

# Dynamique symbolique sur des groupes : une approche informatique

Nathalie Aubrun

▶ **To cite this version:**

Nathalie Aubrun. Dynamique symbolique sur des groupes : une approche informatique. Mathématique discrète [cs.DM]. Université Paris-Saclay, 2021. tel-03425613

**HAL Id: tel-03425613**
**https://hal.science/tel-03425613**

Submitted on 10 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Université Paris-Saclay

**présenté le 16 avril 2021**

par **Nathalie AUBRUN**

# Dynamique symbolique sur des groupes : une approche informatique

**Jury**

| | | |
|---|---|---|
| **M. Olivier BOURNEZ,** | Professeur | Rapporteur |
| **M. Damien GABORIAU,** | Directeur de recherche | Rapporteur |
| **Mme Bryna KRA,** | Professeur | Rapporteuse |
| **M. Jérôme BUZZI,** | Directeur de recherche | Examinateur |
| **Mme Élise JANVRESSE,** | Professeur | Présidente |
| **M. Emmanuel JEANDEL,** | Professeur | Examinateur |
| **Mme. Anne SIEGEL,** | Directrice de recherche | Examinatrice |

**Université Paris-Saclay**
**Laboratoire Interdisciplinaire des Sciences du Numérique (LISN)**
UMR CNRS 9015, F-91405 Orsay, France

Natacha, Nathalie, Laure : merci, c'est pour vous :-)

# Table des matières

**Table des matières** **iii**

**Remerciements** **1**

**Introduction** **3**
État de l'art . . . 3
Démarche . . . 9
Contexte des travaux de recherche . . . 10
Organisation du manuscrit . . . 10
Bibliographie personnelle . . . 12

**1 Dynamique symbolique et groupes de type fini** **13**
1.1 Groupes de type fini . . . 13
1.2 Notions de dynamique symbolique . . . 15
1.3 Sous-décalages sur des graphes . . . 17
1.4 Substitutions 1D et graphes d'orbites . . . 18

**2 Groupes de Baumslag-Solitar** **21**
2.1 Les groupes de Baumslag-Solitar BS$(1,n)$ . . . 22
2.2 Pavages hyperboliques comme SFT sur BS$(1,n)$ . . . 25
2.3 Application : un SFT avec structure hiérarchique sur BS$(1,n)$ . . . 33
2.4 Pistes d'approfondissement . . . 38

**3 Problèmes du domino** **41**
3.1 Problème du domino sous contrainte directionnelle . . . 42
3.2 Groupes de Baumslag-Solitar . . . 47
3.3 Groupes de surface . . . 52
3.4 Pistes d'approfondissement . . . 55

**4 Sous-décalages effectifs sur des groupes de type fini** **57**
4.1 Notions de sous-décalage effectif . . . 57
4.2 Effectifs vs. sofiques . . . 58
4.3 Forte apériodicité : lemme local de Lovász . . . 62
4.4 Pistes d'approfondissement . . . 64

**5 Perspectives** **67**
5.1 Structures codées par règles locales dans des groupes de type fini . . . 67
5.2 Modèle des dimères . . . 71

**Bibliographie** **77**

**Index** **78**

## Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Bryna Kra, Olivier Bournez et Damien Gaboriau, qui m'ont tous les trois fait l'honneur d'accepter le rôle de rapporteur. Je suis également reconnaissante envers Jérôme Buzzi, à nouveau membre d'un jury me concernant dix années plus tard, Élise Janvresse, qui a de plus accepté de présider ce jury, Emmanuel Jeandel, à qui j'espère pouvoir rendre visite bientôt à Nancy et Anne Siegel : j'espère que ce retour à la dynamique symbolique t'aura plu !

Cette habilitation aura finalement été rythmée par les confinements successifs ; j'avais initialement prévu de soutenir à Lyon avant mon départ, aussi il va beaucoup être question de mon ancien laboratoire dans ces remerciements. Je tiens d'abord à remercier les directions successives du LIP pour leur bienveillance à mon égard, et en particulier Guillaume Hanrot. Sans vous le LIP ne serait pas aussi agréable : merci à toute l'équipe des MALIP, et en particulier ♡Marie♡ et ♡Chiraz♡, et à celle des MILIP, de faciliter la vie de tous les membres du laboratoire. Merci également à Nicolas L., Laure, Daniel et Nathalie R., et enfin et surtout l'équipe MC2 (oulala ça en fait du monde sur neuf ans !) et en particulier Natacha (sans conteste la meilleure co-bureau au monde), Nicolas T. (un jour promis je rattraperai mon retard sur ton blog) et Stéphan (je t'ai écrit un mail), vous me manquez !

Je remercie également mes collègues en France et à l'étranger, ainsi que les étudiants que j'ai la chance d'encadrer ou d'avoir encadré, notamment Sebastián, Étienne et Julien : c'est un plaisir de travailler avec vous. Enfin le ~~LRI~~ LISN, et notamment toute l'équipe GALaC pour son accueil, en particulier Benjamin, Francesca, Johanne, Antoine et Nicolas pour leurs encouragements. Je n'ai pas encore croisé tout le monde autrement que virtuellement, j'espère que ce sera bientôt réparé :-) Je remercie également Nicole Bidoit, qui m'a guidée dans le processus administratif menant jusqu'à la soutenance en se montrant disponible et efficace à chaque fois que je l'ai sollicitée.

Merci à Thomas, Cécile et leurs enfants, chez qui je suis comme à la maison :-) Merci à Patate 🐈 pour sa présence assidue à mes côtés, à toute heure du jour et de la nuit pendant la phase de rédaction. Benjamin, Noémie, Félix et Timo : merci pour votre patience et vos sourires, promis je vais être un peu plus disponible à partir de maintenant, faites chauffer la switch !

Enfin Bastien, j'ai de la chance de t'avoir à mes côtés. Merci pour ton soutien indéfectible, pour savoir me bousculer au bon moment et juste ce qu'il faut, pour me donner confiance en moi, merci pour l'organisation familiale au quotidien, surtout ces derniers mois et merci d'avoir été le premier et le plus gros relecteur, et non des moindres, de ce manuscrit (on aura quand même bien rigolé à relire mes bêtises :-D).

# Introduction

Dans ce manuscrit je présente mes travaux de recherche, qui tous s'attaquent à leur manière à une question très générale que l'on peut formuler ainsi :

*Quelles règles locales simples peuvent forcer des comportements globaux complexes ?*

Le contexte général est celui de la dynamique symbolique. On y retrouve comme ingrédients des systèmes dynamiques discrets, de la combinatoire, de la théorie combinatoire et géométrique des groupes et de la calculabilité.

## État de l'art

La dynamique symbolique a pour objet d'étude une certaine classe de systèmes dynamiques discrets, appelés sous-décalages. Étant donné un groupe de type fini G et un alphabet fini A, les sous-décalages sont des ensembles de coloriages du groupe G par A qui sont à la fois fermés pour la topologie produit sur $A^G$ et invariant par l'action de G sur $A^G$ par translation.

Ces objets ont initialement été introduits comme une méthode pour discrétiser des systèmes dynamiques [HM38]. La stratégie consiste à transformer un système dynamique discret en temps $(\mathscr{E}, T)$, où T est une action d'un groupe de type fini G, en un autre système $(X, \mathfrak{S})$, discret en temps et en espace. Pour cela, on partitionne l'espace des phases $\mathscr{E}$ en un nombre fini de sous-ensemble $E_1, \dots, E_n$. Plutôt que d'étudier les orbites $\left(T^g(e)\right)_{g\in G}$ pour chaque élément $e \in \mathscr{E}$, on s'intéresse à leur codage symbolique : il s'agit de ne retenir que l'élément de la partition auquel appartient chaque $T^g(e)$. Si on note $A = \{1, \dots, n\}$, une orbite $\left(T^g(e)\right)_{g\in G}$ pour chaque élément $e \in \mathscr{E}$ est donc codée par la suite $\left(x_g\right)_{g\in G} \in A^G$, où $x_g$ est le numéro de l'élément de la partition dans lequel se trouve $T^g(e)$.

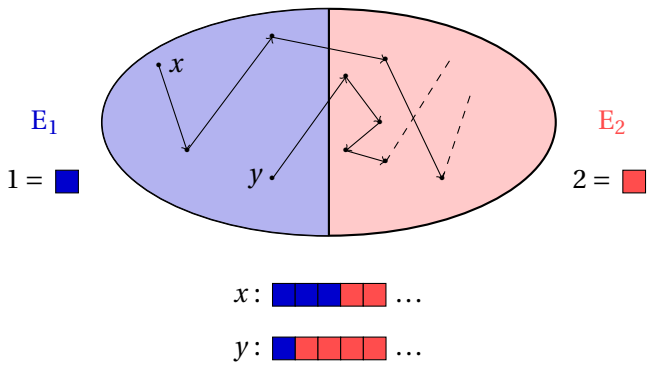



FIGURE 1 – La dynamique symbolique consiste à discrétiser en espace un système dynamique déjà discret en temps.

L'ensemble des codages des orbites forme donc un ensemble $X \subset A^G$ dont on peut vérifier qu'il est bien un sous-décalage. Évidemment, si la partition choisie est trop grossière le sous-ensemble X ne reflétera qu'imparfaitement le système $(\mathscr{E}, T)$ qu'il code. Mais si ce dernier possède de bonnes

propriétés (bijectivité et expansivité), alors il est possible de choisir la partition $\mathscr{E}_1, \dots, \mathscr{E}_n$ de sorte qu'à un codage ne correspond qu'une seule orbite. Les deux systèmes dynamiques partagent dans ce cas les mêmes propriétés, et on peut donc étudier $(X, \mathfrak{S})$ pour comprendre $(\mathscr{E}, T)$. La complexité du système ne réside alors plus dans l'action, qui devient une simple action $\mathfrak{S}$ par translation, mais dans l'espace des phases lui-même, qui est à présent un sous-décalage $X \subset A^G$. Dans la suite de ce manuscrit, on se concentrera sur ces sous-décalages en tant que tels, laissant de côté leur origine dynamique.

Historiquement la dynamique symbolique classique a d'abord été définie dans le cas unidimensionnel $G = \mathbb{Z}$ [LM95] et plus tard généralisée à la dimension supérieure $G = \mathbb{Z}^d$ avec $d \geq 2$ [Lin04]. Des résultats récents obtenus sur des groupes de type finis comme structures alternatives à $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^d$ montrent que comprendre les sous-décalages qui y sont définis pose un ensemble de questions à la fois ardues et fertiles.

Une propriété fondamentale des sous-décalages, qui sert de point de départ aux travaux présentés ici, est qu'ils peuvent être définis de manière purement combinatoire. Ainsi, un ensemble de configurations inclus dans $A^G$ est un sous-décalage si et seulement si on peut le définir comme l'ensemble des configurations évitant certains motifs interdits. Parmi les sous-décalages, ceux que l'on peut définir à l'aide d'un nombre fini de motifs interdits, appelés sous-décalages de type fini (que l'on abréviera en SFT, acronyme de sa traduction en anglais), retiennent particulièrement l'attention des chercheurs. D'abord parce qu'il permettent de modéliser des phénomènes réels décrits par des interactions locales, mais aussi parce qu'avec cette restriction de finitude, les SFT constituent des objets d'étude naturels pour des questions algorithmiques ou de calculabilité.

En théorie des systèmes dynamiques, un problème classique et difficile est de déterminer quels systèmes sont *équivalents*. Habituellement, cette notion est définie à l'aide de conjugaisons, qui transforment un système en un second système dit équivalent, et qui permettent de revenir au système initial à l'aide d'une autre conjugaison. On dit alors que les deux systèmes sont conjugués. Dans le contexte de la dynamique symbolique, les conjugaisons se définissent à l'aide de morphismes, qui sont des applications $\Phi : A^G \to A^G$ définies localement par $\varphi : A^V \to A$, où V est un sous-ensemble fini de G. De manière équivalente, un morphisme est aussi une application continue et invariante par l'action de G par translation. Une conjugaison pour les sous-décalages est un morphisme bijectif, autrement dit si deux sous-décalages sont conjugués alors chacun d'eux peut s'obtenir comme recodage local de l'autre.

L'ensemble des SFT forme une classe de conjugaison, c'est-à-dire qu'être conjugué à un SFT est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-décalage soit lui-même un SFT. Une propriété fondamentale des SFT sur un groupe G est que chacun d'eux est conjugué à une version élémentaire de SFT, les SFT plus proches voisins. Cette notion de plus proches voisins nécessite la donnée d'une partie génératrice S de G, que l'on choisira symétrique ($S^{-1} \subset S$). Un SFT est plus proches voisins pour S s'il existe un ensemble de motifs interdits tel que chaque motif a un support $p_i$ de la forme $p_i = \{1_G, s_i\}$, où $1_G$ est l'identité de G et $s_i$ un élément de S.

D'autres classes de conjugaison présentent un intérêt pour les questions abordées ci-après. On peut tout d'abord penser à la classe des sous-décalages sofiques, qui sont les images par morphisme – pas nécessairement conjugaison – d'un SFT. Comme pour les SFT, la description finie des sous-décalages sofiques fait qu'ils se prêtent bien aux questions de nature algorithmique ou de calculabilité. Ensuite la classe des sous-décalages effectifs, qui apparaissent dès lors que l'on s'intéresse aux sous-actions projectives des sous-décalages sofiques. Il s'agit des sous-décalages que l'on peut définir par un ensemble de motifs interdits donné par une machine de Turing.

Ce manuscrit est structuré autour de trois questions fortement intriquées, réputées difficiles, concernant les sous-décalages sur des groupes de type fini, ainsi qu'à certaines de leurs variantes. Elles sont détaillées dans les paragraphes qui suivent et présentées de la plus générale à la plus spécifique.

— **Problème du domino :** Quels groupes permettent de décider si un SFT contient ou non une configuration ? Cette question fait l'objet du Chapitre 3.

— **Apériodicité :** Quels groupes admettent des SFT fortement apériodiques ? Cette question est traitée dans le Chapitre 2.

— **Effectivité :** Sur quels groupes les sous-décalages effectifs sont-ils sofiques ? Le Chapitre 4 est consacré à cette question.

**Problème du domino** Le problème du domino d'un groupe de type fini G interroge l'existence d'un algorithme prenant en entrée un codage d'un ensemble fini de motifs interdits F et retournant `Oui` si le SFT défini par F est non vide, et `Non` sinon. Dans le cas particulier de $\mathbb{Z}$, ce problème est connu comme étant décidable : un SFT sur $\mathbb{Z}$ possède une représentation sous forme de graphe fini [LM95], et l'existence d'une configuration dans le SFT (un mot bi-infini dans ce cas) équivaut à l'existence d'un chemin bi-infini dans le graphe. Le cas de la dimension 2 est plus subtil. Contrairement à la dimension 1, il n'existe en effet pas de représentation facilement exploitable des SFT par un graphe fini. À l'origine, le problème du domino a été énoncé sur $\mathbb{Z}^2$ par Wang [Wan61], avec le formalisme des tuiles de Wang, comme un problème-jouet pour étudier un fragment de logique du premier ordre. Wang conjecturait que tout SFT sur $\mathbb{Z}^2$ possédant au moins une configuration en possédait aussi une périodique, ce qui entraînerait la décidabilité du problème du domino sur $\mathbb{Z}^2$. Berger, un étudiant de Wang, a réfuté cette conjecture et démontré l'indécidabilité du problème [Ber64]. La preuve, qui procède par réduction depuis le problème de l'arrêt pour les machines de Turing, a plus tard été simplifiée par Robinson [Rob71].

Le problème du domino a également été étudié sur des structures autres que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$. Robinson s'est intéressé au plan hyperbolique discret $\mathbb{H}_2$, pour lequel il n'a pas démontré l'indécidabilité du problème du domino, mais celle de l'une de ses variantes, le problème à origine fixée [Rob78]. Dans cette variante, on s'interroge sur l'existence d'une configuration dans le SFT avec une lettre imposée à l'origine. L'indécidabilité pour le problème sans origine fixée a été obtenue plus tard par Kari [Kar07], et peut aussi se déduire de la construction d'un SFT avec structure hiérarchique sur $\mathbb{H}_2$ de Goodman-Strauss [GS10]. Plus récemment, le problème du domino sur des sous-ensembles auto-similaires de $\mathbb{Z}^2$ a été étudié dans [BS16].

Dans le cas général des groupes de type fini, le problème n'a été formulé qu'assez récemment [AK13, BS18]. Il est important de noter que la décidabilité du problème du domino constitue bien une propriété intrinsèque du groupe G lui-même, peu importe la présentation choisie. Pour l'instant aucune caractérisation des groupes avec problème décidable n'est connue, et la question semble très difficile. On peut cependant formuler une condition suffisante : les groupes virtuellement libres possèdent un problème du domino décidable. On soupçonne en réalité que ce soient les seuls, ce qui amène à formuler la Conjecture 1, apparue dans [BS18].

**Conjecture 1: [BS18]**

Un groupe de type fini G a un problème du domino décidable si et seulement si G est virtuellement libre.

Cette conjecture est motivée par plusieurs observations : si un groupe n'est pas virtuellement libre, alors il possède un bout épais [Woe89] et donc des grilles de tailles arbitraires comme mineurs par le théorème de Halin (voir [Die04] pour une preuve récente). L'intuition serait d'utiliser ces grilles comme zones de calcul, comme cela est fait dans la preuve de Robinson [Rob71]. Mais même si l'on est assuré de l'existence de ces grilles, on ne connaît pas leur localisation et encore moins s'il est possible de les construire dans un SFT.

Partant de la seule connaissance de l'indécidabilité du problème pour $\mathbb{Z}^2$, de nombreuses propriétés d'hérédité permettent de déduire l'indécidabilité du problème du domino pour des classes entières de groupes. Si on peut trouver d'une façon ou d'une autre un groupe H avec problème du domino indécidable "dans" un groupe G, alors l'indécidabilité se transmet à G. C'est le cas par

exemple lorsque H est un sous-groupe $H \leqslant G$ et que H a un problème du domino indécidable : il en est alors de même pour G [ABJ18, Proposition 9.3.30]. On en déduit par exemple que le groupe d'Heisenberg discret a un problème du domino indécidable. L'indécidabilité se transmet également si H n'est pas un sous-groupe de G mais qu'il est de présentation finie et qu'il existe une *translation-like action* de H sur G [Jea15c] – cela revient à dire que l'un des graphes de Cayley de G peut être partitionné en copies d'un graphe de Cayley de H, quitte à supprimer des arêtes. Comme dernière propriété d'hérédité, mentionnons le passage au groupe quotient : si H est un sous-groupe normal de G, et que H est de type fini, alors si le groupe quotient $G/_H$ a un problème du domino indécidable, il en est de même pour G [CP15]. On sait que l'on ne peut pas se passer de l'hypothèse H de type fini : le groupe libre $\mathbb{F}_2$ contient $\mathbb{Z}^2$ comme quotient, et le problème du domino est indécidable sur $\mathbb{Z}^2$ mais décidable sur $\mathbb{F}_2$. Dans l'autre sens, pour passer d'un groupe à l'un de ses sous-groupes, il est nécessaire que H soit un sous-groupe d'indice fini pour que l'indécidabilité pour G implique celle pour H [ABJ18, Proposition 9.3.33]. Il en découle que l'indécidabilité du problème du domino est un invariant de commensurabilité.

Tous les autres résultats récents vont dans le sens de la Conjecture 1. La décidabilité du problème est un invariant de quasi-isométrie pour les groupes de présentation finie [Coh17], donc une propriété géométrique de ces groupes. Enfin la conjecture se vérifie pour les groupes de Baumslag-Solitar [AK13], les groupes polycycliques [Jea15b], les groupes de la forme $G_1 \times G_2$ [Jea15c] – donc en particulier le groupe de Grigorchuk – ou encore les groupes fondamentaux de surfaces orientées [ABM19].

**Apériodicité** La notion d'apériodicité, qui cherche à construire des ensembles de configurations avec peu ou pas d'invariance par translation, constitue un exemple de propriété des sous-décalages difficile à obtenir dans le cas des SFT. Elle se décline en deux versions. Un sous-décalage X est dit *fortement* apériodique si toutes ses configurations ont un stabilisateur trivial, autrement dit si aucune configuration de X n'est invariante par l'action d'un élément $g \in G$ non trivial. Le décalage est dit *faiblement* apériodique si toutes ses configurations ont une orbite infinie, c'est-à-dire qu'en faisant agir G sur une configuration, on obtient une infinité de configurations différentes. Le concept fort implique le concept faible dès lors que le groupe G est infini.

Le cas $G = \mathbb{Z}$ est simple : comme tout SFT peut s'y représenter par un graphe fini, dont les chemins bi-infinis représentent les configurations du SFT, la question de l'existence d'une configuration périodique se ramène à celle d'un cycle dans le graphe. En conséquence, dès lors qu'un SFT possède une configuration, il en possède également une qui est périodique. Il n'existe donc pas de SFT fortement apériodique, ni même de SFT faiblement apériodique.

Le cas de $\mathbb{Z}^2$ est plus riche. En réfutant la conjecture de Wang, Berger [Ber64] a construit un jeu de tuiles de Wang fortement apériodique, dont Robinson proposera plus tard une version simplifiée avec moins de tuiles [Rob71]. On peut d'ailleurs noter que dans le cas de $\mathbb{Z}^2$, les notions de faible et forte apériodicités coïncident – un argument combinatoire permet de ré-agencer une configuration dont le stabilisateur est isomorphe à $\mathbb{Z}$ en configuration d'orbite finie. Ce n'est plus le cas pour $Z^d$ avec $d \geq 3$, où l'on peut facilement construire un exemple de SFT faiblement mais pas fortement apériodique en recopiant un SFT fortement apériodique sur $\mathbb{Z}^2$ selon deux des trois générateurs de $\mathbb{Z}^3$.

La question de l'existence d'un sous-décalage quelconque (donc pas spécifiquement un SFT) fortement apériodique sur un groupe de type fini G est résolue : on sait construire un tel sous-décalage, même si l'on se restreint à l'alphabet binaire $\{0,1\}$ [GJS09, ABT18]. La démonstration fonctionne également si le groupe G est dénombrable. Construire un SFT fortement apériodique sur un groupe G de type fini est par contre un problème difficile. Comme premières contraintes, on peut noter que les groupes libres ne possèdent pas de SFT fortement apériodique [Pia08], et mieux encore que les groupes avec au moins deux bouts rentrent dans la même catégorie [Coh17]. À l'inverse, un groupe de type fini et récursivement présenté qui en possède a nécessairement un problème du mot décidable [Jea15a]. Les groupes dont on sait qu'ils admettent un SFT fortement

apériodique sont $\mathbb{Z}^2$ [Rob71] et $\mathbb{Z}^d$ pour $d > 2$ [CK96], les groupes fondamentaux de surfaces orientées [CGS17], les groupes hyperboliques [CGSR17], le groupe de Heisenberg discret [SSU20] et plus généralement les groupes qui s'écrivent comme un produit semi-direct $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_\phi H$, pourvu que G ait un problème du mot décidable [BS19], ainsi que les groupes de Baumslag-Solitar moyennables [EM20]. Tout ces exemples de groupes ne possèdent qu'un seul bout, et sont donc en cohérence avec une conjecture formulée par Cohen [Coh17] et retravaillée avec la remarque de Jeandel sur l'importance du problème du mot [Jea15a].

**Conjecture 2: [Coh17, Jea15a]**

Un groupe de type fini G récursivement présenté possède un SFT fortement apériodique si et seulement si G a un seul bout et un problème du mot décidable.

Comme première étape vers la résolution de cette conjecture, comprendre quels groupes admettent des SFT faiblement apériodiques semble plus accessible. Pour cette question, les exemples connus de groupes admettant des SFT faiblement apériodiques – et non cités précédemment comme exemple de groupe admettant des SFT fortement apériodiques – on trouve le groupe du falotier [Coh20], les groupes qui ne sont pas résiduellement finis [Jea15c], les quotients $G/_H$ où H est un sous-groupe normal de G, et de type fini [CP15], les groupes non moyennables [BW92], le groupe de Grigorchuk [MN14]. Dans [CP15] les auteurs formulent une conjecture caractérisant les groupes admettant un SFT faiblement apériodique.

**Conjecture 3: [CP15]**

Un groupe G admet un SFT faiblement apériodique si et seulement si G n'est pas virtuellement cyclique.

La liste des groupes possédant un SFT fortement apériodique est très similaire à celle des groupes dont le problème du domino est indécidable. Ces deux problèmes sont en effet étroitement liés, et ce lien est particulièrement bien compris pour $\mathbb{Z}^2$. On observe d'une manière pour le moment totalement empirique que si on sait construire un SFT fortement apériodique sur G, alors une preuve de l'indécidabilité peut se déduire de ce SFT ou d'une adaptation. C'est le cas pour $\mathbb{Z}^2$ [Ber64], pour les groupes de Baumslag-Solitar moyennables $BS(1, n)$ [EM20, AK13] et les groupes de surface [CGS17, ABM19]. Dans la lignée des travaux de Berger [Ber64], Gurevich et Koryakov ont pu formaliser ce lien sur $\mathbb{Z}^2$. Étant donné un SFT X donné par une liste de motifs interdits, on peut formuler trois problèmes de décision :

1. le SFT X est-il vide ?
2. existe-t-il une configuration périodique dans X ?
3. le SFT X est-il fortement apériodique ?

Dans la première question on reconnaît le problème du domino – ou plutôt sa négation. La deuxième est connue dans la littérature sous le nom de problème du domino périodique. Le troisième problème couvre le dernier cas possible pour un SFT sur $\mathbb{Z}^2$ : être non vide mais sans aucune configuration périodique. Ces trois problèmes sont indécidables [GK72], et on trouvera par exemple dans [Jea10] une preuve de l'indécidabilité du problème du domino périodique à partir d'un SFT apériodique sur $\mathbb{Z}^2$. Mieux que cela, les trois problèmes sont en fait récursivement indistingables deux à deux [GK72] ; pouvoir distinguer récursivement deux problèmes $P_1$ et $P_2$ signifie qu'il existe un algorithme qui, sur une entrée commune aux deux problèmes, va renvoyer `Oui` pour toutes les entrées vérifiant le problème $P_1$ et `Non` pour toutes les entrées ne vérifiant pas le problème $P_2$ [Rog87, page 93] – l'algorithme peut par contre renvoyer `Oui` sur une entrée ne vérifiant pas $P_1$ mais vérifiant $P_2$. Un tel algorithme n'existe donc pas si on choisit $P_1$ et $P_2$ parmi les trois problèmes sur les SFT sur $\mathbb{Z}^2$ cités plus haut. On peut aussi remarquer que l'indécidabilité du problème du domino sur $\mathbb{Z}^2$ implique l'existence d'un SFT apériodique, mais on ne sait par contre pas donner de preuve de l'indécidabilité du problème du domino sur $\mathbb{Z}^2$ à partir de la seule don-

née de l'existence – sans en connaître le détail – d'un SFT apériodique. Sur des groupes autres que $\mathbb{Z}^d$, les liens entre ces deux problèmes sont malheureusement beaucoup moins bien compris. Le groupe $\mathrm{Z}^2 * \mathrm{Z}$ donne un exemple de groupe avec problème du domino indécidable, car il contient $\mathbb{Z}^2$ comme sous-groupe, admettant des SFTs faiblement apériodique – prendre n'importe quel SFT fortement périodique sur $\mathbb{Z}^2$ – mais sans SFT fortement apériodique, car il possède une infinité de bouts. On ne sait en revanche pas s'il existe un groupe à un seul bout, avec problème du domino indécidable, mais ne possédant pas de SFT fortement apériodique, ce qui m'amène à formuler une première question.

**Question 1**

Existe-t-il un groupe G de type fini à un seul bout, avec problème du domino indécidable, mais qui ne possède pas de SFT fortement apériodique ?

L'existence d'un tel groupe pourrait même se confirmer sur l'un des exemples dont il a été question plus haut : parmi les candidats pour une réponse positive à la Question 1 se trouvent les groupes de Baumslag-Solitar non moyennables $\mathrm{BS}(m,n)$ et le groupe du falotier.

**Effectivité** Les sous-décalages sofiques s'obtiennent par recodage local d'un SFT. Pour montrer qu'un sous-décalage est sofique, on n'a guère d'autre choix que d'exhiber un SFT et un morphisme qui permettent de l'obtenir. Par exemple, un résultat du folklore est que le sous-décalage

$$\mathrm{X}_{\texttt{even}} := \left\{x \in \{0,1\}^{\mathrm{G}} \mid \text{ les composantes connexes finies de 1 sont de taille paire}\right\}$$

est sofique, quel que soit le groupe G de type fini sur lequel il est défini. Que ce résultat – ainsi que sa démonstration – ne dépende pas du groupe sur lequel le sous-décalage est défini est suffisamment rare pour être noté.

A l'inverse, si on veut montrer qu'un sous-décalage n'est pas sofique, il faut démontrer qu'aucun SFT et aucun morphisme ne permettent de l'obtenir ce qui est conceptuellement plus délicat. Un exemple classique sur $\mathbb{Z}^2$ de sous-décalage non sofique est celui du sous-décalage miroir. Il s'agit du sous-décalage $\mathrm{X}_{\texttt{miroir}}$ défini sur l'alphabet $\mathrm{A} = \{$ □ , ■ , ■ $\}$, dans lequel on interdit l'ensemble de motifs

$$\mathrm{F}_{\text{miroir}} = \left\{ \begin{smallmatrix}□\\■\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}■\\■\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}■\\□\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}■\\■\end{smallmatrix} \right\} \cup \bigcup_{w \in \mathrm{A}^*} \{ ■\, w\, ■ \,,\; ■\, w\, ■\, \tilde{w}\, □ \,,\; □\, w\, ■\, \tilde{w}\, ■ \}$$

de sorte qu'une configuration de $\mathrm{X}_{\texttt{miroir}}$ est soit composée uniquement de □ et de ■ sans aucune contrainte, soit une lettre ■ y apparaît. Dans ce cas une ligne verticale de ■ se forme nécessairement – le miroir – et les deux demi-plans qu'elle induit sont image miroir l'un de l'autre. Un argument de comptage permet de montrer que ce sous-décalage n'est pas sofique. Il existe également des conditions suffisantes de non soficité [KM13, OP16, DR18], toujours pour des sous-décalages sur $\mathbb{Z}^2$.

Ce sous-décalage $\mathrm{X}_{\texttt{miroir}}$ peut néanmoins être défini par motifs interdits, comme décrit plus haut. On conçoit aisément comment une machine de Turing pourrait énumérer les motifs interdits $\mathrm{F}_{\texttt{miroir}}$ : le sous-décalage $\mathrm{X}_{\texttt{miroir}}$ est donc un sous-décalage effectif. Un résultat important du domaine, dû à Hochman [Hoc09] et amélioré de manière indépendante dans [AS13] et [DRS10], établit que dans le cas de $\mathbb{Z}^d$, quitte à augmenter de 1 la dimension, alors les sous-décalages effectifs sont très proches des sous-décalages sofiques. On peut en effet obtenir n'importe quel sous-décalage effectif sur $\mathbb{Z}^d$ comme la sous-action projective d'un sous-décalage sofique sur $\mathbb{Z}^{d+1}$. Avant de chercher à généraliser ce résultat à d'autres groupes de type fini, il est important de comprendre ce que sont les sous-décalages effectifs sur ces structures. En effet, la définition de ces objets implique des machines de Turing qui travaillent classiquement sur un ruban unidimensionnel $\mathbb{Z}$, et il est légitime de se demander dans quelle mesure ceci ne peut pas constituer un obstacle lorsque l'on travaille avec des motifs d'un groupe G. Cette question fait l'objet de l'article [ABS17] dans lequel est présentée une définition propre et robuste de la notion de sous-décalage effectif

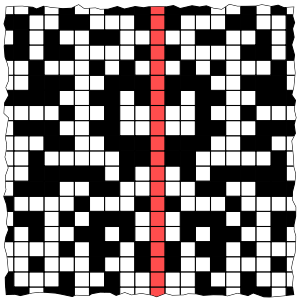


FIGURE 2 – Une configuration du décalage miroir sur $\mathbb{Z}^2$.

en général. Il est par ailleurs légitime de s'assurer que cette notion de sous-décalage effectif est différente de celle de sous-décalage sofique.

**Question 2**

Pour quels groupes G peut-on construire un sous-décalage qui soit à la fois non sofique et effectif ?

Le résultat d'Hochman s'étend aux groupes $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_\phi H$ [BS19], mais on est encore loin de comprendre de manière exhaustive l'ensemble des groupes sur lesquels un tel résultat est possible.

**Question 3**

Sur quels groupes G peut-on obtenir un théorème de simulation dans l'esprit de celui d'Hochman ?

Dans [AS13, DRS10] $\mathbb{Z}$ nécessite $\mathbb{Z}^2$ pour retrouver tous les effectifs à partir des sofiques, alors que dans [BS19] G nécessite $\mathbb{Z}^2 \rtimes G$. Une version optimale d'un théorème de simulation serait de ne même pas avoir besoin d'augmenter le groupe de départ.

**Question 4**

Existe-t-il un groupe G sur lequel tout sous-décalage effectif est aussi sofique ?

Les conjectures et questions que l'on vient de présenter sont difficiles et générales. Dans la suite de ce manuscrit je propose des réponses ou avancées concernant des cas particuliers, ainsi que sur des questions plus spécifiques.

## Démarche

À travers la rédaction de ce manuscrit j'ai souhaité essayer d'aller au-delà de la simple validation « administrative » du diplôme. Plutôt que de proposer une reprise à la lettre de mes publications de recherche, j'ai choisi d'en retravailler abondamment la forme pour privilégier l'accessibilité des raisonnements et tenter de prendre un peu de recul. J'ai ainsi préféré mettre en avant la compréhension des idées-forces, en particulier à travers de nombreuses représentations graphiques, plutôt que sur l'exhausitivité de la rédaction des preuves pour lesquelles je renvoie à la bibliographie. Ce choix est en partie motivé par une spécificité de mon domaine de recherche : autant il y est souvent possible de présenter les idées d'une construction de manière (relativement) intuitive et imagée, autant les détails des preuves sont souvent aussi fastidieux à rédiger qu'à lire. Le ma-

nuscrit que vous tenez entre les mains se veut donc d'un niveau de technicité allégé (sauf dans la Partie 3.2 qui nécessitait une mise au point détaillée) et abondamment illustré.

La rédaction de ce manuscrit – retardée en raison du confinement du printemps 2020 – a également été l'occasion d'un retour sur neuf années de recherche depuis ma soutenance de thèse, ce qui m'a donné l'occasion de prendre le temps de réorganiser mes idées pour mieux me projeter vers l'avenir. Un des objectifs de l'habilitation à diriger des recherches est de sanctionner l'« aptitude à maîtriser une stratégie de recherche dans un domaine scientifique ou technologique suffisamment large » [1]. En cherchant à prendre cette idée au sérieux, j'ai estimé important de faire une ouverture sur l'avenir dans le Chapitre 5, qui propose un programme de recherche incluant des pistes et stratégies à moyen et long termes.

## Contexte des travaux de recherche

Ce manuscrit présente mon travail effectué depuis la fin de mon doctorat en juin 2011. Ces travaux ont été réalisés dans l'équipe MC2 du LIP, et ont bénéficié, en plus de celui de mon employeur le CNRS et du LIP qui m'a accueillie jusqu'à l'été 2020, du soutien de différents projets : projet du fonds recherche de l'ENS de Lyon (2016-2018), projet ANR CoCoGro (2017-2021) et projet ECOS-Sud avec le CMM au Chili (2018-2021). Pendant cette période j'ai participé activement à l'encadrement de trois doctorants :

— Sebastián Barbieri, co-encadrement (80%) avec Stéphan Thomassé. Sebastián a soutenu sa thèse en juin 2017, et a obtenu un poste de maître de conférence à la Universidad de Santiago de Chile. Co-publications : [ABS17, ABT18, ABJ18, ABM19].

— Étienne Moutot, co-encadrement (50%) avec Stéphan Thomassé et en co-tutelle avec Jarkko Kari à Turku. Étienne a soutenu sa thèse en juillet 2020, et est actuellement en post-doctorat au LIS dans l'équipe CANA. Co-publication : [ABM19].

— Julien Esnay, co-encadrement (50%) avec Mathieu Sablik dont la thèse a débuté en septembre 2019. Co-publication : [AES20].

## Organisation du manuscrit

Le premier chapitre du manuscrit donne les définitions et notations nécessaires à la poursuite de la lecture. Ce Chapitre 1 n'a pas nécessairement vocation à être lu en premier, mais plutôt à être consulté pour vérifier une définition.

Le Chapitre 2 est consacré à un travail en collaboration avec Michael Schraudner, effectué dans le cadre du projet ECOS-Sud. Il s'agit de construire un SFT sur les groupes de Baumslag-Solitar moyennables $\mathrm{BS}(1,n)$ avec $n \geq 2$, qui encode sur chacune des feuilles du groupe un certain pavage du plan hyperbolique fixé à l'avance. Cette construction donne à la fois un nouvel exemple de SFT fortement apériodique sur ces groupes, mais permet aussi de définir un analogue du pavage de Robinson sur les $\mathrm{BS}(1,n)$ avec $n \geq 2$ [AS20]. Au vu de l'utilisation intensive du SFT de Robinson, ou de l'une de ses variantes, sur $\mathbb{Z}^2$, nous sommes convaincus que cette construction sera utile pour encore mieux comprendre les propriétés des SFT sur les groupes $\mathrm{BS}(1,n)$.

