

Ségrégation granulaire dans les astéroïdes lâchement agglomérés

Jérémy Sautel

▶ **To cite this version:**

Jérémy Sautel. Ségrégation granulaire dans les astéroïdes lâchement agglomérés. Matière Condensée [cond-mat]. Université de Lyon, 2021. Français. NNT : 2021LYSEN027 . tel-03435039

HAL Id: tel-03435039
https://theses.hal.science/tel-03435039

Submitted on 18 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.




N° National de Thèse : 2021LYSEN027

Thèse de doctorat de l'Université de Lyon

opérée par

l'École Normale Supérieure de Lyon

École Doctorale 52
École Doctorale de Physique et d'Astrophysique de Lyon

Discipline : Physique

Soutenue publiquement le 12/07/2021 par :

Jérémy SAUTEL

Ségrégation granulaire dans les astéroïdes lâchement agglomérés

Devant le jury composé de :

Mme. Kolb, Evelyne	Maître de conférences	Sorbonne Université	Rapportrice
M. Richard, Patrick	Directeur de recherche	CNRS - Université Gustave Eiffel	Rapporteur
M. Bonnefoy, Olivier	Professeur	École des Mines de St-Étienne	Examinateur
M. Vanel, Loïc	Professeur	Université Lyon 1	Examinateur
Mme. Vidal, Valérie	Directrice de recherche	CNRS - ÉNS de Lyon	Examinatrice
M. Taberlet, Nicolas	Maître de conférences	Université Lyon 1 - ÉNS de Lyon	Directeur

Être est plus indispensable qu'avoir.
Le rêve, c'est d'avoir de quoi être.

Frédéric Dard.

Ségrégation granulaire dans les astéroïdes lâchement agglomérés.

Cette thèse porte sur la ségrégation granulaire au sein des astéroïdes lâchement agglomérés, avec une approche surtout numérique mais aussi expérimentale. Ce travail est motivé par l'observation d'astéroïdes non monolithiques, mais formés de différents blocs maintenus ensemble par la gravitation, comme par exemple l'astéroïde Itokawa. On y constate la présence de nombreux gros rochers à la surface, et une inhomogénéité de leur répartition. Au vu des sollicitations mécaniques subies par les astéroïdes, un processus de ségrégation granulaire peut expliquer ces observations.
Un premier travail numérique porte sur un problème modèle : un astéroïde bidimensionnel, circulaire, soumis à des expansions isotropes et périodiques. Dans ce cadre, nous observons une ségrégation radiale, dont nous quantifions la netteté et la rapidité, avec un rôle important joué par le frottement solide et la rotation des grains. De plus, nous observons et étudions une ségrégation angulaire : les gros grains forment des lobes à la surface, rappelant le cas d'Itokawa.
Nous avons ensuite modifié la topologie de l'agrégat, retrouvant alors des analogues à la ségrégation radiale et à la ségrégation angulaire. Nous mettons ainsi en évidence une longueur d'onde typique quantifiant la distance entre lobes. Nous avons également étudié la ségrégation sous collisions, la vitesse d'impact et l'élasticité des contacts jouant alors un rôle important. Enfin, l'étude a été étendue au cas d'astéroïdes tridimensionnels sous expansions isotropes, montrant une dynamique particulière liant fortement ségrégation radiale et angulaire, et des lobes antipodaux de gros grains. Cela est très significatif vis-à-vis du cas d'Itokawa.
Enfin, nous avons construit une expérience permettant d'étudier la ségrégation en champ gravitationnel central.

Mots-clés : milieux granulaires, astéroïdes, astrophysique, ségrégation, simulations.

Granular segregation in rubble-pile asteroids.

This thesis focuses on particle size segregation in rubble-pile asteroids, mostly by using numerical methods, but also with an experimental exploration. It is motivated by the fact that some asteroids are not monolithic, but instead consist of a assembly of rocks held together by gravitation, like for instance asteroid Itokawa. One notices an accumulation of big boulders at the surface, with a heterogeneous distribution. Given the mechanical environment of asteroids, size sorting processes are good candidates to explain these patterns.
The first part of the numerical work deals with a simplified problem : simulating 2D circular asteroids undergoing isotropic and periodic expansions. In this case, we observe a radial segregation and we quantify its typical speed and strength, highlighting the strong role played by friction and rotation. We also observe and study an angular segregation, with the big grains gathering into lobes at the surface, like on Itokawa.
Then, we modified the agregate's topology, which led to observing the analogous of radial and angular segregations. This enabled us to quantify the inter-lobes distance. We also studied the segregation process when the asteroid undergoes collisions : the impact velocity and the grains elasticity thus play an important role. Furthermore, we extended our numerical study to the case of 3D spherical asteroids, and observed very interesting dynamics linking radial and angular segregations with the formation of opposed lobes of big grains. This is very significant considering the surface of Itokawa.
Finally, we built a simple experiment dedicated to the study of granular segregation in a central force field.

Keywords : granular matter, asteroids, astrophysics, segregation, simulations.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse Nicolas Taberlet pour ces trois années de thèse. Ton encadrement m'a été extrêmement profitable, tant du point de vue scientifique que du point de vue humain. Scientifiquement, tu as toujours été disponible pour une petite discussion en plus de nos échanges de chaque semaine, tu m'as toujours proposé des pistes enthousiasmantes et m'a bien sûr aidé à opérer un tri efficace parmi les quelques pistes que je proposais par ailleurs. Bref, c'était clairement très agréable de faire de la recherche dans ce cadre. Et, j'en viens aux aspects moins scientifiques, nos discussions pouvaient aussi se terminer par des échanges beaucoup moins en lien avec le sujet de thèse (et beaucoup plus avec Chamonix ou Sisteron !), mais tout aussi agréables et toujours teintées d'humour, quel que soit le sujet. C'est peu dire que de constater qu'une telle ambiance est un vrai plus pour travailler. Enfin, nos séances de badminton le jeudi étaient également de très bons moments, même si je regrette que tu sois resté invaincu jusqu'à ma soutenance... !

Je remercie également tous les membres de mon jury pour avoir accepté d'examiner mon travail : Évelyne Kolb et Patrick Richard, qui ont rapporté mon manuscrit, ainsi que Olivier Bonnefoy, Valérie Vidal et Loïc Vanel. La séance de discussion a été riche, la bienveillance et l'enthousiasme du jury, ainsi que la multiplicité des questions et suggestions m'ont fait très plaisir et ont rendu cette discussion vraiment stimulante.

Bien entendu, je remercie ici tous mes amis : les sisteronnais et les marseillais avec qui nous avons gardé le lien, souvent car ils sont aussi devenus lyonnais et, cela va sans dire, toutes celles et tous ceux rencontrés au cours de ces sept années à Lyon ! Ce fut un réel plaisir de voir un grand nombre d'entre vous assister à la soutenance ! Un grand merci donc à Agathe, Alice, Maëlys, Ulysse, Alan, Andréane, Baptiste M.-C., Thibaut, Hélène, Élias, et tous les autres rencontrés avant la thèse. Parmi les connaissances du labo, je remercie l'ensemble des personnels d'enseignement et de recherche, permanents et non permanents, ainsi que les équipes administratives, de mécanique, d'électronique et d'informatique pour leur bonne humeur et leur disponibilité. Merci en particulier à Thierry et Jean-Christophe pour leur souci constant du bien-être des doctorants et pour avoir continué de guider le fonctionnement du labo à travers la crise sanitaire. La team pause café/passerelle mérite bien entendu une mention spéciale : Alizée, Ariane, Louison, Baptiste F., Baptiste B., Aubin, Pol, Thomas B. et Thomas B. (!) et encore d'autres que j'oublie sûrement ! Une mention spéciale également pour mes co-bureaux (plus ou moins officiels) : Lucas, Amélie et Marceau.

Bien sûr ces trois années de thèse auraient été très différentes sans le projet Jolidon, qui nous a beaucoup occupé, surtout en deuxième année. C'était une très belle aventure et le résultat fait très plaisir à voir. Un grand merci donc à Antoine, Benjamin C., Benjamin G., Camille,

David, Éric, Louis, Louisine, Michou et Théo. Et bien sûr, un merci tout particulier à Martin, Shahrâm et Amélie pour tous les bons moments passés à l'appartement. J'oublie sûrement du monde, mais la liste n'est de toute façon pas exhaustive !

Certains enseignants m'ont particulièrement donné l'envie de poursuivre les études jusqu'à cette soutenance, qu'ils en soient tous chaleureusement remerciés, avec une mention particulière pour M. Prever-Loiri au lycée Paul Arène à Sisteron. Enfin, je remercie beaucoup, énormément même, mes parents et mon frère pour avoir pris spécialement des jours de congé et fait le déplacement, afin d'organiser le pot de thèse et aussi assister à (et filmer !) la soutenance. C'est formidable de pouvoir compter sur votre soutien. Je suis aussi très reconnaissant envers les autres membres de la famille qui se sont intéressés à mes études jusqu'à cette soutenance, en particulier mes grand-parents.

Table des matières

Résumé - Abstract **5**

Remerciements **7**

Avant-propos **13**

I Introduction générale et état de l'art **15**
I- Astéroïdes . . . 16
I-1. Définition . . . 16
I-2. Formation et distribution spatiale . . . 18
I-3. Caractéristiques physico-chimiques . . . 22
II- Astéroïdes granulaires . . . 27
II-1. Milieux granulaires . . . 27
II-2. Observation de la ségrégation dans les astéroïdes granulaires . . . 36
II-3. Environnement spécifique aux astéroïdes granulaires . . . 38
III- Ségrégation granulaire : état de l'art . . . 44
III-1. Ségrégation granulaire terrestre . . . 44
III-2. Explorations de la ségrégation dans les astéroïdes granulaires . . . 55
III-3. Conclusion et orientations du travail effectué . . . 59

II Méthodes numériques **61**
I- Choix du type de simulation . . . 62
I-1. Présentation des grands types de simulation . . . 62
I-2. Dynamique moléculaire de sphères molles . . . 63
II- Fonctionnement général de l'algorithme . . . 64
II-1. Initialisation de la simulation . . . 64
II-2. Calcul des forces de gravité . . . 66
II-3. Recherche des contacts . . . 66
II-4. Calcul des forces de contact . . . 69
II-5. Intégration des équations du mouvement . . . 74
II-6. Compléments sur la formation et l'évolution de l'astéroïde . . . 74
II-7. Remarque sur les valeurs numériques des paramètres . . . 75
III- Conclusion . . . 77

III Simulations d'un astéroïde à deux dimensions sous expansions isotropes **79**
I- Présentation du cadre de l'étude . . . 81
I-1. Perturbations appliquées à l'astéroïde . . . 81
I-2. Position du centre de masse . . . 85

II- Grandeurs caractéristiques de la ségrégation . . . 86
II-1. Observations de la ségrégation . . . 86
II-2. Définition des quantités utiles à l'étude de la ségrégation . . . 88
II-3. Influence de l'état initial . . . 92
II-4. Déplacements moyens des grains . . . 95
III- Évolution en fonction des différents paramètres . . . 96
III-1. Influence du coefficient de restitution . . . 96
III-2. Influence de la durée de la perturbation . . . 97
III-3. Influence du coefficient de frottement . . . 102
III-4. Influence du moment d'inertie . . . 108
III-5. Synthèse sur l'importance des déplacements moyens . . . 114
IV- Exploration de différentes distributions en taille . . . 118
IV-1. Variations sur la distribution binaire . . . 118
IV-2. Distributions continues . . . 124
V- Ségrégation angulaire . . . 130
V-1. Observation et quantification . . . 130
V-2. Influence des paramètres de la simulation . . . 135
V-3. Dynamique des lobes . . . 137
VI- Conclusion . . . 139

IV Topologie modifiée : bande de grains sous expansions transverses 141
I- Présentation de l'étude . . . 142
I-1. Motivation et implémentation . . . 142
I-2. Caractéristiques des perturbations . . . 144
I-3. Degré de ségrégation . . . 145
I-4. Comportement sous une perturbation . . . 146
II- Ségrégation verticale . . . 147
II-1. Observation . . . 147
II-2. Influence du coefficient de frottement . . . 149
II-3. Influence du moment d'inertie . . . 151
II-4. Influences géométriques . . . 153
III- Ségrégation horizontale . . . 158
III-1. Observation et quantification . . . 158
III-2. Nombre et position des lobes . . . 163
III-3. Dynamique dans la région des petits grains . . . 170
IV- Conclusion . . . 174

V Simulations d'astéroïdes bidimensionnels soumis à des collisions aléatoires 175
I- Perturbations par collisions . . . 176
I-1. Présentation générale . . . 176
I-2. Comportement de l'agrégat sous une collision . . . 177
II- Ségrégation radiale sous collisions . . . 180
II-1. Observations . . . 180
II-2. Déplacements moyens des grains . . . 181
II-3. Influence de la vitesse de collision . . . 184
II-4. Influence du coefficient de frottement . . . 187
II-5. Influence du moment d'inertie . . . 188

III- Conclusion . . . 191

VI Simulations d'astéroïdes tridimensionnels soumis à des perturbations isotropes 193
I- Présentation de l'étude . . . 194
I-1. Taille de l'astéroïde et choix du nombre de grains . . . 194
I-2. Énergie injectée par une perturbation . . . 194
I-3. Degré de ségrégation . . . 196
II- Résultats . . . 197
II-1. Simulations 3D « classiques » . . . 197
II-2. Simulations 3D avec des propriétés inertielles 2D . . . 204
II-3. Simulations intermédiaires . . . 207
III- Conclusion . . . 214

VII Exploration expérimentale de la ségrégation en champ central 215
I- Présentation de l'expérience . . . 216
I-1. Imitation d'un champ gravitationnel central . . . 216
I-2. Préparation du milieu granulaire . . . 219
I-3. Perturbations et suivi du milieu granulaire . . . 219
II- Expériences menées et résultats . . . 222
II-1. Calibration de la réponse du pot vibrant . . . 222
II-2. Tentatives d'observation de la ségrégation . . . 225
III- Conclusion . . . 227

Conclusion et perspectives 229

Bibliographie 231

Avant-propos

Le présent manuscrit décrit les travaux réalisés, ainsi que les résultats obtenus, dans le cadre de cette thèse portant sur la ségrégation granulaire dans les astéroïdes lâchement agglomérés. Cette étude a été principalement menée à l'aide de simulations numériques, et une première exploration expérimentale du sujet a été effectuée. Ce manuscrit se divise en sept chapitres dont nous proposons ci-dessous une succinte description. Le chapitre I introduit le sujet et motive notre travail : il présente les caractéristiques générales des astéroïdes granulaires, les observations de la ségrégation sur ces astéroïdes, ainsi que leur environnement particulier. Ce chapitre est également l'occasion de dresser un état de l'art de la ségrégation granulaire en taille dans les granulaires terrestres, et de présenter les premières explorations de la ségrégation au sein des astéroïdes granulaires. Le chapitre II présente les méthodes numériques utilisées. Les résultats obtenus à l'aide de simulations numériques sont ensuite détaillés dans les chapitres III à VI. Le chapitre III décrit les simulations d'agrégats bidimensionnels soumis à un premier type de perturbations, simples et isotropes. Le chapitre IV s'intéresse plus particulièrement à l'influence de la géométrie du champ gravitationnel sur la ségrégation. Le chapitre V explore un autre type de perturbations, en faisant subir des collisions à un agrégat bidimensionnel. Le chapitre VI constitue une extension des simulations du chapitre III au cas d'agrégats tridimensionnels. Enfin, le chapitre VII décrit notre première étude expérimentale de la ségrégation granulaire en champ central, et ouvre les pistes pour la poursuite et le développement de cette étude.

Note : afin d'alléger les renvois, toute référence à une section (ou sous-section, etc) du type « voir la Sec. II- », faite dans un chapitre donné, se rapporte par défaut à la section ainsi numérotée au sein de ce même chapitre. Si la référence se rapporte à une section d'un autre chapitre, ce dernier est spécifiquement mentionné, en écrivant par exemple « voir la Sec. II- du Chap. I ».

Chapitre I

Introduction générale et état de l'art

Oh, le grand air
Tournez le vent, la dune à l'envers
Tournez le ciel et tournez la terre
Tournez, tournez le grand air

Alain Souchon.

Le but de ce premier chapitre est de définir le contexte général dans lequel s'inscrit cette thèse. Il s'agit donc d'abord de présenter les astéroïdes granulaires : leur nature, leur environnement, les explorations et études dont ils ont été et sont l'objet. De cette présentation nous tirons les motivations pour l'étude de la ségrégation granulaire dans les astéroïdes, et enfin nous résumons l'état actuel des connaissances sur la ségrégation granulaire, en environnement terrestre d'une part et sur les astéroïdes d'autre part.

Sommaire

I- Astéroïdes **16**
I-1. Définition 16
I-2. Formation et distribution spatiale 18
I-3. Caractéristiques physico-chimiques 22
II- Astéroïdes granulaires **27**
II-1. Milieux granulaires 27
II-2. Observation de la ségrégation dans les astéroïdes granulaires 36
II-3. Environnement spécifique aux astéroïdes granulaires 38
III- Ségrégation granulaire : état de l'art **44**
III-1. Ségrégation granulaire terrestre 44
III-2. Explorations de la ségrégation dans les astéroïdes granulaires 55
III-3. Conclusion et orientations du travail effectué 59

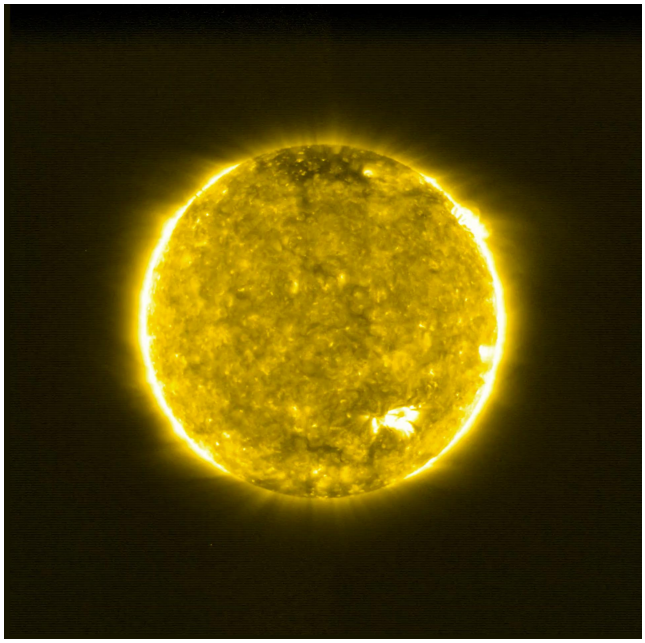
I- Astéroïdes

I-1. Définition

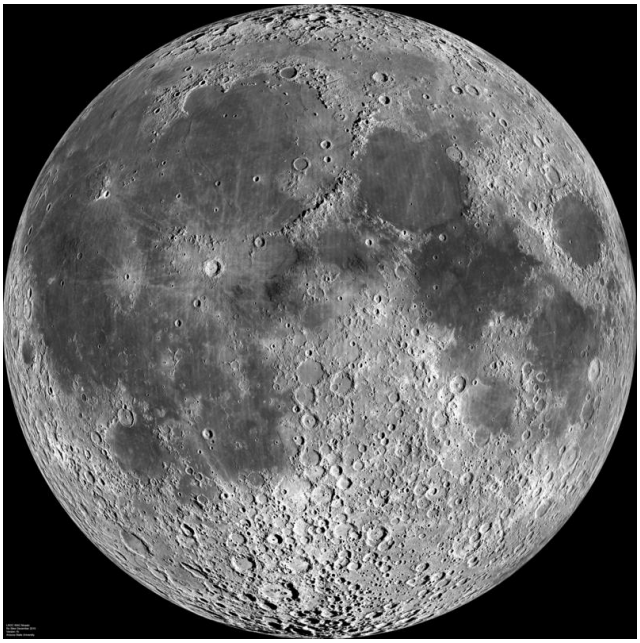
Avant toute chose, il nous faut définir précisément ce que l'on appelle un astéroïde. On se place dans le cadre du système solaire, à savoir l'ensemble des objets célestes dont la dynamique est dominée par l'interaction gravitationnelle avec le Soleil. Bien entendu, il existe d'autres interactions entre les corps du système solaire et le Soleil, notamment du fait de l'émission de matière (le vent solaire) et de rayonnement électromagnétique par le Soleil. De plus, les corps du système solaire interagissent également entre eux. En conséquence de cette définition, le système solaire possède un rayon d'environ deux années-lumière. En effet, l'étoile la plus proche du Soleil, *Proxima Centauri*, est distante d'environ 4 années-lumière [66, 105], et possède par ailleurs une masse inférieure à celle du Soleil. Le système solaire ainsi défini contient donc divers corps, que l'on classe en quatre catégories principales [57].

- Le Soleil : il possède à lui seul $99,85\%$ de la masse totale du système solaire (voir la Fig. I.1a).
- Les planètes. Pour être classé parmi les planètes, un objet doit vérifier trois conditions : être en orbite autour du Soleil, être suffisamment massif pour être rendu sphérique par sa propre gravité, qui domine alors les forces de cohésion internes, et ne pas avoir de corps ayant une orbite proche et une taille comparable dans son voisinage. Cette dernière condition, adoptée en 2006 par l'IAU, a mené à évincer Pluton du groupe des planètes à cause de la présence de Charon. On compte donc huit planètes dans le système solaire : les quatre planètes telluriques (Mercure, Vénus, la Terre et Mars) et les quatre géantes gazeuses (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune), citées par ordre croissant d'éloignement au Soleil. Les objets qui, comme Pluton, respectent les deux premières conditions mais pas la dernière, sont appelés « planètes naines » et sont au nombre de cinq.
- Les satellites : ce sont les corps en orbite autour d'une des planètes.
- Les petits corps du système solaire : cette catégorie réunit tous les corps en orbite autour du Soleil mais pas assez massifs (et donc pas assez sphériques) pour être considérés comme une planète ou une planète naine. Cette catégorie est donc très vaste, et comprend de très nombreux corps dont les astéroïdes. On isole généralement les comètes, qui se caractérisent par une orbite de forte excentricité et l'émission de gaz et de poussières au voisinage du périhélie, le gaz étant formé par sublimation (voir la Fig. I.1d) [85].

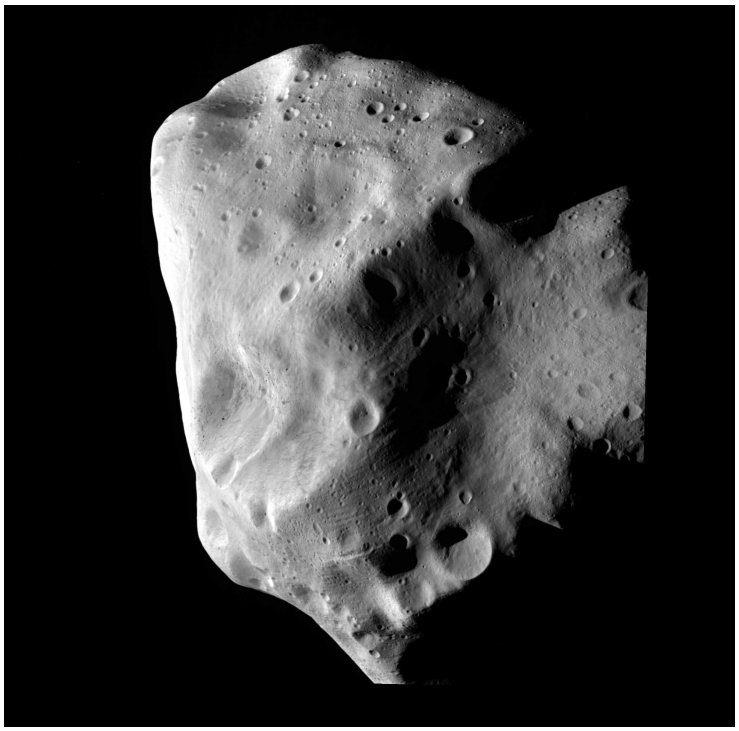
Signalons enfin que toute la matière du système solaire n'est pas condensée dans ces quatre catégories, puisqu'il faut aussi prendre en compte le vent solaire, qui est un plasma d'ions et d'électrons émis par le Soleil. Au sein de la catégorie des petits corps qui ne sont pas des comètes, l'IAU distingue trois sous-ensembles principaux. Ainsi, on ne retient comme astéroïdes que les corps dont la taille dépasse un mètre. Pour les tailles comprises entre 30 micromètres et un mètre, on parle de météoroïdes, et en deçà de 30 micromètres, de poussières. Ces limites sont arbitraires, mais permettent de définir ce que l'on désigne usuellement par le terme astéroïde. Par ailleurs, on exclut usuellement du terme « astéroïde » les corps situés au-delà de Neptune, qui sont dénommés « objets transneptuniens ». Dans ce cadre, l'IAU recense 547966 astéroïdes dans le système solaire au 27 janvier 2021. Ce nombre élevé, et la diversité d'objets qu'il recouvre, s'expliquent par l'histoire de notre système solaire et le processus de formation des astéroïdes.



(a) Le Soleil, photographié par le satellite *Solar Orbiter* le 30 mai 2020 (crédits image : ESA).



(b) La face visible de la Lune, photographiée par la sonde *Lunar Reconnaissance Orbiter* en décembre 2010 (crédits image : NASA).



(c) L'astéroïde Lutetia, photographié par la sonde *Rosetta* en 2010 (crédits image : ESA).



(d) La comète de Halley, photographiée lors de son passage près de la Terre en 1985 (crédits image : James Balog).

FIGURE I.1 – Photographies de quelques corps du système solaire.

I-2. Formation et distribution spatiale

I-2.a) Premières observations des astéroïdes

Le premier astéroïde connu est (1) Cérès, découvert par hasard par Giuseppe Piazzi en 1801 alors qu'il cherchait à observer une étoile [84, 164]. La relative lenteur du mouvement de Cérès fit songer à Piazzi qu'il ne s'agissait pas d'une comète. Dans les années qui suivirent, d'autres astéroïdes furent découverts : (2) Pallas en 1802, (3) Junon en 1804 et (4) Vesta en 1807, ayant tous leur orbite entre celles de Mars et Jupiter, comme Cérès. Ces quatre corps furent longtemps considérés comme des planètes, jusqu'à la découverte de nombreux autres petits corps à partir de 1845. On commença alors à distinguer la catégorie des astéroïdes, à laquelle ils se voient logiquement rattachés. Par ailleurs, du fait de sa sphéricité, Cérès a intégré le groupe des planètes naines lorsque celui-ci a été défini en 2006. Les astéroïdes identifiés à ce jour et dont la trajectoire est connue présentent une distribution spatiale particulière. La majeure partie d'entre eux se situent dans la ceinture principale d'astéroïdes, située entre Mars et Jupiter. Les orbites de ces astéroïdes se caractérisent par un demi grand-axe compris entre $2,1$ et $3,3$ UA [1]. L'abondance d'astéroïdes dans cette région du système solaire s'explique par le processus de formation de ce dernier.

I-2.b) Formation du système solaire

En l'état actuel des connaissances, le modèle privilégié correspond à l'hypothèse dite de la « nébuleuse solaire » [116]. Selon ce modèle, le système solaire provient d'un nuage moléculaire dense et froid, comme on en trouve en grand nombre dans le milieu interstellaire [169]. Un tel nuage est le théâtre des interactions gravitationnelles entre ses constituants, qui le rendent gravitationnelement instable. Cet effet est néanmoins contré par l'agitation thermique des molécules, qui permet de stabiliser le nuage si sa température est suffisante [28]. C'est pourquoi on observe encore des nuages moléculaires dans le milieu interstellaire. Mais un tel état reste sensible aux diverses perturbations extérieures, notamment aux événements majeurs comme par exemple l'explosion d'une Supernova proche. On peut alors avoir création d'une zone de forte densité dans laquelle de la matière s'accumule, et attire de plus en plus la matière environnante : c'est l'effondrement gravitationnel. Le moment cinétique barycentrique du nuage étant conservé, cette concentration de masse autour du barycentre s'accompagne d'une augmentation de la vitesse angulaire. Celle-ci entraîne une concentration de la matière du nuage dans le plan orthogonal à ce moment cinétique : c'est la formation du disque protoplanétaire [128, 131]. Quant au noyau central, il forme une étoile dès lors que sa masse devient suffisante pour amorcer la fusion nucléaire en son centre. La concentration de matière dans le disque protoplanétaire en rotation conduit à la formation de petits corps qui grossissent par accrétion de la matière environnante. Certains atteignent une taille suffisante pour devenir des planètes. Ils sont alors capables de piéger d'autres corps en orbite autour d'eux : les satellites. De plus, planètes et satellites « nettoient » leur orbite en attirant à eux les petits corps trop proches ou en les éloignant par effet de fronde gravitationnelle. C'est pourquoi la Lune, dépourvue d'atmosphère, est couverte de cratères. À la lumière de ce modèle, la ceinture d'astéroïdes apparaît comme un vestige du disque protoplanétaire du système solaire. Elle aurait pu mener à la formation d'une planète tellurique, mais la forte influence gravitationnelle de Jupiter empêcha cette évo-

1. L'unité astronomique (UA) correspond à la distance moyenne Soleil-Terre : 1 UA $\simeq 1,5 \times 10^{11}$ m, c'est-à-dire 150 millions de kilomètres.

lution [57]. Cette influence de Jupiter a d'ailleurs joué un rôle important dans l'évolution de la ceinture d'astéroïdes, et explique en grande partie la distribution spatiale actuelle des astéroïdes du système solaire.

I-2.c) Distribution spatiale des astéroïdes

Comme vu plus haut, la majeure partie des astéroïdes sont localisés dans la ceinture principale. Néanmoins, la distribution des astéroïdes n'est pas uniforme au sein de cette ceinture, comme le montre l'histogramme de la Fig. I.2. En effet, on constate que pour quatre valeurs particulières de demi grand-axe, on ne compte quasiment aucun astéroïde. Les zones correspondantes sont appelées « lacunes de Kirkwood » [198].

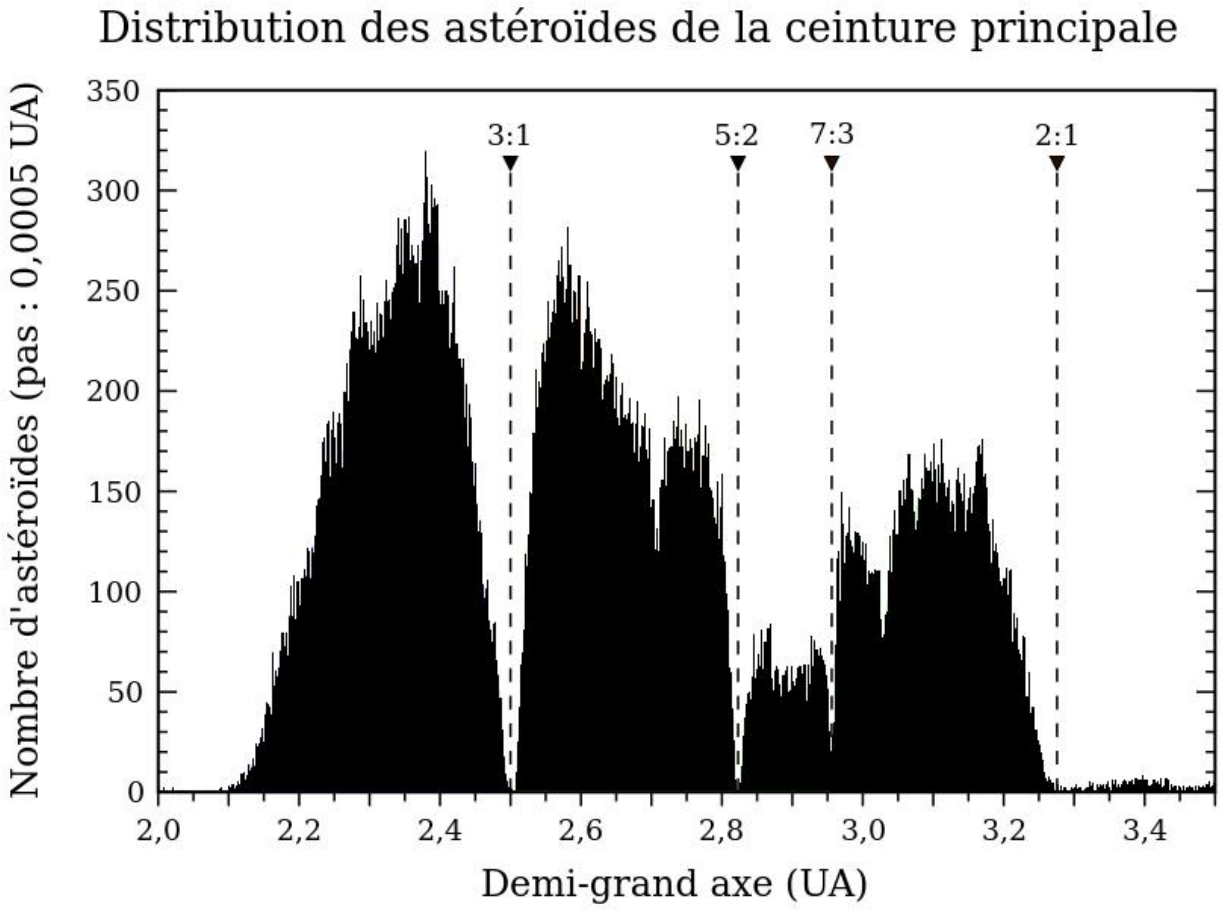


FIGURE I.2 – Histogramme du nombre d'astéroïdes en fonction du demi grand-axe de leur orbite. Les trajectoires résonantes avec celle de Jupiter (périodes orbitales dans les proportions 3:1, 5:2, 7:3 et 2:1 avec celle de Jupiter) sont dépeuplées : ce sont les lacunes de Kirkwood. Source : IAU Minor Planet Center.

Elles s'expliquent par l'existence de résonances avec l'orbite de Jupiter. Considérons que la période orbitale d'un astéroïde est telle qu'il effectue un nombre entier p de révolutions en un temps durant lequel Jupiter effectue un nombre entier q de révolutions, avec p et q de l'ordre de quelques unités. On appelle ceci une « résonance p:q » avec Jupiter. Alors les instants où l'astéroïde est au plus près de Jupiter tombent toujours au même point de sa trajectoire. De plus,

cela arrive toutes les n révolutions de l'astéroïde, avec $n = \min(p, q)$, donc assez fréquemment vu l'ordre de grandeur de p et q. Cette influence gravitationnelle répétée de Jupiter au même point de la trajectoire d'un astéroïde va faire augmenter l'excentricité de son orbite tout en conservant l'orientation du demi-grand axe. Cela va donc déstabiliser durablement la trajectoire de l'astéroïde considéré et dépeupler l'orbite correspondante, faisant apparaître une lacune de Kirkwood. Ces lacunes correspondent à des valeurs particulières de période orbitale et donc, en vertu de la troisième loi de Képler, à des valeurs particulières de demi grand-axe, d'où leur identification claire sur l'histogramme de la Fig. I.2.

Si la majorité des astéroïdes appartient à la ceinture principale d'astéroïdes, d'autres ont leur orbite hors de cette ceinture, comme on peut le voir sur la Fig. I.3. En particulier, deux groupes d'astéroïdes se situent au-delà de la ceinture principale.

- Les astéroïdes Troyens : le demi grand-axe de leur orbite a une valeur proche de $5,2$ UA, ce qui veut dire que leur orbite est proche de celle de Jupiter. Ils se situent en fait autour des deux points de Lagrange L4 et L5 du système { Soleil + Jupiter }. Ces deux points sont des minima pour le potentiel effectif d'un corps en interaction gravitationnelle avec le Soleil et Jupiter [68]. Notons que le point L4, le Soleil et Jupiter sont les sommets d'un triangle équilatéral, et qu'il en va de même pour le point L5. Une partie des astéroïdes Troyens (ceux autour du point L4) est donc en avance de 60° par rapport à Jupiter, tandis que les autres (ceux autour du point L5) sont en retard de 60° par rapport à Jupiter (voir la Fig. I.3).
- Les Centaures : il s'agit des astéroïdes dont le périhélie est au-delà de l'orbite de Jupiter et l'aphélie en deçà de l'orbite de Neptune. Pour les petits corps plus éloignés, on retrouve la catégorie des objets transneptuniens.

Enfin, de nombreux astéroïdes ont une orbite située entre le Soleil et la ceinture principale. La très grande majorité de ces astéroïdes ont une orbite croisant celle de la Terre ou de Mars. On parle alors respectivement d'astéroïdes géocroiseurs (ou *Near-Earth Objects* en anglais, souvent abrégé en *NEOs*) et d'astéroïdes aréocroiseurs (ou *Mars-crossing* en anglais). Parmi les astéroïdes géocroiseurs, on trouve (433) Éros, le premier du genre à avoir été découvert (dès 1898), ainsi que (25143) Itokawa, un bel exemple d'astéroïde granulaire, sur lequel nous reviendrons plus loin (voir notamment les Sec. I-3. et II-2.). La plupart de ces astéroïdes provient de la ceinture principale, dont ils sont sortis suite à une modification de leur trajectoire par résonance avec l'orbite de Jupiter voire celle de Saturne [12, 16]. On retrouve ici un corollaire à l'existence des lacunes de Kirkwood. Les astéroïdes géocroiseurs présentent par nature un risque de collision avec la Terre : la probabilité moyenne d'un tel événement pour un géocroiseur donné est évaluée à environ 1 % sur toute la durée de son existence en tant que géocroiseur [118]. Les objets de moins de 10 mètres sont généralement détruits en pénétrant dans l'atmosphère terrestre, mais on estime par ailleurs que l'intervalle moyen entre deux collisions avec un astéroïde de 14 mètres de diamètre est de 5 ans [182]. La trajectoire des géocroiseurs est donc sous étroite surveillance. C'est un des objectifs du téléscope SST (pour *space surveillance telescope*), lancé en 2011 et qui peut détecter des astéroïdes géocroiseurs ne mesurant que 5 à 10 mètres [165]. De plus, des missions sont prévues afin d'évaluer la possibilité de modifier la trajectoire d'un astéroïde, afin d'être en mesure d'empêcher de futures collisions éventuelles. Il s'agit de la mission DART (*Double Asteroid Redirection Test*) de la NASA et de la mission AIDA de l'ESA. La mission DART prévoit le lancement en 2021 d'un satellite ayant pour objectif de rentrer en collision en 2022 avec l'astéroïde satellite Dimorphos du système binaire (65803) Didymos [112]. Il est

prévu que la collision se fasse à une vitesse de 6 km.s^{-1}. Ensuite, la mission AIDA doit lancer en 2024 la sonde Hera qui pourra atteindre Dimorphos en 2027 et y étudier les conséquences de la collision [67].

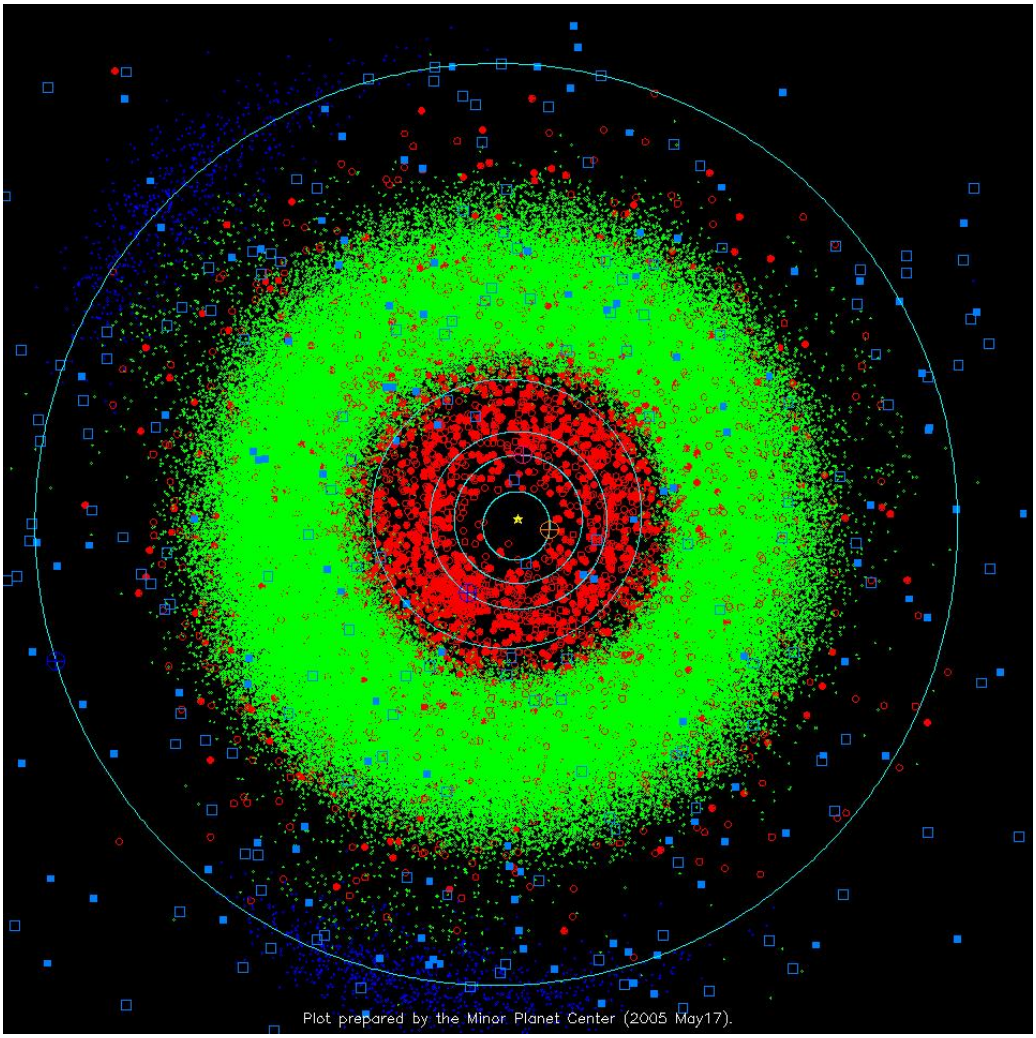


FIGURE I.3 – Repérage de tous les corps du système solaire situés entre le Soleil et Jupiter, à leur position du 17 mai 2005. Les cercles en bleu clair sont les trajectoires des planètes. Les astéroïdes de la ceinture principale sont représentés en vert, ceux entre le Soleil et la ceinture principale en rouge, et les Troyens en bleu foncé. Source : NASA.

Par ailleurs, plusieurs missions ayant pour but l'étude des astéroïdes géocroiseurs ont déjà eu lieu, rendues possibles par la proximité de ces objets. En 2000, la sonde NEAR s'est placée en orbite autour d'Éros puis s'y est posée, ce qui a permis d'obtenir une analyse chimique de la composition de sa surface [108, 187]. Quelques années plus tard, la sonde Hayabusa de la JAXA s'est placée en orbite autour d'Itokawa, et y a déposé un robot *lander* qui a pu prélever un échantillon de la surface de l'astéroïde. Cet échantillon a ensuite été analysé lors de son retour sur Terre en 2010 [64, 121, 148]. Ces missions fournissent de précieuses informations sur les caractéristiques physico-chimiques des astéroïdes, néanmoins c'est bien l'observation depuis la Terre qui apporte la plus grande quantité d'information à ce jour.

I-3. Caractéristiques physico-chimiques

Chacun des nombreux astéroïdes du système solaire se caractérise par plusieurs paramètres physico-chimiques qu'il est intéressant de mesurer. Parmi ceux-ci, on trouve naturellement la composition chimique, mais aussi des propriétés physiques élémentaires comme la taille, la masse, la forme, la porosité et la cohésion. D'autres propriétés sont également d'une grande importance, notamment celles liées à la dynamique de l'astéroïde, comme la géométrie de son orbite et sa vitesse de rotation, ainsi que les propriétés de surface comme sa température de surface et son albédo. Pour l'ensemble de ces grandeurs, les informations dont nous disposons sont en grande partie issues de l'observation terrestre : repérage et relevé des positions des astéroïdes, étude spectroscopique, mais aussi analyse des fragments d'astéroïdes qui atteignent la surface terrestre sous forme de météorites. Nous proposons ici un résumé des connaissances actuelles concernant les principales propriétés physico-chimiques des astéroïdes.

I-3.a) Composition chimique

Les mesures spectroscopiques constituent une première source d'information probante, car la surface de nombreux astéroïdes possède des bandes d'absorption bien définies dans le visible et l'infrarouge. Ces bandes étant connues pour être caractéristiques de certains minéraux, on en déduit aisément la minéralogie de la surface des astéroïdes étudiés [65]. Néanmoins, le très grand nombre d'astéroïdes étudiés, ainsi que la grande variété de bandes d'absorption observables, rendent compliquée l'émergence d'une classification spectroscopique simple des astéroïdes. En 1993, on dénombrait pas moins de 17 classes taxonomiques [65]. Ce nombre a atteint 26 en 2002 avec la classification taxonomique de Bus et Binzel [24,25]. Celle-ci apparaît comme assez robuste mais put être améliorée en 2009 par DeMeo, à la lumière de mesures effectuées sur plusieurs centaines d'autres astéroïdes, et en élargissant le spectre d'étude [45]. Enfin, une meilleure prise en compte des biais dus à la distance d'observation, à la taille des astéroïdes et à leur albédo permit d'affiner encore cette classification en 2013 [44]. Dans ce cadre, les classes taxonomiques les plus fournies sont :

- la classe C correspondant aux minéraux carbonés, qui avec ses sous-classes comprend environ 75 % des astéroïdes étudiés ;
- la classe S correspondant aux silicates, qui représente environ 15 % des astéroïdes étudiés ;
- la classe X rassemblant les sous-classes des minéraux métalliques, qui décrit environ 8 % des astéroïdes étudiés.

Les études spectroscopiques indiquent par ailleurs que les astéroïdes de la classe S sont surreprésentés au sein du groupe des géocroiseurs, à hauteur de 36 % [173].

Comme mentionné précédemment, l'analyse chimique des météorites donne également de bonnes informations sur la composition chimique des astéroïdes, notamment les géocroiseurs. En effet, les météorites atteignant la surface terrestre sont généralement des débris d'astéroïdes géocroiseurs. Les météorites sont classées selon quatre catégories principales, qui toutes nous renseignent sur les astéroïdes [195].

- Les chondrites, météorites pierreuses principalement constituées de silicates, mais contenant également des métaux et pouvant être carbonées. On parle de matériau indifférencié. Elles se caractérisent par la présence de chondres, qui sont des agglomérats millimétriques de silicates. En conséquence, on pense qu'elles proviennent de petits astéroïdes n'ayant

jamais connu de fusion en leur centre. Elles représentent environ 87 % des chutes rapportées.

- Les achondrites ont au contraire connu une fusion : les chondres et la roche ont fondu ensemble. Elles sont plus riches en calcium et moins riches en métaux que les chondrites. Elles sont très proches des roches de la lithosphère et on place donc leur origine dans la surface de gros astéroïdes ou même de la Lune ou de Mars. Elles représentent environ 8 % des chutes rapportées.
- Les météorites ferreuses, qui contrairement aux précédentes, contiennent plus de 35 % de métaux. Elles sont principalement constituées de fer et de nickel, à l'image du noyau de la Terre. Elles sont donc interprétées comme des morceaux de noyaux d'astéroïdes qui auraient perdu leur couche de silicates à la suite de collisions répétées. Elles représentent environ 5 % des chutes rapportées.
- Les météorites sidérolithes, qui sont mixtes et constituées à parts égales de silicates et d'un alliage de fer et de nickel. On situe leur origine à la limite entre le noyau métallique et la couche de silicates de gros astéroïdes, zone dans laquelle des silicates peuvent sédimenter dans du métal en fusion. Elles représentent moins de 1 % des chutes rapportées.

Notons que ces hypothèses sur l'origine des météorites sont cohérentes avec l'importance de la classe S, c'est-à-dire des surfaces essentiellement faites de silicates, au sein des astéroïdes géocroiseurs.

Enfin, les indications les plus directes sont fournies par les analyses d'échantillons prélevés directement sur des astéroïdes. De plus, ces analyses permettent aussi d'interpréter plus précisément les études spectroscopiques d'une part, et de tester les hypothèses sur l'origine des météorites (surtout chondrites et achondrites) d'autre part [121]. Par ailleurs, les missions effectuant ces prélèvements ont aussi pour objectif d'étudier en détail plusieurs propriétés physiques de l'astéroïde visé : taille, forme, densité et donc porosité, nature et topographie de la surface...

I-3.b) Propriétés physiques élémentaires

Les tailles et masses des astéroïdes sont extrêmement variées (voir la Fig. I.4). La taille de la plupart d'entre eux est comprise entre la limite inférieure de 1 m et 1 km [30]. La masse de ces astéroïdes leur confère donc un champ de pesanteur $\lesssim 10^{-6} g$ (où $g = 9,81$ m.s^{-2} est la pesanteur terrestre), on parle alors de micro-gravité. Néanmoins, on trouve également plusieurs astéroïdes dont la taille dépasse la centaine de kilomètres. C'est notamment le cas de Vesta, qui est le plus gros astéroïde depuis le classement de Cérès comme planète naine, et dont les dimensions principales sont d'environ 560 km, 540 km et 450 km [180]. Par ailleurs, sa masse atteint $2,7 \times 10^{20}$ kg, ce qui lui confère une densité de (3700 ± 300) kg.m^{-3} [111, 132]. On peut mettre ces valeurs en perspective en comparant Vesta à la Lune par exemple : il apparaît ainsi qu'il est 270 fois moins massif que celle-ci, et possède une densité très proche. Il est d'ailleurs intéressant de constater que les plus gros astéroïdes de la ceinture principale, dont Vesta, perturbent l'orbite de Mars au point que l'incertitude sur la masse de ces astéroïdes est devenue la principale source d'incertitude sur l'éphéméride de Mars [119]. Entre un astéroïde comme Vesta et des corps de 1 mètre de diamètre se situe donc une grande variété de situations, impliquant des formes et des densités très différentes.

Une autre grandeur pouvant varier considérablement d'un astéroïde à un autre est sa vitesse de rotation propre. En effet, les astéroïdes ont généralement un mouvement de rotation propre, dont les causes peuvent être multiples et seront discutées dans la Sec. II-3.. Si la majorité des



(a) (4) Vesta, le plus gros astéroïde du système solaire (crédits image : NASA).

(b) (433) Éros, photographié par la sonde *NEAR* (crédits image : NASA).

(c) L'astéroïde (25143) Itokawa, photographié par la mission Hayabusa en 2005 (crédits image : JAXA).

FIGURE I.4 – Illustration de la variabilité des tailles, formes et états de surface des astéroïdes du système solaire.

astéroïdes effectue entre 1 et 10 rotations par jour terrestre, l'astéroïde (288) Glaucé n'effectue qu'une rotation tous les 50 jours, tandis que certains petits astéroïdes (de l'ordre de quelques dizaines de mètres) effectuent de l'ordre de 100 voire 1000 rotations par jour [137]. Bien entendu, de telles vitesses de rotation impliquent de fortes contraintes internes associées aux forces centrifuges, ce qui impose un maximum de diamètre de l'astéroïde et un minimum de cohésion interne [153].

I-3.c) Albédo et propriétés thermiques de surface

Les propriétés de surface telles que l'albédo et la température ont également été très étudiées. L'albédo des astéroïdes est très variable, puisqu'il dépend de la composition chimique et de l'état de la surface. Il apparaît néanmoins que les astéroïdes dont l'orbite est de demi-grand axe plus faible ont statistiquement un albédo plus élevé [117]. La température de surface est par ailleurs estimée à l'aide du rayonnement émis par les astéroïdes. De plus, les récentes missions ont permis d'en savoir plus sur les propriétés thermiques de la surface des astéroïdes. C'est notamment le cas de la mission Hayabusa 2, qui a pu mesurer *in situ* et précisément le rayonnement infrarouge de (162173) Ryugu, ce qui a permis d'estimer la capacité calorifique des matériaux de sa surface [167]. De même, les données issues de la mission OSIRIS-REx ont permis de modéliser le comportement thermique de la surface de (101955) Bennu [145]. Ces modélisations thermiques sont très intéressantes puisqu'elles donnent des indications sur la porosité des matériaux de la surface, ainsi que sur la possibilité d'éjection de poussières sous l'effet de l'agitation thermique.

I-3.d) Porosité et cohésion

La structure interne des astéroïdes constitue un important point d'intérêt. En effet, tous les astéroïdes ne sont pas monolithiques, et une grande partie d'entre eux sont en fait des agrégats de rochers, cailloux, grains et poussières, maintenus ensemble par leur interaction gravitationnelle. Ces astéroïdes sont dits lâchements agglomérés, et communément appelés *rubble-pile asteroids* en anglais [78, 192]. Ils constituent un milieu granulaire sec, dont la cohésion est *a priori* de nature uniquement gravitationnelle. Des forces de Van der Waals très faibles s'exercent néanmoins entre les surfaces des grains, et leur rôle peut ne pas être négligeable (devant celui de

la gravité) pour de petits grains dans un environnement de micro-gravité [152]. L'existence de ces structures d'agrégat est bien sûr inspirée par les observations, et permet d'expliquer facilement plusieurs phénomènes [141]. Tout d'abord, on observe des chaînes de cratères sur certains astres (entre autres sur la Lune, et sur Ganymède et Callisto, deux satellites de Jupiter [196]), qui auraient donc subi une collision par un astéroïde lâchement aggloméré. En effet, l'astéroïde n'a pu être morcelé par sa traversée d'une atmosphère, la Lune n'en possédant aucune. De plus, on mesure pour de nombreux astéroïdes une densité plus faible que celle de ses constituants, que l'on explique par la porosité de l'agrégat. Cette porosité se définit par la proportion d'espace vide au sein de l'astéroïde. Par ailleurs, l'observation d'astéroïdes possédant un astéroïde sattelite (c'est le cas de Dimorphos, évoqué dans la Sec. I-2.) peut s'expliquer par une structure d'agrégat, dont une partie des constituants se serait détachée sous l'effet des forces de marée d'une planète par exemple, pour ensuite entrer en orbite autour du reste de l'agrégat. La désintégration de petits corps sous l'effet de forces de marée apparaît d'ailleurs comme une source importante de matériau pour constituer des agrégats [162]. Enfin, certains astéroïdes présentent une forme inhabituelle, comme par exemple Itokawa (voir la Fig. I.4c), dont la morphologie peut être due à la rencontre de deux agrégats formés autour de deux cœurs rocheux distincts. Dans le cas d'Itokawa, l'observation directe de sa surface par la mission Hayabusa permet de toute façon d'établir qu'au moins une certaine épaisseur de l'astéroïde est de nature granulaire (voir la Fig. I.5c), tout comme pour Bennu (mission OSIRIS-REx) et Ryugu (mission Hayabusa 2). De façon générale, les observations de la surface des astéroïdes, qu'ils soient monolithiques ou lâchement agglomérés, montrent une topographie complexe et inégale (voir la Fig. I.5). En effet, on relève de nombreux cratères certainement issus d'impacts, des reliefs positifs et négatifs, des accumulations locales de gros rochers ou au contraire des mers de fines poussières. Une revue complète des connaissances à ce sujet est proposée dans la Réf. [120], dont sont tirées les images de la Fig. I.5.



(a) Terrain grêlé sur Vesta.

(b) Cratère sur Éros.

(c) Rochers et mer de poussières sur Itokawa.

FIGURE I.5 – Vues des surfaces des astéroïdes de la Fig. I.4. Images tirées de la Réf. [120].

Comme pour la taille et la vitesse de rotation des astéroïdes, il existe une grande variété de situations pour la porosité et la cohésion, donc de multiples cas intermédiaires entre le monolithe et l'agrégat gravitationnel. Il est alors intéressant de repérer les astéroïdes sur un diagramme porosité/cohésion relative [141]. La cohésion relative se définit en rapportant la cohésion entre les différents constituants de l'astéroïde, c'est-à-dire la force attractive entre eux par unité de

surface[2], à la cohésion interne d'un de ces constituants, c'est-à-dire la contrainte nécessaire pour le rompre. Ce diagramme porosité/cohésion relative est présenté sur la Fig. I.6.

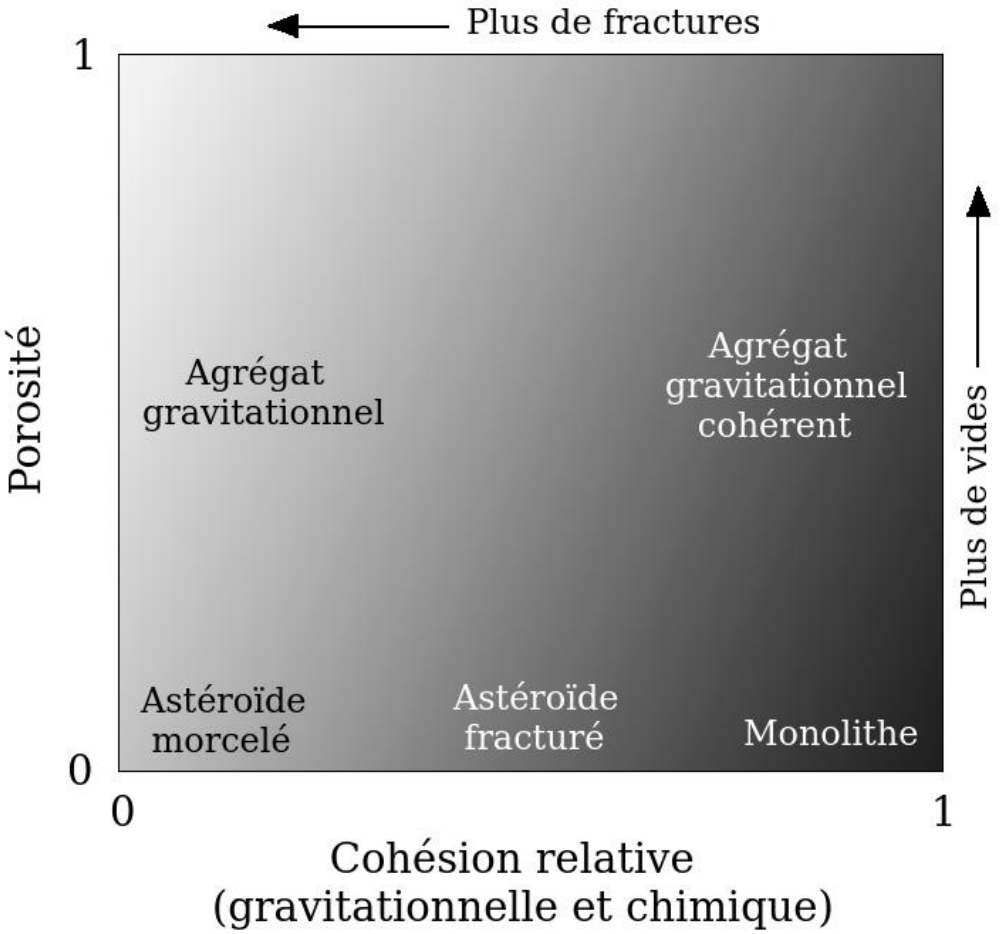


FIGURE I.6 – Diagramme porosité/cohésion relative permettant de repérer les petits corps du système solaire (astéroïdes et noyaux cométaires). Diverses catégories sont situées sur le diagramme. D'après la Réf. [141].

On peut identifier sur le diagramme plusieurs catégories de petits corps, dont la description est fournie en détail dans la Réf. [141], et dont nous proposons ici un résumé.

- Les monolithes sont d'un seul tenant, donc de porosité nulle, puisqu'il n'y pas de vide, et de cohésion relative égale à 1, puisqu'il n'y a qu'un seul constituant. Ils sont peu sensibles aux forces de marée, mais peuvent être endommagés par les collisions, les ondes de chocs pouvant sans problème parcourir l'astéroïde de part en part et se réfléchir en de multiples points.
- Les astéroïdes fracturés, de porosité nulle mais de cohésion relative intermédiaire. Leurs origines peuvent être variées : ils peuvent être issus de monolithes fracturés par des collisions, ou bien d'agrégats compactés. Leur plus faible cohésion relative les rend plus sensibles aux forces de marée et aux collisions.

2. On prend en compte la cohésion totale, donc les contributions d'origine chimique et gravitationnelle.

- Les astéroïdes morcelés sont de porosité et de cohésion relative quasi nulles. Ils correspondent à une limite du cas précédent avec des fractures extrêmement nombreuses, dans toute la structure. Ils sont donc plus susceptibles de se rompre sous l'effet des forces de marée ou de leur propre rotation, mais amortissent mieux les ondes de chocs engendrées par les collisions.
- Les agrégats gravitationnels cohérents présentent une porosité intermédiaire, et une forte cohésion relative, due à des interactions chimiques qui s'ajoutent à l'interaction gravitationnelle. C'est le cas de certains noyaux cométaires, qui contiennent également de la glace [13]. Cette glace fut formée dans le disque proto-planétaire aux origines du système solaire [103].
- On trouve enfin les agrégats gravitationnels de cohésion relative quasi nulle, simplement maintenus ensemble par interaction gravitationnelle.

C'est à cette dernière catégorie que correspondent les astéroïdes lâchement agglomérés dont l'existence est suggérée par les nombreuses observations énumérées plus haut. De plus, des mesures de porosité ont permis de ranger définitivement certains astéroïdes dans cette catégorie. C'est notamment le cas de l'astéroïde (253) Mathilde dont la porosité a été estimée, grâce à la mission NEAR, à environ 50 % [188]. Concernant Itokawa, les mesures de densité confirment la grande porosité indiquée par les images de sa surface. En effet, son survol par la mission Hayabusa a permis d'estimer sa masse totale, et donc sa masse volumique globale qui vaut $(1,95 \pm 0,14) \times 10^3$ kg.m^{-3} [1]. Mais la mission Hayabusa a également rapporté un échantillon du matériau de sa surface, dont la masse volumique s'élève à $3,4 \times 10^3$ kg.m^{-3} [184]. On peut alors estimer la porosité d'Itokawa à environ 43 %.

Les catégories très générales présentées ici ne sont bien sûr que des modèles limites, et il faut garder à l'esprit que le diagramme de la Fig. I.6 ne prend pas en compte la distribution en taille des constituants de l'astéroïde, ni les compositions plus complexes, typiquement le cas d'un cœur rocheux recouvert d'un agrégat de type granulaire. Le cas de l'astéroïde Éros est particulièrement intéressant, puisqu'on estime qu'il est fait d'un cœur cohérent mais fracturé [197] et recouvert de poussières et de rochers (milieu granulaire, type agrégat) [49], l'ensemble présentant une porosité d'environ 20 %.

Dans cette thèse consacrée à la ségrégation granulaire dans les astéroïdes lâchement agglomérés, c'est à la dernière catégorie citée, celles des « agrégats gravitationnels », que nous allons nous intéresser. De par leur nature, ces agrégats peuvent être étudiés comme un milieu granulaire, évoluant néanmoins dans un environnement bien particulier, et très différent du cadre terrestre usuel. Nous parlerons désormais d'**astéroïdes granulaires**. La section suivante a justement pour objet de préciser cette notion.

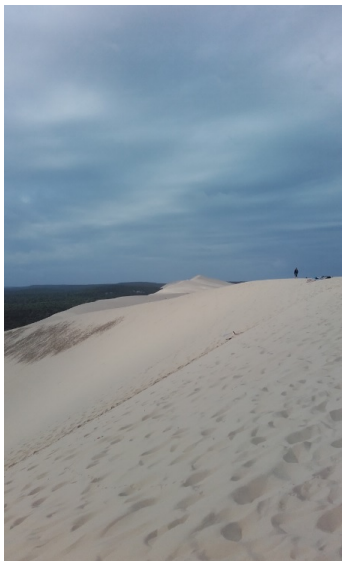
II- Astéroïdes granulaires

II-1. Milieux granulaires

II-1.a) Définition

Commençons par définir ce que l'on appelle milieu granulaire : il s'agit d'un assemblage de particules solides et rigides en interaction, toutes de taille supérieure à la centaine de micromètres [5, 51, 75]. Pour des tailles entre 1 μm et 100 μm, les forces d'attraction dues aux

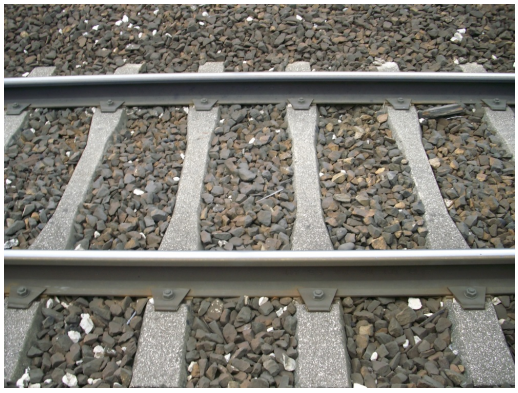
interactions de Van der Waals entre la surface de deux particules en contact ne sont plus négligeables devant le poids de chacune, de même que les effets de l'humidité ambiante : on parle alors de **poudres**. C'est par exemple le cas de la farine. En dessous du micromètre s'ajoute l'agitation thermique des particules qui n'est plus négligeable, et on parle alors de **colloïdes**. De plus, la définition des milieux granulaires suppose implicitement que le milieu en question est sec, c'est-à-dire plongé dans l'air et non dans un liquide, auquel cas on parlerait de **granulaire immergé** ou de **suspension** [5]. Par exemple, le lait est une suspension de colloïdes faits de matière grasse, dans une solution aqueuse.



(a) La dune du Pilat (Gironde) en juillet 2017 (photo J. Sautel).



(b) Empilements de cailloux au sommet du Taillefer (Isère) en juillet 2020 (photo J. Sautel).



(c) Ballast des voies SNCF à Viviers-du-Lac (Savoie) en août 2008 (photo J. Sautel).



(d) Saturne et ses anneaux photographiés par la sonde Cassini (crédits image : NASA).

FIGURE I.7 – Quelques exemples de milieux granulaires.

Cette définition des milieux granulaires couvre donc une grande variété de matériaux, dont beaucoup sont très présents dans la vie quotidienne. On peut citer, par ordre croissant de taille moyenne des constituants : le sable des plages, du désert du Sahara ou de la dune du Pilat (voir la Fig. I.7a), le sucre en poudre, de nombreux féculents (riz, blé, maïs, lentilles...), le bois

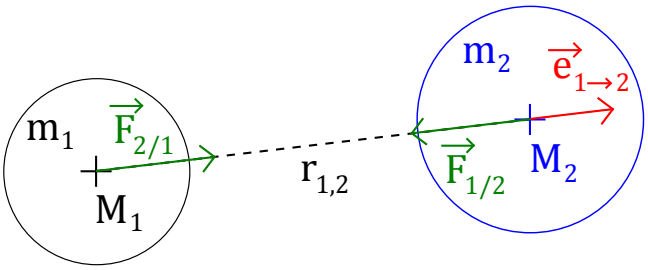
de chauffage en granules, le ballast des voies de chemin de fer (voir la Fig. I.7c), les éboulis, pierriers et accumulations de cailloux que l'on rencontre en montagne (voir la Fig. I.7b). Mais on trouve également des milieux granulaires hors du cadre terrestre : c'est bien sûr le cas des astéroïdes granulaires décrits dans la Sec. I-3.d) et auxquels nous nous intéressons, mais aussi des anneaux de Saturne (voir la Fig. I.7d). La nature granulaire de ces derniers apparaît d'ailleurs essentielle pour expliquer leur stabilité [8, 14]. En effet, la constitution d'un milieu granulaire fait qu'il est le siège de très nombreuses interactions entre ces constituants, notamment au niveau des contacts entre eux. C'est dans la physique complexe de ces interactions que réside la richesse de l'étude des milieux granulaires. Par exemple, un élément important est que le comportement des granulaires n'est pas toujours descriptible par une approche de type milieux continus. Néanmoins, une description des interactions de contact entre grains est possible, et même indispensable si l'on veut mieux appréhender la complexité des milieux granulaires.

II-1.b) Forces mises en jeu

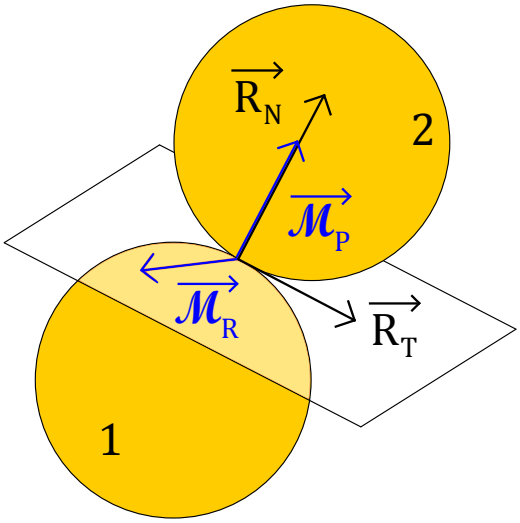
Dans cette partie, nous ne décrivons que les forces en présence dans un astéroïde granulaire. Nous excluerons donc en particulier les forces cohésives d'origine capillaire, qui sont *a priori* absentes dans ces astéroïdes, faute d'eau liquide. Le lecteur trouvera une description de ces effets dans les Réf. [5, 100]. Au sein d'un astéroïde granulaire, on trouve essentiellement les interactions gravitationnelles entre chaque paire de grains ainsi que les interactions de contact, ces dernières s'exerçant entre grains en contact uniquement.

Les interactions de contact sont d'origines multiples et dépendent de nombreux éléments : géométrie macroscopique et microscopique des grains, rugosité, propriétés chimiques des surfaces, en particulier possibilité de la présence de matériaux adsorbés à la surface des grains, propriétés mécaniques des surfaces, comme le comportement visco-élastique ou autre, etc. De façon générale, les interactions de contact se traduisent par une résultante $\overrightarrow{R}$ appliquée par un des deux grains en contact (notons le 1) à l'autre (noté 2) au niveau du point de contact, tandis que le grain 2 applique une force $-\overrightarrow{R}$ au grain 1. On décompose traditionnellement cette force en deux composantes : une composante dite normale et notée $\overrightarrow{R_{\mathrm{N}}}$ et une composante dite tangentielle et notée $\overrightarrow{R_{\mathrm{T}}}$. Notons que la composante tangentielle possède un moment non nul par rapport au centre du grain et intervient donc dans sa rotation. De plus, dans le cas où les grains sont en rotation, les actions au point de contact font intervenir un moment supplémentaire $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ appliqué par le grain 1 au grain 2. Comme pour la résultante, on décompose $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ en une composante $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{P}}}$ normale, que l'on appelle « moment de résistance au pivotement », et une composante tangentielle $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{R}}}$, que l'on appelle « moment de résistance au roulement »(voir la Fig. I.8b). De façon analogue, $\overrightarrow{R_{\mathrm{T}}}$ peut être vue comme une force de résistance au glissement, et $\overrightarrow{R_{\mathrm{N}}}$ comme une force de résistance à l'interpénétration. La condition $\overrightarrow{R_{\mathrm{N}}} \neq \overrightarrow{0}$ est d'ailleurs une caractérisation du fait que les grains 1 et 2 sont en contact.

Pour un granulaire sec comme les astéroïdes que nous considérons, et pour des grains de taille suffisante (typiquement de taille supérieure aux 100 μm évoqués plus haut), les interactions de contact se réduisent essentiellement à la répulsion élastique et au frottement solide. Nous proposons de détailler ces deux aspects.



(a) Notations utilisées pour décrire l'interaction gravitationnelle entre deux grains.



(b) Notations utilisées pour décrire l'interaction de contact entre deux grains. On a représenté les actions exercées par le grain 1 sur le grain 2 uniquement.

FIGURE I.8 – Représentations des notations utilisées.

II-1.c) Répulsion élastique

La répulsion élastique entre deux grains en contact est due au fait que chaque grain résiste à la déformation endurée dans le cadre de ce contact. Pour simplifier, considérons le cas de deux grains sphériques élastiques (toujours notés 1 et 2), tous deux de rayon R et de module d'Young E identique, et pressés l'un contre l'autre sous l'effet d'une force donnée $\overrightarrow{F_N}$. Les grains élastiques se déforment alors au niveau du point de contact et on observe en réalité un disque de contact, de rayon a. En conséquence de cette déformation des grains, le centre du disque de contact se trouve à une distance $R - \delta$ des centres des deux grains, δ étant l'écrasement. Plus le grain est résistant à la déformation, autrement dit plus E est important, moins il se déformera à intensité $F_N = ||\overrightarrow{F_N}||$ donnée, autrement dit moins a et δ seront importants. La relation reliant δ à F_N et aux propriétés élémentaires des grains (R et E) semble donc très importante dans ce problème appelé « contact de Hertz » [5, 81]. Un raisonnement simple en termes de lois d'échelle permet d'obtenir la dépendance de δ en fonction de F_N, E et R. En effet, on a géométriquement que $R^2 = (R-\delta)^2 + a^2$, soit $2R\delta = \delta^2 + a^2$ (voir la Fig. I.9). Pour de petites déformations telles que $\delta \ll a, R$, on obtient, au premier ordre non nul en δ :

$$2R\delta = a^2. \tag{I.1}$$

Par ailleurs, on se place dans le cadre de l'élasticité linéaire, donc en supposant que le matériau constituant les grains est isotrope, on peut appliquer la loi de Hooke qui relie la déformation locale ε à la contrainte σ par le module d'Young :

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{I.2}$$

En termes de loi d'échelle, la contrainte correspond ici à la force F_N appliquée sur un disque de rayon a, soit $\sigma \propto F_N/a^2$. De même la déformation correspond à un écrasement δ réparti sur

une zone de taille typique a, soit $\varepsilon \propto \delta/a$. En injectant ceci dans l'Éq. (I.2) et en éliminant a à l'aide de l'Éq. (I.1), on obtient :

$$F_{\mathrm{N}} \propto E\sqrt{R}\delta^{\frac{3}{2}}. \tag{I.3}$$

Cette relation est non linéaire : la raideur apparente du milieu définie par F_{N}/δ augmente donc avec δ, c'est-à-dire au fur et à mesure que l'on presse les deux grains l'un contre l'autre. Cet effet est dû à l'évolution linéaire de la surface de contact avec l'écrasement (voir l'Éq. (I.1)).

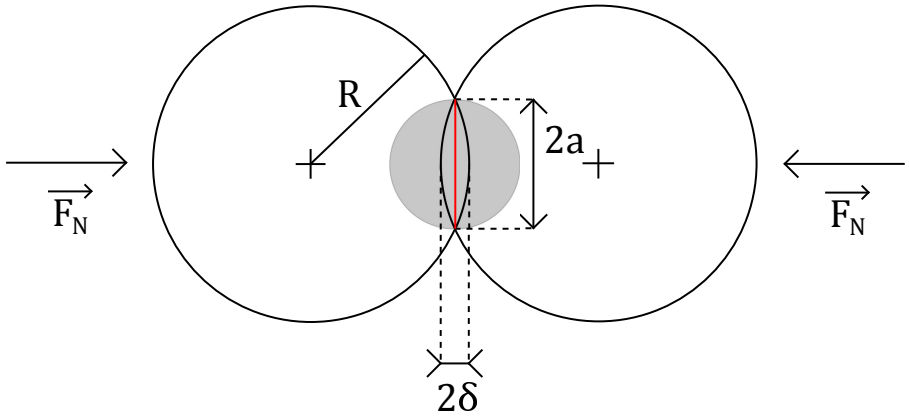


FIGURE I.9 – Contact de Hertz entre deux grains sphériques. La zone déformée est teintée en gris clair, et le disque de contact est représenté en rouge.

On peut résoudre analytiquement le problème du contact de Hertz entre deux sphères pour obtenir la relation exacte liant F_{N} à δ. Il faut alors prendre en compte le coefficient de Poisson ν des matériaux constituant les grains. Ce coefficient quantifie l'expansion du matériau, lorsqu'il est comprimé selon un axe, dans les directions orthogonales à cet axe de compression. En calculant la déformation en chaque point du disque de contact, on en déduit les contraintes en ces mêmes points. L'intégration des contraintes normales sur le disque donne alors l'expression suivante de F_{N} [98] :

$$F_{\mathrm{N}} = \frac{E\sqrt{2R}}{3(1-\nu^2)}\delta^{\frac{3}{2}}. \tag{I.4}$$

Calculons un ordre de grandeur de l'écrasement pour des billes de verre de 1 mm de diamètre empilées en tas. Le module d'Young du verre vaut $E \simeq 7 \times 10^{10}$ Pa et son coefficient de Poisson vaut $\nu = 0,25$. Étant données la masse volumique du verre $\rho = 2,5 \times 10^3$ kg.m^{-3}, la hauteur du tas h et sa compacité C, *a priori* comprise entre 55 % (tas aléatoire le moins compact possible [161]) et 74 % (tas organisé en réseau hexagonal compact), une bille située au fond du tas subit une contrainte $\sigma = \rho C h g$ où $g = 9,81$ m.s^{-2} est l'accélération de la pesanteur. Pour $h \sim 5$ m, on a $\sigma \sim 10^5$ Pa, et donc $F_{\mathrm{N}} = \pi R^2 \sigma \sim 10^{-1}$ N avec $R = 0,5$ mm. En utilisant l'Éq. (I.4), on obtient finalement $\delta \sim 100$ nm. L'approximation des petites déformations est donc bien respectée, mais l'écrasement ainsi prédit est en fait plus faible que les écarts à la sphéricité pour une bille de verre réelle. Néanmoins, l'Éq. (I.4) est expérimentalement valide tant que l'hypothèse des petites déformations est respectée. En particulier, la non linéarité de la relation entre F_{N} et δ permet de prédire la possibilité de la propagation d'ondes mécaniques solitaires (solitons) dans une chaîne de billes en contact [122]. Ce problème a justement été

étudié expérimentalement, sur une chaîne de billes en acier ayant un rayon de 8 mm (tolérance de 2 μm), et cette étude a confirmé les prédictions théoriques issues de l'Éq. (I.4) [38].

Il est également possible de résoudre analytiquement le problème du contact entre deux cylindres identiques de rayon R, de longueur L, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν. On considère un contact latéral, de sorte que la surface de contact est un rectangle de longueur L et de largeur a, et on note toujours l'écrasement δ et la force pressante F_N. Il suffit de procéder par la même méthode que pour le contact entre deux sphères, et on obtient [89] :

$$F_\mathrm{N} = \frac{\pi E}{4(1-\nu^2)} L\delta. \tag{I.5}$$

Ainsi dans le cas de cylindres, on trouve une relation linéaire entre F_N et δ, autrement dit la raideur des cylindres ne dépend pas de l'écrasement. Cela s'explique par le fait que la surface de contact croît cette fois-ci comme $\sqrt{\delta}$, et non comme δ dans le cas de deux sphères en contact. Nous reviendrons sur l'intérêt de l'Éq. (I.5) dans le Chap. III. Notons enfin que la théorie des contacts de Hertz n'est plus valable dès que l'on sort de l'hypothèse des petites déformations, et plus généralement lorsque les contraintes et déformations ne vérifient plus la loi de Hooke, c'est-à-dire lorsque l'on entre dans un régime d'élasticité non linéaire voire de plasticité ou même de fractures.

On a supposé ici un contact statique entre grains, mais il est également possible que deux grains entrent en collision. Ils seront alors en contact durant un certain intervalle de temps, avec un écrasement variable. On constate expérimentalement que durant ce processus, une partie de l'énergie cinétique initiale des grains est dissipée. Cela est dû à plusieurs phénomènes : comportement viscoélastique des grains, possibilités de déformations plastiques voire de fractures (donc processus irréversibles), génération d'ondes de vibration dans les grains, qui seront ensuite atténuées, et génération d'ondes acoustiques rayonnées dans le milieu environnant [90]. La collision se caractérise donc par un coefficient de restitution de l'énergie, défini par $e_\mathrm{E} = E_{\mathrm{c,\ finale}}/E_{\mathrm{c,\ initiale}}$ avec $E_{\mathrm{c,\ initiale}}$ l'énergie cinétique totale des grains avant la collision et $E_{\mathrm{c,\ finale}}$ leur énergie cinétique totale après la collision. De même, on peut définir le coefficient de restitution du point de vue des vitesses des grains. Notons $\overrightarrow{v_{1,\mathrm{i}}}$ et $\overrightarrow{v_{2,\mathrm{i}}}$ les vitesses des grains avant la collision, $\overrightarrow{v_{1,\mathrm{f}}}$ et $\overrightarrow{v_{2,\mathrm{f}}}$ leurs vitesses après la collision, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire dirigeant l'axe joignant les centres des deux grains durant la collision. Le coefficient de restitution en vitesse noté e est alors défini par la relation [5] :

$$(\overrightarrow{v_{2,\mathrm{f}}} - \overrightarrow{v_{1,\mathrm{f}}}) \,.\, \overrightarrow{u} = e\,(\overrightarrow{v_{2,\mathrm{i}}} - \overrightarrow{v_{1,\mathrm{i}}}) \,.\, \overrightarrow{u}\,. \tag{I.6}$$

Il vérifie l'encadrement $0 \leq e < 1$. Considérons le cas de deux grains formant un système isolé. Le cas $e = 0$ correspond à un choc parfaitement inélastique, aussi appelé choc mou, à l'issue duquel les deux grains ont la même vitesse (éventuellement nulle) et sont donc en contact statique. Cela correspond à la dissipation totale de l'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique, c'est-à-dire à la perte d'une quantité d'énergie $E_\mathrm{perdue} = \mu(\overrightarrow{v_{2,\mathrm{i}}} - \overrightarrow{v_{1,\mathrm{i}}})^2/2$ où $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ est la masse réduite des deux grains de masses respectives m_1 et m_2. Le cas $e \to 1$ correspond à la limite idéale d'un choc parfaitement élastique, durant lequel l'énergie cinétique des grains est conservée. Le système étant isolé, l'impulsion l'est aussi, et de ces deux lois de conservation découle la conservation de la vitesse relative des deux grains. En pratique, e prend une valeur située entre ces deux limites et déterminée par les propriétés géométriques (taille, forme) et mécaniques internes (régime de déformation) de chaque grain d'une part, et par la dynamique des grains avant l'impact d'autre part. En effet, e dépend

de la vitesse d'impact, de l'angle formé par les trajectoires des grains avant l'impact, et de la rotation éventuelle des grains [61]. La prise en compte des propriétés viscoélastiques des grains voire de la possibilité de déformations plastiques durant la collision permet de modéliser la dépendance de e en fonction des vitesses d'impact [97,181]. Généralement, ces effets entraînent une décroissance de e en fonction de la vitesse relative d'impact [139]. Néanmoins, en pratique pour un milieu granulaire dense, avec des vitesses d'impact limitées, il est possible de considérer une valeur unique de e pour obtenir une description satisfaisante et suffisamment simple. En effet, la dissipation à l'œuvre dans un contact dynamique se modélise alors par l'application d'une force d'amortissement de type frottement fluide à chaque grain, proportionnelle à la dérivée temporelle de l'écrasement δ.

Les effets de répulsion élastique et de dissipation d'énergie que nous venons de décrire contribuent donc à la composante $\overrightarrow{R_\mathrm{N}}$ de la résultante des interactions de contact. Il reste à prendre en compte un autre processus dissipatif : le frottement solide, qui contribue à la composante $\overrightarrow{R_\mathrm{T}}$.

II-1.d) Frottement solide

L'origine microscopique du frottement solide est complexe et fait intervenir la géométrie des surfaces, leur élasticité notamment leurs propriétés sous cisaillement, leurs régimes de déformation plastiques et de fracture ainsi que d'éventuelles forces d'adhésion entre les deux solides considérés [5, 86, 90]. Il est toutefois possible de décrire plus simplement le frottement solide entre deux grains à l'échelle macroscopique, à l'aide des lois phénoménologiques d'Amontons-Coulomb.

- À partir de deux grains en contact statique, il faut que la norme de la réaction tangentielle $||\overrightarrow{R_\mathrm{T}}||$ atteigne la valeur $\mu_\mathrm{s}||\overrightarrow{R_\mathrm{N}}||$ pour que les grains se mettent à glisser l'un sur l'autre. Ici, $||\overrightarrow{R_\mathrm{N}}||$ désigne la norme de la réaction normale, et μ_s est le **coefficient de frottement statique** entre les deux grains. En l'absence de glissement, on a donc l'inégalité $||\overrightarrow{R_\mathrm{T}}|| < \mu_\mathrm{s}||\overrightarrow{R_\mathrm{N}}||$, qui laisse la réaction tangentielle indéterminée.
- Si les deux grains sont en glissement l'un par rapport à l'autre, on est dans le cas d'égalité $||\overrightarrow{R_\mathrm{T}}|| = \mu_\mathrm{d}||\overrightarrow{R_\mathrm{N}}||$ où μ_d est le **coefficient de frottement dynamique** entre les deux grains.

Notons que les coefficients μ_s et μ_d sont uniquement déterminés par le matériau dont sont faits les solides en contact ; ils ne dépendent ni de l'aire de la surface de contact, ni de la vitesse éventuelle de glissement (pour μ_d). On a généralement $\mu_\mathrm{d} < \mu_\mathrm{s}$ pour deux matériaux donnés, et les valeurs de ces coefficients excèdent rarement l'ordre de l'unité. Par conséquent, la mise en glissement nécessite que $||\overrightarrow{R_\mathrm{T}}||$ atteigne une valeur supérieure à celle qui sera la sienne durant le glissement, à condition que $||\overrightarrow{R_\mathrm{N}}||$ reste constante [5]. On observe alors une hystérésis du frottement solide, dont une illustration est le phénomène de collé-glissé (*stick-slip* en anglais). Ce phénomène est notamment à l'œuvre dans le déclenchement des tremblements de terre [19] et dans l'instabilité de pelage observée lorsque l'on décolle un morceau de ruban adhésif [42]. Cette hystérésis du frottement solide est également responsable de la complexité de la mécanique des milieux granulaires, puisque les valeurs des réactions tangentielles au repos sont alors dépendantes de l'histoire du système. On parle parfois de « charge mécanique » pour qualifier cette histoire. Cette dépendance est d'ailleurs liée au fait que la loi en cas de non glissement $||\overrightarrow{R_\mathrm{T}}|| < \mu_\mathrm{s}||\overrightarrow{R_\mathrm{N}}||$ ne fournit que des encadrements, rendant nécessaire la connaissance

de l'histoire du système pour déterminer entièrement les réactions tangentielles. Ainsi, dans le cas d'un tas de sable, l'état des contraintes au sein du tas dépend de la façon dont a été formé le tas, et il en va de même pour un astéroïde granulaire [186].

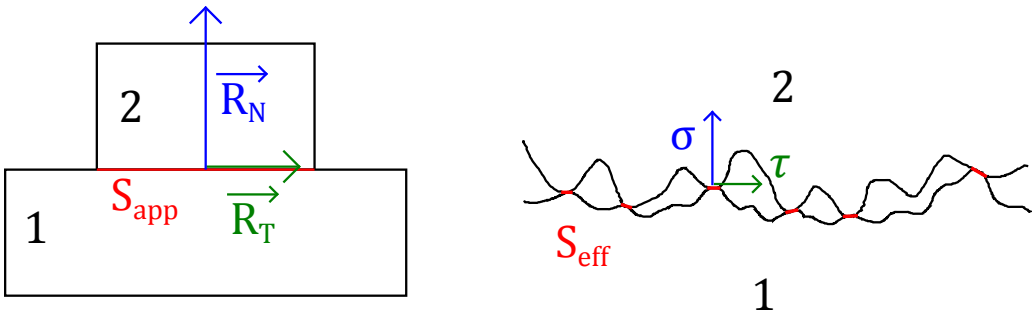


FIGURE I.10 – Illustration des notations utilisées dans la Sec. II-1.d) consacrée au frottement solide, des points de vue macroscopique (à gauche) et microscopique (à droite). On constate en particulier que la surface effective de contact S_{eff} entre les solides 1 et 2 est bien plus petite que leur surface apparente de contact S_{app}. D'après la Réf. [5].

Les lois d'Amontons-Coulomb peuvent sembler contre-intuitives, mais peuvent être justifiées par des approches microscopiques simplifiées, comme le modèle de Bowden et Tabor [18]. Ce modèle considère qu'en raison de la rugosité des surfaces des deux solides, le contact entre eux se fait en réalité uniquement au niveau de certaines aspérités, ce qui fait que la surface effective de contact S_{eff} est bien inférieure à la surface apparente de contact S_{app} (voir la Fig. I.10). De plus, il est raisonnable de supposer que plus $||\overrightarrow{R_N}||$ est élevée, plus les aspérités en contact sont écrasées et donc plus S_{eff} est élevée. C'est notamment cohérent avec la théorie du contact de Hertz, et l'expérience montre même une dépendance linéaire de S_{eff} en fonction de $||\overrightarrow{R_N}||$ [46]. Pour faire glisser les deux solides l'un par rapport à l'autre il faut donc appliquer une certaine contrainte tangentielle au niveau de chaque aspérité. Cette contrainte n'est pas forcément la même pour toutes les aspérités (elle dépend notamment de leur forme). Néanmoins, en considérant qu'elle ne dépend pas de la contrainte normale au niveau des aspérités en contact, et en notant $\langle\tau\rangle$ la contrainte moyenne à atteindre, il faudra que $||\overrightarrow{R_T}||$ atteigne approximativement $\langle\tau\rangle S_{\text{eff}}$ pour démarrer le glissement. Comme on peut relier linéairement S_{eff} à $||\overrightarrow{R_N}||$, on retrouve bien les lois d'Amontons-Coulomb. Celles-ci restent néanmoins phénoménologiques et présentent des limites de validité. En particulier, pour des réactions normales très importantes, les aspérités peuvent être complètement écrasées. Cela peut avoir plusieurs conséquences : en statique μ_{s} peut dépendre du temps de contact, la réaction normale travaillant au fur et à mesure et créant de nombreuses déformations irréversibles [10], et en dynamique μ_{d} peut dépendre de la vitesse de glissement [130].

II-1.e) Autres forces envisageables

À titre de remarque, il est possible d'évoquer d'autres forces pouvant intervenir dans les astéroïdes granulaires. Même si ceux-ci sont secs, les interactions de Van der Waals entre les surfaces des grains (évoquées dans la Sec. I-3.d)) résultent en une faible interaction cohésive. L'adsorption de matériaux à la surface des grains peut en particulier contribuer à cet effet. Deux grains sphériques de rayons respectifs r_1 et r_2, distants de $2d$ et couverts chacun d'une

couche d'adsorption d'épaisseur t, subissent une force attractive dont l'intensité F est donnée par [77, 129] :

$$F = \frac{A}{48(t+d)^2}\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}, \tag{I.7}$$

où A est la constante de Hamaker, correspondant à l'énergie potentielle typique due aux interactions de Van der Waals entre les surfaces des grains.

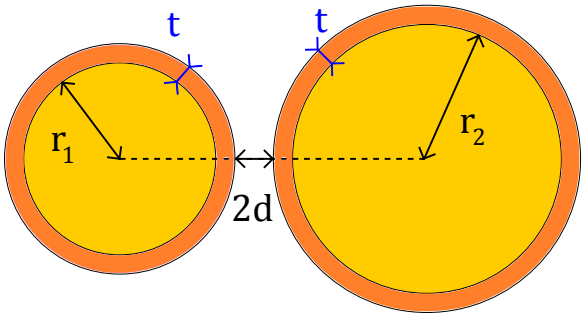


FIGURE I.11 – Schéma illustrant les notations utilisées dans l'Éq. (I.7). Les grains sont représentés en jaune, et les couches d'adsorption en orange.

Des prélèvements effectués sur le sol lunaire ont permis de mesurer $A = 4,3 \times 10^{-20}$ J et $t = 1,5 \times 10^{-10}$ m, soit en réalité une monocouche d'adsorption [129, 158]. Considérons que ces valeurs s'appliquent à deux grains sphériques de mêmes rayons $r_1 = r_2 = r$ d'un astéroïde donné. Par ailleurs, si chacun de ces grains est de masse volumique $\rho = 3,4 \times 10^3$ kg.m^{-3} (cas des constituants d'Itokawa par exemple) il subit son poids $P = (4/3)\pi r^3 \rho g_{\text{ast}}$ où g_{ast} est l'accélération de la pesanteur locale sur l'astéroïde considéré. Si $g_{\text{ast}} \sim 10$ m.s^{-2} comme sur Terre, on trouve $P \sim F$ pour $d = 0$ et $r \sim 100$ μm, ce qui correspond bien à la limite en taille utilisée pour distinguer les milieux granulaires et les poudres. Si par contre $g_{\text{ast}} \sim 10^{-5}$ m.s^{-2} comme sur Itokawa, on trouve $P \sim F$ pour $d = 0$ et $r \sim 10$ cm. La faiblesse de la pesanteur sur les astéroïdes granulaires a donc pour conséquence d'élargir, par rapport au cas terrestre, la gamme de taille sur laquelle les forces cohésives peuvent jouer un rôle important. Néanmoins, dans la mesure où nous nous intéressons à des agrégats gravitationnels peu cohésifs, et en l'absence de mesures relatives à la cohésion chimique des astéroïdes granulaires, nous ne prendrons pas en compte cette cohésion.

Par ailleurs, des interactions d'origine magnétique ne sont pas totalement à exclure. En effet, il est *a priori* possible de rencontrer, au sein d'un astéroïde granulaire, des débris provenant de la désintégration du cœur d'un autre astéroïde (à l'image des météorites ferreuses, voir la Sec. I-3.a)). De tels débris sont donc riches en fer et en nickel. Or ces deux élements présentent un comportement ferromagnétique lorsqu'ils sont purs, mais également sous certaines formes oxydées comme Fe_3O_4, ou encore sous certaines formes d'alliages comme la kamacite, faite de $90 - 95$ % de fer et $5 - 10$ % de nickel, très présente sur les astéroïdes [56]. Une légère aimantation rémanente de l'un des grains peut alors aimanter les grains voisins, entraînant alors une forte interaction attractive avec eux [50]. De plus, des grains ferromagnétiques sont très sensibles à leur environnement magnétique. Dans le cas des astéroïdes du système solaire, cet environnement est essentiellement dû à l'activité du Soleil et, pour les géocroiseurs, à la magnétosphère terrestre [101]. Toutefois, comme nous nous restreindrons dans la suite à des grains faits essentiellement de silicates, ces effets ne seront pas envisagés.

II-2. Observation de la ségrégation dans les astéroïdes granulaires

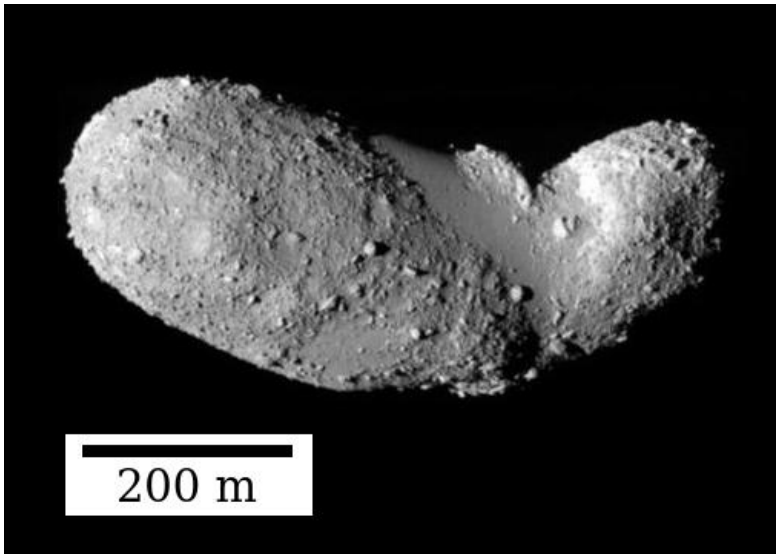
Maintenant que nous avons défini un milieu granulaire et décrit les interactions mises en jeu dans le cas d'un astéroïde granulaire, nous allons pouvoir nous intéresser au phénomène de **ségrégation**. C'est un phénomène typique des milieux granulaires polydisperses, c'est-à-dire constitués de grains de tailles variables, ou plus généralement contenant des grains dont certaines propriétés diffèrent. Comme son nom l'indique, la ségrégation granulaire correspond à un phénomène de tri spatial des grains dans un tel milieu, typiquement sous l'effet de perturbations mécaniques (chocs, vibrations) ou au cours d'un écoulement du milieu granulaire. Ce tri peut s'opérer selon la taille des grains [115], leur densité [183], leur forme [126], leur élasticité [22], leur coefficient de frottement [95] ou encore la chimie de leurs surfaces ou leur charge électrique [62]. Dans le cas des astéroïdes granulaires, c'est une ségrégation selon la taille que l'on observe. Nous proposons ici un bref tour d'horizon de ces observations, qui constituent la première motivation de notre travail.

Un des premiers astéroïdes concernés par ces observations est Itokawa (voir la Fig. I.12a). En effet, les images prises par la mission Hayabusa permettent de constater qu'environ 20 % de sa surface est recouverte de « mers » de fines poussières [3], d'aspect très lisse, tandis que d'autres régions ont au contraire un relief très accidenté et comportent de nombreux gros rochers [148]. On est donc en présence d'un état ségrégé, et on constate par ailleurs une corrélation entre la taille des grains et l'éloignement au centre de l'astéroïde. En d'autres termes, les plus gros constituants semblent se trouver préférentiellement dans les régions de plus haut potentiel gravitationnel [178]. De plus, l'étude des pentes locales à la surface d'Itokawa montre qu'elles sont toujours dirigées vers les mers de poussières, et que certains graviers sont alignés selon ces pentes [114]. Un autre point intéressant est la possibilité d'une ségrégation selon la forme des grains. En effet, les grains les plus sphériques semblent localisés dans les régions de haut potentiel gravitationnel [178]. Le même phénomène a d'ailleurs été observé dans des écoulements granulaires terrestres, expérimentalement et numériquement [138], mais va à l'encontre des résultats de certaines simulations Monte-Carlo [2, 144].

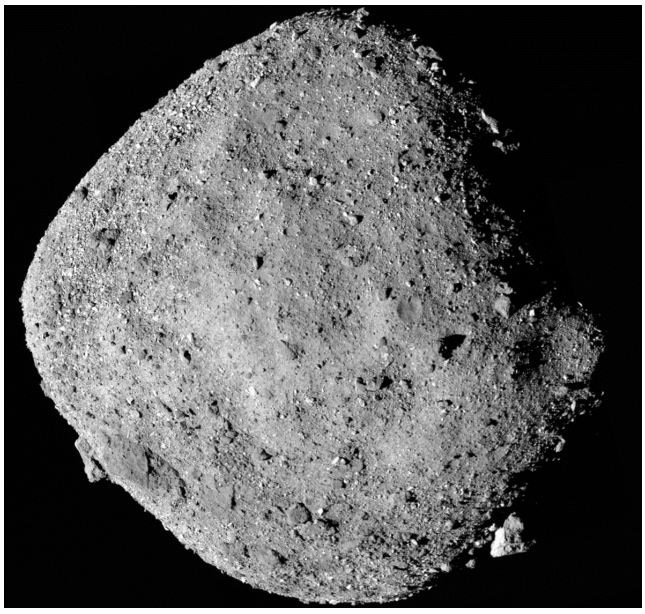
Depuis les observations d'Itokawa faites par la mission Hayabusa, d'autres astéroïdes granulaires ont été photographiés, et montrent également des indices d'une ségrégation selon la taille des constituants. C'est notamment le cas de Bennu (voir la Fig. I.12b), photographié par la sonde OSIRIS-REx de la NASA en 2019 [99] et de Ryugu (voir la Fig. I.12c), photographié la même année par la sonde Hayabusa 2 de la JAXA [87].

Un tel état ségrégé ne peut s'expliquer que par des possibilités de réarrangement de l'agrégat, impliquant donc des déplacements des grains dus à certaines perturbations. En particulier, les observations de la surface d'Itokawa et l'étude des pentes locales peuvent suggérer un mécanisme de tamisage : les petits grains arrivent à passer entre les gros pour se diriger vers le bas des pentes [114]. Mais pour que cela se produise, il faut qu'Itokawa subisse effectivement des perturbations entraînant des mouvements de grains. Plusieurs indices vont dans ce sens, notamment la présence de grains à la forme arrondie, qui indique que ceux-ci sont régulièrement soumis à des contraintes analogues à celles rencontrées dans un écoulement [184]. Par ailleurs, des analyses d'exposition aux rayonnements cosmiques menées sur l'échantillon prélevé sur Itokawa ont permis de dater la présence de ces grains à la surface de l'astéroïde [37]. Il en ressort que le dernier réarrangement majeur sur Itokawa a eu lieu il y a environ 8 millions d'années,

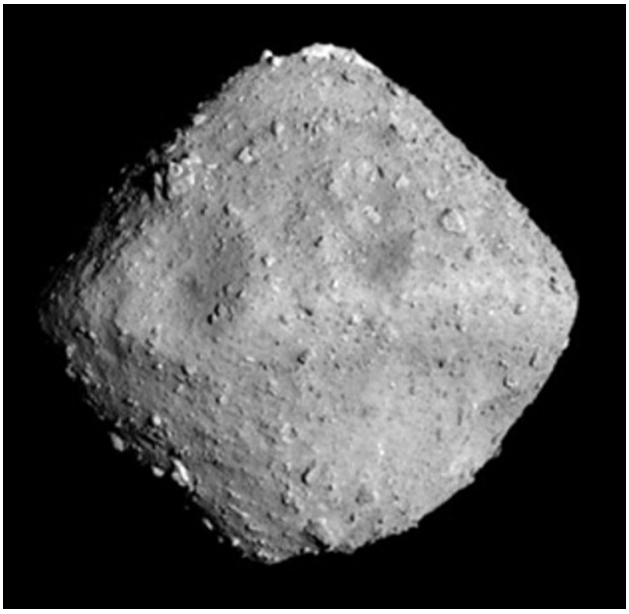
3. Dans la littérature, on trouve souvent le terme « régolithe » pour désigner globalement le matériau constituant les astéroïdes granulaires.



(a) Photographie d'Itokawa en 2005 par la sonde Hayabusa (crédits image : JAXA).



(b) Photographie de Bennu en 2019 par la sonde OSIRIS-REx (crédits image : NASA).



(c) Photographie de Ryugu en 2019 par la sonde Hayabusa 2 (crédits image : JAXA).

FIGURE I.12 – Astéroïdes granulaires présentant une ségrégation en taille des constituants de leur surface.

mais que de plus faibles réarrangements ont pu avoir lieu jusqu'à il y a 500000 ans. Ces conclusions sont toutefois à manier avec précautions puisque dépendantes du lieu de prélèvement de l'échantillon.

Il reste à préciser la nature des perturbations évoquées : comment un astéroïde peut-il être mécaniquement sollicité, de sorte à permettre des réarrangements des positions de ces constituants ? La section suivante se donne pour objectif de répondre à cette question.

II-3. Environnement spécifique aux astéroïdes granulaires

Les astéroïdes granulaires comme Itokawa, Bennu et Ryugu évoluent dans un environnement totalement différent de celui que connaissent les milieux granulaires terrestres. L'influence de l'humidité n'est par exemple plus un problème dans le cas des astéroïdes. Mais il y a aussi des aspects nouveaux par rapport au cadre terrestre : ils résident essentiellement dans la topographie du champ gravitationnel et dans les perturbations mécaniques particulières que peut subir un astéroïde.

II-3.a) Champ gravitationnel

La première différence notoire du point de vue du champ gravitationnel est son intensité. En effet, on a vu dans la Sec. I-3.b) que la pesanteur locale peut être bien plus faible que sur Terre. Rappelons que la pesanteur prend en compte la gravité de l'astre et la force centrifuge due à la rotation. Cette pesanteur est typiquement de l'ordre de $10^{-3}g$ sur Éros, et de l'ordre de $10^{-6}g$ sur Itokawa [120], où l'on peut parler de *micropesanteur*. Comme on a pu le voir, cette relative faiblesse de la pesanteur permet des formes non sphériques et aussi un rôle accru des forces de cohésion pour des grains de taille centimétrique. La non sphéricité d'un astéroïde a bien sûr des implications sur sa carte de champ gravitationnel. Dans le cas d'Itokawa, qui présente une forme très allongée, on obtient de grands écarts de pesanteur locale en fonction du point de la surface considéré : de $5,6\times10^{-5}$ m.s^{-2} à $8,6\times10^{-5}$ m.s^{-2}, soit une augmentation de 54 % entre ces deux extrêmes [157]. Mais l'influence de la forme est plus importante encore. En effet, la force gravitationnelle pointe toujours vers le centre de masse de l'astéroïde et la force centrifuge pointe toujours vers un éloignement à l'axe de rotation. Pour un astéroïde non sphérique, la pesanteur en un point donné de la surface peut alors être très inclinée par rapport à la normale à la surface en ce point. Cet effet est particulièrement présent sur Itokawa [4], où la projection de la pesanteur selon la normale locale vaut entre $2,4\times10^{-5}$ m.s^{-2} et $8,6\times10^{-5}$ m.s^{-2} en fonction du point considéré [120, 157]. La cartographie des vitesses de libération sur Itokawa illustre bien les variations importantes de pesanteur locale (voir la Fig. I.13). Ces grandes variations, ainsi que la présence d'une composante horizontale de la pesanteur, sont susceptibles d'influer grandement sur les mouvements des grains lors de glissements de terrains ou d'éboulements. L'environnement gravitationnel dans lequel évoluent les constituants d'un astéroïde granulaire est donc radicalement différent de celui que connaissent les milieux granulaires terrestre. On retiendra que la pesanteur y est bien plus faible, et que l'orientation et la norme du champ varient significativement sur des distances qui ne sont pas toujours grandes devant la taille des grains ou devant la dimension typique d'un écoulement.

II-3.b) Forces de marées

L'environnement gravitationnel créé par un astéroïde granulaire lui-même n'est pas le seul que subissent ses constituants. Ils sont également sensibles aux interactions gravitationnelles avec d'autres corps qui sont soit suffisamment proches, soit suffisamment massifs pour que cette interaction ait une influence significative. En particulier, l'inhomogénéité du champ gravitation-

4. Notons que même pour la Terre, approximée sphérique, la composante centrifuge tend à écarter la pesanteur de la verticale locale. Néanmoins celle-ci est partout au moins trois ordres de grandeur plus faible que la composante gravitationnelle. De plus, dans les régions où la composante centrifuge est la plus forte, c'est-à-dire au niveau de l'Équateur, elle tend justement à s'aligner avec la verticale.

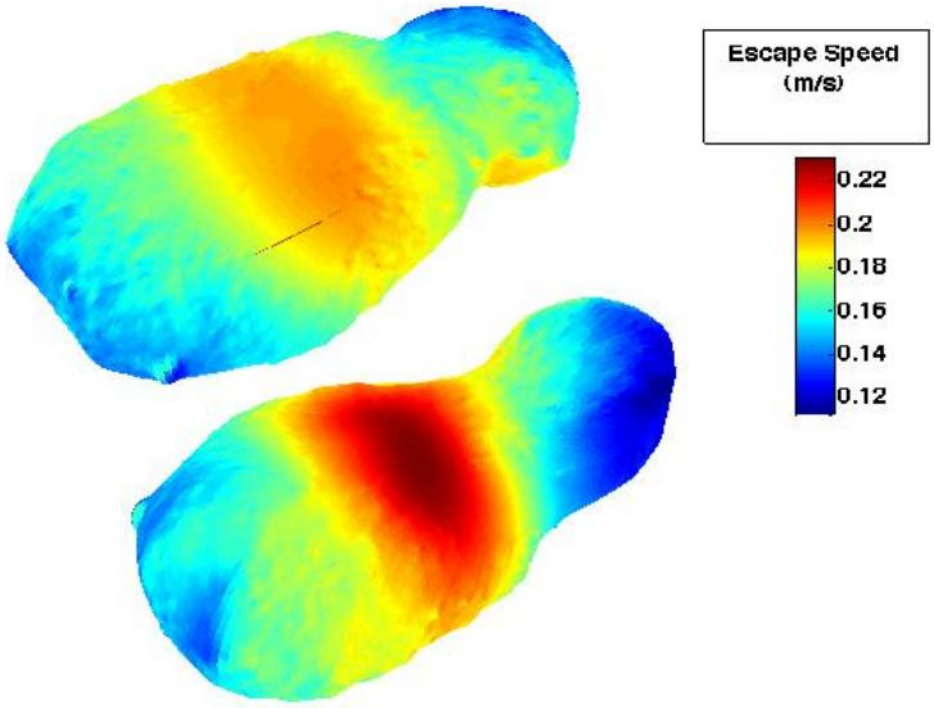


FIGURE I.13 – Cartographie des vitesses de libération estimées à la surface d'Itokawa à partir des mesures de forme, de densité, et de vitesse de rotation de l'astéroïde. Image tirée de la Réf. [157].

nel créé par ces corps sur le volume de l'astéroïde est à l'origine de forces de marées. Pour les astéroïdes de la ceinture principale, ces forces sont principalement présentes lors des passages au voisinage de Jupiter, voire de Cérès et des plus gros astéroïdes de la ceinture comme Vesta, Pallas et Junon. Pour les astéroïdes géocroiseurs, elles sont plutôt dues aux planètes telluriques. C'est notamment le cas d'Itokawa dont l'orbite est peu inclinée par rapport au plan de l'écliptique. Les forces de marée peuvent contribuer de façon importante au champ de contraintes dans l'astéroïde, causant des réarrangements, des déformations de la forme globale, voire des ruptures [141, 178].

II-3.c) Collisions

Les astéroïdes du système solaire évoluent dans un environnement très propice aux collisions. En effet, ils sont nombreux à avoir des orbites très proches (voir la Fig. I.3), et la ceinture d'astéroïdes compte également de nombreux petits corps et débris pouvant être attirés à des astéroïdes. Les images de la surface des astéroïdes montrent d'ailleurs de nombreux cratères (voir la Fig. I.5) qui permettent de confirmer la survenue de collisions. Dans le cas d'un astéroïde granulaire, de tels événements sont de nature à entraîner des réarrangements des grains pouvant être importants. Cette forme de perturbation peut s'apparenter au cas d'un milieu granulaire terrestre périodiquement secoué. Néanmoins, les collisions subies par un astéroïde entraînent des chocs d'amplitude variable et ne présentant *a priori* aucune périodicité bien définie.

II-3.d) Effets Yarkovsky et YORP

Une composante essentielle de la dynamique des astéroïdes est liée aux rayonnements. L'intérêt pour cet contribution trouve son origine dans certaines observations qui ne peuvent pas être expliquées par des effets gravitationnels ou par les collisions [15]. Comme on l'a évoqué à propos des réarrangements de la surface d'Itokawa, il est possible de mesurer la durée d'exposition des matériaux des astéroïdes aux rayonnements cosmiques. On peut alors en déduire l'âge des astéroïdes [26]. Ces méthodes de datation ont montré que certains astéroïdes possédant des orbites proches des lacunes de Kirkwood étaient plus anciens que ce que l'instabilité de leur orbite laissait espérer, parmi lesquels beaucoup d'astéroïdes métalliques [69]. De plus, si on considère un processus stochastique de collisions entre astéroïdes, avec conservation du moment cinétique, la distribution des vitesses de rotation des astéroïdes du système solaire devrait suivre une statistique de Maxwell-Boltzmann [11, 109]. Les mesures de vitesses de rotation ne confirment pas cette prédiction, puisqu'on observe une surabondance d'astéroïdes possédant des vitesses angulaires très faibles ou très élevées, en particulier les plus petits astéroïdes [136]. Il apparaît donc nécessaire de prendre en compte des effets autres que gravitationnels ou collisionnels.

Les astéroïdes sont soumis à plusieurs rayonnements dont la principale source est le Soleil, les contributions des rayonnements émis par d'autres étoiles ou réfléchis par les autres corps du système solaire étant largement négligeables. Une partie de ce rayonnement est alors absorbée ou réfléchie à la surface des astéroïdes. Dans les deux cas, la variation d'impulsion des photons concernés s'accompagne d'une variation d'impulsion du matériau éclairé, qui subit donc une force dirigée selon l'axe du rayonnement incident. Cette force est proportionnelle à la surface éclairée, et on parle donc de pression de radiation. Celle-ci est plus élevée pour un corps réfléchissant que pour un corps absorbant (le transfert d'impulsion étant doublé) mais est toujours proportionnelle à l'intensité du rayonnement impliqué. Comme celui-ci est émis par le Soleil, son intensité décroît comme $1/r^2$ où r est la distance d'éloignement au Soleil. La résultante $\overrightarrow{F}_{\text{sol}}$ subie par un astéroïde du fait de la pression de radiation solaire est donc une force radiale en $1/r^2$ au même titre que la gravitation qui gouverne son orbite, mais plus faible que celle-ci de plusieurs ordres de grandeur [23]. On ne s'attend donc *a priori* pas à un effet important sur la dynamique des astéroïdes. Néanmoins, nous n'avons considéré ici que l'effet de la réflexion et de l'absorption. Or il y a également émission de rayonnement, l'astéroïde n'étant pas à température nulle puisque chauffé par le rayonnement solaire. Cette émission s'accompagne d'un transfert d'impulsion, de sorte que le matériau émetteur subit une force de même direction mais de sens opposé à l'axe d'émission. Si un astéroïde donné émet de façon isotrope, alors la résultante $\overrightarrow{F}_{\text{émis}}$ de ces forces dues à l'émission est nulle. Mais cela suppose, en traitant l'astéroïde comme un corps noir, que la température à sa surface est homogène. Or l'astéroïde possède une conductivité thermique et une capacité calorifique finies, ce qui donne une certaine inertie thermique à sa surface [43, 190]. Cela joue un rôle dès lors que l'astéroïde possède une rotation propre. En effet, sa surface n'est alors pas homogène en température, et la partie la plus chaude n'est pas celle faisant face au Soleil, mais se situe un peu plus loin le long du mouvement de rotation (voir la Fig. I.14). Ce phénomène est d'ailleurs bien connu sur Terre, où le moment le plus chaud de la journée ne correspond pas au midi solaire, mais survient plus tard, du fait de l'inertie thermique de l'atmosphère, des océans et du sol. Pour résumer, l'astéroïde présente une surface inhomogène en température, donc une émission anisotrope et subit ainsi une force $\overrightarrow{F}_{\text{émis}}$ non nulle. Cette force est parallèle à l'axe selon lequel l'intensité émise est la plus élevée, qui correspond donc à la zone la plus chaude de la surface de l'astéroïde. En raison

de l'inertie thermique, cet axe n'est pas dirigé vers le Soleil, mais un peu plus loin le long de la rotation de l'astéroïde. Les forces $\overrightarrow{F}_{\text{sol}}$ et $\overrightarrow{F}_{\text{émis}}$ forment ainsi un angle non nul, et leur somme possède une composante non nulle le long de la trajectoire de l'astéroïde (voir la Fig. I.14 pour le cas d'un axe de rotation propre orthogonal au plan de l'orbite). Ce phénomène, conséquence de la pression de radiation, de l'inertie thermique et de la rotation propre, est nommé **effet Yarkovsky** [15].

