comme jauge, la formule de Steiner montre que le volume moyen du grain dilaté $\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0 \oplus (rB)], r \geq 0$ est un polynôme en r de degré d dont les coefficients sont à une constante près, les espérances des fonctionnelles de Minkowski du grain primaire.

4.1.3 Densités volumiques du Modèle Booléen

Rappelons tout d'abord que la densité volume *d*-dimensionnel d'un modèle Booléen s'exprime $v_d(\Xi) = p_{\Xi} = 1 - e^{-\lambda \mathbb{E}[V_d(\Xi_0)]}$ même lorsque le grain n'est pas convexe. Cependant, afin d'exprimer les autres densités de volumes intrinsèques il faudra supposer le grain convexe et même isotrope. En effet, si le grain est convexe alors :

$$v_{d-1}(\Xi) = \lambda e^{-\lambda \mathbb{E}[V_d(\Xi_0)]} \mathbb{E}[V_{d-1}(\Xi_0)].$$
(4.8)

Bien qu'il existe des formulations plus générales mettant en jeu les volumes mixtes [81] et les tenseurs de Minkowski [82, 83], il faudra supposer l'isotropie du modèle pour obtenir des expressions des autres densités volumiques en fonction des volumes intrinsèques du grain.

Proposition 4.1.5 (Densités volumiques du modèle Booléen isotrope [81]). Soit Ξ un modèle Booléen isotrope de \mathbb{R}^d , alors les volumes intrinsèques spécifiques de Ξ existent et s'expriment :

$$v_j(\Xi) = e^{-\lambda \bar{V}_d(\Xi_0)} \{ \lambda \bar{V}_j(\Xi_0) - \sum_{s=2}^{d-j} \frac{(-\lambda)^s}{s!} \sum_{(m_1, \cdots m_s) \in I_s}^{d-1} \prod_{i=1}^s \omega_j^{m_i} \bar{V}_{m_i}(\Xi_0) \},$$
(4.9)

où I_s désigne $I_s = \{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{N}^s | m_k \ge j+1, k = 1, \dots, s, et \sum_{k=1}^s m_k = (s-1)d+j\}$ et la notation $\overline{V}_k(.) = \mathbb{E}[V_k(.)]$ l'espérance du k-ème volume intrinsèque.

En dimension deux et trois, et pour les fonctionnelles géométriques usuelles (aire, périmètre et

caractéristique d'Euler) ces relations sont connues sous le nom de formules de Miles [84].

THÉORÈME 4.2 (Formules de Miles en dimension deux)

Soit Ξ un modèle Booléen isotrope de \mathbb{R}^2 , alors :

$$p_{\Xi} = 1 - e^{-\lambda \mathbb{E}[A(\Xi_0)]},$$
 (4.10)

$$L_A = \lambda (1 - p_{\Xi}) \mathbb{E}[U(\Xi_0)], \qquad (4.11)$$

$$\chi_A = \lambda (1 - p_{\Xi}) (1 - \frac{\lambda \mathbb{E}[U(\Xi_0)]^2}{4\pi}).$$
(4.12)

Notons que (4.10) reste valable pour le modèle Booléen généralisé et que (4.11) reste valable dans le cas anisotrope. La relation (4.12) est valable uniquement dans le cas isotrope.

4.2 Caractéristiques globales du modèle Booléen 2D

Nous discuterons dans cette section des différentes caractéristiques globales du modèle Booléen 2D, ainsi que de leurs estimateurs. L'estimation de ces caractéristiques sera faite à partir d'une réalisation du modèle Booléen Ξ restreinte à une fenêtre d'observation W compacte convexe et d'intérieur non vide, usuellement, W est une fenêtre rectangulaire.

4.2.1 Premières caractéristiques du modèle Booléen

La fraction d'aire

La fraction de volume p_{Ξ} , aussi appelée fraction d'aire ou aire spécifique en dimension 2, représente le volume de Ξ par unité de volume. Cette description fournit alors l'estimateur de la fraction d'aire suivant [57].

Proposition 4.2.1 (Estimateur de la fraction d'aire). Soient Ξ un modèle Booléen généralisé de \mathbb{R}^2 et W une fenêtre d'observation compacte, convexe et d'intérieur non vide. Alors :

$$\hat{p}_{\Xi,W} = \frac{A(\Xi \cap W)}{A(W)},\tag{4.13}$$

est un estimateur sans biais de p_{Ξ} convergeant lorsque $W \uparrow \mathbb{R}^2$, de variance $Var(\hat{p}_{\Xi,W}) = \frac{1}{A(W)} \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_W(v) (Cov(v) - p_{\Xi}^2) dv$, où $\gamma_W(v)$ est le covariogramme géométrique de W. De plus $\sqrt{A(W)}(\hat{p}_W - p)$ converge en loi vers la loi normale centrée de variance $\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (C(v) - p^2) dv$ lorsque $W \uparrow \mathbb{R}^2$.

Notons tout d'abord que cette proposition reste valable si Ξ est ensemble aléatoire simplement supposé ergodique et stationnaire (voir [57]). Plusieurs caractéristiques du modèle Booléen telles que la fonction de covariance ou la capacité fonctionnelle, peuvent êtres vues comme la fraction d'aire d'une transformation du modèle. L'estimateur de la fraction d'aire est alors utilisé pour estimer ces caractéristiques.

La capacité fonctionnelle

La distribution du modèle Booléen Ξ est entièrement déterminée par sa capacité fonctionnelle T_{Ξ} , notons que pour K un compact $\forall x \in \mathbb{R}^2$ $T_{\Xi}(K) = T_{\Xi}(K+x) = P(\Xi \cap (K+x) \neq \emptyset) = P(x \in \Xi \oplus \check{K}) = T_{\Xi \oplus \check{K}}(\{x\})) = T_{\Xi \oplus \check{K}}(\{0\})$. Par conséquent, $T_{\Xi}(K)$ est la fraction d'aire de $\Xi \oplus \check{K}$. Cependant la capacité fonctionnelle ne peut être estimée directement par $\frac{A((\Xi \oplus \check{K}) \cap W)}{A(W)}$ à cause d'effets de bord. En effet, il est possible que K n'intersecte pas Ξ dans W et qu'il l'intersecte en dehors [57]. Ainsi, si Ξ n'est observable que dans la fenêtre W, alors $\Xi \oplus \check{K}$ n'est observable que dans la fenêtre érodée $W \oplus K = \{x \mid (x+K) \subset W\}$.

Proposition 4.2.2 (Estimateur de la capacité fonctionnelle). Soient Ξ un modèle Booléen généralisé de \mathbb{R}^2 et W une fenêtre d'observation compacte convexe et non vide. Alors :

$$\hat{T}_{\Xi,W}(K) = \frac{A[(\Xi \oplus \breve{K}) \cap (W \ominus K)]}{A(W \ominus K)},\tag{4.14}$$

est un estimateur non biaisé de la capacité fonctionnelle. De plus, $\sqrt{A(W)}(\hat{T}_{\Xi,W}(K) - T_{\Xi}(K))$ converge en loi vers la loi normale centré de variance $\sigma^2(K) = \int_{\mathbb{R}^2} (Cov_{\Xi \oplus \check{K}}(v) - p_{\Xi \oplus \check{K}})^2 dv$ lorsque $W \uparrow \mathbb{R}^2$.

Notons tout de même la capacité fonctionnelle ne peut être évaluée que pour des compacts K satisfaisants $A(W \ominus K) > 0$, ce qui se traduit par le fait qu'il existe une translation de K incluse dans W (i.e. "K rentre dans la boîte W").

La fonction de covariance du modèle Booléen

Notons tout d'abord que la covariance s'exprime $Cov(v) = 2p_{\Xi} - T_{\Xi}(\{0, v\}), v \in \mathbb{R}^2$, de sorte que les estimateurs non biaisés de la capacité fonctionnelle (4.14) et de la fraction d'aire (4.13), fournissent un premier estimateur non biaisé de la covariance. Cependant cette estimation peut être simplifiée en remarquant que la $Cov_{\Xi}(v)$ est égale à la fraction d'aire de l'ensemble érodé $\Xi \ominus \{0, v\}$.

Proposition 4.2.3 (Estimateur de la covariance). Soient Ξ un modèle Booléen généralisé de \mathbb{R}^2 et W une fenêtre d'observation compacte convexe et d'intérieur non vide. Alors :

$$\hat{C}ov_{\Xi,W}(v) = \frac{A((W \cap \Xi) \ominus \{0, v\})}{A(W \ominus \{0, v\})},\tag{4.15}$$

est un estimateur non biaisé de la covariance qui converge uniformément lorsque $W \uparrow \mathbb{R}^2$ (i.e. $\sup_{v \in \mathbb{R}^2} |\hat{C}ov_{\Xi,W}(v) - Cov_{\Xi}(v)| \to 0$ p.s lorsque $W \uparrow \mathbb{R}^2$).

La variance asymptotique de cet estimateur ne peut être obtenue facilement [57]. Dans un contexte discret, cet estimateur permet un calcul rapide de la covariance par transformé de Fourrier discrète.

Lorsque Ξ est isotrope, la covariance $Cov_{\Xi}(v)$ ne dépend que de r = ||v||, elle est alors notée $Cov_{\Xi}(r)$. Dans ce contexte, l'étude de la covariance peut être limitée à une direction $u_{\theta} =^{t} (\cos(\theta), \sin(\theta))$ fixée, elle est alors estimée par $\hat{C}ov_{\Xi,W}(ru_{\theta})$. Cependant, afin d'améliorer la qualité de l'estimation, il est préférable de moyenner sur plusieurs directions :

$$Cov_{\Xi}^{iso}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Cov_{\Xi}(ru_{\theta}) d\theta.$$
(4.16)

Notons que si Ξ n'est pas isotrope cette quantité correspond exactement à la covariance du modèle isotropisé (voir chapitre 7 et [23]), en pratique elle est calculée, de manière discrète à partir d'une subdivision régulière de $[0, \pi]$.

Rappelons que la covariance du modèle Booléen s'exprime :

$$Cov_{\Xi}(v) = 2p_{\Xi} - 1 + (1 - p_{\Xi})^2 e^{\lambda \gamma_{\Xi_0}(v)},$$

ainsi, $Cov_{\Xi}(0) = p_{\Xi}$ et pour tout $u \in S^1$ l'application $r \in \mathbb{R}_+ \to Cov_{\Xi}(ru)$ est décroissante et de limite p_{Ξ}^2 , puisque $\gamma_{\Xi_0}(ru) \to 0$. Supposons que le grain primaire soit borné, alors il existe r_{max} tel que $\forall r \geq r_{max}, \forall u \in S^1, Cov_{\Xi}^{iso}(r) = 0$. La distance maximale r_{max} est alors appelée portée du grain et correspond exactement au diamètre de Féret maximal du grain.

Le modèle Booléen satisfait à la propriété de mélange, le critère $Cov_{\Xi}(v) \rightarrow p_{\Xi}^2$ lorsque $||v|| \rightarrow +\infty$ fournit donc un moyen de savoir si la fenêtre d'observation est suffisamment étendue. En effet, la covariance $Cov_{\Xi}(v)$ n'est évaluable que pour $v \in W \oplus (-W)$, si dans ce support il peut être considéré que la covariance atteint sa limite (i.e est assez proche de p_{Ξ}^2), la fenêtre peut être considéré comme suffisamment étendue. Dans ce cas, il est considéré que γ_{Ξ_0} atteint sa limite nulle dans le support spatial $W \oplus (-W)$, et donc que la fenêtre W peut être considéré comme une borne pour le grain primaire (i.e "le grain rentre toujours dans la boîte W").

L'estimation de la fonction de corrélation du modèle Booléen q_{Ξ} est alors obtenue à partir des estimateurs de la covariance et de la fraction d'aire :

$$\hat{q}_{\Xi}(u) := 1 + \frac{\hat{C}ov_{\Xi}(u) - \hat{p}_{\Xi}^2}{(1 - \hat{p}_{\Xi})^2}, \ u \in \mathbb{R}^2,$$
(4.17)

il s'agit encore d'un estimateur uniformément convergent [57].

La fonction de distribution des contacts

Rappelons que la fonction de distribution des contacts du modèle Booléen Ξ relativement à une jauge convexe K s'exprime $Cont_K(\Xi, r) = 1 - \frac{1-T_{\Xi}(rK)}{1-p_{\Xi}}, r \ge 0$, de sorte que les estimateurs de la fraction d'aire et de la capacité fonctionnelle fournissent un estimateur de la fonction de distribution des contacts.

Proposition 4.2.4 (Estimateur la fonction de distribution des contacts). Soient Ξ un modèle Booléen généralisé de \mathbb{R}^2 , W une fenêtre d'observation compacte convexe et d'intérieur

non vide et K un convexe compact. Alors :

$$\hat{C}ont_{K,W}(\Xi, r) = 1 - \frac{1 - \hat{T}_{\Xi,W}(rK)}{1 - \hat{p}_{\Xi,W}},$$
(4.18)

est un estimateur uniformément convergent de la fonction de distribution des contacts, i.e $\sup_{r>0} |\hat{C}ont_{K,W}(\Xi,r) - Cont_K(\Xi,r)| \to 0 \text{ p.s lorsque } W \uparrow \mathbb{R}^2.$

La fonction de distribution des contacts du modèle Booléen relativement à la jauge convexe K s'exprime :

$$Cont_K(\Xi, r) = 1 - \exp(-\lambda(\mathbb{E}[A(\Xi_0 \oplus rK)] - \mathbb{E}[A(\Xi_0)])),$$

donc par convexité du grain et d'après la formule de Steiner, l'expression devient :

$$Cont_K(\Xi, r) = 1 - \exp(-\lambda(2r\mathbb{E}[W(\Xi_0, K)] + r^2 A(K))), \ r \ge 0.$$
(4.19)

La transformation logarithmique $Cont_K^l(\Xi, r) := -\ln(1 - Cont_K(\Xi, r))$ s'exprime alors sous la forme polynômiale :

$$Cont_K^l(\Xi, r) = 2r\lambda \mathbb{E}[W(\Xi_0, K)] + \lambda r^2 A(K)), \ r \ge 0,$$
(4.20)

de sorte que $\frac{Cont_{K}^{l}(\Xi,r)}{r}, r>0$ ait l'expression linéaire :

$$\frac{Cont_K^l(\Xi, r)}{r} = 2\lambda \mathbb{E}[W(\Xi_0, K)] + \lambda r A(K)), \ r > 0.$$
(4.21)

Cette expression linéaire s'avèrera alors très utile pour tester les hypothèses du modèle Booléen, ou encore pour estimer des caractéristiques intrinsèques du modèle.

4.2.2 Estimation des densités volumiques du modèle Booléen

Les densité volumiques d'un modèle Booléen Ξ de \mathbb{R}^2 sont intuitivement les parts de volumes intrinsèques (aire, périmètre, nombre d'Euler) par unité d'aire. L'estimation de la fraction d'aire de Ξ à partir d'une fenêtre W, est obtenue de manière non biaisée comme la fraction de l'aire de $\Xi \cap W$ par l'aire de W, et ceci car l'aire de $\Xi \cap W$ ne dépend de W que par son aire A(W). Cependant, les autres volumes intrinsèques (périmètre, nombre d'Euler) ne peuvent être estimés de la même manière. Le périmètre ou le nombre d'Euler de $\Xi \cap W$ sont intimement liés à la morphologie de W, on parle d'effet de bord. Pour le périmètre par exemple, le bord $\partial(\Xi \cap W)$ n'est pas contenu dans le bord $\partial \Xi$, de sorte que $\frac{U(\Xi \cap W)}{A(W)}$ fournit un estimateur biaisé de L_A .

Lorsque que la fenêtre d'observation considérée W est rectangulaire, une méthode pour s'affranchir des effets de bord consiste à corriger le biais par l'évaluation des volumes intrinsèques de Ξ sur le demi bord $\partial^+ W$ de W, le demi bord désignant l'union des côtés en haut et à droite de W (voir [57]). Cette correction fournit les estimateurs de la fraction de périmètre et du nombre de connexité suivants :

$$\hat{L}_{A,W} = \frac{U(\Xi \cap W) - U(\Xi \cap \partial^+ W)}{A(W)},$$
$$\hat{\chi}_{A,W} = \frac{\chi(W \cap \Xi) - \chi(\partial^+ W \cap \Xi)}{A(\Xi)}.$$

Bien que sans biais, l'expérimentation montre que ces estimations s'avèrent moins performantes que l'estimation simultanée des densités volumiques [81], de plus cette dernière ne se limite pas au cas d'une fenêtre rectangulaire.

Proposition 4.2.5 (Estimation simultanée des densités volumiques [81]). Soit Ξ un modèle Booléen et W une fenêtre d'observation compacte, convexe et d'intérieur non vide. Alors les estimateurs des densités volumiques de Ξ suivants sont non biaisés.

$$\hat{p}_{\Xi,W} = \frac{A(\Xi \cap W)}{A(W)},\tag{4.22}$$

$$\hat{L}_{A,W} = \frac{U(\Xi \cap W)}{A(W)} - \hat{p}_{\Xi,W} \frac{U(W)}{A(W)},$$
(4.23)

$$\hat{\chi}_{A,W} = \frac{\chi(\Xi \cap W)}{A(W)} - \frac{U(W)}{2\pi A(W)} \hat{L}_{A,W} - \frac{1}{A(W)} \hat{p}_{\Xi,W}.$$
(4.24)

Notons que ces estimateurs restent valables pour d'autres types de modèles germes-grains à grains convexes que le modèle Booléen (voir [81]).

4.2.3 Processus des points tangents et nombre de convexités

Soit F un convexe compact de \mathbb{R}^2 et $u \in S^1$, considérons l'ensemble $\partial_u(F) = \{x \in \partial F \mid \langle u, x \rangle = h_F(-u)\}$ où h_F est la fonction support de F. De sorte que $\partial_u(F)$ soit l'ensemble des points $x \in \partial F$ réalisant min $\{\langle x, u \rangle\}$, par exemple si u est dirigé vers le haut il existe deux droites orthogonales à u et tangentes à F prenons la plus basse des deux, $\partial_u(F)$ est la partie de ∂F sur cette droite. Notons $n_u(F)$ le minimum lexicographique de $\partial_u(F)$, $n_u(F)$ sera appelé le point tangent de F dans la direction u.



FIGURE 4.1 – Un point tangent à Ξ_0 , extrait de [57].

Définition 4.2.1 (Processus des points tangents visibles). Soit $\Xi = \bigcup_{x_i \in \Phi} x_i + \Xi_i$ un modèle Booléen de \mathbb{R}^2 d'intensité λ et $u \in S^1$, pour chaque x_i on note $\tilde{x}_i = n_u(\Xi_i + x_i)$ le point tangent au grain translaté $\Xi_i + x_i$ dans la direction u et $\Xi_i^u = \Xi_i - n_u(\Xi_i)$, de sorte que $\Xi_i^u + \tilde{x}_i = \Xi_i + x_i$. On appelle processus des points tangents visibles ou plus simplement processus des points tangents dans la direction u, le processus ponctuel suivant :

$$N^{+}(u) = \{ \tilde{x}_{i} \mid \tilde{x}_{i} \notin \bigcup_{j \neq i} (\Xi_{j}^{u} + \tilde{x}_{j}) \}.$$
(4.25)



FIGURE 4.2 – Les points tangents (visibles) d'un ensemble dans la direction \vec{u} , extrait de [57].

Notons tout d'abord que l'indépendance entre germes et grains implique que le processus ponctuel $\{\tilde{x}_i\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ . En effet, le modèle Booléen Ξ peut être construit à partir des grains Ξ_i^u centrés sur les germes $\{\tilde{x}_i|i \ge 1\}$. Ainsi, le processus des points tangents visibles $N^+(u)$ est obtenu par un amincissement du processus ponctuel $\{\tilde{x}_i\}$. Notons que cet amincissement est dépendant de $\{\tilde{x}_i\}$, le processus des points tangents n'est donc pas un processus de Poisson. Ceci étant, $N^+(u)$ est un processus stationnaire dont les caractéristiques fournissent d'importantes informations sur le modèle Booléen, à l'instar de son intensité.

Proposition 4.2.6 (Nombre spécifique de convexités [23, 57]). Soient $u \in S^1$, alors l'intensité N_A^+ du processus des points tangents $N^+(u)$ ne dépend pas de la direction u et s'exprime :

$$N_A^+ = \lambda (1 - p_\Xi), \tag{4.26}$$

cette intensité N_A^+ est alors appelée nombre spécifique de convexités, ou plus simplement nombre de convexités.

L'estimation du nombre spécifique de convexités du modèle Ξ dans une fenêtre W est alors obtenue en comptant le nombre de points tangents visibles dans la fenêtre.

Proposition 4.2.7 (Estimateur du nombre spécifique de convexités). Soit Ξ un modèle Booléen, $u \in S^1$ et W une fenêtre compacte convexe d'intérieur non vide, alors :

$$\widehat{N}_{A,W}^{+}(u) = \frac{Card(N^{+}(u) \cap W)}{A(W)},$$
(4.27)

est un estimateur non biaisé, fortement convergent et asymptotiquement normal de N_A^+ . i.e. $\mathbb{P}(N_{A,W}^+ \to N_A^+ \text{ quand } W \uparrow \mathbb{R}^2) = 1 \text{ et } \sqrt{A(W)}(N_{A,W}^+ - N_A^+) \text{ converge en loi vers } N(0, \sigma_u^2) \text{ lorsque } W \uparrow \mathbb{R}^2.$

De plus, la variance asymptotique σ_u^2 s'exprime en fonction des caractéristiques de $N^+(u)$ (voir [85]). L'estimation de N_A^+ peut être obtenue à partir d'une direction u, cependant un estimateur

plus performant est obtenu en moyennant sur plusieurs directions.

Les autres caractéristiques du processus des points tangents s'avèrent elles aussi utiles pour décrire des caractéristiques du modèle Booléen, en particulier la fonction de corrélation des paires (voir [86]).

Notons que le processus des points tangents est une caractéristique très sensible à de légères perturbations des données. En effet, la discrétisation des données ou le bruitage des données induit de nombreux artéfacts pour le processus des point tangents.

4.2.4 Test d'adéquation au modèle Booléen 2D

Nous nous limiterons ici à une présentation très succincte des tests d'adéquations au modèle Booléen, pour plus de détails le lecteur est renvoyé à [87]. Les propriétés et caractéristiques globales du modèle Booléen précitées fournissent différents moyens de tester l'adéquation de données (images 2D) au modèle Booléen. Nombre de ces tests sont basés sur la stabilité du modèle par dilatations convexes [87], d'autres sur le processus des points tangents [57]. Le test visuel le plus élémentaire consiste à tester la linéarité de la transformation logarithmique normalisé de la fonction de distribution des contacts sphériques $\frac{\hat{C}ont_B^l(\Xi,r)}{r}$, r > 0 où B désigne la boule unité [23]. D'autres tests visuels basés sur l'expression polynomiale de la transformation logarithmique de la fonction de distribution des contacts $Cont_K^l(\Xi,.)$ relativement à des convexes K, sont aussi utilisés.

On distingue deux catégories de tests, la première consistant à tester l'adéquation de données à un modèle Booléen particulier. Dans ce contexte, ce modèle particulier est donc supposé connu (il est généralement obtenu par ajustement voir section 4.4). De sorte que des tests basés sur la simulation (*simulation-based test*) peuvent être mis en place de la manière suivante. Des caractéristiques (réelles) (fonction de distribution des contacts, densités de volumes intrinsèques,...) sont estimées sur les données réelles, les mêmes caractéristiques (simulées) sont alors estimées sur des simulations du modèle particulier. Enfin la comparaison des propriétés statistiques des caractéristiques réelles et simulées fournit des tests d'adéquations au modèle particulier (*simulation-based test with deviation measure, simulation-based test with enveloppes*, [87]).

La seconde catégorie de tests, consiste à tester si des données satisfont aux hypothèses du modèle Booléen (distribution spatiale de Poisson, convexité des grains), sans connaissance à priori, sur le modèle Booléen dont sont issues les données. De tels tests sont plus difficiles à mettre en place, et ne sont que très peu étudiés dans la littérature [23]. En général, un modèle Booléen paramétrique dont les paramètres sont estimés, et des test basés sur la simulation sont alors utilisés. Cependant, de telles méthodes restent très dépendantes du modèle paramétrique choisi et de la qualité de l'estimation de ces paramètres. Les tests basés sur les expressions polynomiales des transformées logarithmiques de la fonction de distribution des contacts s'avèrent alors être de très bon moyens de tester l'hypothèse de convexité des grains, puisque ces expressions polynomiales sont directement dues à la convexité des grains. Le test le plus efficace ne supposant aucune connaissance à priori,

sur le modèle Booléen dont sont issues les données, est certainement le test de Laslett [57]. Ce test est basé sur le fait qu'en appliquant la transformation de Laslett aux points tangents visibles d'un modèle Booléen, ces derniers perdent leurs dépendances et constitue alors un processus ponctuel de Poisson. Le test de Laslett consiste donc à tester si oui ou non, les points tangents transformés constituent un processus de Poisson.

4.3 Caractéristiques intrinsèques du modèle Booléen 2D

Rappelons que l'on désigne par caractéristiques intrinsèques ou individuelles l'intensité λ du modèle ainsi que toute quantité relative au grain primaire. En d'autres termes, il s'agit de variables aléatoires qui informent sur la géométrie du grain primaire Ξ_0 tel que : l'aire A, le périmètre U, le diamètre de Féret H_{Ξ_0} ... Plusieurs méthodes ont été développées pour estimer des caractéristiques intrinsèques du modèle Booléen à partir de ses caractéristiques globales [23]. Nous présenterons ici les principales techniques de la littérature.

4.3.1 La méthode du contraste minimum

La méthode du contraste minimum parfois appelée méthode de Steiner, a été introduite par Dupac et Digle dans les années 80 [80], à l'origine pour la fonction de distribution de contacts, cependant elle peut être utilisée pour d'autres caractéristiques globales de type fonctionnelles, elle se présente de la manière suivante.

Soit K une jauge convexe, rappelons la relation linéaire (4.21):

$$\frac{Cont_K^l(\Xi, r)}{r} = 2\lambda \mathbb{E}[W(\Xi_0, K)] + \lambda r A(K)), \ r > 0.$$

De sorte que les coefficients $a := \lambda \mathbb{E}[W(\Xi_0, K)]$ et $b := \lambda A(K)$ peuvent être estimés par une approximation linéaire de $\frac{Cont_K^l(\Xi, r)}{r}$ pour r > 0 (obtenue à partir de l'estimateur $\hat{C}ont_K(\Xi, r)$). L'aire de la jauge A(K) étant connue, l'intensité λ , l'espérance de l'aire mixte $\mathbb{E}[W(\Xi_0, K)]$ et de l'aire $\mathbb{E}[A(\Xi_0)]$ peuvent être estimées via les relations :

$$\lambda = \frac{b}{A(K)},\tag{4.28}$$

$$\mathbb{E}[W(\Xi_0, K)] = \frac{a}{2\lambda},\tag{4.29}$$

$$\mathbb{E}[A(\Xi_0)] = -\frac{\ln(-p_{\Xi})}{\lambda}.$$
(4.30)

En pratique, l'approximation linéaire est effectuée à partir de plusieurs rayons de dilatation r_1, \dots, r_n . Le choix de ces rayons ainsi que la qualité de ces estimateurs sont discutés dans [88].

Notons tout d'abord, que d'après la formule de Steiner généralisée, si le grain primaire est isotrope alors quelle que soit la jauge K, $\mathbb{E}[W(\Xi_0, K)] = \frac{U(K)}{4\pi} \mathbb{E}[U(\Xi)]$, le choix de la jauge n'est pas pour autant sans conséquences sur la complexité algorithmique et la qualité des estimations.

Rappelons de plus que si *B* désigne le disque unité et S_{θ} un segment unitaire dirigé par $\theta \in [0, \pi]$, alors :

$$W(\Xi_0, B) = \frac{1}{2}U(\Xi_0), W(\Xi_0, S_{\theta}) = \frac{1}{2}H_{\Xi_0}(\theta).$$

Ainsi, le choix d'un disque fournit des estimateurs de l'intensité λ , de l'espérance de l'aire $\mathbb{E}[A(\Xi_0)]$ et de l'espérance du périmètre $\mathbb{E}[U(\Xi_0)]$. Le choix d'un segment S_{θ} fournit des estimateurs de l'intensité λ , de l'espérance de l'aire $\mathbb{E}[A(\Xi_0)]$ et de l'espérance du diamètre de Féret $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta)]$ dans la direction θ .

L'estimation de l'espérance du diamètre de Féret $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta)]$ dans toutes les directions $\theta \in [0, \pi]$ fournit un moyen de construire l'espérance d'Aumann du grain primaire symétrisé $\tilde{\Xi}_0 := \frac{1}{2}(\Xi_0 \oplus \Xi_0)$ (mean difference body [57]). En effet, la fonction d'appui de $\frac{1}{2}(\Xi_0 \oplus \Xi_0)$ étant égale à $\frac{1}{2}H_{\Xi_0}$, en notant $u_{\theta} = t \ (-\sin(\theta), \cos(\theta))$, l'espérance d'Aumann de $\tilde{\Xi}_0$ peut être construite comme :

$$\mathbf{E}\tilde{\Xi}_0 = \bigcap_{\theta \in [0,\pi]} \{ x \in \mathbb{R}^d | -\frac{1}{2} \mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta)] < x, u_\theta \ge \frac{1}{2} \mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta)] \}.$$

Cependant, $\mathbf{E}\tilde{\Xi}_0$ n'informe pas sur la morphologie du grain mais sur son anisotropie. En effet, si le grain est isotrope alors $\mathbf{E}\tilde{\Xi}_0$ est un disque de rayon $\frac{1}{2\pi}\mathbb{E}[U(\Xi_0)]$.

4.3.2 La méthode des intensités

La méthode des intensités, aussi appelé méthode des densités consiste à estimer les densités volumiques du modèle p, L_A, χ_A et le nombre de convexités N_A^+ pour en déduire ensuite à l'aide de relations connues, l'intensité ainsi que l'espérance de l'aire et du périmètre du grain primaire. En d'autres termes, la méthode est basée sur l'inversion des relations suivantes :

$$p_{\Xi} = 1 - e^{-\lambda \mathbb{E}[A(\Xi_0)]},\tag{(4.10)}$$

$$L_A = \lambda (1 - p_{\Xi}) \mathbb{E}[U(\Xi_0)], \qquad ((4.11))$$

$$\chi_A = \lambda (1 - p_{\Xi}) (1 - \frac{\lambda \mathbb{E}[U(\Xi_0)]^2}{4\pi}), \qquad ((4.12))$$

$$N_A^+ = \lambda (1 - p_{\Xi}). \tag{(4.26)}$$

Notons que la troisième formule de Miles (4.12) n'est valable que si le modèle est isotrope, de sorte que la méthode se décline sous deux formes : la méthode dite des points tangents [57] dans le cas général et la méthode d'inversion des formules de Miles [84] dans le cas isotrope.

Proposition 4.3.1 (Méthode des points tangents). Soit Ξ un modèle Booléen de grain pri-

maire Ξ_0 et d'intensité $\lambda > 0$, alors :

$$\lambda = \frac{N_A^+}{1 - p_\Xi},\tag{4.31}$$

$$\mathbb{E}[U(\Xi_0)] = \frac{L_A}{N_A^+},\tag{4.32}$$

$$\mathbb{E}[A(\Xi_0)] = -\frac{\log(1-p_{\Xi})N_A^+}{1-p}.$$
(4.33)

Les propriétés statistiques de la méthode des points tangents sont encore inconnues, cependant la normalité asymptotique de l'estimation de l'intensité est connue [85]. L'estimation du nombre de convexité s'avère souvent difficile en pratique (car très sensible).

Proposition 4.3.2 (Inversion de Miles). Soit Ξ un modèle Booléen isotrope de grain primaire Ξ_0 et d'intensité $\lambda > 0$, alors :

$$\lambda = \frac{\chi_A}{1 - p_{\Xi}} + \frac{1}{4\pi} \frac{L_A^2}{(1 - p_{\Xi})^2},\tag{4.34}$$

$$\mathbb{E}[U(\Xi_0)] = \frac{4\pi L_A (1 - p_{\Xi})}{4\pi (1 - p_{\Xi})\chi_A + L_A^2},$$
(4.35)

$$\mathbb{E}[A(\Xi_0)] = -\frac{\log(1-p_{\Xi})}{\lambda}.$$
(4.36)

Bien que les propriétés statistiques de la méthode des intensités soient inconnues, l'expérimentation montre que cette méthode s'avère plus performante que la méthode du contraste minimum, cette performance sera d'ailleurs étudiée au chapitre suivant.

Il existe donc plusieurs méthodes permettant d'estimer l'intensité ainsi que l'espérance de l'aire et du périmètre du grain. Cependant, ces quantités ne donnent que très peu d'informations sur la distribution géométrique du grain. En effet, même la totale connaissance des variables aléatoires associées à l'aire et au périmètre du grain ne suffirait pas à le caractériser. C'est pourquoi des hypothèses réductrices portant sur la morphologie du grain sont souvent émisses et des méthodes correspondant à ces cas particuliers sont alors développées. Ces cas particuliers feront l'objet de la section 4.4. Cependant, on dénombre quelques techniques de caractérisation se passant de telles hypothèses.

4.3.3 Les méthodes d'estimation de variations géométriques du grain

4.3.3.1 Les méthodes basées sur le covariogramme géométrique moyen

Soit Ξ un modèle Booléen généralisé de \mathbb{R}^d de grain primaire Ξ_0 . De récents travaux de B.Galerne [89],[24],[70] montre que les dérivées directionelles en 0 à droite du covariogramme géométrique moyen $V_u(\Xi_0) := \frac{d\gamma_{\Xi_0}(u)}{dr}(0^+)$, $u \in S^{d-1}$ (voir variation directionelle [24]) révèlent d'importantes informations sur la géométrie du grain. De sorte que leur moyenne sur toutes les directions possibles $V(\Xi_0) := \frac{1}{\omega_{d-1}} \int_{u \in S^{d-1}} \frac{d\gamma_{\Xi_0}(u)}{dr}(0^+) \mathcal{H}^{d-1} du$ (variation totale) soit égale au périmètre du grain. Ces notions de variation directionnelle et de variation totale sont alors généralisées sous la forme de densités (ou d'intensités) aux ensembles aléatoires stationnaires, on parle de variation directionnelle spécifique Θ_{V_u} et de de variation totale spécifique Θ_V . De sorte que ces quantités puissent être estimées pour un modèle Booléen généralisé Ξ et ensuite reliées à leur homologue pour le grain $V(\Xi_0)$ et $V_u(\Xi_0)$. Précisément les relations suivantes sont établies :

$$\Theta_{V_u}(\Xi) = \lambda \mathbb{E}(V_u(\Xi_0)) \exp(-\lambda \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)]), \qquad (4.37)$$

$$\Theta_V(\Xi) = \lambda \mathbb{E}(V_{d-1}(\Xi_0)) \exp(-\lambda \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)]).$$
(4.38)

Ces résultats sont établis pour le modèle Booléen généralisé et en dimension quelconque. En dimension 2, ils fournissent de nouveaux estimateurs du périmètre dans un contexte plus général et éventuellement des informations concernant l'anisotropie du grain primaire (variation directionnelle). Dans le cas du modèle à grains convexes, ces résultats n'apportent pas de nouvelles informations concernant le grain. Cependant, le covariogramme géométrique moyen révèle le moment d'ordre 2 de l'aire du grain via la relation (3.31):

$$\int_{\mathbb{R}^2} \gamma_{\Xi_0}(y) dy = \mathbb{E}[A(\Xi_0)^2].$$
(4.39)

Compte tenu de la relation (4.6), un estimateur du covariogramme géométrique moyen du grain primaire peut être estimé à partir d'estimateurs de la fonction de corrélation $\hat{q}_{\Xi,W}$ et de l'intensité $\hat{\lambda}$:

$$\hat{\gamma}_{\Xi_0}(u) = \frac{1}{\hat{\lambda}} \ln(\hat{q}_{\Xi,W}(u)), \ u \in \mathbb{R}^2.$$

$$(4.40)$$

Bien que biaisé, cet estimateur est convergent, de plus, il reste valable pour le modèle Booléen généralisé. De sorte que si le covarigamme géométrique peut être estimé dans une fenêtre suffisamment étendue, son intégrale sur \mathbb{R}^2 aussi, et par conséquent le moment d'ordre 2 de l'aire du grain.

4.3.3.2 Les méthode basées sur la densité produit du processus des points tangents

Une approche développée par I.S Molchanov [86],[57] établit des relations entre les variations géométriques du grain du modèle Booléen et les propriétés du processus des points tangents. En effet, la structure de corrélation des points tangents est intrinsèquement liée à la géométrie du grain.

En particulier, les probabilités de recouvrement (hitting probabilities [57]), $\mathbb{P}(\{x_1, \dots, x_n\} \subset \Xi_0)$ pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$ peuvent être estimées à partir des densités produits d'ordre $k = 1, \dots, n+1$ du processus des points tangents $N^+(u)$ dans une direction $u \in s^1$ (voir [86]). Ces probabilités de recouvrement permettent alors de mettre en évidence le moment d'ordre n de l'aire du grain :

$$\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)^n] = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(\{x_1, \cdots, x_n\} \subset \Xi_0) dx_1 \cdots dx_n.$$
(4.41)

D'autre part, en considérant simultanément les processus des points tangents dans différentes directions des caractéristiques de la distribution de la fonction d'appui du grain peuvent être obtenues. En effet, sous certaines hypothèse d'existence, la fonction de corrélation des paires conjointes des processus des points tangents dans deux directions $N^+(u_1)$ et $N^+(u_2)$, permet d'estimer la densité (si elle existe) du vecteur aléatoire ζ_{u_1,u_2} reliant les points tangents du grain dans les directions u_1 et u_2 . Ce résultat se généralise alors à plus de deux directions $u_1, \dots u_n$ et permet d'estimer la densité conjointe (si elle existe) de ${}^t(\zeta_{u_1,u_2}, \dots \zeta_{u_1,u_n})$ (voir [86]).

Malheureusement en pratique la mauvaise qualité des estimateurs des densités produits du processus des points tangents rend ces méthodes inutilisables.

4.4 Modèle Booléen 2-D à grains paramétrés

Les méthodes d'estimations de caractéristiques intrinsèques précédemment présentées ont pour vocation de décrire le grain. Cependant, les caractéristiques intrinsèques accessibles à ce jour, ne suffisent pas à totalement caractériser le grain. C'est pourquoi des hypothèses supplémentaires portant sur la géométrie du grain sont souvent émises. Le grain primaire est alors supposé avoir une géométrie paramétrée, l'objectif étant alors d'estimer des caractéristiques de la distribution de ces paramètres. Notons que souvent ces paramètres sont eux mêmes supposés suivre des distributions paramétriques (uniforme, gausienne, log-normal,...), l'objectif devenant donc d'estimer les paramètres de ces distributions.

En général, le grain est supposé avoir une forme connue (disque, segment, carré...). Le modèle Booléen de disque fait l'objet d'une attention particulière, pour un tel modèle Booléen des méthodes particulières de caractérisation du grain peuvent être introduites.

4.4.1 Modèle Booléen de disques

Soit Ξ un modèle Booléen de disques d'intensité λ . De sorte que le grain primaire $\Xi_0 := B(0, R)$ soit le disque de rayon R > 0. L'enjeu consiste alors à estimer la distribution de la variable aléatoire R.

Notons tout d'abord que Ξ est nécessairement isotrope, ainsi les formules de Miles permettent d'estimer l'espérance de l'aire et du périmètre du grain. Compte tenu de la forme du grain, les premier et second moments du rayon R sont alors donnés par $\mathbb{E}[R] = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}[U(\Xi_0)]$ et $\mathbb{E}[R^2] = \frac{1}{\pi^2} \mathbb{E}[A(\Xi_0)]$.

Il existe dans la littérature de nombreuses techniques permettant d'accéder à d'autres caractéristiques du rayon R (voir [90, 91, 92, 93]). La méthode la plus générale est probablement la méthode de X.Emery [90] basée sur le covariogramme géométrique moyen du grain γ_{Ξ_0} . En effet, l'expression particulière du covariogramme géométrique d'un disque (2.18), permet d'exprimer la fonction de répartition de R à partir du covariogramme géométrique moyen du grain. Plus précisément, en notant $F_R(t) := \mathbb{P}(R \leq t), t \in \mathbb{R}$ la fonction de répartition de R, si $\mathbb{E}[R^2] < \infty$ alors :

$$F_R(t) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_t^{+\infty} \frac{\gamma_{\Xi_0}'(r)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dr.$$
(4.42)

De sorte que la distribution du rayon R est obtenue à partir d'une estimation du covario-

gramme géométrique moyen du grain. Notons que cette méthode reste assez sensible à la qualité de l'estimation du covariogramme géométrique moyen [90].

Une approche similaire peut être développée dans le cas d'un modèle Booléen de carrés, dans un contexte discret. Cependant, le mauvais conditionnement du problème rend cette technique inutile. Il semble alors assez difficile de développer une approche similaire dans un contexte plus général (voir le problème du covariogramme section 2.3.2).

4.4.2 Modèle Booléen de grains paramétriques

Plusieurs autre techniques pour les modèles à grains paramétrés ont été développées. Le modèle Booléen de segments fait lui aussi l'objet d'une attention particulière. En effet, lorsque le grain est un segment, il est possible d'estimer la distribution de sa longueur ainsi que celle de son orientation [23].