J'ai rassemblé dans le Chapitre 3 mes travaux autour du problème du domino. En 2013 avec Jarkko Kari nous avons démontré l'indécidabilité du problème du domino pour tous les groupes de Baumslag-Solitar $\mathrm{BS}(m,n)$ [AK13]. La preuve détaillée de ce résultat se trouve dans la Partie 3.2. Avec Sebastián Barbieri et Emmanuel Jeandel, nous avons compilé dans un chapitre de livre [ABJ18] tous les résultats connus sur le sujet au moment de la rédaction, en 2017. J'ai alors poursuivi mes investigations avec deux angles d'attaque différents : trouver des preuves d'indécidabilité originales pour de nouveaux groupes ou classes de groupes d'une part, et explorer plus

1. Arrêté du 23 novembre 1988 relatif à l'habilitation à diriger des recherches.

précisément le cas de $\mathbb{Z}^2$ en étudiant des variantes du problème du domino d'autre part. Concernant le premier, nous obtenons avec Sebastián Barbieri et Étienne Moutot [ABM19] l'indécidabilité pour les groupes de surface orientée de genre au moins 2, dont les grandes lignes de la démonstration sont présentées dans la Partie 3.3. De ce résultat, intéressant en lui-même, nous espérons deux choses : d'abord l'étendre à tous les groupes hyperboliques à un bout, et ensuite ré-utiliser la construction de la preuve, qui semble présenter un intérêt beaucoup plus large que la seule résolution du problème du domino. Pour la seconde piste d'investigation, avec Julien Esnay et Mathieu Sablik nous donnons une caractérisation des SFT 1D plus proches voisins pour lesquels une variante du problème du domino sur $\mathbb{Z}^2$ est indécidable [AES20].

Le Chapitre 4 s'intéresse aux notions d'effectivité pour les sous-décalages. Un sous-décalage effectif peut être défini par un ensemble de motifs interdits qui s'énumère par une machine de Turing, ou un algorithme. Avec Sebastián Barbieri et Mathieu Sablik [ABS17] nous avons d'abord donné une définition robuste de cette notion, déjà bien comprise sur $\mathbb{Z}^d$, pour des sous-décalages sur un groupe de type fini G quelconque. Ce travail ne présente pas réellement de résultat nouveau, mais pose des bases solides pour se lancer dans l'étude des décalages effectifs – et obtenir des théorèmes de simulation par exemple. À propos de sous-décalages effectifs, avec Sebastián Barbieri et Stéphan Thomassé, nous donnons une preuve nouvelle de l'existence de sous-décalages fortement apériodiques sur un groupe de type fini quelconque [ABT18]. Notre preuve présente un double avantage par rapport à la preuve originale [GJS09] : le décalage que nous construisons est effectif, et la preuve tient en quelques pages grâce à l'utilisation du lemme local de Lovász. Ce résultat a été apprécié par la communauté de dynamique symbolique [GW18], et l'utilisation du lemme local a inspiré d'autres travaux [Ele17, Ber19, Berar].

Les Chapitres 2, 3 et 4 comportent chacun une dernière partie proposant des pistes d'approfondissement. On y trouve des questions en lien direct avec les résultats présentés, qui font écho aux questions générales présentées en introduction. Dans le Chapitre 5, qui conclut le manuscrit, je présente un projet de recherche à plus long terme, qui comporte notamment un thème non abordé auparavant, celui du modèle des dimères sur un groupe de type fini G (Partie 5.2).

## Bibliographie personnelle citée dans ce mémoire


[ABJ18] Nathalie AUBRUN, Sebastián BARBIERI et Emmanuel JEANDEL : *About the Domino Problem for Subshifts on Groups*, pages 331–389. Springer International Publishing, 2018.

[ABM18] Nathalie AUBRUN, Sebastián BARBIERI et Etienne MOUTOT : The domino problem is undecidable on surface groups. `https://arxiv.org/abs/1811.08420`, 2018.

[ABM19] Nathalie AUBRUN, Sebastián BARBIERI et Etienne MOUTOT : The domino problem is undecidable on surface groups. *In MFCS2019 44th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, Aachen, Germany, août 2019.

[ABT18] Nathalie Aubrun, Sebastián Barbieri, and Stéphan Thomassé. Realization of aperiodic subshifts and uniform densities in groups. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 13(1) :107–129, nov 2018.

[AES20] Nathalie AUBRUN, Julien ESNAY et Mathieu SABLIK : Domino Problem Under Horizontal Constraints. *In* Christophe PAUL et Markus BLÄSER, éditeurs : *37th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2020)*, Dagstuhl, Germany, 2020.

[AK13] Nathalie AUBRUN et Jarkko KARI : Tiling Problems on Baumslag-Solitar groups. *In MCU'13*, pages 35–46, 2013.

[AS20] Nathalie AUBRUN et Michael SCHRAUDNER : Tilings of the hyperbolic plane of substitutive origin as subshifts of finite type on baumslag-solitar groups $bs(1,n)$. `https://arxiv.org/abs/2012.11037`, 2020.

# 1 Dynamique symbolique et groupes de type fini

**Sommaire**


**État de l'art** . . . . . 3
**Démarche** . . . . . 9
**Contexte des travaux de recherche** . . . . . 10
**Organisation du manuscrit** . . . . . 10
**Bibliographie personnelle** . . . . . 12


Ce chapitre contient les définitions et résultats classiques utiles à la lecture du reste du manuscrit. Il est volontairement court et permet d'alléger les chapitres suivants.

## 1.1 Groupes de type fini

### 1.1.1 Premières définitions

Un groupe G est de **type fini** s'il possède une présentation $\langle S \mid R \rangle$ où S est une partie génératrice finie et symétrique ($S^{-1} \subset S$) et R un ensemble de relations $R \subset S^* \times S^*$. Si de plus l'ensemble des relations R est lui aussi fini, on dit que le groupe G est de **présentation finie**. Si deux mots $w_1, w_2$ de $S^*$ représentent le même élément du groupe G on écrit $w_1 =_G w_2$ (et parfois on omettra l'indice G et on écrira simplement $w_1 = w_2$).

Étant donnée une partie génératrice S du groupe G, le **graphe de Cayley** (à droite) de G est $\mathtt{Cay}(G,S) := (V,E)$ où les sommets V sont les éléments du groupe ; $(g,h) \in E$ est une arête s'il existe $s \in S$ tel que $gs = h$. Comme on a choisi S symétrique, le graphe est non orienté. Si on assigne à chaque arête de $\mathtt{Cay}(G,S)$ la longueur 1, le graphe devient un espace métrique. Pour tout élément $g \in G$ on note $|g|$ la longueur d'un plus court chemin de $1_G$ à $g$ dans $\mathtt{Cay}(G,S)$. On définit la **boule de taille** $n \geq 0$ dans $\mathtt{Cay}(G,S)$ comme $B_n := \{g \in G \mid |g| \leq n\}$. Toutes ces définitions dépendent du choix de la partie génératrice S, mais toutes les métriques définies par les distances dans les différents graphes de Cayley de G sont équivalentes.

Le **problème du mot** du groupe G est le langage $\mathtt{WP}(G) = \left\{w \in S^* \mid w =_G 1_G\right\}$. La notation $\mathtt{WP}(G)$ sans mention de S est justifiée car le caractère décidable de $\mathtt{WP}(G)$ est indépendant du choix de la partie génératrice S. Parmi les exemples de groupes avec un problème du mot décidable, on trouve les groupes abéliens, les groupes libres, les groupes à un relateur [Mag32]. Un résultat fondamental, obtenu de manière indépendante par Novikov [Nov54] et Boone [Boo59], est qu'il existe des groupes de présentation finie avec problème du mot indécidable.

Un groupe G est **virtuellement libre** s'il possède un sous-groupe libre d'indice fini. Plus généralement, un groupe possède **virtuellement une propriété** (cyclique, résiduellement fini, etc...) s'il admet un sous-groupe d'indice fini avec cette propriété.

Soit H un groupe et $(X,d)$ un espace métrique. Une action (à gauche) $*$ de H sur X est **translation-like** si l'action $*$ est libre (si $h*x = x$ alors $h = 1_H$) et si pour tout $h \in H$, l'ensemble $\{d(x, h*x) \mid x \in X\}$ est borné.

Ce concept d'action *translation-like* a été introduit comme analogue géométrique au concept de sous-groupe [Why99]. En effet, si H est un sous-groupe de G, alors H agit *translation-like* sur G. Seward [Sew14] montre que $\mathbb{Z}$ agit *translation-like* sur tout groupe infini. Ce résultat est notamment utilisé dans [Jea15c] pour montrer que le problème du domino est indécidable sur les groupes $G_1 \times G_2$, où $G_1$ et $G_2$ sont deux groupes infinis.

### 1.1.2 Commensurabilité et quasi-isométrie

Si $(X_1, d_1)$ et $(X_2, d_2)$ sont deux espaces métriques, une **quasi-isométrie** de $(X_1, d_1)$ vers $(X_2, d_2)$ est une fonction $f : X_1 \to X_2$ telle qu'il existe des constantes $A \geq 1$ et $B, C \geq 0$ telles que :

1. pour tous $x, y \in X_1$, $\frac{1}{A} d_1(x, y) - B \leq d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq A \cdot d_1(x, y) + B$ ;
2. pour tout $z \in X_2$, il existe $x \in X_1$ tel que $d_2\big(z, f(x)\big) \leq C$.

On peut composer les quasi-isométries et les inverser, et ainsi voir la relation *être quasi-isométrique à* comme une relation d'équivalence sur les espaces métriques. Si G est un groupe de type fini et que $S_1$ et $S_2$ sont deux parties génératrices finies de G, alors les deux graphes de Cayley $\texttt{Cay}(G, S_1)$ et $\texttt{Cay}(G, S_2)$ sont quasi-isométriques. La relation de quasi-isométrie s'applique donc bien aux groupes eux-mêmes : deux groupes $G_1$ et $G_2$ sont quasi-isométriques s'il existe une quasi-isométrie entre deux de leurs graphes de Cayley $\texttt{Cay}(G_1, S_1)$ et $\texttt{Cay}(G_2, S_2)$. En particulier, si H est un sous-groupe d'indice fini dans G, alors H et G sont quasi-isométriques.

Deux groupes $G_1$ et $G_2$ sont **commensurables** s'ils contiennent chacun des sous-groupes d'indice fini $H_1 \leqslant G_1$ et $H_2 \leqslant G_2$ tels que $H_1$ et $H_2$ sont isomorphes. Pour les groupes de type fini, la commensurabilité est donc une notion plus forte que la quasi-isométrie, et il existe des exemples de groupes de type fini quasi-isométriques mais pas commensurables [dlH00, Problème 47, page 107].

### 1.1.3 Quelques propriétés géométriques des groupes

Un espace métrique $(X, d)$ est $\delta$-hyperbolique si les triangles géodésiques de X sont $\delta$-fins, c'est-à-dire que pour tous $x, y, z \in X$ alors

$$[x, y] \subseteq B_\delta\big([y, z] \cup [z, x]\big)$$
$$[y, z] \subseteq B_\delta\big([z, x] \cup [x, y]\big)$$
$$[z, x] \subseteq B_\delta\big([x, y] \cup [y, z]\big)$$

où $[x, y]$ est le segment géodésique de $x$ à $y$. Un groupe G est **hyperbolique** si l'un de ses graphes de Cayley est $\delta$-hyperbolique pour un certain $\delta > 0$ (et si l'un des graphes de Cayley de G est hyperbolique, ils le sont tous). Les groupes hyperboliques sont bien compris d'un point de vue algorithmique [GdlH90] : beaucoup de problèmes classiques comme les problèmes du mot, d'isomorphisme et de conjugaison y sont décidables.

**Exemple 1.** *Pour des groupes de type fini, on sait que :*

— *les groupes finis, virtuellement cycliques et libres sont hyperboliques ;*

— *tout groupe possédant un sous-groupe isomorphe au groupe de Baumslag-Solitar* $BS(m, n)$ *(en particulier* $BS(1, 1) = \mathbb{Z}^2$*) n'est pas hyperbolique.*

Le **nombre de bouts** $e(G)$ d'un groupe G est la limite lorsque $n$ tend vers l'infini du nombre de composantes connexes infinies de $\texttt{Cay}(G, S) \setminus B_n$. Le nombre de bouts d'un groupe ne dépend pas de la partie génératrice choisie. Un groupe peut avoir 0, 1, 2 ou bien une infinité de bouts (le cas $e(G) = 0$ correspond aux groupes finis).

**Exemple 2.** — *le groupe* $\mathbb{Z}$ *a deux bouts,* $\mathbb{Z}^d$ *avec* $d \geq 2$ *a un seul bout et* $\mathbb{F}_d$ *(le groupe libre à d générateurs) avec* $d \geq 2$ *a une infinité de bouts ;*

— *si* H *est un sous-groupe d'indice fini de* G*, alors* $e(G) = e(H)$ *;*

— *si* $G_1$ *et* $G_2$ *sont infinis, alors* $G_1 \times G_2$ *a un seul bout ;*

— *les groupes de Baumslag-Solitar* $BS(m,n)$ *avec* $m, n \geq 1$ *ont un seul bout.*

Un théorème de Stallings [Sta68] donne une caractérisation constructive des groupes G avec au moins deux bouts $e(G) \geq 2$ , à l'aide de produits amalgamés et d'extensions HNN.

Un groupe de type fini G est **moyennable** s'il existe une mesure $f$ simplement additive (si $A \cap B = \emptyset$ alors $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$) et invariante par translation (pour tout $A \subset G$ et tout $g \in G$ on a $f(A) = f(gA)$). Il existe d'autres manières équivalentes de formuler la moyennabilité, et dans la suite nous utiliserons la condition de Følner. Une **suite de Følner** est une suite d'ensembles finis $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de G tels que pour tout $g \in G$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|F_n \Delta g F_n|}{|F_n|} = 0.$$

Le groupe G est moyennable si et seulement s'il possède une suite de Følner.

**Exemple 3.** — *le groupe* $\mathbb{Z}^d$ *est moyennable ;*

— *les groupes libres* $\mathbb{F}_d$ *avec* $d \geq 2$ *ne sont pas moyennables ;*

— *le groupe de Baumslag-Solitar* $BS(m,n)$ *avec* $m, n \geq 1$ *est moyennable si et seulement si* $m = 1$ *ou* $n = 1$.

Le caractère hyperbolique, moyennable ou le nombre de bouts d'un groupe sont des invariants de quasi-isométrie pour les groupes de type fini. On trouvera une liste plus complète des invariants de quasi-isométrie dans [dlH00, Complément IV.50, page 114].

**Remarque 1.** *Il existe deux groupes* $G_1$ *et* $G_2$ *de présentation finie tels que* $G_1$ *est isomorphe à un sous-groupe de* $G_2$*,* $G_2$ *est isomorphe à un sous-groupe de* $G_1$ *mais* $G_1$ *et* $G_2$ *ne sont pas quasi-isométriques [dlH00, Complément V.A.25, page 131] !*

## 1.2 Notions de dynamique symbolique

### 1.2.1 Configurations et sous-décalages

Dans toute la suite A est un alphabet fini et G un groupe de type fini. Équipé de la topologie produit, l'ensemble $A^G$ est compact et métrisable. Les éléments de $A^G$ sont appelés **configurations**, et sont donc des coloriages du groupe G par l'alphabet A. Si $x \in A^G$ est une configuration, on simplifie l'écriture $x(g)$ en $x_g$. Le groupe G agit à gauche sur l'ensemble des configurations $A^G$ par translation :

$$\mathfrak{S} : \begin{pmatrix} G \times A^G & \to & A^G \\ (g,x) & \mapsto & \mathfrak{S}_g(x) \end{pmatrix}$$

où $\mathfrak{S}_g(x)$ est la configuration définie $\big(\mathfrak{S}_g(x)\big)_h = x_{g^{-1}.h}$ pour tout $h \in G$. Le système dynamique $\big(A^G, \mathfrak{S}\big)$ est appelé le **décalage plein**. Un ensemble de configurations $X \subset A^G$ est un **sous-décalage** s'il est fermé pour la topologie produit et stable par $\mathfrak{S}$.

Un **morphisme** est une application $\Phi : A^G \to A^G$ définie localement par $\varphi : A^V \to A$, où V est un sous-ensemble fini de G. Pour toute configuration $x \in A^G$ et tout $g \in G$, l'image de $x$ par $\Phi$ se calcule lettre par lettre : $\Phi(x)_g = \varphi(x_{gV})$. De manière équivalente, un morphisme $\Phi$ est aussi une application continue et invariante par l'action de G par translation. Une **conjugaison** est un morphisme bijectif.

**Remarque 2.** *Il existe des sous-décalages* $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ *et* $Y \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ *qui ne sont pas conjugués, mais tels qu'il existe un morphisme surjectif* $\phi : X \to Y$ *et un morphime surjectif* $\psi : Y \to X$ *[LM95].*

Si $g \in G$ et $a \in A$, le **cylindre** $[a]_g$ est l'ensemble de configurations $[a]_g := \{x \in A^G | x_g = a\}$. Un **support** est une partie finie $K \subset G$. Un **motif** de support K est un élément $p$ de $A^K$. On définit l'ensemble des motifs finis par $A_G^* := \bigcup_{K \subset G, |K| < \infty} A^K$. Si $p \in A^K$ et $g \in G$, le cylindre engendré par $p$ en $g$ est $[p]_g := \bigcap_{h \in K} [p_h]_{gh}$.

**Proposition 1.1**

Un ensemble de configurations X est un sous-décalage si et seulement s'il existe un ensemble de motifs interdits $F \subset A_G^*$ tel que

$$X = X_F =: \bigcap_{p \in F, g \in G} A^G \setminus [p]_g.$$

Cette définition combinatoire des sous-décalages par exclusion de motifs permet de définir des classes de sous-décalages, en fonction de propriétés vérifiées par un des ensembles de motifs interdits qui les définissent.

Un sous-décalage $X \subset A^G$ est de **type fini**, que l'on abbréviera en SFT, s'il existe un ensemble fini de motifs interdits F tel que $X = X_F$. Si l'ensemble de motifs interdits F est tel que tout motif de F est de la forme $p \in A^{\{1_G, s\}}$ avec $s \in S$, on dit que le SFT $X_F$ est un **SFT plus proches voisins**. Cette notion de SFT plus proches voisins dépend de la partie génératrice S choisie. Un sous-décalage $Y \subset B^G$ est **sofique** s'il existe un SFT $X \subset A^G$ est un $\Phi : A^G \to B^G$ un morphisme tels que $Y = \Phi(X)$. Un sous-décalage $X \subset A^G$ est **effectif** s'il existe un ensemble de motifs interdits F, pouvant être énuméré par une machine de Turing avec oracle $\mathtt{WP}(G)$, tel que $X = X_F$ (voir [AB09] pour une définition de machine de Turing).

### 1.2.2 Problème du domino

Soit G un groupe de type fini et S une partie génératrice finie de G. Pour coder un motif plus proche voisin, on identifie un motif $p \in A^{\{1_G, s\}}$ au triplet $(p(1_G), s, p(s)) \in A \times S \times A$ qui lui correspond. Un ensemble de motifs interdits plus proches voisins est donc un sous-ensemble de $A \times S \times A$. Le **problème du domino** de G par rapport à S, noté $\mathtt{DP}(G, S)$ est l'ensemble des codages de motifs interdits F plus proches voisins pour S tels que $X_F \neq \emptyset$. On dit que le problème du domino de G par rapport à S est décidable si le langage $\mathtt{DP}(G, S)$ est lui-même décidable (on renvoie à [AB09] pour la notion de décidabilité).

**Proposition 1.2: [ABJ18, Corollaire 9.3.27]**

Soient S et S′ deux parties génératrices finie d'un groupe G. Alors $\mathtt{DP}(G, S)$ est décidable si et seulement si $\mathtt{DP}(G, S')$ l'est également.

Il est donc légitime de parler du problème du domino d'un groupe G indépendamment de la partie génératrice S choisie. On notera donc $\mathtt{DP}(G)$ le problème du domino du groupe G.

### 1.2.3 Notions d'apériodicité

Soit $x \in A^G$ une configuration. L'**orbite** de $x$ est l'ensemble des configurations $orb_{\mathfrak{S}}(x) = \{\mathfrak{S}_g(x) \mid g \in G\}$, et le **stabilisateur** de $x$ est le sous-groupe $stab_{\mathfrak{S}}(x) = \{ g \in G \mid \mathfrak{S}_g(x) = x\}$. Une configuration $x \in A^G$ est **périodique** si son orbite est finie $|orb_{\mathfrak{S}}(x)| < \infty$.

Un sous-décalage $X \subseteq A^G$ est **faiblement apériodique** si toute configuration $x \in X$ a une orbite infinie $|orb_{\mathfrak{S}}(x)| = \infty$. Un sous-décalage $X \subseteq A^G$ est **fortement apériodique** si toute configuration

$x \in X$ a un stabilisateur trivial $stab_{\mathfrak{S}}(x) = \{1_G\}$. Pour un groupe G infini, la forte apériodicité implique la faible apériodicité. Le sous-décalage X est **minimal** s'il ne contient pas de sous-système propre (si $Y \subset X$ est un sous-décalage, alors $Y = \emptyset$ ou $Y = X$) ou de manière équivalente si l'orbite de chaque configuration $x \in X$ est dense.

## 1.3 Sous-décalages sur des graphes

Dans cette partie on généralise la définition combinatoire des sous-décalages par exclusion de motifs à des graphes qui ne sont pas nécessairement des graphes de Cayley d'un groupe de type fini. En modifiant de la sorte la structure sur laquelle les sous-décalages sont définis, on perd l'action par translation et donc la caractérisation topologique des sous-décalages comme ensembles de configurations fermés et invariants par translation. On choisit néanmoins de conserver le terme sous-décalages pour désigner ces objets, en gardant en tête que ceux-ci n'ont plus une origine dynamique dans ce contexte. On se limite à des graphes infinis dénombrables de degré borné, et dont les arêtes sont étiquetées.

On définit un **graphe** $\Gamma$ comme un triplet $(V_\Gamma, E_\Gamma, L_\Gamma)$ où $V_\Gamma$ est un ensemble infini dénombrable de sommets, $E_\Gamma \subset V_\Gamma^2$ est l'ensemble des arêtes du graphe, avec comme condition que pour tout sommet $v \in V_\Gamma$, l'ensemble $\{u \in V_\Gamma \mid (u,v) \in E_\Gamma \text{ ou } (v,u) \in E_\Gamma\}$ est de taille bornée par une constante M, et $L_\Gamma : E_\Gamma \to L$ est une fonction d'étiquetage qui associe un élément de L à chaque arête du graphe. Des exemples importants de ce modèle de graphes sont les graphes de Cayley de groupes de type fini. Si $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma, L_\Gamma)$ est un graphe, et S, T deux sous-ensembles fini de $V_\Gamma$, on dit qu'une application $\phi : S \to T$ est un **isomorphisme de graphe préservant les étiquettes** si $\phi$ est une bijection et

— pour tous $u, v \in S$, $(u,v) \in E_\Gamma$ si et seulement si $(\phi(u), \phi(v)) \in E_\Gamma$ ;

— pour tous $u, v \in S$, $L_\Gamma((u,v)) = L_\Gamma\big((\phi(u), \phi(v))\big)$.

Si A est un alphabet fini et $\Gamma$ un graphe, l'ensemble des applications de $V_\Gamma$ vers A, noté $A^\Gamma$, est l'ensemble des **configurations** sur $\Gamma$. Équipé de la topologie prodiscrète, l'ensemble $A^\Gamma$ est compact et métrisable.

Si $S \subset V_\Gamma$ est un ensemble fini et connexe de sommets, un **motif** de support S est une application $p : S \to A$. Un motif $p : S \to A$ apparaît dans une configuration $x \in A^G$ (resp. dans un motif $p' : S' \to A$) s'il existe un ensemble fini de sommets $T \subset V_\Gamma$ (resp. $T \subset S'$) et un isomorphisme de graphe préservant les étiquettes $\phi : S \to T$ tels que $p_u = x_{\phi(u)}$ (resp. $p_u = p'_{\phi(u)}$) pour tout $u \in S$. Dans ce cas, on écrit $p \sqsubset x$ (resp. $p \sqsubset p'$). Un **sous-décalage** $X_F \subset A^\Gamma$ est un ensemble de configurations qui évitent un ensemble de motifs interdits F, autrement dit $X_F := \{x \in A^\Gamma \mid \text{ aucun motif de F n'apparaît dans } x\}$. Cette notion généralise la définition classique de sous-décalage pour des actions de groupes à des graphes arbitraires. Un **sous-décalage de type fini** (SFT) est un sous-décalage pour lequel l'ensemble de motifs interdits F peut être choisi fini. Si les supports de tous les motifs interdits dans F sont composés de deux sommets connectés par une arête, on dit que $X_F$ est un SFT **plus proches voisins**.

Étant donnés un graphe $\Gamma$ et un alphabet fini A, on peut coder un motif par un graphe fini (un sous-graphe induit de $\Gamma$) avec des étiquettes sur les arêtes et des lettres de A sur les sommets. On parlera de codage d'un motif en référence à ce graphe fini. Le **problème du domino** de $\Gamma$ est l'ensemble $\mathtt{DP}(\Gamma)$ des codages d'ensembles finis de motifs interdits F tels que $X_F \neq \emptyset$. Si cet ensemble $\mathtt{DP}(\Gamma)$ est récursif, on dit que $\Gamma$ a problème du domino décidable, et le problème est indécidable dans le cas contraire.

## 1.4 Substitutions 1D et graphes d'orbites

### 1.4.1 Fonctions parents

Dans cette partie on définit les fonctions parents, qui seront utiles pour décrire précisément l'action d'une substitution sur un mot bi-infini, et donner une représentation par graphe d'une orbite. Une **fonction parent** $\mathrm{P}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est une fonction surjective et croissante. En particulier, une telle fonction vérifie que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{P}(i+1) - \mathrm{P}(i) \in \{0,1\}$. Soit $u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^{\mathbb{Z}}$ une suite bi-infinie d'entiers strictement positifs. La **fonction d'accumulation** de la suite $u$ est la fonction $\Delta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donnée par

$$\Delta(i) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{i-1} u_k & \text{si } i \geq 1 \\ 0 & \text{si } i = 0 \\ -\sum_{k=i}^{-1} u_k & \text{if } i \leq -1 \end{cases}.$$

On peut remarquer que la famille d'intervalles discrets $(\mathrm{I}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ avec $\mathrm{I}_k = [\Delta(k); \Delta(k+1)-1]$ forme une partition de $\mathbb{Z}$. Si P est une fonction parent, et si on définit la suite $u$ par $u_i = |\mathrm{P}^{-1}(i)|$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on obtient que $\mathrm{P}(j) = i$ pour tout $j \in [\Delta(i); \Delta(i+1)-1]$, avec $\Delta$ la fonction d'accumulation de $u$.

### 1.4.2 Substitutions (non) déterministes

Une **substitution** – non déterministe – est un couple $\sigma = (\mathrm{A}, \mathrm{R})$, où $\mathrm{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est un alphabet fini de taille $n$ et $\mathrm{R} \subset \mathrm{A} \times \mathrm{A}^*$ est l'ensemble des règles de la substitution $\sigma$. Une substitution $\sigma$ est **déterministe** si pour toute lettre $a \in \mathrm{A}$, il existe seulement une règle $(a, \sigma(a)) \in \mathrm{R}$. Dans le cas déterministe, on peut associer à la substitution $\sigma$ sa matrice d'incidence $\mathrm{M}_\sigma \in \mathscr{M}_n(\mathbb{N})$ donnée par $\mathrm{M}_\sigma(i,j) = |\sigma(a_i)|_{a_j}$ le nombre d'occurrences de la lettre $a_j$ dans le mot $\sigma(a_i)$. Une substitution $\sigma$ est **primitive** s'il existe une puissance de $\mathrm{M}_\sigma$ dont toutes les entrées sont strictement positives. Le théorème de Perron-Frobenius implique que la matrice d'incidence d'une substitution (déterministe) primitive admet une valeur propre réelle $\lambda \geq 1$, et qui est plus grande en module que toutes les autres valeurs propres. Par analogie, et comme nous le faisons dans [ABM19], on dit qu'une substitution non déterministe $\sigma = (\mathscr{A}, \mathrm{R})$ possède une **valeur propre dominante** s'il existe $\lambda > 1$ et un vecteur $v : \mathrm{A} \to \mathbb{R}^{+*}$ tels que pour toute règle $(a, w) \in \mathrm{R}$ :

$$\lambda \cdot v(a) = \sum_{i=1}^{|w|} v(w_i).$$

On dit qu'un mot infini $\omega \in \mathrm{A}^{\mathbb{Z}}$ **produit** le mot $\omega' \in \mathrm{A}^{\mathbb{Z}}$ selon une fonction parent P si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $(\omega_i, \omega'_{|\mathrm{P}^{-1}(i)}) \in \mathrm{R}$, avec $\omega'_{|\mathrm{P}^{-1}(i)}$ le sous-mot fini de $\omega'$ qui apparaît aux indices $\{j \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{P}(j) = i\}$. Dans ce cas, pour simplifier les notations, on écrit $(\omega, \omega') \in \mathrm{R}$. Pour une substitution non déterministe $(\mathrm{A}, \mathrm{R})$, une **orbite** est un ensemble $\left\{(\omega^i, \mathrm{P}_i)\right\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \left(\mathscr{A}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}\right)^{\mathbb{Z}}$ tel que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{P}_i$ est une fonction parent, et le mot $\omega^i$ produit le mot $\omega^{i+1}$ selon $\mathrm{P}_i$.

### 1.4.3 Orbites d'une substitution comme pavage de $\mathbb{R}_2$

Dans cette partie on décrit les orbites d'une substitution comme des pavages de $\mathbb{R}^2$, comme présenté dans [ABM19]. Une **tuile** est un ensemble compact et connexe de $\mathbb{R}^2$ d'intérieur non vide. Si T est un ensemble de tuiles, pas nécessairement fini, un T**-pavage** ou pavage par T est une collection de copies translatées de tuiles dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, et dont l'union est le plan entier $\mathbb{R}^2$.

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{R})$ une substitution non déterministe avec valeur propre dominante $\lambda > 1$ et vecteur associé $v : \mathrm{A} \to \mathbb{R}^{+*}$. Pour chaque règle $(a, w) \in \mathrm{R}$, on définit une $(a, w)$-tuile en position $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ comme étant le polygône dessiné sur la Figure 3, avec $w = w_1 \ldots w_k$.

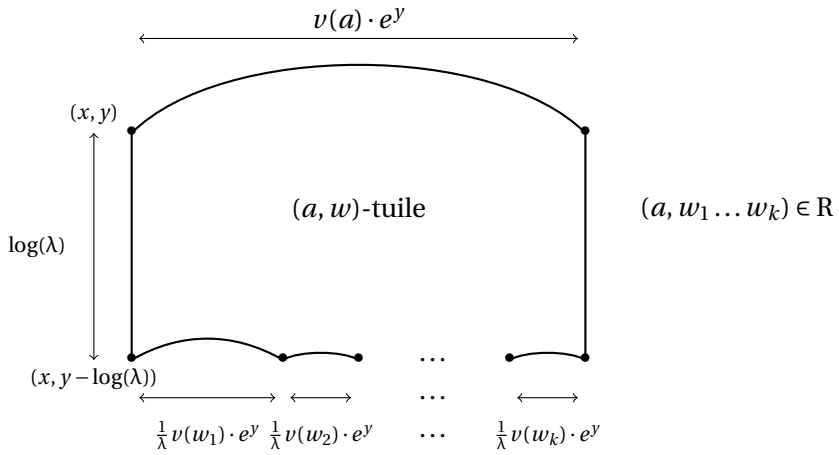



FIGURE 3 – Une $(a,w)$-tuile pour une règle $(a,w)\in \mathrm{R}$ avec $w=w_1\dots w_k$. Les côtés horizontaux du polygône sont incurvés pour les rendre plus visibles.

**Remarque 3.** *La longueur du côté supérieur est égale à la somme des longueurs des côtés inférieurs de la $(a,w)$-tuile. Comme $\lambda>1$ et que $v$ est le vecteur associé à $\lambda$, on a*

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\lambda}v(w_i)\cdot e^y=\frac{e^y}{\lambda}\cdot\lambda\cdot v(a)=v(a)\cdot e^y,$$

*de sorte que le sommet en bas à droite $\left(x+\frac{1}{\lambda}\left(v(w_1)+\dots+v(w_k)\right)e^y, y-\log(\lambda)\right)$ est en fait $(x+v(a)\cdot e^y, y-\log(\lambda))$.*

L'ensemble de toutes les $(a,w)$-tuiles en position $(x,y)$ pour toutes les règles $(a,w)\in \mathrm{R}$ et tous les $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ forme les $(\mathrm{A},\mathrm{R})$-**tuiles**, ou $\sigma$-**tuiles**. Les $\sigma$-tuiles sont donc des compacts de $\mathbb{R}^2$ d'intérieur non vide. On peut donc définir un pavage de $\mathbb{R}^2$ par des $\sigma$-tuiles comme une collection dénombrable de $\sigma$-tuiles qui recouvrent $\mathbb{R}^2$ et sont d'intérieurs deux à deux disjoints, de sorte que les tuiles sont accolées côté contre côté – l'intersection de deux tuiles est soit vide, soit un côté entier.

**Proposition 1.3**

Si une substitution $(\mathrm{A},\mathrm{R})$ avec valeur propre dominante admet une orbite, alors il existe un pavage de $\mathbb{R}^2$ par des $(\mathrm{A},\mathrm{R})$-tuiles.

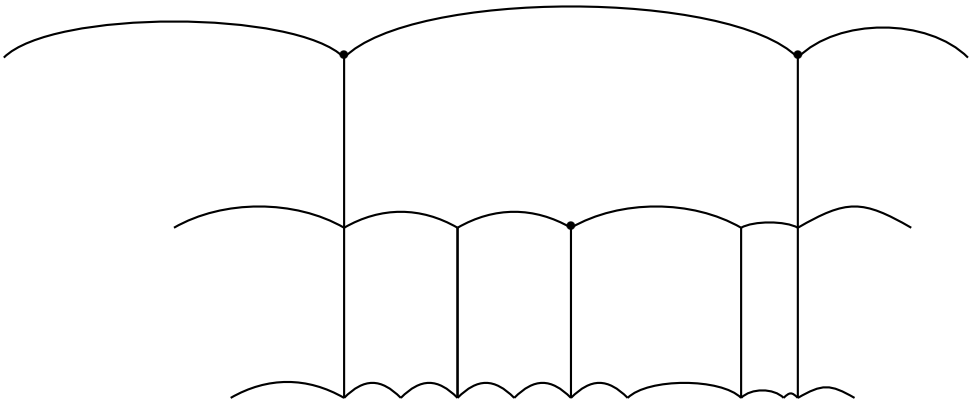


FIGURE 4 – Un pavage de $\mathbb{R}^2$ par $\sigma$-tuiles.

### 1.4.4 Graphes d'orbites d'une substitution

Si $\sigma = (A, R)$ est une substitution non déterministe, on note $M := \max_{(a,w)\in R} |w|$. Le **graphe d'orbite** associé à une orbite $\Omega = \left\{(\omega^i, P_i)\right\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $(A, R)$ est le graphe $\Gamma_\Omega$ dont les sommets sont $\mathbb{Z}^2$, les arêtes $E_\Omega$ et la fonction d'étiquetage $L_\Omega : E_\Omega \to \{\texttt{next}\} \cup [0; M-1]$ définie par

— pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$, $((i, j), (i, j+1)) \in E_\Omega$ et $L_\Omega\left(((i, j), (i, j+1))\right) = \texttt{next}$ ;

— pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in [\Delta_{i+1}(j); \Delta_{i+1}(j+1)-1]$, $((i, j), (i+1, k)) \in E_\Omega$ et $L_\Omega\left(((i, j), (i+1, k))\right) = k - \Delta_{i+1}(j)$,

avec $\Delta_i$ la fonction d'accumulation associée à la suite $\left(|P_i^{-1}(j)|\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

On remarque que $\Gamma_\Omega$ ne dépend que du choix des fonctions parents $\{P_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, et pas de $\{\omega^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Cependant, on impose que la suite des fonctions parents définissent une orbite $\Omega = \left\{(\omega^i, P_i)\right\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $(A, R)$.

