



HAL
open science

Observations cosmologiques par LISA : limitations dues au bruit et aux signaux astrophysiques

Guillaume Boileau

► **To cite this version:**

Guillaume Boileau. Observations cosmologiques par LISA : limitations dues au bruit et aux signaux astrophysiques. Astrophysique [astro-ph]. Université Côte d'Azur, 2021. Français. NNT : 2021COAZ4064 . tel-03438923

HAL Id: tel-03438923

<https://theses.hal.science/tel-03438923>

Submitted on 22 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

THÈSE DE DOCTORAT

Observations cosmologiques par LISA

limitations dues au bruit et
aux signaux astrophysiques

Guillaume BOILEAU

Artemis UMR 7250

**Présentée en vue de l'obtention
du grade de docteur en
Astrophysique**

d'Université Côte d'Azur

Dirigée par : *Nelson Christensen DR*

Co-encadrée par : *Renate Meyer
Professeur*

Soutenu le : 28 septembre 2021

Devant le jury, composé de :

Chiara Caprini, CR + HDR, Laboratoire
Astroparticule et Cosmologie, Paris
Établissement

Tania Regimbau, DR, Laboratoire
d'Annecy de Physique des Particules,
Annecy

Mairi Sakellariadou, Professeur, King's
College London

Nick van Remortel, Professeur,
Université d'Anvers, Belgique

OBSERVATIONS COSMOLOGIQUES PAR LISA : LIMITATIONS DUES AU BRUIT ET AUX SIGNAUX ASTROPHYSIQUES

UNE THÈSE SOUMISE POUR L'ACHÈVEMENT DE
EXIGENCES POUR LE DEGRÉ DE

THÈSE DE DOCTORAT

PAR

GUILLAUME BOILEAU

RÉALISÉE AU LABORATOIRE

ARTEMIS, OBSERVATOIRE DE LA CÔTE D'AZUR, UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR, CNRS,
CS 34229, F-06304 NICE CEDEX 4, FRANCE
ELECTRONIC ADDRESS: GUILLAUME.BOILEAU@OCA.EU

SOUS LA DIRECTION DE

NELSON CHRISTENSEN, DR

ARTEMIS, OBSERVATOIRE DE LA CÔTE D'AZUR, UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR, CNRS

RENATE MEYER, PROFESSEUR

DEPARTMENT OF STATISTICS, UNIVERSITY OF AUCKLAND, AUCKLAND, NEW
ZEALAND

JURY:

PRÉSIDENT DU JURY

TANIA REGIMBAU, DR, LABORATOIRE D'ANNECY DE PHYSIQUE DES PARTICULES,
ANNECY

RAPPORTEURS

TANIA REGIMBAU, DR, LABORATOIRE D'ANNECY DE PHYSIQUE DES PARTICULES,
ANNECY

NICK VAN REMORTEL, PROFESSEUR, UNIVERSITÉ D'ANVERS, BELGIQUE

EXAMINATRICES

CHIARA CAPRINI, CR + HDR, LABORATOIRE ASTROPARTICULE ET COSMOLOGIE,
PARIS ÉTABLISSEMENT

MAIRI SAKELLARIADOU, PROFESSEUR, KING'S COLLEGE LONDON

Table des matières

Remerciements	11
Abstract	13
Résumé	15
1 Introduction	17
1.1 Relativité générale	17
1.1.1 Place de la gravitation relativiste	17
1.1.2 Gravitation et géométrie	21
Principe d'équivalence	21
Principe de Mach	22
Généralisation géométrique	22
1.1.3 Physique en espace-temps courbe	23
Ligne d'Univers	23
Cinématique Relativiste	23
Dynamique Relativiste	25
Tenseur d'énergie-impulsion	25
Symétrie et lois de conservation	27
1.1.4 Gravitation Relativiste	28
Tenseur de courbure ou tenseur de Riemann	28
Déviation des géodésiques	30
Équation d'Einstein	31
1.2 Cosmologie	33
1.2.1 Solution cosmologique dans un cadre d'un espace symétrique	33
Tenseur d'énergie-impulsion pour la cosmologie	35
1.2.2 La métrique de Friedmann Lemaître Robertson Walker (FLRW)	35
Métrique de l'hypersurface spatiale et symétrique de dimension 3	36
Résumé de la métrique de l'hypersurface spatiale et symé-	
trique de dimension 3	36
Métrique de l'espace-temps	37

	Transformation des coordonnées	37
	Symbole de Christoffel	37
	Tenseur et scalaire de Ricci	37
1.2.3	Équation Friedmann	38
	Tenseur d'énergie-impulsion	38
	Équation de Friedmann	39
	Solution de Friedmann-Lemaître	41
1.2.4	Distance et Redshift	41
	Redshift cosmologique	41
1.2.5	Limites du modèle standard de la cosmologie	42
1.2.6	Le modèle inflationnaire appliqué aux ondes gravitationnelles	44
1.3	Ondes gravitationnelles	47
1.3.1	Équation d'Einstein linéarisée, approximation en champ faible	47
1.3.2	Jauge de Lorenz et jauge transverse et sans trace (TT)	49
	Changement de coordonnées infinitésimales	49
	Jauge de Lorenz	50
	Jauge transverse et sans trace (TT)	51
	États de polarisation	52
1.3.3	Effet d'ondes gravitationnelles sur la matière	53
1.3.4	Génération d'une onde gravitationnelle : formule du quadripôle	56
	Formule du quadripôle	56
	Flux d'énergie d'une source émettrice d'ondes gravitationnelles	59
	Luminosité gravitationnelle	60
1.3.5	Sources des ondes gravitationnelles	60
1.3.6	Détection des ondes gravitationnelles	61
	Détecteur au sol	62
	Détecteur spatial : LISA	66
	Système de détection de LISA : le système optique de LISA	70
	Traitement de données des signaux d'ondes gravitationnelles	72
1.3.7	Réponse des détecteurs d'ondes gravitationnelles	73
	Différents types de détecteurs	73
	Fonction réponse des détecteurs	76
2	Fond Stochastique des ondes gravitationnelles	79
2.1	Introduction et motivations	79
2.2	Analogie du fond stochastique des ondes gravitationnelles et du fond diffus cosmologique	80
2.3	Polarisation du CMB	82

2.4	Contexte des différentes sources du fond stochastique dans la bande de fréquences de LISA	84
2.4.1	Résumé de la documentation sur la séparation des signaux	87
	Études SGWB pour LIGO/Virgo	88
	Études du SGWB dans la bande spectral de LISA	88
	Études du SGWB pour les futurs détecteurs de troisième génération	88
2.4.2	Contexte mathématique du fond stochastique	88
	Cas des ondes planes et progressives se propageant	88
2.4.3	Propriété temporelle et anisotropies du fond stochastique	94
2.4.4	Réponse du détecteur LISA	95
	Fonction de réponse d'un interféromètre à deux bras	95
	Cas particulier de LISA	96
	Diagramme d'antenne de LISA dépendant de la fréquence	97
2.4.5	La densité spectrale d'énergie du fond stochastique d'ondes gravitationnelles	98
2.4.6	Fond stochastique dans un contexte d'un univers en expansion	102
2.4.7	Émission gravitationnelle d'un système double en orbite circulaire	104
2.5	Premier plan astrophysique	111
2.5.1	Contexte astrophysique	111
2.5.2	Description des catalogues de Naines Blanches Doubles (<i>Double White Dwarfs (DWDs)</i>)	113
	Simulation des populations de DWDs	113
	Comparaison des catalogues	114
	Calcul de l'amplitude	115
	Bruit de confusion d'origine galactique	122
2.5.3	Calcul de la forme d'onde	123
	Amplitude de l'onde gravitationnelle	123
	Fonction de réponse du détecteur	127
	Signal de la mesure de premier plan de binaires de naines blanches par LISA	127
	Densité spectrale d'énergie sans dimension et étude de la forme d'onde du premier plan galactique	127
	Densité spectrale d'énergie sans dimension	129
	Comparaison de la densité spectrale d'énergie de différents catalogues	129
3	Séparation spectrale	133
3.1	Séparation spectrale	133
3.1.1	L'information de Fisher	137

3.1.2	La Borne de Cramér-Rao	142
3.2	Adaptive Markov chain Monte-Carlo	144
3.2.1	Markov chain Monte-Carlo	144
3.2.2	La procédure de Metropolis-Hastings	144
3.2.3	Adaptive Markov chain Monte-Carlo	145
	Incertitude de la composante d’amplitude cosmologique avec l’Adaptive Markov chains Monte Carlo (A-MCMC)	146
3.3	Donnée extraite du <i>Mock LISA Data Challenge (MLDC)</i>	146
3.3.1	Densité spectrale de puissance et d’énergie du MLDC	146
3.4	Ajustement du SGWB avec l’A-MCMC en utilisant le canal T et les deux canaux scientifiques A et E	152
3.4.1	Limites	160
4	Étude du fond stochastique cosmologique dans un contexte de premier plan galactique	167
4.1	Paramétrisation de l’étude du premier plan galactique dans un contexte de bruit de LISA et d’autres SGWB (astrophysique et cosmologique)	167
4.2	Mesure de l’amplitude des naines blanches doubles dans le cadre de la modulation orbitale induit par LISA	169
4.3	Mesure du fond stochastique cosmologique dans le contexte de fonds galactique et astrophysique	178
4.4	Études d’information de Fisher pour les modèles de premier plan galactiques modifiés	181
4.5	limites de l’étude	186
4.6	Contexte des sources astrophysiques et cosmologiques en loi puissance cassée	188
4.6.1	SGWB astrophysique	189
4.6.2	SGWB cosmologique	189
4.6.3	Résultats de mesures des modèles de loi puissance cassée	193
4.6.4	Loi Puissance	194
4.6.5	Loi puissance cassée	194
	Loi en puissance cassée unique	194
	Population de naines blanches doubles	197
	Double loi puissance cassée	203
4.6.6	Signal avec un ou plusieurs pics fréquentiels	203
	Signal avec un unique pic fréquentiel	203
	Signal à double pic fréquentiel	208
4.6.7	Signal de Wiggly	211
4.7	Séparation spectrale des cordes cosmiques	218
4.7.1	Les cordes cosmiques	218

4.7.2	Séparation spectrale des cordes cosmiques	218
4.7.3	Critère d'information de déviance	226
4.7.4	Conclusion	226
5	Séparation spectrale dans le cas d'un bruit de LISA non idéal	229
5.1	Introduction	229
5.2	Étude de corrélations	230
5.3	Soustraction d'un bruit corrélé dans le domaine fréquentiel	231
5.4	Filtre de Wiener	232
5.5	Différence d'accélération des test-masses en chute libre de LPF	234
5.5.1	Densité spectrale de puissance (PSD) de la différence d'accélération des test-masses en chute libre de LPF	235
5.6	Champ Magnétique de LPF	236
5.6.1	Densité spectrale de puissance (PSD) du champ magnétique	238
5.6.2	Cohérence entre le champ magnétique et l'accélération	241
5.6.3	Soustraction du bruit corrélé du champ magnétique sur la différence d'accélération	241
5.7	μ -Propulseur	245
5.7.1	Soustraction du bruit corrélé des micro-propulseurs sur la différence d'accélération des masses-test	247
5.8	Température du satellite de la mission LPF	250
5.8.1	Traitement des données LPF	250
5.8.2	Densité spectrale de puissance (PSD) des températures	253
5.8.3	Cohérence entre température et accélération	256
5.8.4	Étude de cohérence avec une augmentation forcée de la température Données de l'augmentation forcée de la température	256
5.8.5	Soustraction du bruit corrélé de la température sur la différence d'accélération	261
5.9	De-glitching de la différence d'accélération des TM	265
5.10	Résumé de la mesure des corrélations	270
5.11	Corrélations de LISA PathFinder (LPF) intégrées dans le bruit de LISA	272
5.11.1	Corrélation de LPF dans le canal de bruit analytique de LISA	272
5.11.2	Corrélation de LPF dans le modèle de performance LISA et du budget d'erreur	273
5.11.3	Corrélations de LPF dans l'Interférométrie à retardement <i>Time De- lay Interferometry (TDI)</i>	276
5.11.4	Séparation spectrale du SGWB dans le contexte de l'ajout des cor- rélations de LPF	281
5.12	Modification du bruit de LISA	283

5.12.1	Augmentation du niveau du bruit du chemin optique de LISA . . .	283
5.12.2	Modification du niveau de bruit indépendante des MOSA	287
5.12.3	Bruit corrélé et séparation spectrale du fond stochastique	293
	Conclusion	299

Remerciements

Il me sera difficile de remercier tout le monde, l'élaboration d'une thèse de doctorat étant la somme de réflexions, de discussions et de calculs de nombreuses personnes aboutissant à la compréhension du sujet et à formulation de réponses.

Il m'est important tout d'abord de remercier mes directeurs de thèse, Nelson Christensen et Renate Meyer. Ainsi Nelson, a su me faire confiance pour mener cette thèse dont il avait déposé le sujet auprès de l'école doctoral. Je le remercie pour son aide, sa disponibilité, mais également les nombreuses opportunités de me présenter de multiple acteur très important de nos sujets étudiés. Il m'est aussi important de remercier Renate Meyer pour sa gentillesse, son expertise ô combien utile pour établir une compréhension des stratégies statistiques. Je ne peux que la remercier pour sa rigueur, celle-ci nous a permis d'établir des études très rigoureuses et à échapper des arbitrages désagréables.

Je remercie tous les membres du groupe LISA d'Artémis pour les discussions très constructives sur les enjeux de la mission LISA. De plus, j'ai également pu assister à des réunions et des séminaires LISA avec le soutien et l'encouragement des collègues du groupe de travail d'Artémis sur LISA. Ce groupe est composé de personnes avec des compétences et des domaines d'expertise variés qui en font une chance lorsque l'on souhaite comprendre les enjeux d'un tel projet scientifique, mais également lorsque l'on est un jeune chercheur voulant évoluer dans un domaine d'excellence.

Durant ma thèse, j'ai rencontré également une ambiance de travail bienveillante. L'ensemble des membres du laboratoire Artemis ont été disponibles et source d'encouragements. Sans oublier Angélique Guitard pour son accueil (je ne peux pas oublier la visite de bienvenue de l'observatoire) et de l'ensemble des services qu'elle peut nous rendre pour notre thèse plus douce.

Je ne peux pas oublier de remercier l'équipe du restaurant, Khaled régnant en maître nous régale de sa cuisine, mais aussi de sa bonne humeur communicative.

Je remercie également le personnel de l'université et de l'école doctoral. Et, plus particulièrement Catherine Briet pour sa disponibilité et sa gentillesse. Sans oublier son cours que je recommande à tous les étudiants.

Un grand merci à ma Famille, à mes amies et amis qui me soutiennent depuis très longtemps. Et, sans oublier Gwenaëlle, ma partenaire qui m'a soutenu pendant ces trois années, qui m'a aidé à relire cette thèse malgré le fait qu'elle ne comprend rien à la

physique. Qui a passé ses vacances à relire la thèse au lieu d'écrire son mémoire, ça c'est de l'amour.

Abstract

Cosmological observations by LISA : limitations due to noise and astrophysical signals

While waiting to measure the stochastic gravitational waves background with the Laser Interferometer Space Antenna (LISA), we propose to determine methods and strategies to understand and prepare for the cosmological observations by LISA. LISA is a space mission aiming at measuring gravitational waves between 1×10^{-5} and 1 Hz. This mission, led by ESA, should be launched in 2034 or later. The subject of this PhD thesis is to understand and simulate the stochastic cosmological background produced at the beginning of our Universe in a context of other stochastic backgrounds of astrophysical or galactic origin, along with the LISA noise. The first one comes from unresolved binaries of black holes and neutron stars and is also present in the frequency range of LIGO/Virgo. The second one comes from the white dwarf binaries present in our galaxy. The gravitational wave signal of these binaries is not yet well understood, and we will have to simulate and study it. Indeed, some phenomena related to its properties, but also to its observation, make it difficult to study. We are looking for and have developed Bayesian and Fisher strategies to understand the spectral separation of the different stochastic backgrounds while evaluating the possible limits of detectability of the cosmological background.

Moreover, LISA noise could have multiple sources of disturbance, such as correlated noise. To understand the issue of a non-perfect LISA noise we studied and then established some correlations from the LISA test mission, LISA PathFinder, of which we performed a detailed noise study. In order to understand the effects of possible correlated noise in LISA, we injected these correlations into a LISA noise level, and established new estimates of the limitation of the cosmological stochastic background measurement. We also sought to establish the limits of the current model with more complex noise models, i.e., correlating the noise of two optical banks on the same satellite, or independently increasing the noise of each optical system.

Thus, we will be able, with our method, to detect and separate cosmological backgrounds of the order of $\Omega_{GW,cosmo} \simeq 1 \times 10^{-13}$ to 1×10^{-12} . We have also studied the detectability limit of cosmic strings, for which we have established a tension limit

$G\mu \simeq 1 \times 10^{-17}$ to 1×10^{-16} .

Keywords : Gravitational waves, stochastic background, MCMC, Fisher Information, Dwarf white, cosmic strings, correlations.

Résumé

Observations cosmologiques par LISA : limitations dues au bruit et aux signaux astrophysiques

En attendant de mesurer le fond stochastique des ondes gravitationnelles avec la mission spatiale Laser Interferometer Space Antenna (LISA), nous nous proposons de déterminer des méthodes et des stratégies pour comprendre et préparer les observations cosmologiques du fond stochastique des ondes gravitationnelles de la future mission LISA. Celle-ci est donc une mission spatiale visant à mesurer les ondes gravitationnelles comprises entre 1×10^{-5} et 1 Hz. Cette mission, portée par l'ESA, devrait être lancée d'ici à 2034. L'enjeu de cette thèse de doctorat consiste à comprendre et à simuler les fonds stochastiques cosmologiques produits au début de notre Univers dans un contexte d'autres fonds stochastiques d'origine astrophysique ou galactique, tout en incluant le bruit de LISA à nos études. Le premier fond stochastique est issu de binaires de trous noirs et d'étoiles à neutrons non résolues, qui sont également présents dans la gamme de fréquence de LIGO/Virgo. Les missions LISA et LIGO/Virgo n'observeront pas simultanément les mêmes binaires, mais les propriétés du fond mesurer avec LIGO/Virgo donne une très bonne estimation pour prédire le comportement de ce fond dans LISA. Le deuxième fond a pour origine les binaires de naines blanches présentes dans notre galaxie. Ce signal d'ondes gravitationnelles produit par ces dernières, n'est pas encore bien compris, nous avons tout d'abord dû le simuler de la manière la plus réaliste possible, puis l'étudier. Effectivement, certains phénomènes du fond des naines blanches le rendent complexe à étudier. Ils sont liés aux propriétés des objets le produisant, mais également à la manière dont nous l'observons. Dans notre cas, par la constellation que constitue l'instrument LISA. Nous avons cherché et développé, pour le futur, des stratégies bayésiennes des méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov et d'information de Fisher pour la séparation spectrale des différents fonds stochastiques. De plus, il est possible d'évaluer les possibles limites de détectabilité du fond cosmologique dans des contextes de bruits et de fonds astrophysiques et galactiques variés. Nos algorithmes nous donnent une très bonne flexibilité, ce qui permet de facilement d'établir des limites de mesures de différents fonds cosmologiques de diverses origines.

De plus, le bruit de LISA pourrait avoir de multiples sources de perturbation comme les bruits corrélés. Pour comprendre l'enjeu d'un bruit de LISA non parfait nous avons étudié les données et ensuite établie les corrélations de la mission test de LISA, LISA PathFinder, dont nous avons réalisé une étude détaillée et complète du bruit. Dans le but de comprendre les effets des possibles bruits corrélés dans LISA, nous avons injecté ces corrélations dans le budget de bruit de LISA, et établi de nouvelles estimations de limitation de la mesure du fond stochastique cosmologique. Nous avons également cherché à établir les limites du modèle actuel avec des modèles de bruit plus complexe, c'est-à-dire en corrélant le bruit de deux bancs optiques du même satellite, ou en augmentant indépendamment le bruit de chaque système optique.

Ainsi, nous pourrions, avec notre méthode, détecter et séparer des fonds cosmologiques de l'ordre de $\Omega_{GW,cosmo} \simeq 1 \times 10^{-13}$ à 1×10^{-12} . Nous avons également étudié la limite de détectabilité des cordes cosmiques, dont nous avons établie une limite de tension $G\mu \simeq 1 \times 10^{-17}$ à 1×10^{-16} .

Mots-clés : Ondes gravitationnelles, fond stochastique, MCMC, Information de Fisher, Naines blanches, cordes cosmiques, corrélations.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Relativité générale

1.1.1 Place de la gravitation relativiste

La physique est composée de quatre interactions fondamentales : l'électromagnétisme, la force nucléaire faible, la force nucléaire forte et la gravitation. Les trois premières sont unifiées au sein d'une seule et même théorie : la théorie quantique des champs [158]. La dernière est celle, qui nous intéressera au cours de cette thèse, elle est comprise au sein de la théorie classique des champs. Il s'agit d'une interaction de très faible intensité et qui domine à grande échelle. Einstein a établi cette nouvelle théorie en voulant résoudre le problème du périhélie de Mercure. À l'heure actuelle, la relativité générale d'Albert Einstein (1915)[90, 89] modélise cette interaction. Celle-ci comprend deux constantes universelles, la célérité de la lumière c et la constante universelle de gravitation G . Nous pouvons ainsi introduire deux théories limites à la relativité générale. En considérant la célérité de la lumière infinie devant les autres vitesses, nous pouvons construire la gravitation universelle de Newton (1687) [180]. De la même manière, dans un cadre théorique où la constante de gravitation universelle tend vers 0, c'est-à-dire en l'absence de gravité, nous pouvons construire la relativité restreinte d'Einstein (1905). En effet, si nous considérons deux électrons de masse $m_e = 9.1 \times 10^{-31}\text{kg}$ et de charge électrique $q_e = -e = -1.6 \times 10^{-19}\text{C}$, le rapport des modules de la force gravitationnelle et de la force électromagnétique des interactions entre électrons sont respectivement $\frac{F_{\text{Grav}}}{F_{\text{EM}}} = \frac{4\pi\epsilon_0 G m_e^2}{q_e^2} \approx 10^{-43}$, où $G = 6.67 \times 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ et $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$ est la permittivité du vide. L'interaction gravitationnelle est donc très peu intense par rapport à l'interaction électromagnétique. Il en va de même pour les forces nucléaires. Il s'agit donc de l'interaction la moins intense, elle n'est donc pas ou peu présente dans la compréhension de l'infiniment petit. De plus, l'interaction gravitationnelle est non écrantée, à longue portée et universelle. Elle est donc l'interaction dominante à très grande échelle.

Nous pouvons introduire une première grandeur, la compacité Ξ , cette quantité ren-

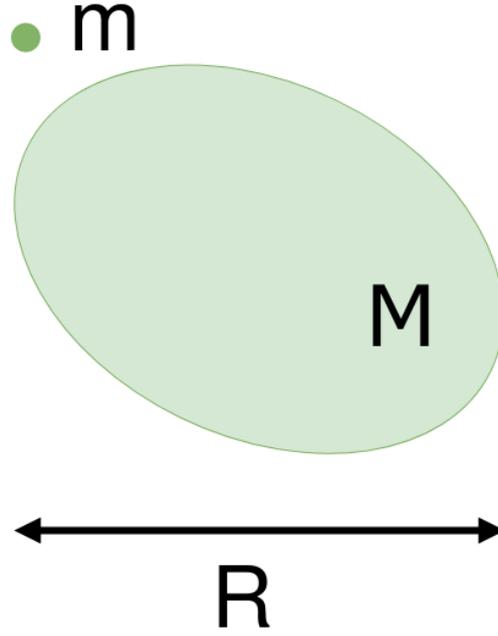


FIGURE 1.1 – Figure illustrant et introduisant les grandeurs en jeu dans la définition de la compacité (voir équation 1.1).

seigne sur la nature relativiste, au sens général, d'une situation étudiée. Il s'agit pour un système de taille caractéristique R du rapport entre son potentiel gravitationnel et son énergie nucléaire contenue dans sa masse. En effet, pour une masse M autogravitante de masse volumique $\rho(r)$ tel que $r \in [0, R]$ et m la masse contenue à l'intérieur du rayon r , avec $m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$. Nous avons $m(R) = M$ si et seulement si $r \leq R$. Ainsi pour un champ gravitationnel radial $\vec{g} = -g(r)\vec{e}_R$, nous pouvons écrire $g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}$, et donc avoir comme potentiel gravitationnel $\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$ tant que $r \geq R$. Nous en déduisons donc la forme de l'énergie potentielle gravitationnelle $E_{grad} = -\alpha \frac{GM^2}{R}$ (la constante α dépend du profil de densité du corps, si celle-ci est en loi puissance, c'est-à-dire $\rho(r) \approx r^{-a}$, alors nous obtenons $\alpha = \frac{3-a}{5-2a}$. Un astre homogène a $\alpha = \frac{3}{5}$, s'il suit une loi en $\rho(r) \approx r^{-2}$ alors $\alpha = 1$). Nous pouvons également écrire, pour la masse M , son énergie nucléaire $E = Mc^2$.

$$\Xi = \frac{GM}{c^2 R} \quad (1.1)$$

Nous pouvons à partir de cette quantité établir deux régimes. Le premier est la gravitation non-relativiste pour $\Xi \ll 1$, c'est le cadre de l'application de la théorie de Newton. Le second régime est $\Xi \leq 1$, c'est le cadre de l'application de la gravitation relativiste, celle d'Einstein. Ainsi, nous pouvons écrire $\Xi = \frac{|\Phi_{grav}|}{c^2} \sim \frac{v^2}{c^2} \sim \frac{|E_{potgrav}|}{E_{masse}}$. Pour un trou noir de masse M , si nous considérons une particule de masse m en chute vers le centre du trou noir, nous avons $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{R}$. Nous établissons la vitesse de libération $v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2\Xi}c$. Le cas limite est donné par $v_{lib} = c$, donc pour un trou noir dit

de Schwarzschild (pas de rotation ou *spin* en anglais) nous avons $\Xi = \frac{1}{2}$ au niveau de l'horizon d'un trou noir. Pour un trou noir dit de Kerr [140] (avec un spin ou rotation sur lui-même) nous pouvons établir que la compacité est entre 1 et 2. Au niveau de la singularité, la compacité est considérée comme infinie. Il est aussi possible d'établir une compacité pour l'Univers observable. En effet, en considérant que l'univers est homogène et isotrope à grande échelle et les modèles cosmologiques, nous avons un horizon cosmologique ou rayon d'Hubble. Il s'agit du rapport entre la vitesse de la lumière c et la vitesse de l'expansion de l'Univers mesurée aujourd'hui H_0 (constante Hubble-Lemaître), qui est de $\frac{c}{H_0} = 1 \times 10^{23}$ km [107]. Il est aussi possible de construire avec les mesures des constantes cosmologiques par la mission Planck [194], la masse de l'Univers observable. Nous considérons que la matière baryonique et la matière noire représentent aujourd'hui 30% de la masse de l'Univers Observable lorsque l'énergie noire représente 70% [10]. Ceci nous conduit à une autre estimation du rayon de l'Univers autour de 4.16×10^{23} km. Ainsi, le volume de l'Univers observable est donc de $V_{Univ} = \frac{4\pi}{3}\pi R_{Univ}^3 \simeq 3 \times 10^{71}$ km³. Avec les constantes de l'Univers, il est également possible d'établir une densité moyenne de l'Univers observable $\bar{\rho}_{Univ} = \frac{3H_0}{8\pi G} \simeq 1 \times 10^{-26}$ kg.cm⁻³. Nous obtenons ainsi une estimation de la masse de l'Univers Observable $M_{Univ} = 6.5 \times 10^{22} M_\odot$, avec $M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$ kg la masse du Soleil. Les différentes estimations de la compacité sont résumées dans le tableau 1.1.

La théorie de la relativité générale utilise la notion de l'espace-temps, il s'agit d'un continuum à quatre dimensions composé d'événements. Pour nous, il s'agira de points dans l'espace-temps. Ainsi, un événement contient quatre nombres pour coordonnées. Une suite d'événements liés causalement dans l'espace-temps forment des lignes d'univers. Il s'agit du chemin d'une particule dans l'espace-temps. En outre, l'espace-temps en relativité générale est le lieu, au sens spatial et aussi temporel, des actions. Celui-ci contrairement à la gravitation universelle est aussi affectée par les événements en son sein.