De manière plus générale lorsque le grain est d'une forme déterministe, plusieurs caractéristiques du grain sont obtenues. Considérons que le grain primaire est de la forme $\Xi_0 := k(s)^{\delta} R_{\eta}(K)$ où K désigne un convexe fixé, k une variable aléatoire positive, s une reflexion, R_{η} la rotation d'angle aléatoire η et δ une variable aléatoire à valeur dans $\{0,1\}$. Le grain primaire est donc obtenu par similitude aléatoire du convexe K. Dans ce contexte, compte tenu des degrés d'homogénéité des fonctionnelles de Minkowski, lorsque le convexe K est connu, les premier et second moments du facteur d'homothétie k sont aisément obtenus à partir des estimateurs des espérances de l'aire et du périmètre du grain par $\mathbb{E}[k] = \frac{1}{U(K)}\mathbb{E}[U(\Xi_0)]$ et $\mathbb{E}[k^2] = \frac{1}{A(K)}\mathbb{E}[A(\Xi_0)]$. De sorte qu'une distribution paramétrique puisse être associée à k. D'autre part, si le grain est obtenu par une rotation uniforme d'un convexe K (i.e $\Xi_0 = R_{\eta}(K)$ avec η une v.a uniforme sur $[0, 2\pi]$), alors le convexe K peut être estimé [94].

Cependant, la question de la caractérisation du grain est ouverte dès lors que la forme du grain n'est pas déterministe. Le cas du modèle Booléen à grain rectangulaire constitue déjà une limite. En effet, si Ξ_0 est un rectangle de côtés (x, y), les caractéristiques intrinsèques accessibles $(\mathbb{E}[U(\Xi_0)],\mathbb{E}[A(\Xi_0)],\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta)])$ ne suffisent pas pour ajuster une distribution paramétrique à (x, y). La caractérisation du grain du modèle Booléen sans hypothèse sur sa forme, constituera l'objectif principal de cette thèse.

La synthèse de ce chapitre ne sera pas présentée ici, elle fera l'objet du chapitre 6. Nous discuterons préalablement de la simulation de modèle Booléen et évaluerons la performance des méthodes d'estimations précédemment présentées dans le chapitre 5. Enfin la synthèse et les objectifs de la thèse seront présentés au chapitre 6.

Chapitre 5

Simulation de modèle Booléen et estimations

Les estimateurs des caractéristiques du modèle Booléen introduits dans le chapitre précédent ont des propriétés mal maîtrisées. En ce sens, la simulation de modèles Booléen permet d'évaluer numériquement la qualité des estimateurs. Ce court chapitre a pour objectif de présenter la procédure de simulation de modèles Booléens pour ensuite valider les procédures d'estimation des caractéristiques du modèle.

5.1 Simulation de modèle Booléen

Soit $W \subset \mathbb{R}^2$ une fenêtre compacte convexe et d'intérieur non vide. Dans cette section, le processus de simulation d'une réalisation $\Xi(\omega) \cap W$ d'un modèle Booléen Ξ intersecté avec la fenêtre W sera discuté.

Méthode 5.1 (Simulation de modèle Booléen). Soit $W \subset \mathbb{R}^2$ une fenêtre compacte convexe et d'intérieur non vide, $\lambda > 0$ et P_{Ξ_0} la distribution du grain primaire du modèle Booléen Ξ . Il est supposé sans pertes de généralités que $0 \in \Xi_0$.

- i. Simulation des germes :
 - Détermination de la fenêtre de génération des germes W_0 : soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un convexe compact choisit tel que :

$$\mathbb{P}(\Xi_0 \subset K) = 1, \tag{5.1}$$

alors $W_0 = W \oplus K$.

• Génération des germes dans W_0 :

il faut tout d'abord générer un entier N_0 à partir de la loi de Poisson de paramètre $\lambda A(W_0)$, ensuite N_0 germes $x_i(\omega)$ sont tirée aléatoirement et indépendamment suivant une loi uniforme sur W_0 .

- ii. Simulation des grains et intersection avec la fenêtre d'observation W:
 - N_0 grains $\Xi_i(\omega)$ sont générés à partir de P_{Ξ_0} .
 - Une réalisation du modèle est alors obtenue en attachant les grains aux germes :

$$\Xi(\omega) \cap W = (\bigcup_{i=1}^{N_0} \Xi_i(\omega) + x_i(\omega)) \cap W.$$

Notons tout d'abord que pour générer les grains, il faut supposer qu'ils appartiennent à une famille paramétrée de convexes. Les grains sont alors construits à partir de générations de leurs paramètres. En général les grains sont choisis comme étant des disques, des polygones ou des ellipses. Les réalisations des grains translatés $\Xi_i(\omega) + x_i(\omega)$ d'un modèle Booléen Ξ , peuvent intersecter Wsans que $x_i(\omega) \in W$, c'est pourquoi les germes doivent être générés dans une fenêtre W_0 plus grande que W. En ce sens, la condition (5.1) garantit que si $x \in \mathbb{R}^2/W_0$ alors $\mathbb{P}(\Xi_0 + x \cap W = \emptyset) = 1$, elle garantie donc que p.s aucun grain translaté $\Xi_i + x_i$ issu d'un germe x_i à l'extérieur de W_0 n'intersecte W. Cependant, il n'existe pas toujours de borne K telle que la condition (5.1) soit vérifiée (par exemple si le grain est un disque dont le rayon suit une loi gaussienne), c'est pourquoi en pratique la condition (5.1) est remplacée par :

$$\mathbb{P}(\Xi_0 \subset K) \ge 1 - \epsilon, \tag{5.2}$$

avec $\epsilon \in [0, 1]$ suffisamment petit. Ce qui garantit que l'événement $\{\Xi_i + x_i | x_i \in \mathbb{R}^2/W_0\}$ se produit avec au plus la probabilité ϵ . Par exemple, si le grain est un disque de rayon gaussien $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors la borne K peut être choisit comme la boule de rayon $\mu + 2\sigma$ au seuil $\epsilon = 5\%$ ou $\mu + 3\sigma$ au seuil $\epsilon = 1\%$. Dans le cas général, la borne K est choisie à partir d'intervalles de confiance pour le diamètre de Féret du grain. Par exemple, si $d_{max} > 0$ satisfait $\mathbb{P}(\sup_{\theta \in \mathbb{R}} H_{\Xi_0}(\theta) \leq d_{max}) \geq 1 - \epsilon$ alors K est choisit comme le disque de diamètre d_{max} , (des bornes K plus petites peuvent être obtenues en considérant le diamètre de Féret dans chaque direction). Lorsque la fenêtre W considérée est rectangulaire, il est judicieux de choisir une borne K rectangulaire, ceci facilite la génération des germes. La condition (5.2) assure que le grain d'un germe donné, situé en dehors de $W_0 = W \oplus K$ intersecte W avec la probabilité au plus ϵ . Notons cependant que la probabilité qu'il existe un tel germe en dehors de W_0 est bien plus grande. En effet, cette dernière dépend de l'intensité du modèle λ ainsi que de la distribution du grain primaire. D'autre part, cette probabilité peut être majorée par $2\lambda \int_1^{+\infty} (W(W, K) + rA(K))(1 - \mathbb{P}(\Xi_0 \subset rK))dr$, ce qui suggère l'utilisation d'une majoration de $1 - \mathbb{P}(\Xi_0 \subset rK)$ en fonction de r. Cependant, en pratique la condition (5.2) est suffisante.

La simulation et la représentation d'un modèle Booléen nécessite forcément de discrétisé le modèle d'une manière ou d'une autre. Usuellement, le modèle est discrétiser sous la forme d'image matricielle binaire. Cependant cette approche pose de nombreux problèmes [95]. En effet, au delà des considérations probabilistes du modèle Booléen, l'estimation du périmètre ou du nombre d'Euler d'un objet à partir de sa discrétisation sous forme matricielle (i.e son intersection avec la grille \mathbb{N}^2) s'avère complexe et nécessairement biaisé [96]. Ces problèmes ont pour origines les grandes différences topologiques entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{N}^2 . Notre approche consiste à discrétiser le modèle sous forme polygonale. Il existe de nombreuses techniques de géométrie algorithmique permettant d'effectuer des opérations Booléennes (union, intersection) ou morphologique (dilatation, érosion,...) avec des polygones [97, 98], bien que le coût algorithmique soit parfois plus élevé que dans le cas matriciel. Ces opérations permettent alors de simuler un modèle Booléen et d'en évaluer les caractéristiques globales. Cette approche permet de s'affranchir des problèmes topologiques précitées puisque dans ce contexte la discrétisation du modèle est un objet de \mathbb{R}^2 et non de \mathbb{N}^2 . De plus, en pratique, lorsque les données réelles sont sous forme matricielles elles peuvent toujours être vectorisées sous forme polygonale [96]. La figure 5.1 montre quelques simulations sous forme polygonale de différents modèles Booléens.

5.1.1 Exemples de modèles simulés



FIGURE 5.1 – Des exemples de simulation de différents modèles Booléens.

5.2 Estimations des caractéristiques du modèle

Afin d'évaluer la performances des estimateurs des caractéristiques globales et intrinsèques du modèle, plusieurs simulations ont été réalisées. En particulier, un grain primaire Ξ_0 rectangulaire dont les côtés suivent la loi normale de moyenne ${}^t(40, 80)$ et de matrice de covariance diag(100, 400)est choisi. Des modèles Booléens de grain primaire isotrope Ξ_0 et de différentes intensités sont alors considérés. Les intensités des modèles sont alors choisies de sorte à ce que la fraction d'aire des modèles varie de 10% à 90% par pas de 10%, des réalisations de ces modèles sont représentées figure 5.2. Pour chacun de ces modèles, l'estimation des caractéristiques globales p_{Ξ} , L_A et χ_A ainsi que les caractéristiques intrinsèques λ , $\mathbb{E}[A(\Xi_0)]$ et $\mathbb{E}[U(\Xi_0)]$ est réalisée à partir de 2000 réalisations du modèle.



 ${\rm FIGURE}$ 5.2 – Exemples de réalisation. La fraction d'aire évolue de 0.1 à 0.9 lorsque l'intensité augmente.

5.2.1 Estimations des caractéristiques globales du modèle

Pour chacun des modèles précités, les estimations des densités volumiques (p_{Ξ} , L_A et χ_A) du modèle sont estimées à partir de la méthode d'estimation simultanée (proposition 4.2.5, p.72), les erreurs relatives commises sur ces caractéristiques sont respectivement notées ϵ_p , ϵ_{L_A} et ϵ_{χ} . Ces erreurs relatives sont alors représentées, en fonction du nombre de réalisations du modèle utilisés pour le modèle de fraction d'aire 60% sur la figure 5.3, ainsi qu'en fonction de la fraction d'aire du modèle (figure 5.4). L'erreur de plus de 60% sur l'estimation de L_A pour le modèle de fraction d'aire 0.5 présentée figure 5.4, n'est pas significative. En effet, pour ce modèle particulier, le nombre spécifique de connectivité χ_A est quasiment nul, ce qui à pour conséquence de faire exploser l'erreur relative malgré une estimation fiable (cette erreur est sans conséquence sur l'estimation des caractéristiques intrinsèques, voir figure 5.6).



FIGURE 5.3 – Erreurs relatives commises sur les estimations $\widehat{p_{\Xi}}$, $\widehat{L_A}$ et $\widehat{\chi_A}$ pour le modèle de fraction d'aire 60% en fonction du nombre de réalisations du modèle.

5.2.2 Estimations des caractéristiques intrinsèques du modèle

Les caractéristiques intrinsèques λ , $\mathbb{E}[A(\Xi_0)]$ et $\mathbb{E}[U(\Xi_0)]$ des modèles considérés sont estimées à partir des formules de Miles (proposition 4.3.2), les erreurs relatives commises sur ces estimations sont respectivement notées ϵ_{λ} , ϵ_A et ϵ_U . Ces erreurs sont représentées en fonction du nombre de réalisations du modèle pour la fraction d'aire 60% sur la figure 5.5, et en fonction de la fraction d'aire du modèle pour 2000 réalisations sur la figure 5.6. Ainsi, les figures 5.5 et 5.6 montrent que l'estimation des caractéristiques intrinsèques λ , $\mathbb{E}[A(\Xi_0)]$ et $\mathbb{E}[U(\Xi_0)]$ est très performante (erreur relative inférieure à 5%) au delà de 100 réalisations et quelle que soit la fraction d'aire du modèle



FIGURE 5.4 – Erreurs relatives commises sur les estimations $\widehat{p_{\Xi}}$, $\widehat{L_A}$ et $\widehat{\chi_A}$ pour 2000 réalisations, en fonction de la fraction d'aire.

considéré.



FIGURE 5.5 – Erreurs relatives commises sur les estimations $\mathbb{E}[A(\Xi_0)], \mathbb{E}[U(\Xi_0)]$ et $\hat{\lambda}$ obtenues via les formules de Miles, pour le modèle de fraction d'aire 60%, en fonction du nombre de réalisations du modèle.



FIGURE 5.6 – Erreurs relatives commises sur les estimations $\mathbb{E}[A(\Xi_0)], \mathbb{E}[U(\Xi_0)]$ et $\hat{\lambda}$ obtenues via les formules de Miles, pour 2000 réalisations, en fonction de la fraction d'aire.

Chapitre 6

Synthèse et objectifs

Dans ce chapitre la synthèse de l'état de l'art sur le modèle Booléen est présentée, elle permettra alors de dégager les principaux objectifs de cette thèse.

6.1 Synthèse

La problématique applicative initiatrice de cette thèse est de modéliser et de caractériser des distributions de populations de particules se superposant via un modèle géométrique aléatoire, dans un contexte d'analyse d'image 2-D. De telles populations de particules peuvent être représentées par un modèle germes-grains. Le modèle germes-grains le plus élémentaire étant le modèle Booléen, il constitue un point de départ.

Les différentes méthodes de la littérature permettant de modéliser une image 2D par un modèle Booléen pour ensuite en caractériser le grain primaire on été présentées dans le chapitre chapitre 4. Lorsque le grain primaire est simplement supposé convexe, permettent d'estimer l'intensité ainsi que les espérances de certaines caractéristiques géométriques du grain primaire (fonctionnelles de Minkowski, aire mixte et diamètre de Féret). Notons que certaines méthodes restent valables si le grain n'est pas convexe (voir sous-sous-section 4.3.3.1). Plus précisément, ces méthodes consistent dans un premier temps à estimer des caractéristiques globales du modèle (relatives à la réunion des grains) à partir de ses réalisations dans une fenêtre bornée. Dans un second temps, des relations analytiques entre caractéristiques globales et caractéristiques intrinsèques (relatives au grains primaire et aux germes) sont utilisées pour estimer les caractéristiques intrinsèques du modèle. Les propriétés statistiques des estimateurs induits par ces méthodes n'étant pas complètement maîtrisées, ces techniques ont par la suite été testées et validées par simulation dans le chapitre 5.

Les caractéristiques intrinsèques accessibles à ce jour, ne suffisent pas à totalement caractériser le grain, c'est pourquoi des hypothèses supplémentaires portant sur la géométrie du grain sont souvent émises. Le grain primaire est alors supposé avoir une géométrie paramétrée (disque, carré, segment...), de sorte à pouvoir estimer des caractéristiques de la distribution de ces paramètres. Dans ce contexte, des méthodes particulières de caractérisation du grain sont introduites. Cependant, dès lors que la forme du grain n'est pas déterministe, les caractéristiques estimées ne suffisent pas à caractériser le grain primaire. En ce sens, le cas du modèle Booléen à grain rectangulaire constitue une limite. En effet, si le grain primaire est un rectangle aléatoire, les caractéristiques intrinsèques accessibles ne suffissent pas pour ajuster une distribution paramétrique à ses côtés.

6.2 Objectifs

Ainsi un premier objectif de cette thèse sera de mettre en place des méthodes pour estimer des caractéristiques intrinsèques qui permettent de complètement caractériser le grain primaire sans émettre d'hypothèses concernant sa forme (à l'exception de la convexité). Un second objectif sera d'interpréter ces caractéristiques afin de décrire la distribution morphologique du grain.

Afin de complètement caractériser le grain primaire, il faudra tout d'abord mettre en place des relations fournissant un accès aux variations des caractéristiques géométriques précitées (fonctionnelles de Minkowski, aire mixte et diamètre de Féret). Pour ce faire, la capacité fonctionnelle du modèle devra nécessairement être considérée sur des ensembles non convexes. En effet, compte tenu du Théorème 4.1 et de la formule de Steiner (2.5), pour un ensemble convexe K, la capacité fonctionnelle ne dépend du grain que via l'espérance de ses volumes mixtes. Les ensembles non convexes les plus élémentaires étant les ensembles discrets $\{x_1, \dots, x_n\}$, il est alors nécessaire de mettre en évidence le covariogramme géométrique moyen. Il révèle alors le moment d'ordre 2 du volume du grain (3.31). Cette relation sera à l'origine du développement proposé dans cette thèse.

Rappelons que la problématique initiatrice de cette thèse est de de caractériser des distributions de populations de particules. En ce sens, les méthodes établies dans le cadre du modèle Booléen auront vocation à être généralisées à une classe plus large de modèle germes-grains. Ainsi, dans un premier temps (partie Partie III), en dehors du contexte du modèle Booléen, les convexes aléatoires seront étudiés. Les variations géométriques d'un convexe aléatoire seront exprimées à partir de son *n*-variogramme géométrique moyen (voir chapitre 7). Elles seront ensuite interprétées afin de décrire la morphologie des convexes aléatoires. Dans un second temps (partie IV), il sera discuté de l'estimation ainsi que de l'interprétation des variations géométriques du grain primaire du modèle Booléen. Troisième partie

VARIATIONS GÉOMÉTRIQUES ET MORPHOLOGIQUES D'UN CONVEXE ALÉATOIRE

Table des matières

| 7 | Variations géométriques d'un convexe aléatoire | | | 95 |
|---|---|---|--|-----|
| | 7.1 | Expression des variations géométriques par le n -variogramme $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ | | 95 |
| | | 7.1.1 | Le cas du covariogramme dans le plan $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ | 95 |
| | | 7.1.2 | n -Variogramme moyen d'un convexe aléatoire $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ | 97 |
| | | 7.1.3 | Dilatations d'un convexe aléatoire et variations de ses volumes mixtes | 100 |
| | 7.2 Variations géométriques et diamètre de Féret dans le plan | | 104 | |
| | | 7.2.1 | Volumes mixtes et caractéristiques géométriques | 104 |
| | | 7.2.2 | Diamètre de Féret d'un convexe aléatoire | 107 |
| | 7.3 | Synthe | $\hat{\mathbf{se}}$ | 109 |
| | _ | | | |
| 8 Description des convexes aléatoires symétriques par des zonotopes a | | | on des convexes aléatoires symétriques par des zonotopes aléatoires | 111 |
| | 8.1 Introduction | | uction | 111 |
| 8.2 Approximation de convexes symétriques par des zonotopes | | Appro | ximation de convexes symétriques par des zonotopes | 112 |
| | | 8.2.1 | Approximation d'un convexe symétrique par un zonotope 0-régulier | 112 |
| | | 8.2.2 | Approximation d'un convexe symétrique par un zonotope régulier | 118 |
| | 8.3 | Zonotopes aléatoires et diamètre de Féret | | 122 |
| | | 8.3.1 | Description des zonotopes aléatoires par leurs côtés | 122 |
| | | 8.3.2 | Caractérisation d'un zonotope aléatoire régulier isotrope par son diamètre | |
| | | | de Féret \ldots | 130 |
| | 8.4 Description des convexes aléatoires symétriques par des zonotopes alé | | ption des convexes aléatoires symétriques par des zonotopes aléatoires via | |
| | | leurs diamètres de Féret | | 135 |
| | | 8.4.1 | Approximation d'un convexe aléatoire symétrique par un zonotope aléatoire | |
| | | | 0-régulier | 135 |
| | | 8.4.2 | Approximation d'un convexe aléatoire symétrique par un zonotope aléatoire | |
| | | | régulier et isotrope | 138 |
| | 8.5 | Synthe | 2se | 140 |

Chapitre 7

Variations géométriques d'un convexe aléatoire

L'objectif de ce chapitre sera de montrer comment les variations géométriques d'un convexe aléatoire s'expriment à partir des *n*-variogrammes géométriques moyens de ses dilatés. On montrera tout d'abord que pour un convexe aléatoire du plan X, les moments d'ordre 2 de ses volumes mixtes ${}^{t}(A(X), W(X, K))$ avec n'importe quel convexe compact K, peuvent être obtenus via le covariogramme géométrique moyen des dilatés $(X \oplus rK)_{r>0}$. On tentera alors de généraliser ce résultat à une dimension quelconque ainsi qu'aux moments d'ordre arbitraire.

En dimension quelconque d, on introduira le n-variogramme moyen $(n \ge 1)$, il s'agit d'une généralisation du covariogramme moyen. Pour un convexe aléatoire X de \mathbb{R}^d et n'importe quel convexe compact K, il sera montré que les n-variogrammes des dilatés $(X \oplus rK)_{r>0}$ nous informent sur les moments d'ordre n du vecteur composé des volumes mixtes de X et K. En particulier, dans le cas planaire (d = 2), on montrera que tout les moments du vecteur ${}^t(A(X), W(X, K))$ peuvent être obtenus. On montrera de plus que de telles quantités permettent de totalement caractériser X sous certaines hypothèses.

Le choix de la jauge K pourra alors être discuté. Par exemple pour une boule, les moments de ${}^{t}(A(X), U(X))$ seront obtenus, ceux de ${}^{t}((A(X), H_X(\theta))$ seront obtenus avec un segment de droite. De plus, toutes les caractéristiques du processus aléatoire du diamètre de Féret seront facilement obtenues en choisissant un zonotope comme jauge. Enfin, les propriétés de ce processus seront étudiées.

7.1 Expression des variations géométriques par le *n*-variogramme

7.1.1 Le cas du covariogramme dans le plan

L'objectif ici est de montrer comment le covariogramme géométrique d'un convexe du plan permet de décrire ses variations géométriques. En particulier, il sera montré que les moments d'ordre 2 de caractéristiques géométriques d'un convexe aléatoire peuvent être obtenus via les covariogrammes géométriques moyens de ses dilatés.

Soit X un convexe aléatoire de \mathbb{R}^2 , rappelons que le moment d'ordre 2 de l'aire de X s'exprime via son covariogramme géométrique moyen [24] par la relation :

$$\mathbb{E}[A(X)^2] = \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_X(u) du, \qquad ((4.39))$$

cette égalité ayant lieu dans $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit K un convexe compact de \mathbb{R}^2 , alors de la même manière :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \ \mathbb{E}[A(X \oplus rK)^2] = \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_{X \oplus rK}(u) du.$$
(7.1)

Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ on introduit la quantité $\zeta_{X,K}^{(2)}(r) := \mathbb{E}[A(X \oplus rK)^2]$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ . De manière formelle $\zeta_{X,K}^{(2)}(r)$ se développe à l'aide de la formule de Steiner (2.5) de la manière suivante :

$$\begin{split} \zeta_{X,K}^{(2)}(r) = & \mathbb{E}[(A(X) + 2W(X, rK) + A(rK))^2] \\ = & \mathbb{E}[A(rK)^2 + 4W(X, rK)A(rK) + 2A(rK)A(X) + 4W(X, rK)^2... \\ & \dots + 4A(X)W(X, rK) + A(X)^2] \end{split}$$

et donc en utilisant les degrés d'homogénéité de l'aire et de l'aire mixte nous avons :

$$\zeta_{X,K}^{(2)}(r) = r^4 \cdot A(K) + 4r^3 \cdot A(K) \mathbb{E}[W(X,K)] + r^2 \cdot (2A(K)\mathbb{E}[A(X)]...$$
$$\dots + 4\mathbb{E}[W(X,K)^2]) + r \cdot 4\mathbb{E}[A(X)W(X,K)] + \mathbb{E}[A(X)^2] \quad (7.2)$$

De sorte que $\zeta_{X,K}^{(2)}$ ait une expression polynomiale. Supposons que $\mathbb{E}[A(X \oplus K)^2] < \infty$, alors les coefficients du polynôme $\zeta_{X,K}^{(2)}$ existent et donc $\zeta_{X,K}^{(2)}$ existe. De manière plus générale, quel que soit le convexe compact K pour que $\zeta_{X,K}^{(2)}$ existe il suffit que les moments d'ordre 2 des fonctionnelles de Minkowski de X existent(ici l'aire et le périmètre) voir proposition 7.1.3.

Remarquons que l'existence de $\zeta_{X,K}^{(2)}$ implique celle de $\mathbb{E}[A(X \oplus rK]$ pour tout $r \in \mathbb{R}_+$. Introduisons désormais pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ la quantité $\zeta_{X,K}^{(1)}(r) := \mathbb{E}[A(X \oplus rK)]$ de sorte que pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\zeta_{X,K}^{(1)}(r) = r^2 A(K) + 2r \mathbb{E}[W(X,K)] + \mathbb{E}[A(X)],$$
(7.3)

$$\zeta_{X,K}^{(2)}(r) - 2r^2 A(K) \zeta_{X,K}^{(1)}(r) = 4r^2 \mathbb{E}[W(X,K)^2] + 4r \mathbb{E}[A(X)W(X,K)] + \mathbb{E}[A(X)^2].$$
(7.4)

Ainsi quel que soit le convexe compact K choisi, les moments du premier et second ordre du vecteur aléatoire ${}^{t}(A(X), W(X, K))$ s'obtiennent facilement par évaluation des polynômes $\zeta_{X,K}^{(1)}$ et $\zeta_{X,K}^{(2)}$. En d'autre termes, ces moments s'obtiennent via les covariogrammes géométriques moyens de X dilatés par des convexes homothétiques à K. En effet, $\zeta_{X,K}^{(1)}(r) = \gamma_{X\oplus rK}(0)$ et $\zeta_{X,K}^{(2)}(r) = \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_{X\oplus rK}(u) du$.

Rappelons que l'aire mixte W(X, K) permet d'exprimer différentes caractéristiques géométriques de X, tel que le périmètre ou le diamètre de Féret. D'autre part, d'après le Théorème 2.5 la donnée de W(X, K) pour tout convexe K suffit à caractériser X. Cependant, nous ne disposons pas de cette donnée mais seulement de ses premiers et seconds moments. C'est pourquoi nous allons généraliser les résultats présentés ci-dessus affin d'obtenir des moments d'ordre quelconque.

7.1.2 *n*-Variogramme moyen d'un convexe aléatoire

Nous allons introduire ici une généralisation du concept de covariogramme géométrique, le *n*-variogramme $(n \ge 2)$ géométrique d'un convexe (voir Figure 7.1) et étudierons ses propriétés ainsi que celles de son espérance. Nous montrerons par la suite comment il permet d'exprimer les variations géométriques d'ordre n d'un convexe aléatoire.

Définition 7.1.1 (*n*-variogramme géométrique d'un convexe). Soit X un convexe compact de \mathbb{R}^d , pour $n \ge 2$, on appellera *n*-variogramme géométrique de X l'application suivante :

$$g_X^{(n)}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{d\times(n-1)} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (u_1, \cdots u_{n-1}) & \longmapsto & \nu_d(\bigcap_{i=1}^{n-1} (X - u_i) \cap X). \end{array}$$

De plus, on adoptera les conventions $g_X^{(1)}(...) = \nu_d(X)$ et $g_X^{(0)}(...) = 1$.



FIGURE 7.1 – Illustration du 3-variogramme géométrique d'un disque : l'aire de la partie rouge correspond au 3-variogramme géométrique évalué en (u_1, u_2) .

Proposition 7.1.1 (Propriétés du *n*-variogramme géométrique). Soient $n \ge 2$, X un convexe compact de \mathbb{R}^d et $g_X^{(n)}$ son *n*-variogramme géométrique, alors :

i) $g_X^{(n)}$ est invariant par permutation de ses variables :

$$\forall (u_1, \cdots , u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{d \times (n-1)}, \forall \sigma \in S_n, \ g_X^{(n)}(u_1, \cdots , u_{n-1}) = g_X^{(n)}(u_{\sigma(1)}, \cdots , u_{\sigma(n-1)})$$

ii) Pour tout $(u_1, \cdots u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{d \times (n-1)}$ on a :

$$g_X^{(n)}(-u_1,\dots-u_n) = g_{-X}^{(n)}(u_1,\dots-u_n),$$

et $g_X^{(n)}(-u_1,u_2\dots-u_{n-1}) = g_X^{(n)}(u_1,u_2-u_1,\dots-u_{n-1}-u_1)$

iii) Le rang du n-variogramme peut être réduit des manières suivantes :

$$\exists i \neq j, u_i = u_j \Rightarrow g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1}) = g_X^{(n-1)}(u_1, \cdots u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots u_{n-1}),$$

et $\exists i, u_i = 0 \Rightarrow g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1}) = g_X^{(n-1)}(u_1, \cdots u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots u_{n-1}).$

iv) Nous avons l'inégalité suivante :

$$\forall (u_1, \cdots , u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{d \times (n-1)}, \ 0 \le g_X^{(n)}(u_1, \cdots , u_{n-1}) \le g_X^{(n-1)}(u_1, \cdots , u_{n-2}).$$

- v) L'application partielle $u \mapsto g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-2}, u)$ est uniformément continue et de limite nulle lorsque $||u|| \to +\infty$. De plus, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, l'application $r \mapsto g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-2}, ru)$ est décroissante sur \mathbb{R}_+ .
- vi) Nous avons la formulation intégrale suivante :

$$g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_X(x) \mathbf{1}_X(x+u_1) \cdots \mathbf{1}_X(x+u_{n-1}) dx.$$
(7.5)

vii) Pour $n \ge 2$ et $0 \le k \le n$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} g_X^{(n)}(u_1, \cdots , u_{n-1}) du_1 \cdots du_k = \nu_d(X)^k g_X^{(n-k)}(u_{k+1}, \cdots , u_{n-1}).$$

En particulier pour k = n on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1}) du_1 \cdots du_{n-1} = \nu_d(X)^n.$$
(7.6)

Preuve. Les points i),ii),iii), et iv) sont triviaux compte tenue de l'expression du *n*-variogramme. Montrons v), soit $n \ge 2$, compte tenu de la majoration $g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-2}, u) \le g_X^{(2)}(u)$ ainsi que des propriétés du covariogramme géométrique $g_X^{(2)}$ (proposition 2.3.1), l'application partielle $u \mapsto$ $g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-2}, u)$ est uniformément continue et de limite nulle lorsque $||u|| \to +\infty$. Soient r et sdeux réels positifs tel que $r \le s$, notons $Y_r = X \cap (X - ru)$ et $Y_s = X \cap (X - su)$. Il est facile de voir que la convexité de X implique que $Y_s \subset Y_r$. D'autre part, $g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-2}, ru) = \nu_d(Z \cap Y_r)$ et $g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-2}, su) = \nu_d(Z \cap Y_s)$ avec $Z = \mathbb{R}^d$ si n = 2 et $Z = \bigcap_{i=1}^{n-2}(X - u_i)$ sinon. Dans tout les cas $Z \cap Y_s \subset Z \cap Y_r$ et donc $g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-2}, ru) \ge g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-2}, su)$. Montrons désormais vi), soit $n \ge 2$, remarquons que $\mathbf{1}_X(x)\mathbf{1}_X(x + u_1)\cdots \mathbf{1}_X(x + u_{n-1})$ est la fonction indicatrice de $\bigcap_{i=1}^{n-1}(X - u_i) \cap X$ ce qui prouve vi). Compte tenu de vi) nous avons vii) en appliquant le théorème de Fubini.

Nous avons montré que les propriétés du covariogramme se généralisent au *n*-variogramme. Nous allons désormais montrer que tout comme l'espérance du covarigramme d'un convexe aléatoire, l'espérance du *n*-variogramme d'un convexe aléatoire révèle d'importantes informations sur sa nature.

Définition 7.1.2. Soit X un convexe aléatoire satisfaisant $\mathbb{E}[\nu_d(X)] < \infty$ et $n \ge 0$, nous appelle-

rons n-variogramme moyen de X l'espérance de son n-variogramme :

$$\gamma_X^{(n)} : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^{d \times (n-1)} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (u_1, \cdots u_{n-1}) & \longmapsto & \mathbb{E}[g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1})] \end{vmatrix}$$

Notons tout d'abord que la condition $\mathbb{E}[\nu_d(X)] < \infty$ assure l'existence du *n*-variogramme moyen puisque $\forall (u_1, \cdots u_{n-1}), g_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1}) \leq \nu_d(X).$

Proposition 7.1.2. Soit X un convexe aléatoire de \mathbb{R}^d satisfaisant $\mathbb{E}[\nu_d(X)] < \infty$ and $n \ge 2$. Alors, le n-variogramme moyen a les propriétés suivantes :

i) $\gamma_X^{(n)}$ est invariant par permutation de ses variables :

$$\sigma \in S_n, \ \gamma_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1}) = \gamma_X^{(n)}(u_{\sigma(1)}, \cdots u_{\sigma(n-1)}).$$

ii) Pour tout $(u_1, \cdots u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{d \times (n-1)}$ on a :

$$\gamma_X^{(n)}(-u_1,\dots-u_n) = \gamma_{-X}^{(n)}(u_1,\dots-u_n),$$

et $\gamma_X^{(n)}(-u_1,u_2\dots-u_{n-1}) = \gamma_X^{(n)}(u_1,u_2-u_1,\dots-u_{n-1}-u_1)$

iii) Le rang de $\gamma_X^{(n)}$ peut être réduit des manières suivantes :

$$\exists i \neq j, u_i = u_j \Rightarrow \gamma_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1}) = \gamma_X^{(n-1)}(u_1, \cdots u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots u_{n-1}),$$

et $\exists i, u_i = 0 \Rightarrow \gamma_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1}) = \gamma_X^{(n-1)}(u_1, \cdots u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots u_{n-1}).$

iv) Nous avons l'inégalité suivante :

$$\forall (u_1, \cdots , u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{d \times (n-1)}, \ 0 \le \gamma_X^{(n)}(u_1, \cdots , u_{n-1}) \le \gamma_X^{(n-1)}(u_1, \cdots , u_{n-2})$$

- v) L'application partielle $u \mapsto \gamma_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-2}, u)$ est uniformément continue et de limite nulle lorsque $||u|| \to +\infty$. De plus pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ l'application $r \mapsto \gamma_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-2}, ru)$ est décroissante sur \mathbb{R}_+ .
- vi) Nous avons la formulation intégrale suivante :

$$\gamma_X^{(n)}(u_1,\cdots u_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(\{x, x+u_1,\cdots x+u_{n-1}\} \subset X) dx.$$

$$(7.7)$$

vii) Nous avons la relation :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1}) du_1 \cdots du_{n-1} = \mathbb{E}[\nu_d(X)^n].$$
(7.8)

Preuve. A l'exception de la formulation intégrale vi), les points de cette proposition découlent simplement de l'intégration des résultats précédents vis à vis de la distribution de X et des propriétés classiques de l'espérance. Notons tout de même que (7.8) reste vrai lorsque $\mathbb{E}[\nu_d(X)^n] = +\infty$. Montrons désormais vi), Notons $Z = \bigcap_{i=1}^{n-1} (X - u_i) \cap X$ alors $\gamma_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1}) = \mathbb{E}[\nu_d(Z)]$, donc d'après le théorème de Robin (proposition 3.2.1) on a : $\gamma_X^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(x \in Z) dx$. De plus, il est facile de voir que $\{x, x + u_1, \cdots x + u_{n-1}\} \subset X \Leftrightarrow x \in Z$, ce qui conduit au résultat. \Box

La relation (7.8) permet d'accéder au moment d'ordre n du volume d-dimensionnel de X. De plus, en dilatant X par un convexe K, elle fournit des informations sur les moments croisés d'ordre n des volumes mixtes de X et K.

7.1.3 Dilatations d'un convexe aléatoire et variations de ses volumes mixtes

Soit X un ensemble aléatoire convexe et K un convexe compact, rappelons la formule de Steiner :

$$\forall r \ge 0, \ \nu_d(X \oplus rK) = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} W_{d-k,k}(X,K) r^k, \tag{(2.5)}$$

où $W_{d-k,k}(X, K)$ désigne le volume mixte (d-k)-homogène en sa première variable et (k)-homogène en sa seconde, avec $W_{d,d}(X, K) = \nu_d(K)$ et $W_{d,0}(X, K) = \nu_d(X)$.

Définition 7.1.3 (Le moment d'ordre *n* du volume du dilaté $\zeta_{X,K}^{(n)}$). Soient $n \ge 0$, X un convexe aléatoire de \mathbb{R}^d et K un convexe compact, on appellera fonction $\zeta_{X,K}^{(n)}$ l'application suivante :

$$\zeta_{X,K}^{(n)} : \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ r & \longmapsto & \mathbb{E}[\nu_d(X \oplus rK)^n]. \end{aligned}$$
(7.9)

Proposition 7.1.3 (Condition d'existence de $\zeta_{X,K}^{(n)}$). Soient $n \ge 0$, X un convexe aléatoire de \mathbb{R}^d , alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et tout compact convexe K la quantité $\zeta_{X,K}^{(n)}(r)$ existe (i.e $\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall K \in \mathbb{K} \zeta_{X,K}^{(n)}(r) \in \mathbb{R}_+)$.
- ii) Pour tout compact convexe K les moments d'ordre n du vecteur aléatoire ${}^{t}(W_{d,0}(X,K),\cdots W_{d,d}(X,K))$ existent.
- iii) Les moments d'ordre n du vecteur aléatoire ${}^t(W_0(X), \cdots W_d(X))$ existent.

Preuve. Compte tenu de la formule de Steiner, de la positivité des variables $W_{d,0}(X,K), \cdots W_{d,d}(X,K)$ et de la linéarité de l'espérance, on a i) \Leftrightarrow ii). De plus, si on suppose ii) alors en prenant K = B la boule unité on obtient iii), donc ii) \Rightarrow iii). Supposons iii) et soit K un convexe compact, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $K \subset \alpha B$. Les moments de ${}^t(W_{d,0}(X,\alpha B), \cdots W_{d,d}(X,\alpha B))$ existent car $W_{d,k}(X,\alpha B) = \alpha W_k(X), \ k = 0, \cdots d$. De plus, $0 \leq W_{d,k}(X,K) \leq W_{d,k}(X,\alpha B), \ k = 0, \cdots d$ car les volumes mixtes sont positifs et croissants pour l'inclusion, donc les moments de ${}^t(W_{d,0}(X,K), \cdots W_{d,d}(X,K))$ existent et donc iii) \Rightarrow ii). \Box

Remarque 7.1.1. Cette propriété établie que pour que $\zeta_{X,K}^{(n)}$, $(n \ge 0)$ soit à valeurs réelles quel que soit le convexe compact K choisi, il suffit que les volumes intrinsèques de X admettent des moments d'ordre n.

Soit K un convexe compact, supposons que $\zeta_{X,K}^{(n)}$ soit à valeurs réelles. Remarquons tout d'abord que d'après (7.8), la fonction $\zeta_{X,K}^{(n)}$ s'exprime via le *n*-variogramme moyen de $X \oplus rK$:

$$\zeta_{X,K}^{(n)}(r) = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_{X \oplus rK}^{(n)}(u_1, \cdots , u_{n-1}) du_1 \cdots du_{n-1}.$$
(7.10)

De plus, en injectant (2.5) dans (7.9) on a :

$$\zeta_{X,K}^{(n)}(r) = \mathbb{E}[(\sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} W_{d-k,k}(X,K)r^{k})^{n}].$$
(7.11)

De sorte que $\zeta_{X,K}^{(n)}$ ait une expression polynomiale en r de degrés $n \times d$, on note donc :

$$\zeta_{X,K}^{(n)} = \sum_{j=0}^{nd} C_{n,j}^{(K)} r^j.$$
(7.12)

D'après la formule du multinôme de Newton, chaque coefficient $C_{n,j}^{(K)}$ de degrés $j \leq nd$, s'exprime comme une combinaison linéaire des espérances $\mathbb{E}[\prod_{k=0}^{d} W_{d-k,k}(X,K)^{p_k}]$ satisfaisant $j = \sum_{k=0}^{d} k \times p_k$ et $\sum_{k=0}^{d} p_k = n$. Bien sûr, les coefficients $C_{n,j}^{(K)}$ s'expriment facilement à partir de $\zeta_{X,K}^{(n)}$, mais ils ne permettent pas d'exprimer directement tous les moments d'ordre n du vecteur aléatoire ${}^t(W_{d,0}(X,K), \cdots W_{0,d}(X,K))$. Cependant, dans le cas du plan (d = 2) les moments des volumes d'ordre $\leq n$ mixtes s'expriment à partir des fonctions $\zeta_{X,K}^{(s)}$, $s \leq d$ de la manière suivante.

THÉORÈME 7.1 (Variation des volumes mixtes dans le plan)

Soient $n \ge 0$, X un convexe aléatoire de \mathbb{R}^2 et K un convexe compact, supposons que le vecteur aléatoire ${}^t(A(X), W(X, K), A(K))$ admette des moments d'ordre n. On note $\eta_{X,K}^{(n)}$ l'application suivante :

$$\eta_{X,K}^{(n)}(r) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j} A(K)^{j} r^{2j} \zeta_{X,K}^{(n-j)}(r).$$
(7.13)

Alors $\eta_{X,K}^{(n)}$ est une fonction polynômiale de degré n, si $M_{n,k}^{(K)}$ désigne son coefficient d'ordre k, alors pour tout $k = 1, \dots, n$;

$$M_{n,k}^{(K)} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\kappa}{2} \rfloor} (-1)^j A(K)^j \binom{n}{j} C_{2n-2j,k-2j}^{(K)},$$
(7.14)

$$=2^k \binom{n}{k} \mathbb{E}[A(X)^{n-k} W(X,K)^k], \qquad (7.15)$$

où $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{k}{2}$.