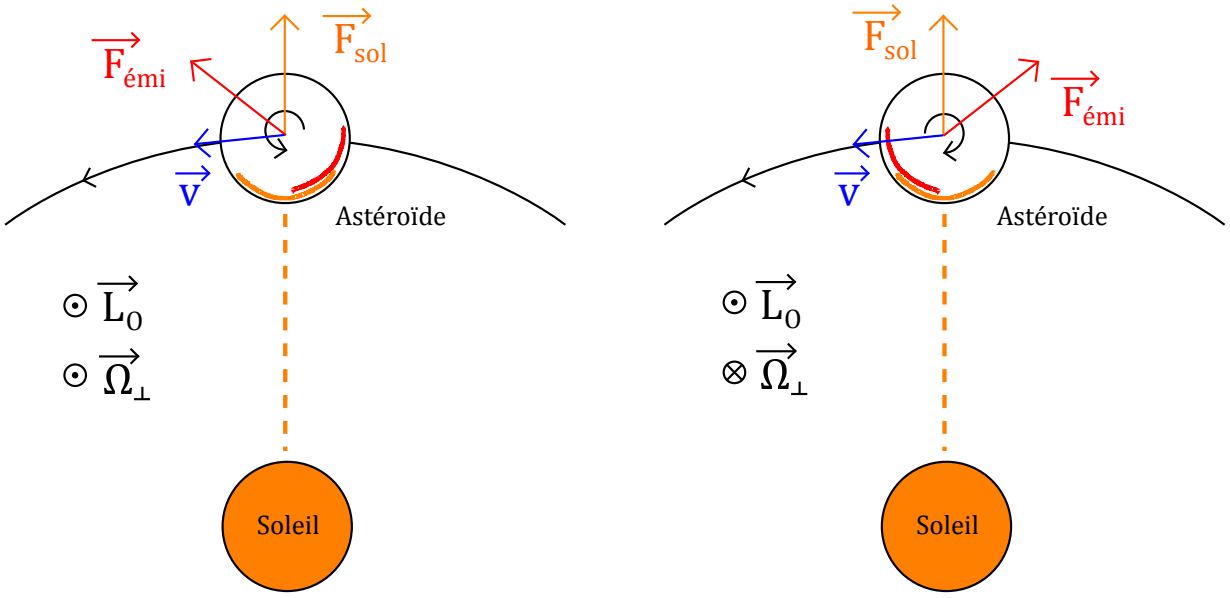


FIGURE I.14 – Schéma explicatif de l'effet Yarkovsky diurne, tracé dans le plan de la trajectoire de l'astéroïde. La bande orange désigne la portion de surface exposée au rayonnement solaire, tandis que la bande rouge désigne la portion de surface la plus chaude, donc émettant le plus intensément. À gauche, on a représenté le cas d'un astéroïde pour lequel $\overrightarrow{\Omega}_{\perp}$ et $\overrightarrow{L}_O$ sont de même sens, et à droite, le cas où ils sont de sens opposés.

Notons $\overrightarrow{\Omega}$ le vecteur rotation propre de l'astéroïde. Alors $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega}_{\perp} + \overrightarrow{\Omega}_{//}$, où $\overrightarrow{\Omega}_{\perp}$ est orthogonal au plan de l'orbite et $\overrightarrow{\Omega}_{//}$ appartient à ce plan. Dans le cas où $\overrightarrow{\Omega}_{\perp} \neq \overrightarrow{0}$, le phénomène que nous avons décrit est lié au jour sidéral de l'astéroïde : on parle d'effet Yarkovsky diurne. Ses conséquences sur la trajectoire de l'astéroïde dépend du sens de $\overrightarrow{\Omega}_{\perp}$. Si ce vecteur est de même sens que le moment cinétique $\overrightarrow{L}_O$ associé à l'orbite de l'astéroïde autour du Soleil (comme dans le cas de la Terre, par exemple), alors la composante orthoradiale de $\overrightarrow{F}_{\text{émis}}$ est de même sens que la vitesse $\overrightarrow{v}$ du centre de masse de l'astéroïde (voir la Fig. I.14). Ainsi, elle tend à augmenter son énergie mécanique totale, et donc à augmenter le demi-grand axe de sa trajectoire. *A contrario*, si $\overrightarrow{\Omega}_{\perp}$ et $\overrightarrow{L}_O$ sont de sens opposés, alors la composante orthoradiale de $\overrightarrow{F}_{\text{émis}}$ est de sens opposé à $\overrightarrow{v}$. L'effet Yarkovsky diurne tend alors à faire diminuer l'énergie mécanique totale de l'astéroïde, et donc à diminuer le demi-grand axe de sa trajectoire.

Il existe également un effet Yarkovsky dans le cas où $\overrightarrow{\Omega}_{\perp} = \overrightarrow{0}$ mais $\overrightarrow{\Omega}_{//} \neq \overrightarrow{0}$. Partons d'un instant t_0 où l'axe joignant le Soleil à l'astéroïde est aligné avec $\overrightarrow{\Omega}_{//}$ (voir la Fig. I.15). Le rayonnement solaire ne chauffe alors qu'un seul « hémisphère » de l'astéroïde. Par inertie thermique, cet hémisphère va atteindre son maximum de température lorsque l'astéroïde aura un peu avancé le long de sa trajectoire. On a alors une inhomogénéité thermique de la surface,

et donc une anisotropie du rayonnement et une force $\overrightarrow{F}_{\text{émis}} \neq \overrightarrow{0}$. Par construction, celle-ci ne peut qu'être de sens opposé à $\overrightarrow{v}$ (voir la Fig. I.15). Lorsque l'astéroïde a parcouru un quart de tour autour du Soleil depuis t_0, on est dans une situation où $\overrightarrow{\Omega}_{//}$ est perpendiculaire à l'axe joignant le Soleil à l'astéroïde. Toute la surface est alors exposée au Soleil durant un jour sidéral. En raison de l'inertie toujours, la température de la surface de l'astéroïde ne sera homogène qu'un peu plus loin le long de son orbite. On aura alors une force $\overrightarrow{F}_{\text{émis}} = \overrightarrow{0}$. Puis, lorsque l'astéroïde a effectué un demi-tour depuis t_0, on retrouve une situation où l'axe joignant le Soleil à l'astéroïde est aligné avec $\overrightarrow{\Omega}_{//}$. Le même raisonnement qu'en t_0 s'applique avec cette fois un chauffage sur l'autre « hémisphère » uniquement, et ainsi de suite. La période typique étant alors la durée d'une révolution, on parle cette fois-ci d'effet Yarkovsky saisonnier. Comme on l'a vu, pour cet effet la force $\overrightarrow{F}_{\text{émis}}$ est toujours opposée à $\overrightarrow{v}$, ce qui tend à diminuer le demi-grand axe de la trajectoire (voir la Fig. I.15).

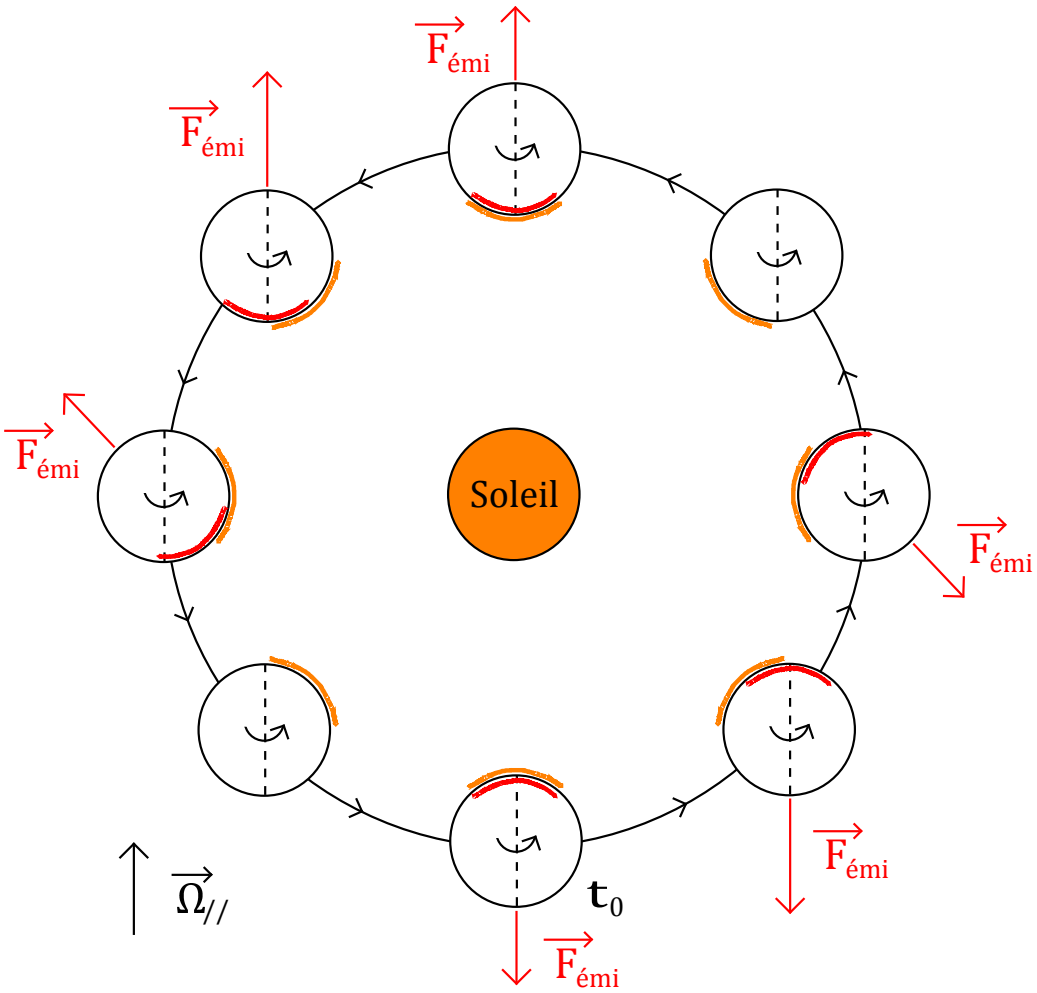


FIGURE I.15 – Schéma explicatif de l'effet Yarkovsky saisonnier. Comme sur la Fig. I.14, le tracé est effectué dans le plan de la trajectoire de l'astéroïde et la bande orange désigne la portion de surface exposée au rayonnement solaire tandis que la bande rouge désigne la portion de surface la plus chaude, donc émettant le plus intensément. L'astéroïde possède cette fois-ci un vecteur rotation propre dans le plan de sa trajectoire.

Dans le cas général, on a superposition des manifestations diurnes et saisonnières de l'effet

Yarkovsky. L'effet saisonnier est d'autant plus discernable que $||\overrightarrow{\Omega}_{//}|| \gg ||\overrightarrow{\Omega}_{\perp}||$, c'est-à-dire si la rotation se fait essentiellement autour d'un axe appartenant au plan de l'orbite. L'effet Yarkovsky influe non seulement sur le demi-grand axe de la trajectoire, mais aussi sur l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite, puisque $\overrightarrow{F}_{\text{émis}}$ peut avoir une composante hors du plan de l'orbite. Un calcul simplifié à une dimension, mais très instructif quant aux propriétés de l'effet Yarkovsky, est réalisé dans la Réf. [23], tandis que le calcul complet pour une sphère est traité dans la Réf. [189]. Cet effet a été directement détecté par mesures radar pour l'astéroïde (6489) Golevka. En effet, la trajectoire de cet astéroïde avait été calculée de deux façons : en prenant en compte la gravitation seulement d'une part, et en y ajoutant l'effet Yarkovsky d'autre part [191]. Seule la seconde prédiction rentrait dans l'intervalle d'erreur des mesures radars [34]. Par la suite, l'obtention de données sur les trajectoires de plus d'astéroïdes a permis d'identifier au moins 21 autres cas où l'effet Yarkovsky a une influence mesurable sur la dynamique [58]. En modifiant l'orbite de ces astéroïdes, l'effet Yarkovsky modifie l'environnement auquel ils sont soumis, en particulier les forces de marée et les collisions, et a donc une influence indirecte sur les réarrangements au sein de l'astéroïde.

Il existe un autre effet ayant pour origine la pression de radiation et l'inertie thermique des astéroïdes : l'**effet YORP** (abréviation de Yarkovsky-O'Keefe-Radzievskii-Paddack). Celui-ci se traduit par l'application d'un couple à l'astéroïde, c'est donc un pendant de l'effet Yarkovsky pour les degrés de liberté rotationnels [17, 190]. On n'observe cet effet que pour des corps ne présentant pas une forme sphérique ou ellipsoïdale [146]. En effet, pour des formes ne présentant pas de symétrie de révolution, la surface faisant face au Soleil peut ne pas être répartie uniformément vis-à-vis du centre de masse, tant du point de vue de son aire que de celui de son exposition, à cause des pentes locales. Ainsi, l'ensemble des pressions de radiation locales donne un couple résultant non nul à l'astéroïde par rapport à son barycentre. Cela entraîne une modification du moment cinétique barycentrique, donc de $\overrightarrow{\Omega}$. La période de rotation propre et l'orientation de l'axe de rotation d'un astéroïde de forme quelconque sont donc influencés par l'effet YORP. Notons qu'en modifiant $\overrightarrow{\Omega}$, l'effet YORP a une influence directe sur l'effet Yarkovsky. Ces deux effets sont généralement faibles, mais peuvent être significatifs pour de petits astéroïdes. En effet, les actions mécaniques dues aux effets YORP et Yarkovsky sont d'autant plus importantes que la surface de l'astéroïde l'est, tandis que l'attraction gravitationnelle solaire est d'autant plus importante que le volume l'est. L'importance relative des effets YORP et Yarkovsky croît donc comme $1/d$ où d est la dimension typique de l'astéroïde considéré. Notons néanmoins que pour de trop petits objets, la thermalisation est suffisamment rapide pour que l'émission soit isotrope et annihile l'effet Yarkovsky. On trouve plusieurs vérifications expérimentales de l'effet YORP, notamment pour les astéroïdes (54509) YORP [102, 179], (1862) Apollo [93], (1620) Geographos [54] et (3103) Eger [55]. L'effet YORP est d'ailleurs l'explication la plus plausible pour la surabondance de vitesses de rotations propres élevées parmi les plus petits astéroïdes du système solaire. De plus, la rotation qu'il provoque et accélère implique des forces centrifuges qui peuvent déformer un astéroïde en l'aplatissant selon son axe de rotation [123] voire aller jusqu'à le rompre, menant à la formation de systèmes binaires [193]. Cet effet est donc une source de perturbation importante pouvant provoquer de nombreux réarrangements au sein d'un astéroïde granulaire.

Nous avons maintenant une vue d'ensemble des perturbations susceptibles d'entraîner des réarrangements au sein des astéroïdes granulaires, et donc d'expliquer la ségrégation en taille que l'on y observe. Il nous reste donc à faire un bilan des connaissances actuelles sur la ségrégation granulaire et ses mécanismes, qui sont importantes pour bien appréhender les résultats des

travaux de cette thèse.

III- Ségrégation granulaire : état de l'art

De toutes les formes de ségrégation granulaire listées dans la Sec. II-2., c'est la ségrégation en taille qui a été la plus étudiée. Nous commençons par résumer les résultats classiques obtenus pour des milieux granulaires terrestres, avant de décrire les premières explorations qui ont été faites pour le cas des astéroïdes granulaires.

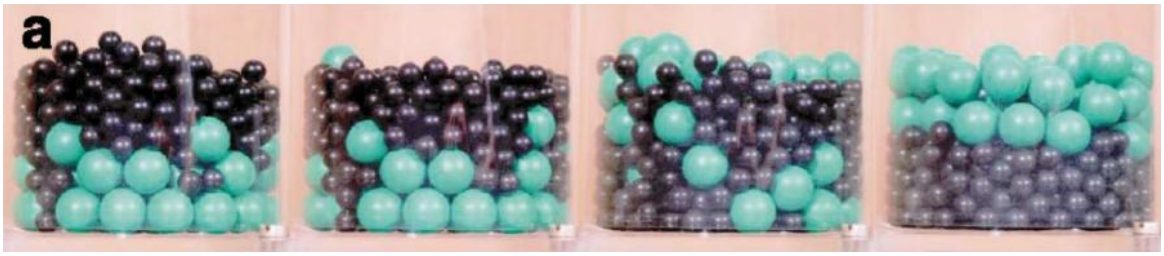
III-1. Ségrégation granulaire terrestre

La ségrégation granulaire en taille[5] peut se produire dans les milieux granulaires en écoulement ou soumis à des vibrations, le mouvement des grains permettant alors au tri de s'opérer. Dans le cas d'un mélange de grains ne différant que par leur taille, plusieurs configurations permettent d'observer une ségrégation.

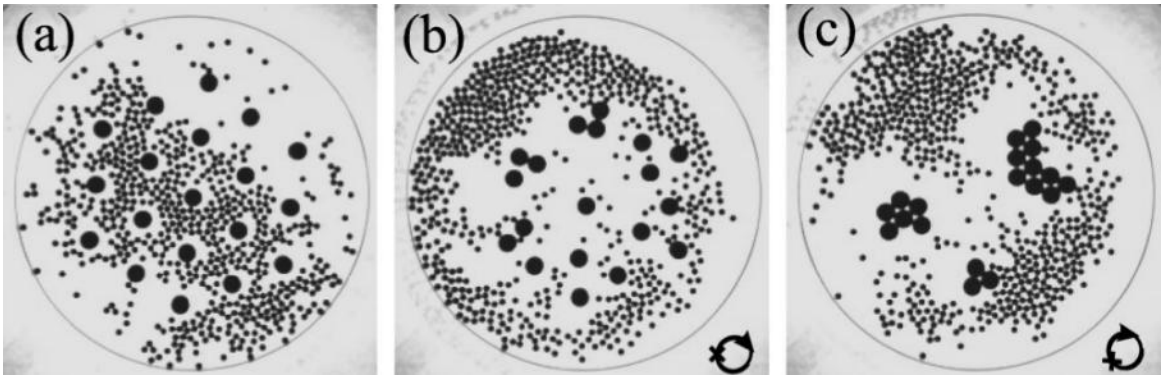
- Le fait de mettre le milieu dans un récipient soumis à des vibrations verticales entraîne une remontée des plus gros grains, tandis que les plus petits vont majoritairement au fond (voir la Fig. I.16a) [20]. Ce type de ségrégation est nommé « effet noix du Brésil » (*Brazil nut effect* en anglais), puisqu'on l'observe lors du transport des récoltes de fruits secs au Brésil. Les différents types de fruits sont mélangés dans les remorques des camions, et subissent les cahots de celles-ci sur de longues routes de terre. Les vibrations verticales associées causent la remontée des plus gros fruits présents dans le mélange, en l'occurrence les noix du Brésil [143].
- Une monocouche de grains vibrée horizontalement entraîne également une ségrégation. Tous les grains restent bien sûr à la même altitude, mais se regroupent en fonction de leurs tailles (voir la Fig. I.16b) [7].
- Lors de la formation d'un tas de grains par avalanche successives, les plus gros grains atteignent plus facilement le fond et la périphérie du tas [36].
- Si on place le milieu dans un tambour tournant, celui-ci étant à moitié rempli, la rotation fait que les plus gros grains vont se placer préférentiellement près des bords du tambour : on parle de ségrégation radiale (voir la Fig. I.16c) [175].
- En géologie, on constate un phénomène de ségrégation dans les coulées pyroclastiques. Il s'agit des écoulements de pierres qui se produisent à la base des nuées ardentes émises par certains volcans de type explosif [166]. Les plus grosses pierres s'accumulent sur les bords de la coulée, formant ainsi des « levées » (voir la Fig. I.16d), mais aussi à l'avant de la coulée [60].

Les conditions d'apparition de la ségrégation sont donc très diverses, et font qu'il est en pratique difficile d'obtenir un mélange granulaire polydisperse homogène. Cela peut poser problème dans l'industrie, où les milieux granulaires sont très présents et où un mélange homogène est en général souhaitable, afin de pouvoir être simplement divisé en petites quantités commercialisables et de composition identique. Des recherches ont d'ailleurs porté sur les méthodes permettant de contrer la ségrégation, notamment dans les domaines agroalimentaire [9] et pharmaceutique [171].

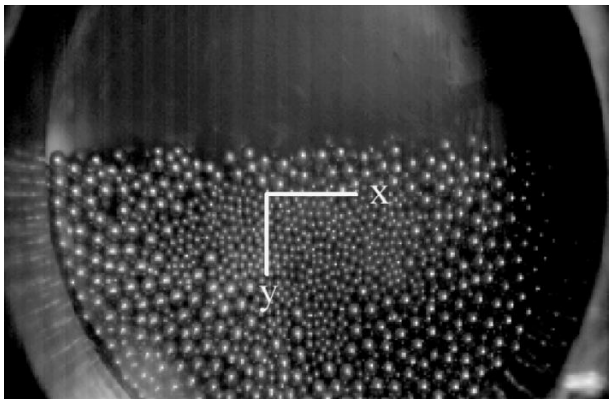
5. Dans toute la suite, nous omettrons la mention « en taille », cette précision étant sous-entendue.



(a) Illustration de l'effet noix du Brésil (le temps s'écoule de l'image de gauche vers celle de droite) : le fait de vibrer verticalement le milieu fait remonter les plus grosses billes. Images tirées de la Réf. [20].



(b) Monocouche de grains (19 gros disques et 600 petites sphères) agitée horizontalement en faisant décrire un cercle au centre du plateau (*swirling* en anglais). Les photos montrent le milieu dans l'état initial à gauche, après 360 s au milieu, et après 4896 s à droite : on constate une nette ségrégation. Images tirées de la Réf. [7].



(c) Ségrégation radiale dans un tambour tournant. Image tirée de la Réf. [175].



(d) Levées de grosses pierres sur les bords de la coulée pyroclastique de 1993 du volcan *Lascar*, au Chili. Image tirée de la Réf. [60].

FIGURE I.16 – Différents exemples expérimentaux de ségrégation granulaire.

Au-delà de ces observations de la ségrégation, divers mécanismes ont été avancés pour expliquer le phénomène. Nous proposons une description de ces mécanismes pour l'effet noix du Brésil et pour les cas de ségrégation sous écoulement.

III-1.a) Mécanismes de l'effet noix du Brésil

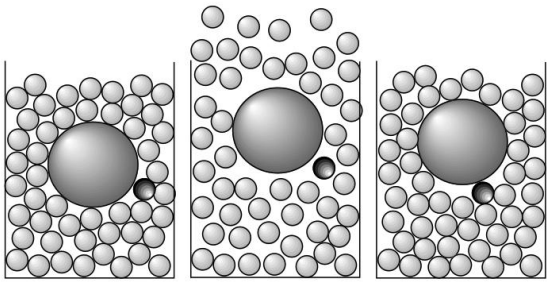
L'effet noix du Brésil a été au cœur de nombreuses études, en partie à cause du gain paradoxal d'énergie potentielle de pesanteur qu'il implique pour le milieu. Pour le comprendre, remarquons que le fait de ségréger le milieu fait diminuer sa compacité [39]. En effet, un empilement polydisperse est d'une plus grande compacité qu'un empilement monodisperse, puisque les petits grains peuvent « combler » les vides laissés par les plus gros. Ainsi, à quantité de grains fixée et pour un récipient donné, la hauteur h occupée par le milieu granulaire augmente lorsqu'il devient ségrégé. De plus, la compacité sera logiquement la même au sein du groupe de petits grains (formé au fond) et au sein du groupe de gros grains (formé à la surface), donc le centre de masse du milieu sera bien à l'altitude $h/2$. En conclusion, le fait de ségréger le milieu fait augmenter l'altitude de son centre de masse, et donc l'énergie potentielle de pesanteur totale.

Le raisonnement précédent s'applique bien à des mélanges dans lesquels petits et gros grains contribuent chacun approximativement à la moitié du volume. Dans le cas où il n'y a qu'un seul gros grain au milieu d'une assemblée de petits grains, il y a également élévation de l'énergie potentielle de pesanteur du milieu lorsque le gros grain migre vers la surface, mais l'explication est différente. En effet, il n'est plus question alors de vides entre les gros grains qui seraient mieux comblés dans l'état mélangé, puisqu'il n'y a qu'un seul gros grain. La hauteur h du milieu n'augmente donc pas au fur et à mesure que le gros grain migre vers la surface. Par contre, ce gros grain assure une compacité locale de 100 % sur son volume, tandis que si des petits grains occupaient le même volume, la compacité y serait plus faible. Par conséquent, si le gros grain se trouve à une altitude supérieure à $h/2$, le centre de masse du milieu se trouvera également à une altitude supérieure à $h/2$. Là encore, l'effet noix du Brésil s'accompagne donc d'une augmentation de l'énergie potentielle de pesanteur totale.

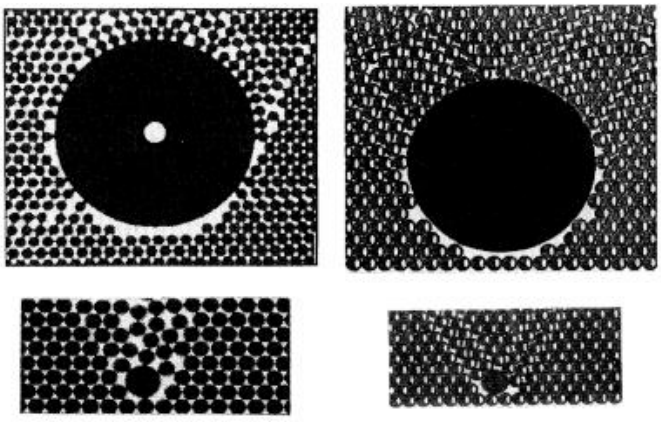
Ce stockage d'énergie confirme qu'il faille exciter mécaniquement le milieu pour observer l'effet noix du Brésil, typiquement en le vibrant. Les premières études consacrées à cet effet ont d'ailleurs montré que la ségrégation se produit d'autant plus rapidement que l'amplitude de vibration est élevée, tant expérimentalement [3] que numériquement [143]. Mais ces études montrent qu'un second paramètre semble aussi augmenter la rapidité de la ségrégation : le ratio de taille entre gros et petits grains. La compréhension de cet aspect implique de se pencher en détail sur les deux principaux mécanismes mis en jeu, qui sont l'effet d'arche et la convection.

L'effet d'arche désigne le fait que lors d'une vibration, les petits grains peuvent venir se placer sous les gros grains, les empêchant alors de retrouver leur position antérieure par effet d'arche (voir la Fig. I.17a). On parle aussi parfois de voûtes, ou de percolation[6]. Les gros grains se trouvent alors à des altitudes plus élevées qu'avant la vibration. On peut modéliser géométriquement ce problème en deux dimensions en considérant un récipient évasé d'ouverture 60°, jouant le rôle d'un empilement hexagonal contact de petits grains immobiles [53]. Un gros grain et des petits grains sont placés dans ce récipient, de sorte que le gros grain repose sur des petits grains placés au fond tout en touchant les parois du récipient. On peut imaginer qu'en soulevant le gros grain d'une certaine hauteur, on puisse dégager un espace suffisant pour qu'un petit grain passe entre le gros grain et les parois, sans toutefois qu'une nouvelle couche horizontale de petits grains ne se constitue sous le gros grain : celui-ci se retrouve alors soulevé par effet d'arche. Néanmoins, dans ce modèle ceci n'est possible que pour un ratio en

6. Cela étant, l'effet d'arche ne doit pas être confondu avec la percolation telle qu'on l'entend habituellement, c'est-à-dire la traversée complète d'un empilement de gros grains par un petit grain. Notons cependant qu'une telle traversée peut aussi se produire si le ratio de taille entre gros et petits grains excède $\sqrt{3}/(2-\sqrt{3}) \simeq 6,5$.



(a) Le petit grain gris foncé percole sous le gros grain pendant la vibration, empêchant celui-ci de retrouver sa position antérieure qui était plus basse. Image tirée de la Réf. [5].



(b) Expériences (à gauche) et simulations (à droite) de ségrégation à deux dimensions (disques). On n'observe l'effet d'arche que si le ratio en taille est suffisant (en haut), sinon le gros disque repose simplement sur une couche horizontale de petits disques (en bas). Image tirée de la Réf. [53].

FIGURE I.17 – Illustration de l'effet d'arche.

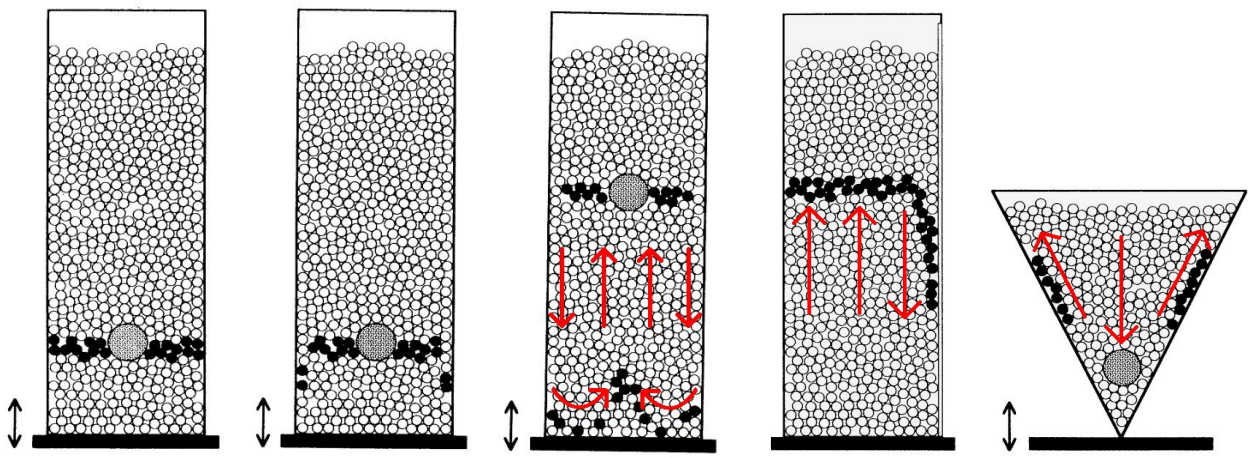
taille suffisant entre petits et gros grains, ce que confirment expériences et simulations (voir la Fig. I.17b). De plus, la généralisation à trois dimensions de ce modèle indique que ce ratio doit excéder une valeur critique $(2, 8)$ pour que la ségrégation se produise par effet d'arche [92]. Notons toutefois que l'effet d'arche peut être annihilé par de trop fortes vibrations ou secousses. En effet, les espaces créés durant la perturbation sont alors suffisamment grands pour accueillir un gros grain aussi bien qu'un petit, et il n'y a plus de passage spécifique des petits grains sous les gros grains [159]. Par ailleurs, si les gros grains sont plus denses, l'effet noix du Brésil se voit associé à une forte élévation d'énergie potentielle de pesanteur. L'effet d'arche est alors en compétition avec la minimisation de cette énergie, et il devient possible d'observer un effet noix du Brésil inverse (voir la Fig. I.18) [20]. L'effet d'arche intervient également dans la ségrégation observée lors de la formation d'un tas. Dans ce cas, il survient dès qu'un début de tas est déjà formé, au sein de la coulée de grains glissant sur les parois de ce début de tas. Les gros grains se retrouvent ainsi à la surface de cette coulée, et les petits grains au fond. Ces derniers seront donc piégés par les aspérités rencontrées au cours de leur descente, tandis que les gros grains atteignent plus facilement le bas de la pente, d'où la concentration plus élevée en gros grains au fond du tas [36, 52].

Le second mécanisme jouant un rôle important dans l'effet noix du Brésil est la convection : il s'agit d'un mouvement collectif de grains sous l'effet conjugué des vibrations verticales appliquées au milieu et du frottement des grains contre les parois du récipient. Les grains situés au centre du réservoir ont un mouvement ascensionnel indépendant de leur taille, tandis que les grains situés près des bords du réservoir ont un mouvement descendant (voir la Fig. I.19a). L'épaisseur de la bande de cisaillement au niveau des bords est typiquement de l'ordre de quelques diamètres de petits grains. Cet effet est présent dès lors que le récipient est suffisamment large, typiquement de dimension grande devant le rayon d'un grain. Les mouvements verticaux de convection concernent indifféremment les petits et les gros grains, mais le tri s'effectue au niveau de la surface. En effet, on observe que si un gros grain atteint la surface, il a



FIGURE I.18 – Effet noix du Brésil inversé (le temps s'écoule de l'image de gauche vers celle de droite). Les grosses billes sont en bronze de masse volumique $\rho_{\text{bronze}} = 8,9 \times 10^3$ kg.m^{-3}, et les petites billes en verre de masse volumique $\rho_{\text{verre}} = 1,5 \times 10^3$ kg.m^{-3}. Les vibrations verticales font tomber les grosses billes au fond. Image tirée de la Réf. [20].

tendance à y rester piégé, tandis qu'un petit grain peut facilement s'infiltrer et redescendre le long d'un bord [94]. De par leur nature, ces mouvements de convection ainsi que le tri opéré en surface ou au fond sont très dépendants du coefficient de frottement entre les grains, ainsi que de la géométrie du milieu. En l'occurrence, l'adoption d'un récipient évasé peut mener à une inversion de l'effet noix du Brésil, par inversion du sens de la convection et piégeage des gros grains au fond du vase (voir la Fig. I.19b).



(a) Cas de l'effet noix du Brésil dans un récipient classique. On observe un mouvement ascendant sur une large partie du récipient et des mouvements descendants le long des murs.

(b) À gauche : cas d'un récipient dont le mur droit est beaucoup plus rugueux que le mur gauche. Le mouvement descendant se fait essentiellement le long du mur rugueux. À droite : cas d'un récipient évasé. Les boucles s'inversent et le gros grain est piégé au fond.

FIGURE I.19 – Expériences mettant en jeu un gros grain (grisé) dans un ensemble de petits grains, le tout vibré verticalement. Pour chacune, on suit les petits grains qui sont initialement situés à la même hauteur que le gros grain, et coloriés en noir. Les flèches rouges montrent les mouvements globaux que l'on en déduit. Image tirée de la Réf. [94].

Des modèles impliquant d'autres mécanismes ont également été proposés, notamment en lien avec la théorie cinétique des milieux granulaires. Celle-ci s'applique surtout au cas des milieux dilués, tels que la monocouche visible sur la Fig. I.16b. Dans ce cadre, un mécanisme

proposé est la condensation : sous l'effet des vibrations, une zone monodisperse du milieu peut se fluidiser. S'il s'agit d'un ensemble de gros grains, les petits grains vont alors pouvoir couler au travers et condenser au fond du récipient [83, 159]. Néanmoins, ce mécanisme présuppose plusieurs éléments :

- la formation préalable d'une zone monodisperse au sein du milieu ;
- l'équipartition de l'énergie cinétique dans tout le milieu ;
- une température cinétique T vérifiant $T_\mathrm{L} < T < T_\mathrm{S}$ où T_L (respectivement T_S) est la température cinétique critique du fluidisation des gros (resp. petits) grains. Cela implique en particulier que $T_\mathrm{L} < T_\mathrm{S}$. Si ce n'est pas le cas, alors une température cinétique vérifiant $T_\mathrm{S} < T < T_\mathrm{L}$ mène à un effet noix du Brésil inversé.

D'autres aspects peuvent également jouer un rôle, comme l'interaction des grains avec l'air environnant ou encore la présence d'un gradient de température au sein du milieu. Une revue des différents mécanismes en jeu est proposée dans la Réf. [96]. Finalement, la coexistence possible de plusieurs mécanismes, l'influence de paramètres très divers sur l'influence de chacun, ainsi que l'absence de modèle quantitatif pour certains d'entre eux (notamment l'effet d'arche) rendent très difficile l'interprétation des expériences de ségrégation sous vibrations.

III-1.b) Mécanismes de ségrégation dans les écoulements

Comme on l'a vu, l'effet noix du Brésil n'est pas la seule occurrence de la ségrégation dans les granulaires terrestres. En particulier, la ségrégation survient dans le cas d'un écoulement sur un plan incliné rugueux, modélisant par exemple l'avalanche de grains sur un début de tas déjà formé. Ce phénomène est constaté dans le cadre d'écoulements géophysiques [60] et a été étudié expérimentalement [71] et numériquement (voir la Fig. I.20) [172]. Comme nous l'avons mentionné dans la Sec. III-1.a), l'effet d'arche joue un rôle important dans cette configuration, et les réarrangements sont complexes en raison de la présence d'une vitesse d'ensemble. De plus, une fois les gros grains concentrés en surface de l'avalanche, ceux-ci peuvent se concentrer le long de certaines lignes de courant, et ne sont donc plus uniformément répartis à la surface [156]. Cette instabilité secondaire découle généralement d'un processus de digitation [135]. Par ailleurs, les études numériques ont permis de cerner la dynamique de la ségrégation en écoulement sur plan incliné. Dans les simulations, il est en effet possible de connaître la position y_G du centre de masse des gros grains selon la normale au plan incliné. On constate empiriquement que son évolution est de la forme [172] :

$$y_\mathrm{G}(t) = y_0 + (y_\infty - y_0)\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right], \tag{I.8}$$

où y_0 est sa position initiale, y_∞ sa position finale et τ le temps typique sur lequel se fait la ségrégation. Notons que l'état final n'est pas complètement ségrégé (voir la Fig. I.20).

Il est possible de retrouver la dynamique exponentielle visible dans l'Éq. (I.8) en supposant que chaque gros grain subit une force de portance $\overrightarrow{F}_\mathrm{port}$ et une force de frottement $\overrightarrow{F}_\mathrm{f}$ au sein de cet écoulement. Celles-ci seraient alors de la forme :

$$\overrightarrow{F}_\mathrm{port} = C\frac{y_\infty - y_\mathrm{G}}{y_\infty - y_0}\overrightarrow{e_y}, \quad \overrightarrow{F}_\mathrm{f} = -D\dot{y}_\mathrm{G}\overrightarrow{e_y}, \tag{I.9}$$

où $\overrightarrow{e_y}$ dirige la normale au plan de l'écoulement, C est un coefficient dépendant *a priori* du taux de cisaillement rencontré dans l'écoulement et D un coefficient dépendant *a priori* du

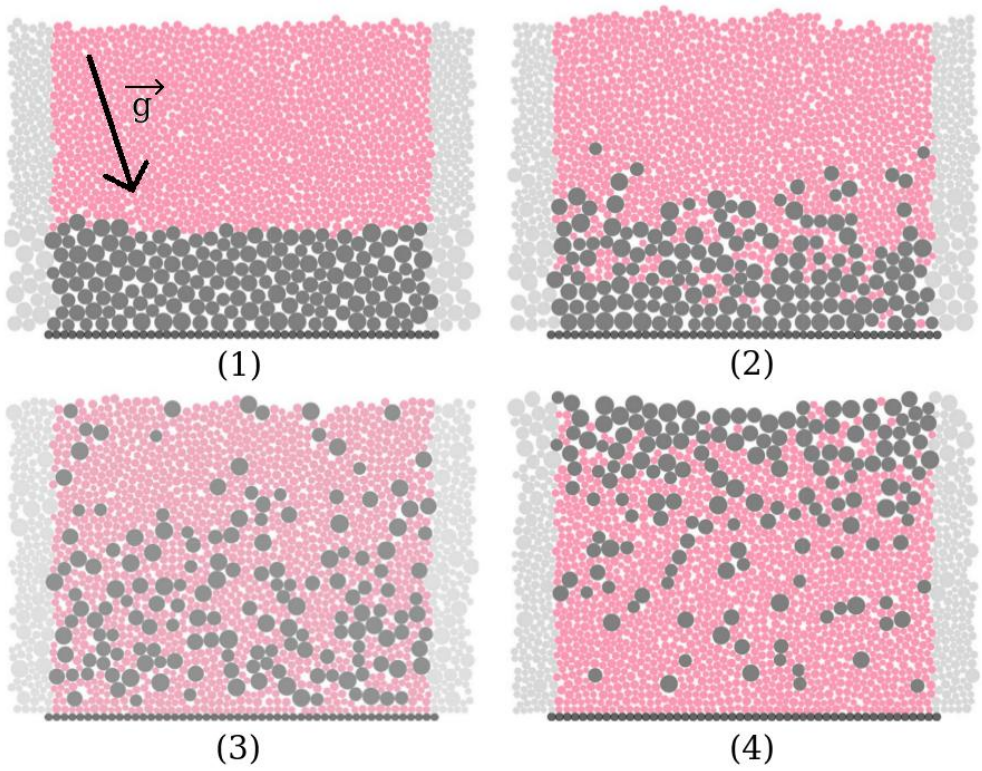


FIGURE I.20 – Simulation d'un écoulement bidimensionnel sur un plan incliné (pente de 18°) utilisant des conditions aux limites périodiques et un fond rugueux. Les gros grains sont en gris foncé et les petits en rose. Le temps s'écoule de l'image (1) vers l'image (4) : on constate une nette ségrégation de l'écoulement, toutefois l'état final n'est pas totalement ségrégé. Image tirée de la Réf. [172].

coefficient de restitution e des collisions et du coefficient de frottement μ entre deux grains. En négligeant l'accélération des gros grains selon (Oy), l'équilibre de ces deux forces donne une équation différentielle dont la résolution permet de retrouver l'Éq. (I.8) [172]. L'existence d'une force de portance, tout comme la dépendance du frottement en $\dot{y_G}$ (force de Stokes), sont conformes aux constatations expérimentales et numériques dans le cas d'un cylindre horizontal se déplaçant dans un granulaire [47, 72]. Néanmoins, dans ce cas la force de frottement dépend de l'épaisseur de grains au-dessus du cylindre, tandis que la force de portance n'en dépend plus (et atteint une saturation) au-delà d'une certaine épaisseur [72]. La modélisation à l'aide des forces décrites par l'Éq. (I.9) semble donc présenter plusieurs limites, et constitue plutôt un postulat *ad hoc* permettant de retrouver la dynamique de l'Éq. (I.8). En outre, la simulation permet d'accéder facilement à la force totale réellement appliquée sur un gros grain en fonction du temps, qui s'avère être un signal très bruité [172].

La ségrégation s'observe également au sein d'un écoulement de Couette granulaire. L'expérience consiste à placer un granulaire dans une cellule de Couette dont l'anneau supérieur est mobile verticalement, en disposant les gros grains en bas et les petits en haut (voir la Fig. I.21). La mise en rotation du cylindre extérieur, et le cisaillement qui s'en suit, vont entraîner la remontée des gros grains tandis que les petits vont tomber au fond de la cellule [70]. Une pression constante est maintenue sur l'anneau supérieur, de sorte que la mesure de sa position $H(t)$ permet de remonter à la compacité du granulaire. Comme celui-ci comprend un volume

égal de petits et de gros grains, sa compacité est directement liée au taux de ségrégation, en vertu du raisonnement explicité au début de la Sec. III-1.a). Cette étude permet de mettre en évidence une saturation exponentielle de $H(t)$, donc de nouveau une cinétique d'ordre 1 pour la ségrégation, avec ici $\tau \simeq 500$ s (voir la Fig. I.21). Sachant que l'entraînement a une période de rotation d'environ 20 s, le temps typique de ségrégation correspond à 25 tours. Par ailleurs, le niveau de ségrégation atteint est quasi maximal, puisque $H(t)$ tend vers sa valeur initiale qui était celle d'un milieu complètement « anti-ségrégé ».

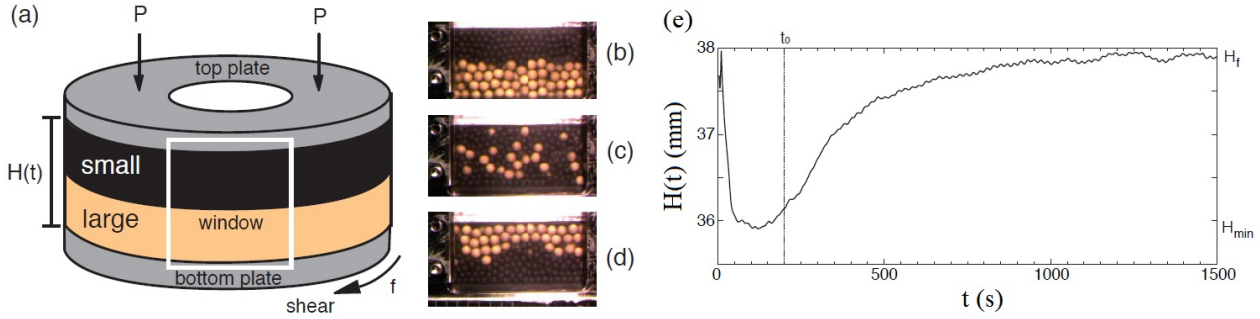


FIGURE I.21 – Ségrégation en cellule de Couette. (a) Schéma de l'état initial. (b) Photo de l'état initial, qui illustre la géométrie et définit $H(t)$. (c) Photo après quelques tours, les gros grains remontent. (d) Photo dans l'état final, quasiment totalement ségrégé. (e) Tracé de $H(t)$: on voit que le milieu se mélange durant une première phase assez courte ($\simeq 100$ s, soit 5 tours) pour se ségréger ensuite avec les plus gros grains en haut. La cinétique est d'ordre 1 à partir de t_0. Image tirée de la Réf. [70].

Enfin, on retrouve le phénomène de ségrégation dans le cas d'un milieu granulaire placé dans un tambour tournant. Cette géométrie est assez fréquemment utilisée en laboratoire : il s'agit simplement d'un cylindre pouvant tourner autour de son axe de symétrie, ce dernier étant à l'horizontale. À cause du frottement, les grains sont entraînés le long de la paroi en rotation et pour un tambour à moitié rempli, le milieu granulaire prend la forme d'un demi-cylindre incliné. Après seulement quelques tours du tambour, on constate une ségrégation radiale : les gros grains sont concentrés sur l'extérieur, et on les trouve aussi dans la couche en écoulement à la surface du granulaire, selon le diamètre du demi-cylindre (voir la Fig. I.16c). Ce résultat est établi expérimentalement et numériquement en trois dimensions [175], mais aussi en deux dimensions, c'est-à-dire dans la limite d'un cylindre de longueur nulle [29]. L'écoulement à la surface du demi-cylindre est le siège du même processus de ségrégation que celui impliqué dans la formation d'un tas : les gros grains arrivent plus facilement en bas de la pente, donc contre la paroi latérale du cylindre. À partir d'un état radialement ségrégé, le milieu peut connaître deux évolutions très intéressantes : la formation de « pétales » dans la section transverse au tambour (voir la Fig. I.22) [82, 201], ou l'apparition d'une ségrégation axiale, c'est-à-dire d'une inhomogénéité de la répartition des gros et petits grains le long de l'axe du tambour (voir la Fig. I.23) [35, 63, 124, 175]. La formation de pétales de petits grains est observée pour un tambour rempli à un peu plus de la moitié de son volume : ce sont des avalanches successives de gros et de petits grains qui mènent à la formation de ces pétales. On observe donc une forme de résonance dans les avalanches de petits grains, puisqu'il faut qu'un pétale atteigne le haut de l'avalanche au moment où un autre doit se former en bas, pour conserver la régularité du motif. Cetté résonance donne un effet intéressant à la composition du milieu : si les petits grains sont

majoritaires (60 % en volume), le nombre de pétales décroît avec la vitesse de rotation [82], tandis que s'ils sont minoritaires (35 % en volume), il augmente [201]. Notons enfin que si le tambour n'est pas assez rempli (moins de 50 %) ou trop rempli (plus de 65 %), on n'observe pas de formation de pétales [82].

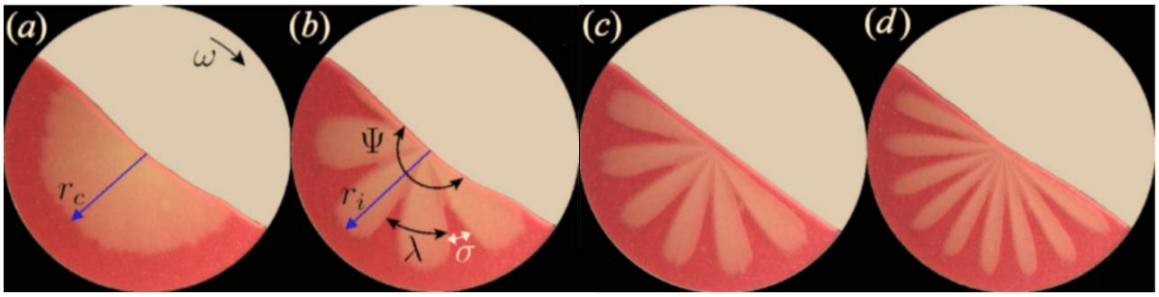
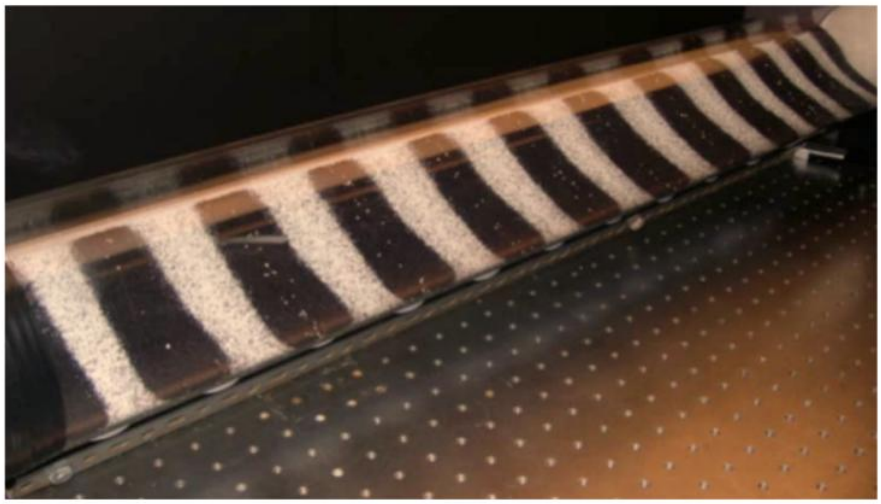


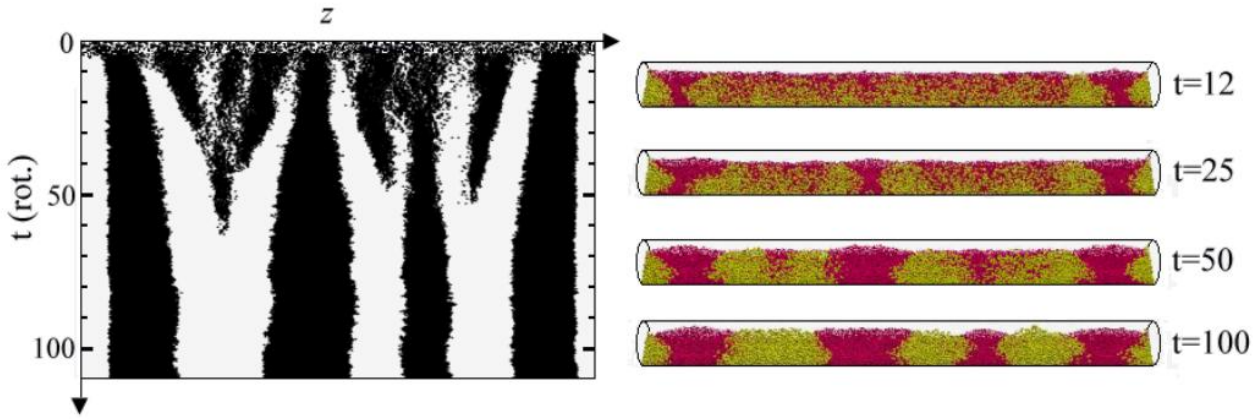
FIGURE I.22 – Formation de pétales dans un tambour tournant. Les gros grains (en rose) ont un diamètre de 0, 71 mm et les petits grains (en blanc) un diamètre de 0, 12 mm. Observation de la ségrégation radiale (a), puis d'un nombre de pétales augmentant avec la vitesse de rotation (b), (c) et (d). Image tirée de la Réf. [201].

La ségrégation axiale est une instabilité observée pour des nombres de rotations bien supérieurs à ceux entraînant la ségrégation radiale. En effet, une fois le milieu radialement ségrégé, les petits grains sont au cœur du tambour, entourés par une couche épaisse de gros grains sur l'extérieur et couverts d'une fine couche de gros grains en avalanche. Ce cœur de petits grains peut alors se déstabiliser et atteindre la surface pour certaines positions le long de l'axe du tambour. Vu d'en haut, le milieu présente donc une alternance de bandes de gros et petits grains le long de l'axe du tambour (voir la Fig. I.23). Les bandes de petits grains émergent et grossissent lentement [63], on observe parfois des fusions de bandes (voir la Fig. I.23b). Une fois la ségrégation axiale établie, l'évolution des bandes est complexe : on peut atteindre un état stationnaire [35, 63] avec une longueur d'onde bien définie (voir la Fig. I.23a) qui semble dépendre du diamètre du tambour tournant [32], mais aussi observer des oscillations de la position des bandes [175]. Ce phénomène de ségrégation axiale s'observe également lorsque trois différentes tailles de grains sont en présence [175].

En résumé, la ségrégation en écoulement est un processus complexe faisant intervenir plusieurs mécanismes, et fortement influencé par la géométrie du milieu. Toutefois, on observe assez souvent une cinétique d'ordre 1 comme celle décrite par l'Éq. (I.8). Un mécanisme souvent évoqué pour expliquer la ségrégation en écoulement est celui du « tamisage cinétique » [155] : l'écoulement libère des espaces entre grains qui seront plus facilement remplis par les petits. Ainsi petits et gros grains connaissent des évolutions asymétriques menant à un état ségrégé. De plus, la mobilité des petits et gros grains dépend de la composition de leur environnement immédiat, ce qui alimente cette asymétrie dans leurs mouvements [185]. Néanmoins, si les gros grains sont plus denses que les petits, le processus de ségrégation en écoulement s'inverse, comme pour l'effet noix du Brésil, alors que le tamisage cinétique est *a priori* toujours présent [59]. Parmi les éléments mal compris, notons également le développement d'instabilités secondaires transverses lors de la formation de tas ou dans un tambour tournant, c'est-à-dire dès qu'on a une situation d'avalanche. Aucun modèle satisfaisant n'a été proposé, mais une hypothèse avancée est l'influence de la force de déplétion, phénomène dont nous proposons une brève description.



(a) Photographie d'un état final présentant une nette ségrégation axiale, avec une longueur d'onde très bien définie. Image tirée de la Réf. [6].



(b) Observation de la ségrégation axiale dans une simulation numérique. Le graphe à gauche est un diagramme spatio-temporel seuillé de la densité de petits grains le long de l'axe du tambour. On voit nettement l'émergence et la formation des bandes (en blanc). Les illustrations à droite montrent le tambour tournant après 12, 25, 50 et 100 tours. Les gros grains sont en rose, les petits en jaune. Image tirée de la Réf. [175].

FIGURE I.23 – Observations expérimentale et numérique de la ségrégation axiale en tambour tournant.

III-1.c) Force de déplétion

La force de déplétion est une interaction d'origine géométrique tendant à stabiliser un contact de deux gros grains plongés dans un ensemble de grains plus petits. Elle joue notamment un rôle important dans les expériences de ségrégation en monocouche horizontale de la Réf. [7]. Pour comprendre ce phénomène, considérons deux grains sphériques de rayons R_g entourés de petits grains également sphériques de rayon $R_p < R_g$. On repère chaque grain par la position de son centre, et on note r la distance entre les centres des deux gros grains. Chaque gros grain représente un certain volume exclu pour les petits grains. Dans la limite où l'écrasement de deux grains quelconques en contact est toujours largement négligeable devant R_p, autrement

dit pour des sphères dures, ce volume exclu est une sphère de rayon $R_g + R_p$ centrée sur le gros grain considéré (voir la Fig. I.24). La présence des deux gros grains représente donc un volume exclu $8\pi(R_g+R_p)^3/3$, sauf dans le cas où $r < 2(R_g+R_p)$. En effet, les volumes exclus possèdent alors un certain recouvrement, avec pour conséquence l'absence de petits grains entre les deux gros grains. Ceux-ci subissent donc des forces de contact avec des petits grains uniquement sur les parties de leurs surfaces opposées à ce volume exclu : cette asymétrie résulte en une force rapprochant chaque gros grain de l'autre et les maintenant en contact. Cet effet est bien connu dans le cas de colloïdes, pour lesquels l'agitation thermique joue un rôle important. En prenant en compte la condition de non interpénétration, c'est-à-dire $r > 2R_g$, on peut montrer que la force d'interaction entre les deux gros grains dérive du potentiel suivant [147] :

$$U(r) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad r < 2R_g, \\ -PV_{rec}(r) & \text{si} \quad 2R_g \leq r < 2(R_g + R_p), \\ 0 & \text{si} \quad r \geq 2(R_g + R_p). \end{cases} \tag{I.10}$$

Pour le cas $2R_g \leq r < 2(R_g + R_p)$, on note $V_{rec}(r)$ le volume du recouvrement entre les sphères d'exclusion des deux gros grains. Le préfacteur P est homogène à une pression et s'identifie à la pression exercée par les chocs des petits grains sur les gros grains [110].

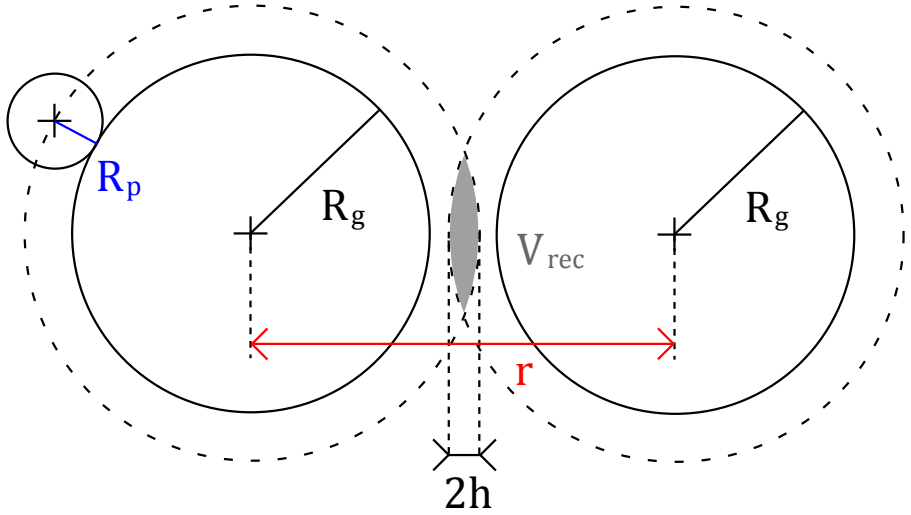


FIGURE I.24 – Schéma illustrant l'origine géométrique de la force de déplétion. La surface des volumes exclus dus aux deux gros grains est en pointillés, et le recouvrement entre ces volumes est teinté en gris.

On remarque que V_{rec} est le double du volume d'une calotte sphérique de rayon $R = R_g + R_p$ et de hauteur $h = R_g + R_p - r/2$ (voir la Fig. I.24). On en déduit que

$$V_{rec}(r) = \frac{2\pi}{3}h^2(3R - h) = \frac{2\pi}{3}\left[2(R_g + R_p)^3 - \frac{3r}{2}(R_g + R_p)^2 + \frac{r^3}{8}\right]. \tag{I.11}$$

En traitant le milieu granulaire comme un ensemble de particules à l'équilibre avec un thermostat à la température T, la probabilité $P(r)$ que les deux gros grains soient séparés d'une distance r fixée suit une statistique de Maxwell-Boltzmann [31] :

$$P(r) \propto \exp\left(-\frac{U(r)}{k_{\mathrm{B}}T}\right). \tag{I.12}$$

Dans le cas de colloïdes, pour lequel cette théorie fut initialement développée, la température T est celle du fluide environnant qui joue le rôle de thermostat, la cinétique des colloïdes étant bien dominée par l'agitation thermique. Dans le cas d'un milieu granulaire, la température T de l'Éq. (I.12) est toujours liée aux énergies cinétiques des différents grains, mais celles-ci sont maintenant déterminées par les perturbations mécaniques auxquelles est soumis le milieu, qui jouent le rôle du thermostat. À l'aide des Éq. (I.10), (I.11) et (I.12), on peut calculer explicitement $P(r)$ pour tout $r > 0$. Par ailleurs, des mesures de $P(r)$ ont été réalisées, expérimentalement et numériquement, dans le cas d'une monocouche mélangeant gros grains et petits grains et vibrée verticalement. Ces mesures présentent un très bon accord avec les prédictions théoriques [110].

Les effets de la force de déplétion semblent donc s'ajouter aux mécanismes déjà évoqués pour expliquer la ségrégation granulaire : effet d'arche, convection et tamisage cinétique principalement. Mais elle pourrait aussi expliquer la formation d'instabilités secondaires tendant à rassembler les gros grains dans une direction transverse à celle de la ségrégation initiale, typiquement la ségrégation axiale intervenant après la ségrégation radiale en tambour tournant. Toutes ces études concernent toutefois des milieux granulaires en environnement terrestre. Pour compléter cet état de l'art, il nous faut maintenant résumer les explorations qui ont pu être faites concernant la ségrégation granulaire dans les astéroïdes.

III-2. Explorations de la ségrégation dans les astéroïdes granulaires

Les observations listées dans la Sec. II-2. ont motivé quelques études de la ségrégation granulaire dans le cas spécifique d'un astéroïde. Ces études sont presque toutes de type numérique afin de pouvoir modéliser le champ gravitationnel de façon réaliste. Néanmoins, une étude expérimentale a été effectuée en tenant compte de la faiblesse du champ d'un astéroïde mais pas de sa géométrie complexe [73]. Dans cette étude, un milieu granulaire polydisperse est placé dans un récipient vertical et soumis à un champ gravitationnel parallèle et uniforme mais très faible. Le récipient est ensuite vibré verticalement, ce qui revient à étudier l'effet noix du Brésil en microgravité. Cette expérience montre que la ségrégation a bien lieu dans ces conditions, et que la vitesse de remontée des gros grains croît avec l'intensité du champ gravitationnel [73]. Cette configuration a également été étudiée numériquement. Certaines études trouvent une dépendance quasi linéaire de la vitesse de remontée des gros grains en fonction de l'intensité du champ [177]. D'autes mettent en avant le rôle important de la convection et du coefficient de frottement entre les grains, retrouvant ainsi des résultats classiques de l'effet noix du Brésil en gravité terrestre [104]. Enfin, certaines simulations ont étudié l'effet noix du Brésil en microgravité mais en appliquant des conditions aux limites périodiques aux bords du récipient, à l'aide de huit réplications de celui-ci (voir la Fig. I.25) [106]. Le mécanisme dominant ne semble alors plus être la convection, mais le tamisage cinétique. Par ailleurs, le coefficient de frottement continue de jouer un rôle dans la dynamique de la ségrégation. Notons par ailleurs que toutes ces études numériques ne montrent pas d'effet significatif du coefficient de restitution caractérisant les collisions entre grains. Finalement, les simulations d'effet noix du Brésil en microgravité que nous avons évoquées ne font que retrouver la plupart des résultats connus en gravité terrestre, tout en ne mettant en jeu qu'un nombre limité de grains.

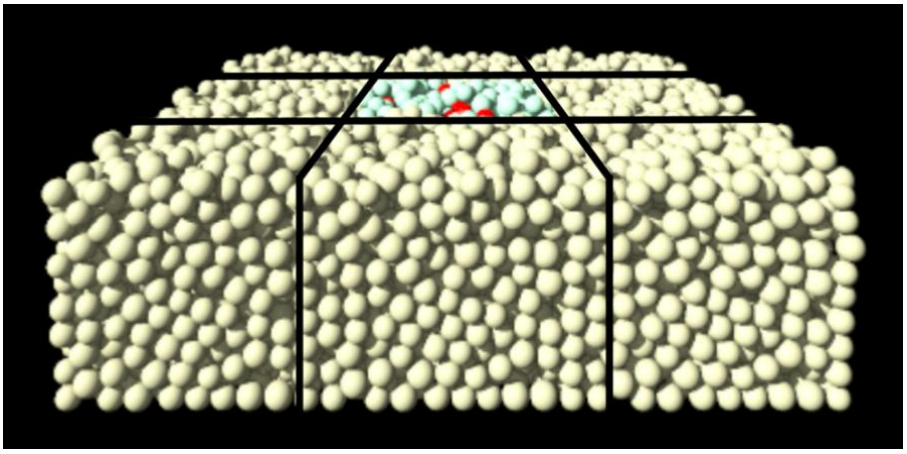


FIGURE I.25 – Empilement central (coloré) soumis à un champ peu intense (microgravité) et à des vibrations verticales. Les conditions aux limites périodiques sont imposées en entourant l'empilement de huit répliques (en blanc, séparées par des traits noirs). Image tirée de la Réf. [106].

Certaines études numériques se sont intéressées à la géométrie spécifique du champ dans un astéroïde, en simulant un agrégat gravitationnel sphérique [127]. Celui-ci est constitué de grains rassemblés sous l'effet de leur interaction gravitationnelle, et ensuite soumis à des perturbations : périodiquement, tous les grains de l'agrégat se voient affecter une faible vitesse, aléatoire distribuée. On observe alors un processus de ségrégation : la surface devient très majoritairement peuplée de gros grains. Un résultat intéressant est que cette ségrégation se produit même pour un coefficient de frottement nul entre les grains, et le mécanisme dominant semble de nouveau être le tamisage cinétique. Par contre, l'étude conclut à une absence de ségrégation au cœur de l'agrégat, quelles que soient l'importance du frottement solide et l'intensité des perturbations mécaniques (voir la Fig. I.26). Cette conclusion est toutefois sujette à caution. En effet, le nombre total de grains est relativement faible (1000 grains) pour une simulation à trois dimensions, ce qui donne un astéroïde dont le rayon ne vaut que 10 fois le rayon des gros grains. De plus, il y a autant de petits grains que de gros grains. Comme le rapport entre leurs rayons vaut 2, on constate que les gros grains occupent en réalité 89 % du volume matériel de l'astéroïde ainsi simulé. Compte tenu de cette fraction volumique élevée en gros grains, et du faible nombre de gros grains pouvant être disposés selon un rayon de l'agrégat, il apparaît assez difficile de dépeupler le cœur de l'astéroïde en gros grains. Cela peut certainement suffire à expliquer le fait qu'aucune ségrégation au cœur ne se produit dans ces simulations.

Par ailleurs, d'autres simulations ont porté sur la ségrégation au sein d'agrégats gravitationnels, mais en deux dimensions, avec un mécanisme de perturbation différent, et un milieu nettement plus dilué [150]. De nouveau, les grains sont soumis à l'interaction gravitationnelle, mais ici une « barrière réfléchissante circulaire » est ajoutée autour de l'agrégat (voir la Fig. I.27). Lorsqu'un grain heurte cette barrière, typiquement après avoir rebondi sur d'autres grains, il est redirigé vers l'agrégat avec une vitesse initiale fixée. Les collisions qui s'en suivent constituent la perturbation mécanique dans cette simulation. On retrouve alors un phénomène de ségrégation, les gros grains se concentrant à la surface de l'astéroïde circulaire. Néanmoins, le milieu granulaire n'atteint pas un état de repos dans cette simulation et garde une forte agitation évocatrice de celle d'un gaz granulaire, ce qui pose la question de sa pertinence pour modéliser un astéroïde.

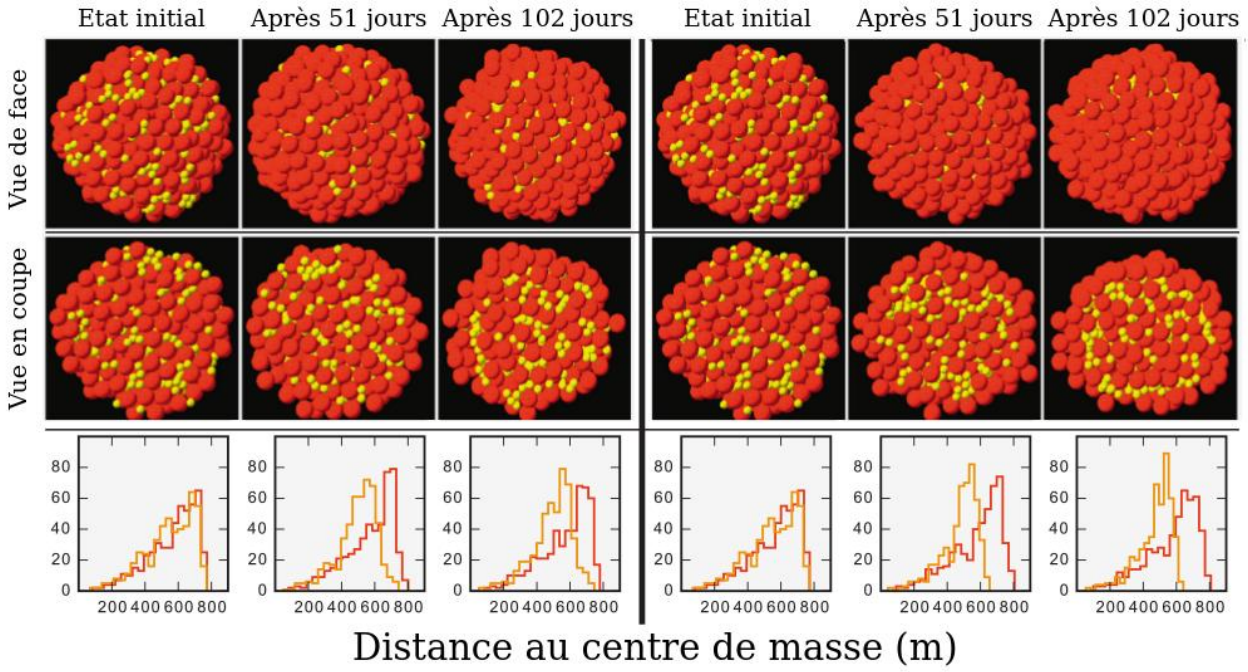


FIGURE I.26 – Simulations d'un astéroïde granulaire sphérique soumis à des vibrations aléatoires. Les gros grains sont en rouge, les petits en jaune. La partie gauche montre l'évolution de l'astéroïde (vue de face en haut, vue en coupe au milieu, histogrammes en bas) en l'absence de frottement entre grains, tandis que la partie droite utilise un coefficient de frottement $\mu = 0,7$. Image tirée de la Réf. [127].

Au-delà de ces tentatives de reproduction de la ségrégation par simulations numériques, différents nouveaux mécanismes pouvant entraîner la ségrégation ont été proposés dans le cas des astéroïdes. En particulier, les mers de fines poussières visibles sur Itokawa s'observent également sur Éros. Leur formation pourrait être expliquée par un processus de fluidisation du milieu granulaire, dû à l'éjection par l'astéroïde de vapeur (notamment de la vapeur d'eau). Cette fluidisation permettrait donc aux fines poussières de descendre dans les creux de potentiel pour y former les mers observées [163]. Néanmoins, l'éjection de composés volatils à travers la surface de l'astéroïde suppose une activité géologique interne, *a priori* absente des petits astéroïdes granulaires comme Itokawa, Bennu et Ryugu. Un autre mécanisme proposé découle de la rupture d'un astéroïde, typiquement suite à un choc violent, suivie de la réaccrétion de ses constituants. En effet, des simulations numériques montrent que ce type de processus peut mener à des formes irrégulières similaires à celle d'Itokawa [113]. Les chocs mous se produisant au cours de la réaccumulation des fragments de l'astéroïde permettent alors aux plus gros morceaux de se déposer à la surface du nouvel agrégat, pouvant expliquer un motif de ségrégation. Néanmoins, cela suppose que la masse initiale de l'astéroïde est suffisamment importante, faute de quoi les débris sont simplement dispersés. De nouveau, cela ne semble pas être le cas pour de petits astéroïdes comme Itokawa [106]. Ce processus de ségrégation est tout de même intéressant car il pourrait survenir simplement lors de l'accrétion de nouveaux grains à l'astéroïde, sans qu'il y ait eu un événement catastrophique au préalable. Les expériences et les simulations montrent en effet qu'un grain rentrant en collision avec un plus gros grain a plus de chances de rebondir que s'il rencontre un amas de grains de sa taille, auquel cas il va généralement s'y déposer [168]. Ce processus de « tri balistique » est intéressant mais reste à

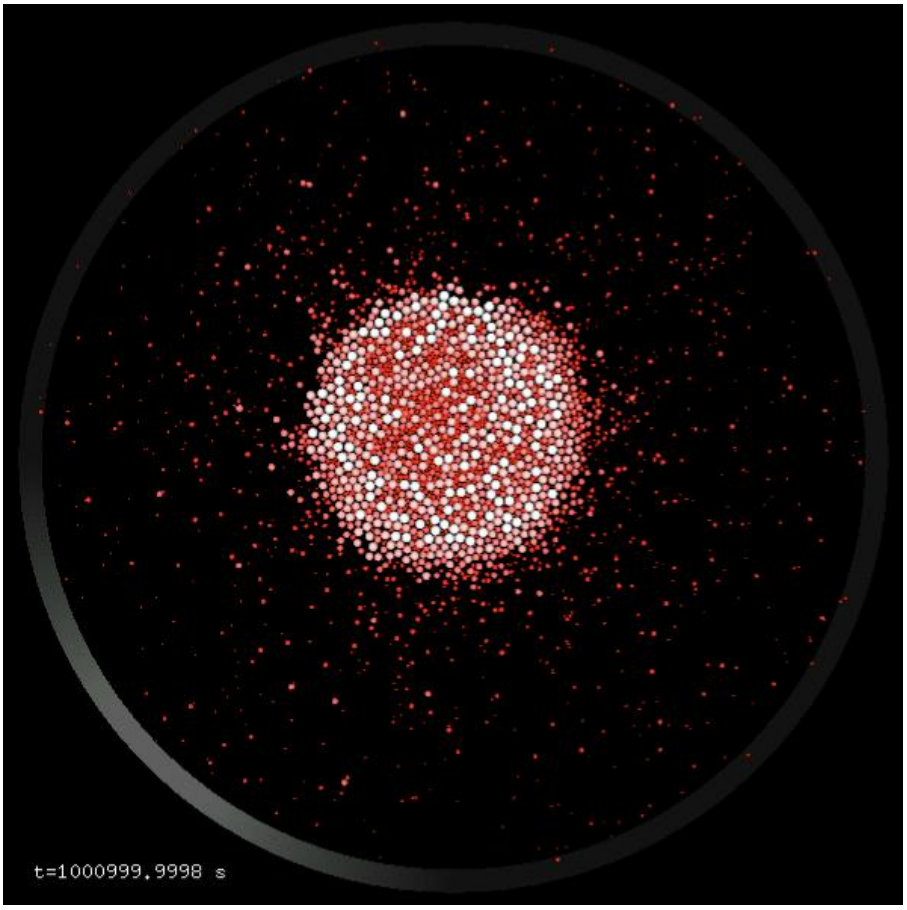


FIGURE I.27 – Simulation d'un agrégat gravitationnel subissant des collisions répétées. La couleur des grains va du blanc pour les plus gros au rouge pour les plus petits. Le disque grisé est une barrière réfléchissant vers l'agrégat les grains qui l'atteignent. On constate une nette ségrégation de l'agrégat mais une trop forte agitation de l'ensemble. Image tirée de la Réf. [150].

explorer plus en détails, notamment dans des simulations impliquant un agrégat complet. Par ailleurs, il ne s'applique qu'à des grains venant s'accréter à un astéroïde existant et présentant déjà des inhomogénéités de répartition des gros grains à sa surface. Enfin, nous avons vu que généralement les astéroïdes sont inhomogènes en température et possèdent une rotation propre (voir la Sec. II-3.d)). Le matériau granulaire est alors soumis à des cycles thermiques qui peuvent entraîner des réarrangements et éventuellement des fluidisations locales. Ce phénomène a été étudié expérimentalement [48] et numériquement [125] dans un environnement terrestre. Une modélisation numérique dans le cas des astéroïdes pourrait être envisageable à partir des mesures des propriétés thermiques de surface et en considérant l'intensité du rayonnement solaire au niveau d'un astéroïde donné et dépourvu d'atmosphère.

Finalement, quelques pistes ont pu être explorées quant à la ségrégation granulaire dans les astéroïdes, mais les résultats sont sujets à caution à cause des limites présentées par les modèles utilisées, et le phénomène reste encore assez mal compris.

III-3. Conclusion et orientations du travail effectué

Les connaissances acquises sur la ségrégation granulaire en environnement terrestre sont précieuses pour aborder le phénomène dans les astéroïdes. En effet, comme nous l'avons expliqué, de nombreux mécanismes terrestres peuvent intervenir également dans le cas spécifique des astéroïdes. De plus, les premières explorations spécifiques au cas des astéroïdes sont également instructives car elles font émerger de nouveaux mécanismes dont la contribution reste à déterminer. Néanmoins, ces explorations restent largement incomplètes pour les raisons que nous avons évoquées. Par ailleurs, aucune ne s'est intéressée à l'éventualité d'une instabilité secondaire, qui pourrait notamment expliquer l'inhomogénéité de la densité en gros grains à la surface d'Itokawa. Le but de cette thèse est donc d'étudier le problème de la ségrégation dans un agrégat gravitationnel, à l'aide de simulations numériques d'une part, mais aussi en proposant un modèle expérimental d'autre part. Le travail numérique s'incrit dans la continuité des travaux entamés par Charles-Édouard Lecomte durant sa thèse [100]. Il a en effet pu établir que la ségrégation se produisait dans des agrégats à deux dimensions, perturbés de façon isotrope. Dans ce cadre, il a pu mettre en évidence une cinétique d'ordre 1, similaire à celle retrouvée dans plusieurs cas en environnement terrestre, mais aussi observer le développement d'une instabilité secondaire matérialisée par une ségrégation azimutale. Néanmoins, l'influence de certains paramètres sur la cinétique, notamment le coefficient de frottement, restait à étudier plus en détails. Ce fut un premier objectif de cette thèse. Une étude de l'influence de la géométrie du champ gravitationnel, sur les ségrégations radiale et azimutale, a constitué un second objectif. Ensuite, nous avons également étudié la ségrégation sous des perturbations plus réalistes dans un contexte astrophysique, à savoir des collisions survenant en des points aléatoires de la surface de l'astéroïde. La fin du travail numérique a porté sur le passage à des simulations en trois dimensions. Par ailleurs, le développement d'une expérience modélisant la ségrégation dans un astéroïde en deux dimensions, avec la difficulté de la reproduction du champ gravitationnel, a été très intéressant et instructif. Nous avons pu obtenir des premiers résultats encourageants, même si encore largement incomplets.

Chapitre II

Méthodes numériques

La pomme est un fruit sympathique,
et je l'observe tous les jours.

Jacques Chirac.

Dans ce chapitre, nous présentons les méthodes numériques utilisées dans les simulations d'astéroïdes granulaires de cette thèse. Il s'agit notamment de donner le principe général de ces simulations, leurs avantages et leurs inconvénients. Ensuite, nous expliquons plus en détails les étapes importantes de l'algorithme : formation de l'astéroïde, implémentation du champ gravitationnel, détection des contacts et modélisation des forces de contact. Quant aux éléments variant d'un type de simulations à l'autre, ils seront explicités au début des chapitres concernés.

Sommaire

I- Choix du type de simulation **62**
I-1. Présentation des grands types de simulation 62
I-2. Dynamique moléculaire de sphères molles 63
II- Fonctionnement général de l'algorithme **64**
II-1. Initialisation de la simulation 64
II-2. Calcul des forces de gravité 66
II-3. Recherche des contacts 66
II-4. Calcul des forces de contact 69
II-5. Intégration des équations du mouvement 74
II-6. Compléments sur la formation et l'évolution de l'astéroïde 74
II-7. Remarque sur les valeurs numériques des paramètres 75
III- Conclusion **77**

I- Choix du type de simulation

L'apparition des ordinateurs, permettant d'enchaîner un grand nombre d'opérations élémentaires de façon automatique, a ouvert le champ de l'analyse numérique et des simulations. L'évolution constante des capacités jusqu'à nos jours, tant du point de vue de la fréquence de calculs que de celui de la mémoire vive disponible, a fait de l'informatique un outil de calcul extrêmement puissant. Les méthodes numériques sont ainsi rapidement devenues essentielles dans divers domaines de l'économie, de l'ingénierie, mais aussi de la recherche fondamentale et appliquée. C'est notamment le cas de la physique des milieux granulaires, en grande partie parce que nous ne disposons pas d'une théorie complète la décrivant [80]. De plus, un milieu granulaire se décompose évidemment en petites entités dont la simulation pourra étudier la dynamique : les grains. Ces deux constats sont de bonnes motivations pour simuler numériquement un milieu granulaire, mais on compte deux autres avantages majeurs à cette méthode.

- On peut appliquer des conditions qui seraient très difficiles à obtenir expérimentalement, comme une certaine géométrie, la préparation initiale de l'empilement, ou certaines perturbations mécaniques. De plus, on peut également fixer les valeurs de certains paramètres physiques hors des gammes accessibles expérimentalement, par exemple dans le but de tester les limites d'un modèle ou d'avoir plus d'informations sur l'influence du paramètre en question.
- On peut connaître toutes les variables mécaniques du système à tout instant. Par exemple, si l'on fait des expériences avec un tas de sable, on ne peut pas connaître toutes les positions des grains ni toutes les contraintes à l'intérieur du tas. Par contre, dans une simulation, on peut suivre tous les grains un à un dans le temps.

Tout ceci contribue à faire des simulations numériques un excellent complément à l'expérience, voire une méthode de remplacement dans certains cas. Voyons maintenant comment on peut construire une simulation de milieu granulaire.

I-1. Présentation des grands types de simulation

Les méthodes de simulations numériques des milieux granulaires sont nombreuses, mais se répartissent entre trois grandes catégories [134, 199].

- Les simulations de type *event-driven*, c'est-à-dire « dirigées par les événements », en l'occurrence les collisions entre grains. Elles sont adaptées aux milieux peu denses (gaz granulaires) dans lesquels les collisions sont rares et où un grain est impliqué dans une seule collision à la fois. Le but est donc de calculer, à partir de positions et vitesses données, la date et le lieu de la prochaine collision. Celle-ci est ensuite prise en compte en appliquant un certain opérateur de collision aux deux grains impliqués : il s'agit d'une collision instantanée. Pour des milieux granulaires denses, ces méthodes sont sans intérêt et donnent même des résultats peu crédibles, puisque les contacts sont alors très fréquents, voire permanents, et qu'un grain peut être impliqué dans plusieurs contacts à la fois.
- Les simulations de type « dynamique moléculaire » traitent chaque grain comme un système physique subissant un certain nombre de forces et dont on intègre alors les équations du mouvement avec un pas de temps fixé. Comme on traite des grains et non des molécules, on parle aussi d'éléments discrets, ou *discrete element method* en anglais. On peut là encore adopter une approche de sphères dures pour le traitement des contacts, bien

adaptée si ces derniers sont peu fréquents et binaires : chaque collision est modélisée par un coefficient de restitution en vitesse appliqué à un instant donné. On parle alors de HSDEM pour *Hard-Spheres Discrete Element Method* en anglais [142]. Mais pour des milieux granulaires denses, on préférera adopter une méthode de sphères molles, dans laquelle les contacts ne sont plus instantanés. Les grains entrant en contact subissent un certain écrasement ; des forces de contacts sont alors calculées tous les pas de temps durant le contact, et insérées dans les équations de la dynamique des deux grains impliqués. On parle dans ce cas de SSDEM pour *Soft-Spheres Discrete Element Method* en anglais [80].

- Les simulations de type « dynamique des contacts », dans lesquelles les grains sont parfaitement rigides et les contacts suivent les lois d'Amontons-Coulomb du frottement solide [88]. Aucune loi de force n'est prédéterminée et les vitesses au niveau des points de contact sont simplement modifiées compte tenu de la géométrie du contact et du frottement solide. La durée du contact dépend donc des vitesses relatives des grains et non de leur capacité à se déformer comme ce serait le cas en SSDEM. De plus, les grains peuvent alors avoir une vitesse discontinue sous l'effet de contacts multiples. Pour ces raisons, ces méthodes sont difficiles à mettre en place, elles utilisent une forme intégrée des équations du mouvement, et le temps de calcul peut être sensiblement plus élevé que pour les méthodes de dynamique moléculaire. Elles sont néanmoins utiles pour simuler des grains non sphériques, puisqu'on peut alors traiter les contacts entre des polyèdres. De plus, la dynamique des contacts appliquée à des sphères donne des résultats cohérents avec les simulations de type SSDEM [149].

Dans le cadre de l'étude de la ségrégation granulaire dans des astéroïdes, nous avons choisi d'utiliser des simulations de type SSDEM, bien adaptées à des milieux denses impliquant des contacts permanents, et permettant notamment d'étudier l'effet de la viscoélasticité des grains et de leur coefficient de frottement. La limitation à des grains sphériques n'est pas gênante dans la mesure où la ségrégation se produit sans problème pour des milieux constitués de grains sphériques, comme nous l'avons vu à maintes reprises dans le Chap. I. Les propriétés physiques de la ségrégation pourront donc être étudiées dans ce cadre simple, bien que les constituants d'un astéroïde granulaire ne soient absolument pas sphériques. Nous proposons maintenant quelques informations plus détaillées sur les simulations de type SSDEM.

I-2. Dynamique moléculaire de sphères molles

Les simulations de type SSDEM reposent sur une discrétisation du temps. On choisit donc un pas de temps dt, qui ne doit être ni trop large, pour que la simulation reste réaliste (ce point sera détaillé dans la Sec. II-4.a)), ni trop fin, pour que le temps de calcul reste raisonnable. Une fois que l'on a choisi ce pas, le nombre de grains et tous les paramètres physiques devant intervenir dans leur dynamique (coefficient de restitution des contacts, coefficient de frottement, etc), l'algorithme est simplement une boucle temporelle. À chaque incrément de temps, plusieurs opérations sont réalisées, dans l'ordre suivant.

- Connaissant les positions des grains à un instant t, on applique à chacun les forces qu'il subit hors contacts, c'est-à-dire dans notre cas les forces d'origine gravitationnelle.
- On recherche les contacts entre grains et on applique à chaque grain les forces et moments de contact associés.

- Connaissant l'ensemble des actions mécaniques subies par chaque grain, on intègre ses équations du mouvement : principe fondamental de la dynamique (PFD) et théorème du moment cinétique (TMC). On en déduit les nouvelles positions et vitesses de tous les grains, à l'instant $t + \mathrm{d}t$.
- À la fin de cet incrément temporel, on peut sauvegarder dans un fichier les positions, vitesses et accélérations des grains, ou toute autre donnée pertinente (le nombre de contacts pour chaque grain, par exemple).

Ce type de simulation est donc extrêmement intéressant, car il se contente d'appliquer les lois de la mécanique classique à chaque constituant du milieu granulaire. Le réalisme de la description repose donc sur la façon dont on modélise les diverses actions mécaniques subies par chaque grain. La section suivante apporte toutes les précisions nécessaires sur les modèles que nous adoptons, en détaillant les différentes étapes au sein de la boucle temporelle.

II- Fonctionnement général de l'algorithme

II-1. Initialisation de la simulation

Avant de démarrer la boucle temporelle, il est nécessaire de définir numériquement les grains et de les munir des propriétés physiques qui seront utiles durant la simulation. C'est le but du processus d'initialisation. On commence par définir N grains, désignés par un indice $i \in [|1, N|]$. Plaçons nous dans le cas d'une simulation en deux dimensions (2D). Chaque grain se voit affecter une position initiale et une vitesse initiale. Comme les grains sont des disques, on définit pour chacun son rayon R_i, sa masse m_i et son moment d'inertie J_i par rapport à son centre. Pour ce faire, on fixe un rayon standard R^*, une masse standard m^* et un moment d'inertie standard J^* et on associe à chaque grain un rayon réduit $\overline{R}_i$, de sorte que :

$$\begin{aligned} R_i &= R^* \overline{R}_i, \\ m_i &= m^* {\overline{R}_i}^2, \\ J_i &= J^* \frac{m_i {R_i}^2}{2} = J^* \frac{m^* {R^*}^2}{2} {\overline{R}_i}^4. \end{aligned} \tag{II.1}$$

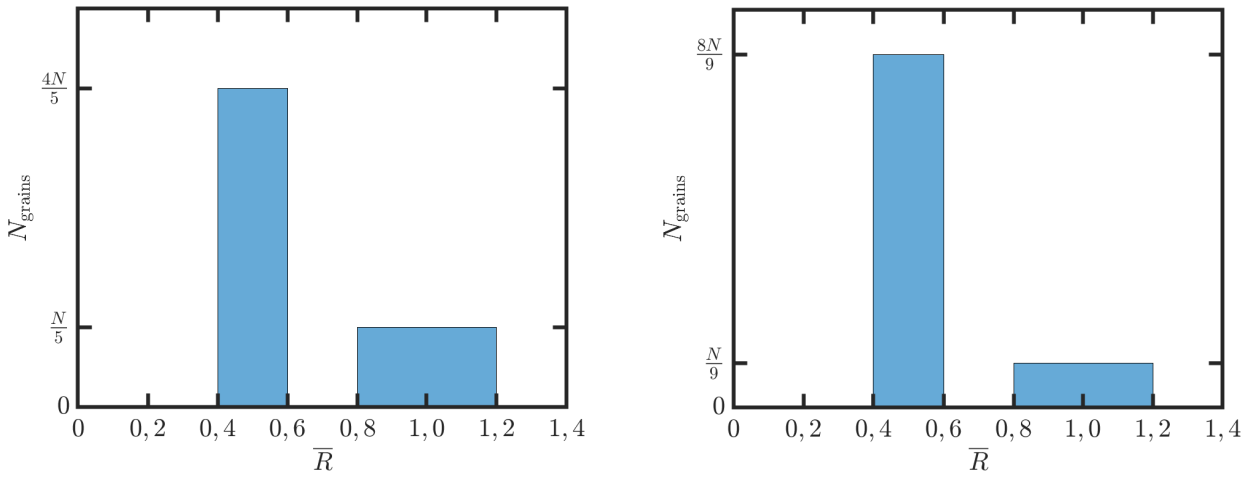
L'intérêt de procéder ainsi est de pouvoir fixer l'échelle typique de la simulation à travers R^*, la masse surfacique ρ_{surf} des grains à travers m^*, et l'importance relative du degré de liberté en rotation, par rapport à ceux en translation, à travers J^*. Physiquement, on doit avoir $m_i = \rho_{\text{surf}} \pi {R_i}^2$ et $J_i = m_i {R_i}^2/2$, c'est-à-dire $m^* = \rho_{\text{surf}} \pi {R^*}^2$ et $J^* = 1$. L'intérêt de considérer d'autres valeurs de J^* sera détaillé dans le Chap. III.

Ces considérations se généralisent sans problème au cas de simulations en trois dimensions (3D), à condition de prendre en compte l'effet de ce changement de géométrie sur la définition de m_i et de J_i, qui valent alors :

$$\begin{aligned} m_i &= m^* {\overline{R}_i}^3, \\ J_i &= \frac{2}{5} J^* m_i {R_i}^2 = \frac{2}{5} J^* m^* {R^*}^2 {\overline{R}_i}^5. \end{aligned} \tag{II.2}$$

Pour étudier la ségrégation, nous utilisons dans nos simulations un milieu polydisperse

composé de deux populations de grains [1]. Nous distinguons la population des « petits grains », caractérisée par un rayon réduit $\overline{R}_i$ uniformément distribué sur l'intervalle $[0,4;0,6]$, de celle des « gros grains », pour laquelle $\overline{R}_i$ est uniformément distribué sur $[0,8;1,2]$. Les gros grains ont donc en moyenne un rayon deux fois plus important que les petits grains. La variabilité de ± 20 % en rayon au sein de chaque population a pour but d'éviter la cristallisation des zones monodisperses pouvant apparaître avec la ségrégation. Sauf mention contraire, dans les simulations les gros grains et les petits grains recouvrent toujours la même aire en 2D, ou représentent le même volume en 3D. Cela implique que les petits grains sont 4 fois plus nombreux que les gros en 2D, et 8 fois plus nombreux en 3D (voir la Fig. II.1).



(a) Histogramme de la distribution en rayon réduit $\overline{R}$ utilisée dans les simulations 2D.

(b) Histogramme de la distribution en rayon réduit $\overline{R}$ utilisée dans les simulations 3D.

FIGURE II.1 – Distribution binaire utilisée dans la plupart des simulations.

Tous les grains ainsi définis évoluent dans un espace borné : la simulation est de taille L selon (Ox), W selon (Oy), et éventuellement H selon (Oz) si on est en 3D. Le processus d'initialisation introduit également les variables numériques dans lesquelles seront stockées les positions, vitesses, forces, etc. Nous pouvons ainsi profiter de cette description pour préciser quelques notations importantes. Le grain i est repéré par sa position $\overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{OM_i}$ où O est une origine fixée au début de la simulation et M_i la position de son centre de masse. Ce dernier possède par ailleurs une vitesse $\overrightarrow{v_i}$ et une accélération $\overrightarrow{a_i}$. De plus, on note $\overrightarrow{\theta_i}$ la position angulaire du grain i : la première coordonnée de ce vecteur selon (Ox) correspond à l'angle dont le grain i a tourné autour de l'axe (Ox), et pareillement pour (Oy) et (Oz). La dérivée de ce vecteur donne la vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_i}$ et sa dérivée seconde donne l'accélération angulaire $\overrightarrow{\alpha_i}$ [2]. Enfin, les interactions du grain i avec son environnement se traduisent par une résultante $\overrightarrow{F_i}$ et un moment résultant $\overrightarrow{\mathcal{M}_i}$ (pris en M_i) appliqués au grain. Dans le cas de nos simulations d'agrégat gravitationnel, ces actions mécaniques ont pour seules origines l'interaction gravitationnelle et les interactions de contact entre grains.

1. Il s'agit là d'une règle générale, qui souffre toutefois quelques exceptions, puisque nous avons aussi exploré d'autres distributions en taille. Le cas échéant, une mention spécifique sera faite.

2. Dans le cas de simulations à deux dimensions, les disques ne peuvent tourner qu'autour de l'axe (Oz) normal au plan de la simulation. Les vecteurs $\overrightarrow{\theta_i}$, $\overrightarrow{\Omega_i}$ et $\overrightarrow{\alpha_i}$ se réduisent alors à des scalaires.

II-2. Calcul des forces de gravité

Chaque grain i de la simulation est en interaction gravitationnelle avec chacun des grains $j \neq i$. La prise en compte de toutes les forces associées présente donc une complexité en $\mathcal{O}(N^2)$. Plutôt que de subir l'allongement du temps de calcul qui en découle, nous préférons tirer profit du cas d'un agrégat à symétrie sphérique en 3D (ou circulaire dans le cas 2D). Cette symétrie fait que le champ gravitationnel s'écrit alors $\overrightarrow{\mathcal{G}} = -g(r)\overrightarrow{e_r}$, en prenant l'origine au centre O de l'agrégat. Nous pouvons de plus supposer que la répartition de masse est homogène au sein de l'agrégat : c'est le cas dans un état mélangé mais aussi dans un état totalement ségrégé, la compacité étant la même au sein d'une zone monodisperse de gros grains ou de petits grains [3]. le théorème de Gauss gravitationnel permet de préciser $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ en tout point M de l'agrégat :

$$\overrightarrow{\mathcal{G}} = -\frac{4}{3}\pi G \rho_{\text{vol}} r \overrightarrow{e_r} \quad \text{en 3D ou} \quad \overrightarrow{\mathcal{G}} = -2\pi G \rho_{\text{surf}} r \overrightarrow{e_r} \quad \text{en 2D,} \tag{II.3}$$

où ρ_{vol} (resp. ρ_{surf}) désigne la masse volumique (resp. surfacique) pour un agrégat 3D (resp. 2D), $r = ||\overrightarrow{OM}||$ et $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$. Que l'on soit en 3D ou en 2D, la description d'un tel agrégat se traduit par un champ gravitationnel central et dont l'intensité croît comme la distance r au centre de masse. Dans les simulations, le point O est imposé et l'interaction gravitationnelle est donc modélisée en appliquant à chaque grain une force

$$\overrightarrow{F}_{i,\text{grav}} = -g m_i \frac{r_i}{R_{\text{ast}}} \overrightarrow{e_{r,i}}, \tag{II.4}$$

où on a noté $r_i = ||\overrightarrow{x_i}||$, $\overrightarrow{x_i} = r_i \overrightarrow{e_{r,i}}$, g l'intensité de la pesanteur à la surface de l'agrégat ainsi formé, et R_{ast} le rayon de cet agrégat [4]. Notons que l'introduction de g et R_{ast} permet d'utiliser l'Éq. (II.4) indifféremment en 2D ou en 3D.

À titre de remarque, signalons que des méthodes intermédiaires existent pour prendre en compte l'interaction gravitationnelle entre grains dans le cas de géométries sans symétrie particulière, tout en évitant une complexité en $\mathcal{O}(N^2)$. L'idée est de découper l'espace en cubes de côté connu et de regrouper les grains appartenant à un même cube pour connaître la masse contenue dans chaque cube. On peut alors calculer les forces d'attraction entre ces cubes, et en déduire une approximation de la résultante gravitationnelle subie par chaque grain du cube [151].

II-3. Recherche des contacts

II-3.a) Découpage de l'espace en cellules

Les interactions de contact ne concernent, par définition, que les couples de grains effectivement en contact. L'algorithme doit donc dans un premier temps déterminer si deux grains donnés i et j sont en contact ou non. Comme les grains sont des sphères molles, une condition simple pour que i et j soient en contact à l'instant t est que la distance entre leurs centres de masse soit inférieure ou égale à la somme de leurs rayons, c'est-à-dire :

$$||\overrightarrow{x_j}(t) - \overrightarrow{x_i}(t)|| \leq R_i + R_j. \tag{II.5}$$

3. Par contre, la compacité globale de l'agrégat est plus faible dans un état ségrégé.

4. Cependant, dans le Chap. IV, nous étudions des géométries d'agrégat différentes, ce qui nous a conduit à adapter l'Éq. (II.4).

La vérification systématique de cette condition pour tous les couples de grains possibles entraînerait de nouveau une complexité en $\mathcal{O}(N^2)$. Il est néanmoins possible de contourner cette difficulté en ciblant efficacement la recherche des contacts : c'est la méthode dite des « cellules liées » [4]. L'idée est de découper l'espace en carrés (2D) ou en cubes (3D) identiques, constituant donc les cellules. Ensuite, la position du centre de masse d'un grain détermine à quelle cellule il se voit rattaché. Si le côté a des cellules est strictement supérieur au diamètre du plus gros grain de la simulation, alors un grain donné ne peut être en contact qu'avec les grains de sa cellule ou des cellules limitrophes (voir la Fig. II.2). Pour un grain i donné, la recherche des contacts revient donc à tester la condition donnée par l'Inéq. (II.5) pour les grains j contenus dans 9 cellules dans le cas 2D ou 27 dans le cas 3D. La complexité de la recherche des contacts est donc proportionnelle à $N_\mathrm{c}N$ où N_c est le nombre moyen de grains dans une cellule. L'intérêt d'utiliser les cellules liées plutôt qu'une recherche « naïve » des contacts est donc d'autant plus grand que N est grand (dans notre cas, N vaut au moins 1000 en 2D et 7500 en 3D) et que N_c est faible. Il faut donc ajuster le côté a des cellules de sorte à ce qu'il soit le plus faible possible, pour minimiser N_c, tout en restant supérieur au dimaètre des plus gros grains de la simulation, faute de quoi la méthode ne tient plus. Dans notre cas, les plus gros grains sont de diamètre $2,4R^*$ et nous avons donc fixé $a = 2,5R^*$. Comme les plus petits grains sont de diamètre $0,8R^*$, une cellule contient au plus une dizaine de grains en 2D (pour une compacité de 84 %), donc $N_\mathrm{c} < 10 \ll 1000 = N$, ce qui justifie l'emploi des cellules liées.

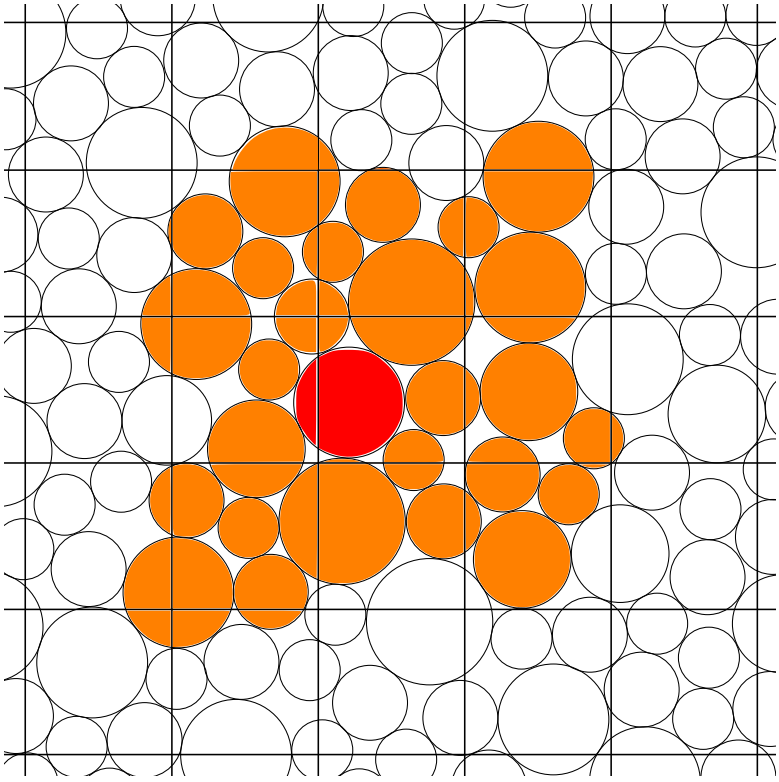


FIGURE II.2 – Illustration de la méthode des cellules liées. On a représenté une partie d'un milieu granulaire bidimensionnel, ainsi que les délimitations des cellules. Le côté de celles-ci est plus grand que le diamètre des plus gros grains. Ainsi, comme le grain rouge appartient à la cellule du centre, il ne peut être en contact qu'avec les grains coloriés en orange, c'est-à-dire ceux appartenant à la même cellule ou à une des huit cellules limitrophes.

II-3.b) Implémentation : méthode des cellules liées

Le classement des grains dans les différentes cellules et la recherche des contacts dans certaines cellules uniquement sont des opérations qui doivent être effectuées efficacement. En effet, elles sont recommencées à chaque incrément temporel et doivent rester moins coûteuses qu'une recherche naïve des contacts.

Décrivons le processus de classement des grains dans les cellules en 2D, celui-ci se généralisant facilement au cas 3D. On utilise une matrice `HoC` (pour *Head of Cell* en anglais) de taille $N_x \times N_y$, où $N_x = L/a$ (resp. $N_y = W/a$) est le nombre de cellules selon l'axe (Ox) (resp. (Oy)), ainsi qu'un vecteur `list_link` de taille N. Au début de chaque incrément temporel, `HoC` et `list_link` sont remplis avec la valeur -1. On effectue ensuite une boucle sur les N grains, en suivant pour chaque grain i les étapes suivantes.

- On repère la cellule à laquelle il appartient, de numéros $n_x = E(x_i/a)$ selon (Ox) et $n_y = E(y_i/a)$ selon (Oy), E désignant la fonction partie entière par défaut.
- Si $\texttt{HoC}[n_x, n_y] = -1$, alors i est le premier grain trouvé dans la cellule (n_x, n_y). On assigne donc $\texttt{HoC}[n_x, n_y] = i$: le grain i devient la tête de la cellule (n_x, n_y).
- Si par contre $\texttt{HoC}[n_x, n_y] = j \in [|1, n|]$, c'est qu'il y a déjà un grain j à la tête de la cellule (n_x, n_y). On assigne alors $\texttt{list\_link}[i] = j$ puis $\texttt{HoC}[n_x, n_y] = i$: le grain i devient la nouvelle tête de la cellule (n_x, n_y), et le grain j son premier successeur dans la liste des grains de cette cellule.

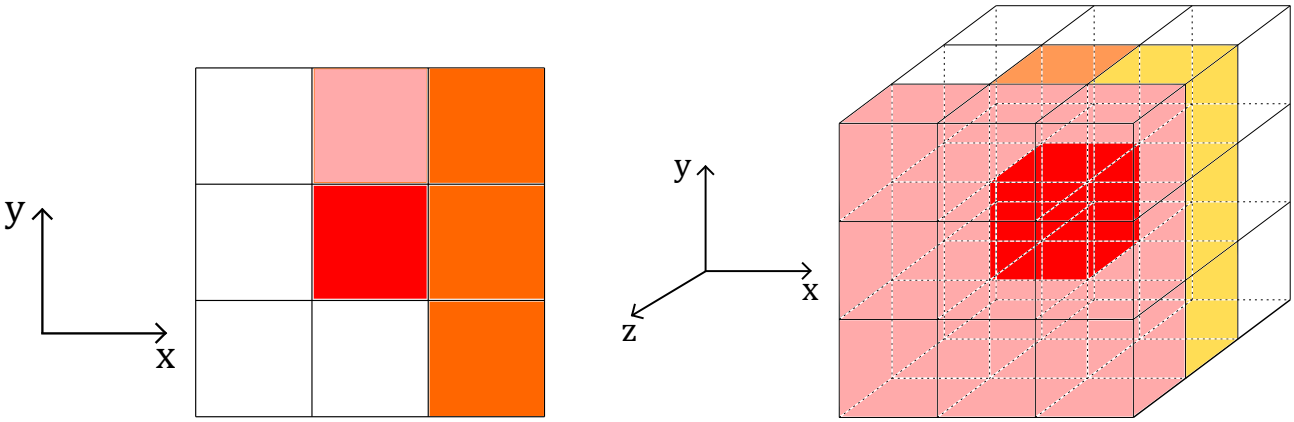
Une fois les grains ainsi classés, toutes les cellules (n_x, n_y) possédant au moins un grain correspondent à une valeur $\texttt{HoC}[n_x, n_y] > 0$, tandis que les cellules (n_x, n_y) vides correspondent à une valeur $\texttt{HoC}[n_x, n_y] = -1$. Tous les grains i dont la cellule contient au moins un grain de plus petit numéro, $j < i$, correspondent à une valeur $\texttt{list\_link}[i] > 0$, tandis que les grains seuls dans leur cellule, ou de plus petit numéro au sein de celle-ci, correspondent à une valeur $\texttt{list\_link}[i] = -1$. On peut alors connaître facilement, pour chaque cellule, l'ensemble des grains qu'elle contient, ce qui rend efficace notre processus de recherche des contacts par cellules liées. Pour connaître tous les contacts d'un grain i, situé dans une cellule (n_x, n_y) donnée, on suit les étapes suivantes.

- Si $\texttt{list\_link}[i] = -1$, alors le grain i est seul dans sa cellule et on passe directement aux cellules limitrophes. Si par contre $\texttt{list\_link}[i] = j$, alors on teste la condition donnée par l'Inéq. (II.5) entre i et j, mais aussi entre i et $\texttt{list\_link}[j]$ si $\texttt{list\_link}[j] > 0$, et ainsi de suite jusqu'à avoir épuisé les grains $j < i$ de la cellule (n_x, n_y). On passe ensuite aux cellules limitrophes.
- Les cellules limitrophes sont données par les combinaisons $(n_x, n_y \pm 1)$, $(n_x \pm 1, n_y)$ et $(n_x \pm 1, n_y \pm 1)$. Pour chacune on applique la même méthode. Considérons par exemple la cellule immédiatement à droite, $(n_x + 1, n_y)$. Si $\texttt{HoC}[n_x + 1, n_y] = -1$, alors cette cellule est vide et on ne s'y intéresse pas plus. Si par contre $\texttt{HoC}[n_x + 1, n_y] = j \in [|1, n|]$, alors on teste de nouveau la condition donnée par l'Inéq. (II.5) entre i et j, mais aussi entre i et $\texttt{list\_link}[j]$ si $\texttt{list\_link}[j] > 0$, et ainsi de suite jusqu'à avoir épuisé tous les grains de la cellule $(n_x + 1, n_y)$.

On constate cependant que cette méthode détecte une seule fois un contact entre deux grains i et j d'une même cellule, mais deux fois un contact entre deux grains appartenant à deux cellules différentes. Cette double détection est inutile, et il existe deux façons simples de s'en passer.

- Pour un grain i donné, on ne cherche les contacts qu'avec les grains $j < i$ des cellules limitrophes. Il suffit alors de joindre la condition $j < i$ à celle de l'Inéq. (II.5).
- Pour un grain i donné, on cherche les contacts avec les grains j de la moitié des cellules limitrophes seulement. Cette moitié doit être déterminée à l'avance et être la même pour toutes les cellules. Par exemple en 2D, cette moitié peut être constituée des 3 cellules à droite et de la cellule au-dessus (voir la Fig. II.3a). Cette méthode se généralise sans problème en 3D (voir la Fig. II.3b).

Dans les deux cas, le contact entre i et j n'est bien détecté qu'une seule fois.



(a) Cas 2D : si la cellule rouge est de numéros (n_x, n_y), on ne considère que 4 de ses 8 cellules voisines. Par exemple, les 3 à droite, $(n_x + 1, n_y \pm l)$ avec $l \in \{-1; 0; 1\}$ (en orange) et celle au-dessus $(n_x, n_y + 1)$ (en rose).

(b) Cas 3D : si la cellule rouge est de numéros (n_x, n_y), on ne considère que 13 de ses 26 cellules voisines. Par exemple, les 9 devant (n_x+k, n_y+l, n_z+1) avec $k, l \in \{-1; 0; 1\}$ (en rose), les 3 à droite $(n_x + 1, n_y + l, n_z)$ avec $l \in \{-1; 0; 1\}$ (en jaune) et celle au-dessus $(n_x, n_y + 1, n_z)$ (en orange).

FIGURE II.3 – Illustration de la sélection d'une moitié des cellules limitrophes seulement.

II-4. Calcul des forces de contact

II-4.a) Force normale de contact

Une fois un contact entre i et j détecté, il reste à calculer les interactions de contact entre ces deux grains. La première interaction à modéliser est la répulsion élastique (voir la Sec. II-1.c) du Chap. I). En 2D, les grains sont des disques et nous utilisons une modélisation directement inspirée de la répulsion élastique entre deux cylindres (voir l'Éq. (I.5)). Le grain i subit alors une force

$$\overrightarrow{F}_{\text{élast},i} = -k_{\text{n}} \delta \overrightarrow{n}_{i \to j}, \tag{II.6}$$

où $k_{\text{n}} = 10^4$ N.m^{-1} est la raideur effective, $\delta = R_i + R_j - ||\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}||$ représente l'écrasement total des deux grains et $\overrightarrow{n}_{i \to j} = (\overrightarrow{x_j} - \overrightarrow{x_i})/||\overrightarrow{x_j} - \overrightarrow{x_i}||$ est le vecteur unitaire dirigeant l'axe de M_i à M_j (voir la Fig. II.4). Nous appliquons la même loi dans les simulations en 3D, avec donc une répulsion en δ et non en $\delta^{3/2}$ comme prévu pour le contact de Hertz entre deux sphères. L'adoption de cette dépendance en δ permet d'assurer que la durée d'une collision ne dépend

pas des vitesses initiales des grains, ce qui est important pour pouvoir fixer le pas de temps de la simulation, comme nous allons le voir. Les principales différences entre cette forme simplifiée et une dépendance en $\delta^{3/2}$ concernent la propagation d'ondes acoustiques dans le milieu granulaire (par exemple, les solitons ne peuvent exister que pour une répulsion hertzienne [122]), et n'ont pas de grande influence sur nos études.

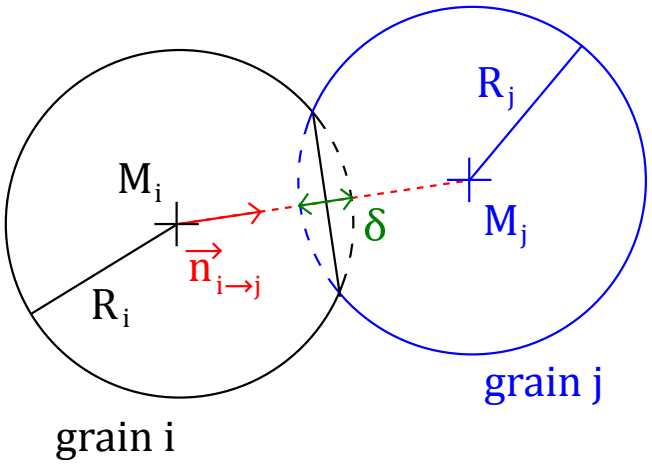


FIGURE II.4 – Grains en contact, et illustration des variables utiles pour le calcul de la force normale.

Par ailleurs, la dissipation viscoélastique au cours du contact est modélisée par une force de frottement fluide. Pour le grain i, on a

$$\overrightarrow{F}_{\text{visc},i} = -\gamma \frac{2R_{\text{réd}}}{R^*} \dot{\delta} \overrightarrow{n}_{i\to j}, \tag{II.7}$$

où γ est un coefficient de frottement que nous ferons varier pour modifier la restitution des collisions, et $R_{\text{réd}} = R_i R_j/(R_i + R_j) = R^* \overline{R}_i \overline{R}_j/(\overline{R}_i + \overline{R}_j)$ joue le rôle d'un rayon réduit. Le PFD projeté sur $\overrightarrow{n}_{i\to j}$ pour chacun des grains i et j donne alors, en omettant la gravité :

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\overrightarrow{x_i}}.\overrightarrow{n}_{i\to j} &= -k_{\text{n}}\delta - \gamma \frac{2R_{\text{réd}}}{R^*}\dot{\delta}, \\ m_j \ddot{\overrightarrow{x_j}}.\overrightarrow{n}_{i\to j} &= k_{\text{n}}\delta + \gamma \frac{2R_{\text{réd}}}{R^*}\dot{\delta}. \end{aligned} \tag{II.8}$$

En remarquant que $\ddot{\delta} = (\ddot{\overrightarrow{x_i}} - \ddot{\overrightarrow{x_j}}).\overrightarrow{n}_{i\to j}$, on en déduit facilement que

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\gamma R_{\text{réd}}}{R^* m_{\text{réd}}}\dot{\delta} + \frac{k_{\text{n}}}{m_{\text{réd}}}\delta = 0, \tag{II.9}$$

où $m_{\text{réd}} = m_i m_j/(m_i + m_j) = m^* \overline{R_i}^2 \overline{R_j}^2/(\overline{R_i}^2 + \overline{R_j}^2)$ est la masse réduite des deux grains en contact. Durant le contact, l'évolution de δ suit donc une équation d'oscillateur amorti, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k_{\text{n}}/m_{\text{red}}}$ et de facteur d'amortissement $\lambda = \gamma R_{\text{réd}}/(R^* m_{\text{réd}})$. Si on prend $t = 0$ au début du contact, donc $\delta(t = 0) = 0$, et que l'amortissement est suffisamment faible ($\lambda < \omega_0$) alors l'évolution de δ est décrite par :

$$\delta(t) = \delta_{\max} \exp\left(-\frac{\gamma R_{\text{réd}}}{R^* m_{\text{réd}}} t\right) \sin\left(\sqrt{\frac{k_{\text{n}}}{m_{\text{réd}}} - \left(\frac{\gamma R_{\text{réd}}}{R^* m_{\text{réd}}}\right)^2}\, t\right), \tag{II.10}$$

où $\delta_{\max} = \dot{\delta}(0)/\sqrt{\omega_0{}^2 - \lambda^2}$ est l'écrasement maximal atteint, fixé par les vitesses des grains à l'instant initial. La fin du contact a lieu pour le premier instant $t_\mathrm{f} > 0$ tel que $\delta(t_\mathrm{f}) = 0$. La valeur de t_f correspond donc à la durée du contact et est donnée par :

$$t_\mathrm{f} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k_\mathrm{n}}{m_\mathrm{réd}} - \left(\frac{\gamma R_\mathrm{réd}}{R^* m_\mathrm{réd}}\right)^2}} = \pi\sqrt{\frac{m_\mathrm{réd}}{k_\mathrm{n}}}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{k_\mathrm{n} m_\mathrm{réd}}\left(\frac{R_\mathrm{réd}}{R^*}\right)^2}} \simeq \pi\sqrt{\frac{m_\mathrm{réd}}{k_\mathrm{n}}}, \tag{II.11}$$

puisque les ordres de grandeurs que nous utilisons sont $\gamma \sim 10$ kg.s^{-1}, $k_\mathrm{n} = 10^4$ N.m^{-1}, $m_\mathrm{réd} \sim 1$ kg et $R_\mathrm{réd}/R^* \sim 1$. Cela donne donc $t_\mathrm{f} \sim 10^{-2}$ s, cette valeur ne dépendant pas des vitesses d'impact. Une description réaliste des contacts implique que le pas de temps de la simulation soit petit devant la durée typique d'un contact, c'est-à-dire $\mathrm{d}t \ll t_\mathrm{f}$. Dans toutes les simulations, nous utilisons $\mathrm{d}t = 5 \times 10^{-4}$ s, ce qui discrétise un contact en une vingtaine d'incréments temporels. Nous avons vérifié que cela était suffisant en réalisant des simulations comparatives avec un pas de temps $\mathrm{d}t = 10^{-4}$ s. Aucune différence significative du comportement de l'agrégat n'a été constatée, ce qui conforte notre choix. Le choix d'une valeur $k_\mathrm{n} = 10^4$ N.m^{-1} fait que les grains que nous simulons sont beaucoup plus mous que ne le seraient des grains rocheux de module d'Young $E \sim 10$ GPa, mais nous permet de ne pas avoir à trop réduire $\mathrm{d}t = 10^{-4}$ s tout en conservant des valeurs d'écrasement raisonnables.