En physique pré-relativiste, on peut décrire l'espace comme un plan, où chaque événement est à simultanéité absolue. On y décrit l'évolution temporelle comme une superposition de plans infinis et simultanés. Par conséquence, les grandeurs géométriques $||\Delta\vec{x}||$ et Δt sont indépendantes. En relativité restreinte, on perd la notion de simultanéité absolue, deux événements deviendront causaux si leur cône de lumière comporte une intersection. De plus, on parlera d'intervalle d'espace-temps pour deux événements p et q , $I(p, q) = -c^2\Delta t^2 + ||\Delta\vec{x}||^2$. L'intervalle I est quadratique dans les différences de coordonnées et invariant par changement de référentiel inertiel. Il est aussi appelé métrique de l'espace-temps de la relativité restreinte ds^2 , tel que $I = ds^2 = \sum_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta$, avec $(x^\alpha) = (t, x, y, z)$ et $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ la matrice de Minkowski. Nous pourrions remarquer que la métrique de la relativité restreinte respecte la géométrie minkowskienne, celle-ci est, en outre, la même que la métrique de la relativité générale, mais en courbure

Astre	Masse M (M_\odot)	Taille caractéristique R (km)	Densité moyenne $\bar{\rho}$ (gcm^{-3})	Compacité/- Paramètre de gravitation relativiste Ξ	Interaction opposée
Terre	3×10^{-6}	6400	5.4	$\simeq 7 \times 10^{-10}$	Force EM de la structure cristalline
Soleil	1	696 000	1.4	$\simeq 6 \times 10^{-6}$	Pression de radiation et thermique
Naine blanche	$\simeq [0.1, 1.4]$	$\approx 10^4$	$\simeq [10^6, 10^7]$	$\simeq [10^{-4}, 10^{-3}]$	Pression de dégénérescence des électrons
Étoile à neutrons	$\simeq [1, 3]$	≈ 10	$\simeq 10^{15}$	$\simeq [0.2, 0.4]$	Interaction forte entre les baryons
Trou noir stellaire	≥ 3	$8.9 \left(\frac{M}{3M_\odot} \right)$	\emptyset	1	\emptyset
Trou noir supermassif	$\simeq [10^6, 10^9]$	$3 \times 10^9 \left(\frac{M}{10^9 M_\odot} \right)$	\emptyset	1	\emptyset
Univers Observable	$\simeq 6.5 \times 10^{22}$	$\simeq 4.16 \times 10^{26}$	$\simeq 1 \times 10^{-23}$	3	\emptyset

TABLE 1.1 – Tableau de comparaison de différentes estimations de la compacité Ξ pour différents astres, classées par ordre croissant.

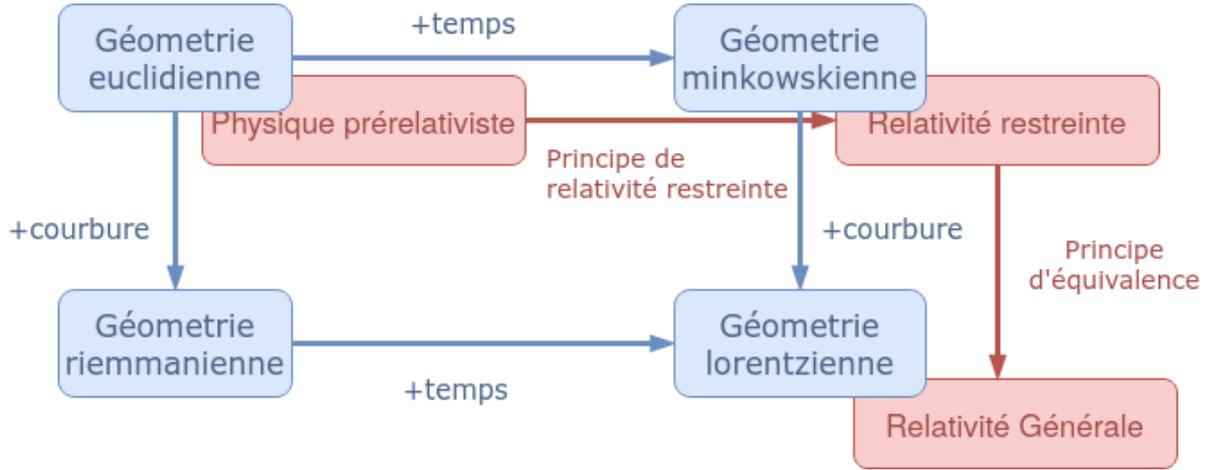


FIGURE 1.2 – Schéma illustrant les différences conceptuelles des théories de la physique macroscopique en fonction de la géométrie qu'elle utilise.

nulle.

1.1.2 Gravitation et géométrie

Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence est une observation d'universalité du mouvement en chute libre. En effet, en l'absence de forces extérieures, les mouvements des corps sont indépendants de leur masse et de leur composition. Il s'agit de la propriété fondamentale de la gravitation, il structure l'espace-temps. De plus, nous comprenons ainsi que la gravitation est avant tout une théorie géométrique. En mécanique newtonienne, nous pouvons construire deux grandeurs. La première est la masse inertielle m_i , celle-ci est la masse du principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = m_i \vec{a}$. Celle-ci est liée au mouvement de l'objet. La seconde grandeur est la masse gravitationnelle m_g , il s'agit de la masse qui provient de la loi universelle de gravitation, il s'agit de la grandeur qui caractérise la quantité de matière d'un objet. Il s'agit de la masse du poids $\vec{P} = m_g \vec{g}$, avec \vec{g} l'intensité du champ gravitationnel. Pour un objet en chute libre, nous pouvons établir,

$$\vec{F} = \vec{P} \longrightarrow m_i \vec{a} = m_g \vec{g} \longrightarrow \vec{a} = \frac{m_g}{m_i} \vec{g} \quad (1.2)$$

Expérimentalement, on mesure une égalité entre la masse inertielle et la masse gravitationnelle $m_i = m_g$. Les dernières mesures du principe d'équivalence $\eta = \frac{|\left(\frac{m_i}{m_g}\right)_1 - \left(\frac{m_i}{m_g}\right)_2|}{\frac{m_i}{m_g}}$, établissent une égalité entre les deux masses avec une précision $\eta < 10^{-15}$ [234].

Il existe donc deux principes d'équivalence, un faible et un principe fort ou d'Einstein. Le premier établit pour tous les corps, l'égalité entre la masse inertielle et la masse gravitationnelle. Le deuxième établit que, dans un référentiel localement inertiel, toutes les lois non gravitationnelles de la nature ont la forme donnée dans le cadre de la rela-

tivité restreinte. En outre, il s'agit d'affirmer que localement, les effets gravitationnels d'un champ de pesanteur sont identiques aux effets qu'un corps subit dans un référentiel accéléré. Autrement dit, il est impossible pour un observateur isolé de différencier l'effet de pesanteur de l'effet de l'accélération. Ainsi, il y a donc équivalence entre l'accélération et le champ de marée, les véritables manifestations de la gravité ne peuvent pas être effacées par un changement de référentiel.

Principe de Mach

En physique pré-relativiste et restreinte, nous considérons la structure de l'espace-temps comme fixe, celle-ci n'est pas déformée par la présence de corps matériels. Les référentiels inertiels sont donc indépendants du matériel de l'univers. Nous pouvons établir que la distribution de l'ensemble de la matière dans l'univers détermine quels référentiels sont inertiels. Ce principe est le principe de Mach.

Généralisation géométrique

Il est possible de généraliser la géométrie minkowskienne ou plate de la relativité restreinte dans une géométrie lorentzienne courbe telle que :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \longrightarrow ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \quad (1.3)$$

Une particule libre a un mouvement inertiel dans cette métrique $g_{\alpha\beta}(x)$, c'est le principe d'équivalence faible. Dans un référentiel localement inertiel $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, c'est le principe d'équivalence d'Einstein. Il est possible d'établir l'équation d'Einstein qui relie la géométrie $G[g]$ à l'énergie et la quantité de mouvement de la matière T .

$$G[g] = \frac{8\pi G}{c^4} T \quad (1.4)$$

Le champ de marée est équivalent à la courbure de l'espace-temps qui est généré par l'énergie et la quantité de mouvement de la matière ($\Delta U = 4\pi G\rho$). Il est aussi important de noter que les champs électromagnétiques E et B peuvent également distordre l'espace-temps avec leurs énergies. Nous verrons plus tard qu'il est possible d'introduire les effets électromagnétiques dans le terme d'énergie impulsion T .

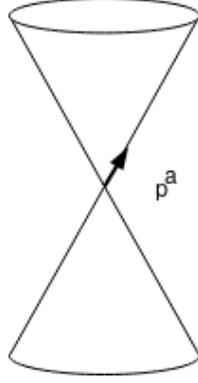


FIGURE 1.3 – Cône de lumière d'un photon, avec sa quadri-impulsion p^a .

1.1.3 Physique en espace-temps courbe

Ligne d'Univers

Pour un photon, la trajectoire suit les géodésiques de lumière, il s'agit comme sur la figure 1.3 de la structure intrinsèque de la variété \mathcal{V}^1 associée à la métrique g_{ab} (\mathcal{V}, g_{ab}). Nous nommons la quadri-impulsion p^a , le vecteur tangent aux géodésiques du genre lumière telle que $g_{ab}p^ap^b = 0$

Pour une particule, que nous assimilons à un point matériel de masse m . La trajectoire suit les lignes d'univers et forme des courbes de genre temps (\mathcal{L}). La quadri-impulsion p^a de la particule est tangent à \mathcal{L} et de genre temps, c'est-à-dire, tel que $g_{ab}p^ap^b = -m^2$.

Nous pouvons définir le temps propre du quadri-déplacement infinitésimal dl^a . En effet, si celui-ci est de genre temps, nous avons $ds^2 = g_{ab}dl^adl^b < 0$. Si nous associons le paramétrage $\mathcal{P}(\lambda)$ de \mathcal{L} , nous définissons $d\tau = \sqrt{-g_{ab}dl^adl^b} = \sqrt{-g_{ab}v^av^b}d\lambda$, avec $dl^A = v^A d\lambda$ où v^a est le quadri-vecteur de base. Pour deux points quelconques $(p, q) \in \mathcal{L}$, on écrit $\tau = \int_p^q d\tau = \int_{\lambda_p}^{\lambda_q} \sqrt{-g_{ab}v^av^b}d\lambda$. Pour une particule, le quadri-vecteur $u^a = \frac{dl^a}{d\tau}$, il s'agit d'un vecteur également tangent à \mathcal{L} paramétré par le temps propre tel que,

$$d\tau^2 = -g_{ab}dl^adl^b \longrightarrow g_{ab} \left(\frac{dl^a}{d\tau} \right) \left(\frac{dl^b}{d\tau} \right) = -1 \longrightarrow g_{ab}u^au^b = 1 \quad (1.5)$$

De même qu'en mécanique pré-relativiste, l'impulsion p^a est proportionnelle à la vitesse u^a avec $p^ap_a = -m^2$ et $v^av_a = -1$ implique $p^a = mu^a$. Il est également possible de définir l'énergie $E^2 = P^aP_a + m^2$, $E = \gamma m$ et la quantité de mouvement $P^a = \gamma mv^a$.

Cinématique Relativiste

Nous avons remarqué qu'en mécanique relativiste, il n'y a plus de simultanéité absolue. Nous pouvons définir pour un observateur \mathcal{O} sur \mathcal{L} deux événements sont simultanés, si

1. Nous appelons variété \mathcal{V} de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace topologique tel qu'en chacun de ses points, nous pouvons définir un voisinage homéomorphe à un ensemble ouvert \mathbb{R}^n

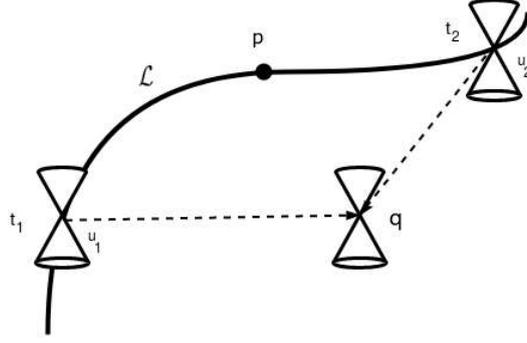


FIGURE 1.4 – Schéma de la définition de la simultanéité entre p et q pour un observateur \mathcal{O} sur la courbe \mathcal{L} .

et seulement si pour $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$, avec t_1 et t_2 le temps entre l'émission et la réception de deux photons à deux points différents u_1 et u_2 , nous avons les deux intervalles de genre lumière $-dt n^a + dt u^a$ et $-dt n^a - dt u^a$. Il est possible de montrer que $u^a n_a = 0$ C'est-à-dire qu'au voisinage de p , pour l'observateur \mathcal{O} sur la courbe \mathcal{L} , on forme un hyperplan de la forme linéaire de la variété $T_p(\mathcal{V})$ à u^a et est de genre espace.

Cette notion de simultanéité nous permet de construire le facteur de Lorentz et la vitesse relative. Pour q et q' simultanés pour l'observateur \mathcal{O} sur \mathcal{L} , nous avons $d\tau = \gamma d\tau'$ où γ est le facteur de Lorentz. De plus, on a $V^a u_a = 0$ avec V^a la vitesse appartenant au plan local de repos de l'observateur. Ainsi, on définit le déplacement infinitésimal de q à q' comme $d\tau V^a$ et la vitesse de \mathcal{O} relativement à \mathcal{O}' : V^a . On décompose donc $d\tau' u'^a = d\tau u^a + d\tau v^a = \gamma d\tau' (u^a + v^a)$. On a donc

$$u'^a = \gamma(u^a + v^a) \quad (1.6)$$

Nous avons aussi

$$u'^a u_a = \gamma(u^a + v^a) u_a = -\gamma \quad (1.7)$$

et

$$u'^a u'_a = \gamma^2 (u^a + v^a)(u_a + v_a) \implies -1 = \gamma^2 (-1 + v^a v_a) \implies \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^a v_a}} \quad (1.8)$$

avec $v^a v_a \geq 0 \implies \gamma \geq 1$, qui décrit la dilatation du temps.

Nous pouvons écrire la décomposition spatiale et temporelle du champ de vitesse v^a telle que

$$v^a = -(v^b u_b) u^a + (v^a + (v^b u_b) u^a) \quad (1.9)$$

avec $-(v^b u_b) u^a$ colinéaire à u^a , il s'agit de la composante temporelle de même $(v^a + (v^b u_b) u^a)$ est orthogonale à u^a , il s'agit de la composante spatiale. Nous utilisons des

opérateurs de projection tangents et orthogonaux à u^a tels que

$$\begin{cases} K^a_b = -u^a u_b \\ k^a_b = \delta^a_b + u^a u_b \end{cases} \quad (1.10)$$

L'équation 1.9 devient

$$v^a = K^a_b v^b + k^a_b v^b \quad (1.11)$$

avec $K^a_b u^b = u^a$ et $K^a_b u^b = u^b = 0$ et $K^a_c K^c_b = k^a_b$, $k^a_c k^c_b = K^a_b$, il s'agit de nilpotence.

Dynamique Relativiste

En chaque point de sa ligne d'univers, un observateur peut mesurer son accélération sous forme d'un quadri-vecteur A^a . Il est orthogonal à sa quadri-vitesse u^a , il est aussi de genre espace. L'accélération est une quantité mesurable sans référence à un référentiel extérieur. Ainsi, chaque accélération est attribuée à une force. Ce qui signifie que la gravitation n'est pas une force. L'accélération est identifiée avec la courbure des lignes d'univers telle que $A^a = u^a \nabla_b u^a$. On a donc A^a et u^a orthogonaux car :

$$u_a A^a = u_a (u^b \nabla_b u^a) = \frac{1}{2} u^b \nabla_b (u^a u_a) = 0 \quad (1.12)$$

Si l'accélération est nulle $A^a = 0$, nous pouvons écrire $u^b \nabla_b u^a = 0$, ce qui a pour conséquence d'induire pour la particule de matière, un mouvement qui suit l'équation de géodésie. Il s'agit d'un résultat rassurant et semblable à la mécanique pré-relativiste. Avec le quadri-vecteur d'accélération on peut définir le quadri-vecteur force $F^a = mA^a = mu^b \nabla_b u^a$, la force est également orthogonale à la vitesse u^a . Par exemple, en relativité générale, nous pouvons écrire la force de Lorentz :

$$mu^b \nabla_b u^a = qF^{bc} u_c \quad (1.13)$$

Par la même occasion nous définissons le tenseur électromagnétique $F^{bc} u_c = E^b F_{bc}$

Tenseur d'énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion T^{ab} ou *Stress-Energy tensor* en anglais est un tenseur de rang deux qui est symétrique. Il décrit tous les aspects énergétiques d'un système, comme l'énergie interne, la masse, la densité ou encore la viscosité. Il s'agit du flux de P^a à travers une surface de X^b constante.

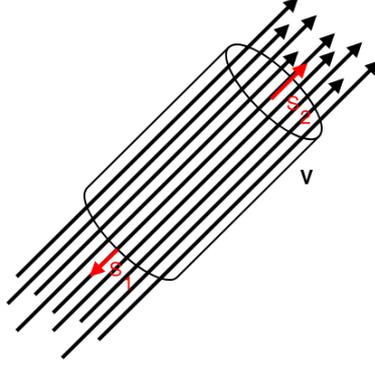


FIGURE 1.5 – Schéma du tube de flux pour la démonstration d'énergie de masse dans un tube à flux de particules conservées.

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{10} & T^{20} & T^{30} \\ T^{01} & T^{11} & \dots & \dots \\ T^{02} & \vdots & T^{22} & \ddots \\ T^{03} & \vdots & \ddots & T^{33} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Avec T^{00} la densité d'énergie, $T^{0,j}$ et $T^{i,0}$ les densités d'impulsion, T^{ii} les pressions ou *stress* normal et les autres coefficients sont les termes de cisaillement. Le tenseur d'énergie-impulsion T_{ab} est caractérisé par le champ u^a de quadri-vitesse et le champ scalaire de densité d'énergie de masse ρ ou aussi appelé : densité de particule de volume S' de trois dimensions. Ce dernier, est orthogonal à u^a tel que $\rho = \frac{Nm}{S'}$ avec N le nombre de lignes d'univers traversant le volume S' . En l'absence d'interaction, c'est-à-dire $A^a = u^b \nabla_b u^a = 0$, les particules suivent les géodésiques.

Nous allons nous intéresser à la conservation de l'énergie, mais également à la conservation du nombre de particules. Pour cela, nous considérons un tube de flux (voir figure 1.5) de volume V et de sections S_1 et S_2 , dans lequel le flux de particules entrant est identique au flux de particules sortant que l'on écrira S^a tel que

$$\int_{S_1} \rho u_a dS^a + \int_{S_2} \rho u_a dS^a = 0 \quad (1.15)$$

avec $u_a dS^a = 0$ sur les sections latérales du tube. Nous considérons que le flux de particules ne sort pas par les côtés du tube.

Ainsi,

$$\int_{S_{Tot}} \rho u_a dS^a = 0 = \int_V \nabla_a (\rho u^a) dV = 0 \quad (1.16)$$

Nous avons donc $\nabla_a (\rho u^a) = 0$ ce qui revient à écrire l'équation de continuité ;

$$u^a \nabla_a \rho + \rho \nabla_a u^a = 0 \quad (1.17)$$

En remarquant qu'en combinant l'équation des géodésiques $u^a \nabla_b u^b = 0$ et l'équation de continuité, il est possible d'établir :

$$\rho u^a \nabla_a u^b + u^b \nabla_a (\rho u^a) = 0 \implies \nabla_a T^{ab} = 0 \quad (1.18)$$

Avec $T^{ab} = \rho u^a u^b$. Nous avons donc bien la conservation locale de l'énergie-impulsion.

Symétrie et lois de conservation

Nous parlerons dans ce paragraphe d'isométrie, il s'agit de la symétrie de la métrique, c'est-à-dire les transformations qui laissent la métrique invariante. Par exemple, si nous considérons l'espace-temps de Minkowski, pour rappel $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ tel que $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Alors, lorsque celui-ci subit la translation $X^\mu \longrightarrow X^\mu + a$ avec a une constante est invariant. Nous pouvons montrer trivialement que la métrique est inchangée. Il s'agit donc bien d'une isométrie. De manière générale pour un système de coordonnées, si nous avons $\partial_{\delta^*} g_{\mu\nu} = 0$, cela implique la transformation suivante $X^{\delta^*} \implies X^{\delta^*} + a$, avec a une constante et X^{δ^*} est une des coordonnées. Ce qui ne change pas la métrique, c'est donc une isométrie dans le cas général. Il s'agit d'établir la conséquence de cette isométrie pour le mouvement des particules sur une géodésie. Pour cela, nous écrivons l'équation des géodésies dans un système de coordonnées.

$$0 = p^\lambda \nabla_\lambda p_\tau = p^\lambda \partial_\lambda p_\mu - \Gamma_{\lambda\mu}^\delta p_\delta \quad (1.19)$$

avec $\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cb} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})$ le symbole de Christoffel.

En écrivant les équations du mouvement d'une particule de masse m dans la métrique g_{ab} :

$$m \frac{dp^\mu}{d\mu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu^*} g_{\nu\lambda}) p^\lambda p^\nu \quad (1.20)$$

Et, en supposant, $\partial_{\mu^*} g_{\nu\lambda} = 0$ nous déduisons $\frac{dp^{\mu^*}}{d\mu} = 0$. Autrement dit, la conservation de mouvement de p_{μ^*} . Il convient que cela soit une quantité conservée le long de géodésie. Il est alors important de constater le besoin d'introduire une description tensorielle. Pour cela, nous choisissons d'introduire $K^a = (\partial_{\mu^*})^a = \delta_{\mu^*}^\alpha (\partial_\alpha)^a$, de tel que $p_{\mu^*} = K_a p^a$.

$$\frac{dp^{\mu^*}}{d\tau} = 0 \iff p^a \nabla_a (K_b p^b) = 0 \quad (1.21)$$

$$p^a \nabla_a (K_b p^b) = p^a K_b \nabla_a p^b + p^a p^b \nabla_a K_b = \frac{1}{2} p^a p^b (\nabla_a K_b + \nabla_b K_a) \quad (1.22)$$

avec $p^a K_b \nabla_a p^b = 0$, car il s'agit d'une conséquence d'une particule suivant sa géodésie.

Nous démontrons ainsi ce que l'on appelle l'équation de Killing :

$$\nabla_{(a}K_b) = 0 \iff p^a \nabla_a (K_b p^b) = 0 \quad (1.23)$$

avec $\nabla_a K_b = \frac{1}{2} (\nabla_a K_b + \nabla_b K_a)$. Cette équation de Killing est définie à une constante multiplicative près. Elle est liée à l'intégrale première d'énergie et de moment angulaire. Pour le tenseur d'énergie-impulsion, nous avons :

$$\nabla_a (T^{ab} K_b) = (\nabla_a T^{ab}) K_b + T^{ab} \nabla_a K_b = \frac{1}{2} (T^{ab} + T^{ba}) \nabla_a K_b = T^{ab} \Delta_{(a} K_b) = 0 \quad (1.24)$$

Donc la conservation de $T^{ab} K_b$. Il est possible de généraliser l'équation de Killing au tenseur de Killing :

$$\Delta_{(a} K_{b_1 \dots b_n)} = 0 \iff p^a \Delta_a (K_{b_1 \dots b_n} p^{b_1} \dots p^{b_n}) = 0 \quad (1.25)$$

1.1.4 Gravitation Relativiste

Tenseur de courbure ou tenseur de Riemann

Avec un transfert parallèle d'un vecteur sur une boucle infinitésimale donnée par A^a et B^b , nous nous attendons à obtenir la propriété suivante.

$$\frac{\delta^2}{\delta_a \delta_b} V^c = R^c{}_{dab} V^d A^{ab} \quad (1.26)$$

où V^a sont les champs vectoriels de la base naturelle, δ_a, δ_b les deux déplacements infinitésimaux de respectivement A^a et B^b et $R^c{}_{dab}$ le tenseur de courbure ou de Riemann. Nous introduisons également les commutateurs $[\nabla_a, \nabla_b] V^b$ qui mesurent la différence entre le transfert parallèle le long de A et après B , mais également le transfert parallèle le long de B et après A .

$$\begin{aligned} [\nabla_a, \nabla_b] V^b &= \nabla_a \nabla_b V^c - \nabla_b \nabla_a V^c = \partial_a (\nabla_b V^c) - \Gamma^d{}_{ab} \nabla_a V^c + \Gamma^c{}_{ae} \nabla_b V^e \\ &\quad - (\partial_b (\nabla_a V^c) - \Gamma^d{}_{ba} \nabla_b V^c + \Gamma^c{}_{be} \nabla_a V^e) \\ &= (\partial_a \Gamma^c{}_{be} - \partial_b \Gamma^c{}_{ac} + \Gamma^c{}_{ad} \Gamma^d{}_{be} - \Gamma^c{}_{bd} \Gamma^d{}_{ae}) V^e - (\Gamma^d{}_{ab} - \Gamma^d{}_{ba}) \nabla_d V^c \end{aligned} \quad (1.27)$$

avec $R^c{}_{eab} = \partial_a \Gamma^c{}_{be} - \partial_b \Gamma^c{}_{ac} + \Gamma^c{}_{ad} \Gamma^d{}_{be} - \Gamma^c{}_{bd} \Gamma^d{}_{ae}$ le tenseur de Riemann et $T^d{}_{ab} = \Gamma^d{}_{ab} - \Gamma^d{}_{ba}$ le tenseur de torsion qui est nul dans notre cas. Ceci conduit à l'égalité sui suit :

$$[\nabla_a, \nabla_b] V^b = R^c{}_{eab} V^b \quad (1.28)$$

Il en est de même pour le vecteur ω_d du champ vectoriel de la base dual : $[\nabla_a, \nabla_b] \omega^b = R^c{}_{eab} \omega^b$.

Cette équation nous conduit à établir l'identité de Ricci, il s'agit d'une généralisation pour un tenseur de rang (k, l) :

$$[\nabla_a, \Delta_b] X^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} = R^c{}_{eab} X^{ec_2 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} + \dots - R^e{}_{d_1 ab} X^{c_1 \dots c_k}_{ed_2 \dots d_l} \quad (1.29)$$

Le tenseur de Riemann $R^c{}_{dab}$, dans le cas d'un système de coordonnées avec $g_{\mu\nu}$ constant pour tous les μ, ν , cela implique que le tenseur de Riemann est nul $R^c{}_{dab} = 0$, l'espace est donc plat. La réciproque est aussi juste, pour un espace plat, nous avons $R^c{}_{dab} = 0$ ce qui implique que $g_{\mu\nu}$ constant pour tous les μ, ν . Le tenseur contient les dérivées premières et secondes de la métrique. Ce tenseur est également symétrique, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} R^{cdab} &= -R_{cdba} \longrightarrow R_{vd(ab)} = 0 \\ R^{cdab} &= -R_{dcab} \longrightarrow R_{(cd)ab} = 0 \\ R^{cdab} &= -R_{abcd} \\ R^{cdab} + R_{cabd} + R_{cbda} &= 0 \longrightarrow R_{c[dab]} = 0 \text{ and } R_{[cda]b} = 0 \\ R_{[cdab]} &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Par conséquent, il y a donc $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ composantes indépendantes avec n la dimension du tenseur de Riemann.

Avec les propriétés de symétrie, nous pouvons établir l'identité de Bianchi. En effet, $R^{cdab} = -R_{dcab} \longrightarrow R_{(cd)ab} = 0$ conduit à écrire $\nabla_{[eR_{cd]ab}} = 0$ ainsi on déduit $\nabla_e R_{cdab} + \nabla_c R_{deab} + \nabla_d R_{ecab} = 0$. Nous pouvons écrire aussi le tenseur de Ricci,

$$R_{ab} = R^c{}_{acb} \quad (1.31)$$

avec $R_{ab} = R_{ba}$, on construit le tenseur de Ricci en réduisant le tenseur de Riemann avec la métrique $R_{ab} = g^{cd} R_{cabd}$.

De la même manière, on construit le scalaire de Ricci qui lui aussi à son tour est la réduction du tenseur de Ricci avec la métrique.

$$R = R^a{}_a = g^{ab} R_{ab} \quad (1.32)$$

En utilisant l'identité de Bianchi et en la contractant à deux reprises avec la métrique, nous obtenons :

$$\nabla_a \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) = 0 \quad (1.33)$$

Nous en déduisons le tenseur d'Einstein $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$

Dans le but de résumer ce paragraphe, nous allons regarder le calcul de tous les tenseurs présentés dans cette partie sur la 2-sphère définie par $ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$

avec $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$. Nous avons donc

$$\begin{cases} \Gamma_{bc}^a : \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta \\ R_{dab}^c : R_{\phi\theta\phi}^\theta = -\sin^2 \theta & R_{\theta\phi\theta\phi} = a^2 \sin^2 \theta \\ R_{ab} : R_{\theta\theta} = g^{\phi\phi} R_{\theta\phi\theta\phi} = 1 & R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta \\ R : R = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = \frac{2}{a^2} \\ G_{ab} : G_{\theta\theta} = R_{\theta\theta} - \frac{1}{2} R g_{\theta\theta} = 0 & G_{\phi\phi} = R_{\phi\phi} - \frac{1}{2} R g_{\phi\phi} = 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

Déviations des géodésiques

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le comportement d'une famille de géodésiques du genre temps $\gamma_s(t)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. $\gamma_s(t)$ est une géodésique paramétrisée par le paramètre t . Cette famille définie définit une surface à deux dimensions, nous appelons surface, l'ensemble des points $X^\mu(d, t)$. Il existe ainsi deux types de champ de vecteur, les vecteurs tangents à la surface $T^a = (\partial_t)^a$ et les vecteurs de séparation $T^a = (\partial_s)^a$. Nous définissons ainsi la vitesse relative entre les géodésiques $v^a = T^b \nabla_b S^a$ et l'accélération relative entre les géodésiques $B^a = T^b \nabla_b v^a$.