Preuve. Notons que d'après la formule de Steiner, $A(X) + 2rW(X, K) = A(X \oplus rK) - r^2A(K)$, ce qui implique

$$\mathbb{E}[(A(X) + 2rW(X, K))^n] = \mathbb{E}[(A(X \oplus K) - r^2A(K))^n].$$

En appliquant la formule du binôme à chaque côté de cette égalité et d'après la linéarité de
l'espérance, on a :

$$\eta_{X,K}^{(n)}(r) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} r^k \mathbb{E}[A(X)^{n-k} W(X,K)^k],$$
(7.16)

ce qui prouve (7.15). De plus, en injectant (7.12) dans (7.13) on a :

$$\eta_{X,K}^{(n)}(r) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{p=0}^{2(n-j)} \binom{n}{j} (-1)^j A(K)^j r^{2j+p} C_{2n-2j,p}^{(K)},$$

en applicant le changement de variable z = 2j + p, on a :

$$\begin{split} \eta_{X,K}^{(n)}(r) &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{z=2j}^{2n} \binom{n}{j} (-1)^{j} A(K)^{j} r^{z} C_{2n-2j,z-2j}^{(K)}, \\ &= \sum_{z=0}^{2n} \{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor} \binom{n}{j} (-1)^{j} A(K)^{j} C_{2n-2j,z-2j}^{(K)} \} r^{z}, \\ &= \sum_{z=0}^{n} \{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor} \binom{n}{j} (-1)^{j} A(K)^{j} C_{2n-2j,z-2j}^{(K)} \} r^{z}. \end{split}$$

Enfin, par identification avec (7.16) on obtient (7.14).

Remarque 7.1.2. Le Théorème 7.1 montre qu'en dimension 2, quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et $K \in \mathbb{K}$ les moments d'ordre n du vecteur des volumes mixtes ${}^{t}(A(X), W(X, K), A(K))$ s'expriment à partir des j-variogrammes moyens de $X \oplus K$ pour $j = 1, \dots n$.

THÉORÈME 7.2 (Caractérisation des convexes aléatoires du plan)

soient X_1 et X_2 deux convexes aléatoires de \mathbb{R}^2 tel que les distributions de ${}^t(A(X_j), U(X_j)), j = 1, 2$ soient *M*-déterminées [25]. Si

$$\forall n \ge 1, \ \forall K \in \mathbb{K}, \ \zeta_{X_1,K}^{(n)} = \zeta_{X_2,K}^{(n)}.$$
 (7.17)

Alors X_1 et X_2 ont même distribution à translation près.

Preuve. On adopte la notation $F \stackrel{\mathcal{L}}{=} G$ pour dire que F et G ont même loi. Pour tout convexe compact K, il existe une constante positive α tel que $K \subset \alpha B$ où B est la boule unité. De sorte que pour j = 1 ou 2 :

$$0 \le W(X_j, K) \le \frac{\alpha}{2} U(X).$$

Les vecteurs aléatoires ${}^{t}(A(X_{j}, W(X, K)_{j}), j = 1, 2$ sont donc *M*-déterminés. Ainsi, que que soit *K* :

$$\forall n \ge 1, \ \zeta_{X_1,K}^{(n)} = \zeta_{X_2,K}^{(n)} \Rightarrow W(X_1,K) \stackrel{\mathcal{L}}{=} W(X_2,K).$$
 (7.18)

Pour j = 1 ou 2 et quel que soit $K \in \mathbb{K}$ on note $v_j(K) := W(X_j, K)$. De sorte que v_{X_j} soit un processus aléatoire indexé par $K \in K$, montrons que v_{X_1} et v_{X_2} ont mêmes lois

finies-dimensionnelles, et donc même loi.

Soient $N \in \mathbb{N}$, K_1, \dots, K_N des convexes compacts et $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N_+$. Pour j = 1, 2 on considère la combinaison linéaire suivante :

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i W(X_j, K_i).$$

En notant $K = \bigoplus_{i=1}^{N} K_i$, on a :

$$W(X_j, K) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i W(X_j, K_i).$$

De sorte que d'après (7.18) on a :

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i W(X_1, K_i) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i W(X_2, K_i),$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_{X_1}(K_i) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_{X_2}(K_i).$$

Donc v_{X_1} et v_{X_2} ont mêmes lois finies-dimensionnelles et donc les processus aléatoires ont même distribution. Montrons désormais que ces processus caractérisent totalement les distributions de X_1 et X_2 à translation près.

Notons \mathcal{R} la relation d'équivalence "à translation près", autrement dit :

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^2, \ X = Y + t,$$

et notons $\tilde{X} \in \mathbb{K}/\mathcal{R}$ la classe d'un convexe compact X. Considérons l'application suivante :

$$f: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}/\mathcal{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{K}} \\ \tilde{X} & \longmapsto & v_X. \end{array} \right|$$

cette application est bien définie car l'aire mixte est invariante par translation, de plus elle est injective en vertu du Théorème 2.5. De sorte que l'on puisse définir l'application bijective $f^{-1}: Im(f) \longrightarrow \mathbb{K}/\mathcal{R}.$

On conclut donc que :

$$v_{X_1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} v_{X_2} \Rightarrow f^{-1}(v_{X_1}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} f^{-1}(v_{X_2}),$$
$$\Rightarrow \tilde{X}_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \tilde{X}_2.$$

Donc X_1 et X_2 ont même loi à translation près.

Remarque 7.1.3 (Condition de détermination de la distribution). Ce théorème établit

qu'un convexe aléatoire X est complètement déterminé (à translation près) par la donnée de $\zeta_{X,K}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ à condition que le vecteur aléatoire (A(X), U(X)) soit M-déterminé. En pratique cette condition est souvent satisfaite. En effet, pour que (A(X), U(X)) soit M-déterminé, il suffit que (A(X), U(X)) soit borné ce qui est le cas si le convexe aléatoire X est lui même borné, ce qui peut quasiment toujours être supposé en pratique.

7.2 Variations géométriques et diamètre de Féret dans le plan

Dans cette section nous discuterons le choix de la jauge K. Nous avons précédemment montré que pour un convexe aléatoire X et un convexe compact K, le *n*-variogramme du dilaté $X \oplus K$ permet d'exprimer les moments du vecteur aléatoire ${}^{t}(A(K), W(X, K))$. Rappelons que la distribution de l'aire mixte W(X, .) permet de caractériser celle du convexe aléatoire X. Cependant, les moments de ${}^{t}(A(X), W(X, K))$ ne décrivent pas directement la géométrie de X. C'est pourquoi, dans cette section nous discuterons le choix de la jauge K. En particulier, nous montrerons qu'un choix judicieux de K permet d'exprimer d'importantes caracteristiques géométriques de X. Par exemple, en choisissant une boule, le vecteur aléatoire ${}^{t}(A(X), W(X, K))$ devient ${}^{t}(A(X), U(X))$. D'autre part, en choisissant une famille de zonotopes (voir chapitre 8), les moments de l'aire mixte permettent d'exprimer ceux du processus aléatoire associé au diamètre de Féret de X. Enfin, nous étudierons les propriétés de ce processus aléatoire.

7.2.1 Volumes mixtes et caractéristiques géométriques

Soient $n \ge 1$ et X un convexe aléatoire de \mathbb{R}^2 , supposons que les moments d'ordre $\le n$ de ${}^t(A(X), U(X))$ existent. Notons B la boule unité de \mathbb{R}^2 et $S_{\theta} = R_{\theta}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ la rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$ du segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, rappelons alors (voir chapitre 2) :

$$W(X,B) = \frac{1}{2}U(X),$$
 (7.19)

$$W(X, S_{\theta}) = \frac{1}{2} H_X(\theta), \qquad (7.20)$$

où $H_X(\theta)$ désigne le diamètre de Féret de X dans la direction θ . Ainsi, le choix K = 2Bpermet d'exprimer les moments de ${}^t(A(X), U(X))$, et le choix $K = 2S_{\theta}$ fournit les moments de ${}^t(A(X), H_X(\theta))$. De sorte qu'avec les notations du Théorème 7.1, on ait :

$$\forall n \ge 1, \forall 0 \le k \le n, \ \mathbb{E}[A(X)^{n-k}U(X)^k] = \frac{M_{n,k}^{(B)}}{2^{2k} \binom{n}{k}},\tag{7.21}$$

 \mathbf{et}

$$\forall n \ge 1, \forall 0 \le k \le n, \ \mathbb{E}[A(X)^{n-k} H_X(\theta)^k] = \frac{M_{n,k}^{(S_\theta)}}{2^{2k} \binom{n}{k}}.$$
(7.22)

Ainsi les moments des marginales du processus aléatoire diamètre de Féret s'expriment en utilisant un segment de droite comme jauge. Cependant, de telles quantités ne permettent pas de caractériser complètement ce processus aléatoire. En effet, il faudrait que H_X soit M-déterminé et les moments de la distribution conjointe de tout vecteur extraits ${}^t(H_X(\theta_1), \cdots H_X(\theta_l))$ du processus H_X où $l \in \mathbb{N}^*$ et $(\theta_1, \cdots, \theta_l) \in [0, 2\pi]^l$.

Proposition 7.2.1 (Moments des vecteurs extrait H_X). Soient $n \ge 0$ et X un convexe aléatoire dont les moments d'ordre n de ${}^t(A(X), U(X))$ existent. Soient $l \in \mathbb{N}^*$, $(\theta_1, \dots, \theta_l) \in [0, 2\pi]^l$ et $(r_1, \dots, r_l) \in \mathbb{R}^l_+$. Considérons l'application suivante :

$$P_{X,(\theta_1,\cdots\theta_l)}^{(l,n)}: \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+^l & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (r_1,\cdots,r_l) & \longmapsto & \mathbb{E}[W(X,\bigoplus_{i=1}^l r_i S_{\theta_i})^n]. \end{aligned}$$
(7.23)

Alors $P_{X,(\theta_1,\cdots,\theta_l)}^{(l,n)}$ est un polynôme à l'variables de degré n, dont les coefficients sont exactement les moments d'ordre n du vecteur ${}^t(H_X(\theta_1),\cdots,H_X(\theta_l))$. En d'autres termes, le coefficient de $P_{X,(\theta_1,\cdots,\theta_l)}^{(l,n)}$ de degrés (j_1,\cdots,j_l) (avec $\sum_{i=1}^l j_i = n$) est $\mathbb{E}[\prod_{i=1}^l H_X(\theta_i)^{j_i}]$.

Preuve. Compte tenu de l'existence des moments d'ordre n de ${}^{t}(A(X), U(X))$ l'application $P_{X,(\theta_{1},\cdots,\theta_{k})}^{(k,n)}$ est bien définie. De plus, d'après l'additivité et l'homogénéité de l'aire mixte :

$$W(X, \bigoplus_{i=1}^{l} r_i S_{\theta_i}) = \sum_{i=1}^{l} r_i H_X(\theta_i).$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance et en utilisant la formule du multinôme, on a :

$$P_{X,(\theta_1,\cdots\theta_l)}^{(l,n)}(r_1,\cdots,r_l) = \mathbb{E}[W(X,\bigoplus_{i=1}^l r_i S_{\theta_i})^n],$$

$$= \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^l r_i H_X(\theta_i))^n],$$

$$= \sum_{j_1+\cdots,j_l=n} \binom{n}{j_1,\cdots,j_l} \mathbb{E}[\prod_{i=1}^l H_X(\theta_i)^{j_i}] \prod_{i=1}^l r_i^{j_i},$$

ce qui conclut la preuve.

Ainsi les moments $\mathbb{E}[\prod_{i=1}^{l} H_X(\theta_i)^{j_i}]$ peuvent être exprimés à partir de $P_{X,(\theta_1,\cdots,\theta_l)}^{(l,n)}$ par évaluation puis ajustement. Cependant, en pratique, l'évaluation de $P_{X,(\theta_1,\cdots,\theta_l)}^{(l,n)}$ pour de grandes valeurs de let n s'avère très coûteuse. C'est pourquoi, en pratique, on se limitera à l'auto-covariance de H_X ainsi qu'à ses moments marginaux $\mathbb{E}[H_X(\theta)^k], k \in \mathbb{N}$.

Proposition 7.2.2 (Moments d'ordre premier et second de H_X). Soit X un convexe aléatoire dont les moments d'ordre second de ${}^t(A(X), U(X))$ existent, alors :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi] \mathbb{E}[H_X(\theta)] = \frac{M_{1,1}^{(S_\theta)}}{4}, \qquad (7.24)$$

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi], \ \mathbb{E}[H_X(\theta_1)H_X(\theta_2)] = \frac{1}{2} (M_{2,2}^{(S_{\theta_1} \oplus S_{\theta_2})} - M_{2,2}^{(S_{\theta_1})} - M_{2,2}^{(S_{\theta_2})}).$$
(7.25)

Preuve. La relation (7.24) consiste en l'application de (7.15) avec $K = S_{\theta}$. Montrons la relation (7.25). Remarquons que $\forall \theta \in [0, 2\pi], \ M_{2,2}^{(S_{\theta})} = \mathbb{E}[H_X(\theta)^2]$, de plus d'après (7.15) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}M_{2,2}^{(S_{\theta_1}\oplus S_{\theta_2})} &= \mathbb{E}[W(X, S_{\theta_1}\oplus S_{\theta_2})^2], \\ &= \mathbb{E}[(\frac{1}{2}(H_X(\theta_1) + H_X(\theta_2)))^2], \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[H_X(\theta_1)H_X(\theta_2)] + \frac{1}{4}(\mathbb{E}[H_X(\theta_1)^2] + \mathbb{E}[H_X(\theta_2)^2]). \end{aligned}$$

donc :

$$\mathbb{E}[H_X(\theta_1)H_X(\theta_2)] = \frac{1}{2}M_{2,2}^{(S_{\theta_1}\oplus S_{\theta_2})} - \frac{1}{2}(\mathbb{E}[H_X(\theta_1)^2] + \mathbb{E}[H_X(\theta_2)^2]),$$

$$= \frac{1}{2}(M_{2,2}^{(S_{\theta_1}\oplus S_{\theta_2})} - M_{2,2}^{(S_{\theta_1})} - M_{2,2}^{(S_{\theta_2})}).$$

Notons que le processus aléatoire du diamètre de Féret $H_X = (H_X(\theta))_{\theta \in [0,\pi]}$ d'un convexe aléatoire X caractérise complètement son symétrisé $\frac{1}{2}(X \oplus \check{X})$. En effet, pour tout $\omega \in \Omega$, le diamètre de Féret $H_X(\omega) : [0,\pi] \to \mathbb{R}_+$ de la réalisation $X(\omega)$ coïncide avec la fonction support de la réalisation du symétrisé $\frac{1}{2}(X \oplus \check{X})(\omega)$. D'autre part, il est bien connu que la fonction support d'un convexe le caractérise [29]. Ainsi H_X caractérise le symétrisé $\frac{1}{2}(X \oplus \check{X})$ de X.

Ainsi si X est symétrique (i.e X présente une symétrie centrale) alors $X = \frac{1}{2}(X \oplus \check{X})$ et H_X le caractérise. En revanche si X n'est pas symétrique, H_X ne suffit pas à le caractériser. Cependant, le diamètre Féret fournit tout de même d'importantes informations sur sa morphologie, car un convexe partage avec son symétrisé plusieurs caractéristiques géométriques communes (voir Figure 7.2). En effet, de nombreux descripteurs morphologiques s'expriment à partir du diamètre de Féret (compacité, rapport d'aspect...).



FIGURE 7.2 – Des convexes asymétriques (à gauche) et leurs symétrisés (à droite).

7.2.2 Diamètre de Féret d'un convexe aléatoire

Soit X un convexe aléatoire, ici nous allons étudier certaines propriétés du processus aléatoire correspondant au diamètre de Féret de X.

Définition 7.2.1 (Processus du diamètre de Féret). Soit X un convexe aléatoire de \mathbb{R}^2 , pour tout $\omega \in \Omega$ p.s $X(\omega)$ est un convexe. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire positive $H_X(t) : \omega \mapsto H_{X(\omega)}(t)$ est presque sûrement définie. Le processus aléatoire $\{H_X(t), t \in \mathbb{R}\}$ noté H_X sera appelé processus du diamètre de Féret de X ou plus simplement diamètre de Féret de X.

Les trajectoires de H_X sont les diamètres de Féret des réalisations de X, donc les propriétés énoncées dans la proposition 2.3.3sont valables pour les trajectoires de H_X . En particulier, les trajectoires sont continues et π -périodiques. De plus, le processus du diamètre de Féret d'un convexe aléatoire X acquiert aussi d'importantes propriétés si X est isotrope.

Rappelons qu'un ensemble aléatoire est isotrope si sa distribution est invariante par isométries [23]. Soit s une réflexion de \mathbb{R}^2 , notons que toute isométrie de \mathbb{R}^2 s'écrit sous la forme $s^{\delta} \circ R$ avec $\delta \in \{0, 1\}$ où R est une rotation. De sorte à ce que l'on puisse introduire la définition suivante.

Définition 7.2.2 (version isotrope d'un ensemble aléatoire). Soient X' un convexe aléatoire, η une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi]$ indépendante de X', s une réflexion et δ une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ indépendante de X' et de η . Considérons le convexe aléatoire X suivant :

$$X := s^{\delta} R_{\eta}(X').$$

On dira alors que X est une version isotrope de X' ou isotropisée de X'.

Proposition 7.2.3. Soient X' un convexe aléatoire et X sa version isotropisée, alors X est isotrope.

Preuve. Soient X' un convexe aléatoire et $X = s^{\delta} R_{\eta}(X')$ sa version isotropisée. Donc quel que soit $K \in \mathfrak{K}$, compte tenu de l'indépendance de δ et X', on a :

$$T_X(K) = \mathbb{P}(s^{\delta} R_{\eta}(X') \cap K \neq \emptyset),$$

= $\frac{1}{2} \mathbb{P}((sR_{\eta}(X')) \cap K \neq \emptyset) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(R_{\eta}(X') \cap K \neq \emptyset).$

De plus, compte tenu de l'uniformité de η et de son indépendance avec X', on a :

$$T_X(K) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \mathbb{P}((sR_t(X')) \cap K \neq \emptyset) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(R_t(X') \cap K \neq \emptyset) dt.$$

Soit *m* une isométrie vectorielle de \mathbb{R}^2 , alors il existe $\delta_0 \in \{0, 1\}$ et $\eta_0 \in [0, 2\pi]$ tel que $m(X) = s^{\delta_0} R_{\eta_0}(X)$. De sorte que $m(X) = s^{\delta_0 + \delta} R_{\eta_0 + \eta}(X')$. Ainsi,

$$T_{m(X)}(K) = \mathbb{P}((s^{\delta_0 + \delta} R_{\eta_0 + \eta}(X')) \cap K \neq \emptyset),$$

$$= \frac{1}{2} \mathbb{P}((s^{\delta_0} R_{\eta_0+\eta}(X')) \cap K \neq \emptyset) + \frac{1}{2} \mathbb{P}((s^{\delta_0+1} R_{\eta_0+\eta}(X')) \cap K \neq \emptyset),$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \mathbb{P}((s^{\delta_0} R_{t+\eta_0}(X')) \cap K \neq \emptyset) + \frac{1}{2} \mathbb{P}((s^{\delta_0+1} R_{t+\eta_0}(X')) \cap K \neq \emptyset) dt,$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \mathbb{P}((s^{\delta_0} R_t(X')) \cap K \neq \emptyset) + \frac{1}{2} \mathbb{P}((s^{\delta_0+1} R_t(X')) \cap K \neq \emptyset) dt.$$

Donc quel que soit δ_0 , on a $T_{m(X)}(K) = T_X(K)$, et ainsi X est isotrope.

Soit X une version isotrope de X', notons tout d'abord que X et X' ont même forme. Nous allons montrer que le diamètre de Féret de X s'exprime facilement à partir de celui de X', en effet :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ H_X(\theta) = H_{X'}(\theta - \eta).$$

De sorte qu'en raison de l'indépendance de η et X', pour tout borélien B, on a :

$$\mathbb{P}(H_X(\theta) \in B) = \mathbb{P}(H_{X'}(\theta - \eta) \in B),$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{P}(H_{X'}(\theta - t) \in B) dt.$$

De plus, en raison de la π -périodicité du diamètre de Féret, on a :

$$\mathbb{P}(H_X(\theta) \in B) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathbb{P}(H_{X'}(\theta - t) \in B) dt.$$
(7.26)

Ainsi les moments du diamètre de Féret de X' s'expriment à partir de ceux de H_X , de la manière suivante.

Proposition 7.2.4 (Moments du diamètre de Féret de la version isotrope). Soient $n \ge 1$, X' un convexe aléatoire et X sa version isotrope. Supposons que les moments d'ordre n de $H_{X'}$ existent, alors ceux du processus H_X existent et s'expriment :

$$\forall (t_1, \dots t_n) \in [0, 2\pi]^n, \ \mathbb{E}[H_X(t_1) \dots H_X(t_n)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathbb{E}[H_{X'}(t_1 - \theta) \dots H_{X'}(t_n - \theta)] d\theta, \quad (7.27)$$

en particulier, pour n = 1 ou n = 2 on a :

$$\forall t \in [0, 2\pi], \ \mathbb{E}[H_X(t)] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathbb{E}[H_{X'}(\theta)] d\theta,$$
(7.28)

$$\forall (s,t) \in [0,2\pi]^2, \ \mathbb{E}[H_X(s)H_X(t)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathbb{E}[H_{X'}(\theta)H_{X'}(\theta+s-t)]d\theta.$$
(7.29)

Preuve. Soient $n \ge 1$, X' un convexe aléatoire et $X = s^{\delta} R_{\eta}(X')$ une version isotrope. Supposons que les moments d'ordre n de $H_{X'}$ existent. Rappelons que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $H_X(\theta) = H_{X'}(\theta - \eta)$ et que η est une variable uniforme indépendante de X'. De sorte que d'après le théorème de Fubini et la π -périodicité du diamètre de Féret, on a :

$$\forall (t_1, \cdots t_n) \in [0, 2\pi]^n, \ \mathbb{E}[H_X(t_1) \cdots H_X(t_n)] = \mathbb{E}[H_{X'}(t_1 - \eta) \cdots H_{X'}(t_n - \eta)],$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{E}[H_{X'}(t_1 - \theta) \cdots H_{X'}(t_n - \theta)] d\theta,$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathbb{E}[H_{X'}(t_1 - \theta) \cdots H_{X'}(t_n - \theta)] d\theta.$$

Les résultats pour les moments d'ordre premier et second se déduisent directement de (7.27).

Cette propriété montre que les caractéristiques du diamètre de Féret de la version isotrope d'un convexe aléatoire X sont directement obtenues à partir de celles du diamètre de Féret de X. De plus, un convexe aléatoire et sa version isotrope ont même morphologie. En conséquence, l'étude du diamètre de Féret peut être limitée aux cas où il se réfère à un convexe aléatoire isotrope sans perte de généralités.

Proposition 7.2.5 (Diamètre de Féret d'un convexe aléatoire isotrope). *Soit X un convexe aléatoire.*

- i. Si X est isotrope, alors le processus aléatoire $H_{X'}$ est stationnaire.
- ii. De plus, si X est symétrique alors la réciproque est vraie.

Preuve.

- i. Soient X un convexe aléatoire et $X' = R_{\eta}(X)$ une rotation de X. Si X' est isotrope, alors X et X' ont même distribution, et donc H_X et $H_{X'}$ ont aussi même distribution. D'autre part, $H_{X'}$ est le processus H_X translaté de η , ainsi H_X est stationnaire.
- ii. Supposons que X' soit symétrique et que H_X soit stationnaire. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, le processus $(H_X(\theta))_{\theta \in \mathbb{R}}$ et le processus translaté $(\tilde{H}_X(\theta) = H_X(\theta + x))_{\theta \in \mathbb{R}}$ ont même distribution. Notons que \tilde{H}_X est exactement le processus aléatoire du diamètre de Féret de $R_x(X)$. Or nous avons déjà établi que le diamètre de Féret caractérise les convexes symétriques, on conclut donc que pour tout $x \in \mathbb{R}, R_x(X)$ et X ont même distribution, donc X est isotrope (puisque pour un objet symétrique toute isométrie est une rotation).

7.3 Synthèse

En dimension arbitraire d, nous avons montré que les variations de caractéristiques géométriques d'un convexe aléatoire X s'expriment à partir des *n*-variogrammes géométriques moyens de ses dilatés. En d'autres termes, ces variations s'obtiennent par dilatations, translations, intersections puis mesures d'espérance de leurs volumes. En dimension arbitraire, ces variations ne permettent pas à priori de caractériser complètement le convexe aléatoire X.

Dans le cas d'un convexe aléatoire X du plan, cette méthode permet d'extraire tous les moments du vecteur aléatoire ${}^{t}(A(X), W(X, K))$ quel que soit le convexe compact K choisi. Nous avons montré que les distributions des vecteurs aléatoires ${}^{t}(A(X), W(X, K))$ lorsque K décrit K suffit à caractériser X à translation près. De plus, pour que le vecteur aléatoire ${}^{t}(A(X), W(X, K))$ soit M-déterminé, il suffit que le vecteur aléatoire ${}^{t}(A(X), U(X))$ le soit. Ainsi, l'évaluation des *n*-variogrammes géométriques moyens des dilatés de X permet de complètement caractériser X. Cependant, l'interprétation géométrique des moments de ${}^{t}(A(X), W(X, K))$, $K \in \mathbb{K}$ n'est pas directe, c'est pourquoi nous avons discuté du choix de la jauge K. En choisissant une boule, les moments de ${}^{t}(A(X), U(X))$ sont obtenus et en choisissant une somme de segments (un zonotope), les moments du processus aléatoire du diamètre de Féret sont obtenus.

Le diamètre de Féret d'un convexe aléatoire X du plan permet de caractériser son symétrisé. De sorte que si X est symétrique alors H_X le caractérise. Cependant si X n'est pas symétrique le diamètre reste utile puisque X partage de nombreuses caractéristiques géométriques avec son symétrisé (rapport d'aspect, facteur de compacité...). Nous avons étudié certaines propriétés du diamètre de Féret, en particulier, nous avons montré que le diamètre de Féret d'une version isotrope d'un convexe aléatoire X s'exprime à partir de celui de X. De sorte que, par la suite, on puisse toujours considérer que l'on travaille avec le diamètre de Féret d'un convexe aléatoire isotrope et symétrique. Rappelons que l'évaluation des moments du diamètre de Féret d'ordre élevé s'avère coûteuse, c'est pourquoi on se limitera à la moyenne et à l'auto-covariance de ce processus. On montrera alors comment ces quantités s'interprètent géométriquement.

Chapitre 8

Description des convexes aléatoires symétriques par des zonotopes aléatoires

8.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent, que pour $n \ge 1$ les variations d'ordre n du diamètre de Féret d'un convexe aléatoire X peuvent être obtenues via le n-variogramme géométrique de ses dilatés. L'objectif de ce chapitre est d'exploiter ces informations afin de décrire X. Le diamètre de Féret d'un convexe aléatoire X coïncide avec celui de son symétrisé $\frac{1}{2}(X \oplus \check{X})$, c'est pourquoi au lieu de s'intéresser au symétrisé $\frac{1}{2}(X \oplus \check{X})$ on considèrera que X est un convexe symétrique (i.e $X = \frac{1}{2}(X \oplus \check{X})$). Le diamètre de Féret sera exploité dans un cadre discret, c'est à dire que les moments du vecteur ${}^t(H_X(\theta_1), \cdots H_X(\theta_N))$ où $\theta_i = \frac{(i-1)\pi}{N}$, $i = 1 \cdots N$, seront utilisés pour décrire X. On montrera que ces derniers peuvent être reliés aux côtés d'un zonotope aléatoire décrivant X en terme de distance de Hausdorff. Ici nous nous limiterons aux moments d'ordre premier et second bien que ces résultats puissent être généralisés à n'importe quel ordre.

Dans la première section, le cas des convexes compacts déterministes sera traité. La notion de zonotope sera définie et certaines de leurs propriétés seront étudiées. Notons X un convexe compact déterministe, pour N > 1 une approximation $X_0^{(N)}$ de X en tant que zonotope sera définie. Il sera montré que cette approximation est consistante relativement à la distance de Hausdorff (ie : $N \to \infty \Rightarrow d_H(X, X_0^{(N)}) \to 0$) et que $X_0^{(N)}$ peut être caractérisé par la donnée ${}^t(H_X(\theta_1), \cdots H_X(\theta_N))$. Ensuite nous définirons $\tilde{X}_0^{(N)}$, une approximation à rotation près de X. Il sera montré que cette approximation est toujours plus fine que $X_0^{(N)}$, elle sera utilisée pour décrire la forme de X.

Dans la seconde section, nous aborderons le cas des convexes symétriques aléatoires, il s'agit d'une généralisation de la première partie. Nous montrerons qu'un ensemble aléatoire X presque sûrement à valeurs convexes symétriques, peut être approché aussi précisément que l'on souhaite par un zonotope aléatoire $X_0^{(N)}$. Il sera aussi défini $X_{\infty}^{(N)}$ une approximation de X à rotation près en tant que zonotope aléatoire isotrope. Les propriétés de ces approximations seront étudiées et il sera montré qu'elles peuvent être caractérisées à partir du diamètre de Féret de X. En particulier, nous monterons que les premier et second moments des vecteurs aléatoires associés aux côtés des approximations, peuvent être obtenus à partir de l'espérance et de l'auto-covariance du diamètre de Féret de X.

8.2 Approximation de convexes symétriques par des zonotopes

8.2.1 Approximation d'un convexe symétrique par un zonotope 0-régulier

Notons \mathcal{C} la classe des convexes symétriques de \mathbb{R}^2 , c'est à dire symétriques dans le sens de Minkowski : $X = \frac{1}{2}(X \oplus \check{X})$. Soit S_0 le segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et S_t sa rotation d'angle $t \in [0, \pi[$. Considérons désormais le convexe suivant :

$$X = \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i S_{\theta_i}, \ n \in \mathbb{N}^*, \ \forall i = 1, \cdots n, \ \alpha_i \in \mathbb{R}_+, \ \theta_i \in [0, \pi[.$$
(8.1)

Remarquons que X est un polygone symétrique convexe et compact, qui possède au plus 2n côtés (voir Figure 8.1). En particulier, $\forall i = 1, \dots, n, \alpha_i$ est la longueur des deux côtés de X orienté par θ_i . Remarquons que tout polygone symétrique convexe et compact a un nombre pair de côtés, et qu'il peut être représenté par (8.1). De plus, il est important de noter que X est d'intérieur non vide seulement si n > 1.



FIGURE 8.1 – Polygones symétriques convexes

Définition 8.2.1 (Zonotopes). Tout convexe compact s'écrivant sous la forme (8.1) sera appelé zonotope. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $\mathcal{C}^{(N)}$ la classe des zonotopes à au plus 2N côtés :

$$\mathcal{C}^{(N)} = \{ \bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i S_{\theta_i} | \alpha \in \mathbb{R}^N_+, \ \theta \in [0, \pi[^n]\},$$

 $o\dot{u} \ \alpha =^t (\alpha_1, \cdots \alpha_N) \ et \ \theta =^t (\theta_1, \cdots \theta_N).$

Plusieurs caractéristiques géométriques des zonotopes peuvent s'exprimer facilement à partir de la représentation (8.1).

Proposition 8.2.1 (Caractérisation géométrique des zonotopes). Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et X =

 $\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i S_{\theta_i} \in \mathcal{C}^{(N)}$, soit H_X son diamètre de Féret, U(X) son périmètre et A(X) son aire, alors :

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, \ H_X(\eta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i |\sin(\eta - \theta_i)|, \tag{8.2}$$

$$U(X) = 2\sum_{i=1}^{N} \alpha_i, \tag{8.3}$$

$$A(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j |\sin(\theta_i - \theta_j)|.$$
(8.4)

Preuve. Pour tout $(\beta, \eta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction d'appui du segment S_β dans la direction η s'écrit :

$$\begin{split} h_{S_{\beta}}(\eta) &= \max_{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \{ t(-\cos(\beta)\sin(\eta) + \sin(\beta)\cos(\eta)) \}, \\ &= \max_{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \{ t\sin(\beta - \eta) \}, \\ &= \frac{1}{2} |\sin(\beta - \eta)|, \\ &\Rightarrow H_{S_{\beta}}(\eta) = |\sin(\beta - \eta)|, \end{split}$$

de sorte que les points i et ii de la proposition 2.3.3 conduisent à (8.2). Remarquons que X est un polygone à 2N côtés, deux à deux de longueur $\alpha_i, i = 1, \dots, N$, le périmètre peut être obtenu en sommant les longueurs des côtés.

Le résultat (8.4) pour l'aire est obtenue par récurrence sur N : pour N = 1, $X = S_{\theta_1}$ et A(X) = 0donc (8.4) est vérifiée. Supposons que le résultat est vrai pour $n \leq N$ et montrons qu'il le reste pour N + 1. Notons que $X = (\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i S_{\theta_i}) \oplus \alpha_{N+1} S_{\theta_{N+1}}$ donc d'après la formule de Steiner :

$$A(X) = A(\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i S_{\theta_i}) + 2W(\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i S_{\theta_i}, \alpha_{N+1} S_{\theta_{N+1}}),$$

donc d'après (7.20):

$$2W(\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i S_{\theta_i}, \alpha_{N+1} S_{\theta_{N+1}}) = \alpha_{N+1} H_{\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i S_{\theta_i}}(\theta_{N+1}),$$

et finalement avec (8.2):

$$\begin{split} A(X) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i} \alpha_{j} |\sin(\theta_{i} - \theta_{j})| + \alpha_{N+1} H_{\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_{i} S_{\theta_{i}}}(\theta_{N+1}), \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i} \alpha_{j} |\sin(\theta_{i} - \theta_{j})| + \alpha_{N+1} \sum_{i=1}^{N} \alpha_{i} |\sin(\theta_{N+1} - \theta_{i})|, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_{i} \alpha_{j} |\sin(\theta_{i} - \theta_{j})|, \end{split}$$

ce qui prouve (8.4).

Par la suite nous travaillerons avec des subdivisions régulières. Nous montrerons que si la subdivision est suffisamment fine, n'importe quel convexe symétrique peut être approché aussi précisément que l'on souhaite par un zonotope.

Définition 8.2.2 (zonotope 0-régulier). Soit $N \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $\mathcal{C}_0^{(N)}$ la classe des zonotopes à au plus 2N côtés orientés par la subdivision régulière de $[0, \pi]$ à N éléments :

$$\mathcal{C}_0^{(N)} = \{\bigoplus_{i=1}^N \alpha_i S_{\theta_i} | \alpha \in \mathbb{R}_+^N\} \text{ with } \theta_i = \frac{(i-1)\pi}{N}, \ i = 1, \cdots N.$$

ces zonotopes seront appelés zonotopes 0-réguliers.

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{C}_0^{(N)} \subset \mathcal{C}^{(N)}$ et $\mathcal{C}_0^{(N_1)} \subset \mathcal{C}_0^{(N_2)}$ si et seulement si N_1 est un diviseur de N_2 . De plus, $\mathcal{C}_0^{(N)}$ peut être identifié à \mathbb{R}^N_+ , en effet l'application $\alpha \to X = \bigoplus_{i=1}^N \alpha_i S_{\theta_i}$ est un isormorphisme entre les semi-groupes $(\mathbb{R}^N_+, +)$ et $(\mathcal{C}_0^{(N)}, \oplus)$. En d'autre termes cette application est bijective et :

$$\forall (\alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^N_+ \times \mathbb{R}^N_+, \ (\bigoplus_{i=1}^N (\alpha_i + \alpha'_i) S_{\theta_i}) = (\bigoplus_{i=1}^N \alpha_i S_{\theta_i}) \oplus (\bigoplus_{i=1}^N \alpha'_i S_{\theta_i}).$$

THÉORÈME 8.1 (Approximation dans $\mathcal{C}_0^{(N)}$)

So t $X \in \mathcal{C}$, alors :

i. Pour tout N > 1, notons $F^{(N)}$ la matrice carrée $(|\sin(\theta_i - \theta_j)|)_{1 \le i,j \le N}$ et $H_X^{(N)} = {}^t (H_X(\theta_1), \cdots H_X(\theta_N))$, alors le convexe suivant :

$$X_0^{(N)} = \bigoplus_{i=1}^N (F^{(N)^{-1}} H_X^{(N)})_i S_{\theta_i},$$
(8.5)

est un élément de $\mathcal{C}_0^{(N)}$ qui satisfait :

$$\forall N > 1, \ d_H(X, X_0^{(N)}) \le (6 + 2\sqrt{2}) \sin(\frac{\pi}{2N}) diam(X),$$
(8.6)

où $diam(X) = \sup_{s \in \mathbb{R}} (H_X(s))$ désigne le diamètre de Féret maximal de X et d_H la distance de Hausdorff.

En conséquence, la suite de zonotopes 0-réguliers $(X_0^{(N)})_{N>1}$ approche X de la manière suivante :

$$d_H(X, X_0^{(N)}) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } N \longrightarrow \infty.$$
 (8.7)

L'ensemble $X_0^{(N)}$ sera appelé la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation de X.

ii. Pour tout N>1 l'ensemble $X_0^{(N)}{\rm est}$ l'unique élément de $\mathcal{C}_0^{(N)}$ satisfaisant :

$$H_{X_0^{(N)}}(\theta_i) = H_X(\theta_i), \ i = 1, \cdots N.$$
 (8.8)

iii. $X_0^{(N)}$ est un zonotope contenant X qui peut s'exprimer comme :

$$X_0^{(N)} = \bigcap_{i=1}^N \{ x \in \mathbb{R}^2, \ | < x, {}^t (-\sin(\theta_i), \cos(\theta_i)) > | \le \frac{1}{2} H_X(\theta_i) \}.$$
(8.9)

Preuve.

2. Soit N > 1 un entier, il est facile de voir que la matrice $F^{(N)}$ est inversible puisque $F^{(N)}$ est une matrice circulante [99], ses valeurs propres sont les coefficients de la transformée de Fourier discrète [100] du signal $|\sin(.)|$ (ces coefficients sont toujours positifs). Notons $\alpha = F^{(N)^{-1}}H_X^{(N)}$ de sorte que :

$$X_0^{(N)} = \bigoplus_{i=1}^N \alpha_i S_{\theta_i},$$

et montrons que $X_0^{(N)}$ est l'unique élément de $\mathcal{C}_0^{(N)}$ satisfaisant $H_{X_0^{(N)}}(\theta_i) = H_X(\theta_i), i = 1, \dots N.$

Supposons qu'il existe $X' \in \mathcal{C}_0^{(N)}$ tel que $H_{X'}(\theta_i) = H_X(\theta_i)$, $i = 1, \dots N$ alors X' peut s'écrire $X' = \bigoplus_{i=1}^N \alpha'_i S_{\theta_i}$ et donc $H_X^{(N)} = F^{(N)} \alpha'$. Par conséquent l'inversibilité de $F^{(N)}$ implique $\alpha = \alpha'$ et donc $X_0^{(N)} = X'$.

1. Cherchons une borne supérieure pour la distance de Hausdorff. Pour tout $\eta \in \mathbb{R}$ il existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\eta = \theta_i + \delta$ avec $|\delta| \leq \frac{\pi}{2N}$. D'après l'inégalité (2.30) avec $\theta = \theta_i, \beta = \delta$ appliqué à $X_0^{(N)}$, nous avons :

$$H_{X_0^{(N)}}(\eta) \le H_{X_0^{(N)}}(\theta_i) + 2|\sin(\frac{\delta}{2})|H_{X_0^{(N)}}(\theta_i + \frac{\delta + \pi}{2}).$$

En appliquant à nouveau (2.30) avec $\theta = \eta, \beta = -\delta$ pour X :

$$H_X(\theta_i) \le H_X(\eta) + 2|\sin(\frac{-\delta}{2})|H_X(\theta_i + \frac{\delta + \pi}{2}),$$

$$\Rightarrow -H_X(\eta) \le -H_X(\theta_i) + 2|\sin(\frac{\delta}{2})|H_X(\theta_i + \frac{\delta + \pi}{2}).$$

En considérant l'égalité $H_{X_0^{(N)}}(\theta_i)=H_X(\theta_i)$ ainsi que les deux inégalités précédentes, il vient :

$$H_{X_0^{(N)}}(\eta) - H_X(\eta) \le 2|\sin(\frac{\delta}{2})|(H_X(\theta_i + \frac{\delta + \pi}{2}) + H_{X_0^{(N)}}(\theta_i + \frac{\delta + \pi}{2})).$$

De la même manière, en utilisant (2.30) avec $\theta = \theta_i, \beta = \delta$ pour X, et avec $\theta = \eta, \beta = -\delta$ pour $X_0^{(N)}$, nous avons :

$$H_X(\eta) - H_{X_0^{(N)}}(\eta) \le 2|\sin(\frac{\delta}{2})|(H_X(\theta_i + \frac{\delta + \pi}{2}) + H_{X_0^{(N)}}(\theta_i + \frac{\delta + \pi}{2}))$$

Par conséquent, si on note $diam(X) = \sup_{\theta} \{H_X(\theta)\}$ et $diam(X_0^{(N)}) = \sup_{\theta} \{H_{X_0^{(N)}}(\theta)\},$ nous avons :

$$|H_X(\eta) - H_{X_0^{(N)}}(\eta)| \le 2\sin(\frac{\pi}{2N})(diam(X) + diam(X_0^{(N)})).$$
(8.10)

De plus,

$$\begin{split} H_{X_0^{(N)}}(\eta) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j |\sin(\theta_i + \delta - \theta_j)|, \\ &= \sum_{j=1}^N \alpha_j |\sin(\theta_i - \theta_j) \cos(\delta) - \cos(\theta_i - \theta_j) \sin(\delta)|, \\ &\leq |\cos(\delta)| \sum_{j=1}^N \alpha_j |\sin(\theta_i - \theta_j) + |\sin(\delta)| \sum_{j=1}^N |\sin(\theta_i - \theta_j + \frac{\pi}{2})|, \\ &\leq |\cos(\delta)| H_{X_0^{(N)}}(\theta_i) + |\sin(\delta)| H_{X_0^{(N)}}(\frac{\pi}{2}) \\ &\leq |\cos(\delta)| H_X(\theta_i) + |\sin(\delta)| diam(X_0^{(N)}), \\ &\leq |\cos(\delta)| diam(X) + |\sin(\delta)| diam(X_0^{(N)}), \\ &\leq diam(X) + \sin(\frac{\pi}{2N}) diam(X_0^{(N)}), \\ &\Rightarrow diam(X_0^{(N)})(1 - \sin(\frac{\pi}{2N})) \leq diam(X), \\ N \geq 2 \Rightarrow diam(X_0^{(N)}) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} diam(X). \end{split}$$

Donc d'après (8.10):

$$|H_X(\eta) - H_{X_0^{(N)}}(\eta)| \le 2\sin(\frac{\pi}{2N})(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1})diam(X),$$

$$\Rightarrow \sup_{\eta} |(H_X(\eta) - H_{X_0^{(N)}}(\eta))| = d_H(X, X_0^{(N)}) \le (6 + 2\sqrt{2})\sin(\frac{\pi}{2N})diam(X),$$

et donc $d_H(X, X_0^{(N)}) \longrightarrow 0$ as $N \longrightarrow \infty$.