On peut enfin extraire le coefficient de restitution en vitesse e pour la collision ainsi modélisée. Il est défini par $e = \exp(-\lambda t_\mathrm{f})$ soit, dans notre cas :

$$e = \exp\left(-\frac{\gamma R_\mathrm{réd}}{R^* m_\mathrm{réd}}\frac{\pi}{\sqrt{\frac{k_\mathrm{n}}{m_\mathrm{réd}} - \left(\frac{\gamma R_\mathrm{réd}}{R^* m_\mathrm{réd}}\right)^2}}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\frac{k_\mathrm{n} m_\mathrm{réd}}{\gamma^2}\left(\frac{R^*}{R_\mathrm{réd}}\right)^2 - 1}}\right). \tag{II.12}$$

On réalise ici l'intérêt d'avoir introduit le rayon réduit $R_\mathrm{réd}$ dans la force de dissipation visqueuse (voir l'Éq. (II.7)) : cela permet d'avoir le même coefficient de restitution pour une collision entre deux gros grains et entre deux petits grains. En effet, pour deux gros grains moyens, $\overline{R}_j = \overline{R}_j = 1$, donc $R_\mathrm{réd} = R^*/2$ et $m_\mathrm{réd} = m^*/2$. Pour deux petits grains moyens, $\overline{R}_i = \overline{R}_j = 0,5$, donc $R_\mathrm{réd} = R^*/4$ et $m_\mathrm{réd} = m^*/8$. Dans les deux cas, le coefficient de restitution se réduit à :

$$e = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\frac{2k_\mathrm{n} m^*}{\gamma^2} - 1}}\right). \tag{II.13}$$

Cependant, pour une collision entre un gros grain et un petit grain, on a $\overline{R}_i = 1$, $\overline{R}_j = 0,5$ donc $R_\mathrm{réd} = R^*/3$ et $m_\mathrm{réd} = m^*/5$, soit

$$e = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\frac{9k_\mathrm{n} m^*}{5\gamma^2} - 1}}\right). \tag{II.14}$$

Pour la valeur $\gamma = 30$ kg.s^{-1}, que nous avons majoritairement utilisée, cela donne une restitution en vitesse $e \simeq 49$ pour une collision entre un gros et un petit grain, contre $e \simeq 0,51$ entre deux grains de tailles égales. Nous pouvons donc considérer que la restitution d'une collision ne dépend quasiment pas de la taille des grains impliqués.

Nous pouvons par ailleurs remarquer que dans ce modèle, la force normale de contact est généralement répulsive mais peut devenir attractive lorsque les deux grains se séparent. En effet, on a alors $\delta > 0$ et $\dot{\delta} < 0$, et on peut donc avoir $(\overrightarrow{F}_{\text{élast},i} + \overrightarrow{F}_{\text{visc},i}).\overrightarrow{n}_{i\to j} > 0$. Il serait alors possible de supprimer numériquement la force normale dans les cas où cette condition devient vraie, mais cela n'a un effet significative que si les grains se séparent à une vitesse suffisamment élevée, ce qui suppose que la vitesse d'impact l'était également. Pour un agrégat où les chocs sont en général peu violents, cette cohésion parasite n'agit que sur la toute fin du contact, et son influence est alors négligeable [160].

Enfin, signalons que d'autres modélisations sont possibles pour la dissipation durant la collision. On peut par exemple se passer de force dissipative mais implémenter une raideur plus faible lors de la détente des grains que lors de leur compression [194]. On peut également considérer une force dissipative en $\delta\dot{\delta}$ au lieu de $\dot{\delta}$, notamment pour des simulations de type SSDEM appliquées à des gaz granulaires [21]. Cela permet en particulier d'atténuer l'effet cohésif artificiel que peut avoir la force normale sur la fin des contacts.

II-4.b) Force tangentielle de contact

Il reste enfin à prendre en compte la force tangentielle de contact, ce qui revient à modéliser le frottement solide entre les deux grains (voir la Sec. II-1.d) du Chap. I). Nous adoptons pour cela le modèle de Cundall, qui rend compte des lois d'Amontons-Coulomb tout en levant l'indétermination en cas de non glissement [40,41]. La méthode repose sur le calcul, à partir du début du contact, du déplacement tangentiel du grain i par rapport au grain j au niveau du point de contact. Ce déplacement fait non seulement intervenir les vitesses $\overrightarrow{v_i}$ et $\overrightarrow{v_j}$ des centres des grains, mais aussi les vitesses de rotation $\overrightarrow{\Omega_i}$ et $\overrightarrow{\Omega_j}$. En effet, si on note I le point de contact entre les deux grains, la vitesse relative (de i par rapport à j) au niveau du point de contact, notée $\overrightarrow{v}_{i/j}$ se déduit de la formule de Varignon :

$$\overrightarrow{v}_{i/j} = \overrightarrow{v_i} - \overrightarrow{v_j} + \overrightarrow{\Omega_i} \wedge \overrightarrow{M_iI} - \overrightarrow{\Omega_j} \wedge \overrightarrow{M_jI}. \tag{II.15}$$

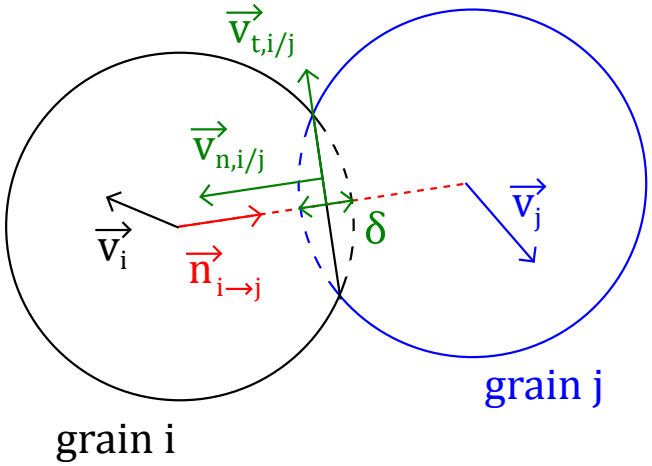


FIGURE II.5 – Grains en contact, et illustration des variables utiles pour le calcul de la force tangentielle. Pour simplifier, on a représenté deux grains ne possédant pas de vitesse de rotation.

Cette vitesse contient toutefois une composante selon l'axe liant les centres de masse des grains, qui est la vitesse relative normale $\overrightarrow{v}_{\text{n},i/j} = \dot{\delta}\overrightarrow{n}_{i\to j}$. Il convient donc de retrancher ce

terme pour ne conserver que la vitesse relative tangentielle (voir la Fig. II.5). De plus, en supposant que $\delta \ll R_i, R_j$, ce qui est bien le cas dans nos simulations où l'écrasement est en général de l'ordre de 1 % du rayon des grains, nous pouvons écrire $\overrightarrow{M_iI} = R_i \overrightarrow{n}_{i\to j}$ et $\overrightarrow{M_jI} = -R_j \overrightarrow{n}_{i\to j}$. La vitesse relative tangentielle au point de contact est donc :

$$\overrightarrow{v}_{\mathrm{t},i/j} = \overrightarrow{v_i} - \overrightarrow{v_j} - \dot{\delta}\overrightarrow{n}_{i\to j} + \left(R_i\overrightarrow{\Omega_i} + R_j\overrightarrow{\Omega_j}\right) \wedge \overrightarrow{n}_{i\to j}. \tag{II.16}$$

Nous avons accès à cette vitesse à tout instant du contact entre les grains i et j, et on en déduit le déplacement tangentiel total $\xi(t)$ depuis le début du contact, donné par :

$$\xi(t) = \int_0^t ||\overrightarrow{v}_{\mathrm{t},i/j}(u)||\mathrm{d}u. \tag{II.17}$$

La force tangentielle subie par le grain i est alors la suivante :

$$\overrightarrow{F}_{\mathrm{tang},i}(t) = -\min\left(k_\mathrm{t}\xi(t), \mu||\overrightarrow{F}_{\mathrm{norm},i}(t)||\right) \frac{\overrightarrow{v}_{\mathrm{t},i/j}}{||\overrightarrow{v}_{\mathrm{t},i/j}||}, \tag{II.18}$$

où k_t est une raideur associée au déplacement tangentiel de deux grains en contact, μ est le coefficient de frottement entre deux grains, et $\overrightarrow{F}_{\mathrm{norm},i} = \overrightarrow{F}_{\text{élast},i} + \overrightarrow{F}_{\mathrm{visc},i}$ est la force normale de contact totale subie par le grain i. Physiquement, l'Éq. (II.18) s'interprète de la façon suivante.

- La force de frottement solide subie par le grain i est toujours opposée à sa vitesse par rapport au grain j au niveau du point de contact.
- Au début du contact, et tant que le déplacement tangentiel entre les deux grains est suffisamment faible, la force tangentielle est simplement un rappel élastique de raideur k_t. Ce cas joue le rôle d'un contact physique non glissant. Plusieurs études montrant qu'un rapport $k_\mathrm{t}/k_\mathrm{n} = 2/7$ permet des simulations réalistes [41, 151, 170], nous avons choisi la valeur de k_t de cette façon.
- Si la valeur de $k_\mathrm{t}\xi(t)$ atteint ou dépasse le produit $\mu||\overrightarrow{F}_{\mathrm{norm},i}(t)||$, alors on entre en régime de glissement et on applique $||\overrightarrow{F}_{\mathrm{tang},i}(t)|| = \mu||\overrightarrow{F}_{\mathrm{norm},i}(t)||$. Les simulations ne distinguent donc pas les coefficients de frottement statique et dynamique, et nous utilisons une unique valeur de μ, qui sera toujours comprise entre 0 et 1 dans nos études.

Notons qu'il est également possible de lever l'indétermination sur $\overrightarrow{F}_{\mathrm{tang},i}$ en implémentant un frottement visqueux $\gamma_\mathrm{t}||\overrightarrow{v}_{\mathrm{t},i/j}||$ au lieu du rappel élastique $k_\mathrm{t}\xi(t)$ [76, 100]. Cela revient à régulariser la dépendance de $||\overrightarrow{F}_{\mathrm{tang},i}||$ vis-à-vis de $||\overrightarrow{v}_{\mathrm{t},i/j}||$ autour du point $||\overrightarrow{v}_{\mathrm{t},i/j}|| = 0$, mais donne de l'importance au paramètre artificiel γ_t. En comparaison, le rappel élastique que nous implémentons est directement inspiré du modèle de Hertz-Mindlin du frottement solide [79, 90]. Il est d'ailleurs possible de combiner rappel élastique et dissipation visqueuse pour calculer $\overrightarrow{F}_{\mathrm{tang},i}$ en régime de non glissement, à la manière du modèle utilisé pour la force normale $\overrightarrow{F}_{\mathrm{tang},i}$.

Enfin, signalons que contrairement aux forces de gravité et aux forces normales de contact, la force tangentielle de contact possède un moment non nul par rapport au centre du grain i auquel elle s'applique. Ce moment est simplement donné par :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{tang},i} = \overrightarrow{M_iI} \wedge \overrightarrow{F}_{\mathrm{tang},i}. \tag{II.19}$$

II-5. Intégration des équations du mouvement

Une fois toutes les forces et tous les moments connus à l'instant t, il reste à intégrer les équations du mouvement pour disposer des positions et vitesses des grains à l'instant suivant, $t+\mathrm{d}t$. Nous utilisons l'algorithme de Verlet, qui repose sur le développement limité de la position d'un grain i :

$$\overrightarrow{x_i}(t+\mathrm{d}t) = \overrightarrow{x_i}(t) + \overrightarrow{v_i}(t) \times \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\overrightarrow{a_i}(t) \times (\mathrm{d}t)^2 + \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{a_i}}{\mathrm{d}t}(t) \times (\mathrm{d}t)^3 + \mathcal{O}((\mathrm{d}t)^4). \tag{II.20}$$

En remplaçant $\mathrm{d}t$ par $-\mathrm{d}t$ dans l'Éq. (II.20), on obtient une seconde équation, que l'on peut ajouter à l'Éq. (II.20), afin d'écrire l'équation maîtresse de l'algorithme de Verlet :

$$\overrightarrow{x_i}(t+\mathrm{d}t) = 2\overrightarrow{x_i}(t) - \overrightarrow{x_i}(t-\mathrm{d}t) + \overrightarrow{a_i}(t) \times (\mathrm{d}t)^2 + \mathcal{O}((\mathrm{d}t)^4). \tag{II.21}$$

L'application de cet algorithme nécessite donc de connaître les positions aux deux pas de temps précédents, en t et en $t-\mathrm{d}t$. Informatiquement, ces grandeurs sont stockées dans les variables $\overrightarrow{x_i}$ et $\overrightarrow{x}_{i,\mathrm{old}}$ respectivement. Mais l'algorithme de Verlet présente d'importants avantages : il permet de s'affranchir de la connaissance des vitesses à l'instant t, et surtout de commettre une erreur sur la dynamique plus faible qu'en utilisant la méthode d'Euler, à pas de temps $\mathrm{d}t$ fixé. En effet, l'algorithme d'Euler consiste à utiliser l'Éq. (II.20) limitée à l'ordre 2 : on calcule dans ce cas les positions et vitesses à $t+\mathrm{d}t$ à partir des positions, vitesses et accélérations à l'instant t. On commet alors une erreur de l'ordre de $\mathrm{d}t^3$ sur la position à chaque incrément, alors qu'avec l'algorithme de Verlet, cette erreur est seulement de l'ordre de $\mathrm{d}t^4$, comme le montre l'Éq. (II.21).

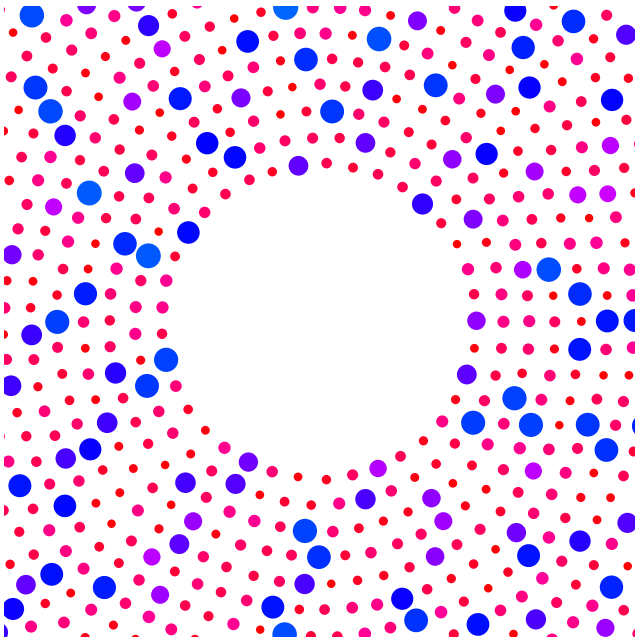
Il reste intéressant de connaître la vitesse $\overrightarrow{v_i}$ de chaque grain à tout instant de la simulation, par exemple en vue de calculer l'énergie cinétique totale du milieu. Enfin, les lois de la dynamique prescrivent que $\overrightarrow{F_i} = m_i\overrightarrow{a_i}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_i} = J_i\overrightarrow{\alpha_i}$. Compte tenu de tous ces éléments, l'algorithme fonctionne dans l'ordre suivant pour un grain i donné, à l'aide des variables locales $\overrightarrow{x}_{\mathrm{new}}$ et $\overrightarrow{\theta}_{\mathrm{new}}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x}_{\mathrm{new}} &= 2\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x}_{i,\mathrm{old}} + \frac{\overrightarrow{F_i}}{m_i}(\mathrm{d}t)^2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\theta}_{\mathrm{new}} = 2\overrightarrow{\theta_i} - \overrightarrow{\theta}_{i,\mathrm{old}} + \frac{\overrightarrow{\mathcal{M}_i}}{J_i}(\mathrm{d}t)^2, \\
\overrightarrow{v_i} &= \frac{\overrightarrow{x}_{\mathrm{new}} - \overrightarrow{x}_{i,\mathrm{old}}}{2\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega_i} = \frac{\overrightarrow{\theta}_{\mathrm{new}} - \overrightarrow{\theta}_{i,\mathrm{old}}}{2\mathrm{d}t}, \\
\overrightarrow{x}_{i,\mathrm{old}} &= \overrightarrow{x_i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\theta}_{i,\mathrm{old}} = \overrightarrow{\theta_i}, \\
\overrightarrow{x_i} &= \overrightarrow{x}_{\mathrm{new}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\theta_i} = \overrightarrow{\theta}_{\mathrm{new}}.
\end{aligned} \tag{II.22}$$

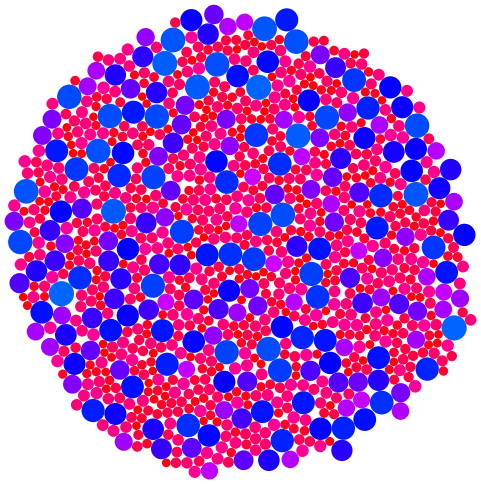
II-6. Compléments sur la formation et l'évolution de l'astéroïde

Dans le cas d'agrégats circulaires en 2D (resp. sphériques en 3D), l'initialisation consiste à disposer les grains selon des anneaux (resp. coquilles sphériques) concentriques autour du point O origine du champ gravitationnel central imposé (voir l'Éq. (II.4)). Les grains sont alors suffisamment espacés pour qu'il n'y ait aucun contact initial, et nous ne leur donnons aucune vitesse initiale (voir la Fig. II.6a). Nous ajoutons toutefois un léger écart aléatoire à ces positions

initiales pour éviter des effets d'alignement le long de certains rayons. La répartition spatiale initiale des petits et des gros grains est totalement aléatoire (et respecte les histogrammes de la Fig. II.1), sauf bien sûr dans les simulations où nous avons étudié l'influence d'un état initial ségrégé ou anti-ségrégé. Sous l'effet de ce champ, l'ensemble des grains « s'effondre » et un agrégat se forme autour du point O (voir la Fig. II.6b). En raison des processus dissipatifs intervenant durant les contacts entre grains, cet agrégat relaxe rapidement vers un état compact stable, et des perturbations peuvent alors lui être appliquées périodiquement pour étudier une possible ségrégation dans l'astéroïde ainsi simulé. Par ailleurs, l'application de perturbations mécaniques, le bruit numérique et l'évolution globale des grains dans un champ central peuvent entraîner diverses oscillations parasites, qu'il convient de corriger. Dans le cadre d'agrégats circulaires ou sphériques, ces oscillations concernent la position du centre de l'agrégat, qu'il suffit alors de replacer au niveau du point O à chaque incrément temporel, ce qui revient à se placer dans le référentiel barycentrique de l'astéroïde [100]. Étant établi que ce phénomène d'oscillations peut survenir pour divers types de perturbations, nous donnerons quelques précisions à son sujet lors de la présentation de chaque type de simulation. De plus, afin de lutter contre l'influence de mouvements parasites liés au bruit numérique, toutes les vitesses de translation et de rotation sont fixées à 0 juste avant chaque perturbation appliquée.



(a) Disposition initiale des grains selon des anneaux concentriques autour du centre des forces gravitationnelles O.



(b) Obtention d'un agrégat circulaire après effondrement gravitationnel des grains.

FIGURE II.6 – Formation initiale de l'astéroïde dans le cas d'une simulation 2D.

II-7. Remarque sur les valeurs numériques des paramètres

De nombreux paramètres physiques de nos simulations sont des grandeurs dimensionnées, que nous donnerons donc toujours avec leurs unités respectives. Il faut néanmoins garder à l'esprit que les valeurs numériques correspondantes sont à manier avec précautions. Par exemple,

un petit grain de rayon réduit $\overline{R}_i = 0,5$ est traité physiquement comme un disque de rayon $R_i = R^*\overline{R}_i = 0,25$ m. Mais cette valeur numérique n'a que peu de sens intrinsèquement. Par contre, le fait que ce rayon soit deux fois plus faible que le rayon R_i d'un gros grain est important pour étudier le phénomène de ségrégation. De même, nous exprimons la masse m_i d'un grain en kg, puisque c'est l'unité d'une masse. Mais la valeur numérique exacte de m_i, par exemple $m_i = m^*\overline{R}_i^{\,2} = 0,25$ kg pour $\overline{R}_i = 0,25$ et $m^* = 1$ kg, n'a pas de sens en elle-même puisque nous sommes libres de fixer la masse standard m^* servant à calculer m_i à partir de $\overline{R}_i$. C'est également uniquement pour des raisons de respect des dimensions que nous donnons l'intensité de la pesanteur g à la surface de l'astéroïde en m.s^{-2}, le rayon R_{ast} de l'astéroïde en m et la masse standard m^* en kg. De nouveau, les valeurs numériques précises de ces paramètres n'ont pas de sens intrinsèque, dans la mesure où g est modifiable indépendamment de m^* et de R_{ast} par exemple. Par contre, la variation de g permet d'étudier le comportement de la ségrégation en fonction de l'intensité du champ gravitationnel environnant. Pour résumer, si nous fixons numériquement « $g = 1$ », alors le champ central imposé est calculé compte tenu de ce paramètre et cela a une influence sur la physique de l'agrégat, qui pourrait être différente si nous fixions « $g = 2$ » par exemple. Il nous faudra donc préciser le choix effectué pour la valeur de g, et nous noterons $g = 1$ m.s^{-2} plutôt que « $g = 1$ » uniquement parce que g est homogène à une accélération.

Le choix de R^* est important puisque tous les rayons des grains sont indexés dessus : il fixe donc les échelles typiques de la simulation, à commencer par l'échelle de longueur R_{ast}. De par la nature des simulations SSDEM, les échelles de longueur, de masse, de force sont liées entre elles. Par exemple, une éventuelle modification de R^* s'accompagnerait physiquement d'une modification de la durée des collisions, ainsi que des valeurs des paramètres visco-élastiques des grains, c'est-à-dire k_{n} et γ dans notre cas [133].

III- Conclusion

Pour conclure ce chapitre, nous proposons un résumé des caractéristiques importantes des simulations utilisées.

- Les simulations sont de type SSDEM, elles reposent sur une discrétisation du temps et une simple intégration des équations de mouvement à chaque pas de temps.
- Nous employons deux populations de grains en termes de taille, les gros grains étant en moyenne deux fois plus gros en diamètre que les petits grains. La répartition spatiale initiale de ces deux populations est aléatoire : l'état initial est complètement mélangé, sans ségrégation.
- Tous les grains sont soumis à un champ gravitationnel central, d'intensité croissant comme la distance au centre de masse, $\overrightarrow{g} \propto -r\overrightarrow{e_r}$.
- Les interactions de contact sont modélisées par une répulsion élastique et une dissipation visqueuse pour la force normale, et par le modèle de Cundall pour la force tangentielle.
- Les paramètres physiques des grains qui seront variés dans les simulations sont le coefficient de restitution e (en variant le coefficient d'amortissement γ), le coefficient de frottement μ et le préfacteur du moment d'inertie J^*.
- Certaines simulations sortent du cadre ainsi défini, soit par la distribution en taille des grains, soit par un état initial non mélangé, soit par la géométrie du champ gravitationnel. Chaque exception sera spécifiée le moment venu.
- Différents types de perturbations peuvent être appliqués aux astéroïdes ainsi simulés. Leur nature sera précisée dans chaque chapitre.

Chapitre III

Simulations d'un astéroïde à deux dimensions sous expansions isotropes

Savoir où l'on veut aller, c'est très bien ; mais il faut encore montrer qu'on y va.

Émile Zola.

Dans ce chapitre, nous présentons le premier type de simulations effectuées. Elles consistent en un agrégat à deux dimensions perturbé par des expansions isotropes, obtenues par une brève inversion du champ gravitationnel imposé. Nous détaillons ensuite les résultats obtenus dans ce cadre : observation de la ségrégation, quantification de son importance et de sa dynamique, influence des différents paramètres physiques. Ces résultats sont par ailleurs résumés dans l'article [154].

Sommaire

I- Présentation du cadre de l'étude **81**
I-1. Perturbations appliquées à l'astéroïde 81
I-2. Position du centre de masse 85
II- Grandeurs caractéristiques de la ségrégation **86**
II-1. Observations de la ségrégation 86
II-2. Définition des quantités utiles à l'étude de la ségrégation 88
II-3. Influence de l'état initial 92
II-4. Déplacements moyens des grains 95
III- Évolution en fonction des différents paramètres **96**
III-1. Influence du coefficient de restitution 96
III-2. Influence de la durée de la perturbation 97
III-3. Influence du coefficient de frottement 102
III-4. Influence du moment d'inertie 108
III-5. Synthèse sur l'importance des déplacements moyens 114
IV- Exploration de différentes distributions en taille **118**
IV-1. Variations sur la distribution binaire 118

IV-2. Distributions continues 124
V- Ségrégation angulaire **130**
V-1. Observation et quantification 130
V-2. Influence des paramètres de la simulation 135
V-3. Dynamique des lobes 137
VI- Conclusion **139**

I- Présentation du cadre de l'étude

Les simulations de ce chapitre reprennent les caractéristiques générales introduites dans le Chap. II dans le cas à deux dimensions (2D). Nous utilisons en général un rayon standard $R^* = 0,5$ m, une masse standard $m^* = 1$ kg, $N = 1000$ grains, soit 200 grains de rayons réduits $\overline{R}$ aléatoirement répartis dans l'intervalle $[0,8; 1,2]$ et 800 grains de rayons réduits aléatoirement répartis dans l'intervalle $[0,4; 0,6]$. Le processus de formation est celui présenté dans la Sec. II-6. du Chap. II, formant ainsi un modèle d'astéroïde 2D.

I-1. Perturbations appliquées à l'astéroïde

I-1.a) Description générale des perturbations

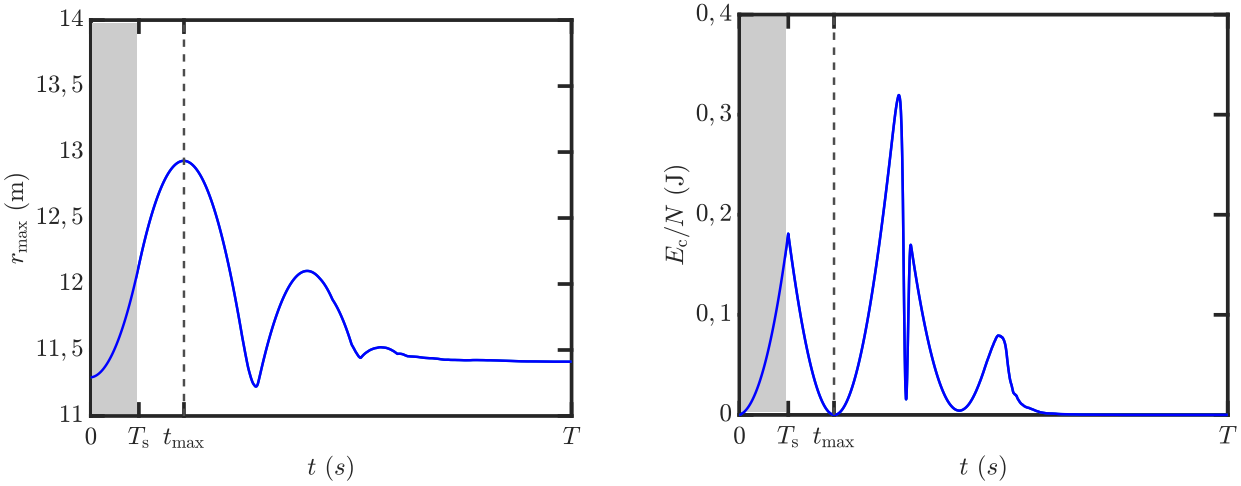
Nous avons pour but de modéliser numériquement les nombreuses sollicitations mécaniques auxquelles sont soumis les astéroïdes granulaires (voir la Sec. II-3. du Chap. I). Pour ce faire, nous appliquons des « perturbations », que nous appellerons aussi « secousses » périodiques et correspondant à une brève inversion du champ gravitationnel central (le centre étant noté O) imposé aux grains. Ce champ vaut, pour rappel (voir la Sec. II-2. du Chap. II) :

$$\overrightarrow{\mathcal{G}} = -g\frac{r}{R_{\text{ast}}}\overrightarrow{e_r}, \tag{III.1}$$

en coordonnées polaires, où g est l'accélération de la pesanteur en surface de l'astéroïde et R_{ast} le rayon total de l'astéroïde. Sauf exception, nous imposons $g = 1$ m.s^{-2} pour $R_{\text{ast}} = 11$ m, rayon obtenu pour $N = 1000$ grains. Ce champ est donc appliqué à tout instant de la simulation, sauf durant certains intervalles de temps durant lesquels il est retourné, c'est-à-dire que son sens est simplement inversé en tout point. Les grains sont alors accélérés vers l'extérieur au lieu d'être attirés par le centre de masse, ce qui crée une perturbation isotrope de l'agrégat. Une telle inversion est artificielle, mais correspond assez bien à des coups qui seraient appliqués en O (« tapping » en anglais). Les intervalles de temps durant lesquels $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ est retourné sont ceux de la forme $[nT, nT + T_{\text{s}}]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{\text{s}} < T$ et $T = 12,5$ s. Cela signifie qu'après une durée T durant laquelle l'agrégat se forme, on applique périodiquement (la période étant T) une perturbation. Le champ est alors retourné pour une durée T_{s} qui est la même pour toutes les perturbations d'une même simulation. Cette durée ne dépasse jamais $1,75$ s, de sorte que l'agrégat a toujours le temps de relaxer vers un état d'équilibre mécanique avant que l'on n'applique la perturbation suivante.

Pour bien visualiser ce qu'il se passe durant une perturbation, il est intéressant de tracer le rayon maximal r_{max} de l'agrégat, donné par la coordonnée radiale du grain le plus éloigné du centre O, ainsi que l'énergie cinétique totale E_{c}, durant un intervalle de temps du type $[nT, (n+1)T]$ (voir la Fig. III.1). L'analyse de ces tracés permet de discerner plusieurs étapes dans l'évolution de l'agrégat ainsi perturbé.

- Sur l'intervalle $0 \leq t < T_{\text{s}}$, le champ gravitationnel est retourné et les grains sont accélérés vers l'extérieur. Le rayon r_{max} de l'astéroïde augmente, ainsi que l'énergie cinétique E_{c}.
- À l'instant $t = T_{\text{s}}$, le champ revient à la normale. Les grains continuent sur leur lancée mais sont freinés par le champ central, jusqu'à s'arrêter à $t = t_{\text{max}}$. L'expansion est alors maximale et l'énergie cinétique nulle.



(a) Évolution du rayon maximal de l'agrégat $r_{\max}$ sur un intervalle de durée T.

(b) Évolution de l'énergie cinétique par particule E_c/N sur un intervalle de durée T.

FIGURE III.1 – Comportement de l'agrégat entre le début d'une perturbation (où on place l'origine $t = 0$, pour ce tracé) et le début de la suivante à $t = T$. On a représenté en grisé la période durant laquelle le champ gravitationnel est retourné, $t \in [0, T_s]$. On a noté $t_{\max}$ l'instant auquel l'astéroïde atteint son expansion maximale. Les valeurs utilisées ici sont $T_s = 1,25$ s, $e = 0,51$ et $\mu = 0,5$.

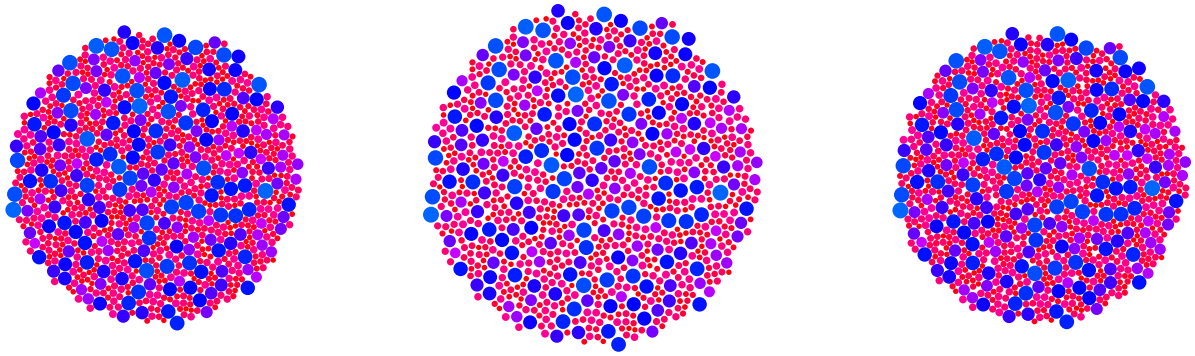
- À partir de l'instant $t = t_{\max}$, les grains convergent vers O sous l'effet du champ central, $r_{\max}$ diminue tandis que E_c augmente de nouveau. Mais cela ne peut durer indéfiniment car les grains entrent en collision, d'où un décrochage net de E_c et un rebond de $r_{\max}$. Une certaine quantité d'énergie est dissipée, par viscoélasticité et par frottement solide, et les grains repartent vers l'extérieur sous l'effet des collisions. Mais la gravité les ramène vers O et il s'en suit de nouvelles collisions, moins violentes. C'est alors que les grains se réarrangent pour former un nouvel agrégat.

On voit par ailleurs que l'astéroïde a bien le temps de revenir au repos avant l'application de la perturbation suivante en $t = T$. La représentation de l'astéroïde 2D que nous simulons donne également une bonne idée de l'expansion maximale atteinte en $t = t_{\max}$ et du retour à l'équilibre en $t = T$ (voir la Fig. III.2).

Pour compléter cette présentation des perturbations appliquées, nous pouvons calculer le rayon $r_{\max}(t_{\max})$ atteint lors de l'expansion maximale, ainsi que l'énergie mécanique injectée lors d'une perturbation.

I-1.b) Expansion maximale atteinte suite à une perturbation

Comme on le voit sur la Fig. III.2b, les grains sont complètement séparés les uns des autres (il n'y a aucun contact) en $t = t_{\max}$. Pour simplifier, nous allons supposer que cela est aussi vrai durant toute la phase d'expansion $0 \leq t < t_{\max}$. Tant que $t < T_s$, les grains sont attirés vers l'extérieur par le champ gravitationnel retourné. Le PFD appliqué à un grain i de coordonnée radiale r_i et de masse m_i, et projeté sur $\overrightarrow{e_r}$, donne donc :



(a) Astéroïde au début de la perturbation, à $t = 0$.

(b) Astéroïde dans son état d'expansion maximale, à $t = t_{\max}$.

(c) Astéroïde au début de la secousse suivante, à $t = T$.

FIGURE III.2 – Images de l'astéroïde sur le même intervalle de temps de durée T que celui utilisé pour les tracés de la Fig. III.1.

$$\frac{\mathrm{d}^2 r_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{g}{R_{\text{ast}}} r_i. \tag{III.2}$$

Si on considère qu'en $t = 0$, le grain i a une vitesse nulle et une coordonnée radiale $r_i(0)$, alors cette coordonnée évolue, pour $t < T_{\text{s}}$, selon :

$$r_i(t) = r_i(0)\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\text{ast}}}}t\right). \tag{III.3}$$

Cela dure jusqu'en $t = T_{\text{s}}$, et on a alors :

$$r_i(T_{\text{s}}) = r_i(0)\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\text{ast}}}}T_{\text{s}}\right) \text{ et } \frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t}(T_{\text{s}}) = r_i(0)\sqrt{\frac{g}{R_{\text{ast}}}}\ \mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\text{ast}}}}T_{\text{s}}\right). \tag{III.4}$$

Ensuite, le champ gravitationnel retrouve sa forme normale, et la coordonnée radiale vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 r_i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{R_{\text{ast}}} r_i. \tag{III.5}$$

L'évolution de r_i est alors donnée, pour $t \geq T_{\text{s}}$, par :

$$r_i(t) = r_i(0)\left[\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\text{ast}}}}T_{\text{s}}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\text{ast}}}}(t - T_{\text{s}})\right) + \mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\text{ast}}}}T_{\text{s}}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\text{ast}}}}(t - T_{\text{s}})\right)\right]. \tag{III.6}$$

Les grains continuent donc de s'éloigner de O, mais de moins en moins vite du fait du champ central rétabli, et leur vitesse s'annule finalement pour

$$t_{\max} = T_{\text{s}} + \sqrt{\frac{R_{\text{ast}}}{g}}\ \arctan\left[\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\text{ast}}}}T_{\text{s}}\right)\right]. \tag{III.7}$$

En réinjectant ceci dans l'Éq. (III.6), on montre que :

$$r_i(t_{\max}) = r_i(0)\sqrt{\mathrm{ch}\left(2\sqrt{\frac{g}{R_{\mathrm{ast}}}}T_{\mathrm{s}}\right)}. \tag{III.8}$$

Comme le rayon de l'astéroïde est défini par $r_{\max}(t) = \max_{i\in[|1,N|]}\{r_i(t)\}$, on en déduit immédiatement que l'expansion doit vérifier :

$$\frac{r_{\max}(t_{\max})}{r_{\max}(0)} = \sqrt{\mathrm{ch}\left(2\sqrt{\frac{g}{R_{\mathrm{ast}}}}T_{\mathrm{s}}\right)}, \tag{III.9}$$

soit $r_{\max}(t_{\max})/r_{\max}(0) \simeq 1,14$ pour $g = 1$ m.s^{-2}, $R_{\mathrm{ast}} = 11$ m et $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s. Empiriquement, on mesure $r_{\max}(t_{\max})/r_{\max}(0) \simeq 1,15$ pour les données de la Fig. III.1a par exemple. L'accord est donc très bon, et la légère sous-estimation, retrouvée assez systématiquement dans les simulations, peut être due à l'énergie élastique stockée dans les contacts lorsque les grains sont tenus ensemble par leur gravité. Cette énergie est convertie en énergie cinétique lorsque les grains s'écartent, et vient s'ajouter au travail fourni par le champ retourné. On mesure donc une expansion légèrement supérieure à celle prévue par l'Éq. (III.9).

I-1.c) Énergie mécanique injectée lors d'une perturbation

Du fait de la présence du champ $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ donné par l'Éq. (III.1), les grains évoluent dans un potentiel harmonique, de la forme :

$$V_{\mathrm{grav}}(r) = \frac{1}{2}\frac{g}{R_{\mathrm{ast}}}r^2, \tag{III.10}$$

à l'exception bien sûr des intervalles de temps où $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ est retourné. Si on néglige les énergies potentielles élastiques dues aux contacts, un grain i de masse m_i et coordonnée radiale initiale $r_i(0)$ a pour énergie mécanique à $t = 0$:

$$E_{\mathrm{m},i}(t=0) = \frac{1}{2}\frac{gm_i}{R_{\mathrm{ast}}}r_i(0)^2. \tag{III.11}$$

Durant l'intervalle $t \in [0, T_{\mathrm{s}}]$, le champ retourné accélère le grain vers l'extérieur, de sorte que lorsque le champ gravitationnel est rétabli, à $t = T_{\mathrm{s}}$, le grain a acquis une certaine énergie cinétique, et se trouve à une position de potentiel $V_{\mathrm{grav}}(r)$ plus élevé. Son énergie mécanique est alors :

$$E_{\mathrm{m},i}(t=T_{\mathrm{s}}) = \frac{1}{2}m_i\left(\frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t}(T_{\mathrm{s}})\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{gm_i}{R_{\mathrm{ast}}}r_i(T_{\mathrm{s}})^2. \tag{III.12}$$

En utilisant l'Éq. (III.4), on montre alors que :

$$\Delta E_{\mathrm{m},i} = E_{\mathrm{m},i}(t=T_{\mathrm{s}}) - E_{\mathrm{m},i}(t=0) = \frac{gm_i}{R_{\mathrm{ast}}}r_i(0)^2\mathrm{sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\mathrm{ast}}}}T_{\mathrm{s}}\right). \tag{III.13}$$

On connaît donc l'énergie mécanique fournie par une perturbation au grain i ; elle dépend de sa masse et de sa position initiale. En traitant l'astéroïde comme un milieu continu, on peut

en déduire une estimation de l'énergie mécanique totale ΔE_{tot} fournie à l'astéroïde par une perturbation :

$$\Delta E_{\text{tot}} = \int_{\text{ast}} \frac{g r^2}{R_{\text{ast}}} \text{sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\text{ast}}}} T_{\text{s}}\right) \text{d}m = \int_{r=0}^{R_{\text{ast}}} \frac{g r^2}{R_{\text{ast}}} \text{ sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\text{ast}}}} T_{\text{s}}\right) \times 2\pi r \rho_{\text{ast}} \text{d}r, \tag{III.14}$$

où on a introduit $\rho_{\text{ast}} = M_{\text{ast}}/(\pi {R_{\text{ast}}}^2)$ la masse surfacique globale de l'astéroïde, $M_{\text{ast}} = \sum_{i\in[|1,N|]} m_i$ étant sa masse totale. Le calcul de l'intégrale aboutit à l'expression suivante :

$$\Delta E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} M_{\text{ast}} g R_{\text{ast}} \text{ sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\text{ast}}}} T_{\text{s}}\right). \tag{III.15}$$

Cette expression permet de quantifier l'influence de la durée T_{s} de la perturbation, nous y reviendrons dans la Sec. III-2..

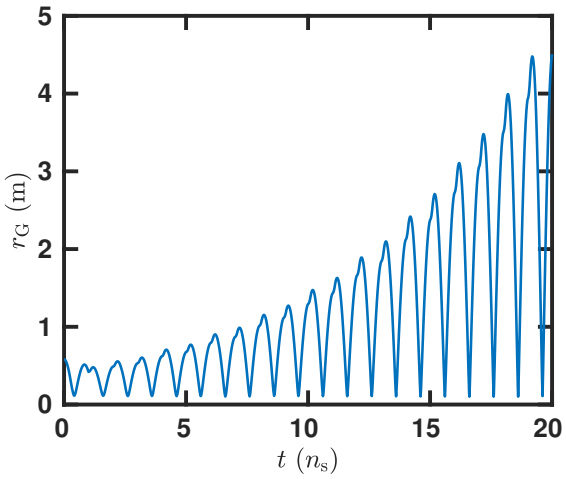
I-2. Position du centre de masse

Le centre de masse G de l'astéroïde est répéré par

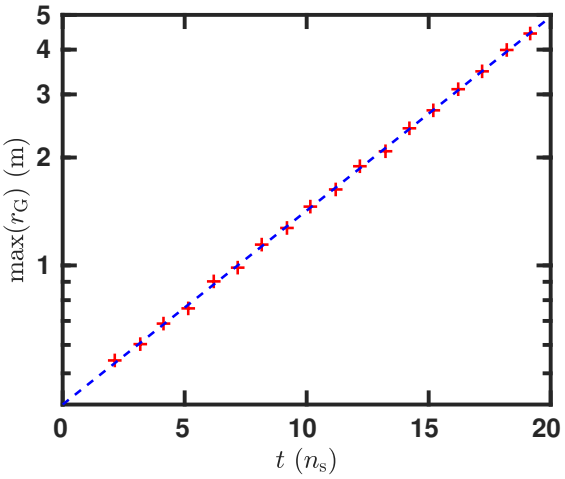
$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i\in[|1,n|]} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i\in[|1,n|]} m_i} = \frac{\sum_{i\in[|1,n|]} {R_i}^2 \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i\in[|1,n|]} {R_i}^2}, \tag{III.16}$$

puisque pour chaque grain i, $m_i = m^* {\overline{R}_i}^2$ et $R_i = R^* \overline{R}_i$. Comme le champ central $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ que nous imposons est censé jouer le rôle de l'interaction gravitationnelle entre les grains, il faut que le centre de masse G et le centre de force O soient rigoureusement confondus. Or, à la suite de l'application d'une perturbation à l'astéroïde, il arrive que O et G ne soient plus confondus, G étant déterminé par les nouvelles positions des grains. Du fait de la forme de $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ (voir l'Éq. (III.1)), l'astéroïde subit alors un rappel global de la forme $-k\overrightarrow{OG}$. Comme un mouvement d'ensemble de l'astéroïde est soumis à très peu de dissipation (on a uniquement des écrasements croissants dans les régions soumises aux plus forts champs), il s'en suit des oscillations de G autour de O très peu amorties. L'application de la perturbation suivante vient alors exciter ces oscillations, surtout si elle survient à un instant où $r_{\text{G}} = ||\overrightarrow{OG}||$ est proche de son maximum. Les oscillations vont alors devenir de plus en plus importantes (voir la Fig. III.3a).

On constate que leur amplitude croît de façon exponentielle, ce qui est typique d'un phénomène de résonance paramétrique, où on apporte une nouvelle excitation à un oscillateur au moment où son oscillation est proche d'un maximum d'amplitude [91, 100]. Pour $T_{\text{s}} = 1,25$ s et $T = 12,5$ s, nous observons une enveloppe en $\text{e}^{t/\tau_{\text{c}}}$ avec un temps typique de croissance $\tau_{\text{c}} \simeq 8 n_{\text{s}} = 100$ s (voir la Fig. III.3b). Notons que cette résonance est complètement artificielle et uniquement due au fait que nous imposons un centre de force O fixé. Elle pose tout de même un important problème, puisque d'une part le champ gravitationnel au sein de l'astéroïde n'a plus rien de physique si G est trop éloigné du centre de force O, et d'autre part l'astéroïde finit de toute façon par sortir de la carte de la simulation, empêchant la poursuite de celle-ci. Il serait possible de régler le problème en attendant suffisamment longtemps entre deux perturbations, c'est-à-dire en augmentant T, afin que les faibles oscillations initiales soient suffisamment amorties. Mais cela impliquerait un allongement déraisonnable du temps de calcul, et ne serait



(a) Évolution de r_G en fonction du temps, sur les 20 premières secousses. L'amplitude des oscillations semble diverger exponentiellement dans le temps.



(b) Évolution des maxima locaux de r_G en fonction du temps, en échelle logarithmique (points rouges). La droite tiretée bleue représente un ajustement affine $\ln(\max(r_G)) = t_c/\tau + \alpha$. On trouve $\tau_c \simeq 8$ n_s.

FIGURE III.3 – Oscillations de la position du centre de masse, repérée par r_G, sous l'effet des perturbations. On a utilisé ici $T_s = 1,25$ s et $T = 12,5$ s, $e = 0,51$ et $\mu = 0,5$.

pas robuste sous une variation de T_s. Nous préférons donc calculer x_G et y_G à chaque incrément temporel, et appliquer une translation globale de $-x_G$ et $-y_G$ à l'agrégat afin que O et G soient confondus à tout instant. Physiquement, cela revient simplement à se placer dans le référentiel du centre de masse de l'astéroïde, dans lequel le champ gravitationnel est bien donné par $\overrightarrow{\mathcal{G}}$. Cette astuce suffit à éradiquer le phénomène artificiel d'oscillations. Dans toutes nos études d'agrégats bidimensionnels, les centres de masse G et de force O seront donc toujours confondus, et nous parlerons simplement de « centre O de l'astéroïde ».

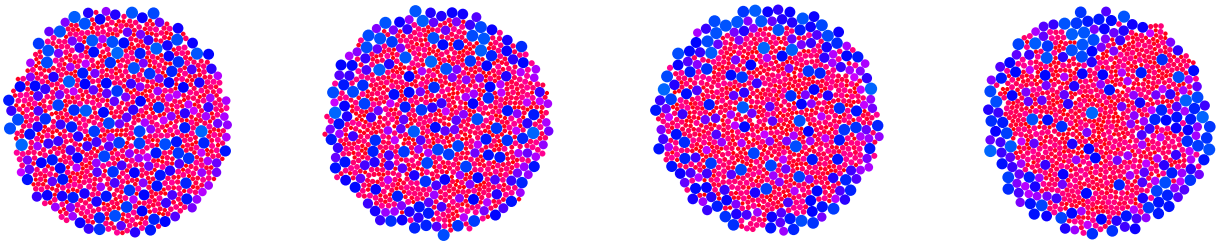
Maintenant que nous avons dessiné le cadre des simulations de ce chapitre, nous pouvons présenter les résultats que nous en avons tiré.

II- Grandeurs caractéristiques de la ségrégation

II-1. Observations de la ségrégation

Notons tout d'abord que l'on observe un processus de ségrégation, plus ou moins marqué, dans toutes les simulations présentées dans ce chapitre. Pour des paramètres typiques $\mu = 0,5$, $e = 0,51$, $T_s = 1,25$ s, cette ségrégation se produit en quelques centaines de secousses typiquement. Ensuite, l'état ségrégé reste stable sur plusieurs milliers de secousses (voir la Fig. III.4). Nous appliquons en général 10000 secousses en tout sur une simulation. De plus, même si tous les gros grains ne sont pas en périphérie, on constate une ségrégation nette au cœur de l'astéroïde également, en opposition aux résultats de la Réf. [126]. Cela est très certainement dû au fait que nous avons autant de grains (1000) mais dans un agrégat à 2D dans notre cas, et que les gros grains ne couvrent que 50 % de la surface de cet agrégat dans notre cas,

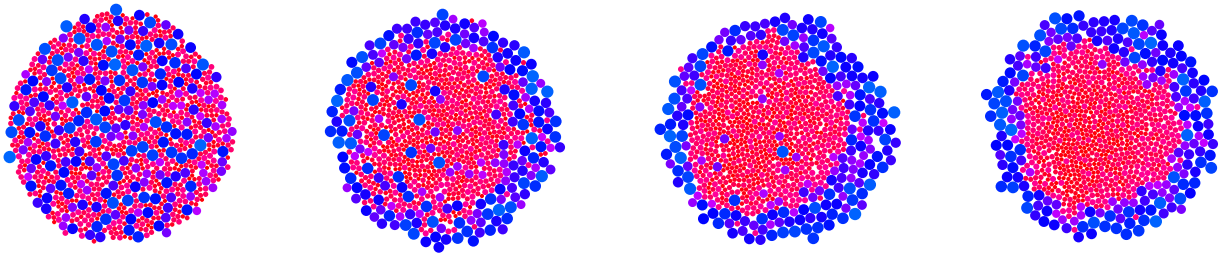
contre 89 % du volume dans la Réf. [126] (voir la Sec. III-2. du Chap. II). Ces observations constituent le fondement de ce chapitre : de simples perturbations isotropes appliquées à un agrégat bidimensionnel permettent d'observer une nette ségrégation, avec une concentration des gros grains en surface tout à fait semblable aux constats effectués sur l'astéroïde Itokawa par exemple [178].



(a) État initial. (b) Après 500 secousses. (c) Après 1000 secousses. (d) Après 5000 secousses.

FIGURE III.4 – Observation de la ségrégation pour un astéroïde bidimensionnel simulé, avec les paramètres suivants : $T_s = 1,25$ s, $e = 0,51$ et $\mu = 0,5$.

Nous observons par ailleurs l'apparition d'une ségrégation angulaire : après 5000 secousses, les grains sont essentiellement concentrés à la surface mais de façon non uniforme sur cette surface (voir la Fig. III.4d). Cela se traduit par une distribution non uniforme de la position des gros grains selon la coordonnée polaire angulaire θ, d'où la dénomination « ségrégation angulaire ». Celle-ci sera abordée plus en détails dans la Sec. V-, mais nous pouvons déjà constater que ce phénomène tend à former des lobes de gros grains, séparés par des petits grains qui atteignent de nouveau la surface. Par conservation de l'aire totale de l'agrégat, certains gros grains se rapprochent donc du centre, ce qui diminue l'ampleur de la ségrégation radiale. Dans certaines simulations, ce phénomène de ségrégation angulaire n'est pas du tout observé. C'est notamment le cas si les grains sont privés de leur degré de liberté en rotation (les motivations pour de telles simulations, ainsi que les résultats qui en découlent, sont détaillés dans la Sec. III-4..), comme le montre la Fig. III.5.



(a) État initial. (b) Après 500 secousses. (c) Après 1000 secousses. (d) Après 2000 secousses.

FIGURE III.5 – Observation de la ségrégation pour un astéroïde bidimensionnel simulé, avec les paramètres suivants : $T_s = 1,25$ s, $e = 0,51$, $\mu = 0,8$ et rotation bloquée.

La ségrégation radiale est alors assez rapide, puisque l'agrégat est déjà très ségrégé après 500 secousses (voir la Fig. III.5b) et atteint des niveaux exceptionnels dans l'état final, puisque tous les gros grains sont alors exclus du cœur de l'agrégat (voir la Fig. III.5d).

Nous remarquons donc déjà le fait que la ségrégation radiale est plus ou moins marquée en fonction des paramètres physiques, et qu'elle s'établit sur un temps typique plus ou moins important. Pour étudier quantitativement ces deux aspects, nous proposons la définition d'un degré de ségrégation radiale pour les agrégats circulaires.

II-2. Définition des quantités utiles à l'étude de la ségrégation

II-2.a) Degré de ségrégation

Nous reprenons la définition du degré de ségrégation proposée par Charles-Édouard Lecomte dans sa thèse [100]. Comme nous utilisons un histogramme binaire pour la taille des grains, c'est-à-dire un groupe de petits grains et un groupe de gros grains, une possibilité pour quantifier la ségrégation est de prendre en compte l'éloignement moyen des gros grains au centre de masse. En effet, plus les gros grains sont concentrés à la surface, plus on parle d'astéroïde ségrégé. Nous définissons donc le degré de ségrégation ψ dans un état donné par

$$\psi = \frac{\langle r_\mathrm{g} \rangle}{\langle r_\mathrm{t} \rangle}, \tag{III.17}$$

où $\langle r_\mathrm{g} \rangle$ est la distance moyenne des gros grains au centre, et $\langle r_\mathrm{t} \rangle$ est la distance moyenne de tous les grains au centre. Formellement, ces quantités valent :

$$\langle r_\mathrm{g} \rangle = \frac{\sum\limits_{i,\mathrm{gros}} {R_i}^2 r_i}{\sum\limits_{i,\mathrm{gros}} {R_i}^2} \text{ et } \langle r_\mathrm{t} \rangle = \frac{\sum\limits_{i\in[\![1,N]\!]} {R_i}^2 r_i}{\sum\limits_{i\in[\![1,N]\!]} {R_i}^2}. \tag{III.18}$$

Nous pondérons la position des grains r_i par le carré de leur rayon ${R_i}^2$ afin de rendre compte du fait qu'un gros grain situé à une distance r_i du centre prend la place de plusieurs petits grains. Le degré de ségrégation ψ défini par l'Éq. (III.17) vaut donc 1 pour un état mélangé, puisqu'alors gros et petits sont en moyenne aussi éloignés du centre les uns que les autres, et vaut une certaine valeur ψ_max dans un état totalement ségrégé. Un tel état correspondrait à un anneau peuplé uniquement de gros grains entourant un disque central peuplé uniquement de petits grains. Nous pouvons alors calculer ψ_max en traitant l'astéroïde comme un milieu continu. Notons α_A la fraction en aire couverte par les gros grains ; nous utilisons généralement $\alpha_\mathrm{A} = 0,5$. Alors, l'anneau formé par les gros grains dans un état totalement ségrégé a pour rayon intérieur R_int défini par :

$${R_\mathrm{int}}^2 = (1-\alpha_\mathrm{A}) {R_\mathrm{ast}}^2. \tag{III.19}$$

Cela nous indique que $R_\mathrm{int} = \sqrt{1-\alpha_\mathrm{A}} R_\mathrm{ast}$ et on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} \sum_{i,\mathrm{gros}} {R_i}^2 r_i &= \frac{1}{\pi}\int_{r=R_\mathrm{int}}^{R_\mathrm{ast}} r \mathrm{d}S = \frac{1}{\pi}\int_{r=R_\mathrm{int}}^{R_\mathrm{ast}} r 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{2}{3}\left[1-(1-\alpha_\mathrm{A})^{3/2}\right] {R_\mathrm{ast}}^3, \\ \sum_{i,\mathrm{gros}} {R_i}^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{r=R_\mathrm{int}}^{R_\mathrm{ast}} \mathrm{d}S = \frac{1}{\pi}\int_{r=R_\mathrm{int}}^{R_\mathrm{ast}} 2\pi r \mathrm{d}r = \alpha_\mathrm{A} {R_\mathrm{ast}}^2. \end{aligned} \tag{III.20}$$

Ainsi, dans l'état totalement ségrégé, on a

$$\langle r_{\rm g}\rangle = \frac{2}{3}\,\frac{1-(1-\alpha_{\rm A})^{3/2}}{\alpha_{\rm A}} R_{\rm ast}. \tag{III.21}$$

Par ailleurs, on calcule facilement :

$$\begin{aligned} \sum_{i\in[|1,N|]} {R_i}^2 r_i &= \frac{1}{\pi}\int_{r=0}^{R_{\rm ast}} r{\rm d}S = \frac{1}{\pi}\int_{r=0}^{R_{\rm ast}} r2\pi r{\rm d}r = \frac{2}{3}{R_{\rm ast}}^3, \\ \sum_{i\in[|1,N|]} {R_i}^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{r=0}^{R_{\rm ast}} {\rm d}S = \frac{1}{\pi}\int_{r=0}^{R_{\rm ast}} 2\pi r{\rm d}r = {R_{\rm ast}}^2. \end{aligned} \tag{III.22}$$

Ainsi, on trouve que $\langle r_{\rm t}\rangle = 2R_{\rm ast}/3$ et donc :

$$\psi_{\rm max} = \frac{1-(1-\alpha_{\rm A})^{3/2}}{\alpha_{\rm A}}. \tag{III.23}$$

Pour $\alpha_{\rm A} = 0,5$, on trouve $\psi_{\rm max} \simeq 1,29289$. Plutôt que d'étudier ψ qui varie entre 1 dans le cas mélangé et $\psi_{\rm max}$ dans le cas totalement ségrégé, nous définissons un degré de ségrégation normalisé Ψ par le changement de variable affine :

$$\Psi = \frac{\psi - 1}{\psi_{\rm max} - 1}. \tag{III.24}$$

La quantité Ψ varie donc entre 0 pour un état complètement mélangé et 1 pour un état complètement ségrégé. Désormais, Ψ sera simplement nommé, par abus, « degré de ségrégation ».

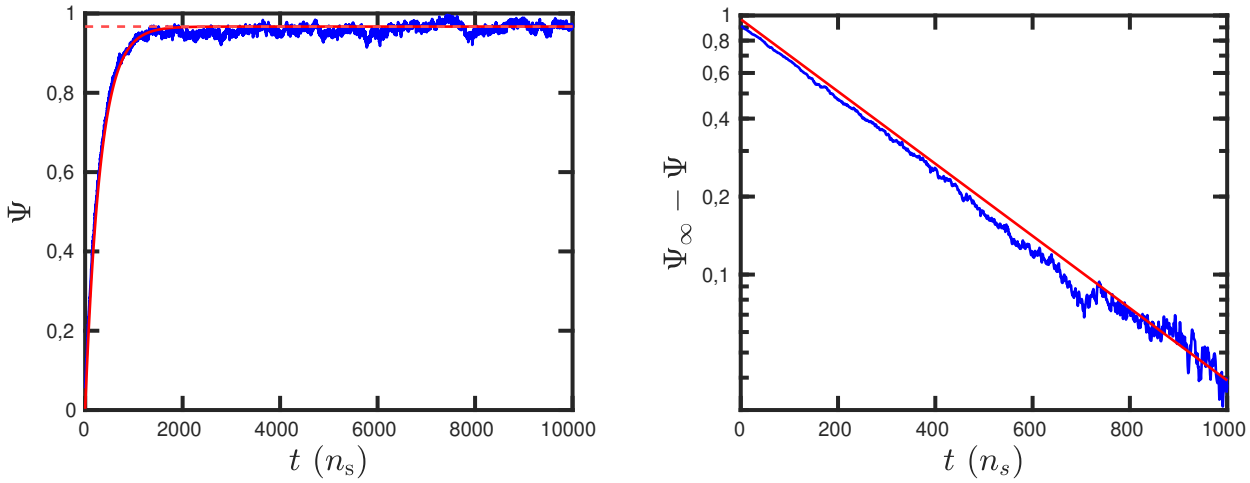
II-2.b) Degré de ségrégation à l'équilibre et temps typique de ségrégation

Le tracé de Ψ en fonction du temps t, c'est-à-dire en fonction du nombre de secousses, pour une simulation donnée permet d'étudier la dynamique de la ségrégation et de préciser si un état d'équilibre est atteint, et avec quelle qualité de ségrégation finale. Dans toutes les simulations de ce chapitre, on observe une évolution du degré de ségrégation compatible avec une cinétique d'ordre 1, du moins tant qu'aucune ségrégation angulaire ne vient à se produire (ce phénomène sera détaillé dans la Sec. V-). L'état initial étant mélangé, on a $\Psi(t=0) = 0$ et l'évolution est de la forme :

$$\Psi(t) = \Psi_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right], \tag{III.25}$$

où Ψ_∞ et τ sont des constantes (voir la Fig. III.6).

Physiquement, cela signifie que τ est le temps typique sur lequel s'établit la ségrégation tandis que Ψ_∞ est le dégré de ségrégation dans l'état final. Ainsi, τ quantifie la rapidité de la ségrégation, et Ψ_∞ sa qualité. Ces deux grandeurs nous sont donc extrêmement utiles pour comparer les différentes simulations, et donc pour étudier l'influence des différents paramètres physiques et numériques sur la ségrégation que nous observons. Signalons cependant que l'ajustement n'est pas toujours aussi aisé que pour le cas présenté sur la Fig. III.6. En effet, si un phénomène de ségrégation angulaire se produit (voir la Fig. III.4), cela fait diminuer Ψ puisque la formation des lobes tend à rapprocher en moyenne les gros grains du centre. L'évolution de



(a) Tracé de Ψ en fonction du temps t exprimé en nombres de secousses. La ligne tiretée rouge indique la valeur Ψ_∞ issue de l'ajustement.

(b) Tracé en échelle semi-logarithmique de $\Psi_\infty - \Psi$ en fonction du temps t exprimé en nombres de secousses.

FIGURE III.6 – Cinétique d'ordre 1 pour le degré de ségrégation Ψ, pour la simulation représentée sur la Fig. III.5. Les données numériques sont représentées en bleu et l'ajustement exponentiel (voir l'Éq. (III.25)) en rouge. On trouve $\Psi_\infty = 0,967$ et $\tau = 312$ secousses.

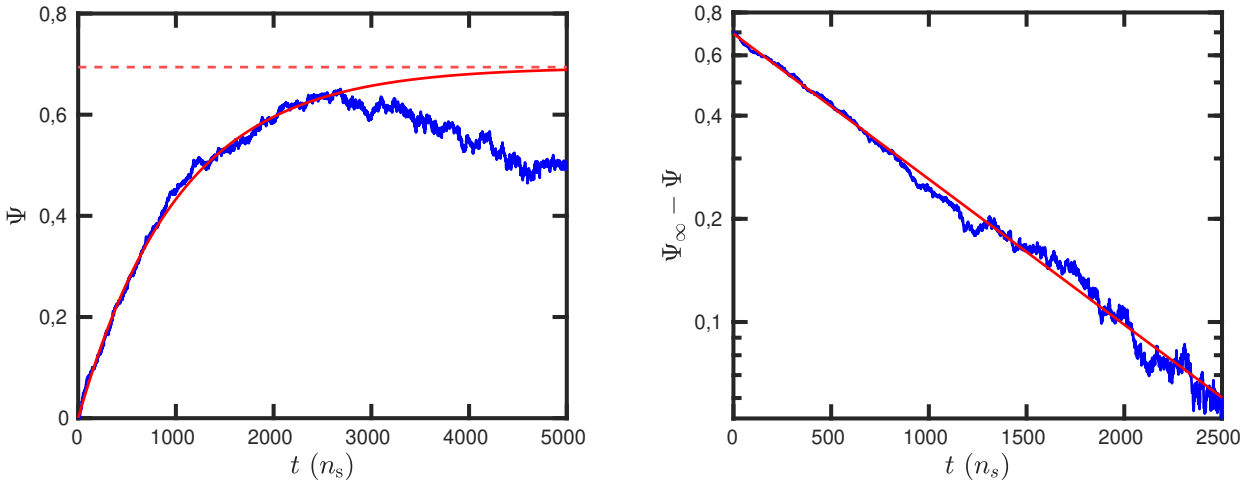
$\Psi(t)$ s'éloigne alors d'une cinétique d'ordre 1 et il convient de ne réaliser l'ajustement que sur les secousses antérieures à la ségrégation angulaire (voir la Fig. III.7).

Notons par ailleurs que la présence d'une cinétique d'ordre 1 est assez commune dans les expériences de ségrégation granulaire, comme nous avons pu le voir dans la Sec. III-1. du Chap. I. C'est en particulier le cas pour la ségrégation dans les écoulements sur un plan incliné [172] ou dans une cellule de Couette [70]. Un modèle permettant de prédire cette cinétique fait intervenir des forces de portance et de traînée subies par les gros grains se déplaçant au milieu de petits grains [172]. Dans notre cas toutefois, la géométrie est très différente puisque les grains évoluent dans un champ gravitationnel qui n'est ni parallèle, ni de norme uniforme, contrairement à celui régnant dans les écoulements terrestres. En conclusion, même s'il est intéressant de retrouver une cinétique observée dans la ségrégation terrestre, aucune justification évidente à cela ne semble se dégager, et nous préférons tirer profit de cette cinétique en caractérisant empiriquement la ségrégation par les valeurs de τ et Ψ_∞.

II-2.c) Réalisation de l'ajustement

Il nous reste à préciser comment nous ajustons les données par la loi donnée par l'Éq. (III.25). L'algorithme repose sur les étapes suivantes.

- Sur un simple tracé de Ψ en fonction de t, nous déterminons au jugé un encadrement réaliste pour Ψ_∞, c'est-à-dire deux valeurs $\Psi_{\infty,\min}$ et $\Psi_{\infty,\max}$ entre lesquelles nous allons rechercher numériquement Ψ_∞. Nous déterminons également une borne supérieure sur le temps pour la réalisation de l'ajustement, afin de nous affranchir des écarts liés à une éventuelle ségrégation angulaire (voir la Fig. III.7a).
- Nous choisissons un grand nombre N_{val} (on a toujours $N_{\text{val}} \geq 400$) de valeurs de test $\Psi_{\infty,\text{test}}$ permettant de discrétiser l'intervalle $[\Psi_{\infty,\min}, \Psi_{\infty,\max}]$. Pour chacune, nous procé-



(a) Tracé de Ψ en fonction du temps t exprimé en nombres de secousses. La ligne tiretée rouge indique la valeur Ψ_∞ issue de l'ajustement.

(b) Tracé en échelle semi-logarithmique de $\Psi_\infty - \Psi$ en fonction du temps t exprimé en nombres de secousses.

FIGURE III.7 – Cinétique d'ordre 1 pour le degré de ségrégation Ψ, pour la simulation représentée sur la Fig. III.4. Les données numériques sont représentées en bleu et l'ajustement exponentiel (voir l'Éq. (III.25)) en rouge. Cet ajustement n'est réalisé que sur l'intervalle $t \leq 2500$ n_s, un décrochage dû à la ségrégation angulaire se produisant ensuite. On trouve $\Psi_\infty = 0,694$ et $\tau = 1023$ secousses.

dons à un ajustement de $\ln(|\Psi(t) - \Psi_{\infty,\mathrm{test}}|)$ en fonction de t par un polynôme d'ordre 2, soit $a_2 t^2 + a_1 t + a_0$.

- Nous retenons la valeur de $\Psi_{\infty,\mathrm{test}}$ qui permet de minimiser $|a_2|$, c'est-à-dire celle pour laquelle $\ln(|\Psi(t) - \Psi_{\infty,\mathrm{test}}|)$ se rapproche le plus d'une fonction affine du temps. Cette valeur de $\Psi_{\infty,\mathrm{test}}$ nous donne directement Ψ_∞ et le coefficient a_1 associé nous donne $1/\tau$.
- Nous réalisons ensuite les tracés des données et de leur ajustement en échelles linéaire et semilogarithmique (voir la Fig. III.7) afin de vérifier que les paramètres retenus correspondent à un ajustement réaliste de $\Psi(t)$. Ce test est presque toujours concluant, et dans le cas contraire il suffit généralement d'affiner l'intervalle temporel d'ajustement et/ou l'intervalle $[\Psi_{\infty,\mathrm{min}}, \Psi_{\infty,\mathrm{max}}]$. Ce n'est parfois le cas : nous en concluons alors, tracé de $\Psi(t)$ à l'appui, que le processus ne peut pas être décrit raisonnablement par une cinétique d'ordre 1.

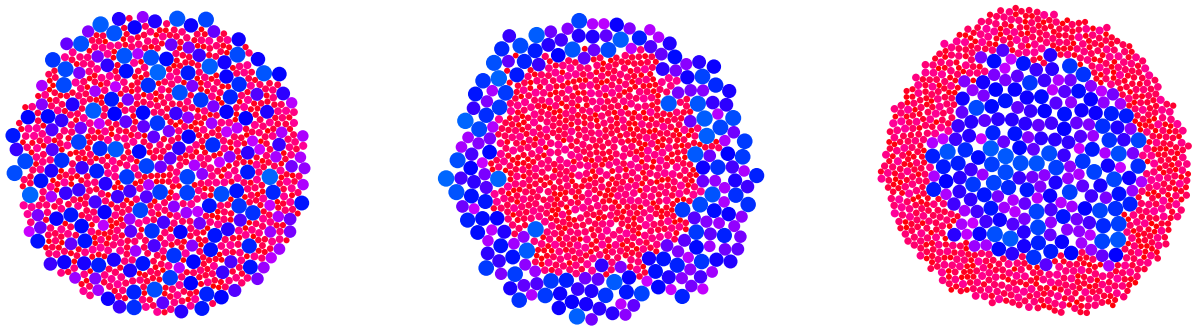
À des fins d'efficacité des calculs, nous n'utilisons donc pas une méthode de moindres carrés directement entre l'ajustement et les données de Ψ en fonction de t, comme cela a été fait par Charles-Édouard Lecomte [100]. Notre méthode peut donc donner des ajustements moins « proches » selon le critère des moindres carrés, d'où la phase de test finale par le tracé des données et de leur ajustement. L'obtention d'un graphe comme celui représenté sur la Fig. III.7b montre bien que l'ajustement obtenu est convaincant.

II-3. Influence de l'état initial

Avant de se lancer dans un étude systématique, il est important de s'assurer de la robustesse du phénomène de ségrégation, et d'évaluer l'influence éventuelle de l'état initial de l'astéroïde. En effet, nous savons que de nombreux phénomènes d'hystérésis peuvent être à l'œuvre dans les milieux granulaires, principalement en raison du frottement solide entre les grains (voir la Sec. II-1.d) du Chap. I).

II-3.a) Influence du degré de ségrégation initial

Un premier paramètre pouvant avoir une influence est l'état initial de ségrégation de l'astéroïde. En effet, nous avons vu qu'en partant d'un état initial totalement mélangé, l'application des secousses permet d'atteindre un état d'équilibre caractérisé par un degré de ségrégation $\Psi_\infty > 0$. Nous nous sommes donc demandés si le même état était atteint pour des conditions initiales présentant déjà de la ségrégation, ou au contraire présentant une anti-ségrégation.



(a) État initial totalement mélangé, $\Psi(t=0)=0$.

(b) État initial complètement ségrégé, $\Psi(t=0)=1$.

(c) État initial complètement anti-ségrégé, $\Psi(t=0)=-1$.

FIGURE III.8 – Illustration des trois états initiaux considérés.

Nous avons alors considéré deux cas extrêmes : un état initial complètement ségrégé, c'est-à-dire un disque central de petits grains entouré d'un anneau de gros grains, correspondant à $\Psi(t=0)=1$ (voir la Fig. III.8b), et un état initial complètement anti-ségrégé, c'est-à-dire un disque central de gros grains entouré d'un anneau de petits grains, correspondant à $\Psi(t=0)=-1$ (voir la Fig. III.8c). On remarque que les deux astéroïdes ainsi obtenus ne sont pas parfaitement circulaires dans leur état initial, mais ils le deviennent après quelques secousses. Les trois astéroïdes simulés présentent par ailleurs les mêmes paramètres physiques ($e=0,51$ et $\mu=0,5$) et sont soumis aux mêmes secousses, avec $T_\mathrm{s}=1,25$ s. Le tracé de $\Psi(t)$ dans les trois cas est représenté sur la Fig. III.9. On constate que les trois tracés convergent assez rapidement (en moins de 2000 secousses) vers des valeurs très proches, traduisant un même état d'équilibre, assez nettement ségrégé ($\Psi_\infty \simeq 0,6$). La ségrégation sous perturbations isotropes est donc robuste sous modification de l'état de ségrégation initial, ce qui conforte nos observations et contribue à motiver une étude systématique.

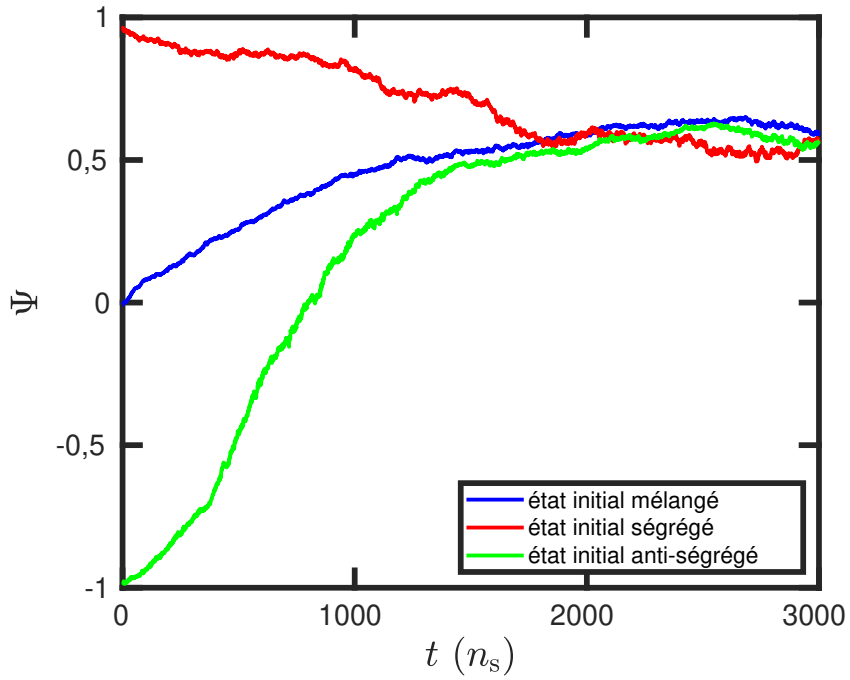


FIGURE III.9 – Comparaison des évolutions pour trois états initiaux différents : totalement mélangé, complètement ségrégé et complètement anti-ségrégé, toutes choses étant égales par ailleurs ($T_s = 1,25$ s, $e = 0,51$ et $\mu = 0,5$). Ces différences sont gommées en un peu moins de 2000 secousses et les trois agrégats convergent vers un même état ségrégé.

II-3.b) Influence des conditions initiales aléatoires

Dans la suite, nous nous concentrerons sur des états initiaux complètement mélangés. Mais même dans ce cas, les conditions initiales peuvent toujours jouer un rôle. En effet, nous choisissons au hasard un grain sur cinq pour être un gros grain, les autres étant des petits grains. Mais il y a ensuite une part d'aléatoire, la distribution en rayon réduit $\overline{R}$ des grains étant uniforme sur l'intervalle $[0,8; 1,2]$ pour les gros grains, et sur l'intervalle $[0,4; 0,6]$ pour les petits grains (voir les histogrammes de la Fig. II.1). Cet aléatoire est numériquement traité à l'aide du choix d'un nombre entier appelé « graine ». Le logiciel de compilation du code attribue à chaque graine une liste aléatoire de nombres de l'intervalle $[0, 1]$. Il est facile de transformer une telle liste en liste aléatoire de nombres de n'importe quel intervalle $[a, b]$. Ainsi, en variant la graine, on varie la distribution aléatoire des rayons des petits et des gros grains, et ceux-ci vont alors s'arranger différemment lors de la formation de l'astéroïde. La graine apparaît donc comme le facteur à modifier pour passer d'un état initial mélangé à un autre.

Pour évaluer l'influence du choix de la graine, il est possible de réaliser plusieurs simulations ne différent que par la graine, tous les paramètres physiques étant égaux, et de comparer les évolutions de Ψ en fonction du temps. Dans le cas des paramètres physiques $T_s = 1,25$ s, $e = 0,51$ et $\mu = 0,5$, et pour quatre graines différentes, nous obtenons le graphe de la Fig. III.10. Les évolutions sont très proches, notamment dans la phase de croissance de Ψ. Les écarts sont ensuite un peu plus importants, essentiellement en raison d'effets de ségrégation angulaire. En réalisant un ajustement sur les 2500 premières secousses, nous obtenons une valeur de Ψ_∞ et de τ pour chaque graine (voir la Tab. III.1).

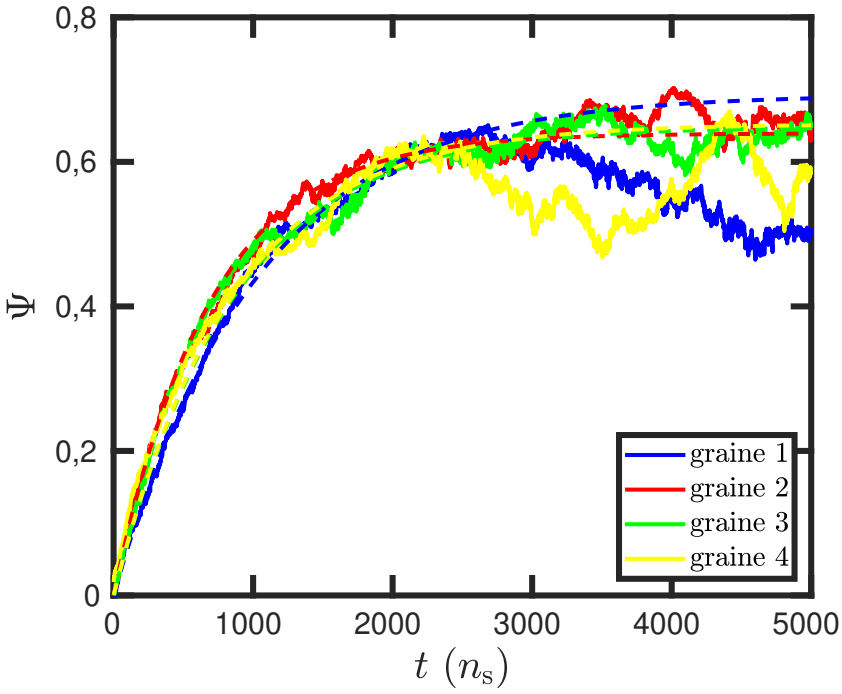


FIGURE III.10 – Comparaison des évolutions pour quatre graines différentes, toutes choses étant égales par ailleurs ($T_\mathrm{s} = 1,25$ s, $e = 0,51$ et $\mu = 0,5$). Les courbes pleines représentent les données numériques, les courbes tiretées les ajustements, dont les résultats sont donnés dans la Tab. III.1.

Graine	Ψ_∞	τ (n_s)
1	0,694	1023
2	0,640	686
3	0,649	848
4	0,653	846

TABLE III.1 – Résultats des ajustements pour quatre graines différentes, les autres paramètres étant $T_\mathrm{s} = 1,25$ s, $e = 0,51$ et $\mu = 0,5$.

Les valeurs obtenues sont très proches pour Ψ_∞, plus dispersées pour τ. Pour Ψ_∞, la moyenne des quatre valeurs s'établit à 0,659 avec un écart-type de 0,021, tandis que τ vaut en moyenne 851 n_s avec un écart-type de 119 n_s. Ces écart-types peuvent être comparés aux incertitudes intrinsèques sur les valeurs issues de chaque ajustement. Celles-ci tiennent essentiellement au choix de la borne supérieure de l'intervalle temporel d'ajustement, qui est en partie arbitraire. On peut donc la déterminer en étudiant l'effet d'une restriction légère de cet intervalle. Dans le cas de la graine 1 par exemple, ce procédé fournit des écarts maximaux $\Delta\Psi_\infty = 0,004$ et $\Delta\tau = 14\ n_\mathrm{s}$ en faisant varier la largeur de l'intervalle d'ajustement de 2300 à 2700 secousses. Ces valeurs sont nettement dominées par les écart-types issus de l'essai de quatre graines distinctes. Ainsi, pour toutes les simulations de ce chapitre, mais aussi des suivants, nous avons choisi de tester systématiquement quatre mêmes graines pour chaque jeu de paramètres physiques donné. Ce sont alors la moyenne et l'écart-type issus de ces quatre simulations que nous retiendrons pour déterminer les valeurs de Ψ_∞ et de τ, ainsi que les incertitudes associées $\Delta\Psi_\infty$ et $\Delta\tau$.

Concrètement, pour le jeu de paramètres $T_s = 1,25$ s, $e = 0,51$ et $\mu = 0,5$, nous écrirons $\Psi_\infty = (0,659 \pm 0,021)$ et $\tau = (851 \pm 119)\ n_s$. Les incertitudes seront également déterminées de cette façon pour toutes les grandeurs que nous feront intervenir par la suite, à commencer par les déplacements moyens des grains.

II-4. Déplacements moyens des grains

Une grandeur physique intéressante à étudier est la variation de position des grains suite à l'application d'une secousse à l'astéroïde. En effet, ce sont des réarrangements successifs qui semblent permettre le processus de ségrégation, comme le montre la Fig. III.11.

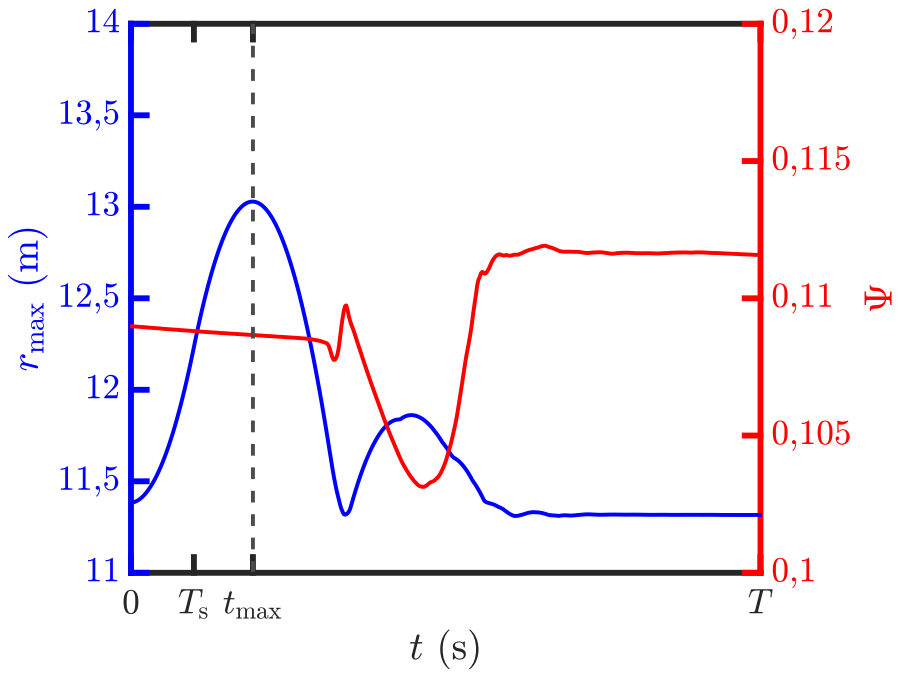


FIGURE III.11 – Tracé du rayon de l'agrégat r_{max} en bleu (avec ordonnée à gauche) et du degré de ségrégation Ψ en rouge (avec ordonnée à droite) au cours de la 120ème secousse, pour $T_s = 1,25$ s, $e = 0,51$ et $\mu = 0,5$.

Ce tracé simultané de r_{max} et Ψ concerne la 120ème secousse d'une simulation à $T_s = 1,25$ s, $e = 0,51$ et $\mu = 0,5$, sachant que pour ces paramètres on a $\tau = 851$ secousses. On se place donc bien durant la phase d'établissement de la ségrégation radiale. On remarque que durant la phase d'expansion puis d'effondrement, et jusqu'aux premières collisions, le degré de ségrégation évolue très peu. Ensuite, il marque un petit pic lors de ces collisions, avant de diminuer nettement lorsque les grains rebondissent et s'éloignent de nouveau. Cela s'explique par le fait qu'un gros et un petit grain entrant en collision subissent des actions de contacts exactement opposées, dont en particulier la répulsion élastique. Mais la masse du petit grain étant plus faible, celui-ci est plus accéléré et est donc expulsé plus loin du centre. C'est lors du retour de tous les grains vers le centre, et des réarrangements qui s'en suivent, que Ψ augmente significativement, pour atteindre une valeur supérieure à celle qu'il avait avant la perturbation.

Il semble donc très intéressant d'étudier quantitativement ces réarrangements. Pour un grain i donné, si on note $\overrightarrow{x_i}(nT)$ sa position au début de la n-ème secousse, et $\overrightarrow{x_i}(nT+T)$ sa position à

la fin de cette même secousse, alors son déplacement $d_i(n)$ sur la n-ème secousse est simplement donné par :

$$d_i(n) = ||\overrightarrow{x_i}(nT+T) - \overrightarrow{x_i}(nT)||. \tag{III.26}$$

Nous définissons alors le déplacement moyen des grains $d(n)$, ainsi que les déplacements moyens des petits grains seuls $d_\mathrm{p}(n)$ et des gros grains seuls $d_\mathrm{g}(n)$ sur la n-ème secousse :

$$\begin{aligned} d(n) &= \frac{1}{N}\sum_{i\in[|1,N|]} d_i(n), \\ d_\mathrm{p}(n) &= \frac{1}{N_\mathrm{p}}\sum_{i,\mathrm{petits}} d_i(n), \\ d_\mathrm{g}(n) &= \frac{1}{N_\mathrm{g}}\sum_{i,\mathrm{gros}} d_i(n), \end{aligned} \tag{III.27}$$

où N_p est le nombre de petits grains et N_g celui de gros grains. On définit ensuite le déplacement moyen des grains $\overline{d}$, ainsi que les déplacements moyens des petits grains seuls $\overline{d_\mathrm{p}}$ et des gros grains seuls $\overline{d_\mathrm{g}}$ sur les τ premières secousses :

$$\overline{d} = \frac{1}{\tau}\sum_{n=1}^{\tau} d(n),\ \overline{d_\mathrm{p}} = \frac{1}{\tau}\sum_{n=1}^{\tau} d_\mathrm{p}(n) \text{ et } \overline{d_\mathrm{g}} = \frac{1}{\tau}\sum_{n=1}^{\tau} d_\mathrm{g}(n). \tag{III.28}$$

Ces trois quantités permettent d'étudier l'ampleur des réarrangements ayant lieu au cours des τ premières secousses, qui sont celles au cours desquelles s'établit la ségrégation. Ces déplacements moyens nous seront donc particulièrement utiles pour quantifier les influences des différents paramètres de l'agrégat et des perturbations, qui font l'objet de la section suivante.

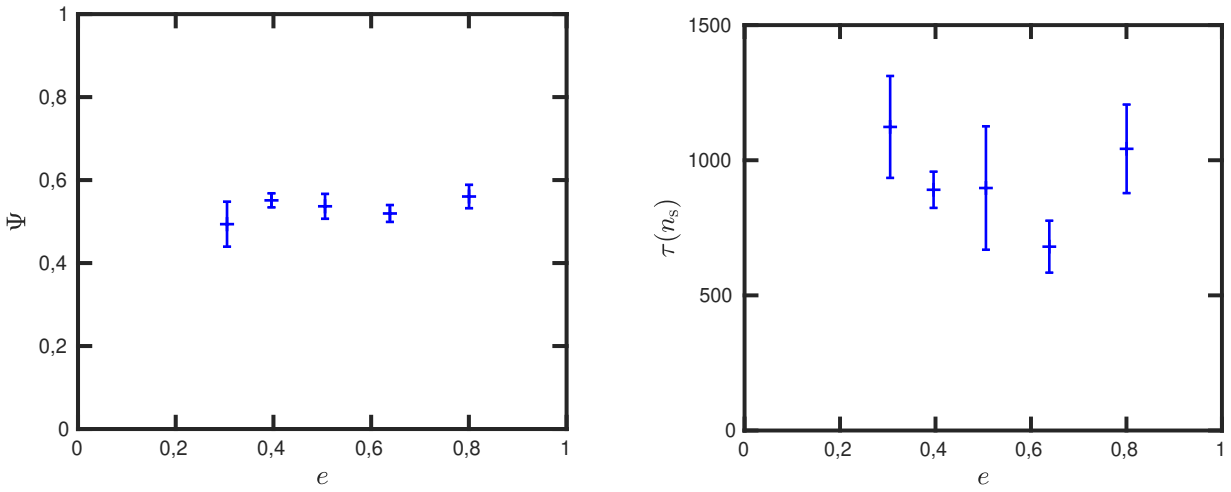
III- Évolution en fonction des différents paramètres

III-1. Influence du coefficient de restitution

Nous désignons par « coefficient de restitution » la valeur e du coefficient de restitution en vitesse [1] lors d'une collision entre deux grains. Son l'expression en fonction des paramètres de la simulation est fournie par l'Éq. (II.13). Étant donné que nous travaillons à k_n et m^* fixés, c'est en variant γ, le coefficient d'amortissement impliqué dans la force normale de contact, que nous pouvons faire varier e. Pour des valeurs de μ et de T_s fixées, il est donc possible d'étudier la dépendance de Ψ_∞ et τ en fonction de e (voir la Fig. III.12). Si nous considérons par exemple les valeurs $\mu = 0,2$ et $T_\mathrm{s} = 1,25$ s, nous n'observons que e ne semble pas avoir d'influence nette sur Ψ_∞ (voir la Fig. III.12a) ou sur τ (voir la Fig. III.12b). En effet, les variations ne sont pas monotones et inscrites dans les barres d'erreur. On retrouve ce constat pour d'autres couples de paramètres, en accord avec les résultats de la Réf. [100] obtenus avec un description différente du frottement solide, ou encore avec les résultats de la Réf. [127] obtenus pour de petits agrégats 3D. Il faut néanmoins souligner que ce faible effet de e est a priori valable pour le type de perturbations étudié seulement, Nous reviendrons toutefois sur l'influence de e pour d'autres type de perturbations (voir le Chap. V). Puisque e ne semble pas être un paramètre

1. Le coefficient de restitution en énergie cinétique est alors donné par e^2.

très important pour la ségrégation étudiée, l'ensemble des simulations présentées dans la suite de ce chapitre ont été réalisées avec la valeur intermédiaire $\gamma = 30$ kg.s^{-1}, soit $e \simeq 0,51$.



(a) Degré de ségrégation final Ψ_∞ en fonction du coefficient de restitution en vitesse e.

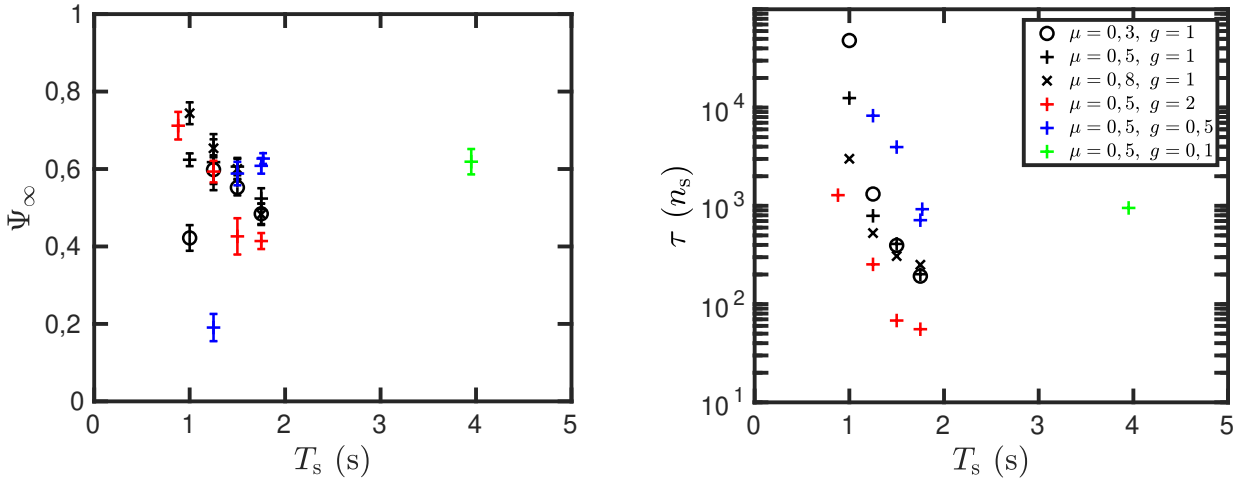
(b) Temps typique de ségrégation τ en fonction du coefficient de restitution en vitesse e.

FIGURE III.12 – Dépendance de la ségrégation en fonction de la restitution en vitesse lors des collisions entre grains, pour $\mu = 0,2$ et $T_s = 1,25$ s.

III-2. Influence de la durée de la perturbation

La durée T_s de la perturbation, c'est-à-dire ici du retournement du champ, joue un rôle important puisque plus elle est élevée, plus les grains sont écartés de leur position initiale (voir l'Éq. (III.9)). Les collisions lors de leur retour vers le centre sont alors plus violentes et les réarrangements différents. Nous avons implémenté, pour $g = 1$ m.s^{-2} et pour différents coefficients de frottement, les valeurs suivantes de T_s : 1 s, 1,25 s, 1,5 s et 1,75 s. Nous avons également exploré des valeurs inférieures à 1 s, mais aucun effet significatif n'a pu être constaté, même en allant jusqu'à effectuer 100000 secousses. Par ailleurs, l'intensité du champ gravitationnel central imposé joue également un rôle : plus elle est importante, plus une perturbation de durée donnée va écarter fortement les grains. Nous avons donc effectué d'autres simulations mettant en jeu une gravité de surface $g = 0,5$ m.s^{-2} ou bien $g = 2$ m.s^{-2} et enfin une simulation a été effectuée à $g = 0,1$ m.s^{-2} et $\mu = 0,5$. Pour les valeurs de T_s utilisées dans ces simulations à g modifié, nous avons en partie repris celles citées dans le cas où $g = 1$ m.s^{-2}, mais aussi testé d'autres valeurs dont nous détaillerons le choix dans les lignes qui suivent. Les résultats obtenus pour trois coefficients de frottement ($\mu = 0,3$, $\mu = 0,5$ et $\mu = 0,8$) sont représentés sur la Fig. III.13.

Nous pouvons noter ici qu'à T_s fixé, la ségrégation se fait plus rapidement si la pesanteur de surface g est plus importante (voir la Fig. III.13b). La valeur de g semble donc jouer un rôle tout aussi important que celle de T_s, comme le suggère l'Éq. (III.9). En effet, il en ressort qu'à rayon de l'astéroïde R_{ast} fixé (ce qui est le cas puisque nous avons travaillé à $N = 1000$ pour toutes les simulations de cette section), l'expansion du milieu due à une perturbation est une fonction du seul paramètre $T_s\sqrt{g}$. Cette valeur nous a permis de déterminer quelques unes des valeurs de



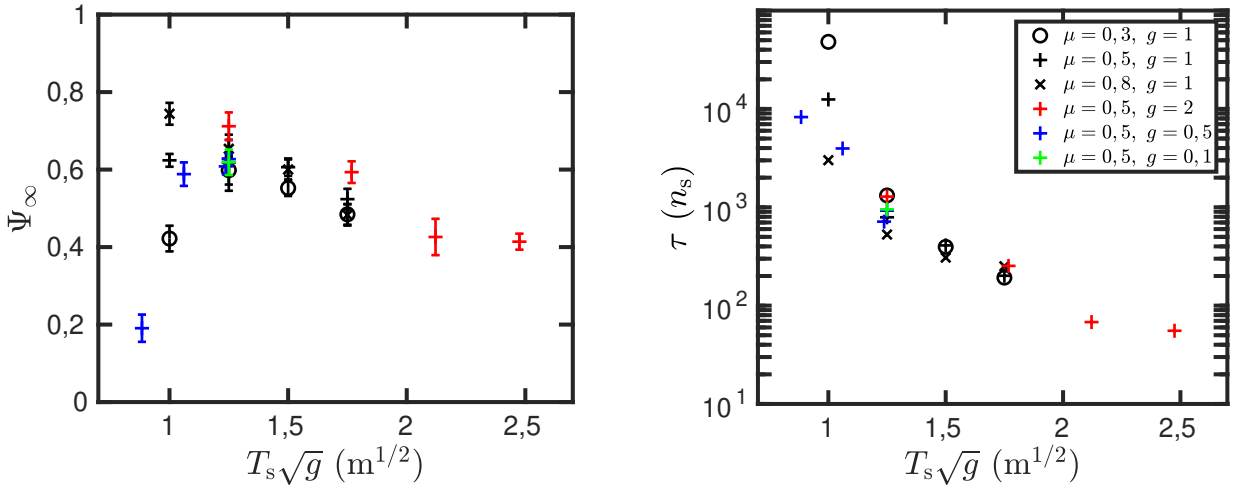
(a) Degré de ségrégation final Ψ_∞ en fonction de la durée de la perturbation T_s.

(b) Temps typique de ségrégation τ en fonction de la durée de la perturbation T_s.

FIGURE III.13 – Dépendance de la ségrégation en fonction de la durée de la perturbation T_s, pour différents coefficients de frottements μ et différentes valeurs de la pesanteur g à la surface de l'astéroïde. La légende est commune aux deux graphes.

T_s utilisées. Pour $g = 0,5$ m.s^{-2} et $g = 2$ m.s^{-2}, nous avons repris les valeurs $T_s = 1,25$ s, $1,5$ s et $1,75$ s, et nous en avons ajouté une quatrième permettant de conserver la quantité $T_s\sqrt{g}$ par rapport au cas où $g = 1$ m.s^{-2} et $T_s = 1,25$ s. Ces valeurs sont respectivement $T_s = 0,88$ s pour $g = 2$ m.s^{-2} et $T_s = 1,77$ s pour $g = 0,5$ m.s^{-2}. Enfin, la simulation à $g = 0,1$ m.s^{-2} conserve également la valeur $T_s\sqrt{g} = 1,25$ m$^{1/2}$, et a donc été effectuée à $T_s = 3,95$ s. La période T a par ailleurs été augmentée en conséquence, afin que l'agrégat ait le temps de revenir au repos entre deux secousses. Nous proposons donc d'étudier les variations de Ψ_∞ et τ en fonction non pas de T_s, mais de $T_s\sqrt{g}$ (voir la Fig. III.14).

Nous observons alors des tendances claires. Tout d'abord, nous notons que les différents points correspondant à une même valeur de $T_s\sqrt{g}$ sont rassemblés, tant pour la valeur de Ψ_∞ que pour celle de τ. Ils correspondent pourtant à des situations très variées, la durée de la perturbation allant de $0,88$ à $3,95$ s et l'intensité de la pesanteur en surface allant de $0,1$ à 2 m.s^{-2}. Cela montre la pertinence du paramètre $T_s\sqrt{g}$ pour étudier globalement l'influence de l'intensité des perturbations. Concernant le degré de ségrégation dans l'état final Ψ_∞, on peut distinguer un maximum semblant être atteint entre $T_s\sqrt{g} = 1$ m$^{1/2}$ et $T_s\sqrt{g} = 1,25$ m$^{1/2}$ (voir la Fig. III.14a). Cela peut se comprendre assez simplement. D'une part, dans la limite où $T_s\sqrt{g} \to 0$, on ne perturbe pas du tout l'astéroïde : les grains ne bougent donc pas et aucune ségrégation ne peut se produire. Mais si les perturbations deviennent trop importantes, on écarte tellement les grains que le tamisage cinétique ne favorise plus autant les petits grains. Les réarrangements mènent alors à une ségrégation moins nette : $\Psi_\infty \simeq 0,4$ au lieu de $\simeq 0,7$ au maximum, pour $\mu = 0,5$. Concernant le temps typique de ségrégation τ, on voit que tous les points se placent sur une courbe décroissante de $T_s\sqrt{g}$ (voir la Fig. III.14b). Cela est également attendu dans la mesure où si l'on secoue plus fort, les réarrangements sont plus importants et la ségrégation peut donc s'établir plus rapidement, quelle que soit sa qualité finale. On constate que la décroissance de τ en fonction de $T_s\sqrt{g}$ est très forte : pour $\mu = 0,5$, une multiplication de $T_s\sqrt{g}$ par $2,5$ entraîne une chute d'environ trois ordres de grandeur pour τ. L'existence d'un



(a) Degré de ségrégation final Ψ_∞ en fonction du paramètre $T_s\sqrt{g}$.

(b) Temps typique de ségrégation τ en fonction du paramètre $T_s\sqrt{g}$.

FIGURE III.14 – Dépendance de la ségrégation en fonction du paramètre $T_s\sqrt{g}$ gouvernant l'expansion de l'agrégat due à une perturbation, pour différents coefficients de frottements μ. La légende est commune aux deux graphes.

optimum pour Ψ_∞ en fonction du paramètre $T_s\sqrt{g}$ quantifiant l'intensité des perturbations, ainsi que le fait que τ décroisse strictement de ce paramètre, ne sont pas sans rappeler certains résultats expérimentaux concernant la compaction d'un milieu granulaire monodisperse soumis à des coups périodiques [140]. L'évolution de la compacité ρ du milieu en fonction du temps, pour différentes valeurs d'accélération dues aux coups, est représentée sur la Fig. III.15.

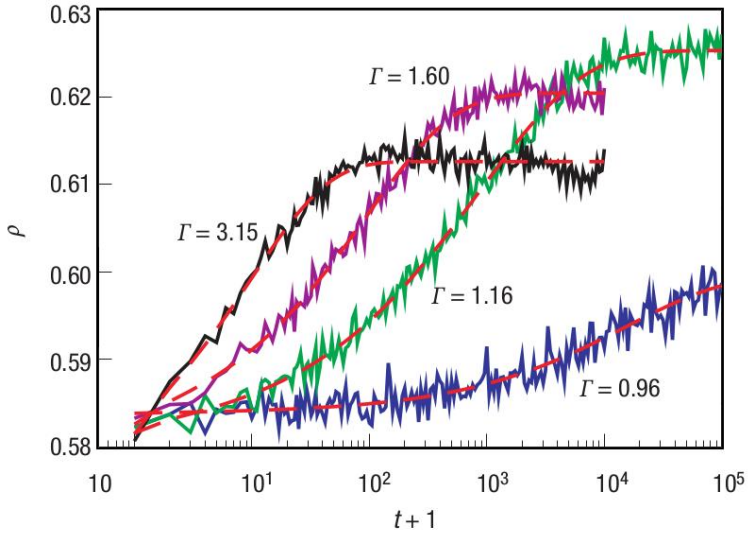


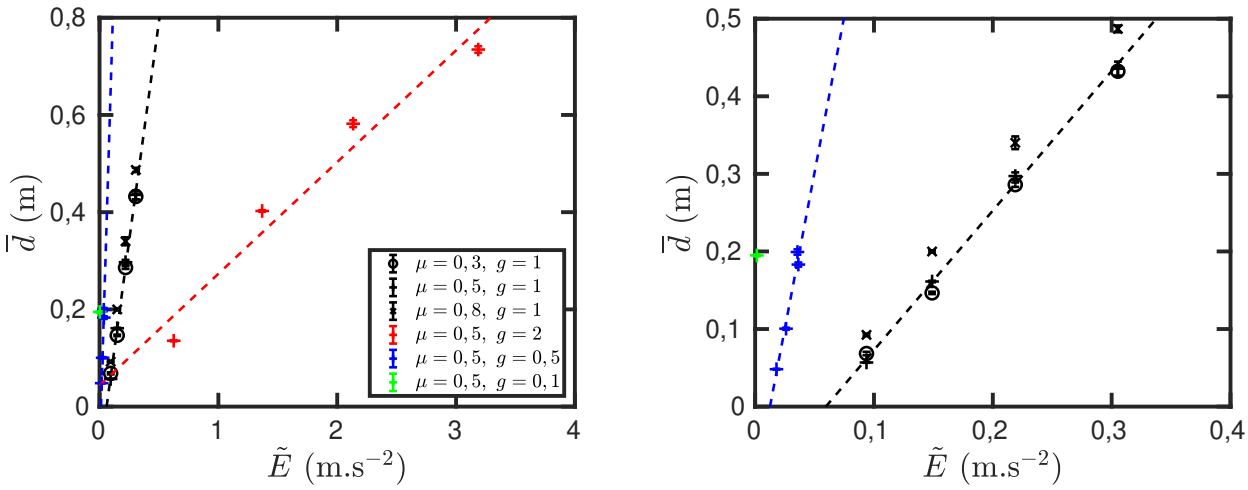
FIGURE III.15 – Évolution de la compacité ρ d'un granulaire monodisperse en fonction du temps t. Le milieu est soumis à des coups périodiques donnant une accélération aux grains quantifiée par le paramètre Γ. Le temps est représenté en échelle logarithmique. Image tirée de la Réf. [140].

Nous constatons d'une part que plus on sollicite fortement le milieu granulaire, plus la compacité augmente rapidement aux temps courts, et d'autre part que la compacité atteint un plateau aux temps longs, dont la valeur présente un optimum pour $\Gamma = 1,16$. L'analogie entre ces résultats et les nôtres tient au fait qu'une augmentation de la compacité nécessite, tout comme la ségrégation, des réarrangements locaux tendant à plus ordonner le milieu. Des perturbations trop fortes permettent certes d'obtenir plus rapidement les premiers réarrangements, mais désordonnent ensuite tellement le milieu que l'effet des réarrangements se retrouve en fait plus limité.

Pour évaluer plus en détail la rapidité des réarrangements et confirmer cette analyse, il est intéressant d'étudier le déplacement moyen des grains $\overline{d}$ en fonction de l'énergie mécanique totale injectée lors d'une perturbation. Cette dernière est donnée par l'Éq. (III.14), et peut se réécrire $\Delta E_{\text{tot}} = M_{\text{ast}} R_{\text{ast}} \tilde{E}/2$ avec

$$\tilde{E} = g \, \text{sh}^2 \left(\sqrt{\frac{g}{R_{\text{ast}}}} T_{\text{s}} \right). \tag{III.29}$$

Nous représentons donc le tracé de $\overline{d}$ en fonction de $\tilde{E}$ sur la Fig. III.16.



(a) Déplacement moyen des grains $\overline{d}$ en fonction du facteur d'énergie injectée $\tilde{E}$.

(b) Agrandissement du graphe pour mieux visualiser les points à $g < 2$ m.s^{-2}.

FIGURE III.16 – Dépendance de la ségrégation en fonction du paramètre $\tilde{E}$ quantifiant l'énergie injectée lors d'une perturbation, pour différents coefficients de frottements μ. Les droites tiretées sont des ajustements affines pour chaque valeur de g (sauf $g = 0,1$ m.s^{-2}) et pour $\mu = 0,5$. La légende est commune aux deux graphes.

Cette étude va dans le sens de l'analyse que nous proposons pour expliquer les variations de Ψ_∞ et τ. En effet, on observe que les plus forts déplacements moyens $\overline{d}$, autrement dit les plus importants réarrangements sur une secousse, sont globalement obtenus pour les plus fortes valeurs de $\tilde{E}$. De plus, si on considère les points obtenus pour $\mu = 0,5$ par exemple, une dépendance affine de $\overline{d}$ en fonction de $\tilde{E}$ semble se dégager pour chaque valeur de g fixée. Les pentes obtenues valent $8,0$ s^2 pour $g = 0,5$ m.s^{-2}, $1,8$ s^2 pour $g = 1$ m.s^{-2} et $0,23$ s^2 pour $g = 2$ m.s^{-2}. Elles sont décroissantes de g mais ne sont pas inversement proportionnelles à g, ce qui exclut une dépendance affine globale de $\overline{d}$ en fonction de $\tilde{E}/g$. Nous notons toutefois que les

données à $g = 2$ m.s^{-2} semblent présenter une concavité, et que leur ajustement affine ne passe par aucune des barres d'incertitude associées. Cela est possiblement dû à l'application de la fonction convexe sh^2 à l'abscisse du tracé, et suggère donc d'étudier également les déplacements moyens en fonction du seul paramètre d'expansion $T_s\sqrt{g}$, qui nous a été utile pour étudier τ et Ψ_∞. C'est l'objet du graphe représenté sur la Fig. III.17.

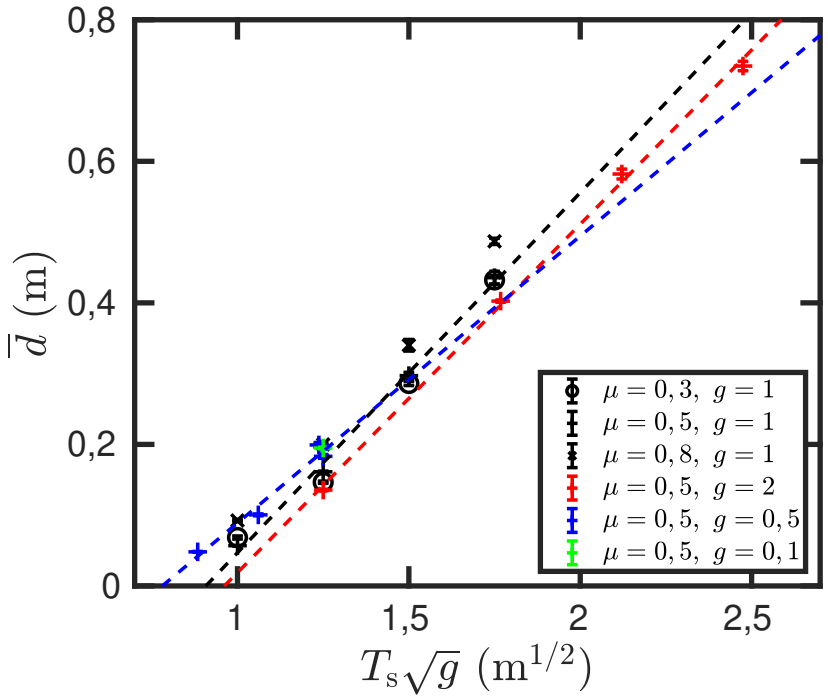


FIGURE III.17 – Déplacement moyen $\overline{d}$ en fonction du paramètre d'expansion $T_s\sqrt{g}$. Les droites tiretées représentent des ajustements affines des données obtenues pour $\mu = 0,5$ et les différentes valeurs de $g > 0,1$ m.s^{-2}.

On constate que les points semblent presque tous s'aligner le long d'une droite maîtresse, avec toutefois des écarts pour les points à $\mu = 0,8$ et ceux à $g = 2$ m.s^{-2}. Concernant ces derniers, un ajustement affine semble bien plus pertinent pour modéliser la dépendance $\overline{d} = f(T_s\sqrt{g})$ qu'il ne l'était pour $\overline{d} = f(\tilde{E})$. La pente obtenue vaut $0,49$ m$^{1/2}$, très proche de celle obtenue pour les données à $g = 1$ m.s^{-2}, qui s'établit à $0,51$ m$^{1/2}$. Néanmoins les données semblent cette fois-ci présenter une légère convexité, suggérant que l'ajustement linéaire est probablement plus pertinent en fonction de $\tilde{E}$ qu'en fonction de $T_s\sqrt{g}$. Enfin, les données obtenues pour $g = 0,5$ m.s^{-2} semblent également présenter une convexité lorsque l'on trace $\overline{d}$ en fonction de $T_s\sqrt{g}$, et un ajustement affine mène à une pente significativement plus faible, valant $0,41$ m$^{1/2}$. Ce dernier constat est toutefois à tempérer au vu de la faible amplitude en $T_s\sqrt{g}$ couverte par les données à $g = 0,5$ m.s^{-2}. En résumé, $\overline{d}$ semble présenter une dépendance linéaire en $\tilde{E}$ pour $g = 0,5$ s^{-2} et $g = 1$ s^{-2}, autrement dit aux faibles valeurs de $\tilde{E}$, tandis que $\overline{d}$ semble dépendre linéairement de $T_s\sqrt{g}$ pour $g = 2$ s^{-2}, autrement dit aux fortes valeurs de $\tilde{E}$.

On peut aller plus loin en remarquant que l'expression de $\tilde{E}$ admet un développement limité lorsque $T_s\sqrt{g/R_{ast}} \ll 1$, ce qui est bien vérifié pour $g \leq 1$ m.s^{-2}. En effet, puisque $\mathrm{sh}(x) \simeq x$ pour $x \ll 1$, on a :

$$\tilde{E} = g\ \mathrm{sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\mathrm{ast}}}}T_{\mathrm{s}}\right) \simeq \frac{(gT_{\mathrm{s}})^2}{R_{\mathrm{ast}}} \propto {T_{\mathrm{s}}}^2 \text{ à } g \text{ fixé.} \tag{III.30}$$

Cela permet de conclure que pour une valeur de g fixée, $\overline{d}$ dépend linéairement de ${T_{\mathrm{s}}}^2$ si $\tilde{E} \lesssim 1$ m.s^{-2}, mais dépend linéairement de T_{s} si $\tilde{E} \gtrsim 1$ m.s^{-2} (voir la Fig. III.16a). Il semble donc se dégager un régime de perturbations « faiblement énergétiques » et de perturbations « fortement énergétiques ». Pour développer ce point de vue, il est intéressant de comparer l'énergie totale ΔE_{tot} apportée par une perturbation à l'énergie potentielle gravitationnelle totale $E_{\mathrm{pg,tot}}$ emmagasinée dans l'agrégat au repos. Si on traite ce dernier comme un milieu continu, cette dernière est donnée par :

$$E_{\mathrm{pg,tot}} = \int_{\text{astéroïde}} V_{\mathrm{grav}}(r)\mathrm{d}m = \int_{r=0}^{R_{\mathrm{ast}}} \frac{1}{2}\frac{gr^2}{R_{\mathrm{ast}}} 2\pi\rho_{\mathrm{surf}} r\mathrm{d}r = \frac{1}{4}M_{\mathrm{ast}}R_{\mathrm{ast}}g. \tag{III.31}$$

En utilisant les Éq. (III.14) et (III.29), on remarque donc que :

$$\frac{\Delta E_{\mathrm{tot}}}{E_{\mathrm{pg,tot}}} = \frac{2\tilde{E}}{g}. \tag{III.32}$$

Ainsi, pour $g = 0,5$ m.s^{-2}, ΔE_{tot} excède l'énergie potentielle gravitationnelle $E_{\mathrm{pg,tot}}$ de l'agrégat si $\tilde{E} \geq 0,08$ m.s^{-2}, ce qui n'est jamais vérifié dans nos simulations. Cette valeur de g a donc servi uniquement pour des perturbations faiblement énergétiques. Pour $g = 1$ m.s^{-2}, on a $\Delta E_{\mathrm{tot}} \geq E_{\mathrm{pg,tot}}$ si $\tilde{E} \geq 0,5$ m.s^{-2}, ce qui n'est jamais le cas pour les valeurs de T_{s} explorées. Cependant, un ajustement affine fonctionne bien pour $\overline{d} = f(\tilde{E})$ comme pour $\overline{d} = f(T_{\mathrm{s}}\sqrt{g})$. Enfin, pour $g = 2$ m.s^{-2}, on a $\Delta E_{\mathrm{tot}} \geq E_{\mathrm{pg,tot}}$ si $\tilde{E} \geq 1$ m.s^{-2}, ce qui est le cas pour trois des quatre valeurs de T_{s} explorées. Cette valeur de g a donc servi majoritairement pour des perturbations fortement énergétiques.

