



HAL
open science

Relation entre enseignement et recherche dans le travail documentaire des enseignants-chercheurs – cas de l’enseignement de la théorie des graphes

Theresia Tabchi

► To cite this version:

Theresia Tabchi. Relation entre enseignement et recherche dans le travail documentaire des enseignants-chercheurs – cas de l’enseignement de la théorie des graphes. Education. Université de Reims Champagne-Ardenne; Université Libanaise, 2020. Français. NNT: . tel-03429855

HAL Id: tel-03429855

<https://theses.hal.science/tel-03429855v1>

Submitted on 15 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES HUMAINES ET SOCIALES (555)

THÈSE EN CO-TUTELLE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ LIBANAISE

Discipline : DIDACTIQUE DE MATHÉMATIQUES

Et

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Discipline : Mathématiques Appliquées et Sciences Sociales

Spécialité : Didactique des mathématiques

Présentée et soutenue publiquement par

Theresia TABCHI

Le 15 décembre 2020

Relation entre enseignement et recherche dans le travail documentaire des enseignants-chercheurs – cas de l'enseignement de la théorie des graphes

Thèse dirigée par M. **Mohamad MEHDI**, Université Libanaise

Et par Mme **Cécile OUVRIER-BUFFET**, Université de Paris-Est Créteil

JURY

Mme Ghislaine GUEUDET ,	Professeur des Universités, Université de Bretagne Occidentale,	Présidente
Mme Cécile OUVRIER-BUFFET ,	Professeur des Universités, Université Paris-Est Créteil,	Co-Directrice
M. Mohamad MEHDI ,	Professeur des Universités, Université Libanaise,	Co-Directeur
M. Hussein SABRA ,	Maître de Conférences, Université de Reims Champagne-Ardenne,	Co-Encadrant
M. Carl WINSLØW ,	Professeur des Universités, Université de Copenhague,	Rapporteur
Mme Fairouz SARKIS ,	Professeur des Universités, Université Arabe Ouverte,	Examinatrice

Remerciements

Avec la fin de ma thèse, je souhaite exprimer ma reconnaissance envers celles et ceux qui m'ont soutenue tout au long de ce travail qui n'aurait pu être mené à bien sans leur support.

Il me tient à cœur de remercier tout d'abord Hussein Sabra, sans qui cette thèse n'aurait pu être ce qu'elle est. Merci Hussein pour m'avoir accompagnée pendant ce travail. Grâce à toi, ces années de recherche ont été extraordinairement formatrices, tant au niveau recherche qu'au niveau personnel. Merci pour ta disponibilité, ton ouverture, ton exigence, ton implication dans le travail, ta motivation, et ton soutien constant. Merci surtout pour ton amitié qui m'est aujourd'hui très précieuse.

Je remercie vivement ma directrice de thèse, Cécile Ouvrier-Buffer, pour toutes les heures qu'elle a consacrées à diriger cette recherche. Je la remercie pour toutes les discussions, les échanges et les conseils qu'elle m'a donnés.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse, M. Mohamad Mehdi, qui a toujours été d'une disponibilité et d'une qualité humaine remarquables. Je le remercie pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail de thèse.

Mes remerciements vont aussi à Mme Ghislaine Gueudet et à M. Carl Winsløw qui m'ont fait l'honneur de rapporter ce travail, et dont les rapports sont une source précieuse pour faire encore progresser ma réflexion. Merci à Mme Fairuz Sarkis d'avoir d'accepté de faire partie du jury.

Une partie de mes recherches s'est appuyée sur des interviews avec des enseignants-chercheurs. Je remercie, anonymement, les 11 enseignants-chercheurs, au Liban et en France, qui ont accepté de répondre à mes questions.

Je remercie Susanne et Hussein pour leur accueil toujours chaleureux et pour tous les bons moments que nous avons partagés ensemble lors de mes séjours à Reims.

Enfin, je tiens à remercier mes parents et mon frère pour leur infaillible support, Sam, Joe, et Rana pour leur amitié au quotidien, Sandra, Carine et Rasane pour leur soutien avant la soutenance, Elise pour la partie de cette expérience que nous avons partagée ensemble.

Relation entre enseignement et recherche dans le travail documentaire des enseignants-chercheurs – cas de l’enseignement de la théorie des graphes

Notre travail porte sur les pratiques d’enseignement des enseignants-chercheurs en mathématiques à l’université. Celles-ci admettent des spécificités : l’articulation entre les activités d’enseignement et de recherche en est un exemple. Nous cherchons à caractériser la place de l’activité de recherche dans les pratiques d’enseignement des enseignants-chercheurs. Nous avons fait le choix d’explorer cette thématique à partir de l’interaction avec les ressources pour l’enseignement de la théorie des graphes. Le choix de la théorie des graphes est lié au fait qu’elle s’inscrit dans le cadre des mathématiques « contemporaines », et qu’elle est enseignée dans un large spectre de formations au Liban comme en France. Notre méthodologie prend appui tout d’abord sur des entretiens avec des enseignants-chercheurs. Nous nous appuyons sur l’approche documentaire du didactique, en particulier le concept de schème d’utilisation de ressources pour caractériser leurs interactions avec des ressources issues de l’enseignement et de la recherche. Nous proposons par ailleurs une analyse de ressources conçues collectivement par des enseignants-chercheurs interviewés avec appui sur le concept de « connectivité », suivie par des observations de séances d’une enseignante-chercheuse, faisant partie des concepteurs des ressources analysées. Nous avons mis en évidence qu’une mise en regard des processus de conception des ressources et des processus de leur mise en œuvre nous permet de caractériser des différents facteurs qui impactent les pratiques des enseignants-chercheurs.

Mots clés en français : pratiques des enseignants-chercheurs, ressources, schèmes d’utilisation des ressources, invariants opératoires, connectivité, théorie des graphes.

Relationship between teaching and research in the documentary work of teachers-researchers – the case of teaching graph theory

Our work deals with the teaching practices of university mathematics professors. These concur specificities: the articulation between teaching and research is an example. We seek to characterize the research impact in the teaching practices at university. We have chosen to explore this theme through the lens of the interaction with resources for teaching graph theory. The choice of graph theory is due to the fact that it is a branch of mathematics that belongs to "contemporary" mathematics, and that is taught in a wide spectrum of university majors in Lebanon as in France. Our methodology first draws on interviews with university professors. We rely on the documentary approach, in particular the concept of the scheme of use of resources to characterize the interactions of university professors with resources issued from teaching and research. We also analyze resources designed collectively by some of the university professors interviewed using the concept of connectivity, followed by observations of sessions by a university professor, one of the designers of the resources analyzed. We have shown that a comparison of the processes of the design of resources and their implementation in class allows us to characterize the various factors that impact the practices of university professors.

Keywords: practices of teachers-researchers, resources, schemes of use of resources, operational invariants, connectivity, graph theory

Discipline : *MATHEMATIQUES APPLIQUEES ET SCIENCES SOCIALES*

Spécialité : Didactique des mathématiques

Université Libanaise
Sin-EI-Fil, Beyrouth – Liban

Université de Reims Champagne-Ardenne
CEREP - EA 4692
57 rue Pierre Taittinger – 51100 REIMS

Table des matières

Introduction générale	1
Chapitre I- Les pratiques des enseignants dans le supérieur : une approche par les ressources et le cas des mathématiques discrètes	3
I.1- Les pratiques des enseignants du supérieur dans les travaux en didactique : un champ à explorer.....	3
I.1.1- Une nécessité de recherches sur les pratiques des enseignants au Liban	4
I.1.2- Les recherches dans RDM sur les pratiques des enseignants depuis 1980 : évolution des problématiques, cadres théoriques et méthodologies.....	4
I.1.3- Travaux existants sur les pratiques des enseignants à une échelle plus large	7
I.1.4- Depuis 2016 : des réseaux et groupements de recherche sur l'enseignement des mathématiques au supérieur	10
I.2- La place et le rôle des ressources dans l'enseignement des mathématiques	11
I.3- Les mathématiques discrètes : un champ en pleine expansion, opportun pour l'étude des pratiques des enseignants-chercheurs au supérieur.....	12
I.4- Problématique, premiers questionnements et méthodologie générale.....	15
Chapitre II- Le cas de la théorie des graphes : présentation mathématique et choix théoriques ..	20
II.1- Apports théoriques	21
II.1.1- La théorie des champs conceptuels et la définition d'un concept par Vergnaud	21
II.1.2- Registres de représentation sémiotique : Objets mathématiques et représentations	21
II.1.3- Caractérisation des concepts et de leur statut en didactique des mathématiques	23
II.1.4- Concepts et registres de représentation sémiotique dans le cas de la théorie des graphes.....	24
II.2- La théorie des graphes et ses particularités pour notre étude	27
II.3- Sélection des ouvrages et choix effectués par les concepteurs	28
II.3.1- Présentation des ouvrages consultés	28
II.3.2- La théorie des graphes dans la recherche et l'enseignement, selon les auteurs des ouvrages consultés.....	30
II.3.3- Présentation des objectifs et des choix explicités par les auteurs des ouvrages consultés	32
II.4- Les problèmes de parcours	43
II.4.1- Parcours d'Euler : chemins et cycles	43
II.4.2- Parcours de Hamilton.....	52
II.4.3- Recherche du plus court chemin dans un graphe	59

II.5- Enjeux épistémologiques et didactiques dans l'étude des pratiques d'enseignement de la théorie des graphes au supérieur	70
Chapitre III- Cadre théorique.....	75
III.1- Evolution du concept de « schème » dans les travaux de Vergnaud	76
III.1.1- La notion de schème en 1991 : prise en considération de l'activité d'apprentissage de notions mathématiques	76
III.1.2- La notion de schème en 1998 : prise en considération de l'activité d'apprentissage et de l'activité professionnelle.	77
III.1.3- La notion de schème en 2011 : prise en considération des différentes formes de l'activité humaine.....	79
III.1.4- L'évolution de la notion de schème et de ses composantes dans les travaux de Vergnaud....	81
III.1.5- Les composantes d'un schème dans notre étude	83
III.2- Approche documentaire	84
III.2.1- L'Approche instrumentale	84
III.2.2- L'Approche documentaire : prolongement de l'approche instrumentale	85
III.3- Théorie Anthropologique du Didactique	87
III.3.1- Institutions et rapports personnel et institutionnel au savoir	88
III.3.2- Praxéologies.....	88
III.4- Approche documentaire et concepts de la TAD mobilisés dans des travaux sur l'enseignement supérieur.....	89
III.4.1- L'approche documentaire pour l'étude des interactions des enseignants au supérieur avec les ressources	89
III.4.2- L'approche documentaire articulée avec la TAD pour l'étude des interactions des enseignants du post-secondaire avec les ressources	92
III.4.3- Considération et adaptations de concepts de l'approche documentaire.....	97
III.4.4- Adaptation des classes de situations pour le cas des enseignants-chercheurs	98
III.5- Analyse de la « qualité » des manuels : cohérence et connectivité	102
III.5.1- Établir des connexions pour la compréhension des notions en mathématiques	103
III.5.2- Approches horizontale et verticale pour l'analyse des manuels	104
III.5.3- Prise en considération des niveaux macro et micro dans l'analyse des ressources numériques	105
III.5.4- Développement de la notion de « connectivité » pour l'analyse des ressources numériques	106
III.5.5- Discussion.....	107
III.5.6- La « connectivité » dans les ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes	108

III.6- Conclusion et reformulation des questions de recherche.....	112
Chapitre IV- Méthodologie et analyse des données	113
IV.1- Analyse des entretiens	113
IV.1.1- Méthodologie de recueil de données	113
IV.1.2- Méthodologie d'analyse des entretiens.....	122
IV.1.3- Résultats des analyses des entretiens.....	136
IV.2- Analyse des ressources conçues collectivement.....	176
IV.2.1- Choix des ressources à analyser et articulations entre l'analyse des entretiens et l'analyse des ressources	176
IV.2.2- Description des ressources à analyser	178
IV.2.3- Méthodologie d'analyse des ressources	179
IV.2.4- Principaux résultats de l'analyse des contenus.....	184
IV.3- Analyse des observations de classe	189
IV.3.1- Méthodologie de recueil de données et description des séances observées	190
IV.3.2- Méthodologie d'analyse des observations de classe.....	192
IV.3.3- Principaux éléments de synthèse	194
IV.4- Résultats et discussions	206
V- Conclusion générale.....	215
V.1- Retour sur notre recherche	215
V.1.1- Comment les schèmes des enseignants-chercheurs (chercheurs en théorie des graphes) guident-ils leurs interactions avec les ressources dans / pour l'enseignement de la théorie des graphes ?.....	215
V.1.2- Dans quelle mesure le contexte institutionnel dans lequel un enseignant-chercheur enseigne influence-t-il ses interactions avec les ressources dans / pour l'enseignement de la théorie des graphes ?	218
V.1.3- Comment peut-on caractériser, par le prisme de la conception et l'usage des ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes, l'influence de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs sur leur enseignement dans ce même champ ?	219
V.2- Limites de l'étude.....	220
V.3- Développements théoriques et méthodologiques.....	222
V.4- Perspectives.....	223
Bibliographie.....	224
Annexes.....	232
Annexe 1- Parcours d'Euler, parcours de Hamilton, et plus courts chemins.....	233

Annexe 2- Présentation de la grille d’entretien avec les enseignants-chercheurs.....	255
Annexe 3 : Tableaux documents des enseignants-chercheurs	257
Annexe 4- Tableaux relatifs à l’étude des sous-buts, des ressources et des invariants opératoires recensés dans les tableaux documents	322
Annexe 5- Tableaux élaborés lors de l’analyse des contenus	358
Annexe 6- Contenus mis en œuvre par LQ lors des séances observées.....	381
Annexe 7- Guides des entretiens avec LQ avant et après les observations de classe	384

Introduction générale

Notre thèse porte principalement sur l'étude des pratiques d'enseignement des mathématiques au supérieur. Nous nous intéressons aux pratiques des enseignants à l'université. Nous considérons plus particulièrement le cas des enseignants-chercheurs. Nous donnons au mot « enseignant-chercheur », dans un premier temps, une acception générale : les personnes qui occupent des postes à l'université à deux volets : recherche et enseignement.

Pour définir ce que nous entendons par « pratiques des enseignants », nous nous appuyons dans un premier temps sur la définition donnée par Roditi (2011) :

« Les pratiques comprennent toujours au moins ce que les enseignants font d'observable et, selon les chercheurs, ce qu'ils disent et ce qu'ils pensent, ce qu'ils ressentent, ce qu'ils considèrent avoir fait, ce qu'ils prévoient de faire et ce qu'ils renoncent à faire, etc. » (Roditi, 2011, p. 42).

Tout en s'intéressant aux pratiques d'enseignement, nous prétendons caractériser les différents facteurs qui impactent ces pratiques (institutionnels, didactiques et épistémologiques). Nous attirons une attention particulière sur l'impact qu'une activité de recherche peut avoir sur les pratiques d'enseignement. Nous employons les termes pratiques des enseignants-chercheurs, pratiques d'enseignement et activité de recherche dans un sens précis tout au long du texte :

Nous utilisons « pratiques d'enseignement » et « pratiques des enseignants-chercheurs » pour désigner tout ce qui se rapporte au volet « enseignement » du métier de l'enseignant-chercheur, c'est-à-dire aux pratiques des enseignants dans le sens que leur confère Roditi (2011) dans la définition susmentionnée ; Nous utilisons le terme « activité de recherche » pour désigner tout ce qui se rapporte au volet « recherche » de son métier.

Notre étude portera un focus sur la place des mathématiques discrètes dans l'enseignement supérieur. Les mathématiques discrètes ont une importance épistémologique. C'est une branche peu explorée en didactique (Heinze, Anderson, & Reiss, 2004). Nous considérons les pratiques des enseignants-chercheurs particulièrement dans le champ des mathématiques discrètes, nous précisons ce choix plus loin dans le texte.

Les enseignants-chercheurs, dans différents aspects de leurs pratiques, interagissent avec des *ressources* diverses qu'ils peuvent avoir conçues eux-mêmes ou qui peuvent être conçues par des pairs. Ces ressources peuvent être issues de leur activité de recherche. Les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources peuvent être influencées par leur expérience personnelle (en recherche et en enseignement) ainsi que par des conditions et des contraintes institutionnelles relatives au contexte d'enseignement. Subséquemment, nous considérons que les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources constituent un prisme pour l'étude de leurs pratiques d'enseignement, et de l'influence de leur activité de recherche sur leur enseignement.

Cette étude constitue une contribution à des travaux émergents au niveau international et portant sur les pratiques des enseignants au supérieur (Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz, & Rasmussen, 2016).

Le premier chapitre comporte quatre sections. Nous commençons par une consultation de travaux qui existent sur les pratiques des enseignants au supérieur. La première section a pour objectif de

situer notre travail dans le paysage des travaux existants sur les pratiques des enseignants au supérieur. Elle porte sur les travaux consultés et sur les résultats qui émergent de cette consultation en rapport avec les pratiques d'enseignement des enseignants au supérieur, les conditions et contraintes qui les influencent, et les liens potentiels entre leur activité de recherche et leurs pratiques d'enseignement. Dans la deuxième section du chapitre, nous présentons la définition des « ressources » que nous retenons dans notre travail et les principaux enjeux d'interaction des enseignants-chercheurs avec les ressources. Nous consacrons la troisième section du chapitre à un état des lieux sur les mathématiques discrètes et à l'identification des caractéristiques de ce domaine mathématique qui font de lui un contexte opportun pour l'étude des pratiques des enseignants-chercheurs, ainsi que pour la caractérisation de la relation entre leur activité de recherche et leurs pratiques d'enseignement. Dans la quatrième section du chapitre, nous présentons les conclusions que nous tirons des deux premières sections qui nous amènent à formuler nos questions de recherche initiales.

Le deuxième chapitre porte sur une consultation des ouvrages destinés à l'enseignement de la théorie des graphes au supérieur. Cette consultation nous a permis de caractériser l'univers du possible au niveau des choix que les enseignants-chercheurs peuvent effectuer dans la conception de leur enseignement dans divers contextes institutionnels. Cette consultation nous a aussi permis de recenser les contenus mathématiques stabilisés dans l'enseignement supérieur en théorie des graphes et les variations aux niveaux des choix de ces contenus et des différents modes de présentations possibles de ces contenus.

Le troisième chapitre porte sur le cadre théorique que nous avons élaboré pour nourrir notre étude et qui nous a permis d'apporter plus de précision à nos questions de recherche. Pour la construction du cadre théorique, nous avons mobilisé des éléments qui nous permettent en premier lieu de caractériser les choix que les enseignants effectuent dans la conception de leur enseignement et dans sa mise en œuvre à travers leur interaction avec les ressources, ainsi que la façon dont ces enseignants-chercheurs mettent en œuvre les choix qu'ils énoncent dans la conception de ressources pour leur enseignement et dans la mobilisation des ressources conçues dans leur enseignement en classe.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons notre méthodologie générale de recherche qui consiste en trois étapes. La première consiste à réaliser des entretiens avec des enseignants-chercheurs, chercheurs en théorie des graphes, et les analyser afin de caractériser globalement leurs interactions avec les ressources et les liens potentiels entre leur activité de recherche et leurs pratiques d'enseignement, particulièrement l'influence de leur recherche sur leur enseignement. La deuxième étape consiste à analyser les contenus de ressources conçues par les enseignants-chercheurs pour leur enseignement de la théorie des graphes afin d'affiner les résultats des analyses des entretiens. La troisième étape consiste à effectuer des observations de classe d'une enseignante-chercheuse interviewée, qui est une des concepteurs des ressources analysées dans la deuxième étape. Cette étape nous a permis de mettre en perspective les résultats des deux premières étapes et de caractériser les écarts existant entre la conception et la planification de l'enseignement et la mise en œuvre effective en classe. Nous présentons aussi notre méthodologie de recueil de données pour les trois étapes de l'analyse, et les principaux résultats obtenus.

Dans la conclusion générale, nous proposons d'articuler les principaux résultats obtenus afin d'apporter des éléments de réponse à nos questions de recherche. Nous présentons de même les limites de cette étude, ainsi que quelques perspectives pour de futurs travaux.

Chapitre I- Les pratiques des enseignants dans le supérieur : une approche par les ressources et le cas des mathématiques discrètes

Nous présentons dans ce chapitre le contexte de ce travail ainsi que ses objectifs. Nous lançons à la fin de ce chapitre les premiers questionnements qui émergent à partir d'une caractérisation de nos objets d'étude.

Dans la première section de ce chapitre, nous situons notre travail dans le paysage des travaux existants sur les pratiques des enseignants au supérieur au Liban, en France, et au niveau international (objet de cette section). Dans la deuxième section, nous présentons les enjeux des interactions des enseignants avec les ressources et la définition des ressources que nous retenons dans notre travail. Dans la troisième section, nous présentons une justification du choix des mathématiques discrètes comme domaine mathématique propice pour notre étude. Et enfin, dans la quatrième section de ce chapitre, nous présentons la problématique émergeant des sections précédentes et annonçons la méthodologie utilisée dans notre recherche.

I.1- Les pratiques des enseignants du supérieur dans les travaux en didactique : un champ à explorer

Dans cette section, nous allons situer notre travail autour des pratiques des enseignants dans le paysage actuel des recherches en didactique, au Liban, en France, et à l'échelle internationale.

Nous commençons par une consultation des recherches autour des pratiques des enseignants, au Liban (§ I.1.1) et en France (§ I.1.2). Pour ce faire, nous avons fait le choix de consulter des publications de deux revues majeures dans ces deux pays respectivement : « *Lebanese Science Journal* »¹ (Journal Scientifique Libanais, LSJ) et « *Recherches en Didactique des Mathématiques* » (RDM). Nous considérons qu'une consultation des publications de ces deux revues peut nous renseigner sur les tendances et les avancées des recherches menées autour de cette thématique. Nous signalons que nous ne prétendons pas repérer de manière exhaustive tous les travaux portant sur les pratiques des enseignants au supérieur. Nous situons ensuite notre travail dans le paysage des travaux existants au niveau international sur les pratiques des enseignants au supérieur. Nous avons aussi consulté une étude de l'ICME² (Biza et al., 2016) qui dresse un bilan des travaux existants sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au supérieur (§ I.1.3). Nous avons également étudié les actes des conférences INDRUM (*International Network for Didactic Research in University Mathematics*). Nous y considérons particulièrement les travaux qui portent sur les pratiques des enseignants du supérieur (§ I.1.4).

¹ LSJ a été créé depuis vingt ans par Le Conseil National de la Recherche Scientifique de la République Libanaise (CNRS-L). Ce journal publie actuellement des articles qui relèvent de plusieurs domaines, entre autres les sciences et les sciences sociales. Il n'existe pas de revue au Liban qui diffuse des recherches en didactique des mathématiques ou en *math education*.

² *International Commission on Mathematical Instruction*

I.1.1- Une nécessité de recherches sur les pratiques des enseignants au Liban

Pour notre recensement des travaux existant sur les pratiques des enseignants au Liban, nous avons consulté les publications de la revue LSJ. Les articles sur le site de LSJ³ sont classés en fonction de leur spécialité. La revue consultée publie des articles relevant de plusieurs domaines. Nous avons consulté tous les articles en lien avec les sciences de l'homme et de la société qui constituent 2% des publications de LSJ (Lebanese Science Journal, 2020). Le seul article repéré portant sur les enseignants étudie la différence entre les perceptions des enseignants de mathématiques dans les écoles libanaises unisexes et les écoles mixtes au Liban (Khaddaj & Moukarzel, 2018). Il nous semble que cette absence d'articles qui traitent des pratiques des enseignants peut être due au nombre relativement restreint de didacticiens de mathématiques au Liban, et au fait que les didacticiens existants s'intéressent à des thématiques de recherche portant sur les questions d'enseignement et d'apprentissage dans l'enseignement primaire et secondaire.

Nous notons que nous avons constaté l'absence d'une revue libanaise spécifique pour les recherches en didactique, qui s'intéresse - entre autres - aux questions de l'enseignement en général, et particulièrement à l'enseignement des mathématiques.

I.1.2- Les recherches dans RDM sur les pratiques des enseignants depuis 1980 : évolution des problématiques, cadres théoriques et méthodologies

Afin de recenser les travaux portant sur les pratiques des enseignants des mathématiques, nous avons effectué le choix de consulter les travaux publiés dans RDM. RDM est considérée la revue majeure en didactique des mathématiques en France (Roditi, 2011) dont les publications marquent les principaux apports des recherches de « l'école française de didactique des mathématiques ». Nous nous sommes appuyée sur le travail de Roditi (2011) (§ I.1.2.1, § I.1.2.2 et § I.1.2.3) pour une revue des travaux existants sur les pratiques des enseignants et de l'évolution des problématiques entre 1980 et 2010. Nous avons complété cette revue de littérature par une consultation des publications de RDM portant sur les pratiques des enseignants depuis 2010 jusqu'à aujourd'hui⁴ (§ I.1.2.4).

Roditi (2011) a présenté dans sa note de synthèse un recensement des travaux publiés dans la revue « *Recherches en Didactique des Mathématiques* » (RDM) portant sur les pratiques des enseignants depuis 1980 jusqu'à 2010. Il propose une synthèse des travaux effectués sur les enseignants, leurs pratiques, l'évolution de ces pratiques, à partir des articles publiés dans RDM.

Roditi (2011) distingue la façon dont la notion de pratiques des enseignants est prise en compte dans les recherches en didactique des mathématiques et en sciences de l'éducation. Il note que les approches utilisées en sciences de l'éducation sont inspirées par les différents courants de recherche en psychologie, alors que celles menées en didactique des mathématiques sont centrées sur le savoir mathématique. Les didacticiens de mathématiques se posent principalement les questions d'enseignement et d'apprentissage de contenus disciplinaires :

« Les questions travaillées par les didacticiens des mathématiques correspondent à un savoir précis dont les spécificités, notamment épistémologiques, et les

³ <http://lsj.cnrs.edu.lb/>

⁴ Les publications de RDM ont été consultées en Juillet 2020.

difficultés d'apprentissage rencontrées de façon récurrente justifient qu'on se penche de manière particulière sur leur enseignement » (Roditi, 2011, p. 30)

Dans son examen des publications de RDM entre 1980 et 2010, Roditi (2011) analyse l'évolution des questionnements sur les pratiques des enseignants au sein des principaux courants de recherche en didactique des mathématiques. Selon Roditi (2011), l'observation des pratiques des enseignants peut s'effectuer en classe et hors classe, dans les établissements où les enseignants travaillent lors des réunions, dans les laboratoires pour la préparation des cours et la correction des copies, etc. Pour étudier les pratiques des enseignants, plusieurs activités peuvent être prises en compte et d'une façon conjointe, en classe et hors classe.

Nous considérons dans ce qui suit les principaux résultats tirés par Roditi (2011) sur l'évolution des recherches autour des pratiques des enseignants publiées dans RDM, entre 1980 et 2010. Nous complétons le paysage de travaux existants sur les pratiques des enseignants par un recensement des publications qui portent sur le sujet dans RDM de l'année 2010 jusqu'à aujourd'hui⁵ (§ I.1.2.4).

I.1.2.1- Entre 1980 et 1990 : un enseignement au service de la construction de savoirs mathématiques par les élèves

Dans sa revue des articles publiés dans la revue RDM, Roditi (2011) montre que les didacticiens ont commencé à étudier les pratiques des enseignants à la fin des années quatre-vingt-dix. Avant cette période, l'enseignant était considéré dans les recherches comme au service de l'apprentissage des élèves ; il n'était pas au centre d'intérêt des travaux en didactique, et la relation entre les pratiques des enseignants et les apprentissages des élèves n'était pas encore une problématique de recherche. En effet, jusqu'aux années quatre-vingt, « *l'enseignement était envisagé comme étant au service de la construction de savoirs mathématiques par les élèves* » (Roditi, 2011, p. 9).

Dans les premières recherches autour des pratiques des enseignants, les chercheurs en didactique ont mobilisé à cette période la méthodologie d'ingénierie didactique. Ils se sont rendu compte directement des limites de cette méthodologie. Il n'était pas facile dans ce cadre d'observer les pratiques ordinaires de l'enseignant puisque les situations mises en œuvre en classe étaient le produit d'une réflexion entre chercheurs et enseignants. De ce fait, les chercheurs ont souligné des décalages importants entre les pratiques des enseignants dans des classes où on met en œuvre des ingénieries et leurs pratiques dans les classes ordinaires.

I.1.2.2- Entre 1990 et 2000 : une première attention portée à l'enseignant

Dès le début des années quatre-vingt-dix, des articles ont discuté des limites des théories existantes pour étudier les pratiques ordinaires des enseignants. Grenier (1990) a perçu l'influence de l'enseignant sur la diffusion des savoirs, mais elle a souligné l'absence des outils pour considérer l'enseignant comme un acteur ayant ses propres finalités. Margolinas (1992) a analysé le rôle de l'enseignant dans les différentes situations didactiques et identifié les limites de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1986; 1990) pour analyser les pratiques des enseignants. Des chercheurs, Bailleul (1995), Josse et Robert (1993), Bronner (1997), et Houdement et Kuzniak (2000) ont commencé à interroger les conceptions des enseignants, c'est-à-dire leur manière de penser et de percevoir, et leurs rapports au savoir – utilisé dans un sens commun - dans le courant cognitiviste.

⁵ Les publications de RDM ont été consultées en Juillet 2020.

D'autres études, entre 1990 et 2000, ont porté sur les effets des contextes d'enseignement sur les pratiques enseignantes. En particulier, Hache et Robert (1997) ont analysé des situations didactiques proposées aux élèves en même temps que les discours tenus par les enseignants. Hache et Robert (1997) ont étudié les programmes, les croyances des enseignants et les scénarios prévus en classe. Ils ont distingué différents types d'enseignement selon les manières de diffusion des savoirs. En fait, face aux mêmes contraintes, les enseignants peuvent avoir leurs propres marges de manœuvre et réagir de manières différentes, ce qui entraîne une certaine diversité dans leurs pratiques. D'où l'émergence d'une nouvelle problématique de recherche : étudier les pratiques des enseignants dans leur diversité.

I.1.2.3- Entre 2000 et 2010 : des développements théoriques autour des pratiques des enseignants

Dans la décennie 2000, les articles autour des pratiques des enseignants se sont intéressés plus particulièrement aux développements théoriques. Par exemple, Bosch, Espinoza, et Gascón (2003) ont analysé les pratiques d'un enseignant au secondaire qui enseigne la notion de limite d'une fonction, dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1998). Ils ont constaté que l'enseignant n'arrive pas toujours en classe à expliquer et justifier l'utilisation des méthodes proposées par rapport au discours mathématique (ou scientifique), et que cela conduit à une simple routinisation de méthodes isolées. Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, Soury-Lavergne (2003) a analysé les conséquences des interventions de l'enseignant sur l'interaction élève-milieu. Elle a constaté que cette interaction peut avoir lieu sans l'intervention de l'enseignant. Robert (2001) a proposé d'étudier les pratiques dans leur complexité. Selon Robert (2001), la pratique ne se limite pas à l'ensemble des actes observables, actions et réactions, mais elle comporte les procédés de mise en œuvre de l'activité dans une situation donnée, les planifications des leçons, les choix des ressources et des démarches à prendre, les décisions instantanées c'est-à-dire la manière de réagir face à des situations imprévues en classe, les réunions avec les collègues, l'évaluation des apprentissages, etc. En effet, Robert (2001) développe une approche théorique qui permet d'analyser les pratiques suivant cinq composantes : cognitive, médiative, institutionnelle, sociale et personnelle. Étudier les pratiques dans leur complexité signifie analyser les relations entre ces composantes, les équilibres et les compromis afin de comprendre ce qui est en jeu.

I.1.2.4- Publications dans RDM de 2010 jusqu'à aujourd'hui : thématiques de recherche portant sur les pratiques des enseignants

Pour compléter le paysage des travaux existant sur les pratiques des enseignants, nous avons consulté les titres, mots-clés et résumés des articles publiés dans RDM depuis l'année 2010 jusqu'à aujourd'hui. Nous avons ensuite repéré les articles qui portent sur les pratiques des enseignants au supérieur. Ainsi, nous avons repéré sept articles dont quatre mettent l'accent sur la dimension institutionnelle dans l'enseignement des mathématiques : la place des mathématiques dans la réalisation des projets d'ingénierie (Romo Vazquez & Castela, 2011); les contraintes et les conditions institutionnelles qui influencent l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation mathématique au supérieur (Barquero, Bosch, & Gascón, 2013); les défis contemporains dans l'enseignement de l'analyse à l'université (Winsløw & Grønbaek, 2014); et la transition secondaire/supérieure et les choix institutionnels dans l'enseignement dans la théorie des ensembles en Tunisie (Najar, 2015). Par ailleurs, Ashjari (2018) examine la transition secondaire/supérieur et s'intéresse particulièrement à l'explicitation par les enseignants à l'université de critères liés à l'évaluation auprès des étudiants. Bourgade (2019) explore les raisons

d'être pour l'étude des structures algébriques dans l'enseignement supérieur. Et une étude de Páez Murillo et Pluinage (2019) porte sur l'utilisation d'un logiciel de mathématiques dynamiques dans l'enseignement du concept d'asymptote à des étudiants de première année universitaire.

I.1.2.5- Les pratiques des enseignants au supérieur : un champ de recherche largement inexploré au Liban et en France

Roditi (2011) a noté une grande différence entre les travaux portant sur les pratiques des enseignants avant et après les années quatre-vingt-dix. Il a remarqué une évolution dans la façon de prendre en compte les enseignants en trente années dans les études qu'il a considérées. En fait, avant les années quatre-vingt-dix, l'enseignant était pris comme un acteur dans la mise en œuvre des expérimentations. La relation entre les pratiques des enseignants et l'apprentissage n'était pas traitée dans les recherches. Dans les années quatre-vingt-dix, les chercheurs ont commencé à interroger les pratiques des enseignants dans leur diversité, les conceptions des enseignants et leur rapport au savoir. La considération des pratiques des enseignants comme un objet d'étude important a entraîné des développements théoriques à la première décennie du XXI^{ème} siècle. Des nouvelles approches ont ainsi émergé (§ I.1.2.3), ayant comme objectifs la compréhension des pratiques ordinaires des enseignants et l'étude des conditions de leur développement.

Les travaux en didactique des mathématiques sur les pratiques des enseignants sont nombreux (Roditi, 2011). La plupart des articles dans RDM traitent des pratiques des enseignants en classe ; la notion des pratiques hors classe n'est presque pas traitée. En revanche, les travaux qui portent sur les pratiques des enseignants au supérieur ne sont pas nombreux. Les articles recensés par Roditi (2011) portent sur les pratiques des enseignants au primaire et secondaire en quasi-intégralité. Un seul article aborde la question d'enseignement de la notion de convergence des suites numériques à l'université (Robert, 1982) mais l'enseignant n'est pas l'objet principal de l'étude.

Depuis 2010, des chercheurs ont commencé à s'intéresser aux pratiques des enseignants au supérieur. Les articles – peu nombreux – repérés dans RDM abordent la dimension institutionnelle dans l'enseignement, la transition secondaire/supérieur, l'évaluation des apprentissages, et l'intégration de logiciels de mathématiques dynamiques dans l'enseignement.

I.1.3- Travaux existants sur les pratiques des enseignants à une échelle plus large

Au niveau international, dans une étude de l'ICME⁶, Biza et al. (2016) ont réalisé un bilan des travaux existants sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au supérieur. L'étude s'est appuyée sur des publications dans des revues et sur des actes de conférences internationales, publiés depuis 2014 et portant sur les questions de l'enseignement des mathématiques à l'université. Ils ont identifié des tendances actuelles et repéré les avancées les plus récentes dans le domaine.

Biza et al. (2016) ont classé les travaux existants en fonction de leur thématique de recherche. En ce qui concerne l'enseignement, ils ont identifié quatre tendances en termes de thématiques de recherche : *mathematics teaching practices at the tertiary level, the influence of teachers' perspectives, background, and research practices on their teaching, resources and preparation*

⁶ *International Congress on Mathematical Education.*

for teaching - mathematics teachers' professional development, et alternative approaches to teaching.

Nous présentons dans la sous-section suivante, et suivant l'étude ICMI (Biza et al., 2016), chacune de ces tendances et les travaux de recherche qui s'y inscrivent.

I.1.3.1- Recherches internationales sur les pratiques des enseignants au supérieur entre 2014 et 2016

La communication des idées mathématiques a fait l'objet de plusieurs études récentes. Viirman (2014) examine les pratiques d'enseignement au supérieur de sept enseignants suédois lors des cours magistraux portant sur les fonctions. L'étude, basée sur une approche discursive (Sfard, 2008), pointe les différences entre le discours mathématique des enseignants et leur façon de mettre en œuvre des contenus mathématiques en classe. Dans la continuité de l'étude précédente, Viirman (2015) classe les routines des enseignants quant à leur discours didactique en trois catégories (explication, motivation, et pose de questions). Dans une perspective discursive et sémiotique, Park (2015) examine les discours portant sur la dérivée de trois enseignants, par rapport à l'usage des mots, des gestes, et des différents médiateurs visuels (symbolique, algébrique, et graphique) dans un module d'analyse au supérieur. L'étude pointe qu'une explicitation par les enseignants de certains aspects de la notion de dérivée, sources de difficultés pour les étudiants, par l'usage de mots et de médiateurs visuels peut les leur rendre plus accessibles. Par ailleurs, Weinberg, Fukawa-Connelly, et Wiesner (2015) s'intéressent à la façon dont les gestes contribuent en mathématiques à penser et à communiquer les idées. Ils décrivent les gestes d'un enseignant dans une classe universitaire d'algèbre abstraite et mettent l'accent sur leur rôle dans la communication des idées mathématiques. Hare et Sinclair (2015), de leur côté, étudient l'usage des mains et des doigts pour pointer durant dans une conférence portant sur la théorie des groupes en troisième année universitaire. L'étude souligne l'importance des gestes dans la communication en termes de « (1) *bringing mathematical objects into being*, (2) *relating these objects to each other and* (3) *connecting the spoken with the written and drawn* » (p. 33).

Des études s'appuyant sur la théorie de l'activité (Leontiev, 1978) considèrent l'enseignement des mathématiques comme une activité orientée vers un but. Dans ce contexte, Grenier-Boley (2014) propose une méthodologie pour l'étude de l'introduction des concepts de l'algèbre linéaire durant les séances de tutorat au début des études universitaires. Treffert-Thomas (2015) analyse des entretiens et des observations de classe d'un enseignant de l'algèbre linéaire en première année universitaire et présente une catégorisation de l'enseignement en trois niveaux (*activity-motive*, *actions-goals*, et *operations-conditions*). Elle présente un modèle pour le processus d'enseignement qui met en relation les intentions de l'enseignant exprimées durant l'entretien et les stratégies qu'il a conçues pour son enseignement.

D'autres études portent sur le rôle des exemples dans l'enseignement des mathématiques. Fukawa-Connelly et Newton (2014) étudient l'usage des exemples dans l'enseignement des preuves à l'université. Mali, Biza et Jaworski (2014) considèrent l'usage des exemples comme l'une des caractéristiques de l'enseignement des mathématiques au supérieur. Ils étudient le rôle des « exemples génériques », qu'ils définissent comme des exemples qui illustrent les caractéristiques critiques d'un concept, dans des séances de tutorat portant sur l'injection en première année universitaire.

Petropoulou, Jaworski, Potari, et Zachariades (2015) cherchent à caractériser l'enseignement de l'analyse au supérieur, particulièrement dans le cas des enseignants, chercheurs en mathématiques, lors des conférences. Ils examinent les pratiques en classe d'un enseignant-chercheur et mettent l'accent sur sa sensibilité aux besoins des étudiants et la façon dont il les attire aux mathématiques en leur proposant des situations qui les défient.

Certaines recherches mentionnent l'influence du profil des enseignants et de leur activité de recherche sur leurs pratiques d'enseignement. Dans cette perspective, Mali et al. (2014) suggèrent que l'activité de recherche de l'enseignant-chercheur influence ses pratiques d'enseignement. De même, Mali (2015) analyse deux séances d'enseignement de deux enseignants-chercheurs, dont les domaines de recherche sont respectivement les mathématiques et la didactique des mathématiques. Cette étude questionne l'impact de l'activité de recherche et de la position épistémologique d'un enseignant-chercheur sur ses pratiques d'enseignement. Elle met ainsi en évidence la nécessité de développer des travaux de recherche autour de cette thématique.

En ce qui concerne les pratiques hors-classe des enseignants, certaines recherches mobilisent l'approche documentaire du didactique (Gueudet, 2015 ; Gueudet & Trouche, 2009). Cette approche offre la possibilité de considérer l'interaction des enseignants avec les ressources, d'une façon conjointe, lors de la préparation et lors de la mise en œuvre de leur enseignement. Elle considère que les pratiques d'enseignement comprennent, en plus des activités en classe, des activités hors classe telles que la préparation d'une conférence, la correction des productions des étudiants, etc. Gueudet, Buteau, Mesa, et Mistfeldt (2014) soulignent le besoin de mener des travaux de recherche portant sur les liens existants entre les interactions des enseignants avec les ressources dans leur activité de recherche et dans leur pratique d'enseignement. Ils soulignent également l'intérêt d'analyser la place de la dimension collective dans les pratiques d'enseignement à l'université.

L'étude ICMI (Biza et al., 2016) met en évidence la présence de certains travaux de recherche qui portent sur l'analyse des approches alternatives pour l'enseignement. Nous citons à titre d'exemples : l'approche de la « classe inversée », dans laquelle les étudiants suivent la partie « explication » à la maison avec l'aide de supports divers (vidéos, sites en lignes, etc.) et les séances avec l'enseignant sont allouées pour les discussions et la résolution des exercices (Oh Nam, 2015) ; la stratégie d'« apprentissage assisté par les pairs » dans laquelle les étudiants travaillent par deux et chacun prend tantôt le rôle de l'apprenant, tantôt le rôle de l'enseignant (Duah, Croft, & Inglis, 2014).

Nous pouvons conclure que les travaux développés autour des pratiques d'enseignement des mathématiques au supérieur portent sur les pratiques en classe telles que la communication des idées mathématiques et le rôle des exemples. Bien que des études récentes suggèrent que l'activité de recherche des enseignants-chercheurs impacte leurs modes d'enseignement (Biza et al., 2016), peu de travaux portent sur cet aspect. En outre, certains travaux portent les interactions des enseignants avec les ressources dans leurs pratiques hors classe. Cependant, ils soulignent le besoin de conduire plus de travaux sur le sujet.

[I.1.3.5- Aspects inexplorés des pratiques des enseignants au supérieur au niveau international entre 2014 et 2016](#)

Certaines études récentes soulignent l'existence de peu de travaux qui portent sur les pratiques des enseignants au supérieur (Mali et al., 2014). L'étude ICMI (Biza et al., 2016) met en évidence

l'intérêt émergent à l'échelle internationale pour le développement des études autour des pratiques des enseignants à l'université. En revanche, Biza et al. (2016) mentionnent que certains aspects des pratiques restent largement inexplorés et nécessitent le développement de nouveaux travaux. Nous citons à titre d'exemple : l'impact de l'activité de recherche sur les pratiques d'enseignement, le rôle et la place de la dimension collective dans les pratiques d'enseignement à l'université, l'impact de l'évolution de l'offre des ressources pour l'enseignement sur les pratiques des enseignants à l'université, le développement professionnel des enseignants, etc.

La plupart des travaux mentionnés (Biza et al., 2016) portent sur l'enseignement en classe. Nous citons à titre d'exemples les recherches portant sur la communication des idées mathématiques (Viirman, 2014; 2015; Park, 2015; Weinberg et al., 2015; Hare & Sinclair, 2015), le rôle des exemples (Fukawa-Connelly & Newton, 2014; Mali et al., 2014), les conférences (Petropoulou et al., 2015) et les approches alternatives pour l'enseignement (Duah et al., 2014; Oh Nam, 2015), etc. Les études qui considèrent le travail hors classe des enseignants portent particulièrement sur l'interaction des enseignants avec les ressources (Gueudet et al., 2014; Gueudet, 2015).

I.1.4- Depuis 2016 : des réseaux et groupements de recherche sur l'enseignement des mathématiques au supérieur

La société européenne de la recherche sur l'enseignement des mathématiques (*European Society for Research in Mathematics Education ERME*) a lancé un appel à propositions sur les conférences thématiques lors de son 9ème congrès (*Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 9*). Suivant une proposition du groupe de travail thématique sur l'enseignement universitaire des mathématiques, INDRUM a été fondé en février 2015. INDRUM (*International Network for Didactic Research in University Mathematics*) est un réseau international de chercheurs en *Mathematics Education*. Il a comme objectif de fédérer les travaux de recherche sur les questions de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'université. Le réseau INDRUM organise des conférences biannuelles. En mars 2016, la première conférence du « *International Network for Didactic Research in University Mathematics* » (INDRUM) a eu lieu à Montpellier, France.

Plusieurs contributions à INDRUM 2016 et 2018 montrent l'intérêt porté aux travaux sur les pratiques des enseignants-chercheurs au supérieur, et notamment les liens existants entre la recherche et l'enseignement. Notons en particulier, dans ces contributions, qu'une étude porte sur les difficultés rencontrées par les enseignants au supérieur au début d'un cours de formation de niveau universitaire (Florensa, Bosch, Cuadros, & Gascón, 2018). Les auteurs considèrent que les connaissances en didactique des enseignants sont essentielles pour améliorer leurs pratiques en leur fournissant des outils conceptuels et méthodologiques leur permettant de les décrire, les concevoir et les interroger plus efficacement. L'étude souligne la nécessité de développer davantage ces aspects de la formation des enseignants. De plus, deux autres contributions traitent de la relation entre l'activité de recherche et les pratiques d'enseignement au supérieur. Tabchi (2018)⁷ s'appuie sur l'interaction des enseignants-chercheurs avec les ressources dans la perspective de caractériser l'impact de leur activité de recherche sur leurs pratiques d'enseignement, dans le domaine des mathématiques discrètes. L'étude montre que les caractéristiques des ressources développées par les enseignants-chercheurs, à différents moments de leurs activités, peuvent nous éclairer sur différents aspects de leurs pratiques, notamment sur

⁷ Publication qui s'inscrit dans le cadre de notre travail de thèse.

les liens entre leur activité de recherche et leurs pratiques d'enseignement. Par ailleurs, Broley (2016) examine l'écart existant entre l'intégration de la programmation informatique dans les pratiques de recherche des mathématiciens et sa mobilisation dans leur enseignement au supérieur. Dans ce cadre, Broley (2016) étudie la place de la programmation informatique dans des contextes de recherche et d'enseignement pour pouvoir caractériser cet écart. Broley (2016) note que, même si les mathématiciens utilisent la programmation dans leurs recherches, son intégration dans leur enseignement est beaucoup plus limitée. De plus, les contraintes institutionnelles (curriculaires, départementales et culturelles) contribuent à combler l'écart existant.

En France, un réseau de recherche « Didactique et Épistémologie des Mathématiques, liens avec l'Informatique et la Physique, dans le Supérieur » (DEMIPS) a été créé en 2017. Le réseau DEMIPS a commencé à organiser des journées d'étude en 2017, et a débouché à la création d'un groupement de recherche CNRS (GDR - CNRS) en janvier 2020. Le GDR comprend plusieurs groupes de travail thématiques⁸ dont l'un porte spécifiquement sur l'étude des pratiques d'enseignement des mathématiques au supérieur et leurs interactions avec la physique.

I.2- La place et le rôle des ressources dans l'enseignement des mathématiques

Les ressources occupent une place centrale dans les pratiques des enseignants, en classe et hors classe. Les enseignants rassemblent des ressources, les sélectionnent, les modifient, les adaptent, les mettent en œuvre : ce travail et son produit sont au cœur de leur activité professionnelle (Gueudet & Trouche, 2010).

La notion de « ressource » prend des valeurs différentes dans les travaux en didactique des mathématiques. Pour Remillard (2010), les ressources sont les supports curriculaires que le professeur reçoit, de l'institution, pour enseigner (programme, manuel scolaire...). Ruthven (2010) adopte une définition des ressources moins restreinte. Il considère les ressources comme étant les objets physiques ou virtuels (supports papiers ou numériques, Internet, etc.) qui peuvent avoir été développés pour des objectifs curriculaires, ou avoir fait l'objet d'une appropriation pour des objectifs éducatifs, bien qu'ils n'aient pas été développés pour ces objectifs à l'origine. Une définition plus générale de la notion de ressources est avancée par Adler (2010) qui attribue à la notion de ressource un double sens qui intègre le substantif et le verbe : « Il est possible aussi de penser les ressources comme une forme du verbe *re-sourcer* : nourrir à nouveau, ou différemment » (Adler, 2010, p. 23). Ainsi, pour Adler (2010), une ressource peut être matérielle (manuel, calculatrice, production d'un élève, etc.) ou non matérielle (temps, langue, etc.). Elle désigne par ressources les objets et les actions, dans l'objectif d'attirer l'attention sur les ressources dans l'usage dans le contexte d'enseignement des mathématiques, voire sur les enseignants qui ressource leurs pratiques.

Les ressources peuvent avoir des caractéristiques diverses. Elles peuvent être matérielles ou non matérielles, et elles peuvent être conçues (ou non) à des fins d'enseignement (Trouche, Gueudet, & Pepin, 2020). Les ressources conçues à des fins d'enseignement sont désignées par ressources curriculaires, et définies par Trouche et al. (2020) comme étant les ressources utilisées ou

⁸ Le programme de recherche comporte cinq thèmes de recherche : (1) Analyse, (2) Algèbre, (3) Arithmétique et Mathématiques discrètes, (4) Logique, langage, raisonnement, preuve, et modélisation, (5) Pratiques des enseignants.

développées par les enseignants ou par les élèves dans leurs interactions avec les mathématiques, en classe et hors classe.

Les enseignants interagissent en permanence avec les ressources, dans la conception de leur enseignement (sélection des contenus, préparation d'une séance, construction d'une progression, etc.) et dans la mise en œuvre en classe. Les interactions des enseignants avec les ressources prennent différentes formes. Ils peuvent utiliser des ressources curriculaires à disposition ou concevoir des ressources pour leur enseignement. Trouche et al. (2020) considèrent l'enseignement comme un travail de conception, influencé d'une part, par les capacités des enseignants et d'autre part, par le potentiel des ressources qu'ils utilisent.

Les habitudes et les connaissances des enseignants guident leurs interactions avec les ressources dans la sélection, la transformation et la conception (Trouche et al., 2020). L'intégration d'outils et de supports numériques dans l'enseignement a entraîné une rupture dans la pratique habituelle des enseignants, et demande de leur part un effort d'organisation supplémentaire (Ruthven, 2010), particulièrement quand ces ressources sont mobilisées occasionnellement dans l'enseignement. Par conséquent, les routines établies par les enseignants, dans la conception de leur enseignement comme dans le déroulement en classe, doivent être souvent adaptées à l'intégration des supports numériques. De plus, la disponibilité d'un foisonnement de ressources sur Internet peut constituer une complexité supplémentaire pour les enseignants au niveau de la sélection de ressources pertinentes pour leur enseignement (Trouche et al., 2020). En effet, la numérisation de l'information et le développement de l'Internet donnent un accès facile et rapide à de nombreuses ressources. Afin de pouvoir mobiliser ces ressources dans leur enseignement, les enseignants auraient besoin de développer ce que Trouche et al. (2020) décrivent par « teacher design capacity - a mindfulness/sensitivity of mathematical and pedagogical aspects of learning resources, and the flexibility to use them » (2020, p. 239).

La notion de ressource peut avoir une acception plus ou moins générale dans les travaux. Nous adoptons, dans la suite de notre travail, la définition d'Adler (2010) qui considère comme ressource tout ce qui peut ressourcer le travail des enseignants. Une caractérisation des interactions des enseignants avec les ressources nécessite une prise en considération des enjeux en lien avec les caractéristiques des ressources, les habitudes et les connaissances des enseignants qui les mobilisent, les formes des interactions et le domaine mathématique sous-jacent. Dans le cas des enseignants-chercheurs, un enjeu supplémentaire est l'accessibilité des ressources issues de l'activité de recherche, surtout dans le cas de mathématiques contemporaines où il y a proximité entre les objets et processus de recherche et les objets d'enseignement.

I.3- Les mathématiques discrètes : un champ en pleine expansion, opportun pour l'étude des pratiques des enseignants-chercheurs au supérieur

Les mathématiques discrètes constituent une branche relativement « jeune » des mathématiques qui a commencé à se développer depuis une trentaine d'années (Ouvrier-Buffer, 2019). C'est une branche sans réelle définition conventionnelle, dont les objets possèdent différentes définitions, de différentes natures. Grenier et Payan (1998) ont défini les structures discrètes comme étant des configurations que l'on peut décrire par un ensemble fini ou dénombrable de relations, et les objets discrets comme étant ceux que l'on peut décrire par des éléments finis ou dénombrables. Nous garderons à l'esprit cette caractérisation du domaine.

Dans l'enseignement secondaire et supérieur, plusieurs concepts en mathématiques relèvent des mathématiques discrètes. Ainsi, un enseignement des mathématiques discrètes peut englober plusieurs sujets que Maurer (1997) a tenté de délimiter (cf. figure 1) en distinguant entre les sujets enseignés au secondaire (qu'il a présentés dans les listes D et E) et les sujets enseignés au supérieur (qu'il a présentés dans les listes A, B et C).

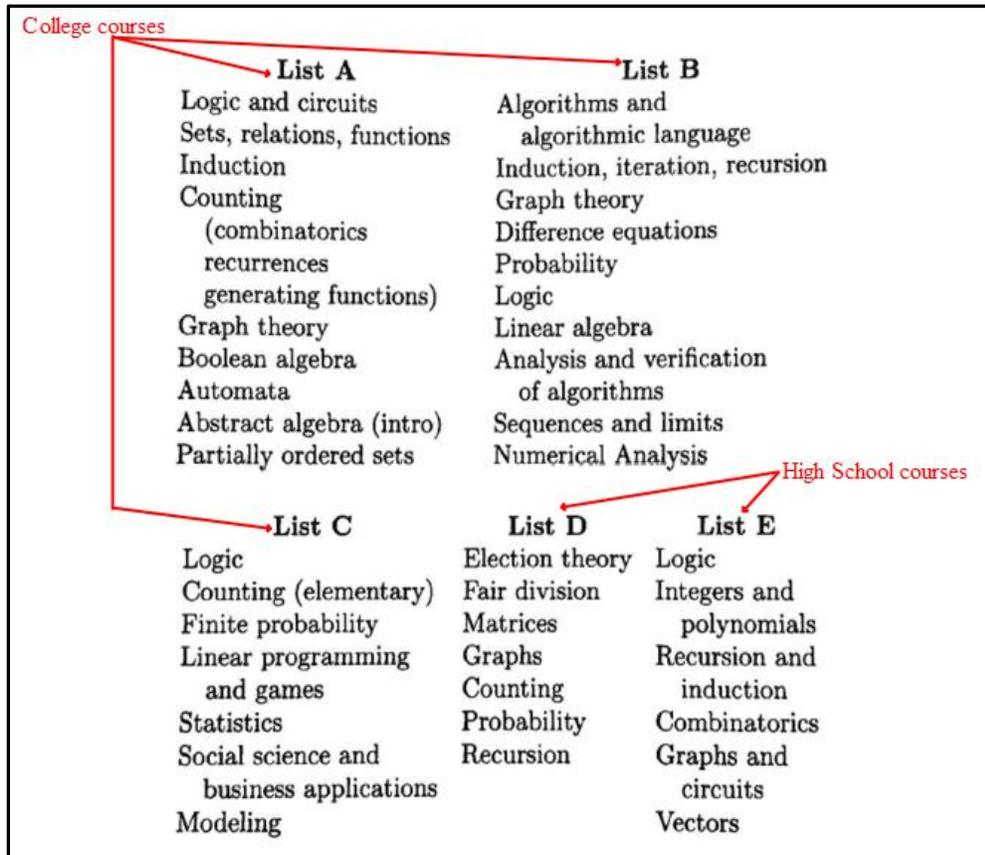


Figure 1 : Figure extraite de (Maurer, 1997, p. 124), annotée en rouge, montrant les sujets en mathématiques discrètes pouvant être enseignés au secondaire et au supérieur

Au Liban, les mathématiques discrètes actuellement n'existent pas explicitement dans le programme de l'enseignement scolaire, sauf quelques exceptions tel que le dénombrement en classe de terminale. A l'université libanaise⁹, les mathématiques discrètes sont aujourd'hui/généralement enseignées dans certains parcours, tels que le parcours de formation en mathématiques ou en informatique de gestion.

En France, les mathématiques discrètes sont peu visibles dans les programmes de ces dernières années en tant que savoir institutionnel dans le secondaire sauf quelques exceptions¹⁰. La théorie des graphes a été introduite en enseignement de spécialité ES (économique et social) en terminale depuis 2002 (Cartier, 2008) : c'était la première entrée officielle des mathématiques discrètes en tant que telle dans les classes (Ouvrier-Buffet, 2010). Par ailleurs, en France, au supérieur, les mathématiques discrètes sont enseignées dans un spectre large d'offres de formations, et ce, de

⁹ La seule université publique au Liban

¹⁰ On pourra se référer à Grenier et Payan (1998) pour un état des lieux à l'époque, démontrant le faible ancrage des problèmes de dénombrement utilisés dans les manuels dans la combinatoire.

manière explicite, sous divers intitulés (recherche opérationnelle et optimisation combinatoire, codes et combinatoire algébrique, optimisation discrète, modélisation et résolution de problèmes d'optimisation, etc.).

Hart et Martin (2016) soulignent l'importance d'inclure les mathématiques discrètes dans le programme scolaire. Ils les considèrent comme essentielles pour la compréhension de notre monde technologique moderne.

« Discrete mathematics is empirically powerful, as a tool for modeling and solving fundamental contemporary problems, and it is pedagogically powerful in that it can be used in the curriculum to simultaneously address content, process, and affect goals of mathematics education. As such, discrete mathematics is indeed essential mathematics for a 21st century school curriculum » (Hart & Martin, 2016, p. 17-18).

En effet, les mathématiques discrètes se constituent d'un ensemble de sujets avec diverses applications dans des situations du monde réel. Elles touchent et recouvrent plusieurs champs des mathématiques, tels que la théorie des groupes, la géométrie, la théorie des nombres, la combinatoire, la théorie des graphes, la cryptographie, la théorie des jeux, algorithmes, la théorie du codage, etc. (Hart & Martin, 2016). L'enseignement des mathématiques discrètes permet d'engager les étudiants dans une démarche mathématique, en mettant l'accent sur l'apprentissage de la preuve, de la modélisation, de l'optimisation, de l'utilisation de stratégies et la prise de décision (Ouvrier-Buffer, 2010). Elles permettent aussi de résoudre une variété de problèmes ouverts importants et intéressants pour les étudiants. Hart et Martin (2016) présentent des exemples de questions qui peuvent être étudiées à l'aide des mathématiques discrètes :

« How can you avoid conflicts when scheduling meetings, shipping hazardous chemicals, or assigning frequencies to radio stations? How can you schedule a project for shortest completion time when it consists of numerous interconnected sub-projects? How can you fairly decide among competing alternatives, like candidates standing for election? How can you fairly divide or apportion objects, such as seats of congress or property in an inheritance? How can you ensure accuracy, security, and efficiency in digital transactions such as transferring files, making online purchases, or posting to social networks? How many different Personal Identification Numbers (PINs), IP addresses, or pizzas with different toppings are possible? How can you model and analyse processes of sequential change, such as year-to-year growth in population, month-to-month change in credit card debt, or periodic medicine dosage? » (Hart & Martin, 2016, p. 4).

Les mathématiques discrètes sont particulièrement adaptées aux applications en lien avec la technologie et les ordinateurs. En fait, les mathématiques discrètes sont parfois considérées comme les mathématiques de l'informatique (Hart & Martin, 2016). Les situations discrètes favorisent le travail sur les algorithmes. Elles permettent une introduction à l'optimisation et à la recherche opérationnelle, ainsi qu'aux mathématiques « expérimentales » (Ouvrier-Buffer, 2010).

Par ailleurs, Ouvrier-Buffer (2010) souligne que les mathématiques discrètes ont le potentiel d'offrir un nouveau départ pour les enseignants comme pour les étudiants, se référant aux travaux de Goldin (2004). Les mathématiques discrètes sont accessibles aux étudiants et fournissent une

opportunité pour améliorer leurs capacités relatives au raisonnement, à la résolution de problèmes, à la communication des idées, à la modélisation, au raisonnement combinatoire et à la pensée récursive (Rosenstein, 2016). L'expérience en mathématiques discrètes peut favoriser le développement de processus heuristiques chez des étudiants ayant des difficultés en mathématiques. Les objets discrets sont faciles d'accès et pas encore présents formellement dans les programmes, ce qui permet d'instaurer un rapport à ces objets distant de celui que les étudiants ont habituellement aux mathématiques (Ouvrier-Bufferet, 2010).

Rosenstein (1997) pointe que l'introduction de nouveaux contenus dans les curricula offre des opportunités pour infuser de nouvelles techniques dans l'enseignement. Par conséquent, pour les enseignants, les mathématiques discrètes peuvent leur offrir l'occasion de réfléchir sur leur enseignement ; elles leur donnent un nouveau regard sur les mathématiques traditionnelles et des stratégies différentes qui leur permettent de les rendre accessibles et d'engager les étudiants (DeBellis & Rosenstein, 2004; Rosenstein, 1997). Dans le cas de l'enseignement supérieur, Goldin (2016) souligne que les mathématiques discrètes peuvent offrir une possibilité de changer les modes d'enseignement qui, pour la plupart, sont traditionnels et axés sur les cours magistraux.

Ainsi, les mathématiques discrètes constituent un champ de recherche contemporain en plein expansion, dont les contenus dans l'enseignement supérieur ne sont pas toujours stabilisés et sont parfois diffus ; différentes approches de ce domaine à l'intersection entre mathématiques et autres disciplines existent. Plusieurs formes d'interactions peuvent exister entre les ressources issues de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs en mathématiques discrètes et les ressources qu'ils mobilisent pour leur enseignement. Ainsi, nous considérons que les mathématiques discrètes constituent un contexte opportun pour l'étude des pratiques des enseignants-chercheurs au supérieur, et de la relation entre leur activité de recherche et leurs pratiques d'enseignement. Elles peuvent nous permettre de caractériser les différents choix que les enseignants-chercheurs effectuent pour leur enseignement en termes de contenus et de ressources mobilisées, et leur adaptation à un contexte institutionnel d'enseignement.

I.4- Problématique, premiers questionnements et méthodologie générale

L'étude des pratiques des enseignants au supérieur s'inscrit dans un courant de recherche en développement, mais encore largement inexploré (Biza et al., 2016). Bien que des travaux aient tenté de caractériser les pratiques des enseignants depuis plus d'une vingtaine d'années (Roditi, 2011), la plupart des travaux existants portent sur les pratiques des enseignants en classe. Les pratiques des enseignants hors classe et l'influence de leur formation académique sur leur enseignement sont presque non abordées. Les travaux en cours en didactique des mathématiques (et en *mathematics education*) que nous avons consultés (§ I.1.3) montrent un intérêt émergent pour des recherches portant sur les interactions des enseignants avec les ressources dans leurs pratiques hors classe, et sur l'influence potentielle de leur activité de recherche sur leur enseignement (Biza et al., 2016). Nous considérons particulièrement le cas des enseignants-chercheurs. Nous cherchons à caractériser, par le prisme de leurs interactions avec les ressources, des aspects non explorés de leurs pratiques et les différents facteurs qui les influencent, notamment l'impact de leur activité de recherche sur leur enseignement.

Les pratiques des enseignants au supérieur admettent des spécificités par rapport aux pratiques des enseignants au secondaire. Au supérieur, un enseignant a une plus grande marge de manœuvre dans le choix des contenus à enseigner, plus de liberté dans la sélection et la conception des

ressources pour l'enseignement. Ces choix peuvent être influencés par des conditions et des contraintes relatives au contexte dans lequel l'enseignant exerce (Barquero et al., 2013; Najjar, 2015). Nous citons à titre d'exemple le parcours de formation. Un enseignant qui enseigne les mathématiques au supérieur n'effectue pas forcément les mêmes choix en termes de contenus et de ressources à mobiliser dans des parcours de formation en mathématique et en informatique. Un autre exemple est l'existence (ou non) de recommandations institutionnelles en lien avec les choix des contenus (syllabus) et le travail collectif (conception de ressources communes, partage de ressources, conception d'une évaluation commune ou non, etc.). Les particularités du contexte institutionnel dans lequel les enseignants au supérieur exercent leur métier confère à leurs pratiques des spécificités au niveau de la conception de leur enseignement, et de la mise en œuvre.

Des spécificités supplémentaires des pratiques existent dans le cas particulier des enseignants-chercheurs. Du point de vue de la formation, un enseignant-chercheur au supérieur est formé à la recherche et exerce une activité de recherche. Il peut y avoir plus ou moins de proximité entre le domaine mathématique qu'il enseigne, et son domaine de recherche. Ainsi, son parcours académique peut impacter (ou pas) ses pratiques d'enseignement dans les choix des contenus à enseigner et de leur organisation, comme dans les modes d'enseignement, les formes d'interaction avec les étudiants et les apprentissages qu'il souhaite développer auprès d'eux (raisonnement, propriétés, applications, etc.) et dans les ressources qu'il mobilise.

Les ressources occupent une place importante dans les pratiques des enseignants-chercheurs (Gueudet & Trouche, 2010; Trouche et al., 2020). Dans leurs pratiques d'enseignement, les enseignants-chercheurs interagissent avec des diverses ressources (anciennes ressources, logiciels, ressources en ligne, vidéos et podcasts, manuels, ressources issues de leurs activités de recherche, articles, etc.). Comme tout enseignant, les enseignants-chercheurs maintiennent une interaction permanente avec les ressources dans divers aspects de leurs pratiques. Ces interactions avec les ressources peuvent prendre différentes formes (sélection, utilisation, adaptation, modification, conception) et peuvent avoir lieu à différents moments (planification et mise en œuvre des séances, moments d'expérimentation, des modes d'évaluation, participation à une conférence, lecture d'un article, etc.). Les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources sont influencées par plusieurs facteurs : l'environnement de travail, la disponibilité du matériel et l'espace physique, les étudiants et les collègues (Gueudet, 2017), mais aussi la nature de leur activité de recherche. En outre, les enseignants-chercheurs ne sont pas forcément des utilisateurs passifs des ressources. Nous citons à titre d'exemple le cas d'un enseignant-chercheur qui essaie d'adapter, pour son enseignement, un problème issu de ses travaux de recherche. En effet, une caractérisation des interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources nécessite une prise en compte de la nature des ressources en question, des formes des interactions, ainsi que du contexte institutionnel dans lequel ces interactions prennent place.

Une dimension qui s'ajoute à l'interaction avec les ressources dans le cas des enseignants-chercheurs est l'accessibilité des ressources issues de la recherche. Ces ressources peuvent être en lien direct avec leurs préoccupations scientifiques, comme elles peuvent être produites par des pairs dans une perspective de diffusion à destination des enseignants, des étudiants et des chercheurs en formation (doctorants ou étudiants en Master). Ainsi, pour concevoir des ressources pour leur enseignement, les enseignants-chercheurs peuvent interagir avec les ressources issues de leur activité de recherche, notamment dans des domaines mathématiques où les contenus pour l'enseignement sont en cours d'évolution et de structuration (comme c'est le cas pour les

mathématiques contemporaines). Les interactions avec les ressources issues de la recherche peuvent prendre des formes différentes, allant d'une simple consultation des ressources issues de la recherche pour la conception de ressources pour l'enseignement, jusqu'à une mobilisation de ces ressources dans l'enseignement, avec ou sans adaptations. D'autres liens entre enseignement et recherche peuvent avoir lieu dans les pratiques observables des enseignants-chercheurs : dans les choix des contenus ; dans la mise en œuvre en classe des ressources, les interactions avec les étudiants et les réponses apportées à leurs questions, etc. Ainsi, approcher les pratiques des enseignants-chercheurs par les ressources offre la possibilité de caractériser d'une part, la nature de la complémentarité entre les ressources issues de la recherche et celles pour l'enseignement et d'autre part, l'articulation entre la conception et la mise en œuvre d'une ressource pour l'enseignement.

En revanche, la caractérisation des pratiques des enseignants-chercheurs à partir de leurs interactions avec les ressources présente des complexités. Plusieurs facteurs doivent être pris en compte, dont les connaissances pédagogiques et didactiques des enseignants-chercheurs, leurs connaissances épistémologiques sous-jacentes, et le contexte institutionnel dans lequel ils travaillent (Trouche et al., 2020). Nous cherchons à examiner les différents choix effectués par les enseignants-chercheurs dans leur conception des ressources pour l'enseignement, ainsi que l'influence du contexte institutionnel et de leur activité de recherche sur cette conception. Les caractéristiques des ressources conçues par les enseignants-chercheurs peuvent nous éclairer sur le potentiel de ces ressources à développer chez les étudiants une compréhension des concepts mathématiques en jeu.

Pour caractériser les pratiques des enseignants-chercheurs et l'interaction mutuelle entre leur recherche et leur enseignement, le champ des mathématiques discrètes présente une expérience riche et vivante ; c'est un champ récent en recherche en tant que tel et son enseignement en France a commencé à se développer depuis une trentaine d'années (Ouvrier-Buffet, 2010). Les mathématiques discrètes possèdent une réelle importance épistémologique vu qu'elles se déploient dans différents domaines mathématiques et ont des applications concrètes dans les différents domaines mathématiques et scientifiques (Hart & Martin, 2016). Ainsi, elles sont porteuses d'un enjeu sociétal fort de par leurs applications. Bien qu'il existe des travaux en didactique portant sur les mathématiques discrètes (e.g. Heinze et al., 2004; Maurer, 1997; Grenier & Payan, 1998), ceux-ci ne marquent pas l'existence d'une didactique des mathématiques discrètes en tant que champ de recherche structuré. En effet, les mathématiques discrètes constituent une branche encore peu explorée en didactique, en particulier au niveau de l'enseignement supérieur. Elles sont intégrées, au Liban et en France, dans les cursus de mathématiques dans divers parcours de formation. Cependant, dans les deux pays, les mathématiques discrètes dans l'enseignement sont peu naturalisées et prennent des formes variées en fonction du contexte d'enseignement et de la dynamique de leur évolution dans la recherche. En effet, la conception de ressources pour l'enseignement des mathématiques discrètes doit prendre en compte les articulations qui peuvent avoir lieu entre les conditions épistémologiques et le contexte institutionnel. Les spécificités et les potentialités des mathématiques discrètes, dans la recherche comme dans l'enseignement, font d'elles un champ privilégié pour étudier les pratiques des enseignants-chercheurs, particulièrement dans leur conception des ressources pour l'enseignement, et le rapport qui existe entre leur activité de recherche et leurs pratiques d'enseignement.

Ainsi, nous nous intéressons à l'étude, dans le cas des mathématiques discrètes, des pratiques des enseignants-chercheurs par le prisme de leur interaction avec les ressources, et de l'influence de leur activité de recherche sur leur enseignement. D'où l'intérêt de conduire un travail permettant de répondre aux questions suivantes :

- Comment les enseignants-chercheurs conçoivent-ils leurs enseignements (lorsqu'il s'agit aussi de leur domaine de recherche) ?
- Comment les enseignants-chercheurs interagissent-ils avec les ressources dans/pour l'enseignement des mathématiques discrètes ?
- Comment peut-on caractériser, par le prisme des ressources, le rapport entre les pratiques d'enseignement des mathématiques discrètes et les activités de recherche dans ce même champ ?

Nous nous intéressons donc à l'étude des pratiques des enseignants-chercheurs en mathématiques discrètes, particulièrement en théorie des graphes (choix que nous allons justifier dans le chapitre II). Nous cherchons à cerner les différents choix que les enseignants-chercheurs peuvent effectuer dans la conception des ressources pour leur enseignement de la théorie des graphes. Pour cela, nous commencerons par une consultation des choix effectués en termes de contenus et de leur organisation dans des ouvrages que nous avons sélectionnés qui sont destinés à être diffusés pour l'enseignement de la théorie des graphes au supérieur (Chapitre II). Nous débuterons le chapitre II par une introduction de quelques notions théoriques (concepts, objets, processus, registres de représentation sémiotique) nécessaires à cette consultation. La consultation des ouvrages nous permettra de cerner le spectre de choix qui existent pour la conception de ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes, ainsi que l'influence potentielle des facteurs épistémologiques et institutionnels sur ces choix.

Nous mobiliserons plusieurs outils théoriques pour notre étude (chapitre III) qui nous permettront de préciser nos questions de recherche. Afin de pouvoir étudier les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources dans leurs pratiques d'enseignement, nous nous appuierons sur l'approche documentaire (Gueudet & Trouche, 2009). Les interactions avec les ressources, dans toutes leurs formes (utilisation, mobilisation, conception) sont façonnées par l'expérience personnelle des enseignants-chercheurs et influencées par le contexte institutionnel. Pour cerner l'influence de l'expérience personnelle et du contexte institutionnel des enseignants-chercheurs sur les différents choix qu'ils effectuent dans/pour leur enseignement, nous mobiliserons des concepts de *rappports personnel et institutionnel au savoir* de la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard (1998). Un aspect des pratiques d'enseignement apparaît dans les choix effectués dans les ressources conçues. Pour caractériser cet aspect, nous nous appuierons sur la notion de « connectivité » (Gueudet, Pepin, Restrepo, Sabra, & Trouche, 2018). La « connectivité » permet d'étudier la potentialité d'une ressource donnée à présenter aux étudiants des situations qui leur permettent d'établir des connexions au niveau cognitif (en lien avec les connaissances et l'apprentissage) d'une part, et des connexions pratiques en relation avec le contexte d'enseignement et d'apprentissage. L'observation de la mise en œuvre et de la mobilisation des ressources en classe permet de mieux comprendre les choix défendus dans la conception des ressources, les empreintes de la recherche dans cette mise en œuvre, et les adaptations effectuées en fonction des étudiants et du contexte institutionnel.

La méthodologie mise en place pour le traitement de nos questions de recherche consiste en trois étapes. La première porte sur une analyse d'entretiens effectués avec des enseignants-chercheurs, chercheurs en théorie des graphes. Cette analyse des entretiens nous permettra de caractériser globalement les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources dans/pour leur enseignement et l'influence potentielle de leur activité de recherche sur leurs pratiques d'enseignement. La deuxième étape porte sur une analyse de ressources conçues par des enseignants-chercheurs interviewés. Cette analyse des ressources nous permettra de caractériser la mise en œuvre, dans la conception de ressources pour l'enseignement, des choix énoncés par les enseignants-chercheurs lors des entretiens et les facteurs qui les influencent. La troisième étape consiste à effectuer des observations de classe d'une enseignante-chercheure interviewée, et qui est une des concepteurs des ressources analysées. Les observations de classe nous permettront d'étudier la mise en œuvre des choix énoncés par l'enseignante-chercheure et de caractériser l'écart existant entre la conception et la planification des séances et la mise en œuvre effective en classe.

Chapitre II- Le cas de la théorie des graphes : présentation mathématique et choix théoriques

Ce chapitre porte sur une caractérisation des spécificités des mathématiques discrètes : nous faisons le choix d'étudier les spécificités de la théorie des graphes.

Nous commençons ce chapitre par mettre en place des outils théoriques adaptés à la théorie des graphes afin de conduire une étude didactique prospective sur ce type de contenus mathématiques (§ II.1). Nous présentons dans la deuxième partie des justifications du choix de la théorie des graphes comme domaine mathématique pour notre étude (§ II.2).

Afin de pouvoir accéder à une telle caractérisation de la théorie des graphes, nous avons consulté des ouvrages destinés à l'enseignement de la théorie des graphes dans le supérieur. La caractérisation des choix effectués dans ces ouvrages nous a permis de cerner un spectre de choix possibles pour un concepteur de ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes. La consultation des ouvrages nous a permis aussi de caractériser les influences potentielles de facteurs didactiques (choix des contenus et leur présentation dans les ouvrages), épistémologiques (particularités de la théorie des graphes en tant que champ mathématique), et institutionnels (public destinataire de l'ouvrage) sur la conception des ressources pour l'enseignement. Ainsi, la troisième partie de ce chapitre porte sur le choix des ouvrages consultés et sur les objectifs de la consultation de ces ouvrages (§ II.3). Nous nous intéressons particulièrement aux objectifs des ouvrages consultés explicités par les concepteurs dans les préfaces, ainsi qu'aux choix qu'ils énoncent dans les préfaces en termes de contenus, et de présentation de ces contenus (§ II.3.3). Ces choix explicités peuvent en effet nous renseigner sur les caractéristiques de la théorie des graphes, mais aussi sur des points de vue de chercheurs ou enseignants-chercheurs dans le domaine. Ils peuvent nous permettre de mettre à jour d'éventuelles disparités ou tendances communes qui peuvent exister dans les choix de contenus et de leur présentation par des concepteurs poursuivant un même objectif.

Nous présentons, dans la quatrième partie (§ II.4) notre caractérisation de la présentation des concepts de « chemin » et « cycle » considérés comme des notions fondamentales en théorie des graphes par les concepteurs des ouvrages, et plus spécifiquement des parcours eulériens (§ II.4.1), des parcours hamiltoniens (§ II.4.2), et des plus courts chemins (§ II.4.3). Ainsi, pour chacun de ces concepts, nous nous intéressons à son émergence dans l'histoire, aux théorèmes fondamentaux et leurs preuves présentés dans les ouvrages, aux algorithmes mobilisés dans des preuves ou dans la résolution des problèmes, aux registres de représentation sémiotique mobilisés et aux activités cognitives qui en découlent (représentation, traitement et conversion), ainsi qu'aux liens établis par les auteurs avec les autres domaines mathématiques, avec les autres disciplines et avec la vie réelle. Nous présentons les aspects mathématiques de ces notions (annexe 1) pour le lecteur qui serait non familier avec celles-ci.

Enfin, la dernière partie (§ II.5) consiste en une synthèse des différents choix qui existent, en termes de contenus et des modes de présentation, concernant la conception de ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes, et une reformulation de nos questions de recherche initiales.

II.1- Apports théoriques

II.1.1- La théorie des champs conceptuels et la définition d'un concept par Vergnaud

En 1991, Vergnaud a développé la théorie des champs conceptuels, qui selon lui est « une théorie cognitive qui vise à fournir un cadre pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques » (p. 135). Sa principale finalité était la compréhension des filiations et des ruptures entre les connaissances des enfants et adolescents lors du processus de conceptualisation des structures additives et multiplicatives, des relations nombre-espace, et de l'algèbre.

Selon Vergnaud (1991), l'apprentissage d'un concept ne se limite pas à l'apprentissage de sa définition. C'est à travers la résolution des situations et des problèmes qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant.

« Une approche psychologique et didactique de la formation des concepts mathématiques, conduit à considérer un concept comme un ensemble d'invariants utilisables dans l'action. La définition pragmatique d'un concept fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par les sujets dans ces situations » (Vergnaud, 1991, p. 145).

Comme il n'est pas possible d'identifier les aspects d'un concept implicite sans l'aide de mots, énoncés, symboles et signes, Vergnaud a souligné que « l'usage de signifiants explicites est indispensable à la conceptualisation » (Vergnaud, 1991, p. 145).

Ainsi, selon Vergnaud (1991), un concept est un triplet composé de :

- L'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence) ;
- L'ensemble des invariants qui assurent l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ;
- L'ensemble des formes langagières et des signes qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, et les procédures de traitement (le signifiant).

Le sens d'un concept mathématique est constitué par l'ensemble des schèmes qu'une situation ou un signifiant permettent de mettre en œuvre chez un sujet. Une situation particulière ou un symbolisme donné ne peuvent pas évoquer tous les schèmes disponibles chez un sujet. Ainsi, le sens d'une situation ou d'un symbole mobilisant un concept n'est pas le sens du concept ; l'opérationnalité d'un concept doit être éprouvée à travers une diversité de situations, pour lesquelles le sujet peut disposer, ou non, des compétences requises pour le traitement.

II.1.2- Registres de représentation sémiotique : Objets mathématiques et représentations

Duval (1993) met l'accent sur le rôle fondamental des « signifiants » dans l'activité mathématique. Il définit la « représentation » d'un objet par le fait de le rendre perceptible par un signe, une image, une description, etc. Il souligne qu'il n'est pas possible d'accéder à un objet mathématique en dehors de toute représentation faite de cet objet (Duval, 1993). En outre, un même objet (un concept ou une notion tels qu'un nombre, une fonction, un polygone, etc.) peut avoir plusieurs représentations possibles ; par exemple, une fonction peut être représentée par une expression algébrique ou par une courbe représentative.

« La distinction entre un objet et sa représentation est donc un point stratégique pour la compréhension des mathématiques » (Duval, 1993, p. 37).

En effet, une représentation donnée ne peut rendre compte que d'une sélection de caractéristiques d'un objet donné. Cette sélection est contrainte par les possibilités offertes par la représentation choisie ; une image n'offre pas les mêmes possibilités de représentation qu'un tableau de valeurs numériques par exemple. « Cela veut dire que toute représentation est cognitivement partielle par rapport à ce qu'elle représente » (Duval, 1993, p. 49-50).

Duval (1993) distingue deux types de représentations : les représentations sémiotiques et les représentations mentales. « Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi des signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signification et de fonctionnement » (Duval, 1993, p. 39). Et les représentations mentales sont les images mentales que l'individu développe sur un objet.

Selon Duval (1993), les représentations sémiotiques sont fondamentales pour les représentations mentales qu'un individu peut avoir d'un objet mathématique. Les représentations sémiotiques peuvent être utilisées pour la communication des représentations mentales d'un objet, afin de les extérioriser et de les rendre accessibles à autrui. En outre, elles sont essentielles pour le développement des représentations mentales d'un objet. En effet, la sémosis renvoie à l'appréhension ou la production d'une représentation sémiotique, tandis que la noésis renvoie à l'appréhension conceptuelle d'un objet. La noésis est inséparable de la sémosis. « Il n'y a pas de noésis sans sémosis » (Duval, 1993, p. 40).

Un ensemble de représentations sémiotiques peut constituer un « registre ». Un « registre » peut dénoter une catégorie d'éléments de même nature. Duval (1993) définit les « registres de représentation sémiotique » comme un système sémiotique permettant trois activités cognitives fondamentales liées à la sémosis (Duval, 1993) : la formation de représentations, le traitement et la conversion. Nous explicitons ci-dessous ces trois activités :

- *La formation d'une représentation identifiable comme une représentation d'un registre donné* peut être considérée comme une tâche de description d'une sélection de caractéristiques de l'objet à représenter (telle que construire la courbe représentative d'une fonction donnée). Cette formation doit respecter des règles propres au registre sémiotique dans lequel elle est produite (tels que les règles de construction d'une courbe) dont la fonction est d'assurer l'identification de la représentation et la possibilité d'effectuer des traitements ;
- *Le traitement d'une représentation* est une transformation interne de cette représentation dans le registre même où elle a été formée (par exemple, à partir de la courbe représentative d'une fonction donnée, construire une courbe qui représente la fonction dérivée). La possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend du registre sémiotique utilisé. Il existe des règles de traitement propres à chaque registre : la nature et le nombre varient d'un registre à un autre ;
- *La conversion d'une représentation* est une transformation de cette représentation en une représentation dans un autre registre en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale. La conversion est une transformation externe au registre de départ, différente de celle de traitement (par exemple, l'élaboration d'un tableau de variations d'une fonction à partir de sa courbe représentative donnée).

Duval (1993) met l'accent sur l'importance de mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotique pour l'appréhension conceptuelle des objets mathématiques :

« Il est essentiel, dans l'activité mathématique, soit de pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotique (figures, graphes, écriture symbolique, langue naturelle, etc.) au cours d'une même démarche, soit de pouvoir choisir un registre plutôt que l'autre. Et, indépendamment de tout commodité de traitement, ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations. [...] c'est à ces deux conditions qu'une représentation fonctionne véritablement comme représentation c'est-à-dire qu'elle donne accès à l'objet représenté » (Duval, 1993, p. 40).

L'existence de plusieurs registres de représentation est essentielle. Elle permet d'effectuer des choix de représentation sémiotique des contenus (objet, concept ou notion). Elle permet aussi des traitements plus rapides pouvant mettre en relief les relations entre les objets d'une façon plus économique. En outre, la nature du registre de représentation sémiotique mobilisé (en termes de possibilités qu'il offre et des contraintes) impose une sélection des éléments significatifs du contenu que l'on représente. De plus, l'appréhension des représentations sémiotiques suppose une distinction entre les objets et leurs représentations. Cette distinction ne peut se faire qu'en comparant les représentations diverses d'un même objet, effectuées dans plusieurs registres sémiotiques. Ainsi, former des représentations dans des registres différents, effectuer des traitements sur ces représentations dans un registre donné et enfin, convertir des représentations d'un registre sémiotique à un autre est, selon Duval (1993), fondamental pour le développement des représentations mentales.

Nous notons que Duval (1993), qui, dans son travail, distingue entre un objet mathématique et une représentation de cet objet, met l'accent sur la définition des représentations sémiotiques d'un objet mathématique sans porter un intérêt particulier à la définition de ce dernier ou à son statut. En revanche, différents travaux (e.g. Sfard, 1991; Douady, 1992) se sont centrés sur la définition des « concepts » et des « objets » en mathématiques. Nous exposons ci-dessous (§ II.1.3) les définitions des « concepts, objets et processus » développés par Sfard (1991) et les « statuts outil/objet d'un concept » introduits par Douady (1992). Nous présentons ensuite (§ II.1.4) ce que nous retenons de ces différents apports théoriques pour notre travail.

II.1.3- Caractérisation des concepts et de leur statut en didactique des mathématiques

Sfard (1991) fait une distinction entre les *concepts* et les *conceptions*. Elle désigne par *concept* une idée mathématique présentée en tant que construction théorique dans le *formal universe of ideal knowledge* et par *conception* l'ensemble des représentations internes et associations évoquées par le concept chez un sujet, c'est-à-dire dans le *universe of human knowing* (Sfard, 1991, p. 3). Sfard (1991) distingue aussi entre « objet » et un « processus ». Pour elle, percevoir une entité mathématique comme un objet signifie la considérer dans son ensemble comme une structure statique, existant quelque part dans l'espace et le temps. En revanche, interpréter une notion comme un processus implique de la considérer comme une conception opérationnelle d'une notion, potentielle plutôt que réelle, qui prend naissance dans une séquence d'actions.

Sfard (1991) souligne que les conceptions opérationnelles et structurelles d'une même notion mathématique sont complémentaires, bien qu'elles puissent paraître incompatibles. Elle soutient que les concepts mathématiques peuvent être définis structurellement et opérationnellement et que la capacité de les percevoir comme processus et objets à la fois est indispensable pour une « compréhension » des mathématiques. En revanche, selon Sfard (1991), dans le développement d'un concept, les conceptions opérationnelles précèdent l'approche structurelle.

Douady (1992) distingue le statut *outil* et le statut *objet* d'un concept. Elle définit un concept comme outil quand il est mobilisé pour la résolution d'un problème. Pour Douady, « un outil est engagé par quelqu'un, dans un contexte problématique, à un moment donné » (1992, p. 134). Douady souligne qu'un concept n'est pas mobilisé de manière isolée dans un problème. Les relations établies entre le concept et un ensemble de concepts intervenant dans la résolution d'un problème contribuent à donner au concept son sens. Ainsi, « la dimension outil est constitutive du sens d'un concept » (Douady, 1992, p. 134). Les concepts acquièrent le statut d'objet quand ils sont décontextualisés et dépersonnalisés. En effet, Douady désigne par objet « l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement » (1992, p. 134). Ainsi, l'objet est défini indépendamment de ses usages, et peut être réinvesti dans des contextes loin du contexte d'origine.

Ces apports nous permettent de définir des orientations théoriques pour l'étude de la théorie des graphes, dans le paragraphe suivant.

II.1.4- Concepts et registres de représentation sémiotique dans le cas de la théorie des graphes

Nous présentons dans cette partie les termes « conception », « concept », « objet », et « processus » tels que nous les considérons dans la suite de notre travail.

Nous distinguons dans notre travail « conception » et « concept ». Nous considérons une conception dans le sens de Sfard, comme étant une représentation mentale interne d'une notion relative à un sujet (Sfard, 1991). Et nous adoptons la définition d'un concept présentée par Vergnaud (1991), tout en reconnaissant qu'un concept peut être perçu comme processus et comme objet (Sfard, 1991). De plus, nous faisons la distinction entre un objet et sa représentation. Nous considérons comme objets mathématiques les concepts qui peuvent être représentés dans un registre de représentation sémiotique (Duval, 1993) tels que les rectangles, les polynômes, etc. et nous considérons comme « processus » les concepts qui renvoient à des démarches à mettre en place pour/dans la recherche des objets tels que le périmètre d'un rectangle, le degré d'un polynôme, etc. Nous rejoignons ainsi Sfard (1991) en ce qui concerne le caractère statique d'un objet et le caractère dynamique d'un processus. Nous soulignons que la façon dont nous considérons les objets mathématiques dans notre travail est indépendante de leur statut dans un contexte problématique donné. Par la suite, nous ne prenons pas en considération les statuts outil/objet d'un concept.

Dans l'enseignement de la théorie des graphes au supérieur, des liens peuvent être effectués (ou non) avec d'autres domaines mathématiques. Ainsi, nous nous intéressons aux registres de représentation sémiotique mobilisés dans un enseignement de la théorie des graphes et les activités cognitives dans lesquelles les étudiants peuvent être potentiellement engagés si des liens sont établis avec d'autres domaines mathématiques (nous développons ce point plus loin dans ce

chapitre, § II.4.1.4, § II.4.2.4 et § II.4.3.4). Nous présentons ci-dessous les registres de représentation sémiotique que nous estimons susceptibles d'être mobilisés en théorie des graphes :

Registre de représentation par un schéma : représentation par des schémas ou par des figures des objets mathématiques. Ce registre permet de représenter les objets mathématiques abstraits par des schémas : les représentations par des schémas ont des fonctions descriptives et illustratives des caractéristiques de ces objets. De plus, il est possible de raisonner et d'effectuer des traitements en se basant sur les schémas, ainsi que de convertir d'une représentation par un schéma en d'autres registres de représentation.

Registre de représentation par un graphe : représentation par des graphes des objets mathématiques. Ce registre permet de former des représentations des objets mathématiques (tels qu'un chemin, un cycle, etc.), d'effectuer des traitements sur les graphes (tels que la recherche d'un chemin, d'un plus court chemin, etc.) et enfin de convertir les représentations par graphe en d'autres registres de représentation et réciproquement (par exemple, la conversion de la description de la ville de Königsberg en langage naturel en un graphe).

Il est possible de former une représentation par un graphe d'un objet à partir d'une représentation par un schéma d'une situation donnée par un simple codage. Nous illustrons nos propos par l'exemple ci-dessous :

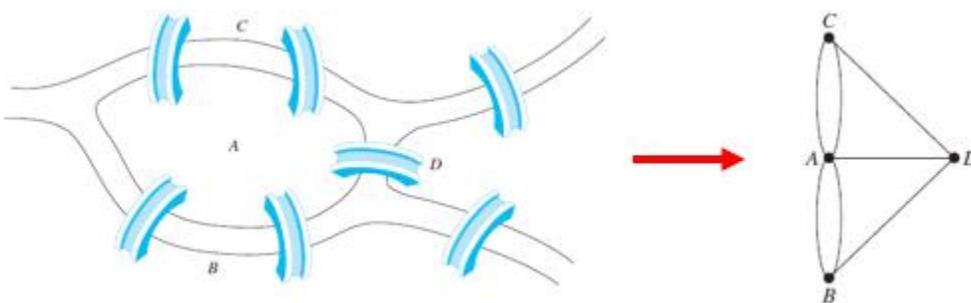


Figure 2 : Le passage d'une représentation par un schéma des ponts de Königsberg à une représentation par un graphe (Rosen, 2012, p. 693)

Le passage de la représentation par un schéma à la représentation par un graphe dans la figure 2 est par simple codage. Plusieurs formes de codage sont possibles. A titre d'exemple, dans la figure 2 ci-dessus, pour convertir du registre de représentation par un schéma au registre de représentation par un graphe, chaque région est désignée par un sommet (cf. annexe 1, D1) du graphe et chaque pont par une arête (cf. annexe 1, D1).

Registre de représentation par le langage naturel : représentation des objets mathématiques par des phrases ou par la composition de textes. Par exemple « un chemin eulérien est un chemin simple qui contient chaque arête d'un graphe » (cf. annexe 1, D32). Ce registre permet de former des représentations des objets mathématiques par une simple énonciation et de raisonner sur ces objets.

Registre de représentation par un tableau : représentation de certains attributs des objets mathématiques par des notations ou des valeurs numériques organisées dans un tableau. Des traitements peuvent être effectués (ou non) sur les représentations par tableau, et il est possible de convertir des représentations d'autres registres en des représentations par des tableaux. Nous donnons pour illustrer nos propos les exemples ci-dessous :

	Berlin	Brussels	Düsseldorf	Luxembourg	Munich
Brussels	783				
Düsseldorf	564	223			
Luxembourg	764	219	224		
Munich	585	771	613	517	
Paris	1,057	308	497	375	832

Figure 3 : Tableau qui représente les distances (en kilomètres) entre des villes européennes (Epp, 2010, p. 660)

La représentation par un tableau dans la figure 3 a pour seule fonction de décrire les distances entre différentes villes européennes.

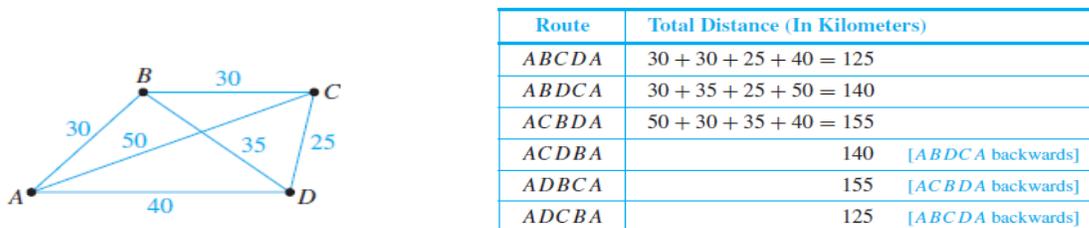


Figure 4 : La recherche d'un cycle hamiltonien dans le graphe pondéré à gauche en utilisant le tableau à droite (Epp, 2010, p. 656)

Il y a une conversion de la représentation par un graphe dans la figure 4 en une représentation par un tableau. De même, la représentation par un tableau permet un traitement qui est la recherche d'un cycle hamiltonien (cf. annexe 1, D34) allant du sommet A à lui-même en listant tous les cycles possibles et en calculant la longueur de chacun d'eux.

Registre de représentation par une matrice : les matrices peuvent être utilisées pour représenter des objets mathématiques en théorie des graphes tels le nombre de chemins qui existent dans un graphe entre deux sommets donnés. En revanche, il est possible d'effectuer des traitements sur les représentations par une matrice en mobilisant des opérations sur les matrices telles que l'addition ou la puissance. Par exemple, pour savoir si un graphe ayant 3 sommets est connexe (cf. annexe 1, D23), il est possible d'additionner la matrice représentant ce graphe, avec le carré de cette matrice, et de vérifier si la matrice résultante a des entrées nulles. Nous donnons ci-dessous (cf. figure 5) un exemple d'une représentation d'un graphe par une matrice :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figure 5 : Représentation d'un graphe par une matrice (Epp, 2010, p. 663)

Dans la représentation par une matrice, les nombres dans la matrice indiquent le nombre d'arêtes entre deux sommets donnés. Par exemple, entre v_1 et v_2 , il existe une arête.

Registre de représentation formelle : représentation des objets par des symboles mathématiques ($\emptyset, \alpha, \leq, \dots$), des quantificateurs (\forall, \exists, \dots), des opérations ($+, -, \times, \text{etc.}$) et des opérateurs logiques ($\Leftrightarrow, \Rightarrow, \wedge, \vee, \dots$). Nous exposons un exemple dans l'encadré 1 ci-dessous :

Théorème 1. — *Les différentes composantes du graphe (X, Γ) constituent une partition de X ; c'est-à-dire :*

- (1) $C_a \neq \emptyset$
- (2) $C_a \neq C_b$ entraîne $C_a \cap C_b = \emptyset$
- (3) $\bigcup C_a = X$.

Encadré 1 : Théorème énoncé dans le registre de représentation formelle (Berge, 1963, p. 2)

II.2- La théorie des graphes et ses particularités pour notre étude

La caractérisation des contenus des ressources conçues pour l'enseignement est déterminée par le domaine mathématique en jeu. Nous nous intéressons au champ des mathématiques discrètes. Les caractéristiques de ce champ considéré comme « contemporain », dans la recherche comme dans l'enseignement (§ I.3), le rendent opportun pour notre travail de thèse.

Nous faisons un focus sur la théorie des graphes. En effet, la théorie des graphes présente des spécificités qui la rendent particulièrement intéressante pour notre travail de thèse. Elle occupe une place importante dans le champ de recherche en mathématiques discrètes (Gross & Yellen, 2004). Elle permet d'établir des liens avec d'autres domaines mathématiques tels que l'algèbre et la topologie ; elle permet de mettre en relation des représentations différentes des objets mathématiques (par un graphe, en langage naturel, formelles, par une matrice, etc.) ; elle permet de modéliser et de résoudre des problèmes issus de différentes disciplines, comme des problèmes de la vie réelle d'un citoyen. Pour traiter cette dimension « modélisation », nous considérerons dans la suite de notre travail la « modélisation mathématique » dans le sens de Blum et Borromeo Ferri (2009), qui la définissent comme étant le processus de traduction entre le monde réel et les mathématiques, et réciproquement.

Dans l'enseignement supérieur, nous constatons que la théorie des graphes est enseignée dans différents parcours de formation en France comme au Liban. Elle a été introduite dans les programmes d'enseignement de spécialité mathématique de la terminale économique et sociale (ES) en France dès 2002 (Cartier, 2008). Mais elle n'est pas enseignée selon les programmes officiels scolaires au Liban (CRDP (Centre de Recherche et de Développement Pédagogiques), 2020).

Les potentialités de la théorie des graphes dans la recherche comme dans l'enseignement peuvent la rendre assujettie à différentes formes de présentation au niveau des choix des concepts et des notions mises en avant, de leur exposition, et des articulations entre eux et avec des applications diverses (§ II.3). Par ailleurs, rappelons qu'il n'y a pas de travaux de recherche en didactique sur les pratiques des enseignants lorsqu'il s'agit de l'enseignement de la théorie des graphes. Ainsi, la théorie des graphes apparaît comme un domaine mathématique opportun pour l'étude des pratiques d'enseignement des enseignants-chercheurs.

Afin de caractériser les spécificités de la théorie des graphes, nous avons consulté plusieurs ouvrages, destinés à l'enseignement, conçus par des enseignants-chercheurs. Nous nous

intéressons particulièrement aux questions suivantes : Existe-t-il des contenus mathématiques stabilisés dans l'enseignement supérieur en théorie des graphes ? Quelles variations existent dans les ouvrages universitaires ?

La caractérisation des choix effectués dans ces ouvrages nous permettra de cerner la conception d'une unité d'enseignement de la théorie des graphes, et de caractériser les influences potentielles de facteurs didactiques (choix des contenus et leur présentation dans les ouvrages), épistémologiques (particularités de la théorie des graphes en tant que champ mathématique), et institutionnels (public destinataire de l'ouvrage).

Nous expliciterons dans la suite notre choix des ouvrages consultés, et les objectifs que nous nous sommes fixés pour l'étude de ceux-ci.

II.3- Sélection des ouvrages et choix effectués par les concepteurs

Nous présentons dans cette partie notre consultation des ouvrages autour de la théorie des graphes dans/pour l'enseignement supérieur. Nous nous intéressons à l'identification, à partir de cette consultation des ouvrages, des spécificités de la théorie des graphes, à savoir : les concepts mathématiques en jeu et les relations qui existent entre eux ; les différentes représentations sémiotiques de ces concepts ; les liens éventuels avec d'autres domaines mathématiques et d'autres disciplines ; et la possibilité d'utiliser la théorie des graphes pour représenter ou modéliser des phénomènes issus de la vie réelle. Nous souhaitons ainsi faire apparaître d'éventuelles disparités ou tendances communes existantes dans la présentation de mêmes contenus mathématiques.

Cette section est composée de trois parties. La première consiste en une présentation des ouvrages consultés (§ II.3.1), des profils des concepteurs et du public destinataire pour chaque ouvrage. La deuxième partie porte sur la considération, selon les préfaces des ouvrages, de la place de la théorie des graphes dans les deux mondes de la recherche et de l'enseignement (§ II.3.2). Nous exposons, dans la troisième partie, les objectifs explicités par les auteurs, ainsi que les choix qu'ils énoncent en termes de contenus, comme en termes de présentation de ces contenus (§ II.3.3).

II.3.1- Présentation des ouvrages consultés

Nous avons consulté huit ouvrages :

- Trois sont des ouvrages de mathématiques discrètes écrits par des mathématiciens, chercheurs en mathématiques discrètes avec des chapitres dédiés à la théorie des graphes (Epp, 2010; Rosen, 2012; Dierker & Voxman, 1986) ;
- Cinq portent complètement sur la théorie des graphes dont les auteurs sont des chercheurs en théorie des graphes (Berge, 1963; Bondy & Murty, 1976; 2008a; Wilson, 1996; West, 2001).

Ces ouvrages ne sont pas totalement exhaustifs en tant que ressources à destination d'un public d'enseignants ou d'étudiants. Cependant, ils ont été choisis en fonction de la diversité de leurs destinataires, ainsi qu'en fonction de leurs années de publication pour couvrir une période large. Nous présentons dans le tableau ci-dessous, le titre de chaque ouvrage consulté, les auteurs et leurs domaines de recherche, ainsi que les publics destinataires des ouvrages quand ils sont évoqués explicitement par les auteurs. Pour les domaines de recherche des auteurs, nous avons effectué une recherche en ligne. Pour les publics destinataires des ouvrages, nous nous sommes appuyée sur les

publics mentionnés par les auteurs dans les préfaces. Pour les ouvrages où le public n'est pas précisé par les auteurs, nous l'avons spécifié dans le tableau.

Ouvrage, année de publication et auteur(s)	Domaine de recherche des auteurs	Public destinataire de l'ouvrage
Graph theory with applications (1976)- Bondy et U.S.R. Murty	Bondy : Chercheur en théorie des graphes Murty : Chercheur en combinatoire et optimisation	Le public n'est pas précisé.
Graph theory (2008a)- Bondy et U.S.R. Murty ¹¹	Bondy : Chercheur en théorie des graphes Murty : Chercheur en combinatoire et optimisation	L'ouvrage est destiné aux étudiants en mathématiques et informatique et aux enseignants souhaitant enseigner un cours de théorie des graphes ; L'ouvrage peut servir comme introduction à la recherche en théorie des graphes.
Discrete mathematics with applications (2011)- S. Epp	Epp : Chercheuse en mathématiques, elle s'intéresse aux mathématiques discrètes, à la logique mathématique	L'ouvrage est destiné aux étudiants en informatique, mathématiques, « mathematics education », futurs ingénieurs et aux enseignants souhaitant enseigner un cours de théorie des graphes.
Discrete mathematics and its applications (2012)- K. Rosen	Rosen : Chercheur en mathématiques, il s'intéresse aux mathématiques discrètes et théorie des nombres	L'ouvrage s'adresse à des utilisateurs dans des formations diverses dont informatique, mathématiques et génie, ainsi qu'aux enseignants souhaitant enseigner un cours de théorie des graphes.
Théorie des graphes et ses applications (1963)- C. Berge	Berge : Chercheur en mathématiques qui a travaillé sur la théorie des graphes	Le public n'est pas précisé.
Introduction to graph theory (2001)- D. West	West : Chercheur en théorie des graphes	Le public n'est pas précisé, cependant l'auteur donne des indications aux enseignants

¹¹ Bondy et Murty ont rédigé cet ouvrage une trentaine d'années après la publication de la première édition de « Graph theory with applications » en 1976.

		souhaitant enseigner un cours de théorie des graphes.
Introduction to graph theory (1996)- R. J. Wilson	Wilson : Chercheur en théorie des graphes et en histoire des mathématiques	L'ouvrage est destiné aux étudiants en mathématiques et à des lecteurs appartenant à différents domaines qui souhaitent étudier la théorie des graphes.
Discrete mathematics (1986)- P. F. Dierker et W. L. Voxman	Dierker : Chercheur en mathématiques ¹² Voxman : Chercheur en théorie des nombres	Le public n'est pas précisé, cependant les auteurs indiquent qu'un cours de mathématiques discrètes est important dans des formations en informatique, mathématiques et d'autres formations centrées sur les mathématiques. Ils donnent des indications aux enseignants souhaitant enseigner un cours de théorie des graphes.

Tableau 1 : Les ouvrages consultés, les profils des auteurs et le public destinataire de chaque ouvrage

Nous constatons d'après le tableau 1 que les ouvrages consultés sont, sans exception, rédigés par des mathématiciens qui mènent des recherches principalement en mathématiques discrètes. Ils s'adressent à un public varié d'enseignants, de chercheurs en formation et d'étudiants appartenant à des filières différentes notamment les mathématiques, l'informatique, futurs ingénieurs et étudiants en « *mathematics education* ». Les ouvrages sont publiés sur un intervalle de cinquante années (entre 1963 et 2012), une période durant laquelle la théorie des graphes a évolué considérablement selon Bondy et Murty (2008a).

Ainsi, ces ouvrages conçus pour l'enseignement supérieur sont variés en termes de publics destinataires et de périodes de leur conception. Cette diversité peut potentiellement influencer les choix en termes de contenus et modes de présentation.

Nous présentons dans la suite les particularités de la théorie des graphes comme explicitées par les auteurs des ouvrages dans les préfaces.

II.3.2- La théorie des graphes dans la recherche et l'enseignement, selon les auteurs des ouvrages consultés

Nous avons identifié, à partir des préfaces, les points de vue des auteurs des ouvrages sur la théorie des graphes et la place qu'elle occupe dans la recherche et dans l'enseignement.

¹² Nous avons trouvé un seul article pour lui sur les plateformes qui date de 1977 et qui porte sur la théorie des graphes. <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0132028?journalCode=smjmap>

Selon les auteurs des ouvrages, la théorie des graphes se caractérise par les liens qui existent avec d'autres domaines mathématiques et par son potentiel à représenter/modéliser des situations issues d'autres disciplines scientifiques ou de la vie réelle. Ils ajoutent que c'est un domaine qui peut avoir un rôle important dans l'enseignement et dans le monde de la recherche mathématique, surtout au niveau du développement des algorithmes. Nous détaillerons leurs propos dans la suite du paragraphe.

Selon Bondy et Murty (2008a), dans les trente années avant la publication de leur ouvrage en 2008, la théorie des graphes a évolué considérablement. Plusieurs événements ont marqué cette évolution dont : le développement d'algorithmes à temps polynomial (cf. encadré 2) permettant de résoudre divers problèmes, la découverte par S. Cook au début des années 1970 de l'existence de la vaste classe de problèmes NP-complets (cf. encadré 2) et par conséquent la recherche d'algorithmes d'approximation efficaces pour les résoudre ; et la résolution de la conjecture des quatre couleurs par K. Appel et W. Haken en 1976. Bondy et Murty (2008a) soulignent que, depuis lors, le sujet a connu une croissance exponentielle. Ils considèrent que cette évolution de la théorie des graphes est due en grande partie à son potentiel de résolution de problèmes relevant de différents domaines scientifiques. Ils citent à titre d'exemples les réseaux de communication, l'optimisation combinatoire et les sciences appliquées dont l'importance s'est accentuée dans l'ère des développements technologiques et informatiques (Bondy & Murty, 2008a). Berge (1963) et Wilson (1996) soulignent, de même, que la théorie des graphes s'applique à une variété de domaines, tels que la recherche opérationnelle, la théorie de l'information, la cybernétique, la chimie, la génétique et la linguistique, le génie électrique et la géographie.

En revanche, Bondy et Murty (2008a) pointent, mais sans détailler, que des liens existent entre la théorie des graphes et les autres branches des mathématiques telles que la topologie, la géométrie et la probabilité. Ils ajoutent que des outils d'algèbre, d'analyse, et de théorie des nombres sont utilisés en théorie des graphes avec des résultats considérables, et que des méthodes de résolution de problèmes issues de la théorie des graphes sont de plus en plus utilisées dans d'autres domaines des mathématiques tels que l'algèbre et la théorie des ensembles. Bondy et Murty (2008a) insistent sur le rôle de la théorie des graphes dans les sciences appliquées, notamment, et dans la recherche d'algorithmes efficaces qui a alimenté beaucoup de travaux sur la structure des graphes (Bondy & Murty, 2008a). En effet, la résolution de certains problèmes nécessite la conception d'algorithmes avec toutes leurs caractéristiques en termes d'efficacité et de complexité (cf. Encadré 2).

West (2001) et Rosen (2012) notent que la théorie des graphes permet d'entraîner les étudiants à la construction de preuves, notamment par induction mathématique (*mathematical induction*) en développant leur capacité de penser de manière abstraite. Cela signifie, selon Epp (2010), leur apprendre à utiliser des arguments logiques et à raisonner à partir de définitions et de résultats connus pour obtenir de nouveaux résultats, ainsi que travailler avec des représentations formelles symboliques comme s'il s'agissait d'objets concrets.

Selon Bondy et Murty (2008a), la théorie des graphes est un sujet idéal à inclure dans les programmes d'enseignement des mathématiques, pour plusieurs raisons, du fait qu'elle se visualise comme la géométrie. Ils considèrent qu'elle contient des concepts qui mobilisent peu de prérequis et des problèmes ouverts qui sollicitent une pensée critique chez les étudiants. Elle présente de plus de nombreuses applications. Pourtant, selon West (2001), la théorie des graphes est un domaine mathématique relativement jeune (dans les deux mondes, recherche et enseignement) et aucun consensus ne s'est dégagé selon lui sur la présentation du matériel dans un ouvrage qui a

pour objectif d'introduire la théorie des graphes à des utilisateurs variés (étudiants, jeunes chercheurs, enseignants, etc.).

Un algorithme de résolution d'un problème est une procédure bien définie qui accepte une instance du problème comme entrée et renvoie une solution au problème comme sortie. A cet égard, les deux aspects théoriques intéressants sont, premièrement, de vérifier qu'un algorithme proposé fonctionne bien correctement et, deuxièmement, d'analyser à quel point cette procédure est efficace. L'efficacité d'un algorithme est étroitement liée à la « complexité de cet algorithme ».

Par complexité d'un algorithme, nous entendons le nombre d'opérations élémentaires (telles que les opérations arithmétiques et les comparaisons) requises pour son exécution. Ce nombre dépend clairement de la taille et de la nature de l'entrée. La notion de complexité en temps correspond au temps demandé pour l'exécution d'un traitement automatique. Si la complexité est bornée supérieurement par un polynôme en la taille de l'entrée, l'algorithme est dit être en temps polynomial ou plus simplement polynomial.

L'importance des algorithmes polynomiaux vient du fait qu'ils se trouvent souvent être exécutable sur un ordinateur, même sur de grands graphes en entrée. En revanche, les algorithmes dont la complexité est exponentielle en la taille de l'entrée ont des temps d'exécution qui les rendent impraticables même sur des entrées de taille modérée. Des problèmes dont la résolution sollicite de tels algorithmes sont désignés par NP-complets.

Encadré 2 : Algorithmes et différents types de complexité comme présentés dans (Bondy & Murty, 2008b, p. 184)

Nous retenons des points de vue des auteurs exposés ci-dessus sur la théorie des graphes dans l'enseignement et la recherche les idées dominantes suivantes. Il s'agit d'une théorie en pleine évolution qui a des liens avec d'autres domaines mathématiques et d'autres disciplines. C'est une théorie intéressante pour plusieurs domaines d'enseignement et de formation. En revanche, il n'existe pas de consensus sur la manière dont on peut l'introduire dans une formation ou un cursus donné. En fait, ces caractéristiques de la théorie des graphes posent des interrogations sur la « cohérence » d'une formation universitaire, notamment quant aux choix des contenus, leur présentation et leur articulation avec les autres domaines mathématiques et disciplines. Afin de nous éclairer sur les choix qui peuvent exister dans la conception d'un module d'enseignement de la théorie des graphes, nous avons cherché dans les préfaces des ouvrages consultés, les objectifs et les choix explicités des concepteurs (partie suivante).

II.3.3- Présentation des objectifs et des choix explicités par les auteurs des ouvrages consultés

Nous exposons dans cette partie les objectifs précisés par le(s) auteur(s) des ouvrages consultés, les différents choix de contenus et leur présentation.

II.3.3.1. Étude des préfaces des ouvrages

Dans cette partie, nous avons repéré dans les préfaces des ouvrages, les expressions où les auteurs énoncent leurs objectifs. Par exemple, Bondy et Murty (1976) déclarent dans la préface : « This book is intended as an introduction to graph theory. Our aim has been to present what we consider to be the basic material, together with a wide variety of applications, both to other branches of mathematics and to real-world problems. » (Bondy & Murty, 1976, p. VI). Cette citation reflète

des objectifs des auteurs qui consistent à introduire la théorie des graphes et de présenter ce qu'ils considèrent comme « notions de base ». Ils ont également comme objectif de mettre à disposition des utilisateurs une grande variété d'applications dans d'autres domaines mathématiques, d'autres disciplines et dans des situations issues de la vie réelle. Nous avons repéré de même les déclarations dans lesquelles les auteurs explicitent leurs choix en termes de contenus ou de leur présentation. Nous citons à titre d'exemple ce passage de Bondy et Murty (2008a) :

« The exercises of varying levels of difficulty, have been designed so as to help the reader master these techniques and to reinforce his or her grasp of the material. Those exercises which are needed for an understanding of the text are indicated by a star. The more challenging exercises are separated from the easier ones by a dividing line » (Bondy & Murty, 2008a, p. IX).

Nous pouvons identifier ici un choix en termes de contenus : l'inclusion des exercices à plusieurs niveaux de difficulté. De même, des choix en termes de présentation des exercices peuvent être identifiés notamment par des indications montrant les exercices que les auteurs considèrent comme difficiles.

Nous notons qu'un choix annoncé dans la préface peut être considéré à la fois comme un choix en termes de contenus et en termes de présentation. Nous citons, à titre d'exemple, West (2001):

« Many results in graph theory have several proofs; illustrating this can increase students' flexibility in trying multiple approaches to a problem. I include some alternative proofs as remarks and others as exercises » (West, 2001, p. XIII).

Dans la citation « I include some alternative proofs as remarks and others as exercises », nous pouvons identifier un choix au niveau des contenus (inclure des preuves alternatives quand elles existent), mais aussi un choix au niveau de la présentation (présenter des preuves « alternatives » comme remarques ou dans les exercices).

Nous notons que les préfaces ont un nombre de pages qui varie entre une page et demie pour certaines et neuf pages pour d'autres. En effet, il peut exister des choix implicites non explicités par les auteurs dans les préfaces. Toutefois, nous ne considérons que les choix explicitement déclarés par les auteurs.

II.3.3.2. Objectifs, contenus et modes de présentation

Les objectifs à atteindre des auteurs d'un ouvrage déterminent les modes de présentation de ces contenus : les relations à expliciter entre les différents concepts et les liens à établir avec d'autres domaines mathématiques, les applications dans d'autres disciplines ou issues de la vie réelle, les représentations utilisées (langage naturel, par schéma, par tableau, etc.), ainsi que le degré de formalisme dans l'exposition des idées, etc. Dans le tableau ci-dessous, nous présentons pour chaque ouvrage : les objectifs ainsi que les choix, en termes de contenus comme en termes de présentation, tel qu'ils sont énoncés par le(s) auteur(s) dans les préfaces.

Ouvrage, auteur(s) et année de publication	Objectifs de l'ouvrage	Choix des contenus, si explicités par les auteurs	Modes de présentation des contenus, si explicités par les auteurs
Graph theory with applications (1976)- J.A. Bondy et U.S.R. Murty	L'ouvrage vise à introduire la théorie des graphes. L'objectif des auteurs est de présenter ce qu'ils considèrent comme notions de base, ainsi qu'une grande variété d'applications, dans d'autres domaines mathématiques, d'autres disciplines et dans des situations issues de la vie réelle.	<ul style="list-style-type: none"> - applications portant sur la partie théorique développée dans le cours ; - des exercices à plusieurs niveaux de difficulté ; - tableau exposant un nombre de problèmes non résolus en théorie des graphes en annexe ; - des suggestions de lectures supplémentaires données en annexe ; - inclusion de plusieurs algorithmes et analyse de leur efficacité ; - pas de mention sur l'exécution des algorithmes en utilisant des logiciels. 	<ul style="list-style-type: none"> - traitement « approfondi » des applications ; - indications montrant les exercices les plus difficiles et indications pour leur résolution en annexe, le cas échéant ; - introduction de nouvelles définitions dans certains exercices ; - indications montrant les exercices utilisés dans des sections ultérieures ; - propriétés des graphes exposées dans un tableau en annexe.
Graph theory (2008a)- J.A. Bondy et U.S.R. Murty	L'objectif premier de l'ouvrage était d'apporter des modifications mineures à l'ouvrage précédent des auteurs « graph theory with applications ». L'objectif du précédent ouvrage était de présenter une introduction à la théorie des graphes pour des étudiants en mathématiques et en informatique. Cet ouvrage garde le même objectif, tout en ayant un deuxième objectif	<ul style="list-style-type: none"> - exposition de contenus à aborder dans un cours de théorie des graphes au supérieur ; - des représentations par graphes pour illustrer les concepts et les notions ; - des exercices à plusieurs niveaux de difficulté ; - inclusion de sections sur des sujets qui demandent plusieurs notions comme prérequis ; 	<ul style="list-style-type: none"> - description détaillée des modes de raisonnement mis en œuvre dans la construction des preuves ; - indications montrant les exercices les plus difficiles ; - indications montrant les exercices nécessaires à la compréhension des notions et des concepts présentés ; - organisation des contenus permettant de les utiliser dans un

	de servir comme introduction à la recherche en théorie des graphes.	<ul style="list-style-type: none"> - mise en avant et discussion de problèmes ouverts intéressants pour la recherche ; - exposition de problèmes intéressants pour la recherche en théorie des graphes en annexe. 	cours d'introduction à la théorie des graphes.
Discrete mathematics with applications (2011)- S. Epp	L'objectif de l'ouvrage est de fournir un traitement clair et accessible des mathématiques discrètes pour des étudiants dans des filières différentes : informatique, mathématiques, éducation de mathématiques et génie. L'objectif de l'ouvrage est surtout de présenter les contenus mathématiques que l'auteur considère essentiels pour des cours d'informatique.	<ul style="list-style-type: none"> - inclusion d'un grand nombre d'exemples concrets et d'exercices (2600 exercices) ; - inclusion de thématiques considérées essentielles dans un enseignement de mathématiques discrètes pour des étudiants en informatique ; - Exposition des aperçus historiques sur certains résultats. 	<ul style="list-style-type: none"> - exposition des preuves dans un langage naturel, avec peu de formalisme ; - description détaillée des modes de raisonnement mis en œuvre dans la construction des preuves ; - développement en spirale des concepts apparaissant dans plusieurs chapitres ; - des solutions à certains exercices sont données à la fin de l'ouvrage ; - division en sous-sections de la plupart des sections de l'ouvrage ; - regroupement des « contenus de base » dans les premières sections des huit premiers chapitres ; - organisation des contenus permettant de les utiliser dans un cours de mathématiques discrètes.
Discrete mathematics and its applications	L'ouvrage a deux objectifs :	<ul style="list-style-type: none"> - accent sur le raisonnement mathématique et les différentes 	<ul style="list-style-type: none"> - exposition des idées dans un langage naturel, avec peu de formalisme ;

(2012)- Rosen	<p>K. Le premier est de présenter aux étudiants des différentes disciplines les mathématiques discrètes d'une façon pertinente et claire ; tout en présentant aux étudiants en informatique les fondements mathématiques dont ils ont besoin et aux étudiants en mathématiques une compréhension des concepts mathématiques importants et de leurs applications.</p> <p>Le deuxième objectif est de fournir aux enseignants un document qu'ils peuvent utiliser dans leur enseignement de mathématiques discrètes en ayant la possibilité de l'adapter aux besoins de leurs étudiants.</p>	<p>manières de résolution des exercices ;</p> <ul style="list-style-type: none"> - accent sur l'induction mathématique ; - présentation des exercices sur des applications à l'informatique et à des domaines divers ; - illustration des concepts par des exemples ; - inclusion des applications issues de la vie réelle ou d'autres disciplines ; - inclusion de plusieurs algorithmes et analyse de leur efficacité ; - ensemble de projets informatiques donnés à la fin de chaque chapitre ; - inclusion d'explorations sollicitant l'utilisation de logiciels ; - inclusion d'un ensemble de projets de nature historique ou portant sur des idées non traitées dans le texte ; - exposition des aperçus historiques exposant les biographies de 83 mathématiciens et informaticiens. 	<ul style="list-style-type: none"> - description des modes de raisonnement mis en œuvre dans la construction des preuves ; - indications montrant les exercices les plus difficiles ; - exposition de questions d'examen à la fin de chaque chapitre ; - exposition des algorithmes dans une forme de pseudocode ; - indication montrant les projets informatiques les plus difficiles ; - regroupement des « contenus de base » dans les premiers chapitres de l'ouvrage ; - organisation des contenus permettant de les utiliser dans un cours de mathématiques discrètes ; - minimisation de la dépendance des chapitres sur les contenus des chapitres précédents.
Théorie des graphes et ses	L'objectif de l'ouvrage est de mettre entre les mains du lecteur un outil mathématique s'appliquant à	<ul style="list-style-type: none"> - définitions issues d'autres domaines mathématiques comme l'algèbre ou la théorie des 	<ul style="list-style-type: none"> - présentation formelle et abstraction des contenus ; - énoncés courts et nombreux ;

<p>applications (1963)- C. Berge</p>	<p>différents domaines mathématiques et différentes disciplines telles que les sciences du comportement, la théorie de l'information, la cybernétique, les jeux, les réseaux de transport, la théorie des ensembles et les matrices, etc.</p>	<p>ensembles rappelées à fur et à mesure en fonction des besoins.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - énoncés exposés quand nécessaires à la démonstration de théorèmes ultérieurs ; - premiers chapitres consacrés aux notions « orientées » et derniers chapitres portant sur les notions « non orientées ».
<p>Introduction to graph theory (2001)- D. West</p>	<p>Cet ouvrage peut être utilisé comme une introduction à la théorie des graphes dans un cours du premier ou deuxième cycle du supérieur, ou même dans deux cours donnés chacun dans un semestre.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - illustration des concepts par des exemples ; - des représentations par graphe pour illustrer les concepts et les notions ; - exposition des différentes preuves d'un théorème, quand elles existent ; - accent sur le raisonnement mathématique ; - inclusion d'un grand nombre d'exemples concrets et d'exercices (plus de 1200 exercices) ; - des exercices à plusieurs niveaux de difficulté ; - inclusion de plusieurs algorithmes ; - exposition en annexe de notions essentielles telles que des contenus sur les ensembles et l'induction pour les étudiants novices en théorie des graphes. 	<ul style="list-style-type: none"> - exposition des preuves dans un langage naturel, avec peu de formalisme ; - les différentes preuves d'un théorème sont exposées comme remarques ou dans des exercices ; - exposition des définitions de nouveaux termes au fur et à mesure selon les besoins ; - indications montrant les exercices les plus difficiles et indications pour leur résolution en annexe, le cas échéant ; - exposition des exercices mobilisant plusieurs concepts après introduction de tous les concepts nécessaires à leur résolution ; - introduction des digraphes reportée jusqu'à la fin du premier chapitre ; - regroupement des « contenus de base » dans les premières sections des chapitres ;

			<ul style="list-style-type: none"> - organisation des contenus permettant de les utiliser dans un cours de théorie des graphes.
<p>Introduction to graph theory (1996)- R. J. Wilson</p>	<p>L'ouvrage vise une introduction à la théorie des graphes, adaptée aussi bien aux mathématiciens qu'aux non spécialistes souhaitant apprendre le sujet le plus rapidement possible.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - inclusion de 250 exercices dans l'ouvrage ; - des exercices à plusieurs niveaux de difficulté. 	<ul style="list-style-type: none"> - indications montrant les exercices les plus difficiles ; - regroupement des « contenus de base » dans les premiers chapitres de l'ouvrage tels que des définitions et des exemples de graphes, de connectivité, de chemins et de cycles eulériens et hamiltoniens, et d'arbres ; - introduction des digraphes reportée jusqu'à la troisième partie de l'ouvrage.
<p>Discrete mathematics (1986)- P. F. Dierker et W. L. Voxman</p>	<p>L'objectif de l'ouvrage selon les auteurs est de présenter des sujets intéressants et utiles pour les étudiants, avec un contenu mathématique solide.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - accent sur les relations entre la théorie et la pratique en mathématiques discrètes ; - mise en relief des aspects informatiques des mathématiques discrètes et de la théorie sous-jacente ; - résolution de plusieurs problèmes par « une approche algorithmique » ; - inclusion d'explications sur les différentes étapes d'un algorithme. 	<ul style="list-style-type: none"> - introduction de la théorie des graphes dans le troisième et le quatrième chapitre de l'ouvrage composé de onze chapitres ; - exposition des algorithmes dans un langage naturel commun à plusieurs langages de programmation ; - organisation des contenus permettant de les utiliser dans un cours de mathématiques discrètes ; - organisation des contenus permettant aux enseignants une flexibilité dans les choix des sujets.

Tableau 2 : Les objectifs des ouvrages et les choix d'exposition des contenus, explicités par les auteurs

Sept des huit ouvrages consultés visent à présenter une introduction à la théorie des graphes ou aux mathématiques discrètes à des étudiants dans des formations différentes (mathématiques, informatique, génie, etc.). Un autre objectif énoncé dans plusieurs ouvrages est de fournir aux enseignants des contenus qu'ils peuvent utiliser dans leur enseignement. En effet, tous les ouvrages consultés proposent d'être utilisés dans plusieurs formations, et donc visent une portée large en termes de profils des utilisateurs. Le potentiel de la théorie des graphes à représenter et modéliser des situations diverses (en lien avec les domaines mathématiques, les disciplines scientifiques et situations de la vie réelle), telle qu'elle est caractérisée par Bondy et Murty (2008a) lui permet d'avoir une place importante dans un large spectre de formation. Nous notons que dans l'ouvrage « Graph theory » de (Bondy & Murty, 2008a), les auteurs énoncent un deuxième objectif : servir comme introduction à la recherche pour des chercheurs en formation en théorie des graphes.

II.3.3.3. Choix formulés en termes de contenus et de présentation – mise en relation avec les objectifs des auteurs

Dans les préfaces des ouvrages consultés, les auteurs explicitent les choix relatifs aux contenus et à leur présentation en fonction des objectifs des ouvrages. Nous avons remarqué que certains choix sont partagés par plusieurs auteurs. Nous exposons ci-dessous, respectivement, tous les choix relatifs aux contenus (3ème colonne du tableau 2) et à leur présentation (4ème colonne du tableau 2) que nous avons recensés dans le tableau 2, et nous précisons pour chacun, entre parenthèses, le nombre d'auteurs qui l'ont explicité.

Nous avons identifié en total 29 choix formulés en termes de contenus, que nous avons regroupés par axes :

- Des représentations par graphe pour illustrer les concepts et les notions (2/8) ;
- Accent sur les relations entre la théorie et la pratique en mathématiques discrètes (1/8) ;
- Exposition de contenus à aborder dans un cours de théorie des graphes au supérieur (1/8) ;
- Inclusion d'exercices à plusieurs niveaux de difficulté (4/8) ;
- Inclusion d'un grand nombre d'exemples concrets et d'exercices (3/8) ;
- Accent sur les différentes manières de résolution des exercices (1/8) ;
- Présentation d'exercices sur des applications à l'informatique et à des domaines divers et inclusion des applications issues de la vie réelle ou d'autres disciplines (1/8) ;
- Inclusion des applications portant sur la partie théorique développée dans le cours (1/8) ;
- Un tableau exposant un nombre de problèmes non résolus en théorie des graphes en annexe (2/8) ;
- Discussion de problèmes ouverts intéressants pour la recherche (2/8) ;
- Accent sur le raisonnement mathématique (2/8) ;
- Accent sur l'induction mathématique (1/8) ;
- Exposition des différentes preuves d'un théorème, quand elles existent (1/8) ;
- Exposition en annexe de notions essentielles telles que des contenus sur les ensembles et l'induction pour les étudiants novices en théorie des graphes (1/8) ;
- Résolution de plusieurs problèmes par « une approche algorithmique » (1/8) ;
- Inclusion de plusieurs algorithmes (3/8) ;
- Analyse de l'efficacité des algorithmes présentés (2/8) ;
- Un ensemble de projets informatiques donnés à la fin de chaque chapitre (1/8) ;
- Inclusion d'explorations sollicitant l'utilisation de logiciels (1/8) ;
- Pas de mention sur l'exécution des algorithmes en utilisant des logiciels (1/8) ;
- Inclusion d'explications sur les différentes étapes de l'exécution d'un algorithme (1/8) ;
- Mise en relief des aspects informatiques des mathématiques discrètes et de la théorie sous-jacente (1/8) ;

- Inclusion de thématiques considérées essentielles dans un enseignement de mathématiques discrètes pour des étudiants en informatique (1/8) ;
- Inclusion de sections sur des sujets qui demandent plusieurs notions comme prérequis (1/8) ;
- Des définitions issues d'autres domaines mathématiques comme l'algèbre ou la théorie des ensembles rappelées à fur et à mesure en fonction des besoins (1/8) ;
- Inclusion d'un ensemble de projets de nature historique ou portant sur des idées non traitées dans le texte (1/8) ;
- Exposition des aperçus historiques sur certains résultats (1/8) ;
- Exposition des aperçus historiques exposant les biographies de 83 mathématiciens et informaticiens (1/8) ;
- Des suggestions de lectures supplémentaires données en annexe (1/8) ;

Nous avons par ailleurs identifié 31 choix distincts formulés en termes de présentation des contenus :

- Organisation des contenus permettant de les utiliser dans un cours d'introduction à la théorie des graphes (5/8) ;
- Regroupement des « contenus de base » dans les premiers chapitres de l'ouvrage (3/8) ;
- Regroupement des « contenus de base » dans les premières sections des chapitres (1/8) ;
- Premiers chapitres consacrés aux notions « orientées » et derniers chapitres portant sur les notions « non orientées » (1/8) ;
- Division en sous-sections de la plupart des sections de l'ouvrage (1/8) ;
- Introduction des digraphes reportée jusqu'à la fin du premier chapitre (1/8) ;
- Introduction des digraphes reportée jusqu'à la troisième partie de l'ouvrage (1/8) ;
- Introduction de la théorie des graphes dans le troisième et le quatrième chapitre de l'ouvrage composé de onze chapitres (1/8) ;
- Organisation des contenus permettant aux enseignants une flexibilité dans les choix des sujets (1/8) ;
- Minimisation de la dépendance des chapitres sur les contenus des chapitres précédents (1/8) ;
- Développement en spirale des concepts apparaissant dans plusieurs chapitres (1/8) ;
- Description détaillée des modes de raisonnement mis en œuvre dans la construction des preuves (3/8) ;
- Exposition des preuves dans un langage naturel, avec peu de recours au registre formel (2/8) ;
- Exposition des différentes preuves d'un théorème comme remarques ou dans des exercices (1/8) ;
- Exposition des algorithmes dans un langage naturel commun à plusieurs langages de programmation (2/8) ;
- Indications montrant les projets informatiques les plus difficiles (1/8) ;
- Exposition des idées dans un langage naturel, avec peu de formalisme (1/8) ;
- Indications montrant les exercices les plus difficiles (5/8) ;
- Indications pour la résolution des exercices les plus difficiles en annexe (2/8) ;
- Indications montrant les exercices utilisés dans des sections ultérieures (1/8) ;
- Indications montrant les exercices nécessaires à la compréhension des notions et des concepts présentés (1/8) ;
- Des solutions à certains exercices sont données à la fin de l'ouvrage (1/8) ;
- Exposition des exercices mobilisant plusieurs concepts après introduction de tous les concepts nécessaires à leur résolution (1/8) ;
- Introduction de nouvelles définitions dans certains exercices (1/8) ;

- Énoncés exposés quand nécessaires à la démonstration de théorèmes ultérieurs (1/8) ;
- Exposition des définitions de nouveaux termes au fur et à mesure selon les besoins (1/8) ;
- Exposition de questions d'examen à la fin de chaque chapitre (1/8) ;
- Traitement « approfondi » des applications (1/8) ;
- Des propriétés des graphes exposées dans un tableau en annexe (1/8) ;
- Présentation formelle et abstraction des contenus (1/8) ;
- Des énoncés courts et nombreux (1/8).

Nous soulignons, en consultant les deux listes ci-dessus, que certains choix sont partagés par les auteurs de plusieurs ouvrages. Par exemple, un choix explicité dans cinq des ouvrages est d'organiser les contenus d'une manière qui permet de les utiliser dans un cours d'introduction à la théorie des graphes. Ce choix nous semble cohérent avec un objectif énoncé dans sept des ouvrages : fournir aux enseignants des contenus qu'ils peuvent utiliser dans leur enseignement.

Certaines disparités peuvent figurer dans les choix énoncés par les auteurs. Deux choix énoncés par deux auteurs d'ouvrages peuvent être compatibles. Nous citons comme exemples : le choix « un regroupement des « contenus de base » dans les premiers chapitres de l'ouvrage » et le choix « un regroupement des « contenus de base » dans les premières sections des chapitres ». Ces deux choix reflètent deux modes d'organisation des contenus dans les ouvrages totalement différents, mais partagent une idée commune qui est « la possibilité de repérer facilement par les utilisateurs les contenus considérés « de base » par les auteurs ». En revanche, d'autres choix peuvent refléter des tensions dans l'orientation de la construction des connaissances. Nous citons à titre d'exemple le choix de « la minimisation de la dépendance des chapitres sur les contenus des chapitres précédents » et du « développement en spirale des concepts apparaissant dans plusieurs chapitres ». Ces deux choix sont divergents en termes d'organisation des contenus. Le développement en spirale des concepts suppose l'apparition d'un même concept dans plusieurs chapitres de l'ouvrage, donc augmente la dépendance des chapitres les uns par rapport aux autres.

Nous soulignons que les choix effectués par un enseignant-chercheur concepteur d'un ouvrage, en termes de contenus et en termes de leur présentation, peuvent être influencés par les objectifs de ce concepteur, ainsi que par le public destinataire de l'ouvrage (cf. tableau 1). Nous étayons nos propos ci-dessous en exposant certains des choix et des objectifs des concepteurs tels que ces derniers les avaient énoncés dans les préfaces (cf. tableau 2).

Bondy et Murty (2008a) ont pour objectif d'introduire la théorie des graphes pour des étudiants en mathématiques et en informatique et d'introduire les utilisateurs à la recherche en théorie des graphes. Ils choisissent d'inclure des représentations par des graphes pour illustrer les concepts et les notions, et des exercices à plusieurs niveaux de difficulté. Ils mettent en avant des discussions de problèmes ouverts qu'ils jugent intéressants pour un public envisageant des recherches en théorie des graphes. Rosen (2012) a quant à lui pour objectif de présenter les mathématiques discrètes aux étudiants des différentes disciplines, notamment aux étudiants en informatique et en mathématiques, et de fournir aux enseignants une ressource adaptable selon leurs besoins dans leur enseignement de mathématiques discrètes. Il effectue ainsi plusieurs choix dont la présentation d'exercices sur des applications à l'informatique et à des domaines divers, et l'inclusion d'algorithmes avec analyse de leur efficacité, ainsi que des projets informatiques et des explorations sollicitant l'utilisation de logiciels. Il choisit aussi d'inclure des exemples qui illustrent les concepts et de mettre l'accent sur le raisonnement mathématique et les différentes manières de résolution des exercices. Berge (1963) a pour objectif de mettre entre les mains du lecteur un outil mathématique s'appliquant à différents domaines mathématiques et à différentes disciplines telles que les sciences du comportement, la théorie de l'information, la théorie des ensembles et les matrices, etc. Ainsi, il inclut dans son ouvrage

des définitions issues d'autres domaines mathématiques comme l'algèbre ou la théorie des ensembles. Ces choix en termes de contenus admettent des disparités qui peuvent être justifiées par les objectifs des concepteurs et des publics destinataires respectifs de chacun d'eux.

Dans l'ouvrage de Bondy et Murty (2008a), destiné à des étudiants en mathématiques et en informatique, les auteurs choisissent de décrire en détail les modes de raisonnement mis en œuvre dans la construction des preuves et donnent des indications montrant les exercices nécessaires à la compréhension des notions et des concepts présentés. La consultation de l'ouvrage montre peu de recours au registre formel dans la rédaction des preuves exposées dans le registre du langage naturel avec passage à des représentations par des graphes ; une activité de conversion qui, selon Bondy et Murty (2008a), contribue à illustrer les concepts et les notions. Dans l'ouvrage de Rosen (2012) destiné à des étudiants dans diverses filières de formation, notamment en informatique et en mathématiques, les idées sont exposées dans un langage naturel, avec peu de formalisme et les algorithmes sont décrits en pseudocode avec des indications montrant les projets informatiques les plus difficiles. Le concepteur choisit aussi de regrouper les « contenus de base » dans les premiers chapitres de l'ouvrage et de minimiser la dépendance des chapitres sur les contenus des chapitres précédents. Epp (2011), dont l'ouvrage est aussi destiné à des étudiants dans des filières différentes, effectue des choix qui rejoignent ceux de Rosen (2012) en termes de présentation des contenus. Pourtant, elle choisit un développement en spirale des concepts en les exposant dans plusieurs chapitres. Ainsi, dans les ouvrages d'Epp (2011) et Rosen (2012) destinés à un même public, les concepteurs dont les objectifs se ressemblent effectuent plusieurs choix relatifs à la présentation des contenus, qui admettent des points de convergence et des disparités. Berge (1963), dans son ouvrage ayant pour objectif de fournir un outil mathématique s'appliquant à différents domaines mathématiques et à différentes disciplines, met l'accent sur l'abstraction des contenus et les présente dans le registre formel.

Ces différents choix énoncés par les concepteurs des ouvrages en termes de présentation des contenus dépendent des objectifs que ces concepteurs se fixent, du public destinataire ainsi que des différents rapports que ces concepteurs peuvent avoir à la théorie des graphes en fonction de leur domaine de recherche.

Ainsi, les choix explicités par les auteurs dans les préfaces nous renseignent sur les caractéristiques de la théorie des graphes, et les points de vue des enseignants-chercheurs dans le domaine. Ces choix soulignent clairement le potentiel de la théorie des graphes à :

- articuler des concepts théoriques et des applications concrètes (par exemple, par inclusion des applications portant sur la partie théorique développée dans le cours) ;
- accommoder les besoins d'utilisateurs ayant des profils divers en termes de contenus qui leur sont utiles (par exemple, « présentation des exercices sur des applications à l'informatique et à des domaines divers » et « inclusion des applications issues de la vie réelle ou d'autres disciplines ») ;
- proposer des modes de présentations qui rendent ces contenus accessibles (par exemple, par exposition des preuves dans un langage naturel, avec peu de recours au registre formel).

Ce large spectre de choix, en termes de contenus et de leur présentation, pouvant être effectués dans/pour l'enseignement, rend la tâche de conception d'un module d'enseignement de la théorie des graphes une tâche relativement complexe.

« Graph theory is still young, and no consensus has emerged on how the introductory material should be presented. Selection and order of topics, choice of proofs, objectives, and underlying themes are matter of lively

debate. Revising this book dozens of times has taught me the difficulty of these decisions » (West, 2001, p. xi).

En revanche, cette diversité, en termes de contenus et de leur présentation, montre la variété de choix que les enseignants-chercheurs peuvent effectuer dans la conception de ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes. Ces choix peuvent être déterminés par des conditions didactiques (par exemple, choix en termes de présentation), institutionnelles (en lien avec le cursus de formation par exemple), ainsi qu'épistémologiques (en lien avec la recherche). Nous soulignons que ces choix fixent des orientations générales adoptées par les auteurs, qui peuvent se décliner de manières différentes dans la conception des ouvrages. Il nous semble donc indispensable de consulter les contenus dans les ouvrages afin de caractériser la mise en application de ces choix et objectifs. Travail que nous allons entreprendre dans la partie suivante.

II.4- Les problèmes de parcours

Les concepts de « chemin » et « cycle » sont considérés comme des notions fondamentales en théorie des graphes par les auteurs des ouvrages. Nous présenterons dans cette section trois parties qui portent respectivement sur les parcours (eulériens et hamiltoniens et plus courts chemins). Notre objectif est de présenter une description analytique de chacune de ces parties, c'est-à-dire de recenser les mises en application des choix effectués par les auteurs des ouvrages (§II.3.3). Nous considérons les notions et concepts mis en avant et les formes de leur exposition et de leur mise en relation. Ainsi, pour chaque partie, nous exposerons le contexte et l'émergence du concept dans l'histoire, en énonçant les théorèmes fondamentaux présentés dans les ouvrages. Nous mettrons l'accent sur les différentes preuves exposées pour les théorèmes et propositions, les algorithmes mobilisés dans des preuves ou dans la résolution des problèmes. Nous listerons les registres de représentation sémiotique mobilisés dans chaque partie et les activités cognitives qui en découlent (représentation, traitement et conversion). Enfin, nous identifierons des liens que les auteurs tissent avec les autres domaines mathématiques (tels que l'algèbre, la topologie, etc.), ainsi qu'avec les autres disciplines. Le cas échéant, nous présenterons les situations mises à disposition des auteurs et offrant des possibilités de mobilisation de la théorie des graphes dans des activités de représentation et/ou de modélisation des phénomènes issus de la vie réelle.

En effet, les problèmes de parcours sont présents dans les premiers chapitres des ouvrages de la théorie des graphes que nous avons consultés, et dans les premières sections des chapitres portant sur les graphes dans les ouvrages de mathématiques discrètes. Nous discuterons dans ce paragraphe des problèmes de parcours, en commençant par les parcours eulériens (§ II.4.1), puis les parcours hamiltoniens (§ II.4.2), et enfin les plus courts chemins (§ II.4.3). Nous notons que les concepts et les notions de base (chemin, cycle, graphe, connexe, etc.) traités tout au long de cette section sont définis dans les annexes. Nous signalons que les références sur lesquelles nous nous sommes appuyée pour le recueil des contenus de l'annexe concernant la théorie des graphes sont rédigées en anglais. En conséquence, les contenus mathématiques présentés dans l'annexe en lien avec la théorie des graphes sont présentés en anglais : dans le paragraphe II.4, ils sont traduits par nos soins.

II.4.1- Parcours d'Euler : chemins et cycles

La ville de Königsberg, est traversée par une rivière, la Pregel, qui coule de part et d'autre de l'île de Kneiphof. La ville, au dix-huitième siècle, possédait sept ponts qui reliaient les sept régions séparées par la Pregel, comme le montre la figure 6. Selon Rosen (2012), les citadins

se promenaient dans la ville les dimanches et se demandaient s'il était possible pour un piéton de traverser une fois et une seule chaque pont et revenir à son point de départ.

Le mathématicien suisse Leonhard Euler prouva l'impossibilité de ce problème en 1736. Selon Berge (1963) et Rosen (2012), la solution d'Euler pourrait être considérée la première utilisation de la théorie des graphes. En général, un graphe (cf. annexe 1, D1) est constitué de points, appelés sommets, et de connexions, appelées arêtes, qui sont représentées par des segments ou des courbes reliant certaines paires de ces sommets. Euler a étudié le problème des ponts de Königsberg en utilisant le multigraphe (cf. annexe 1, D10) obtenu lorsque les quatre régions sont représentées par des sommets et les ponts par des arêtes (cf. figure 6). Le problème de voyager à travers chaque pont sans traverser un pont plus d'une fois peut alors être représenté par le modèle ci-dessous (cf. figure 6). Des questions que nous pouvons nous poser : y a-t-il un cycle (cf. annexe 1, D22) dans ce multigraphe qui utilise toute arête une fois et une fois seulement ? Et si ce cycle existe, comment pourrait-on le construire ? Ainsi, les questions peuvent porter sur l'existence ou sur la construction d'un tel parcours.

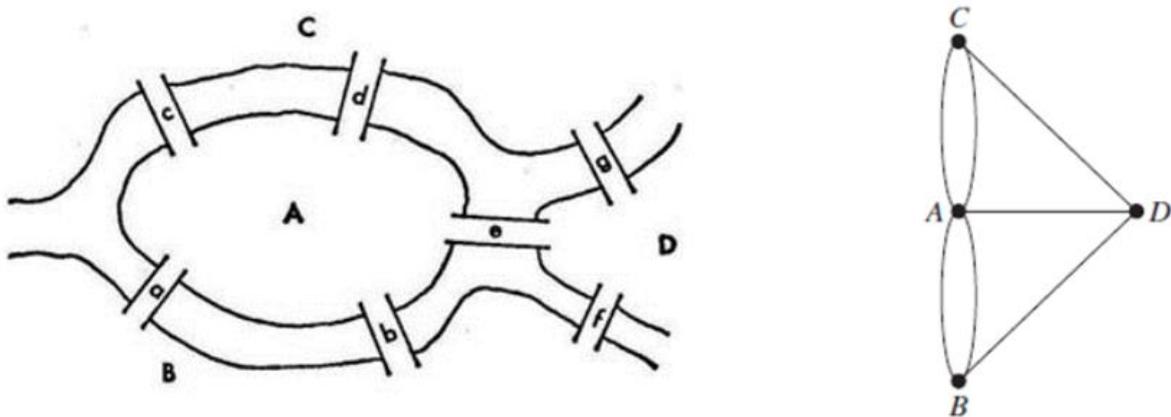


Figure 6 : A gauche, un schéma des ponts de la ville de Königsberg, et à droite, un modèle multigraphe de la ville de Königsberg

Nous commencerons cette partie par une exposition des définitions, propriétés et théorèmes en lien avec les parcours eulériens présentés dans les ouvrages (§II.4.1.1). Nous présenterons ensuite les preuves des théorèmes recensés dans les huit ouvrages consultés (§II.4.1.2). Nous mettons l'accent sur l'algorithme de Fleury (§II.4.1.3) qui peut être mobilisé pour la recherche d'un parcours eulérien. Nous listerons les registres de représentation sémiotique mobilisés dans les ouvrages dans les parties qui portent sur les parcours eulériens et les activités cognitives qui en découlent (§II.4.1.4). Nous identifierons également des liens que les auteurs des ouvrages consultés tissent avec les autres domaines mathématiques, ainsi qu'avec les autres disciplines (§II.4.1.5). Enfin, nous conclurons par une synthèse qui résume ce que nous retenons comme choix possibles en termes de contenus et de leur présentation en lien avec l'enseignement des parcours eulériens (§II.4.1.6).

II.4.1.1- Définitions, propriétés et théorèmes

Par définition, on distingue un chemin d'un cycle (cf. annexe 1, D21 et D22). Un chemin eulérien est un chemin simple (cf. annexe 1, D21) qui contient chaque arête d'un graphe, et un cycle eulérien est un cycle simple qui contient chaque arête d'un graphe. Un graphe eulérien est un graphe qui contient un cycle eulérien. Un graphe semi-eulérien est un graphe qui contient un chemin eulérien.

En effet, le théorème d'Euler peut être énoncé comme suit :

Théorème 3.1.1 : Un graphe G connexe (cf. annexe 1, D23) est eulérien (ou admet un cycle eulérien) si et seulement si chaque sommet de G a un degré (cf. annexe 1, D15) pair.

Un autre théorème est énoncé pour les graphes semi-eulériens comme suit :

Théorème 3.1.2 : Un graphe G connexe est semi-eulérien (ou admet un chemin eulérien) si et seulement si exactement deux sommets de G ont un degré impair. Dans certains ouvrages, ce théorème est énoncé comme corollaire du théorème 3.1.1 (Epp, 2010; Wilson, 1996).