En conséquence, nous construisons le commutateur de deux vecteurs comme

$$[X, Y]^a = X^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b X^a \stackrel{(a)}{=} X^b \nabla_b Y^a - Y^b \nabla_b X^a \quad (1.35)$$

nous notons que l'égalité ^(a) est vraie si est seulement s'il n'a pas de torsion.

Pour les deux champs de vecteurs présentés précédemment, nous avons la version de la commutation sans torsion

$$[S, T]^a = S^b \nabla_b T^a - T^b \nabla_b S^a = 0 \quad (1.36)$$

Nous pouvons ainsi calculer l'accélération relative entre deux géodésiques :

$$\begin{aligned} B^a &= T^b \nabla_b v^a = T^b \nabla_b (T^c \nabla_c S^a) \stackrel{(a)}{=} T^b \nabla_b (S^c \nabla_c T^a) \\ &\stackrel{(b)}{=} (T^b \nabla_b S^c) (\nabla_b T^a) + T^b S^c \nabla_b \nabla_c = (S^b \nabla_b T^c) (\nabla_c T^a) + T^b S^c (\nabla_c \nabla_b T^a + R_{adc}^b T^d) \\ &= R_{abc}^d T^d T^b S^c \end{aligned} \quad (1.37)$$

nous obtenons cette égalité ^(a), car nous avons montré que les deux champs de vecteurs S et T commutent au sens de la relativité générale. L'égalité ^(b) est obtenue avec la règle de Leibnitz $\nabla_c (T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_n} S^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_n}) = (\nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_n}) S^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_n} + T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_n} (\nabla_c S^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_n})$. Nous remarquons que l'accélération relative entre deux géo-

désiques voisines est proportionnelle au terme de courbure de l'espace-temps, il s'agit du tenseur de Riemann. Il s'agit ici de la manifestation de la force de marée.

Équation d'Einstein

En gravitation pré-relativiste ou Newtonienne, nous utilisons d'une part, le principe fondamental de la dynamique $\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi$ et l'équation de Poisson $\Delta\Phi = \vec{\nabla}^2\Phi = 4\pi\rho$. Ainsi, pour deux corps séparés par \vec{s} dans un potentiel Φ l'accélération relative est donnée par $\ddot{\vec{s}} = -(\vec{s} \cdot \vec{\Delta})\vec{\nabla}\Phi$.

En relativité générale, il est possible de faire l'analogie de l'effet de marée avec la dérivation ds géodésique de tel que $\ddot{\vec{s}} = -(\vec{s} \cdot \vec{\Delta})\vec{\nabla}\Phi$ devient $u^c\nabla_c(u^b\nabla_b s^a) = R^a{}_{dbc}u^a u^b s^c$ avec $-\partial^a\partial_c\Phi$ équivalent à $-R^a{}_{dc}u^a u^b$. Le terme $\Delta\Phi = \partial^a\partial_a\Phi$ est lui équivalent à $R_{ab}u^a u^b$. Nous pouvons aussi trouver une analogie à la masse volumique ρ . En effet, nous pouvons faire un parallèle entre la densité d'énergie de masse vue par un observateur avec u^a , $T_{ab}u^a u^b$ et l'équation de poisson. Pour cela, il est possible d'essayer $R_{ab} = \frac{4\pi G}{c^4}T_{ab}$, ceci n'est pas concluant, car si nous avons $\nabla^a T_{ab} = 0$ cela implique $\nabla^a R_{ab} = 0$ mais d'après l'identité de Bianchi nous avons $\nabla^a(R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}) = 0$. Ce qui nous conduit à écrire que si $\nabla^a R_{ab} = 0$ nous avons $\nabla_a R = 0$, cela implique $\partial_a R = 0$ et $\partial_a T = 0$ et donc nous avons R et T constants. Ainsi, nous établissons l'équation d'Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab} \quad (1.38)$$

Nous pouvons aussi l'écrire

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab} \quad (1.39)$$

avec $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$. L'identité de Bianchi s'écrit $\nabla^a G_{ab} = 0$, celle-ci implique donc $\nabla^a T_{ab}$. Nous avons donc bien la conservation locale de l'énergie-impulsion. Il s'agit d'une conséquence de l'équation d'Einstein. L'équation d'Einstein permet aussi d'établir la propriété fondamentale de la gravitation relativiste. En effet, la géométrie de l'espace-temps $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$ est générée par les distributions locales de masse et d'énergie T_{ab} . Autrement dit la gravité n'existe pas, il s'agit d'une conséquence de la déformation locale de l'espace-temps générer par la distribution de masse et d'énergie. Il existe des formulations alternatives, en effet, en contractant l'équation d'Einstein avec la métrique g^{ab} .

$$R - \frac{1}{4}R4 = \frac{8\pi G}{c^4}T \implies R = -\frac{8\pi G}{c^4}T \quad (1.40)$$

en utilisant $g_{ab}g^{ab} = 4$. Nous avons finalement cette nouvelle équation analogue :

$$R_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab} \right) \quad (1.41)$$

L'une des caractéristiques est la non-linéarité du champ gravitationnel couplé avec lui-

même. Nous avons entre autres pour un fluide parfait $T^{ab} = (E + P)u^a u^b + P g^{ab}$, où $E = \gamma^2 \rho c^2$ est la densité énergie et P la pression du fluide parfait. En effet, en champ faible pour un système de coordonnées $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$ la métrique s'écrit :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= - \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^{-2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &\simeq - \left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \end{aligned} \quad (1.42)$$

le potentiel gravitationnel Newtonien dans la limite pré-relativiste respecte $|\Phi| \ll c^2$. Il est possible de remarquer qu'en utilisant l'équation d'Einstein avec un fluide parfait non-relativiste, c'est-à-dire $p \ll \rho c^2$, l'équation d'équation d'Einstein se réduit à une unique équation qui est l'équation de Poisson $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$.

Une deuxième caractéristique de l'équation d'Einstein est que cette équation implique qu'une particule libre suit les géodésiques. En effet, nous avons pour une particule libre $T^{ab} = \rho u^a u^b$ et donc $\nabla_a G^{ab} = 0$ qui implique $\nabla_a T^{ab} = 0$. Nous démontrons que lorsque $u^b \nabla_a (\rho u^a) = 0$ ce dernier caractérise la conservation de la masse, $\rho u^a \nabla_a u^b + u^b \nabla_a (\rho u^a) = 0$. Nous en déduisons $u^a \nabla_a u^b = 0$, autrement dit les particules libres suivent bien les géodésiques. Dans les années 1930, on se rend compte de l'expansion de l'univers, Einstein voulant conserver les conséquences de son équation, rajoute un paramètre, que l'on nomme constante cosmologique Λ . pour écrire l'équation d'Einstein d'un Univers accéléré :

$$\begin{aligned} R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \\ R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} &= \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ab} - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{ab} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T'_{ab} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Λ est une constante qui exprime l'accélération de l'expansion de l'Univers. Nous l'interprétons comme une pression négative, et par ailleurs comme une énergie sombre ou *dark energy* en anglais. Ceci est obtenu en modifiant le tenseur d'énergie impulsion de l'Univers T'_{ab} . L'ajout de cette constante ne change en rien les propriétés établies avec l'équation d'Einstein sans l'ajout. En effet, les résultats obtenus sont des conséquences de calculs utilisant des grandeurs dérivées. De plus, la relativité générale d'Einstein est une théorie différentielle et par conséquent, les conclusions sont toujours vraies à une constante près. La nouveauté de cet ajout est le changement de la nature de l'Univers. En effet, l'ajout de cette constante a préalablement été introduit par Einstein pour empêcher l'Univers d'avoir une histoire. Il l'introduit pour tuer l'évolution de l'Univers. Il reconnaîtra qu'il s'agit de la plus grosse erreur de sa vie.

Dans le cadre d'un univers isotrope et homogène à grande échelle (pour notre univers, nous parlons de 100 Mpc) nous établissons une nouvelle équation d'Einstein. Nous enten-

dans isotrope si et seulement si les propriétés de l'univers sont les mêmes dans toutes les directions, et homogène si et seulement s'il n'y a pas d'observateur de l'Univers privilégié. Autrement dit l'observation de l'univers ne dépend pas de la position de l'observateur.

1.2 Cosmologie

La cosmologie est l'étude de l'Univers, elle regroupe l'étude de son origine, de sa nature, de sa structure et de son histoire. Contrairement à l'astrophysique qui est l'étude des objets contenus dans l'Univers, la cosmologie est l'étude du contenant. Elle est devenue une science lorsqu'on a pris conscience que l'Univers lui aussi avait une histoire. Dans les années 1920, Edwin Hubble s'est intéressé à des nuages appelaient nébuleuses. Aujourd'hui, nous savons qu'il s'agit de galaxies. Il a remarqué en 1929 [129] que toutes les nébuleuses s'éloignent de nous de la même manière. Dès 1927 [157], l'abbé Georges Lemaître, en se fondant sur les observations, montre que l'Univers est en expansion en démontrant que les galaxies s'éloignent les unes des autres. De plus, l'effet est plus important pour les galaxies qui nous sont plus lointaines. En inversant l'écoulement du temps, il montre que les galaxies semblent toutes se rapprocher. Si l'on se permet d'aller plus loin, l'Univers a donc une "naissance" que l'on nomme le Big Bang. Plus tard, on se rendra compte qu'il s'accompagne d'une dilatation de la température de l'Univers. En effet, il semble être de plus en plus froid. On parle aujourd'hui plus volontiers de Big Bang chaud.

1.2.1 Solution cosmologique dans un cadre d'un espace symétrique

Le premier principe de la cosmologie est de considérer un univers isotrope et homogène partout, pour des échelles que l'on considère comme suffisamment grandes. Nous considérons un espace isotrope si et seulement si pour un point p de l'espace, nous avons pour deux vecteurs V et W appartenant à la trajectoire d'une particule passant par p , une isométrie qui laisse p invariante et transforme V en un vecteur colinéaire à W . Autrement dit, les propriétés de la physique sont les mêmes partout dans l'Univers. Nous définissons le concept d'homogénéité tel que pour toute paire de points p et q qui appartiennent à un espace, il existe une isométrie qui fait passer p à q . C'est-à-dire que les lois de la physique sont indépendantes de la direction. Les deux concepts d'homogénéité et d'isotropie impliquent que l'Univers est symétrique. D'après l'équation 1.23 nous avons au maximum $\frac{n(n+1)}{2}$ vecteur de Killing, dans notre espace-temps à 4 dimensions, nous avons donc 10 vecteurs de Killing. Dans son cours sur la relativité générale *Spacetime and Geometry*, Sean Carroll démontre qu'homogénéité et isotropie de l'Univers ont pour conséquence d'avoir K et R constants sur toute la variété de l'Univers.

$$R^c{}_{dab} = K (\delta_a^c g_{db} - \delta_b^c g_{da}) \quad (1.44)$$

avec $K = \frac{R}{n(n-1)}$. Nous pouvons donc établir que l'espace-temps cosmologique de dimension $n = 4$, peut-être assimilé à une métrique lorentzienne symétrique dont K est le paramètre de courbure de l'Univers. Nous avons donc trois Univers possibles :

- $K = 0$: il s'agit de l'espace-temps de Minkowski, celui de la relativité restreinte et celui de l'espace-temps plat sans distribution de masse-énergie.
- $K > 0$: il s'agit de l'espace-temps à courbure positive de Sitter. Dans ce cas, nous utilisons la métrique hyperbolique de quatre dimensions plongées dans un espace plat de Minkowski de dimension cinq, tel que

$$ds_{Sitter}^2 = -du^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \quad (1.45)$$

Les trajectoires dans cet Univers sont des hyperboloïdes ($-u^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \alpha^2$, avec α une constante), nous introduisons les quatre paramètres de la métrique de Sitter (t, χ, θ, φ) en fonction des paramètres de la métrique de Minkowski à cinq dimensions (u, x, y, z, w), tel que

$$ds_{Sitter}^2 = -c^2 dt^2 - \alpha^2 \cosh^2 \frac{ct}{x} (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \varphi d\varphi^2)) \quad (1.46)$$

avec $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \varphi d\varphi^2$ la métrique sphérique et symétrique de dimension deux S^2 et de même $d\Omega_3^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \varphi d\varphi^2)$ la métrique sphérique et symétrique de dimension trois S^3 . Dans ce cas, nous avons $\alpha = \frac{1}{\sqrt{K}}$.

- $K < 0$: il s'agit de la métrique en espace-temps d'anti-Sitter à courbure négative. De la même manière que pour l'espace de Sitter, nous pouvons introduire une métrique hyperbolique de dimension quatre (t, ρ, θ, φ) dans une métrique plate de dimension 5 (U, V, X, Y, Z), tel que

$$ds_{anti-Sitter}^2 = -dU^2 - dV^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \quad (1.47)$$

En utilisant l'hyperboloïde ($-U^2 - V^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = -\alpha^2$, avec $\alpha = \text{Cst}$), nous arrivons à la métrique d'anti-Sitter à quatre dimensions :

$$ds_{anti-Sitter}^2 = -c^2 \cosh^2 \rho dt^2 + \alpha^2 (d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \varphi d\varphi^2)) \quad (1.48)$$

avec $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \varphi d\varphi^2$ la métrique sphérique et symétrique de dimension deux S^2 . Dans ce cas, nous avons $\alpha = \frac{1}{\sqrt{-K}}$.

Tenseur d'énergie-impulsion pour la cosmologie

Le tenseur de l'énergie-impulsion en dimension 4 s'écrit comme

$$R_{ab} = R^c{}_{acb} = K (\delta_c^a g_{ab} - \delta_b^c g_{ac}) = 3K g_{ab} \quad (1.49)$$

avec l'équation d'Einstein, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} G_{ab} &= R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 3K g_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \\ &= 3K g_{ab} - \frac{1}{2} (n(n-1)K) g_{ab} = -3K g_{ab} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Nous avons donc

$$T_{ab} = -\frac{3c^4 K}{8\pi G} g_{ab} \quad (1.51)$$

Ici T_{ab} correspond à une constante cosmologique, c'est-à-dire dans le cas d'un fluide parfait nous avons $\rho = -P = \frac{3c^4 K}{8\pi G}$, ce qui correspond à une pression négative, on parlera d'énergie du vide. Pour résumer, nous avons

$$\begin{aligned} K = 0 &\implies \rho = 0 \implies \text{5-Minkowski} \\ K < 0 &\implies \rho < 0 \implies \text{anti de Sitter} \\ K > 0 &\implies \rho > 0 \implies \text{de Sitter.} \end{aligned} \quad (1.52)$$

1.2.2 La métrique de Friedmann Lemaître Robertson Walker (FLRW)

Nous conservons la métrique symétrique des coordonnées spatiales, auxquelles nous ajoutons l'évolution temporelle en t pour la rendre plus générale. Il s'agit d'une construction en feuillet, tel que le temps apparaît indépendant des dimensions spatiales. En effet, nous voulons des lois de la physique qui ne changent pas de nature au cours du temps et qu'ils n'aient pas de changement des propriétés en fonction des zones de l'Univers. Nous avons donc un temps dit cosmologique, tel que celui-ci respecte la métrique :

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) d\sigma^2 \quad (1.53)$$

avec $d\sigma^2 = \gamma_{ij}(u) du^i du^j$, (u^1, u^2, u^3) sont les coordonnées la métrique des hypersurfaces spatiales et symétriques de dimension 3, $R(t) = R_0 a(t)$ le facteur d'échelle. Il s'agit du rayon de courbure des sections spatiales. Nous pouvons aussi utiliser la notation $a(t)$ pour parler du facteur d'échelle avec $a_0 = a(t_{\text{today}}) = 1$. Dans ce cas, t_0 désigne le temps d'aujourd'hui, mais également de l'âge de l'Univers. Ainsi, les coordonnées comobiles de

l'Univers sont (t, u^1, u^2, u^3) pour un observateur immobile ($u^i = \text{Cst}$), nous avons $d\sigma = 0$. L'observateur comobile est en chute libre. De plus, pour cet observateur $\tau = t$ et l'Univers est isotrope.

Métrie de l'hypersurface spatiale et symétrique de dimension 3

Dans le cas d'une dimension $n = 3$, nous avons $K = \frac{R}{6}$ (voir équation 1.44) et

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= K (\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \\ R_{ij} &= \gamma^{kl} R_{ijkl} = 2K \gamma_{ij} \end{aligned} \quad (1.54)$$

La symétrie sphérique implique que nous pouvons réécrire la métrique $d\sigma^2$ avec la métrique de Schwarzschild [218] tel que

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}(u) du^i du^j = e^{2\beta(\bar{r})} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega_2^2 \quad (1.55)$$

Les composantes du tenseur de Ricci R_{ab} sont

$$\begin{aligned} R_{11} &= {}^{(1)} \frac{2}{\bar{r}} \partial_{\bar{r}} \beta = 2K \gamma_{11} = 2K e^{2\beta(\bar{r})} \\ R_{22} &= {}^{(2)} e^{-2\beta} (\bar{r} \partial_{\bar{r}} \beta - 1) + 1 = 2K \gamma_{22} = 2K \bar{r}^2 \\ R_{33} &= {}^{(3)} [e^{-2\beta} (\bar{r} \partial_{\bar{r}} \beta - 1) + 1] \sin^2 \theta = 2K \gamma_{33} = 2\bar{r}^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (1.56)$$

En introduisant l'égalité ⁽¹⁾ dans ⁽²⁾ et ⁽³⁾ nous obtenons $K\bar{r}^2 - e^{-2\beta} + 1 = 2K\bar{r}^2$ et $e^{-2\beta} = -K\bar{r}^2 + 1$. Nous avons donc une nouvelle forme de la métrique,

$$d\sigma^2 = \frac{d\bar{r}^2}{1 - K\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega_2^2 \quad (1.57)$$

Nous pouvons montrer que $d\sigma^2$ est invariante sous l'homothétie λ^{-1} est une constante. Nous introduisons le paramètre de courbure $\bar{k} = (-1, 0, 1)$, avec $\lambda = \sqrt{|\bar{k}|}$. Ainsi avec le paramètre χ , tel que $d\chi = \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{k}\bar{r}^2}}$. Les trois cas possibles de courbure donnent une condition sur la forme de \bar{r} , tel que $\bar{r} = S_{\bar{K}}(\chi)$:

$$S_{\bar{K}}(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & \bar{k} = 1 \\ \chi, & \bar{k} = 0 \\ \sinh \chi, & \bar{k} = -1 \end{cases} \quad (1.58)$$

Nous avons finalement :

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + S_{\bar{K}}^2(\chi) d\Omega_2^2 \quad (1.59)$$

Résumé de la métrique de l'hypersurface spatiale et symétrique de dimension 3

- $\bar{K} = 0$: espace-temps plat, espace euclidien $\rightarrow d\sigma^2 = d\chi^2 + \chi^2 d\Omega_2^2$
- $\bar{K} = 1$: espace-temps fermé, espace de trois-sphère $S^3 \rightarrow d\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_2^2$
- $\bar{K} = -1$: espace-temps ouvert, espace hyperbolique $H^3 \rightarrow d\sigma^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega_2^2$

Métrie de l'espace-temps Nous avons montré que le principe cosmologique a pour conséquence une métrie de l'espace-temps en feuille. Nous rajoutons donc à la métrie de l'hypersurface spatiale et symétrique de dimension 3, le paramètre temporel t tel que :

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{k}\bar{r}^2}} + \bar{r}^2 d\Omega_2^2 \right] \quad (1.60)$$

Il s'agit de la métrie de FLRW.

Transformation des coordonnées Le facteur d'échelle $R(t)$ peut être transformé sans dimension tel que $R(t) \rightarrow \frac{R(t)}{R_0} = a(t)$, avec $R_0 = R(t_0)$. Ainsi, \bar{r} et \bar{k} deviennent respectivement $\bar{r}R_0 = r$ et $\frac{\bar{k}}{R_0^2} = k$. Nous avons donc une nouvelle forme de la métrie de FLRW :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} + r^2 d\Omega_2^2 \right] \quad (1.61)$$

Il existe un lien entre la distance physique et comobile, telle que la distance physique $d_{ph}(t) = a(t)d_{com} = a(t)d_c$

Symbole de Christoffel Nous écrivons uniquement les composantes non nulles et introduisons $\dot{a} = \frac{da}{dt}$.

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, \Gamma^0_{22} = a\dot{a}r^2, \Gamma^0_{33} = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma^i_{0i} &= \frac{\dot{a}}{a}, \Gamma^1_{11} = \frac{kr}{1 - kr^2}, \Gamma^1_{22} = -r(1 - kr^2), \Gamma^1_{33} = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta, \Gamma^3_{22} = -\cot \theta \end{aligned} \quad (1.62)$$

Tenseur et scalaire de Ricci Nous écrivons uniquement les composantes non nulles et introduisons $\ddot{a} = \frac{d\dot{a}}{dt}$.

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - ka^2}, R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\ R_{33} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (1.63)$$

Le tenseur de Ricci est la courbure de l'espace-temps,

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad (1.64)$$

1.2.3 Équation Friedmann

Tenseur d'énergie-impulsion

Nous calculons le tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide parfait, au repos en coordonnées comobiles donc isotrope dans notre Univers.

Ainsi, nous avons pour $u^\mu(1, 0, 0, 0)$,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & g_{ij}P \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

et

$$T^\mu{}_\nu = g^{\sigma\mu} T_{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

donc, le scalaire de l'énergie-impulsion est donc $T = T^\mu{}_\mu = -\rho + 3P$.

La condition de conservation locale du tenseur d'énergie-impulsion ($\nabla^a T_{ab} = 0$) selon la composante 0, nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu T^\mu{}_0 = \partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} T^\lambda{}_0 - \Gamma^\lambda{}_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda \\ 0 &= -\partial_t \rho + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + P) \end{aligned} \quad (1.67)$$

Nous en déduisons l'équation d'état de l'Univers $P(\rho) = \omega P$, avec ω constant pour les fluides les plus simples tels que

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega) \frac{\dot{a}}{a} \implies \rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (1.68)$$

L'Univers contient 3 types de matières qui ont des équations de densité d'énergie :

- Matière baryonique, il s'agit de la matière non-relativiste, elle comporte les baryons, la matière noire froide² et la poussière. Celle-ci à $P_\mu \simeq 0$ donc $\Omega_\mu \simeq 0$, ce qui conduit à $\rho_M \propto a^{-3}$, de plus, nous avons l'énergie totale de cette espèce

2. La matière noire est le nom donné à une espèce de matière hypothétique qui n'émet pas de lumière (noire) et qui ne participe pas à la thermodynamique de son environnement (froid), elle a été rajoutée comme un ingrédient de l'Univers à la suite d'un échec. En effet, nous n'arrivons pas à expliquer la distribution de vitesse de rotation des grandes structures comme les galaxies avec la mécanique Newtonienne. Si on rajoute un terme de masse froide et noire, il est possible de retrouver un accord entre la théorie et les observations. C'est le physicien Fritz Zwicky, [254] qui en 1937 parle en premier de matière noire.

$E_{tot} = \rho a^{-3}$ qui est constante.

- Matière rayonnante, il s'agit de l'espèce relativiste qui englobe les photons, les neutrinos légers ou les axions. Pour cette espèce, on écrit le tenseur d'énergie impulsion comme,

$$T_R^{ab} = T_e m^{ab} = F^{ac} F^b{}_c - \frac{1}{4} g^{ab} F_{cd} F_{cd} \quad (1.69)$$

Le scalaire de l'énergie impulsion est nul tel que $T_R = T_{Ra}^a = 0$ implique $T_R = -\rho_R + 3P_R \implies P_R = \frac{1}{3}\rho_R$ et donc pour cette espèce, nous avons $\omega_R = \frac{1}{3}$. Nous avons donc la densité d'énergie $\rho_R \propto a^{-4}$, ainsi l'énergie totale $E_{tot} = \rho_R a^3$ n'est pas conservée.

- Énergie du vide, il s'agit de la constante cosmologique Λ . Pour cette espèce la pression est négative telle que nous avons $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Ce qui nous permet d'avoir $\omega_\Lambda = -1$. Ainsi, la densité d'énergie décrit $\rho_\Lambda \propto a^0 = \text{Cst}$, l'énergie n'est donc pas dilatée.

Équation de Friedmann

Pour rappel, nous pouvons écrire le tenseur de Ricci comme $R_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T)$. Dans le cas particulier de notre Univers, nous avons :

$$\begin{aligned} R_{00} : -3\frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{4\pi G}{c^4}(\rho + 3P) \\ R_{11}, R_{22}, R_{33} : \frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} &= \frac{4\pi G}{c^4}(\rho + P) \end{aligned} \quad (1.70)$$

En combinant les deux équations suivantes, nous pouvons obtenir deux équations différentielles sur le facteur d'échelle.

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 & \stackrel{(a)}{=} \frac{8\pi G\rho}{3c^4} - \frac{k}{a^2} \\ \frac{\ddot{a}}{a} & \stackrel{(b)}{=} \frac{-4\pi G}{3c^4}(\rho + 3P) \end{cases} \quad (1.71)$$

Il s'agit des équations de Friedmann, elles expriment comment le facteur d'échelle $a(t)$ s'exprime selon le temps cosmologique t . L'équation ^(a) fait le lien entre le taux d'expansion ou paramètre d'Hubble que l'on définit comme $H = \frac{\dot{a}}{a}$, avec la densité d'énergie des composantes de l'Univers $\rho(a)$ et la courbure de l'Univers. Tandis que l'équation ^(b) relie la dérivée du taux d'expansion $\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a}$ et le terme d'énergie-impulsion de l'Univers. Sachant que le facteur d'échelle est une grandeur positive, il s'agit du rapport entre deux longueurs. Ce terme caractérise la manière dont la distance entre deux objets immobiles dans l'Univers varie. C'est donc la grandeur qui rend compte de l'expansion de l'Univers. Ainsi, si nous regardons l'équation ^(b), nous remarquons qu'il existe deux régimes compte tenu du signe de la dérivée seconde du facteur d'échelle tel que :

$$\begin{cases} \ddot{a} < 0 & \iff P > \frac{-\rho}{3} \\ \ddot{a} \geq 0 & \iff P \leq \frac{-\rho}{3} \end{cases} \quad (1.72)$$

Le deuxième cas correspond au cas de l'énergie du vide Λ avec une densité d'énergie ρ positive nous avons une pression négative. Donc, si l'Univers a une expansion accélérée (Cas $\ddot{a} \geq 0$), celui-ci doit nécessairement contenir un élément qui tient le rôle de constante cosmologique. Aujourd'hui, nous parlons d'énergie sombre en l'absence de compréhension de la nature de l'effet.

Nous introduisons le paramètre de densité $\Omega = \frac{8\pi G}{3c^2 H_0^2} \rho = \frac{\rho}{\rho_c}$, avec ρ_c la densité critique de l'Univers ou paramètre cosmologique de densité réduite. Ω est une grandeur sans dimension. Nous réécrivons l'équation de Friedmann tel que $H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{k}{a^2} \implies \Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}$. Ainsi, nous avons trois cas possibles pour l'Univers en fonction de la valeur du paramètre de densité de l'Univers.

$$\begin{cases} \rho < \rho_c & \iff \Omega < 1 & \iff k < 0 \\ \rho = \rho_c & \iff \Omega = 1 & \iff k = 0 \\ \rho > \rho_c & \iff \Omega > 1 & \iff k > 0 \end{cases} \quad (1.73)$$

Nous en déduisons que la connaissance et la mesure de la courbure de l'Univers nous renseignent sur la densité d'énergie de l'Univers.

Nous pouvons poser $\rho(t) = \sum_i \rho_i(t) = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \rho_k$. Il s'agit de décomposer la densité d'énergie de l'Univers sur les i espèces de l'Univers avec respectivement ρ_m , ρ_r , ρ_Λ , ρ_k , les densités d'énergie de la matière baryonique, relativiste, d'énergie sombre et de k -courbure. Nous introduisons la k -courbure dans la densité d'énergie telle que $\rho_k(t) = -\frac{3c^4 k}{8\pi G a(t)^2}$ pour avoir $\rho = \rho_c$. Ainsi, pour chaque espèce, nous avons $\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_c}$. L'équation ^(a) de Friedmann 1.71 peut se réécrire comme

$$H^2 = H_0^2 \sum_{i \neq k} \Omega_i(t) - k \frac{c^2}{R^2(t)} \quad (1.74)$$

avec $\Omega_k = -k \frac{c^2}{H_0^2 R^2(t)} = -k \left(\frac{R_{H_0}(t_0)}{R(t)} \right)^2$, avec $R_H(t) = \frac{c}{H(t)}$ le rayon d'Hubble, nous avons donc $H^2(t) = H_0^2 \sum_i \Omega_i(t)$. Donc à $t = t_0$, nous avons

$$\sum_i \Omega_{i,0}(t) = 1 \iff \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} = 1 \quad (1.75)$$

avec $\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0}$. Nous avons $\Omega_{k,0} = 1 - \Omega_0$.