Finalement, la conclusion suivante semble se dégager empiriquement : si les perturbations apportent une énergie mécanique plus faible que l'énergie potentielle gravitationnelle de l'agrégat au repos, alors les déplacements moyens sur une secousse croissent comme $\tilde{E} \propto {T_{\mathrm{s}}}^2$ à g fixé, mais dans le cas contraire, ils croissent comme T_{s} à g fixé. Nous avons par ailleurs mentionné plusieurs coefficients de frottement μ, nous proposons donc d'étudier maintenant l'influence de μ sur la ségrégation.

III-3. Influence du coefficient de frottement

Pour étudier l'influence du coefficient de frottement, nous réalisons des simulations pour neuf valeurs de μ, allant de 0 à 0,8 par incréments de 0,1. Cette étude est réalisée pour $g = 1$ m.s^{-2} et $e = 0,51$ fixés, mais pour plusieurs durées de secousses : $T_{\mathrm{s}} = 1$ s, 1,25 s, 1,5 s et 1,75 s. Nous représentons, pour chaque valeur de T_{s}, l'évolution de Ψ_∞ en fonction de μ sur la Fig. III.18.

Nous constatons que pour les quatre valeurs de T_{s}, le degré de ségrégation final Ψ_∞ augmente significativement avec μ. En effet, pour chaque jeu de données, Ψ_∞ est deux fois plus important pour $\mu = 0,8$ que pour $\mu = 0$. Pour cette dernière valeur, on observe d'ailleurs une ségrégation tout à fait correcte puisque Ψ_∞ se situe entre 0,2 et 0,4 en fonction du choix de T_{s}. Nous rejoignons sur ce point les conclusions de la Réf. [127] : la ségrégation dans un agrégat sphérique se produit même en l'absence de frottement. Cependant, la différence de comportement entre les cas $\mu = 0$ et $\mu = 0,7$ est plus marquée dans nos simulations. Nous concluons

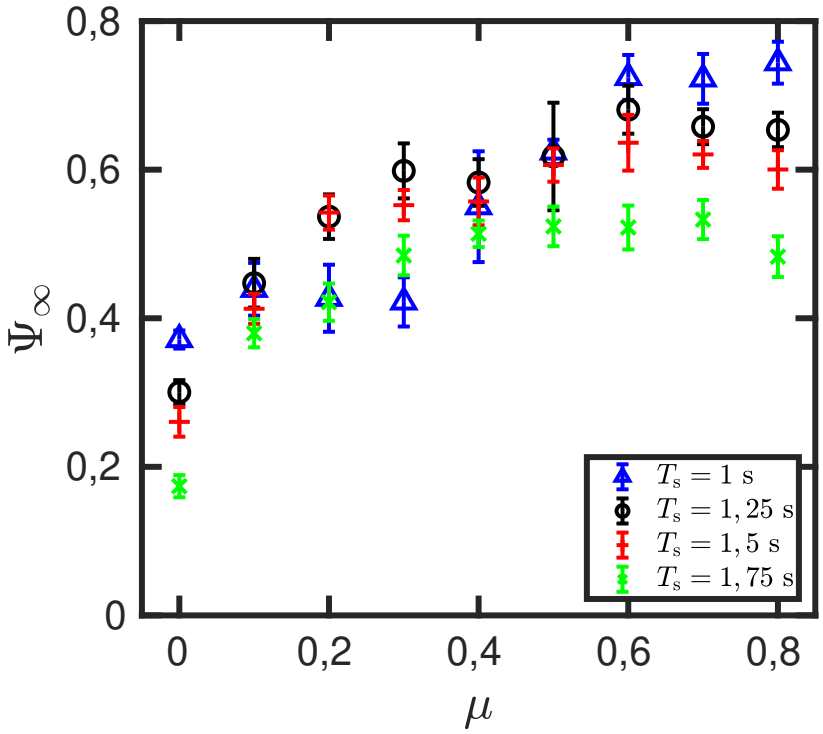
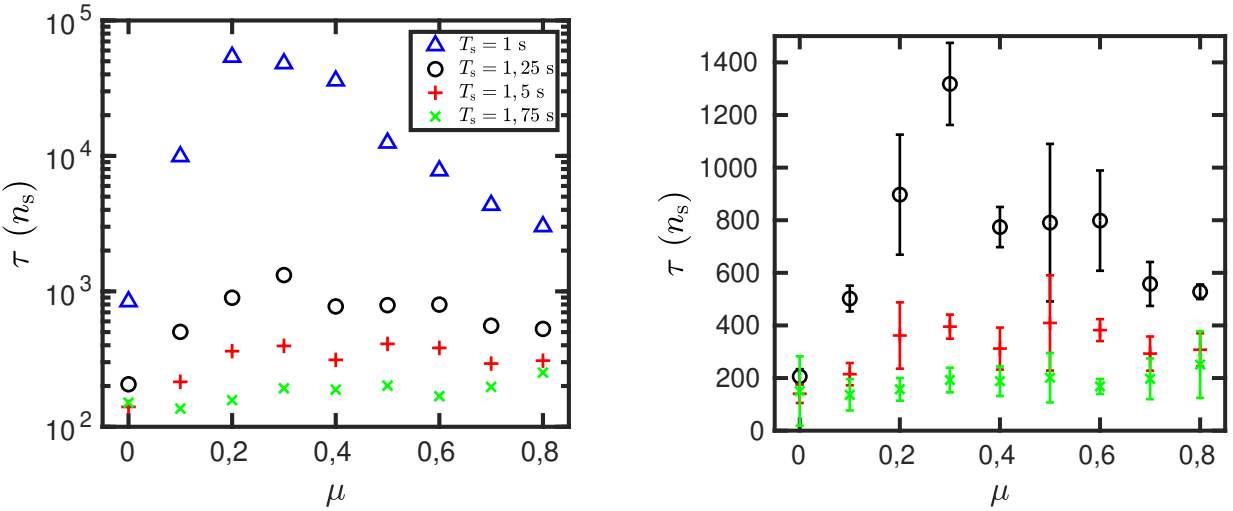


FIGURE III.18 – Degré de ségrégation final Ψ_∞ en fonction du coefficient de frottement μ, pour quatre valeurs de T_s.

donc que le frottement joue un rôle important puisqu'il permet d'accéder à des états finaux plus ségrégés. Enfin, nous retrouvons les observations de la Sec. III-2. : pour chaque valeur de μ, les ségrégations les plus nettes sont obtenues pour $T_s = 1$ s ou $1,25$ s. Par ailleurs, la valeur de μ a également une influence forte sur la rapidité de la ségrégation, comme le montre la Fig. III.19.

De nouveau, nous retrouvons les conclusions de la Sec. III-2., généralisées à toutes les valeurs de μ considérées, à savoir que l'augmentation de T_s accélère la ségrégation. Mais ce n'est pas tout : il ressort de ces graphiques que l'évolution de τ en fonction de μ n'est pas monotone. En effet, il semble exister une valeur de μ, située autour de $0,2$ pour $T_s = 1$ s ou $0,3$ pour $T_s = 1,25$ s, pour laquelle τ est maximal. Cela est contre-intuitif puisque l'on pourrait s'attendre à ce qu'à T_s fixée, autrement dit à énergie injectée par une secousse $\tilde{E}$ fixée, l'augmentation de μ réduise globalement les réarrangements possibles sur une secousse, en freinant plus fortement les grains lorsque ceux-ci reviennent vers le centre. Ainsi, il faudrait plus de secousses pour que les gros grains puissent migrer vers la surface de l'agrégat, et τ serait une fonction croissante de μ. Or cette analyse « intuitive » est démentie par le tracé du déplacement moyen des grains suite à une secousse $\overline{d}$ en fonction de μ (voir la Fig. III.20).

En effet, on peut y voir que $\overline{d}$ atteint un minimum au voisinage de $\mu = 0,3$ pour chaque valeur de T_s. Signalons d'ailleurs que les données sont ici enrichies du cas $T_s = 0,5$ s : pour ces simulations, la ségrégation est si lente qu'il est impossible de réaliser un ajustement exponentiel correct de $\Psi(t)$ même sur 100000 secousses. Nous nous contentons donc de calculer $\overline{d}$ sur les 1000 premières secousses (au lieu des τ premières secousses lorsque τ est connu, voir l'Éq. (III.28)). Avant de de se pencher plus en détail sur ce minimum de $\overline{d}$ en fonction de μ, il est intéressant de vérifier si ce minimum concerne simultanément les déplacements $\overline{d_g}$ des gros grains et ceux



(a) Temps typique de ségrégation τ en fonction du coefficient de frottement μ, en échelle semi-logarithmique.

(b) Agrandissement du graphe pour mieux visualiser les points à $T_s \geq 1,25$ s en échelle linéaire.

FIGURE III.19 – Dépendance du temps typique de ségrégation en fonction du coefficient de frottement pour quatre valeurs de T_s. La légende est commune aux deux graphes.

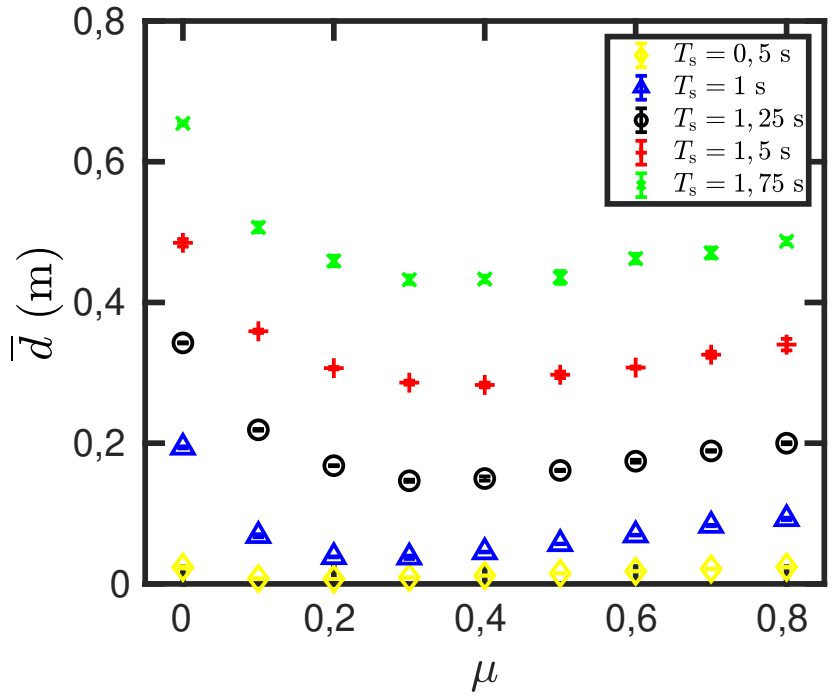
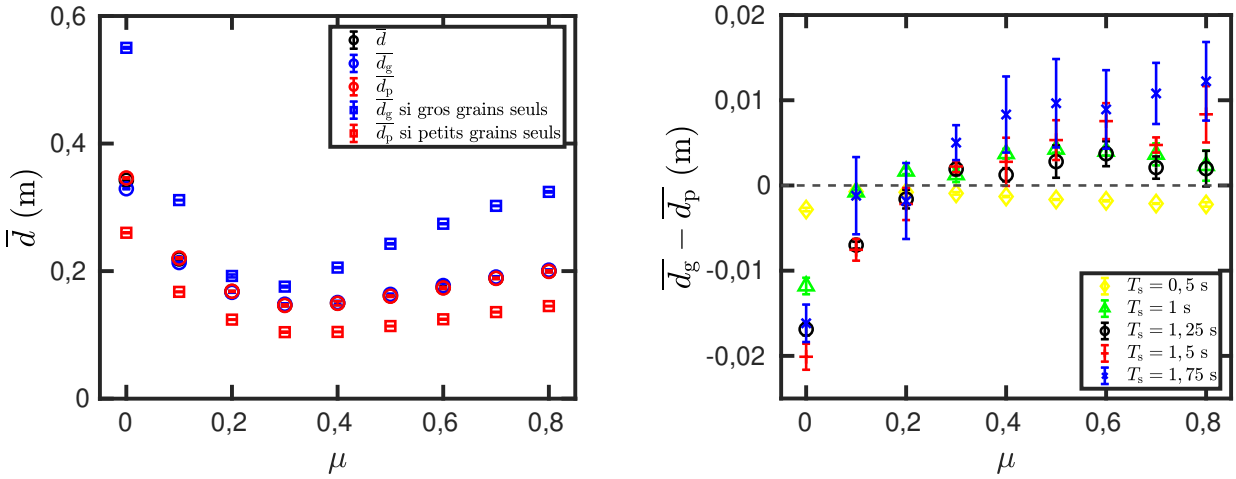


FIGURE III.20 – Déplacement moyen des grains suite à une secousse $\overline{d}$ en fonction du coefficient de frottement μ, pour cinq valeurs de T_s : les quatre précédentes ainsi que $T_s = 0,5$ s.

$\overline{d_p}$ des petits grains (voir la Fig. III.21).

Sur la Fig. III.21a, on a utilisé une unique valeur $T_s = 1,25$ s, pour laquelle on a représenté les déplacements moyens de tous les grains $\overline{d}$, des petits grains seuls $\overline{d_p}$ et des gros grains



(a) Déplacements moyens, pour $T_s = 1,25$ s, de tous les grains $\overline{d}$ (en noir), des gros $\overline{d_g}$ (en bleu), et des petits $\overline{d_p}$ (en rouge). Les carrés sont les déplacements moyens pour des astéroïdes constitués uniquement de gros grains (en bleu) ou de petits grains (en rouge).

(b) Différence de déplacements moyens $\overline{d_g} - \overline{d_p}$ entre les gros grains et les petits grains pour cinq valeurs de T_s. La ligne tiretée grise correspond à la situation où $\overline{d_g} = \overline{d_p}$.

FIGURE III.21 – Étude des déplacements moyens des gros et petits grains.

seuls $\overline{d_g}$. Comme on peut le voir, les points correspondants sont presque toujours complètement confondus, sauf pour $\mu = 0$ et $0,1$ où l'on peut noter à l'œil que $\overline{d_p} > \overline{d_g}$. Il semble donc que le minimum de déplacement autour de $\mu \simeq 0,3$ concerne indistinctement les gros et les petits grains. De plus, nous avons ajouté des données de déplacements moyens pour des agrégats « monodisperses » constitués de 1000 gros grains ($\overline{R}_i \in [0,8; 1,2]$) seuls d'une part, et de 1000 petits grains ($\overline{R}_i \in [0,4; 0,6]$) seuls d'autre part. Notre degré de ségrégation Ψ n'étant pas défini en pareil cas, ces déplacements moyens sont calculés sur 1000 secousses. Nous constatons de nouveau un minimum de déplacement atteint en $\mu = 0,3$. Signalons par ailleurs qu'il ne faut pas accorder une grande importance au fait que les gros grains semblent se déplacer plus lorsqu'ils sont seuls, tandis que les petits grains semblent alors se déplacer moins. Cela est lié au fait que nous avons travaillé à nombre total N de grains constant : les agrégats constitués uniquement de gros grains ont donc un rayon supérieur aux agrégats polydisperses classiques, qui ont eux-mêmes un rayon supérieur aux agrégats constitués uniquement de petits grains. Comme nous avons également travaillé à paramètres g et R_{ast} constants, le champ gravitationnel moyen au sein d'un agrégat fait de gros (resp. petits) grains uniquement est plus (resp. moins) important que celui au sein des agrégats polydisperses. Par conséquent, à $T_s = 1,25$ s fixé, une secousse injecte plus (resp. moins) d'énergie lorsque les gros (resp. petits) grains sont seuls, ce qui explique les écarts observés pour les déplacements moyens.

Nous avons vu que $\overline{d_p}$ et $\overline{d_g}$ sont très proches, à $T_s = 1,25$ s, pour toutes les valeurs de μ. Pour en savoir plus, nous nous intéressons à l'évolution de la différence $\overline{d_g} - \overline{d_p}$ en fonction de μ, pour toutes les valeurs de T_s considérées (voir la Fig. III.21b). Nous constatons que pour chaque couple de paramètres (T_s, μ), cette différence est relativement faible, de l'ordre de 10 % de $\overline{d}$ au mieux. Mais l'observation la plus intéressante est le fait que cette différence s'annule autour de $\mu = 0,3$ pour toutes les valeurs de T_s supérieures ou égales à 1 s. Pour résumer, il

existe, pour chacune de ces quatre valeurs de T_s, un coefficient de frottement μ_{min} pour lequel $\overline{d}$ est minimal, et en dessous duquel les petits grains se déplacent en moyenne plus que les gros suite à une secousse, tandis que c'est l'inverse qui se produit pour $\mu > \mu_{min}$. Il semble donc intéressant de chercher à expliquer l'existence de μ_{min}. Pour $\mu < \mu_{min}$, les déplacements moyens $\overline{d}$ sont décroissants de μ, ce qui va dans le sens de l'analyse « intuitive » présentée plus haut. Mais au-delà de μ_{min}, les déplacements moyens réaugmentent. Une explication possible est que du fait des valeurs de μ plus élevées, il y a moins de contacts qui atteignent le régime de glissement que nous avons implémenté. Pour rappel, nous calculons le déplacement tangentiel relatif ξ des grains en leur point de contact. La force de frottement solide se comporte alors comme un rappel linéaire en ξ, du moins tant que son intensité n'atteint pas μF_{norm} (F_{norm} étant l'intensité de la force normale de contact), auquel cas elle est simplement fixée à cette valeur (voir l'Éq. (II.18))). On atteint alors le régime de glissement des lois d'Amontons-Coulomb. Afin d'explorer cette piste, nous pouvons étudier la fraction α_G des contacts qui atteignent effectivement ce régime de glissement dans nos simulations, pour différentes valeurs de μ (voir la Fig. III.22).

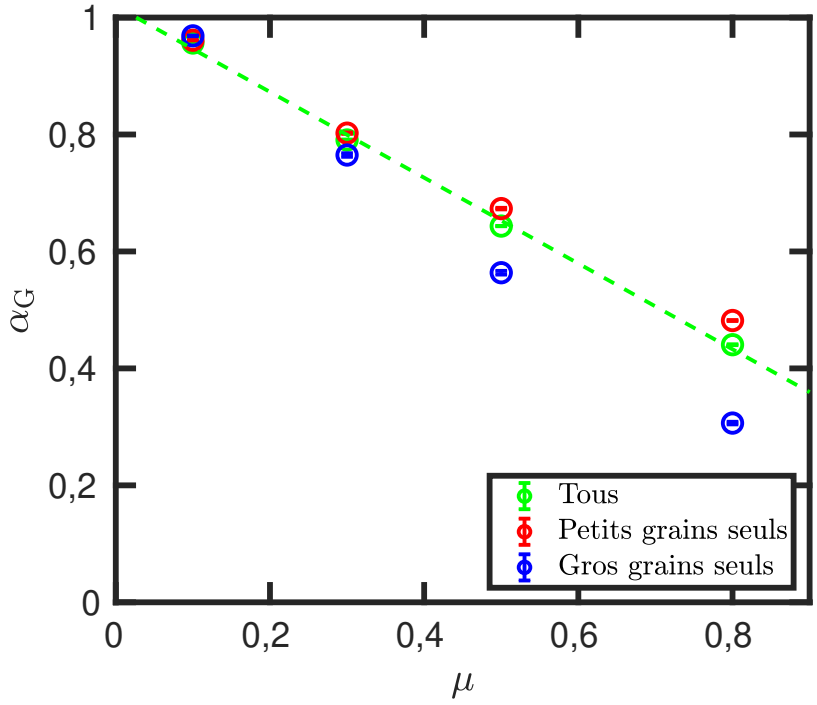


FIGURE III.22 – Fraction de contacts glissants α_G en fonction du coefficient de frottement μ, pour des astéroïdes classiques (en vert) mais aussi pour des astéroïdes monodisperses faits de petits grains uniquement (en rouge) ou de gros grains uniquement (en bleu). Toutes les données sont obtenues à $T_s = 1,25$ s. La ligne tiretée verte représente un ajustement affine des données concernant les astéroïdes classiques, de la forme $\alpha_G = \alpha_0 - \mu/\mu_0$. On trouve $\alpha_0 = 1,03$ et $\mu_0 = 1,36$.

Nous constatons alors que α_G semble présenter une dépendance affine de μ. Naturellement, on doit avoir $\alpha_G = 1$ pour $\mu = 0$ puisqu'en l'absence de frottement, les contacts sont tous glissants (et il n'y a alors aucune résistance à ce glissement). Un ajustement affine empirique de la forme $\alpha_G = \alpha_0 - \mu/\mu_0$ confirme cette attente puisqu'on obtient $\alpha_0 = 1,03$. Nous avons

également représenté les valeurs de α_{G} obtenues pour les astéroïdes « monodisperses » décrits lors de l'étude de la Fig. III.21a. Notons $\alpha_{\mathrm{G,p}}$ (resp. $\alpha_{\mathrm{G,g}}$) la valeur obtenue pour des petits (resp. gros) grains seuls. On peut alors définir la moyenne pondérée suivante :

$$\alpha_{\mathrm{G,moy}} = \frac{N_{\mathrm{p}}\ \alpha_{\mathrm{G,p}} + N_{\mathrm{g}}\ \alpha_{\mathrm{G,g}}}{N} = 0,8\ \alpha_{\mathrm{G,p}} + 0,2\ \alpha_{\mathrm{G,g}}. \tag{III.33}$$

Définissons par ailleurs les écarts relatifs suivants :

$$\Delta\alpha_{\mathrm{G,moy}} = \frac{\alpha_{\mathrm{G,moy}} - \alpha_{\mathrm{G}}}{\alpha_{\mathrm{G}}} \text{ et } \Delta\alpha_{\mathrm{G,p/g}} = \frac{\alpha_{\mathrm{G,p}} - \alpha_{\mathrm{G,g}}}{\alpha_{\mathrm{G}}}. \tag{III.34}$$

On remarque que pour chaque valeur de μ, le calcul de $\alpha_{\mathrm{G,moy}}$ permet d'estimer la valeur α_{G} obtenue pour un agrégat polydisperse, avec une précision à 1 %, alors même que $\alpha_{\mathrm{G,p}} - \alpha_{\mathrm{G,g}}$ peut atteindre 40 % de α_{G} (voir la Tab. III.2).

μ	α_{G}	$\Delta\alpha_{G,\mathrm{moy}}$	$\Delta\alpha_{\mathrm{G,p/g}}$
$0,1$	$0,9582$	$0,65$ %	$-0,78$ %
$0,3$	$0,7907$	$0,53$ %	$4,7$ %
$0,5$	$0,6434$	$1,2$ %	17 %
$0,8$	$0,4819$	$1,4$ %	40 %

TABLE III.2 – Comparaison de l'écart relatif de $\alpha_{\mathrm{G,moy}}$ à α_{G} avec $\Delta\alpha_{\mathrm{G,p/g}}$.

Nous constatons également que deux petits grains en contact atteignent plus facilement le régime de glissement, à μ fixé, que deux gros grains en contact, sauf pour $\mu = 0,1$. Ainsi, il semble que pour $\mu < \mu_{\min} \simeq 0,3$, non seulement les petits grains sont plus mobiles que les gros, comme nous l'avons vu, mais de plus leurs contacts atteignent moins facilement le régime de glissement que les contacts des gros grains.

Enfin, la dépendance affine de α_{G} en fonction de μ présente un certain intérêt en soi, puisqu'elle permet de prédire l'existence d'un maximum de la force tangentielle moyenne de contact $\overline{F_{\mathrm{t}}}$ entre deux grains en fonction de μ. En effet, pour un contact glissant, l'intensité F_{tang} de la force tangentielle est directement reliée à celle de la force normale et au coefficient de frottement : $F_{\mathrm{tang}} = \mu F_{\mathrm{norm}}$. Mais pour un contact non glissant, la force tangentielle est indéterminée. Supposons qu'elle est alors uniformément distribuée, pour l'ensemble des contacts non glissants, entre 0 et $\mu\overline{F_{\mathrm{n}}}$ où $\overline{F_{\mathrm{n}}}$ est la force normale moyenne de contact entre deux grains. Ainsi, F_{tang} vaut en moyenne $\mu\overline{F_{\mathrm{n}}}/2$ pour les contacts non glissants et $\mu\overline{F_{\mathrm{n}}}$ pour les contacts glissants. Nous pouvons alors en déduire que

$$\overline{F_{\mathrm{t}}} = (1-\alpha_{\mathrm{G}})\mu\frac{\overline{F_{\mathrm{n}}}}{2} + \alpha_{\mathrm{G}}\mu\overline{F_{\mathrm{n}}} = \frac{\mu\overline{F_{\mathrm{n}}}}{2}\left(1+\alpha_{\mathrm{G}}\right). \tag{III.35}$$

Si l'on injecte $\alpha_{\mathrm{G}} = \alpha_0 - \mu/\mu_0$, on obtient alors

$$\overline{F_{\mathrm{t}}} = \frac{\mu\overline{F_{\mathrm{n}}}}{2}\left(1+\alpha_0 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) = -\frac{\overline{F_{\mathrm{n}}}}{2\mu_0}\mu^2 + (1+\alpha_0)\frac{\overline{F_{\mathrm{n}}}}{2}\mu. \tag{III.36}$$

Ainsi, il apparaît que $\overline{F_{\mathrm{t}}}$ admet un maximum en $\mu = (1+\alpha_0)\mu_0/2$. Comme c'est finalement cette force qui est responsable du freinage des grains, et s'oppose donc à leur déplacement moyen suite à une secousse, cela permettrait d'expliquer l'existence d'un minimum de $\overline{d}$ en fonction de μ. Cependant, comme nous obtenons par ajustement affine $\alpha_0 = 1,03$ et $\mu_0 = 1,36$,

cette analyse prédit que $\mu_{\min} \simeq 1,4$ en désaccord avec notre observation, $\mu_{\min} \simeq 0,3$ (voir la Fig. III.20). Nous envisageons que cet écart puisse provenir du fait que la force tangentielle F_{tang} n'a pas seulement pour effet de freiner le centre de masse des grains. En effet, elle contribue également, puisqu'elle possède un moment non nul, à leur donner une vitesse de rotation. Pour étudier les contributions relatives des degrés de liberté en translation et du degré de liberté en rotation au déplacement moyen $\overline{d}(\mu)$, et donc à la ségrégation, nous avons utilisé une possibilité intéressante offerte par les simulations : celle de modifier le moment d'inertie des grains.

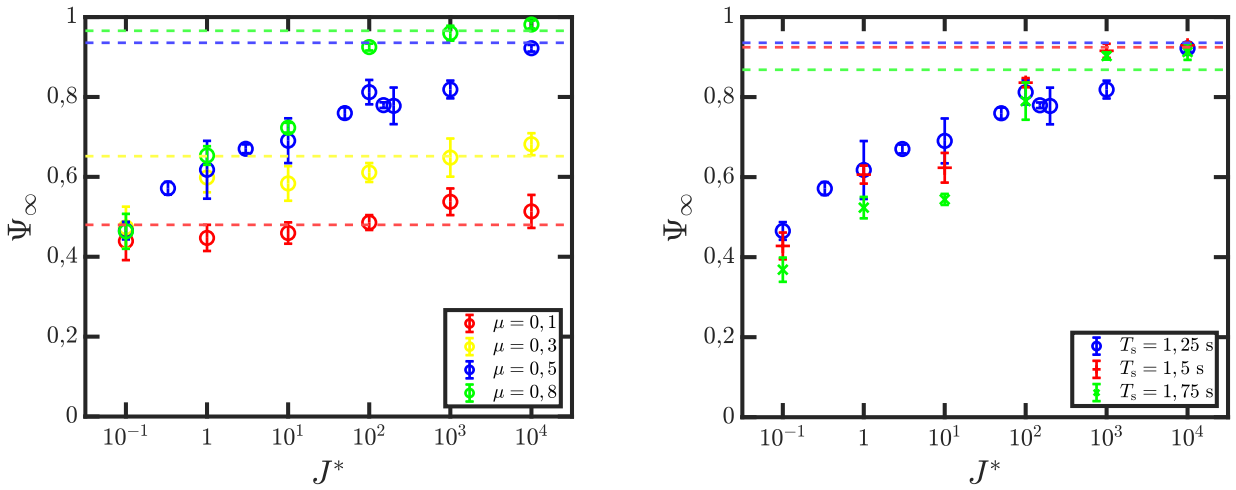
III-4. Influence du moment d'inertie

Pour rappel, un grain de rayon R_i et de masse m_i possède dans nos simulations 2D (évolution dans le plan (xOy)) un moment d'inertie (autour de (Oz)) donné par (voir l'Éq. (II.1)) :

$$J_i = J^* \frac{m_i {R_i}^2}{2}. \tag{III.37}$$

Dans toutes les simulations présentées jusqu'à présent, le « moment d'inertie standard » J^* était choisi égal à 1, ce qui est la seule valeur réaliste pour des disques pleins. Afin d'étudier l'influence de la rotation sur la ségrégation, notamment au vu des résultats obtenus lors de l'étude de l'influence de μ, nous avons également utilisé d'autres valeurs de J^*, de la forme 10^n avec $n \in [|-1, 4|]$. Il est clair que toute valeur $n \neq 0$ ne décrit pas un cas physique, et seule une approche numérique nous permet d'explorer des valeurs $J^* \neq 1$. Nous avons également réalisé des simulations où les équations régissant la rotation (TMC) ne sont pas intégrées, la vitesse de rotation des grains est alors maintenue nulle. Celles-ci correspondent au cas limite $J^* \to +\infty$: la rotation est complètement gelée. Pour chacun de ces cas, nous avons de nouveau implémenté les neuf coefficients de frottement précédemment utilisés (de 0 à 0, 8), ainsi que les trois valeurs de T_{s} suivantes : 1, 25 s, 1, 5 s et 1, 75 s. Cela représente un grand nombre de simulations, et par souci de clarté, certains graphes que nous présentons ne prennent pas en compte l'ensemble des paramètres testés. Par ailleurs, nous choisissons le couple de paramètres $T_{\text{s}} = 1,25$ s et $\mu = 0,5$ comme référence pour les comparaisons avec les profils en fonction de J^* obtenus pour d'autres valeurs de T_{s} d'une part, ou de μ d'autre part. De plus, quelques valeurs supplémentaires de J^* (0, 3, 3, 50, 150 et 200) ont été expérimentées pour ce couple de valeurs. Nous représentons l'influence de J^* sur le degré de ségrégation final Ψ_∞ sur la Fig. III.23.

Tout d'abord, nous constatons que pour chaque jeu de données, $\Psi_\infty(J^*)$ semble bien tendre, lorsque $J \to +\infty$, vers la valeur de Ψ_∞ obtenue pour une rotation complètement gelée. De plus, Ψ_∞ a globalement tendance à croître avec J^*, même si cette tendance est peu marquée pour $\mu = 0,1$ (voir la Fig. III.23a). Ce dernier point se comprend d'ailleurs aisément : en effet une modification de J^* n'agit que sur le degré de liberté en rotation, qui n'est alimenté que par les forces de frottement solide. Aux faibles coefficients de frottement, les moments de force subis par les grains sont également faibles. La valeur de leur moment d'inertie importe donc moins, leur vitesse de rotation restant relativement faible dans tous les cas. Nous constatons également que pour $J^* = 0,1$, Ψ_∞ est quasiment le même pour tous les coefficients de frottement μ allant de 0, 1 à 0, 8. Pour ces simulations, les grains sont 10 fois plus faciles à mettre en rotation que dans le cas « physique » ($J^* = 1$). Il semble donc que si les grains peuvent atteindre facilement de grandes vitesses de rotation, le degré de ségrégation final ne dépend presque plus du coefficient de frottement, et reste modéré ($\Psi_\infty < 0,5$). Au contraire, si la rotation est fortement entravée, voire gelée, on atteint pour $\mu \geq 0,5$ des états très nettement ségrégés,



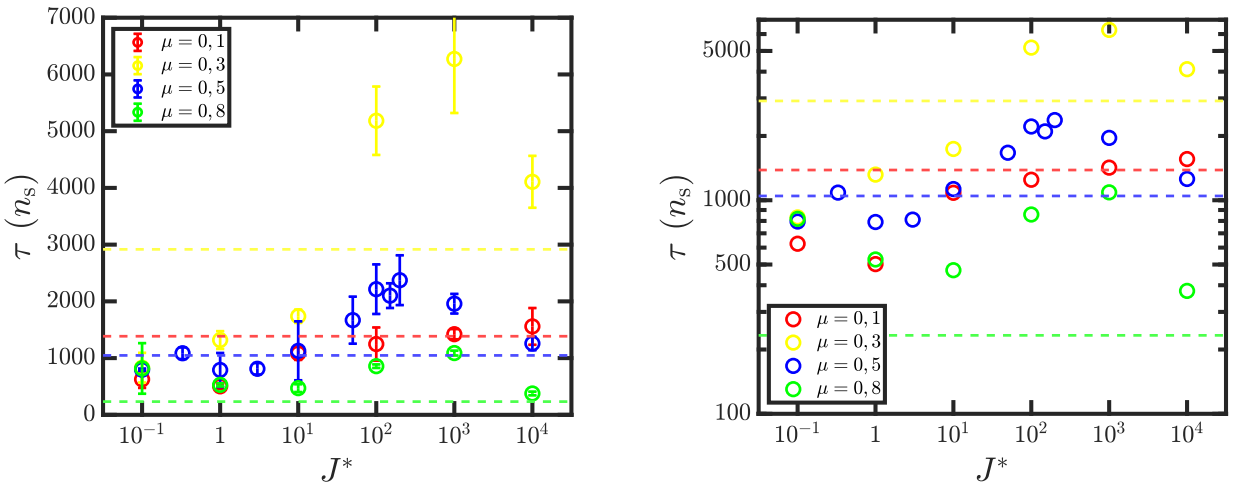
(a) Évolution de Ψ_∞ en fonction de J^* pour quatre valeurs de μ, avec $T_s = 1,25$ s commun à toutes les données.

(b) Évolution de Ψ_∞ en fonction de J^* pour trois valeurs de T_s, avec $\mu = 0,5$ commun à toutes les données.

FIGURE III.23 – Dépendance de Ψ_∞ en fonction du moment d'inertie standard J^*. Pour chaque jeu de données, la droite tiretée représente la valeur de Ψ_∞ lorsque la rotation est rigoureusement gelée (limite $J^* \to +\infty$).

caractérisés par $\Psi_\infty > 0,9$. C'est d'ailleurs le cas de la simulation à $\mu = 0,8$ et rotation gelée qui est illustrée sur la Fig. III.5. Par ailleurs, nous constatons que Ψ_∞ est également croissant de J^* pour les autres valeurs de T_s explorées (voir la Fig. III.23b dans le cas $\mu = 0,5$). Pour les valeurs de J^* pas trop extrêmes (de $0,1$ à 10), l'influence de T_s reste celle que nous avons observée pour $J^* = 1$, à savoir qu'il y a un optimum autour de $T_s = 1,25$ s, et que des secousses plus fortes mènent à une ségrégation moins nette. Ces différences sont partiellement gommées pour des valeurs plus importantes de J^*, et on peut même observer, à $J^* = 10^3$, une meilleure ségrégation pour les valeurs de T_s plus importantes. Pour une rotation gelée, on retrouve toutefois l'ordre rencontré à $J^* = 1$. L'ensemble de ces observations concernant l'effet de J^* sur Ψ_∞ peut s'expliquer qualitativement à la lumière d'une analyse énergétique. En effet, un état final caractérisé par une valeur de Ψ_∞ élevée présente logiquement des régions peuplées uniquement de gros grains ou uniquement de petits grains. Cela se voit par exemple très bien sur la Fig. III.5d, représentant un agrégat à un instant t auquel $\Psi(t) \simeq 0,96$. Par abus de langage, nous parlons de régions « monodisperses », malgré la dispersité de ± 20 % en rayon au sein de chacune des deux populations de grains. Cette dispersité empêche la cristallisation des régions dites monodisperses selon un réseau hexagonal compact (c'est justement son but). Cependant, on trouve localement des arrangements de grains selon une structure proche du réseau hexagonal compact. Autrement dit, dans les régions dites monodisperses, de nombreux trios de grains en contact ont leurs centres approximativement situés aux trois sommets d'un triangle équilatéral. Cela n'est pas anodin puisqu'une telle disposition a pour propriété de frustrer la rotation des grains. Ainsi, la formation de zones monodisperses est coûteuse en énergie, puisqu'elle dissipe largement l'énergie cinétique de rotation des grains. Lors d'une secousse, une fraction de l'énergie ΔE_{tot} injectée est convertie en énergie cinétique de rotation des grains $E_{c,rot}$ lors des premières collisions. Si l'agrégat présente déjà une certaine ségrégation

radiale, donc des régions monodisperses, cette énergie $E_{\mathrm{c,rot}}$ va rapidement être dissipée. Or, plus J^* est élevé, plus il est difficile de mettre les grains en rotation à force tangentielle donnée, et donc plus la fraction de ΔE_{tot} convertie en $E_{\mathrm{c,rot}}$ est faible. Finalement, le fait d'augmenter J^*, donc d'entraver la rotation, permet de diminuer la part de ΔE_{tot} qui n'est pas utile aux réarrangements des grains. Cela explique pourquoi Ψ_∞ croît globalement avec J^* : si la rotation est entravée, on peut plus facilement continuer de réarranger les grains, et donc d'augmenter Ψ, même s'il y a déjà un début de ségrégation. À l'inverse, si la rotation est facilitée (cas $J^* = 0,1$), il est difficile de faire progresser la ségrégation au-delà d'une certaine limite, qui semble être ici de l'ordre de $\Psi_\infty = 0,5$, applicable à toutes les valeurs de μ et de T_{s} que nous avons testées. Concernant l'effet de J^* sur le temps typique de ségrégation, les résultats pour différents μ, à $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s fixé, sont représentés sur la Fig. III.24.



(a) Représentation en échelle linéaire.

(b) Représentation en échelle semi-logarithmique pour mieux voir les variations à $\mu \neq 0,3$.

FIGURE III.24 – Dépendance de τ en fonction du moment d'inertie standard J^* pour quatre valeurs de μ, avec $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s commun à toutes les données. Pour chaque jeu de données, la droite tiretée représente la valeur de Ψ_∞ lorsque la rotation est rigoureusement gelée (limite $J^* \to +\infty$).

Nous observons globalement la même dépendance de τ en fonction de J^* pour toutes les valeurs de μ, à savoir que τ augmente dans un premier temps, jusqu'à $J^* \sim 10^2 - 10^3$, puis diminue de nouveau. Cette tendance est un peu plus marquée pour $\mu = 0,5$ et nettement plus marquée pour $\mu = 0,3$ (voir la Fig. III.24a). Cette valeur $\mu = 0,3$ est, comme on l'a vu, celle pour laquelle la ségrégation est la plus lente à $J^* = 1$, avec les déplacements moyens des grains les plus faibles. Le fait d'entraver J^* augmente fortement cette lenteur relative de la ségrégation pour $\mu = 0,3$, τ devenant jusqu'à trois fois plus important que pour $\mu = 0,5$ lorsque J^* excède 10^3. Nous pouvons également étudier les variations de τ en fonction de J^* pour les trois valeurs de T_{s} considérées (voir la Fig. III.25).

Nous constatons alors que pour un coefficient de frottement $\mu = 0,5$, τ ne dépend que très faiblement de J^* si $T_{\mathrm{s}} = 1,5$ s et $T_{\mathrm{s}} = 1,75$ s, en net contraste avec les résultats obtenus à $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s. Par ailleurs, nous retrouvons, pour chaque valeur de J^*, que la ségrégation est d'autant plus rapide que les secousses sont fortes. Pour mieux comprendre l'ensemble des observations

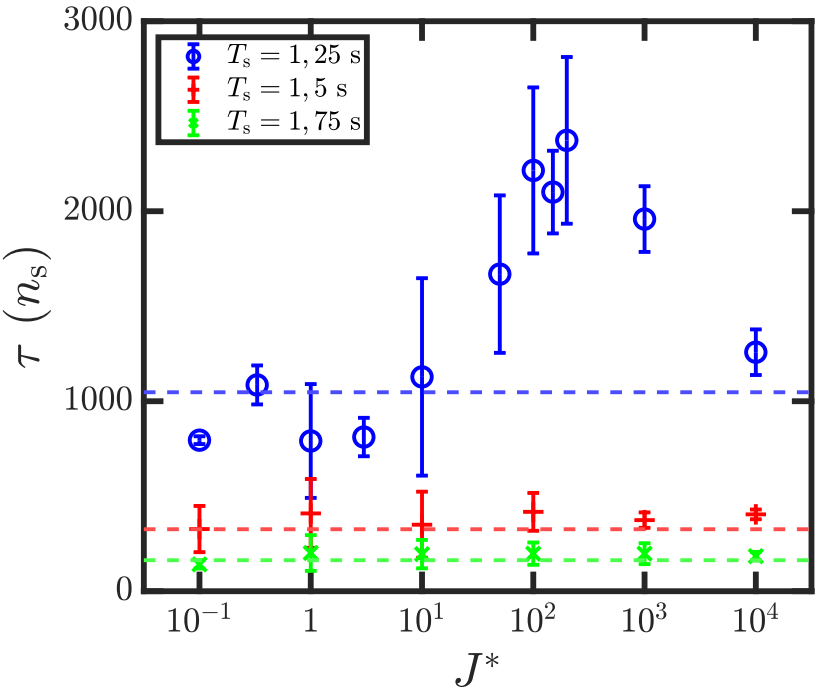


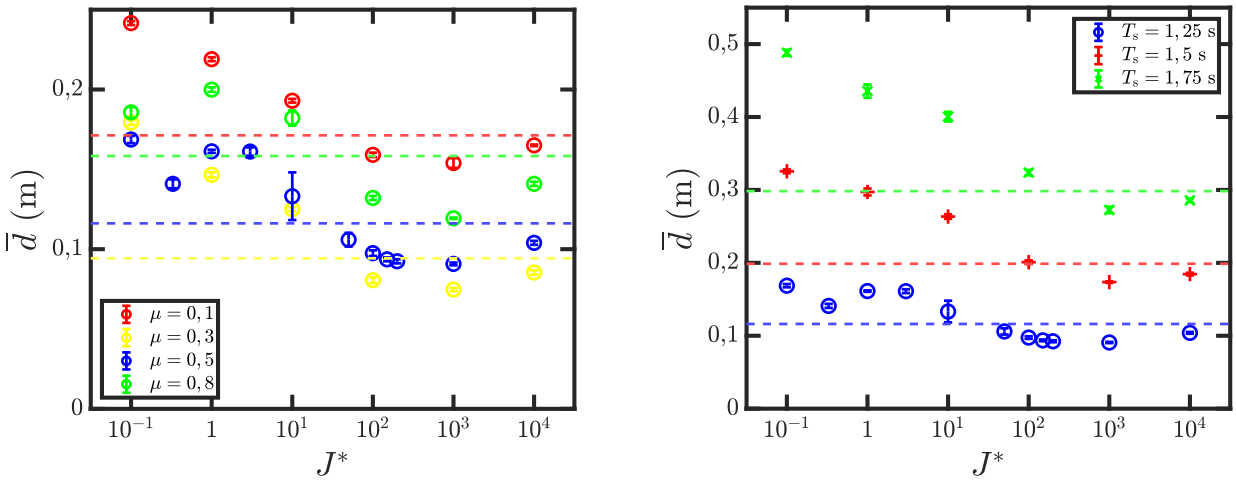
FIGURE III.25 – Dépendance de τ en fonction du moment d'inertie standard J^* pour trois valeurs de T_s, avec $\mu = 0,5$ commun à toutes les données. Pour chaque jeu de données, la droite tiretée représente la valeur de Ψ_∞ lorsque la rotation est rigoureusement gelée (limite $J^* \to +\infty$).

que nous venons de citer, il est à nouveau intéressant de considérer le déplacement moyen $\overline{d}$ des grains sur les τ premières secousses. L'évolution de $\overline{d}$ en fonction de J^* est représentée sur la Fig. III.26.

Ces graphes nous montrent que pour toutes les valeurs de μ et de T_s expérimentées dans les simulations, le déplacement moyen $\overline{d}$ décroît jusqu'à $J^* \simeq 10^3$, avant de réaugmenter légèrement. De plus, les observations faites précédemment à $J^* = 1$ semblent se généraliser largement aux autres valeurs de J^* :

- d'une part, $\overline{d}$ augmente toujours avec T_s (voir la Sec. III-2.), même si les écarts diminuent globalement au fur et à mesure que l'on augmente J^* ;
- d'autre part, $\overline{d}$ présente toujours un minimum en $\mu = 0,3$ (voir la Sec. III-3.), avec toutefois une exception assez peu marquée en $J^* = 0,1$. De plus, la différence $\overline{d}(\mu = 0,1) - \overline{d}(\mu = 0,3)$ ne semble pas dépendre de J^*.

Nous interprétons ces observations de la façon suivante : lorsque nous commençons à augmenter J^*, la vitesse de rotation des grains diminue et ils peuvent de moins en moins rouler les uns sur les autres, ce qui tend à diminuer leurs déplacements moyens. Mais lorsque J^* devient trop important, c'est-à-dire de l'ordre de 10^2 ici, on atteint des états très ségrégés (voir la Fig. III.23), de sorte que le gel de la rotation représente un gain énergétique intéressant, comme nous l'avons mentionné plus haut. Ainsi, une plus forte partie de l'énergie ΔE_{tot} injectée au cours d'une secousse peut être utilisée pour contribuer aux degrés de liberté en translation, et donc à $\overline{d}$. On a alors une inflexion de la courbe $\overline{d} = f(J^*)$. Si J^* continue d'augmenter, le



(a) Évolution de $\overline{d}$ en fonction de J^* pour quatre valeurs de μ, avec $T_s = 1,25$ s commun à toutes les données.

(b) Évolution de $\overline{d}$ en fonction de J^* pour trois valeurs de T_s, avec $\mu = 0,5$ commun à toutes les données.

FIGURE III.26 – Dépendance des déplacements moyens $\overline{d}$ en fonction du moment d'inertie standard J^*. Pour chaque jeu de données, la droite tiretée représente la valeur de Ψ_∞ lorsque la rotation est rigoureusement gelée (limite $J^* \to +\infty$).

degré de liberté en rotation est déjà très entravé et n'a plus beaucoup d'influence sur $\overline{d}$. Par contre, l'effet de meilleure alimentation énergétique des degrés de liberté en translation joue un rôle de plus en plus important, puisque Ψ_∞ continue d'augmenter avec J^*. On obtient donc finalement, à partir de $J^* \simeq 10^3$, une réaugmentation de $\overline{d}$. Pour confronter cette analyse aux données, il est intéressant de quantifier cette réaugmentation de $\overline{d}$ en fonction de la valeur de μ. Pour ce faire, le moyen le plus simple est de définir l'écart $\Delta\overline{d} = \overline{d}(J^* \to +\infty) - \overline{d}(J^* = 10^3)$. Si notre analyse est correcte, on s'attend à ce que pour une valeur de μ donnée, $\Delta\overline{d}$ soit d'autant plus marqué que l'on atteint d'importantes valeurs de Ψ_∞ pour $J^* > 10^3$. Ce dernier point est quantifié par $(\Psi_\infty(J^* = 10^4)$, puisque nous disposons de $J^* = 10^4$ comme valeur intermédiaire entre $J^* = 10^3$ et la limite $J^* \to +\infty$. La représentation des résultats, pour les huit valeurs de μ considérées, dans un diagramme $(\Psi_\infty(J^* = 10^4), \Delta\overline{d})$ est donnée par la Fig. III.27.

Nous constatons en effet que plus la ségrégation est nette à $J^* = 10^4$, plus les déplacements moyens augmentent entre $J^* = 10^3$ et le cas d'une rotation complètement gelée, ce qui conforte notre analyse. Pour conclure cette étude sur l'influence de J^*, nous proposons comme précédemment d'observer l'évolution de la différence $\overline{d_g} - \overline{d_p}$ en fonction de J^* (voir la Fig. III.28).

Nous remarquons que pour une large majorité de paramètres, les gros grains se déplacent en moyenne plus que les petits durant une secousse. Cependant, on a au contraire $\overline{d_g} < \overline{d_p}$ si $J^* = 0,1$ ou $\mu = 0,1$, quelles que soient alors les valeurs des autres paramètres. Cela pourrait s'expliquer par le fait que lorsque les grains peuvent tourner facilement, mais aussi lorsque le frottement est faible, les petits grains peuvent plus facilement progresser entre deux gros grains. Nous constatons également que pour $\mu = 0,5$ et $\mu = 0,8$, $\overline{d_g} - \overline{d_p}$ est multiplié par plus de 10 entre $J^* = 1$ et $J^* = 10^3$. Cela correspond d'ailleurs aux coefficients de frottement pour lesquels Ψ_∞ augmente significativement avec J^*, et suggère la possibilité d'une corrélation entre le degré de ségrégation final Ψ_∞ et la différence de mobilité entre gros et petits grains sur une secousse

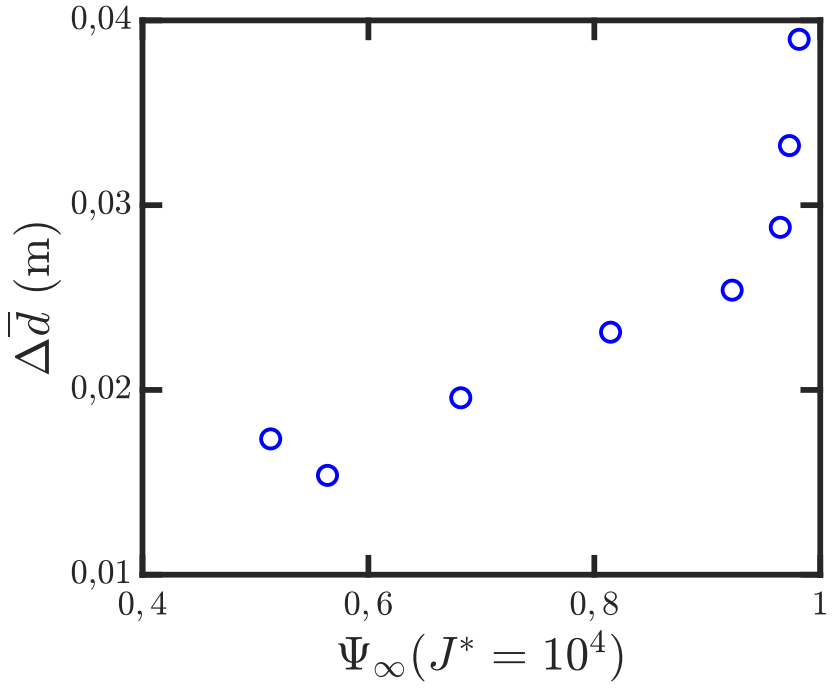
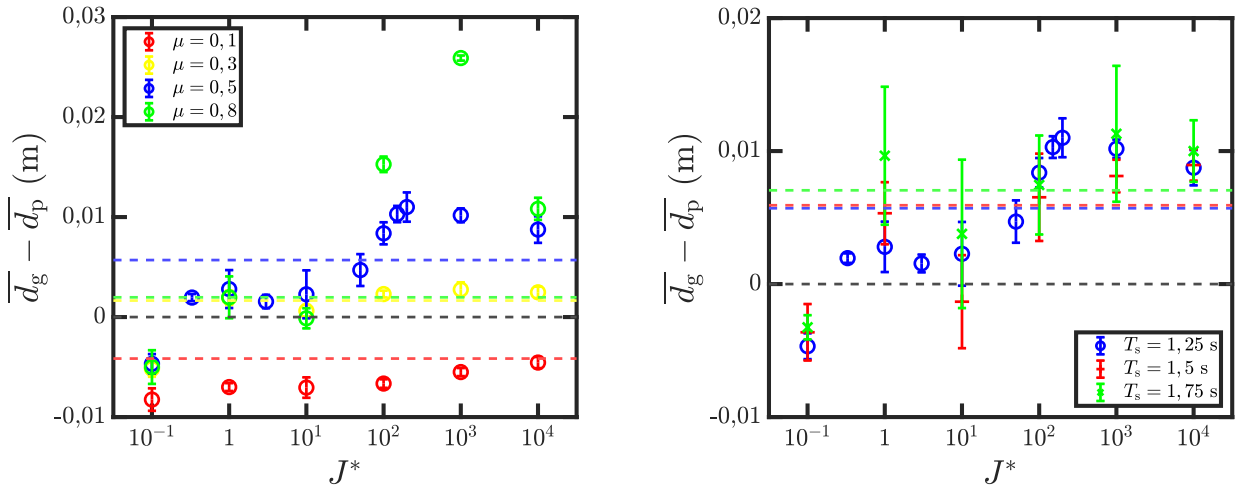


FIGURE III.27 – Tracé de l'écart $\Delta\overline{d} = \overline{d}(J^* \to +\infty) - \overline{d}(J^* = 10^3)$ en fonction du degré de ségrégation final Ψ_∞ pour $J^* = 10^4$. Les points correspondent aux huit valeurs de $\mu > 0$ considérées, avec $T_\mathrm{s} = 1,25$ s commun à toutes les données.

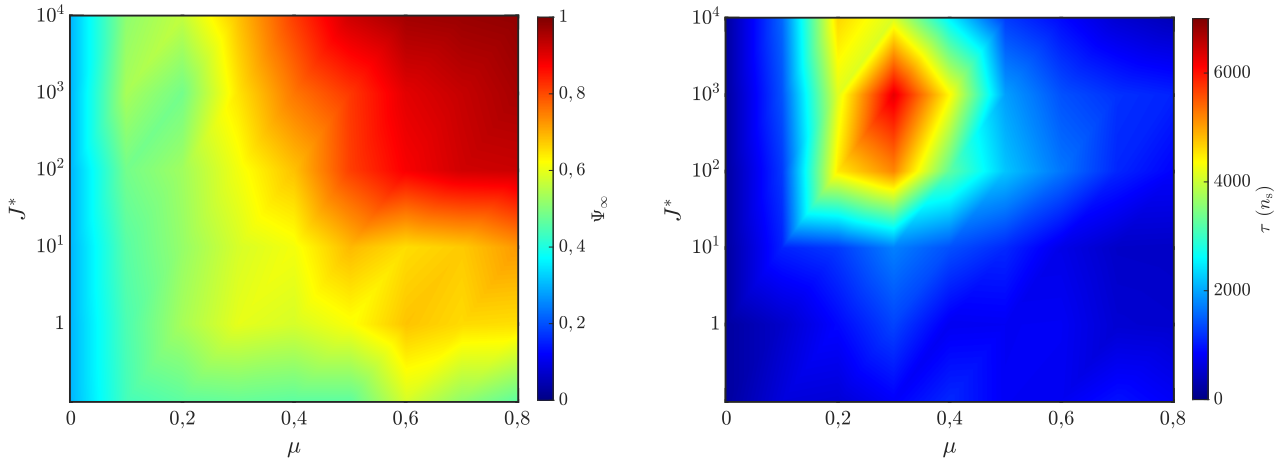


(a) Évolution de $\overline{d_\mathrm{g}} - \overline{d_\mathrm{p}}$ en fonction de J^* pour quatre valeurs de μ, avec $T_\mathrm{s} = 1,25$ s commun à toutes les données.

(b) Évolution de $\overline{d_\mathrm{g}} - \overline{d_\mathrm{p}}$ en fonction de J^* pour trois valeurs de T_s, avec $\mu = 0,5$ commun à toutes les données.

FIGURE III.28 – Dépendance de la différence de déplacement moyen $\overline{d_\mathrm{g}} - \overline{d_\mathrm{p}}$ en fonction du moment d'inertie standard J^*. Pour chaque jeu de données, la droite tiretée représente la valeur de Ψ_∞ lorsque la rotation est rigoureusement gelée (limite $J^* \to +\infty$). De plus, la droite tiretée noire repère le cas $\overline{d_\mathrm{g}} = \overline{d_\mathrm{p}}$.

$\overline{d_g} - \overline{d_p}$. Un tel lien était par ailleurs déjà envisageable lors de l'étude des dépendances en μ, par la comparaison des Fig. III.18 et III.21b. Nous proposons d'ailleurs une cartographie, dans le cas où $T_s = 1,25$ s, de l'évolution des grandeurs caractéristiques de la ségrégation Ψ_∞ et τ en fonction des paramètres μ et J^* (voir la Fig. III.29).



(a) Évolution de Ψ_∞ en fonction de μ et J^*. Les forts coefficients de frottement couplés à une forte limitation de la rotation donnent les ségrégations les plus nettes.

(b) Évolution de τ en fonction de μ et J^*. La ségrégation est nettement plus lente pour $\mu \simeq 0,3$ et $J^* \simeq 10^3$.

FIGURE III.29 – Dépendance des quantités caractéristiques de la ségrégation en fonction de μ et J^*, pour $T_s = 1,25$ s commun à toutes les données.

Notons enfin que l'ensemble des études présentées dans les Sec. III-2., III-3. et dans la section présente indiquent l'existence d'un lien entre le temps typique de ségrégation τ et le déplacement moyen de tous les grains sur une secousse $\overline{d}$. Nous nous proposons maintenant de synthétiser les études réalisées pour tester la pertinence de tels liens.

III-5. Synthèse sur l'importance des déplacements moyens

Tout d'abord, rappelons que les déplacements moyens $\overline{d}$, $\overline{d_g}$ et $\overline{d_p}$ sont calculés pour chaque simulation sur les τ premières secousses (voir la Sec. II-4.). Nous commençons par évaluer la pertinence d'une corrélation entre Ψ_∞ et $\overline{d_g} - \overline{d_p}$. Pour ce faire, nous traçons Ψ_∞ en fonction de $\overline{d_g} - \overline{d_p}$ pour chacune des simulations présentées précédemment (voir la Fig. III.30).

Nous remarquons que Ψ_∞ semble effectivement être globalement croissant de $\overline{d_g} - \overline{d_p}$: cela se vérifie sur les données à $J^* = 1$, pour chaque valeur de T_s. Pour $T_s = 1,25$ s, les données à $J^* \neq 1$ s'inscrivent sur la même tendance que celles à $J^* = 1$. En revanche, pour les valeurs de T_s supérieures, les données à $J^* \neq 1$ se caractérisent par des valeurs de Ψ_∞ bien plus importantes que pour $J^* = 1$, à $\overline{d_g} - \overline{d_p}$ égal. Nous réalisons des ajustements affines $\Psi_\infty = \alpha(\overline{d_g} - \overline{d_p}) + \beta$ sur les données à $J^* = 1$, pour chaque valeur de T_s. Ces ajustements ont pour principal objectif de réaliser des guides pour l'œil sur la Fig. III.30, en l'absence de modèle prescrivant une dépendance linéaire de Ψ_∞ vis-à-vis de $\overline{d_g} - \overline{d_p}$. Les valeurs obtenues pour α et β sont présentées dans la Tab. III.3.

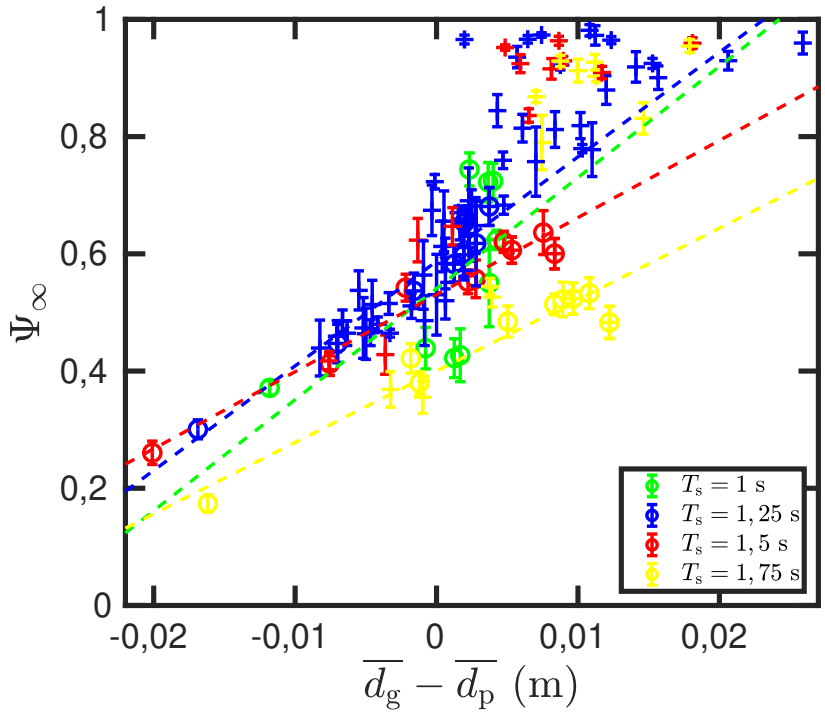


FIGURE III.30 – Tracé de Ψ_∞ en fonction de $\overline{d_g} - \overline{d_p}$ pour l'ensemble des paramètres explorés. Les couleurs indiquent la valeur de T_s (voir légende) et pour chacune, les $\circ$ représentent les simulations à $J^* = 1$ et les $+$ les simulations à $J^* \neq 1$. Les lignes tiretées représentent des ajustements affines réalisés sur les seuls point à $J^* = 1$ pour chaque valeur de T_s. Les résultats de ces ajustements sont donnés dans la Tab. III.3

T_s (s)	α (m^{-1})	β
1	18,9	0,54
1,25	17,8	0,59
1,5	13,1	0,53
1,75	12,2	0,40

TABLE III.3 – Paramètres des ajustements $\Psi_\infty = \alpha(\overline{d_g} - \overline{d_p}) + \beta$ réalisés sur les données à $J^* = 1$ pour chaque valeur de T_s.

Nous constatons que les pentes obtenues sont relativement proches pour $T_s = 1$ s et 1,25 s d'une part, et pour $T_s = 1,5$ s et 1,75 s d'autre part. Notons toutefois que l'ajustement affine à $T_s = 1$ s paraît nettement moins pertinent que les trois autres (voir la Fig. III.30).

Étudions maintenant la possibilité d'une corrélation entre τ et $\overline{d}$, en traçant l'un en fonction de l'autre, en échelle logarithmique cette fois-ci au vu des grandes valeurs de τ pour $T_s = 1$ s, qui écraseraient les autres données en échelle linéaire (voir la Fig. III.31). L'adoption d'une échelle logarithmique également pour l'axe des abscisses sera justifiée dans les lignes qui suivent.

De nouveau, ce tracé montre bien l'existence d'une corrélation entre les valeurs observées, puisque τ est nettement décroissant de $\overline{d}$. Autrement dit, plus les grains se déplacent sur les premières secousses, plus la ségrégation est rapide, ce qui n'a rien de surprenant. De nouveau, les points à $J^* = 1$ semblent rassemblés selon une même tendance, tandis que les points à

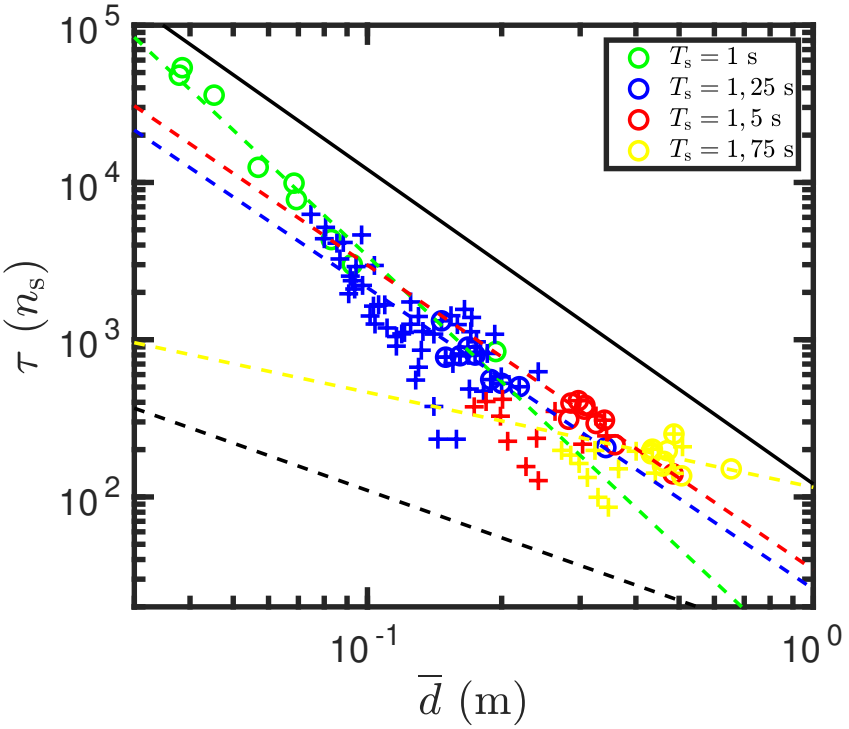


FIGURE III.31 – Tracé de τ en fonction de $\overline{d}$ en échelle logarithmique, pour l'ensemble des paramètres explorés. La légende est exactement identique à celle de la Fig. III.30, avec l'ajout sous forme d'une ligne tiretée (resp. pleine) noire de la loi d'échelle prédite par l'Éq. (III.38) (resp. (III.39)). Par ailleurs, les résultats des ajustements affines sont donnés dans la Tab. III.4.

$J^* \neq 1$ semblent plus dispersés. Comme pour Ψ_∞ et $\overline{d_g} - \overline{d_p}$, nous réalisons des ajustements des données à J^* pour chaque valeur de T_s. Cependant, ces ajustements ne sont pas ici affines vis-à-vis des données, mais de leurs logarithmes en base 10, c'est-à-dire de la forme $\log(\tau/\tau_0) = \alpha \log(\overline{d}/\overline{d_0}) + \beta$ où $\tau_0 = 1$ n_s (1 secousse) et $\overline{d_0} = 1$ m. Les résultats sont présentés dans la Tab. III.4.

T_s (s)	α	β
1	$-2,66$	$0,87$
$1,25$	$-1,92$	$1,4$
$1,5$	$-1,94$	$1,7$
$1,75$	$-0,60$	$2,1$

TABLE III.4 – Paramètres des ajustements $\log(\tau/\tau_0) = \alpha \log(\overline{d}/\overline{d_0}) + \beta$ réalisés sur les données à $J^* = 1$ pour chaque valeur de T_s.

Les ajustements en question semblent bien passer par les données, en particulier pour $T_s = 1$ s, valeur pour laquelle τ varie sur deux ordres de grandeur (voir la Fig. III.31). L'obtention d'une pente α suggère une loi de puissance de la forme $\tau \propto \overline{d}^\alpha$. Or, il est justement possible d'obtenir, par une approche très simple, une loi de puissance pour l'évolution de τ en fonction de $\overline{d}$. En effet, il suffit pour cela de considérer la vitesse v de migration des gros grains vers le bord de l'agrégat durant la phase d'établissement de la ségrégation. Comme l'agrégat est de

rayon R_{ast} et que la ségrégation se développe sur un temps typique τ, nous pouvons dire que l'ordre de grandeur de v est donné par $\tilde{v} = R_{\text{ast}}/\tau$. Mais nous pouvons aussi dire qu'un gros grain se déplace en moyenne de $\overline{d}$ entre le début d'une secousse et le début de la suivante, ces deux instants étant séparés de T. On en déduit que $\tilde{v} = \overline{d}/T$. En égalant les deux expressions de $\tilde{v}$, on obtient la loi d'échelle suivante :

$$\tau = \frac{R_{\text{ast}} T}{\overline{d}}. \tag{III.38}$$

Compte tenu du fait que $R_{\text{ast}} = 11$ m et $T = 12,5$ s $= 1$ n_{s} (c'est-à-dire 1 secousse), nous représentons cette loi, sans aucun paramètre ajustable, par une ligne tiretée noire sur le graphe de la Fig. III.31. Cette analyse suppose en fait que la vitesse v des gros grains est constante durant leur migration vers le bord de l'agrégat. Mais si nous supposons maintenant un régime de type diffusif, alors la distance parcourue par les gros grains évolue comme la racine carrée du temps écoulé. On obtient alors, en considérant la durée typique d'établissement de la ségrégation, $R_{\text{ast}} \simeq \sqrt{D\tau}$, où D est un coefficient de diffusion effectif. En considérant l'intervalle de temps entre deux secousses, on obtient par ailleurs $\overline{d} \simeq \sqrt{DT}$. Finalement, l'égalisation des deux expressions approchées de D permet de conclure que

$$\tau = \frac{{R_{\text{ast}}}^2 T}{\overline{d}^2}. \tag{III.39}$$

De nouveau, en considérant que $R_{\text{ast}} = 11$ m et $T = 12,5$ s $= 1$ n_{s}, nous représentons cette loi sans aucun paramètre ajustable, cette fois-ci par une ligne pleine noire, sur le graphe de la Fig. III.31.

Les deux modèles présentés ici prédisent une pente $\alpha = -1$ et $\alpha = -2$ respectivement pour les ajustements de la forme $\log(\tau/\tau_0) = \alpha \log(\overline{d}/\overline{d_0}) + \beta$ que nous avons réalisé. Ainsi, nous constatons (voir la Tab. III.4) que les données à $J^* = 1$ semblent traduire un régime diffusif pour $T_{\text{s}} = 1,25$ s et $T_{\text{s}} = 1,5$ s. Cela rejoint les conclusions de la Réf. [176], dans laquelle la diffusion d'un bloc de gros grains au sein de petits grains est étudiée dans le cas d'un tambour tournant. Les résultats des ajustements ne sont par contre pas très concluants pour $T_{\text{s}} = 1$ s et $T_{\text{s}} = 1,75$ s, et on constate globalement une diminution de α en fonction de T_{s}. Ce dernier point est cohérent avec le fait que si l'on augmente T_{s}, on secoue plus fort, et on finit donc par recréer du mélange à chaque secousse [2], ce qui altère le régime diffusif en place pour $T_{\text{s}} = 1,25$ s par exemple. Nous retrouvons bien la notion de secousses « faiblement énergétiques » et « fortement énergétiques », déjà mise en exergue précédemment, avec cependant ici une transition entre les deux régimes que l'on situerait entre $T_{\text{s}} = 1,5$ s et $T_{\text{s}} = 1,75$ s alors que $g = 1$ m.s^{-2}.

Cela conclut notre étude de la ségrégation radiale dans les agrégats bidimensionnels constitués de deux populations principales de grains : 800 petits grains et 200 gros grains, les seconds ayant un rayon en moyenne deux fois plus grand. Nous avons également exploré ce phénomène de ségrégation radiale pour d'autres distributions en taille, que nous présentons dans la section suivante.

2. C'est d'ailleurs ce que traduit la diminution observée de Ψ_∞ en fonction de T_{s}, toutes choses étant égales par ailleurs.

IV- Exploration de différentes distributions en taille

La distribution binaire (ou presque, compte tenu de la polydispersité de ±20 % en rayon introduite dans chaque population) décrite par l'histogramme de la Fig. II.1a est très utile dans le cadre de ce travail car elle permet, comme on l'a vu, de quantifier simplement la rapidité et la qualité de la ségrégation, en particulier grâce à l'observation d'une cinétique d'ordre 1 pour Ψ. Néanmoins, un astéroïde tel qu'Itokawa présente une distribution en taille bien plus large, et surtout continue. Même s'il est techniquement impossible, ou du moins déraisonnablement chronophage, de simuler un granulaire dont le plus gros constituant aurait un rayon environ 10 millions de fois supérieur à celui du plus petit constituant (cas d'Itokawa), il importe d'évaluer la robustesse du phénomène de ségrégation observé pour d'autres distributions en taille des grains.

IV-1. Variations sur la distribution binaire

IV-1.a) Simulations avec des petits grains plus petits

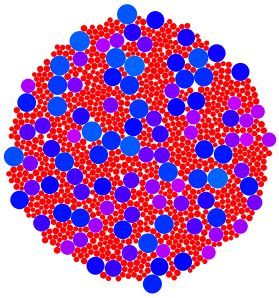
En conservant une distribution binaire, il est possible de modifier le ratio $r_{g/p}$ de taille entre les deux populations de grains. En particulier, nous avons réalisé des simulations dans lesquelles $r_{g/p} = 3$ ou encore $r_{g/p} = 4$. Les gros grains font la même taille que dans les simulations à $r_{g/p} = 2$ ($\overline{R}_i \in [0,8; 1,2]$) mais les petits grains sont plus petits. Leurs rayons réduits vérifient donc $\overline{R}_i \in [0,267; 0,4]$ pour $r_{g/p} = 3$ et $\overline{R}_i \in [0,2; 0,3]$ pour $r_{g/p} = 4$. Nous conservons le nombre total de grains N et la fraction en aire couverte par les gros grains $\alpha_A = 0,5$. Ainsi, nous travaillons avec $N_g \simeq 100$ gros grains et $N_p \simeq 900$ petits grains lorsque $r_{g/p} = 3$ et avec $N_g \simeq 59$ gros grains et $N_p \simeq 941$ petits grains lorsque $r_{g/p} = 4$. Nous avons expérimenté trois coefficients de frottement ($\mu = 0,2$, $0,4$ et $0,5$) pour les simulations à $r_{g/p} = 3$ et deux coefficients de frottement ($\mu = 0,2$ et $0,5$) pour celles à $r_{g/p} = 4$. Dans tous les cas, nous soumettons les astéroïdes ainsi obtenus à des secousses de durée $T_s = 1,25$ s. Une vue des états initiaux et finaux (soit après 10000 secousses) dans le cas $\mu = 0,2$ est proposée sur la Fig. III.32.

Nous constatons que la ségrégation radiale est très nette pour ces simulations, tout comme elle l'était pour celles à $r_{g/p} = 2$. Pour aborder plus quantitativement cette comparaison, nous traçons sur un même graphe l'évolution de $\Psi(t)$ pour les trois valeurs de $r_{g/p}$, toutes choses étant égales par ailleurs (voir la Fig. III.33).

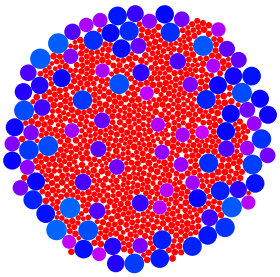
Au vu de l'allure des données, nous réalisons des modélisations par une cinétique d'ordre 1 pour les deux nouvelles valeurs de $r_{g/p}$ également. Ces modélisations ne prennent en compte que les 2500 premières secousses pour éviter les décrochages de Ψ pouvant survenir au-delà, certainement du fait d'une ségrégation angulaire. Nous obtenons donc une valeur de Ψ_∞ et de τ pour chaque valeur de $r_{g/p}$ (celles-ci sont données dans la Tab. III.5).

$r_{g/p}$ (s)	Ψ_∞	τ (n_s)
2	0,694	1023
3	0,653	394
4	0,672	562

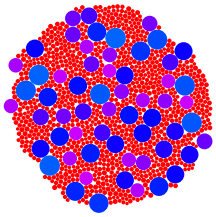
TABLE III.5 – Paramètres des ajustements de la forme $\Psi(t) = \Psi_\infty(1 - \exp(-t/\tau))$ présentés sur la Fig. III.33.



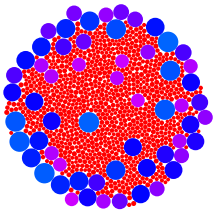
(a) État initial pour $r_{g/p} = 3$.



(b) État final pour $r_{g/p} = 3$.



(c) État initial pour $r_{g/p} = 4$.



(d) État final pour $r_{g/p} = 4$.

FIGURE III.32 – Observation de la ségrégation dans des agrégats à $r_{g/p} = 3$ et $r_{g/p} = 4$. Dans les deux cas, on a $N = 1000$, $\alpha_A = 0,5$, $\mu = 0,2$ et $T_s = 1,25$ s. L'état final est celui après 10000 secousses.

Les valeurs de Ψ_∞ ainsi déterminées sont assez proches pour les trois valeurs de $r_{g/p}$, et τ est globalement plus faible pour les simulations à $r_{g/p} = 3$ et $r_{g/p} = 4$. Notons qu'une simple visualisation des données indique déjà ces tendances (voir la Fig. III.33). Cela prouve que le phénomène de ségrégation que nous étudions est robuste vis-à-vis du rapport en diamètre entre gros grains et petits grains. De plus, la loi dynamique semble être la même pour les trois valeurs explorées (cinétique d'ordre 1), et donc les mécanismes à l'œuvre aussi, avec essentiellement l'effet des réarrangements successifs. Comme nous l'avons vu dans la Sec. III-1.a) du Chap. I, la percolation peut aussi jouer un rôle important pour $r_{g/p} \geq \sqrt{3}/(2-\sqrt{3}) \simeq 6,5$. Cependant, nous n'avons pas exploré de telles valeurs car la durée de contact entre deux petits grains serait alors trop faible (voir l'Éq. (II.11)), et il nous faudrait abaisser d'autant le pas de temps dt des simulations.

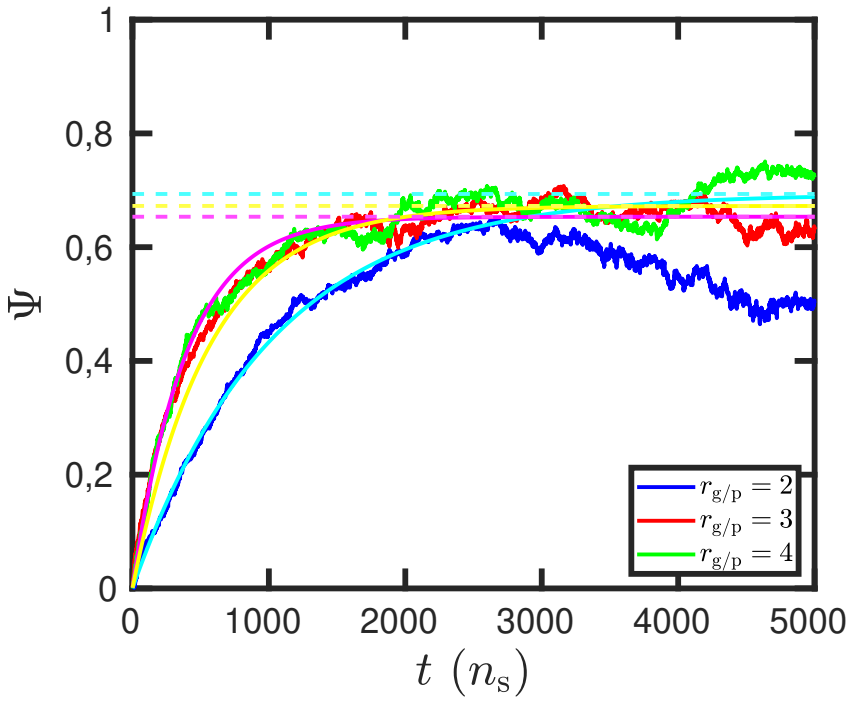


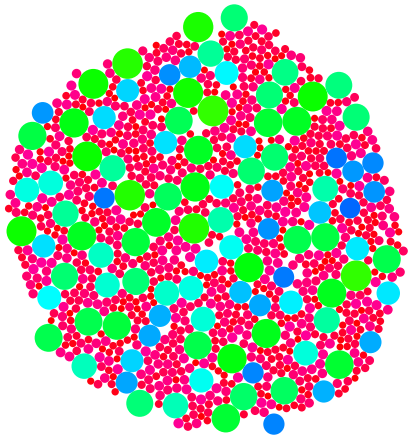
FIGURE III.33 – Tracé de Ψ en fonction du nombre de secousses pour les trois valeurs de $r_{g/p}$, avec $\mu = 0,5$ et $T_s = 1,25$ s communs aux trois cas. Nous utilisons les couleurs claires pour représenter les modélisations par une cinétique d'ordre 1 (en lignes pleines) et la valeur de Ψ_∞ (ligne tiretée). Les paramètres des modélisations sont donnés dans la Tab. III.5.

IV-1.b) Simulations avec des gros grains plus gros

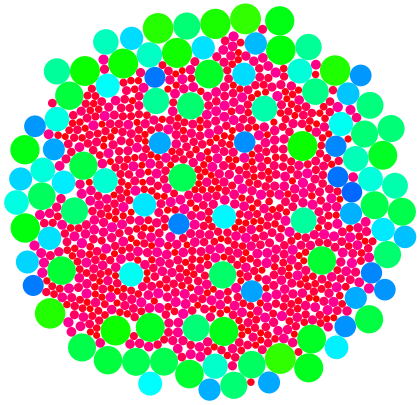
Il est également possible, à $r_{g/p}$ et α_A fixés, de jouer sur le rayon des gros grains plutôt que sur celui des petits. Dans ce cadre, nous avons simulé des agrégats pour lesquels les petits grains ont toujours un rayon réduit $\overline{R}_i = [0,4; 0,6]$ et les gros grains ont un rayon réduit $\overline{R}_i = [1,2; 1,8]$ si $r_{g/p} = 3$ et $\overline{R}_i = [1,6; 2,4]$ si $r_{g/p} = 4$. Les nombres de petits et gros grains sont de nouveau déterminés de façon à avoir $\alpha_A = 0,5$ dans tous les cas. Nous n'avons réalisé ces simulations que dans le cas $\mu = 0,5$ et $T_s = 1,25$ s. Les états initiaux et après 10000 secousses sont représentés sur la Fig. III.34.

Nous constatons de nouveau une ségrégation très nette pour les deux cas $r_{g/p} = 3$ et $r_{g/p} = 4$. Par ailleurs, nous proposons de comparer les évolutions de $\Psi(t)$ entre les deux cas suivants : $r_{g/p} = 3$ avec gros grains de rayons réduits $\overline{R}_i \in [0,8; 1,2]$ (cas présenté dans la Sec. IV-1.a)) et $r_{g/p} = 3$ avec gros grains de rayons réduits $\overline{R}_i \in [1,2; 1,8]$. Cette comparaison est présentée sur le graphe de la Fig. III.35.

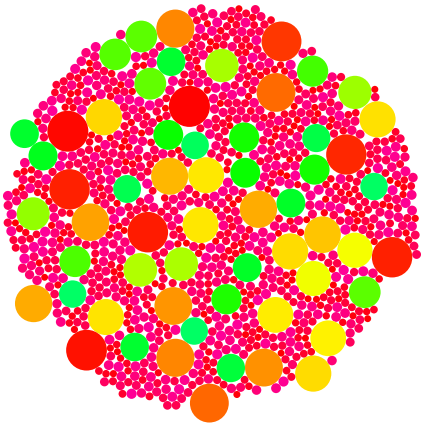
Nous réalisons de nouveau une modélisation par une cinétique d'ordre 1 dans le cas où les gros grains ont un rayon réduit $\overline{R}_i \in [1,2; 1,8]$ (correspondant aux images des Fig. III.34a et III.34b). Nous obtenons alors $\Psi_\infty = 0,629$ et $\tau = 418$ n_s, valeurs très proches de celles obtenues à même $r_{g/p} = 3$ mais avec des gros grains ayant un rayon réduit $\overline{R}_i \in [0,8; 1,2]$ (voir la Tab. III.5). Nous en concluons qu'à $r_{g/p} = 3$ fixé, le phénomène est quasiment invariant vis-à-vis de l'échelle de taille choisie pour les petits grains par exemple. Dans notre cas, cela implique que le choix initial du rayon standard R^* importe peu, et renforce encore la robustesse de nos



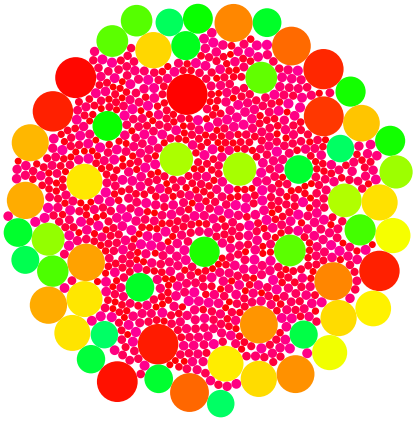
(a) État initial pour $r_{g/p} = 3$.



(b) État final pour $r_{g/p} = 3$.



(c) État initial pour $r_{g/p} = 4$.



(d) État final pour $r_{g/p} = 4$.

FIGURE III.34 – Observation de la ségrégation dans des agrégats à $r_{g/p} = 3$ et $r_{g/p} = 4$, avec les gros grains plus gros que pour $r_{g/p} = 2$. Dans les deux cas, on a $N = 1000$, $\alpha_A = 0,5$, $\mu = 0,5$ et $T_s = 1,25$ s. L'état final est celui après 10000 secousses.

résultats. Par ailleurs, on pourrait envisager d'utiliser le protocole adopté ici, c'est-à-dire des petits grains identiques à ceux du cas standard à $r_{g/p} = 2$ mais des gros grains plus gros, pour effectuer des simulations à $r_{g/p} \geq 6,5$, afin d'étudier le rôle possible de la percolation. En effet, les chocs entre petits grains ne poseraient alors aucun problème. Néanmoins, il resterait un autre problème lié à l'utilisation de grands ratios en taille : la méthode des cellules liées deviendrait très peu efficace, et les simulations très chronophages. Nous préférons donc envisager ces études comme un prolongement futur du présent travail.

IV-1.c) Simulations à aire couverte par les gros grains modifiée

Enfin, nous avons simulé des agrégats à $r_{g/p} = 3$ mais en conservant les nombres $N_g = 200$ gros grains et $N_p = 800$ petits grains utilisés dans le cas où $r_{g/p} = 2$. Cela a pour conséquence

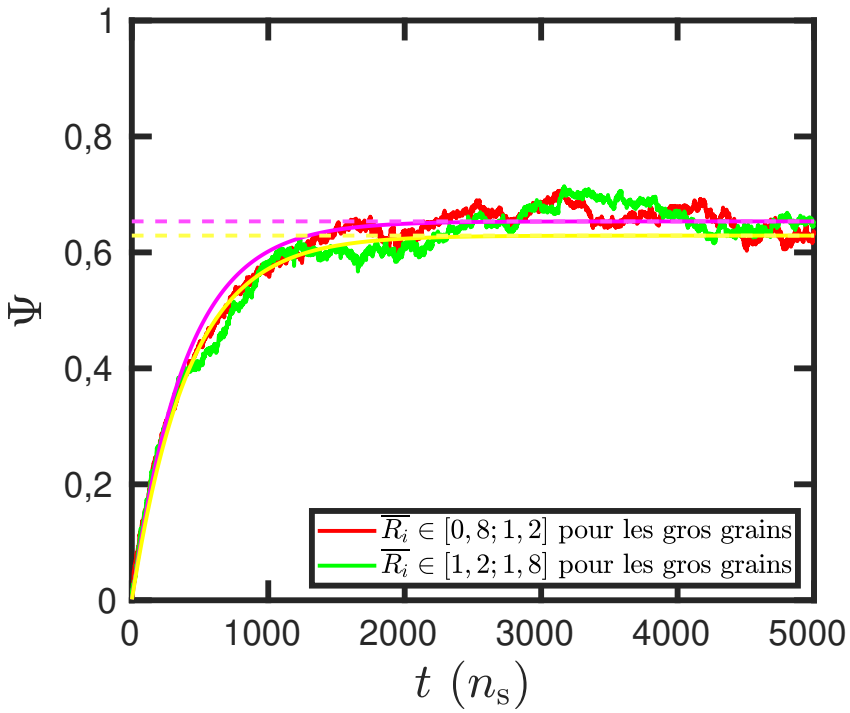


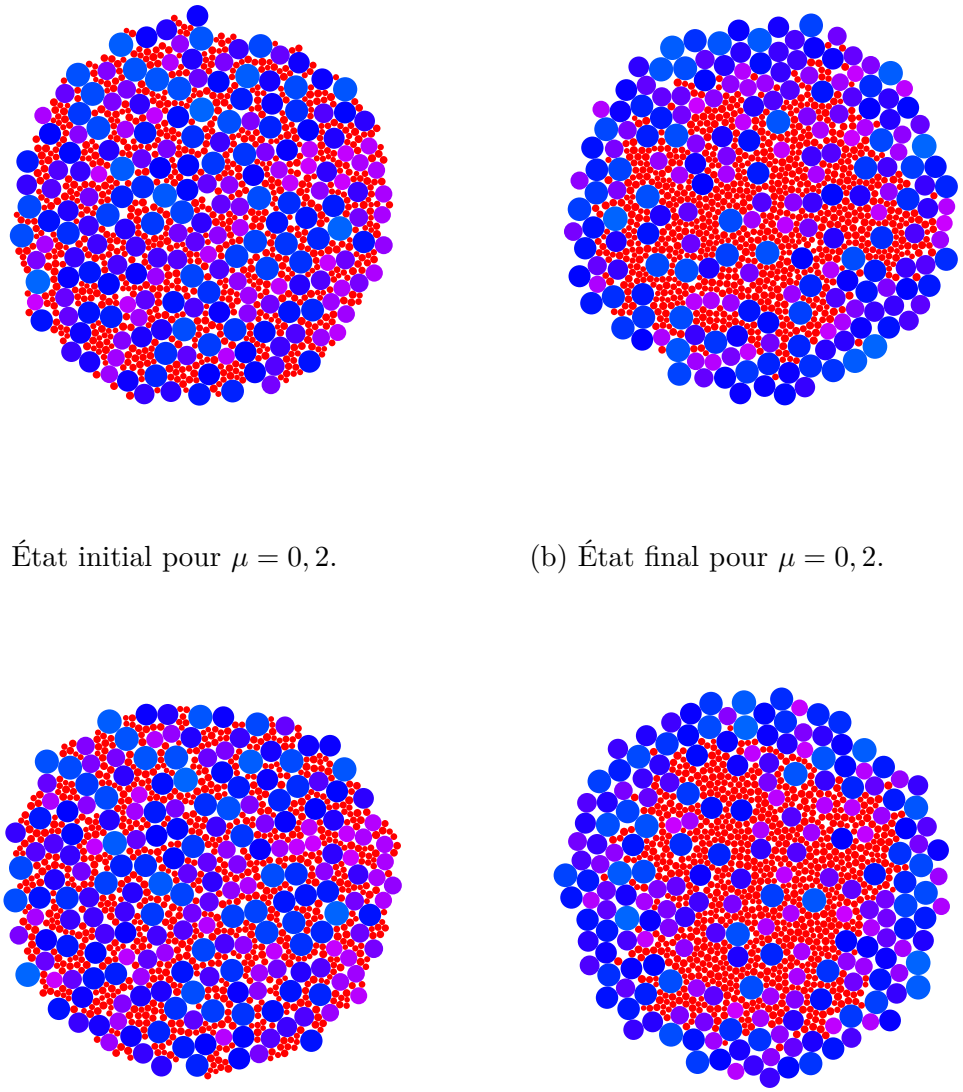
FIGURE III.35 – Tracé de Ψ en fonction du nombre de secousses pour $r_{g/p} = 3$ avec gros grains de rayons réduits $\overline{R_i} \in [0,8;1,2]$ et $r_{g/p} = 3$ avec gros grains de rayons réduits $\overline{R_i} \in [1,2;1,8]$. Les paramètres $\mu = 0,5$ et $T_s = 1,25$ s sont communs aux trois cas. Nous utilisons de nouveau les couleurs claires pour représenter les modélisations par une cinétique d'ordre 1 (en lignes pleines) et la valeur de Ψ_∞ (ligne tiretée).

de fixer la fraction en aire couverte par les gros grains à $\alpha_A = 0,69$, contre $0,5$ dans toutes les simulations précédentes. Le calcul de Ψ est donc légèrement modifié en raison de cette modification de α_A (voir les Éq. (III.23) et (III.24)). Ces simulations ont été lancées pour $\mu = 0,2$ et $\mu = 0,4$, avec toujours $T_s = 1,25$ s. Nous représentons les états initiaux et après 10000 secousses sur la Fig. III.36.

Pour le cas à $\mu = 0,2$, nous comparons ces simulations avec celles à $r_{g/p} = 3$ également mais $\alpha_A = 0,5$ (présentées dans la Sec. IV-1.a)). Les tracés de $\Psi(t)$ correspondants sont représentés sur la Fig. III.37.

La modélisation par une cinétique d'ordre 1 donne $\Psi_\infty = 0,568$ et $\tau = 358\ n_s$ pour $\alpha_A = 0,5$ et $\Psi_\infty = 0,513$ et $\tau = 248\ n_s$ pour $\alpha_A = 0,69$. Ces valeurs sont cohérentes avec une observation directe de la Fig. III.37 : la ségrégation a quasiment la même rapidité dans les deux cas, mais est plus nette pour $\alpha_A = 0,5$. Il semble donc que si les gros grains recouvrent une plus grande fraction de l'aire de l'agrégat, il soit plus difficile d'obtenir une ségrégation nette. Cela se comprend d'ailleurs bien en comparant les images des états finaux des agrégats utilisés pour les tracés de la Fig. III.37. Dans le cas où $\alpha_A = 0,5$, la ségrégation au cœur est très nette dans l'état final (voir la Fig. III.32b), alors que ce n'est pas du tout le cas dans le cas où $\alpha_A = 0,69$ (voir la Fig. III.36b). Cela rejoint l'explication que nous avions avancée concernant notre différence de résultats avec la Réf. [127]. En effet, dans cette étude la ségrégation n'est observée qu'en surface, et les gros grains occupent 89 % du volume de l'agrégat.

Les conclusions qui semblent se dégager de ces variations sur la distribution binaire utilisée



(a) État initial pour $\mu = 0,2$.

(b) État final pour $\mu = 0,2$.

(c) État initial pour $\mu = 0,4$.

(d) État final pour $\mu = 0,4$.

FIGURE III.36 – Observation de la ségrégation dans des agrégats à $r_{g/p} = 3$. Dans les deux cas, on a $N = 1000$, $\alpha_A = 0,69$ et $T_s = 1,25$ s. L'état final est celui après 10000 secousses.

sont les suivantes.

- L'augmentation du rapport de taille $r_{g/p}$ ne change pas significativement Ψ_∞ mais diminue τ : la ségrégation est plus rapide.
- À valeur de $r_{g/p}$ fixée, la valeur des rayons de chaque population n'a quasiment aucune influence sur la ségrégation.
- À valeur de $r_{g/p}$ fixée, l'augmentation de la fraction d'aire α_A couverte par les gros grains ne change pas significativement τ mais diminue Ψ_∞ : la ségrégation est moins nette,

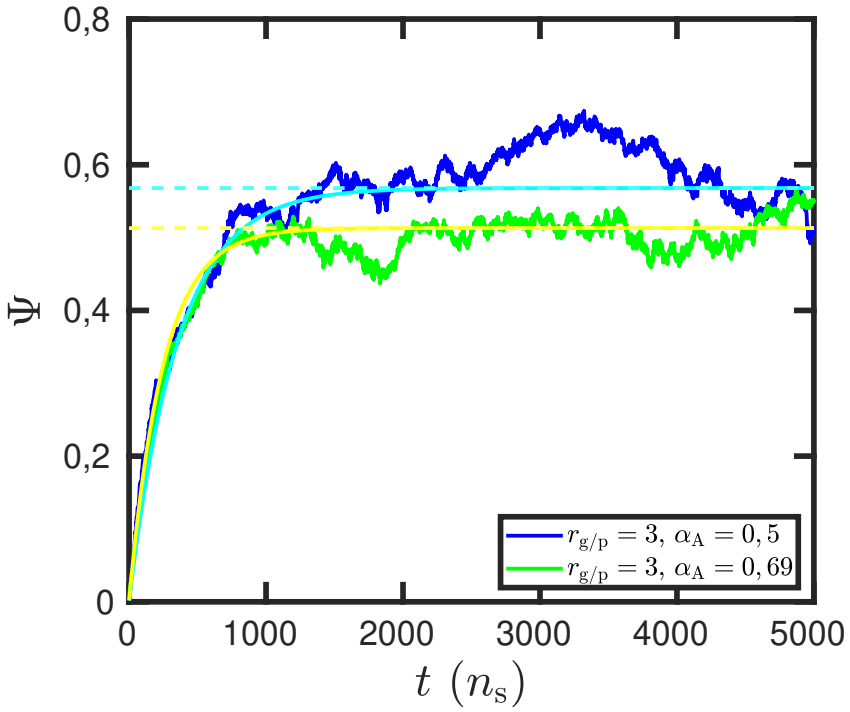


FIGURE III.37 – Tracé de Ψ en fonction du nombre de secousses pour $\alpha_A = 0,5$ et $\alpha_A = 0,69$. Les paramètres $\mu = 0,2$, $T_s = 1,25$ s et $r_{g/p} = 3$ sont communs aux deux cas. Les couleurs claires représentent de nouveau les modélisations par une cinétique d'ordre 1 (en lignes pleines) et la valeur de Ψ_∞ (ligne tiretée).

notamment au cœur.

IV-2. Distributions continues

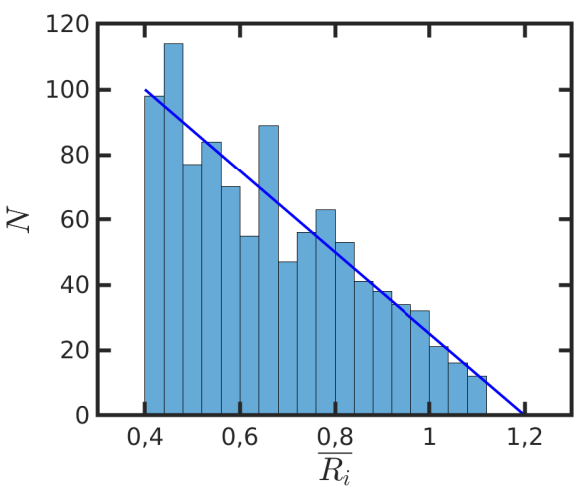
IV-2.a) Présentation

Nous avons enfin travaillé avec deux distributions continues en taille des grains. L'une, notée 1, est une distribution linéaire décroissante en le rayon des grains (voir la Fig. III.38a), tandis que l'autre, notée 2, est linéaire décroissante en la masse (ou l'aire) des grains (voir la Fig. III.38b). Ces deux distributions ont pour limites $\overline{R}_{min} = 0,4$ et $\overline{R}_{max} = 1,2$, et comptent $N = 1000$ grains au total. Pour chacune on note $dN(\overline{R})$ le nombre de grains i dont le rayon réduit vérifie $\overline{R}_i \in [\overline{R}, \overline{R} + d\overline{R}[$. Ainsi, la distribution 1 est décrite entre $\overline{R}_{min}$ et $\overline{R}_{max}$ par $dN(\overline{R}) = f_1(\overline{R})d\overline{R}$ et la distribution 2 par $dN(\overline{R}) = f_2(\overline{R})d\overline{R}$, avec :

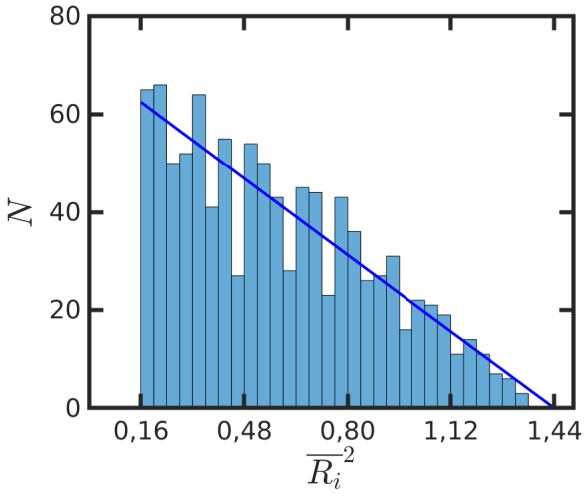
$$f_1(\overline{R}) = \frac{2N(\overline{R}_{max} - \overline{R})}{(\overline{R}_{max} - \overline{R}_{min})^2} \quad \text{et} \quad f_2(\overline{R}) = \frac{4N\overline{R}(\overline{R}_{max}{}^2 - \overline{R}^2)}{(\overline{R}_{max}{}^2 - \overline{R}_{min}{}^2)^2}. \tag{III.40}$$

IV-2.b) Définition d'un nouveau degré de ségrégation

Pour une distribution continue, il n'est plus possible de définir le degré de ségrégation de la façon dont nous l'avons fait précédemment, sauf à choisir un critère arbitraire pour séparer



(a) Exemple d'histogramme des rayons réduits $\overline{R}_i$ obtenu dans une simulation, pour la distribution théorique 1, représentée en ligne bleue pleine.



(b) Exemple d'histogramme des rayons réduits au carré $\overline{R}_i{}^2$ obtenu dans une simulation, pour la distribution théorique 2, représentée en ligne bleue pleine.

FIGURE III.38 – Distributions linéaires en le rayon et en l'aire des grains : comparaison entre les distributions théoriques et les histogrammes obtenus numériquement.

gros et petits grains. Nous avons donc choisi de définir un nouveau degré de ségrégation ψ_c à partir de la corrélation entre la masse m_i d'un grain et sa distance r_i au centre de masse :

$$\psi_c = \langle m_i r_i \rangle - \langle m_i \rangle \langle r_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{i=1}^{N} r_i. \tag{III.41}$$

Dans un état complètement mélangé, la masse d'un grain et sa distance au centre sont complètement indépendantes et on a $\psi_c = 0$. Il reste à déterminer la valeur de ψ_c dans un état totalement ségrégé, notée $\psi_{c,\max}$. Pour cela, nous considérons l'agrégat comme un milieu continu. Si le rayon réduit $\overline{R}_i$ des grains suit une loi du type $\mathrm{d}N(\overline{R}) = f(\overline{R})\mathrm{d}\overline{R}$, et si l'astéroïde est de rayon R_{ast}, alors les moyennes $\langle m_i r_i \rangle$, $\langle m_i \rangle$ et $\langle r_i \rangle$ sont données par :

$$\begin{aligned}
\langle m_i r_i \rangle &= \frac{1}{N} \int_{\overline{R}_{\min}}^{\overline{R}_{\max}} m(\overline{R}) r(\overline{R}) f(\overline{R}) \mathrm{d}\overline{R} = \frac{m^*}{N} \int_{\overline{R}_{\min}}^{\overline{R}_{\max}} \overline{R}^2 r(\overline{R}) f(\overline{R}) \mathrm{d}\overline{R}, \\
\langle m_i \rangle &= \frac{1}{N} \int_{\overline{R}_{\min}}^{\overline{R}_{\max}} m(\overline{R}) f(\overline{R}) \mathrm{d}\overline{R} = \frac{m^*}{N} \int_{\overline{R}_{\min}}^{\overline{R}_{\max}} \overline{R}^2 f(\overline{R}) \mathrm{d}\overline{R}, \\
\langle r_i \rangle &= \frac{1}{N} \int_{\overline{R}_{\min}}^{\overline{R}_{\max}} r(\overline{R}) f(\overline{R}) \mathrm{d}\overline{R}.
\end{aligned} \tag{III.42}$$

Le calcul de l'intégrale pour $\langle m_i \rangle$ donne $\langle m_i \rangle_1 = 0,48\ m^*$ pour la distribution 1 et $\langle m_i \rangle_2 \simeq 0,587\ m^*$ pour la distribution 2.

Par ailleurs, il reste à calculer $\langle m_i r_i \rangle$ et $\langle r_i \rangle$, et pour cela il faut connaître la fonction $r(\overline{R})$. Dans le cas d'un agrégat totalement ségrégé, la coordonnée radiale r_i d'un grain i de rayon réduit $\overline{R}_i$ est déterminée de façon univoque. En effet, elle est telle que le disque de rayon r_i contient exactement les grains j de rayon réduit $\overline{R}_j < \overline{R}_i$. En supposant que la compacité ϕ est constante sur tout l'agrégat ségrégé, on peut relier r et $\overline{R}$:

$$\int_{\overline{R}_{\min}}^{\overline{R}} \pi {R^*}^2 u^2 f(u)\mathrm{d}u = \phi\pi r^2(\overline{R}) \quad \text{soit} \quad r(\overline{R}) = R^* \left(\frac{1}{\phi} \int_{\overline{R}_{\min}}^{\overline{R}} u^2 f(u)\mathrm{d}u \right)^{1/2}. \tag{III.43}$$

Remarquons que pour $\overline{R} = \overline{R}_{\max}$, on a $r = R_{\text{ast}}$ et nous sommes donc ramenés au calcul de la même intégrale que pour $\langle m_i \rangle$. Nous en déduisons que $\phi = \langle m_i \rangle {R^*}^2 N/(m^* {R_{\text{ast}}}^2)$. Le calcul de l'intégrale de l'Éq. (III.43) pour une valeur $\overline{R}$ quelconque donne les expressions suivantes pour la fonction $r(\overline{R})$:

$$\begin{aligned} r_1(\overline{R}) &= R_{\text{ast},1} \sqrt{\frac{m^*}{\langle m_i \rangle_1} \left(-\alpha_1 \overline{R}^4 + \beta_1 \overline{R}^3 - \gamma_1 \right)} \quad \text{pour la distribution 1,} \\ r_2(\overline{R}) &= R_{\text{ast},2} \sqrt{\frac{m^*}{\langle m_i \rangle_2} \left(-\alpha_2 \overline{R}^6 + \beta_2 \overline{R}^4 - \gamma_2 \right)} \quad \text{pour la distribution 2.} \end{aligned} \tag{III.44}$$

Les coefficients $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ et $\gamma_{1,2}$ sont des constantes positives déterminées par les valeurs de $\overline{R}_{\min}$ et $\overline{R}_{\max}$. Finalement on a, dans un état totalement ségrégé :

$$\begin{aligned} \langle m_i r_i \rangle_1 &\simeq 0,32\ m^* R_{\text{ast},1} \quad \text{et} \quad \langle r_i \rangle_1 \simeq 0,532\ R_{\text{ast},1} \quad \text{pour la distribution 1,} \\ \langle m_i r_i \rangle_2 &\simeq 0,392\ m^* R_{\text{ast},2} \quad \text{et} \quad \langle r_i \rangle_2 \simeq 0,537\ R_{\text{ast},1} \quad \text{pour la distribution 2.} \end{aligned} \tag{III.45}$$

Nous pouvons alors directement écrire :

$$\begin{aligned} \psi_{\text{c,max},1} &\simeq 0,065\ m^* R_{\text{ast},1} \quad \text{pour la distribution 1,} \\ \psi_{\text{c,max},2} &\simeq 0,076\ m^* R_{\text{ast},2} \quad \text{pour la distribution 2.} \end{aligned} \tag{III.46}$$

Ces valeurs nous permettent de définir un degré de ségrégation normalisé, évoluant donc de 0 pour un état complètement mélangé à 1 pour un état totalement ségrégé, pour chacune des deux distributions continues :

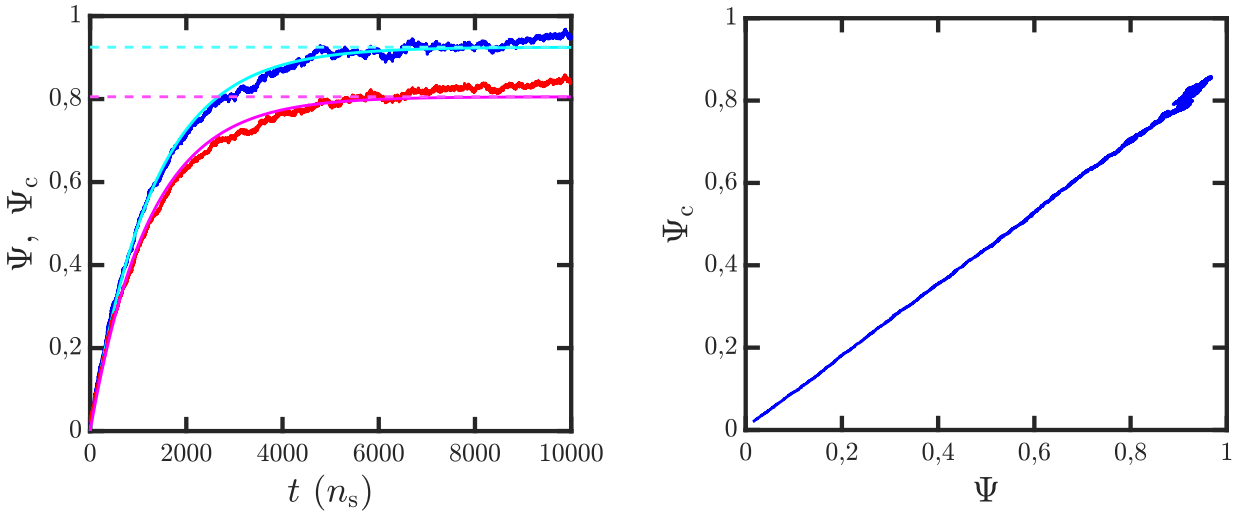
$$\Psi_{\text{c},1} = \frac{\psi_{\text{c}}}{\psi_{\text{c,max},1}} \quad \text{et} \quad \Psi_{\text{c},2} = \frac{\psi_{\text{c}}}{\psi_{\text{c,max},2}}. \tag{III.47}$$

IV-2.c) Comparaison avec le degré de ségrégation des distributions binaires

Le degré de ségrégation Ψ_{c} que nous venons de définir est également utilisable dans le cas des distributions binaires. Il faut alors calculer le degré maximal $\psi_{\text{c,max},0}$ atteignable pour une telle distribution. Cela revient à reprendre les calculs de la Sec. IV-2.b) avec $f = f_0$ traduisant l'histogramme de la Fig. II.1a. La fonction f_0 est donc définie par :

$$f_0(\overline{R}) = \begin{cases} \dfrac{0,8N}{\overline{R}_{\text{max,p}} - \overline{R}_{\min}} & \text{si} \quad \overline{R}_{\min} \leq \overline{R} \leq \overline{R}_{\text{max,p}}, \\ 0 & \text{si} \quad \overline{R}_{\text{max,p}} < \overline{R} < \overline{R}_{\text{min,g}}, \\ \dfrac{0,2N}{\overline{R}_{\max} - \overline{R}_{\text{min,g}}} & \text{si} \quad \overline{R}_{\text{min,g}} \leq \overline{R} \leq \overline{R}_{\max}, \end{cases} \tag{III.48}$$

où $\overline{R}_{\mathrm{min,g}}$ est le rayon réduit maximal des petits grains et $\overline{R}_{\mathrm{max,p}}$ le rayon réduit minimal des petits grains, soit $\overline{R}_{\mathrm{max,p}} = 0,6$ et $\overline{R}_{\mathrm{min,g}} = 0,8$ dans notre cas. Le calcul fait également intervenir le rayon $R_{\mathrm{ast},0} \simeq 11,5$ m d'un astéroïde décrit par l'histogramme de la Fig. II.1a. On trouve finalement $\psi_{\mathrm{c,max},0} \simeq 0,062\ m^* R_{\mathrm{ast},0}$. Connaissant cette valeur, il est possible de définir le degré de ségrégation normalisé Ψ_c pour les distributions binaires. Nous le comparons alors avec le degré de ségrégation Ψ que nous utilisons habituellement pour ces distributions, dans le cas d'une simulation explorant une large gamme de valeurs de Ψ (voir la Fig. III.39).



(a) Tracé de Ψ (en bleu) et Ψ_c (en rouge) en fonction du nombre de secousses. Les couleurs claires sont utilisées pour représenter en lignes tiretées les modélisations par une cinétique d'ordre 1, ainsi que les valeurs de Ψ_∞ obtenues.

(b) Tracé de Ψ_c en fonction de Ψ..

FIGURE III.39 – Comparaison entre les deux degrés de ségrégation normalisés Ψ et Ψ_c pour une simulation utilisant une distribution binaire, et les paramètres $\mu = 0,5$, $T_\mathrm{s} = 1,25$ s et $J^* = 10^4$. Cette simulation a été choisie pour la large gamme de valeurs de Ψ parcourue dans le temps.

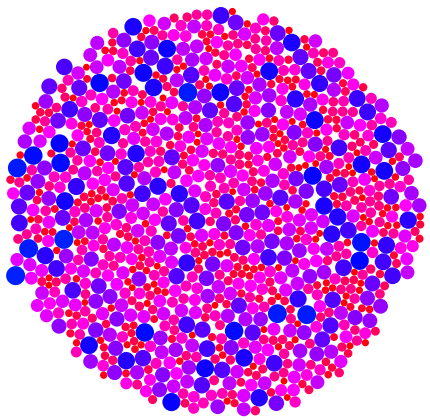
Il apparaît alors que les grandeurs Ψ et Ψ_c suivent des évolutions très semblables, jusque dans leurs plus petites variations (voir la Fig. III.39a). Nous réalisons alors une modélisation par une cinétique d'ordre 1 pour Ψ_c comme pour Ψ, c'est-à-dire un ajustement de la forme $\Psi_\mathrm{c}(t) = \Psi_{\mathrm{c},\infty}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_\mathrm{c}})$. Nous obtenons $\Psi_{\mathrm{c},\infty} = 0,806$ et $\tau_\mathrm{c} = 1232\ n_\mathrm{s}$, à comparer à $\Psi_\infty = 0,925$ et $\tau = 1300\ n_\mathrm{s}$ pour la même simulation. Le faible écart relatif entre τ_c et τ confirme l'observation d'une évolution très proche de Ψ et Ψ_c. Pour comparer plus quantitativement ces deux grandeurs, nous traçons également Ψ_c en fonction de Ψ (voir la Fig. III.39b). On voit alors clairement que Ψ_c et Ψ sont dans un rapport quasi constant (on trouve $\Psi_\mathrm{c}/\Psi \simeq 0,88$). Ce rapport se retrouve d'ailleurs dans les valeurs finales des degrés de ségrégation puisque $\Psi_{\mathrm{c},\infty}/\Psi_\infty \simeq 0,87$.

Cette comparaison entre la définition « habituelle » du degré de ségrégation (Ψ) et la nouvelle définition adaptée aux distributions continues (Ψ_c) met en évidence la pertinence de cette dernière. On aurait par exemple pu définir Ψ_c à partir de la corrélation entre r_i et R_i plutôt qu'entre r_i et m_i, mais le choix de m_i semblait plus cohérent avec la pondération par l'aire des

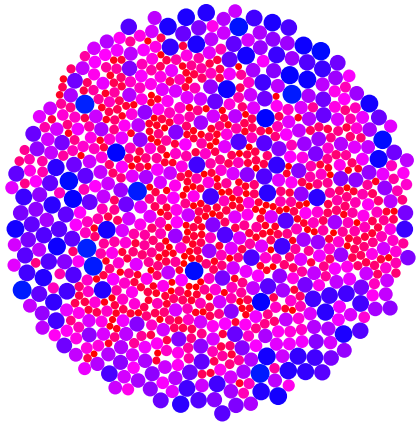
grains qui intervient dans le calcul de Ψ (voir l'Éq. (III.18)). Cela est maintenant confirmé. De plus, le fait que Ψ_c et Ψ soient dans un rapport constant pour une large gamme de Ψ nous permet d'une part d'étandre notre modélisation habituelle (cinétique d'ordre 1) aux distributions continues, et d'autre part de comparer quantitativement la netteté de la ségrégation finale entre une distribution continue et une distribution binaire de mêmes paramètres physiques.

IV-2.d) Résultats

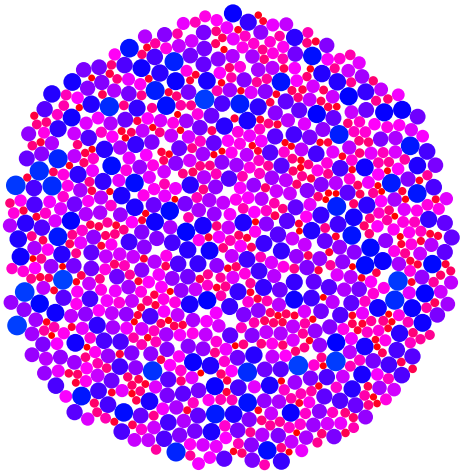
Pour chacune des deux distributions continues décrites dans la Sec. IV-2.a), nous avons réalisé des simulations à $\mu = 0,5$ et $T_s = 1,25$ s. Nous montrons des vues de ces astéroïdes dans l'état initial et après 10000 secousses sur la Fig. III.40.