Les deux théorèmes, 3.1.1 et 3.1.2, peuvent être fusionnés en un seul théorème :

Théorème 3.1.3 : Un multigraphe G admet un parcours eulérien (chemin ou cycle) si et seulement si il est connexe, et si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Un lemme du théorème 3.1.1 est cité dans deux ouvrages (Wilson, 1996; West, 2001) :

Lemme 3.1.4 : Si G est un graphe dans lequel le degré de chaque sommet est plus grand ou égal à 2, alors G contient un cycle (cf. annexe 1, lemma 1.4).

Dans deux ouvrages (Bondy & Murty, 1976; Dierker & Voxman, 1986), le lemme 3.1.4 est cité comme théorème, mais nous choisissons de le citer comme lemme, vu son utilité dans la preuve du théorème 3.1.1.

Les théorèmes ci-dessus donnent des critères pour l'existence d'un parcours eulérien. Une condition nécessaire pour l'existence d'un tel parcours est la connexité du graphe. Une autre condition nécessaire est la parité des degrés des sommets d'un graphe : un graphe connexe dont tous les sommets ont un degré pair admet un cycle eulérien ; un graphe connexe dont exactement deux des sommets ont des degrés impairs admet un chemin eulérien. Ainsi, l'existence (ou non) d'un parcours eulérien dans un graphe G peut être déterminée par un comptage des degrés des sommets de G . En revanche, dans les cas où ce parcours existe, on s'intéresse à chercher une construction possible de ce parcours par une démarche algorithmique.

La relation entre la connexité d'un graphe, les degrés des sommets et l'existence d'un parcours eulérien est mise en avant dans presque tous les ouvrages consultés. Au niveau des concepts et des notions exposés et de leurs articulations, les différences qui existent entre les ouvrages sont subtiles. Nous citons les exemples suivants : West (2001) et Wilson (1996) expriment la notion de connexité comme étant l'existence d'une seule composante connexe dans un graphe (cf. annexe 1, D25) ; West (2001) met l'accent sur ce qu'il désigne par « TONCAS », c'est-à-dire « The Obvious Necessary Conditions are Also Sufficient » en discutant des conditions nécessaires et suffisantes de l'existence d'un cycle eulérien ; il insiste de même sur la notion maximalité « extremality » qui peut, selon lui, générer des informations utiles dans les preuves en considérant des structures maximales. L'algorithme de Fleury est présenté dans cinq ouvrages sur huit (Berge, 1963; Epp, 2010; Rosen, 2012; Wilson, 1996; Bondy & Murty, 2008a) ; quatre des cinq ouvrages qui discutent de l'algorithme le présentent après exposition des théorèmes 3.1.1, 3.1.2 ou 3.1.3 à l'exception d'Epp (2010). Epp (2010) présente l'algorithme implicitement comme preuve du théorème 3.1.1 et explique ensuite les étapes de la construction par un traitement sur des représentations par graphe.

En revanche, nous notons des disparités au niveau des choix de présentation des parcours eulériens dans les deux ouvrages conçus par Bondy et Murty. Dans « graph theory with applications », en 1976, ils ont énoncé le théorème 3.1.1 et sa preuve, et le théorème 3.1.2 dont la preuve découle de celle de 3.1.1. Ils n'ont pas traité l'algorithme de Fleury. Dans « graph theory », en 2008, ils ont commencé par une présentation de l'algorithme de Fleury et de sa preuve, puis ont énoncé le théorème 3.1.1 comme étant une caractérisation des cycles eulériens offerte par l'algorithme. Nous soulignons que les auteurs ont déclaré dans la préface de « graph

theory with applications » en 1976 le choix d'inclure des algorithmes utiles en théorie des graphes, choix qu'ils n'ont pas explicités en 2008 dans « graph theory ». Une interprétation naïve serait un manque de cohérence entre les choix déclarés dans les préfaces et les choix effectués par les auteurs des deux ouvrages. Cependant, une déclaration de Bondy et Murty en 2008 nous paraît essentielle pour expliquer ce manque de cohérence apparent : « The present project began with the intention of simply making minor revisions to our earlier book. However, we soon came to the realization that the changing face of the subject called for a total reorganization and enhancement of its contents. » (Bondy & Murty, 2008a, p. VIII).

Ainsi, nous inférons que cette disparité au niveau des choix effectués dans les deux ouvrages est due à l'évolution de la théorie des graphes au cours du temps.

Différentes preuves existent dans les ouvrages pour les théorèmes 3.1.1 et 3.1.2. Certaines consistent à justifier l'existence d'un parcours eulérien dans un graphe connexe pour des conditions données, et d'autres justifient cette existence par la construction de ce parcours, quand il est possible de le faire. Nous exposons dans la suite les preuves présentées dans les ouvrages consultés pour chacun de ces théorèmes, tout en discutant les concepts mis en jeu dans chacune d'elles et les types et les natures des représentations utilisées.

II.4.1.2- Preuves

Pour le théorème 3.1.1, il existe trois preuves différentes dans les ouvrages consultés : par récurrence (West, 2001; Berge, 1963; Wilson, 1996) ; par contradiction (maximalité) en utilisant un contre-exemple minimal (Bondy & Murty, 1976; Dierker & Voxman, 1986) ; et par construction (Bondy & Murty, 2008a; Epp, 2010; Rosen, 2012). La preuve du théorème 3.1.2 découle en général de celle de 3.1.1. Dans la suite de ce paragraphe, nous présentons les preuves de ces deux théorèmes, en distinguant à chaque fois entre « condition nécessaire » et « condition suffisante ». Nous discutons ensuite la preuve par construction (algorithme) dans le paragraphe suivant.

Pour le théorème 3.1.1, la condition nécessaire peut être énoncée comme suit :

« Si un graphe G connexe est eulérien, alors chaque sommet de G a un degré pair »

Les ouvrages consultés utilisent une même preuve pour la condition nécessaire (Bondy & Murty, 1976; Epp, 2010; Rosen, 2012; Berge, 1963; West, 2001; Wilson, 1996; Dierker & Voxman, 1986). Cette preuve consiste à montrer que si la proposition « un graphe G connexe est eulérien » est vraie, alors la proposition « chaque sommet de G a un degré pair » est vraie. Si le graphe G connexe est eulérien, alors il y aura un cycle fermé qui passe par tous les sommets en traversant chaque arête une seule fois ; donc à chaque fois que l'on traverse une arête pour arriver à un sommet, il faudrait repartir en prenant une autre, et par la suite, tous les sommets auront des degrés pairs.

Regardons maintenant la preuve de la condition suffisante qui peut être énoncée de la façon suivante :

« Si chaque sommet d'un graphe G connexe a un degré pair, alors G est eulérien »

La preuve par contradiction (cf. annexe 1, proof 3.1.1) consiste à supposer qu'il existe un graphe connexe dont tous les sommets sont de degrés pairs, mais qui n'est pas eulérien. De ces graphes, on sélectionne celui qui possède le plus petit nombre d'arêtes (le contre-exemple minimal) et on le désigne par G . Par le lemme 3.1.4, G contient un cycle. On choisit le plus grand cycle C dans G . On note que C ne contient pas toutes les arêtes de G . Il y a une possibilité de prolonger C par cette arête, et C ne serait plus le plus grand chemin simple de G , donc il y a contradiction avec l'hypothèse de maximalité.

Dans la preuve par récurrence (cf. annexe 1, proof 3.1.2), on considère un graphe connexe G dont tous les sommets sont de degrés pairs. Si G ne contient pas d'arêtes alors G admettra un cycle eulérien. Sinon, on suppose que si G a n arêtes alors G admet un cycle eulérien, et on essaie de montrer que si on ajoute une arête alors G admettra un cycle eulérien. Pour le faire, on considère dans G (ayant $(n + 1)$ arêtes) un chemin simple fermé C . En ôtant les arêtes de C , il y aurait plusieurs composantes connexes restant dans G dont les sommets auront des degrés pairs, et comme dans chaque composante il y aurait moins que $(n + 1)$ arêtes, donc il y aurait un cycle eulérien dans chacune. En reconsidérant C et toutes les composantes connexes, on pourrait construire un cycle eulérien sur G .

Nous soulignons que les concepts mis en jeu dans les deux preuves ci-dessus de la condition suffisante ne sont pas les mêmes. Dans la preuve par contradiction, on considère un contre-exemple minimal (un graphe non-eulérien avec le nombre minimal d'arêtes) et le plus long cycle dans ce graphe (un cycle de longueur maximale). La preuve consiste à montrer que le cycle considéré peut être prolongé, et donc à contredire l'hypothèse de maximalité. La preuve par récurrence met en relation les concepts de composantes connexes dans un graphe connexe, en décomposant un graphe en plusieurs composantes connexes et construisant un cycle passant par toutes les composantes, ce qui est possible à cause de la connexité du graphe considéré.

En revanche, les problèmes de l'existence de cycles eulériens deviennent relativement simples si on connaît le théorème 3.1.1, il suffirait de vérifier que tous les sommets ont des degrés pairs. L'intérêt des problèmes de recherche des parcours eulériens dans un enseignement de la théorie des graphes réside dans le développement des modes de raisonnement mis en œuvre en rédigeant les preuves des théorèmes : montrer l'existence d'un chemin ou d'un cycle eulérien peut se faire par un comptage, c'est leur construction, quand ils existent, qui requiert la mise en œuvre de plusieurs étapes.

Pour le théorème 3.1.2, pour montrer la condition nécessaire :

« Si un graphe G connexe est semi-eulérien, alors exactement deux sommets de G ont un degré impair »

On considère les sommets a et b aux extrémités du chemin eulérien (cf. annexe 1, proof 1.2.1). Si le chemin commence par le sommet a , a aurait un degré impair, sinon, à chaque fois qu'on quitte a par une arête, il faudrait qu'on retourne et dans ce cas on aurait un cycle. De même pour b . Pour tous les autres sommets, à chaque fois qu'on traverse une arête pour arriver à un sommet, il faudrait repartir en prenant une autre. Par la suite, tous les sommets auront des degrés pairs, à l'exception des sommets a et b où le chemin commence et se termine.

Pour montrer la condition suffisante ci-dessous :

« Si un graphe connexe a tous les sommets, sauf deux, qui ont un degré pair, donc il admet un chemin eulérien ouvert »

La preuve découle de la preuve du théorème 3.1.1. En effet, en ajoutant une arête ayant pour extrémités les sommets de degrés impairs, tous les sommets auraient des degrés pairs, et par la première partie du théorème, le graphe admettrait un chemin eulérien fermé. En enlevant l'arête ajoutée, le graphe admettrait un chemin eulérien ouvert.

En outre, la preuve de la condition suffisante du théorème 3.1.2 met en jeu les concepts de l'addition et de la suppression d'une arête d'un graphe : on additionne une arête à un graphe ayant deux sommets de degrés impairs, donc tous les sommets auraient des degrés pairs et on pourrait par la suite utiliser le théorème 3.1.1.

Les preuves discutées ci-dessus donnent les conditions nécessaires et les conditions suffisantes pour l'existence de parcours eulériens. Nous pouvons construire les cycles eulériens, quand ils existent, c'est-à-dire dans des graphes connexes où tous les sommets ont des degrés pairs, en utilisant un protocole de construction, l'algorithme de Fleury. Une adaptation de cet algorithme permet de construire les chemins eulériens, dans les graphes connexes ayant deux sommets de degrés impairs.

II.4.1.3- L'algorithme de Fleury

L'algorithme de Fleury, publié en 1883, construit les cycles d'Euler en choisissant d'abord un sommet arbitraire d'un multigraphe connexe G , puis en formant un cycle en choisissant successivement les arêtes. Une fois qu'une arête est choisie, elle est supprimée de G . Les arêtes sont choisies successivement de sorte que chaque arête commence à l'endroit où la dernière se termine, et que, enlever cette arête ne conduise pas à diviser G en deux composantes connexes, à moins qu'il n'y ait pas d'alternative.

Fleury's algorithm, published in 1883, constructs Euler circuits by first choosing an arbitrary vertex of a connected multigraph, and then forming a circuit by choosing edges successively. Once an edge is chosen, it is removed. Edges are chosen successively so that each edge begins where the last edge ends, and so that this edge is not a cut edge unless there is no alternative.

Encadré 3 : Algorithme de Fleury (Rosen, 2012, p. 706)

THEOREM 6.5. *Let G be an Eulerian graph. Then the following construction is always possible, and produces an Eulerian trail of G .*

Start at any vertex u and traverse the edges in an arbitrary manner, subject only to the following rules:

- (i) erase the edges as they are traversed, and if any isolated vertices result, erase them too;*
- (ii) at each stage, use a bridge only if there is no alternative.*

Encadré 4 : Algorithme de Fleury (Wilson, 1996, p. 33)

Cet algorithme peut être rédigé dans un langage naturel (cf. encadrés 3 et 4) (Rosen, 2012; Wilson, 1996) ou en pseudocode, qui mobilise les registres de langage naturel et de représentation formelle (cf. annexe 1, algorithm 1.3). Il peut être effectué à l'aide d'un papier/crayon pour des graphes qui n'ont pas un très grand nombre d'arêtes. Ainsi, la construction d'un cycle eulérien par l'algorithme de Fleury ne nécessite pas forcément la mobilisation de logiciels. L'algorithme de Fleury est un algorithme efficace (cf. encadré 2). Il peut être exécuté en peu de temps et requiert peu de taille en matière d'espace pour les graphes n'ayant pas un grand nombre de sommets.

II.4.1.4- Les différentes représentations sémiotiques et les liens existant entre elles

Dans les ouvrages consultés, les preuves des théorèmes 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3 sont rédigées toujours dans un langage naturel (cf. annexe 1, proofs 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4), avec des symboles pour représenter les objets mathématiques en question. Une double justification de ce choix est présentée par les auteurs des ouvrages (§ II.3.3) : les preuves doivent être accessibles pour les étudiants, et l'accent doit être plus sur le raisonnement que sur la rédaction des idées dans le registre formel. Ainsi, le registre de représentation formelle est peu présent dans l'exposition des preuves. En outre, dans les preuves, il existe toujours un passage du

registre du langage naturel à des représentations par un graphe. Selon Bondy et Murty (2008a) et West (2001), cette conversion a pour rôle d'illustrer les concepts et les notions. Ainsi, on a, dans certains ouvrages (Dierker & Voxman, 1986; Epp, 2010; Rosen, 2012; West, 2001; Wilson, 1996), recours à des représentations par des graphes qui ont le rôle d'exemples génériques¹³ essentiels pour la compréhension des idées (cf. encadré 5). Nous pouvons trouver, dans certains ouvrages, pour l'exposition d'une preuve, une alternance entre une formulation des idées en langage naturel, des représentations par un graphe et des représentations formelles pour désigner les objets et énoncer les théorèmes et propriétés (cf. annexe 1, proof 1.2.1). Et dans d'autres ouvrages, on trouve, pour la même preuve, une seule représentation en jeu, telle que la représentation des idées en langage naturel.

Theorem 10.2.2
If a graph has an Euler circuit, then every vertex of the graph has positive even degree.

Proof:
Suppose G is a graph that has an Euler circuit. [We must show that given any vertex v of G , the degree of v is even.] Let v be any particular but arbitrarily chosen vertex of G . Since the Euler circuit contains every edge of G , it contains all edges incident on v . Now imagine taking a journey that begins in the middle of one of the edges adjacent to the start of the Euler circuit and continues around the Euler circuit to end in the middle of the starting edge. (See Figure 10.2.3. There is such a starting edge because the Euler circuit has at least one edge.) Each time v is entered by traveling along one edge, it is immediately exited by traveling along another edge (since the journey ends in the *middle* of an edge).

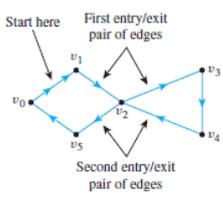


Figure 10.2.3 Example for the Proof of Theorem 10.2.2

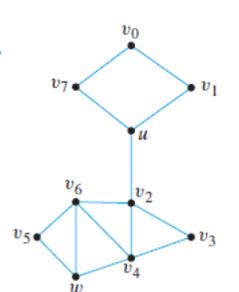
Encadré 5 : Illustration du fonctionnement de la preuve par un exemple générique extrait d'Epp (2010, p. 648)

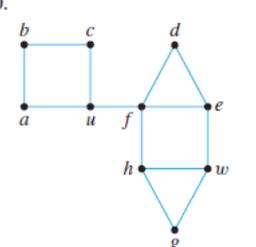
En revanche, nous soulignons que les représentations par un graphe sont largement utilisées dans les ouvrages à différents moments : lors de l'exposition des preuves, dans les exemples donnés, et dans les exercices proposés. Nous pouvons trouver dans les ouvrages consultés des exercices avec des représentations par graphe données où l'on demande aux utilisateurs d'agir sur ces représentations (cf. encadré 6). D'autres exercices exposent des situations (qui peuvent convoquer des représentations par schéma) où l'on doit représenter ou modéliser par des graphes, et répondre en se basant sur le modèle construit (cf. encadré 7). Pour résoudre ces exercices, on peut passer des représentations par un schéma, le cas échéant, aux représentations par un graphe par un simple codage : par exemple, dans le cas de l'exercice proposé dans l'encadré 7, les régions A, B, C, D et E peuvent être représentées par des sommets et les ponts par des arêtes. Par contre, dans les situations qui requièrent une modélisation, on doit articuler au moins deux processus cognitifs : former une représentation des données dans un registre de représentation sémiotique et effectuer des traitements sur la représentation dans ce registre. Des exercices consistent à convertir l'algorithme de Dijkstra du registre de représentation par

¹³ "L'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus. La formulation dégage les propriétés caractéristiques et les structures d'une famille en restant attachée au nom propre et l'exhibition de l'un de ses représentants." (Balacheff, 1987, p.164-165).

langage naturel en pseudocode (Rosen, 2012, p. 706) ou à effectuer des adaptations sur l'algorithme afin de produire un chemin eulérien (Rosen, 2012, p. 706).

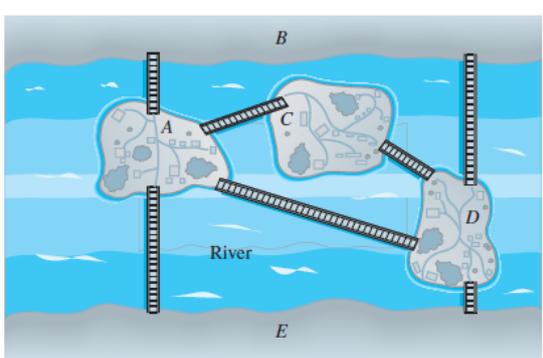
For each of the graphs in 19–21, determine whether there is an Euler path from u to w . If there is, find such a path.

19. 

20. 

Encadré 6 : Exercice sur les chemins eulériens, extrait de l'ouvrage d'Epp (2010, p. 658)

18. Is it possible to take a walk around the city whose map is shown below, starting and ending at the same point and crossing each bridge exactly once? If so, how can this be done?



Encadré 7- Exercice sur les cycles eulériens, extrait de la partie exercices de l'ouvrage d'Epp (2010, p. 658)

II.4.1.5- Applications et liens avec les autres domaines mathématiques et les autres disciplines

Les chemins et les cycles eulériens peuvent être utilisés pour résoudre de nombreux problèmes pratiques. De nombreuses applications dans les ouvrages consultés portent sur l'existence d'un chemin ou d'un cycle qui traverse chaque rue dans un quartier, chaque route dans un réseau de transport, chaque connexion dans une grille de services publics, ou chaque lien dans un réseau de communications exactement une fois (Rosen, 2012). Ces problèmes divers reviennent à trouver un chemin ou un cycle eulérien. Nous citons quelques exemples issus de la vie réelle :

- Recherche du chemin eulérien dans un graphe représentant des rues qu'un facteur doit couvrir. Si aucun chemin eulérien n'existe, certaines rues devront être traversées plus d'une fois. Le problème de trouver un cycle dans un graphe avec le moins d'arêtes qui traverse chaque arête au moins une fois est connu comme le problème du postier chinois en l'honneur de Guan Meigu, qui l'a posé en 1962 (Rosen, 2012) ;
- Parcours dans un bâtiment étant donné le plan des chambres et des portes aboutissant de l'une à l'autre, en passant une seule fois par chacune des portes (Epp, 2010);
- Dessin d'une figure sans lever le stylo en plaçant un sommet à chaque intersection de lignes, les arêtes étant les portions de lignes entre ces intersections (Berge, 1963; Bondy & Murty, 1976; 2008a; Rosen, 2012).

Des applications existent, en rapport avec d'autres disciplines comme la mobilisation des chemins eulériens en biologie moléculaire dans le séquençage de l'ADN (Rosen, 2012).

Cette diversité des applications des parcours eulériens dans d'autres disciplines et des liens qui peuvent exister avec la vie réelle offre des marges de manœuvre à des enseignants-chercheurs pour effectuer des choix d'enseigner certains contenus qui se rapprochent, plus ou moins, de leur activité de recherche.

II.4.1.6- Enseignement des parcours eulériens : choix possibles en termes des contenus et de leur présentation

De nombreux problèmes en théorie des graphes portent sur la recherche de parcours eulériens. On s'intéresse, dans ces problèmes, en général, à l'existence de parcours eulériens (chemins ou cycles) et à la construction de ces parcours (dans le cas des graphes eulériens ou semi-eulériens). Une condition nécessaire, loin d'être suffisante, pour l'existence d'un parcours eulérien est la connexité du graphe. En outre, l'existence d'un parcours eulérien dans un graphe G peut être déterminée simplement en trouvant les degrés des sommets de G , donc en comptant les arêtes adjacentes à chaque sommet. En revanche, dans les cas où ce parcours existe, on s'intéresse à chercher une construction possible par l'élaboration d'un algorithme.

En consultant les différents théorèmes en relation avec les parcours eulériens et leurs preuves, nous remarquons que ces contenus sollicitent peu de prérequis intrinsèques à la théorie des graphes : il suffit en effet de connaître les définitions des notions de base de la théorie des graphes telles que graphe, sommet, arête, degré d'un sommet, cycle, chemin simple, graphe connexe et l'addition ou la suppression d'arêtes. Ces notions peuvent être mises en relation : la connexité du graphe et la somme des degrés déterminent l'existence d'un chemin ou d'un cycle eulériens. Des notions mises en jeu sont plutôt relatives à des raisonnements, pas forcément spécifiques à la théorie des graphes, tels que le contre-exemple minimal ou la maximalité. Certaines preuves permettent particulièrement de mettre en relief la distinction entre une condition nécessaire et une condition suffisante. Par exemple, la parité des degrés est une condition nécessaire pour l'existence d'un cycle eulérien, mais si le graphe n'est pas connexe, cette condition ne serait pas suffisante.

Les preuves sont souvent rédigées dans un langage naturel, avec quelques représentations formelles pour désigner les objets mathématiques. Ainsi, l'accent est mis sur les modes de raisonnement plutôt que sur les détails de l'écriture mathématique formelle. En revanche, la rédaction des preuves, aussi bien que la construction des exemples et des exercices, sollicite des registres de représentation sémiotique divers (langage naturel, formel et par graphe), et il y a toujours des conversions d'un registre à un autre. A titre d'exemple, il y a sollicitation des représentations par un graphe pour expliquer et illustrer les idées énoncées dans les preuves et les étapes de l'algorithme de Fleury. En revanche, l'algorithme de Fleury peut être rédigé dans le registre de représentation formelle ou dans le registre du langage naturel, voire en mobilisant des représentations sémiotiques des deux registres à la fois. Nous notons que la construction des parcours eulériens en utilisant l'algorithme de Fleury dans les ouvrages ne mobilise pas des logiciels, les étapes sont effectuées sur des représentations par un graphe en utilisant un papier/crayon.

Enfin, les parcours eulériens se trouvent au cœur de différents problèmes en théorie des graphes qui peuvent mettre en œuvre des concepts mathématiques abstraits (tels que chemin et connexité) ou représenter ou modéliser des situations diverses, issues d'autres disciplines ou de la vie réelle. Ces problèmes constituent une occasion dans l'enseignement pour un travail sur la modélisation (comment modéliser ou représenter une situation donnée par un graphe, comment choisir les arêtes et les sommets, etc.) et du développement de modes de

raisonnement chez les étudiants. Le large choix de situations d'application des parcours eulériens (intra et extra mathématique) peut être considéré comme un atout pour qu'un enseignant-chercheur effectue des choix se rapprochant de son domaine de recherche.

La consultation des ouvrages montre la diversité des choix qui existent au niveau des modes de présentation des parcours eulériens : différentes preuves existent pour un même théorème, l'algorithme de Fleury pour la construction des parcours eulériens peut être abordé ou pas, des registres de représentation sémiotique divers peuvent intervenir (par graphe, formel, langage naturel) dans les preuves, les exemples, les exercices, etc. et des représentations par schéma peuvent être mobilisées pour illustrer des situations ou des problèmes.

II.4.2- Parcours de Hamilton

Un autre type de parcours sont les « parcours hamiltoniens » où l'on recherche l'existence d'un cycle qui passe une seule fois par tous les sommets d'un graphe, tout en ne traversant pas deux fois une même arête. Bien que les définitions des cycles eulériens et hamiltoniens puissent apparaître analogues, il y a une grande disparité entre les deux types de parcours. Des critères simples permettent de déterminer l'existence d'un cycle eulérien dans un graphe, il suffit de compter les degrés des sommets et de vérifier que le graphe est connexe. Cependant, de tels critères n'existent pas pour garantir l'existence de parcours hamiltoniens.

En 1859, un mathématicien irlandais, Sir William Rowan Hamilton, introduisit un puzzle intitulé « Icosian puzzle » : il s'agissait d'un dodécaèdre en bois [un polyèdre avec 12 pentagones réguliers comme faces, comme illustré à la figure 7 ci-dessous. Chacun des 20 sommets était étiqueté avec le nom d'une ville, Londres, Paris, Hong Kong, New York, etc. et était marqué par une cheville et une ficelle. L'objet du puzzle était de commencer par une ville et de parcourir les arêtes du dodécaèdre, de visiter chacune des 19 autres villes une seule fois et de revenir à la première ville. Le cycle parcouru a été marqué à l'aide de la ficelle et des chevilles (Rosen, 2012; Epp, 2010).

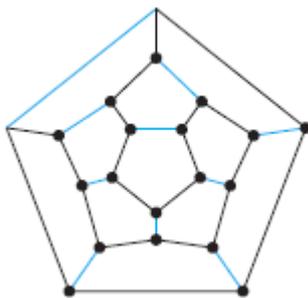


Figure 7 : Dodécaèdre régulier (Epp, 2010, p. 654)

Contrairement au cas des graphes eulériens, aucune condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit hamiltonien n'est connue. En fait, le problème de trouver une telle condition est l'un des principaux problèmes non résolus de la théorie des graphes (Bondy & Murty, 1976). Des conditions suffisantes pour qu'un graphe soit hamiltonien ont ensuite été obtenues par des chercheurs en théorie des graphes notamment G.A. Dirac, O. Ore, J.A. Bondy et V. Chvátal.

Un autre exemple de problème de recherche d'un cycle hamiltonien (cf. annexe 1, D34) est le « knight's tour problem » (cf. figure 8). Il consiste à trouver une succession de mouvements de chevaliers sur un échiquier, en visitant chacune des 64 cases une seule fois et en revenant au point de départ. Ce problème peut être daté de plusieurs centaines d'années et des solutions

systematiques ont été apportées par des mathématiciens dont Euler et A.-T. Vandermonde (Gross & Yellen, 2004).

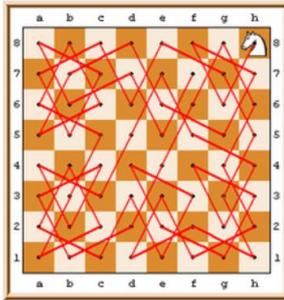


Figure 8 : Problème du cavalier

Nous commencerons cette partie par une exposition des définitions, propriétés et théorèmes en lien avec les parcours hamiltoniens présentés dans les ouvrages (§II.4.2.1). Nous présenterons ensuite les preuves des théorèmes recensés dans les huit ouvrages consultés (§II.4.2.2). Nous discuterons de l'existence d'algorithmes qui permettent la recherche de parcours hamiltoniens (§II.4.2.3). Nous listerons les registres de représentation sémiotique mobilisés dans les ouvrages dans les parties qui portent sur les parcours hamiltoniens et les activités cognitives qui en découlent (§II.4.2.4). Nous identifierons ensuite des liens que les auteurs des ouvrages consultés tissent avec les autres domaines mathématiques, ainsi qu'avec les autres disciplines (§II.4.2.5). Enfin, nous conclurons par une synthèse qui résume ce que nous retenons comme choix possibles en termes de contenus et de leur présentation en lien avec l'enseignement des parcours hamiltoniens (§II.4.2.6).

II.4.2.1- Définitions, propriétés et théorèmes

Étant donné un graphe G , un cycle hamiltonien pour G est un cycle simple qui inclut tous les sommets de G . En d'autres termes, un cycle hamiltonien pour G est une séquence de sommets et d'arêtes distinctes adjacentes (cf. annexe 1, D3) dans laquelle chaque sommet de G apparaît exactement une fois, sauf le premier et le dernier, qui sont les mêmes. Un graphe hamiltonien est un graphe qui contient un cycle hamiltonien.

Le problème peut être reformulé comme suit : comment déterminer si un graphe donné est un graphe hamiltonien ? Il s'agit donc de déterminer l'existence d'un cycle hamiltonien dans un tel graphe. Il n'existe pas de conditions qui garantissent l'existence d'un cycle hamiltonien dans un graphe, cependant, une idée qui apparaît souvent dans les ouvrages consultés est la suivante : en augmentant le nombre d'arêtes d'un graphe, la probabilité de l'existence d'un cycle hamiltonien augmente. Ainsi, selon Wilson (1996), les théorèmes qui portent sur l'existence d'un cycle hamiltonien dans les ouvrages consultés sont plutôt de la forme : « if G has enough edges, then G is hamiltonian » (Wilson, 1996, p. 36). En effet, en augmentant le nombre d'arêtes d'un graphe, il y aurait plus de chance de pouvoir accéder à chaque sommet par une arête et sortir par une autre. Ainsi, des conditions portant sur le nombre d'arêtes et les degrés des sommets dans un graphe peuvent être suffisantes pour l'existence d'un cycle hamiltonien dans ce graphe. Des conditions nécessaires existent de même, c'est-à-dire sans lesquelles un cycle hamiltonien ne peut pas exister. Cependant, il n'existe pas encore des conditions à la fois nécessaires et suffisantes pour qu'un graphe donné soit hamiltonien.

Les graphes hamiltoniens peuvent être mis en relation avec des notions diverses de la théorie des graphes. Ainsi, nous avons remarqué en consultant les ouvrages une diversité au niveau des choix des concepts et des notions mis en avant et de leur mise en relation. Epp (2010) définit un cycle hamiltonien et énonce des critères nécessaires pour son existence. Elle insiste

sur le fait que l'absence d'un de ces critères détermine la non-existence d'un cycle hamiltonien. Rosen (2012) met l'accent sur des conditions suffisantes pour l'existence d'un cycle hamiltonien (graphe complet, théorèmes de Dirac et d'Ore) et discute la complexité exponentielle des algorithmes de recherche de cycles hamiltoniens et enfin, il expose des applications des graphes hamiltoniens, le problème du commerçant voyageur et les codes de Gray. En contrepartie, Dierker et Voxman (1986) rédigent une section sur les codes de Gray, et énoncent la définition d'un cycle hamiltonien pour l'utiliser dans cette section. Berge (1963), quant à lui, traite des cycles hamiltoniens dans les digraphes. Bondy et Murty (1976), dans leur premier ouvrage de douze chapitres, traitent des cycles hamiltoniens dans le chapitre 4 intitulé « Euler tours and Hamiltonian cycles ». Ils énoncent des conditions nécessaires pour l'existence d'un cycle hamiltonien (le nombre de composantes connexes d'un sous-graphe, les sous graphes couvrants, etc.) et des conditions suffisantes, entre autres le théorème de Dirac. Dans leur second ouvrage (Bondy & Murty, 2008a), composé de vingt et un chapitres, ils traitent les cycles hamiltoniens dans le chapitre 18 intitulé « Hamilton cycles » et établissent des liens avec les graphes planaires et les graphes hypohamiltoniens.

Nous exposons dans la suite des théorèmes et des propriétés qui présentent des conditions nécessaires ou suffisantes pour l'existence de cycles hamiltoniens dans les graphes non-orientés et qui nécessitent la mobilisation seulement des notions de base comme prérequis.

Théorème 3.2.1 (Ore) : Si G est un graphe simple ayant n sommets avec $n \geq 3$ tel que $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ pour toute paire de sommets non adjacents u et v dans G , alors G a un cycle hamiltonien.

Théorème 3.2.2 (Dirac) : Si G est un graphe simple avec n sommets avec $n \geq 3$ tel que le degré de chaque sommet dans G est au moins $\frac{n}{2}$, alors G a un cycle hamiltonien.

Théorème 3.2.3 : le cube Q_n est hamiltonien pour tout $n \geq 2$.

Proposition 3.2.4 : Si G contient un cycle hamiltonien, alors pour tout ensemble non vide $S \subseteq V$, le graphe $G - S$ a au plus $|S|$ composantes (traduit par nos soins, West, 2001).

Propriété 3.2.5 : Tout graphe 2-connexe est hamiltonien (traduit par nos soins, West, 2001).

Propriété 3.2.6 : Si un graphe G contient un cycle hamiltonien, alors G admet un sous-graphe H qui a les propriétés suivantes : (1) tout sommet de G appartient à H ; (2) H est connexe; (3) le nombre d'arêtes de H est égal au nombre de sommets de H ; (4) tout sommet de H a un degré égal à 2 (traduit par nos soins, Epp, 2010).

Les propriétés 3.2.5 et 3.2.6 sont des conditions nécessaires pour l'existence d'un cycle hamiltonien : pour être hamiltonien, un graphe doit satisfaire ces critères, et pour montrer qu'un graphe n'est pas hamiltonien, il suffirait de montrer que l'une de ces conditions n'est pas satisfaite. En revanche, les théorèmes 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 et la proposition 3.2.4 sont des conditions suffisantes pour l'existence d'un cycle hamiltonien.

Bien que l'on ne connaisse encore aucune condition à la fois nécessaire et suffisante pour l'existence des cycles de Hamilton, il existe suffisamment de conditions suffisantes. Les conditions suffisantes ouvrent un champ d'application d'un ensemble de propriétés en rapport avec les cycles hamiltonien :

- un cycle hamiltonien ne peut pas contenir un cycle hamiltonien plus court que lui ;
- Q_n est hamiltonien pour toute valeur de n plus grande ou égale à 2 (cf. théorème 3.2.3) ;
- les théorèmes d'Ore et de Dirac (cf. théorèmes 3.2.1 et 3.2.2)

Par exemple, un graphe avec un sommet de degré 1 ne peut pas avoir un cycle hamiltonien, parce que dans un cycle hamiltonien, chaque sommet est incident à deux arêtes. En outre, si un

sommet dans le graphe a un degré 2, alors les deux arêtes qui sont incidentes à ce sommet doivent faire partie de n'importe quel cycle hamiltonien. Ainsi, un cycle hamiltonien ne peut pas contenir un cycle hamiltonien plus court que lui, puisque pour passer par un sommet, on passe par une arête et on sort par une autre, et toutes les autres arêtes incidentes à ce sommet ne feraient plus partie du cycle hamiltonien.

Le théorème de Dirac peut être présenté comme un corollaire du théorème d'Ore parce que les conditions du théorème de Dirac impliquent celles du théorème d'Ore. Le théorème d'Ore et le théorème de Dirac fournissent des conditions suffisantes pour qu'un graphe simple connexe admette un cycle hamiltonien. Cependant, ces théorèmes ne fournissent pas les conditions nécessaires à l'existence d'un cycle hamiltonien. Par exemple, le graphe ci-dessous (cf. figure 9) contient un cycle hamiltonien, mais ne satisfait pas les conditions citées dans les théorèmes de Dirac et d'Ore.

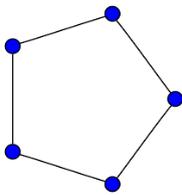


Figure 9 : Cycle de 5 arêtes.

Dans deux ouvrages consultés, une preuve existe pour le théorème d'Ore. Il s'agit de « la contradiction par maximalité » (Wilson, 1996; Rosen, 2012). Dans le cas où la preuve du théorème d'Ore est donnée, la preuve du théorème de Dirac y découle (Wilson, 1996; Rosen, 2012). Deux autres ouvrages (Bondy & Murty, 1976; West, 2001) exposent le théorème de Dirac et une preuve de ce théorème par contradiction. Selon West (2001), la preuve du théorème d'Ore en découle.

II.4.2.2- Preuves

Une preuve du théorème d'Ore est la contradiction par maximalité. On considère un graphe non-hamiltonien tel que pour chaque pair de sommets u et v , $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Mais en choisissant ce graphe, on considère ce qu'on appelle « un exemple maximal » ; on choisit le graphe de façon que, si on lui ajoute une arête, il devient hamiltonien. Donc, il y aurait un chemin – non fermé – qui passe par tous les sommets de G . On peut montrer que ce chemin contient des arêtes adjacentes à u et à v (cf. figure 10), par la suite, il existe un cycle hamiltonien d'où la contradiction.

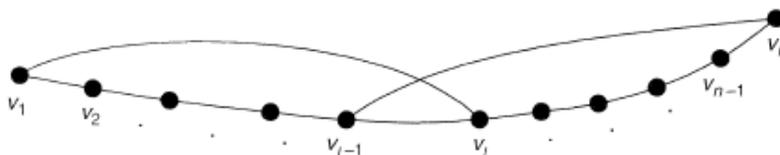


Figure 10 : Figure extraite de l'ouvrage de Wilson (1996, p. 36)

La preuve du théorème de Dirac peut découler du théorème d'Ore : si chaque sommet a un degré plus grand que $\frac{n}{2}$, alors pour n'importe quels sommets u et v , $d(u) + d(v) > \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$ donc la condition de Dirac serait satisfaite, et le graphe sera hamiltonien.

II.4.2.3- Les algorithmes

Les algorithmes connus pour trouver un cycle hamiltonien dans un graphe ou déterminer sa non-existence ont une complexité temporelle exponentielle (cf. encadré 2). Ces algorithmes ne

sont pas exposés dans les ouvrages, sauf dans le cas d'un problème particulier : le voyageur de commerce (Epp, 2010).

Le problème du voyageur de commerce (cf. annexe 1, 3.4) est proposé dans plusieurs ouvrages (Rosen, 2012; Wilson, 1996; Epp, 2010; Bondy & Murty, 1976) comme application sur le cycle hamiltonien (un petit cas qui porte sur 4 villes), et les distances entre les villes sont calculées à la main sans mentionner la notion de plus court chemin (que nous présenterons dans la partie II.4.3). Cependant, on mentionne que pour des cas plus larges, c'est-à-dire des cas que l'on peut obtenir en augmentant le nombre de villes, il n'existe pas aujourd'hui un algorithme avec une complexité temporelle non exponentielle pour résoudre le problème, mais il existe des algorithmes qui trouvent des approximations qui sont considérées comme des solutions acceptables.

Trouver un algorithme qui détermine l'existence d'un cycle hamiltonien dans un graphe avec une complexité polynomiale serait un accomplissement majeur dans le monde de la théorie des graphes.

II.4.2.4- Les différentes représentations sémiotiques et les liens existant entre elles

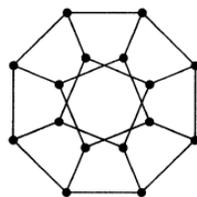
Les preuves des théorèmes exposés qui donnent des conditions nécessaires ou suffisantes pour l'existence d'un parcours hamiltonien sont rédigées dans un langage naturel avec un recours au registre de représentation formelle. Dans certains ouvrages, les idées présentées dans les preuves sont accompagnées par des représentations par un graphe afin de faciliter la compréhension des idées exposées.

En outre, les représentations par un graphe sont largement présentes dans les exemples et les exercices. Dans certains exercices, on demande aux utilisateurs de l'ouvrage de tracer des graphes satisfaisant à des conditions données (cf. encadré 8). Dans d'autres exercices, des graphes sont donnés aux étudiants et on leur demande de répondre aux questions en se référant à ces graphes (cf. encadré 9). D'autres exercices exposent des situations, rédigées en langage naturel (cf. encadré 10) ou représentées par des tableaux (cf. encadré 11) : on doit les représenter ou modéliser par des graphes, et répondre à des questions en effectuant des traitements sur le modèle construit.

7.2.9. Construct an infinite family of non-Hamiltonian graphs satisfying the necessary condition of Proposition 7.2.3.

Encadré 8 : Exercice portant sur les parcours hamiltoniens, extrait de l'ouvrage de West (2001, p. 295)

Determine whether the graph below is Hamiltonian.



Encadré 9 : Exercice portant sur les parcours hamiltoniens, extrait de l'ouvrage de West (2001, p. 295)

A mouse eats his way through a $3 \times 3 \times 3$ cube of cheese by tunnelling through all of the 27 $1 \times 1 \times 1$ subcubes. If he starts at one corner and always moves on to an uneaten subcube, can he finish at the centre of the cube?

Encadré 10 : Exercice portant sur les parcours hamiltoniens, extrait de Bondy et Murty (1976, p. 60)

36. A traveler in Europe wants to visit each of the cities shown on the map exactly once, starting and ending in Brussels. The distance (in kilometers) between each pair of cities is given in the table. Find a Hamiltonian circuit that minimizes the total distance traveled. (Use the map to narrow the possible circuits down to just a few. Then use the table to find the total distance for each of those.)



	Berlin	Brussels	Düsseldorf	Luxembourg	Munich
Brussels	783				
Düsseldorf	564	223			
Luxembourg	764	219	224		
Munich	585	771	613	517	
Paris	1,057	308	497	375	832

Encadré 11 : Exercice portant sur les parcours hamiltoniens, extrait d'Epp (2010, p. 660)

Les situations présentées (cf. encadrés 8 et 10) demandent de former des représentations par des graphes et d'effectuer des traitements dans ce registre. Dans l'exercice de l'encadré 9, par exemple, une représentation par un graphe est donnée sur laquelle on doit agir. Et dans l'exercice de l'encadré 11, on peut passer d'une représentation par tableau de données à une représentation par un graphe par un simple codage. Ces activités cognitives diverses mises en place dans les exercices sont essentielles pour la compréhension des parcours hamiltoniens.

II.4.2.5- Applications et liens avec les autres domaines mathématiques et les autres disciplines

Des liens intra-mathématiques existent dans certains problèmes entre les parcours hamiltoniens et des concepts tels que la bijection (cf. encadré 12) et le produit cartésien (cf. encadré 13).

18.1.2 Let G be a cubic graph, and let H be the cubic graph obtained from G by expanding a vertex to a triangle. Exhibit a bijection between the Hamilton cycles of G and those of H .

Encadré 12 : Exercice sur les parcours hamiltoniens, extrait de Bondy et Murty (2008a, p. 296)

7.2.18. Prove that the cartesian product of two graphs with Hamiltonian paths fails to have a Hamiltonian cycle if and only if both graphs are bipartite and have odd order, in which case the product has a Hamiltonian path.

Encadré 13 : Exercice sur les parcours hamiltoniens, extrait de West (2001, p. 296)

En outre, les chemins et les cycles hamiltoniens peuvent être utilisés pour résoudre des problèmes pratiques. De nombreuses applications demandent un chemin ou un cycle qui visite chaque intersection de routes dans une ville, chaque endroit où les pipelines se croisent dans une grille de services publics, ou chaque nœud dans un réseau de communications exactement une fois. Trouver un chemin ou un cycle hamiltonien dans le modèle de graphe approprié peut résoudre de tels problèmes issus de la vie réelle (Rosen, 2012). Nous citons à titre d'exemple la fameuse course du cavalier sur l'échiquier (Berge, 1963).

On se propose de déplacer un cavalier sur l'échiquier (cf. figure 8) de sorte que, dans son parcours, le cavalier passe une fois et une seule sur chacune des cases. Ce problème, revient à chercher un chemin hamiltonien d'un graphe symétrique. Les méthodes employées sont innombrables. Une règle qui semble être justifiée par la pratique mais n'a pas été justifiée par la théorie, est la suivante : on place chaque fois le cavalier là où il domine le plus petit nombre de cases non encore utilisées.

De même, des liens existent entre les cycles hamiltoniens et d'autres disciplines scientifiques. Nous citons ci-dessous l'exemple de la recherche opérationnelle. En recherche opérationnelle, la détermination d'un chemin hamiltonien est la clé de nombreux problèmes d'ordonnancement : pour être précis, quand on cherche un ordre optimum pour effectuer un certain nombre d'actions, l'ordonnancement cherché est en général indiqué par l'un des chemins hamiltoniens du graphe (Berge, 1963).

La diversité des liens existants entre les graphes hamiltoniens et d'autres domaines mathématiques, ainsi que les applications issues d'autres disciplines et de la vie réelle, rend compte de la portée de ce concept dans le monde des mathématiques, aussi bien que dans d'autres disciplines scientifiques.

II.4.2.6- Enseignement des parcours hamiltoniens : choix possibles en termes des contenus et de leur présentation

La recherche de parcours hamiltoniens est au centre de plusieurs problèmes mathématiques en théorie des graphes. On pourrait croire qu'il existe un moyen permettant toujours de déterminer l'existence des cycles hamiltoniens. Ceci peut être dû au fait que, dans plusieurs ouvrages, les parcours hamiltoniens sont présentés après les parcours eulériens (Bondy & Murty, 1976; Epp, 2010; Rosen, 2012; Wilson, 1996). Les mêmes connaissances antérieures relatives à la théorie des graphes sont requises pour ces deux types de parcours : les notions de bases telles que graphe, sommet, arête, degré d'un sommet, cycle, chemin simple, graphe connexe. Pourtant, nous notons que, bien que les définitions des cycles eulériens et hamiltoniens puissent apparaître analogues, il y a une réelle disparité entre les deux types de parcours. Des critères simples permettent de déterminer l'existence d'un cycle eulérien dans un graphe. Il suffit de dénombrer les degrés des sommets et de vérifier que le graphe est connexe. Aussi, l'algorithme de Fleury permet de construire aisément un cycle eulérien dans un graphe quand il existe. Un tel algorithme n'existe pas pour construire des cycles hamiltoniens, et il n'existe pas de critères permettant de déterminer l'existence d'un cycle hamiltonien dans un graphe. Cependant, en se basant sur des propriétés des cycles hamiltoniens, nous pouvons dans de nombreux cas montrer qu'un graphe ne possédant pas ces propriétés ne peut pas avoir de cycles hamiltoniens.

Des théorèmes qui existent donnent des conditions suffisantes pour l'existence de cycles hamiltoniens (tels que les théorèmes d'Ore et de Dirac). Des conditions nécessaires sont parfois exposées de même dans les ouvrages. Mais il n'existe pas aujourd'hui des conditions qui soient à la fois nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un cycle hamiltonien.

Les preuves des théorèmes sont rédigées dans un langage naturel, avec recours à des représentations formelles. Des représentations par graphe interviennent dans certaines preuves afin de rendre les idées plus accessibles. Les exemples exposés et les exercices mobilisent plusieurs représentations (langage naturel, par graphe, formelle et par tableau) et il y a parfois conversion d'une représentation à une autre. En outre, différentes activités cognitives peuvent être mises en œuvre telles que convertir d'une représentation à une autre dans les preuves et dans les exemples, agir sur des représentations données ou représenter/modéliser une situation par un graphe dans les preuves, les exemples et les exercices.

Les problèmes qui convoquent les graphes hamiltoniens sont divers et variés. Ils mobilisent les connaissances de base en théorie des graphes tels que les cycles, les chemins, les degrés des arêtes, les composantes connexes d'un graphe, etc. Cependant, ils peuvent interagir avec des notions diverses tels que les graphes planaires, les sous-graphes couvrants, etc. Les différents choix de concepts et de notions effectués par les concepteurs des ouvrages influencent les modes de présentation. Nous citons à titre d'exemple la présentation des graphes hamiltoniens dans les deux ouvrages de Bondy et Murty, « graph theory with application » (1976) et « graph theory » (2008a). Dans « graph theory with applications », on les trouve dans le chapitre 4 avec les parcours eulériens avec des liens établis avec les composantes connexes d'un sous-graphe et les sous-graphes couvrants, etc. Dans « graph theory », ils sont exposés dans le chapitre 18 et articulés avec les graphes planaires et les graphes hypohamiltoniens, etc. Les mêmes auteurs ont effectué, dans deux ouvrages, des choix différents dans la présentation des cycles hamiltoniens. Ceci est vraisemblablement dû aux développements de la théorie des graphes et ses applications dans les trois décennies d'écart entre l'édition des deux ouvrages.

Enfin, les parcours hamiltoniens peuvent établir des liens avec d'autres domaines mathématiques en mobilisant des objets tels que la bijection ou le produit cartésien. Ils peuvent de même être mobilisés dans des problèmes d'application issus d'autres disciplines et des situations de modélisation de la vie réelle. La recherche des parcours hamiltoniens fournit aux étudiants une occasion de développer leur raisonnement mathématique et d'apprécier le rôle que peuvent jouer les concepts mathématiques abstraits dans la résolution de situations diverses et plus concrètes. Ainsi, des situations diverses peuvent engager une recherche des parcours hamiltoniens et différents registres de représentation sémiotique peuvent intervenir dans chacune d'elle. Cette diversité, aussi bien que l'évolution de la théorie des graphes dans le temps, contribuent à la disparité dans les modes de présentation des graphes hamiltoniens dans des ouvrages et dans la conception de ressources pour l'enseignement de ce concept.

II.4.3- Recherche du plus court chemin dans un graphe

Les algorithmes de la théorie des graphes remontent en particulier au 19^{ème} siècle, lorsque Fleury donna une méthode systématique pour tracer un graphe eulérien et que G. Tarry montra comment sortir d'un labyrinthe. Au 20^{ème} siècle, des algorithmes ont été développés pour trouver des solutions à des problèmes tels que les problèmes des chemins les plus courts et les plus longs, et le problème du facteur chinois, ainsi que de nombreux problèmes liés à la recherche opérationnelle. Dans chacun de ces problèmes, des numéros sont attribués aux arêtes (et/ou sommets) d'un graphe qui représentent la distance ou le temps pris pour les parcourir.

La recherche d'un plus long chemin dans un réseau d'activités date des années 1940 et 1950, dans des problèmes liés à la construction de sous-marins par la marine américaine ou dans des

situations où on essaie de minimiser le coût total d'un projet (développement du CPM, *Critical Path Method*, pour ce but par Du Pont de Nemours Company) (Gross & Yellen, 2004).

À la fin des années 1960, des chercheurs ont développé le concept des problèmes P/NP-complets : la classe P regroupe des problèmes dont la résolution sollicite des algorithmes à temps polynomial tels que les problèmes de transport et d'impact minimum et la classe NP regroupe des problèmes qui requièrent des algorithmes à temps exponentiel tels que les problèmes de vendeurs itinérants et de recherche de cycles hamiltoniens (Gross & Yellen, 2004).

Nous nous intéressons particulièrement dans cette partie aux situations de recherche du plus court chemin dans un graphe que nous introduisons ci-dessous :

De nombreuses situations de la vie réelle se ramènent à accomplir un certain nombre d'étapes pour arriver d'un état donné a à un état b . Considérons l'exemple d'une personne qui souhaite aller de chez elle (point A) à la gare (point G). Les rues entre la maison et la gare sont représentées dans le graphe ci-dessous (cf. figure 11) par les arêtes. Pour arriver à sa destination, cette personne peut effectuer plusieurs trajets possibles, nous citons à titre d'exemple ABCG ou ADFCG. Chacun de ces trajets est un chemin allant de A à G.

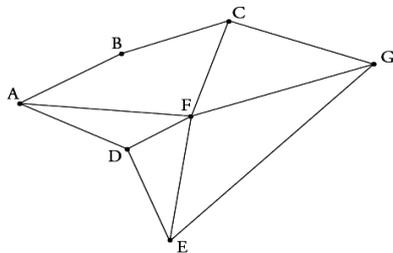


Figure 11 : Graphe que nous avons conçu qui représente les rues entre la maison (point A) et la gare (point G)

Supposons que la personne ne connaît pas le trajet et voudrait mémoriser le plus petit nombre possible d'indications pour aller de A à G, et par conséquent, effectuer un trajet passant un nombre minimum de rues. Le problème se ramène donc, dans ce cas, à trouver un chemin de A à G qui passe par le minimum d'arêtes. On désigne un tel chemin en théorie des graphes par le chemin le plus court. Dans ce cas, la longueur des rues et la distance traversée n'ont aucune importance, le chemin est le plus court en tant que nombre d'arêtes traversées. Le chemin serait dans ce cas AFG (cf. figure 11).

Supposons maintenant que cette personne voudrait prendre le trajet avec la distance minimale. Nous attribuons à chaque arête du graphe un nombre qui représente la longueur, en kilomètres, de la rue représentée par cette arête. Et la question devient alors « trouver le chemin avec la plus courte distance ». En considérant les chemins possibles (cf. figure 12) et calculant la distance traversée pour chacun, nous pouvons conclure aisément que AFEG est le chemin le plus court.

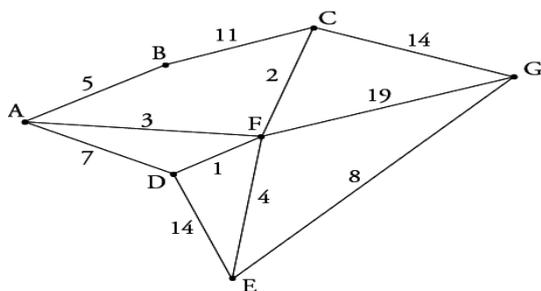


Figure 12 : Graphe que nous avons conçu qui représente les longueurs, en kilomètres, des rues entre la maison (point A) et la gare (point G)

Un graphe avec des poids affectés aux arêtes est appelé un « graphe pondéré ». De nombreux problèmes peuvent être modélisés en utilisant des graphes avec des poids affectés à leurs arêtes. À titre d'exemple, si nous considérons un système de transport aérien, il peut être modélisé par un graphe en représentant les villes par sommets et les vols par arêtes. Les arêtes peuvent représenter différentes grandeurs (cf. annexe 1, D12) des vols telles que les distances, les durées, les tarifs, etc. selon le problème qu'on essaie de modéliser (voir figures 13, 14, 15) (Rosen, 2012).

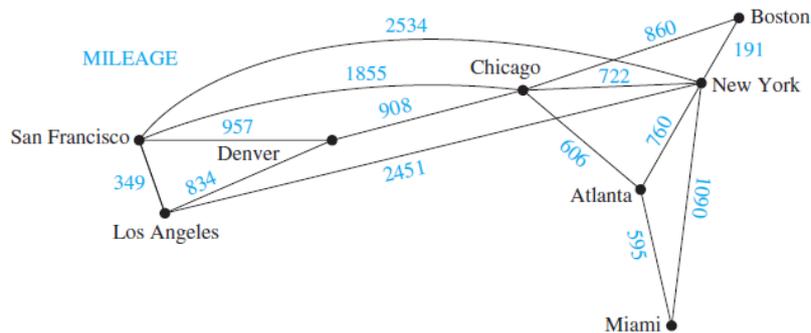


Figure 13 : Graphe pondéré qui modélise un système de transport aérien où les arêtes représentent les distances entre les villes (Rosen, 2012, p. 708)

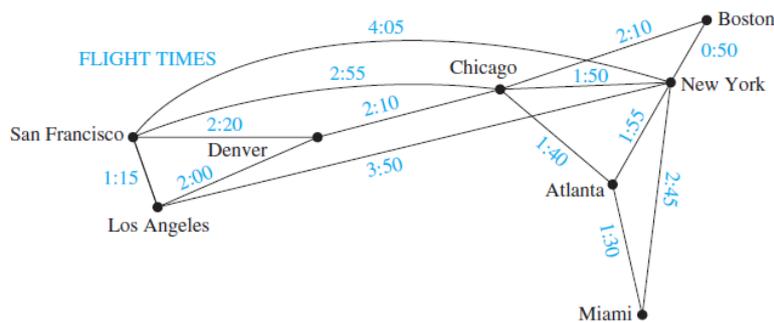


Figure 14 : Graphe pondéré qui modélise un système de transport aérien où les arêtes représentent les durées des vols (Rosen, 2012, p. 708)

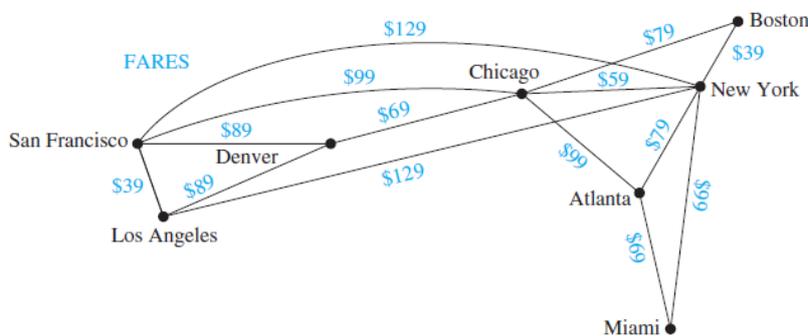


Figure 15 : Graphe pondéré qui modélise un système de transport aérien où les arêtes représentent les tarifs des vols (Rosen, 2012, p. 708)

Plusieurs types de problèmes impliquant des graphes pondérés (cf. annexe 1, D38) apparaissent dans les ouvrages consultés tels que la détermination d'un chemin de moindre longueur entre deux sommets donnés. Par exemple, dans le système de transport aérien représenté par les

graphes pondérés ci-dessus, quel est le chemin le plus court (en termes de distance du vol) entre Boston et Los Angeles (cf. figure 13) ? Quelles combinaisons de vols ont la plus courte durée entre Boston et Los Angeles (cf. figure 14) ? Quel est le tarif le moins cher entre ces deux villes (cf. figure 15) ? (Rosen, 2012). Les questions de recherche d'un chemin de moindre longueur ou du chemin le plus long sont en général des questions d'optimisation. Par exemple, comment planifier le trajet d'un vol afin d'optimiser la distance (cf. figure 13) ou le coût (cf. figure 15) ?

Les situations de recherche du plus court chemin entre deux sommets d'un graphe peuvent être dissociées en deux étapes : la recherche des chemins possibles entre ces deux sommets, et le calcul des longueurs de ces chemins afin de choisir le plus court. Ces deux étapes sont à la base des algorithmes mis en œuvre dans la recherche et la construction de tels chemins.

Nous commencerons cette partie par une présentation des définitions, propriétés et théorèmes en lien avec le plus petit chemin exposés dans les ouvrages (§II.4.3.1). Nous discuterons des preuves et des algorithmes en lien avec la recherche du plus court chemin dans un graphe (§II.4.3.2). Nous mettons l'accent sur l'algorithme de Dijkstra (§II.4.3.3) qui permet de rechercher le plus petit chemin dans un graphe. Nous recenserons les registres de représentation sémiotique mobilisés dans les ouvrages dans les parties qui portent sur les plus courts chemins et les activités cognitives qui en découlent (§II.4.3.4). Et nous identifierons des liens que les auteurs des ouvrages consultés tissent avec les autres domaines mathématiques, ainsi qu'avec les autres disciplines (§II.4.3.5). Enfin, nous concluons par une synthèse qui résume ce que nous retenons comme choix possibles en termes de contenus et de leur présentation en lien avec l'enseignement des plus courts chemins (§II.4.3.6).

II.4.3.1- Définitions, propriétés et théorèmes

Dans un graphe connexe non pondéré, la longueur d'un chemin passant par n sommets est $n - 1$, cette longueur est définie par le nombre d'arêtes traversées. La distance entre deux sommets a et b est la plus petite longueur d'un chemin entre a et b (cf. annexe 1, D35). Le chemin de a à b qui a pour longueur la distance de a à b est une géodésique (cf. encadré 14), et la distance entre a et b est métrique (cf. encadré 14 et annexe 1, D35).

Par définition, dans un espace métrique, une distance sur un ensemble X , non vide, est une fonction définie de $X \times X$ vers \mathbb{R}^+ ayant les propriétés suivantes :

Symétrie : $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$;

Séparation: $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

Inégalité triangulaire: $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Un espace métrique X muni de sa distance d est dénoté par (X, d) . Dans un espace métrique (X, d) , une géodésique reliant $x, y \in X$ est une fonction continue (courbe) $\rho: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ satisfaisant $x = \rho(a) = \rho(b)$ et pour chaque $s, t \in [a, b], d(\rho(s), \rho(t)) = |s - t|$.

Un espace métrique est géodésique si pour toute paire d'éléments dans l'espace, il existe une géodésique qui les relie.

Encadré 14: Définition d'un espace métrique et d'une géodésique

Dans un graphe pondéré G , la distance $d(u, v)$ entre deux arêtes a et b est la plus petite somme des poids dans un chemin entre a et b . Cette définition est celle d'une distance métrique, mais dans ce cas, l'espace métrique (G, d) n'est pas géodésique (puisque le chemin de longueur minimale entre deux sommets dans un graphe pondéré n'est pas forcément unique).

Nous pouvons constater que « trouver la distance entre deux sommets a et b d'un graphe G (pondéré ou non pondéré) » revient à trouver le plus court chemin entre a et b .

On note que les plus courts chemins trouvés à chaque itération forment un graphe connexe sans cycle, donc un arbre. D'où, certains ouvrages comparent l'algorithme de Dijkstra à une procédure de développement d'arbres (tree growing) et introduisent cet algorithme après avoir introduit les arbres (Epp, 2010; West, 2001). En effet, Epp (2010) considère que la recherche du plus court chemin d'un graphe est une construction d'un arbre, en choisissant l'arête qui a le plus petit poids à chaque étape. Elle introduit l'algorithme de Dijkstra en expliquant les étapes, et les illustre en utilisant des représentations par graphe et par tableau. Et enfin, elle donne la preuve de l'algorithme, qui consiste à montrer qu'il donne le résultat demandé et qu'il se termine après un certain nombre d'étapes (preuves de correction et de terminaison). Berge (1963) et Dierker et Voxman (1986) introduisent la recherche du plus court chemin dans les digraphes. Bondy et Murty (1976), dans « Graph theory with applications », choisissent d'introduire l'algorithme de Dijkstra en utilisant des représentations par graphe et des diagrammes pour illustrer les étapes. Dans « Graph theory » en 2008, ils introduisent un autre algorithme, le Breadth-First Search, qui recherche le plus court chemin en construisant un arbre dans des graphes non-pondérés, et donc peut être considéré comme un cas particulier de l'algorithme de Dijkstra. Ils y présentent l'algorithme de Dijkstra pour rechercher le plus court chemin dans les digraphes. Cette disparité au niveau des contenus exposés peut être due au choix que les auteurs déclarent dans la préface de « graph theory » qui consiste à introduire plus d'algorithmes que dans leur premier ouvrage, et aux développements dans la théorie des graphes entre 1976 et 2008.

II.4.3.2- Preuves et algorithmes

Pour les preuves en rapport avec les situations du plus court chemin, nous avons fait le choix de présenter les preuves et les algorithmes qui y sont associés dans la même sous-partie. En effet, des ouvrages consultés (Rosen, 2012; Bondy & Murty, 1976; West, 2001; Epp, 2010) présentent l'algorithme de Dijkstra (cf. encadré 15) comme la méthode la plus connue pour la recherche du chemin le plus court entre deux sommets d'un graphe pondéré. Et les preuves existantes sont présentées pour montrer que l'algorithme fonctionne bien et donne le résultat demandé. Ces preuves utilisent la récurrence. Nous soulignons que l'algorithme de Dijkstra calcule la longueur du plus court chemin entre deux sommets quelconques d'un graphe.

Le principe de l'algorithme est le suivant : Pour trouver la longueur du plus court chemin entre u et v dans un graphe pondéré, l'algorithme de Dijkstra procède en recherchant la longueur du plus court chemin de u à un premier sommet, puis à un deuxième sommet, et ainsi de suite jusqu'à ce que la longueur du plus court chemin de u à v soit trouvée. Nous notons, dans ce cas, la distance de u à un point a est le poids minimal d'un chemin qui existe entre u et a .

L'algorithme repose sur une série d'itérations. A chaque itération, un sommet u est étiqueté avec la longueur du plus court chemin de u à a . a est ajouté alors à un ensemble de sommets qui est construit à chaque étape en ajoutant un sommet dont l'étiquette est minimale parmi ceux qui ne figurent pas déjà dans l'ensemble. Nous présentons l'algorithme dans le paragraphe suivant.

II.4.3.3- L'algorithme de Dijkstra

Un mathématicien et informaticien Hollandais a développé un algorithme, en 1959, qui trouve le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe pondéré et qui a gardé son nom, l'algorithme de Dijkstra (cf. encadrés 15 et 16).

ALGORITHM 1 Dijkstra's Algorithm.

```
procedure Dijkstra( $G$ : weighted connected simple graph, with
    all weights positive)
{ $G$  has vertices  $a = v_0, v_1, \dots, v_n = z$  and lengths  $w(v_i, v_j)$ 
    where  $w(v_i, v_j) = \infty$  if  $\{v_i, v_j\}$  is not an edge in  $G$ }
for  $i := 1$  to  $n$ 
     $L(v_i) := \infty$ 
 $L(a) := 0$ 
 $S := \emptyset$ 
{the labels are now initialized so that the label of  $a$  is 0 and all
    other labels are  $\infty$ , and  $S$  is the empty set}
while  $z \notin S$ 
     $u :=$  a vertex not in  $S$  with  $L(u)$  minimal
     $S := S \cup \{u\}$ 
    for all vertices  $v$  not in  $S$ 
        if  $L(u) + w(u, v) < L(v)$  then  $L(v) := L(u) + w(u, v)$ 
        {this adds a vertex to  $S$  with minimal label and updates the
            labels of vertices not in  $S$ }
return  $L(z)$  { $L(z)$  = length of a shortest path from  $a$  to  $z$ }
```

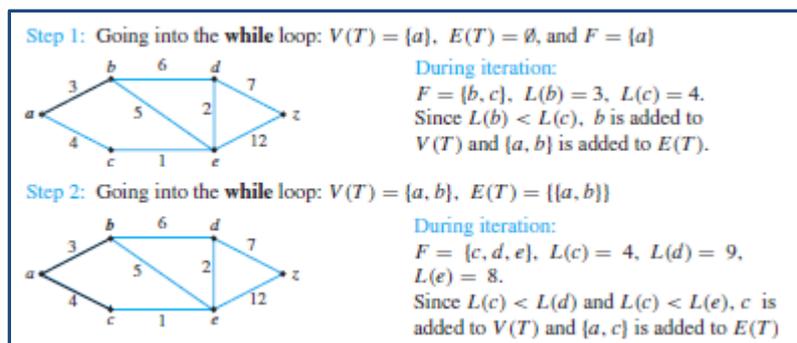
Encadré 15 : L'algorithme de Dijkstra (Rosen, 2012, p. 712)

Input: A graph (or digraph) with nonnegative edge weights and a starting vertex u . The weight of edge xy is $w(xy)$; let $w(xy) = \infty$ if xy is not an edge.
Idea: Maintain the set S of vertices to which a shortest path from u is known, enlarging S to include all vertices. To do this, maintain a tentative distance $t(z)$ from u to each $z \notin S$, being the length of the shortest u, z -path yet found.
Initialization: Set $S = \{u\}$; $t(u) = 0$; $t(z) = w(uz)$ for $z \neq u$.
Iteration: Select a vertex v outside S such that $t(v) = \min_{z \notin S} t(z)$. Add v to S . Explore edges from v to update tentative distances: for each edge vz with $z \notin S$, update $t(z)$ to $\min\{t(z), t(v) + w(vz)\}$.
The iteration continues until $S = V(G)$ or until $t(z) = \infty$ for every $z \notin S$.
At the end, set $d(u, v) = t(v)$ for all v . ■

Encadré 16 : L'algorithme de Dijkstra (West, 2001, p. 97)

Nous illustrons les étapes de l'algorithme en se référant à l'encadré 17. Dans la première étape, les sommets adjacents à a sont b et c . La longueur du chemin de a à b est 3, celle de a à c est 4. Donc b est ajouté à l'ensemble de sommets contenant déjà a , l'ensemble devient $\{a, b\}$. Dans la deuxième étape, on regarde les sommets adjacents à a et b , c'est-à-dire, les sommets c, d et e . Le chemin de a à c est le plus court, donc c est ajouté à l'ensemble des sommets et l'ensemble devient $\{a, b, c\}$. La procédure est répétée jusqu'à arriver à z .

L'algorithme de Dijkstra peut être facilement étendu pour trouver la longueur du plus court chemin de a à tous les autres sommets du graphe, non seulement à z (si on a l'intention de déterminer le plus court chemin de a à un sommet u_0 , on s'arrête dès qu'on arrive à u_0).



Encadré 17 : Illustration de la recherche du plus court chemin en utilisant l’algorithme de Dijkstra (Epp, 2010, p. 712)

L’exécution de l’algorithme peut être illustrée par une construction d’un diagramme (cf. annexe 1, figure 3.8), ou par un tableau numérique (cf. annexe 1, table 3.7). Cet algorithme peut être de même adapté pour trouver le plus court chemin dans un graphe orienté.

L’intérêt de l’utilisation d’un algorithme pour chercher un plus court chemin dans un graphe varie en fonction du nombre de sommets et d’arêtes du graphe. Plus le graphe a des sommets et des arêtes, plus l’algorithme sera long et dur à effectuer sans utiliser un logiciel. En effet, pour les petits cas, une méthode plus élémentaire existe pour déterminer le plus court chemin entre deux sommets dans un graphe donné : en calculant les longueurs de tous les chemins existants entre ces deux sommets et choisissant celui qui s’avère le plus court. Cependant, l’algorithme de Dijkstra est beaucoup plus économique en termes de temps d’exécution d’un certain nombre d’étapes pour les grands cas, d’où son efficacité. Nous soulignons le besoin d’utiliser des logiciels (dans les grands cas) pour la recherche du plus court chemin.

II.4.3.4- Les différentes représentations sémiotiques et les liens existant entre elles

Dans certains ouvrages où figure l’algorithme de Dijkstra pour la recherche du plus court chemin, il est présenté dans le registre de représentation par langage naturel (West, 2001; Wilson, 1996), et en pseudocode dans d’autres (Rosen, 2012; Epp, 2010; Bondy & Murty, 1976). La preuve de l’algorithme, quand elle est donnée, est rédigée dans un langage naturel, avec des symboles pour représenter les objets mathématiques en question.

Des traitements dans différents registres sont effectués pour expliquer les étapes. La construction du plus court chemin en utilisant l’algorithme est expliquée dans le registre du langage naturel et en effectuant des traitements sur des représentations par graphe dans certains ouvrages (Bondy & Murty, 1976; Epp, 2010; Rosen, 2012; Wilson, 1996). Bondy et Murty illustrent les étapes de l’algorithme dans le registre formel (cf. figure 16). Epp (2010) utilise une conversion d’une représentation par graphe en une représentation par tableau pour expliquer les étapes (cf. annexe 1, table 3.7). Dans ce cas, les valeurs numériques dans le tableau changent à chaque étape en fonction des valeurs calculées à partir de la représentation par graphe ; le traitement dans ce cas mobilise les deux registres de représentation sémiotique, par graphe et par tableau, en faisant des allers-retours de l’un à l’autre.

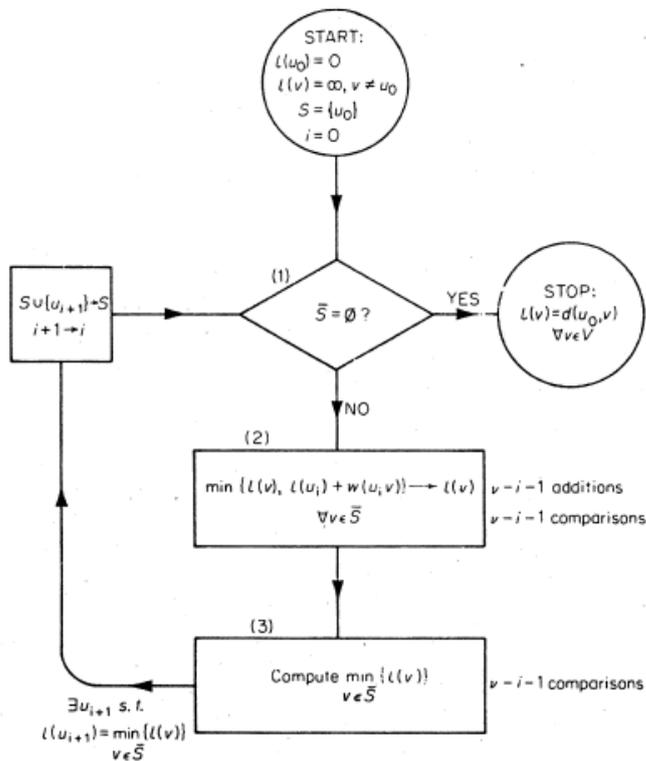


Figure 16 : L'algorithme de Dijkstra (Bondy & Murty, 1976, p. 20)

Dans les exercices où l'on cherche l'existence d'un plus court chemin dans un graphe, on a recours, dans les ouvrages consultés, à des représentations par graphe et par schéma. Dans les exercices proposés, on trouve des consignes variées : construire un graphe avec des conditions données (cf. encadré 18) ; convertir une donnée d'une représentation par matrice à une représentation par tableau (cf. encadré 19) ; agir sur une représentation par graphe ou par matrice d'un graphe (cf. encadré 20) ; modéliser une situation énoncée par un graphe, ensuite utiliser le modèle pour répondre à des questions (cf. encadré 21) ; adapter l'algorithme de Dijkstra présenté en pseudocode afin qu'il produise un résultat donné (cf. encadré 22) ; convertir d'une représentation en langage naturel à une représentation par graphe ; convertir d'une représentation par graphe à une représentation par tableau (cf. encadré 23) ; convertir d'une représentation par matrice à une représentation par tableau (cf. encadré 24) ; effectuer des adaptations sur l'algorithme de Dijkstra afin de produire un résultat donné ou même afin de chercher le plus long chemin dans un graphe.

29. Construct a weighted undirected graph such that the total weight of a circuit that visits every vertex at least once is minimized for a circuit that visits some vertices more than once. [Hint: There are examples with three vertices.]

Encadré 18 : Exercice sur les plus courts chemins, extrait de Rosen (2012, p. 718)

1.8.3 A company has branches in each of six cities C_1, C_2, \dots, C_6 . The fare for a direct flight from C_i to C_j is given by the (i, j) th entry in the following matrix (∞ indicates that there is no direct flight):

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$

The company is interested in computing a table of cheapest routes between pairs of cities. Prepare such a table.

Encadré 19 : Exercice sur les plus courts chemins, extrait de Bondy et Murty (1976, p. 20-21)

2.3.3. (–) There are five cities in a network. The cost of building a road directly between i and j is the entry $a_{i,j}$ in the matrix below. An infinite entry indicates that there is a mountain in the way and the road cannot be built. Determine the least cost of making all the cities reachable from each other.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 11 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 0 & \infty & 10 \\ 11 & 9 & \infty & 0 & 7 \\ 9 & 8 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Encadré 20 : Exercice sur les plus courts chemins, extrait de West (2001, p. 103)

1.8.4 A wolf, a goat and a cabbage are on one bank of a river. A ferryman wants to take them across, but, since his boat is small, he can take only one of them at a time. For obvious reasons, neither the wolf and the goat nor the goat and the cabbage can be left unguarded. How is the ferryman going to get them across the river?

Encadré 21 : Exercice sur les plus courts chemins, extrait de Bondy et Murty (1976, p. 21)

Modify Algorithm 10.7.3 so that the output consists of the sequence of edges in the shortest path from a to z .

Encadré 22 : Exercice sur l'algorithme de Dijkstra, extrait d'Epp (2010, p. 716)

Use Dijkstra's algorithm for the airline route system of Figure 10.7.3 to find the shortest distance from Nashville to Minneapolis. Make a table similar to Table 10.7.1 to show the action of the algorithm.

Encadré 23 : Exercice sur la recherche du plus court chemin, extrait d'Epp (2010, p. 715)

A company has branches in each of six cities C_1, C_2, \dots, C_6 . The fare for a direct flight from C_i to C_j is given by the (i, j) th entry in the following matrix (∞ indicates that there is no direct flight):

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$

The company is interested in computing a table of cheapest routes between pairs of cities. Prepare such a table.

Encadré 24 : Exercice sur la recherche du plus court chemin, extrait de Bondy et Murty (1976, p. 20-21)

Les différentes représentations sémiotiques mobilisées dans les exercices de recherche d'un plus court chemin et les différentes activités cognitives mises en œuvre dans de telles situations (former une représentation, traiter et convertir) sont essentielles pour la compréhension des propriétés mathématiques en jeu lors de la recherche d'un plus court chemin dans un graphe ou lors de l'implémentation de l'algorithme de Dijkstra.

II.4.3.5- Applications et liens avec les autres domaines mathématiques et les autres disciplines

Retrouver le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe non pondéré revient à trouver la distance entre ces deux sommets, voire la géodésique qui relie ces deux sommets. Dans le cas d'un graphe pondéré, le plus court chemin entre deux sommets peut être associé à une fonction qui à chaque chemin, associe la somme des poids des arêtes, et le plus court chemin serait celui qui a l'image avec la plus petite valeur. Ainsi, des liens intra-mathématiques peuvent exister avec les concepts de distance, de géodésique et même de fonctions.

En outre, « Trouver le plus court chemin » entre deux sommets d'un graphe pondéré est important pour la résolution de plusieurs problèmes issus d'autres disciplines scientifiques telles que les réseaux. Un graphe pondéré peut être utilisé pour modéliser un réseau informatique en termes de coûts de communication, de durées de réponse des ordinateurs sur les lignes ou de distances entre les différents ordinateurs ; trouver le plus court chemin entre deux sommets permettrait de construire un réseau avec une longueur ou un coût minimaux.

D'autres problèmes issus de la vie réelle peuvent solliciter la recherche ou la construction du plus court chemin. Nous citons quelques exemples ci-dessous :

- trouver le plus court chemin qu'un train peut traverser afin d'aller d'une ville dans une autre ville, ou les villes seraient représentées par les sommets d'un graphe et les distances entre elles par les arêtes ;
- évaluer des employés selon leur aptitude à occuper des emplois offerts ; le but est de distribuer les emplois d'une façon optimale, en respectant les informations présentées dans le tableau ci-dessous (cf. encadré 25).

	Bill	Ross	George	Al	Ralph
used car salesman	8	10	4	5	0
fraternity president	9	2	8	4	3
standup comic	7	4	1	5	9
talk show host	8	1	3	2	5

Encadré 25 : Exemple qui porte sur l'aptitude des employés à occuper un poste (Marcus, 2008, p. 7)

Un problème souvent discuté dans les ouvrages est celui du postier chinois (cf. annexe 1, 3.5) qui peut être décrit comme suit : « Dans son travail, un postier récupère le courrier au bureau de poste, le distribue, et ensuite retourne au bureau de poste. Il doit, bien entendu, passer au moins une fois dans chaque rue. Sous cette contrainte, il veut choisir un trajet qui nécessite le moins de marche possible »¹⁴ (Bondy & Murty, 1976). En représentant les rues par les arêtes et les longueurs de ces rues par les poids de ces arêtes, le problème devient : trouver le plus court chemin dans un graphe en commençant par un sommet et retournant au même sommet, tout en passant par toutes les arêtes. Pour le résoudre, il suffit de chercher tous les parcours eulériens possibles et calculant le poids de chacun afin de choisir celui avec le poids minimal. Il est toujours possible de trouver la solution pour ce problème, sauf que la trouver requiert moins de travail dans les graphes eulériens.

Un autre problème de recherche du plus court chemin est celui du « voyageur de commerce » (cf. annexe 1, 3.4) qui désire visiter certaines villes et retourner ensuite à la ville de départ. La question est la suivante : étant donné les durées requises des parcours entre les villes, comment peut-il planifier son trajet afin qu'il puisse parcourir toutes les villes en minimisant le temps de parcours ? En représentant les villes par les sommets du graphe et les durées de parcours par les poids des arêtes, le problème devient le suivant : comment trouver un parcours de poids minimal qui passe par tous les sommets du graphe et revenant au sommet de départ. Donc, pour le résoudre, nous aurons besoin de chercher les circuits hamiltoniens possibles, et calculer leurs poids respectifs, afin de trouver le chemin le plus court, c'est-à-dire, celui ayant le poids minimal. La résolution de ce problème peut être d'une très grande complexité ; le nombre de cycles hamiltoniens possibles pour un graphe ayant n sommets est $(n - 1)!/2$, c'est-à-dire 3.1×10^{23} cycles hamiltoniens pour un graphe ayant 25 sommets (cf. annexe 1, 3.4). Des algorithmes existent qui donnent une approximation de la solution pour ce type de problèmes, puisqu'il n'existe pas à ce jour un algorithme qui peut trouver la solution ayant une complexité polynomiale.

II.4.3.6- Enseignement du plus court chemin : choix possibles en termes des contenus et de leur présentation

La recherche d'un plus court chemin entre deux sommets d'un graphe est effectuée en général dans un but d'optimisation. Dans un graphe non pondéré, le plus court chemin entre deux points est le chemin passant par le moindre nombre d'arêtes, c'est donc la distance entre ces deux sommets. Dans un graphe pondéré (V, E) , nous pouvons associer à chaque arête e un nombre $l(e) \geq 0$, qui est la longueur de cette arête. Nous notons que la longueur peut signifier la longueur en kilomètres, ou le prix d'un trajet, ou même sa durée, etc. Trouver un plus court chemin entre deux points a et b de du graphe consiste à trouver un chemin entre a et b tel que la longueur totale $\sum_{e \in E} l(e)$ soit aussi petite que possible.

Dans un graphe pondéré, un algorithme qui permet de trouver le plus court chemin est l'algorithme de Dijkstra. Certains ouvrages effectuent le choix de le présenter pour la construction du plus court chemin entre deux sommets donnés d'un graphe pondéré (Bondy & Murty, 1976; Epp, 2010; Rosen, 2012; West, 2001; Wilson, 1996) ; d'autres ouvrages l'utilisent pour la recherche du plus court chemin dans les graphes orientés (Berge, 1963; Dierker & Voxman, 1986; Bondy & Murty, 2008a). D'autres choix sont souvent effectués dans les ouvrages tels que présenter la recherche du plus court chemin comme étant le développement d'un arbre et l'usage d'algorithmes tels que le Breadth-First Search (Bondy & Murty, 2008a; Dierker & Voxman, 1986; West, 2001).

¹⁴ Le problème est présenté en anglais dans l'ouvrage, nous l'avons traduit en français.

Certains ouvrages consultés s'intéressent à montrer que cet algorithme marche et proposent une preuve par induction (Epp, 2010; Rosen, 2012; West, 2001). Nous soulignons que le raisonnement inductif est largement utilisé dans l'analyse des algorithmes, vu que les relations de récurrence ont un rôle important dans sa construction. Les ouvrages consultés s'intéressent en général aux étapes de l'algorithme et donnent des exemples pour illustrer les différentes étapes.

Pour expliquer aux lecteurs le fonctionnement de l'algorithme de Dijkstra pour la recherche du plus court chemin dans un graphe, les ouvrages mobilisent des registres de représentation sémiotique divers (langage naturel, formel, par graphe, par matrice et par tableau). L'algorithme est souvent rédigé dans un langage naturel dans certains ouvrages, et en mobilisant les deux registres de représentation sémiotique, langage naturel et formel, à la fois dans d'autres ouvrages. Les étapes de l'algorithme, dans certains ouvrages, sont illustrées par des traitements dans les registres de représentation formelle, par graphe et en langage naturel. Le cas échéant, la recherche du plus court chemin est effectuée sur des graphes qui possèdent un petit nombre d'arêtes, à l'aide d'un papier/crayon. Les étapes dans l'ouvrage d'Epp (2010) sont expliquées par une conversion du registre par graphe à une représentation par tableau. Ce recours à plusieurs registres et à des traitements dans divers registres et à des conversions entre les registres engendre une disparité dans les modes de présentation du concept dans les ouvrages.

Finalement, nous soulignons que le concept du plus court chemin peut être défini en utilisant le concept de la distance topologique. Ainsi, il permet d'établir des liens entre la théorie des graphes et d'autres domaines mathématiques comme la topologie (distance métrique et géodésique). En outre, la recherche du plus court chemin est au cœur de plusieurs situations issues d'autres disciplines scientifiques ou de la vie réelle. Les différentes façons de définir le concept du plus court chemin, l'existence des différentes situations où la recherche du plus court chemin est mobilisée, aussi bien que les différents registres de représentation sémiotique auxquels on peut avoir recours dans de telles situations nous rendent compte de la diversité des modes de présentation possibles : au niveau des choix des concepts et des définitions, de l'utilisation des algorithmes et des constructions à mettre en place, et des différentes représentations sémiotiques à convoquer.

II.5- Enjeux épistémologiques et didactiques dans l'étude des pratiques d'enseignement de la théorie des graphes au supérieur

Nous avons caractérisé dans ce chapitre les choix qui existent, en termes de contenus et de leur présentation, pour la conception de ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes. Notre objectif était de caractériser les spécificités de ce domaine mathématique pour l'enseignement et de développer un cadre qui nous permet de situer les enjeux didactiques dans l'étude des pratiques d'enseignement de la théorie des graphes à l'université. Pour ce faire, nous avons consulté huit ouvrages qui portent sur la théorie des graphes dans l'enseignement supérieur.

Les ouvrages sont conçus par des mathématiciens, spécialistes dans le domaine, dont cinq portent sur la théorie des graphes et trois traitent des mathématiques discrètes avec un ou deux chapitres sur la théorie des graphes. Ils s'adressent à un public varié d'utilisateurs, enseignants, étudiants et chercheurs débutants et sont publiés sur un intervalle de cinquante années (entre 1963 et 2012). Cette période a marqué l'émergence et l'évolution de la théorie des graphes et de ses articulations avec les autres domaines mathématiques et de sa place dans les autres domaines scientifiques (§ II.3.2).

Les choix, effectués par les concepteurs des ouvrages consultés, en termes de contenus (concepts et notions) et de leur mise en relation, sont étroitement liés aux objectifs qu'ils se sont fixés (§ II.3.3). Ces choix, explicités dans les préfaces des ouvrages, situent des enjeux épistémologiques auxquels un enseignant-chercheur doit faire face en concevant des ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes. Les choix que des enseignants-chercheurs sont susceptibles d'adopter lors de la conception des ressources pour leur enseignement sont à deux niveaux : les contenus (concepts et notions) et leur présentation (les propriétés des contenus à mettre en avant).

En termes des contenus, un large spectre de choix est possible. Ces choix peuvent porter sur les exercices, les applications dans d'autres domaines mathématiques et disciplines scientifiques, les algorithmes et les applications dans l'informatique, les différentes preuves d'un théorème, les problèmes intéressants pour la recherche. Un spectre aussi large de choix est aussi possible en termes de la présentation des contenus. Ces choix peuvent porter sur l'organisation des concepts et des notions dans les chapitres (mobilisation d'un concept dans différentes parties d'un même chapitre, mobilisation d'un même concept dans plusieurs chapitres, développement de chapitres non-dépendants les uns des autres, etc.), l'exposition des preuves et des exemples, le degré de formalisme, la présentation des algorithmes, et des choix relatifs aux exercices (le nombre d'exercices et leur place dans l'ouvrage, indications pour la résolution, etc.). Ainsi, une grande disparité peut exister dans les choix que les enseignants-chercheurs sont censés effectuer pour la conception de ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes : ces choix peuvent être compatibles ou en tension. Ils sont aussi déterminés par des conditions didactiques, institutionnelles et épistémologiques qui devraient être prises en compte dans une application effective de ces choix dans un contexte donné.

Afin de pouvoir recenser la(les) mise(s) en application des choix effectués par les auteurs des ouvrages, nous avons consulté les contenus dans les ouvrages relatifs aux « parcours eulériens et hamiltoniens » et au « plus court chemin ». Cette consultation des contenus, en termes de choix de concepts et de notions, nous a permis de retenir les idées qui portent particulièrement sur les prérequis nécessaires, l'articulation des concepts, les algorithmes, les registre de représentation sémiotique et leur mobilisation dans la construction des connaissances dans les ouvrages, ainsi que sur les liens que les auteurs établissent avec d'autres domaines mathématiques, avec d'autres disciplines et avec la vie réelle.

En termes de prérequis, les parcours eulériens n'en sollicitent que très peu. Pour la recherche des parcours eulériens et l'étude de leur existence, on s'appuie sur des concepts de base de la théorie des graphes (§ II.4.1.6). En revanche, différents choix sont possibles en termes de contenus et de leur articulation en ce qui concerne les parcours hamiltoniens (§ II.4.2.6). Dans certains ouvrages, on les présente juste après les parcours eulériens et, comme pour les parcours eulériens, on mobilise comme prérequis des notions de base. Dans d'autres ouvrages, on les trouve dans les sections qui traitent des digraphes ou articulés avec des notions « plus avancées » en théorie des graphes telles que les graphes planaires et les codes de Gray. Nous pouvons élaborer des propos identiques pour les problèmes de recherche du plus court chemin (§ II.4.3.6). Ils peuvent apparaître dans les ouvrages dans les sections qui portent sur les parcours dans les graphes non-orientés, ou dans les sections qui portent sur les digraphes ou sur les arbres ; et ces différents choix de contenus articulés avec les plus courts chemins déterminent une grande disparité en termes de prérequis mobilisés.

En termes de choix de contenus, dans les parcours eulériens, les concepts et les notions exposés sont les mêmes dans les ouvrages (degrés des sommets, connexité, maximalité). Cependant, certaines disparités peuvent exister ; la notion de « composante connexe » constitue

une autre façon de traiter la connexité d'un graphe pour certains ouvrages (§ II.4.1.1). Des disparités plus remarquables existent dans les choix des contenus relatifs aux parcours hamiltoniens dans les ouvrages. Des formes différentes de mise en relation des concepts et des notions peuvent être considérées pour l'étude de l'existence de parcours hamiltoniens (sous-graphe/degré de sommets/connexité ; le nombre de sommets/degrés des sommets ; graphe complet/nombre de sommets/nombre d'arêtes) (§ II.4.2.1). La mise en relation des concepts et des notions s'avère encore variée pour la recherche du plus court chemin (§ II.4.3.1). Ils peuvent être introduits dans différents contextes, en mobilisant des graphes pondérés ou non pondérés, orientés ou non orientés, voire le concept d'arbre (recherche du plus court chemin par développement d'un arbre avec des choix) ; les contextes différents déterminent des formes d'articulation diverses entre les concepts (distance métrique/graphes non pondérés/géodésique, graphes pondérés/poids/distance).

Les algorithmes mobilisés dans les ouvrages dans les chapitres portant sur les parcours prennent des formes différentes. L'algorithme de Fleury (§ II.4.1.3) pour la recherche d'un parcours eulérien sur un graphe est, dans un des ouvrages, énoncé comme théorème, et dans un autre, présenté comme preuve d'un théorème ; souvent, il est mobilisé dans les exercices. L'algorithme de Dijkstra (§ II.4.3.3) est présenté dans certains ouvrages pour la recherche du plus court chemin dans un graphe pondéré. Certains ouvrages proposent des exercices qui consistent à effectuer des adaptations de l'algorithme (par exemple, pour la recherche du plus long chemin dans un graphe). D'autres ouvrages mobilisent le BFS, Breadth-First Search, utilisé pour le développement d'un arbre dans un graphe, mais qui peut produire le plus court chemin dans un graphe si on pose des contraintes sur les étapes de la construction. On discute dans certains ouvrages de l'existence d'algorithmes pour la recherche de parcours hamiltoniens, mais ces algorithmes ont une complexité exponentielle, et par conséquent, ne sont pas présentés dans les ouvrages.

Les algorithmes, tels qu'ils sont présentés, sollicitent souvent un environnement papier/crayon. Il n'y a pas sollicitation d'un environnement de programmation particulier pour leur mise en exécution. C'est un choix qui donnerait une marge de manœuvre pour les enseignants-chercheurs, utilisateurs potentiels de l'ouvrage, du fait qu'on met à leur disposition des contenus adaptables par des utilisateurs de différents environnements informatiques par exemple.

Les registres de représentation sémiotique et les activités cognitives qui en découlent sont également riches et variés dans les ouvrages. Ils prennent place dans les différentes parties (preuves, exemples d'application, exemples d'illustration, exercices, etc.). Les registres de représentation sémiotique mobilisés sont les suivants : formel, par graphe, par matrice, par langage naturel et par tableau. Les trois activités de représentation, de traitement et de conversion apparaissent dans les preuves, les exemples et les exercices. Nous exposons ci-après des éléments qui caractérisent chacune des trois activités cognitives dans les ouvrages.

Les activités de « représentation » : dans les parcours eulériens, elles apparaissent dans les exercices (représentation d'une situation donnée par un graphe ou par un schéma) (§ II.4.1.4). Dans les parcours hamiltoniens, elles apparaissent particulièrement dans les exercices consistant à construire un graphe satisfaisant des conditions données ou à représenter ou modéliser des situations énoncées en langage naturel ou par un schéma (§ II.4.2.4). Dans le plus court chemin, on demande de représenter des données en langage naturel par des graphes (§ II.4.3.4) (comme par exemple dans le problème du chou, du loup et de la chèvre de l'encadré 21).

Les activités de « traitement » : dans les parcours eulériens, les activités de traitement dans le registre de représentation par graphe apparaissent dans les preuves, les exemples et les

exercices (adaptation de l'algorithme de Fleury dans le registre de langage naturel ou le registre formel) (§ II.4.1.4). Dans les parcours hamiltoniens, on effectue des traitements sur des représentations par graphe dans les preuves, les exemples et les exercices (§ II.4.2.4). Dans la recherche plus court chemin, une démarche d'identification du plus court chemin dans les différents registres est possible (formel, par graphe, par tableau, par langage naturel). De même, on trouve dans certains ouvrages des exercices d'adaptation de l'algorithme de Dijkstra présenté dans le registre de représentation par langage naturel ou en pseudocode (§ II.4.3.4).

Les activités de « conversion » : dans les parcours eulériens, il y a souvent dans les preuves une conversion du registre de représentation par langage naturel au registre de représentation par graphe. Des exercices consistent à convertir des représentations en langage naturel en pseudocode (§ II.4.1.4). Dans les parcours hamiltoniens, l'activité de conversion est notamment dans les preuves (allers-retours dans la construction des preuves entre des représentations par graphe et formelles) (§ II.4.2.4). Les problèmes de recherche du plus court chemin sont particulièrement riches en activités de conversion présentes dans les exemples et les exercices (du registre de représentation par graphe au registre de représentation par tableau en faisant des allers-retours entre les deux registres, d'une représentation en langage naturel à une représentation par graphe, d'une représentation par graphe à une représentation par tableau et d'une représentation par matrice à une représentation par tableau) (§ II.4.3.4).

Des liens intra-mathématiques existent entre les parcours et **d'autres domaines mathématiques** tels que les liens existant dans certains problèmes entre les parcours hamiltoniens et la bijection ou le produit cartésien (§ II.4.2.5), et ceux entre le plus court chemin et les concepts de distance, de géodésique et de fonction (§ II.4.3.5). En plus, les parcours ont plusieurs applications dans des situations issues de la vie réelle telles que la recherche de parcours (eulérien ou hamiltonien, selon les contraintes) dans les rues d'un quartier, dans des réseaux de transport ou de communication, des grilles de services publics. D'autres problèmes peuvent solliciter la recherche ou la construction du plus court chemin (un train qui traverse le plus court chemin dans une ville, distribution optimale des employés selon leur aptitude à occuper des emplois offerts, etc.) (§ II.4.3.5). En revanche, des liens existent entre les parcours et d'autres disciplines scientifiques tels que la mobilisation des chemins d'Euler dans le séquençage de l'ADN en biologie moléculaire (§ II.4.1.5), la recherche de chemins hamiltoniens dans des problèmes d'ordonnancement en recherche opérationnelle (§ II.4.2.5) et les liens entre les plus courts chemins et les réseaux informatiques (construire un réseau avec des coûts de communication minimaux ou les plus courtes durées de réponse des ordinateurs sur les lignes, etc.) (§ II.4.3.5).

Ce large spectre de choix identifiés dans les ouvrages pour la conception de ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes, dont nous venons de présenter certaines manifestations, rend compte de l'ample portée de la théorie des graphes. La richesse de ces choix reflète le potentiel de la théorie des graphes à accommoder les besoins d'utilisateurs appartenant à différentes filières de formation en articulant des concepts théoriques et des applications concrètes. En outre, ces choix peuvent être déterminés par des conditions didactiques (représentation des profils des étudiants, de leurs difficultés potentielles, etc.), institutionnelles (parcours de formation, volume horaire, etc.) et épistémologiques (nature de la théorie des graphes et ses liens avec d'autres domaines mathématiques et d'autres disciplines). Ce travail nous permet ainsi de recentrer nos questions de recherche :

- Comment les enseignants-chercheurs (chercheurs en théorie des graphes) conçoivent-ils leur enseignement en théorie des graphes ?
- Comment les enseignants-chercheurs interagissent-ils avec les ressources dans/pour l'enseignement de la théorie des graphes ?

- Comment peut-on caractériser, par le prisme des ressources, le rapport entre les pratiques d'enseignement de la théorie des graphes et les activités de recherche dans ce même champ ?

Nous présentons dans la partie suivante les outils théoriques que nous exploitons dans notre travail afin de nous permettre de préciser les questions susmentionnées.

Chapitre III- Cadre théorique

Nos questions de recherche (§ II.5) portent sur la caractérisation des pratiques d'enseignement des enseignants-chercheurs à l'université. Nous nous intéressons à l'influence potentielle de leur activité de recherche sur leur enseignement. Nous considérons, à travers le prisme de l'interaction avec les ressources, le cas de l'enseignement de la théorie des graphes. Dans ce chapitre, nous présentons les approches théoriques mobilisées pour notre étude.

Les enseignants-chercheurs interagissent avec des *ressources* diverses dans/pour la conception et la mise en œuvre de leur enseignement. En effet, les enseignants-chercheurs peuvent produire des ressources, ou utiliser, modifier ou adapter des ressources existantes dans la conception de leurs unités d'enseignement, des séances de cours, TDs ou TPs, des évaluations, etc. Ces ressources peuvent être issues de leur propre activité de recherche (quand leur enseignement et leur recherche portent sur le même domaine mathématique) ; elles peuvent également être des ressources produites et diffusées par des pairs afin qu'elles soient utilisées dans l'enseignement par les enseignants et les étudiants.

Le choix des ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs dans/pour leur enseignement peut être influencé par leur expérience personnelle (en recherche et en enseignement) ainsi que par le contexte institutionnel dans lequel ils enseignent. Nous faisons l'hypothèse que les caractéristiques des ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs dans/pour leurs pratiques d'enseignement peuvent nous informer sur les différents aspects de leurs pratiques, et sur l'influence potentielle de leur activité de recherche sur leur enseignement.

La première approche que nous mobilisons est l'*approche documentaire du didactique* (Gueudet & Trouche, 2009) (§ III.2), développée par Gueudet et Trouche (2009) afin d'étudier les interactions des enseignants avec les ressources. Afin de cerner l'influence de l'activité de recherche et du contexte institutionnel des enseignants-chercheurs sur les différents choix qu'ils effectuent dans/pour leur enseignement, nous mobilisons des concepts de la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard (1998) (§ III.3) : les *institutions*, le *rapport personnel* et le *rapport institutionnel* au savoir. Comme nous portons une attention particulière aux ressources conçues par les enseignants-chercheurs, nous nous appuyons sur le concept de « connectivité » (Gueudet et al., 2018) pour l'analyse de ces ressources (§ III.5.4). La « connectivité » permet d'étudier la nature des apprentissages que favorise une ressource donnée. Elle nous sert également pour l'analyse des choix des enseignants-chercheurs aux niveaux des contenus et de leur présentation. Nous prétendons pouvoir, à partir de l'ensemble des approches et outils théoriques mobilisés, cerner les facteurs qui influencent ces choix, quelle que soit leur nature épistémologique, didactique ou institutionnelle.

Dans ce chapitre, nous retraçons l'évolution du concept de schème dans les travaux de Vergnaud (1991; 1998; 2011) (§ III.1). Nous poursuivons par la présentation de l'*approche documentaire du didactique* (Gueudet & Trouche, 2009) et ses principaux concepts, dont le concept de schème, comme cadre pour l'analyse de l'interaction des enseignants avec les ressources (§ III.2). La section III.3 porte ensuite sur les concepts d'*institutions*, *rapport personnel* et *rapport institutionnel* au savoir, de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1998) (§ III.3). Après la présentation de ces approches théoriques, nous discutons des mobilisations de ces approches dans des études qui portent sur l'enseignement des mathématiques à l'université (§ III.4.1, § III.4.2). Nous terminons par une présentation, à partir des travaux existants, des critères à considérer dans l'analyse des ressources produites par les enseignants-chercheurs, afin de mieux caractériser leurs pratiques. Dans ce cadre, des critères en termes de qualité, cohérence et connectivité de ressources sont développés (§ III.5).

III.1- Evolution du concept de « schème » dans les travaux de Vergnaud

Dans cette section, nous exposons le concept de *schème* défini par Vergnaud (1998) et nous retraçons la progression de la définition de ce concept à travers les travaux de Vergnaud (1991; 1998; 2011).

Le concept de schème a été introduit dans son acception moderne par Kant (Vergnaud, 2011). Selon Kant (1869), la formation de la connaissance humaine suppose l'existence d'un schème qui articule, à la fois, la façon dont un objet est perçu par un sujet au moyen de ses sens, et la manière dont le sujet conçoit l'objet cognitivement au niveau de la pensée. Kant (Vergnaud, 2011) souligne que la perception d'une expérience par un sujet ne se réduit pas à une réception passive, mais requiert un travail d'organisation.

Le concept de schème est repris par Piaget (1980) dans ses premières analyses du développement sensoriel et moteur du bébé. Piaget cherchait alors un concept qui permettrait d'organiser les perceptions et les gestes et de rendre compte du fait que l'action forme une totalité. Dans la théorie de Piaget, le schème est défini comme une totalité dynamique organisée qui se construit par l'échange du sujet avec le monde qui l'entoure. L'émergence d'un schème est rendue possible par la mise en œuvre de mécanismes d'adaptation (assimilation¹⁵, accommodation¹⁶, et équilibration). Un contact avec un nouvel élément perturbe les schèmes existants chez un sujet. Une assimilation du nouvel élément ou accommodation du schème en fonction de cet élément permet de rétablir l'équilibre du schème. Cette adaptabilité des schèmes permet de généraliser un comportement efficace à de nouvelles situations. Ainsi, Piaget (1980) souligne qu'un schème est une organisation susceptible de reproduction dans un ensemble de situations analogues, tout en permettant une adaptation en fonction de situations nouvelles.

III.1.1- La notion de schème en 1991 : prise en considération de l'activité d'apprentissage de notions mathématiques

En 1991, Vergnaud développe la notion de schème dans le contexte de situations d'apprentissage de mathématiques.

Vergnaud (1991) a élaboré un cadre pour l'étude des filiations et des ruptures entre les connaissances chez les enfants et les adolescents face à des situations nouvelles lors de l'apprentissage de notions et de concepts mathématiques. Vergnaud (1991) distingue entre deux types de *classes de situations* (pourtant ne présente pas une définition explicite de ce terme) : (1) des classes de situations pour lesquelles le sujet dispose dans son répertoire des compétences¹⁷ requises pour le traitement ; (2) des classes de situations pour lesquelles le sujet ne dispose pas de toutes les compétences requises pour le traitement. Vergnaud (1991) note que le traitement des deux types de classes de situations sollicite des conduites chez les sujets générées par des « schèmes ». Dans son article de 1991, Vergnaud s'est intéressé notamment aux conduites des élèves en situations d'apprentissage de mathématiques appartenant aux deux

¹⁵ Intégration d'un nouvel élément ou d'une nouvelle expérience à un ensemble d'éléments ou à une expérience pour lesquels il existe déjà un schème (<http://dictionnaire.sensagent.leparisien.fr/Jean%20Piaget/fr-fr/#Adaptation>).

¹⁶ Modification des schèmes existants afin de pouvoir intégrer un nouvel élément ou une nouvelle expérience (<http://dictionnaire.sensagent.leparisien.fr/Jean%20Piaget/fr-fr/#Adaptation>).

¹⁷ Vergnaud ne définit pas le terme « compétence » dans cet article de 1991. Dans son travail de 2011 (§ I.2.3), il définit une compétence comme étant « résultat d'une activité dans laquelle s'engage un sujet » et il note que les compétences s'appuient fortement sur les connaissances disponibles d'un sujet et la manière dont il les traite afin d'atteindre un but donné.

catégories de classes de situations susmentionnées. Ainsi, il se réfère à plusieurs reprises dans son article à des exemples d'élèves dans des situations d'apprentissage de notions mathématiques pour illustrer le fonctionnement des schèmes. Vergnaud (1991) précise que les décisions conscientes des élèves, aussi bien que l'automatisme, relèvent de l'organisation invariante de la conduite.

Ainsi, Vergnaud (1991) distingue deux types de sujets face à une situation : celui qui dispose des compétences lui permettant le traitement d'une situation ; et celui qui ne dispose pas de toutes les compétences nécessaires pour le traitement d'une situation. Le premier aurait recours à des conduites automatisées, générées par un schème unique (Vergnaud, 1991). Le second effectuerait des tentatives, suite à un temps de réflexion, qui peuvent aboutir à la réussite ou à l'échec. Dans ce cas, des schèmes mobilisés successivement devraient être accommodés, décombinés et recombinaés afin de pouvoir atteindre la finalité souhaitée de l'action. Le cas échéant, cet amorçage de plusieurs schèmes par le sujet conduit à une découverte de nouvelles connaissances permettant à son action d'être opératoire, voire à de nouveaux schèmes.

Vergnaud prend en effet comme point de départ la définition suivante d'un schème : « Une organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée » (1991, p. 136). Il définit un schème comme étant une totalité dynamique qui organise l'action d'un sujet pour une classe de situations donnée ; et qui, en revanche, permet de générer des règles de comportement pouvant être adoptées ou transposées dans des situations analogues.

En conséquence, dans le contexte de l'apprentissage en mathématiques, Vergnaud (1991) associe un schème à un ensemble de situations mathématiques analogues, dans lesquelles les procédures, les représentations et les formulations peuvent être dérivées les unes des autres. Il souligne qu'un schème est déterminé en fonction d'un *but* d'action, et, en revanche, permet de générer une suite d'actions en vue d'atteindre un certain but, voire de traiter les situations en question. Ainsi, pour Vergnaud, un schème est composé de *règles d'action* du type si... alors..., des *invariants opératoires* et des inférences, essentielles à la mise en œuvre du schème en fonction des spécificités des situations particulières. Les invariants opératoires sont définis comme étant les connaissances-en-acte, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire. Ils permettent une identification des éléments pertinents d'une situation et une prise d'informations sur cette situation. Vergnaud (1991) identifie trois types d'invariants opératoires : les « propositions » qui sont susceptibles d'être vraies ou fausses, par exemple, les *théorèmes-en-acte* ; les « fonctions propositionnelles » qui ne sont pas susceptibles d'être vraies ou fausses, mais qui constituent des briques indispensables à la construction des propositions, c'est-à-dire les *concepts-en-acte*, tels que les concepts de cardinal et de collection ; et les « arguments » qui, en mathématiques, peuvent être des objets matériels comme un livre, des personnages, des nombres ou même des propositions. Il souligne que la relation entre les « propositions » et les « fonctions propositionnelles » est dialectique ; les unes ne peuvent pas exister sans les autres. Les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte sont toujours en étroite interaction.

Toutefois, un schème, associé à un ensemble de situations analogues, peut être appliqué à un ensemble plus étroit ou plus large de situations. Ce processus nécessiterait une reconnaissance des analogies et des parentés entre les situations pour lesquelles le schème est opératoire et la nouvelle situation, donc des invariants.

III.1.2- La notion de schème en 1998 : prise en considération de l'activité d'apprentissage et de l'activité professionnelle

Vergnaud (1998) étend la notion de schème aux situations en lien avec des activités professionnelles, aussi bien que les situations d'apprentissage des mathématiques.

En 1998, Vergnaud exprime un besoin d'étudier, d'une part, les liens entre l'ensemble des savoirs théoriques et l'activité pratique en mathématiques, et, d'une autre part, les liens entre l'activité d'enseignement d'un enseignant et les recherches en *mathematics education* et en psychologie cognitive. Il souligne l'importance de développer une approche permettant une mise en relation des connaissances et des actions d'un sujet, en mathématiques, mais aussi dans toute activité humaine. Ainsi, il étend le concept de schème afin d'étudier la conduite d'un sujet engagé dans une action donnée. Cette extension, étroitement liée au champ d'activités qu'il considère, correspond à un large éventail de buts en lien avec des expériences professionnelles et des situations d'apprentissage en mathématiques. Il illustre ses propos par des exemples divers issus des expériences professionnelles, tel que celui d'un athlète du saut à la perche, et des exemples issus de situations mathématiques portant sur la proportionnalité, l'algorithme de la division euclidienne et la symétrie. Nous présentons ci-dessous (cf. encadré 26) un exemple de Vergnaud (1998), celui du porcher dans un abattoir de porcs.

Le porcher, dans l'abattoir de porcs, est la personne qui dirige les porcs avec un bâton vers le lieu du sacrifice. Des ergonomes faisant l'étude des postes de travail dans l'abattoir se sont aperçu que le porcher était l'une des personnes les plus importantes. Plusieurs raisons ont influencé leur constatation : les porcs peuvent se stresser et peuvent mourir d'une crise cardiaque ; le porcher disposait d'une série d'indices qui lui permettait de choisir les animaux qu'il fallait acheminer avant les autres ; il a aussi au cours de son expérience développé des gestes qui lui permettaient d'acheminer les porcs sans les stresser. Ainsi, les compétences développées par le porcher dans son expérience professionnelle lui permettent d'exécuter un rôle essentiel dans l'abattoir que nulle autre personne ne peut accomplir.

Encadré 26 : Reformulation de l'exemple du porcher, issu de (Vergnaud, 1998, p. 227-228)

Vergnaud (1998) met l'accent sur le rôle essentiel du porcher dans l'abattoir ; nous constatons que le porcher a des règles d'action permettant d'acheminer les porcs sans les stresser afin d'atteindre le but qui est : « diriger les porcs avec un bâton vers le lieu du sacrifice sans les stresser ». Ces règles d'action sont guidées par des invariants opératoires pouvant être inférées dans les indices permettant au porcher de choisir les animaux qu'il fallait acheminer avant les autres. Ainsi, les schèmes développés par le porcher au cours de son activité professionnelle lui permettent, suivant Vergnaud (1998), d'accomplir une fonction que nulle autre personne ne pouvait exécuter.

Selon Vergnaud (1998), un sujet, lors du traitement d'une situation, relative à un apprentissage de concepts et de notions mathématiques, ou à une expérience professionnelle, met en œuvre des compétences développées dans la pratique. Par conséquent, un schème, peut être associé à des activités diverses liées à des apprentissages en mathématiques, à des expériences professionnelles ou même à des actions de tous les jours telles que s'asseoir, marcher, danser, dialoguer, argumenter, acheter quelque chose, etc. Vergnaud (1998) souligne qu'un schème est associé à une classe de situations. Une classe de situations regroupe les situations qui ont un même but.

Ainsi, Vergnaud (1998) définit un schème comme une totalité dynamique fonctionnelle qui a quatre composantes interagissant entre elles :

- Un but (*Goal*¹⁸) identifiable qui indique l'intentionnalité dans l'organisation de l'activité ;
- Des règles d'action (*rules of action*) qui sont des façons d'agir générées par le schème afin d'atteindre un but spécifique ; ainsi que les prises d'information et les contrôles qui

¹⁸ Dans Vergnaud (1998), qui est un article en anglais, le but est traduit par *Goal*.

permettent les variations de la conduite en fonction des particularités de chaque situation ;

- Des invariants opératoires (*operational invariants*) qui influencent les règles d'action. Ils peuvent être des concepts-en-acte (qui permettent de sélectionner et de catégoriser l'information disponible pour une situation donnée) ou des théorèmes-en-acte (propositions tenues pour vrais par le sujet, qui lui permettent de traiter l'information disponible afin de générer des règles d'action qui lui permettent d'atteindre la finalité de la situation) ;
- Les possibilités d'inférence (*possibilities of inference*), c'est-à-dire les adaptations que peut apporter le sujet à son activité pour répondre à des spécificités de la situation correspondante à un but.

Dans son article de 1998, Vergnaud propose une adaptation de la notion de schème pour étudier les connaissances associées à la pratique des enseignants. Il considère que l'enseignant doit à la fois gérer un processus complexe pouvant être influencé par de nombreuses conditions, contraintes et variables et aussi agir comme un médiateur. La médiation, selon Vergnaud (1998), est essentielle dans l'enseignement. Cela est justifié par le fait que le rôle d'un enseignant consiste à proposer des situations et des activités visant à aider les élèves à apprendre, clarifier les buts et les sous-but à atteindre et veiller sur l'exécution des étapes à effectuer par les élèves afin d'atteindre les objectifs visés. Vergnaud conclut qu'il est possible d'analyser la tâche de médiation des enseignants en se référant aux composantes des schèmes.

III.1.3- La notion de schème en 2011 : prise en considération des différentes formes de l'activité humaine

Dans son article de 2011, Vergnaud a retracé la succession des définitions du concept de schème et les développements apportés au concept dans ses travaux antérieurs, en s'appuyant sur différentes formes de l'activité humaine.

Vergnaud (2011) souligne que, dans toutes les activités humaines, il existe des liens aussi bien qu'un décalage entre les savoirs théoriques et les savoirs d'action. La « clé de voûte » permettant de comprendre les liens et décalages existants est l'étude des schèmes.

« La psychologie cognitive a besoin d'un cadre théorique pour penser les relations entre savoirs d'action et savoirs théoriques, notamment pour penser à la fois les décalages et les liaisons entre eux. S'il n'y avait pas décalage on ne comprendrait pas comment les savoirs d'action permettent d'agir dans des domaines où la théorie est pauvre ou inexistante. S'il n'y avait pas liaison, on ne comprendrait pas comment l'action peut se nourrir de la théorie et la théorie se nourrir de l'action. La clé de voûte du cadre théorique proposé ici est le concept de schème » (Vergnaud, 2011, p. 278).

Vergnaud (2011) souligne qu'une action n'est pas possible sans la « formation en pensée d'objets, de propriétés, de relations, de transformations, de circonstances, de conditions, de relations fonctionnelles de ces objets entre eux et avec l'action » (Vergnaud, 2011, p. 275). L'organisation de la conduite et le fonctionnement des représentations sont fortement intégrés entre eux comme composantes essentielles de ce que Vergnaud (1991) définit par un *schème*.

Vergnaud (2011) présente des exemples pour illustrer le fonctionnement des schèmes. Il reprend certains exemples des articles précédents (athlète, champion du saut à la perche (1991) et porcher dans l'abattoir de porcs (1998)). Nous exposons ci-dessous (cf. encadré 27) un exemple qu'il propose afin d'analyser les rapports entre pratique et théorie : celui des

ingénieurs de conception d'une entreprise d'aéronautique et de technologie spatiale. Les ingénieurs de cette entreprise développent, avec l'expérience, des savoirs d'action qui leur permettent d'accomplir des tâches attendues d'eux. Les savoirs théoriques qui leur permettent d'effectuer ces tâches sont de deux types : les savoirs appris lors de leur formation académique, et des savoirs qu'ils ont construits avec le temps durant leur expérience professionnelle. Vergnaud (2011), à partir de cet exemple, souligne que ces savoirs construits avec le temps sont souvent implicites, et que ces ingénieurs sont faiblement conscients des décisions et jugements implicites sur lesquels repose leur action.

Les ingénieurs de conception recrutés dans une grande entreprise d'aéronautique et de technologie spatiale ont une très bonne formation de base. Cependant, quand ils arrivent dans cette entreprise, ils ne sont pas en mesure d'effectuer ce qu'on attend d'eux. Ces ingénieurs disposent de logiciels, de diverses ressources documentaires, et de l'aide de certaines personnes telles que le responsable de leur équipe et des ingénieurs plus anciens. Il leur faut du temps pour qu'ils deviennent experts. Pour remédier à la situation, l'entreprise a engagé tous les ingénieurs dans un processus d'écriture de guides méthodologiques, dans lesquels ils sont censés communiquer leur savoir-faire. Ces guides ayant pour objectifs de capitaliser les compétences pour les conserver dans l'entreprise et d'offrir une aide aux nouveaux ingénieurs. La lecture de ces guides méthodologiques montre que les ingénieurs n'étaient pas capables d'explicitier et de communiquer clairement les savoirs qu'ils avaient construits sur une longue période de temps.

Encadré 27 : Exemple des ingénieurs de conception, issu de (Vergnaud, 2011)

Cet exemple, avancé par Vergnaud (2011), montre l'importance de l'analyse des schèmes pour la compréhension de la conduite d'un sujet et des liens existants entre les actions qu'il entreprend et des savoirs théoriques sous-jacents.

Ainsi, Vergnaud (2011) retrace la progression du concept de schème dans ses travaux en fournissant quatre définitions qui se succèdent et se complètent :

- (1) Le schème est *une totalité dynamique fonctionnelle*, définition que Vergnaud avait adoptée d'un schème dans son article de 1998, et qu'il explique comme suit : « le schème est une unité identifiable de l'activité du sujet, qui correspond à un but identifiable, se déroulant selon un certain décours temporel (et donc une dynamique), et dont la fonctionnalité repose sur un ensemble d'éléments peu dissociables les uns des autres » (Vergnaud, 1998, p. 283).
- (2) Le schème est *une organisation invariante de la conduite pour une classe donnée de situations*, définition que Vergnaud avait donnée d'un schème en 1991. Vergnaud (2011) souligne qu'un schème s'adresse toujours à une classe de situations, et un même schème peut engendrer des conduites relativement différentes en fonction des situations auxquelles il adresse. Cette définition du schème permet, selon Vergnaud (2011) de comprendre son fonctionnement dans des situations analogues. Cependant, elle ne permet pas d'expliquer les conduites improvisées par un sujet devant une situation nouvelle. Ainsi, il donne la troisième définition ci-dessous d'un schème.
- (3) Un schème est *formé de plusieurs catégories d'éléments, tous indispensables : des buts et anticipations, des règles d'action, des possibilités d'inférence en situation, et des invariants opératoires* (Vergnaud, 2011, p. 285). Les règles d'action étant définies comme la partie générative du schème, qui engendre l'activité, la prise d'information et le contrôle. Et les invariants opératoires étant la partie cognitive du schème, c.-à-d. les

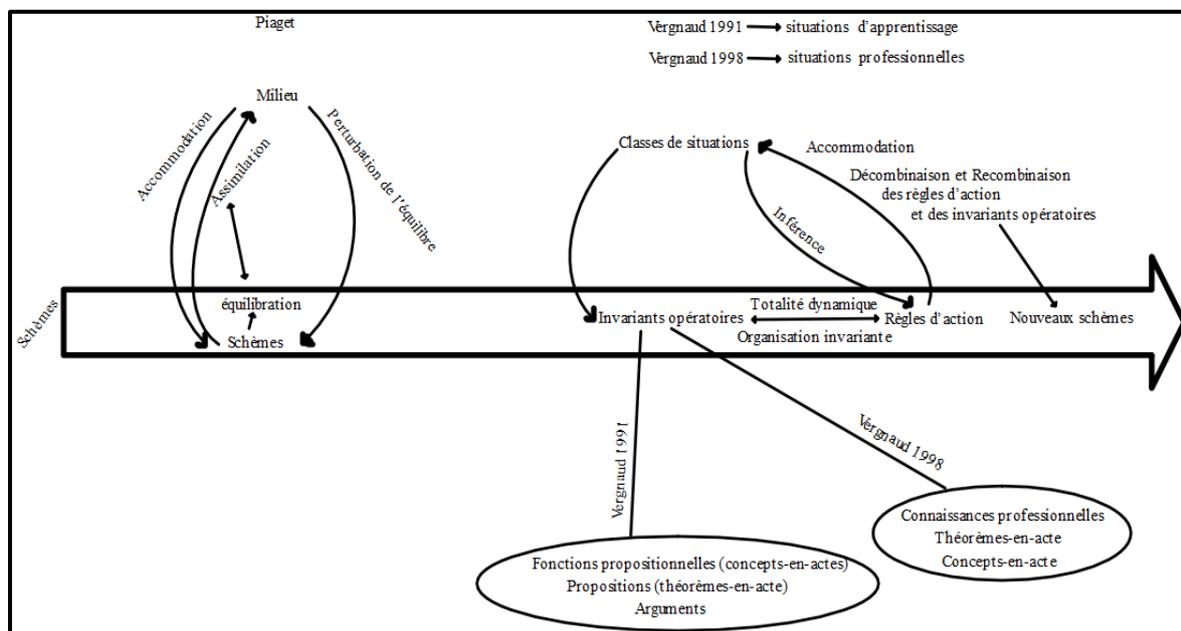
concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte qui permettent de sélectionner et d'interpréter l'information pertinente et de la traiter.

- (4) Une quatrième définition que Vergnaud donne en 2011 est la suivante : le schème est *une fonction temporalisée de l'espace à n dimensions des informations disponibles dans l'espace à n' dimensions des actions possibles, n et n' étant en général très grands* (Vergnaud, 2011, p. 286). Il souligne pourtant que cette définition ne permet pas d'aller très loin, vu que n et n' sont très grands et que le schème est une fonction qui s'inscrit dans un décours temporel, ce qui résulte en une variation de l'espace des informations disponibles et l'espace des actions possibles au cours du temps.

Nous présentons, dans la section suivante, les composantes du concept de schème que nous retenons pour notre travail, ainsi que les adaptations que nous apportons à ces éléments en fonction des particularités de notre contexte d'étude.

III.1.4- L'évolution de la notion de schème et de ses composantes dans les travaux de Vergnaud

Le champ d'opérationnalité du concept de schème a évolué dans les travaux de Vergnaud (nous représentons notre interprétation de cette progression dans l'encadré 28 ci-dessous). En effet, en 1991, Vergnaud définit un schème comme étant une *organisation invariante de la conduite pour une classe donnée de situations* organisant la conduite des élèves dans des situations d'apprentissage en mathématiques, et en 1998, il le définit comme étant une totalité dynamique fonctionnelle correspondant à une classe de situations donnée. Cette progression est étroitement en lien avec les classes de situations considérées, les règles d'action et invariants opératoires, propos que nous étayerons dans la suite.



Encadré 28 : Une représentation issue de notre interprétation de la progression du concept de schème, de Piaget à Vergnaud.

Les classes de situations considérées se centrent, en 1991, sur des activités d'apprentissage en mathématiques, et de 1998 et 2011, et peuvent regrouper toutes situations où un sujet entreprend une action.

L'évolution des exemples dans les travaux de Vergnaud (1991; 1998; 2011) montre que le concept de schème est crucial pour étudier les conduites des élèves en situations de résolution

d'exercices et de problèmes en mathématiques (1991), et devient une « clé de voûte » permettant de comprendre les liens entre l'action et la théorie dans tout domaine d'activité (1998, 2011).

Cette évolution du champ d'opérationnalité du concept de schème dans les travaux de Vergnaud, étroitement liée à la généralisation des *but*s de l'activité qu'il considère, entraîne un élargissement des définitions qu'il attribue aux règles d'action et surtout aux invariants opératoires. En effet, les règles d'action sont définies en 1991 comme étant les règles de comportement permettant d'atteindre un certain but qui sont du type « si... alors... ». Cette définition est affinée dans les travaux de 1998 et 2011. Dans ces travaux (Vergnaud, 1998; 2011), les règles d'action sont présentées comme étant la partie du schème qui engendre l'activité en vue d'atteindre un but spécifique, ainsi que les prises d'information et les contrôles qui permettent les variations de la conduite en fonction des particularités de chaque situation.

Vergnaud (1991) définit les invariants opératoires comme les connaissances-en-acte qui sont les éléments cognitifs permettant à l'action du sujet d'être opératoire. Cependant, la manière dont Vergnaud (1991) présente les trois types d'invariants opératoires est en lien étroit avec l'apprentissage des mathématiques (propositions, fonctions propositionnelles et arguments). Vergnaud (1998, 2011) propose une définition plus générale des invariants opératoires qui englobe la partie cognitive du schème sur laquelle repose l'action. Il les définit comme concepts-en-acte permettant de sélectionner et de catégoriser l'information. Les théorèmes-en-acte permettent quant à eux d'interpréter l'information pertinente et de la traiter afin de générer des règles d'action.

Dans leur enseignement, les enseignants de mathématiques s'engagent dans des activités diverses dans le contexte de l'élaboration et la mise en œuvre d'une progression annuelle, de la planification des séances, de l'élaboration et de la mise en œuvre des énoncés, des fiches de cours, des exercices et des évaluations, de la participation à des conseils de classe, etc. Ces activités supposent l'existence de deux types de savoirs : des savoirs théoriques qui peuvent être relatifs aux contenus, à leur enseignement ou à des conditions institutionnelles, et des savoirs d'action, impliqués dans la mise en œuvre de l'enseignement et des interactions avec les étudiants en classe. Ces deux types de savoirs sont étroitement entrelacés ; d'une part, les savoirs théoriques jouent un rôle dans la génération des actions qui permettent aux enseignants d'atteindre les finalités qu'ils se fixent dans leur enseignement, et d'une autre part, les actions entreprises par les enseignants sont essentielles pour une élaboration des savoirs théoriques, qui peuvent souvent être implicites. Vergnaud (2011) souligne qu'une étude de l'action permet d'offrir un accès à une partie limitée des savoirs théoriques sous-jacents. Il pointe la complexité méthodologique au niveau de l'identification et de l'étude des schèmes mis en place par un sujet pour atteindre un but, notamment la partie implicite en lien avec les invariants opératoires. Nous reprenons les propos de Vergnaud (2011) dans ce contexte :

« Dans l'action, nous ne prélevons qu'une petite partie de l'information présente et nous en utilisons une partie plus petite encore. Dans la communication nous sommes encore plus sélectifs, et laissons à autrui la charge de reconstituer, à partir des bribes d'énoncés et des rares énoncés complets, qui sont le lot habituel de la communication orale dans le travail, le sens des messages que nous lui envoyons » (Vergnaud, 2011, p. 290).

En revanche, Vergnaud (2011) insiste sur le rôle des invariants opératoires dans l'articulation des savoirs théoriques et des savoirs d'action :

« La théorie est la forme prédicative de la connaissance par excellence, comme le schème est par excellence la forme opératoire de la connaissance.

C'est le concept d'invariant opératoire qui permet d'articuler en une vision unitaire et synthétique les deux formes de la connaissance. C'est lui qui permet d'éviter la vision schizophrénique de la connaissance » (p. 290).

Ainsi, nous pouvons constater que l'étude des invariants opératoires des enseignants permet de mieux comprendre les liens qui existent entre leurs savoirs théoriques et leurs savoirs d'action.

III.1.5- Les composantes d'un schème dans notre étude

Dans le cadre de notre travail, nous nous intéressons à l'étude des pratiques des enseignants-chercheurs au supérieur. Bien que des similarités existent entre leurs pratiques et celles des enseignants du secondaire, les pratiques des enseignants au supérieur admettent des particularités, du point de vue institutionnel, comme du point de vue de leur formation (§ I.4). En outre, leur activité de recherche peut potentiellement influencer leurs pratiques d'enseignement (Biza et al., 2016) aux niveaux des choix des savoirs à enseigner et des modes d'enseignement, et au niveau des interactions avec les étudiants. Une considération des schèmes offre la possibilité, dans ce cadre, de mieux comprendre les liens qui existent entre les connaissances (mathématiques, didactiques et institutionnelles) des enseignants-chercheurs et les actions qu'ils entreprennent dans les différents domaines d'activité, ainsi que l'influence que leur activité de recherche peut avoir sur ces actions. En effet, l'activité de recherche des enseignants-chercheurs permet de développer des savoirs et des savoir-faire qu'ils peuvent mettre en œuvre dans leurs pratiques d'enseignement. Dans cette perspective, la composante 'invariants opératoires' est essentielle pour comprendre les pratiques des enseignants-chercheurs, aussi bien que l'influence potentielle de leur activité de recherche sur ces pratiques.

Nous allons spécifier davantage la notion d'invariants opératoires. Nous faisons l'hypothèse de travail que les invariants opératoires peuvent s'exprimer suivant des dominantes différentes : épistémologique, didactique, pédagogique, et institutionnelle que nous définissons comme suit. Nous désignons par « invariant opératoire à dominante épistémologique » tout ce qui est en lien avec les connaissances mathématiques des enseignants-chercheurs, particulièrement avec les mathématiques discrètes dans le cas de notre étude et leurs liens avec les autres domaines mathématiques et les autres disciplines. Nous considérons comme « invariant opératoire à dominante didactique » tout ce qui est en lien avec l'enseignement de la théorie des graphes (les choix des contenus et leur organisation) et les représentations des enseignants-chercheurs relatives aux étudiants et leurs difficultés potentielles dans l'apprentissage des contenus en lien avec la théorie des graphes. En revanche, nous considérons tout ce qui renvoie à des connaissances relatives à l'enseignement et à l'évaluation sans prise en considération des spécificités des contenus en question comme « invariant opératoire à dominante pédagogique ». Et enfin, nous considérons comme « invariant opératoire à dominante institutionnelle » les connaissances des enseignants-chercheurs en lien avec l'institution à laquelle ils sont rattachés et le parcours de formation dans lequel ils enseignent (niveau d'enseignement, nombre d'heures, syllabus, etc.).

Nous soulignons qu'un enseignant-chercheur, dans ses pratiques, peut se fixer des buts qui relèvent des domaines d'activité suscités qu'il vise dans son enseignement. Ainsi, les pratiques d'enseignement d'un enseignant-chercheur peuvent être organisées selon différentes finalités de l'enseignement qu'il peut se fixer *a priori*, voire en plusieurs classes de situations. Ces finalités peuvent être en lien avec des activités diverses telles que la conception et la mise en œuvre des séances de cours, des séances de Travaux Dirigés (TDs) et de Travaux Pratiques (TPs), ainsi que des évaluations des apprentissages. Nous nous basons dans notre travail sur le concept de schème comme défini par Vergnaud (1998). Une étude des schèmes permettrait d'analyser, par la mise en relation des invariants opératoires et des règles d'action, les actes de

médiation considérés – selon Verganud (1998) – comme étant la partie la plus importante des pratiques des enseignants.

Nous soulignons que les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs, dans leur enseignement, jouent un rôle majeur dans les actes de médiation. Elles engendrent le choix des contenus proposés aux étudiants en classe, des objectifs à atteindre, des fiches de remédiation, etc. Les caractéristiques de ces ressources peuvent nous éclairer sur les actes de médiation prenant place en classe, voire sur les différents aspects des pratiques d'enseignement des enseignants-chercheurs. Nous constatons qu'une étude des pratiques des enseignants-chercheurs nécessite une prise en compte des ressources qu'ils mobilisent dans leur enseignement et avec lesquelles ils interagissent. Par la suite, nous considérons dans notre travail l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche, 2009) que nous présentons dans la section suivante.

III.2- Approche documentaire

Les enseignants-chercheurs interagissent en permanence avec les ressources dans différentes activités d'enseignement telles que la préparation des unités d'enseignement et leur mise en œuvre dans des séances de cours, TDs et TP, la conception des évaluations, etc. Ces ressources peuvent être des ressources conçues par d'autres enseignants-chercheurs dans une perspective d'être diffusées pour l'enseignement. Elles peuvent également être des ressources issues de leur activité de recherche, ou des ressources avec lesquelles ils interagissent dans leur recherche, notamment dans les domaines de mathématiques contemporaines, telle que la théorie des graphes. Les interactions avec les ressources peuvent prendre des formes différentes. Ainsi, les enseignants-chercheurs peuvent être des simples utilisateurs des ressources existantes, ils peuvent les adapter et les modifier ou même concevoir de nouvelles ressources pour/dans leur enseignement. En outre, ces interactions avec les ressources sont en lien avec les finalités de l'action des enseignants-chercheurs et, par conséquent, peuvent nous éclairer sur différents aspects de leurs pratiques. Nous citons plus particulièrement les caractéristiques des ressources qu'ils conçoivent pour leur enseignement et les liens entre recherche et enseignement dans la conception de ces ressources, aussi bien que le potentiel de ces ressources à promouvoir l'atteinte des finalités pour lesquelles elles ont été conçues.

Afin de pouvoir étudier les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources dans leurs pratiques d'enseignement, nous nous appuyons sur l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche, 2009). Cette approche s'inscrit dans le prolongement de l'approche instrumentale (Rabardel, 1995). Ainsi, nous commençons cette partie (§ III.2.1) par une brève présentation des concepts fondamentaux de l'approche instrumentale introduite par Rabardel (1995). Ensuite, nous exposons l'approche documentaire, avec les principaux concepts de cette approche que nous mobilisons dans le cadre de notre travail (§ III.2.2).

III.2.1- L'Approche instrumentale

Selon Rabardel (1995), un sujet engagé dans une activité dirigée par un but interagit avec des *artefacts*. Rabardel (1995) définit un artefact comme étant un produit de l'activité¹⁹ humaine, dont la conception est inscrite dans une activité finalisée. Un artefact associé à un *schème d'utilisation* de cet artefact dans une situation donnée génère un *instrument*. Un schème d'utilisation comporte des règles d'action, et des invariants opératoires qui sont dans ce cas les

¹⁹ Nous utilisons le terme *activité* au singulier en référence à la théorie de l'activité (Vygotski 1934/1997, Leontiev 1984) et le terme *activités* au pluriel selon un sens commun de tâches professionnelles.

connaissances susceptibles d'intervenir dans l'activité professionnelle des enseignants (Gueudet & Trouche, 2009). Il se construit à travers l'appropriation et la transformation de l'artefact pour le traitement d'une variété de situations. Rabardel (1995) distingue un artefact d'un instrument. Ce dernier associe un artefact avec un schème d'utilisation de cet artefact. Les processus de développement d'un instrument sont les *genèses instrumentales*. Gueudet et Trouche (2010) soulignent que :

« Les genèses instrumentales ne doivent pas être pensées comme des mécanismes de production, avec un début et une fin clairement identifiables. Ce sont des processus qui s'étendent dans le temps, incluant des moments de stabilité et des ruptures. Dans l'acception du terme que nous retenons ici, genèse peut signifier à la fois naissance et transformation, mais ne désigne jamais une création ex nihilo » (Gueudet & Trouche, 2010, p. 58).

Les genèses instrumentales imbriquent deux types de processus : *l'instrumentation* et *l'instrumentalisation*. L'instrumentation est dirigée de l'artefact vers le sujet. Elle représente le développement des schèmes d'utilisation des artefacts par le sujet influencé par les caractéristiques de l'artefact. L'instrumentalisation agit dans le sens inverse, du sujet vers l'artefact. Elle présume que le sujet dispose de connaissances avant d'interagir avec un artefact et que ces connaissances influencent et structurent cette interaction. Ainsi, les genèses instrumentales sont des processus dynamiques qui influencent les connaissances des utilisateurs (les enseignants dans notre cas).

L'approche instrumentale a été adaptée aux recherches en didactique des mathématiques (Rabardel, 1999), en particulier pour l'étude de l'intégration et l'usage des outils technologiques dans l'enseignement des mathématiques (Guin & Trouche, 2002 ; Artigue, 2002). Le développement du numérique a entraîné un enrichissement de l'environnement du travail de l'enseignant, notamment avec un foisonnement de ressources numériques accessibles sur la toile. Ces évolutions ont encouragé le développement des approches théoriques afin d'étudier et d'accompagner ces phénomènes (Gueudet & Trouche, 2009).

III.2.2- L'Approche documentaire : prolongement de l'approche instrumentale

Gueudet et Trouche (2010) constatent que l'évolution des connaissances des enseignants est étroitement liée à leurs interactions permanentes avec les *ressources* dont l'étendue dépasse celle des artefacts. L'approche documentaire est un prolongement de l'approche instrumentale. Elle a été développée par Gueudet et Trouche (2009) pour l'étude de l'interaction des enseignants avec les ressources (notamment les ressources – numériques ou non – dans le contexte de l'enseignement secondaire). L'approche documentaire propose une définition des « ressources » proche de la notion générale de ressource décrite par Adler (2010) qui pense les ressources comme une forme du verbe *re-sourcer* qui signifie nourrir à nouveau, ou différemment. Pour un enseignant, une ressource est donc tout ce qui peut éventuellement intervenir dans son activité. Elles peuvent être matérielles comme les manuels d'enseignement ou des notes prises sur un cahier, ou non matérielles telles que les interactions avec les étudiants en classe. L'association d'un ensemble de ressources et d'un « schème d'utilisation » de ces ressources génère un *document* (Gueudet & Trouche, 2009). L'ensemble des ressources mobilisées dans le développement d'un document constitue le *système de ressources* d'un enseignant. Les processus de sélection, d'adaptation, de réorganisation, et d'utilisation des ressources, lors de la conception et de la mise en œuvre, constituent le *travail documentaire* d'un enseignant (Gueudet & Trouche, 2009). Gueudet et Trouche (2010) soutiennent

l'hypothèse que le travail documentaire d'un enseignant est structuré selon des buts spécifiques, ou en général, selon des classes de situations²⁰.

Gueudet et Trouche (2010) représentent les documents produits par l'équation :

$$\text{Document} = \text{Ressources recombinaées} + \text{Schème d'utilisation}$$

Ainsi, les genèses documentaires développent conjointement une nouvelle ressource (par mobilisation et recombinaison de ressources existantes) et un schème d'utilisation de cette nouvelle ressource. Le schème d'utilisation comporte particulièrement des règles d'action et des invariants opératoires, définis dans ce cas comme étant les connaissances professionnelles des enseignants (Gueudet & Trouche, 2010). Ces connaissances ne sont pas stables et évoluent avec les genèses de nouveaux documents. En effet, lors de leur interaction avec des ressources nouvelles associées à des nouvelles classes de situations, les enseignants puisent dans leur répertoire des invariants opératoires qu'ils adaptent et modifient engendrant ainsi de nouveaux invariants (Gueudet & Trouche, 2010). Gueudet et Trouche (2010) soulignent que l'interaction avec les ressources est centrale pour comprendre les évolutions des connaissances professionnelles des enseignants.

Gueudet et Trouche (2010) indiquent que les documents produits par un enseignant peuvent être structurés selon différents critères : lieu, temps, acteurs impliqués, etc. Ils effectuent le choix de considérer comme critère de structuration des documents des enseignants la « finalité de l'action » ; choix introduit dans un travail antérieur de Rabardel et Bourmaud (2005) dans un travail conduit dans le cadre de l'approche instrumentale, et que Gueudet et Trouche (2010) justifient par leur intention à saisir la globalité de l'activité des enseignants. Ils considèrent ainsi que pour un enseignant, un document est associé à une situation ayant une finalité précise. Elle correspond en effet à une classe de situations correspondant à un même type de finalités de l'action (§ III.1.2). Ils s'appuient sur les *moments de l'étude* de Chevallard (2002) pour définir les finalités de l'action d'un enseignant de mathématiques et retiennent 9 familles d'activité (entre crochets, les noms abrégés associés par Gueudet et Trouche (2010) à ces familles d'activité) :

(1) *développer une réflexion sur sa pratique* [Réflexion] : lecture de revues professionnelles, discussion des choix d'enseignement avec des collègues, etc. ;

(2) *concevoir et mettre en œuvre la planification et la gestion des temps de l'enseignement* [C/O Planification] : planification de la progression ou du déroulement temporel d'une séance, etc. ;

(3) *concevoir et mettre en œuvre des moments de découverte et d'introduction* [C/O Découverte] : recherche des idées de situations de recherche, l'élaboration et la mise en œuvre d'un énoncé pour la classe, etc. ;

(4) *concevoir et mettre en œuvre des moments de synthèse et d'apports mathématiques* [C/O Synthèse] : développement d'une synthèse à partir des extraits choisis de productions d'élèves, élaboration de fiches de cours ou de révision, etc. ;

(5) *concevoir et mettre en œuvre des moments de travail de la technique* [C/O Technique] : choix des exercices d'entraînement à effectuer par les élèves, correction des exercices au tableau, etc. ;

(6) *concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation* [C/O Evaluation] : élaboration d'un sujet d'examen, correction des copies, etc. ;

²⁰ Gueudet et Trouche (2010) définissent les classes de situations comme étant des situations d'activité professionnelle ayant des caractéristiques qui se rapprochent en termes de tâches à effectuer et de conditions à prendre en considération.

(7) *gérer la classe et suivre les élèves* [Suivi] : saisie des notes, participation aux conseils de classe et aux réunions parents-professeurs, etc. ;

(8) *participer à la vie du ou des établissements* [Vie établissement] : accompagnement des élèves dans des activités extracurriculaires telles un voyage scolaire, participation à un conseil d'administration, etc. ;

(9) *participer à la vie de collectifs professionnels hors institutions* [Vie collectif] : participation à l'assemblée générale d'une association, etc.

Gueudet et Trouche (2010) soulignent que ces familles ne sont pas disjointes. Une même activité telle que la « saisie des notes » fait partie des deux familles [C/O Evaluation] et [Suivi]. Ainsi, les 9 familles peuvent être articulées entre elles de différentes manières selon les activités de chaque enseignant. Gueudet et Trouche (2010) ont déterminé la répartition et l'articulation des familles d'activité, à partir des études de cas. Ils se sont appuyés sur l'étude de cas d'enseignants au secondaire présentant des profils variés, en termes de degré d'intégration des technologies de l'information et de la communication dans l'enseignement (TICE), d'implication dans des collectifs, et de responsabilité institutionnelle.

Notre travail porte sur les pratiques des enseignants-chercheurs au supérieur qui admettent des spécificités (§ I.4). Nous prenons comme point de départ les familles d'activité présentées par Gueudet et Trouche (2010), dans une perspective de les adapter aux particularités du cas des enseignants-chercheurs dans l'enseignement supérieur (§ III.4.4).

III.3- Théorie Anthropologique du Didactique

Nous commençons cette partie par pointer que les interactions des enseignants avec les ressources, dans toutes leurs formes (utilisation, mobilisation, conception) sont façonnées par leur expérience professionnelle et influencées par des conditions et des contraintes institutionnelles. Nous citons à titre d'exemples les syllabus qui décrivent les contenus, le nombre d'heures d'enseignement, le niveau d'enseignement, le nombre d'élèves en classe, les ressources à disposition, etc. Nous mobilisons le concept d'*institution* de la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard (1998).

Nous nous intéressons particulièrement aux pratiques des enseignants-chercheurs au supérieur dans le cadre de notre travail. Les enseignants-chercheurs ont une expérience en recherche et leurs enseignements peuvent être plus ou moins rapprochés de leurs préoccupations de recherche. En outre, leur expérience professionnelle peut être influencée par des conditions institutionnelles particulières à l'enseignement universitaire : le parcours de formation, la distribution des séances d'enseignement, la marge de liberté souvent plus grande dans les choix des contenus, etc. Nous considérons qu'une étude des pratiques des enseignants-chercheurs, et de leurs interactions avec les ressources, nécessite une prise en compte de leur expérience personnelle (en recherche et en enseignement) aussi bien que du contexte institutionnel dans lequel ils enseignent. Les pratiques des enseignants-chercheurs peuvent également être influencées par des facteurs en lien avec le domaine mathématique qu'ils enseignent, voire une thématique particulière au sein de ce domaine. Ainsi, pour cerner l'influence de l'expérience personnelle et du contexte institutionnel des enseignants-chercheurs sur les différents choix qu'ils effectuent dans/pour leur enseignement d'un contenu donné, nous mobilisons des concepts tels les *rappports personnel et institutionnel au savoir* de la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard (1998).

Nous présentons dans cette partie les concepts d'*institution*, et de *rappport personnel et institutionnel au savoir* tel qu'ils sont présentés dans la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1998).

III.3.1- Institutions et rapports personnel et institutionnel au savoir

Les enseignants-chercheurs, dans leurs pratiques, n'agissent pas dans un vide social, ils agissent au sein d'*institutions* qui, selon Chevallard (1998), influencent leurs pratiques. Une institution est définie par Chevallard (1998) comme étant un dispositif social « total », qui permet – et impose – à ses *sujets*, c'est-à-dire aux personnes qui viennent y occuper les différentes *positions* offertes au sein de ce dispositif, la mise en jeu de *manières de faire et de penser propres*. Chevallard (1998) souligne que les institutions peuvent avoir une extension plus ou moins réduite dans l'espace social, ainsi la *classe* est une institution (dont les deux positions essentielles sont celles de *professeur* et d'*élève*), aussi bien que l'*établissement* (où d'autres positions apparaissent comme celle du directeur, etc.).

Chevallard (1998) insiste sur le rôle des institutions auxquelles appartient un sujet dans la construction de sa « personne ». En effet, un individu est, dès sa naissance, *assujetti* à une multitude d'institutions, dont il devient le *sujet*. Il explique l'assujettissement par la soumission du sujet à l'institution et le soutien que cette dernière lui procure. C'est par les assujettissements aux différentes institutions qu'un individu se constitue en *personne* selon Chevallard (1998). Le *rapport institutionnel* à une entité, d'un sujet qui occupe une position donnée au sein d'une institution, est défini comme étant le rapport à cette entité qui, idéalement, devrait être celui des sujets de cette institution occupant la même position. En revanche, en raison de toutes les interactions qu'un sujet peut avoir avec une entité dans différentes institutions, son *rapport personnel* à cette entité évolue au fil du temps. Le rapport personnel d'un sujet à une entité (matérielle ou non) étant défini comme le produit des interactions du sujet avec cette entité au sein de diverses institutions. Le rapport personnel d'un sujet au savoir évolue avec l'accumulation des expériences au sein des différentes institutions. Il est, selon Chevallard (1998), le fruit des assujettissements institutionnels du sujet, passés et présents. Ainsi, un comportement d'un sujet consiste en un mélange de facteurs personnels et institutionnels (Bosch & Gascón, 2014). Il est largement influencé par l'existence (ou la disponibilité) de constructions institutionnelles que ce sujet s'adapte, adopte et développe individuellement ou collectivement. Cette dialectique entre le personnel et l'institutionnel permet, suivant Bosch et Gascón (2014), d'expliquer les régularités dans le comportement des sujets au sein d'une institution donnée, et l'« empreinte » personnelle de chacun d'eux. Par exemple, deux enseignants-chercheurs, dont les domaines de recherche sont différents, n'enseigneraient pas de la même façon dans un parcours de formation donné. Un mathématicien, chercheur en théorie des graphes, n'enseignerait pas la théorie des graphes forcément de la même manière qu'un ingénieur enseignant ce domaine dans un parcours de formation d'ingénieurs. Le rapport personnel de l'enseignant-chercheur à la théorie des graphes pourrait influencer les choix qu'il effectue dans son enseignement au niveau des contenus, des exemples, de la mise en œuvre en classe, des modes d'évaluation, etc. Aussi, un enseignant-chercheur, dont le domaine de recherche est la théorie des graphes, n'effectuerait pas les mêmes choix dans son enseignement de ce domaine dans des parcours de formation différents ; cet enseignant-chercheur pourrait juger intéressant de mettre l'accent sur les concepts théoriques dans un parcours de formation en mathématique, tandis que dans une formation de génie industrielle par exemple, il pourrait estimer qu'il serait plus intéressant de mettre l'accent sur la modélisation de situations issues du contexte industriel.

III.3.2- Praxéologies

Bosch et Gascón (2014) soulignent qu'une étude des « pourquoi » et des « comment » dans le comportement d'un sujet nécessite la mobilisation des *praxéologies*. Nous exposons dans cette partie les praxéologies de la Théorie Anthropologique du Didactique. Nous tenons à préciser que nous n'utiliserons pas les concepts en lien avec l'organisation praxéologique

ultérieurement dans notre travail. En revanche, la définition de ces concepts est indispensable pour la justification de certaines articulations théoriques que nous effectuons.