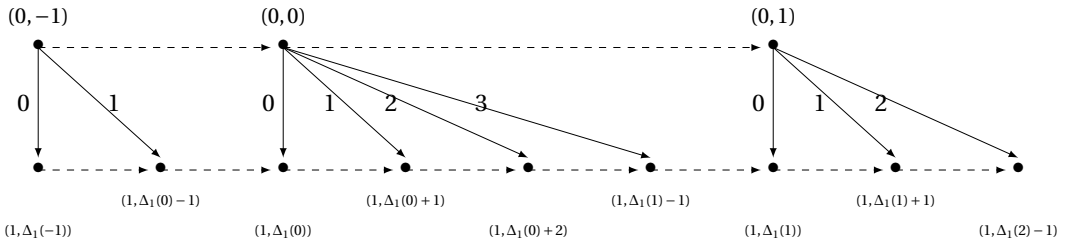



FIGURE 5 – Morceau de graphe d'orbite. Les flèches hachurées sont les arêtes du graphe étiquetées par `next`.

**Remarque 4.** *Si $\sigma$ est la substitution uniforme $0 \mapsto 00$, alors les graphes d'orbites de $\sigma$ sont les duaux des pavages du plan hyperbolique par tuiles de Wang pentagonales de la Figure 6 : les tuiles de Wang d'un pavage sont les sommets du graphe d'orbite, et les adjacences entre tuiles donnent les arêtes du graphe d'orbite.*

# 2 Groupes de Baumslag-Solitar

## Sommaire


**1.1 Groupes de type fini . . . . . 13**
1.1.1 Premières définitions . . . . . 13
1.1.2 Commensurabilité et quasi-isométrie . . . . . 14
1.1.3 Quelques propriétés géométriques des groupes . . . . . 14
**1.2 Notions de dynamique symbolique . . . . . 15**
1.2.1 Configurations et sous-décalages . . . . . 15
1.2.2 Problème du domino . . . . . 16
1.2.3 Notions d'apériodicité . . . . . 16
**1.3 Sous-décalages sur des graphes . . . . . 17**
**1.4 Substitutions 1D et graphes d'orbites . . . . . 18**
1.4.1 Fonctions parents . . . . . 18
1.4.2 Substitutions (non) déterministes . . . . . 18
1.4.3 Orbites d'une substitution comme pavage de $\mathbb{R}_2$ . . . . . 18
1.4.4 Graphes d'orbites d'une substitution . . . . . 20


Dans un article publié en 2007 [Kar07], Jarkko Kari présente une nouvelle preuve de l'indécidabilité du problème du domino sur $\mathbb{Z}^2$, qui s'avère transposable au plan hyperbolique $\mathbb{H}_2$. Pour le plan hyperbolique il utilise un modèle de tuiles de Wang pentagonales, où chaque tuile possède comme sur $\mathbb{Z}^2$ un voisin gauche, un voisin droite, un parent (immédiatement au-dessus) et non pas un mais deux enfants (immédiatement en dessous), l'enfant de gauche étant le voisin de gauche de l'enfant de droite. En pavant $\mathbb{H}_2$ avec ces tuiles, on fait apparaître une structure de

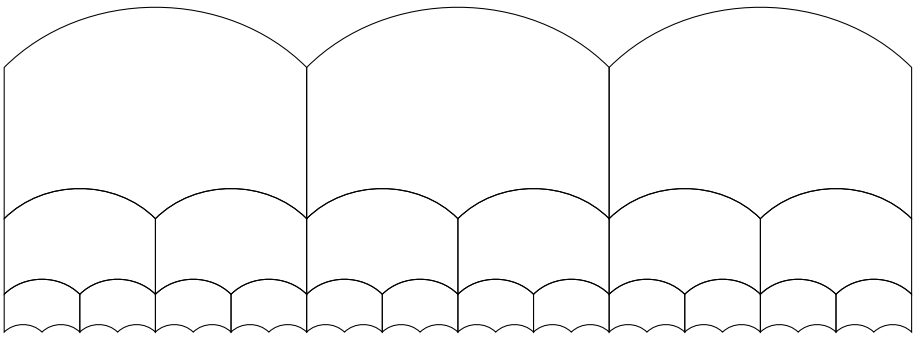


FIGURE 6 – Un pavage de $\mathbb{H}_2$ par des tuiles de Wang pentagonales.

graphe qui s'interprète soit comme le graphe de Cayley du monoïde à trois générateurs de présentation $\langle a, a^{-1}, t \mid at = ta^2, aa^{-1} = 1\rangle$, soit comme le dual d'un graphe d'orbite de la substitution constante $0 \mapsto 00$. Ce graphe n'est pas le graphe de Cayley d'un groupe car tous les sommets n'ont pas le même degré : les pavages par tuiles de Wang pentagonales ne rentrent pas dans le cadre de la définition d'un sous-décalage sur un groupe de type fini (voir la Partie 1.2.1).

La question de la transposition des outils d'investigation des sous-décalages sur certaines structures à de nouvelles structures proches, plus riches et plus générales s'avère être une question pivot, comme on l'a vu en introduction. Or si l'on ajoute $t^{-1}$ au monoïde, on autorise ainsi la possibilité de remonter depuis un sommet de degré 3 et on obtient alors le groupe de présentation $\langle a, t \mid at = ta^2 \rangle$. Ce groupe apparaît dès 1951 dans un article de Higman [Hig51b], dans lequel il propose un exemple de groupe de présentation finie G à trois générateurs et deux relations qui soit non Hopfien : le groupe G est isomorphe à l'un de ses sous-groupes quotient G/H non triviaux. Le sous-groupe normal H de l'exemple d'Higman est précisément $\langle a, t \mid at = ta^2 \rangle$. Dans ce même article, Higman énonce qu'un groupe de type fini à une seule relation est nécessairement Hopfien. Cette assertion sera réfutée en 1962 par Baumslag et Solitar [BS62] qui s'intéressent aux groupes de présentation $\langle a, t \mid a^m t = ta^n \rangle$ et caractérisent ceux parmi eux qui sont non Hopfiens. En référence à cet article, les groupes de présentation $\langle a, t \mid a^m t = ta^n \rangle$ sont appelés groupes de Baumslag-Solitar et notés $\mathrm{BS}(m, n)$.

Les groupes de Baumslag-Solitar constituent des exemples simples d'extensions HNN, une construction fondamentale de la théorie combinatoire des groupes qui joue par exemple un rôle clé dans la preuve du théorème de plongement de Higman (tout groupe de type fini et de présentation récursive se plonge dans un groupe de présentation finie) [LS01]. Les $\mathrm{BS}(m, n)$ bénéficient donc de toutes les conséquences du lemme de Britton, qui donne par exemple une forme normale élégante pour les $\mathrm{BS}(1, n)$.

La classe des $\mathrm{BS}(m, n)$ est nettement séparée en deux sous-classes aux comportements très différents : les groupes $\mathrm{BS}(1, n)$ sont résolubles donc moyennables, tandis que les $\mathrm{BS}(m, n)$ avec $m, n > 1$ possèdent des sous-groupes libres et ne sont donc pas moyennables. Chacune de ces deux sous-classes est également bien comprise d'un point de vue géométrique, car on sait précisément à quelle condition deux $\mathrm{BS}(m, n)$ sont quasi-isométriques :

— les groupes $\mathrm{BS}(1, n)$ et $\mathrm{BS}(1, n')$ sont quasi-isométriques si et seulement si $n$ et $n'$ ont une puissance commune [FM98] – et dans ce cas, les deux groupes sont même commensurables ;

— les groupes $\mathrm{BS}(m, n)$ et $\mathrm{BS}(m', n')$ sont toujours quasi-isométriques dès lors que $2 \leq m < n$ et $2 \leq m' < n'$ [Why01].

Ainsi les groupes de Baumslag-Solitar servent à la fois d'exemples canoniques en théorie combinatoire et théorie géométrique des groupes et constituent un prolongement naturel pour l'application des outils et techniques de dynamique symbolique. Ce double intérêt, qui permet de mettre en dialogue approche mathématique et approche informatique, s'est avéré efficace pour obtenir de nouveaux résultats. En tout état de cause, ces considérations justifient à mes yeux le fait d'avoir consacré plusieurs années de recherche et un chapitre entier de ce manuscrit aux groupes de Baumslag-Solitar.

Ce chapitre poursuit trois objectifs. D'abord présenter les groupes de Baumslag-Solitar $\mathrm{BS}(1, n)$, leur graphe de Cayley ainsi qu'un isomorphisme entre $\mathrm{BS}(1, n)$ et $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}] \rtimes_f \mathbb{Z}$, qui sera fondamental pour la suite. Ensuite donner les idées clés de la construction décrite dans [AS20], qui permet de déployer certains pavages hyperboliques, les $\sigma$-pavages, dans le groupe $\mathrm{BS}(1, n)$ sous forme de SFT. Enfin, montrer comment cette construction peut s'utiliser comme boîte noire pour obtenir des SFT sur $\mathrm{BS}(1, n)$ en déployant un $\sigma$-pavage bien choisi. Nous verrons comment cette dernière permet de retrouver des résultats déjà connus, comme l'existence de SFT fortement apériodique ou l'indécidabilité du problème du domino, mais aussi d'obtenir des constructions originales, par exemple en déployant dans $\mathrm{BS}(1, n)$ le pavage de Robinson hyperbolique. Ces constructions laissent entrevoir de nouvelles avancées comme celles mentionnées dans la Partie 2.4.

## 2.1 Les groupes de Baumslag-Solitar $\mathrm{BS}(1, n)$

Dans cette partie on décrit les groupes $\mathrm{BS}(1, n)$, leur graphe de Cayley ainsi qu'un plongement de $\mathrm{BS}(1, n)$ dans $\mathbb{R}^2$.

### 2.1.1 Définition et propriétés

Étant donnés deux entiers positifs $m$ et $n$, le groupe de Baumslag-Solitar $\mathrm{BS}(m,n)$ est le groupe de présentation finie

$$\mathrm{BS}(m,n) := \langle a, t \mid t^{-1}a^m t = a^n \rangle.$$

Dans la suite de ce chapitre on s'intéresse uniquement aux groupes de Baumslag-Solitar résolubles, qui sont ceux définis avec $m, n$ tels que $m = 1$ ou $n = 1$. Ils forment une classe fondamentale d'exemples de groupes de type fini résolubles, donc moyennables. Ils possèdent également une forme normale particulièrement simple à écrire, comme l'exprime la Proposition 2.1.

**Proposition 2.1**

Tout élément de $\mathrm{BS}(1,n)$ s'écrit de manière unique soit comme $a^j t^{-k}$ avec $k \geq 0$ et $j \in \mathbb{Z}$, soit comme $t^i a^j$ avec $i > 0$ et $j \in \mathbb{Z}$, soit comme $t^i a^j t^{-k}$ avec $i > 0$, $k \geq 0$ et $n \nmid j$.

**Remarque 5.** *En contrepartie de la simplicité de son écriture, le mot proposé par cette forme normale pour représenter un élément du groupe n'est pas de longueur minimale : par exemple l'élément représenté par $t^2 a^{n^2-1}$ peut tout aussi bien s'écrire $at^2a^{-1}$.*

### 2.1.2 Graphe de Cayley de $\mathrm{BS}(1,n)$

Une construction pas à pas du graphe de Cayley de $\mathrm{BS}(1,2)$ avec partie génératrice $\{a, t, a^{-1}, t^{-1}\}$, représenté sur la Figure 7, se trouve dans [Mei08, Section 5.4] – attention, les générateurs sont différents. À partir de la relation $t^{-1}at = a^n$ on définit une brique de base, qui est le cycle de taille $n+3$ lui correspondant. On peut coller ces briques entre elles en respectant les sens et étiquettes des arêtes. Le graphe de Cayley de $\mathrm{BS}(1,n)$ se compose ainsi d'une multitude de feuilles qui fusionnent $n$ par $n$, ces fusions étant organisées de sorte que la structure globale du graphe ressemble à un arbre $(n+1)$-aire régulier. Chacune des feuilles est quasi-isométrique au plan hyperbolique $\mathbb{H}_2$. Formellement, si $g$ est un élément de $\mathrm{BS}(1,n)$, alors la feuille définie par $g$ est l'ensemble

$$\mathrm{S}_g := \left\{ g \cdot t^k a^\ell \mid k \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Remarque 6.** *Pour un élément du groupe $g \in \mathrm{BS}(1,n)$, la forme normale de la Proposition 2.1 correspond au choix du chemin reliant l'identité $1$ à $g$ suivant : d'abord descendre dans le graphe si nécessaire (emprunter $i$ fois le générateur $t$) puis se déplacer latéralement afin de sélectionner la feuille adéquate (emprunter $j$ fois le générateur $a$) et enfin remonter jusqu'à $g$ (emprunter $k$ fois le générateur $t^{-1}$). La condition $n \nmid j$ dans le cas où $i$ est non nul signifie que l'on ne descend pas plus que nécessaire dans le graphe (on choisit $i$ minimal).*

On appelle **rectangle** tout ensemble fini de $\mathrm{BS}(1,2)$ de la forme :

$$\mathrm{R}_{k,\ell} := \left\{ t^\ell a^i t^{-j} \mid i \in [0; (k+1)\cdot 2^{\ell-1} - 1] \text{ et } j \in [0;\ell] \right\}.$$

Contrairement aux boules, ces rectangles forment une suite de Følner et prouvent ainsi la moyennabilité des groupes $\mathrm{BS}(1,n)$ de manière directe (on sait par ailleurs qu'ils sont moyennables car résolubles).

**Proposition 2.2**

La suite $\left(\mathrm{R}_{k,\ell}\right)_{k,\ell \in \mathbb{N}}$ est une suite de Følner.

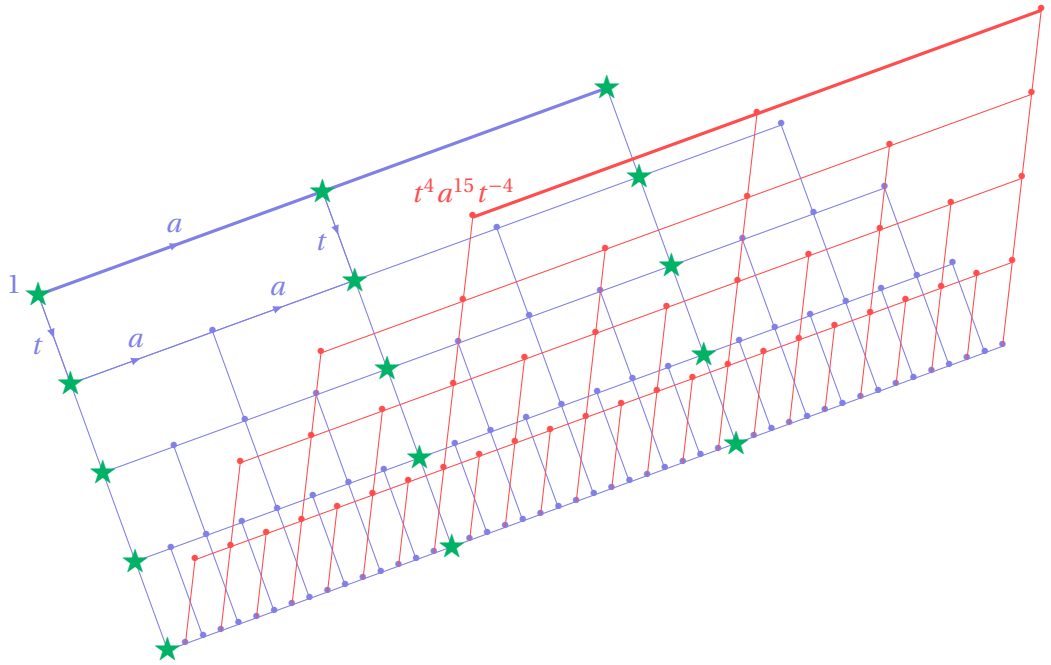



FIGURE 7 – Une partie du graphe de Cayley de BS(1,2). Une première feuille, celle définie par l'origine 1, est représentée en bleu. En rouge la feuille définie par l'élément $t^4a^{15}t^{-4}$. Les étiquettes des arêtes de la brique positionnée en l'origine 1 sont également dessinées. Les sommets marqués d'une étoile verte forment une grille de taille $3\times 5$, qui est ici un mineur du graphe de Cayley.

Chacune des feuilles du rectangle $R_{k,\ell}$ possède une grille de taille $k\times\ell$ comme sous-graphe induit. On peut donc trouver des grilles de tailles arbitraires dans le graphe de BS(1,2). On retrouve là une propriété des groupes qui ne sont pas virtuellement libres : ils possèdent un bout épais [Woe89] et donc, par le théorème de Halin, des grilles de taille arbitraire comme mineurs (on pourra consulter [Die04] pour une preuve récente du théorème de Halin). Ces grilles nécessitent un graphe de taille exponentielle, ou autrement dit, il faut un nombre exponentiel en $k$ et $\ell$ d'opérations de suppression d'arête/suppression de sommet/contraction d'arête pour obtenir la grille à partir d'un sous-graphe fini du graphe de Cayley.

### 2.1.3 De BS$(1,n)$ vers $\mathbb{R}^2$

On considère le produit semi-direct $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]\rtimes_f\mathbb{Z}$ défini par

$$f:\begin{pmatrix}\mathbb{Z} & \to & Aut\left(\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]\right)\\ k & \mapsto & x\mapsto n^k\cdot x\end{pmatrix}.$$

A l'aide de la forme normale de la Proposition 2.1, on montre que BS$(1,n)$ et $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]\rtimes_f\mathbb{Z}$ sont isomorphes, via

$$\Phi:\begin{pmatrix}\mathrm{BS}(1,n) & \to & \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]\rtimes_f\mathbb{Z}\\ t^ia^jt^{-k} & \mapsto & \left(j\cdot n^{-i},k-i\right)\end{pmatrix}.$$

**Proposition 2.3**

L'application $\Phi$ est un isomorphisme.

Cette fonction $\Phi$ nous permet d'introduire la notion de $\Phi(g)$-boîte pour un élément $g\in$ BS$(1,n)$. Pour cela on s'autorise à voir $\Phi$ comme une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, par exemple $\Phi(ta^3t^{-2})=$

$(\frac{3}{2},1)$ dans $\mathrm{BS}(1,2)$. Si $g \in \mathrm{BS}(1,n)$ a pour forme normale $g = t^i a^j t^{-k}$, la $\Phi(g)$-**boîte** est le rectangle $\Phi(g) + [0, n^{-i+k}[\times]-1,0]$ dans $\mathbb{R}^2$. Une $\Phi$-boîte est simplement une $\Phi(g)$-boîte pour un certain $g \in \mathrm{BS}(1,n)$.

**Remarque 7.** *L'ensemble des $\Phi(g)$-boîtes pour tous les $g$ d'une même feuille de $\mathrm{BS}(1,n)$ forment une partition de $\mathbb{R}^2$.*

Cette remarque constitue un élément important de la construction de la Partie 2.2 : connaître le contenu de toutes les $\Phi$-boîtes d'une même feuille revient à connaître le contenu du plan euclidien entier. On peut également décrire le comportement des $\Phi$-boîtes par changement de feuille : si $g$ est un élément du groupe, alors en faisant varier l'entier $\ell \in \mathbb{N}$, l'élément $gt^\ell a t^{-\ell}$ parcourt l'ensemble des feuilles avec lesquelles la feuille définie par $g$ va fusionner. De par la définition, les contenus des $\Phi(g)$ et $\Phi(gt^\ell a t^{-\ell})$-boîtes ne sont pas indépendants.

**Remarque 8.** *Pour tout élément $g$ avec forme normale $g = t^i a^j t^{-k}$ et pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$, la $\Phi(g)$-boîte et la $\Phi(gt^\ell a t^{-\ell})$-boîte ont comme intersection le rectangle $\Phi(g)+[n^{-\ell-i+k}, n^{-i+k}[\times]-1,0]$.*

## 2.2 Pavages hyperboliques comme SFT sur $\mathrm{BS}(1,n)$

À partir de maintenant, par souci de simplicité on considère seulement le cas $n = 2$, mais le lecteur se convaincra que les énoncés qui suivent se transposent facilement au cas général $n \geq 2$. Je présente dans un premier temps les grandes lignes de la construction détaillée dans [AS20], qui permet de déployer certains pavages de $\mathbb{H}_2$ en SFT sur $\mathrm{BS}(1,n)$.

J'explique ensuite comment utiliser cette construction comme une « boîte noire » pour retrouver par exemple les résultats de [AK13] ou encore une démonstration nouvelle de l'indécidabilité du problème du domino. L'énoncé formel apparaît en page 29 dans le Théorème 2.1.

La notion de pavage hyperbolique à laquelle on se réfère est celle des pavages provenant d'une substitution $\sigma$ (déterministe ou non), les $\sigma$-pavages, tels que décrits dans [CGS17, ABM19] et dans la Partie 1.4.3. Une substitution est notée $\sigma = (\mathrm{A}, \mathrm{R})$, avec $\mathrm{R} \subset \mathrm{A} \times \mathrm{A}^*$ l'ensemble des règles. Si $\sigma$ est déterministe alors pour chaque lettre $a \in \mathrm{A}$, il n'existe qu'une seule règle $(a, \sigma(a)) \in \mathrm{R}$. Afin d'obtenir des pavages, on impose à la substitution $\sigma$ l'existence d'un réel $\lambda > 1$ et d'un vecteur $v : \mathrm{A} \to \mathbb{R}^{+*}$ tels que, pour tout $(a,w) \in \mathrm{R}$ :

$$\lambda \cdot v(a) = \sum_{i=1}^{|w|} v(w_i).$$

Dans le cas déterministe, cela revient à imposer que la valeur propre dominante $\lambda$ de la matrice d'incidence de la substitution $\mathrm{M}_\sigma$ soit strictement supérieure à 1. Les $\sigma$-tuiles dans le cas d'une substitution générale sont décrites dans [ABM19] ; on donne ici un exemple de $\sigma$-tuiles et de $\sigma$-pavage pour la substitution $\sigma : \{a,b\} \to \{a,b\}^*$ définie par $\sigma(a) = aab$ et $\sigma(b) = ba$ (voir la Figure 8). Il faut retenir que les $\sigma$-pavages constituent une manière géométrique de visualiser les orbites de l'action de $\sigma$ sur les mots bi-infinis $\mathrm{A}^{\mathbb{Z}}$, où une ligne horizontale de $\sigma$-tuiles représente un mot bi-infini, et la ligne horizontale immédiatement au-dessous (resp. au-dessus) son image (resp. sa pré-image) par $\sigma$. Chaque lettre de l'alphabet A se voit attribuer une forme de tuile, dont la hauteur est fixée et la largeur dépend de la position verticale de la tuile. Chaque $\sigma$-tuile code localement la substitution $\sigma$.

Dans le groupe $\mathrm{BS}(1,2)$, chaque feuille est quasi-isométrique à un plan hyperbolique. Dans le cas des groupes à présentation finie, quasi-isométries et décalages de type fini sont par nature des objets compatibles entre eux : on pensera notamment au résultat de Cohen qui montre que l'indécidabilité du problème du domino est un invariant de quasi-isométrie pour cette classe de

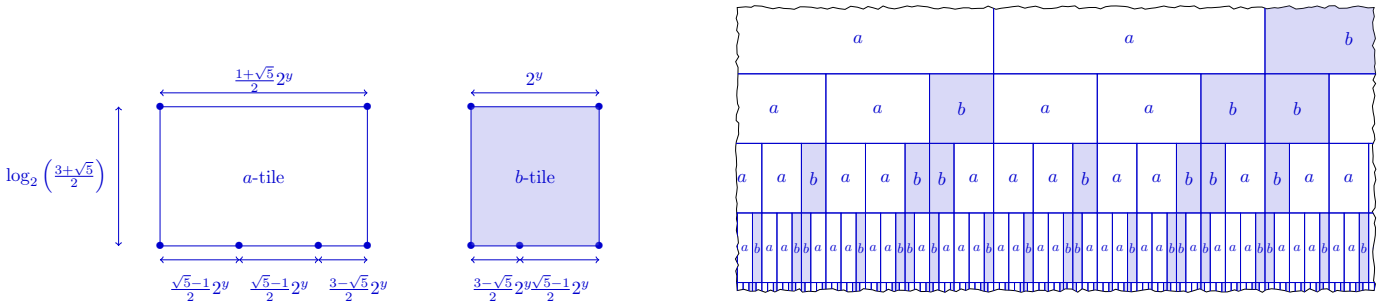



FIGURE 8 – À gauche, les formes et dimensions des σ-tuiles en position $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour $\sigma(a) = aab, \sigma(b) = ba$. Pour cette substitution, $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $v = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$. Une partie finie d'un σ-pavage est dessinée à droite.

groupes [Coh17]. Que l'on puisse encoder un pavage du plan hyperbolique, et donc en particulier un σ-pavage, dans une feuille de BS(1,2) n'a donc rien de surprenant. La difficulté principale est de réussir à synchroniser toutes les feuilles de BS(1,2) pour que chacune d'elles encode le même σ-pavage, et que les jonctions entre feuilles ne posent pas de problème, tout cela uniquement par règles locales. Pour se faire on s'appuie sur la fonction Φ, en construisant un sous-décalage de type fini $X_\sigma$ dont les configurations codent les σ-pavages. De manière imagée, on referme d'abord le groupe BS(1,2) sur $\mathbb{R}^2$ via Φ, comme on refermerait les pages d'un livre. Puis on colorie le groupe ainsi refermé avec le σ-pavage, et on déplie ensuite le groupe pour déployer le σ-pavage.

Pour parvenir à construire ce SFT, dans une configuration $x$ du SFT $X_\sigma$, chaque élément $g$ du groupe se voit attribuer une fenêtre de $\mathbb{R}^2$ qu'il aura pour tâche de décrire via la lettre $x_g$ qui lui sera associée. En choisissant pour fenêtre associée à $g$ la $\Phi(g)$-boîte, on s'assure que la configuration $x$ voit sur chaque feuille de BS(1,2) la totalité du σ-pavage. L'alphabet de $X_\sigma$ est choisi pour décrire localement la structure du pavage hyperbolique : les lettres seront tous les contenus possibles des Φ-boîtes. Grâce à la Remarque 7, on pourra construire, pour tout σ-pavage, une configuration sur BS(1,2) dans laquelle chaque feuille code le σ-pavage, et la Remarque 8 montre que les feuilles sont bien synchronisées.

### 2.2.1 Description de l'alphabet

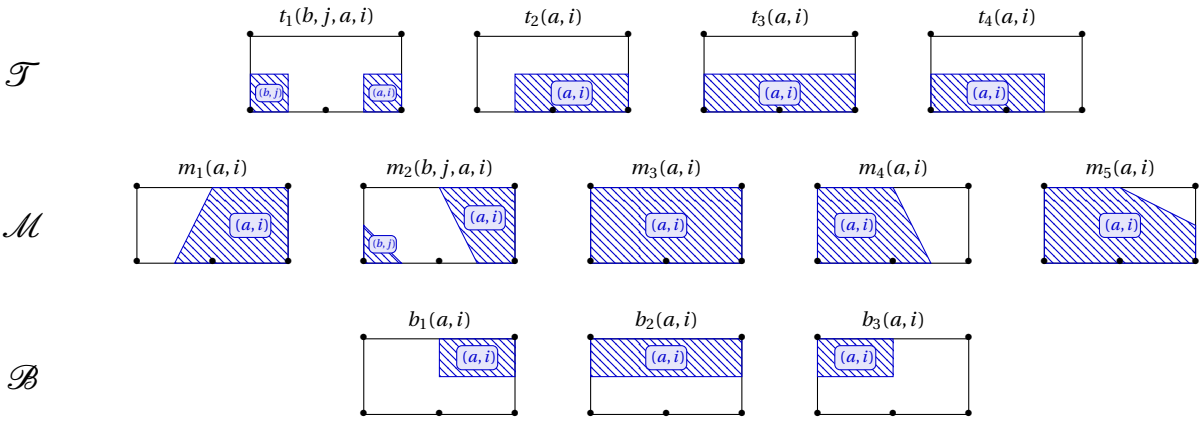
On appelle $M := \max_{(a,r)\in R}|r|$ (ou $M := \max_{a\in A}|\sigma(a)|$ pour une substitution déterministe) la taille maximale des images par σ. On définit un alphabet $\mathscr{D}$ qui contient des lettres comme $t_1(b,j,a,i)$, $m_3(a,i)$ ou encore $b_2(a,i)$. Plus précisément $\mathscr{D} = \mathscr{T} \cup \mathscr{M} \cup \mathscr{B}$, où $\mathscr{T}$ est employé pour *top*, $\mathscr{B}$ pour *bottom* et $\mathscr{M}$ pour *middle*, avec

$$\begin{aligned}\mathscr{T} &:= t_1 \cup t_2 \cup t_3 \cup t_4\\ \mathscr{M} &:= m_1 \cup m_2 \cup m_3 \cup m_4 \cup m_5\\ \mathscr{B} &:= b_1 \cup b_2 \cup b_3\end{aligned}$$

où chaque lettre $d \in \mathscr{D}$ peut prendre deux formes :

$$\begin{aligned}\alpha &:= \{\alpha(b,j,a,i) : a,b \in A, i,j = 1\dots M\}\\ \beta &:= \{\beta(a,i) : a \in A, i = 1\dots M\}\end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in \{t_1, m_2\}$ et pour tout $\beta \in \{t_2, t_3, t_4, m_1, m_3, m_4, m_5, b_1, b_2, b_3\}$. Les lettres elles-mêmes sont les tuiles de Wang pentagonales décrites ci-dessous.




Dans le cas d'une lettre $t_1\left(b,j,a,i\right)$ ou $m_2\left(b,j,a,i\right)$, on adoptera la convention que $(a,i)$ se réfère à la zone hachurée la plus à droite, et $(b,j)$ à celle la plus à gauche.

### 2.2.2 Intuition derrière cet alphabet

De manière informelle, chaque lettre $d \in \mathscr{D}$ donne une information locale à propos du σ-pavage qui est codé. Supposons que $x \in \mathrm{X}_\sigma$ et $g \in \mathrm{BS}(1,2)$ avec pour forme normale $g = t^i a^j t^{-k}$, de sorte que $\Phi(g) = (j \cdot 2^{-i}, k-i)$. Alors la lettre $d = x_g$ décrit ce que la $\Phi(g)$-boîte capture géométriquement du σ-pavage (quelle σ-tuile est visible, et où elle est située avec une erreur possible de $2^{k-i}$ horizontalement) et nous indique aussi la position de cette σ-tuile sous la σ-tuile qui la surmonte.

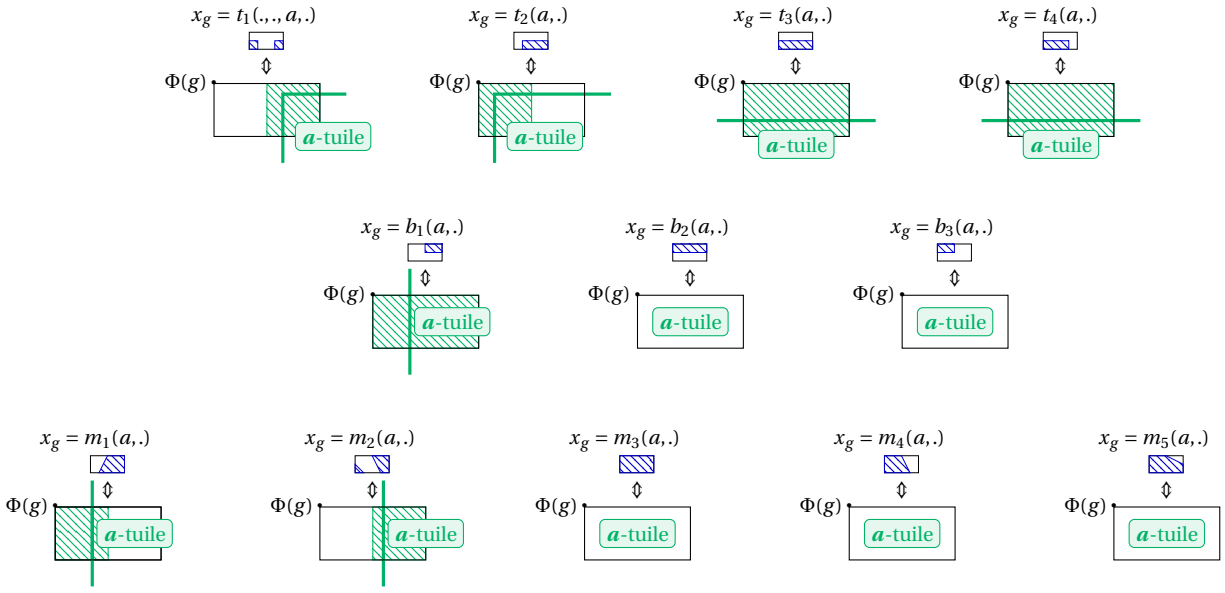



FIGURE 9 – Interprétation de la lettre $x_g$ qui apparaît en position $g \in \mathrm{BS}(1,2)$ dans une configuration $x \in \mathrm{X}_\sigma$. Le rectangle en noir, dont le coin supérieur gauche est étiqueté par $\Phi(g)$, représente la $\Phi(g)$-boîte.

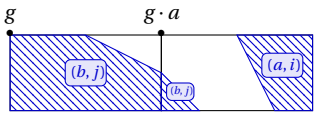
La lettre $d$ peut encoder la présence d'une ligne verticale (lettres $m_1$, $m_2$ et $b_1$), d'une ligne horizontale (lettres $t_3$ et $t_4$), d'un coin supérieur gauche (lettres $t_1$ et $t_2$) ou encore l'absence d'éléments du bord d'une σ-tuile (lettres $m_3$, $m_4$, $m_5$, $b_2$ et $b_3$). La Figure 9 s'interprète comme suit : si une lettre $d \in \mathscr{D}$ encode la présence d'un élément (coin, ligne verticale ou horizontale), celui-ci doit nécessairement apparaître à l'intérieur de la zone hachurée en vert. Par exemple, le fait que $x_g \in t_1$ équivaut à la présence d'un coin supérieur gauche quelque part dans le rectangle $\Phi(g) + [2^{-i+k}; 2^{k-i+1}[\times]-1;0]$. De manière analogue, le fait que $x_g \in m_2$ équivaut à la présence

d'une ligne verticale en position $\{j\cdot 2^i + x\}\times[k-i, k-i+1[$, avec $x\in[2^{k-i};2^{k-i+1}[$. De cette façon, en descendant dans le graphe de Cayley (i.e. en progressant selon le générateur $t$) dans une configuration $x\in \mathrm{X}_\sigma$, on obtient une meilleure approximation de la position des $\sigma$-tuiles.

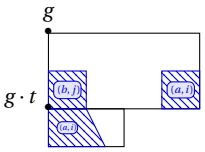
### 2.2.3 Description des règles locales

Appelons $\mathrm{W} := \max_{a\in\mathrm{A}}\lfloor v(a)\rfloor$, où $v$ est le vecteur associé à $\lambda$. L'ensemble $\mathscr{A}_\sigma$ des motifs autorisés qui permet de définir le sous-décalage $\mathrm{X}_\sigma \subset \mathscr{D}^{\mathrm{BS}(1,2)}$ et que l'on décrit plus bas est un sous-ensemble de $\mathscr{D}^{\mathrm{R}_{3\mathrm{W},3(h+1)}}$. Dans un souci de concision, nous ne présentons pas directement l'ensemble $\mathscr{A}_\sigma$, mais listons plutôt les règles locales qui décrivent les motifs dans $\mathscr{A}_\sigma$.

1. Les couleurs doivent correspondre selon les générateurs $a, a^{-1}, t$ et $t^{-1}$. Cette condition est plus proche voisin.

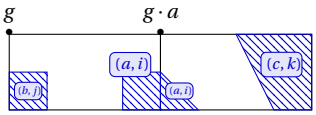



$$\begin{cases} x_g &= m_5(b,j) \\ x_{g\cdot a} &= m_2(b,j,a,i)\end{cases}$$ est autorisé




$$\begin{cases} x_g &= t_1(b,j,a,i) \\ x_{g\cdot t} &= m_4(a,i)\end{cases}$$ est autorisé

2. Le type de lettre de la première coordonnée($\mathscr{T}$, $\mathscr{M}$ ou $\mathscr{B}$) est uniforme sur l'ensemble $\{g\cdot a^k : k\in\mathbb{Z}\}$ pour tout $g\in\mathrm{BS}(1,2)$. Cette condition est plus proche voisin.




$$\begin{cases} x_g &= t_1(b,j,a,i) \\ x_{g\cdot a} &= m_2(a,i,c,k)\end{cases}$$ est interdit (même si les couleurs correspondent)

3. Les dimensions des zones hachurées connexes sont bornées en accord avec la substitution $\sigma$. Plus précisément : il y a deux hauteurs possibles pour les zones hachurées : $h$ et $h-1$, indépendamment de la lettre $a\in\mathrm{A}$ qui est codée. La largeur du haut d'une zone hachurée dépend elle de la lettre $a\in\mathrm{A}$ codée, et peut seulement prendre des valeurs comprises entre $(w_a-1)$ et $(2w_a-1)$.