3. Notons $Y_N = \bigcap_{i=1}^N \{x \in \mathbb{R}^2, | < x, (-\sin(\theta_i), \cos(\theta_i)) > | \le \frac{1}{2}H_X(\theta_i)\}$, et remarquons que $Y_N \in \mathcal{C}_0^{(N)}$. En effet, chaque ensemble de l'intersection est l'espace entre deux droites orientées par un des θ_i , donc Y_N est un polygone dont les faces sont dirigées par les θ_i et donc il appartient à $\mathcal{C}_0^{(N)}$.

De plus en raison de sa symétrie X s'écrit $X = \bigcap_{s \in [0,\pi]} \{x \in \mathbb{R}^2, | < x, t(-\sin(s), \cos(s)) > | \le \frac{1}{2}H_X(s)\}$ donc $X \subset Y_N$, ce qui implique $H_X \le H_{Y_N}$. De plus d'après l'expression de Y_N nous avons $i = 1, \dots, N, H_X(\theta_i) \ge H_{Y_N}(\theta_i)$. En conclusion, $i = 1, \dots, N, H_X(\theta_i) = H_{Y_N}(\theta_i)$, et donc d'après l'unicité démontrée précédemment $Y_N = X_0^{(N)}$.

Ce théorème montre qu'un corps convexe symétrique peut être approché aussi précisément que l'on veut par un zonotope 0-régulier. Remarquons que le choix de la suite $X_0^{(N)}$ n'est pas optimal. En effet, en prenant $\frac{diam(X)}{diam(X_0^{(N)})}X_0^{(N)}$, l'approximation est plus fine en terme de distance de Hausdorff. Cependant, la suite $X_0^{(N)}$ à des propriétés avantageuses : elle contient toujours X, l'approximation d'une somme de Minkowski est la somme de Minkowski des approximations, et le vecteur des longueurs des faces α s'exprime comme une combinaison linéaire du diamètre de Féret de X évalué sur la subdivision. De plus si $\exists M > 1, X \in C_0^{(M)}$ alors $X_0^{(M)} = X$ et X est une valeur d'adhérence de la suite $X_0^{(N)}$.

Remarque 8.2.1 (Équivalence entre diamètre de Féret et périmètre). Remarquons que diam(X) peut être remplacé par $\frac{1}{2}U(X)$ dans (8.6), car pour n'importe quel corps convexe X :

$$2diam(X) \le U(X) \le 4diam(X) \tag{8.11}$$

En effet, , par définition de diam(X) il existe un segment $S \subseteq X$ de longueur supérieure à diam(X)donc $U(X) \ge U(S) \ge 2diam(X)$. La seconde inégalité vient en remarquant qu'il existe un carré de côté diam(X) contenant X.

Remarque 8.2.2 (Expression de l'aire mixte par le diamètre de Féret). Le théorème 8.1 fournit une interprétation de l'aire mixte entre un convexe et convexe symétrique. En effet, soit N > 1 un entier, Y un convexe (pas nécessairement symétrique), X un convexe symétrique et $X_0^{(N)} = \bigoplus_{i=1}^N \alpha_i S_{\theta_i}$ sa $\mathcal{C}_0^{(M)}$ -approximation.

Alors en raison de la continuité de la mesure d'aire et de l'addition de Minkowski :

$$W(Y, X_0^{(N)}) \to W(Y, X) \text{ as } N \to \infty.$$

De plus, d'après le théorème 8.1, $W(Y, X_0^{(N)})$ peut s'exprimer :

$$W(Y, X_0^{(N)}) = \sum_{i=1}^{N} H_Y(\theta_i) \sum_{j=1}^{N} F_{ij}^{(N)^{-1}} H_X(\theta_j),$$

donc l'aire mixte W(Y, X) peut être calculée par :

$$W(Y,X) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} F_{ij}^{(N)^{-1}} H_Y(\theta_i) H_X(\theta_j).$$

Notons qu'une version continue de cette expression peut être formulée en terme de convolution (pour plus de détails voir [48]).

Il est facile de voir que la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation est sensible aux rotations : la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation d'une rotation de X n'est pas toujours la rotation de la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation de X. Considérons l'exemple suivant d'une ellipse.

Exemple 8.2.1. Soit X une ellipse de demi-axes a = 1 et b = 3, supposons que le grand axe est orienté horizontalement. Considérons tout d'abord le cas N = 2 et notons $X' := R_{\frac{\pi}{4}}(X)$.



FIGURE 8.2 – Les $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximations d'une ellipse X de demi-axes a = 1 et b = 3 et de X' sa rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

La Figure 8.2 montre que la $C_0^{(2)}$ -approximation de X est meilleure que celle de X'. En effet, $d_H(X, X_0^{(2)}) << d_H(X', X_0^{(2)})$ de plus l'approximation de la rotation n'est pas la rotation de l'approximation. Par conséquent, la $C_0^{(2)}$ -approximation ne peut être utilisée pour décrire la forme de X. Notons que pour l'ellipse X les orientations 0 et $\frac{\pi}{4}$ sont respectivement la meilleure et la pire orientation pour la $C_0^{(2)}$ -approximation.

Considérons désormais le cas plus général $N \geq 2$. Pour chaque $N = 2, \dots 20$, les $\mathcal{C}_0^{(N)}$ approximations de toutes les rotations $R_\eta(X)$ de X sont considérées. Parmi elles, la meilleure η_b et
la pire η_w orientations (pour la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation, en terme de distance de Hausdorff) furent retenues. Les distances de Hausdorff correspondantes sont représentées Figure 8.3. En conséquence,
quel que soit l'orientation de l'ellipse $R_\eta(X)$, pour $N = 2, \dots 20$ la distance de Hausdorff entre $R_\eta(X)$ et sa $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation se situe dans la zone grisée Figure 8.3. Remarquons que la différence entre la meilleure et la pire orientation décroît lorsque N augmente. Par conséquent, la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation ne peut être utilisée pour décrire la forme d'un objet pour de petites valeurs de
N. En revanche elle peut l'être pour de grandes valeurs de N.

Pour les raisons précitées, il peut être intéressant de travailler avec une approximation invariante par isométrie. Heureusement, pour un convexe symétrique X, la meilleure $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation (en terme de distance Hausdorff) de la famille des rotations de X, peut être utilisée pour définir une telle approximation.

8.2.2 Approximation d'un convexe symétrique par un zonotope régulier

Nous avons montré précédemment comment un convexe symétrique peut être approximé dans la classe $C_0^{(N)}$. Cette approximation est sensible aux rotations, cependant pour étudier la forme des corps convexes il est parfois nécessaire de travailler avec des descriptions invariantes par isométrie. C'est pourquoi nous allons définir ici une approximation invariante par rotations. Pour répondre à cet objectif, il nous faut travailler dans une classe d'approximation plus large.



FIGURE 8.3 – La distance de Hausdorff entre une ellipse de demi-axes (1,3) et sa $C_0^{(N)}$ approximation pour $N = 2, \dots 20$. Le cas de la meilleure orientation en rouge, et celui de pire
en bleu. La zone grisée représente l'ensemble des valeurs possibles pour cette distance.

Définition 8.2.3 (zontope t-régulier et zonotope régulier). Soient $t \in \mathbb{R}$ et N > 1 un entier, on notera $\mathcal{C}_t^{(N)}$ la classe des rotations d'angle t des éléments de $\mathcal{C}_0^{(N)}$:

$$\mathcal{C}_t^{(N)} = \{ R_t(X) | X \in \mathcal{C}_0^{(N)} \}.$$

Tout élément de $C_t^{(N)}$ sera appelé zonotope t-régulier à 2N faces. De plus, on notera $C_{\infty}^{(N)} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} C_t^{(N)}$ la classe des zonotopes réguliers à 2N faces.

Toutes les propriétés de $\mathcal{C}_0^{(N)}$ énoncées précédemment sont vraies pour $\mathcal{C}_t^{(N)}$, $t \in \mathbb{R}$, aussi nous pourrions définir une approximation dans cette classe. Cependant cela ne serait pas d'un grand intérêt, c'est pourquoi nous allons plutôt définir une approximation dans $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$.

THÉORÈME 8.2 (Approximation dans $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$)

Soit $X \in \mathcal{C}$, notons $X_0^N(t)$ la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation de $R_{-t}(X)$. i. Il existe $\tau \in [0, \pi[$ tel que : $d_H(R_{\tau}(X_0^N(\tau)), X) = d_H(X_0^N(\tau), R_{-\tau}(X)) = \min_{t \in \mathbb{R}} d_H(X_0^N(t), R_{-t}(X))$. (8.12) $X_0^N(\tau)$, aussi noté \tilde{X}_0^N , sera appelé la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation rotationnelle de X. ii. La $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation rotationnelle de X est invariante par rotation de X. Le zonotope $R_{\tau}(X_0^N(\tau))$ sera appelé la \mathcal{C}_{∞}^N -approximation de X et sera noté $X_{\infty}^{(N)}$.

Preuve.

1. Premièrement, en raison de la symétrie des zonotopes 0-réguliers nous avons :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathcal{C}_t^{(N)} = \mathcal{C}_{t+\pi}^{(N)} \Rightarrow \min_{t \in \mathbb{R}} d_H(X_0^N(t), R_{-t}(X)) = \min_{t \in [0,\pi]} d_H(X_0^N(t), R_{-t}(X)).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, notons $\alpha(t)$ le vecteur des faces de $X_0^N(t)$, alors pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\| \alpha(t) - \alpha(t+h) \|_{1} = \| F^{(N)^{-1}} (H^{(N)}_{R_{-t}(X)} - H^{(N)}_{R_{-t-h}(X)}) \|_{1},$$

$$\Rightarrow \| \alpha(t) - \alpha(t+h) \|_{1} \le \| F^{(N)^{-1}} \|_{1} \| H^{(N)}_{R_{-t}(X)} - H^{(N)}_{R_{-t-h}(X)} \|_{1}$$

Cependant, $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $H_{R_{-t-h}(X)}(\eta) = H_{R_{-t}(X)}(\eta+h)$, et par continuité du diamètre de Féret $\parallel H_{R_{-t}(X)}^{(N)} - H_{R_{-t-h}(X)}^{(N)} \parallel_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$ alors $\parallel \alpha(t) - \alpha(t+h) \parallel_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$. Donc, d'après l'expression du diamètre de Féret d'un zonotope (8.2), nous avons :

$$\begin{aligned} \forall \eta \in \mathbb{R}, \ |H_{X_0^N(t+h)}(\eta) - H_{X_0^N(t)}(\eta)| &= |(\sum_{i=1}^N (\alpha_i(t) - \alpha_i(t+h))| \sin(\eta - \theta_i)||), \\ &\leq N \max\{(\alpha_i(t) - \alpha_i(t+h))|i = 1, \cdots N\}, \end{aligned}$$

alors $|H_{X_0^N(t+h)}(\eta) - H_{X_0^N(t)}(\eta)| \to 0$ quand $h \to 0$ et finalement $d_H(X_0^N(t), X_0^N(t+h)) \to 0$ lorsque $h \to 0$. En conséquence, l'application $t \mapsto X_0^N(t)$ est continue par rapport à la distance de Hausdorff.

Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R}, \ H_{R_t(X_0^N(t))}(x) = H_{X_0^N(t)}(x-t)$ et $H_X(x) = H_{R_{-t}(X)}(x-t)$ donc :

$$H_{R_t(X_0^N(t))}(x) - H_X(x) = H_{X_0^N(t)}(x-t) - H_{R_{-t}(X)}(x-t)$$

$$\Rightarrow d_H(R_t(X_0^N(t)), X) = d_H(X_0^N(t), R_{-t}(X)),$$

$$\Rightarrow \min_{t \in \mathbb{R}} d_H(R_t(X_0^N(t)), X) = \min_{t \in \mathbb{R}} d_H(X_0^N(t), R_{-t}(X)).$$

De plus, pour tout $x, h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{split} |H_{R_t(X_0^N(t))}(x) - H_{R_{t+h}(X_0^N(t+h))}(x)| &= |H_{X_0^N(t)}(x-t) - H_{X_0^N(t+h)}(x-t)...\\ &\dots + H_{X_0^N(t+h)}(x-t) - H_{X_0^N(t+h)}(x-t-h)|\\ &\leq |H_{X_0^N(t)}(x-t) - H_{X_0^N(t+h)}(x-t)|...\\ &\dots + |H_{X_0^N(t+h)}(x-t) - H_{X_0^N(t+h)}(x-t-h)| \end{split}$$

alors la continuité du diamètre de Féret et de $t \mapsto X_N(t)$, implique celle de $t \mapsto R_t(X_0^N(t))$. En conséquence, l'application $t \mapsto d_H(X_0^N(t), X)$ est elle aussi continue, et donc le minimum $\min_{t \in [0,\pi]} d_H(R_t(X_0^N(t)), X)$ est atteint. Donc il existe $\tau \in [0,\pi]$ tel que $d_H(R_\tau(X_0^N(\tau)), X) = \min_{t \in \mathbb{R}} d_H(X_0^N(t), R_{-t}(X))$.

2. Montrons l'invariance par rotation, soient $\eta \in [0, \pi]$ et $Y = R_{\eta}(X)$, alors $Y_0^N(t)$ est la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -

approximation de $R_{-(t-\eta)}(X)$ et $Y_0^N(t) = X_0^N(t-\eta)$. De plus,

$$\min_{t \in \mathbb{R}} d_H(Y_0^N(t), R_{-t}(Y)) = \min_{t \in \mathbb{R}} d_H(X_0^N(t-\eta), R_{-(t-\eta)}(X)),$$
$$= \min_{t \in \mathbb{R}} d_H(X_0^N(t), R_{-(t)}(X)),$$
$$= d_H(X_0^N(\tau), R_{-\tau}(X)),$$

donc, $X_0^N(\tau)$ est une $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation rotationnelle de Y et sa $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation associée est $R_{\eta}(R_{\tau}(X_0^N(\tau)))$ (en effet, $Y_0^N(\tau + \eta) = X_0^N(\tau)$).

Ce théorème fournit d'importantes informations, en effet la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation d'un corps convexe symétrique X est le meilleur zonotope régulier à 2N faces contenant X, c'est toujours une meilleure approximation que la $\mathcal{C}_{0}^{(N)}$ -approximation.

Par conséquent cette approximation peut être utilisée pour de petites valeur de N. Par exemple pour N = 2, la $C_0^{(2)}$ -approximation d'une ellipse dépend de son orientation, mais pas sa $C_{\infty}^{(2)}$ approximation, il s'agit de la meilleure façon de placer l'ellipse dans un rectangle (voir Figure 8.4). Une illustration pour de plus grandes valeurs de N est représentée Figure 8.5.



FIGURE 8.4 – Une ellipse X et ses approximations : $X_2 \in \mathcal{C}_0^{(2)}$ (en bleu) et $R_{\tau}(\tilde{X}_2) \in \mathcal{C}_{\infty}^{(2)}$ (en rouge).

La précision de la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation est représentée Figure 8.3. Notons que sur cette figure, le cas de la meilleure orientation correspond à la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation. Par conséquent, la Figure 8.3 représente aussi la précision de la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation.

Cependant, la précision de la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation dépend aussi bien de la forme que de la taille de l'objet considéré, ce qui nous conduit à la remarque suivante.

Remarque 8.2.3 (Précision de la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation). La précision de la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ approximation décroît proportionnellement au facteur de taille. En effet, pour $Y := kX, k \in \mathbb{R}_+$,
on a $d_H(Y_{\infty}^{(N)}, Y) = kd_H(X_{\infty}^{(N)}, X)$ (car le diamètre de Féret est homogène).



FIGURE 8.5 – Les $C_0^{(N)}$ -approximations (à gauche) et $C_{\infty}^{(N)}$ -approximations (à droite) d'une ellipse de demi-axes (3,1) pour différentes valeurs de N(=3,4,10).

Afin d'étudier l'effet de la forme (indépendamment de celui de la taille) sur la précision de l'approximation, il nous faut considérer un descripteur de précision invariant par homothétie. Pour ce faire, le diamètre de Féret sera normalisé par le périmètre. D'après la formule de Cauchy (2.4) [29], le périmètre est égal à la masse totale du diamètre de Féret $\int_0^{\pi} H_X(\theta) d\theta$. Donc, d'après l'homogénéité du diamètre de Féret, une distance invariante par homothétie peut être définie par $\forall X, Y \in C, \ \tilde{d}_H(X,Y) := d_H(\frac{X}{U(X)}, \frac{Y}{U(Y)})$. Cette distance peut être utilisée pour étudier l'impact de la forme sur la précision de la $C_0^{(N)}$ -approximation indépendamment de la taille. Remarquons que ceci revient à utiliser la distance de Hausdorff usuelle en considérant des objets de périmètre unitaire, c'est ce que nous ferons dans cet exemple :

Considérons une ellipse X de périmètre unitaire et dont le ratio des axes est $k \in [1, +\infty[$, le cas k = 1 correspondant au disque. La précision de la $C_{\infty}^{(N)}$ -approximation en fonction de N et k est représentée Figure 8.6. En particulier, l'allure des courbes Figure 8.6 est très différente en fonction des valeurs de N. En effet, pour N = 2 la pire forme est le disque, ce qui n'est pas le cas pour d'autres valeurs de N. Notons que lorsque k croît, l'impact de N sur la qualité de l'approximation décroît. Ceci suggère, que plus un objet est allongé, plus nous pouvons choisir une petite valeur de N pour le décrire.

8.3 Zonotopes aléatoires et diamètre de Féret

L'objectif de cette section est d'étudier comment un zonotope aléatoire peut être représenté par ses côtés et comment cette représentation peut être caractérisée à partir du diamètre de Féret du zonotope aléatoire.

8.3.1 Description des zonotopes aléatoires par leurs côtés

Plusieurs classes de zonotopes aléatoires seront définies ici. En particulier, la classe des zonotopes aléatoires p.s à valeurs $C_0^{(N)}$ et celle de ceux p.s à valeurs $C_{\infty}^{(N)}$. Les propriétés des zonotopes aléatoires seront étudiées. En particulier, nous montrerons comment un zonotope aléatoire peut



FIGURE 8.6 – La distance de Hausdorff entre une ellipse de périmètre unitaire et sa $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ approximation, pour différentes valeurs de N et en fonction du ratio de ses axes k.

être décrit par un vecteur aléatoire correspondant à ses côtés.

Définition 8.3.1 (Zonotope aléatoire). Soit $N \ge 1$ un entier, un ensemble aléatoire X p.s à valeurs dans $\mathcal{C}^{(N)}$ sera appelé zonotope aléatoire à au plus 2N côtés où plus simplement zonotope aléatoire, lorsque qu'il n'y a pas de confusion possible.

De tels ensembles aléatoires sont p.s décrits par :

p.p.
$$\omega \in \Omega$$
, $X(\omega) = \bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i(\omega) S_{\beta_i(\omega)}$.

La distribution du couple (α, β) caractérise celle de X. Le vecteur aléatoire α sera appelé le vecteur des longueurs des faces de X.

D'après la proposition 8.2.1, quel que soit le vecteur des longueurs des faces α de X, les caractéristiques géométriques (diamètre de Féret, périmètre, aire) de X peuvent s'exprimer :

p.p.
$$\omega \in \Omega, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ H_X(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i |\sin(t - \beta_i)|,$$
 (8.13)

p.p.
$$\omega \in \Omega$$
, $U(X) = 2 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$, (8.14)

p.p.
$$\omega \in \Omega$$
, $A(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j |\sin(\beta_i - \beta_j)|.$ (8.15)

Proposition 8.3.1 (Conditions d'existence de l'auto-covariance du diamètre de Féret). Soit X un zonotope aléatoire à au plus 2N côtés et α un de ses vecteurs des longueurs des faces, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\mathbb{E}[U(X)^2] < \infty, \tag{8.16}$$

$$\alpha \in L^2(\mathbb{R}^N_+). \tag{8.17}$$

De plus, si elles sont satisfaites $\mathbb{E}[A(X)] < \infty$ et $\forall (s,t) \in [0,\pi]^2$, $\mathbb{E}[H_X(s)H_X(t)] < \infty$.

Preuve. D'après (8.14), $U(X)^2 = (2\sum_{i=1}^N \alpha_i)^2$, la première implication est triviale (α est à composantes positives).

La proposition 8.2.1 montre que : $\forall (s,t) \in [0,\pi]^2$,

$$H_X(s)H_X(t') = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j |\sin(s - \eta - \beta_i)\sin(t - \eta - \beta_i)|$$

$$\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j,$$

$$\leq \frac{1}{4}U(X)^2.$$

Donc l'espérance $\mathbb{E}[H_X(s)H_X(t)]$ existe et l'existence de $\mathbb{E}[A(X)]$ est due à l'inégalité isopérimétrique.

Définition 8.3.2 (Zonotope aléatoire 0-régulier). Soit N > 1 un entier, un ensemble aléatoire X p.s à valeurs $C_0^{(N)}$ sera appelé un zonotope aléatoire 0-régulier à au plus 2N côtés ou zonotope aléatoire 0-régulier lorsque qu'il n'y a pas de confusion possible.

Un zonotope aléatoire 0-régulier s'exprime donc :

p.p.
$$\omega \in \Omega$$
, $X(\omega) = \bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i(\omega) S_{\theta_i}$,

où θ_i , $i = 1, \dots N$ désigne la subdivision régulière de $[0, \pi]$.

La distribution du vecteur des longueurs des faces α caractérise complètement celle de X. De plus, cette relation est bijective; c'est à dire que la distribution de α est définie de manière unique.

Naturellement, les zonotopes aléatoires 0-réguliers peuvent être utilisés pour approcher les convexes symétriques aléatoires lorsque $N \to \infty$ (voir sous-section 8.4.1). Cependant, ce n'est pas toujours le meilleur moyen de modéliser un convexe symétrique aléatoire. En effet, on peut remarquer qu'un zonotope aléatoire 0-régulier n'est jamais isotrope. De plus, un grand nombre de faces est nécessaire pour modéliser de simples objets. Par exemple, il nous faut considérer un grand N pour approcher un ensemble aléatoire construit comme un carré aléatoire isotrope (voir Exemple 8.4.1). C'est pourquoi nous considèrerons une classe de zonotopes aléatoires plus large.

Définition 8.3.3 (Zonotope aléatoire régulier). Soit N > 1 un entier, on appelle zonotope aléatoire régulier tout ensemble aléatoire p.s à valeur dans $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$.

Un zonotope aléatoire régulier s'exprime donc :

$$X \stackrel{p.s}{=} R_x(\bigoplus_{i=1}^N \alpha_i S_{\theta_i}),$$

où x est une variable aléatoire sur $[0, \pi]$ et α un vecteur aléatoire à valeur \mathbb{R}^N_+ . On dira que α est le vecteur des longueurs des faces de X.

Proposition 8.3.2 (Zonotope régulier isotrope). Soit $X = R_x(\bigoplus_{i=1}^N \alpha_i S_{\theta_i})$ un zonotope aléatoire régulier isotrope, alors X a la même distribution que :

$$X \stackrel{p.s}{=} R_{\eta}(\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i S_{\theta_i}), \tag{8.18}$$

où η est une variable aléatoire uniforme sur $[0, \pi]$ indépendante de α .

Preuve. Soit $X = R_x(\bigoplus_{i=1}^N \alpha_i S_{\theta_i})$ un zonotope régulier isotrope et η' une variable aléatoire uniforme sur $[0, \pi]$ indépendante de α . Par définition de l'isotropie de X, l'ensemble aléatoire $R_{\eta'}(X)$ possède la même distribution que X. Soit $\eta = x + \eta'[\pi]$ alors $R_{\eta'}(X)$ s'exprime $R_{\eta}(\bigoplus_{i=1}^N \alpha_i S_{\theta_i})$. En conséquence, $R_{\eta}(\bigoplus_{i=1}^N \alpha_i S_{\theta_i})$ a la même distribution que X.

Montrons que η est une variable aléatoire uniforme indépendante de α . Soit B un Borélien de \mathbb{R}^N . Pour tout $t \in [0, \pi]$ on note E l'événement $E := \{\eta \in [0, t]\} \cap \{\alpha \in B\}$, alors :

$$E = \{\alpha \in B\} \cap (\bigcup_{z \in [0,\pi]} \{x = z\} \cap \{\eta' + z[\pi] \le t\}),$$
$$= \bigcup_{z \in [0,\pi]} \{\alpha \in B\} \{x = z\} \cap \{\eta' + z[\pi] \le t\}.$$

La réunion est disjointe, donc en raison de l'indépendance de η' :

$$\mathbb{P}(E) = \int_0^{\pi} \mathbb{P}(\{\alpha \in B\}\{x = z\}) \mathbb{P}(\{\eta' + z[\pi] \le t\}) dz.$$

Ainsi, la quantité $\mathbb{P}(\{\eta' + z[\pi] \leq t\})$ est indépendante de la valeur de z et elle peut être calculée $\mathbb{P}(\{\eta' + z[\pi] \leq t\}) = \frac{t}{\pi}$. En conséquence :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{t}{\pi} \int_0^{\pi} \mathbb{P}(\{\alpha \in B\} \{x = z\}) \mathbb{P}(\{\eta' + z[\pi] \le t\}) dz,$$
$$\mathbb{P}(E) = \frac{t}{\pi} \mathbb{P}(\{\alpha \in B\}),$$

donc η est une variable uniforme sur $[0, \pi]$ indépendante de α .

La proposition ci-dessus montre qu'un zonotope régulier isotrope peut toujours être décrit par (8.18). Un tel ensemble aléatoire est donc complément décrit par son vecteur des longueurs des faces α . Cependant, la réciproque est fausse. En effet, différentes distributions de α déterminent X, nous avons la proposition suivante.

Proposition 8.3.3 (Famille de vecteurs des longueurs des faces). Soit α un vecteur des longueurs des faces d'un zonotope régulier isotrope X. La famille $\mathcal{F}_N(X)$ des vecteurs des longueurs des faces de X peut être décrite comme :

$$\mathcal{F}_N(X) = \{ \alpha' \stackrel{p.s}{=} J^n \alpha | p.p. \ \omega \in \Omega, n(\omega) \in \{0 \cdots, N-1\} \},$$
(8.19)

où J désigne la matrice circulante $J = Circ(0, 1, 0, \dots 0)$.

Preuve. Par construction $\mathcal{F}_N(X)$ est non vide. Soit α, α' deux vecteur des longueurs des faces de X, alors il existe deux variables uniformes η et η' respectivement indépendantes de α et α' telles que :

$$p.p. \ \omega \in \Omega, \ \bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i(\omega) S_{\theta_i + \eta(\omega)} = \bigoplus_{i=1}^{M} \alpha'_i(\omega) S_{\theta_i + \eta'(\omega)},$$
$$\Rightarrow p.p. \ \omega \in \Omega, \ R_{-\eta'(\omega)}(\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i(\omega) S_{\theta_i + \eta(\omega)}) = R_{-\eta'(\omega)}(\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha'_i(\omega) S_{\theta_i + \eta'(\omega)}),$$
$$\Rightarrow p.p. \ \omega \in \Omega, \ \bigoplus_{i=1}^{N} \alpha'_i(\omega) S_{\theta_i} = \bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i(\omega) S_{\theta_i + \eta(\omega) - \eta'(\omega)}.$$

Donc, en raison de l'unicité du vecteur des longueurs des faces dans $\mathcal{C}_0^{(N)}$, presque pour tout $\omega \in \Omega$ il existe un entier $j(\omega) \in \{1, \dots, N\}$ tel que :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= (\theta_{j(\omega)} + \eta(\omega) - \eta'(\omega))[\pi] \text{ and } \alpha'_1(\omega) = \alpha_j(\omega), \\ \Rightarrow \theta_{j(\omega)} &= (\eta'(\omega) - \eta(\omega))[\pi] \text{ and } \alpha'_1(\omega) = \alpha_j(\omega), \\ \Rightarrow \alpha'_i(\omega) &= \alpha_{i+j-1[M]}(\omega), \\ \Rightarrow \alpha'(\omega) &= J^{j(\omega)-1}\alpha(\omega). \end{aligned}$$

Prenons p.p. $\omega \in \Omega$, $n(\omega) = j(\omega) - 1[N]$, alors $\alpha' = J^n \alpha$ et donc $\mathcal{F}_N(X) \subset \{\alpha' = J^n \alpha | \text{ p.p. } \omega \in \Omega, n(\omega) \in \{0 \cdots, N-1\}\}.$

L'autre sens de l'inclusion se démontre en choisissant η' tel que p.p. $\omega \in \Omega, \eta'(\omega) = \beta_{n(\omega)+1} + \eta[\pi]$. Pour un tel η' nous avons p.p. $\omega \in \Omega, X(\omega) = \bigoplus_{i=1}^{N} \alpha'_i(\omega) S_{\theta_i + \eta'(\omega)}$.

Définition 8.3.4 (Vecteur central). Soient $\alpha \in \mathcal{F}_N(X)$ et n une variable uniforme sur $\{0 \cdots, N-1\}$ indépendante de α . Le vecteur des longueurs des faces $\alpha' = J^n \alpha$ sera appelé vecteur central des longueurs des faces de X ou plus simplement vecteur central de X.

Remarquons qu'un vecteur central a toutes ses composantes identiquement distribuées. De plus, sa distribution présente d'intéressantes propriétés.

Proposition 8.3.4 (Unicité de la distribution centrale). Tous les vecteurs centraux ont même distribution. En d'autres termes, si $\tilde{\alpha}'$ et α' sont deux vecteurs centraux de X, alors ils ont même distribution. Cette distribution sera appelée la distribution centrale de X.

Preuve. Soient $\tilde{\alpha}'$ et α' deux vecteurs centraux de X. Alors, il existe un vecteur des longueurs des faces $\tilde{\alpha}$ et une variable uniforme \tilde{n} sur $\{0 \cdots, N-1\}$ tel que $\tilde{\alpha}' = J^{\tilde{n}} \tilde{\alpha}$. De plus, $\tilde{\alpha} \in \mathcal{F}_N(X)$ donc il existe n tel que $\tilde{\alpha} = J^n \alpha'$. En conséquence, $\tilde{\alpha}' = J^{\tilde{n}+n} \alpha'$. Prenons $n' = \tilde{n} + n[N]$, nous avons alors $J^{\tilde{n}+n} = J^{n'}$, et donc :

$$\tilde{\alpha}' = J^{n'} \alpha'.$$

Montrons que n' est uniforme sur $\{0 \cdots, M-1\}$ et indépendante de α' .

Pour $k \in \{0 \cdots, N-1\}$,

$$\mathbb{P}(\{n'=k\}) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=0}^{N-1} \{\tilde{n} = k - i[N]\} \cap \{n = i\}),$$

= $\sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{\tilde{n} = k - i[N]\})\mathbb{P}(\{n = i\}),$
= $\frac{1}{N},$

alors n' est uniforme sur $\{0 \cdots, N-1\}$. De plus, pour tout Borélien B et tout $k \in \{0 \cdots, N-1\}$:

$$\begin{split} \mathbb{P}(\{n'=k\} \cap \{\alpha' \in B\}) &= \mathbb{P}(\bigcup_{i=0}^{N-1} \{\tilde{n} = k - i[N]\} \cap \{n = i\} \cap \{\alpha' \in B\}), \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{\tilde{n} = k - i[N]\} \cap \{n = i\} \cap \{\alpha' \in B\}), \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{\tilde{n} = k - i[N]\}) \mathbb{P}(\{n = i\} \cap \{\alpha' \in B\}), \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{n = i\} \cap \{\alpha' \in B\}), \\ &= \frac{1}{N} \mathbb{P}(\{\alpha' \in B\}), \\ &= \mathbb{P}(\{n' = k\}) \mathbb{P}(\{\alpha' \in B\}). \end{split}$$

Montrons désormais que α' et $\tilde{\alpha}'$ ont même distribution. Soit $B = B_0 \times \cdots \times B_{N-1}$ un produit de Boréliens de \mathbb{R} . Tout d'abord, remarquons que $\forall k \in \{0 \cdots, N-1\}, \mathbb{P}(J^k \alpha' \in B) = \mathbb{P}(\alpha' \in B)$. En effet, par définition, α' s'exprime $\alpha' = J^n \alpha$ avec α un représentant de X et n une variable uniforme indépendante sur $\{0 \cdots, N-1\}$. Donc :

$$\mathbb{P}(\{\alpha' \in B\}) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=0}^{N-1} \{J^i \alpha \in B\} \cap \{n=i\}),$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{J^i \alpha \in B\}),$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{\alpha \in B_i \times \cdots B_0 \cdots B_{N-1-i}\}),$$

de la même manière,

$$\mathbb{P}(\{J^k \alpha' \in B\}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{J^{i+k} \alpha \in B\}),$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{\alpha \in B_{i+k} \times \cdots B_0 \cdots B_{N-1-i-k}\}),$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{\alpha \in B_i \times \cdots B_0 \cdots B_{N-1-i}\}),$$
$$= \mathbb{P}(\{\alpha' \in B\}).$$

De plus,

$$\mathbb{P}(\{\tilde{\alpha'} \in B\}) = \mathbb{P}(\bigcup_{k=0}^{N-1} \{J^k \alpha' \in B\} \cap \{n' = k\}),$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{J^k \alpha' \in B\}),$$
$$= \mathbb{P}(\{\alpha' \in B\}).$$

Finalement $\tilde{\alpha}'$ et α' ont même distribution.

Proposition 8.3.5. *Propriétés de la distribution centrale*

Soit α un vecteur central de X, alors les moments d'ordres premier et second de la distribution centrale ont les propriétés suivantes :

i. premier ordre :

$$\forall i = 1, \dots N, \ \mathbb{E}[\alpha_i] = \frac{U(X)}{2N}.$$
(8.20)

 $ii. \ second \ ordre$:

La matrice $C[\alpha] = (\mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j])_{1 \le i,j \le N}$ est une matrice circulante définie par sa première colonne $V[\alpha] = {}^t (\mathbb{E}[\alpha_1 \alpha_1], \cdots \mathbb{E}[\alpha_1 \alpha_N]) : C[\alpha] = Circ(V[\alpha])$. De plus, cette matrice est symétrique, elle ne dépend que de $(\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1)$ valeurs, où $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ désigne la partie entière par valeur inférieure de $\frac{N}{2}$. Notons $m = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ et $v = {}^t (\mathbb{E}[\alpha_1 \alpha_1], \cdots \mathbb{E}[\alpha_1 \alpha_{m+1}])$ alors si N est un entier pair $V = {}^t (v_0, \cdots v_{m-1}, v_m, v_{m-1}, \cdots v_1)$ et si N est impair alors $V = {}^t (v_0, \cdots v_m, v_m, \cdots v_1)$.

Preuve.

- 1. Le premier point est évident. En effet, les marginales de α sont identiquement distribuées $\forall i, j \mathbb{E}[\alpha_i] = \mathbb{E}[\alpha_j]$ et $U(X) = 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \Rightarrow \forall i = 1, \dots N, \mathbb{E}[\alpha_i] = \frac{U(X)}{2N}$.
- 2. Il a été montré que pour $k \in \{0 \cdots, N-1\}$, les variables α et $J^k \alpha$ ont même distribution, donc elles ont la même matrice de covariance. Ainsi $\forall 1 \leq i, j \leq N$:

$$\forall k \in \{0 \cdots, N-1\}, \ \mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j] = \mathbb{E}[\alpha_{i+k[N]+1} \alpha_{j+k[N]+1}],$$

donc $\mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j]$ est une matrice circulante qui ne dépend que de i - j[N] et à cause de sa symétrie elle ne dépend aussi que de j - i[N]. Soit $1 \leq i \leq j \leq N$ alors deux cas sont possibles, soit N = 2m est pair, et alors $\forall 0 \le k \le m - 1$:

$$\mathbb{E}[\alpha_1\alpha_{1+m+k}] = \mathbb{E}[\alpha_{1+m}\alpha_{1+k}] = \mathbb{E}[\alpha_{1+m+N-k}\alpha_{1+N}] = \mathbb{E}[\alpha_1\alpha_{1+m-k}],$$

donc en notant $V =^t (\mathbb{E}[\alpha_1\alpha_1], \cdots \mathbb{E}[\alpha_1\alpha_N])$ et $v =^t (\mathbb{E}[\alpha_1\alpha_1], \cdots \mathbb{E}[\alpha_1\alpha_{m+1}])$ on a $V =^t (v_0, \cdots v_{m-1}, v_m, v_{m-1}, \cdots v_1)$. Si N est impair, alors N = 2m + 1 et pour $0 \le k \le m$:

$$\mathbb{E}[\alpha_1\alpha_{1+m+k}] = \mathbb{E}[\alpha_{1+m+1}\alpha_{1+k}] = \mathbb{E}[\alpha_{2+m+N-k}\alpha_{1+N}] = \mathbb{E}[\alpha_1\alpha_{2+m-k}],$$

donc en notant $V[\alpha] = {}^t (\mathbb{E}[\alpha_1\alpha_1], \cdots \mathbb{E}[\alpha_1\alpha_N])$ et $v = {}^t (\mathbb{E}[\alpha_1\alpha_1], \cdots \mathbb{E}[\alpha_1\alpha_{m+1}])$ on a $V = {}^t (v_0, \cdots v_m, v_m, \cdots v_1)$. Finalement, $C[\alpha]$ est une matrice symétrique et circulante.

Exemple 8.3.1. Afin d'illustrer les propriétés des distributions des vecteurs des longueurs des faces, discutons du cas N = 2. Ainsi, $X = R_{\eta}(\alpha_1 S_0 \oplus \alpha_2 S_{\frac{\pi}{2}})$ avec η uniforme sur $[0, \pi]$ et indépendante de α .

De sorte que X soit un rectangle aléatoire isotrope décrit par les côtés (α_1, α_2) . Cependant, cette description n'est pas unique. En effet, considérons un rectangle déterministe décrit par ses côtés (a, b), il peut très bien être décrit par ses côtés (b, a). Cette simple inversion qui consiste à ne pas distinguer largeur et longueur, induit une grande diversité pour les distributions des vecteurs des longueurs des faces d'un rectangle aléatoire isotrope.

Prenons ce simple exemple : Y est de manière équiprobable un rectangle de côtés (1,2) ou un rectangle de côtés (3,4). Alors, il y a déjà quatre manières de décrire les côtés possibles de Y :

- (1,2) ou (3,4)
- (2,1) ou (3,4)
- (2,1) ou (4,3)
- (1,2) ou (4,3)

E donc il y a les quatre distributions correspondantes pour le vecteur des longueurs des faces : $\frac{1}{2}\Delta_{(1,2)} + \frac{1}{2}\Delta_{(3,4)}, \frac{1}{2}\Delta_{(2,1)} + \frac{1}{2}\Delta_{(3,4)}, \dots$ où $\Delta_{(a,b)}$ désigne la mesure de Dirac en (a,b). De plus, d'autres distributions conviennent. En effet, plusieurs distributions peuvent être construites à partir de ces quatre, telles que : $\frac{1}{4}\Delta_{(1,2)} + \frac{1}{4}\Delta_{(2,1)} + \frac{1}{2}\Delta_{(3,4)}$. Remarquons que la distribution centrale de Y est $\frac{1}{4}\Delta_{(1,2)} + \frac{1}{4}\Delta_{(2,1)} + \frac{1}{4}\Delta_{(4,3)}$.

Retournons à l'exemple plus général du rectangle aléatoire X de vecteur des longueurs des faces α . D'après ce qui a été dit précédemment, il est évident que n'importe quel vecteur des longueurs des faces α' de X peut être construit comme :

$$\alpha' = \begin{pmatrix} 1 - \delta & \delta \\ \delta & 1 - \delta \end{pmatrix} \alpha, \tag{8.21}$$

où δ est n'importe quelle variable de Bernoulli (i.e à valeur $\{0,1\}$). Notons que δ peut être éventuellement corrélée à α , c'est par exemple le cas lorsque l'on parle du couple largeur, longueur (la largeur est inférieure à la longueur).

Remarquons que
$$\begin{pmatrix} 1-\delta & \delta\\ \delta & 1-\delta \end{pmatrix} = J^{\delta}$$
, donc en prenant $\eta' = \eta + \delta \frac{\pi}{2}[\pi]$,
$$X = R_{\eta}(\alpha_1 S_0 \oplus \alpha_2 S_{\frac{\pi}{2}}) = R_{\eta'}(\alpha'_1 S_0 \oplus \alpha'_2 S_{\frac{\pi}{2}}).$$

On peut facilement montrer que η' est uniforme sur $[0, \pi]$ et indépendante de α' (voir la preuve de la proposition 8.3.4), alors α' est un vecteur des longueurs des faces de X.