Les mesures d'aujourd'hui de la géométrie de l'univers nous laissent penser que l'Univers serait plat, en effet, la mesure à 95% CL de Planck+WP+BAO [17], nous laisse à penser que l'espace est euclidien ($k = 0$) avec une vitesse d'expansion modérée de

67.66 ± 0.42 km/s/Mpc. En effet, nous avons

$$|\Omega_{k,0}| < 5 \times 10^{-4} \quad (1.76)$$

Ce résultat provient de la mesure du modèle Λ -CDM (voir 1.2.5).

Solution de Friedmann-Lemaître

L'équation de Friedmann conduit à $H^2 \propto \rho = \rho_0 a^{-n}$ avec n la pente d'une espèce i , ainsi nous montrons qu'il y a deux solutions à $\frac{\dot{a}}{a} \propto a^{-n}$, il s'agit des solutions de Friedmann-Lemaître telles que :

$$\begin{cases} a(t) \propto t^{2/n}, & \neq 0 \\ a(t) \propto e^{Ht}, & = 0 \end{cases} \quad (1.77)$$

Le cas $n = 0$ correspond à la constante cosmologique telle que $H(t) = cst$. Nous pouvons montrer que l'Univers peut faire un recollap, c'est le cas pour $\dot{a} < 0$ (Big-Bang dans l'autre sens), si $\Omega_\Lambda < 0$, mais également si pour $\Omega_\Lambda \geq 0$, Ω_m est suffisamment large.

1.2.4 Distance et Redshift

Redshift cosmologique

La métrique de FLRW ne comporte pas de vecteur de Killing du genre temps, mais il existe un tenseur de Killing tel que, pour le quadri-vecteur d'un observateur comobile u^a ($u^\mu = (1, 0, 0, 0)$), nous avons

$$K_{ab} = a^2(g_{ab} + u_a u_b) \quad (1.78)$$

avec $\nabla_{(c} K_{ab)} = 0$, nous avons $X^a \nabla_a (K_{bc} X^b X^c) = 0$, le long d'une géodésique avec le vecteur tangent X^a , tel que pour rappel $X^a = \frac{dx^a}{d\lambda}$

Nous en déduisons, $K^2 = K_{ab} X^a X^b = a^2 [X^a X_a + (u_a u^a)^2]$.

Pour une particule massive, nous avons $\lambda = \tau$ (temps propre de la particule), X^a devient V^a (quadri-vitesse d'une particule) tel que $V^a V_a = -1$. En coordonnées comobiles nous avons $(V^0)^2 = 1 + |\vec{V}|^2$, où $|\vec{V}|^2 = g_{ij} V^i V^j$ et $V_\mu V^\mu = -V^0$.

Donc,

$$K^2 = a^2 [-1 + (1 + |\vec{V}|^2)] = a^2 |\vec{V}|^2 \implies |\vec{V}| = \frac{K}{a} \propto a^{-1} \quad (1.79)$$

Il s'agit du cas particulier du gaz refroidi pendant l'expansion de l'Univers.

Pour un photon, nous utilisons l'équation des géodésiques telle que X^a devient $P^a = \frac{dX^a}{d\lambda}$, où $P^a P_a = 0$ et

$$K^2 = a^2(U_a P^a)^2 \implies U_a P^a = \frac{K}{a} \implies -\omega = \frac{K}{a} \quad (1.80)$$

avec $\omega = \frac{-K}{a}$ la pulsation du photon. Ce qui nous permet de déduire entre l'émission et la réception du photon par l'observateur l'égalité suivante $\frac{\omega_{obs}}{\omega_{em}} = \frac{a_{em}}{a_{obs}}$ et donc nous pouvons établir le redshift cosmologique z ,

$$z = z_{em} = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\omega_{em}}{\omega_{obs}} - 1 = \frac{a_{obs}}{a_{em}} - 1 \quad (1.81)$$

et donc de manière générale $\frac{a(t_0)}{a(t_{em})} = z + 1$, pour $t_0 = \text{today}$:

$$a_{em} = \frac{1}{1 + z_{em}} \quad (1.82)$$

Dans le cas particulier de l'espace-temps plat, il n'y a pas d'effet Doppler une galaxie au repos émettant un photon ν_{em} vers une galaxie au repos qui absorbe le photon ν_{obs} , nous avons $\nu_{em} = \nu_{obs}$. Dans le cas d'un espace-temps courbe, nous émettons un photon à $t_0 = \text{today}$ avec $a(t_0) = 1$ et $\dot{a}(t_0) = 0$. À t_1 le photon est dans l'Univers en expansion tel que $\dot{a}(t_1) > 0$, enfin le photon est absorbé à t_2 par une galaxie telle que $\dot{a}(t_2) = 0$. Nous avons donc $\frac{\nu_{obs}}{\nu_{em}} = \frac{a_{em}}{a_{obs}} < 1$. Il est important de noter ici que les ondes gravitationnelles sont également soumises au redshift cosmologique.

1.2.5 Limites du modèle standard de la cosmologie

Le résultat de la mesure de la courbure de l'Univers peut-être vu comme un problème. En effet, si l'on reprend l'équation $H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(t) - k \frac{c^2}{R^2(t)}$, nous avons pour $k = 0$ la densité critique en fonction de $a(t)$ qui s'écrit $\rho_c(a(t)) = \frac{3c^2 H^2(a)}{8\pi G}$ et $\Omega_i(a) = \frac{\rho_i(a)}{\rho_c(a)}$ alors l'équation de Friedmann nous permet d'écrire $1 - \Omega(a) = -k \left(\frac{R_H(a)}{R(a)} \right)^2 = \Omega_k(a)$ et donc $|\Omega_k(a)| = \left(\frac{R_H(a)}{R(a)} \right)^2$. Si l'on considère l'ère de domination de la matière (l'époque où Ω_m est la plus grande composante), nous avons $a(t) \propto t^{2/3}$, c'est-à-dire $H \propto t^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire $|\Omega_k| \propto \left(\frac{t}{t^{2/3}} \right)^2 \propto t^{2/3} \propto a$. Pour l'ère de rayonnement, nous avons $a(t) \propto t^{1/2}$, c'est-à-dire $H \propto t^{-1}$, et donc $|\Omega_k| \propto \left(\frac{t}{t^{1/3}} \right)^2 \propto t \propto a^2$. Nous comprenons qu'une valeur de courbure $|\Omega_k|$ très petite aujourd'hui implique qu'elle doit être encore plus petite dans le passé. En effet, sachant la valeur mesurée aujourd'hui, nous avons à $a = a_{eq}$ (équilibre entre la matière et le rayonnement) nous avons $|\Omega_k(a_{eq})| < 1.45 \times 10^{-7}$, pour le temps de Planck $t = t_{pl} \simeq 5.4 \times 10^{-44}$ s, nous avons $|\Omega_k(a_{eq})| < 4 \times 10^{-56}$. Il s'agit du problème de platitude qui conduit à modifier le modèle standard de la cosmologie pour l'idée d'inflation cosmique. Un second problème qui conduit à l'inflation est le problème de l'horizon. Il a été identifié par C. Misner [156] dans les années 60, puis renforcé par les observations du fond diffus cosmologique entre 1964 et 1992. Ce problème provient de l'horizon cosmologique des particules, en effet, nous pouvons calculer la distance maximale

qu'une particule a pu franchir depuis son $t = 0$ (ici $t = 0$ est aujourd'hui, nous regardons dans le sens inverse de l'écoulement du temps). Ainsi, un photon ds^2 implique $d\chi = \frac{cdt}{a(t)}$. Ainsi, nous calculons l'horizon comobile au temps t , tel qu'un photon ne peut parcourir qu'une distance donnée par

$$\begin{aligned} d_{Hor,c}(t) &= \int_0^{d_{Hor,c}} d\chi = c \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = c \int_0^{a(t)} \frac{da}{\dot{a}a} = c \int_0^{a(t)} \frac{da}{H(a)a^2} \\ &= R_H \int_0^{a(t)} \frac{da}{a^2 \sqrt{\sum_i \Omega_i(a)}} \end{aligned} \quad (1.83)$$

avec $R_H = \frac{c}{H_0}$. Nous en déduisons l'horizon physique tel que $d_{Hor,phy}(t) = a(t)d_{Hor,c}(t)$. Aujourd'hui, nous avons $d_{Hor,phy}(t_0) = 14.4$ Gpc [165]. Au moment de la recombinaison [252], $z = 1100$ ($a_{rec} = 9 \times 10^{-4}$), ce qui implique un horizon physique de la recombinaison de $d_{Hor,phy} = 255$ kpc. Ainsi, nous pouvons nous intéresser à la limite causale des tailles angulaires de l'uniformité imprimée sur le fond diffus cosmologique. Pour cela, nous introduisons l'angle θ , il s'agit de l'angle limite pour lesquelles deux photons sont reliés causalement, c'est-à-dire peuvent avoir la même cause physique. En dehors de cet angle, si nous avons deux points corrélés (semble avoir la même origine physique.), alors le modèle cosmologique n'est pas correct. L'angle θ s'écrit :

$$\theta = \frac{d_{Hor,phy}(t_{res})}{D_A(t_{res})} \quad (1.84)$$

avec la distance angulaire $D_A(t) = a(t)D_c(a) = a(t) \int_{t_{res}}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}$
 $= a(t) \left[d_{Hor,c}(t_0) - d_{Hor,c}(t_{res}) \right]$, ce calcul est donné dans le cas $k = 0$.

Le calcul de θ nous donne $\theta \simeq \frac{d_{Hor,phy}(t_{res})}{d_{Hor,phy}(t_0)} \simeq 1.92 \times 10^{-2}$ rad $\simeq 1.12^\circ$. Il s'agit du problème de l'uniformité du fond diffus cosmologique, car celui-ci apparaît comme très homogène.

Pour tenter de résoudre ce problème, nous pouvons reconsidérer la définition de l'horizon physique tel que

$$d_{Hor,phy}(t) = a(t)R_H \int_0^{a(t)} \frac{da}{a^2 \sqrt{\sum_{i \neq k} \Omega_{i,0} a^{-3(1+\omega_i)} + \Omega_{k,0} a^{-2}}} \quad (1.85)$$

Si nous considérons l'absence de courbure $k = 0$ et que le fluide i domine nous simplifions l'équation 1.85 tel que :

$$d_{Hor,phy}(t) = a(t)R_H \int_0^{a(t)} \frac{da}{a^2 \sqrt{\Omega_{i,0} a^{-\frac{1-3\omega_i}{2}}}} \quad (1.86)$$

Pour résoudre en partie les problèmes, il faut une époque pendant laquelle nous avons la quantité $\int_0^{a(t)} \frac{da}{a^{\frac{1+3\omega}{2}}}$ qui diverge, ce que nous avons si nous considérons le cas $\omega < -\frac{1}{3}$.

Ainsi, deux régions de l'espace auraient été causalement reliées dans le passé. Pour rappel, le cas $\omega < -\frac{1}{3}$ correspond au cas d'une accélération de l'expansion de l'Univers dans notre cas, elle doit être très importante, on appelle cette phase l'inflation [2]. Il s'agit donc d'une époque où la taille de l'univers s'est agrandie d'un facteur incroyablement grand pendant une infime fraction de seconde au moment du Big-Bang. Cette théorie a réussi à expliquer de nombreuses caractéristiques observées de notre univers, y compris l'origine des anisotropies de température du CMB.

1.2.6 Le modèle inflationnaire appliqué aux ondes gravitationnelles

Nous pouvons établir des modèles d'inflation, pour un champ scalaire φ avec un potentiel $V(\varphi)$ nous pouvons écrire l'action telle que :

$$S = - \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + V(\varphi) \right] d^4x \quad (1.87)$$

avec $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi)$ le Lagrangien du champ scalaire. Ce qui nous donne le tenseur d'énergie impulsion de φ $T^{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial^\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + V(\varphi) \right)$. L'homogénéité et d'équation d'état sont conservés tel que $\omega_\varphi = \frac{P_\varphi}{\rho_\varphi} = \frac{\dot{\varphi}/2 - V(\varphi)}{\dot{\varphi}/2 + V(\varphi)}$. de même la combinaison des équations d'Einstein et d'Euler-Lagrange, nous permettent d'établir que les équations de Klein Gordon se réduisent en FLRW tel que $\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0$ (Lire chapitre 8 [237]). Ainsi, les équations de Friedmann et de Klein-Gordon indépendantes s'écrivent :

$$\begin{cases} H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\varphi = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right) \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} (\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)) \\ \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0 \end{cases} \quad (1.88)$$

Nous rappelons que l'inflation a pour objectif de théoriser le comportement de l'Univers pour $\ddot{a} > 0 \iff \omega_\varphi < -\frac{1}{3} \iff \dot{\varphi}^2 < V(\varphi)$, ceci implique que durant l'inflation, le champ scalaire doit être dans un régime de roulement lent, ceci est impliqué par $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$.

Faire une théorie d'inflation, c'est aussi faire l'étude des fluctuations primordiales générées durant l'inflation. Il s'agit de décrire l'évolution des fluctuations $\delta\varphi$, en fonction des échelles et de faire le lien entre le spectre de puissance des perturbations scalaires (densité et température) et tensorielles (ondes gravitationnelles primordiales).

En considérant l'action 1.87, dans un univers plat. Nous considérons également φ in-homogène, mais avec la métrique homogène, nous pouvons écrire, en posant, $u = a\varphi$ l'action comme $S = \int d\eta d^3x \frac{1}{2} \left(\left(\frac{du}{d\eta} \right)^2 - \left(\vec{\nabla} u \right)^2 + \frac{d^2 a}{d\eta^2} \frac{u^2}{a} \right)$ avec $\eta = \frac{-1}{aH}$. Nous remarquons qu'il s'agit de la même action que celle d'une particule de masse m soumise à un champ V ($S = \int dt \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right)$). Ainsi, de la même manière, nous pouvons appliquer les

équations d'Euler Lagrange, ce qui nous donne

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2 \frac{du}{d\eta} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} - \frac{d^2 a}{d\eta^2} \frac{u}{a} = 0 \quad (1.89)$$

En passant dans le domaine de Fourier, nous obtenons

$$u_{\vec{k}} \frac{d^2 u_{\vec{k}}}{d\eta^2} + k^2 u_{\vec{k}} - \frac{d^2 a}{d\eta^2} \frac{u_{\vec{k}}}{a} = 0 \quad (1.90)$$

Ainsi, $u_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}}^2(\eta) u_{\vec{k}} = 0$ avec $\omega_{\vec{k}}^2 = k^2 - \frac{2}{\eta^2}$. Donc pour k petit, nous avons $k \ll \left| \frac{\sqrt{2}}{\eta} \right|$, c'est le cas d'un super horizon [206]. Il y a donc deux solutions, la première avec des modes croissants ($u_{\vec{k}} \propto a \propto \frac{1}{\eta}$) ou décroissants ($u_{\vec{k}} \propto \eta^2$). Nous avons donc des modes croissants, car nous avons pris $u = a\varphi$ avec φ fixé. Le cas k grand, implique $k^2 \gg \frac{2}{\eta^2}$, il s'agit de sous-horizon. Nous avons donc une solution oscillante en u avec $u_{\vec{k}} \propto e^{\pm ik\eta}$.

Ainsi, nous avons besoin de quantifier les fluctuations de l'inflation, en effet, nous pouvons montrer qu'avec l'aide d'un Wronskien que les résultats précédents respectent une quantification [117, 226, 212]. Nous ne réaliserons pas ici se calcule, les conséquences sont extraites de cours sur l'inflation de Daniel Baumann [39]. Ainsi, une inflation suffisamment tôt, implique que toutes les échelles sont du genre sous-horizon tel que $|k\eta| \gg 1$ donne $\omega_{\vec{k}}^2 = k^2$, et donc que les solutions sont de la forme $u_{\vec{k}} \propto e^{\pm ik\eta}$. La solution apportée par Daniel Baumann [39] est finalement $u_{\vec{k}}(\eta) = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right)$. Nous pouvons maintenant calculer le spectre de puissance de φ . Ce qui nous permet d'obtenir $\mathcal{P}_\varphi(k) = \frac{H^2}{4\pi^2} (k^2 \eta^2 + 1)$. Pour les échelles de super-horizon [94] ($|k\eta| \gg 1$) le spectre de puissance devient $\mathcal{P}_\varphi(k) = \frac{H^2}{4\pi^2}$. De même pour les échelles de sous-horizon ($|k\eta| \ll 1$) donne $\mathcal{P}_\varphi(k) = \left(\frac{k}{2\pi^2 a} \right)^2$.

Nous sommes précédemment partis de la forme perturbée de φ , tel que $\varphi = \langle \varphi \rangle + \delta\varphi$, tel que $\langle \varphi \rangle$ représente la dynamique de l'inflation et $\delta\varphi$ ses fluctuations. En relativité générale, nous pouvons de manière analogue regarder les perturbations de la métrique telle que $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + \delta g_{\mu\nu}$, avec $g_{\mu\nu}^0$ la métrique dépendant uniquement du temps et $\delta g_{\mu\nu}$ les fluctuations de la métrique dépendant du temps, mais également de la position \vec{r} . Nous pouvons classifier ses fluctuations en trois catégories (Pour rappel la métrique symétrique $g_{\mu\nu}$ à 10 composantes ou degrés de liberté) : 4 degrés de liberté pour les composantes scalaires, 4 pour les composantes vectorielles et 2 pour les composantes tensorielles. Le nombre de degrés de liberté peut être réduit avec la liberté de jauge en montrant que certain est des artefacts. Ainsi, nous avons 2 degrés de liberté pour les composantes scalaires, vectorielles et tensorielles, soit 6 degrés de liberté.

Pour les degrés de liberté scalaire, nous perturbons simultanément φ et $g_{\mu\nu}$, tel que

$$\begin{cases} \varphi(\eta, \vec{r}) = \varphi_0 + \delta\varphi(\eta, \vec{r}), & \varphi_0(\eta) = \varphi = \langle \varphi(\eta) \rangle \\ g_{\mu\nu} : ds^2 = a^2 [-(1 + 2\psi(\eta, \vec{r}))d\eta^2 + (1 - 2\psi(\eta, \vec{r}))d\vec{r}^2] \end{cases} \quad (1.91)$$

Ce qui implique, en posant $v = a \left(\delta\varphi + \frac{d\varphi_0}{d\eta} \right)$ la variable de Sasaki-Mukhanow [112, 110] où $\mathcal{H} = \frac{da}{a d\eta}$ et $Z = a \frac{d\varphi_0}{d\eta}$, que l'action devient

$$S = \frac{1}{2} \int d\eta d^3\vec{r} \left(v - \left(\vec{\nabla} v \right)^2 + \frac{d^2 Z}{d\eta^2} v^2 \right) \quad (1.92)$$

Nous connaissons donc l'action d'un oscillateur harmonique en fonction de η , comme nous avons fait précédemment pour u , nous montrons en passant dans le domaine de Fourier que tous les calculs précédents s'applique dans ce cas beaucoup plus général.

Nous pouvons montrer que des perturbations de la courbure sont les conséquences de la perturbation de la métrique $g_{\mu\nu}$. En effet, il s'agit de perturbations de l'espace-temps. Donc, les fluctuations de $g_{\mu\nu}$ sont donc des perturbations locales de la courbure \mathcal{R} , tel que nous avons $v = Z\mathcal{R}$ avec $\mathcal{R} = \psi + \frac{\mathcal{H}}{d\varphi_0} \delta\varphi$ l'invariante de jauge. En passant dans le domaine de Fourier, nous avons $k^2 \psi_k \propto \delta_k$ et donc un spectre de puissance des variations de courbure $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \sim \frac{k^3}{a^2(t_H(k))} |v_k(t_i)|^{-2}$, avec t_i le temps initial des modes sous-horizons constants et pour rappel $t_H(k)$ le temps pour lequel nous avons $k = \frac{H}{c}$. Le calcul exact nous donne $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left(\frac{H}{\dot{\varphi}} \right)^2 \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2$ [237]. Ce spectre est donc un invariant d'échelle, ce qui nous permet d'introduire un premier paramètre cosmologique; l'indice spectral scalaire n_s tel que

$$n_s(k) = \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)}{d \ln k} + 1 \quad (1.93)$$

Il est possible en suivant le même lien logique d'établir pour les degrés de liberté tensoriels (donc des ondes gravitationnelles primordiales), le spectre tensoriel $\mathcal{P}_T(k) = \frac{8}{M_p^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2$, avec $M_p = \sqrt{\frac{hc}{2\pi G}}$ la masse de Planck. De même nous pouvons définir un autre paramètre de l'inflation, l'indice spectral du spectre tensoriel n_T tel que

$$n_T = \frac{d \ln \mathcal{P}_T(k)}{d \ln k} \quad (1.94)$$

Par ailleurs, nous montrons que le rapport des deux spectres de puissance, scalaire et tensoriel donne $\frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} = \frac{8}{M_p^2} \frac{\dot{\varphi}^2}{H^2}$. Nous définissons également un autre paramètre inflationnaire, il s'agit du rapport entre les deux spectres de puissance r tel que

$$r = \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}. \quad (1.95)$$

Nous pouvons montrer que le spectre de puissance tensorielle est proportionnel à une observable. En effet, nous avons

$$\frac{d\Omega_{GW}}{d \ln k} \propto \mathcal{P}_T \quad (1.96)$$

avec Ω_{GW} la densité spectrale sans dimension du fond stochastique des ondes gravita-

	Ondes électromagnétiques	Ondes gravitationnelles
Nature	Ondes dans l'espace-temps	Onde de l'espace-temps
Générées par	accélération des charges électrique	accélération de masse-énergie
Superposition	incohérente d'ondes (sauf MASER)	cohérente d'ondes
Longueur d'onde	\leq taille source	\geq taille source
Structure dominante	dipolaire (conservation charge)	quadripolaire (conservation masse et quantité de mouvement)
Interaction avec la matière	très forte	très faible
Propagation	diffusées, absorbées, réfractées	essentiellement inaltérées
Détection de	la puissance ($\sim \frac{1}{r^2}$)	l'amplitude ($\sim \frac{1}{r}$)

TABLE 1.2 – Table de comparaison des propriétés des ondes électromagnétique et gravitationnelles.

tionnelles.

1.3 Ondes gravitationnelles

1.3.1 Équation d'Einstein linéarisée, approximation en champ faible

Les ondes gravitationnelles ont été prédites, il y a plus d'un siècle par Albert Einstein en 1916, il fait l'approximation de linéarisation de la relativité générale, il établit de multiples applications, comme les ondes gravitationnelles. En 1918 [92], il produit un calcul plus complet sur les propriétés de ces ondes. Nous résumons dans le tableau 1.2, les différences de propriétés entre les ondes gravitationnelles et les ondes électromagnétiques. Celles-ci sont des oscillations de l'espace-temps. Les ondes gravitationnelles résultent de la linéarisation des équations d'Einstein. Nous allons dans cette partie refaire la démonstration des ondes gravitationnelles. Comme dans le cours deourgoulhon [116], nous nous plaçons dans une métrique de Minkowski, c'est-à-dire une métrique plate sans perturbation (Champ gravitationnel faible : loin d'un objet massif et/ou compact), dans laquelle on considère un système de coordonnées cartésiennes $x^\alpha = (ct, x, y, z)$ telles que :

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} \quad (1.97)$$

où $(\eta_{\alpha\beta})$ est la métrique de Minkowski avec $|\eta_{\alpha\beta}| \ll 1$, h_{ab} est une perturbation de la métrique de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$. En effet, près d'un astre non compact, nous avons $|h_{\alpha\beta}| \approx \Xi$.

Nous linéarisons l'équation (1.97), en effectuant un développement limité au premier

ordre en h_{ab} , nous pouvons ainsi construire l'inverse g^{ab} de la métrique de g_{ab} :

$$g^{ab} = \eta^{ab} - h^{ab} \text{ où, } h^{ab} = \eta^{ac}\eta^{bd}h_{cd} \quad (1.98)$$

avec respectivement g^{ab} , η^{ab} et h^{ab} les inverses de g_{ab} , η_{ab} et h_{ab} . Il est important de remarquer que $g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c + o(h^2)$ avec δ^a_c le symbole de Kronecker. Il est aussi important de noter $h^{ab}h_{bc} \neq \delta^a_c$.

Ensuite, nous linéarisons l'équation d'Einstein, c'est-à-dire que nous devons calculer les symboles de Christoffel Γ_{ab}^c associés à la métrique g et aux coordonnées (x^α) . Pour cela, nous introduisons la dérivée ordinaire associée aux coordonnées (x^α) ∂_a , pour que nous obtenions $\partial_a\eta_{bc} = 0$.

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^c &= \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{cd}(\partial_a h_{db} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab}) \end{aligned} \quad (1.99)$$

Ensuite, nous devons calculer le tenseur de Ricci $R_{abc}{}^d$.

$$\begin{aligned} R_{abc}{}^d &= -2\partial_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{c[a}\Gamma_{b]}^d{}^e \\ &= -\partial_a\Gamma_{bc}^d + \partial_b\Gamma_{ac}^d \end{aligned} \quad (1.100)$$

avec $\partial_{[a}K_{b]} = \frac{1}{2}[\partial_a K_b + \partial_b K_a]$, cette notation permet de simplifier la notation.

Ainsi, nous pouvons construire R_{ab} :

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \partial_c\Gamma_{ab}^c - \partial_a\Gamma_{cb}^c \\ &= \partial^c\partial_{(ab)c} - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c h_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b h \end{aligned} \quad (1.101)$$

où $\eta^{ab}h_{ab} = h$.

En utilisant le tenseur de Ricci R_{ab} et la métrique inverse perturbée en champ faible g^{ab} , nous obtenons le scalaire de Ricci R :

$$R = g^{ab}R_{ab} = \eta^{ab}R_{ab} = \partial^c\partial^b h_{cd} + \partial^c\partial_c h \quad (1.102)$$

Ainsi, nous avons tous les éléments pour écrire l'équation d'Einstein :

$$\begin{aligned}
G_{ab} &= R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} \\
&= R_{ab} - \frac{1}{2}R\eta_{ab} \\
&= -\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\overline{h_{ab}} + \partial^c\partial_{(a\overline{h_{b)c}}} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\overline{h_{cd}}
\end{aligned} \tag{1.103}$$

Nous introduisons ici, une nouvelle quantité : la perturbation métrique à trace renversée $\overline{h} = -h$, où $\overline{h_{ab}} = h_{ab} - \eta_{ab}h$, de manière symétrique, nous avons également $h_{ab} = \overline{h_{ab}} - \eta_{ab}\overline{h}$.

Nous pouvons écrire en utilisant avec le tenseur énergie-impulsion T_{ab} l'équation d'Einstein $G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}$, on obtient alors l'équation d'Einstein linéarisée :

$$\square\overline{h_{ab}} - 2\partial_{(a}H_{b)} + \eta_{ab}\partial^c H_c = \frac{-16\pi G}{c^4}T_{ab} \tag{1.104}$$

où $H_a = \partial^b\overline{h_{ab}}$, de plus, l'opérateur \square peut être écrit comme $\square = \partial^c\partial_c = \eta^{cd}\partial_c\partial_d = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, il s'agit de l'opérateur d'Alembertien. Il s'agit du même opérateur que celui des ondes électromagnétiques. Ainsi, nous avons démontré qu'une perturbation de la métrique de Minkowski sans le terme H_a est une onde de h_{ab} par rapport à η_{ab} l'espace-temps.

1.3.2 Jauge de Lorenz et jauge transverse et sans trace (TT)

Changement de coordonnées infinitésimales

Nous pouvons remarquer que nous n'avons pas encore démontré que ce résultat reste inchangé compte tenu du choix de coordonnées. Nous avons préalablement considéré la métrique perturbée en champ faible $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ avec $(\eta_{\alpha\beta}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ et $|\eta_{\alpha\beta}| \ll 1$, mais cela ne fixe pas complètement le système de coordonnées sur la variété d'espace-temps. Pour cela nous considérons un changement de coordonnées :

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x) \tag{1.105}$$

tel que $|\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}| \sim |h_{\alpha\beta}| \ll 1$.

Ce type de changement de coordonnées est dit infinitésimal. Il nous est alors possible d'écrire la métrique avec le nouveau système de coordonnées avec la loi de transformation des composantes du tenseur métrique :

	Électromagnétisme	Gravitation linéarisée
Générateur	Λ	ξ_a
Potentiel	A_a	h_{ab}
Transformation de Jauge	$A_a \longrightarrow A_a + \partial_a \Lambda$	$h_{ab} \longrightarrow h_{ab} - 2\partial_{(a}\xi_{b)}$
Invariant/Observable	$F_{ab} = \partial_{[a}A_{b]}$	R_{abcd}

TABLE 1.3 – Table de comparaison les jauges de l'électromagnétisme et la gravitation linéarisée.