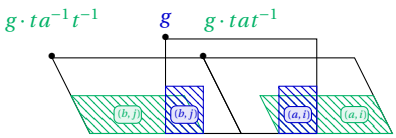
4. Les lettres en positions $g$, $gtat^{-1}$ et $gta^{-1}t^{-1}$ sont synchronisées :

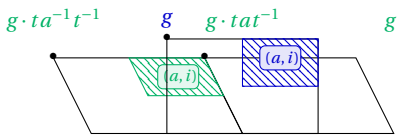
   a) $x_g = t_1(b,j,a,i) \Rightarrow \begin{cases} x_{g\cdot tat^{-1}} = t_2(a,i) \\ x_{g\cdot ta^{-1}t^{-1}} = t_4(b,j)\end{cases}$

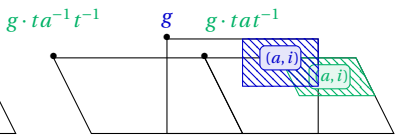
   b) $x_g = b_1(a,i) \Rightarrow x_{g\cdot bab^{-1}} = b_1(a,i)$ ou $x_{g\cdot ta^{-1}t^{-1}} = b_1(a,i)$

   c) $x_g = b_3(a,i) \Rightarrow x_{g\cdot bab^{-1}} = b_3(a,i)$ ou $x_{g\cdot ba^{-1}t^{-1}} = b_3(a,i)$

   d) $x_g = m_1(a,i) \Leftrightarrow x_{g\cdot ta^{-1}t^{-1}} = m_2(b,j,a,i)$

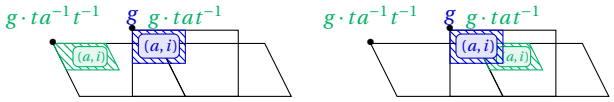


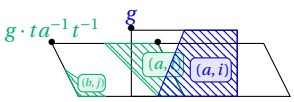




(a) $x_g = t_1(b,j,a,i) \Rightarrow \begin{cases} x_{g\cdot tat^{-1}} = t_2(a,i) \\ x_{g\cdot ta^{-1}t^{-1}} = t_4(b,j)\end{cases}$

(b) $x_g = b_1(a,i) \Rightarrow \begin{cases} x_{g\cdot bab^{-1}} = b_1(a,i) \\ ou \\ x_{g\cdot ta^{-1}t^{-1}} = b_1(a,i)\end{cases}$

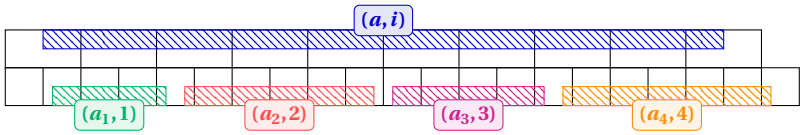



(c) $x_g = b_3(a,i) \Rightarrow \begin{cases} x_{g \cdot bab^{-1}} = b_3(a,i) \\ ou \\ x_{g \cdot ba^{-1}t^{-1}} = b_3(a,i) \end{cases}$




(d) $x_g = m_1(a,i) \Leftrightarrow x_{g \cdot ta^{-1}t^{-1}} = m_2(b,j,a,i)$

5. Si une zone hachurée porte une information de type $(a,i)$, alors les zones hachurées situées immédiatement en dessous doivent porter les informations $(r_1,1),\dots,(r_{|r|},|r|)$ dans cet ordre, avec $(a, r_1 \dots r_{|r|}) \in R$ (ou les informations $(a_1,1),\dots,(a_{|\sigma(a)|},|\sigma(a)|)$ dans cet ordre, avec $\sigma(a) = a_1 \dots a_{|\sigma(a)|}$ pour une substitution déterministe).




Avec ces règles locales, les configurations du SFT $X_\sigma$ contiennent des zones hachurées de taille bornée, qui sont agencées en bandes horizontales. Ces zones hachurées sont en forme de rectangles déformés, dont les bords gauche et droit peuvent être soumis à des distorsions. De plus, ces zones hachurées ne sont pas nécessairement alignées verticalement, il peut y avoir un décalage de 1 d'une bande à l'autre (voir la Figure 11 en fin de chapitre).

Nous avons maintenant la description complète d'un SFT $X_\sigma \subset \mathscr{D}^{BS(1,2)}$. Un exemple de configuration $x \in X_\sigma$ est dessiné sur les Figures 10 et 11 en pages 30 et 31. Chaque $\sigma$-pavage correspond à une configuration de $X_\sigma$ et vice-versa, comme formalisé dans le théorème suivant :

**Théorème 2.1: [AS20]**

Si $\tau$ est un $\sigma$-pavage, alors il existe une configuration $x \in X_\sigma$ telle que $\tau(\Phi(gat)) = \pi(x_g)$ pour tout $g \in BS(1,2)$. Réciproquement, à chaque configuration $x \in X_\sigma$ on peut associer un $\sigma$-pavage $\tau$ tel que $\tau(\Phi(gat)) = \pi(x_g)$ pour tout $g \in BS(1,2)$.

où la fonction $\pi : \mathscr{D} \to A$ est le morphisme lettre à lettre qui ne conserve que la lettre $a$ associée à la zone hachurée la plus à droite.

**Remarque 9.** *On peut s'étonner de lire $\tau(\Phi(gat)) = \pi(x_g)$ et non pas $\tau(\Phi(g)) = \pi(x_g)$ dans l'énoncé du Théorème 2.1. Cela s'explique par la définition des $\Phi$-boîtes : si la $\Phi(g)$-boîte voit par exemple le coin supérieur gauche d'une $\sigma$-tuile (tuiles $t_1$ ou $t_2$), alors $gat$ (coin inférieur droit de la $\Phi(g)$-boîte) est le seul élément dont on est certain qu'il soit recouvert par cette $\sigma$-tuile dans le $\sigma$-pavage.*

*Idée de la démonstration.* Le Théorème 2.1 se montre en deux temps. Le sens le plus facile construit une configuration $x \in X_\sigma$ à partir d'un $\sigma$-pavage $\tau$ donné. Pour cela il suffit d'assigner à chaque élément $g \in BS(1,2)$ la lettre de l'alphabet $\mathscr{D}$ correspondant au contenu de la $\Phi(g)$-boîte. Reste ensuite à s'assurer que la configuration obtenue est bien dans le SFT $X_\sigma$. Pour chaque feuille prise indépendamment, les règles locales du SFT sont bien respectées de manière immédiate. La seule chose à vérifier qui ne découle pas directement des définitions des objets manipulés se situe au niveau des fusions entre feuilles. Pour résoudre cette question, il suffit d'utiliser la Remarque 8.

Pour le sens réciproque, il s'agit de construire un $\sigma$-pavage à partir d'une configuration $x \in X_\sigma$. On procède en deux étapes :

1. chaque feuille de la configuration $x$ définit un $\sigma$-pavage ;
2. les $\sigma$-pavages définis par chacune des feuilles sont égaux.

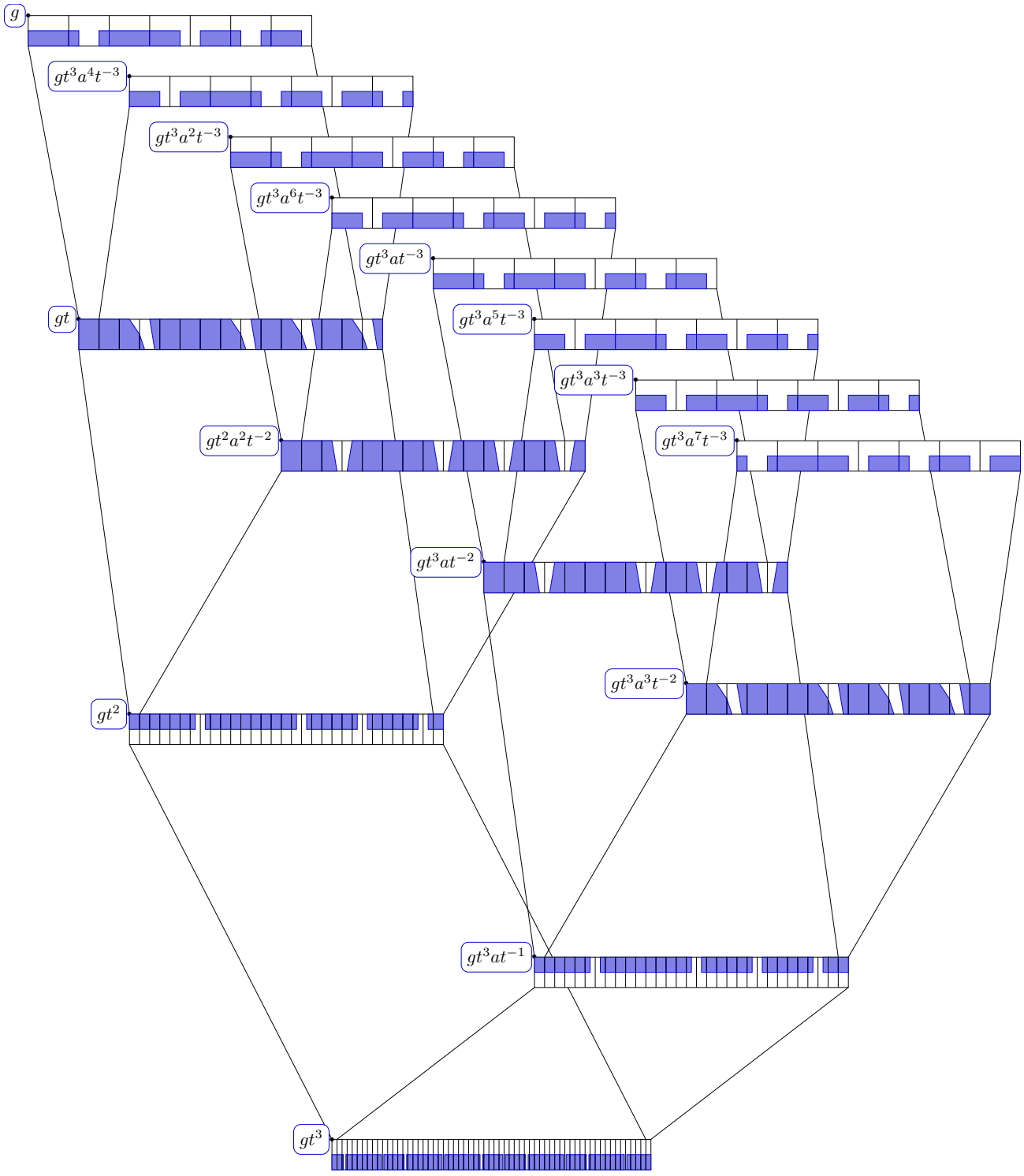



FIGURE 10 – Une configuration $x \in X_\sigma$ dessinée sur le graphe de Cayley de BS(1,2).

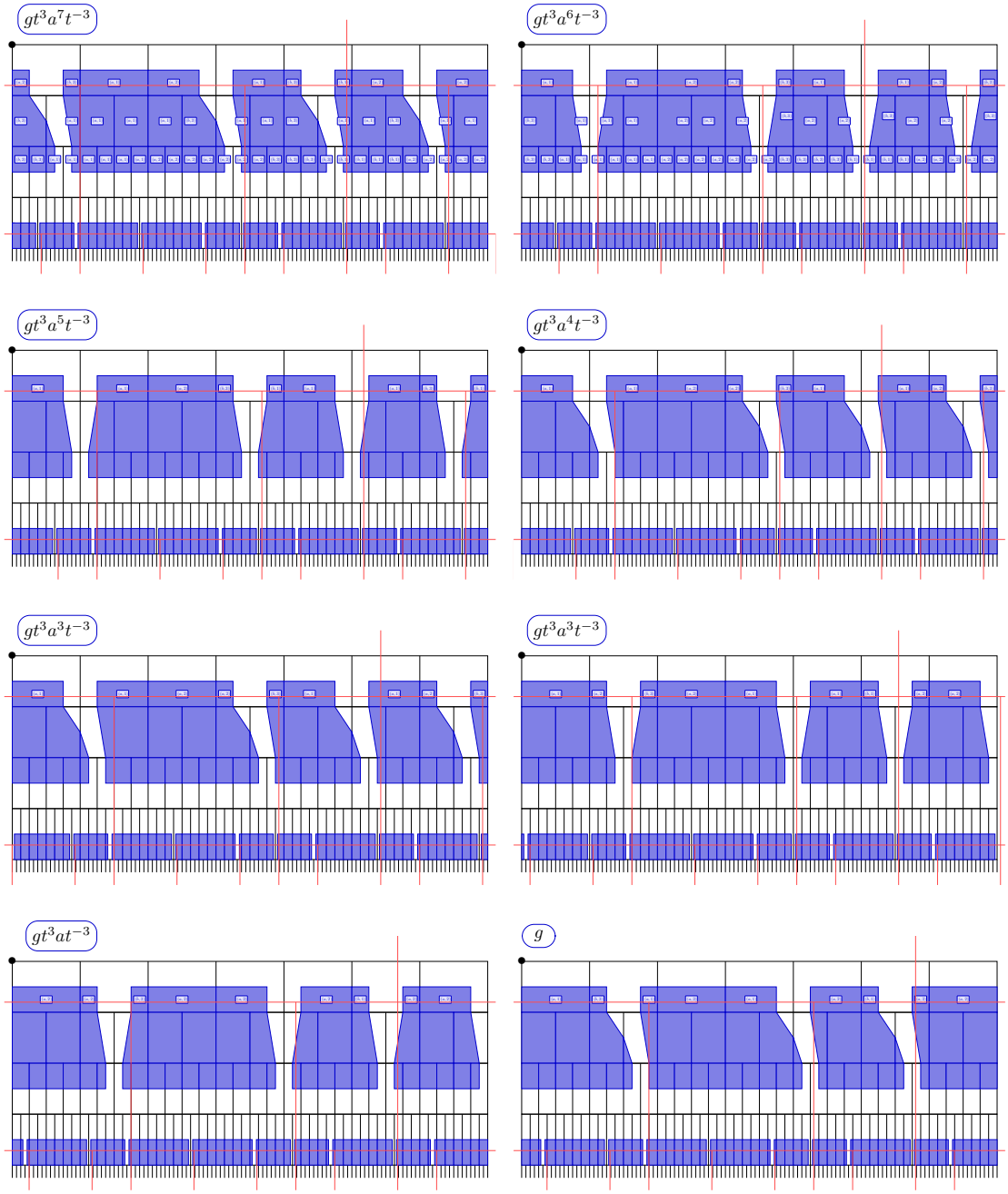



FIGURE 11 – La configuration $x$ de la Figure 10 est dessinée feuille par feuille. Le σ-pavage correspondant apparaît en rouge.

**Étape 1 : chaque feuille de $x$ définit un σ-pavage** Considérons une feuille de la configuration $x$. Notre stratégie est de définir un σ-pavage en deux étapes : d'abord placer les lignes verticales formant le σ-pavage, ensuite déduire la position des lignes horizontales ainsi que le type (i.e une lettre $a \in A$) des σ-tuiles.

1. Chaque tuile portant un coin supérieur gauche $t_1(\ldots, i \geq 2)$ ou $t_2(\ldots, i \geq 2)$ en position $g$ définit une ligne verticale semi-infinie vers le bas, dont la position est connue de manière

exacte pourvu que l'on connaisse toutes les lettres $x_{g\cdot h}$ pour $h \in \{t, ta\}^*$. Sa position verticale n'est par contre connue qu'avec imprécision.

2. Une fois toutes les lignes semi-verticales infinies placées, on déduit la position exacte de toutes les σ-tuiles composant τ directement de la définition des σ-tuiles (voir la Figure 8 pour l'exemple) : le type de σ-tuile est donné par la lettre $t_1$ ou $t_2$ du coin supérieur gauche de la zone hachurée, et si les bords gauche et droit d'une $a$-tuile sont en position $x_\ell$ et $x_r$, alors la $a$-tuile est positionnée en $\left(x_\ell, \log_2\left(\frac{x_r - x_\ell}{v(a)}\right)\right)$.

Avec ces deux conditions réunies, le pavage τ que l'on obtient est effectivement un σ-pavage.

**Étape 2 : toutes les feuilles définissent le même σ-pavage** Pour ce point, il suffit de vérifier que deux feuilles différentes donnent le même σ-pavage. Cette condition est assurée par la règle locale 4 décrite en page 28 : cette condition force les bords gauches des zones hachurées à se synchroniser lors de la fusion de deux feuilles, de sorte que les positions horizontales des lignes verticales ne dépendent pas de la feuille considérée. □

Le SFT $X_\sigma$ possède des propriétés dynamiques intéressantes :

**Proposition 2.4**

Le SFT $X_\sigma$ est d'entropie nulle. Il est de plus minimal et fortement apériodique si et seulement si $\log_2(\lambda)$ est irrationnel.

On a donc, pour chaque groupe de Baumslag-Solitar moyennable $BS(1,n)$ avec $n \geq 2$, l'existence d'un SFT minimal, fortement apériodique et d'entropie nulle. Il est légitime de se demander si ce résultat pourra être renforcé.

**Question 5**

Existe-il un SFT minimal, fortement apériodique et d'entropie positive sur $BS(1,n)$ pour $n \geq 2$ ?

Comme premier exemple d'utilisation du Théorème 2.1, on peut appliquer la construction aux $0 \mapsto 00$-pavages de l'article [Kar07]. On retrouve ainsi deux résultats déjà connus sur les groupes de Baumslag-Solitar résolubles non abéliens :

**Corollaire 2.1**

Il existe un SFT fortement apériodique sur $BS(1,n)$ pour $n \geq 2$.

dont la démonstration originale complète se trouve dans [EM20], ainsi que

**Corollaire 2.2**

Le problème du domino est indécidable sur $BS(1,n)$ pour $n \geq 2$.

qui a d'abord été démontré dans [AK13].

**Remarque 10.** *La question de l'existence d'un SFT fortement apériodique sur les* $BS(m,n)$ *non résolubles est toujours ouverte ; on sait en revanche que le problème du domino sur ces groupes est indécidable [AK13].*

La construction du Théorème 2.1 fonctionne bien avec des σ-pavages, notamment parce que ceux-ci se découpent naturellement en bandes horizontales de taille fixée. Cette spécificité est très contraignante, et on peut se demander à quel point on pourrait passer outre.

**Question 6**

Quels autres pavages hyperboliques que les σ-pavages peut-on encoder dans un SFT sur $\mathrm{BS}(1,n)$ avec $n \geq 2$ ?

## 2.3 Application : un SFT avec structure hiérarchique sur $\mathrm{BS}(1,n)$

Dans cette partie j'explique comment obtenir un SFT sur $\mathrm{BS}(1,n)$ fortement apériodique dont toutes les configurations présentent une structure très contrainte. Chaque configuration fait apparaître des carrés de tailles arbitraires, organisés de sorte que :

— tous les carrés d'un niveau $n$ sont disposés de manière régulière ;

— les centre de quatre carrés de niveau $n$ sont les coins d'un carré de niveau $n+1$.

Cette description est identique à celle des pavages du Robinson sur $\mathbb{Z}^2$, à cela près qu'un carré hyperbolique de côté $u_n$ compte $u_n$ tuiles sur ses côtés supérieur, gauche et droit et $u_n 5^{u_n}$ tuiles sur son côté inférieur.

Le travail présenté ici reprend des éléments de l'article de Goodman-Strauss [GS10]. Je présente d'une part une interprétation en terme de graphes d'orbites de sa construction (Section 2.3.2). D'autre part j'explique comment le SFT hiérarchique de [GS10] permet de déduire l'indécidabilité du problème du Domino dans $\mathbb{H}_2$ (Section 2.3.4). En combinant ce dernier résultat avec la construction de la Partie 2.2, on obtient une preuve alternative à l'indécidabilité du problème du Domino sur les $\mathrm{BS}(1,n)$ (résultat déjà connu depuis [AK13]).

Nous utilisons ici le modèle du demi-plan de Poincaré pour le plan hyperbolique $\mathbb{H}_2$, et comme le fait Goodman-Strauss [GS10] nous nous concentrons sur les graphes d'orbite de la substitution de taille 5 sur l'alphabet unaire : $\sigma : 0 \mapsto 00000$ [CGS17, ABM19]. Dans ce modèle, une tuile possède donc un parent, un voisin gauche, un voisin droit et cinq fils ordonnés (voir la Figure 12).

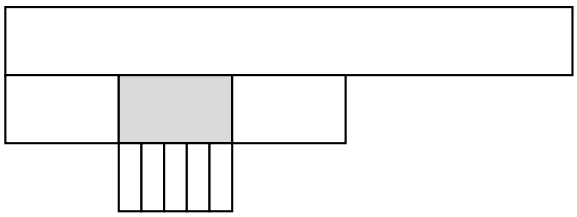


FIGURE 12 – Une tuile dans $\mathbb{H}_2$ et son premier voisinage.

### 2.3.1 Retour sur le pavage de Robinson

En guise d'introduction, reprenons les idées clés du pavage apériodique de Robinson du plan euclidien $\mathbb{Z}^2$. On pourra pour plus de détails se référer l'article original de Robinson [Rob71], mais aussi consulter les nombreuses explications plus récentes de ce pavage, comme par exemple une version provenant d'une substitution 2D [JV20]. Le jeu de tuiles se compose des six tuiles dessinées sur la Figure 13, ainsi que de toutes les tuiles obtenues par rotations et réflexions de celles-ci.

Les coins des tuiles sont soit proéminents (tuile 1, dite *bumpy*) soit rognés (tuiles 2 à 6, dite *dented*), et chaque tuile porte des décorations supplémentaires sur ses côtés, qui prennent la forme de flèches entrantes ou sortantes de différents types. Les inscriptions en bleu à l'intérieur des tuiles n'apporte pas de nouvelles contraintes, mais aident à visualiser la structure des pavages. Sur le motif dessiné à droite sur la Figure 13, on voit apparaître des carrés de différentes tailles (3, 5 et 9 tuiles de côté) qui sont agencés d'une manière bien particulière : quatre carrés de même taille donnent naissance à un carré de taille plus grande en reliant leurs quatre centres. Le motif donné en exemple est en fait le seul (à rotation et translation près) qui soit prolongeable en un pavage

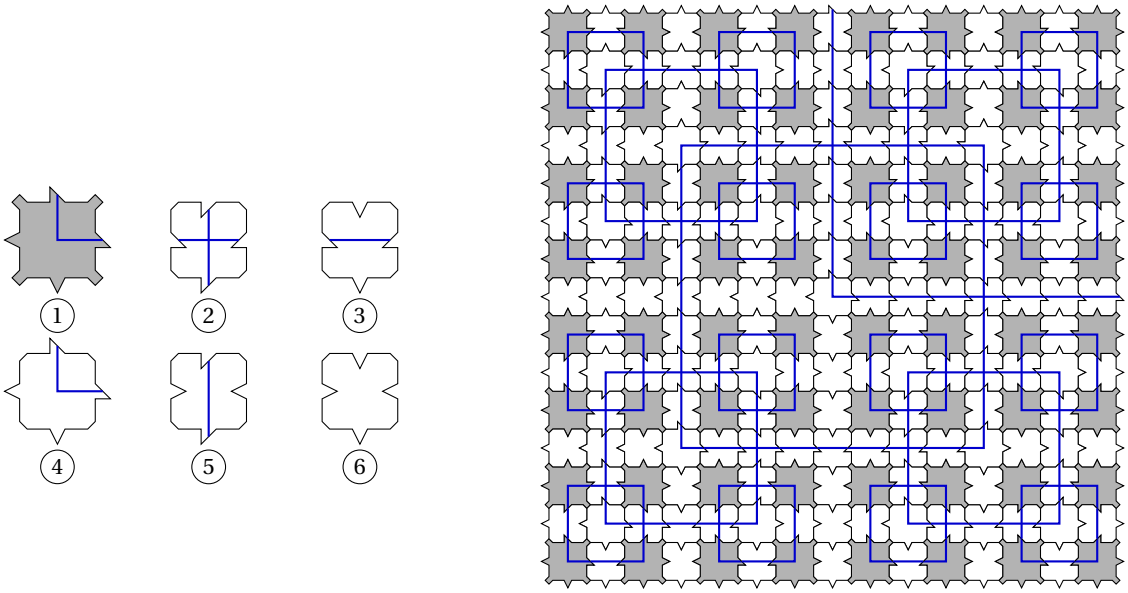



FIGURE 13 – À gauche les six tuiles qui permettent d'obtenir l'intégralité du jeu de tuiles de Robinson, par rotations et réflexions. À droite un motif réalisable à l'aide des tuiles.

du plan entier : même s'il existe une infinité non dénombrable de pavages possibles (à chaque niveau il existe quatre possibilités pour rassembler les carrés pour définir le niveau suivant), ils possèdent tous cette même structure de carrés imbriqués de plus en plus grands, structure qui donne son caractère apériodique au pavage. L'idée de Robinson est de coder, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le sous-réseau $2^n\mathbb{Z} \times 2^n\mathbb{Z}$, sachant qu'une tuile donnée ne peut appartenir qu'à un seul de ces sous-réseaux. Le premier sous-réseau $2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ apparaît sur les tuiles 1, et une fois que ces tuiles sont en place, le reste du pavage se déduit assez facilement. Le côté d'un carré de niveau $n$ vaut $2^n + 1$.

Ce jeu de tuiles est fortement apériodique : il permet de paver le plan et aucun des pavages réalisables ne possède d'invariance par translation. Pour l'exploiter en vue de démontrer l'indécidabilité du problème du domino sur $\mathbb{Z}^2$, il faut l'enrichir de manière à distinguer les carrés de niveaux pairs et les carrés de niveaux impairs. C'est possible en modifiant le jeu de tuiles, mais on ne détaille pas ici les décorations supplémentaires. On peut se concentrer uniquement sur les carrés de niveaux impairs, et on obtient la structure représentée ci-dessous : les pavages dessinent une hiérarchie de carrés imbriqués.

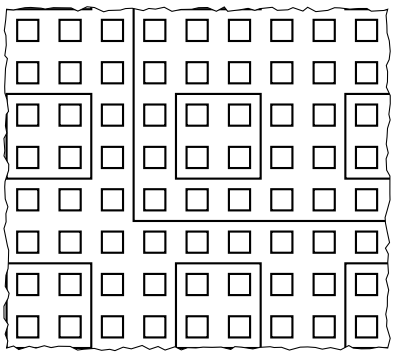


FIGURE 14 – Les carrés de niveaux impairs dans le pavage de Robinson sur $\mathbb{Z}^2$.

### 2.3.2 Les tuiles de Robinson hyperboliques

Dans le plan euclidien, les tuiles du pavage de Robinson [Rob71] forcent un premier sous-réseau $2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}$ grâce aux tuiles *bumpy*. La situation est plus complexe dans $\mathbb{H}_2$, où l'on ne peut pas forcer $2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}$ à apparaître sans dans le même temps autoriser des configurations vide de ce sous-réseau (conséquence de la compacité). Au lieu des tuiles *bumpy* et *dented*, on utilise les cinq formes dessinées sur la Figure 15.

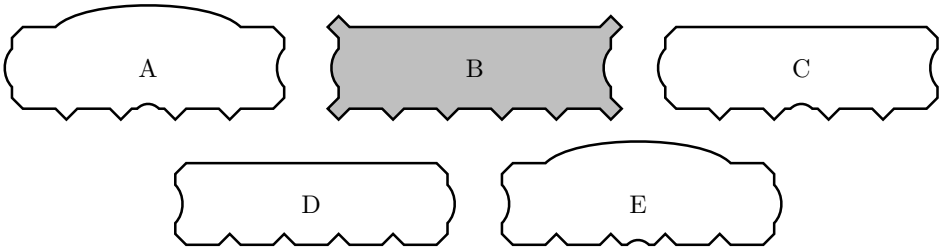



FIGURE 15 – Les cinq formes de tuiles A, B, C, D et E dans $\mathbb{H}_2$. La tuile B est la seule possédant uniquement des coins proéminents, les tuiles A et C ont à la fois des coins proéminents et rognés, tandis que les tuiles D et E n'ont que des coins rognés.

Cette première couche de règles locales impose déjà des contraintes fortes aux pavages réalisables. La structure globales des pavages par A/B/C/D/E apparaît sur la Figure 16. Pour s'en convaincre, on observera d'abord que les décorations latérales (bords bombés dans un sens ou dans l'autre) impose des lignes composées soit de A/B/C soit de D/E. En raisonnant ensuite sur les coins des tuiles, on déduit que les lignes de type A/B/C alternent une ligne sur deux avec les lignes D/E, et que sur une ligne A/B/C, les B apparaissent nécessairement une fois sur deux.

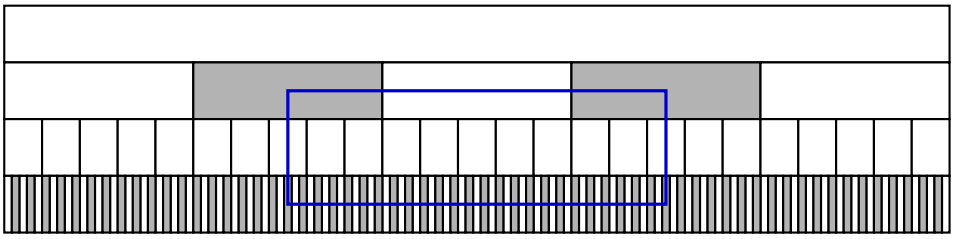


FIGURE 16 – Emplacements des tuiles B (en gris) dans un pavage. En bleu, la forme attendue d'un carré de niveau 1.

Sur la Figure 16 est dessiné ce qui serait un analogue hyperbolique d'un carré de niveau 1 du Robinson euclidien : sur une même ligne, deux tuiles B plus proches voisines portent les coins supérieurs gauche et droit du carré; les coins inférieurs sont situés deux lignes plus bas, mais la géométrie de $\mathbb{H}_2$ impose qu'entre ces deux coins portés par des tuiles B, on trouve $5^2-1=24$ autres tuiles B. La Figure 16 montre donc que, contrairement au cas euclidien, toutes les tuiles B ne pourront pas porter un coin de carré. Il faut donc s'attendre à devoir utiliser un nombre de décorations pour ces tuiles beaucoup plus important que dans $\mathbb{Z}^2$.

Avant d'aller plus loin dans la description des tuiles du Robinson hyperbolique, on peut déjà remarquer que les contraintes imposées par les cinq formes de tuiles conduisent déjà à une forme de déterminisme. Appelons $\sigma$ la substitution non déterministe : $\{A,B,C,D,E\} \to \{A,B,C,D,E\}^5$ don-

née par

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= DDEDD\\ \sigma(B) &= DDDDD\\ \sigma(C) &= DDEDD\\ \sigma(D) &= BCBCB \text{ ou } CBCBC\\ \sigma(E) &= CBABC.\end{aligned}$$

Les orbites de cette substitution σ correspondent exactement aux pavages possibles par A/B/C/D/E, comme l'exprime la proposition suivante.

**Proposition 2.5**

À tout pavage par les tuiles A/B/C/D/E on peut associer l'orbite d'un mot infini $w \in \{A,B,C,D,E\}^{\mathbb{Z}}$ sous l'action de σ.

Si on ajoute des décorations aux tuiles A/B/C/D/E, on définit de nouveaux pavages de $\mathbb{H}_2$. Grâce à la Proposition 2.5, on pourra penser à ces pavages comme des SFT sur les graphes d'orbites de σ, et notamment utiliser la construction de la Partie 2.2.

On enrichit ainsi le jeu de tuiles de base {A, B, C, D, E} en ajoutant les décorations de la Figure 17 pour finaliser la description des tuiles du Robinson hyperbolique.

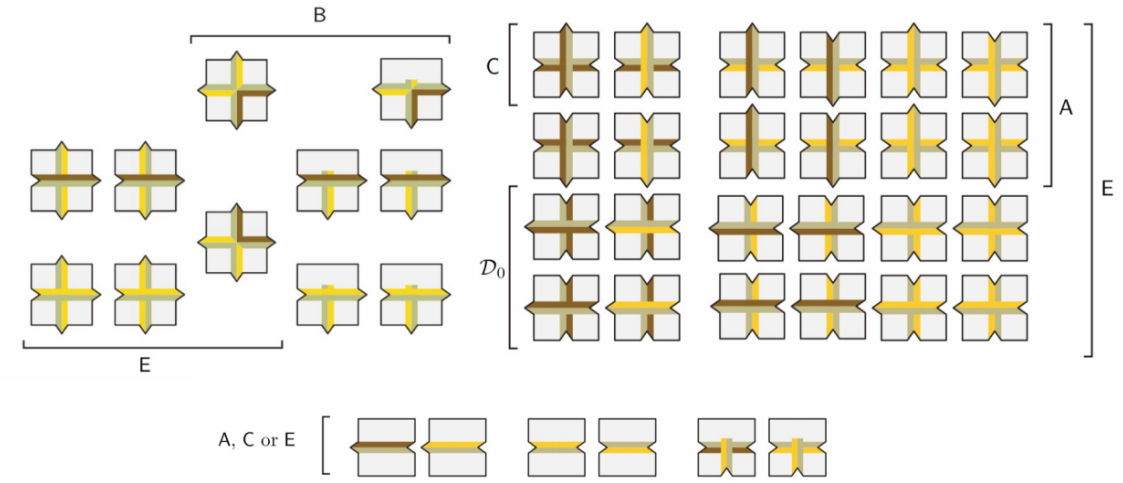



FIGURE 17 – Les décorations supplémentaires à ajouter aux tuiles A/B/C/D/E pour obtenir le jeu de tuiles de Robinson hyperbolique, telles que présentées dans [GS10] et reproduites avec l'aimable autorisation de l'auteur.

Pour obtenir un analogue du Robinson sur BS(1, $n$) pour $n \geq 2$, il suffit maintenant d'appliquer le Théorème 2.1 aux σ-pavages avec la substitution σ sur l'alphabet {A, B, C, D, E} définie plus haut, et d'enrichir le SFT $X_\sigma$ obtenu avec les règles locales permettant de copier le Robinson hyperbolique sur chacune des feuilles.

**Théorème 2.2**

Pour tout $n \geq 2$ il existe un jeu de tuiles fortement apériodique sur BS(1, $n$) dont tous les pavages présentent sur chacune de leurs feuilles la structure hiérarchique du Robinson hyperbolique.

### 2.3.3 Sur la structure hiérarchique des pavages

Dessiner l'agencement exact des carrés de différents niveaux devient vite irréalisable à cause de la croissance de la structure. Une vue schématique est proposée dans la Figure 18; on peut notamment y remarquer que, contrairement au cas euclidien où un carré de niveau 3 contient seulement 4 carrés de niveau 1, le nombre de carrés hyperboliques de niveau 1 dans un carré hyperbolique de niveau 3 est déjà astronomique, de l'ordre du million!

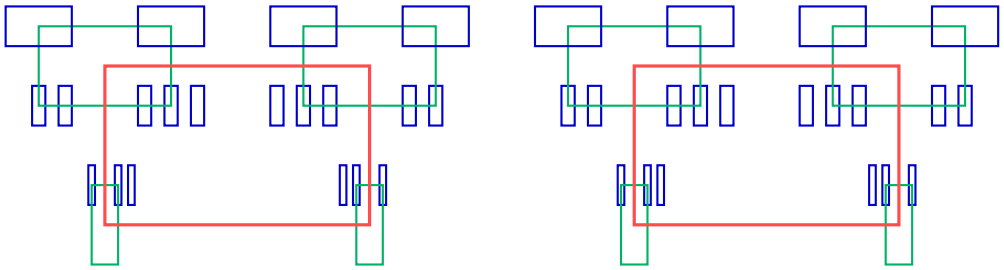


FIGURE 18 – Vue schématique des premiers niveaux de la hiérarchie de carrés forcée par les tuiles de Robinson hyperbolique. Les carrés hyperboliques de niveaux 1, 2 et 3 sont dessinés en bleu, vert et rouge. La structure qui apparaît est l'analogue hyperbolique de celle de la Figure 14.

**Remarque 11.** *Les structures hiérarchiques des pavages du Robinson euclidien et de ceux du Robinson hyperbolique présentent une forte similarité : verticalement, l'agencement des carrés de différents niveaux est le même. Horizontalement en revanche le Robinson hyperbolique est plus complexe; on perd notamment la symétrie entre haut et bas au sein d'un carré.*

### 2.3.4 Indécidabilité du problème du domino

Dans son article [GS10], Goodman-Strauss écrit en fin d'introduction, à propos du problème du domino :

« *Readers familiar with Berger's or Robinson's proof of the undecidability of the Domino Problem in the Euclidean plane will have little trouble using the strongly aperiodic set of tiles in this paper to prove the undecidability of the Domino Problem in the hyperbolic plane.* »

Dans cette partie je reviens sur ce point et donne les idées pour parvenir à une preuve d'indécidabilité du problème du domino sur $\mathbb{H}_2$ en utilisant le Robinson hyperbolique. Cela me semble important, car en plus de conforter l'affirmation de Goodman-Strauss, cela ouvre aussi des pistes pour réutiliser le Robinson hyperbolique dans d'autres constructions de SFT sur les $\mathrm{BS}(1,n)$ (voir la Partie 2.4).