Considérons désormais le cas de la distribution centrale. Soit δ une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ (i.e uniforme sur $\{0,1\}$) indépendante de α , et soit $\alpha' = J^{\delta}\alpha$ un vecteur central, alors d'après (8.21),

$$\alpha_1' = (1 - \delta)\alpha_1 + \delta\alpha_2,$$

$$\alpha_2' = \delta\alpha_1 + (1 - \delta)\alpha_2.$$

En conséquence, les moments du premier et second ordre de α' s'expriment :

$$\mathbb{E}[\alpha_1'] = \mathbb{E}[\alpha_2'] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\alpha_1 + \alpha_2],$$
$$\mathbb{E}[\alpha_1'^2] = \mathbb{E}[\alpha_2'^2] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\alpha_1^2 + \alpha_2^2],$$
$$\mathbb{E}[\alpha_1'\alpha_2'] = \mathbb{E}[\alpha_1\alpha_2].$$

Remarquons que la proposition 8.3.5 est bien vérifiée. En effet, $\mathbb{E}[\alpha'_1] = \mathbb{E}[\alpha'_2] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[U(X)]$ et la matrice $C[\alpha]$ est une matrice circulante qui dépend de deux paramètres.

8.3.2 Caractérisation d'un zonotope aléatoire régulier isotrope par son diamètre de Féret

Nous avons montré qu'un zonotope aléatoire régulier isotrope peut être décrit par la distribution centrale de son vecteur des longueurs des faces. Les propriétés de cette distribution ont été étudiées. Nous montrerons ici, comment ses caractéristiques peuvent être reliées aux caractéristiques géométriques du zonotope aléatoire. En particulier, nous donnerons des formules permettant de calculer les moments du premier et second ordre de la distribution centrale à partir de ceux du diamètre de Féret.

Soit X un zonotope aléatoire régulier et isotrope et α son vecteur des longueurs des faces. Rappelons que X s'exprime presque sûrement :

$$X = R_{\eta}(\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_i S_{\theta_i}),$$

où η est une variable aléatoire uniforme indépendante de $\alpha \geq 0$. Supposons que la condition $\mathbb{E}(U(X)^2) < \infty$ est satisfaite, donc d'après la Équation 8.3.1, $\alpha \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ et la moyenne et l'auto-covariance de H_X existe.

D'après 8.2.1, pour tout α représentant X, certaines caractéristiques géométriques de X s'expriment :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ H_X(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i |\sin(t - \eta - \theta_i)|,$$
$$U(X) = 2\sum_{i=1}^N \alpha_i,$$
$$A(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j |\sin(\theta_i - \theta_j)|.$$

Donc en considérant que $\alpha \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ et l'indépendance de α et η , leur espérances se calculent par intégration selon la distribution uniforme de η :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathbb{E}[H_X(t)] = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[\alpha_i],$$
(8.22)

$$\mathbb{E}[U(X)] = 2\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[\alpha_i], \qquad (8.23)$$

$$\mathbb{E}[A(X)] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j] |\sin(\theta_i - \theta_j)|, \qquad (8.24)$$

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, \ \mathbb{E}[H_X(t)H_X(t+t')] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j] k_S(t'+\theta_i-\theta_j),$$
(8.25)

où
$$\forall t \in \mathbb{R}, k_S(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin(t+z)\sin(z)| dz.$$
 (8.26)

Remarquons que k_S est une fonction π -périodique que l'on peut exprimer sur $[0, \pi]$ par :

$$k_S(t) = \frac{1}{2\pi} (2\sin^3(t) + \cos(t)(\pi - 2t + \sin(2t))).$$
(8.27)

D'après (8.25) et la stationnarité de H_X :

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, \ \mathbb{E}[H_X(t)H_X(t+t')] = \mathbb{E}[H_X(t)H_X(t-t')], \tag{8.28}$$

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j] k_S(t' + \theta_i - \theta_j) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j] k_S(t' + \theta_j - \theta_i).$$
(8.29)

Donc en introduisant la fonctionnelle suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall 1 \le i, j \le N, \ K_{ij}(t) = k_S(t + \theta_i - \theta_j), \tag{8.30}$$

nous avons :

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, \ \mathbb{E}[H_X(t)H_X(t+t')] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j] K_{ij}(t').$$
(8.31)

Proposition 8.3.6. Pour tout réel t, K(t) est une matrice circulante. De plus, en notant $(k_1(t), \dots k_N(t))$ la première ligne de K(t), $K(t) = Circ((k_1(t), \dots k_N(t)))$ et $\forall 1 \leq i, j \leq N$, $K_{ij}(t) = k_j(\theta_i + t)$.

Preuve. Montrons que K(t) est une matrice circulante. Pour tout réel t, la quantité $t + \theta_i - \theta_j$ dépend seulement de i - j donc K(t) est une matrice de Toeplitz. De plus, pour $1 \le i \le N - 1$, et $1 \le j \le N$, $K_{(i+1)j}(t) = k_S(t + \theta_i - (\theta_j - \frac{\pi}{N}))$ or $(\theta_j - \frac{\pi}{N}) = \theta_{\sigma(j)}$ où $\sigma(j) = (j - 2[N]) + 1$, donc $K_{(i+1)j}(t) = K_{i\sigma(j)}$. Ainsi la i+1 ième ligne de K(t) est une permutation cyclique de la i ième ligne de K(t), donc K(t) est une matrice circulante. De plus, $k_j(\theta_i + t) = k_S(t + \theta_i - \theta_j) = K_{ij}(t)$. \Box

Supposons désormais que α est un représentant central de X, nous allons montrer que les premier et second moments de la distribution centrale s'expriment à partir de ceux du diamètre de Féret.

THÉORÈME 8.3 (Moments de la distribution centrale)

Soit X un zonotope aléatoire isotrope de vecteur central α , alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots N, \ \mathbb{E}[\alpha_i] = \frac{\pi}{2N} \mathbb{E}[H_X(x)]$$
(8.32)

$$V[\alpha] = \frac{1}{N} K(0)^{-1} V[H_X^{(N)}], \qquad (8.33)$$

où V[x] désigne le vecteur ${}^{t}(\mathbb{E}[x_1x_1], \cdots \mathbb{E}[x_1x_N]).$

Preuve. α est un vecteur central de X, alors d'après la proposition 8.3.5 et (8.22) l'espérance de la distribution centrale s'exprime :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots N, \ \mathbb{E}[\alpha_i] = \frac{\pi}{2N} \mathbb{E}[H_X(x)].$$
 (8.34)

De plus, d'après la proposition 8.3.6 et la proposition 8.3.5, nous avons $\mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j] = V[\alpha]_{j-i[N]+1}$ et $K_{ij}(t) = k_{j-i[N]+1}$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[H_X(0)H_X(t)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j] K_{ij}(t),$$

= $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V[\alpha]_{j-i[N]+1} k_{j-i[N]+1}(t),$

$$\begin{split} &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i} V[\alpha]_{j-i[N]+1} k_{j-i[N]+1}(t) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i}^{N} V[\alpha]_{j-i[N]+1} k_{j-i[N]+1}(t), \\ &= \sum_{i=1}^{N} V[\alpha]_{1} k_{1}(t), \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=0}^{i-1} V[\alpha]_{s+1} k_{s+1}(t) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=0}^{N-i} V[\alpha]_{s+1} k_{N-s[N]+1}(t) - NV[\alpha]_{1} s_{1}(t), \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=0}^{i-1} V[\alpha]_{s+1} k_{s+1}(t) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{z=N}^{i} V[\alpha]_{N-z+1} k_{z[N]+1}(t) - NV[\alpha]_{1} k_{1}(t), \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=0}^{i-1} V[\alpha]_{s+1} k_{s+1}(t) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{z=N}^{i} V[\alpha]_{z[N]+1} k_{z[N]+1}(t) - NV[\alpha]_{1} k_{1}(t), \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=0}^{i-1} V[\alpha]_{s+1} k_{s+1}(t) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=i}^{N} V[\alpha]_{s[N]+1} k_{s[N]+1}(t) - NV[\alpha]_{1} k_{1}(t), \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=0}^{N-1} V[\alpha]_{s+1} k_{s+1}(t) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=i}^{N} V[\alpha]_{s[N]+1} k_{s[N]+1}(t) - NV[\alpha]_{1} k_{1}(t), \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=0}^{N-1} V[\alpha]_{s[N]+1} k_{s[N]+1}(t) - NV[\alpha]_{1} k_{1}(t), \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=0}^{N-1} V[\alpha]_{s[N]+1} k_{s[N]+1}(t) + \sum_{i=1}^{N} V[\alpha]_{1} k_{1}(t) - NV[\alpha]_{1} k_{1}(t), \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=0}^{N-1} V[\alpha]_{s[N]+1} k_{s[N]+1}(t) + \sum_{i=1}^{N} V[\alpha]_{1} k_{1}(t) - NV[\alpha]_{1} k_{1}(t), \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=0}^{N-1} V[\alpha]_{s+1} k_{s+1}(t), \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=0}^{N-1} V[\alpha]_{s+1} k_{s+1}(t), \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=0}^{N-1} V[\alpha]_{s+1} k_{s+1}(t), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[H_X(0)H_X(t)] = N \sum_{s=1}^N V[\alpha]_s k_s(t).$$
(8.35)

Notons $V[H_X^{(N)}] = {}^t (\mathbb{E}[H_X(0)H_X(\theta_1)], \cdots \mathbb{E}[H_X(0)H_X(\theta_N)])$, alors pour $1 \le i \le N$, $V[H_X^{(N)}]_i = N \sum_{s=1}^N V[\alpha]_s k_s(\theta_i) = N \sum_{s=1}^N V[\alpha]_s K_{is}(0)$ donc,

$$V[H_X^{(N)}] = NK(0)V[\alpha].$$
(8.36)

Remarquons que K(0) une matrice symétrique définie positive. En effet, pour $1 \leq i, j \leq N$, $K_{ij}(0) = k_S(\theta_i - \theta_j) = k_S(\theta_j - \theta_i) = K_{ji}(0)$ donc K(0) est symétrique. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^N$,

$${}^{t}xK(0)x = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_{i}x_{j}K_{ij}(0),$$

= $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_{i}x_{j}\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} |\sin(\theta_{i} - \theta_{j} + z)\sin(z)|dz,$

Chapitre 8. Description des convexes aléatoires symétriques par des zonotopes aléatoires

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j |\sin(z - \theta_i) \sin(z - \theta_j)| dz$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sum_{i=1}^N x_i |\sin(z - \theta_i)|)^2 dz.$$

Notons Y la variable aléatoire réelle définie par $Y = \sum_{i=1}^{N} x_i |\sin(z - \theta_i)|$ où z est une variable aléatoire uniforme sur $[0, \pi]$, alors ${}^t x K(0) x = \mathbb{E}[Y^2]$ donc ${}^t x K(0) x \ge 0$. De plus, ${}^t x K(0) x = 0$ si et seulement si Y = 0 presque sûrement, Y = 0 p.s $\Rightarrow \forall z \in [0, \pi], \sum_{i=1}^{N} x_i |\sin(z - \theta_i)| = 0 \Rightarrow x = 0$. Finalement K(0) est symétrique définie positive et donc inversible, de sorte que :

$$V[\alpha] = \frac{1}{N} K(0)^{-1} V[H_X^{(N)}].$$

Ce théorème montre que les premier et second moments de la distribution centrale s'expriment à partir de ceux du diamètre de Féret.

Remarquons que $V[\alpha]$ et $V[H_X^{(N)}]$ présentent des propriétés de symétrie. En effet, en notant $m = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, nous avons montré que si N est pair $V[\alpha] = t (v_0, \cdots v_{m-1}, v_m, v_{m-1}, \cdots v_1)$ et si N est impair $V[\alpha] = t (v_0, \cdots v_m, v_m, \cdots v_1)$, où $v_k = \mathbb{E}[\alpha_1 \alpha_{1+k}], \ k = 0, \cdots m$. Le vecteur $V[H_X^{(N)}]$ s'exprime de la même manière : $\forall i = 1, \cdots N, \ \pi - \theta_i = \frac{N-i+2-1}{N}\pi = \theta_{N-i+1[N]+1}$

$$V[H_X^{(N)}]_i = \mathbb{E}[H_X(0)H_X(\theta_i)],$$

= $\mathbb{E}[H_X(0)H_X(\pi - \theta_i)],$
= $V[H_X^{(N)}]_{N-i+1[N]+1}.$

Ainsi, si N est pair, $V[H_X^{(N)}] = {}^t (c_0, \cdots c_{m-1}, c_m, c_{m-1}, \cdots v_1)$, et si N est impair, $V[H_X^{(N)}] = {}^t (c_0, \cdots c_m, c_m, \cdots c_1)$, où $c_k = V[H_X^{(N)}]_{k+1}$, $k = 0, \cdots m$. En pratique, $V[\alpha]$ peut être calculé à partir des m + 1 ièmes premières composantes de $V[H_X^{(N)}]$ et le problème linéaire (8.36) peut être réécrit et résolu comme un problème de taille m + 1.

Remarque 8.3.1. En pratique, l'estimation de $\mathbb{E}[H_X(0)H_X(t)]$ pour $t \in [0,\pi]$ sera souvent bruitée. C'est pourquoi, il est plus judicieux de chercher $V[\alpha]$ au sens des moindres carrés. Soit $N' \ge m + 1$ et notons $0 = t_1 \le \cdots \le t_{N'} = \frac{\pi}{2}$ une subdivision de $[0,\pi]$ contenant $\{\theta_1, \cdots, \theta_{m+1}\}$. les points $(t_i)_{1\le i\le N'}$ seront les points d'observation. Rappelons que $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}], \quad \mathbb{E}[H_X(0)H_X(t)] =$ $\mathbb{E}[H_X(0)H_X(\pi-t)]$ donc nous pouvons considérer qu'il y a 2(N'-1) points d'observation : $z_i = t_i$ pour $i = 1, \cdots, N'$, et $z_i = t_{2N'-i}$ pour $i = N'+1, \cdots, 2N'-2$. Soit $Q_{ij} = Nk_j(z_i), \quad V[H_X^{(2(N'-1))}] = t$ $(\mathbb{E}[H_X(0)H_X(z_1)], \cdots, \mathbb{E}[H_X(0)H_X(z_{2(N'-1)})])$ alors d'après (8.35) :

$$V[H_X^{(2(N'-1))}] = QV[\alpha].$$

Finalement, si $\hat{V}[H_X^{(2(N'-1))}]$ est une estimation bruitée de $V[H_X^{(2(N'-1))}]$, l'estimateur aux moindres

carrés suivant de $V[\alpha]$ est meilleur que celui induit par (8.33),

$$\tilde{V}[\alpha] = \underset{V \in \mathbb{R}^{N}_{+}}{\arg\min} \|\hat{V}[H_{X}^{(2(N'-1))}] - QV\|^{2}.$$
(8.37)

Certaines propriétés des zonotopes aléatoires ont été discutées. Les zonotopes aléatoires 0-réguliers et réguliers ont été définis et étudiés. Nous avons montré qu'un zonotope 0-régulier est décrit par une unique distribution des longueurs des faces. Cette distribution est facilement reliée au diamètre de Féret du zonotope aléatoire 0-régulier considéré via les relations établies dans la première section.

Les différentes distributions d'un zonotope aléatoire régulier ont été décrites. Parmi elles, une peut être identifiée : la distribution centrale. Enfin, des formules permettant de décrire les moments d'ordre premier et second de la distribution centrale via ceux du diamètre de Féret ont été données. La section suivante sera consacrée à l'étude de la description des convexes aléatoires par des zonotopes aléatoires.

8.4 Description des convexes aléatoires symétriques par des zonotopes aléatoires via leurs diamètres de Féret

Dans la première section, il a été défini des approximations d'un convexe symétrique en tant que zonotopes. Dans la seconde, les zonotopes 0-réguliers et réguliers ont été étudiés. En particulier, nous avons montré qu'ils peuvent être caractérisés par leurs diamètres de Féret. L'objectif de cette section est de généraliser les approximations à un convexe symétrique aléatoire X.

Tout d'abord, nous montrerons que le zonotope aléatoire 0-régulier correspondant à la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ approximation de X peut être caractérisé à partir du diamètre de Féret de X. Ensuite, nous
montrerons que le zonotope aléatoire régulier et isotrope correspondant à la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation
d'une version isotrope de X peut être estimé à partir du diamètre de Féret de X.

8.4.1 Approximation d'un convexe aléatoire symétrique par un zonotope aléatoire 0-régulier

L'approximation d'un convexe aléatoire symétrique X par un zonotope aléatoire régulier sera étudiée ici. Nous montrerons que le zonotope aléatoire $X_0^{(N)}$ à valeurs dans $\mathcal{C}_0^{(N)}$ défini comme la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation des réalisations de X peut être caractérisée par le diamètre de Féret de X. Des formules permettant de calculer les moments du vecteur des faces de $X_0^{(N)}$ seront données.

Proposition 8.4.1 (Approximation par un zonotope aléatoire 0-régulier). Soit X un convexe aléatoire symétrique. Pour tout $\omega \in \Omega$ p.s, soit $X_0^{(N)}(\omega)$ la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation de $X(\omega)$. Le zonotope aléatoire 0-régulier $X_0^{(N)}$ sera appelé la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation de X.

Pour tout N > 1, un intervalle de confiance pour la distance de Hausdorff entre X et sa $C_0^{(N)}$ approximation peut être construit. En effet, pour tout a > 0 on a:

$$\mathbb{P}(d_H(X, X_0^{(N)}) > a) \le \frac{(6 + 2\sqrt{2})}{a} \sin(\frac{\pi}{2N}) \mathbb{E}[diam(X)].$$
(8.38)

Si $\epsilon \in [0,1]$ est un seuil de confiance, $a(\epsilon, N) = \frac{(6+2\sqrt{2})}{\epsilon} \sin(\frac{\pi}{2N}) \mathbb{E}[diam(X)]$ peut être considéré comme un majorant de $d_H(X, X_0^{(N)})$ avec la confiance $1 - \epsilon$. En conséquence, cette approximation est convergente lorsque $N \to \infty$.

Preuve. Soit X un convexe symétrique aléatoire. Pour tout $\omega \in \Omega$ p.s, on note $X_0^{(N)}(\omega)$ la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation de $X(\omega)$ dans $\mathcal{C}_0^{(N)}$. D'après le théorème 8.1, pour tout a > 0:

p.p.
$$\omega \in \Omega$$
, $d_H(X, X_0^{(N)}) \le (6 + 2\sqrt{2}) \sin(\frac{\pi}{2N}) diam(X)$,
 $\Rightarrow \mathbb{P}(d_H(X, X_0^{(N)}) > a) \le \mathbb{P}((6 + 2\sqrt{2}) \sin(\frac{\pi}{2N}) diam(X) > a)$.

En appliquant l'inégalité de Markov [101], on a :

$$\mathbb{P}(d_H(X, X_0^{(N)}) > a) \le \frac{(6 + 2\sqrt{2})}{a} \sin(\frac{\pi}{2N}) \mathbb{E}[diam(X)].$$

La convergence de l'approximation lorsque $N \to \infty$ se déduit directement de cette relation. \Box

Remarquons que d'après (8.11), $\mathbb{E}[diam(X)]$ peut être remplacé par $\frac{1}{2}\mathbb{E}[U(X)]$. De la même manière que dans le cas déterministe, le vecteur des longueurs des faces de la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation de X s'exprime à partir de son diamètre de Féret. D'autre part une vitesse de convergence peut être obtenue en fonction des propriétés d'intégration de diam(X). En effet, si diam(X) admet une fonction génératrice des moments, alors $\mathbb{E}[e^{(3+\sqrt{2})\pi diam(X)}] < \infty$ et une vitesse de convergence est donnée par :

$$\mathbb{P}(d_H(X, X_0^{(N)}) > a) \le e^{-aN} \mathbb{E}[e^{(3+\sqrt{2})\pi diam(X)}].$$
(8.39)

Proposition 8.4.2 (Caractérisation de la $C_0^{(N)}$ -approximation par le diamètre de Féret). Soient N > 1, X un convexe symétrique aléatoire et $X_0^{(N)}$ sa $C_0^{(N)}$ -approximation. Le vecteur des longueurs des faces α de $X_0^{(N)}$ s'exprime via le diamètre de Féret de X via :

$$p.p.\ \omega \in \Omega,\ \alpha(\omega) = F^{(N)^{-1}} H_X^{(N)}(\omega), \qquad (8.40)$$

$$\mathbb{E}[\alpha] = F^{(N)^{-1}} \mathbb{E}[H_X^{(N)}], \qquad (8.41)$$

$$C[\alpha] = F^{(N)^{-1}} C[H_X^{(N)}]^t F^{(N)^{-1}}, \qquad (8.42)$$

où $H_X^{(N)} = {}^t(H_X(\theta_1), \cdots H_X(\theta_N))$ est le vecteur aléatoire composé par le diamètre de Féret de X évalué sur la subdivision régulière. La matrice $F^{(N)}$ est toujours définie par $(|\sin(\theta_i - \theta_j)|)_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ et pour un vecteur x la notation C[x] désigne $\mathbb{E}[x^t x]$.

Preuve. D'après le théorème 8.1, la matrice $F^{(N)}$ est inversible donc par définition de l'approximation nous avons (8.40). Notons que $\alpha^t \alpha = F^{(N)^{-1}} H_X^{(N)t} H_X^{(N)t} F^{(N)^{-1}}$, donc par linéarité de l'espérance nous avons (8.41) et (8.42).

Remarque 8.4.1. La $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation d'un convexe aléatoire symétrique X converge lorsque $N \to \infty$. De plus, si X est déjà un zonotope aléatoire 0-régulier de $\mathcal{C}_0^{(N)}$, sa M^{th} approximation $X_0^{(M)}$ coïncide avec X si et seulement si N divise M.

Cette approximation est sensible aux rotations de X. En effet, si $R_{\eta}(X)$ est la rotation de X par l'angle aléatoire η alors X et $R_{\eta}(X)$ ont des approximations différentes. Cette propriété est tantôt un avantage et tantôt un inconvénient. Il s'agit d'un avantage si l'objectif est de décrire l'anisotropie d'un objet, cependant il faudra utiliser un nombre des longueurs des faces 2N assez grand. En revanche, lorsque l'objectif est de décrire la forme d'un convexe aléatoire avec un petit N sans tenir compte de sa direction, cette propriété devient un gros inconvénient, comme nous pouvons le remarquer dans l'exemple suivant.

Exemple 8.4.1. Soient N = 2 et $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ la subdivision régulière de $[0, \pi]$. Considérons le convexe aléatoire symétrique X défini comme le carré (déterministe) de côté 1, i.e. $X = S_{\theta_1} \oplus S_{\theta_2}$. Alors, sa $\mathcal{C}_0^{(2)}$ -approximation coïncide avec $X : X_0^{(2)} = X$. La matrice $F^{(N)}$ s'exprime :

$$F^{(N)} = F^{(N)^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

 $et \ donc :$

$$\mathbb{E}[\alpha_X] = \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}, C[\alpha_X] = \begin{pmatrix} 1 & 1\\1 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } Cov(\alpha_X) = 0.$$

Considérons désormais le convexe symétrique aléatoire $Y = R_{\eta}(X)$ où η est une variable aléatoire uniforme sur $[0, \pi]$, alors la moyenne et la covariance du diamètre de Féret peuvent être calculées (voir (8.25) à (8.27)) :

$$\mathbb{E}[H_Y^{(N)}] = \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi} \\ \frac{4}{\pi} \end{pmatrix} \text{ and } C[H_Y^{(N)}] = (1 + \frac{2}{\pi}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}[\alpha_Y] = \frac{4}{\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ C[\alpha_Y] = \begin{pmatrix} \pi + 2 \\ \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$Cov(\alpha_Y) = \frac{\pi^2 + 2\pi - 16}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble aléatoire Y est alors approximé par un rectangle aléatoire qui peut varier. Cet exemple montre que la $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation n'est pas l'outil approprié pour décrire la forme des convexes pour de petites valeurs de N.

Afin de décrire la forme d'un convexe aléatoire symétrique à l'aide d'un zonotope il faudra donc utiliser une approximation invariante par rotations.
8.4.2 Approximation d'un convexe aléatoire symétrique par un zonotope aléatoire régulier et isotrope.

Nous avons montré qu'un convexe symétrique aléatoire peut être approché par un zonotope aléatoire 0-régulier. Cependant cette approximation peut être problématique pour de petites valeurs de N. L'objectif ici, est de définir et caractériser une approximation dans $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ invariante par rotations. Pour ce faire, l'approximation sera faite pour une version isotropisée de X au lieu de X lui même. Nous montrerons qu'un convexe aléatoire symétrique peut être approximé, à rotation près, par un zonotope aléatoire régulier et isotrope.

Notons $Y = R_z(X)$ une version isotrope de X avec z une variable aléatoire indépendante uniforme sur $[0, \pi]$. Soit $X_{\infty}^{(N)}$ la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation de X, alors,

p.p.
$$\omega \in \Omega$$
, $X_{\infty}^{(N)}(\omega) = R_{\tau(\omega)}(\tilde{X}_0^{(N)}(\omega)).$

D'après la définition de la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation, l'ensemble aléatoire $Y_{\infty}^{(N)} = R_z(X_{\infty}^{(N)})$ est la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ approximation de Y, de sorte que $Y_{\infty}^{(N)} = R_{z+\tau}(\tilde{X}_0^{(N)})$. En raison de l'indépendance de η et Xet d'après les propriétés de l'addition modulo π , la variable $\eta = z + \tau$ est une variable aléatoire uniforme sur $[0, \pi]$ indépendante de X, donc $Y_{\infty}^{(N)}$ est un zonotope aléatoire régulier et isotrope, il sera utilisé comme approximation de X à rotations près.

Définition 8.4.1 ($\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation isotrope). Soit X un convexe aléatoire symétrique et $Y = R_z(X)$ sa version isotrope, le zonotope isotrope régulier $Y_{\infty}^{(N)} = R_z(X_{\infty}^{(N)})$ sera appelé $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ approximation isotrope de X et noté $\tilde{X}_{\infty}^{(N)}$.

Proposition 8.4.3 (Propriétés de la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation isotrope). Soit X un convexe aléatoire symétrique et $\tilde{X}_{\infty}^{(N)}$ sa $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation isotrope.

- i. $\tilde{X}_{\infty}^{(N)}$ est un zonotope aléatoire isotrope.
- *ii.* p.p. $\omega \in \Omega, \exists t(\omega) \in [0,\pi], \forall i = 1, \dots, N, H_X(t+\theta_i) = H_{\tilde{X}^{(N)}}(t+\theta_i).$
- *iii.* $p.p. \ \omega \in \Omega, d_P(X, Y_{\infty}^{(N)}) \to 0 \text{ lorsque } N \to \infty.$
- iv. La $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation isotrope est invariante par rotation de X.
- v. Si X est un zonotope régulier, tout vecteur des longueurs des faces de $\tilde{X}_{\infty}^{(N)}$ est un vecteur des longueurs des faces de X.

Preuve.

- 1. Remarquons que $\tilde{X}_{\infty}^{(N)}$ est une version isotrope de $X_{\infty}^{(N)}$, c'est donc un zonotope régulier isotrope.
- 2-4. Conséquence direct du Théorème 8.2.
 - 5. Supposons que X soit un zonotope régulier alors X et $\tilde{X}_{\infty}^{(N)}$ coïncident à une rotation aléatoire près, donc tout vecteur des longueurs des faces de l'un en est un de l'autre.

Une manière de décrire la forme de X serait de caractériser la distribution centrale de $\tilde{X}_{\infty}^{(N)}$ à partir de données accessibles sur X. Malheureusement il est impossible d'obtenir les caractéristiques de $H_{\tilde{X}_{\infty}^{(N)}}$ à partir de celles de H_X . Cependant, une estimation des moments de $H_{\tilde{X}_{\infty}^{(N)}}$ peut être faite à partir de ceux du diamètre de Féret d'une version isotrope de X (i.e. de H_Y , où Y est une version isotrope de X).

Proposition 8.4.4 (Estimation des moments de la distribution centrale). Soit X un convexe aléatoire symétrique, Y sa version isotrope, $\tilde{X}_{\infty}^{(N)}$ la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation isotrope de X et α le vecteur central de $\tilde{X}_{\infty}^{(N)}$.

i. Une estimation des premier et second moments de α est donnée par :

$$\hat{\mathbb{E}}[\alpha] = \frac{\pi}{2N} \mathbb{E}[H_Y^{(N)}], \qquad (8.43)$$

$$\hat{V}[\alpha] = \frac{1}{N} K(0)^{-1} V[H_Y^{(N)}].$$
(8.44)

Cette estimation converge lorsque $N \to \infty$: $\hat{\mathbb{E}}[\alpha] - \mathbb{E}[\alpha] \to 0$ et $\hat{V}[\alpha] - V[\alpha] \to 0$ quand $N \to \infty$.

ii. Si $\hat{\alpha}$ est un vecteur aléatoire à composantes positives satisfaisant $V[\hat{\alpha}] = \hat{V}[\alpha], \ \mathbb{E}[\hat{\alpha}] = \hat{\mathbb{E}}[\alpha]$ et η une variable aléatoire uniforme sur $[0, \pi]$, alors l'ensemble aléatoire \hat{X} défini par :

$$\hat{X} = R_{\eta} (\bigoplus_{i=1}^{N} \hat{\alpha}_i S_{\theta_i}), \qquad (8.45)$$

satisfait $\mathbb{E}[U(X)] = \mathbb{E}[U(\hat{X})].$

Preuve.

- 1. La convergence est triviale puisque $\mathbb{E}[H_Y^{(N)}] \to \mathbb{E}[H_{\tilde{X}_{\infty}^{(N)}}^{(N)}]$ et $V[H_Y^{(N)}] \to V[H_{\tilde{X}_{\infty}^{(N)}}^{(N)}]$ quand $N \to \infty$.
- 2. Soit $\hat{\alpha}$ un vecteur aléatoire à composantes positives satisfaisant $V[\hat{\alpha}] = \hat{V}[\alpha]$, $\mathbb{E}[\hat{\alpha}] = \hat{\mathbb{E}}[\alpha]$ et η une variable aléatoire uniforme sur $[0, \pi]$. En raison de l'isotropie de Y, le vecteur $\mathbb{E}[H_Y^{(N)}]$ a toutes ses composantes égales à $\frac{1}{\pi}\mathbb{E}[(U(Y)]]$, alors le zonotope aléatoire régulier et isotrope $\hat{X} = R_{\eta}(\bigoplus_{i=1}^{N} \hat{\alpha}_i S_{\theta_i})$ satisfait :

$$\mathbb{E}[U(\hat{X})] = 2 \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[\hat{\alpha}_i],$$
$$= \mathbb{E}[U(Y)],$$
$$= \mathbb{E}[U(X)].$$

Remarque 8.4.2. Remarquons tout d'abord que $\mathbb{E}[H_Y^{(N)}]$ et $V[H_Y^{(N)}]$ s'obtiennent à partir de la moyenne et de l'auto-covariance de H_X en utilisant la propriété 7.2.4. Les estimations $\hat{\mathbb{E}}[\alpha]$ et

 $\hat{V}[\alpha]$ peuvent être vues comme les moments d'un zonotope aléatoire régulier et isotrope \hat{X} qui a le même diamètre de Féret qu'une version isotrope de X sur les θ_i .

De plus, si X est un zonotope régulier à 2N faces, les estimations $\hat{\mathbb{E}}[\alpha]$ et $\hat{V}[\alpha]$ coïncident avec les moments du vecteur central des longueurs des faces de X. D'ailleurs, cette approche est d'autant plus efficace lorsque X est supposé être un zonotope régulier à 2N faces.

8.5 Synthèse

Plusieurs approximations de convexes symétriques en tant que zonotopes ont été présentées. Ces approximations ont par la suite été généralisées aux convexes aléatoires symétriques. Il a été montré qu'un convexe aléatoire symétrique peut être approximé aussi précisément que souhaité par un zonotope aléatoire régulier en terme de distance de Hausdorff. De plus de telles approximations coïncident lorsque le convexe aléatoire considéré est lui même un zonotope. Les zonotopes aléatoires réguliers ont été particulièrement étudiés, nous avons montré que leurs vecteurs de longueurs des faces s'expriment via leur diamètre de Féret. Ces relations permettent en particulier de caractériser un zonotope régulier à rotation près.

Plus précisément, pour un convexe aléatoire symétrique X, les moments des vecteurs des longueurs des faces des approximations s'expriment à partir des moments du diamètre de Féret de X. Ainsi, avec les résultats du chapitre 7, les moments des vecteurs des longueurs des faces des approximations s'expriment à partir des *n*-variogrammes moyens des dilatés de X par des zonotopes. Notons que les résultats présentés dans ce chapitre s'appliquent aussi lorsque X n'est pas symétrique (puisque le diamètre de Féret est insensible à la symétrisation), seulement dans ce cas les approximations considérées concernent le symétrisé $\frac{1}{2}(X \oplus \check{X})$.

Nous montrerons par la suite comment le *n*-variogramme moyen du grain primaire d'un modèle Booléen peut être estimé. De sorte que les résultats présentés s'appliquent au grain du modèle Booléen.

Quatrième partie

APPLICATION AU MODÈLE BOOLÉEN

Table des matières

| 9 | Est | imatio | n des variations géométriques du grain du modèle Booléen | 145 |
|---|------|--|---|------|
| | 9.1 | Estima | ation du <i>n</i> -variogramme moyen du grain | 145 |
| | | 9.1.1 | Expression du n -variogramme moyen du grain | 145 |
| | | 9.1.2 | Estimation du covariogramme géométrique moyen | 148 |
| 9.2 Estimation des variations géométriques d'ordre 2 du grain | | ation des variations géométriques d'ordre 2 du grain | 152 | |
| | | 9.2.1 | Estimation du moment d'ordre 2 du volume du grain | 152 |
| | | 9.2.2 | Estimation des variations géométriques du grain à l'ordre 2 et en dimension 2 | 2155 |
| 9.3 Synthèse | | | èse | 160 |
| 10 | Des | scriptio | on morphologique du grain du modèle Booléen | 163 |
| | 10.1 | Modèl | e Booléen à grains convexes | 163 |
| | | 10.1.1 | Approximation du grain par un zonotope aléatoire 0-régulier | 163 |
| | | 10.1.2 | Approximation du grain par un zonotope aléatoire régulier | 164 |
| | 10.2 | Modèl | e Booléen de zonotopes | 166 |
| | | 10.2.1 | Modèle Booléen de zonotopes aléatoires 0-réguliers | 166 |
| | | 10.2.2 | Modèle Booléen de zonotopes aléatoires réguliers | 167 |
| | 10.3 | Synthe | èse | 170 |

Table des matières

Chapitre 9

Estimation des variations géométriques du grain du modèle Booléen

Soit Ξ un modèle Booléen d'intensité $\lambda>0$ et de grain primaire $\Xi_0,$ en d'autres termes :

$$\Xi = \bigcup_{x_i \in \Phi} \Xi_i + x_i,$$

où Φ est un processus de Poisson stationnaire et les Ξ_i sont des convexes aléatoires i.i.d. Ce chapitre à pour objectif l'estimation des variations géométriques du grain primaire Ξ_0 . Un estimateur du *n*-variogramme moyen du grain sera proposé, ses propriétés seront par la suite discutées dans le cas du covariogramme moyen (n = 2). Dans un second temps, un estimateur du moment d'ordre 2 du volume du grain sera proposé, ses propriétés seront discutées puis sa qualité sera évaluée par simulation dans le cas de la dimension 2. Enfin, en dimension 2, l'estimateur du moment d'ordre 2 de l'aire du grain sera utilisé pour estimer les moments d'ordre 2 des volumes mixtes du grain ${}^t(A(\Xi_0), W(\Xi_0, .))$. La qualité de ces estimations sera alors évalués par simulation.

9.1 Estimation du *n*-variogramme moyen du grain

9.1.1 Expression du *n*-variogramme moyen du grain

Rappelons la relation fondamentale du modèle Booléen pour la capacité fonctionnelle (théorème 4.1, p.64):

$$\forall X \in \mathfrak{K}, \ T_{\Xi}(X) = P(\{\Xi \cap X \neq \emptyset\}),$$

=1 - exp(- $\lambda \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0 \oplus \breve{X})]),$
=1 - exp(- $\Psi_{\Xi}(X)$),

où $\Psi_{\Xi}(X) = -\ln(1 - T_{\Xi}(X)) = \lambda \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0 \oplus \check{X})]$. Le principe d'inclusion-exclusion énoncé après sera utilisé par la suite. La preuve est omise puisqu'elle est simplement établie par induction.

Proposition 9.1.1 (Principe d'inclusion-exclusion). Soient f une fonction d'ensemble C-additive

et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille non dégénérée de parties de \mathbb{R}^d , alors :

$$f(\bigcap_{i=1}^{n} A_{i}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \sum_{(i(1),\dots,i(k))\in I_{k}} f(\bigcup_{j=1}^{k} A_{i(j)}),$$

$$f(\bigcup_{i=1}^{n} A_{i}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \sum_{(i(1),\dots,i(k))\in I_{k}} f(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i(j)}),$$

 $o\dot{u} I_k = \{(i(1), \cdots i(k)) \in \{1, \cdots n\}^k \mid \forall l \le k, \forall m \le k, \ l \ne m \Rightarrow i(l) \ne i(m)\}.$

Le principe d'inclusion-exclusion (proposition 9.1.1) et l'expression de Ψ , fournissent une expression du *n*-variogramme moyen du grain primaire.

THÉORÈME 9.1 (Expression du n-variogramme géométrique moyen)

Soient $n \ge 2$, et $u_1, \dots u_{n-1} \in \mathbb{R}^d$ alors : $\gamma_{\Xi_0}^{(n)}(u_1, \dots u_{n-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\lambda k!} \sum_{(i(1), \dots i(k)) \in I_k} \ln(1 - T_{\Xi}(\{u_{i(1)}, \dots u_{i(k)}\})), \quad (9.1)$ où $u_n = 0$ et $I_k = \{(i(1), \dots i(k)) \in \{1, \dots n\}^k \mid \forall l \le k, \forall m \le k, l \ne m \Rightarrow i(l) \ne i(m)\}.$ De plus, si $\mathscr{C}_{\Xi}^{(n)}(x_1, \dots x_n) = \mathbb{P}(\{x_1, \dots x_n\} \subset \Xi)$ pour $x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}^d$ désigne la fonction de n-variance (n points probability function) alors : (n) (\dots, n) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (-1)^k \prod_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{i=1}^n (1 - \mathfrak{C}^{(j)})(1 - \mathfrak{C}^{(j)})

$$\gamma_{\Xi_0}^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1}) = \sum_{k=1}^n \sum_{(i(1), \cdots i(k)) \in I_k} \frac{(-1)^k}{\lambda k!} \ln(\sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \sum_{(z(1), \cdots z(j)) \in I_j} (1 - \mathscr{C}_{\Xi}^{(j)}(u_{i(z(1))}, \cdots u_{i(z(j))})))$$
(9.2)

Preuve. Soient $n \ge 2, u_1, \dots u_{n-1} \in \mathbb{R}^d$ et $u_n = 0$, alors d'après le principe d'inclusion exclusion :

$$\begin{split} \gamma_{\Xi_{0}}^{(n)}(u_{1},\cdots u_{n-1}) &= \mathbb{E}[\nu_{d}(\bigcap_{i=1}^{n} \Xi_{0} - u_{i})], \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \sum_{(i(1),\cdots i(k)) \in I_{k}} \mathbb{E}[\nu_{d}(\bigcup_{j=1}^{k} \Xi_{0} - u_{i(j)})], \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda k!} \sum_{(i(1),\cdots i(k)) \in I_{k}} \Psi_{\Xi}(\{u_{i(1)},\cdots u_{i(k)}\}), \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k}}{\lambda k!} \sum_{(i(1),\cdots i(k)) \in I_{k}} \ln(1 - T_{\Xi}(\{u_{i(1)},\cdots u_{i(k)}\})), \end{split}$$

ce qui conclue la preuve de (9.1). De plus, les quantités $\Psi_{\Xi}(\{u_{i(1)}, \cdots u_{i(k)}\}) = \ln(1 - T_{\Xi}(\{u_{i(1)}, \cdots u_{i(k)}\}))$ s'expriment à partir des fonctions k-variances $(k \leq n)$ évaluées sur les sousensembles de $\{u_1, \cdots u_n\}$:

$$\ln(1 - T_{\Xi}(\{u_{i(1)}, \cdots , u_{i(k)}\})) = \ln(\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{k} \{u_{i(j)} \notin \Xi\})),$$

$$= \ln\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \sum_{(z(1),\cdots z(j))\in I_{j}} \mathbb{P}\left(\bigcup_{l=1}^{j} \{u_{i(z(l))} \notin \Xi\}\right)\right),$$

$$= \ln\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \sum_{(z(1),\cdots z(j))\in I_{j}} (1 - \mathscr{C}_{\Xi}^{(j)}(u_{i(z(1))},\cdots u_{i(z(j))}))\right),$$

ce qui conduit à (9.2).

Notons tout d'abord que ce théorème reste valable pour le modèle général (à grains non nécessairement convexes), cependant dans ce contexte l'interprétation du *n*-variogramme s'avère plus complexe.