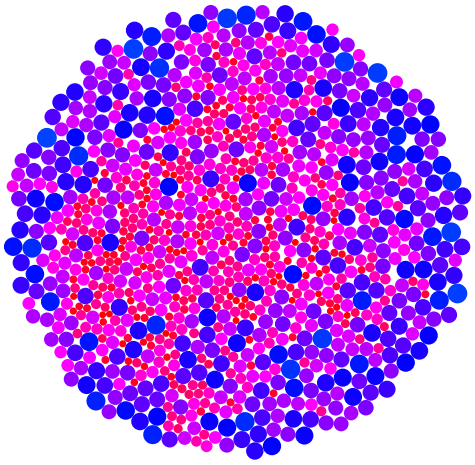
(a) État initial pour la distribution 1.



(b) État après 10000 secousses pour la distribution 1.



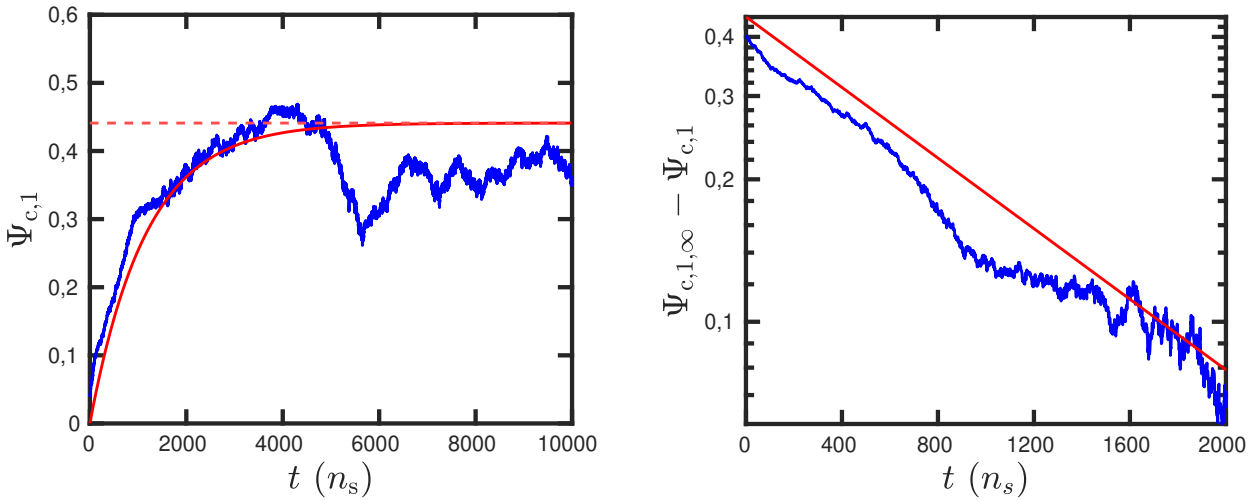
(c) État initial pour la distribution 2.



(d) État après 10000 secousses pour la distribution 2.

FIGURE III.40 – Images dans l'état initial et après 10000 secousses pour les deux distributions continues envisagées, avec $\mu = 0,5$ et $T_s = 1,25$ s dans chaque cas.

Nous pouvons déjà constater que $R_{\mathrm{ast},1} < R_{\mathrm{ast},2}$, ce qui est attendu puisque la distribution 2 implique des grains de rayon réduit en moyenne plus élevé. En effet on mesure, dans le cas des histogrammes de la Fig. III.38, $\langle \overline{R}_i \rangle_1 \simeq 0,67$ et $R_{\mathrm{ast},1} \simeq 12$ m pour la distribution 1, contre $\langle \overline{R}_i \rangle_2 \simeq 0,74$ et $R_{\mathrm{ast},2} \simeq 13,5$ m pour la distribution 2. De plus, la ségrégation radiale est très nette : nous observons dans les deux cas que les plus gros grains (en bleu) sont concentrés à la surface de l'astéroïde après 10000 secousses. Étudions maintenant l'évolution de $\Psi_{\mathrm{c},1}$ en fonction du nombre de secousses (voir la Fig. III.41).



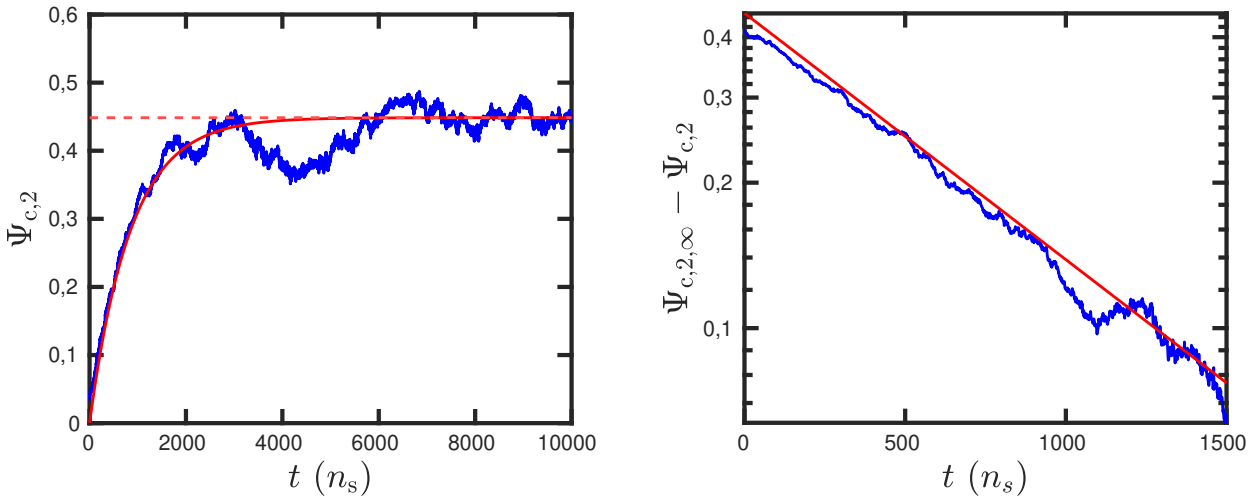
(a) Tracé de $\Psi_{\mathrm{c},1}$ en fonction du nombre de secousses.

(b) Représentation en échelle semi-logarithmique pour les 2000 premières secousses.

FIGURE III.41 – Évolution de $\Psi_{\mathrm{c},1}$ en fonction du nombre de secousses : les données sont en bleu, la modélisation par une cinétique d'ordre 1 en rouge et la ligne tiretée rouge représente la valeur de $\Psi_{\mathrm{c},1,\infty}$. On trouve $\Psi_{\mathrm{c},1,\infty} = 0,441$ et $\tau_{\mathrm{c},1} = 1164$ n_{s}.

Au vu de l'allure des données (voir la Fig. III.41a), nous pouvons réaliser un ajustement de la forme $\Psi_{\mathrm{c},1}(t) = \Psi_{\mathrm{c},1,\infty}(1-\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{c},1}})$ sur les 3000 premières secousses, en utilisant exactement la même méthode que pour les distributions binaires (voir la Sec. II-2.c)). Cette modélisation par une cinétique d'ordre 1 semble assez bien traduire la dynamique de $\Psi_{\mathrm{c},1}$ (voir la Fig. III.41b), même si il n'y a une fois encore aucune motivation théorique précise pour une telle cinétique, si ce n'est l'analogie avec certains résultats obtenus concernant la ségrégation en écoulement [172]. Nous obtenons $\Psi_{\mathrm{c},1,\infty} = 0,441$ et $\tau_{\mathrm{c},1} = 1164$ (n_{s}). Cette dernière valeur est comparable à celles mesurées pour τ avec des distributions binaires présentant exactement les mêmes paramètres physiques $\mu = 0,5$ et $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s (voir la Tab. III.1). Par contre, nous trouvons ici une valeur $\Psi_{\mathrm{c},1,\infty}$ en moyenne 33 % plus faible que les valeurs de Ψ_∞ obtenues pour les distributions binaires. Cet écart ne s'explique donc pas complètement par la différence de définition entre Ψ_{c} et Ψ, qui justifierait un écart relatif d'environ 12 % seulement (voir la Fig. III.39b). Il semble donc que l'on atteigne, pour nos paramètres standards $\mu = 0,5$ et $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s, une ségrégation finale moins marquée dans le cas de la distribution continue 1 que pour une distribution binaire. Examinons maintenant le cas de la distribution continue 2 (voir la Fig. III.42).

Nous réalisons un ajustement de la forme $\Psi_{\mathrm{c},2}(t) = \Psi_{\mathrm{c},2,\infty}(1-\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{c},2}})$ sur les 2800 premières secousses. Nous obtenons alors $\Psi_{\mathrm{c},2,\infty} = 0,449$ et $\tau_{\mathrm{c},2} = 852$ (n_{s}). Ces valeurs sont tout à fait comparables à $\Psi_{\mathrm{c},1,\infty}$ et $\tau_{\mathrm{c},1}$ respectivement, et les conclusions sont donc les mêmes que pour la



(a) Tracé de $\Psi_{c,2}$ en fonction du nombre de secousses.

(b) Représentation en échelle semi-logarithmique pour les 1500 premières secousses.

FIGURE III.42 – Évolution de $\Psi_{c,2}$ en fonction du nombre de secousses, les données sont en bleu, la modélisation par une cinétique d'ordre 1 en rouge et la ligne tiretée rouge représente la valeur de $\Psi_{c,2,\infty}$. On trouve $\Psi_{c,2,\infty} = 0,449$ et $\tau_{c,2} = 852$ (n_s).

distribution continue 1. Enfin, le fait que la ségrégation soit moins nette pour les distributions continues que pour les distributions binaires renforce notre hypothèse d'une ségrégation essentiellement due aux réarrangements locaux suite aux perturbations. En effet, dès qu'un astéroïde présentant une distribution continue en taille commence à être ségrégé, les réarrangements locaux concernent des grains de tailles très proches, et ce en tout point de l'agrégat. Il est alors, à Ψ_c donné, plus difficile de continuer à faire progresser la ségrégation que dans le cas d'une distribution binaire.

Ces études encore exploratoires sur des distributions continues en taille des grains apportent d'intéressantes informations sur le phénomène de ségrégation que nous avons observé et détaillé. En effet, celui-ci apparaît très robuste, tout comme la cinétique d'ordre 1 qui le caractérise empiriquement. Puisque nous disposons d'une définition fiable d'un degré de ségrégation Ψ_c, nous pouvons envisager une étude quantitative complète (à la façon des travaux présentés dans la Sec. III-) employant ces distributions continues. Celle-ci pourra constituer un prolongement intéressant au présent travail.

Enfin, il nous reste à signaler la possibilité d'une ségrégation angulaire pour les distributions continues en taille, notamment la distribution 1 pour laquelle les gros grains semblent globalement répartis en trois groupes après 10000 secousses (voir la Fig. III.40b). Ce phénomène, déjà observé pour les distributions binaires, fait l'objet de la section suivante.

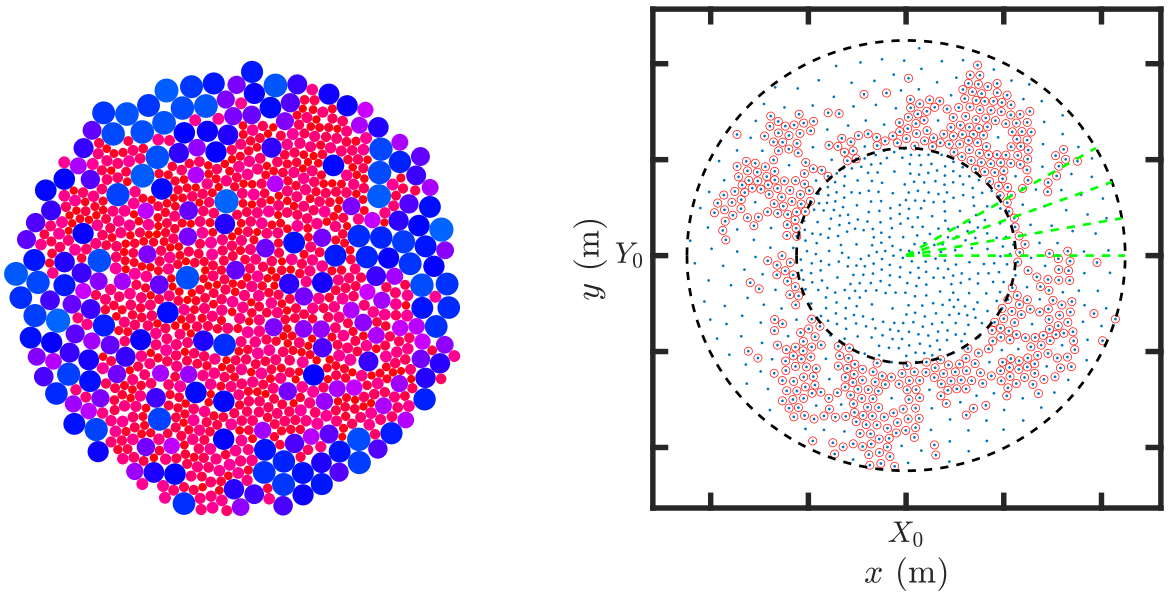
V- Ségrégation angulaire

V-1. Observation et quantification

Nous avions évoqué, dans la Sec. II-1., la possibilité d'une ségrégation angulaire dans une simulation à $\mu = 0,5$, $T_s = 1,25$ s et $J^* = 1$. L'évolution de $\Psi(t)$ (voir la Fig. III.7a), ainsi que

l'allure de l'agrégat après 4500 secousses (voir la Fig. III.43a), laissent en effet penser que des lobes de gros grains se forment à la surface à partir de $t \simeq 3000\ n_s$. Ce phénomène est également observé dans d'autres simulations, mais ne se produit pas systématiquement, et toujours une fois qu'une ségrégation radiale a commencé à s'établir. Notons par ailleurs que la diminution de $\Psi(t)$ observée en cas de ségrégation angulaire ne signifie pas que petits et gros grains se mélangent de nouveau, mais simplement que, de par la formation des lobes, les zones de gros grains sont en moyenne moins éloignées du centre O. Pour quantifier la présence de ces lobes, nous proposons l'analyse suivante.

- Après chaque secousse, nous convertissons les coordonnées cartésiennes (x_i, y_i) de chaque grain en coordonnées polaires (r_i, θ_i) avec $\theta_i \in [0, 2\pi[$.
- Nous sélectionnons les grains j qui sont à la fois de petits grains $\overline{R}_j \in [0,4, 0,6]$ et éloignés du centre d'une distance supérieure à la moitié du rayon de l'agrégat, c'est-à-dire vérifiant $r_j \geq \max(r_i)/2$ (voir la Fig. III.43b).
- Nous découpons l'espace en 36 secteurs angulaires de 10° chacun, à partir du centre de masse O, définis par $\theta \in [2\pi k/36, 2\pi(k+1)/36[$ avec $k \in [|0, 35|]$. Pour chacun, nous comptons le nombre $N_{\mathrm{p,A}}(k)$ de grains j (en rouge sur la Fig. III.43b) qu'il contient.



(a) Vue de l'astéroïde. (b) Principe du traitement.

FIGURE III.43 – Illustration du traitement réalisé pour la quantification de la ségrégation angulaire. On considère ici une simulation utilisant $\mu = 0,5$, $T_s = 1,25$ s et $J^* = 1$, juste après la 4500ème secousse. Sur l'image traitée, les positions des grains sont repérées en bleu et les grains d'intérêt sont représentés par des cercles rouges. Il s'agit des petits grains localisés entre les deux cercles tiretés noirs, de centre O et de rayons respectifs R_{ast} et $R_{\mathrm{ast}}/2$. On a de plus représenté les délimitations des trois premiers secteurs angulaires ($k = 0, 1, 2$) en lignes tiretées vertes.

Nous pouvons ainsi associer à chaque angle $\theta_k = 2\pi k/36$ le nombre $N_{\mathrm{p,A}}(k)$ de grains j contenus dans le k-ème secteur angulaire (vérifiant donc $\theta_j \in [2\pi k/36, 2\pi(k+1)/36]$). Cela nous

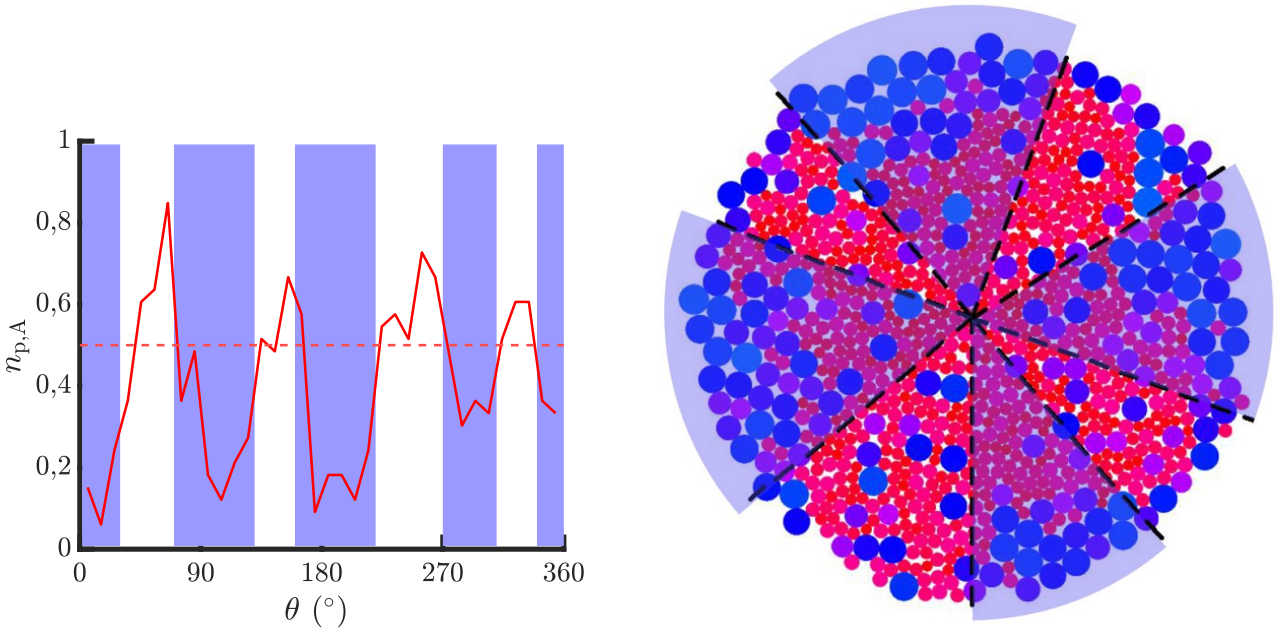
donne une fonction $N_{\mathrm{p,A}}(\theta)$ pour l'astéroïde dans un état donné. Nous estimons par ailleurs le nombre maximal $N_{\mathrm{p,A,max}}$ de petits grains que contient un secteur angulaire. L'intersection d'un de ces secteurs avec l'anneau $r \in [R_{\mathrm{ast}}/2, R_{\mathrm{ast}}]$ possède une aire $3\beta {R_{\mathrm{ast}}}^2/8$, où $\beta = \pi/18$ est l'ouverture du secteur angulaire. Puisqu'un astéroïde de rayon R_{ast} contient 800 petits grains et 200 gros grains, les deux populations couvrant la même aire, il contiendrait 1600 petits grains sur une surface $\pi {R_{\mathrm{ast}}}^2$ si ces derniers étaient seuls. De cette façon, nous trouvons :

$$N_{\mathrm{p,A,max}} = \frac{3\beta {R_{\mathrm{ast}}}^2/8}{\pi {R_{\mathrm{ast}}}^2} \times 1600 = \frac{600\beta}{\pi} \simeq 33. \tag{III.49}$$

Ce nombre nous permet de renormaliser le nombre $N_{\mathrm{p,A}}$ de grains contenus dans chaque secteur, pour définir une densité de petits grains :

$$n_{\mathrm{p,A}}(\theta) = \frac{N_{\mathrm{p,A}}(\theta)}{N_{\mathrm{p,A,max}}}. \tag{III.50}$$

Ainsi, les quatre lobes de gros grains qui étaient déjà visibles sur la Fig. III.43a sont également identifiables sur le tracé de $n_{\mathrm{p,A}}(\theta)$ pour l'astéroïde après 4500 secousses (voir la Fig. III.44a), et nous pouvons reporter les délimitations ainsi mesurées sur une vue de l'astéroïde pour vérifier leur pertinence (voir la Fig. III.44b).



(a) Représentation de la fonction $n_{\mathrm{p,A}}(\theta)$ à l'instant $t = 4500$ (n_{s}). On a représenté en ligne tiretée rouge un critère $n_{\mathrm{p,A}} = 0,5$ pour la délimitation des lobes de gros grains, ces derniers étant teintés en bleu.

(b) Vue de l'agrégat à $t = 4500$ n_{s} : les délimitation des lobes visibles sur les Fig. III.45 et III.44a sont reprises en lignes tiretées noires, et les secteurs angulaires contenant les lobes sont teintés en bleu. Les angles sont comptés depuis l'horizontale orientée vers la droite.

FIGURE III.44 – Délimitation des lobes sur le profil $n_{\mathrm{p,A}}(\theta)$ et sur l'image de l'astéroïde, après 4500 secousses, toujours pour la simulation de la Fig. III.43.

Nous avons ici mené cette analyse à $t = 4500$ n_{s}, mais elle est généralisable pour l'état de l'astéroïde après un nombre t quelconque de secousses. Cela nous donne finalement une fonction

$n_{\mathrm{p,A}}(\theta, t)$, dont nous proposons une représentation spatio-temporelle sur la Fig. III.45, pour la simulation à $\mu = 0,5$, $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s et $J^* = 1$ illustrée sur la Fig. III.43.

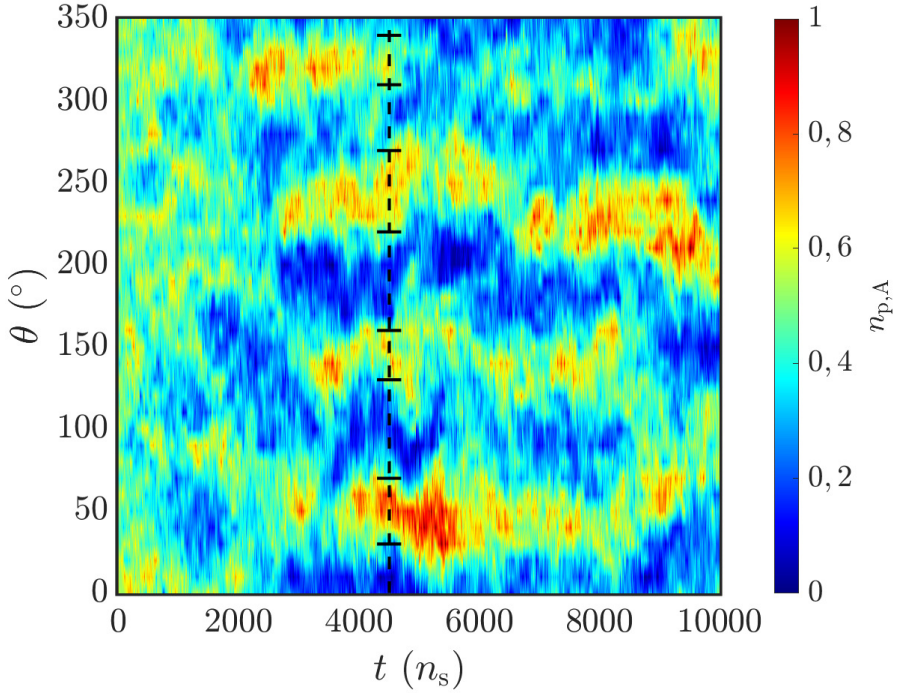


FIGURE III.45 – Graphe spatio-temporel de $n_{\mathrm{p,A}}$ en fonction de θ (ici en degrés) et du temps t exprimé en nombre de secousses. La ligne tiretée verticale repère la 4500ème secousse et les segments horizontaux sont de simples guides pour l'œil repérant les quatre lobes de gros grains (zones bleues) observés à $t = 4500$ n_{s}.

Sur cette représentation, nous pouvons identifier les zones de la surface qui sont riches en petits grains (en rouge) ou en gros grains (en bleu). Nous retrouvons alors, à $t = 4500$ n_{s}, les lobes identifiés sur la Fig. III.44. Ce traitement est efficace pour compter les lobes, mais il reste à quantifier la netteté de ceux-ci, et donc de la ségrégation angulaire. Nous définissons donc un degré de ségrégation angulaire ψ_{A} donné à un instant t donné par l'écart-type vis-à-vis de θ de la fonction $n_{\mathrm{p,A}}(\theta, t)$. Compte tenu du fait que la variable θ est discrétisée, dans le cadre de notre traitement, selon 36 secteurs angulaires de 10° chacun, nous avons formellement :

$$\psi_{\mathrm{A}}(t) = \sqrt{\frac{1}{35}\sum_{k=1}^{36}\left(n_{\mathrm{p,A}}(k,t) - \langle n_{\mathrm{p,A}}(t)\rangle\right)^2} \quad \text{avec} \quad \langle n_{\mathrm{p,A}}(t)\rangle = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{36} n_{\mathrm{p,A}}(k,t). \tag{III.51}$$

De plus, comme dans le cas des degrés de ségrégation radiale, nous souhaitons travailler avec un degré normalisé Ψ_{A}. Nous choisissons pour cela de fixer $\Psi_{\mathrm{A}} = 1$ pour une répartition sinusoïdale des petits grains à la surface, de la forme

$$n_{\mathrm{p,A}}(k) = n_0\left(1 + \cos\left(N_{\mathrm{l}}\left(\theta_k - \theta_{\mathrm{ori}}\right)\right)\right) \quad \text{avec} \quad \theta_k = \frac{2\pi k}{36}, \tag{III.52}$$

et où n_0 et θ_{ori} sont des constantes et N_{l} est le nombre de lobes de gros grains. Or dans ce cas on a $\psi_{\mathrm{A}} = n_0/\sqrt{2} = \langle n_{\mathrm{p,A}}\rangle/\sqrt{2}$. Nous définissons donc le degré de ségrégation angulaire normalisé par :

$$\Psi_{\mathrm{A}}(t) = \frac{\sqrt{2}\psi_{\mathrm{A}}(t)}{\langle n_{\mathrm{p,A}}(t)\rangle}. \tag{III.53}$$

Remarquons que si cette définition permet de quantifier la netteté de la ségrégation angulaire, elle ne permet en revanche pas de connaître le nombre de lobes. Nous représentons, toujours pour la même simulation, les évolutions simultanées de Ψ et Ψ_{A} en fonction du nombre de secousses sur la Fig. III.46.

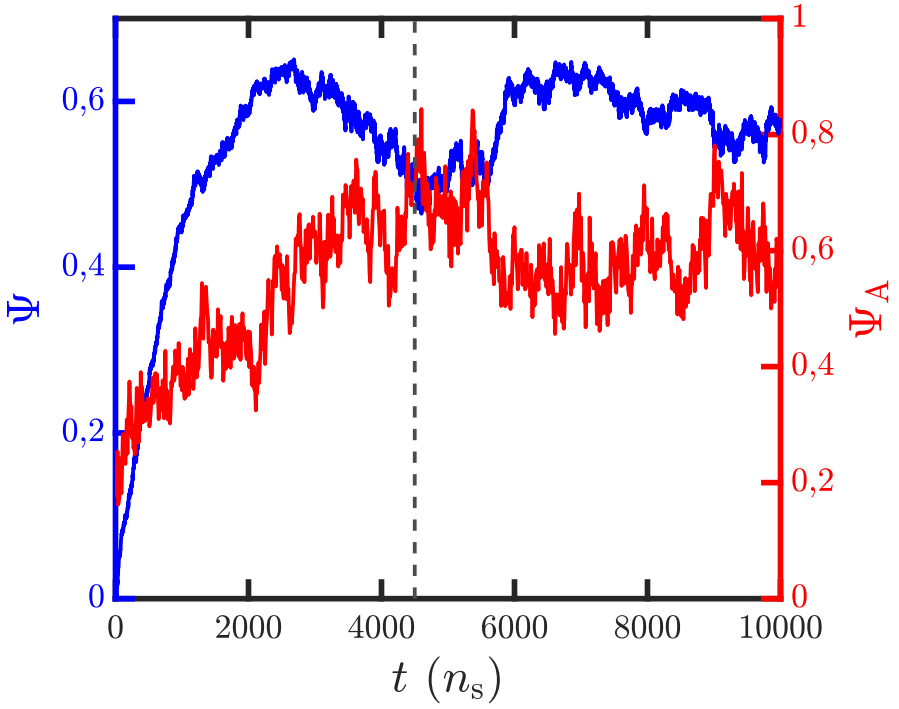


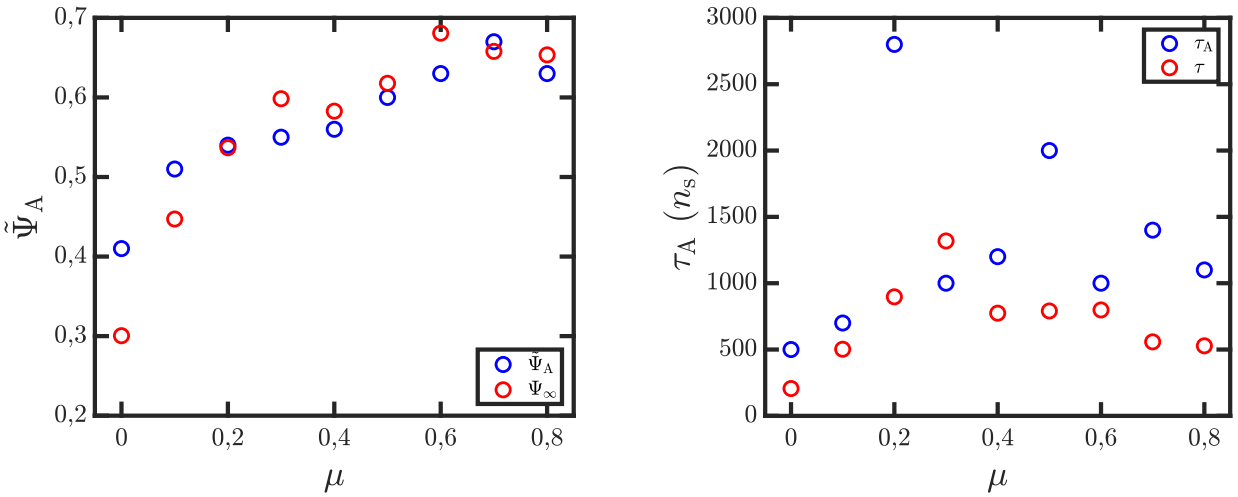
FIGURE III.46 – Tracé des degrés de ségrégation radiale Ψ (en bleu) et de ségrégation angulaire Ψ_{A} (en rouge) en fonction du temps t exprimé en nombre de secousses. La ligne tiretée noire repère la 4500ème secousse, illustrée sur les Fig. III.43 et III.44.

Cette représentation permet de constater qu'une fois la ségrégation radiale établie, les quantités Ψ_{A} et Ψ ont des évolutions opposées. Cela est d'ailleurs systématique à toutes les simulations dans lesquelles une ségrégation angulaire suffisante se développe. Cela correspond au fait que la formation de lobes, c'est-à-dire l'augmentation de Ψ_{A}, implique que des petits grains réatteignent la surface, pour séparer les lobes (voir la Fig. III.43a par exemple). On a donc des petits grains en moyenne plus éloignés du centre et, à aire de l'agrégat fixée, des gros grains en moyenne plus proches du centre, ce qui se traduit par une diminution de Ψ. Par ailleurs, nous constatons que Ψ_{A} augmente significativement après $t = 2000\ n_{\mathrm{s}}$, instant qui correspond à l'apparition de lobes bien définis sur le graphe spatio-temporel de la Fig. III.45. Cela nous permet de définir un temps typique d'établissement de la ségrégation angulaire, $\tau_{\mathrm{A}} = 2000\ n_{\mathrm{s}}$ ici. De plus, la grandeur τ_{A} permet de définir une valeur typique $\tilde{\Psi}_{\mathrm{A}}$ du degré de ségrégation angulaire, en moyennant Ψ_{A} sur les temps $t \geq \tau_{\mathrm{A}}$. Dans le cas présent, nous obtenons $\tilde{\Psi}_{\mathrm{A}} \simeq 0,60$. Ainsi munis du degré de ségrégation angulaire Ψ_{A} et d'une première analyse de celui-ci, nous pouvons effectuer une étude simplifiée de l'influence de certains paramètres sur la ségrégation angulaire.

V-2. Influence des paramètres de la simulation

V-2.a) Influence du coefficient de frottement

Nous nous intéressons d'abord à l'influence du coefficient de frottement μ sur la ségrégation angulaire. En effet, nous avons vu que ce paramètre avait un effet important sur la ségrégation radiale, qui est elle-même un prérequis à l'apparition d'une ségrégation angulaire. Pour les paramètres $T_s = 1,25$ s et $J^* = 1$ fixés, nous représentons l'évolution des deux grandeurs caractéristiques $\tilde{\Psi}_A$ et τ_A en fonction du coefficient de frottement μ, variant de 0 à 0,8 (voir la Fig. III.47).



(a) Évolution de $\tilde{\Psi}_A$ en fonction du coefficient de frottement μ.

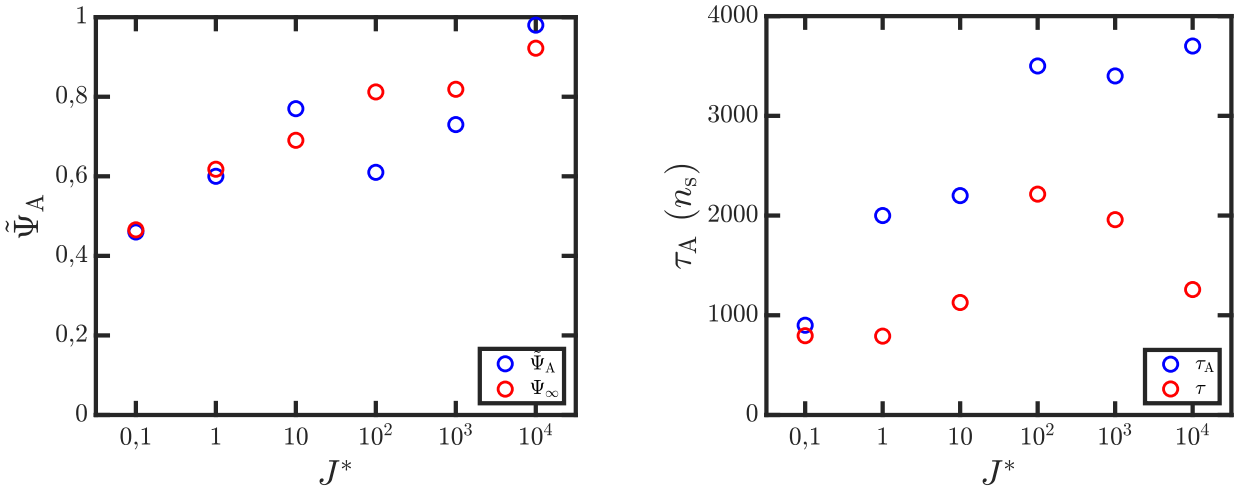
(b) Évolution de τ_A en fonction du coefficient de frottement μ.

FIGURE III.47 – Tracé des grandeurs caractéristiques $\tilde{\Psi}_A$ et τ_A de la ségrégation angulaire en fonction de μ, à $T_s = 1,25$ s et $J^* = 1$ fixés. Les données sont en bleu, et on a représenté en rouge, pour rappel, les grandeurs Ψ_∞ et τ caractéristiques de la ségrégation radiale.

Notons que nous n'avons utilisé ici qu'une seule « graine », c'est-à-dire un seul jeu de positions et tailles initiales des N grains (voir la Sec. II-3.b)), par coefficient de frottement. En effet, la ségrégation angulaire nous apparaissant comme une instabilité consécutive à la ségrégation radiale, nous avons préféré travailler à conditions initiales égales pour comparer les résultats concernant $\tilde{\Psi}_A$ et τ_A. Nous constatons que le degré de ségrégation angulaire typique $\tilde{\Psi}_A$ augmente sensiblement avec μ, suivant en cela l'évolution du degré de ségrégation radiale final Ψ_∞ sur les mêmes simulations (voir la Fig. III.47a). Il semblerait donc, du moins pour les données à $J^* = 1$, que plus la ségrégation radiale est nette, plus la ségrégation angulaire l'est aussi. En conclusion, le fait d'avoir un important coefficient de frottement semble favoriser à la fois la migration des gros grains vers la surface et le rassemblement de ceux-ci en lobes une fois qu'ils sont concentrés à la surface. Par ailleurs, il ne se dégage pas de tendance claire concernant le temps typique de ségrégation angulaire τ_A (voir la Fig. III.47b). On constate néanmoins qu'il est presque toujours supérieur à τ (sauf une légère exception pour $\mu = 0,3$), ce qui traduit bien le fait que la ségrégation angulaire est consécutive à la ségrégation radiale.

V-2.b) Influence du moment d'inertie

Un autre paramètre jouant un grand rôle dans la ségrégation radiale, et donc potentiellement dans la ségrégation angulaire, est le moment d'inertie standard J^*, qui permet de contrôler l'importance relative de la rotation dans la dynamique des grains. À la manière de ce qui a été fait pour μ, nous étudions donc la dépendance de $\tilde{\Psi}_\mathrm{A}$ et τ_A en fonction de J^*. Les résultats, pour $T_\mathrm{s} = 1,25$ s et $\mu = 0,5$ fixés et J^* variant de $0,1$ à 10^4, sont représentés sur la Fig. III.48.



(a) Évolution de $\tilde{\Psi}_\mathrm{A}$ en fonction du moment d'inertie standard J^*.

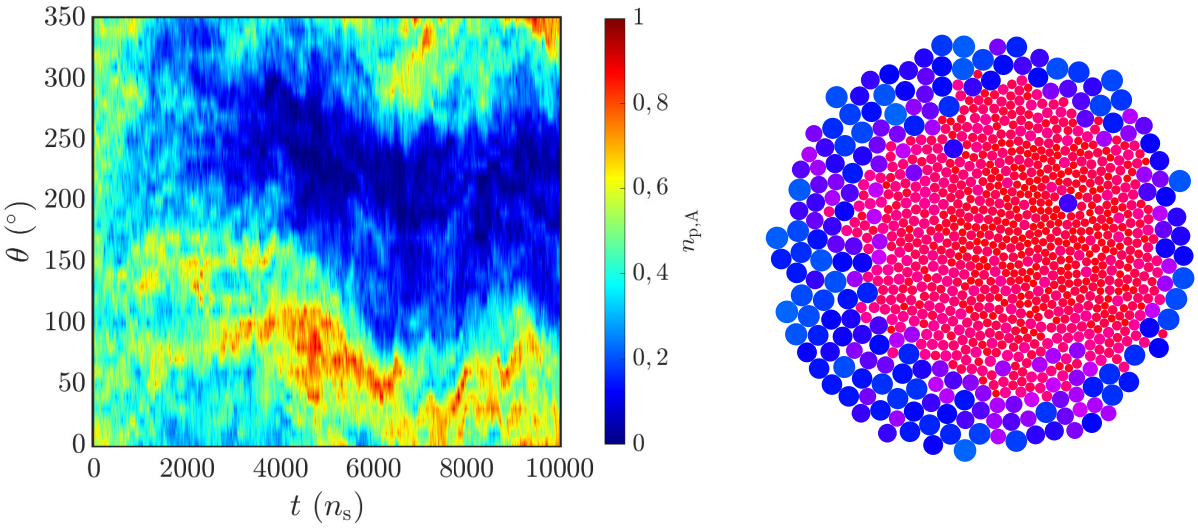
(b) Évolution de τ_A en fonction du moment d'inertie standard J^*.

FIGURE III.48 – Tracé des grandeurs caractéristiques $\tilde{\Psi}_\mathrm{A}$ et τ_A de la ségrégation angulaire en fonction de μ, à $T_\mathrm{s} = 1,25$ s et $\mu = 0,5$ fixés. Les données sont en bleu, et on a représenté en rouge, pour rappel, les grandeurs Ψ_∞ et τ caractéristiques de la ségrégation radiale.

Là encore, nous observons une évolution de $\tilde{\Psi}_\mathrm{A}$ semblable à celle de Ψ_∞, c'est-à-dire une augmentation globale en fonction de J^* (voir la Fig. III.48a). Le fait de priver les grains de leur degré de liberté en rotation semble donc favoriser la formation de lobes bien définis. Concernant l'évolution de τ_A, on note ici une augmentation significative avec J^*, et une différence $\tau_\mathrm{A} - \tau$ positive et augmentant également avec J^* (voir la Fig. III.48b). Cela implique en particulier que pour toutes les valeurs de J^*, on a d'abord concentration des gros grains à la surface, puis les petits grains arrivent à s'immiscer à travers cette couche de gros grains pour la séparer en lobes. Cela est d'ailleurs cohérent, dans le cas $J^* = 1$, avec le fait que Ψ augmente, atteint un maximum, puis diminue lorsque Ψ_A augmente à son tour (voir la Fig. III.46). De plus, l'augmentation de τ_A avec J^* montre que la rotation aide les petits grains à réatteindre la surface pour la séparer en lobes, car sans celle-ci ce processus nécessite l'application d'un plus grand nombre de perturbations.

Signalons enfin que l'étude des graphes spatio-temporels montre que pour toutes les valeurs de μ et J^* explorées, on a formation de 3 ou 4 lobes, à l'exception notable des simulations à $J^* = 10^3$ et $J^* = 10^4$, dans lesquelles un seul gros lobe se forme. Concrètement, on observe deux hémisphères, l'un étant beaucoup plus riche en gros grains que l'autre (voir la Fig. III.49).

Cela rejoint en partie l'analyse que nous avions proposée concernant l'évolution de Ψ_∞ avec J^*, à savoir que lorsque la rotation est figée, il est énergétiquement moins coûteux de former de vastes régions consitutées uniquement de gros ou de petits grains. Enfin, nous voyons qu'au



(a) Graphe spatio-temporel de $n_{\mathrm{p,A}}$ en fonction de θ exprimé en degrés et de t exprimé en nombre de secousses.

(b) Vue de l'astéroïde après 10000 secousses.

FIGURE III.49 – Formation d'un unique lobe de gros grains, définissant deux hémisphères, pour $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s, $\mu = 0,5$ et $J^* = 10^4$.

début (vers $t \simeq 1000\ n_{\mathrm{s}}$), de petits lobes peu résolus émergent, avant de converger vers un unique gros lobe. Il s'agit là d'un autre aspect intéressant de ce phénomène de ségrégation angulaire : la possible variation du nombre de lobes.

V-3. Dynamique des lobes

Nous constatons sur les graphes spatio-temporels déjà étudiés (voir les Fig. III.45 et III.49a) que la formation des lobes est un processus assez complexe. La sélection d'un angle d'émergence d'un gros lobe semble uniquement due aux mouvements de certains petits grains vers la surface à la faveur des perturbations successives. Une fois ce régime de croissance des lobes franchi, autrement dit pour les temps $t \geq \tau_{\mathrm{A}}$, le nombre de lobes reste souvent constant. Néanmoins il arrive que certains lobes fusionnent : pour les tailles d'agrégats que nous étudions, cela se traduit généralement par un passage de trois à quatre lobes. C'est typiquement ce que l'on observe pour $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s, $\mu = 0,5$ et $J^* = 10$ (voir la Fig. III.50).

En effet, nous constatons qu'à partir de $t \simeq 2000\ n_{\mathrm{s}}$, on a trois lobes assez nets, autour de $\theta = 0°$, 170° et 280° respectivement, ainsi qu'un lobe moins bien défini autour de $\theta = 90°$. Ce dernier échange des gros grains avec le lobe à $\theta \simeq 0°$, si bien que la démarcation entre eux peut être floue. À partir de $T \simeq 6000\ n_{\mathrm{s}}$, il s'en détache et migre selon un angle θ croissant jusqu'à fusionner avec le lobe à $\theta \simeq 170°$ à partir de $t \simeq 7000\ n_{\mathrm{s}}$. Ainsi, on discerne assez nettement quatre lobes à $t = 6300\ n_{\mathrm{s}}$ par exemple, et seulement trois à $t = 9000\ n_{\mathrm{s}}$ (voir la Fig. III.51).

Nous constatons sur ces images qu'une fois la fusion entre deux lobes effectuées, les positions des trois lobes restants sont telles que ces derniers sont régulièrement répartis à la surface de l'agrégat, dans le sens où il y a environ 60° entre un lobe et chacun de ses voisins (voir la Fig. III.51c). Cette dynamique de fusion des lobes n'est pas sans évoquer les résultats de la Réf. [174]. Celle-ci étudie la dynamique des bandes de ségrégation axiale dans un tambour

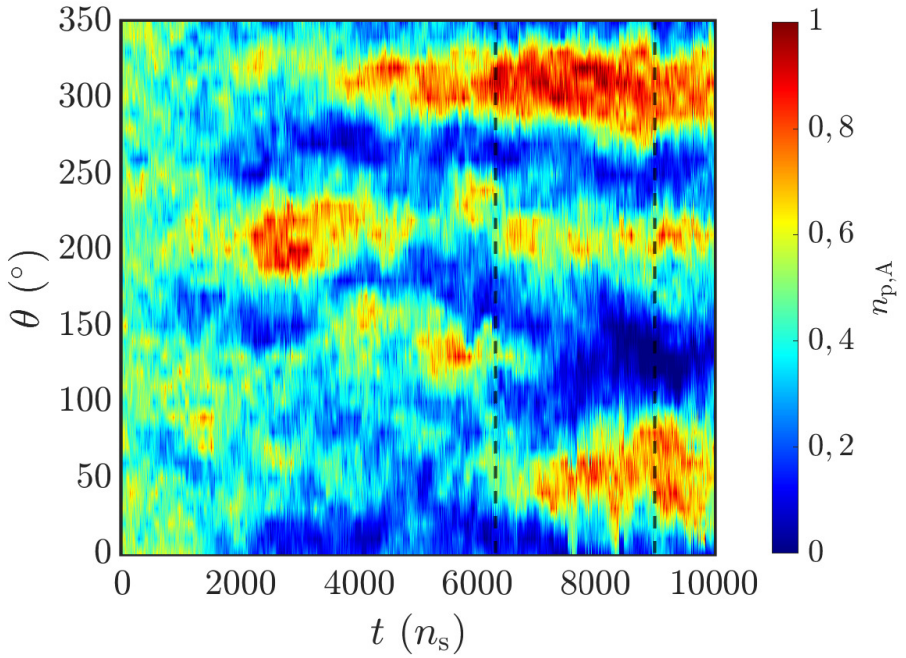
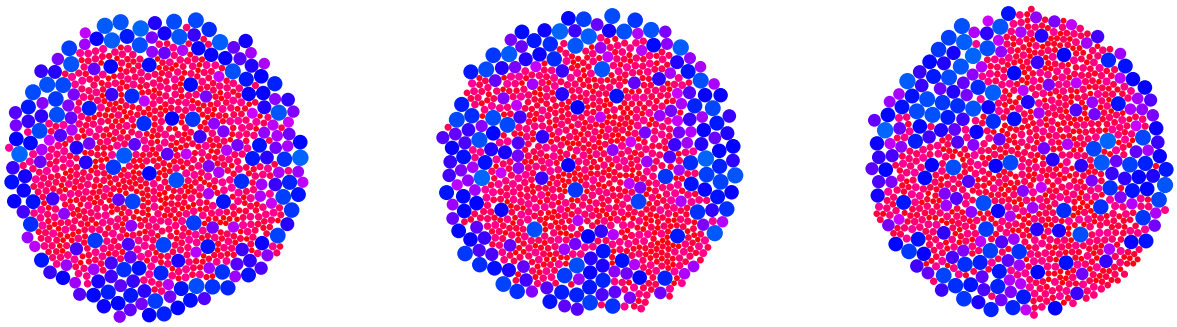


FIGURE III.50 – Graphe spatio-temporel de $n_{p,A}$ en fonction de θ exprimé en degrés et de t exprimé en nombre de secousses, pour $T_s = 1,25$ s, $\mu = 0,5$ et $J^* = 10$. Les lignes tiretées noires repèrent les instants $t = 6300$ n_s et $t = 9000$ n_s illustrés sur la Fig. III.51.



(a) Vue après 2200 secousses. (b) Vue après 6300 secousses. (c) Vue après 9000 secousses.

FIGURE III.51 – Vues de l'astéroïde à deux instants différents pour $T_s = 1,25$ s, $\mu = 0,5$ et $J^* = 10$. On distingue quatre lobes à $t = 6300$ n_s puis trois lobes à $t = 9000$ n_s.

tournant et en particulier l'évolution du nombre de bandes de gros ou de petits grains. Un des principaux résultats est que les fusions de bandes de gros grains se caractérisent par la réunion de deux bandes voisines, ce processus ignorant toutes les autres bandes. C'est ce que nous observons dans le cas présenté ici, avec deux lobes fusionnant en ignorant les deux autres, alors même qu'ils échangeaient des grains auparavant. Même si la dynamique de ces lobes nous éloigne quelque peu du sujet initial, elle constitue certainement un problème physique très riche. Une étude approfondie serait donc un prolongement intéressant des résultats préliminaires présentés ici, notamment en suivant précisément certains grains à la manière du travail réalisé dans la

Réf. [174]. Pour conclure cette étude de la ségrégation angulaire, signalons que celle-ci constitue une piste très intéressante pour expliquer l'inhomogénéité de la distribution des gros rochers à la surface d'astéroïdes comme Itokawa, Bennu et Ryugu (voir la Fig. I.12).

VI- Conclusion

Arrivés au terme de ce chapitre, nous proposons ici un résumé des résultats importants qu'il apporte, ainsi que des prolongements qu'il appelle.

- Nous observons une ségrégation radiale dans un agrégat bidimensionnel soumis à des expansions isotropes périodiques. Ce phénomène est extrêmement robuste et se produit pour toutes les conditions initiales et distributions en taille que nous avons explorées numériquement.
- Cette ségrégation radiale est systématiquement modélisable par une cinétique d'ordre 1, bien qu'aucun modèle précis ne motive cela.
- La ségrégation est d'autant plus rapide que les perturbations sont énergétiques, mais il existe un optimum concernant sa qualité dans l'état final.
- À l'inverse, la ségrégation est d'autant plus nette dans l'état final que le coefficient de frottement μ est élevé, mais présente un minimum de rapidité pour une valeur intermédiaire de μ. De plus, le fait d'entraver la rotation des grains en augmentant leur moment d'inertie standard permet d'augmenter encore la qualité de la ségrégation, en rendant celle-ci moins coûteuse énergétiquement.
- L'étude des déplacements moyens des grains montre que le degré de ségrégation final est corrélé à de plus grands déplacements des gros grains par rapport aux petits. Elle indique également que les gros grains suivent en bonne approximation un régime diffusif pour des perturbations qui n'apportent pas plus d'énergie mécanique que l'énergie potentielle gravitationnelle de l'agrégat au repos.
- Enfin, une instabilité secondaire, que nous appelons ségrégation angulaire, est observée. Elle se produit suite à la ségrégation radiale et tend à rassembler les gros grains en certaines zones de la surface.

Les diverses suites envisageables pour ce travail, mais non encore réalisées, sont les suivantes :

- une étude systématique du degré de ségrégation radiale pour des simulations à distribution continue en taille des grains ;
- une étude spécifique du phénomène de ségrégation angulaire, pour des distributions binaires mais aussi pour des distributions continues, à l'aide d'un suivi plus poussé de la trajectoire des grains individuels.

Chapitre IV

Topologie modifiée : bande de grains sous expansions transverses

Tous les esprits justes, précis et clairs appartiennent à la géométrie.

Jean Le Rond d'Alembert.

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats concernant l'influence de la topologie de l'agrégat et du champ gravitationnel sur la ségrégation. En effet, un astéroïde granulaire se distingue d'un granulaire terrestre par son champ gravitationnel non parallèle, et de norme non uniforme. Ce chapitre porte donc sur des simulations d'un cas « intermédiaire » : une bande rectangulaire de grains, soumise à un champ gravitationnel parallèle mais de norme non uniforme.

Sommaire

I- Présentation de l'étude . . . **142**
I-1. Motivation et implémentation . . . 142
I-2. Caractéristiques des perturbations . . . 144
I-3. Degré de ségrégation . . . 145
I-4. Comportement sous une perturbation . . . 146
II- Ségrégation verticale . . . **147**
II-1. Observation . . . 147
II-2. Influence du coefficient de frottement . . . 149
II-3. Influence du moment d'inertie . . . 151
II-4. Influences géométriques . . . 153
III- Ségrégation horizontale . . . **158**
III-1. Observation et quantification . . . 158
III-2. Nombre et position des lobes . . . 163
III-3. Dynamique dans la région des petits grains . . . 170
IV- Conclusion . . . **174**

I- Présentation de l'étude

I-1. Motivation et implémentation

Dans le cas d'un astéroïde granulaire sphérique, tel que ceux simulés dans le Chap. III, le champ gravitationnel est central, de la forme $\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r}) = -(gr/R_{\text{ast}})\overrightarrow{e_{\text{r}}}$ où g est l'intensité du champ à la surface et R_{ast} le rayon de l'astéroïde (voir l'Éq. (III.1)). Or, un milieu granulaire terrestre est quant à lui soumis au champ de pesanteur vertical uniforme $\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r}) = -g_0\overrightarrow{e_{\text{z}}}$ avec $g_0 \simeq 9,81$ m.s^{-2}. Cette différence de topologie du champ gravitationnel est de nature à pouvoir induire une dynamique différente selon que l'on étudie la ségrégation en milieu terrestre ou au sein d'un astéroïde. De plus, il existe un cas intermédiaire entre ces deux topologies, qui est celui d'un champ parallèle mais de norme non uniforme sur le milieu granulaire étudié. Formellement, nous souhaitons donc étudier un champ gravitationnel de la forme

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r}) = -g\frac{z}{H_{\text{b}}}\overrightarrow{e_z}, \tag{IV.1}$$

où H_{b} est la demi-hauteur de la bande de grains, et g l'intensité du champ à la surface du milieu. Par ailleurs, nous restons dans le cadre de simulations à deux dimensions. Nous faisons donc évoluer les grains, qui sont des disques, dans une carte à deux dimensions, repérée par (Oxz). Les coordonnées sont telles que x varie de 0 à L et z de $-H$ à H, et nous imposons alors le champ décrit par l'Éq. (IV.1). La ligne $z = 0$ est une ligne de champ nul, par rapport à laquelle la carte de champ gravitationnel est symétrique. Nous aurions également pu imposer un sol infranchissable en $z = 0$, ce qui aurait plus contraint les déplacements des grains. Nous y reviendrons dans la Sec. II-4.b). Géométriquement, on peut imaginer que nous avons coupé l'astéroïde selon un de ses rayons et l'avons « déplié » pour en faire une bande, le centre O devenant la ligne $z = 0$ et la bande étant ensuite rendue symétrique par rapport à cette ligne (voir la Fig. IV.1).

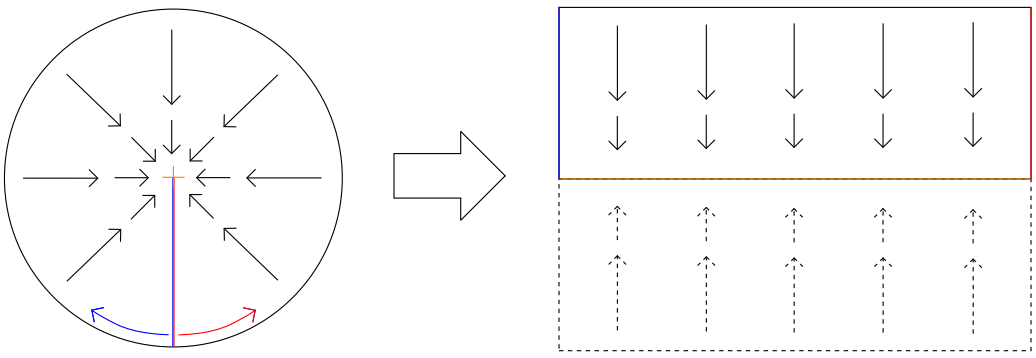
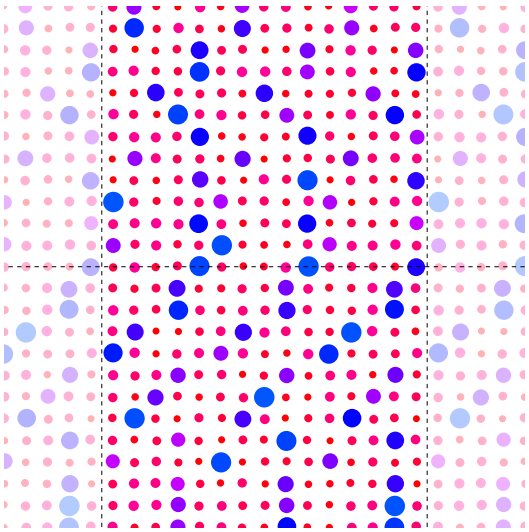


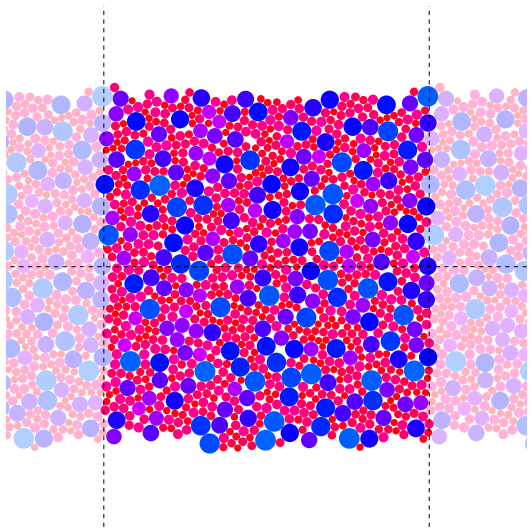
FIGURE IV.1 – Construction géométrique d'une bande de grains à partir du cas circulaire. On coupe l'astéroïde selon un de ses rayons, formant ainsi deux bords (en bleu et rouge), que l'on déplie selon les flèches de couleur pour former la bande à droite. Le champ gravitationnel (en noir) devient donc parallèle et le point O (en orange) devient la ligne $z = 0$. Cette bande est ensuite symétrisée (le symétrique est représenté en lignes tiretées). Remarquons que l'aspect « dépliage » est semblable au passage d'une mappemonde à un planisphère, pour lequel la découpe se fait le long d'un méridien.

Cela pose d'ailleurs la question du traitement des bords de la bande, puisque dans le point de

vue géométrique que nous venons de décrire, ils correspondent à un même segment de l'astéroïde. Pour prendre cela en compte, nous appliquons des conditions aux limites périodiques (CLP) en $x = 0$ et $x = L$. Cela fait que lorsqu'un grain de rayon R_i a pour position $x_i \geq (L - R_i)$, il peut être en contact avec un grain de rayon R_j situé en $x_j \leq R_j$. De même, si la trajectoire d'un grain i fait qu'à un instant t, il sort de la carte par la droite, c'est-à-dire $x_i(t) < L$ mais $x_i(t + \mathrm{d}t) = L + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, alors on le fait revenir dans la carte par la gauche, c'est-à-dire que l'on impose $x_i(t + \mathrm{d}t) = \varepsilon$. Tout se passe donc comme si le milieu granulaire était périodiquement dupliqué à l'infini selon (Ox). Signalons que si L est trop faible, cela peut poser problème car les grains se « voient » alors eux-mêmes au cours de leur déplacement. Il faut typiquement que L soit plus important que la distance caractéristique d'amortissement d'une onde acoustique dans le milieu. Par ailleurs, le changement de géométrie par rapport au Chap. III se traduit par l'adoption d'un processus différent pour l'attribution des positions initiales des grains. Naturellement, on tend à disposer les grains selon un réseau périodique en x et z. Cependant, le champ gravitationnel rigoureusement vertical mènerait alors à des piles verticales de grains complètement indépendantes les unes des autres. Nous reprenons donc cette idée, mais en ajoutant de légers écarts aléatoires à ces positions périodiques. Nous plaçons par ailleurs un nombre quasi égal de grains dans la région $z < 0$ et dans la région $z > 0$ (voir la Fig. IV.2a). Ainsi, en laissant simplement évoluer les grains dans le champ $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ imposé, nous obtenons une bande de grains centrée sur $z = 0$ (voir la Fig. IV.2b).



(a) Disposition initiale des grains.



(b) Aperçu de la bande une fois les grains rassemblés sous l'effet du champ imposé.

FIGURE IV.2 – Implémentation d'une bande comportant $N = 1000$ grains soumis à un champ parallèle de norme non uniforme. La ligne tiretée horizontale repère la position $z = 0$, pour laquelle le champ est nul. Les lignes tiretées verticales repèrent les positions $x = 0$ et $x = L$, liées par les conditions aux limites périodiques (CLP). On a représenté en couleurs atténuées les grains traduisant ces CLP. Ces conventions seront les mêmes pour toutes les images de bandes de grains présentées dans ce chapitre.

Notons enfin que nous reprenons la distribution en taille binaire illustrée par l'histogramme de la Fig. II.1a. Comme dans la plupart des simulations du Chap. III, nous aurons donc $N_\mathrm{g} \simeq N/5$ gros grains de rayon réduit $\overline{R}_i \in [0,8; 1,2]$ et $N_\mathrm{p} \simeq 4N/5$ petits grains de rayon réduit

$\overline{R}_i \in [0,4;0,6]$. Cependant, nous nous réservons ici la possibilité d'augmenter N afin d'avoir plus de grains et d'étudier une bande de longueur L plus importante et de même demi-hauteur H_b. Enfin, les perturbations appliquées au milieu granulaire sont de la même nature que dans le Chap. III, à savoir des inversions de $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ sur une durée T_s, avec un délai T entre les débuts de deux inversions successives. Cela étant, compte tenu de la topologie différente de $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, il nous faut adapter les expressions concernant l'expansion de la bande et l'énergie apportée par une perturbation.

I-2. Caractéristiques des perturbations

Concernant l'expansion de la bande sous l'effet d'une perturbation, le calcul est en fait exactement le même que dans le cas d'un agrégat circulaire (voir la Sec. I-1.b) du Chap. III), avec $|z|$ jouant ici le rôle de la coordonnée r et H_b jouant le rôle de R_ast. Nous trouvons donc, en notant $h_\mathrm{max}(t) = \max_{i\in[|1,N|]}\{|z_i(t)|\}$ et t_max l'instant où les grains sont en moyenne les plus éloignés de $z=0$, l'expression suivante :

$$\frac{h_\mathrm{max}(t_\mathrm{max})}{h_\mathrm{max}(0)} = \sqrt{\mathrm{ch}\left(2\sqrt{\frac{g}{H_\mathrm{b}}}T_\mathrm{s}\right)}. \tag{IV.2}$$

De même, l'énergie mécanique apportée par une perturbation à un grain i de masse m_i et situé en $z_i(0)$ au début de la perturbation est donnée par :

$$\Delta E_{\mathrm{m},i} = \frac{g m_i}{H_\mathrm{b}} z_i(0)^2 \mathrm{sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{H_\mathrm{b}}}T_\mathrm{s}\right). \tag{IV.3}$$

La différence avec le cas d'un agrégat circulaire se fait essentiellement lors de l'intégration de cette équation sur l'ensemble des grains de la bande, la géométrie étant ici différente. En traitant la bande comme un milieu continu, l'énergie mécanique totale ΔE_tot fournie à la bande par une perturbation peut s'approximer par :

$$\Delta E_\mathrm{tot} = \int_\mathrm{bande} \frac{g z^2}{H_\mathrm{b}} \mathrm{sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{H_\mathrm{b}}}T_\mathrm{s}\right) \mathrm{d}m = 2\int_{z=0}^{H_\mathrm{b}} \frac{g z^2}{H_\mathrm{b}}\, \mathrm{sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{H_\mathrm{b}}}T_\mathrm{s}\right) \times \rho_\mathrm{b} L \mathrm{d}z, \tag{IV.4}$$

où $\rho_\mathrm{b} = M_\mathrm{b}/(2LH_\mathrm{b})$ est la masse surfacique globale de la bande, $M_\mathrm{b} = \sum_{i\in[|1,N|]} m_i$ étant sa masse totale. Nous obtenons alors l'expression suivante :

$$\Delta E_\mathrm{tot} = \frac{1}{3} M_\mathrm{b} g H_\mathrm{b}\, \mathrm{sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{H_\mathrm{b}}}T_\mathrm{s}\right). \tag{IV.5}$$

Ce résultat est très proche de l'Éq. (III.15) donnant l'expression de ΔE_tot pour un agrégat circulaire, avec H_b et M_b dans les rôles de R_ast et M_ast respectivement. Seul le préfacteur géométrique change : il vaut ici $1/3$, contre $1/2$ dans le cas circulaire. Théoriquement, la physique des perturbations est donc très proche. Néanmoins, nous sommes ici en présence d'une expansion transverse à l'axe (Ox), et non plus isotrope. Durant cette expansion, les grains restent donc globalement en contact selon (Ox), tandis qu'ils s'éloignaient les uns des autres dans le cas circulaire (comme on le voyait sur la Fig. III.2).

Puisque nous cherchons par l'étude d'une bande de grains à nous placer dans une topologie intermédiaire entre un champ gravitationnel central et le champ de pesanteur terrestre parallèle et uniforme, il est également intéressant de calculer ΔE_{tot} pour ce dernier cas. Supposons cette fois-ci que nous imposons un champ $\overrightarrow{\mathcal{G}} = -g_0\overrightarrow{e_z}$ aux grains situés dans la région $z > 0$, et $\overrightarrow{\mathcal{G}} = +g_0\overrightarrow{e_z}$ à ceux situés dans la région $z < 0$. Si ce champ est inversé à partir de $t = 0$ et pour une durée T_s, alors un grain i donné vérifie, pour $t \in [0, T_\text{s}]$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\mathrm{d}t^2} = g_0 \text{ si } z_i > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\mathrm{d}t^2} = -g_0 \text{ si } z_i < 0. \tag{IV.6}$$

Les deux cas étant symétriques, plaçons nous dans le cas où $z_i > 0$. Nous avons alors $z_i(T_\text{s}) = z_i(0) + g_0 {T_\text{s}}^2/2$ car la bande était au repos à $t = 0$. Pour $t > T_\text{s}$, on a $\ddot{z}_i(t) = -g_0$, donc $\dot{z}_i(t) = -g_0(t - T_\text{s}) + \dot{z}_i(T_\text{s}) = -g_0(t - 2T_\text{s})$. Ainsi, la bande atteint son expansion maximale pour $t_{\max} = 2T_\text{s}$ et le grain i vérifie alors $z_i(t_{\max}) = z_i(0) + g{T_\text{s}}^2$ et $\dot{z}_i(t_{\max}) = 0$. Par conséquent, la perturbation a fourni au grain i une énergie mécanique supplémentaire $\Delta E_{\text{m},i} = m_i g^2 {T_\text{s}}^2$. On en déduit immédiatement l'énergie mécanique totale fournie à la bande :

$$\Delta E_{\text{tot,unif}} = M_\text{b} g^2 {T_\text{s}}^2. \tag{IV.7}$$

Ainsi, du point de vue de l'énergie injectée, le cas où $\overrightarrow{\mathcal{G}} \propto z\overrightarrow{e_z}$ présente un comportement plus proche du cas où $\overrightarrow{\mathcal{G}} \propto r\overrightarrow{e_r}$ que du cas où $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ est parallèle uniforme.

I-3. Degré de ségrégation

Le changement de géométrie implique également une légère redéfinition du degré de ségrégation dans le cadre du présent chapitre. Nous reprenons la définition du degré de ségrégation (non normalisé) ψ donnée par l'Éq. (III.17), en remplaçant la distance au centre r par la distance à la ligne de champ nul $|z|$:

$$\psi = \frac{\langle |z|_\text{g} \rangle}{\langle |z|_\text{t} \rangle}, \tag{IV.8}$$

où $\langle |z|_\text{g} \rangle$ est la distance moyenne des gros grains à la ligne $z = 0$, et $\langle |z|_\text{t} \rangle$ est la distance moyenne de tous les grains à cette ligne. Comme dans le cas circulaire (voir l'Éq. (III.18)), ces moyennes sont pondérées par les carrés des rayons des grains. Il nous reste à déterminer la valeur $\psi_{\max}$ atteinte par ψ pour une bande totalement ségrégée. Nous notons toujours α_A la fraction en aire couverte par les gros grains. Une bande totalement ségrégée, traitée comme un milieu continu, présente alors des petits grains entre $z = -(1-\alpha_\text{A})H_\text{b}$ et $z = (1-\alpha_\text{A})H_\text{b}$ et des gros grains dans les zones $z \in [-H_\text{b}, -(1-\alpha_\text{A})H_\text{b}]$ et $z \in [(1-\alpha_\text{A})H_\text{b}, H_\text{b}]$. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{i,\text{gros}} {R_i}^2 |z_i| &= 2\int_{z=(1-\alpha_\text{A})H_\text{b}}^{H_\text{b}} z\mathrm{d}S = 2L\int_{z=(1-\alpha_\text{A})H_\text{b}}^{H_\text{b}} z\mathrm{d}z = 2\alpha_\text{A} L {H_\text{b}}^2 \left(1 - \frac{\alpha_\text{A}}{2}\right), \\ \sum_{i,\text{gros}} {R_i}^2 &= 2\alpha_\text{A} L H_\text{b}. \end{aligned} \tag{IV.9}$$

Dans l'état totalement ségrégé, on a donc

$$\langle |z|_\text{g} \rangle = H_\text{b}\left(1 - \frac{\alpha_\text{A}}{2}\right). \tag{IV.10}$$

Par ailleurs, nous trouvons également :

$$\begin{aligned} \sum_{i\in[\![1,N]\!]} {R_i}^2|z|_i &= 2\int_{z=0}^{H_\mathrm{b}} z\mathrm{d}S = 2L\int_{z=0}^{H_\mathrm{b}} z\mathrm{d}z = L{H_\mathrm{b}}^2, \\ \sum_{i\in[\![1,N]\!]} {R_i}^2 &= 2LH_\mathrm{b}. \end{aligned} \tag{IV.11}$$

Nous avons donc $\langle|z|_\mathrm{t}\rangle = H_\mathrm{b}/2$, soit finalement :

$$\psi_\mathrm{max} = 2 - \alpha_\mathrm{A}. \tag{IV.12}$$

Dans ce chapitre, nous avons systématiquement $\alpha_\mathrm{A} = 0,5$, ce qui donne $\psi_\mathrm{max} = 1,5$. Nous utilisons cette valeur pour définir le degré de ségrégation normalisé Ψ dans le cas d'une bande :

$$\Psi = \frac{\psi - 1}{\psi_\mathrm{max} - 1}. \tag{IV.13}$$

I-4. Comportement sous une perturbation

À la manière de ce que nous avions présenté dans le Chap. III, il est intéressant de suivre l'évolution de la demi-hauteur de la bande, définie par $h_\mathrm{max}(t) = \max_{i\in[\![1,N]\!]}\{|z_i|(t)\}$, et du degré de ségrégation Ψ suite à une perturbation (voir la Fig. IV.3).

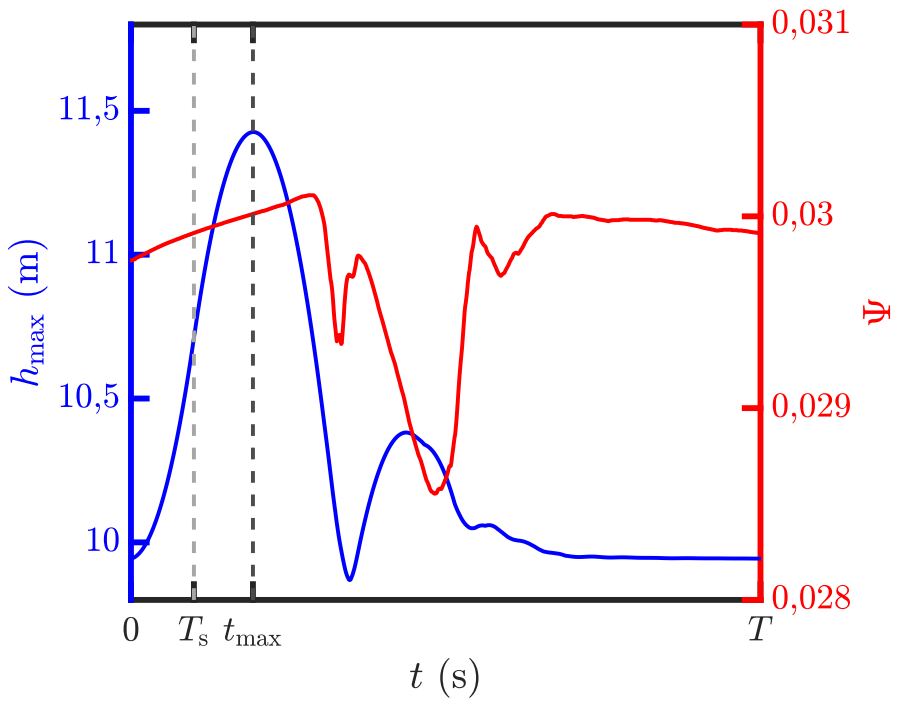


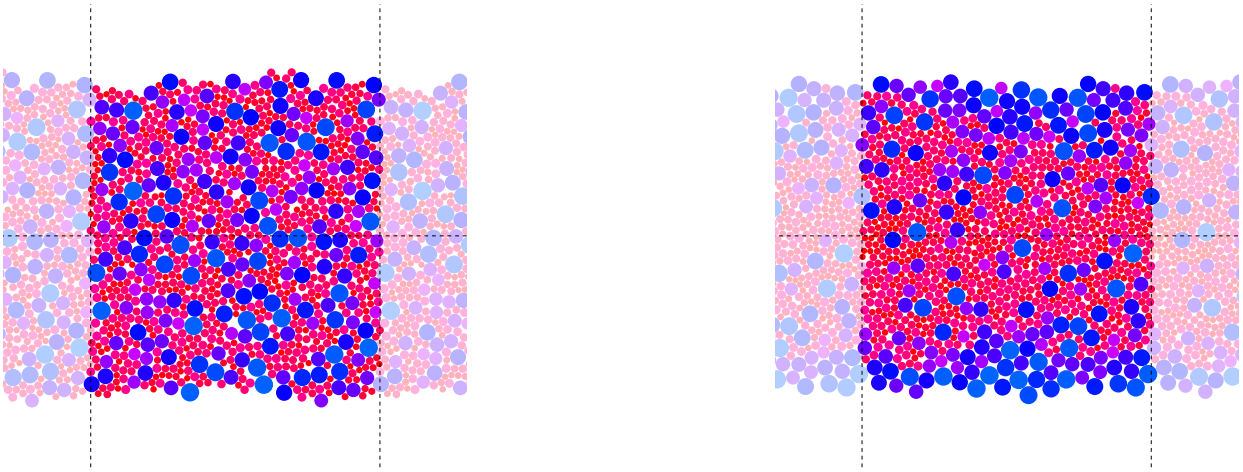
FIGURE IV.3 – Tracé de h_max (en bleu) et Ψ (en rouge) entre deux débuts de perturbations successifs $t = 0$ et $t = T$. Les lignes tiretées repèrent la fin de l'inversion du champ gravitationnel imposé, à $t = T_\mathrm{s}$ (en gris), et l'instant d'expansion maximale de la bande à $t = t_\mathrm{max}$ (en noir). Ces données concernent une simulation à $e = 0,51$, $T_\mathrm{s} = 1,25$ s et $\mu = 0,5$.

Tout d'abord, nous pouvons mesurer l'expansion de la bande de grains sous une secousse. Contrairement au cas d'un agrégat circulaire, la perturbation n'est plus isotrope : ici l'inversion du champ accélère tous les grains selon la verticale uniquement. Certains grains peuvent donc rester en contact, et donc subir les effets dissipatifs de ces contacts. Nous pourrions donc nous attendre à ce que l'expansion réelle de la bande n'atteigne pas celle prévue par l'Éq. (IV.2), qui ne prend en compte aucune dissipation. Dans la simulation considérée sur la Fig. IV.3, nous avons paramétré le champ gravitationnel imposé avec $g = 1$ m.s^{-2} et $H_\mathrm{b} = 11$ m. L'Éq. (IV.2) prédit alors $h_\mathrm{max}(t_\mathrm{max})/h_\mathrm{max}(0) \simeq 1,14$, et nous mesurons dans la simulation $h_\mathrm{max}(t_\mathrm{max})/h_\mathrm{max}(0) = 1,15$. Nous sommes donc en réalité dans le même cas de figure que pour un agrégat circulaire, avec visiblement la conversion en énergie cinétique d'une partie de l'énergie potentielle élastique liée à la compression des grains selon (Oz) dans la bande au repos, et un effet négligeable du frottement solide durant la phase d'expansion. Par ailleurs, nous observons que c'est durant les phases de recollisions entre grains, donc au moment où les réarrangements se produisent, que le degré de ségrégation évolue. Le principal mécanisme à l'origine d'une éventuelle ségrégation verticale dans la bande serait donc l'effet des réarrangements, comme pour la ségrégation radiale dans les agrégats circulaires. Voyons maintenant ce qu'il en est concernant la survenue d'une ségrégation verticale.

II- Ségrégation verticale

II-1. Observation

Tout d'abord, nous observons qu'une ségrégation verticale se produit, phénomène analogue à la ségrégation radiale des agrégats circulaires (voir la Fig. IV.4).

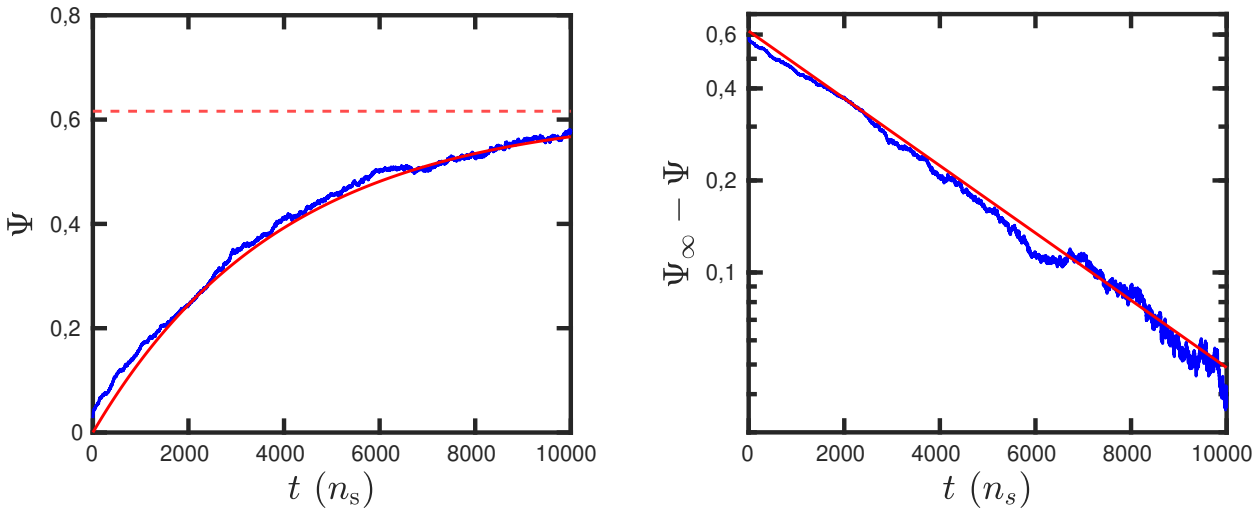


(a) État initial. (b) État après 10000 secousses.

FIGURE IV.4 – Illustration de la ségrégation verticale dans une bande de grains. La simulation représentée ici correspond au choix de paramètres $e = 0,51$, $T_\mathrm{s} = 1,25$ s, $\mu = 0,8$ et $J^* = 1$.

Pour la simulation représentée, les paramètres sont $e = 0,51$, $T_\mathrm{s} = 1,25$ s, $\mu = 0,8$ et $J^* = 1$. Par ailleurs, le tracé du degré de ségrégation Ψ en fonction du temps t exprimé en nombre de secousses permet de constater que celui-ci semble de nouveau suivre une cinétique d'ordre 1, tout comme pour les agrégats circulaires. Cette dynamique est très robuste, puisque

nous la retrouvons aussi pour les autres valeurs de T_s, μ et J^* que nous avons explorées. Nous réaliserons donc des ajustements de la forme $\Psi(t) = \Psi_\infty(1 - \exp(-t/\tau))$ dans le cadre de ce chapitre (voir la Fig. IV.5).



(a) Évolution de Ψ en fonction de t.

(b) Évolution de $\Psi_\infty - \Psi$ en fonction de t, en échelle logarithmique.

FIGURE IV.5 – Dynamique du degré de ségrégation Ψ pour la simulation illustrée sur la Fig. IV.4. Les données sont en bleu, l'ajustement de la forme $\Psi(t) = \Psi_\infty(1 - \exp(-t/\tau))$ en rouge et la ligne tiretée rouge représente Ψ_∞. Nous trouvons $\Psi_\infty = 0,616$ et $\tau = 3945$ n_s.

La représentation de $\Psi_\infty - \Psi$ en échelle logarithmique, en fonction de t, appuie notre modélisation par une cinétique d'ordre 1 (voir la Fig. IV.5b). Nous allons donc appliquer les mêmes modélisations que dans le Chap. III, toujours en prenant en compte quatre « graines » par jeu de paramètres. Pour rappel, le choix de la graine fixe la répartition aléatoire des tailles de grains (voir la Sec. II-3.b) du Chap. III) mais aussi les petits écarts aléatoires que font leurs positions initiales par rapport à un réseau carré rigoureusement périodique. La simulation présentée sur les Fig. IV.4 et IV.5 correspond par exemple à la graine 2. Les résultats des ajustements pour les trois autres graines, à paramètres physiques égaux, sont donnés dans la Tab. IV.1.

Graine	Ψ_∞	τ (n_s)
1	$0,676$	5148
2	$0,616$	3945
3	$0,741$	6122
4	$0,732$	5910

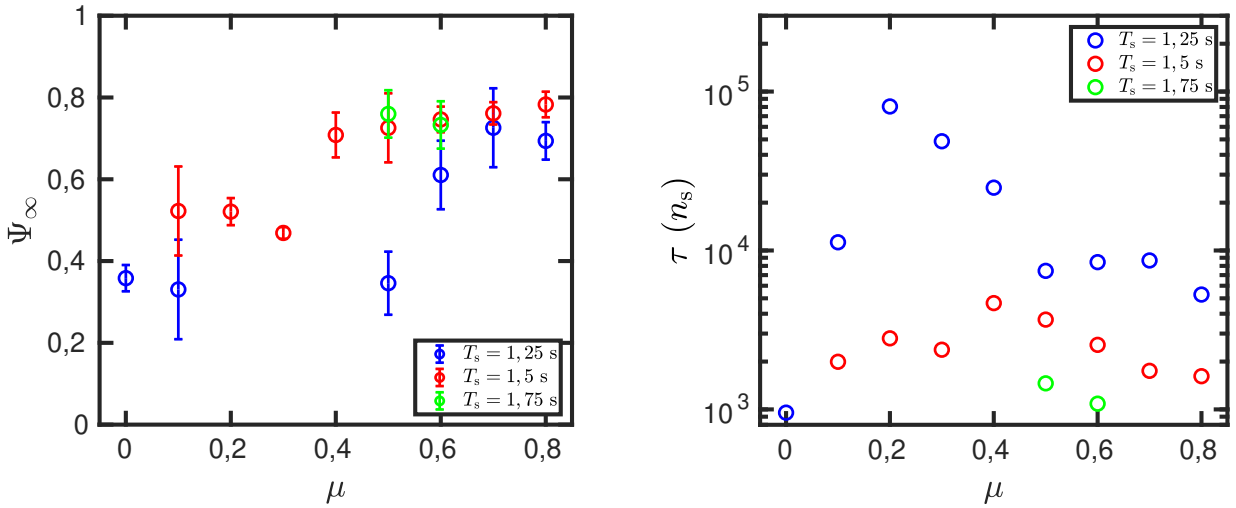
TABLE IV.1 – Résultats des ajustements pour quatre graines différentes, les autres paramètres étant $e = 0,51$, $T_s = 1,25$ s, $e = 0,51$, $\mu = 0,8$ et $J^* = 1$.

Nous adoptons la même méthode que dans le Chap. III, à savoir que nous calculons Ψ_∞ et τ par moyennage sur les quatre graines, et les incertitudes associées avec l'écart-type sur les quatre graines. Pour les paramètres considérés ici, nous avons donc $\Psi_\infty = 0,691 \pm 0,050$ et $\tau = (5531 \pm 1108)$ n_s. Enfin, la valeur du coefficient de restitution en vitesse e des collisions

entre grains ne sera plus mentionnée dans ce chapitre, puisque nous fixons $e = 0,51$ pour toutes les simulations de bandes de grains. Néanmoins, d'autres paramètres comme le coefficient de frottement μ et le moment d'inertie standard J^* jouaient un rôle important dans le cas des agrégats circulaires, et nous proposons donc d'examiner leur influence dans le cadre de la géométrie adoptée ici.

II-2. Influence du coefficient de frottement

Nous étudions dans un premier temps l'influence du coefficient de frottement μ, en explorant les valeurs de $0,1$ à $0,8$ par incréments de $0,1$ pour $T_s = 1,25$ s et $1,5$ s. Nous avons également effectué des simulations à $\mu = 0$ pour $T_s = 1,25$ s, et $\mu = 0,5$ et $0,6$ pour $T_s = 1,75$ s. Pour toutes ces simulations, nous travaillons avec $g = 1$ m.s^{-2} à la surface de la bande, ainsi qu'avec le moment d'inertie physique des grains, autrement dit $J^* = 1$. Les résultats concernant l'évolution de Ψ_∞ et τ en fonction de μ sont présentés sur la Fig. IV.6.



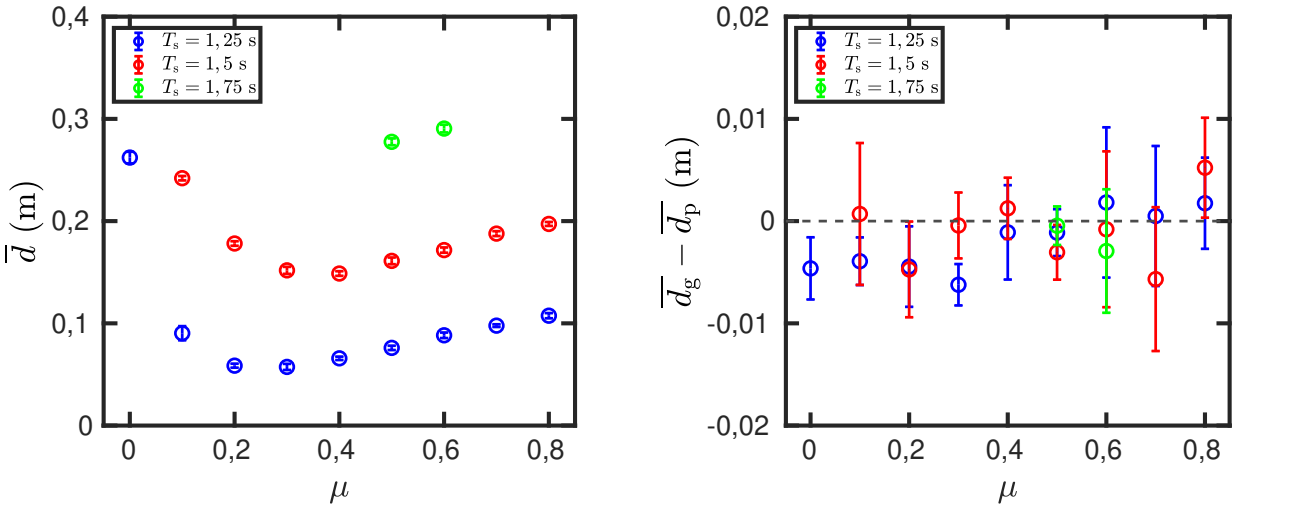
(a) Évolution de Ψ_∞ en fonction de μ.

(b) Évolution de τ en fonction de μ, en échelle logarithmique.

FIGURE IV.6 – Dépendance des quantités caractéristisques de la ségrégation en fonction du coefficient de frottement.

Signalons le cas des simulations à $\mu = 0,2$ $0,3$ et $0,4$ pour $T_s = 1,25$ s, pour lesquelles la ségrégation est extrêmement lente, au point qu'un ajustement exponentiel sur les 10000 premières secousses n'est plus pertinent. En effet, le modèle $\Psi(t) = \Psi_\infty(1 - \exp(-t/\tau))$ s'approxime par $\Psi(t) = \Psi_\infty t/\tau$ pour $t \ll \tau$. Nous ne pouvons donc pas déterminer de façon unique Ψ_∞ et τ pour ces simulations. Néanmoins, les valeurs de Ψ_∞ mesurées pour $\mu = 0$, $0,1$ et $0,5$ sont très proches, et de moyenne $\simeq 0,34$ (voir la Fig. IV.6a). Nous proposons donc une estimation de τ obtenue par un simple ajustement affine de $\Psi(t)$ et en supposant que $\Psi_\infty = 0,34$ pour $\mu = 0,2$, $0,3$ et $0,4$. Dans ce cadre, les trois points ayant les ordonnées les plus élevées sur la Fig. IV.6b sont à manier avec précaution, et donnent surtout une estimation de l'ordre de grandeur de τ dans ces cas de ségrégation extrêmement lente. Nous retrouvons des propriétés mises en avant dans le cas des agrégats circulaires, à savoir que Ψ_∞ augmente globalement avec

μ à T_s donné. Les valeurs sont d'ailleurs sensiblement les mêmes puisque Ψ_∞ évolue dans l'intervalle $[0,3;0,7]$ pour $T_s = 1,25$ s, exactement comme dans le cas circulaire (voir la Fig. IV.6a, à comparer avec la Fig. III.18). En matière de qualité finale de la ségrégation, le fait d'avoir un champ parallèle ou central semble donc avoir peu d'influence. Concernant l'évolution de τ, on constate un nouveau point commun avec le cas circulaire, vu qu'il est maximal autour de $\mu = 0,3$. Néanmoins, τ s'établit environ un ordre grandeur au-dessus de la valeur qu'il prend dans le cas circulaire à paramètres physiques égaux, et ce pour tous les couples (T_s, μ) envisagés ici (voir la Fig. IV.6b, à comparer avec la Fig. III.19a). Il semble donc que le fait d'avoir un champ parallèle plutôt que central ralentisse la ségrégation, très certainement en ralentissant les réarrangements. En effet, cette fois-ci les grains sont tous déplacés selon un même axe. Cela diminue, par rapport au cas d'une expansion isotrope, la possibilité pour les petits grains de s'immiscer entre deux gros grains. Pour étudier la pertinence de cette analyse, nous proposons d'observer les déplacements moyens des grains sur une secousse, calculés pour les τ premières secousses de chaque simulation (voir la Sec. II-4. du Chap. III pour les définitions formelles). L'évolution de $\overline{d}$ et de $\overline{d_g} - \overline{d_p}$ (différence de déplacements moyens entre gros et petits grains) en fonction de μ est représentée sur la Fig. IV.7.



(a) Évolution de $\overline{d}$ en fonction de μ.

(b) Évolution de $\overline{d_g} - \overline{d_p}$ en fonction de μ. La ligne tiretée noire correspond au cas $\overline{d_g} = \overline{d_p}$.

FIGURE IV.7 – Dépendance des déplacements moyens des grains suite à une perturbation en fonction du coefficient de frottement.

Concernant $\overline{d}$, nous observons une allure très proche de celle obtenue dans le cas des agrégats circulaires, avec ici un minimum en $\mu = 0,3$ pour $T_s = 1,25$ s et en $\mu = 0,4$ pour $T_s = 1,5$ s. De plus, $\overline{d}$ augmente avec la durée T_s de la perturbation à μ fixé, ce qui est attendu. Remarquons que les valeurs obtenues ici pour $T_s = 1,5$ s sont proches de celles obtenues pour $T_s = 1,25$ s dans le cas circulaire (voir la Fig. III.20). En revanche, la valeur $T_s = 1,25$ s donne ici des déplacements environ deux fois plus faibles que dans le cas circulaire, pour toutes les valeurs de μ. Cela traduit le fait qu'à paramètres physiques T_s et μ fixés, la topographie du champ permet des réarrangements plus ou moins importants sur les τ premières secousses. En l'occurrence, un champ central permet des réarrangements plus importants, et donc des ségrégations plus rapides, qu'un champ parallèle. Cela tient essentiellement au fait que nos

perturbations consistent à inverser ce champ durant un bref intervalle de temps, et éloignent donc plus les grains les uns des autres si le champ est central que s'il est parallèle. Nous avions identifié dans le Chap. III deux régimes de perturbations suivant que l'énergie mécanique ΔE_{tot} injectée lors d'une perturbation est plus ou moins importante que l'énergie potentielle gravitationnelle initiale $E_{\text{pg,tot}}$ de l'agrégat. Dans le cas d'une bande de grains traitée comme un milieu continu, avec une masse surfacique moyenne $\rho_{\text{surf}} = M_{\text{b}}/(2LH_{\text{b}})$, nous avons :

$$E_{\text{pg,tot}} = \int_{\text{bande}} V_{\text{grav}}(z)\mathrm{d}m = 2\int_{z=0}^{H_{\text{b}}} \frac{1}{2}\frac{gz^2}{H_{\text{b}}}\rho_{\text{surf}} L\mathrm{d}z = \frac{1}{6}M_{\text{b}}H_{\text{b}}g. \tag{IV.14}$$

En utilisant les Éq. (IV.5) et (IV.14), on remarque donc que :

$$\frac{\Delta E_{\text{tot}}}{E_{\text{pg,tot}}} = 2\ \text{sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{H_{\text{b}}}}T_{\text{s}}\right). \tag{IV.15}$$

À paramètres g et T_{s} égaux, et pour $H_{\text{b}} = R_{\text{ast}}$ (ce qui est notre cas), le ratio $\Delta E_{\text{tot}}/E_{\text{pg,tot}}$ est donc le même dans la configuration en bande que pour un agrégat circulaire. Ainsi, il atteint ici au mieux $0,61$, pour $T_{\text{s}} = 1,75$ s (avec $g = 1$ m.s^{-2} et $H_{\text{b}} = 11$ m). Toutes les simulations présentées se placent donc dans un régime de « faibles perturbations » du point de vue énergétique.

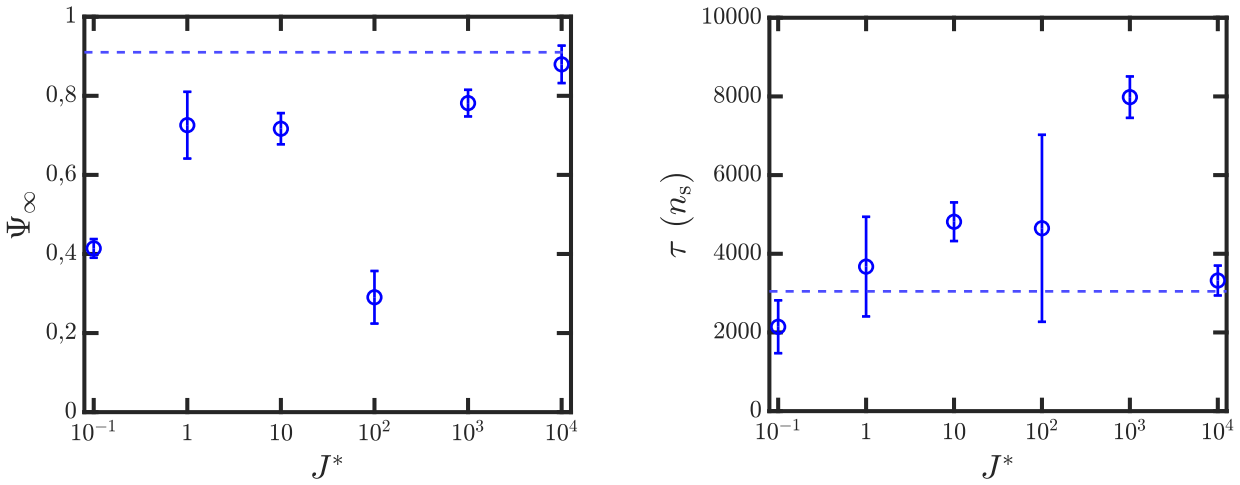
Par ailleurs, nous n'observons pas ici de différence significative de déplacement entre gros et petits grains, les valeurs restant comprises entre $-0,005$ m et $+0,005$ m pour tous les paramètres explorés (voir la Fig. IV.7b). Néanmoins, nous trouvons beaucoup plus de valeurs négatives de $\overline{d_{\text{g}}} - \overline{d_{\text{p}}}$ que dans le cas circulaire, nous y reviendrons dans la Sec. II-3.. Enfin, l'évolution de $\overline{d_{\text{g}}} - \overline{d_{\text{p}}}$ avec μ est beaucoup moins marquée que dans le cas circulaire (voir la Fig. III.21b pour comparaison), notamment si $T_{\text{s}} = 1,5$ s, valeur pour laquelle aucune monotonie ne se dégage ici.

Nous proposons maintenant d'étudier l'influence du degré de liberté en rotation dans le cadre de la géométrie de la bande de grains.

II-3. Influence du moment d'inertie

Nous observons l'influence du moment d'inertie en modifiant le préfacteur J^* qui intervient dans la formule $J_i = m_i {R_i}^2/2$ donnant le moment d'inertie J_i d'un grain bidimensionnel (disque) de masse m_i et de rayon R_i. Comme dans le Chap. III, nous explorons les valeurs $J^* = 10^n$ avec $n \in [|-1, 4|]$ et effectuons également des simulations où la rotation des grains est rigoureusement inexistante, correspondant à la limite $J^* \to +\infty$. Dans le cas des paramètres $T_{\text{s}} = 1,5$ s et $\mu = 0,5$, nous représentons les résultats obtenus concernant Ψ_∞ et τ sur la Fig. IV.8.

Nous constatons des évolutions globalement proches de celles obtenues dans le cas d'un agrégat circulaire : tout d'abord, Ψ_∞ augmente avec J^* jusqu'à atteindre des valeurs assez proches de 1 pour $J^* \to +\infty$. De plus, τ augmente dans un premier temps avec J^*, atteint un maximum en $J^* = 10^3$ puis diminue de nouveau jusqu'à une valeur comparable au cas physique $J^* = 1$. Notons tout de même le cas particulier des données à $J^* = 10^2$: le degré de ségrégation Ψ_∞ subit un décrochage très marqué (voir la Fig. IV.8a) tandis que les temps typiques de ségrégation diffèrent fortement entre les quatre graines, menant à une incertitude très importante (voir la Fig. IV.8b). Ces observations étaient complètement absentes dans le cas d'agrégats circulaires. Pour rappel, nous avions évoqué le mécanisme global suivant : lorsque J^* augmente de 1 à 10^2, la rotation est entravée et les grains deviennent moins mobiles durant



(a) Évolution de Ψ en fonction de J^*.

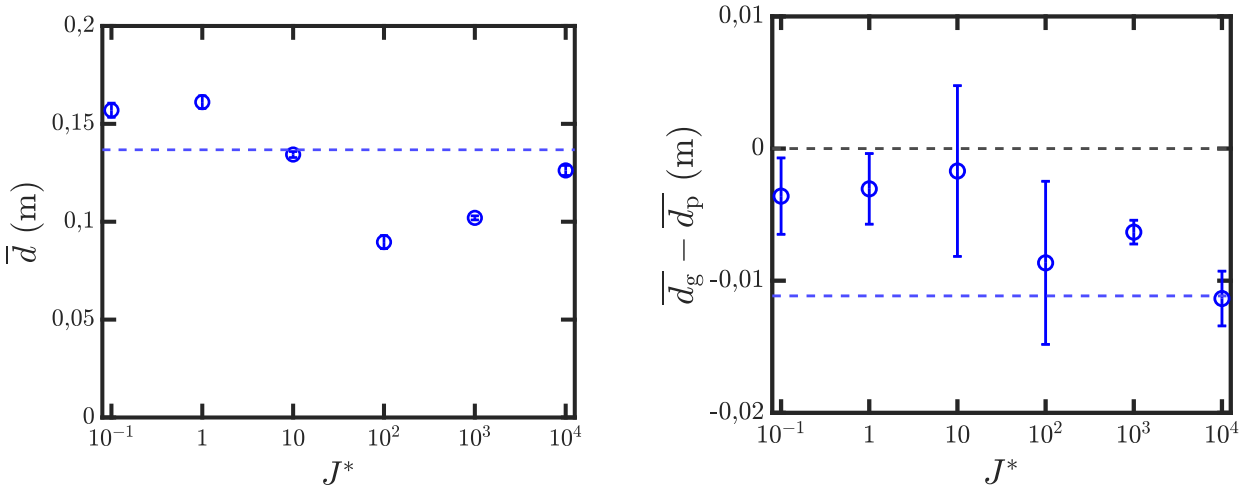
(b) Évolution de τ en fonction de J^*.

FIGURE IV.8 – Dépendance des quantités caractéristiques de la ségrégation en fonction du moment d'inertie standard J^*. Les paramètres $T_s = 1,5$ s et $\mu = 0,5$ sont fixés et communs à toutes les données. Sur chaque graphique, la ligne tiretée bleue représente la valeur mesurée pour des vitesses de rotation maintenues rigoureusement nulles, correspondant à la limite $J^* \to +\infty$.

une secousse. Mais au-delà de $J^* \simeq 10^2$, la faiblesse de la rotation permet un gain énergétique important dans le cas d'états très ségrégés, de sorte que les grains peuvent utiliser plus d'énergie pour vaincre les forces de frottement et sont de nouveau plus mobiles sur une secousse. Ce mécanisme à deux régimes semble être reproduit dans la géométrie d'une bande de grains, avec toutefois ici un « entre-deux » dans le cas où $J^* = 10^2$. La rotation est déjà très entravée, et il faut ajouter à cela le fait que la géométrie contraint plus les réarrangements que dans le cas circulaire, puisque les gros grains doivent désormais tous migrer selon la même direction pour donner un état ségrégé. Les réarrangements sont donc compliqués et la ségrégation devient très incertaine : c'est pourquoi elle est globalement bien moins efficace, et se développe sur un temps typique assez sensible aux conditions initiales. Aux plus grandes valeurs de J^*, le gain énergétique bénéficiant aux degrés de liberté en translation arrive toutefois à l'emporter sur la difficulté qu'ont les grains à rouler les uns sur les autres, et on retrouve alors les observations du cas circulaire. Il est intéressant de confronter cette analyse aux valeurs des déplacements moyens des grains en fonction de J^* (voir la Fig. IV.9).

Ces données vont dans le sens de notre explication, en effet les déplacements moyens $\overline{d}$ des grains sur les τ premières secousses sont minimaux pour $J^* = 10^2$, et ne sont eux pas du tout dispersés en fonction de la graine considérée. Il semble donc bien y avoir une difficulté importante pour les grains à se réarranger lorsque $J^* = 10^2$, dans le cas de la géométrie de la bande de grains. Nous remarquons également que les petits grains sont plus mobiles que les gros grains ($\overline{d_p} > \overline{d_g}$) pour toutes les valeurs de J^*. Par ailleurs, nous avions également $\overline{d_p} > \overline{d_g}$ pour beaucoup plus de couples (T_s, μ) à $J^* = 1$, que dans le cas d'agrégats circulaires (voir la Fig. IV.7b). Cela traduit bien la difficulté supplémentaire pour les gros grains de migrer vers la surface dans la géométrie de la bande, comme nous l'avons envisagé.

L'étude des influences de μ et J^* indique donc que le passage d'un champ central à un champ parallèle a essentiellement pour effet de restreindre les possibilités de déplacement des



(a) Évolution de $\overline{d}$ en fonction de J^*.

(b) Évolution de $\overline{d_g} - \overline{d_p}$ en fonction de J^*. La ligne tiretée noire représente le cas $\overline{d_g} = \overline{d_p}$.

FIGURE IV.9 – Dépendance des déplacements moyens des grains en fonction du moment d'inertie standard J^*. Les paramètres $T_s = 1,5$ s et $\mu = 0,5$ sont fixés et communs à toutes les données. Sur chaque graphique, la ligne tiretée bleue représente la valeur mesurée pour des vitesses de rotation maintenues rigoureusement nulles, correspondant à la limite $J^* \to +\infty$.

gros grains par rapport aux petits grains, entraînant l'existence d'un régime autour de $J^* = 10^2$ (pour $\mu = 0,5$ et $T_s = 1,5$ s) dans lequel la ségrégation est très compliquée. Dans les autres cas, les comportements observés suivent globalement les mêmes mécanismes qu'au sein des agrégats circulaires. Nous proposons par ailleurs quelques études supplémentaires concernant la géométrie du champ gravitationnel d'une part et de la bande de grains d'autre part.

II-4. Influences géométriques

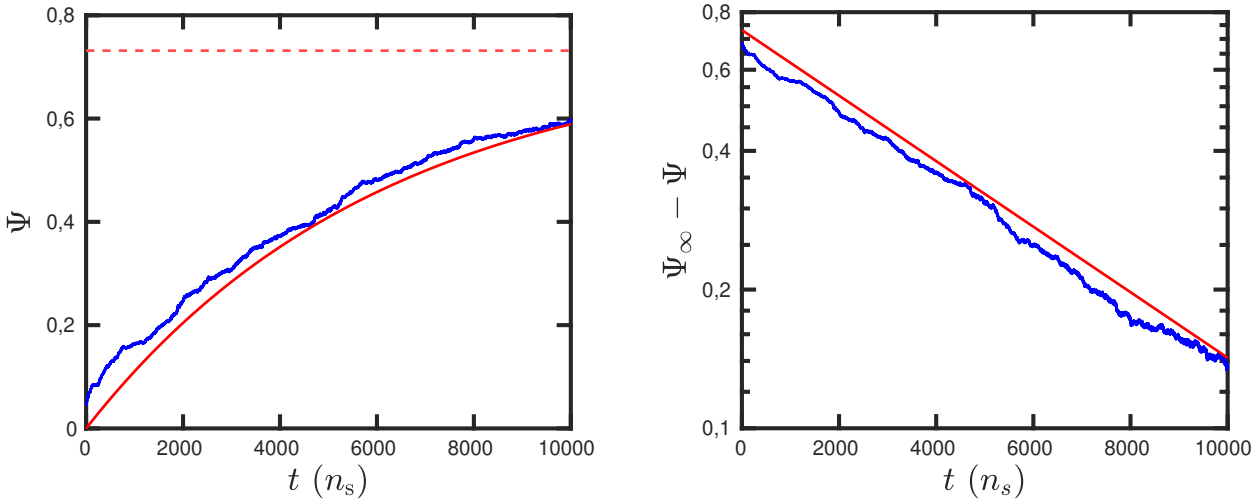
II-4.a) Simulations à champ parallèle et uniforme

Nous proposons dans un premier temps d'étudier le phénomène de ségrégation pour un champ gravitationnel uniforme de part et d'autre de la ligne $z = 0$. Pour ce faire, nous avons réalisé des simulations de bandes de grains tout à fait semblables à celles présentées dans les sections précédentes, à ceci près que le champ gravitationnel n'est plus celui décrit par l'Éq. (IV.1). Il est toujours parallèle à (Oz) et orienté vers la ligne $z = 0$, mais il est désormais également de norme uniforme de chaque côté de cette ligne. Autrement dit, nous avons

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r}) = -g\overrightarrow{e_z} \text{ pour } z > 0 \text{ et } \overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r}) = +g\overrightarrow{e_z} \text{ pour } z < 0. \tag{IV.16}$$

Nous nous sommes restreints à $T_s = 1,25$ s et $J^* = 1$, et avons expérimenté quatre coefficients de frottement (de $\mu = 0,5$ à $0,8$), et pour chacun deux intensités du champ gravitationnel ($g = 0,5$ m.s^{-2} et 1 m.s^{-2}). Les évolutions obtenues pour Ψ en fonction de t ressemblent typiquement à celle illustrée sur la Fig. IV.10, avec de nouveau une modélisation pertinente par une cinétique d'ordre 1.

La configuration explorée ici est en fait très proche du cas de la ségrégation granulaire terrestre, à ceci près que le champ est symétrique vis-à-vis de $z = 0$. Tout se passe en somme



(a) Évolution de Ψ en fonction de t.

(b) Évolution de $\Psi_\infty - \Psi$ en fonction de t, en échelle logarithmique.

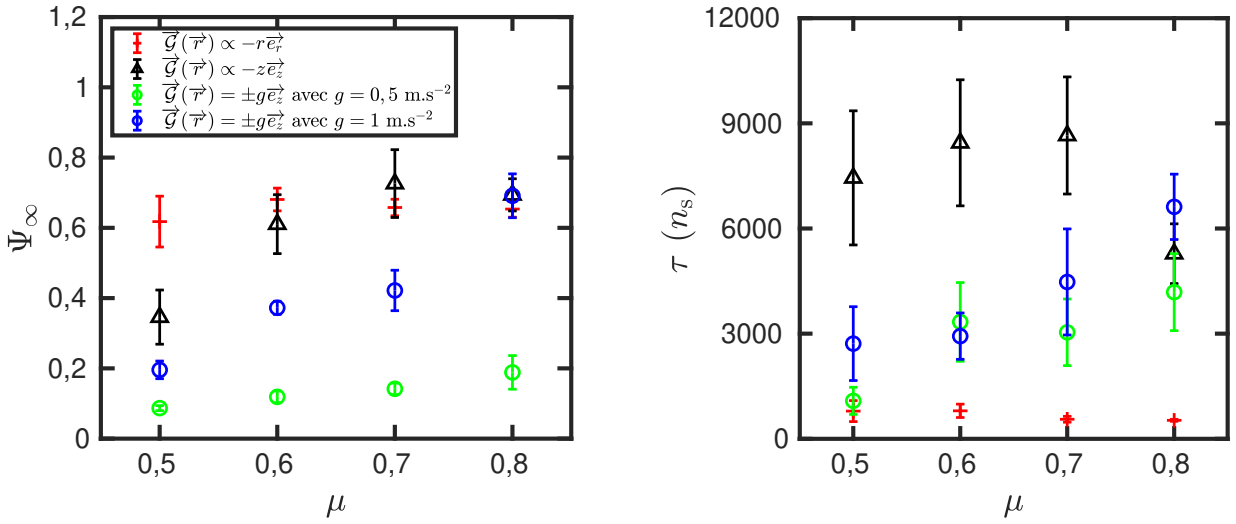
FIGURE IV.10 – Dynamique du degré de ségrégation Ψ pour une simulation à champ uniforme (voir l'Éq. (IV.16)) avec $T_\mathrm{s} = 1,25$ s, $\mu = 0,8$ et $g = 1$ m.s^{-2}. Les données sont en bleu, l'ajustement de la forme $\Psi(t) = \Psi_\infty(1-\exp(-t/\tau))$ en rouge et la ligne tiretée rouge représente Ψ_∞. Nous trouvons $\Psi_\infty = 0,732$ et $\tau = 6107$ n_s.

comme si nous avions deux granulaires terrestres en appui l'un contre l'autre, et pouvant échanger des grains. Nous représentons les résultats concernant Ψ_∞ et τ sur la Fig. IV.11, qui permet de faire la comparaison avec le cas circulaire $\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r}) \propto -r\overrightarrow{e_r}$ et le cas d'une bande à champ parallèle $\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r}) \propto -z\overrightarrow{e_z}$.

Nous constatons que la ségrégation est globalement plus efficace pour $g = 1$ m.s^{-2} que pour $g = 0,5$ m.s^{-2}, la différence augmentant avec le coefficient de frottement. Il est par ailleurs remarquable que dans le cas où $T_\mathrm{s} = 1,25$ s, $\mu = 0,8$ et $g = 1$ m.s^{-2} à la surface, le degré de ségrégation final Ψ_∞ s'établisse quasiment à la même valeur quelle que soit la topologie du champ gravitationnel (voir la Fig. IV.11a). Cette dernière joue donc un rôle important dans la dynamique menant à la ségrégation, comme on l'a vu, mais il semble par ailleurs possible que le coefficient de frottement suffise, s'il est assez élevé, à fixer seul la valeur de Ψ_∞. Nous remarquons aussi que la ségrégation est plus rapide dans le cas d'un champ parallèle et uniforme que dans le cas d'un champ parallèle en $z\overrightarrow{e_z}$ (voir la Fig. IV.11b). Conformément aux Éq. (IV.5) et (IV.7), les énergies injectées lors d'une secousse dans le cas $\overrightarrow{\mathcal{G}} = \pm g\overrightarrow{e_z}$ et dans le cas $\overrightarrow{\mathcal{G}} = \pm(gz/H_\mathrm{b})\overrightarrow{e_z}$ sont dans un rapport

$$\frac{\Delta E_\mathrm{tot,unif}}{\Delta E_\mathrm{tot}} = \frac{3g{T_\mathrm{s}}^2}{H_\mathrm{b}\ \mathrm{sh}^2\left(\sqrt{g/H_\mathrm{b}}T_\mathrm{s}\right)} \simeq 2,9 \qquad \text{(IV.17)}$$

pour $g = 1$ m.s^{-2}, $T_\mathrm{s} = 1,25$ s et $H_\mathrm{b} = 11$ m. Puisque chaque secousse injecte environ trois fois plus d'énergie dans le cas d'un champ uniforme, il n'est pas surprenant que la ségrégation se produise alors plus vite. Une fois encore, il est également intéressant de comparer l'énergie injectée $\Delta E_\mathrm{tot,unif}$ à l'énergie potentielle gravitationnelle initiale de la bande dans le cas d'un champ uniforme, notée $E_\mathrm{pg,tot,unif}$. Cette dernière se calcule très facilement et vaut :



(a) Degré de ségrégation final Ψ_∞.

(b) Temps typique de ségrégation τ.

FIGURE IV.11 – Comparaison des grandeurs caractéristiques de la ségrégation entre les différentes topologies de champ envisagées : central (en rouge), parallèle (en noir), parallèle uniforme à $g = 0,5$ m.s^{-2} (en vert) et à $g = 1$ m.s^{-2} (en bleu). Le paramètre $T_s = 1,25$ s est commun à toutes les données.

$$E_{\text{pg,tot,unif}} = \frac{gM_bH_b}{2}. \tag{IV.18}$$

Nous en déduisons directement :

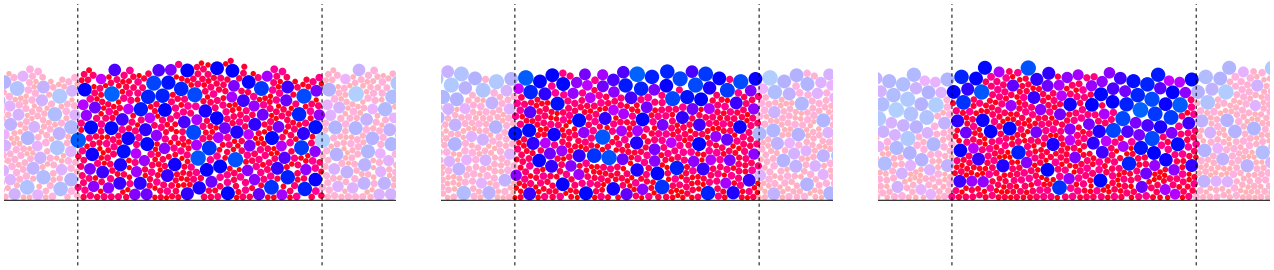
$$\frac{\Delta E_{\text{tot,unif}}}{E_{\text{pg,tot,unif}}} = \frac{2g{T_s}^2}{H_b}. \tag{IV.19}$$

Nous calculons donc $\Delta E_{\text{tot,unif}}/E_{\text{pg,tot,unif}} \simeq 0,14$ pour $g = 0,5$ m.s^{-2}, ($0,28$ pour $g = 1$ m.s^{-2}). Les simulations à champ uniforme se placent donc dans un régime de faibles perturbations, au sens où $\Delta E_{\text{tot,unif}} < E_{\text{pg,tot,unif}}$, et sont en cela comparables aux autres géométries.