L'idée pour retrouver des grilles dans la structure hiérarchique du Robinson hyperbolique s'inspire sans surprise du Robinson classique : on reprend le système de grille non connexe dessiné sur la Figure 19. Comme les Robinson classique et hyperbolique sont similaires si on les projette sur un axe vertical, les tuiles qui permettent de définir les lignes horizontales des grilles vont rester identiques. On ne sait par contre pas repérer quelles sont les colonnes qui pourraient jouer le rôle de lignes verticales. Qu'à cela ne tienne : on fait partir un fil vers le bas depuis chacune des tuiles formant un bord supérieur d'un carré de niveau $2n+1$. Ces fils peuvent toujours éviter un carré de niveau 1 et poursuivre leur cheminent vers le bas. En effet un carré de niveau 1 est de largeur 3, et comme chaque tuile possède 5 enfants, il en reste toujours 2 disponibles. Si par contre un fil rencontre le bord supérieur d'un carré de niveau $2n+1$ avec $n \geq 1$, le fil ne peut pas le contourner et renvoie un signal vers le haut pour prévenir qu'il est corrompu. On obtient une grille de taille $w(n) \times 2^{n+1}$ dans chaque carré de taille $2n+1$, où $w(n)$ est la largeur en haut d'un carré de taille $2n+1$, avec des fils verticaux qui peuvent être corrompus ou non. L'ensemble des fils non corrompus forment une grille de taille $f(n) \times 2^{n+1}$ pour une certaine fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. De cette fonction

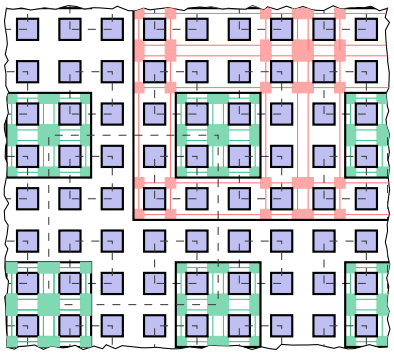


FIGURE 19 – Grilles de taille arbitraire construites par règles locales dans le pavage de Robinson sur $\mathbb{Z}^2$. Dans les carrés de niveau 1 (en bleu) on trouve une grille $2 \times 2$, dans les carrés de niveau 3 (en vert) une grille $4 \times 4$, dans les carrés de niveau 5 (en rouge) une grille de taille $8 \times 8$ et plus généralement dans les carrés de niveau $2n+1$ une grille de taille $2^{n+1} \times 2^{n+1}$.

on sait seulement qu'elle vérifie que $f(n) \geq 2^{n+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ : il y a au moins autant de fils non corrompus que dans le Robinson sur $\mathbb{Z}^2$. Cette borne inférieure est suffisante : le Robinson hyperbolique ainsi enrichi contient des grilles de tailles arbitraires. L'indécidabilité du problème du domino en découle, et on obtient une preuve alternative du résultat démontré par Kari [Kar07].

**Théorème 2.3: [GS10]**

Le problème du domino est indécidable sur le plan hyperbolique.

Cependant l'estimation de $f$ est grossière et il serait intéressant, notamment dans l'objectif de simuler des machines de Turing dans le Robinson hyperbolique, de connaître une meilleure borne inférieure pour $f$.

**Question 7**

Peut-on donner une estimation plus précise de la fonction $f$ ?

On peut également chercher des règles d'évitement des carrés de niveaux inférieurs plus subtiles dans le but de maximiser la fonction $f$ associée (ou tout au moins maximiser la borne inférieure que l'on est capable de démontrer).

**Question 8**

Quelle fonction $f$ peut-on obtenir avec des règles locales bien choisies ?

En utilisant la technique de déploiement du Théorème 2.1, on retrouve encore une autre construction menant à l'indécidabilité du problème du domino sur $\mathrm{BS}(1,n)$.

**Corollaire 2.3**

Le problème du domino est indécidable sur $\mathrm{BS}(1,n)$ pour $n \geq 2$.

## 2.4 Pistes d'approfondissement

Dans cette partie je présente mes questions et pistes de recherches actuelles en lien direct avec le contenu de ce chapitre. Deux d'entre elles concernent les valeurs possibles pour l'entropie d'un SFT sur $\mathrm{BS}(1,n)$.

Le **langage de taille** $(k,\ell)$ d'un sous-décalage $X \subseteq A^{BS(1,n)}$ est l'ensemble des motifs de support $R_{k,\ell}$ qui apparaissent dans une configuration de X

$$\mathscr{L}_{k,\ell}(X) := \left\{p \in A^{R_{k,\ell}} \mid \exists x \in X, g \in BS(1,n) \text{ tel que } \forall h \in R_{k,\ell}, x_{gh} = p_h\right\}.$$

L'**entropie** du sous-décalage $X \subseteq A^{BS(1,n)}$ est alors

$$h(X) := \lim_{k,\ell\to\infty} \frac{\log\left(\sharp \mathscr{L}_{k,\ell}(X)\right)}{|R_{k,\ell}|}.$$

Sur $\mathbb{Z}^2$, on sait que les valeurs possibles pour les entropies des SFT sont exactement les nombres calculables par valeurs supérieures [HM10]. Sur les $BS(1,n)$ on ne connaît pas de résultat analogue. On sait que l'on peut au moins réaliser toutes les entropies des SFT sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire l'ensemble des logarithmes de nombres de Perron [Lin84].

### 2.4.1 Quelques entropies réalisables par SFT sur $BS(1,n)$

Définissons l'ensemble $Y_\sigma \subset A^{BS(1,2)}$ par

$$Y_\sigma := \left\{y \in A^{BS(1,2)} \mid \exists \text{ un } \sigma\text{-pavage } \tau \text{tel que } y_g = \tau(\Phi(gat)) \ \forall g \in BS(1,2)\right\}.$$

On peut vérifier qu'il s'agit bien là d'un sous-décalage [AS20, Proposition 3.4]. Mieux que cela la construction de la preuve du théorème 2.1 montre que ce sous-décalage est sofique : le SFT $X_\sigma$ est une couverture SFT de $Y_\sigma$. Sur chaque ligne $\left\{g \cdot a^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ de $Y_\sigma$, la fréquence d'apparition de chacune des lettres $a_i \in A$ est connue : il s'agit de $\frac{v_i}{\|v\|}$ avec $v$ le vecteur associé à la valeur propre dominante de la matrice de $\sigma$. On s'attend à ce que les fréquences d'apparition des lettres dans $Y_\sigma$ soit la même, et aussi à ce que l'on puisse calculer précisément les fréquences d'apparition des lettres de l'alphabet $\mathscr{D}$ dans $X_\sigma$. La connaissance précise de ces fréquences permettrait, avec la technique de doublage des lettres de [HM10], de produire de l'entropie positive. Ce travail est en cours de réalisation avec Michael Schraudner.

### 2.4.2 Substitutions sur $BS(1,n)$ et théorème de Mozes

Un célèbre théorème énoncé par Mozes [Moz89] établit que les sous-décalages engendrés par des substitutions 2D sont des sous-décalages sofiques. Ce résultat est souvent utilisé dans des constructions assez techniques impliquant des SFT définis couche par couche, les couches interagissant entre elles par règles locales [Hoc09, AS13, HM10, SS16, BS19].

Dans son rapport [SM20], Eduardo Silva partitionne un rectangle de $BS(1,n)$ en rectangles plus petits, et utilise ce découpage pour définir des susbtitutions sur le groupe $BS(1,n)$. On obtient ainsi une notion de sous-décalage substitutif pour $BS(1,n)$. Silva démontre également une version du théorème de Mozes où les substitutions doivent vérifier une condition supplémentaire : pour toute lettre $a \in A$, alors le motif $\sigma(a)$ possède $a$ en l'origine (ces substitutions sont appelées *settling substitutions* dans [SM20]).

**Question 9**

Est-il possible d'obtenir un théorème de Mozes sur $BS(1,n)$ sans condition sur la substitution ?

Une utilisation classique de [Moz89] consiste à définir un sous-décalage sofique sur $\mathbb{Z}^2$ avec structure hiérarchique à l'aide d'une substitution. Dans la Partie 2.3 nous obtenons un SFT sur $BS(1,n)$ avec structure hiérarchique par la construction du Théorème 2.1 : peut-on également l'obtenir en appliquant la version de Silva du théorème de Mozes ?

**Question 10**

Peut-on définir un sous-décalage substitutif avec structure hiérarchique sur $\mathrm{BS}(1,n)$ ?

### 2.4.3 Vers une caractérisation des entropies réalisables par SFT ?

Dans [HM10] les auteurs utilisent le résultat de Mozes [Moz89] en 2D pour leur construction montrant que tous les nombre calculables par valeurs supérieures sont réalisables comme entropie d'un SFT 2D. La version de Silva [SM20] du théorème de Mozes permet-elle d'obtenir le même résultat sur les $\mathrm{BS}(1,n)$ ?

**Question 11**

Les entropies réalisables par des SFT sur $\mathrm{BS}(1,n)$ sont-elles exactement les nombres calculables par valeurs supérieures ?

# 3 Problèmes du domino

## Sommaire


**2.1 Les groupes de Baumslag-Solitar** BS$(1,n)$ . . . . . **22**
2.1.1 Définition et propriétés . . . . . 23
2.1.2 Graphe de Cayley de BS$(1,n)$ . . . . . 23
2.1.3 De BS$(1,n)$ vers $\mathbb{R}^2$ . . . . . 24
**2.2 Pavages hyperboliques comme SFT sur** BS$(1,n)$ . . . . . **25**
2.2.1 Description de l'alphabet . . . . . 26
2.2.2 Intuition derrière cet alphabet . . . . . 27
2.2.3 Description des règles locales . . . . . 28
**2.3 Application : un SFT avec structure hiérarchique sur** BS$(1,n)$ . . . . . **33**
2.3.1 Retour sur le pavage de Robinson . . . . . 33
2.3.2 Les tuiles de Robinson hyperboliques . . . . . 35
2.3.3 Sur la structure hiérarchique des pavages . . . . . 37
2.3.4 Indécidabilité du problème du domino . . . . . 37
**2.4 Pistes d'approfondissement** . . . . . **38**
2.4.1 Quelques entropies réalisables par SFT sur BS$(1,n)$ . . . . . 39
2.4.2 Substitutions sur BS$(1,n)$ et théorème de Mozes . . . . . 39
2.4.3 Vers une caractérisation des entropies réalisables par SFT ? . . . . . 40


Ce chapitre est consacré au problème du domino sur des groupes de type fini. Dans l'introduction nous avons présenté la conjecture énonçant que le problème du domino serait décidable sur les groupes virtuellement libres et seulement sur ceux-ci (voir Conjecture 1 en page 5). Je présente ici trois résultats, le premier traite d'une variante du problème sur $\mathbb{Z}^2$, les deux autres vont dans le sens de la conjecture :

— dans la Partie 3.1, une étude du problème sur $\mathbb{Z}^2$ lorsque l'on impose des contraintes selon la direction horizontale [AES20] ;

— dans la Partie 3.2, l'indécidabilité du problème pour les groupes de Baumslag-Solitar [AK13] ;

— enfin dans la Partie 3.3 l'indécidabilité du problème pour les groupes de surface [ABM19].

J'ai fait le choix de présenter chacun de ces résultats de manière spécifique. Pour [AES20], dont la preuve consiste en une étude de cas assez technique permettant de se ramener à un cas générique, je présente les idées essentielles de la construction à partir d'un exemple simple ; la construction de la preuve du Théorème 3.1 réduite à cet exemple s'en trouve épurée. L'article [AK13] énonce le fait que l'indécidabilité du problème du domino sur les groupes BS$(m,n)$ s'obtient comme conséquence immédiate de la construction d'un SFT apériodique sur BS$(m,n)$. Or cette dernière ne se révélant finalement pas aussi immédiate que nous l'avions alors écrit, je présente la démonstration reprise en détails dans la Partie 3.2.2. Enfin sur l'indécidabilité du problème pour les groupes de surface [ABM19], la Partie 3.3 expose les grandes lignes de la preuve, notamment la technique de superposition des graphes d'orbites.

## 3.1 Problème du domino sous contrainte directionnelle

Dans cette partie je présente une variante du problème du domino sur $\mathbb{Z}^2$, dans laquelle les règles locales selon la direction horizontale sont fixées. Pour les SFT plus proches voisins, nous obtenons dans [AES20] une caractérisation de la décidabilité de cette variante du problème.

### 3.1.1 Motivation et question

Lorsqu'il porte sur l'ensemble de tous les jeux finis de tuiles de Wang sans aucune restriction, le problème du Domino est connu comme étant indécidable sur $\mathbb{Z}^2$ depuis les travaux de Berger [Ber64, Ber66]. On sait en revanche que sous certaines contraintes, le problème devient décidable. Ces contraintes peuvent être de natures variées : en lien avec la complexité [KM20], avec le nombre de couleurs relativement au nombre de tuiles [JR12], ou encore d'ordre dynamique comme la propriété *block gluing* [PS15, Lemme 3.1] ou la minimalité [GS18] des SFT. Une autre forme de contrainte, encore peu explorée à ma connaissance, consiste à pré-remplir les tuiles de Wang selon l'une des directions, par exemple la direction horizontale, et laisser l'autre direction libre. Cette forme de restriction revient à inverser en quelque sorte la notion de sous-dynamique projective : au lieu de projeter une configuration 2D sur l'axe horizontal comme on le fait pour la sous-dynamique projective, on fixe à l'avance les projections sur l'axe horizontal, et on se demande quels sous-décalages 2D permettent d'obtenir ces projections.

Ici on choisit *a priori* un SFT horizontal $H \subset A^{\mathbb{Z}}$, et on s'intéresse aux SFT verticaux $V \subset A^{\mathbb{Z}}$ qui peuvent cohabiter avec H dans une configuration 2D. Si H et $V \subset A^{\mathbb{Z}}$ sont deux sous-décalages de dimension 1, on appelle sous-décalage combiné de H et V l'ensemble

$$X_{H,V} := \{x \in A^{\mathbb{Z}^2} \mid \forall i,j \in \mathbb{Z}, (x_{k,j})_{k\in\mathbb{Z}} \in H \text{ et } (x_{i,\ell})_{\ell\in\mathbb{Z}} \in V\}$$

qui utilise comme règles horizontales les règles de H et comme règles verticales celles de V. On dit que les sous-décalages H et V sont compatibles si leur sous-décalage combiné est non vide.

**Remarque 12.** *En projetant sur l'axe horizontal toutes les configurations de* $X_{H,V}$*, on ne retrouve pas nécessairement* H *en intégralité.*

Cette remarque nous incite à nous pencher plus en détails sur les conditions qui rendent deux SFT de dimension 1 compatibles ou non. On peut formuler cette question comme une variante du problème du domino. Si $H \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un SFT, alors le problème du domino relatif à H est le langage

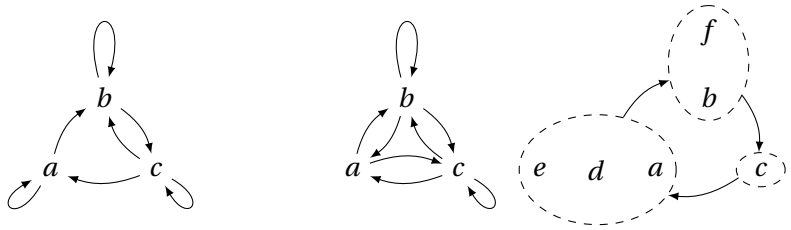
$$DP_H := \{\langle V\rangle \mid V \subset A^{\mathbb{Z}} \text{ est un SFT et } X_{H,V} \neq \emptyset\},$$

où $\langle V\rangle$ est un codage quelconque du SFT V. Dans la suite de cette partie, nous allons considérer seulement des SFT $H, V \subset A^{\mathbb{Z}}$ plus proches voisins, qui possèdent une représentation par un graphe orienté dont les sommets sont les lettres de l'alphabet A.

### 3.1.2 Exemples avec problème décidable

On se rend rapidement compte que parmi les SFT horizontaux plus proches voisins dont le graphe $\mathcal{G}(H)$ possède peu de sommets, il existe trois classes pour lesquelles le problème du domino relatif est décidable. Les exemples de la Figure 20 illustrent chacune des classes.

Soit $V \subset A^{\mathbb{Z}}$ un SFT vertical. Dès lors que V contient une configuration, on peut grâce aux boucles présentes sur chacun des sommets du graphe $\mathcal{G}(H_1)$ la juxtaposer à elle-même pour en faire une configuration de $X_{H_1,V}$. Réciproquement si le SFT combiné $X_{H_1,V}$ contient au moins une configuration, alors n'importe laquelle de ses colonnes est une configuration de V. Donc $X_{H_1,V}$ est vide si et seulement V l'est également. Et comme $DP(\mathbb{Z})$ est décidable, on obtient pour cet exemple le fait que $DP_{H_1}$ est décidable. Un raisonnement analogue s'applique pour $H_2$ et $H_3$, en considérant




$\mathscr{G}(H_1)$ $\mathscr{G}(H_2)$ $\mathscr{G}(H_3)$

FIGURE 20 – Les graphes de trois SFT plus proches voisins $H_1, H_2 \subset \{a,b,c\}^{\mathbb{Z}}$ et $H_3 \subset \{a,b,c,d,e,f\}^{\mathbb{Z}}$. Pour le graphe $\mathscr{G}(H_3)$, la présence d'une arête entre deux sous-ensembles de sommets symbolise l'existence d'arêtes entre le premier et le deuxième sous-ensemble. On suppose que les arêtes sont telles que le graphe $\mathscr{G}(H_3)$ est fortement connexe.

cette fois non plus des colonnes seules, mais des paires de colonnes pour $H_2$ et des triplets de colonnes pour $H_3$, que l'on peut toujours juxtaposer à elles-mêmes. Comme le nombre de colonnes à considérer est fini (2 ou 3), on peut aussi se ramener au problème du domino $DP(\mathbb{Z})$. Ainsi, les problèmes $DP_{H_2}$ et $DP_{H_3}$ sont décidables.

De ces trois exemples on déduit une propriété sur les graphes orientés, appelée propriété D (pour décidable). On dit qu'un graphe orienté $\mathscr{G} = (\mathscr{V}, \vec{E})$ satisfait la propriété D s'il existe un type que toutes ses composantes fortement connexes S partagent parmi :

— type *réflexif* : tous les sommets possèdent une boucle ;

— type *symétrique* : si $(v,w)$ est une arête du graphe alors $(w,v)$ est aussi une arête (une boucle vérifie cette condition) ;

— type *partition circulaire* : on peut partitionner l'ensemble des sommets en $S = \bigsqcup V_i$ de sorte que toute arête partant de $V_i$ aboutit nécessairement dans $V_{i+1}$.

Une composante connexe peut être d'aucun, d'un seul ou de plusieurs de ces types. Sur les exemples de la Figure 20, le graphe $\mathscr{G}(H_1)$ est de type réflexif, $\mathscr{G}(H_2)$ est de type symétrique et $\mathscr{G}(H_3)$ de type partition circulaire.

**Proposition 3.1: [AES20]**

Soit $H \subset A^{\mathbb{Z}}$ un SFT horizontal plus proche voisin dont le graphe $\mathscr{G}(H)$ vérifie la condition D. Alors $DP_H$ est décidable.

La démonstration de la Proposition 3.1 utilise des arguments similaires à ceux présentés pour les trois exemples de SFT de la Figure 20. Comme $\mathscr{G}(H)$ vérifie la condition D, toutes ses composantes fortement connexes partagent un des trois types. On parvient à construire, comme détaillé dans [AES20], un motif rectangulaire dont la taille dépend du type commun des composantes et des composantes elles-mêmes, et qui accolé à lui-même permet d'obtenir une configuration fortement périodique dans $X_{H,V}$.

### 3.1.3 Cas indécidable : idée générale de la construction

La condition suffisante de la Proposition 3.1 se révèle aussi être nécessaire. Nous exposons dans cette partie l'idée générale de la preuve présentée dans [AES20] sur un exemple de contraintes horizontales, données par le graphe de la Figure 21. La preuve de l'indécidabilité du problème du Domino $DP_H$ pour ce H particulier procède, comme pour le cas général, par réduction depuis le problème du domino sur $\mathbb{Z}^2$.

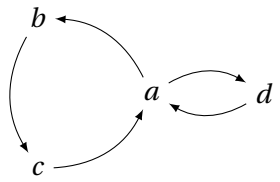



FIGURE 21 – Exemple de contraintes horizontales sur un alphabet à quatre lettres $\{a,b,c,d\}$. Dans cet exemple, deux cycles $\mathscr{C}_1 = \{bca\}$ et $\mathscr{C}_2 = \{da\}$ s'intersectent en un seul sommet $a$, et aucun sommet ne présente de boucle.

Dans cet exemple, le graphe du SFT horizontal $H \subset \{a,b,c,d\}^{\mathbb{Z}}$ se compose de deux cycles $\mathscr{C}_1 = \{bca\}$ et $\mathscr{C}_2 = \{da\}$ qui s'intersectent en un seul sommet $a$, et aucun sommet ne présente de boucle. La lettre $a$ jouera donc un rôle particulier dans la construction, puisqu'elle est la seule qui ne force pas ses voisines gauche et droite.

Soit $\tau$ un jeu fini de tuiles de Wang sur $\mathbb{Z}^2$. Dans la suite nous explicitons la construction sur un exemple de petite taille avec $|\tau| = 4$ afin de faciliter la lecture (les tuiles formant $\tau$ sont dessinées à gauche de la Figure 22). Nous sommes ramenés au problème suivant : comment définir des contraintes verticales sous forme de SFT $V \subset \{a,b,c,d\}^{\mathbb{Z}}$ de sorte que le SFT $X_{H,V}$ est non-vide si et seulement si le jeu de tuiles de Wang $\tau$ pave le plan ? L'idée est de coder chacune des tuiles de Wang de $\tau$ par leur numéro : sur l'exemple on codera un entier entre 1 et 4. Toute la difficulté consiste à produire un codage d'une tuile qui lui permettra de communiquer à la fois avec ses voisines en haut et en bas – cette partie ne pose pas de problème, car on a toute liberté pour choisir le SFT V – mais aussi avec ses voisines de gauche et de droite. Ce dernier point est plus délicat, mais une astuce permet de résoudre le problème. Chaque tuile $\tau_i$ est d'abord codée par un premier motif rectangulaire $\texttt{codage}(\tau_i)$, qui lui-même sera dupliqué pour produire un autre motif $\overleftarrow{\texttt{codage}}(\tau_i)$ qui pourra communiquer, selon la direction verticale, avec les motifs $\overleftarrow{\texttt{codage}}(\tau_j)$ et $\overleftarrow{\texttt{codage}}(\tau_k)$ des voisines gauche et droite de $\tau_i$.

Décrivons à présent en détails ces fonctions $\texttt{codage}$ et $\overleftarrow{\texttt{codage}}$. Le motif $\texttt{codage}(\tau_i)$ est un motif rectangulaire de taille $ppcm(|\mathscr{C}_1|,|\mathscr{C}_2|) \times |\tau|$, soit $6 \times 4$ pour notre exemple. La dernière colonne composée uniquement de $a$ est identique pour toutes les tuiles $\tau_i$ (colonne hachurée sur la Figure 22), et le numéro de la tuile $i$ est le numéro de la seule ligne où le cycle $\mathscr{C}_2 = \{da\}$ apparaît répété trois fois (en grisé sur la Figure 22) ; sur les autres lignes on lit le cycle $\mathscr{C}_1 = \{bca\}$ répété deux fois. Ces motifs peuvent être accolés les uns aux autres : verticalement, il suffit de l'autoriser dans les règles verticales qui sont encore à définir, et horizontalement grâce à la colonne de $a$ qui fait tampon entre deux motifs. Cependant deux problèmes persistent.

1. Autant les adjacences verticales autorisées entre les tuiles du jeu $\tau$ sont faciles à imposer via V, autant on n'a pour l'instant aucun moyen de vérifier la validité des adjacences horizontales.
2. On n'a pour l'instant aucun moyen de synchroniser les blocs codants pour les disposer selon un réseau.

Pour pallier au premier problème, on utilise une fonction $\overleftarrow{\texttt{codage}}$ plutôt que $\texttt{codage}$. Dans cette nouvelle version, une tuile $\tau_i$ de $\tau$ est codée par une superposition verticale de blocs $\overleftarrow{\texttt{codage}}(\tau_i)$ décalés horizontalement les uns par rapport aux autres (voir Figure 22). Les motifs $\overleftarrow{\texttt{codage}}(\tau_i)$, disposés selon un réseau régulier, permettent de paver le plan. L'avantage est qu'un motif vertical assez grand peut intersecter deux motifs $\overleftarrow{\texttt{codage}}(\tau_i)$ et $\overleftarrow{\texttt{codage}}(\tau_j)$ qui sont voisins horizontalement. La forme de ces motifs permet donc de contrôler une information horizontale uniquement à l'aide de contraintes verticales, ce qui constitue la clé de notre construction.

Pour le second point, on introduit un motif $p$ qui servira de motif synchronisant entre les différentes lignes de $\overleftarrow{\texttt{codage}}(\tau_i)$. Avant d'en détailler la définition, on présente sur la Figure 23 le

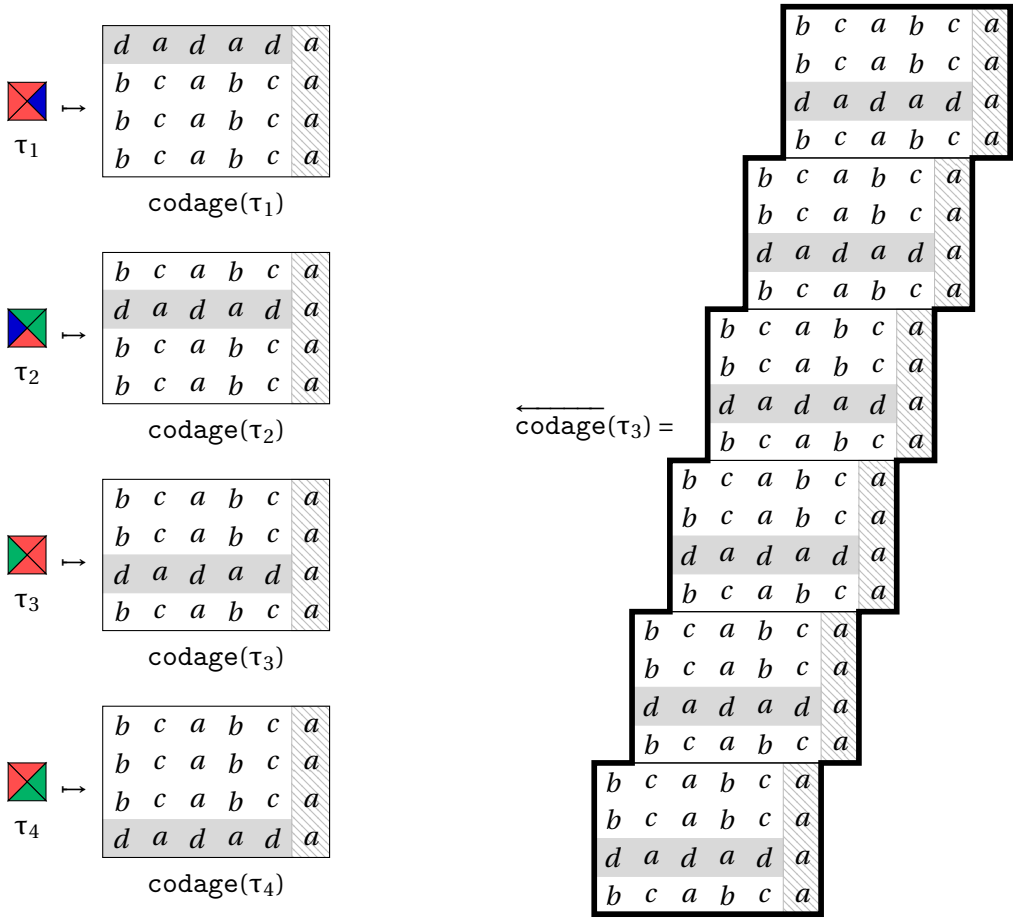



FIGURE 22 – Exemple de codages d'un jeu de tuiles de Wang avec les contraintes horizontales de la Figure 21.

schéma global impliquant les différents motifs.

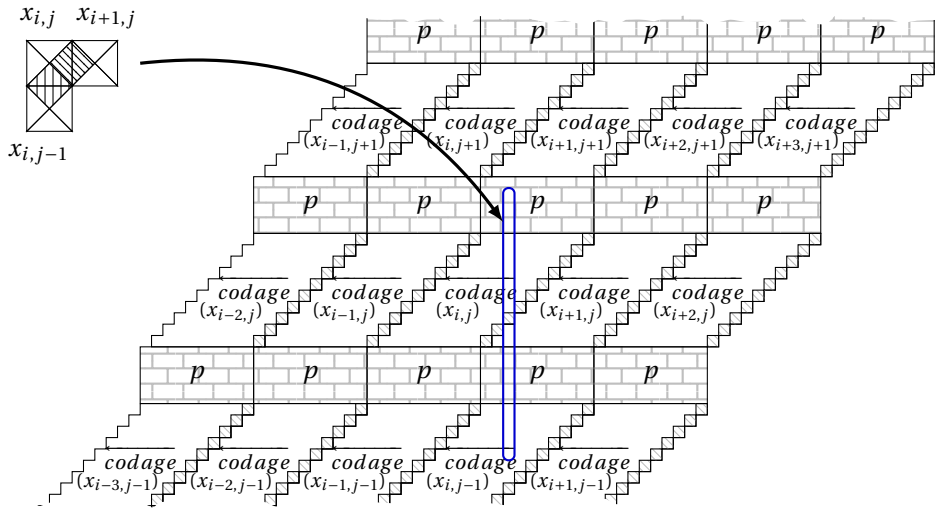



FIGURE 23 – Vue schématique du codage d'un pavage $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ par une configuration de $X_{H,V}$.

Pour notre exemple de la Figure 21, on choisit le motif $p$ dessiné ci-dessous. Le motif est de

taille $6 \times 5$, donc strictement plus haut qu'un motif `codage`. Ses lignes sont toutes identiques, et contiennent le cycle $\mathscr{C}_1 = abc$ répété deux fois. Le motif $p$ ne contient donc aucune lettre $d$.

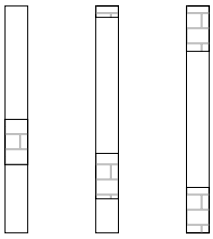
$p =$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $b$ | $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $b$ | $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $b$ | $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $b$ | $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |

Le motif $p$ peut bien être accolé à lui même pour former une ligne horizontale d'épaisseur 5. Pour s'assurer que la seule manière de combiner $p$ avec les motifs $\overleftarrow{\texttt{codage}}(\tau_i)$ soit celle présentée sur la Figure 23, on impose comme contraintes pour V l'interdiction de tous les motifs verticaux de hauteur 34 ne pouvant pas y apparaître. On choisit 34 comme hauteur car il s'agit de la hauteur d'un motif $\overleftarrow{\texttt{codage}}(\tau_i)$ additionnée à deux fois la hauteur du motif synchronisant $p$. En conséquence de quoi, et si on se concentre sur les occurrences de motifs verticaux de la forme $a^n$, on observe que :

1. le motif $a^6$ est interdit ;
2. le motif $a^5$ est autorisé, et s'il apparaît c'est nécessairement dans un motif $p$ ;
3. le motif $a^4$ est autorisé, et s'il n'apparaît pas comme sous-motif d'un $a^5$ c'est nécessairement la dernière colonne d'un motif $\texttt{codage}(\tau_i)$.

Comme on a choisi des motifs verticaux suffisamment grands, l'ensemble de contraintes V assure qu'une configuration de $x \in X_{H,V}$ réalise bien le codage d'un pavage par $\tau$. En effet, si on se focalise sur un motif vertical $v$ de hauteur 34 apparaissant dans $x$, par définition de l'ensemble de contraintes V, le motif $v$ contient nécessairement cinq $a$, cinq $b$ ou cinq $c$ consécutifs. Ce sous-mot peut y apparaître deux fois mais pas plus, et dans ce cas c'est uniquement comme préfixe et suffixe de $v$. Ce ou ces sous-mot(s) de taille cinq défini(ssen)t la position du motif synchronisant $p$. On est donc dans l'une des trois situations suivantes :



On trouve nécessairement dans $v$ quatre $a$ consécutifs dans un sous-mot $caaaab$ (lu de haut en bas), et ce une seule fois qui ne soit pas à une extrémité de $v$. En découpant $v$ en sous-mot de taille 4 dont ce sous-mot $aaaa$, on trouve au-dessus les colonnes successives d'un motif $\texttt{codage}(\tau_i)$ et en dessous celles d'un autre motif $\texttt{codage}(\tau_j)$. On peut à présent partitionner la configuration $x \in X_{H,V}$ comme sur la Figure 23. Ainsi si $X_{H,V}$ est non vide, alors il existe un pavage par $\tau$. Réciproquement, à partir d'un pavage par $\tau$, on construit toujours sur le modèle de la Figure 23 une configuration $x \in X_{H,V}$. On a donc tous les éléments de preuve pour montrer que $DP_H$ est indécidable.

**Proposition 3.2**

Soit $H \subset \{a,b,c\}^{\mathbb{Z}}$ le SFT décrit dans la Figure 21. Alors le problème du domino relatif à H est indécidable.

### 3.1.4 Une caractérisation complète pour les plus proches voisins

Le cas général se traite de manière analogue : il s'agit de simuler des pavages par tuiles de Wang comme présenté précédemment sur la Figure 23, à l'aide de blocs de synchronisation de taille

très largement supérieure à celle des blocs codant effectivement une tuile de Wang. Dans [AES20] nous obtenons une caractérisation complète des sous-décalages de type fini plus proches voisins. Il s'avère finalement plus facile de caractériser pour quels SFT plus proches voisins le problème du domino associé est décidable : la condition suffisante de la Proposition 3.1 est aussi nécessaire.

**Théorème 3.1: [AES20]**

Soit $H \subset A^{\mathbb{Z}}$ un SFT horizontal plus proche voisin. Alors $DP_H$ est décidable si et seulement si le graphe $\mathscr{G}(H)$ vérifie la condition D.

## 3.2 Groupes de Baumslag-Solitar

A la fin de la Partie 2.2 nous évoquions comme conséquence du Théorème 2.1 l'indécidabilité du problème du domino pour les groupes de Baumslag-Solitar moyennables $BS(1,n)$ (Corollaire 2.2). Ce résultat est déjà connu depuis [AK13], où il est énoncé pour tous les groupes $BS(m,n)$.

### 3.2.1 Preuve de Jarkko Kari dans le plan hyperbolique

Dans son article [Kar07], Jarkko Kari adapte sa preuve de l'indécidabilité du problème du domino sur $\mathbb{Z}^2$ au plan hyperbolique $\mathbb{H}_2$. Cette preuve se fait par réduction au problème de l'immortalité des fonctions affines par morceaux, dont nous rappelons ici les principaux ingrédients.

Une fonction $f : U \to U$ est rationnelle affine par morceaux s'il existe une partition de $U = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$ où chaque $U_i$ est un carré unitaire à coordonnées entières, et telle que $f = f_i$ sur chaque $U_i$, avec $f_i : U_i \to \mathbb{R}^2$ une fonction affine dont les paramètres sont rationnels. Un point $\vec{x} \in U$ est immortel pour $f$ si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'image itérée $f^k(\vec{x})$ est dans U. Le problème de l'immortalité des fonctions rationnelles affines par morceaux est le problème de décision prenant en entrée une fonction $f$ telle que définie plus haut, et renvoyant `Oui` si $f$ possède un point immortel, et `Non` sinon. Ce problème se réduit à celui de l'immortalité des machines de Turing, dont on sait qu'il est indécidable [Hoo66].

**Proposition 3.3: [Kar07]**

Le problème de l'immortalité des fonctions rationnelles affines par morceaux est indécidable.

Pour montrer l'indécidabilité du problème de la pavabilité du plan hyperbolique $\mathbb{H}_2$ par tuiles de Wang pentagonales, Kari [Kar07] raisonne par réduction au problème de l'immortalité des fonctions rationnelles affines par morceaux. Il construit, pour toute fonction affine par morceaux $f : U \to U$ à paramètres rationnels, un jeu fini de tuiles de Wang hyperboliques qui calcule la fonction, au sens où un pavage par ce jeu de tuiles représente l'orbite d'un point $\vec{x} \in U$ sous l'action de $f$.

**Théorème 3.2: [Kar07]**

Le problème du domino est indécidable sur le plan hyperbolique $\mathbb{H}_2$.

La principale difficulté dans cette construction est d'assurer la finitude du jeu de tuiles construit. Pour cela Kari utilise deux ingrédients principaux : une représentation des réels par leur suite de Beatty, et l'exploitation du fait que la fonction $f$ est à paramètres rationnels. A la place de la suite de Beatty d'un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ nous utiliserons sa représentation équilibrée, définie à la page 50, qui tient compte des feuilletages dans le groupe $BS(m,n)$.