La relation (9.2) pour n = 2, correspond directement à l'expression bien connue du covariogramme moyen du grain (voir (4.6) chapitre 4) :

$$\gamma_{\Xi_0}(u) = \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \frac{C_{\Xi}(u) - p_{\Xi}^2}{(1 - p_{\Xi})^2}),$$

les expressions (9.1) et (9.2) consistent alors en une généralisation de ce résultat. En considérant l'estimateur non biaisé de la capacité fonctionnelle ou un estimateur de la fonction *n*-variance, un estimateur du *n*-variogramme moyen $\hat{\gamma}_{\Xi_0}^{(n)}$ est obtenu. Une estimation non biaisée et convergent de la fonction de *n*-variance $\mathscr{C}_{\Xi}^{(n)}$ à partir d'une réalisation de Ξ restreinte à une fenêtre d'observation W est donnée par [57] :

$$\hat{\mathscr{C}}_{\Xi,W}^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \frac{\nu_d((\Xi\cap W)\ominus\{0,x_1-x_n,\cdots,x_{n-1}-x_n\})}{\nu_d(W\ominus\{0,x_1-x_n,\cdots,x_{n-1}-x_n\})}.$$
(9.3)

Compte tenu des transformations logarithmiques mises en jeu par (9.1) et (9.2) l'estimateur $\hat{\gamma}_{\Xi_0}^{(n)}$ s'avère nécessairement biaisé. La convergence de estimateurs de la fonction *n*-variance ou de la capacité fonctionnelle lorsque $W \uparrow \mathbb{R}^d$ assure la convergence de $\hat{\gamma}_{\Xi_0}^{(n)}$ lorsque $W \uparrow \mathbb{R}^d$.

En pratique la fenêtre d'observation W est un paramètre fixé que l'on ne peut faire évoluée à souhait. C'est pourquoi il est préférable d'obtenir un estimateur $\hat{\gamma}_{\Xi_0}^{(n)}$ basé sur plusieurs observations de Ξ dans une fenêtre W qui converge lorsque le nombre d'observations augmente. En ce sens, le caractère non biaisé des estimateurs de la *n*-variance et de la capacité fonctionnelle est très utile. En effet, en considérant L observations indépendantes du modèle $\Xi(\omega_1) \cap W, \dots \Xi(\omega_L) \cap W$, ainsi que les estimateurs obtenus par moyenne des estimateurs de la *n*-variance et de la capacité fonctionnelle sur ces L observations, l'estimateur du *n*-variogramme moyen obtenu converge lorsque $L \to +\infty$.

Par conséquent, pour $r \in \mathbb{R}_+$ et un convexe K, le moment d'ordre n du volume du grain dilaté $\zeta_{\Xi_0,K}^{(n)}(r) = \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0 \oplus rK)^n] = \int_{\mathbb{R}^{d \times (n-1)}} \gamma_{\Xi_0 \oplus rK}^{(n)}(u_1, \cdots u_{n-1}) du_1 \cdots du_{n-1}$ peut être estimé sous certaines hypothèses (voir section 9.2). Ainsi, sous ces hypothèses, en dimension 2 les variations géométriques du grain sont alors estimées via le polynôme $\eta_{\Xi_0,K}^{(n)}(r)$ (voir chapitre 7 section 7.1). Cependant, pour de grandes valeurs de n, ces estimations s'avèrent coûteuses. Aussi, la qualité de

ces estimations sera discutée dans le cas n = 2, d = 2.

9.1.2 Estimation du covariogramme géométrique moyen

Nous discuterons ici de l'estimation du covariogramme géométrique moyen du grain, à partir de L observations indépendantes et identiquement distribuées du modèle Booléen Ξ dans une fenêtre W compacte convexe d'intérieur non vide.

Proposition 9.1.2. Soient $I_k = \Xi(\omega_k) \cap W$, $k = 1 \cdots L$, L observations indépendantes et identiquement distribuées du modèle Booléen Ξ dans une fenêtre W compacte convexe d'intérieur non vide. Alors les estimateurs de la covariance et de la fraction d'aire suivants :

$$\hat{C}_{\Xi,L}(u) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{L} \frac{\nu_d(I_k \cap (I_k + u))}{\nu_d(W \ominus \{0, u\})}, \ \forall u \in \mathbb{R}^d,$$
(9.4)

$$\hat{p}_{\Xi,L} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{L} \frac{\nu_d(I_k)}{\nu_d(W)},\tag{9.5}$$

sont non biaisés et convergent lorsque $L \to +\infty$.

Preuve. Compte tenu du caractère non biaisé des estimateurs de la covariance $\hat{C}_{\Xi,W}$ et de la fraction d'aire $\hat{p}_{\Xi,W}$ (voir section 4.2 et [57]), du caractère i.i.d des observations, la loi des grand nombre assure que les estimateurs $\hat{C}_{\Xi,L}$ et $\hat{p}_{\Xi,L}$ sont non biaisés et convergent lorsque $L \to +\infty$. \Box

Notons tout d'abord que $\hat{C}_{\Xi,L}(0) = \hat{p}_{\Xi,L}$. Nous supposerons toujours $\hat{p}_{\Xi,L} < 1$, cette hypothèse n'est pas réductrice puisque sinon les L réalisations du modèle sont toutes "pleines" et alors aucune information ne peut être extraite de telles données. De la même manière on supposera $\hat{p}_{\Xi,L} > 0$, car sinon soit les L observations sont "vides", soit le grain est de volume presque sûrement nul (le covariogramme géométrique moyen est alors identiquement nul).

En notant $\hat{\lambda} > 0$ un estimateur de l'intensité du modèle (voir section 4.3), les estimateurs précités permettent de construire un estimateur du covariogramme géométrique moyen convergent lorsque $L \to +\infty$ de la manière suivante :

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \ \hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) = \frac{1}{\hat{\lambda}} \ln(1 + \frac{\hat{C}_{\Xi,L}(u) - \hat{p}_{\Xi,L}^2}{(1 - \hat{p}_{\Xi,L})^2}).$$
(9.6)

Cet estimateur s'avère nécessairement biaisé puisque la relation mise en jeu n'est pas linéaire. Cependant, ce biais peut être contrôlé par les erreurs absolues commises sur les estimations de λ, p_{Ξ} et C_{Ξ} de la manière suivante.

Proposition 9.1.3 (Contrôle du biais sur le covariogramme géométrique moyen). Soient $\epsilon_{\lambda} = \frac{|\hat{\lambda}-\lambda|}{\lambda}, \epsilon_{p} = \frac{|\hat{p}_{\Xi,L}-p_{\Xi}|}{p_{\Xi}} et \epsilon_{C}(u) = \frac{|\hat{C}_{\Xi,L}(u)-C_{\Xi}(u)|}{C_{\Xi}(u)}, u \in \mathbb{R}^{d}$ les erreurs absolues commises sur les estimations de λ, p_{Ξ} et C_{Ξ} . Notons $\epsilon(u) := \max\{\epsilon_{C}(u), \epsilon_{p}\}$ Supposons que $\epsilon(u) < \max\{\frac{(1-p_{\Xi})^{2}}{3p_{\Xi}}, 1\}$,

alors pour $u \in \mathbb{R}^d$, :

$$\left|\hat{\gamma}_{\Xi_{0},L}(u) - \gamma_{\Xi_{0}}(u)\right)\right| \leq \frac{p_{\Xi}\epsilon(u)}{\lambda(1-\epsilon_{\lambda})} \left(\frac{3}{(1-p)^{2} - 3p_{\Xi}\epsilon(u)} + \frac{1}{1-p_{\Xi}(1+\epsilon(u))}\right) - \frac{\lambda\epsilon_{\lambda}}{1-\epsilon_{\lambda}}\ln(1-p_{\Xi}), \quad (9.7)$$

De plus, en notant $\epsilon_0 = \max\{\sup_{u \in \mathbb{R}^d} (\epsilon(u)), \epsilon_\lambda\}$:

$$|\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \gamma_{\Xi_0}(u))| \le \frac{p_{\Xi}\epsilon_0(9 + 2\lambda^2)}{2(1 - p_{\Xi})(1 - \epsilon_0)\lambda}.$$
(9.8)

Preuve. Soient x et \hat{x} deux réels strictement positifs satisfaisant $\hat{x} < 2x$, alors :

$$\ln(x) - \ln(\hat{x})| \le |x - \hat{x}| \sup_{t \in [\min(x, \hat{x}), \max(x, \hat{x})]} (\frac{1}{t}),$$

$$\le \frac{|x - \hat{x}|}{\min(x, \hat{x})},$$

$$\le \frac{|x - \hat{x}|}{x - |x - \hat{x}|}.$$
(9.9)

Ainsi, si $\epsilon_x:=\frac{|x-\hat{x}|}{x}$ désigne l'erreur absolue entre x et $\hat{x},$ alors $0\leq\epsilon_x<1$ et :

$$|\ln(x) - \ln(\hat{x})| \le \frac{\epsilon_x}{1 - \epsilon_x}.$$
(9.10)

Notons que pour $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\hat{\lambda}\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) = \ln(1 + \hat{C}_{\Xi,L}(u) - 2\hat{p}_{\Xi,L}) - 2\ln(1 - \hat{p}_{\Xi,L})),$$

et $\lambda\gamma_{\Xi_0}(u) = \ln(1 + C_{\Xi}(u) - 2p_{\Xi}) - 2\ln(1 - p_{\Xi})),$

de sorte que :

$$\begin{aligned} |\hat{\lambda}\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \lambda\gamma_{\Xi_0}(u)| &\leq |\ln(1 + \hat{C}_{\Xi,L}(u) - 2\hat{p}_{\Xi,L}) - \ln(1 + C_{\Xi}(u) - 2p_{\Xi})| \\ &+ 2|\ln(1 - \hat{p}_{\Xi,L}) - \ln(1 - p_{\Xi})|. \end{aligned}$$
(9.11)

De plus, avec ces notations, $\epsilon_p = \frac{1-p_{\Xi}}{p_{\Xi}} \epsilon_{1-p}$ donc la condition $\epsilon_p \le \epsilon(u) < \frac{(1-p_{\Xi})^2}{3p_{\Xi}}$ conduit à :

$$\begin{aligned} \epsilon_p < \frac{1-p_{\Xi}}{p_{\Xi}} \Rightarrow 0 \le \epsilon_{1-p} < 1, \\ \Rightarrow \frac{|1-\hat{p}_{\Xi,L}-(1-p_{\Xi})|}{1-p_{\Xi}} < 1, \\ \Rightarrow 0 \le 1-\hat{p}_{\Xi,L} < 2(1-p_{\Xi}). \end{aligned}$$

Ainsi,
en appliquant (9.9), avec $x=1-p_{\Xi}$ et $\hat{x}=1-\hat{p}_{\Xi,L}$:

$$\begin{aligned} |\ln(1-\hat{p}_{\Xi,L}) - \ln(1-p_{\Xi})| &\leq \frac{|1-\hat{p}_{\Xi,L} - (1-p_{\Xi})|}{1-p_{\Xi} - |1-\hat{p}_{\Xi,L} - (1-p_{\Xi})|}, \\ &\leq \frac{|\hat{p}_{\Xi,L} - p|}{1-p_{\Xi} - |\hat{p}_{\Xi,L} - p_{\Xi}|}, \end{aligned}$$

$$\leq \frac{p_{\Xi}\epsilon_p}{1 - p_{\Xi}(1 + \epsilon_p)},$$

$$\leq \frac{p_{\Xi}\epsilon(u)}{1 - p_{\Xi}(1 + \epsilon(u))}.$$
(9.12)

D'autre part, en notant $\epsilon'(u) = \frac{|1+C_{\Xi}(u)-2p_{\Xi}-(1+\hat{C}_{\Xi,L}-\hat{p}_{\Xi,L})|}{1+C_{\Xi}-2p_{\Xi}}$ l'erreur absolue commise sur $C_{\Xi}(u) - 2p_{\Xi} + 1$, l'encadrement $1 - p_{\Xi} \ge C_{\Xi}(u) - 2p_{\Xi} + 1 \ge (1 - p_{\Xi})^2$ implique :

$$\begin{aligned} \epsilon'(u) &\leq \frac{|(C_{\Xi}(u) - \hat{C}_{\Xi,L}) - 2(p_{\Xi} - \hat{p}_{\Xi,L})|}{(1-p)^2}, \\ &\leq \frac{|C_{\Xi}(u) - \hat{C}_{\Xi,L}| + 2|p_{\Xi} - \hat{p}_{\Xi,L}|}{(1-p)^2}, \\ &\leq \frac{C_{\Xi}(u)\epsilon_C(u) + 2p_{\Xi}\epsilon_p}{(1-p)^2}, \\ &\leq \frac{p_{\Xi}\epsilon_C(u) + 2p_{\Xi}\epsilon_p}{(1-p)^2}, \\ &\leq (\epsilon_C(u) + 2\epsilon_p)\frac{p_{\Xi}}{(1-p)^2}, \\ &\leq \frac{3p_{\Xi}\epsilon(u)}{(1-p)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi la condition $\epsilon(u) < \frac{(1-p_{\Xi})^2}{3p_{\Xi}}$ garantie $\epsilon'(u) < 1$ donc en appliquant (9.10) avec $x = 1 + C_{\Xi}(u) - 2p_{\Xi}$ et $\hat{x} = 1 + \hat{C}_{\Xi}(u) - 2\hat{p}_{\Xi,L}$:

$$|\ln(1 + \hat{C}_{\Xi,L}(u) - 2\hat{p}_{\Xi,L}) - \ln(1 + C_{\Xi}(u) - 2p_{\Xi})| \leq \frac{\epsilon'(u)}{1 - \epsilon'(u)},$$

$$\leq \frac{3p_{\Xi}\epsilon(u)}{(1 - p)^2} (1 - \frac{3p_{\Xi}\epsilon(u)}{(1 - p)^2})^{-1},$$

$$\leq \frac{3p_{\Xi}\epsilon(u)}{(1 - p)^2 - 3p_{\Xi}\epsilon(u)}.$$
 (9.13)

Donc en injectant (9.13) et (9.12) dans (9.11) :

$$|\hat{\lambda}\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \lambda\gamma_{\Xi_0}(u)| \le \frac{3p_{\Xi}\epsilon(u)}{(1-p)^2 - 3p_{\Xi}\epsilon(u)} + \frac{p_{\Xi}\epsilon(u)}{1-p_{\Xi}(1+\epsilon(u))}.$$
(9.14)

De plus,

$$\hat{\lambda}\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \lambda\gamma_{\Xi_0}(u) = \hat{\lambda}(\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \gamma_{\Xi_0}(u)) - \gamma_{\Xi_0}(u)(\hat{\lambda} - \lambda),$$

$$\Rightarrow \hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \gamma_{\Xi_0}(u)) = \frac{\hat{\lambda}\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \lambda\gamma_{\Xi_0}(u)}{\hat{\lambda}} + \gamma_{\Xi_0}(u)\frac{(\hat{\lambda} - \lambda)}{\hat{\lambda}}.$$

Or $\epsilon_{\lambda} < 1 \Rightarrow \hat{\lambda} > \lambda(1 - \epsilon_{\lambda})$ et $\gamma_{\Xi_0}(u) \leq -\lambda \ln(1 - p_{\Xi})$ donc :

$$|\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \gamma_{\Xi_0}(u))| \le |\frac{\hat{\lambda}\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \lambda\gamma_{\Xi_0}(u)}{\hat{\lambda}}| + \gamma_{\Xi_0}(u)|\frac{(\hat{\lambda} - \lambda)}{\hat{\lambda}}|,$$

$$\leq \frac{1}{\lambda(1-\epsilon_{\lambda})} (|\hat{\lambda}\hat{\gamma}_{\Xi_{0},L}(u) - \lambda\gamma_{\Xi_{0}}(u)| - \lambda\ln(1-p_{\Xi})|\hat{\lambda} - \lambda|), \\ \leq \frac{|\hat{\lambda}\hat{\gamma}_{\Xi_{0},L}(u) - \lambda\gamma_{\Xi_{0}}(u)|}{\lambda(1-\epsilon_{\lambda})} - \frac{\lambda\epsilon_{\lambda}}{1-\epsilon_{\lambda}}\ln(1-p_{\Xi}).$$

Ainsi avec (9.14):

$$|\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \gamma_{\Xi_0}(u))| \le \frac{1}{\lambda(1-\epsilon_\lambda)} \left(\frac{3p_{\Xi}\epsilon(u)}{(1-p)^2 - 3p_{\Xi}\epsilon(u)} + \frac{p_{\Xi}\epsilon(u)}{1-p_{\Xi}(1+\epsilon(u))}\right) - \frac{\lambda\epsilon_\lambda}{1-\epsilon_\lambda}\ln(1-p_{\Xi}),$$

ce qui prouve (9.7).

Notons $\epsilon_0 = \max\{\sup_{u \in \mathbb{R}^d} (\epsilon(u)), \epsilon_\lambda\}$, alors :

$$|\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \gamma_{\Xi_0}(u))| \le \frac{1}{\lambda(1-\epsilon_0)} \left(\frac{3p_{\Xi}\epsilon_0}{(1-p)^2 - 3p_{\Xi}\epsilon_0} + \frac{p_{\Xi}\epsilon_0}{1-p_{\Xi}(1+\epsilon_0)}\right) - \frac{\lambda\epsilon_0}{1-\epsilon_0}\ln(1-p_{\Xi}).$$
(9.15)

Rappelons que $p_{\Xi}\in]0,1[,$ alors :

$$\epsilon_{0} < \frac{1 - p_{\Xi}}{p_{\Xi}} \Rightarrow 3\epsilon_{0}P_{\Xi} < 3(1 - p_{\Xi}),$$

$$\Rightarrow (1 - p_{\Xi})^{2} - 3\epsilon_{0}p_{\Xi} > (1 - p_{\Xi})(2 - p_{\Xi}),$$

$$\Rightarrow \frac{3}{(1 - p_{\Xi})^{2} - 3\epsilon_{0}p_{\Xi}} < \frac{3}{(1 - p_{\Xi})(2 - p_{\Xi})}.$$

Or $3 < 3(2 - p_{\Xi})$, donc :

$$\frac{1}{1 - p_{\Xi}(1 + \epsilon_0)} < \frac{3}{(1 - p_{\Xi})}.$$
(9.16)

De plus,

$$\epsilon_{0} < \frac{(1-p_{\Xi})^{2}}{3p_{\Xi}} \Rightarrow \epsilon_{0}P_{\Xi} < \frac{1}{3}(1-p_{\Xi})^{2},$$

$$\Rightarrow (1-p_{\Xi}) - \epsilon_{0}p_{\Xi} > (1-p_{\Xi}) - \frac{1}{3}(1-p_{\Xi})^{2},$$

$$\Rightarrow 1 - p_{\Xi}(1+\epsilon_{0}) > (1-p_{\Xi}) - \frac{1}{3}(1-p_{\Xi}),$$

$$\Rightarrow 1 - p_{\Xi}(1+\epsilon_{0}) > \frac{2}{3}(1-p_{\Xi}),$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-p_{\Xi}(1+\epsilon_{0})} < \frac{3}{2(1-p_{\Xi})}.$$
(9.17)

De plus,

$$-\ln(1-p_{\Xi}) \le \frac{p_{\Xi}}{1-p_{\Xi}}.$$
 (9.18)

Ainsi en injectant (9.16), (9.17) et(9.18) dans (9.15):

$$\begin{aligned} |\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \gamma_{\Xi_0}(u))| &\leq \frac{\epsilon_0 p_{\Xi}}{\lambda (1-\epsilon_0)} (\frac{9}{2(1-p)}) + \frac{\lambda \epsilon_0 p_{\Xi}}{(1-\epsilon_0)(1-p_{\Xi})}, \\ &\leq \frac{p_{\Xi} \epsilon_0}{(1-p_{\Xi})(1-\epsilon_0)} (\frac{9}{2\lambda} + \lambda), \end{aligned}$$

ce qui conduit à la seconde majoration (9.8).

Notons tout d'abord que cette proposition montre la convergence de l'estimation du covariogramme lorsque $L \to +\infty$. D'autre part (9.8) suggère que l'estimation est d'autant plus performante pour de petites valeurs de la fraction d'aire. De plus, les propriétés de symétrie de la proposition vis à vis des caractéristiques globales et de leurs estimateurs permettent de contrôler la différence $|\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \gamma_{\Xi_0}(u)\rangle|$ à partir de estimateurs.

Compte tenu des résultats du chapitre 5, des majorations heuristiques des erreurs absolues $\epsilon_0, \epsilon_p, \epsilon_\lambda, \epsilon_C$ (commise sur l'estimation de l'intensité, de la covariance et de la fraction d'aire) en fonction du nombre d'observations L, peuvent être obtenus par simulation. Par conséquent, des intervalles de confiance pour l'estimation du covariogramme ainsi que des majorants de l'erreur absolue, peuvent être construit. Il est cependant préférable d'évaluer la qualité de l'estimation des variations du grain.

Remarque 9.1.1. Notons que le théorème 9.1 suggère l'existence de majoration similaire pour l'estimation du n-variogramme moyen.

9.2 Estimation des variations géométriques d'ordre 2 du grain

Considérons désormais un modèle Booléen Ξ de \mathbb{R}^d et rappelons la relation :

$$\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)^2] = \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_{\Xi_0}(u) du.$$
 ((3.31))

Ainsi le moment d'ordre 2 du volume du grain dilaté $\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0 \oplus rK)^2]$ peut être estimé par intégration de l'estimateur du covariogramme moyen du grain dilaté $\hat{\gamma}_{\Xi_0 \oplus rK}$ sur \mathbb{R}^d . Cependant, certaines précaution doivent être prises afin d'estimer cette intégrale. En effet, le covariogramme moyen du grain dilaté $\Xi_0 \oplus rK$ ne peut être estimé que sur un support spatial restreint (la fenêtre d'observation érodée et symétrisée $(W \oplus rK) \oplus (-(W \oplus rK)))$. Par conséquent, le covariogramme moyen du grain dilaté ne peut être intégré que sur ce support spatial. Nous discuterons ici de ces aspects et évaluerons par simulations l'estimation des variations d'ordre 2 en dimension 2.

9.2.1 Estimation du moment d'ordre 2 du volume du grain

Compte tenu de la relation (3.31) le moment d'ordre 2 du volume du grain $\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)^2]$ peut être estimé par $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) du$. Cet estimateur converge lorsque $L \to +\infty$ puisque l'estimateur $\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}$ converge. Cependant, l'estimateur $\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u)$ n'est connue que pour $u \in W \oplus \breve{W}$. L'intégrale

 $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) du$ se décompose de la manière suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) du = \int_{W \oplus \breve{W}} \hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) du + \int_{\mathbb{R}^d \setminus W \oplus \breve{W}} \hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) du.$$
(9.19)

Le premier terme $\int_{W \oplus \check{W}} \hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) du$ peut être calculé aussi précisément que voulu par une discrétisation du support $W \oplus \check{W}$. Le second terme $\int_{\mathbb{R}^d \setminus W \oplus \check{W}} \hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) du$ peut être négligé sous certaines conditions qui seront discutées ci-dessous.

Proposition 9.2.1 (Support du covariogramme moyen). Soient W un convexe compact d'intérieur non vide et Ξ_0 un convexe aléatoire satisfaisant :

$$\mathbb{P}(\Xi_0 \oplus \check{\Xi}_0 \subset W \oplus \check{W}) = 1, \tag{9.20}$$

alors : $\forall u \in \mathbb{R}^d \setminus W \oplus \breve{W}, \ \gamma_{\Xi_0}(u) = 0.$

Preuve. Soient W un convexe compact d'intérieur non vide et Ξ_0 un convexe aléatoire satisfaisant (9.20). Soient $\omega \in \Omega$ et $g_{\Xi_0(\omega)}(u)$ le covariogramme géométrique de $\Xi_0(\omega)$ évalué en u. Le support de $g_{\Xi_0(\omega)}$ est $\Xi_0(\omega) \oplus \check{\Xi}_0(\omega)$, en d'autre termes $u \notin (\Xi_0(\omega) \oplus \check{\Xi}_0(\omega)) \Rightarrow g_{\Xi_0}(u) = 0$. Soit $u \in \mathbb{R}^2 \setminus W \oplus \check{W}$, la condition (9.20) implique que $\mathbb{P}(u \notin \Xi_0 \oplus \check{\Xi}_0) = 0$, ce qui implique $\mathbb{P}(g_{\Xi_0}(u) = 0) = 1$. Par conséquent $\gamma_{\Xi_0}(u) = \mathbb{E}[g_{\Xi_0}(u)] = 0$.

Cette propriété montre que si la condition (9.20) est satisfaite, alors $\int_{\mathbb{R}^2 \setminus W \oplus \breve{W}} \hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) du = 0.$

Remarque 9.2.1. La condition (9.20) peut être exprimée de différentes manières, elle consiste par exemple à dire que presque sûrement, les dimensions du grain Ξ_0 sont bornée par celles de la fenêtre W. Notons aussi que (9.20) $\Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega \ p.s$, $H_{\Xi_0} \leq H_W$. Des conditions suffisantes à (9.20) peuvent être exprimées en terme de diamètres de Féret maximal et minimal ou de périmètre en dimension 2. En effet, $\sup_{\theta \in [0,\pi]}(H_{\Xi_0}(\theta)) \leq \inf_{\theta \in [0,\pi]}(H_W(\theta))$ est une condition suffisante, de plus, en dimension 2, cette dernière nécessite que $U(\Xi_0) \leq U(W)$ ce qui est encore une condition suffisante à (9.20).

De manière plus grossière, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d \setminus W \oplus \check{W}} \hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) du$ peut être négligée dès que l'on peut admettre que le grain est toujours plus "petit" que la fenêtre d'observation. Cette hypothèse peut très souvent être faîte pour les applications pratiques, car sinon le modèle Booléen n'est pas des plus adapté aux données (l'échelle d'observation W étant plus petite que les particules observées, l'ergodicité invérifiable...).

De plus, la condition (9.20) peut toujours être testée. En effet, (9.20) est vérifiée si $\gamma_{\Xi_0,L}$ a son support inclu dans $W \oplus \breve{W}$. En pratique, ce test consiste à vérifier que $\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}$ atteint des valeurs suffisamment proches de zéro au bord de $W \oplus \breve{W}$.

Ainsi sous la condition (9.20), un estimateur convergent (lorsque $L \to +\infty$) du moment d'ordre

2 du volume du grain est donné par :

$$\widehat{\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)^2]} = \int_{W \oplus \breve{W}} \gamma_{\Xi_0}(u) du.$$
(9.21)

Remarque 9.2.2. Notons que la condition (9.20) est valable pour le n-variogramme moyen (le n-variogramme étant majoré par le covariogramme), donc l'estimation des moments d'ordre quelconque du volume peut être réalisé de la même manière à partir d'un estimateur du n-variogramme moyen.

Une majoration de l'erreur absolue commise sur l'estimation du moment d'ordre 2 du volume peut être obtenue à partir des résultats de la proposition 9.1.3, de la manière suivante.

Proposition 9.2.2 (Contrôle sur l'estimation du moment d'ordre 2 du volume.). Soit $\epsilon_0 = \max\{\sup_{u \in \mathbb{R}^d} (\epsilon_C(u)), \epsilon_\lambda\}$ satisfaisant $\epsilon_0 < \max\{\frac{(1-p_{\Xi})^2}{3p_{\Xi}}, 1\}$ et supposons que le grain primaire Ξ_0 satisfait (9.20), alors l'erreur absolue $\epsilon = \frac{|\widehat{\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)^2]} - \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)^2]|}{\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)^2]}$ vérifie :

$$\epsilon \le \frac{\nu_d(W \oplus \tilde{W})\lambda\epsilon_0(9+2\lambda^2)}{2p_{\Xi}(1-p_{\Xi})(1-\epsilon_0)}.$$
(9.22)

Preuve. Notons tout d'abord que d'après (9.8):

$$\begin{split} |\widehat{\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)^2]} - \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)^2]| &\leq \int_{W \oplus \breve{W}} |\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \gamma_{\Xi_0}(u)| du, \\ &\leq \nu_d(W \oplus \breve{W}) \sup_{u \in W \oplus \breve{W}} \{|\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) - \gamma_{\Xi_0}(u)|\}, \\ &\leq \nu_d(W \oplus \breve{W}) \frac{p_\Xi \epsilon_0 (9 + 2\lambda^2)}{2(1 - p_\Xi)(1 - \epsilon_0)\lambda}. \end{split}$$

D'autre part, $\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)^2] \ge \mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)]^2 = (\frac{-\ln(1-p_{\Xi})}{\lambda})^2$ et $-\ln(1-p_{\Xi}) \ge p_{\Xi}$ donc :

$$\frac{1}{\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)^2]} \le \frac{\lambda^2}{\ln(1-p_{\Xi})^2},$$
$$\le \frac{\lambda^2}{p_{\Xi}^2}.$$

Ainsi,

$$\epsilon \leq \nu_d(W \oplus \breve{W}) \frac{p_{\Xi}\epsilon_0(9+2\lambda^2)}{2(1-p_{\Xi})(1-\epsilon_0)\lambda} \frac{\lambda^2}{p_{\Xi}^2},$$
$$\leq \frac{\nu_d(W \oplus \breve{W})\lambda\epsilon_0(9+2\lambda^2)}{2p_{\Xi}(1-p_{\Xi})(1-\epsilon_0)}.$$

Notons tout d'abord que si la fenêtre W est symétrique alors $\nu_d(W \oplus \breve{W}) = 2^d \nu_d(W)$. Cette proposition montre la convergence de l'estimation du moment d'ordre 2 volume lorsque $L \to +\infty$

et permet de contrôler l'erreur commise sur l'estimation de $\mathbb{E}[\nu_d(\Xi_0)^2]$ à partir de celle commises sur les estimations de la covariance et de l'intensité.

En dimension deux, la qualité de l'estimation du moment d'ordre 2 de l'aire du grain a été évaluée par simulation de la manière suivante. Le grain primaire Ξ_0 est un rectangle aléatoire dont les côtés suivent la loi normale de moyenne ${}^t(40, 80)$ et de matrice de covariance diag(100, 400). Différent modèles Booléen de grain primaire Ξ_0 sont alors considérés Figure 9.1, les intensités de ces modèles Booléens sont alors choisis de sorte que la fraction d'aire varie de 10% à 90% (par pas de 10%). L'erreur relative $\epsilon_{A^2} = \widehat{\mathbb{E}[A(\Xi_0)^2] - \mathbb{E}[A(\Xi_0)^2]}_{\mathbb{E}[A(\Xi_0)^2]}$ est alors représentée (en %) en fonction du nombre d'observation L utilisé pour le modèle de fraction d'aire 80% Figure 9.2, et en fonction de la fraction d'aire pour L = 2000 observations Figure 9.3.



FIGURE 9.1 - Exemples de réalisations des modèles tests. La fraction d'aire évolue de 0.1 à 0.9 lorsque l'intensité augmente.

9.2.2 Estimation des variations géométriques du grain à l'ordre 2 et en dimension 2

Soit K un convexe de \mathbb{R}^2 , les moments du vecteur ${}^t(A(\Xi_0), W(\Xi_0, K))$ s'expriment à partir de ceux de l'aire du grain dilaté $\Xi_0 \oplus rK$, r > 0 (voir chapitre 7). En particulier, en reprenant les notations du chapitre 7 ($\zeta_{\Xi_0,K}^{(1)}(r) = \mathbb{E}[A(\Xi_0 \oplus rK)], \ \zeta_{\Xi_0,K}^{(2)}(r) = \mathbb{E}[A(\Xi_0 \oplus rK)^2]$, pour r > 0) le



FIGURE 9.2 – Évaluation de l'erreur absolue ϵ_{A^2} commise sur l'estimation du moment d'ordre 2 de l'aire du grain en fonction du nombre d'observations L pour le modèle dont la fraction d'aire vaut 80%

polynôme $\eta^{(2)}_{\Xi_0,K}(r)$ s'écrit :

$$\forall r > 0, \ \eta_{\Xi_0,K}^{(2)}(r) = \zeta_{\Xi_0,K}^{(2)}(r) - 2r^2 A(K) \zeta_{\Xi_0,K}^{(1)}(r) + r^4 A(K).$$
(9.23)

De plus,

$$\forall r > 0, \ \eta_{\Xi_0,K}^{(2)}(r) = \mathbb{E}[A(\Xi_0)^2] + 4r\mathbb{E}[A(\Xi_0)W(\Xi_0,K)] + 4r^2\mathbb{E}[W(\Xi_0,K)^2].$$
(9.24)

Notons $Z_{\Xi_0,K}(r) := \frac{\eta_{\Xi_0,K}^{(2)}(r) - \mathbb{E}[A(\Xi_0)^2]}{4r}$ de sorte que :

$$\forall r > 0, \ Z_{\Xi_0,K}(r) = \mathbb{E}[A(\Xi_0)W(\Xi_0,K)] + r\mathbb{E}[W(\Xi_0,K)^2].$$
(9.25)

Ainsi, les moments d'ordre 2 de ${}^{t}(A(\Xi_{0}), W(\Xi_{0}, K))$ peuvent être obtenus à partir d'estimations de $\zeta_{\Xi_{0},K}^{(1)}(r)$, de $\zeta_{\Xi_{0},K}^{(2)}(r)$ pour quelques valeurs de r et par un ajustement polynômial. L'estimation de $\zeta_{\Xi_{0},K}^{(1)}(r)$ est directement obtenue par la méthode du contraste minimum (voir section 4.3), notons $\hat{\zeta}_{\Xi_{0},K}^{(1)}(r)$ cet estimateur.

Ainsi $\zeta_{\Xi_0,K}^{(2)}(r)$ est estimer par $\mathbb{E}[\widehat{A(\Xi_0 \oplus rK)^2}]$. Cependant, une précaution concernant le rayon



FIGURE 9.3 – Évaluation de l'erreur relative commise sur l'estimation du moment d'ordre 2 de l'aire du grain en fonction de la fraction d'aire $p_{\Xi}(\lambda)$ du modèle pour L = 2000 observations.

de dilatation r doit être prise. En effet, la condition (9.20) s'écrit pour le grain dilaté :

$$\mathbb{P}((\Xi_0 \oplus rK) \oplus (-(\Xi_0 \oplus rK)) \subset W_{rK} \oplus \check{W}_{rK}) = 1,$$
(9.26)

où W_{rK} désigne la fenêtre érodée $W \ominus rK$. Cette condition limite donc la valeur de r, si (9.20) est respectée alors il existe un rayon maximal r_{max} à partir duquel la condition (9.26) n'est plus respectée. Rappelons qu'en pratique $r < r_{max}$ peut être obtenu en testant si le covariogramme moyen du grain dilaté admet son support dans $W_{rK} \oplus \check{W}_{rK}$.

Soit $r < r_{max}$, alors $\hat{\zeta}^{(2)}_{\Xi_0,K}(r) := \mathbb{E}[\widehat{A(\Xi_0 \oplus rK)}^2]$ est un estimateur convergent (lorsque $L \to +\infty$) de $\zeta^{(2)}_{\Xi_0,K}(r)$. Un estimateur convergent de $\eta^{(2)}_{\Xi_0,K}(r)$ est alors donné par :

$$\hat{\eta}_{\Xi_0,K}^{(2)}(r) := \hat{\zeta}_{\Xi_0,K}^{(2)}(r) - 2r^2 A(K) \hat{\zeta}_{\Xi_0,K}^{(1)}(r) + r^4 A(K).$$
(9.27)

Par conséquent, un estimateur convergent de $Z_{\Xi_0,K}(r)$ est donné par :

$$\forall r > 0, \ \hat{Z}_{\Xi_0,K}(r) := \frac{\hat{\eta}_{\Xi_0,K}^{(2)}(r) - \hat{M}_A^{(2)}(\Xi_0)}{4r}.$$
(9.28)

Soit $0 < r_1 < \cdots < r_k < r_{max}, k \ge 2$, des rayons de dilatation et $\hat{\eta}_{\Xi_0,K}^{(2)}(r_i), i = 1, \cdots k$ les moments d'ordre 2 de ${}^t(A(\Xi_0), W(\Xi_0, K))$ peuvent alors être estimés de différentes manières. Avec les notations du chapitre 7 les coefficients $M_{2,0}^{(K)} = \mathbb{E}[A(\Xi_0)^2], M_{2,1}^{(K)} = 4\mathbb{E}[A(\Xi_0)W(\Xi_0, K)]$ et $M_{2,2}^{(K)} = 4\mathbb{E}[W(\Xi_0, K)^2]$ du polynôme $\eta_{\Xi_0, K}^{(2)}$ peuvent être estimés aux moindres carrés, fournissant ainsi directement des estimations des moments d'ordre 2 de ${}^t(A(\Xi_0), W(\Xi_0, K))$. De plus, des contraintes de différente nature (positivité de la variance, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité d'Alexandrov-Fenchel Théorème 2.3) peuvent être considérées pour la régression. En particulier :

$$\mathbb{E}[A(\Xi_0)^2] \ge \mathbb{E}[A(\Xi_0)]^2, \tag{9.29}$$

$$\mathbb{E}[W(\Xi_0, K)^2] \ge \mathbb{E}[W(\Xi_0, K)]^2, \tag{9.30}$$

$$\mathbb{E}[A(\Xi_0)W(\Xi_0, K)] \le \sqrt{\mathbb{E}[W(\Xi_0, K)^2]\mathbb{E}[A(\Xi_0)^2]},$$
(9.31)

$$\mathbb{E}[W(\Xi_0, K)^2] \ge 4\mathbb{E}[A(\Xi_0)]A(K).$$
(9.32)

Cependant, l'expérimentation montre qu'il est préférable d'estimer les moments d'ordre 2 de ${}^{t}(A(\Xi_{0}), W(\Xi_{0}, K))$ à l'aide de la relation linéaire (9.25) en tenant compte des contraintes (9.29) à(9.32). Ainsi, le moment d'ordre 2 de l'aire du grain est estimé par $\widehat{\mathbb{E}[A(\Xi_{0})^{2}]}$ sous la contrainte (9.29). Les autre moments $\mathbb{E}[A(\Xi_{0})W(\Xi_{0}, K)]$ et $\mathbb{E}[W(\Xi_{0}, K)^{2}]$ sont estimés aux moindres carrés à partir de $\widehat{Z}_{\Xi_{0},K}$ sous les contraintes (9.30) à (9.32). Ces estimateurs seront respectivement notés $\mathbb{E}[A(\Xi_{0})W(\Xi_{0}, K)]$ et $\mathbb{E}[\widehat{W(\Xi_{0}, K)^{2}}]$.

La procédure d'estimation des moments d'ordre 2 de ${}^{t}(A(\Xi_0), W(\Xi_0, K))$ est alors décrite dans la méthode suivante.

Méthode 9.1 (Estimation des moments d'ordre 2 de ${}^{t}(A(\Xi_{0}), W(\Xi_{0}, K)))$. Soient $(I_{l})_{l=1,\cdots,L}$ des réalisations de Ξ restreintes à une fenêtre W, $0 < r_{1} < \cdots < r_{k} < r_{max}$, $k \ge 2$ des rayons de dilatation et notons $r_{0} = 0$. L'estimation des moments d'ordre 2 de ${}^{t}(A(\Xi_{0}), W(\Xi_{0}, K))$ s'effectue selon cette procédure :

- Estimation des caractéristiques individuelles $\hat{\lambda}, \mathbb{E}[W(\Xi_0, K)], \mathbb{E}[A(\Xi_0)]$ par la méthode du contraste minimum $(\widetilde{\mathbb{E}[A(\Xi_0)]}]$ et $\hat{\lambda}$ peuvent être obtenus à l'aide des formules de Miles lorsque le modèle est isotrope).
- Estimation de $\mathbb{E}[A(\Xi_0)^2]$
 - i. Estimation des caractéristiques globales en moyennant sur les L observations : $\hat{p}_{\Xi,L}, \hat{C}_{\Xi,L}$.
 - ii. Estimation $\hat{\gamma}_{\Xi_0,L}$ du covariogramme géométrique moyen, puis estimation de $\mathbb{E}[A(\Xi_0)^2]$ sous la contrainte (9.29) :

$$\widehat{\mathbb{E}[A(\Xi_0)^2]} = \int_{W \oplus \breve{W}} \hat{\gamma}_{\Xi_0,L}(u) du.$$

- Estimation de $Z_{\Xi_0,K}$, pour $i = 1, \dots k$:
 - i. Estimation des caractéristiques globales en moyennant sur les L observations : $\hat{p}_{\Xi \oplus r_i K, L}, \hat{C}_{\Xi \oplus r_i K, L}.$
 - ii. Estimation des caractéristiques individuelles $\zeta_{\Xi_0,K}^{(2)}(r_i)$ et $\zeta_{\Xi_0,K}^{(1)}(r_i)$:

$$\hat{\zeta}^{(2)}_{\Xi_0,K}(r_i) = \int_{W_{r_iK} \oplus \breve{W}_{r_iK}} \hat{\gamma}_{\Xi_0 \oplus r_iK}(u) du,$$

$$\hat{\zeta}_{\Xi_0,K}^{(1)}(r_i) = \frac{-\ln(1-\hat{p}_{\Xi\oplus r_iK,L})}{\hat{\lambda}}.$$

iii. Estimation de $Z_{\Xi_0,K}(r_i)$:

$$\hat{Z}_{\Xi_{0,K}}(r_{i}) = \frac{\hat{\eta}_{\Xi_{0,K}}^{(2)}(r) - \widetilde{\mathbb{E}[A(\Xi_{0})^{2}]}}{4r_{i}}$$

Estimation E[A(Ξ₀)W(Ξ₀, K)] et E[W(Ξ₀, K)²] aux moindres carrées sous les contraintes (9.30) à (9.32).

Remarque 9.2.3 (Choix des rayons de dilatation). En pratique le choix des rayons de dilatation s'avère difficile. En effet, la condition (9.26) suggère l'utilisation de petit rayons. D'autre part, la régression linéaire réalisée sur $Z_{\Xi_0,K}$ est d'autant plus robuste lorsque la plage de dilatation $(r_k - r_1)$ est étendue. Ce qui sous-entend qu'un choix optimal serait de prendre les valeurs les plus grandes possibles $r < r_m ax$ qui respectent (9.26). Cependant, la qualité de l'estimation du moment d'ordre deux de l'aire est corrélé à la fraction d'aire p_{Ξ} du modèle. En ce sens, la majoration (9.22) suggère des rayons r choisis de sorte à ce que $p_{\Xi\oplus rK}$ soit le plus proche possible de $\frac{1}{2}$.