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} g'^{\mu\nu} \\
&= g'_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} g'_{\mu\beta} + \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\beta}} g'_{\alpha\nu} + o(h^2)
\end{aligned} \tag{1.106}$$

De plus, nous avons en gardant les termes du premier ordre :

$$\begin{aligned}
g'_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - 2g'_{\mu} \left(\alpha \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \right) \\
&= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - 2\eta_{\mu} \left(\alpha \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \right) + o(h^2) \\
&= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - 2\partial_{(\alpha}\xi_{\beta)}
\end{aligned} \tag{1.107}$$

avec $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - 2\partial_{(\alpha}\xi_{\beta)}$. Ainsi, nous avons démontré que les composantes du tenseur métrique dans les nouvelles coordonnées sont sous la forme :

$$g'_{ab} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta} \tag{1.108}$$

avec $h'_{ab} = h_{ab} - 2\partial_{(a}\xi_{b)}$.

Si l'on considère le point de vue de la théorie de jauge, on constate encore une fois un parallèle entre l'électromagnétisme et la gravitation linéarisée. Ce parallèle est résumé dans le tableau 1.3.

Jauge de Lorenz

Pour qu'un potentiel respecte la condition de Lorenz ou de Dendes, il faut que :

$$H_a = \partial^b \overline{h_{ab}} = 0 \tag{1.109}$$

Il s'agit de la jauge analogue à $\partial^a A_a = 0$ lorsque l'on considère l'interaction électromagnétique. Cette jauge conduit aux lois suivantes :

$$x^{\alpha} \longrightarrow x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha} \tag{1.110}$$

$$h_{ab} \longrightarrow h'_{ab} = h_{ab} - 2\partial_{(a}\xi_{b)} \quad (1.111)$$

$$\overline{h_{ab}} \longrightarrow \overline{h'_{ab}} = \overline{h_{ab}} - 2\partial_{(a}\xi_{b)} + \eta_{ab}\partial^c\xi_c \quad (1.112)$$

$$\begin{aligned} H_a &\longrightarrow H'_a = H_a - \partial_a\partial^b\xi_b - \square\xi_a + \partial_a\partial^c\xi_c \\ H'^a &\longrightarrow H_a - \square\xi_a \end{aligned} \quad (1.113)$$

Nous remarquons que si $H_a \neq 0$ alors il est possible d'avoir $H'_a = 0$ si et seulement si $\square\xi_a = H_a$, ce qui est toujours possible. Tout l'intérêt de la jauge de Lorenz est l'obtention de l'équation d'Einstein linéarisée sous la forme :

$$\square\overline{h_{ab}} = \frac{-16\pi G}{c^4}T_{ab} \quad (1.114)$$

En outre, dans le vide, c'est-à-dire, en absence d'énergie et de matière ou encore avec $T_{ab} = 0$, nous obtenons $\square\overline{h_{ab}} = 0$. La jauge de Lorenz permet aussi d'obtenir $\partial^b h_{ab} = 0$.

En conclusion de la jauge de Lorenz, nous avons démontré que la solution générale est une superposition d'ondes plane-monochromatiques, telle que :

$$\overline{h_{ab}}(x^\alpha) = \Re\left(H_{ab}e^{ik_\alpha x^\alpha}\right) \quad (1.115)$$

avec H_{ab} le tenseur de polarisation et k_α les composantes du quadri-vecteur d'onde k_a .

En considérant, l'espace vide, nous avons constaté que nous obtenons $\square\overline{h_{ab}} = 0$, ce qui conduit, dans le cadre d'une onde plane monochromatique à $k^a k_a = \eta^{ab}k_a k_b = 0$. Autrement dit, les ondes gravitationnelles se propagent à la vitesse de la lumière c . À l'aide de la jauge de Lorenz nous avons également établi $\partial^b \overline{h_{ab}} = 0$, ce qui nous conduit grâce à l'équation 1.115, $H_{ab}h^b = 0$, les ondes gravitationnelles sont donc transverses.

Jauge transverse et sans trace (TT)

La jauge de Lorenz $H_a = 0$ ne fixe pas entièrement le système de coordonnées (x^α) sur ξ , c'est-à-dire que cette jauge ne fixe pas entièrement la forme de h_{ab} . Si l'on considère les coordonnées (x^α) telles que $\partial^b \overline{h_{ab}}$ alors le changement de coordonnées infinitésimal $x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha$ de manière à conserver la condition de la jauge de Lorenz ($\partial^b \overline{h'_{ab}} = 0$) si et seulement si $\square\xi_a = 0$. Ainsi, nous avons $\xi_a(x) = X_a e^{ik_\alpha x^{\alpha p h a}}$ qui vérifie directement $\square\xi_a = 0$.

$$\overline{h_{ab}} \longrightarrow \overline{h'_{ab}} = \overline{h_{ab}} - 2\partial_{(a}\xi_{b)} + \eta_{ab}\partial^c\xi_c \quad (1.116)$$

$$H_{ab} \longrightarrow H'_{ab} = H_{ab} - 2ik_{(a}X_{b)} + i\eta_{ab}k^c X_c \quad (1.117)$$

Pour fixer complètement la jauge, il faut introduire des conditions supplémentaires. De telles manières dont nous considérons un quadri-vecteur de vitesse u^a d'un observateur détectant le rayonnement gravitationnel produit $u^a k_a \neq 0$. Ainsi, le choix judicieux de X_a permet d'imposer les conditions de jauge transverse et sans trace, en anglais *transverse and traceless* (TT). Les conditions de la jauge TT se résument comme la transversalité de u^a :

$$H_{ab}u^b = 0 \quad (1.118)$$

et la condition de trace nulle :

$$\eta^{ab}H_{ab} = 0 \quad (1.119)$$

États de polarisation

Initialement, le tenseur de polarisation $H_{\alpha\beta}$ est construit avec 10 composantes différentes. En effet, en relativité générale, les tenseurs sont des matrices 4×4 symétriques. Nous avons donc bien 10 degrés de liberté. La jauge de Lorenz réduit les nombres de composantes indépendantes à 4. Et, enfin la jauge TT réduit le tenseur de polarisation à deux degrés de liberté.

En considérant un référentiel propre d'une particule de quadri-vecteur u^a tel que $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$. Nous choisissons une onde gravitationnelle qui se propage dans la direction z . Ce qui produit en conséquence $k^\alpha = (\frac{\omega}{c}, 0, 0, -\frac{\omega}{c})$, c'est-à-dire $e^{ik_\alpha k^\alpha} = e^{i\omega(t-z)}$, avec une pulsation ω que l'observateur peut mesurer. Ainsi nous pouvons construire tous les coefficients du tenseur H_{ab} :

$$H_{ab}u^b = 0 \longrightarrow H_{\alpha\beta}u^\beta = H_{\alpha t} = 0 \quad (1.120)$$

pour tous les $\alpha = x, y, z, t$.

$$H_{ab}k^b = 0 \longrightarrow H_{\alpha\beta}k^\beta = \omega(H_{\alpha t} - H_{\alpha z}) = 0 \longrightarrow H_{\alpha z} = 0 \quad (1.121)$$

pour tous les $\alpha = x, y, z, t$.

$$\eta^{ab}H_{ab} = 0 \longrightarrow \eta^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta} = -H_{tt} + H_{xx} + H_{yy} + H_{zz} = 0 \longrightarrow H_{xx} + H_{yy} = 0 \quad (1.122)$$

Ceci nous permet d'obtenir l'équation d'Einstein linéarisée, en se plaçant dans la jauge de Lorenz. On construit désormais la jauge de Lorenz :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\eta^{\mu\nu}h_{\alpha\mu}) = 0 \quad (1.123)$$

En effet, le potentiel $h_{\alpha\beta}$ respecte la jauge de Lorenz si et seulement si cette condition est respectée. La jauge de Lorenz nous donne alors [116] :

$$\square h_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (1.124)$$

Nous en déduisons le tenseur de polarisation des ondes gravitationnelles avec la jauge TT h_{ab}^{TT}

$$(h_{\alpha\beta}^{TT}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(t - \frac{z}{c}) & h_\times(t - \frac{z}{c}) & 0 \\ 0 & h_\times(t - \frac{z}{c}) & -h_+(t - \frac{z}{c}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.125)$$

Avec $h_+(t - \frac{z}{c}) = H_+ e^{i\omega(t - \frac{z}{c})}$ et $h_\times = H_\times e^{i\omega(t - \frac{z}{c})}$ les deux états de polarisation de l'onde gravitationnelle.

1.3.3 Effet d'ondes gravitationnelles sur la matière

Nous considérons une onde gravitationnelle plane et monochromatique de pulsation ω qui se déplace selon la direction z . En se plaçant dans la jauge TT et en utilisant les coordonnées $(x^\alpha) = (ct, x, y, z)$, nous écrivons la métrique :

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}) dx^i dx^j \quad (1.126)$$

Une particule A qui est libre ou isolée, c'est-à-dire soumise à aucune interaction gravitationnelle. La particule a pour ligne d'univers, une géodésique $x^a = X_A^a(\tau)$, en l'absence d'onde gravitationnelle, celle-ci est immobile, c'est-à-dire que sa ligne d'univers est une ligne droite dans l'espace-temps de Minkowski avec $X_A^t(\tau) = c\tau$ et $X_A^\mu = 0$, pour $\mu = (x, y, z)$. En présence d'une onde gravitationnelle ses lignes d'univers $X_A^a(\tau)$ respectent l'équation des géodésiques :

$$\frac{d^2 X_A^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dX_A^{\mu A}}{d\tau} \frac{dX_A^{\nu A}}{d\tau} = 0 \quad (1.127)$$

En calculant les symboles de Christoffel et en se limitant au premier ordre, nous pouvons écrire $\frac{d^2 X_A^\mu}{d\tau^2} = 0$, à l'aide des conditions initiales à $\tau = 0$ avant l'arrivée de l'onde gravitationnelle $X_A^\mu(0) = 0$ et $\frac{dX_A^\mu}{d\tau} = 0$, nous démontrons que $X_A^\mu(\tau) = 0$. Nous avons donc l'évidence qu'une particule reste toujours au même endroit. La particule ne bouge pas lors d'un passage d'onde gravitationnelle. Autrement dit, dans la jauge TT, la particule au cours du passage d'une onde gravitationnelle ne connaît pas de modification de ses coordonnées. Nous verrons plus tard qu'il s'agit d'une conséquence fondamentale pour la construction d'un détecteur d'onde gravitationnelle.

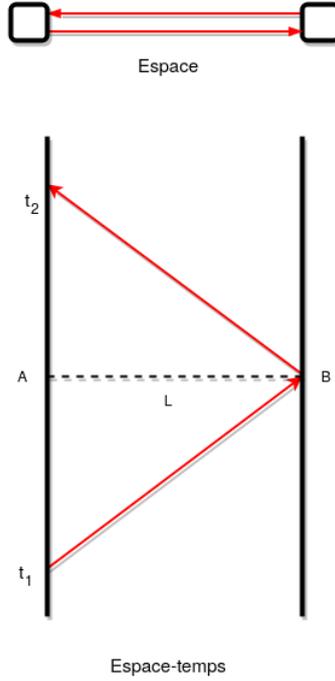


FIGURE 1.6 – Schéma de comparaison entre le diagramme d’espace et le diagramme d’espace-temps. Ce schéma illustre le principe de mesure de la distance L entre deux particules de matière A et B .

Il est possible de mesurer l’effet du passage d’une onde gravitationnelle en regardant la variation de distance entre deux particules de masse en chute libre. Nous associons la masse A à un observateur, celui-ci chronomètre le temps d’aller-retour d’une impulsion lumineuse qui aura émis vers la masse B . On note le temps propre t_1 du début de l’émission et le temps propre t_2 correspondant à l’instant où l’observateur aura reçu l’impulsion lumineuse réfléchi sur la particule B . Il nous est possible de définir la distance L comme illustrée sur la figure 1.6.

$$L = \frac{c}{2}(t_2 - t_1) \quad (1.128)$$

Si les deux masses A et B sont infiniment proches, nous pouvons aussi utiliser le tenseur métrique g pour écrire

$$\begin{aligned} g(A_1B, A_1B) &= g(A_1A + AB, A_1A + AB) \\ 0 &= g(A_1A, A_1A) + 2g(A_1A, AB) + g(AB, AB) \\ 0 &= -\left[\frac{c}{2}(t_2 - t_1)\right]^2 + g(AB, AB) \end{aligned} \quad (1.129)$$

Nous avons donc

$$L = \sqrt{g(AB, AB)} \quad (1.130)$$

En considérant la variation de L au passage d’une onde gravitationnelle, nous obtenons, en utilisant le premier ordre en h_{ab} et en coordonnées TT (ct, x, y, z) :

$$L = L_0 \left(1 + \frac{1}{2} h_{ij}^{TT} n^i n^j \right) \quad (1.131)$$

Avec L_0 la distance en absence d'onde gravitationnelle et n^i un vecteur unitaire. En notant la variation de longueur $\delta L = L - L_0$, nous pouvons établir le rapport entre la présence ou l'absence d'ondes gravitationnelles.

$$\frac{\delta L}{L} = \frac{1}{2} h_{ij}^{TT} n^i n^j \quad (1.132)$$

L'amplitude de l'onde gravitationnelle est proportionnelle à la variation de longueur produite par ladite onde gravitationnelle.

En utilisant une particule au voisinage d'un observateur et en considérant des coordonnées TT (x_{alpha}), nous montrons que, lors du passage d'une onde gravitationnelle, nous avons

$$\hat{x}^i(t) = x_0^i + \frac{1}{2} h_{ij}^{TT}(t, 0) x_0^j \quad (1.133)$$

En utilisant cette équation à une onde plane et monochromatique de fréquence ω se propageant selon l'axe z . Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = x_0 + \frac{1}{2} (H_+ x_0 + H_\times y_0) e^{i\omega t} \\ \hat{y}(t) = y_0 + \frac{1}{2} (H_\times x_0 - H_+ y_0) e^{i\omega t} \\ \hat{z}(t) = z_0 \end{cases} \quad (1.134)$$

La figure 1.7 montre la déformation que subit le cercle de particule de matière situé dans le plan \hat{z} par une onde gravitationnelle plane et monochromatique de période T et se propageant dans le plan \hat{z} qui est orthogonal au plan des cercles de particule de matière. Il est important de noter que l'on peut construire ce schéma des détecteurs d'ondes gravitationnelles. Pour cela, un bon moyen est de construire un cercle de matière comme nous le distinguons dans la figure 1.7 et de mesurer les déformations de ce cercle. De plus, on pourra mesurer l'amplitude de l'onde gravitationnelle en comparant les longueurs sans déformation et avec déformation. L'amplitude de l'onde gravitationnelle sera l'erreur relative de la mesure de la longueur.

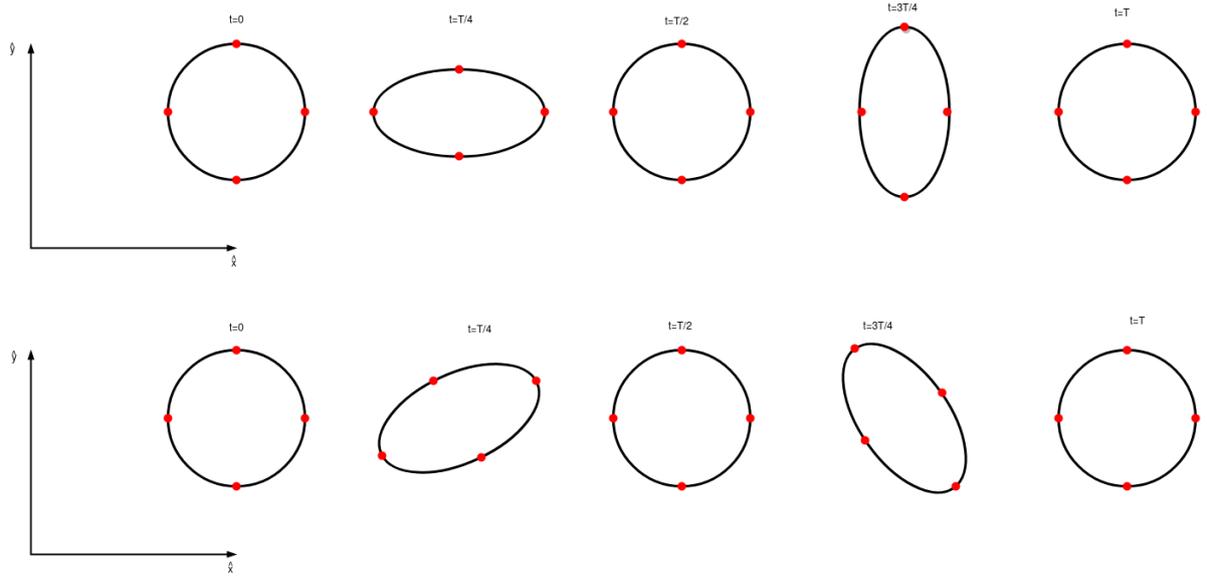


FIGURE 1.7 – Schéma de la déformation que subit un cercle de particule de matière situé dans le plan \hat{z} de chacune des polarisations des ondes gravitationnelles données par la jauge TT. La première ligne correspond à l'effet de la polarisation $+$ et celle du bas de la polarisation \times .

1.3.4 Génération d'une onde gravitationnelle : formule du quadripôle

Formule du quadripôle

Avant d'étudier les sources d'ondes gravitationnelles, il nous faut comprendre ce qui émet le plus efficacement les ondes gravitationnelles. Pour cela, nous pouvons reprendre l'équation d'Einstein linéarisée, en se plaçant dans la jauge de Lorenz, nous écrivons.

$$\square \bar{h}_{ab} = \frac{-16\pi G}{c^4} T_{ab} \quad (1.135)$$

il est important de noter qu'en utilisant la forme linéarisée de l'équation d'Einstein, nous nous restreignons au cas de faible compacité $\Xi \ll 1$. En utilisant les coordonnées de jauge de Lorenz de type cartésien (ct, x, y, z) nous écrivons la formule du potentiel retardé :

$$\bar{h}_{ab}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \iiint \frac{T_{ab}(t - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (1.136)$$

où $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $|\vec{x}| = \sqrt{\delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu}$ et \iiint l'intégrale sur la source émettrice. Pour un observateur à grande distance de la source, c'est-à-dire $r = |\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ nous avons

$$\begin{aligned}
|\vec{x} - \vec{x}'| &= r \left| \vec{n} - \frac{\vec{x}'}{r} \right| = r \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{x}'}{r} \right) \cdot \left(\vec{n} - \frac{\vec{x}'}{r} \right) \right]^{1/2} = r \left[1 - 2 \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{r} + \left(\frac{\vec{x}'}{r} \right)^2 \right]^{1/2} \\
&\simeq r \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{r} \right)
\end{aligned} \tag{1.137}$$

avec $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}$.

La formule du potentiel retardé est donc simplifiée.

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{ab}(t, \vec{x}) &= \frac{4G}{c^4} \iiint T_{ab} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{c}, \vec{x}' \right) d^3 \vec{x}' \\
&= \frac{4G}{c^4} \iiint T_{ab} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) d^3 \vec{x}'
\end{aligned} \tag{1.138}$$

La seconde égalité est obtenue en supposant que la source est lentement variable. Nous supposons ainsi que le tenseur d'énergie-impulsion évolue très peu lors du passage d'un photon qui viendrait à traverser la source. C'est-à-dire que pour une fréquence caractéristique ω , nous avons $\frac{\omega |\vec{x}'|}{c} \ll 1$. C'est pour cette raison que nous négligeons le terme $\frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{c}$.

Dans le cadre de la linéarisation de l'équation de conservation de l'énergie-impulsion $\nabla^a T_{ab} = 0$, peut s'écrire comme $\eta^{ab} = \frac{\partial T_{ab}}{\partial x^b} = 0$, ainsi nous écrivons le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{c} \frac{\partial T_{00}}{\partial t} + \frac{\partial T_{0i}}{\partial x^i} = 0 \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 T_{0i}}{\partial x^k \partial t} = 0 \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial T_{k0}}{\partial t} + \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^l} = 0 \end{cases} \tag{1.139}$$

En utilisant la symétrie du tenseur d'énergie-impulsion $T_{0k} = T_{k0}$ on obtient

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(c \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^l} \right) = 0 \tag{1.140}$$

En intégrant l'équation (1.140) multipliée par $x^i x^j$ sur tout l'espace nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} \iiint \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} x^i x^j d^3 \vec{x} &= \iiint \frac{\partial^2 T_{kl}}{\partial x^k \partial x^l} x^i x^j d^3 \vec{x} \\
&= \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial T_{kl}}{\partial x^l} x^i x^j \right) - \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^l} (\delta^i_k x^j + x^i \delta^j_k) \right] d^3 \vec{x} \\
&= - \iiint \left(\frac{\partial T_{il}}{\partial x^l} x^j + \frac{\partial T_{jl}}{\partial x^l} x^i \right) d^3 \vec{x} \\
&= - \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x^l} (T_{ilx^j} + T_{jlx^i}) - T_{il} \delta_l^j - T_{jl} \delta_l^i \right] d^3 \vec{x} = 2 \iiint T_{ij} d^3 \vec{x}
\end{aligned} \tag{1.141}$$

Nous en déduisons l'inversion de l'intégrale et la dérivée seconde telle que $\frac{1}{c^2} \iiint \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} x^i x^j d^3 \vec{x} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \iiint T_{00} x^i x^j d^3 \vec{x}$. En se limitant à la limite d'une source faiblement relativiste, c'est-à-dire $T_{00} \simeq \rho c^2$, nous obtenons en utilisant le tenseur de moment d'inertie de la source $I_{ij} = \iiint \rho(t, \vec{x}) x^i x^j d^3 \vec{x}$

$$\frac{1}{c^2} \iiint \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} x^i x^j d^3 \vec{x} = \frac{d^2}{dt^2} I_{ij}(t) = \ddot{I}_{ij}(t) = 2 \iiint T_{ij}(t, \vec{x}') d^3 \vec{x}' \tag{1.142}$$

Nous avons donc

$$\bar{h}_{ab} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ab}(t - \frac{r}{c}) \tag{1.143}$$

Il s'agit d'un résultat obtenu dans le cadre de la jauge de Lorenz, il nous faut maintenant simplifier ce résultat avec la jauge TT. Une solution pour cela est d'introduire l'opérateur de projection transverse tel que $P_{ij}(\vec{x}) = \delta_{ab} - n_a n_b$ et de prendre uniquement la partie transverse et sans trace.

$$h_{ab}^{TT} = \frac{2G}{c^4 r} \left[P_a^c P_b^d - \frac{1}{2} P_{ab} P^{cd} \right] \ddot{I}_{ab}(t - \frac{r}{c}) \tag{1.144}$$

Nous introduisons également le moment quadrupolaire de masse de la source Q_{ab} :

$$Q_{ab}(t) = \iiint \rho(t, \vec{x}) \left(x^a x^b - \frac{1}{3} \vec{x} \cdot \vec{x} \delta_{ab} \right) d^3 \vec{x} = I_{ab} - \frac{1}{3} (\delta^{cd} I_{cd}) \delta^{ab} \tag{1.145}$$

Il est important d'introduire cette quantité, car elle permet de faire apparaître une version du tenseur de moment d'inertie sans trace. Elle demeure également plus accessible que le tenseur d'inertie I_{ab} . De plus, c'est un terme qui est présent dans le développement du potentiel gravitationnel de la gravitation pré-relativiste de tel que :

$$\Phi(t, \vec{x}) = \frac{GM}{r} + \frac{3GQ_{ab}(t)n^a n^b}{2r^3} + \dots \tag{1.146}$$

De plus, en remarquant que

$$\left[P_a^c P_b^d - \frac{1}{2} P_{ab} P^{cd} \right] I_{ab} = \left[P_a^c P_b^d - \frac{1}{2} P_{ab} P^{cd} \right] Q_{ab} \quad (1.147)$$

Finalement, nous en déduisons l'équation du quadrupôle.

$$h_{ab}^{TT} = \frac{2G}{c^4 r} \left[P_a^c P_b^d - \frac{1}{2} P_{ab} P^{cd} \right] \ddot{Q}_{ab}(t - \frac{r}{c}) \quad (1.148)$$

Flux d'énergie d'une source émettrice d'ondes gravitationnelles

Nous avons montré que les ondes gravitationnelles sont des ondes de déformation de l'espace-temps. Elles s'accompagnent d'un déplacement d'énergie et d'impulsion, comme une vague à la surface de la mer. Lorsque nous regardons celle-ci loin de leur source émettrice, c'est-à-dire en supposant que nous sommes en espace-temps plat et lorsqu'on les moyenne sur plusieurs longueurs d'ondes, comme nous pourrions le faire avec une simple onde électromagnétique, cela nous permet de réécrire le tenseur énergie-impulsion comme fonction de la moyenne temporelle des ondes gravitationnelles. Ce tenseur ainsi construit se nomme le tenseur d'Isaacson (lire section 35.7 [173]) :

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} \left\langle \frac{\partial h_{ab}^{TT}}{\partial x^\mu} \frac{\partial h_{ab}^{TT}}{\partial x^\nu} \right\rangle \quad (1.149)$$

En considérant une onde gravitationnelle se propageant selon la direction z , la composante T_{tz} du tenseur d'Isaacson nous permet d'arriver à une nouvelle quantité, il s'agit du flux d'énergie F transporté par l'onde gravitationnelle.

$$F = \frac{c^3}{16\pi G} \left\langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \right\rangle \quad (1.150)$$

nous retrouvons ici, les deux polarisations de l'onde gravitationnelle h_+ et h_\times . Dans le cas idéal d'une onde gravitationnelle monochromatique de fréquence f et d'amplitude h , et en moyennant sur plusieurs périodes, il est évident que $\left\langle \dot{h}_+^2 \right\rangle = \left\langle \dot{h}_\times^2 \right\rangle = \frac{(2\pi f)^2 h^2}{2}$ nous avons donc

$$F = \frac{\pi c^3}{4G} f^2 h^2 \simeq 0.3 \left(\frac{f}{1\text{kHz}} \right)^2 \left(\frac{h}{10^{21}} \right)^2 \text{ W.m}^{-2} \quad (1.151)$$

Une première conclusion est la quantité importante que transporte une onde gravitationnelle. Nous avons présenté une onde gravitationnelle comme une déformation de l'espace-temps, ainsi, nous pouvons donc assimiler l'espace-temps à quelque chose de très rigide.

Luminosité gravitationnelle

Nous allons nous intéresser à la luminosité gravitationnelle, il s'agit d'estimer, comme nous pourrions le faire pour les ondes électromagnétiques, l'énergie totale qui est rayonnée par la source par unité de temps. Pour cela, nous considérons une sphère autour de la source et le tenseur d'Isaacson, nous dérivons celui-ci sur le temps pour obtenir.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{Q}_{ab} \ddot{Q}^{ab} \rangle \quad (1.152)$$

Cette formule est aussi appelée formule du quadrupôle, il s'agit d'un des résultats du deuxième papier sur les ondes gravitationnelles publié en 1918 par Einstein [92]. C'est un résultat assez proche que celui que nous pouvons obtenir pour des ondes électromagnétiques. Dans ce cadre théorique, on utilise la puissance rayonnée par des charges électriques accélérées, on appelle cela un dipôle électrique oscillant D_a . Celui-ci produit une luminosité électrique qui a exactement la même forme que celui des ondes gravitationnelles. En effet, nous avons $\mathcal{L} = \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{4\pi} \langle \ddot{D}_a \ddot{D}^a \rangle$.

1.3.5 Sources des ondes gravitationnelles

Les ondes gravitationnelles sont émises par des masses accélérées. Nous pouvons définir une luminosité gravitationnelle comme pour les ondes électromagnétiques. Il s'agit de l'énergie totale rayonnée sous la forme d'ondes gravitationnelles par unité de temps [116] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\sim \frac{G}{c^5} s^2 \omega^6 M^2 R^4 \\ &\sim \frac{c^5}{G} s^2 \left(\frac{R_s}{R} \right)^2 \left(\frac{v}{c} \right)^6 \\ &\sim \frac{c^5}{G} s^2 \Xi^2 \left(\frac{v}{c} \right)^6 \end{aligned} \quad (1.153)$$

avec R_s le rayon de Schwarzschild de l'objet, s est un facteur d'asymétrie. Pour un objet à symétrie sphérique $s = 0$ et v la vitesse caractéristique du mouvement de la source.

Nous comprenons que, pour obtenir une luminosité importante, il faut des objets compacts. On introduit la compacité $\Xi = \frac{R_s}{R}$ comme le rapport énergie du potentiel gravitationnel et d'énergie de masse. Un objet compact a donc une énergie de masse du même ordre que l'énergie du potentiel gravitationnel. La formule de la luminosité (voir équation 1.153) dépend quadratiquement de ce paramètre Ξ . Ce qui explique que les trous noirs émettent efficacement ces ondes. Des objets dont le facteur de symétrie est grand (loin de la symétrie sphérique) émettent des ondes plus efficacement également. En effet, la dépendance de l'équation en s est quadratique. Les vitesses importantes favorisent

aussi la luminosité \mathcal{L} .