II-4.b) Demi-bande de grains reposant sur un sol

Un autre aspect géométrique important est le fait que nous avons considéré des bandes symétriques par rapport à la ligne $z = 0$. Dans le cadre de la construction géométrique présentée dans la Sec. I-1., nous aurions aussi bien pu faire le choix de ne pas symétriser la bande mais plutôt d'imposer un sol en $z = 0$, sur lequel les grains reposeraient. Afin d'examiner les conséquences qu'aurait eu ce choix, nous avons réalisé des simulations avec un tel sol, et seulement $N = 500$ grains évoluant tous dans la région des $z > 0$. Les contacts des grains avec le sol ne sont pas soumis au frottement solide. Nous nous sommes restreints au coefficient de frottement $\mu = 0,5$ et aux durées de perturbations $T_s = 1,5$ s et $1,75$ s. Un exemple d'évolution d'une demi-bande avec sol en $z = 0$, pour $T_s = 1,5$ s et $\mu = 0,5$, est illustré sur la Fig. IV.12.

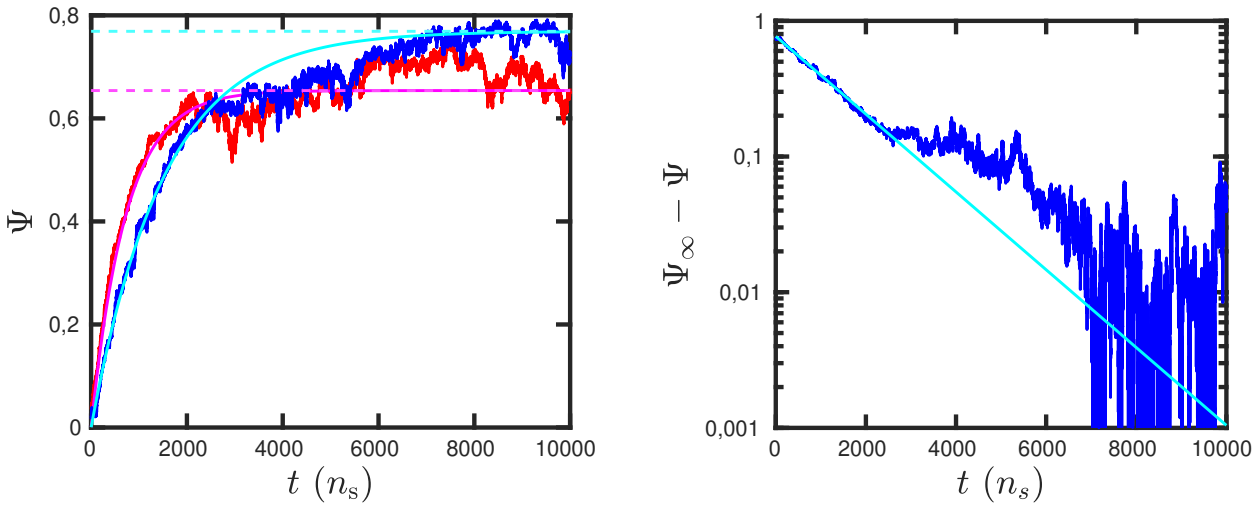
Nous constatons alors une nette ségrégation verticale et même l'émergence d'une ségrégation horizontale après 10000 secousses, phénomène que nous détaillerons dans la Sec. III-. Par ailleurs, nous donnons l'évolution de $\Psi(t)$ pour une simulation à $T_s = 1,75$ s et $\mu = 0,5$ sur la



(a) État initial. (b) État après 4000 secousses. (c) État après 10000 secousses.

FIGURE IV.12 – Illustrations de l'évolution d'une demi-bande de grains ($N = 500$ grains) reposant sur un sol en $z = 0$, ici avec $T_s = 1,5$ s et $\mu = 0,5$. La ligne noire pleine représente le sol en $z = 0$, et les lignes tiretées représentent toujours les limites (périodiques) en $x = 0$ et $x = L$.

Fig. IV.13, avec pour comparaison $\Psi(t)$ pour les mêmes paramètres physiques mais dans le cas habituel d'une bande de 1000 grains répartie de part et d'autre de $z = 0$, sans sol.



(a) Évolution de Ψ en fonction de t. Pour comparaison, on a représenté en rouge les données issues de la même simulation mais avec une disposition à $N = 1000$ grains sans sol, et leur ajustement en magenta.

(b) Évolution de $\Psi_\infty - \Psi$ en fonction de t, en échelle logarithmique.

FIGURE IV.13 – Dynamique du degré de ségrégation Ψ pour une simulation avec un sol en $z = 0$ et $N = 500$ grains (voir l'Éq. (IV.16)) avec $T_s = 1,75$ s et $\mu = 0,5$. Les données sont en bleu, l'ajustement de la forme $\Psi(t) = \Psi_\infty(1 - \exp(-t/\tau))$ en cyan et la ligne tiretée cyan représente Ψ_∞. Nous trouvons $\Psi_\infty = 0,769$ et $\tau = 1515\ n_s$.

Nous remarquons d'une part que la présence d'un sol ne change pas la dynamique globale de la ségrégation, avec toujours une cinétique d'ordre 1 constatée empiriquement, et d'autre part que le sol semble rendre la ségrégation un peu plus lente. Les données résumées dans la Tab. IV.2 confirment ce constat, et ne montrent par ailleurs aucune tendance claire concernant Ψ_∞.

Configuration	T_s (s)	Ψ_∞	τ (n_s)
$N = 500$ avec sol	$1,5$	$0,627 \pm 0,098$	4310 ± 2108
$N = 1000$ sans sol	$1,5$	$0,726 \pm 0,084$	3674 ± 1267
$N = 500$ avec sol	$1,75$	$0,770 \pm 0,039$	1730 ± 152
$N = 1000$ sans sol	$1,75$	$0,760 \pm 0,058$	1459 ± 229

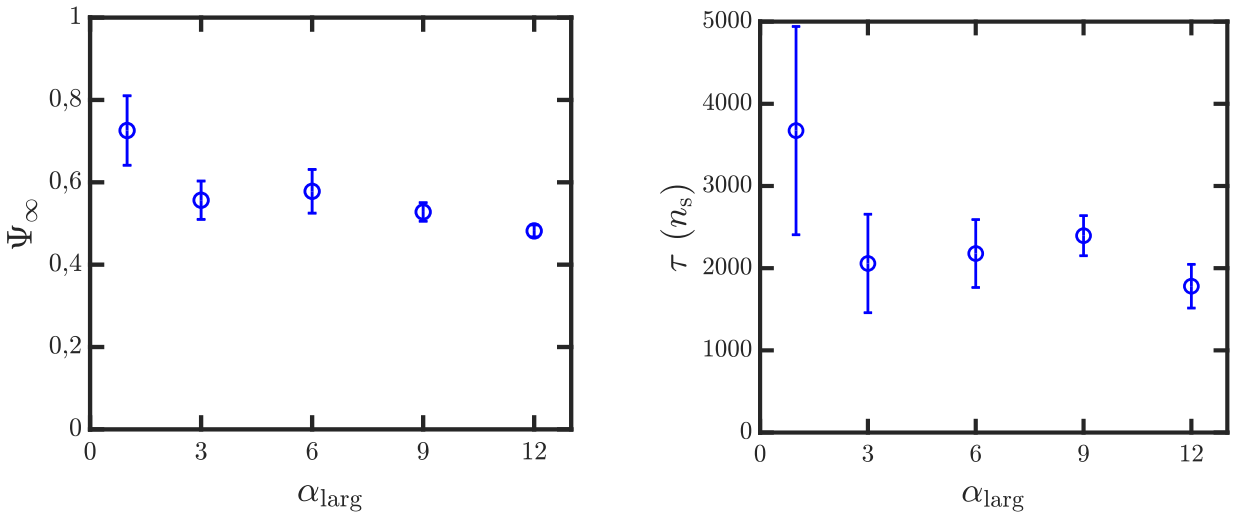
TABLE IV.2 – Comparaison des résultats (obtenus sur quatre graines) entre le cas à 1000 grains sans sol et celui à 500 grains avec sol, pour $T_s = 1,5$ s d'une part et $T_s = 1,75$ s d'autre part, avec $\mu = 0,5$ commun à tous les cas présents.

Le fait de symétriser la bande comme nous l'avons fait a donc pour principal effet d'accélérer la ségrégation par rapport à une disposition présentant un sol. Cela peut se comprendre aisément dans la mesure où la présence d'un sol force le sens selon lequel les gros grains initialement proches de $z = 0$ doivent migrer pour que la ségrégation s'établisse. Dans la suite, nous revenons à des bandes symétriques par rapport à $z = 0$.

II-4.c) Bandes de largeur augmentée

Lorsque nous avons construit notre bande de grains, nous avons fait le choix de conserver $N = 1000$ grains et d'obtenir une demi-hauteur H_b égalant le rayon R_{ast} d'un agrégat circulaire contenant aussi 1000 grains. Pour assurer ceci, nous avons simplement ajusté la largeur L de la bande de sorte à ce que $H_b = R_{ast}$ et $2LH_b = \pi {R_{ast}}^2$ (égalité des aires de la bande et de l'agrégat circulaire), ce qui donnerait $L = \pi R_{ast}/2 \simeq 17,3$ m. En réalité, nous avons plutôt travaillé à $L = 18,75$ m pour avoir un nombre entier de cellules permettant de détecter les contacts (voir la Sec. II-3. du Chap. II). Néanmoins, il est possible que le choix de L ait une influence sur la dynamique de la ségrégation au sein de la bande. En particulier, la bande est ici délimitée par deux segments situés en $z = \pm H_b$ et de longueur $L = 18,75$ m chacun, tandis que les agrégats circulaires du Chap. III sont délimités par un cercle de périmètre $2\pi R_{ast} \simeq 69$ m. Nous avons donc le double objectif d'étudier l'influence de L sur la ségrégation, et d'obtenir des bandes dont les délimitations sont de longueur équivalente à $2\pi R_{ast}$. Pour cela, nous avons simulé des bandes élargies d'un facteur α_{larg} : elles sont en tout point semblables à celles présentées jusqu'ici, à ceci près qu'elles comptent $N = \alpha_{larg} N_0$ grains et sont de largeur $L = \alpha_{larg} L_0$ avec $N_0 = 1000$ et $L_0 = 18,75$ m. Les valeurs que nous avons explorées sont $\alpha_{larg} = 3$, 6, 9 et 12. Nous présentons les résultats obtenus pour Ψ_∞ et τ en fonction de α_{larg}, pour les paramètres $T_s = 1,5$ s, $\mu = 0,5$ et $J^* = 1$ fixés, sur la Fig. IV.14.

Nous constatons que la qualité finale de la ségrégation Ψ_∞ évolue assez peu avec α_{larg}, hormis une décroissance un peu plus marquée lorsque l'on passe de $\alpha_{larg} = 1$ à $\alpha_{larg} = 3$. Hormis un éventuel effet de « confinement » lorsque la bande a une largeur réduite à L_0, le degré de ségrégation final Ψ_∞ est indépendant de la largeur de la bande. Le temps typique de ségrégation τ suit quant a lui une évolution assez proche, avec une diminution lorsqu'on multiplie la largeur de la bande par 3, puis des valeurs aux environs de 2000 secousses pour des bandes plus larges. La dynamique et la qualité de la ségrégation verticale semblent donc invariantes de la largeur de la bande dès lors que celle-ci excède $3L_0$.



(a) Évolution de Ψ_∞ avec l'élargissement α_{larg}.

(b) Évolution de τ avec l'élargissement α_{larg}.

FIGURE IV.14 – Dépendance des quantités caractéristiques de la ségrégation en fonction de l'élargissement de la bande α_{larg}. Les paramètres $T_s = 1,5$ s, $\mu = 0,5$ et $J^* = 1$ sont communs à toutes les données.

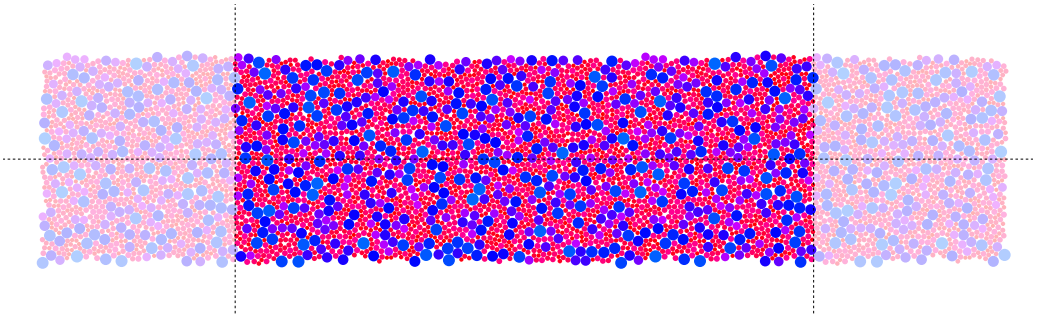
III- Ségrégation horizontale

III-1. Observation et quantification

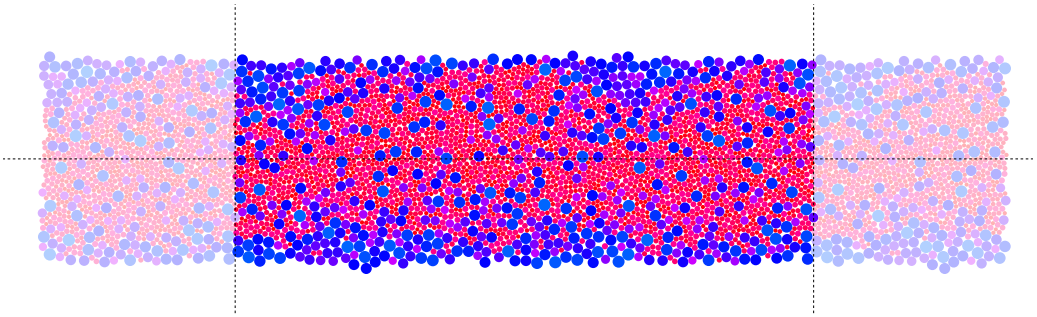
De façon analogue à la ségrégation angulaire étudiée dans le Chap. III, nous observons dans certains cas une ségrégation horizontale au sein de la bande de grains. En effet, une fois les grains rassemblés sur les deux faces de la bande, en $z = \pm H_b$, ils tendent parfois à se rassembler en lobes. Les bandes de largeur L_0 présentent rarement de tels lobes, et nous observons surtout la ségrégation horizontale pour les bandes présentant un élargissement $\alpha_{\text{larg}} \geq 3$. Cela laisse entendre qu'il faut que l'agrégat, qu'il soit circulaire ou sous la forme d'une bande, possède des faces suffisamment longues pour que des lobes puissent se séparer. Un exemple typique d'évolution avec ségrégation verticale puis horizontale est présenté sur la Fig. IV.15, pour $T_s = 1,5$ s, $\mu = 0,5$ et $\alpha_{\text{larg}} = 3$.

Un fait remarquable est le fait que le lobe formé sur la face supérieure de la bande est décalé d'environ $L/2$ par rapport au lobe formé sur la face inférieure. Cette situation « intercalée » est en fait systématique, comme nous le verrons plus loin. Pour quantifier la ségrégation horizontale, nous adoptons une analyse directement inspirée de celle utilisée dans le cas de la ségrégation angulaire (voir la Sec. V- du Chap. III).

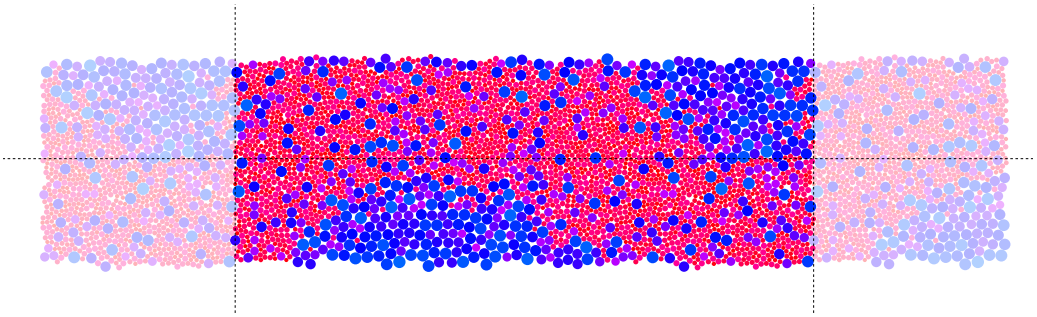
- Pour un état donné de la bande, nous sélectionnons les petits grains j de rayon réduit $\overline{R}_j \in [0,4, 0,6]$ et séparons ceux situés en $z > 0$ de ceux situés en $z < 0$ (représentés respectivement en rouge et en vert sur la Fig. IV.16).
- Nous découpons la bande en $20 \times \alpha_{\text{larg}}$ tranches verticales (faisant donc $\Delta x = 0,9375$ m de large chacune), décrites par $x \in [k\Delta x, (k+1)\Delta x[$ avec $k \in [|0, 20\alpha_{\text{larg}} - 1|]$. Nous comptons ensuite le nombre $N_{p,z>0}(k)$ (resp. $N_{p,z<0}(k)$) de grains j à $z > 0$ (resp. $z < 0$) dans la k-ème tranche.



(a) État initial.



(b) État après 4100 secousses.



(c) État après 10000 secousses.

FIGURE IV.15 – Évolution d'une barre de $N = 3000$ grains, dans laquelle se produit d'abord une nette ségrégation verticale, puis une ségrégation horizontale menant à la formation d'un lobe sur chaque face. Nous constatons que ces deux lobes sont intercalés, dans le sens où leurs centres sont écartés d'environ $L/2$ selon l'horizontale, où $L = 3L_0$ est la largeur totale de la bande. Les paramètres de la simulation sont $T_s = 1,5$ s, $\mu = 0,5$ et $J^* = 1$.

Nous déduisons de ce traitement les fonctions $N_{p,z>0}(x)$ et $N_{p,z<0}(x)$ pour la bande à un instant donné. Nous calculons le nombre maximal de petits grains pouvant être présents dans la partie $z > 0$ (ou $z < 0$) d'une tranche, en effectuant un raisonnement analogue donné par $N_{p,z>0,\max} = 1600\Delta x/(2L_0) \simeq 40$ grains. Nous définissons ainsi une densité de petits grains par demi-tranche :

$$n_{p,z>0}(x) = \frac{N_{p,z>0}(x)}{N_{p,z>0,\max}}. \tag{IV.20}$$

Ainsi, les deux lobes intercalés de gros grains visibles sur la Fig. IV.15c sont également identifiables sur le tracé de $n_{p,z>0}(x)$ et $n_{p,z<0}(x)$ pour la bande après 10000 secousses (voir la Fig. IV.17).

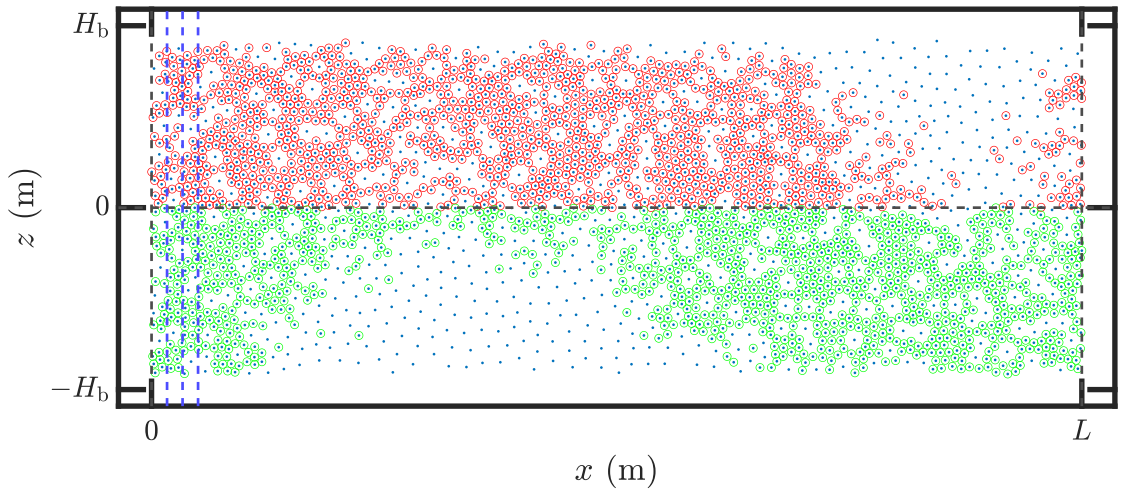


FIGURE IV.16 – Traitement de la bande représentée sur la Fig. IV.15c. Les points bleus repèrent les centres des grains, les cercles rouges (resp. vert) repèrent les petits grains situés dans la région $z > 0$ (resp. $z < 0$). Les trois premières tranches sont représentées en lignes bleues tiretées.

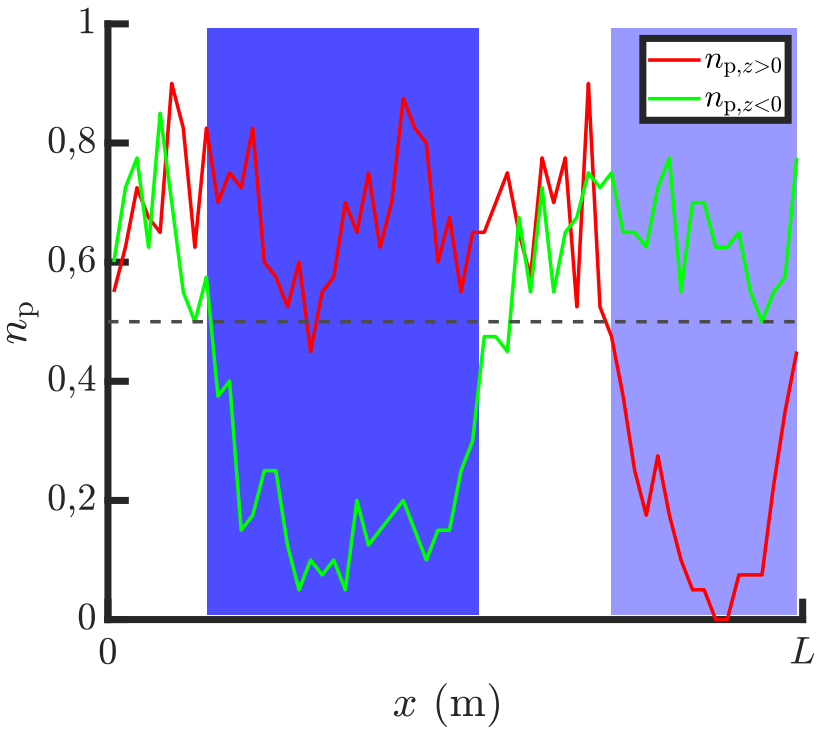
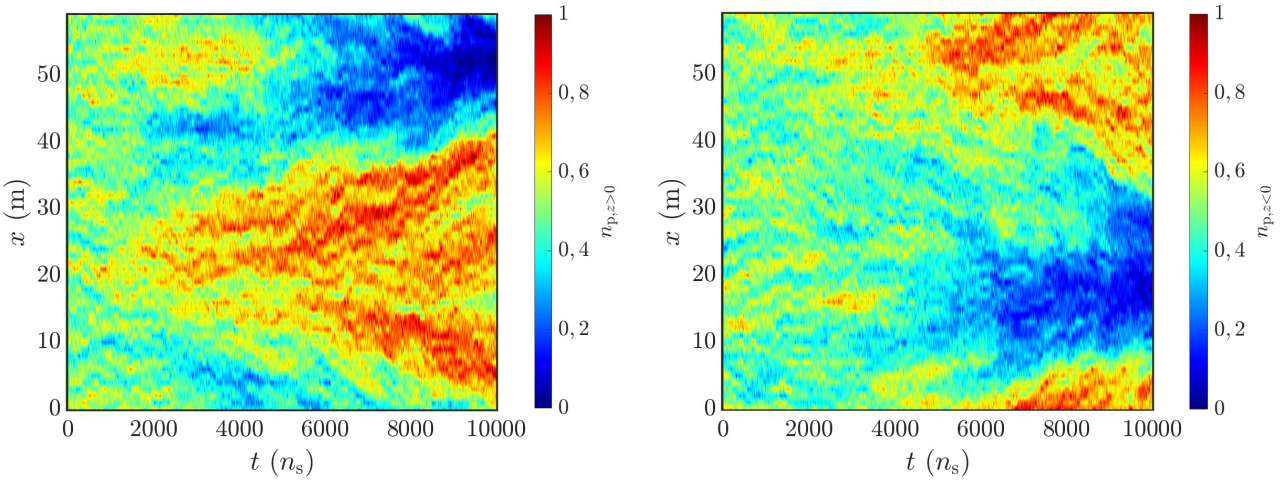


FIGURE IV.17 – Profils de densité des petits grains par tranches de largeur Δx, à $t = 10000\ n_\mathrm{s}$, pour la région $z > 0$ (en rouge) et $z < 0$ (en vert). La ligne tiretée noire représente un critère $n_\mathrm{p} = 0,5$. On identifie ainsi le lobe de gros grains à $z > 0$ (teinté en bleu pâle) et celui à $z > 0$, plus large selon (Ox) (teinté en bleu plus soutenu).

Tout comme dans le cas de la ségrégation angulaire, nous pouvons également représenter les fonctions $n_{\mathrm{p},z>0}(x,t)$ et $n_{\mathrm{p},z<0}(x,t)$ avec un graphe spatio-temporel. C'est notamment le cas sur la Fig. IV.18, pour la simulation à $\mu = 0,5$, $T_{\mathrm{s}} = 1,5$ s et $\alpha_{\mathrm{larg}} = 3$ utilisée sur les Fig. IV.15 à IV.17.



(a) Cas de la région $z > O$.

(b) Cas de la région $z < 0$.

FIGURE IV.18 – Graphe spatio-temporel des fonctions $n_{\mathrm{p},z>0}(x,t)$ et $n_{\mathrm{p},z<0}(x,t)$ pour la simulation à $\mu = 0,5$, $T_{\mathrm{s}} = 1,5$ s et $\alpha_{\mathrm{larg}} = 3$ utilisée sur les Fig. IV.15 à IV.17. On voit nettement les deux lobes se former, et le décalage selon (Ox) entre le lobe à $z > 0$ et celui à $z < 0$.

Nous observons très distinctement la formation d'un lobe de chaque côté de la ligne $z = 0$, correspondant aux zones pauvres en petits grains (donc en bleu) sur les graphes de la Fig. IV.18. De nouveau, signalons qu'un tel traitement est efficace pour compter les lobes et suivre leur formation, mais il reste intéressant de définir un degré de ségrégation horizontale pour quantifier leur netteté. En l'occurrence, nous en définissons ici deux, $\psi_{\mathrm{H},z>0}$ et $\psi_{\mathrm{H},z<0}$, qui se rapportent respectivement aux régions $z > 0$ et $z < 0$. Leurs définitions sont analogues à celle du degré de ségrégation angulaire du Chap. III, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{H},z>0}(t) &= \sqrt{\frac{1}{20\alpha_{\mathrm{larg}}-1}\sum_{k=1}^{\alpha_{\mathrm{larg}}}\left(n_{\mathrm{p},y>0}(k,t)-\langle n_{\mathrm{p},z>0}(t)\rangle\right)^2}, \\ \psi_{\mathrm{H},z<0}(t) &= \sqrt{\frac{1}{20\alpha_{\mathrm{larg}}-1}\sum_{k=1}^{\alpha_{\mathrm{larg}}}\left(n_{\mathrm{p},z<0}(k,t)-\langle n_{\mathrm{p},z<0}(t)\rangle\right)^2}, \end{aligned} \tag{IV.21}$$

avec

$$\langle n_{\mathrm{p},z>0}(t)\rangle = \frac{1}{20\alpha_{\mathrm{larg}}}\sum_{k=1}^{20\alpha_{\mathrm{larg}}} n_{\mathrm{p},z>0}(k,t) \quad \text{et} \quad \langle n_{\mathrm{p},z<0}(t)\rangle = \frac{1}{20\alpha_{\mathrm{larg}}}\sum_{k=1}^{20\alpha_{\mathrm{larg}}} n_{\mathrm{p},z<0}(k,t). \tag{IV.22}$$

Nous procédons par ailleurs à la même renormalisation que pour le calcul de Ψ_{A}, et définissons donc les degrés de ségrégation horizontale normalisés suivants :

$$\Psi_{\mathrm{H},z>0}(t) = \frac{\sqrt{2}\ \psi_{\mathrm{H},z>0}(t)}{\langle n_{\mathrm{p},z>0}(t)\rangle} \quad \text{et} \quad \Psi_{\mathrm{H},z<0}(t) = \frac{\sqrt{2}\ \psi_{\mathrm{H},z<0}(t)}{\langle n_{\mathrm{p},z<0}(t)\rangle}. \tag{IV.23}$$

Si ces grandeurs permettent de quantifier la netteté de la ségrégation horizontale, elles ne portent par contre pas d'information sur le nombre de lobes. Nous représentons, toujours pour la même simulation, les évolutions simultanées de Ψ, $\Psi_{\mathrm{H},z>0}$ et $\Psi_{\mathrm{H},z<0}$ en fonction du nombre de secousses sur la Fig. IV.19.

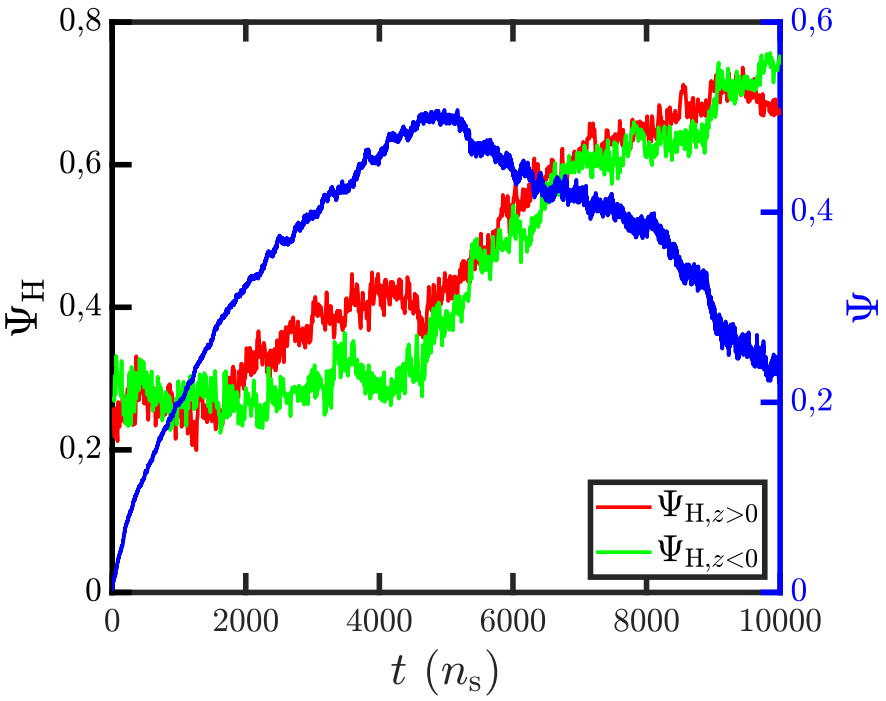


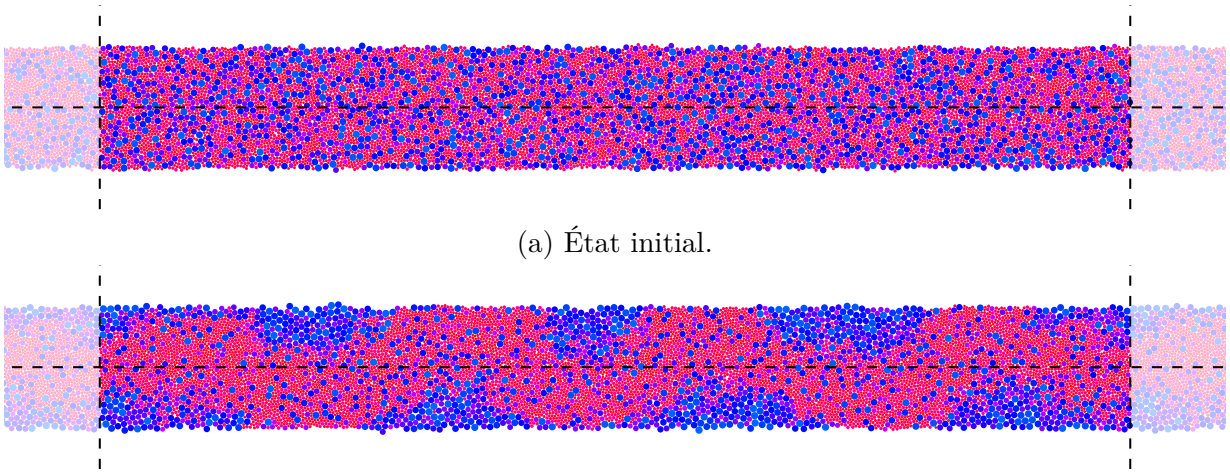
FIGURE IV.19 – Tracé des degrés de ségrégation verticale Ψ (en bleu) et de ségrégation horizontale $\Psi_{\mathrm{H},z>0}$ (en rouge) et $\Psi_{\mathrm{H},z<0}$ (en vert) en fonction du temps t exprimé en nombre de secousses. La simulation est la même que celle utilisée pour les Fig. IV.15 à IV.18.

Nous constatons un fait qui s'avère systématique lors de l'analyse des autres simulations : le degré de ségrégation verticale connaît une évolution contraire aux degrés de ségrégation horizontale à compter du moment où cette dernière se développe fortement, soit ici à partir de $t \simeq 5000$ (n_{s}) environ, comme on peut le voir sur les Fig. IV.18 et IV.19. Cela correspond bien sûr au fait que la formation de lobes implique que les petits grains soient en moyenne plus éloignés de la droite $z = 0$ et les gros grains en soient en moyenne moins éloignés. Un autre constat systématique très visible ici est que les deux degrés de ségrégation horizontale $\Psi_{\mathrm{H},z>0}$ et $\Psi_{\mathrm{H},z<0}$ ont des valeurs très proches à chaque instant. Cela signifie que même si la ségrégation horizontale brise l'invariance du problème selon (Ox), elle respecte malgré tout la symétrie axiale du problème par rapport à $z = 0$, autrement dit par rapport à ce même axe (Ox). Pour aller plus loin dans l'analyse des lobes se développant sur les deux faces de la bande, nous proposons d'étudier la ségrégation horizontale dans les simulations de bandes élargies que nous avons présenté dans la Sec. II-4.c).

III-2. Nombre et position des lobes

III-2.a) Dépendance en la largeur de la bande

Nous avons vu que pour $\alpha_{\text{larg}} = 3$, nous observons la formation d'un lobe sur chaque face, leurs centres étant décalés de $L/2$. La ségrégation horizontale se comporte comme une instabilité, qui sélectionne un mode propre, donc une période spatiale ou longueur d'onde, pour la position des lobes. Une trop faible largeur de bande pourrait donc mener au développement d'une autre longueur d'onde que celle qui serait naturellement sélectionnée par l'instabilité. L'étude de plus grandes valeurs de α_{larg} est donc également motivée dans le cadre de la ségrégation horizontale. Les analyses menées pour $\alpha_{\text{larg}} = 6$, 9 et 12 montrent également la formation de lobes, avec de nouveau cette disposition intercalée d'une face à l'autre, comme illustré sur la Fig. IV.20 dans le cas d'une simulation à $\mu = 0,5$, $T_{\text{s}} = 1,5$ s et $\alpha_{\text{larg}} = 9$.



(a) État initial.

(b) État après 10000 secousses.

FIGURE IV.20 – Illustration d'une bande correspondant aux paramètres $T_{\text{s}} = 1,5$ s, $\mu = 0,5$ et $\alpha_{\text{larg}} = 9$ dans l'état initial et après 10000 secousses.

Nous proposons de tracer les densités de gros grains $n_{\text{p},z>0}(x)$ dans la partie $z > 0$ de la bande et $n_{\text{p},z<0}(x)$ dans sa partie $z < 0$ dans le cas illustré sur la Fig. IV.20b. Nous obtenons ainsi le graphe représenté sur la Fig. IV.21.

Il apparaît alors clairement que les lobes de gros grains à $z > 0$, repérables par les zones où $n_{\text{p},z>0}(x) < 0,5$ sont intercalés entre les lobes de gros grains à $z < 0$, repérables quant à eux par les zones où $n_{\text{p},z<0}(x) < 0,5$. En effet la courbe rouge et la courbe verte ont des évolutions opposées sur toute la largeur de la bande.

Afin d'observer la dynamique de formation de ces lobes, l'analyse spatio-temporelle que nous avons décrite dans la Sec. III-1. est réalisée pour chacune des simulations, et nous en présentons le résultat sur la Fig. IV.22 dans le cas de la simulation illustrée sur la Fig. IV.20.

Ces analyses spatio-temporelles montrent qu'une longueur d'onde, correspondant à la distance inter-lobes, est sélectionnée par la ségrégation horizontale, avec fusion de régions de gros grains jusqu'à obtenir des lobes espacés de cette longueur d'onde. Typiquement, pour $z > 0$, on a deux lobes peu nets entre $x = 100$ m et $x = 150$ m autour de $t = 3000$ n_{s} puis seulement un seul, très net, à $t = 10000$ n_{s}. De nouveau, cette dynamique n'est pas sans rappeler celle des bandes en tambour tournant étudiée dans la Réf. [174]. Un important point commun entre

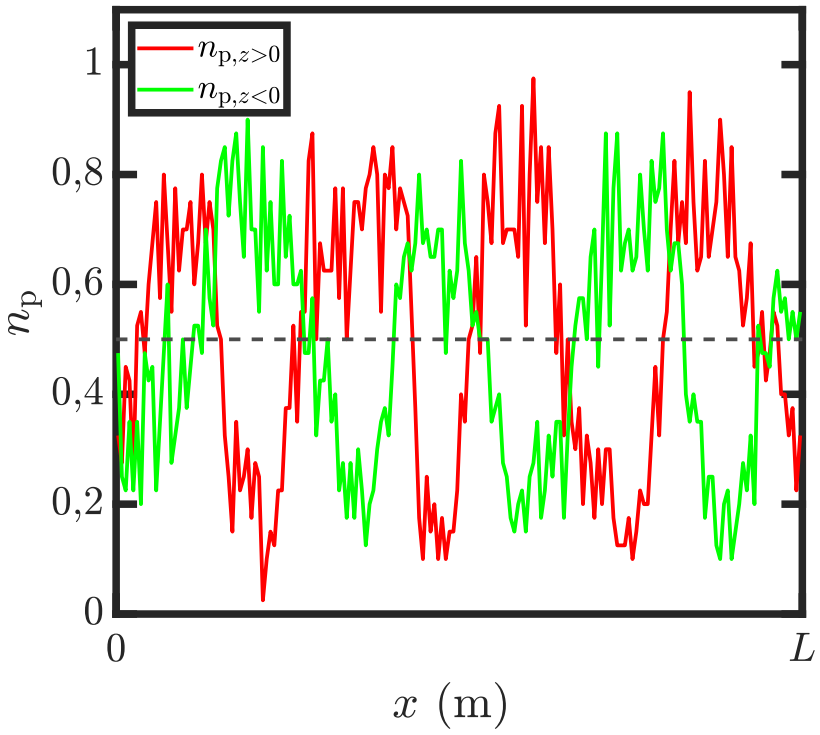
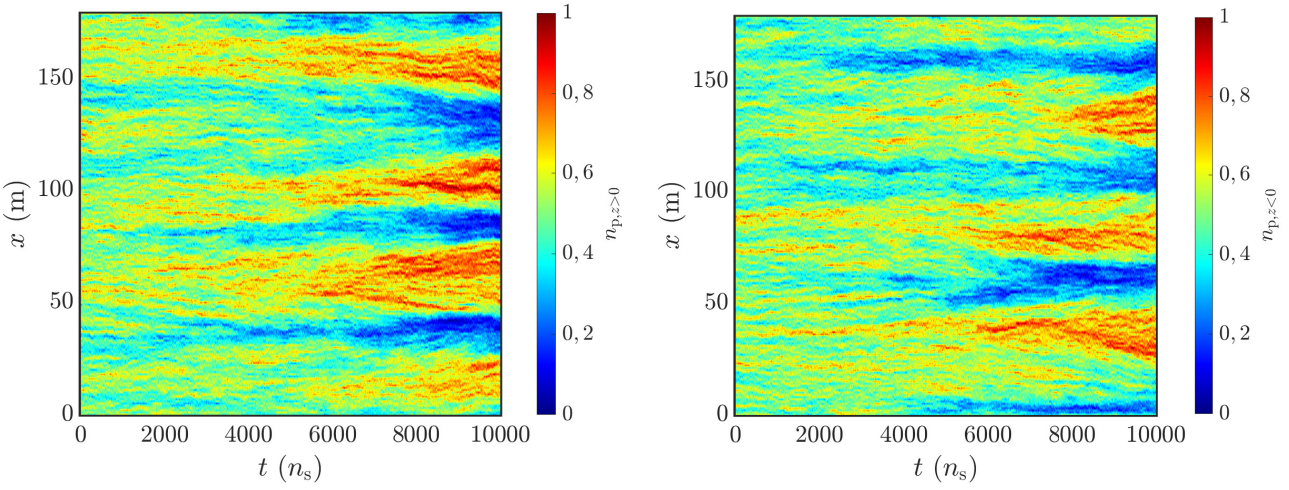


FIGURE IV.21 – Tracé des densités de petits grains $n_{\mathrm{p},z>0}(x)$ (en rouge) et $n_{\mathrm{p},z<0}(x)$ (en vert) pour la bande illustrée sur la Fig. IV.20b. La ligne tiretée noire correspond à un critère $n_{\mathrm{p}} = 0,5$.



(a) Cas $z > 0$.

(b) Cas $z < 0$.

FIGURE IV.22 – Graphe spatio-temporel des fonctions $n_{\mathrm{p},z>0}(x,t)$ et $n_{\mathrm{p},z<0}(x,t)$ pour la simulation à $\mu = 0,5$, $T_{\mathrm{s}} = 1,5$ s et $\alpha_{\mathrm{larg}} = 9$ illustrée sur la Fig. IV.20. On voit très clairement quatre lobes (en bleu) se former sur chaque face, avec les lobes à $z > 0$ intercalés entre ceux à $z < 0$.

cette dernière étude et la nôtre est le rôle différent joué par les petits et les gros grains. En effet, dans les deux cas, la région peuplée majoritairement de petits grains prend une forme

particulière mais reste connexe (le serpentin dans notre cas), séparant par contre les gros grains entre plusieurs régions qui ne sont plus en contact (les lobes). L'existence d'une longueur d'onde de ségrégation horizontale est confirmée par le fait suivant : lorsque l'on considère différentes largeurs de bandes, le nombre de lobes sur chaque face augmente avec α_{larg}. Pour $\mu = 0,5$ et $T_{\text{s}} = 1,5$ s, nous avons typiquement, après 10000 secousses, un lobe par face pour $\alpha_{\text{larg}} = 3$, deux lobes par face pour $\alpha_{\text{larg}} = 6$, entre trois et quatre lobes par face (en fonction de la graine) pour $\alpha_{\text{larg}} = 9$ et entre quatre et cinq lobes par face $\alpha_{\text{larg}} = 12$. Les lobes d'une même face sont donc généralement séparés d'une même distance, qui semble être de l'ordre de $3L_0 = 56$ m, et intercalés entre ceux de la face inverse. Nous observons ainsi une forme de longueur d'onde, correspondant à la distance inter-lobes, dans le phénomène de ségrégation horizontale. Pour quantifier plus précisément cette longueur d'onde, nous proposons l'analyse suivante. Pour un instant t donné, nous retranchons à $n_{\text{p},z>0}(x,t)$ sa moyenne sur $x \in [0,L]$ pour définir une densité $\tilde{n}_{\text{p},z>0}(x,t)$ de moyenne nulle. Ce calcul se fait sur les $20\alpha_{\text{larg}}$ tranches de largeur Δx :

$$\tilde{n}_{\text{p},z>0}(x_k,t) = n_{\text{p},z>0}(x_k,t) - \frac{1}{20\alpha_{\text{larg}}} \sum_{k=0}^{20\alpha_{\text{larg}}-1} n_{\text{p},z>0}(x_k,t). \tag{IV.24}$$

Nous calculons ensuite l'autocorrélation $A_{z>0}$ de cette densité $\tilde{n}_{\text{p},z>0}$ sous une translation ℓ le long de (Ox). En raison du découpage en tranches adopté, la distance ℓ ne peut être qu'un multiple entier de Δx. Par ailleurs, les conditions aux limites périodiques sont prises en compte : si $x + \ell > L$, alors le calcul est effectué avec $x + \ell - L$ au lieu de $x + \ell$. Formellement, nous avons donc :

$$A_{z>0}(\ell,t) = \sum_{k=0}^{20\alpha_{\text{larg}}-1} \tilde{n}_{\text{p},z>0}(x_k,t) \times \tilde{n}_{\text{p},z>0}(x_k+\ell,t). \tag{IV.25}$$

Nous renormalisons ensuite cette valeur par l'autocorrélation maximale, qui est par définition atteinte pour la comparaison de la densité $\tilde{n}_{\text{p},z>0}$ avec elle-même, autrement dit pour $\ell = 0$. Cela définit l'autocorrélation normalisée $\mathcal{A}_{z>0}$:

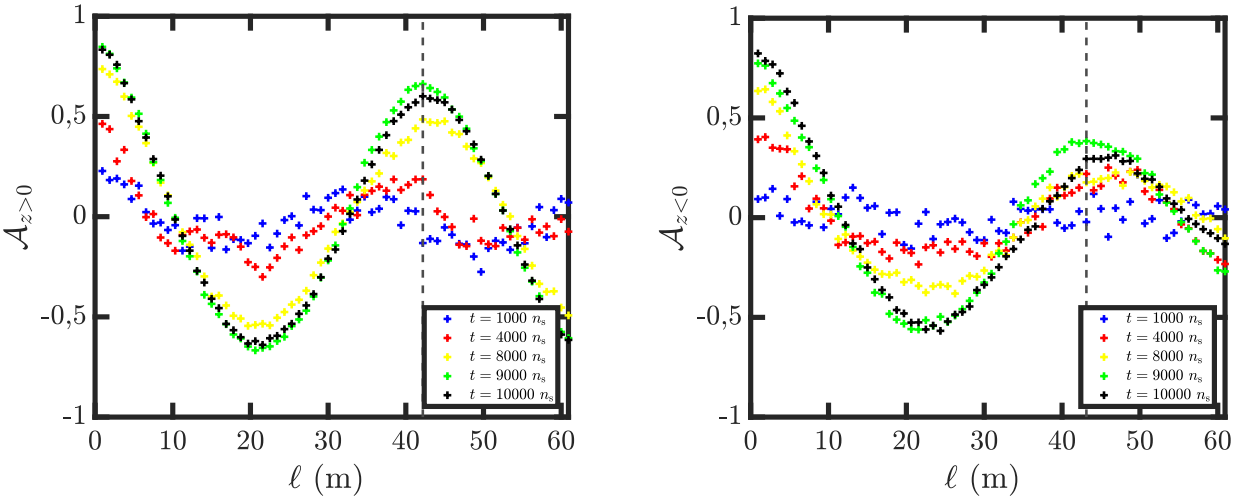
$$\mathcal{A}_{z>0}(\ell,t) = \frac{A_{z>0}(\ell,t)}{A_{z>0}(0,t)}. \tag{IV.26}$$

Cette analyse est efficace pour mesurer une longueur d'onde λ puisque si $\tilde{n}_{\text{p},z>0}(x,t)$ présente une périodicité spatiale de période λ à l'instant t, alors son autocorrélation $\mathcal{A}_{z>0}(\ell,t)$ est maximale pour $\ell = \lambda$. Nous effectuons une analyse identique pour la région $z < 0$, définissant ainsi l'autocorrélation $\mathcal{A}_{z<0}(\ell,t)$. Sur la Fig. IV.23, nous traçons $\mathcal{A}_{z>0}(\ell,t)$ et $\mathcal{A}_{z<0}(\ell,t)$ en fonction de ℓ à différents instants t pour la simulation illustrée sur les Fig. IV.20 à IV.22.

Ces analyses permettent d'établir qu'une longueur d'onde λ très stable est effectivement observable de chaque côté de la ligne $z = 0$. En raison de la discrétisation de ℓ par incréments de Δx, nous trouvons $\lambda = 45\Delta x = 42,2$ m dans la région $z > 0$ et $\lambda = 46\Delta x = 43,1$ m dans la région $z < 0$. Cela permet donc de bien affiner notre évaluation de λ par rapport à l'estimation précédente qui donnait $\lambda \simeq 3L_0 = 56$ m.

III-2.b) Dépendance en le coefficient de frottement

Au vu de l'importance majeure du rôle joué par le coefficient de frottement dans nos systèmes, il se pose la question de son influence éventuelle sur la longueur inter-lobes. Notre mesure



(a) Cas $z > 0$.

(b) Cas $z < 0$.

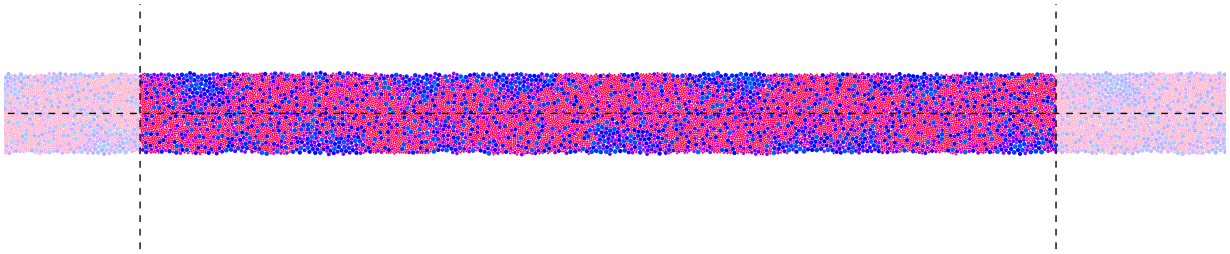
FIGURE IV.23 – Tracé des fonctions d'autocorrélation $\mathcal{A}_{z>0}(\ell, t)$ et $\mathcal{A}_{z<0}(\ell, t)$ en fonction de ℓ à différents instants t. On voit nettement une longueur d'onde émerger dans chaque région, très stable entre $t = 8000\ n_s$ et $t = 10000\ n_s$: nous la repérons par une ligne tiretée noire. Cette longueur d'onde est identique de part et d'autre de $z = 0$ aux effets de discrétisation près.

de cette longueur est d'autant meilleure que α_{larg} est important, puisque nous évitons les possibles effets de confinement liés à une bande dont la largeur n'est pas assez grande devant la longueur inter-lobes que nous recherchons. Nous observons donc les bandes à $\alpha_{\text{larg}} = 12$ obtenues avec la même graine et $T_s = 1,5$ s, pour trois autres coefficients de frottement : $\mu = 0,1$, $\mu = 0,3$ et $\mu = 0,8$ (voir la Fig. IV.24).

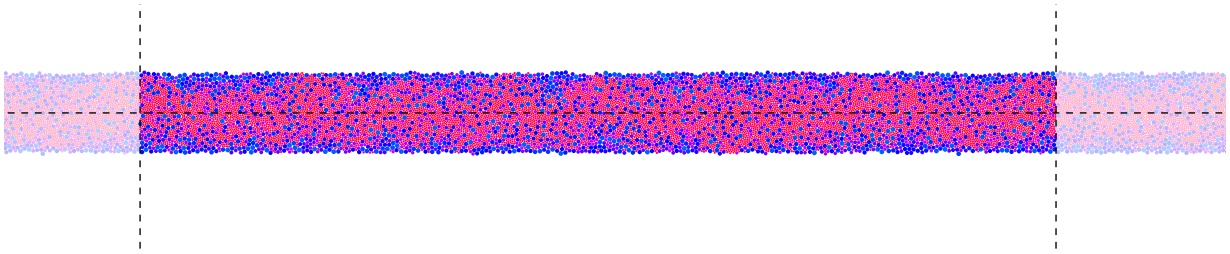
Il ressort de cette observation que l'on trouve quatre lobes pour $\mu = 0,8$, comme pour $\mu = 0,5$ (voir la Fig. IV.24c), toutes choses étant égales par ailleurs. Les cas à $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,3$ sont cependant moins nets, et la ségrégation horizontale semble en fait plus lente pour $\mu = 0,1$ que pour $\mu = 0,8$, et encore plus lente pour $\mu = 0,3$. Compte tenu du fait que la ségrégation horizontale survient après la ségrégation verticale et implique un décrochage du degré Ψ quantifiant cette dernière (voir par exemple la Fig. IV.19), nous proposons d'observer l'évolution de Ψ pour les simulations illustrées sur la Fig. IV.24, et de le comparer à l'évolution de Ψ pour $\mu = 0,5$, toutes choses étant égales par ailleurs (voir la Fig. IV.25).

Le décrochage de Ψ est très marqué dans le cas $\mu = 0,8$, ce qui est cohérent avec la nette ségrégation horizontale visible sur la Fig. IV.24c. Nous constatons également que pour $\mu = 0,3$, nous sommes toujours dans le régime d'établissement de la ségrégation verticale après 8000 secousses, et aucune ségrégation horizontale ne semble venir perturber la dynamique de Ψ. Une fois encore, cela est cohérent avec le fait que nous ne distinguons pas vraiment de lobes sur la Fig. IV.24b. Dans le cas $\mu = 0,1$, la ségrégation verticale est plus rapide que pour $\mu = 0,5$ et moins que pour $\mu = 0,8$, ainsi que la ségrégation horizontale, le décrochage de Ψ intervenant pour $t \simeq 4000\ ns$, contre $t \simeq 3000\ ns$ pour $\mu = 0,8$ et $t \simeq 6000\ ns$ pour $\mu = 0,5$. Une fois la ségrégation horizontale établie, la longueur d'onde pour $\mu = 0,1$ semble proche de celle observée pour $\mu = 0,8$, mais les lobes sont moins nets (voir la Fig. IV.24a).

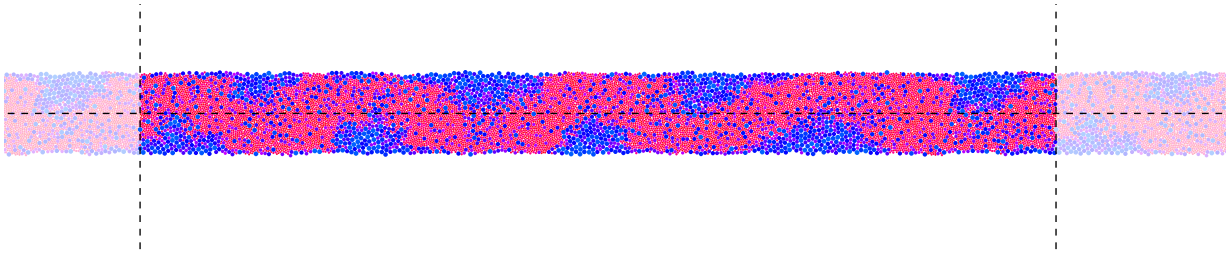
Notre conclusion à ce stade est que la longueur d'onde ne semble pas dépendre du coefficient de frottement. En revanche, le temps typique de formation des lobes en dépend fortement : cela



(a) État après 8000 secousses pour $\mu = 0,1$.



(b) État après 8000 secousses pour $\mu = 0,3$.



(c) État après 8000 secousses pour $\mu = 0,8$.

FIGURE IV.24 – Illustration de l'état après 8000 secousses de trois bandes ayant en commun la même graine (conditions initiales), ainsi que les paramètres $T_s = 1,5$ s et $\alpha_{larg} = 12$, mais différant par le coefficient de frottement implémenté.

est visiblement dû à la variation du temps typique de ségrégation verticale τ avec μ et au fait que la ségrégation horizontale intervient systématiquement après la ségrégation verticale.

III-2.c) Dépendance en les conditions initiales de la bande

Un dernier point intéressant est la robustesse de la longueur d'onde qui ressort de nos simulations. Pour évaluer celle-ci, nous avons simulé des bandes présentant des dispositions initiales particulières des petits grains et gros grains (voir les Fig. IV.26 et IV.28) afin de voir si l'on obtient toujours des lobes, et d'évaluer la façon dont ils se forment. Nous souhaitons aussi vérifier que la position des lobes n'est pas artificiellement contrainte par un quelconque artefact numérique.

La première disposition envisagée est celle où les petits grains sont initialement rassemblés dans la région $x \leq L/2$ et les gros grains dans la région $x \geq L/2$. Nous avons ainsi un « lobe » rectangulaire de chaque côté de $z = 0$, les deux étant situés à la même position selon (Ox). Les paramètres physiques sont $T_s = 1,5$ s, $\mu = 0,5$ et $\alpha_{larg} = 3$. Nous réalisons comme d'habitude la simulation pour quatre graines, c'est-à-dire quatre jeux de tailles de grains et de positions initiales des grains différents. Après 10000 secousses, nous faisons deux observations importantes (voir la Fig. IV.26).

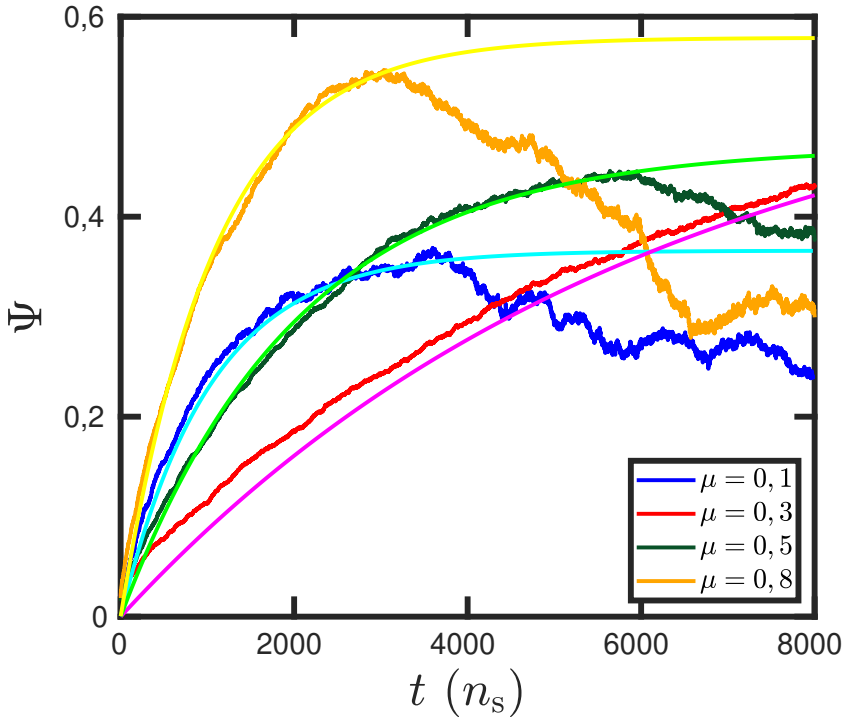
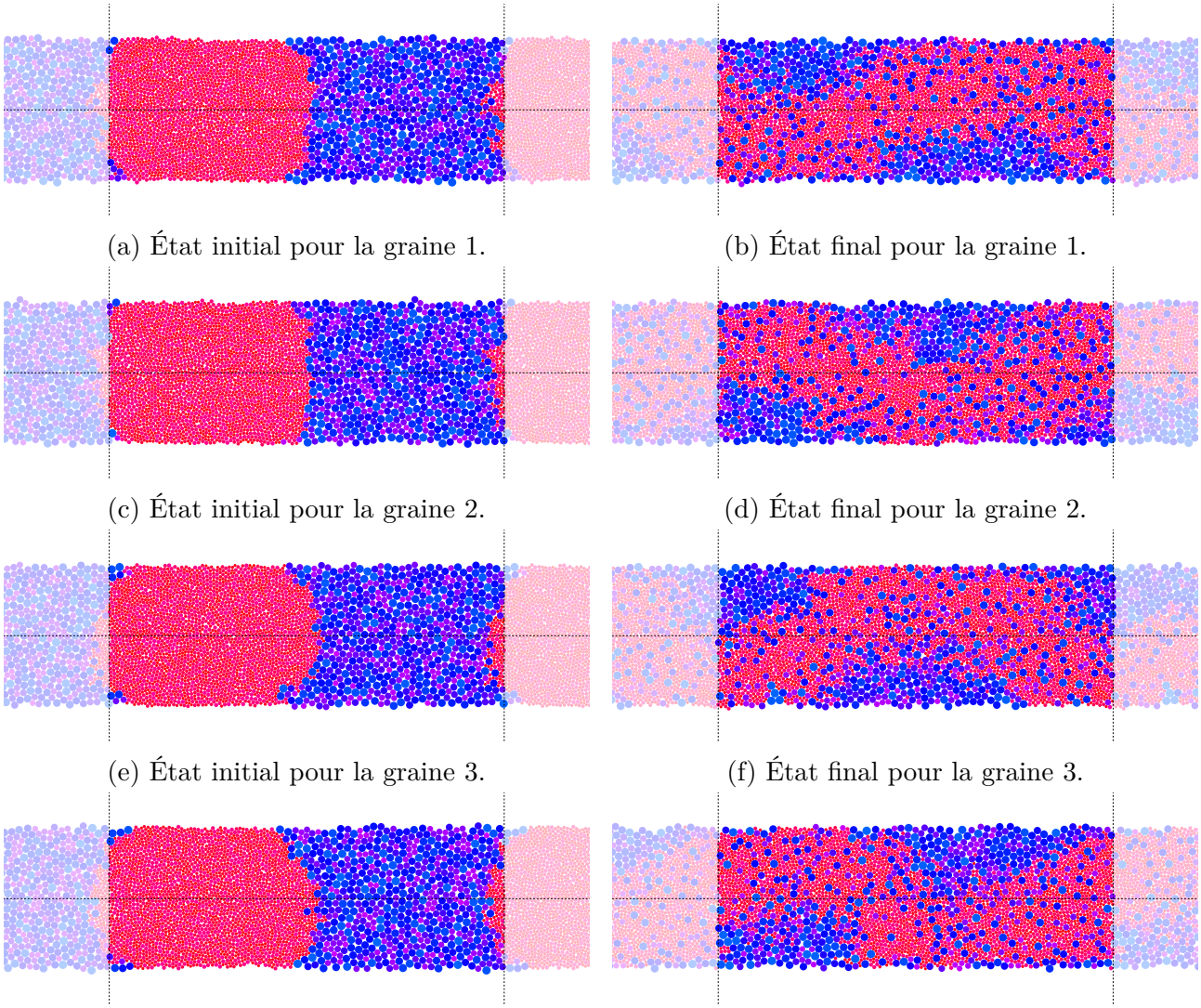


FIGURE IV.25 – Tracé du degré de ségrégation verticale Ψ pour quatre simulations utilisant la même graine ainsi que les paramètres $T_s = 1,5$ s et $\alpha_{larg} = 12$, mais différant par le coefficient de frottement implémenté. Les données à $\mu \neq 0,5$ sont tirées des simulations illustrées sur la Fig. IV.24. Pour chaque valeur de μ, la courbe de couleur plus claire représente l'ajustement de la forme $\Psi(t) = \Psi_\infty(1 - \exp(-t/\tau))$.

- Pour toutes les graines, nous avons formation d'un lobe par face, les centres des deux lobes étant approximativement éloignés de $L/2$ selon (Ox). Nous rejoignons de ce point de vue la configuration obtenue pour les mêmes paramètres physiques, mais avec un état initial complètement mélangé (voir la Fig. IV.15 pour comparaison).
- Les positions des lobes sont aléatoires d'une graine à l'autre. Pour la graine 1, les gros grains semblent avoir peu bougé dans la région $z < 0$, mais s'être déplacés en moyenne de $L/2$ dans la région $z > 0$. C'est typiquement l'inverse pour la graine 4. Pour la graine 2 par contre, les gros grains se sont rassemblés autour de $x = 0$ dans la région $z < 0$ et de $x = L/2$ dans la région $z > 0$, et inversement pour la graine 3.

Nous présentons sur la Fig. IV.27 les graphes spatio-temporels correspondant aux régions $z > 0$ et $z < 0$ dans le cas de la graine 2.

Nous y voyons bien la dérive du lobe de gros grains de chaque côté de la ligne $z = 0$, à travers laquelle aucun échange de gros grains ne semble se faire. L'ensemble de ces constats traduit bien le fait que la ségrégation horizontale se comporte comme une instabilité mécanique. En effet, nous savions que pour un état initial apparamment invariant selon (Ox), la formation de lobes constitue une brisure de cette invariance. Nous savons désormais aussi qu'en partant d'une situation non invariante selon (Ox), les lobes adoptent forcément une configuration « intercalée », et que celle-ci peut indifféremment s'aligner sur la position initiale d'un des deux lobes, ou bien s'aligner sur des positions intermédiaires. Le phénomène de ségrégation



(a) État initial pour la graine 1. (b) État final pour la graine 1.

(c) État initial pour la graine 2. (d) État final pour la graine 2.

(e) État initial pour la graine 3. (f) État final pour la graine 3.

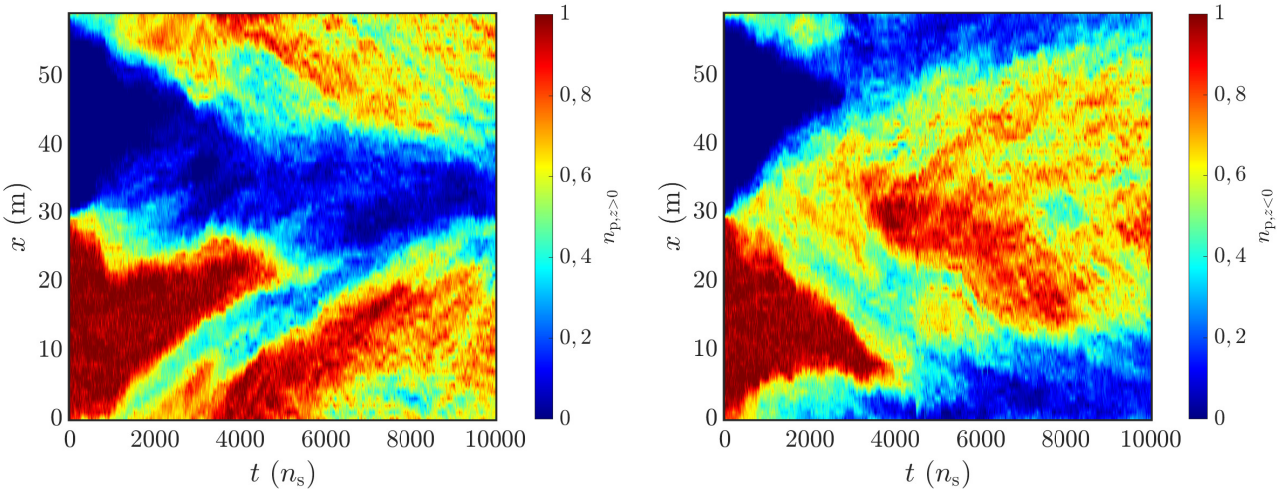
(g) État initial pour la graine 4. (h) État final pour la graine 4.

FIGURE IV.26 – Illustration des états initiaux et finaux (soit après 10000 secousses) pour quatre graines différentes avec les petits grains initialement rassemblés dans la région $x \leq L/2$ et les gros grains dans la région $x \geq L/2$. Les paramètres physiques sont $T_s = 1,5$ s, $\mu = 0,5$ et $\alpha_{larg} = 3$.

horizontale est donc particulièrement sensible aux conditions initiales.

Pour essayer d'aller plus loin dans la compréhension de la disposition intercalée des lobes d'une face par rapport à l'autre, nous proposons de partir d'une situation présentant des « lobes » rectangulaires déjà intercalés (voir la Fig. IV.28), afin de suivre l'évolution de leurs positions selon (Ox). Les paramètres physiques sont toujours les mêmes, à savoir $T_s = 1,5$ s, $\mu = 0,5$ et $\alpha_{larg} = 3$.

Nous constatons alors qu'après 10000 secousses, les lobes n'ont quasiment pas bougé pour les graines 2 à 4, mais se sont décalés pour la graine 1, puisqu'ils sont désormais approximativement centrés sur $x = 0$ et $x = L$. Cela est d'autant plus surprenant que la graine 1 est précisément la seule pour laquelle le lobe à $z < 0$ restait à la même place dans la configuration précédente (voir la Fig. IV.26b). L'analyse spatio-temporelle des densités de petits grains $n_{p,z>0}$ et $n_{p,z<0}$



(a) Cas $z > 0$.

(b) Cas $z < 0$.

FIGURE IV.27 – Graphe spatio-temporel des fonctions $n_{\mathrm{p},z>0}(x,t)$ et $n_{\mathrm{p},z<0}(x,t)$ pour la graine 2 illustrée sur les Fig. IV.26c et IV.26d. Les paramètres physiques sont $T_{\mathrm{s}} = 1,5$ s, $\mu = 0,5$ et $\alpha_{\mathrm{larg}} = 3$. Nous observons un groupe de gros grains qui vient fusionner avec le lobe principal de la région $z > 0$, entre $t = 2000\ n_{\mathrm{s}}$ et $t = 8000\ n_{\mathrm{s}}$.

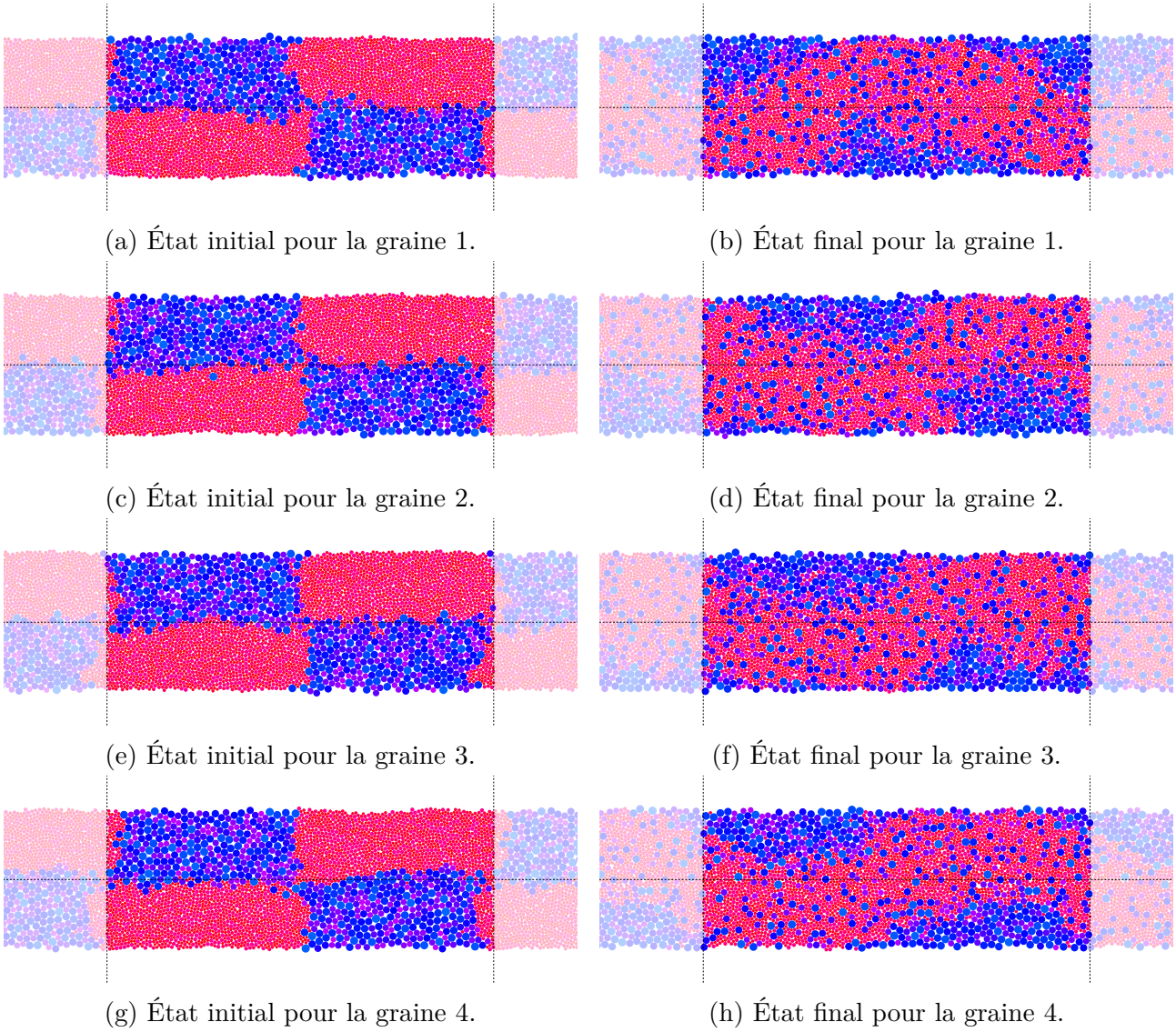
est proposée sur la Fig. IV.29.

Ces graphes spatio-temporels confirment nos observations : les régions de gros grains changent de forme, puisque de rectangles elles deviennent des lobes, mais ne se déplacent globalement pas selon (Ox). Il apparaît donc que même si les conditions initiales de la bande présentent des lobes de ségrégation horizontale à des positions données, le fait de soumettre la bande à des perturbations peut mener à un déplacement de ces lobes.

III-3. Dynamique dans la région des petits grains

Pour terminer cette étude de la ségrégation horizontale, nous proposons d'analyser le mouvement des grains au sein de la région en forme de serpentin que forment les petits grains entre les lobes de gros grains. Pour ce faire, nous procédons comme suit.

- Nous découpons la bande en carrés de côté 1 m. Chaque carré correspond ainsi à $x \in [p_x, p_x + 1], z \in [p_z, p_z + 1]$ avec p_x, p_z entiers, et sera donc désigné par le couple (p_x, p_z).
- Pour chaque carré (p_x, p_z), nous repérons les grains i lui appartenant à l'instant $t = nT$ et calculons le déplacement vectoriel $\overrightarrow{d_i}(nT)$ de chacun de ces grains entre $t = nT$ et $t = (n+1)T$, autrement dit durant la n-ème perturbation. Nous avons donc $\overrightarrow{d_i}(nT) = \overrightarrow{x_i}(nT + T) - \overrightarrow{x_i}(nT)$.
- Nous moyennons ensuite ces déplacements sur tous les grains i du carré (p_x, p_z) pour obtenir le déplacement vectoriel moyen des grains de ce carré durant la n-ème perturbation, noté $\overrightarrow{d}(p_x, p_z, nT)$. Cela correspond à un champ de déplacement eulérien au sein de la bande de grains, à l'instant $t = nT$.
- Nous moyennons ensuite ces déplacements dans le temps, sur toutes les perturbations entre les numéros $n_{\min}$ et $n_{\max}$, ce qui nous donne le champ de déplacement $\overrightarrow{d}(p_x, p_z)$.



(a) État initial pour la graine 1. (b) État final pour la graine 1.

(c) État initial pour la graine 2. (d) État final pour la graine 2.

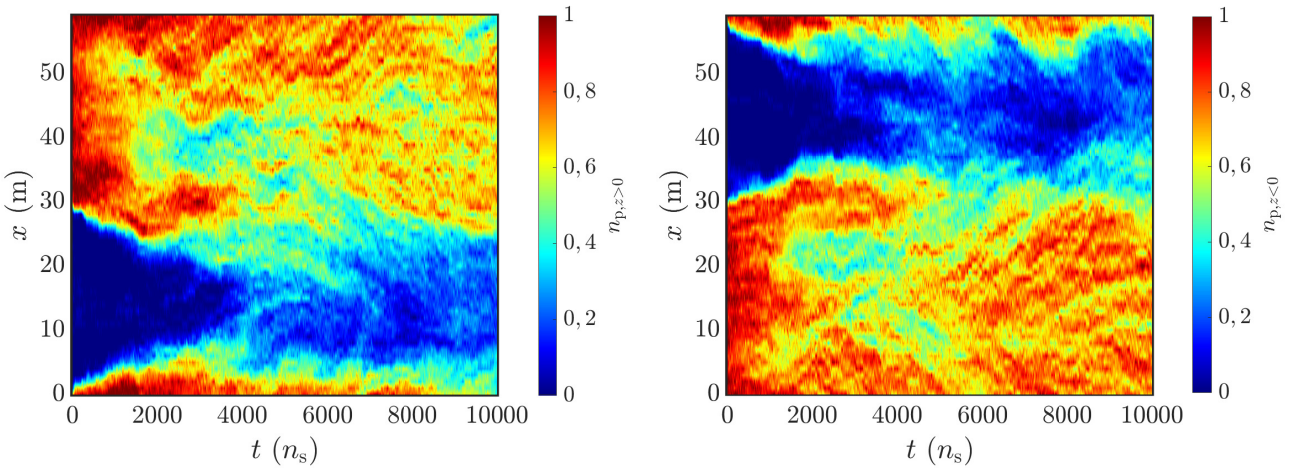
(e) État initial pour la graine 3. (f) État final pour la graine 3.

(g) État initial pour la graine 4. (h) État final pour la graine 4.

FIGURE IV.28 – Illustration des états initiaux et finaux (soit après 10000 secousses) pour quatre graines différentes avec les petits grains initialement rassemblés dans les régions $x \leq L/2, z < 0$ et $x \geq L/2, z > 0$ et les gros dans les régions $x \leq L/2, z > 0$ et $x \geq L/2, z < 0$. Les paramètres physiques sont $T_\mathrm{s} = 1,5$ s, $\mu = 0,5$ et $\alpha_\mathrm{larg} = 3$.

Le résultat de cette analyse pour une simulation à $T_\mathrm{s} = 1,5$ s, $\mu = 0,5$ et $\alpha_\mathrm{larg} = 3$, entre les perturbations $n_\mathrm{min} = 9000$ et $n_\mathrm{max} = 10000$, est illustré sur la Fig. IV.30.

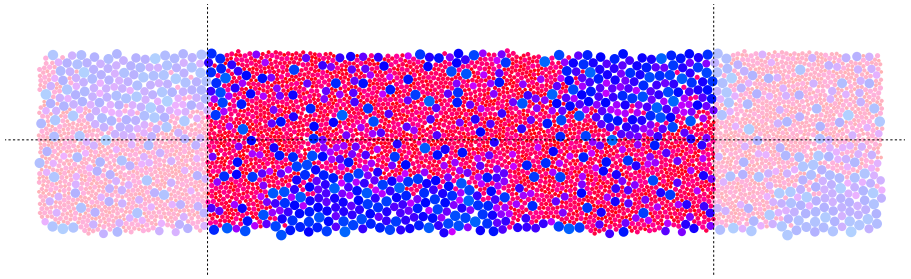
Les positions des lobes de gros grains sont stables sur tout l'intervalle temporel choisi pour l'analyse. Au vu de l'allure du champ de déplacement $\overrightarrow{d}$, qui semble former des boucles au sein du serpentin de petits grains (voir la Fig. IV.30b), nous calculons son rotationnel, noté $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{d})$. La norme de celui-ci est représentée en couleurs sur la Fig. IV.30c, et nous ajoutons des lignes de courant de $\overrightarrow{d}$ reconstituées sur la Fig. IV.30d. Il ressort alors très nettement que les petits grains suivent des boucles de courant dans les régions inter-lobes. On distingue une boucle dans le sens horaire dans la partie gauche de la barre et anti-horaire dans la partie droite. Ces boucles étant issues d'une moyenne des déplacements réalisée sur 1000 perturbations, nous pouvons affirmer



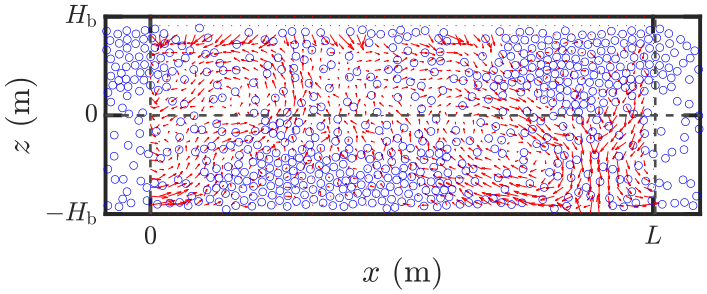
(a) Cas $z > 0$. (b) Cas $z < 0$.

FIGURE IV.29 – Graphe spatio-temporel des fonctions $n_{\mathrm{p},z>0}(x,t)$ et $n_{\mathrm{p},z<0}(x,t)$ pour la graine 4 illustrée sur les Fig. IV.28g et IV.28h. Les paramètres physiques sont $T_{\mathrm{s}} = 1,5$ s, $\mu = 0,5$ et $\alpha_{\mathrm{larg}} = 3$. Les régions de gros grains changent de forme mais ne se déplacent gloablement pas selon (Ox).

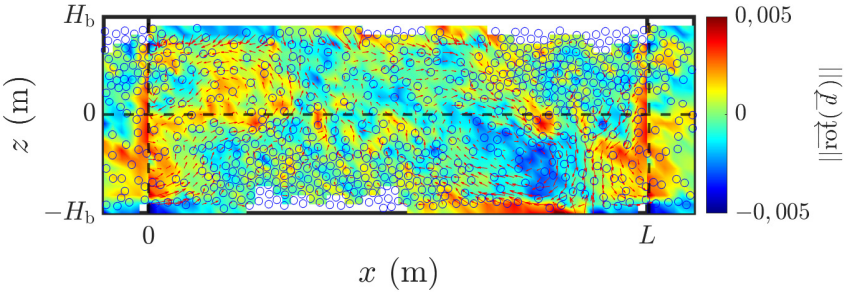
qu'elles sont persistantes. Cependant, l'existence de boucles persistantes dans le mouvement des grains est démentie dans le cas d'un agrégat circulaire [100]. Dans le cas présent, ces boucles ont des conséquences sur les lobes : en effet, les quelques gros grains toujours présents dans le serpentin de petits grains sont entraînés par ces boucles, qui peuvent donc constituer un moyen d'échange de gros grains entre les deux lobes. Cela tempère les conclusions de la section précédente : même si les lobes semblent se déplacer en gardant un nombre de grains assez constant, il peut en fait y avoir des grains entrants et sortants pour un lobe, et échangés avec l'autre lobe.



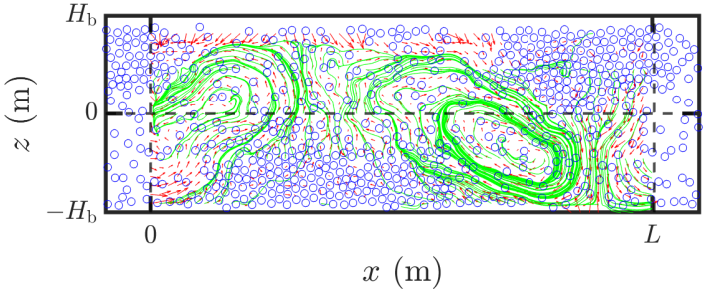
(a) Vue de la bande à $t = 9000\ n_s$.



(b) Tracé du champ $\overrightarrow{d}$ en rouge.



(c) Superposition du champ $\overrightarrow{d}$ en rouge et de la norme de son rotationnel en trame de fond.



(d) Superposition du champ $\overrightarrow{d}$ et de ses lignes de courant reconstituées afin de servir de guide pour l'œil, en vert.

FIGURE IV.30 – Illustration de l'analyse des mouvements des petits grains dans une situation où les lobes de gros grains sont déjà formés, ici entre la 9000ème et la 10000ème secousse, pour une simulation dont les paramètres physiques sont $T_s = 1,5$ s, $\mu = 0,5$ et $\alpha_{larg} = 3$. Nous reproduisons en bleu, sur toutes les images traitées, les positions des gros grains à $t = 9000\ n_s$ (soit sur la Fig. IV.30a).

IV- Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'observer l'effet de la géométrie du champ gravitationnel environnant sur la ségrégation, afin de mieux comprendre les différences possibles entre le cas terrestre et la ségrégation en champ central. Les principaux résultats sont les suivants.

- Les dépendances en μ et J^* de la ségrégation verticale sous $\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r}) \propto -z\overrightarrow{e_z}$ sont très proches de celles observées pour la ségrégation radiale sous $\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r}) \propto -r\overrightarrow{e_r}$.
- La ségrégation verticale est globalement bien plus lente dans le cas d'une bande de grains que la ségrégation radiale dans un agrégat circulaire, essentiellement du fait qu'une perturbation déplace tous les grains selon un même axe de l'espace dans le cas où $\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r}) \propto -z\overrightarrow{e_z}$.
- La qualité de la ségrégation dans l'état final ne dépend quasiment plus de la géométrie, à intensité du champ en surface donnée, lorsque l'on atteint de hautes valeurs du coefficient de frottement, comme $\mu = 0,8$.
- Nous constatons une ségrégation horizontale postérieure à la ségrégation verticale, et analogue à la ségrégation angulaire des agrégats circulaires. Celle-ci se caractérise par des lobes sur chaque face, présentant des positions intercalées d'une face sur l'autre, et séparés d'une distance bien définie et peu dépendante de μ.
- Sous l'effet des perturbations appliquées, des boucles de courant existent au sein des petits grains entre les lobes des deux faces opposées, permettant des échanges de gros grains entre lobes.

Chapitre V

Simulations d'astéroïdes bidimensionnels soumis à des collisions aléatoires

Ce qui ne peut être évité, il faut l'embrasser.

William Shakespeare.

Dans ce chapitre, nous revenons aux astéroïdes circulaires étudiés dans le Chap. III, mais soumis cette fois-ci à des collisions par des grains de provenance aléatoire mais de vitesse d'impact fixée dans chaque simulation. Nous montrons que ce type de perturbation, plus réaliste d'un point de vue astrophysique, mène également à une ségrégation radiale de l'agrégat et détaillons le rôle nouveau joué par les différents paramètres, dont le coefficient de restitution des collisions entre grains.

Sommaire

I- Perturbations par collisions **176**
I-1. Présentation générale 176
I-2. Comportement de l'agrégat sous une collision 177
II- Ségrégation radiale sous collisions **180**
II-1. Observations 180
II-2. Déplacements moyens des grains 181
II-3. Influence de la vitesse de collision 184
II-4. Influence du coefficient de frottement 187
II-5. Influence du moment d'inertie 188
III- Conclusion **191**

I- Perturbations par collisions

I-1. Présentation générale

Les simulations réalisées dans le cadre de ce chapitre reprennent en très grande partie les éléments déjà présentés dans le Chap. III : champ central imposé à deux dimensions, distribution en taille des grains, initialisation de la simulation sont identiques. Nous introduisons cependant une différence de taille : il n'est désormais plus question d'inversions périodiques du champ gravitationnel. Pour perturber l'astéroïde, nous le soumettons à des collisions répétées par un grain « impacteur », dont la taille est typique des gros grains de l'astéroïde, puisque son rayon réduit vaut $\overline{R}_{\text{imp}} = 1$. Tous les $t = nT$ avec n entier, ce grain impacteur est lâché à une hauteur $h = 6$ m de la surface de l'astéroïde, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = -v_0\overrightarrow{e_r}$ dirigée vers le centre O de l'astéroïde. L'intervalle de temps entre deux lâchers vaut $T = 12,5$ s, ce qui est suffisant pour que l'agrégat revienne au repos après chaque collision. La position angulaire du point de lâcher est quant à elle aléatoire. Ainsi, l'astéroïde subit des collisions successives provenant de toutes les directions. Il est important de souligner que nous sommes dans un régime de collisions non destructif [27,200] : comme nous le montrons plus loin, les déplacements moyens des grains restent limités. Il n'y a pas de vaste cratère créé, et l'impacteur ne se retrouve pas enterré sous les autres grains après la collision (voir la Fig. V.2 par exemple). Après la collision, le grain impacteur repose donc à la surface et nous le retirons pour le lâcher de nouveau vers l'astéroïde, depuis une autre position angulaire (mais toujours à la même altitude h). Comme il s'agit d'un gros grain, on évite ainsi d'accumuler directement des gros grains à la surface de l'agrégat, ce qui créerait une ségrégation artificielle.

L'énergie apportée par une perturbation de ce type correspond à l'énergie cinétique $E_{\text{c,imp}}$ du grain impacteur, au moment où il rentre en contact avec l'astéroïde. Celle-ci correspond à son énergie cinétique au moment du lâcher, augmentée du travail du champ central $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ (donné par l'Éq. (III.1)) durant la chute du grain impacteur vers la surface de l'agrégat. La masse du grain impacteur vaut $m_{\text{imp}} = m^*\overline{R}_{\text{imp}}{}^2 = m^*$ puisque $\overline{R}_{\text{imp}} = 1$. Ainsi, nous avons

$$E_{\text{c,imp}} = \frac{1}{2}m^*\overrightarrow{v_0}^2 + \frac{1}{2}m^*\frac{g}{R_{\text{ast}}}\left[(R_{\text{ast}}+h)^2 - R_{\text{ast}}{}^2\right]. \tag{V.1}$$

Pour des vitesses de lâcher allant de $v_0 = 5$ m.s^{-1} à $v_0 = 23$ m.s^{-1}, et avec les paramètres fixes $m^* = 1$ kg, $g = 1$ m.s^{-2}, $R_{\text{ast}} = 11$ m et $h = 6$ m, l'énergie cinétique de l'impacteur varie entre $E_{\text{c,imp}} = 20$ J et $E_{\text{c,imp}} = 272$ J. Néanmoins seule une partie de cette énergie est transmise à l'astéroïde, compte tenu de la dissipation dans les premières collisions. La plus haute valeur du produit de v_0 par le coefficient de restitution en vitesse e que nous avons implémentée est $ev_0 = 11,64$ m.s^{-1}, soit $e = 0,506$ pour la vitesse de lâcher maximale utilisée qui est $v_0 = 23$ m.s^{-1}. Cela donne donc un coefficient de restitution en énergie $e_{\text{E}} = 0,256$ pour cette valeur de v_0. Ainsi, l'énergie typiquement transmise à l'astéroïde au cours d'une collision est de l'ordre de 70 J. Cette valeur est à comparer à l'énergie potentielle gravitationnelle stockée dans l'agrégat au repos, qui vaut $E_{\text{pg,tot}} = M_{\text{ast}}R_{\text{ast}}g/4 \simeq 100$ J pour $M_{\text{ast}} = 400$ kg, $R_{\text{ast}} = 11$ m et $g = 1$ m.s^{-2}. Une collision peut donc apporter une fraction non négligeable de cette énergie potentielle au repos, mais en raison du champ gravitationnel central $\overrightarrow{\mathcal{G}} \propto -r\overrightarrow{e_r}$ imposé sur toute la carte, y compris hors de l'astéroïde, les déformations de celui-ci restent faibles, comme nous l'avons vu.

Enfin, nous sommes toujours à deux dimensions, avec la distribution en taille binaire décrite

par l'histogramme de la Fig. II.1a, et une fraction d'aire couverte par les gros grains $\alpha_{\mathrm{A}} = 0,5$. Par conséquent, le degré de ségrégation normalisé Ψ est défini exactement de la même manière que dans le Chap. III. Pour rappel, nous avons :

$$\Psi = \frac{\psi - 1}{\psi_{\max} - 1} \quad \text{avec} \quad \psi = \frac{\langle r_{\mathrm{g}} \rangle}{\langle r_{\mathrm{t}} \rangle} \quad \text{et} \quad \psi_{\max} = 1,29289, \tag{V.2}$$

$\langle r_{\mathrm{g}} \rangle$ étant la distance moyenne des gros grains au centre O, cette moyenne étant pondérée par les surfaces des grains, et $\langle r_{\mathrm{t}} \rangle$ la distance moyenne de tous les grains au centre O, également pondérée par leurs surfaces.

I-2. Comportement de l'agrégat sous une collision

Nous nous intéressons à la trajectoire de l'impacteur avant la collision. Durant sa chute, il est uniquement soumis au champ central imposé. En le repérant par $\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r}$, nous avons alors :

$$\ddot{r}(t) + \frac{g}{R_{\mathrm{ast}}} r(t) = 0. \tag{V.3}$$

Nous écrivons donc $r(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ où $\omega = \sqrt{g/R_{\mathrm{ast}}}$ et A et φ sont des constantes déterminées par les conditions initiales. En l'occurrence, si le lâcher a lieu à l'instant $t = 0$, nous avons $r(0) = R_{\mathrm{ast}} + h$ et $\dot{r}(0) = -v_0$. Nous en déduisons l'équation horaire suivante :

$$r(t) = \sqrt{(R_{\mathrm{ast}} + h)^2 + \frac{{v_0}^2 R_{\mathrm{ast}}}{g}} \cos\left[\sqrt{\frac{g}{R_{\mathrm{ast}}}} t + \arctan\left(\frac{v_0}{R_{\mathrm{ast}} + h}\sqrt{\frac{R_{\mathrm{ast}}}{g}}\right)\right]. \tag{V.4}$$

La collision avec la surface de l'astéroïde a lieu en $t = t_{\mathrm{choc}}$, cet instant étant défini en première approximation par $r(t_{\mathrm{choc}}) = R_{\mathrm{ast}}$. En utilisant l'Éq. (V.4), nous avons :

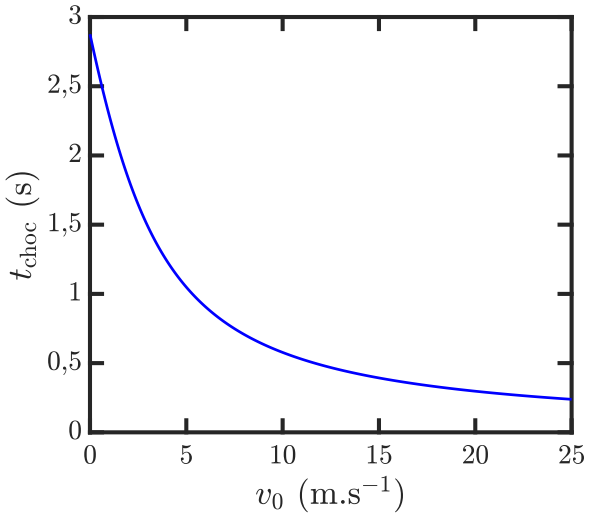
$$t_{\mathrm{choc}} = \sqrt{\frac{R_{\mathrm{ast}}}{g}} \left[\arccos\left(\frac{R_{\mathrm{ast}}}{\sqrt{(R_{\mathrm{ast}} + h)^2 + {v_0}^2 R_{\mathrm{ast}}/g}}\right) - \arctan\left(\frac{v_0}{R_{\mathrm{ast}} + h}\sqrt{\frac{R_{\mathrm{ast}}}{g}}\right)\right]. \tag{V.5}$$

Nous en déduisons immédiatement la vitesse v_{choc} de l'impacteur au moment où il atteint l'agrégat (du reste, cette information était déjà contenue dans l'Éq. (V.1)) :

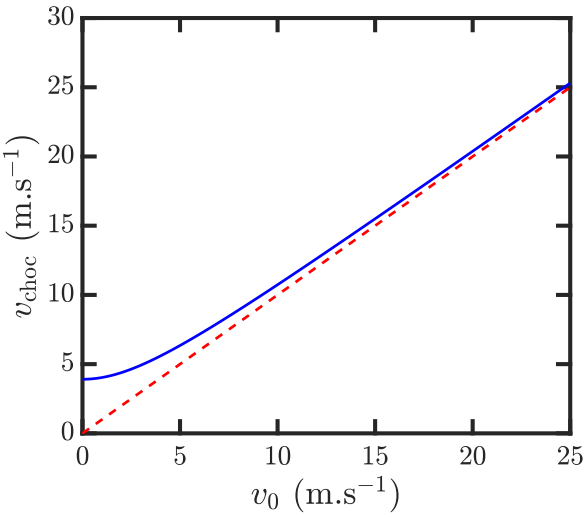
$$v_{\mathrm{choc}} = \dot{r}(t_{\mathrm{choc}}) = \sqrt{{v_0}^2 + \frac{g}{R_{\mathrm{ast}}}\left[(R_{\mathrm{ast}} + h)^2 - {R_{\mathrm{ast}}}^2\right]}. \tag{V.6}$$

Pour $R_{\mathrm{ast}} = 11$ m, $h = 6$ m et $g = 1$ m.s^{-2}, nous traçons t_{choc} et v_{choc} en fonction de v_0 sur la plage $[1;25]$ m.s^{-1} dans laquelle se situent toutes les vitesses de lâcher explorées dans nos simulations (voir la Fig. V.1).

Le temps que met l'impacteur à atteindre l'astéroïde n'excède donc pas 1 s dès lors que $v_0 \geq 5$ m.s^{-1}, ce qui sera toujours le cas dans nos simulations. Nous constatons de plus que v_{choc} est très proche de v_0 pour cette gamme de vitesses, ce qui traduit le fait que l'énergie cinétique initiale $m{v_0}^2/2$ est grande devant le travail du champ central entre $r = R_{\mathrm{ast}} + h$ et $r = R_{\mathrm{ast}}$. Cela nous permet de contrôler assez finement la vitesse de collision sans avoir à lâcher l'impacteur trop près de l'astéroïde, ce qui pourrait poser problème pour un astéroïde de forme légèrement irrégulière. Notons que dans presque toutes nos simulations, nous avons considéré



(a) Évolution de t_{choc} avec v_0.

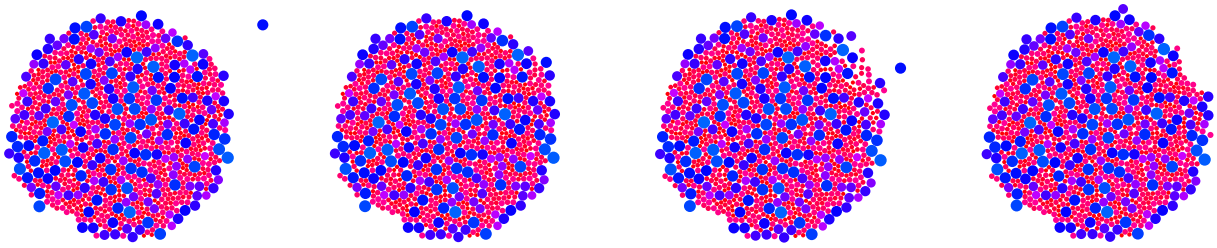


(b) Évolution de v_{choc} avec v_0. La droite tiretée rouge représente le cas limite $v_{\text{choc}} = v_0$, atteint si $h = 0$.

FIGURE V.1 – Évolution du temps t_{choc} théoriquement écoulé entre le lâcher et la collision de l'impacteur avec l'agrégat, ainsi que de la vitesse théorique v_{choc} de l'impacteur au moment de la collision, en fonction de la vitesse de lâcher v_0 pour $R_{\text{ast}} = 11$ m, $h = 6$ m et $g = 1$ m.s^{-2}.

$R_{\text{ast}} = 11$ m, $h = 6$ m et $g = 1$ m.s^{-2}, et des vitesses v_0 allant de 5 m.s^{-1} à 23 m.s^{-1}. Les rares exceptions concernent h, et seront spécifiquement mentionnées.

Nous proposons maintenant d'observer l'évolution d'un astéroïde sous une collision (la 160ème, en l'occurrence) pour une simulation dont les paramètres sont $v_0 = 20,45$ m.s^{-1}, $e = 0,569$ (coefficient de restitution en vitesse) et $\mu = 0,5$ (voir la Fig. V.2).



(a) État avant la collision.

(b) État 0,1 s après la collision.

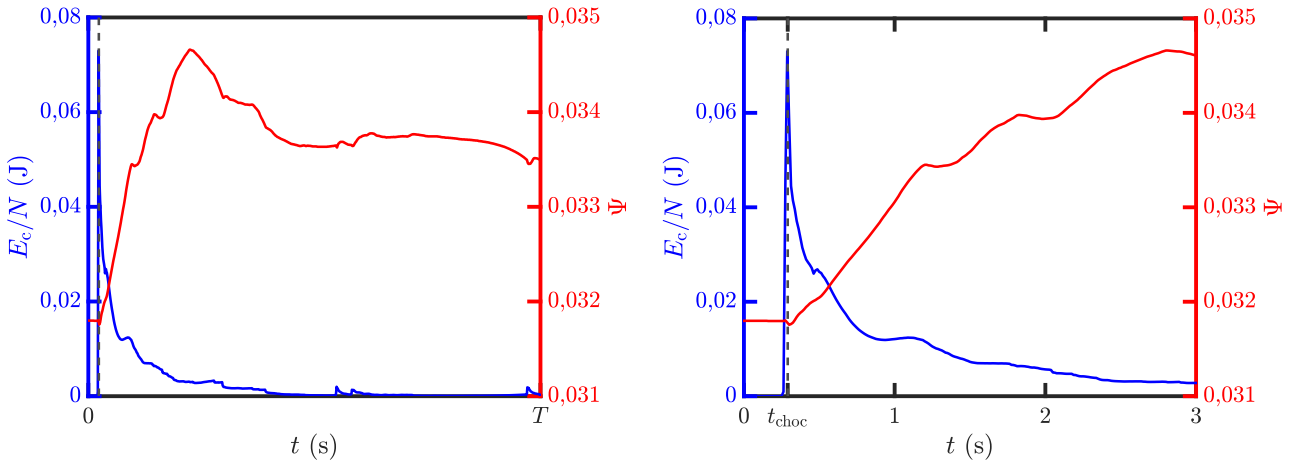
(c) État 0,8 s après la collision.

(d) État 5 s après la collision.

FIGURE V.2 – Évolution d'un astéroïde suite à une collision, pour une simulation de paramètres $v_0 = 20,45$ m.s^{-1}, $e = 0,569$ et $\mu = 0,5$. Les images concernent la 160ème collision.

Nous voyons d'abord l'impacteur arriver sur la Fig. V.2a. Peu après la collision (0,1 s après, exactement), nous voyons que l'impacteur a légèrement rebondi, et les grains n'ont pas encore beaucoup bougé. Une certaine partie de l'énergie apportée est alors convertie en énergie potentielle élastique (voir la Fig. V.2b). Ensuite, 0,8 s après la collision, une partie de l'énergie

potentielle élastique est convertie en énergie potentielle gravitationnelle : les grains s'écartent les uns des autres dans la zone de l'impact, seul l'impacteur ayant un rebond relativement haut, comme on peut le voir sur la Fig. V.2c. Les grains ainsi écartés sont naturellement réattirés par le champ central imposé, et adoptent donc un nouvel arrangement dans la zone de l'impact, bien visible 5 s après celui-ci (voir la Fig. V.2d). Tout ceci illustre notre propos précédent sur le fait que ces collisions ne sont pas destructives pour l'agrégat, mais entraînent essentiellement des déplacement en surface autour du point d'impact. Nous pouvons par ailleurs observer l'évolution de l'énergie cinétique moyenne par grain et du degré de ségrégation suite à ce même impact (voir la Fig. V.3).



(a) Évolution entre le 160ème lâcher (ici à $t = 0$) et le 161ème (à $t = T$).

(b) Agrandissement sur les temps $t \leq 3$ s.

FIGURE V.3 – Tracés de l'énergie cinétique moyenne par grain E_c/N (en bleu) et du degré de ségrégation Ψ (en rouge) entre deux lâchers successifs de l'impacteur. Le lâcher suivi est le même que sur la Fig. V.2, pour la même simulation, dont les paramètres sont $v_0 = 20,45$ m.s^{-1}, $e = 0,569$ et $\mu = 0,5$. La ligne tiretée noire repère l'instant t_{choc} théoriquement prédit pour $v_0 = 20,45$ m.s^{-1}.

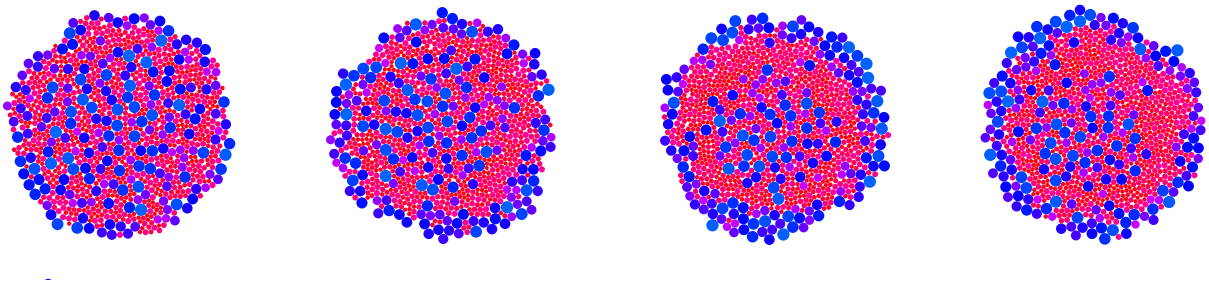
Nous voyons que sous l'effet d'une collision, les grains de l'agrégat acquièrent une certaine énergie cinétique, qui leur permet de se réarranger. Par ailleurs l'énergie cinétique moyenne par particule atteint une valeur maximale légèrement supérieure à $0,07$ J. Comme notre agrégat contient $N = 1000$ particules, notre prédiction de l'ordre de grandeur de l'énergie injectée, qui était de 70 J, se voit confirmée. Les réarrangements obtenus mènent à l'établissement d'une ségrégation radiale. En effet, c'est pendant la phase de diminution de l'énergie cinétique moyenne E_c/N que le degré de ségrégation Ψ augmente. Enfin, l'astéroïde est de nouveau au repos en $t = T = 12,5$ s (c'était d'ailleurs déjà bien le cas à $t = 5$ s), lorsque nous procédons au lâcher suivant de l'impacteur.

Ce nouveau protocole de perturbations, par applications de collisions de provenance aléatoire mais à vitesse fixée pour une simulation donnée, semble donc apte à induire un phénomène de ségrégation. La section suivante présente les résultats que nous obtenons dans ce cadre.

II- Ségrégation radiale sous collisions

II-1. Observations

Comme le montre la Fig. (V.3), les collisions de l'impacteur sur l'astéroïde entraînent des réarrangements faisant augmenter le degré de ségrégation. Nous appliquons un nombre total de 20000 collisions dans toutes les simulations de ce chapitre. La Fig. V.4 montre l'évolution de l'allure de l'astéroïde au fur et à mesure que les collisions surviennent, pour la même simulation que sur la Fig. V.3.

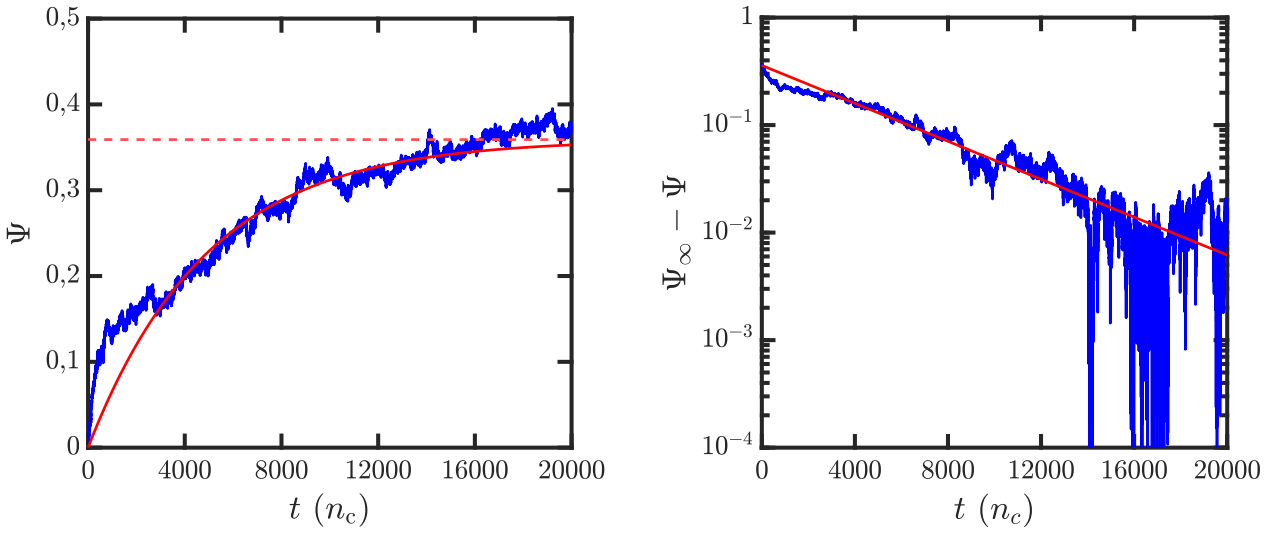


(a) État initial. (b) État après 5000 collisions. (c) État après 10000 collisions. (d) État après 20000 collisions.

FIGURE V.4 – Évolution d'un astéroïde soumis à plusieurs collisions successives. La ségrégation est très nette à la surface, même si l'agrégat reste assez mélangé au centre. La forme de l'agrégat n'est pas parfaitement circulaire du fait des collisions, et les irrégularités évoluent donc au gré des collisions successives. La simulation représentée est celle déjà utilisée pour les Fig. V.2 et V.3, de paramètres $v_0 = 20,45$ m.s^{-1}, $e = 0,569$ et $\mu = 0,5$.

Nous constatons une ségrégation nette concernant une certaine épaisseur sous la surface, le cœur de l'agrégat restant assez mélangé. Par ailleurs, l'agrégat est légèrement déformé par les différents impacts, qui semblent également pouvoir entraîner une forme de ségrégation angulaire, avec une couche surfacique de gros grains d'épaisseur variable le long de la circonférence, et ce dès $t = 5000n_c$ (n_c désignant le nombre de collisions subies). Tout comme pour des perturbations isotropes, nous pouvons quantifier cette ségrégation en étudiant l'évolution du degré de ségrégation Ψ avec le temps t exprimé en nombre de collisions. Nous représentons cette évolution sur la Fig. V.5.

Nous constatons une nouvelle fois qu'un ajustement par une loi cinétique d'ordre 1, soit $\Psi(t) = \Psi_\infty(1 - \exp(-t/\tau_c))$, est pertinent pour décrire l'évolution de Ψ. Il apparaît donc que le mécanisme de ségrégation à l'œuvre est le même que celui obtenu sous des perturbations isotropes (voir le Chap. III). La ségrégation se fait donc essentiellement par des réarrangements locaux des positions des grains, même si ces réarrangements sont ici plus localisés pour une collision donnée. Le fait que les collisions successives se fassent en différents points de la surface permet d'obtenir des réarrangements, et donc une ségrégation, sur toute la surface. Néanmoins, comme nous l'avons vu, le cœur reste peu concerné par ce phénomène.



(a) Évolution de Ψ avec t.

(b) Évolution de $\Psi_\infty - \Psi$ avec t, en échelle semi-logarithmique.

FIGURE V.5 – Évolution du degré de ségrégation pour la simulation illustrée sur la Fig. V.4. Les données sont en bleu et l'ajustement par une loi cinétique d'ordre 1 en rouge. La ligne tiretée rouge repère la valeur de Ψ_∞ ainsi obtenue. Nous trouvons $\Psi_\infty = 0,359$ et $\tau = 4923\ n_c$.

II-2. Déplacements moyens des grains

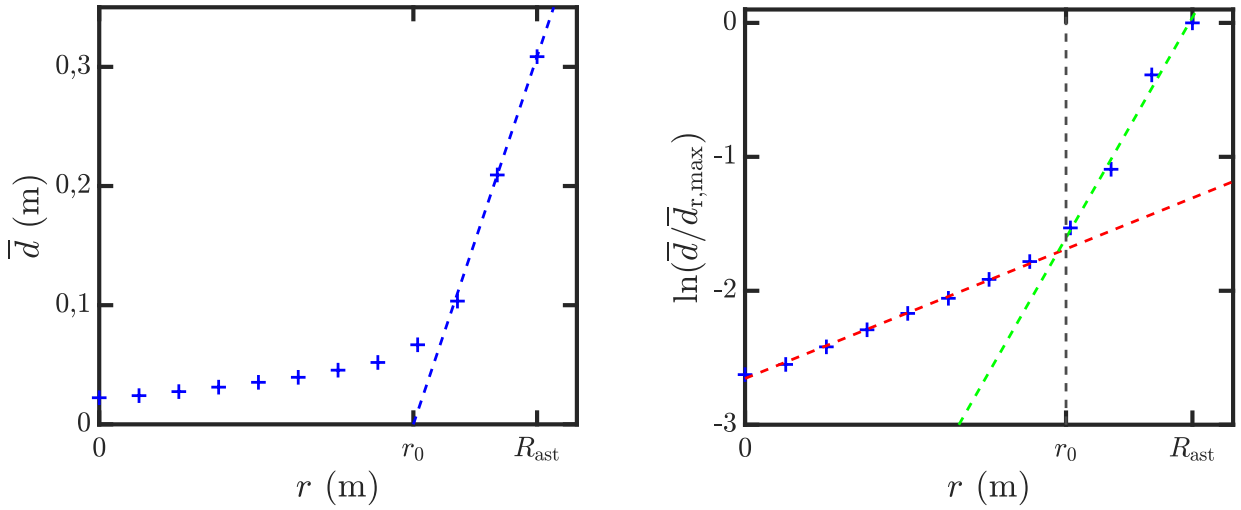
Pour préciser l'idée que les réarrangements dus aux collisions sont moins importants au cœur, nous utilisons le déplacement moyen des grains $\overline{d}$ suite à une perturbation. Nous nous inspirons de la définition donnée au Chap. III, mais en la modifiant afin de pouvoir étudier la dépendance des déplacements avec la distance r au centre de l'agrégat. Nous découpons donc l'astéroïde en anneaux concentriques d'épaisseur $\Delta r = 1$ m. En numérotant les anneaux à partir de $k = 1$, le k-ème d'entre eux a pour rayon intérieur $r_k = (k-1)\Delta r$ et pour rayon extérieur $r_k + \Delta r = k\Delta r$. Nous calculons alors les déplacements moyens des grains au sein de chaque anneau. Ainsi, le déplacement moyen $\overline{d}_n(r_k)$ des grains situés dans le k-ème anneau, suite à la n-ème collision, est donné par :

$$\overline{d}_n(r_k) = \frac{1}{N_{\text{grains}}(r_k)} \sum_{r_k \leq r_i(nT) < r_k + \Delta r} ||\overrightarrow{x_i}(nT+T) - \overrightarrow{x_i}(nT)||, \tag{V.7}$$

où $N_{\text{grains}}(r_k)$ est le nombre de grains i situés dans le k-ème anneau juste avant la n-ème collision, donc à $t = nT$. Ces grains vérifient donc la condition $r_k \leq ||\overrightarrow{x_i}(nT)|| < r_k + \Delta r$ précisée sous le signe somme. Nous moyennons ensuite ces déplcements sur les 100 premières collisions, et non sur les τ premières comme nous le faisions dans le Chap. III. Ainsi, le déplacement moyen des grains sous une collision, à une distance r_k du centre, est défini par :

$$\overline{d}(r_k) = \frac{1}{100} \sum_{n=1}^{100} \overline{d}_n(r_k). \tag{V.8}$$

Nous traçons l'évolution de $\overline{d}$ en fonction de r sur la Fig. V.6.



(a) Évolution de $\overline{d}$ avec r. La ligne tiretée bleue est la droite passant par les deux points à $r = R_{\text{ast}} - \Delta r$ et $r = R_{\text{ast}}$. Son intersection avec l'axe des abscisses donne une estimation de la distance r_0 à partir de laquelle les grains sont fortement déplacés par les collisions se produisant en surface.