Rappelons que si S_{θ} désigne un segment unitaire dirigé par θ et B la boule unité alors $W(\Xi_0, S_{\theta}) = \frac{1}{2}H_{\Xi_0}(\theta)$ et $W(\Xi_0, B) = \frac{1}{2}U(\Xi_0)$. Ainsi, la méthode précitée permet d'estimer les moments d'ordre 2 de ${}^t(A(\Xi_0), H_{\Xi_0}(\theta))$ et de ${}^t(A(\Xi_0), U(\Xi_0))$ en choisissant une un segment ou une boule comme jauge. En particulier, l'estimation de ces moments à testé par simulation sur un modèle Booléen isotrope d'intensité $\lambda = \frac{100}{A(W)}$ de rectangles aléatoires dont les côtés suivent la loi normale de moyenne ${}^t(40, 30)$ et de covariance diag((10, 10)). La figure 9.4, représente l'erreur relatives absolue commises sur l'estimation de ces moments en fonction du nombre d'observation L utilisé.



FIGURE 9.4 – Une réalisation du modèle test (a) et les erreur relatives commises sur l'estimation des moments d'ordres 2 de ${}^{t}(A(\Xi_{0}), U(\Xi_{0}))$ (b) et de ${}^{t}(A(\Xi_{0}), H_{\Xi_{0}}(\theta))$ (c).

L'autocovariance du diamètre de Féret du grain peut être estimée en utilisant un parallélogramme comme jauge. En effet, pour $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, si K désigne le parallélogramme $K = S_{\theta_1} \oplus S_{\theta_2}$ alors $W(\Xi_0, K) = H_{\Xi_0}(\theta_1) + H_{\Xi_0}(\theta_2)$, de sorte que :

$$\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_1)H_{\Xi_0}(\theta_2)] = \frac{1}{2} (\mathbb{E}[W(\Xi_0, S_{\theta_1} \oplus S_{\theta_2})^2] - \mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_1)^2] - \mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_2)^2]).$$
(9.33)

Ainsi, l'estimation des moments du diamètre de Féret peut donc être réalisée par la procédure suivante.

Méthode 9.2 (Estimation de l'auto-covariance du diamètre de Féret). Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, l'estimation de $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_1)H_{\Xi_0}(\theta_2)]$ peut être réalisée de la manière suivante :

- i. Estimations $\mathbb{E}[W(\Xi_0, S_{\theta_1} \oplus S_{\theta_2})^2]$, $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_1)^2]$ et $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_2)^2]$ par la méthode 9.1. Notons que si Ξ_0 est isotrope alors $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_1)^2] = \mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_2)^2]$, il suffit donc d'estimer une de ces deux quantités.
- ii. estimation de $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_1)H_{\Xi_0}(\theta_2)]$ avec (9.33) :

$$\mathbb{E}[\widehat{H_{\Xi_0}(\theta_1)H_{\Xi_0}(\theta_2)}] = \frac{1}{2} (\mathbb{E}[W(\Xi_0, S_{\theta_1} \oplus S_{\theta_2})^2] - \mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_1)^2] - \mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_2)^2]).$$

Dans le cas isotrope $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_1)H_{\Xi_0}(\theta_2)] = \mathbb{E}[H_{\Xi_0}(0)H_{\Xi_0}(\theta)]$ ne dépend que $\theta = \theta_1 - \theta_2$. Dans ce contexte, cette méthode à été testé sur un modèle Booléen isotrope de rectangle aléatoire d'intensité $\lambda = \frac{30}{A(W)}$ dont les côtés suivent la loi normale de moyenne (40, 80) et de matrice de covariance diag(100, 400), pour θ prenant valeurs 0, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{2}$. La figure 9.5 représente les erreurs relatives commises sur l'estimation réalisée avec 1500 réalisations du modèle de $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(0)H_{\Xi_0}(\theta)]$ pour chaque valeur de θ .



FIGURE 9.5 – Une réalisation du modèle test (a) et (b) les erreurs relatives commises sur l'estimation de $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(0)H_{\Xi_0}(\theta)]$ faite avec 1500 réalisations du modèle, pour $\theta = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$.

9.3 Synthèse

Dans ce chapitre, des méthodes d'estimation des variations d'ordre n du grain primaire du modèle Booléen ont été présentées. À l'ordre 2 (n = 2), la qualité de ces estimations a été discutée

puis évaluée par simulation. En particulier, les résultats présentés figures 9.3 et 9.2 montrent que l'estimateur du moment d'ordre 2 de l'aire du grain est efficace dès lors que le nombre d'observations du modèle L est suffisamment grand $L \ge 1000$, et cela quel que soit la fraction d'aire du modèle. Par conséquent, les estimateurs des moments d'ordre 2 de ${}^{t}(A(\Xi_{0}), W(\Xi_{0}, K))$ sont efficaces lorsque le nombre d'observations du modèle L est assez grand ($L \ge 1000$, voir figure 9.4). Ces estimateurs fournissent alors un estimateur performant de l'auto-covariance du diamètre de Féret (figure 9.5). Notons cependant que ces estimations sont conditionnées par (9.26).

Chapitre 10

Description morphologique du grain du modèle Booléen

Soit Ξ un modèle Booléen d'intensité λ et de grain primaire Ξ_0 . Ce chapitre à pour objectif de discuter de la description morphologique du grain primaire. Tout d'abord, les différentes méthodes d'approximation du grain primaire en tant que zonotope seront présentées dans le cas général. Par la suite, le cas où le grain est un zonotope aléatoire sera discuté et la qualité des estimations sera évaluée par simulation.

10.1 Modèle Booléen à grains convexes

Dans cette section, le grain sera simplement supposé convexe. Rappelons que le diamètre de Féret est invariant par symétrisation (centrale), les approximations sous forme de zonotopes 0-réguliers et réguliers présentées seront donc celles du grain symétrisé. Cependant afin de faciliter la lecture on parlera d'approximation du grain.

10.1.1 Approximation du grain par un zonotope aléatoire 0-régulier

Soit $N \geq 2$, rappelons les notations du chapitre $8 : \theta_1, \dots \theta_N$ désigne la subdivision régulière de $[0, \pi[, \alpha =^t (\alpha_1, \dots \alpha_N)]$ le vecteur des longueurs des faces de la \mathcal{C}_0^N -approximation, $H_{\Xi_0}^{(N)} =^t (H_{\Xi_0}(\theta_1), \dots H_{\Xi_0}(\theta_N))$ désigne le vecteur composé des diamètres de Féret du grain évalués sur la subdivision $\theta_1, \dots \theta_N$ et $C[x] = \mathbb{E}[x^t x]$. Alors, d'après la proposition 8.4.2, les moments d'ordre 1 et 2 du vecteur α peuvent s'exprimer à partir de ceux du vecteur $H_{\Xi_0}^{(N)}$, afin qu'ils puissent être estimés par la méthode suivante.

Méthode 10.1 (Estimation des moments du vecteur des longueurs des faces de la C_0^N -approximation). Soit $N \ge 2$, la procédure d'estimation des moments d'ordres 1 et 2 du vecteur des longueurs des faces de la C_0^N -approximation du grain se présente de la manière suivante :

- i. Estimation $\widetilde{\mathbb{E}[H_{\Xi_0}^{(N)}]}$ de $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}^{(N)}]$ via la méthode du contraste minimum section 4.3.
- ii. Estimation $\widehat{C[H_{\Xi_0}^{(N)}]}$ de $C[H_{\Xi_0}^{(N)}]$ via la méthode 9.2.

iii. Estimation des moments d'ordre 1 et 2 du vecteur des longueurs des faces α de la C_0^N approximation du grain par :

$$\widehat{\mathbb{E}[\alpha]} = F^{(N)^{-1}} \widetilde{\mathbb{E}[H_{\Xi_0}^{(N)}]}, \qquad (10.1)$$

$$\widehat{C[\alpha]} = F^{(N)^{-1}} \widehat{C[H_{\Xi_0}^{(N)}]} F^{(N)^{-1}}, \qquad (10.2)$$

où $F^{(N)} = (|\sin(\theta_i - \theta_j)|)_{1 \le i,j \le N}.$

Remarque 10.1.1 (Estimation de $C[H_{\Xi_0}^{(N)}]$). Rappelons que diamètre de Féret est π -périodique et symétrique, de sorte que $\forall x \in \mathbb{R}$, $H_{\Xi_0}(\pi-x) =_{\Xi_0}(x)$. De plus, $\pi-\theta_i = \theta_{N+1-i[N]+1}$, $i = 2, \dots N$. Ainsi, en notant $m = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ pour i > m+1, une estimation de $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_i)H_{\Xi_0}(\theta_j)]$ est obtenue par celle de $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\theta_{N+1-i[N]+1})H_{\Xi_0}(\theta_j)]$. Ainsi l'estimation de $C[H_{\Xi_0}^{(N)}]$ nécessite moins d'opérations que prévue.

Remarque 10.1.2 (Utilisation de la C_0^N -approximation). Rappelons qu'il est préférable d'utiliser la C_0^N -approximation pour de grandes valeurs de N (voir chapitre 8). Les caractéristiques du vecteur des longueurs des faces α décrivent alors le grain primaire Ξ_0 .

La C_0^N -approximation s'avère utile pour décrire l'anisotropie du grain. En effet, d'une part la C_0^N -approximation est une approximation géométrique du grain, c'est à dire qu'elle approxime le grain directement dans \mathbb{R}^2 (pas à isométrie près). De plus, le zonotope $\bigoplus_{i=1}^N \mathbb{E}[\alpha_i] S_{\theta_i}$ s'avère être simplement une version discrète de la moyenne d'Aumman (voir chapitre 3) du grain (sa C_0^N -approximation). La moyenne d'Aumman informe sur l'anisotropie moyenne du grain, les moments d'ordre 2 de α permettent alors de généraliser ce concept, en fournissant des informations sur les variations du grain dans les différentes directions $\theta_1, \dots \theta_N$.

Remarquons que si le modèle est isotrope, l'estimation $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}^{(N)}]$ de $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}^{(N)}]$ peut être réalisée à partir d'un estimateur de $\mathbb{E}[U(\Xi_0)]$ puisque dans ce contexte $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(t)] = \frac{1}{\pi}\mathbb{E}[U(\Xi_0)]$. Cependant, dans le cas isotrope une approximation dans \mathcal{C}_{∞}^N s'avère plus efficace.

10.1.2 Approximation du grain par un zonotope aléatoire régulier

Soit Ξ'_0 une version isotrope du grain primaire Ξ_0 (voir sous-section 7.2.2), afin d'alléger les notations, le diamètre de Féret de Ξ'_0 sera noté H. D'après la proposition 7.2.4, les moments d'ordres premiers et seconds de H sont obtenus à partir de ceux du diamètre de Féret H_{Ξ_0} de Ξ_0 . En particulier, ils peuvent être estimés par la procédure suivante.

Méthode 10.2 (Estimation des caractéristiques du diamètre de Féret de la version isotrope). Soit $(s,t) \in [0,2\pi]^2$, alors les moments $\mathbb{E}[H(s)]$ et $\mathbb{E}[H(s)H(t)]$ peuvent être estimés de la manière suivante.

i. Estimation de l'espérance du périmètre $\mathbb{E}[U(\Xi_0)]$ via la méthode du contraste minimum (section 4.3), de sorte que :

$$\widehat{\mathbb{E}[H(s)]} = \frac{1}{\pi} \widehat{\mathbb{E}[U(\Xi_0)]}.$$
(10.3)

ii. Estimation $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(s-\eta)H_{\Xi_0}(t-\eta)]$ de $\mathbb{E}[H_{\Xi_0}(s-\eta_i)H_{\Xi_0}(t-\eta_i)]$ via la méthode 9.2 pour des valeurs de η parcourant une subdivision suffisamment fine de $[0, \pi[$. Le moment $\mathbb{E}[H(s)H(t)]$ est alors estimé par une discrétisation de l'intégrale $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathbb{E}[H_{\Xi_0}(s-\eta)H_{\Xi_0}(t-\eta)]d\eta$. En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et $\eta_i = \frac{k\pi}{n}$:

$$\widehat{\mathbb{E}[H(s)H(t)]} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[H_{\Xi_0}(\widehat{s-\eta_i})H_{\Xi_0}(t-\eta_i)].$$
(10.4)

Notons tout d'abord que la symétrie et la π -périodicité du diamètre de Féret permettent de réduire le coût de cette méthode (voir remarque 10.1.1). Reprenons la notation $H^{(N)} =^t (H(\theta_1), \cdots H(\theta_N))$ du chapitre 8 et rappelons que le (processus aléatoire) diamètre de Féret H du grain isotropisé Ξ'_0 est stationnaire donc $C[H^{(N)}] = Circ(V[H^{(N)}])$ avec $V[H^{(N)}] =^t (\mathbb{E}[H(\theta_1)H(\theta_1)], \cdots \mathbb{E}[H(\theta_1)H(\theta_n)])$ (voir chapitre 8). Ainsi si α désigne le vecteur central de la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation isotrope du grain et si $V[H^{(N)}], \mathbb{E}[H^{(N)}]$ désigne respectivement les estimations de $V[H^{(N)}]$ et de $\mathbb{E}[H^{(N)}]$ obtenus par la méthode précitée (méthode 10.2, p.164), alors d'après le Théorème 8.3, les moments de α sont estimés par :

$$\widehat{\mathbb{E}[\alpha]} = \frac{\pi}{2N} \widehat{\mathbb{E}[H^{(N)}]}, \qquad (10.5)$$

$$\widehat{V[\alpha]} = \frac{1}{N} K(0)^{-1} \widehat{V[H^{(N)}]}, \qquad (10.6)$$

où $K(0) = (k_S(\theta_i - \theta_j))_{1 \le i,j \le N}$ avec $t \mapsto k_S(t)$ la fonction π -périodique qui s'exprime $\forall t \in [0, \pi], k_S(t) = \frac{1}{2\pi} (2\sin^3(t) + \cos(t)(\pi - 2t + \sin(2t)))$ (voir chapitre 8). Ainsi la procédure d'estimation des moments de la distribution centrale de la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation isotrope du grain se présente de la manière suivante.

Méthode 10.3 (Estimation des moments du vecteur central des longueurs des faces de la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation). L'estimation des moments du vecteur central de la $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation se résume aux deux étapes suivantes.

- i. Estimation de $\mathbb{E}[H^{(N)}]$ et de $V[H^{(N)}]$ par la méthode 10.2, p.164.
- ii. Estimation de $\widehat{\mathbb{E}[\alpha]}$ et de $\widehat{C[\alpha]} = Circ(\widehat{V[\alpha]})$ via les relations (10.5) et (10.6).

Remarque 10.1.3. En pratique, lorsque le grain est isotrope, l'estimation des caractéristiques du diamètre de Féret du grain isotropisé $\widehat{\mathbb{E}[H^{(N)}]}$ et $\widehat{V[H^{(N)}]}$, s'avère beaucoup moins coûteuse que dans le cas anisotrope. En effet, la discrétisation de l'intégrale (10.4) nécessite de nombreuses estimations de l'auto-covariance de H_{Ξ_0} , alors que lorsque le grain est isotrope $H = H_{\Xi_0}$ et donc la mise en place de la méthode 10.2, n'est pas nécessaire.

D'après la proposition 8.4.4, les estimations $\widehat{\mathbb{E}[\alpha]}$ et $\widehat{C[\alpha]}$ correspondent aux moments du vecteur central des longueurs des faces d'un zonotope aléatoire isotrope $\widehat{\Xi_0}$ satisfaisant $\mathbb{E}[U(\widehat{\Xi_0})] = \widehat{\mathbb{E}[U(\Xi_0)]}$ et $C[H_{\widehat{\Xi_0}}^{(N)}] = C[H^{(N)}]$. Il s'agit donc d'une estimation de la meilleure approximation (en terme de distance de Hausdorff) du grain isotropisé en un zonotope aléatoire régulier à 2N côtés. De plus, cette approximation coïncide avec le grain isotropisé lorsque le grain est un zonotope aléatoire régulier.

10.2 Modèle Booléen de zonotopes

10.2.1 Modèle Booléen de zonotopes aléatoires 0-réguliers

Supposons désormais que le grain primaire est un zonotope aléatoire 0-régulier à 2N côtés (voir section 8.3) :

$$\Xi_0 = \bigoplus_{i=1}^N \alpha_i S_{\theta_i}.$$

La $C_0^{(N)}$ -approximation du grain coïncide avec le grain, et donc les moments de α peuvent être estimés par la méthode 10.1. Cependant, dans ce contexte, les caractéristiques géométriques $A(\Xi_0)$ et $U(\Xi_0)$ s'expriment en fonction de α (voir section 8.3). En particulier :

$$U(\Xi_0) = 2 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i,$$

$$A(\Xi_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j F_{ij}^{(N)}.$$

De sorte que :

$$\mathbb{E}[U(\Xi_0)] = 2\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[\alpha_i], \qquad (10.7)$$

$$\mathbb{E}[U(\Xi_0)^2] = 4 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j],$$
(10.8)

$$\mathbb{E}[A(\Xi_0)] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}[\alpha_i \alpha_j] F_{ij}^{(N)}.$$
(10.9)

Les estimations de $\mathbb{E}[U(\Xi_0)], \mathbb{E}[U(\Xi_0)^2]$ et $\mathbb{E}[A(\Xi_0)]$ peuvent alors être utilisées pour améliorer l'estimation des moments d'ordres 2 de α . Ainsi, une estimation des moments d'ordres 2 de α par optimisation est plus judicieuse.

Méthode 10.4 (Estimation des moments du vecteur central des longueurs des faces d'un zonotope aléatoire 0-régulier). Les estimations $\widehat{\mathbb{E}[\alpha]}$ et $\widehat{C[\alpha]}$ des moments du vecteur central des longueurs des faces α d'un zonotope aléatoire 0-régulier Ξ_0 sont obtenues par la procédure suivante.

- i. Estimation $\widehat{\mathbb{E}[U(\Xi_0)]}, \widehat{\mathbb{E}[A(\Xi_0)]}$ et $\widehat{\mathbb{E}[H_{\Xi_0}^{(N)}]}$ par la méthode du contraste minimum (voir section 4.3).
- ii. Estimation $\widehat{\mathbb{E}[U(\Xi_0)^2]}$ et $\widehat{C[H_{\Xi_0}^{(N)}]}$ par les méthodes 9.1 et 9.2.
- iii. Estimation $\widehat{\mathbb{E}[\alpha]}$ de $\mathbb{E}[\alpha]$ par optimisation contrainte :

$$\widehat{\mathbb{E}[\alpha]} = \operatorname*{arg\,min}_{x \in \mathbb{R}^N_+} \{ \| F^{(N)} x - \widetilde{\mathbb{E}[H^{(N)}_{\Xi_0}]} \|_2 \},$$
(10.10)

$$\sum_{i=1}^{N} \widehat{\mathbb{E}[\alpha]}_{i} = \frac{1}{2} \widehat{\mathbb{E}[U(\Xi_{0})]}.$$
(10.11)

iv. Estimation $C[\alpha]$ de $C[\alpha]$ par optimisation contrainte :

$$\widehat{C[\alpha]} = \underset{M \in \mathbb{R}^{N \times N}_{+}}{\arg\min} \{ \|F^{(N)}MF^{(N)} - \widehat{C[H_{\Xi_{0}}^{(N)}]}\|_{2} + \|4\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}M_{ij} - \widehat{\mathbb{E}[U(\Xi_{0})^{2}]}\|_{2} \}, \quad (10.12)$$

$$Tr(F^{(N)}\widehat{C[\alpha]}) = 2\widehat{\mathbb{E}[A(\Xi_0)]}.$$
(10.13)

Les estimateurs $\widehat{\mathbb{E}[U(\Xi_0)]}$ et $\widehat{\mathbb{E}[A(\Xi_0)]}$ sont beaucoup plus performants que les autres estimateurs intervenant dans cette méthode (voir les chapitres 5 et 9), c'est pourquoi ils sont utilisés sous la forme de contraintes égalités. En revanche, l'estimateur $\widehat{\mathbb{E}[U(\Xi_0)^2]}$ n'est pas aussi performant, c'est pourquoi il intervient seulement dans la minimisation.

Remarque 10.2.1. Notons que pour N suffisamment grand, l'hypothèse que le grain primaire soit un zonotope 0-régulier est peu restrictive puisque n'importe quel convexe symétrique peut être approché aussi précisément que souhaité lorsque N augmente (voir 8). Lorsque le grain n'est pas symétrique, c'est sur le grain symétrisé que porte l'hypothèse, mais dans ce cas les relations (10.7),(10.8) et (10.9) ne peuvent être utilisées.

Ceci étant la modélisation du grain par un zonotope aléatoire 0-régulier ayant un grand nombre de côtés 2N n'est pas toujours idéal à interpréter. D'autre part, la mise en place de la méthode 10.4 est d'autant plus coûteuse que N est grand. C'est pourquoi, la modélisation du grain par un zonotope aléatoire régulier ayant moins de côtés est parfois préférable.

10.2.2 Modèle Booléen de zonotopes aléatoires réguliers

Considérons désormais que le grain primaire Ξ_0 est un zonotope aléatoire régulier à 2N côtés :

$$\Xi_0 = R_\eta(\bigoplus_{i=1}^N \alpha_i S_{\theta_i}),$$

où η est une variable aléatoire sur $[0, \pi]$. Notons H le diamètre de Féret de la version isotrope du grain et α le vecteur central des longueurs des faces du grain. Les moments d'ordres 2 de α peuvent alors être estimés avec la méthode 10.1, cependant, ici aussi une approche par optimisation est préférable (voir remarque 8.3.1). En effet, d'une part les relations (10.7),(10.8) et (10.9) sont valables, et d'autre part l'auto-covariance de H peut aussi être évaluée en dehors de la subdivision $\theta_1, \dots \theta_N$.

Notons $m = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ et rappelons que $V[\alpha]$ ne dépend que de m + 1 valeurs (voir proposition 8.3.5). En particulier, en notant $v_k = \mathbb{E}[\alpha_1 \alpha_{k+1}]$ pour $k = 0, \dots m$ alors si N est pair $V[\alpha] =^t (v_0 \cdots v_{m-1}, v_m, v_{m-1}, \dots v_1)$ et si N est impair $V[\alpha] =^t (v_0 \cdots , v_m, v_m, \dots v_1)$. L'enjeu consiste

alors à estimer le vecteur $v = t (v_0, \dots v_m)$. Ceci peut aussi s'écrire comme la contrainte :

$$V[\alpha]_i = V[\alpha]_{N-i+1[N]+1}, \ i = 1, \cdots N.$$
(10.14)

Dans ce contexte, les relations (10.8) et (10.9) s'écrivent alors :

$$\mathbb{E}[U(\Xi_0)^2] = 4N \sum_{i=1}^N V[\alpha]_i, \qquad (10.15)$$

$$\mathbb{E}[A(\Xi_0)] = \frac{N}{2} \sum_{i=1}^{N} V[\alpha]_i |\sin(\theta_i)|.$$
(10.16)

Soient $M \ge m+1$ et $t_1 = 0 < \cdots < t_M = \frac{\pi}{2}$ une subdivision de $[0, \frac{\pi}{2}]$ contenant $\{\theta_1, \cdots, \theta_{m+1}\}$. Notons $V_H =^t (\mathbb{E}[H(0)H(t_1)], \cdots \mathbb{E}[H(0)H(t_M)])$ le vecteur des observations de l'auto-covariance du diamètre de Féret sur les t_i , alors d'après (8.35) :

$$V_H = QV[\alpha], \tag{10.17}$$

où $Q_{ij} = Nk_S(t_i - \theta_j)$ pour $1 \le i \le M$ et $1 \le j \le N$. Ainsi, une estimation de v peut être obtenue en minimisant $||V_H - QV[\alpha]||$ à l'aide des contraintes (10.14), (10.15) et (10.16). Plus précisément, la procédure d'estimation est décrite ci-après.

Méthode 10.5 (Estimation des moments du vecteur central des longueurs des faces d'un zonotope régulier.). Les estimations $\widehat{\mathbb{E}[\alpha]}$ et $\widehat{V[\alpha]}$ des moments du vecteur central des longueurs des faces α d'un zonotope aléatoire régulier Ξ_0 sont obtenues par la procédure suivante.

- i. Estimation $\widehat{\mathbb{E}[U(\Xi_0)]}, \widehat{\mathbb{E}[A(\Xi_0)]}$ et $\widehat{\mathbb{E}[H_{\Xi_0}^{(N)}]}$ par la méthode du contraste minimum (voir section 4.3).
- ii. Estimation $\widehat{\mathbb{E}[U(\Xi_0)^2]}$ et $\widehat{V_H} =^t (\widehat{\mathbb{E}[H(0)H(t_1)]}, \cdots \widehat{\mathbb{E}[H(0)H(t_M)]})$ par les méthodes 9.1 et 9.2.
- iii. Estimation de $\mathbb{E}[\alpha]$ par :

$$\widehat{\mathbb{E}[\alpha]} = \frac{1}{2N}^{t} (\widehat{\mathbb{E}[U(\Xi_{0})]}, \cdots \widehat{\mathbb{E}[U(\Xi_{0})]})$$
(10.18)

iv. Estimation $\widehat{V[\alpha]}$ de $V[\alpha]$ par optimisation contrainte :

$$\widehat{V[\alpha]} = \underset{V \in \mathbb{R}^{N}_{+}}{\arg\min} \{ \|QV - \widehat{V_{H}}\|_{2} + \|4N \sum_{i=1}^{N} V_{i} - \widehat{\mathbb{E}[U(\Xi_{0})^{2}]}\|_{2} \},$$
(10.19)

$$\sum_{i=1}^{N} |\sin(\theta_i)| \widehat{V[\alpha]_i} = \frac{2}{N} \widehat{\mathbb{E}[A(\Xi_0)]}, \qquad (10.20)$$

$$\widehat{V[\alpha]}_{i} = V[\widehat{\alpha]}_{N-i+1[N]+1}, \ i = 1, \cdots N.$$
(10.21)

La méthode 10.5 à donc été testée par simulation à partir des données estimés figure 9.5 (un modèle de Booléen de rectangles aléatoire). Plus précisément, la méthode à été testée avec aucune contraintes et avec la contrainte (10.16). Les erreurs absolues ϵ_{V_1} et ϵ_{V_2} respectivement commises sur les estimations de $V[\alpha]_1 = \mathbb{E}[\alpha_1^2]$ et $V[\alpha]_2 = \mathbb{E}[\alpha_1\alpha_2]$ sont alors résumées dans le tableau 10.1.

| Erreurs absolues | Sans aucunes contraintes | Avec la contrainte (10.16) |
|------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| ϵ_{V_1} | 3.3248% | 7.1459% |
| ϵ_{V_2} | 14.8978% | 0.1401% |

TABLE 10.1 – Erreurs relatives commises sur l'estimation des moments d'ordre 2 du vecteur des longueurs des faces du grain d'un modèle Booléen de rectangles aléatoire, à partir des estimations présentées figure 9.5.

Remarque 10.2.2 (Estimation des moments du vecteur central des longueurs des faces pour un zonotope aléatoire à 4 ou 6 côtés.). Si le grain est un zonotope aléatoire régulier à 4 ou 6 côtés (N = 2 ou 3) l'estimation des moments du vecteur central des longueurs des faces peut être réalisée sans faire appel à l'auto-covariance du diamètre de Féret. En effet, pour $N \in \{2,3\}$ le vecteur $V[\alpha]$ ne dépend que des $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1 = 2$ paramètres v_0 et v_1 . Ces paramètres peuvent alors être estimés à partir de $\mathbb{E}[U(\Xi_0)^2]$ et $\mathbb{E}[A(\Xi_0)]$ via les relations (10.15) et (10.16). En particulier, pour N = 2:

$$\mathbb{E}[U(\Xi_0)^2] = 8(v_0 + v_1), \\ \mathbb{E}[A(\Xi_0)] = v_1,$$

ce qui conduit à :

$$v_0 = \frac{1}{8} \mathbb{E}[U(\Xi_0)^2] - \mathbb{E}[A(\Xi_0)], \qquad (10.22)$$

$$v_1 = \mathbb{E}[A(\Xi_0)]. \tag{10.23}$$

D'autre part pour N = 3 :

$$\mathbb{E}[U(\Xi_0)^2] = 12(v_0 + 2v_1)$$
$$\mathbb{E}[A(\Xi_0)] = \frac{3\sqrt{3}}{2}v_1,$$

ce qui conduit à :

$$v_0 = \frac{1}{12} \mathbb{E}[U(\Xi_0)^2] - \frac{4\sqrt{3}}{9} \mathbb{E}[A(\Xi_0)], \qquad (10.24)$$

$$v_1 = \frac{2\sqrt{3}}{9} \mathbb{E}[A(\Xi_0)]. \tag{10.25}$$

Notons que les moments $\mathbb{E}[A(\Xi_0)H_{\Xi_0}]$, $\mathbb{E}[A(\Xi_0)H_{\Xi_0}]$ et $\mathbb{E}[A(\Xi_0)^2]$ ne sont pas utilisés dans les méthodes présentées ici. En effet, ces quantités mettent en jeu les moments d'ordres 3 et 4 des vecteurs des longueurs des faces du grain. Cependant ces quantités peuvent être utilisées pour estimer les caractéristiques d'un vecteur des longueurs des faces particulier (différents du vecteur central) lorsque ce dernier suit une distribution paramétrique, comme le montre l'exemple de rectangle gaussien (exemple 10.2.1).

Exemple 10.2.1 (Modèle Booléen de rectangles gaussien). Supposons désormais que le grain est un rectangle aléatoire dont l'un des vecteur des longueurs des faces (α_1, α_2) suit une distribution normale $N(\mu, \Sigma)$, ainsi $\Xi_0 = R_\eta(\alpha_1 S_0 \oplus \alpha_2) S_{\frac{\pi}{2}}$. Alors les moments d'ordre 2 de ${}^t(A(\Xi_0), U(\Xi_0))$ peuvent être exprimés à partir de ceux de (α_1, α_2) . En effet, les moments de ${}^t(A(\Xi_0), U(\Xi_0))$ mettent en jeu les moment d'ordre 1 à 4 de (α_1, α_2) . Il existe alors des relations permettant d'exprimer ces moments à partir des paramètre de la loi (μ, Σ) (voir [102], p.103). En particulier :

$$\begin{split} & \mathbb{E}[U(\Xi_0)] = 2(\mathbb{E}[\alpha_1] + \mathbb{E}[\alpha_2]), \\ & \mathbb{E}[A(\Xi_0)] = \mathbb{E}[\alpha_1\alpha_2], \\ & \mathbb{E}[U(\Xi_0)^2] = 4(\mathbb{E}[\alpha_1^2] + \mathbb{E}[\alpha_2^2]) + 8\mathbb{E}[\alpha_1\alpha_2], \\ & \mathbb{E}[[A(\Xi_0)U(\Xi_0)] = 4(\mathbb{E}[\alpha_1] + \mathbb{E}[\alpha_2])(\mathbb{E}[\alpha_1\alpha_2] - \mathbb{E}[\alpha_1]\mathbb{E}[\alpha_2]) + \mathbb{E}[\alpha_1]\mathbb{E}[\alpha_2^2] + \mathbb{E}[\alpha_2]\mathbb{E}[\alpha_1^2], \\ & \mathbb{E}[A(\Xi_0)^2] = 2\mathbb{E}[\alpha_1\alpha_2]^2 + \mathbb{E}[\alpha_1^2]\mathbb{E}[\alpha_2^2] - 2\mathbb{E}[\alpha_1]^2\mathbb{E}[\alpha_2]^2. \end{split}$$

De sorte que :

$$\frac{\mathbb{E}[U(\Xi_0)]}{2} = \mathbb{E}[\alpha_1] + \mathbb{E}[\alpha_2], \tag{10.26}$$

$$\mathbb{E}[A(\Xi_0)] = \mathbb{E}[\alpha_1 \alpha_2], \tag{10.27}$$

$$\frac{\mathbb{E}[U(\Xi_0)^2]}{4} - 2\mathbb{E}[A(\Xi_0)] = \mathbb{E}[\alpha_1^2] + \mathbb{E}[\alpha_2^2], \qquad (10.28)$$

$$\mathbb{E}[[A(\Xi_0)U(\Xi_0)] - 2\mathbb{E}[U(\Xi_0)]\mathbb{E}[A(\Xi_0)] = \mathbb{E}[\alpha_1]\mathbb{E}[\alpha_2^2] + \mathbb{E}[\alpha_2]\mathbb{E}[\alpha_1^2] - 2\mathbb{E}[U(\Xi_0)]\mathbb{E}[\alpha_1]\mathbb{E}[\alpha_2],$$
(10.29)

$$\mathbb{E}[A(\Xi_0)^2] - 2\mathbb{E}[A(\Xi_0)]^2 = \mathbb{E}[\alpha_1^2]\mathbb{E}[\alpha_2^2] - 2\mathbb{E}[\alpha_1]^2\mathbb{E}[\alpha_2]^2.$$
(10.30)

La résolution de ce système d'équations montre qu'il existe exactement deux distributions gaussienne parmi les distributions des vecteurs des longueurs des faces du grain. Ces distributions sont celle du vecteur ${}^t(\alpha_1, \alpha_2)$ et celle du vecteur ${}^t(\alpha_2, \alpha_1)$. Les paramètres de ces distributions sont alors obtenus par la résolution de ce système. Notons que des équations similaires peuvent être obtenues à partir des moments de ${}^t(A\Xi_0), H_{\Xi_0}$). Des approches par optimisation peuvent alors être envisagées pour l'estimation des paramètres de la loi normale.

10.3 Synthèse

Dans ce chapitre, les approximations de convexes aléatoires symétriques introduites au chapitre 8 ont été appliquées au grain primaire du modèle Booléen. Plus précisément, des méthodes permettant d'estimer ces approximations du grain en tant que zonotope aléatoire, on été présentées. Ces méthodes permettent de décrire la morphologie du grain symétrisé. Lorsque le grain est un zonotope aléatoire régulier, ces approximations coïncident avec le grain primaire. Dans ce contexte, les moments d'ordre 1 et 2 des longueurs des côtés du grain sont estimés. Cinquième partie

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES
Table des matières

| 11 | Conclusions | 177 |
|-----------------|--|-----|
| | 11.1 Contributions | 177 |
| | 11.2 Publications et communications | 178 |
| | 11.2.1 Journaux à comité de lecture | 178 |
| | 11.2.2 Conférences internationales à comité de lecture avec avec actes | 178 |
| | 11.2.3 Autres communications | 178 |
| | 11.3 Limites | 179 |
| 12 Perspectives | | 181 |
| | 12.1 Perspectives applicatives | 181 |
| | 12.2 Perspectives théoriques | 182 |

Table des matières

Chapitre 11

Conclusions

11.1 Contributions

Pour un convexe aléatoire X, une généralisation du covariogramme géométrique moyen est introduite (chapitre 7) : le *n*-variogramme moyen $\mathbb{E}[\nu_d(\bigcap_{i=1}^n X + x_i)]$. Pour un convexe K, des relations permettant d'exprimer le moment d'ordre n du volume du dilaté $\mathbb{E}[\nu_d(X \oplus K)^n]$ à partir du *n*-variogramme du dilaté $X \oplus K$ seront établies. En dimension 2, pour n'importe quelle jauge convexe K, ces relations permettent d'exprimer les moments du vecteur aléatoire ${}^t(A(X), W(X, K))$ composé des volumes mixtes de X et K. Au delà du problème des moments [103] (voir chapitre 3), ces moments permettent de totalement caractériser la distribution de X. Le choix de la jauge K révèle alors différentes caractéristiques géométriques de X. En particulier, en choisissant une boule, les fonctionnelles de Minkowski du grain sont exprimées. En choisissant un zonotope comme jauge, les moments du processus aléatoire du diamètre de Féret sont exprimés (voir chapitre 7).

Le processus du diamètre de Féret d'un convexe aléatoire X permet alors de construire différentes approximations de X sous formes de zonotopes aléatoires réguliers. Ces zonotopes aléatoires réguliers peuvent être décrits par leurs vecteurs des longueurs des faces $\alpha = {}^t (\alpha_1, \dots \alpha_N)$. Des relations permettant d'exprimer les moments des vecteurs des faces α des approximations de X à partir de ceux du diamètre de Féret de X sont alors donnés (voir chapitre 8).

Enfin, des relations permettant d'estimer le *n*-variogramme du grain primaire du modèle Booléen sont établies. Ces relations conduisent donc à des estimateurs des variations géométriques du grain (i.e les moments de ${}^{t}(A(X), W(X, K))$). Les propriétés de ces estimateurs sont discutées et leurs qualités évaluées par simulation. Ces estimations fournissent alors une description morphologique du grain primaire via ses approximations sous forme de zonotopes aléatoires.

L'approche proposée dans cette thèse fournit ainsi des outils permettant de caractériser la morphologie d'une population de particules via un modèle géométrique aléatoire. Lorsque des images 2-D de milieux granulaires (satisfaisant aux hypothèses du modèle Booléen) sont considérées, cette approche permet de décrire la population des particules projetées (tâche généralement difficile à réaliser avec les méthodes classiques d'analyse d'image).

11.2 Publications et communications

Ces travaux de thèse on donné lieu à différentes publications et communications, listées cidessous.

11.2.1 Journaux à comité de lecture

• Rahmani, S., Pinoli, J. C., & Debayle, J. (2017). Description of the symmetric convex random closed sets as zonotopes from their Feret diameters. Modern Stochastics : Theory and Applications, 3(4), 325-364.

11.2.2 Conférences internationales à comité de lecture avec avec actes

- Rahmani, S., Pinoli, J. C., & Debayle, J. (2015, July). Geometrical Stochastic Modeling and Characterization of 2-D Crystal Population. In 14th International Congress for Stereology and Image Analysis-14th ICSIA (p. FA06). Liège Belgium. International Society for Stereology. Acta Stereologica.
- Rahmani, S., Pinoli, J. C., & Debayle, J. (2015, October). Characterization and estimation
 of the variations of a random convex set by its mean n-variogram : Application to the
 boolean model. In International Conference on Networked Geometric Science of Information
 (pp. 296-308). Palaiseau, France. Springer International Publishing.
- Rahmani, S., Pinoli, J. C., & Debayle, J. (2015, September). Estimation of the Geometrical Variations of the Typical Grain within a Boolean Model. In International Conference on Geometry and Physics of Spatial Random Systems (GPSRS). Karlsruhe, Germany.

11.2.3 Autres communications

- Rahmani, S., Pinoli, J. C., & Debayle, J. (2016, May). Modélisation et caractérisation géométriques de cristaux par analyse d'images in situ. In Cristal Rouen 2016-8 ème édition du colloque Cristallisation et Précipitation Industrielles (Vol. 108). Rouen, France. SFGP-Diffusion Lavoisier Technique et documentation.
- Rahmani, S., Pinoli, J. C., & Debayle, J. (2015, February). Estimation des variations géométriques de grains anisotropes dans un modele Booléen. In 38 ème journée ISS France/International Society for Stereology (ISS 2015). Paris, France.
- Rahmani, S., Pinoli, J. C., & Debayle, J. (2015). Modélisation et caractérisation de populations de particules particules par géométrie intégrale et aléatoire : application aux processus

de cristallisation. Poster présenté à l'occasion de la journée de la recherche de l'école doctorale sciences ingénierie et santé (EDSIS). Saint-Étienne, France.

11.3 Limites

Outre le coût de calcul parfois élevé des covariances induit par les méthodes développées, elles présentes certaines limites. La première limite intervenant est la condition (9.20), elle implique que ces méthodes ne peuvent être utilisées lorsque le grain primaire du modèle Booléen a des dimensions de l'ordre de celles de la fenêtre d'observation. Cependant cette condition n'est pas très restrictive puisque en pratique, le modèle Booléen n'est pas adapté à la modélisation de telles données (l'ergodicité étant invérifiable, voir 153). Une seconde limite, est que les descriptions morphologiques d'un convexe aléatoire X introduites dans le chapitre 8 font référence au symétrisé de X. Bien que la morphologie du symétrisé de X informe sur celle de X, elle ne permet pas de la décrire complètement. Ainsi lorsque le grain primaire du modèle Booléen n'est pas symétrique, ce n'est pas la morphologie du grain qui est estimée mais celle de son symétrisé. Enfin, la plus importante limite de ces méthodes est l'hypothèse d'une répartition des germes selon un processus ponctuel de Poisson (une hypothèse du modèle Booléen). En effet, les autres hypothèses du modèle (stationnarité, indépendance des grains) sont soit faciles à vérifier soit admissibles dans la majorité des applications visées. Cependant, l'hypothèse d'une répartition spatiale "purement aléatoire" (purely random property, voir [55] et section 3.3) de Poisson est fausse pour de nombreuses applications ou des phénomènes d'agrégations ou de répulsions interviennent.

Chapitre 12

Perspectives

12.1 Perspectives applicatives

Bien que le modèle Booléen puisse être utilisé pour modéliser différents types de milieux granulaires. La modélisation du grain primaire par un zonotope aléatoire semble particulièrement adaptée aux cristaux (voir figures 12.1a et 1.1). Ainsi la principale perspective applicative de ces travaux sera la caractérisation morphologique de populations de cristaux.



FIGURE 12.1 – Une images de cristaux d'oxalate d'ammonium (a) et sa version binaire (b).

Au cours d'un processus de cristallisation un capteur en ligne permet l'acquisition d'images 2-D des cristaux en suspension. Des méthodes de traitement d'images [104, 105, 17, 106] permettent alors de segmenter les images acquises sous forme d'images binaires (figure 12.1). Dans ce contexte, ces images binaires (figure 12.1b) peuvent toujours être appréhendées comme les réalisations d'un modèle germes-grains dans lequel les grains supposés i.i.d modélisent les projections des cristaux en présence. Ainsi, la distribution du grain primaire correspond à celle des projections des cristaux.