Les praxéologies ont été introduites par Chevallard (1998) pour une analyse des apprentissages des mathématiques chez les élèves en mobilisant les deux blocs, pratique et théorique, et éventuellement pour une étude de toute activité humaine, y compris les pratiques des enseignants. En effet, la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) considère que toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T , au moyen d'une technique τ , justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ . Elle part du postulat que toute activité humaine met en œuvre une organisation que Chevallard (1998) note $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et qu'il nomme *praxéologie*, ou organisation praxéologique.

Bosch et Gascón (2014) soulignent que le concept de praxéologies montre que toute activité humaine consiste en deux parties étroitement liées, la pratique (*praxis*) et la théorie (*logos*). Ainsi, pour analyser les « pratiques » humaines, il est essentiel d'analyser les praxéologies, techniques et technologies, qui permettent d'accomplir les tâches et présentent des justifications des manières de les accomplir. Ils notent que dans les activités humaines en général, le concept de « théorie » est plus difficile à saisir que la partie « pratique » de l'activité, sauf en cas de difficultés, de crises et de remise en question des praxéologies. En revanche, Bosch et Gascón (2014) attirent l'attention sur le rôle des assujettissements institutionnel d'un « praticien » à rendre une certaine manière de faire désirable, possible, voire dominante ou inévitable.

Dans la suite de cette partie, nous nous intéressons à la façon dont l'approche documentaire et les concepts que nous avons présentés de la TAD ont été mobilisés dans des travaux qui s'intéressent aux pratiques des enseignants au supérieur (§ III.4) et nous présentons ce que nous avons retenu pour notre travail (§ III.4.3).

III.4- Approche documentaire et concepts de la TAD mobilisés dans des travaux sur l'enseignement supérieur

Nous nous intéressons dans cette partie à la façon dont l'approche documentaire et certains concepts de la TAD ont été mobilisés dans des travaux qui s'intéressent aux pratiques des enseignants au supérieur. Dans ce contexte, nous exposons l'exploitation de la TAD mobilisée dans le travail de Gueudet (2017) (§ III.4.1) et l'articulation des concepts de rapport personnel au savoir et de praxéologies avec l'approche documentaire dans le cadre d'un travail de González-Martín, Nardi et Biza (2018) (§ III.4.2).

III.4.1- L'approche documentaire pour l'étude des interactions des enseignants au supérieur avec les ressources

Gueudet (2017) s'est appuyée sur l'approche documentaire (Gueudet & Trouche, 2009) pour analyser l'interaction des enseignants à l'université avec les ressources issues de leurs activités d'enseignement. Il s'agit d'une étude exploratoire qui s'inscrit dans le cadre des études sur les pratiques d'enseignement au supérieur. Gueudet (2017), dans son travail, cherche à examiner l'hypothèse de recherche suivante : les interactions des enseignants avec les ressources façonnent leurs pratiques et leurs « professional beliefs » (dans le sens²¹ de (Rezat, 2010)). Et

²¹ Rezat (2000) introduit la notion de « beliefs-in-action », qui est une généralisation des notions de concepts-en-acte et de théorèmes-en acte de Vergnaud, et qui guide les actions d'un individu dans n'importe quelles circonstances

inversement, l'usage des ressources par les enseignants est influencé par leurs pratiques et leurs « professional beliefs ». Gueudet (2017) considère qu'une exploration du système de ressources d'un enseignant (§ III.2.2) peut contribuer à la compréhension des activités d'enseignement et des mathématiques enseignées au supérieur. Selon Gueudet (2017), la structure des documents et des systèmes de ressources d'un enseignant correspond à la structure de ses activités d'enseignement, ce qui signifie, en référence à Vergnaud (1998), à différentes classes de situations.

Dans son travail, elle considère les ressources dans le sens attribué à ce mot dans l'approche documentaire (§ III.2.2). Elle prend en compte dans son étude des ressources matérielles et des ressources non matérielles (par exemple, une expression sur le visage d'un étudiant, une discussion avec un collègue, l'expérience personnelle de l'enseignant en tant qu'étudiant, etc.). En outre, une classe de situations rassemble toutes les situations qui correspondent à une même finalité de l'activité (Vergnaud, 1998). Gueudet (2017) note que plusieurs choix peuvent être effectués concernant des classes de situations à considérer dans une étude des pratiques d'enseignement. Ces classes de situations peuvent regrouper un ensemble plus ou moins large d'activités en lien avec l'enseignement. Par exemple, toutes les activités d'enseignement d'un enseignant peuvent être inscrites dans une seule classe de situations qui correspond au but « design instruction » (conception de l'instruction). Cependant, Gueudet (2017) soutient que ce niveau de généralité ne permet pas de rendre compte des différents aspects des pratiques des enseignants. Elle considère que, étant donné qu'une classe de situations, selon Vergnaud (1998), est associée à un schème, il est possible de considérer que pour une classe de situations donnée, l'enseignant élabore un document unique.

Dans son travail, Gueudet (2017) a considéré, d'une part, des classes de situations restreintes, relatives à des buts spécifiques (par exemple, préparer et mettre en œuvre une évaluation en algèbre linéaire) et donc qui correspondent à un seul document, et, d'une autre part, des classes de situations plus générales qui ne dépendent pas d'un contenu mathématique bien déterminé (par exemple, préparer et mettre en œuvre une évaluation). Elle a effectué ces choix pour, à la fois, observer l'organisation des ressources des enseignants des mathématiques à l'université en général et analyser les invariants opératoires et les règles d'action relatifs à des contenus mathématiques dans les classes de situations plus spécifiques.

L'étude de Gueudet (2017) est basée sur des entretiens avec six enseignants-chercheurs²² avec des profils divers en termes de leur expérience, leur domaine de recherche, leur pays d'études, le poste qu'ils occupent, les domaines mathématiques qu'ils enseignent, etc. Elle a identifié dans les déclarations des enseignants-chercheurs interviewés les buts de leur activité, les ressources associées aux buts, les règles d'action (qu'elle définit comme étant les stabilités dans les usages des ressources) et les invariants opératoires (qu'elle considère comme étant les discours justifiant les règles d'action).

Gueudet (2017), en présentant le cadre théorique pour son travail, insiste sur le fait que, pour toutes les classes de situations qu'elle considère, l'enseignant-chercheur est toujours conscient du but de son activité. Cependant, elle note qu'on peut inférer des objectifs de certaines activités de l'enseignant qui ne sont pas explicites pour lui. Ces derniers, suivant Gueudet (2017), ne relèvent pas d'une classe de situations. Elle les considère comme invariants opératoires. Elle soutient ses propos par l'exemple suivant (que nous traduisons nous-même) : « au moins deux tiers des étudiants doivent être capables de réussir un examen ». Selon Gueudet (2017), cet objectif peut être non explicite pour l'enseignant-chercheur. Ainsi, elle le

²² Gueudet (2017), dans son article en anglais, utilise le terme « teachers » pour désigner les enseignants participant à son étude, et elle indique leur domaine de recherche dans son travail ; nous utilisons le terme « enseignants-chercheurs » pour les désigner.

considère comme un invariant opératoire en lien avec la classe de situations « préparer et mettre en œuvre une évaluation ».

En ce qui concerne les ressources, Gueudet (2017) a repéré les ressources matérielles mobilisées pour chaque but, qui étaient explicitement mentionnées par les enseignants-chercheurs. En outre, Gueudet (2017) a considéré d'autres ressources non matérielles à chaque fois qu'elle en a repéré un impact sur les pratiques des enseignants-chercheurs comme leur expérience personnelle étant étudiants ou leur expérience internationale, etc.

Pour les règles d'action, Gueudet (2017) les a identifiées dans les déclarations des enseignants-chercheurs. Et finalement, elle a repéré les invariants opératoires dans les « professional beliefs » des enseignants-chercheurs sur les mathématiques et leur enseignement justifiant leurs règles d'action. Gueudet a déclaré qu'elle a aussi inféré des « professional beliefs » qui n'étaient pas explicitement exprimés par les enseignants-chercheurs (mais elle n'explique pas plus cette idée).

Dans la suite de son travail, Gueudet (2017) a introduit les « documents tables » (tableaux documents) et a construit un pour chaque enseignant-chercheur. Dans un tableau document (cf. encadré 29), les colonnes correspondent aux ensembles de classes de situations, de ressources, de règles d'action et d'invariants opératoires relatifs à chaque classe. Gueudet (2017) souligne qu'un suivi d'un enseignant-chercheur sur une longue période de temps est nécessaire pour identifier la manière dont il adapte ses schèmes face à des situations nouvelles. Par conséquent, elle s'est limitée dans son travail à étudier trois des composantes d'un schème, sans prendre en considération les possibilités d'inférence.

Aims	Resources used	Rules of actions (Way to use the resources)	Operational invariants (Reasons for using them this way)
Preparing the first lecture on numerical methods	Curriculum of year 1 and year 2 semester 1 Written notes (his notes and the notes of the previous teacher)	The first lecture starts by recalling previous knowledge which will be used The first lecture also introduces what is new in the perspective of the course	The new lecture must be connected with the students' previous knowledge. "The students must learn that the results they know are connected: mean value theorem, Taylor formula, etc".
Preparing and setting up exercises for a tutorial on interpolation	Book (Crouzeix and Mignot 1984) Written notes (his notes) Previous exam texts Scilab Tables of values of functions, including an old table of a Bessel function	Some exercises are chosen from the book and adapted to the students' level Some exercises are chosen from the notes of the previous year Choose tables of values of functions and values which are not in the table.	The students must know how to use interpolation to produce approximate values of a function "Using links with the history of mathematics increases students' motivation"

Table 2. Extract of Bob's documents table for the teaching unit on numerical methods.

Ensemble de ressources mobilisées par Bob

Ensemble de règles d'action

Ensemble d'invariants opératoires

Encadré 29 : Extrait d'un tableau document (Gueudet, 2017, p. 205) que nous avons annoté en couleurs

Gueudet (2017) reconnaît que l'activité de recherche peut avoir une influence sur les pratiques d'enseignement des enseignants au supérieur, mais son étude n'a pas réalisé un focus sur cet aspect.

III.4.2- L'approche documentaire articulée avec la TAD pour l'étude des interactions des enseignants du post-secondaire avec les ressources

González-Martín et al. (2018) se sont appuyés sur l'Approche Documentaire et l'Approche Anthropologique du Didactique (TAD) pour étudier les liens entre le rapport personnel au savoir de cinq enseignants du post-secondaire²³ et leurs interactions avec les ressources pour l'enseignement. Ils ont essayé d'explorer en particulier les variations dans le rapport personnel des enseignants au savoir et la manière dont ces variations se reflètent dans leur travail documentaire.

Dans ce contexte, les auteurs considèrent une ressource particulière, un ouvrage que tous les enseignants impliqués dans l'étude mobilisent dans leurs activités d'enseignement. En outre, ils considèrent dans cet ouvrage un contenu spécifique, les séries numériques des nombres réels. Les auteurs avaient en 2011 conduit un travail sur la présentation des séries numériques dans cet ouvrage (González-Martín, Nardi, & Biza, 2011).

González-Martín et al. (2018) considèrent les ressources comme définies dans l'approche documentaire (Gueudet & Trouche, 2009), c'est-à-dire au sens large d'Adler (2010) : une ressource est tout ce qui est susceptible à re-sourcer le travail d'un enseignant. Par la suite, les auteurs considèrent un large spectre de ressources qui peuvent être matérielles ou non matérielles telles que des ressources humaines, sociales ou culturelles (une discussion avec un collègue peut constituer une ressource pour un enseignant). Cependant, ils soulignent que la formation d'un enseignant et ses connaissances à propos des savoirs à enseigner sont aussi des ressources. Ainsi, ils apportent des précisions à la définition des ressources présentée dans l'approche documentaire (Gueudet & Trouche, 2009) et les définissent de la manière ci-dessous :

« A resource is anything that can possibly be used during individual activity, or « anything likely to re-source the teacher's practice » (Adler, 2000, in Gueudet, 2017, p. 201). This includes material and non-material elements (social, cultural, and human resources such as a discussion with a colleague). An individual's own training and knowledge about the content to be taught is also a resource » (González-Martín et al., 2018, p. 233).

González-Martín et al. (2018) considèrent, dans leur travail, l'ouvrage mobilisé par les cinq enseignants comme ressource principale. Cependant, ils remarquent que d'autres ressources peuvent être mobilisées dans le travail d'un enseignant qui peuvent être issues d'une expérience antérieure d'enseignement (qui peut être un enseignement des séries numériques), de son expérience d'apprentissage des séries numériques, des contraintes institutionnelles (telles que contraintes de temps et obligation d'enseignement d'un contenu donné). En outre, ils notent que les interactions avec les étudiants deviennent également des ressources pour les enseignants puisque certaines de leurs actions semblent être guidées par ces interactions. Pourtant, nous signalons qu'il nous semble que, bien que González-Martín et al. (2018) précisent qu'une variété de ressources peuvent être mobilisées dans l'enseignement, ils ne prennent en considération que la ressource commune des enseignants dans leur étude, l'ouvrage destiné à l'enseignement.

González-Martín et al. (2018) s'appuient principalement sur l'approche documentaire (Gueudet & Trouche, 2009) et sur le concept de schème présenté dans (Gueudet, 2017). Ils considèrent dans leur travail les quatre composantes suivantes d'un schème :

- Les buts (dans le sens de Gueudet, 2017), pour les auteurs, peuvent être à un degré de généralité, et ainsi, des sous-buts plus spécifiques peuvent être définis pour chaque but. Par exemple, « enseigner un thème » est un but général dans lequel on peut inscrire un

²³ Les auteurs marquent qu'aucun des cinq enseignants n'est un enseignant-chercheur.

sous-but « démontrer comment une approche donnée peut être mobilisée pour résoudre un type de problèmes » ;

- Les règles d'action sont identifiées dans les régularités des façons d'agir afin d'atteindre un but ;
- Les invariants opératoires comprennent les propositions tenues pour vraies par le sujet et qui sont pertinentes pour une situation donnée. Elles peuvent aussi avoir comme fonction de justifier les règles d'action ;
- Les inférences permettent une adaptation des schèmes afin de répondre aux particularités d'une situation spécifique et peuvent (ou non) être effectuées par le sujet.

González-Martín et al. (2018) distinguent entre les buts qui sont en relation avec un contenu mathématique bien déterminé, les séries numériques, et les buts qui sont, par rapport aux contenus mathématiques, à un niveau plus général, donc qui ne dépendent pas des séries numériques particulièrement.

Pour les buts en relation avec les séries numériques, les auteurs considèrent des sous-butts plus spécifiques. Nous citons à titre d'exemple : « prepare students to learn Taylor polynomials ». Ils considèrent que ces derniers peuvent être vus comme des « tâches » au sens de la Théorie anthropologique du Didactique, et, ainsi, articulent l'approche documentaire (Gueudet & Trouche, 2009) et la TAD (Chevallard, 1998). En effet, ils considèrent les actions dans lesquelles les enseignants s'engagent comme étant les « techniques », et les justifications de ces actions comme les « technologies ». Nous illustrons nos propos par un exemple extrait de González-Martín et al. (2018). Une règle d'action qui permet d'atteindre le but « prepare students to learn Taylor polynomials » est : « give hints and organise the content in order to highlight Taylor polynomials ». Les deux invariants opératoires identifiés par González-Martín et al. (2018), dans leurs analyses, qui justifient cette règle d'action sont les suivants : « Series are a stepping stone to more important parts of the content (e.g., power, Taylor and Maclaurin series, approximation » et « including series in Integral calculus curriculum is debatable ». Dans cet exemple, on peut considérer le but « prepare students to learn Taylor polynomials » comme une tâche donnée. Une technique qui permet d'accomplir cette tâche est donnée par la règle d'action : « give hints and organise the content in order to highlight Taylor polynomials ». Et les technologies justifiant cette technique dans ce cas sont les deux invariants opératoires cités ci-dessus. Dans González-Martín et al. (2018), les techniques dans lesquelles les enseignants s'engagent pour atteindre les buts font partie de leurs règles d'action et les technologies justifiant les techniques jouent le rôle des invariants opératoires qui guident ces règles d'action.

Les invariants opératoires sont les parties des discours des enseignants qui justifient les règles d'action. Gueudet (2017) indique que ces justifications peuvent être en lien avec une ressource particulière ou avec les savoirs mathématiques à enseigner. Par conséquent, nous pouvons être amenés à inférer que Gueudet (2017) reconnaît implicitement l'impact des ressources et de leur mobilisation sur la construction d'un document par un enseignant, ainsi que l'influence de la manière dont il perçoit les savoirs mathématiques en question et leur enseignement sur cette construction. Dans le prolongement de cette idée, González-Martín et al. (2018) soutiennent que les justifications que les enseignants apportent à leurs règles d'action peuvent être relatives aux ressources en question ou au contenu mathématique. Les invariants opératoires des enseignants qui guident leurs interactions avec les ressources sont influencés par la nature des ressources en question et par leur expérience personnelle, ce que Chevallard (1998) désigne par *rapport personnel* au savoir (§ III.3.1).

González-Martín et al. (2018) donnent l'exemple d'un enseignant au post-secondaire ayant à enseigner les séries numériques. Cet enseignant, selon eux, entretient une relation personnelle avec les séries, créée en grande partie par la présentation et l'utilisation de cette notion dans les cours qu'il avait eu en premier cycle en tant qu'étudiant. Cependant, le fait de devenir enseignant et avoir

à enseigner des séries, préparer des activités adéquates et répondre aux questions des étudiants en classe, peut modifier cette relation personnelle. Cet enseignant devrait, le cas échéant, utiliser des ressources qui lui sont jusqu'alors inconnues pour préparer ses cours. Il devrait tenir compte des restrictions institutionnelles qui peuvent exister. Ainsi, les schèmes d'utilisation des ressources pour son enseignement des séries numériques sont influencés par les expériences qu'ils avaient comme étudiants, et de son expérience comme étant enseignant de mathématiques, en somme par ce que Chevallard (1998) désigne par rapport personnel au savoir.

Dans leur travail, González-Martín et al. (2018) explorent les deux hypothèses ci-dessous :

- L'utilisation des ouvrages destinés pour l'enseignement par les enseignants est influencée par leur rapport personnel aux contenus en question ;
- Le rapport personnel des enseignants au savoir peut avoir une influence sur la forme de leur travail documentaire.

Le travail consiste en deux étapes principales. Dans la première étape, González-Martín et al. (2018) ont identifié des caractéristiques de l'introduction des séries numériques dans 17 ouvrages utilisés dans des institutions collégiales en Québec entre 1993 et 2008. La deuxième étape de leur travail a porté sur des entretiens avec cinq enseignants volontaires qui mobilisent le même ouvrage dans leur enseignement. Les enseignants interviewés ont des profils divers en termes de leur formation. Ils occupent des postes d'enseignement dans trois institutions post-secondaires différentes, appliquant diverses politiques départementales.

Les auteurs ont identifié dans les transcriptions des entretiens des enseignants les éléments saillants portant sur leur relation personnelle aux séries numériques (en se concentrant sur les techniques d'enseignement des séries et les raisons derrière ces techniques). Ainsi, ils ont identifié les buts, les techniques (actions) mises en place pour atteindre les buts, et les justifications des techniques (technologies en « TAD ») offertes par les enseignants.

Afin d'étudier l'influence de la relation personnelle des enseignants au savoir (les séries numériques) sur leur travail documentaire, les auteurs ont mené une deuxième analyse des entretiens, en se concentrant sur les composantes des schèmes (buts, règles d'action, invariants opératoires, inférences). Les auteurs ont en effet identifié les buts et les sous-buts dans les discours par les enseignants, et pour chaque sous-but, les règles d'action et les invariants opératoires qui les guident.

González-Martín et al. (2018) ont identifié des buts généraux dans les déclarations des enseignants tels que « mon objectif est d'enseigner les séries numériques » et des sous-buts qui sont plus spécifiques tels que « mon objectif est d'initier les étudiants à la convergence de la somme des termes d'une suite numérique ». Ils ont repéré principalement deux grands buts de l'enseignement des séries numériques : « Scaffolding mathematical content (series as a stepping stone to learning about Taylor polynomials and Maclaurin series) » et « organizing student learning about series through drill exercises, visualization, examples and applications ». Pour chacun de ces deux buts, ils ont identifié des sous-buts qui s'y inscrivent. Nous exposons, dans le tableau 3 ci-dessous, les buts et les sous-buts que nous pouvons identifier dans le travail de González-Martín et al. (2018).

Aims	Sub-aims
Scaffolding mathematical content	deliver the content of the textbook
	prepare students to learn Taylor polynomials
	develop competencies on the convergence criteria
Support student learning	introduce the new content
	develop intuitions through visualisation
	develop competencies
	help students overcome difficulties

Tableau 3 : Tableau résumant les buts et sous-buts identifiés par González-Martín et al. (2018)

Pour chaque but, González-Martín et al. (2018) identifient les règles d'action (qu'ils définissent comme étant le « quoi » et le « comment » de l'utilisation de l'ouvrage dans l'organisation de l'enseignement des séries) et les invariants opératoires (qui pour eux sont les justifications sous-jacentes à la planification et à la mise en œuvre de l'enseignement, c'est-à-dire le « pourquoi » dans l'organisation de cet enseignement). Pour les invariants opératoires, ils se basent de même sur des analyses préliminaires d'un travail antérieur de González-Martín (2015) dans lequel les auteurs puisent des éléments en lien avec le rapport personnel des enseignants au savoir (les séries et leur enseignement). González-Martín et al. (2018) présentent les invariants opératoires, en lien avec le rapport personnel des enseignants aux séries numériques et à leur enseignement, dans un tableau que nous exposons dans l'encadré 30 ci-dessous.

Operational Invariants	Code	Participants
The order of the textbook is good.	OB	T1, T3, T4, T5
Series is a stepping stone for more important parts of the content (e.g., power, Taylor and Maclaurin series, approximation).	SS	T1, T2
Including series in the Integral Calculus curriculum is debatable.	SD	T2, T3, T5
Series is about convergence criteria.	CC	T1, T2, T3, T5
Series is about convergence (arithmetic of infinity, convergence of partial sums).	C	T1, T2, T3, T4
Series is a counterintuitive concept.	CI	T3
It is difficult to visualise series.	HV	T1, T2, T4, T5
It is difficult to find real-life applications of series.	HA	T1, T2, T3, T4, T5
It is important to practise with many drill exercises.	DE	T2, T3, T4, T5
Using criteria does not necessarily imply grasping the topic.	AntiCC	T4
The content of the course has an already established structure / this structure is logical and helps learning.	ES	T1
Time pressure and student fatigue constrain the teaching approach.	TP	T1, T4
Visualisation is good for student learning / helps develop intuition.	VG	T1, T3, T4, T5
Creating intuitions/a feeling about mathematical concepts is good for student learning.	IG	T2, T3, T4

Ensemble des invariants opératoires identifiés relevant de leur rapport personnel au savoir

T1, T2, T3, T4, et T5 désignent les 5 enseignants participants à l'étude

Encadré 30 : Extrait du tableau résumant les invariants opératoires, présenté par González-Martín et al. (2018, p. 239) que nous avons annoté en rouge

González-Martín et al. (2018) adaptent le tableau document d'un enseignant introduit par Gueudet (2017). Ils construisent un seul tableau qui expose les documents des cinq enseignants participant à leur étude (cf. figure 17). Les colonnes dans leur tableau correspondent aux ensembles de buts et de sous-buts considérés, de règles d'action et d'invariants opératoires relatifs à chaque sous-but, et d'exemples de déclarations des enseignants desquelles les règles d'action et les invariants opératoires ont été inférées. Et horizontalement, chaque ligne représente un document d'un ou de plusieurs enseignants en lien avec un sous-but donné.

Table 3 Summary of main rules of action and associated operational invariants identified in the five participants' statements

Aims	Sub-aims	Rules of action (ways of using the textbook and other classroom activities)	Operational invariants	Participants	Example
Scaffolding content	Deliver the content of the textbook	Follow the structure of the textbook which covers the course content	The order of the textbook is good—namely, is key to the way the content is presented to the students. (OB)	T1, T2, T3, T4, T5	“Certain sections are put aside and left out, but on the whole we almost follow the order” (T2)
			The content of the course has an already established structure / this structure is logical and helps learning. (ES)	T1	“The simplest reason [why I use this book] is that [it] contains the course content, so it’s a good work tool as much for the students as for the teacher.” (T1) “It’s difficult to deconstruct a logical structure that has been established for many years of teaching, at least in Québec.” (T1)
			Go through the textbook’s exercises (particularly drill exercises)	The order of the textbook is good. (OB) Series is about convergence criteria. (CC) It is important to practise with many drill exercises. (DE)	T1, T2, T3, T4, T5

Document développé par les enseignants T1, T2, T3, T4 et T5

Codes des enseignants

Exemples issus des déclarations de T1 dans lesquels les règles d'actions et les invariants opératoires sont identifiés

Figure 17 : Extrait du tableau construit par González-Martín et al. (2018, p. 242) que nous avons annoté en rouge

Nous notons que González-Martín et al. (2018) déclarent que, dans leur travail, ils repèrent des éventuelles inférences. Cependant, le tableau qu'ils construisent pour exposer les résultats de leurs analyses ne comprend pas la composante « inférence » des schèmes (cf. figure 17).

III.4.3- Considération et adaptations de concepts de l'approche documentaire

Nous mettons l'accent dans ce paragraphe, en se basant sur les recherches présentées précédemment (§ III.3), sur certains concepts de l'approche documentaire, le sens qu'on leur attribue dans la suite de notre travail, ainsi que les adaptations à notre objet d'étude.

Les ressources constituent une toile de fond dans notre travail. Nous citons particulièrement les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources et les manières dont ces interactions influencent leurs activités d'enseignement. Nous retenons la définition que Gueudet et Trouche (2010) confèrent au terme ressources : « tout ce qui est susceptible de re-sourcer le travail des enseignants ». Ainsi, les ressources peuvent être matérielles (ouvrage, logiciel, article publié, etc.), ou non matérielles comme des interactions avec les étudiants ou avec les collègues. Par exemple, les notes des étudiants sur une épreuve écrite ou leur réaction en classe face à un exercice donné peuvent impacter certains choix d'un enseignant-chercheur, et ainsi, constituer des ressources pour lui.

En revanche, une même ressource peut être mobilisée dans une ou plusieurs situations d'activité d'un enseignant-chercheur. Par exemple, un enseignant-chercheur peut avoir recours à un ouvrage pour la conception d'un module d'enseignement, et, ensuite, avoir recours au même ouvrage lors de la conception d'une évaluation écrite. L'enseignant-chercheur ne mobiliserait pas l'ouvrage de la même manière dans ces deux situations : la finalité de l'action façonne les interactions d'un enseignant-chercheur avec une ressource ou un ensemble de ressources données. Les situations ayant une même finalité de l'action appartiennent, selon Gueudet et Trouche (2010) à une même famille d'activité. En revanche, les situations ayant un même but, c'est-à-dire une même finalité de l'action, selon Vergnaud (1998) appartiennent à la même classe de situations. Nous considérons alors qu'une classe de situations peut regrouper des situations ayant une même finalité, ou ayant des finalités différentes mais correspondant à un même but général. Par exemple, la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre un cours de mathématiques discrètes » correspond à un but général. Pour atteindre ce but, un enseignant-chercheur peut s'engager dans des actions diverses telles que « consulter des ouvrages et des anciens cours en mathématiques discrètes » et « concevoir et mettre en œuvre une introduction aux mathématiques discrètes », etc. Ces actions ont des finalités différentes : « concevoir et mettre en œuvre un module de mathématiques discrètes » et « concevoir et mettre en œuvre une introduction à de nouveaux contenus mathématiques ».

Nous pouvons déduire qu'un but peut être décliné en plusieurs sous-buts. Une classe de situations donnée peut en effet regrouper des classes de situations ayant des portées moins larges. Nous envisageons dans notre travail un ensemble de classes de situations à plusieurs niveaux de généralité que nous déterminons *a priori* (§ III.4.4), tout en estimant que cet ensemble pourrait comprendre toute classe de situations qui ressortirait lors de l'exploitation de nos données. Nous proposons, pour l'élaboration de nos classes de situations, une adaptation des 9 familles d'activités de Gueudet et Trouche (2010) (§ III.2.2). En effet, ces 9 familles d'activités concernent les enseignants de mathématiques particulièrement au secondaire. Nous les adapterons donc, dans la

suite de notre travail (§ III.4.4), en prenant en considération les spécificités des pratiques des enseignants-chercheurs au supérieur.

De plus, nous considérons dans notre étude les invariants opératoires comme étant issus des connaissances professionnelles des enseignants-chercheurs justifiant leurs règles d'action. Elles peuvent être des théorèmes-en-acte ou des concepts-en-acte. Elles expliquent et justifient les choix que les enseignants-chercheurs effectuent dans la conception de leur enseignement et les façons dont ils interagissent avec les ressources. Nous soulignons que le rapport personnel d'un enseignant-chercheur aux mathématiques discrètes peut guider ou influencer ses actions. Par exemple, un enseignant-chercheur qui a vécu des moments de difficulté face à des problèmes de recherche en mathématiques discrètes peut réajuster la mise en œuvre des moments de recherche en classe quand les étudiants rencontrent des difficultés semblables. Nous mettons donc l'accent sur l'importance de considérer le rôle fondamental du rapport personnel d'un enseignant-chercheur aux mathématiques discrètes comme un ensemble d'invariants opératoires. Nous mentionnons qu'un même invariant opératoire peut intervenir dans différentes classes de situations, et peut même inférer, dans chacune d'elles, des règles d'action différentes.

Nous nous intéressons à la façon dont les invariants opératoires pilotent des interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources, dans différentes classes de situations, dans la conception et dans la mise en œuvre de leur enseignement. Nous nous intéressons de même aux ressources conçues par les enseignants-chercheurs pour leur enseignement. Ces ressources incarnent des invariants opératoires de ces derniers et peuvent nous permettre de caractériser la mise en œuvre des choix qu'ils effectuent dans leur enseignement. Ainsi, nous présentons dans la suite notre élaboration *a priori* des classes de situations que nous considérons pour notre travail (§ III.4.4).

III.4.4- Adaptation des classes de situations pour le cas des enseignants-chercheurs

Nous présentons dans cette partie notre élaboration des classes de situations que nous mobilisons dans la suite de notre travail. Pour cette construction *a priori* de nos classes de situations, nous proposons ci-dessous une adaptation des 9 familles d'activités présentées par Gueudet et Trouche (2010) (§ III.2.2), afin de prendre en compte les spécificités des pratiques des enseignants-chercheurs au supérieur, du point de vue institutionnel, ainsi que du point de vue de leur formation (§ I.4).

Pour la famille d'activité [réflexion], nous considérons que l'activité de recherche d'un enseignant-chercheur, qui peut être dans le domaine mathématique qu'il enseigne ou non, peut potentiellement influencer ses pratiques d'enseignement. Nous estimons qu'il est naturel qu'un enseignant-chercheur ait une activité de publication et assiste à des séminaires et à des colloques. Nous faisons l'hypothèse que l'activité de recherche d'un enseignant-chercheur, entre autres, peut l'inciter à se poser des questions sur ses propres pratiques à plusieurs niveaux tels que les choix des contenus à aborder dans un module, les modes de présentations possibles, etc. Nous estimons qu'un examen de cette hypothèse nécessiterait une étude des différents aspects des pratiques d'enseignement d'un enseignant-chercheur.

Par conséquent, la première famille d'activité [Réflexion], dans le cas des enseignants-chercheurs, peut être imbriquée dans toutes les autres familles d'activités ; les buts relatifs à l'activité « réflexion sur ses propres pratiques » peuvent s'inscrire dans différentes classes de situations.

Pour étudier la réflexion d'un enseignant-chercheur sur ses propres pratiques, nous nous réfèrerons donc à toutes les classes de situations que nous définirons dans la suite.

Pour la troisième famille d'activités [C/O Introduction], nous estimons que ces moments peuvent avoir lieu dans des séances de cours où des contenus (notions, concepts, propriétés, théorèmes, etc.) peuvent être introduits aux étudiants ou dans des séances de TDs ou de TPs qui peuvent consister par exemple en des activités de recherche et d'expérimentation menant à des découvertes de la part des étudiants. Nous considérons alors trois classes de situations pouvant imbriquer cette famille d'activités « concevoir et mettre en œuvre des séances de cours », « concevoir et mettre en œuvre des séances de TDs » et « concevoir et mettre en œuvre des séances de TPs ».

Pour la quatrième famille d'activités [C/O Synthèse], nous considérons qu'au supérieur, les moments de synthèse peuvent avoir lieu dans des séances de cours, ou dans des séances de TDs et de TPs portant sur une expérimentation ou une recherche sur une question donnée. Par la suite, nous considérons pour cette famille d'activités les trois classes de situations susmentionnées : « concevoir et mettre en œuvre des séances de cours », « concevoir et mettre en œuvre des séances de TDs » et « concevoir et mettre en œuvre des séances de TPs ».

Pour la cinquième famille d'activités [C/O Technique], nous faisons l'hypothèse que l'entraînement à la technique à l'université se fait principalement dans des séances de TDs et de TPs. Ainsi, nous considérons dans notre travail les deux classes de situations « concevoir et mettre en œuvre des séances de TDs » et « concevoir et mettre en œuvre des séances de TPs ».

Concernant la septième famille d'activités [Suivi], nous faisons l'hypothèse qu'un étudiant à l'université doit être plus autonome qu'un élève au secondaire et qu'un enseignant-chercheur ne suit pas nécessairement en permanence les étudiants qu'il enseigne. La gestion de classe imbrique la mise en œuvre des contenus dans des séances de cours, de TDs et de TPs. Donc pour examiner la gestion de classe, nous nous réfèrerons aux classes de situations : « concevoir et mettre en œuvre des séances de cours », « concevoir et mettre en œuvre des séances de TDs » et « concevoir et mettre en œuvre des séances de TPs ».

Pour la huitième et la neuvième famille d'activités, [Vie établissement] et [Vie collectif], nous considérons dans notre travail la dimension collective dans les pratiques des enseignants-chercheurs. Le travail collectif peut avoir lieu au sein de l'établissement où ils enseignent (réunions au sein du département, recherches avec des collègues, etc.), ou avec des enseignants-chercheurs qui n'appartiennent pas à la même institution (appartenance à des groupements de recherche, etc.). Nous définissons pour ces deux familles d'activités une seule classe de situations : « participer à un collectif d'enseignement ou de recherche ». Ce travail collectif peut être dans le cadre de l'institution à laquelle l'enseignant-chercheur appartient ou non.

Suite aux adaptations proposées ci-dessus, nous proposons dans notre étude, *a priori*, les classes de situations suivantes pour le cas des enseignants-chercheurs :

(1) *concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement* [C/O Planification] : planifier individuellement/collectivement une unité d'enseignement, définir sa structure, sélectionner les contenus à inclure, adapter ou modifier une unité d'enseignement, pondérer et alterner les cours, TDs et TPs (le cas échéant) ;

Nous notons que la pondération des cours, TDs et TPs peut dépendre de l'institution ou du choix personnel d'un enseignant-chercheur. Par exemple, certains enseignants-chercheurs exposent les notions théoriques dans des séances de cours, et engagent les étudiants dans une résolution de

problèmes et d'exercices uniquement dans les séances de TDs. D'autres enseignants-chercheurs co-construisent les connaissances avec les étudiants en mobilisant des exemples, des exercices et des problèmes durant toutes les séances accordées à l'enseignement d'un module ; dans ce genre d'enseignement, la division des séances entre cours, TDs et TPs n'est pas toujours applicable. Dans la suite de notre travail, nous désignons par « séances de cours » toutes les séances qui ne sont pas formellement définies comme des séances de TDs ou de TPs par l'institution ou par les enseignants-chercheurs interviewés.

(2) *concevoir et mettre en œuvre des séances de cours* [C/O Cours] : esquisser les contenus d'un cours, les modifier ou les adapter, introduire une séance de cours, introduire la théorie des graphes, enseigner un théorème ou une preuve, mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes ou d'entraînement et d'application (exercices), engager les étudiants dans un travail sur la modélisation ou dans une lecture d'articles de recherche, établir des liens avec d'autres domaines mathématiques ou d'autres disciplines ;

(3) *concevoir et mettre en œuvre des séances de TDs* [C/O TDs] : esquisser les contenus d'un TD, les modifier ou les adapter, échanger des questions avec d'autres enseignants-chercheurs, mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes ou d'entraînement et d'application (exercices), concevoir et mettre en œuvre des projets en classe, engager les étudiants dans un travail sur la modélisation, enseigner les preuves, établir des liens avec d'autres disciplines ;

(4) *concevoir et mettre en œuvre des séances de TPs* [C/O TPs] : planifier des moments d'expérimentation avec des objets matériels (jeux matériels, calculatrice graphique, etc.), planifier et/ou mettre en œuvre des séances de programmation, mettre en œuvre des moments de recherche autour d'un problème, engager les étudiants dans un travail sur la modélisation ;

(5) *concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation* [C/O Evaluation] : élaborer les modalités d'évaluation des étudiants (épreuves écrites, projets, présentation orale, présence en classe, etc.), élaborer individuellement/collectivement une épreuve écrite, répartir les notes dans une épreuve écrite, échanger des questions avec d'autres enseignants-chercheurs, concevoir des projets mémoire pour l'évaluation des étudiants, évaluer le travail des étudiants en classe ;

(6) *participer à un collectif d'enseignement ou de recherche* [Vie collectif] : participer à un collectif de recherche qui s'intéresse à la diffusion et à l'enseignement des mathématiques, participer à un collectif d'enseignants-chercheurs au sein du département.

Nous notons que ces classes de situations ne sont pas disjointes. Une même activité peut appartenir à plusieurs classes de situations en fonction de la finalité que l'enseignant-chercheur se pose en l'effectuant. Par exemple, pour « engager les étudiants dans un travail sur la modélisation », un enseignant-chercheur peut proposer une situation issue de la vie réelle dans une séance de cours, ou dans le contexte d'un problème de recherche dans une séance de TPs, ou dans le contexte d'un problème à résoudre dans une séance de TDs.

De plus, notre étude porte sur des enseignants-chercheurs qui n'enseignent pas dans de mêmes conditions institutionnelles. En effet, les enseignants-chercheurs interviewés, au Liban et en France, enseignent dans différents parcours de formation (mathématiques, mathématiques appliquées, génie industrielle, gestion) au sein d'universités diverses (faculté des sciences, faculté de génie, faculté de gestion). Ils enseignent dans différents niveaux, qui dans un parcours d'ingénieurs, peuvent être les classes préparatoires et cycles d'ingénieurs, et dans les autres parcours, les niveaux licence ou Master. En revanche, les unités d'enseignement en lien avec les

mathématiques discrètes, et la théorie des graphes particulièrement, diffèrent selon les parcours de formation et les niveaux dans lesquels elles sont enseignées. Elles peuvent porter essentiellement sur les mathématiques discrètes et comprendre une partie sur la théorie des graphes, ou porter uniquement sur la théorie des graphes, ou même porter essentiellement sur la recherche opérationnelle avec une partie sur la théorie des graphes.

Les conditions et les contraintes institutionnelles peuvent impacter les pratiques des enseignants-chercheurs au niveau des différentes classes de situations que nous considérons. Pour tenir compte de cet impact, nous inscrivons, dans la suite de notre travail, plusieurs institutions non disjointes, qui peuvent même être emboîtées les unes dans les autres (que nous définissons dans la figure 18 ci-dessous).

Ainsi, l'institution la plus large que nous considérons dans le cadre de notre de notre étude est l'université. Dans un enseignement universitaire en France et au Liban, les mathématiques discrètes (ou la théorie des graphes) peuvent être enseignées dans plusieurs parcours de formation (mathématiques, mathématiques appliquées, informatique, gestion, parcours d'ingénieurs, etc.) ; nous distinguons entre les parcours universitaires consistant en 3 années de licence (L1, L2, et L3) et en deux années de Master (M1 et M2) et les parcours d'ingénieurs divisés en 1^{ère} ou 2^{ème} année des classes préparatoires et 1^{ère}, 2^{ème} ou 3^{ème} année du cycle d'ingénieurs.

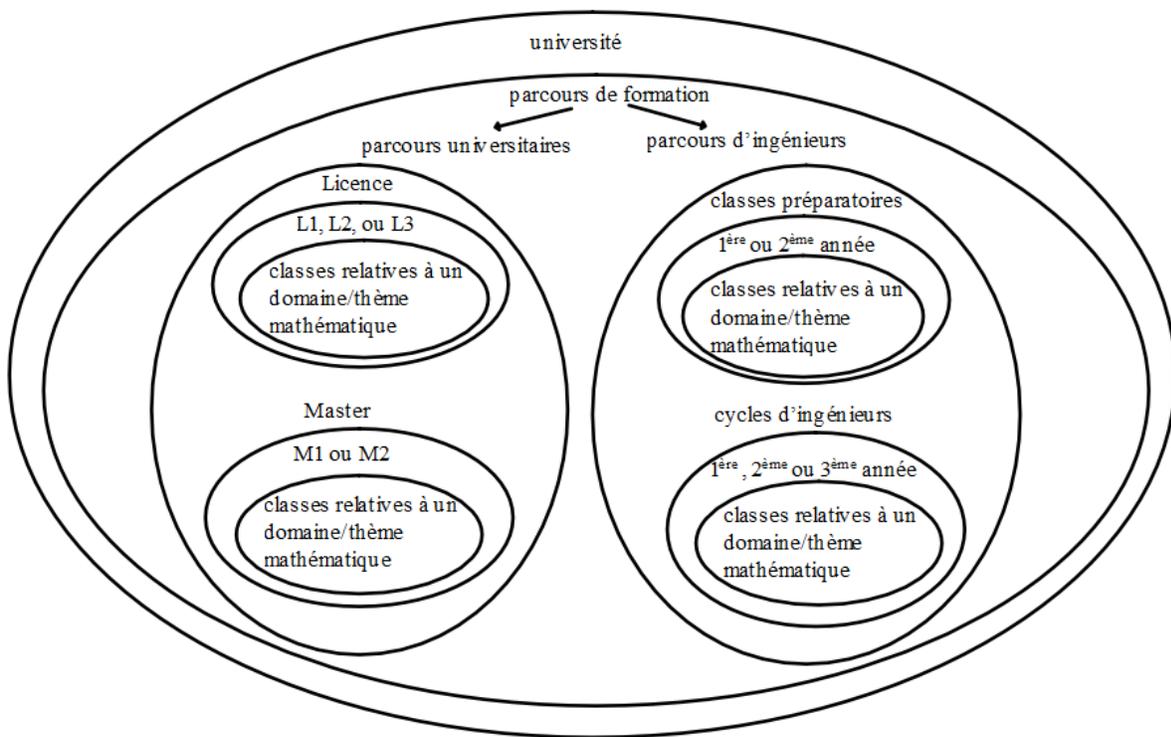


Figure 18 : Illustration des institutions que nous considérons dans notre étude

Nous insistons sur le fait que les institutions que nous considérons sont à différents niveaux de généralité et peuvent être imbriquées les unes dans les autres. Nous illustrons nos propos par un exemple ci-dessous (cf. figure 19).

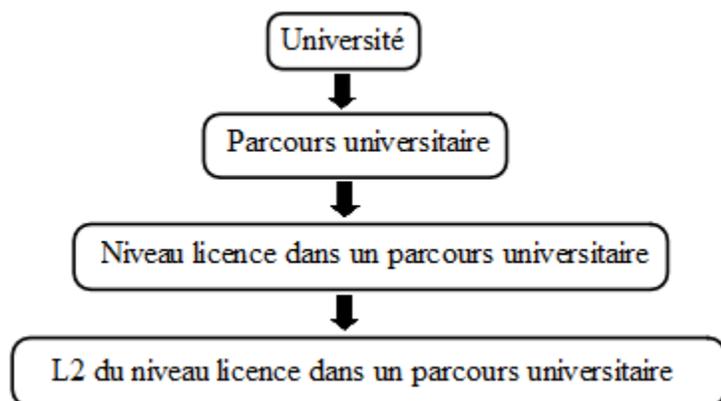


Figure 19 : Exemple d'institutions qui peuvent ressortir des analyses

Nous estimons qu'une considération des sous-buts inscrits dans les différentes classes de situations dans le cadre de ces institutions peut nous permettre de cerner, dans un deuxième temps dans nos analyses, l'impact des conditions et des contraintes institutionnelles sur les pratiques des enseignants-chercheurs.

III.5- Analyse de la « qualité » des manuels : cohérence et connectivité

Nous présentons dans cette partie les travaux que nous avons consultés qui portent sur l'analyse de la « qualité » des manuels dans l'enseignement des mathématiques.

Les enseignants dans leurs pratiques d'enseignement en classe et hors classe, interagissent avec des ressources diverses, dont une ressource centrale, les manuels scolaires (Gueudet et al., 2018). Bien que leur rôle dans l'enseignement dépende de la façon dont ils sont mobilisés par les utilisateurs (élèves et enseignants) (Charalambous, Delaney, Hsu, & Mesa, 2010; Stylianides, 2009), néanmoins les manuels influencent les apprentissages réalisés par les élèves (Garner, 1992).

« Une grande variété de manuels est produite dans les différents pays du monde, et ces manuels sont comme des fenêtres qui donnent à voir la conception de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques dans ces pays, notamment en ce qui concerne les opportunités d'apprentissage offertes aux élèves par le biais de ces manuels » (Gueudet, Pepin, & Trouche, 2015, p. 3).

Plusieurs études ont porté sur la « qualité des manuels » et ont proposé des critères pour évaluer la qualité d'un manuel, parmi lesquels la *connectivité* et la *cohérence* (Gueudet et al., 2015). La connectivité d'une ressource est définie comme le potentiel d'une ressource à établir des connexions (Gueudet, Pepin, & Trouche, 2013; Gueudet et al., 2015; Gueudet et al., 2018), ce qui est essentiel pour l'apprentissage et la conceptualisation (Hiebert & Carpenter, 1992). La cohérence d'un manuel selon Gueudet et al. (2013, 2015) consiste en trois dimensions : la *cohérence du produit* qui porte sur la rigueur du contenu mathématique, la conformité au curriculum officiel, le séquençage des contenus introduits d'une manière à éviter les lacunes dans la progression mathématique, l'articulation entre le cours et les exercices et les problèmes. Et dans le cas d'une conception collective, la *cohérence de la conception* qui signifie que les intentions des concepteurs, concernant les mathématiques ou des aspects pédagogiques, sont bien coordonnées. Enfin, la *cohérence dans l'usage* prend en considération la mise en œuvre du manuel par les enseignants en classe. Gueudet et al. (2013) soulignent qu'une analyse des manuels examine le

programme d'études prévues et non les apprentissages effectifs des élèves, car les enseignants interagissent avec les manuels de diverses manières. En outre, de telles analyses peuvent nous éclairer sur les opportunités d'apprentissage des mathématiques offertes aux élèves en termes de traitement de contenus mathématiques et de priorité accordée à la compréhension conceptuelle ou à la fluidité procédurale (Charalambous et al., 2010).

Notre travail porte sur l'enseignement de la théorie des graphes au supérieur, et présente donc plusieurs particularités par rapport aux travaux concernés par des analyses des manuels. Les enseignants-chercheurs au supérieur mobilisent des modules d'enseignement qu'ils peuvent avoir conçu individuellement ou collectivement, ou conçus par des pairs. Nous estimons que plusieurs enjeux, de natures didactique, épistémologique ou institutionnelle, peuvent influencer la conception des modules d'enseignement au supérieur tels que l'activité de recherche de l'enseignant-chercheur (qui peut être dans le même domaine mathématique ou non), le parcours de formation, le nombre de séances allouées au module, etc. Nous faisons l'hypothèse qu'une analyse d'un module d'enseignement produit par un enseignant-chercheur pourrait nous éclairer sur plusieurs aspects de ses pratiques et sur les conditions et les contraintes qui les influencent, ainsi que sur les liens potentiels entre son activité de recherche et son enseignement.

Nous présentons dans la suite des travaux antérieurs que nous avons consultés dans le contexte de l'analyse des manuels, concernant les notions de « qualité », « cohérence », et « connectivité ».

III.5.1- Établir des connexions pour la compréhension des notions en mathématiques

Nous présentons dans cette partie la définition développée par Hiebert et Carpenter (1992) concernant la compréhension et la connaissance chez un individu.

Tout enseignement doit être conçu de manière à permettre aux élèves d'établir des liens (Hiebert & Carpenter, 1992). En effet, selon Hiebert et Carpenter (1992), la connaissance chez un individu consiste en un ensemble de représentations mentales qu'ils désignent par représentations internes. La compréhension peut être décrite en termes de la façon dont ces représentations internes sont structurées. Les représentations permettent à un individu de réfléchir et de communiquer les idées mathématiques. La communication requiert que les représentations soient externalisées, prenant la forme d'un langage parlé, de symboles écrits, d'images ou d'objets physiques, ce que Hiebert et Carpenter désignent par représentations externes. Une ou plusieurs formes de représentations externes peuvent être utilisées pour représenter une idée mathématique. Hiebert et Carpenter (1992) supposent que les représentations externes et internes sont étroitement liées. Ils ne prétendent pas connaître la nature précise des représentations internes, cependant ils supposent qu'elles peuvent être liées ou connectées les unes aux autres de manière utile. En outre, Hiebert et Carpenter soutiennent que la nature d'une représentation interne peut être influencée et limitée par la situation externe représentée. En particulier, en mathématiques, la nature des représentations externes influence la nature des représentations mathématiques internes. La forme de la représentation externe (images, symboles, etc.) d'une quantité ou d'une relation avec laquelle interagit l'élève influence la représentation interne de ce dernier de cette quantité ou relation. Aussi, la façon dont un élève traite ou génère une représentation externe peut nous éclairer sur la façon dont l'élève se représente cette information en interne. Hiebert et Carpenter (1992) soulignent que les connexions entre les représentations internes peuvent être stimulées en établissant des connexions entre les représentations externes correspondantes. Le degré de compréhension est déterminé par le nombre et la force de ces connexions.

Nous faisons l'hypothèse que tout enseignement vise à développer une compréhension des contenus enseignés. Nous adoptons dans notre travail la définition de la compréhension telle qu'elle est présentée par Hiebert et Carpenter (1992). Ainsi, nous considérons que dans un enseignement des mathématiques, le potentiel des situations présentées aux étudiants à établir des connexions chez les étudiants influence largement leur compréhension des concepts sous-jacents.

III.5.2- Approches horizontale et verticale pour l'analyse des manuels

Nous présentons dans cette partie les approches horizontales et verticales pour l'analyse des manuels telles qu'elles ont été développées par Charalambous et al. (2010) et ce que nous retenons pour notre travail.

Charalambous et al. (2010) comparent le traitement de l'addition et de la soustraction des fractions au primaire dans des manuels de mathématiques utilisés à Chypre, en Irlande et au Taïwan. Ils ont identifié dans des travaux antérieurs concernés par une analyse de manuels trois catégories d'approches utilisées qu'ils ont classées comme *horizontale*, *verticale* et *contextuelle*.

Dans l'analyse horizontale, le manuel est examiné dans son ensemble. L'analyse se concentre sur des caractéristiques générales telles que l'apparence physique, l'organisation du contenu à travers le manuel, etc. Bien que cette approche rende compte des contenus abordés dans un manuel, elle ne permet pas d'analyser la façon dont les concepts sont traités dans le manuel, et conséquemment, elle ne tient pas compte des possibilités d'apprentissage offertes aux élèves par le manuel (Charalambous et al., 2010).

L'analyse verticale examine la manière dont un manuel traite un concept mathématique donné et considère ce manuel comme un « environnement pour la construction de la connaissance ». Cette analyse ne s'intéresse pas aux liens existant entre le sujet examiné et les autres sujets traités dans le manuel (Charalambous et al., 2010).

L'analyse contextuelle, s'intéresse à la manière dont les manuels sont mobilisés dans l'enseignement par les enseignants ou les élèves, et considère le manuel comme un « artefact au sens large ... historiquement développé, culturellement formé, produit à certaines fins et utilisé avec des intentions particulières » (Rezat, 2006, p. 409). Cette approche s'intéresse plus aux apprentissages effectifs réalisés par la mobilisation du manuel dans l'enseignement.

Ainsi, Charalambous et al. (2010) ont développé un cadre à trois niveaux pour l'analyse des manuels d'enseignement des mathématiques en intégrant les deux dimensions, horizontale et verticale. Selon eux, chacune des deux approches, verticale et horizontale, révélerait des caractéristiques des manuels qui complèteraient celles illustrées par l'autre. Charalambous et al. (2010) n'ont pas pris en compte la dimension contextuelle de l'analyse des manuels, leur intention étant d'examiner les opportunités d'apprentissage potentielles offertes par les manuels, et non les apprentissages effectifs lors de la mobilisation des manuels dans l'enseignement.

Pour la dimension horizontale de l'analyse, Charalambous et al. (2010) ont inclus deux catégories, chacune englobant plusieurs critères : *Background information* qui comprend un aperçu descriptif d'un manuel et le contexte de sa production ; et *Overall structure* qui inclut les sujets traités dans le manuel et leur organisation. Cette analyse horizontale fournit un premier aperçu sur les fonctionnalités du manuel telles que le nombre de pages, les sujets et leur séquence, et sa pertinence pour les élèves à un niveau donné.

Pour la dimension verticale de l'analyse, Charalambous et al. (2010) ont regroupé les critères en trois catégories. La première catégorie, qu'ils désignent par *Communicated to students*, réfère à la façon dont le manuel transmet les mathématiques aux élèves. Cette catégorie inclue la communication des contenus mathématiques, des pratiques mathématiques et des attitudes à l'égard du sujet. La deuxième catégorie, intitulée *Required of students*, fait référence aux exigences que le manuel requiert des élèves, qui comprennent les demandes cognitives potentielles et les types de réponses. La troisième catégorie, *Connections*, concerne les connexions établies entre les sujets mathématiques dans le manuel, entre le manuel et l'enseignement en classe, et les connexions à des situations en dehors de l'école. Cette dimension verticale leur permet des analyses plus ciblées et approfondies du contenu mathématique.

Nous retenons les critères de l'analyse de la dimension horizontale de Charalambous et al. (2010) et nous les adaptons en fonction des particularités de notre étude. Ainsi, nous nous intéressons à avoir un aperçu descriptif de la ressource et à examiner l'organisation des contenus dans une ressource. En effet, il nous semble essentiel d'examiner le contexte de conception d'une ressource (le parcours de formation dans lequel elle a été conçue, travail collectif ou individuel, etc.). De plus, le concepteur d'une ressource pourrait effectuer des choix d'inclure des définitions, des preuves, des exemples et des applications qui dépendent du public destinataire de la ressource et de la représentation que le concepteur a des besoins de ce public. Ainsi, la fréquence des définitions, des théorèmes, des preuves, des exemples, et des applications pourrait nous éclairer sur ce que le(s) concepteur(s) souhaite(nt) développer chez les étudiants. La dimension verticale dans le travail de Charalambous et al. (2010) porte sur un concept bien défini alors que notre étude porte en général sur des ressources autour de la théorie des graphes, impliquant plusieurs concepts. Ainsi, nous nous intéressons aux connexions établies entre tous les concepts évoqués dans une ressource.

III.5.3- Prise en considération des niveaux macro et micro dans l'analyse des ressources numériques

Nous présentons dans cette partie les deux niveaux, macro et micro, que Pepin, Gueudet, Yerushalmy, Trouche et Chazan (2016) ont développés pour l'analyse de ressources numériques.

Pepin et al. (2016) examinent la qualité des manuels numériques intégrant, selon eux, les caractéristiques des manuels et des ressources en ligne. Leur analyse des manuels numériques porte sur les deux niveaux, macro et micro. Le niveau macro où le manuel est examiné « globalement » dans son ensemble correspond selon eux à une analyse horizontale du manuel. Et le niveau micro où le manuel est considéré comme un environnement pour construire la connaissance qui, selon eux, correspond à une analyse verticale du manuel.

Pour chacun des deux niveaux d'analyse, Pepin et al. (2016) définissent des critères qu'ils classent selon deux rubriques : connexions existantes, et connexions potentielles offertes par le manuel numérique.

En ce qui concerne le niveau macro, les auteurs s'intéressent aux connexions existantes entre les ressources fournies par le manuel numérique, et avec des ressources extérieures au manuel, ainsi qu'aux connexions entre les niveaux d'enseignement et avec le curriculum national du pays. Les auteurs s'intéressent aussi aux connexions potentielles reliant les utilisateurs et les utilisateurs (enseignants et élèves), ainsi que les utilisateurs et les concepteurs.

Pour la connectivité au niveau micro, Pepin et al. (2016) s'intéressent aux connexions existantes entre les différents sujets mathématiques et les différentes représentations sémiotiques (textes, figures, statiques et dynamiques), ainsi qu'aux connexions entre les différents logiciels pouvant être mobilisés pour effectuer une même fonction. Et finalement, les auteurs considèrent les connexions potentielles à ce niveau entre les différents concepts d'un même champ conceptuel (Vergnaud, 1991), entre les différentes stratégies de résolution des problèmes et entre les différents moments d'appropriation d'un concept donné (par exemple progression en spirale).

Nous nous intéressons particulièrement au niveau micro de l'analyse présenté par Pepin et al. (2016), étant donné que les critères présentés au niveau macro sont étroitement liés à la nature numérique des ressources qu'ils considèrent, ce qui n'est pas forcément le cas dans notre étude.

III.5.4- Développement de la notion de « connectivité » pour l'analyse des ressources numériques

Nous présentons dans cette partie la notion de « connectivité », développée par Gueudet et al. (2018), que nous considérons dans notre étude pour l'analyse des ressources conçues par les enseignants-chercheurs, ainsi que les critères que nous retenons pour notre travail.

Une étude, plus récente que les travaux susmentionnés, de Gueudet et al. (2018) s'inscrit dans le cadre de l'analyse des ressources *composites* pour l'enseignement, particulièrement les manuels scolaires numériques. Ils considèrent pour leur étude deux manuels numériques des mathématiques pour la classe de seconde. Gueudet et al. (2018) soulignent l'importance des connexions établies entre les concepts et les champs mathématiques et développent la notion de « connectivité » en s'appuyant sur des travaux antérieurs (Hiebert & Carpenter, 1992; Charalambous et al., 2010). Ils argumentent que les relations de natures différentes, dans/entre les contenus d'un manuel et parmi le manuel, les autres ressources, les utilisateurs et les concepteurs, peuvent constituer un élément de base pour l'analyse d'un manuel. Ainsi, Gueudet et al. (2018) définissent la notion de « connectivité » d'un manuel numérique comme étant la potentialité du manuel à présenter à un utilisateur, élève ou enseignant, des occasions à établir des relations à deux niveaux : pratique (relations avec d'autres ressources, avec et entre les concepteurs et les utilisateurs, etc.) et cognitif (relations entre les concepts et les notions mathématiques et avec l'évaluation, etc.). Ainsi, ils distinguent deux niveaux de « connectivité » qu'ils définissent de la façon suivante :

(a) La *connectivité au niveau macro* qui désigne le potentiel de relier les utilisateurs entre eux (enseignants et élèves), ou avec les concepteurs, et l'interaction du manuel avec d'autres ressources, via des liens web, ou sur des plateformes, par exemple. Cette connectivité au niveau macro pourrait inclure les connexions entre les différents niveaux scolaires, les connexions avec le curriculum national et avec d'autres disciplines, la connexion à un système d'évaluation et les connexions à d'autres ressources électroniques (fichiers à télécharger ou sites Web de différentes sortes), etc.

(b) La *connectivité au niveau micro* qui fait référence aux connexions effectuées à l'intérieur du manuel numérique. Elle concerne une notion mathématique particulière, et pourrait inclure : les connexions entre les différents concepts mathématiques ; les connexions entre les différentes représentations sémiotiques (par exemple, textes, figures, statiques et dynamiques) ; les connexions entre différents logiciels mobilisés pour effectuer une tâche particulière ; les relations entre les différentes stratégies de résolution d'un même problème et entre les différents moments d'appropriation d'un concept donné (par exemple, progression en spirale, approfondissement progressif d'un concept au lieu de proposer une présentation complète dans le même chapitre) ; la

connexion aux évaluations (concernant le contenu mathématique particulier étudié) ; les connexions avec les besoins divers des élèves.

Au niveau macro, les critères présentés par Gueudet et al. (2018) sont plus en lien avec la nature numérique des ressources qu'ils examinent, et, par conséquent, ne correspondent pas à notre objet d'étude. Nous considérons donc le concept de connectivité au niveau micro comme présenté par Gueudet et al. (2018). Cependant, nous ne prenons pas en compte la connexion aux évaluations concernant un contenu mathématique particulier étant donné qu'au supérieur, le mode et la fréquence des évaluations varient en fonction des différentes institutions. En outre, il est possible d'avoir accès à une ressource portant sur la théorie des graphes, sans forcément avoir accès aux évaluations. De plus, la prise en compte des besoins des étudiants est un critère qui est étroitement lié à la nature des ressources numériques, donc nous ne le prenons pas en considération dans notre travail.

III.5.5- Discussion

Nous rappelons dans cette partie le contexte de notre étude et présentons les éléments que nous retenons des travaux que nous avons exposés pour l'analyse de la « qualité » de ressources conçues pour l'enseignement. Dans la partie suivante, nous présentons les adaptations que nous apportons aux éléments retenus dans le contexte de notre étude.

Dans notre étude, nous nous intéressons à analyser des ressources conçues par des enseignants-chercheurs au supérieur pour l'enseignement de la théorie des graphes. Ces ressources peuvent être de natures diverses (ressources numériques, fichiers PDF, ressources en ligne, etc.) et elles peuvent être mobilisées pour/dans l'enseignement de la théorie des graphes dans divers parcours de formation. Des invariants opératoires à dominantes didactique, pédagogique, épistémologique, ou institutionnelle (§ III.1.5) pilotent les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources et justifient les choix que ces derniers effectuent dans la conception de leur enseignement et dans la mise en œuvre. Nous nous intéressons aux ressources produites par les enseignants-chercheurs, notamment aux formes de connectivité établies dans ces ressources (§ III.5.4), et à la façon dont les invariants opératoires des concepteurs pilotent leur conception. Nous estimons que la nature des connexions établies dans les ressources peut nous éclairer sur les formes de connexions potentielles que les enseignants-chercheurs souhaitent développer chez les étudiants et sur l'impact potentiel de leur activité de recherche sur leur enseignement. Ainsi, nous nous basons, pour notre analyse des ressources, sur la notion de « connectivité » comme elle a été introduite dans les travaux antérieurs (Charalambous et al., 2010; Pepin et al., 2016; Gueudet et al., 2018). Nous considérons la connectivité aux deux niveaux, micro et macro.

Au niveau macro, nous retenons les critères de l'analyse de la dimension horizontale de Charalambous et al. (2010) tout en les adaptant en fonction des particularités de notre étude. Ainsi, nous nous intéressons dans un premier temps à obtenir un aperçu descriptif de la ressource, savoir qui sont les concepteurs de la ressource, et dans quel contexte elle est conçue (travail collectif ou non, pour quel parcours de formation, etc.). Dans un second temps, nous nous intéressons à l'organisation d'une ressource, c'est-à-dire à l'organisation des contenus de la ressource en termes de la distribution des définitions, des théorèmes, des preuves, des exemples, des applications, et des exercices et problèmes, etc.

En ce qui concerne le niveau micro, nous nous intéressons aux connexions établies entre tous les concepts évoqués dans une ressource. Ainsi, nous nous intéressons particulièrement aux

connexions au niveau micro comme présentées par Gueudet et al. (2018). Nous citons en particulier les connexions entre : les différents concepts mathématiques ; les différentes représentations sémiotiques (par exemple, textes, figures, statiques et dynamiques) ; les différents logiciels pour effectuer une tâche particulière ; les différentes stratégies de résolution d'un même problème et les différents moments d'appropriation d'un concept donné.

Nous présentons dans la suite la notion de « connectivité » (Gueudet et al., 2018) telle que nous la considérons dans le contexte de notre travail (§ III.5.6). Nous commençons par un rappel du contexte de notre étude suivi par une présentation des adaptations que nous apportons aux critères retenus en fonction des spécificités de notre contexte d'étude.

III.5.6- La « connectivité » dans les ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes

Dans notre étude, nous nous intéressons à analyser des modules d'enseignement de la théorie des graphes conçus par des enseignants-chercheurs au supérieur. Nous nous intéressons à examiner la forme de connectivité développée par les enseignants-chercheurs dans la conception de leur enseignement, et la façon dont les invariants opératoires de ces derniers pilotent la conception des ressources pour l'enseignement. Il nous semble pertinent, dans le cadre d'une analyse des contenus des ressources récupérées, de mettre l'accent sur la capacité de ces ressources à développer chez les étudiants une compréhension des concepts mathématiques en question, donc, à leur permettre d'établir des connexions (Hiebert & Carpenter, 1992). Ainsi, nous mettons l'accent sur la potentialité d'une ressource donnée à présenter aux étudiants des situations qui leur permettent d'établir des connexions au niveau cognitif d'une part, et des connections pratiques en relation avec la filière d'étude d'une autre part.

Nous estimons que, pour une analyse de ces aspects des ressources, il serait pertinent de se baser sur la notion de « connectivité » comme elle a été introduite dans les travaux antérieurs (Charalambous et al., 2010; Pepin et al., 2016; Gueudet et al., 2018). De plus, nous soulignons que notre travail admet des particularités par rapport à ces études.

Nous considérons des ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes au supérieur. Ces ressources peuvent être conçues collectivement ou individuellement. Un enseignant-chercheur peut être en même temps concepteur et utilisateur d'une ressource, ou il peut mobiliser une ressource conçue par un pair. Finalement, ces ressources peuvent être de différentes natures, photocopiés, fichiers PDF, ressources numériques, etc.

Nous considérons pour l'analyse des ressources, dans le contexte de notre étude, les deux niveaux, macro et micro. Nous estimons que le niveau macro nous renseignera sur le contexte de conception de la ressource et sur la place de cette ressource dans le parcours de formation. Et le niveau micro nous renseignera sur les formes de connectivité potentielle établies au niveau des contenus de la ressource. Une description de la ressource, du contexte de sa conception, et de sa structure sont dans ce cas essentiels avant d'étudier les formes de connectivité potentielle établies dans la ressource.

En ce qui concerne l'aperçu descriptif de la ressource et le contexte de sa conception, nous nous intéressons à connaître la nature de la ressource à analyser (fichier PDF, ressource numérique, etc.), et le contexte dans lequel elle est conçue (travail collectif ou non, pour quel parcours de formation, etc.). En effet, dans la conception individuelle d'une ressource, les choix effectués peuvent refléter des intentions du concepteur et seraient pilotées par des invariants opératoires de

ce dernier. En outre, une ressource conçue collectivement peut refléter des invariants opératoires supposés partagés par les concepteurs. De plus, des conditions institutionnelles en lien avec le cursus de formation peuvent avoir une influence sur la conception individuelle ou collective d'une ressource. Il nous semble donc essentiel d'examiner le contexte de conception d'une ressource.

En ce qui concerne la structure de la ressource, nous nous intéressons à la fréquence des définitions, théorèmes, preuves, exemples, applications, exercices²⁴ et problèmes, etc. Nous estimons que le concepteur d'une ressource pourrait effectuer des choix différents en termes de nature des contenus et de leur organisation selon le contexte et les objectifs de mobilisation de la ressource. En effet, le type de formation peut influencer les objectifs d'un module donné (un module de théorie des graphes n'aurait pas forcément la même fonction dans une formation de mathématiciens et une formation d'ingénieurs), et les choix des contenus peuvent différer selon les objectifs du module. Ainsi, le type de formation peut avoir un impact sur la nature des contenus d'une ressource et sur leur organisation.

La prise en considération des deux critères précédents peut nous fournir un premier aperçu de la ressource : nature, contexte de conception et de mobilisation, et structure. Nous complétons cet aperçu général de la ressource par une adaptation de deux critères de connectivité au niveau macro avancés par Gueudet et al. (2018). Le premier est la « connexion au curriculum national ». Nous notons que, bien qu'il n'existe pas au supérieur un curriculum officiel qui définit les contenus à enseigner comme pour l'enseignement scolaire, il existe au sein des institutions des syllabus qui définissent les objectifs d'un module et/ou les contenus à aborder. Ainsi, nous nous intéressons à examiner les connexions qui existent entre une ressource conçue pour l'enseignement et les syllabus existant dans l'institution. Le second est la connexion à des sites internet ou à des ressources en ligne conçues ou non par le même concepteur. Nous pointons que les ressources que nous considérons dans notre étude peuvent être numériques ou non. En outre, des connexions peuvent être établies par le concepteur avec d'autres ressources à travers des notes renvoyant à des ouvrages ou des sites internet à consulter, la référence à des publications scientifiques, des fiches d'exercices supplémentaires, etc. Nous estimons que les connexions établies entre la ressource et des ressources qui lui sont extérieures peuvent nous éclairer sur les liens potentiels entre l'activité de recherche des enseignants-chercheurs concepteurs de la ressource et leurs pratiques d'enseignement, ainsi que sur la prise en considération du parcours de formation dans la conception de la ressource.

Dans la suite de notre travail, nous considérons les critères suivants pour la description du contexte de production d'une ressource, de sa composition et de sa connectivité potentielle au niveau macro :

- les connexions au syllabus fixé par l'institution ;
- et les connexions à des ressources extérieures (ouvrages à consulter, matériel supplémentaire fourni par le(s) concepteur(s), modules d'enseignement mobilisés dans le même parcours de formation, etc.).

Pour l'analyse des contenus d'une ressource au niveau micro, nous nous basons principalement sur les critères développés par Gueudet et al. (2018) que nous avons retenus dans le paragraphe

²⁴ Nous désignons par exercices/problèmes les situations dans le module qui requièrent une solution. Dans les ressources que nous considérons dans notre travail, nous nous limitons à la dénomination effectuée par les concepteurs des ressources à de telles situations et nous désignons par exercices les entités que les concepteurs appellent « exercices », et par problèmes les entités que les concepteurs appellent « problèmes ».

III.5.4. Nous proposons quelques adaptations à ces critères en fonction de notre objet d'étude. Notre travail porte particulièrement sur l'enseignement de la théorie des graphes au supérieur qui, d'après notre consultation des ouvrages destinés pour l'enseignement (§ II.5), admet plusieurs particularités, et un large spectre de choix en termes de contenus et de leur organisation. Ainsi, nous nous intéressons aux concepts mobilisés dans une ressource et aux connexions établies entre eux. Nous nous intéressons, de même, aux différents moments d'appropriation d'un même concept (sollicitation d'un même concept dans des définitions, des exemples, des exercices, etc.). Nous estimons qu'une analyse des différentes façons dont des concepts donnés sont mis en relation et des différents moments où un concept donné est mobilisé peut nous éclairer sur des représentations des enseignants-chercheurs concepteurs des ressources en lien avec la nature de la théorie des graphes et son enseignement (les concepts sur lesquels il faut mettre l'accent, la façon de présenter les concepts dans une ressource conçue pour l'enseignement afin de développer chez les étudiants une compréhension de ces concepts, etc.). Cela peut nous renseigner en plus sur la place accordée par le concepteur à l'activité de preuve, aux exemples et aux applications, aux exercices d'entraînement et aux problèmes.

Nous portons aussi une attention particulière à la capacité de cette ressource à promouvoir chez les étudiants une compréhension approfondie des notions mathématiques, donc au nombre et à la force des connexions établies entre les notions mathématiques de la ressource (Hiebert & Carpenter, 1992). Selon Hiebert et Carpenter (1992), les représentations mentales sont étroitement liées aux formes de représentations quand elles sont externalisées, et établir des connexions entre ces dernières pourrait contribuer à développer les connexions entre les représentations mentales. Ainsi, nous nous intéressons aux représentations sémiotiques mobilisées dans une ressource, c'est-à-dire aux registres de représentation sémiotique mobilisés (formel, par graphe, par matrice, par langage naturel et par tableau) (Duval, 1993). De plus, nous soulignons que le travail dans un seul registre ne permet pas d'accéder aux concepts. Selon Duval (1993), il est fondamental, pour développer des représentations mentales d'un concept, de pouvoir traiter des représentations dans un registre sémiotique donné, ainsi que convertir des représentations d'un registre sémiotique à un autre. Ainsi, nous portons une attention particulière aux registres de représentation sémiotique mobilisés ainsi qu'aux activités cognitives sollicitées (représentation, traitement et conversion). Il convient ici de mentionner que notre consultation des ouvrages (§ II.5) montre une mobilisation de différents registres de représentation sémiotique et une sollicitation des trois activités cognitives, représentation, traitement et conversion. Bien que cela ne concerne pas juste la théorie des graphes et reste vrai pour d'autres domaines mathématiques, nous nous permettons de mettre l'accent sur le fait que les registres de représentation par langage naturel et par graphe étaient souvent mobilisés plus que le registre formel dans les ouvrages que nous avons consultés (§ II.5), ce qui nous semble peut-être une particularité de ce domaine mathématique.

Par ailleurs, la théorie des graphes admet des liens avec d'autres domaines mathématiques, et permet de représenter ou de modéliser des situations issues de la vie réelle, ainsi que des situations issues d'autres disciplines, l'informatique à titre d'exemple (§ II.2). En France comme au Liban, la théorie des graphes est enseignée dans plusieurs parcours de formation (mathématiques, informatique, mathématiques-informatique, génie industrielle, etc.) (§ II.2). Une analyse des connexions établies avec les autres domaines mathématiques, les autres disciplines, et la vie réelle peut nous permettre de cerner l'influence du contexte institutionnel (parcours de formation en particulier) sur la conception des ressources pour l'enseignement. Aussi, elle peut nous éclairer sur l'influence potentielle de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs concepteurs des ressources sur la conception de leur enseignement (particulièrement dans les cas où il existe une

tension entre le rapport personnel des enseignants-chercheurs à la théorie des graphes dans les deux institutions, enseignement et recherche).

D'après notre consultation des ouvrages (§ II.5), les algorithmes, si mobilisés dans une ressource portant sur la théorie des graphes, peuvent être implémentés sans passage à un environnement de programmation. En outre, ils peuvent solliciter un environnement de programmation particulier pour leur mise en exécution ou un environnement papier/crayon. Ainsi, nous nous intéressons à examiner les connexions existant entre les logiciels sollicités pour la mise en exécution des algorithmes, le cas échéant. Cela nous informera sur le rôle et la place des outils technologiques et des logiciels dans la conception de la ressource.

Enfin, nous estimons que les choix des exercices d'entraînement et d'application et des problèmes mobilisés dans une ressource peuvent refléter certaines intentions des enseignants-chercheurs concepteurs de la ressource. Par exemple, mobiliser un grand nombre d'exercices d'entraînement et d'application pourrait refléter une priorité accordée à acquérir une fluidité procédurale aux étudiants. En outre, inclure des problèmes avec lesquels les étudiants ne sont pas familiers, qui demandent une réflexion de la part de ces derniers pourrait refléter une intention des concepteurs à développer chez les étudiants une compréhension des concepts et des prises d'initiatives. Ainsi, nous nous intéressons à examiner les demandes cognitives potentielles dans les exercices d'entraînement et d'application et dans les problèmes, ainsi que l'existence de différentes stratégies pour la résolution des exercices et des problèmes proposés. Nous estimons que cela nous permettra aussi d'inférer l'importance que les enseignants-chercheurs concepteurs des ressources accordent à l'activité de preuve et de raisonnement (une classification des types de preuves et de raisonnement mobilisés est au-delà de la portée de notre travail).

Nous présentons ci-dessous les critères que nous considérons pour l'analyse de la connectivité potentielle d'une ressource au niveau micro. Nous soulignons que ces critères ne sont pas spécifiques à la théorie des graphes, et peuvent être mobilisés pour l'analyse des contenus dans d'autres domaines mathématiques. Cependant, ils peuvent bien nous renseigner sur des formes de connectivité établies dans la ressource étroitement liées au domaine mathématique en question.

- connectivité en termes de concepts mobilisés ;
- connectivité en termes de registres de représentation sémiotique mobilisés et d'activités cognitives sollicitées (représentation, traitement et conversion) ;
- connectivité en termes de différents moments d'appropriation d'un même concept (dans des définitions, des exemples, des exercices, etc.) ;
- les connexions à d'autres domaines mathématiques ;
- les connexions à des situations authentiques ou à des situations issues de la vie réelle ;
- les connexions à des situations issues d'autres disciplines ;
- connectivité en fonction des logiciels mobilisés, le cas échéant (au cas où des algorithmes sont mobilisés dans la ressource et des logiciels sont sollicités pour les résoudre) ;
- les variations d'un même exercice ;
- les différentes stratégies de résolution d'un même exercice/problème ;
- les demandes cognitives potentielles dans les exercices d'entraînement et d'application et dans les problèmes.

Dans la suite (§ III.6), nous présentons une synthèse de la construction théorique développée dans ce chapitre. Nous présentons ensuite les questions de recherche définies à l'éclairage de cette construction théorique.

III.6- Conclusion et reformulation des questions de recherche

Nous retenons une définition large de la notion de ressources qui englobe les ressources matérielles et les ressources non-matérielles (§ III.4.3). Une ressource conçue par un enseignant-chercheur, pour l'enseignement d'un contenu donné à un public d'étudiants, incarne des invariants opératoires de cet enseignant-chercheur (§ III.2.2). Ces invariants opératoires peuvent être à dominante didactique, épistémologique, ou institutionnelle (§ III.1.5). Ils peuvent concerner les spécificités des contenus à enseigner et les enjeux de leur enseignement, et les conditions et les contraintes institutionnelles à prendre en compte (§ III.1.5). Et dans le cas d'une conception collective, la ressource peut refléter des invariants opératoires supposés partagés par les concepteurs en lien avec les mathématiques ou avec des aspects pédagogiques. Nous estimons qu'une analyse des invariants opératoires qui pilotent la conception d'une ressource pour l'enseignement peut nous donner un premier accès à la compréhension des pratiques de(s) l'enseignant(s)-chercheur(s) concepteur(s) de cette ressource et des différents facteurs qui les influencent. Ces facteurs peuvent aussi être en lien avec le(s) rapport(s) personnel(s) de cet (ces) enseignant(s)-chercheur(s) au contenu à enseigner, ses (leurs) conceptions concernant les besoins des étudiants dans un parcours de formation donné et leurs difficultés potentielles, et les conditions et les contraintes institutionnelles à respecter.

Nous considérons qu'un enseignant-chercheur, dans la conception d'une ressource pour l'enseignement, participe à développer chez les étudiants, une compréhension d'un contenu mathématique donné. La compréhension du contenu mathématique exposé dans la ressource par les étudiants est liée aux connexions pouvant être établies à l'échelle cognitive, entre les différentes représentations, les différentes situations, etc. (Hiebert & Carpenter, 1992). Ainsi, nous considérons que la caractérisation des connexions, au niveau cognitif, établies dans une ressource peut nous éclairer sur ce que l'enseignant-chercheur, concepteur de la ressource, souhaite potentiellement développer chez les étudiants utilisateurs de la ressource (§ III.5.4).

Ainsi, nous affinons nos questions de recherche en regard de la construction théorique proposée. Nous présentons les questions de recherche redéfinies ci-dessous :

- Q1 : Comment les schèmes des enseignants-chercheurs (chercheurs en théorie des graphes) guident-ils leurs interactions avec les ressources dans/pour l'enseignement de la théorie des graphes ?
- Q2 : Dans quelle mesure le contexte institutionnel dans lequel un enseignant-chercheur enseigne influence-t-il ses interactions avec les ressources dans/pour l'enseignement de la théorie des graphes ?
- Q3 : Comment peut-on caractériser, par le prisme de la conception et l'usage des ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes, l'influence de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs sur leur enseignement dans ce même champ ?

Nous présentons dans le chapitre suivant une méthodologie de recherche que nous avons élaborée afin de nous permettre de répondre aux questions de recherche précédentes.

Chapitre IV- Méthodologie et analyse des données

Afin de pouvoir apporter des éléments de réponse à nos questions de recherche, nous mettons en place une méthodologie de recueil de données et d'analyse formée de trois volets complémentaires :

- un volet qui porte sur dix entretiens avec des enseignants-chercheurs qui enseignent la théorie des graphes dans différents parcours de formation (§ IV.1) ;
- un volet qui porte sur une analyse des ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes conçues collectivement par des enseignants-chercheurs interviewés (§ IV.2) ;
- un volet qui porte sur un suivi d'une enseignante-chercheure qui est l'une des concepteurs des ressources analysées (§ IV.3).

Le premier volet (§ IV.1) porte sur une méthodologie de recueil de données et d'analyse d'entretiens réalisés avec des enseignants-chercheurs, chercheurs en théorie des graphes, et qui enseignent la théorie des graphes dans différents parcours de formation universitaires. L'analyse des entretiens nous permet d'apporter des premiers éléments de réponse aux questions de recherche Q1 et Q2 en lien avec la façon dont les schèmes guident les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources dans/pour leur enseignement. Elle nous permet aussi de caractériser les choix que les enseignants-chercheurs effectuent dans leur enseignement en termes de contenus et de leur organisation ainsi que l'influence des conditions et des contraintes institutionnelles sur ces choix. Le second volet (§ IV.2) consiste en une analyse des ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes conçues collectivement par des enseignants-chercheurs interviewés. Une étude des formes de connectivité établies dans le module nous permet de caractériser la façon dont les concepteurs mettent en œuvre les choix énoncés lors des entretiens et ainsi d'apporter des premiers éléments de réponses à la troisième question Q3. Le troisième volet (§ IV.3) porte sur la mise en place d'une méthodologie de suivi d'une enseignante-chercheure, qui est l'une des enseignants-chercheurs interviewés, concepteurs des ressources analysées. Ce suivi consiste en une observation de trois séances de classe, dont cours et TDs, et de deux entretiens qui ont eu lieu avant et après les observations. Ces observations de classe nous permettent de caractériser des formes d'usage individuel des ressources conçues collectivement et d'apporter ainsi des compléments aux éléments de réponse à la troisième question de recherche.

IV.1- Analyse des entretiens

Cette partie porte sur une analyse d'entretiens avec des enseignants-chercheurs, chercheurs en théorie des graphes. Nous commençons par présenter notre méthodologie de recueil de données pour les entretiens (§ IV.1.1) et notre méthodologie d'analyse des données recueillies (§ IV.1.2). Nous présentons ensuite nos éléments de synthèse (§ IV.1.3).

IV.1.1- Méthodologie de recueil de données

Nous présentons dans cette partie notre méthodologie de recueil de données pour la première étape de l'analyse.

Comme une étude exploratoire, notre méthodologie prend appui sur des entretiens avec des enseignants-chercheurs, chercheurs en théorie des graphes. Nous avons considéré pour notre étude le cas des mathématiciens au Liban et en France. Les entretiens, d'à peu près 90 minutes, ont eu lieu dans les lieux de travail des enseignants-chercheurs libanais afin de pouvoir accéder à leurs ressources ; pour les enseignants-chercheurs en France, les entretiens ont eu lieu via Skype. Nous

avons élaboré une grille d’entretien (§ IV.1.1.3) dans le but de caractériser les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources diverses issues de leur enseignement et de leur recherche. Nous avons demandé, lors des entretiens, l’ensemble des ressources citées et disponibles afin de pouvoir comparer les contenus de ces ressources aux résultats de nos analyses pour les affiner. Nous avons enregistré et transcrit les entretiens.

Nous notons que des travaux existent (Gueudet, 2017; González-Martin et al., 2018) qui analysent les interactions des enseignants avec les ressources au supérieur dans des contextes institutionnels bien déterminés. Bien que nous nous intéressons aux interactions avec les ressources dans les pratiques d’enseignement au supérieur, notre travail présente des particularités par rapport à ces travaux existants ; nos participants sont des enseignants-chercheurs dans le domaine de la théorie des graphes qui enseignent dans différents parcours de formation, et nous cherchons à étudier l’influence de leur activité de recherche sur leurs pratiques d’enseignement, aussi bien que l’impact du contexte institutionnel sur ces pratiques.

Ainsi, nous commençons par présenter les profils des enseignants-chercheurs interviewés (§ IV.1.1.1). Nous exposons dans la suite (§ IV.1.1.2) les fondements théoriques sur lesquels se sont basés Gueudet (2017) et González-Martin et al. (2018) pour la conception de leurs guides d’entretien. Ensuite, nous présentons (§ IV.1.1.3) le guide d’entretien que nous avons conçu pour le recueil de données afin de nous permettre d’avoir des éléments de réponses à nos deux questions de recherche Q1 et Q2. L’objectif principal étant de caractériser les interactions des enseignants-chercheurs en théorie des graphes avec diverses ressources, issues de leurs pratiques d’enseignement et de leur activité de recherche.

IV.1.1.1- Le choix des interviewés et leurs profils

Nous avons réalisé dix entretiens avec des enseignants-chercheurs, chercheurs en théorie des graphes, ayant fait leurs études doctorales en France ou en cotutelle entre le Liban et la France, et qui enseignent la théorie des graphes dans différents parcours de formation en France ou au Liban.

Nous présentons dans le tableau 4 ci-dessous les profils des enseignants-chercheurs interviewés, leur domaine de recherche, le nombre d’années d’expérience en recherche et en enseignement, les parcours de formation dans lesquels ils enseignent et les modules enseignés, ainsi que leur pays d’exercice. Dans le cas où un module est optionnel et transversal à plusieurs parcours de formation, nous l’avons indiqué dans le tableau. Nous conservons l’anonymat des enseignants-chercheurs interviewés. Nous allons les désigner par des codes de deux lettres.

	Nombre d’années d’expérience	Domaine de recherche	de Modules enseignés et parcours de formation	Pays d’études doctorales	Pays d’exercice
FT homme	Recherche 25 ans	Théorie des graphes	Jeux combinatoires et raisonnements mathématiques (module optionnel, L1 et L2)	France	France
	Enseignement 24 ans		Codes et combinatoire algébrique (M2 en Recherche Opérationnelle, Combinatoire et Optimisation)		

LB homme	Recherche 24 ans Enseignement 21 ans	Théorie des graphes	Parcours de formation en mathématiques Relations binaires (L1) Mathématiques discrètes (L2) Théorie des graphes (M1)	France	Liban
LQ femme	Recherche 9 ans Enseignement 5 ans	Théorie des graphes	Parcours de formation en mathématiques Mathématiques discrètes (L2) Théorie des graphes (M1) Parcours de formation en mathématiques appliquées Théorie des graphes (Licence)	Cotutelle entre le Liban et la France	Liban
LT homme	Recherche 9 ans Enseignement 6 ans	Théorie des graphes	Parcours de formation en mathématiques Mathématiques discrètes (Licence)	Cotutelle entre le Liban et la France	Liban
LK homme	Recherche 26 ans Enseignement 20 ans	Recherche opérationnelle	Parcours de formation en informatique et en statistiques Théorie des graphes (L2) Parcours de formation en statistiques Recherche opérationnelle (L3) Parcours de formation en informatique Recherche opérationnelle (L2)	France	Liban
LX homme	Recherche 9 ans Enseignement 16 ans	Modélisation (modélisation graphique, système de systèmes)	Parcours d'informatique de gestion Recherche opérationnelle (Licence) Parcours de formation en informatique Mathématiques discrètes (L1)	France	Liban

LN femme	Recherche 11 ans Enseignement 9 ans	Théorie des graphes	Parcours de formation en mathématiques Relations binaires (L1) Mathématiques discrètes (L2) Théorie des graphes (M1)	Cotutelle entre le Liban et la France	Liban
FO femme	Recherche 18 ans Enseignement 21 ans	Recherche opérationnelle et optimisation combinatoire	Parcours de formation en gestion des entreprises et des administrations Recherche opérationnelle Parcours de formation en maths info Graphes, optimisation, et informatique (L3) Parcours de formation en informatique et en mathématiques appliquées Graphes, optimisation, et informatique (M1 et M2)	France	France
FF homme	Recherche 15 ans Enseignement 10 ans	Jeux combinatoires, graphes (problèmes de coloration, de plongement, et d'identification), et intelligence artificielle pour les jeux	Parcours de formation en informatique Optimisation et recherche opérationnelle (M1)	France	France
FK homme	Recherche 16 ans Enseignement 12 ans	Théorie des graphes et optimisation discrète	Modélisation et résolution de problèmes d'optimisation (Institut Universitaire de Technologie IUT, Bac+1 et Bac+2) Recherche opérationnelle (Institut Universitaire de Technologie IUT, Bac+1 et Bac+2) Parcours d'ingénieurs Recherche opérationnelle (M1)	France	France

Tableau 4 : tableau montrant les profils des enseignants-chercheurs interviewés, que nous avons élaboré en 2018

Nous soulignons que trois des enseignants-chercheurs interviewés au Liban (LB, LQ et LN) enseignent un même module de mathématiques discrètes en L2 et un module de théorie des graphes en Master dans un parcours de formation en mathématiques dans différents sites de l'université libanaise. En outre, le tableau 4 ci-dessus montre que les enseignants-chercheurs que nous avons interviewés font des recherches en théorie des graphes ou des recherches qui portent sur des applications de la théorie des graphes dans des contextes d'optimisation, de jeux combinatoires, etc. De plus, les dix enseignants-chercheurs enseignent la théorie des graphes dans divers parcours de formation (mathématiques, gestion des entreprises et des administrations, informatique, parcours d'ingénieurs, etc.).

Nous présentons, dans ce qui suit, la grille que nous avons élaborée pour les entretiens (§ IV.1.1.3). Nous pointons qu'avant d'élaborer notre grille d'entretien, nous avons consulté des guides d'entretien dans des travaux qui s'intéressent à caractériser les interactions des enseignants avec les ressources au supérieur et qui se basent sur des entretiens. Ainsi, nous commençons par présenter les contextes d'élaboration des guides d'entretien dans ces travaux et les fondements théoriques de leur élaboration.

IV.1.1.2- Point de départ : des grilles d'entretien dans des travaux existants

Les études de Gueudet (2017) et de González-Martín et al. (2018) prennent appui sur des méthodologies d'entretiens avec des enseignants au supérieur.

Gueudet (2017) a mené des entretiens avec des enseignants-chercheurs qui enseignent des modules dans différents domaines mathématiques (analyse, algèbre, théorie des nombres, etc.) et qui ont des postes différents au sein de l'université (doctorants qui enseignent des cours ou des TDs, enseignants expérimentés, etc.). Ses questions ont porté sur les ressources mobilisées et utilisées pour l'enseignement à différents moments (conférences, TDs, préparation des évaluations, expérimentations avec ordinateurs, etc.), les modifications apportées aux ressources et les raisons pour lesquelles elles ont été modifiées le cas échéant. D'autres questions ont porté sur l'usage des ressources numériques, le travail collectif et le transfert des ressources issues de l'activité de recherche dans l'enseignement. Gueudet (2017) a appuyé les résultats des analyses des entretiens par des analyses des ressources conçues et mobilisées par les enseignants-chercheurs dans leur enseignement. Bien qu'elle reconnaisse l'impact possible de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs sur leurs activités d'enseignement, elle n'a pas pris cet aspect particulièrement en considération dans son étude.

González-Martín et al. (2018) ont mené des entretiens avec 5 enseignants volontaires, ayant des profils divers en termes de leur formation, et qui mobilisent le même ouvrage dans leur enseignement. L'objectif des entretiens était d'identifier les caractéristiques principales des rapports personnels des enseignants aux séries numériques et à leur enseignement - et d'explorer les liens pouvant exister entre ces caractéristiques et la manière dont les enseignants utilisent cet ouvrage dans leur enseignement. González-Martín, Nardi, et Biza avaient conduit, en 2011, un travail qui porte sur l'analyse de l'introduction des séries numériques dans cet ouvrage en particulier. Ils ont étudié spécifiquement la mobilisation des applications, des exercices, et des problèmes, l'utilisation de la visualisation et la prise en considération (ou non) des difficultés potentielles des étudiants dans ces ouvrages (González-Martín et al., 2011). Ainsi, González-Martín et al. en 2018 se sont appuyés sur leur travail antérieur dans l'élaboration du guide d'entretien. En tenant compte des principaux éléments identifiés par leurs analyses de 2011, ils ont conçu une grille d'entretien qui comporte 28 questions. Les questions ont porté sur l'introduction du thème mathématique, l'utilisation des exemples et des applications, l'utilisation

de la visualisation, les activités qui soutiennent l'apprentissage des séries, les éléments clés pour l'apprentissage des séries, les difficultés des étudiants (qui peuvent être en lien avec les séries particulièrement) et leur prise en compte dans l'enseignement, et la façon dont les participants auraient préféré idéalement enseigner les séries.

González-Martín et al. (2018) déclarent avoir conçu le guide des entretiens en gardant à l'esprit les six moments didactiques de l'étude de Chevallard (1998) : la première rencontre avec la notion des séries ; l'exploration d'un type de tâches et de l'élaboration d'une technique relative à ce type de tâches ; la constitution des fondements théoriques (technologies) par rapport à ces techniques ; le travail de la technique ; l'institutionnalisation ; et l'évaluation.

Notre travail admet des points de convergence avec les deux études présentées ci-dessus : nous nous intéressons, en effet, à l'analyse des interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources dans leurs activités d'enseignement. Cependant, nous soulignons que notre étude admet des particularités par rapport aux deux études présentées précédemment. Nous considérons le cas des enseignants-chercheurs, donc nous nous intéressons aux ressources qui peuvent provenir de leurs pratiques d'enseignement et/ou de leur activité de recherche. En outre, ils sont tous chercheurs en théorie des graphes, qui est un champ contemporain avec une importance épistémologique et dont les contenus dans l'enseignement supérieur ne sont pas complètement naturalisés (§ II.2). Par ailleurs, nos interviewés présentent des disparités au niveau de leur domaine de spécialité en recherche, le nombre d'années d'expérience, etc. Aussi, ils enseignent dans divers parcours de formations et différents contextes institutionnels. Nous faisons l'hypothèse que cela peut nous permettre de mieux cerner l'impact des conditions et des contraintes institutionnelles sur les pratiques d'enseignement des enseignants-chercheurs, ainsi que l'influence potentielle de leur activité de recherche sur leur enseignement.

IV.1.1.3- Présentation et analyse des questions dans la grille d'entretien

Notre grille d'entretien (cf. annexe 2) est composée de deux parties : une première partie qui porte sur le profil des enseignants-chercheurs et leur activité de recherche ; et une deuxième partie qui porte sur leurs pratiques d'enseignement.

Dans la première partie, les questions concernent le profil des interviewés, leurs années d'expérience en enseignement et en recherche, les modules qu'ils enseignent, leur statut au sein des deux institutions, enseignement et recherche, etc. et la représentation qu'ils ont développée des mathématiques discrètes dans leur activité de recherche. Nous exposons les questions ci-dessous :

- 1- Comment définissez-vous le champ de mathématiques discrètes ? Qu'entendez-vous par « mathématiques discrètes » ?
- 2- Comment concevez-vous l'activité de preuve en mathématiques discrètes ?
- 3- Quels sont la place et le rôle du travail de la modélisation en mathématiques discrètes ?
- 4- Comment caractérisez-vous le lien entre les mathématiques discrètes et les autres disciplines ?

Nous estimons que ces questions peuvent nous permettre d'identifier les particularités des mathématiques discrètes du point de vue des enseignants-chercheurs interviewés. Elles peuvent nous permettre aussi de cerner des éléments de leur rapport personnel aux mathématiques discrètes, donc des invariants opératoires en lien avec les contenus mathématiques en question. Ces invariants opératoires peuvent guider des règles d'action dans différentes classes de situations

telles que « la conception et la mise en œuvre d'une séance de cours », « la conception et la mise en œuvre de la planification de l'enseignement », etc.

Nous avons mis davantage l'accent sur les questions qui portent sur les activités d'enseignement et les interactions avec les ressources à différents moments de ces activités. Nous présenterons ci-dessous une liste des questions dans la grille, et nous discuterons, pour chaque question, l'intérêt *a priori* qu'elle peut avoir pour notre analyse :

1- De quelle manière élaborerez-vous les contenus d'enseignement ?

Les choix des contenus (cours, TDs et évaluations) peuvent nous donner un aperçu des différentes règles d'action et des invariants opératoires correspondants aux différentes classes de situations en relation avec la préparation des cours, des TDs et des évaluations. Nous citons à titre d'exemples :

- la pondération des cours et des TDs qui peut nous permettre de savoir si l'enseignant-chercheur souhaite développer chez les étudiants des savoir-faire ou transférer des savoirs ;
- les modifications qu'un enseignant-chercheur apporte à un module d'enseignement qui peuvent nous permettre d'identifier la dynamique dans le temps afin d'inférer des règles d'action ;
- savoir si les choix des contenus sont des choix personnels ou des choix au niveau du département peut nous informer sur la place de la dimension collective.

Cette question peut aussi nous permettre d'identifier la nature des liens qui existent entre l'activité de recherche et les activités d'enseignement d'un enseignant-chercheur. Par exemple, l'intégration dans l'enseignement de contenus issus de l'activité de recherche indique l'existence d'un lien explicite entre l'enseignement et la recherche.

2- Etant un chercheur, est-ce que vous sentez que les recherches que vous faites ont une influence sur les contenus que vous enseignez en classe ?

Cette question peut nous informer sur le rapport personnel des enseignants-chercheurs aux mathématiques discrètes, et donc nous permettre d'identifier des invariants opératoires à dominante épistémologique qui peuvent guider leurs choix et leurs actions dans leurs pratiques d'enseignement. Cela peut être au niveau des choix qu'ils effectuent dans la conception et dans la mise en œuvre de leur enseignement aussi bien que dans les interactions avec les ressources. Nous notons aussi que cette question pourrait nous informer sur l'existence de ressources communes mobilisées dans l'enseignement et dans la recherche (même si elles ne sont pas mobilisées de la même manière).

3- Quelles sont les principales ressources que vous utilisez pour votre enseignement ?

Nous faisons l'hypothèse qu'en citant les ressources qu'ils mobilisent dans leur enseignement, les enseignants-chercheurs peuvent évoquer les classes de situations dans lesquelles ils les mobilisent, voire les sous-buts en lien avec leurs interactions avec ces ressources. En effet, à chaque fois que l'interviewé évoque une expression de la forme « j'utilise cette ressource pour... », nous pourrions identifier un nouveau but ou sous-but. En outre, cette question peut nous donner une vision panoramique des ressources sélectionnées, mobilisées et utilisées dans les différentes classes de situations (préparation de cours et de TDs, évaluation) ; nous estimons que le type et la nature des ressources sélectionnées et utilisées (ressources issues de la recherche ou de l'enseignement) peuvent nous renseigner sur les relations entre l'activité de recherche et les pratiques d'enseignement des interviewés. En effet, pour concevoir des ressources pour leur enseignement

des mathématiques discrètes, les enseignants-chercheurs peuvent sélectionner et/ou adapter des ressources issues de leur activité de recherche.

- 4- Pourriez-vous présenter une ressource que vous avez produite et que vous considérez importante pour l'enseignement des mathématiques discrètes ?

Nous estimons qu'un recueil de ressources est essentiel pour nos analyses. D'une part, l'analyse des contenus des ressources permet de supporter les déclarations des enseignants-chercheurs lors des entretiens ; et d'autre part, cette analyse peut nous permettre d'inférer des éléments afin d'analyser les manières dont les enseignants-chercheurs interagissent avec les diverses ressources d'une manière plus approfondie et d'identifier des liens qui existent entre leurs pratiques d'enseignement et leur activité de recherche (peut être au niveau des choix des contenus effectués, de la nature de la ressource et de sa provenance, etc.). Cette question peut également nous donner accès à un exemple précis et donc, elle offre un potentiel d'analyse des composantes d'un (ou de plusieurs) schème(s) des enseignants-chercheurs interviewés d'une manière plus fine.

- 5- En tant qu'enseignant, rencontrez-vous des difficultés, ou au contraire, des facilités dans l'enseignement des contenus en rapport avec les mathématiques discrètes ? Quel est le comportement des étudiants quand vous enseignez des contenus en relation avec les mathématiques discrètes ?

Les mathématiques discrètes, et en particulier la théorie des graphes, présentent plusieurs particularités, au niveau des prérequis pour le cours et au niveau des champs d'application (§ I.3). La plupart des enseignants-chercheurs que nous avons interviewés enseignent un module de mathématiques discrètes (particulièrement la théorie des graphes) à des étudiants qui ne les avaient jamais rencontrées auparavant. Donc, pour la plupart, ces enseignants-chercheurs introduisent ce domaine mathématique pour la première fois aux étudiants. Les réactions des étudiants face à ce nouveau domaine mathématique peuvent guider les règles d'action des enseignants-chercheurs au niveau de la conception de leur enseignement ou de sa mise en œuvre, et par la suite, ces réactions peuvent constituer des ressources non-matérielles pour ces enseignants-chercheurs, ou même générer des invariants opératoires qui influencent leurs règles d'action.

- 6- Pourriez-vous décrire la place de l'activité de preuve dans votre enseignement des mathématiques discrètes ?

Cette question peut nous permettre de mettre en perspective le rapport personnel de l'enseignant-chercheur à la preuve qu'il a construit dans son expérience personnelle et son activité de recherche, et la manière dont il conçoit les preuves dans son enseignement. Ainsi, elle peut nous permettre d'identifier des règles d'action et des invariants opératoires qui influencent la mise en œuvre de l'activité de preuve dans son enseignement.

- 7- Dans votre enseignement des objets discrets, est-ce que vous faites des liens avec d'autres disciplines ou d'autres domaines mathématiques dans les cours et les TDs proposés ? Quels sont la place et le rôle du travail de modélisation dans votre enseignement des mathématiques discrètes ? Donnez des exemples.

Les mathématiques discrètes, et en particulier la théorie des graphes, permettent de modéliser des situations issues de plusieurs disciplines comme la physique, l'informatique, le génie industriel etc. et de résoudre des problèmes issus de situations de la vie réelle (§ I.3). Savoir si ces types de problèmes sont travaillés avec les étudiants peut nous permettre de savoir quels liens existent entre les activités de recherche et d'enseignement des enseignants-chercheurs, et d'analyser l'impact du

parcours de formation sur les choix des contenus et des ressources sélectionnées, utilisées, mobilisées et/ou produites par les enseignants-chercheurs dans/pour leur enseignement.

8- Quelles conditions et contraintes interviennent dans l'élaboration et la mise en œuvre de vos cours et de vos TDs ?

Cette question peut nous permettre en premier lieu d'identifier les institutions à considérer pour l'enseignant-chercheur interviewé. Les conditions et les contraintes institutionnelles peuvent impacter les choix des ressources avec lesquelles interagissent les enseignants-chercheurs. Par exemple, le type de formation peut influencer le choix des problèmes donnés en classe et l'usage des logiciels, etc. de même, l'étude des conditions et contraintes institutionnelles (liées à l'institution d'enseignement ou à l'institution de recherche) peut contribuer à inférer des invariants opératoires qui guident les actions des enseignants-chercheurs et à caractériser l'impact de leur recherche sur leur enseignement.

9- Comment évaluez-vous les étudiants et sur quoi ?

L'évaluation est essentielle dans tout enseignement, en effet, « concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation » est une classe de situations (§ III.4.4) pouvant regrouper plusieurs sous-butts tels que la conception des questions pour une évaluation écrite, ou l'attribution des notes aux différents moments de l'évaluation, etc. Ainsi, cette question peut nous permettre de repérer les règles d'action des enseignants-chercheurs dans la conception des évaluations et dans leur mise en œuvre, aussi bien que les invariants opératoires qui guident ces règles d'action. En outre, les invariants opératoires en lien avec l'évaluation peuvent nous donner accès à la façon dont les enseignants-chercheurs perçoivent l'enseignement, et à des conditions et des contraintes institutionnelles qui potentiellement peuvent impacter la conception et la mise en œuvre de l'évaluation.

10- Pourriez-vous décrire la place de la dimension expérimentale dans les mathématiques que vous enseignez ? Utilisez-vous la salle informatique et/ou d'autres objets matériels ?

Les mathématiques discrètes, particulièrement la théorie des graphes, est un domaine où l'expérimentation peut jouer un rôle important, dans la recherche et dans l'enseignement (§ I.3). Dans l'activité de recherche, des logiciels peuvent être utilisés pour tester des conjectures et valider des résultats ; des ressources matérielles comme les jeux permettent d'expérimenter sur les petits cas et donc contribuer à l'appropriation du problème par le chercheur (Broley, 2016). Un enseignant-chercheur peut mobiliser, adapter ou transformer des ressources issues de son activité de recherche, en théorie des graphes, dans la conception de situations pour l'enseignement. L'intégration (ou non) de ces ressources en classe et le rôle qu'elles jouent dans l'enseignement peuvent nous informer sur la nature des liens existants entre les pratiques d'enseignement et l'activité de recherche d'un enseignant-chercheur.

11- Faites-vous partie d'un groupement de chercheurs ou d'enseignants ?

La collaboration avec les collègues dans les différentes classes de situations (conception et mise en œuvre de la planification de l'enseignement, conception et mise en œuvre des moments d'évaluation, etc.) (§ III.4.4) peut nous permettre de cerner l'impact de l'appartenance des enseignants-chercheurs à des collectifs sur les choix qu'ils effectuent dans la conception de leur enseignement et dans sa mise en œuvre.

Nous estimons que les réponses des enseignants-chercheurs à nos questions lors des entretiens peuvent nous permettre d'avoir accès aux ressources qu'ils mobilisent dans leur enseignement et aux composantes des schèmes qui guident leurs interactions avec ces ressources (buts et sous-buts, invariants opératoires et règles d'action), ainsi qu'aux différents facteurs qui les influencent. Nous présentons dans la partie suivante la méthodologie d'analyse des données recueillies lors des entretiens (§ IV.1.2).

IV.1.2- Méthodologie d'analyse des entretiens

Notre analyse dans cette partie porte sur les pratiques d'enseignement des enseignants-chercheurs en théorie des graphes, et leurs interactions avec les ressources. Nous nous intéressons particulièrement aux schèmes développés par les enseignants-chercheurs en lien avec les activités différentes dans lesquelles ils s'engagent dans/pour leur enseignement. Ainsi, nous nous intéressons aux différentes classes de situations (§ III.4.4) générées par les activités des enseignants-chercheurs, et à l'ensemble des ressources mobilisées pour chaque classe de situations, ainsi qu'aux règles d'action et aux invariants opératoires qui les justifient et les guident.

Nous commençons par présenter notre méthodologie de conception des tableaux documents et d'élaboration des classes de situations et des différentes institutions que nous considérons dans notre étude (§ IV.1.2.1). Dans la suite, nous exposons la méthodologie d'identification des sous-buts inscrits dans chaque classe de situations (§ IV.1.2.2) ainsi que des ressources mobilisées (§ IV.1.2.3) et des invariants opératoires (§ IV.1.2.4) qui s'inscrivent dans chacune d'elles.

IV.1.2.1- identification des schèmes et élaboration des tableaux documents

Nous avons commencé notre analyse par une transcription des entretiens menés avec les enseignants-chercheurs. Dans les transcriptions, nous avons identifié, pour chaque enseignant-chercheur, les buts, évoqués d'une façon explicite lors des entretiens, qui renvoient aux classes de situations que nous définissons *a priori* en s'appuyant sur les développements du § III.4.4.

Ainsi, pour identifier les différentes classes de situations avec les différents niveaux de généralité possibles dans notre étude, nous construisons le tableau 5 ci-dessous. Dans ce tableau, dans la première ligne, on peut voir les 6 classes de situations prédéfinies (§ III.4.4) (C/O planification, C/O cours, C/O TDs, C/O TPs, C/O évaluation, vie collectif). Les deux premières colonnes du tableau comprennent les différentes institutions (§ III.4.4) emboîtées les unes dans les autres que nous considérons dans notre étude (cf. figure 18, § III.4.4).

		C/O planification	C/O Cours Magistral	C/O TDs	C/O TP	C/O évaluation	Vie collectif
Université	Faculté des Sciences						
	Faculté de Génie						
	Faculté de Gestion						
parcours de formation	mathématiques						
	mathématiques appliquées						
	génie industrielle						
	gestion						
niveau d'enseignement	Licence						
	Master						
	Classes préparatoires						
	Cycle d'ingénieurs						
Année	Première						
	Deuxième						
	Troisième						
	Quatrième						
	Cinquième						

Tableau 5 : Tableau permettant de générer les classes de situations dans les différentes institutions considérées

Le tableau 5 nous permet de définir les classes de situations dans toutes les institutions que nous considérons dans le cadre de notre étude. Nous présentons un exemple ci-dessous.

		C/O planification	C/O Cours Magistral	C/O TDs	C/O TP	C/O évaluation	Vie collectif
Université	Faculté des Sciences						
	Faculté de Génie						
	Faculté de Gestion						
parcours de formation	mathématiques						
	mathématiques appliquées						
	génie industrielle						
	gestion						
niveau d'enseignement	Licence						
	Master						
	Classes préparatoires						
	Cycle d'ingénieurs						
Année	Première						
	Deuxième						
	Troisième						
	Quatrième						
	Cinquième						

concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement à la faculté des Sciences dans un parcours de mathématiques

concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs en cycle d'ingénieurs dans un parcours de génie industrielle à la faculté de génie

Figure 20 : Exemple de classes de situations dans les différentes institutions étudiées

Ainsi, dans le tableau de la figure 20 ci-dessus, nous associons les classes de situations de la première ligne aux institutions à différents niveaux de généralité exposées dans les deux premières colonnes à gauche. Par exemple, les cases colorées en vert dans le tableau de la figure 20 correspondent à la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement » dans le domaine des mathématiques discrètes.

Nous soulignons que l'activité d'un enseignant-chercheur donné peut ne pas impliquer toutes les classes de situations prédéfinies dans notre étude. Pour l'identification des classes de situations dans les transcriptions des entretiens, il s'agit de repérer, dans les discours des enseignants-chercheurs, les passages où ils expliquent les finalités des activités qu'ils entreprennent et d'identifier, parmi les classes de situations définies *a priori*, lesquelles correspondent à ces activités. En revanche, nous notons que certaines finalités des activités des enseignants-chercheurs, à un niveau moins général que les classes de situations susmentionnées, peuvent être inscrites dans ces classes de situations comme sous-buts, telles que « introduire une notion dans une séance de cours » qui peut être un sous-but inscrit dans la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre une séance de cours ».

Pour chaque classe de situations considérée, un enseignant-chercheur peut développer un ou plusieurs documents. Nous envisageons de classer, dans un tableau, pour chaque classe de situations, les ressources associées, ainsi que les règles d'action et les invariants opératoires qui interviennent dans le développement des documents. Nous illustrons nos propos par le tableau 6 ci-dessous :

Institution					
Classes de situations	de	Sous-buts	Ressources utilisées	Règles d'action	Invariants opératoires

Tableau 6 : Matrice du tableau pour chaque classe de situations

Une lecture horizontale du tableau 6 révèle les documents développés pour chaque classe de situations considérée. Une lecture verticale nous permet de recenser l'ensemble des ressources produites et mobilisées, et les règles d'action et les invariants opératoires correspondants aux buts (classes de situations).

Pour chaque classe de situations, nous avons identifié l'ensemble des ressources matérielles associées (manuels, ouvrages, articles scientifiques, ordinateurs, logiciels, Internet, etc.) énoncées de façon directe dans l'entretien. Nous avons de même repéré les ressources non-matérielles dans les passages où les enseignants-chercheurs décrivent des échanges et des interactions, verbales et non verbales, avec des étudiants ou des collègues.

Pour les règles d'action, nous avons repéré les façons d'agir décrites par les enseignants-chercheurs dans les entretiens. Il s'agit des manières dont ils se conduisent pour réaliser un but précis, et dont ils contrôlent et adaptent leurs conduites conformément aux exigences et aux particularités de chaque situation. Ce sont les conditions et les actions qui peuvent être explicitées dans des déclarations de la forme « si (condition) ... alors (règle d'action) ... » ou bien « pour (but, classe de situations) ... je fais (règle d'action) ... ».

Les régularités des conduites dans des situations spécifiques révèlent la présence d'invariants opératoires que les enseignants-chercheurs n'explicitent pas toujours dans leurs déclarations. Afin de les repérer, nous avons identifié les déclarations caractérisant le rapport personnel des enseignants-chercheurs aux contenus de la théorie de graphes et celles justifiant leurs règles d'action, c'est-à-dire les propositions qu'ils tiennent pour vraies (théorèmes-en-acte) et les raisons derrière les actions et les choix qu'ils effectuent en fonction des spécificités des situations. Pour pouvoir les repérer, nous nous sommes appuyée en premier lieu sur des expressions telles que « à

mon avis », « je vois que », « il faut », « ça veut dire », « je pense que », « c'est intéressant de », etc. Nous avons ensuite vérifié si les déclarations qui suivent ces expressions sont des explications ou des justifications, ou influencent les règles d'action.

Nous avons complété la liste des invariants opératoires ainsi repérés par des invariants opératoires identifiés à partir de déclarations qui ne sont pas précédées par de telles expressions, mais renvoyant à des connaissances des enseignants-chercheurs qui guident ou justifient leurs règles d'action dans une classe de situations donnée. Nous citons à titre d'exemples les représentations des enseignants-chercheurs des difficultés que peuvent rencontrer les étudiants en classe. Nous illustrons nos propos par l'exemple suivant extrait d'un entretien LQ, une enseignante-chercheure que nous avons interviewée au Liban : « Quand je donne un théorème qui est ben divisé dans le TD, les étudiants sont plus à l'aise ²⁵ ». Nous pouvons inférer de cet exemple l'invariant opératoire « la division des théorèmes en plusieurs étapes les rend plus accessibles aux étudiants » qui guide les règles d'action de cette enseignante-chercheure dans la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs ».

Nous donnons un autre exemple issu de notre entretien avec LQ pour illustrer la manière dont nous avons construit les tableaux documents. Au cours de son travail au sein de l'université, LQ a conçu un module d'introduction aux mathématiques discrètes collectivement avec des enseignants-chercheurs qui enseignent le même module dans d'autres sites de l'université. Dans le cadre de l'approche documentaire, LQ a élaboré un document. La déclaration « les contenus d'un module doivent être en harmonie avec les syllabus présents au sein de l'institution » indique la présence d'un invariant opératoire : « Il faut qu'il y ait une conformité des contenus avec les instructions officielles de la filière ». Cet invariant opératoire guide la règle d'action de LQ « elle choisit de donner des contenus biens connus comme l'arbre, le bloc, le graphe Hamiltonien, la coloration, etc. » (cf. annexe 3, tableau 3.2). Le but qui oriente cet invariant opératoire et cette règle d'action est « concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement d'un module de mathématiques discrètes en deuxième année de licence dans un parcours de mathématiques à la faculté des Sciences ».

Dans la suite, nous avons élaboré, pour chaque enseignant-chercheur, un tableau des documents développés dans/pour ses pratiques d'enseignement. Ce tableau document est composé de cinq colonnes correspondant respectivement aux classes de situations relatives aux activités d'enseignement, et aux sous-buts inscrits dans chacune d'elles identifiés dans les déclarations des enseignants-chercheurs, aux ressources produites et mobilisées pour chaque sous-but, aux règles d'action et aux invariants opératoires inférés. Ainsi, une lecture verticale de chaque tableau permet de montrer l'ensemble des ressources utilisées, l'ensemble des règles d'action et des invariants opératoires. Horizontalement, dans chaque tableau, nous obtenons sur un document associé à une classe de situations donnée (les ressources utilisées et le schème d'utilisation).

Nous présentons ci-dessous des extraits de la transcription de l'entretien avec LQ et nous illustrons le processus d'élaboration du tableau document pour LQ en se basant sur ces extraits.

²⁵ Nous reprenons les propos de LQ tels qu'ils sont, mais nous notons qu'elle ne parle pas couramment le français.

LQ : Bien sûr tu ne peux pas évaluer tout. Chaque fois, je choisis des parties particulières, mais en général, je donne des idées de chaque chapitre. Tous les chapitres ils sont dans l'examen. Par exemple, moi quand je fais l'examen, je regarde que par exemple, il y a des points équivalents de chaque chapitre, ça veut dire, premier chapitre 30 points, deuxième chapitre 20 points, troisième chapitre, etc. pour chaque chapitre il y a des points. Par exemple les étudiants, parfois ils étudient juste le premier chapitre.

Encadré 31 : Extrait de l'entretien avec LQ

C : Et, dans la construction des évaluations...

LQ : Oui, je prends beaucoup de temps pour mettre l'examen. Je sens qu'il y a beaucoup de responsabilité ici. Il faut bien choisir les questions. Et est-ce qu'ils vont bien répondre ? Est-ce qu'ils vont comprendre ce que je veux ? Pour l'examen, jusqu'à maintenant, c'est difficile pour moi de mettre les questions, je prends beaucoup de temps. Même si j'ai beaucoup de questions dans ma tête par exemple, et j'ai les livres, je prends des... mais parfois, je fais des exercices, et après, je décide de ne pas les mettre, c'est... par exemple, ça va être difficile pour eux, parfois je mets des exercices pour essayer, et je ne mets pas beaucoup de notes sur ces exercices, c'est comme ça. Mais après, bien sûr que, avec le temps, ça devient un peu facile, tu connais les choses qui sont difficiles pour les étudiants et les choses qui sont plus faciles. Mais pour l'évaluation, c'est jusqu'à maintenant, pas très facile.

C : Et, les difficultés que vous rencontrez dans l'enseignement ou dans la préparation des évaluations, vous les discutez avec des collègues ?

LQ : Euh... pas beaucoup. Parce qu'il n'y a personne ici autre que moi qui enseigne la théorie des graphes. Euh... quand je vois LB, parfois je parle avec lui de quelques points, mais parfois, on n'a pas le temps. Moi, je dépends, je dépends bien sur l'expérience. Ce qui est bien, bien sûr, moi je demande... la première année, j'ai envoyé l'examen à LB pour me dire s'il était difficile ou facile, parce que c'était la première fois. Donc, je l'ai envoyé. Ah oui, c'était juste la première et la deuxième année, après non. Avec l'expérience, je peux savoir moi-même si c'est bien.

Encadré 32 : Extrait de l'entretien avec LQ, C représente le chercheur, moi-même

D'après les extraits des encadrés 31 et 32 de l'entretien avec LQ, nous repérons la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation » dans un parcours de formation en mathématiques. Nous pouvons identifier plusieurs passages qui nous permettent d'inférer des règles d'action et des invariants opératoires. Par exemple, dans l'encadré 31, le passage « il y a des idées des questions de tous les chapitres [...] quand je fais l'examen, je regarde que par exemple, il y a des points équivalents de chaque chapitre » nous permet d'identifier les deux règles d'action suivantes concernant la conception des évaluations : « Elle donne des questions qui portent sur tous les chapitres d'un module » et « elle répartit la note dans une évaluation d'une façon équitable sur tous les chapitres ». Le même passage nous permet d'inférer des invariants opératoires qui guident ces règles d'action : « les étudiants choisissent parfois d'étudier certains chapitres d'un module et pas d'autres » et « un étudiant qui a bien étudié doit être capable de réussir ». Le premier invariant opératoire est explicitement exprimé par LQ « les étudiants, parfois ils étudient juste le premier chapitre ». Cependant, le deuxième invariant

opérateur est implicite. En effet, LQ reconnaît que les étudiants étudient parfois une partie du module. Ainsi, elle essaie d'inclure tous les contenus du module dans l'évaluation écrite et de diviser la note équitablement sur tous les exercices ; nous pouvons inférer qu'elle considère qu'un étudiant qui n'a pas étudié tout le module doit être capable de réussir.

Dans l'encadré 32, nous pouvons identifier l'invariant opératoire suivant : « Un enseignant-chercheur expérimenté est capable d'anticiper les réactions des étudiants face à une question ». Cet invariant opératoire est identifiable d'après les passages : « Pour l'examen, jusqu'à maintenant, c'est difficile pour moi de mettre les questions, je prends beaucoup de temps [...] avec le temps, ça devient un peu facile, tu connais les choses qui sont difficiles pour les étudiants et les choses qui sont plus faciles ». Une règle d'action que nous avons repérée dans le même extrait qui est guidée par cet invariant opératoire est : « Elle sollicite, si besoin, l'opinion d'un enseignant-chercheur plus expérimenté sur les questions proposées dans une évaluation ». Cette règle d'action est identifiable dans les déclarations suivantes : « La première année, j'ai envoyé l'examen à LB pour me dire s'il était difficile ou facile, parce que c'était la première fois ».

Ces deux extraits nous permettent de repérer deux sous-buts inscrits dans la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation » qui sont « concevoir des questions pour une évaluation écrite » et « répartir les notes dans une évaluation écrite ». Aussi, ils nous permettent d'identifier des ressources mobilisées par LQ dans la conception des évaluations, y compris des ressources non-matérielles. LQ déclare qu'elle a demandé conseil à un collègue concernant l'élaboration de l'évaluation écrite lors des deux premières années où elle a enseigné le module de mathématiques discrètes. Aussi, en construisant son évaluation, elle essaie d'anticiper la réaction des étudiants face aux exercices, et ces réactions anticipées influencent la conception de l'évaluation. Ainsi, nous pouvons repérer un ensemble de ressources mobilisées lors de l'élaboration de l'évaluation écrite, les ouvrages, les réactions des étudiants et le conseil d'un collègue qui enseigne le même module dans un autre site de l'université.

Les éléments précédents nous permettent de construire le tableau 7 ci-dessous :

Parcours de formation en mathématiques				
Classe de situations	Sous-buts	Ressources utilisées	Règles d'action	Invariants opératoires
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Concevoir des questions pour une évaluation écrite	Ouvrages Réactions des étudiants Conseil d'un collègue	Elle donne des questions qui portent sur tous les chapitres d'un module Elle sollicite, si besoin, l'opinion d'un enseignant-chercheur plus expérimenté sur les questions proposées dans une évaluation	Les étudiants choisissent parfois d'étudier certains chapitres d'un module et pas d'autres Il est difficile pour un enseignant non-expérimenté d'anticiper les réactions des étudiants face à une question
	Répartir les notes dans une évaluation écrite		Elle répartit la note dans une évaluation d'une façon équitable sur tous les chapitres	Un étudiant qui a bien étudié doit être capable de réussir

Tableau 7 : Partie du tableau document de LQ correspondant à la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation » dans un parcours de formation en mathématiques

Après construction d'un tableau document pour chacun des enseignants-chercheurs dans notre étude, nous avons recensé dans la suite les classes de situations identifiées pour chacun des enseignants-chercheurs et les sous-buts qui s'inscrivent dans chacune d'elles. Cela nous permet d'avoir une première vision globale des finalités que les enseignants-chercheurs se fixent dans leur enseignement, ce qui constitue une entrée pour l'analyse des pratiques des enseignants-chercheurs. Toutes les analyses effectuées dans la suite de notre étude s'inscrivent dans le contexte de classes de situations bien définies.

IV.1.2.2- Recensement des classes de situations et des sous-buts correspondants

En s'appuyant sur les tableaux documents des enseignants-chercheurs, nous avons marqué pour chaque enseignant-chercheur les classes de situations recensées, ainsi que les sous-buts inscrits dans chacune d'elle. Les classes de situations peuvent fournir une vision panoramique des finalités que les enseignants-chercheurs se fixent dans leur enseignement. Ces finalités peuvent dépendre du rapport personnel d'un enseignant-chercheur à la théorie des graphes ou des conditions et contraintes institutionnelles. Par exemple, un enseignant-chercheur qui s'appuie sur des expérimentations dans son activité de recherche en théorie des graphes peut mettre l'accent dans son enseignement sur les séances de TPs. Par contre, un enseignant-chercheur qui enseigne la théorie des graphes dans un parcours de formation en mathématiques peut effectuer un choix de ne pas engager les étudiants dans des séances de TPs par exemple.

Par ailleurs, les sous-buts inscrits dans les classes de situations peuvent donner une vision plus complète des finalités que les enseignants-chercheurs se fixent dans leurs pratiques d'enseignement. Par exemple, un enseignant-chercheur peut engager les étudiants dans une activité de programmation dans des séances de TPs alors qu'un autre pourrait leur proposer des problèmes de recherche avec des objets matériels et leur donner le temps d'expérimenter sur les petits cas. Ces différents sous-buts peuvent être en lien avec des conceptions de l'enseignant-chercheur concernant les contenus et les modes de leur enseignement, ou avec des conditions institutionnelles dans lesquelles il enseigne.

Nous avons construit un tableau (cf. tableau 8) avec, dans la première colonne, une liste des classes de situations que nous avons proposées *a priori* (§ III.4.4), et une liste des enseignants-chercheurs interviewés en première ligne.

	LB	LQ	LN	LK	LT	LX	FO	FF	FK	FT
concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement										
concevoir et mettre en œuvre une séance de cours										
concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs										
concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs										
concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation										
participer à un travail collectif d'enseignement ou de recherche										

Tableau 8 : Tableau permettant de marquer les classes de situations repérées pour chacun des enseignants-chercheurs interviewés

Par la suite, nous avons marqué par « X » les classes de situations identifiées pour chacun des enseignants-chercheurs.

Ensuite, pour chacun des enseignants-chercheurs, nous avons identifié dans le tableau document les sous-buts qui s'inscrivent dans chaque classe de situations. Par conséquent, nous avons construit pour chaque enseignant-chercheur un tableau qui montre les classes de situations et les sous-buts associés. Nous présentons ci-dessous une matrice d'un tel tableau (cf. tableau 9) :

Classes de situations	Sous-buts

Tableau 9 : Matrice d'un tableau exposant les sous-buts s'inscrivant dans chaque classe de situations pour un enseignant-chercheur interviewé

L'élaboration de ces tableaux nous permet d'avoir un premier accès à la compréhension des pratiques des enseignants-chercheurs à travers les finalités que ces derniers se fixent dans le contexte de chacune de ces classes de situations.

Nous avons regroupé les tableaux élaborés pour chacun des enseignants-chercheurs en un seul tableau. Pour le faire, nous avons construit un tableau qui comprend en première colonne les sous-buts identifiés pour chaque classe de situations, et en première ligne une liste des enseignants-chercheurs participants à notre étude. Ce tableau nous permet, en marquant les sous-buts recensés pour chaque enseignant-chercheur, d'identifier des tendances (s'il en existe) possibles et des disparités au niveau des finalités que les enseignants-chercheurs se fixent dans/pour chaque classe de situations.

Notre étape suivante porte sur un examen des ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans chaque classe de situations.

IV.1.2.3- Ressources mobilisées dans/pour les classes de situations identifiées

Pour chaque sous-but repéré dans la partie précédente, les enseignants-chercheurs mobilisent une ressource ou un ensemble de ressources et un schème d'utilisation de ces ressources. Les ressources que les enseignants-chercheurs mobilisent dans/pour leur enseignement peuvent être conçues pour l'enseignement, ou être des ressources avec lesquelles ils interagissent dans leur activité de recherche et qu'ils mobilisent dans leur enseignement. De plus, ces ressources peuvent être produites par les enseignants-chercheurs eux-mêmes, ou elles peuvent être produites par des pairs et adaptées, modifiées, ou utilisées par les enseignants-chercheurs lors de la conception ou de la mise en œuvre de leur enseignement. Une analyse de ces ressources peut nous éclairer sur des choix que les enseignants-chercheurs effectuent dans l'enseignement de la théorie des graphes, et sur les liens potentiels entre leur activité de recherche et leurs pratiques d'enseignement.

Afin de pouvoir caractériser davantage les choix des enseignants-chercheurs par rapport aux ressources qu'ils mobilisent dans/pour l'enseignement, nous avons élaboré des tableaux qui montrent les types de ressources intervenant dans les pratiques des enseignants-chercheurs pour chaque classe de situations.

Pour cela, nous avons commencé par dresser une liste des ressources évoquées par les enseignants-chercheurs lors des entretiens. Nous avons classifié ces ressources en deux grandes catégories : ressources matérielles et ressources non-matérielles. Pour les ressources matérielles, nous avons apporté une première distinction entre les ressources produites par les enseignants-chercheurs (que nous désignons par « ressources produites »), et ressources produites par des pairs mais mobilisées

par les enseignants-chercheurs (que nous désignons par « ressources mobilisées »). Ensuite, nous avons apporté une deuxième distinction entre les ressources provenant de l'enseignement et les ressources provenant de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs. Nous avons ajouté une catégorie intitulée « autres ressources » qui regroupe les ressources qui n'appartiennent à aucune des catégories susmentionnées, le cas échéant.

Ainsi, nous avons élaboré un premier tableau avec en colonne une liste des ressources identifiées dans les tableaux documents et évoquées par les enseignants-chercheurs lors des entretiens, et en première ligne une liste des enseignants-chercheurs participants à notre étude. Nous exposons ci-dessous une matrice du tableau élaboré (cf. encadré 33).

		Liste des ressources	Liste des enseignants-chercheurs	
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement			
	Ressources provenant de la recherche			
Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement			
	Ressources provenant de la recherche			
Ressources non matérielles				
Autres ressources				

Encadré 33 : Matrice du tableau présentant les ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans/pour leur enseignement

Dans le cas où une ressource listée en colonne est mobilisée par un enseignant-chercheur, nous l'avons marqué par un « X » dans la cellule correspondante du tableau. Ce tableau nous permet d'avoir un regard global sur les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs dans leurs pratiques d'enseignement. Afin d'apporter plus de précision sur les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs dans les différentes classes de situations, nous avons élaboré un tableau des ressources mobilisées pour chaque classe de situations ayant la même structure que le tableau initial.

Nous indiquons qu'un enseignant-chercheur pourrait mobiliser une même ressource dans plusieurs classes de situations, ou dans une même classe de situations dans des activités ayant des finalités différentes. Les schèmes d'utilisation de ces ressources, les invariants opératoires et les règles d'action peuvent différer en fonction des sous-buts en question. De plus, plusieurs enseignants-chercheurs peuvent mobiliser une même ressource dans une même classe de situations. Les schèmes d'utilisation de cette ressource peuvent varier d'un enseignant-chercheur à un autre. Nous citons particulièrement un module d'enseignement des mathématiques discrètes, conçu collectivement par LB, LQ et LN, et que tous les trois mobilisent dans leur enseignement des mathématiques discrètes en deuxième année de licence dans un parcours de formation en

mathématiques, c'est-à-dire dans des conditions institutionnelles qui se ressemblent. Nous estimons qu'une mise en perspective des schèmes d'utilisation de ce même module par les trois enseignants-chercheurs susmentionnés peut nous permettre de cerner l'influence de leur rapport personnel aux mathématiques discrètes dans les institutions de recherche et d'enseignement sur la mobilisation des ressources conçues pour l'enseignement. Ainsi, nous avons effectué des croisements consistant à comparer les schèmes de mobilisation d'une même ressource dans une même classe de situations par plusieurs enseignants-chercheurs. Ces croisements peuvent nous permettre d'identifier des tendances et des disparités qui existent dans les composantes des schèmes d'utilisation de ces ressources par les enseignants-chercheurs, c'est-à-dire dans les règles d'action et les invariants opératoires.

IV.1.2.4- Invariants opératoires qui s'inscrivent dans les classes de situations

Nous signalons que les invariants opératoires peuvent être à dominante didactique, pédagogique, épistémologique ou institutionnelle (§ III.1.4). Nous considérons que des invariants opératoires sont à dominante didactique quand ils renvoient à des connaissances des enseignants-chercheurs en rapport avec l'enseignement de la théorie des graphes. Ces connaissances peuvent porter sur les objectifs d'apprentissage qu'ils se posent en planifiant un module d'enseignement de la théorie des graphes, les choix qu'ils effectuent au niveau des contenus et de leur organisation, les ressources qu'ils mobilisent, les modes de gestion de classe, la représentation qu'ils ont des étudiants, de l'évaluation, etc. Des invariants opératoires sont à dominante pédagogique quand ils renvoient à des connaissances des enseignants-chercheurs relatives à l'enseignement sans une prise en compte de la nature des contenus à enseigner. Des invariants opératoires sont à dominante épistémologique quand ils renvoient aux particularités de la théorie des graphes pour un enseignant-chercheur, et aux activités mathématiques (raisonnements et démarches) sollicitées lors de la résolution d'un problème en mathématiques discrètes, ainsi qu'à la démarche de recherche sur un problème en mathématiques discrètes, etc. Et des invariants opératoires sont à dominante institutionnelle quand ils renvoient aux connaissances d'un enseignant-chercheur relatives au parcours de formation, le niveau d'enseignement, le volume horaire, la distribution des séances, le type de séance (TD, TP, cours), la nature du module (obligatoire ou optionnel), le nombre d'étudiants dans une classe, la description des contenus et des objectifs d'un module d'enseignement dans les syllabus, les modalités de l'évaluation fixées par l'institution, etc.

Nous avons essayé, pour chaque classe de situations, de classer les invariants opératoires selon ces dominantes. Ainsi, dans ce qui suit, nous utilisons les notations suivantes pour désigner la dominante d'un invariant opératoire : D (dominante didactique), I (dominante institutionnelle), P (dominante pédagogique), et E (dominante épistémologique). En classifiant nos invariants opératoires, nous nous gardons de prétendre pouvoir les cloisonner dans des catégories disjointes. Pourtant, nous estimons que cette classification peut nous permettre de cerner l'influence des conditions et contraintes institutionnelles sur les pratiques des enseignants-chercheurs, ainsi que l'influence possible de leur activité de recherche sur leurs pratiques d'enseignement.

Ainsi, nous avons, pour les enseignants-chercheurs interviewés, repéré dans les tableaux documents les invariants opératoires inscrits dans chacune des classes de situations, et identifié leur dominante. Nous avons classé nos résultats dans des tableaux. Nous présentons ci-dessous une matrice du tableau (cf. tableau 10) que nous avons construit pour chacun des enseignants-chercheurs.

Classe de situations	Invariant opératoire	Dominante

Tableau 10 : Matrice d'un tableau permettant d'identifier les invariants opératoires à dominante épistémologique, didactique, pédagogique, ou institutionnelle s'inscrivant dans chaque classe de situations

Nous explicitons ci-dessous, par des exemples extraits des transcriptions des entretiens, la façon dont nous avons procédé pour la classification des invariants opératoires. Ainsi, nous présentons dans les encadrés ci-après des extraits des entretiens avec trois des enseignants-chercheurs interviewés, FF, LQ et FO. Nous rappelons que LQ est une enseignante-chercheuse au Liban qui enseigne les mathématiques discrètes dans un parcours de formation en mathématiques, et FO et FF sont des enseignants-chercheurs en France qui enseignent la théorie des graphes dans des parcours de formation en informatique et en mathématiques-informatique. Nous avons, dans les extraits, surligné en bleu les passages où nous avons identifié des invariants opératoires, et en vert les expressions sur lesquelles nous nous sommes basée pour les identifier. Nous présentons, pour chaque extrait, l'invariant opératoire repéré tout en explicitant l'identification de la dominante.

FF : Oui, en fait, en fait, ça dépend. Si je suis sur un format justement où j'ai du temps pour les laisser réfléchir et tout, je prends mon temps, et... s'ils ne vont pas aussi loin que ce que j'espérais, **ce n'est pas grave**. **Ils vont à leur rythme**. Après sur des séances plus classiques où ils ne sont pas, ... séances de TDs normales, oui j'avance au rythme que je dois avancer **parce qu'il faut que j'aille au bout de mon programme**.

Encadré 34 : Extrait de l'entretien avec FF

Dans l'extrait 34 ci-dessus, nous identifions les deux invariants opératoires suivants : « Il est parfois difficile de respecter le rythme des étudiants dans le travail en classe » et « il est essentiel de compléter le programme prévu ». Nous estimons que le premier invariant opératoire est en lien avec la mise en œuvre de l'enseignement en classe, et il est donc à dominante didactique (D). En outre, le deuxième invariant opératoire est à dominante institutionnelle (I) ; les contraintes institutionnelles, le nombre de séances et le programme à respecter, influencent des règles d'action de FF relatives à la mise en œuvre des séances.

LQ : Oui, pour l'évaluation **moi, mon souci** c'est : **est-ce que les étudiants, ils ont compris la matière que je donne ? Ça veut dire, est-ce qu'ils ont compris les théorèmes avec les démonstrations**. Parfois je donne dans les examens, il y a des questions de compréhension, compréhension du cours, ...

Encadré 35 : Extrait de l'entretien avec LQ

Dans l'extrait de l'encadré 35 ci-dessus, nous identifions l'invariant opératoire suivant : « Le principal objectif de l'évaluation est de vérifier la compréhension des contenus (théorèmes et démonstrations) ». LQ évoque dans l'entretien qu'elle évalue les étudiants par le moyen des épreuves écrites, ce qui est une recommandation institutionnelle. En revanche, dans ce passage, elle parle de sa propre représentation de ce que les objectifs d'une évaluation doivent être. Ainsi, nous considérons que cet invariant opératoire est à dominante pédagogique (P), et influence les choix de LQ dans la construction des épreuves écrites.

FO : Donc, quand je fais des graphes je commence par faire peu d'algorithmique pour essayer de comprendre qu'est ce que c'est, et puis après, le plan ça va être de se promener dans les graphes, donc ça ils doivent le connaître pour un peu toutes les matières, donc les algorithmes BFS, DFS, faire des parcours de graphe euh et savoir exactement ce qu'on est en train de parcourir, est ce que on parcourir des composantes connexes, tout le graphe etc. Ensuite [...] après moi je m'intéresse plus spécifiquement aux chemins dans les graphes orientés donc ... plus court chemin parce que ça, ça fait partie de la culture de base d'un étudiant... Et puis après, on va s'amuser avec des problèmes comme coloration, couplage, bipartie, flots, etc.

Encadré 36 : Extrait de l'entretien avec FO

Dans l'extrait de l'encadré 36 ci-dessus, nous identifions les deux invariants opératoires suivants : « Il est important que les étudiants possèdent une culture sur les graphes et les algorithmes : faire des parcours de graphes et savoir ce qu'on est en train de parcourir » et « certains contenus en théorie des graphes constituent une culture de base pour les étudiants tels que les chemins et les plus courts chemins ». Ces invariants opératoires indiquent des représentations de FO des besoins des étudiants dans un parcours de formation en informatique, et par la suite influencent des choix de FO en lien avec la planification de son enseignement de la théorie des graphes dans ce parcours de formation. Ainsi, ces deux invariants opératoires sont à dominante didactique (D).

Nous soulignons qu'en essayant de classifier les invariants opératoires selon les critères susmentionnés, nous nous sommes rendue compte que la tâche est complexe. Certains invariants opératoires renvoient à des connaissances de plusieurs natures des enseignants-chercheurs. Par exemple, un invariant opératoire peut être à dominante didactique et pourtant refléter des connaissances de l'enseignant-chercheur en lien avec des conditions et des contraintes institutionnelles, ou être à dominante épistémologique et en lien aussi avec des connaissances didactiques de l'enseignant-chercheur. Ainsi, pour les invariants opératoires qui peuvent être en lien avec des connaissances de plusieurs natures, nous avons essayé d'identifier la dominante tout en utilisant des notations qui renvoient aux connaissances sous-jacentes. Ainsi, nous avons introduit des notations supplémentaires qui reflètent la dominante ainsi que la nature des autres connaissances-en-acte en indice. Nous citons à titre d'exemples : D_E (connaissances de natures épistémologique et didactique, dominante didactique), E_D (connaissances de natures épistémologique et didactique, dominante épistémologique), D_P (connaissances de natures pédagogique et didactique, dominante didactique), D_I (connaissances de natures institutionnelle et didactique, dominante didactique) et E_I (connaissances de natures épistémologique et institutionnelle, dominante institutionnelle). Nous présentons quelques exemples illustratifs ci-dessous.

FF : La particularité que je trouve, c'est qu'ils sont des problèmes qu'on peut présenter à n'importe qui, c'est à dire des problèmes qu'on peut expliquer à un enfant. Après les méthodes de résolution sont souvent très difficiles, et ça fait appel à des maths parfois complexes.

Encadré 37 : Extrait de l'entretien avec FF

Dans l'extrait de l'encadré 37 ci-dessus de l'entretien avec FF, nous avons identifié les deux invariants opératoires suivants : « Les problèmes en mathématiques discrètes sont faciles d'accès » et « les problèmes en mathématiques discrètes peuvent faire appel à des méthodes de résolution complexes ».

Dans le premier invariant opératoire, il y a un enjeu de diffusion de la théorie des graphes, les problèmes peuvent être présentés à des enfants, ainsi qu'à des étudiants au supérieur. En outre, la raison sous-jacente est en lien avec la nature de la théorie des graphes qui présente des problèmes faciles d'accès. Ainsi, nous considérons que cet invariant opératoire est en lien avec des connaissances didactiques et épistémologiques de FF, et à dominante didactique (D_E).

Le second invariant opératoire indique une particularité qui est en lien avec la nature de la théorie des graphes, des problèmes qui font appel à des méthodes de résolution « complexes ». Cette particularité implique des choix didactiques lorsque ces problèmes sont présentés aux étudiants en classe. Ainsi, nous considérons que cet invariant opératoire est à dominante épistémologique (E_D).

FF : Et c'est en fait ce double volet-là qui m'intéresse, moi particulièrement. Les maths discrètes, oui que c'est vrai qu'elles sont souvent présentées chez nous dans un contexte informatique mais ça a du sens. C'est les maths qui sont les plus proches de l'informatique.

Encadré 38 : Extrait de l'entretien avec FF

Dans l'extrait de l'encadré 38 ci-dessus, nous identifions l'invariant opératoire suivant : « Les mathématiques discrètes sont les mathématiques les plus proches de l'informatique ». Cet invariant opératoire reflète le point de vue de FF sur des choix institutionnels à l'échelle de la société en France (que FF évoque dans son discours en utilisant l'expression « chez nous » par opposition à « chez vous, au Liban »). Cependant, FF justifie le choix de présentation des mathématiques discrètes dans un contexte informatique en France par le fait qu'elles sont les mathématiques les plus proches de l'informatique, ce qui est étroitement lié à la nature épistémologique des mathématiques discrètes (§ I.3). Ainsi, nous considérons que l'invariant opératoire susmentionné est à dominante épistémologique (E_I).

FF : Après on enseigne principalement, c'est vrai que les maths discrètes en France, quand on en fait, ça tourne beaucoup autour de la théorie des graphes. Donc on est nombreux à proposer des cours de la théorie des graphes là-dessus. Que ce soit des problèmes d'optimisation ou de recherche de chemin.

Encadré 39 : Extrait de l'entretien avec FF

Dans l'extrait de l'encadré 39 ci-dessus, nous identifions les deux invariants opératoires suivants : « L'enseignement des mathématiques discrètes en France tourne surtout autour de la théorie des graphes » et « l'enseignement de la théorie des graphes en France porte surtout sur l'optimisation et la recherche des chemins ». Ces deux invariants opératoires reflètent le point de vue de FF sur les choix des institutions à l'échelle de la société en France. Ainsi, il est à dominante institutionnelle (I_E).

FF : Il y a plein de problèmes dans d'autres disciplines, qu'on va assez souvent pouvoir modéliser en mathématiques discrètes. Les maths discrètes, pour moi, c'est un ensemble qui contient un ensemble d'outils et des modèles, qui représente assez bien beaucoup des problèmes de la vie quotidienne et d'autres disciplines. Par exemple, je vois en informatique, dans mon laboratoire, tout le monde parle du graphe à un moment donné.

Encadré 40 : Extrait de l'entretien avec FF

Dans l'extrait de l'encadré 40 ci-dessus, nous identifions l'invariant opératoire suivant : « Les mathématiques discrètes permettent de représenter des problèmes issus de la vie réelle et d'autres disciplines ». Dans ce passage, FF répondait à une question qui portait sur des choix qu'il effectue

au niveau des contenus dans son enseignement des mathématiques discrètes. Ainsi, il a parlé des liens des mathématiques discrètes aux autres disciplines et à la vie réelle sur lesquels il travaille avec les étudiants en classe. Bien que l'invariant opératoire porte sur la nature des mathématiques discrètes qui permet de modéliser un large spectre de situations issues de la vie quotidienne et d'autres disciplines, FF dans ce passage discutait des choix en termes d'enseignement que cette nature des mathématiques discrètes permet d'effectuer. En conséquence, nous considérons que cet invariant opératoire est à dominante didactique (D_E).

Nous estimons qu'une caractérisation des invariants opératoires peut nous éclairer davantage sur les raisons qui guident les différents choix que les enseignants-chercheurs effectuent dans leur enseignement de la théorie des graphes en termes de contenus, de leur organisation, et des interactions avec les ressources. Ainsi, elle peut nous donner accès à une compréhension plus profonde des pratiques des enseignants-chercheurs dans les différentes classes de situations inscrites dans leur enseignement de la théorie des graphes et sur l'influence de leur activité de recherche sur leur enseignement.

IV.1.2.5- Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le premier volet de notre méthodologie qui porte sur l'analyse des entretiens avec dix enseignants-chercheurs, chercheurs en théorie des graphes et qui enseignent la théorie des graphes dans des parcours de formation différents.

Ce premier volet de recherche nous permet d'apporter des éléments de réponse à nos deux questions de recherche Q1 et Q2 que nous rappelons ci-dessous :

- Q1 : Comment les schèmes des enseignants-chercheurs (chercheurs en théorie des graphes) guident-ils leurs interactions avec les ressources dans/pour l'enseignement de la théorie des graphes ?
- Q2 : Dans quelle mesure le contexte institutionnel dans lequel un enseignant-chercheur enseigne influence-t-il ses interactions avec les ressources dans/pour l'enseignement de la théorie des graphes ?

Il convient de mentionner ici que les enseignants-chercheurs participant à notre étude ont des profils variés en termes de formation, d'expérience dans la recherche et dans l'enseignement, etc. et ils enseignent dans différents parcours de formation. Cependant, certains enseignants-chercheurs présentent des caractéristiques qui se rejoignent en termes de formation et d'éléments professionnels (département d'enseignement et modules enseignés). Par exemple, LB, LQ et LN sont des chercheurs en théorie des graphes au Liban, qui enseignent les mathématiques discrètes en L2 et la théorie des graphes en Master dans un parcours de formation en mathématiques dans deux différents sites de la même université. Aussi, ils ont tous les trois participé à la conception d'un module d'enseignement des mathématiques discrètes en L2 qu'ils mobilisent dans leur enseignement. En revanche, FF, FO, FK et FT sont des chercheurs en théorie des graphes en France, qui enseignent la théorie des graphes dans différents parcours de formation (informatique, maths-info, mathématiques appliquées et parcours d'ingénieurs). De plus, FF, FK et FT appartiennent à un même groupe de recherche, *maths à modeler*, qui s'intéresse au développement d'ingénieries didactiques pour l'enseignement des mathématiques discrètes (au sens large). Et FO déclare avoir fait partie de ce groupe de recherche auparavant. Afin de pouvoir accéder à une compréhension plus profonde des pratiques des enseignants-chercheurs, nous avons effectué le choix de considérer des sous-groupes parmi les enseignants-chercheurs interviewés. Ainsi, nous

considérons dans la suite deux sous-groupes des enseignants-chercheurs en prenant en considération les critères susmentionnés dans le paragraphe précédent. Le premier groupe comprend LB, LN et LQ, et le second groupe consiste en FF, FO, FK et FT.

Nous faisons l'hypothèse que la prise en considération de ces deux sous-groupes d'enseignants-chercheurs peut nous permettre d'approfondir l'étude de certains aspects de leurs pratiques. Nous estimons que dans un parcours de formation en mathématiques pures, les choix effectués par les enseignants-chercheurs en termes de contenus, de leur organisation et de ressources mobilisées peuvent différer des choix effectués pour un enseignement dans des parcours de formation en informatique, maths-info, mathématiques appliquées et dans des parcours d'ingénieurs. Ainsi, une analyse des pratiques des enseignants-chercheurs au sein de ces deux groupes peut nous permettre d'identifier des tendances possibles au niveau des choix qu'ils effectuent et des différents facteurs qui influencent ces choix, entre autres leur activité de recherche et les conditions et contraintes institutionnelles.

Nous signalons que, bien que les deux groupes susmentionnés regroupent des enseignants-chercheurs exerçant leur métier au Liban pour le premier groupe, et en France pour le second, ce regroupement ne nous permet pas de prétendre accéder à deux groupes représentatifs de l'ensemble des enseignants-chercheurs enseignant les mathématiques discrètes dans les deux pays. Ainsi, nous nous gardons de tirer des conclusions qui comparent l'enseignement des mathématiques discrètes, particulièrement la théorie des graphes, dans les deux pays.