### 3.2.2 Adaptation aux groupes $\mathrm{BS}(m,n)$

Avec Jarkko Kari [AK13] nous avons démontré, en suivant le même schéma de preuve que dans [Kar07], que le problème du domino est indécidable sur les groupes de Baumslag-Solitar $\mathrm{BS}(m,n)$ pour tous entiers $m,n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{BS}(m,n) = \langle a,t | t^{-1}a^m t = a^n \rangle.$$

On projette le groupe $\mathrm{BS}(m,n)$ dans $\mathbb{R}^2$ via une fonction $\Phi_{m,n} : \mathrm{BS}(m,n) \to \mathbb{R}^2$, que l'on définit d'abord récursivement sur tous les mots $w$ sur l'alphabet $\mathrm{A} = \{a,t,a^{-1},t^{-1}\}$. Si $x$ est une lettre de A, on note $|w|_x$ le nombre d'occurrences de la lettre $x$ dans le mot $w$. On appelle également contribution de $x$ à $w$ la quantité $\| w \|_x = |w|_x - |w|_{x^{-1}}$. Ceci nous permet de définir d'abord la fonction $\beta : \mathrm{A}^* \to \mathbb{Z}$ par $\beta(w) := -\| w \|_t$, et aussi la fonction $\alpha_{m,n} : \mathrm{A}^* \to \mathbb{R}$, que l'on notera $\alpha$ par la suite pour simplifier l'écriture, par induction sur la longueur des mots ($\varepsilon$ est le mot vide) :

$$\begin{aligned}
\alpha(\varepsilon) &= 0 \\
\alpha(w.t) &= \alpha(w.t^{-1}) = \alpha(w) \\
\alpha(w.a) &= \alpha(w) + \left(\frac{m}{n}\right)^{-\beta(w)} \\
\alpha(w.a^{-1}) &= \alpha(w) - \left(\frac{m}{n}\right)^{-\beta(w)}
\end{aligned}$$

En raisonnant par induction sur la longueur des mots, on obtient la formule :

**Proposition 3.4**

Pour tous mots $u,v \in \mathrm{A}^*$ on a :

$$\alpha(u.v) = \alpha(u) + \left(\frac{m}{n}\right)^{-\beta(u)} \alpha(v).$$

Dans la suite nous nous servirons en particulier des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha(ga) &= \alpha(g) + \left(\frac{m}{n}\right)^{-\beta(g)} \\
\beta(gt) &= \beta(g) - 1
\end{aligned}$$

Finalement, la fonction $\Phi_{m,n} : \mathrm{BS}(m,n) \to \mathbb{R}^2$ sera :

$$\Phi_{m,n}(g) = \big(\alpha(w), \beta(w)\big),$$

où $w$ est un mot représentant l'élément $g$. On peut vérifier qu'elle est bien définie, c'est-à-dire que la valeur de $\Phi_{m,n}(g)$ ne dépend pas du mot $w$ choisi, en utilisant la Proposition 3.4.

**Proposition 3.5**

La fonction $\Phi_{m,n}$ est bien définie sur $\mathrm{BS}(m,n)$.

Il est à noter qu'en fixant le paramètre $m$ à 1, on retrouve l'isomorphisme $\Phi$ défini dans Partie 2.1.3.

**Remarque 13.** *Si $|m| \neq 1$ et $|n| \neq 1$ alors la fonction $\Phi_{m,n}$ n'est pas injective. Dans [AK13] nous donnons un exemple de défaut d'injectivité pour $m = 3$ and $n = 2$ : l'élément du groupe $\omega = bab^{-1}a^2ba^{-1}b^{-1}a^{-2}$ est envoyé par $\Phi_{3,2}$ sur l'origine, mais est d'ordre infini dans $\mathrm{BS}(3,2)$. Dans [EM20] on trouve le mot $\omega = bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}a^{-1}$ qui vérifie que $\Phi_{m,n}(\omega) = (0,0)$ pour*

*tous $m, n$ tels que $|m| \neq 1$ et $|n| \neq 1$.*

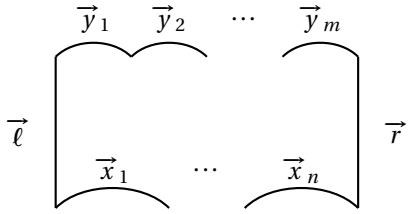



FIGURE 24 – Une tuile de Wang sur $\mathrm{BS}(m,n)$.

Fixons des entiers $m, n \in \mathbb{N}^*$. On dit alors qu'une tuile de $\mathrm{BS}(m,n)$ calcule une fonction $f_i : \mathrm{U}_i \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si, avec les couleurs telles que nommées sur la Figure 24, on a la relation

$$\frac{\vec{y}_1 + \dots \vec{y}_m}{m} + \vec{r} = f_i\left(\frac{\vec{x}_1 + \dots \vec{x}_n}{n}\right) + \vec{\ell}\,.$$

On imagine aisément que pour paver une seule feuille de $\mathrm{BS}(m,n)$, sélectionner toutes les tuiles vérifiant cette relation et dont les couleurs appartiennent à un ensemble fini bien choisi fonctionnera de manière analogue à ce qui est fait pour le plan hyperbolique [Kar07]. Une difficulté se présente lorsqu'il s'agit de synchroniser les différentes feuilles entre elles : il faut clairement enrichir le jeu de tuiles hyperboliques pour espérer le faire fonctionner sur $\mathrm{BS}(m,n)$. Pour cela on utilise la fonction $\Phi_{m,n}$. D'abord on définit une fonction $\lambda : \mathrm{BS}(m,n) \to \mathbb{R}$ par

$$\lambda(g) := \frac{1}{m}\left(\frac{n}{m}\right)^{-\beta(g)} \alpha(g),$$

pour tout $g \in \mathrm{BS}(m,n)$, dont on peut vérifier qu'elle satisfait que

$$\lambda(ga) = \lambda(g) + \frac{1}{m}$$
$$\lambda(gt) = \frac{n}{m}\lambda(g).$$

A l'aide de cette fonction $\lambda$ et des propriétés qu'elle vérifie, on détaille le contenu de chaque tuile calculant une fonction $f_i : \mathrm{U}_i \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ affine par morceaux telle que $f_i(\vec{x}) = \mathrm{M}\vec{x} + \vec{b}$ :

$$\begin{aligned}
\vec{x}_k(g,\vec{x}) &:= \lfloor \big(n\lambda(g)+k\big)\vec{x}\rfloor - \lfloor \big(n\lambda(g)+(k-1)\big)\vec{x}\rfloor \ \text{ pour } k = 1\dots n\\
\vec{y}_k(g,\vec{x}) &:= \lfloor \big(m\lambda(g)+k\big) f_i(\vec{x})\rfloor - \lfloor \big(m\lambda(g)+(k-1)\big) f_i(\vec{x})\rfloor \ \text{ pour } k = 1\dots m\\
\vec{\ell}\,(g,\vec{x}) &:= \frac{1}{n} f_i\left(\lfloor n\lambda(g)\vec{x}\rfloor\right) - \frac{1}{m}\lfloor m\lambda(g) f_i(\vec{x})\rfloor + \lfloor \lambda(g) - \frac{1}{2}\rfloor \vec{b}\\
\vec{r}\,(g,\vec{x}) &:= \frac{1}{n} f_i\left(\lfloor \big(n\lambda(g)+n\big)\vec{x}\rfloor\right) - \frac{1}{m}\lfloor \big(m\lambda(g)+m\big) f_i(\vec{x})\rfloor + \lfloor \lambda(g) + \frac{1}{2}\rfloor \vec{b}
\end{aligned}$$

On vérifie que la tuile de la Figure 25 calcule bien la fonction $f_i$, autrement dit que la quantité S suivante somme au vecteur nul $\vec{0}$ :

$$\mathrm{S} := \frac{\vec{y}_1 + \dots + \vec{y}_m}{m} + \vec{r} - f_i\left(\frac{\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n}{n}\right) - \vec{\ell}$$

En remplaçant chaque terme $\vec{y}_k$ et $\vec{x}_k$ par son expression décrite plus haut, les deux sommes $\vec{y}_1 + \dots + \vec{y}_m$ et $\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n$ se télescopent et S se simplifie donc en :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} = {} & \frac{1}{m}\lfloor \big(m\lambda(g)+m\big) f_i(\vec{x})\rfloor - \frac{1}{m}\lfloor m\lambda(g) f_i(\vec{x})\rfloor + \frac{1}{n} f_i\left(\lfloor \big(n\lambda(g)+n\big)\vec{x}\rfloor\right) - \frac{1}{m}\lfloor \big(m\lambda(g)+m\big) f_i(\vec{x})\rfloor + \lfloor \lambda(g) + \frac{1}{2}\rfloor \vec{b}\\
& - f_i\left(\frac{1}{n}\lfloor \big(n\lambda(g)+n\big)\vec{x}\rfloor - \frac{1}{n}\lfloor n\lambda(g)\vec{x}\rfloor\right) - \frac{1}{n} f_i\left(\lfloor n\lambda(g)\vec{x}\rfloor\right) + \frac{1}{m}\lfloor m\lambda(g) f_i(\vec{x})\rfloor - \lfloor \lambda(g) - \frac{1}{2}\rfloor \vec{b}
\end{aligned}$$

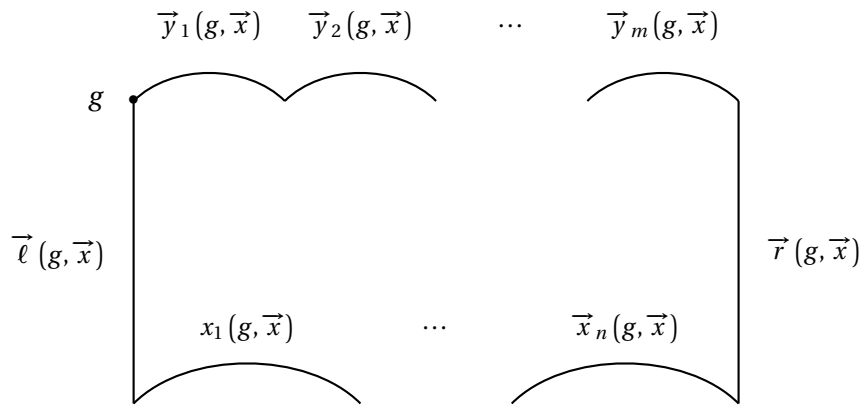



FIGURE 25 – Tuile permettant de coder une fonction affine par morceaux $f_i : \mathrm{U}_i \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dans le groupe $\mathrm{BS}(m,n)$.

On élimine déjà tous les termes qui s'annulent deux à deux, et il reste :

$$\begin{aligned}\mathrm{S} = &\frac{1}{n} f\left(\lfloor \left(n\lambda(g)+n\right)\overrightarrow{x}\rfloor\right) + \lfloor \lambda(g) + \frac{1}{2}\rfloor \overrightarrow{b} \\ &- f\left(\frac{1}{n}\lfloor \left(n\lambda(g)+n\right)\overrightarrow{x}\rfloor - \frac{1}{n}\lfloor n\lambda(g)\overrightarrow{x}\rfloor\right) - \frac{1}{n} f\left(\lfloor n\lambda(g)\overrightarrow{x}\rfloor\right) - \lfloor \lambda(g) - \frac{1}{2}\rfloor \overrightarrow{b}\end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que $f_i(c\overrightarrow{y} - c\overrightarrow{z}) = cf_i(\overrightarrow{y}) - cf_i(\overrightarrow{z}) + \overrightarrow{b}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}\mathrm{S} = &-\frac{1}{n} f_i\left(\lfloor n\lambda(g)\overrightarrow{x}\rfloor\right) + \lfloor \lambda(g) + \frac{1}{2}\rfloor \overrightarrow{b} \\ &- \frac{1}{n} f_i\left(\lfloor \left(n\lambda(g)+n\right)\overrightarrow{x}\rfloor\right) + \frac{1}{n} f_i\left(\lfloor n\lambda(g)\overrightarrow{x}\rfloor\right) - \overrightarrow{b} + \frac{1}{n} f_i\left(\lfloor \left(n\lambda(g)+n\right)\overrightarrow{x}\rfloor\right) - \lfloor \lambda(g) - \frac{1}{2}\rfloor \overrightarrow{b}\end{aligned}$$

après quoi il nous reste :

$$\mathrm{S} = \lfloor \lambda(g) + \frac{1}{2}\rfloor \overrightarrow{b} - \overrightarrow{b} - \lfloor \lambda(g) - \frac{1}{2}\rfloor \overrightarrow{b}$$

et comme $\lfloor z + \frac{1}{2}\rfloor - \lfloor z - + \frac{1}{2}\rfloor = 1$ pour tout réel $z$, on obtient bien que $\mathrm{S} = 0$.

**Proposition 3.6**

Pour tout $g \in \mathrm{BS}(m,n)$ et tout $\overrightarrow{x} \in \mathrm{U}_i$, la tuile décrite sur la Figure 25 calcule la fonction affine par morceaux $f_i : \mathrm{U}_i \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Ainsi, chaque tuile individuellement calcule l'image par $f_i$ de la moyenne des éléments sur les bords inférieurs, et redistribue cette image sur les éléments des bords supérieurs. Tout ceci s'effectue à des erreurs de calcul près, stockées dans les éléments gauche et droit de la tuile.

Rappelons maintenant, comme expliqué dans [AK13], que pour tous $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$ et $z \in \mathbb{R}$, si on définit pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ la quantité

$$\overrightarrow{\mathrm{B}}_k(\overrightarrow{x}, z) := \lfloor (z+k)\overrightarrow{x}\rfloor - \lfloor (z+(k-1))\overrightarrow{x}\rfloor,$$

alors la suite bi-infinie $\left(\overrightarrow{\mathrm{B}}_k(\overrightarrow{x}, z)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une **représentation équilibrée de** $\overrightarrow{x}$. En particulier, c'est une représentation de $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ au sens où

— chaque $\overrightarrow{\mathrm{B}}_k(\overrightarrow{x},z)$ est à coordonnées entières, dans $\{\lfloor x_1\rfloor;\lfloor x_1\rfloor+1\}\times\{\lfloor x_2\rfloor;\lfloor x_2\rfloor+1\}$ ;

— la moyenne des éléments de la suite converge vers $\overrightarrow{x}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\sum_{j=-k}^{k}\overrightarrow{\mathrm{B}}_j(\overrightarrow{x},z)=\overrightarrow{x}.$$

**Proposition 3.7**

Pour tout $g_0\in \mathrm{BS}(m,n)$ et tout $\overrightarrow{x}\in \mathrm{U}_i$, si on place la tuile de la Figure 25 en position $g$ pour tout $g\in\{g_0\cdot a^k \mid k\in\mathbb{Z}\}$, alors on lit la représentation équilibrée $\overrightarrow{\mathrm{B}}_k\left(\overrightarrow{x},\lambda(g)\right)$ de $\overrightarrow{x}$ sur les bords inférieurs et la représentation équilibrée $\overrightarrow{\mathrm{B}}_k\left(f_i(\overrightarrow{x}),\lambda(gt^{-1})\right)$ de $f_i(\overrightarrow{x})$ sur les bords supérieurs.

La Proposition 3.7 exprime le fait que passer d'une seule tuile qui calcule $f_i$ avec erreurs à une ligne infinie de tuiles rend le calcul de $f_i$ exact.

Vérifions à présent que le jeu de tuiles ainsi défini peut être choisi de cardinalité finie. Pour tout $g\in\mathrm{BS}(m,n)$, la suite $\overrightarrow{\mathrm{B}}_k(\overrightarrow{x},\lambda(g))$ est une représentation équilibrée de $\overrightarrow{x}$, donc il n'existe qu'un nombre fini de valeurs possibles pour les $\overrightarrow{x}_k$ et les $\overrightarrow{y}_k$. Il reste à vérifier que les $\overrightarrow{\ell}$ et $\overrightarrow{r}$ sont eux aussi à choisir parmi en ensemble fini. En utilisant le fait que $\lambda(ga^m)=\lambda(g)+1$, on remarque que $\overrightarrow{\ell}(ga^m,\overrightarrow{x})=\overrightarrow{r}(g,\overrightarrow{x})$ ; il suffit donc de s'assurer que les $\overrightarrow{\ell}$ uniquement peuvent être choisis parmi un ensemble fini. Rappelons que :

$$\overrightarrow{\ell}(g,\overrightarrow{x}):=\frac{1}{n}f_i\left(\lfloor n\lambda(g)\overrightarrow{x}\rfloor\right)-\frac{1}{m}\lfloor m\lambda(g)f_i(\overrightarrow{x})\rfloor+\lfloor\lambda(g)-\frac{1}{2}\rfloor\overrightarrow{b}.$$

On vérifie tout d'abord que $\overrightarrow{\ell}(g,\overrightarrow{x})$ est borné, en utilisant l'encadrement $\overrightarrow{z}-1\le\lfloor\overrightarrow{z}\rfloor<\overrightarrow{z}$ (les inégalités s'entendent coordonnée par coordonnée). D'abord :

$$\begin{aligned}\lambda(g)\left(f_i(\overrightarrow{x})-\overrightarrow{b}\right)-\frac{1}{n}\mathrm{M}\overrightarrow{1}-\frac{1}{n}\overrightarrow{b}-\lambda(g)f_i(\overrightarrow{x})+\lambda(g)\overrightarrow{b}-&<-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}<\overrightarrow{\ell}(g,\overrightarrow{x})\\ -\frac{1}{n}\mathrm{M}\overrightarrow{1}-\frac{3n+2}{2n}\overrightarrow{b}&<\overrightarrow{\ell}(g,\overrightarrow{x})\end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\ell}(g,\overrightarrow{x})&<\lambda(g)\left(f_i(\overrightarrow{x})-\overrightarrow{b}\right)+\frac{1}{n}\overrightarrow{b}-\lambda(g)f_i(\overrightarrow{x})+\lambda(g)\overrightarrow{b}-<-\frac{1}{m}\overrightarrow{1}+\lambda(g)\overrightarrow{b}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\\ \overrightarrow{\ell}(g,\overrightarrow{x})&<-\frac{1}{m}\overrightarrow{1}-\frac{n-2}{2n}\overrightarrow{b}.\end{aligned}$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{b}$ est à coefficients rationnels, et qu'il en est de même pour la matrice M, on peut ramener les deux inégalités ci-dessus au même dénominateur $q$, et on s'assure ainsi de l'existence de deux vecteurs $\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2}\in\mathbb{Z}^2$ tels que

$$\frac{\overrightarrow{p_1}}{q}\le\overrightarrow{\ell}(g,\overrightarrow{x})\le\frac{\overrightarrow{p_2}}{q},$$

où $\overrightarrow{p_1}$ est choisi maximal et $\overrightarrow{p_2}$ minimal. On peut même se convaincre que la valeur de $\overrightarrow{\ell}(g,\overrightarrow{x})$ appartient toujours à l'ensemble fini

$$\left\{\frac{\overrightarrow{p_1}}{q},\frac{\overrightarrow{p_1}+(0,1)}{q},\frac{\overrightarrow{p_1}+(1,0)}{q},\frac{\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{1}}{q},\ldots,\frac{\overrightarrow{p_2}}{q}\right\}\subset\mathbb{Q}$$

pour tout $g \in \mathrm{BS}(m,n)$ et tout $\vec{x} \in \mathrm{U}$. En effet, en observant attentivement tous les nombres rationnels qui apparaissent dans l'expression de $\vec{\ell}\,(g,\vec{x})$, on voit que l'on peut réécrire $\vec{\ell}\,(g,\vec{x})$ sous la forme $\frac{\vec{p}}{q}$. Le fait que $\vec{p_1} \leq \vec{p} \leq \vec{p_2}$ provient directement de la définition de $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$. Le jeu de tuiles $\tau_{f_i}$ correspondant à la fonction $f_i$ est donc fini.

**Proposition 3.8**

Il existe un ensemble fini de tuiles sur le modèle de la Figure 25 qui permet de calculer $f_i(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in \mathrm{U}_i$.

Grâce aux propriétés de la fonction $\lambda$ énoncées plus haut, on a

$$y_1\left(g\cdot a^k,\vec{x}\right) = y_{1+k}\left(g,\vec{x}\right) \text{ pour } k \in [1;m-1]$$
$$y_1\left(gt,\vec{x}\right) = x_1\left(g,f_i\left(\vec{x}\right)\right),$$

ce qui nous assure que pour un certain $\vec{x} \in \mathrm{U}_i$, il existe un pavage de la classe $\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ tel que les représentations équilibrées de $\vec{x}$ et $f_i(\vec{x})$ apparaissent respectivement en haut et en bas. Il suffit maintenant de rassembler tous les jeux de tuiles correspondant à chaque fonction $f_i$, en ajoutant à ces tuiles le numéro $i$ de la fonction qu'elles codent. Avec la règle locale supplémentaire stipulant que deux tuiles en positions $g$ et $ga$ doivent porter le même numéro $i$, on obtient au final le résultat souhaité.

**Théorème 3.3: [AK13]**

Le problème du domino est indécidable sur les groupes de Baumslag-Solitar $\mathrm{BS}(m,n)$ pour tous entiers $m,n \in \mathbb{Z}$.

## 3.3 Groupes de surface

Cette partie est consacrée aux groupes fondamentaux de surfaces orientées. Pour une surface de genre $n$, on appelle $\mathrm{S}_n$ le groupe fondamental associé, qui a pour présentation

$$\mathrm{S}_n := \langle a_1,\dots a_n,b_1,\dots,b_n \mid \prod_{i=1}^{n}[a_i;b_i]=1\rangle.$$

Dans ce qui suit, on oublie complètement l'origine géométrique de ces groupes et on se focalise sur leur présentation. De plus, on traite seulement le cas de $\mathrm{S}_2$. En effet, pour $n=1$ le groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$, dont on sait depuis longtemps qu'il a un problème du domino indécidable. Il se trouve par ailleurs que les groupes $\mathrm{S}_n$ pour $n \geq 2$ sont tous commensurables [ABJ18, Corollaire 9.53] ; l'indécidabilité du problème du domino étant un invariant de commensurabilité [Coh17], il suffit de la démontrer pour un seul des $\mathrm{S}_n$.

On se concentre donc dans cette partie sur le groupe $\mathrm{S}_2$, dont on commence par montrer qu'un de ses graphes de Cayley présente de fortes similarités avec le graphe d'orbite d'une substitution bien choisie (Partie 3.3.1). Puis on démontre que le problème du domino est indécidable pour une large classe de substitutions, ce qui permet de conclure quant au problème du domino sur $\mathrm{S}_2$ (Partie 3.3.2). Je résume ici les principaux ingrédients de la preuve ; on consultera l'article de conférence [ABM19] ou bien la version longue disponible sur Arxiv [ABM18] pour plus de détails.

### 3.3.1 Le groupe de surface $\mathrm{S}_2$ comme graphe d'orbites

Le graphe de Cayley du groupe $\mathrm{S}_2$ avec sa présentation usuelle $\langle a,b,c,d \mid [a;b][c;d]=1\rangle$ se construit en accolant des octogones tout en respectant l'étiquette et le sens des arêtes (en particulier ce graphe est planaire). En ajoutant à la partie génératrice toutes les cordes de ces octogones, on obtient un nouveau graphe de Cayley qui permet, à condition de choisir les étiquettes

appropriées sur les arêtes, de voir le groupe de surface $S_2$ comme le graphe d'orbite d'une certaine substitution $\sigma$ :

$$\begin{cases} \sigma(a) = ab^5ab^5ab^5ab^5ab^4 \\ \sigma(b) = ab^5ab^5ab^5ab^5ab^5ab^4 \end{cases}$$

avec comme éléments propres $\lambda = 17+12\sqrt{2}$ et $\nu(b)/\nu(a) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Cette observation a été formulée dans [CGS17], et nous l'écrivons dans [ABM19] avec un SFT sur $S_2$ pour les besoins de la preuve d'indécidabilité qui suit.

**Proposition 3.9: [ABM18, Lemme 14]**

Il existe un SFT X sur $S_2$ tel que les configurations de X représentent des graphes d'orbites de la substitution $\sigma$.

Notre stratégie initiale visait à utiliser la technique de [Kar07, AK13] pour encoder des fonctions rationnelles affines par morceaux dans le groupe de surface $S_2$. La première étape consistait donc à exhiber dans $S_2$ une structure suffisamment proche de celle de la Figure 6 (pavage du plan hyperbolique $\mathbb{H}_2$ par des tuiles pentagonales). La structure de graphes d'orbites s'y prête bien : si $\sigma : A \to A^*$ est une substitution, alors on peut voir ses graphes d'orbites comme des pavages de $\mathbb{H}_2$ avec autant de types de tuiles que de lettres dans A (voir la Figure 8 pour un exemple de pavage). Il restait donc à trouver, pour chaque type de tuiles, les bonnes expressions pour chacun des côtés de la tuile (comme on le fait pour $BS(m,n)$ dans la Partie 3.2.2, voir la Figure 25). Il se trouve que la technique fonctionne bien pour des substitutions avec $\lambda$ rationnel, mais qu'elle se heurte à un problème technique insurmontable dès lors que $\lambda$ est irrationnel (on ne peut plus assurer la finitude du jeu de tuiles). Malheureusement pour la substitution $\sigma$ qui nous intéresse ici $\lambda = 17+12\sqrt{2}$, et nous sommes donc contraints d'adopter une autre stratégie qui consiste à démontrer que le problème du domino est indécidable sur les graphes d'orbite de $\sigma$.

### 3.3.2 Le problème du domino sur les graphes d'orbites

Dans [CGS17, Main technical Lemma] les auteurs définissent, à partir de deux substitutions incommensurables $\sigma$ et $\sigma'$ une troisième substitution $\overline{\sigma}$, non déterministe, qui contient des informations sur les deux substitutions $\sigma$ et $\sigma'$. Plus précisément, les graphes d'orbites de $\overline{\sigma}$, projetés de manières adéquates, permettent de retrouver soit ceux de $\sigma$ soit ceux de $\sigma'$. Pour les besoins de l'article [CGS17] cette formulation est nécessaire. Ici nous n'avons pas besoin de cette troisième substitution, mais simplement d'exprimer le graphe de $\sigma$ comme un SFT sur les graphes d'orbites de $\sigma'$.

**Remarque 14.** *C'est un fait observable sur les résultats récents du domaine qui s'attaquent aux problèmes du domino et de l'existence de SFT fortement apériodique sur un groupe : il est en général plus facile de montrer l'indécidabilité du problème du domino que l'existence d'un SFT fortement apériodique. On sait par exemple démontrer le premier mais pas construire le deuxième sur les groupes de Baumslag-Solitar non moyennables [AK13].*

**Théorème 3.4: [ABM19]**

Si $\sigma$ est une substitution primitive, alors le problème du domino sur les graphes d'orbite de $\sigma$ est indécidable.

*Idée de la démonstration.* Soit $\sigma$ une substitution primitive. Pour illustrer les idées de la démons-

tration, on choisit la substitution $\sigma : \{a,b\} \to \{a,b\}^*$ définie par

$$\sigma(a) = \left(ab^5\right)^4 ab^4;$$
$$\sigma(b) = \left(ab^5\right)^5 ab^4.$$

Pour démontrer le résultat, il suffit de construire un SFT Y sur un graphe d'orbite de $\sigma$ qui est non vide, et dont chaque configuration encode un graphe d'orbite de la substitution $0 \mapsto 00$. On commence par superposer un $0 \mapsto 00$-pavage et un $\sigma$-pavage, comme illustré sur la Figure 26.

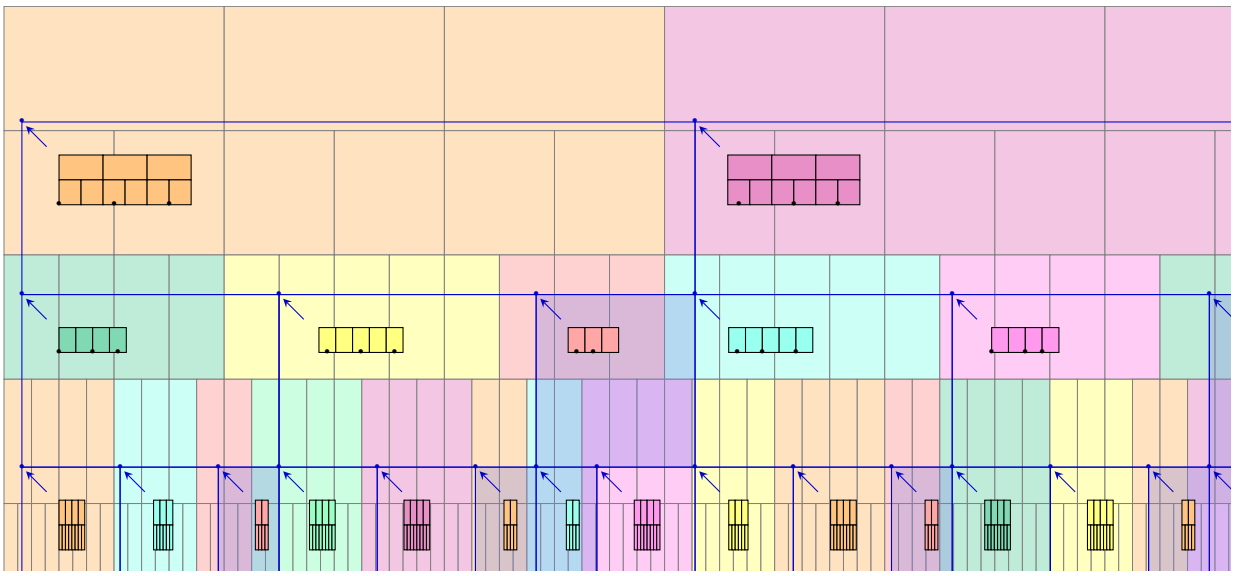


FIGURE 26 – Superposition d'un graphe d'orbite de $0 \mapsto 00$ et de $\sigma(a) = aab$, $\sigma(b) = ba$.

Le $\sigma$-pavage induit une partition du $0 \mapsto 00$-pavage. Pour chaque $\sigma$-tuile on considère l'ensemble des $0 \mapsto 00$-tuiles dont le coin inférieur droit appartient à la $\sigma$-tuile : chaque $\sigma$-tuile se voit ainsi attribuer un bloc du $0 \mapsto 00$-pavage (sur la Figure 26, par exemple la $a$-tuile en haut à gauche définit comme élément de la partition le bloc orange). La taille de ces blocs est bornée, on peut donc les coder dans un alphabet fini. Une information supplémentaire est nécessaire afin de pouvoir reformer le $0 \mapsto 00$-pavage à partir du $\sigma$-pavage et des éléments de la partition associés à chaque $\sigma$-tuile : il faut savoir comment recoller les blocs du $0 \mapsto 00$-pavage entre eux verticalement. Il suffit pour cela d'ajouter, pour chaque $\sigma$-tuile, les points d'ancrage des blocs codés par les $\sigma$-tuiles qui lui sont immédiatement inférieures (ces points d'ancrage sont signalés en bas de chaque bloc codé par une $\sigma$-tuile sur la Figure 26). Cette information supplémentaire ne change pas la finitude de l'alphabet. Les règles locales qui font du sous-décalage Y un SFT consistent à s'assurer que les différents blocs codés ainsi que les points d'ancrage sont compatibles localement.

□

En combinant ce résultat avec celui de la Proposition 3.9, on obtient :

**Théorème 3.5:** [ABM19]

Le problème du domino est indécidable sur les groupes de surface de genre $g \geq 2$.

## 3.4 Pistes d'approfondissement

### 3.4.1 Contraintes directionnelles

Le problème du domino $DP_H$ pour un SFT $H \subset A^{\mathbb{Z}}$ n'est pas un invariant de conjugaison; de ce fait la caractérisation des SFT H plus proches voisins tels que $DP_H$ est décidable, obtenue dans [AES20], ne résout pas le problème pour le cas général. Il y a d'ailleurs peu d'espoir d'obtenir une caractérisation élégante en terme de graphe du SFT (par élégante, on entend ici qu'elle ne dépende pas des noms des sommets du graphe). Si le SFT H est de rayon $k$ – l'entier $k$ est la taille minimale des motifs interdits permettant de définir H – alors c'est à son graphe de Rauzy d'ordre $k$ qu'il faut s'intéresser. Mais dès que $k \geq 2$, les sommets d'un graphe de Rauzy d'ordre $k$ n'ont pas tous des rôles interchangeables. Par exemple, tous les sommets d'un graphe de Rauzy d'ordre 2 ne peuvent pas avoir de boucle, seuls les sommets $aa$ avec $a \in A$ ont cette possibilité. Une caractérisation de la décidabilité de $DP_H$ devra donc en tenir compte.

**Question 12**

Comment caractériser les SFT $H \subset A^{\mathbb{Z}}$ de rayon $k \geq 2$ avec problème du domino relatif à H décidable?

### 3.4.2 La conjecture du problème du Domino

Dans l'introduction du manuscrit nous avons présenté la conjecture du problème du domino, que l'on rappelle ici :

**Conjecture 4**

Un groupe de type fini G a un problème du domino décidable si et seulement si G est virtuellement libre.

On sait déjà qu'un groupe virtuellement libre a une logique monadique du second ordre décidable. Comme le problème du domino peut s'exprimer dans ce fragment de logique, il est automatiquement décidable sur un groupe virtuellement libre. La partie difficile de cette conjecture réside dans l'autre sens d'implication.

La littérature sur la question dresse déjà un inventaire conséquent de groupes ou classes de groupes pour lesquels on arrive à démontrer l'indécidabilité du problème, en adaptant des constructions déjà connues sur $\mathbb{Z}^2$, ou des construction adaptées de celles sur $\mathbb{Z}^2$ [AK13, Jea15b, Jea15c, Coh17, ABM19]. Il existe aussi des variantes du problème du domino, où l'on remplace la structure à paver, un groupe de type fini G, par des graphes provenant d'une substitution [ABM19] ou bien possédant un caractère auto-similaire [BS16, Bar20]. Il est à noter que les résultats présentés dans [Bar20] s'appuient sur des notions de logique, et renvoient ainsi aux origines de la formulation du problème du domino par Wang [Wan61, KMW62]. Cette direction de recherche mérite certainement d'être encore exploitée.

Intéressons-nous à la contraposée du sens réciproque : est-il possible d'exploiter le fait qu'un groupe G a un problème du domino décidable pour montrer qu'il est virtuellement libre? Pour montrer qu'un groupe G est libre, on peut au choix :

— utiliser le lemme du Ping-pong;

— montrer que la dimension cohomologique de G est 1 [Sta68, Swa69];

— montrer que G est le groupe fondamental d'un graphe connexe;

— et cette liste n'est bien sûr pas exhaustive!

Quelle que soit la méthode choisie, il semble peu évident d'utiliser un algorithme résolvant le problème du domino sur G.

### 3.4.3 Groupes hyperboliques

Soit G un groupe et S une partie finie génératrice de G ; ce choix de la partie génératrice définit un graphe de Cayley de G, qu'on désignera dans la suite comme le graphe de Cayley de G. On appelle **géodésique** un chemin de longueur minimale dans le graphe de Cayley de G.

Étant donné un élément $g$ du groupe G, le **cône de** $g$, noté $\mathscr{C}_g$, est l'ensemble des éléments du groupe que l'on peut atteindre depuis l'identité $1_G$ par une géodésique passant par $g$ :

$$\mathscr{C}_g := \{h \in G \mid \exists \text{ géodésique } 1 \to g \to h\}.$$

Informellement, le cône de $g$ est l'ensemble des éléments du groupe que l'on peut voir depuis $g$ à condition de ne s'autoriser à regarder que dans les directions qui nous éloignent de l'origine.

**Exemple 4.** *Le nombre de types de cônes de certains des groupes évoqués jusqu'ici sont connus.*

- *Le groupe* $\mathbb{Z}^2$ *avec sa présentation usuelle* $< a, b | ab = ba >$ *possède cinq types de cône : celui de l'identité, et les quatre demi-plans correspondants aux quatre directions données par les générateurs et leurs inverses.*
- *Le groupe libre à deux générateurs possède cinq types de cône : celui de l'identité, et les quatre arbres enracinés correspondants aux quatre directions données par les générateurs et leurs inverses.*
- $BS(1, n)$ *a une infinité de types de cônes.*
- *Le groupe du falotier* L *a une infinité de types de cônes.*

**Théorème 3.6: [Mei08, Théorème 9.28]**

Soit G un groupe et S une partie finie génératrice de G. Le couple (G, S) possède un nombre fini de type de cônes si et seulement si le langage des géodésiques est régulier.

Il se trouve que les groupes hyperboliques ont précisément un langage des géodésiques régulier, à condition de choisir les géodésiques minimales pour l'ordre lexicographique [CGSR17]. Il existe donc un automate fini $(A, Q, q_0, \delta, F)$ qui reconnaît ce langage. Nous avons bon espoir d'exploiter le caractère régulier de ce langage pour trouver un graphe d'orbite d'une substitution $\sigma$ dans le graphe de Cayley d'un groupe hyperbolique. La substitution $\sigma$ serait définie sur l'alphabet Q, et la fonction de transition $\delta$ donnerait l'image de $q \in Q$ par $\sigma$ : $\sigma(q)$ est obtenu en concaténant toutes les images $\delta(q, a)$ pour tout $a \in A$. Pour les groupes de surface, la planarité du graphe de Cayley joue un rôle fondamental dans la démonstration, car elle assure qu'un seul graphe d'orbite suffit à couvrir tout le graphe de Cayley. La situation est moins claire lorsque l'on suppose seulement que le groupe est hyperbolique.