Il existe différentes sources astrophysiques d'ondes gravitationnelles [52]. Nous nous intéresserons ici aux fusions d'objets compacts. Lors de la fusion d'objets compacts comme les trous noirs et les étoiles à neutrons, les ondes gravitationnelles (OG) sont à l'origine de la circularisation des orbites. En effet, l'émission des OGs vient de la perte en énergie potentielle et du moment angulaire.

La sensibilité des détecteurs avancés LIGO et VIRGO est typiquement $h \sim 10^{-21}$. En effet, pour un système composé de deux objets de l'ordre de $M \sim 10M_\odot$ séparés initialement de $D \sim 10r_s$, 10 rayons de Schwarzschild $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ et à une distance $R = 100$ Mpc du système d'observation $h \sim \frac{G^2 M^2}{c^4 DR} \sim 10^{-21}$. Il est important de noter que le facteur $\frac{G^2}{c^4}$ est fort petit de l'ordre de $10^{-54} \text{ kg}^{-2}\text{m}^2$. On peut donner une expression de h qui donne l'ordre de grandeur de l'amplitude d'une source en fonction de sa masse M , la distance entre lui et la Terre R , sa fréquence d'émission et le temps caractéristique d'émission de la source [116] :

$$h \simeq 2 \times 10^{-19} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{1 \text{ Mpc}}{R} \right) \left(\frac{1 \text{ kHz}}{f} \right) \left(\frac{1 \text{ ms}}{\tau} \right)^{1/2} \epsilon^{1/2} \quad (1.154)$$

où f est la fréquence de l'onde émise τ le temps caractéristique et $\epsilon = \frac{\Delta E}{Mc^2}$ l'efficacité du processus d'émission gravitationnelle. On supposera qu'il est égal à 1 (toute l'énergie de masse est rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles).

Un binaire de quelques masses solaires, situé à 1 Mpc émettant une onde de fréquence 1 kHz et dont le temps caractéristique est de quelques millisecondes, produit une amplitude estimée égale à 10^{-19} . Cela représente une bonne motivation, car notre estimation de l'amplitude est 100 fois supérieure à la sensibilité des détecteurs avancés LIGO et VIRGO.

1.3.6 Détection des ondes gravitationnelles

Il est difficile de détecter les ondes gravitationnelles. En effet, Einstein déjà en 1916 dans son papier où il fait apparaître pour la première fois le concept d'ondes gravitationnelles[91], reconnaît qu'elles sont vraiment petites. À la suite de son papier, beaucoup de discussions existent au sujet de l'existence ou non de ces ondes. C'est à la conférence de Chappel Hill [65], en 1957, que Felix Pirani établit que l'accélération relative de particules génère des ondes gravitationnelles [192]. C'est une source de motivation pour réfléchir à la conception de détecteurs. Ainsi, la première idée pour l'observation directe est d'utiliser la résonance d'une barre métallique et d'étudier les modes de la barre (Weber, 1966) [244]. Le passage d'une onde gravitationnelle devrait modifier les modes de vibrations thermiques de la barre. Il s'agit de détecteur peu sensible et avec une très petite bande passante, ainsi pour observer une onde gravitationnelle, il faut que celle-ci soit parfaite-

ment dans la petite bande de fréquence. Cela nécessite une très bonne connaissance des propriétés des sources que l'on désire observer. Durant les années soixante et soixante-dix, des premiers espoirs de détection de J. Weber [243] sont apparus. Aujourd'hui, il n'est pas possible de conclure sa détection. Parallèlement, les théoriciens étudient les sources astrophysiques, à la lumière du futur prix Nobel Kip Thorne qui [230] établit les premières zoologies de sources. Les sources prédites sont des binaires compacts de trous noirs stellaires ($\sim 10M_{\odot}$) ou d'étoiles à neutrons émettant des ondes gravitationnelles autour de 10 Hz à 10 kHz durant leur danse, en anglais, on parle d'*inspiral*. Une autre motivation pour construire des détecteurs est l'observation de Hulse et Taylor (prix Nobel 1993)[131]. Ils ont observé une binaire de pulsar (voir figure 1.8) qui avait un raccourcissement de l'orbite [247]. L'explication est le rayonnement de l'énergie potentielle de cette binaire par émission gravitationnelle. Il s'agit d'une observation indirecte et de la preuve de l'existence des ondes gravitationnelles [228]. La deuxième idée pour l'observation directe est d'utiliser un interféromètre de Michelson, ce sont deux Soviétiques qui démontrent cette possibilité (Gertsenshtein et Pustovoit, 1962) [200] cette méthode a l'avantage d'avoir une bande de fréquence plus grande. Ainsi, nous maximisons la possibilité d'observer des sources, mais il s'agit toujours de détecter un effet très petit. C'est donc toujours un défi de réalisation. Ainsi, dans ce contexte, un Michelson est donc construit par Robert Forward (étudiant en thèse de Weber) et Hughes Aircraft pour chercher les ondes gravitationnelles, mais celui-ci n'est pas assez sensible. Le futur prix Nobel Rainer Weiss du MIT en 1972 [248] détaille une manière réaliste pour développer un interféromètre capable de détecter des ondes gravitationnelles. Il détaille chaque source de bruits dans ce type de détecteur afin de construire la sensibilité. C'est ainsi que le projet LIGO est né dans les années 1980. En Europe, des projets similaires voient le jour comme Virgo avec le français et niçois Alain Brillet, spécialiste de l'optique LASER et l'italien de Pise Adalberto Giazotto spécialiste des installations d'isolation des vibrations.

Ce type de détecteur a été couronné de succès pour la première fois en 2015 [1], à la suite de la première observation directe d'ondes gravitationnelles, cent ans après la publication de la relativité générale par Einstein.

Détecteur au sol

Les observations directes ont été réalisées en configuration lame d'air avec les détecteurs LIGO (aux États-Unis). Il s'agit d'interféromètres de Michelson. Lorsqu'une onde passe dans un détecteur, elle modifie la longueur des bras. Cette modification de longueur est de l'ordre de $\Delta L = 10^{-18}$ m, la longueur du bras étant de $L \sim 4$ km, l'ordre de grandeur de l'amplitude détectée est donc de $h(t) = \frac{\delta L(t)}{L} \sim 10^{-21}$. L'amplitude $h(t)$ est donc définie par un écart relatif des bras.

Les bras des détecteurs LIGO contiennent des cavités optiques de type Fabry-Pérot

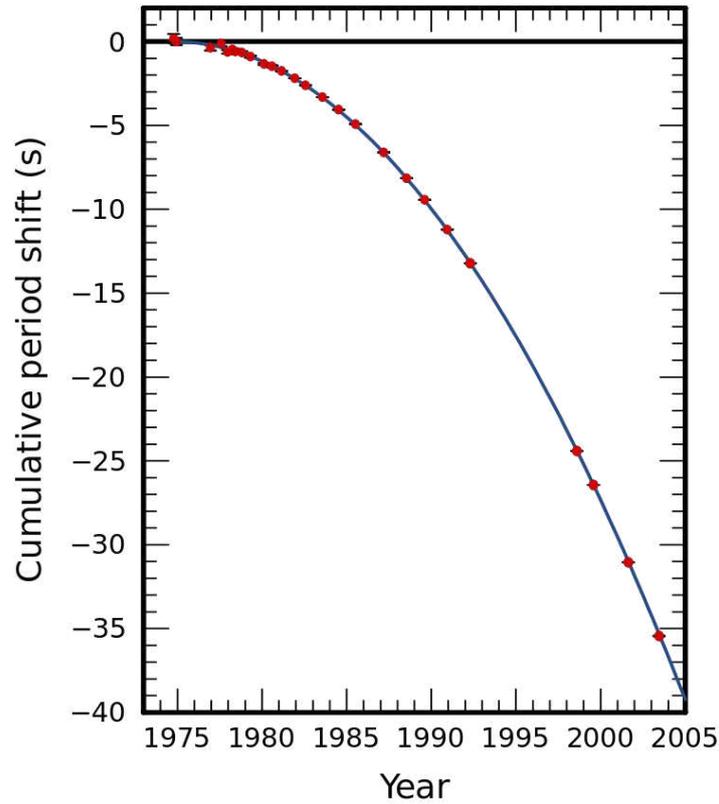


FIGURE 1.8 – Décalage de période cumulée de la binaire de pulsar PSR 1913+16 observées entre 1974 et 2004. Avec une période de huit heures qui se décale de trois minutes à toutes les orbites, $M_1 = 1.438M_\odot$ et $M_2 = 1.390M_\odot$. Les points rouges correspondent aux mesures radio de périodes orbitales et le tracé bleu est celui de la valeur théorique d’une radiation gravitationnelle. Nous constatons un très bon accord entre les mesures et le modèle d’émission de radiations gravitationnelles. *Data from J. M. Weisberg and J. H. Taylor, Relativistic Binary Pulsar B1913+16 : Thirty Years of Observations and Analysis, July 2004.*[246].

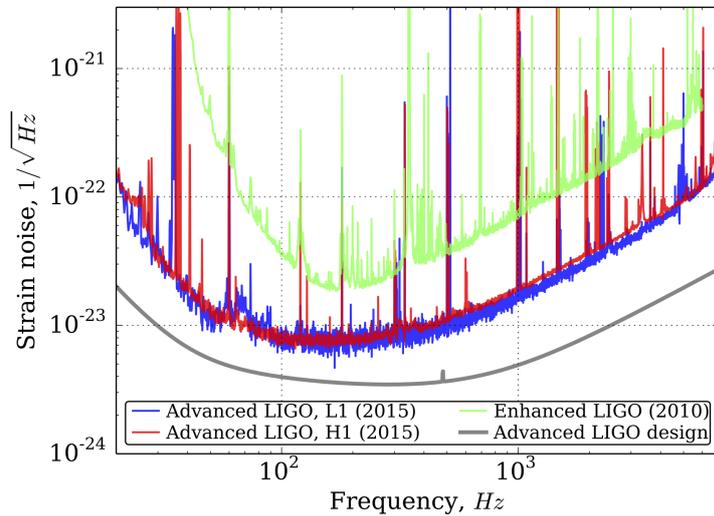
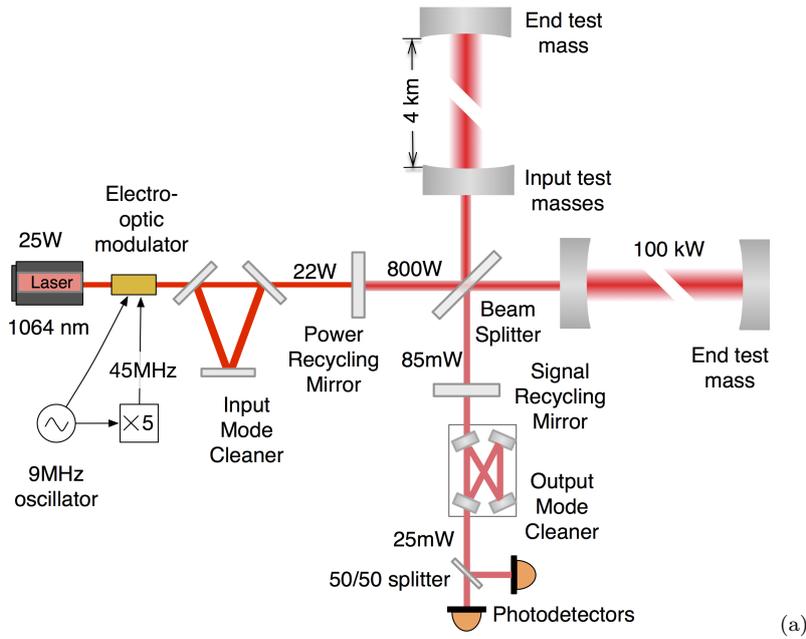


FIGURE 1.9 – (a) schéma du détecteur LIGO et (b) sa sensibilité.

pour augmenter la différence de marche des faisceaux (a). La densité spectrale d'amplitude du bruit du détecteur (b) détermine la sensibilité. Celle des détecteurs Advanced LIGO, au cours de la première série d'observations (septembre 2015 à janvier 2016), était d'environ trois fois supérieure à celle des instruments LIGO en 2010.

Les phases de prise de données sont ponctuées par des phases de maintenance durant lesquelles des travaux sur les instruments optimisent la sensibilité. Il est important d'avoir différents détecteurs afin de localiser les sources. C'est dans ce but que différents détecteurs ont vu le jour à différents endroits de la planète. Ainsi, ce type de détecteurs est désigné pour observer les binaires d'objet compact comme les trous noirs et les étoiles à neutrons, ces signaux ont la caractéristique d'avoir une amplitude et une fréquence qui augmente jusqu'au moment du *merger*, ce terme anglais désigne le moment où les deux

objets fusionnent. Ce type de signaux s'appelle un *Chirp*, qui signifie en français "gazouillis", il s'agit d'un signal très reconnaissable par les spécialistes dans un diagramme temps-fréquence. Après les phases d'*inspiral* et de *merger* vient la phase de *ringdown*. Il s'agit de la phase de "vibration" de l'horizon des événements. Cette phase est caractérisée par une baisse de l'amplitude au cours du temps. De nombreuses sources peuvent générer des signaux courts, on parle de *bursts*. Il s'agit de signaux transitoires, on espère observer des supernovæ pour comprendre le mécanisme d'explosion. Les sursauts gamma transitoire (*Gamma Ray bursts*) produit durant l'effondrement d'étoiles massives qui ont des rotations rapides ou les fusions d'étoiles à Neutrons (kilonovæ) [4]. Nous espérons aussi détecter les *glitches* de pulsar accrétant ou les cordes cosmiques. Les signaux transitoires sont observés par un excès de puissance dans les données. Il est potentiellement possible d'observer des sources périodiques comme un pulsar non sphérique. En effet, pour des objets à rotation rapide et compact des discontinuités de surface comme des montagnes, sont des ingrédients générant périodiquement des ondes gravitationnelles (*cf.* : paragraphe sur la luminosité gravitationnelle 1.3.4). En effet, à chaque passage devant la ligne de visée de la discontinuité produit une émission d'ondes gravitationnelles, ainsi nous avons un signal sinusoïdal. Malgré la simplicité du signal, il est soumis à l'effet Doppler, mais également aux variations de discontinuité. Ceci le rend assez compliqué à observer. Ces détecteurs sont aussi sensibles au fond stochastique, mais nous avons dédié une partie pour ce type de signal.

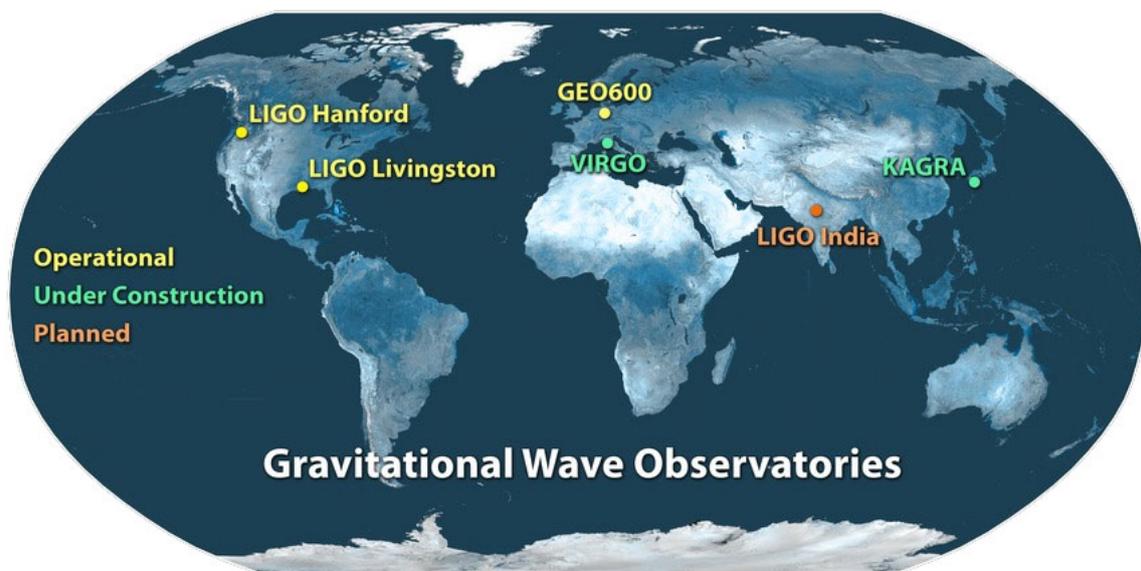


FIGURE 1.10 – Carte des projets de construction de détecteur.

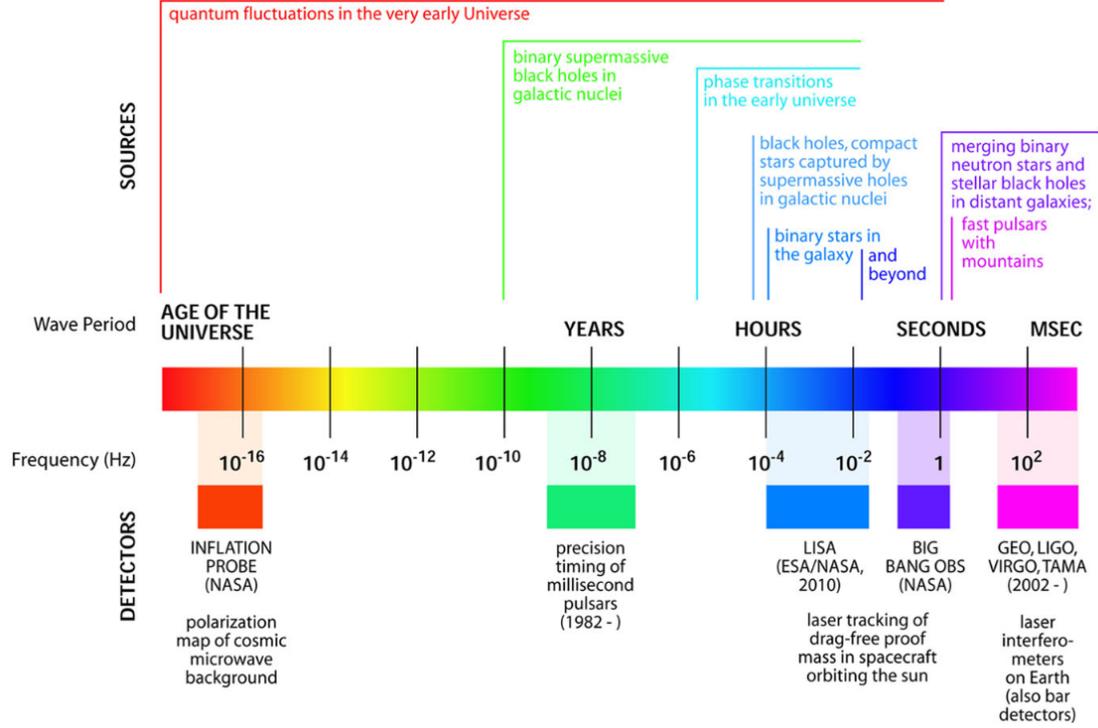


FIGURE 1.11 – Spectre d’ondes gravitationnelles, ainsi que les sources potentielles et les détecteurs appropriés. [211]

Détecteur spatial : LISA

On peut, comme pour les ondes électromagnétiques astrophysiques, introduire un spectre d’ondes gravitationnelles. Comme pour l’astronomie traditionnelle basée sur la réception des photons, chaque domaine fréquentiel correspond à différents phénomènes astrophysiques. De plus, pour mesurer les photons des différents domaines, il faut construire différents instruments dont la géométrie et le principe de détection ne sont pas les mêmes. Il en est de même avec les ondes gravitationnelles [211]. Sur la figure 1.11, nous trouvons que, par exemple, pour $f = 10 \Rightarrow 1000$ Hz. Nous pouvons observer les effets binaires des objets compacts ($M < 200 M_{\odot}$). Pour $f = 10^{-5} \Rightarrow 10^{-2}$ Hz. Nous pouvons observer des objets compacts capturés par des trous noirs supermassifs ($M > 10^6 M_{\odot}$) ou des étoiles binaires compactes dans la Voie lactée également jusqu’à $M_{total} \sim 50 M_{\odot}$, mais pas la fusion.

Pour observer un tel domaine fréquentiel, nous pouvons introduire :

$$h = \frac{(\pi f)^{2/3} \mathcal{M}^{5/3}}{D} = \frac{\Delta L}{L} \quad (1.155)$$

Avec f la fréquence de l’onde gravitationnelle, D la distance du binaire qui émet l’onde, $\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}$ est la *chirp mass*. Une propriété des ondes gravitationnelles peut être établie. En effet, nous remarquons que la dépendance de l’amplitude est en $1/D$. Si nous nous considérons un gain de sensibilité d’un facteur $1/k$, c’est-à-dire que la sen-

sibilité d'un détecteur pour détecter h est divisé par k , par conséquent le nombre de sources d'amplitude h accessibles par le nouveau détecteur amélioré est multiplié par k^3 . Si nous considérons une densité de source uniforme. Dans un même temps pour un instrument mesurant des ondes électromagnétiques voit son nombre de sources potentiellement accessible croître en $k^{2/3}$ car le flux électromagnétique, la quantité mesurée par les instruments mesurant les ondes électromagnétiques, est proportionnel à $1/D^2$. Il est très important de noter ici que cette estimation de l'évolution du nombre de sources ne tient pas compte du redshift. Il s'agit ici de même en avant l'importance de l'évolution du nombre de sources lorsque l'on augmente son rayon d'observation. De plus, nous avons remarqué que cette évolution du nombre de sources est très différente des sources électromagnétiques. D'après l'équation 1.155, si on veut mesurer une onde gravitationnelle de plus faible fréquence, nous avons deux choix : soit nous cherchons à mesurer des ΔL plus petit, mais cette solution est impossible. En effet, les bruits de limitation de la sensibilité des détecteurs LIGO/Virgo sont d'origine sismique. Il nous faudrait empêcher la terre de trembler. Ou, soit en construisant un interféromètre beaucoup plus grand. C'est une solution actuellement à l'étude en Europe avec le projet Einstein Telescope (ET) [247] ou le projet américain Cosmic Explorer [205]. Mais, si l'on introduit un interféromètre avec $L = 2,5 \cdot 10^9$ m (Pour satisfaire une mesure de $h \simeq 10^{-21}$), il est impossible d'avoir ce genre d'interféromètre sur Terre. C'est pour cette raison que nous devons envoyer des interféromètres dans l'espace. C'est dans ce contexte que nous pouvons introduire la mission LISA (Laser Interferometer Space Antenna) qui est une constellation de trois satellites qui sera envoyée en 2034 au point de Lagrange L3. La mission Laser Interferometer Space Antenna (LISA) [19] est une future mission de l'ESA, également soutenue par la NASA, dans le but d'observer les ondes gravitationnelles dans la bande des basses fréquences $[10^{-5}, 1]$ Hz. La durée de vie de la mission sera théoriquement de 4 ans, mais pourrait être étendue à 6 ou 10 ans d'observations scientifiques. LISA est une constellation triangulaire de trois engins spatiaux, séparés les uns des autres à une distance de $L = 2.5 \times 10^9$ m. Les trois vaisseaux spatiaux échangent des signaux laser entre eux pour former un interféromètre fonctionnel, de manière à former un triangle équilatéral dont le passage d'une onde gravitationnelle viendra modifier le triangle. De cette manière, nous disposons de trois interféromètres (figure 1.12) [73]. La grandeur conséquente des bras introduit un temps de propagations des signaux laser, non négligeable $\tau = 8,33$ s. Ainsi, nous devons introduire une technique interférométrique appelée : interférométrie temporelle (TDI). De plus, il n'y a pas de référentiel fixe, ce qui rend le calcul plus complexe. Les trois *sciencecraft* sont reliés par six lasers séparés, deux par bras. Les lectures de phase de chacun de ces lasers sont combinées numériquement pour former les signaux interférométriques de base. Comme il s'agit d'une mission spatiale, nous ne pouvons pas y apporter des améliorations comme cela se fait avec LIGO ou VIRGO. Pour que la mission LISA soit couronnée de succès, nous devons donc avoir une connaissance presque parfaite des bruits instrumentaux de

LISA comme le bruit de lumière diffusée ou *optical bench jitter*.

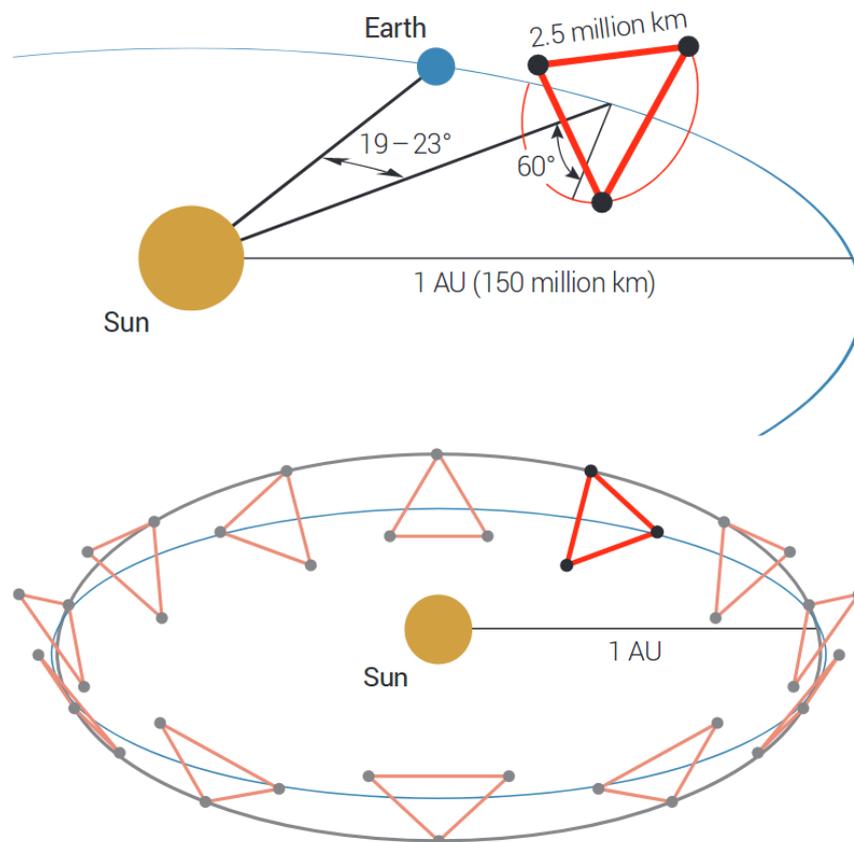


FIGURE 1.12 – Schéma de l’orbite et du système à trois satellites de LISA [73].