Si ces images satisfont aux hypothèses du modèle Booléen, les techniques d'estimations développées dans cette thèse permettraient de caractériser la distribution des projections de cristaux. Des méthodes de stéréologie projective pourraient alors être utilisées pour caractériser les cristaux en 3-D. Cependant, des tests montrent que ces images ne satisfont pas aux hypothèses du modèle Booléen, notamment vis à vis de la distribution des germes. En effet, des phénomènes d'agrégations entre les cristaux semble se produire. En ce sens, afin de traiter cette application, les relations établies au chapitre 9 pour le modèle Booléen devront préalablement être généralisées à une classe plus large de modèles germes-grains.

12.2 Perspectives théoriques

Plusieurs perspectives pour améliorer les méthodes développées sont envisageables. Une étude analytique des propriétés de l'estimateur du *n*-variogramme moyen du grain du modèle Booléen peut être envisagée. D'autre part il serait intéressant d'évaluer par simulation la qualité de l'estimation des moments de $t(A(\Xi_0), W(\Xi_0))$ d'ordre supérieur à 3. Enfin, pour certains contextes applicatifs, il serait utile d'adapter les méthodes du chapitre 10, pour décrire des modèles Booléens de zonotopes aléatoires non réguliers.

Des perspectives de généralisations en termes de dimension et d'ordre des moments estimés peuvent être considérées. Pour un convexe aléatoire $X \in \mathbb{R}^d$ et un convexe K, les relations développées dans le chapitre 7, permettent d'exprimer les moments de tout ordre du volume du grain dilaté $\mathbb{E}[\nu_d(X \oplus K)^n]$, $n \in \mathbb{N}$. Cependant, la méthode présentée permet d'exprimer tout les moments du vecteur des volumes mixtes uniquement dans le cas de la dimension 2 (d = 2). Ainsi, il serait intéressant de pouvoir faire la même chose pour $d \geq 3$ et de généraliser les approximations introduites au chapitre 8. D'autre part, les relations développés dans le chapitre 8 pour l'approximation dans $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ permettent uniquement de décrire les moments d'ordres 2 du vecteur des faces de l'approximation. Aussi, il serait utile d'étendre ces relations afin d'obtenir les moments d'ordres ≥ 3 du vecteur des faces.

L'une des plus importantes limites des descriptions morphologiques développées au chapitre 8 pour un convexe aléatoire X est qu'elles concernent son symétrisé. Ainsi la description de l'asymétrie des convexes aléatoires constitue l'une des plus importantes perspectives. Rappelons que la connaissance de W(X, K) pour toute jauge convexe K suffit à caractériser X (à translation près). Le chapitre 8 consiste en une description du symétrisé de X par l'utilisation de jauges construites à partir d'une base de segments (zonotopes). Ainsi, il serait intéressant d'investiguer une description du grain à partir d'autres types de jauges. Notons tout de même que si la jauge est symétrique alors W(X, K) n'informe que sur le grain symétrisé. Ainsi, une approche similaire au chapitre \mathcal{R} , en utilisant une base d'objets asymétriques pour construire des jauges doit être envisagée.

La plus importante limite de ces travaux réside certainement dans l'hypothèse portant sur la répartition spatiale des germes du modèle Booléen (processus ponctuel de Poisson). En effet, les relations permettant d'estimer le n-variogramme moyen du grain primaire développées au chapitre 9 sont uniquement valables pour le modèle Booléen. Afin de traiter l'application précitée, il est donc nécessaire d'avoir des relations similaires pour des modèles germes-grains autorisant l'agrégation des grains [107, 23](cluster Boolean model, Cox germs grains *model, Quermass Model...*). Malheureusement, l'expression de la capacité fonctionnelle de ces modèles [23] est rapidement très complexe et ne permet pas une expression directe du *n*-variogramme.

Cependant, afin de traiter des applications qui ne satisfont pas à une distribution spatiale de Poisson, une autre approche peut être envisagée. En effet, des données telles que la figure 12.1b peuvent être considérées comme des réalisations d'un modèle germes-grains (restreintes à une fenêtre d'observation) dont les grains sont i.i.d et indépendant du processus ponctuel des germes. Rappelons que l'organisation spatiale et le nombre des particules n'est pas un objectif et notons Ξ_0 le grain primaire du modèle germes-grains. Dans ce contexte on peut se demander si on peut construire une réalisation d'un modèle Booléen de grain primaire Ξ_0 à partir des données (figure 12.1b)? Si une telle procédure est établie, elle permettrait de traiter une large gamme d'application puisque quelles que soient les données il serait toujours possible de se ramener au modèle Booléen. Une telle procédure ne peut être élaborée de manière analytique puisqu'elle dépendrait du processus des germes du modèle originel, cependant une approche par optimisation semble envisageable.

LISTES ET NOMENCLATURE DES SYMBOLES

Liste des figures

| 1.1 | Exemples d'acquisitions d'images 2-D de cristaux d'oxalate d'amonium (à gauche) et d'acide citrique (à droite). | 6 |
|-----|---|-----|
| 2.1 | Fonction d'appui du compact K de \mathbb{R}^2 évalué dans la direction $u \in S^1$ | 28 |
| 2.2 | Diamètre de Féret d'un compact X sans la direction θ | 29 |
| 2.3 | Dilatation d'un convexe compact X par un segment S_{θ} dirigé par θ avec la repré- sentation de l'aire mixte $W(X, S_{\theta})$ et de ses points tangents | 34 |
| 4.1 | Un point tangent à Ξ_0 , extrait de [57] | 72 |
| 4.2 | Les points tangents (visibles) d'un ensemble dans la direction \vec{u} , extrait de[57]. | 73 |
| 5.1 | Des exemples de simulation de différents modèles Booléens | 83 |
| 5.2 | Exemples de réalisation. La fraction d'aire évolue de 0.1 à 0.9 lorsque l'intensité augmente. | 84 |
| 5.3 | Erreurs relatives commises sur les estimations $\widehat{p_{\Xi}}$, $\widehat{L_A}$ et $\widehat{\chi_A}$ pour le modèle de fraction d'aire 60% en fonction du nombre de réalisations du modèle | 85 |
| 5.4 | Erreurs relatives commises sur les estimations $\widehat{p_{\Xi}}$, $\widehat{L_A}$ et $\widehat{\chi_A}$ pour 2000 réalisations, en fonction de la fraction d'aire. | 86 |
| 5.5 | Erreurs relatives commises sur les estimations $\widetilde{\mathbb{E}[A(\Xi_0)]}, \widetilde{\mathbb{E}[U(\Xi_0)]}$ et $\widehat{\lambda}$ obtenues via les formules de Miles, pour le modèle de fraction d'aire 60%, en fonction du nombre | |
| | de réalisations du modèle. | 87 |
| 5.6 | Erreurs relatives commises sur les estimations $\mathbb{E}[A(\Xi_0)], \mathbb{E}[U(\Xi_0)]$ et $\hat{\lambda}$ obtenues via les formules de Miles, pour 2000 réalisations, en fonction de la fraction d'aire | 87 |
| 7.1 | Illustration du 3-variogramme géométrique d'un disque : l'aire de la partie rouge correspond au 3-variogramme géométrique évalué en (u_1, u_2) . | 97 |
| 7.2 | Des convexes asymétriques (à gauche) et leurs symétrisés (à droite). | 106 |
| 8.1 | Polygones symétriques convexes | 112 |
| 8.2 | Les $C_0^{(N)}$ -approximations d'une ellipse X de demi-axes $a = 1$ et $b = 3$ et de X' sa rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. | 118 |

| 8.3 | La distance de Hausdorff entre une ellipse de demi-axes $(1,3)$ et sa $\mathcal{C}_0^{(N)}$ - | |
|------|--|-----|
| | approximation pour $N = 2, \dots 20$. Le cas de la meilleure orientation en rouge, et | |
| | celui de pire en bleu. La zone grisée représente l'ensemble des valeurs possibles pour | |
| | cette distance. | 119 |
| 8.4 | Une ellipse X et ses approximations : $X_2 \in \mathcal{C}_0^{(2)}$ (en bleu) et $R_{\tau}(\tilde{X}_2) \in \mathcal{C}_{\infty}^{(2)}$ (en rouge) | 121 |
| 8.5 | Les $\mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximations (à gauche) et $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximations (à droite) d'une ellipse | |
| | de demi-axes $(3,1)$ pour différentes valeurs de $N(=3,4,10)$. | 122 |
| 8.6 | La distance de Hausdorff entre une ellipse de périmètre unitaire et sa $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ - | |
| | approximation, pour différentes valeurs de N et en fonction du ratio de ses axes | |
| | k | 123 |
| 9.1 | Exemples de réalisations des modèles tests. La fraction d'aire évolue de 0.1 à 0.9 | |
| | lorsque l'intensité augmente. | 155 |
| 9.2 | Évaluation de l'erreur absolue ϵ_{A^2} commise sur l'estimation du moment d'ordre 2 | |
| | de l'aire du grain en fonction du nombre d'observations L pour le modèle dont la | |
| | fraction d'aire vaut 80% | 156 |
| 9.3 | Évaluation de l'erreur relative commise sur l'estimation du moment d'ordre 2 de | |
| | l'aire du grain en fonction de la fraction d'aire $p_{\Xi}(\lambda)$ du modèle pour $L = 2000$ | |
| | observations. | 157 |
| 9.4 | Une réalisation du modèle test (a) et les erreur relatives commises sur l'estimation | |
| | des moments d'ordres 2 de ${}^{t}(A(\Xi_{0}), U(\Xi_{0}))$ (b) et de ${}^{t}(A(\Xi_{0}), H_{\Xi_{0}}(\theta))$ (c). | 159 |
| 9.5 | Une réalisation du modèle test (a) et (b) les erreurs relatives commises sur l'es- | 100 |
| 0.0 | timation de $\mathbb{E}[H_{-}(0)H_{-}(\theta)]$ faite avec 1500 réalisations du modèle pour $\theta =$ | |
| | $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$ | 160 |
| 12.1 | Une images de cristaux d'oxalate d'ammonium (a) et sa version binaire (b) | 181 |

Liste des tableaux

| 2.1 | Différentes normalisations des fonctionnelles de Minkowski 2-D | 21 |
|------|--|-----|
| 2.2 | Différentes normalisations des fonctionnelles de Minkowski 3-D | 21 |
| | | |
| 10.1 | Erreurs relatives commises sur l'estimation des moments d'ordre 2 du vecteur des | |
| | longueurs des faces du grain d'un modèle Booléen de rectangles aléatoire, à partir | |
| | des estimations présentées figure 9.5 | 169 |
| | | |

Liste des tableaux

Liste des notations

Une liste non exhaustive des notations présentes dans ce manuscrit est proposée ici. Les notations spécifiques introduites sont regroupées en trois catégories : les notation relatives à la géométrie intégrale, à la géométrie aléatoire ainsi que celles qui sont relatives au développement proposé. Dans chaque catégorie, les différentes notations sont regroupées en fonction du chapitre dans lequel elles sont introduites.

NOTATIONS RELATIVES À LA GÉOMÉTRIE INTÉGRALE

Notations du chapitre 2 : Géométrie intégrale

| £ | Ensemble des compacts de \mathbb{R}^d |
|--|--|
| ₭ | Ensemble des compacts convexes de \mathbb{R}^d |
| \mathcal{R} | Anneau des convexes |
| <i>X</i> | Réflexion $\check{X} := -X$ de l'ensemble X |
| ⊕ | Addition de Minkowski |
| \ominus | Soustraction de Minkowski |
| d_H | Distance de Hausdorff |
| ν_d | Mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d |
| $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ | Tribu borélienne de \mathbb{R}^d |
| χ | Caractéristique d'Euler-Poincaré |
| $W_k(X)$ ou $W_k^{(d)}(X)$ | $\ldots \ldots \ldots k$ -ième fonctionnelle de Minkowski de X dans \mathbb{R}^d |
| ω_d | |
| $M_k(X)$ ou $M_k^{(d)}(X)$ | $\ldots \ldots k$ -ième fonctionnelle de Minkowski normalisée de X dans \mathbb{R}^d |
| $V_k(X)$ ou $V_k^{(d)}(X)$ | $\dots \dots \dots k$ -ième volume intrinsèque de X dans \mathbb{R}^d |
| A(X) et $U(X)$ | Aire et périmètre de $X \subset \mathbb{R}^2$ |
| $W_{k,d-k}(X,Y)$ ou $W_{k,d-k}^{(d)}(X)$. | $\dots \dots \dots \dots \dots k$ -ième volume mixte entre X et Y dans \mathbb{R}^d |
| W(X,Y) | Aire mixte entre X et Y dans \mathbb{R}^2 |
| g_K | Covariogramme géométrique de $K \subset \mathbb{R}^d$ |
| \bar{g}_K | Covariogramme géométrique isotropisé de $K \subset \mathbb{R}^d$ |
| f_K | |
| h_X | |

| Symétrisé de X | \dots $\frac{1}{2}(X \oplus \check{X})$ |
|----------------|---|
| H_X | Diamètre de Féret de $X \subset \mathbb{R}^2$ |
| $S_{	heta}$ | Segment (centré) de unitaire de \mathbb{R}^2 dirigé par $\theta \in \mathbb{R}$ |
| R_{θ} | Rotation vectorielle de \mathbb{R}^2 d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ |

NOTATIONS RELATIVES À LA GÉOMÉTRIE ALÉATOIRE

Notations du chapitre 3 : Géométrie aléatoire

| $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Espace probabilisé usue |
|--|
| v.a |
| e.a |
| <i>p.s</i> |
| p.p |
| P_X |
| $\mathbb{E}[X]$ Espérance de la v.a X |
| $\mathbb F$ Ensemble des parties fermées de $\mathbb R^d$ |
| ${\cal F}$ Tribu sur ${\Bbb I}$ |
| T_X Capacité fonctionnelle de l'e.a X |
| p(X,.) |
| p_X Fraction de volume $p_X := p(X,0)$ de l'e.a X de \mathbb{R}^d |
| $v_k(X)$ k -ième fraction de volume intrinsèque de l'e.a X |
| p_X |
| L_A Fraction de périmètre $L_A := 2v_1$ (d'un e.a de \mathbb{R}^2) |
| $\chi_A \dots \dots$ |
| $Cont_K(X, .)$ Fonction de distribution des contacts de l'e.a X relativement au compact K |
| Cov_X |
| $\mathcal{C}_X^{(n)}$ |
| γ_X Covariogramme géométrique moyen $\gamma_X := \mathbb{E}[g_X]$ de l'e.a X |
| $\mathbf{E}X$ |
| Λ_{Φ} |
| λ_{Φ} |
| $ ho_{\Phi}^{(2)}$ Densité produit d'ordre 2 du processus ponctuel Φ |
| g_{Φ} |
| Ξ Un modèle germes-grains |
| Ξ_i Un grain du modèle germes-grains Ξ |
| Ξ_0 Le grain primaire du modèle germes-grains Ξ |

Notations du chapitre 4 : État de l'art sur le modèle Booléen

| Ξ | Un modèle Booléen |
|-------------------|--|
| λ | Intensité du modèle Booléen |
| Ξ_0 | Grain primaire du modèle Booléen |
| Ψ_{Ξ} | $\Psi_{\Xi}(K) = -\ln(1 - T_{\Xi}(K))$ pour tout compact K |
| q_{Ξ} | Fonction de corrélation du modèle Booléen |
| $Cont^l_K(\Xi,.)$ | . Transformée logarithmique $Cont_K^l(\Xi, .) := -\ln(1 - Cont_K(\Xi, .))$ de $Cont_K(\Xi, .)$. |
| N_A^+ | Nombre spécifique de convexités du modèle Booléen Ξ |
| <i>W</i> | \ldots Fenêtre d'observation compacte convexe et d'intérieur non vide |
| W_{rK} | |

NOTATIONS RELATIVES AU DÉVELOPPEMENT PROPOSÉ

Notations du chapitre 7 : Variations géométriques d'un convexe aléatoire

| g | ${n \choose X}$ | n -variogramme géométrique du convexe $X \subset \mathbb{R}^d$ |
|----------|---------------------------|---|
| γ | $\stackrel{(n)}{X}$ | $\dots\dots\dots n$ -variogramme géométrique moyen $\gamma_X^{(n)} := \mathbb{E}[g_X^{(n)}]$ du convexe aléatoire X de \mathbb{R}^d |
| ζ | $_{X,K}^{(n)}$ | \dots Moment d'ordre n du volume du dilaté d'un convexe aléatoire X par un convexe K |
| η | $_{X,K}^{(n)}$ | Polynôme $\forall r > 0, \ \eta_{X,K}^{(n)}(r) := \sum_{j=1}^{n} {n \choose j} r^{2j} \zeta_{X,K}^{(n-j)}(r)$ pour un convexe aléatoire X de \mathbb{R}^{2} |
| Λ | $\mathcal{I}_{n,k}^{(K)}$ |) Coefficient d'ordre k de $\eta_{X,k}^{(n)}$ |

Notations du chapitre 8 : Description des convexes aléatoires symétriques par des zonotopes aléatoires

| $(\theta_i)_{1\leq i}$ | $\leq i \leq N$ Subdivision régulière de $[0, \pi[$ à N éléments |
|------------------------------|---|
| $H_X^{(N)}$ | $=^{t} (H_X(\theta_1), \cdots H_X(\theta_N))$ Vecteur des diamètres de Féret de X évalués sur $(\theta_i)_{1 \le i \le N}$ |
| \mathcal{C} | Classe des convexes symétriques de \mathbb{R}^2 |
| $\mathcal{C}^{(N)}$ | $\subset \mathcal{C}$ Classe des zonotopes de \mathbb{R}^2 ayant au plus $2N$ côtés |
| $\mathcal{C}_0^{(N)}$. | $\subset \mathcal{C}^{(N)}$ |
| $\mathcal{C}_t^{(N)}$. | $\subset \mathcal{C}^{(N)}, t \in \mathbb{R}$ Classe des zonotopes t-réguliers |
| $\mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ | $\subset \mathcal{C}^{(N)}$ Classe des zonotopes réguliers $\mathcal{C}^{(N)}_{\infty} := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{C}^{(N)}_t$ |
| X_0^N | $\ldots \ldots \mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation de $X \in \mathcal{C}$ |
| $	ilde{X}_0^N$. | $\ldots \ldots \mathcal{C}_0^{(N)}$ -approximation rotationnelle de $X \in \mathcal{C}$ |
| X_{∞}^N | $\ldots \ldots \mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation de $X \in \mathcal{C}$ |
| $	ilde{X}^N_\infty$. | $\dots \mathcal{C}_{\infty}^{(N)}$ -approximation isotrope d'un convexe aléatoire symétrique |
| $\alpha =^t$ | $(\alpha_1 \cdots \alpha_N)$ |
| Circ(| (x)Matrice circulante engendrée par le vecteur x |
| C[x] | $\ldots \ldots \ldots C[x] := \mathbb{E}[x^t x]$ Matrice des moments d'ordre 2 du vecteur aléatoire x |
| V[x] | Première colonne de ${\cal C}[x]$ |
| | |

| k_S | La fonction π -périodique $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t+z)\sin(z) dz$ |
|-----------|--|
| K | La fonction matricielle $t \in \mathbb{R} \mapsto K(t) = (k_S(t + \theta_i - \theta_j))_{1 \le i,j \le N}$ |
| $F^{(I)}$ | ^{N)} La matrice $(\sin(\theta_i - \theta_j))_{1 \le i,j \le N}$ |

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. Raj. Effect of WO3 powder particle shape, size and bulk density, on the grain size and grain size distribution of tungsten metal powder. *Metal Powder Report*, 71(4):285–287, 2016.
- P. Mougin, A. Thomas, G. Wilkinson, D.and White, K.J. Roberts, N. Herrmann, R. Jack, and R. Tweedie. On line monitoring of a crystallization process. *AIChE Journal*, 49(2):373–378, 2003.
- [3] K. Schladitz, A. Büter, M. Godehardt, O. Wirjadi, J. Fleckenstein, T. Gerster, U. Hassler, K. Jaschek, M. Maisl, U. Maisl, et al. Non-destructive characterization of fiber orientation in reinforced smc as input for simulation based design. *Composite Structures*, 160 :195–203, 2017.
- [4] O. Wirjadi, K. Schladitz, P. Easwaran, and J. Ohser. Estimating fibre direction distributions of reinforced composites from tomographic images. *Image Analysis and Stereology*, 35(3):167–179, 2016.
- [5] L. Wei and M. Sun. Numerical studies of the influence of particles size distribution characteristics on the gravity separation performance of liquid-solid fluidized bed separator. *International Journal of Mineral Processing*, 157 :111–119, 2016.
- [6] F. Gruy. Fast calculation of the light differential scattering cross section of optically soft and convex bodies. *Optics Communications*, 313:394–400, 2014.
- [7] T. Mori, N. Moteki, S. Ohata, M. Koike, K. Goto-Azuma, Y. Miyazaki, and Y. Kondo. Improved technique for measuring the size distribution of black carbon particles in liquid water. *Aerosol Science and Technology*, 50(3) :242–254, 2016.
- [8] C. M. Keck and R.H. Müller. Size analysis of submicron particles by laser diffractometry 90% of the published measurements are false. *International Journal of Pharmaceutics*, 355(1):150–163, 2008.
- [9] G. Crawley, M. Cournil, and D. Di Benedetto. Size analysis of fine particle suspensions by spectral turbidimetry : potential and limits. *Powder Technology*, 91(3) :197–208, 1997.
- [10] J. Worlitschek, T. Hocker, and M. Mazzotti. Restoration of PSD from chord length distribution data using the method of projections onto convex sets. *Particle and Particle Systems Characterization*, 22(2) :81–98, 2005.
- [11] P. Mougin, D. Wilkinson, K.J. Roberts, R. Jack, and P. Kippax. Sensitivity of particle sizing by ultrasonic attenuation spectroscopy to material properties. *Powder technology*, 134(3):243–248, 2003.

- [12] F. Gruy. Quels défis pour la granulométrie optique? what challenges does optical particle sizing face? In *Cristal 7*, number 103. Technique et documantation Lavoisier et Société Française de Génie des procédés, 2013.
- [13] B. Presles, J. Debayle, and J-C. Pinoli. Size and shape estimation of 3-D convex objects from their 2-D projections : application to crystallization processes. *Journal of Microscopy*, 248(2) :140–155, 2012.
- [14] B. Presles. Caractérisation géométrique et morphométrique 3-D par analyse d'image 2-D de distributions dynamiques de particules convexes anisotropes. Application aux processus de cristallisation. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2011.
- [15] S. Schorsch, D.R. Ochsenbein, T. Vetter, M. Morari, and M. Mazzotti. High accuracy online measurement of multidimensional particle size distributions during crystallization. *Chemical Engineering Science*, 105 :155–168, 2014.
- [16] Y. Huo, T. Liu, H. Liu, C.Y. Ma, and X.Z. Wang. In-situ crystal morphology identification using imaging analysis with application to the L-glutamic acid crystallization. *Chemical Engineering Science*, 148 :126–139, 2016.
- [17] J. Calderon De Anda, X.Z. Wang, and K.J. Roberts. Multi-scale segmentation image analysis for the in-process monitoring of particle shape with batch crystallisers. *Chemical Engineering Science*, 60(4) :1053–1065, 2005.
- [18] O. S. Ahmad, J. Debayle, and J-C. Pinoli. A geometric-based method for recognizing overlapping polygonal-shaped and semi-transparent particles in gray tone images. *Pattern Re*cognition Letters, 32(15):2068–2079, 2011.
- [19] P. Calka, J. Michel, and S. Porret-Blanc. Visibilité dans le modèle booléen. Comptes Rendus Mathématique, 347(11-12) :659–662, 2009.
- [20] D. Jeulin. Random texture models for material structures. Statistics and Computing, 10(2):121–132, 2000.
- [21] C. Peyrega. Prédiction des propriétes acoustiques de matériaux fibreux hétérogenes a partir de leur microstructure 3D. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2010.
- [22] M. Moreaud. Propriétés morphologiques multi-échelles et prévision du comportement diélectrique de nanocomposites. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2006.
- [23] S.N. Chiu, D. Stoyan, W.S. Kendall, and J. Mecke. Stochastic geometry and its applications. John Wiley & Sons, 2013.
- [24] B. Galerne. Computation of the perimeter of measurable sets via their covariogram. applications to random sets. *Image Analysis and Stereology*, 30(1):39–51, 2011.
- [25] J. Stoyanov. Krein condition in probabilistic moment problems. *Bernoulli*, pages 939–949, 2000.
- [26] Bourbaki. Eléments de mathématique : les structures fondamentales de l'analyse. Livre 3 : Topologie générale. Hermann, 1947.
- [27] K. Michielsen and H. De Raedt. Integral-geometry morphological image analysis. *Physics Reports*, 347(6) :461–538, 2001.

- [28] J-C. Pinoli. Mathematical foundations of image processing and analysis, volume 2. John Wiley & Sons, 2014.
- [29] R. Schneider. Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory, volume 151. Cambridge University Press, 2013.
- [30] S. Rivollier. Analyse d'image géométrique et morphométrique par diagrames de forme et voisinages adaptatifs généraux. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2010.
- [31] H. Hadwiger. Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, volume 93. Springer-Verlag, 2013.
- [32] D.A. Klain and G-C. Rota. Introduction to geometric probability. Cambridge University Press, 1997.
- [33] D.A. Klain. A short proof of Hadwiger's characterization theorem. *Mathematika*, 42(02):329– 339, 1995.
- [34] A.D. Aleksandrov. Theory of Mixed Volumes. 1967.
- [35] L. Parapatits and F. E. Schuster. The Steiner formula for Minkowski valuations. Advances in Mathematics, 230(3) :978–994, 2012.
- [36] P. Gruber. Convex and discrete geometry, volume 336. Springer Science & Business Media, 2007.
- [37] M.A Hernández Cifre. Optimizing the perimeter and the area of convex sets with fixed diameter and circumradius. Archiv der Mathematik, 79(2):147–157, 2002.
- [38] M.A. Hernández Cifre, G. Salinas, and S. Gomis. Complete systems of inequalities. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2(1-10) :1–12, 2001.
- [39] T. Lindeberg. Scale-space theory in computer vision, volume 256. Springer Science & Business Media, 2013.
- [40] G. Matheron. Traité de géostatistique appliquée. 1 (1962), volume 1. Editions Technip, 1962.
- [41] G. Bianchi. Matheron's conjecture for the covariogram problem. Journal of the London Mathematical Society, 71(1):203–220, 2005.
- [42] G. Averkov and G. Bianchi. Confirmation of Matheron's conjecture on the covariogram of a planar convex body. *Journal of the European Mathematical Society*, 11(6) :1187–1202, 2009.
- [43] G. Bianchi. The covariogram determines three-dimensional convex polytopes. Advances in Mathematics, 220(6) :1771–1808, 2009.
- [44] G. Matheron. Random sets and integral geometry. 1975.
- [45] W. Gille. Scattering properties and structure functions of boolean models. Computers and Structures, 89(23):2309–2315, 2011.
- [46] L.R. Féret. La grosseur des grains des matières pulvérulentes. 1930.
- [47] R. Alexander, I.D. Berg, and R.L. Foote. Integral geometric formulas for perimeter in S2, H2 and hilbert planes. *Journal of Mathematics*, 35(6), 2005.

- [48] G. Meurant. Handbook of convex geometry. Elsevier, 2014.
- [49] E. Lutwak. Volume of mixed bodies. Transactions of the American Mathematical Society, 294(2):487–500, 1986.
- [50] S. Torquato. Random heterogeneous materials : microstructure and macroscopic properties, volume 16. Springer Science & Business Media, 2002.
- [51] W. Feller. An introduction to probability theory and its applications, volume 2. John Wiley & Sons, 2008.
- [52] E. Cinlar. Introduction to stochastic processes. Courier Corporation, 2013.
- [53] N. Akhiezer and N. Kemmer. The classical moment problem : and some related questions in analysis, volume 5. Oliver & Boyd Edinburgh, 1965.
- [54] C. Kleiber and J. Stoyanov. Multivariate distributions and the moment problem. Journal of Multivariate Analysis, 113:7–18, 2013.
- [55] D. Stoyan. Stochastic Geometry and its application. John Wiley & Sons, 1987.
- [56] A. Baddeley, I. Bárány, R. Schneider, and W. Weil. Stochastic geometry. Springer, 2007.
- [57] I.S. Molchanov. Statistics of the Boolean model for practitioners and mathematicians. Wiley Chichester, 1997.
- [58] T. Mattfeldt, H-W. Gottfried, V. Schmidt, and HA. Kestler. Classification of spatial textures in benign and cancerous glandular tissues by stereology and stochastic geometry using artificial neural networks. *Journal of microscopy*, 198(2) :143–158, 2000.
- [59] K. Rannou, Y. Gavet, and J-C. Pinoli. Characterization of the corneal endothelial mosaic and comparison with simulated tessellations modeled with gaussian random fields. In *The International Conference on Quality Control by Artificial Vision 2015.* International Society for Optics and Photonics, 2015.
- [60] D. Stoyan and A. Penttinen. Recent applications of point process methods in forestry statistics. *Statistical Science*, pages 61–78, 2000.
- [61] M.G. Kendall and P.A.P. MMoran. *Geometrical probability*. Griffin, 1963.
- [62] G. Matheron. Random sets and integral geometry. 1975.
- [63] G. Beer. On the fell topology. Set-valued analysis, 1(1):69–80, 1993.
- [64] F. Ballani. The surface pair correlation function for stationary boolean models. Advances in Applied Probability, 39(1):1–15, 2007.
- [65] F. Ballani. On second-order characteristics of germ-grain models with convex grains. Mathematika, 53(02) :255–285, 2006.
- [66] I.S. Molchanov. Theory of random sets. Springer Science & Business Media, 2006.
- [67] G. Choquet. Theory of capacities. In Annales de l'institut Fourier, volume 5, pages 131–295, 1954.
- [68] I.S. Molchanov. Random closed sets. In Michel Bilodeau, Fernand Meyer, and Michel Schmitt, editors, Space, Structure and Randomness, volume 183 of Lecture Notes in Statistics, pages 135–149. Springer New York, 2005.

- [69] M. Zähle. Curvature measures and random sets ii. Probability Theory and Related Fields, 71(1):37–58, 1986.
- [70] B. Galerne. *Modèles d'images aléatoires et synthèse de texture*. PhD thesis, Ecole normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2010.
- [71] A. Gallego and A. Simò. Random closed set models : estimating and simulating binary images. *Image Analysis and Stereology*, 22 :72–91, 2003.
- [72] R.J Aumann. Integrals of set-valued functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 12(1):1–12, 1965.
- [73] D. Stoyan and H. Stoyan. Fractals, random shapes and point fields : methods of geometrical statistics. 1994.
- [74] D.J Daley and D. Vere-Jones. An introduction to the theory of point processes : volume II : general theory and structure. Springer Science & Business Media, 2007.
- [75] B.D. Ripley. The second-order analysis of stationary point processes. Journal of applied probability, 13(02) :255–266, 1976.
- [76] E. Villa. Mean densities and spherical contact distribution function of inhomogeneous boolean models. Stochastic Analysis and Applications, 28(3):480–504, 2010.
- [77] F. Camerlenghi, V. Capasso, and E. Villa. On the estimation of the mean density of random closed sets. *Journal of Multivariate Analysis*, 125 :65–88, 2014.
- [78] X.X. Nguyen and H. Zessin. Ergodic theorems for spatial processes. Zeitschrift f
 ür Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 48(2):133–158, 1979.
- [79] W. Weil. Intensity analysis of boolean models. Pattern Recognition, 32(9):1675–1684, 1999.
- [80] V. Dupac. Parameter estimation in the poisson field of discs. *Biometrika*, pages 187–190, 1980.
- [81] R. Schneider and W. Weil. Stochastic and integral geometry. Springer Science & Business Media, 2008.
- [82] G.E. Schröder-Turk, W. Mickel, S.C. Kapfer, F.M. Schaller, B. Breidenbach, D. Hug, and K. Mecke. Minkowski tensors of anisotropic spatial structure. *New Journal of Physics*, 15(8) :083028, 2013.
- [83] G.E. Schröder-Turk, R. Schielein, Kapfer S.C., G.W. Schaller, F.M.and Delaney, T. Senden, M. Saadatfar, and K. Aste, T. Mecke. Minkowski tensors and local structure metrics : Amorphous and crystalline sphere packings. *AIP Conference Proceedings*, 1542(1):349–352, 2013.
- [84] R.E. Miles. Estimating aggregate and overall characteristics from thick sections by transmission microscopy. Journal of Microscopy, 107(3):227–233, 1976.
- [85] I.S. Molchanov and D. Stoyan. Asymptotic properties of estimators for parameters of the boolean model. Advances in Applied Probability, pages 301–323, 1994.
- [86] I.S. Molchanov. Statistics of the boolean model : From the estimation of means to the estimation of distributions. Advances in Applied Probability, 27(1) :pp. 63–86, 1995.

- [87] T. Mrkvička. On testing of general random closed set model hypothesis. *Kybernetika*, 45(2):293–308, 2009.
- [88] L. Heinrich. Asymptotic properties of minimum contrast estimators for parameters of boolean models. *Metrika*, 40(1) :67–94, 1993.
- [89] B. Galerne. Variation totale moyenne de modèles stochastiques de texture. In proceedings of GRETSI 2011 in Bordeaux, France, 2011.
- [90] X. Emery, W. Kracht, A. Egaña, and F. Garrido. Using two-point set statistics to estimate the diameter distribution in boolean models with circular grains. *Mathematical Geosciences*, 44(7):805–822, 2012.
- [91] D. Hug, G. Last, Z. Pawlas, and W. Weil. Statistics for poisson models of overlapping spheres. Advances in Applied Probability, 46(4) :937–962, 2014.
- [92] J. Møller and K. Helisová. Likelihood inference for unions of interacting discs. Scandinavian Journal of Statistics, 37(3):365–381, 2010.
- [93] W-H. Zhang, X. Jiang, and Y-M. Liu. A method for recognizing overlapping elliptical bubbles in bubble image. *Pattern Recognition Letters*, 33(12):1543–1548, 2012.
- [94] I.S. Molchanov. On estimation of the shape of an isotropic grain in the boolean model. Acta Stereologica, 1993.
- [95] J. Ohser and K. Schladitz. 3D images of materials structures : processing and analysis. John Wiley & Sons, 2009.
- [96] R.C. Gonzalez, R.E. Woods, and S.L. Eddins. *Digital image processing using MATLAB*, volume 2. Gatesmark Publishing Knoxville, 2009.
- [97] F. Martínez, A. J. Rueda, and F.R. Feito. A new algorithm for computing boolean operations on polygons. *Computers and Geosciences*, 35(6) :1177–1185, 2009.
- [98] M.V. Leonov and A.G. Nikitin. A closed set of algorithms for performing set operations on polygonal regions in the plane. Academic paper translation of A.P.Ershov Institute of Information Systems, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 1997.
- [99] R.M. Gray. Toeplitz and circulant matrices : II. Information Systems Laboratory, Stanford Electronics Laboratories, Stanford University, 1977.
- [100] D. Sundararajan. The discrete Fourier transform : theory, algorithms and applications. World Scientific, 2001.
- [101] D. R. Cox and H.D. Miller. The theory of stochastic processes, volume 134. CRC Press, 1977.
- [102] J.K. Knight. Rotation points from motion capture data using a closed form solution. PhD thesis, University of Colorado at Colorado Springs, 2008.
- [103] C. Kleiber and J. Stoyanov. Multivariate distributions and the moment problem. Journal of Multivariate Analysis, 113:7–18, 2013.
- [104] Y. Zhou, X-T. Doan, and R. Srinivasan. Real-time imaging and product quality characterization for control of particulate processes. *Computer and Chemical Engineering*, 21:775–780, 2006.

- [105] Y. Zhou, R. Srinivasan, and S. Lakshminarayanan. Critical evaluation of image processing approaches for real-time crystal size measurements. *Computers and Chemical Engineering*, 33(5):1022–1035, 2009.
- [106] S. Zafari, Tuomas Eerola, J. Sampo, H. Kälviäinen, and H. Haario. Segmentation of overlapping elliptical objects in silhouette images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 24(12):5942–5952, 2015.
- [107] D. Coupier and D. Dereudre. Continuum percolation for quermass interaction model. *Electronic Journal of Probabability*, 19(35) :1–19, 2014.

École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne

NNT: 2017LYSEM019

Saïd RAHMANI

GEOMETRICAL APPROXIMATION OF RANDOM CONVEX SETS BY ZONTOPES: APPLICATION TO THE BOOLEAN MODEL

Speciality: IMAGE, VISION, SIGNAL

Keywords: Boolean model, Féret diameter, geometrical covariogram, random zonotopes, stochastic geometry

Abstract:

Industrial processes involving granular media (population of particles: powders, crystals, fibers...) have been of increasing interest for different applications (pharmacy, nuclear, materials, agronomy...) over the last decade. The geometrical characterization of such particles is then required for a better knowledge and improvement of such processes.

For this purpose, 2-D image acquisition provides a direct visualization of the projected particles. From these data, stochastic geometry provides useful tools for modeling and characterizing images of granular media. Indeed, germ-grain models (union of overlapping particles) are suitable for representing such a population of projected particles. The most elementary germ-grain model is the well-known Boolean model. When the primary grain is convex, there exists in the literature different methods (intensities, minimum contrast...) providing the expectation of its geometrical characteristics (Minkowski functionals, Féret diameter). Nevertheless, these estimates are not enough to fully characterize the grains distribution. In this way, strong hypothesis about the shape of the typical grain are often assumed (homothetic grains, deterministic grains...).

The objective of this thesis consists in characterizing the geometry and morphology of the primary grain within a Boolean model without any hypothesis on its shape (except convexity). In this way, a method has been proposed for estimating the moments of the mixed volumes of the primary grain whatever the convex gauge used. By selecting specific gauges, it is possible to get the moments of the Minkowski functionals and those of the Féret diameter (seen as a stochastic process). In the following, the properties of the Féret diameter process have been exploited to define approximations of the primary grain as random parametric zonotopes (regular symmetric polygons). The parameters of such zonotopes (side lengths) are therefore related to the moments of the Féret diameter process. Consequently, the geometry and morphology of the primary grain can be described by the side lengths of its zonotope approximation. The performance of the proposed method has been quantitatively evaluated through several experiments on simulated data.

The proposed approach provides useful tools for characterizing the morphology of a population of particles by using a stochastic geometrical model. When dealing with 2-D images of granular media (satisfying the Boolean model hypothesis), such a model enables a population of projected/overlapping particles to be investigated, which is generally difficult with classical image analysis. The prospects of this work are to generalize this approach to more general situations than 2-D Boolean models.

École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne

NNT : 2017LYSEM019

Saïd RAHMANI

APPROXIMATION GÉOMÉTRIQUE DE CONVEXES ALÉATOIRES PAR DES ZONOTOPES : APPLICATION AU MODÈLE BOOLÉEN

Spécialité: IMAGE, VISION, SIGNAL

Mots clefs : Modèle Booléen, diamètre de Féret, covariogramme géométrique, zonotope aléatoire, géométrie aléatoire.

Résumé :

Les processus industriels mettant en jeu des milieux granulaires (population de particules : poudres, cristaux, fibres...) font l'objet d'un intérêt croissant pour différentes applications (pharmacie, nucléaire, matériau, agronomie...) depuis ces dernières années. La caractérisation géométrique de telles particules est alors requise afin d'améliorer la connaissance et la maîtrise de ces processus. Dans cet objectif, l'acquisition d'images 2-D permet une visualisation directe des particules projetées qui nécessite d'être exploitée.

À partir de telles données, la géométrie aléatoire fournit des outils pour modéliser et caractériser ces images de milieux granulaires. En effet, le modèle germes-grains (union d'ensembles compacts aléatoires) est adapté à la représentation d'une population de particules projetées. Le modèle germes-grains le plus élémentaire est le modèle Booléen. Lorsque le grain primaire est convexe, il existe différentes méthodes de la littérature (intensités, contraste minimum...) qui permettent d'estimer les espérances de certaines caractéristiques géométriques du grain primaire (fonctionnelles de Minkowski, diamètre de Féret). Cependant, ces quantités ne suffisent pas à complètement caractériser la distribution des grains. En effet, de fortes hypothèses concernant la forme du grain primaire sont souvent émises (grains homothétiques, grains déterministes...).

L'objectif de cette thèse consiste à caractériser la géométrie et la morphologie du grain primaire du modèle Booléen sans émettre d'hypothèses concernant sa forme (à l'exception de la convexité). Une méthode est proposée pour estimer les moments des volumes mixtes du grain primaire, quelle que soit la jauge convexe utilisée. En choisissant des jauges spécifiques, cette méthode permet d'estimer les moments des fonctionnelles de Minkowski du grain primaire et de son diamètre de Féret (considéré comme un processus stochastique). Les propriétés du processus du diamètre de Féret sont alors exploitées pour définir des approximations du grain primaire en tant que zonotope paramétré (polygone régulier symétrique) aléatoire. Les paramètres de ces zonotopes (longueurs des côtés) sont donc mis en relation avec les moments du diamètre de Féret du grain. Par conséquent, la géométrie et la morphologie du grain primaire du modèle Booléen peuvent être décrites au moyen des longueurs des côtés de son approximation en tant que zonotope. La performance de la méthode proposée est évaluée de manière expérimentale à partir de données simulées.

L'approche proposée dans cette thèse fournit donc des outils permettant de caractériser la morphologie d'une population de particules via un modèle géométrique aléatoire. Lorsque des images 2-D de milieux granulaires (satisfaisant aux hypothèses du modèle Booléen) sont considérées, cette approche permet de décrire la population des particules projetées (tâche généralement difficile à réaliser avec les méthodes classiques d'analyse d'image). Les perspectives de ce travail sont de généraliser cette approche à des situations plus générales que le modèle Booléen 2-D.