Nous avons développé la première étape de notre méthodologie en cohérence avec les questions de recherche Q1 et Q2 et avec les outils théoriques développés dans le chapitre III. Nous présentons dans la partie IV.1.3 qui suit les résultats des analyses obtenus par exploitation de la méthodologie développée dans cette partie.

IV.1.3- Résultats des analyses des entretiens

Nous présentons dans cette partie des résultats des analyses des entretiens que nous avons effectués par exploitation de la méthodologie développée (§ IV.1.2). Nous suivons, pour la présentation des résultats, le même ordre suivi dans les sous-parties du paragraphe IV.1.2. Nous commençons donc par présenter nos résultats en termes de classes de situations (§ IV.1.3.1), de sous-buts qui s'inscrivent dans chacune de ces classes de situations (§ IV.1.3.2), des ressources mobilisées (§ IV.1.3.3) puis des invariants opératoires identifiés dans les différents schèmes (§ IV.1.3.4).

Nous signalons que nous avons commencé notre analyse des entretiens par des transcriptions des entretiens suivies par l'élaboration d'un tableau document pour chacun des enseignants-chercheurs interviewés. Nous présentons ces tableaux documents en Annexe 3.

IV.1.3.1- Classes de situations

Nous avons commencé par identifier les classes de situations dans les tableaux documents construits pour les dix enseignants-chercheurs. Nous présentons nos résultats dans le tableau 11 ci-dessous.

Nous commençons par souligner que les classes de situations identifiées par le dépouillement des entretiens avec les enseignants-chercheurs couvrent toutes les classes que nous avons proposées *a priori* (§ III.4.4).

	LB	LQ	LN	LK	LT	LX	FO	FF	FK	FT
concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs						X	X	X	X	
concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation		X	X	X	X	X	X	X	X	X
participer à un travail collectif d'enseignement ou de recherche								X	X	X

Tableau 11 : Classes de situations repérées pour chacun des enseignants-chercheurs interviewés

En consultant le tableau 11 ci-dessus, nous remarquons que quatre des classes de situations proposées sont communes pour la plupart des enseignants-chercheurs participant à notre étude. En outre, les deux classes de situations en lien avec la conception et la mise en œuvre des séances de TPs et la participation à des collectifs de recherche ou d'enseignement sont évoquées par une minorité des enseignants-chercheurs interviewés.

En effet, le fait que la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs » n'est pas évoquée par FT est dû au fait que ce dernier mobilise dans les séances de cours des problèmes issus de situations de recherche pour co-construire les notions théoriques avec les étudiants et intègre ainsi les travaux dirigés dans les séances de cours. De plus, nous signalons que, bien que la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation » ne soit pas évoquée par LB, nous sommes certains que ce dernier s'engage dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation. En effet, les autres enseignants-chercheurs qui enseignent les mêmes modules que LB à l'université libanaise (LN, LQ et LT) en parlent en évoquant la conception des épreuves écrites. Il convient aussi de mentionner que l'entretien avec LB était le premier entretien (pilote) effectué, et nous nous sommes appuyée sur un dépouillement de cet entretien pour modifier notre guide d'entretiens dans la suite.

Par ailleurs, quatre des enseignants-chercheurs interviewés conçoivent et mettent en œuvre des séances de TPs dont trois en France. Tous les quatre enseignent les mathématiques discrètes dans des parcours de formation en informatique, maths-info, mathématiques appliquées et parcours d'ingénieurs. FF, qui enseigne dans un parcours de formation en informatique, souligne l'importance de convaincre les étudiants de l'importance des mathématiques discrètes en leur montrant à quoi ça sert dans une formation d'informaticiens. Il considère, ainsi que FO, que les mathématiques discrètes sont les mathématiques les plus proches de l'informatique, et il pointe qu'en mathématiques discrètes, il y a des résultats qui peuvent émerger à partir d'expérimentations informatiques. FK met aussi l'accent sur la dimension expérimentale dans l'enseignement des mathématiques discrètes. En outre, les quatre enseignants-chercheurs au Liban (LB, LQ, LN et LT) qui enseignent les mathématiques discrètes dans des parcours de formation en mathématiques mettent l'accent sur la théorie dans leur enseignement sans avoir recours à des applications.

Enfin, en ce qui concerne la participation à un travail collectif de recherche ou d'enseignement, trois des enseignants-chercheurs en France participent à un collectif de chercheurs qui s'intéresse à des questions de diffusion des mathématiques dans l'enseignement (*maths à modeler*) – FO déclare avoir été membre de ce collectif auparavant.

L'examen des classes de situations montre des finalités communes que les enseignants-chercheurs se fixent dans leurs pratiques, qui comprennent la conception et la mise en œuvre de la planification de l'enseignement et des séances de cours et de TDs, et des moments d'évaluation. Des disparités existent en ce qui concerne la conception et la mise en œuvre des séances de TPs, qui peuvent être en lien avec le parcours de formation dans lequel les enseignants-chercheurs enseignent, leur rapport personnel à la théorie des graphes, ou avec des convictions qu'ils ont en termes de besoins des étudiants.

Nous présentons dans la partie suivante (§ IV.1.3.2) les sous-buts qui s'inscrivent dans chacune des classes de situations afin de compléter notre vision des finalités que les enseignants-chercheurs se fixent dans leurs pratiques d'enseignement de la théorie des graphes.

IV.1.3.2- Sous-buts correspondants dans des classes de situations identifiées

Le tableau 4.1 en annexe 4 montre les sous-buts qui s'inscrivent dans chaque classe de situations pour chacun des enseignants-chercheurs participants à notre étude. Nous présentons ci-dessous une description des résultats du tableau.

Conception et mise en œuvre de la planification de l'enseignement

Dans la conception et la mise en œuvre de la planification de l'enseignement, nous avons identifié à partir des entretiens 9 sous-buts évoqués par les enseignants-chercheurs. Ces sous-buts peuvent nous donner un premier aperçu des activités dans lesquelles s'engage un enseignant-chercheur en planifiant son enseignement des mathématiques discrètes au supérieur. Certains sous-buts sont évoqués par la majorité des enseignants-chercheurs, ce qui peut indiquer qu'ils constituent une partie intégrante des pratiques d'enseignement lors de la conception et la mise en œuvre de la planification d'un module. D'autres sous-buts sont mentionnés par un seul enseignant-chercheur, et peuvent désigner des activités particulières qui relèvent de ses propres pratiques. Par la suite, en se référant au tableau 4.1 de l'annexe 4, nous remarquons que, pour concevoir et mettre en œuvre la planification de leur enseignement, les enseignants-chercheurs sélectionnent les contenus d'une unité d'enseignement et pondèrent et/ou alternent les séances de cours, TDs et TPs (le cas échéant).

Dans une perspective d'apporter un regard plus complet sur les tendances qui peuvent exister dans la conception et la mise en œuvre de la planification de l'enseignement par les enseignants-chercheurs, nous exposons ci-dessous dans les tableaux 12 et 13 respectivement les sous-buts identifiés dans les pratiques des enseignants-chercheurs appartenant aux deux groupes que nous avons définis (§ IV.1.2.5).

		LB	LQ	LN	Total
concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Définir la structure d'une unité d'enseignement	X	X	X	3
	Pondérer/alterner cours, TDs et TPs (le cas échéant)	X	X	X	3
	Sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement	X		X	2
	Planifier collectivement une unité d'enseignement		X		1

Tableau 12 : Tableau extrait du tableau 4.1 de l'annexe 4 - sous-buts inscrits dans la classe de situations « Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement » pour les enseignants-chercheurs du premier groupe

Quatre sous-buts sont identifiés dans les pratiques des enseignants-chercheurs du premier groupe dans la conception et la mise en œuvre de la planification de l'enseignement (cf. tableau 12). En effet, les enseignants-chercheurs du premier groupe, pour planifier leur enseignement, semblent essentiellement définir la structure de l'unité d'enseignement et pondérer les séances de cours et les séances de TDs. LB, LQ et LN organisent les séances d'une façon à faire presque moitié cours, et moitié TDs, conformément aux instructions officielles de la filière. En outre, LN donne un peu plus de TDs que de cours, étant convaincue que les TDs donnent une compréhension plus « profonde » des concepts que les cours magistraux. Tandis que LQ est convaincue que le cours donne une compréhension plus profonde des mathématiques discrètes que le TD, et conséquemment donne, quand possible, un peu plus de cours que de TDs. De plus, LB, LQ et LN définissent la structure des unités d'enseignement des mathématiques discrètes et de la théorie des graphes en mettant l'accent sur la théorie sans applications, et sans recours à des logiciels et à des ordinateurs. En L2, LQ planifie collectivement les unités d'enseignement avec les collègues qui enseignent les mêmes modules.

		FO	FF	FK	FT	Total
concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Définir la structure d'une unité d'enseignement		X			1
	Pondérer/alterner cours, TDs et TPs (le cas échéant)	X	X	X		3
	Sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement	X	X		X	3
	Planifier collectivement une unité d'enseignement	X	X			2
	Gérer le temps de l'enseignement		X		X	2
	Planifier individuellement une unité d'enseignement			X		1
	Esquisser les contenus d'une unité d'enseignement				X	1
	Définir collectivement la structure d'une unité d'enseignement	X				1

Tableau 13 : Tableau extrait du tableau 4.1 de l'annexe 4 - sous-buts inscrits dans la classe de situations « Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement » pour les enseignants-chercheurs du second groupe

Dans la conception et la mise en œuvre de la planification, huit sous-buts sont évoqués par les enseignants-chercheurs du second groupe (cf. tableau 13) dont les quatre sous-buts évoqués par les enseignants-chercheurs du premier groupe. Cela montre des tendances au niveau des finalités que les enseignants-chercheurs se fixent dans la planification de leur enseignement. En revanche, les actions que les enseignants-chercheurs entreprennent pour atteindre un même sous-but semblent différer entre les enseignants-chercheurs des deux groupes. Les enseignants-chercheurs du second groupe sélectionnent des contenus qui sollicitent une activité de résolution de problèmes chez les étudiants. FF, par exemple, met l'accent sur la résolution de problèmes de modélisation en sélectionnant des contenus qui portent sur des jeux combinatoires et sur des situations d'optimisation. FO sélectionne des contenus qui portent sur la coloration, le couplage, les flots, etc. FT sélectionne des contenus issus de situations vécues dans des ateliers, tels que la chasse à la bête et les problèmes de pavage avec les dominos. FK définit des contenus autour de l'optimisation linéaire et l'ordonnancement de la production qui correspondent à l'un des objectifs du module (rendre les étudiants capables de modéliser des situations et d'obtenir une solution optimale aux problèmes concrets). Il sélectionne aussi des contenus autour des graphes (plus courts chemins, arbres couvrants de poids minimum, flot maximum, coloration). FO planifie collectivement les unités d'enseignement et définit leur structure. Elle inclut des concepts dans les contenus des modules qu'elle conçoit et qu'elle désigne par « culture de base » (parcours de graphes, plus court chemins, arbres, coloration, couplage, flots, etc.). FF, FK et FO incluent dans leurs modules d'enseignement de la théorie des graphes des situations d'optimisation dont la résolution sollicite la mobilisation d'algorithmes. Ainsi, tous les trois planifient et mettent en œuvre des séances de programmation. FF et FT considèrent qu'en Master, il y a un niveau théorique plus important qu'en licence, ainsi, ils sollicitent des contenus qui ciblent des savoirs notionnels.

Certaines classes de situations sont évoquées par tous les enseignants-chercheurs participant à notre étude. Pour ces classes de situations, des tendances peuvent être repérées au niveau des sous-buts. Cela semble indiquer que, pour atteindre les buts généraux qu'ils explicitent dans leur discours, les enseignants-chercheurs se fixent des finalités qui peuvent être les mêmes. En outre, les règles d'action des enseignants-chercheurs pour atteindre ces finalités diffèrent souvent d'un enseignant-chercheur à un autre. Nous déduisons que plusieurs schèmes peuvent exister pour un même sous-but inscrit dans une classe de situations.

Conception et mise en œuvre d'une séance de cours

Dans la conception et la mise en œuvre d'une séance de cours, nous avons identifié seize sous-buts évoqués par les enseignants-chercheurs, ce qui pourrait refléter une diversité des activités dans lesquelles ils s'engagent. Une majorité mentionne qu'ils esquissent les contenus des séances de cours, et établissent des liens avec d'autres domaines mathématiques et/ou d'autres disciplines. Certains enseignants-chercheurs mettent l'accent sur l'enseignement des théorèmes dans les séances de cours, d'autres sur l'enseignement des preuves. En revanche, quelques enseignants-chercheurs mettent en œuvre des moments de résolution de problèmes. Cette diversité au niveau des activités dans lesquelles s'engagent les enseignants-chercheurs dans les séances de cours semble indiquer une disparité dans les représentations qu'ils ont de ces séances. Ces représentations différentes peuvent être influencées par les rapports personnels de ces enseignants-chercheur à la théorie des graphes, ou par des conditions et des contraintes institutionnelles.

Afin d'apporter plus d'éclairage sur les tendances et les disparités qui existent dans les finalités que les enseignants-chercheurs se fixent dans la conception et la mise en œuvre des séances de

cours, nous exposons ci-dessous les sous-buts identifiés dans les propos des enseignants-chercheurs appartenant aux deux groupes prédéfinis (§ IV.1.2.5).

		LB	LQ	LN	Total
concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Esquisser les contenus du cours	X	X	X	3
	Enseigner un théorème	X	X	X	3
	Etablir des liens avec d'autres domaines mathématiques	X	X		2
	Solliciter l'attention des étudiants en classe	X	X		2
	Enseigner les preuves	X			1
	Enseigner un algorithme		X		1
	Introduire la théorie des graphes en classe	X	X	X	3
	Modifier/adapter les contenus d'un cours		X		1

Tableau 14 : Tableau extrait du tableau 4.1 de l'annexe 4 - sous-buts inscrits dans la classe de situations « Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours » pour les enseignants-chercheurs du premier groupe

Une consultation du tableau 14 ci-dessus montre que les enseignants-chercheurs du premier groupe mettent l'accent sur l'enseignement des théorèmes et l'introduction de la théorie des graphes dans les séances de cours. Ils mettent l'accent sur des contenus qui portent sur des concepts, des notions et des théorèmes dans les séances de cours, sans avoir recours à des applications. LB, par exemple, cherche à faire passer les idées qu'il considère « de base » et insère dans son cours des exemples et des « preuves techniques » qu'il considère comme « difficiles ». LQ donne des théorèmes et leurs preuves qu'elle décrit par « mathématiques », n'abordant pas d'applications. LN aussi travaille avec les étudiants sur la construction des preuves des théorèmes dans les séances de cours. Pour la conception et la mise en œuvre des séances de cours dans un parcours de formation en mathématiques appliquées, LQ donne quelques applications avec la partie théorique et introduit des algorithmes comme les « Bellman-Ford Algorithme » et « Dijkstra Algorithm ». Elle questionne les algorithmes avec les étudiants et utilise les ordinateurs seulement pour leur montrer. Ce choix semble guidé par des conditions institutionnelles en lien avec le parcours de formation. Aussi, LQ déclare modifier et adapter les contenus du module d'enseignement des mathématiques discrètes en L2 conçu collectivement par elle-même, LB et LN. Elle déclare le faire en s'appuyant sur les réactions des étudiants et en éliminant les théorèmes qui leur semblent « difficiles » ou en les divisant en plusieurs étapes. Pour avoir une vision plus complète de la façon dont elle mobilise ce module d'enseignement et le met en œuvre en classe, nous avons analysé les formes de connectivité potentielle établies dans les contenus du module dans la partie IV.2 et complété nos analyses dans la partie IV.3 par des observations de séances de classe afin de caractériser des formes d'usages lors de la mise en œuvre en classe.

		FO	FF	FK	FT	Total
concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Esquisser les contenus du cours	X		X	X	3
	Établir des liens avec les autres disciplines				X	1
	Solliciter l'attention des étudiants en classe		X			1
	Enseigner les preuves	X	X		X	3
	Enseigner un algorithme	X				1
	Mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes	X	X		X	3
	Engager les étudiants dans un travail sur la modélisation	X				1
	Introduire la théorie des graphes en classe	X			X	2
	Établir des liens avec d'autres domaines mathématiques et d'autres disciplines	X				1
	Remédier aux difficultés des étudiants	X				1
	Engager les étudiants dans une lecture d'articles de recherche			X		1

Tableau 15 : Tableau extrait du tableau 4.1 de l'annexe 4 - sous-buts inscrits dans la classe de situations « Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours » pour les enseignants-chercheurs du second groupe

Dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours, nous avons identifié des tendances communes en termes de sous-buts entre les enseignants-chercheurs de ce groupe et ceux du premier groupe (cf. tableau 15). Mais bien que certains sous-buts puissent être communs, une consultation des tableaux documents dans l'annexe 3 montrent des disparités au niveau des actions dans lesquelles les enseignants-chercheurs s'engagent pour les atteindre. Par exemple, pour introduire la théorie des graphes en classe, FO commence par donner de la combinatoire et montre aux étudiants comment manipuler une structure de données, écrire un algorithme et vérifier qu'il fonctionne. De son côté en M2, FT invite les étudiants à réfléchir sur le problème de l'emploi de temps dont la résolution sollicite souvent l'algorithme glouton, ce qui lui permet d'interroger l'algorithme et son efficacité. LB dans le premier groupe prend comme exemple le modèle des liens d'amitié existants entre les étudiants et LN prend celui du réseau « Facebook » qui peut être modélisé par un graphe. Cela nous permet de souligner la différence qui existe au niveau des schèmes mis en place par les enseignants-chercheurs pour atteindre une même finalité. En outre, des tendances communes existent entre les enseignants-chercheurs du second groupe qui consistent en une mise en œuvre de moments de résolution de problèmes et à l'accent mis sur l'enseignement des preuves dans les séances de cours. FO, FK et FT transforment des problèmes issus de la recherche mathématique en situations pour l'enseignement. FK, par exemple, travaille avec les étudiants sur des problèmes de modélisation issus de situations concrètes du contexte industriel, particulièrement sur des sujets d'ordonnancement de la production qui, selon lui, sont ancrés dans les applications et permettent aux étudiants de raisonner dessus. FO, de son côté, sélectionne des contenus qui permettent aux étudiants de travailler en même temps sur la modélisation, la programmation et les preuves. En effet, les quatre enseignants-chercheurs en France mettent tous l'accent sur l'activité de preuve et le raisonnement dans les séances de cours. FF travaille avec les étudiants dans un parcours formation en informatique en M1 sur des preuves formelles que les étudiants de ce parcours n'ont pas la rigueur mathématique nécessaire pour construire. FO aussi travaille sur les preuves avec les étudiants dans un parcours de formation en

mathématiques-informatique qui, selon elle, sont capables de s'engager dans un travail sur les preuves, une capacité que les étudiants dans un parcours d'informatique ne possèdent pas selon FO. Une autre tendance des enseignants-chercheurs en France dans les séances de cours est la mise en œuvre des moments de résolution de problèmes. Pour enseigner une notion en classe, FT lance un problème aux étudiants et les invite à réfléchir dessus. Il sélectionne entre autres des problèmes d'optimisation combinatoire qui lui permettent d'aborder des notions inhérentes à l'activité mathématique. Ainsi, il place les étudiants en posture de chercheurs sur des problèmes et leur pose des questions qui portent sur le « pourquoi » afin de développer chez eux l'habitude de questionner les choses. FO, dans les séances de cours, co-construit les connaissances avec les étudiants en échangeant et discutant sur des problèmes qu'elle propose. En plus, les quatre enseignants-chercheurs en France mobilisent dans les séances de cours des contenus issus de la recherche. FF donne, quand cela est possible, des exemples qui proviennent de son activité de recherche, susceptibles selon lui d'intéresser les étudiants plus que les notions théoriques moins concrètes. FO aussi montre à ses étudiants ce qu'elle fait en recherche, ce qu'ils apprécient bien. FK propose dans son enseignement des sujets issus de son activité de recherche parce qu'il trouve que certains sujets proposés dans un enseignement de l'ordonnancement de la production ne se trouvent pas dans des ouvrages classiques de la littérature. Il engage aussi les étudiants dans une lecture d'articles de recherche relativement « simples » publiés dans des conférences récentes auxquels il a accès étant chercheur.

Nous pouvons détecter chez les enseignants-chercheurs du second groupe une influence de leur activité de recherche sur leur enseignement. Cette influence peut être identifiée dans le choix des ressources à mobiliser en classe qui sont souvent issues de l'activité de recherche ; les enseignants adaptent des problèmes issus de leur activité de recherche afin de pouvoir les présenter aux étudiants en classe. Elle peut être aussi identifiée dans des gestes des enseignants-chercheurs tels qu'engager les étudiants dans une activité de lecture d'articles de recherche ou les placer dans une posture de chercheurs sur des problèmes ouverts, ou développer chez eux l'habitude de questionner les choses.

Les sous-buts indiquent aussi des disparités dans les conceptions des enseignants-chercheurs concernant les séances de cours. Les enseignants-chercheurs du premier groupe semblent considérer que les séances de cours doivent consister en des apports théoriques (introduction de concepts, de théorèmes, d'exemples, etc.). En contrepartie, les enseignants-chercheurs du second groupe mettent en œuvre des moments de résolution de problèmes, de travail sur les algorithmes et de co-construction des connaissances avec les étudiants dans les séances de cours. Ces différentes façons de concevoir les séances de cours peuvent être expliquées par des conditions institutionnelles en lien avec les parcours de formation ; les enseignants-chercheurs du premier groupe enseignent dans un parcours de formation en mathématiques alors que ceux du deuxième groupe enseignent dans des parcours de formation en informatique, maths-info, mathématiques appliquées et parcours d'ingénieurs. Cela peut être aussi justifié par des rapports différents à la théorie des graphes que peuvent avoir les enseignants-chercheurs des deux groupes dans leur activité de recherche.

Conception et mise en œuvre d'une séance de TDs

En ce qui concerne la conception et la mise en œuvre des séances de TDs, nous avons identifié treize sous-buts. La majorité des enseignants-chercheurs semblent esquisser les contenus des TDs et mettre en œuvre des moments d'entraînement et d'application. Quelques-uns mettent en œuvre des moments de résolution de problèmes. Les autres sous-buts mentionnés par les enseignants-

chercheurs reflètent plutôt des spécificités de leurs pratiques. Par exemple, LB met l'accent sur l'enseignement des preuves dans les séances de TDs. LK et LX engagent les étudiants dans un travail sur la modélisation, et LX conçoit et met en œuvre des projets en classe. LN dans les séances de TDs enseigne un théorème et introduit le problème des quatre couleurs au niveau Master. Elle établit aussi des liens avec l'algèbre dans le contexte d'un problème en théorie des graphes. FO et FF échangent des questions avec d'autres enseignants-chercheurs pour l'élaboration des contenus du TD, ce qui indique la présence d'une dimension collective dans leurs pratiques d'enseignement. Et LQ modifie les contenus du TD du module conçu collectivement pour l'enseignement des mathématiques discrètes en L2.

Nous présentons ci-dessous dans les tableaux 16 et 17 les sous-buts qui s'inscrivent dans la classe de situations relative à la conception et la mise en œuvre des séances de TDs pour les deux groupes d'enseignants-chercheurs.

		LB	LQ	LN	Total
concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Mettre en œuvre des moments d'entraînement et d'application (exercices)	X	X	X	3
	Enseigner les preuves	X			1
	Esquisser les contenus du TD		X		1
	Enseigner un théorème			X	1
	Introduire le problème des 4 couleurs			X	1
	Etablir des liens avec d'autres domaines mathématiques			X	1
	Modifier/adapter les contenus d'un TD		X		1

Tableau 16 : Tableau extrait du tableau 4.1 de l'annexe 4 - sous-buts inscrits dans la classe de situations « Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs » pour les enseignants-chercheurs du premier groupe

Dans la conception et la mise en œuvre d'une séance de TDs, LB, LN et LQ, mettent en œuvre des moments d'entraînement et d'application (exercices). Cela pourrait être lié à leur conception collective du module d'enseignement des mathématiques discrètes, ou à une perception qu'ils partagent des mathématiques discrètes et de leur enseignement qui peut nous être en partie accessible à travers les invariants opératoires. De plus, LB met l'accent sur les preuves et incite les étudiants à résoudre des exercices et à rédiger des preuves et des idées. LN met l'accent sur l'enseignement des théorèmes, et les donne sous forme d'exercices. Elle met en place un travail en groupes où les étudiants peuvent discuter et échanger des idées lors de la résolution des exercices. LQ modifie les contenus du TD comme elle le fait pour les contenus du cours. Elle allège les contenus en éliminant des questions qui se ressemblent, en remplaçant les questions que les étudiants perçoivent comme « difficiles » par des questions plus « faciles » ou en les divisant en plusieurs étapes afin de les rendre plus accessibles aux étudiants.

		FO	FF	FK	FT	Total
concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Echanger des questions avec d'autres enseignants-chercheurs	X	X			2
	Mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes	X	X	X		3
	Esquisser les contenus du TD	X		X		2

Tableau 17 : Tableau extrait du tableau 4.1 de l'annexe 4 - sous-buts inscrits dans la classe de situations « Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs » pour les enseignants-chercheurs du second groupe

Dans la conception et la mise en œuvre des séances de TDs, nous avons identifié trois sous-buts mentionnés par les enseignants-chercheurs du second groupe (cf. tableau 17), ce qui peut refléter des tendances communes dans leurs pratiques pour cette classe de situations. En effet, tous les enseignants-chercheurs du second groupe mettent en œuvre des moments de résolution de problèmes. FK donne des questions ouvertes et sélectionne des problèmes de modélisation portant sur des situations issues du contexte industriel, et des problèmes industriels concrets en lien avec la logistique et la gestion de la production, aussi bien que des problèmes issus de son activité de recherche ou inspirés de sujets de recherche actuels. FF donne des sujets issus de situations authentiques. FO travaille avec les étudiants sur des problèmes pratiques qui peuvent être modélisés par un graphe. Elle partage des bandes de questions avec d'autres enseignants-chercheurs et mobilise des questions générées par des étudiants pris en stage. De même, FF échange des sujets de TDs avec des collègues qui enseignent le même domaine mathématique. Ainsi, nous inférons la présence d'une dimension collective dans la conception des séances de TDs. Par ailleurs, lors de la mise en œuvre des séances de TDs, FO invite les étudiants à travailler sur les problèmes sans jamais leur donner les solutions. FK, de son côté, met l'accent sur les raisonnements et accorde une attention particulière à la gestion des émotions des étudiants qui peuvent se sentir démotivés en travaillant sur des problèmes ouverts.

Des disparités existent entre les finalités que les enseignants-chercheurs se fixent pour la conception et la mise en œuvre des séances de TDs dans les deux groupes. Les enseignants-chercheurs du premier groupe mettent l'accent sur des exercices d'entraînement et d'application et sur le travail sur les preuves, alors que les enseignants-chercheurs du deuxième groupe mettent l'accent sur la résolution de problèmes issus du contexte industriel et de situations authentiques ou de leur activité de recherche. Aussi, la dimension collective en matière d'échange de questions entre les enseignants-chercheurs semble être plus importante parmi les enseignants-chercheurs du second groupe, bien que les enseignants-chercheurs du premier groupe aient conçu collectivement le module d'enseignement des mathématiques discrètes en L2.

Conception et mise en œuvre d'une séance de TPs

Dans la conception et la mise en œuvre des séances de TPs, nous avons identifié six sous-buts dont parlent les enseignants-chercheurs dans les entretiens. Cela peut être expliqué par le fait que quatre enseignants-chercheurs engagent les étudiants dans des séances de travaux pratiques (cf. annexe 4, tableau 4.1). Tous les quatre mettent en œuvre des séances de programmation sur ordinateurs. Cela peut être dû au rapport personnel que ces enseignants-chercheurs ont à la théorie des graphes, qu'ils perçoivent comme un domaine mathématique assez proche de l'informatique. Nous soulignons aussi que ces enseignants-chercheurs enseignent dans des parcours de formation en informatique, maths-info, informatique de gestion, génie industrielle, etc. Ces contextes institutionnels peuvent influencer la mise en œuvre des séances de TPs, étant donné que la

programmation peut être perçue comme une compétence essentielle à développer chez les étudiants dans ces parcours.

Nous soulignons qu'aucun enseignant-chercheur appartenant au premier groupe ne conçoit ou met en œuvre des séances de TPs. Nous présentons ci-dessous les sous-buts identifiés en lien avec la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation pour les enseignants-chercheurs du second groupe.

		FO	FF	FK	Total
concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs	Engager les étudiants dans un travail sur la modélisation		X		1
	Mettre en œuvre des séances de programmation	X	X	X	3
	Mettre en œuvre des moments de recherche autour d'un problème		X		1
	Mettre en œuvre des moments d'expérimentation avec des objets matériels	X			1
	Planifier des séances de programmation	X			1
	Planifier des moments d'expérimentation avec des objets matériels			X	1

Tableau 18 : Tableau extrait du tableau 4.1 de l'annexe 4 - sous-buts inscrits dans la classe de situations « Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs » pour les enseignants-chercheurs du second groupe

Nous soulignons que trois de quatre enseignants-chercheurs du second groupe conçoivent et mettent en œuvre des séances de TPs. FT met en œuvre des moments de recherche et d'expérimentation en classe avec les étudiants dans les séances de cours. En effet, il ne distingue pas dans les séances entre cours, TDs, et TPs. Le tableau 18 ci-dessus montre une diversité des pratiques des trois enseignants-chercheurs (FO, FF, et FK) dans la conception et la mise en œuvre des séances de TPs. Tous les trois mettent en œuvre des séances de programmation. En outre, FF met en œuvre des moments de recherche autour de problèmes dans les séances de TPs et engage les étudiants dans un travail de modélisation sur des problèmes concrets d'entreprises comme le problème de l'affectation des horaires. Il présente une justification de ce choix qui relève de l'épistémologie, en lien avec la nature des mathématiques discrètes dont l'enseignement, selon lui, permet de familiariser les étudiants aux modèles qui représentent un tas de problèmes issus d'autres disciplines telles que l'informatique. FO et FK mettent aussi l'accent sur l'expérimentation avec des objets matériels dans les séances de TPs. FO expérimente avec les étudiants sur des jeux et effectue des liens avec les notions enseignées lors des séances de cours. Pour elle, dans les séances de TPs, elle entame en même temps un travail sur la modélisation, la preuve et la programmation. FK organise des séances sur ordinateurs quand il le juge « pertinent » et « possible ». Il souligne que la dimension expérimentale peut être souvent plus forte quand un étudiant est placé devant un plateau avec du matériel que dans une salle informatique. Il planifie des moments d'expérimentation avec des objets matériels que souvent il fabrique lui-même avec du bois, du plastique ou d'autres matériaux.

Le fait que les enseignants-chercheurs du premier groupe ne conçoivent pas des séances de TPs dans leur enseignement de la théorie des graphes peut avoir plusieurs justifications possibles. Il peut être dû à des conditions institutionnelles en lien avec le parcours de formation dans lequel ils enseignent et la disponibilité des ressources, ainsi que leurs conceptions relatives à la théorie des graphes et son enseignement. Trois des enseignants-chercheurs du second groupe conçoivent et

mettent en œuvre des séances de TPs qui peuvent porter sur des expérimentations avec des jeux matériels ou sur une mobilisation de logiciels dans des séances de programmation. Certains enseignants-chercheurs mobilisent des problèmes issus de leur activité de recherche dans les séances de TPs, ce qui peut indiquer une influence de leur activité de recherche sur leur enseignement.

Conception et mise en œuvre des moments d'évaluation

Dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation, sept sous-buts sont mentionnés par les enseignants-chercheurs. La majorité d'entre eux élaborent les questions des épreuves écrites. Ils le font individuellement ou collectivement, ce qui dépend en général de l'institution dans laquelle ils enseignent. Quand plusieurs enseignants-chercheurs enseignent un même module, l'élaboration collective de la même épreuve écrite est souvent une recommandation institutionnelle. Certains enseignants-chercheurs élaborent plusieurs modalités pour l'évaluation des étudiants.

Nous présentons ci-dessous les sous-buts identifiés en lien avec la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation pour les deux groupes d'enseignants-chercheurs que nous avons définis.

		LB	LQ	LN	Total
concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Élaborer individuellement une épreuve écrite		X		1
	Répartir les notes dans une épreuve écrite		X		1
	Élaborer collectivement les questions d'une épreuve écrite			X	1

Tableau 19 : Tableau extrait du tableau 4.1 de l'annexe 4 - sous-buts inscrits dans la classe de situations « Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation » pour les enseignants-chercheurs du premier groupe

Dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation, trois sous-buts sont évoqués par les enseignants-chercheurs, tous en lien avec l'élaboration des épreuves écrites (cf. tableau 19). Bien que chaque sous-but soit mentionné par un des enseignants-chercheurs, nous soulignons une homogénéité au niveau de la modalité d'évaluation, ce qui peut être une recommandation de l'institution. LB et LN construisent des questions ensemble pour les épreuves écrites étant donné qu'ils enseignent dans un même site de l'université. LQ élabore les épreuves écrites individuellement parce qu'elle enseigne le module dans un autre site de l'université. Cependant, elle déclare avoir demandé les conseils de LB lors de l'élaboration des épreuves écrites quand elle n'avait pas suffisamment d'expérience dans l'enseignement. LN et LB incluent des questions de compréhension du cours, d'autres qui portent sur des preuves de théorèmes travaillés en classe, et des problèmes nouveaux, dont la résolution demande une réflexion. LQ de son côté donne des questions qui portent sur tous les chapitres d'un module. Elle les pioche dans les ouvrages ou les rédige elle-même, et consulte parfois des ressources en ligne.

		FO	FF	FK	FT	Total
concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Élaborer individuellement une épreuve écrite	X	X			2
	Répartir les notes dans une épreuve écrite		X			1
	Échanger des questions avec d'autres enseignants-chercheurs	X	X			2
	Élaborer les modalités d'évaluation des étudiants	X		X	X	3
	Concevoir des projets mémoires pour l'évaluation des étudiants				X	1
	Évaluer le travail des étudiants en classe				X	1

Tableau 20 : Tableau extrait du tableau 4.1 de l'annexe 4 - sous-buts inscrits dans la classe de situations « Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation » pour les enseignants-chercheurs du second groupe

Dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation, nous avons identifié six sous-buts évoqués par les enseignants-chercheurs du second groupe (cf. tableau 20) qui élaborent plusieurs modalités d'évaluation des étudiants dont des épreuves écrites et des projets. FK donne aux étudiants une épreuve écrite, une évaluation sur machine consistant en un problème industriel à modéliser et résoudre et un exposé oral de la rédaction d'un résumé d'un article en anglais que les étudiants ont à lire. Et parfois, il donne des problèmes aux étudiants qu'ils doivent résoudre en une quinzaine de jours. FO évalue les étudiants au fur et à mesure sur la plateforme et leur donne des épreuves écrites composées de questions qui portent sur des théorèmes ou des propriétés du cours et d'autres qui comportent des éléments de preuves que les étudiants doivent compléter. FT évalue les étudiants sur leur présence et leur participation en classe, et sur la rédaction d'un mini mémoire en binômes qu'ils sont supposés exposer oralement. FO et FF échangent des questions avec d'autres enseignants-chercheurs pour l'élaboration des épreuves écrites. Pour ces derniers, la dimension collective est présente dans les épreuves écrites pour l'évaluation des étudiants, bien qu'ils les élaborent individuellement.

Les modalités d'évaluation semblent être plus variées pour les enseignants-chercheurs du second groupe qui évaluent les étudiants sur leur présence, par le biais de mini-mémoires et de leur présentation, ainsi que par des épreuves écrites. En outre, cette dernière semble la seule modalité mobilisée par les enseignants-chercheurs du premier groupe. Cela peut être dû à des recommandations institutionnelles.

Participation à un collectif d'enseignement ou de recherche

En ce qui concerne la participation à un collectif d'enseignement ou de recherche, FF, FK et FT participent à un collectif de recherche qui s'intéresse à la diffusion et à l'enseignement des mathématiques, *maths à modeler*.

Éléments de synthèse : classes de situations et sous-buts

Les classes de situations et les sous-buts identifiés dans les entretiens avec les enseignants-chercheurs nous ont permis d'avoir un premier accès à l'étude de leurs pratiques d'enseignement. Ainsi, nous avons cerné des finalités que les enseignants-chercheurs participant à notre étude se fixent dans leur enseignement de la théorie des graphes. Nous avons pu repérer des tendances qui

existent au niveau des sous-buts, cependant, des consultations des tableaux documents des enseignants-chercheurs nous ont permis de remarquer que les règles d'action des enseignants-chercheurs pour les mêmes sous-buts diffèrent d'un enseignant-chercheur à un autre. Nous retenons que plusieurs schèmes peuvent exister pour un même sous-but inscrit dans une classe de situations.

Les premiers éléments de synthèse obtenus à partir de cette étape permettent de discerner une influence potentielle du contexte institutionnel en termes de parcours de formation et des rapports personnels que les enseignants-chercheurs ont à la théorie des graphes sur les finalités qu'ils se fixent pour leur enseignement, et sur les actions qu'ils entreprennent pour atteindre ces finalités.

De plus, nous avons pu, à partir des sous-buts, détecter chez certains enseignants-chercheurs une influence de leur activité de recherche sur leur enseignement dans les choix qu'ils effectuent en termes de ressources à mobiliser en classe (qui peuvent être issues de leur activité de recherche), et dans leurs gestes dans la mise en œuvre des séances de cours/TDs/TPs (engager les étudiants dans la lecture d'articles de recherche, placer les étudiants dans une posture de chercheurs sur des problèmes de recherche, etc.).

Afin de pouvoir compléter ces premiers éléments obtenus par l'exploitation des deux premières étapes de notre méthodologie, nous présentons dans la partie suivante notre exploitation de la troisième étape. En effet, dans le cadre des classes de situations susmentionnées, les enseignants-chercheurs interagissent avec des ressources diverses. Nous estimons que leurs interactions avec les ressources peuvent être révélatrices en termes d'étude de leurs pratiques d'enseignement et de la relation pouvant exister entre ces pratiques et leur activité de recherche. Ainsi, dans la partie suivante, nous essayerons de recenser les ressources avec lesquelles interagissent les enseignants-chercheurs dans les classes de situations identifiées dans le paragraphe III.4.4.

IV.1.3.3- Caractéristiques des ressources mobilisées dans les pratiques d'enseignement de la théorie des graphes des enseignants-chercheurs

Les enseignants-chercheurs interagissent avec des ressources diverses dans leurs pratiques d'enseignement qu'ils peuvent avoir produites eux-mêmes, ou qui peuvent être produites par des pairs et qu'ils adaptent, modifient ou utilisent lors de la conception ou de la mise en œuvre de leur enseignement. Ces ressources peuvent être conçues pour l'enseignement, ou être des ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans leur activité de recherche et qu'ils mobilisent dans leur enseignement. Une analyse de ces ressources peut nous éclairer sur des choix que les enseignants-chercheurs effectuent dans l'enseignement de la théorie des graphes, et sur les liens potentiels entre leur activité de recherche et leurs pratiques d'enseignement.

Une consultation du tableau 4.2 de l'annexe 4 montre quinze types de ressources que les enseignants-chercheurs mobilisent dans leur enseignement (et qu'ils n'ont pas produites) dont treize proviennent de leurs pratiques d'enseignement. Les ouvrages de mathématiques discrètes et de théorie des graphes diffusés à destination de l'enseignement semblent être les ressources les plus mobilisées par les enseignants-chercheurs dans leurs pratiques d'enseignement. Presque la moitié des enseignants-chercheurs mobilisent des logiciels et des ordinateurs et des ressources en ligne dans leur enseignement. Certains mentionnent qu'ils échangent des ressources avec des collègues. Les ressources provenant du monde de la recherche consistent en des publications scientifiques évoquées par trois des enseignants-chercheurs en parlant de leurs pratiques.

En ce qui concerne les ressources produites par les enseignants-chercheurs pour leur enseignement, sept différents types sont évoqués dont trois proviennent de leur propre activité de recherche. Cependant, la mobilisation de ces types de ressources semble être moins répandue parmi les enseignants-chercheurs que nous avons interviewés, et subséquemment, elle paraît être une spécificité des pratiques de certains enseignants-chercheurs dans notre étude. Ainsi, nous estimons que les enseignants-chercheurs n'ont pas toujours tendance à mobiliser des ressources matérielles issues de leur activité de recherche dans leur enseignement, et ceux qui le font mobilisent plutôt des ressources qu'ils ont produites eux-mêmes dans leur propre activité de recherche.

Nous soulignons aussi que les enseignants-chercheurs mobilisent des ressources non-matérielles dans leurs pratiques d'enseignement tels que leur expérience personnelle dans l'enseignement ou en recherche, les réactions des étudiants quand ils sont exposés à certains contenus ou des discussions avec des collègues lors de l'élaboration des épreuves écrites, etc. LQ à titre d'exemple déclare qu'à une certaine époque où elle n'avait pas suffisamment d'expérience, elle sollicitait les conseils d'un collègue concernant les épreuves écrites qu'elle construisait.

Afin de pouvoir caractériser plus finement les choix des enseignants-chercheurs par rapport aux ressources qu'ils mobilisent dans/pour l'enseignement, nous examinons dans la suite les ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans chaque classe de situations.

Conception et mise en œuvre de la planification de l'enseignement

Pour la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement, les enseignants-chercheurs mobilisent dix types de ressources dont neuf proviennent de leur enseignement (cf. annexe 4 tableau 4.3). Ils semblent mobiliser principalement des ressources produites par des pairs dont les syllabus fixés par les institutions au sein desquelles ils enseignent et des ouvrages à destination de l'enseignement de la théorie des graphes.

Nous présentons ci-dessous des extraits du tableau 4.3 de l'annexe 4 (cf. tableaux 21 et 22) qui peuvent apporter plus d'éclairage sur les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs dans les deux groupes prédéfinis (§ IV.1.2.5) afin d'identifier des tendances et des disparités qui peuvent exister entre les deux groupes en termes de mobilisation de ressources.

			LB	LQ	LN	Total
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	X	3
		Syllabus	X	X		2
Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement	Polycopié conçu collectivement	X	X	X	3

Tableau 21 : Tableau extrait du tableau 4.3 de l'annexe 4 - ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs du premier groupe interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement

Les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs du premier groupe (cf. tableau 21) dans la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement sont les ouvrages et les syllabus, ainsi que le polycopié conçu collectivement pour l'enseignement des mathématiques discrètes en L2. En effet, LQ, LB et LN mobilisent un même polycopié qu'ils ont conçu collectivement pour l'enseignement des mathématiques discrètes en L2. Ce polycopié semble constituer pour eux une ressource principale pour la planification de leur enseignement de ce module. Les ressources sont dans leur totalité des ressources qui proviennent de l'enseignement et

elles semblent être essentielles pour la planification de l'enseignement de ces enseignants-chercheurs.

			FO	FF	FK	FT	Total
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	X		3
		Syllabus			X		1
		Ressources échangées avec des collègues		X			1
		Questions et théorèmes tels que la coloration de graphes et l'emploi du temps				X	1
		Ressources en ligne	X				1
		Plateforme d'apprentissage Moodle	X				1
		Productions des étudiants				X	1
		Ancien polycopié d'un module de mathématiques discrètes conçu par un collègue		X			1
Ressources produites	Ressources provenant de la recherche	Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et les polyominos				X	1

Tableau 22 : Tableau extrait du tableau 4.3 de l'annexe 4 - ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs du second groupe interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement

Les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs du second groupe (cf. tableau 22) dans la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement sont diverses. Huit des neuf types de ressources mobilisées proviennent de leur enseignement. Cependant, chacun des enseignants-chercheurs mobilise deux ou trois types de ressources. La seule ressource qui est mobilisée par trois des enseignants-chercheurs de ce groupe consiste en des ouvrages destinés à l'enseignement. FT planifie son enseignement en sélectionnant des problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et les polyominos à mobiliser en classe avec les étudiants. Il gère son enseignement en fonction des productions des étudiants dans la recherche sur ces problèmes. Il est en fait le seul enseignant-chercheur interviewé qui ne s'appuie pas sur les ouvrages pour planifier son enseignement, non plus sur un syllabus. Cela peut être dû à la position qu'il occupe au sein de l'institution étant directeur de recherche au CNRS, ce qui, selon lui, lui donne une marge de liberté dans les choix des contenus. Cette marge de liberté semble aussi renforcée par le fait qu'il enseigne un module optionnel offert à des étudiants appartenant à des parcours de formation divers. FK s'appuie pour planifier son enseignement sur un ancien polycopié d'un module de mathématiques discrètes, conçu par un collègue qui enseignait le module auparavant. Il s'inspire de ce module et le met à jour chaque année en modifiant les contenus.

Nous soutenons que les enseignants-chercheurs mobilisent principalement des ressources qu'ils n'ont pas produites eux-mêmes et qui sont issues de l'enseignement pour la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement. Les enseignants-chercheurs du premier groupe mobilisent trois types de ressources dont les syllabus et un module d'enseignement qu'ils ont conçu collectivement pour l'enseignement des mathématiques discrètes en L2. La mobilisation d'une ressource commune semble être dans ce cas une recommandation institutionnelle. Cependant, nous faisons l'hypothèse qu'un examen des schèmes de mobilisation de cette même ressource par les trois enseignants-chercheurs dans un même parcours de formation au sein de la même institution peut nous permettre de cerner l'influence du rapport personnel de chacun des trois enseignants-chercheurs à la théorie des graphes, et l'influence de leur activité de recherche

sur leur enseignement. Un plus grand nombre de ressources sont mobilisées par les enseignants-chercheurs du second groupe, ce qui peut refléter une diversité dans les pratiques des enseignants-chercheurs en ce qui concerne la planification de leur enseignement.

Conception et mise en œuvre d'une séance de cours

Pour la conception et la mise en œuvre des séances de cours, les enseignants-chercheurs mobilisent une diversité de ressources, dont certaines sont produites et d'autres sont modifiées, adaptées, et/ou utilisées (cf. annexe 4 tableau 4.4). En effet, parmi les quatorze types de ressources présentées dans le tableau 4.4 de l'annexe 4, cinq sont des ressources produites par les enseignants-chercheurs. Il convient de noter que cette variété des ressources peut refléter des disparités dans les pratiques des enseignants-chercheurs dans la conception de la partie cours de leurs modules, et dans la mise en œuvre. En effet, bien que les ouvrages soient une ressource évoquée par presque tous les enseignants-chercheurs pour la conception de leurs cours, les autres ressources dont ces enseignants-chercheurs parlent sont diverses et diffèrent de l'un à l'autre. Quelques enseignants-chercheurs recherchent des ressources en ligne pour concevoir leurs cours, et certains mobilisent des logiciels et des ordinateurs dans les séances de cours. Pourtant, les enseignants-chercheurs ne semblent pas mettre l'accent sur l'enseignement des algorithmes dans les séances de cours. LQ par exemple, qui utilise des logiciels dans son cours, le fait uniquement dans le contexte d'enseignement des mathématiques discrètes dans une université privée dans un parcours de formation en mathématiques appliquées. Et elle utilise l'ordinateur pour montrer les algorithmes aux étudiants afin de pouvoir en discuter avec eux, sans les engager eux-mêmes dans un travail sur les algorithmes. LQ qui enseigne le même module à des étudiants dans un parcours de formation en mathématiques à l'université libanaise n'évoque jamais les algorithmes dans les séances de cours avec eux. Aussi, LX utilise les ordinateurs comme support de présentation des contenus dans les séances de cours.

Nous présentons ci-dessous des extraits du tableau 4.4 de l'annexe 4 (cf. tableaux 23 et 24) qui peuvent apporter plus d'éclairage sur les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs dans les deux groupes prédéfinis (§ IV.1.2.5) dans/pour la conception et la mise en œuvre des séances de cours afin d'identifier des tendances et des disparités qui peuvent exister entre les deux groupes en termes de mobilisation de ressources.

			LB	LQ	LN	Total
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	X	3
		Ordinateurs et logiciels		X		1
	Ressources provenant de la recherche	Publications scientifiques	X			1
Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement	Polycopié conçu collectivement	X	X		2
	Ressources provenant de la recherche	Résultats de ses propres recherches	X			1

Tableau 23 : Tableau extrait du tableau 4.4 de l'annexe 4 - ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs du premier groupe interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre des séances de cours

Les ressources mobilisées par tous les enseignants-chercheurs du premier groupe (cf. tableau 23) dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours sont les ouvrages à destination de

l'enseignement et le polycopié que tous les trois ont conçu collectivement pour enseigner les mathématiques discrètes en L2. LN ne mentionne pas le polycopié conçu collectivement comme ressource qu'elle mobilise dans les séances de cours simplement parce qu'elle ne parle pas spécifiquement dans son enseignement en L2 quand elle évoque les séances de cours. LB mobilise dans les séances de cours deux ressources issues de la recherche ; il évoque des résultats de ses propres recherches en classe et convertit en textes d'enseignement des publications scientifiques, ces dernières étant souvent rédigées dans un langage que les étudiants ne peuvent pas comprendre.

			FO	FF	FK	FT	Total
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	X		3
		Ressources échangées avec des collègues		X			1
		Questions et théorèmes tels que la coloration de graphes et l'emploi du temps				X	1
		Ressources en ligne	X				1
		Plateforme d'apprentissage Moodle	X				1
		Productions des étudiants				X	1
	Ressources provenant de la recherche	Publications scientifiques				X	1
	Articles publiés dans des conférences récentes			X		1	
Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement	Jeux physiques et fiches (comme chasse-à-la-bête)				X	1
	Ressources provenant de la recherche	Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et les polyominos	X	X		X	3
		Ressources issues de ses propres recherches		X	X		2

Tableau 24 : Tableau extrait du tableau 4.4 de l'annexe 4 - ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs du second groupe interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre des séances de cours

Les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs du second groupe (cf. tableau 24) dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours sont de onze types différents, ce qui semble refléter une variété de choix effectués par les enseignants-chercheurs concernant les séances de cours en termes de contenus, de leur organisation et de leur mise en œuvre. Les ressources principales semblent être les ouvrages à destination de l'enseignement et les problèmes de recherche tels que la chasse à la bête provenant de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs. FF et FK mobilisent aussi des ressources issues de leur propre recherche. FF donne des exemples qui proviennent de son activité de recherche aux étudiants en classe et FK propose dans son enseignement des sujets issus de son activité de recherche en lien avec l'ordonnancement de la production. Il convient de mentionner que quatre des onze ressources citées dans le tableau 24 ci-dessus proviennent de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs ce qui peut indiquer une influence de la recherche sur l'enseignement plus forte que dans la planification de l'enseignement.

Les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours sont diverses en termes de leur provenance (enseignement ou recherche) et de leur conception (conçues par les enseignants-chercheurs ou non). Des disparités existent dans les choix de ressources à mobiliser pour la conception et la mise en œuvre des séances de cours entre les enseignants-chercheurs, ce qui peut refléter une diversité dans leurs pratiques d'enseignement. La mobilisation de ressources issues de la recherche par les enseignants-chercheurs peut indiquer une influence potentielle de leur activité de recherche sur leur enseignement.

Conception et mise en œuvre d'une séance de TDs

Pour la conception et la mise en œuvre des séances de TDs, les enseignants-chercheurs mobilisent une diversité de ressources, dont certaines sont produites et d'autres sont modifiées, adaptées, et/ou utilisées (cf. annexe 4 tableau 4.5). En effet, parmi les dix types de ressources présentées dans le tableau 4.5 de l'annexe 4, trois sont des ressources produites par les enseignants-chercheurs. Les ouvrages à destination de l'enseignement sont mobilisés par tous les enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre des séances de TDs. Aussi, un grand nombre d'enseignants-chercheurs mobilisent des logiciels et des ordinateurs dans la conception et la mise en œuvre des séances de TDs. LX par exemple donne à ses étudiants des situations de programmation linéaire. Il utilise des modèles conçus par des chercheurs en mathématiques parce qu'il est contraint par le nombre d'heures d'enseignement du module qui lui permet presque d'arriver à bout du plan prévu du module. LX donne travail avec ses étudiants sur l'optimisation sur des modèles où des contraintes sont posées, et il vérifie que la solution obtenue respecte ces contraintes.

Nous présentons ci-dessous des extraits du tableau 4.5 de l'annexe 4 (cf. tableaux 25 et 26) qui peuvent apporter plus d'éclairage sur les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs dans les deux groupes prédéfinis (§ IV.1.2.5) dans/pour la conception et la mise en œuvre des séances de TDs afin d'identifier des tendances et des disparités qui peuvent exister entre les deux groupes en termes de mobilisation de ressources.

			LB	LQ	LN	Total
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	X	3
Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement	Polycopié conçu collectivement			X	1

Tableau 25 : Tableau extrait du tableau 4.5 de l'annexe 4 - ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs du premier groupe interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre des séances de TDs

Les ressources mobilisées par tous les enseignants-chercheurs du premier groupe (cf. tableau 25) dans la conception et la mise en œuvre des séances de TDs sont les ouvrages à destination de l'enseignement et le polycopié que tous les trois ont conçu collectivement pour enseigner les mathématiques discrètes en L2. LB et LQ n'évoque pas cette dernière ressource en parlant des TDs lors des entretiens parce qu'ils ne parlent pas spécifiquement des séances de TDs en L2.

			FO	FF	FK	Total
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	X	3
		Ressources échangées avec des collègues		X		1
		Ordinateurs et logiciels	X	X	X	3
		Bandes de questions générées par des étudiants pris en stage	X			1
		Ressources en ligne	X		X	2
		Plateforme d'apprentissage Moodle	X			1
Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement	Propres ressources de formations réalisées les années précédentes			X	1
	Ressources provenant de la recherche	Ressources issues de ses propres recherches		X	X	2

Tableau 26 : Tableau extrait du tableau 4.5 de l'annexe 4 - ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs du second groupe interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre des séances de TDs

Les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs du second groupe (cf. tableau 26) dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours sont de huit types différents, ce qui semble refléter une variété de choix effectués par les enseignants-chercheurs concernant les séances de TDs en termes de contenus, de leur organisation et de leur mise en œuvre. Les ressources principales semblent être les ouvrages à destination de l'enseignement, les ordinateurs et les logiciels. FF échange des sujets possibles de TDs avec un ensemble de collègues qui travaillent dans le même domaine. Ces sujets de TDs peuvent être issus de situations authentiques puisque les mathématiques discrètes permettent de travailler sur des exemples de la vie réelle. FK choisit des problèmes de modélisation portant sur des situations issues du contexte industriel, et des problèmes industriels concrets en lien avec la logistique et la gestion de la production. Il mobilise aussi des problèmes issus de son activité de recherche ou inspirés de sujets de recherche actuels qui, d'une part, peuvent être réinvestis à différents niveaux, et d'une autre part, ne peuvent pas être trouvés dans les ouvrages classiques de la littérature. FO partage des bandes de questions avec d'autres enseignants-chercheurs sur la plateforme d'apprentissage Moodle où chacun peut rajouter des exercices. Aussi, elle prend des étudiants en stage qui génèrent des bandes de questions sur la plateforme Moodle, ce qui s'avère intéressant pour ces étudiants, vu qu'ils devraient se poser les questions à l'envers. Pour la mise en œuvre des moments de résolution de problèmes, FO prend comme point de départ des problèmes pratiques qui peuvent être modélisés par un graphe.

Les choix de ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre des séances de TDs semblent être souvent influencés par des conditions et des contraintes institutionnelles en lien avec le parcours de formation. La mobilisation de ressources issues de leur propre recherche par deux enseignants-chercheurs du second groupe indique une influence de leur activité de recherche sur la conception des séances de TDs. Nous soulignons une plus grande diversité dans les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs du second groupe. Nous estimons qu'elle peut être liée aux différents contextes institutionnels dans lesquels ils enseignent par opposition à l'appartenance des enseignants-chercheurs du premier groupe à un même contexte institutionnel.

Conception et mise en œuvre d'une séance de TPs

Quatre des enseignants-chercheurs interviewés conçoivent et mettent en œuvre des séances de TPs. Ils mobilisent des ordinateurs et des logiciels dans la planification et la mise en œuvre des séances de TPs. Cela peut être en lien avec les rapports personnels de ces enseignants-chercheurs à la théorie des graphes.

Nous présentons ci-dessous un extrait du tableau 4.6 de l'annexe 4 (cf. tableau 27) qui montre les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs du deuxième groupe dans/pour la conception et la mise en œuvre des séances de TPs.

			FO	FF	FK	Total
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X		2
		Ressources échangées avec des collègues	X	X		2
		Ordinateurs et logiciels	X	X	X	3
		Ressources en ligne	X			1
Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement	Jeux physiques et fiches (comme chasse-à-la-bête)	X		X	2
	Ressources provenant de la recherche	Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et les polyominos	X	X		2

Tableau 27 : Tableau extrait du tableau 4.6 de l'annexe 4 - ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs du second groupe interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre des séances de TPs

Pour la conception et la mise en œuvre des séances de TPs, les enseignants-chercheurs évoquent six types de ressources, dont des jeux physiques et des fiches produites par FO et FK et provenant de leur enseignement et des problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et les polyominos produites par FO et FF dans leur activité de recherche. FF par exemple les considère comme les mathématiques les plus proches de l'informatique. Cela peut être aussi en lien avec des conditions institutionnelles. FK à titre d'exemple considère que le parcours de formation conditionne le choix des contenus dans l'enseignement et la disponibilité des ressources est une contrainte à prendre en considération lors de la planification de l'enseignement.

La mobilisation des ordinateurs et des logiciels par tous les enseignants-chercheurs qui conçoivent et mettent en œuvre des séances de TPs peut être justifiée par des invariants opératoires de ces enseignants-chercheurs à dominante épistémologique et/ou didactique. Elle peut être de même justifiée par les conditions institutionnelles dans lesquelles ils exercent leur enseignement. Par ailleurs, la mobilisation de ressources produites par les enseignants-chercheurs et issues de leur activité de recherche peut indiquer un impact potentiel de leur activité de recherche sur leur enseignement.

Conception et mise en œuvre des moments d'évaluation

Dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation, dix différents types de ressources sont évoqués par les enseignants-chercheurs, dont trois sont des ressources qu'ils ont produites eux-mêmes. Celles les plus mobilisées par les enseignants-chercheurs sont les ouvrages et les ressources en ligne. Ainsi, nous estimons que sélectionner des questions pour les épreuves écrites dans les ouvrages et rechercher d'autres en ligne est une partie intégrante de la conception de l'évaluation des étudiants.

Nous présentons ci-dessous des extraits du tableau 4.7 de l'annexe 4 (cf. tableaux 28 et 29) qui peuvent apporter plus d'éclairage sur les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs dans les deux groupes prédéfinis (§ IV.1.2.5) afin d'identifier des tendances et des disparités qui peuvent exister entre les deux groupes en termes de mobilisation de ressources dans/pour la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation.

		LQ	LN	Total	
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	2
		Ressources en ligne	X		1

Tableau 28 : Tableau extrait du tableau 4.7 de l'annexe 4 - ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs du premier groupe interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation

Les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs du premier groupe (cf. tableau 28) dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation proviennent de leur enseignement et sont les ouvrages et des ressources en ligne. Les enseignants-chercheurs de ce groupe consultent ces ressources pour sélectionner des questions pour les épreuves écrites.

			FO	FF	FK	FT	Total
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	X		3
		Ressources échangées avec des collègues	X				1
		Sujets d'examens échangés entre collègues		X			1
		Ressources en ligne	X		X		2
		Plateforme d'apprentissage Moodle	X				1
Ressources provenant de la recherche	Articles publiés dans des conférences récentes			X		1	
Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement	Questions inventées par l'enseignant-chercheur	X				1
		Propres ressources de formations réalisées les années précédentes			X		1
	Ressources provenant de la recherche	Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et les polyominos				X	1

Tableau 29 : Tableau extrait du tableau 4.7 de l'annexe 4 - ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs du second groupe interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation

Les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs du second groupe (cf. tableau 29) dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation sont de neuf types différents. Cela peut être en lien en partie aux différents modes d'évaluation mis en place par ces enseignants-chercheurs. Quelques enseignants-chercheurs échangent des questions pour les épreuves écrites avec des collègues. Cela peut être dû à une recommandation institutionnelle quand plusieurs enseignants-chercheurs dispensent un même module. Une autre raison possible est la collaboration qui existe entre des enseignants-chercheurs appartenant à une même équipe de recherche, comme

dans le cas de FO qui échange des questions avec des collègues dans la fédération de recherche *maths à modeler*, dont FO faisait partie. Il convient de mentionner ici que deux des types de ressources avec lesquelles interagissent les enseignants-chercheurs dans cette classe de situations proviennent de leur activité de recherche. Ces ressources, comme les autres ressources dans le tableau ci-dessus, sont mentionnées par un enseignant-chercheur chacune, ce qui reflète des spécificités dans les pratiques de ces enseignants-chercheurs au niveau de la conception et de la mise en œuvre des moments d'évaluation. Nous citons à titre d'exemples les problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et les polyominos mobilisés par FT pour élaborer les épreuves écrites. Aussi, FK engage les étudiants dans une lecture d'articles de conférences publiés en anglais et leur demande un exposé oral suite à cette lecture comme partie de leur évaluation.

Les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation peuvent être influencées par des conditions institutionnelles. En effet, la diversité des ressources mobilisées pour l'évaluation des étudiants par les enseignants-chercheurs du second groupe peut être expliquée par les différentes modalités d'évaluation (évaluation au fur et à mesure sur la plateforme, projets et présentations orales, épreuves écrites, etc.). Aussi, les types de ressources mobilisées par un enseignant-chercheur pour concevoir des moments d'évaluation peuvent être guidés par la représentation que cet enseignant-chercheur a de l'évaluation.

Premiers éléments de synthèse : interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources

La plupart des ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans leurs pratiques d'enseignement sont des ressources issues du contexte d'enseignement et qu'ils n'ont pas produites eux-mêmes. Les enseignants-chercheurs qui mobilisent des ressources issues de leur activité de recherche enseignent dans des parcours de formation en informatique, maths-info, mathématiques appliquées et parcours d'ingénieurs. Cela peut suggérer une influence potentielle du parcours de formation sur les choix effectués par les enseignants-chercheurs en termes de ressources. Cela peut être aussi justifié par les rapports personnels des enseignants-chercheurs à la théorie des graphes dans l'institution de recherche.

Par ailleurs, des ressources communes sont souvent mobilisées par notre premier groupe d'enseignants-chercheurs qui enseignent un module de mathématiques discrètes en L2 dans deux sites différents de la même université. Bien que la mobilisation d'une même ressource puisse être une condition de l'institution, nous nous intéressons à examiner les schèmes de mobilisation de cette ressource commune par les trois enseignants-chercheurs. Nous estimons qu'une étude des schèmes de mobilisation du module d'enseignement des mathématiques discrètes en L2 peut nous permettre de cerner l'influence du rapport personnel de chacun des trois enseignants-chercheurs à la théorie des graphes dans les deux institutions de recherche et d'enseignement.

Nous présentons dans la partie suivante une comparaison des schèmes de mobilisation du module d'enseignement des mathématiques discrètes en L2 conçu collectivement par LB, LQ et LN et mobilisé par les trois enseignants-chercheurs dans différentes classes de situations.

Mise en perspective des schèmes de mobilisation du module d'enseignement des mathématiques discrètes en L2

Le module d'enseignement des mathématiques discrètes en L2 est mobilisé par les concepteurs dans plusieurs classes de situations. Par exemple, il est mobilisé par LB et LQ dans les classes de situations [C/O planification] et [C/O cours] et mobilisé par LN dans les classes de situations [C/O

planification] et [C/O TDs]. Une consultation des tableaux documents des trois enseignants-chercheurs montre que les schèmes de mobilisation du module diffèrent quand le module est mobilisé par un même enseignant-chercheur dans plusieurs classes de situations, aussi bien que quand il est mobilisé par deux enseignants-chercheurs dans une même classe de situations. Nous illustrons nos propos par l'exemple ci-dessous.

Nous présentons ci-dessous des extraits des tableaux documents de LB et LQ qui montrent des schèmes de mobilisation du module susmentionné dans le contexte de la conception et de la mise en œuvre des séances de cours (cf. tableaux 30 et 31).

Classe de situations	Sous-But	Règle d'action	Invariant opératoire
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Établir des liens avec d'autres domaines mathématiques	Il fait des liens avec les systèmes d'équations algébriques	Il est possible d'établir des liens entre les mathématiques discrètes et les structures algébriques finies

Tableau 30 : Extrait du tableau document de LB qui montre un document élaboré en mobilisant le module d'enseignement des mathématiques discrètes en L2 conçu collectivement par LB, LQ et LN

Classe de situations	Sous-But	Règle d'action	Invariants opératoires
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Modifier/adapter les contenus d'un cours	Elle effectue des modifications au niveau de quelques théorèmes, elle les divise en plusieurs parties ou les remplace par d'autres théorèmes « plus faciles »	Il est parfois difficile d'effectuer des modifications au niveau des contenus du cours en mathématiques discrètes Les réactions des étudiants en classe permettent à l'enseignant de savoir s'ils ont bien compris

Tableau 31 : Extrait du tableau document de LQ qui montre un document élaboré en mobilisant le module d'enseignement des mathématiques discrètes en L2 conçu collectivement par LB, LQ et LN

Les tableaux 30 et 31 ci-dessus montrent les schèmes de mobilisation du module d'enseignement des mathématiques discrètes par respectivement LB et LQ. Une consultation de ces deux tableaux nous permet de constater que, bien que le module d'enseignement est mobilisé par les deux enseignants-chercheurs dans une même classe de situations, les schèmes de mobilisation de ce module sont différents en termes de sous-buts, de règles d'action et d'invariants opératoires. Étant donné que LQ et LB mobilisent ce module dans les mêmes conditions institutionnelles, nous estimons que ces disparités existantes dans les schèmes de mobilisation du module peuvent être dues aux rapports personnels différents de LB et LQ aux mathématiques discrètes dans le monde de recherche, ou à des différences au niveau des invariants opératoires à dominante épistémologique ou/et didactique des deux enseignants-chercheurs. Ainsi, nous considérons qu'une étude des invariants opératoires des enseignants-chercheurs dans les diverses classes de situations est essentielle pour nous éclairer davantage sur différents aspects de leurs pratiques.

Nous présentons donc dans la partie suivante une étude des invariants opératoires qui guident et justifient les règles d'action des enseignants-chercheurs dans les différentes classes de situations.

IV.1.3.4- Classification des invariants opératoires

Nous avons commencé cette partie par l'élaboration des tableaux de classification des invariants opératoires que nous exposons dans l'annexe 4.

Nous avons consulté les tableaux de classification des invariants opératoires de l'annexe 4 et dénombré le nombre d'invariants opératoires à dominantes différentes pour chaque classe de situations. Nous pointons que ce recensement a pour objectif de comprendre quels types de connaissances guident les enseignants-chercheurs dans leurs pratiques d'enseignement de la théorie des graphes, et de cerner l'influence des conditions institutionnelles sur ces pratiques. Nous estimons qu'une caractérisation des connaissances qui guident les actions des enseignants-chercheurs dans leur enseignement peut nous permettre de caractériser l'influence potentielle de leur activité de recherche sur leur enseignement.

Nous présentons respectivement pour chaque classe de situations, un tableau qui rend compte des invariants opératoires à dominantes différentes pour l'ensemble des enseignants-chercheurs participant à notre étude, suivis par des tableaux qui montrent le même type de résultats pour les enseignants-chercheurs des deux groupes prédéfinis (§ IV.1.2.5). Nous estimons que cela peut nous renseigner sur des tendances qui existent en termes d'invariants opératoires au sein des deux groupes d'enseignants-chercheurs.

Conception et mise en œuvre de la planification de l'enseignement

Nous présentons dans le tableau 32 ci-dessous les nombres d'invariants opératoires à dominantes épistémologique, didactique, pédagogique et institutionnelle que nous avons repérés pour la classe de situations [C/O planification] pour chacun des enseignants-chercheurs dans notre étude.

C/O planification	LB	LQ	LN	LK	LX	LT	FO	FF	FK	FT	Total
E	0	1	0	0	0	0	1	2	1	0	5
D	0	3	2	1	3	0	6	2	4	5	26
I	3	8	4	3	2	5	1	5	8	4	43
P	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2
DE	0	0	0	0	0	0	3	1	1	1	6
ED	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2
EI	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
IE	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	3
DI	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
ID	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Tableau 32 : nombres d'invariants opératoires à dominantes différentes repérés pour la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement »

Les invariants opératoires qui justifient les règles d'action des enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre de leur enseignement sont surtout à dominantes didactique et

institutionnelle (cf. tableau 32). Des conditions institutionnelles telles que les choix des contenus décrits dans les syllabus, le volume horaire, et le parcours de formation semblent impacter les choix des enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement. Par exemple, LK enseigne la théorie des graphes d'une façon théorique sans applications ce qui est conforme aux objectifs décrits dans les syllabus. LT aussi se restreint aux contenus décrits dans les syllabus, sinon, il choisit des exemples et des exercices conformes aux objectifs dans l'ouvrage recommandé par le syllabus. Cela est lié à sa conviction que les exemples et les exercices présentés doivent être en harmonie avec les objectifs du module et correspondre au niveau des étudiants. Le nombre d'heures constitue une contrainte qui influence la façon dont FF gère le temps de l'enseignement. Subséquemment, il se restreint au temps prévu pour l'enseignement d'un contenu donné dans les séances de cours afin d'arriver à bout du programme prévu pour le module d'enseignement. FK souligne qu'au supérieur, même si les syllabus définissent les grands thèmes à être abordés dans une unité d'enseignement, l'enseignant a une marge de manœuvre dans le choix des objectifs et qu'un même thème peut être décliné en des objectifs pédagogiques différents les uns des autres. Ainsi, il se considère en charge de décider comment décliner un contenu en enseignement tout en prenant en considération des contraintes telles que le volume horaire global et la répartition des séances dans l'année ou dans le semestre, la disponibilité des ressources, le nombre d'étudiants en classe, leur spécialité qui conditionnent le choix des contenus et les types d'activité à mettre en place en classe.

Les invariants opératoires à dominante didactique peuvent être en lien avec les représentations des enseignants-chercheurs en lien avec l'enseignement de la théorie des graphes. Par exemple, LX est convaincu qu'un enseignement des mathématiques doit mettre l'accent sur leur utilité. Ainsi, il inclue dans son cours des idées et des exemples inspirés des questions que les étudiants lui posent et oriente son enseignement vers les applications. Pour FT, faire des mathématiques, c'est faire des preuves. Ainsi, il modifie des situations proposées dans des ateliers d'une manière à être données en classe dans un module de mathématiques, et à solliciter une activité de preuve.

Des connaissances épistémologiques sous-tendent des invariants à dominante didactique. FF considère que, bien que les problèmes en mathématiques discrètes puissent être présentés à tout le monde, ils peuvent faire appel à des méthodes de résolution complexes. Ainsi, en définissant la structure d'une unité d'enseignement, il articule la modélisation et la résolution de problèmes. Il sélectionne des contenus qui portent sur des jeux combinatoires et sur des situations d'optimisation. Il considère que les mathématiques discrètes sont proches de l'informatique, particulièrement, « les graphes » sont des objets mathématiques qui peuvent modéliser des jeux combinatoires et peuvent être mobilisés en informatique.

Les invariants opératoires à dominante didactique peuvent être aussi en lien avec les connaissances des enseignants-chercheurs en lien avec les profils des étudiants en classe et leurs besoins. FT, par exemple, considère que les étudiants ont besoin du temps pour pouvoir rechercher un problème. En conséquence, dans la planification de son enseignement, il se fixe des contenus potentiels à aborder en classe, et avance selon les productions des étudiants.

Nous présentons dans l'encadré 41 ci-dessous les nombres d'invariants opératoires à dominantes épistémologique, didactique, pédagogique et institutionnelle que nous avons repérés pour la classe de situations [C/O planification] pour chacun des enseignants-chercheurs du premier groupe.

C/O planification	LB	LQ	LN	Total
E	0	1	0	1
D	0	3	2	5
I	3	8	4	15
P	0	0	0	0
D _E	0	0	0	0
E _D	0	0	0	0
E _I	0	0	0	0
I _E	0	0	0	0
D _I	0	0	0	0
I _D	0	0	0	0

C/O planification	FO	FF	FK	FT	Total
E	1	2	1	0	4
D	6	2	4	5	17
I	1	5	8	4	18
P	1	0	0	0	1
D _E	3	1	1	1	6
E _D	0	2	0	0	2
E _I	0	1	0	0	1
I _E	0	2	0	0	2
D _I	0	0	0	0	0
I _D	0	0	0	0	0

Encadré 41 : Extraits du tableau 32 ci-dessus pour les enseignants-chercheurs du premier et du second groupe

Les invariants opératoires qui justifient les règles d'action de LB, LQ et LN dans la conception et la mise en œuvre de leur enseignement sont surtout à dominante institutionnelle. Tous les trois mettent l'accent sur la conformité des contenus d'un module avec les instructions officielles de la filière. LQ et LN soulignent aussi l'importance d'introduire les mathématiques discrètes aux étudiants, comme pour les autres branches de mathématique, ce qui est selon LB une des raisons principales derrière l'introduction récente du module de mathématiques discrètes en L2 dans le parcours de formation en mathématiques. Aussi, LQ et LB soulignent qu'en Master, le niveau théorique est plus important qu'en licence. Quelques invariants opératoires qui guident la planification de l'enseignement de LQ et LN sont à dominante didactique comme les objectifs d'apprentissage et les représentations qu'elles ont des séances de cours et de TDs qui influence leur pondération et les choix de contenus à inclure dans ces séances. LQ par exemple est convaincue que les cours donnent une compréhension plus « profonde » des concepts que les TDs, tandis que LN est convaincue du contraire.

Les invariants opératoires qui justifient les règles d'action des enseignants-chercheurs du second groupe dans la conception et la mise en œuvre de leur enseignement sont surtout à dominantes didactique et institutionnelle. Cependant, nous pouvons distinguer entre FF et FK qui ont une majorité d'invariants opératoires à dominante institutionnelle, et FO et FT qui ont une majorité à dominante didactique. Les invariants opératoires à dominante institutionnelle sont en lien avec la marge de liberté dans le supérieur qui dépend du niveau d'enseignement et de la nature du module, avec le parcours de formation, le nombre de séances, etc. Les invariants opératoires à dominante didactique renvoient aux objectifs d'apprentissage et aux choix de contenus et de leur organisation qui, selon les enseignants-chercheurs, permettent de les atteindre, la disponibilité des ressources ainsi que la perception que ces enseignants-chercheurs ont de l'enseignement de la théorie des graphes. FO met aussi l'accent sur l'importance du travail collectif et du partage des ressources dans la planification de l'enseignement. Des invariants opératoires à dominante épistémologique guident la planification de l'enseignement de FF qui considère que les mathématiques discrètes sont les mathématiques les plus proches de l'informatique.

En conclusion, les invariants opératoires qui justifient les règles d'action des enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre de la planification de l'enseignement sont surtout à dominante institutionnelle. La conformité des contenus aux objectifs d'apprentissage

semble être un invariant opératoire essentiel qui guide la sélection des contenus d'un module. D'autres invariants opératoires à dominante institutionnelle guident les règles d'action des enseignants-chercheurs lors de la planification de leur enseignement. Ces invariants opératoires renvoient aux connaissances des enseignants-chercheurs relatives au niveau d'enseignement, au volume horaire, à la distribution des séances, au type de séance (TD, TP, cours), à la nature du module (obligatoire ou optionnel), au nombre d'étudiants dans une classe, etc. Cela semble indiquer une influence du contexte institutionnel sur la planification de l'enseignement des enseignants-chercheurs. En outre, les connaissances relatives à l'enseignement de la théorie des graphes ont une influence sur la planification de l'enseignement du second groupe. Celles-ci renvoient aux différents choix possibles en termes de contenus et de leur organisation qui permettent d'atteindre les objectifs d'apprentissage, ainsi que les conceptions des enseignants-chercheurs en lien avec les profils des étudiants et à leurs besoins dans un parcours de formation donné. Ainsi, les invariants opératoires qui guident la planification de l'enseignement des enseignants-chercheurs sont en général à dominantes didactique et institutionnelle, avec une quasi-absence des invariants opératoires à dominante épistémologique. En conclusion, l'activité de recherche des enseignants-chercheurs en théorie des graphes a peu d'influence sur les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources dans la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement.

Conception et mise en œuvre d'une séance de cours

Nous présentons dans le tableau 33 ci-dessous les nombres d'invariants opératoires à dominantes épistémologique, didactique, pédagogique et institutionnelle que nous avons repérés pour la classe de situations [C/O cours] pour chacun des enseignants-chercheurs dans notre étude.

C/O cours	LB	LQ	LN	LK	LX	LT	FO	FF	FK	FT	Total
E	5	1	1	0	1	0	4	1	0	4	17
D	5	8	0	1	3	0	14	2	4	8	45
I	0	2	1	1	1	1	0	1	0	1	8
P	0	1	0	0	2	0	2	1	0	2	8
DE	12	1	1	1	2	0	8	2	3	12	42
ED	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	5
EI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
IE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DI	0	1	0	1	2	0	4	1	0	1	10
ID	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Tableau 33 : Nombres d'invariants opératoires à dominantes différentes repérés pour la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre une séance de cours »

Dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours, les invariants opératoires à dominante didactique, ainsi que les invariants opératoires de natures épistémologiques et didactiques à dominante didactique, semblent guider les règles d'action des enseignants-chercheurs.

Les invariants opératoires à dominante didactique peuvent être en lien avec des connaissances des enseignants-chercheurs sur l'enseignement de la théorie des graphes. FT, par exemple, considère que le principal apport de l'enseignement des mathématiques discrètes est l'enseignement du raisonnement. Ainsi, lors de la mise en œuvre des moments de résolution de problèmes, il essaie de développer chez les étudiants un réflexe sur le questionnement des choses, en leur posant des questions qui portent sur le « pourquoi » à chaque fois qu'ils donnent des affirmations.

Les invariants opératoires à dominante didactique peuvent être en lien avec les représentations que ces enseignants-chercheurs ont des profils des étudiants. Afin de solliciter l'attention des étudiants en classe lors de la mise en œuvre d'une séance de cours, FF leur donne, quand possible, des exemples qui proviennent de son activité de recherche. Il trouve que les étudiants sont plus intéressés par des exemples provenant de la vie réelle que par des notions théoriques moins concrètes. Dans le parcours de formation en informatique, FF met l'accent sur les preuves parce qu'il trouve que les étudiants dans un parcours d'informatique n'ont pas la rigueur mathématique nécessaire pour les construire. De son côté, LQ modifie les contenus d'un cours magistral selon les réactions des étudiants. Selon elle, il est important que les étudiants se sentent « à l'aise » avec les contenus d'un cours et qu'ils les comprennent. Elle trouve que les étudiants rencontrent des difficultés au niveau du raisonnement dans l'activité de preuve en mathématiques discrètes. Donc, elle travaille les preuves en classe avec les étudiants. Elle effectue des modifications au niveau de quelques théorèmes qu'elle juge « difficiles » pour les étudiants en divisant les preuves en plusieurs étapes. FK engage les étudiants dans une lecture d'articles de recherche publiés dans des conférences récentes auxquels il a accès étant chercheur. Il trouve que lire des articles qui portent sur des sujets d'applications concrets est stimulant pour les étudiants. Ainsi, FK sélectionne des articles relativement « simples » pour les étudiants qui portent sur des modélisations de problèmes issus de situations concrètes du contexte industriel. LK fait en sorte d'enseigner les preuves « formelles » parce qu'il considère qu'elles peuvent être enseignées aux étudiants quel que soit leur profil. FO montre aux étudiants ce qu'elle fait dans son travail de recherche parce qu'elle considère que ces derniers apprécient quand l'enseignant partage avec eux ce qu'il fait en recherche.

Les invariants opératoires de natures épistémologique et didactique à dominante didactique sont en lien avec des connaissances des enseignants-chercheurs relatives à la nature de la théorie des graphes sous-jacentes aux choix qu'ils effectuent pour leur enseignement. Par exemple, pour LT, les objectifs d'apprentissage des mathématiques discrètes sont la construction des preuves et l'application des résultats mathématiques à l'informatique. Ainsi, dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours, LT ne travaille pas sur les liens avec les autres disciplines, pourtant, il discute des liens existants avec l'informatique quand cela est possible. LX donne beaucoup d'exemples, dont certains portent sur son travail de recherche. Il justifie l'importance qu'il attribue aux exemples par des arguments en lien avec la nature des mathématiques discrètes et leur enseignement : un domaine mathématique qui permet de modéliser des phénomènes « difficiles » à comprendre par des modèles accessibles aux étudiants, et dont les concepts peuvent être expliqués à travers des exemples. Dans les séances de cours, LX discute de l'utilité des graphes à résoudre des problèmes qui relèvent de la géographie, la biologie, la chimie, la théorie des décisions, l'informatique et les réseaux sociaux. Selon lui, cet aspect concret des mathématiques discrètes les rend faciles d'accès aux étudiants et leur permet de se rendre compte de leur utilité.

Des invariants opératoires à dominante épistémologique semblent parfois guider les choix que les enseignants-chercheurs effectuent dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours.

FO, par exemple, distingue entre trois aspects complémentaires en théorie des graphes : preuve, modélisation et programmation. Ainsi, elle choisit des contenus qui permettent aux étudiants de travailler sur les preuves et la modélisation, et sur des algorithmes pour des cas d'optimisation. Elle mobilise aussi des contenus portant sur les arbres qui, selon elle, permettent d'aborder plein de preuves pour travailler sur les preuves par induction. Dans les séances de cours, FT met en œuvre des moments de résolution de problèmes parce qu'il considère que les mathématiques discrètes sont interface entre les mathématiques et les problèmes issus de la vie réelle.

Les conditions et les contraintes institutionnelles en lien avec le parcours de formation semblent aussi avoir une certaine influence sur la conception et la mise en œuvre des séances de cours. Par exemple, dans le parcours de formation en informatique, LK travaille particulièrement sur les algorithmes de recherche du plus court chemin, de l'arbre couvrant minimum, et des flots, ce qui est en harmonie avec les objectifs du module d'enseignement de la théorie des graphes : initier les étudiants aux définitions et aux propriétés des graphes et aux algorithmes. Par contre, dans le parcours de formation en statistique, LK évoque rarement les algorithmes dans son enseignement. Cependant, il utilise des logiciels tels que Matlab pour la résolution des problèmes en statistiques.

Nous présentons dans l'encadré 42 ci-dessous les nombres d'invariants opératoires à dominantes épistémologique, didactique, pédagogique et institutionnelle que nous avons repérés pour la classe de situations [C/O cours] pour chacun des enseignants-chercheurs du premier et du second groupe.

C/O cours	LB	LQ	LN	Total
E	5	1	1	7
D	5	8	0	13
I	0	2	1	3
P	0	1	0	1
D_E	12	1	1	14
E_D	4	0	0	4
E_I	0	0	0	0
I_E	0	0	0	0
D_I	0	1	0	1
I_D	0	0	0	0

C/O cours	FO	FF	FK	FT	Total
E	4	1	0	4	9
D	14	2	4	8	28
I	0	1	0	1	2
P	2	1	0	2	5
D_E	8	2	3	12	25
E_D	0	0	0	0	0
E_I	0	0	0	0	0
I_E	0	0	0	0	0
D_I	4	1	0	1	6
I_D	0	0	0	0	0

Encadré 42 : Extraits du tableau 33 ci-dessus pour les enseignants-chercheurs du premier et du second groupe

Les tableaux de l'encadré 42 montrent que les tendances sont les mêmes pour les enseignants-chercheurs des deux groupes en ce qui concerne les invariants opératoires qui justifient leurs règles d'action dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours.

Nous pouvons conclure que les connaissances qui guident les enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours sont surtout en lien avec leurs modèles didactiques concernant l'enseignement de la théorie des graphes, avec une prise en considération de la nature de ce domaine mathématique.

Conception et mise en œuvre d'une séance de TDs

Nous présentons dans le tableau 34 ci-dessous les nombres d'invariants opératoires à dominantes épistémologique, didactique, pédagogique et institutionnelle que nous avons repérés pour la classe de situations [C/O TDs] pour chacun des enseignants-chercheurs dans notre étude.

C/O TDs	LB	LQ	LN	LK	LX	LT	FO	FF	FK	Total
E	1	0	2	0	0	0	0	0	0	3
D	1	3	4	3	3	1	6	0	8	29
I	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2
P	1	1	0	0	3	0	0	0	1	6
DE	3	1	4	1	2	1	0	1	1	14
ED	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2
EI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
IE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DI	0	1	0	0	2	0	0	1	0	4
ID	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 34 : Nombres d'invariants opératoires à dominantes différentes repérés pour la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs »

Dans la conception et la mise en œuvre des séances de TDs, les invariants opératoires à dominante didactique semblent guider les règles d'action des enseignants-chercheurs (cf. tableau 34). LB par exemple, insiste sur l'importance de la rédaction des idées, parce qu'il considère que les étudiants sont parfois incapables de produire des idées, même s'ils les comprennent. LQ divise les questions « difficiles » en plusieurs étapes, ce qui les rend, selon elle, plus accessibles aux étudiants ayant des « difficultés » au niveau du raisonnement. Selon LN, les étudiants peuvent se lancer souvent dans des méthodes de résolution qui peuvent ne pas aboutir à la solution d'un exercice. Subséquemment, elle met en place un travail en groupes de deux où les étudiants peuvent discuter et échanger des idées lors de la résolution d'un exercice. FK considère que la gestion des émotions des étudiants et de leur motivation est très délicate, surtout en travaillant sur des problèmes ouverts. Souvent, ils se sentent démotivés en travaillant sur les exercices et les problèmes ouverts parce qu'ils n'ont pas l'habitude de travailler sur des problèmes de recherche. D'un côté, il leur est désagréable de ne pas avoir d'idées sur un problème sur lequel on travaille en classe, et de l'autre côté, ils se sentent déçus quand ils découvrent qu'une idée qu'ils considéraient bonne pour résoudre un problème ne l'est pas en réalité. D'ailleurs, selon FK, il est essentiel de ne pas donner trop d'indices aux étudiants quand ils se sentent bloqués, et, si nécessaire, il leur donne quelques indices.

Nous remarquons aussi certains invariants opératoires de natures épistémologique et didactique à dominante didactique. Par exemple, selon FF, des sujets de TDs qu'il échange avec des collègues peuvent être issus de situations authentiques puisque les mathématiques discrètes permettent de travailler sur des exemples de la vie réelle.

En outre, la contrainte institutionnelle qui semble avoir une influence sur la conception et la mise en œuvre des séances de TDs est le volume horaire. Par exemple, LK donne à ses étudiants des situations de programmation linéaire. Il utilise des modèles conçus par des chercheurs en mathématiques parce qu'il est contraint par le nombre d'heures d'enseignement du module qui lui permet presque d'arriver à bout du plan prévu du module. LT discute avec les étudiants les liens avec d'autres disciplines quand ils existent, sans entamer un travail sur ces liens, étant contraint par le nombre d'heures.

Nous présentons dans l'encadré 43 ci-dessous les nombres d'invariants opératoires à dominantes épistémologique, didactique, pédagogique et institutionnelle que nous avons repérés pour la classe de situations [C/O TDs] pour chacun des enseignants-chercheurs du premier et du second groupe.

C/O TDs	LB	LQ	LN	Total	C/O TDs	FO	FF	FK	Total
E	1	0	2	3	E	0	0	0	0
D	1	3	4	8	D	6	0	8	14
I	0	0	0	0	I	0	0	0	0
P	1	1	0	2	P	0	0	1	1
D_E	3	1	4	8	D_E	0	1	1	2
E_D	0	0	1	1	E_D	0	0	0	0
E_I	0	0	0	0	E_I	0	0	0	0
I_E	0	0	0	0	I_E	0	0	0	0
D_I	0	1	0	1	D_I	0	1	0	1
I_D	0	0	0	0	I_D	0	0	0	0

Encadré 43 : Extraits du tableau 34 ci-dessus pour les enseignants-chercheurs du premier et du second groupe

Dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours et de TDs, les invariants opératoires à dominante didactique semblent guider le plus les actions des enseignants-chercheurs. Il nous semble qu'en concevant les séances de TDs, les enseignants-chercheurs sont guidés par les modes de raisonnements et les savoir-faire qu'ils souhaitent développer chez les étudiants.

Les invariants opératoires qui guident les règles d'actions des enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre des séances de TDs sont surtout en lien avec les représentations que les enseignants-chercheurs ont des profils des étudiants et de leurs difficultés potentielles. Les invariants opératoires à dominante épistémologique et institutionnelle sont quasi-absents dans cette classe de situations. La seule dimension institutionnelle qui semble avoir une influence sur la conception et la mise en œuvre des séances de TDs est le volume horaire d'un module.

Conception et mise en œuvre d'une séance de TPs

Nous présentons dans le tableau 35 ci-dessous les nombres d'invariants opératoires à dominantes épistémologique, didactique, pédagogique et institutionnelle que nous avons repérés pour la classe de situations [C/O TPs] pour chacun des enseignants-chercheurs dans notre étude.

C/O TPs	LX	FO	FF	FK	Total
E	0	1	4	0	5
D	0	5	4	4	13
I	0	0	1	0	1
P	0	0	0	0	0
DE	1	1	2	2	6
ED	0	0	0	0	0
EI	0	0	0	0	0
IE	0	0	1	0	1
DI	0	1	1	0	2
ID	0	0	0	1	1

Tableau 35 : Nombres d'invariants opératoires à dominantes différentes repérés pour la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs »

Des invariants opératoires à dominante didactique semblent guider les règles d'action des enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre des séances de TPs (cf. tableau 35). Certains de ces invariants opératoires sont de natures épistémologique et didactique, à dominante didactique. Par exemple, FO trouve que les étudiants dans le parcours de formation en mathématiques-informatique rencontrent des difficultés en lien avec les algorithmes et la notion de complexité d'un algorithme, et la programmation, et en conséquence, elle planifie des moments de programmation adaptés aux besoins des étudiants dans ce parcours en sollicitant l'aide des informaticiens pour la conception d'une bonne structure de données. FF engage les étudiants dans un travail sur la modélisation et met l'accent dans son enseignement sur le choix du modèle à mobiliser dans un problème donné. Un choix étroitement lié à la nature des mathématiques discrètes dont l'enseignement permet de familiariser les étudiants aux modèles permettant de représenter beaucoup de problèmes issus d'autres disciplines telles que l'informatique. FF met les étudiants en groupes de quatre face à un papier ou à un ordinateur, et les invite à réfléchir ensemble sur des problèmes. Il le justifie par le fait que la recherche sur des problèmes en mathématiques discrètes ne requiert pas forcément l'utilisation d'ordinateurs et permet un travail en groupes ou des collaborations à distance. De plus, il met en œuvre des séances de programmation où il accompagne les étudiants dans l'élaboration des algorithmes. Il trouve que ces derniers prennent plaisir à la partie TP, concrète, du module, et s'intéressent à construire des algorithmes efficaces, sans vraiment s'intéresser aux preuves théoriques des résultats. En conséquence, FF incite ses étudiants à développer des preuves formelles sur l'efficacité des algorithmes construits. FK est convaincu qu'il est important que les étudiants expérimentent avec du matériel quand ils sont confrontés à une situation de type problème ouvert, même si ce type d'activités peuvent être très coûteuses en termes de temps. Ainsi, il essaie de toujours mettre en œuvre des séances où les étudiants ont la chance de manipuler du matériel. Il met en œuvre des séances de programmation en organisant des séances sur ordinateurs quand il le juge « pertinent » et « possible ». La dimension expérimentale, selon FK, peut être plus forte quand un étudiant est placé devant un plateau avec du matériel que dans une salle informatique, et on peut bien faire 30 heures de recherche opérationnelle sans aller sur machine et atteindre un tas d'objectifs.

Dans la conception et la mise en œuvre des séances de TPs, les invariants opératoires qui pilotent les choix des enseignants-chercheurs sont pour la plupart à dominante didactique. Certains invariants opératoires sont à dominante épistémologique ou de natures didactique et épistémologique, à dominante didactique. Nous inférons que les connaissances des enseignants-chercheurs en lien avec la théorie des graphes ont un impact sur les choix qu'ils effectuent dans leur enseignement de ce domaine mathématique. Nous remarquons que les connaissances des enseignants-chercheurs en lien avec les conditions institutionnelles dans lesquelles ils enseignent n'ont pas un grand rôle dans la conception et la mise en œuvre des séances de TPs.

Conception et mise en œuvre des moments d'évaluation

Nous présentons dans le tableau 36 ci-dessous les nombres d'invariants opératoires à dominantes épistémologique, didactique, pédagogique et institutionnelle que nous avons repérés pour la classe de situations [C/O évaluation] pour chacun des enseignants-chercheurs dans notre étude.

C/O évaluation	LQ	LN	LK	LX	LT	FO	FF	FK	FT	Total
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	7	1	1	0	2	4	1	3	1	20
I	0	0	0	4	0	0	0	0	3	7
P	5	1	2	0	1	4	1	0	8	22
D_E	0	4	0	0	1	1	2	0	0	8
E_D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I_E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D_I	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
I_D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 36 : Nombres d'invariants opératoires à dominantes différentes repérés pour la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation »

En ce qui concerne la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation, les invariants opératoires qui semblent guider les actions de la majorité des enseignants-chercheurs interviewés sont à dominantes pédagogique et didactique (cf. tableau 36).

Certaines représentations que les enseignants-chercheurs ont de l'évaluation sont indépendantes du domaine mathématique en question. Pour LK, l'objectif d'une évaluation est de vérifier la compréhension des notions enseignées en classe par les étudiants, et le niveau des questions dans une épreuve écrite doit correspondre au niveau des contenus enseignés en classe. Ainsi, dans les épreuves écrites, LK donne des questions qui correspondent aux notions enseignées en classe et qui sont du même niveau qu'elles. Il construit lui-même les questions pour l'évaluation ; l'expérience dans l'enseignement permet à un enseignant d'acquérir une connaissance profonde des notions qui lui permet de construire des questions pour une épreuve écrite. LN, par exemple, considère que les résultats d'une épreuve écrite ne permettent pas à un enseignant de décider si un étudiant donné est un bon candidat pour des études doctorales, ainsi, elle s'appuie sur la performance de cet étudiant en classe afin de pouvoir émettre un tel jugement, le cas échéant. FF

élabore individuellement les épreuves écrites de façon que chaque évaluation écrite couvre une moitié du cours. Cela est en harmonie avec sa conviction qu'un étudiant qui a suivi le cours doit être capable de réussir. Il répartit les notes dans une épreuve écrite de la façon suivante : 10 points sur des questions similaires à celles du module, 5 points sur des questions d'une difficulté intermédiaire et 5 points sur de nouveaux problèmes qui demandent une réflexion de la part des étudiants. Selon lui, il est important d'évaluer la capacité des étudiants à prendre des initiatives.

Les invariants opératoires à dominante didactique qui guident les choix des enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation sont en lien avec l'enseignement de la théorie des graphes ou les représentations qu'ils ont des profils des étudiants. FO, par exemple, évalue la capacité des étudiants à construire une preuve et à programmer un algorithme. Selon elle, l'objectif de l'évaluation est de tester ce que les étudiants ont appris dans le module. FK élabore plusieurs modalités d'évaluation. Il donne aux étudiants une évaluation écrite, qui peut être avec ou sans document, parce qu'il lui est important que les étudiants soient capables de reproduire un raisonnement sur des cas simples ou proches des cas exposés dans le module. Aussi, il donne aux étudiants une évaluation sur machine, qui consiste à donner un problème industriel, et où ils doivent produire un modèle du problème et le résoudre. De plus, il planifie souvent des évaluations qui portent sur un exposé oral qui résulte d'un travail en groupes consistant en la lecture d'un article de conférence en anglais et la rédaction d'un résumé. Cependant, il trouve que les étudiants rencontrent souvent un obstacle d'ordre linguistique dans la compréhension des articles rédigés en anglais.

Des invariants opératoires qui guident les règles d'action des enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation sont parfois à dominante institutionnelle. Elles peuvent être en lien avec les contraintes imposées quand plusieurs enseignants-chercheurs donnent un même module en termes de l'unification des épreuves écrites, des barèmes de correction, etc. LT élabore les épreuves écrites collectivement avec un comité d'enseignants ou le coordinateur du domaine. Ainsi, il prend en considération des questions proposées par le coordinateur, qu'il peut éventuellement inclure ou exclure. LX évalue les étudiants par des épreuves écrites qu'il élabore collectivement avec les autres enseignants-chercheurs qui enseignent le même module. Ainsi, il envoie aux autres enseignants-chercheurs des propositions de questions à inclure, et lit les questions que ces derniers proposent et donne ses commentaires là-dessus. Enfin, ils se mettent tous d'accord sur un même barème à respecter lors des corrections. En outre, FT considère l'évaluation comme une prescription institutionnelle non fiable pour 90% des étudiants, et où il existe une marge de subjectivité.

Nous présentons dans l'encadré 44 ci-dessous les nombres d'invariants opératoires à dominantes épistémologique, didactique, pédagogique et institutionnelle que nous avons repérés pour la classe de situations [C/O évaluation] pour chacun des enseignants-chercheurs du premier et du second groupe.

C/O évaluation	LQ	LN	Total	C/O évaluation	FO	FF	FK	FT	Total
E	0	0	0	E	0	0	0	0	0
D	7	1	8	D	4	1	3	1	9
I	0	0	0	I	0	0	0	3	3
P	5	1	6	P	4	1	0	8	13
D_E	0	4	4	D_E	1	2	0	0	3
E_D	0	0	0	E_D	0	0	0	0	0
E_I	0	0	0	E_I	0	0	0	0	0
I_E	0	0	0	I_E	0	0	0	0	0
D_I	0	0	0	D_I	0	0	0	1	1
I_D	0	0	0	I_D	0	0	0	0	0

Encadré 44 : Extraits du tableau 36 ci-dessus pour les enseignants-chercheurs du premier et du second groupe

Les invariants opératoires qui guident les actions de LQ dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation sont à dominante didactique ou pédagogique. Ces invariants opératoires sont pour la plupart en lien avec les choix des questions à inclure dans les épreuves écrites et aux représentations que LQ a des étudiants. En outre, les invariants opératoires qui guident les actions de LN dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation sont pour la plupart de natures didactique et épistémologique, à dominante didactique. De même, les invariants opératoires qui guident les actions des 4 enseignants-chercheurs du second groupe sont à dominante didactique ou pédagogique. Ces invariants opératoires sont en lien avec les objectifs de l'évaluation et la représentation que les enseignants-chercheurs ont de l'évaluation, qui parfois ne dépendent pas des contenus à évaluer.

Dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation, la majorité des enseignants-chercheurs élaborent des épreuves écrites. Bien que les modalités d'évaluation soient en général fixées par les institutions, les invariants opératoires qui guident la conception des épreuves écrites sont pour la plupart à dominante didactique ou pédagogique. Cela peut être dû au fait que les enseignants-chercheurs ont essayé de décrire « comment » ils construisent les épreuves écrites, et cette construction semble dépendre des connaissances didactiques qu'ils ont des contenus, ainsi que des représentations qu'ils ont de l'évaluation et des profils des étudiants, etc.

Participation à un collectif d'enseignement ou de recherche

Nous présentons dans le tableau 37 ci-dessous les nombres d'invariants opératoires à dominantes épistémologique, didactique, pédagogique et institutionnelle que nous avons repérés pour la classe de situations [Vie collectif] pour chacun des enseignants-chercheurs dans notre étude.

Vie collectif	FK	FT	Total
E	0	0	0
D	2	1	3
I	0	0	0
P	0	0	0
DE	0	0	0
ED	0	0	0
EI	0	0	0
IE	0	0	0
DI	0	0	0
ID	0	0	0

Tableau 37 : Nombres d'invariants opératoires à dominantes différentes repérés pour la classe de situations « participer à un collectif d'enseignement ou de recherche »

Les invariants opératoires qui guident les actions des enseignants-chercheurs interviewés dans leur participation à des collectifs d'enseignement ou de recherche sont à dominante didactique (cf. tableau 37). FK et FT font partie de la fédération de recherche *maths à modeler* qui constitue un groupement de chercheurs en mathématiques et de didacticiens. L'équipe vise à développer des ingénieries didactiques pour enseigner des concepts en mathématiques discrètes et de les présenter à des publics variés en les engageant dans des démarches de recherche autour de problèmes. FK considère qu'appartenir à de tels groupements de chercheurs peut constituer une occasion pour rencontrer des personnes qui s'intéressent à des façons différentes d'enseigner les mathématiques discrètes, aux problèmes ouverts et aux jeux avec matériel, et qui sont susceptibles d'en développer. Aussi, les chercheurs dans une telle équipe peuvent apporter un regard critique sur certaines situations que FK développe et propose dans/pour son enseignement. Pour FT, les ingénieries didactiques développées par de tels groupements contribuent à réduire la distance existante entre les mathématiques enseignées et les problèmes de la vie réelle.

L'appartenance des enseignants-chercheurs du second groupe à des collectifs de recherche qui s'intéressent aux questions de l'enseignement des mathématiques discrètes semble ne pas être une recommandation institutionnelle. Les invariants opératoires qui justifient l'appartenance des enseignants-chercheurs à ces collectifs de recherche sont à dominante didactique.

Éléments de synthèse : les invariants opératoires

Les invariants opératoires qui guident les règles d'action des enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement sont surtout à dominante institutionnelle, alors que pour les cinq autres classes de situations (C/O cours/TDs/TPs/évaluation et vie collectif), la plupart des invariants opératoires sont à dominante didactique, avec des invariants opératoires à dominante pédagogique dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation.

Les enseignants-chercheurs semblent prendre en compte les conditions et les contraintes institutionnelles dans la planification générale de leur enseignement. Nous citons à titre

d'exemples le parcours de formation, le volume horaire alloué à l'enseignement du module, la répartition des séances, les objectifs listés dans le syllabus, le nombre d'étudiants en classe, etc.

De plus, pour planifier les séances et les moments d'évaluation, les actions des enseignants-chercheurs sont guidées surtout par des invariants opératoires à dominante didactique. Ces invariants opératoires sont souvent de natures épistémologique et didactique, à dominante didactique. Cela indique que les connaissances didactiques mobilisées par les enseignants-chercheurs pour la conception et la mise en œuvre des séances peuvent désigner les représentations qu'ils ont des profils des étudiants, de leurs besoins et de leurs difficultés potentielles, ainsi que des conceptions relatives aux modes d'enseignement des contenus de la théorie des graphes, avec des connaissances sous-jacentes en lien avec la nature des contenus en question et leurs particularités.

Des invariants opératoires à dominante pédagogique guident aussi les actions des enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation. En effet, les invariants opératoires des enseignants-chercheurs relatifs à l'évaluation renvoient souvent à des connaissances qu'ils possèdent en lien avec les modalités d'évaluation et des conceptions qu'ils possèdent par rapport à l'évaluation indépendamment des contenus à évaluer.

Nous présentons dans la suite (§ IV.1.3.5) une mise en perspective des résultats obtenus par les analyses des entretiens en termes de ressources et de schèmes de mobilisation de ces ressources.

IV.1.3.5- Premiers éléments de réponses à nos questions de recherche Q1 et Q2 : ressources et schèmes de mobilisation

Nous avons commencé le paragraphe IV.1 par une présentation de notre méthodologie de recueil de données pour les entretiens en termes de choix des profils des enseignants-chercheurs interviewés et de construction d'une grille pour les entretiens (§ IV.1.1). Nous avons ensuite présenté notre méthodologie d'analyse des entretiens et des éléments obtenus par un dépouillement des entretiens avec 10 enseignants-chercheurs interviewés au Liban et en France (§ IV.1.2). Dans cette partie, nous présentons une synthèse des résultats obtenus par le dépouillement des entretiens dans l'objectif d'apporter des éléments de réponses à nos deux premières questions de recherche que nous rappelons ici :

- Q1 : Comment les schèmes des enseignants-chercheurs (chercheurs en théorie des graphes) guident-ils leurs interactions avec les ressources dans/pour l'enseignement de la théorie des graphes ?

- Q2 : Dans quelle mesure le contexte institutionnel dans lequel un enseignant-chercheur enseigne influence-t-il ses interactions avec les ressources dans/pour l'enseignement de la théorie des graphes ?

Notre analyse des entretiens nous a donné un premier accès à des éléments de réponse aux deux questions susmentionnées.

En ce qui concerne notre question de recherche Q1, nous commençons par pointer que les analyses montrent six classes de situations inscrites dans les pratiques des enseignants-chercheurs interviewés qui sont les classes de situations que nous avons définies *a priori* (§ III.4.4). Plusieurs sous-buts s'inscrivent dans chaque classe de situations et renvoient à des finalités que les enseignants-chercheurs se fixent dans leur enseignement. Bien que des tendances puissent exister au niveau des sous-buts explicités par différents enseignants-chercheurs, plusieurs schèmes peuvent être définis pour un même sous-but. Ces schèmes peuvent mobiliser des mêmes ressources

ou des ressources différentes. En outre, deux enseignants-chercheurs ne mobiliseraient pas une même ressource forcément de la même façon pour atteindre une même finalité. Les schèmes de mobilisation d'une même ressource peuvent différer d'un enseignant-chercheur à un autre, même dans le contexte d'un même sous-but.

Un examen des schèmes développés par les enseignants-chercheurs pour atteindre des sous-buts dans leur enseignement nous a permis de cerner chez certains d'eux une influence potentielle de leur activité de recherche sur leur enseignement. Nous avons identifié cette influence dans des règles d'action de certains enseignants-chercheurs qui consistent à développer chez les étudiants une attitude ou des gestes d'un chercheur en les engageant dans des lectures d'articles de recherche, en les poussant à questionner les choses, etc. ou dans les choix des ressources mobilisées pour atteindre un sous-but donné.

Les ressources que les enseignants-chercheurs mobilisent dans leurs pratiques d'enseignement peuvent être issues de l'activité de recherche ou de l'enseignement. Elles peuvent être aussi produites par les enseignants-chercheurs eux-mêmes ou produites par des pairs. Nous soulignons que dans notre étude, la plupart des ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans leurs pratiques d'enseignement sont des ressources issues du contexte d'enseignement et qu'ils n'ont pas produites eux-mêmes. Certains enseignants-chercheurs qui appartiennent à la fédération de recherche *maths à modeler* et qui enseignent dans des parcours de formation en informatique, maths-info, mathématiques appliquées et parcours d'ingénieurs mobilisent quelques ressources issues de leur activité de recherche. Ces enseignants-chercheurs peuvent être influencés par leurs collaborations avec des didacticiens au sein de la fédération de recherche *maths à modeler*, et leurs implications dans des ingénieries didactiques transposant à la classe des situations de recherche. Leur mobilisation des ressources issues de leur activité de recherche peut être aussi expliquée par le rapport personnel de ces enseignants-chercheurs à la théorie des graphes dans le monde de recherche, ou par une influence des conditions institutionnelles en lien avec le parcours de formation sur les choix effectués en termes d'interactions avec les ressources dans/pour l'enseignement.

Par ailleurs, une ressource peut être produite par un enseignant-chercheur ou collectivement par plusieurs enseignants-chercheurs. Nous citons à titre d'exemple le module d'enseignement des mathématiques discrètes en L2 produit collectivement par LB, LQ et LN. Ce module incarne des invariants opératoires supposés partagés par les enseignants-chercheurs, cependant les schèmes de mobilisation du module dans l'enseignement ne sont pas les mêmes pour les trois concepteurs. Étant donné que les concepteurs du module le mobilisent dans les mêmes conditions institutionnelles, il nous semble que les disparités repérées dans les schèmes de mobilisation du module par les concepteurs peuvent être dues aux rapports personnels différents qu'ils ont aux mathématiques discrètes dans le monde de recherche. Nous estimons qu'une analyse des formes de connectivité potentielle établies par les concepteurs dans le module peut nous informer sur ce qu'ils souhaitent potentiellement développer chez les étudiants par la mobilisation du module dans l'enseignement, et par la suite nous éclairer davantage sur les invariants opératoires supposés partagés de ces enseignants-chercheurs qui ont piloté la conception du module.

Nous soulignons ici que l'analyse des entretiens avec les enseignants-chercheurs montre une forte dominance des invariants opératoires à dominante didactique dans les classes de situations en lien avec la conception et la mise en œuvre des séances d'enseignement, par opposition à une présence plus faible des invariants opératoires à dominante épistémologique. Les règles d'action des enseignants-chercheurs dans notre étude sont justifiées surtout par des invariants opératoires à

dominante didactique (leurs connaissances en lien avec l'enseignement de la théorie des graphes et leurs représentations en lien avec les profils des étudiants) dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours, TDs, TP et des moments d'évaluation. Et des invariants opératoires à dominante institutionnelle (connaissances en lien avec les parcours de formation, le volume horaire, le nombre d'étudiants en classe, etc.) semblent piloter la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement. Au premier abord, cela peut donner l'impression d'une rupture qui existe entre l'activité de recherche des enseignants-chercheurs et leurs pratiques d'enseignement. Cependant, nous estimons que ce qui peut être perçu comme une rupture dans le rapport aux deux institutions, enseignement et recherche, d'un enseignant-chercheur, pourrait avoir plusieurs interprétations possibles.

En effet, lors de la conception de son enseignement de la théorie des graphes, un enseignant-chercheur peut être contraint d'effectuer des choix qui sont plus en harmonie avec le contexte institutionnel dans lequel il enseigne que d'autres choix pouvant être justifiés par la nature épistémologique du domaine mathématique en question. Une autre interprétation possible peut être que, bien qu'un enseignant-chercheur puisse considérer que des liens existent entre son enseignement de la théorie des graphes et son activité de recherche dans ce domaine, il peut ne pas ressentir la nécessité de mobiliser des connaissances épistémologiques provenant de son activité de recherche en théorie des graphes dans son enseignement du même domaine. Il peut même être en train de mobiliser dans ses pratiques d'enseignement des connaissances issues de son activité de recherche, sans en être totalement conscient, et sans l'explicitier dans son discours lors de l'entretien. En outre, le rapport personnel d'un enseignant-chercheur à la théorie des graphes dans l'institution de recherche peut être complètement différent de son rapport à la théorie des graphes dans l'institution de l'enseignement. Le développement des rapports différents à la théorie des graphes au sein des deux institutions, enseignement et recherche, peut conduire un enseignant-chercheur à percevoir ces deux institutions comme deux mondes totalement séparés.

En ce qui concerne notre question de recherche Q2, les analyses montrent une grande influence du contexte institutionnel sur les pratiques d'enseignement de la théorie des graphes. Cette influence peut être identifiée dans les choix que les enseignants-chercheurs effectuent en termes de contenus et de ressources mobilisées, qui souvent semblent impactés par le parcours de formation en question. Elle peut être aussi observée dans la dominance des invariants opératoires à dominante institutionnelle dans la classe de situations « concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement ». Ce qui montre que, les enseignants-chercheurs, dans la planification de leur enseignement, prennent en considération les conditions et les contraintes institutionnelles telles que le parcours de formation, le nombre d'étudiants, le volume horaire, etc. En plus, la conception collective de ressources pour l'enseignement ou les modalités d'évaluation peuvent être souvent des recommandations de l'institution.

Il nous semble, d'après ce qui précède, que les tendances et les spécificités que nous avons identifiées dans les pratiques des enseignants-chercheurs peuvent être guidées par leur rapport personnel à la théorie des graphes, par des conditions institutionnelles telles que le parcours de formation dans lequel ils enseignent et par leurs connaissances didactiques. Elles peuvent être (ou non) influencées par leur activité de recherche en théorie des graphes. Dans la continuité de ce travail, et pour mieux comprendre les pratiques de ces enseignants-chercheurs et cerner les différents facteurs qui les influencent, il nous semble pertinent d'apporter l'éclairage des ressources conçues par ces enseignants-chercheurs pour leur enseignement. Il nous semble qu'une analyse des ressources produites par les enseignants-chercheurs peut nous permettre de mettre en

perspective certains résultats de l'analyse des entretiens et la façon dont ils prennent forme lors de la conception d'une ressource.

Ainsi, afin d'apporter une vision plus concrète et plus précise sur les pratiques des enseignants-chercheurs, nous nous tournons à l'issue des entretiens avec les enseignants-chercheurs sur une analyse du module conçu par trois d'entre eux (§ IV.2). Nous estimons qu'une analyse des contenus de ce module peut nous apporter un éclairage sur des spécificités des pratiques des enseignants-chercheurs des trois enseignants-chercheurs, et nous permettre de cerner davantage l'influence du contexte institutionnel et de leur activité de recherche sur leurs pratiques d'enseignement.

IV.2- Analyse des ressources conçues collectivement

Nous présentons dans cette partie notre analyse des ressources conçues collectivement par un sous-groupe d'enseignants-chercheurs interviewés, pour leur enseignement de la théorie des graphes. Nous nous appuyons sur le concept de « connectivité » dans cette analyse (Gueudet et al., 2018) (§ III.5.6). Nous commençons par présenter les choix des ressources retenues pour l'analyse ainsi que la contribution de cette analyse à la compréhension des pratiques des enseignants-chercheurs et des facteurs qui les influencent (§ IV.2.1). Ensuite, nous présentons une description détaillée de ces ressources (§ IV.2.2) suivie par la méthodologie que nous avons développée pour cette analyse (§ IV.2.3). Enfin, nous présentons notre analyse de la ressource suivant la méthodologie développée, et les résultats de cette analyse (§ IV.2.4).

IV.2.1- Choix des ressources à analyser et articulations entre l'analyse des entretiens et l'analyse des ressource

Les analyses des entretiens montrent la variété des ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans leurs pratiques d'enseignement, et l'imbrication de facteurs institutionnels et individuels dans les interactions avec les ressources dans les différentes classes de situations. Certaines ressources sont conçues collectivement par un ensemble d'enseignants-chercheurs, et puis mobilisées par chacun de ces enseignants-chercheurs dans son enseignement de la théorie des graphes. Nous citons particulièrement un module conçu collectivement par LB, LQ et LN pour l'enseignement des mathématiques discrètes, dont la théorie des graphes, dans un parcours de formation en mathématiques en L2. Ces trois concepteurs du module sont chercheurs en théorie des graphes. Les recherches de LB et LN portent respectivement sur la coloration et l'orientation des graphes et sur le nombre chromatique de graphe, et les recherches de LQ concernent des applications de la théorie des graphes à la télécommunication. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que ces enseignants-chercheurs ont un rapport personnel différent à la théorie des graphes dans l'institution de recherche. LB et LN semblent positionnés plus du côté de la théorie dans leur recherche en théorie des graphes, et LQ semble plus proche du côté des applications concrètes de la théorie des graphes dans son activité de recherche.

Dans l'enseignement, le module qu'ils ont conçu a été récemment introduit dans le parcours de formation en mathématiques et vise, selon eux, à préparer les étudiants à une filière de recherche en théorie des graphes au niveau Master. En plus, ce module consiste en trois parties dont une porte sur la théorie des graphes, avec deux autres parties qui portent sur l'arithmétique et la récurrence.

Chacun de ces enseignants-chercheurs a deux positions par rapport à ce module, concepteur et utilisateur. Le module conçu collectivement par les trois enseignants-chercheurs pourrait refléter

des invariants opératoires à dominantes différentes supposés partagés par ces derniers, et les conditions institutionnelles prises en considération. Cependant, l'analyse des entretiens montre que les schèmes d'utilisation de ce module dans l'enseignement de la théorie des graphes ne sont pas les mêmes pour les trois concepteurs. Étant donné que LB, LN et LQ mobilisent ce module dans un même parcours de formation au même niveau (L2), les conditions institutionnelles en termes de volume horaire, distribution des séances, nombres d'étudiants par classe, etc. sont presque les mêmes pour les trois enseignants-chercheurs. Nous estimons donc que les rapports personnels différents de ces enseignants-chercheurs à la théorie des graphes dans les deux institutions, enseignement et recherche, peuvent en partie expliquer les disparités existantes dans les schèmes d'utilisation de ce même module d'enseignement de la théorie des graphes.

Nous nous intéressons à une caractérisation des formes de connectivité potentielle établie dans le module par ces trois concepteurs. Ces trois concepteurs avec des rapports personnels différents à la théorie des graphes ont conçu le module d'enseignement de ce domaine mathématique dans les mêmes conditions institutionnelles. Nous nous intéressons à étudier les connexions établies entre les concepts, leur organisation, leur progression dans le module, les représentations sémiotiques mobilisées, les choix des exercices et des stratégies de leur résolution, ainsi que les connexions avec les autres domaines mathématiques, les autres disciplines et la vie réelle. Nous estimons qu'une caractérisation des connexions établies peut nous éclairer sur la façon dont les convictions et les connaissances partagées par les trois concepteurs concernant l'enseignement de la théorie des graphes orientent les différents choix effectués dans la conception du module. Elle pourrait aussi nous permettre de cerner l'influence des conditions institutionnelles sur les choix effectués collectivement par les concepteurs.

Nous rappelons ici que l'analyse des entretiens avec les enseignants-chercheurs montre une forte dominance des invariants opératoires à dominante didactique et une faible présence de ceux à dominante épistémologique dans les classes de situations en lien avec leurs pratiques d'enseignement. Les règles d'action des enseignants-chercheurs dans notre étude sont justifiées surtout par des invariants opératoires de nature didactique (leurs connaissances en lien avec l'enseignement de la théorie des graphes et les profils des étudiants) dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours, TDs, TP et des moments d'évaluation. Et des invariants opératoires de nature institutionnelle (connaissances en lien avec les parcours de formation et les contraintes et conditions institutionnelles) semblent piloter la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement. Au premier abord, cela peut donner l'impression d'une rupture qui existe entre l'activité de recherche des enseignants-chercheurs et leurs pratiques d'enseignement. Cependant, nous estimons que ce qui peut être perçu comme une rupture dans le rapport aux deux institutions, enseignement et recherche, d'un enseignant-chercheur, peut avoir plusieurs interprétations possibles.

Nous nous intéressons particulièrement à caractériser les liens entre l'activité de recherche de LQ et ses pratiques d'enseignement. En effet, LQ a fait des recherches qui portent sur des applications de la théorie des graphes à la télécommunication, et enseigne la théorie des graphes dans un parcours de formation en mathématiques. Nous faisons l'hypothèse qu'une tension pourrait exister son activité de recherche et son enseignement.

Ainsi, nous estimons qu'une analyse du module conçu par LQ, LN et LB par le prisme de la connectivité peut nous permettre de cerner davantage l'existence (ou non) d'une influence de l'activité de recherche de ces trois enseignants-chercheurs sur leur enseignement et de la caractériser. En effet, bien que les entretiens n'aient pas porté particulièrement sur ce module, il a

été évoqué à plusieurs reprises par les trois concepteurs. Nous estimons qu'une caractérisation des choix effectués par les trois enseignants-chercheurs (LB, LN et LQ) dans la conception du module d'enseignement peut nous éclairer sur les liens qui existent entre les justifications des choix avancés par chacun d'eux (invariants opératoires) lors des entretiens et la mise en œuvre de ces choix lors de la conception du module. Ainsi, une caractérisation de la forme de connectivité potentielle établie dans le module peut nous permettre de comprendre certains choix effectués par les enseignants-chercheurs dans la conception de leur enseignement de la théorie des graphes, et de cerner les facteurs qui les influencent, surtout ceux de nature institutionnelle. Elle peut nous éclairer sur l'influence de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs, concepteurs des modules d'enseignement, sur la conception de leur enseignement. Ainsi, une analyse des contenus de ce module conçu collectivement peut nous permettre de compléter les résultats des analyses des entretiens en apportant des éléments de réponse à deux questions de recherche Q1 et Q2 (§ III.6), et d'apporter des premiers éléments de réponses à la question de recherche Q3 que nous rappelons ci-dessous :

Q3 : Comment peut-on caractériser, par le prisme de la conception et l'usage des ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes, l'influence de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs sur leur enseignement dans ce même champ ?

Nous commençons cette partie par une présentation plus détaillée du module à analyser (§ IV.2.2).

IV.2.2- Description des ressources à analyser

Dans notre étude, nous portons une attention singulière aux ressources conçues par les enseignants-chercheur pour l'enseignement de la théorie des graphes. Lors des entretiens avec les enseignants-chercheurs, nous avons demandé des ressources particulières (polycopiés de cours, TDs, manuels, épreuves écrites, etc.) qu'ils conçoivent dans/pour leur enseignement des mathématiques discrètes.

Parmi les ressources que nous avons récupérées, une ressource nous semble particulièrement intéressante à analyser dans le contexte de notre travail : un module intitulé « Mathématiques discrètes » qui a été introduit en 2015-2016 à l'université Libanaise pour l'enseignement des mathématiques discrètes en L2 conçu par LB, LN et LQ.

Le module de mathématiques discrètes à l'université libanaise vise à introduire la théorie des graphes. Il est composé de trois parties, l'une d'elles est intitulée « Généralités sur les graphes » et c'est celle qui nous intéresse dans notre analyse. L'objectif de cette partie déclaré par les concepteurs est d'introduire les étudiants à la théorie des graphes et les préparer à une filière de Master en théorie des graphes.

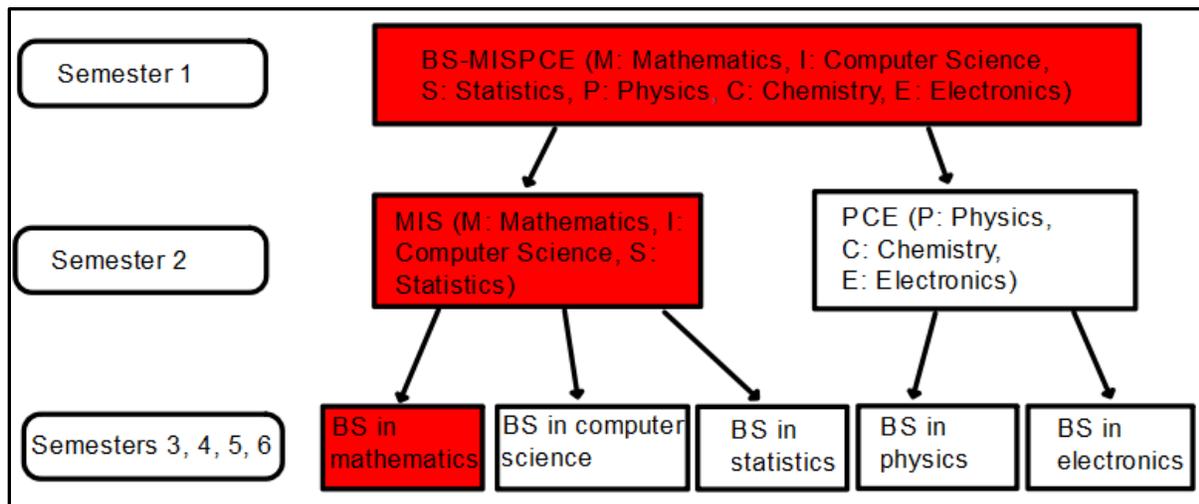
Le module de mathématiques discrètes au Liban a été conçu collectivement par les trois enseignants-chercheurs LB, LN et LQ que nous avons interviewés et qui enseignent dans deux sites différents de la faculté des sciences de l'université libanaise. Et tous les trois mobilisent ce module dans leur enseignement des mathématiques discrètes en L2.

Nous commençons par présenter le contexte institutionnel dans lequel ce module a été conçu à l'université libanaise.

Les programmes d'étude à l'université libanaise sont sanctionnés par des diplômes, et organisés en trois cycles : licence (1^{er} cycle), master (2^{ème} cycle) et doctorat (3^{ème} cycle).

La durée d'un cycle est de 6 semestres pour la licence, de 4 semestres pour le master, et d'un minimum de six semestres pour le doctorat. Les cours sont dispensés en français ou en anglais.

Dans la faculté des sciences, les programmes d'études sont regroupés selon deux orientations : MISPCE (M: Mathematics, I: Computer Science, S: Statistics, P: Physics, C: Chemistry, E: Electronics) et CSVT (C : Chemistry, SVT : Life Science and Earth, Geology).



Encadré 45 : Parcours (en rouge) que doit suivre un étudiant souhaitant se former en mathématiques à l'université libanaise

Dans l'encadré 45 ci-dessus, nous montrons (en rouge) le parcours que doit effectuer un étudiant afin d'acquérir une licence en mathématiques. Le premier semestre (cf. encadré 45) constitue comme un tronc commun aux étudiants voulant s'inscrire dans une formation en mathématiques, physiques, statistiques, « computer science », ou électronique. A la fin du premier semestre, les étudiants doivent choisir entre deux orientations : MIS (Mathematics, Computer Science, Statistics) ou PCE (Physics, Chemistry, Electronics). A partir du troisième semestre, les étudiants choisissent leur parcours de formation.

Le module de mathématiques discrètes est un module obligatoire du troisième semestre pour les étudiants dans un parcours de formation en mathématiques. Le volume horaire du module est de 60 heures réparties en 30 heures de cours et 30 heures de TDs. Selon LB, l'objectif de ce module est l'initiation des étudiants au champ des mathématiques discrètes, particulièrement l'introduction à la théorie des graphes et la préparation à une filière de Master en théorie des graphes. Les ressources dont nous disposons sont des photocopiés de la partie cours qui sont distribués aux étudiants en classe, les fiches de TDs et quelques épreuves écrites fournies par LQ en 2016-2017.

Le module consiste en trois chapitres intitulés respectivement : arithmétique, généralités sur les graphes et relations de récurrence et fonctions génératrices. Nous nous intéressons en particulier à la partie qui porte sur les parcours (chemins, cycles, plus courts chemins) du chapitre « généralités sur les graphes » et aux TDs correspondants. Le module est évalué par des épreuves écrites : un examen partiel au milieu du semestre, et un examen final à la fin.

IV.2.3- Méthodologie d'analyse des ressources

Nous commençons notre analyse par une description du contexte de production de la ressource et de sa structure globale. Nous nous intéressons à la composition de la ressource en termes de sujets abordés et de leur séquençage, et en termes de la nature de contenus et de leur organisation (théorèmes, lemmes, corollaires, exemples, exercices, définitions, etc.).

Pour l'analyse de la connectivité potentielle offerte par la ressource, nous nous basons sur les critères explicités dans la partie III.5.6 pour construire notre grille d'analyse des contenus (cf. tableau 38).

Critères au niveau macro	Description
Les connexions au syllabus fixé par l'institution	Les objectifs visés par le module décrits dans le syllabus, les connaissances à introduire, les modes de raisonnement, les savoirs et les savoir-faire à développer chez les étudiants, etc.
Les connexions à des ressources extérieures	Les ouvrages à consulter, le matériel supplémentaire fourni par le(s) concepteur(s), les modules d'enseignement mobilisés dans le même parcours de formation, etc.
Critères au niveau micro	Description
Les connexions entre les concepts mobilisés	Les concepts en jeu et les concepts articulés ensemble, et la façon dont ces derniers sont mis en lien dans les définitions, les exemples, les théorèmes, les exercices, etc.
Les différents moments d'appropriation d'un même concept (progression qui permet de revisiter les propriétés d'un concept ou les formes de connexions établies entre un groupe de concepts)	La présentation des concepts (ou non) ou des connexions établies entre eux dans différentes parties du module (définitions et théorèmes, exemples, exercices, etc.)
Les connexions entre les registres de représentation sémiotique mobilisés et les activités cognitives sollicitées (représentation, traitement et conversion)	Les registres d'écriture utilisés dans le module (le langage naturel, le langage symbolique, les graphes cartésiens, les tableaux, les figures géométriques, etc.) et s'il y a (ou non) passage d'un registre à un autre avec caractérisation des propriétés sollicitées et des démarches sous-jacentes
Les connexions à d'autres domaines mathématiques	Les liens établis avec d'autres domaines mathématiques dans les exemples, les exercices et les problèmes
Les connexions à des situations authentiques ou à des situations issues de la vie réelle	Les connexions à des situations issues de la vie réelle ou à des situations authentiques établies dans les exemples, les exercices et les problèmes
Les connexions à d'autres disciplines	Les connexions avec d'autres disciplines telles que l'informatique ou la physique, établies dans les exemples, les exercices et les problèmes
Les connexions entre les logiciels mobilisés, le cas échéant (au cas où des algorithmes sont mobilisés dans la	Sollicitation (ou non) de l'utilisation des outils technologiques comme la calculatrice, les logiciels, les ordinateurs, d'autres objets matériels, etc.

ressource et des logiciels sont sollicités pour les implémenter)	
Les variations d'un même exercice ou problème	Les variations des instances de l'exercice
Les différentes stratégies de résolution d'un même exercice ou problème	Indication préalable de la méthode de résolution d'un exercice ou problème (ou non), existence d'autres méthodes qui peuvent être utilisées
Les demandes cognitives potentielles dans les exercices d'entraînement et d'application et dans les problèmes	Caractérisation des démarches pouvant être sollicitées pour la résolution des exercices d'entraînement et d'application et des problèmes

Tableau 38 : Grille conçue pour l'analyse des contenus aux niveaux macro et micro

Nous avons commencé par une description du contexte de production de la ressource et de sa structure globale. Pour le faire, nous avons commencé par élaborer une liste des définitions, théorèmes, corollaires, lemmes, exemples, et applications portant sur les parcours dans le chapitre sur la théorie des graphes. Ces choix au niveau de la structure des contenus peuvent nous éclairer sur des intentions des concepteurs à mettre l'accent sur l'introduction de concepts, le développement de raisonnements, l'illustration des idées, etc.

En ce qui concerne l'analyse au niveau macro, nous considérons deux critères : les connexions au syllabus et les connexions à des ressources extérieures. Nous rappelons que plusieurs autres critères ont été développés par Gueudet et al. (2018) pour l'étude de la macro connectivité d'une ressource ; nous ne prenons pas ces critères en considération dans notre étude étant donné que les ressources que nous proposons d'analyser ne sont pas des ressources numériques, et sont mobilisées dans l'enseignement supérieur. Ainsi, nous avons fixé deux critères pour l'analyse au niveau macro en fonction des adaptations des critères avancés par Gueudet et al. (2018) que nous avons présentées dans le paragraphe III.5.6.

Pour l'analyse au niveau macro, nous avons commencé par chercher les connexions au syllabus fixé par l'institution. Pour le faire, nous avons comparé la description des contenus susmentionnée avec la liste de contenus présentés dans le syllabus. Le syllabus pourrait fournir des justifications de certains choix effectués par les enseignants-chercheurs lors de la conception du module. Afin de repérer l'existence de connexions à des ressources extérieures, nous avons cherché dans la ressource l'existence de notes explicites qui suggérèrent aux étudiants de consulter d'autres ressources ou d'avoir recours à des logiciels (notes en bas de pages, références à consulter, logiciel suggéré pour la résolution des exercices, etc.). Les connexions à des ressources extérieures peuvent suggérer un impact de l'activité de recherche de l'enseignant-chercheur concepteur de la ressource sur ses pratiques d'enseignement, ou une intention du concepteur à effectuer des liens avec le parcours de formation, etc.

Pour l'analyse au niveau micro, nous avons considéré trois unités d'analyse : une partie qui porte sur les apports théoriques dans le cours consistant en des définitions, des notations, des propositions, des théorèmes, des lemmes, des corollaires et de leurs preuves ; une partie qui consiste en des exemples et des remarques ; et une partie qui porte sur les neuf exercices du TD correspondant à la partie du chapitre que nous avons analysée. Nous considérons que la première unité d'analyse, les apports théoriques, peut nous éclairer sur des choix des concepteurs au niveau des concepts introduits dans la partie cours du module, et des formes de mise en relation de ces

concepts dans les définitions, les théorèmes, les propositions, les preuves, etc. la deuxième unité d'analyse qui consiste en des exemples et des remarques peut nous éclairer sur le rôle des exemples dans le module (illustrer des concepts et leur mise en relation, introduire de nouvelles formes de relations entre les concepts, etc.) et sur la place des remarques. Nous considérons que les concepteurs peuvent utiliser les remarques pour communiquer des idées aux étudiants ou attirer leur attention sur des caractéristiques des concepts mobilisés et leur mise en relation. Ainsi, une analyse des formes de connexions établies par les concepteurs dans les exemples et les remarques peut nous éclairer sur des idées sur lesquelles ils souhaitent mettre l'accent, ou sur des conceptions qu'ils ont en lien avec des difficultés potentielles des étudiants, etc. La troisième unité d'analyse consistant en neuf exercices de la partie TD du module peut nous informer sur ce que les concepteurs du module souhaitent développer chez les étudiants et sur la façon dont ils perçoivent les exercices.

Nous avons commencé par examiner la partie cours du module, c'est-à-dire les deux premières unités d'analyse. Nous avons essayé d'identifier les concepts et les notions introduites et leur mise en relation en répondant aux questions suivantes : quels sont les concepts en jeu ? Comment sont-ils mobilisés et sollicités (dans des activités introductives, des définitions, des exemples, des questions, des exercices, etc.) ? Quels concepts sont-ils articulés ensemble ? Nous avons organisé nos réponses à ces questions dans un tableau à deux entrées. Dans l'entrée en colonne, nous avons listé les groupes de concepts mis en relation, et dans l'entrée en ligne, les unités que nous considérons pour notre analyse (les apports théoriques, les exemples et les remarques, et les exercices) (cf. annexe 5 tableau 5.1). Ainsi, dans les cellules du tableau, nous avons, pour chaque groupe de concepts, identifié les formes de leur mise en relation dans les définitions, les exemples, les théorèmes, les propositions, les preuves, etc. dans le cas où des connexions sont établies entre les concepts en s'appuyant sur des relations antérieures, nous l'avons clairement indiqué dans les cellules du tableau. Par exemple, quand la preuve d'un théorème sollicite la mobilisation d'un lemme ou d'une définition. Pour les preuves, nous avons indiqué le raisonnement mis en place (récurrence, contradiction par maximalité, construction, etc.).

Pour repérer les concepts mobilisés dans la troisième unité d'analyse (le TD), nous avons examiné les données des exercices et nous les avons résolus. Ainsi, nous avons listé les concepts en jeu lors de la résolution des exercices dans le tableau que nous avons construit, tout en notant à chaque fois le numéro de l'exercice en question (cf. tableau 39). Nous avons aussi indiqué, le cas échéant, les théorèmes, les corollaires et les propositions sollicités lors de la résolution (cf. annexe 5 tableau 5.1).

Concepts mis en relation	Apports théoriques de la partie cours du module			Exemples et remarques	Exercices du TD 2 du module	
arête, sommet	définition 1 définition d'un graphe qui met en relation l'ensemble de sommets registre formel			exemple 1 exemple d'un graphe avec l'ensemble de sommets et l'ensemble des arêtes registre par graphe		
graphe complet, sommet, arête	définition 2 définition d'un graphe complet qui met en relation l'ensemble des arêtes et l'ensemble de sommets registre formel			exemple 2 exemple d'un graphe complet d'ordre 5 qui met en relation les arêtes et les sommets registre par graphe		
sous-graphe, sommet, arête	définition 3 définition d'un sous-graphe qui met en lien les ensembles de sommets et d'arêtes registre formel			exemple 3 exemple qui met en lien un graphe et un sous-graphe en illustrant les sommets et les arêtes		

Tableau 39 : Capture d'écran du tableau construit pour l'analyse des contenus illustrant son utilisation

Ainsi, le tableau 5.1 de l'annexe 5 peut nous permettre en premier lieu de considérer un concept donné et de repérer pour ce concept les différentes formes de mises en relation avec d'autres concepts, et les différents moments où ce concept est mobilisé. Pour chaque concept, nous avons noté ces différents moments d'exposition afin d'étudier sa progression dans la partie du module analysée. Nous avons aussi considéré les trois unités d'analyse et élaboré une liste des concepts mobilisés dans chacune. Cela nous a permis de cerner les concepts en jeu dans une seule unité d'analyse (par exemple des concepts mobilisés seulement dans les apports théoriques) et les concepts mobilisés à plusieurs moments, c'est-à-dire communs à plusieurs unités d'analyse. Les formes de connexion que les concepteurs établissent entre les concepts dans le module peuvent nous renseigner sur leur rapport à la théorie des graphes ou sur les représentations qu'ils ont de l'enseignement de la théorie des graphes.

De plus, nous nous sommes intéressée à caractériser les concepts mobilisés dans le module par une identification des concepts qui renvoient à des objets et des concepts qui renvoient à des processus (§ II.1.4). Cette caractérisation des concepts peut nous éclairer sur des intentions des concepteurs à mettre l'accent sur les objets mathématiques et des mises en relation de ces objets, ou sur des processus qui mobilisent les objets en question. Des choix effectués par les concepteurs en termes de la mobilisation des concepts en tant qu'objets ou en tant que processus peuvent incarner certains invariants opératoires de ces concepteurs en lien avec la théorie des graphes et son enseignement (mettre l'accent dans l'enseignement de la théorie des graphes sur le développement des apprentissages autour des objets, ou sur le développement de raisonnements mobilisant des processus propres à la théorie des graphes tels que la recherche de degrés, de longueurs, de chemins, etc.).

Ensuite, nous avons identifié dans la partie cours et dans le TD les registres de représentation sémiotique (par graphe, langage naturel, formel, par schéma, par matrice, et par tableau) mobilisés par les concepteurs, ou pouvant être mobilisés par les étudiants lors de la résolution des exercices

du TD, et les activités cognitives correspondantes dans chaque cas (représentation, traitement et conversion) tout en caractérisant les propriétés sollicitées et les démarches sous-jacentes (§ II.1.4). Les représentations sémiotiques mobilisées dans le module peuvent nous éclairer sur le potentiel de la ressource conçue à développer chez les étudiants une compréhension des concepts.

Aussi, nous avons essayé d'étudier la place et le rôle des outils technologiques et des logiciels dans le cas où ils sont sollicités. Le type de logiciels et d'outils technologiques sollicités, le cas échéant, peut nous renseigner sur des liens que le concepteur souhaite établir avec le parcours de formation, ou sur un impact de son activité de recherche sur son enseignement, etc.

Nous avons de même examiné les connexions qui existent avec d'autres domaines mathématiques. Ces liens peuvent être mentionnés explicitement, ou peuvent être établis à travers des modes de raisonnement mobilisés dans les preuves ou dans les exercices issus de l'algèbre, de la théorie des ensembles, etc. Les liens établis avec les autres domaines mathématiques peuvent nous éclairer sur les connexions que les concepteurs du module souhaitent établir avec la filière de formation. De plus, nous avons cherché les liens avec d'autres disciplines, ou avec des situations authentiques ou issues de la vie réelle. Pour le faire, dans la partie cours, nous avons examiné l'existence de situations qui relèvent d'autres disciplines ou de la vie réelle dans les exemples et les remarques. Pour la partie TD, nous avons aussi examiné les données des exercices pour repérer l'existence de situations qui relèvent d'autres disciplines ou de la vie réelle. Les connexions avec d'autres disciplines et avec la vie réelle peuvent nous renseigner sur les connexions pratiques à la filière d'étude.

Finalement, pour les exercices et les problèmes présentés dans le TD, nous avons cherché, d'une part, les différentes stratégies possibles de résolution qui existent pour un même exercice/problème, et d'autre part, les variations d'un même exercice/problème (les instances d'un exercice/problème qui varient). Pour cela, nous avons résolu les exercices du TD en mobilisant les stratégies que des étudiants ayant suivi la partie cours de ce module seraient capables de mettre en place. Par exemple, certains exercices peuvent être résolus par une méthode algorithmique. Nous ne l'avons pas prise en considération parce que les étudiants ne possèdent pas les connaissances en algorithmique qui leur permettent de mobiliser les algorithmes propres à la théorie des graphes (tels que le BFS). Enfin, pour chaque exercice/problème, nous avons dressé une liste des demandes cognitives pouvant être requises des étudiants lors de la résolution. Pour cela, nous avons identifié les verbes d'action mobilisés dans les exercices et les problèmes, tout en caractérisant les démarches pouvant être mises en place pour la résolution. Une analyse des demandes cognitives requises pour la résolution des exercices et des problèmes ainsi que de l'existence des variations d'un même exercice peut nous renseigner sur ce que les concepteurs du module souhaitent développer chez les étudiants (applications de procédure, réflexion sur des situations nouvelles, représentation et modélisation de situations issues de situations pratiques en lien avec la filière de formation, etc.).

IV.2.4- Principaux résultats de l'analyse des contenus

Nous présentons dans cette partie des résultats que nous avons obtenus par exploitation de la méthodologie d'analyse développée dans la partie IV.2.3 pour l'analyse des contenus portant sur les chemins et les cycles dans le module d'enseignement des mathématiques discrètes en L2.

IV.2.4.1- Description de la ressource

La ressource est un module d'enseignement des mathématiques discrètes en L2 à l'université libanaise qui a été conçu collectivement par trois enseignants-chercheurs, LB, LQ et LN. Selon les concepteurs, le module a été conçu pour introduire les étudiants aux mathématiques discrètes, particulièrement à la théorie des graphes afin de les préparer à une filière de recherche en théorie des graphes. Le module est composé de trois parties : arithmétique dans \mathbb{Z} , relations de récurrence et théorie des graphes. Les trois parties sont indépendantes les unes des autres. Cela semble être en harmonie avec un invariant opératoire de LQ « Les branches des mathématiques discrètes sont indépendantes les unes des autres ». La partie qui porte sur la théorie des graphes est divisée en deux chapitres. Le premier chapitre comporte quatre sous-parties organisées comme suit :

- 1.1- Définitions et notations
- 1.2- Chemins
- 1.3- Cycles
- 1.4- Digraphes

Le second chapitre comporte deux sous-parties organisées comme suit :

- 2.1- Définitions et notations
- 2.2- Degrés des sommets dans un graphe biparti

Nous nous intéressons particulièrement aux parties 1.1, 1.2, et 1.3 du premier chapitre portant sur les chemins et les cycles. Cette partie consiste en 11 définitions, 11 exemples, 3 notations, 3 remarques, 6 propositions, 4 théorèmes, 1 corollaire, 4 lemmes. Tous les théorèmes, lemmes, corollaires et propositions sont suivis de leurs preuves. Les définitions sont présentées suivies par des exemples. Pour les théorèmes qui sollicitent des lemmes pour la preuve, les lemmes et leurs preuves sont présentés avant les preuves de ces théorèmes. La partie TD du second chapitre consiste en 13 exercices, dont 9 portent sur les parties 1.1, 1.2 et 1.3.

IV.2.4.2- Résultats de l'analyse au niveau macro

Nous présentons ci-dessous (cf. encadré 46) le syllabus du module de mathématiques discrètes à l'université libanaise.

Code du cours	Titre du cours	Semestre	ECTS	CM	TD	TP
M2204	Mathématiques discrètes	3	3	15	15	0

Département de rattachement : Mathématiques

Contenu :

Arithmétique dans \mathbb{Z} : les entiers, division euclidienne, divisibilité, nombres premiers, PGCD, PPCM, congruences, équations diophantiennes, identité de Bézout, théorème de Wilson, théorème de Fermat, théorème Chinois, fonction d'Euler.

Relations de récurrence : motivation, résolution des équations récurrentes : position du problème, récurrences linéaires, fonctions génératrices, séries et polynômes formels, séries rationnelles, manipulations formelles, fonctions génératrices, applications, encadrement, approche asymptotique.

Théories des graphes : terminologies (sommets, arêtes, arcs, ordre, indice, degrés, adjacence, incidence, voisinage etc.), représentations graphique et matricielle d'un graphe, matrices d'adjacence et d'incidence, quelques classes de graphes, sous-graphes, graphes partiels, cheminement dans les graphes (chaînes chemins, cycles, circuits), connexité et composantes connexes d'un graphe, cycles eulériens et cycles hamiltoniens.

Encadré 46 : Syllabus du module de mathématiques discrètes en L2 à l'université libanaise

Les contenus du module sont décrits dans le syllabus, sans évocation des objectifs d'apprentissage. Les sujets abordés dans le module ne correspondent pas exactement à la description présentée dans le syllabus. La représentation matricielle d'un graphe, les matrices d'adjacence et d'incidence et les cycles eulériens et les cycles hamiltoniens sont cités dans le syllabus, pourtant non abordés dans le module.

Nous soulignons que le module ne comprend aucune évocation explicite de liens avec des ressources lui sont extérieures. Les ouvrages mobilisés par les enseignants-chercheurs lors de la conception du module ne sont pas mentionnés. Le module consiste en des fichiers PDF. A aucun moment dans ce fichier, d'autres ressources, numériques ou matérielles, ne sont évoquées.

IV.2.4.3- Résultats de l'analyse au niveau micro

Nous avons recensé 31 concepts mobilisés dans la partie que nous avons prise en considération pour nos analyses. Les définitions, les théorèmes, les exemples et les exercices mobilisent des objets de la théorie des graphes (graphe, sommet, arête, chemin, cycle, etc.). En revanche, dans les preuves de la partie cours et les exercices de la partie TD, les concepteurs mettent l'accent sur des processus tels que la recherche de chemins, de cycles, du degré maximal, du plus long chemin, etc. En effet, les définitions, les théorèmes, les lemmes, les corollaires, les notations, les propositions, les exemples et les remarques mobilisent les définitions structurelles des concepts. En outre, les preuves et les exercices sollicitent les définitions opérationnelles de certains concepts ainsi que leur définition structurelle. Neuf des onze exemples semblent illustrer les objets mathématiques mobilisés dans les définitions et leur mise en relation. Les deux autres exemples et les remarques introduisent de nouvelles formes de mises en relation des objets introduits dans les définitions.

En revanche, certains concepts sont mis en relation seulement dans les apports théoriques, et d'autres sont mis en relation uniquement dans les exercices. Nous concluons que certains concepts sont mobilisés à différents moments alors que d'autres peuvent ne pas l'être. Afin d'apporter plus de clarté en ce qui concerne les différents moments d'appropriation des concepts, nous avons considéré les trois unités d'analyse (apports théoriques, exemples et remarques, et exercices), et

nous avons, pour chaque concept, identifié les unités où il est mobilisé. Ainsi, nous avons construit un tableau (cf. tableau 40) pour illustrer nos résultats.

Ainsi, dans le tableau 40 ci-dessous, nous remarquons que certains concepts sont mobilisés à plusieurs moments. En effet, 13 des 31 concepts sont mobilisés dans les trois unités d'analyse : les apports théoriques, les exemples et les remarques, et les exercices. Huit concepts sont mobilisés dans les apports théoriques, les exemples et les remarques comme objets. Cinq concepts sont mobilisés dans les apports théoriques et les exercices, tantôt comme objets, tantôt comme processus. Certains concepts sont introduits comme objets dans les définitions et les théorèmes sans être mobilisés dans des exemples, des remarques ou des exercices tels que la distance et la géodésique. D'autres concepts sont introduits comme objets dans la partie TD du module tel que le graphe simple et le graphe acyclique ou dans les exemples tels que le graphe biparti complet.

Concepts mobilisés dans les trois unités d'analyse	Concepts mobilisés dans deux unités d'analyse		Concepts mobilisés dans une seule unité d'analyse		
	Apports théoriques, et exemples et remarques	Apports théoriques et exercices	Apports théoriques	Exemples et remarques	Exercices
Arête Sommet Nombre d'arêtes Nombre de sommets Graphe complet Sous-graphe couvrant Voisinage Degré Graphe régulier Complément d'un graphe Cycle Connexité Composante connexe	Sous-graphe induit Degré maximal Sommet isolé Triangle Longueur Maximalité Partition	Degré minimal Chemin Longueur minimale Longueur maximale Sous-chemin	Distance Géodésique	Graphe biparti complet	Graphe acyclique Graphe simple

Tableau 40 : Tableau élaboré pour lister les concepts mobilisés dans chacune des unités d'analyse

En ce qui concerne les registres de représentation sémiotique, le registre formel est mobilisé dans les définitions, les remarques, les théorèmes, les lemmes, les propositions et les corollaires. Une seule définition mobilise le registre de représentation par graphe avec le registre formel. Huit des onze exemples mobilisent le registre de représentation par graphe. En outre, les remarques sont présentées dans le registre formel. Les énoncés des exercices sont rédigés dans le registre de représentation sémiotique formel, et les exercices sollicitent un traitement dans le registre formel

pour la plupart. Un seul exercice requiert une représentation par un graphe comme contre-exemple pour montrer qu'une conjecture n'est pas vraie. En revanche, nous soulignons qu'il est possible que les étudiants effectuent des conversions du registre formel au registre de représentation par graphe lors de la résolution des exercices.