Selon la proposition de mission LISA [73] (figure 1.13), avec la sensibilité de LISA telle qu’elle a été donnée par le proposal 1.14 la mission permettra d’observer :

- *Binaires galactiques compactes* : Notre galaxie, la Voie lactée contient des objets compacts rayonnants des ondes gravitationnelles dans la bande de fréquences LISA. Nous pouvons estimer que cette source d’ondes gravitationnelles est majoritairement dominée par les naines blanches. Nous pouvons nous attendre d’avoir des sources résolues [154] la plupart ne devraient pas l’être, ce qui forme le fond stochastique galactique.
- *Binaires des trous noirs* : La fusion de trous noirs massifs dans les noyaux galactiques sont les signaux les plus puissants que LISA puisse détecter. Nous prévoyons de détecter des fusions de l’ordre de $10^4 M_\odot$ à $10^7 M_\odot$ jusqu’à un redshift $z = 20$ (P. Lowman *et al.*, 2009 [197]). Nous pouvons mesurer la luminosité des binaires, et ainsi comprendre l’évolution des trous noirs massifs et mesurer la vitesse de fusion. C’est aussi un excellent moyen de tester les principes de la relativité générale.
- *Extreme Mass Ratio Inspirals (EMRI)* : C’est un processus dynamique de capture d’étoiles ou d’objets compacts de faible masse par des trous noirs de masse ex-

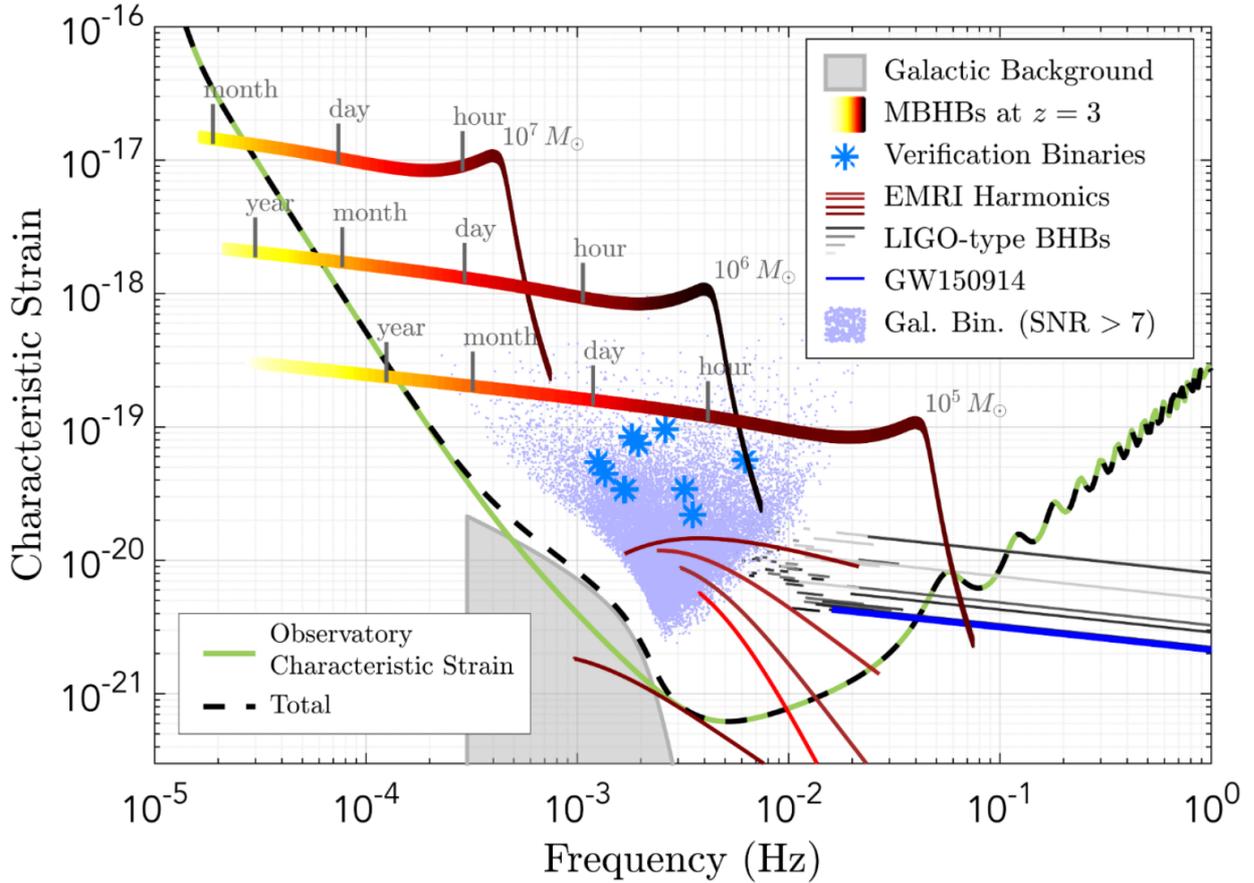


FIGURE 1.13 – La figure est tirée de la proposition de mission LISA L3 (*proposal*) [73]. En vert, ce sont les courbes de sensibilité et l'autre couleur correspond à la source différente possible dans la dimension de déformation caractéristique. Le gris représente le fond des binaires galactiques (naines blanches), les tracés dégradés du jaune vers le brun sont des estimations des binaires de trous noirs supermassifs (*Massif Binaries black holes (MBHB)*) pour différentes valeurs de masses ($10^5 M_\odot$, $10^6 M_\odot$ et $10^7 M_\odot$) pour un *redshift* de $z = 3$. Les points bleus sont les binaires galactiques résolus ($SNR > 7$), les étoiles bleues sont les binaires de vérifications. Il s'agit de binaires dont on connaît les propriétés et qui seront observables, nous les utiliserons pour paramétrer les détections. Les tracés rouges sont les *inspirals* de binaires de ratio de masse extrême (*Extrem mass ratio inspirals (EMRIs)*). Il sera aussi possible d'observer les binaires de LIGO/Virgo (tracé noir) et le tracé bleu est le premier événement GW150914.

trême (ratio = 10^6) (Hughes 2001 [130]). Les étoiles deviennent des témoignages de l'espace-temps autour du trou noir supermassif. C'est l'une des meilleures chances de tester dans des domaines forts et d'analyser le champ gravitationnel produit par des trous noirs massifs.

- *Fond stochastique cosmologique* : Nous pourrons observer ce fond qui est comme le fond cosmologique des microondes, un rayonnement fossile produit par l'univers quand il était très jeune. Nous avons réservé une longue discussion sur le sujet. Il s'agit de notre but au sein de cette thèse de doctorat.

LISA a un domaine de fréquence dans lequel sa courbe de sensibilité [73] est utilisée pour visualiser le niveau de détectabilité d'un phénomène. Si un phénomène a une amplitude supérieure à la sensibilité pour une fréquence donnée, ce signal sera détectable. La courbe de sensibilité de LISA (figure 1.14) est limitée par le bruit instrumental et environnemental. Il est fondamental de comprendre les différentes sources de limitation et de comprendre la physique responsable du bruit pour comprendre les observations, particulièrement, lorsque nous désirons observer le fond stochastique.

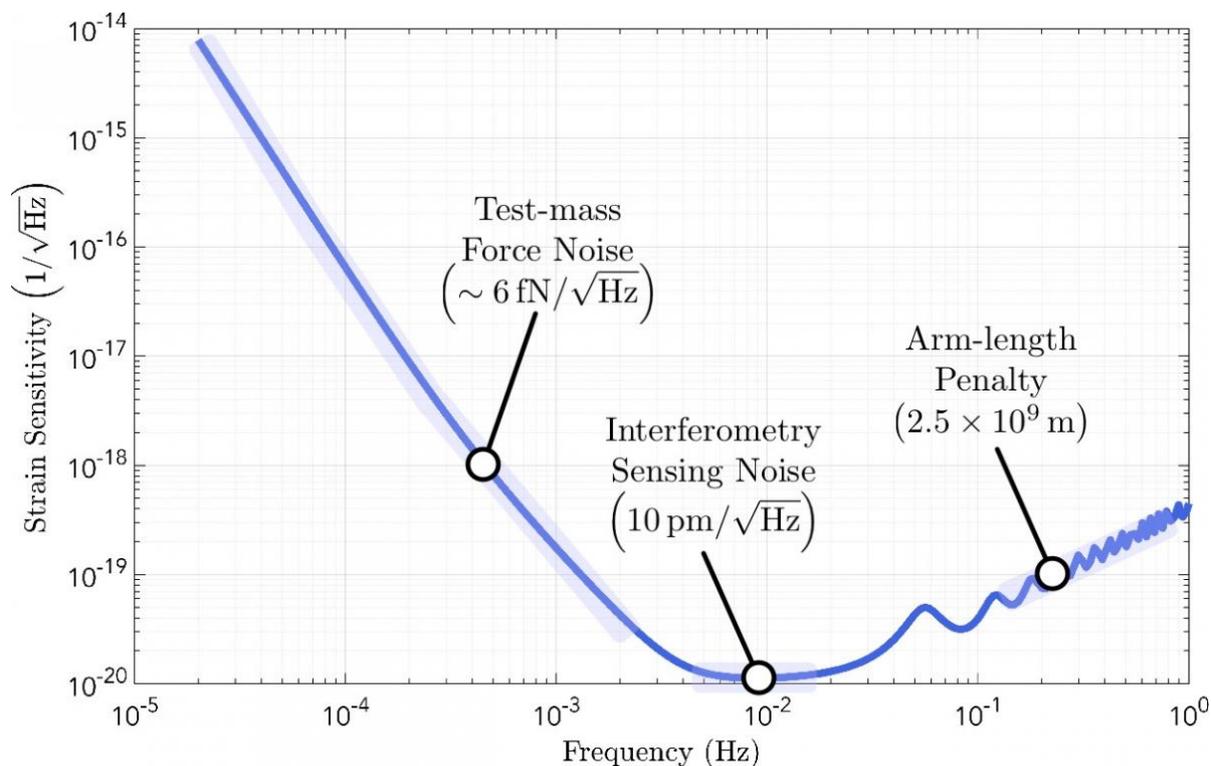


FIGURE 1.14 – Le tracé est tiré de la collaboration LISA [245]. En bleu, il s'agit de la sensibilité à la déformation avec les différentes limitations du spectre de bruit.

Système de détection de LISA : le système optique de LISA

Dans la description du design de LISA [161], celle-ci est une constellation de trois satellites (Voir figure 1.15), chacun est composé de deux masses de test en chute libre. Une onde gravitationnelle crée une déformation, par effet, de marée de cette constellation, qui produit une modulation dans le temps de trajet de la lumière entre ces masses-test (TM). Ceci se caractérise par une variation de longueur des trajets optiques. Nous pouvons aussi le définir comme un décalage Doppler faisant varier la fréquence des Lasers. Nous utiliserons l'interférométrie laser pour effectuer des mesures de changement de phase optique effectuées dans chacun des trois satellites, afin de mesurer les effets du passage d'ondes gravitationnelles. Ainsi, la sensibilité de LISA est limitée par le bruit de la mesure de la variation de longueur de trajet optique entre les TMs, et par ailleurs par les bruits

de forces orbitales s'appliquant sur les TMs, et les bruits accélérations parasites. La figure 1.14 montre la sensibilité de LISA en fonction des différents bruits de l'instrument. Nous pouvons estimer que le changement de distance entre les deux TMs provoqués par le passage d'ondes gravitationnelles sera de l'ordre de 10^{-12} à 10^{-9} m, ce qui correspond à une variation d'accélération de l'ordre de 10^{-15} m.s⁻². Il s'agit d'une variation d'une variation très petite en comparaison aux variations causées par les dynamiques du système solaire. D'après le rapport de l'ESA [161], on s'attend à des variations de l'ordre de $\pm 35 \times 10^6$ m sur les longs bras et des variations d'accélération de l'ordre de 10^{-6} m.s⁻². Mais, si l'on compare les fréquences, celle-ci ne doit pas affecter les fréquences autour des mHz, car les variations d'origine orbitale ont une période de l'ordre de l'année. C'est ce qui limite donc les basses fréquences de LISA. Les valeurs très petites associées aux ondes gravitationnelles représentent de nombreux défis d'ingénierie et de métrologie des systèmes optiques. Pour un succès de la mission LISA, nous devons ainsi avoir une mesure de bruit de déplacement inférieur à

$$S_{link}^{1/2} < 10 \text{ pm.Hz}^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{2 \text{ mHz}}{f} \right)^4 \right]^{1/2} \quad (1.156)$$

de même, le bruit d'accélération limite de chute libre des TMs est données par

$$S_g^{1/2} < 3 \text{ fm.s}^{-2}.\text{Hz}^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{0.4 \text{ mHz}}{f} \right)^2 \right]^{1/2} \left[1 + \left(\frac{f}{8 \text{ mHz}} \right)^4 \right]^{1/2} \quad (1.157)$$

De plus, la combinaison de l'étalement du faisceau laser et de la distance des longs bras entre chaque satellite induit une grande perte de puissance de faisceau LASER. En effet, la puissance nominale du LASER sera de 2 W, lors de la réception le télescope observera un Laser de quelques centaines des pW. Il s'agit de la puissance reçue, nous cherchons à observer des variations de ce faisceau de l'ordre de trois ordres de grandeur de celui-ci. Il s'agit donc d'un défi supplémentaire à relever. Toute source lumineuse parasite est donc très problématique pour la mesure finale.

Ainsi, la mesure de LISA est la combinaison de trois mesures interférométriques réalisées sur chaque MOSA (Moving Optical Sub-Assembly). En effet, il s'agit de l'assemblage de trois instruments (Le télescope, le banc optique (Voir figure 1.16 et 1.16) et le système de référence gravitationnelle). Il y a donc un MOSA pour chaque lien optique via un LASER entre satellites, c'est-à-dire 6 MOSA. Ainsi, ce système injecte le signal pour le satellite voisin et reçoit avec son télescope le signal du même satellite. LISA est donc la combinaison d'une mesure interférométrique de distance des longs bras, d'une mesure de décalage de fréquence du signal reçu avec un interféromètre de référence et une mesure de variations accélérations avec une mesure interférométrique sur la TM de référence.

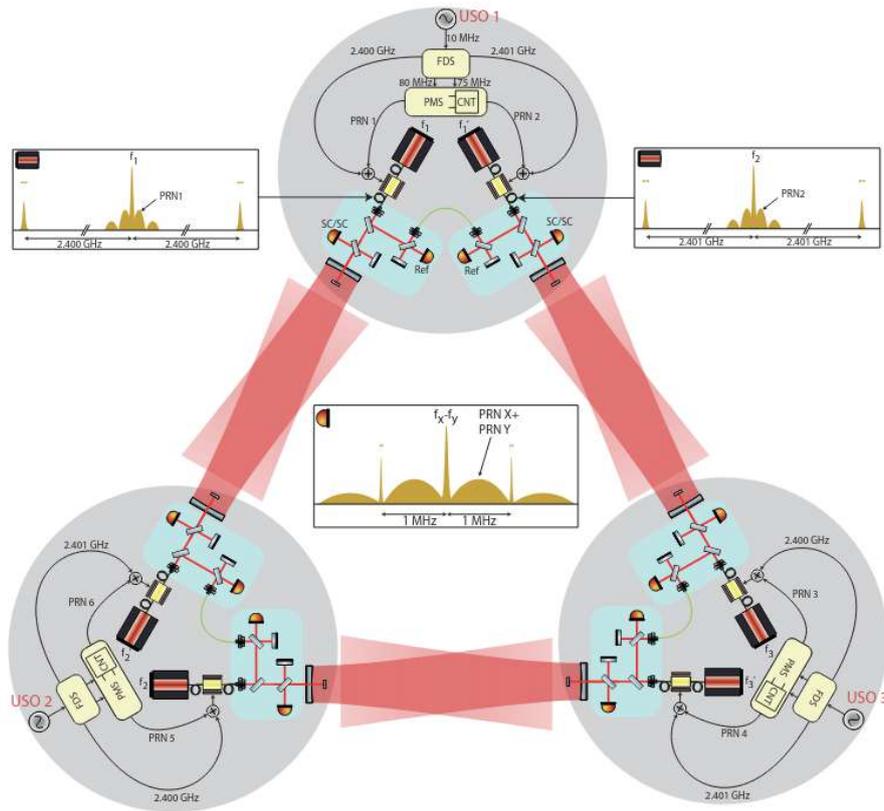


FIGURE 1.15 – Constellation de LISA avec un aperçu du système de détection, figure extraite du document de la description du design de LISA [161].

Traitement de données des signaux d'ondes gravitationnelles

Le détecteur est soumis à de multiples sources de bruit comme les bruits sismiques, thermiques, de photons, mode de résonance de l'ensemble miroir-fils de suspension. L'ensemble de ces bruits nuit à la détection d'ondes gravitationnelles et affecte la sensibilité des détecteurs, voir la figure 1.18.

Pour détecter une onde gravitationnelle, il y a deux approches différentes :

- *Le filtrage adapté* consiste à utiliser un filtre qui est obtenu en corrélant un signal avec un modèle théorique qui est paramétrisé, avec le signal mesuré pour détecter d'ondes gravitationnelles. Il s'agit d'établir dans une banque de données de modèle celui qui colle le plus aux données mesurées. Cette méthode nécessite une très bonne connaissance de ce que l'on veut détecter. Elle repose sur une modélisation assez précise des sources recherchées, il est donc possible de passer à côté d'un signal exotique, c'est-à-dire qui n'est pas encore connu ou modélisé.
- *Recherche temps-fréquence* ne nécessite pas une connaissance précise de la forme d'onde. Effectivement, en se servant de plusieurs détecteurs, nous pouvons détecter un événement. De plus, on espère aussi améliorer notre sensibilité aux signaux

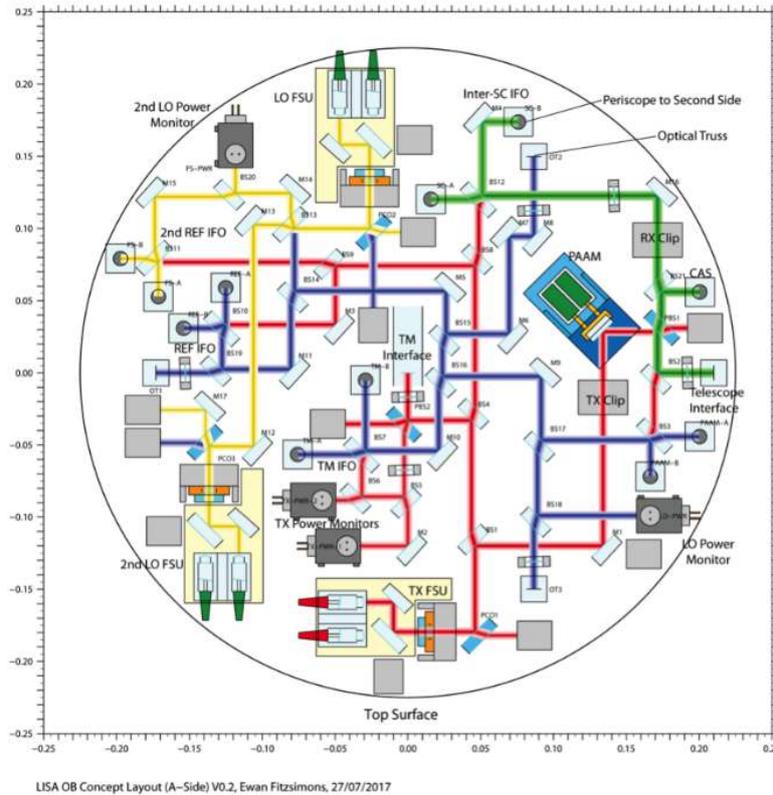


FIGURE 1.16 – Schéma optique de la face A du banc optique, figure extraite du document de la description du design de LISA [161].

d’onde gravitationnelle. Chaque détecteur possède un bruit qui lui est propre. Nous supposons que le bruit soit gaussien et non corrélé d’un détecteur à l’autre. Si, on constate qu’un signal est cohérent en temps et en phase (en prenant en compte un temps de vol de l’onde entre les détecteurs) dans les données de tous les détecteurs, cela permet d’effectuer la détection.

1.3.7 Réponse des détecteurs d’ondes gravitationnelles

Dans cette thèse, nous étudions la détection du fond stochastique, pour cela, il faut placer son estimation de détection dans un contexte, ainsi nous avons besoin d’introduire la réponse du détecteur d’ondes gravitationnelles. En effet, celle-ci n’est pas homogène sur le ciel. Pour LISA, elle dépend, par exemple, de son mouvement orbital. Il s’agit aussi de grandeurs qui ne sont pas homogènes en fréquence. Dans cette section, nous proposons de faire le calcul de cet effet qui sera fondamental dans la suite de nos calculs.

Différents types de détecteurs

Le point commun entre tous les détecteurs actuels, c’est qu’ils utilisent des sources électromagnétiques. Souvent, ce sont des Lasers échangés par des tests masses qui sont

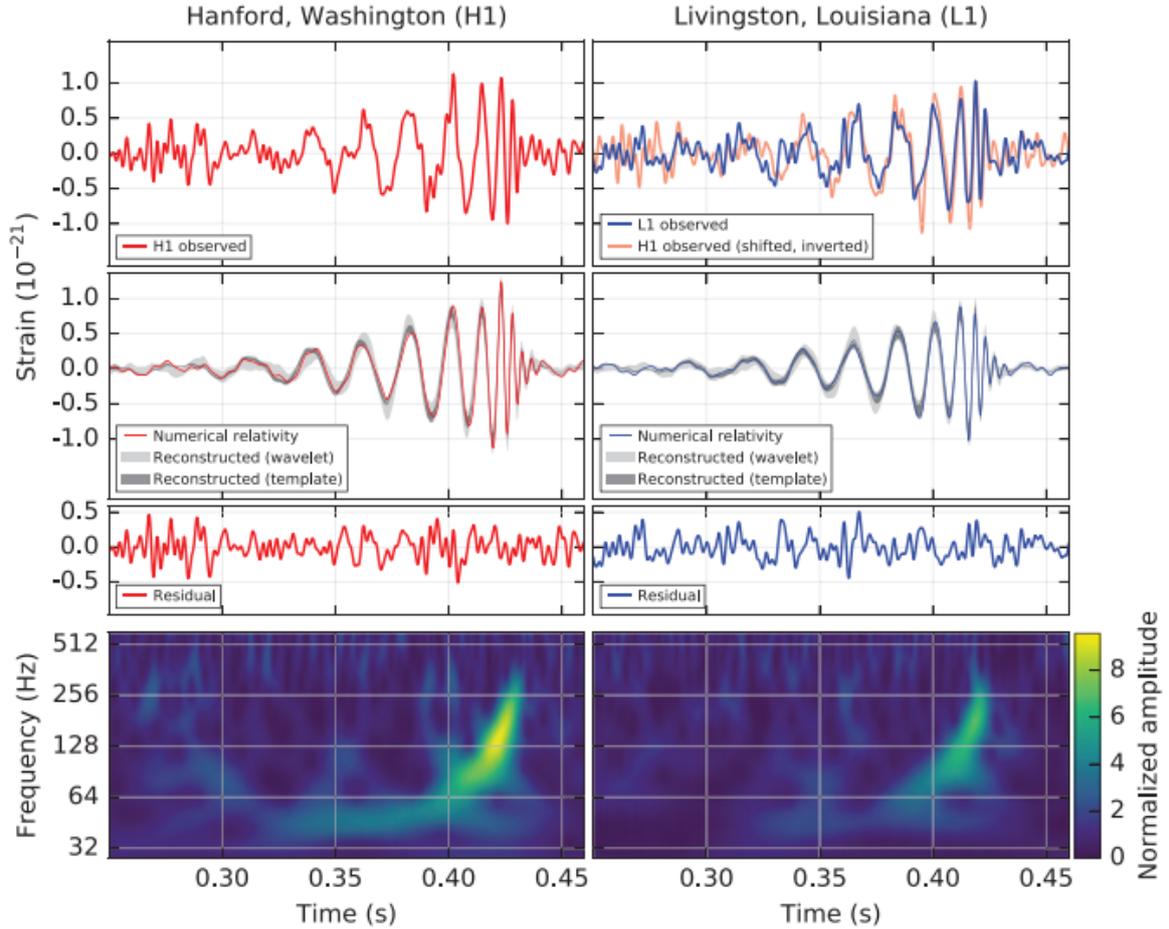


FIGURE 1.18 – Signal de la première détection de septembre par LIGO [1]. Nous avons les données des deux détecteurs, chaque colonne correspond aux deux sites H1 et L1 des deux instruments LIGO. La première figure montre l’amplitude de Hanford (H1). Sur le tracé de Livingston, on a superposé en changeant l’origine temporelle pour rendre les signaux cohérents. La deuxième ligne comporte le signal reconstruit pour chaque site. Sur la troisième ligne, il s’agit de la soustraction du signal détecté et du signal reconstruit, il ne reste que le bruit gaussien. Enfin, sur la dernière ligne, il s’agit de la carte temps-fréquence du signal détecté.

tel que $h(t) \sim \Delta T(t)$. Il est possible de détecter les ondes gravitationnelles en utilisant l’effet Doppler d’un satellite (*spacecraft Doppler tracking*), il s’agit d’étudier le décalage de fréquence d’un signal émit sur Terre et réfléchi sur un satellite produit par le passage d’une onde gravitationnelle [97]. Cette méthode utilise un bras et deux chemins. L’amplitude gravitationnelle est donnée par $h(t) \sim \frac{\Delta\mu(t)}{\mu_0} = \frac{d\Delta T(t)}{dt}$. Les mesures effectuées par les interféromètres ont pour objectif de comparer deux signaux se propageant dans des directions différentes. Une onde gravitationnelle passant sur le détecteur modifie la longueur de l’un des deux bras. En comparant les deux signaux (celui modifié et l’autre, qui agit comme un bras de référence), nous pouvons reconstruire le signal gravitationnel. Il s’agit de détecteurs à deux bras et à deux chemins. Pour les détecteurs au sol comme LIGO/Virgo ou KAGRA, leur amplitude est donnée par $h(t) \sim \frac{\Delta L(t)}{L} = \frac{\Delta T(t)}{T}$. Pour les

détecteurs spatiaux comme LISA, la mesure est donnée pour un décalage de phase par rapport à un LASER tel que $h(t) \sim \Delta\Phi(t) = 2\pi\nu_0\Delta T(t)$.

Fonction réponse des détecteurs

Les ondes gravitationnelles observées par un détecteur $h(t)$ peuvent être décrites comme la convolution de la métrique linéaire de perturbations $h_{ab}(t, \vec{x})$ (voir section 2.1 et lire le cours de l'École d'été des Houches de Joseph D. Romano [210]) décrite comme une onde linéaire et la réponse impulsionnelle d'un détecteur $R_{ab}(t, \vec{x})$ tel que

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \iiint d^3\vec{x} R^{ab}(t', \vec{x}') h_{ab}(t - t', \vec{x} - \vec{x}') \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} df \iint d^2\hat{\Omega}(\hat{n}) R^{ab}(f, \hat{n}) h_{ab}(f, \hat{n}) e^{2i\pi ft} \end{aligned} \quad (1.158)$$

^(a) est obtenu pour une onde gravitationnelle plane et progressive avec la transformée de Fourier de l'amplitude $h(t)$ tel que

$$\bar{h}(f) = \iint d^2\hat{\Omega}(\hat{n}) R^{ab}(f, \hat{n}) h_{ab}(f, \hat{n}) \quad (1.159)$$

et

$$R^{ab}(f, \hat{n}) = e^{2i\pi f \frac{\hat{n}\cdot\vec{x}}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \iiint d^3\vec{x} R^{ab}(t', \vec{x}') e^{-2i\pi f(t' + \frac{\hat{n}\cdot\vec{x}'}{c})}. \quad (1.160)$$

Le terme R_{ab} est la réponse d'un détecteur. Il est important de noter que ce terme n'est pas universel, il dépend du détecteur que nous utilisons. Plus tard, nous calculerons pour LISA ce terme. Nous avons montré que les ondes gravitationnelles sont constituées de deux polarisations $A = +, \times$, il nous est donc possible de réécrire la transformée de Fourier de l'amplitude $h(t)$ tel que

$$\bar{h}(f) = \iint d^2\hat{\Omega}(\hat{n}) \sum_{A=+, \times} R^A(f, \hat{n}) h_A(f, \hat{n}) \quad (1.161)$$

avec $R^A(f, \hat{n})$ la fonction de réponse du détecteur de la polarisation A , celle-ci est valable pour une onde gravitationnelle plane et monochromatique de fréquence f et se propageant selon l'axe \hat{n} . La réunion des deux fonctions de réponse du détecteur des polarisations $+$ et \times nous permet de construire le diagramme de faisceau d'antenne ou *antenna beam patterns* en anglais tel que

$$\mathcal{R}(f, \hat{n}) = \sqrt{|R^+(f, \hat{n})|^2 + |R^\times(f, \hat{n})|^2} \quad (1.162)$$

Ce terme de diagrammes de faisceau d'antenne est une fonction fréquentielle, elle

caractérise la réponse "globale" du détecteur. C'est un terme que nous pouvons utiliser comme terme de correction de l'effet du détecteur sur la détection. Dans notre cas, l'étude du fond stochastique de LISA, nous l'utilisons comme terme de correction pour analyser correctement nos signaux. Il s'agit d'un terme non homogène en fréquence, il est donc d'avantage utilisé lorsque nous étudions la dépendance spectrale d'un signal.

Chapitre 2

Fond Stochastique des ondes gravitationnelles

2.1 Introduction et motivations

Le fond stochastique des ondes gravitationnelles ou *stochastic gravitational waves background (SGWB)* en anglais est la superposition de signaux d'ondes gravitationnelles non résolues. Ceux-ci sont non résolus, car trop faibles pour être mesurés, ou bien le nombre de sources est trop important, par conséquent les sources ont des propriétés trop proches. Il est alors impossible de les distinguer individuellement. Nous avons donc ici un lien intrinsèque entre les fonds stochastiques et les propriétés des instruments mesurant. Nous établissons ainsi deux limites, la première est liée à la sensibilité du détecteur, c'est-à-dire à sa capacité de mesurer une amplitude donnée et la seconde est liée à sa capacité de résolution fréquentielle. Effectivement, pour une différence de fréquence donnée entre deux sources Δf_{GW} , si la résolution de l'instrument df est plus grande, il sera impossible de séparer les deux sources, ce qui enrichit un fond stochastique. De même, un instrument qui a une bonne résolution pourra ainsi appauvrir le fond stochastique. Ainsi, il est très important lorsque l'on parle d'un fond stochastique de le placer dans un contexte observationnel. De plus, la résolution fréquentielle des instruments dépend également du temps d'intégration. Il est donc important de l'associer au fond stochastique le temps d'observation. Il est possible ainsi d'établir plusieurs origines de production d'un fond stochastique et prévoir leur forme d'onde. Leur étude permet une compréhension des propriétés statistiques des ensembles émettant des ondes gravitationnelles, et ainsi de connaître les propriétés de population des sources.