(b) Évolution de $\ln(\overline{d}/\overline{d}_{\text{r,max}})$ avec r. Les lignes tiretées représentent des ajustements affines sur $r \leq 7$ m (en rouge) et $r \geq 8$ m (en vert). La ligne tiretée noire repère la distance r_0 tirée de la Fig. V.6a.

FIGURE V.6 – Évolution de l'amplitude des déplacements sous une collision en fonction de la position radiale des grains. Ces données sont obtenues pour la simulation utilisée pour les Fig. V.4 et V.5.

Le tracé de $\overline{d}$ en fonction de r montre que les plus importants déplacements ont lieu en surface, comme nous pouvions nous y attendre. Pour obtenir la tangente à la courbe en $r = R_{\text{ast}}$, nous traçons la droite définie par les deux points à $r = R_{\text{ast}} - \Delta r = 10$ m et $r = R_{\text{ast}} = 11$ m (voir la Fig. V.6a). Celle-ci permet d'estimer la position radiale typique r_0 à partir de laquelle les déplacements sont significativement plus importants qu'au cœur. Ainsi, $R_{\text{ast}} - r_0$ apparaît comme une profondeur de pénétration des déplacements dus aux collisions en surface. Pour la simulation considérée, nous trouvons $r_0 = 7,9$ m. Afin d'étudier la forme de l'amortissement des déplacements avec la profondeur, nous représentons $\ln(\overline{d}/\overline{d}_{\text{r,max}})$ où $\overline{d}_{\text{r,max}} = \overline{d}(R_{\text{ast}})$ (voir la Fig. V.6b). Deux régimes semblent alors se dégager : en effet, $\ln(\overline{d}/\overline{d}_{\text{r,max}})$ présente une dépendance affine en r dans la gamme $r < r_0$, et une dépendance affine, de pente distincte, dans la gamme $r > r_0$. Le fait que la limite entre les deux gammes observées coïncide avec la distance r_0 que nous avons définie est possiblement fortuit : nous ne disposons à ce stade d'aucune analyse théorique permettant de justifier un tel lien. Il ressort néanmoins que $\overline{d}(r) \propto \exp(-\alpha_1(R_{\text{ast}} - r))$ dans la gamme $r < r_0$ et $\overline{d}(r) \propto \exp(-\alpha_2(R_{\text{ast}} - r))$ dans la gamme $r > r_0$. Pour la simulation étudiée ici, nous trouvons $\alpha_1 = 0,12$ m^{-1} et $\alpha_2 = 0,53$ m^{-1}. Nous observons donc deux régimes d'amortissement des déplacements : à partir de la surface, un premier amortissement pour r décroissant de $r = R_{\text{ast}}$ à $r \simeq r_0$, puis un second amortissement, plus faible, de $r \simeq 0$ jusqu'à $r = 0$ au centre de l'agrégat.

La valeur de la constante α_2 caractérisant l'amortissement en surface peut être prédite par un modèle simple. En effet, le déplacement d d'un grain suite à une collision est par définition proportionnel à la vitesse moyenne v de son mouvement entre cette collision et la suivante, soit

durant un intervalle de temps T : $d = vT$. Près de la surface, ce sont les grains situés dans la région d'une collision donnée qui contribuent le plus au calcul du déplacement moyen dû à cette collision. Si nous considérons en particulier le premier grain subissant la collision de l'impacteur, son premier mouvement est surtout radial, à l'image de l'impulsion initiale que lui donne l'impact. Il en va de même des grains situés sous lui (sur l'axe joignant le centre O au point d'impact), du moins sur une certaine profondeur. Néanmoins, plus les grains sont éloignés du point d'impact, moins leur vitesse moyenne v est importante. En effet, chaque contact grain/grain est caractérisé par un coefficient de restitution en vitesse $e_\mathrm{V} < 1$[1]. À chaque contact, v est donc multiplié par e_V, du moins pour un contact binaire (seuls deux grains sont impliqués), frontal et non permanent. Nous appliquons ici la même valeur de e_V aux contacts au niveau de l'impacrt, même si ceux-ci ne vérifient pas exactement ces conditions. Ainsi, la vitesse moyenne $v(r)$, à une profondeur $R_\mathrm{ast} - r$ sous le point d'impact, vérifie :

$$v(r) \propto {e_\mathrm{V}}^{n_\mathrm{c,r}(R_\mathrm{ast}-r)}. \tag{V.9}$$

où $n_\mathrm{c,r}$ est le nombre de contacts rencontrés sur une variation de profondeur de 1 m. En surface, on a rapidement accumulation de gros grains, dont le diamètre moyen est $2R^*\overline{R}_\mathrm{g}$ où $\overline{R}_\mathrm{g} = 1$ est le rayon réduit moyen des gros grains. Par ailleurs, $R^* = 0,5$ m dans nos simulations, et nous estimons donc le diamètre moyen des grains en surface à 1 m. Ainsi, on ne trouve en moyenne qu'un seul contact grain/grain en s'enfonçant de 1 m dans l'astéroïde à partir de la surface, soit $n_\mathrm{c,r} \simeq 1$ m^{-1}. Si nous reprenons l'Éq. (V.9), et que nous considérons $\overline{d}(r) \propto v(r)$ comme vu plus haut, nous avons :

$$\frac{\overline{d}(r)}{\overline{d}_\mathrm{r,max}} = {e_\mathrm{V}}^{n_\mathrm{c,r}(R_\mathrm{ast}-r)}, \tag{V.10}$$

du moins sous la surface, donc pour les valeurs de r les plus proches de R_ast. Nous en déduisons directement :

$$\ln\left(\frac{\overline{d}(r)}{\overline{d}_\mathrm{r,max}}\right) = \ln(e_\mathrm{V}) n_\mathrm{c,r}(R_\mathrm{ast} - r). \tag{V.11}$$

Notre modèle simple prédit donc $\alpha_2 = -n_\mathrm{c,r}\ln(e_\mathrm{V}) = -1 \times \ln(0,569) \simeq 0,56$ m^{-1} pour la simulation considérée, en très bon accord avec la valeur mesurée $\alpha_2 = 0,53$ m^{-1}. Il semble donc que le régime d'amortissement observé pour $r > r_0$ soit essentiellement dû à la force normale visco-élastique qui s'exerce entre le premier grain touché par l'impacteur et ses proches voisins.

Concernant l'amortissement « au cœur », le coefficient α_1 est plus faible que α_2, mais reste du même ordre de grandeur puisque l'on a $\alpha_2/\alpha_1 \simeq 4,4$. Une modélisation concernant α_1 serait complexe du fait de la propagation des ondes mécaniques issues de l'impact dans un milieu où le frottement solide joue un rôle important. Nous nous en tiendrons donc au constat de l'existence de deux régimes d'amortissement, avec une décroissance exponentielle des déplacements moyens au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans l'agrégat, et ce dans les deux régimes. Nous retenons également l'existence d'une distance au centre r_0 typique, en dessous de laquelle les réarrangements sont significativement plus faibles qu'en surface.

1. Même si nous le notons habituellement e, nous ajoutons dans ce paragraphe l'indice V afin d'éviter toute confusion avec la constante de Néper e, puisque l'exponentielle intervient dans les calculs développés.

II-3. Influence de la vitesse de collision

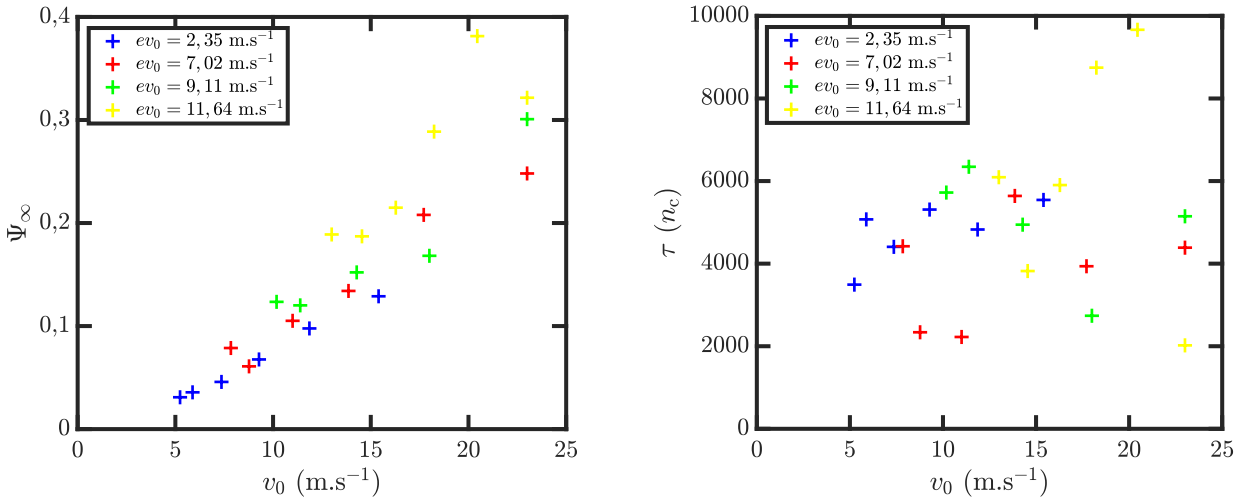
Nous nous attendons à ce que la vitesse de collision v_{choc} ait une influence assez importante sur les caractéristiques de la ségrégation sous collisions. Comme nous avons pu le voir sur la Fig. V.1b, v_{choc} est en fait assez proche de la vitesse de lâcher v_0. Pour la valeur la plus faible $v_0 = 5$ m.s^{-1} que nous avons utilisée, l'écart relatif entre v_{choc} et v_0 est de 27 %, mais celui-ci tombe à 7 % pour $v_0 = 10$ m.s^{-1} et 1 % pour la valeur maximale $v_0 = 23$ m.s^{-1}. Nous étudierons donc la dépendance de Ψ_∞ et τ en fonction de v_0. L'élément limitant pour la gamme de v_0 explorée est la détection du premier contact entre l'impacteur et un grain de l'astéroïde. En effet, si l'impacteur arrive trop vite, son écrasement peut être très important, donc non physique, au moment où ce premier contact est détecté. Pour un impact à vitesse $v_{\text{choc}} \simeq v_0$ (c'est bien le cas aux grandes valeurs de v_0 comme on l'a vu), l'écrasement initial maximal vaut $v_0 \mathrm{d}t$ où $\mathrm{d}t = 5 \times 10^{-4}$ s est le pas de temps de la simulation. Vu que l'impacteur a un diamètre de 1 m, une vitesse $v_0 = 23$ m.s^{-1} peut donner un écrasement initial maximal d'environ 1 % du diamètre de l'impacteur. C'est pourquoi nous n'explorons pas de valeurs v_0 supérieures à 23 m.s^{-1}. La gamme de v_0 étant fixée, nous choisissons de faire varier concomitamment v_0 et e afin de travailler à produit ev_0 fixé. En effet, ce produit quantifie la vitesse typique acquise par le premier grain de l'astéroïde à être touché par l'impacteur. Nous menons ensuite cette étude pour plusieurs valeurs du produit ev_0. Les valeurs de e utilisées sont celles correspondant à certaines valeurs du facteur d'amortissement visqueux γ utilisé dans le calcul de la force normale de contact entre deux grains (voir la Sec. II-4.a) du Chap. II). Pour rappel, la relation liant le coefficient e de restitution en vitesse au facteur γ est, pour un contact entre deux grains de même taille :

$$e = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\frac{2k_{\text{n}}m^*}{\gamma^2} - 1}}\right). \tag{V.12}$$

où $k_{\text{n}} = 10^4$ N.m^{-1} et $m^* = 1$ kg. Comme e est décroissant de γ, et que nous travaillons à ev_0 constant, la valeur de γ à implémenter augmente avec la vitesse de lâcher v_0 utilisée. Nous choisissons donc une valeur maximale de γ avec laquelle travailler, et que nous associons à $v_0 = 23$ m.s^{-1}. Cela fixe naturellement le produit ev_0, et nous en déduisons les vitesses v_0 à implémenter pour les valeurs de γ plus faibles que nons voulons explorer.

Maintenant que nous avons détaillé le choix des valeurs de e et de v_0 implémentées, nous proposons d'étudier l'évolution de Ψ_∞ et τ en fonction de v_0, pour différentes valeurs fixées du produit ev_0 (voir la Fig. V.7). Toutes les données présentées sont obtenues pour le même coefficient de frottement $\mu = 0,5$ et avec le moment d'inertie physique des grains ($J^* = 1$). Signalons enfin que les données à $ev = 2,35$ m.s^{-1} (en bleu) sont obtenues pour un lâcher à $h = 3$ m de la surface de l'astéroïde, contre $h = 6$ m pour les autres points. Cela ne change pas grand-chose à la physique du problème, et renforce même la validité de l'approximation $v_{\text{choc}} \simeq v_0$.

Nous constatons tout d'abord qu'aucune dépendance nette de τ en v_0 ne semble se dégager. Les points sont très dispersés et nous en concluons que la vitesse de collision n'a pas d'influence précise sur le temps typique de ségrégation. En revanche, nous remarquons que Ψ_∞ est croissant de v_0, selon une tendance très nette. De plus, il ressort que Ψ_∞ est d'autant plus élevé, à v_0 fixé, que ev_0 l'est, mais cette tendance est secondaire. Par ailleurs, Ψ_∞ reste assez modeste par rapport aux valeurs atteintes sous perturbations isotropes (voir le Chap. III), et n'excède jamais $0,4$. Cela est lié à la persistence d'un état mélangé dans le cœur de l'agrégat, moins



(a) Tracé de Ψ_∞ en fonction de v_0.

(b) Tracé de τ en fonction de v_0.

FIGURE V.7 – Évolution des caractéristiques de la ségrégation en fonction de v_0, pour plusieurs produits ev_0 fixés. Les paramètres $\mu = 0,5$ et $J^* = 1$ sont communs à toutes les données.

touché par les réarrangements dus aux collisions successives.

Il est possible de calculer la valeur maximale de Ψ que l'on peut espérer s'il existe un disque central non ségrégé de rayon $R_{\text{mél}}$. Supposons que celui-ci est entouré d'une surface parfaitement ségrégée, autrement dit d'un anneau de petits grains de rayon intérieur $R_{\text{mél}}$ et de rayon extérieur R_{ann}, lui même entouré d'un anneau de gros grains de rayon intérieur R_{ann} et de rayon extérieur R_{ast}, le rayon de l'astéroïde. En traitant ce dernier comme un milieu continu, et en notant comme précédemment α_{A} la fraction d'aire couverte par les gros grains, la distance moyenne des gros grains au centre vaut

$$\langle r_{\text{g}} \rangle = \left(\int_{r=0}^{R_{\text{mél}}} r\alpha_{\text{A}} 2\pi r \text{d}r + \int_{r=R_{\text{ann}}}^{R_{\text{ast}}} r 2\pi r \text{d}r \right) \left(\int_{r=0}^{R_{\text{mél}}} \alpha_{\text{A}} 2\pi r \text{d}r + \int_{r=R_{\text{ann}}}^{R_{\text{ast}}} 2\pi r \text{d}r \right)^{-1}, \tag{V.13}$$

soit, après calcul des diverses intégrales,

$$\langle r_{\text{g}} \rangle = \frac{2}{3} \frac{\alpha_{\text{A}} {R_{\text{mél}}}^3 + {R_{\text{ast}}}^3 - {R_{\text{ann}}}^3}{\alpha_{\text{A}} {R_{\text{mél}}}^2 + {R_{\text{ast}}}^2 - {R_{\text{ann}}}^2}. \tag{V.14}$$

Et comme par ailleurs nous avons toujours $\langle r_{\text{t}} \rangle = 2R_{\text{ast}}/3$ (moyenne de la distance de tous les grains au centre), le degré de ségrégation brut ψ_0 caractérisant un tel état s'écrit :

$$\psi_0(R_{\text{mél}}) = \frac{1}{R_{\text{ast}}} \frac{\alpha_{\text{A}} {R_{\text{mél}}}^3 + {R_{\text{ast}}}^3 - {R_{\text{ann}}}^3}{\alpha_{\text{A}} {R_{\text{mél}}}^2 + {R_{\text{ast}}}^2 - {R_{\text{ann}}}^2}. \tag{V.15}$$

Il est enfin possible d'éliminer R_{ann}, en prenant en compte le fait que l'aire de l'anneau surfacique de gros grains représente une fraction α_{A} de l'aire de la partie ségrégée, autrement dit :

$$\pi({R_{\text{ast}}}^2 - {R_{\text{ann}}}^2) = \alpha_{\text{A}} \pi({R_{\text{ast}}}^2 - {R_{\text{mél}}}^2). \tag{V.16}$$

Nous en déduisons que $R_{\text{ann}} = \sqrt{\alpha_{\text{A}} {R_{\text{mél}}}^2 + (1-\alpha_{\text{A}}) {R_{\text{ast}}}^2}$, et donc :

$$\psi_0(R_{\text{mél}}) = \frac{\alpha_{\text{A}} {R_{\text{mél}}}^3 + {R_{\text{ast}}}^3 - \left(\alpha_{\text{A}} {R_{\text{mél}}}^2 + (1-\alpha_{\text{A}}) {R_{\text{ast}}}^2\right)^{3/2}}{\alpha_{\text{A}} {R_{\text{ast}}}^3}. \tag{V.17}$$

Notons d'ailleurs qu'en l'absence de cœur non ségrégé, c'est-à-dire pour $R_{\text{mél}} = 0$, nous trouvons bien $\psi_0(R_{\text{mél}} = 0) = \left(1 - (1-\alpha_{\text{A}})^{3/2}\right)/\alpha_{\text{A}} = \psi_{\max}$. De même, pour un astéroïde complètement mélangé, c'est-à-dire pour $R_{\text{mél}} = R_{\text{ast}}$, nous trouvons $\psi_0(R_{\text{mél}} = R_{\text{ast}}) = 1$. Nous écrivons enfin le degré de ségrégation normalisé $\Psi_0(R_{\text{mél}})$ atteint pour un astéroïde avec un cœur mélangé de rayon $R_{\text{mél}}$ entouré d'une couche totalement ségrégée :

$$\Psi_0(R_{\text{mél}}) = \frac{\psi_0(R_{\text{mél}}) - 1}{\psi_{\max} - 1}. \tag{V.18}$$

Nous représentons alors l'évolution de Ψ_0 en fonction de $R_{\text{mél}}$ sur la Fig. V.8.

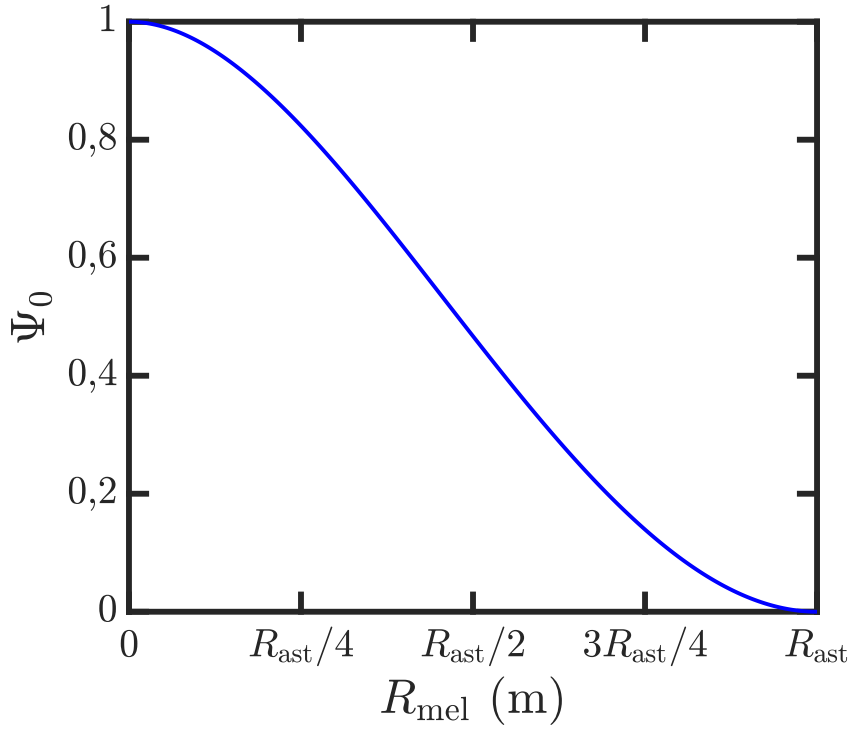


FIGURE V.8 – Représentation de la fonction $\Psi_0(R_{\text{mél}})$ donnée par les Éq. (V.17) et (V.18), indiquant le degré de ségrégation Ψ maximal que l'on peut espérer si un cœur mélangé de rayon $R_{\text{mél}}$ persiste au centre de l'astéroïde.

Au vu des images de la Fig. V.4 par exemple, nous pouvons considérer que $R_{\text{mél}} \simeq R_{\text{ast}}/2$, ce qui laisse espérer un degré de ségrégation maximal $\Psi_0 \simeq 0,47$. Cette valeur maximale prédite est cohérente avec le fait que le degré de ségrégation Ψ ne dépasse jamais $0,4$ pour les valeurs de v_0 explorées (voir la Fig. V.7a), mais aussi pour toutes les valeurs de μ et J^* explorées, comme nous allons le voir dans les sections suivantes. Forts de ce constat, nous pourrions être tentés de corréler la dépendance de Ψ_∞ avec v_0 à celle de r_0 avec v_0. En effet, r_0 est la profondeur typique de pénétration dans l'astéroïde des déplacements dus aux collisions. Pourtant le tracé

de r_0 en fonction de v_0 montre que cette profondeur ne varie quasiment pas avec la vitesse de collision, quelle que soit par ailleurs la valeur du produit ev_0 (voir la Fig. V.9).

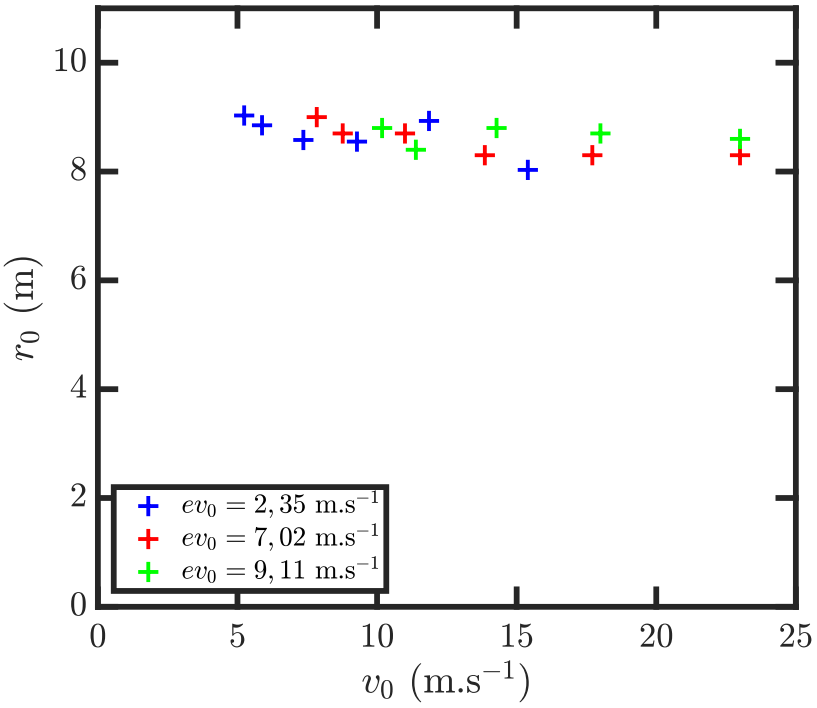


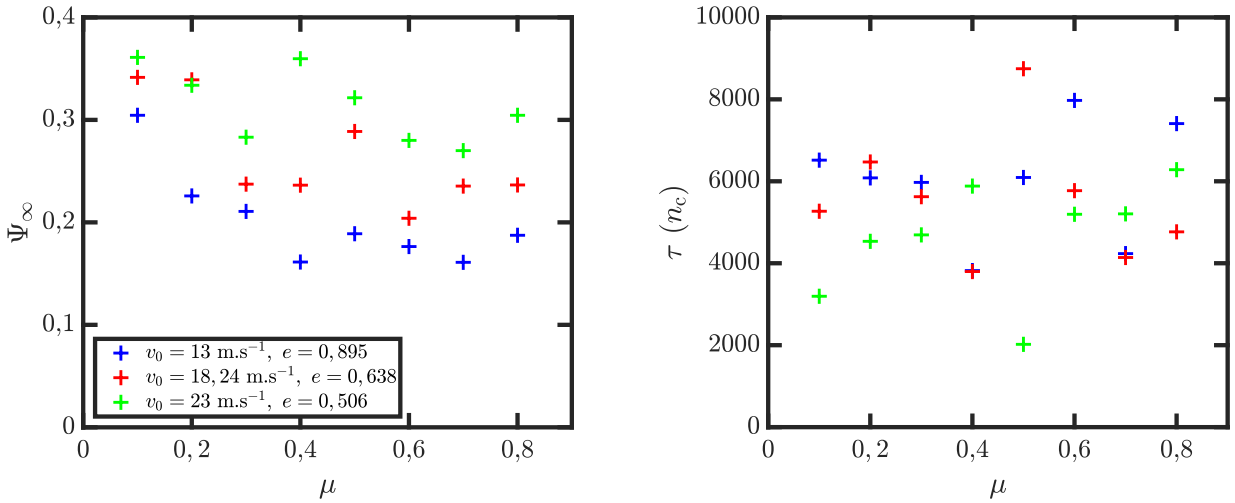
FIGURE V.9 – Tracé de r_0 en fonction de v_0 pour les simulations représentées sur la Fig. V.7. L'axe des ordonnées va de 0 à $R_{\text{ast}} = 11$ m pour envisager r_0 vis-à-vis du rayon de l'astéroïde : aucune variation nette ne transparaît.

Il semble donc que la profondeur de pénétration des réarrangements soit approximativement la même pour toutes les vitesses de collision, ce qui renforce notre modèle reliant l'amortissement en surface aux propriétés visco-élastiques intrinsèques des grains (voir la Sec. II-2.). Par contre, le fait de varier v_0 modifie l'amplitude des déplacements en surface, et permet d'atteindre une ségrégation plus ou moins marquée au sein de la couche surfacique typique. Retenons également que même si l'évolution de τ avec v_0 est particulièrement erratique, la ségrégation sous collisions suit toujours une cinétique d'ordre 1.

II-4. Influence du coefficient de frottement

Nous proposons maintenant d'étudier l'influence du coefficient de frottement sur le phénomène de ségrégation sous collisions. Pour cela, nous explorons les mêmes valeurs que dans les chapitres précédents, à savoir de $\mu = 0,1$ à $0,8$ par incréments de $0,1$. L'évolution de Ψ_∞ et τ en fonction de μ est donnée pour trois couples de valeurs de (v_0, e) vérifiant $ev_0 = 11,64$ m.s^{-1} sur la Fig. V.10.

Une fois encore, aucune dépendance nette concernant τ ne se dégage. Nous constatons néanmoins que l'ordre de grandeur de τ est globalement toujours le même, la majorité des valeurs mesurées se situant entre 4000 et 6000 collisions. La qualité finale de la ségrégation Ψ_∞ semble quant à elle plutôt décroissante de μ, cette tendance étant d'autant moins marquée



(a) Tracé de Ψ_∞ en fonction de μ.

(b) Tracé de τ en fonction de μ.

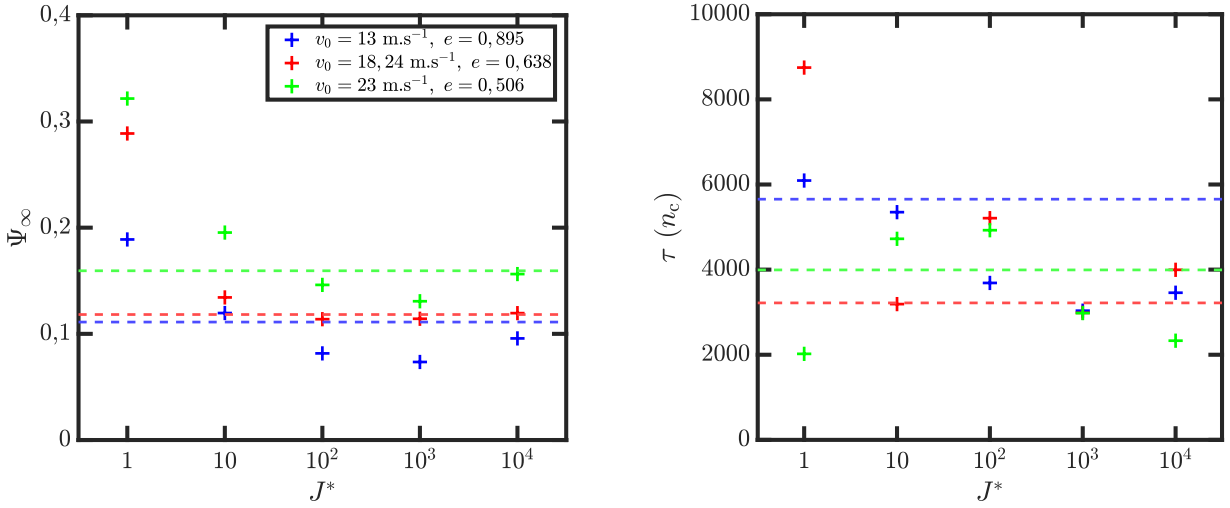
FIGURE V.10 – Évolution des caractéristiques de la ségrégation en fonction de μ pour trois couples (v_0, e) vérifiant $ev_0 = 11,64$ m.s^{-1}. Toutes les données sont obtenues pour $J^* = 1$. La légende est commune aux deux graphes.

que v_0 est élevée. Nous constatons d'ailleurs que les simulations à $ev_0 = 11,64$ m.s^{-1} (valeur la plus élevée que nous avons implémentée, et qui concerne tous les points de la Fig. V.10) donnent un degré de ségrégation supérieur à $0,15$ quel que soit le coefficient de frottement. Ce constat, ajouté au fait que la décroissance de Ψ_∞ avec μ est bien plus faible pour $v_0 = 23$ m.s^{-1} que pour $v_0 = 13$ m.s^{-1}, confirme l'idée que la qualité de la ségrégation est surtout croissante de l'amplitude des déplacements dans la couche de surface. En corollaire à cela, le coefficient de frottement ne joue donc un rôle important que pour des collisions suffisamment « douces » en termes de transfert d'impulsion (ou d'énergie). Nous avons d'ailleurs vu, avec l'exemple d'une simulation à $v_0 = 20,45$ m.s^{-1}, que pour les collisions plus violentes l'amortissement est essentiellement dû aux effets visco-élastiques.

II-5. Influence du moment d'inertie

Enfin, l'étude de perturbations isotropes dans les chapitres précédents avait mis en évidence le rôle important joué par le degré de liberté en rotation, que nous pouvons contrôler à l'aide du paramètre numérique J^*, qui permet de modifier artificiellement le moment d'inertie des grains. Pour rappel, un grain 2D (disque) de rayon R_i et de masse m_i possède dans nos simulations un moment d'inertie $J_i = J^* m_i {R_i}^2/2$. La valeur $J^* = 1$ correspond donc au cas physique, tandis que des valeurs $J^* > 1$ permettent d'entraver la rotation jusqu'à la geler pour $J^* \to +\infty$. Pour simuler ce dernier cas, nous fixons simplement la vitesse de rotation de chaque grain à 0, quels que soient les moments de force subis. Les valeurs finies de J^* que nous explorons sont de la forme $J^* = 10^n$ avec $n \in [|0, 4|]$. Nous représentons, sur la Fig. V.11, l'évolution de Ψ_∞ et τ en fonction de J^* pour les trois couples (v_0, e) déjà utilisés dans la section précédente.

Tout d'abord, le paramètre J^* semble ne pas avoir d'influence très nette sur l'évolution du temps typique de ségrégation τ, à l'instar de ce que nous avons observé pour v_0 et μ. On constate seulement une décroissance de τ avec J^* pour la vitesse de lâcher la plus faible



(a) Tracé de Ψ_∞ en fonction de J^*.

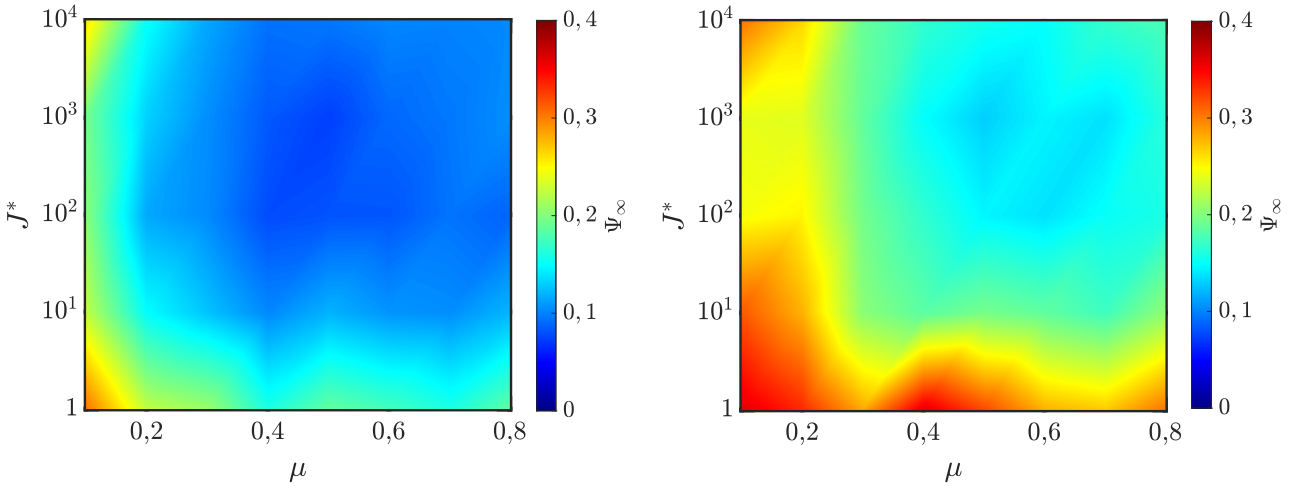
(b) Tracé de τ en fonction de J^*.

FIGURE V.11 – Évolution des caractéristiques de la ségrégation en fonction de J^* pour trois couples (v_0, e) vérifiant $ev_0 = 11,64$ m.s^{-1}. Toutes les données sont obtenues pour $\mu = 0,5$. La légende est commune aux deux graphes et les lignes tiretées représentent les valeurs obtenues dans la limite $J^* \to +\infty$, c'est-à-dire pour une rotation complètement bloquée.

$v_0 = 13$ m.s^{-1}, néanmoins la limite sans rotation $J^* \to +\infty$ donne une valeur de τ de nouveau très proche de celle du cas physique $J^* = 1$. Concernant Ψ_∞ par contre, la tendance est très nette, et identique pour toutes les valeurs de v_0, avec une décroissance jusqu'à $J^* \simeq 10^3$ suivie d'une légère remontée aux plus grandes valeurs de J^*. Il apparaît donc que le degré de liberté en rotation joue toujours un rôle important dans la ségrégation sous collision. Ce rôle semble même essentiel pour obtenir une ségrégation finale de qualité, et ce sur toute la gamme de vitesses d'impact envisagées, à produit ev_0 fixé. L'évolution de Ψ_∞ avec J^* observée ici est en revanche totalement opposée à celle qui était observée dans le cas de perturbations isotropes (voir la Sec. III-4. du Chap. III). Nous avions alors expliqué nos observations par l'économie d'énergie mécanique que permet le gel de la rotation dans les zones monodisperses, où la rotation est naturellement frustrée. Dans les simulations présentées ici, de telles zones sont nettement plus rares, puisque les degrés de ségrégation atteints sont plus faibles que pour la ségrégation sous perturbations isotropes. Ceci peut expliquer que l'intérêt de la rotation pour déplacer les grains les uns par rapport aux autres l'emporte ici sur l'intérêt qu'il y aurait à geler la rotation pour économiser l'énergie mécanique des grains.

Enfin, l'importance de la rotation est intimement liée au frottement solide, vu que cette dernière force est la seule à appliquer un moment non nul aux grains. Nous avons donc exploré les cinq valeurs de J^* introduites plus haut à la fois pour les huit valeurs de μ allant de $0,1$ à $0,8$ et pour les six couples (v_0, e) explorés à $ev_0 = 11,64$ m.s^{-1}. L'évolution de Ψ_∞ en fonction de μ et J^* est représentée sur la Fig. V.12 pour les deux couples de valeurs extrêmes de v_0 et e.

Il apparaît alors clairement que pour tous les choix de paramètres (μ, J^*), Ψ_∞ est plus important pour $v_0 = 23$ m.s^{-1} que pour $v_0 = 13$ m.s^{-1}, bien que le produit ev_0 soit le même dans les deux cas. Cela généralise largement les observations qui avaient été faites dans la Sec. II-3. pour le cas particulier des valeurs $\mu = 0,5$ et $J^* = 1$. Par ailleurs il ressort de ces cartographies que l'influence de J^* est sensiblement la même pour toutes les valeurs de $\mu \geq 0,3$,



(a) Cas $v_0 = 13$ m.s^{-1} et $e = 0,895$.

(b) Cas $v_0 = 23$ m.s^{-1} et $e = 0,506$.

FIGURE V.12 – Évolution du degré final de ségrégation Ψ_∞ en fonction de μ et J^* pour deux couples (v_0, e) vérifiant $ev_0 = 11,64$ m.s^{-1}. L'échelle de couleur est commune aux deux cartes pour faciliter leur comparaison.

et recoupe les observations faites sur la Fig. V.11a dans le cas $\mu = 0,5$. En revanche, le rôle joué par J^* est nettement atténué aux plus faibles valeurs de μ, ce qui est attendu. En effet, les grains subissent alors des moments de force moins intenses, puisque ceux-ci sont globalement proportionnels à μ pour tous les contacts glissants. Le moment d'inertie des grains a alors moins d'importance puisque même pour $J^* = 1$, les grains sont peu mis en rotation. Nous retrouvons en cela les observations générales sur la contribution des divers degrés de libertés déjà effectuées dans le cas de perturbations isotropes (voir le Chap. III).

III- Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'explorer un type de perturbations plus réaliste vis-à-vis de l'environnement dans lequel évoluent les astéroïdes granulaires tels qu'Itokawa. Nous en retenons quelques résultats importants.

- La ségrégation radiale se développe sous collisions comme sous perturbations isotropes. Le mécanisme dominant est celui des réarrangements successifs et le phénomène est toujours gouverné par une cinétique d'ordre 1, cette dernière apparaissant donc comme extrêmement robuste.
- Les collisions de surface entraînent des réarrangements sur une certaine profondeur typique, qui ne dépend quasiment pas de la vitesse de collision, mais semble uniquement due au comportement visco-élastique des grains en contact. De ce fait, le cœur de l'agrégat reste assez mélangé, et le degré de ségrégation final Ψ_∞ est donc limité.
- Par ailleurs, Ψ_∞ augmente nettement avec la vitesse v_0 de l'impacteur, et ce même pour un produit ev_0 fixé.
- Le degré de liberté en rotation semble essentiel pour l'établissement de la ségrégation sous collisions, puisque Ψ_∞ diminue fortement avec J^*. Cette évolution est d'ailleurs totalement opposée à celle observée dans le cas de perturbations isotropes. Cela suggère que l'origine des réarrangements est différente, avec une plus forte contribution de la rotation dans les réarrangements sous collisions.

Chapitre VI

Simulations d'astéroïdes tridimensionnels soumis à des perturbations isotropes

Je n'utilise pas d'adverbes. Je n'utilise que des mots à trois dimensions.

Georges Simenon.

Toujours dans l'idée de se placer dans des cadres plus réalistes du point de vue de l'astrophysique, les dernières études numériques réalisées ont consisté en une reprise des simulations du Chap. III mais pour des agrégats tridimensionnels. Ce nouveau contexte nous a permis d'observer de nouveau ségrégations radiale et angulaire, mais également une interaction étroite entre ces deux phénomènes, que nous ne rencontrions pas dans le cas bidimensionnel. Nous montrons comment ces différences de comportement sont reliées aux conséquences du passage en 3D : augmentation du nombre de degrés de liberté et nouvelle dépendance des quantités inertielles (masse et moment d'inertie) en le rayon des grains.

Sommaire

I- Présentation de l'étude **194**
I-1. Taille de l'astéroïde et choix du nombre de grains 194
I-2. Énergie injectée par une perturbation 194
I-3. Degré de ségrégation 196
II- Résultats **197**
II-1. Simulations 3D « classiques » 197
II-2. Simulations 3D avec des propriétés inertielles 2D 204
II-3. Simulations intermédiaires 207
III- Conclusion **214**

I- Présentation de l'étude

I-1. Taille de l'astéroïde et choix du nombre de grains

Le système étudié ici est très semblable à celui du Chap. III, au passage à trois dimensions (3D) près. Les grains sont donc désormais des sphères, de même que l'agrégat qu'ils forment. Si on considère un astéoïde sphérique de masse volumique uniforme , le champ gravitationnel est donné par le théorème de Gauss. Il s'écrit alors, en coordonnées sphériques de centre O (le centre de force),

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r}) = -g\frac{r}{R_{\rm ast}}\overrightarrow{e_r}. \tag{VI.1}$$

Comme dans le cas bidimensionnel, $R_{\rm ast}$ désigne le rayon de l'agrégat et g l'intensité du champ en surface. Nous imposons donc ce champ gravitationnel central aux différents grains dans nos simulations. Nous avons souhaité conserver un rayon $R_{\rm ast} = 11$ m pour les simulations 3D, et avons déterminé le nombre N de grains utilisé en conséquence. Ceux-ci constituent un empilement aléatoire de sphères en trois dimensions, dont la compacité $\phi_{\rm 3D}$ est donc de l'ordre de $0,64$. Cet empilement doit occuper un volume total $V_{\rm tot} = 4\pi {R_{\rm ast}}^3/3$. Par ailleurs, nous utilisons la distribution en taille présentée sur l'histogramme de la Fig. II.1b. Il y a donc $N/9$ gros grains de rayon réduit $\overline{R} \in [0,8;1,2]$ et $8N/9$ petits grains de rayon réduit $\overline{R} \in [0,4;0,6]$. Le volume moyen $V_{\rm moy}$ d'un grain est donc :

$$V_{\rm moy} = \frac{8}{9\times 0,2}\int_{\overline{R}=0,4}^{0,6}\frac{4}{3}\pi {R^*}^3\overline{R}^3{\rm d}\overline{R} + \frac{1}{9\times 0,4}\int_{\overline{R}=0,8}^{1,2}\frac{4}{3}\pi {R^*}^3\overline{R}^3{\rm d}\overline{R} = \frac{52}{225}\times\frac{4}{3}\pi {R^*}^3. \tag{VI.2}$$

De plus, notre agrégat vérifie $NV_{\rm moy} = \phi_{\rm 3D}V_{\rm tot}$, ce qui donne :

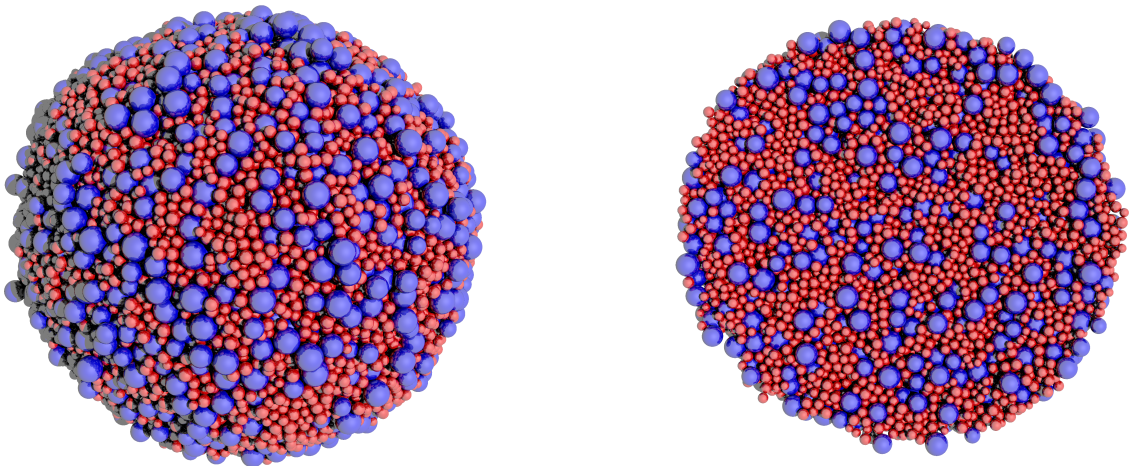
$$N = \phi_{\rm 3D}\frac{V_{\rm tot}}{V_{\rm moy}} = \phi_{\rm 3D}\times\frac{225}{52}\frac{{R_{\rm ast}}^3}{{R^*}^3} \simeq 29487 \text{ grains}, \tag{VI.3}$$

avec $\phi_{\rm 3D} = 0,64$, $R_{\rm ast} = 11$ m et $R^* = 0,5$ m, comme dans les chapitres précédents concernant cette dernière valeur. Pour simplifier, nous travaillons donc avec $N = 30000$ grains pour les agrégats 3D. L'espace de la simulation est repéré par un système d'axes $(Oxyz)$ et est de dimensions $L \times W \times H$. Concernant l'initialisation, les grains sont disposés selon des coquilles sphériques concentriques autour du centre de force O, puis convergent vers ce point sous l'effet du champ central imposé. Nous obtenons ainsi un agrégat semblable à celui illustré sur la Fig. VI.1.

Le changement de géométrie associé au passage à trois dimensions implique également de modifier le calcul de l'énergie mécanique injectée lors d'une perturbation, ainsi que celui du degré de ségrégation maximal atteignable.

I-2. Énergie injectée par une perturbation

Les perturbations sont identiques à celles utilisées dans le cas 2D. Pour rappel, elles consistent en une inversion du champ $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ en tout point, durant une brève durée $T_{\rm s}$, deux débuts de perturbations étant séparés d'une durée $T = 12,5$ s. Notons tout d'abord que l'expansion maximale de l'astéroïde sous une telle perturbation est la même que dans la situation 2D, et vaut :



(a) Vue de face, depuis la direction $x \to +\infty$, $y = 0$, $z = 0$.

(b) Vue en coupe selon le plan (Oyz), depuis la direction $x \to +\infty$.

FIGURE VI.1 – Illustration d'un agrégat tridimensionnel dans son état initial, vu de face et en coupe. Les gros grains sont en bleu et les petits grains en rouge.

$$\frac{r_{\max}(t_{\max})}{r_{\max}(0)} = \sqrt{\mathrm{ch}\left(2\sqrt{\frac{g}{R_{\mathrm{ast}}}}T_{\mathrm{s}}\right)}, \tag{VI.4}$$

en notant $r_{\max}(t) = \max_{i\in[|1,N|]} r_i(t)$ la distance maximale d'un grain au centre O à un instant t donné, et $t_{\max}$ l'instant où l'expansion est maximale. De plus, l'énergie mécanique $\Delta E_{\mathrm{m},i}$ apportée à un grain i par une perturbation est donnée, comme dans le cas 2D, par :

$$\Delta E_{\mathrm{m},i} = \frac{g m_i}{R_{\mathrm{ast}}} r_i(0)^2 \mathrm{sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\mathrm{ast}}}}T_{\mathrm{s}}\right). \tag{VI.5}$$

Comme dans le cas des bandes de grains étudiées dans le Chap. IV, c'est la nouvelle géométrie de l'agrégat qui est reponsable d'un changement dans l'expression de l'énergie mécanique totale ΔE_{tot} qu'il reçoit au cours d'une perturbation. En effet, en traitant l'agrégat comme un milieu continu, nous avons ici :

$$\Delta E_{\mathrm{tot}} = \int_{\mathrm{ast}} \frac{g r^2}{R_{\mathrm{ast}}} \mathrm{sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\mathrm{ast}}}}T_{\mathrm{s}}\right) \mathrm{d}m = \int_{r=0}^{R_{\mathrm{ast}}} \frac{g r^2}{R_{\mathrm{ast}}}\, \mathrm{sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\mathrm{ast}}}}T_{\mathrm{s}}\right) \times 4\pi r^2 \rho_{\mathrm{ast}} \mathrm{d}r, \tag{VI.6}$$

en notant $\rho_{\mathrm{ast}} = 3M_{\mathrm{ast}}/(4\pi {R_{\mathrm{ast}}}^3)$ la masse volumique globale de l'astéroïde, $M_{\mathrm{ast}} = \sum_{i\in[|1,N|]} m_i$ étant sa masse totale. Le calcul de l'intégrale aboutit donc à l'expression suivante :

$$\Delta E_{\mathrm{tot}} = \frac{3}{5} M_{\mathrm{ast}} g R_{\mathrm{ast}}\, \mathrm{sh}^2\left(\sqrt{\frac{g}{R_{\mathrm{ast}}}}T_{\mathrm{s}}\right). \tag{VI.7}$$

Par rapport au cas 2D, seul le préfacteur géométrique change donc, et vaut ici 3/5 contre 1/2 en 2D.

I-3. Degré de ségrégation

Le degré de ségrégation ψ est défini de la même façon que dans le cas 2D, soit

$$\psi = \frac{\langle r_{\rm g}\rangle}{\langle r_{\rm t}\rangle}, \tag{VI.8}$$

où $\langle r_{\rm g}\rangle$ est la distance moyenne des gros grains au centre, et $\langle r_{\rm t}\rangle$ est la distance moyenne de tous les grains au centre. Dans le cas 2D, ces moyennes étaient pondérées par les carrés des rayons des grains, pour prendre en compte la superficie couverte par chacun. En 3D, il convient d'utiliser une pondération par le cube de ces rayons, puisque nous avons désormais un volume occupé par chaque grain. Ainsi,

$$\langle r_{\rm g}\rangle = \frac{\sum\limits_{i,\rm gros} {R_i}^3 r_i}{\sum\limits_{i,\rm gros} {R_i}^3} \quad \text{et} \quad \langle r_{\rm t}\rangle = \frac{\sum\limits_{i\in[|1,N|]} {R_i}^3 r_i}{\sum\limits_{i\in[|1,N|]} {R_i}^3}. \tag{VI.9}$$

Il nous faut de plus déterminer la valeur $\psi_{\rm max}$ atteinte pour un agrégat 3D totalement ségrégé. On aurait alors, en considérant l'agrégat comme un milieu continu et de rayon $R_{\rm ast}$ constant, une boule peuplée uniquement de petits grains entourée par une coquille sphérique épaisse contenant quant à elle les gros grains. Nous notons $\alpha_{\rm V}$ la fraction en volume couverte par les gros grains : nous aurons toujours $\alpha_{\rm V} = 0,5$ dans ce chapitre. Alors, le rayon $R_{\rm boule}$ de la boule formée par les petits grains est défini par :

$$\frac{4}{3}\pi {R_{\rm boule}}^3 = (1-\alpha_{\rm V})\frac{4}{3}\pi {R_{\rm ast}}^3. \tag{VI.10}$$

Nous en déduisons $R_{\rm boule} = (1-\alpha_{\rm V})^{1/3} R_{\rm ast}$ et donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,\rm gros} {R_i}^3 r_i &= \frac{3}{4\pi}\int_{r=R_{\rm boule}}^{R_{\rm ast}} r{\rm d}V = \frac{3}{4\pi}\int_{r=R_{\rm boule}}^{R_{\rm ast}} r4\pi r^2{\rm d}r = \frac{3}{4}\left[1-(1-\alpha_{\rm V})^{4/3}\right]{R_{\rm ast}}^4,\\
\sum_{i,\rm gros} {R_i}^3 &= \frac{3}{4\pi}\int_{r=R_{\rm boule}}^{R_{\rm ast}} {\rm d}V = \frac{3}{4\pi}\int_{r=R_{\rm boule}}^{R_{\rm ast}} 4\pi r^2{\rm d}r = \alpha_{\rm V}{R_{\rm ast}}^3.
\end{aligned} \tag{VI.11}$$

Ainsi, pour un agrégat 3D totalement ségrégé, on a

$$\langle r_{\rm g}\rangle = \frac{3}{4}\,\frac{1-(1-\alpha_{\rm V})^{4/3}}{\alpha_{\rm V}} R_{\rm ast}. \tag{VI.12}$$

Par ailleurs, nous avons également :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in[|1,N|]} {R_i}^3 r_i &= \frac{3}{4\pi}\int_{r=0}^{R_{\rm ast}} r{\rm d}V = \frac{3}{4\pi}\int_{r=0}^{R_{\rm ast}} r4\pi r^2{\rm d}r = \frac{3}{4}{R_{\rm ast}}^4,\\
\sum_{i\in[|1,N|]} {R_i}^3 &= \frac{3}{4\pi}\int_{r=0}^{R_{\rm ast}} {\rm d}V = \frac{3}{4\pi}\int_{r=0}^{R_{\rm ast}} 4\pi r^2{\rm d}r = {R_{\rm ast}}^3.
\end{aligned} \tag{VI.13}$$

Ainsi, on établit que $\langle r_{\rm t}\rangle = 3R_{\rm ast}/4$ et donc :

$$\psi_{\rm max} = \frac{1-(1-\alpha_{\rm V})^{4/3}}{\alpha_{\rm V}}. \tag{VI.14}$$

Pour $\alpha_V = 0,5$, le calcul donne $\psi_{max} \simeq 1,20630$. Comme dans le cas 2D, nous définissons ainsi un degré de ségrégation normalisé Ψ, variant entre 0 pour un état complètement mélangé et 1 pour un état totalement ségrégé :

$$\Psi = \frac{\psi - 1}{\psi_{max} - 1}. \tag{VI.15}$$

II- Résultats

II-1. Simulations 3D « classiques »

Les premières simulations que nous avons réalisées décrivent le plus naturellement possible un granulaire à trois dimensions, en ce sens qu'un grain sphérique de rayon R_i possède une masse m_i et un moment d'inertie J_i (le même relativement à tout axe passant par son centre) donnés par :

$$\begin{aligned} m_i &= m^* \overline{R}_i^{\,3}, \\ J_i &= J^* \frac{2 m_i {R_i}^2}{5} = J^* \frac{2 m^* {R^*}^2}{5} \overline{R}_i^{\,5}, \end{aligned} \tag{VI.16}$$

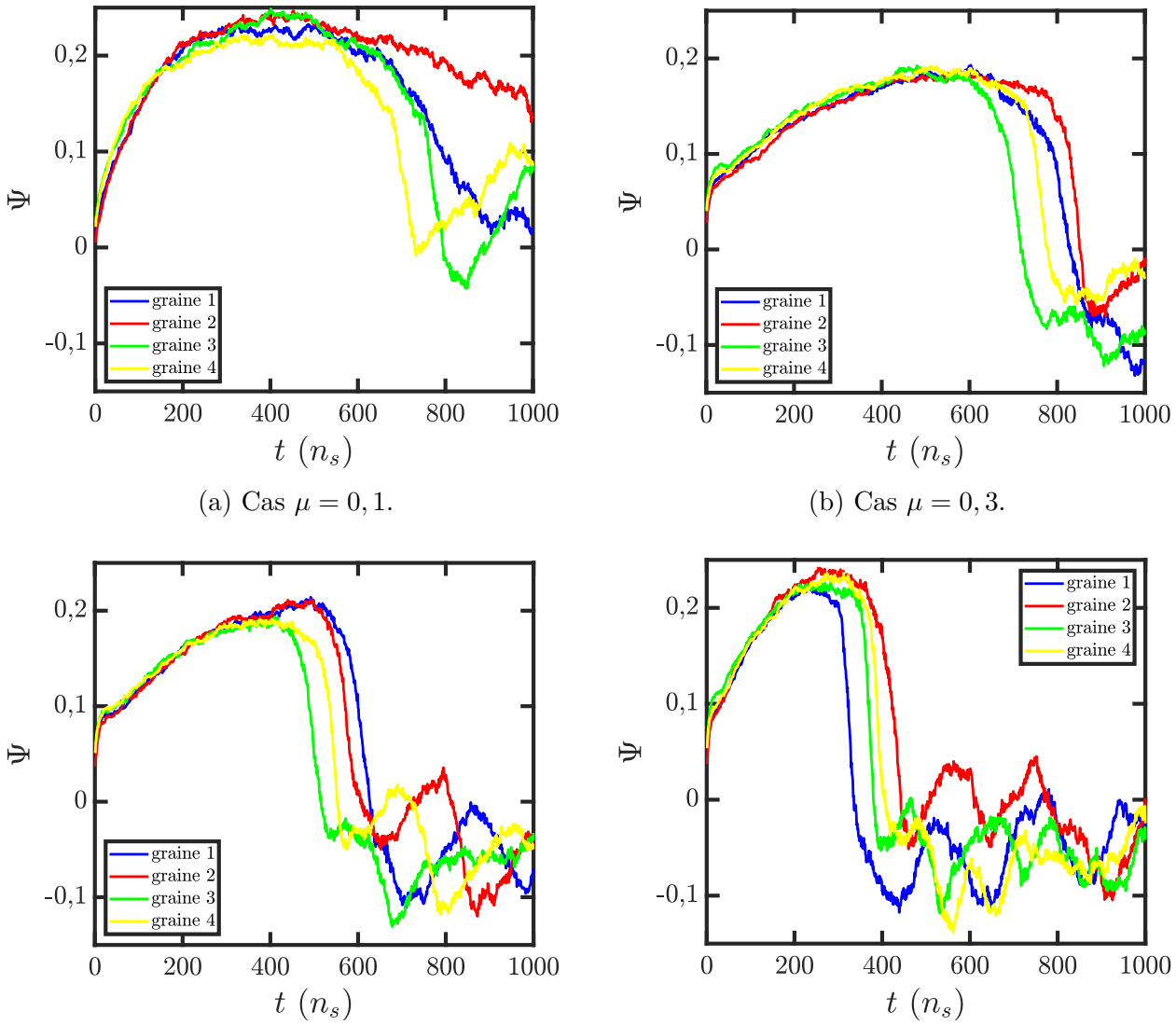
avec toujours la masse standard $m^* = 1$ kg, et une valeur $J^* = 1$ pour décrire la situation physique. Nous nous sommes cantonnés à une durée de perturbation $T_s = 1,25$ s, et avons exploré quatre valeurs de coefficient de frottement : $\mu = 0,1$, $0,3$, $0,5$ et $0,8$. Par ailleurs, la présence de $N = 30000$ grains rend ces simulations nettement plus lentes [1] que celles du cas 2D, qui comptent $N = 1000$ grains. Nous appliquons donc seulement 1000 perturbations, contre 10000 dans les simulations 2D. Heureusement, comme nous allons le voir, cela est suffisant pour étudier le phénomène de ségrégation. Pour chaque couple de paramètres (T_s, μ) exploré, nous réalisons quatre simulations différentes utilisant chacune une « graine » donnée. La graine sert à déterminer les variables aléatoires intervenant dans l'attribution des tailles et des positions initiales des grains. Nous représentons les évolutions $\Psi(t)$ obtenues pour les quatre graines et pour chaque valeur de coefficient de frottement (voir la Fig. VI.2).

Le premier constat qui se dégage est que l'on n'atteint pas de très hauts degrés de ségrégation, puisque la valeur maximale de Ψ sur une simulation n'excède jamais $0,25$. Par contre, cette valeur est atteinte assez vite, après 200 secousses pour $\mu = 0,8$ et environ 400 secousses pour les autres valeurs de μ. Pour tous les coefficients de frottement, les quatre graines ont des évolutions très proches durant cette phase de montée, et dont l'allure semble peu compatible avec les cinétiques d'ordre 1 observées dans les cas 2D, sauf éventuellement pour $\mu = 0,1$. Nous proposons d'ailleurs une vue d'un agrégat à $\mu = 0,1$ dans l'état initial et après 400 perturbations pour visualiser l'allure de la ségrégation radiale donnant $\Psi = 0,25$ (voir la Fig. VI.3).

La ségrégation radiale est bien visible sur les Fig. VI.3b et VI.3d, avec une surface comportant bien plus de gros grains que dans l'état initial et un appauvrissement en gros grains sur une certaine épaisseur sous la surface. Le cœur reste par contre assez mélangé, voire plus concentré en gros grains que dans l'état initial.

Le second constat important concernant les graphes de la Fig. VI.2 est que pour toutes les valeurs de μ, la phase de croissance de Ψ est suivie d'une chute brutale jusqu'à 0 voire des

1. De l'ordre de 30 fois plus lentes, étant donné notre algorithme de détection des contacts (voir la Sec. II-3. du Chap. II).



(a) Cas $\mu = 0,1$.

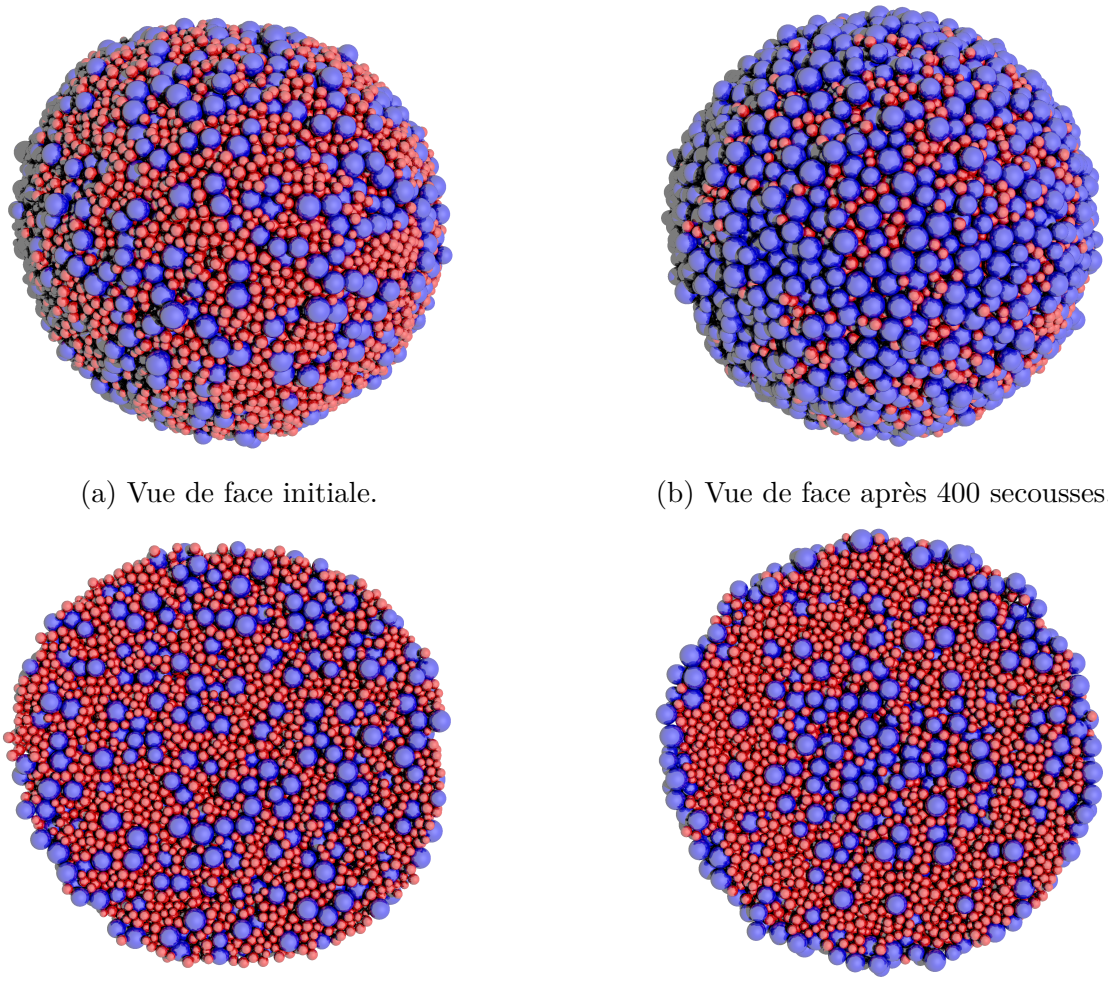
(b) Cas $\mu = 0,3$.

(c) Cas $\mu = 0,5$.

(d) Cas $\mu = 0,8$.

FIGURE VI.2 – Évolution de Ψ en fonction du temps t exprimé en nombre de secousses pour les quatre coefficients de frottement explorés avec, pour chacun, comparaison entre les quatre graines. Le paramètre $T_s = 1,25$ s est commun à toutes les simulations.

valeurs négatives. Cette chute intervient plus ou moins rapidement en fonction du coefficient de frottement. Pour $\mu = 0,8$, où l'ensemble des phénomènes observés semblent se dérouler plus rapidement que pour les autres valeurs de μ, cette chute est effective après 400 secousses, quelle que soit la graine considérée. Nous observons ensuite des oscillations de Ψ au sein de l'intervalle $[-0,15; 0,05]$, dont la période semble être de l'ordre de 100 à 200 secousses. Pour rappel, une valeur négative de Ψ traduit le fait que les petits grains sont en moyenne plus éloignés de O que les gros grains : on a un état « anti-ségrégé ». Le degré de ségrégation Ψ est une quantité importante mais qui gomme l'information sur la répartition exacte des petits et gros grains selon r, ainsi que celle sur les coordonnées sphériques θ et φ des petits et gros grains. Autrement dit, nous ne savons pas si la ségrégation concerne tout l'agrégat ou seulement une certaine épaisseur



(a) Vue de face initiale.

(b) Vue de face après 400 secousses.

(c) Vue en coupe initiale.

(d) Vue en coupe après 400 secousses.

FIGURE VI.3 – Vues de face et en coupe selon le plan (Oyz) (en regardant depuis la direction $x \to +\infty$, $y = 0$, $z = 0$) d'un agrégat 3D dans l'état initial et après 400 secousses, avec pour paramètres $T_\mathrm{s} = 1,25$ s et $\mu = 0,1$ (graine 1). On observe clairement une ségrégation radiale, avec la surface qui se couvre de gros grains (voir la Fig. VI.3b), mais également le cœur qui contient de nombreux gros grains (voir la Fig. VI.3d). La direction (Ox) donnant le point de vue et le plan de coupe choisis est purement arbitraire, mais les mêmes observations sont faites selon les autres directions.

en surface, ni si une ségrégation secondaire selon la latitude ou la longitude se produit. Pour mieux comprendre ce qu'il se passe dans le cas des simulations à $\mu = 0,8$ par exemple, nous proposons une analyse sous forme de graphes spatio-temporels pour suivre la densité de petits grains en fonction de (r, θ, φ), coordonnées sphériques associées à l'axe (Oz).

Tout d'abord, nous nous intéressons à la distribution des petits grains selon la coordonnée r en fonction du temps t. Pour ce faire, nous découpons l'astéroïde en 22 coquilles sphériques emboîtées, de centre O et d'épaisseur $\Delta r = 0,5$ m, étant donné que $R_\mathrm{ast} = 11$ m. En numérotant les coquilles de $k = 1$ à 22, la k-ème coquille est décrite par $r \in [(k-1)\Delta r; k\Delta r]$. Nous comptons ensuite le nombre $N_{\mathrm{p},r}(k,t)$ de petits grains contenus dans la k-ème coquille après t secousses. Bien sûr, toutes les coquilles ne sont pas de même volume, et nous renormalisons donc $N_{\mathrm{p},r}(k,t)$

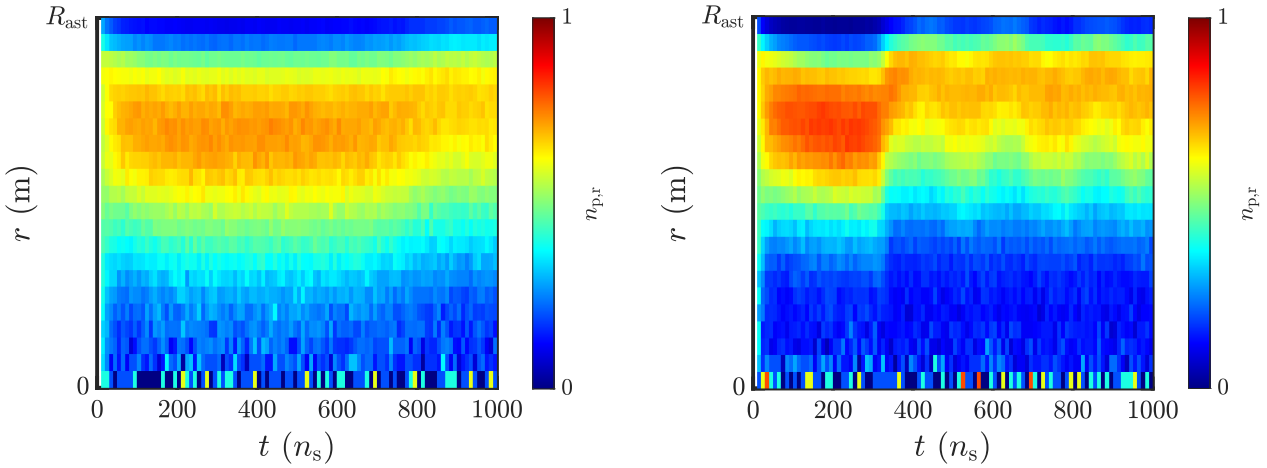
par le nombre maximal de petits grains que peut contenir la k-ème coquille, noté $N_{\mathrm{p},r,\max}(k)$. Sachant qu'un astéroïde 3D contient dans nos simulations $N_\mathrm{p} = 8N/9$ petits grains, et que ceux-ci occupent la moitié de son volume, nous savons qu'un astéroïde de même rayon mais ne contenant que des petits grains en contiendrait $16N/9$ avec $N = 30000$. Ainsi, compte tenu du volume de la k-ème coquille, nous avons :

$$N_{\mathrm{p},r,\max}(k) = \frac{(k\Delta r)^3 - ((k-1)\Delta r)^3}{{R_\mathrm{ast}}^3} \times \frac{16N}{9}. \tag{VI.17}$$

En associant par ailleurs la k-ème coquille à son rayon intérieur $r_k = (k-1)\Delta r$, nous définissons une densité de petits grains $n_{\mathrm{p},r}(r_k, t)$ de la façon suivante :

$$n_{\mathrm{p},r}(r_k, t) = \frac{N_{\mathrm{p},r}(k,t)}{N_{\mathrm{p},r,\max}(k)}. \tag{VI.18}$$

Nous représentons les évolutions spatio-temporelles de cette densité pour la graine 1 des cas $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,8$ sur la Fig. VI.4.



(a) Cas $\mu = 0,1$.

(b) Cas $\mu = 0,8$.

FIGURE VI.4 – Représentations spatio-temporelles de la fonction $n_{\mathrm{p},r}(r,t)$ pour la graine 1 des cas $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,8$, avec $T_\mathrm{s} = 1,25$ s commun aux deux cas. Le bleu en surface signifie qu'il n'y a pas de petits grains, mais on pourrait également avoir absence de gros grains, notamment si l'agrégat se compacte. Ce n'est pas le cas, R_ast ne diminuant pas dans le temps, et nous observons bien des gros grains en surface sur les vues de face associées.

Le phénomène de ségrégation radiale tendant à rassembler les gros grains à la surface mais aussi au cœur de l'agrégat est très net dans le cas $\mu = 0,1$, et durant les 300 premières secousses dans le cas $\mu = 0,8$. Globalement, les petits grains sont concentrés dans une couche intermédiaire, coincée entre un cœur et une surface riches en gros grains. Pour $\mu = 0,8$, nous observons ensuite des oscillations du profil de densité de petits grains, comme si les petits grains semblaient s'éloigner en bloc du centre puis y revenir. Cela est cohérent avec le graphe représentant la graine 1 sur la Fig. VI.2d. Nous constatons en effet que lorsque la zone orangée de la Fig. VI.4b gagne des valeurs de r plus élevées, typiquement pour $t \simeq 450\ n_\mathrm{s}$, $t \simeq 650\ n_\mathrm{s}$ et $t \simeq 850\ n_\mathrm{s}$, Ψ atteint un minimum (voir la courbe bleue sur le graphe de la Fig. VI.2d). Inversement, lorsque cette zone orangée se déplace vers des valeurs de r plus faibles, typiquement

pour $t \simeq 550\ n_s$, $t \simeq 750\ n_s$ et $t \simeq 950\ n_s$, Ψ atteint un maximum. La couche de petits grains étant entourée de gros grains, le déplacement apparent du profil de densité des petits grains traduit en réalité un échange de gros grains entre le cœur et la surface. En effet, lorsque des gros grains traversent la couche intermédiaire de petits grains pour gagner la surface, cela fait mécaniquement se rapprocher les petits grains de O, et inversement. Mentionnons enfin que dans le cas où $\mu = 0,1$, la chute de Ψ pour la graine 1 aux temps $t \geq 700 n_s$ (voir la Fig. VI.2a) ne s'accompagne pas d'un changement radical sur le spatio-temporel de la Fig. VI.4a. En effet, nous constatons seulement que le rayon du cœur de gros grains croît légèrement, tandis que la surface de gros grains s'affine. Cela traduit le transfert de gros grains de la surface vers le cœur, et suffit donc à faire chuter la distance moyenne $\langle r_g \rangle$ des gros grains au centre, et donc le degré de ségrégation Ψ que nous avons défini (voir les Éq. (VI.8) et (VI.15)).

Nous nous intéressons maintenant à la distribution des petits grains selon la colatitude θ et la longitude φ en fonction du temps t. Nous cherchons à obtenir des tracés spatio-temporels du type de ceux de la Fig. VI.4, mais avec θ ou φ dans le rôle de r. Nous découpons donc l'astéroïde selon 18 « cornets »emboîtés de sommet O (leurs intersections avec la surface sont parallèles au plan (xOy)) représentant chacun une plage de colatitude de 10 degrés, ainsi qu'en 36 « tranches d'orange » représentant chacune une plage de longitude de 10 degrés. Ce découpage est rigoureusement le même que celui de la Terre selon ses parallèles et méridiens. Ainsi, en référence à cette terminologie simple, le découpage selon θ sera désigné par « coupes parallèles » dans la suite. Nous aurions pu envisager un autre découpage, mais l'utilisation de pas constants en θ et en φ constitue le procédé le plus simple. Il est aussi important de souligner que l'axe (Oz) des coordonnées sphériques utilisées est complètement arbitraire et joue un rôle purement utilitaire : il n'y a aucun axe privilégié *a priori* dans le système étudié. Les régions découpées par les parallèles sont numérotées de $p = 1$ à 18, la p-ème correspondant à $\theta \in [(p-1)\Delta\theta; p\Delta\theta]$ avec $\Delta\theta = 10°$. De même, les tranches découpées par les méridiens sont numérotées de $q = 1$ à 36, la q-ème correspondant à $\varphi \in [(q-1)\Delta\varphi; q\Delta\varphi]$ avec $\Delta\varphi = 10°$, la longitude φ étant comptée depuis l'axe (Ox). Nous comptons ensuite le nombre $N_{p,\theta}(p,t)$ de petits grains contenus dans la p-ème coupe parallèle après t secousses, et celui $N_{p,\varphi}(q,t)$ de petits grains contenus dans la q-ème tranche d'orange après t secousses également. Nous comptons également le nombre $N_{p,ang}(p,q,t)$ de petits grains contenus à la fois dans la p-ème coupe parallèle et dans la q-ème tranche d'orange après t secousses. Ces quantités sont toutes renormalisées conformément au volume des régions auxquelles elles se rapportent. Le nombre maximal de petits grains que peut contenir la p-ème coupe parallèle est noté $N_{p,\theta,max}(p)$ et vaut :

$$N_{p,\theta,max}(p) = \frac{\sin((p-1/2)\Delta\theta)\Delta\theta}{2} \times \frac{16N}{9}. \tag{VI.19}$$

Le nombre maximal de petits grains que peut contenir une tranche d'orange est quant à lui noté $N_{p,\varphi,max}$ et vaut :

$$N_{p,\varphi,max} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \times \frac{16N}{9}. \tag{VI.20}$$

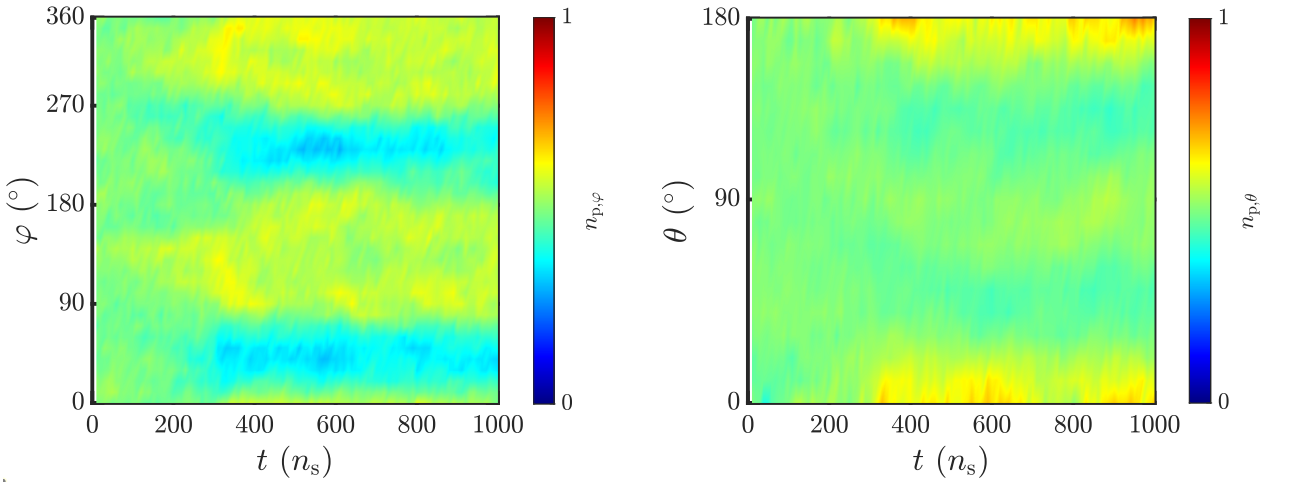
Enfin, le nombre maximal de petits grains que peut contenir l'intersection de la p-ème coupe parallèle avec une tranche d'orange est noté $N_{p,ang,max}(k)$ et vaut :

$$N_{p,ang,max}(p) = \frac{\sin((p-1/2)\Delta\theta)\Delta\theta\Delta\varphi}{4\pi} \times \frac{16N}{9}. \tag{VI.21}$$

À la manière de ce que nous avons fait selon la coordonnée r, nous associons la p-ème coupe parallèle à $\theta_p = (p-1)\Delta\theta$ et la q-ème tranche d'orange à $\varphi_q = (q-1)\Delta\varphi$. Nous définissons alors les densités de petits grains $n_{\mathrm{p},\theta}(\theta_p, t)$, $n_{\mathrm{p},\varphi}(\varphi_q, t)$ et $n_{\mathrm{p,ang}}(\varphi_q, \theta_p, t)$ relatives respectivement à la p-ème coupe parallalèle, à la q-ème tranche d'orange et à l'intersection de la q-ème tranche d'orange avec la p-ème coupe parallèle :

$$n_{\mathrm{p},\theta}(\theta_p, t) = \frac{N_{\mathrm{p},\theta}(p,t)}{N_{\mathrm{p},\theta,\max}(p)},\ n_{\mathrm{p},\varphi}(\varphi_q, t) = \frac{N_{\mathrm{p},\varphi}(q,t)}{N_{\mathrm{p},\varphi,\max}} \quad \text{et} \quad n_{\mathrm{p,ang}}(\varphi_q, \theta_p, t) = \frac{N_{\mathrm{p,ang}}(p,q,t)}{N_{\mathrm{p,ang},\max}(p)}. \quad \text{(VI.22)}$$

Nous représentons les évolutions spatio-temporelles des densités $n_{\mathrm{p},\theta}(\theta_p, t)$ et $n_{\mathrm{p},\varphi}(\varphi_q, t)$ pour la graine 1 dans le cas $\mu = 0,8$ sur la Fig. VI.5. Remarquons d'ailleurs que les densités $n_{\mathrm{p},\theta}(\theta, t)$ et $n_{\mathrm{p},\varphi}(\varphi, t)$ sont totalement insensibles à la ségrégation radiale, leur calcul intégrant toutes les positions radiales.



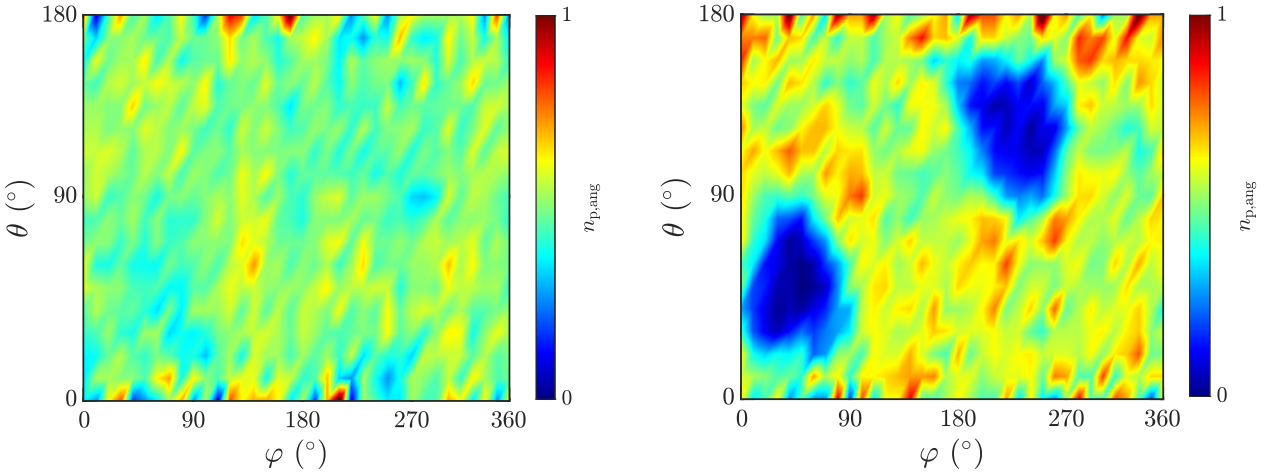
(a) Densité $n_{\mathrm{p},\varphi}(\varphi, t)$ donnant la répartition des petits grains selon la longitude.

(b) Densité $n_{\mathrm{p},\theta}(\theta, t)$ donnant la répartition des petits grains selon la colatitude.

FIGURE VI.5 – Représentations spatio-temporelles des densités $n_{\mathrm{p},\varphi}(\varphi, t)$ et $n_{\mathrm{p},\theta}(\theta, t)$ pour la graine 1 du cas $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s et $\mu = 0,8$.

Il ressort de l'analyse de ces graphes que jusqu'à $t \simeq 200$ secousses, la répartition des petits grains est à peu près uniforme selon θ et φ, et il en va donc de même pour les gros grains. Ainsi, durant toute la durée d'établissement de la ségrégation radiale, aucune ségrégation selon la latitude ou la longitude ne semble se produire. Par contre, au-delà de $t = 200$ secousses, c'est-à-dire dès que Ψ s'effondre, les gros grains semblent se rassembler plutôt autour de $\varphi = 45°$ et $225°$ (zones bleues sur la Fig. VI.5a). De même, ils semblent également plus présents autour de $\theta = 45°$ et $135°$, entre un équateur et des pôles [2] plus riches en petits grains (voir la Fig. VI.5b). Pour préciser cela, nous proposons une représentation de la densité $n_{\mathrm{p,ang}}(\varphi, \theta, t)$ en fonction de φ et θ à $t = 100\ n_{\mathrm{s}}$ et à $t = 800\ n_{\mathrm{s}}$ (voir la Fig. VI.6). L'utilisation de la commande Matlab `shading 'interp'` pour ces représentations peut donner l'impression d'alignements obliques : il s'agit d'un simple artefact numérique.

2. Nous insistons sur le fait que ceux-ci sont complètement arbitraires, il n'y a pas de pôles physiquement définis sur les astéroïdes considérés.



(a) Densité $n_{\mathrm{p,ang}}(\varphi, \theta, t)$ donnant la répartition des petits grains selon la colatitude et la longitude à $t = 100$ secousses.

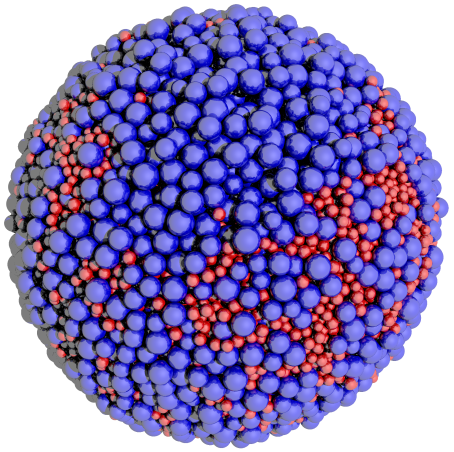
(b) Densité $n_{\mathrm{p,ang}}(\varphi, \theta, t)$ donnant la répartition des petits grains selon la colatitude et la longitude à $t = 800$ secousses.

FIGURE VI.6 – Représentations de la densité $n_{\mathrm{p,ang}}(\varphi, \theta, t)$ avant et après la chute de Ψ, pour la graine 1 du cas $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s et $\mu = 0,8$.

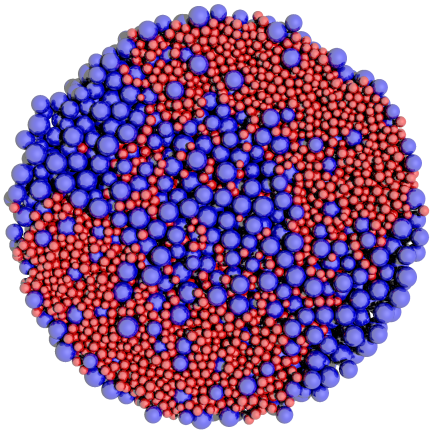
Après 100 secousses, nous voyons que les petits grains sont assez uniformément répartis selon φ et θ. Mais après 800 secousses, nous voyons deux zones très pauvres en petits grains, qui contiennent donc presque exclusivement des gros grains. Ces deux zones sont espacées d'environ 180° selon φ et symétriques par rapport à $\theta = 90°$. Il s'agit donc de deux « lobes » antipodaux. Nous mettons lobes entre guillemets car la densité angulaire de petits grains $n_{\mathrm{p,ang}}(\varphi, \theta, t)$ est calculée sur toutes les distances r et pas seulement pour les grains à $r \geq R_{\mathrm{ast}}/2$ comme nous l'avions fait en 2D. Ces deux lobes antipodaux apparaissent très nettement, ainsi qu'un cœur riche en gros grains également, sur les images de la Fig. VI.7.

Pour résumer, les points importants de ces simulations 3D sont les suivants.

- La ségrégation radiale s'établit assez vite, typiquement en 200 à 400 secousses. Le phénomène est plus rapide pour $\mu = 0,1$ et $0,8$ que pour $\mu = 0,5$, mais plus lent pour $\mu = 0,3$. Par ailleurs, Ψ ne dépasse jamais $0,25$ pour les paramètres explorés. La surface, mais aussi le cœur de l'astéroïde, se chargent en gros grains, ce qui peut expliquer les faibles valeurs de Ψ observées ainsi que l'éloignement vis-à-vis d'une cinétique d'ordre 1.
- Une fois la ségrégation radiale établie, une ségrégation angulaire se développe, et ce d'autant plus rapidement que la ségrégation radiale était rapide. Nous avons donc pu l'étudier plus aisément pour $\mu = 0,8$. Nous constatons qu'elle tend à former deux lobes antipodaux, qui échangent des gros grains avec le cœur. Ces échanges semblent par ailleurs présenter une certaine périodicité temporelle, visible sur le tracé de Ψ.
- Les motifs ainsi obtenus ne sont pas sans rappeler Itokawa. La vue en coupe de la Fig. VI.7b montre bien deux antipodes couverts de gros grains avec des petits grains affleurant à la surface dans les régions séparant les lobes. Cela étant, nous avons ici une géométrie sphérique, donc simplifiée par rapport à celle d'Itokawa.



(a) Vue de face sous $\varphi = 45°$, c'est-à-dire depuis un point situé à $z = 0$ (soit $\theta = 90°$), $\varphi = 45°$ et $r \to +\infty$. On distingue le lobe de gros grains sur le haut de l'image, où aucun petit grain n'est visible en surface. Ce lobe est situé autour de $\varphi = 45°$ et $\theta = 45°$ sur la Fig. VI.6b.



(b) Vue d'une coupe selon le plan contenant (Oz) et correspondant à $\varphi = 45°$, observée depuis un point situé à $z = 0$ (soit $\theta = 90°$), $\varphi = 135°$ et $r \to +\infty$. On distingue les deux lobes de gros grains antipodaux visibles sur la Fig. VI.6b, connectés au cœur qui est également riche en gros grains.

FIGURE VI.7 – Vue de l'agrégat à $t = 800$ secousses permettant l'observation des deux lobes de gros grains détectables sur la Fig. VI.6b.

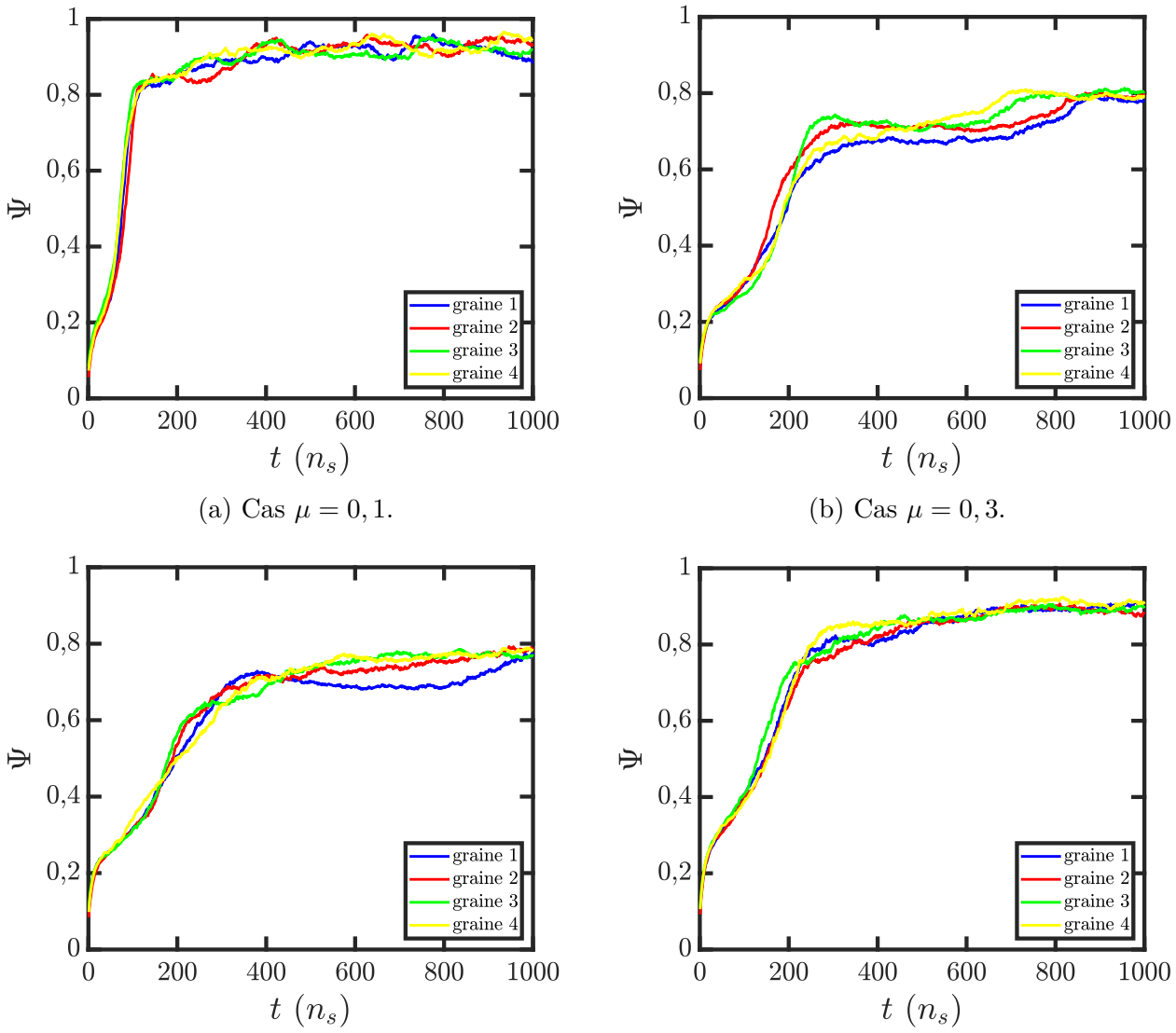
II-2. Simulations 3D avec des propriétés inertielles 2D

Nous avons donc constaté, dans le cas 3D, des différences notoires de comportement avec le cas 2D, et ceci en conservant l'essentiel des paramètres importants (R^*, m^*, J^*, g, R_{ast}, T_{s}, μ) égaux. De plus, nous avons pu constater dans les simulations 2D que les propriétés inertielles des grains jouent un rôle très important dans la ségrégation, avec une forte influence du paramètre numérique J^*. Ces différents constats nous ont inspiré des simulations particulières, ne correspondant pas à un cas réellement physique, mais permettant d'examiner l'influence des propriétés inertielles des grains dans le cas 3D. En fait, nous reprenons quasiment tous les ingrédients des simulations de la section précédente, à ceci près que la masse m_i et le moment d'inertie J_i d'un grain de rayon i sont calculés comme s'il s'agissait d'un disque et non d'une sphère. Formellement, nous implémentons :

$$\begin{aligned} m_i &= m^* \overline{R}_i^{\,2}, \\ J_i &= J^* \frac{m_i R_i^{\,2}}{2} = J^* \frac{m^* R^{*2}}{2} \overline{R}_i^{\,4}, \end{aligned} \tag{VI.23}$$

avec $m^* = 1$ kg et $J^* = 1$ comme précédemment. En somme, nous réalisons des simulations 3D avec des grains sphériques, mais ayant les propriétés inertielles de grains 2D. Dans la mesure où la ségrégation que nous étudions tire son origine des différences de rayon R entre les grains, les lois d'échelle liant m_i et J_i à R_i peuvent jouer un rôle essentiel, d'où la pertinence de ces simulations quelque peu artificielles. Nous explorons les mêmes paramètres physiques que dans les simulations 3D classiques de la section précédente. Les résultats concernant l'évolution de Ψ en fonction du temps t exprimé en nombre de secousses sont donnés sur la Fig. VI.8.

Nous faisons un premier constat très net : l'évolution de Ψ est radicalement différente de



(a) Cas $\mu = 0,1$.

(b) Cas $\mu = 0,3$.

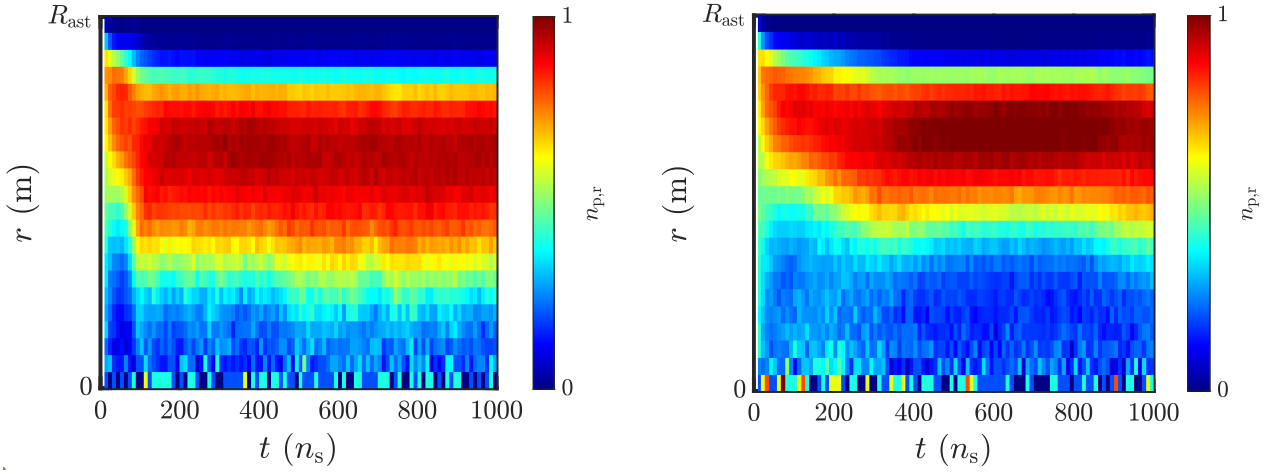
(c) Cas $\mu = 0,5$.

(d) Cas $\mu = 0,8$.

FIGURE VI.8 – Évolution de Ψ en fonction du temps t exprimé en nombre de secousses dans le cas de simulations 3D où les grains ont des propriétés inertielles 2D. Les graphes concernent les quatre coefficients de frottement explorés avec, pour chacun, comparaison entre les quatre graines. Le paramètre $T_\mathrm{s} = 1,25$ s est commun à toutes les simulations.

celle observée pour les simulations 3D physiques, et ce pour les quatre coefficients de frottement. De plus, cette évolution est très peu sensible à la graine, et ne semble suivre en aucun cas une cinétique d'ordre 1. Nous pouvons toutefois distinguer un temps typique $\tilde{\tau}$, et un degré de ségrégation final typique $\tilde{\Psi}$ dans chaque cas. Il semble que $\tilde{\tau} \simeq 100$ secousses pour $\mu = 0,1$, alors que l'on aurait plutôt $\tilde{\tau} \simeq 300$ secousses pour les autres valeurs de μ. Par ailleurs, on atteint un degré de ségrégation $\tilde{\Psi} \simeq 0,9$ pour $\mu = 0,1$ et $0,8$, mais un peu moins élevé ($\tilde{\Psi} \simeq 0,8$) pour $\mu = 0,3$ et $0,5$. Ces évolutions ne sont pas vraiment semblables à celles observées pour des agrégats purement 2D, et nous n'avons pas d'interprétation théorique satisfaisante les concernant. Comme pour les simulations 3D classiques, nous proposons quelques analyses

spatio-temporelles pour mieux visualiser la répartition des petits et gros grains au sein de l'astéroïde. Nous représentons l'évolution spatio-temporelle de la densité radiale de petits grains $n_{\mathrm{p},r}(r,t)$ pour la graine 1 dans les cas $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,5$ sur la Fig. VI.9.



(a) Cas $\mu = 0,1$.

(b) Cas $\mu = 0,5$.

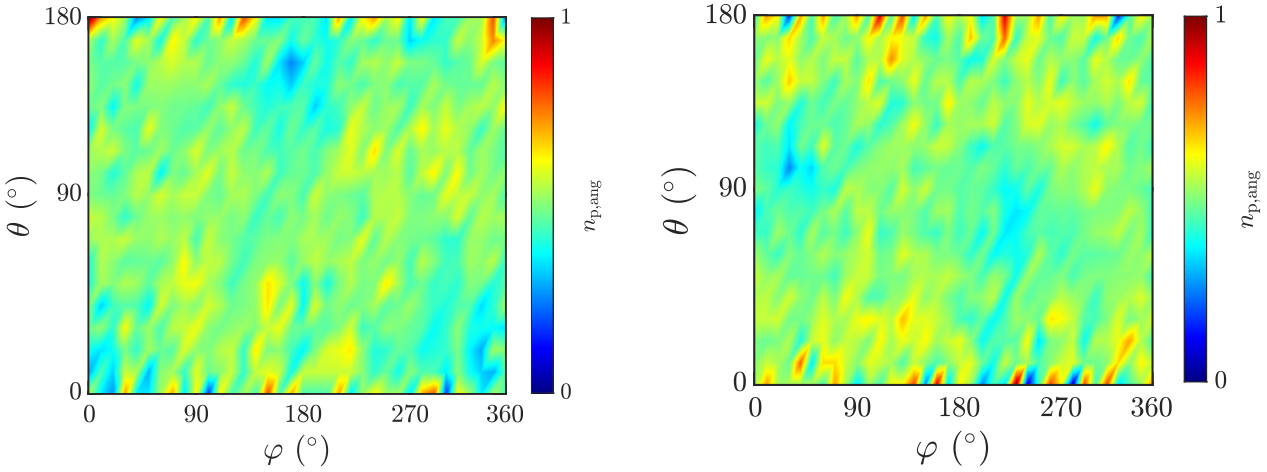
FIGURE VI.9 – Représentations spatio-temporelles de la fonction $n_{\mathrm{p},r}(r,t)$ pour la graine 1 des cas $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,5$, avec propriétés inertielles 2D et $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s communs aux deux cas.

Dans les deux cas, nous voyons très nettement la formation rapide d'une couche surfacique composée presque exclusivement de gros grains, surmontant une couche intermédiaire au contraire très riche en petits grains, puis un cœur où ce sont plutôt les gros grains qui semblent majoritaires. Notons d'ailleurs que la couche de petits grains semble un peu plus épaisse, et aussi un peu moins dense en petits grains, dans le cas $\mu = 0,1$. En outre, l'épaisseur de cette couche est dynamique. Au début, la couche de petits grains se forme juste sous la surface, autour de $r \simeq 10$ m, puis elle s'épaissit rapidement, sur les 100 premières secousses environ, pour atteindre une épaisseur qui reste ensuite quasi constante. Examinons maintenant la répartition des petits grains selon θ et φ. Les évolutions spatio-temporelles de $n_{\mathrm{p},\theta}(\theta,t)$ et $n_{\mathrm{p},\varphi}(\varphi,t)$ ne révèlent rien de particulier pour les différentes simulations effectuées. Nous pouvons le vérifier par exemple sur le tracé de $n_{\mathrm{p,ang}}(\varphi,\theta,t)$ après $t = 1000$ secousses pour la graine 1 des cas $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,5$ (voir la Fig. VI.10).

Aucune ségrégation angulaire ne semble donc survenir sous 1000 secousses si les propriétés inertielles des grains sont celles de grains 2D. Nous pouvons enfin observer les vues de face et en coupe d'un tel astéroïde, simulé avec $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s et $\mu = 0,5$, dans son état initial et après 1000 secousses (voir la Fig. VI.11).

Ces images illustrent bien les constats que nous tirions des Fig. VI.9b et VI.10 : la ségrégation radiale est nette et se caractérise par une couche de surface faite quasi exclusivement de gros grains, surplombant une couche faite quasi exclusivement de petits grains, et enfin un cœur comportant de nombreux gros grains. Par ailleurs, aucun motif de ségrégation angulaire n'est effectivement visible sur ces images. La comparaison entre les simulations 3D physiques de la Sec. II-1. et les présentes simulations 3D, où les grains ont des propriétés inertielles 2D, peut donc se résumer comme suit.

- Dans les deux cas, une ségrégation radiale s'établit rapidement, avec le profil de densité radiale que nous avons détaillé. Cette rapidité, par rapport au cas 2D, peut s'expliquer



(a) Cas $\mu = 0,1$. (b) Cas $\mu = 0,5$.

FIGURE VI.10 – Représentations de la densité $n_{\mathrm{p,ang}}(\varphi, \theta, t)$ à $t = 1000$ secousses pour la graine 1 des cas $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,5$, avec $T_{\mathrm{s}} = 1,25$ s dans les deux cas. La masse et le moment d'inertie des grains sont calculés selon les formules 2D.

par le fait que les petits grains disposent en 3D de deux fois plus de degrés de liberté. Ils ne sont notamment pas astreints à se déplacer dans un plan, ce qui améliore les possibilités de réarrangements.

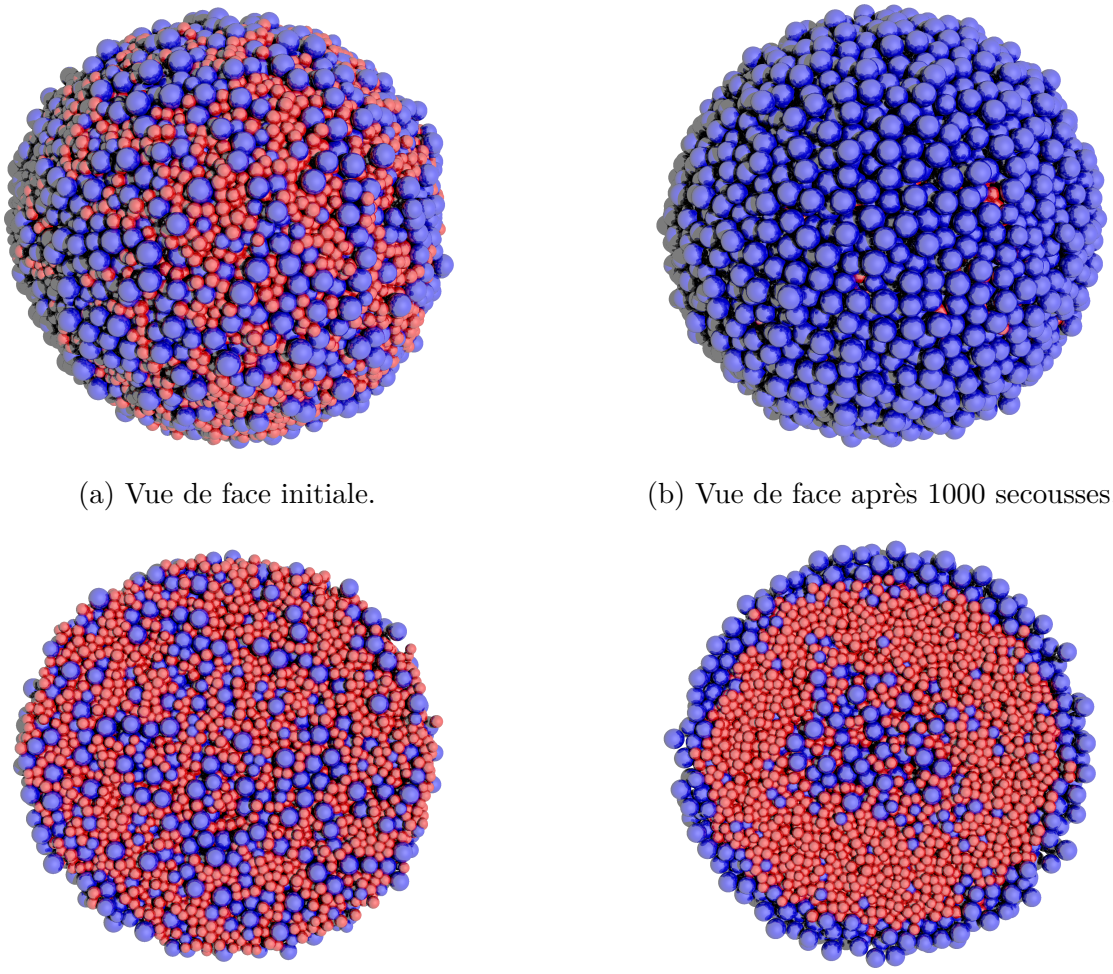
- Ensuite, une ségrégation angulaire avec lobes antipodaux s'établit dans le cas physique, mais celle-ci ne survient pas si les grains ont des propriétés inertielles 2D. La ségrégation radiale peut alors atteindre des niveaux bien plus élevés. Dans les simulations 3D classiques, les lois de puissance liant m_i et J_i à R_i font intervenir des exposants plus élevés que dans le cas 2D : 3 et 5 respectivement, contre 2 et 4. Il semblerait donc que des écarts plus importants en masse, et/ou en moment d'inertie entre gros et petits grains, favorisent la survenue d'une ségrégation angulaire. Néanmoins, les conditions nécessaires à cette ségrégation angulaire restent en grande partie à élucider.

II-3. Simulations intermédiaires

Les différences importantes de comportement observées entre les simulations de la Sec. II-1. et celles de la Sec. II-2. viennent du fait que nous avions modifié les lois d'échelle liant m_i et J_i à R_i pour un grain i donné. Nous essayons donc de déterminer si l'une de ces deux modifications, effectuée seule, peut mener à cette différence de comportement de l'agrégat sous perturbations. De pareils cas ne correspondent bien sûr à aucune réalité physique, mais peuvent nous nous donner d'intéressantes indications sur le rôle joué par les propriétés inertielles.

II-3.a) Cas d'une masse 2D et d'un moment d'inertie 3D

Tout d'abord, nous avons implémenté le cas où la masse suit la loi physique qui prévaut dans le cas 2D et le moment d'inertie celle qui prévaut dans le cas 3D. Pour un grain i de rayon R_i, nous obtenons donc :



(a) Vue de face initiale.

(b) Vue de face après 1000 secousses.

(c) Vue en coupe initiale.

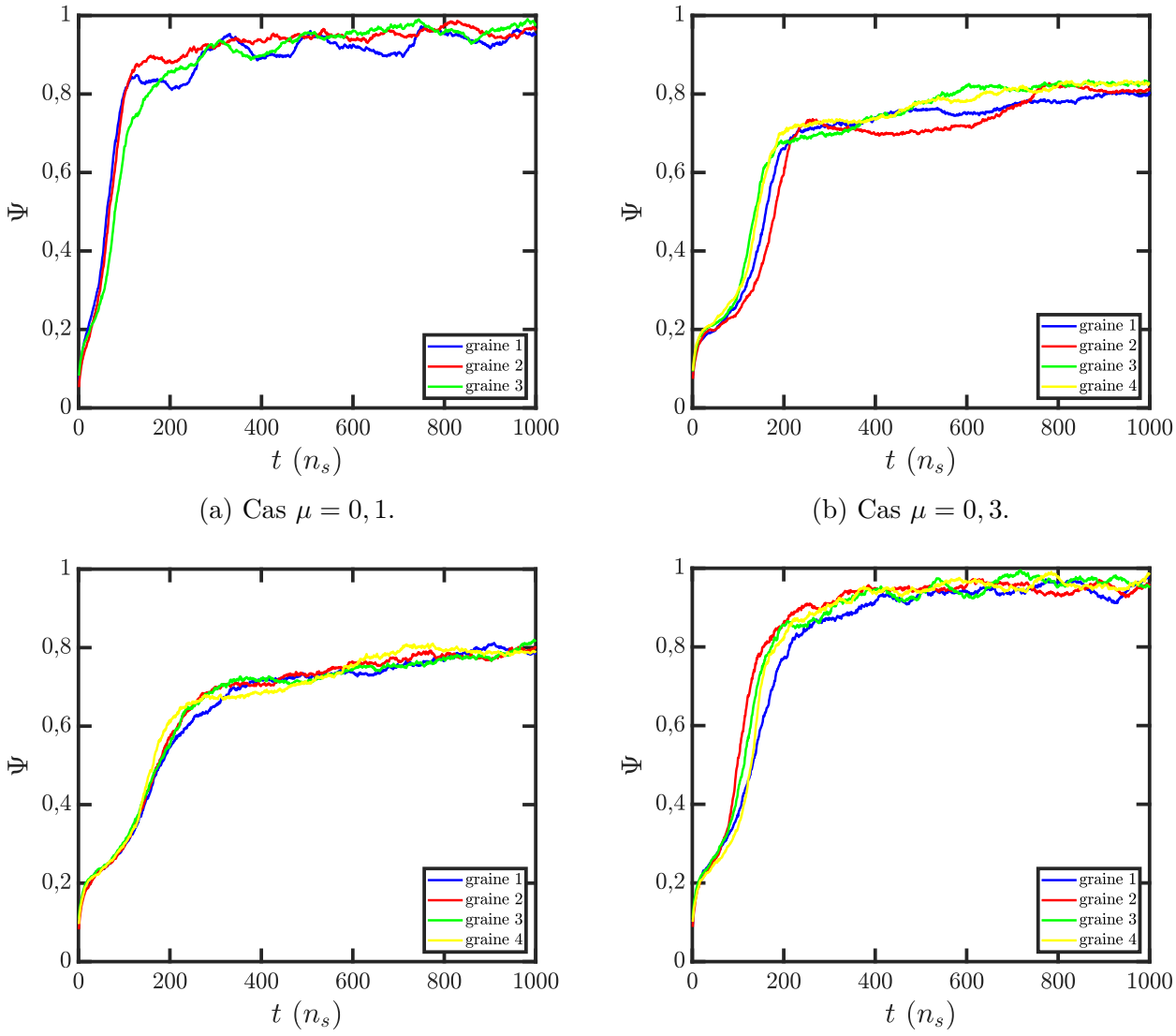
(d) Vue en coupe après 1000 secousses.

FIGURE VI.11 – Vues de face et en coupe selon le plan (Oyz) (en regardant depuis la direction $x \to +\infty$, $y = 0$, $z = 0$) d'un agrégat 3D, avec grains ayant des propriétés inertielles 2D, dans l'état initial et après 1000 secousses. Les paramètres sont $T_\mathrm{s} = 1,25$ s et $\mu = 0,5$ (graine 1). La ségrégation radiale est très nette avec de nombreux gros grains en surface mais aussi au cœur.

$$\begin{aligned} m_i &= m^* {\overline{R}_i}^2, \\ J_i &= J^* \frac{2 m_i {R_i}^2}{5} = J^* \frac{2 m^* {R^*}^2}{5} {\overline{R}_i}^5, \end{aligned} \tag{VI.24}$$

toujours avec $m^* = 1$ kg et $J^* = 1$. Les paramètres explorés sont toujours les mêmes : $T_\mathrm{s} = 1,25$ s et $\mu = 0,1$, $0,3$, $0,5$ et $0,8$. L'évolution du degré de ségrégation en fonction du nombre de perturbations est présentée sur la Fig. VI.12, pour les quatre graines utilisées pour chaque valeur de μ.

Cs graphes sont extrêmement semblables à ceux de la Fig. VI.8. L'allure des courbes $\Psi(t)$ est identique pour chacun des quatre coefficients de frottement. La seule différence, minime, est que la valeur maximale atteinte par Ψ semble un peu plus importante ici, avec une masse 2D et un moment d'inertie 3D, que lorsque ces deux quantités sont définies comme en 2D. Les temps typiques d'établissement de la ségrégation sont quant à eux les mêmes dans les deux cas.



(a) Cas $\mu = 0,1$.

(b) Cas $\mu = 0,3$.

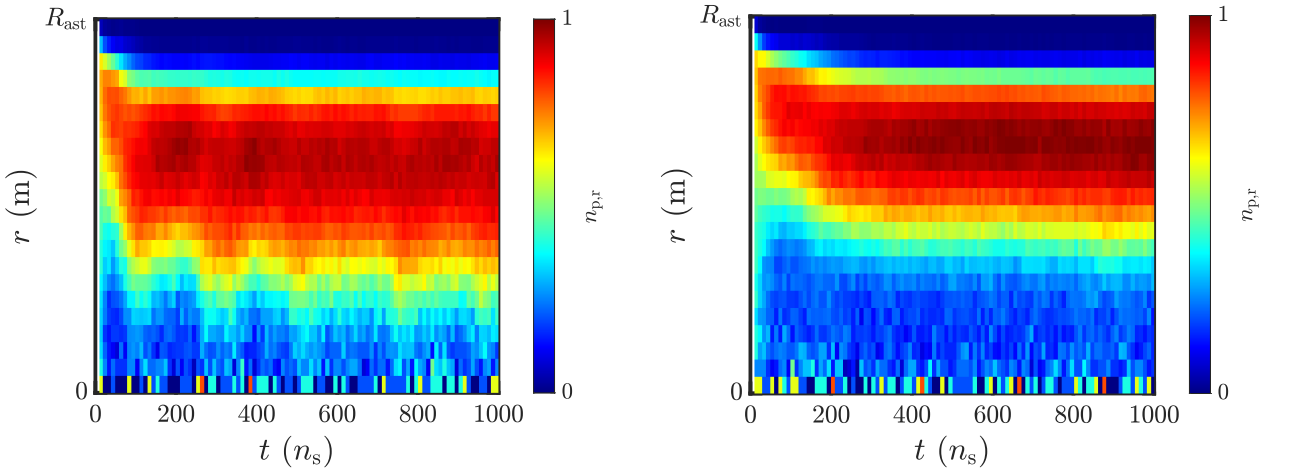
(c) Cas $\mu = 0,5$.

(d) Cas $\mu = 0,8$.