Quelques liens, qui nous semblent « timides », sont effectués avec les autres domaines mathématiques. Ces liens, pour la plupart, consistent en une mobilisation de concepts issus d'autres domaines (comme celui de la distance), ou des raisonnements issus de l'algèbre qui peuvent être considérés comme transversaux aux mathématiques. En effet, des liens avec l'algèbre sont établis à deux reprises dans la partie cours du module : dans une preuve d'un théorème et dans le lemme correspondant sollicitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et dans une preuve qui sollicite les concepts de l'application et de l'injection. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est introduite dans un module d'analyse en L1. Les notions de distance et de géodésique sont aussi définies dans la partie cours du module et mobilisées dans des propositions. De plus, certaines preuves (preuve du corollaire 11, preuve du lemme 28) et certains exercices (exercice 1 (3), exercice 2) sollicitent des propriétés issues de l'arithmétique en lien avec la parité et la somme des entiers, cependant ces propriétés peuvent sembler transversales en mathématiques. Nous avons repéré un lien avec la probabilité dans un exercice (cf. encadré 47) dont la résolution nécessite une p-liste. Et finalement, des propriétés en lien avec l'inclusion et l'intersection des ensembles issues de la théorie des ensembles peuvent être mobilisées pour la résolution de deux parties de l'exercice 8.

En ce qui concerne les exercices, les énoncés commencent toujours par le mot « prouver ». Il n'y a pas d'indications données pour les méthodes de résolution. Nous n'avons pas repéré des variations d'un même exercice. Les exercices mobilisent des concepts divers, et même quand ils mobilisent un même groupe de concepts, ils les mettent en relation de façons différentes. Certains exercices peuvent être résolus de deux façons différentes. La résolution des exercices requiert un traitement des données dans le registre formel. Pourtant, les étudiants peuvent convertir du registre formel au registre de représentation par graphe lors de la résolution des exercices afin d'illustrer les idées, ce qui peut leur fournir un support de réflexion, surtout sur les petits cas ou sur des cas particuliers. Certains concepts sont introduits comme objets dans les exercices (graphe simple, graphe acyclique). Certains exercices mobilisent des propositions et des théorèmes du cours, d'autres s'appuient sur des résultats obtenus dans d'autres exercices. Certains exercices (exercices 6, 7 et 8) sont divisés en plusieurs sous-parties où chacune s'appuie sur des résultats des parties précédentes.

Exercice 3. Prouver que le nombre de graphes de n sommets est égal à $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
--

Encadré 47 : Énoncé de l'exercice 3 du TD

Bien qu'il existe dans le parcours de formation un module intitulé « Algorithmique, Programmation » en L1, le module de mathématiques discrètes ne sollicite un raisonnement algorithmique à aucun moment. Et il n'y a aucun recours à des logiciels et à des outils technologiques.

Nous remarquons que le module introduit un grand nombre de concepts renvoyant à des objets ; les définitions sont présentées pour introduire les concepts du module, et les exemples semblent illustrer des connexions établies dans les définitions. Cela peut être dû à une intention des concepteurs d'inclure dans le module les définitions qu'ils considèrent « de base » et de développer chez les étudiants une culture de la théorie des graphes. En effet, LB considère qu' « il

est important que les étudiants soient cultivés au niveau de la connexité et non-connexité des graphes et du recouvrement et d'autres applications » et pour LQ « il est important que les étudiants soient cultivés au niveau des liens entre la théorie des graphes et d'autres domaines mathématiques ». Les concepteurs considèrent que l'objectif du module est d'introduire les étudiants à la théorie des graphes afin de les préparer à une filière de recherche dans le domaine. Ainsi, le module constitue une introduction à ce domaine mathématique.

En ce qui concerne les registres de représentation sémiotique, le registre formel est le plus mobilisé dans la partie cours du module. Cela semble en harmonie avec un invariant opératoire commun chez deux des trois concepteurs « Il est important que les contenus soient conformes avec les instructions officielles de la filière ». En outre, huit des onze exemples mobilisent le registre de représentation par graphe. Bien qu'il soit possible que la place des exemples dans l'enseignement effectif en classe soit différente, dans le module, ils semblent être présentés aux étudiants pour illustrer les connexions établies entre les concepts dans les définitions. De plus, les remarques sont présentées dans le registre formel, et les concepteurs semblent attirer l'attention sur des connexions entre les concepts non établies dans les apports théoriques.

Les concepteurs effectuent des liens avec l'algèbre à deux reprises dans le module. Ils effectuent aussi le choix d'introduire la distance en théorie des graphes comme espace métrique, et effectuent ainsi un lien avec le module de topologie métrique donné en L2. Cela semble en harmonie avec les propos de LB lors de l'entretien « là, dans notre enseignement on a fait pas mal de liens entre algèbre par exemple et mathématiques discrètes euhh la topologie, je suis faible dans ce domaine mais il y a la théorie des graphes topologiques, donc c'est clair qu'il y a un lien étroit entre les mathématiques discrètes et les autres disciplines, pourquoi ? Parce que les mathématiques discrètes ne se basent pas sur des définitions élaborées, c'est des définitions très simples, on a besoin d'un ensemble, d'une application, d'une relation, pour démarrer le travail de mathématiques discrètes ».

Les façons dont les concepts sont mobilisés dans les exercices semblent différer d'un exercice à un autre. Selon LN «The way of thinking in discrete mathematics is very different from one proof to another and from one problem to another». Selon LN et LQ, les preuves de certains théorèmes nécessitent de montrer plusieurs résultats intermédiaires. Donc, les concepteurs choisissent de donner de tels théorèmes sous formes d'exercices dans le TD où chaque résultat à prouver constitue une partie de cet exercice. Selon les concepteurs, cela rend les preuves de ces théorèmes plus accessibles aux étudiants.

IV.3- Analyse des observations de classe

La troisième étape de notre analyse consiste en des observations de séances de classe, accompagnées d'entretiens avant et après les observations, afin de compléter et préciser – le cas échéant – les résultats des analyses des entretiens et des ressources. Nous avons fait le choix d'effectuer les observations dans les classes de LQ, une des dix enseignants-chercheurs interviewés (§ IV.1.1.1) et l'une des trois concepteurs des ressources analysées (§ IV.2.1). Nous justifions dans le paragraphe suivant ce choix en fonction du profil de LQ (enseignement et recherche), de certains résultats issus de l'analyse des entretiens et de l'analyse des ressources.

Nous nous intéressons aux formes de conjonction de l'activité, entre conception et usage des ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes. Nous cherchons à compléter notre analyse des formes de connectivité dans les ressources afin de caractériser leur manifestation lors de la mise en œuvre des ressources par LQ. Dans ce cadre, nous prenons en considération plusieurs facteurs. La ressource que nous considérons est mobilisée par LQ pour l'enseignement de la théorie

des graphes dans un parcours de formation en mathématiques pures. Les concepteurs de la ressource semblent avoir des rapports différents à la théorie des graphes dans leur activité de recherche, LB et LN étant positionnés plus du côté de la théorie dans leur recherche en théorie des graphes, et LQ étant plus proche du côté des applications concrètes de la théorie des graphes (voir tableau 4, § IV.1.1.1). Tous les trois mettent l'accent, lors de l'entretien, sur la conformité des contenus aux instructions officielles de la filière et l'homogénéité avec la description des contenus présentée dans le syllabus. Par ailleurs, l'analyse de la ressource met en évidence une certaine forme de connectivité au niveau micro (§ IV.2.4.3) qui induit des choix reflétant des invariants opératoires supposés partagés par les enseignants-chercheurs, concepteurs de la ressource. Cette connectivité est caractérisée par une dominance du registre de représentation formel dans la ressource, des connexions réduites avec les autres domaines mathématiques et avec les autres disciplines, une absence d'applications issues de la vie réelle, et aucune mention des algorithmes. Cette forme de connectivité peut indiquer une influence du parcours de formation sur la conception de la ressource. En outre, elle semble peu compatible avec les résultats de l'entretien avec LQ (Annexe 3, tableau 3.2) qui trouve que les étudiants sont plus intéressés par les applications en mathématiques discrètes et qu'il est important qu'ils soient cultivés au niveau des liens entre la théorie des graphes et d'autres domaines mathématiques. Nous faisons l'hypothèse qu'une tension existe entre le rapport de LQ à la théorie des graphes dans son activité de recherche, et la forme de connectivité identifiée dans les ressources analysées. Nous nous intéressons à étudier la façon dont cette tension se façonne dans la mise en œuvre des ressources par LQ.

Nous présentons dans ce qui suit notre méthodologie de recueil de données et une description des séances observées (§ IV.3.1). Nous décrivons ensuite la méthodologie que nous avons développée pour l'analyse des séances observées (§ IV.3.2). Nos principaux éléments de synthèse seront développés dans le paragraphe IV.3.3.

IV.3.1- Méthodologie de recueil de données et description des séances observées

Pour les observations de classe, nous avons prévu d'assister à des séances de mise en œuvre des ressources analysées (§ IV.2). Elles s'inscrivent dans un module intitulé « mathématiques discrètes » en deuxième année d'université dans une filière de mathématiques pures. Elles constituent une première introduction des étudiants au domaine des mathématiques discrètes.

Nous avons effectué le choix d'assister à des séances de cours et des séances de TDs associées. Nous avons demandé l'autorisation à l'enseignante-chercheuse d'assister à des séances qui portent sur les notions de « chemins » et « cycles ». Ces notions se trouvent dans la deuxième section (chemins) et troisième section (cycles) d'un chapitre composé de quatre sections intitulé « théorie des graphes » (§ IV.2.2).

Plusieurs raisons ont guidé notre choix des séances à observer. Dans notre consultation des ouvrages (§ II), nous nous sommes particulièrement intéressée à la présence des « chemins », « cycles », et « plus courts chemins » (§ II.4). Notre analyse des ressources a porté sur le chapitre « théorie des graphes » du module d'enseignement de mathématiques discrètes, composé de quatre sections dont deux portent sur les « chemins » et les « cycles ». Nous pointons que ces deux sections suivent la section « définitions et notations ». Ainsi, elles constituent une première confrontation des étudiants en classe à la théorie des graphes, aux objets de ce domaine mathématique, aux raisonnements et aux preuves associés.

En plus, la consultation des ouvrages montre un large spectre de choix pouvant être effectués dans l'enseignement des contenus en lien avec les chemins, les cycles et les plus courts chemins, en

termes de mobilisation de registres de représentation sémiotique et d'algorithmes, de liens avec d'autres domaines mathématiques, d'autres disciplines et la vie réelle, etc. (§ II.5). Par exemple, plusieurs choix, en termes de contenus et de leur présentation, sont effectués par les concepteurs des ouvrages en ce qui concerne le concept de plus court chemin. En termes de contenus les plus courts chemins peuvent être articulés avec les concepts de distance métrique et de géodésique dans le contexte de graphes non pondérés et avec les concepts de poids et de distance dans le contexte de graphes pondérés (§ II.4.3.1). Certains ouvrages mobilisent l'algorithme de Dijkstra (§ II.4.3.3) pour la recherche de plus courts chemins, d'autres mobilisent le BFS, Breadth-First Search qui peut produire le plus court chemin dans un graphe si on pose des contraintes sur les étapes de la construction (§ II.4.3.4). Ces algorithmes, tels qu'ils sont présentés dans les ouvrages, peuvent solliciter un environnement papier/crayon ou un environnement de programmation pour leur mise en exécution. Les registres de représentation sémiotique mobilisés sont divers (§ II.4.3.4) : formel, par graphe, par matrice, par langage naturel et par tableau. Les trois activités de représentation (représenter des données en langage naturel par des graphes), de traitement (identification du plus court chemin dans les registres de représentation formel, par graphe, par tableau, par langage naturel, etc.) et de conversion (d'une représentation par graphe à une représentation par tableau et vice-versa, d'une représentation en langage naturel à une représentation par graphe, d'une représentation par graphe à une représentation par tableau et d'une représentation par matrice à une représentation par tableau) apparaissent dans les preuves, les exemples et les exercices. Des liens existent entre les plus courts chemins et l'informatique (construction de réseaux avec optimisation des coûts ou des durées de réponse des ordinateurs sur les lignes, etc.) (§ II.4.3.5). Des liens existent aussi entre les plus courts chemins et la vie réelle (recherche du plus court chemin traversé par un train dans une ville, distribution optimale des employés selon leur aptitude à occuper des emplois offerts, etc.) (§ II.4.3.5). En revanche, les concepteurs du module analysé introduisent le plus court chemin dans le contexte de graphes non pondérés en mobilisant les concepts de distance et de géodésique (§ IV.2.4.3). Ils présentent les contenus dans le registre formel, avec un recours au registre de représentation par graphe dans quelques exemples qui visent à illustrer les concepts introduits dans les définitions (§ IV.2.4.3). Il n'y a aucun recours à des algorithmes (§ IV.2.4.3). L'activité de traitement est toujours dans le registre de représentation formel. Les concepteurs n'établissent aucun lien avec d'autres disciplines et la vie réelle (§ IV.2.4.3).

Nous nous intéressons à l'observation de la mise en œuvre d'une section de la ressource conçue collectivement (des contenus en lien avec les chemins, les cycles, les plus courts chemins) sous la tension suscitée entre le profil de LQ et les choix effectués pour la ressource. Nous avons ainsi choisi différents moments d'observation en classe : l'introduction de nouveaux concepts, l'exposition de propositions et de théorèmes et de leurs preuves, et la résolution des exercices dans les séances de TDs. L'observation de ces différents moments peut nous permettre de compléter les résultats obtenus par l'exploitation de la grille d'analyse de la connectivité potentielle des ressources en fonction des différents critères : concepts introduits et leur mise en relation à différents moments (introduction des concepts, exposition de propositions et de théorèmes et de leurs preuves, et résolution des exercices, etc.), registres de représentation sémiotique mobilisés lors de la mise en œuvre de la ressource et activités cognitives qui en découlent, et exposition des différentes stratégies de résolution des exercices – le cas échéant – dans les séances de TDs. Nous avons observé trois séances :

- Une première séance de cours qui porte sur des propositions en lien avec les chemins et leurs preuves ;

- Une deuxième séance où LQ alterne cours et TDs portant sur une introduction du concept de cycle, des propositions en lien avec le concept et trois exercices du TD ;
- Une troisième séance de TDs qui consiste en une résolution de deux exercices.

Notre rôle s'est limité à une observation du déroulement des séances (avec enregistrement vidéo) et de la mise en œuvre des ressources, tout en prenant en compte un ensemble de paramètres dont les échanges et les interactions avec les étudiants. Nous avons mené, avant et après les observations, des entretiens avec l'enseignante-chercheuse (cf. annexe 7, 7.1 et 7.6). Le but de l'entretien avant les observations était de nous renseigner sur les rapports institutionnel et personnel de l'enseignante-chercheuse au savoir en jeu (§ III.3.1) et sur les conditions et contraintes qui interviennent dans les différents choix, et de distinguer entre les choix individuels et collectifs dans l'organisation, la préparation et la mise en œuvre des contenus. L'objectif du second entretien, après les observations des séances, était de clarifier des aspects précis repérés lors des observations et de discuter des écarts (s'ils existent) entre la planification prévue des séances et la mise en œuvre en classe.

Nous soulignons que, dans le parcours de formation en mathématiques, la langue d'enseignement peut être l'anglais ou le français. Les contenus du module que nous avons analysés sont en français. Nous avons également récupéré un polycopié de la version anglaise (qui consiste en une simple traduction de la version française) mobilisé par LQ et les étudiants dans les séances auxquelles nous avons assistées où la langue d'enseignement est l'anglais.

Nous avons transcrit les entretiens effectués avec LQ avant et après les observations de classe, ainsi que les trois séances observées (cf. Annexe 7, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5 et 7.7).

Nous présentons dans la section IV.3.2 notre méthodologie d'analyse des observations de classe.

IV.3.2- Méthodologie d'analyse des observations de classe

L'analyse des observations de séances porte particulièrement sur une étude de l'usage par LQ d'une ressource qu'elle a conçue collectivement avec LB et LN. Une étude de la mobilisation de cette ressource dans l'enseignement par LQ peut nous informer sur ce que cette dernière souhaite développer chez les étudiants en classe, et nous éclairer sur les contraintes et conditions institutionnelles qui impactent ses pratiques d'enseignement, ainsi que sur l'influence potentielle de son activité de recherche sur son enseignement.

En effet, l'analyse des entretiens avec les trois concepteurs de la ressource montre une étendue des invariants opératoires à dominante didactique dans les classes de situations « concevoir et mettre en œuvre une séance de cours » et « concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs », avec une présence plus réduite des invariants opératoires à dominante institutionnelle ou épistémologique (§ IV.1.3.4). Cela peut indiquer des formes de rupture entre institution d'enseignement et institution de recherche dans les pratiques de ces enseignants-chercheurs. Nous faisons l'hypothèse que les observations des séances de classe de LQ peuvent nous éclairer davantage sur l'influence potentielle de son activité de recherche sur la mise en œuvre de son enseignement, ainsi que sur l'impact du contexte institutionnel sur cette mise en œuvre. Nous préciserons dans la suite les questions qui ont guidé notre analyse des séances observées.

L'influence de l'activité de recherche de LQ sur son enseignement peut être décelée dans la répartition des exemples sur les séances observées et la sélection de ces exemples. En effet, les exemples peuvent être mobilisés à différents moments dans les séances de cours et de TDs pour illustrer des caractéristiques des concepts présentés dans les définitions, pour mettre en relief des

conditions nécessaires pour l'existence des concepts (par mobilisation de contre-exemples), pour exposer aux étudiants des cas particuliers qui leur permettent de généraliser des processus ou de raisonner sur des cas généraux dans les preuves, etc. ainsi, les exemples peuvent avoir des fonctions diverses dans la mise en œuvre des ressources. Mali et al. (2014) analysent l'utilisation des exemples génériques par une enseignante-chercheuse pour révéler les caractéristiques des concepts mathématiques et montrent comment les choix de ces exemples peuvent les informer sur l'influence de l'activité de recherche de l'enseignante-chercheuse sur son enseignement. Goldin (2004) souligne que les problèmes en mathématiques discrètes sont souvent plus faciles pour les étudiants dans les cas de petits nombres ou d'objets mathématiques de petite taille. Il pointe qu'une particularité des mathématiques discrètes est le processus de modéliser le général sur le particulier. Ainsi, nous nous intéressons dans l'analyse des observations de séances à la répartition et à la sélection d'exemples abordés par LQ, ainsi qu'à leur place et leur rôle dans l'enseignement. Nous nous intéressons, de même, aux approches adoptées dans les preuves et dans la résolution des exercices telles que le raisonnement à partir de petits cas particuliers et le passage des cas particuliers aux cas plus généraux. Ces modes de raisonnement sont étroitement liés à l'épistémologie de la théorie des graphes, et par conséquent peuvent nous éclairer sur l'influence potentielle de l'activité de recherche de LQ sur son enseignement.

De plus, nous nous intéressons à étudier les interactions de LQ avec les étudiants en classe lors des séances de cours et de TDs. Une analyse de ces interactions peut nous éclairer sur les conceptions de LQ en lien avec l'enseignement de la théorie des graphes, et sur l'influence de son activité de recherche sur son enseignement. Par exemple, la mise en œuvre de moments de réflexion sur les questions « comment le faire » et « pourquoi le faire » en construisant les preuves, et en résolvant des exercices peut développer chez les étudiants une habitude de questionner les choses, un trait indispensable pour de futurs chercheurs.

Nous nous intéressons également aux registres de représentation sémiotiques mobilisés dans les séances de cours et de TDs à différents moments. Les registres mobilisés peuvent nous informer sur ce que LQ souhaite développer chez les étudiants. Par exemple, un accent porté sur le registre formel peut indiquer une intention de développer chez les étudiants des savoir-faire en lien avec le traitement et la rédaction des idées dans le registre de représentation sémiotique formel. Une mobilisation du registre de langage naturel peut indiquer une intention de rendre les idées accessibles aux étudiants. Les registres de représentation sémiotique mobilisés par LQ en classe peuvent être influencés par des conditions institutionnelles en lien avec le parcours de formation, ou par son activité de recherche.

Finalement, nous nous intéressons aux adaptations apportées aux contenus ou à leur mise en œuvre en classe (exposition de différentes stratégies pour la résolution des exercices proposés dans le TD, usage d'explications différentes si les étudiants ne comprennent pas un concept, etc.). Ces adaptations peuvent solliciter chez les étudiants l'autonomie et les prises d'initiatives, traits qui peuvent être essentiels pour de futurs chercheurs.

Ainsi, nous avons organisé nos analyses des observations des séances de classe selon plusieurs axes en vue de répondre aux questions suivantes :

- Quelles sont les modalités de mise en œuvre de l'enseignement en classe par LQ ? (cours magistral, co-construction des connaissances, travail individuel, travail collectif, etc.)
- Comment LQ exploite-t-elle les interventions des étudiants ?

- Quels registres de représentation sémiotique sont mobilisés en classe ? Quelles activités cognitives ?
- Quels sont la place et le rôle des exemples dans la mise en œuvre de l'enseignement ?
- LQ établit-elle des liens avec d'autres domaines mathématiques ou d'autres disciplines ? Avec la vie réelle ?
- LQ établit-elle des liens avec sa propre activité de recherche ?
- LQ fait-t-elle des liens avec des prérequis ou avec des parties ultérieures du module ?
- Quelle approche adopte-t-elle dans la résolution des exercices ? Quand plusieurs méthodes de résolution existent, les travaille-t-elle avec les étudiants ?

L'exploitation de notre méthodologie d'analyse de l'observation des séances consiste à identifier, dans les transcriptions des séances observées, des passages qui permettent de répondre aux questions ci-dessus. Nous soulignons que, dans nos transcriptions des séances, nous n'avons pas toujours saisi les prénoms des étudiants, par conséquent, nous les avons désignés par « student ».

Nous présentons dans la section IV.3.3 les principaux éléments de synthèse sur l'analyse des observations des séances.

IV.3.3- Principaux éléments de synthèse

Les analyses des observations ont pour objectif de compléter nos résultats par rapport à notre troisième question de recherche que nous rappelons ci-dessous :

- Q3 : Comment peut-on caractériser, par le prisme de la conception et l'usage des ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes, l'influence de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs sur leur enseignement dans ce même champ ?

Nous commençons cette section par répondre aux questions précédentes (§ IV.3.2), et ensuite nous présentons les conclusions que nous tirons par rapport à notre troisième question de recherche.

[Quelles sont les modalités de mise en œuvre de l'enseignement en classe par LQ ? \(cours magistral, co-construction des connaissances, travail individuel, travail collectif, etc.\)](#)

Les séances sont divisées entre séances de cours et séances de TDs. LQ alterne parfois cours et TDs dans une même séance. LQ gère les séances de cours et de TDs de la même façon : elle co-construit les connaissances avec les étudiants en leur posant des questions (par exemple, « What do we need to prove ? », « What does this mean ? », « Where is the contradiction ? ») et en les engageant dans des discussions. La ressource mobilisée en classe par les étudiants et par LQ est le module qu'elle a conçu collectivement avec LB et LN.

[Comment LQ exploite-t-elle les interventions des étudiants ?](#)

Lorsque les étudiants posent une question, LQ prend le temps de répondre à leurs questions et engage des discussions avec eux afin de les amener à réaliser les réponses eux-mêmes (encadré 48).

Student: Ah, because $P_{[\alpha,\beta]}$ has to be minimum, right?

LQ: No.

Student: Is it connected to something in A and then connected to B ?

LQ: No. In fact you are saying that $P_{[\alpha,\beta]} \cap A$ is only α , so how can it be connected to something else in A ? You understand me? So we have a sub-path, from A , it contains only α , and from B , it contains only β , and there are no other points outside. So how can it be? You understand? So this, always you can deduce it. Is it clear, guys, the writing?

Students: Yes.

LQ: So what I wanted to say is that, whenever you have a connected graph, and a partition, it means that the vertices are split into two sets of vertices, then I can find definitely an edge from this set to that set. An edge for sure.

Student: in this case is x ?

LQ: No, α is not x . x and y don't have to be ... you said, the graph is connected, so of course there is a path from x to y , this path could be like this (drawing on the board). But the idea is that there should be ... this path is not necessarily an edge, but I say that there is a part of it, a sub-path of it, which is an edge. A sub-path of it intersecting A at only one vertex and intersecting B at only one vertex, so this part (pointing at an edge between A and B in the figure she drew) definitely should be an edge. You see? Because you have to pass from this set to that set, you cannot pass by... it should be an edge. So, I am saying that I can find an edge inside this path from here to here (pointing at the same drawing). Ok, now, is this clear?

Encadré 48 : Extrait de l'explication de la remarque 18 de la partie cours qui illustre une discussion entre LQ et les étudiants en classe (cf. annexe 6)

Nous pouvons inférer, à partir des questions de LQ dans l'encadré 48 ci-dessus (« You understand me ? », « Is it clear, guys, the writing ? », « Now, is this clear ? ») qu'elle met l'accent sur la compréhension des raisonnements par les étudiants, ainsi que sur la compréhension de la rédaction formelle des raisonnements. Aussi, lorsque les étudiants ne savent pas comment répondre à une question posée par LQ, ou donnent une réponse incorrecte, LQ leur pose de nouvelles questions qui les poussent à réaliser leurs erreurs et les guide pour construire un raisonnement correct (cf. encadré 49).

Student: uv should be shorter than xy .

LQ: what do you mean by uv ?

Student: The path.

LQ: $P_{[u,v]}$

Student: Should be shorter ...

LQ: $P_{[u,v]}$, what do we mean by $P_{[u,v]}$?

Students: The path.

LQ: So this is the part of P , the part of P . I mean this part here (pointing at the part in the drawing between u and v) which is a part of P .

Encadré 49 : Extrait de l'explication de la remarque 18 de la partie cours qui montre l'accent que LQ met sur l'usage des symboles par les étudiants (cf. annexe 6)

L'encadré 49 montre également que, même dans les discussions orales avec les étudiants, LQ met l'accent sur la propre mobilisation des concepts mathématiques et des symboles qui les représentent par les étudiants. Dans l'exemple ci-dessus (cf. encadré 49), pour désigner un sous-chemin de P allant de u à v , l'étudiant utilise uv . Ce symbole renvoie à un chemin allant de u à v sans nécessairement être une partie de P . LQ insiste sur la propre mobilisation du symbole $P_{[u,v]}$ par l'étudiant, tout en insistant sur son sens (le P dans le symbole renvoyant au chemin P et les u et v étant les extrémités du sous-chemin défini sur P).

LQ: Ok, isn't this a path?
Student: It is not smaller.
LQ: What do you mean? Measuring it with a ruler? No, shorter means with respect to the number of edges.

Encadré 50 : Extrait de l'explication de la proposition 19 de la partie cours qui montre l'accent mis par LQ sur le sens des concepts (cf. annexe 6)

Un autre extrait (cf. encadré 50 ci-dessus) qui montre que LQ met l'accent sur le sens des concepts mathématiques en théorie des graphes. Elle engage une discussion avec un étudiant sur le sens d'un plus court chemin en théorie des graphes qui est défini en fonction du nombre d'arêtes, par opposition à la notion de distance en géométrie.

En revanche, bien que LQ s'engage dans des discussions avec les étudiants en langage naturel, elle les incite à proprement utiliser les notions pour désigner les notions mathématiques, même dans les discussions orales. Nous illustrons nos propos dans l'encadré 51 ci-dessous.

LQ: Now what do we need to prove?
Student: $P \cap A \dots$
LQ: $P \cap A$?
Student: $P_{[\alpha,\beta]}$
LQ: $P_{[\alpha,\beta]} \cap A \dots$ there is a huge difference between P and $P_{[\alpha,\beta]}$. $P_{[\alpha,\beta]}$ is the whole path, [...] There is a huge difference between P and $P_{[\alpha,\beta]}$ that I have chosen. I don't know the shape of $P_{[\alpha,\beta]}$, I just know that it is a part of P . It is a sub-path of P from a vertex of A to a vertex of B ok? Which has the minimum length. So it is a part of P . You understand?

Encadré 51 : Extrait de l'explication de la proposition 17 de la partie cours qui montre une discussion autour du sens du symbole $P_{[\alpha,\beta]}$ (cf. annexe 6)

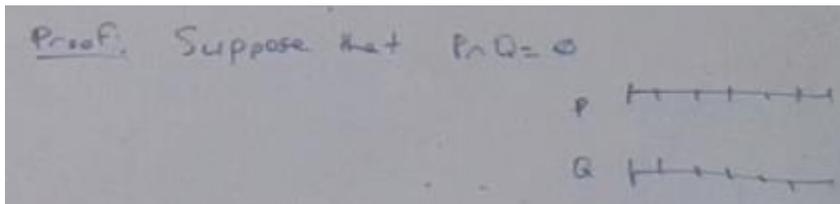
L'encadré 51 ci-dessus montre un second extrait où LQ discute du sens du symbole $P_{[\alpha,\beta]}$ avec les étudiants.

Par ailleurs, LQ co-construit les preuves avec les étudiants. Elle leur pose des questions tout au long de la séance qui portent sur les étapes à suivre dans les preuves (cf. encadré 52).

LQ: Suppose that $P \cap Q$ is empty. So just to have an illustration, can you illustrate the paths P and Q ? If the intersection is empty, can you plot the paths P and Q ?

Students: They don't touch each other.

LQ: So I am in the case where P and Q are disjoint paths (illustrating the paths on the board). Ok? But the graph is connected. They are both disjoint paths. So I am now in the case that P and Q , they are both disjoint paths. Ok?



Student: The graph is connected.

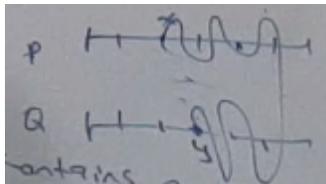
LQ: Connected. This means what? That there is a path between any two vertices.

Students: We take vertices from here and from there.

LQ: Ok, very good. I will take an arbitrary vertex x on P and an arbitrary vertex y on Q , and since the graph is connected, then definitely G contains an xy -path. Ok? So, let x belong to P , y belongs to Q . Since G is connected, then G contains an xy -path, I will call it R . Ok, what is the shape of this path R ?

Student: Euler set.

LQ: (While sketching on the board) you mean like this?



Student: It could be like this.

LQ: I could have plenty of intersections of course before I reach y . Fine.

(Students saying indistinct comments)

LQ: Ok, we will have to reach to a contradiction. In your opinion, how will you reach to that contradiction?

Student: That P is not the longest path anymore?

LQ: So I will be able to find a path longer than P and Q , which will give the contradiction, yes. I will be able to find a path longer than P and Q .

Encadré 52 : Extrait de l'explication de la proposition 19 de la partie cours qui montre la co-construction des preuves avec les étudiants en classe (cf. annexe 6)

LQ pose des questions aux étudiants telles que « So help me out. What do we need to prove ? Now otherwise, what do we have ? What do you think guys ? What is the problem then ? How will you get to this remark ? Who can tell me why ? Etc. ». De plus, LQ met l'accent sur les théorèmes et les propositions qui lui semblent importantes à retenir en disant aux étudiants par exemple : « So it is an important proposition, the idea behind it is important. You can use it in plenty of theorems »

ou « This idea you can use at any point, any sub-path of a geodesic is a geodesic. Any part of a shortest path would also be a shortest path from this vertex to this vertex. »

Quels registres de représentation sémiotique sont mobilisés en classe ? Quelles activités cognitives ?

Les contenus du module sont représentés dans le registre formel, le registre de représentation sémiotique par graphe étant mobilisé dans la plupart des exemples. Le traitement des contenus (théorèmes, preuves, propositions, etc.) dans le module est toujours dans le registre formel, et il n'y a pas de conversion d'un registre à un autre.

En revanche, dans la mise en œuvre des contenus en classe, LQ utilise le registre formel dans la rédaction des preuves et la résolution des exercices au tableau. Ainsi, elle représente les définitions, les propositions et les objets mathématiques mobilisés dans les exercices dans le registre formel. Elle passe au registre de représentation par graphe en travaillant sur les preuves et lors de la résolution des exercices. Elle utilise le registre de représentation par langage naturel pour expliquer les idées aux étudiants. Elle effectue des traitements dans les deux registres de représentation par langage naturel et par graphe, mais passe toujours de nouveau au registre de représentation formel et présente aux étudiants le traitement des raisonnements et leur rédaction dans ce registre. Nous détaillons tout cela dans ce qui suit.

LQ met l'accent sur l'usage du registre formel correctement par les étudiants. Lors de leurs interventions, elle les corrige et leur pose des questions qui visent à développer chez eux une compréhension relative à l'usage des symboles mathématiques. Nous illustrons nos propos par un exemple ci-dessous (cf. encadré 53).

Student: $x\alpha$

LQ: $P_{[x,\alpha]}$, P ! Stop saying guys $x\alpha$. What is $x\alpha$?

Students: $P_{[x,\alpha]}$

LQ: You are taking a part of P , right? It is a sub-path of P from x to α , so it should be named $P_{[x,\alpha]}$.

Encadré 53 : Extrait de l'explication de la proposition 19 de la partie cours où LQ met l'accent sur le propre usage des symboles mathématiques par les étudiants (cf. annexe 6)

LQ convertit certaines définitions, remarques, et propositions du registre formel dans le registre de langage naturel. Elle procède de la même façon dans les séances de cours. Elle se réfère au photocopié (en anglais) pour lire les contenus dans le registre formel (les étudiants peuvent suivre parce que chacun a une copie du photocopié), et elle effectue des conversions dans le registre de langage naturel (cf. encadré 54).

LQ: the proposition states that, if you take sets $A, B \subseteq V(G)$ such that $A \cap B = \emptyset$, so two disjoint sets of vertices, and you take P to be an xy -path where $x \in A, y \in B$.

Then, there exists $\alpha, \beta \in P$ such that $P_{[\alpha,\beta]} \cap A = \{x\}$ and $P_{[\alpha,\beta]} \cap B = \{y\}$.

So, this means that any path, from vertex A to vertex B knowing that A and B are disjoint, any path, we can find in it a sub-path which intersects A only at one vertex and intersects B only at one vertex.

Encadré 54 : Extrait de l'explication de la proposition 17 de la partie cours où nous avons utilisé le rouge pour désigner la partie du discours présente dans le module (cf. annexe 6)

Dans l'extrait de l'explication de la proposition 17 de la partie cours, dans l'encadré 54, nous avons indiqué en rouge la partie qui renvoie à la proposition 17 dans le photocopié. LQ explique la proposition en langage naturel. En revanche, pour rédiger les raisonnements au tableau, elle utilise le registre formel (cf. figure 21).

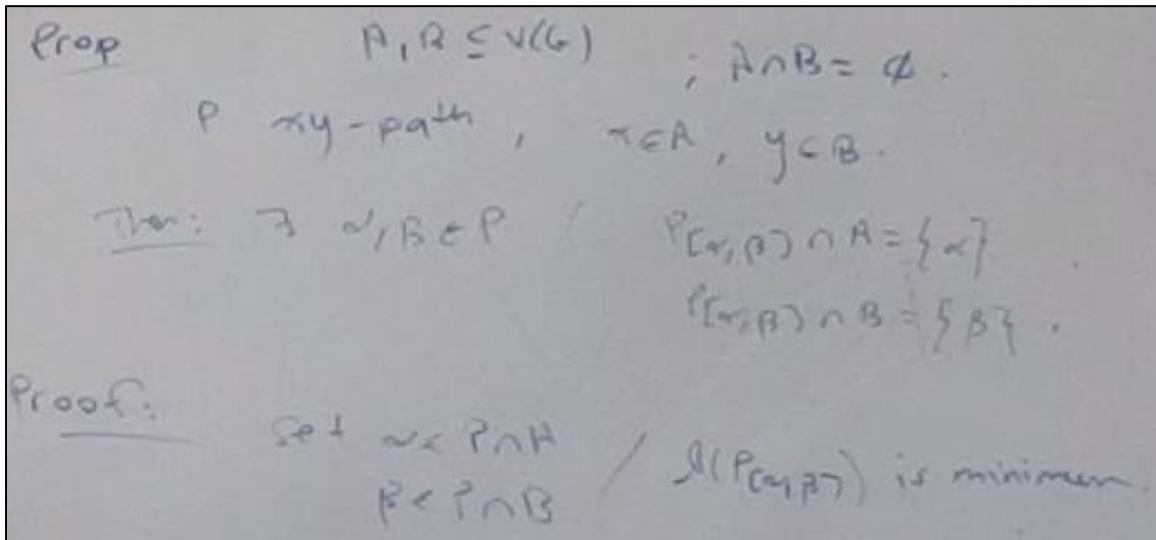
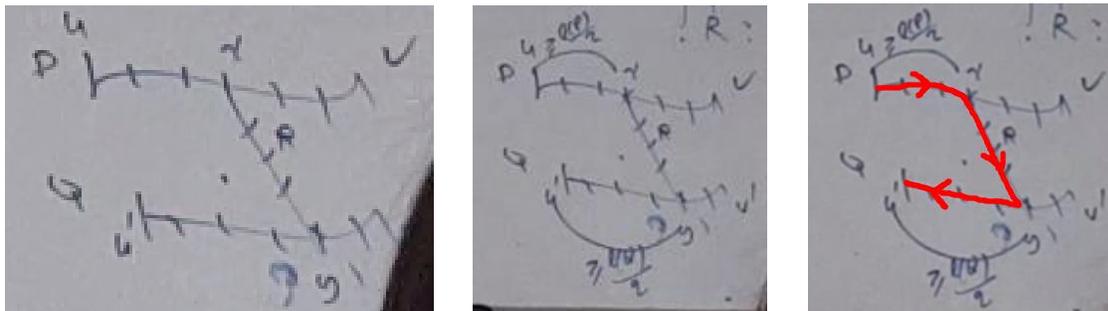


Figure 21 : Capture d'écran des vidéos enregistrées durant les séances - rédaction de la proposition 17 et début de la preuve (cf. annexe 6)

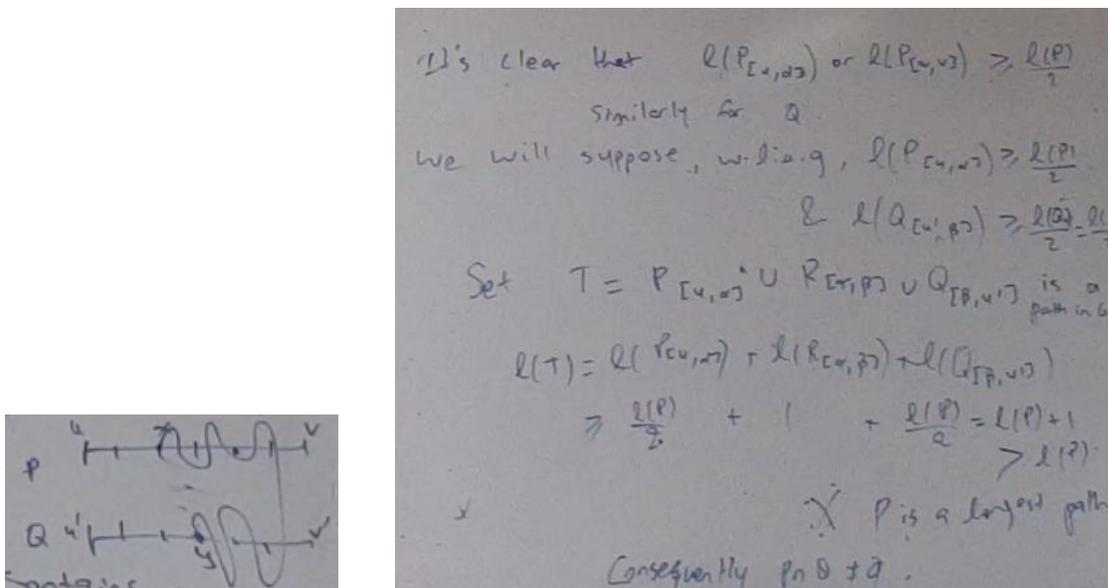
En revanche, LQ mobilise toujours le registre de représentation sémiotique par graphe pour donner des exemples dans les preuves des propositions et dans les exercices. Elle commence par les cas les plus simples. Elle fait la conversion dans le registre de représentation sémiotique par graphe, et les traite dans ce registre (cf. encadré 55), ou fait de nouveau la conversion dans le registre formel et effectue le traitement dans ce dernier.

Dans l'extrait de l'encadré 55 ci-dessous, LQ met l'accent sur le sens de la proposition 21 énoncée de la façon suivante dans le photocopié : « Soient P et Q deux chemins dans un graphe connexe G , de longueur maximale. Alors, $P \cap Q \neq \emptyset$ ($V(P) \cap V(Q) \neq \emptyset$) ». LQ l'explique en langage naturel pour la rendre accessible aux étudiants. Elle l'explique de la manière suivante : « there should be an intersection between any two longest paths in the graph if the graph is connected. »

Listen, let's start with the simple case [...] If you take the simple case, the simple case will make it, maybe it will make closer to your understanding



Ok, so this is the case where the path is very simple. What if it is making plenty of intersections?

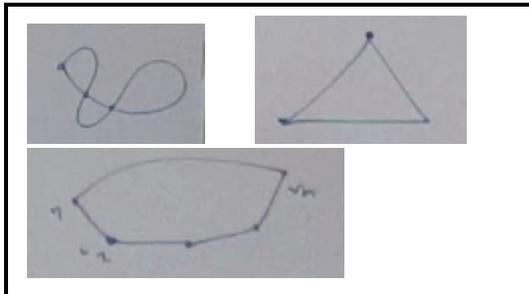


Encadré 55 : Extrait de l'explication de la proposition 21 de la partie cours - exemples génériques dessinés par LQ au tableau et leur traitement (cf. annexe 6)

La preuve de cette proposition consiste à montrer que si deux plus longs chemins d'un graphe n'ont aucune intersection, alors il y aura forcément un chemin qui est plus long que ces deux chemins. LQ considère deux plus longs chemins d'un graphe connexe qui n'ont pas d'intersections, et où il existe un chemin d'un sommet du premier plus long chemin à un sommet du second. Elle commence par considérer un cas où ce chemin entre les sommets n'a pas d'intersections avec les deux plus longs chemins (autres que les deux sommets). Ensuite, elle considère un cas plus général où le chemin entre les deux sommets a plusieurs intersections avec chacun des deux plus longs chemins. Nous soulignons que, dans cet extrait, LQ convertit du registre de représentation formel au registre de représentation par graphe, effectue des traitements dans le registre de représentation par graphe, et ensuite convertit de nouveau au registre de représentation formel où elle effectue des traitements dans le registre de représentation sémiotique formel lors de la rédaction.

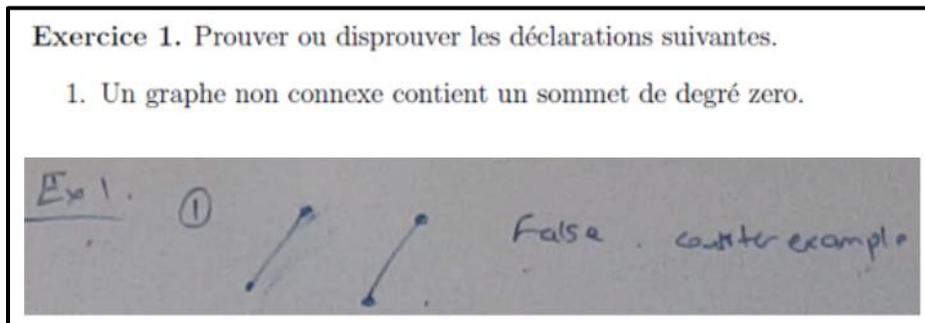
Quels sont la place et le rôle des exemples dans la mise en œuvre de l'enseignement ?

LQ a recours aux exemples à divers moments lors des séances de cours et de TDs. Lors des séances de cours, LQ donne des exemples à titre illustratif après les définitions. Ces exemples sont souvent ceux présentés dans le module et ils sont représentés dans le registre de représentation sémiotique par graphe (cf. encadré 56).



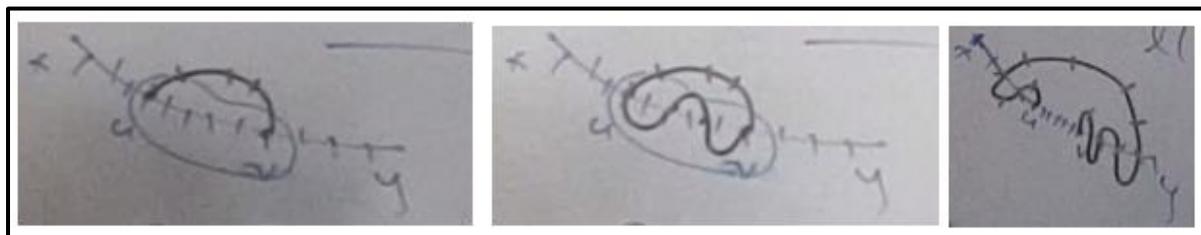
Encadré 56 : Captures d'écran de la vidéo de la deuxième séance - (de gauche à droite) un contre-exemple et deux exemples d'un cycle (cf. annexe 6)

L'encadré 56 ci-dessus montre que LQ utilise un contre-exemple pour illustrer une condition nécessaire pour l'existence d'un cycle (ne passe pas plusieurs fois par un même sommet). Des contre-exemples sont utilisés aussi dans un exercice du TD pour réfuter des propositions incorrectes des étudiants (cf. encadré 57).



Encadré 57 : En haut, énoncé de la partie 1 de l'exercice 1 dans la fiche de TD, et en bas, capture d'écran de la vidéo de la deuxième séance montrant la solution (cf. annexe 6)

Par ailleurs, LQ utilise des exemples génériques dans les preuves et dans la résolution des exercices du TD. Elle commence les preuves par des exemples génériques qui traitent des cas particuliers, et continue par donner des exemples génériques pour les cas plus généraux (cf. encadré 58).



Encadré 58 : Extrait de l'explication de la proposition 19 de la partie cours - (de gauche à droite) une progression des exemples génériques dessinés par LQ au tableau (cf. annexe 6)

Dans l'encadré 58, nous pouvons remarquer que LQ a commencé par donner un graphe d'un cas particulier où un plus court chemin de u à v ne fait pas des intersections avec le chemin xy . Le

deuxième exemple à sa droite montre un cas un peu plus général où un plus court chemin de u à v a deux intersections avec le chemin xy . Le troisième exemple à droite montre le cas le plus général où un plus court chemin de u à v a plusieurs intersections avec le chemin xy .

LQ établit-elle des liens avec d'autres domaines mathématiques ou d'autres disciplines ? Des liens avec la vie réelle ?

LQ travaille sur des liens avec d'autres domaines mathématiques en classe et d'autres disciplines quand ces liens sont établis dans le module (deux fois durant les séances observées). Elle n'évoque pas des liens avec la vie réelle.

Par exemple, dans la proposition 20 (cf. annexe 6), un lien est établi explicitement avec le concept d'espace métrique en topologie. LQ met l'accent sur ce lien dans son discours en classe : « let G be a connected graph. We have x, y, z in G . We have the distance between x and z is less than or equal to the distance between x and y and the distance from y to z . What does this state? Actually this is the triangular inequality. And this actually will prove that the distance d , it is a distance in the topological sense, which means that ... this is the third condition. Now, the first two are very obvious. $d(x, y) = d(y, x)$, it is obvious because a path from x to y is also a path that joins y to x . Ok? And $d(x, y) = 0$ is definitely equivalent to $x = y$. The only thing that we need to prove is this and then the distance will be a distance in the topological sense. Ok? So this makes G a metric space. »

Etablit-elle des liens avec sa propre activité de recherche ?

LQ n'établit pas des liens explicitement avec son activité de recherche. En revanche, elle mobilise des exemples génériques dans la construction des preuves. Elle commence par des exemples qui portent sur des cas particuliers avant d'utiliser des exemples qui permettent de généraliser et formaliser les preuves. Cette façon de construire les preuves en classe avec les étudiants peut être influencée par l'activité de recherche de LQ qui porte sur des applications de la théorie des graphes à la télécommunication, et impliquant peut-être une expérimentation sur des petits cas avant la généralisation.

Par ailleurs, dans les exercices, LQ commence par raisonner sur les petits cas (quand l'exercice le permet). Nous illustrons nos propos par la figure 22 ci-dessous extraite de la solution de l'exercice 4.

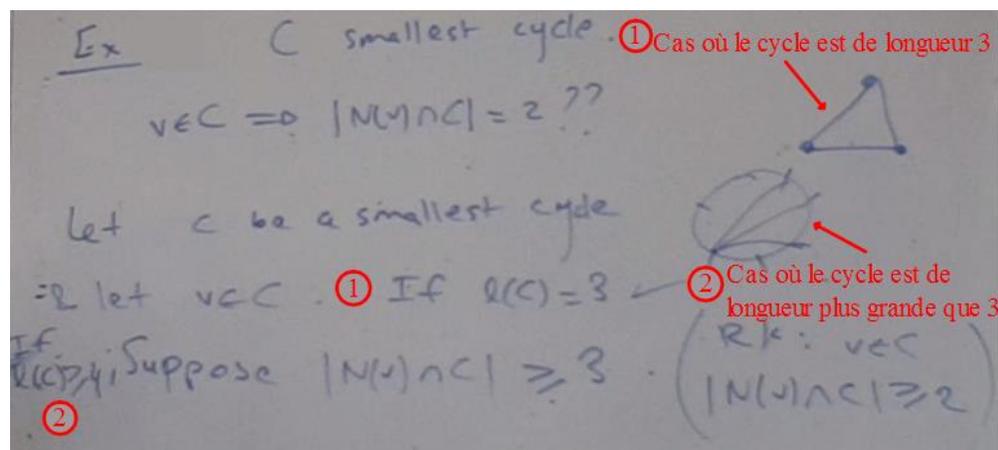


Figure 22 : Capture d'écran de la vidéo de la troisième séance, annotée en rouge, montrant deux cas dans la résolution de l'exercice 4 du TD (cf. annexe 6)

La résolution de l'exercice 4 exposée dans la figure 22 ci-dessus montre que LQ a commencé par le cas où le cycle est de longueur 3, avant de travailler sur le cas où la longueur du cycle est plus grande que 3.

Fait-elle des liens avec des prérequis ou avec des parties ultérieures du module ?

LQ n'effectue pas des liens avec les deux autres chapitres du module. Cependant, elle établit des liens entre les contenus du chapitre 2 du module. Elle met l'accent sur les liens existants entre les propositions, et entre les exercices et les propositions, etc.

Dans la mise en œuvre de l'enseignement en classe, LQ met l'accent sur les liens entre les contenus. Par exemple, la remarque 18 s'appuie sur la proposition 17 : en effet, elle pointe un cas particulier de la proposition 17 où les ensembles A et B ne sont pas simplement disjoints, mais constituent une partition du graphe G qui est connexe. LQ souligne ce lien en classe par des propos comme « As a consequence of this proposition, is remark 18, ok ? So let us look at remark 18 [...]. How will you get to this remark ? »

Quelle approche adopte-t-elle dans les preuves et dans la résolution des exercices ? Et quand plusieurs méthodes de résolution existent, les travaille-t-elle avec les étudiants ?

Dans le travail sur les preuves, LQ essaie de développer chez les étudiants des modes de raisonnement qui dépassent les situations particulièrement exposées dans les exercices, en d'autres termes qui sont transversaux à la théorie des graphes, voire aux mathématiques. Nous illustrons nos propos dans l'extrait ci-dessus (cf. encadré 59).

LQ: Ok, so how are you going to prove this? Usually, how do you prove that you have this or this? We agreed on this before.

Student: One of them is false, one of them is true.

LQ: No, we suppose one of them is false, then definitely, the other one should be true. So we suppose what?

Student: First, we suppose that G is not connected.

LQ: That G is disconnected, and let's prove that \bar{G} is connected.

Encadré 59 : Extrait de l'explication de la proposition 19 de la partie cours qui montre les échanges entre LQ et les étudiants (cf. annexe 6)

De même, lors de la résolution des exercices avec les étudiants, LQ leur pose des questions qui visent à préciser et à clarifier leurs idées (cf. encadré 60).

LQ: So exercise 4, just take, let C be a cycle of smallest length in G . Show v belongs to C implies that the cardinal of the neighbors of v intersection C is equal to 2. So C is a smallest cycle guys, we are given that C is a smallest cycle and we need to prove this, what should we do?

Student: Isn't it obvious?

LQ: Let v belongs to C ... what do you mean by obvious?

Student: I was thinking that it is always the case, we always know this.

LQ: How?

Student: We have a cycle, the neighbors of a vertex in it are always 2.

LQ: Not necessarily.

Student: It is not necessary?

LQ: No, not always. Maybe it could be... let me see, what are other cases we can consider? In general, you might have (adding edges between the vertices on the cycle as shown below).



Student: Ah, ok, yes, yes.

LQ: Yes, you might have, you might have the neighbors of v to be these 2 (pointing to the vertices adjacent to v) which are on the cycle, and maybe other neighbors also which are on the cycle, but however, since it is a smallest cycle, we shouldn't have this shape because we would get a smaller cycle ok? So of course it is not trivial on any cycle.

Encadré 60 : Extrait de la transcription de la troisième séance d'observation qui montre des exemples de questions que LQ pose aux étudiants lors de la résolution des exercices en classe (cf. annexe 6)

LQ propose deux méthodes pour la preuve de la proposition 20, l'une d'elle est celle rédigée dans le polycopié mobilisant la proposition 17 (cf. annexe 6). En outre, LQ met l'accent sur les conditions qui permettent aux étudiants de mobiliser la proposition 17 : « So this is a second method using proposition 17. Is this clear? So you have to choose what's A and what's B , what are the two sets of disjoint vertices, and which is the path Q coming from A to B . Ok? What is the path coming from a vertex in B to a vertex in A ? And then you deduce that there is a part of path Q which should be $Q_{[z, something]}$ of course, because it intersects A at one vertex, B at one vertex, it can only be z . Is this clear? Ok, so this is another way to find the point α . »

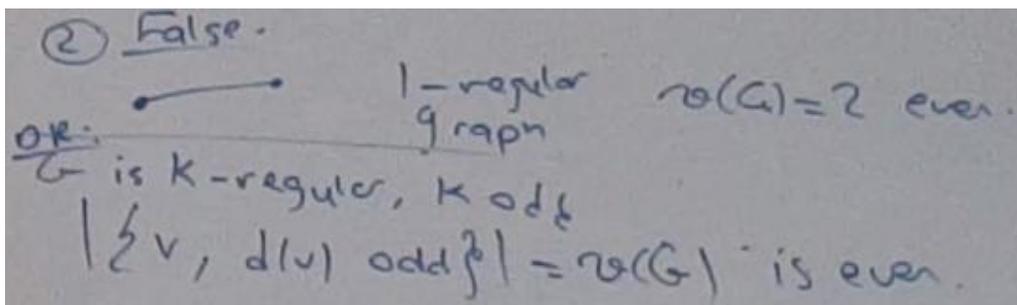


Figure 23 : Capture d'écran de la vidéo de la deuxième séance - deux méthodes de résolution de la partie (2) de l'exercice 1 du TD (cf. annexe 6)

Nous rappelons que certains exercices (exercice 1 (2°, 3°), 4, 5 (1°, 2°)) admettent plusieurs méthodes de résolution. LQ ne travaille pas toujours sur les différentes méthodes. En revanche, dans la résolution de la partie 2 de l'exercice 1 (cf. figure 23), un étudiant avait proposé un contre-exemple (le graphe à gauche dans la figure 23 ci-dessus), et LQ a proposé une autre méthode qui mobilise le théorème d'Euler

Éléments de réponses à la troisième question de recherche

Les observations des séances de classe nous ont permis de caractériser les connexions effectives développées par la mobilisation du module d'enseignement des mathématiques discrètes par LQ en L2 dans un parcours de formation en mathématiques pures. Nous rappelons que les résultats de l'analyse des observations des séances visent à compléter les résultats de notre analyse des contenus du module qui nous a permis de caractériser les formes de connectivité établies par les concepteurs de la ressource. Dans la suite de ce paragraphe, nous présentons les résultats de cette troisième étape d'analyse au regard des résultats des deux premières étapes.

Dans la mise en œuvre de son enseignement, dans les séances de cours et de TDs, LQ met l'accent sur les modes de raisonnement et sur le développement du sens des concepts mathématiques chez les étudiants, ainsi que sur la rédaction des raisonnements. En effet, dans l'entretien avant les observations de classe, LQ a souligné que les étudiants éprouvent des difficultés au niveau du raisonnement dans l'activité de preuve en mathématiques discrètes, et qu'il est essentiel de travailler sur la construction des preuves avec les étudiants, dans les séances de cours comme dans les séances de TDs. Et dans l'entretien après les observations de classe, LQ souligne que comprendre un raisonnement et rédiger un raisonnement sont deux aspects indépendants du travail en mathématique ; ainsi, elle commence par s'assurer que les étudiants ont bien compris les notions et le raisonnement, et ensuite, elle travaille avec eux sur la rédaction des raisonnements.

Ainsi, LQ essaie de développer chez les étudiants une compréhension des notions de la théorie des graphes. Elle utilise des exemples, et parfois des contre-exemples, pour illustrer les caractéristiques des concepts mobilisés dans les définitions. Ces exemples sont, pour la plupart, ceux présentés dans le module. Elle utilise de même des contre-exemples (non évoqués dans le module) pour réfuter les propositions fausses évoquées par les étudiants dans les séances de cours ou dans les exercices. De plus, LQ elle mobilise des exemples génériques dans le registre de représentation par graphe pour révéler des caractéristiques des concepts mathématiques avant d'entamer une rédaction des preuves avec les étudiants dans le registre de représentation sémiotique formel.

En ce qui concerne les registres de représentation sémiotique, LQ mobilise le registre de représentation par graphe dans les exemples, soit pour illustrer les définitions des objets mathématiques, soit pour développer chez les étudiants une compréhension des propriétés des objets mathématiques représentés qui dépassent les particularités de l'exemple mobilisé. LQ considère qu'il est important que les étudiants se sentent à l'aise avec les contenus d'un cours et qu'ils comprennent les notions. Par conséquent, elle mobilise le registre de représentation sémiotique par langage naturel pour expliquer les idées mathématiques aux étudiants et pour engager des discussions avec eux qui portent sur les objets mathématiques, les processus et les raisonnements. En revanche, elle mobilise le registre de représentation sémiotique formel dans la rédaction des preuves et la résolution des exercices, ce qui peut être expliqué par une intention de LQ d'enseigner des contenus conformes aux instructions officielles de la filière. En effet, même quand LQ effectue des conversions vers le registre de représentation par langage naturel ou par

graphe et effectue des traitements dans ces registres, elle convertit toujours de nouveau vers le registre formel et effectue des traitements dans ce dernier avant la rédaction formelle.

Dans le raisonnement sur une preuve et dans la résolution des exercices, LQ prend comme point de départ des cas particuliers et des petits cas avant de travailler sur les cas les plus généraux. Cela peut être justifié par ses propos lors de l'entretien que nous avons effectué avec elle après les observations des séances : « because particular cases, simpler cases, they are closer to your logical thinking, and so the particular cases being understood they can generalize ». Cette démarche qui consiste à tester les petits cas avant de généraliser relève d'une spécificité épistémologique des mathématiques discrètes, et peut conséquemment indiquer une influence de l'activité de recherche de LQ sur son enseignement.

LQ n'effectue pas des liens avec les deux autres chapitres (arithmétique, relations de récurrence et fonctions génératrices) du module. Elle n'effectue pas de liens avec les autres domaines mathématiques et les autres disciplines autres que ceux, timides, exposés dans le module (un lien avec le concept de distance métrique, et un lien avec la combinatoire). Et elle n'effectue aucun lien avec la vie réelle dans son enseignement en classe. Cela peut être expliqué par le rapport personnel de LQ aux mathématiques discrètes. En effet, LQ a affirmé lors de notre premier entretien avec elle qu'elle perçoit les branches des mathématiques discrètes comme indépendantes les unes des autres et qu'elle considère qu'un contenu est « mathématique » quand il n'aborde pas des applications.

IV.4- Résultats et discussions

Dans ce chapitre, nous avons présenté trois volets complémentaires de notre méthodologie de recueil et d'analyse de données : les entretiens avec les enseignants-chercheurs qui enseignent la théorie des graphes dans des parcours de formation divers (§ IV.1), l'analyse des formes de connectivité dans les ressources conçues par trois des enseignants-chercheurs interviewés, pour l'enseignement de la théorie des graphes (§ IV.2), et un suivi d'une enseignante-chercheuse, une des concepteurs des ressources analysées, avec des observations de classe (§ IV.3).

Le premier volet (§ IV.1.3.5) nous a permis d'apporter des éléments de réponse aux deux premières questions de recherche Q1 et Q2 que nous rappelons ci-dessous :

- Q1 : Comment les schèmes des enseignants-chercheurs (chercheurs en théorie des graphes) guident-ils leurs interactions avec les ressources dans/pour l'enseignement de la théorie des graphes ?
- Q2 : Dans quelle mesure le contexte institutionnel dans lequel un enseignant-chercheur enseigne influence-t-il ses interactions avec les ressources dans/pour l'enseignement de la théorie des graphes ?

Le deuxième volet (§ IV.2.4.2 et § IV.2.4.3) nous a permis d'apporter des éléments de réponse à notre troisième question de recherche Q3 que nous rappelons ici :

- Q3 : Comment peut-on caractériser, par le prisme de la conception et de l'usage des ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes, l'influence de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs sur leur enseignement dans ce même champ ?

Le troisième volet (§ IV.3.3) nous a permis de compléter et de préciser nos éléments de réponses aux trois questions de recherche, particulièrement à la troisième question de recherche Q3.

Nous rappelons que les enseignants-chercheurs participant à notre étude ont des profils variés en termes de formation, d'expérience dans la recherche et dans l'enseignement, et de parcours de formation dans lesquels ils enseignent. Ainsi, nous avons considéré, dans nos analyses, deux sous-groupes d'enseignants-chercheurs : le premier²⁶ (G_L) regroupant des enseignants-chercheurs au Liban qui enseignent un même module de mathématiques discrètes (dont un chapitre porte sur la théorie des graphes, et qu'ils ont conçu collectivement) en L2 dans un parcours de formation en mathématiques dans deux sites différents de l'université libanaise ; le deuxième²⁷ (G_F) regroupant des enseignants-chercheurs en France qui enseignent la théorie des graphes dans des parcours de formation différents (informatique, maths-info, mathématiques appliquées et parcours d'ingénieurs), et qui appartiennent à une même fédération de recherche, *maths à modeler*. Nous sommes conscients que le vivier d'enseignants-chercheurs participant à notre étude n'est pas représentatif de l'ensemble des enseignants-chercheurs enseignant les mathématiques discrètes dans les deux pays, et par conséquent, nous ne prétendons pas comparer les pratiques des enseignants-chercheurs des mathématiques discrètes, particulièrement la théorie des graphes, dans les deux pays. La prise en considération des deux sous-groupes vise à nous permettre d'approfondir l'étude de certains aspects des pratiques des enseignants-chercheurs.

En ce qui concerne notre question de recherche Q1, nous présentons nos résultats des analyses des entretiens en fonction des six classes de situations identifiées dans les discours des enseignants-chercheurs (§ IV.1.3.1). Les enseignants-chercheurs²⁸ que nous avons interviewés ont des tendances communes dans les finalités qu'ils se fixent dans leurs pratiques d'enseignement. Ils conçoivent et mettent en œuvre la planification de leur enseignement, de séances de cours et de TDs, et des moments d'évaluation. Certains enseignants-chercheurs dans notre étude qui enseignent dans des parcours de formation en informatique, maths-info, mathématiques appliquées et parcours d'ingénieurs conçoivent et mettent en œuvre des séances de TPs (programmation sur ordinateurs, expérimentation par mobilisation de jeux physiques et de fiches). Cela peut être dû à des conditions institutionnelles en lien avec le parcours de formation, ou avec des invariants opératoires de certains de ces enseignants-chercheurs qui considèrent que les mathématiques discrètes sont très proches de l'informatique. Finalement, trois des enseignants-chercheurs en France participent à un collectif de chercheurs qui s'intéresse à des questions de diffusion des mathématiques dans l'enseignement (*maths à modeler*).

Dans la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement, les enseignants-chercheurs ont tendance à définir la structure (les contenus et leur présentation, ainsi que les ressources mobilisées dans la mise en œuvre en classe) et sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement, et à pondérer et alterner les séances de cours, de TDs et de TPs (le cas échéant). D'autres sous-buts (gérer le temps de l'enseignement, modifier/adapter une unité d'enseignement, etc.) sont évoqués par une minorité d'enseignants-chercheurs (1 ou 2 parmi les 10 enseignants-chercheurs dans notre étude), et renvoient à des particularités de leurs propres pratiques. En plus, des tendances ou des disparités peuvent exister au niveau des actions que les enseignants-chercheurs entreprennent pour atteindre un même sous-but. Par exemple, pour sélectionner les

²⁶ Pour simplifier la lecture dans la suite, nous désignerons ce groupe par « G_L » (pour Liban) bien qu'il ne regroupe pas tous les enseignants-chercheurs au Liban participant à notre étude.

²⁷ Nous désignerons ce groupe par « G_F » (Pour France) ; ce groupe comprend tous les enseignants-chercheurs participant à notre étude en France.

²⁸ Dans cette conclusion, « les enseignants-chercheurs » renvoie à l'ensemble des enseignants-chercheurs au Liban et en France participant à notre étude ; nous emploierons « G_L » et « G_F » quand nos propos concernent un sous-groupe de ces enseignants-chercheurs.

contenus de l'unité d'enseignement, les enseignants-chercheurs de G_F choisissent des contenus qui sollicitent une activité de résolution de problèmes chez les étudiants. En outre, un enseignant-chercheur de G_L pondère les séances de cours et de TDs d'une façon à donner plus de cours que de TDs, alors qu'un autre enseignant-chercheur enseignant le même module dans un même parcours de formation les pondère d'une manière à donner plus de TDs que de cours. Les ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement sont principalement issues de leur enseignement et sont, dans leur majorité, produites par des pairs. Nous citons particulièrement les syllabus, des ouvrages à destination de l'enseignement de la théorie des graphes, des ordinateurs et des logiciels et des ressources en ligne. Des conditions et des contraintes institutionnelles semblent impacter la conception et la mise en œuvre de la planification de l'enseignement par les enseignants-chercheurs de notre étude. Nous citons à titre d'exemples les choix des contenus décrits dans les syllabus, le parcours de formation, le nombre d'étudiants par classe, le volume horaire et la répartition des séances dans l'année ou dans le semestre et des recommandations institutionnelles concernant les ressources à mobiliser. Des invariants opératoires à dominante didactique (§ III.5.5) relatifs aux représentations des enseignants-chercheurs en lien avec l'enseignement de la théorie des graphes, les besoins des étudiants en classe et leurs profils pilotent de même la conception et la mise en œuvre de la planification de l'enseignement.

Dans la conception et la mise en œuvre d'une séance de cours, bien que les sous-butés repérés reflètent une diversité des activités dans lesquelles s'engagent les enseignants-chercheurs (établir des liens avec d'autres domaines mathématiques, avec d'autres disciplines, solliciter l'attention des étudiants en classe, remédier à leurs difficultés, enseigner des preuves, des algorithmes, mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes, un travail sur la modélisation, engager les étudiants dans une lecture d'articles de recherche, etc.), des tendances existent pour les enseignants-chercheurs des deux groupes. Les enseignants-chercheurs de G_L enseignent des théorèmes dans les séances de cours, alors que les enseignants-chercheurs de G_F mettent en œuvre des moments de résolution de problèmes. Cette disparité dans les pratiques peut être en lien avec les rapports différents des enseignants-chercheurs à la théorie des graphes dans les deux institutions d'enseignement et de recherche. En effet, les invariants opératoires qui guident et pilotent les règles d'action des enseignants-chercheurs dans notre étude sont surtout à dominante didactique, en lien avec des connaissances qu'ils possèdent sur l'enseignement de la théorie des graphes, ou avec les représentations qu'ils ont des profils des étudiants. D'autres invariants opératoires sont de natures épistémologique et didactique à dominante didactique ; ils renvoient à des connaissances des enseignants-chercheurs relatives à la nature de la théorie des graphes sous-jacentes aux choix qu'ils effectuent pour leur enseignement. Par exemple, LQ trouve que les étudiants rencontrent des difficultés au niveau du raisonnement dans l'activité de preuve en mathématiques discrètes, et par conséquent, elle met l'accent dans les séances de cours sur le travail sur les preuves avec les étudiants, sans aborder des applications. Aussi, les enseignants-chercheurs de G_L semblent convaincus que les séances de cours doivent être allouées aux apports théoriques (introduction de concepts, de théorèmes, d'exemples, etc.). Ils mobilisent des ressources issues de leur enseignement qu'ils peuvent avoir produites (telles que le module d'enseignement conçu collectivement pour l'enseignement des mathématiques discrètes en L2) ou utilisées (ouvrages à destination de l'enseignement). Les enseignants-chercheurs de G_F transforment des problèmes issus de leur activité de recherche en situations pour l'enseignement qui permettent aux étudiants un travail sur la modélisation et sur les preuves. Cette mobilisation de ressources issues de leur activité de recherche indique une influence de leur activité de

recherche sur leur enseignement. Elle peut être aussi due aux représentations de ces enseignants-chercheurs concernant les besoins des étudiants dans un parcours de formation donné.

En ce qui concerne la conception et la mise en œuvre des séances de TDs, nous avons identifié des tendances différentes au niveau des finalités que les enseignants-chercheurs se fixent dans leur enseignement (mettre en œuvre des moments d'entraînement et d'application, enseigner des preuves, des théorèmes, engager les étudiants dans un travail sur la modélisation, mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes, échanger des questions avec d'autres enseignants-chercheurs, établir des liens avec d'autres domaines mathématiques, avec d'autres disciplines, concevoir et mettre en œuvre des projets en classe, etc.). Les enseignants-chercheurs au Liban, particulièrement ceux de G_L , mettent en œuvre des moments d'entraînement et d'application, alors que les enseignants-chercheurs de G_F mettent en œuvre des moments de résolution de problèmes. Cette disparité au niveau des pratiques peut être expliquée par les rapports personnels différents des enseignants-chercheurs à la théorie des graphes dans l'institution de recherche. L'activité de recherche des enseignants-chercheurs de G_L porte sur des aspects « théoriques » de la théorie des graphes (à l'exception de LQ dont le travail de thèse a porté sur des applications de la théorie des graphes à la télécommunication). En outre, l'activité de recherche des enseignants-chercheurs de G_F porte sur des applications à la théorie des graphes dans le contexte industriel ou dans le contexte de jeux. Cela peut justifier en partie les choix des enseignants-chercheurs dans la conception des séances de TDs consistant en des applications des théorèmes et des processus présentés dans la partie cours du module pour les enseignants-chercheurs de G_L , et issues de contextes concrets (monde industriel, jeux, vie réelle, etc.) pour ceux de G_F . Leurs choix peuvent être aussi impactés par les parcours de formation et les représentations qu'ils ont des besoins des étudiants dans ces parcours. En termes de ressources, les enseignants-chercheurs de G_L mobilisent des ouvrages à destination de l'enseignement et le module qu'ils ont conçu collectivement pour l'enseignement des mathématiques discrètes en L2. Les enseignants-chercheurs de G_F mobilisent une variété de ressources dans la conception et la mise en œuvre des séances de TDs, dont les ouvrages à destination de l'enseignement, ainsi que des ordinateurs et des logiciels, des ressources en ligne, et des ressources qu'ils ont produites eux-mêmes, issues de leur activité de recherche. Cela semble indiquer une influence plus importante de l'activité de recherche sur les pratiques d'enseignement chez les enseignants-chercheurs de G_F que sur ceux de G_L . Nous soulignons une étendue des invariants opératoires à dominante didactique dans la conception et la mise en œuvre des séances de TDs. Ces invariants opératoires sont en lien avec des représentations différentes que les enseignants-chercheurs ont des profils des étudiants et de leurs besoins (apprentissage à développer lors des séances, difficultés des étudiants, gestion des émotions des étudiants, etc.). Certains invariants opératoires sont de natures épistémologique et didactique à dominante didactique. Ils portent sur des choix différents effectués par les enseignants-chercheurs en termes de contenus et de leur organisation dans l'enseignement de la théorie des graphes, avec une prise en compte des particularités de ce domaine mathématique. Enfin, le volume horaire est une contrainte que les enseignants-chercheurs prennent en compte dans la mise en œuvre des séances de TDs.

En ce qui concerne la conception et la mise en œuvre des séances de TPs, les quatre enseignants-chercheurs qui conçoivent et mettent en œuvre des séances de TPs mettent en œuvre des séances de programmation sur ordinateurs. Ce choix semble influencé par le rapport personnel de ces enseignants-chercheurs à la théorie des graphes, qu'ils perçoivent comme un domaine mathématique assez proche de l'informatique, ainsi que par des conditions institutionnelles en lien avec les parcours de formation dans lesquels ils enseignent (informatique, maths-info,

informatique de gestion, génie industrielle, etc.). Ces quatre enseignants-chercheurs mobilisent des ordinateurs et des logiciels dans la planification et la mise en œuvre des séances de TPs. La mise en œuvre des séances de programmation est une partie intégrante des pratiques des enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre des séances de TPs, alors que d'autres finalités diverses marquent des particularités des pratiques de ces enseignants-chercheurs dans cette classe de situations (mise en œuvre des moments de recherche autour de problèmes, modélisation sur des problèmes concrets d'entreprises, expérimentation avec des objets matériels). Les ressources mobilisées sont souvent produites par les enseignants-chercheurs comme les jeux physiques et des fiches, et des problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et les polyominos. Les invariants opératoires à dominante didactique qui guident les règles d'action des enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre des séances de TPs sont en lien avec les représentations différentes qu'ils ont des difficultés des étudiants, de leurs besoins et de leurs émotions. D'autres invariants opératoires sont de natures épistémologique et didactique, à dominante didactique en lien avec la potentialité de la théorie des graphes à représenter beaucoup de problèmes issus d'autres disciplines telles que l'informatique, ce qui induit des choix relatifs à la conception des séances de TPs et aux modalités de mise en œuvre.

Dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation, une tendance commune chez les enseignants-chercheurs est l'élaboration des questions pour les épreuves écrites, collectivement pour certains, et individuellement pour d'autres. L'élaboration collective des épreuves écrites est souvent une recommandation institutionnelle ; quand plusieurs enseignants-chercheurs enseignent un même module dans une même institution, on leur demande souvent de concevoir une épreuve commune. Les modalités d'évaluation semblent plus variées pour les enseignants-chercheurs de G_F (projets mémoires, expositions orales de projets, participation en classe, travail sur des problèmes de recherche, évaluation sur machine, rédaction de résumés d'articles de recherche, etc.). Bien que ces enseignants-chercheurs n'élaborent pas collectivement des épreuves écrites, ils échangent des questions avec d'autres enseignants-chercheurs pour l'élaboration des épreuves écrites, ce qui indique une présence de la dimension collective dans leurs pratiques d'enseignement. Cette collaboration entre les enseignants-chercheurs de G_F peut être aussi due à leur appartenance à la fédération de recherche *maths à modeler*. Par ailleurs, les ressources les plus mobilisées par les enseignants-chercheurs dans notre étude dans la conception des moments d'évaluation sont les ouvrages à destination de l'enseignement et les ressources en ligne. Cependant, les enseignants-chercheurs de G_F mobilisent une variété de ressources dont des ressources qu'ils ont produites eux-mêmes (questions inventées pour les épreuves écrites, propres ressources de formations réalisées les années précédentes), et des ressources provenant de leur activité de recherche (articles publiés dans des conférences récentes, problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et les polyominos). Les invariants opératoires qui guident les actions de la majorité des enseignants-chercheurs interviewés dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation sont à dominante pédagogique et didactique (§ III.5.5). Les représentations que les enseignants-chercheurs interviewés ont de l'évaluation sont souvent indépendantes du domaine mathématique en question. Des invariants opératoires à dominante pédagogique peuvent renvoyer aux convictions des enseignants-chercheurs relatives aux objectifs généraux de l'évaluation (vérification de la compréhension des notions enseignées par les étudiants, évaluation de la capacité des étudiants à prendre des initiatives, etc.), à sa pertinence (le niveau des questions, le potentiel qu'elle offre à un étudiant qui a suivi le cours de réussir, etc.), et à la portée des résultats (indicateurs ou non des apprentissages effectifs des étudiants). Les invariants opératoires à dominante didactique qui guident les choix des enseignants-chercheurs dans la conception et la

mise en œuvre des moments d'évaluation sont en lien avec l'enseignement de la théorie des graphes ou les représentations qu'ils ont des profils des étudiants (leur capacité à construire une preuve, à programmer un algorithme, ou à reproduire un raisonnement sur des cas proches des cas exposés dans le module). Des invariants opératoires à dominante institutionnelle (§ III.5.5) sont en lien avec les contraintes imposées par l'institution (unification des épreuves écrites pour un même module, des barèmes de correction, etc.).

En ce qui concerne la participation à un collectif d'enseignement ou de recherche, FF, FK et FT participent à un collectif de recherche, *maths à modeler*, qui s'intéresse à développer des ressources pour favoriser des apprentissages transversaux en mathématiques (preuve, modélisation, etc.) en concevant et implémentant en classe des situations conçues collectivement entre chercheurs en mathématiques discrètes et didacticiens. Cette participation au collectif ne semble pas être une recommandation institutionnelle. Les trois enseignants-chercheurs considèrent que leur appartenance à *maths à modeler* leur apporte un regard pratique sur les situations qu'ils développent pour leur enseignement et leur offre une occasion de partager des ressources avec d'autres enseignants-chercheurs qui enseignent les mathématiques discrètes.

Notre analyse des ressources nous a permis de compléter et de préciser nos éléments de synthèse en lien avec les deux classes de situations, concevoir et mettre en œuvre des séances de cours et de TDs. Nous nous sommes intéressée dans cette analyse à un module d'enseignement des mathématiques discrètes conçu collectivement par LB, LN et LQ qui enseignent les mathématiques discrètes en L2 dans différents sites de l'université libanaise. Bien que les trois concepteurs mettent l'accent sur la conformité des contenus avec les instructions officielles de la filière, notre analyse du module montre que les sujets abordés ne correspondent pas exactement à la description présentée dans le syllabus. Cela semble être dû à une contrainte institutionnelle en lien avec le volume horaire.

Dans la conception du module pour l'enseignement en L2, les concepteurs introduisent un grand nombre d'objets mathématiques, et mobilisent des processus pour la recherche d'objets mathématiques dans les preuves et dans les exercices. Cela semble en phase avec une intention des concepteurs d'introduire les étudiants aux objets de la théorie des graphes, et de mettre l'accent sur le raisonnement dans le travail sur les preuves. En effet, certains concepts sont introduits comme objets dans les définitions et les théorèmes sans être mobilisés dans des exemples, des remarques ou des exercices tels que la distance et la géodésique. Les exemples sont mobilisés dans le module après les définitions et visent à illustrer les caractéristiques des concepts introduits. De plus, les exercices mobilisent des objets mathématiques ainsi que les processus, et certains objets (graphe acyclique, graphe simple) sont introduits dans les exercices. Les concepteurs mobilisent le registre de représentation formel (§ II.1.4) dans les parties cours et TDs du module, avec mobilisation du registre de représentation par graphe juste pour les exemples qui illustrent les définitions. La mobilisation du registre formel peut être en lien avec une conviction des concepteurs que les contenus doivent être en harmonie avec les instructions officielles de la filière, et semble indiquer une influence des conditions institutionnelles (particulièrement le parcours de formation) sur les choix effectués par les concepteurs. Cette dominance du registre de représentation formel peut être aussi justifiée par des invariants opératoires supposés partagés des concepteurs qui considèrent que la compréhension des idées et la rédaction des idées en mathématiques discrètes sont deux aspects indépendants, mais essentiels dans un apprentissage des mathématiques discrètes par les étudiants. Le rapport personnel des enseignants-chercheurs à la théorie des graphes dans l'institution de recherche semble avoir aussi une influence sur les choix

qu'ils effectuent. LQ par exemple considère que les contenus sont « mathématiques » quand ils n'abordent pas d'applications. Les concepteurs effectuent des liens minimes avec d'autres domaines mathématiques, et n'effectuent aucun lien avec d'autres disciplines et la vie réelle, ce qui semble aussi en lien avec la représentation qu'ils ont du parcours de formation et des besoins des étudiants dans ce parcours. Bien qu'il existe dans le parcours de formation en mathématiques à l'université libanaise un module intitulé « Algorithmique, Programmation » en L1, le module de mathématiques discrètes ne sollicite un travail sur les algorithmes à aucun moment. Cela indique une grande disparité dans les rapports à la théorie des graphes des enseignants-chercheurs des deux groupes dans les institutions de recherche et d'enseignement. Les enseignants-chercheurs de G_L mettent l'accent dans le module sur l'introduction des objets mathématiques et sur le travail sur les preuves. Les enseignants-chercheurs de G_F considèrent la théorie des graphes comme le domaine mathématique le plus proche de l'informatique et mobilisent souvent, dans leur enseignement, des algorithmes dans la recherche de solutions optimales pour des situations issues du contexte industriel et de la vie réelle. Finalement, les exercices de la partie TD du module commencent par le mot « prouver » ce qui reflète une intention des concepteurs à mettre l'accent sur l'activité de preuve dans les séances de TDs.

Notre analyse des observations de classe nous a permis de compléter et de préciser certains éléments de synthèse en lien avec la mise en œuvre des séances de cours et de TDs, en s'appuyant sur le cas particulier de LQ. Dans l'entretien avec LQ, elle met l'accent sur la compréhension des concepts et des raisonnements par les étudiants. Elle souligne que les étudiants rencontrent des difficultés dans le raisonnement en mathématiques discrètes. Ainsi, dans la mise en œuvre de son enseignement, LQ co-construit les raisonnements avec les étudiants en posant des questions qui portent sur le sens des concepts et des énoncés des théorèmes et des exercices. Elle engage les étudiants dans des discussions qui portent sur les objets mathématiques, les processus et les raisonnements. Elle convertit les définitions, les théorèmes et les raisonnements au registre de représentation par langage naturel (§ II.1.4) dans son discours en classe, afin de les rendre plus accessibles aux étudiants. Aussi, elle mobilise le registre de représentation par graphe (§ II.1.4) dans les exemples pour illustrer les caractéristiques des objets définis dans la partie cours du module, et dans des exemples génériques qu'elle mobilise dans la construction des preuves et des raisonnements afin de révéler des caractéristiques des concepts mathématiques avant d'entamer la rédaction dans le registre de représentation sémiotique formel. Finalement, LQ met l'accent sur la rédaction des raisonnements dans le registre de représentation formel, et par conséquent, elle insiste sur le sens des symboles mathématiques et leur utilisation par les étudiants en classe, dans le discours oral ainsi que dans la rédaction des raisonnements lors de la résolution des exercices.

En ce qui concerne notre question de recherche Q2, les analyses des entretiens avec les enseignants-chercheurs montrent une étendue des invariants opératoires à dominante institutionnelle dans la conception et la mise en œuvre de la planification de l'enseignement. En planifiant leur enseignement, les enseignants-chercheurs prennent en considération des conditions et des contraintes institutionnelles. Nous citons à titre d'exemples le parcours de formation, le volume horaire et la répartition des séances, la disponibilité des ressources, et les recommandations institutionnelles (description des contenus dans les syllabus, ressources à mobiliser, modalités d'évaluation, etc.). Ainsi, les conditions et les contraintes institutionnelles influencent souvent les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources à plusieurs niveaux.

Le parcours de formation semble avoir une influence importante sur les choix des enseignants-chercheurs en termes de ressources qu'ils utilisent et conçoivent, en termes de contenus, de leur

organisation et de leur mise en œuvre. Les enseignants-chercheurs qui enseignent dans un parcours de formation en mathématiques, notamment les enseignants-chercheurs de G_L , mettent l'accent sur l'introduction des objets mathématiques. Ils soutiennent l'importance de développer chez les étudiants une culture autour des objets mathématiques de la théorie des graphes. Ils enseignent ce qu'ils considèrent comme « contenus de base » (chemins, cycles, degrés, sommets, etc.) et mettent l'accent sur la conformité des contenus avec les instructions officielles de la filière et les syllabus présents au sein de l'institution. Ils effectuent le choix d'inclure dans le TD des exercices qui portent sur des preuves de théorèmes ; ils divisent les preuves en plusieurs étapes et posent des questions portant sur chacune des étapes dans les exercices. Ils ne mettent pas en œuvre des séances de TPs, les séances d'enseignement consistent en des séances de cours et de TDs. En revanche, les enseignants-chercheurs qui enseignent dans d'autres parcours de formation (informatique, maths-info, informatique de gestion, génie industrielle), notamment les enseignants-chercheurs de G_F , mettent en œuvre des séances de cours, TDs et TPs (à l'exception de FT dont la seule modalité de mise en œuvre des contenus dans son enseignement consiste à mettre les étudiants dans une position de recherche sur des problèmes ouverts, et qui ne distingue pas entre séances de cours, TDs et TPs). Les enseignants-chercheurs de G_F mobilisent des situations issues de contextes concrets (industriel, vie réelle, jeux, etc.). Ils mettent l'accent sur des situations qui favorisent l'apprentissage de la programmation et des processus de recherche de solutions optimales. Finalement, la majorité des enseignants-chercheurs dans notre étude soulignent qu'en master, il y a un niveau théorique plus important qu'en licence, et par conséquent, ils donnent plus de théorèmes et introduisent un plus grand nombre d'objets mathématiques en master qu'en licence.

Les schèmes d'utilisation des ressources peuvent être aussi influencés par le contexte institutionnel. Par exemple, FO mobilise une plateforme d'apprentissage Moodle dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours dans des parcours de formation en informatique et en maths info. Les schèmes d'utilisation de la plateforme par FO sont influencés par le parcours de formation en question. Dans le parcours de formation en informatique, elle met l'accent sur la programmation, les structures de données et la complexité, et dans le parcours de formation en maths info, elle met l'accent sur le travail sur les preuves.

Le contexte institutionnel de recherche semble avoir aussi une influence sur le contexte d'enseignement des enseignants-chercheurs, une influence qui semble plus importante dans le cas des enseignants-chercheurs de G_F . En effet, pour ces derniers, il semble qu'il y a un rapprochement entre les thématiques qu'ils abordent dans leur activité de recherche et le contexte d'enseignement. Nous citons à titre d'exemple FO dont les recherches portent sur la recherche opérationnelle et l'optimisation combinatoire et les intitulés de modules qu'elle enseigne sont « recherche opérationnelle » et « graphes, optimisation, et informatique », et FK dont les recherches portent sur la théorie des graphes et l'optimisation discrète, et qui enseigne des modules intitulés « modélisation et résolution de problèmes d'optimisation » et « recherche opérationnelle ». Ainsi, les enseignants-chercheurs de G_F adaptent pour leur enseignement des situations issues de leur activité de recherche. En revanche, nous soulignons qu'une tension peut exister entre le domaine de recherche et le contexte d'enseignement pour certains enseignants-chercheurs. Par exemple, les recherches de LQ portent sur des applications de la théorie de graphes à la télécommunication, et elle enseigne dans un parcours de formation en mathématiques. LQ mobilise dans son enseignement de mathématiques discrètes en L2 à l'université libanaise un module qu'elle a conçu collectivement avec deux autres enseignants-chercheurs, LB et LN, qui enseignent aussi les mathématiques discrètes en L2 dans le même parcours de formation en mathématiques dans un autre site de l'université libanaise.

Une analyse des formes de connectivité établies par les trois concepteurs dans les contenus de ce module reflète une influence importante du contexte institutionnel sur la conception du module, notamment du parcours de formation en mathématiques. Les contenus sont conformes à la description présentée dans le syllabus, avec quelques exceptions de contenus non abordés, ce qui semble être dû à une contrainte institutionnelle, le nombre d'heures allouées au module. Il y a, dans les parties cours et TD du module, une dominance du registre de représentation formel, une quasi-absence de liens avec d'autres domaines mathématiques, une absence d'applications dans des contextes issus d'autres disciplines et de la vie réelle. Les exercices mettent l'accent sur l'activité de preuve et certains portent sur les preuves de théorèmes non abordés dans la partie cours du module.

Enfin, notre analyse des observations des séances de cours et de TDs de LQ où elle met en œuvre les contenus d'une partie du module montre une certaine influence de l'institution de recherche sur l'enseignement. LQ commence les preuves par des raisonnements sur les cas de petite taille et les cas particuliers avant de généraliser, ce qui paraît être une particularité des preuves en mathématiques discrètes dans l'institution de recherche. Aussi, LQ met l'accent sur le sens des symboles mathématiques et sur une utilisation correcte de ces symboles par les étudiants, dans leurs discours à l'oral et dans la rédaction des raisonnements, ce qui peut suggérer une influence du contexte institutionnel sur ses pratiques d'enseignement.

En ce qui concerne la troisième question de recherche Q3, l'analyse des formes de connectivité dans le module conçu collectivement par les trois enseignants-chercheurs LQ, LB et LN montre une quasi-absence d'une influence de leur activité de recherche sur la conception du module. Les concepteurs ne sollicitent pas dans le module des situations issues de leur activité de recherche. Les ressources qu'ils mobilisent dans la conception du module sont des ressources issues de l'enseignement. Les exercices qu'ils proposent dans la partie TD portent souvent sur des preuves de théorèmes non inclus dans la partie cours du module, et que les concepteurs ont adaptés pour transformer en exercices à plusieurs étapes. L'influence de l'activité de recherche sur la conception du module semble surtout absente dans le cas de LQ, dont les recherches portent sur des applications de la théorie des graphes à la télécommunication.

En revanche, dans le cas de LQ, notre analyse des observations des séances de classe nous a permis de cerner une certaine influence de son activité de recherche sur les formes de connectivité effectives développées dans la mise en œuvre du module en classe. LQ met l'accent dans son enseignement sur deux aspects qu'elle considère complémentaires et indépendants : la compréhension des raisonnements par les étudiants, et la rédaction des raisonnements. Ces deux aspects semblent former une partie intégrante de tout travail de recherche en mathématiques. Ainsi, dans le raisonnement sur une preuve et dans la résolution des exercices, LQ mobilise des exemples génériques dans le registre de représentation par graphe avant d'entamer la rédaction des raisonnements dans le registre de représentation sémiotique formel. Elle prend comme point de départ des cas particuliers et des cas de petite taille avant de travailler sur les cas les plus généraux. Cette démarche qui consiste à tester les petits cas avant de généraliser semble étroitement liée aux spécificités des mathématiques discrètes au niveau épistémologique, et peut conséquemment signaler une influence de l'activité de recherche de LQ sur son enseignement.

Chapitre V- Conclusion générale

Nous présentons dans ce chapitre la conclusion générale de notre recherche. Nous commençons par une présentation des résultats en fonction de nos questions de recherche (§ V.1). Nous discutons ensuite du domaine de validité de ces résultats (§ V.2) et nous continuons par le questionnement de nos contributions aux niveaux théorique et méthodologique (§ V.3). Nous présentons enfin quelques perspectives issues de notre recherche (§ V.4).

V.1- Retour sur notre recherche

Notre questionnement initial porte sur les pratiques des enseignants-chercheurs au supérieur, particulièrement dans le cas de l'enseignement de la théorie des graphes. Nous considérons l'interaction des enseignants-chercheurs avec les ressources comme un prisme pour l'étude de leurs pratiques. Nous nous intéressons aux différents facteurs qui impactent ces pratiques (institutionnels, didactiques et épistémologiques), et nous portons une attention particulière à l'influence que l'activité de recherche des enseignants-chercheurs peut avoir sur ces pratiques.

Nous avons élaboré une méthodologie d'analyse de données composée de trois volets complémentaires (§ IV). Le premier volet porte sur une analyse d'entretiens effectués avec dix enseignants-chercheurs, chercheurs en théorie des graphes, en s'appuyant principalement sur l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche, 2009), tout en mettant l'accent sur le concept de schèmes et ses différentes composantes (Vergnaud, 1998) (§ IV.1). Le deuxième volet consiste en une analyse des contenus d'un module d'enseignement de la théorie des graphes dont les concepteurs sont trois des enseignants-chercheurs interviewés (§ IV.2). Cette analyse s'appuie sur le concept de « connectivité » (Gueudet et al., 2018). Pour le troisième volet, nous avons suivi une enseignante-chercheuse (que nous avons interviewée et qui est l'une des concepteurs du module analysé lors de la deuxième étape). Ce suivi consiste en une observation de trois séances de classe, dont cours et TDs, et de deux entretiens qui ont eu lieu avant et après les observations. Le troisième volet porte sur une analyse d'observations de séances pour compléter les résultats des analyses des entretiens et des contenus (§ IV.3).

Après un retour sur les trois volets de recherche mis en œuvre et sur nos questions de recherche (§ IV.4), nous synthétisons nos principaux résultats de recherche pour chacune des trois questions, tout en questionnant nos hypothèses de recherche.

V.1.1- Comment les schèmes des enseignants-chercheurs (chercheurs en théorie des graphes) guident-ils leurs interactions avec les ressources dans/pour l'enseignement de la théorie des graphes ?

Nous commençons ce paragraphe par une présentation des éléments de réponse à cette première question de recherche obtenus par nos analyses des entretiens avec les enseignants-chercheurs. Nous exposons tout d'abord nos résultats concernant les buts que les enseignants-chercheurs se fixent dans leurs pratiques d'enseignement, les classes de situations, qui déterminent des formes différentes d'interactions avec les ressources. Pour chaque classe de situations, nous présentons les types de ressources avec lesquelles interagissent les enseignants-chercheurs (issues de leur enseignement ou de leur activité de recherche, ressources qu'ils ont produites eux-mêmes ou produites par des pairs) ; nous caractérisons les schèmes d'interaction des enseignants-chercheurs avec ces ressources, en mettant l'accent sur les invariants opératoires qui guident ces interactions ;

et nous présentons aussi une première caractérisation de l'influence des conditions et des contraintes institutionnelles sur les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources, ainsi que l'influence de leur activité de recherche sur ces interactions. Enfin, nous complétons les résultats par des éléments supplémentaires obtenus par nos analyses des ressources et des observations des séances de classe.

La conception et la mise en œuvre de la planification de l'enseignement, des séances de cours et de TDs, et des moments d'évaluation semblent être une partie intégrante des pratiques des enseignants-chercheurs (§ IV.1.3.1). En outre, certains enseignants-chercheurs conçoivent et mettent en œuvre des séances de TPs, et participent à des collectifs qui s'intéressent à des questions de diffusion des mathématiques dans l'enseignement. Plusieurs facteurs, de types didactique, épistémologique et institutionnel, semblent influencer les enseignants-chercheurs au niveau des finalités qu'ils se fixent. Ces facteurs peuvent être en lien avec les représentations des enseignants-chercheurs des besoins des étudiants, les conditions institutionnelles relatives au parcours de formation et à la disponibilité des ressources, et le rapport personnel des enseignants-chercheurs à la théorie des graphes dans les deux institutions d'enseignement et de recherche. Nous explicitons nos propos dans la suite du paragraphe.

Les ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement sont souvent issues de leur enseignement et produites par des pairs (§ IV.1.3.3). Nous citons à titre d'exemples les syllabus et les ouvrages à destination de l'enseignement mobilisés par les enseignants-chercheurs pour la définition de la structure et la sélection des contenus des modules d'enseignement. L'interaction des enseignants-chercheurs avec les ressources dans la planification de leur enseignement semble être largement influencée par des conditions et des contraintes institutionnelles dont les choix des contenus décrits dans les syllabus, le parcours de formation, le nombre d'étudiants par classe, le volume horaire et la répartition des séances dans l'année ou dans le semestre et des recommandations institutionnelles concernant les ressources à mobiliser. Des invariants opératoires à dominante didactique peuvent guider les enseignants-chercheurs dans la planification de leur enseignement relatifs à leurs connaissances portant sur l'enseignement de la théorie des graphes, les besoins des étudiants en classe et leurs profils (§ IV.1.3.4).

Les ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans la conception et la mise en œuvre des séances de cours et de TDs semblent indiquer des tendances différentes dans leurs pratiques. Les ouvrages à destination de l'enseignement semblent être le type de ressource mobilisé par la plupart des enseignants-chercheurs (§ IV.1.3.3). En outre, certains enseignants-chercheurs mobilisent des ressources issues de leur enseignement dont des ressources qu'ils ont produites eux-mêmes (modules d'enseignement). D'autres mobilisent des problèmes issus de leur activité de recherche qu'ils transforment en situations pour l'enseignement. Ces disparités au niveau des ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs semblent étroitement liées à des divergences dans leurs pratiques. La mobilisation de ressources issues de la recherche dans l'enseignement par les enseignants-chercheurs révèle des éléments qui permettent de caractériser leur rapport personnel à la théorie des graphes dans l'institution de recherche. En effet, ce rapport personnel à la théorie des graphes dans l'institution de recherche semble marqué par le type de problèmes abordés par les enseignants-chercheurs dans leur activité de recherche, et induit des invariants opératoires à dominante épistémologique qui pilotent les choix des enseignants-chercheurs au niveau des contenus, de leur organisation et des modalités de mise en œuvre. En revanche, des enseignants-chercheurs peuvent avoir des schèmes d'utilisation différents d'une

même ressource. Les enseignants-chercheurs peuvent avoir des règles d'action différentes dans leurs interactions avec une même ressource guidées et justifiées par les invariants opératoires propres à chacun d'eux. Les invariants opératoires qui guident et justifient les règles d'action des enseignants-chercheurs dans la conception et la mise en œuvre des séances de TDs peuvent être à dominante didactique en lien avec des connaissances qu'ils ont sur l'enseignement de la théorie des graphes, ou avec leurs représentations des profils des étudiants de leurs besoins (apprentissages à développer, difficultés potentielles des étudiants, gestion de leurs émotions, etc.) (§ IV.1.3.4). Les invariants opératoires peuvent être aussi de natures épistémologiques et didactiques à dominante didactique renvoyant à des connaissances des enseignants-chercheurs relatives aux particularités de la théorie des graphes sous-jacentes aux choix qu'ils effectuent pour leur enseignement (§ IV.1.3.4).

Notre analyse des ressources conçues collectivement pour l'enseignement de la théorie des graphes dans des séances de cours et de TDs montre que les ressources conçues incarnent des invariants opératoires partagés des enseignants-chercheurs. Ces invariants opératoires semblent être à dominante didactique en lien avec les apprentissages que les concepteurs souhaitent développer chez les étudiants (raisonnement, introduction aux objets mathématiques, modélisation, programmation, etc.) (§ IV.1.3.4). Des conditions et des contraintes institutionnelles semblent aussi avoir une influence sur la conception des ressources par les enseignants-chercheurs. Nous citons à titre d'exemple le parcours de formation, la description des contenus dans les syllabus, et le volume horaire. Cette influence se manifeste dans les choix des concepts introduits (accent sur les objets ou sur les processus), les choix des exemples et leur fonction, les registres de représentation sémiotique mobilisés, les liens (existants ou non) avec d'autres domaines mathématiques, d'autres disciplines et la vie réelle, les choix des exercices et des problèmes, etc.

Les ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans la conception et la mise en œuvre des séances de TPs (ordinateurs et logiciels, jeux physiques, problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et les polyominos) comprennent des ressources qu'ils ont produites et des ressources issues de leur activité de recherche (§ IV.1.3.3). Les choix des ressources à mobiliser dans les séances de TPs semblent surtout être influencés par leur rapport personnel à la théorie des graphes dans l'institution de recherche. Leurs recherches portant en général sur des applications de la théorie des graphes à l'informatique ou à des contextes concrets industriels. Il apparaît que les enseignants-chercheurs qui conçoivent et mettent en œuvre des séances de TPs perçoivent la théorie des graphes comme le domaine mathématique le plus proche de l'informatique. Par conséquent, la mise en œuvre des séances de programmation semble être une partie intégrante des pratiques des enseignants-chercheurs dans le contexte de cette classe de situations. La conception et la mise en œuvre des séances de TPs semblent aussi être étroitement liées au parcours de formation. Les enseignants-chercheurs qui enseignent dans un parcours de formation en informatique, maths-info, informatique de gestion, génie industrielle semblent mettre l'accent sur l'importance des séances de TPs par opposition aux enseignants-chercheurs qui enseignent dans un parcours de formation en mathématiques qui ne conçoivent pas des séances de TPs dans leur enseignement de la théorie des graphes.

Les ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation semblent être le plus souvent les ouvrages et les ressources en ligne (§ IV.1.3.3). Ces ressources sont en général mobilisées pour l'élaboration individuelle ou collective des questions pour les épreuves écrites. Les invariants opératoires qui guident les interactions des enseignants-chercheurs avec ces ressources sont surtout à dominante

pédagogique en lien avec leurs représentations des modalités d'évaluation, de leur pertinence et de la portée des résultats qu'elles produisent (§ IV.1.3.4). Les invariants opératoires peuvent être aussi à dominante didactique en lien avec l'enseignement de la théorie des graphes ou les représentations que les enseignants possèdent des profils des étudiants (leur capacité à construire une preuve, à programmer un algorithme, ou à reproduire un raisonnement). La dimension collective semble présente dans la conception des moments d'évaluation, pouvant être une recommandation institutionnelle pour certains enseignants-chercheurs, ou une simple collaboration ou partage de ressources entre des enseignants-chercheurs appartenant à un même groupement de recherche.

Enfin, nous confirmons l'hypothèse que l'interaction des enseignants-chercheurs avec les ressources constitue un prisme pour l'étude des différents aspects de leurs pratiques (§ III, p. 87). Les caractéristiques des ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans leurs pratiques d'enseignement et l'étude des schèmes d'utilisation de ces ressources nous ont permis d'accéder à une première compréhension de leurs pratiques. Les facteurs qui impactent ces pratiques peuvent être liés aux rapports personnels à la théorie des graphes, aux connaissances relatives à l'enseignement de celle-ci, ainsi qu'aux profils des étudiants (leurs difficultés et leurs besoins).

V.1.2- Dans quelle mesure le contexte institutionnel dans lequel un enseignant-chercheur enseigne influence-t-il ses interactions avec les ressources dans/pour l'enseignement de la théorie des graphes ?

Les choix des ressources à mobiliser et les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources dans divers aspects de leurs pratiques peuvent être influencés par les conditions et les contraintes institutionnelles.

En effet, les ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans la planification de leur enseignement peuvent être prescrites par l'institution comme les syllabus ou des ouvrages à destination de l'enseignement désignés a priori pour l'enseignement d'un module. Nous soulignons que même quand la mobilisation d'une ressource est une recommandation institutionnelle, les schèmes d'utilisation de la ressource peuvent différer d'un enseignant-chercheur à un autre. Par exemple, un thème à aborder décrit dans le syllabus peut être décliné suivant des objectifs différents par deux enseignants-chercheurs mobilisant le syllabus.

Même quand les choix des ressources à mobiliser dans l'enseignement ne sont pas imposés par l'institution, ils peuvent être influencés par des conditions institutionnelles telles que le parcours de formation, le volume horaire, et la disponibilité des ressources. Par exemple, un enseignant-chercheur qui enseigne la théorie des graphes dans deux parcours de formation différents, informatique et parcours d'ingénieurs, peut effectuer des choix différents en termes de ressources à mobiliser. Dans le parcours de formation en informatique, il peut mobiliser des logiciels et mettre l'accent sur la programmation, et dans le parcours d'ingénieurs, il peut effectuer le choix de mobiliser des situations issues du contexte industriel. Aussi, deux enseignants-chercheurs peuvent avoir des schèmes d'utilisation différents d'une même ressource.

Les conditions et les contraintes institutionnelles ont aussi une influence sur les interactions des enseignants-chercheurs avec les ressources, dans la conception et dans la mise en œuvre. Dans la conception des ressources pour leur enseignement de la théorie des graphes, les formes de connectivité tissées par les enseignants-chercheurs semblent souvent déterminées par des

conditions et des contraintes institutionnelles. Les enseignants-chercheurs semblent tisser des connexions entre les contenus des ressources qu'ils conçoivent pour leur enseignement et le parcours de formation dans lequel ils enseignent. Ces connexions peuvent être repérées dans les choix des concepts à mobiliser, les registres de représentation sémiotique mobilisés, les liens effectués avec d'autres domaines mathématiques, d'autres disciplines et la vie réelle, et dans les choix des exercices. En outre, ces formes de connexions semblent aussi influencées par les rapports personnels des enseignants-chercheurs à la théorie des graphes dans l'institution de recherche. Deux enseignants-chercheurs avec des rapports personnels différents à la théorie des graphes dans l'institution de recherche n'effectueraient pas forcément les mêmes choix dans la conception pour l'enseignement dans un même parcours de formation.

En revanche, les observations des séances de classe montrent que de nouvelles formes de connectivité se développent dans la mise en œuvre des ressources. Les connexions établies lors de la mise en œuvre des ressources par l'enseignant-chercheur semblent largement influencées par le rapport de l'enseignant-chercheur à la théorie des graphes dans l'institution de recherche.

Finalement, nous avons fait l'hypothèse que la diversité des profils des enseignants-chercheurs participant à notre étude en matière de leur domaine de spécialité en recherche, du nombre d'années d'expérience, et des parcours de formation dans lesquels ils enseignent nous permettra de mieux cerner l'impact des conditions et des contraintes institutionnelles sur leurs pratiques d'enseignement, ainsi que l'influence potentielle de leur activité de recherche sur leur enseignement (§ IV.1.1.2, p. 132). Nous confirmons cette hypothèse. En effet, l'étude des schèmes d'utilisation par des enseignants-chercheurs d'une ressource commune dans les mêmes conditions institutionnelles, permet de cerner des éléments qui caractérisent leur rapport personnel à la théorie des graphes dans la recherche. Aussi, la diversité des parcours de formation dans lesquels ils enseignent nous a permis une mise en regard des choix qu'ils effectuent dans leurs interactions avec les ressources et de cerner l'impact du parcours de formation sur les choix effectués par un enseignant-chercheur.

V.1.3- Comment peut-on caractériser, par le prisme de la conception et de l'usage des ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes, l'influence de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs sur leur enseignement dans ce même champ ?

L'influence de l'activité de recherche d'un enseignant-chercheur sur ses pratiques d'enseignement peut être au premier abord détectée d'une manière explicite dans les ressources issues de son activité de recherche qu'il mobilise dans son enseignement. Nous citons à titre d'exemples les articles de recherche, les problèmes issus de situations de recherche sur lesquels l'enseignant-chercheur travaille, des objets matériels que l'enseignant-chercheur fabrique dans son activité de recherche tels que des fiches et des jeux, etc.

L'activité de recherche des enseignants-chercheurs peut aussi influencer la conception de ressources pour leur enseignement à plusieurs niveaux : dans les choix effectués en termes de contenus et de leur organisation qui définissent les apprentissages à développer chez les étudiants (reproduction de démarches, recherche sur des situations nouvelles, etc.), dans les liens effectués dans les ressources conçues avec d'autres domaines mathématiques, d'autres disciplines et la vie réelle, dans la mobilisation de ressources issues de la recherche pour la conception des ressources pour l'enseignement, etc. Cependant, la caractérisation des formes de connectivité potentielle établies dans une ressource par les concepteurs ne peut pas toujours nous informer sur l'influence de leur activité de recherche sur leur enseignement, surtout dans le cas d'une conception collective

de la ressource. Nous avons avancé l'hypothèse que « les caractéristiques des ressources mobilisées par les enseignants-chercheurs dans/pour leurs pratiques d'enseignement peuvent nous informer sur les différents aspects de leurs pratiques, et sur l'influence potentielle de leur activité de recherche sur leur enseignement » (§ III.5, p. 116). Nous soutenons qu'il est possible de déterminer une influence de l'activité de recherche d'un enseignant-chercheur sur son enseignement dans l'usage des ressources, même si cette influence ne peut être détectée directement dans les caractéristiques de ces ressources. Ce qui nous amène à reformuler notre hypothèse comme suit : « Les formes de connectivité établies par les enseignants-chercheurs conjointement dans la conception des ressources et dans leur mise en œuvre en classe peuvent contribuer à une caractérisation de leurs pratiques, et de l'influence potentielle de leur activité de recherche sur leur enseignement ». L'étude de la mise en œuvre des ressources en classe nécessite une caractérisation des schèmes d'utilisation de ces ressources par les enseignants-chercheurs en classe. L'influence de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs, utilisateurs des ressources, sur leur enseignement peut être surtout détectée dans les invariants opératoires à dominante épistémologique. En effet, l'analyse des entretiens montre un nombre réduit d'invariants opératoires à dominante épistémologique dans les différentes classes de situations d'enseignement, ce qui peut indiquer au premier abord une rupture dans le rapport à la théorie des graphes des enseignants-chercheurs dans les deux institutions, enseignement et recherche. Cependant, l'observation de classes met en évidence un rapprochement dans les rapports personnels des enseignants-chercheurs à la théorie des graphes dans les deux institutions, enseignement et recherche. Ce résultat issu des observations constitue une piste qui mérite d'être approfondie dans des recherches futures.

Enfin, l'influence de l'activité de recherche d'un enseignant-chercheur sur son enseignement peut être détectée dans les connexions effectives établies en classe dans la mise en œuvre des contenus d'une ressource. Cette influence peut être détectée dans le choix des exemples que l'enseignant-chercheur donne en classe, dans les liens qu'il évoque avec des problèmes de recherche qui peuvent être issus de la vie réelle et d'autres disciplines, dans la construction des preuves et des raisonnements, etc. Ainsi, nous soutenons l'hypothèse que nous avons émise : « les observations des séances de classe d'un enseignant-chercheur peuvent nous éclairer davantage sur l'influence potentielle de son activité de recherche sur la mise en œuvre de son enseignement, ainsi que l'impact du contexte institutionnel sur cette mise en œuvre » (§ IV.3.2, p. 206).

V.2- Limites de l'étude

Dans la partie précédente, nous avons décrit les résultats de notre travail. Nous questionnons, dans cette partie, le domaine de validité des résultats et identifions des limites de l'étude.

En ce qui concerne les entretiens avec les enseignants-chercheurs, les questions que nous avons élaborées dans la grille d'entretien présentent un certain niveau de généralité afin de laisser aux enseignants-chercheurs la liberté de décrire les différents aspects de leurs pratiques et ne pas insinuer des réponses. Par la suite, certains enseignants-chercheurs ont été précis dans leur propos, d'autres sont restés plus généralistes dans leur discours, et donc certains aspects de leurs pratiques sont restés insuffisamment explicités. D'autres limites tiennent aux discours plus ou moins développés de ces derniers dans les réponses à nos questions. Nous avons remarqué au cours des entretiens que les enseignants-chercheurs qui appartiennent à des groupements de recherche comportant des mathématiciens et des didacticiens étaient capables de communiquer des réponses

plus complètes et plus précises en termes de description de leurs règles d'action et des justifications et des raisonnements sous-jacents à ces règles d'action. Ce qui nous conduit à une autre limite de notre étude en lien avec les invariants opératoires des enseignants-chercheurs. Notre première étape de l'analyse a consisté en une étude des schèmes des enseignants-chercheurs, les invariants opératoires étant la composante des schèmes qui ne nous est pas complètement accessible à travers les discours des enseignants-chercheurs. Ainsi, dans la construction des tableaux documents des enseignants-chercheurs, nous avons pu repérer un plus grand nombre d'invariants opératoires dans les discours des enseignants-chercheurs qui appartiennent à la fédération de recherche *maths à modeler* que pour les autres enseignants-chercheurs dans notre étude. D'ailleurs, une étude de la composante *inférence* des schèmes nécessite un suivi de longue durée des enseignants-chercheurs. Par conséquent, nous ne l'avons pas prise en considération dans notre étude.

La démarche que nous avons retenue pour répondre à nos questions de recherche consiste aussi en une analyse de ressources conçues par des enseignants-chercheurs interviewés, et une observation de séances où une partie de ces ressources sont mises en œuvre en classe. Dans ce contexte, nous avons analysé les contenus d'un module d'enseignement des mathématiques discrètes (particulièrement la partie portant sur la théorie des graphes) conçu collectivement par trois enseignants-chercheurs qui enseignent le module dans un parcours de formation en mathématiques dans deux sites différents de l'université libanaise. Et nous avons ensuite observé des séances de cours et de TDs où une partie du module est mise en œuvre par l'une des trois concepteurs. Notre étude aurait certainement été enrichie si nous avons pu exploiter des données supplémentaires dans ces deux étapes de l'analyse : dans la deuxième étape, par une analyse de ressources conçues par des enseignants-chercheurs qui enseignent la théorie des graphes dans d'autres parcours de formation au Liban, ou des ressources conçues par les enseignants-chercheurs de notre étude faisant partie de la fédération de recherche *maths à modeler* pour l'enseignement de la théorie des graphes dans divers parcours de formation en France ; et dans la troisième étape, en observant des séances de classes des deux autres enseignants-chercheurs concepteurs du module à l'université libanaise, ou des enseignants-chercheurs de la fédération de recherche *maths à modeler* en France. L'observation de la mise en œuvre des ressources, développées au sein des collectifs de recherche regroupant mathématiciens et didacticiens, par des mathématiciens peut avoir un intérêt particulier pour la caractérisation de l'écart existant entre les connexions potentielles développées dans les ressources par les concepteurs, et les connexions pratiques qui se développent lors de la mise en œuvre de ces ressources par les mathématiciens en classe.

En ce qui concerne la participation à un collectif d'enseignement ou de recherche, FF, FK et FT participent à un collectif de recherche, *maths à modeler*, regroupant mathématiciens et didacticiens qui s'intéressent à exploiter les mathématiques discrètes pour favoriser des apprentissages transversaux et notionnels.

Par ailleurs, bien que le vivier d'enseignants-chercheurs dans notre étude consiste en des enseignants-chercheurs, chercheurs en théorie des graphes, qui enseignent la théorie des graphes dans divers parcours de formation au Liban et en France, aucun des enseignants-chercheurs en France n'enseigne la théorie des graphes dans un parcours de formation en mathématiques. Il aurait été intéressant d'avoir dans notre vivier un enseignant-chercheur avec un tel profil, ou même des enseignants-chercheurs, chercheurs en d'autres domaines mathématiques ou d'autres disciplines (telles que l'informatique), et qui enseignent la théorie des graphes au supérieur. L'analyse de données relatives à un chercheur dans un domaine autre que la théorie des graphes et enseignant

la théorie des graphes nous aurait peut-être permis de caractériser davantage l'influence du rapport personnel des enseignants-chercheurs à la théorie des graphes dans l'institution de recherche sur leur enseignement.

V.3- Développements théoriques et méthodologiques

Nous présentons dans cette partie les développements théoriques que nous avons proposés et les choix méthodologiques qui en découlent.

Dans notre analyse des entretiens, nous nous sommes basée sur les concepts de ressources et de schème d'utilisation des ressources de l'approche documentaire (Gueudet & Trouche, 2009). Nous avons défini des classes de situations *a priori* (§ III.4.4) en proposant des adaptations des neuf familles d'activités présentées par Gueudet et Trouche (2010) (§ III.2.2) qui prennent en compte les spécificités des pratiques des enseignants-chercheurs au supérieur (§ I.4), et nous avons mis ces classes de situations à l'épreuve. Les résultats de nos analyses des entretiens montrent que les classes de situations que nous avons proposées *a priori* couvrent les classes de situations repérées à partir des discours des enseignants-chercheurs. Nous signalons ici que l'enseignement hybride ou l'enseignement à distance (suite à la crise du Covid19) provoque une mutation dans l'enseignement en général et l'enseignement universitaire particulièrement. Ces nouvelles formes d'enseignement constitueraient une piste pour enrichir ces classes de situations afin de prendre en compte une mise en œuvre à distance de l'enseignement.

Nous avons porté une attention particulière aux invariants opératoires des enseignants-chercheurs. Vergnaud (1998) a proposé une catégorisation des invariants opératoires en concepts-en-acte qui relèvent plutôt des connaissances des enseignants-chercheurs, et des théorèmes-en-acte qui justifient et pilotent leurs règles d'action. Dans une perspective de cerner les différents facteurs de types didactique, épistémologique et institutionnel sur les pratiques d'enseignement, nous avons proposé, dans notre travail, une catégorisation des invariants opératoires. Ainsi, nous avons commencé par proposer une classification des invariants opératoires selon leur dominante qui peut être didactique, pédagogique, épistémologique, et institutionnelle tout en identifiant des critères qui permettent de les classer. Cette catégorisation des invariants opératoires a présenté des obstacles au niveau méthodologique. Les différentes catégories d'invariants opératoires n'étaient pas disjointes, et certains invariants opératoires renvoyaient simultanément à des connaissances des enseignants-chercheurs de plusieurs natures (didactique, épistémologique, institutionnelle et pédagogique). Afin de franchir cet obstacle au niveau méthodologique, nous avons proposé de nouvelles catégories qui couvrent les invariants opératoires renvoyant à des connaissances de plusieurs natures, tout en identifiant leur dominante. Bien que cette catégorisation des invariants opératoires nous a permis une première caractérisation des facteurs qui influencent les pratiques des enseignants, certains résultats que nous avons obtenus nous semblent contre-intuitifs (comme le nombre réduit d'invariants opératoires à dominante épistémologique). Cela reste sujet à discussion, qui mérite d'être creusé davantage dans des études ultérieures.

Nous avons effectué le choix d'étudier les pratiques des enseignants-chercheurs dans leur enseignement de la théorie des graphes, et l'influence potentielle de leur activité de recherche sur leur enseignement. Plusieurs raisons avaient guidé ce choix (§ II.2) qui s'est avéré favorable pour notre étude. En effet, le choix de la théorie des graphes nous a permis une prise en considération de plusieurs cas de figure dans notre étude : rapprochement/tension entre le domaine de recherche

d'un enseignant-chercheur et le domaine d'enseignement, enseignement de la théorie des graphes dans un parcours de mathématiques ou dans d'autres parcours (informatique, génie industrielle, etc.). Notre étude a aussi révélé un large spectre de choix effectués par les enseignants-chercheurs interviewés dans leur enseignement de la théorie des graphes, en termes de contenus et de leur organisation, et des modalités de la mise en œuvre. La prise en compte des éléments susmentionnés nous a permis d'identifier des tendances et des disparités dans les pratiques des enseignants-chercheurs, et de cerner l'influence du contexte institutionnel et de l'activité de recherche sur leurs pratiques d'enseignement.

V.4- Perspectives

La nature de nos résultats et certaines limites de notre travail nous semblent offrir des perspectives pour des travaux ultérieurs qui permettent de dépasser certaines de ces limites.

Les résultats des analyses des entretiens gagneraient sans doute à être complétés et précisés par des analyses d'entretiens avec des enseignants-chercheurs et chercheurs dans d'autres domaines mathématiques ou d'autres disciplines, et enseignant la théorie des graphes dans divers parcours de formation. Cela pourrait contribuer à cerner l'influence de l'activité de recherche des enseignants-chercheurs et de leur rapport personnel aux savoirs dans les institutions de recherche et d'enseignement sur leurs pratiques d'enseignement de la théorie des graphes.

Nos résultats de l'analyse des entretiens pourraient être précisés et complétés par des suivis des deux autres enseignants-chercheurs, concepteurs du module d'enseignement de la théorie des graphes dans le parcours de mathématiques à l'université libanaise. Ces observations nous permettraient une mise en regard des différentes formes de connectivité effective établies par les différents concepteurs d'une ressource conçue collectivement lors de la mise en œuvre en classe. Aussi, des suivis de plus longue durée des enseignants-chercheurs nous renseigneraient sur la composante inférence de leurs schèmes.

Par ailleurs, au niveau méthodologique, la richesse des données que nous avons recueillies ne nous semble pas avoir été complètement exploitée. Par exemple, une méthodologie d'analyse des entretiens pourrait être développée en se basant sur le travail de Madsen et Winsløw (2014). Madsen et Winsløw se sont basés sur la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard (1998) pour construire un cadre théorique qui leur permet d'étudier, à partir des entretiens avec des enseignants-chercheurs, les liens existants entre la recherche et l'enseignement. Ils ont distingué par la suite entre trois types de liens (minimal, explicite et implicite) entre enseignement et recherche en mathématiques et en géographie. Le développement d'une telle méthodologie d'analyse des entretiens est un travail intéressant à entreprendre dans le futur. L'identification de liens minimal, explicite et implicite dans les ressources que les enseignants-chercheurs mobilisent dans leur enseignement et dans les composantes des schèmes d'utilisation des ressources (sous-buts, invariants opératoires, et règles d'action) pourrait nous éclairer davantage sur les liens existants entre enseignement et recherche dans le domaine de la théorie des graphes.

Bibliographie

- Adler, J. (2010). La conceptualisation des ressources. Apports pour la formation des professeurs de mathématiques. Dans G. Gueudet, & L. Trouche, *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (p. 23-40). Rennes, France: Presses Universitaires de Rennes.
- Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 189-209.
- Ashjari, H. (2018). Marking the exam paper – explicitness and communication of knowledge criteria in first year undergraduate mathematics education. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 38(3), 365-408.
- Bailleul, M. (1995). Une approche statistique des représentations de l'enseignement des mathématiques chez des enseignants de mathématiques de collège et de lycée. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(2), 9-30.
- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 33(3), 307-338.
- Berge, C. (1963). *Théorie des graphes et ses applications* (2e éd.). Paris : Dunod.
- Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A., & Rasmussen, C. (2016). Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level: State-of-the-Art and Looking Ahead. Dans G. Kaiser (dir.), *Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level. ICME-13 Topical Surveys* (p. 1-32). Hamburg: Springer.
- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. (2008a). *Graph theory*. New York: Springer.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. (2008b). *Théorie des graphes*. (F. Havet, Trad.) Berlin : Springer.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. (1976). *Graph theory with applications* (5e éd.). Great Britain: The Macmillan Press Ltd.
- Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2003). El profesor como director de proceso de estudios. Anàlisis de organizaciones didàcticas espontàneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(1), 79-136.
- Bosch, M., & Gascón, j. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). Dans P. S. Bikner-Ahsbahs A. (dir.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (p. 67-83). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

- Bourgade, J.-P. (2019). À la recherche de raisons d'être pour les structures de groupe : quelques praxéologies pour la profession de professeur. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 39(2), 131–166.
- Brolley, L. (2016). The place of computer programming in (undergraduate) mathematical practices. Dans E. Nardi, C. Winsløw, T. Hausberger (dir.), *Proceedings of INDRUM 2016 - First conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 3060-369). Montpellier : Université de Montpellier & INDRUM.
- Bronner, A. (1997). Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée ». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 55-80.
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Cartier, L. (2008). *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation*. (Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier - Grenoble I). Repéré à <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00416598v1>
- Charalambous, Y. C., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical thinking and learning*, 12(2), 117-151.
- Chevallard, Y. (2002). Écologie et régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (dir.), *Actes de la XIème École d'été de didactique des mathématiques* (p. 41-56). Grenoble : La Pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques- Actes de l'université d'été*, (p. 91-120). La Rochelle : IREM de Clermont-Ferrand.
- DeBellis, V. A., & Rosenstein, J. G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36(2), 46-55.
- Dierker, P. F., & Voxman, W. L. (1986). *Discrete mathematics*. San Diego: Harcourt Brace Jovanovich.
- Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*, 6, 132-158.
- Duah, F., Croft, T., & Inglis, M. (2014). Can peer assisted learning be effective in undergraduate mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(4), 552-565.

- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Epp, S. S. (2010). *Discrete mathematics with applications* (4e éd.). Boston: Cengage learning.
- Florensa, I., Bosch, M., Cuadros, J., & Gascón, J. (2018). Helping lecturers address and formulate teaching challenges: An exploratory study. Dans V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild & N.M. Hogstad (dir.), *Proceedings of INDRUM 2018 – Second conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 373-382). University of Agder, Kristiansand: Norway.
- Fukawa-Connelly, T. P., & Newton, C. (2014). Analyzing the teaching of advanced mathematics courses via the enacted example space. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3), 323–349.
- Garner, R. (1992). Learning from school texts. *Educational Psychologist*, 27, 53-63.
- Goldin, G. A. (2016). Discrete Mathematics and the Affective Dimension of Mathematical Learning and Engagement. Dans E. W. Hart, & J. Sandefour (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research, ICME-13 Monographs* (p. 53-65). Hamburg: Springer.
- Goldin, G. A. (2004). Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36(2), 56-60.
- González-Martín, A. S. (2015). The use of textbooks by pre-university teachers: An example with infinite series of real numbers. Dans K. Konrad, & N. Vondrovà (dir.), *Proceedings of the 9th congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 2124–2130). Prague: Charles University in Prague.
- González-Martin, A. S., Nardi, E., & Biza, I. (2018). From resource to document: scaffolding content and organising student learning in teachers' documentation work on the teaching of series. *Educational Studies in Mathematics*, 98, 231-252.
- González-Martin, A. S., Nardi, E., & Biza, I. (2011). Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practice: The case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(5), 565-589.
- Grenier, D. (1990). Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie de situations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(1), 5-60.
- Grenier, D., & Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 59-100.
- Grenier-Boley, N. (2014). Some issues about the introduction of first concepts in linear algebra during tutorial sessions at the beginning of university. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3), 439-461.

Gross, J. L., & Yellen, J. (dir.). (2004). *Handbook of graph theory* (2e éd.). Florida, United States of America: CRC Press.

Gueudet, G. (2017). University Teachers' Resources Systems and Documents. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 40753, 198-224.

Gueudet, G. (2015). University teachers' resources and documentation work. Dans K. Krainer, & N. Vondrová (dir.), *Proceedings of CERME9*, (p. 2138-2144). Prague, Czech Republic: Charles University In Prague, Faculty of Education and ERME.

Gueudet, G., Buteau, C., Mesa, V., & Mistfeldt, M. (2014). Instrumental and documentational approaches: from technology use to documentation systems in university mathematics education. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 139-155.

Gueudet, G., Pepin, B., Restrepo, A. M., Sabra, H., & Trouche, L. (2018). E-textbooks and Connectivity: Proposing an Analytical Framework. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(3), 539-558.

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2015). Manuels scolaires et ressources numériques : vers de nouvelles conceptualisations. *EM TEIA / Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 6(3). Repéré à <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01346646/document>.

Gueudet, G., Pepin, T., & Trouche, L. (2013). Textbooks design and digital resources. Dans Margolinas, C. (dir.), *Proceedings of ICMI Study 22 Task Design in Mathematics Education* (p. 327-338). United Kingdom: Oxford.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. Dans G. Gueudet, & L. Trouche (dir.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (p. 57-74). Rennes, France : Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199-218.

Guin, D., & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of intrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34, 204-211.

Hache, C., & Robert, A. (1997). Un essai d'analyse de pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait « fréquenter » les mathématiques à ses élèves pendant la classe. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.

Hare, A., & Sinclair, N. (2015). Pointing in an undergraduate abstract algebra lecture: Interface between speaking and writing. Dans K. Beswick, M. Tracey, & J. Wells (dir.), *Proceedings of PME39. Vol. 3*, (p. 33-40). Hobart: PME.

Hart, E. W., & Martin, G. W. (2016). Discrete Mathematics is Essential Mathematics in a 21st Century School Curriculum. Dans E. W. Hart, & J. Sandefour (dir.), *Teaching and Learning*

Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research, ICME-13 Monographs (p. 3-19). Hamburg: Springer.

Heinze, A., Anderson, I., & Reiss, K. (2004). Discrete mathematics and Proof in the High School. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36(2), 44-84.

Hiebert, J., & Carpenter, T. B. (1992). Learning and teaching with understanding. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 65-97). New York: Macmillan.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2000). Formation des maitres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 89-116.

Josse, E., & Robert, A. (1993). Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(1.2), 119-154.

Khaddaj, Z. H., & Moukarzel, D. (2018). Principals' and teachers' perceptions of students learning in math classes in single-sex versus co-educational public schools in Beirut- Lebanon. *Lebanese Science Journal*, 19(3), 486-507.

Kant, E. (1869). *La critique de la raison pure*. (Germer-Baillièrre, dir., & J. Barni, Trans.). Paris: Bibliothèque Nationale de France.

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness and personality*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Madsen, L., & Winsløw, C. (2014). Relations between Teaching and Research in Physical Geography and Mathematics at Research-Intensive Universities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(4), 741-763.

Mali, A. (2015). Characterising university mathematics teaching. Dans K. Krainer, & N. Vondrová (dir.), *Proceedings of CERME9* (p. 2187-2193). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Mali, A., Biza, I., & Jaworski, B. (2014). Characteristics of university mathematics teaching: Use of generic examples in tutoring. Dans P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (dir.), *Proceedings of the joint meeting of PME38 and PME-NA36* (p. 161-168). Vancouver, Canada: PME.

Marcus, D. A. (2008). *Graph theory: A problem oriented approach*. Washington: The Mathematical Association of America.

Margolinas, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maitre : les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 113-158.

Maurer, S. B. (1997). What is Discrete Mathematics? The Many Answers. Dans J. G. Rosenstein, D. S. Franzblau, & F. S. Roberts (dir.), *Discrete Mathematics in the Schools* (p. 121-132). American Mathematical Society and National Council of Teachers of Mathematics.

Najar, R. (2015). À propos de l'enseignement de la théorie des ensembles : les choix institutionnels dans la transition secondaire/supérieur en Tunisie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35(2), 141-182.

Oh Nam, K. (2015). How to teach without teaching: An inquiry-oriented approach in tertiary education. Dans K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (dir.), *Proceedings of PME39, Vol. 1*, (p. 19-36). Hobart, Australia: PME.

Ouvrier-Bufferet, C. (2019). Discrete mathematics teaching and learning. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of mathematics education*. Switzerland: Springer Cham.

Ouvrier-Bufferet, C. (2010). Mathématiques discrètes : un champ d'expérimentation mais aussi un champ des mathématiques. Dans L. Coulange & C. Hache (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2009* (p. 31-45). Paris : IREM de Paris, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).

Páez Murillo, R. E., & Pluvinage, F. (2019). Estudio de las asíntotas de una función en un entorno de software dinámico. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 39(3), 331–369.

Park, J. (2015). Is the derivative to function? If so, how do we teach it? *Educational Studies in Mathematics*, 89(2), 233-250.

Pepin, B., Gueudet, G., Yerushalmy, M., Trouche, L., & Chazan, D. I. (2016). E-textbooks in/for teaching and learning mathematics: A potentially transformative educational technology. Dans L. English, & D. Krishna (dir.), *Handbook of Research in Mathematics Education* (3e éd., p. 636-661). New York: Taylor & Francis.

Petropoulou, G., Jaworski, B., Potari, D., & Zachariades, T. (2015). How do research mathematicians teach Calculus? Dans K. Krainer, & N. Vondrová (dir.), *Proceedings of CERME9* (p. 2221-2227). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Piaget, J. (1980). *Adaptation and Intelligence*. Chicago: University of Chicago Press.

Rabardel, P. (1999). Le langage comme instrument ? Éléments pour une théorie instrumentale élargie. Dans Y. Clot (dir.), *Avec Vygotski* (p. 241-265). Paris : La Dispute.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Rabardel, P., & Bourmaud, G. (2005). Instruments et systèmes d'instruments. Dans P. Rabardel, & P. Pastré (dir.), *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement* (p. 211-229). Toulouse : Octarès.

Remillard, J. T. (2010). Modes d'engagement : comprendre les transactions entre professeurs et ressources curriculaires en mathématiques. Dans G. Gueudet, & L. Trouche, *Ressources vives : le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (p. 201-216). Rennes : Presses Universitaires de Rennes, Institut national de recherche pédagogique (INRP).

Rezat, S. (2010). The Utilization of Mathematics Textbooks as Instruments for Learning. Dans V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (dir.), *Proceedings of the 6th Conference of European Research in Mathematics Education* (p. 1260-1269). Lyon : INRP.

Rezat, S. (2006). A model of textbook use. Dans J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlíkova (dir.), *Proceedings of the 30th Conference of the international group of the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4*, (p. 409-416). Prague: Charles University.

Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21 (1-2), 57-80.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(3), 305-341.

Roditi, É. (2011). *Recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques : apports d'une intégration de diverses approches et perspectives*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université René Descartes, Paris V. Repéré à <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00655481>.

Romo Vazquez, A., & Castela, C. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.

Rosen, K. H. (2012). *Discrete mathematics and its applications* (7e éd.). New York: McGrawHill.

Rosenstein, J. G. (2016). The absence of discrete mathematics in primary and secondary education in the United States... and why that is counterproductive. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research, ICME-13 Monographs* (p. 21-40). Hamburg: Springer.

Rosenstein, J. G. (1997). Discrete mathematics in the schools: an opportunity to revitalize school mathematics. Dans J. G. Rosenstein, D. S. Franzblau, & F. S. Roberts (dir.), *Discrete Mathematics in the Schools* (p. xxiii-xxx). American Mathematical Society, National Council of Teachers of Mathematics.

Ruthven, K. (2010). Constituer les technologies et les supports numériques en ressources pour la classe. Dans G. Gueudet, & L. Trouche (dir.), *Ressources vives : le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (p. 183-199). Rennes : Presses Universitaires de Rennes, Institut national de recherche pédagogique (INRP).

Sfard, A. (1991, February). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36. Repéré sur <http://www.jstor.org/stable/3482237>

Soury-Lavergne, S. (2003). De l'étayage à l'effet Topaze, regard sur la négociation dans la relation didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(1), 9-40.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11, 258-288.

- Tabchi, T. (2018). University teachers-researchers' practices: The case of teaching discrete mathematics. Dans V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild & N.M. Hogstad (dir.), *Proceedings of INDRUM 2018 – Second conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 432-441). University of Agder, Kristiansand: Norway.
- Treffert-Thomas, S. (2015). Conceptualising a university teaching practice in an activity theory perspective. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(2), 53–77.
- Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (2020). Documentational approach to didactics. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2e éd., p. 237-247). Cham: Springer.
- Vergnaud, G. (2011). Au fond de l'action, la conceptualisation. Dans J.-M. Barbier (dir.), Paris : Presses Universitaires de France.
- Vergnaud, G. (1998). Towards a Cognitive Theory of Practice. Dans A. Sierpiska, & J. Kilpatrick (dir.), *New ICMI Studies Series: Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (Vol. 4, p. 227-240). Dordrecht: Springer.
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.
- Viirman, O. (2015). Explanation, motivation and question posing routines in university mathematics teachers' pedagogical discourse: A commognitive analysis. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(8), 1165-1181.
- Viirman, O. (2014). The functions of function discourse: University mathematics teaching from a commognitive standpoint. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(4), 512-527.
- Weinberg, A., Fukawa-Connelly, T., & Wiesner, E. (2015). Characterizing instructor gestures in a lecture in a proof-based mathematics class. *Educational Studies in Mathematics*, 90(3), 233-258.
- West, D. B. (2001). *Introduction to graph theory* (2e éd.). Deli: Pearson education.
- Wilson, R. J. (1996). *Introduction to graph theory* (4e éd.). Essex: Longman.
- Winsløw, C., & Grønbaek, N. (2014). The ecological Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 59-86.
- CRDP (Centre de Recherche et de Développement Pédagogiques). (2020, September 2). Récupéré sur Programme Scolaire: <http://www.crdp.org/curriculum?f=2&la=fr>
- Lebanese Science Journal*. (2020, Juillet 30). Récupéré sur <http://lsj.cnrs.edu.lb/>

Annexes

Annexe 1- Parcours d'Euler, parcours de Hamilton, et plus courts chemins

Throughout this document, all the definitions are mainly taken from the « Handbook of graph theory » (Gross & Yellen, 2004), so we will indicate it whenever it is not the case. The other contents, such as theorems, proofs and algorithms, etc. were compiled from different sources that are discrete mathematics or graph theory books; we will indicate these references throughout.

We will start by exposing some basic definitions.

Any mathematical object involving points and connections between them may be called a graph. If all the connections are unidirectional, it is called a digraph.

D1: A Graph $G = (V, E)$ consists of two sets V and E .

The elements of V are called *vertices* (or *nodes*)

The elements of E are called *edges*.

Each edge has a set of one or two vertices associated to it, which are called its *endpoints*. An edge is said to *join* its endpoints.

Notation: the subscripted notations V_G and E_G (or $(V(G))$ and $E(G)$) are used for the vertex- and edge-sets when G is not the only graph under consideration.

D2: If vertex v is an endpoint of edge e , then v is said to be *incident* on e , and e is incident on v .

D3: A vertex u is *adjacent* to vertex v if they are joined by an edge.

D4: Two adjacent vertices may be called *neighbors*.

D5: *Adjacent edges* are two edges that have an endpoint in common.

D6: A *multi-edge* is a collection of two or more edges having identical endpoints.

D7: A *self-loop* is an edge that joins a single endpoint to itself. (An alternative term is *loop*. It can be used in contexts in which loop has no other meanings).

Example:

A line drawing of a graph $G = (V; E)$ is shown in Figure 1. It has vertex-set $V = \{u, v, w, x\}$ and edge-set $E = \{a, b, c, d, e, f\}$. The set $\{a, b\}$ is a multi-edge with endpoints u and v , and edge c is a self-loop.

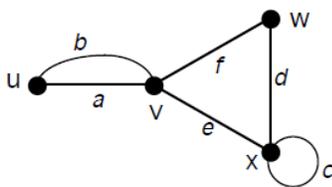


Figure 1: A graph (Rosen, 2012, p. 3)

Remark

A graph is realized in a plane or in 3-space as a set of points, representing the vertices, and a set of curved or straight line segments, representing the edges. The curvature or length of such a line segment is irrelevant to the meaning. However, if a direction is indicated, that is significant.

D8: A *simple graph* is a graph that has no self-loops or multi-edges.

D9: The *trivial graph* is a graph with one vertex and no edges.

D10: A *multigraph* is a graph that has no self-loops. (It might have multi-edges.)

Most of theoretical graph theory is concerned with simple graphs. This is partly because many problems regarding general graphs can be reduced to problems about simple graphs.

D11: A simple graph is a *complete graph* if every pair of vertices is joined by an edge. The complete graph with n vertices is denoted K_n .

D12: An *edge attribute* is a function from the edge-set to some set of possible attribute values.

Allowing graphs to have additional attributes beyond vertices and edges enables them to serve as mathematical models for a wide variety of applications. Two of the most common additional edge attributes are edge direction and edge weight. Another common attribute (for edges or vertices) is color.

An edge between two vertices creates a connection in two opposite senses at once. Assigning a direction makes one of these senses forward and the other backward. Viewing direction as an edge attribute is partly motivated by its impact on computer implementations of graph algorithms.

D13: A *digraph* (or *directed graph*) is a graph each of whose edges is directed.

D14: A *directed edge* (or *arc*) is an edge e , one of whose endpoints is designated as the *tail*, and whose other endpoint is designated as the *head*. They are denoted $\text{head}(e)$ and $\text{tail}(e)$, respectively.

A directed edge is said to be directed from its tail and directed to its head. (The tail and the head of a directed self-loop are the same vertex). In a line drawing, the arrow points toward the head.

D15: The *degree* of a vertex v in a graph G , denoted $\text{deg}(v)$, is the number of proper edges incident on v plus twice the number of self-loops. (For simple graphs, of course, the degree is simply the number of neighbors.)

D16: An *isolated vertex* in a graph is a vertex of degree 0.

D17: A walk in a graph G is an alternating sequence of vertices and edges, $W = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$ such that for $j = 1, \dots, n$, the vertices v_{j-1} and v_j are the endpoints of the edge e_j . If, moreover, the edge e_j is directed from v_{j-1} to v_j , then W is a *directed walk*.

- In a simple graph, a walk may be represented simply by listing a sequence of vertices: $W = v_0, v_1, \dots, v_n$ such that for $j = 1, \dots, n$, the vertices v_{j-1} and v_j are adjacent.
- The *initial vertex* is v_0 .
- The *final vertex* (or *terminal vertex*) is v_n .
- An *internal vertex* is a vertex that is neither initial nor final.

D18: The *length of a walk* is the number of edges (counting repetitions).

D19: A walk is *closed* if the initial vertex is also the final vertex; otherwise, it is *open*.

D20: A *trail* in a graph is a walk such that no edge occurs more than once.

D21: A *path* in a graph is a trail such that no internal vertex is repeated.

D22: A *cycle* is a closed path of length at least 1.

D23: A graph is *connected* if there exists a walk between every pair of its vertices. A graph that is not connected is called *disconnected*.

D24: A subgraph of a graph G is a graph H such that $V_H \subset V_G$ and $E_H \subset E_G$. (Usually, any graph isomorphic to a subgraph of G is also said to be a subgraph of G).

D25: A *component* of a graph G is a connected subgraph H such that no subgraph of G that properly contains H is connected. In other words, a component is a *maximal* connected subgraph.

D26: A *tree* is a connected graph with no cycles (i.e., acyclic).

D27: A *cut-edge* (or *bridge*) is an edge whose removal increases the number of components. The cut-edge of a subset F of a graph G is denoted by ∂_F .

D28: The operation of *deleting the vertex u* from a graph $G = (V, E)$ not only removes the vertex u but also removes every edge of which u is an endpoint. The resulting graph is denoted $G - u$.

D29: The operation of *deleting an edge uv* from a graph $G = (V, E)$ removes only that edge. The resulting graph is denoted $G - uv$.

D30: The k - *cube* Q_k is the graph whose vertices correspond to the sequences (a_1, a_2, \dots, a_k) , where each $a_i = 0$ or 1, and whose edges join those sequences that differ in just one place. Note that Q_k has 2^k vertices and $k2^{k-1}$ edges, and is regular of degree k .

D31: A graph G is called k -connected if the removal of $k - 1$ or fewer vertices leaves neither a non-connected graph nor a trivial one.

1- Eulerian paths and circuits (or tours)

D32: An *eulerian tour* (sometimes referred to as *eulerian circuit*) in a graph (or digraph) G is a closed walk that uses each edge (or arc) of G exactly once, and hence, is a closed trail. An *open eulerian trail* (sometimes referred to as *eulerian path*) is an open trail that uses each edge and/or arc exactly once.

D33: A graph or digraph that has an eulerian trail or tour is called *eulerian*.

Theorem 1.1 (Euler's theorem): a connected graph G has an Euler tour (is Eulerian) if and only if the degree of every vertex of G is even.

There are many proofs given in books for theorem 1.1.

Proof 1.1.1 (Dierker & Voxman, 1986)

First assume that G is eulerian and let C be an Euler tour in G . Note that each time a vertex v of G appears during a transversal of C , the two edges adjacent to v are accounted for (one edge going toward v , the other edge leaving v). By definition of an Euler tour, C includes all edges of G , so it follows that the degree of each vertex of G is even.

Now we prove the converse, that if all vertices of G are of even degree, then G is an Euler graph. If the converse is false, then there is a graph that does not contain an Euler tour, but that does have each vertex of even degree. Of all such graphs, choose one with the least number of edges (such a selection is called a *minimal counterexample*), and label it G . Since all vertices have even degrees and G is connected, therefore all edges have degrees greater than or equal to 2, and G must contain a tour. Choose the longest tour C in G . Since G is not eulerian, C will not include all of the edges of G , and hence $E(G) \setminus E(C) \neq \emptyset$.

Let G' be a component of the graph formed by removing the edges (not the vertices) of C from G . Since $E(G) \setminus E(C) \neq \emptyset$, it follows that $E(G') \neq \emptyset$. Moreover, since C itself is Eulerian, it must be the case that each vertex of C has even degree, from which it follows that every vertex of G' also has even degree. Recall that G was selected as the minimal counterexample. Thus, since $|E(G')| < |E(G)|$, and since every vertex of G' has even degree and G' is connected, we conclude that G' has an Euler tour C' . Since G is connected, C and C' must have a vertex v in common. we now have the situation illustrated in figure 1.1 below.

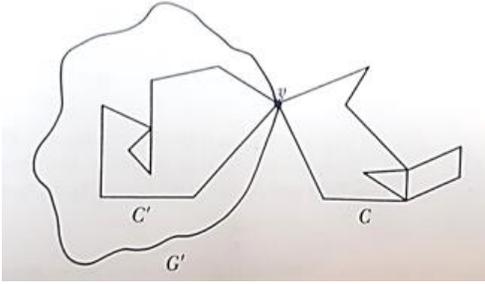


Figure 1.1 (Dierker & Voxman, 1986, p. 170)

The tour formed by starting at v , traversing C and then traversing C' is a tour that is longer than C . However, C was chosen as the tour of maximal length in G . This contradiction implies that G is eulerian.

Proof 1.1.2

\Rightarrow Suppose that P is an Eulerian trail of G . Whenever P passes through a vertex, there is a contribution of 2 towards the degree of that vertex. Since each edge occurs exactly once in P , each vertex must have even degree.

\Leftarrow The proof is by induction on the number of edges of G . Suppose that the degree of each vertex is even. Since G is connected, each vertex has degree at least 2 and so, by Lemma 1.4, G contains a cycle C . If C contains every edge of G , the proof is complete. If not, we remove from G the edges of C to form a new, possibly disconnected, graph H with fewer edges than G and in which each vertex still has even degree. By the induction hypothesis, each component of H has an Eulerian trail. Since each component of H has at least one vertex in common with C , by connectedness, we obtain the required Eulerian trail of G by following the edges of C until a non-isolated vertex of

H is reached, tracing the Eulerian trail of the component of H that contains that vertex, and then continuing along the edges of C until we reach a vertex belonging to another component of H , and so on. The whole process terminates when we return to the initial vertex (see Fig. 1.2).

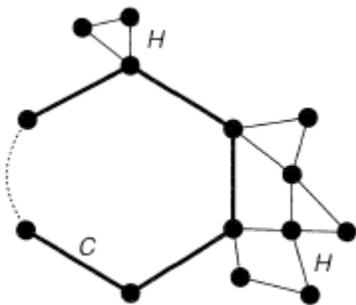


Figure 1.2 (Wilson, 1996, p. 32)

Proof 1.1.3: Fleury's algorithm

Start at any vertex u and traverse the edges in an arbitrary manner, subject only to the following rules (Wilson, 1996)

- (i) erase the edges as they are traversed, and if any isolated vertices result, erase them too;
- (ii) at each stage, use a bridge only if there is no alternative.

We show first that the construction can be carried out at each stage. Suppose that we have just reached a vertex v . If $v \neq u$, then the subgraph H that remains is connected and contains only two vertices of odd degree, u and v . To show that the construction can be carried out, we must show that the removal of the next edge does not disconnect H - or, equivalently, that v is incident with at most one bridge. But if this is not the case, then there exists a bridge vw such that the component K of $H - vw$ containing w does not contain u (see Fig. 1.3). Since the vertex w has odd degree in K , some other vertex of K must also have odd degree, giving the required contradiction. If $v = u$, the proof is almost identical, as long as there are still edges incident with u .

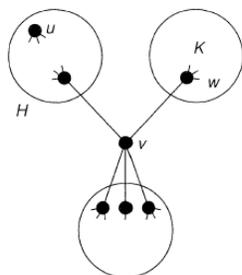


Figure 1.3 (Wilson, 1996, p. 33)

It remains only to show that this construction always yields a complete Eulerian trail. But this is clear, since there can be no edges of G remaining untraversed when the last edge incident to u is used, since otherwise the removal of some *earlier* edge adjacent to one of these edges would have disconnected the graph, contradicting (ii).

Proof 1.1.4 (Rosen, 2012)

We will assume that the graphs discussed have a finite number of vertices and edges.

What can we say if a connected multigraph has an Euler circuit? What we can show is that every vertex must have even degree. To do this, first note that an Euler circuit begins with a vertex a and continues with an edge incident with a , say $\{a, b\}$. The edge $\{a, b\}$ contributes one to $\deg(a)$. Each time the circuit passes through a vertex it contributes two to the vertex's degree, because the circuit enters via an edge incident with this vertex and leaves via another such edge.