Comme nous le remarquons à la fin de l'article [ABM19], il suffirait de démontrer qu'un groupe hyperbolique à un seul bout a un problème du domino indécidable pour démontrer la Conjecture 1 dans le cas des groupes hyperboliques.

**Proposition 3.10: [ABM19]**

Si tout groupe hyperbolique à un seul bout a un problème du domino indécidable, alors la conjecture se vérifie pour les groupes hyperboliques.

# 4 Sous-décalages effectifs sur des groupes de type fini

**Sommaire**


**3.1 Problème du domino sous contrainte directionnelle . . . . . 42**
3.1.1 Motivation et question . . . . . 42
3.1.2 Exemples avec problème décidable . . . . . 42
3.1.3 Cas indécidable : idée générale de la construction . . . . . 43
3.1.4 Une caractérisation complète pour les plus proches voisins . . . . . 46
**3.2 Groupes de Baumslag-Solitar . . . . . 47**
3.2.1 Preuve de Jarkko Kari dans le plan hyperbolique . . . . . 47
3.2.2 Adaptation aux groupes BS$(m,n)$ . . . . . 48
**3.3 Groupes de surface . . . . . 52**
3.3.1 Le groupe de surface $S_2$ comme graphe d'orbites . . . . . 52
3.3.2 Le problème du domino sur les graphes d'orbites . . . . . 53
**3.4 Pistes d'approfondissement . . . . . 55**
3.4.1 Contraintes directionnelles . . . . . 55
3.4.2 La conjecture du problème du Domino . . . . . 55
3.4.3 Groupes hyperboliques . . . . . 56


La sous-dynamique projective est une opération qui modifie le groupe G sur lequel un sous-décalage $X \subset A^G$ est défini, en projetant les configurations de X sur un sous-groupe H de G

$$\pi_H(X) := \left\{ y \in A^H \mid \exists x \in X \text{ tel que } y_h = x_h \text{ pour tout } h \in H \right\}.$$

Partant d'un sous-décalage bidimensionnel $X \subset A^{\mathbb{Z}^2}$, on peut par exemple considérer l'ensemble des lignes horizontales $\pi_{\mathbb{Z}}(X) \subset A^{\mathbb{Z}}$ apparaissant dans des configurations de X. La sous-dynamique projective ne préserve pas le caractère SFT d'un sous-décalage, mais on peut en revanche observer que le sous-décalage obtenu est nécessairement effectif. Comprendre les sous-décalages 1D que l'on peut obtenir comme sous-action projective d'un SFT sur $\mathbb{Z}^2$ est une question difficile, et aucune caractérisation n'en est connue, même si des résultats partiels existent [PS15]. En autorisant le sous-décalage initial à être sofique, on peut en revanche construire un théorème de simulation : les sous-décalages effectifs sur $\mathbb{Z}$ sont exactement les sous-dynamiques projective de sous-décalages sofiques sur $\mathbb{Z}^3$. Ce résultat important a dans un premier temps été démontré par Hochman [Hoc09], puis amélioré indépendamment par [DRS10] et [AS13] en réduisant à $\mathbb{Z}^2$ le groupe nécessaire aux sofiques. Les sous-décalages effectifs sur un groupe de type fini G méritent donc une attention particulière pour comprendre les SFT ou sous-décalages sofiques à travers leurs sous-action projectives.

## 4.1 Notions de sous-décalage effectif

En guise de première partie pour ce chapitre, je résume le travail de définition réalisé dans [ABS17] à propos des sous-décalages effectifs. Rappelons tout d'abord l'existence de groupes de présentation finie avec problème du mot indécidable, pour lesquels définir des sous-décalages effectifs

semble délicat. Il faut alors en effet exclure des configurations des motifs de tailles arbitraires, ce qui semble incompatible avec l'absence d'algorithme prenant comme entrée un entier $n$ et renvoyant la liste des éléments du groupe formant la boule de taille $n$. Une manière de passer outre ce problème est de supposer connu le problème du mot du groupe $\mathtt{WP}(G)$. On dira donc qu'un sous-décalage est G-effectif s'il existe un ensemble de motifs F énuméré par une machine de Turing avec oracle $\mathtt{WP}(G)$ tel que $X = X_F$.

Avant de s'intéresser de plus près aux propriétés de ces sous-décalages G-effectifs, on propose une définition équivalente, dans laquelle la machine de Turing classique avec oracle $\mathtt{WP}(G)$ est remplacée par une machine de Turing dont le ruban est le groupe G, appelée G-machine de Turing.

**Théorème 4.1: [ABS17, Corollaire 3.5]**

Un sous-décalage $X \subset A^G$ est G-effectif si et seulement s'il existe une G-machine de Turing reconnaissant un langage $F \subset A_G^*$ tel que $X = X_F$.

Toujours en raison de l'existence de groupes avec problème du mot indécidable, cette notion de G-effectivité est plus faible que la $\mathbb{Z}$-effectivité (où l'on utilise une machine de Turing classique sans oracle pour énumérer les motifs interdits). Ces deux notions coïncident en revanche dès lors que le problème du mot $\mathtt{WP}(G)$ est décidable. On peut également mentionner la robustesse de cette définition : la classe des sous-décalages G-effectifs est close par union et intersection finie, close par morphisme et contient la classe des sous-décalages sofiques. Cette classe forme également une classe de conjugaison. Les relations entre les différentes classes de sous-décalages sont résumées Figure 27 ; on en trouvera les démonstrations dans [ABS17].

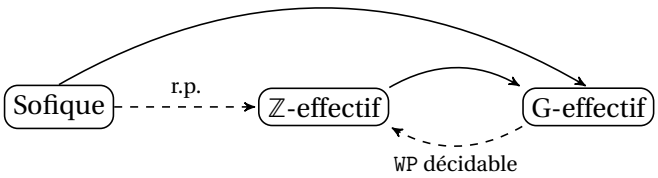



FIGURE 27 – Relations d'inclusion entre les différentes classes de sous-décalages sur un groupe G de type fini. Une flèche en trait plein signifie que l'inclusion est vraie pour tout groupe de type fini ; une indication associée à une flèche (r.p. pour récursivement présenté, et WP décidable pour le problème du mot) est valable uniquement pour les groupes G vérifiant cette indication.

La G-effectivité constitue également la bonne notion vis-à-vis de la sous-dynamique projective. Si X est G-effectif est que H est un sous-groupe de type fini de G, alors la sous-dynamique projective $\pi_H(X)$ est G-effective. Ce n'est nécessairement le cas pour un sous-décalage $\mathbb{Z}$-effectif : si G n'est pas récursivement présenté, alors il existe un sous-décalage GÖ$\mathbb{Z}$-effectif $X \subset A^{G\ddot{O}\mathbb{Z}}$ tel que $\pi_{\mathbb{Z}}(X)$ n'est pas $\mathbb{Z}$-effectif [ABS17, Proposition 2.13].

Par la suite, sauf mention contraire explicite, on utilisera le terme effectif pour un sous-décalage $X \subset A^G$ comme référence à la G-effectivité.

## 4.2 Effectifs vs. sofiques

Une machine de Turing classique avec comme oracle le problème du mot $\mathtt{WP}(G)$ d'un groupe G permet de construire, pour tout entier N, la boule $B_N$ de n'importe lequel des graphes Cayley de G. Grâce à cette connaissance des boules de tailles arbitraires, et dès lors que le groupe est infini, on peut définir une suite récursive avec oracle $\mathtt{WP}(G)$ d'éléments $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tous distincts (il suffit de choisir $g_0 = 1_G$ et chaque $g_n$ dans $B_n \setminus B_{n-1}$). Cette idée constitue la base des deux constructions de sous-décalages effectifs non sofiques des Parties 4.2.1 et 4.2.2.

Je présente dans les pages qui suivent trois classes de groupes pour lesquelles on sait construire un sous-décalage qui n'est pas sofique : les groupes moyennable (Partie 4.2.1), les groupes avec au moins deux bouts (Partie 4.2.2) et les groupes avec problème du mot indécidable (Partie 4.2.3).

### 4.2.1 Une généralisation du sous-décalage miroir

Le sous-décalage miroir, présenté dans l'introduction en page 9, est un exemple classique de sous-décalage sur $\mathbb{Z}^2$ effectif mais pas sofique. L'argument combinatoire utilisé repose sur le fait que le périmètre d'un carré dans $\mathbb{Z}^2$ est de taille négligeable devant l'intérieur de ce carré. Comme il existe des carrés de tailles arbitraires de part et d'autre du miroir, on peut réfuter l'existence d'une couverture SFT pour $X_{\leq 1}$, quelle que soit la taille de ses motifs interdits.

Définir un sous-décalage réalisant une symétrie axiale par rapport à une ligne de symbole (le miroir) est beaucoup trop difficile dans le cas d'un groupe dont on sait seulement qu'il est moyennable. En particulier, pour des groupes de torsion, la réalisation du miroir est compromise. Il faut donc adapter et assouplir le principe mis en œuvre dans le sous-décalage miroir sur $\mathbb{Z}^2$. Comme rappelé plus haut, dès lors qu'un groupe est infini, on peut construire une suite récursive avec oracle $\mathtt{WP}(G)$ d'éléments deux à deux distincts. On peut aussi à peu de frais construire en parallèle deux suites d'éléments $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont à distance de plus en plus grande les uns des autres ; c'est ce qui est exprimé dans le lemme suivant.

**Lemme 4.1: [ABS17]**

Pour tout groupe infini G, il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites récursives avec oracle $\mathtt{WP}(G)$ telles les éléments de l'ensemble

$$\mathscr{S} = \{\{1_G\}\} \cup \{g_n B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{h_n B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

sont deux à deux disjoints.

Avec ces deux suites à disposition, on peut définir un sous-décalage effectif $X_{\mathtt{mimic}} \subset \{0,1,\boxtimes\}^G$, dont toute configuration $x \in X_{\mathtt{mimic}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

— la lettre $\boxtimes$ apparaît au plus un fois dans $x$ ;

— si $x_g = \boxtimes$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sigma_{g_n^{-1}g^{-1}}(x)|_{B_n} = \sigma_{h_n^{-1}g^{-1}}(x)|_{B_n}$.

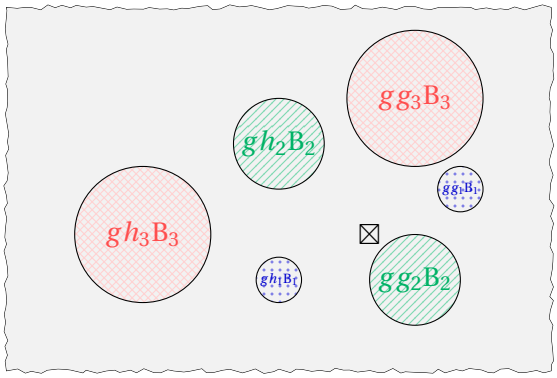



FIGURE 28 – Une partie d'une configuration $x$ du sous-décalage $X_{\mathtt{mimic}}$. La présence d'un symbole $\boxtimes$ en $g$ force les motifs $x_{gg_nB_n}$ et $x_{gh_nB_n}$ à être identiques pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans une configuration $x \in X_{\mathtt{mimic}}$, les éléments $gg_n$ et $gh_n$ sont donc entourés du même motif de support $B_n$ (voir la Figure 28). De façon similaire à ce que l'on observe pour $X_{\mathtt{miroir}}$ sur $\mathbb{Z}^2$, la

moyennabilité de G est incompatible avec la soficité de $X_{\texttt{mimic}}$ : toute tentative d'écriture de $X_{\texttt{mimic}}$ comme un sous-décalage sofique autorise la possibilité de briser l'égalité entre les contenus des boules $gg_nB_n$ et $gh_nB_n$ pour $n$ assez grand. En conséquence, effectivité et soficité sont bien des notions distinctes dès lors que le groupe G est infini et moyennable.

**Théorème 4.2:** [ABS17]

Si G est un groupe moyennable infini, alors il existe un sous-décalage G-effectif qui n'est pas sofique.

### 4.2.2 Groupes avec au moins deux bouts

Fixons une partie génératrice finie de G. Si G possède au moins deux bouts, alors il existe une taille de boule N telle que le graphe $\texttt{Cay}(G,S) \setminus B_N$ possède au moins deux composantes connexes infinies $C_1$ et $C_2$. Pour construire un sous-décalage effectif mais pas sofique, on reprend l'idée du sous-décalage $X_{\texttt{mimic}}$ en l'adaptant. Intuitivement, comme il suffit de retirer une boule finie $B_N$ au groupe G pour déconnecter les deux composantes $C_1$ et $C_2$, seule une quantité finie d'information peut circuler entre $C_1$ et $C_2$ dans les configurations de n'importe quel SFT. Si on impose à ces deux composantes des dépendances en quantités arbitraires, alors il n'est pas possible de les imposer dans un SFT, donc *a fortiori* pas non plus dans un sous-décalage sofique. Le lemme suivant permet de construire un sous-décalage effectif reposant sur cette idée.

**Lemme 4.2**

Soit G un groupe avec au moins deux bouts, et N un entier tel que $\texttt{Cay}(G,S) \setminus B_N$ possède deux composantes connexes infinies $C_1$ et $C_2$. Alors il existe deux suites $(g_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C_1$ et $(h_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C_2$ récursives avec oracle $\texttt{WP}(G)$ dont tous les éléments sont distincts.

On définit maintenant un sous-décalage $Y \subset \{0,1,\boxtimes\}^G$ dont toute configuration $y \in Y$ vérifie les deux conditions suivantes, où les suites $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont données par le lemme précédent :

— la lettre $\boxtimes$ apparaît au plus un fois dans $y$ ;

— si $y_g = \boxtimes$ alors pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $y_{gg_i} = y_{gh_i}$.

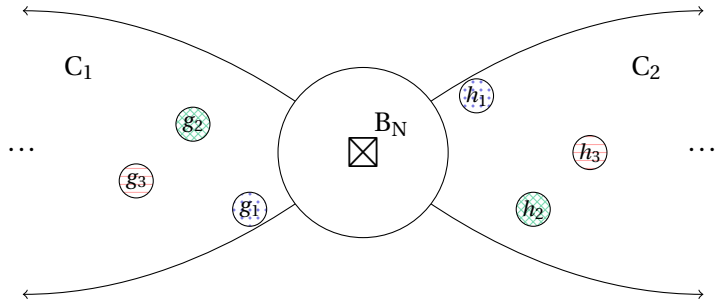



FIGURE 29 – Une configuration $y$ du sous-décalage Y. La présence d'un symbole $\boxtimes$ en $g$ force les lettres $y_{gg_n}$ et $y_{gh_n}$ à être identiques pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En vertu du Lemme 4.2, le sous-décalage Y est effectif. Le détail de la démonstration du fait qu'il n'est pas sofique est disponible dans [ABS17, Théorème 2.17].

**Théorème 4.3: [ABS17]**

Si G est un groupe de type fini avec au moins deux bouts, alors il existe un sous-décalage G-effectif qui n'est pas sofique.

### 4.2.3 Groupes avec problème du mot indécidable

Si G est un groupe de type fini, le sous-décalage pointé $X_{\leq 1}$ (appelé *sunny-side-up subshift* [Sal20] ou encore *one-or-less subshift* [ABS17]) sur G est l'ensemble

$$X_{\leq 1} := \left\{x \in \{0,1\}^G \mid \left\{g \in G \mid x_g = 1\right\} \leq 1\right\},$$

autrement dit l'ensemble des configurations sur l'alphabet $\{0,1\}$ dans lesquelles la lettre 1 apparaît au plus une fois. C'est un exemple classique de sous-décalage qui n'est pas un SFT sur $\mathbb{Z}^d$ : un nombre fini de motifs interdits ne permet de détecter la présence de deux symboles 1 qu'à distance bornée par la taille maximale d'un motif interdit. On peut en revanche aisément montrer que ce sous-décalage est sofique sur $\mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{F}_d$. Pour cela on enrichit l'alphabet $\{0,1\}$ en autorisant une lettre 1 à envoyer des signaux dans les $2d$ directions, et on interdit les motifs dans lesquels deux signaux d'origines distinctes apparaissent. Il suffit ensuite d'appliquer le morphisme qui envoie la lettre 1 sur 1, et toutes les autres lettres sur 0 (voir la Figure 30).

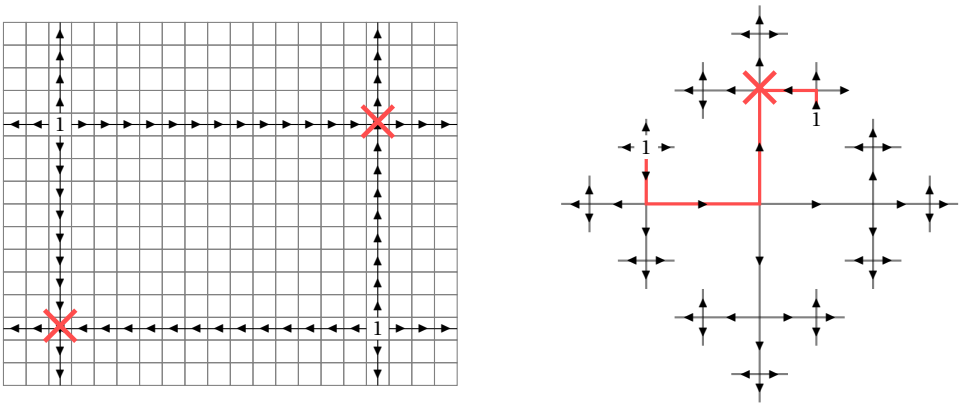



FIGURE 30 – Un exemple de couverture SFT montrant que le sous-décalage pointé est sofique (à gauche sur $\mathbb{Z}^2$ et à droite sur $\mathbb{F}_2$). Les croix rouges symbolisent l'interdiction du motif qu'elles recouvrent.

Ce sous-décalage défini sur un groupe de type fini a été étudié en détails dans [DY08], où les auteurs établissent un lien entre la soficité de $X_{\leq 1}$ sur certains sous-groupes de G et le caractère finiment présenté de l'action du groupe G sur son bord $\delta G$. Dans l'article, la soficité de $X_{\leq 1}$ est appelée *propriété du symbole spécial*.

**Proposition 4.1: [DY08]**

Pour un groupe G de type fini, le sous-décalage $X_{\leq 1}$ est sofique dans les cas suivants :

- le groupe G est libre ;
- le groupe G est abélien ;
- le groupe G est hyperbolique.

On peut aussi noter que ce sous-décalage $X_{\leq 1}$ est toujours effectif, et ce quelque soit le groupe G. Dans l'article [ABS17] nous cherchons à l'inverse des exemples de groupes sur lesquels le sous-décalage $X_{\leq 1}$ n'est pas sofique, donc pas effectif *a fortiori*.

**Théorème 4.4: [ABS17]**

Si G est un groupe récursivement présenté avec problème du mot indécidable, alors le sous-décalage $X_{\leq 1}$ est G-effectif mais pas sofique.

S'il s'avérait que les seuls groupes de type fini pour lesquels le sous-décalage $X_{\leq 1}$ n'est pas sofique soient les groupes récursivement présentés et avec problème du mot indécidable, alors on aurait, pour ce sous-décalage en particulier, équivalence entre soficité et effectivité.

**Question 13**

Quels sont les groupes de type fini G sur lesquels le sous-décalage $X_{\leq 1}$ est sofique ?

## 4.3 Forte apériodicité : lemme local de Lovász

### 4.3.1 Le lemme local de Lovász

Si des événements indépendants dans leur ensemble se produisent avec chacun une probabilité strictement inférieure à 1, alors il y a bien évidemment une probabilité strictement positive qu'aucun d'entre eux ne se produise. Le lemme local de Lovász autorise à relâcher la condition, extrêmement forte, d'indépendance des événements en une condition de faible dépendance.

Le lemme local de Lovász est un des outils de la méthode probabiliste qui permet de démontrer l'existence d'un objet combinatoire. Il s'applique aussi bien à des problèmes de satisfiabilité qu'à des problèmes de colorations de graphes. On présente ici une version asymétrique du lemme local de Lovász [AS08]. Si $\mathscr{A} := \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est une collection finie d'ensembles mesurables dans un espace de probabilités $(X, \mu, \mathscr{B})$, alors pour chaque événement de cet ensemble $A \in \mathscr{A}$, on définit $\Gamma(A)$ comme le plus petit sous-ensemble de $\mathscr{A}$ tel que A est indépendant de la collection $\mathscr{A} \setminus (\{A\} \cup \Gamma(A))$.

**Lemme 4.3**

Soit $\mathscr{A} := \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ une collection finie d'ensembles mesurables dans un espace de probabilités $(X, \mu, \mathscr{B})$. Supposons qu'il existe une fonction $\chi : \mathscr{A} \to (0,1)$ vérifiant

$$\forall A \in \mathscr{A} : \mu(A) \leq \chi(A) \prod_{B \in \Gamma(A)} (1 - \chi(B)).$$

Alors la probabilité d'éviter simultanément tous les événements de $\mathscr{A}$ est strictement positive :

$$\mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \prod_{A \in \mathscr{A}} (1 - \chi(A)) > 0.$$

La difficulté pour appliquer le Lemme 4.3 avec succès réside plus dans la définition de la collection de mauvais événements $\mathscr{A}$ que dans le choix de la fonction $\chi$. Dans la suite on abrégera lemme local de Lovász en LLL.

### 4.3.2 Une version pour les sous-décalages

On observe des similitudes entre LLL et la définition par exclusion de motifs des sous-décalages : pour l'un on minore la probabilité d'éviter un ensemble de *mauvais* événements, dans l'autre on s'intéresse à l'ensemble des configurations qui évitent des motifs. Une différence fondamentale toutefois : dans LLL on ne manipule qu'un nombre fini de *mauvais* événements, alors que pour vérifier qu'une configuration $x$ appartient à un sous-décalage X, quand bien même il s'agit d'un SFT, on a besoin de contrôler l'ensemble des motifs apparaissant dans $x$, donc une infinité. La

compacité de l'espace des configurations $A^G$ et de X permet néanmoins d'appliquer LLL aux sous-décalages. On munit l'espace des configurations $A^G$ de la mesure de Bernoulli uniforme $\mu$. En particulier, pour tout motif $f$ de support S et tout $g \in G$, si on note $A_g = \{x \in A^G : x|_{gS} = f\}$, alors on a

$$\mu(A_g) = |A|^{-|S|}.$$

**Lemme 4.4: [ABT18]**

Soit G un groupe dénombrable et $X \subset A^G$ un sous-décalage défini par l'ensemble de motifs interdits $F = \bigcup_{n\geq 1} F_n$, avec $F_n \subset A^{S_n}$. Supposons qu'il existe une fonction $x : \mathbb{N} \times G \to (0,1)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g \in G,\ \mu(A_{n,g}) \leq x(n,g) \prod_{\substack{gS_n \cap hS_k \neq \emptyset \\ (k,h)\neq(n,g)}} (1 - x(k,h)), \qquad (*)$$

où $A_{n,g} = \{x \in A^G : x|_{gS_n} \in F_n\}$. Alors le sous-décalage X n'est pas vide.

La démonstration du Lemme 4.4, disponible dans [ABT18], combine l'utilisation de la compacité de l'espace des configurations $A^G$ et celle du Lemme local de Lovász. C'est en effet une utilisation classique de la compacité de l'espace des configurations $A^G$ : pour montrer qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ défini par un ensemble de motifs interdits F n'est pas vide, il suffit d'exhiber une suite de motifs $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne contenant aucun sous-motif dans F et telle que l'union des supports des $p_n$ est le groupe G entier. Cela nécessite en général d'être capable de décrire localement une configuration de X.

**Remarque 15.** *Pour montrer l'existence d'une configuration dans un sous-décalage avec le LLL, on n'a en revanche pas besoin de connaître a priori les motifs $p_n$.*

### 4.3.3 Application : forte apériodicité

Comme exemple d'utilisation du Lemme local, nous démontrons dans [ABT18] que tout groupe G dénombrable (en particulier de type fini) possède un sous-décalage effectif fortement apériodique. Pour ce faire, une bonne manière d'exprimer qu'une configuration $x \in \{0,1\}^G$ est fortement apériodique passe par la notion de *distinct neighborhood property* de [GJS09]. La configuration $x$ a **des voisinages distincts** si pour tout élément $h$ de $G \setminus \{1_G\}$ il existe un ensemble fini $T \subset G$ tel que :

$$\forall g \in G : x|_{ghT} \neq x|_{gT}.$$

Il est aisé de vérifier que la fermeture de l'orbite d'une telle configuration est fortement apériodique.

**Proposition 4.2**

Si une configuration $x \in \{0,1\}^G$ possède la propriété des voisinages distincts, alors le sous-décalage $X := \overline{orb_\sigma(x)}$ est fortement apériodique.

On applique donc le lemme local pour construire une configuration $x \in \{0,1\}^G$ avec la propriété des voisinages distincts.

**Théorème 4.5: [ABT18]**

Tout groupe dénombrable admet un sous-décalage fortement apériodique sur l'alphabet $\{0,1\}$.

*Démonstration.* On commence par choisir une énumération $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ du groupe G, de sorte que $s_0 = 1_G$. Comme G est infini, on choisit ensuite une suite $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de G qui

vérifie que pour tout $i \in \mathbb{N}$, d'une part $T_i \cap s_i T_i = \emptyset$ et d'autre part $|T_i| = C \cdot i$, où C est une constante dont on choisira la valeur plus tard.

Les événements $\mathscr{A} := \{A_{n,g}\}_{n\geq 1, g\in G}$ s'inspirent directement de la propriété des voisinages distincts : on définit $A_{n,g} = \{x \in \{0,1\}^G \mid x|_{gT_n} = x|_{gs_nT_n}\}$. Si $s_i \in G$ est une période pour la configuration $x$, alors l'événement $A_{i,g}$ se produit pour tout $g \in G$. Éviter tous les événements de $\mathscr{A}$ entraîne donc le fait que la configuration $x$ a bien la propriété des voisinages distincts.

En utilisant le fait que $s_n T_n \cap T_n = \emptyset$ on déduit $\mu(A_{n,g}) = 2^{-|T_n|} = 2^{-Cn}$. Considérons à présent un ensemble $A_{n,g}$. Remarquons tout d'abord que $A_{n,g}$ et $A_{m,g'}$ sont indépendants si et seulement si $(gT_n \cup gs_nT_n)$ n'intersecte pas $(g'T_m \cup g's_mT_m)$. En conséquence, pour un entier $m \in \mathbb{N}$ fixé, le nombre d'ensembles $A_{m,g'}$ qui ne sont pas indépendants de $A_{n,g}$ est au plus $4C^2nm$. On choisit $x(A_{n,g}) := 2^{-\frac{Cn}{2}}$. Pour pouvoir utiliser le Lemme 4.4, il suffit de montrer que :

$$2^{-Cn} \leq 2^{-\frac{Cn}{2}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - 2^{-\frac{Cm}{2}})^{4C^2nm}.$$

Un calcul détaillé dans [ABT18] montre que l'inégalité est vraie dès lors que $C \geq 17$. En fixant la constante C à 17 par exemple, on peut conclure quant à l'existence d'une configuration $x \in \{0,1\}^G$ possédant la propriété des voisinages distincts. La Proposition 4.2 donne enfin un sous-décalage fortement apériodique sur G. □

En adaptant une preuve d'existence de coloration de graphe sans carré [AGHR02], on peut également obtenir l'effectivité du sous-décalage fortement apériodique.

**Théorème 4.6: [ABT18]**

Tout groupe dénombrable admet un sous-décalage effectif fortement apériodique.

## 4.4 Pistes d'approfondissement

### 4.4.1 Effectifs vs. sofiques

Des groupes de type fini échappent encore aux hypothèses des Théorèmes 4.2, 4.3 et 4.4. C'est le cas en particulier du groupe $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$, qui n'est pas moyennable (il possède $\mathbb{F}_2$ comme sous-groupe), a un seul bout en tant que produit direct et son problème du mot est décidable de manière immédiate. Barbieri et Sablik montrent que sur ce groupe $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ (et plus généralement pour tout produit direct de deux groupes non moyennables infinis), un sous-décalage effectif est aussi sofique [BS].

**Question 14**

Sur quels groupes tout sous-décalage effectif est-il sofique ?

Dans un travail non publié [AS16], nous définissons une version affaiblie des sous-décalages, les sous-décalages à ligne fixée, dans le plan hyperbolique discret $\mathbb{H}_2$. On s'autorise à fixer les lettres sur un horocycle, ou bien de manière équivalente à fixer les lettres sur une ligne $\mathbb{Z} \times \{i\}$ d'un graphe d'orbite de substitution. En conséquence on conserve l'invariance par translation mais on perd le caractère fermé de l'ensemble des configurations. Par analogie avec les sous-décalages, on définit les classes de SFT, sofiques et effectifs. Dans ce contexte simplifié, on montre que les sous-décalages à ligne fixée effectifs sont sofiques dans le plan hyperbolique discret $\mathbb{H}_2$ [AS16]. Pouvoir fixer une ligne permet d'initialiser des calculs de machines de Turing sans avoir recours à une structure hiérarchique. On utilise également une astuce permettant de compresser sur une ligne d'un graphe d'orbite tout le contenu du demi-plan supérieur que cette ligne définit (voir la Figure 31). Avec cette technique d'encodage dyadique, on peut transformer un SFT $X \subset A_2^{\mathbb{H}}$ en un autre SFT $\widetilde{X} \subset (A \times A)_2^{\mathbb{H}}$ tel que toute configuration $\tilde{x}$ de $\widetilde{X}$ vérifie que $\pi_1(\tilde{x}) = x \in X$, et une ligne $\mathbb{Z} \times \{i_0\}$ de $\tilde{x}$ contient toutes les lignes $\mathbb{Z} \times \{i\}$ avec $i \geq i_0$ au-dessus d'elle.

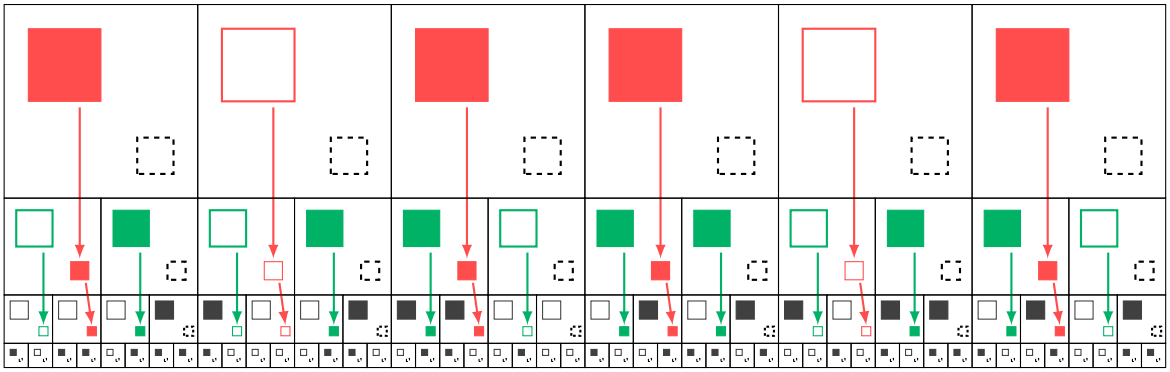


FIGURE 31 – Encodage dyadique d'un sous-décalage $X \subset \{\square, \blacksquare\}^{\mathbb{H}_2}$. Les couleurs ajoutées aux deux lettres de l'alphabet permettent de visualiser la répartition de l'information sur une ligne donnée.

Reprenons trois éléments présentés dans ce manuscrit : l'encodage dyadique défini dans [AS16], le Robinson hyperbolique de [GS10] présenté dans les Parties 2.3.2 et 2.3.3, et le groupe de surface $S_2$ interprété comme un graphe d'orbite de substitution dans la Partie 3.3.1 : peut-on combiner toutes ces observations pour montrer que tout décalage effectif est sofique sur $S_2$ ?

**Question 15**

Est-ce que tout sous-décalage effectif est sofique sur le groupe de surface $S_2$ ?

### 4.4.2 Constructions de sous-décalages à l'aide du LLL

Dans [ABT18] nous utilisons le lemme local de Lovász pour démontrer l'existence d'un SFT effectif fortement apériodique sur tout groupe infini dénombrable. Ce n'est pas la première fois que cet outil est utilisé en dynamique symbolique. L'article [Mil12] par exemple contient une condition générale pour montrer qu'un sous-décalage 1D est non vide : il suffit que les tailles des motifs interdits qui le définissent vérifient une certaine condition de sommabilité. Cette condition est en fait similaire à celle du Lemme 4.4, et on peut unifier ces deux résultats en donnant une version plus générale du LLL.

Soit $X \subset A^G$ un sous-décalage défini par un ensemble de motifs interdits F. On regroupe les motifs interdits de F avec le même support, c'est-à-dire qu'on écrit $F = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, avec $S_n$ un sous-ensemble fini de G et $f_n \in A^{S_n}$. On note $\gamma_\ell := \sharp\{m \mid |S_m| = \ell\}$ l'ensemble des indices $m$ tels que le support $S_m$ est de taille $\ell$. L'entier $\gamma_\ell$ est donc le nombre de supports de taille $\ell$ parmi $\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

**Lemme 4.5**

Soit $X \subset A^G$ un sous-décalage défini par un ensemble de motifs interdits $\mathscr{F} := \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, avec $f_n \in \mathscr{A}^{S_n}$. S'il existe $\kappa \in [0,1[$ et $\phi : \mathbb{N} \to [0,\kappa]$ tels que

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}} \gamma_\ell \ell \phi(\ell) \leq \kappa \frac{1 + \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{\log_{|A|} \phi(m)}{m}}{-\log_{|A|}(1-\kappa)}, \qquad (\clubsuit)$$

alors le sous-décalage X est non vide.

La démonstration, qui provient d'un travail avec Pierre Guillon, est purement calculatoire : vérifier la condition (♣) implique de vérifier également les hypothèses du Lemme 4.4. En choisis-

sant $\phi(\ell) := |A|^{-\kappa\ell}$, alors la sommabilité de la série à gauche est garantie. Pour pouvoir appliquer le Lemme 4.5, il faut en revanche être capable de majorer assez finement cette série. La définition des sous-décalages par motifs interdits est plutôt souple, au sens où il n'y a pas d'unique ensemble de motifs interdits qui définit un sous-décalage donné. En comprenant à quel point le choix de l'ensemble des motifs interdits est flexible, on pourra certainement comprendre quelles sont les limitations à l'application de LLL.

Si le groupe G est moyennable, on peut adapter la preuve du Théorème 4.5 pour obtenir un sous-décalage fortement apériodique d'entropie positive arbitraire [Ber19, Théorème 1.3]. Cet exemple suggère que d'autres propriétés de sous-décalages peuvent s'exprimer de manière à pouvoir appliquer le LLL.

**Question 16**

Pour quels types de sous-décalages peut-on utiliser le LLL?

# 5 Perspectives

## Sommaire


**4.1 Notions de sous-décalage effectif . . . 57**
**4.2 Effectifs vs. sofiques . . . 58**
4.2.1 Une généralisation du sous-décalage miroir . . . 59
4.2.2 Groupes avec au moins deux bouts . . . 60
4.2.3 Groupes avec problème du mot indécidable . . . 61
**4.3 Forte apériodicité : lemme local de Lovász . . . 62**
4.3.1 Le lemme local de Lovász . . . 62
4.3.2 Une version pour les sous-décalages . . . 62
4.3.3 Application : forte apériodicité . . . 63
**4.4 Pistes d'approfondissement . . . 64**
4.4.1 Effectifs vs. sofiques . . . 64
4.4.2 Constructions de sous-décalages à l'aide du LLL . . . 65


Ce chapitre présente un projet de recherche à moyen et long termes pour les années à venir. Il s'inscrit dans une perspective plus longue que les Parties 2.4, 3.4 et 4.4, qui contiennent des pistes à explorer de manière plus immédiate. Dans la Partie 5.1, je propose d'approfondir les méthodes d'investigation présentées dans les précédents chapitres de ce mémoire, avec l'objectif constant de comprendre les SFT sur des structures toujours plus variées. En effet on semble loin d'avoir épuisé le potentiel de ces méthodes, comme en atteste la richesse des résultats récents et des questions qui en découlent.

La Partie 5.2 présente quant à elle une nouvelle direction de recherche, résolument tournée vers une approche combinatoire des SFT : l'étude du modèle des dimères sur des groupes de type fini. Ce modèle est déjà très bien compris pour une classe assez large de graphes qui englobe les graphes planaires. À la lumière de tous les éléments présentés dans ce manuscrit, pourrait-on aller plus loin et par exemple résoudre le modèle des dimères sur $\mathrm{BS}(1,3)$ ?