FIGURE VI.12 – Évolution de Ψ en fonction du temps t exprimé en nombre de secousses dans le cas de simulations 3D où les grains ont une masse 2D et un moment d'inertie 3D. Les graphes concernent les quatre coefficients de frottement explorés avec, pour chacun, comparaison entre les quatre graines (trois graines seulement pour $\mu = 0,1$). Le paramètre $T_s = 1,25$ s est commun à toutes les simulations.

Il apparaît donc que c'est la loi d'échelle suivie par la masse qui est décisive pour l'évolution de Ψ avec le nombre de secousses. Pour pousser la comparaison plus loin, nous proposons d'observer l'évolution spatio-temporelle de la densité $n_{\mathrm{p},r}(r,t)$ dans les mêmes conditions que dans la Sec. II-2., à savoir pour la graine 1 des coefficients de frottement $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,5$.

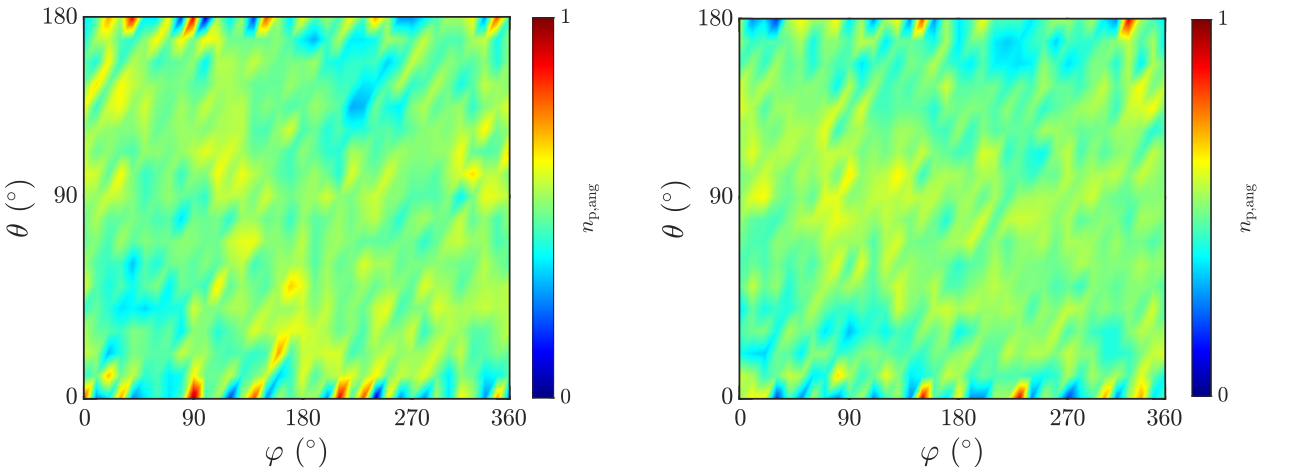
Ces évolutions sont de nouveau extrêmement semblables à celles du cas où masse et moment d'inertie sont calculés selon les formules 2D (voir la Fig. VI.9 pour comparaison). Nous notons toutefois la présence d'un motif d'oscillations dans le cas $\mu = 0,1$, qui se retrouve d'ailleurs sur le tracé de Ψ pour cette simulation (graine 1 du cas $\mu = 0,1$, voir la Fig. VI.12a). Ces



(a) Cas $\mu = 0,1$. (b) Cas $\mu = 0,5$.

FIGURE VI.13 – Représentations spatio-temporelles de la fonction $n_{\text{p},r}(r,t)$ pour la graine 1 des cas $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,5$, avec masse 2D et moment d'inertie 3D. Le paramètre $T_{\text{s}} = 1,25$ s est commun aux deux cas.

oscillations peuvent rappeler celles observées dans le cas physique, où la masse et le moment d'inertie sont calculés conformément aux formules valables pour une sphère 3D. Cela suggère que la loi d'échelle suivie par le moment d'inertie, et donc la rotation, joue quant à elle un rôle dans les échanges de gros grains entre la surface et le cœur. Enfin, nous illustrons le tracé de $n_{\text{p,ang}}(\varphi,\theta,t)$ après $t = 1000$ secousses pour les mêmes simulations, soit la graine 1 des cas $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,5$ (voir la Fig. VI.14).



(a) Cas $\mu = 0,1$. (b) Cas $\mu = 0,5$.

FIGURE VI.14 – Représentations de la densité $n_{\text{p,ang}}(\varphi,\theta,t)$ à $t = 1000$ secousses pour la graine 1 des cas $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,5$, avec $T_{\text{s}} = 1,25$ s dans les deux cas. Les grains ont une masse 2D et un moment d'inertie 3D.

De nouveau, le résultat est quasiment identique au cas où les grains ont une masse 2D et un moment d'inertie 2D (voir la Fig. VI.10). En particulier on ne distingue aucune ségrégation

angulaire dans les simulations où les grains ont une masse 2D et un moment d'inertie 3D.

II-3.b) Cas d'une masse 3D et d'un moment d'inertie 2D

Nous avons implémenté le cas inverse de celui de la Sec. II-3.a) : désormais, la masse suit la loi physique du cas 3D et le moment d'inertie celle du cas 2D. Pour un grain i de rayon R_i, cela donne :

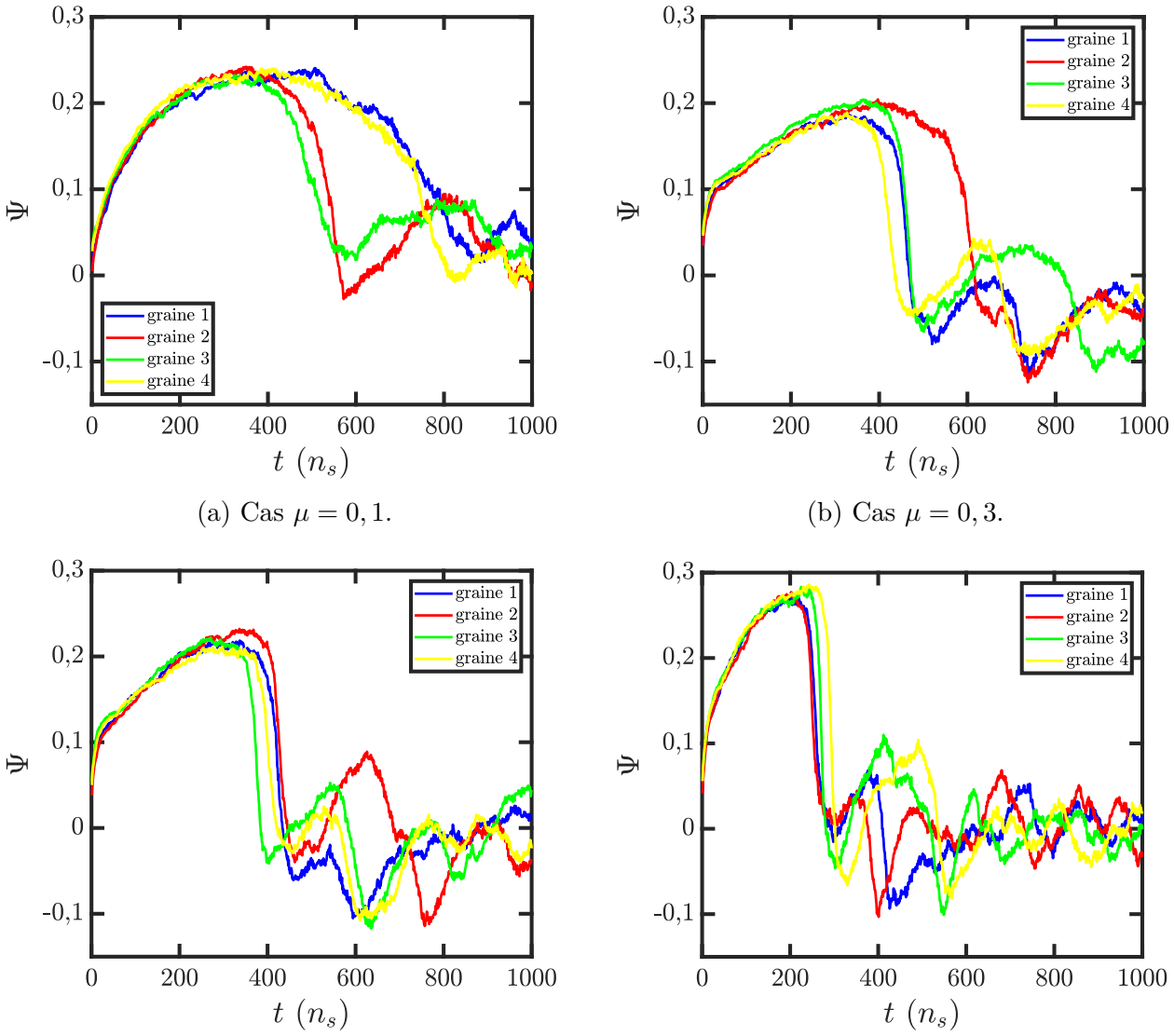
$$\begin{aligned} m_i &= m^* \overline{R}_i{}^3, \\ J_i &= J^* \frac{m_i {R_i}^2}{2} = J^* \frac{m^* {R^*}^2}{2} \overline{R}_i{}^4, \end{aligned} \tag{VI.25}$$

toujours avec $m^* = 1$ kg et $J^* = 1$. De même, les paramètres explorés sont toujours $T_\mathrm{s} = 1,25$ s et $\mu = 0,1$, $0,3$, $0,5$ et $0,8$. Nous présentons l'évolution du degré de ségrégation en fonction du nombre de perturbations sur la Fig. VI.15, pour les quatre graines utilisées pour chaque valeur de μ.

Ces graphes rappellent très fortement ceux obtenus pour les simulations 3D physiques (voir la Fig. VI.2), c'est-à-dire avec des grains possédant une masse $m_i \propto {R_i}^3$ et un moment d'inertie $J_i \propto {R_i}^5$. En effet, les évolutions de Ψ avec le nombre de secousses sont tout à fait semblables, pour les quatre coefficients de frottement explorés. Nous pouvons cependant remarquer que la croissance de Ψ est plus rapide dans le cas détaillé ici, où les grains ont un moment d'inertie 2D, que dans le cas physique. De même, la chute de Ψ intervient ici plus rapidement, en moyenne 200 secousses plus tôt. Signalons que cette chute n'est pas due à un re-mélange des grains selon la coordonnée radiale, mais à la survenue d'uune ségrégation angulaire, comme nous le montrons plus loin. Enfin, les oscillations de Ψ, après sa chute, semblent ici moins régulières, avec une période moins bien définie, que sur les graphes de la Fig. VI.2. Ces observations recoupent celles de la Sec. II-3.a) : c'est la loi en vigueur pour le calcul de la masse qui détermine l'allure générale de Ψ, tandis que la loi en vigueur pour le calcul du moment d'inertie joue un rôle sur d'éventuels échanges de gros grains entre le cœur et la surface. Nous proposons à nouveau d'observer l'évolution spatio-temporelle de la densité $n_{\mathrm{p},r}(r,t)$ pour les mêmes simulations que dans la Sec. II-1., à savoir pour la graine 1 des coefficients de frottement $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,8$.

L'évolution de la densité $n_{\mathrm{p},r}$ est tout à fait semblable à celle observée sur la Fig. VI.4 pour chacun des deux coefficients de frottement $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,8$. En particulier, pour $\mu = 0,1$, la couche intermédiaire de petits grains n'atteint pas une densité $n_{\mathrm{p},r} \simeq 1$ en petits grains, signe qu'elle contient encore une certaine quantité de gros grains. De même pour $\mu = 0,8$ nous constatons de nouveau un changement assez net après environ 200 secousses (contre environ 300 dans le cas 3D physique, voir la Fig. VI.4b), avec une couche surfacique de gros grains qui s'amincit en moyenne (mais cela cache en fait une ségrégation angulaire en surface, comme nous allons le voir) et des oscillations de la couche intermédiaire de petits grains. Celles-ci sont cependant moins régulières que dans le cas purement 3D, ce qui rejoint les observations faites sur l'évolution de Ψ. À nouveau, nous terminons l'analyse des résultats par le tracé de la densité angulaire $n_{\mathrm{p,ang}}(\varphi,\theta,t)$ après $t = 1000$ secousses pour la graine 1 des cas $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,8$ (voir la Fig. VI.17).

Le cas $\mu = 0,8$ illustré sur la Fig. VI.17b (avec donc masse 3D et moment d'inertie 2D) est à comparer avec le cas $\mu = 0,8$ physique (masse 3D et moment d'inertie 3D) illustré sur la Fig. VI.6. Nous retrouvons ici l'apparition d'une ségrégation secondaire très nette, avec pour $\mu = 0,1$ comme pour $\mu = 0,8$, formation de deux lobes de gros grains antipodaux.



(a) Cas $\mu = 0,1$.

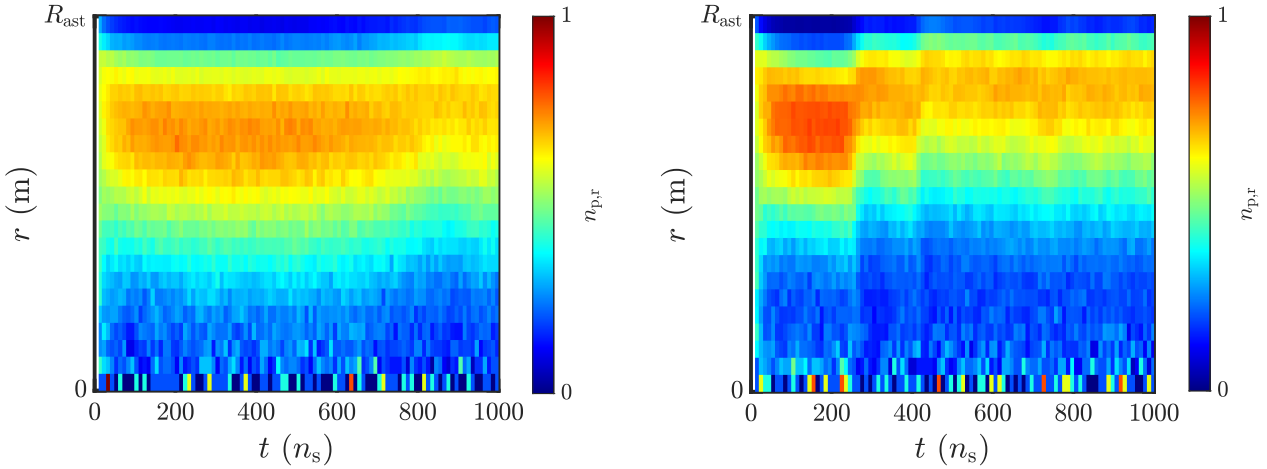
(b) Cas $\mu = 0,3$.

(c) Cas $\mu = 0,5$.

(d) Cas $\mu = 0,8$.

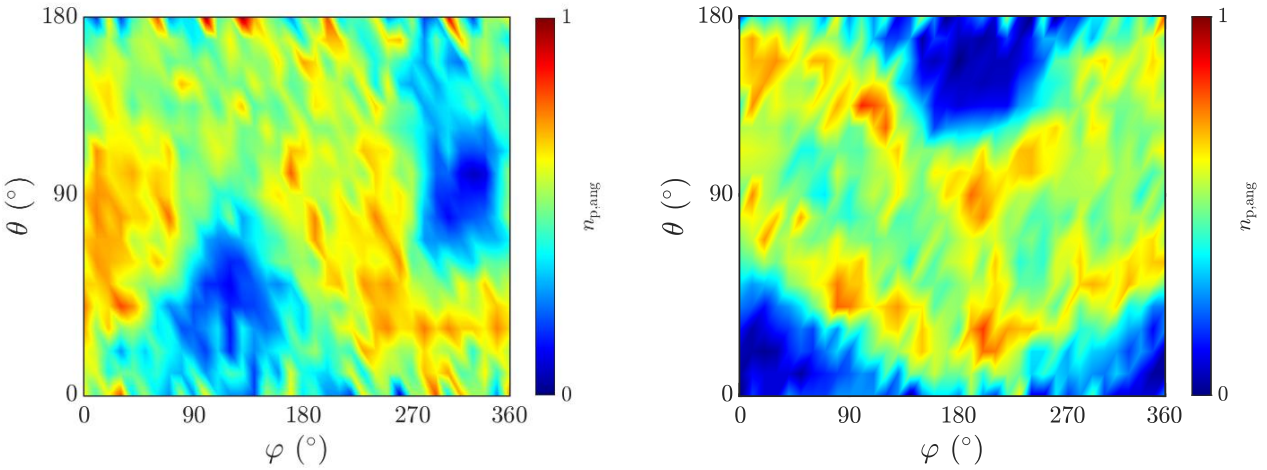
FIGURE VI.15 – Évolution de Ψ en fonction du temps t exprimé en nombre de secousses dans le cas de simulations 3D où les grains ont une masse 3D et un moment d'inertie 2D. Les graphes concernent les quatre coefficients de frottement explorés avec, pour chacun, comparaison entre les quatre graines. Le paramètre $T_\mathrm{s} = 1,25$ s est commun à toutes les simulations.

L'analyse spatio-temporelle de $n_{\mathrm{p},r}$ (voir la Fig. VI.16) nous permet d'ailleurs de savoir que ces lobes échangent des gros grains avec le cœur également riche en gros grains, exactement comme dans le cas 3D physique. Pour $\mu = 0,1$, les lobes sont respectivement situés autour de $(\theta \simeq 60°, \phi \simeq 110°)$ et autour de $(\theta \simeq 100°, \phi \simeq 320°)$ et ne sont donc qu'approximativement antipodaux (voir la Fig. VI.17a). Rappelons que ces valeurs de θ et φ n'ont pas de sens physique dans l'absolu. En effet, le choix des axes $(Oxyz)$ de notre système de coordonnées, et donc des origine du décompte de la colatitude θ et de la longitude φ est complètement arbitraire. Nous savons seulement que deux lobes rigoureusement antipodaux sont caractérisés par des valeurs de φ espacées de 180° et des valeurs de θ symétriques par rapport à 90°, et ce quel que soit



(a) Cas $\mu = 0,1$. (b) Cas $\mu = 0,8$.

FIGURE VI.16 – Représentations spatio-temporelles de la fonction $n_{\text{p},r}(r,t)$ pour la graine 1 des cas $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,8$, avec masse 3D et moment d'inertie 2D. Le paramètre $T_{\text{s}} = 1,25$ s est commun aux deux cas.



(a) Cas $\mu = 0,1$. (b) Cas $\mu = 0,8$.

FIGURE VI.17 – Représentations de la densité $n_{\text{p,ang}}(\varphi,\theta,t)$ à $t = 1000$ secousses pour la graine 1 des cas $\mu = 0,1$ et $\mu = 0,8$, avec $T_{\text{s}} = 1,25$ s dans les deux cas. Les grains ont une masse 3D et un moment d'inertie 2D.

le système d'axes choisi. Par ailleurs, pour $\mu = 0,8$, les deux lobes sont respectivement situés autour de $(\theta \simeq 20°, \phi \simeq 10°)$ et autour de $(\theta \simeq 70°, \phi \simeq 190°)$ et sont donc nettement antipodaux (voir la Fig. VI.17b).

Nous retenons deux éléments importants de ces études à masse et moment d'inertie modifiés.

- Le passage d'une loi de puissance 3D $m_i \propto {R_i}^3$ à une loi de puissance 2D $m_i \propto {R_i}^2$ pour la masse des grains change radicalement le comportement de l'agrégat sous perturbations isotropes. Dans le cas physique 3D $m_i \propto {R_i}^3$, on observe la formation rapide de deux lobes antipodaux de gros grains, échangeant par ailleurs des grains avec le cœur également riche

en gros grain. Cela est observé pour toute valeur de μ et quelle que soit la loi de puissance suivie par le moment d'inertie (3D ou 2D). En revanche, dans le cas 2D $m_i \propto {R_i}^2$, la ségrégation radiale est très nette, malgré la persistence de gros grains au cœur, et aucune ségrégation angulaire ne se développe.

- Le passage d'une loi de puissance 3D $J_i \propto {R_i}^5$ à une loi de puissance 2D $J_i \propto {R_i}^4$ pour le moment d'inertie des grains n'a que très peu d'effet. Nous constatons seulement que dans le cas où deux lobes se forment (c'est-à-dire pour une masse 3D), le cas physique $J_i \propto {R_i}^5$ semble rendre les échanges de grains entre les lobes et le cœur plus réguliers, avec une période mieux définie.

III- Conclusion

Cette première étude d'astéroïdes tridimensionnels soumis à des perturbations isotropes nous a apporté plusieurs résultats intéressants, mais reste à compléter.

- Le résultat le plus intéressant est que la ségrégation radiale se produit aussi bien dans des astéroïdes 3D que 2D, et même plus rapidement. Cependant, nous constatons qu'en 3D il est difficile de vider le cœur de ses gros grains, du moins pour les paramètres que nous avons explorés.
- L'étude est encore largement incomplète du point de vue de la gamme de paramètres explorés (voir le Chap. III pour comparaison). Il serait intéressant de varier la valeur de T_s, d'implémenter d'autres valeurs de coefficient de frottement μ, mais aussi d'étudier l'effet d'un préfacteur J^* sur le moment d'inertie physique, autrement dit $J_i = J^* \times (2m_i {R_i}^2/5)$ avec $m_i = m^* {\overline{R}_i}^3$ et $R_i = R^* \overline{R}_i$.
- Enfin, les résultats que nous avons obtenus concernant l'effet de la dépendance de m_i et J_i en R_i indiquent que la masse des grains joue un rôle très important. En particulier, le rôle essentiel joué par la loi liant m_i à R_i suggère que le ratio de masse entre petits et gros grains est capital, et nous incite à explorer d'autres distributions en taille. Nous resterions alors dans le cas physique $m_i \propto {R_i}^3$ et $J_i \propto {R_i}^5$.

Chapitre VII

Exploration expérimentale de la ségrégation en champ central

La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information.

Albert Einstein.

Dans ce chapitre, nous présentons l'approche expérimentale que nous avons développée pour étudier la ségrégation dans les astéroïdes. Le point essentiel est d'imiter un champ gravitationnel central dans lequel faire évoluer un milieu granulaire. Nous donnons également quelques résultats préliminaires, cette étude expérimentale restant très exploratoire à ce stade.

Sommaire

I- Présentation de l'expérience **216**
I-1. Imitation d'un champ gravitationnel central 216
I-2. Préparation du milieu granulaire 219
I-3. Perturbations et suivi du milieu granulaire 219
II- Expériences menées et résultats **222**
II-1. Calibration de la réponse du pot vibrant 222
II-2. Tentatives d'observation de la ségrégation 225
III- Conclusion **227**

I- Présentation de l'expérience

I-1. Imitation d'un champ gravitationnel central

L'idée maîtresse de l'expérience développée est de faire évoluer les grains dans un champ gravitationnel effectif de la forme de celui donné par l'Éq. (III.1). Afin d'atteindre cet objectif facilement, et de pouvoir observer tous les grains de l'agrégat, nous souhaitons construire une expérience bidimensionnelle, dans le sens où nous étudions une monocouche de grains. Le champ de force que nous souhaitons reproduire est tiré du théorème de Gauss pour un astéroïde sphérique et de masse volumique homogène. Pour rappel, il s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}(\overrightarrow{r}) = -g\frac{r}{R_{\text{ast}}}\overrightarrow{e_r}. \tag{VII.1}$$

Nous pouvons remarquer que ce champ dérive d'un potentiel V donné par

$$V(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{2}g\frac{r^2}{R_{\text{ast}}}, \tag{VII.2}$$

où r est la distance au centre de force considéré. Or, dans le cadre d'expériences réalisées en laboratoire, les grains sont soumis au potentiel de pesanteur terrestre V_{t} donné par

$$V_{\text{t}}(\overrightarrow{r}) = gz, \tag{VII.3}$$

où z est leur altitude. L'astuce consiste donc à contraindre les grains à se déplacer sur une surface de révolution, décrite par une équation de la forme

$$z \propto r^2, \tag{VII.4}$$

où r est la distance à l'axe de révolution de la surface, et z l'altitude par rapport au point d'intersection entre la surface et son axe de révolution, c'est-à-dire par rapport au centre de la surface. Une telle surface est un paraboloïde elliptique de révolution. Une vue en coupe du dispositif imaginé, avec une monocouche de grains se déplaçant sur un paraboloïde, est proposée sur la Fig. VII.1.

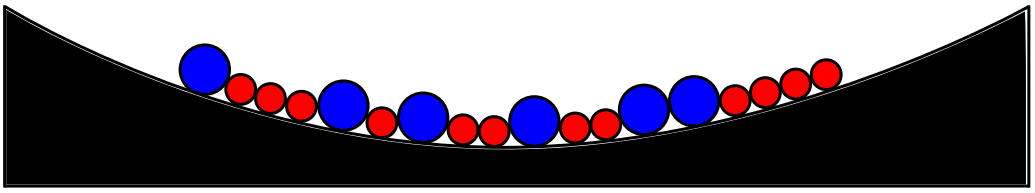


FIGURE VII.1 – Vue en coupe du dispositif permettant de reproduire un champ central : une monocouche de grains évolue sur un paraboloïde elliptique de révolution.

Pour fabriquer un paraboloïde, nous nous inspirons d'un problème simple de mécanique des fluides, qui est celui d'un fluide en rotation uniforme. En effet, considérons un fluide de masse volumique ρ, placé dans un récipient cylindrique de rayon R et de hauteur H lui-même mis en rotation à la vitesse angulaire ω autour de son axe de symétrie, noté (Oz). Nous supposons de plus que l'entraînement du fluide par le récipient (fond et bords) est parfait, de sorte que le fluide est en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de (Oz). Expérimentalement, il

faut pour cela attendre suffisamment longtemps après la mise en mouvement du récipient. Plus précisément, si cette dernière intervient à $t = 0$, il faut se placer à $t \gg H^2/\nu$ où $\nu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique de fluide, qui s'interprète comme un coefficient de diffusion de l'impulsion au sein de celui-ci, η étant sa viscosité dynamique. Ainsi, le régime permanent en rotation est atteint, et nous pouvons écrire le champ de vitesse en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) :

$$\overrightarrow{v} = r\omega\overrightarrow{e_\theta}. \tag{VII.5}$$

Nous allons pouvoir en déduire le champ de pression P, à l'aide de l'équation de Navier-Stokes pour la quantité de mouvement applicable à un fluide newtonien en écoulement incompressible [74] :

$$\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2}\right) - \overrightarrow{v}\wedge\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v}\right)\right) = -\overrightarrow{\nabla}P + \rho\overrightarrow{g} + \eta\Delta\overrightarrow{v}, \tag{VII.6}$$

où $\overrightarrow{\nabla}$ désigne l'opérateur « Nabla » et Δ désigne l'opérateur laplacien vectoriel. En injectant l'Éq. (VII.5) dans l'Éq. (VII.6), nous obtenons :

$$\rho\left(r\omega^2\overrightarrow{e_r} - 2r\omega^2\overrightarrow{e_r}\right) = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{e_\theta} - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\overrightarrow{e_z} - \rho g\overrightarrow{e_z}. \tag{VII.7}$$

La projection de cette équation sur la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ donne alors :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = \rho r\omega^2, \ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta} = 0 \ \text{ et } \ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g. \tag{VII.8}$$

Nous en déduisons immédiatement le champ de pression dans le fluide :

$$P(r,z) = P_0 + \rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz\right), \tag{VII.9}$$

en notant P_0 la pression atmosphérique et en prenant $z = 0$ à la surface du fluide en $r = 0$. Quant au reste de la surface du fluide, il correspond aux points de coordonnées (r, z) telles que $P(r, z) = P_0$, à savoir :

$$z = \frac{\omega^2}{2g}r^2. \tag{VII.10}$$

Nous nous sommes donc appuyés sur cette équation pour fabriquer les surfaces paraboloïdales dont nous avons besoin pour imiter le champ central régnant au sein des astéroïdes. Néanmoins, nous avons besoin d'une surface solide, et non liquide, pour pouvoir y placer un milieu granulaire. La solution que nous avons trouvée consiste à utiliser une résine « Époxy » courante, l'Araldite®. Nous mélangeons donc celle-ci et son durcisseur avec de la peinture noire (cela sera justifié plus loin) puis disposons la mixture obtenue dans une boîte de Pétri de 14,5 cm de diamètre, mise en rotation à une certaine vitesse angulaire ω. La mixture prend alors assez rapidement la forme de paraboloïde prévue, et nous maintenons la rotation environ 48 heures, afin que la résine devienne complètement solide. Ainsi, nous obtenons des paraboloïdes solides dont nous pouvons contrôler la concavité en contrôlant ω. Nous avons fabriqué de la sorte plusieurs paraboloïdes, en utilisant $\omega = 33$, 45, 60, 65, 69 et enfin 78 tr/min[1]. Tous les

1. Les valeurs 33, 45 et 78 tr/min ont bien sûr été obtenues à l'aide d'un tourne-disques.

paraboloïdes ainsi obtenus font la même masse $M = 120$ g, que nous pouvons fixer simplement lors de la préparation de la résine.

Comme nous venons de le montrer, l'évolution sur une surface paraboloïdale permet d'imiter un champ central en $-r\overrightarrow{e_r}$. Néanmoins, du fait de l'altitude variable de la surface, un grain repéré par les coordonnées cylindriques $(r, z(r))$ doit parcourir une distance $s(r)$ légèrement supérieure à r pour atteindre le centre de la surface. De plus, la réaction normale de la surface fait que la résultante des forces subies par le grain n'est pas orientée selon $\overrightarrow{e_r}$, mais selon un vecteur unitaire $\overrightarrow{t}(\overrightarrow{r})$ localement tangent à la surface (voir la Fig. VII.2).

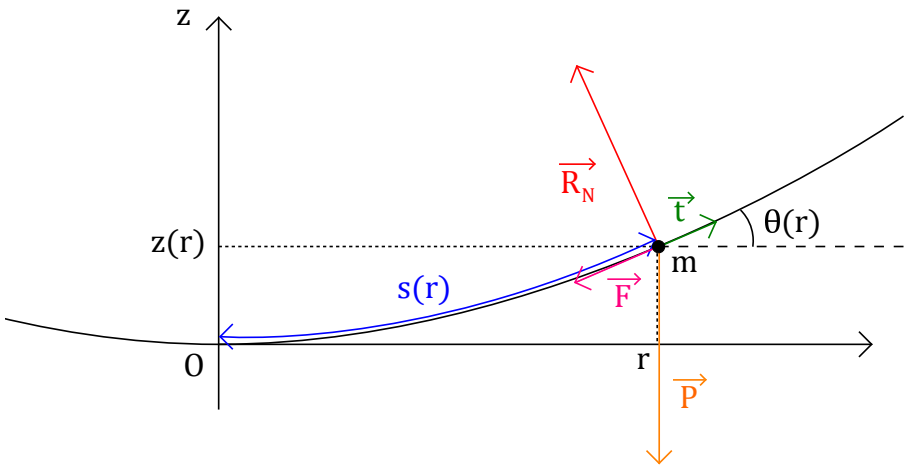


FIGURE VII.2 – Schéma des notations utilisées pour étudier la dynamique d'un point matériel sur une surface paraboloïdale.

Pour clarifier cela et montrer que les grains subissent finalement bien une force en $-s(r)\,\overrightarrow{t}(\overrightarrow{r})$, nous proposons étudier brièvement la dynamique d'un point matériel de masse m évoluant sur une surface paraboloïdale. Si nous négligeons le frottement solide, celui-ci est soumis à deux forces. Il y a tout d'abord son poids $\overrightarrow{P}$ qui, du fait de l'inclinaison locale de la surface, possède une composante normale à celle-ci ainsi qu'une composante tangentielle. Il y a également la réaction normale $\overrightarrow{R_N}$ de la surface, qui compense précisément la composante normale du poids. La résultante $\overrightarrow{F}$ est donc donnée par la composante tangentielle du poids, qui vaut :

$$\overrightarrow{F} = -mg\,\sin(\theta(r))\;\overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}), \tag{VII.11}$$

où θ est l'angle entre l'horizontale et la pente locale de la surface, et $\overrightarrow{t}(\overrightarrow{r})$ est le vecteur unitaire indiquant la direction locale de plus forte pente. Nous avons donc par définition $\tan(\theta(r)) = (\mathrm{d}z/\mathrm{d}r)(r) = \omega^2 r/g$ puisque $z(r) = \omega^2 r^2/(2g)$ (voir l'Éq. VII.10). Dans nos expériences, la plus grande valeur de ω utilisée est $\omega = 78$ tr.min^{-1} $= 8,2$ rad.s^{-1} et les billes sont au plus à $r = 5$ cm du centre de la surface. Nous avons donc $\omega^2 r/g \leq 8,2^2 \times 0,05/9,81 \simeq 0,34$. Comme $\sin(\arctan(0,34)) \simeq 0,32$, nous pouvons faire l'approximation que $\sin\theta \simeq \tan\theta$ avec une erreur relative ne dépassant pas 6 % (et même 4 % pour les valeurs $\omega \leq 69$ tr.min^{-1}). De la sorte, nous avons :

$$\overrightarrow{F} \simeq -m\omega^2 r\;\overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}). \tag{VII.12}$$

Par ailleurs, la distance $s(r)$ du chemin le plus court entre le fond du paraboloïde $(r = 0, z = 0)$ et un point de coordonnées $(r, z(r))$ correspond à une abscisse curviligne, et est donnée par :

$$s(r) = \int_{u=0}^{r} \sqrt{(\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}z)^2} = \int_{u=0}^{r} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\right)^2}\, \mathrm{d}u = \int_{u=0}^{r} \sqrt{1 + \frac{\omega^4 u^2}{g^2}}\, \mathrm{d}u. \qquad \text{(VII.13)}$$

Pour $\omega = 78$ tr.min^{-1} $= 8,2$ rad.s^{-1} et $r = 0,05$ m, nous trouvons $s \simeq 0,051$ m. Ainsi, l'approximation $s(r) \simeq r$ s'accompagne d'une erreur relative n'excédant jamais 2 %. Finalement, nous avons bien :

$$\overrightarrow{F} \simeq -m\omega^2 s(r)\ \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}). \qquad \text{(VII.14)}$$

Autrement dit, dans nos expériences les grains sont bien accélérés vers le centre du paraboloïde proportionnellement à la longueur du chemin minimal à parcourir pour rejoindre ce centre.

I-2. Préparation du milieu granulaire

Notre milieu granulaire est constitué de billes de verre, qui ont donc toutes la même densité. Comme le diamètre de nos surfaces paraboloïdales est de 14, 5 cm, nous travaillons avec des billes de diamètre compris entre 4 et 10 mm. Ainsi, nous pouvons en disposer environ 200 sans qu'elles n'atteignent les bords de la surface au cours des perturbations que nous appliquons (détaillées dans la Sec. I-3.). Plus précisément, nous mettons en jeu deux populations de billes : des petites billes de diamètre égal à 4 ou 5 mm et des grosses billes de diamètre égal à 8 ou 10 mm. L'utilisation de deux tailles par population permet d'éviter autant que possible les effets de cristallisation du milieu suivant un réseau hexagonal compact. Précisons enfin que toutes les petites billes sont peintes en rouge, tandis que les billes de 8 mm de diamètre sont peintes en bleu et celles de 10 mm de diamètre en vert. Comme la surface paraboloïdale est peinte en noir, cela permet une bonne visualisation de la position des différentes billes, et facilite le traitement des photos que nous sommes amenés à prendre en vue de quantifier une éventuelle ségrégation. Le fait d'utiliser des billes pour créer notre monocouche granulaire peut poser problème, puisque les petites billes et les grosses billes n'ont pas leur centre de masse à la même hauteur, comme nous le verrons plus loin. Néanmoins nous évitons ainsi certains problèmes que pourrait poser l'emploi de disques, comme le chevauchement ou le frottement important. Une photo du milieu granulaire préparé, vu de dessus dans son état initial avant toute perturbation, est montrée sur la Fig. VII.3.

I-3. Perturbations et suivi du milieu granulaire

Maintenant que nous avons reproduit un milieu granulaire polydisperse évoluant dans un champ central, il nous faut lui appliquer des perturbations mécaniques pouvant mener à une ségrégation radiale. Pour ce faire, le paraboloïde contenant le milieu est fixé sur un pot vibrant, de sorte que ce dernier peut le déplacer verticalement (voir la Fig. VII.4a).

La tension U appliquée aux bornes du pot vibrant consiste en des « *pulses* » successifs d'amplitude V_0 et de largeur temporelle Δt (voir la Fig. VII.4b). Deux débuts de *pulses* sont séparés d'un intervalle constant fixé à $T = 1$ seconde. Ainsi, le milieu est soulevé en bloc puis la surface paraboloïdale redescend. Au cours de ce mouvement, l'accélération de la surface prend donc des valeurs positives puis négatives. Pour une amplitude V_0 suffisamment importante,

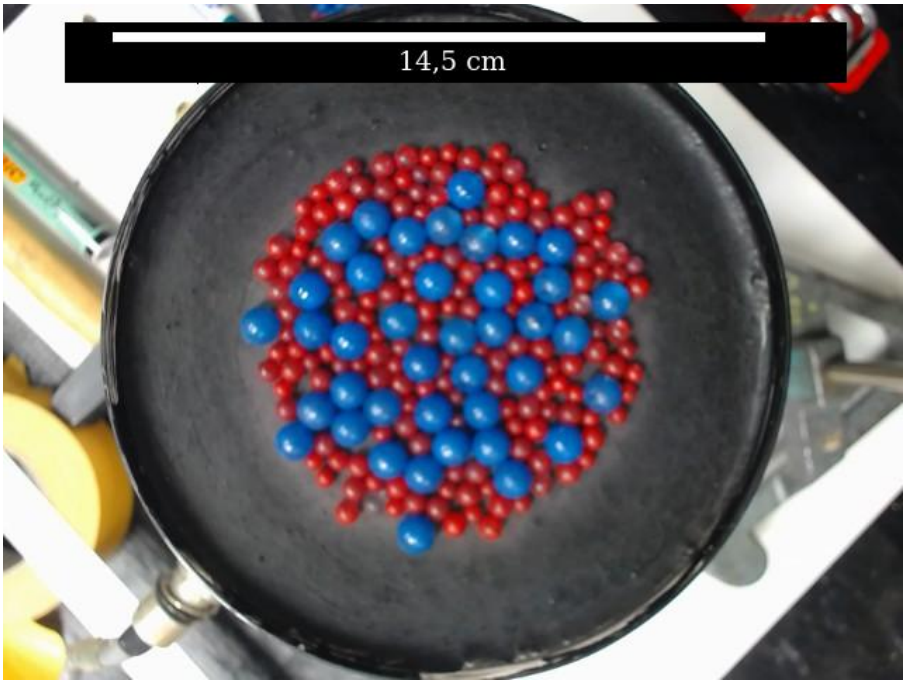
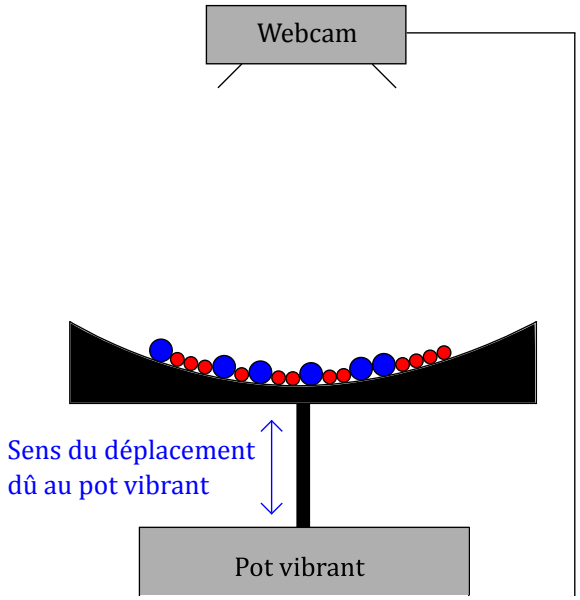


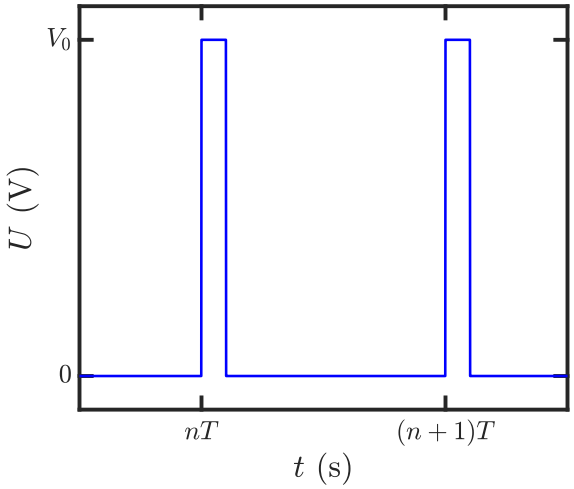
FIGURE VII.3 – Vue de dessus d'une surface paraboloïdale (en noir) contenant un total de 200 billes : 40 billes de 8 mm de diamètre (en bleu), ainsi que 80 billes de 5 mm de diamètre et 80 billes de 4 mm de diamètre (en rouge). Ces proportions permettent d'avoir une surface totale couverte par les grosses billes égale à celle couverte par les petites billes, comme dans la plupart des simulations.

l'accélération négative maximale est, en valeur absolue, plus élevée que celle de la pesanteur terrestre g. Les billes sont alors brièvement décollées de la surface. Au moment où elles rentrent de nouveau en contact avec la surface, la pente locale ainsi que les possibles irrégularités de cette dernière font que les billes s'entrechoquent. Cela permet de créer une forme d'agitation dans le milieu et autorise donc des réarrangements susceptibles d'entraîner une ségrégation. Comme la conversion de l'excitation verticale en excitation horizontale se fait par les chocs entre billes, cette conversion dépend de la densité de billes présentes sur le socle. En effet, si une seule bille était présente, elle aurait tendance à rester seule au fond de la surface concave, sans mouvements horizontaux importants [33,107]. Le milieu a le temps de revenir au repos avant le début du *pulse* suivant. Pour étudier la survenue éventuelle d'une ségrégation radiale, nous photographions le milieu toutes les 10 secondes, donc toutes les 10 perturbations appliquées, à l'aide de la webcam placée au-dessus (voir la Fig. VII.4a). La photo montrée sur la Fig. VII.3 est prise selon ce procédé, dont nous voyons alors qu'il permet bien de repérer les différentes billes. Nous avons développé un traitement systématique et automatisé des photographies, permettant de repérer les pixels à dominante rouge et ceux à dominante bleue, afin de cartographier les régions peuplées de grosses billes et de petites billes. Ce traitement ne considère que les pixels situés dans un certain disque au centre de l'image. Nous ajustons le rayon de ce disque manuellement pour chaque expérience, les réglages de la webcam étant bien sûr constants au cours d'une même expérience. Pour illustrer le fonctionnement de ce traitement, nous pouvons prendre l'exemple de la photo de la Fig. VII.3 et la comparer à sa version traitée (voir la Fig. VII.5b).

La position du centre O de l'agrégat est calculée, pour chaque image, en faisant la moyenne des positions des pixels sélectionnés. Nous calculons ensuite la distance moyenne d_b des pixels

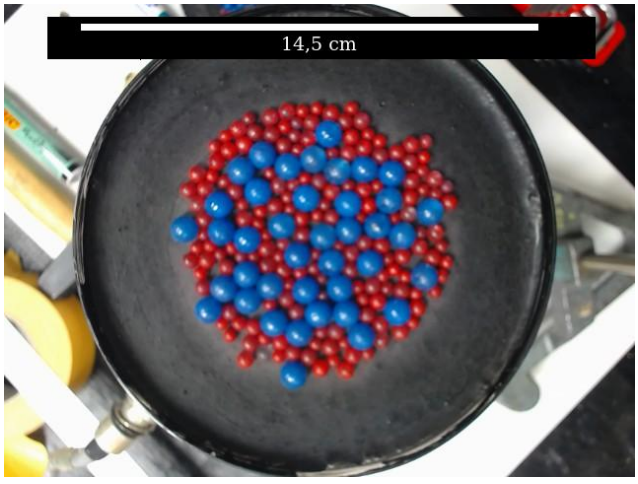


(a) Schéma du montage expérimental permettant de perturber mécaniquement le milieu à l'aide d'un pot vibrant, et de le photographier régulièrement avec une webcam. Le paraboloïde et le milieu granulaire qu'il supporte sont vus en coupe.

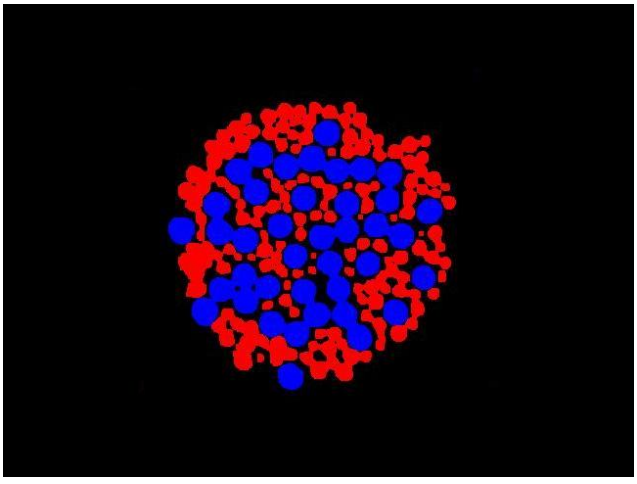


(b) Forme de la tension U appliquée aux bornes du pot vibrant, avec deux *pulses* successifs (numérotés n et $n+1$). On a représenté ici $\Delta t = 0,1$ s et $T = 1$ s.

FIGURE VII.4 – Procédé d'application de perturbations au milieu granulaire.



(a) Photographie.



(b) Traitement.

FIGURE VII.5 – Illustration du procédé de détection des zones peuplées de petites billes et de grosses billes par tri selon la couleur dominante des pixels.

bleus à O et la distance moyenne d_r des pixels rouges à O. Cela nous permet d'estimer les quantités introduites dans le Chap. III pour définir un degré de ségrégation, à savoir la distance moyenne des gros grains au centre pondérée par leur aire, notée $\langle r_\mathrm{g} \rangle$, et la distance moyenne de tous les grains au centre, notée $\langle r_\mathrm{t} \rangle$. En effet, nous avons directement

$$\langle r_\mathrm{g}\rangle = d_\mathrm{b} \quad \text{et} \quad \langle r_\mathrm{t}\rangle = \frac{N_\mathrm{b} d_\mathrm{b} + N_\mathrm{r} d_\mathrm{r}}{N_\mathrm{b} + N_\mathrm{r}}. \tag{VII.15}$$

où N_b (resp. N_r) est le nombre de pixels bleus (resp. rouges) détectés sur l'image considérée. Signalons que ce mode de calcul de $\langle r_\mathrm{g}\rangle$ et $\langle r_\mathrm{t}\rangle$ permet de ne pas avoir à identifier chaque grain individuellement. Ainsi, nous pouvons définir le degré de ségrégation pour cette image :

$$\psi = \frac{\langle r_\mathrm{g}\rangle}{\langle r_\mathrm{t}\rangle}. \tag{VII.16}$$

Celui-ci est, comme dans le cas des simulations 2D, renormalisé par la valeur maximale ψ_max qu'il peut atteindre compte tenu de la fraction en aire couverte par les gros grains, notée α_A. Nous obtenons donc un degré Ψ variant de 0 pour un état complètement mélangé à 1 pour état totalement ségrégé, et donné par :

$$\Psi = \frac{\psi - 1}{\psi_\mathrm{max} - 1} \quad \text{avec} \quad \psi_\mathrm{max} = \frac{1 - (1 - \alpha_\mathrm{A})^{3/2}}{\alpha_\mathrm{A}}. \tag{VII.17}$$

II- Expériences menées et résultats

II-1. Calibration de la réponse du pot vibrant

Nous souhaitons quantifier l'intensité des perturbations appliquées au milieu en fonction des paramètres V_0 et Δt (la hauteur et la largeur des *pulses*). Pour ce faire, nous mesurons donc la réponse mécanique du système constitué par le pot vibrant supportant un paraboloïde, à une excitation électrique donnée. Nous appliquons donc aux bornes du pot vibrant une tension U sinusoïdale de fréquence f, autrement dit $U(t) = U_\mathrm{max} \sin(2\pi f t)$. Un accéléromètre est fixé sur le paraboloïde : la tension $U_\mathrm{acc}(t)$ mesurée à ses bornes permet de connaître l'accélération verticale atteinte par le paraboloïde. Celle-ci est également sinusoïdale, et nous mesurons son amplitude $U_\mathrm{acc,amp}$. Nous divisons ensuite cette amplitude par f^2 pour quantifier l'amplitude du déplacement vertical du paraboloïde. Nous définissons ainsi :

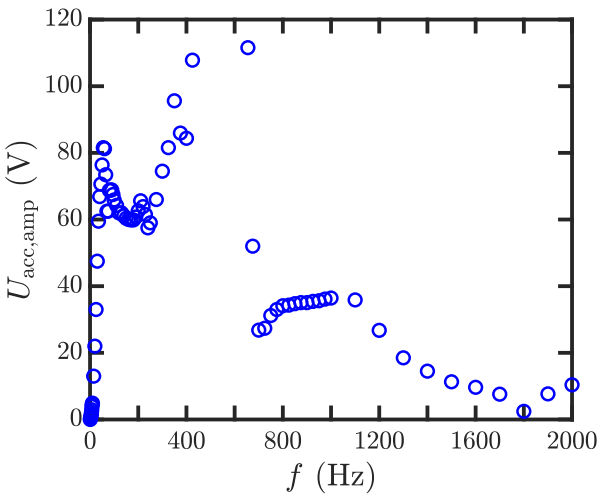
$$A_\mathrm{pos}(f) = \frac{U_\mathrm{acc,amp}(f)}{f^2}. \tag{VII.18}$$

Nous réalisons cette mesure pour une gamme de fréquences allant de 1 Hz à 2 kHz. La valeur maximale de A_pos est alors obtenue pour $f = 2$ Hz. Comme la valeur absolue de l'amplitude $A_\mathrm{pos}(f)$ n'a pas de sens en soi (elle dépend du facteur de conversion de l'accéléromètre), nous renormalisons $A_\mathrm{pos}(f)$ par sa valeur maximale $A_\mathrm{pos}(f = 2\ \mathrm{Hz})$. Nous obtenons ainsi l'amplitude normalisée A_norm (sans unité) du déplacement vertical en fonction de la fréquence f de l'excitation sinusoïdale aux bornes du pot vibrant :

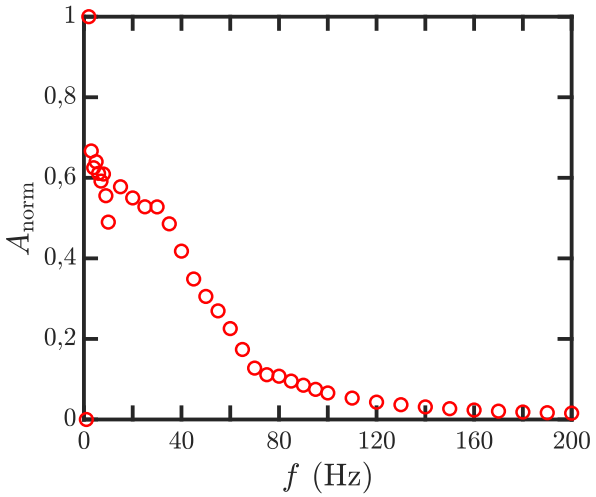
$$A_\mathrm{norm}(f) = \frac{A_\mathrm{pos}(f)}{A_\mathrm{pos}(f = 2\ \mathrm{Hz})}. \tag{VII.19}$$

Les évolutions de $U_\mathrm{acc,amp}$ et A_norm en fonction de f sont représentées sur la Fig. VII.6.

Comme nous le voyons, la fonction de réponse mécanique du pot vibrant surmonté d'un de nos paraboloïdes est typiquement de la forme passe-bas. La fréquence typique de coupure n'est néanmoins pas la même concernant l'accélération (elle se situe alors autour de 2 kHz) et



(a) Tracé de l'amplitude brute $U_{\mathrm{acc,amp}}$ de la tension de sortie de l'accéléromètre, en fonction de la fréquence d'excitation f.



(b) Tracé de l'amplitude normalisée A_{norm} du déplacement, déduite de celle de l'accélération, en fonction de f.

FIGURE VII.6 – Amplitudes du déplacement vertical et de l'accélération associée, mesurée à l'accéléromètre, en fonction de la fréquence f de la tension sinusoïdale appliquée aux bornes du pot vibrant.

concernant le déplacement (pour lequel elle est de l'ordre de 100 Hz). Cela implique que lorsque nous appliquons un *pulse* aux bornes du pot vibrant, le mouvement vertical qu'il applique à son tour au paraboloïde est en réalité moins brusque que le *pulse*. En particulier, le signal de sortie de l'accéléromètre montre que pour un *pulse* donné, il existe une accélération maximale et une décélération [2] maximale finies, toutes deux dépendant de la largeur Δt du pulse et de sa hauteur V_0. L'accélération maximale correspond à une tension $A_{\mathrm{acc,m}}$ en sortie de l'accéléromètre. La dépendance de $A_{\mathrm{acc,m}}$ en fonction de V_0 et Δt est tracée sur la Fig. VII.7.

Nous constatons que l'accélération positive maximale, quantifiée par la tension $A_{\mathrm{acc,m}}$, augmente linéairement avec la hauteur V_0 du *pulse*, cette dépendance ne semblant que faiblement sensible à la largeur Δt du *pulse*. Cette mesure n'est pas optimale, puisque c'est la décélération maximale qui compte vraiment, et dont la valeur absolue doit excéder g pour que les grains décollent. La largeur du pic de décélération a également une grande influence sur le temps durant lequel les grains sont décollés du socle, et donc aussi sur les vitesses auxquelles ils s'entrechoquent en retrouvant le contact avec le socle. Il nous reste donc à quantifier l'effet de la dynamique du socle sur notre milieu granulaire fait de billes de verre. Comme on peut le voir sur la photographie de la Fig. VII.5a par exemple, celui-ci a, vu de dessus, la forme d'un disque. Ce disque possède un certain rayon r_0 lorsque le milieu est au repos. En filmant le milieu durant l'application d'un *pulse*, nous pouvons mesurer le rayon maximal r_1 qu'il atteint sous l'effet de ce *pulse*. Nous définissons alors simplement l'expansion radiale du milieu e_{rad} par

$$e_{\mathrm{rad}} = r_1 - r_0. \tag{VII.20}$$

L'évolution de $\sqrt{e_{\mathrm{rad}}}$ en fonction de $A_{\mathrm{acc,m}}$, qui est donc l'accélération verticale maximale positive subie par le milieu, est représentée sur la Fig. VII.8. Nous insistons sur le fait que $A_{\mathrm{acc,m}}$

2. Nous nommons ainsi les accélérations négatives selon la verticale ascendante.

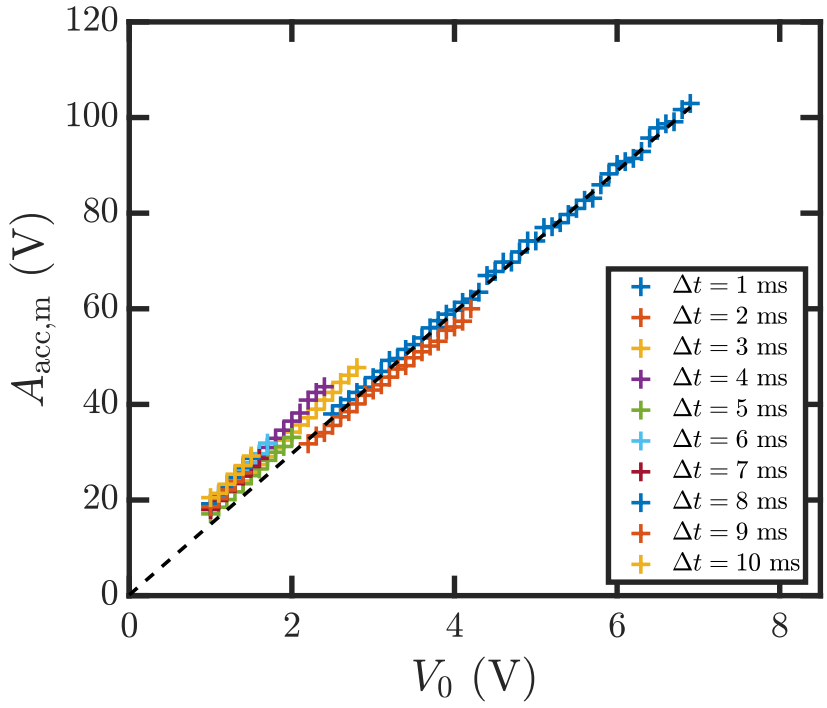


FIGURE VII.7 – Tracé de $A_{\mathrm{acc,m}}$ en fonction de V_0, pour différentes valeurs de Δt. La ligne tiretée noire est un simple guide pour l'œil.

n'est *a priori* pas la meilleure quantité pour quantifier l'expansion, puisque ce sont plutôt les caractéristiques du pic de décélération qui déterminent l'expansion atteinte par le milieu suite à l'application du *pulse*.

Nous remarquons alors que $\sqrt{e_{\mathrm{rad}}}$ semble présenter une dépendance affine en fonction de $A_{\mathrm{acc,m}}$, bien que nous n'ayons pas de motivation théorique pour une telle dépendance. De plus, cette dépendance ne vaut que pour une largeur de *pulse* Δt fixée, les coefficients de cette loi affine changeant visiblement avec Δt. Globalement, plus la largeur du pulse est importante, moins l'accélération positive nécessaire pour atteindre une expansion donnée est élevée. Sans expliquer ces dépendances affines, nous pouvons par contre comprendre aisément le fait qu'elles soient affines et non pas linéaires. Autrement dit, nous pouvons nous attendre à ne pas avoir $e_{\mathrm{rad}} = 0$ pour $A_{\mathrm{acc,m}} = 0$, mais pour une valeur $A_{\mathrm{acc,m}} > 0$. En effet, il faut que la décélération atteigne au moins celle de la pesanteur terrestre $g = 9,81$ m.s^{-2} pour que les billes soient soulevées du socle paraboloïdal, et donc qu'elles se choquent en retombant. Elles peuvent ainsi être poussées loin du centre, ce qui mène à l'observation d'une expansion radiale non nulle. Or une telle décélération du socle ne peut être atteinte que si son accélération positive a d'abord atteint une certaine valeur, vu que le socle doit revenir à la même altitude après le *pulse*. D'ailleurs, nous remarquons que tous les ajustements affines obtenus n'intersectent pas l'axe des abscisses au même point : cela est dû au fait que l'accélération positive maximale n'est pas celle qu'il convient de comparer à g. Nous en concluons que la relation liant l'accélération positive maximale à la largeur et à la hauteur du pic de décélération maximale dépend de Δt. Cela est par ailleurs cohérent avec le fait que nous utilisons des largeurs de pulse $\Delta t \sim 1 - 10$ ms, correspondant donc à des fréquences typiques $f \sim 100 - 1000$ Hz. Au vu de la réponse fréquentielle du pot vibrant, nos largeurs de *pulses* sont donc inférieures au temps typique de

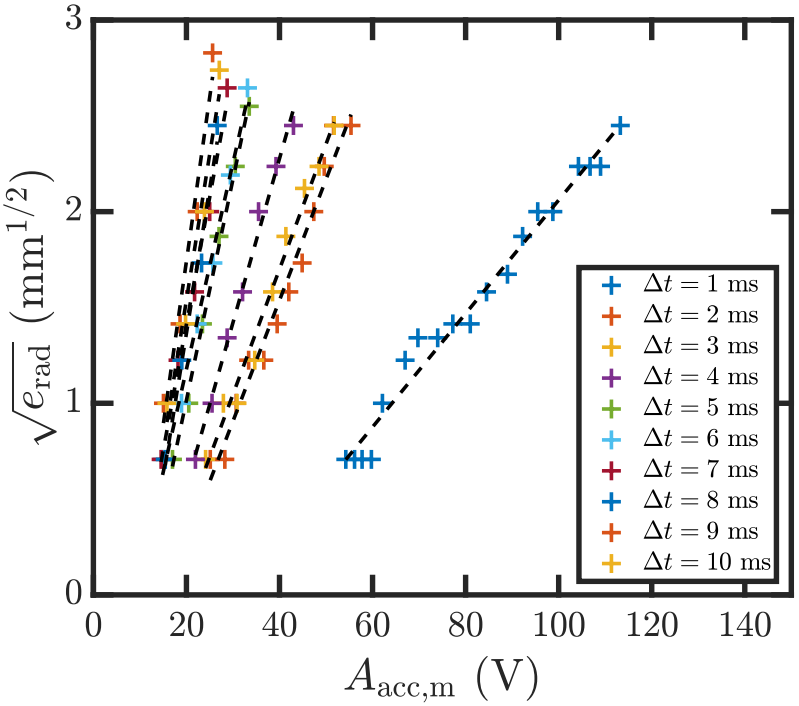


FIGURE VII.8 – Tracé de $\sqrt{e_{\mathrm{rad}}}$ en fonction de $A_{\mathrm{acc,m}}$ pour différentes valeurs de Δt. Les lignes tiretées noires sont des ajustements affines, pour chaque valeur de Δt.

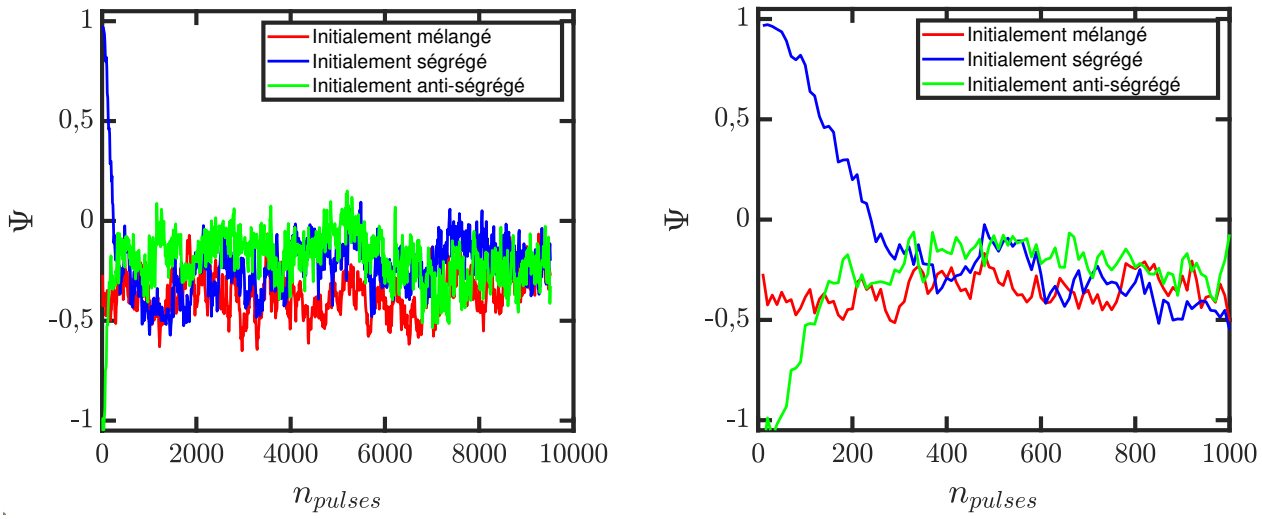
réponse du pot vibrant : celui-ci n'a donc pas encore fini de répondre au front montant du *pulse* lorsque survient le front descendant. C'est pourquoi la relation entre accélération maximale et décélération maximale dépend de Δt.

Finalement, à partir de la Fig. VII.6, et plus généralement de nos analyses de calibrage, nous retenons que nous pouvons contrôler l'expansion radiale maximale du milieu, donc l'écartement des grains et l'ampleur des réarrangements, à travers les paramètres V_0 et Δt caractérisant les *pulses* appliqués aux bornes du pot vibrant. Rappelons par ailleurs que nous disposons également de plusieurs paraboloïdes, pour faire varier la courbure locale et donc l'expansion radiale à *pulse* donné.

II-2. Tentatives d'observation de la ségrégation

Nous avons mené des expériences visant à étudier la ségrégation radiale pour différentes valeurs des paramètres V_0 et Δt, et en utilisant des socles paraboloïdaux obtenus pour différentes vitesses de rotation ω. Malheureusement, aucune n'a permis à ce stade de mesurer une réelle augmentation de Ψ, et pour certains paramètres le degré de ségrégation a même plutôt tendance à diminuer. Un exemple d'évolution typique de Ψ, pour trois états initiaux différents du milieu (mélangé, ségrégé et anti-ségrégé) est présenté sur la Fig. VII.9. Les données sont obtenues pour $\Delta t = 4$ ms, $V_0 = 4,5$ V, et un paraboloïde fabriqué à $\omega = 33$ tr.min^{-1} et contenant un total de 200 billes (40 de diamètre 8 mm, 80 de diamètre 5 mm et 80 de diamètre 4 mm). Des photographies des états initiaux et après 1000 *pulses*, sont par ailleurs présentées sur la Fig. VII.10, pour le cas de l'état initial ségrégé.

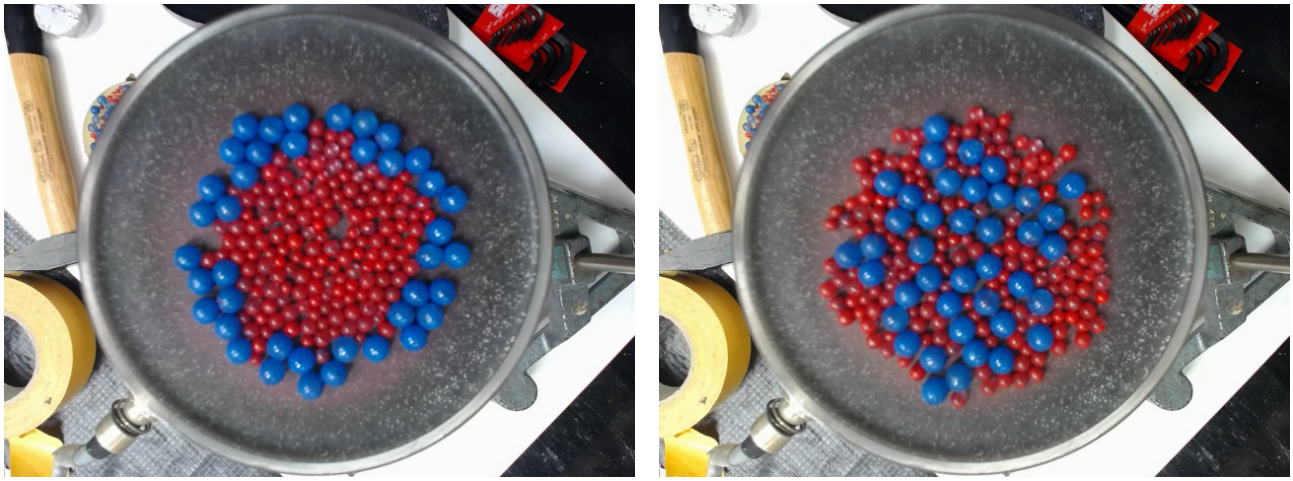
Nous constatons que quel que soit l'état initial, le degré de ségrégation évolue assez rapide-



(a) Évolution de Ψ en fonction de n_{pulses}, sur 9500 *pulses*.

(b) Agrandissement sur les 1000 premiers *pulses*.

FIGURE VII.9 – Tracé de Ψ en fonction du nombre de *pulses* n_{pulses} appliqués, pour trois états initiaux différents. Les paramètres expérimentaux sont $\Delta t = 4$ ms, $V_0 = 4,5$ V. Le paraboloïde utilisé a été fabriqué à $\omega = 33$ tr.min^{-1} et contient un total de 200 billes (40 de diamètre 8 mm, 80 de diamètre 5 mm et 80 de diamètre 4 mm).



(a) Photographie dans l'état initial, $\Psi \simeq 1$.

(b) Photographie après 1000 *pulses*, $\Psi \simeq -0,5$

FIGURE VII.10 – Illustration de l'évolution du milieu pour un état initial ségrégé.

ment, typiquement après 300 *pulses*, vers des valeurs comprises entre $-0,5$ et 0, qui caractérisent donc un état plutôt anti-ségrégé (voir la Fig. VII.10b pour illustration). Ces évolutions sont observées pour une large majorité de paramètres expérimentaux explorés. Néanmoins, pour les perturbations les plus faibles (en termes de largeur et de hauteur des *pulses*), la chute du degré de ségrégation, à partir d'un état initial ségrégé ou mélangé, est moins marquée.

Nous attribuons ces difficultés à notre mode de conversion de l'accélération verticale en une accélération horizontale. En effet, celui-ci met en jeu les chocs entre billes lorsque celles-ci

retombent après avoir été décollées ensemble de la surface paraboloïdale. Or deux billes en contact exercent l'une sur l'autre des forces exactement opposées. Si une bille de 8 mm de diamètre est en contact avec une petite bille (4 ou 5 mm de diamètre), elle subira donc une force de contact de même intensité. Mais comme la masse d'une bille de 8 mm de diamètre vaut $(8/5)^3 = 5$ fois celle d'une bille de 5 mm de diamètre (ou $(8/4)^3 = 8$ fois celle d'une bille de 4 mm de diamètre), l'accélération horizontale de la grosse bille sera d'autant moins forte, comparée à celle de la petite bille. Comme le milieu est par ailleurs globalement rassemblé sous l'effet du champ central imposé, cette différence d'accélération horizontale peut contribuer à expulser les petites billes plus loin du centre du paraboloïde. De plus, comme nous utilisons des grains sphériques, la force normale de contact entre une grosse bille et une petite bille n'est pas dans le plan tangent local au socle, puisque le centre de masse d'une grosse bille est en moyenne deux fois plus loin du socle que le centre de masse d'une petite bille. Cela peut également mener à un effet d'expulsion des petites billes situées entre deux grosses billes. Dans nos expériences, et pour les perturbations imposées, il semble que ces effets malheureux prennent le pas sur la possible ségrégation par réarrangements successifs, et mènent donc le milieu vers un état plutôt anti-ségréré.

Pour régler ces différents problèmes, il pourrait être intéressant de directement agiter le milieu dans le plan horizontal, par exemple en appliquant un mouvement de « swirling » au paraboloïde, c'est-à-dire en faisant décrire un cercle horizontal à son centre. C'est par exemple ce qui est fait dans les expériences de ségrégation horizontale présentées dans la Réf. [7]. De plus, nous pourrions également remplacer les billes par des disques, afin d'éviter les forces de contact non horizontales entre petits et gros grains. Notre milieu étant une monocouche de grains, il serait par ailleurs assez naturel d'utiliser des disques, tout comme dans les simulations du Chap. III par exemple. Il faudrait alors veiller à ce que la taille des disques soit petite devant le rayon de courbure local du paraboloïde, afin d'éviter d'avoir des disques dont seuls les bords seraient en contact avec la surface paraboloïdale. Il conviendrait également de réduire le coefficient de frottement entre la surface et les disques, afin d'éviter que ceux-ci puissent se retrouver « coincés » dans une position périphérique hors de l'agrégat.

III- Conclusion

Nous retenons quelques points importants de cette première exploration expérimentale de la ségrégation en champ central.

- Le champ central peut être fidèlement reproduit en faisant évoluer les grains sur un paraboloïde.
- L'application de *pulses* verticaux permet de contrôler l'ampleur des réarrangements. Néanmoins, et en partie en raison de l'utilisation de grains sphériques, ce protocole s'accompagne d'effets menant généralement à une anti-ségrégation du milieu.
- Une reprise de l'expérience, toujours sur des surfaces paraboloïdales, mais avec cette fois-ci des disques et une sollicitation mécanique horizontale, constituerait un prolongement intéressant de nos investigations.

Conclusion et perspectives

On crée pour l'éternité, même si elle se charge de démentir.

François Mitterrand.

Cette étude de la ségrégation granulaire dans les astéroïdes lâchement agglomérés a permis de dégager plusieurs résultats intéressants, essentiellement à l'aide de simulations numériques. Tout d'abord, le fait que la dynamique de la ségrégation radiale se fasse conformément à une cinétique d'ordre 1 apparaît comme extrêmement robuste, et touche toutes nos simulations d'agrégats bidimensionnels. Cela nous a été très utile puisque la qualité et la rapidité du phénomène peuvent alors être aisément quantifiées, ce qui permet des études systématiques de l'influence de certains paramètres. Nous avons notamment établi que la ségrégation radiale se produisait par réarrangements successifs, et ce sous perturbations isotropes comme sous l'application de collisions. Nous avons également montré le rôle important joué par l'intensité des perturbations et par le coefficient de frottement entre les grains. De plus, nous avons exploré et analysé le rôle joué par la rotation des grains.

Les simulations effectuées dans ce cadre nous ont également permis de mettre en évidence un autre phénomène très intéressant : la ségrégation angulaire, consistant en une répartition inhomogène des gros grains à la surface de l'astéroïde simulé. Cette ségrégation est particulièrement importante à nos yeux, étant donné l'aspect de la surface d'astéroïdes comme Itokawa, Bennu et Ryugu. Elle apparaît comme une instabilité secondaire, se produisant postérieurement à la ségrégation radiale, c'est-à-dire seulement une fois que celle-ci a atteint un certain niveau. Les mécanismes à son origine restent à ce stade assez mal compris. Néanmoins, la réalisation de simulations dans une géométrie modifiée, avec un champ gravitationnel parallèle, a permis de mettre en évidence la sélection d'une longueur d'onde par ce phénomène. Cela confirme que nous avons bien affaire à une instabilité, et renvoie à des résultats connus dans d'autres géométries, comme celle du tambour tournant. L'étude de la ségrégation angulaire ouvre également de nouvelles perspectives : le phénomène semble très robuste, et la longueur d'onde sélectionnée ne paraît que peu dépendre du coefficient de frottement solide, malgré le rôle majeur joué par celui-ci dans la ségrégation radiale. C'est pourquoi une modélisation complète de ce phénomène, qui permettrait une prédiction théorique de la longueur d'onde observée, nous paraît être une des principales perspectives à la suite de ce travail.

Pour autant, la ségrégation radiale, sujet central de notre étude, ouvre également de très nombreuses perspectives, notamment puisque nous n'avons exploré jusqu'ici que deux types de

perturbations. En particulier, les perturbations isotropes sont surtout pertinentes pour servir de première base à l'observation de la ségrégation en champ gravitationnel central, en injectant de l'énergie mécanique au sein de l'agrégat de façon assez simple. Les perturbations par collisions, que nous avons également explorées, sont plus réalistes du point de vue des perturbations mécaniques réellement endurées par un astéroïde. Mais il reste également à étudier l'effet d'une rotation propre de l'agrégat ou encore des forces de marée, avec les efforts internes qui leur sont associés. De telles conditions sont relativement aisées à mettre en œuvre numériquement, et pourraient s'avérer fort instructives. Par ailleurs, nous n'avons que peu exploré les différents paramètres à notre disposition dans le cas des simulations en trois dimensions. En effet, nous avons préféré nous concentrer d'abord sur les différences de comportement dues au changement des propriétés inertielles des grains lorsque l'on passe du cas bidimensionnel au cas tridimensionnel. Cela n'exclut pas d'étendre ensuite nos travaux à l'exploration de différentes intensités de perturbations, ou encore au contrôle des degrés de liberté en rotation. En effet, le rôle important joué par ces éléments dans le cas bidimensionnel est bien établi, sans compter que la rotation compte pour la moitié des degrés de liberté des grains en trois dimensions. De plus, le rôle de la géométrie du champ gravitationnel n'a pas encore été détaillé en trois dimensions. Ainsi, à la manière des études menées en deux dimensions, nous pourrions tout à fait simuler un agrégat tridimensionnel soumis à un champ gravitationnel parallèle mais de norme variable. Cela pourrait en particulier apporter de nouveaux éclairages au sujet de la longueur d'onde de ségrégation horizontale. Au total, les prolongements possibles et souhaitables ne manquent pas concernant l'aspect numérique.

Enfin, notre approche expérimentale de la ségrégation en champ central reste très exploratoire. De nombreuses améliorations du dispositif peuvent être envisagées. Nous retenons notamment l'idée de modifier le mode d'agitation mécanique du milieu, pour passer à une perturbation directement horizontale. De même, l'utilisation de disques et non de sphères, se déplaçant sur les surfaces paraboloïdales que nous avons conçues, pourrait faciliter l'émergence d'une ségrégation radiale. De façon générale, ces modifications permettraient de se rapprocher physiquement du cas d'un agrégat bidimensionnel soumis à un champ gravitationnel central, ressemblant donc fortement à nos simulations. La comparaison entre expériences et simulations en serait par ailleurs facilitée, et ne manquerait certainement pas d'ouvrir de nouvelles perspectives enthousiasmantes.

Bibliographie

[1] Abe, S., Mukai, T., Hirata, N., Barnouin-Jha, O. S., Cheng, A. F., Demura, H., Gaskell, R. W., Hashimoto, T., Hiraoka, K., Honda, T., et al. Mass and local topography measurements of Itokawa by Hayabusa. *Science 312*, 5778 (2006), 1344–1347.

[2] Abreu, C. R., Tavares, F. W., and Castier, M. Influence of particle shape on the packing and on the segregation of spherocylinders via Monte Carlo simulations. *Powder Technology 134*, 1-2 (2003), 167–180.

[3] Ahmad, K., and Smalley, I. Observation of particle segregation in vibrated granular systems. *Powder Technology 8*, 1-2 (1973), 69–75.

[4] Allen, M. P., and Tildesley, D. J. *Computer simulation of liquids*. Oxford University Press, 2017.

[5] Andreotti, B., Forterre, Y., and Pouliquen, O. *Les milieux granulaires - Entre fluide et solide*. EDP Sciences, 2012.

[6] Aranson, I. S., and Tsimring, L. S. Patterns and collective behavior in granular media : Theoretical concepts. *Reviews of modern physics 78*, 2 (2006), 641.

[7] Aumaître, S., Kruelle, C. A., and Rehberg, I. Segregation in granular matter under horizontal swirling excitation. *Physical Review E 64*, 4 (2001), 041305.

[8] Ballouz, R.-L., Richardson, D. C., and Morishima, R. Numerical Simulations of Saturn's B Ring : Granular Friction as a Mediator between Self-gravity Wakes and Viscous Overstability. *The Astronomical Journal 153*, 4 (2017), 146.

[9] Barbosa-Canovas, G., Malave-Lopez, J., and Peleg, M. Segregation in food powders. *Biotechnology progress 1*, 2 (1985), 140–146.

[10] Baumberger, T. Contact dynamics and friction at a solid-solid interface : material versus statistical aspects. *Solid state communications 102*, 2-3 (1997), 175–185.

[11] Binzel, R. P., Farinella, P., Zappala, V., and Cellino, A. Asteroid rotation rates : distributions and statistics. *Asteroids II* (1989), 416–441.

[12] Binzel, R. P., Xu, S., Bus, S. J., and Bowell, E. Origins for the near-Earth asteroids. *Science 257*, 5071 (1992), 779–782.

[13] Bockelée-Morvan, D., Biver, N., Moreno, R., Colom, P., Crovisier, J., Gérard, É., Henry, F., Lis, D. C., Matthews, H., Weaver, H., et al. Outgassing behavior and composition of comet C/1999 S4 (LINEAR) during its disruption. *Science 292*, 5520 (2001), 1339–1343.

[14] Borderies, N., Goldreich, P., and Tremaine, S. A granular flow model for dense planetary rings. *Icarus 63*, 3 (1985), 406–420.

[15] Bottke, W., Vokrouhlickỳ, D., Rubincam, D. P., and Broz, M. The effect of Yarkovsky thermal forces on the dynamical evolution of asteroids and meteoroids. *Asteroids III 395* (2002).

[16] Bottke Jr, W. F., Morbidelli, A., Jedicke, R., Petit, J.-M., Levison, H. F., Michel, P., and Metcalfe, T. S. Debiased orbital and absolute magnitude distribution of the near-Earth objects. *Icarus 156*, 2 (2002), 399–433.

[17] Bottke Jr, W. F., Vokrouhlickỳ, D., Rubincam, D. P., and Nesvornỳ, D. The Yarkovsky and YORP effects : Implications for asteroid dynamics. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci. 34* (2006), 157–191.

[18] Bowden, F. P., Bowden, F. P., and Tabor, D. *The friction and lubrication of solids*, vol. 1. Oxford University Press, 2001.

[19] Brace, W., and Byerlee, J. Stick-slip as a mechanism for earthquakes. *Science 153*, 3739 (1966), 990–992.

[20] Breu, A. P., Ensner, H.-M., Kruelle, C. A., and Rehberg, I. Reversing the Brazil-nut effect : competition between percolation and condensation. *Physical review letters 90*, 1 (2003), 014302.

[21] Brilliantov, N. V., Spahn, F., Hertzsch, J.-M., and Pöschel, T. Model for collisions in granular gases. *Physical review E 53*, 5 (1996), 5382.

[22] Brito, R., Enríquez, H., Godoy, S., and Soto, R. Segregation induced by inelasticity in a vibrofluidized granular mixture. *Physical Review E 77*, 6 (2008), 061301.

[23] Brož, M. Yarkovsky effect and the dynamics of the Solar System. *Ph. D. Thesis* (2006).

[24] Burbine, T. H., and Binzel, R. P. Small main-belt asteroid spectroscopic survey in the near-infrared. *Icarus 159*, 2 (2002), 468–499.

[25] Bus, S. J., and Binzel, R. P. Phase II of the small main-belt asteroid spectroscopic survey : A feature-based taxonomy. *Icarus 158*, 1 (2002), 146–177.

[26] Caffee, M., Goswami, J., Hohenberg, C., Marti, K., and Reedy, R. Irradiation records in meteorites. *Meteorites and the early solar system* (1988), 205–245.

[27] Calvetti, F., Di Prisco, C., and Vecchiotti, M. Experimental and numerical study of rock-fall impacts on granular soils. *Rivista Italiana di Geotecnica 4* (2005), 95–109.

[28] Campa, A., Dauxois, T., Fanelli, D., and Ruffo, S. *Physics of long-range interacting systems*. Oxford University Press, 2014.

[29] Cantelaube, F., and Bideau, D. Radial segregation in a 2d drum : an experimental analysis. *EPL (Europhysics Letters) 30*, 3 (1995), 133.

[30] Cellino, A., Zappalà, V., and Farinella, P. The size distribution of main-belt asteroids from IRAS data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 253*, 4 (1991), 561–574.

[31] Chaikin, P. M., Lubensky, T. C., and Witten, T. A. *Principles of condensed matter physics*, vol. 10. Cambridge University Press, 1995.

[32] Charles, C. R., Khan, Z. S., and Morris, S. W. Pattern scaling in axial segregation. *Granular Matter 8*, 1 (2006), 1–3.

[33] Chastaing, J.-Y., Pillet, G., Taberlet, N., and Géminard, J.-C. Transversal stability of the bouncing ball on a concave surface. *Physical Review E 91*, 5 (2015), 052918.

[34] Chesley, S. R., Ostro, S. J., Vokrouhlickỳ, D., Čapek, D., Giorgini, J. D., Nolan, M. C., Margot, J.-L., Hine, A. A., Benner, L. A., and Chamberlin, A. B. Direct detection of the Yarkovsky effect by radar ranging to asteroid 6489 Golevka. *Science 302*, 5651 (2003), 1739–1742.

[35] Chicharro, R., PeraltaFabi, R., and Velasco, R. Segregation in dry granular systems.

[36] Cizeau, P., Makse, H. A., and Stanley, H. E. Mechanisms of granular spontaneous stratification and segregation in two-dimensional silos. *Physical Review E 59*, 4 (1999), 4408.

[37] Connolly, H. C., Lauretta, D. S., Walsh, K. J., Tachibana, S., and Bottke, W. F. Towards understanding the dynamical evolution of asteroid 25143 Itokawa : constraints from sample analysis. *Earth, Planets and Space 67*, 1 (2015), 1–6.

[38] Coste, C., Falcon, E., and Fauve, S. Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact. *Physical review E 56*, 5 (1997), 6104.

[39] Cumberland, D., and Crawford, R. J. The packing of particles.

[40] Cundall, P., and Strack, O. Modeling of microscopic mechanisms in granular material. In *Studies in Applied mechanics*, vol. 7. Elsevier, 1983, pp. 137–149.

[41] Cundall, P. A., and Strack, O. D. A discrete numerical model for granular assemblies. *geotechnique 29*, 1 (1979), 47–65.

[42] De Zotti, V., Rapina, K., Cortet, P.-P., Vanel, L., and Santucci, S. Bending to kinetic energy transfer in adhesive peel front microinstability. *Physical review letters 122*, 6 (2019), 068005.

[43] Dell'Oro, A., Harris, A. W., Mottola, S., Mueller, M., et al. Thermal inertia of near-Earth asteroids and implications for the magnitude of the Yarkovsky effect. *Icarus 190*, 1 (2007), 236–249.

[44] DeMeo, F., and Carry, B. The taxonomic distribution of asteroids from multi-filter all-sky photometric surveys. *Icarus 226*, 1 (2013), 723–741.

[45] DeMeo, F. E., Binzel, R. P., Slivan, S. M., and Bus, S. J. An extension of the Bus asteroid taxonomy into the near-infrared. *Icarus 202*, 1 (2009), 160–180.

[46] Dieterich, J. H., and Kilgore, B. D. Direct observation of frictional contacts : New insights for state-dependent properties. *Pure and Applied Geophysics 143*, 1 (1994), 283–302.

[47] Ding, Y., Gravish, N., and Goldman, D. I. Drag induced lift in granular media. *Physical review letters 106*, 2 (2011), 028001.

[48] Divoux, T., Gayvallet, H., and Géminard, J.-C. Creep motion of a granular pile induced by thermal cycling. *Physical review letters 101*, 14 (2008), 148303.

[49] Dombard, A. J., Barnouin, O. S., Prockter, L. M., and Thomas, P. C. Boulders and ponds on the Asteroid 433 Eros. *Icarus 210*, 2 (2010), 713–721.

[50] du Trémolet de Lacheisserie, É. *Magnétisme*, vol. 2. EDP Sciences, collection Grenoble Sciences, 1999.

[51] Duran, J. Sables, poudres et grains.

[52] Duran, J., Mazozi, T., Clément, E., and Rajchenbach, J. Size segregation in a two-dimensional sandpile : Convection and arching effects. *Physical Review E 50*, 6 (1994), 5138.

[53] Duran, J., Rajchenbach, J., and Clément, E. Arching effect model for particle size segregation. *Physical review letters 70*, 16 (1993), 2431.

[54] Ďurech, J., Vokrouhlickỳ, D., Kaasalainen, M., Higgins, D., Krugly, Y. N., Gaftonyuk, N., Shevchenko, V., Chiorny, V., Hamanowa, H., Reddy, V., et al. Detection of the YORP effect in asteroid (1620) Geographos. *Astronomy & Astrophysics 489*, 2 (2008), L25–L28.

[55] Durech, J., Vokrouhlicky, D., Polishook, D., Krugly, Y., Gaftonyuk, N., Stephens, R., Warner, B., Kaasalainen, M., Gross, J., Cooney, W., et al. Detection of the YORP Effect in Asteroid (3103) Eger. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts# 41* (2009), pp. 56–04.

[56] Eisele, T. C. Concentration of useful minerals from asteroids. *Journal of the British Interplanetary Society 54*, 7/8 (2001), 277–288.

[57] Encrenaz, T., Barucci, M.-A., and Bibring, J.-P. *Le système solaire*. EDP Sciences, 2012.

[58] Farnocchia, D., Chesley, S., Vokrouhlickỳ, D., Milani, A., Spoto, F., and Bottke, W. Near Earth asteroids with measurable Yarkovsky effect. *Icarus 224*, 1 (2013), 1–13.

[59] Félix, G., and Thomas, N. Evidence of two effects in the size segregation process in dry granular media. *Physical Review E 70*, 5 (2004), 051307.

[60] Félix, G., and Thomas, N. Relation between dry granular flow regimes and morphology of deposits : formation of levées in pyroclastic deposits. *Earth and Planetary Science Letters 221*, 1-4 (2004), 197–213.

[61] Foerster, S. F., Louge, M. Y., Chang, H., and Allia, K. Measurements of the collision properties of small spheres. *Physics of Fluids 6*, 3 (1994), 1108–1115.

[62] Forward, K. M., Lacks, D. J., and Sankaran, R. M. Charge segregation depends on particle size in triboelectrically charged granular materials. *Physical review letters 102*, 2 (2009), 028001.

[63] Frette, V., and Stavans, J. Avalanche-mediated transport in a rotated granular mixture. *Physical Review E 56*, 6 (1997), 6981.

[64] Fujiwara, A., Kawaguchi, J., Yeomans, D., Abe, M., Mukai, T., Okada, T., Saito, J., Yano, H., Yoshikawa, M., Scheeres, D., et al. The rubble-pile asteroid Itokawa as observed by Hayabusa. *Science 312*, 5778 (2006), 1330–1334.

[65] Gaffey, M. J., Burbine, T. H., and Binzel, R. P. Asteroid spectroscopy : Progress and perspectives. *Meteoritics 28*, 2 (1993), 161–187.

[66] Gaia, C., Brown, A., Vallenari, A., Prusti, T., De Bruijne, J., Babusiaux, C., Juhász, Á., Marschalkó, G., Marton, G., Molnár, L., et al. Gaia Data

Release 2-Summary of the contents and survey properties. *Astronomy & Astrophysics 616*, 1 (2018).

[67] Galvez, A., Carnelli, I., Michel, P., Cheng, A., Reed, C., Ulamec, S., Biele, J., Zbrll, P., and Landis, R. AIDA : The asteroid impact and deflection assessment mission. In *European Planetary Science Congress* (2013), vol. 8.

[68] Giorgilli, A., and Skokos, C. On the stability of the Trojan asteroids. *Astronomy and Astrophysics 317* (1997), 254–261.

[69] Gladman, B. J., Migliorini, F., Morbidelli, A., Zappala, V., Michel, P., Cellino, A., Froeschle, C., Levison, H. F., Bailey, M., and Duncan, M. Dynamical lifetimes of objects injected into asteroid belt resonances. *Science 277*, 5323 (1997), 197–201.

[70] Golick, L. A., and Daniels, K. E. Mixing and segregation rates in sheared granular materials. *Physical review E 80*, 4 (2009), 042301.

[71] Goujon, C. *Écoulements granulaires bidisperses sur plans inclinés rugueux*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I, 2004.

[72] Guillard, F., Forterre, Y., and Pouliquen, O. Lift forces in granular media. *Physics of Fluids 26*, 4 (2014), 043301.

[73] Güttler, C., von Borstel, I., Schräpler, R., and Blum, J. Granular convection and the Brazil nut effect in reduced gravity. *Physical Review E 87*, 4 (2013), 044201.

[74] Guyon, E., Hulin, J.-P., and Petit, L. *Hydrodynamique physique*. CNRS Éditions, EDP Sciences, 1991.

[75] Guyon, É., and Troadec, J.-P. *Du sac de billes au tas de sable*. Odile Jacob, 1994.

[76] Haff, P. K., and Werner, B. T. Computer simulation of the mechanical sorting of grains. *Powder Technology 48*, 3 (1986), 239–245.

[77] Hamaker, H. C. The London—Van der Waals attraction between spherical particles. *physica 4*, 10 (1937), 1058–1072.

[78] Harris, A. W. The rotation rates of very small asteroids : Evidence for 'rubble pile' structure. In *Lunar and Planetary Science Conference* (1996), vol. 27.

[79] Hentschel, H. G. E., Procaccia, I., and Roy, S. Scaling theory of giant frictional slips in decompressed granular media. *EPL (Europhysics Letters) 125*, 6 (2019), 68004.

[80] Herrmann, H., and Luding, S. Modeling granular media on the computer. *Continuum Mechanics and Thermodynamics 10*, 4 (1998), 189–231.

[81] Hertz, H. Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik 92*, 156-171 (1882), 22.

[82] Hill, K. M., Gioia, G., Amaravadi, D., and Winter, C. Moon patterns, sun patterns, and wave breaking in rotating granular mixtures. *Complexity 10*, 4 (2005), 79–86.

[83] Hong, D. C., Quinn, P. V., and Luding, S. Reverse Brazil nut problem : competition between percolation and condensation. *Physical Review Letters 86*, 15 (2001), 3423.

[84] Hoskin, M. Bode's Law and the discovery of Ceres. In *Physics of solar and stellar coronae : GS Vaiana Memorial Symposium* (1993), Springer, pp. 35–46.

[85] Hsieh, H. H., and Jewitt, D. A population of comets in the main asteroid belt. *Science 312*, 5773 (2006), 561–563.

[86] Israelachvili, J. N. *Intermolecular and surface forces*. Academic press, 2011.

[87] Jaumann, R., Schmitz, N., Ho, T.-M., Schröder, S., Otto, K. A., Stephan, K., Elgner, S., Krohn, K., Preusker, F., Scholten, F., et al. Images from the surface of asteroid Ryugu show rocks similar to carbonaceous chondrite meteorites. *Science 365*, 6455 (2019), 817–820.

[88] Jean, M., and Moreau, J. J. Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections. In *1st Contact Mechanics International Symposium* (1992), pp. 31–48.

[89] Johnson, K. L. One hundred years of Hertz contact. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 196*, 1 (1982), 363–378.

[90] Johnson, K. L. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1987.

[91] Jolidon. *Physique expérimentale*. EDP Sciences, collection Enseignement Sup Physique, 2021.

[92] Jullien, R., Meakin, P., and Pavlovitch, A. Three-dimensional model for particle-size segregation by shaking. *Physical review letters 69*, 4 (1992), 640.

[93] Kaasalainen, M., Ďurech, J., Warner, B. D., Krugly, Y. N., and Gaftonyuk, N. M. Acceleration of the rotation of asteroid 1862 Apollo by radiation torques. *Nature 446*, 7134 (2007), 420–422.

[94] Knight, J. B., Jaeger, H. M., and Nagel, S. R. Vibration-induced size separation in granular media : The convection connection. *Physical review letters 70*, 24 (1993), 3728.

[95] Kondic, L., Hartley, R., Tennakoon, S., Painter, B., and Behringer, R. Segregation by friction. *EPL (Europhysics Letters) 61*, 6 (2003), 742.

[96] Kudrolli, A. Size separation in vibrated granular matter. *Reports on progress in physics 67*, 3 (2004), 209.

[97] Kuwabara, G., and Kono, K. Restitution coefficient in a collision between two spheres. *Japanese journal of applied physics 26*, 8R (1987), 1230.

[98] Landau, L., and Lifshitz, E. *Théorie de l'élasticité*. Mir Moscou, 1967.

[99] Lauretta, D., DellaGiustina, D., Bennett, C., Golish, D., Becker, K., Balram-Knutson, S., Barnouin, O., Becker, T., Bottke, W., Boynton, W., et al. The unexpected surface of asteroid (101955) Bennu. *Nature 568*, 7750 (2019), 55–60.

[100] Lecomte, C.-E. *Instabilités dans un milieu granulaire : tôle ondulée sur un lit de sable, et ségrégation au sein des astéroïdes lâches*. PhD thesis, Université de Lyon, 2018.

[101] Lilensten, J., and Blelly, P.-L. *Du Soleil à la Terre*. EDP Sciences, collection Grenoble Sciences, 2000.

[102] Lowry, S. C., Fitzsimmons, A., Pravec, P., Vokrouhlickỳ, D., Boehnhardt, H., Taylor, P. A., Margot, J.-L., Galád, A., Irwin, M., Irwin, J., et al. Direct detection of the asteroidal YORP effect. *science 316*, 5822 (2007), 272–274.

[103] Lunine, J. I. Origin of water ice in the solar system. *Meteorites and the early solar system II* (2006), 309–319.

[104] Matsumura, S., Richardson, D. C., Michel, P., Schwartz, S. R., and Ballouz, R.-L. The Brazil nut effect and its application to asteroids. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 443*, 4 (2014), 3368–3380.

[105] Matthews, R. A. The close approach of stars in the solar neighborhood. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society 35* (1994), 1.

[106] Maurel, C., Ballouz, R.-L., Richardson, D. C., Michel, P., and Schwartz, S. R. Numerical simulations of oscillation-driven regolith motion : Brazil-nut effect. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (2016), stw2641.

[107] McBennett, B. G., and Harris, D. M. Horizontal stability of a bouncing ball. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 26*, 9 (2016), 093105.

[108] McCoy, T. J., Burbine, T., McFadden, L., Starr, R., Gaffey, M., Nittler, L., Evans, L., Izenberg, N., Lucey, P., Trombka, J., et al. The composition of 433 Eros : A mineralogical—chemical synthesis. *Meteoritics & Planetary Science 36*, 12 (2001), 1661–1672.

[109] Medeiros, H., Lazzaro, D., and Kodama, T. Spin distribution of asteroids-Statistical model revisited. *Planetary and Space Science 160* (2018), 77–83.

[110] Melby, P., Prevost, A., Egolf, D. A., and Urbach, J. S. Depletion force in a bidisperse granular layer. *Physical Review E 76*, 5 (2007), 051307.

[111] Michalak, G. Determination of asteroid masses—I.(1) Ceres,(2) Pallas and (4) Vesta. *Astronomy and Astrophysics 360* (2000), 363–374.

[112] Michel, P., Kueppers, M., Sierks, H., Carnelli, I., Cheng, A. F., Mellab, K., Granvik, M., Kestilä, A., Kohout, T., Muinonen, K., et al. European component of the AIDA mission to a binary asteroid : Characterization and interpretation of the impact of the DART mission. *Advances in Space Research 62*, 8 (2018), 2261–2272.

[113] Michel, P., and Richardson, D. C. Collision and gravitational reaccumulation : possible formation mechanism of the asteroid Itokawa. *Astronomy & Astrophysics 554* (2013), L1.

[114] Miyamoto, H., Yano, H., Scheeres, D. J., Abe, S., Barnouin-Jha, O., Cheng, A. F., Demura, H., Gaskell, R. W., Hirata, N., Ishiguro, M., et al. Regolith migration and sorting on asteroid Itokawa. *Science 316*, 5827 (2007), 1011–1014.

[115] Möbius, M. E., Lauderdale, B. E., Nagel, S. R., and Jaeger, H. M. Size separation of granular particles. *Nature 414*, 6861 (2001), 270–270.

[116] Montmerle, T., Augereau, J.-C., Chaussidon, M., Gounelle, M., Marty, B., and Morbidelli, A. 3. Solar System formation and early evolution : the first 100 million years. *Earth, Moon, and Planets 98*, 1-4 (2006), 39–95.

[117] Morbidelli, A., Delbo, M., Granvik, M., Bottke, W. F., Jedicke, R., Bolin, B., Michel, P., and Vokrouhlicky, D. Debiased albedo distribution for Near Earth Objects. *Icarus 340* (2020), 113631.

[118] Morbidelli, A., and Gladman, B. Orbital and temporal distributions of meteorites originating in the asteroid belt. *Meteoritics & Planetary Science 33*, 5 (1998), 999–1016.

[119] Mouret, S., Simon, J., Mignard, F., and Hestroffer, D. The list of asteroids perturbing the Mars orbit to be seen during future space missions. *Astronomy & Astrophysics 508*, 1 (2009), 479–489.

[120] Murdoch, N., Sánchez, P., Schwartz, S. R., and Miyamoto, H. Asteroid surface geophysics. *arXiv preprint arXiv :1503.01931* (2015).

[121] Nakamura, T., Noguchi, T., Tanaka, M., Zolensky, M. E., Kimura, M., Tsuchiyama, A., Nakato, A., Ogami, T., Ishida, H., Uesugi, M., et al. Itokawa dust particles : a direct link between S-type asteroids and ordinary chondrites. *Science 333*, 6046 (2011), 1113–1116.

[122] Nesterenko, V. F. Propagation of nonlinear compression pulses in granular media. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics 24*, 5 (1983), 733–743.

[123] Ostro, S. J., Margot, J.-L., Benner, L. A., Giorgini, J. D., Scheeres, D. J., Fahnestock, E. G., Broschart, S. B., Bellerose, J., Nolan, M. C., Magri, C., et al. Radar imaging of binary near-Earth asteroid (66391) 1999 KW4. *Science 314*, 5803 (2006), 1276–1280.

[124] Oyama, Y. Horizontal rotating cylinder. *Bull. Inst. Phys. Chem. Res.(Tokyo), Rep. 18* (1939), 600–610.

[125] Percier, B., Divoux, T., and Taberlet, N. Insights on the local dynamics induced by thermal cycling in granular matter. *EPL (Europhysics Letters) 104*, 2 (2013), 24001.

[126] Pereira, G., and Cleary, P. Segregation due to particle shape of a granular mixture in a slowly rotating tumbler. *Granular Matter 19*, 2 (2017), 23.

[127] Perera, V., Jackson, A. P., Asphaug, E., and Ballouz, R.-L. The spherical Brazil nut effect and its significance to asteroids. *Icarus 278* (2016), 194–203.

[128] Pericaud, J. *Des disques proto-planétaires aux disques de débris : étude des disques hybrides : observations dans le domaine millimétrique*. PhD thesis, Bordeaux, 2016.

[129] Perko, H. A., Nelson, J. D., and Sadeh, W. Z. Surface cleanliness effect on lunar soil shear strength. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering 127*, 4 (2001), 371–383.

[130] Persson, B. N. *Sliding friction : physical principles and applications*. Springer Science & Business Media, 2013.

[131] Pfalzner, S., Davies, M. B., Gounelle, M., Johansen, A., Münker, C., Lacerda, P., Zwart, S. P., Testi, L., Trieloff, M., and Veras, D. The formation of the solar system. *Physica Scripta 90*, 6 (2015), 068001.

[132] Pitjeva, E. Estimations of masses of the largest asteroids and the main asteroid belt from ranging to planets, Mars orbiters and landers. In *35th COSPAR Scientific Assembly* (2004), vol. 35, p. 2014.

[133] Pöschel, Thorsten, S. C., and Schwager, T. Scaling properties of granular materials. In *Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive-Frictional Materials*. Springer, 2001, pp. 173–184.

[134] Pöschel, T., and Schwager, T. *Computational granular dynamics : models and algorithms*. Springer Science & Business Media, 2005.

[135] Pouliquen, O., Delour, J., and Savage, S. B. Fingering in granular flows. *Nature 386*, 6627 (1997), 816–817.

[136] Pravec, P., Harris, A., Vokrouhlickỳ, D., Warner, B., Kušnirák, P., Hornoch, K., Pray, D., Higgins, D., Oey, J., Galád, A., et al. Spin rate distribution of small asteroids. *Icarus 197*, 2 (2008), 497–504.

[137] Pravec, P., and Harris, A. W. Fast and slow rotation of asteroids. *Icarus 148*, 1 (2000), 12–20.

[138] Ramaioli, M. Granular flow simulations and experiments for the food industry. Tech. rep., EPFL, 2008.

[139] Ramírez, R., Pöschel, T., Brilliantov, N. V., and Schwager, T. Coefficient of restitution of colliding viscoelastic spheres. *Physical review E 60*, 4 (1999), 4465.

[140] Richard, P., Nicodemi, M., Delannay, R., Ribiere, P., and Bideau, D. Slow relaxation and compaction of granular systems. *Nature materials 4*, 2 (2005), 121–128.

[141] Richardson, D. C., Leinhardt, Z. M., Melosh, H., Bottke Jr, W., Asphaug, E., et al. Gravitational aggregates : Evidence and evolution. *Asteroids iii 1* (2002), 501–515.

[142] Richardson, D. C., Walsh, K. J., Murdoch, N., and Michel, P. Numerical simulations of granular dynamics : I. Hard-sphere discrete element method and tests. *Icarus 212*, 1 (2011), 427–437.

[143] Rosato, A., Strandburg, K. J., Prinz, F., and Swendsen, R. H. Why the Brazil nuts are on top : Size segregation of particulate matter by shaking. *Physical review letters 58*, 10 (1987), 1038.

[144] Roskilly, S. J., Colbourn, E. A., Alli, O., Williams, D., Paul, K. A., Welfare, E. H., and Trusty, P. A. Investigating the effect of shape on particle segregation using a Monte Carlo simulation. *Powder Technology 203*, 2 (2010), 211–222.

[145] Rozitis, B., Emery, J., Siegler, M., Susorney, H., Molaro, J., Hergenrother, C., and Lauretta, D. Implications for ice stability and particle ejection from high-resolution temperature modeling of asteroid (101955) Bennu. *Journal of Geophysical Research : Planets 125*, 8 (2020), e2019JE006323.

[146] Rubincam, D. P. Radiative spin-up and spin-down of small asteroids. *Icarus 148*, 1 (2000), 2–11.

[147] Russel, W. B., Russel, W., Saville, D. A., and Schowalter, W. R. *Colloidal dispersions*. Cambridge University Press, 1991.

[148] Saito, J., Miyamoto, H., Nakamura, R., Ishiguro, M., Michikami, T., Nakamura, A., Demura, H., Sasaki, S., Hirata, N., Honda, C., et al. Detailed images of asteroid 25143 Itokawa from Hayabusa. *Science 312*, 5778 (2006), 1341–1344.

[149] Sanchez, P., Renouf, M., Azéma, E., and Mozul, R. The Contact Dynamics (CD) Method, as a Discrete Element Method for the simulation of granular asteroids. In *European Planetary Science Congress (EPSC-DPS Joint meeting)* (2019).

[150] Sánchez, P., Scheeres, D., and Swift, M. Impact driven size sorting in self-gravitating granular aggregates. In *Lunar and Planetary Science Conference* (2010), no. 1533, p. 2634.

[151] Sánchez, P., and Scheeres, D. J. Simulating asteroid rubble piles with a self-gravitating soft-sphere distinct element method model. *The Astrophysical Journal 727*, 2 (2011), 120.

[152] Sánchez, P., and Scheeres, D. J. The strength of regolith and rubble pile asteroids. *Meteoritics & Planetary Science 49*, 5 (2014), 788–811.

[153] Sánchez, P., and Scheeres, D. J. Cohesive regolith on fast rotating asteroids. *Icarus 338* (2020), 113443.

[154] Sautel, J., Lecomte, C.-É., and Taberlet, N. Particle size segregation in two-dimensional circular granular aggregates. *Physical Review E 103*, 2 (2021), 022901.

[155] Savage, S., and Lun, C. Particle size segregation in inclined chute flow of dry cohesionless granular solids. *Journal of fluid mechanics 189* (1988), 311–335.

[156] Savage, S. B., and Hutter, K. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *Journal of fluid mechanics 199* (1989), 177–215.

[157] Scheeres, D., Gaskell, R., Abe, S., Barnouin-Jha, O., Hashimoto, T., Kawaguchi, J., Kubota, T., Saito, J., Yoshikawa, M., Hirata, N., et al. The actual dynamical environment about Itokawa. In *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit* (2006), p. 6661.

[158] Scheeres, D. J., Hartzell, C. M., Sánchez, P., and Swift, M. Scaling forces to asteroid surfaces : The role of cohesion. *Icarus 210*, 2 (2010), 968–984.

[159] Schröter, M., Ulrich, S., Kreft, J., Swift, J. B., and Swinney, H. L. Mechanisms in the size segregation of a binary granular mixture. *Physical review E 74*, 1 (2006), 011307.

[160] Schwager, T., and Pöschel, T. Coefficient of restitution and linear–dashpot model revisited. *Granular Matter 9*, 6 (2007), 465–469.

[161] Scott, G., and Kilgour, D. The density of random close packing of spheres. *Journal of Physics D : Applied Physics 2*, 6 (1969), 863.

[162] Scotti, A., Meneveau, C., and Lilly, D. K. Generalized Smagorinsky model for anisotropic grids. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics 5*, 9 (1993), 2306–2308.

[163] Sears, D., Tornabene, L., Osinski, G., Hughes, S., and Heldmann, J. Formation of the "ponds" on asteroid (433) Eros by fluidization. *Planetary and Space Science 117* (2015), 106–118.

[164] Serio, G. F., Manara, A., Sicoli, P., and Bottke, W. F. *Giuseppe Piazzi and the discovery of Ceres*. University of Arizona Press, 2002.

[165] Shah, R., Woods, D. F., Faccenda, W., Johnson, J., Lambour, R., Pearce, E. C., and Stuart, J. S. Asteroid detection with the space surveillance telescope. In *Proceedings of the AMOS Conference* (2013).

[166] Sheridan, M. F. Emplacement of pyroclastic flows : A review. *Ash flow tuffs : Geological Society of America Special Paper 180* (1979), 125–136.

[167] Shimaki, Y., Senshu, H., Sakatani, N., Okada, T., Fukuhara, T., Tanaka, S., Taguchi, M., Arai, T., Demura, H., Ogawa, Y., et al. Thermophysical properties of the surface of asteroid 162173 Ryugu : Infrared observations and thermal inertia mapping. *Icarus 348* (2020), 113835.

[168] Shinbrot, T., Sabuwala, T., Siu, T., Lazo, M. V., and Chakraborty, P. Size sorting on the rubble-pile asteroid Itokawa. *Physical review letters 118*, 11 (2017), 111101.

[169] Shu, F. H., Adams, F. C., and Lizano, S. Star formation in molecular clouds : observation and theory. *Annual review of astronomy and astrophysics 25*, 1 (1987), 23–81.

[170] Silbert, L. E., Ertaş, D., Grest, G. S., Halsey, T. C., Levine, D., and Plimpton, S. J. Granular flow down an inclined plane : Bagnold scaling and rheology. *Physical Review E 64*, 5 (2001), 051302.

[171] Sommier, N., Porion, P., Evesque, P., Leclerc, B., Tchoreloff, P., and Couarraze, G. Magnetic resonance imaging investigation of the mixing-segregation process in a pharmaceutical blender. *International journal of pharmaceutics 222*, 2 (2001), 243–258.

[172] Staron, L., and Phillips, J. Segregation time-scale in bi-disperse granular flows. *Physics of Fluids 26*, 3 (2014), 033302.

[173] Stuart, J. S., and Binzel, R. P. Bias-corrected population, size distribution, and impact hazard for the near-Earth objects. *Icarus 170*, 2 (2004), 295–311.

[174] Taberlet, N., Losert, W., and Richard, P. Understanding the dynamics of segregation bands of simulated granular material in a rotating drum. *EPL (Europhysics Letters) 68*, 4 (2004), 522.

[175] Taberlet, N., Newey, M., Richard, P., and Losert, W. On axial segregation in a tumbler : an experimental and numerical study. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment 2006*, 07 (2006), P07013.

[176] Taberlet, N., and Richard, P. Diffusion of a granular pulse in a rotating drum. *Physical review E 73*, 4 (2006), 041301.

[177] Tancredi, G., Maciel, A., Heredia, L., Richeri, P., and Nesmachnow, S. Granular physics in low-gravity environments using discrete element method. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 420*, 4 (2012), 3368–3380.

[178] Tancredi, G., Roland, S., and Bruzzone, S. Distribution of boulders and the gravity potential on asteroid Itokawa. *Icarus 247* (2015), 279–290.

[179] Taylor, P. A., Margot, J.-L., Vokrouhlickỳ, D., Scheeres, D. J., Pravec, P., Lowry, S. C., Fitzsimmons, A., Nolan, M. C., Ostro, S. J., Benner, L. A., et al. Spin rate of asteroid (54509) 2000 PH5 increasing due to the YORP effect. *Science 316*, 5822 (2007), 274–277.

[180] Thomas, P. C., Binzel, R. P., Gaffey, M. J., Zellner, B. H., Storrs, A. D., and Wells, E. Vesta : Spin pole, size, and shape from HST images. *Icarus 128*, 1 (1997), 88–94.

[181] Thornton, C. Coefficient of restitution for collinear collisions of elastic-perfectly plastic spheres.

[182] Toon, O. B., Zahnle, K., Morrison, D., Turco, R. P., and Covey, C. Environmental perturbations caused by the impacts of asteroids and comets. *Reviews of Geophysics 35*, 1 (1997), 41–78.

[183] Tripathi, A., and Khakhar, D. Density difference-driven segregation in a dense granular flow. *Journal of Fluid Mechanics 717* (2013), 643.

[184] Tsuchiyama, A., Uesugi, M., Matsushima, T., Michikami, T., Kadono, T., Nakamura, T., Uesugi, K., Nakano, T., Sandford, S. A., Noguchi, R., et al. Three-dimensional structure of Hayabusa samples : origin and evolution of Itokawa regolith. *science 333*, 6046 (2011), 1125–1128.

[185] van der Vaart, K., Gajjar, P., Epely-Chauvin, G., Andreini, N., Gray, J., and Ancey, C. Underlying asymmetry within particle size segregation. *Physical review letters 114*, 23 (2015), 238001.

[186] Vanel, L., Howell, D., Clark, D., Behringer, R., and Clément, E. Memories in sand : Experimental tests of construction history on stress distributions under sandpiles. *Physical Review E 60*, 5 (1999), R5040.

[187] Veverka, J., Robinson, M., Thomas, P., Murchie, S., Bell, J., Izenberg, N., Chapman, C., Harch, A., Bell, M., Carcich, B., et al. NEAR at Eros : Imaging and spectral results. *Science 289*, 5487 (2000), 2088–2097.

[188] Veverka, J., Thomas, P., Harch, A., Clark, B., Bell, J., Carcich, B., Joseph, J., Chapman, C., Merline, W., Robinson, M., et al. NEAR's flyby of 253 Mathilde : Images of a C asteroid. *Science 278*, 5346 (1997), 2109–2114.

[189] Vokrouhlickỳ, D. A complete linear model for the Yarkovsky thermal force on spherical asteroid fragments. *Astronomy and Astrophysics 344* (1999), 362–366.

[190] Vokrouhlicky, D., Bottke, W. F., Chesley, S. R., Scheeres, D. J., and Statler, T. S. The Yarkovsky and YORP effects. *arXiv preprint arXiv :1502.01249* (2015).

[191] Vokrouhlickỳ, D., Milani, A., and Chesley, S. Yarkovsky effect on small near-Earth asteroids : Mathematical formulation and examples. *Icarus 148*, 1 (2000), 118–138.

[192] Walsh, K. J. Rubble pile asteroids. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics 56* (2018), 593–624.

[193] Walsh, K. J., Richardson, D. C., and Michel, P. Rotational breakup as the origin of small binary asteroids. *Nature 454*, 7201 (2008), 188–191.

[194] Walton, O. R., and Braun, R. L. Viscosity, granular-temperature, and stress calculations for shearing assemblies of inelastic, frictional disks. *Journal of rheology 30*, 5 (1986), 949–980.

[195] Wasson, J. T. *Meteorites : Classification and properties*, vol. 10. Springer Science & Business Media, 2012.

[196] Wichman, R., and Wood, C. A. The Davy Crater Chain : Implications for tidal disruption in the Earth-Moon System and elsewhere. *Geophysical research letters 22*, 5 (1995), 583–586.

[197] Wilkison, S. L., Robinson, M. S., Thomas, P. C., Veverka, J., McCoy, T. J., Murchie, S. L., Prockter, L. M., and Yeomans, D. K. An estimate of Eros's porosity and implications for internal structure. *Icarus 155*, 1 (2002), 94–103.

[198] Wisdom, J. The origin of the Kirkwood gaps-A mapping for asteroidal motion near the 3/1 commensurability. *The Astronomical Journal 87* (1982), 577–593.

[199] Wolf, D. E. Modelling and computer simulation of granular media. In *Computational Physics*. Springer, 1996, pp. 64–95.

[200] Wright, E., Quillen, A. C., South, J., Nelson, R. C., Sánchez, P., Siu, J., Askari, H., Nakajima, M., and Schwartz, S. R. Ricochets on asteroids : Experimental study of low velocity grazing impacts into granular media. *Icarus 351* (2020), 113963.

[201] Zuriguel, I., Gray, J., Peixinho, J., and Mullin, T. Pattern selection by a granular wave in a rotating drum. *Physical Review E 73*, 6 (2006), 061302.