Finally, the circuit terminates where it started, contributing one to $\deg(a)$. Therefore, $\deg(a)$ must be even, because the circuit contributes one when it begins, one when it ends, and two every time it passes through a (if it ever does). A vertex other than a has even degree because the circuit

contributes two to its degree each time it passes through the vertex. We conclude that if a connected graph has an Euler circuit, then every vertex must have even degree.

Is this necessary condition for the existence of an Euler circuit also sufficient? That is, must an Euler circuit exist in a connected multigraph if all vertices have even degree? This question can be settled affirmatively with a construction.

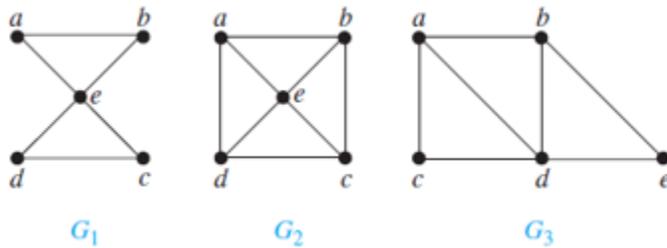


Figure 1.4 (Rosen, 2012, p. 694)

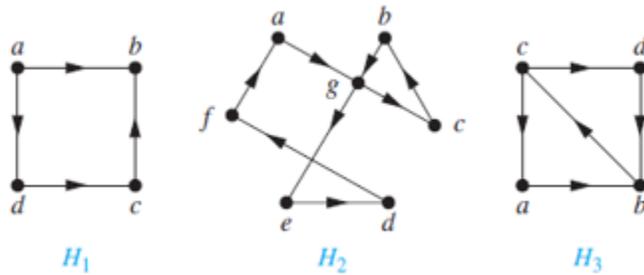


Figure 1.5 (Rosen, 2012, p. 694)

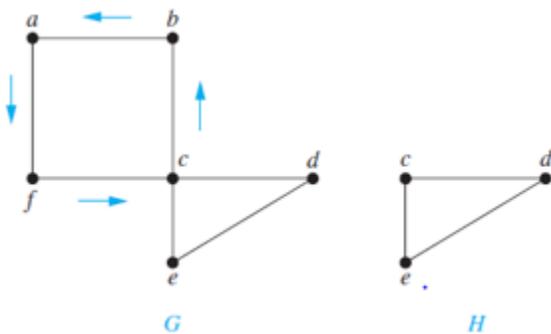


Figure 1.6 (Rosen, 2012, p. 695)

Suppose that G is a connected multigraph with at least two vertices and the degree of every vertex of G is even. We will form a simple circuit that begins at an arbitrary vertex a of G , building it edge by edge. Let $x_0 = a$. First, we arbitrarily choose an edge $\{x_0, x_1\}$ incident with a which is possible because G is connected. We continue by building a simple path $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\}$, successively adding edges one by one to the path until we cannot add another edge to

the path. This happens when we reach a vertex for which we have already included all edges incident with that vertex in the path. For instance, in the graph G in Figure 1.7 we begin at a and choose in succession the edges $\{a, f\}$, $\{f, c\}$, $\{c, b\}$, and $\{b, a\}$.

The path we have constructed must terminate because the graph has a finite number of edges, so we are guaranteed to eventually reach a vertex for which no edges are available to add to the path. The path begins at a with an edge of the form $\{a, x\}$, and we now show that it must terminate at a with an edge of the form $\{y, a\}$. To see that the path must terminate at a , note that each time the path goes through a vertex with even degree, it uses only one edge to enter this vertex, so because the degree must be at least two, at least one edge remains for the path to leave the vertex. Furthermore, every time we enter and leave a vertex of even degree, there are an even number of edges incident with this vertex that we have not yet used in our path. Consequently, as we form the path, every time we enter a vertex other than a , we can leave it. This means that the path can end only at a . Next, note that the path we have constructed may use all the edges of the graph, or it may not if we have returned to a for the last time before using all the edges.

An Euler circuit has been constructed if all the edges have been used. Otherwise, consider the subgraph H obtained from G by deleting the edges already used and vertices that are not incident with any remaining edges. When we delete the circuit a, f, c, b, a from the graph in Figure 1.6, we obtain the subgraph labeled as H .

Because G is connected, H has at least one vertex in common with the circuit that has been deleted. Let w be such a vertex. (In our example, c is the vertex.)

Every vertex in H has even degree (because in G all vertices had even degree, and for each vertex, pairs of edges incident with this vertex have been deleted to form H). Note that H may not be connected. Beginning at w , construct a simple path in H by choosing edges as long as possible, as was done in G . This path must terminate at w . For instance, in Figure 1.6, c, d, e, c is a path in H . Next, form a circuit in G by splicing the circuit in H with the original circuit in G (this can be done because w is one of the vertices in this circuit). When this is done in the graph in Figure 1.6, we obtain the circuit a, f, c, d, e, c, b, a .

Continue this process until all edges have been used. (The process must terminate because there are only a finite number of edges in the graph.) This produces an Euler circuit. The construction shows that if the vertices of a connected multigraph all have even degree, then the graph has an Euler circuit.

Theorem 1.2: A connected graph G has an Euler path that is not an Euler tour if and only if G has exactly two vertices of odd degree.

Proof 1.2.1 (Dierker & Voxman, 1986)

If G has an Euler path that is not an Euler tour, then a proof similar to the proof of theorem 1.1 shows that each vertex except the initial and final vertices to the path has even degree. Only two vertices, the initial and final, have odd degree.

Conversely, assume that G does have only two vertices of odd degree, u and v . We must prove it has an Euler path.

Form a new graph G' where

$$V(G') = V(G) \cup \{w\} \quad w \notin V(G)$$

$$E(G') = E(G) \cup \{\{w, u\}, \{w, v\}\} \quad \text{as illustrated in figure 1.7.}$$

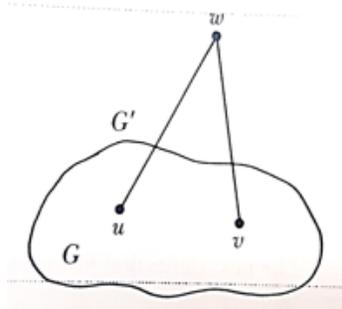


Figure 1.7 (Dierker & Voxman, 1986, p. 171)

Observe now that all vertices of G' have even degree, because adding a new edge to u and to v makes both u and v each have an even degree instead of an odd degree. Consequently, by theorem 2, there is an Euler tour C in G' . Therefore, by removing vertex w and edges $\{w, u\}$ and $\{v, w\}$, the Euler tour C of G' becomes an Euler path of G . In other words, the path $P = C \setminus \{\{w, u\}, \{w, v\}\}$ is an Euler path in G , and this completes the proof.

Algorithm 1.3 (Fleury's algorithm) (Rosen, 2012)

Fleury's algorithm constructs Euler circuits by first choosing an arbitrary vertex of a connected multigraph, and then forming a circuit by choosing edges successively. Once an edge is chosen, it is removed. Edges are chosen successively so that each edge begins where the last edge ends, and so that this edge is not a cut edge unless there is no alternative.

INPUT: a connected even graph G and a specified vertex u of G
 OUTPUT: an Euler tour W of G starting (and ending) at u

- 1: set $W := u$, $x := u$, $F := G$
- 2: **while** $\partial_F(x) \neq \emptyset$ **do**
- 3: choose an edge $e := xy \in \partial_F(x)$, where e is not a cut edge of F unless there is no alternative
- 4: replace uWx by $uWxey$, x by y , and F by $F \setminus e$
- 5: **end while**
- 6: **return** W

Figure 1.8: Fleury's algorithm (Bondy & Murty, 2008a, p. 87)

Lemma 1.4: if G is a graph and if $\delta(v) \geq 2$ for all vertices v of G , then G has a cycle.

Proof: (Dierker & Voxman, 1986)

The idea of the proof is quite straightforward: we begin with an arbitrary vertex and then move from vertex to adjacent vertex. At some point, we must return to a vertex that has already been used and when this occurs, we will have formed a cycle.

More formally, let w_0 be an arbitrary vertex of G . Since $\delta(w_0) \geq 2$, there is another vertex w_1 , that is adjacent to w_0 . Since $\delta(w_1) \geq 2$, there is a vertex other than w_0 adjacent to w_1 . Call this vertex w_2 .

Since $\delta(w_2) \geq 2$, there is another vertex w_3 , that is adjacent to w_2 and distinct from the vertex w_1 . It may happen that $w_3 = w_0$. If so, we have completed a cycle w_0, w_1, w_2, w_0 and thus have established the theorem. If $w_3 \neq w_0$, then, since $\delta(w_3) \geq 2$, there is a vertex w_4 other than w_2 adjacent to w_3 . If w_4 is equal to either w_0 or w_1 , then we have completed a cycle; if w_4 is distinct from both w_0 and w_1 , then we can continue this process to find a vertex, w_5 , and so on. Ultimately, because the graph has only a finite number of vertices, some vertex will be repeated. When this happens, a cycle will be formed. In other words, if $w_q = v = w_{q+r}$, then $(v = w_q), w_{q+1}, \dots, (w_{q+r} = v)$ is the desired cycle as indicated by figure 1.9.



Figure 1.9 (Dierker & Voxman, 1986, p. 104)

2- Hamiltonian paths and circuits

D34 (Rosen, 2012): A simple path in a graph G that passes through every vertex exactly once is called a *Hamilton path*, and a simple circuit in a graph G that passes through every vertex exactly once is called a *Hamilton circuit*. That is, the simple path $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ in the graph $G = (V, E)$ is a Hamilton path if $V = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ and $x_i \neq x_j$ for $0 \leq i < j \leq n$, and the simple circuit $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_0$ (with $n > 0$) is a Hamilton circuit if $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ is a Hamilton path.

Existence of Hamilton circuits (Rosen, 2012)

Is there a simple way to determine whether a graph has a Hamilton circuit or path? At first, it might seem that there should be an easy way to determine this, because there is a simple way to answer the similar question of whether a graph has an Euler circuit. Surprisingly, there are no known simple necessary and sufficient criteria for the existence of Hamilton circuits. However, many theorems are known that give sufficient conditions for the existence of Hamilton circuits. Also, certain properties can be used to show that a graph has no Hamilton circuit. For instance, a graph with a vertex of degree one cannot have a Hamilton circuit, because in a Hamilton circuit, each vertex is incident with two edges in the circuit. Moreover, if a vertex in the graph has degree two, then both edges that are incident with this vertex must be part of any Hamilton circuit. Also, note that when a Hamilton circuit is being constructed and this circuit has passed through a vertex, then

all remaining edges incident with this vertex, other than the two used in the circuit, can be removed from consideration. Furthermore, a Hamilton circuit cannot contain a smaller circuit within it.

Although no useful necessary and sufficient conditions for the existence of Hamilton circuits are known, quite a few sufficient conditions have been found. Note that the more edges a graph has, the more likely it is to have a Hamilton circuit. Furthermore, adding edges (but not vertices) to a graph with a Hamilton circuit produces a graph with the same Hamilton circuit. So as we add edges to a graph, especially when we make sure to add edges to each vertex, we make it increasingly likely that a Hamilton circuit exists in this graph. Consequently, we would expect there to be sufficient conditions for the existence of Hamilton circuits that depend on the degrees of vertices being sufficiently large. We state two of the most important sufficient conditions here.

These conditions were found by Gabriel A. Dirac in 1952 and Øystein Ore in 1960. (Rosen, discrete mathematics and applications)

Theorem 2.1 (Ore’s theorem): If G is a simple graph with n vertices with $n \geq 3$ such that

$\deg(u) + \deg(v) \geq n$ for every pair of nonadjacent vertices u and v in G , then G has a Hamilton circuit.

Proof 2.1.1 of Ore’s theorem (Wilson, 1996)

We assume the theorem false, and derive a contradiction. So let G be a non-hamiltonian graph with n vertices, satisfying the given condition on the vertex degrees. By adding extra edges if necessary, we may assume that G is “only just” non-Hamiltonian, in the sense that the addition of any further edge gives a Hamiltonian graph. (Note that adding an extra edge does not violate the condition on the vertex degrees.) It follows that G contains a path $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ passing through every vertex. But since G is non-Hamiltonian, the vertices v_1 and v_n are not adjacent, and so $\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$. It follows that there must be some vertex v_i adjacent to v_1 with the property that v_{i-1} is adjacent to v_n (see figure 2.1). But this gives us the required contradiction since $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v_n \rightarrow v_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i+1} \rightarrow v_i \rightarrow v_1$ is then a Hamiltonian cycle.

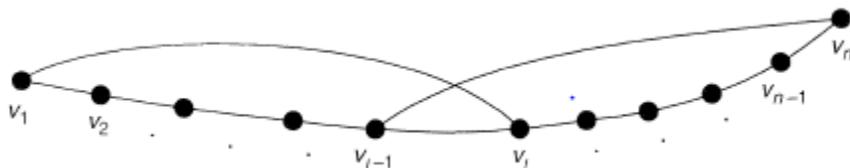


Figure 2.1 (Wilson, 1996, p. 36)

Theorem 2.2 (Dirac’s theorem): If G is a simple graph with n vertices with $n \geq 3$ such that the degree of every vertex in G is at least $n/2$, then G has a Hamilton circuit.

Dirac’s theorem can be proved as a corollary to Ore’s theorem because the conditions of Dirac’s theorem imply those of Ore’s theorem.

Both Ore’s and Dirac’s theorems provide sufficient conditions for a connected simple graph to have a Hamilton circuit. However, these theorems do not provide necessary conditions for the

existence of a Hamilton circuit. For example, the graph C_5 (see figure 2.2) has a Hamilton circuit but does not satisfy the hypotheses of either Ore's theorem or Dirac's theorem.

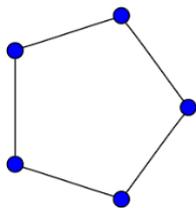


Figure 2.2

Other theorems and propositions give conditions that are sufficient or necessary for the existence of a Hamiltonian cycle.

Theorem 2.3: The cube Q_n is hamiltonian for $n \geq 2$. (Dierker & Voxman, 1986)

Proposition 2.4: “if G has a hamiltonian cycle, then for each nonempty set $S \subseteq V$, the graph $G - S$ has at most $|S|$ components” (West, 2001).

Proof 2.4.1 (West, 2001)

When leaving a component of $G - S$, a hamiltonian cycle can go only to S , and the arrivals in S must use distinct vertices of S . Hence, S must have at least as many vertices as $G - S$ has components (see Fig 2.3).

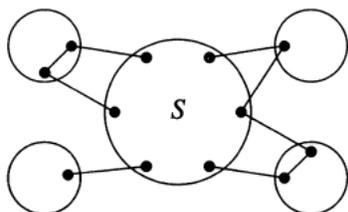


Figure 2.3 (West, 2001, p. 287)

Property 2.5 : A 2 -connected graph is hamiltonian (West, 2001).

Property 1.2.6 : If a graph G has a Hamiltonian cycle, then G has a subgraph H with the following properties: (Epp, 2010)

1. H contains every vertex of G .
2. H is connected.
3. H has the same number of edges as vertices.
4. Every vertex of H has degree 2.

3- Finding a shortest path in a graph

D35: For two vertices u and v in a graph G , the *distance* $d(u, v)$ from u to v is the length (number of edges) of a shortest $u - v$ path in G .

The distance d defined on the graph G is a metric (Gross & Yellen, 2004), that is, d satisfies the following four properties:

1. $d(u, v) \geq 0$ for all $u, v \in V(G)$.
2. $d(u, v) = 0$ if and only if $u = v$.
3. $d(u, v) = d(v, u)$ for all $u, v \in V(G)$ (the symmetric property).
4. $d(v, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ for all $u, v, w \in V(G)$ (the triangle inequality).

D36: A $u - v$ path of length $d(u, v)$ is called a $u - v$ *geodesic*.

D37: For a vertex v in a connected graph G , the *eccentricity* $e(v)$ of v is the distance from v to a vertex farthest from v . That is, $e(v) = \max\{d(v, x); x \in V(G)\}$

D38: If, to the edges of a graph G , an attribute is added, a weight, then G , together with the weights on its edges, would be called a *weighted graph*.

D39: The *weight* of an edge, is an attribute added to an edge e denoted by $w(e)$.

Weighted graphs occur frequently in applications of graph theory (Bondy & Murty, 1976). In the friendship graph, for example, weights might indicate intensity of friendship; in the communications graph, they could represent the construction or maintenance costs of the various communication links.

Shortest path

The question of finding the shortest path was introduced in Bondy and Murty (1976) as follows:

If H is a subgraph of a weighted graph, the *weight* $w(H)$ of H is the sum of the weights $\sum_{e \in E(H)} w(e)$ on its edges. Many optimization problems amount to finding, in a weighted graph, a subgraph of a certain type with minimum (or maximum) weight. One such is the *shortest path problem*: given a railway network connecting various towns, determine a shortest route between two specified towns in the network.

Here, one must find, in a weighted graph, a path of minimum weight connecting two specified vertices u_0 and v_0 ; the weights represent distances by rail between directly-linked towns, and are therefore non-negative. The path indicated in the graph of figure 3.1 is a (u_0, v_0) path of minimum Weight.

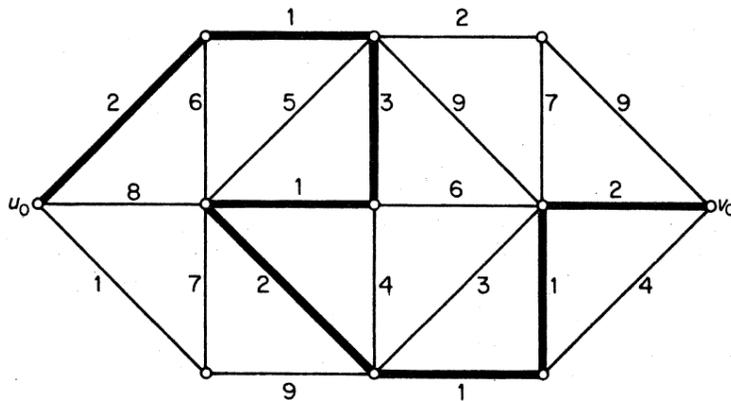


Figure 3.1: a (u_0, v_0) path with minimum weight (Bondy & Murty, 1976, p. 16)

Breadth-First Search (BFS) algorithm

Input: An unweighted graph (or digraph) and a start vertex u .
Idea: Maintain a set R of vertices that have been reached but not searched and a set S of vertices that have been searched. The set R is maintained as a First-In First-Out list (queue), so the first vertices found are the first vertices explored.
Initialization: $R = \{u\}$, $S = \emptyset$, $d(u, u) = 0$.
Iteration: As long as $R \neq \emptyset$, we search from the first vertex v of R . The neighbors of v not in $S \cup R$ are added to the back of R and assigned distance $d(u, v) + 1$, and then v is removed from the front of R and placed in S . ■

Figure 3.2 (West, 2001, p. 99)

Dijkstra's algorithm (Epp, 2010)

In 1959, Dijkstra developed an algorithm to find the shortest path between a starting vertex and an ending vertex in a weighted graph in which all the weights are positive.

At the start of execution of the algorithm, each vertex u of G is given a label $L(u)$, which indicates the current best estimate of the length of the shortest path from a to u . $L(a)$ is initially set equal to 0 because the shortest path from a to a has length zero, but, because there is no previous information about the lengths of the shortest paths from a to any other vertices of G , the label $L(u)$ of each vertex u other than a is initially set equal to a number, denoted ∞ , that is greater than the sum of the weights of all the edges of G . As execution of the algorithm progresses, the values of $L(u)$ are changed, eventually becoming the actual lengths of the shortest paths from a to u in G .

Because T is built up outward from a , at each stage of execution of the algorithm the only vertices that are candidates to join T are those that are adjacent to at least one vertex of T . Thus at each stage of Dijkstra's algorithm, the graph G can be thought of as divided into three parts: the tree T that is being built up, the set of "fringe" vertices that are adjacent to at least one vertex of the tree, and the rest of the vertices of G . Each fringe vertex is a candidate to be the next vertex added to T .

The one that is chosen is the one for which the length of the shortest path to it from a through T is a minimum among all the vertices in the fringe.

An essential observation underlying Dijkstra's algorithm is that after each addition of a vertex v to T , the only fringe vertices for which a shorter path from a might be found are those that are adjacent to v [because the length of the path from a to v was a minimum among all the paths from a to vertices in what was then the fringe]. So after each addition of a vertex v to T , each fringe vertex u adjacent to v is examined and two numbers are compared: the current value of $L(u)$ and the value of $L(v) + w(v, u)$, where $L(v)$ is the length of the shortest path to v (in T) and $w(v, u)$ is the weight of the edge joining v and u . If $L(v) + w(v, u) < L(u)$, then the value of $L(u)$ is changed to $L(v) + w(v, u)$.

Dijkstra's algorithm is given in the box below (see Fig 3.3) (Epp, 2010)

Input: G [a connected simple graph with a positive weight for every edge], ∞ [a number greater than the sum of the weights of all the edges in the graph], $w(u, v)$ [the weight of edge $\{u, v\}$], a [the starting vertex], z [the ending vertex]

Algorithm Body:

1. Initialize T to be the graph with vertex a and no edges. Let $V(T)$ be the set of vertices of T , and let $E(T)$ be the set of edges of T .
2. Let $L(a) = 0$, and for all vertices in G except a , let $L(u) = \infty$.
[The number $L(x)$ is called the label of x .]
3. Initialize v to equal a and F to be $\{a\}$.
[The symbol v is used to denote the vertex most recently added to T .]
4. **while** ($z \notin V(T)$)
 - 4a. $F := (F - \{v\}) \cup \{\text{vertices that are adjacent to } v \text{ and are not in } V(T)\}$
[The set F is called the fringe. Each time a vertex is added to T , it is removed from the fringe and the vertices adjacent to it are added to the fringe if they are not already in the fringe or the tree T .]
 - 4b. For each vertex u that is adjacent to v and is not in $V(T)$,
if $L(v) + w(v, u) < L(u)$ **then**

$$L(u) := L(v) + w(v, u)$$

$$D(u) := v$$

[Note that adding v to T does not affect the labels of any vertices in the fringe F except those adjacent to v . Also, when $L(u)$ is changed to a smaller value, the notation $D(u)$ is introduced to keep track of which vertex in T gave rise to the smaller value.]
 - 4c. Find a vertex x in F with the smallest label
 Add vertex x to $V(T)$, and add edge $\{D(x), x\}$ to $E(T)$
 $v := x$ [This statement sets up the notation for the next iteration of the loop.]

end while

Output: $L(z)$ [$L(z)$, a nonnegative integer, is the length of the shortest path from a to z .]

Figure 3.3: Dijkstra's algorithm (Epp, 2010, p. 711)

Dijkstra's algorithm can be written in a different way as shown in figure

Input: A graph (or digraph) with nonnegative edge weights and a starting vertex u . The weight of edge xy is $w(xy)$; let $w(xy) = \infty$ if xy is not an edge.

Idea: Maintain the set S of vertices to which a shortest path from u is known, enlarging S to include all vertices. To do this, maintain a tentative distance $t(z)$ from u to each $z \notin S$, being the length of the shortest u, z -path yet found.

Initialization: Set $S = \{u\}$; $t(u) = 0$; $t(z) = w(uz)$ for $z \neq u$.

Iteration: Select a vertex v outside S such that $t(v) = \min_{z \notin S} t(z)$. Add v to S . Explore edges from v to update tentative distances: for each edge vz with $z \notin S$, update $t(z)$ to $\min\{t(z), t(v) + w(vz)\}$.

The iteration continues until $S = V(G)$ or until $t(z) = \infty$ for every $z \notin S$.

At the end, set $d(u, v) = t(v)$ for all v . ■

Figure 3.4 :L'algorithme de Dijkstra (West, 2001, p. 97)

Epp (2010) illustrated in a drawing (see Fig 3.5 and 3.6) the way the Dijkstra algorithm works.

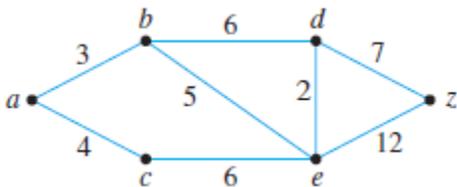


Figure 3.5: example of a weighted graph (Epp, 2010, p. 712)

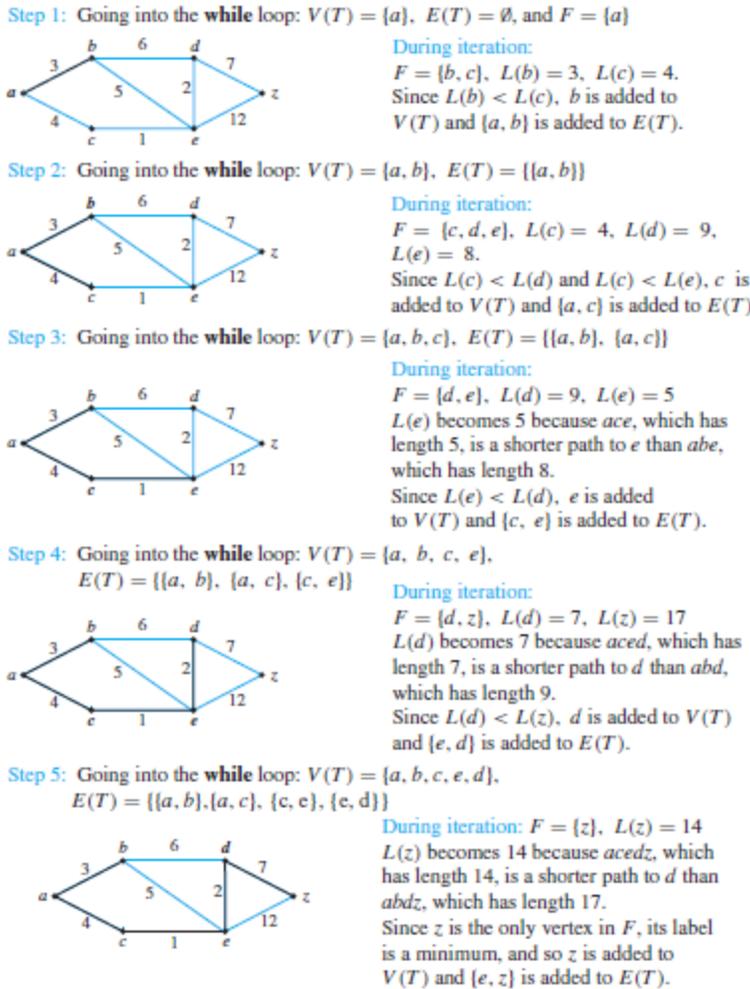


Figure 3.6: illustration of the way to find the shortest path using Dijkstra's algorithm (Epp, 2010, p. 712)

Another way to illustrate the way Dijkstra's algorithm works is by using a table. We present below a table (cf. table 3.7) given by Epp to illustrate how the algorithm works for the same example given above.

Step	$V(T)$	$E(T)$	F	$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(z)$
0	$\{a\}$	\emptyset	$\{a\}$	0	∞	∞	∞	∞	∞
1	$\{a\}$	\emptyset	$\{b, c\}$	0	3	4	∞	∞	∞
2	$\{a, b\}$	$\{\{a, b\}\}$	$\{c, d, e\}$	0	3	4	9	8	∞
3	$\{a, b, c\}$	$\{\{a, b\}, \{a, c\}\}$	$\{d, e\}$	0	3	4	9	5	∞
4	$\{a, b, c, e\}$	$\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, e\}\}$	$\{d, z\}$	0	3	4	7	5	17
5	$\{a, b, c, e, d\}$	$\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, e\}, \{e, d\}\}$	$\{z\}$	0	3	4	7	5	14
6	$\{a, b, c, e, d, z\}$	$\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, e\}, \{e, d\}, \{e, z\}\}$							

Table 3.7: table that shows how to find the shortest path of the graph shown in figure 1 using Dijkstra's algorithm (Epp, 2010, p. 713)

A flow diagram (see figure 3.8) to summarize Dijkstra's algorithm is shown below where S represents a proper subset of V such that $u_0 \in S$, and \bar{S} denotes $V \setminus S$ (Bondy & Murty, 1976).

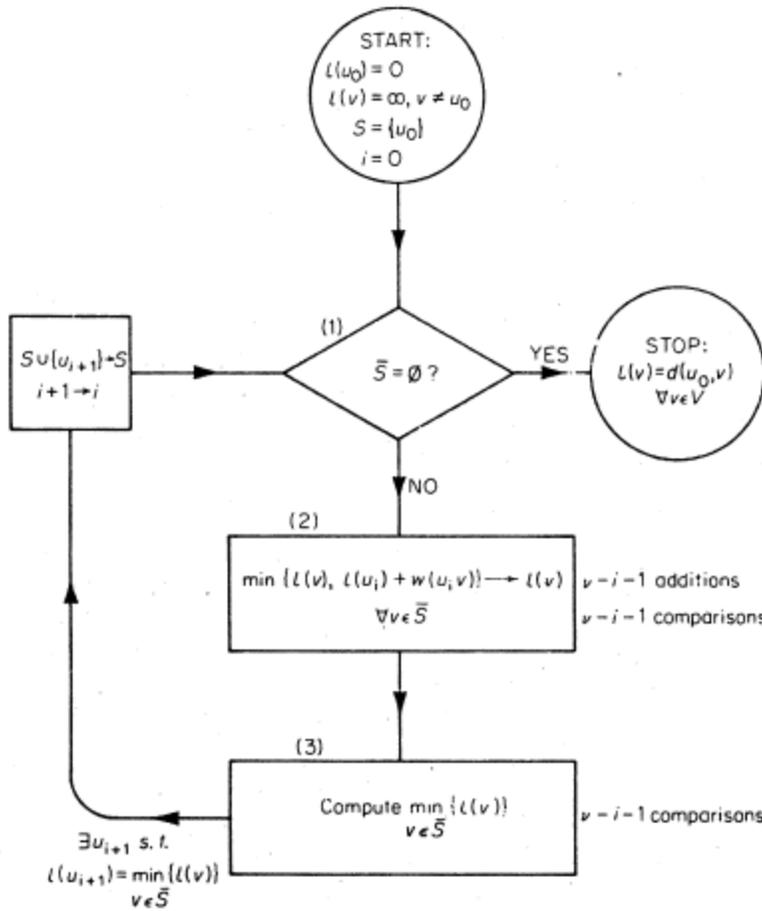


Figure 3.8: Dijkstra's algorithm (Bondy & Murty, 1976, p. 20)

An inductive reasoning shows that Dijkstra's algorithm always produces the length of a shortest path between two vertices in a weighted graph (Epp, 2010). The correctness of the algorithm is given by the following theorem:

Theorem 3.1: When a connected, simple graph with a positive weight for every edge is input to Dijkstra's algorithm with starting vertex a and ending vertex z , the output is the length of a shortest path from a to z .

Proof 3.1.1 (Epp, 2010)

Let G be a connected, weighted graph with no loops or parallel edges and with a positive weight for every edge. Let T be the graph built up by Dijkstra's algorithm, and for each vertex u in G , let $L(u)$ be the label given by the algorithm to vertex u .

For each integer $n \geq 0$, let the property $P(n)$ be the sentence

After the n th iteration of the while loop in Dijkstra's algorithm,

(1) T is a tree, and (2) for every vertex v in T , $L(v)$ is the length of a shortest path in G from a to v .

We will show by mathematical induction that $P(n)$ is true for all integers n from 0 through the termination of the algorithm.

Show that $P(0)$ is true: When $n = 0$, the graph T is a tree because it is defined to consist only of the vertex a and no edges. In addition, $L(a)$ is the length of the shortest path from a to a because the initial value of $L(a)$ is 0.

Show that for all integers $k \geq 0$, if $P(k)$ is true then $P(k + 1)$ is also true: Let k be any integer with $k \geq 0$ and suppose that

After the k th iteration of the while loop in Dijkstra's algorithm, (1) T is a tree, and (2) for every vertex v in T , $L(v)$ is the length of a shortest path in G from a to v .

We must show that after the $(k + 1)$ st iteration of the *while* loop in Dijkstra's algorithm, (1) T is a tree, and (2) for every vertex v in T , $L(v)$ is the length of a shortest path in G from a to v .

So suppose that after the $(k + 1)$ st iteration of the *while* loop in Dijkstra's algorithm, the vertex v and edge $\{x, v\}$ have been added to T , where x is in $V(T)$. Clearly the new value of T is a tree because adding a new vertex and edge to a tree does not create a circuit and does not disconnect the tree. By inductive hypothesis for each vertex y in the tree before the addition of v , $L(y)$ is the length of a shortest path from a to y . So it remains only to show that $L(v)$ is the length of a shortest path from a to v .

Now, according to the algorithm, the final value of $L(v) = L(x) + w(x, v)$. Consider

any shortest path from a to v , and let $\{s, t\}$ be the first edge in this path to leave

T , where $s \in V(T)$ and $t \notin V(T)$. This situation is illustrated below in figure 3.9.

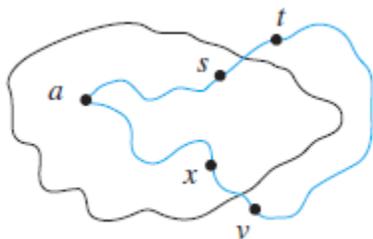


Figure 3.9 (Epp, 2010, p. 714)

Let $LSP(a, v)$ be the length of a shortest path from a to v , and let $LSP(a, s)$ be the length of a shortest path from a to s . Observe that

$$LSP(a, v) \geq LSP(a, s) + w(s, t) \quad (\text{because the path from } t \text{ to } v \text{ has length } \geq 0)$$

$$\geq L(s) + w(s, t) \quad (\text{by inductive hypothesis because } s \text{ is a vertex in } T)$$

$$\geq L(x) + w(x, v) \quad (t \text{ is in the fringe of the tree, and so if } L(s) + w(s, t) \text{ were less than } L(x) + w(x, v) \text{ then } t \text{ would have been added to } T \text{ instead of } v).$$

On the other hand

$L(x) + w(x, v) \geq LSP(a, v)$ (because $L(x) + w(x, v)$ is the length of a path from a to v and so it is greater than or equal to the length of the shortest path from a to v).

It follows that $LSP(a, v) = L(x) + w(x, v)$,

and, since $L(v) = L(x) + w(x, v)$,

$L(v)$ is the length of a shortest path from a to v . This completes the proof by mathematical induction.

The algorithm terminates as soon as z is in T , and, since we have proved that the label of every vertex in the tree gives the length of the shortest path to it from a , then, in particular, $L(z)$ is the length of a shortest path from a to z .

Theorem 3.2 : Given a (di)graph G and a vertex $u \in V(G)$, Dijkstra's algorithm computes $d(u, z)$ for every $z \in V(G)$. (West, 2001)

Complexity of Dijkstra's algorithm (Rosen, 2012)

Dijkstra's algorithm uses no more than $n - 1$ iterations where n is the number of vertices in the graph, because one vertex is added to the distinguished set at each iteration. We are done if we can estimate the number of operations used for each iteration. We can identify the vertex not in $V(T)$ with the smallest label using no more than $n - 1$ comparisons.

Then we use an addition and a comparison to update the label of each vertex not in $V(T)$. It follows that no more than $2(n - 1)$ operations are used at each iteration, because there are no more than $n - 1$ labels to update at each iteration. Because we use no more than $n - 1$ iterations, each using no more than $2(n - 1)$ operations, we have Theorem 3.3.

Theorem 3.3: Dijkstra's algorithm uses $O(n^2)$ operations (additions and comparisons) to find the length of a shortest path between two vertices in a connected simple undirected weighted graph with n vertices (Rosen, 2012).

3.4- The traveling salesman problem

The traveling salesperson problem asks for the circuit of minimum total weight in a weighted, complete, undirected graph that visits each vertex exactly once and returns to its starting point. This is equivalent to asking for a Hamilton circuit with minimum total weight in the complete graph, because each vertex is visited exactly once in the circuit.

The most straightforward way to solve an instance of the traveling salesperson problem is to examine all possible Hamilton circuits and select one of minimum total length. How many circuits do we have to examine to solve the problem if there are n vertices in the graph? Once a starting point is chosen, there are $(n - 1)!$ different Hamilton circuits to examine, because there are $n - 1$ choices for the second vertex, $n - 2$ choices for the third vertex, and so on. Because a Hamilton circuit can be traveled in reverse order, we need only examine $(n - 1)!/2$ circuits to find our answer. Note that $(n - 1)!/2$ grows extremely rapidly. Trying to solve a traveling salesperson problem in this way when there are only a few dozen vertices is impractical. For example, with 25 vertices, a total of $24!/2$ (approximately 3.1×10^{23}) different Hamilton circuits would have to be considered. If it took just one nanosecond (10^{-9} second) to examine each Hamilton circuit, a total of approximately ten million years would be required to find a minimum-length Hamilton circuit in this graph by exhaustive search techniques.

Because the traveling salesperson problem has both practical and theoretical importance, a great deal of effort has been devoted to devising efficient algorithms that solve it. However, no algorithm with polynomial worst-case time complexity is known for solving this problem. Furthermore, if a polynomial worst-case time complexity algorithm were discovered for the traveling salesperson problem, many other difficult problems would also be solvable using polynomial worst-case time complexity algorithms. This follows from the theory of NP-completeness.

A practical approach to the traveling salesperson problem when there are many vertices to visit is to use an approximation algorithm. These are algorithms that do not necessarily produce the exact solution to the problem but instead are guaranteed to produce a solution that is close to an exact solution. That is, they may produce a Hamilton circuit with total weight W' such that $W \leq W' \leq c^W$, where W is the total length of an exact solution and c is a constant. For example, there is an algorithm with polynomial worst-case time complexity that works if the weighted graph satisfies the triangle inequality such that $c = \frac{3}{2}$. For general weighted graphs for every positive real number k no algorithm is known that will always produce a solution at most k times a best solution. If such an algorithm existed, this would show that the class P would be the same as the class NP, perhaps the most famous open question about the complexity of algorithms.

3.5- The Chinese Postman Problem (Wilson, 1996)

In this problem, discussed by the Chinese mathematician Mei-Ku Kwan, a postman wishes to deliver his letters, covering the least possible total distance and returning to his starting point. He must obviously traverse each road in his route at least once, but should avoid covering too many roads more than once.

This problem can be reformulated in terms of a weighted graph, where the graph corresponds to the network of roads, and the weight of each edge is the length of the corresponding road. In this reformulation, the requirement is to find a closed walk of minimum total weight that includes each edge at least once. If the graph is Eulerian, then any Eulerian trail is a closed walk of the required type. Such an Eulerian trail can be found by Fleury's algorithm. If the graph is not Eulerian, then the problem is much harder, although an efficient algorithm for its solution is known. To illustrate the ideas involved, we look at a special case, in which exactly two vertices have odd degree (see Fig. 3.10).

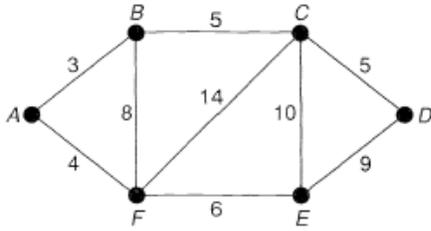


Figure 3.10 (Wilson, 1996, p. 40)

Since vertices B and E are the only vertices of odd degree, we can find a semi-Eulerian trail from B to E covering each edge exactly once (A non-Eulerian graph G is semi-Eulerian if there exists a trail containing every edge of G). In order to return to the starting point, covering the least possible distance, we now find the shortest path from E to B using the algorithm described above. The solution of the Chinese postman problem is then obtained by taking this shortest path $E \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow B$, together with the original semi-Eulerian trail, giving a total distance of $13 + 64 = 77$. Note that, if we combine the shortest path and the semi-Eulerian trail, we get an Eulerian graph (see Fig. 3.11).

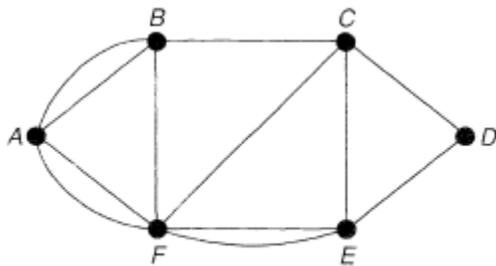


Figure 3.11 (Wilson, 1996, p. 40)

Annexe 2- Présentation de la grille d'entretien avec les enseignants-chercheurs

Notre grille d'entretien est composée de deux parties : une première partie qui porte sur le profil des enseignants-chercheurs et leur activité de recherche ; et une deuxième partie qui porte sur leurs pratiques d'enseignement.

Première partie :

- 1- Pourriez-vous vous présenter ? (votre domaine de recherche, vos années d'expérience en enseignement et en recherche, les modules que vous enseignez, votre statut au sein des deux institutions, enseignement et recherche, le(s) pays d'études et le pays dans lequel vous exercez votre enseignement, etc.)
- 2- Comment définissez-vous le champ de mathématiques discrètes ? Qu'entendez-vous par « mathématiques discrètes » ?
- 3- Comment concevez-vous l'activité de preuve en mathématiques discrètes ?
- 4- Quels sont la place et le rôle du travail de la modélisation en mathématiques discrètes ?
- 5- Comment caractérisez-vous le lien entre les mathématiques discrètes et les autres disciplines ?

Deuxième partie :

- 6- De quelle manière élaborez-vous les contenus d'enseignement ?
- 7- Etant un chercheur, est-ce que vous sentez que les recherches que vous faites ont une influence sur les contenus que vous enseignez en classe ?
- 8- Quelles sont les principales ressources que vous utilisez pour votre enseignement ?
- 9- Pourriez-vous présenter une ressource que vous avez produite et que vous considérez importante pour l'enseignement des mathématiques discrètes ?
- 10- En tant qu'enseignant, rencontrez-vous des difficultés, ou au contraire, des facilités dans l'enseignement des contenus en rapport avec les mathématiques discrètes ? Quel est le comportement des étudiants quand vous enseignez des contenus en relation avec les mathématiques discrètes ?
- 11- Pourriez-vous décrire la place de l'activité de preuve dans votre enseignement des mathématiques discrètes ?
- 12- Dans votre enseignement des objets discrets, est-ce que vous faites des liens avec d'autres disciplines ou d'autres domaines mathématiques dans les cours et les TDs proposés ? Quels sont la place et le rôle du travail de la modélisation dans votre enseignement des mathématiques discrètes ? Donnez des exemples.
- 13- Quelles conditions et contraintes interviennent dans l'élaboration et la mise en œuvre de vos cours et vos TDs ?
- 14- Comment évaluez-vous les étudiants et sur quoi ?

15- Pourriez-vous décrire la place de la dimension expérimentale dans les mathématiques que vous enseignez ? Utilisez-vous la salle informatique et/ou d'autres objets matériels ?

16- Faites-vous partie d'un groupement de chercheurs ou d'enseignants ?

Annexe 3 : Tableaux documents des enseignants-chercheurs

Tableau 3.1 : Tableau document de LB

Parcours de formation en mathématiques				
Classes de situations	Sous-buts	Ressources utilisées	Règles d'action	Invariants opératoires
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Définir la structure d'une unité d'enseignement	Ouvrages Syllabus	Il enseigne les mathématiques discrètes d'une façon théorique, sans faire des liens avec des exemples issus de la vie réelle et d'autres domaines ou disciplines Il enseigne sans recours à des outils technologiques ou à des travaux pratiques	Il est important que les contenus soient conformes avec les instructions officielles de la filière Un enseignant au supérieur a une certaine marge de liberté dans la conception de son enseignement
	Pondérer/alterner cours et TDs	Syllabus	Dans l'enseignement, il fait moitié cours moitié exercices	Il est important que les contenus soient conformes avec les instructions officielles de la filière
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Esquisser les contenus du cours	Publications scientifiques Ouvrages	Il convertit les publications scientifiques en textes d'enseignement Il donne des remarques et des exemples en relation avec des thématiques sur lesquelles porte son travail de recherche Il cherche à faire passer les idées de base telles que la définition des graphes, les matrices d'adjacence	Le langage des publications scientifiques est différent du langage utilisé en classe Certaines notions mathématiques dans l'enseignement peuvent être mises en lien avec la théorie mathématique sur laquelle l'enseignant-chercheur travaille dans sa recherche Il est important que les étudiants soient cultivés au niveau de la connexité et la non-connexité des

			<p>des graphes, les objets standards tels que les chemins et les cycles, les caractéristiques et les invariants des graphes, les degrés, la stabilité, l'émail, etc.</p> <p>Il se sert de beaucoup d'exemples et de preuves « techniques »</p>	<p>graphes et du recouvrement et d'autres applications</p> <p>Les preuves en mathématiques discrètes sont considérées comme « difficiles »</p>
Introduire la théorie des graphes	la des	Publications scientifiques	<p>Il introduit les notions mathématiques en commençant par des applications</p> <p>Il introduit le graphe en prenant comme exemple le modèle des liens d'amitié existants entre les étudiants</p>	<p>Les définitions en mathématiques discrètes sont simples</p> <p>Il est important de modéliser dans l'enseignement des mathématiques discrètes</p>
Enseigner un théorème	un	<p>Ouvrages</p> <p>Publications scientifiques</p>	<p>Il fait des choix permettant aux étudiants de découvrir les idées et de les formuler</p> <p>Il présente aux étudiants des outils qui leur servent d'astuces dans les preuves</p>	<p>Il est plus facile de répondre à la question « quoi faire » dans les preuves en mathématiques discrètes qu'à la question « pourquoi faire »</p> <p>Les preuves en mathématiques discrètes sont basées sur des astuces</p> <p>Les preuves en mathématiques discrètes ne sont pas faites les unes sur les autres</p> <p>Les preuves en mathématiques discrètes ont des énoncés simples</p>

			<p>Il essaie de faire surgir les aspects techniques d'une preuve comme par exemple la création d'un tableau à plusieurs dimensions dans certaines preuves</p> <p>Avant de commencer la rédaction d'une preuve, il illustre les idées ; une fois que les étudiants ont bien compris les idées, il commence la rédaction</p> <p>Il donne aux étudiants des « textes modèles » et les encourage à les lire</p>	<p>L'énoncé simple en mathématiques est un danger sérieux</p> <p>Les preuves en mathématiques discrètes ont des aspects techniques qui se répètent souvent</p> <p>Les preuves en mathématiques discrètes ont des particularités par rapport aux preuves en général</p> <p>Les particularités des preuves en mathématiques discrètes font que ce soit un domaine qui n'est pas aisé pour les étudiants</p> <p>Une difficulté des mathématiques discrètes est la compréhension des idées</p> <p>Il est parfois difficile de rédiger les idées en mathématiques discrètes</p> <p>La difficulté la plus importante dans l'enseignement des mathématiques discrètes est la difficulté dans le raisonnement</p> <p>Certaines phrases dans les « textes modèles » sont irremplaçables lors de la rédaction d'une preuve</p>
	Etablir des liens avec d'autres		Il évoque les liens avec d'autres domaines, la topologie et la	

	domaines mathématiques		géométrie par exemple, sans travailler sur ces liens	
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Mettre en œuvre des moments d'entraînement et d'application (exercices)	Ouvrages	Il incite les étudiants à résoudre des exercices en classe Il donne des devoirs aux étudiants et vérifie leurs travaux Il incite les étudiants à résoudre des exercices au tableau en classe	La difficulté la plus importante dans l'enseignement des mathématiques discrètes est la difficulté dans le raisonnement La vérification des travaux des étudiants permet à l'enseignant d'être sûr qu'ils effectuent le travail demandé
	Enseigner les preuves	Ouvrages	Il présente aux étudiants des outils qui leur servent d'astuces dans les preuves Il incite les étudiants à rédiger	Les preuves en mathématiques discrètes sont basées sur des astuces Il est important que les étudiants s'entraînent à la rédaction Les étudiants sont parfois incapables de rédiger les idées en mathématiques discrètes même s'ils les comprennent Les preuves en mathématiques discrètes sont considérées comme « difficiles »
L2 dans un parcours de formation en mathématiques				
Concevoir et mettre en œuvre la planification	Pondérer/alterner cours et TDs	Syllabus	Dans l'enseignement, il fait moitié cours moitié exercices, donc 15 heures de cours et 15 heures de TDs	Il est important que les contenus soient conformes avec les instructions officielles de la filière

de l'enseignement	Sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement	Syllabus Polycopié conçu collectivement avec deux autres enseignants-chercheurs	Dans la partie sur la théorie des graphes, il enseigne les graphes, les digraphes, les tournois, les chemins, les cycles, et les arbres	Il est important que les contenus soient conformes avec les instructions officielles de la filière
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Solliciter l'attention des étudiants en classe	Ouvrages Publications scientifiques	Il fait appel à beaucoup d'exemples	Les étudiants ont des préjugés sur les mathématiques discrètes, ils les trouvent difficiles Il faut beaucoup d'exemples pour familiariser les étudiants au raisonnement en mathématiques discrètes
	Etablir des liens avec d'autres domaines mathématiques	Polycopié conçu collectivement avec deux autres enseignants-chercheurs	Il fait des liens avec les systèmes d'équations algébriques	Il est possible d'établir des liens entre les mathématiques discrètes et les structures algébriques finies
Master 1 dans un parcours de formation en mathématiques				
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement	Ouvrages Syllabus	Il se lance plus de théorie qu'en licence Il enseigne les graphes, les digraphes, les tournois, les chemins, les cycles, les arbres, et la coloration	En Master, il y a un niveau théorique plus important qu'en licence
	Pondérer/alterner cours et TDs	Syllabus	Dans l'enseignement, il fait moitié cours moitié exercices, donc 30 heures de cours, 30 heures de TDs	Il est important que les contenus soient conformes avec les instructions officielles de la filière

Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Enseigner les preuves	<p>Ouvrages</p> <p>Publications scientifiques</p> <p>Résultats de ses propres recherches</p>	<p>Avant de rédiger la preuve d'un théorème, il illustre les idées</p> <p>Il met l'accent sur les « aspects techniques » d'une preuve qui se répètent</p> <p>Il enseigne des résultats de ses propres recherches</p>	<p>La compréhension des idées est très importante en mathématiques discrètes</p> <p>Les illustrations sont importantes pour les preuves en mathématiques discrètes</p> <p>L'illustration peut être un obstacle à voir les choses avec la généralité demandée</p> <p>Les preuves en mathématiques discrètes ont des aspects « techniques » qui se répètent souvent</p> <p>Il est important de faire sortir les aspects « techniques » des preuves pour avoir des astuces</p> <p>Il est agréable pour un enseignant-chercheur de pouvoir présenter à ses étudiants des résultats de son activité de recherche</p>
	Etablir des liens avec d'autres domaines mathématiques		Il fait des liens surtout avec l'algèbre linéaire, et un peu avec la topologie et la géométrie	

Tableau 3.2 : Tableau document de LQ

Parcours de formation en mathématiques				
Classes de situations	Sous-buts	Ressources utilisées	Règles d'action	Invariants opératoires
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Définir la structure d'une unité d'enseignement	Ouvrages tels que : « Graph theory with applications » de Bondy et Murty, et « introduction to graph theory » de West Syllabus	Elle donne la théorie de la théorie des graphes sans applications Elle n'utilise pas l'ordinateur dans son enseignement	Il faut qu'il y ait une conformité des contenus avec les instructions officielles de la filière
	Pondérer/alterner les cours et TDs	Syllabus	Elle donne, quand possible, un peu plus de cours que de TDs Elle termine le cours d'un chapitre avant de commencer les TDs	Le cours donne une compréhension plus profonde des mathématiques discrètes que le TD Un enseignant qui donne les deux parties, cours magistral et TDs, d'un module a une marge de manœuvre dans la planification de l'alternance des séances (cours magistral et TDs)
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Modifier/adapter les contenus d'un cours	Réactions des étudiants	Elle effectue des modifications au niveau des contenus du cours magistral suivant les réactions des étudiants	Il est important que les étudiants comprennent les notions Il est important que les étudiants se sentent à l'aise avec les contenus d'un cours
	Enseigner un théorème	Ouvrages tels que : « Graph theory with applications » de	Elle donne les théorèmes et leurs preuves « mathématiques »	Un contenu est « mathématique » quand il n'aborde pas des applications

		Bondy et Murty, et « introduction to graph theory » de West	<p>Elle effectue des modifications au niveau de quelques théorèmes en divisant les preuves en plusieurs étapes</p> <p>Elle travaille les preuves elle-même en classe avec les étudiants</p> <p>Elle explique les étapes d'une preuve d'un théorème comme s'il était donné en TD</p>	<p>Il est parfois difficile d'effectuer des modifications au niveau des contenus du cours en mathématiques discrètes</p> <p>La division des preuves des théorèmes en plusieurs étapes les rend plus accessibles aux étudiants</p> <p>Dans l'activité de preuve en mathématiques discrètes, les étudiants trouvent des difficultés au niveau du raisonnement</p> <p>Les étudiants se sentent plus à l'aise dans les séances de TDs</p> <p>Il est important d'expliquer aux étudiants dans le cours la construction de preuves qui ressemblent à celles données en TD</p>
	Solliciter l'attention des étudiants en classe	Réactions des étudiants	<p>Elle anticipe les réactions des étudiants pour savoir comment gérer son enseignement</p> <p>Elle encourage les étudiants en leur disant qu'ils ont besoin du temps pour s'habituer au raisonnement en mathématiques discrètes</p>	<p>La capacité d'anticiper les réactions des étudiants guide l'enseignant dans son enseignement en classe</p> <p>Il faut du temps pour que les étudiants se familiarisent avec le domaine des mathématiques discrètes</p>
Concevoir et mettre en œuvre	Modifier/adapter les contenus d'un TD	Ouvrages tels que : « Graph theory with	Elle allège le TD en éliminant des questions similaires ou des questions difficiles	Le cours donne plus de compréhension des mathématiques discrètes que le TD

une séance de TDs		applications » de Bondy et Murty, et « introduction to graph theory » de West	Elle remplace certaines questions « difficiles » par d'autres questions « plus faciles »	Certaines questions sont inutiles pour les étudiants
	Esquisser les contenus du TD	Ouvrages tels que : « Graph theory with applications » de Bondy et Murty, et « introduction to graph theory » de West	Elle donne des exercices qui portent sur les preuves des théorèmes qu'elle divise en parties dans le TD	Les questions sont plus accessibles aux étudiants quand elles sont divisées en plusieurs étapes
	Mettre en œuvre des moments d'entraînement et d'application (exercices)		Dans le TD, elle divise les questions difficiles en plusieurs étapes	La division des preuves des théorèmes en plusieurs étapes les rend plus accessibles aux étudiants Dans l'activité de preuve en mathématiques discrètes, les étudiants trouvent des difficultés au niveau du raisonnement
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Elaborer individuellement une épreuve écrite	Ouvrages tels que : « Graph theory with applications » de Bondy et Murty, et « introduction to graph theory » de West Ressources en ligne	Elle donne des exercices de compréhension du cours (tels que des démonstrations des théorèmes déjà faits en classe) Elle donne des questions qui portent sur des parties de théorèmes travaillés en classe	Le principal objectif de l'évaluation est de vérifier la compréhension des contenus (théorèmes et démonstrations) Un étudiant qui a bien compris un théorème doit être capable de répondre à une question qui porte sur ce théorème

		<p>Réactions des étudiants</p> <p>Conseil d'un collègue</p>	<p>Elle donne des questions qui visent à évaluer l'analyse de l'étudiant, c'est-à-dire des problèmes nouveaux, dont la résolution demande une réflexion</p> <p>Elle donne des questions qui portent sur tous les chapitres d'un module</p> <p>Elle rédige des questions basées sur les théorèmes dans des ouvrages ou donne des exercices présentés dans ces ouvrages</p> <p>Elle résout les exercices qu'elle sélectionne dans les ouvrages avant de les inclure dans l'épreuve écrite</p> <p>Elle utilise des ressources en ligne quand elle se sent bloquée et qu'elle ne trouve pas des questions dans les ouvrages</p> <p>Elle met beaucoup de temps à choisir les questions d'une épreuve écrite</p>	<p>Un des objectifs de l'évaluation est de tester la capacité d'analyse d'un étudiant</p> <p>Les étudiants choisissent parfois d'étudier certains chapitres d'un module et pas d'autres</p> <p>Les problèmes proposés dans les ouvrages peuvent donner des idées pour l'évaluation</p> <p>Certains exercices présents dans les ouvrages sont « difficiles » pour les étudiants</p> <p>Il est difficile de trouver des questions en ligne si l'enseignant ne sait pas exactement ce qu'il recherche</p> <p>Les ouvrages constituent une source plus fiable d'exercices pour un enseignant que l'Internet</p> <p>Un enseignant doit être prudent en choisissant les questions d'une épreuve écrite</p>
--	--	---	--	--

			<p>Parfois elle rédige des exercices et décide de ne pas les inclure dans une épreuve écrite</p> <p>Elle mobilise des questions qu'elle estime « difficiles » pour les étudiants afin de tester leurs réactions, mais ne leur attribue pas trop de notes</p> <p>Elle sollicite, si besoin, l'opinion d'un enseignant-chercheur plus expérimenté sur les questions proposées dans une évaluation</p>	<p>Les exercices dans une épreuve écrite ne doivent pas être très « difficiles » pour les étudiants</p> <p>Un enseignant-chercheur expérimenté est capable d'anticiper les réactions des étudiants face à une question</p>
	Répartir les notes dans une épreuve écrite		Elle répartit la note dans une épreuve écrite d'une façon équitable sur tous les chapitres	Un étudiant qui a bien étudié doit être capable de réussir
L2 dans un parcours de formation en mathématiques				
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Planifier collectivement une unité d'enseignement	Polycopié conçu collectivement avec deux autres enseignants-chercheurs	Elle a conçu collectivement avec deux autres enseignants-chercheurs un module qui constitue une introduction à la théorie des graphes, à l'arithmétique, et à la récurrence	<p>Les discussions et les collaborations entre les enseignants permettent d'améliorer le module en profitant de l'expérience de chacun</p> <p>Il est important qu'il y ait une homogénéité au niveau des contenus d'un même module dans les différents sites d'une même université</p> <p>Les branches des mathématiques discrètes sont indépendantes les unes des autres</p>

				Il est important d'introduire les mathématiques discrètes aux étudiants comme pour les autres domaines mathématiques
	Définir la structure d'une unité d'enseignement	Ouvrages tels que : « Graph theory with applications » de Bondy et Murty, et « introduction to graph theory » de West Polycopié conçu collectivement avec deux autres enseignants-chercheurs	Elle choisit de commencer par des définitions de base et d'augmenter le niveau au fur et à mesure (graphes, surgraphes, digraphes, cycles, stables, graphe complet, graphe biparti, chemin, cycle, tournoi) Elle choisit de donner des contenus biens connus comme l'arbre, le bloc, le graphe Hamiltonien, la coloration, etc.	Le choix des contenus à inclure dans un module est plus facile quand on commence de zéro Les contenus d'un module doivent être en harmonie avec les syllabus présents au sein de l'institution
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Introduire la théorie des graphes en classe	Polycopié conçu collectivement avec deux autres enseignants-chercheurs	Elle commence le cours par une introduction générale sur la théorie des graphes	
	Modifier/adapter les contenus d'un cours	Polycopié conçu collectivement avec deux autres enseignants-chercheurs Réactions des étudiants	Elle effectue des modifications au niveau de quelques théorèmes, elle les divise en plusieurs parties ou les remplace par d'autres théorèmes « plus faciles »	Il est parfois difficile d'effectuer des modifications au niveau des contenus du cours en mathématiques discrètes Les réactions des étudiants en classe permettent à l'enseignant de savoir s'ils ont bien compris

Master dans un parcours de formation en mathématiques				
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Planifier individuellement une unité d'enseignement	Ouvrages tels que : « Graph theory with applications » de Bondy et Murty, et « introduction to graph theory » de West	Elle donne la théorie de la théorie des graphes sans applications Elle donne des définitions de base qu'elle donne en licence (graphes, surgraphes, digraphes, cycles, stables, graphe complet, graphe biparti, chemin, cycle, tournoi) et ajoute d'autres (couplage)	Les contenus en Master doivent être un peu différents de ceux donnés en licence En Master, il y a un niveau théorique plus important qu'en licence La marge de liberté dans les choix des contenus d'un module est plus grande en Master qu'en licence
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Esquisser les contenus du cours	Ouvrages tels que : « Graph theory with applications » de Bondy et Murty, et « introduction to graph theory » de West	Elle rappelle des définitions de base qu'elle donne en licence (graphes, surgraphes, digraphes, cycles, stables, graphe complet, graphe biparti, chemin, cycle, tournoi) et ajoute d'autres (couplage, arbres, connectivité, coloration) Elle donne une notion sur les graphes planaires	Les étudiants sont intéressés par les définitions et les applications (telles que la coloration) en mathématiques discrètes Il faut qu'il y ait une conformité des contenus avec les instructions officielles de la filière Il existe un théorème intéressant en coloration qui mobilise les graphes planaires
	Etablir des liens avec d'autres domaines mathématiques		Elle travaille sur le lien avec l'algèbre linéaire en donnant un théorème qui porte sur ce lien et en modélisant un graphe par une matrice	Il est important que les étudiants soient cultivés au niveau des liens entre la théorie des graphes et d'autres domaines mathématiques
Parcours de formation en mathématiques appliquées				
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Esquisser les contenus du cours	Ouvrages tels que : « Graph theory with applications » de	Elle donne une partie théorique avec quelques applications	Il faut qu'il y ait une conformité des contenus avec les instructions officielles de la filière

		Bondy et Murty, et « introduction to graph theory » de West		
	Enseigner un algorithme	Algorithmes sur ordinateurs	<p>Elle introduit des algorithmes pour trouver le plus court chemin d'un graphe comme les « Bellman-Ford Algorithm » et « Dijkstra Algorithm »</p> <p>Elle travaille avec les étudiants sur les analyses des algorithmes (comment et pourquoi un algorithme donne le plus court chemin)</p> <p>Elle utilise l'ordinateur pour montrer les algorithmes aux étudiants</p>	<p>Des applications, telles que des algorithmes, doivent être présentées aux étudiants d'un parcours de formation en mathématiques appliquées</p> <p>Il est important d'utiliser l'ordinateur pour présenter les algorithmes aux étudiants</p>

			<p>Il définit des contenus autour des graphes (plus courts chemins, arbres couvrants poids minimum, flot maximum, coloration), de l'optimisation linéaire (programmation linéaire, simplex) et de l'ordonnancement de la production</p> <p>Il assortit le cours d'exemples « parlants » aux étudiants</p>	<p>Le profil des étudiants conditionne le choix des contenus dans l'enseignement</p> <p>Le parcours de formation conditionne le choix des contenus dans l'enseignement</p> <p>La disponibilité des ressources est une contrainte à prendre en compte lors de la planification de l'enseignement</p> <p>L'objectif du module est de familiariser les étudiants avec le vocabulaire et de les rendre capables de modéliser des situations en mobilisant les outils présentés et d'obtenir une solution optimale aux problèmes concrets</p> <p>L'algorithme du simplex permet d'obtenir des résultats dans des problèmes d'optimisation</p> <p>L'ordonnancement de la production comprend des raisonnements intéressants et instructifs pour les étudiants</p> <p>Un enseignement ancré dans les applications permet de justifier aux étudiants pourquoi on étudie ce qu'on étudie</p>
--	--	--	---	---

	Pondérer/alterner les cours et les TDs		Il essaie d'alterner les cours et les TDs, ainsi que les moments où il faut que les étudiants écoutent et suivent les explications et les moments où ils doivent réfléchir eux-mêmes	Il est important de trouver le bon discours adapté aux étudiants dans un enseignement en termes d'exemples mobilisés, de pondération théories/preuves/exemples et de choix de problèmes à aborder
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Esquisser les contenus du cours	<p>Ouvrages tels que « algorithms » de Dasgupta, Papadimitriou, et Vazirani</p> <p>Articles portant sur des modélisations de problèmes issus de situations concrètes du contexte industriel</p> <p>Ressources issues de son activité de recherche</p>	<p>Il travaille sur la modélisation dans les enseignements qui concernent l'optimisation linéaire</p> <p>Il inclut dans son enseignement des sujets d'ordonnancement de la production</p> <p>Il propose des sujets issus de son activité de recherche</p> <p>Il pioche dans les ouvrages des façons de présenter les idées</p>	<p>Les articles portant sur des modélisations de problèmes issus de situations concrètes du contexte industriel sont intéressants pour les étudiants</p> <p>L'ordonnancement de la production est intéressant dans l'enseignement parce qu'il est ancré dans les applications</p> <p>En ordonnancement de la production, il y a des cas simples faciles à modéliser et sur lesquels les étudiants peuvent raisonner</p> <p>Certains sujets proposés dans un enseignement de l'ordonnancement de la production ne se trouvent pas dans des ouvrages classiques de la littérature</p> <p>Certains ouvrages sont bien écrits en ce qui concerne la présentation des idées</p>

	Engager les étudiants dans une lecture d'articles de recherche	Articles publiés dans des conférences récentes	<p>Il sélectionne des articles de conférences relativement « récents » et « simples » pour les étudiants</p> <p>Il propose aux étudiants une activité de lecture de ces articles</p> <p>Il donne des articles qui portent sur des modélisations de problèmes issus de situations concrètes du contexte industriel</p>	<p>La proposition des idées simples issues des recherches récentes est stimulante pour les étudiants</p> <p>La lecture des articles récents publiés dans des conférences qui portent sur des sujets d'application concrets est stimulante pour les étudiants</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Esquisser les contenus du TD	<p>Propres ressources de formations réalisées les années précédentes</p> <p>Internet</p>	<p>Il pioche des exercices dans les ouvrages</p> <p>Il recherche des problèmes sur Internet</p> <p>Il donne des énigmes et des questions ouvertes</p> <p>Il choisit des problèmes de modélisation portant sur des situations issues du contexte industriel</p> <p>Il choisit des problèmes industriels concrets en lien avec la logistique et la gestion de la production</p>	<p>Il est délicat de trouver un problème pour illustrer une situation</p> <p>La recherche d'un problème sur Internet permet de donner un premier aperçu des possibilités en ce qui concerne la mobilisation de ce problème dans l'enseignement</p> <p>Les questions ouvertes peuvent susciter des débats en classe</p>

			Il mobilise des problèmes issus de son activité de recherche ou inspirés de sujets de recherche actuels	Certains problèmes en mathématiques discrètes peuvent être réinvestis à différents niveaux
Mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes	Problèmes issus de son activité de recherche Ouvrages tels que « algorithms » de Daspugta, Papadimitriou, et Vazirani	Il prend du temps pour travailler sur les raisonnements et montrer qu'un raisonnement sur un cas ne se transpose pas forcément sur un autre cas qui lui ressemble Il montre aux étudiants comment les idées sous-jacentes d'un certain raisonnement sur un problème peuvent être adaptées à un autre problème Il essaie d'interagir avec les étudiants et de les remobiliser en ce qui concerne la recherche d'idées sur des problèmes en classe, quand ils ne sont plus motivés	La gestion des émotions des étudiants et de leur motivation est très délicate, surtout en travaillant sur des problèmes ouverts Les étudiants sont peu habitués à travailler sur des problèmes de recherche Les étudiants sont souvent démotivés en travaillant sur les exercices et les problèmes ouverts Il est désagréable pour un étudiant de ne pas avoir d'idées sur un problème sur lequel on travaille en classe Les étudiants se sentent déçus quand ils découvrent qu'une idée qu'ils considéraient bonne pour résoudre un problème ne l'est pas en réalité	

			Il donne des indices aux étudiants quand ils sont bloqués dans la résolution d'un problème	Il est essentiel d'éviter de donner trop d'indices aux étudiants quand ils se sentent bloqués
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs	Planifier des moments d'expérimentation avec des objets matériels	Jeux qu'il fabrique lui-même	Il essaie de toujours faire des séances où les étudiants ont la chance de manipuler du matériel Il fabrique des jeux avec du bois, du plastique, et d'autres matériaux qu'il utilise dans son enseignement	La dimension expérimentale est importante dans l'enseignement Les activités expérimentales avec manipulation de matériel peuvent être très coûteuses en termes de temps Il est important que les étudiants expérimentent avec du matériel quand ils sont confrontés à une situation de type problème ouvert La dimension expérimentale peut être présente en mobilisant des jeux et du matériel
	Mettre en œuvre des séances de programmation	Logiciels	Il fait des séances sur ordinateurs quand il le juge « pertinent » et « possible »	Il est possible d'atteindre un tas d'objectifs en recherche opérationnelle sans utiliser des ordinateurs Souvent les séances informatique consistent à enseigner une procédure, comme se servir des fonctionnalités principales d'un logiciel La dimension expérimentale peut être plus forte quand un étudiant est placé devant un plateau avec du matériel que dans une salle informatique

<p>Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation</p>	<p>Elaborer les modalités d'évaluation des étudiants</p>	<p>Ressources propres de formations réalisées les années précédentes</p> <p>Internet</p> <p>Ouvrages tels que « algorithms » de Daspugta, Papadimitriou, et Vazirani</p> <p>Articles publiés dans des conférences récentes</p>	<p>Il donne aux étudiants une évaluation écrite, qui peut être avec ou sans document</p> <p>Il donne aux étudiants une évaluation sur machine, qui consiste à donner un problème industriel, et où ils doivent produire un modèle du problème et le résoudre</p> <p>Il planifie souvent des évaluations qui portent sur un exposé oral qui résulte d'un travail en groupes consistant en la lecture d'un article de conférence en anglais et en la rédaction d'un résumé</p> <p>Il donne parfois des devoirs maison, où les étudiants ont une quinzaine de jours pour résoudre un problème</p>	<p>Il est important que les étudiants soient capables de reproduire un raisonnement sur des cas simples ou proches des cas exposés dans le module</p> <p>Dans certains domaines mathématiques, la réussite dans une évaluation exige un apprentissage de formules et de techniques</p> <p>Les étudiants rencontrent un obstacle d'ordre linguistique dans la compréhension d'un article rédigé en anglais</p>
<p>Participer à un collectif d'enseignement ou de recherche</p>	<p>Participer à un collectif de recherche qui s'intéresse à la diffusion et à l'enseignement des mathématiques</p>		<p>Il participe à une équipe de recherche, <i>maths à modeler</i></p>	<p>Appartenir à un groupement de chercheurs peut constituer une occasion pour rencontrer des personnes qui s'intéressent à des façons différentes d'enseigner les mathématiques discrètes, et aux problèmes ouverts et aux jeux avec matériel, et qui sont susceptibles d'en développer</p>

				Des chercheurs dans une équipe à laquelle appartient un chercheur peuvent apporter un regard critique sur certaines situations qu'il développe et qu'il propose dans/pour son enseignement
--	--	--	--	--

Tableau 3.4 : Tableau document de FT

Université				
Classes de situations	Sous-buts	Ressources utilisées	Règles d'action	Invariants opératoires
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement	Problèmes de recherche issus de situations vécues dans des ateliers tels que la chasse à la bête, le jeu du solitaire, le pavage avec les dominos	Il choisit des contenus qui sollicitent une activité de preuve Il choisit les contenus au fur et à mesure en fonction de l'évolution des situations en classe	Faire des mathématiques, c'est faire des preuves Une personne qui occupe un poste de recherche a une grande marge de liberté dans les choix des contenus des modules qu'elle enseigne
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Esquisser les contenus du cours	Problèmes de recherche issus de situations vécues dans des ateliers tels que la chasse à la bête, le jeu du solitaire, le pavage avec les dominos Objets matériels comme la chasse à la bête ou le jeu du solitaire	Il met l'accent dans son enseignement sur l'activité de preuve Il transforme des problèmes issus de la recherche mathématique en situations pour l'enseignement	L'enseignement des mathématiques discrètes permet de viser des savoirs relatifs à la preuve Dans la rédaction des preuves, on risque de se concentrer sur les aspects techniques et d'oublier les idées qui font que la preuve fonctionne Ce qui est intéressant dans une preuve en mathématiques discrètes, c'est l'idée, c'est l'aspect innovateur Des problèmes issus des recherches en mathématiques peuvent être transformés en situations pour l'enseignement

	Mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes	<p>Problèmes de recherche issus de situations vécues dans des ateliers tels que la chasse à la bête, le jeu du solitaire, le pavage avec les dominos</p> <p>Objets matériels comme la chasse à la bête ou le jeu du solitaire</p>	<p>Pour enseigner une notion aux étudiants, il lance un problème amusant en classe et les invite à réfléchir dessus</p> <p>Pour résoudre un problème de modélisation, il regarde la démarche et ce qui est pertinent par rapport au problème, et le met dans une classe d'objets sur lesquels il peut travailler comme les graphes</p> <p>Il essaie de développer chez les étudiants les gestes d'un chercheur : il expérimente et teste les petits cas puis généralise, et formule le raisonnement ou le résultat</p>	<p>Les cours donnés en amphi peuvent la plupart du temps être remplacés par des vidéos ou des livres</p> <p>Les problèmes en mathématiques discrètes sont faciles d'accès</p> <p>En mathématiques discrètes, le modèle de résolution des problèmes de modélisation est rarement désigné à l'avance</p> <p>Une difficulté des étudiants est de reconnaître les objets dans des problèmes, c'est-à-dire identifier leurs propriétés</p> <p>L'enseignement des mathématiques discrètes permet de placer les étudiants en posture de chercheurs</p> <p>Il est important que les étudiants vivent des problèmes de recherche en mathématiques</p>
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Elaborer les modalités d'évaluation des étudiants	Discussion avec les collègues qui interviennent dans le même module	<p>Il discute avec les collègues qui interviennent dans le même module des modalités de l'évaluation</p> <p>Il attribue une partie de la note à la présence en classe et à la participation active dans le travail de groupes</p>	<p>Il y a un aspect subjectif dans l'évaluation</p> <p>Les professeurs sont capables d'évaluer les étudiants en discutant entre eux sans mettre des notes</p> <p>L'évaluation est une prescription institutionnelle</p>

			<p>Il propose aux étudiants de rédiger un mini mémoire de quelques pages</p> <p>Il demande aux étudiants un exposé oral relatif au mini-mémoire</p>	<p>L'évaluation est peu fiable pour 90% des étudiants</p> <p>L'évaluation orale permet de distinguer entre les étudiants dans un même binôme, qui ont présenté une même production écrite</p>
	Concevoir des projets mémoires pour l'évaluation des étudiants	Problèmes de recherche qui ressemblent à ceux vécus en classe (pour l'évaluation écrite)	<p>Il donne les sujets des mini-mémoires assez tôt aux étudiants</p> <p>Il donne des sujets des mini-mémoires qui ressemblent aux problèmes qu'il travaille dans les séances de classe avec les étudiants</p> <p>Il demande aux étudiants de rédiger les parties des mini-mémoires qui ont été abordées dans le module</p>	Il est important qu'il y ait dans les mini-mémoires des parties non abordées en classe
Participer à un collectif d'enseignement ou de recherche	Participer à un collectif de recherche qui s'intéresse à la diffusion et à l'enseignement des mathématiques	Problèmes issus de situations de la vie réelle et de jeux	Il participe à une équipe de recherche qui a pour objectif de proposer des ingénieries didactiques et des situations recherche basées sur des vrais problèmes de recherche, et de les diffuser en mettant en place des ateliers	Il est important de réduire la distance entre les mathématiques théoriques enseignées et les problèmes de la vie réelle
L1 et L2 (module optionnel)				
Concevoir et mettre en œuvre la	Esquisser les contenus d'une unité d'enseignement	Problèmes de recherche issus de situations vécues dans des	Il choisit des contenus qui sollicitent une activité de preuve	Il y a une grande marge de liberté dans le choix des contenus d'un module optionnel

<p>planification de l'enseignement</p>		<p>ateliers tels que la chasse à la bête, le jeu du solitaire, le pavage avec les dominos</p>	<p>Il propose aux étudiants des problèmes tels que la chasse à la bête, le jeu du solitaire et le pavage avec les dominos</p> <p>Il sélectionne des problèmes en classe issus de situations de recherche</p>	<p>Faire des mathématiques, c'est faire des preuves</p> <p>L'objectif du module est de former les étudiants au raisonnement</p> <p>Il est souvent difficile pour les étudiants de formuler des résultats et des raisonnements</p> <p>Il est important de faire émerger chez les étudiants, dès les premières séances, la nécessité de la preuve</p> <p>Il est important que les étudiants vivent des problèmes de recherche en mathématiques</p>
<p>Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours</p>	<p>Sélectionner les contenus du cours</p>	<p>Problèmes de recherche issus de situations vécues dans des ateliers tels que la chasse à la bête, le jeu du solitaire, le pavage avec les dominos</p>	<p>Il adapte des situations préalablement proposées dans des ateliers de recherche de manière à être données en classe</p> <p>Il met l'accent dans son enseignement sur l'activité de preuve</p> <p>Il sélectionne des problèmes d'optimisation combinatoire qui permettent d'aborder la notion de condition nécessaire et condition suffisante</p>	<p>Des problèmes issus des recherches en mathématiques peuvent être transformés en situations pour l'enseignement</p> <p>Faire des mathématiques, c'est faire des preuves</p> <p>Les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence d'un objet sont d'une certaine manière une définition de cet objet</p>

	Mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes	<p>Problèmes de recherche issus de situations vécues dans des ateliers tels que la chasse à la bête, le jeu du solitaire, le pavage avec les dominos</p> <p>Objets matériels comme la chasse à la bête ou le jeu du solitaire</p> <p>Productions des étudiants</p>	<p>Il met les étudiants en classe en posture de chercheurs</p> <p>Il propose aux étudiants des situations qui développent leur prise d'initiative</p> <p>Il développe chez les étudiants un réflexe sur le questionnement des choses ; il leur pose des questions qui portent sur le « pourquoi » quand ils donnent des affirmations</p> <p>Il écoute les idées des étudiants, même si ce qu'ils disent est faux, et développe des questionnements à la base de ces idées</p>	<p>Il est important que les étudiants vivent des moments de recherche en mathématiques</p> <p>Les problèmes en mathématiques discrètes sont facilement énonçables</p> <p>Le caractère ludique des problèmes en mathématiques discrètes donne aux étudiants l'envie de les résoudre</p> <p>Il est important que les étudiants s'approprient le problème sur lequel ils travaillent</p> <p>Le principal apport de l'enseignement des mathématiques discrètes est l'enseignement du raisonnement</p> <p>Il est important de développer chez les étudiants un réflexe sur le questionnement des choses</p> <p>La gestion de classe qui consiste à être guidé par les productions des étudiants est souvent difficile pour un enseignant</p>
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Evaluer le travail des étudiants en classe		<p>Il attribue une partie de la note à la présence en classe</p> <p>Il invite les étudiants à travailler en groupes. Il repère les groupes</p>	<p>Il est convenu de donner de bonnes notes aux étudiants dans un module optionnel</p> <p>Il est important que les étudiants soient présents et actifs en classe</p>

			actifs, et identifie les individualités au sein des groupes ; S'il estime qu'un étudiant a été plus actif dans son groupe, il peut lui donner un point de plus qu'une autre personne qui a le même nombre de présences	Il est nécessaire d'individualiser l'évaluation au sein d'un groupe L'évaluation de l'activité des étudiants dans un travail de groupe est subjective
			Il pondère le travail en groupe comme un contrôle continu lors de l'évaluation	Il est facile pour un étudiant d'avoir une bonne note en étant présent en classe et actif au sein de son groupe
M2 dans un parcours de formation en « Recherche Opérationnelle, Combinatoire et Optimisation »				
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement	Problèmes de recherche issus de situations vécues dans des ateliers tels que la chasse à la bête, le jeu du solitaire, le pavage avec les dominos Questions et théorèmes tels que la coloration de graphes, l'emploi du temps, etc.	Il choisit des contenus qui sollicitent une activité de preuve aussi bien que des savoirs notionnels Il sélectionne des contenus qui ciblent des savoirs comme la coloration des graphes Il choisit les contenus au fur et à mesure en fonction de l'évolution des situations en classe	Une personne qui occupe un poste de recherche a une grande marge de liberté dans les choix des contenus des modules qu'elle enseigne Faire des mathématiques, c'est faire des preuves En Master, il y a un niveau théorique plus important qu'en licence Il y a un univers de problèmes, de questions, et de théorèmes qui peuvent être abordés en Master

	Gérer le temps de l'enseignement	Productions des étudiants	Il fixe des contenus potentiels à aborder en classe et avance dans ces contenus selon les productions des étudiants	Les étudiants ont besoin du temps pour pouvoir rechercher un problème
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Introduire la théorie des graphes en classe	Problème de l'emploi de temps	Il commence par le problème de l'emploi de temps en mettant les étudiants dans une position d'expérimentation sur ce problème Il interroge l'algorithme et son efficacité, il pose des questions sur le « pourquoi » et le « comment »	Dans le problème de l'emploi du temps, le graphe peut être construit facilement par les étudiants 90 pourcent des étudiants procèdent sur le problème de l'emploi du temps en utilisant l'algorithme glouton
	Mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes	Problèmes de recherche issus de situations vécues dans des ateliers tels que la chasse à la bête, le jeu du solitaire, le pavage avec les dominos Questions et théorèmes tels que la coloration de graphes, l'emploi du temps, etc.	Il propose des problèmes qui ont un aspect ludique Il met les étudiants en classe en posture de chercheurs Il cherche à modéliser les problèmes en utilisant les graphes	Le caractère ludique des problèmes en mathématiques discrètes donne aux étudiants l'envie de les résoudre Il est important que les étudiants vivent des moments de recherche en mathématiques Les étudiants vivent une phase de frustration quand ils sont placés en situation de recherche Les mathématiques discrètes peuvent être des outils de modélisation et des outils d'enseignement de la preuve Le problème mathématique derrière un problème de la vraie vie en est plus important

		Productions des étudiants	<p>Il s'intéresse plus aux problèmes mathématiques qu'aux objets qu'ils modélisent</p> <p>Il aborde les questions en fonction de l'avancement des étudiants sur des problèmes qu'il propose</p> <p>En fonction de ce que les étudiants font, il leur demande des questions sur l'efficacité des algorithmes qu'ils ont utilisés, leur complexité, leur domaine de validité, etc.</p> <p>Il prend le temps de réfléchir aux propositions des étudiants pour résoudre un problème</p>	<p>Les étudiants peuvent mettre en œuvre des stratégies pour résoudre un problème avec lesquelles l'enseignant n'est pas familier ou formuler des idées auxquelles il n'a pas la réponse</p> <p>Il est important de développer chez les étudiants un réflexe sur le questionnement des choses</p> <p>Dans un travail de recherche, on peut ne pas avoir toutes les réponses aux questions que l'on se pose</p>
	Enseigner les preuves	Papiers de recherche publiés sur certains théorèmes	<p>Il met l'accent dans son enseignement sur l'activité de preuve</p> <p>Il consulte des papiers de recherche publiés dans le cas où il oublie la preuve d'un théorème</p>	<p>Faire des mathématiques, c'est faire des preuves</p> <p>Il y a une différence entre la posture de chercheur et la posture de l'enseignant en classe. Un enseignant est supposé avoir les savoirs afin de les transmettre, un chercheur peut ne pas tout savoir</p>
	Etablir des liens avec d'autres disciplines	Problèmes de recherche issus de situations vécues dans des ateliers tels que la chasse à la	Il évoque des liens avec des disciplines comme la chimie ou les sciences sociales, mais dans le cadre de la modélisation sans entreprendre un travail profond la dessus	Les mathématiques discrètes permettent de modéliser des problèmes issus d'autres disciplines comme la chimie ou les sciences sociales

		bête, le jeu du solitaire, le pavage avec les dominos		
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Elaborer les modalités d'évaluation des étudiants	Discussions avec d'autres enseignants	Il discute avec d'autres enseignants pour décider s'il accepte les étudiants qui candidatent pour une thèse	Il est convenu de donner de bonnes notes aux étudiants dans un module de M2 Il y a une dimension contractuelle dans l'enseignement ; certains étudiants font le travail juste pour obtenir le diplôme

Tableau 3.5 : Tableau document de FF

Institut Universitaire de Technologie				
Classes de situations	Sous-buts	Ressources utilisées	Règles d'action	Invariants opératoires
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Définir la structure d'une unité d'enseignement	Ancien polycopié d'un module de mathématiques discrètes conçu par un collègue	<p>Il s'inspire dans la construction de l'unité d'enseignement d'un ancien module conçu par un collègue et chaque année il change 20 à 30 pourcent des contenus du module</p> <p>Il articule la modélisation et la résolution de problèmes dans les contenus du module</p>	<p>Un enseignant au supérieur a une marge de liberté dans le choix des contenus d'une unité d'enseignement</p> <p>Les problèmes en mathématiques discrètes sont faciles d'accès</p> <p>Les problèmes en mathématiques discrètes peuvent faire appel à des méthodes de résolution complexes</p> <p>Les objectifs d'apprentissage à partir de la résolution de problèmes de modélisation en mathématiques discrètes sont le choix de modèle à mobiliser et les méthodes de résolution</p>
	Sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement	Ouvrages	<p>Il met l'accent dans son enseignement sur l'optimisation</p> <p>Il choisit des contenus qui portent sur des jeux combinatoires</p>	<p>Les mathématiques discrètes sont les mathématiques les plus proches de l'informatique</p> <p>« Les graphes » constituent un objet mathématique qui peut être mobilisé pour la modélisation en informatique</p> <p>Un jeu combinatoire peut être modélisé par un graphe</p>

	Planifier collectivement une unité d'enseignement	Ouvrages	Il repartit le travail de préparation de l'unité d'enseignement avec les autres enseignants-chercheurs qui enseignent le même module	Le travail collectif est une exigence de l'institution
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Solliciter l'attention des étudiants en classe	Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et le jeu du domino	Il donne, quand possible, des exemples qui proviennent de son activité de recherche	Les étudiants sont plus intéressés par des exemples provenant de la vie réelle que par des notions théoriques moins concrètes Les sujets à enseigner dans un parcours de formation ne sont pas forcément les sujets sur lesquels un enseignant-chercheur travaille dans sa recherche
	Mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes	Ouvrages Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et le jeu du domino	Il cherche des stratégies gagnantes dans les jeux combinatoires Il donne un sens concret à certains résultats des mathématiques discrètes	Un jeu combinatoire peut être modélisé par un graphe Il est important qu'un enseignant arrive à donner du sens à ce qu'il enseigne Les mathématiques discrètes permettent de répondre aux questions qui portent sur « leur utilité » vu qu'elles interviennent dans des algorithmes en informatique et des études de cas pratiques
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Echanger des questions avec d'autres enseignants-chercheurs	Ouvrages Ressources échangées entre collègues	Il échange des sujets de TDs avec un ensemble de collègues qui travaillent dans le même domaine	Les mathématiques discrètes permettent de travailler sur des exemples de la vie réelle

Concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs	Engager les étudiants dans un travail sur la modélisation	Ouvrages Ressources échangées entre collègues	Il travaille sur des problèmes de modélisation avec les étudiants comme l'affectation des horaires, etc. Il met l'accent dans son enseignement sur le choix du modèle à mobiliser dans un problème donné	La modélisation est très importante dans un travail sur un problème concret d'une entreprise Les mathématiques discrètes permettent de représenter des problèmes issus de la vie réelle L'enseignement des mathématiques discrètes permet de familiariser les étudiants aux modèles qui existent
	Mettre en œuvre des séances de programmation	Ordinateurs	Il fait travailler les étudiants sur les graphes et leur demande de le coder d'une façon informatique	Les mathématiques discrètes permettent de représenter des problèmes issus d'autres disciplines telles que l'informatique
	Mettre en œuvre des moments de recherche autour d'un problème	Ouvrages Ressources échangées entre collègues	Il met en place des ateliers où les étudiants peuvent réfléchir avant d'avancer dans un cours magistral Il met les étudiants en groupes de 4 devant un papier ou devant un ordinateur, et les invite à réfléchir ensemble sur des problèmes Il met en place des débats avec/entre les étudiants des différents groupes sur des questions	Dans un travail collectif, les idées émergent plus abondamment pour résoudre un problème La recherche sur des problèmes en mathématiques discrètes peut être conduite sans utilisation d'ordinateurs La recherche sur des problèmes en mathématiques discrètes permet un travail en groupes ou des collaborations à distance En mathématiques discrètes, des résultats peuvent émerger à partir d'expérimentations informatiques

			qui portent sur la validité des résultats obtenus et leurs preuves mathématiques	
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Elaborer individuellement une épreuve écrite	Ouvrages	Il fait d'une façon que chaque évaluation écrite couvre une moitié du module Il conçoit des sujets qui portent sur des situations de la vie réelle	Un étudiant qui a suivi le cours doit être capable de réussir Les mathématiques discrètes permettent de travailler sur des exemples de la vie réelle
	Répartir les notes dans une épreuve écrite	Sujets d'examen	Il répartit les notes dans une épreuve écrite de la façon suivante : 10 points sur des questions similaires à celles du module, 5 points sur des questions d'une difficulté intermédiaire et 5 points sur de nouveaux problèmes qui demandent une réflexion de la part des étudiants	Il est important d'évaluer la capacité des étudiants à prendre des initiatives dans des situations problèmes nouvelles En mathématiques discrètes, il y a des casse-têtes qui peuvent être traduits par des modèles mathématiques pour l'enseignement
	Echanger des questions avec d'autres enseignants-chercheurs	Sujets d'examen échangés entre collègues	Il échange des sujets d'examen avec un ensemble de collègues qui travaillent dans le même domaine	
Participer à un collectif d'enseignement ou de recherche	Participer à un collectif de recherche qui s'intéresse à la diffusion et à l'enseignement des mathématiques	Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et le jeu du domino	Il travaille avec l'équipe d'enseignants-chercheurs de <i>maths à modeler</i> sur des ingénieries didactiques en mathématiques discrètes	

M1 dans un parcours de formation en informatique				
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement	Ouvrages Ressources échangées entre collègues	Il donne des problèmes de programmation linéaire Il choisit des notions « importantes » au niveau théorique ou en lien avec le parcours de formation en informatique	Les mathématiques discrètes ont un volet algorithmique présenté avec le modèle purement mathématique Il y a des notions mathématiques très importantes pour le travail d'un informaticien L'enseignement des mathématiques discrètes en France tourne surtout autour de la théorie des graphes L'enseignement de la théorie des graphes en France porte surtout sur l'optimisation et la recherche des chemins
	Planifier collectivement une unité d'enseignement	Ancien polycopié d'un module de mathématiques discrètes conçu par un collègue	Il prépare l'unité d'enseignement avec deux autres enseignants-chercheurs qui enseignent le même module	Le travail collectif est une exigence de l'institution
	Pondérer/alterner les cours, les TDs et les TPs		Il fait 22 heures de cours magistral et 6 à 8 heures de TPs	Il y a une marge de liberté plus importante en Master qu'en licence en termes de choix des contenus et de leur organisation
	Gérer le temps de l'enseignement		Il gère le temps d'enseignement strictement dans des séances de cours et de TDs mais avance au rythme des étudiants dans les séances de TPs	Il est parfois difficile de respecter le rythme des étudiants dans le travail en classe Il est essentiel de compléter le programme prévu

Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Enseigner les preuves	Ouvrages Ressources échangées entre collègues	Il travaille sur des preuves formelles en classe Il demande aux étudiants de réfléchir individuellement aux preuves avant de les travailler avec eux, mais leur donne la chance de discuter entre eux Il essaie, dans le travail sur les preuves, de mettre l'accent sur l'importance de l'enchaînement des idées	Les étudiants dans un parcours d'informatique manquent souvent de la rigueur mathématique nécessaire pour construire des preuves Les étudiants ressentent rarement le besoin d'enchaîner les idées et de prouver la validité d'une idée dans un travail sur les preuves
	Mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes	Problèmes de recherche tels que chasse-à-la-bête et le jeu du domino	Il travaille avec les étudiants sur le problème de la chasse-à-la-bête	Le problème de la chasse à la bête est un problème de dualité en programmation linéaire qui peut être présenté à des étudiants au niveau Master
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes	Ouvrages Ressources échangées entre collègues	Il donne des problèmes aux étudiants et leur demande de prouver les résultats individuellement, mais il leur permet de discuter avec leurs voisins	Les étudiants dans un parcours d'informatique manquent souvent de la rigueur mathématique nécessaire pour construire des preuves
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs	Engager les étudiants dans un travail sur la modélisation	Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et le jeu du domino Ouvrages	Il présente aux étudiants les modèles qu'il utilise dans son activité de recherche lors d'un travail de modélisation	Il est important de convaincre les étudiants de l'importance des mathématiques en leur montrant à quoi ça sert dans une formation d'informaticiens Les étudiants en Master sont plus proches de la recherche que les étudiants en licence

		Ressources échangées entre collègues	Il ne donne pas les solutions des problèmes aux étudiants, mais il intervient s'ils rencontrent des difficultés	Il est important de laisser les étudiants travailler selon leur propre rythme
	Mettre en œuvre des séances de programmation	Ordinateurs Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et le jeu du domino	Il les accompagne dans les élaborations des algorithmes Il les incite à développer des preuves formelles sur l'efficacité des algorithmes construits	Les étudiants prennent plaisir à la partie TP concrète du module plus que la partie qui porte sur les preuves théoriques des résultats Les étudiants s'intéressent à construire un algorithme efficace, sans vraiment s'intéresser aux raisons derrière

Tableau 3.6 : Tableau document de LX

Université					
Classes de situations	Sous-buts	Ressources utilisées	Règles d'action	Invariants opératoires	
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Planifier collectivement une unité d'enseignement	Syllabus : mots-clés qui renvoient aux concepts	Il planifie son enseignement en se basant sur des mots-clés qui renvoient aux concepts qu'il avait enseignés dans les années précédentes	Un enseignant-chercheur a juste besoin de savoir quels concepts à enseigner afin de pouvoir enseigner un module en classe	
		Questions des étudiants	Il inclue dans son module des idées et des exemples inspirés des questions que les étudiants lui posent	Il est important qu'un enseignement de mathématiques vise à mettre l'accent sur leur utilité	
		Expérience dans la recherche	Il oriente son enseignement vers les applications	Les questions que posent les étudiants peuvent donner des idées à inclure dans un module	
		Syllabus : mots-clés qui renvoient aux concepts	Il se met d'accord avec les autres enseignants-chercheurs qui enseignent le même module sur les concepts qu'ils doivent enseigner, et il les enseigne de sa propre façon	Il faut qu'il y ait une conformité des contenus au syllabus	
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Introduire une séance de cours	« Discrete mathematics and its applications » de Rosen	Il commence son cours par un rappel des prérequis	Un enseignant-chercheur a une marge de liberté dans son enseignement, tout en respectant le choix de concepts à enseigner	
	Enseigner un théorème	« Discrete mathematics and	Après avoir expliqué un théorème, il donne un exemple qui porte sur ce théorème	Dans un cours, il faut donner les prérequis avant de s'engager dans de nouvelles notions	
				L'illustration favorise la compréhension des concepts	

	<p>its applications » de Rosen</p> <p>Expérience dans la recherche</p> <p>Versions numériques d'ouvrages pour l'enseignement</p>	<p>Il rédige les idées au tableau sans s'appuyer sur un support comme un livre ou un photocopie</p>	<p>Un enseignant-chercheur a rarement besoin d'une ressource matérielle pour enseigner un cours, il peut avoir les idées en tête</p>
<p>Mettre en œuvre les contenus d'un cours</p>	<p>Ordinateurs</p> <p>Expérience dans la recherche</p>	<p>Il utilise la salle informatique dans son enseignement pour projeter des présentations, des figures, des vidéos, etc.</p> <p>Il donne beaucoup d'exemples</p> <p>Il donne des exemples qui portent sur son travail de recherche</p>	<p>Un enseignement doit comprendre plus qu'une lecture de texte aux étudiants</p> <p>Tout phénomène peut être modélisé par un graphe</p> <p>Les mathématiques discrètes permettent de modéliser des phénomènes difficiles à comprendre en mobilisant des modèles parfois faciles</p> <p>Les concepts en mathématiques discrètes peuvent être expliqués à travers des exemples</p>
<p>Etablir des liens avec d'autres domaines mathématiques et d'autres disciplines</p>	<p>Expérience dans la recherche</p> <p>Internet</p>	<p>Il discute de l'utilité des graphes à résoudre des problèmes qui relèvent de la géographie, la biologie, la chimie, la théorie des décisions, l'informatique et les réseaux sociaux</p>	<p>L'aspect concret des mathématiques discrètes les rend faciles d'accès aux étudiants et leur permet de se rendre compte de leur utilité</p>

			Il essaie de faire des liens dans son enseignement, entre les mathématiques qu'il enseigne, et les situations où elles peuvent être appliquées	Les étudiants finissent par oublier les mathématiques qu'ils ont apprises s'ils ignorent à quoi elles servent Un enseignant-chercheur peut ne pas toujours connaître le domaine d'application des mathématiques qu'il enseigne, surtout quand elles ne relèvent pas de son domaine de recherche
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Esquisser les contenus du TD	Versions numériques d'ouvrages pour l'enseignement Expérience dans la recherche	Il travaille sur l'optimisation sur des modèles où des contraintes sont posées, et il vérifie que la solution obtenue respecte ces contraintes Il donne des applications issues de son travail de recherche	Les modèles mobilisés dans l'enseignement sont créés par des mathématiciens
	Mettre en œuvre des moments d'entraînement et d'application (exercices)	« Discrete mathematics and its applications » de Rosen Versions numériques d'ouvrages pour l'enseignement	Il prend comme point de départ une définition formelle des graphes qu'il illustre par des figures au tableau Selon les situations, il demande aux étudiants de travailler individuellement ou en groupes de 3 ou 4 Il donne aux étudiants du temps pour résoudre les exercices sans intervenir	Il est important que les étudiants réalisent l'utilité des graphes Les étudiants peuvent travailler un groupe ou individuellement, selon les situations sur lesquelles ils travaillent

			<p>Il circule entre les étudiants pour observer ce qu'ils font et comment ils réagissent face aux exercices</p> <p>Il adapte le rythme de son enseignement en fonction des réactions des étudiants</p>	
Concevoir et mettre en œuvre des projets en classe	<p>Versions numériques d'ouvrages pour l'enseignement</p> <p>Expérience dans la recherche</p>	<p>Il divise les étudiants en groupes et leur donne des « mini-projets », issus des questions du module ou des questions posées par les étudiants, à travailler ensemble</p> <p>Il donne des sujets différents de mini-projets aux différents groupes d'étudiants et leur donne du temps pour travailler dessus à la maison</p> <p>Il demande aux différents groupes d'exposer les résultats de leur travail sur le mini-projet au tableau</p> <p>Lors de l'exposition des mini-projets par les étudiants, il s'assoie parmi les autres étudiants et ils posent tous des questions au groupe exposant son travail</p>	<p>Un projet doit être multidisciplinaire</p> <p>Un problème donné aux étudiants dans le contexte d'une unité d'enseignement peut être considéré comme un mini-projet</p> <p>Si les mêmes sujets sont donnés aux étudiants pour les mini-projets, ils pourraient s'appuyer sur les expositions des autres groupes pour prendre des idées</p> <p>L'exposition de plusieurs mini-projets qui portent sur un même sujet pourrait ennuyer les étudiants en classe</p>	
Remédier aux difficultés des étudiants	Versions numériques d'ouvrages pour l'enseignement	Il réexplique les exercices aux étudiants en difficulté tout en leur demandant d'être attentifs		

		Expérience dans la recherche « Discrete mathematics and its applications » de Rosen Téléphone portable	Il donne un autre exercice semblable à celui qu'il a expliqué aux étudiants en difficulté, leur demande de le résoudre individuellement, et sollicite l'un d'eux pour exposer sa solution au tableau Il donne son numéro de téléphone aux étudiants et leur crée un groupe sur WhatsApp où ils peuvent poser des questions et discuter ensemble, et il répond à leurs questions à la fin de chaque jour	La demande à un étudiant d'exposer la solution d'un exercice au tableau l'obligerait à être plus sérieux dans la résolution de cet exercice Le groupe sur WhatsApp permet aux étudiants de répondre aux questions de leurs camarades de classe et de travailler ensemble, et permet à l'enseignant de corriger les mauvaises réponses données
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs	Mettre en œuvre des séances de programmation	Versions numériques d'ouvrages pour l'enseignement logiciels	Il travaille avec les étudiants sur les algorithmes Il effectue avec les étudiants des simulations sur logiciels afin de tester l'efficacité des algorithmes	Les résultats obtenus par mobilisation d'algorithmes peuvent être comparés aux résultats obtenus par des chercheurs dans le domaine
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Elaborer les modalités d'évaluation des étudiants		Il évalue les étudiants par une épreuve écrite	
	Elaborer collectivement les questions d'une épreuve écrite	Internet Versions numériques d'ouvrages pour l'enseignement	Il donne des questions qui portent sur tous les chapitres du module Il envoie des propositions de questions à inclure, et lit les questions proposées par les autres enseignants-chercheurs qui	Il faut que l'évaluation soit commune pour tous les enseignants-chercheurs qui enseignent le même module

		Versions numériques d'ouvrages pour l'enseignement	enseignent le module et donne ses commentaires là-dessus	Il faut que tous les enseignants-chercheurs qui enseignent le module se mettent d'accord sur le contenu d'une évaluation
		questions proposées par d'autres enseignants-chercheurs	Il se met d'accord avec les autres enseignants-chercheurs sur un barème à respecter lors des corrections	Il faut que les enseignants-chercheurs qui enseignent un même module dans différentes sections respectent un même barème lors de la correction
Parcours de formation en informatique de gestion				
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Esquisser les contenus d'une unité d'enseignement	Syllabus : mots-clés qui renvoient aux concepts	Il donne une idée générale sur la logique, les graphes, les relations et les ensembles	Dans certains parcours de formation, il est suffisant de donner aux étudiants une idée globale sur les mathématiques discrètes
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours		Internet Versions numériques d'ouvrages pour l'enseignement Expérience dans la recherche	Il ne travaille pas sur les preuves avec les étudiants Il donne des exemples qui portent sur la gestion de projets	Dans l'enseignement dans certains parcours, on s'intéresse plus à l'application de résultats mathématiques qu'à un travail sur les preuves Il est important que les étudiants se familiarisent avec des notions des mathématiques discrètes qu'ils peuvent mobiliser dans la résolution de problèmes qui relèvent de leur domaine de formation
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Engager les étudiants dans un travail sur la modélisation	Expérience de recherche dans le cadre d'un projet européen	Il utilise des résultats en mathématiques dans la résolution de situations problèmes	Les mathématiques discrètes permettent de modéliser des phénomènes difficiles à comprendre

			Il utilise des modèles issus de son travail de recherche	en mobilisant des modèles parfois faciles Les modèles mathématiques sont intéressants pour leur utilité
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Elaborer les modalités d'évaluation des étudiants	Internet Versions numériques d'ouvrages pour l'enseignement	Il évalue les étudiants en partie par une évaluation écrite et en partie par des applications en gestion de projets, quand le temps le permet	Le temps constitue une contrainte par rapport aux modalités de l'évaluation
L1 dans un parcours de formation en informatique				
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement	Versions numériques d'ouvrages pour l'enseignement Expérience dans la recherche	Il donne les opérateurs logiques, les ensembles, le produit cartésien et la théorie des graphes Dans la théorie des graphes, il donne les graphes simples, les multi graphes, les pseudos graphes, les graphes orientés, non orientés, les degrés, les graphes complets, bipartis, les cycles, le plus court chemin, les matrices d'adjacence et d'incidence, les arbres, les feuilles, l'arbre de décision	Un enseignant qui enseigne son domaine de recherche peut mobiliser son expérience dans la planification de son enseignement Il faut qu'il y ait une conformité des contenus au syllabus

Tableau 3.7 : Tableau document de FO

Université				
Classes de situations	Sous-buts	Ressources utilisées	Règles d'action	Invariants opératoires
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement	Ouvrages en théorie des graphes tels que « théorie des graphes et ses applications » de Berge, « Pearls in graph theory », « Graph theory » de Harary, et « théorie des graphes et ses applications » de Fournier	<p>Elle commence ses cours par une notion sur l'algorithmique</p> <p>Elle donne des contenus de base en théorie des graphes, parcours de graphes, plus court chemin, algorithmes de parcours en largeur et en profondeur, arbres, chemins dans des graphes orientés, coloration, couplage, graphes bipartis, et flots</p> <p>Elle travaille sur des problèmes tels que la coloration, le couplage, les biparties et les flots</p>	<p>Il est important que les étudiants possèdent une culture sur les graphes et les algorithmes : faire des parcours de graphes et savoir ce qu'on est en train de parcourir</p> <p>Certains contenus en théorie des graphes constituent une culture de base pour les étudiants tels que les chemins et les plus courts chemins</p> <p>Il y a des contenus obligatoires en théorie des graphes tels que le cheminement, Dijkstra, et la coloration</p>
	Planifier collectivement une unité d'enseignement	<p>Exemples, exercices et jeux issus d'ouvrages et de l'Internet</p> <p>Situations de modélisation issues de problèmes de recherche</p>	<p>Elle travaille collectivement avec d'autres enseignants-chercheurs sur l'élaboration des cours</p> <p>Elle conçoit collectivement avec d'autres enseignants-chercheurs une unité d'enseignement sur une plateforme d'apprentissage Moodle</p>	<p>Le travail collectif des enseignants-chercheurs permet d'améliorer les modules d'enseignement et de gagner du temps</p> <p>Le partage des ressources entre les enseignants-chercheurs permet d'enrichir leurs modules</p>

		Plateforme d'apprentissage Moodle	Elle engage des discussions avec d'autres enseignants-chercheurs concernant l'unité d'enseignement sur la plateforme en ligne, et ils donnent leurs opinions les uns aux autres sur l'avancement des cours, etc.	
	Définir collectivement la structure d'une unité d'enseignement	Plateforme d'apprentissage Moodle	Elle réfléchit avec les autres enseignants-chercheurs de son équipe de recherche sur les contenus des modules et leur présentation et chacun fait des commentaires sur le travail des autres	Il est mieux d'exposer son travail à d'autres enseignants-chercheurs dans le domaine que de travailler seul
	Pondérer/ alterner les cours, TDs et TPs	Logiciels Plateforme d'apprentissage Moodle	Elle fait au moins 6 heures de cours magistral et 6 heures de programmation dans la salle informatique dans un module de trente heures Elle construit des algorithmes sur la plateforme d'une façon d'y former les étudiants au fur et à mesure Elle fait une heure et demie de jeux dans chaque module	Le nombre d'heures et le nombre d'étudiants dans une classe constituent des contraintes dans l'enseignement Il est important que les étudiants essaient les algorithmes qu'ils ont programmés sur les ordinateurs Il est important pour les étudiants, après avoir travaillé sur des problèmes et sur leurs preuves, qu'ils les programment, pour une compréhension globale Donner des retours à fur et à mesure aux étudiants leur permet d'évaluer leur acquisition des contenus tout au long de leur apprentissage Le graphe est visuel

				Le graphe permet de faire comprendre des notions mathématiques avancées aux étudiants
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours		Situations de modélisation issues de problèmes de recherche Plateforme d'apprentissage Moodle	Elle rentre en détails dans les définitions des graphes et leurs propriétés Elle montre aux étudiants ce qu'elle fait dans son travail de recherche Elle construit le cours avec les étudiants, et leur donne du travail à faire entre les sessions afin de ne pas perdre du temps	Il est important que les étudiants comprennent les notions du cours Les étudiants apprécient quand l'enseignant partage avec eux ce qu'il fait en recherche Les étudiants apprécient la théorie des graphes à cause de son aspect pratique et de la possibilité d'illustrer les idées par des figures
	Introduire la théorie des graphes en classe		Elle commence par donner de la combinatoire, elle enseigne aux étudiants comment compter avant de s'engager dans les contenus qui relèvent de la théorie des graphes	En mathématiques discrètes, il y a une distance entre les objets En mathématiques discrètes, on travaille souvent sur un ensemble fini d'objets
	Esquisser les contenus du cours	Exemples, exercices et jeux issus d'ouvrages et de l'Internet Situations de modélisation issues de problèmes de recherche Plateforme d'apprentissage Moodle	Elle transforme des études de cas qui proviennent de son activité de recherche en problèmes simplifiés pour l'enseignement Elle rajoute des contenus dans son cours qui portent sur des thématiques sur lesquelles elle travaille dans sa recherche	Les études de cas provenant du travail de recherche permettent d'enrichir l'enseignement Les études de cas provenant du travail de recherche servent de support pour montrer des idées aux étudiants L'activité de recherche d'un enseignant permet à son cours de rester vivant, dans le sens que ça lui permet de mettre à jour les contenus en rapport avec son travail de recherche

			<p>Elle travaille les contenus qu'elle considère de base avec tous les étudiants dans sa classe</p> <p>Elle choisit des contenus qui permettent aux étudiants de travailler sur les preuves et la modélisation</p> <p>Elle choisit des contenus qui permettent aux étudiants de travailler sur des algorithmes pour des cas d'optimisation</p> <p>Elle donne des questions « bonus » et des énigmes aux étudiants qui le souhaitent</p>	<p>Il est important que tous les étudiants aient compris les contenus de base « faciles »</p> <p>En théorie des graphes, il y a les aspects preuve, modélisation et programmation</p> <p>Il est important pour les étudiants, après avoir travaillé sur des problèmes et sur leurs preuves, qu'ils les programment, pour une compréhension globale</p> <p>Les questions bonus encouragent les étudiants à développer une culture autour des graphes</p>
Mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes	<p>Situations de modélisation issues de problèmes de recherche</p> <p>Plateforme d'apprentissage Moodle</p>	<p>Elle utilise les cas qui ne marchent pas bien dans ses problèmes de recherche pour illustrer des idées aux étudiants en classe</p> <p>Elle lance un problème et échange dessus et discute avec les étudiants, elle construit avec eux une partie du cours avant de leur donner un cours propre avec les preuves</p>	<p>Les cas qui n'aboutissent pas à la solution d'un problème de recherche peuvent montrer des idées aux étudiants</p> <p>Dans l'enseignement des mathématiques discrètes, le passage des cas pratiques à l'abstraction vient naturellement</p> <p>Certains étudiants ont des difficultés à passer à l'abstraction dans l'apprentissage des mathématiques discrètes</p>	
Enseigner un algorithme	Situations de modélisation issues de problèmes de recherche	<p>Elle réfléchit avec les étudiants aux structures de données et à la complexité</p> <p>Elle enseigne aux étudiants comment manipuler une structure de données,</p>	<p>Les mathématiques discrètes sont très proches de l'informatique</p> <p>La programmation permet d'apprendre les preuves aussi bien que l'informatique</p>	

			<p>écrire un algorithme et vérifier qu'il fonctionne</p> <p>Elle donne des questions qui sont plus « difficiles » aux étudiants qui sont les plus à l'aise et demandent aux « plus faibles » de simplement suivre les étapes quand elle explique</p>	<p>Certains étudiants demandent de travailler sur des contenus plus avancés</p> <p>Les étudiants plus « faibles » s'intéressent parfois à des questions énigmes</p>
Enseigner les preuves	<p>Plateforme d'apprentissage Moodle</p> <p>Exemples, exercices et jeux issus d'ouvrages et de l'Internet</p> <p>Situations de modélisation issues de problèmes de recherche</p>	<p>Elle travaille sur les preuves algorithmiques : elle montre que l'algorithme se termine et donne l'objet demandé</p> <p>Elle construit les preuves avec les étudiants en classe</p> <p>Elle utilise les arbres pour travailler sur les preuves par induction</p> <p>Quand elle explique une preuve « difficile », par exemple, dans la preuve de Dijkstra, elle demande aux étudiants plus « faibles » de suivre l'enchaînement des idées, et aux étudiants plus « forts » de réécrire la preuve</p>	<p>Les mathématiques discrètes, particulièrement les arbres, permettent un travail approfondi sur les preuves</p> <p>La preuve par induction est visible sur les arbres</p> <p>Les étudiants les plus « faibles » ont plus besoin de l'enseignant que ceux qui sont plus « forts »</p> <p>Certains étudiants rencontrent des difficultés avec les preuves</p>	
Engager les étudiants dans un travail sur la modélisation	Situations de modélisation issues de problèmes de recherche	Elle donne des questions bonus aux étudiants où ils doivent pouvoir modéliser par un graphe	Il est important que les étudiants puissent modéliser un problème authentique ou issu de la vie réelle en utilisant un graphe	

	Etablir des liens avec d'autres domaines mathématiques et d'autres disciplines		Elle fait des liens avec l'informatique, la programmation linéaire à nombres entiers et l'optimisation	Les mathématiques discrètes sont un outil que tout mathématicien ou informaticien doit avoir dans son bagage
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Esquisser les contenus du TD	Bandes de questions générées par des étudiants en stage Exemples, exercices et jeux issus d'ouvrages et de l'Internet	Elle prend des étudiants en stage qui génèrent des bandes de questions sur la plateforme Moodle Elle donne des questions qui sont plus « difficiles » aux étudiants qui sont les « plus à l'aise » (qu'elle désigne par des questions à une étoile ou deux étoiles)	Les étudiants, en générant des questions, se posent les questions à l'envers ce qui est intéressant Les profils des étudiants peuvent être une contrainte dans la planification de l'enseignement
	Echanger des questions avec d'autres enseignants-chercheurs	Plateforme d'apprentissage Moodle	Elle partage des bandes de questions avec d'autres enseignants-chercheurs sur la plateforme d'apprentissage Moodle où chacun peut rajouter des exercices	Le partage des ressources entre les enseignants-chercheurs permet d'enrichir leurs modules Le travail collectif des enseignants-chercheurs permet d'améliorer les modules d'enseignement et de gagner du temps
	Mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes	Situations de modélisation issues de problèmes de recherche	Elle prend comme point de départ un problème pratique qui peut être modélisé par un graphe et essaie de trouver des objets dessus Elle ne donne jamais les solutions des exercices et des problèmes	Les problèmes de modélisation constituent une sorte de culture pour les étudiants

				Il est important que les étudiants puissent modéliser un problème authentique ou issu de la vie réelle en utilisant un graphe
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs	Mettre en œuvre des moments d'expérimentation avec des objets matériels	Jeux physiques comme chasse à la bête Fiches avec des jeux	Elle expérimente sur des jeux avec les étudiants et puis revient vers le cours pour faire les liens	Le graphe est visuel Le graphe permet de faire comprendre des notions mathématiques avancées aux étudiants Il est important que les étudiants puissent faire le lien entre ce qu'ils font en TPs et les contenus du cours
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Elaborer les modalités d'évaluation des étudiants	Questions qu'elle invente elle-même Ouvrages Plateforme d'apprentissage Moodle	Elle évalue la capacité des étudiants à construire une preuve Elle évalue la capacité des étudiants à programmer un algorithme Elle donne six énoncés différents de chaque exercice Elle évalue les étudiants au fur et à mesure sur la plateforme	Il est important que les étudiants maîtrisent les « techniques de preuve » L'objectif de l'évaluation est de tester ce que les étudiants ont appris dans le cours Les différentes versions d'un même exercice, en termes de données, empêchent les étudiants de copier les résultats des autres Donner des retours au fur et à mesure aux étudiants leur permet d'évaluer leur acquisition des contenus tout au long de leur apprentissage
	Elaborer individuellement une épreuve écrite	Questions qu'elle invente elle-même Ouvrages Internet	Elle donne des questions basiques qui portent sur des théorèmes ou des propriétés du cours Elle tourne les questions pour savoir ce que les étudiants ont retenu du module	Il est important que les étudiants puissent adapter ce qu'ils ont appris dans le module à de nouvelles situations Il est important que les étudiants comprennent les notions du module

			<p>Elle donne des questions qui comportent des éléments de preuves et leur demande de les compléter</p> <p>Elle ne donne pas des questions qui portent sur les preuves que seuls, les étudiants les plus à l'aise avec les notions du module, peuvent réécrire</p> <p>Elle donne des questions qui portent sur les contenus obligatoires du module que tous les étudiants doivent avoir travaillés chez eux</p> <p>Elle invente des questions elle-même</p>	<p>Il est important que les étudiants puissent écrire une preuve tout seuls</p>
	Echanger des questions avec d'autres enseignants-chercheurs	Questions échangées avec des collègues	<p>Elle échange des questions pour l'évaluation avec des collègues</p> <p>Elle partage les questions de l'évaluation avec les autres enseignants-chercheurs avec lesquels elle travaille la veille de l'évaluation</p>	<p>Le travail collectif des enseignants-chercheurs permet d'améliorer les modules d'enseignement et de gagner du temps</p> <p>Le partage des ressources entre les enseignants-chercheurs permet d'enrichir leurs modules</p>
L3 dans un parcours de formation en informatique				
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Esquisser les contenus du cours	<p>Plateforme d'apprentissage Moodle</p> <p>Ouvrages en théorie des graphes tels que « théorie des graphes et ses</p>	<p>Elle travaille avec les étudiants sur l'arbre couvrant de poids minimal</p>	<p>Les arbres sont très utilisés par les informaticiens</p> <p>Il est essentiel que les étudiants connaissent les propriétés des arbres</p> <p>Les étudiants en informatique ont peur des mathématiques</p>

		applications » de Berge, « Pearls in graph theory », « Graph theory » de Harary, et « théorie des graphes et ses applications » de Fournier	Elle travaille avec les étudiants sur la programmation, les structures de données et la complexité	Les étudiants dans un parcours d'informatique peuvent acquérir les contenus relatifs à la programmation plus vite que les étudiants dans un parcours de mathématiques-informatique
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs	Planifier des séances de programmation	Exemples, exercices et jeux issus d'ouvrages et de l'Internet	Elle sollicite l'aide des informaticiens afin de concevoir une bonne structure de données	Il est important que les étudiants puissent programmer et discuter de l'optimalité de la solution
	Mettre en œuvre des moments de programmation	Situations de modélisation issues de problèmes de recherche	Elle travaille sur la modélisation, la preuve et la programmation	Il est important que les étudiants puissent modéliser un problème authentique ou issu de la vie réelle en utilisant un graphe
L3 dans un parcours de formation en mathématiques-informatique				
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Enseigner les preuves	Plateforme d'apprentissage Moodle	Elle travaille sur les preuves dans son enseignement	Les étudiants dans un parcours de mathématiques-informatique ont la capacité de travailler sur des preuves que ceux dans un parcours d'informatique ne possèdent pas
	Remédier aux difficultés des étudiants	Plateforme d'apprentissage Moodle	Elle demande aux étudiants qui ont du mal à comprendre les preuves de se mettre au tableau et elle reprend les preuves avec eux, soit en les réécrivant, soit en adoptant d'autres méthodes	Certains étudiants ont des difficultés avec la logique des preuves
	Etablir des liens avec d'autres disciplines	Situations de modélisation issues de problèmes de recherche	Elle fait des liens avec la recherche opérationnelle	Il est possible d'établir des liens avec la recherche opérationnelle où on optimise dans des problèmes issus de la vie réelle

Concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs	Planifier des séances de programmation	Exemples, exercices et jeux issus d'ouvrages et de l'Internet	Elle sollicite l'aide des informaticiens afin de concevoir une bonne structure de données	<p>Les étudiants manquent d'une culture de base en programmation</p> <p>Les étudiants peuvent se rattraper vite dans l'apprentissage de la programmation</p> <p>Les étudiants ont du mal avec les algorithmes et la notion de complexité d'un algorithme</p>
	Mettre en œuvre des moments de programmation	Situations de modélisation issues de problèmes de recherche	<p>Elle travaille sur la modélisation, la preuve et la programmation</p> <p>Elle travaille sur les preuves qui portent sur les arbres</p>	Il est important que les étudiants puissent modéliser un problème authentique ou issu de la vie réelle en utilisant un graphe

Tableau 3.8 : Tableau document de LK

Département de l'informatique et des mathématiques appliquées					
Classes de situations	Sous-buts	Ressources utilisées	Règles d'action	Invariants opératoires	
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Planifier individuellement une unité d'enseignement	Ouvrages Internet	Il écrit ses propres notes pour une unité d'enseignement et ne les partage pas Il enseigne la théorie des graphes d'une façon théorique sans applications	Il faut que les contenus soient conformes aux objectifs du syllabus Les cours d'informatique à l'université sont plutôt à la limite des mathématiques Le profil des étudiants conditionne le choix des contenus dans l'enseignement Le parcours de formation conditionne le choix des contenus dans l'enseignement	
	Pondérer/alterner les cours et les TDs	Ouvrages	Il alterne les cours et les TDs en classe dans les mêmes séances	Les enseignants-chercheurs ont une marge de liberté dans le choix des contenus	
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Esquisser les contenus du cours	Ouvrages Internet	Il enseigne les preuves formelles Il essaie de donner le maximum d'informations aux étudiants	La preuve d'un théorème est la même dans tous les parcours de formation	
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Engager les étudiants dans un travail sur la modélisation	Ouvrages Internet	Il donne des situations de programmation linéaire	Les étudiants en deuxième, troisième, et quatrième année de l'université rencontrent des difficultés avec la modélisation Il est important de mettre l'accent dans l'enseignement sur la modélisation et sur	

				la résolution de problèmes depuis la première année en université
	Mettre en œuvre des moments d'entraînement et d'application (exercices)	Ouvrages Internet	Il utilise des modèles conçus par des chercheurs en mathématiques	Résoudre un problème est plus « simple » que le modéliser Le nombre d'heures constitue une contrainte dans l'enseignement
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Elaborer individuellement une épreuve écrite	Ouvrages Internet Expérience dans l'enseignement	Il donne des questions qui correspondent aux notions enseignées en classe Il donne des questions dans les évaluations écrites qui sont du même niveau que les contenus enseignés en classe Il construit lui-même les questions pour l'évaluation	Une évaluation a pour objectif de vérifier la compréhension des notions enseignées en classe par les étudiants Le niveau des questions dans une épreuve écrite doit correspondre au niveau des contenus enseignés en classe Un enseignant expérimenté acquiert une connaissance profonde des notions qui lui permet de construire des questions pour une épreuve écrite
L2 dans un parcours de formation en informatique				
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Esquisser les contenus du cours	Ouvrages Internet	Il commence par les contenus « de base » comme la définition des graphes, les propriétés et l'algèbre des graphes et quelques algorithmes	Les étudiants sont introduits aux graphes pour la première fois dans ce cours

	Enseigner un algorithme	Ouvrages Internet Logiciels	Il travaille sur des algorithmes dans des situations telles que la recherche du plus court chemin Il travaille sur les algorithmes de recherche de plus court chemin, de l'arbre couvrant minimum, et des flots Quand il donne un algorithme, il rentre dans les détails dans l'explication	Les étudiants-informaticiens ont besoin de bien comprendre les algorithmes L'objectif de l'unité d'enseignement de la théorie des graphes est d'initier les étudiants aux définitions et aux propriétés des graphes et de leur enseigner des algorithmes sur les graphes Il est essentiel de montrer aux étudiants le fonctionnement d'un algorithme sur un graphe
L3 dans un parcours de formation en statistique				
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Modifier/ adapter une unité d'enseignement	Ouvrages Internet	Il sélectionne une unité d'enseignement qu'il a conçu pour l'enseignement pour une formation en informatique Il l'adapte d'une façon à éviter les notions informatiques, notamment les algorithmes	Les étudiants-statisticiens ont moins besoin d'algorithmes que les étudiants-informaticiens
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours		Ouvrages Logiciels	Il évoque rarement les algorithmes dans son enseignement Il utilise des logiciels pour résoudre les problèmes en statistiques tels que Matlab	L'objectif de l'unité d'enseignement de la théorie des graphes est d'initier les étudiants aux définitions et aux propriétés des graphes

Tableau 3.9 : Tableau document de LT²⁹

Université				
Classes de situations	Sous-buts	Ressources utilisées	Règles d'action	Invariants opératoires
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement	Syllabus Textbook recommended by the syllabus	He doesn't choose the contents of the courses he teaches, he sticks to the contents described in the syllabus If the choice of exercises and examples is given in the syllabus, he sticks to it, and if not, he chooses examples and exercises from the textbook that align with the objectives described	It is essential to stick to the contents described in the syllabus It is essential that the examples and exercises given in class align with the objectives of the course Time is a major constraint when planning a course The course has to commensurate with the level of the students
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Etablir des liens avec les autres disciplines	Textbook recommended by the syllabus	He doesn't work on the links between discrete mathematics and computer science, but he discusses these links with students whenever he has a chance in class	The objectives of the discrete mathematics course in general are constructing proofs and applying some discrete mathematics results in computer science
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Elaborer collectivement les questions d'une épreuve écrite	Internet Questions pre-assigned by a committee of teachers or the coordinator	He includes everything he discusses in class with the students in the evaluation He inserts questions that are related to his activity of research He includes questions that are about applications of graph theory	All the material taught in class should be included in the evaluation

²⁹ Nous avons élaboré le tableau document de LT en anglais parce que l'entretien avec lui était en anglais

		Questions related to his activity of research Previous exams	He includes questions that are pre-assigned by the coordinator of the course, questions that has either to approve of, or to dismiss	
L1 dans un parcours de formation en mathématiques				
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Pondérer/ alterner les cours et les TDs	Syllabus Textbook written by another teacher-researcher who teaches the same level	He alternates lectures and tutorials He gives more tutorials than lectures, he gives around 25 hours of lectures and 35 hours of tutorials	An instructor has some freedom in the way he organizes his teaching
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Esquisser les contenus du TD	Textbook written by another teacher-researcher who teaches the same level	He includes exercises that relate to some results of his activity of research He works on exercises that require new techniques with students	In discrete mathematics, students have difficulties with exercises Some exercises in the textbook are « difficult » for students in L1
	Etablir des liens avec d'autres disciplines		He discusses links with other disciplines when they exist, without working on them	There is no time to work with students in L1 on the links between discrete mathematics and other disciplines
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Elaborer collectivement les questions d'une épreuve écrite	Internet Questions pre-assigned by a committee of teachers or the coordinator Questions related to his activity of research	He includes a lot of graph theory exercises He includes exercises that relate to some results of his activity of research He rarely gets involved in writing the questions of the evaluation, other teachers who teach the same course write them and he gives his opinion about them	

			<p>He constructs the evaluation such that one small part consists of new exercises that are of the same level of difficulty as the ones discussed in class, and the other part is similar to the contents of the course</p>	<p>Students find the explanation « easy » but some exercises are « difficult » for them</p> <p>A problem is considered « difficult » when students have to create a new technique, or use a complicated technique</p> <p>An exercise is considered « easy » when students are familiar with it, or with the way to solve it</p>
--	--	--	---	---

Tableau 3.10 : Tableau document de LN³⁰

Parcours de formation en mathématiques				
Classes de situations	Sous-buts	Ressources utilisées	Règles d'action	Invariants opératoires
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Définir la structure d'une unité d'enseignement	« Graph theory » by Bondy, and « introduction to graph theory » by West	She teaches discrete mathematics in a theoretical way without applications She doesn't use computers in her teaching	Time constraints affect the choice of contents to be taught
	Pondérer/ alterner les cours et les TDs		She gives more hours to tutorials than lectures	Tutorials give more understanding of the concepts than lectures
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Introduire la théorie des graphes en classe		She introduces graph theory to students by telling them that Facebook is a network, hence a graph	Graph theory is strongly connected to daily life through many examples and applications
	Enseigner un théorème	« Graph theory » by Bondy, and « introduction to graph theory » by West	She never gives the proof of a theorem to students, she works with them so that they come up with it themselves	The way of thinking in discrete mathematics is very different from one proof to another and from one problem to another
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Mettre en œuvre des moments d'entraînement et d'application (exercices)	« Graph theory » by Bondy, and « introduction to graph theory » by West	She solves a lot of exercises ³¹ with the students She gives students time to solve the exercises by themselves	Solving problems in discrete mathematics does not require following a procedure Solving exercises promotes deeper understanding of the concepts

³⁰ Nous avons élaboré le tableau document de LN en anglais parce que l'entretien avec elle était en anglais

³¹ Elle désigne les exercices par le mot « problems » mais comme elle mobilise le polycopié qu'elle a conçu collectivement avec LB et LQ, nous estimons qu'en TD elle met en œuvre des moments d'entraînement et d'application (exercices) plutôt qu'une résolution de problèmes

			She asks students to sit in pairs and discuss when solving an exercise	The students cannot know in advance if a method can lead to solving a problem in graph theory Each problem has its own way to be solved in graph theory
	Enseigner un théorème	Handout prepared collectively with two other teachers-researchers	She divides the proofs of theorems that require many steps and gives them to the students as exercises	Sometimes, to prove something in graph theory requires proving many intermediate results
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation			She gives students grades for interesting ideas that they write in their copies during written evaluation, even if they do not lead them to find the solution	Evaluation does not really represent the student level in graph theory Some students can get depressed during evaluation because of the nature of questions asked (riddles to them)
	Elaborer collectivement les questions d'une épreuve écrite	« Graph theory » by Bondy, and « introduction to graph theory » by West	She constructs problems for the evaluation collectively with another teacher-researcher who teaches the same course	Problems are easily accessed on the Internet
L2 dans un parcours de formation en mathématiques				
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement	Handout prepared collectively with two other teachers-researchers	She teaches basic contents in chapter 1 such as definitions of graphs, edge, vertex, degree, maximum and minimum degree, paths, cycles, symmetric graphs, trees, chromatic numbers, stability numbers, distance, etc.	The objective of the course is introducing students to discrete mathematics The contents have to be aligned with the description of the syllabus

			In chapter 2, she teaches bipartite graphs and matching	Time constraints affect the choice of contents to be taught Bipartite graphs and matching can be taught in few hours The course aims to serve as an introduction to the graph theory course that is present at the Masters' degree
	Pondérer/ alterner les cours et TDs		She gives 12 hours of lectures and 18 hours of tutorials	Tutorials give more understanding of the concepts than lectures
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs		Handout prepared collectively with two other teachers-researchers	She gives homework and exercises to be solved in class	The objective of the course is introducing students to new ways of thinking that are not linked to formulas It is important to get problems that attract students to graph theory
M1 dans un parcours de formation en mathématiques				
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Esquisser les contenus du cours	« Graph theory » by Bondy	She teaches the theory without applications	Time constraints affect the choice of contents to be taught
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Mettre en œuvre des moments d'entraînement et d'application (exercices)	« Graph theory » by Bondy	She gives students challenging exercises to solve in class	Students that usually are underachievers in other math topics can excel in graph theory Problems in discrete mathematics have simple statements

	Introduire le problème des 4 couleurs		She introduces the four-color problem by asking students to work on an example involving schedules in a university	Many students can solve an example involving the four-color problem before getting introduced to the theorem
	Etablir des liens avec d'autres domaines mathématiques	« Graph theory » by Bondy	She works in one exercise on proving a theorem in algebra using graph theory	Students find it interesting to prove results in other mathematical domains using graph theory
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation		« Graph theory » by Bondy	She gives students as much time as they need to solve the questions in the evaluation She takes into consideration the participation of a student in class when deciding if he candidates for a PhD later on	In graph theory, giving a student more time to solve a problem allows him to come up with better and creative solutions In graph theory, solving a new problem requires many trials It is sometimes difficult to tell if a student understood a subject only from a two hour written evaluation

Annexe 4- Tableaux relatifs à l'étude des sous-buts, des ressources et des invariants opératoires recensés dans les tableaux documents

Tableau 4.1: Les sous-buts s'inscrivant dans les classes de situations repérées pour chacun des enseignants-chercheurs interviewés

		LB	LQ	LT	LN	LK	LX	FO	FF	FK	FT	Total
concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	Définir la structure d'une unité d'enseignement	X	X		X				X			4
	Pondérer/alterner cours, TDs et TPs (le cas échéant)	X	X	X	X	X		X	X	X		8
	Sélectionner les contenus d'une unité d'enseignement	X		X	X		X	X	X		X	7
	Planifier collectivement une unité d'enseignement		X				X	X	X			4
	Gérer le temps de l'enseignement								X		X	2
	Planifier individuellement une unité d'enseignement					X				X		2
	Modifier/adapter une unité d'enseignement					X						1
	Esquisser les contenus d'une unité d'enseignement						X				X	2
	Définir collectivement la structure d'une unité d'enseignement							X				1
concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	Esquisser les contenus du cours	X	X		X	X		X		X	X	7
	Enseigner un théorème	X	X		X		X					4
	Etablir des liens avec d'autres domaines mathématiques	X	X									2
	Etablir des liens avec les autres disciplines			X			X				X	3
	Solliciter l'attention des étudiants en classe	X	X						X			3
	Enseigner les preuves	X						X	X		X	4

	Enseigner un algorithme		X			X		X				3
	Mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes							X	X		X	3
	Engager les étudiants dans un travail sur la modélisation							X				1
	Introduire la théorie des graphes en classe	X	X		X			X			X	5
	Etablir des liens avec d'autres domaines mathématiques et d'autres disciplines							X				1
	Remédier aux difficultés des étudiants							X				1
	Modifier/adapter les contenus d'un cours		X									1
	Engager les étudiants dans une lecture d'articles de recherche									X		1
	Introduire une séance de cours						X					1
	Mettre en œuvre les contenus d'un cours						X					1
concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	Mettre en œuvre des moments d'entraînement et d'application (exercices)	X	X		X	X	X					5
	Enseigner les preuves	X										1
	Engager les étudiants dans un travail sur la modélisation					X	X					2
	Echanger des questions avec d'autres enseignants-chercheurs							X	X			2
	Mettre en œuvre des moments de résolution de problèmes							X	X	X		3
	Esquisser les contenus du TD		X	X			X	X		X		5
	Enseigner un théorème				X							1
	Introduire le problème des 4 couleurs				X							1

	Etablir des liens avec d'autres domaines mathématiques				X							1
	Modifier/adapter les contenus d'un TD		X									1
	Etablir des liens avec d'autres disciplines			X								1
	Concevoir et mettre en œuvre des projets en classe					X						1
	Remédier aux difficultés des étudiants					X						1
concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs	Engager les étudiants dans un travail sur la modélisation							X				1
	Mettre en œuvre des séances de programmation					X	X	X	X			4
	Mettre en œuvre des moments de recherche autour d'un problème							X				1
	Mettre en œuvre des moments d'expérimentation avec des objets matériels						X					1
	Planifier des séances de programmation						X					1
	Planifier des moments d'expérimentation avec des objets matériels								X			1
concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	Elaborer individuellement une épreuve écrite		X			X		X	X			4
	Répartir les notes dans une épreuve écrite		X					X				2
	Echanger des questions avec d'autres enseignants-chercheurs						X	X				2
	Elaborer les modalités d'évaluation des étudiants					X	X		X	X		4
	Elaborer collectivement les questions d'une épreuve écrite			X	X		X					3

	Concevoir des projets mémoires pour l'évaluation des étudiants										X	1
	Evaluer le travail des étudiants en classe										X	1
participer à un travail collectif d'enseignement ou de recherche	Participer à un collectif de recherche qui s'intéresse à la diffusion et à l'enseignement des mathématiques								X	X	X	3

Tableau 4.2 : Les ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans/pour leurs pratiques d'enseignement

			LB	LQ	LN	LK	LX	LT	FO	FF	FK	FT	Total
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	X	X	X	X	X	X	X		9
		Syllabus	X	X			X	X			X		5
		Ressources échangées avec des collègues					X	X	X	X			4
		Sujets d'examens échangés entre collègues								X			1
		Exercices donnés dans les années précédentes						X					1
		Ordinateurs et logiciels		X		X	X		X	X	X		6
		Bandes de questions générées par des étudiants pris en stage								X			1
		Ouvrage rédigé par un collègue qui enseigne le même module						X					1
		Questions et théorèmes tels que la coloration de graphes et l'emploi du temps										X	1
		Ressources en ligne		X		X	X	X	X		X		6
		Plateforme d'apprentissage Moodle								X			1
		Productions des étudiants										X	1
		Ancien polycopié d'un module de mathématiques discrètes conçu par un collègue									X		1
Ressources provenant de la recherche	de la	Publications scientifiques	X									X	2
		Articles publiés dans des conférences récentes									X		1

Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement	Polycopié conçu collectivement	X	X	X								3
		Jeux physiques et fiches (comme chasse-à-la-bête)							X		X	X	3
		Questions inventées par l'enseignant-chercheur							X				1
		Propres ressources de formations réalisées les années précédentes									X		1
	Ressources provenant de la recherche	Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et le jeu du domino							X	X		X	3
		Ressources issues de ses propres recherches								X	X		2
		Résultats de ses propres recherches	X										1
Ressources non matérielles	Discussions avec un collègue										X	1	
	Conseils d'un collègue		X									1	
	réactions des étudiants		X			X						2	
	Expérience dans l'enseignement				X							1	
	Expérience dans la recherche					X						1	
Autres ressources	téléphone portable					X					1		

Tableau 4.3 : Les ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre de la planification de leur enseignement

			L	B	Q	N	L	K	L	X	L	T	F	O	F	F	K	F	T	Total		
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X				9	
		Syllabus	X	X				X	X									X				5
		Ressources échangées avec des collègues														X						1
		Questions et théorèmes tels que la coloration de graphes et l'emploi du temps																		X		1
		Ressources en ligne						X						X								2
		Plateforme d'apprentissage Moodle												X								1
		Productions des étudiants																		X		1
		Ancien polycopié d'un module de mathématiques discrètes conçu par un collègue														X						1
Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement	Polycopié conçu collectivement	X	X	X																3	
	Ressources provenant de la recherche	Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et le jeu du domino																	X		1	

Tableau 4.4 : Les ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre d'une séance de cours

			L	B	Q	N	L	K	L	X	L	T	F	O	F	F	K	F	T	Total		
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X					9	
		Ressources échangées avec des collègues														X						1
		Ordinateurs et logiciels			X		X	X														3
		Questions et théorèmes tels que la coloration de graphes et l'emploi du temps																		X		1
		Ressources en ligne					X	X				X										3
		Plateforme d'apprentissage Moodle										X										1
		Productions des étudiants																		X		1
Ressources mobilisées	Ressources provenant de la recherche	Publications scientifiques	X																X		2	
		Articles publiés dans des conférences récentes																	X			1
Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement	Polycopié conçu collectivement	X	X																	2	
		Jeux physiques et des fiches (comme chasse-à-la-bête)																		X		1
	Ressources provenant de la recherche	Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et le jeu du domino												X	X					X		3
		Ressources issues de ses propres recherches													X	X						2
		Résultats de ses propres recherches	X																			1

Tableau 4.5 : Les ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre d'une séance de TDs

			L	B	Q	N	L	K	L	X	L	T	F	O	F	F	K	Total
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	9
		Ressources échangées avec des collègues												X				1
		Ordinateurs et logiciels					X	X				X	X	X				5
		Bandes de questions générées par des étudiants pris en stage												X				1
		Ouvrage rédigé par un collègue qui enseigne le même module									X							1
		Ressources en ligne					X					X				X		3
		Plateforme d'apprentissage Moodle												X				1
Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement	Polycopié conçu collectivement				X											1	
		Propres ressources de formations réalisées les années précédentes														X	1	
	Ressources provenant de la recherche	Ressources issues de ses propres recherches												X	X		2	

Tableau 4.6 : Les ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre d'une séance de TP

			LX	FO	FF	FK	Total
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	X		3
		Ressources échangées avec des collègues		X	X		2
		Ordinateurs et logiciels	X	X	X	X	4
		Ressources en ligne		X			1
Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement	Jeux physiques et fiches (comme chasse-à-la-bête)		X		X	2
		Ressources provenant de la recherche	Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et le jeu du domino		X	X	

Tableau 4.7 : Les ressources avec lesquelles les enseignants-chercheurs interagissent dans/pour la conception et la mise en œuvre des moments d'évaluation

			L	Q	N	L	K	L	X	L	T	F	O	F	F	K	F	T	Total	
Ressources mobilisées	Ressources provenant de l'enseignement	Ouvrages à destination de l'enseignement	X	X	X							X	X	X					6	
		Ressources échangées avec des collègues					X	X	X											3
		Sujets d'examens échangés entre collègues												X						1
		Exercices donnés dans les années précédentes								X										1
		Ressources en ligne	X			X	X	X	X	X						X				6
		Plateforme d'apprentissage Moodle											X							1
	Ressources provenant de la recherche	Articles publiés dans des conférences récentes														X			1	
Ressources produites	Ressources provenant de l'enseignement	Questions inventées par l'enseignant-chercheur										X							1	
		Propres ressources de formations réalisées les années précédentes													X				1	
	Ressources provenant de la recherche	Problèmes de recherche tels que la chasse-à-la-bête et le jeu du domino															X		1	

Tableau 4.8 : Classification des invariants opératoires inscrits dans les classes de situations identifiées dans le tableau document de LB

Classes de situations	Invariants opératoires	dominante
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	- Il est important que les contenus soient conformes avec les instructions officielles de la filière	I
	- Un enseignant au supérieur a une certaine marge de liberté dans la conception de son enseignement	I
	- En Master, il y a un niveau théorique plus important qu'en licence	I
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	- Le langage des publications scientifiques est différent du langage utilisé en classe	D
	- Certaines notions mathématiques dans l'enseignement peuvent être mises en lien avec la théorie mathématique sur laquelle l'enseignant-chercheur travaille dans sa recherche	E _D
	- Il est important que les étudiants soient cultivés au niveau de la connexité et de la non-connexité des graphes et du recouvrement et d'autres applications	D _E
	- Les preuves en mathématiques discrètes sont considérées comme « difficiles »	D _E
	- Les définitions en mathématiques discrètes sont simples	E _D
	- Il est important de modéliser dans l'enseignement des mathématiques discrètes	D _E
	- Il est plus facile de répondre à la question « quoi faire » dans les preuves en mathématiques discrètes qu'à la question « pourquoi faire »	E _D
	- Les preuves en mathématiques discrètes sont basées sur des astuces	E
	- Les preuves en mathématiques discrètes ne sont pas faites les unes sur les autres	E
	- Les preuves en mathématiques discrètes ont des énoncés simples	E
	- L'énoncé simple en mathématiques est un danger sérieux	D
	- Les preuves en mathématiques discrètes ont des aspects « techniques » qui se répètent souvent	E
	- Les preuves en mathématiques discrètes ont des particularités par rapport aux preuves en général	E
	- Les particularités des preuves en mathématiques discrètes font que ce soit un domaine pas aisé pour les étudiants	D _E
	- Une difficulté des mathématiques discrètes est la compréhension des idées	D _E
- Il est parfois difficile de rédiger les idées en mathématiques discrètes	D _E	
- La difficulté la plus importante dans l'enseignement des mathématiques discrètes est la difficulté dans le raisonnement	D _E	

	<ul style="list-style-type: none"> - Certaines phrases dans les « textes modèles » sont irremplaçables lors de la rédaction d'une preuve - Les étudiants ont des préjugés sur les mathématiques discrètes, ils les trouvent difficiles - Il faut beaucoup d'exemples pour familiariser les étudiants au raisonnement en mathématiques discrètes - Il est possible d'établir des liens entre les mathématiques discrètes et les structures algébriques finies - La compréhension des idées est très importante en mathématiques discrètes - Les illustrations sont importantes pour les preuves en mathématiques discrètes - L'illustration peut être un obstacle à voir les choses avec la généralité demandée - Il est important de faire sortir les aspects « techniques » des preuves pour avoir des astuces - Il est agréable pour un enseignant-chercheur de pouvoir présenter à ses étudiants des résultats de son activité de recherche 	<p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">E_D</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">D</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	<ul style="list-style-type: none"> - La difficulté la plus importante dans l'enseignement des mathématiques discrètes est la difficulté dans le raisonnement - La vérification des travaux des étudiants permet à l'enseignant d'être sûr qu'ils effectuent le travail demandé - Les preuves en mathématiques discrètes sont basées sur des astuces - Il est important que les étudiants s'entraînent à la rédaction - Les étudiants sont parfois incapables de rédiger les idées en mathématiques discrètes même s'ils les comprennent - Les preuves en mathématiques discrètes sont considérées comme « difficiles » 	<p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">P</p> <p style="text-align: right;">E</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">D_E</p>

Tableau 4.9 : Classification des invariants opératoires inscrits dans les classes de situations identifiées dans le tableau document de LQ

Classes de situations	Invariants opératoires	Dominante
<p>Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Il faut qu'il y ait une conformité des contenus avec les instructions officielles de la filière - Le choix des contenus à inclure dans un module est plus facile quand on commence de zéro - Les contenus d'un module doivent être en harmonie avec les syllabus présents au sein de l'institution - Le cours donne une compréhension plus profonde des mathématiques discrètes que le TD - Un enseignant qui donne les deux parties, cours magistral et TDs, d'un module a une marge de manœuvre dans la planification de l'alternance des séances (cours magistral et TDs) - Les discussions et les collaborations entre les enseignants permettent d'améliorer le module d'enseignement en profitant de l'expérience de chacun - Il est important qu'il y ait une homogénéité au niveau des contenus d'un même module dans les différentes branches d'une même université - Les branches des mathématiques discrètes sont indépendantes les unes des autres - Il est important d'introduire les mathématiques discrètes aux étudiants comme pour les autres domaines mathématiques - Les contenus en Master doivent être un peu différents de ceux donnés en licence - En Master, il y a un niveau théorique plus important qu'en licence - La marge de liberté dans les choix des contenus d'un module est plus grande en Master qu'en licence 	<p>I</p> <p>D</p> <p>I</p> <p>D</p> <p>I</p> <p>D</p> <p>I</p> <p>E</p> <p>I</p> <p>I</p> <p>I</p> <p>I</p>
<p>Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Il est important que les étudiants comprennent les notions - Il est important que les étudiants se sentent à l'aise avec les contenus d'un cours - Il est parfois difficile d'effectuer des modifications au niveau des contenus du cours en mathématiques discrètes - Un contenu est « mathématique » quand il n'aborde pas des applications - La division des preuves des théorèmes en plusieurs étapes les rend plus accessibles aux étudiants 	<p>D</p> <p>D</p> <p>I</p> <p>D</p> <p>D</p>

	<ul style="list-style-type: none"> - Dans l'activité de preuve en mathématiques discrètes, les étudiants trouvent des difficultés au niveau du raisonnement - Les étudiants se sentent plus à l'aise dans les séances de TDs - Il est important d'expliquer aux étudiants dans le cours la construction de preuves qui ressemblent à celles données en TD - La capacité d'anticiper les réaction des étudiants guide l'enseignant dans son enseignement en classe - Il faut du temps pour que les étudiants se familiarisent avec le domaine des mathématiques discrètes - Les étudiants sont intéressés par les définitions et les applications (telles que la coloration) en mathématiques discrètes - Il faut qu'il y ait une conformité des contenus avec les instructions officielles de la filière - Il existe un théorème intéressant en coloration qui mobilise les graphes planaires - Il est important que les étudiants soient cultivés au niveau des liens entre la théorie des graphes et d'autres domaines mathématiques 	<p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">P</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">I</p> <p style="text-align: right;">E</p> <p style="text-align: right;">D_I</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	<ul style="list-style-type: none"> - Le cours donne plus de compréhension des mathématiques discrètes que le TD - Certaines questions ne sont pas utiles pour les étudiants - Les réactions des étudiants en classe permettent à l'enseignant de savoir s'ils ont bien compris - Les questions sont plus accessibles aux étudiants quand elles sont divisées en plusieurs étapes - La division des preuves des théorèmes en plusieurs étapes les rend plus accessibles aux étudiants - Dans l'activité de preuve en mathématiques discrètes, les étudiants trouvent des difficultés au niveau du raisonnement 	<p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">D_I</p> <p style="text-align: right;">P</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">D_E</p>
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	<ul style="list-style-type: none"> - Le principal objectif de l'évaluation est de vérifier la compréhension des contenus (théorèmes et démonstrations) - Un étudiant qui a bien compris un théorème doit être capable de répondre à une question qui porte sur ce théorème - Un des objectifs de l'évaluation est de tester la capacité d'analyse d'un étudiant - Les étudiants choisissent parfois d'étudier certains chapitres d'un module et pas d'autres 	<p style="text-align: right;">P</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">D</p>

	- Les problèmes proposés dans les ouvrages peuvent donner des idées pour l'évaluation	D
	- Certains exercices présents dans les ouvrages sont « difficiles » pour les étudiants	D
	- Il est difficile de trouver des questions en ligne si l'enseignant ne sait pas exactement ce qu'il recherche	D
	- Les ouvrages constituent une source plus fiable d'exercices pour un enseignant que l'internet	D
	- Un enseignant doit être prudent en choisissant les questions d'une épreuve écrite	P
	- Les exercices dans une épreuve écrite ne doivent pas être très « difficiles » pour les étudiants	P
	- Un enseignant-chercheur expérimenté est capable d'anticiper les réactions des étudiants face à une question	P
	- Un étudiant qui a bien étudié doit être capable de réussir	P