## 5.1 Structures codées par règles locales dans des groupes de type fini

Les preuves d'indécidabilité du problème du domino sur des groupes, lorsqu'elles ne reposent pas uniquement sur une propriété d'hérédité, s'appuient souvent sur le fait de réussir à exhiber une grille comme sous-structure du groupe définissable par règles locales [BS18, Jea15c]. Dans l'article [ABM19] nous proposons une approche plus générale : on peut chercher à faire apparaître des graphes d'orbites de substitution, sans se limiter au cas de la grille $\mathbb{Z}^2$. Je présente ici trois groupes ou classes de groupes auxquels je m'intéresse dans cette nouvelle optique.

Le premier groupe est le groupe du falotier (Partie 5.1.1). Contrairement à tous les exemples dont il a été question jusqu'ici, ce groupe n'est pas de présentation finie. Cependant la structure de l'un de ses graphes de Cayley est particulièrement bien comprise et des résultats encourageants ont récemment été obtenus [Coh20, BS20], dans le sens où l'on sait désormais résoudre des versions faibles du problème de l'existence d'un SFT apériodique et du problème du domino.

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 2 et la Partie 3.2, les groupes de Baumslag-Solitar forment une classe de groupes sur lesquels les SFT sont relativement bien compris. Je m'intéresse ensuite à deux variations autour des ces groupes : le groupe de Higman d'une part (Partie 5.1.2), apparu en 1951 comme exemple de groupe de présentation finie ne possédant pas de sous-groupe normal d'indice fini [Hig51a], et les groupes *mille-feuille* d'autre part (Partie 5.1.3), que l'on définit en modifiant la relation constitutive de $\mathrm{BS}(m,n)$ et dont je n'ai pas trouvé trace dans la littérature.

Le groupe H de Higman est défini à partir de plusieurs copies du groupe $\mathrm{BS}(1,2)$ combinées entre elles par plusieurs opérations de produits amalgamés. J'aimerais comprendre comment interagissent les différentes structures $\mathrm{BS}(1,2)$ qui forment ce groupe, par exemple en trouvant comment à partir d'un SFT fortement apériodique sur $\mathrm{BS}(1,2)$ on pourrait en construire un sur H.

Dans le groupe mille-feuille, la structure d'apparence substitutive des $\mathrm{BS}(m,n)$, où l'information circule le long d'une direction privilégiée selon le générateur $t$, est remplacée par une version déformée, où la direction privilégiée n'est plus $t$ mais $ta^n$ (« en diagonale »). Il semble légitime de se demander si on peut transposer l'encodage d'orbites de fonctions affines par morceaux [Kar07, AK13, ABM19] à cette classe de groupes.

### 5.1.1 Le groupe du falotier

Le groupe du falotier $\mathrm{L}_2$ (appelé habituellement *lamplighter group* ou groupe de l'allumeur de réverbères dans la littérature) constitue un exemple classique en théorie des groupe, dont on trouvera une présentation détaillée dans [Mei08, Chapitre 8]. Il s'agit du groupe à deux générateurs de présentation infinie :

$$\mathrm{L}_2 := \langle a, t \mid a^2, \left(at^n a^{-1} t^{-n}\right)^2, n \in \mathbb{Z} \rangle.$$

On peut interpréter ce groupe comme représentant l'action d'un falotier (allumeur de réverbère) qui parcourt une rue infinie $\mathbb{Z}$ avec un réverbère sur chaque entier $i \in \mathbb{Z}$. Un réverbère peut être allumé ou éteint. Le générateur $a$ représente l'action du falotier sur un réverbère (son état passe d'allumé à éteint ou inversement) et donc $a^2 = 1_{\mathrm{L}_2}$. Le générateur $t$ correspond à un déplacement vers la droite du falotier (il passe au réverbère suivant). Avec cette interprétation visuelle, le mot $\left(at^n a^{-1} t^{-n}\right)^2$ représente bien l'identité, car en répétant deux fois la suite d'actions *(changer l'état d'un réverbère en position i/se rendre en position i + n/changer l'état du réverbère en position i + n/retourner en position i)* on retourne bien dans l'état initial. Un élément du groupe $g$ représenté par un mot $w \in \{a, a^{-1}, t, t^{-1}\}^*$ correspond à la configuration obtenue en appliquant successivement les effets des lettres $w_1, \dots, w_{|w|}$ à partir de la configuration $1_{\mathrm{L}_2}$ où le falotier est en position $0 \in \mathbb{Z}$ et tous les réverbères sont éteints. Les éléments du groupe représentent donc des configurations $(k, r) \in \mathbb{Z} \times \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ à support fini : l'entier $k \in \mathbb{Z}$ représente la position du falotier, et la suite $(r_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ l'état des réverbères, sachant que seul un nombre fini (mais non borné) d'entre eux est allumé.

Le groupe $\mathrm{L}_2$ est un exemple de produit en couronnes restreint (une forme particulière de produit semi-direct), et constitue un exemple important de groupe de type fini résoluble, donc moyennable, mais pas virtuellement nilpotent, donc à croissance exponentielle.

Cohen définit dans [Coh20] un SFT $\mathrm{X} \subset \{0,1\}^{\mathrm{L}_2}$, appelé *conformist subshift*. Pour définir ce SFT, on utilise un support fini $\mathrm{S} \subset \mathrm{L}_2$ bien choisi contenant l'identité $1_{\mathrm{L}_2}$. On impose le fait que chaque configuration $x \in \mathrm{X}$ et que pour tout $g \in \mathrm{L}_2$, la lettre $x_g$ est la même que celle qui est majoritaire dans le motif $x_{g\mathrm{S}}$ .

**Théorème 5.1: [Coh20]**

Le groupe du falotier $\mathrm{L}_2$ admet un SFT faiblement apériodique.

Cohen démontre également que ce SFT n'est pas fortement apériodique. La question de l'existence d'un SFT fortement apériodique sur $\mathrm{L}_2$ est en conséquence toujours ouverte.

**Question 17**

Le groupe du falotier $L_2$ admet-il des SFT fortement apériodiques ?

Le graphe de Cayley $\mathtt{Cay}(L_2, \{a, at\})$ de $L_2$ s'avère être le graphe de Diestel-Leader $DL(2,2,)$ [Woe05], et se trouve à ce titre bien compris. On peut le visualiser comme un objet en trois dimensions, dont la structure fait apparaître deux arbres ternaires tête-bêche (voir la Figure 32).

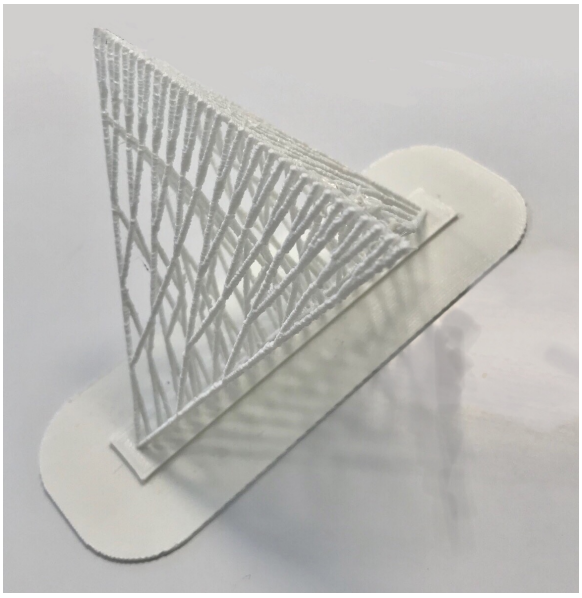


FIGURE 32 – Une version réalisée à l'imprimante 3D du graphe de Cayley $\mathtt{Cay}(L_2, \{a, at\})$ (conception du modèle Laurent Bartholdi, impression Michaël Rao).

Dans [BS20] les auteurs mettent à profit cette correspondance pour démontrer l'indécidabilité du problème du domino dans sa variante à origine fixée (appelée *seeded domino problem* dans l'article).

**Théorème 5.2: [BS20]**

Le problème du domino à origine fixée est indécidable sur $L_2$.

On ne connaît en revanche pas le statut du problème du domino sur $L_2$ sans la contrainte d'origine fixée, même si l'indécidabilité est soupçonnée par les auteurs.

**Conjecture 5: [BS20]**

Le problème du domino est indécidable sur le groupe du falotier $L_2$ .

### 5.1.2 Le groupe de Higman

Le groupe de Higman est le groupe de présentation finie

$$H := \langle a, b, c, d \mid ba = ab^2, cb = bc^2, dc = cd^2, ad = da^2 \rangle.$$

Comme il possède $BS(1,2)$ comme sous-groupe, il hérite automatiquement de l'indécidabilité du problème du domino. Pour la même raison, on peut également construire aisément des SFT faiblement apériodiques ; il suffit pour cela d'interdire dans H les motifs interdits d'un SFT fortement apériodique sur $BS(1,2)$. La question de l'existence d'un SFT fortement apériodique reste en revanche ouverte à ma connaissance.

**Question 18**

Le groupe de Higman H admet-il un SFT fortement apériodique ?

Le groupe de Higman est l'un des candidats actuels pour montrer l'existence d'un groupe qui n'est pas sofique (attention, la notion de groupe sofique n'a, à part l'étymologie du terme, rien à voir avec les sous-décalages sofiques). En particulier, on sait que ce groupe n'est pas moyennable. On sait également que son problème du mot est décidable (il est même résoluble en temps polynomial [DLU12]). En utilisant l'encodage dyadique défini dans [AS16] et le SFT de Robinson sur $\mathrm{BS}(1,n)$ présenté dans la Partie 2.3.2, on peut espérer aboutir à une construction montrant que tous les effectifs sur H sont aussi sofiques.

**Question 19**

Existe-il des décalages effectifs non sofiques sur le groupe de Higman H ?

### 5.1.3 Les groupes *mille-feuille*

En déplaçant une puissance dans la relation définissant les groupes de Baumslag-Solitar $\mathrm{BS}(m,n)$, on définit les groupes *mille-feuille*, qui sont les groupes de présentation

$$\mathrm{M}_{m,n} := \langle a, t \mid at^m = ta^n \rangle.$$

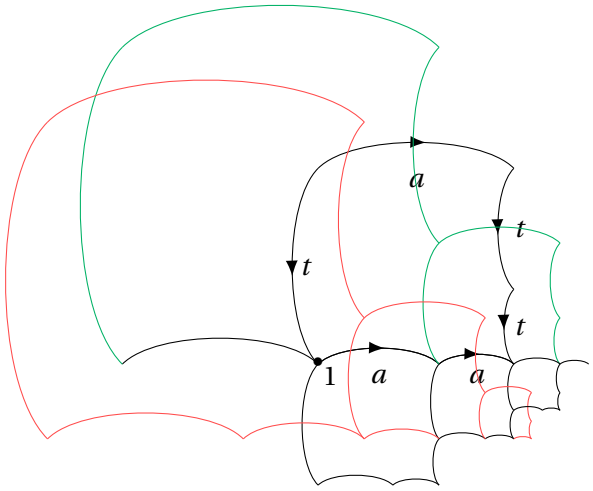



FIGURE 33 – Une partie du graphe de Cayley du groupe mille-feuille $\mathrm{M}_{2,2}$.

Pour $m = 1$, on retrouve les groupes de Baumslag-Solitar résolubles $\mathrm{BS}(1,n)$, pour les lesquels on sait que le problème du Domino est indécidable [AK13] et qui admettent des SFT fortement apériodiques [EM20]. La compréhension de ces deux problèmes pour les $\mathrm{BS}(1,n)$ repose en grande partie sur l'existence d'un isomorphisme $\Phi$ entre $\mathrm{BS}(1,n)$ et le produit semi-direct $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}] \rtimes_f \mathbb{Z}$ défini dans [AS20]. En tant que groupes à un relateur, les $\mathrm{M}_{m,n}$ peuvent, grâce au *Freiheitssatz* de Magnus [LS01, Chapitre II.6], s'écrire comme une extension HNN.

**Question 20**

Peut-on exploiter l'écriture du groupe $\mathrm{M}_{m,n}$ comme extension HNN ?

En particulier, on peut espérer généraliser la technique utilisée pour les groupes de Baumslag-Solitar $\mathrm{BS}(m,n)$ dans [AK13] pour à la fois construire des SFT apériodiques et prouver l'indécidabilité du problème du domino.

**Question 21**

Le groupe $M_{m,n}$ admet-il des SFT fortement apériodiques ? A-t-il un problème du domino indécidable ?

## 5.2 Modèle des dimères

### 5.2.1 Généralités sur le modèle des dimères

Combien y a-t-il de façons $N(m,n)$ de paver un échiquier de forme rectangle $m \times n$ avec des dominos ? La réponse à cette question, pas aussi simple qu'il pourrait sembler, a été donnée par Kasteleyn [Kas61] et Temperley et Fisher [TF61] – l'un côté soviétique, les autres côté occidental – en utilisant des méthodes différentes.

$$N(m,n) = 2^{\frac{mn}{2}} \prod_{k=1}^{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \prod_{\ell=1}^{n} \left( \cos^2\left(\frac{\pi k}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi \ell}{n+1}\right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

De cette formule et d'une bonne propriété de symétrie du modèle des dimères, on déduit une formule asymptotique qui nous donne notamment l'entropie de ce modèle.

Le modèle des dimères est à la croisée de plusieurs domaines : combinatoire, physique statistique et dynamique symbolique. Il est plutôt bien compris lorsque l'on dispose des dominos sur une grille rectangulaire ou infinie (que l'on peut voir comme partie ou tout du graphe de Cayley du groupe $\mathbb{Z}^2$ avec sa présentation usuelle $\langle a, b \mid ab = ba \rangle$).

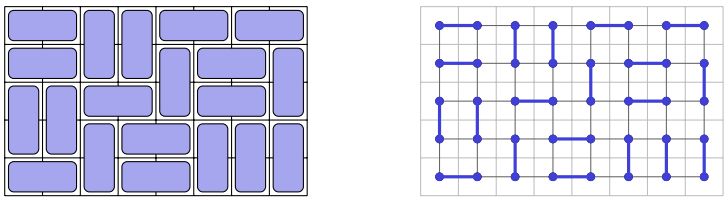


FIGURE 34 – Exemple de pavage par dominos et son équivalent comme couplage parfait.

Au formalisme avec des dominos recouvrant une grille, on préférera son analogue dans le dual de la grille (qui se trouve être la grille elle-même) : les cellules de la grille deviennent des sommets, les dominos des arêtes et un pavage par domino un couplage parfait. Cette représentation possède l'avantage de se généraliser plus facilement à d'autres graphes. On peut ainsi définir un modèle des dimères sur n'importe quel graphe infini biparti et ensuite chercher à comptabiliser le nombre de couplages parfaits d'une part, et comprendre la structure des ensembles de pavages possibles d'un sous-graphe fini d'autre part. Pour le comptage, des résultats sont connus essentiellement dans le cas de graphes planaires [Ken98], ou lorsque le graphe ne contient pas le graphe biparti complet $K_{3,3}$ comme *matching minor* : on peut notamment calculer le nombre de couplages parfaits d'un sous-graphe fini fixé en temps polynomial [LP09]. Ce résultat ne donne pas pour autant de formule close ; il exprime le fait que dans ce cas précis, un calcul de permanent peut être transformé en calcul de déterminant (de Pfaffien pour être exact), ce qui est faisable en temps polynomial grâce au pivot de Gauss.

### 5.2.2 Cas des groupes $BS(1,n)$

Mon objectif est de comprendre ce modèle des dimères pour d'autres groupes de type fini que $\mathbb{Z}^2$, notamment en ce qui concerne les aspects structurels. Le graphe de Cayley de $BS(1,2k+1)$

avec sa présentation usuelle est biparti. De plus il ne possède pas de *matching minor* isomorphe à $K_{3,3}$, même si ce dernier y apparaît comme mineur. Pour simplifier on ne s'intéresse qu'à $\mathrm{BS}(1,3)$.

$$\mathrm{BS}(1,3) := \langle a, t \mid at = ta^3 \rangle.$$

**Question 22**

Comment caractériser les parties finies de $\mathrm{BS}(1,3)$ pavables par domino ?

Il est possible de définir une opération de *flip* qui est un analogue du flip bidimensionnel, et il me semble à portée de démontrer la flip-connexité de l'espace des pavages possibles d'une forme finie fixée.

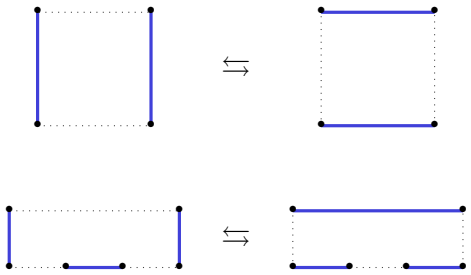


FIGURE 35 – Deux opérations de flips, en haut pour la grille $\mathbb{Z}^2$, en bas pour le groupe $\mathrm{BS}(1,3)$.

**Question 23**

L'ensemble des pavages par domino d'une partie finie de $\mathrm{BS}(1,3)$ est-elle flip-connexe ?

### 5.2.3 Groupes à un relateur et groupes de surface

Comme un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle impair, on peut définir un ensemble de flips pour tout groupe dont le graphe de Cayley est biparti. Reste à comprendre comment ces flips agissent dans leur ensemble sur l'espace des pavages d'une partie finie fixée. On peut se poser la question en toute généralité sur un groupe de type fini, mais comme autant d'opérations de flip que de relateurs sont nécessaires, il semble pertinent de se restreindre dans un premier temps aux groupes à un seul relateur.

**Question 24**

Quels groupes à un seul relateur possèdent la propriété de flip-connexité ?

Une généralisation du modèle des dimères consiste à remplacer les dominos horizontaux et verticaux par deux rectangles de tailles $1 \times \ell$ et $k \times 1$. On parle dans ce cas de pavages par des barres. Pour $\mathbb{Z}^2$ et si la forme à paver est un polygone, alors il existe un algorithme extrêmement efficace pour trouver, le cas échéant, un pavage par barres d'un polygone [KK92]. Le problème devient NP-complet pour une forme arbitraire, notamment s'il s'agit d'un polygone avec des trous [BNRR95]. Il est par contre remarquable que le même problème sur le groupe de surface $S_2$ devient polynomial [BMS99] : pour une fois, remplacer $\mathbb{Z}^2$ par un groupe non abélien facilite les choses !

**Question 25**

Sur quels groupes le problème de pavages par des barres est-il résoluble en temps polynomial ?

De part leurs propriétés algorithmiques fortes, les groupes hyperboliques en général sont des candidats naturels pour généraliser l'algorithme présenté dans [BMS99].

# Bibliographie


[AB09] Sanjeev ARORA et Boaz BARAK : *Computational Complexity : A Modern Approach*. Cambridge University Press, 2009.

[ABJ18] Nathalie AUBRUN, Sebastián BARBIERI et Emmanuel JEANDEL : *About the Domino Problem for Subshifts on Groups*, pages 331–389. Springer International Publishing, 2018.

[ABM18] Nathalie AUBRUN, Sebastián BARBIERI et Etienne MOUTOT : The domino problem is undecidable on surface groups. `https://arxiv.org/abs/1811.08420`, 2018.

[ABM19] Nathalie AUBRUN, Sebastián BARBIERI et Etienne MOUTOT : The domino problem is undecidable on surface groups. *In MFCS2019 44th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, Aachen, Germany, août 2019.

[ABS17] Nathalie AUBRUN, Sebastián BARBIERI et Mathieu SABLIK : A notion of effectiveness for subshifts on finitely generated groups. *Theoretical Computer Science*, 661:35–55, 2017.

[ABT18] Nathalie AUBRUN, Sebastián BARBIERI et Stéphan THOMASSÉ : Realization of aperiodic subshifts and uniform densities in groups. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 13(1): 107–129, nov 2018.

[AES20] Nathalie AUBRUN, Julien ESNAY et Mathieu SABLIK : Domino Problem Under Horizontal Constraints. *In* Christophe PAUL et Markus BLÄSER, éditeurs : *37th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2020)*, Dagstuhl, Germany, 2020.

[AGHR02] Noga ALON, Jaroslaw GRYTCZUK, Mariusz HALUSZCZAK et Oliver RIORDAN : Nonrepetitive colorings of graphs. *Random Struct. Algorithms*, 21(3-4):336–346, 2002.

[AK13] Nathalie AUBRUN et Jarkko KARI : Tiling problems on baumslag-solitar groups. *In* Turlough NEARY et Matthew COOK, éditeurs : *Proceedings Machines, Computations and Universality 2013, Zürich, Switzerland, 9/09/2013 - 11/09/2013*, volume 128 de *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pages 35–46. Open Publishing Association, 2013.

[AS08] Noga ALON et Joel H. SPENCER : *The probabilistic method*. Wiley, 2008.

[AS13] Nathalie AUBRUN et Mathieu SABLIK : Simulation of Effective Subshifts by Two-dimensional Subshifts of Finite Type. *Acta Applicandae Mathematicae*, 126(1):35–63, 2013.

[AS16] Nathalie AUBRUN et Mathieu SABLIK : Row-constrained effective sets of colourings in the 2-fold horocyclic tessellations of $\mathbb{H}^2$ are sofic. `https://arxiv.org/abs/1602.04061`, 2016.

[AS20] Nathalie AUBRUN et Michael SCHRAUDNER : Tilings of the hyperbolic plane of substitutive origin as subshifts of finite type on baumslag-solitar groups $\mathrm{BS}(1,n)$. `https://arxiv.org/abs/2012.11037`, 2020.

[Bar20] Laurent BARTHOLDI : Monadic second-order logic and the Domino problem on self-similar graphs. `https://arxiv.org/abs/2011.02735`, 2020.

[Ber64] Robert BERGER : *The Undecidability of the Domino Problem*. Thèse de doctorat, Harvard University, 1964.

[Ber66] Robert BERGER : *The Undecidability of the Domino Problem*. American Mathematical Society, 1966.

[Ber19] Anton BERNSHTEYN : Building large free subshifts using the Local Lemma. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 2019.

[Berar] Anton BERNSHTEYN : A short proof of Bernoulli disjointness via the Local Lemma. *Proceedings of the American Mathematical Society*, to appear.

[BMS99] Danièle BEAUQUIER, David E. MULLER et Paul E. SCHUPP : The bar problem – a simple tiling problem which is NP-complete on the euclidean tessellation by squares but which is polynomial time on the hyperbolic tessellations by $4g$-gons, $g \geq 2$. *Contemporary Mathematics*, 250:29–36, 1999.

[BNRR95] Danièle BEAUQUIER, Maurice NIVAT, Eric RÉMILA et Mike ROBSON : Tiling figures of the plane with two bars. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 5(1):1–25, mars 1995.

[Boo59] William W. BOONE : The word problem. *Annals of mathematics*, 70:207–265, 1959.

[BS] Sebastián BARBIERI et Mathieu SABLIK : personal communication.

[BS62] Gilbert BAUMSLAG et Donald SOLITAR : Some two-generator one-relator non-hopfian groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68(3):199–201, 05 1962.

[BS16] Sebastián BARBIERI et Mathieu SABLIK : The Domino Problem for Self-similar Structures. *In* Arnold BECKMANN, Laurent BIENVENU et Nataša JONOSKA, éditeurs : *Pursuit of the Universal*, pages 205–214, Cham, 2016. Springer International Publishing.

[BS18] Alexis BALLIER et Maya STEIN : The Domino problem on groups of polynomial growth. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 12(1):93–105, mars 2018.

[BS19] Sebastián BARBIERI et Mathieu SABLIK : A generalization of the simulation theorem for semidirect products. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 39(12):3185–3206, 2019.

[BS20] Laurent BARTHOLDI et Ville SALO : Simulations and the Lamplighter group. `https://arxiv.org/abs/2010.14299`, 2020.

[BW92] Jonathan BLOCK et Shmuel WEINBERGER : Aperiodic tilings, positive scalar curvature, and amenability of spaces. *Journal of the American Mathematical Society*, 5(4):907–918, 1992.

[CGS17] David Bruce COHEN et Chaim GOODMAN-STRAUSS : Strongly aperiodic subshifts on surface groups. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 11(3):1041–1059, 2017.

[CGSR17] David Bruce COHEN, Chaim GOODMAN-STRAUSS et Yo'av RIECK : Strongly aperiodic subshifts of finite type on hyperbolic groups. `https://arxiv.org/abs/1706.01387`, 2017.

[CK96] Karel CULIK et Jarkko KARI : *An aperiodic set of Wang cubes*, pages 675–686. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1996.

[Coh17] David Bruce COHEN : The large scale geometry of strongly aperiodic subshifts of finite type. *Advances in Mathematics*, 308:599 – 626, 2017.

[Coh20] David COHEN : Lamplighters admit weakly aperiodic SFTs. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 14(4):1241–1252, octobre 2020.

[CP15] David CARROLL et Andrew PENLAND : Periodic points on shifts of finite type and commensurability invariants of groups. *New York Journal of Mathematics*, 21:811–822, 2015.

[Die04] Reinhard DIESTEL : A short proof of Halin's grid theorem. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 74:237–242, 2004.

[dlH00] Pierre de la HARPE : *Topics in Geometric Group Theory*. 09 2000.

[DLU12] Volker DIEKERT, Jürn LAUN et Alexander USHAKOV : Efficient algorithms for highly compressed data : the Word Problem in Higman's Group is in P. *International Journal of Algebra and Computation*, 22(08):1240008, décembre 2012.

[DR18] Julien DESTOMBES et Andrei ROMASHCHENKO : Resource-Bounded Kolmogorov Complexity Provides an Obstacle to Soficness of Multidimensional Shifts. `https://arxiv.org/abs/1805.03929`, 2018.

[DRS10] Bruno DURAND, Andrei ROMASHCHENKO et Alexander SHEN : *Effective Closed Subshifts in 1D Can Be Implemented in 2D*, pages 208–226. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.

[DY08] François DAHMANI et Asli YAMAN : Symbolic dynamics and relatively hyperbolic groups. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 2(2):165 – 184, 2008.

[Ele17] Gabor ELEK : On uniformly recurrent subgroups of finitely generated groups. `https://arxiv.org/abs/1702.01631`, 2017.

[EM20] Julien ESNAY et Etienne MOUTOT : Weakly and Strongly Aperiodic Subshifts of Finite Type on Baumslag-Solitar Groups. `https://arxiv.org/abs/2004.02534`, 2020.

[FM98] Benson FARB et Lee MOSHER : A rigidity theorem for the solvable Baumslag-Solitar groups. *Inventiones Mathematicae*, 131:419–451, 1998.

[GdlH90] Etienne GHYS et Pierre de la HARPE : *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[GJS09] Su GAO, Steve JACKSON et Brandon SEWARD : A coloring property for countable groups. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 147:579–592, 11 2009.

[GK72] Yu. Sh. GUREVICH et I. O. KORYAKOV : Remarks on Berger's paper on the Domino problem. *Siberian Mathematical Journal*, 13(2):319–321, 1972.

[GS10] Chaim GOODMAN-STRAUSS : A hierarchical strongly aperiodic set of tiles in the hyperbolic plane. *Theoretical Computer Science*, 411(7):1085 – 1093, 2010.

[GS18] Silvère GANGLOFF et Mathieu SABLIK : Simulation of minimal effective dynamical systems on the Cantor sets by minimal tridimensional subshifts of finite type. `https://arxiv.org/abs/1806.07799`, 2018.

[GW18] Eli GLASNER et Benjamin WEISS : On minimal actions of countable groups. `https://arxiv.org/abs/1801.03308`, 2018.

[Hig51a] Graham HIGMAN : A finitely generated infinite simple group. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-26(1):61–64, 01 1951.

[Hig51b] Graham HIGMAN : A finitely related group with an isomorphic proper factor group. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-26(1):59–61, 01 1951.

[HM38] Gustav HEDLUND et Marston MORSE : Symbolic dynamics. *American Journal of Mathematics*, 60(4):815–866, 1938.

[HM10] Michael HOCHMAN et Tom MEYEROVITCH : A characterization of the entropies of multidimensional shifts of finite type. *Annals of Mathematics*, 171(3):2011–2038, 2010.

[Hoc09] Michael HOCHMAN : On the Dynamics and Recursive Properties of Multidimensional Symbolic Systems. *Inventiones Mathematicae*, 176(1):131–167, 2009.

[Hoo66] Philip HOOPER : The undecidability of the Turing machine immortality problem. *The Journal of Symbolic Logic*, 31:219–234, 1966.

[Jea10] Emmanuel JEANDEL : The periodic Domino problem revisited. *Theoretical Computer Science*, 411(44):4010 – 4016, 2010.

[Jea15a] Emmanuel JEANDEL : Aperiodic subshifts of finite type on groups. `https://arxiv.org/abs/1501.06831`, 2015.

[Jea15b] Emmanuel JEANDEL : Aperiodic subshifts on polycyclic groups. `https://arxiv.org/abs/1510.02360`, 2015.

[Jea15c] Emmanuel JEANDEL : Translation-like actions and aperiodic subshifts on groups. `https://arxiv.org/abs/1508.06419`, 2015.

[JR12] Emmanuel JEANDEL et Nicolas ROLIN : Fixed Parameter Undecidability for Wang Tilesets. *In Proceedings 18th international workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems and 3rd international symposium Journées Automates Cellulaires, AUTOMATA & JAC 2012, La Marana, Corsica, September 19-21, 2012.*, pages 69–85, 2012.

[JV20] Emmanuel JEANDEL et Pascal VANIER : *The Undecidability of the Domino Problem*, pages 293–357. Springer International Publishing, Cham, 2020.

[Kar07] Jarkko KARI : The Tiling Problem Revisited. *In* Jérôme Olivier DURAND-LOSE et Maurice MARGENSTERN, éditeurs : *MCU*, volume 4664 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 72–79. Springer, 2007.

[Kas61] P.W. KASTELEYN : The statistics of dimers on a lattice : I. the number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica*, 27(12):1209 – 1225, 1961.

[Ken98] Richard KENYON : The planar dimer model with boundary : A survey. *In CRM Proceedings and Lecture Notes*, pages 307–328, 1998.

[KK92] C.laire KENYON et Richard KENYON : Tiling a polygon with rectangles. *In Proceedings., 33rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 610–619, 1992.

[KM13] Steve KASS et Kathleen MADDEN : A sufficient condition for non-soficness of higher-dimensional subshifts. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141:3803–3816, 2013.

[KM20] Jarkko KARI et Etienne MOUTOT : Decidability and Periodicity of Low Complexity Tilings. *In* Christophe PAUL et Markus BLÄSER, éditeurs : *37th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2020)*, volume 154 de *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 14 :1–14 :12, Dagstuhl, Germany, 2020. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik.

[KMW62] Andrew Seth KAHR, Edward F. MOORE et Hao WANG : Entscheidungsproblem reduced to the ∀∃∀ case. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 48(3):365–377, mars 1962.

[Lin84] Douglas A. LIND : The entropies of topological Markov shifts and a related class of algebraic integers. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 4(2):283–300, 1984.

[Lin04] Douglas LIND : Multi-dimensional symbolic dynamics, 2004.

[LM95] Douglas A. LIND et Brian MARCUS : *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, 1995.

[LP09] László LOVÁSZ et Michael D. PLUMMER : *Matching Theory*. American Mathematical Society, 2009.

[LS01] Roger C. LYNDON et Paul E. SCHUPP : *Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.

[Mag32] Wilhelm MAGNUS : Das identitätsproblem für gruppen mit einer definierenden relation. *Mathematische Annalen*, 106(1):295–307, décembre 1932.

[Mei08] John MEIER : *Groups, Graphs and Trees : An Introduction to the Geometry of Infinite Groups*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2008.

[Mil12] Joseph S. MILLER : Two notes on subshifts. *Proceedings of the American Mathematical Society*, (140):1617–1622, 2012.

[MN14] Michał MARCINKOWSKI et Piotr NOWAK : Aperiodic tilings of manifolds of intermediate growth. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 8(2):479–483, 2014.

[Moz89] Shahar MOZES : Tilings, substitution systems and dynamical systems generated by them. *Journal d'analyse mathématique (Jerusalem)*, 53:139–186, 1989.

[Nov54] P. S. NOVIKOV : On algorithmic unsolvability of the word problem. *Journal of Symbolic Logic*, 19(1):58–60, 1954.

[OP16] Nic ORMES et Ronnie PAVLOV : Extender sets and multidimensional subshifts. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 36(3):908–923, 2016.

[Pia08] Steven T. PIANTADOSI : Symbolic dynamics on free groups. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 20(3):725–738, 2008.

[PS15] Ronnie PAVLOV et Michael SCHRAUDNER : Entropies realizable by block gluing $\mathbb{Z}^d$ shifts of finite type. *Journal d'Analyse Mathématique*, 126(1):113–174, Apr 2015.

[Rob71] Raphael ROBINSON : Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones Mathematicae*, 12:177–209, 1971.

[Rob78] Raphael M. ROBINSON : Undecidable tiling problems in the hyperbolic plane. *Inventiones Mathematicae*, 44:159–264, 1978.

[Rog87] Hartley ROGERS : *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1987.

[Sal20] Ville SALO : Four heads are better than three. *In* Hector ZENIL, éditeur : *Cellular Automata and Discrete Complex Systems - 26th IFIP WG 1.5 International Workshop, AUTOMATA 2020, Stockholm, Sweden, August 10-12, 2020, Proceedings*, volume 12286 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 111–125. Springer, 2020.

[Sew14] Brandon SEWARD : Burnside's Problem, Spanning Trees and Tilings. *Geometry and Topology*, 18:179–210, 2014.

[SM20] Eduardo Alejandro SILVA MÜLLER : Subshifts en los grupos de Baumslag-Solitar solubles no-abelianos. Mémoire de D.E.A., Universidad de Chile, 2020.

[SS16] Mathieu SABLIK et Michael SCHRAUDNER : Algorithmic Complexity for the Realization of an Effective Subshift By a Sofic. *In* Ioannis CHATZIGIANNAKIS, Michael MITZENMACHER, Yuval RABANI et Davide SANGIORGI, éditeurs : *43rd International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2016)*, volume 55 de *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 110 :1–110 :14, Dagstuhl, Germany, 2016. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.

[SSU20] Ayse A. SAHIN, Michael SCHRAUDNER et Ilie UGARCOVICI : A strongly aperiodic shift of finite type for the discrete heisenberg group. `https://arxiv.org/abs/2009.07751`, 2020.

[Sta68] John R. STALLINGS : On torsion-free groups with infinitely many ends. *Annals of Mathematics*, 88(2):312–334, 1968.

[Swa69] Richard G. SWAN : Groups of cohomological dimension one. *Journal of Algebra*, 12(4): 585 – 610, 1969.

[TF61] H. N. V. TEMPERLEY et Michael E. FISHER : Dimer problem in statistical mechanics-an exact result. *The Philosophical Magazine : A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*, 6(68):1061–1063, 1961.

[Wan61] Hao WANG : Proving theorems by pattern recognition ii. *Bell System Technical Journal*, 40(1-3):1–41, 1961.

[Why99] Kevin WHYTE : Amenability, Bilipschitz equivalence, and the Von Neumann Conjecture. *Duke Mathematical Journal*, 99(1):93–112, 1999.

[Why01] Kevin WHYTE : The large scale geometry of the higher Baumslag-Solitar groups. *GAFA Geometric And Functional Analysis*, 11:1327–1343, 2001.

[Woe89] Wolfgang WOESS : Graphs and groups with tree-like properties. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 47(3):361 – 371, 1989.

[Woe05] Wolfgang WOESS : Lamplighters, Diestel–Leader Graphs, Random Walks, and Harmonic Functions. *Combinatorics, Probability and Computing*, 14(3):415–433, 2005.

# Index


apériodique
    faiblement apériodique, 15
    fortement apériodique, 15

configuration
    périodique, 15
    sur un graphe, 15
    sur un groupe, 13
conjugaison, 14
cylindre, 14

décalage plein, 14

fonction d'accumulation, 16
fonction parent, 16

graphe, 15
    graphe d'orbite, 18
    graphe de Cayley, 11
groupe
    groupe de présentation finie, 11
    groupe de type fini, 11
    groupe hyperbolique, 12
    groupe moyennable, 13
    groupe virtuellement libre, 12
    groupes commensurables, 12
    nombre de bouts d'un groupe, 13
    problème du mot d'un groupe, 11

morphisme, 14
motif
    motif sur un graphe, 15
    motif sur un groupe, 14

orbite
    orbite d'une configuration, 15
    orbite d'une substitution, 16

pavage, 16
problème du domino
    d'un graphe, 15
    d'un groupe, 14

quasi-isométrie, 12

sous-décalage (graphe), 15
    de type fini, 15
    plus proches voisins, 15
sous-décalage (groupe), 14
    de type fini, 14
    effectif, 14
    minimal, 15
    plus proches voisins, 14
    sofique, 14
stabilisateur, 15
substitution, 16
    substitution déterministe, 16
    substitution primitive, 16
    valeur propre dominante, 16
suite de Følner, 13
support d'un motif, 14

translation-like action, 12
tuile, 16
    σ-tuile, 17