Tableau 4.10 : Classification des invariants opératoires inscrits dans les classes de situations identifiées dans le tableau document de FK

Classes de situations	Invariants opératoires	Dominante
<p>Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Il faut que les contenus soient conformes aux objectifs du syllabus - Un enseignant au supérieur a une marge de manœuvre dans le choix des objectifs - En termes de contenus, un thème peut être décliné selon des objectifs pédagogiques différents les uns des autres - L'enseignant est en charge de décider comment décliner un contenu en enseignement et de construire la progression - Le volume horaire global et la répartition des séances dans l'année ou dans le semestre constituent des contraintes dans la planification de l'enseignement - Le nombre d'étudiants constitue une contrainte dans la planification de l'enseignement - Le profil des étudiants conditionne le choix des contenus dans l'enseignement - Le parcours de formation conditionne le choix des contenus dans l'enseignement - La disponibilité des ressources est une contrainte à prendre en compte lors de la planification de l'enseignement - L'objectif du module est de familiariser les étudiants avec le vocabulaire et de les rendre capables de modéliser des situations en mobilisant les outils présentés et d'obtenir une solution optimale aux problèmes concrets - L'algorithme du simplex permet d'obtenir des résultats dans des problèmes d'optimisation - L'ordonnancement de la production comprend des raisonnements intéressants et instructifs pour les étudiants - Un enseignement ancré dans les applications permet de justifier aux étudiants pourquoi on étudie ce qu'on étudie - Il est important de trouver le bon discours adapté aux étudiants dans un enseignement en termes d'exemples mobilisés, de pondération théories/preuves/exemples et de choix de problèmes à aborder 	<p>I I D I I I D I I I E D_E D D</p>
<p>Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Les articles portant sur des modélisations de problèmes issus de situations concrètes du contexte industriel sont intéressants pour les étudiants - L'ordonnancement de la production est intéressant dans l'enseignement parce qu'il est ancré dans les applications 	<p>D D_E</p>

	<ul style="list-style-type: none"> - En ordonnancement de la production, il y a des cas simples faciles à modéliser et sur lesquels les étudiants peuvent raisonner - Certains sujets proposés dans un enseignement de l'ordonnancement de la production ne se trouvent pas dans des ouvrages classiques de la littérature - Certains ouvrages sont bien écrits en ce qui concerne la présentation des idées - La proposition des idées simples issues des recherches récentes est stimulante pour les étudiants - La lecture des articles récents publiés dans des conférences qui portent sur des sujets d'application concrets est stimulante pour les étudiants 	<p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">D</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	<ul style="list-style-type: none"> - Il est délicat de trouver un problème pour illustrer une situation - La recherche d'un problème sur internet permet de donner un premier aperçu des possibilités en ce qui concerne la mobilisation de ce problème dans l'enseignement - Les questions ouvertes peuvent susciter des débats en classe - Certains problèmes en mathématiques discrètes peuvent être réinvestis à différents niveaux - La gestion des émotions des étudiants et de leur motivation est très délicate, surtout en travaillant sur des problèmes ouverts - Les étudiants sont peu habitués à travailler sur des problèmes de recherche - Les étudiants sont souvent démotivés en travaillant sur les exercices et les problèmes ouverts - Il est désagréable pour un étudiant de ne pas avoir d'idées sur un problème sur lequel on travaille en classe - Les étudiants se sentent déçus quand ils découvrent qu'une idée qu'ils considéraient bonne pour résoudre un problème ne l'est pas en réalité - Il est essentiel d'éviter de donner trop d'indices aux étudiants quand ils se sentent bloqués 	<p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">P</p> <p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">D</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs	<ul style="list-style-type: none"> - La dimension expérimentale est importante dans l'enseignement - Les activités expérimentales avec manipulation de matériel peuvent être très coûteuses en termes de temps - Il est important que les étudiants expérimentent avec du matériel quand ils sont confrontés à une situation de type problème ouvert - La dimension expérimentale peut être présente en mobilisant des jeux et du matériel 	<p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">I_D</p> <p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">D</p>

	<ul style="list-style-type: none"> - Il est possible d'atteindre un tas d'objectifs en recherche opérationnelle sans utiliser des ordinateurs - Souvent les séances informatique consistent à enseigner une procédure, comme se servir des fonctionnalités principales d'un logiciel - La dimension expérimentale peut être plus forte quand un étudiant est placé devant un plateau avec du matériel que dans une salle informatique 	<p>D_E</p> <p>D</p> <p>D</p>
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	<ul style="list-style-type: none"> - Il est important que les étudiants soient capables de reproduire un raisonnement sur des cas simples ou proches des cas exposés dans le module - Dans certains domaines mathématiques, la réussite dans une évaluation exige un apprentissage de formules et de techniques - Les étudiants rencontrent un obstacle d'ordre linguistique dans la compréhension d'un article rédigé en anglais 	<p>D</p> <p>D</p> <p>D</p>
Participer à un collectif d'enseignement ou de recherche	<ul style="list-style-type: none"> - Appartenir à un groupement de chercheurs peut constituer une occasion pour rencontrer des personnes qui s'intéressent à des façons différentes d'enseigner les mathématiques discrètes, aux problèmes ouverts et aux jeux avec matériel, et qui sont susceptibles d'en développer - Des chercheurs dans une équipe à laquelle appartient un chercheur peuvent apporter un regard critique sur certaines situations qu'il développe et propose dans/pour son enseignement 	<p>D</p> <p>D</p>

Tableau 4.11 : Classification des invariants opératoires inscrits dans les classes de situations identifiées dans le tableau document de FT

Classes de situations	Invariants opératoires	Dominante
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	<ul style="list-style-type: none"> - Faire des mathématiques, c'est faire des preuves - Une personne qui occupe un poste de recherche a une grande marge de liberté dans les choix des contenus des modules qu'elle enseigne - Il y a une grande marge de liberté dans le choix des contenus d'un module optionnel - L'objectif du module est de former les étudiants au raisonnement - Il est souvent difficile pour les étudiants de formuler des résultats et des raisonnements - Il est important de faire émerger chez les étudiants, dès les premières séances, la nécessité de la preuve - Il est important que les étudiants vivent des problèmes de recherche en mathématiques - En Master, il y a un niveau théorique plus important qu'en licence - Il y a un univers de problèmes, de questions, et de théorèmes qui peuvent être abordés en Master - Les étudiants ont besoin du temps pour pouvoir rechercher un problème 	<p>D I I I D D D I D_E D</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	<ul style="list-style-type: none"> - L'enseignement des mathématiques discrètes permet de viser des savoirs relatifs à la preuve - Dans la rédaction des preuves, on risque de se concentrer sur les aspects techniques et d'oublier les idées qui font que la preuve fonctionne - Ce qui est intéressant dans une preuve en mathématiques discrètes, c'est l'idée, c'est l'aspect innovateur - Des problèmes issus des recherches en mathématiques peuvent être transformés en situations pour l'enseignement - Les cours donnés en amphi peuvent la plupart du temps être remplacés par des vidéos ou des livres - Les problèmes en mathématiques discrètes sont faciles d'accès - En mathématiques discrètes, le modèle de résolution des problèmes de modélisation est rarement désigné à l'avance 	<p>D_E D D_E D_E P D_E E</p>

	- Une difficulté des étudiants est de reconnaître les objets dans des problèmes, c'est-à-dire d'identifier leurs propriétés	D _E
	- L'enseignement des mathématiques discrètes permet de placer les étudiants en posture de chercheurs	D _E
	- Il est important que les étudiants vivent des problèmes de recherche en mathématiques	D
	- Les problèmes en mathématiques discrètes sont facilement énonçables	E
	- Le caractère ludique des problèmes en mathématiques discrètes donne aux étudiants l'envie de les résoudre	D _E
	- Il est important que les étudiants s'approprient le problème sur lequel ils travaillent	D
	- Le principal apport de l'enseignement des mathématiques discrètes est l'enseignement du raisonnement	D _E
	- Il est important de développer chez les étudiants un réflexe sur le questionnement des choses	D
	- La gestion de classe qui consiste à être guidé par les productions des étudiants est souvent difficile pour un enseignant	P
	- Les étudiants vivent une phase de frustration quand ils sont placés en situation de recherche	D
	- Les mathématiques discrètes peuvent être des outils de modélisation et des outils d'enseignement de la preuve	D _E
	- Le problème mathématique derrière un problème de la vraie vie en est plus important	D
	- Les étudiants peuvent mettre en œuvre des stratégies pour résoudre un problème avec lesquelles l'enseignant n'est pas familier ou formuler des idées auxquelles il n'a pas la réponse	D
	- Dans un travail de recherche, on peut ne pas avoir toutes les réponses aux questions que l'on se pose	I
	- Des problèmes issus des recherches en mathématiques peuvent être transformés en situations pour l'enseignement	D _E
	- Faire des mathématiques, c'est faire des preuves	D
	- Les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence d'un objet sont d'une certaine manière une définition de cet objet	E

	<ul style="list-style-type: none"> - Dans le problème de l'emploi du temps, le graphe peut être construit facilement par les étudiants - 90 pourcent des étudiants procèdent sur le problème de l'emploi du temps en utilisant l'algorithme glouton - Il y a une différence entre la posture de chercheur et la posture de l'enseignant en classe. Un enseignant est supposé avoir les savoirs afin de les transmettre, un chercheur peut ne pas tout savoir - Les mathématiques discrètes permettent de modéliser des problèmes issus d'autres disciplines comme la chimie ou les sciences sociales 	<p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">D_E</p> <p style="text-align: right;">D_I</p> <p style="text-align: right;">E</p>
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	<ul style="list-style-type: none"> - Il y a un aspect subjectif dans l'évaluation - Les professeurs sont capables d'évaluer les étudiants en discutant entre eux sans mettre des notes - L'évaluation est une prescription institutionnelle - L'évaluation est peu fiable pour 90% des étudiants - L'évaluation orale permet de distinguer entre les étudiants dans un même binôme, qui ont présenté une même production écrite - Il est convenu de donner de bonnes notes aux étudiants dans un module de M2 - Il y a une dimension contractuelle dans l'enseignement ; certains étudiants font le travail juste pour obtenir le diplôme - Il existe dans les mini-mémoires des parties non abordées en classe - Il est convenu de donner de bonnes notes aux étudiants dans un module optionnel - Il est important que les étudiants soient présents et actifs en classe - Il est nécessaire d'individualiser l'évaluation au sein d'un groupe - L'évaluation de l'activité des étudiants dans un travail de groupe est subjective - Il est facile pour un étudiant d'avoir une bonne note en étant présent en classe et actif au sein de son groupe 	<p style="text-align: right;">P</p> <p style="text-align: right;">P</p> <p style="text-align: right;">I</p> <p style="text-align: right;">P</p> <p style="text-align: right;">P</p> <p style="text-align: right;">I</p> <p style="text-align: right;">P</p> <p style="text-align: right;">D</p> <p style="text-align: right;">I</p> <p style="text-align: right;">P</p> <p style="text-align: right;">P</p> <p style="text-align: right;">P</p> <p style="text-align: right;">D_I</p>
Participer à un collectif d'enseignement ou de recherche	<ul style="list-style-type: none"> - Il est important de réduire la distance entre les mathématiques théoriques enseignées et les problèmes de la vie réelle 	<p style="text-align: right;">D</p>

Tableau 4.12 : Classification des invariants opératoires inscrits dans les classes de situations identifiées dans le tableau document de FF

Classes de situations	Invariants opératoires	Dominante
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	<ul style="list-style-type: none"> - Un enseignant au supérieur a une marge de liberté dans le choix des contenus d'une unité d'enseignement - Les problèmes en mathématiques discrètes sont faciles d'accès - Les problèmes en mathématiques discrètes peuvent faire appel à des méthodes de résolution complexes - Les objectifs d'apprentissage à partir de la résolution de problèmes de modélisation en mathématiques discrètes sont le choix de modèle à mobiliser et les méthodes de résolution - Les mathématiques discrètes sont les mathématiques les plus proches de l'informatique - « Les graphes » constituent un objet mathématique qui peut être mobilisé pour la modélisation en informatique - Un jeu combinatoire peut être modélisé par un graphe - Les mathématiques discrètes possèdent un volet algorithmique présenté avec le modèle purement mathématique - Certaines notions mathématiques théoriques sont très importantes pour un étudiant informaticien - L'enseignement des mathématiques discrètes en France tourne surtout autour de la théorie des graphes - L'enseignement de la théorie des graphes en France porte surtout sur l'optimisation et la recherche des chemins - Le travail collectif est une exigence de l'institution - Il y a une marge de liberté plus importante en Master qu'en licence en termes de choix des contenus et de leur organisation - Il est parfois difficile de respecter le rythme des étudiants dans le travail en classe - Il est essentiel de compléter le programme prévu 	<p style="text-align: center;">I</p> <p style="text-align: center;">D_E</p> <p style="text-align: center;">E_D</p> <p style="text-align: center;">D</p> <p style="text-align: center;">E_I</p> <p style="text-align: center;">E_D</p> <p style="text-align: center;">E</p> <p style="text-align: center;">E</p> <p style="text-align: center;">D</p> <p style="text-align: center;">I_E</p> <p style="text-align: center;">I_E</p> <p style="text-align: center;">I</p> <p style="text-align: center;">I</p> <p style="text-align: center;">I</p> <p style="text-align: center;">I</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	<ul style="list-style-type: none"> - Les étudiants sont plus intéressés par des exemples provenant de la vie réelle que par des notions théoriques moins concrètes 	<p style="text-align: center;">D</p>

	<ul style="list-style-type: none"> - Les sujets à enseigner dans un parcours de formation ne sont pas forcément les sujets sur lesquels un enseignant-chercheur travaille dans sa recherche - Un jeu combinatoire peut être modélisé par un graphe - Il est important qu'un enseignant arrive à donner du sens à ce qu'il enseigne - Les mathématiques discrètes permettent de répondre aux questions qui portent sur « leur utilité » vu qu'elles interviennent dans des algorithmes en informatique et des études de cas pratiques - Le problème de la chasse à la bête est un problème de dualité en programmation linéaire qui peut être présenté à des étudiants au niveau Master - Les étudiants dans un parcours d'informatique manquent souvent de la rigueur mathématique nécessaire pour construire des preuves - Les étudiants ressentent rarement le besoin d'enchaîner les idées et de prouver la validité d'une idée dans un travail sur les preuves 	<p>I</p> <p>E</p> <p>P</p> <p>D_E</p> <p>D_E</p> <p>D_I</p> <p>D</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	<ul style="list-style-type: none"> - Les mathématiques discrètes permettent de travailler sur des exemples de la vie réelle - Les étudiants dans un parcours d'informatique manquent souvent de la rigueur mathématique nécessaire pour construire des preuves 	<p>D_E</p> <p>D_I</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs	<ul style="list-style-type: none"> - La modélisation est très importante dans un travail sur un problème concret d'une entreprise - Les mathématiques discrètes permettent de représenter des problèmes issus de la vie réelle - L'enseignement des mathématiques discrètes permet de familiariser les étudiants aux modèles qui existent - Il est important de convaincre les étudiants de l'importance des mathématiques en leur montrant à quoi ça sert dans une formation d'informaticiens - Les étudiants en Master sont plus proches de la recherche que les étudiants en licence - Il est important de laisser les étudiants travailler selon leur propre rythme - Les mathématiques discrètes permettent de représenter des problèmes issus d'autres disciplines telles que l'informatique - Les étudiants prennent plaisir à la partie TP concrète du module plus que la partie qui porte sur les preuves théoriques des résultats 	<p>D_E</p> <p>E</p> <p>D_E</p> <p>D_I</p> <p>I</p> <p>D</p> <p>E</p> <p>D</p>

	<ul style="list-style-type: none"> - Les étudiants s'intéressent à construire un algorithme efficace, sans vraiment s'intéresser aux raisons derrière - Dans un travail collectif, les idées émergent plus abondamment pour résoudre un problème - La recherche sur des problèmes en mathématiques discrètes peut être conduite sans utilisation d'ordinateurs - La recherche sur des problèmes en mathématiques discrètes permet un travail en groupes ou des collaborations à distance - En mathématiques discrètes, des résultats peuvent émerger à partir d'expérimentations informatiques 	<p>D</p> <p>D</p> <p>E</p> <p>I_E</p> <p>E</p>
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	<ul style="list-style-type: none"> - Un étudiant qui a suivi le cours doit être capable de réussir - Les mathématiques discrètes permettent de travailler sur des exemples de la vie réelle - Il est important d'évaluer la capacité des étudiants à prendre des initiatives dans des situations problèmes nouvelles - En mathématiques discrètes, il y a des casse-têtes qui peuvent être traduits par des modèles mathématiques pour l'enseignement 	<p>P</p> <p>D_E</p> <p>D</p> <p>D_E</p>

Tableau 4.13 : Classification des invariants opératoires inscrits dans les classes de situations identifiées dans le tableau document de LX

Classes de situations	Invariants opératoires	Dominante
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	<ul style="list-style-type: none"> - Un enseignant-chercheur a juste besoin de savoir quels concepts à enseigner afin de pouvoir donner un module en classe - Il est important qu'un enseignement de mathématiques vise à mettre l'accent sur leur utilité - Les questions que posent les étudiants peuvent donner des idées à inclure dans un module - Il faut qu'il y ait une conformité des contenus au syllabus - Un enseignant-chercheur a une marge de liberté dans son enseignement, tout en respectant le choix de concepts à enseigner - Dans certains parcours de formation, il est suffisant de donner aux étudiants une idée globale sur les mathématiques discrètes - Un enseignant qui enseigne son domaine de recherche peut mobiliser son expérience dans la planification de son enseignement 	<p style="text-align: center;">I_D</p> <p style="text-align: center;">D</p> <p style="text-align: center;">P</p> <p style="text-align: center;">I</p> <p style="text-align: center;">I</p> <p style="text-align: center;">D</p> <p style="text-align: center;">D</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	<ul style="list-style-type: none"> - Dans un cours, il faut donner les prérequis avant de s'engager dans de nouvelles notions - L'illustration favorise la compréhension des concepts - Un enseignant-chercheur a rarement besoin d'une ressource matérielle pour enseigner un cours, il peut avoir les idées en tête - Un enseignement doit comprendre plus qu'une lecture de texte aux étudiants - Tout phénomène peut être modélisé par un graphe - Les mathématiques discrètes permettent de modéliser des phénomènes difficiles à comprendre en mobilisant des modèles parfois faciles - Les concepts en mathématiques discrètes peuvent être expliqués à travers des exemples - L'aspect concret des mathématiques discrètes les rend faciles d'accès aux étudiants et leur permet de se rendre compte de leur utilité - Les étudiants finissent par oublier les mathématiques qu'ils ont apprises s'ils ignorent à quoi elles servent 	<p style="text-align: center;">P</p> <p style="text-align: center;">D</p> <p style="text-align: center;">D</p> <p style="text-align: center;">P</p> <p style="text-align: center;">E</p> <p style="text-align: center;">E_D</p> <p style="text-align: center;">D_E</p> <p style="text-align: center;">D_E</p> <p style="text-align: center;">D</p>

	<ul style="list-style-type: none"> - Un enseignant-chercheur peut ne pas toujours connaître le domaine d'application des mathématiques qu'il enseigne, surtout quand elles ne relèvent pas de son domaine de recherche - Dans l'enseignement dans certains parcours, on s'intéresse plus à l'application de résultats mathématiques qu'à un travail sur les preuves - Il est important que les étudiants se familiarisent avec des notions des mathématiques discrètes qu'ils peuvent mobiliser dans la résolution de problèmes qui relèvent de leur domaine de formation 	<p>I</p> <p>D_I</p> <p>D_I</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	<ul style="list-style-type: none"> - Les modèles mobilisés dans l'enseignement sont créés par des mathématiciens - Les étudiants peuvent travailler en groupe ou individuellement, selon les situations sur lesquelles ils travaillent - Il est important que les étudiants réalisent l'utilité des graphes - Un projet doit être multidisciplinaire - Un problème donné aux étudiants dans le contexte d'une unité d'enseignement peut être considéré comme un mini-projet - Si les mêmes sujets sont donnés aux étudiants pour les mini-projets, ils pourraient s'appuyer sur les expositions des autres groupes pour prendre des idées - L'exposition de plusieurs mini-projets qui portent sur un même sujet pourrait ennuyer les étudiants en classe - La demande à un étudiant d'exposer la solution d'un exercice au tableau l'obligerait à être plus sérieux dans la résolution de cet exercice - Le groupe sur WhatsApp permet aux étudiants de répondre aux questions de leurs camarades de classe et de travailler ensemble, et permet à l'enseignant de corriger les mauvaises réponses données - Les mathématiques discrètes permettent de modéliser des phénomènes difficiles à comprendre en mobilisant des modèles parfois faciles - Les modèles mathématiques sont intéressants pour leur utilité 	<p>D_I</p> <p>D_E</p> <p>D</p> <p>D_I</p> <p>D</p> <p>P</p> <p>P</p> <p>P</p> <p>D</p> <p>E_D</p> <p>D_E</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs	<ul style="list-style-type: none"> - Les résultats obtenus par mobilisation d'algorithmes peuvent être comparés aux résultats obtenus par des chercheurs dans le domaine 	<p>D_E</p>
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	<ul style="list-style-type: none"> - Il faut que l'évaluation soit commune pour tous les enseignants-chercheurs qui enseignent le même module - Il faut que tous les enseignants-chercheurs qui enseignent le module se mettent d'accord sur le contenu d'une évaluation 	<p>I</p> <p>I</p>

	- Il faut que les enseignants-chercheurs qui enseignent un même module dans différentes sections respectent un même barème lors de la correction	I
	- Le temps constitue une contrainte par rapport aux modalités de l'évaluation	I

Tableau 4.14 : Classification des invariants opératoires inscrits dans les classes de situations identifiées dans le tableau document de FO

Classes de situations	Invariants opératoires	Dominante
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	<ul style="list-style-type: none"> - Il est important que les étudiants possèdent une culture sur les graphes et les algorithmes : faire des parcours de graphes et savoir ce qu'on est en train de parcourir - Certains contenus en théorie des graphes constituent une culture de base pour les étudiants tels que les chemins et les plus courts chemins - Il y a des contenus obligatoires en théorie des graphes tels que le cheminement, Dijkstra, et la coloration - Le travail collectif des enseignants-chercheurs permet d'améliorer les modules d'enseignement et de gagner du temps -Le partage des ressources entre les enseignants-chercheurs permet d'enrichir leurs modules - Il est mieux d'exposer son travail à d'autres enseignants-chercheurs dans le domaine que de travailler seul - Le nombre d'heures et le nombre d'étudiants dans une classe constituent des contraintes dans l'enseignement - Il est important que les étudiants essaient les algorithmes qu'ils ont programmés sur les ordinateurs - Il est important pour les étudiants, après avoir travaillé sur des problèmes et sur leurs preuves, qu'ils les programment, pour une compréhension globale - Donner des retours à fur et à mesure aux étudiants leur permet d'évaluer leur acquisition des contenus tout au long de leur apprentissage - Le graphe est visuel - Le graphe permet de faire comprendre des notions mathématiques avancées aux étudiants 	<p>D</p> <p>D_E</p> <p>D_E</p> <p>D</p> <p>D</p> <p>D</p> <p>I</p> <p>D</p> <p>D</p> <p>P</p> <p>E</p> <p>D_E</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	<ul style="list-style-type: none"> - Il est important que les étudiants comprennent les notions du cours - Les étudiants apprécient quand l'enseignant partage avec eux ce qu'il fait en recherche - Les étudiants apprécient la théorie des graphes à cause de son aspect pratique et de la possibilité d'illustrer les idées par des figures 	<p>P</p> <p>D</p> <p>D_E</p>

	- En mathématiques discrètes, il y a une distance entre les objets	E
	- En mathématiques discrètes, on travaille souvent sur un ensemble fini d'objets	E
	- Les études de cas provenant du travail de recherche permettent d'enrichir l'enseignement	D
	- Les études de cas provenant du travail de recherche servent de support pour montrer des idées aux étudiants	D
	- L'activité de recherche d'un enseignant permet à son cours de rester vivant, dans le sens que ça lui permet de mettre à jour les contenus en rapport avec son travail de recherche	D
	- Il est important que tous les étudiants aient compris les contenus de base « faciles »	D
	- En théorie des graphes, il y a les aspects preuve, modélisation et programmation	D _E
	- Il est important pour les étudiants, après avoir travaillé sur des problèmes et sur leurs preuves, qu'ils les programment, pour une compréhension globale	D
	- Les questions bonus encouragent les étudiants à développer une culture autour des graphes	D
	- Les arbres sont très utilisés par les informaticiens	D _E
	- Il est essentiel que les étudiants connaissent les propriétés des arbres	D _I
	- Les étudiants en informatique ont peur des mathématiques	D _I
	- Les étudiants dans un parcours d'informatique peuvent acquérir les contenus relatifs à la programmation plus vite que les étudiants dans un parcours de mathématiques-informatique	D _I
	- Les cas qui n'aboutissent pas à la solution d'un problème de recherche peuvent montrer des idées aux étudiants	D
	- Dans l'enseignement des mathématiques discrètes, le passage des cas pratiques à l'abstraction vient naturellement	D _E
	- Certains étudiants ont des difficultés à passer à l'abstraction dans l'apprentissage des mathématiques discrètes	D
	- Les mathématiques discrètes sont très proches de l'informatique	E
	- La programmation permet d'apprendre les preuves aussi bien que l'informatique	D _E
	- Certains étudiants demandent de travailler sur des contenus plus avancés	D
	- Les étudiants plus « faibles » s'intéressent parfois à des questions énigmes	D

	<ul style="list-style-type: none"> - Les mathématiques discrètes, particulièrement les arbres, permettent un travail approfondi sur les preuves - La preuve par induction est visible sur les arbres - Les étudiants les plus « faibles » ont plus besoin de l’enseignant que ceux qui sont plus « forts » - Certains étudiants rencontrent des difficultés avec les preuves - Les étudiants dans un parcours de mathématiques-informatique ont la capacité de travailler sur des preuves que ceux dans un parcours d’informatique ne possèdent pas - Il est important que les étudiants puissent modéliser un problème authentique ou issu de la vie réelle en utilisant un graphe - Les mathématiques discrètes sont un outil que tout mathématicien ou informaticien doit avoir dans son bagage - Il est possible d’établir des liens avec la recherche opérationnelle où on optimise dans des problèmes issus de la vie réelle - Certains étudiants ont des difficultés avec la logique des preuves 	<p>D_E</p> <p>E</p> <p>P</p> <p>D</p> <p>D_I</p> <p>D</p> <p>D_E</p> <p>D_E</p> <p>D</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	<ul style="list-style-type: none"> - Les étudiants, en générant des questions, se posent les questions à l’envers ce qui est intéressant - Les profils des étudiants peuvent être une contrainte dans la planification de l’enseignement - Le partage des ressources entre les enseignants-chercheurs permet d’enrichir leurs modules - Le travail collectif des enseignants-chercheurs permet d’améliorer les modules d’enseignement et de gagner du temps - Les problèmes de modélisation constituent une sorte de culture pour les étudiants - Il est important que les étudiants puissent modéliser un problème authentique ou de la vie réelle en utilisant un graphe 	<p>D</p> <p>D</p> <p>D</p> <p>D</p> <p>D</p> <p>D</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TPs	<ul style="list-style-type: none"> - Le graphe est visuel - Le graphe permet de faire comprendre des notions mathématiques avancées aux étudiants - Il est important que les étudiants puissent faire le lien entre ce qu’ils font en TPs et les contenus du cours 	<p>E</p> <p>D_E</p> <p>D</p>

	<ul style="list-style-type: none"> - Les étudiants manquent d'une culture de base en programmation - Les étudiants peuvent se rattraper vite dans l'apprentissage de la programmation - Les étudiants ont du mal avec les algorithmes et la notion de complexité d'un algorithme - Il est important que les étudiants puissent programmer et discuter de l'optimalité de la solution - Il est important que les étudiants puissent modéliser un problème authentique ou issu de la vie réelle en utilisant un graphe 	<p>D_I</p> <p>D</p> <p>D</p> <p>D</p> <p>D</p>
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	<ul style="list-style-type: none"> - Il est important que les étudiants maîtrisent les « techniques de preuve » - L'objectif de l'évaluation est de tester ce que les étudiants ont appris dans le module - Les différentes versions d'un même exercice, en termes de données, empêchent les étudiants de copier les résultats des autres - Donner des retours à fur et à mesure aux étudiants leur permet d'évaluer leur acquisition des contenus tout au long de leur apprentissage - Il est important que les étudiants puissent adapter ce qu'ils ont appris dans le module à de nouvelles situations - Il est important que les étudiants comprennent les notions du module - Il est important que les étudiants puissent écrire une preuve tout seuls - Le travail collectif des enseignants-chercheurs permet d'améliorer les modules d'enseignement et de gagner du temps -Le partage des ressources entre les enseignants-chercheurs permet d'enrichir leurs modules 	<p>D_E</p> <p>P</p> <p>P</p> <p>P</p> <p>D</p> <p>P</p> <p>D</p> <p>D</p> <p>D</p>

Tableau 4.15 : Classification des invariants opératoires inscrits dans les classes de situations identifiées dans le tableau document de LK

Classes de situations	Invariants opératoires	Dominante
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	<ul style="list-style-type: none"> - Il faut que les contenus soient conformes aux objectifs du syllabus - Les cours d'informatique à l'université sont plutôt à la limite des mathématiques - Le profil des étudiants conditionne le choix des contenus dans l'enseignement - Le parcours de formation conditionne le choix des contenus dans l'enseignement - Les enseignants-chercheurs ont une marge de liberté dans le choix des contenus - Les étudiants-statisticiens ont moins besoin d'algorithmes que les étudiants-informaticiens 	<p>I</p> <p>I_E</p> <p>D</p> <p>I</p> <p>I</p> <p>D_I</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	<ul style="list-style-type: none"> - La preuve d'un théorème est la même dans tous les parcours de formation - Les étudiants sont introduits aux graphes pour la première fois dans ce cours - Les étudiants-informaticiens ont besoin de bien comprendre les algorithmes - L'objectif de l'unité d'enseignement de la théorie des graphes est d'initier les étudiants aux définitions et aux propriétés des graphes et de leur enseigner des algorithmes sur les graphes - Il est essentiel de montrer aux étudiants le fonctionnement d'un algorithme sur un graphe 	<p>D_E</p> <p>I_D</p> <p>D_I</p> <p>I</p> <p>D</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	<ul style="list-style-type: none"> - Les étudiants en deuxième, troisième, et quatrième année de l'université rencontrent des difficultés avec la modélisation - Il est important de mettre l'accent dans l'enseignement sur la modélisation et sur la résolution de problèmes depuis la première année en université - Résoudre un problème est plus « simple » que le modéliser - Le nombre d'heures constitue une contrainte dans l'enseignement - Il est important que les étudiants arrivent à résoudre une question 	<p>D</p> <p>D</p> <p>D_E</p> <p>I</p> <p>D</p>
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	<ul style="list-style-type: none"> - Une évaluation a pour objectif de vérifier la compréhension des notions enseignées en classe par les étudiants - Le niveau des questions dans une épreuve écrite doit correspondre au niveau des contenus enseignés en classe - Un enseignant expérimenté acquiert une connaissance profonde des notions qui lui permet de construire des questions pour une épreuve écrite 	<p>P</p> <p>D</p> <p>P</p>

Tableau 4.16 : Classification des invariants opératoires inscrits dans les classes de situations identifiées dans le tableau document de LT

Classes de situations	Invariants opératoires	Dominante
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	<ul style="list-style-type: none"> - It is essential to stick to the contents described in the syllabus - It is essential that the examples and exercises given in class align with the objectives of the course - Time is a major constraint when planning a course - The course has to commensurate with the level of the students - An instructor has some freedom in the way he organizes his teaching 	<p>I</p> <p>I</p> <p>I</p> <p>I</p> <p>I</p>
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	<ul style="list-style-type: none"> - The objectives of discrete mathematics course in general are constructing proofs and applying some discrete mathematics results in computer science 	I
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	<ul style="list-style-type: none"> - In discrete mathematics, students have difficulties with exercises - Some exercises in the textbook are « difficult » for students in L1 - There is no time to work with students in L1 on the links between discrete mathematics and other disciplines 	<p>D_E</p> <p>D</p> <p>I</p>
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	<ul style="list-style-type: none"> - All the material taught in class should be included in the evaluation - Students find the explanation « easy » but some exercises are « difficult » for them - A problem is considered « difficult » when students have to create a new technique, or use a complicated technique - An exercise is considered « easy » when students are familiar with it, or with the way to solve it 	<p>P</p> <p>D_E</p> <p>D</p> <p>D</p>

Tableau 4.17 : Classification des invariants opératoires inscrits dans les classes de situations identifiées dans le tableau document de LN

Classes de situations	Invariants opératoires	Dominante
Concevoir et mettre en œuvre la planification de l'enseignement	<ul style="list-style-type: none"> - Time constraints affect the choice of contents to be taught - Tutorials give more understanding of the concepts than lectures - The objective of the course is introducing students to discrete mathematics - The contents have to be aligned with the description of the syllabus - Bipartite graphs and matching can be taught in few hours - The course aims to serve as an introduction to the graph theory course that is present at the Masters' degree 	<ul style="list-style-type: none"> I D I I D I
Concevoir et mettre en œuvre une séance de cours	<ul style="list-style-type: none"> - Graph theory is strongly connected to daily life through many examples and applications - The way of thinking in discrete mathematics is very different from one proof to another and from one problem to another - Time constraints affect the choice of contents to be taught 	<ul style="list-style-type: none"> E DE I
Concevoir et mettre en œuvre une séance de TDs	<ul style="list-style-type: none"> - Solving problems in discrete mathematics does not require following a procedure - Solving exercises promotes deeper understanding of the concepts - The students cannot know in advance if a method can lead to solving a problem in graph theory - Each problem has its own way to be solved in graph theory - Students that usually are underachievers in other math topics can excel in graph theory - Problems in discrete mathematics have simple statements - Sometimes, to prove something in graph theory requires proving many intermediate results - The objective of the course is introducing students to new ways of thinking that are not linked to formulas - It is important to get problems that attract students to graph theory - Many students can solve an example involving the four-color problem before getting introduced to the theorem 	<ul style="list-style-type: none"> DE D DE ED DE E E D D DE

	- Students find it interesting to prove results in other mathematical domains using graph theory	D
Concevoir et mettre en œuvre des moments d'évaluation	<ul style="list-style-type: none"> - Evaluation does not really represent the student level in graph theory - Some students can get depressed during evaluation because of the nature of questions asked (riddles to them) - In graph theory, giving a student more time to solve a problem allows him to come up with better and creative solutions - In graph theory, solving a new problem requires many trials - It is sometimes difficult to tell if a student understood a subject only from a two hour written evaluation - Problems are easily accessed on the internet 	<p>D_E</p> <p>D_E</p> <p>D_E</p> <p>D_E</p> <p>P</p> <p>D</p>

Annexe 5- Tableaux élaborés lors de l'analyse des contenus

Tableau 5.1 : Tableau que nous avons construit lors de notre analyse des contenus

Concepts mis en relation	Apports théoriques de la partie cours du module			Exemples et remarques	Exercices du TD 2 du module	
arête, sommet	définition 1 définition d'un graphe qui met en relation l'ensemble de sommets registre formel			exemple 1 exemple d'un graphe avec l'ensemble de sommets et l'ensemble des arêtes registre par graphe		
graphe complet, sommet, arête	définition 2 définition d'un graphe complet qui met en relation l'ensemble des arêtes et l'ensemble de sommets registre formel			exemple 2 exemple d'un graphe complet d'ordre 5 qui met en relation les arêtes et les sommets registre par graphe		
sous-graphe, sommet, arête	définition 3 définition d'un sous-graphe qui met en lien les ensembles de sommets et d'arêtes registre formel			exemple 3 exemple qui met en lien un graphe et un sous-graphe en illustrant les sommets et les arêtes		

				registre par graphe		
sous-graphe induit, sommet, arête	définition 3 définition d'un sous-graphe induit registre formel			exemple 3 exemple qui met en lien un graphe et un sous-graphe induit en illustrant les sommets et les arêtes registre par graphe		
sous-graphe couvrant, sommet	définition 3 définition d'un sous-graphe couvrant registre formel			exemple 3 exemple qui met en lien un graphe et un sous-graphe couvrant en illustrant les sommets et les arêtes registre par graphe		
voisinage, sommet, arête	définition 4 définition d'un voisinage registre formel			exemple 4 illustration du voisinage par un graphe registre par graphe		
degré, voisinage	définition 4 le degré d'un			exemple 4 lien entre		

	sommet est défini comme le nombre de sommets qui appartiennent au voisinage registre formel			voisinage et degré illustré par un graphe registre par graphe		
graphe régulier, degré	définition 5 définition d'un graphe régulier registre formel			exemple 5 exemples de graphes réguliers registre par graphe		
graphe régulier, graphe complet				exemple 6 lien entre un graphe régulier et un graphe complet registre formel		
degré maximal, nombre de sommets				remarque 7 lien entre le degré maximal et le nombre de sommets registre par graphe		
degré maximal, nombre de sommets, sommets isolés				exemple 8 lien entre le degré maximal, le nombre de sommets et le		

				nombre de sommets isolés registre formel		
nombre de sommets, degré	proposition 9 existence de 2 sommets de degrés égaux dans un graphe où il y a au moins 2 sommets registre formel	corollaire 11 corollaire qui met en lien le nombre de sommets et leur degré en se basant sur la parité registre formel	preuve du corollaire 11 preuve basée sur un raisonnement arithmétique registre formel lien avec l'arithmétique (raisonnement qui sollicite des propriétés issues de l'arithmétique en lien avec la parité)		exercice 1 (3) preuve s'appuyant sur le théorème 10 ou le corollaire 11 du cours. Lien entre les degrés et le nombre de sommets dans un graphe pourrait solliciter des propriétés issues de l'arithmétique en lien avec la parité registre formel (traitement)	
nombre de sommets, degré, sommets isolés	preuve de la proposition 9 preuve par contradiction basée sur un raisonnement algébrique. On considère une application de l'ensemble des sommets à l'ensemble de degrés. On considère 2 cas :					

	avec ou sans sommets isolés (liens avec applications et injection) registre formel					
degré, nombre d'arêtes	théorème 10 théorème qui met en lien la somme des degrés des sommets d'un graphe et le nombre d'arêtes registre formel					
sous-graphe couvrant, nombre d'arêtes, degré	preuve du théorème 10 raisonnement par récurrence en se basant sur l'arithmétique (la parité de la somme des degrés) registre formel					
nombre de sommets, nombre d'arêtes, degré	théorème 12 inégalité qui met en lien le nombre d'arêtes avec le nombre de sommets et les degrés. Sollicite un lemme sur l'inégalité de Cauchy-Schwartz					

	pour la preuve registre formel (liens avec l'inégalité de Cauchy Schwartz dans la preuve et le lemme)					
Complément d'un graphe, sommet, arête	définition 6 définition du complément d'un graphe registre formel			exemple 14 Illustration graphique d'un complément d'un graphe registre par graphe		
Complément d'un graphe, nombre de sommets, degré				remarque 15 lien entre le degré d'un même sommet dans un graphe et dans son complément en fonction du nombre de sommets registre formel		
arête, sommet, chemin, longueur	définition 7 définition d'un chemin et de la longueur d'un chemin registre formel +					

	registre par graphe					
sous-graphe, chemin, connexité	définition 8 définition d'un graphe connexe registre formel					
sous-graphe induit, composante connexe, maximalité	définition 8 définition d'une composante connexe comme étant un sous- graphe induit, maximal pour l'inclusion registre formel			exemple 16 Illustration du concept de composante connexe par des graphes registre par graphe		
connexité, distance, longueur d'un chemin, géodésique	définition 9 définition qui met en lien la distance entre 2 sommets et les longueurs des chemins qui les joignent registre formel					
sommet, chemin, sous- chemin, partition	proposition 17 proposition qui met en lien une partition des sommets d'un graphe et un chemin qui joint des sommets dans des ensembles disjoints registre formel					

sommet, chemin, sous- chemin, longueur minimale, partition	preuve de la proposition 17 preuve qui relie les concepts en se basant sur un raisonnement qui tourne autour du concept du plus court chemin registre formel					
partition, arête, connexité, sommet				remarque 18 remarque basée sur la proposition 17 registre formel		
géodésique, sous-chemin	proposition 19 proposition qui met l'accent sur le fait que le sous-chemin d'un géodésique est un géodésique registre formel	preuve de la proposition 19 la preuve est par contradiction en considérant un plus court chemin et trouvant un chemin plus court. La preuve sollicite la mobilisation de la proposition 17 registre formel				
connexité, distance	proposition 20 lien entre la distance en théorie des graphes et la distance en					

	topologie registre formel lien avec les espaces métriques en topologie					
géodésique, connexité, sous-chemin	preuve de la proposition 20 preuve qui intègre une démarche qu'on utilise en topologie pour prouver qu'une distance est métrique registre formel					
connexité, longueur maximale, chemin, sommet	proposition 21 2 chemins de longueur maximale et ont au moins un sommet en commun registre formel	preuve de la proposition 21 preuve par contradiction de la maximalité de la longueur d'un chemin en s'appuyant sur la proposition 17 registre formel				
cycle, sommet, arête, longueur	définition 10 définition d'un cycle et de la longueur d'un cycle registre formel			exemple 22 Illustration graphique d'un cycle registre par graphe		
cycle, sous-	définition 11					

graphe	définition d'un cycle dans un graphe registre formel					
degré minimal, cycle	proposition 23 condition sur le degré minimal suffisante pour l'existence d'un cycle registre formel					
chemin, longueur maximale, sommet, voisinage, sous-chemin, cycle	preuve de la proposition 23 raisonnement basé sur la prise en considération des extrémités du plus long chemin dans un graphe. Si une extrémité a un degré plus grand ou égal à 2, cela implique l'existence d'un cycle registre formel					
connexité, chemin, longueur maximale, cycle, longueur,	théorème 24 théorème qui met en relation le chemin de longueur maximale dans un graphe, la somme					

sommet, nombre de sommets	des degrés des sommets à l'extrémité du chemin et l'existence d'un cycle dont la longueur est égale au nombre de sommets registre formel					
connexité, chemin, longueur maximale, cycle, longueur	lemme 25 lien entre la longueur d'un cycle (s'il existe) et la longueur d'un chemin de longueur maximale registre formel					
longueur, cycle, chemin, maximalité	preuve du lemme 25 preuve par contradiction par maximalité. On considère le plus long chemin et on trouve un chemin plus long registre formel					
cycle, longueur, sommet, voisinage,	preuve du théorème 24 preuve qui mobilise le lemme 25, par					

degré, nombre de sommets	contradiction. On considère le plus long chemin et on considère un chemin plus long registre formel					
nombre d'arêtes, nombre de sommets, triangle	théorème 26 condition sur le nombre d'arêtes et le nombre de sommets pour l'existence d'un triangle dans un graphe registre formel					
arête, degré, nombre de sommets	lemme 27 la somme des degrés de 2 sommets adjacents résultant d'un graphe sans triangles registre formel					
voisinage, degré, nombre de sommets	preuve du lemme 27 raisonnement sur les degrés de 2 sommets adjacents résultant d'un graphe sans triangles registre formel					

degré, sommet	lemme 28 propriété concernant la somme des carrés des degrés des sommets dans un graphe et les sommes des degrés des sommets adjacents registre formel	preuve du lemme 28 preuve qui mobilise les propriétés de sigma registre formel lien avec l'arithmétique (solicitation des propriétés de la somme transversales aux domaines mathématiques)				
degré, sommet, nombre d'arêtes, nombre de sommets	preuve du théorème 26 preuve par l'absurde qui s'appuie sur les lemmes 27 et 28 registre formel					
graphe biparti complet, nombre de sommets, nombre d'arêtes				exemple 29 exemple où on introduit le concept du graphe biparti complet comme vérifiant le théorème 26 registre formel		
connexité,					exercice 1 (1)	

degré					preuve par contre-exemple registre par graphe (représentation)	
graphe régulier, degré, nombre de sommets, nombre d'arêtes					exercice 1 (2) preuve s'appuyant sur le théorème 10 ou le corollaire 11 de la partie cours. Lien entre les degrés, le nombre de sommets et le nombre d'arêtes dans un graphe régulier registre formel (traitement)	
connexité, composante connexe, chemin, degré, nombre de sommets					exercice 1 (4) preuve s'appuyant sur 2 idées, la partition d'un graphe non connexe en composantes connexes registre formel (traitement)	
graphe complet, degré, nombre d'arêtes					exercice 2 preuve mobilisant un raisonnement arithmétique sur les degrés des sommets en fonction du nombre d'arêtes d'un graphe complet registre formel	

					(traitement) lien avec l'arithmétique (sollicitation des propriétés de la somme transversale aux domaines mathématiques)	
graphe complet, degré, nombre d'arêtes, nombre de sommets					exercice 3 preuve mobilisant un raisonnement issu de la probabilité sur le nombre d'arêtes possibles dans un graphe ayant n sommets registre formel (traitement) raisonnement issu de la probabilité	
cycle, longueur minimale, voisinage					exercice 4 raisonnement où on considère un plus court cycle et on trouve un cycle plus court en mobilisant le concept de voisinage registre formel + registre par graphe (activité de traitement dans le registre formel + conversion au registre par graphe)	
longueur					exercice 5	

maximale, voisinage, degré minimal					on considère un chemin avec une longueur maximale et on trouve un chemin plus long. On considère 2 cas en fonction du voisinage d'un sommet v registre formel (traitement)	
graphe acyclique, chemin, cycle, sous-chemin					exercice 6 (1) on introduit le concept d'un graphe acyclique. On montre qu'il ne peut pas exister 2 chemins différents entre 2 sommets du graphe registre formel (traitement)	exercice 6 (2) preuve de l'unicité d'un cycle par contradiction. On suppose l'existence de 2 cycles et on arrive à la contradiction avec la partie (1) de l'exercice registre formel (traitement)
graphe acyclique, chemin, cycle, sous-chemin, connexité					exercice 7 (1) preuve de l'unicité d'un chemin entre 2 sommets d'un graphe connexe et acyclique (s'appuyant sur l'exercice 6- 1°) registre formel (traitement)	exercice 7 (2) preuve de l'unicité d'un cycle dans $G+xy$ où G est connexe acyclique (s'appuyant sur l'exercice 6- 2°) registre formel (traitement)
graphe acyclique,					exercice 7 (3) considération des	

chemin, cycle, sous-chemin, longueur maximale, degré, voisinage					extrémités d'un plus long chemin. S'ils ont un degré plus grand que 1, il y aurait contradiction (2 cas : contradiction avec le plus long chemin ou contradiction avec le fait que G est acyclique) registre formel (traitement)	
degré, chemin, connexité					exercice 7 (4) preuve par contradiction. Un chemin de x à y dans $G - v$ qui passe par v impliquerait que le degré de v serait au moins 2, contradiction avec $d(v)=1$ registre formel (traitement)	
graphe acyclique, connexité, arêtes, nombre de sommets					exercice 7 (5) preuve par récurrence qui mobilise les parties 3 et 4 de l'exercice registre formel (traitement)	
connexité, chemin, arête					exercice 8 (1) preuve qui mobilise un raisonnement issu de la théorie des ensembles.	exercice 8 (2 b) preuve qui considère 2 cas. Pour montrer

					<p>Si e n'est pas arête d'un xy-chemin, le chemin serait inclus dans $G - e$ et $G - e$ serait connexe d'où la contradiction</p> <p>registre formel (traitement)</p> <p>mobilisation de propriétés en lien avec l'inclusion des ensembles issues de la théorie des ensembles</p>	<p>qu'un graphe $G - e$ est connexe, on considère des sommets dans G et on montre qu'il existe un chemin entre eux ne contenant pas e en s'appuyant sur la partie 8-2a</p> <p>registre formel (traitement)</p>
arête, chemin, sous-chemin, cycle					<p>exercice 8 (2 a)</p> <p>preuve qui mobilise un raisonnement issu de la théorie des ensembles. On reconstruit un chemin à partir de l'union de 2 sous-chemins dont les extrémités sont obtenues par intersection de chemins et de cycles</p> <p>registre formel (traitement)</p> <p>mobilisation de propriétés en lien avec l'inclusion et l'intersection des ensembles issues de la théorie des ensembles</p>	

<p>graphe simple, complément d'un graphe, connexité, chemin</p>				<p>exercice 9 on introduit la notion de graphe simple. On considère des composantes connexes d'un graphe G non- connexe et on montre l'existence d'un chemin dans le complément de G entre n'importe quels sommets x, y de G en prenant 2 cas : x et y appartiennent à la même composante connexe ou x et y appartiennent à des composantes connexes différentes registre formel (traitement)</p>	
---	--	--	--	--	--

Tableau 5.2 : Grille des résultats obtenus par l'analyse des contenus

Critères au niveau macro	Description
le contexte de production de la ressource	<p>La ressource est un module d'enseignement des mathématiques discrètes en L2 à l'université libanaise. Elle a été conçue collectivement par trois enseignants-chercheurs, LB, LQ et LN. Selon les concepteurs, le module a été conçu pour introduire les étudiants aux mathématiques discrètes, particulièrement à la théorie des graphes afin de les préparer à une filière de recherche en théorie des graphes.</p>
Un aperçu descriptif	<p>Les contenus du module sont décrits dans le syllabus, sans évocation des objectifs d'apprentissage.</p> <p>Le module est composé de 3 parties : arithmétique, généralités sur les graphes et relations de récurrence et fonctions génératrices.</p> <p>La partie qui porte sur la théorie des graphes est divisée en deux chapitres. Le premier chapitre comporte 4 sous-parties organisées comme suit :</p> <ul style="list-style-type: none"> 1.5- Définitions et notations 1.6- Chemins 1.7- Cycles 1.8- Digraphes <p>Le second chapitre comporte deux sous-parties organisées comme suit :</p> <ul style="list-style-type: none"> 2.1- Définitions et notations 2.2- Degrés des sommets dans un graphe biparti <p>Nous nous intéressons particulièrement aux parties 1.1, 1.2, et 1.3 du premier chapitre portant sur les chemins et les cycles.</p> <p>Cette partie consiste en 11 définitions, 11 exemples, 3 notations, 3 remarques, 6 propositions, 4 théorèmes, 1 corollaire, 4 lemmes. La partie TD du second chapitre consiste en 13 exercices, dont 9 portent sur les parties 1.1, 1.2 et 1.3.</p> <p>Les sujets abordés dans le module ne correspondent pas exactement à la description présentée dans le syllabus. La représentation par une matrice d'un graphe, les matrices d'adjacence et d'incidence et les cycles eulériens et les cycles hamiltoniens sont cités dans le syllabus, pourtant non abordés dans le module.</p>
Les connexions au syllabus fixé par l'institution	<p>Le syllabus ne comprend pas une description des objectifs, ou des savoir-faire à développer chez les étudiants. Le syllabus comprend une description des concepts introduits dans chacune des trois parties du module.</p>

Les connexions à des ressources extérieures	Il n'y a aucune évocation explicite de liens avec des ressources extérieures au module.
Critères au niveau micro	Description
Les connexions entre les concepts mobilisés	3 unités d'analyse : les apports théoriques, les exemples et les remarques, et les exercices. Les concepts mobilisés et leur mise en relation dans chacune de ces trois unités sont détaillés dans le tableau 5.1.
Les différents moments d'appropriation d'un même concept (progression qui permet de revisiter un concept dans les différentes unités d'analyse)	<p>Considération des trois unités pour l'analyse : les apports théoriques, les exemples et les remarques, et les exercices.</p> <p>arête (apports théoriques, exemples et remarques, exercices) sommet (apports théoriques, exemples et remarques) graphe complet (apports théoriques, exemples et remarques, exercices) sous-graphe (apports théoriques, exemples et remarques) sous-graphe induit (apports théoriques, exemples et remarques) sous-graphe couvrant (apports théoriques, exemples et remarques) voisinage (apports théoriques, exemples et remarques, exercices) degré (apports théoriques, exemples et remarques, exercices) graphe régulier (apports théoriques, exemples et remarques, exercices) degré minimal (apports théoriques, exercices) degré maximal (exemples et remarques) nombre de sommets (apports théoriques, exemples et remarques, exercices) sommets isolés (apports théoriques, exemples et remarques) nombre d'arêtes (apports théoriques, exemples et remarques, exercices) triangle (apports théoriques) complément d'un graphe (apports théoriques, exemples et remarques, exercices) chemin (apports théoriques, exercices) longueur (apports théoriques, exemples et remarques) longueur minimale (apports théoriques, exercices) longueur maximale (apports théoriques, exercices) sous-chemin (apports théoriques, exercices) connexité (apports théoriques, exemples et remarques, exercices) composante connexe (apports théoriques, exemples et remarques, exercices) graphe simple (exercices)</p>

	<p>maximalité (apports théoriques, exemples et remarques) distance (apports théoriques) géodésique (apports théoriques) partition (apports théoriques, exemples et remarques) cycle (apports théoriques, exemples et remarques, exercices) graphe acyclique (exercices) graphe biparti complet (exemples et remarques)</p>
<p>Les connexions entre les registres de représentation sémiotique mobilisés et les activités cognitives sollicitées (représentation, traitement et conversion)</p>	<p>10 définitions : registre formel 1 définition : registre formel et registre par graphe 3 exemples : registre formel 8 exemples : registre par graphe 1 remarque : registre par graphe 2 remarques : registre formel 6 propositions et leurs preuves : registre formel 4 théorèmes et leurs preuves : registre formel 1 corollaire et sa preuve : registre formel 4 lemmes et leurs preuves : registre formel exercice 1 (1) : registre par graphe (représentation) exercices 1 (2, 3, 4), 2, 3, 5, 6 (1, 2), 7 (1, 2, 3, 4, 5), 8 (1, 2a, 2b), 9 : registre formel (traitement) exercice 4 : registre formel et registre par graphe (activité de traitement dans le registre formel et possibilité de conversion au registre par graphe)</p>
<p>Les connexions à d'autres domaines mathématiques</p>	<p>preuve du corollaire 11 : raisonnement qui sollicite des propriétés issues de l'arithmétique en lien avec la parité théorème 12 : liens avec l'inégalité de Cauchy Schwartz dans la preuve et le lemme proposition 20 : lien avec les espaces métriques en topologie preuve du lemme 28 : sollicitation des propriétés de la somme transversales aux domaines mathématiques exercice 1 (3) : sollicitation des propriétés issues de l'arithmétique en lien avec la parité</p>

	<p>exercice 2 : sollicitation des propriétés de la somme transversales aux domaines mathématiques</p> <p>exercice 3 : raisonnement issu de la probabilité</p> <p>exercice 8 (1) : mobilisation de propriétés en lien avec l'inclusion des ensembles issues de la théorie des ensembles</p> <p>exercice 8 (2 a) : mobilisation de propriétés en lien avec l'inclusion et l'intersection des ensembles issues de la théorie des ensembles</p>
Les connexions à des situations authentiques ou à des situations issues de la vie réelle	Pas de connexions à des situations issues de la vie réelle ou à des situations authentiques
Les connexions à d'autres disciplines	Il n'y a pas de connexions avec d'autres disciplines
Les connexions entre les logiciels mobilisés, le cas échéant (au cas où des algorithmes sont mobilisés dans la ressource et des logiciels sont sollicités pour les implémenter)	Pas de sollicitation d'outils technologiques ou d'objets matériels
Les variations d'un même exercice	Il n'existe pas de variations d'un même exercice
Les différentes stratégies de résolution d'un même problème	Il n'y a pas d'indications données pour la résolution des exercices. exercices 1 (1, 4), 4, 7 (1, 2, 3, 4, 5), 8 (1, 2a, 2b), 9 : une seule méthode de résolution exercices 1 (2, 3), 2, 3, 5, 6 (1, 2) : deux méthodes de résolution
Les demandes cognitives potentielles dans les exercices d'entraînement et d'application et dans les problèmes	Tous les exercices ont des énoncés comportant les verbes d'action « prouver » ou « disprouver »

Annexe 6- Contenus mis en œuvre par LQ lors des séances observées

Proposition 17. Soit G un graphe. Soient $A, B \subseteq V(G)$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Soit P un xy -chemin tel que $x \in A$ et $y \in B$. Alors, $\exists \alpha, \beta \in P$ tels que $P_{[\alpha, \beta]} \cap A = \{\alpha\}$ et $P_{[\alpha, \beta]} \cap B = \{\beta\}$.

Démonstration. Soient $\alpha \in P \cap A$ et $\beta \in P \cap B$ tels que $l(P_{[\alpha, \beta]})$ est minimal. Si $P_{[\alpha, \beta]} = \alpha\beta$, alors il n'y a rien à prouver. Sinon, soit $x \in P_{] \alpha, \beta]}$. On a :

$$l(P_{[\alpha, x]}) < l(P_{[\alpha, \beta]}) \Rightarrow x \notin B.$$

$$l(P_{[x, \beta]}) < l(P_{[\alpha, \beta]}) \Rightarrow x \notin A.$$

Ainsi, $P_{[\alpha, \beta]} \cap A = \{\alpha\}$, $P_{[\alpha, \beta]} \cap B = \{\beta\}$. □

Remarque 18. Si $\{A, B\}$ est une partition d'un graphe connexe G , alors $\exists \alpha \in A, \beta \in B$ tels que $\alpha\beta \in E(G)$.

Proposition 19. Soit G un graphe et soit P un xy -géodésique dans G . $\forall u, v \in P$, $P_{[u, v]}$ est un uv -géodésique dans G .

Démonstration. On peut supposer que x, u, v, y est l'ordre de ces sommets sur P . Si $P_{[u, v]}$ n'est pas un uv -géodésique, alors \exists dans G un uv -géodésique Q ($l(Q) < l(P_{[u, v]})$). $u \in Q \cap P_{[x, u]}$ et $v \in Q \setminus P_{[x, u]}$. Donc, $\exists \alpha \in Q \cap P_{[x, u]}$ tel que $Q_{[\alpha, v]} \cap P_{[x, u]} = \{\alpha\}$. De même, $\exists \beta \in Q \cap P_{[v, y]}$ tel que $Q_{[\alpha, \beta]} \cap P_{[v, y]} = \{\beta\}$. Ainsi, $R = P_{[x, \alpha]} \cup Q_{[\alpha, \beta]} \cup P_{[\beta, y]}$ est un xy -chemin. On a :

$$\begin{aligned} l(P) = d(x, y) &\leq l(R) = l(P_{[x, \alpha]}) + l(Q_{[\alpha, \beta]}) + l(P_{[\beta, y]}) \\ &\leq l(P_{[x, u]}) + l(Q) + l(P_{[v, y]}) \\ &< l(P_{[x, u]}) + l(P_{[u, v]}) + l(P_{[v, y]}) \\ &= l(P), \text{ ce qui est absurde.} \end{aligned}$$

Proposition 21. Soient P et Q deux chemins dans un graphe connexe G , de longueur maximale. Alors, $P \cap Q \neq \emptyset$ ($V(P) \cap V(Q) \neq \emptyset$).

Démonstration. Supposons par l'absurde que $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$. Soient $x \in P$, $y \in Q$. Soient u, v les extrémités de P et u', v' celles de Q . Puisque G est connexe, il contient un xy -chemin R . Comme ce qui précède, puisque $P \cap Q = \emptyset$, alors $\exists \alpha \in R \cap P$, $\beta \in R \cap Q$ tels que $R_{[\alpha, \beta]} \cap P = \{\alpha\}$ et $R_{[\alpha, \beta]} \cap Q = \{\beta\}$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $l(P_{[u, \alpha]}) \geq \frac{l(P)}{2}$ et que $l(Q_{[u', \beta]}) \geq \frac{l(Q)}{2}$. Alors, $R' = P_{[u, \alpha]} \cup R_{[\alpha, \beta]} \cup Q_{[\beta, u']}$ est un chemin.

$$\begin{aligned} l(R') &= l(P_{[u, \alpha]}) + l(R_{[\alpha, \beta]}) + l(Q_{[\beta, u']}) \\ &\geq \frac{l(P)}{2} + 1 + \frac{l(Q)}{2} \\ &= l(P) + 1 \quad (\text{puisque } l(P) = l(Q)) \end{aligned}$$

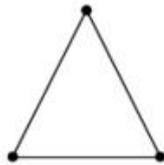
Donc P n'est pas de longueur maximale, ce qui est absurde. \square

Définition 10. Un cycle C est un graphe tel que :

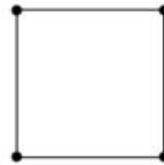
$$\begin{cases} V(C) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \quad n \geq 3 \\ E(C) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\} \end{cases}$$

On note $C = v_1v_2 \dots v_n$. La longueur $l(C)$ de C est son nombre d'arêtes : $l(C) = n$.

Exemple 22.



C : triangle, $l(C) = 3$



C : carré, $l(C) = 4$

- $C = v_1 \dots v_{2n}$ est un cycle pair.
- $C = v_1 \dots v_{2n+1}$ est un cycle impair.

Définition 11. Un cycle dans un graphe G est un sous-graphe de G qui est un cycle.

Proposition 23. Soit G un graphe. Si $\delta(G) \geq 2$, alors G contient un cycle.

Démonstration. Soit P un chemin de longueur maximale dans G . Soit v une extrémité de P . $l(P)$ maximale $\Rightarrow N(v) \subseteq P$; $d(v) \geq 2 \Rightarrow \exists w \in N(v) \cap P / l(P_{[w,v]}) \geq 2$. $P_{[w,v]} + vw$ est un cycle. \square

Exercice 1. Prouver ou disprover les déclarations suivantes.

1. Un graphe non connexe contient un sommet de degré zéro.
2. Si G est un graphe k -régulier, avec k un entier impair, donc $v(G)$ est impair.
3. On peut construire un graphe de cinq sommets dont les degrés sont: 4,3,3,2,1.
4. Si un graphe non connexe G contient seulement deux sommets de degrés impairs, x et y , donc G contient un xy -chemin.

Exercice 3. Prouver que le nombre de graphes de n sommets est égal à $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exercice 4. Soit C un cycle de longueur minimale dans G . Montrer que: $v \in C \Rightarrow |N(v) \cap C| = 2$.

Exercice 5. On considère un graphe G et $P = v_1 \dots v_k$ un chemin de G de longueur maximale. Prouver que $\delta(G) \leq k - 1$.

Exercice 6. Un graphe G est dit acyclique s'il ne contient aucun cycle. On considère un graphe acyclique G and soit x, y deux sommets de G tels que $xy \notin E(G)$ et $G + xy$ est non acyclique.

1. Montrer que dans G , et pour n'importe quels deux sommets, il existe au plus un chemin les joignant.
2. Montrer que $G + xy$ contient un cycle unique.

Exercice 9. Soit G un graphe simple. Montrer que soit G , soit son complément \bar{G} , est connexe.

Annexe 7- Guides des entretiens avec LQ avant et après les observations de classe

7.1- Guide de l'entretien avec LQ avant les observations de classe

- 1- Comment ce contenu a-t-il été conçu ? Qui sont les concepteurs ? Quelles modifications ont été apportées ? Pour quelles raisons ?

(Cette question peut nous informer sur la place de la dimension collective dans la conception des cours et des TDs portant sur « les chemins » et « les cycles » et sur les apports qui résultent de choix personnels de l'enseignante-chercheuse.)

- 2- Quels sont les principaux concepts en jeu dans la partie du cours portant sur les chemins et les cycles ? Qu'essayez-vous de mettre en avant en enseignant ces notions ?

(Cette question peut nous permettre d'identifier les concepts en jeu et la façon dont ces concepts sont abordés et articulés dans le cours.)

- 3- Dans la section portant sur « les chemins », quel est le rôle et la place de la notion de distance ?

(Dans les ouvrages que nous avons consultés, le concept de plus court chemin est toujours abordé sans parler de la distance, en effet le plus souvent en considérant des graphes pondérés, et dans un seul ouvrage, il y a un lien établi avec le concept de distance et le plus court chemin dans un graphe non-pondéré. Cette question peut nous permettre de comprendre les raisons derrière les choix effectués par les concepteurs du module concernant la notion de distance.)

- 4- Evoquez-vous les algorithmes d'une façon ou d'une autre dans la section portant sur les chemins (cours ou TD) ? dans celle sur les cycles ?

(LQ ne travaille pas sur les algorithmes avec les étudiants, mais sa formation à la recherche est dans un domaine appliqué des mathématiques discrètes. Donc cette question peut nous permettre d'identifier – en se référant au premier entretien – des liens qui existent entre son activité de recherche et son enseignement ; surtout avec la possibilité d'évoquer des algorithmes comme celui de Dijkstra dans la section portant sur les chemins.)

- 5- Quels sont les objectifs visés par les séances de cours et TD associés sur les notions de « chemins » et « cycles » ?

(Les objectifs d'un module peuvent influencer les choix de certains contenus et leur exposition et les ressources utilisées et mobilisées dans la mise en œuvre en classe.)

- 6- Quelles sont les attentes relatives aux apprentissages des étudiants pour ce chapitre portant sur la théorie des graphes ?

(La façon d'enseigner une notion donnée est largement influencée par ce que l'enseignante-chercheuse souhaite développer chez les étudiants en classe, c'est-à-dire l'accent peut être mis sur les concepts en jeu, ou sur le raisonnement ou sur les applications dans des situations particulières, etc.)

- 7- Comment décririez-vous le déroulement des séances (cours et TDs) portant sur la théorie des graphes ?

(LQ alterne cours et TDs, parfois dans la même séance. Cette question peut nous informer sur la façon dont elle alterne les cours et les TDs et les raisons derrière les découpages qu'elle met en place ; c'est-à-dire comment elle prend la décision d'alterner, à quels moments, et elle se base sur quoi pour effectuer ces choix. De même, cette question peut nous permettre d'inférer des données sur la façon dont LQ agence les cours et comment cet agencement contribue au développement de l'apprentissage chez les étudiants, ainsi que sur la scénarisation prévue pour les séances à observer.)

- 8- Les étudiants sont initiés aux graphes dans ce cours pour la première fois. Comment qualifieriez-vous la réaction des étudiants à la première séance (séance de l'introduction des graphes) ?
 - Avez-vous effectué des ajouts aux contenus du fichier que vous avez envoyé ? Par exemple, des exemples à l'oral, des exemples de graphes exposés au tableau, des annotations, etc.

(Les graphes et les chemins (définitions, propriétés et notations) avaient été introduits lors de la séance précédente à celle que nous avons prévu observer. Nous nous intéressons aux exemples donnés, aux registres de représentation sémiotique utilisés, aux éventuelles références à des prérequis en mathématiques ou des liens avec de situations particulières qui peuvent être authentiques ou issues de la vie réelle, etc., en plus, vu que nous n'étions pas présente lors de l'introduction de la théorie des graphes, nous nous intéressons à la réaction des étudiants lors de cette première séance afin de la croiser avec les résultats des analyses des entretiens.)

- 9- Suivez-vous le déroulement du chapitre 2 – dans le polycopié – sur la « théorie des graphes » ?

(Cette question peut nous donner plus d'informations sur l'agencement des concepts dans la mise en œuvre prévue et la façon dont elle contribue à l'atteinte des objectifs – « connectivité effective ». En outre, des marges de manœuvre dans la mise en œuvre pour une ressource conçue collectivement.)

- 10- Avez-vous effectué des modifications au cours de l'année précédente, particulièrement dans les sections qui portent sur « les chemins » et « les cycles » ? Le cas échéant, pour quelles raisons ?

(LQ avait mentionné lors de l'entretien qu'elle avait effectué des modifications au niveau de quelques théorèmes, en les divisant en plusieurs parties ou en les remplaçant par d'autres théorèmes « plus faciles ». Cette question vise à savoir si de telles modifications ont été effectuées et, le cas échéant, les raisons derrière qui peuvent être liées aux profils des étudiants, aux contraintes institutionnelles ou à des raisons en lien avec son rapport personnel à la théorie des graphes en recherche et en enseignement.)

- 11- Quelle est la place de ce contenu dans le module de « mathématiques discrètes » ?
 - Quelle est la place du module des « mathématiques discrètes » dans le cursus de la deuxième année ?
 - Quelle est sa place au sein du cursus de la formation en mathématiques ?

(Cette question vise à nous informer sur les objectifs relatifs à l'enseignement de ces contenus à une échelle plus large, c'est-à-dire les objectifs relatifs peut-être au plan institutionnel, au type de formation, à la préparation au Master, etc.)

12- Quelles sont les conditions et les contraintes qui ont influencé vos choix des contenus portant sur la théorie des graphes et des ressources utilisées, mobilisées et produites dans votre enseignement de ce chapitre ?

(Cette question peut nous informer sur les conditions et les contraintes qui interviennent dans les interactions de LQ avec les ressources dans son activité d'enseignement telles que le type de formation, les profils des étudiants, le contexte institutionnel, etc.)

7.2- Transcription de l'entretien avec LQ avant les observations

- 1- **Chercheur:** Le contenu du chapitre sur la théorie des graphes, comment a-t-il été conçu ? Qui sont les concepteurs ? Quelles sont les modifications qui ont été apportées ?
- 2- **LQ:** Vous voulez juste savoir à propos des modifications ?
- 3- **Chercheur:** Je sais que le module de mathématiques discrètes a été conçu collectivement. (LQ demande une traduction du mot conçu). Vous aviez mentionné dans l'entretien que le module a été conçu par trois personnes. Maintenant on va regarder de plus près la conception du chapitre sur la théorie des graphes. Comment a-t-il été conçu ? Qui sont les concepteurs ?
- 4- **LQ:** Ah ok. So from the beginning.
- 5- **Chercheur:** Oui. Exactement.
- 6- **LQ:** Ok. I will speak in English³². In graph theory, chapter 2 actually, mostly it was LB's ideas, how he organized the chapter, he is the most experienced among us, and he knows well how...what is the approach that is easier for the students and that will get closer and closer to their understanding. However, when we...it was me and LN, we took his suggestions, and we then said, ok, it was a little bit too long and there were some theorems that we have eliminated actually, which we thought might be confusing for the students, and it is not time for them to get it now, they can get it later on in the M1 course. There is a graph theory course in M1, so...When we took the course, LN and me, we analyzed it and divided it well, and... we did the modifications which consisted in some of the things in the course that we thought can be put as an exercise by splitting the ideas, we have put as an exercise, and some of them we deleted, because we thought that the idea was a bit hard for them to understand at this stage, ok? Now, if you want to know, this is it. So this is how we prepared it all from the beginning. This was like... two years ago.
- 7- **Chercheur:** OK
- 8- **LQ:** Ok? As for the modifications that I've done lately, they aren't much actually. I just merged the two chapters together because there were two chapters of graph theory, I merged them and put them in one chapter, and... I think that I have removed like two theorems, two additional theorems I have eliminated because I felt that in the previous years, we were struggling with the time, with the time allocated for the course. So you know, because you have 30 hours for all the course to be done, with all the exercises with everything, so I have removed two additional theorems, one about the ... the tournament, that it contains any circuit between length 3 and length n , strongly connected tournament, it contains any circuit of length between 3 and n , where n is the order of the tournament. So this I eliminated, I give it in M1 but I have removed from this course because it is confusing for them, and it takes too much time. Sometimes you have to pay attention to the time.
- 9- **Chercheur:** How many hours exactly is the course, I mean does this chapter take? The graph theory chapter?
- 10- **LQ:** This chapter... I, myself, I give around 15 to 16 hours to this chapter, out of 30. So this takes the majority of the time, yes. It takes the majority of the time, 15, 16, maybe a bit

³² LQ trouve des difficultés à s'exprimer en français, donc nous avons décidé lors de l'entretien à parler en anglais. Nous respectons dans nos transcriptions la langue utilisée, donc nous utilisons le français quand LQ parle en français et l'anglais quand LQ parle en anglais.

more sometimes because it is long. And sometimes, sometimes, students, they... they are stuck at some ideas which we have to explain a bit in details. So, for me, it is between 15 and 16 hours.

11- Chercheure: Ok. And what are the main concepts in that part of the course, and especially in the part focusing on the paths and the cycles? And what do you try to put... to focus on when you teach this part?

12- LQ: The most important is the paths actually, the paths and the cycles. This is the part... ok, the first part... the first thing is just definitions, to be introduced to graphs and all their notations. The paths and the cycles, we like them... Paths, cycles, bipartite graphs, and matchings, these are the four major ideas that we introduce in this course. Ok, so... The paths, they are given with a lot of theorems, and so... there are some propositions that we get through that are mainly about understanding... how to say that... I mean I want them to understand the main issues about paths, the main ideas about paths. So, there are around 4 propositions about paths. They take some time, but they are important. They are essential. Which are very important about path properties. And then you have the cycles which is also...

13- Chercheure: When you say path properties such as... such as what?

14- LQ: Yes, such as, for example, a sub-path of a geodesic is a geodesic. The intersection of... the distance... if you have three vertices, the distance between two of them is less than or equal to the distance between ... the distance between x and z is less than or equal to the distance between x and y and the distance between y and z . Which makes it a metric space... I mean the graph, with the distance d as it is defined makes it a metric space by this property. And so, this is another property also, the intersection... if you are in a connected graph, the intersection of...sorry...two longest paths, they should intersect in any graph...in any connected graph. It should be connected. So...in any connected graph, two longest paths, there should be an intersection between them at some vertex for sure. What else, for example a partition, if you take a partition $P(G)$ in a connected graph, then there should be an edge joining one vertex in the ... one vertex in one set of the partition to the other. And... so all of these properties, they are important to understand and analyze, and these properties, they are... in my opinion they are essential about paths. They should be in mind when we are talking about paths, about connected graphs, you see... they should be in mind. This is about paths. Any other questions about paths?

15- Chercheure: Euh... you were saying for cycles, as well, the same question.

16- LQ: Yes, the cycle part. So I am asking if it is fine about paths. For cycles, ok, we just don't go deep into many of the properties but we take some essential theorems that help understand the shape of cycles and... let's say, if you have a longest path, if the ends of the longest path have degrees that add up to n which is equal to the number of vertices in the graph, then you should find a cycle that contains all the vertices. We talk a lot about cycles that contain all the vertices in the graph, which are called spanning cycles. So... we look at graphs that contain, that have for example certain hypotheses that lead to a spanning cycle in the graph. So, you see? There is one theorem about this, one theorem that explains... this is the one I told you actually. If the ends of a longest path, their degrees add up to the number of vertices, then definitely you can find a cycle in the graph that contains all the vertices. And... this is one... one property we would like them to understand, a cycle containing all the vertices if you have certain hypotheses. So this is one theorem I give in

cycles. I don't get into more of these. Cycles they are more dealt with in the exercises actually.

17- Chercheure: Ok.

18- LQ: What else? You have then the bipartite graphs. The bipartite graphs, also it is given importance where we list several ideas and propositions, and finally we reach to the idea that the characterization of a bipartite graph, which is that a graph is bipartite if and only if it contains no odd cycles. So... this we explain, we give the proof after a list of propositions that help to prove this proof. And afterwards, we give a theorem about a graph that has, ... a graph has a spanning bipartite sub-graph with, ok of course, actually any graph contains a spanning bipartite sub-graph, you can simply take all the vertices with no edges at all, this forms a bipartite sub-graph and spanning. You understand?

19- Chercheure: Yes.

20- LQ: If you have a graph G , if you take a sub-graph that contains all the vertices with no edges at all, this will form a bipartite graph, bipartite sub-graph actually of G and it is spanning. However, there is a theorem that states that in any bipartite... in any graph, you can find a spanning bipartite subgraph such that the degree of every vertex in this subgraph is at least half the original degree, the original degree in the graph. So this means that you can find a spanning bipartite subgraph with the degrees being at least half what they were actually in the graph. This theorem yes, we give it. It is a nice theorem, we explain it in details. And this is all about bipartite. Now, these are just the ideas that I give in the course. Now, of course, later on, we go through these ideas more in the exercises. And finally the matching. The matching is just given as an introduction.

21- Chercheure: Ok.

22- LQ: You see? What is the matching, what is the perfect matching? There is only one small theorem about it, and we stop because there is no time to go a lot through the details.

23- Chercheure: And when you were talking about paths, mainly you spoke a lot about the distance, the concept of distance.

24- LQ: Yes, yes. The distance and shortest path, the notion of distances... when you say distance, this means you are talking about shortest path. Usually about paths, yes, we are interested about shortest path, about longest path in the graphs, you see?

25- Chercheure: And ... Do you work on the concept of shortest path with the students?

26- LQ: Yes, of course. When we are talking about, for example, this metric ... this metric space I told you about, it is about the distance, the triangular inequality applied on the distance. And also, about the geodesic, when we explain that any geodesic contains any sub-path of a geodesic is a geodesic, so this actually is a shortest path. A geodesic is actually a shortest path. An xy -geodesic is defined to be an xy -shortest path.

27- Chercheure: Aha, in non-weighted graphs, right?

28- LQ: In non-weighted yes. I am talking about...yes. Now of course, there is a part, I forgot to talk about the digraphs, of course. I also give a part for digraphs which is... which is... I forgot which part it was. It is slightly after the paths and cycles. We talk about digraphs and some of their properties, ok? Which is actually the out-degrees, the in-degrees, out-neighbors, in-neighbors and tournaments, actually when you are talking about tournaments. Tournaments are the most interesting in digraphs which are orientations of complete

graphs. And... now these tournaments we explain, then we give a theorem about tournaments. That any tournament contains a spanning path, a spanning directed path, which is a directed path that contains all the vertices, and this you can find in any tournament you think about.

29- Chercheure: And, when you talk about cycles and paths, do you mention algorithms, in a way or another, in your classes?

30- LQ: No, no. we don't take in an algorithmic aspect. We just give it in a theoretical manner.

31- Chercheure: Ok, and usually what are the objectives of the sessions that are related to paths and cycles?

32- LQ: This is the very first concepts and aspects in graphs. So the objective is that they understand well what is a path, what is a cycle... so by definition it is very easy, but to understand well the ideas, the properties. What they lead to... If you are in a connected graph, what are the properties that we additionally have. The objective is exactly this. So, they have to know that there are properties in graphs and in connected graphs in particular that paths have, you see? And that cycles have, you see? So, I think this is the objective.

33- Chercheure: Ok, and what do you aim to develop as ... what learning do you aim to develop for the students? When you teach the students?

34- LQ: Are you translating the questions to English now?

35- Chercheure: Yes, yes.

36- LQ: Ok. You asked me about the aim? About the aim, what I want them to learn?

37- Chercheure: Yes, exactly.

38- LQ: Ok. As for me, it was a challenge to start introducing graph theory in the second year. Ok? So... This idea was introduced long time ago and... first of all, colleagues, they didn't accept that. Ok, why do you have to introduce graphs, they can simply take it in the M1 course and that is it. For me, it was a very important modification that we have done to the curriculum. That ... this discrete mathematics course was introduced in the second year. It was only two years ago that we started giving that course. And, it was... in my opinion, a very important step, to introduce graph theory. My aim in this course, and in a part of graphs, is to introduce graphs in the best way, for the students to know what do graphs mean? What is graph theory? What is it about? What properties... maybe a graph by its definition is very simple. It is just a set of vertices with edges, ok? But it has plenty of properties and plenty of theorems. Now, my aim in this course is to introduce graph theory in the best ways for students, for them to understand what is graph theory, and what properties and theories it might contain. And those who will be interested in this part will aim to continue in this course in the M1 and in graduate courses. You see? So by itself, it is nothing, it is just an introduction to graph theory, I am talking about this part in the second year, ok? And you know that, I am sure now that those students who will come to me in the M1... because previously when I used to give the graph theory course in master's, students used not to know what is graph theory. Usually, they came to me: "Please can you tell us, what graph theory is? What is it about? What does it mean?" you see? Now, students, they know what it means, and they know exactly what it is about, and what is the theory behind it, the theorems and propositions related, and ... the way of proof, I mean, it is a new way of logic. I mean a new way of doing proofs. It is a bit different from calculus and algebra. You see? In the way you deal with the ideas. So, they start to be... to get introduced

to ... how to think about the proofs and about the ideas in graph theory. So, this is my aim in this chapter... in this course actually, in the second year course. I want them to know what graph theory is.

39- Chercheure: Ok, and how do you describe a session in class, it could be a course or a tutorial that... that is related to graph theory? I mean, when you're teaching graph theory in class, how does it go usually?

40- LQ: You mean how does it go? How the students react? Or...

41- Chercheure: No, I mean, how do you choose what to do, like course, then tutorial, exercises... or...

42- LQ: Ah, which one first, ok. Me, in my teaching ways, I'd like to give a certain course, let's say, and once I'm able to do exercises, once there is enough material to start exercises, I will start.

43- Chercheure: And why is that?

44- LQ: In my opinion, students they don't like to take all the time, like let's say 2, 3 weeks of course and then to start exercises. Students, they feel, in my opinion, they feel relaxed when they start to practice, and to apply the ideas that they took in the course, to apply them in exercises, to see if they understood the concepts they have taken in the course. So, I'd like to do this. I'd like to start exercises as soon as possible so that students start to think and to understand... To know if they understood well what I have explained in course ok? By trying to solve the exercises, by trying to understand... by trying to think about the exercises themselves. And really, I know that students they like doing exercises more than taking course. This is always the case. They're always like: "Ok, it is enough about the course, can we start exercises? We just need to know how questions are asked in this part."

45- Chercheure: Ok, so you might give course and exercises in the same session?

46- LQ: Yes, I might do it yes. For example, let me... let's say, for example I finished a certain part, and I can start exercises about that part, yes, I can stop, I can start exercises. And later on, when I'm done with the part of the exercises... or maybe, ok, I do maybe one, two or three exercises maybe a couple of exercises just for the students to feel relaxed. And by the way, sometimes, when you are doing a lot of course, and sometimes students are a little bit tired, when you switch to something else, they feel relaxed. You see? They feel that... "Ah, ok, we will start something new, fine". They feel it, you see?

47- Chercheure: And, do you, do you have any idea yet about the sessions that are coming? Like the next sessions?

48- LQ: Yes, yes. I have just looked at the ideas. Tomorrow, you will be attending right?

49- Chercheure: Right, yes.

50- LQ: Ok. So tomorrow, I will continue with the course with the paths part. And I might have maybe one proposition left, maybe not. I don't know, it depends on the students tomorrow. So I might have one proposition about paths... next Tuesday, I will continue this proposition, I will start cycles. And, I might be able to be advanced in cycles. On Tuesday, I will start a little bit of exercises, and next Friday, it will be all about exercises.

51- Chercheure: Ok.

52-LQ: Ok, so next Tuesday, it will be a bit of course ... I guess, most part will be about course, and... if it is an hour and a half, I guess one hour will be for the course and half an hour for the exercises. On Friday, it will be all the session about exercises, I am talking about next week.

53- Chercheure: Yes, Ok. And, you started graph theory last Tuesday, right? Tuesday?

54-LQ: Graph theory... no, last Friday actually.

55- Chercheure: Ah ok, and ... how would you describe the reaction of the students when they were first introduced, like in the first session when they were introduced to graph theory?

56-LQ: Yes, you know? The first sessions, they are very ... how to say that... the students they go with it very happily, you see? Because at the beginning, you are introducing easy stuff: definitions, what is a graph, what is a complete graph, what is a subgraph, what are the neighborhoods, the degrees, ... then you introduce some easy theorems like the Euler theorem, the summation of the degrees is twice the number of edges, any graph contains two vertices of the same degree. These are easy and their proofs are not hard, so... first, when you start introducing graph theory, students feel relaxed, you see? They feel that, ok, it is nice, nice ideas. They like it when they see a picture, when they see a figure, you see? When you plot figures on the graph, you see what is this... you see that for example, if you add up all the degrees it will be twice the number of edges, so let us prove it... They are all from the beginning very relaxed with the course. It is always the case. Now, when we go a little bit more in depth about the theorems and properties, no, they start sometimes to feel that "oh my god, the proof here it wasn't that easy", and they start to feel that, it is not that easy. That is why, the first times, I found them, they were so, so simple for me. And even the students they have, they have reacted very well, and they were answering quickly, everything seemed clear to them, you see? But I expect, the next lecture coming, it won't be such a piece of cake, we say.

57- Chercheure: And, for the first two sessions in graph theory, were they... did you follow exactly what was in the document you sent us?

58-LQ: Yes, yes. The definitions, the notations, the theorems... but however, the document I sent you doesn't contain the proofs, I do the proofs in class.

59- Chercheure: Ok, yes, I know that, but I mean, the examples, they're exactly the ones given ...

60-LQ: Everything, everything was exactly the same. I give the document to the students and we follow.

61- Chercheure: Ah, ok. And, it is going to be...

62-LQ: And like this I save some time by the way. I save some time when they don't have to write everything, so I have some time to save, and to give to theorems and proofs.

63- Chercheure: Ok, and you already discussed the modifications you did for the previous year course, right? We discussed them in the beginning.

64-LQ: Yes, we discussed it. For the previous year, it is not too much, no. I just removed two theorems only and I have merged the two chapters about graph theory in one chapter.

65- Chercheure: Aha.

66-LQ: It is not a lot.

- 67- Chercheure:** Ok, it is just related to... the reason behind that is the lack of time?
- 68- LQ:** Yes, I just removed two theorems, yes because, ok, for two reasons: lack of time, plus, one of them is not hard, but I removed it for the lack of time; and the other one, I felt it was a bit hard for them to understand at this stage, so I prefer I give it in the M1 course, rather than give it now. And of course because of lack of time, because still, even if it is a bit hard for them, I can give it, but it will take time to explain, and it will take time for them to understand. The major issue yes, was time. The major issue is time.
- 69- Chercheure:** Yes, and how do you describe the... the role of this content in the course of discrete mathematics?
- 70- LQ:** Sorry, can you repeat the question?
- 71- Chercheure:** I mean this is one chapter out of the course of discrete math, right?
- 72- LQ:** Three chapters, it is three chapters yes.
- 73- Chercheure:** So, how do you describe like ... the place of this material in the course?
- 74- LQ:** Ah, you mean why is this chapter included in this course? Actually, when you say discrete mathematics, graph theory is one of the aspects in mathematics which is actually major within discrete mathematics. You see? So when I say discrete mathematics, this means the numbers, I mean not all the numbers, not the real numbers, you can talk about ... so when we are talking about arithmetic and \mathbb{Z} , this is the first chapter, this is also in the discrete mathematics aspects, because \mathbb{Z} , the integers, all the integers I mean, the negative and the positive, the ones called in French “entiers relatifs”, these are within the discrete mathematics aspects, you see? Because you have the discontinuity between the integer and the integer, and that is why for example this is the first chapter, because arithmetic, when you talk about \mathbb{Z} , it is within the discrete mathematics aspects. Graph theory is the same. So graph theory actually, it is one major, a whole major within the discrete mathematics aspects. You see? So it is not weird to have this chapter within the discrete mathematics course. This is what I explain actually when I start, in my first lecture, when I get inside and I want to introduce the course. I tell them that this course is divided into three chapters. The first chapter is this, the second is this, the third is this, and why are these all included in what we call discrete mathematics course, because discrete mathematics means 1, 2, 3, and all these majors, or all these ideas I’m talking about, these three chapters we are talking about, they are all majors within the discrete mathematics.
- 75- Chercheure:** Ok, and what is its role in the second year? I mean “quelle est la place de ce module dans la deuxième année” ?
- 76- LQ:** Ah in the second year... actually, for me, it is important for the students to be introduced to what we call discrete mathematics. Previously, students didn’t know ... I mean even when I was in college, in university, we might not know what discrete mathematics is. So, for me, it is very important that such a course is introduced in the second year. And now students know that there is ... the discrete mathematics aspect, you see? They should know about it, you see what I mean? It is important for me to be introduced... me for example, I didn’t know about discrete mathematics up until the fourth year. I guess that no, I could have been introduced to it before. So, that is why I guess it is very important to be introduced in the second year. Actually, this is an introduction, you know, it is only discrete mathematics, taking three parts in discrete mathematics, and going into introducing each of these three parts. You see? So...

77- Chercheure: And in the whole major, like for mathematics, like throughout the years? I mean “quelle est la place de ce module dans la formation?”

78- LQ: Discrete mathematics is mathematics, they should know it, like calculus, like algebra. You see what I mean? So why are students introduced to calculus and to algebra and not be introduced to discrete mathematics? It is a whole aspect for me, exactly the same as calculus, exactly the same as algebra. They should be introduced to it.

79- Chercheure: Ok, and what are the conditions and the constraints that affect your choices of contents or the choices of material you use when you are teaching this chapter?

80- LQ: This chapter exactly?

81- Chercheure: Yes.

82- LQ: In this chapter, I try to be as simple as possible for them. Because, graph theory in its theorems and when you go in details about it, and the proofs of the theorems, sometimes it gets a bit complicated for students. And when you are talking about second year students, they are not that advanced in mathematics to understand everything. So, when I put the course about the second chapter, I try to be as simple as possible, and to give the ideas in a systematic way for them to get it simply, you see? And we don't give like big theorems, theorems with a large proof, ok? We just give the theorems, the major theorems actually, for example, about paths, these are the major theorems. Their proofs, you will see tomorrow, their proofs are not hard, and they are not long. My aim in this, it is not to give them hard theorems with very long proofs, it is just for them to understand theorems, simple proofs, not hard proofs, that in proofs in graph theory you would go that way, you see? And in a way for them to be able to understand.

83- Chercheure: Ok. That was actually my last question.

84- LQ: Ok, I hope it was useful for you.

85- Chercheure: Yes, of course.

7.3- Transcription de la première séance observée

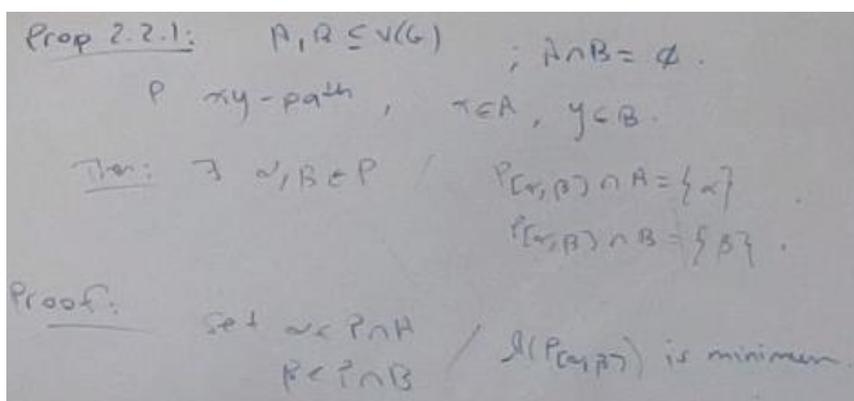
La première séance est une séance de cours. Elle porte sur la partie « chemins » du cours. Selon les contenus que nous avons récupérés, cette séance porte sur la proposition 17 (proposition 2.2.1 dans la version anglaise), la remarque 18 (remarque 2.2.2 dans la version anglaise) et la proposition 19 (proposition 2.2.2 dans la version anglaise) et leurs preuves. LQ a expliqué aussi la proposition 20 (proposition 2.2.3 dans la version anglaise) avec une partie de la preuve.

- 1- **LQ:** The proposition states that “if you take sets $A, B \subseteq V(G)$ such that $A \cap B = \emptyset$ ”, so two disjoint sets of vertices, and you take P to be an xy -path where $x \in A, y \in B$.

Then, there exists $\alpha, \beta \in P$ such that $P_{[\alpha, \beta]} \cap A = \{\alpha\}$ and $P_{[\alpha, \beta]} \cap B = \{\beta\}$.

So, this means that any path, from vertex A to vertex B knowing that A and B are disjoint, any path, we can find in it a sub-path, there is a sub-path of it, ok? Which intersects A only at one vertex and intersects B only at one vertex. Ok, the proof of this:

So, we said that we take sets α and β , α to be in $P \cap A$, and β to be in $P \cap B$ such that the length of $P_{[\alpha, \beta]}$ is minimum, right? Ok, so actually, the whole path P , the whole path P is a path from a vertex A to a vertex B . However, I will choose α of P and A , β of P and B , such that the length of the path from α to β , the sub-path of P from α to β is minimum.



So, what do we say? Anyone who has an idea? We said this means that this is a sub-path of P , ok? A sub-path of P ok? From a vertex in A to a vertex in B which has the minimum length. So help me out. What do we need to prove?

- 2- **Student:** That there exists α and β such that...
- 3- **LQ:** I have chosen this α and this β , I have chosen these α, β such that the length is minimum. I have chosen such α, β . I can do this of course, ok? All the path here is a path from A to B , from vertex α to vertex β , so I will take a sub-path of P from A to B , from a vertex of A to a vertex of B which has the minimum length. Now what do we need to prove?
- 4- **Student:** $P \cap A$...
- 5- **LQ:** $P \cap A$?

6- Student: $P_{[\alpha,\beta]}$

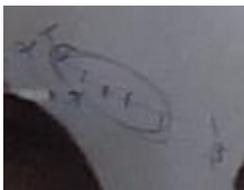
7- LQ: $P_{[\alpha,\beta]} \cap A \dots$ there is a huge difference between P and $P_{[\alpha,\beta]}$. $P_{[\alpha,\beta]}$ is the whole path, so let's say you have, this is A and this is B (while drawing the below figure on the board), x here and y here, ok? We might pass by plenty of points here and then, ok? There is a huge difference between P and $P_{[\alpha,\beta]}$ that I have chosen. I don't know the shape of $P_{[\alpha,\beta]}$, I just know that it is a part of P . It is a sub-path of P from a vertex of A to a vertex of B ok? Which has the minimum length. So it is a part of P . You understand?



Of course, it is not $P \cap A$ that is equal to α because P might intersect A at plenty of points and it can intersect B at plenty of points. We need to prove that $P_{[\alpha,\beta]} \cap A$ is only α if we have chosen α and β to be in this case. Because we need to prove that there exists α and β , the α and β , I should... I should find them. So I chose α and β to be this way because it seems logical that in this way, the path of minimum length will intersect A in only one vertex and B in only one vertex, ok? So, $P_{[\alpha,\beta]} \cap A$, we have started something actually, we said that, if $P_{[\alpha,\beta]}$ happens to be the edge $\alpha\beta$, then there is nothing to prove. Because then $P_{[\alpha,\beta]} \cap A$ would be the singleton α , because β is in B . So there is nothing to prove in this case.

So there is nothing to prove if $\alpha\beta$ happens to be an edge, it could be.

Now otherwise, what do we have? Otherwise? (Students give indistinct answers) Otherwise it is not an edge, so this means that there are interior points, in the path, other than α and β , so otherwise, I would take any... let x belong to $P_{[\alpha,\beta]}$ which means that x is an interior point of this. This means that this is $P_{[\alpha,\beta]}$ (referring to the drawing below), which is a part of P , ok? And I have x 's inside, ok?



8- Students: Yes.

9- LQ: What do we need to prove? I actually need to prove that all this path, all this path (pointing to the same drawing), all this part of P intersects A only at α ok?

So what do I need to prove? If it intersects A only at α , this means I have to prove that all the points (circling the points on the board on the same drawing) other than α are not in A (students participating, indistinct comments), and also not in B , ok? So that is why

I have chosen an x , interior point of the path, I need now to prove that x is neither in A , nor in B . So this means that this sub-path (pointing to the same drawing) intersects A only at α and intersects B only at β . Ok, so, what is the intersection... oh sorry, so ok, what do you think guys? If you choose an x here...

10- Student: If we can assume that...

11- LQ: Ok, suppose x is in A , what is the problem then?

12- Student: x is different than α ...

13- LQ: x is different than α of course.

14- Student: The length will no longer be minimum.

15- LQ: Why, can you find some sub...?

16- Students: $x\beta$

17- LQ: Very good, then $P_{[x,\beta]}$, it will be also a path from a vertex in A to a vertex in B which is shorter strictly than $P_{[\alpha,\beta]}$. A contradiction because $P_{[\alpha,\beta]}$ should be a shortest path from a vertex in A to a vertex in B . Ok? And that is all.

(writing on the board) If x belongs to A and the length of $P_{[x,\beta]}$ is strictly less than the length of $P_{[\alpha,\beta]}$, ok? Of course because x is an interior point of the path...

(Student interrupts but what she says cannot be heard)

18- LQ: (Pointing again to the previous drawing) I mean I'm saying that, the length of $P_{[x,\beta]}$ is strictly less than the length... x is not α even, x belongs to P over $\alpha\beta$ ($P_{[\alpha,\beta]}$), so I am saying x is neither α nor β , ok?

(Going back to writing the proof) so where x belongs to A intersection P of course because it is part of the path, and β belongs to B , so this means that is a sub-path of P from A to B that is shorter than $P_{[\alpha,\beta]}$. A contradiction because the length of $P_{[\alpha,\beta]}$ is shortest, is a shortest, with the property, a vertex in A to a vertex in B . So this means what?

19- Student: It is not in A .

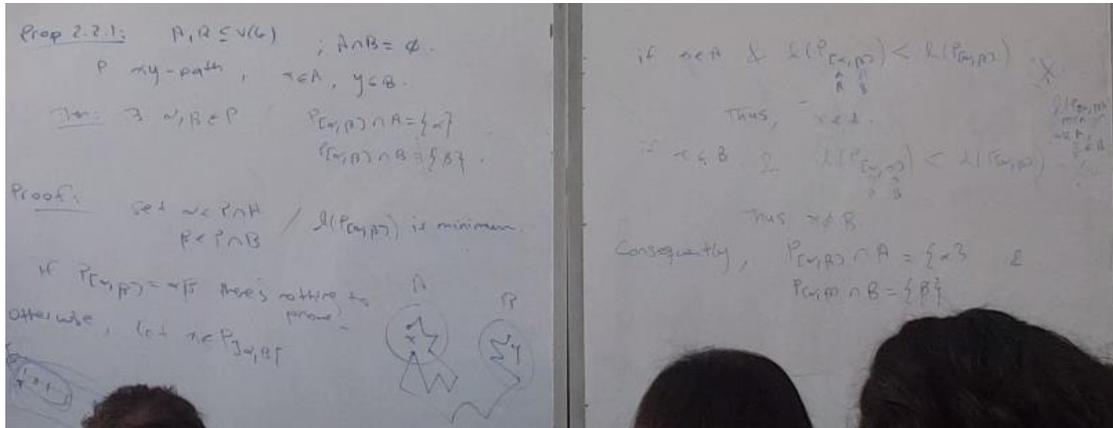
20- LQ: Thus x does not belong to A . Similarly, if x belongs to B then definitely we have... if x is in B , then where is the contradiction?

(Students giving indistinct answers)

21- LQ: Then the length of $P_{[\alpha,x]}$ is also strictly less ... because x is not β , to the length of $P_{[\alpha,\beta]}$ ok? Where α belongs to A and x belongs to B . Ok? If you have the case that x is in B , then this is a sub-path of P (pointing at $P_{[\alpha,x]}$) where α belongs to $P \cap A$ and x belongs to $P \cap B$. So, a contradiction because of the choice of α and β . Ok? Because α and β are chosen such that the length of $P_{[\alpha,\beta]}$ is minimum such that α is in A and β is in

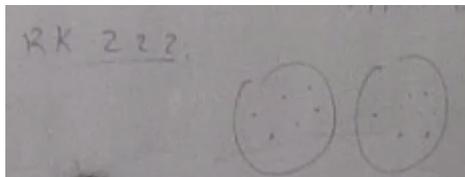
B . Of course they are also on the path. When I say $P_{[\alpha,\beta]}$, definitely α and β are on P . Ok, thus x doesn't belong to B .

Consequently, you can always find, whenever you take, ok, two disjoint sets of vertices, and the path from one set to the other, you can find a sub-path which intersects A only at one vertex and intersects B only at one vertex.



As a consequence of this proposition, is remark 2.2.2, ok? So let us look at remark 2.2.2 (referring to the handout that students have): if $\{A, B\}$ is a partition of $V(G)$, you take a partition of course where A and B would contain all the vertices and would not intersect each other, it is a partition in a connected graph G , then there exists α in A , β in B such that $\alpha\beta$ is an edge. How will you get to this remark?

If you take a partition of $V(G)$, so a partition of $V(G)$, this means that two sets of vertices that contain all the vertices in G (drawing a figure on the board). So all that you have is that A and B they form a partition and that G is connected. This is all that you have. And we deduce that we can find α in A , β in B such that there is an edge between α and β . Who can tell me why?



22- Student: Because G is connected.

23- LQ: Yes. Connected means that there exists a path between any two vertices.

24- Students: A path between A to B .

25- LQ: Yes. If I take x in A , y in B , then definitely there is a path from x to y . So (writing on the board) let x belong to A and y belong to B and let P to be an xy -path, so this path, I have it as a given. So now definitely I have a path from one fixed vertex in A to one fixed vertex in B , so what? I want it to be an edge.

26- Student: According to the proposition...

27- LQ: According to the proposition, yes?

28- Student: There exists $\alpha\beta$ in P .

29- LQ: Based on the proposition, I can find a sub-path of P

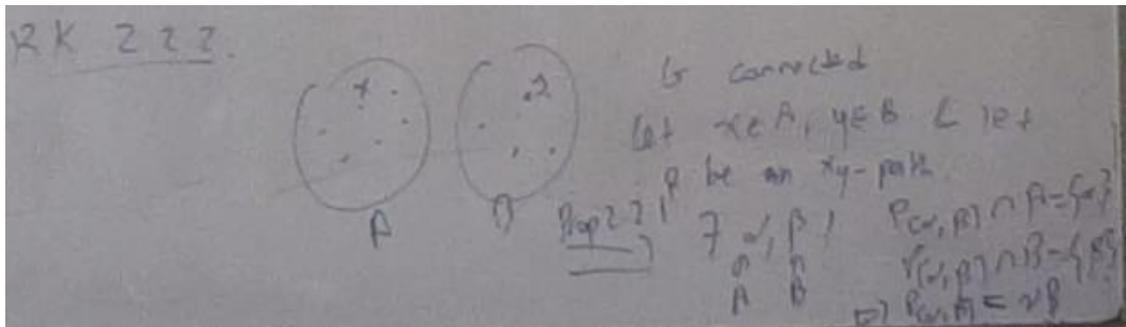
30- Student: Such that α is in A .

31- LQ: So by proposition 2.2.1, we can find that there exists α and β such that, of course α is in A and β is in B , such that $P_{[\alpha,\beta]} \cap A$ is only α and $P_{[\alpha,\beta]} \cap B$ is only β , ok?

32- Student: And because we have a partition, there are no points outside.

33- LQ: Very good. It is a partition, there are no points outside, ok? So if this sub-path intersects A at only one point and B at only one point, and we cannot have other points because this is a partition, so this means that definitely $P_{[\alpha,\beta]}$ should be an edge $\alpha\beta$.

Ok? So this means that $P_{[\alpha,\beta]}$ is equal to the edge $\alpha\beta$ and I have found it ok? So is this clear?



And this you can always deduce. So whenever you have... the fact that it is connected, it helps me to find a path from A to B .

34- Student: Ah, because $P_{[\alpha,\beta]}$ has to be minimum, right?

35- LQ: No.

36- Student: Is it connected to something in A and then connected to B ?

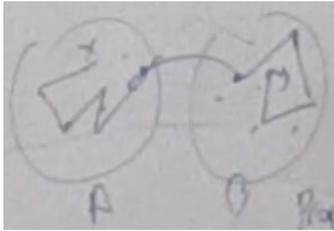
37- LQ: No. in fact you are saying that $P_{[\alpha,\beta]} \cap A$ is only α , so how can it be connected to something else in A ? You understand me? So we have a sub-path, from A , it contains only α , and from B , it contains only β , and there are no other points outside. So how can it be? You understand? So this, always you can deduce it. Is it clear, guys, the writing?

38- Students: Yes.

39- LQ: So what I wanted to say is that, whenever you have a connected graph, and a partition, it means that the vertices are split into two sets of vertices, then I can find definitely an edge from this set to that set. An edge for sure.

40- Student: In this case is x ?

41-LQ: No, α is not x . x and y don't have to be ... you said, the graph is connected, so of course there is a path from x to y , this path could be like this (drawing on the board).



But the idea is that there should be ... this path is not necessarily an edge, but I say that there is a part of it, a sub-path of it, which is an edge. A sub-path of it intersecting A at only one vertex and intersecting B at only one vertex, so this part (pointing at the edge between A and B in the above figure) definitely should be an edge. You see? Because you have to pass from this set to that set, you cannot pass by ... it should be an edge. So, I am saying that I can find an edge inside this path from here to here (pointing at the same drawing). Ok, now this is clear? The fact that the graph is connected, was it beneficial?

42- Students: Yes (then indistinct answers)

43-LQ: Because if it wasn't connected

44- Student: We might not have the edge...

45-LQ: Then we might have no path from a vertex in A to a vertex in B . To apply the proposition, we should have two sets of vertices that are disjoint, and we should have given a path from a vertex in A to a vertex in B . This all should be given. If I don't have a path from A to B , I cannot say that it contains a sub-path, you understand? So, you should have a path from one set to the other. So the fact that it is connected means that for sure I can find a path from a vertex in A to a vertex in B . And so, according to the proposition, there will be a part of this path which will intersect A at only one vertex and B at only one vertex. So, because it is a partition, this path definitely should be an edge. It has no other possibility. Is this clear?

So it is an important proposition, the idea behind it is important. You can use it in plenty of theorems.

So proposition 2.2.2, let G be a graph, and let P be an xy -geodesic in G which means?

46- Students: Smallest path... a shortest xy -path.

47-LQ: A shortest xy -path. So we have (writing on the board) G graph, and we have P , a shortest xy -path. So as we said, P is ... when I say a geodesic, it means it is a shortest path, which means that its length is equal to the distance, where the distance is defined to be the minimum length of a path. Geodesic or shortest xy -path mean the same thing.

For all u, v belong to P , $P_{[u,v]}$ is a uv -geodesic in G . (Writing on the board) for all u, v in P , $P_{[u,v]}$ is a uv -geodesic.

So what do we have and what do we need to prove?

48- Student: We have that P is a xy -geodesic.

49- LQ: It is a geodesic? Yes a shortest path from x to y .

50- Students: And we have that uv is the shortest xy ...

51- LQ: So for any uv for example (drawing on the board), so any two vertices on the path, they could be x and y , and of course they could be something else. Ok? u, v right? So for any u, v on this path...



52- Student: uv should be shorter than xy .

53- LQ: What do you mean by uv ?

54- Student: The path.

55- LQ: $P_{[u,v]}$

56- Student: Should be shorter ...

57- LQ: $P_{[u,v]}$, what do we mean by $P_{[u,v]}$?

58- Students: The path.

59- LQ: So this is the part of P , the part of P . I mean this part here (pointing at the part in the drawing between u and v) which is a part of P .



$P_{[u,v]}$ means a sub-path of P from u to v . So $P_{[u,v]}$, which is this part (pointing at the drawing again) from u to v on the path P is a uv -geodesic.

60- Students: Is shorter than $P_{[x,y]}$...

61- LQ: Shorter than $P_{[x,y]}$? It is of course shorter than $P_{[x,y]}$. Anyway all of it is called P . Of course the length is shorter than that of P because it is a part of it.

62- Student: But this is not what we need to prove.

63-LQ: This is not what we need to prove, of course.

64-Student: We need to show it is a shortest path.

65-LQ: It is a shortest path from u to v , very good. You need to prove that this part of the path (pointing at the part in the drawing between u and v), it is a uv -path, but it does not to be a shortest uv -path. So we prove that if a path is geodesic, then any sub-path of it is also a geodesic, of course, between different ends. So the summary of this is that a sub-path of a geodesic is definitely a geodesic, with different ends. Because this doesn't need to be the case. If u and v are here (pointing at the figure above), the path doesn't have to be the shortest path from u to v . Maybe we can find another which is shorter. However we could prove that this is a shortest uv -path.

So the proof of this, ok, what do you think? Let u, v belong to P , we need of course, we need to prove that P is a uv -geodesic, which means?

66-Students: It is the shortest path.

67-LQ: Ok, so this means that $P_{[u,v]}$ is "a" shortest path not the shortest path because it may not be unique, ok? So $P_{[u,v]}$ is... I need to prove that $P_{[u,v]}$ is a shortest so... (Writing on the board) $P_{[u,v]}$ is a uv -geodesic. This is what I need to prove.

Ok, by contradiction, we suppose that ...

68-Students: There exists...

69-LQ: Suppose that there exists what?

70-Students: A path uv smaller than...

71-LQ: A uv -geodesic or you can say a uv -path, so suppose there exists a uv -geodesic, let's call it Q , such that...

72-Students: Smaller than $P_{[uv]}$

73-LQ: Smaller in terms of what? In terms of the...

74-Students: Length.

75-LQ: Length, it means in terms of the number of edges (writing on the board) such that the length of Q is strictly less than the length of $P_{[u,v]}$. So suppose there exists a uv -geodesic Q , we can say suppose there exists a uv -path Q , because if this wasn't a shortest path, this means that we can find a path shorter, or this means that a shortest path is of course of length shorter. (Reading what she wrote on the board) So suppose there exists a uv -geodesic Q such that the length of Q is strictly less than the length of $P_{[u,v]}$, ok. How would this path Q be? It is different than $P_{[u,v]}$ definitely.

76- Student (Charles)³³: We can say that P is no longer a geodesic.

77- LQ: Why?

78- Student (Charles): Because there is a shorter path now.

79- LQ: How? Can you find it?

80- Student (Charles): x to u , then $u \dots$

81- LQ: Ok, so Q , how will you illustrate it? (Drawing on the board) Q is from u to v . What would it be like in your opinion?

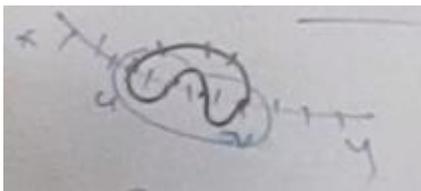
82- Students: From the outside.

83- LQ: Like this?



84- Students: It doesn't matter.

85- LQ: Ok. Or maybe it would be like this, intersecting....



86- Students: Not on the path.

87- LQ: Of course... no... probably it would be (drawing on the board) let's say, not exactly not on the path, different from $P_{[u,v]}$, it could be like this.



It is not $P_{[u,v]}$, fine? Ok if this is the case, Charles is saying that ... how would it be?

³³ Nous avons indiqué entre parenthèses le prénom d'un étudiant à chaque fois que nous l'avons saisi d'après les échanges et les discussions en classe

88- Student (Charles): P is not anymore.

89- LQ: P is not anymore an xy -geodesic. Because...

90- Student (Charles): There exists a smaller path.

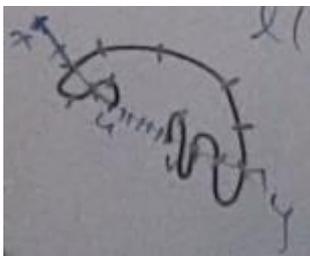
91- LQ: Which is?

92- Student (Charles): P from x to u , union Q , union $P_{[v,y]}$.

93- LQ: Ok, this will be shorter than P because Q is shorter than $P_{[u,v]}$ right?

94- Students: Yes.

95- LQ: It is correct. It is correct we are in this case (referring to the last drawing). However, the path between u and v (drawing a new figure) ok, this is u , this is v (referring to the figure), the path between u and v , it might do intersections with $P_{[x,u]}$, I will draw the path in a different color, do intersections with $P_{[v,y]}$ (drawing the path with a black color as shown below).



Ok, isn't this a path?

96- Student: It is not smaller.

97- LQ: What do you mean? Measuring it with a ruler? No no, shorter means with respect to the number of edges. It means this black path (referring to the drawing above) contains less number of edges than $P_{[u,v]}$. Don't take it according to the measure, it is not about the measure of P . So I am drawing just to show you that the path doesn't have to be like this from u to v (referring to the first drawing) not doing any intersection with $P_{[x,u]}$, not doing any intersection with $P_{[v,y]}$. It could be of that shape (referring to the last drawing). Is this a path?

98- Students: Yes.

99- LQ: Ok. If we do not take the path that Charles has suggested, I mean $P_{[x,u]} \cup Q \cup P_{[v,y]}$, of course this will contain less number of edges. But however, it is not a path. A path should not have repeated vertices. You remember? So, (referring to the last drawing) if you go from x to u , then you go from Q which I don't know if it has plenty of intersections, if you go like this (referring to x to u on the drawing) then like this (referring to Q) then $P_{[v,y]}$, it is not a path anymore. Is it clear?

100- Student: In the example above, if we take it like this, there will not be an intersection.

101- LQ: Yes, this is a particular case.

102- Student: Ah ok.

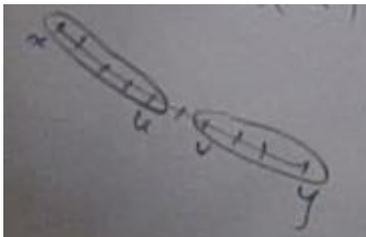
103- LQ: If it was like this, then it works (referring to the first drawing). But it might not be the path from u to v , I don't know where are the vertices on Q , they intersect where. You understand? So, ok, in this case (referring to the last drawing), however I can still find a path which is shorter than P . A path from x to y , an xy -path which is shorter than P . I can still find it. It will not be $P_{[x,u]} \cup Q \cup P_{[v,y]}$, it will be what?

104- Student (Charles): We take the first intersection...

105- LQ: Ok, to avoid this, we can use simply the proposition 2.2.1, because 2.2.1 states that, we can split, we can take this set of vertices here (circling them on the drawing as shown in the figure below).



I don't like this drawing (she erases the drawing to make a new one). Ok? I will take $P_{[x,u]}$ (referring to the new drawing shown below) the vertices of $P_{[x,u]}$ and the vertices in $P_{[v,y]}$, ok? The path Q , it is a path from u to v , and these two sets of vertices (referring to the circled parts), they are disjoint. True or false?



So what do we deduce?

106- Student: That there exists α and β ...

107- LQ: α and β , α in $P_{[x,u]}$ and β in $P_{[v,y]}$ such that

108- Students: The intersection is α

109- LQ: The intersection of what?

110- Students: Of P_α with xu .

111- LQ: $P_{[x,u]}$? No. What is the path from u to...

112- Student: $P_{[x,y]}$.

113- LQ: Guys, let us repeat the given.

114- Student: $P_{[u,v]}$.

115- LQ: No, not $P_{[u,v]}$. Guys, guys, guys, not $P_{[u,v]}$. One moment, let us repeat the given. I have taken these two sets of vertices (referring to the circled parts in the last drawing), they are disjoint, and what else?

116- Student: Two points α and β .

117- LQ: No, before that, I have a given. Not only A and B . I have a path from here (referring to A) to here (referring to B), what is this path?

118- Student: The intersection ... (indistinct answers)

119- LQ: One moment, the problem guys was with Q , I erased it now, the problem was with the path Q that makes plenty of intersections probably with $P_{[x,u]}$ and plenty of intersections with $P_{[v,y]}$. Q was the problem making plenty of... Q is a path from u to v , it is a path from a vertex in $P_{[x,u]}$ to a vertex in $P_{[v,y]}$. So I can find, so this means that there exists α and β such that ...

120- Student: The intersection of Q with

121- LQ: Not of Q .

122- Student: Of P ...

123- LQ: Of $Q_{[\alpha,\beta]}$ guys! Not Q . When we said, when we said P is a path from x to y , then we said that $P_{[\alpha,\beta]}$ not all of P , P may have plenty of intersections with A , plenty of intersections with B , but $P_{[\alpha,\beta]}$, the sub-path of P intersects A only at α , not all of it, so Q over, as I have brought it a bit earlier, it might do plenty of intersections with $P_{[x,u]}$, it might do plenty of intersections with $P_{[v,y]}$. Right? However, $Q_{[\alpha,\beta]}$, I am definitely sure that I can find some sub-path of Q , a part of Q , so $Q_{[\alpha,\beta]}$ that intersects $P_{[x,u]}$ only at α and intersects $P_{[v,y]}$ only at β . So what would $Q_{[\alpha,\beta]}$ look like? Not Q . Q might be doing plenty of intersections. What would $Q_{[\alpha,\beta]}$ look like?

124- Student: uv .

125- LQ: This uv ? (Pointing at the drawing) you mean α is u and β is v ?

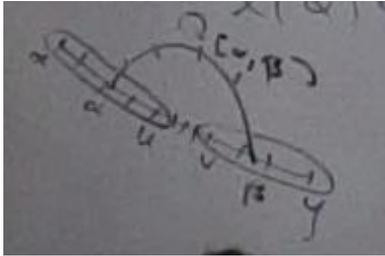
126- Student: Yes.

127- LQ: No, this is not what we have stated in the proposition, the proposition states that there exists α in A and there exists β in B . I did not say that α has to be x when the path P was from x to y .

128- Student: Then α and β make intersections?

129- LQ: α , but α is a point here, and β is a point here (adding α and β to the drawing on the board as shown below). They could be v and u and maybe not. And $Q_{[\alpha,\beta]} \cap P_{[x,u]}$ is

only α and $Q_{[\alpha,\beta]} \cap P_{[v,y]}$ is only β . (Pointing at $Q_{[\alpha,\beta]}$ in the drawing) this is $Q_{[\alpha,\beta]}$ not Q). Now α and β don't have to be u and v . All of Q is from u to v , you understand? The path Q , all of it, it is from u to v , the sub-path of Q , it is from some α to some β , α in the first set, β in the second set. But they need not be the ends of the path Q . Is this right? So $Q_{[\alpha,\beta]}$ looks like this (referring to the figure below).



So now, what did I gain from this? So $Q_{[\alpha,\beta]}$ with this set (referring to the left circled part in the figure above), it makes only one intersection, and with this set (referring to the right circled part in the figure above), it makes only one intersection. Ok, and now what? Now can you form the path? What will that be?

130- Student: $x\alpha$

131- LQ: $P_{[x,\alpha]}$, P ! Stop saying guys $x\alpha$. What is $x\alpha$?

132- Students: $P_{[x,\alpha]}$

133- LQ: You are taking a part of P , right? It is a sub-path of P from x to α , so it should be named $P_{[x,\alpha]}$.

134- Students: $\cup Q_{[\alpha,\beta]} \cup P_{[\beta,y]}$

135- LQ: This will be an xy -path definitely, because this part here (referring to $P_{[x,\alpha]}$ in the drawing) it doesn't intersect $Q_{[\alpha,\beta]}$ except at α . And this part (referring to $P_{[\beta,y]}$ in the drawing) doesn't make any intersection with $Q_{[\alpha,\beta]}$ except at β . Ok? So then this, I guarantee that it contains no repeated vertices. Right? Ok and we still need to investigate its length, its length will be definitely less than the length of P of course. Is this clear? So all of this, α and β , they might be u and v , this here (referring to the first drawing) is a particular case, in this case, α is u and β is v . So this path in itself Q like I drew it, it intersects $P_{[x,u]}$ only at u and it intersects $P_{[v,y]}$ only at v . So in this path here (referring to the first drawing), α is u and β is v . So here the path itself is... $Q_{[\alpha,\beta]}$ is Q . It is a particular case here.

136- Student: In this case (referring to the second drawing), A and B from a partition or they don't have to?

137- LQ: What do you mean? $P_{[xu]}$... No not a partition, disjoint.

138- Student: There is no intersection.

139- LQ: There is no intersection.

140- Student: So there could be vertices on the path that are not in $P_{[x,u]}$ and not in $P_{[v,y]}$?

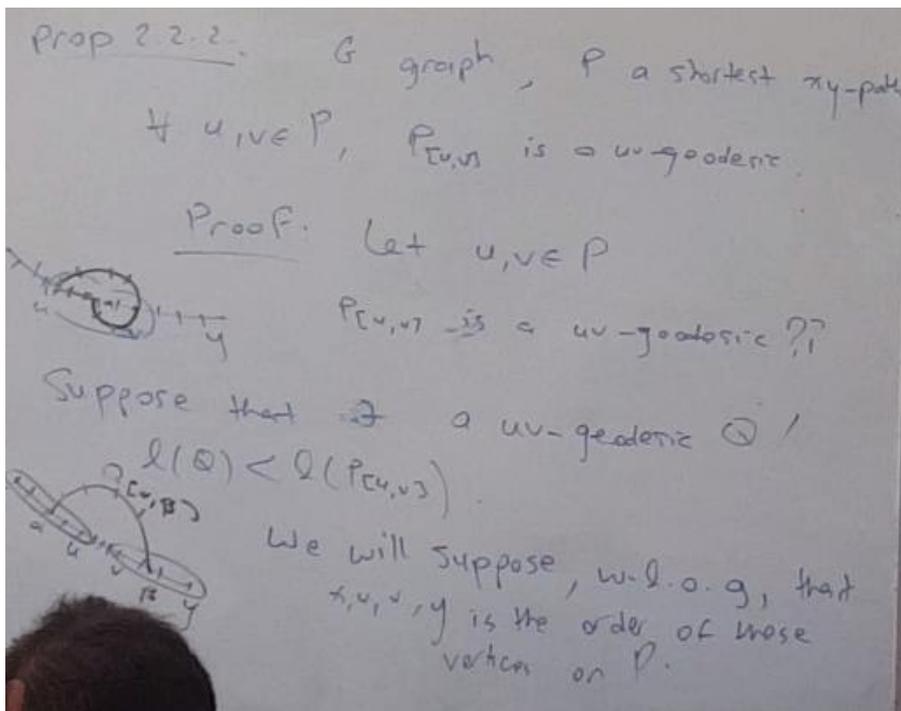
141- LQ: Of course, I had said that I took two sets, two disjoint sets of vertices that are $P_{[x,u]}$ and $P_{[v,y]}$. And I took a path from a vertex in the first set to a vertex in the second set that is Q . Q is a path from u to v , so from a vertex in the first set to a vertex in the second set. Ok? So very good. Now we are going to write this idea.

(Reading what she already had written on the board) suppose that there exists a uv -geodesic Q , and that its length is strictly less than the length of $P_{[u,v]}$.

So Q is a uv -path, right? A uv -path, a path from u to v , my problem was that Q could be making many intersections with $P_{[x,u]}$ and plenty of intersections with $P_{[v,y]}$.

So to avoid these plenty of intersections, ok? We can use proposition 2.2.1 because the proposition states that eventually, I can find a sub-path that intersects $P_{[x,u]}$ at only one vertex and $P_{[v,y]}$ only a one vertex, so we will have avoided these plenty of intersections. Ok? Very good.

Now, we will suppose, of course we know that u and v are on a path, v can be before u , we will suppose without loss of generality that the order of the vertices on the path is x, u, v, y . Because now I will need to take $P_{[x,u]}$ and $P_{[v,y]}$, I need them to be disjoint sets, if the order was x, v, u, y , they wouldn't be disjoint, right? So, simply, whatever the vertex which is before, suppose this order.



So, we have that $P_{[x,u]} \cap P_{[v,y]}$ is empty. Because the two sets are disjoint, two disjoint sets of vertices. And Q is a uv -path. Fine? Where u belongs to $P_{[x,u]}$ and v belongs to $P_{[v,y]}$. Are you following?

142- Students: Yes.

143- LQ: So, these are all given. Accordingly, what do we deduce? By proposition 2.2.1, what do we deduce?

144- Student: There exists α in $P_{[x,u]}$...

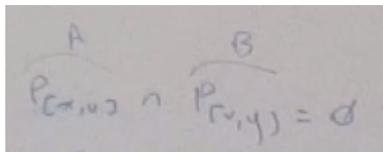
145- LQ: There exists α in $P_{[x,u]}$, of course it is also on Q , when I say $Q_{[\alpha,\beta]}$, it means it is a part of Q , so you can simply skip this idea, and there exists β in $P_{[v,y]}$ such that...

146- Students: The intersection of α in $P_{[\alpha,\beta]}$... $Q_{[\alpha,\beta]}$...

147- LQ: $Q_{[\alpha,\beta]}$, it is part of this path (pointing to Q) guys, you are saying Q is from here to here. So according to the proposition, I can find a part of it, of Q , so $Q_{[\alpha,\beta]} \cap \dots$

148- Student: $x \dots P \dots y \dots P_{[x,u]}$

149- LQ: $P_{[x,u]}$ is only α and $Q_{[\alpha,\beta]} \cap P_{[v,y]}$ is only β . So these are A and B in the proposition (annotating the board as shown below). You understood?

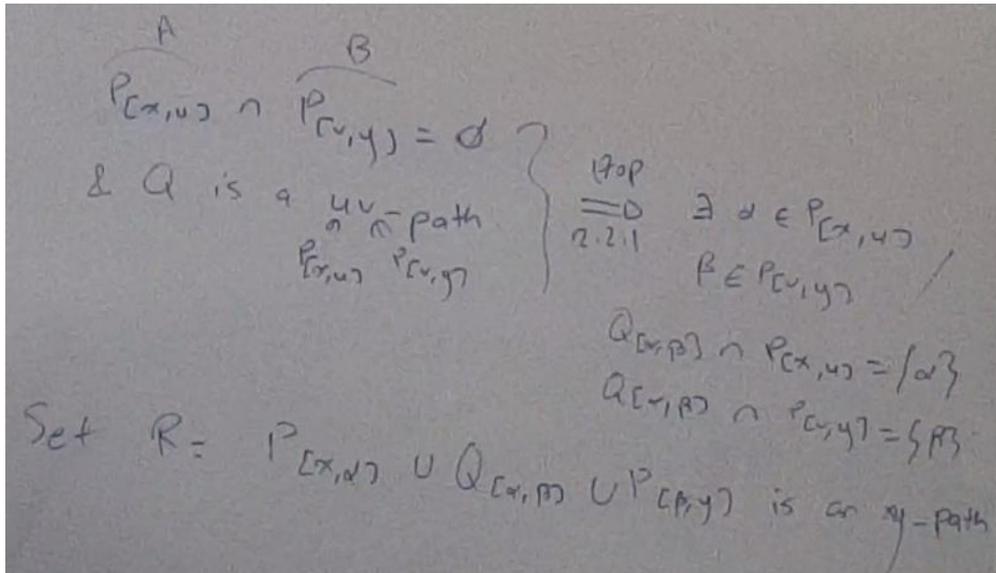


These are the sets A and B , and this is the path P (pointing at Q). Q is path P . So, be careful, you are saying, this is the set of disjoint sets, two disjoint sets of vertices, this is a path from here to here, whatever its name is, let's say R , then I can find a sub-path of R I mean $R_{[\alpha,\beta]}$.

So, set now R to be $P_{[x,\alpha]} \cup Q_{[\alpha,\beta]} \cup P_{[\beta,y]}$ (students participating in stating union), now this path, definitely, from the choice of α and β , it is what?

150- Student: The xy -geodesic.

151- LQ: No, not an xy -geodesic, R is what? xy -path. Who said that it is a shortest path? No. you are saying that it is a path, now we are going to see its length, ok? So, it is a path, from the choice of α and β , there are no repeated vertices, so it is an xy -path. Now let us see its length. Let us compare its length to the length of what?



152- Student: The sum of ...

153- LQ: To the length of...

154- Students: Q , ... xy -geodesic...

155- LQ: P !

156- LQ: The path P is a geodesic from x to y and R is an xy -path. I will compare now the length of R to the length of P . R is a path from x to y , and P is an xy -geodesic. Ok? So, the length of R is... what do you think?

157- Students: The summation.

158- LQ: Of course, the summation of the lengths, the length of $P_{[x,\alpha]}$ plus the length of $Q_{[\alpha,\beta]}$ plus the length of $P_{[\beta,y]}$. Which is

159- Student: Less than...

160- LQ: The length of $P_{[x,\alpha]}$ is of course less than or equal to the length of $P_{[x,u]}$, it can be equal if u is α , and the length of $Q_{[\alpha,\beta]}$ is less than the length of Q , $Q_{[\alpha,\beta]}$ can be all of Q . And the length of $P_{[\beta,y]}$ is less than or equal to the length of $P_{[v,y]}$. Now the length of Q by the given is strictly less than the length of $P_{[u,v]}$. And all the rest remains the same (referring to the inequality below).

$$\begin{aligned}
 l(R) &= l(P_{[x,\alpha]}) + l(Q_{[\alpha,\beta]}) + l(P_{[\beta,y]}) \\
 &\leq l(P_{[x,u]}) + l(Q) + l(P_{[v,y]}) \\
 &< l(P_{[x,u]}) + l(P_{[u,v]}) + l(P_{[v,y]})
 \end{aligned}$$

Now what are these? (Referring to the last line of the inequality above) the length of $P_{[x,u]}$ and the length of $P_{[u,v]}$ and the length of $P_{[v,y]}$. This is the length of P . Very good. We are just adding the lengths of the pieces of P . Ok? So what do we get? We get that the length of R is strictly less than the length of P .

Now what's the problem?

161- Students: The length of $P_{[x,y]}$, the length of $P_{[x,y]}$ is less than P .

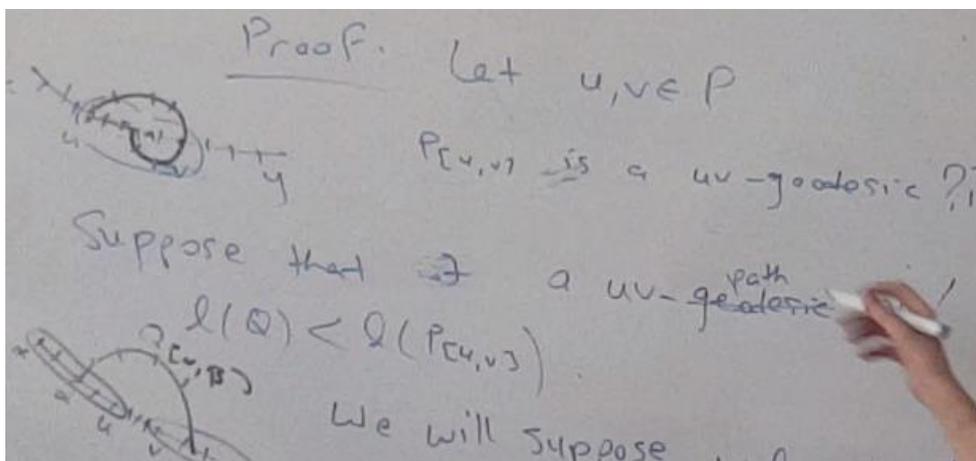
162- LQ: So you cannot find an xy -path shorter than P . This R that I have found is an xy -path. So if we contradict with the fact that P is a geodesic, this means we should find an xy -path, from x to y , ok? Such that the length is shorter, which gives a contradiction.

Now it is a contradiction because P is a shortest xy -path, I cannot find a path from x to y whose length is shorter, which I have found. Ok? So P is a shortest xy -path. Contradiction to what?

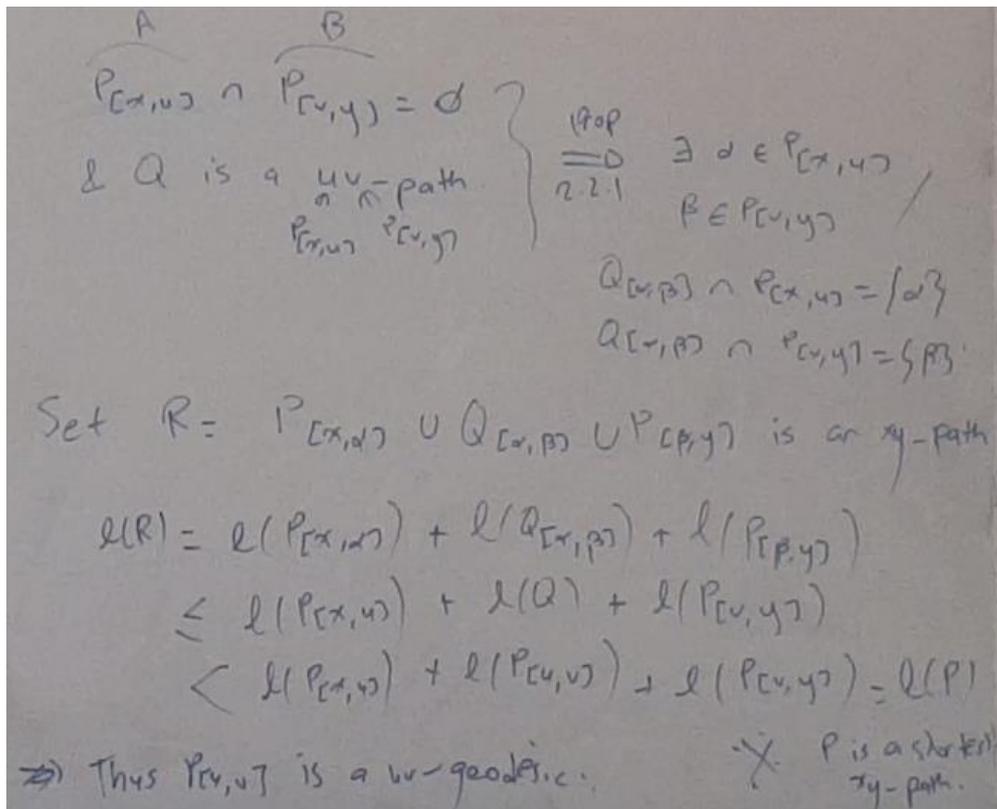
163- Students: That we have another... (Indistinct answers)

164- LQ: I could have said, suppose there exists a path such that its length is strictly less. This means that we cannot find a path whose length is strictly less than the length of $P_{[u,v]}$. We cannot find a uv -path whose length is strictly less than the length of $P_{[u,v]}$. Do we understand?

I'd rather here put that (referring to the part she wrote below on the board), it is not wrong, but so that you understand it better, a uv -path Q ... if you consider that this is not a uv -geodesic, geodesic or path, both are correct. So if we start by taking $P_{[u,v]}$ such that it is not a uv -geodesic, what does it mean to say that it is not a uv -geodesic? It means it is not a shortest uv -path, what does it mean to say it is not a shortest path? It means there is a shorter path. I have a path from u to v that is shorter than this. So you can say a path uv or of course the shortest path will be shorter ...

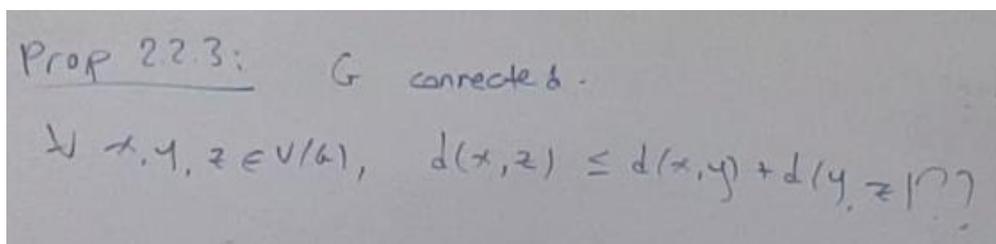


(Going back to finish writing the proof) So this means that $P_{[u,v]}$...thus $P_{[u,v]}$ is a uv -geodesic.



This idea you can use at any point, any sub-path of a geodesic is a geodesic. Any part of a shortest path would also be a shortest path from this vertex to this vertex. Ok? Any questions?

We move to proposition 2.2.3. let G be a connected graph. We have x, y, z in G . We have the distance between x and z is less than or equal to the distance between x and y and the distance from y to z .



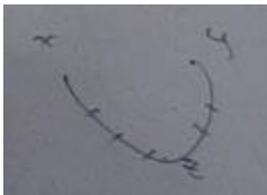
What does this state? Actually this is the triangular inequality. And this actually will prove that the distance d , it is a distance in the topological sense, which means that ... this is the third condition. Now, the first two are very obvious. $d(x, y) = d(y, x)$, it is obvious because a path from x to y is also a path that joins y to x . Ok? And $d(x, y) = 0$ is definitely equivalent to $x = y$. The only thing that we need to prove is this and then the distance will be a distance in the topological sense. Ok? So this makes G a metric space.

So, now for all x, y, z vertices, we need to prove that the distance, the distance which is the length of a shortest path. So the length of a shortest xz -path is less than or equal to the length of a shortest xy -path plus the length of a ...

Ok? Proof. I will start by saying: let P be an xy -geodesic. First of all, let x, y, z belong to $V(G)$. So let me take three arbitrary vertices. Ok? If I say belong to $V(G)$ or belong to G , it would be the same so, three arbitrary vertices in the graph, and let P be an xy -geodesic. Ok? I will take a geodesic. Can I say this? Maybe I won't have an xy -geodesic.

165- Student: The graph is connected.

166- LQ: The graph is connected, so definitely we have xy -paths and so I will choose a shortest, ok? So, let P be an xy -geodesic. You have x, y and z (drawing on the board), we have three vertices, I will take a shortest path from x to y , and then you can tell me we want to take a shortest path from y to z . Right? But before I get to this point, first of all a very simple idea is that the shortest path, a shortest path from x to y , it might pass by z .



Probably not. Right?

So I will take two cases. Case 1: if z belongs to P , in this case you don't need to take a yz -geodesic why?

167- Student: Because it is the same...

168- LQ: Because the $P_{[x,z]}$, sorry the $P_{[z,y]}$ will be a zy -geodesic according to the previous proposition. Right? So that is why I will take this case before. And the second case if z doesn't belong to P , then I will consider another zy -geodesic. Ok?

So, if z belongs to P , then of course, it could happen right? I took P to be the shortest path from x to y , that shorter path from x to y could pass by point z , then $P_{[xz]}$ is an xz -geodesic, and $P_{[z,y]}$ zy -geodesic according to proposition 2.2.2. ok? So because P , all of it, is a geodesic. That is why I chose it from the beginning not to be any path, to be a geodesic. So, let us see, does the inequality hold?

169- Student: $d(x, y)$ is equal to...

170- LQ: Sorry? The length of $P_{[x,z]}$ it is the distance between x and z actually. The length of $P_{[x,z]}$, it will stand for distance between x and z ...

171- Student: Shorter than xy ...

172- LQ: Of course it is shorter than the length of P all of it, because it is a part of it. And the length of P stands for what?

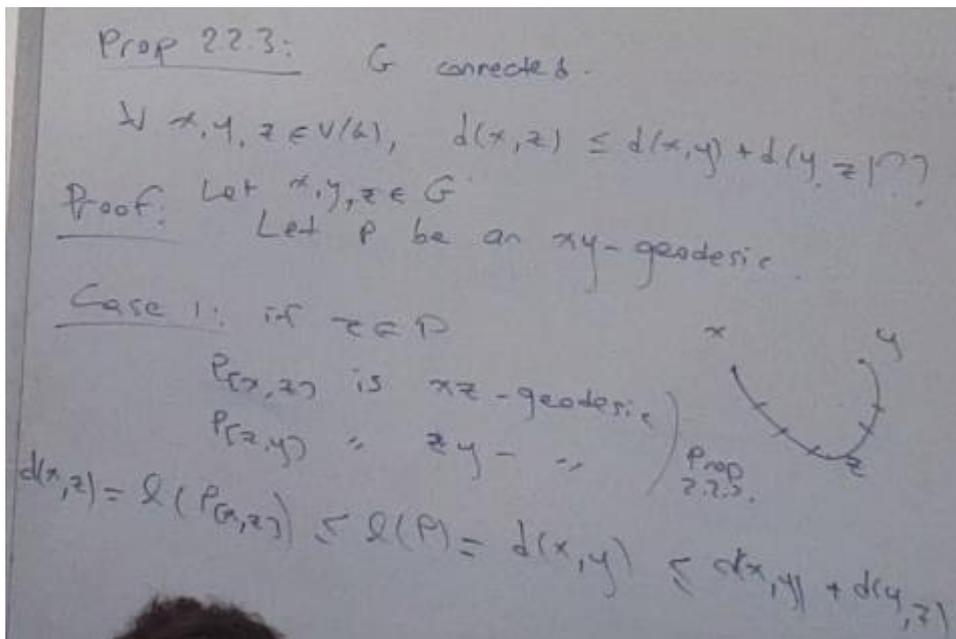
173- Student: $P_{[x,y]}$?

174- LQ: $P_{[x,y]}$ or P , it is the same, I called the whole path P . There is no need to say $P_{[x,y]}$ if x and y are the ends. Usually I take $P_{[u,v]}$ where u and v are points on the path, would mean a part of P , but if it is all of P ... Ok (going back to writing the proof) it is less than the length of P and the length of P stands for what?

(Students giving indistinct answers)

175- LQ: No, the length of P stands for the distance between x and y .

So, I didn't do anything, this one (referring to the length of $P_{[x,z]}$) is less than this one (referring to the length of P) definitely. And this one (referring to the length of $P_{[x,z]}$) is the distance from x to z because it is an xz -geodesic, and this one (referring to the length of P) is the distance between x and y because P is an xy -geodesic. So of course, this (referring to the length of $P_{[x,z]}$) is less than this (referring to the length of P), it is definite. And this one (referring to $d(x,y)$) is less than $d(x,y)$ plus $d(y,z)$. So we get the inequality. This is the trivial case, ok?



176- Student (Steve): But it is still (indistinct) the inequality $d(x,y)$ is...

177- LQ: I know, I know, but you fix the three vertices and you need to prove that the distance between let's say any, between two of them, is less than or equal to...

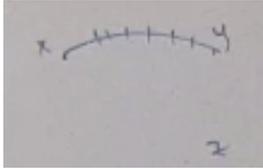
178- Student: The sum of the others.

179- LQ: The others, ok? So I have to fix which ones... I mean you have to fix if you want $d(x,z)$ to be less than the others, or $d(x,y)$ to be less than the others, so you have to fix it.

Now this is the case 1. The case 2 ... case 2 is what?

180- Student: When z does not belong to...

181- LQ: So what will the shape look like? x, y, z (plotting x, y , and z on the board), so $d(x, z)$ less than or equal to ... No Steve, of course it will work however you take it, but the idea is that you have to fix the shape you need to reach to ... so x, y and z , I am in the case that z doesn't belong to P , so the xy -geodesic will look like this (referring to the drawing below), it doesn't pass through z .



So now what?

182- Student: Since it is connected, we take another path from x to y passing through z .

183- LQ: No, maybe we don't have any path passing through z .

184- Students: We take another path Q .

185- LQ: Yes, where is Q .

186- Students: Passing through z .

187- LQ: Who told you there is a path passing through z ? I am not stating anything, I am just saying that, who told you that there is a path from x to y passing through z ? I don't know.

188- Student: But here isn't the proposition true directly?

189- LQ: How is it true directly? You need to prove that the distance between x and z is less than or equal to the distance between x and y plus the distance between y and z .

190- Student: $d(x, y)$ means...

191- LQ: The minimum between x and y .

192- Student: ok

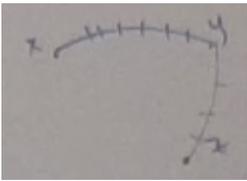
193- Student: Are there 2 cases here?

194- LQ: You told me a while ago, we started it, we said that I will take an xy -path, and I will have to take a zy -path actually, right? Geodesics not paths. True or not? But actually in this case (referring to the first case) it was useless to take a zy -geodesic because this is a zy -geodesic if z belongs to P . Now in this case (referring to the second case), z is not on P . So I will consider another path Q , a zy -path

195- Student: Geodesic.

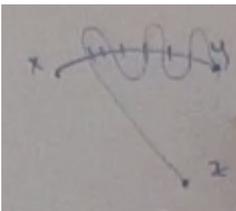
196- LQ: Geodesic. I can take the path, but the geodesic is better for me because it is a shortest, you can take a shortest path between any two vertices if you are sure that there exists a path. So here we are sure that there exists a path because the graph is connected,

so I will take a shortest yz -path. Ok? So, if z doesn't belong to P , I will consider another path Q . Let Q to be a zy -geodesic. So this is a geodesic from z to y . How is its shape? Like this? (Referring to the drawing below)

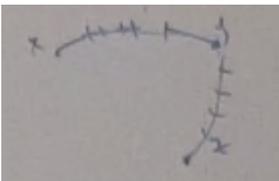


197- Student: Maybe it can pass through x .

198- LQ: Yes very good. Maybe it can pass through x ...I don't know, but the idea is...ok, so probably it will look like this (erasing and drawing a new path Q).



(Erasing again and drawing something like the previous drawing) The simple case, if it was like this, would my problem be solved?



What do you need to prove?

199- Student: The distance between x and z

200- LQ: The distance between x and z , yes, ...

201- Student: Which is $d(x, y)$ plus...

202- LQ: What is $d(x, y)$? So now here you have $d(x, z)$ which is the shortest xz -path, its length is at most $d(x, y)$ plus $d(y, z)$. It could be less, or not? It could be less, of course. So, if it was that shape (referring to the figure above), then I can find what? An xz -path, can you find an xz -path?

203- Student: Yes, from x to y ,

204- LQ: P and Q , if it does in this very simple case, $P \cup Q$, and P is an xz -path, who told you that it is a geodesic? This part is geodesic (referring to the path from x to y on the drawing), this part is geodesic (referring to the path from y to z on the drawing), but if you add two geodesics, no one said that you will get a geodesic. Ok? What you get is an xz -path. Ok? What's its length?

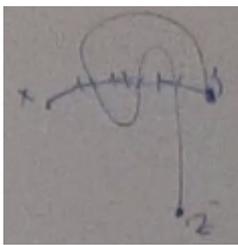
205- Student: Length of $P_{[x,y]}$ plus...

206- LQ: Length of $P_{[x,y]}$ plus... so this means that you have found a path whose length is, an xz -path whose length is $d(x, y) + d(y, z)$. Does this prove our theorem?

207- Students: Yes. Because $d(x, z)$ is less...

208- LQ: $d(x, z)$ is less, very good. Then you have found a path from x to z of length $d(x, y) + d(y, z)$. However, a shortest xz -path could be of that length or could be less. So $d(x, z)$ would be less than or equal. Ok? Very good. So this is in case the path was in that shape (referring to the drawing above). You see how it is not obvious. How would you tell me that this is between x and z , it is the shortest. Why? Directly it is obvious? We need to prove it, we need to prove the length.

However, if you take the path to be of that shape (referring to the drawing below), it could be making intersections, right? Then if you take $P \cup Q$, would that be an xz -path?



$P \cup Q$ it would not be an xz -path, $P \cup Q$ will not be a path anymore because...

209- Student: Intersection.

210- LQ: Ok, however...

211- Students: Proposition 2.2.2

212- LQ: Yes.

213- Student: We take α ...

214- LQ: Before you use proposition 2.2.2, you need to tell me who are the sets A and B , and what is the path that joins a vertex in A to a vertex in B , and then you give the result. Ok?

I will keep it for you for next time. Think about it, what are A and B and what is the path? Ok? Is this clear?

7.4- Transcription de la deuxième séance observée

La deuxième séance est une séance divisée entre cours et TDs. Elle porte sur les parties « chemins » et « cycles » du cours, ainsi que certains exercices du TD2. Selon les contenus que nous avons récupérés, dans cette séance, LQ a expliqué la proposition 20 (proposition 2.2.3 dans la version anglaise) et la proposition 21 (proposition 2.2.4 dans la version anglaise) et leurs preuves, ainsi que les définitions 10 et 11 (définitions 2.3.1 et remarque 2.3.1 dans la version anglaise), l'exemple 22 (exemple 2.3.1 dans la version anglaise) et la proposition 23 (proposition 2.3.1 dans la version anglaise) avec sa preuve. Elle a commencé le TD, les exercices 1 (1°, 2°, 3°, 4°), 3, 5 et 9 (dans la version anglaise, exercices 1 (1°, 2°, 3°, 4°), 2, 4, 8)

- 1- **LQ:** Proposition 2.2.3, we have started this, and we said that we have G is a connected graph, then x, y, z belong to G such that the distance between x and z is less than or equal to the distance between x and y plus the distance between y and z .

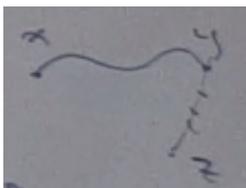
Ok, so, we have considered three arbitrary vertices x, y and z . And we have taken P to be an xy -geodesic, right? And we have taken the first case, if it happens that z belongs to the geodesic P , right? And we have worked that... we have proved that, we have proved the inequality in the case where z belongs to the path P .

Now the second case is, if z doesn't belong to P , so we have three vertices x, y and z , and we have the xy -geodesic from x to y that doesn't pass by z . I asked you to complete from here. Have you tried? No? Has anyone tried to finish it? No one at all? No one? Why?

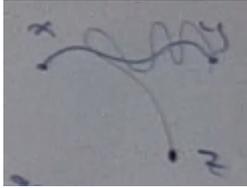
- 2- **Students:** We didn't have time, we were studying for our exams.
- 3- **LQ:** Ok, if z doesn't belong to P , then I will consider a yz -geodesic Q . I don't know if I have written that already. Ok, let Q be a yz -geodesic. What do we need to prove actually? That the distance between y and z , this means that the length of an xz -geodesic, the length of an xz -geodesic, is at most the length of an xy -geodesic plus the length of a yz -geodesic. At most, ok? So, who can tell me? Q is an xy -geodesic. We said last time, how would be the shape of z ? The shape of Q ? How would that shape be?

(Students giving indistinct answers)

- 4- **LQ:** Like this, necessarily (drawing on the board).



Of course it is not necessarily like this, this is a particular case. It could be... it is as if I said nothing last time! (drawing on the board again) so of course it might do plenty of intersections, and then to come to y .



Ok? So, can you find an xz -path.

5- **Student:** Yes.

6- **LQ:** Yes? Which one?

7- **Students:** There are a lot...

8- **LQ:** A lot?

9- **Student (Steve):** Proposition 2.2.2 states... we need to take α ...

10- **LQ:** The first intersection... ok, so we say that the first ... ok, there are two ways actually. Steve is saying that the first intersection between P and Q , let me call this α let's say, the first point of intersection, if you take it then what?

11- **Student (Steve):** It becomes an xz -geodesic, $x\alpha z$

12- **LQ:** Focus, give me the names of the paths.

13- **Student (Steve):** $P_{[x,\alpha]}$

14- **LQ:** $P_{[x,\alpha]}$ union...

15- **Student (Steve):** and $P_{[\alpha,z]}$.

16- **LQ:** $Q_{[\alpha,z]}$

17- **Student (Steve):** Ah $Q_{[\alpha,z]}$ yes.

18- **LQ:** $P_{[x,\alpha]}$ union $Q_{[\alpha,z]}$, will be what?

19- **Students:** An xz -path.

20- **LQ:** An xz -path, I don't know if it is the shortest xz -path. So, this will be an xz -path and its length will be how much?

21- **Student:** It is the length of $P_{[x,\alpha]}$.

22- **LQ:** Of $P_{[x,\alpha]}$, plus the length of this (pointing to $Q_{[\alpha,z]}$), it is definitely less than or equal to the length of P plus the length of Q , and ok, which will be less than the desired sum, ok? So this means that, I am going to write this. Ok?

Let α belong to $P \cap Q$, how to say that, let α be the first point of intersection between P and Q , so how to... let α belong to $P \cap Q$ such that the length of $Q_{[z,\alpha]}$ is minimum. Will that mean the first point of intersection, the way you meant it?

23- Students: Yes.

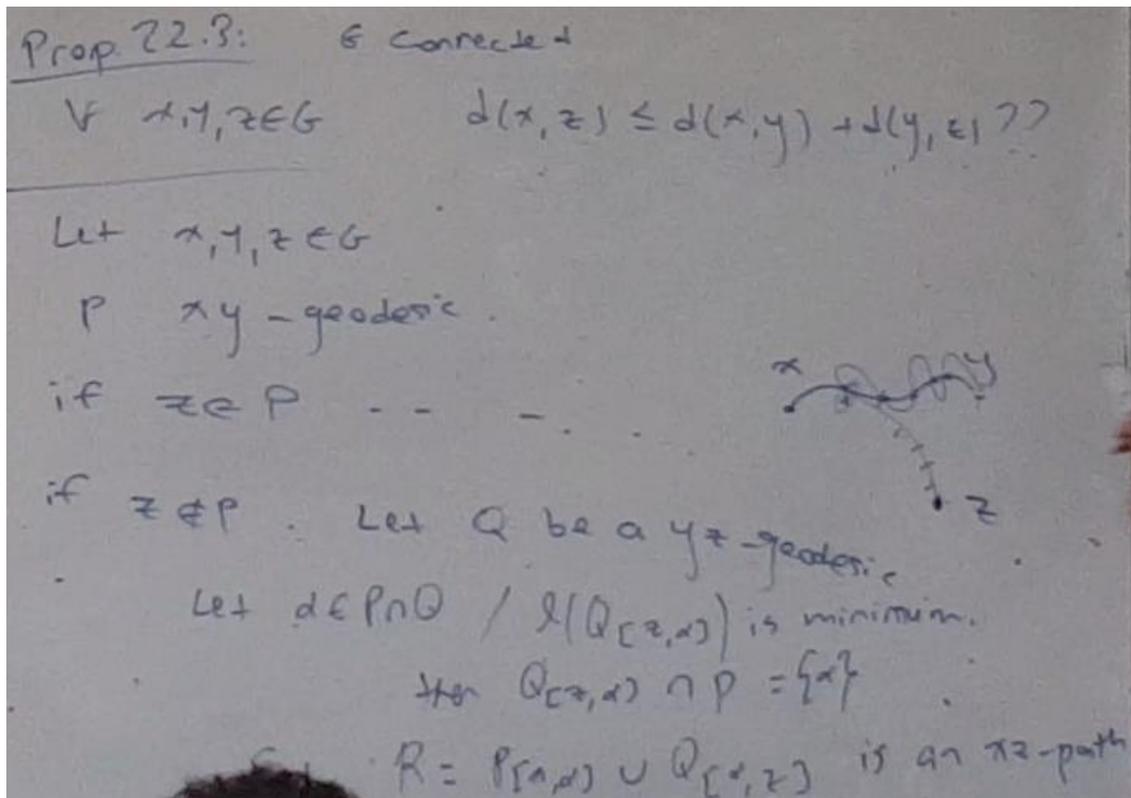
24- LQ: Yes? So I am saying that I want the point of intersection such that, because you have this point of intersection, this point of intersection, there are plenty of points of intersection (pointing at all the points of intersection in the drawing), but such that the length of Q from z to α is minimum. Ok? So definitely, this $Q_{[\alpha,z]}$ (pointing at it in the drawing), it doesn't intersect P except at... (Waiting for students, who do not answer, so then going back to write on the board) then $Q_{[z,\alpha]} \cap P$ is?

25- Student: α .

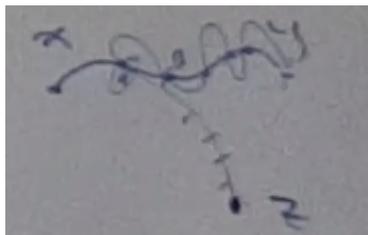
26- LQ: Is only α . By the choice of α , you have chosen α in the intersection, such that it is a minimum length from z . I have also this point of intersection (pointing to another point of intersection on the drawing on the board), is it of... what is the length from here to here? From here to z ? (Pointing at another of intersection on the drawing on the board). Ok, so this is the smallest length from some point in the intersection to z on Q . Ok? So, the fact that $Q_{[z,\alpha]} \cap P$, so that if you set let's say the path R to be $P_{[x,\alpha]} \cup Q_{[\alpha,z]}$, ok? Will that be a path? Why is it a path?

27- Students: According to the proposition.

28- LQ: We haven't used the proposition... by the choice of α , because the intersection of $Q_{[\alpha,z]}$ and P is only α . And this is a part of P (pointing at $P_{[x,\alpha]}$), this is a sub-path of P , so you are taking a sub-path of P union this sub-path (pointing at $Q_{[\alpha,z]}$ in the drawing) which I know that it intersects P only at α . So there will not be repeated vertices, is it true? Because this part (pointing at $Q_{[\alpha,z]}$ in the drawing), it intersects P only at α , and union $P_{[x,\alpha]}$. So there will only be α in the intersection. Do we understand? Ok, by the choice of α . This is (pointing at $P_{[x,\alpha]} \cup Q_{[\alpha,z]}$) an xz -path. Ok? I have chosen α so that I guarantee that I get an xz -path.

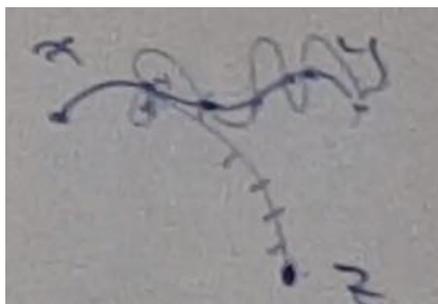


If you choose α to be any point of intersection, I mean if I take $P_{[x, \beta]}$ if this was let's say β (plotting a point β on the figure as shown below) $P_{[x, \beta]} \cup Q_{[\beta, z]}$ this is not a path, do we understand? Do we agree?



If I choose a different point, then this (pointing at a different point of intersection other than α and β in the drawing above) union this is not a path, there will be repeated vertices. Fine.

So this is an xz -path, and the length of R is how much? (writing on the board with reference to the drawing below). It is the length of $P_{[x, \alpha]}$ plus the length of $Q_{[\alpha, z]}$ ok?



And definitely, the length of $P_{[x,\alpha]}$ is less than or equal to the length of P , it could be equal if α was y , plus the length of Q . Ok, now let us write these in terms of the distance. The length of P is?

29- Student: It is an xy -geodesic, so $d(x, y)$

30- LQ: $d(x, y)$. The length of Q ?

31- Student: It is a yz -geodesic.

32- LQ: Q is a yz -geodesic, so the length of Q is the distance between y and z . And the length of R ?

33- Student: It is not...

34- LQ: R is an xz -path.

35- Student: Yes, it is not a geodesic.

36- Student: It is greater than $d(x, z)$.

37- LQ: It is greater than or equal to $d(x, z)$, very good because $d(x, z)$ is the length of the smallest xz -path and R is an xz -path. So what do you get? You get that $d(x, z)$ is less than or equal to this sum as required.

Handwritten mathematical derivation showing the inequality for the length of path R :

$$d(x, z) \leq \overset{\leq}{L(R)} = L(P_{[x,\alpha]}) + L(Q_{[\alpha,z]}) \leq L(P) + L(Q) = d(x, y) + d(y, z)$$

If we hadn't used proposition 2.2.1, to find point α , you could have done another way, ok? I mean instead of saying let α be the first point of intersection or α is $P \cap Q$ such that the length of $Q_{[\alpha,z]}$ is minimum, ok? We could have used also proposition 2.2.1, how? Which states that, ok, we have this path from x to y (drawing on the board), and we have the path Q from z to y , ok? How will we find? Actually I want to find some path that is of that shape (drawing it on the board as shown below).



What will be...? To apply proposition 2.2.1, what do we need?

38- Students: A and B .

39- LQ: We need two disjoint sets and we need a path from one vertex of the first set to one vertex of the other set, right? So, we have to choose the two disjoint sets and the path that you want to take. Ok? What will be these two disjoint sets if you want? You can take P

and z alone. So we can let A to be all the vertices of path P and B to be singleton z . Ok? And what is the path that you want to take?

40- Student: xz .

41- LQ: What is the path from here (pointing at A) to here (pointing at B). Shouldn't I have a path from a vertex in A to a vertex in B ?

42- Student: Ah so we need $z\alpha$ such that the intersection of the path with P is α .

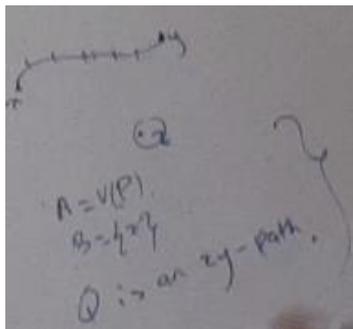
43- LQ: Correct. To apply the proposition, you should have as a given a certain set of two disjoint sets of vertices and I should have a path from a vertex here to a vertex here to be able to deduce that there is a sub-path of this path, a part of this path, that intersects the first set only at one vertex and the second set only at one vertex.

44- Student: We have a point α on xy let's say.

45- LQ: One second, these two sets are disjoint (referring to A and B), right? Because z is not on the path. So they are disjoint. Then what is the path that passes from A to B ?

46- Student: xz

47- LQ: Q . Q is a zy -path. It is a path from z to y , it is a path from here to a vertex here. Isn't your problem that Q is making plenty of intersections? So you would want a part of Q that would make only one intersection. So the whole path that you will be considering is Q . Right? So Q is a zy -path, it is a path from a vertex in P to a vertex in A . All of these are facts that I have (Referring to what she wrote on the board, which is shown below).



I can deduce that there exists α on P , and there exists β in singleton z , so β should be z , such that $Q_{[\alpha,z]} \cap P$ is only α and $Q_{[\alpha,z]} \cap \{z\}$ will definitely be z . Ok, it is useless here, but this part, $Q_{[\alpha,z]} \cap P = \{\alpha\}$, this is what we need. I need a part of Q that intersects P only at one vertex, so in this case, if I go from z to α , and I go from all P to anywhere, I will not have any repeated vertices, so it will be a path. Is this clear?

So this is why, using the second method if you want, a second method to find the vertex α , that guarantees that if you take this part of Q , this sub-path of Q union the other sub-path of P , it will be an xz -path. Ok? So this is a second method using proposition 2.2.1. Is this clear? So you have to choose what's A and what's B , what are the two sets of disjoint vertices, and which is the path Q coming from A to B . Ok? What is the path coming from a vertex in B to a vertex in A ? And then you deduce that there is a part of path Q which should be $Q_{[z, something]}$ of course, because it intersects A at one vertex, B

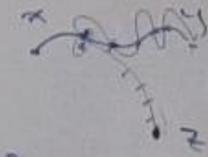
at one vertex, it can only be z . Is this clear? Ok, so this is another way to find the point α .

Prop 2.2.3: G connected

$\forall x, y, z \in G \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) ??$

Let $x, y, z \in G$

P xy -geodesic

if $z \in P$ 

if $z \notin P$. Let Q be a yz -geodesic

Let $d \in P \cap Q$ / $l(Q_{[z, d]})$ is minimum.

Then $Q_{[z, d]} \cap P = \{d\}$

$R = P_{[x, d]} \cup Q_{[d, z]}$ is an xz -path

$d(x, z)$

$\leq l(R) = l(P_{[x, d]}) + l(Q_{[d, z]})$

$\leq l(P) + l(Q) = d(x, y) + d(y, z)$

2nd method: using prop 2.2.1

$A = V(P)$

$B = \{z\}$

Q is an zy -path.

$\Rightarrow \exists d \in P$

$B \in \{z\} \Rightarrow B = z$

$Q_{[z, d]} \cap P = \{d\}$

$Q_{[z, d]} \cap P = \{z\}$

Any questions? Ok, no questions. Finally, we go to the last proposition, proposition 2.2.4

Let P and Q be two paths of a connected graph G of maximum length, so, this means that P and Q , they are both what? Both are longest paths in G . And we have that G is connected.

Go ahead guys, finish writing.

Ok, let P and Q be two paths of a connected graph of maximum length, it means both are longest paths.

48- Student: So both are of the same length?

49- LQ: Same length, definitely, so they are both longest paths in the graph, so of course, they are both of the same length. So the length P is equal to the length of Q . This is clear. That $P \cap Q$ is not empty, which means that $V(P) \cap V(Q)$ is not. Then $P \cap Q$ is not empty which means what? What do we need to prove?

50- Student: They do not get the same vertices.

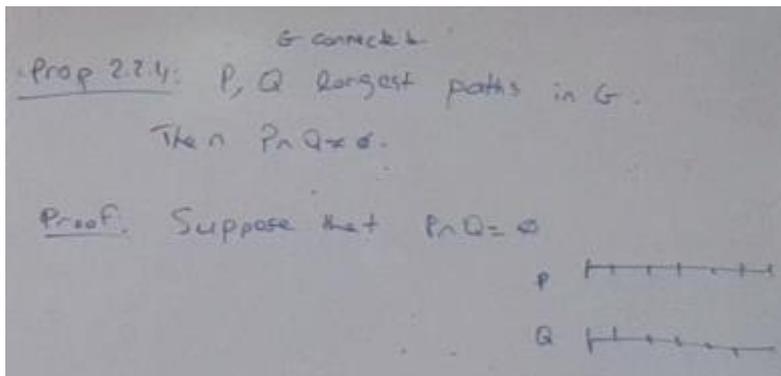
51- LQ: Of course they are not the same, is this what you need to prove?

52- Student: No we need to prove that there is one common vertex, in P and Q .

53- LQ: Yes, so P and Q intersect at some vertices, at least at one vertex, ok? So there should be an intersection between any two longest paths in the graph if the graph is connected. Ok? So, the proof of this, the proof will be done by contradiction, ok? Usually, to prove that two sets are empty or not empty, so maybe so, suppose that $P \cap Q$ is empty. So just to have an illustration, can you illustrate the paths P and Q ? So, if the intersection is empty, can you plot the paths P and Q , how their shapes should be?

54- Students: They don't touch each other.

55- LQ: So I am in the case where P and Q are disjoint paths (illustrating the paths on the board). Ok? But the graph is connected. They are both disjoint paths. So I am now in the case that P and Q , they are both disjoint paths. Ok?

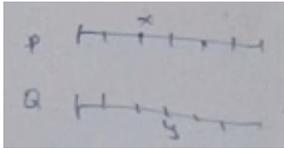


56- Student: The graph is connected.

57- LQ: Connected, but the graph is connected. This means what? That there is a path between any two vertices.

58- Students: We take vertices from here and from there.

59- LQ: Ok, very good. I will take an arbitrary vertex x on P and an arbitrary vertex y on Q , and since the graph is connected, then definitely G contains an xy -path. Ok? So, let x belong to P , y belongs to Q . Since G is connected, then G contains an xy -path, I will call it R .



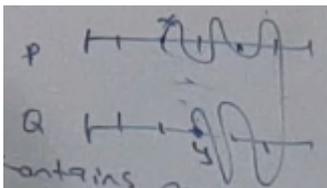
Ok, what is the shape of this path R ?

60- Student: Euler set.

61- LQ: (While sketching on the board) you mean like this?

62- Student: It could be like this.

63- LQ: I could have plenty of intersections of course before I reaches y . Ok. Fine.



(Students saying indistinct comments)

64- LQ: Ok, we will have to reach to a contradiction. In your opinion, how will you reach to that contradiction?

65- Student: That P is not the longest path anymore?

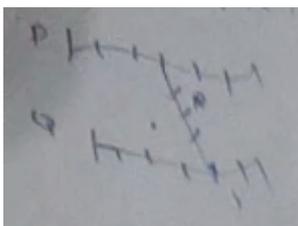
66- LQ: So I will be able to find a path longer than P and Q , which will give the contradiction, yes. I will be able to find a path longer than P and Q .

67- Student: But now, isn't the intersection between P and Q not empty?

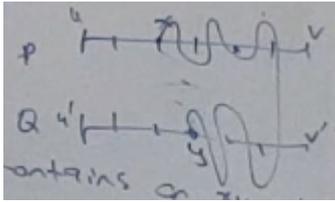
68- LQ: How, I don't get it. No, between P and Q , no, (Pointing to the drawing), this is P , and this is Q , there is an intersection between R and P . This is a different path.

69- Student: I could have taken...

70- LQ: So, now, ok, listen, let's start with the simple case. If the path was like this, not making any intersections (sketching another drawing), if you take the simple case, if it was like this (referring to the drawing below). This is P , this is Q and this is R .



Ok, let me call the ends, let u and v be the ends of P . u' and v' be the ends of Q . u, v, u' and v' (adding them to the first drawing as shown below).



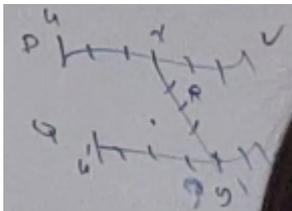
If you take the simple case, the simple case will make it, maybe it will make closer to your understanding (going back to refer to the simple case drawing). If path R was like this, what will be the contradiction? The contradiction as we agreed that we will be able to find a path which is longer than both P and Q . Will you find it in this case?

71- Student: Yes.

72- LQ: What?

73- Student: Because G is connected, then y and v ...

74- LQ: (Annotating the simple case graph), so this is u, v, u', v', x and y . Yes.



75- Student: Because G is connected, then y and v , there is a path between them.

76- LQ: We already drew the path. It is there.

77- Student: y not x .

78- Student: We talk about distance, because it is connected, xy is equal to xu' plus $u'y$ for example.

79- LQ: One second, x ... the distance?

80- Student: xv

81- LQ: Yes.

82- Student: Will be smaller than xy plus yv , the distance.

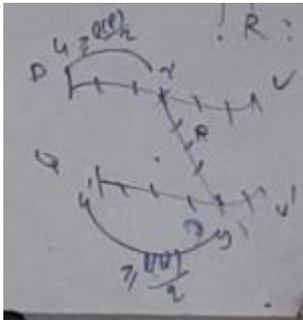
83- LQ: Why? We have no information. Ok, here (pointing to the same figure), x is on the path P , ok, one of these, $P_{[x,u]}$ or $P_{[x,v]}$, one of them, its length will be ... how much?

84- Student: Smaller than the second one.

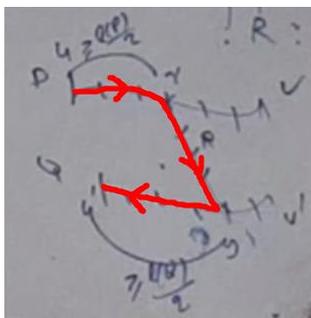
85- LQ: Yes, so definitely how much would it be? At least half of the length of P . One of them will be longer than the other one. The longer will have a length that is equal to what? To the length of P over 2, at least.

86- Students: Yes.

87- LQ: Ok, here also (pointing at path Q), it will be either $Q_{[u',y]}$ or $Q_{[y,v']}$, one of them will have the length that is at least the length of Q over 2. Let's say this one (referring to $P_{[x,u]}$) is the longer one, and this one (referring to $Q_{[y,u']}$) is longer down, so let's say that this one (referring to $P_{[x,u]}$) has a length that is greater than or equal to the length of P over 2, and this one (referring to $Q_{[y,u']}$) has a length that is greater than or equal to the length of Q over 2.



Ok, so if I go this way (she points as shown below in red), what do we get?



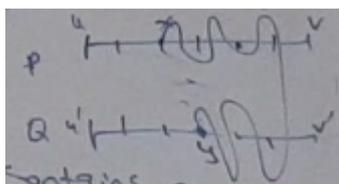
A path, what is the length of this path?

88- Student: Greater than or equal to $\frac{l(p)}{2}$ plus R plus $\frac{l(Q)}{2}$

89- LQ: So eventually, how much? Greater than $\frac{l(p)}{2} + \frac{l(Q)}{2} + l(R)$ which is at least 1. So it will be strictly greater than the length of P . Or not? Wouldn't you have found a path longer than P ?

90- Students: Yes.

91- LQ: Because this is (referring to $P_{[x,u]}$) longer than half of P , and this is (referring to $Q_{[y,u']}$) longer than half of Q , and added to R , so this will be a path longer, true or not? Ok, so this is the case where the path is very simple. What if it is making plenty of intersections? (Referring to the drawing shown below) what happens then?



92- Student: We take the first intersection?

93- LQ: The same, the same, I mean, actually, you can use proposition 2.2.1, ok? Always, whenever you want a path that intersects only at one vertex here, only at one vertex here, can you find it?

94- Students: Yes.

95- LQ: Yes, how? To apply the proposition, what do we need guys? We need two sets of disjoint... what are you going to take as these disjoint sets?

96- Students: P and Q .

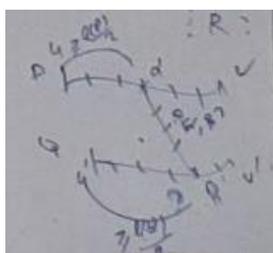
97- LQ: P and Q , very good. Because you are assuming that there is no intersection. And what is the path between here and here? (Referring to P and Q) R . Path R . Then we can deduce that there exists α on P and β on Q such that ...

98- Student: $R_{[\alpha, \beta]}$

99- LQ: $R_{[\alpha, \beta]}$

100- Student: Intersection P

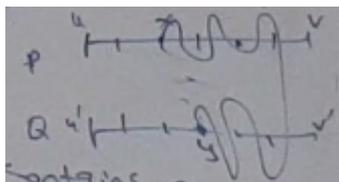
101- LQ: Intersection P is only α and $R_{[\alpha, \beta]} \cap Q$ is only β . If this is the case, then this $R_{[\alpha, \beta]}$ looks like this (referring to what used to be R in the drawing below), here is α and here is β . It intersects P only at α and intersects Q only at β . Now x and y don't have to be exactly α and β themselves, the path could have done many intersections, but $R_{[\alpha, \beta]}$ looks like this (referring to $R_{[\alpha, \beta]}$ in the drawing below). So we have reached to this shape, and then we use the fact that... the longer path we can find. Ok? Very good.



Help me out please (writing the ideas on the board), what do we say now?

102- Students: That R ... (indistinct answers)

103- LQ: Ok, that G contains an xy -path R . Ok? So we have already the path R , and we have, ok these are the ends (referring to the drawing below), now what do we have to state?



104- Students: Two sets... (all talking together)

105- LQ: According to proposition 2.2.1

106- Student: There exists α

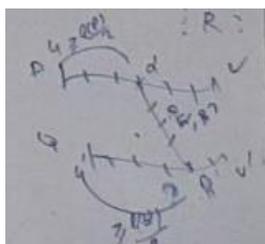
107- LQ: There exists α , if sets A and B are clear, you don't need to...

108- Student: Such that $R_{[\alpha, \dots]}$

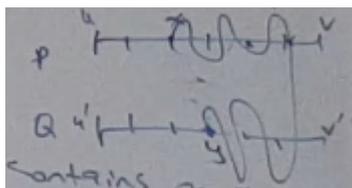
109- LQ: α in P and β in Q , so it is clear that sets A and B , you took them to be P and Q , right? Such that?

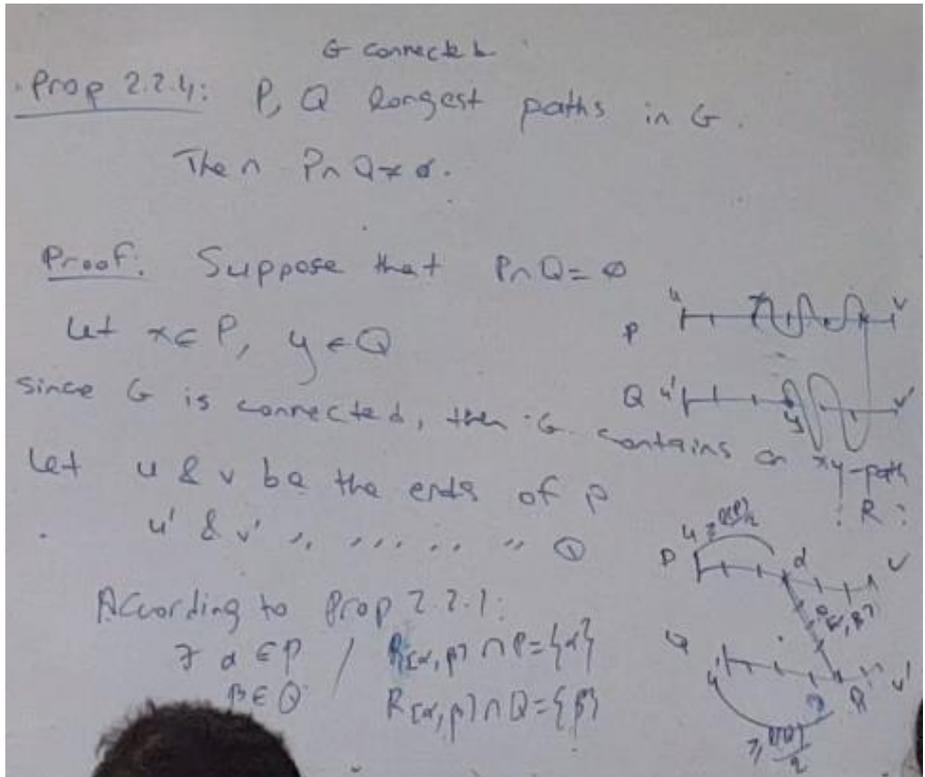
110- Students: $R_{[\alpha, \beta]}$

111- LQ: $R_{[\alpha, \beta]}$, so it is now clear that the path you were originally working with is R , R that is between x and y , where x is on P and y is on Q . So $R_{[\alpha, \beta]} \cap P$ is only α and $R_{[\alpha, \beta]} \cap Q$ is only β . So this means that I have this figure (referring to the drawing below). So $R_{[\alpha, \beta]}$ looks like this (referring to $R_{[\alpha, \beta]}$ in the drawing below).



This is R (referring to the drawing below), probably R is of that shape (referring to R in the figure below), $R_{[\alpha, \beta]}$ it should be of that shape (referring to $R_{[\alpha, \beta]}$ in the drawing above), do we agree? Because it intersects P only at α and it intersects Q only at β . Ok, so it should have that shape. So, now I don't have the problem of the intersections, I have here only one point of intersection, and here one point of intersection.





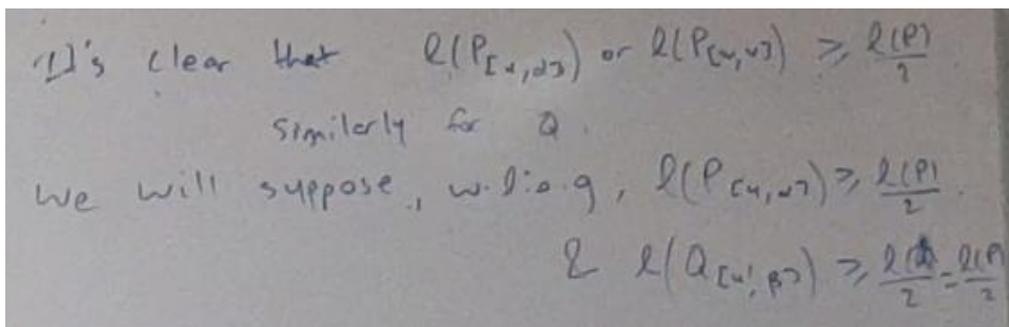
Ok, now what?

112- Student: We take the longest...

113- LQ: Yes, so (writing on the board) it is clear that the length of $P_{[u, \alpha]}$ or the length of $P_{[\alpha, v]}$ is greater than or equal to the length of P over 2, ok? Same for Q . So we'll write similarly for Q . We will suppose, without loss of generality, who can tell me?

114- Student: That there is β ...

115- LQ: Let's assume that the length of $P_{[u, \alpha]}$ is greater than or equal to the length of P over 2, and the length of $Q_{[u', \beta]}$ is greater than or equal to the length of Q over 2, which is the same as the length of P over 2. It doesn't matter if you take this sub-path over here (she points to the other sub-path of each path), so it will be $P_{[u, \alpha]}$ then on $R, \alpha\beta$, then on Q, β to v' , in either case, you can find the path that you desire.



Ok, and then what? So we supposed this without loss of generality

116- Student: If we add them to R ...

117- LQ: (Writing on the board) Set, for example, the path T to be $P_{[u,\alpha]} \cup R_{[\alpha,\beta]} \cup Q_{[\beta,u']}$ (students participating at the same time). This is what?

118- Student: Greater than...

119- LQ: It is a path in G definitely because of the choice of α and β . So I chose α and β ... if I had taken all R , if I take $P \cup R$ or $P_{[u,x]} \cup R \cup \dots$ maybe it will make many intersections, so it will not be a path, right?

120- Student: Who told us that P is equal to Q ?

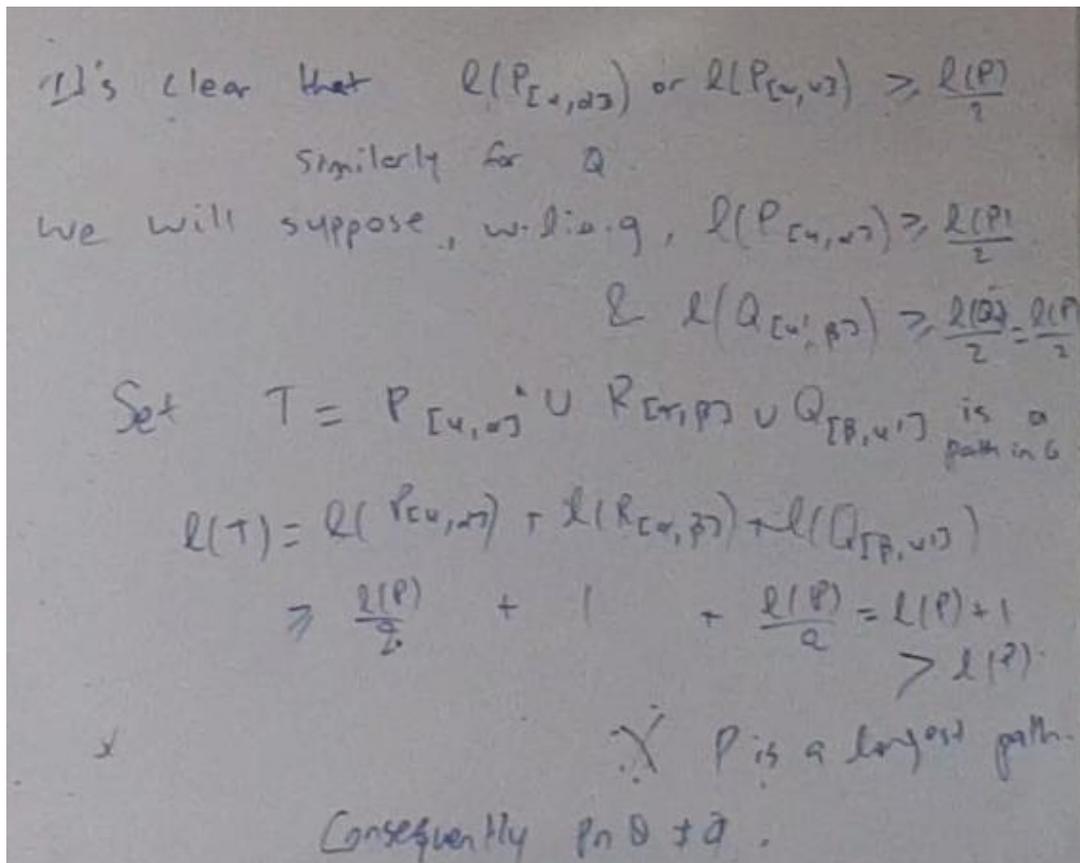
121- LQ: They are both longest paths of the graph, so they should have the same length. Ok, so the length of T is how much? The length of T is the length of $P_{[u,\alpha]}$ plus the length of $R_{[\alpha,\beta]}$ plus the length of $Q_{[\beta,u']}$.

122- Student: Smaller than ...

123- LQ: Which is smaller than the length of P ... sorry, it is greater than or equal to the length of P over 2 plus, the length of $R_{[\alpha,\beta]}$ is greater than or equal to 1, I don't know, at least one edge, plus the length of P over 2. So what do you get? The length of P plus 1, which is strictly greater than $l(P)$. So that means that the length of T is strictly greater than the length of P ...

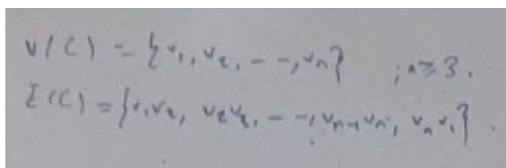
124- Students: Contradiction.

125- LQ: So you cannot find a path longer than a longest path, a contradiction, because P is a longest path. So, because P is a longest path, this gives a contradiction. Contradiction of course to the supposition that there is no intersection, consequently, $P \cap Q$ is not empty. So, any two longest paths, any two longest paths in a graph, in a connected graph, they should intersect. They cannot be disjoint. Ok? Is this clear? Any questions?



Ok, we are going to introduce cycles, and then we are going to start exercises, you all have the exercises sheet? Ok, so is this clear, did you notice how we are applying proposition 2.2.1 and how...?

126- LQ: A cycle C is a graph such that the vertices of C are v_1, v_2 till v_n ok? Where here n should be at least 3, ok? You should have at least 3 vertices to get a cycle, and the edges of C , they are v_1v_2, v_2v_3, \dots till $v_{n-1}v_n, v_nv_1$.



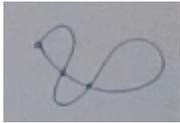
Ok, so let us see (drawing on the board), you have n vertices, v_1, v_2, \dots, v_n

127- Student: They are all connected to each other

128- LQ: No, not all of them... v_1 is connected to v_2, v_2 to v_3, v_3 to a different... v_n ...

129- Student: And v_n to v_1

130- LQ: And v_n to v_1 . So this, we call it a cycle. Ok, is this a cycle? (Referring to the drawing below)



131- Student: No because there is more than one intersection, so we have $v_2 \dots$

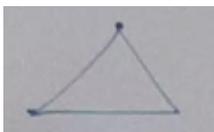
LQ: So by definition, we have that v_1 is adjacent to v_2 , v_2 to v_3 , v_3 to a fourth vertex different than all the previous, ok? So here (referring to the drawing), let's say $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots$ let's say v_{10} is the same as v_6 which is not the case according to the definition. All these vertices are disjoint, so this is what I need you to understand, this is not a cycle by definition, ok? The cycle should not have any repeated vertices except the first one. We write $C = v_1 v_2 \dots v_n$ as a notation. The length of a cycle, the length stands for what usually?

132- Students: The number of edges.

133- LQ: The number of edges, so what is the number of edges in this cycle? What is the number of edges?

134- Students: n .

135- LQ: Yes, so if you have n vertices, yes you have n edges. So in this cycle, the number of edges is equal to the number of vertices, while in the path, they are not, because you have one more edge here. Ok, so with the same number of vertices, for a path and for a cycle, you have one more edge for a cycle. So the number of edges or the length of a cycle is equal to the number of vertices which is n . Ok? So it is very simple. And of course you should have at least three vertices to get a cycle. Ok? So here you see C (referring to the drawing below), this cycle C , ok? A cycle with three vertices, it will be a triangle, this is the cycle three vertices.



This is a cycle of four vertices, it is of that shape (referring to a drawing in the handout), it is called a square.

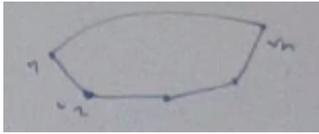
Reading from the handout, $C = v_1 v_2 \dots v_{2n}$ is an even cycle, so an even cycle is simply a cycle with how many? With what?

136- Student: $2n$ edges

137- LQ: $2n$ edges and $2n$ vertices, of course, ok? So this gives v_1 to v_{2n} , it means the vertices of this cycle v_1, v_2 till v_{2n} which gives an even cycle, so an even number of vertices.

$C = v_1 v_2 \dots v_{2n+1}$ is an odd cycle, ok? So this means the number of vertices is odd.

Remark 2.3.1, sorry, yes, a cycle of a graph G , now all of this graph is a cycle (pointing to the graph that she had drawn on the board, shown in the figure below), now if I say a cycle of a graph, who can tell me what is a cycle of a graph?



138- Student: It is a part, which is a sub-graph.

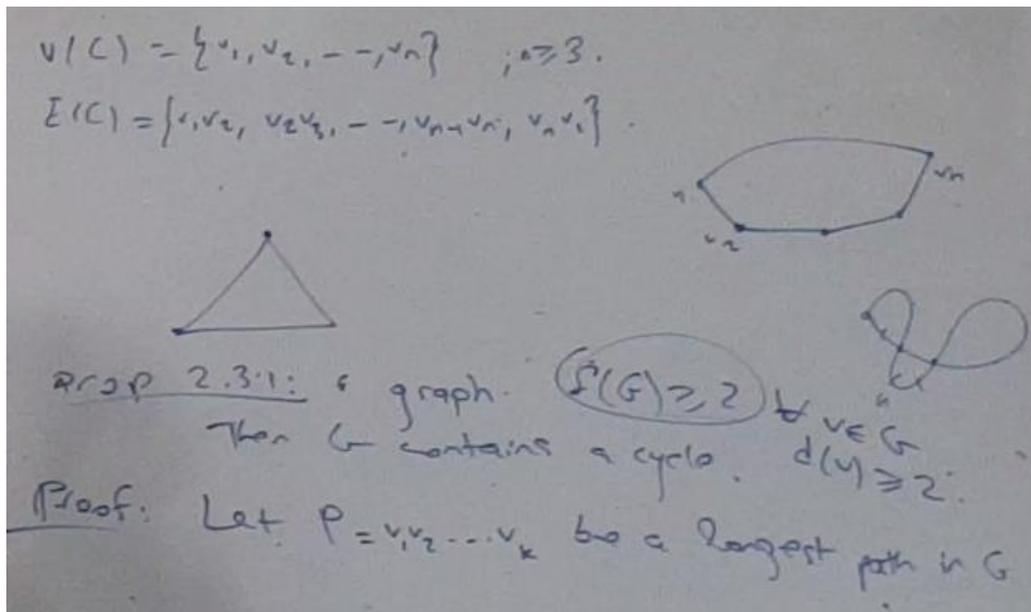
139- LQ: Sub-graph which is a cycle simply. So as if a cycle inside the graph, so this is what we call a cycle of a graph. So it is a sub-graph in G , a sub-graph of G which is a cycle, this is called a cycle of G . Simply, like the path of G . The path of G is also a sub-path of G which is a path, ok? So same idea. So here, we get information about cycles in a graph based on the elementary parameters like degrees or number of edges with respect to the number of vertices. Ok, for the degrees, you can get information, here the remark states that if you are given some information about degrees, you will be able to give information about cycles in the graph. If you look at proposition 2.3.1, it states that let G be a graph, if $\delta(G)$ is greater than or equal to 2, then G contains a cycle. So only knowing $\delta(G)$, that it is at least 2, ok? So this is proposition 2.3.1 (writing on the board) ok? G graph, and we have $\delta(G) \geq 2$, $\delta(G)$ is at least 2, then G contains a cycle. So this is an information about the degrees, right? You are given that, what are we given about the degrees?

140- Student: That each one at least makes 2...

141- LQ: Yes. So the degree of each vertex is at least 2, the minimum degree is at least 2. So this gives that any vertex is of degree at least 2. So if you have this information, that any vertex has a degree of at least 2, then the graph definitely contains a cycle, you might have graphs with no cycles at all. But if they have this case, if we have that the degree of any vertex is at least 2, then definitely, so this means that (pointing at $\delta(G) \geq 2$) for every v in G , the degree of v is greater than or equal to 2, so the minimum is greater than or equal to 2. Ok? So we have this information, and this gives a result that the graph contains a cycle. The proof of this. Ok? I will consider a longest path in the graph. Let P , I will call it $v_1 v_2 \dots v_k$ be a longest path in G . I always consider this, you know I use it a lot, in any graph, I can consider a longest path, ok? Can it be the case that you don't have a path at all in a graph? Can we be in this case, that we don't have any path?

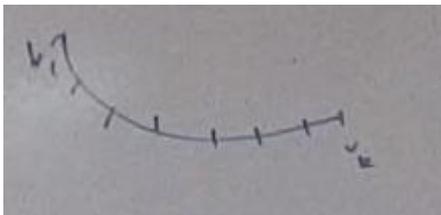
142- Student: If no vertex is ...

143- LQ: No, because the vertex itself, it forms a path of length 0, so of course, all our graphs are not empty, the set of vertices is not empty, so any vertex forms a path, so that is ... this means that any graph definitely contains paths. Ok? So a vertex alone is a path. So that is why, it is legal to say, let P be a longest path in G in any graph. You can always consider a longest path. Ok? But however, I cannot consider a longest... for example take a graph G and let C be a longest cycle. Because the graph maybe doesn't contain any cycle. Do you understand? I cannot say let..., let... C be a longest cycle if I am not sure that there is at least one cycle. If there is no cycle, how can I take the longest, ok? Good. So let P be a longest path in G . Considering longest paths gives information about the ends. Who can tell me what is this information? I mean usually we benefit from longest paths because we have information about their ends ...



144- Student: What is their degree, it can be not less or more...

145- LQ: No, here they are saying that all vertices are of degree greater than or equal to 2, so the degree of v_1 of course is greater than 2 ... I cannot control this. It is given that any vertex has a degree at least 2, including v_1 , including v_k . Ok? So?



146- Student: It passes through all vertices?

147- LQ: So v_1 , what does it have as a property that I can deduce? Think about it. The neighbors of v_1 ?

148- Student: Yes, we can draw a cycle from v_1 to...

149- LQ: The neighbors of v_1 , where should they be? Ok, can I have a neighbor w like this? (Referring to the drawing below)



150- Student: No.

151- LQ: Why?

152- Student: Because we will have a longer path.

153- LQ: Then I will have a path longer... this means what?

154- Student: That we cannot have a w like this.

155- LQ: Very good. The neighbors of v_1 , they are subsets of P . And similarly for the neighbors of v_k . This is information that any longest path has. The ends, they cannot have neighbors outside of the path because we will have a path longer... so, the neighbors of v_1 are a subset of P , because otherwise there exists w , a neighbor of v_1 such that w doesn't belong to P , then $wv_1 \cup P$ is a path longer than P . A contradiction. A contradiction to the supposition that the neighbors are not all on P . Do we agree? Is this clear? Similarly for the neighbors of v_k , so the ends they cannot have neighbors outside the path. Any neighbor outside the path will form a path longer than P . Ok, now this information that the neighbors of v_1 and v_k are on the path, with the additional hypothesis that any vertex has a degree at least 2.

156- Student: If v_1 has a neighbor on the path, it makes with it an intersection...

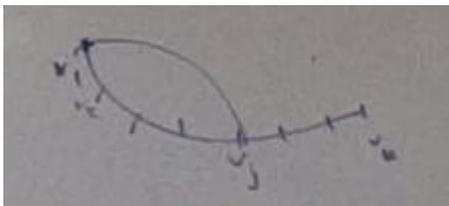
157- LQ: You mean other than v_2

158- Student: Yes, other than v_2

159- LQ: Ok, so the degree of v_1 is at least 2, because it is the same for it, yes? \

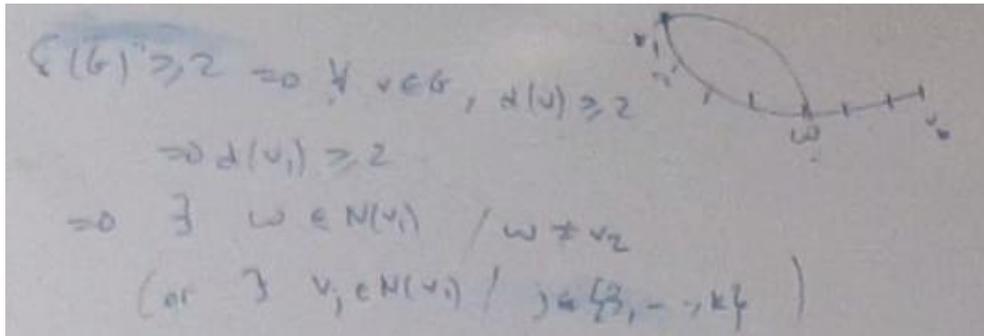
160- Student: So it will make an intersection other than v_2 with the path

161- LQ: Of course, if this is the path (pointing to the drawing below), a vertex other than v_2 , so for example with v_j where $j \neq 1$ (adding v_j to the drawing)



162- Student: So now it became a cycle.

163- LQ: Which is the cycle? The union of $P_{[v_1, v_j]}$ \cup this edge (referring to the edge from v_1 to v_j). This will be a cycle. Very good. So it contains a cycle. As simple as this. So I will write that $\delta(G) \geq 2$ implies that for every v in G , the degree of v is at least 2, implies the degree of v_1 is at least 2, this means that there exists w , a neighbor of v_1 , such that w is different from v_2 . Ok? And since w belongs to the path, w will be one of $v_3, v_4 \dots$ so I can name the vertex w or I can call it v_j , I have enumerated the vertices on the path, (she writes again) or there exists v_j , neighbor of v_1 , such that v_j is different from v_2 , or $j \neq 2$, or I can say j belongs to $\{3, 4, \dots, k\}$.



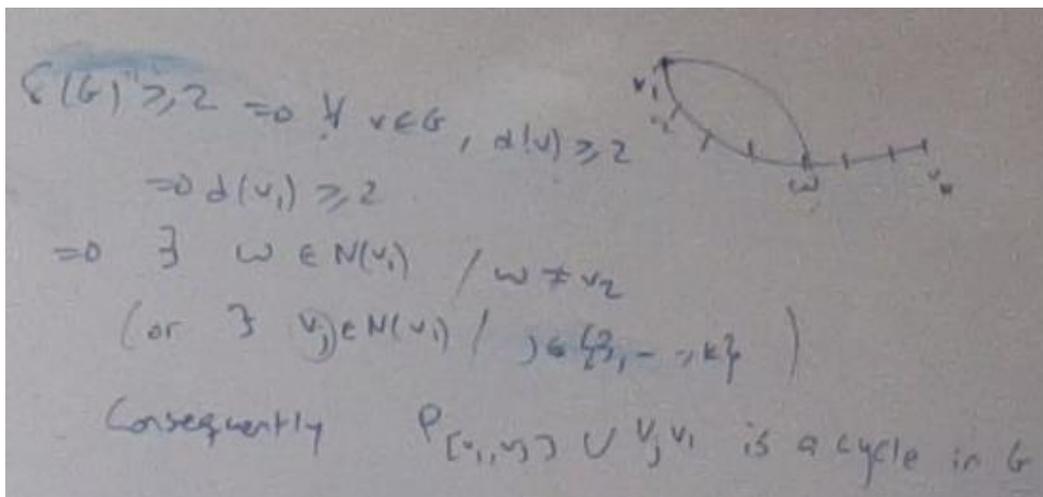
Do we agree? You can say this or this (pointing to the two different ways of stating things in the figure above), but the idea is that we should be careful that w is a neighbor of v_1 , so it is on the path. Right? So there exists w , since it is on the path, then I can call it v_j , and you can keep it w , it is no problem. Then what?

164- Student: Then we will have that $v_1v_j \dots$

165- LQ: Consequently $P \dots$ you are taking a part of P , we should call it $P_{[v_1v_j]}$ or v_1w , as you wish, union the edge v_jv_1 is ...

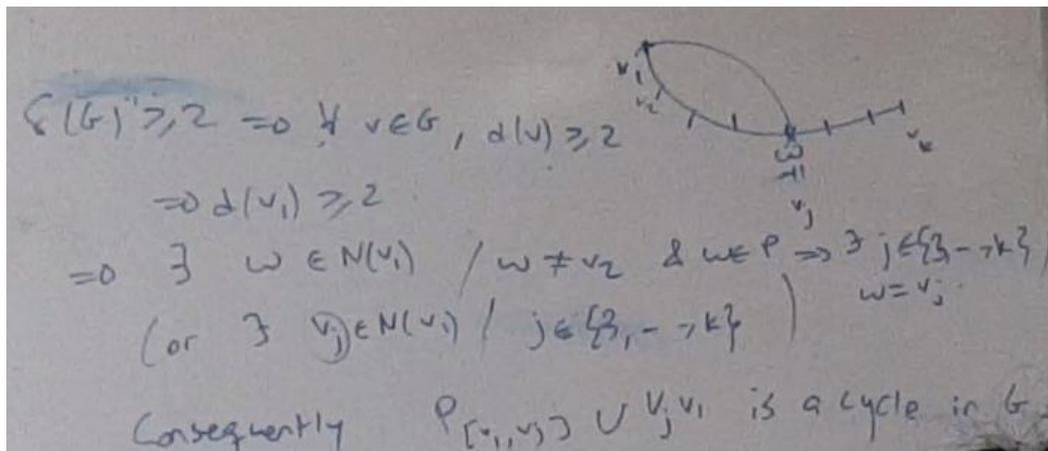
166- Student: Is a cycle.

167- LQ: Is a cycle in G .



So this w or v_j , it is all the path, definitely. So take this part (referring to the path from v_1 to w in the figure) union this edge (referring to v_jv_1) which is not on the path, of course because w is not v_2 , ok? So, any questions?

Now I could have also said, there exists w a neighbor to v_1 other than v_2 , I could have said w belongs to P , it has to, implies that there exists j belongs to $\{2, 3, \dots, k\}$ such that $w = v_j$, so it is one of the v_i of the path. Also I could have said that, ok? If I don't want to say directly v_j .



Ok, any questions? Any questions or it is clear?

168- Students: It is clear.

169- LQ: Ok, I will stop here, just an elementary idea about cycles, and we are going to start exercises, so this is the “set 2” exercise 1.

170- LQ: True or false and justify. 1- A disconnected graph contains a vertex of degree zero.

171- Students: True.

172- LQ: A disconnected graph contains a vertex of degree zero.

173- Students: Yes.

174- LQ: True?

175- Students: Yes, because it doesn't have to be connected to... (Indistinct answers)

176- LQ: So when I say this, a disconnected graph contains a vertex of degree zero, it should definitely contain a vertex of degree 0.

177- Students: No not necessarily.

178- LQ: Then ok, ...

179- Students: No not necessarily.

180- LQ: Ok, then can you give me a proof that it is false? What should we do?

181- Students: Give a counterexample.

182- LQ: Give a counterexample, ok. Can you give me a counterexample?

183- Students: Yes, the vertex should be connected to something, but should not have any path with a third one.

184- LQ: (Drawing on the board as below) isn't this the best counterexample?



185- Student: There is no path...

186- LQ: Is this a connected graph?

187- Students: No.

188- LQ: Does it contain a vertex of degree zero?

189- Students: No.

190- LQ: No, so when I say, a disconnected graph contains a vertex of degree zero, it means it should... any connected graph should contain a vertex of degree zero. Is it true that any disconnected graph...? No, so this is false, and this is a counterexample, ok? So counterexample is this one (referring to the drawing above). So this is a graph, which is disconnected, but it contains no isolated vertices, or vertices of degree 0.

2- if G is a k -regular graph, if G is a k -regular graph where k is odd, then $v(G)$ is odd. So what do you think? If G is a k -regular graph where k is odd, what does k -regular graph mean?

191- Student: Does it mean that all vertices are connected to each other?

192- LQ: No, no, that would be a complete graph. The degree of all vertices is k . So this means that all the vertices have degree k . If G is a k -regular graph, it means that if the degree of all the vertices is k , where k is odd.

193- Student: No the opposite, it would be $k - 1$ if the number of vertices...

194- LQ: No one mentioned anything about the number of vertices.

195- Student: No, I can have a vertex alone for example, that has a degree of zero, and that would be...

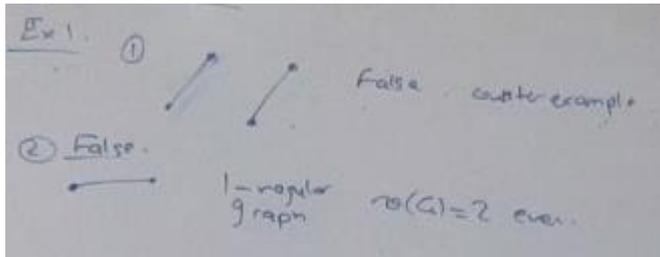
196- LQ: We are saying k is odd guys. k is odd. If G , it means if G is 3-regular, or 5-regular, or 7-regular...

197- Student: If we have only 2 vertices?

198- LQ: They are saying that the number of vertices should be odd, true why? Or false why?

199- Student: If we have two vertices, if the degree of each one is 1, so $k = 1$ and the number of vertices is 2.

200- LQ: Good, so he gave me a counterexample of this graph (drawing on the board). This is a 1-regular graph, this is a 1-regular graph right? Ok? The degree of all the vertices is 1, and $v(G)$ is equal to 2 which is even. So this is false.



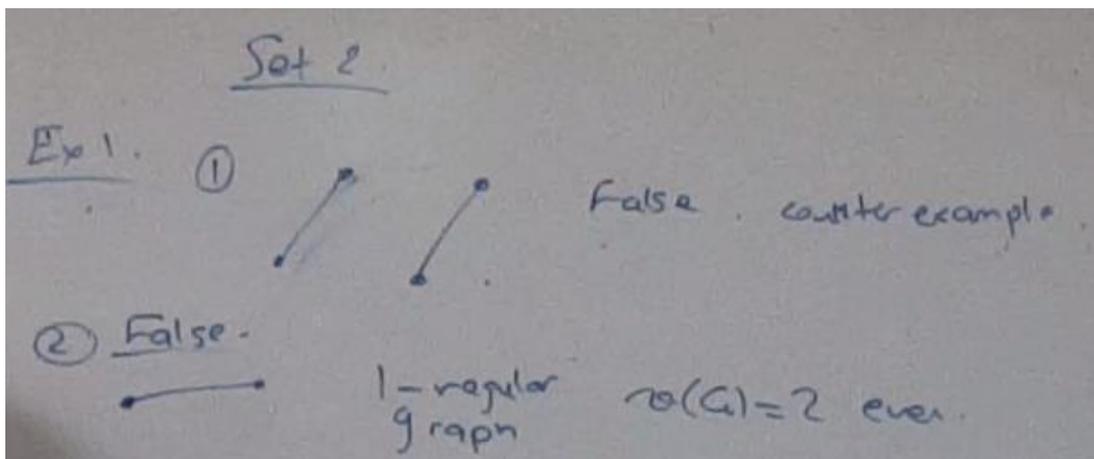
Ok, however, the graph is k -regular and k is odd, then the number of vertices will always be even. It is not as if you had cases where the graph is k -regular with k odd and $v(G)$ even and other cases where it is odd. It is always even. Who can tell me why?

201- Student: What was the question?

202- LQ: I am saying that, he gave me this example (referring to the drawing on the board) that the graph is k -regular, k is odd but $v(G)$ is even. Maybe there are other examples in which the graph is k -regular, k is odd and the number of vertices is odd. It means that it is not always odd. He gave me an example that shows that the number of vertices can be even. But however, it is always even in this case, you can never have a k -regular graph with k being odd and with an odd number of vertices ok? Why is this? Do we have... do we remember that the count of the vertices of odd degrees in a graph? The count of the number, of the cardinal of vertices with an odd degree in a graph is?

203- Students: Even.

204- LQ: Even. The number of vertices with odd degrees, this was a corollary that we deduced from the ... from Euler. Right? When we said that the number of vertices that have an odd degree in any graph, it should definitely be even, right?



205- LQ: When I say that a graph is k -regular, then all the degrees are ... all the vertices have degrees k . If I want to count the number of vertices with an odd degree, it will be how much?

206- Student: $2E(G)$

207- LQ: So if G is k -regular, and k is odd, if I want to count the number of vertices, what do you mean by $2E(G)$? The number of vertices is $2E(G)$?

208- Students: (giving indistinct answers)

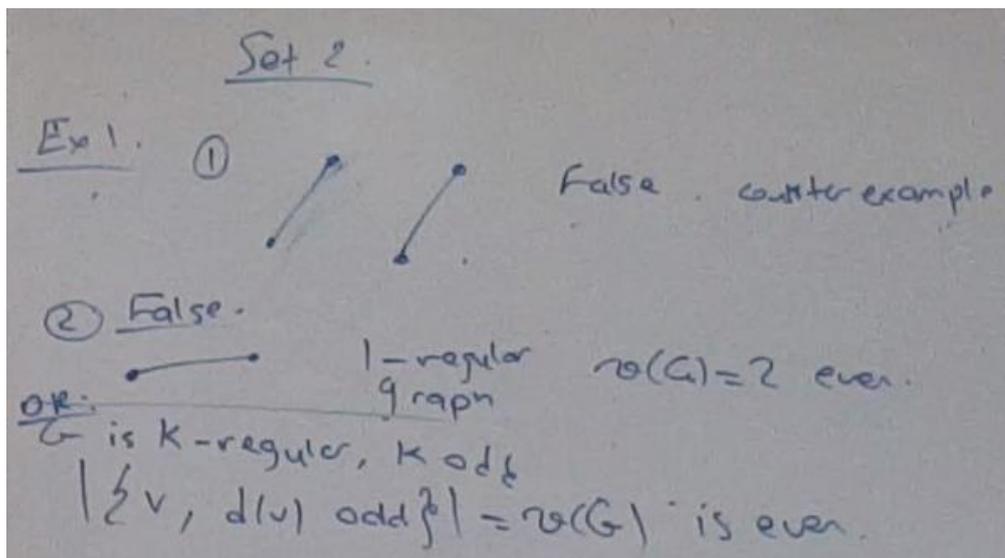
209- LQ: How many vertices with an odd degree?

210- Student: All of them.

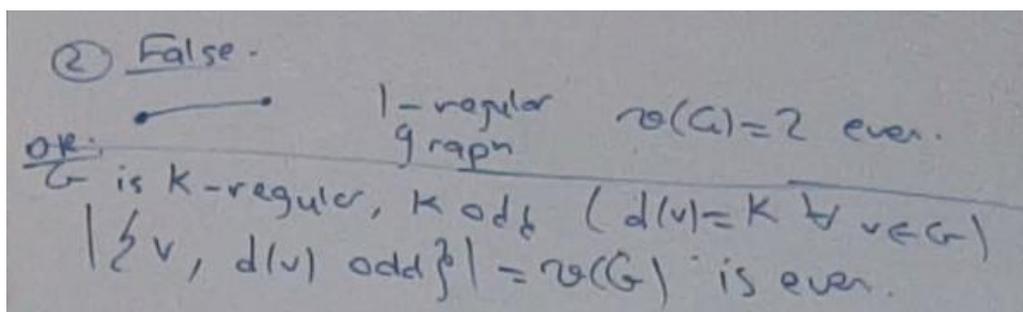
211- LQ: All of them, right? So it is equal to $v(G)$. You agree or not?

212- Student: It is even...

213- LQ: We know that this is even (referring to the number of vertices with an odd degree), then $v(G)$ is even. There is no case... I mean if you take any 3-regular graph, any 5-regular graph, any 7-regular graph, the number of vertices has to be even. It is not as if sometimes it is even, sometimes it is odd. Do you agree? It should be because all the vertices are of odd degrees, they all have a degree of k , ok? So they all have odd degrees, and the count of the vertices of odd degrees in a graph should be even.



So also this is a justification because you are saying that there is no need to give a counterexample. In any graph that is k -regular and k is odd, the number of vertices should be even. Is this clear? So, “or” (adding “or” on the board as shown above), you can justify in this way. So G is k -regular, this means that the degree of v is equal to k for every v in G . Ok? The degree of v is k for all v , and since k is odd, so this means that the degree of v is odd for every v . Ok.



3- We can construct a graph of 5 vertices whose degrees are 4, 3, 3, 2, 1. These are the degrees. Ok? We can find a graph of 5 vertices ok? And these are the degrees of the vertices. Is this true or false? We put 5 vertices and we try? What do you think?

214- Student: It works.

215- LQ: It could be. Ok. So here we should benefit from the properties we know about graphs, ok? There is a property that we have just mentioned about the number of vertices and odd degrees. How many are these?

216- Students: (Indistinct answers)

217- LQ: These are three vertices. Can you have in a graph 3 vertices with an odd degree? We had already said that in any graph, the number of vertices with odd degrees should be even. You cannot find any graph with a number of vertices of odd degrees being odd. This is a property we took. Ok? So this is false, because G contains 3 vertices of odd degrees which is impossible.

218- Student: Because number of...

219- LQ: In any graph, the number of vertices with an odd degree should be even. Ok?

220- Student: I didn't understand part 3.

221- LQ: Did you understand part 2?

222- Student: Yes.

223- LQ: Part 3 is like part 2. How many vertices have an odd degree here?

224- Student: Three.

225- LQ: These are the degrees, ok? (Pointing to the number that represent the degrees of the vertices on the board). These are the degrees. So I have 5 vertices, they are telling me that: can you find a graph with 5 vertices in which these are the degrees of the vertices? Ok? So this means you have three vertices with an odd degree. Could that be? In any graph, the number of vertices that have an odd degree is even. If we count the vertices that have an odd degree, it should be even. We have proven this, this is true in any graph.

226- Student: So if one of these vertices had a degree of 4 instead of 3, it would work?

227- LQ: Maybe not, it doesn't mean that any number... it doesn't mean that if the degrees were satisfying this condition, they work, there are ways to show...ok?

4- if a disconnected graph G contains only 2 vertices of odd degrees, x and y , then G contains an xy -path.

228- Student: No, if it contains only x and y , and it is not connected, it means there is no path between x and y .

229- LQ: There is no path from x to y , ok. They are saying that there is only x and y and they have an odd degree, it doesn't mean there is only x and y . So they are saying, I have

a graph with only 2 vertices having odd degrees, all the other vertices have even degrees.
Ok?

230- Student: Yes, we have 2 odd ...

231- LQ: We only have 2 vertices with odd degrees, then G contains an xy –path. I should find an xy –path. I don't know, what do you think? That I should find. If I don't have an xy –path, what does it mean? If the graph is disconnected, ...

232- Students: It means that there is no path between all vertices.

233- LQ: Yes, not between any two vertices, it means there are two vertices such that there is no path between them. So me, when I talk about a disconnected graph, I always imagine a graph with a set of connected components, yes. So I imagine a graph divided this way (illustrating the idea with a drawing on the board), so here you have a graph, and here you have a graph ... you see how? So I always put that shape in my mind. So the graph is disconnected, ok? It doesn't mean that any two vertices cannot have a path between them, of course. But you can find two vertices with no path between them. Now here, x and y are particular, these are the two vertices, the only two vertices in the graph with odd degrees, ok?

234- Student: But we can find a path between them...

235- LQ: Maybe we can.

236- Student: Because if odd and odd, we have two...

237- LQ: When do we find a path between them? In which case? There should be what?

238- Student: If all the others were of even degree?

239- LQ: No the others have even degrees.

240- Student: The others have even degrees, these are the only two with an odd degree, so we have two vertices of an odd degree, so $v(G)$...

241- LQ: The number of vertices that have an odd degree are two, there is no problem.

242- Student: Even.

243- LQ: Even, so there is no problem.

244- Student: So this is not related?

245- LQ: So I need to see, is there a path? ... they are saying here, if disconnected, and contains only two vertices with odd degrees, then G contains an xy –path. So there has to be a path from x to y . If it is disconnected, and if I only have two vertices with odd degrees, then G definitely should contain a path from x to y . In which case there will be no path? No one is telling me this, in which case there will be no path? Ok, if x and y were in the same connected component.

246- Student: It means there is...

247- LQ: It means there is a path. And if they were not in the same connected component?

248- Student: Then there will be no path.

249- LQ: So there will be no path. Ok, so let's see, these x and y , where they should be. I mean if we have only two vertices with odd degrees, these two vertices with odd degree, should they be in the same connected component or they could be in different components?

250- Students: Oh yes, they should be in the same component.

251- LQ: They should be in the same connected component, why?

252- Student: Because if they were in different ones, then one of them is not connected.

253- LQ: Let's say, x was here, and y was here, why would it be a problem? (Adding x and y to the drawing of the components). The first one alone is connected (referring to one of the connected components), it is a graph.

254- Student: Yes, and the number of vertices with odd degrees is ...

255- LQ: How much is it?

256- Student: One.

257- LQ: One. Ok? The degrees here (referring to the component where she added x), in this part alone, the degree of the vertices, how can you compare it to the degree of all the graph? If I call the components C_1, C_2, C_3 , the degree of v in C_1 , how can you compare it to the degree of v in G ? It is the same because it is an induced sub-graph and there are no edges, no additional edges between any vertex here and any vertex outside this connected component. So all the edges... let's say this is v (drawing v in the first component), all the edges between v and some other vertex, they are all here (pointing to the first component), because if it were connected to a vertex outside of this component.

258- Student: It will ...

259- LQ: It will not be a connected component anymore, ok? So, by the definition of a connected component, all the edges are here. So the degree of any vertex in C_1 is equal to its degree in G . So if the degree is even in the connected component, it remains even in the graph, and if it was odd, it remains odd. The vertices remain as they are if I just consider the connected component alone. So, if I take the graph C_1 , the degrees are going to remain the same as in G , so you will have one vertex x with an odd degree, and all the others will have an even degree, because y is not in C_1 , right? A contradiction. This means what?

260- Student: There should be another...

261- LQ: No, they should be in the same connected component. So they should definitely be in the same connected component. So if x and y were in the same connected component and the component is connected, so definitely I have xy -path. So this proves that the statement is true.

262- Student: Shouldn't they be alone?

263- LQ: There will be a contradiction if they were alone.

264- Student: No I mean in the same one.

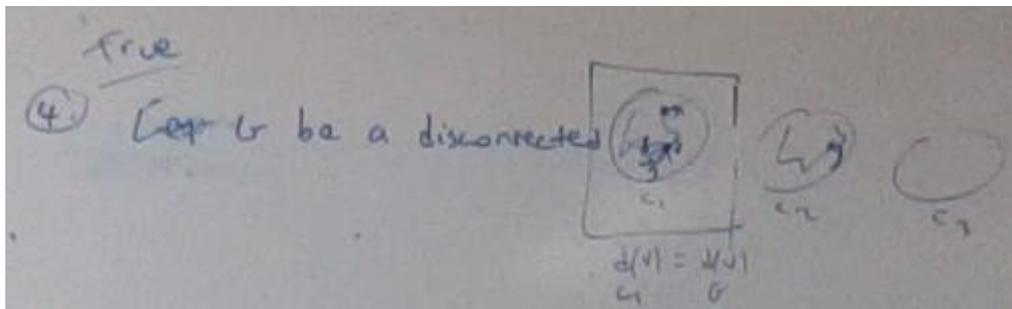
265- LQ: Yes, of course, I am saying there will be a contradiction otherwise.

266- Student: I mean only these 2.

267- LQ: No why? Maybe you can have these two vertices of odd degree in one component, and maybe you have ten other vertices with even exponents, where is the problem with that?

268- Student: Each one of the components is connected.

269- LQ: Yes, what does it mean "connected component"? It is a maximal induced connected, so it is a connected induced sub-graph of G maximal with respect to the inclusion of the sub-graphs. It is a connected and induced sub-graph and we explained that it is not strictly included, or it is not a strict sub-graph of another induced connected sub-graph of G . Right? So it is if you want the greatest connected induced sub-graph, if I add to it anything, it will not remain connected, ok? So, yes, the connected component itself is a connected graph, so if you take any two vertices, if they are in the same connected component, then definitely there is a path between them, if they are in the same connected component. But if one of them is in a connected component and the second is in another connected component, then of course, there is no path between them. Is it clear? So this means that, suppose, ok let G be a disconnected graph, so this is true actually. I can find an xy -path if x and y are the only vertices of odd degrees because x and y , they should be necessarily in the same connected graph. And if they are in the same connected component, then there is a path between them. Do we agree? So it has to be the case, there is no other choice.

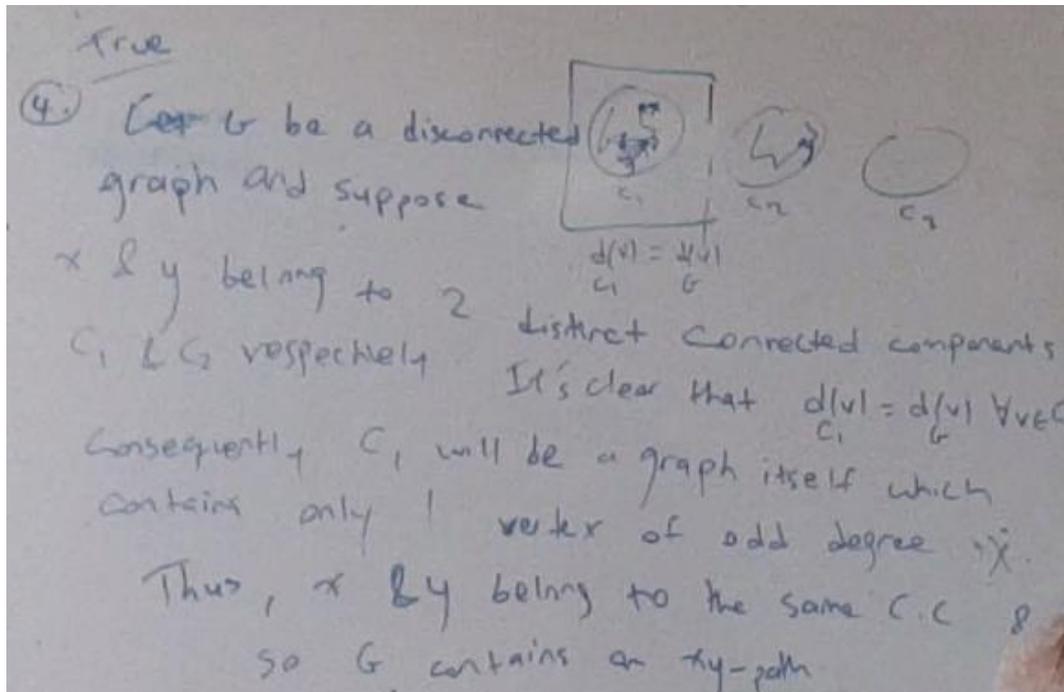


So let G be a disconnected graph, and suppose x and y belong to 2 distinct connected components C_1 and C_2 . Ok? So respectively, x is in C_1 and y is in C_2 . It is clear that the degree of v in C_1 is equal to the degree of v in G , for every v belongs to C_1 . And similarly for C_2 , right? So you understood what I said? The degree doesn't change, so if the degree in the graph was 10, inside the component, the degree remains 10, because the edges connected to v are all in the connected component. Do we agree? If v was connected to something outside, this wouldn't be a connected component. Then I would get something bigger which is connected, right or not? Ok, so it is clear that the degree of v in C_1 is equal to the degree of v in G , for every v belongs to C_1 . So this means that, consequently, C_1 will be a graph itself which contains only one vertex of odd degree.

270- Student: Which is a contradiction.

271- LQ: And you cannot... C_1 alone would make a graph, so since the degrees are all still the same, in the graph, same as for the connected component, so here I have x odd (referring to the connected component containing x) and the others are all even, right? Because y is not here (referring to the component containing x), so contradiction, because we cannot find a graph with only one vertex of degree 0. The number of vertices with odd degrees should be even. Ok? So what do we deduce? Thus, x and y belong to the same connected component. CC is an abbreviation for connected component, we already know that. So x and y belong to the same connected component. And so, G contains an xy -path.

So they cannot, if the graph is disconnected with only two vertices of odd degrees, x and y cannot be in two distinct components, they have to be in the same connected component, so there is a path between them so this is true, it is always true, ok? Whenever the graph is disconnected with only two vertices of odd degrees, these two vertices, they definitely should belong to the same connected component, and thus there is an xy -path. Is this clear? Do you have any questions?



Ok, part 5 we skip for now because we haven't explained the digraph, we move to exercise 2.

Prove that the number of graphs of n vertices is $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Ok, we need to prove that the number of graphs of n vertices, so what does it mean? Who can explain what does this mean?

272- Student: We have a graph of n vertices.

273- LQ: n vertices.

274- Student: So we need to prove that in that graph, we have $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ sub-graphs.

275- LQ: No, you have to prove that the number of graphs of n vertices. So if we have n vertices, how many graphs can we do?

276- Student: C_n^2 .

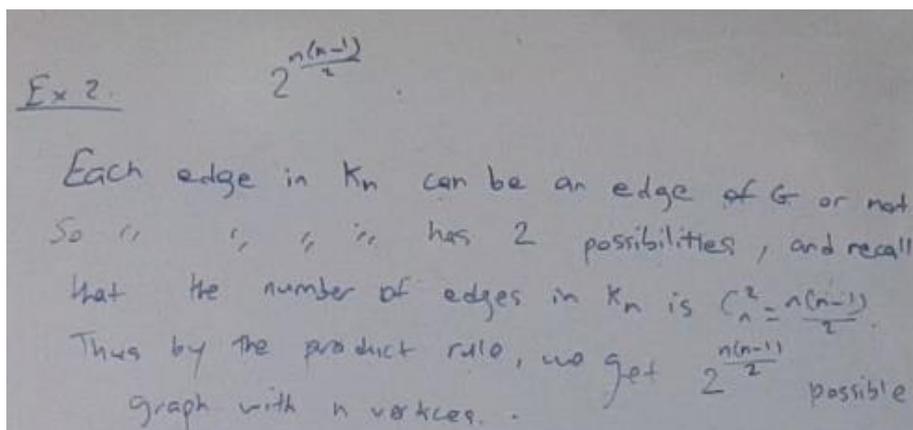
277- LQ: C_n^2 is what? C_2^n is the number of edges in the complete, so all the edges that I can put, right? So C_n^2 which is $\frac{n(n-1)}{2}$, this is if you have n vertices, you have a maximum of $\frac{n(n-1)}{2}$ which is C_n^2 edges, you remember? Do you agree? Yes? Ok. Now the question here is not the maximum number of edges, how many graphs can I do? How many graphs can we construct from n vertices? The first graph is the graph with no edges at all. You can... the second graph, the obvious is the complete graph, ok? You might remove an edge ...

278- Student: Ah the partitions ... partitions of n objects, 2 to the power $\frac{n(n-1)}{2}$

279- LQ: Yes, exactly, this is it. So as if you need to see... the partition of what in this case? Of the edges, ok. Or even you can take from the probability also, from the product rule, you remember the product rule? So you have an edge in K_n , an edge in K_n that could be existing or non-existing. True? Any edge can be existing or non-existing. And what are all the possible edges? Their number is $\frac{n(n-1)}{2}$. So, you know the product rule? So this edge is either present or not, so it has two possibilities, another edge is either present or not, so it has two possibilities ... so every edge has two possibilities, either to be present, either not to be present. So 2 to the power of the number of possible edges in the... very good. Is this clear? (Writing on the board) So each edge in K_n , so I am talking about a graph containing n vertices. Each edge in K_n can be an edge of G or not. So each edge in K_n has 2 possibilities.

280- Student: There are $\frac{n(n-1)}{2}$ edges.

281- LQ: Possible edges in K_n , ok? So by the product rule, we have $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Oh, before that, let me say, recall that the number of edges in K_n is C_n^2 which is $\frac{n(n-1)}{2}$, ok? Thus by the product rule, we get $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ possible graphs with n vertices. Is this clear?



Exercise 4- consider a graph G , so G graph, and let $P = v_1 \dots v_k$ be a longest path in G . So longest path in G . So we are given a graph and the longest path in a graph. Prove that $\delta(G)$ is less than or equal to $k - 1$. So who can tell me what am I supposed to prove?

282- Student: $\delta(G)$ is what?

283- LQ: $\delta(G)$ is the minimum degree. $\delta(G)$ is the minimum degree of v where v belongs to G . The minimum degree in the graph. So you have a graph, you know the degrees, ok? The smallest degree in this graph is $\delta(G)$, ok?

284- Student: So if we have P which is the longest path, isn't $p - 1$ the degree of P ?

285- LQ: Of P ? The degree is for the vertex, right?

286- Student: The length...

287- LQ: The degree for what? You are saying... it is correct, but the degree is for what?

288- Student: For each...

289- LQ: The degree, there is no degree for the path, the degree of the vertex.

290- Student: For each one of the vertices.

291- LQ: For each one of the vertices? She is saying $k - 1$.

292- Student: No, v_1 and v_k .

293- Student: The extremity $v_1 \dots$

294- LQ: No, I am not saying that this is the whole graph (pointing at the drawing of path P), if this was the whole graph... I mean this is inside the graph, I don't know what is the remaining part of the graph, maybe there are many others connected to this path, and so on. This (pointing at the drawing of path P) is a part of the graph, ok? Of course the degree of v_1 is ... here it is what?

295- Student: The degree of v_1 and v_k is $k - 1$.

296- LQ: Equal to $k - 1$?

297- Student: Yes, or more.

298- LQ: Equal or more? Do you agree?

299- Student: Equal.

300- LQ: Maximum $k - 1$, less than or equal, why?

301- Students: (Indistinct answers)

302- LQ: Only v_1 or all the vertices?

303- Student: No only v_1 .

304- LQ: Only the extremities, only the ends of the path. Why?

305- Students: Because it is the longest path, they cannot have neighbors outside the path, then there will be a longer path.

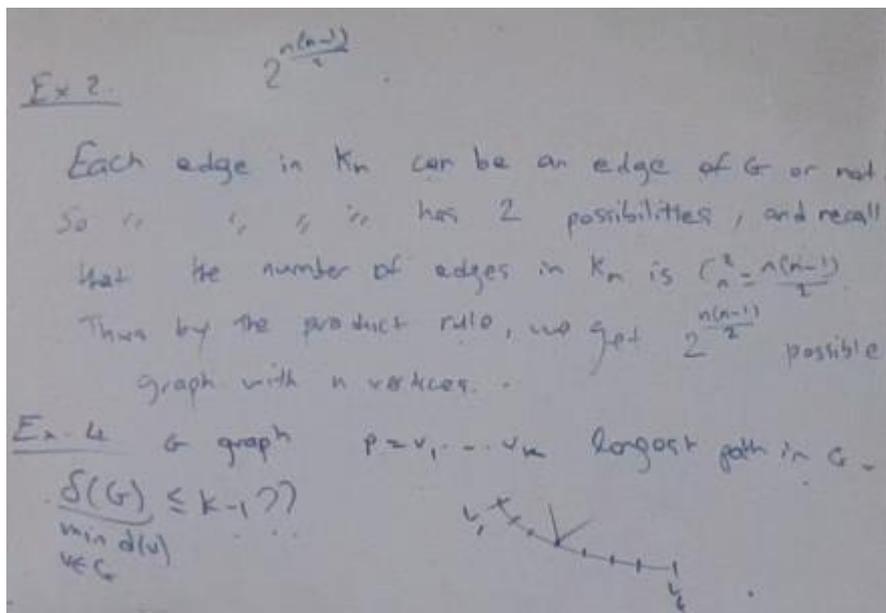
306- LQ: Ok, we just mentioned, the neighbors of v_1 , they are subsets of P , similarly for the neighbors of v_k , ok, so if the neighbors of v_1 are all on the path, what could be the neighbors of v_1 , they could be v_2, v_3 till v_k , and they may be neighbors for all of these, and maybe not to all. So the degree of v_1 is less than or equal to $k - 1$. Ok, does this prove that $\delta(G)$ is less than or equal to $k - 1$?

307- Student: No because we need to find the degrees of all vertices.

308- LQ: Of course... no!

309- Student: Of course because it is the minimum.

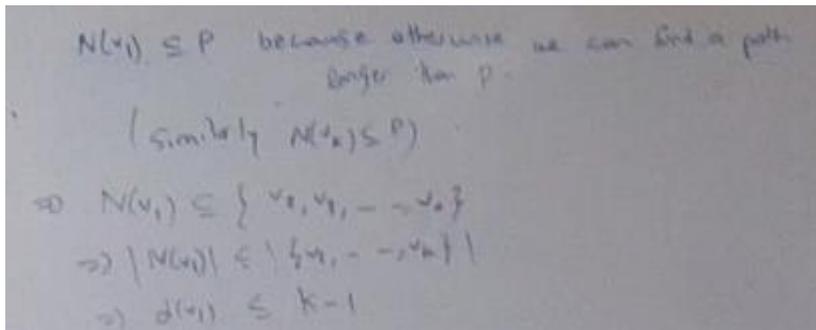
310- LQ: It is the minimum. To prove that the minimum is less than $k - 1$, it is enough to find one vertex whose degree is less than or equal to $k - 1$, so of course the minimum would be less. Ok? Because it is the minimum between them. If you find one vertex whose degree... assume that I want to prove that $\delta(G)$ is less than or equal to 5, if you could find one vertex whose degree is less than or equal to 5, then the minimum would become less than 5. Right or no?



So, the neighbors of v_1 are a subset of P , because otherwise we can find a path longer than P in G . Similarly, the neighbors of v_k are a subset of P . Consequently this means that the neighbors of v_1 they are subsets of P , so they could be what? They could be, we said, v_2, v_3, \dots, v_k . It implies that the cardinal of this (referring to the set of neighbors of v_1) is less than or equal to the cardinal of this (referring to the set containing v_2, v_3, \dots, v_k). Here we have that the degree of v_1 , the degree is the number of neighbors right? Is less than or equal to how many vertices we have here (referring to the set containing v_2, v_3, \dots, v_k)?

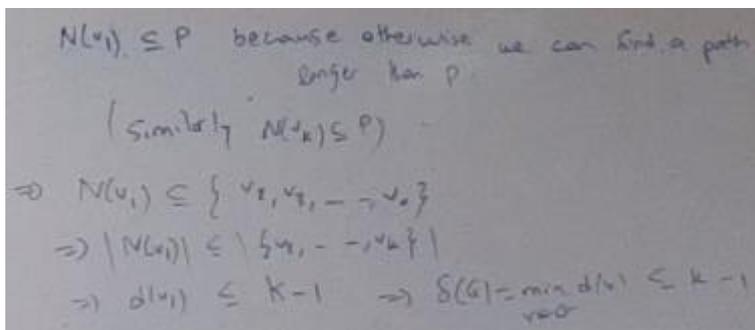
311- Student: $k - 1$

312- LQ: Yes.



313- LQ: Ok, so less than or equal to $k - 1$, and if the degree of one vertex is less than or equal to $k - 1$, implies that $\delta(G)$ which is the minimum degree of a vertex in G is less than or equal to $k - 1$. Ok? Is this clear?

314- Students: Yes.



315- LQ: So we have 10 minutes. I will do exercise 8, very quickly because it is a small exercise. So exercise 8. Is this clear guys? Any questions? Let G be a simple graph, it means a graph with no loops, with no multiple edges. Show that either G or its complement \bar{G} is connected. (Writing on the board) So we simply have G graph, prove G or \bar{G} is connected.

316- Student: What does \bar{G} mean?

317- LQ: \bar{G} is complement, do you remember the complement? Which has the same vertices as the graph, such that those in G we remove, and those not in G we add. Ok? So, in any graph, in any graph, if you look at it and at its complement, one of them, the graph or its complement, should be connected. They could be both connected, but they cannot be both not connected. Exactly. Ok, so how are you going to prove this? Usually, how do you prove that you have this or this? We agreed on this before.

318- Student: One of them is false, one of them is true.

319- LQ: No, we suppose one of them is false, then definitely, the other one should be true. So we suppose what?

320- Student: First, we suppose that G is not connected.

321- LQ: That G is disconnected, and let's prove that \bar{G} is connected. So suppose... so one of them is wrong, so we want to prove that G is connected or \bar{G} is connected. Suppose one of them is disconnected, so suppose G is disconnected, and let's prove that \bar{G} is connected. So suppose that G is a disconnected graph. What do we need to prove?

322- Student: That \bar{G} is connected.

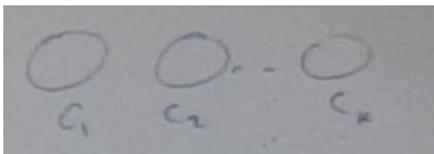
323- LQ: We are not doing contradiction here, ok? So suppose that G is a disconnected graph, prove that \bar{G} is connected. Ok, I ask myself, how am I going to prove... I have that G is disconnected, so in my mind, this means what? About G ?

324- Student: It means that not all the vertices of G are connected to each other.

325- LQ: So? What does it mean? It means there exists two vertices ...

326- Student: There is no path between them.

327- LQ: There is no path between them. It means I can find two vertices with no path between them. And more... also I can imagine that G is partitioned into at least two connected components. Right? It means that G is divided... of course, this also proves that you can find two vertices such that there is no edge between them. So G is disconnected means that G looks like this (sketching on the board), C_1, C_2, \dots, C_n . At least I have 2 connected components because G is disconnected. I cannot have one connected component, right? Ok, so suppose that G is a disconnected graph, so it is divided into many connected components, and also we can deduce that we have two vertices with no path between them in G .



So, either one you want to use. But... so G is disconnected, we have that in mind, we want to prove that \bar{G} is connected. How are we supposed to prove that \bar{G} is connected? How do you prove that a graph is connected?

328- Student: Between any two vertices, there exists a path.

329- LQ: Where?

330- Student: In \bar{G} .

331- LQ: In \bar{G} , very good. So you should prove that, (writing on the board) prove that for every x, y in \bar{G} , as vertices in \bar{G} , it is the same as the vertices of G . So any x, y , a vertex in \bar{G} or a vertex in G , prove ... prove what?

332- Student: That there is an xy -path.

333- LQ: Prove that \bar{G} contains an xy -path, not G . There is a difference between a path in G and a path in \bar{G} . They are two different graphs, G and \bar{G} , two different graphs. Ok? So

for all x, y in ... “Let” instead of “for every”, let x, y belong to $V(G)$ be two vertices in G , prove that \bar{G} contains an xy –path. So here I will say that, take two vertices in G .

334- Student: x_1 and y_1 in G .

335- LQ: In G , or I have said that if I don’t want to use this idea, I say that it is divided into many components, at least two.

336- Student: x in C_1 and y in C_2 .

337- LQ: Ok, if they were... x and y could be any two vertices. Let’s assume that x in C_1 and y in C_2 .

338- Students: So there is no xy –path.

339- LQ: There is no xy –path, there is even no edge between them, where?

340- Students: In G .

341- LQ: In G

342- Students: But in \bar{G} .

343- LQ: But in \bar{G} , there will be an edge. Then there is an xy –path in \bar{G} . So if you take any two vertices in two distinct connected components, there will be no edge between them in G , so this edge will be in \bar{G} , and thus you have found an xy –path, ok? Are you done with all the set of pairs of vertices? No, I still have a case if they were in the same connected component, so if x and y are here (referring to C_1).

344- Students: So there is a path.

345- LQ: So there is a path, Ok, in G . I need to find a path in \bar{G} .

346- Student: I don’t have an edge doesn’t mean I don’t have a path?

347- LQ: I don’t have...?

348- Student: When I don’t have an edge between x and y .

349- LQ: Between x and y ? Maybe there is an edge and maybe no, we cannot know. I don’t know, they are in the same connected component. There could be an edge between them. If there wasn’t an edge between them in G , so there will be an edge between them in \bar{G} which will solve our problem, but we cannot guarantee this, ok? What do you think? How will I be able to find... I should find an xy –path in \bar{G} .

350- Student: We can take an element in C_2 .

351- LQ: Ok, if we take z in C_2 , what happens?

352- Student: Ok, there will be an edge between them in \bar{G} .

353- LQ: Between which vertices.

354- Students: Between x and z and y and z , so there is a path.

355- LQ: Because these are not edges... this is in \bar{G} and this is in \bar{G} (referring to the edges that the students mentioned). They are not in G . So now I have xzy is an xy -path in \bar{G} . And that is it. So if you take any two vertices, you can find a path in \bar{G} between them ok? If they are, I've taken two cases, if they are in distinct connected components or if the two vertices are in the same connected component. Is this clear? Ok? (Writing on the board) so, case 1, if x and y belong to the two different connected components, but let me say before guys, let me set $G = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ ok? Where C_i are all the connected components of G , and since G is disconnected, then it is definitely partitioned into what?

356- Students: Connected components.

357- LQ: How many?

358- Students: At least two.

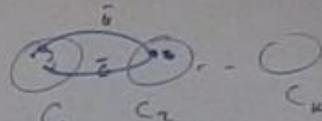
359- LQ: At least two. So I will say $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ Where C_i are all the connected components of G and $k \geq 2$. Ok? Whenever the graph is disconnected, it means it can be partitioned into at least two connected components. Do we agree? If it is connected, we will have one connected component. So since the graph is disconnected, so at least we will have two connected components. If x and y belong to the two different connected components C_i and C_j of G with $i \neq j$ then xy , of course it is not an edge in G , implies that xy is an edge in \bar{G} , implies that \bar{G} contains an xy -path. So it is the edge xy ok? Case 2, if x and y are in the same connected component C_i of G . So G is disconnected, so I divided G into at least 2 connected components.

360- Students: Let z belong to C_j such that...

361- LQ: C_j such that $i \neq j$. I couldn't have said that if G was connected, if I didn't know that it was disconnected, because I may have one connected component, how can I say I want to take an element, a vertex in another connected component? Do we agree? But I can say this because I guarantee that there are at least two connected components in graph G , do we agree? So...I took x and y in the same connected component, I will take z in another connected component so there is for sure another connected component, so z belongs to C_j where $j \neq i$. We have, definitely because x and z are in different components of G , so xz is not an edge in G and yz is not an edge in G , implies xz is an edge in \bar{G} and yz is an edge in \bar{G} , implies xzy is an xy -path in \bar{G} , of course because these edges are in \bar{G} . So in all the cases I am aiming to find an xy -path in \bar{G} , so this means that \bar{G} is connected. If you take any two vertices, there is a path between them in \bar{G} . That is it. Is this clear? Any questions?

Set $G = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$, C_i CCs of G , $k \geq 2$.

Let $x, y \in V(\bar{G}) = V(G)$



prove \bar{G} contains an xy -path

case 1: if x & $y \in$ to 2 different CCs C_i & C_j ($i \neq j$) ^{of G} then

$xy \notin E(G) \Rightarrow xy \in E(\bar{G}) \Rightarrow \bar{G}$ contains an xy -path

case 2: if x & y are in the same C.C. C_i of G

Let $z \in C_j$ / $j \neq i$ we have

$xz \in E(G)$ & $yz \in E(G)$

$\Rightarrow xz \in E(\bar{G})$ & $yz \in E(\bar{G})$

$\Rightarrow xzy$ is an xy -path in \bar{G} .

7.5- Transcription de la troisième séance observée

La troisième séance est une séance de TDs. Elle porte sur les exercices 4 et 6 (exercices 3 et 5 dans la version anglaise). Elle n'a pas continué pour 90 minutes parce que la plupart des étudiants étaient absents ; ils avaient des examens la semaine d'après.

- 1- **LQ:** Exercice 3- Let C cycle of smallest length, ok? Or let me say, C small cycle, ok? Smallest cycle in G .
- 2- **Student (Steve):** (Enters in class), hey, sorry I am late.
- 3- **LQ:** Hello, so exercise 3, just take, let C be a cycle of smallest length in G . Show v belongs to C implies that the cardinal of the neighbors of v intersection C is equal to 2. Ok, guys let's hurry please.
- 4- **Student (Steve):** I think we did exercise 3.
- 5- **LQ:** No we haven't done exercise 3 yet, we have done exercise 2. Ok, so C is a smallest cycle guys, we are given that C is a smallest cycle and we need to prove this, what should we do?
- 6- **Student (Steve):** Isn't it obvious?
- 7- **LQ:** Let v belongs to C ... what do you mean by obvious?
- 8- **Student (Steve):** I was thinking that it is always the case, we always know this.
- 9- **LQ:** How?
- 10- **Student (Steve):** We have a cycle, the neighbors of a vertex in it are always 2.
- 11- **LQ:** (While drawing a cycle on the board) not necessarily.
- 12- **Student (Steve):** It is not necessary?
- 13- **LQ:** No not always. Maybe it could be... let me see, what are other cases we can consider? So if it was any cycle, Steve is saying in any cycle this is true. Do you agree? Of course not! What does this state? (Referring to $|N(v) \cap C| = 2$ that she had written on the board) that the neighbors of v that are on C are 2. However, in general, you might have (adding edges between the vertices on the cycle as shown below).



- 14- **Student (Steve):** Ah, ok, yes, yes.
- 15- **LQ:** Yes, you might have, you might have the neighbors of v to be these 2 (pointing to the vertices adjacent to v) which are on the cycle, and maybe other neighbors also which are on the cycle, but however, since it is a smallest cycle, we shouldn't have this shape

because we would get a smaller cycle ok? So of course it is not trivial on any cycle. But since C is smallest (writing on the board) so let C be a smallest cycle, and let v belong to C . So what do we need to prove? That the cardinal of this intersection is 2. Suppose it is...

16- Student (Steve): Not 2.

17- LQ: So, what?

18- Student (Steve): Greater than 2.

19- LQ: Suppose that the cardinal of the intersection is?

20- Student (Steve): Greater than 2.

21- LQ: Of course it is not smaller than 2 because we have at least 2 neighbors on the cycle, ok? Suppose it is greater than or equal to 3. So it cannot be less than 2. The neighbors of v that are on the cycle are at least 2. So here I will add a remark, the cardinal of the neighbors of v intersection C is at least 2 if v is a vertex on the cycle. So if v is a vertex on the cycle, then it is at least 2. Ok, so what do you think?

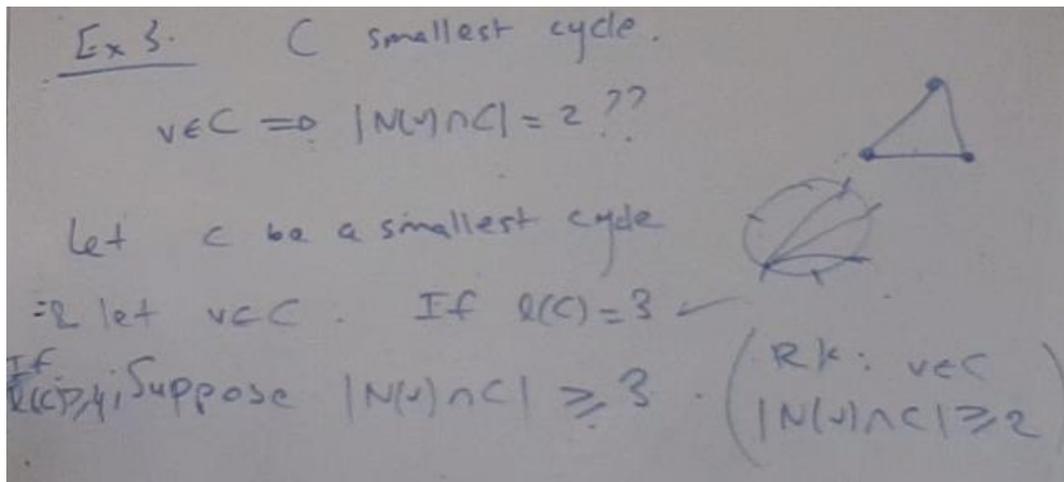
22- Student (Steve): We should take a vertex.

23- LQ: Yes, so the number of the neighbors of v intersection C is greater than or equal to 3... euh, but first of all ... no, we have just to state a particular case first. I will say if the length of C is equal to 3. If a cycle is of length 3, then what will be the cardinal of the neighbors of v intersection C ?

24- Student (Steve): 3.

25- Students: 2.

26- LQ: 2, can it be more? I mean if the cycle is like this (drawing a triangle on the board) if you take any vertex, what is the value of the cardinal of the neighbors of v intersection C ? It should definitely be 2, it cannot be something else, because you have only 3 vertices on the cycle, right? So if the length of C is 3, then this is ok, so we don't need to prove it when the length of C is 3. So now, if the length of C is greater than or equal to 4, suppose that $|N(v) \cap C| \geq 3$. So when the length is greater than or equal to 4, then we can have other neighbors, other than those that are adjacent on the cycle. I mean the ones that are consecutive. Ok? So what do we get now?



27- LQ: Suppose that you have the cardinal greater than or equal to 3, then this means that there exists w belongs to neighbors of v intersection C , such that ...

28- Student (Steve): Neighborhood of w ...

29- LQ: I can say neighborhood of w such that $w(v)$ is not an edge on C , so what do I mean by this? You already have two neighbors, so I want to say suppose you have a third neighbor on the cycle, a third neighbor, other than this and other than this (referring to vertices that are neighbors to v on the cycle), so this means that there exists w which is a neighbor of v on the cycle, such that wv is not an edge on the cycle, I mean I am not taking this neighbor (referring to a vertex that is a neighbor of v on the cycle) and I am not taking this neighbor (referring to a vertex that is a neighbor of v on the cycle).



30- Student (Steve): So if we take another edge, there will be a smallest cycle that is why ...

31- LQ: No, the w you are going to consider... what edge do you want now? Which third neighbor are you talking about?

32- Student (Steve): Ah yes, ok, ok. So based on the assumption we are saying this?

33- LQ: Yes, based on the assumption, that suppose that this is greater than or equal to 3 (referring to $|N(v) \cap C|$), so I have another neighbor other than this and this (talking about the successors of v on the cycle) the ones that are on the cycle, the edges on the cycle, I have a neighbor w on the cycle...

34- Student (Steve): Which will create another smallest cycle.

35- LQ: Now you will see what the problem is but the idea is that if we say this (underlining $|N(v) \cap C| \geq 3$), then definitely you can find a neighbor of v which is on the cycle such that wv is not an edge on the cycle, the edges on the cycle are these (referring to the edges of the cycle), you understand?

36- Student: It is over, it shows now.

37- LQ: Ok, but do you understand the idea? Shall I continue? Do you agree? Ok. Now, it implies, or then, you can say that ... what happens?

38- Student (Steve): There is another cycle smaller than C .

39- LQ: Then when I take the edge $vw \cup C_{[v,w]}$ any part whether you take this part or this part (referring to the two parts of the cycle from v to w).

40- Student (Steve): Any one of them, both are shorter.

41- LQ: With this part of the cycle or this part of the cycle (referring to the two parts of the cycle from v to w), it doesn't matter, both cases, both will be, this is a cycle smaller than C , smaller which means that its length is less, ok? So smaller than C , a contradiction because C is the smallest cycle. Contradiction to what?

42- Student (Steve): The assumption that C is the smallest cycle.

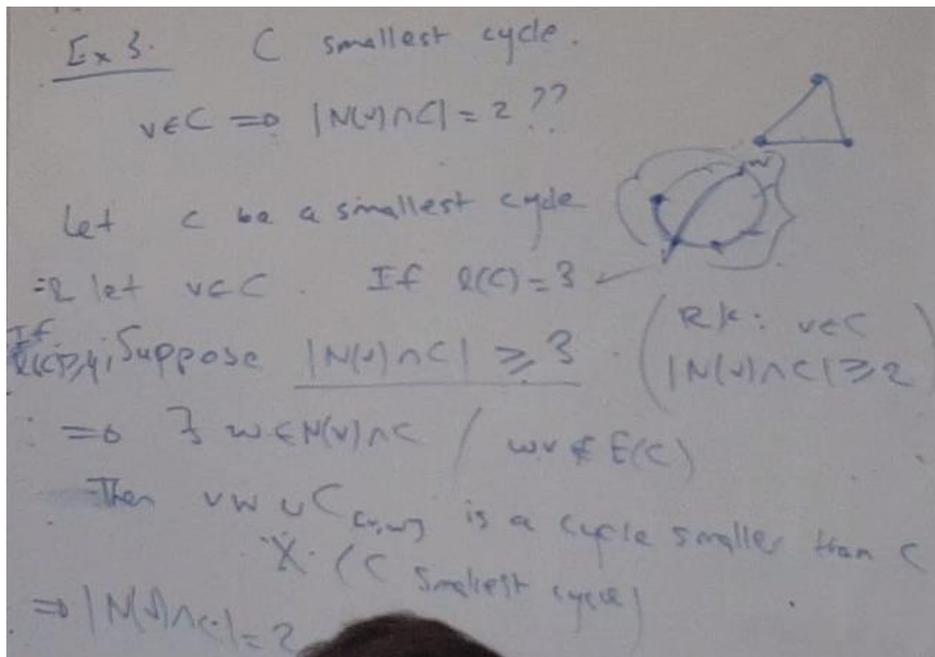
43- LQ: No.

44- Student (Steve): Ah yes, the assumption that $|N(v) \cap C| \geq 3$

45- LQ: So this means that the intersection is equal to 2. It is not greater than or equal to three.

46- Student (Steve): It is not equal to 4.

47- LQ: Ok, so it is less than or equal to 2 let's say. In our case it is greater than or equal to 2, and if it is not greater than or equal to 3, so it should be 2. So it is simple, maybe in writing you feel that ...but what you have to say is simply... I will repeat very quickly. I have a cycle with length at least 4, because it is meaningless to say a cycle of length 3, do the neighbors... or is the number of neighbors on the cycle greater than or equal to 3? T cannot be in this case.



48- Student: vw union? (asking a question to be able to copy)

49- LQ: Union yes. This edge union $C_{[v,w]}$ which is a sub-path of C from v to w . Any one of them, you take this part or that part.

50- Student: So this part works because C is a smallest cycle, if it weren't a smallest cycle, does it work to say that...

51- LQ: Yes. It works, if this is a cycle, you have this vertex v and it is connected to this and that... what is the problem if it weren't a smallest cycle? Ok? So yes, this property only applies to smallest cycles. So I will repeat quickly, only about the writing. If you have a cycle, and if we want to prove that whenever v is on the cycle, the number of the neighbors of v intersection C is 2. So you know that it is at least 2 because you have these 2 neighbors of v on the cycle (referring to the 2 successors of v on the cycle) so it is at least 2, that is why I said that it is greater than or equal to 2 always. You want to prove that it is exactly equal to 2. Ok? Suppose it is greater than 2, greater than 2 means strictly greater than 2, so I have this neighbor, this neighbor (referring to the 2 successors of v on the cycle) and I have a third neighbor for sure, this third neighbor is on C . So where should it be let's say? So this means I have to say that I have a neighbor of v , ok? Which is on the cycle, w , that belongs to $|N(v) \cap C|$ such that vw , this edge, is not an edge of the cycle. The edges of the cycle are these, is this clear? This is not an edge of the cycle (referring to vw). So I am just saying that I am taking a third neighbor which is neither of the two which are the ones succeeding and preceding on the cycle. Ok? So this is it. This sentence is just to say that I have a neighbor other than the one before and the one after on the cycle, ok? That is it, and if this were the case, then you can form a cycle smaller than C , and since C is a smallest cycle, then there is a contradiction. Ok? Any questions? And did you understand why it is meaningless to discuss this if the length of the cycle is 3?



52- LQ: The cycle...

53- Student (Steve): Yes, because it wouldn't have sections...

54- LQ: Because it would become impossible, the intersection then would be maximum 2. All the vertices would be 3, so any vertex on the cycle would be a neighbor to the other 2. So it is... for sure it will be 2, it cannot be more than 2. So that is why it is meaningless in this case, so that is why we took the other case. Because if you take it to be ... if you haven't stated this, you cannot say later there exists w on the cycle... such that wv is not an edge of the cycle, this will not be a possible case. So if I have a triangle, to what third vertex can this be connected (referring to a vertex of a triangle)? Do you understand? So, that is why.

Exercise 5- So, a graph G is said to be acyclic if it contains no cycle. Ok? So simply ...

55- Student: Did we define cyclic?

56- LQ: No we didn't. We defined a cycle. Now we're defining acyclic. There is nothing called cyclic. Ok? So an acyclic graph is simply a graph with no cycles. There are no cycles. So consider an acyclic graph G , so (writing on the board) G contains no cycles. G contains no cycles means that G is acyclic. And then x and y two vertices on G such that xy is not an edge and $G + xy$ is not acyclic. Meaning what?

57- Student (Steve): xy is an something additional in the graph.

58- Student: We add the edge xy

59- LQ: We add the edge, so I have two vertices x and y in G such that xy is not an edge on G .

60- Student (Steve): We can prove that if we add the edge xy , we prove that there is a cycle.

61- LQ: No you don't need to prove anything. Here it is a given. Ok? We have an acyclic graph G and let x and y be two vertices of G such that xy is not an edge and $G + xy$ is not acyclic. So $G + xy$ is not acyclic. What does it mean to say not acyclic? It means $G + xy$ contains a cycle. All of this is given. And of course why do they want xy not to be an edge? Because it is meaningless to say that $G + xy$ if xy was already an edge, ok? It would be the same as G . So we have a graph which contains no cycles, there is an edge that is not in the graph, I added it. I added this edge. Then they told me, after adding this edge, $G + xy$ is not acyclic, so $G + xy$ contains a cycle. So simply, G does not contain cycles, and we have added one edge, G plus this edge contains a cycle. Ok? So part 1, show that between any two vertices in G , there exists at most one path joining them. Show that, between any two vertices in G , any two vertices in G , there exists one path joining them.

62- Student: (Indistinct question)

63- LQ: I did not understand, please repeat. $G + xy$ contains a cycle.

64- Student: It contains a cycle, yes. So for sure between x and y , any two vertices in G , there will be a path joining them.

65- LQ: So you are saying that there is a path between x and any vertex in G including y ? There is a cycle, but in one part of $G + xy$ is the cycle.

66- Student: The cycle is in $G + xy$?

67- LQ: I don't know, what do you think? The cycle is not... I am saying $G + xy$ contains a cycle, so of course the cycle is in $G + xy$.

68- Student: Any points other than x and y are related by a path because $G + xy$ is ...

69- LQ: I don't want to prove that there is a path. Read the question again. Show that between any two vertices in G , there is at most one path joining them. Maybe there will be no path. At most! So what do you need to prove? Why are you stuck on x and y ? The question is show that, between any two vertices in G . x and y or other vertices, any two vertices in G , there exists at most one path. So let u, v belong to G , any two vertices in G . What do you need to prove?

70- Student: That there is a path between them.

71- LQ: No I don't need to prove that there is a path between them, reread the question. At most. At most 1.

72- Students: (Indistinct answers) we suppose that there is more than one path.

73- LQ: We suppose there is more than one. Maybe there won't be any path, ok? So we want to prove that between any two vertices, there is at most one path. One path or no path at all. Suppose that there are two vertices such that there is more than one path between them, so there are 2 or more paths between them. Ok? So we want to prove that for every u, v in G , G contains at most one path. Means what? So either no path... at most one uv -path, so either no path at all, or one uv -path. So I am telling you what at most means, but you are supposed to know it. So for every u, v in G , G contains at most one uv -path, so either no uv -path at all, or one uv -path. To prove this, suppose by contradiction that I can find two vertices u and v in G , such that there is between them more than one path, so two different paths. If there is between them 2 or 3 or 4, so there will be two different. Ok? Suppose there exists u and v in G such that G contains ... so such that....

74- Student: There exists P and P' .

75- LQ: P and P' . So there exists u and v in G such that P and P' are two distinct uv -paths in G . So I am saying there will be more than one. You can tell me there might be 3 or 4, if there are 3 or 4, then there will be two different, ok? So, let's assume that there are P and Q , 2 distinct uv -paths in G .

76- Student (Steve): Then we will have a cycle.

77- LQ: Why?

78- Student (Steve): If we have 2 uv –paths that are different.

79- LQ: Like this? (while drawing on the board)



80- Student (Steve): Yes.

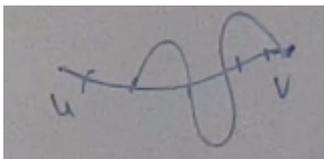
81- LQ: I will have a cycle where?

82- Student (Steve): Between P and P' .

83- LQ: Where is this cycle?

84- Student (Steve): In G .

85- LQ: In G because the two paths are in G . Ok, but however, the two paths don't have to be like this. So this is the first path, and the other one might be like this (drawing on the board).



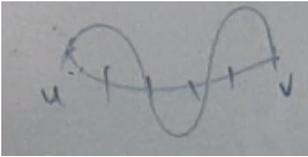
86- Student (Steve): There is a point, after that there will be a cycle.

87- LQ: But still, you can find a cycle. So we say that, two distinct paths with the same ends, their union contains a cycle. It doesn't have to be itself a cycle, ok? So two distinct paths with the same ends, their union contains a cycle. So now I have a cycle in G which contradicts the fact that G is acyclic. You understand? So this cycle how will we create it? I will prove it now quickly how to get this cycle. But from now on, it is good for me if you just state that two different paths with the same ends, their union contains a cycle. Ok? There is no need to ... it is clear enough. I am going now to show it quickly, but for now you can state it like this. How to prove that the union... so actually, then $P \cup Q$ contains a cycle C . You can directly state it, ok? Because there are two different paths with the same ends u and v . Because, I am going to say why, ok? Why $P \cup Q$ contains a cycle. How can they form a cycle? Any idea? Ok, so this cycle that you are telling me about, can you find it?

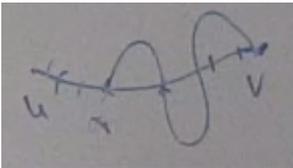
88- Student (Steve): Let α belong to $P \cap Q$...

89- LQ: Yes. Let α belong to $P \cap Q$ such that the successive vertices of α on P and Q are different. Ok? So it could be u, v (drawing on the board) P could be like this. Then α might be u . So this is the first ... maybe not, maybe I could walk along Q ... this means,

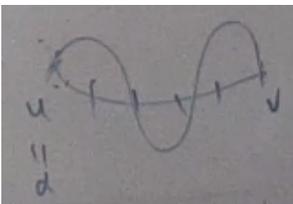
let α to be, in $P \cap Q$, the first vertex in $P \cap Q$ such that the successive vertex of α on P and Q , the successors are different.



Let α belong to $P \cap Q$ be the first vertex, in the intersection of course, such that the successors of α on P and Q are different. You understand what I mean? So the next vertex on P from α and the next vertex on Q from α , they are different. So accordingly α should be this (pointing at α in the drawing below). Right?



And if it is like this (pointing at the drawing below), what would be α ?



90- Student: u .

91- LQ: It would be u . Because the successors of u on P and Q are different. (reading what she had written on the board) So let α belong to the intersection be the first vertex such that the successors of α on P and Q are different. Ok, then what?

92- Student: We take the intersection?

93- Student: Now maybe our intersection is far, so we take this case also, that maybe the intersection is far.

94- LQ: It couldn't be far, unless u and v are the intersections.

95- Student: There will be only v and we will have a cycle in that case.

96- LQ: Of course, but it is a particular case, there is no need to take it. It is a particular case.

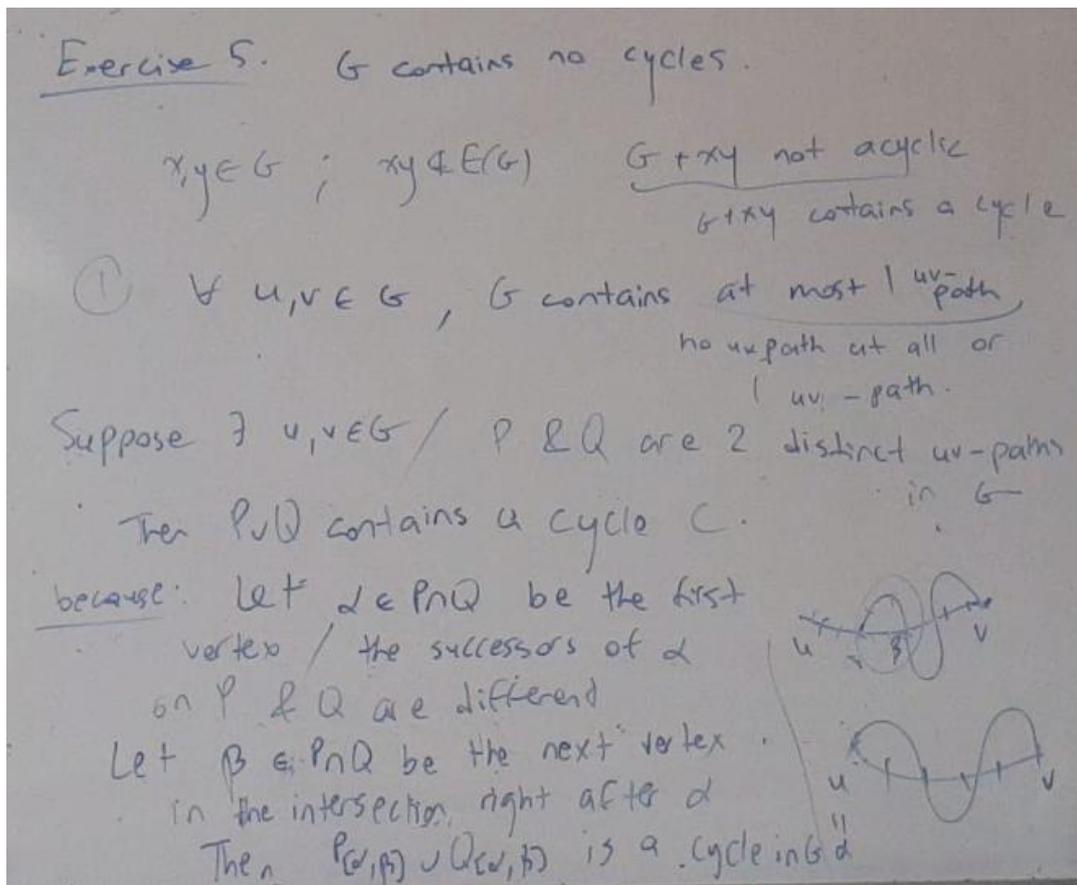
97- Student: Ok, it is obvious then.

98- LQ: When we say α belongs to $P \cap Q$, in this case you would say that α is u and the next vertex I will be talking about will be v . So you don't need to state it, it is mentioned here, ok? And then what did you tell me? Now let β to be the next point of intersection after α , simply, (writing on the board) let β belong to $P \cap Q$ be the next vertex in the

intersection right after α , do you understand? The first vertex in the intersection directly after α , there might be many intersections, you want the one directly after...

99- Student (Steve): So $P_{[\alpha, \beta]} \cup Q_{[\alpha, \beta]}$ is the cycle.

100- LQ: This will form the cycle, you see? Yes, because there will be no intersections, so no repeated vertices, (writing on the board) then I will write it here, then $P_{[\alpha, \beta]} \cup Q_{[\alpha, \beta]}$ is a cycle in G . You cannot say $P \cup Q$ is a cycle because $P \cup Q$ as it is here is not a cycle, ok? So this as I told you, you need ... it is obvious, I've just explained it to you, but for now you can simply stat that the union of two different paths with the same ends contains a cycle.



So now what will I have? We have said that G contains a cycle, ok, so (writing on the board) thus G contains a cycle which makes a contradiction because G is acyclic.

101- Student (Steve): contradicts the assumption that we have more than one path, so we have at most one path.

102- LQ: Contradiction of course, contradiction to this supposition, which means that we cannot have two distinct paths between them, so this means that you either have one, or none. Of course. So here not only x and y , I have a path between x and any vertex and between y and any vertex, why? So it is as if you assumed that on this cycle all the vertices are there, but actually no, so there are vertices that might not be on the cycle. Ok part 2, show that $G + xy$ contains a unique cycle. Show that $G + xy$ contains a unique

cycle. If you want to prove that it contains a unique cycle, so what should we prove? That it contains a cycle...

103- Student (Steve): That there is no other cycle.

104- LQ: That there is no other cycle. Ok.

105- Student (Steve): It contains a cycle.

106- LQ: It contains a cycle by the given. $G + xy$ contains a cycle.

107- Student (Steve): So we have the existence.

108- LQ: We have the existence, so contains a cycle. So the existence we have it. We still have to prove the uniqueness. Suppose that $G + xy$ contains 2 distinct cycles, C and C' . So (writing on the board) suppose $G + xy$ contains 2 distinct cycles, C and C' . Ok? So we are going to see where is the problem. So these cycles, they are both in $G + xy$.

109- Student (Steve): G doesn't contain cycles.

110- LQ: So C is not a cycle in G .

111- Student (Steve): Yes it is in $G + xy$.

112- LQ: It is in $G + xy$ but definitely it is not in G because G is acyclic. So we know that C is a cycle in $G + xy$ but it is not a cycle in G . How can that be?

113- Student (Steve): Then C contains xy .

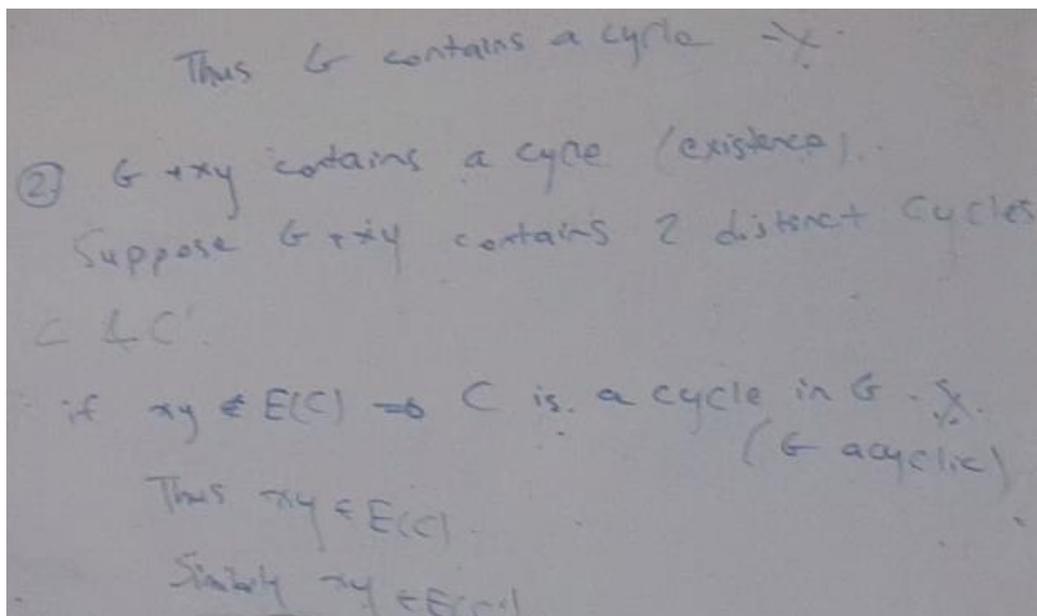
114- LQ: Very good. It contains xy . Because if cycle C doesn't contain the edge xy , ... what is the difference between G and $G + xy$? Only this edge. The difference between G and $G + xy$ is that it contains this additional edge. So if I have a cycle in $G + xy$ and it is not a cycle in G , so what is the difference between the two? Only that edge. So this means that, if this edge is not on the cycle, then the cycle will become in G . The cycle is in $G + xy$ which doesn't differ from G except by the fact that you have this additional edge. So, if the edge is not on the cycle and the cycle is in $G + xy$, so then the cycle becomes in G , which makes a contradiction. Thus the edge should definitely be on the cycle C . And similarly it should definitely be on the cycle C' . You understand? Very good. (writing on the board) I will mention here that if xy , I will prove it, I will prove it simply, if xy is not an edge on C , if it is not an edge on C , then what?

115- Student (Steve): Then...

116- LQ: Then C is a cycle in...

117- Student (Steve): G .

118- LQ: In G . Because it is already a cycle in $G + xy$. Do you understand? It is a cycle in $G + xy$, so if it does not contain xy , it will be a cycle in G . It is a contradiction because G is acyclic. Ok? So contradiction to what? The fact that xy doesn't belong to $E(C)$, thus xy is an edge on the cycle. And similarly, xy is an edge on C' .

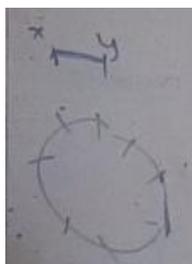


119- Student: How do we say if xy is not an edge of C , C is a cycle?

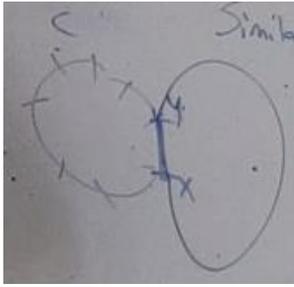
120- LQ: C is a cycle. It is in $G + xy$. This cycle might contain the edge xy , and maybe it doesn't pass through the edge xy . Maybe the edge xy is in the graph somewhere else.

121- Student (Steve): Ok but if we remove it.

122- LQ: You did not remove it. I am saying if it were not there from the beginning. If xy was not here (referring to the edges of the cycle), I mean if xy was here outside the cycle (referring to the drawing below). I did not remove anything from the cycle or else it wouldn't be a cycle anymore, so I didn't remove anything from the cycle. If this edge was not on the cycle (referring to the edge xy in the figure below), so the cycle would be in G . So this means it is a contradiction, so this edge has to be on the cycle, so the cycle has to contain xy . Do we get it? So I didn't remove anything from the cycle, the cycle exists ok? So xy is an edge on C and it is an edge on C' as well. Ok? We are sure of this. So this cycle that is in $G + xy$, you understand? The cycle C that is in $G + xy$ has to pass through edge xy and cycle C' has to pass through edge xy . Ok?



So if this is C , what would C' look like? Always try to illustrate, what would C' look like? So since it passes through xy , one might think of drawing it like this.



123- Student (Steve): Then there will be a cycle in G .

124- LQ: How?

125- Student (Steve): $C \cup C'$ minus xy .

126- LQ: $C - xy$ is this part (erasing xy from the drawing above). $C - xy$ is clear, and $C' - xy$, you are saying it becomes?

127- Students: A cycle.

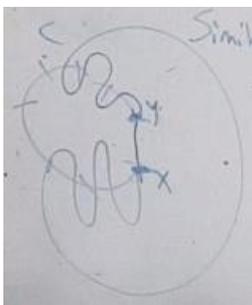
128- LQ: It becomes a cycle in G . Why does it become a cycle in G ?

129- Student (Steve): Because it doesn't contain xy

130- LQ: If all of them were in $G + xy$, what distinguishes G from $G + xy$? This edge xy . If I am in $G + xy$ and this edge is not there, so I am in G . Then can I say $C - xy$ union $C' - xy$ is a cycle?

131- Student (Steve): Is a cycle in G .

132- LQ: But however I cannot say... it is not a cycle. I drew it in a simple way. But maybe the cycle C' will be like this (referring to the figure below). So actually you can simply say $C - xy$ if xy is a path in G , $C - xy$ and $C' - xy$ if the xy is a path in G . They are different. Why are they different?



133- Student (Steve): Because C' is not C .

134- LQ: Since they are different, then $C - xy$ and $C' - xy$, they are two different xy -paths in G , which contradicts 1. I cannot have more than one path between any two vertices.

135- LQ: Ok? So since xy is an edge on C and xy is an edge on C' , then C minus this edge, I can remove an edge from the cycle. If I remove the edge xy from the cycle, which I

know for sure that it is present. If I remove this edge, it will be an xy –path in G . So the xy – path does not contain this edge anymore and all of it is in $G + xy$. And $C' - xy$ is as well an xy –path in G . Right? So now I have two xy –paths. But what if they were the same path? But however, they cannot be the same path because if $C - xy$ was the same as $C' - xy$, then C would be the same as C' . And $C - xy$ is different from $C' - xy$ because C is different than C' which is the supposition. We considered 2 distinct cycles C and C' . Ok? So these two they will form two different xy –paths in G . I can use the proof of part 1, thus G contains at least two distinct xy –paths. The two paths are in G , so G contains two distinct xy –paths, a contradiction to 1. A contradiction to what? To the initial supposition that $G + xy$ contains two distinct cycles, more than one cycle, thus $G + xy$ contains a unique cycle. Contradiction to the initial supposition that I considered that I have more than one cycle. Right? Consequently $G + xy$ contains a unique cycle. Is this clear? I will stop here.

7.6- Guide de l'entretien avec LQ après les observations de classe

- 1- Quels sont les modules que vous enseignez cette année ? Vous les enseignez depuis combien de temps ?

(Cette question peut nous permettre de comprendre la visibilité que l'enseignante-chercheure a sur l'ensemble du cursus de formation en mathématiques.)

- 2- Quel est votre retour (feedback) sur les trois séances observées ?

(Cette question peut nous permettre d'inférer des règles d'action relatives à la mise en œuvre d'une séance et des invariants opératoires derrière ces règles d'action. De même, elle peut nous informer sur la perception de LQ par rapport aux étudiants de la classe actuelle en comparaison avec les étudiants qui assistaient au même module lors de l'année précédente.)

- 3- Comment choisissez-vous les exercices à inclure dans le TD ?

(Cette question peut nous informer sur la distinction qui existe entre cours et TDs pour LQ, et sur l'organisation des contenus dans le module, et nous permettre alors d'inférer des règles d'action et des invariants opératoires qui ont guidé la conception du module.)

- 4- Nous remarquons que vous avez fait le choix de construire la notion de « chemin » en utilisant la « distance topologique ». Quelles sont les raisons derrière ces choix ?

(Cette question vise à savoir s'il un autre choix existe pour l'introduction du concept du « plus court chemin », et le cas échéant, les raisons derrière l'accent mis sur la distance ou la prise en considération des graphes non pondérés uniquement; la réponse peut être à une échelle didactique (par exemple, introduction du plus court chemin en se basant sur des prérequis des étudiants), à une échelle institutionnelle (mobilisation de notions pour la préparation des étudiants à un master recherche en théorie des graphes), ou à une échelle épistémologique liée à la nature du problème du plus court chemin.)

- 5- Comment préparez-vous les étudiants à l'activité de preuve ?

(Cette question peut nous permettre d'inférer des règles d'action et des invariants opératoires relatifs à la construction et la rédaction des preuves avec les étudiants. En outre, en classe, LQ commence toujours par illustrer les graphes des différents cas particuliers et de raisonner avec les étudiants à partir des exemples avant de commencer la rédaction des preuves ; cette question peut nous permettre d'inférer les invariants opératoires derrière cette règle d'action.)

- 6- Si vous aviez à enseigner un module d'introduction à la théorie des graphes dans une filière de mathématiques au sein d'un autre établissement universitaire, le feriez-vous de la même façon ? sinon, que changeriez-vous ? (Deux niveaux : choix des contenus et la mise en œuvre en classe)

(Cette question peut nous permettre de savoir lesquels parmi les choix discutés dans les entretiens antérieurs sont les propres choix de LQ, et lesquels relèvent de conditions et de contraintes institutionnelles ; et peut nous permettre d'inférer des invariants opératoires relatifs à l'élaboration d'un cours/TD de mathématiques discrètes et à la mise en œuvre du cours/TD en classe)

- 7- Quels étaient les contenus du module de « théorie des graphes » que vous enseigniez dans le parcours de formation en mathématiques appliquées ? (Si elle cite les chemins et les cycles), Travaillez-vous les « chemins » et les « cycles » de la même façon que dans le module que vous enseignez actuellement ? (Sinon) quelle différence existe ?

(Cette question peut nous permettre de comparer les choix effectués par les concepteurs du module d'enseignement de la théorie des graphes dans le parcours de formation en mathématiques, et les choix des contenus dans le parcours de formation en mathématiques appliquées ; cette comparaison peut nous informer sur l'influence de la formation et du contexte institutionnel sur les choix effectués par les enseignants-chercheurs, concepteurs du module.)

- 8- Qu'en pensez-vous de l'inclusion des algorithmes dans les modules d'enseignement de la théorie des graphes ?

(Cette question peut nous permettre d'inférer des invariants opératoires derrière certaines règles d'action de LQ, et par la suite nous éclairer sur son rapport personnel à la théorie des graphes.)

7.7- Transcription de l'entretien avec LQ avant les observations

- 1- **Chercheure:** The first question is about the courses that you teach this year, what are they and since when do you teach each one of them?
- 2- **LQ:** Discrete mathematics for second year students, I am teaching it for the third time, so it is my third year. The course for the biologists, a calculus course, and I've been giving it... it is my fourth year. There are courses that I gave only one time, and then I stopped, because of changing courses between teachers and the timetables... there is also a calculus course, it was about polar coordinates mainly and recursive relations, all of these... this one I gave only one time, it was two years ago. What else... the logic course, it is a first year course, and it is the second time I give it. There is the graph theory in the M1, it is a master's course, in M1, it is the fifth year now, the fifth time. What else, Ok, there is this course, also a calculus course, in second semester, it is about series, and improper integrals, and the formal definition of integrals, of the definite integrals, etc. Ok, this course... this year I will not give it, but I had given it for two years, previously. So these are concerning the Lebanese university.
- 3- **Chercheure:** And are you teaching courses outside the Lebanese university?
- 4- **LQ:** I used to, yes. For example, this semester exceptionally, I am giving a graph theory course at a private university. Yes, so this is the third time I give it.
- 5- **Chercheure:** And this is for which students?
- 6- **LQ:** For students in pure mathematics. They are in their master's degree.
- 7- **Chercheure:** Ah, it is a master's course? M1?
- 8- **LQ:** M1, some are in M1, some are in M2...
- 9- **Chercheure:** Ah they choose.
- 10- **LQ:** Yes, they can choose, yes, and depends also on when I give the course. So when I give the course, there are some students who are M1, others who are in M2, both can pursue the course, am thinking, of course, long time ago. The last two years I have stopped, I have a little bit reduced a lot teaching in private universities. Previously I used to teach a lot in LAU, LIU, once in USJ. And the courses I have given, they range between calculus, probability and statistics, calculus I, II, all the different parts of calculus, linear algebra, ODE ... How many times I cannot tell you, I don't remember.
- 11- **Chercheure:** It is fine. Ok, what's your feedback on the three sessions that I attended?
- 12- **LQ:** What I think, like how the students were reacting? In general?
- 13- **Chercheure:** Yes, in general.
- 14- **LQ:** My feedback is that... I feel the students are still feeling weird about the material, a little bit. There are some who feel now, that we have started with some proofs and theorems, they feel that it is not just vertices with edges, as simple as it seems, that no, we have ... when you get inside, it has a lot properties, a lot of theorems, and they feel that they don't know how to express their ideas. Sometimes, they have the idea in mind, but

they don't know how to express it. So, I feel that they have been feeling weird until now, they feel that, Ok, it is nice, some of them feel this, it is good, it is nice, but we might not get the idea on our own, but I feel that there are lots of students who are very interested and they are impressed by the new way of thinking and the new way of analysis. So I am relaxed to feel that a lot of them are so much interested with the material.

15- Chercheure: And the sessions, they go always according to plan?

16- LQ: Ok, not exactly, no. Sometimes, you are a little bit late, sometimes you run faster than you expect. So... but altogether, they compromise. We are sometimes a bit late, I mean you are talking in terms of time, right?

17- Chercheure: In terms of time, in terms of ... you do exactly what you are planning to do?

18- LQ: Ok, in terms of time, no. Ok, sometimes I am a bit late, sometimes, I told you, I go faster, and altogether, it is fine. So I don't respect exactly the time. As for the plans, yes, maybe I'm sometimes late, I might skip the proof of some theorem that I feel could be complicated, so maybe keep it for later, for the M1 course. But I try not to do this, and I try to do all that is planned to do. Not doing all what is planned means to miss something. What is planned is the maximum, you see what is planned is the maximum you can do. And I always aim to do all that is planned.

19- Chercheure: Ok. How do you distinguish between the course and the tutorial exercises?

20- LQ: I'd like the exercises to be a complementary of the course, so that is why, I'm not the kind of instructor to do all the chapter and the course, and when the chapter is finished, to start the exercises. I'd like them to be integrated together. So, you have attended the lectures and you saw that once we have started the class, and did a bit of advanced theorems, I directly went to the exercises, because in my opinion, the tutorial is where students feel relaxed and feel that ok, let's try to solve something knowing the information from the course. So how can you apply the information you know from the course ... if you stay long to start with the tutorial, I guess that the ideas in the students' mind will be messed up. There will be a lot of information they will not be able to ... so the tutorial is a complementary of the course. And it helps them a lot to understand the concepts that are introduced and how we can apply, how we can use them. So for example, we have explained a certain theorem, ok now how can we use it? Can we apply it somewhere? How can we benefit from the idea of these propositions, these theorems? How can they help? So, yes, in this, the tutorial is complementary.

21- Chercheure: Ok, and usually, you do all the exercises that are in the tutorial?

22- LQ: Yes, except when there is no time, I skip the small ones. This is also the maximum, I put...

23- Chercheure: Ok, so what do you prioritize?

24- LQ: Yes, it depends on... Ok, so for example, to give an example of last year. I have started matching, I couldn't go through the last idea of the matching which was the alternating path. And there was an exercise related to alternating path, I skipped that exercise, you see? So the ideas that I had to...not to stress on in the course, I had to skip from the exercises as well. And, I skipped, but actually, I know, all from the beginning

that I put more exercises than I could do, you see? And so, I think that maybe I have enough time, so why not ... maybe if I had time, I can do all. You see? So, in my way, I always put more exercises than I expect I can do. I do this. I know that, ok, maybe there are 20 exercises, I cannot do all of them. But maybe, if time was good and the students maybe understood everything in a very good way, maybe I can do them all. So that is why I put them, but I know also from the beginning that I might not be able to finish them all.

25- Chercheure: Oh ok. The course usually is the common course that you have conceived?

26- LQ: Yes all of us, yes.

27- Chercheure: But the exercises...

28- LQ: You know, I'd like also to put additional exercises even if I know that I won't be able to finish all of them. Maybe some of the curious students will try to solve them themselves and ask me about them. So, it would be a nice idea to see if anyone is interested more to solve exercises on his own, without me solving them in class before. And it sometimes happens, some students are interested. They try to solve exercises that I haven't done.

29- Chercheure: So the exercises you add are similar to the ones...?

30- LQ: I add?

31- Chercheure: I mean how do you choose...

32- LQ: Ah... no, actually... Ok, once I have done something, I removed a theorem from the course, and I have put it as an exercise, by splitting it into several parts. So, I thought that maybe this is a better way for them to try to... to prove the theorem by an exercise. So for example I've done this once. As for the remaining exercises, they are common between us and all the remaining universities. I mean yes, the exercises I am using are the same as here. I might add one which is from this idea, from the idea that trying to remove a theorem from the course and put it in the exercises, like this.

33- Chercheure: And, you have, when you were discussing the paths in class, you chose to link it to the idea of distance, the topological distance.

34- LQ: Yes, but the distance actually... actually when you are talking about distances, you are talking about shortest paths. So there are properties of the shortest paths.

35- Chercheure: Ok. So what are the reasons behind the choice of introducing the shortest path using the distance?

36- LQ: The distance is the definition of the length of a shortest path. So, when you are talking about paths in graphs, and it is well known for us that they may be plenty of paths joining the same set of vertices. So, two main ideas come to mind if you want. What is a shortest path between x and y ? And maybe, one might ask what is a longest path between x and y ? Now, it is not far from mind when you say "the distance", when you talk about shortest xy -path let's say, so it is not far from mind, because there are plenty of paths and you might be interested with the shortest ones. And that is why here, where the idea of distance came. It is logical to think about it.

37- Chercheure: Ok. Are there other ways?

- 38- LQ:** You mean you don't want to talk about... you want to talk about the paths in general... why talk about the shortest paths?
- 39- Chercheure:** No, I mean to introduce the shortest path, could there be like, a different approach, other than distance?
- 40- LQ:** To define shortest path, actually the distance is not a shortest path, the distance is the length of a shortest path. And, no, when you say a shortest path, ok, so it will have, let's say of length 3, and any other shortest path would be of the same length. And that is why the notion of the distance... It is the definition, and I cannot think of a different way. When you say a shortest path, all shortest paths should have the same length, and so we have defined it by the distance.
- 41- Chercheure:** Ok, when you're working on proving a proposition or a theorem, what do you do in general, in class?
- 42- LQ:** Ok, you have attended and you saw. Before I write anything, I try to analyze the ideas with the students, I try to plot a graph and I try to ask them, ok, what do you think if we do this? What do you think if we do this? So, I don't write the proof unless we are all convinced with the certain way of proving it. Then once we agree that ok, you have this, if we have this we get this, "do we all agree?" ok, very good, so "is this our result?" "Yes" ok, so then I write it. So this is how I... so I try to explain the idea graphically and putting conditions, "if we have this, what do we get?" They might not get all the ideas on their own, I might need to help them of course at some point, and once we are done with the ideas, that we have reached our conclusion, I'd write the ideas. Because it is a different... two different approaches actually: understanding the idea and expressing the idea, writing it I mean. So once I know that they have understood the idea, "Ok, now let us express it". And it is also another task here ... here also I ask "what do you think we should write? How do we say this?" Ok, the graph theory notion. So yes, this is how it goes.
- 43- Chercheure:** Ok, to help them understand. It means when we are starting with the proof.
- 44- LQ:** Yes, always with the graph, always with the graph. And maybe sometimes, you might have to start with particular cases. Ok?
- 45- Chercheure:** why?
- 46- LQ:** You might have to, because particular cases, simpler cases, they are closer to your logical thinking, and so the particular cases being understood they can generalize. So I always take two particular cases, and then ok, let's generalize. So when we generalize, you see that this will be that.
- 47- Chercheure:** Ok, so if you have to teach the same course, it means you have students who need to be introduced to graph theory in math, they are mathematics students I mean, in another university, you would do it in the same way?
- 48- LQ:** Maybe not... maybe I ...depends on the kind of students you are dealing with. So sometimes students are weaker, they are not strong, and maybe the opposite, better students. So no, this will influence because... ok, the topics, if I want to, for example let's stick to paths, if I want to explain paths, ok, the theorems they take, they need to be explained the same way. It might take me much longer to explain the same theorems for

weaker students, and might be quicker if students were stronger. And if it was the case of having better students, then I'd rather add more material.

49- Chercheure: Such as, let's say if we stick to paths and cycles?

50- LQ: Add more materials, talk about Hamiltonian cycles, Hamiltonian graphs and their characterizations that we don't mention in this course, talk about Eulerian graphs, these are the graphs that can be traversed by an Euler tour. We can introduce plenty...I might introduce coloring also... so if I mean the students were better. If we have more time, sometimes even the courses in the other universities, so this course is a 30 hours course, maybe in a different university, they give you more time, for example 45 hours, which gives you more space to... And if the students were weaker, this means I will have to remove some ideas which I give here. So no, it will not be exactly the same exact course. Ok, if I have a theorem, if I want to introduce a theorem and I want to explain it. If it is the same theorem that I want to explain, I will explain it in the same way, but it will take longer.

51- Chercheure: Ok, before, I mean before. Let's say, you were assigned a course to teach in a private university and you have no information whatsoever about the students, you just know that they are mathematics students, and it is the first time they encounter graph theory, so you want to make your choices.

52- LQ: I have done this. I have done this at a private university.

53- Chercheure: So you would make the same choices?

54- LQ: Euh... it was more complicated the first time. It was more complicated. The students were master's students, now here you are talking about second year students.

55- Chercheure: Ok, but they were master's students who were introduced to graph theory before?

56- LQ: No. it was applied mathematics.

57- Chercheure: Ah, it was applied mathematics?

58- LQ: But it was the first time they were introduced to graph theory. They knew nothing about graph theory.

59- Chercheure: Ok, so the students, the course you give now at the private university, it is applied mathematics?

60- LQ: Yes, the students are... ok some are in pure mathematics, and some are in applied mathematics, they take a common course.

61- Chercheure: Ok.

62- LQ: Yes, and so when I gave it the first time, this was before I even taught at the Lebanese university, I even started teaching. Yes, so...how did I choose the material, from books, from the course that I have taken with LB long time ago, also I have used a lot of the ideas inside, and since it was the first time...it was a long course I remember, students, they didn't find it that easy but yet they liked it... I had good students at the time. For example,

if I compare now this group of students and the one I gave like four years ago ... the others were much better. So the course I have given that time, it was yes, longer, with more material, even though with the same number of hours. So, afterwards with experience, you feel that, ok, the students with this level are not capable of understanding this, so let me do it in a simple way, you see? With time I have split ideas. Let's say you have a theorem, the first time maybe I didn't know that this might be complicated for students, so theorem proof. With time, I saw that better to split the ideas into smaller ones, and like this it would be better for their understanding. So this is what is different between the first time that I gave it and now. Now the ideas in the course, in my courses are always more strict. I saw that is better for their understanding. Even they can focus with you when, when you split it into smaller and smaller ideas.

63- Chercheure: And, for example you are giving the course at the private university right now, so when you give cycles and paths, it is the same theorems? Right now, in the course that you are giving now?

64- LQ: I am giving... I told you, when I am giving a theorem which itself is introduced over there, the proof is the same. But I am giving more theorems, I have more time. I have 45 hours only for graphs, but here I have like 15 hours for graphs. You see? So...

65- Chercheure: Ok, so what did you add to that part?

66- LQ: I have added Hamiltonian graphs with their characterizations, I have added coloring, talked a lot about the coloring, matchings with some of their theorems, because matching is only defined, we cannot go through the details of it here, matching is more detailed over there. And at the end I just will introduce a couple of algorithms, graph theoretical algorithms. This also is not given here.

67- Chercheure: Theoretical, you mean?

68- LQ: Graph theory algorithms. Algorithms related to graph theory problems

So talking about the minimum spanning tree problem. So there is an algorithm that can solve it. So I don't ask them to write the algorithms, I just introduce them to how to deal with ... to look at the algorithm and how it finds the minimum spanning tree which has the minimum weight. So I just introduce it but I don't ask them to write it themselves.

69- Chercheure: Ah, ok, so they don't have to come up with an algorithm.

70- LQ: No, they have just to understand and analyze why this algorithm works correctly and they say the correctness of an algorithm, which means that, ok, when you write an algorithm, who says that this algorithm will give you the minimum spanning tree. There is a proof to show that it actually works and it will give you the minimum spanning tree for example.

71- Chercheure: And you do it without using...

72- LQ: Algorithms... I just. Actually it is also about proofs because ok, you have to prove that this way of thinking will lead you to the minimum spanning tree let's say, and then to write the algorithm according to this idea. So the start of the algorithm I just try them on the board, and explain that, "you see what we are doing?" so as we have explained them,

this theorem, this will lead to the minimum spanning tree and this is what the algorithm does. Ok, and if I have time, I talk a bit about complexity of an algorithm, how much does each complication require as a complexity, if I have time, sometimes it depends.

73- Chercheure: So what do you think of including algorithms in the course?

74- LQ: It is not bad, it is not bad. Because actually, ok, students get to know that... it is...ok but, they get to know that, yes, ideas that you might want to solve, you can solve that via algorithm, but however they should know that the idea of the algorithm itself, writing the algorithm itself is nothing. You have to prove that this idea works. And I just show them, just to introduce them, to... ok there are many graph theory problems which you can write as algorithms, and this is in any subject actually, so in calculus also this is done. So it is a good idea to introduce them to algorithms related to graphs. They just get to know that this idea could be done on graphs, but no matter, it depends on the type of students you are dealing with. I do this because there are some students in applied theory, but if they were all in pure mathematics, I'd rather give all to be in pure mathematics subjects. You see what I mean?

75- Chercheure: Yes.

76- LQ: So it depends on the type of students you are dealing with.

77- Chercheure: Ok, ok. And... this was my last question basically.

Relation entre enseignement et recherche dans le travail documentaire des enseignants-chercheurs – cas de l'enseignement de la théorie des graphes

Notre travail porte sur les pratiques d'enseignement des enseignants-chercheurs en mathématiques à l'université. Celles-ci admettent des spécificités : l'articulation entre les activités d'enseignement et de recherche en est un exemple. Nous cherchons à caractériser la place de l'activité de recherche dans les pratiques d'enseignement des enseignants-chercheurs. Nous avons fait le choix d'explorer cette thématique à partir de l'interaction avec les ressources pour l'enseignement de la théorie des graphes. Le choix de la théorie des graphes est lié au fait qu'elle s'inscrit dans le cadre des mathématiques « contemporaines », et qu'elle est enseignée dans un large spectre de formations au Liban comme en France. Notre méthodologie prend appui tout d'abord sur des entretiens avec des enseignants-chercheurs. Nous nous appuyons sur l'approche documentaire du didactique, en particulier le concept de schéma d'utilisation de ressources pour caractériser leurs interactions avec des ressources issues de l'enseignement et de la recherche. Nous proposons par ailleurs une analyse de ressources conçues collectivement par des enseignants-chercheurs interviewés avec appui sur le concept de « connectivité », suivie par des observations de séances d'une enseignante-chercheuse, faisant partie des concepteurs des ressources analysées. Nous avons mis en évidence qu'une mise en regard des processus de conception des ressources et des processus de leur mise en œuvre nous permet de caractériser des différents facteurs qui impactent les pratiques des enseignants-chercheurs.

Mots clés en français : pratiques des enseignants-chercheurs, ressources, schèmes d'utilisation des ressources, invariants opératoires, connectivité, théorie des graphes.

Relationship between teaching and research in the documental work of teachers-researchers – the case of teaching graph theory

Our work deals with the teaching practices of university mathematics professors. These concur specificities: the articulation between teaching and research is an example. We seek to characterize the research impact in the teaching practices at university. We have chosen to explore this theme through the lens of the interaction with resources for teaching graph theory. The choice of graph theory is due to the fact that it is a branch of mathematics that belongs to "contemporary" mathematics, and that is taught in a wide spectrum of university majors in Lebanon as in France. Our methodology first draws on interviews with university professors. We rely on the documental approach, in particular the concept of the scheme of use of resources to characterize the interactions of university professors with resources issued from teaching and research. We also analyze resources designed collectively by some of the university professors interviewed using the concept of connectivity, followed by observations of sessions by a university professor, one of the designers of the resources analyzed. We have shown that a comparison of the processes of the design of resources and their implementation in class allows us to characterize the various factors that impact the practices of university professors.

Keywords: practices of teachers-researchers, resources, schemes of use of resources, operational invariants, connectivity, graph theory

Discipline : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET SCIENCES SOCIALES

Spécialité : Didactique des mathématiques

Université Libanaise
Sin-EI-Fil, Beyrouth – Liban

Université de Reims Champagne-
Ardenne
CEREP - EA 4692
57 rue Pierre Taittinger – 51100 REIMS