2.2 Analogie du fond stochastique des ondes gravitationnelles et du fond diffus cosmologique

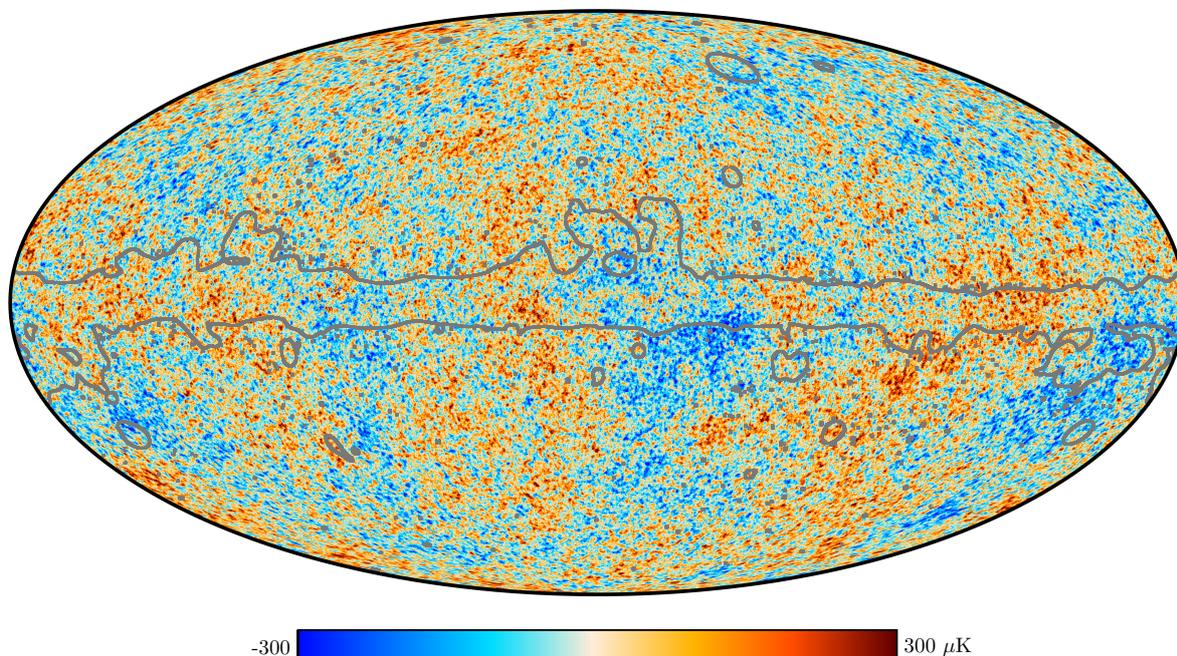


FIGURE 2.1 – Carte du ciel de la mesure relative de l’univers $\frac{\Delta T}{T_{Today}}$ de fond diffus cosmologique, il s’agit des variations de température de l’univers. Les parties rouges et bleues correspondent réciproquement à un excès ou un déficit de température par rapport à un corps noir de température $T_{Today} = 2.73$ K. Cette carte est la carte finale des données Planck [195], sur celle-ci, est superposée en gris l’émission microonde de la poussière de notre Galaxie.

Le fond diffus cosmologique ou *cosmic microwave background*(CMB) est un fond de microondes provenant du début de l’univers. La première observation de ce fond a été effectuée par sérendipité par Penzias et Wilson en 1965 [185], ce qui leur vaudra en 1978, le prix Nobel de Physique. La figure 2.1 montre la carte du ciel obtenue par la dernière étude des données de Planck [195]. Il s’agit de la carte de la variation relative de température de l’univers d’un corps noir. Pour cela, Planck mesure avec des calorimètres plusieurs bandes de fréquences et ensuite recombine les différentes cartes avec la méthode ILC (combinaison linéaire interne). Celle-ci consiste à effectuer une certaine combinaison linéaire des cartes du ciel à différentes fréquences afin d’obtenir une approximation d’une composante des signaux. Dans le cas de l’ILC décrit dans l’article d’Eriksen et al. [95], il s’agit d’obtenir une carte approximative du fond cosmique des microondes. Le CMB correspond donc à un fond d’émissions électromagnétiques produit 380 000 ans après le Big-Bang[143]. Le nom de cette époque est la recombinaison, il s’agit du moment où l’univers est devenu transparent pour les photons, la lumière a pu se propager. En effet,

la température de l'univers autour de 3 000 K permet au premier atome d'hydrogène de se former. Cette recombinaison s'accompagne également d'une émission de photon infra-rouge dans toutes les directions. Cet événement a eu lieu à $z = 1100$. Aujourd'hui, nous baignons dans cette émission de photon primordiale. Du fait de l'expansion de l'univers, on mesure ce flux de photons dans le domaine microonde. Ainsi, la figure 2.1 est donc la première "photo" de l'univers. De plus, cette "photo" est très homogène et constitue le corps noir le plus parfait jamais observé ($T_{Today} = 2.72548 \pm 0.00057$ K [99]). Les missions d'observation du CMB comme COBE [223] ont mesuré pour la première fois les anisotropies de température, ainsi, on sait aujourd'hui que l'Univers est homogène à $\frac{\Delta T}{T} = 10^{-5}$ près. Les mesures des anisotropies du CMB sont au cœur de la cosmologie moderne comme avec les missions WMAP [40] et Planck [194]. Effectivement, les différentes distributions de taches plus ou moins chaudes, c'est-à-dire leur taille, position et répartition, renseignent sur les grandes structures de l'Univers primordial, mais également, permettent de mesurer les paramètres cosmologiques. Il y a en pratique de nombreuses contributions aux anisotropies du fond diffus cosmologique, mais nous pouvons les classer en trois groupes. Les premières sont les anisotropies intrinsèques, elles sont primaires et primordiales. Celles-ci sont de trois ordres, les variations de densité de matière, les effets Doppler et le redshift gravitationnel. Le groupe d'anisotropies intégrées sur la ligne de visée, elles, sont secondaires, mais demeurent cosmologiques. Il s'agit, par exemple, des effets de lentilles gravitationnelles [187] ou de diffusion des photons du CMB (Effet Sunyaev-Zel'dovich [227]). Le troisième groupe est constitué des avant-plans locaux, elles sont d'origines astrophysiques. C'est, par exemple, la poussière de notre galaxie. Les deux derniers groupes d'anisotropies peuvent être corrigées, c'est la première avec laquelle nous pouvons produire le spectre de puissance angulaire (voir figure 2.2). Le modèle standard cosmologique peut être ajusté sur le spectre de puissance, tel que la distribution d'anisotropie nous renseigne sur les paramètres cosmologiques. De plus, c'est cet ajustement qui nous permet aujourd'hui d'établir que le modèle Λ -CDM est le modèle qui, actuellement, est le meilleur pour expliquer les anisotropies.

La carte du CMB est une très bonne motivation. En effet, nous pourrions un jour produire des cartes du ciel de chacune des composantes du fond stochastique, sous forme d'une carte des anisotropies comme pour le CMB. il est important de noter que nous aurons besoin comme la fait Planck [95] de toutes les observables de toutes les bandes de fréquences. L'avantage du fond stochastique des ondes gravitationnelles est l'absence de barrière comme l'opacité de l'univers primordiale, il nous sera donc possible d'observer l'univers plus tôt en comparaison du CMB. Ceci constitue une motivation supplémentaire à l'étude du SGWB.

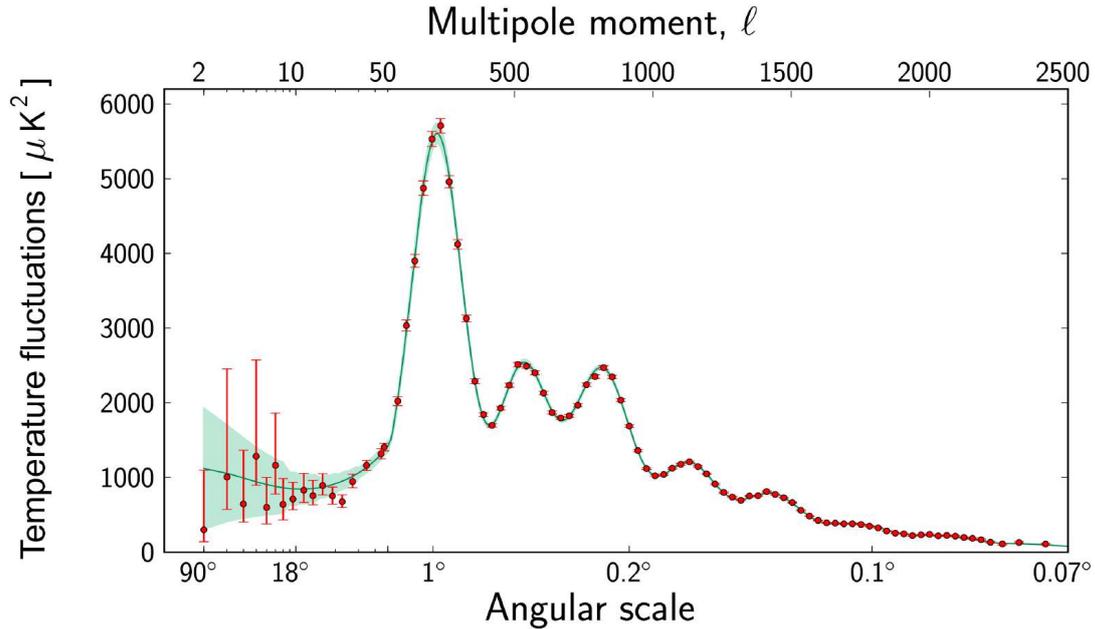


FIGURE 2.2 – Spectre de puissance angulaire des anisotropies du CMB, le tracé vert correspond à l’ajustement des paramètres cosmologiques du Λ -CDM.[193]

2.3 Polarisation du CMB

En 2002, l’expérience au pôle Sud DASI (Degree Angular Scale Interferometer) a pour la première fois mis en lumière la polarisation des photons du CMB [147]. Il s’agit de l’orientation de la lumière suivant la perpendiculaire de la direction de propagation. Celle-ci est polarisée à la hauteur de 10%, en raison de la diffusion de Thomson des photons avec les électrons sur la surface de la recombinaison.

La théorie de l’inflation est la principale motivation pour expliquer ces polarisations. En effet, la théorie prédit une production d’un fond d’ondes gravitationnelles de faible fréquence [74]. Ces ondes gravitationnelles sont trop faibles pour être détectées directement aujourd’hui, mais elles peuvent être observées grâce à leur signature sur la polarisation du CMB. Les anisotropies de polarisation du CMB sont dominées par une perturbation de densité de matière dans l’Univers primitif, elles créent les polarisations du mode E. Les ondes gravitationnelles produites durant l’inflation, créent une polarisation du mode B. Ainsi, la mesure de polarisation du mode B est la preuve de l’existence d’ondes gravitationnelles produites durant l’Univers primitif, mais également un argument supplémentaire au crédit de la théorie de l’inflation cosmologique.

Afin de mettre en évidence ou non, la présence de polarisation des modes B, il faut

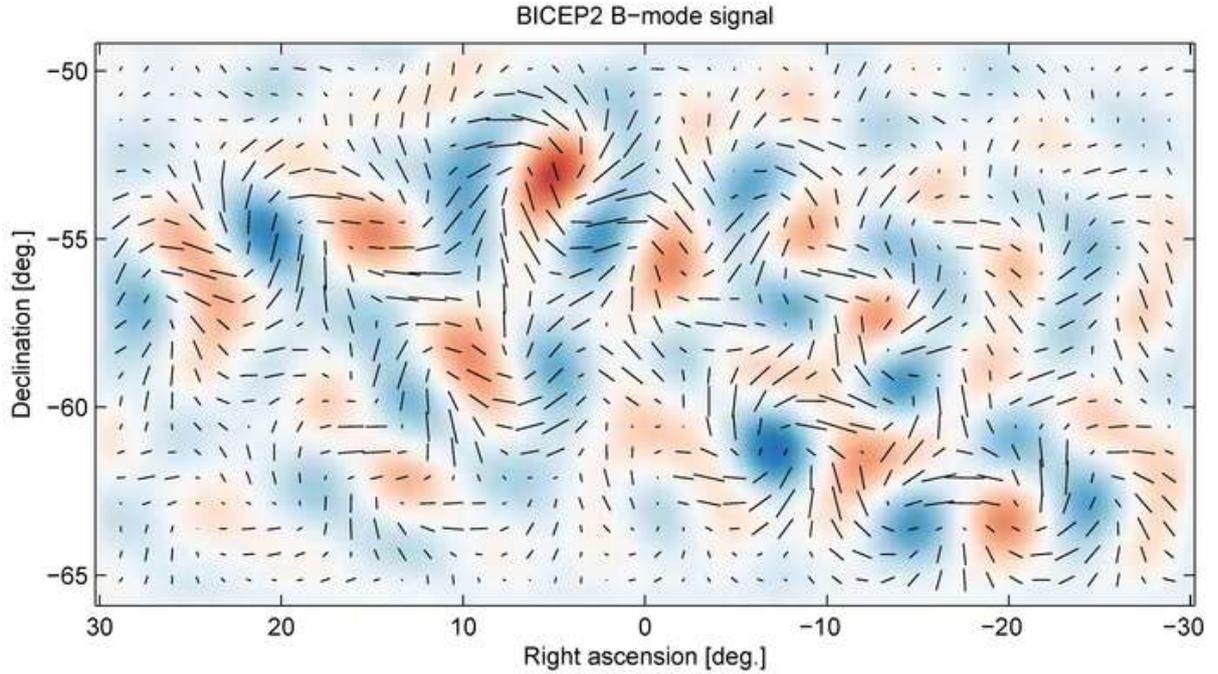


FIGURE 2.3 – Carte du ciel des polarisations du mode B obtenue avec la mission BICEP2 [41, 42]

réaliser des cartes des polarisations du ciel primitif en les séparant des modes E. La figure 2.3 montre le mode B obtenu par la mission BICEP2 [41]. Avec cette image, il est possible d’ajuster en partie les paramètres inflationnaires, tels que le rapport tenseur scalaire $r = \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_S}$. En effet, il s’agit d’un rapport des spectres de puissance des différents modes de l’inflation (Tensoriel \mathcal{P}_T et scalaire \mathcal{P}_S). Pour les ondes gravitationnelles du CMB produites durant l’inflation, nous avons $r = \frac{C_2^S}{C_2^T} = f(h, \Omega_i, \dots)\epsilon$, avec C_2^S et C_2^T est la valeur de spectre de puissance angulaire pour $l = 2$ des composantes scalaires et tensorielles. f est une fonction dépendant des paramètres du modèle cosmologique Λ CDM et $\epsilon < 0.0032$ une contrainte de l’analyse des données de WMAP [146]. En 2014, la combinaison des résultats BICEP2 et Planck [41] ont mis en lumière que les modes B observés sont en grande partie expliqués par la poussière du plan galactique. Mais, la mission Keck Array combinée aux données BICEP2 ont présenté en octobre 2018 leurs résultats. Ils ont établi une limite supérieure sur le mode B ($r < 0.07$). De plus, en combinant avec les résultats de Planck, on réduit la mesure à $r < 0.06$ [16]. Aujourd’hui, il semble donc possible de considérer qu’il y a bien eu des ondes gravitationnelles produites durant l’hypothétique inflation.

2.4 Contexte des différentes sources du fond stochastique dans la bande de fréquences de LISA

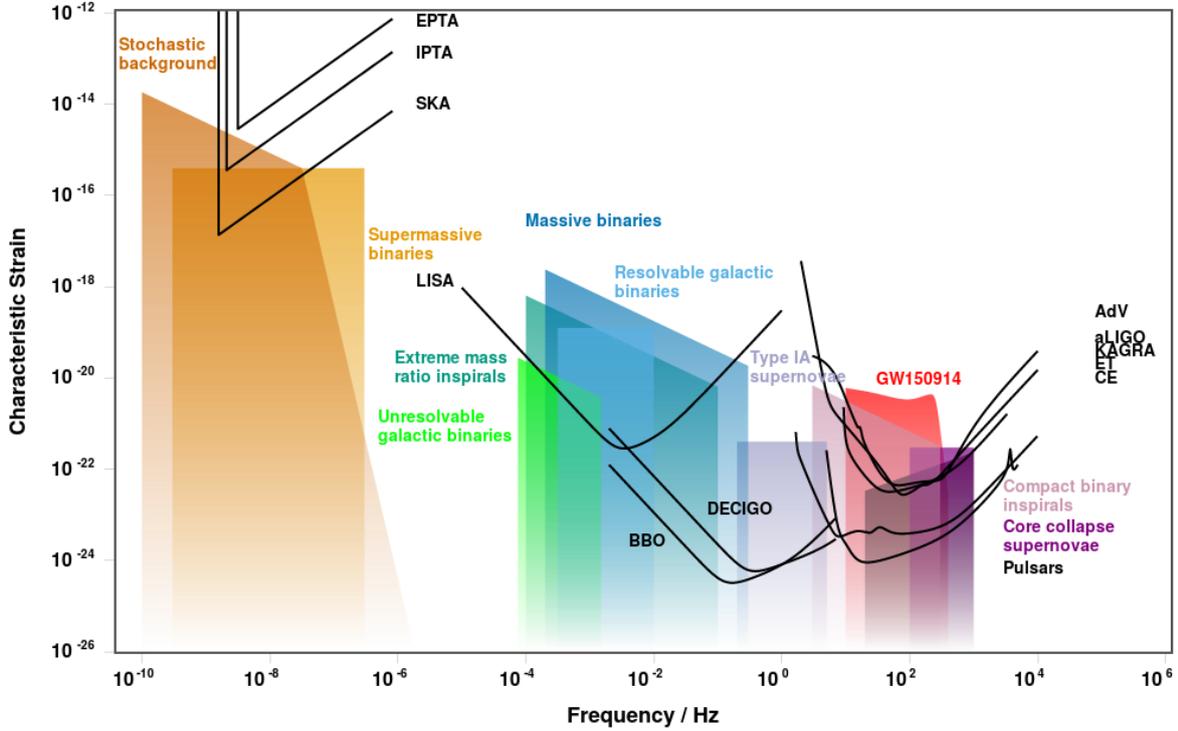


FIGURE 2.4 – *Characteristic strain* en anglais ou amplitude caractéristique de l’onde gravitationnelle, nous présentons ici l’ensemble des missions ou des projets d’observation des ondes gravitationnelles compte tenu de leur domaine de sensibilité, mais également dans le contexte astrophysique et cosmologique des sources potentielles. Cette figure est extraite du site <http://gwplotter.com/> [174]. Ainsi, entre $f = 10^{-10}$ et 10^{-6} Hz, nous distinguons les projets de mesure des périodes de pulsar en analysant des signaux radio comme *European Pulsar Timing Array (EPTA)* [118], *International Pulsar Timing Array (IPTA)* [239] ou le projet de radio télescope *Square Kilometre Array (SKA)* [134] pour détecter des ondes gravitationnelles. De même, à hautes fréquences, nous avons les interféromètres de Michelson avec GR respectivement AdV (*Advanced Virgo*), aLIGO (*Advanced LIGO*) et KAGRA [5]. Cette partie du spectre des ondes gravitationnelles pourrait être observée par les missions de troisième génération telles que *Einstein Telescope (ET)* [199] et *Cosmic Explorer (CE)* [205]

Le fond d’ondes gravitationnelles stochastiques à observer par LISA est composé de sources multiples, qui ont des origines très différentes. On peut les distinguer par trois origines différentes. La première est galactique, produite par des binaires de naines blanches. Les binaires de naines blanches [154, 82, 11] sont nombreuses et relativement proches de la constellation LISA. Lamberts *et al* [154] estime à 35 millions de binaires, dont la plupart ne peuvent pas être résolues individuellement. La superposition de leurs ondes gravitationnelles forme un signal situé entre 1×10^{-5} Hz et 10 mHz. Ce signal est modulé en

amplitude dans le temps en raison de l'orbite de LISA ; la réponse de l'instrument n'est pas uniforme sur un an. Le signal observé par LISA dépend de la densité d'étoiles dans notre galaxie, et du changement d'orientation de LISA. Il y a un signal fort lorsque LISA pointe (perpendiculairement au plan défini par les trois satellites LISA) vers le centre galactique, et d'autres fois le signal est faible parce que LISA pointe vers une partie du ciel avec moins de binaires. En raison de cette situation, il y aura deux pics de signaux dans l'année. L'effet a été abordé dans Adams et Cornish [11] ; ils ont décrit que, étant donné les binaires de naines blanches résolues, il était possible de prédire le signal de premier plan stochastique galactique à partir de binaires non résolues. Le spectre d'énergie de ce signal peut également être modélisé par une loi de puissance cassée. En effet, à des fréquences plus élevées, le nombre de naines blanches binaires diminue, ce qui produit une rupture de la loi de puissance $\alpha = 2/3$ dans l'émission stochastique des binaires de naines blanches. Le deuxième signal stochastique est d'origine astrophysique. Ceci provient des binaires des trous noirs stellaires et des étoiles à neutrons et leur présence peut être prédite à partir des observations de LIGO / VIRGO. Ce fond stochastique astrophysique sera homogène et isotrope sur le ciel ; le fond stochastique produit est une loi de puissance avec une pente en $\alpha = \frac{2}{3}$. Études des populations binaires de trous noirs et d'étoiles à neutrons, telles que [186] prédire $\Omega_{GW}(25 \text{ Hz}) \simeq 4.97 \times 10^{-9} - 2.58 \times 10^{-8}$ et les projections de valeur, nous n'avons pas encore à estimer avec les détecteurs au sol [68] à partir des observations LIGO/Virgo donnent une valeur $\Omega_{2/3}(f_{ref} = 25 \text{ Hz}) \simeq 1.8 \times 10^{-9} - 2.5 \times 10^{-9}$. La troisième et dernière source de fond stochastique dans la bande LISA provient de sources cosmologiques, dont la détection est le but ultime. L'étude des méthodes d'estimation des paramètres permet l'observation par LISA d'une large possibilité d'arrière-plans stochastiques produits cosmologiquement, y compris ceux qui ressemblent à des lois puissances, des lois de puissance brisées [151], des pics [62] ou même des signaux "Wiggly" [104].

La bande de basses fréquences est riche en signaux d'ondes gravitationnelles. Par exemple, récemment, le *Zwicky Transient Facility* (ZTF) a mesuré une double naines blanches avec une période orbitale estimée à 7 minutes [56], ce qui correspond à une émission d'ondes gravitationnelles de $\simeq 30$ mHz. On peut s'attendre à ce que LISA observe de nombreuses binaires résolues, dont beaucoup sont déjà connues des études de photométrie et constituent ce que l'on appelle les binaires de vérification [55, 144]. Des systèmes bien étudiés comme celui-ci peuvent être utilisés pour vérifier les performances de LISA, agissant comme un moyen de confirmer la sensibilité de LISA. Nous pouvons nous attendre d'avoir une binaire sur mille résolubles. La grande majorité des binaires galactiques ne sont pas résolues et forment un signal stochastique. Le fond d'onde gravitationnelle stochastique des binaires de naines blanches ou du premier plan galactique sera anisotrope et le signal ne sera pas une pure loi de puissance.

Un fond d'ondes gravitationnelles stochastiques (SGWB) [211, 69] aura une contribution significative des binaires non résolues, telles que les trous noirs binaires et les étoiles

à neutrons binaires. Ce fond est essentiellement isotrope, et son niveau peut être prédit à partir des signaux observés par LIGO et Virgo [68, 7]. Un autre SGWB important proviendrait de sources cosmologiques [69]. L'origine de ce contexte vient du début de l'Univers [105, 169], avec la possibilité de mesurer les paramètres du scénario d'inflation [58]. Les cordes cosmiques pourraient être une autre source observable [67]. Un arrière-plan produit cosmologiquement peut être modélisé comme une densité d'énergie spectrale plate $\propto f^0$ [79].

Dans cette thèse, nous présentons une stratégie pour séparer les deux SGWB (astrophysique et cosmologique), ainsi que le bruit LISA, en utilisant une stratégie bayésienne [70, 82] fondée sur un algorithme de Markov chains Monte-Carlo adaptatives (A-MCMC). Nous montrons ensuite la capacité de LISA à mesurer un SGWB cosmologique pour différentes magnitudes pour le fond astrophysique. Le SGWB à partir de sources astrophysiques représente aujourd'hui un objectif important, particulièrement compte tenu des observations actuelles de LIGO et Virgo [8, 9].

De nombreuses études ont récemment été présentées sur la façon de détecter éventuellement un fond d'origine cosmologique en présence d'un SGWB astrophysique. Par exemple, une étude récente montre l'utilisation de l'analyse en composantes principales ou *Principal component analysis* en anglais pour modéliser et observer un SGWB en présence d'un premier plan de binaires de trous noirs et d'étoiles à neutrons binaires dans la bande d'observation LISA [191]. Une méthode de séparation des composants est proposée dans [184], où elles montrent qu'il est possible de détecter un SGWB isotrope. La méthode utilise l'estimation des paramètres du maximum de vraisemblance avec les matrices d'information de Fisher. Ceci est proposé pour remplacer une approche de MCMC, et appliqué à la bande d'observation LIGO-Virgo. La proposition dans [235] est d'utiliser un certain nombre de filtres de loi de puissance cassés pour séparer différents arrière-plans avec des détecteurs d'ondes gravitationnelles sur la Terre.

Dans l'étude de [43], la proposition est de diviser les données en segments de temps courts individuels. La méthode a utilisé les procédures décrites dans [221] pour rechercher les segments pour la présence d'un signal de trou noir binaire, soit par détection directe ou sous-seuil en générant une preuve bayésienne. Un SGWB cosmologique serait présent dans tous les segments, alors qu'une probabilité existerait pour la présence d'une fusion binaire de trous noirs pour les segments. La méthode est générale et pourrait être appliquée à LIGO-Virgo ou LISA. L'étude présentée dans [201] a noté que la sensibilité des détections d'ondes gravitationnelles de troisième génération, telles que l'Einstein Telescope (ET) [199] ou Cosmic Explorer [205], sera si basse que presque toutes les fusions binaires de trous noirs dans l'univers observable pourront être directement détectées, puis retirées de la recherche d'un SGWB cosmologique. L'étude de [219] a ensuite exploré comment réaliser une telle soustraction de signaux de fusion de trous noirs binaires et les conséquences de l'effet des résidus de ces soustractions. Une autre étude a uti-

lisé des méthodes bayésiennes pour aborder la séparation spectrale pour les observations LIGO-Virgo, mais en essayant de déterminer comment séparer un SGWB d'un bruit de fond magnétique corrélé produit par les résonances de Schumann [103, 85, 231]; l'étude est cependant générale et peut être appliquée à la séparation spectrale pour différents types d'arrière-plans [172]. Cette étude a ensuite été élargie pour aborder l'estimation simultanée des SGWB astrophysiques et cosmologiques, et a montré que cela sera particulièrement important pour les détecteurs au sol de troisième génération [168]. Une autre étude, spécifiquement dédiée aux observations LISA [63] propose de diviser les données en *bins*, puis à l'intérieur de chaque *bin*, un ajustement est fait à une loi de puissance ou à une amplitude constante; une variante de cette approche est présentée ici [100]. L'affirmation est que cette méthode est plus dynamique et capable de s'adapter à des SGWB de forme arbitraire. L'étude de [136] montre comment attribuer des facteurs et des probabilités de Bayes pour différencier un signal SGWB du bruit instrumental.

Toutes les études SGWB référencées ci-dessus sont résumées dans les tableaux 2.1, 2.2, 2.3, respectivement pour les détecteurs LIGO/Virgo, LISA et de troisième génération. Nous comparons les objectifs, les méthodes, les performances, les limites et l'application. Elles sont également résumées dans la figure 2.4. Nous pouvons encore extraire différents composants. On distingue le fond d'ondes gravitationnelles stochastiques d'origine astrophysique dû à la superposition de signaux provenant d'un grand nombre de sources non résolues et celui d'origine cosmologique produit lors des premiers instants de l'Univers peu après le Big Bang. L'observation de ce rayonnement donnerait des informations importantes sur l'Univers primordial, en particulier sur la période dite d'inflation cosmique. Dans le cas de LISA, nous nous intéressons aux fréquences sources que LISA peut mesurer. Comme chaque composante avec une dépendance fréquentielle et un domaine fréquentiel propre (équation 2.28), nous avons deux composantes principales : Composante cosmologique et composante astrophysique. Elles proviennent de fusions de binaires non résolues de notre galaxie. Il y aura également un arrière-plan astrophysique de BBH (Binary Black Holes) dans tout l'Univers. Dans la composante astrophysique, il y a la fusion des trous noirs, étoile à neutrons, mais le composant le plus important est la fusion non résolue de naines blanches.

2.4.1 Résumé de la documentation sur la séparation des signaux

Dans ce paragraphe, nous présentons sous forme de tableau une liste de diverses études qui ont été menées afin de séparer les différents SGWB et les sources de bruit des détecteurs. Beaucoup ont été publié à ce sujet. Nous présentons ainsi les résultats sous forme de trois catégories compte tenu du type de détecteur utilisé.

Études SGWB pour LIGO/Virgo

Le tableau 2.1 présente un résumé de la littérature traitant de la séparation des signaux SGWB pour LIGO et Virgo. Les études présentées dans le tableau consistent principalement en la mesure du fond stochastique astrophysique avec des méthodes variées comme des analyses de corrélations entre détecteurs, mais également des analyses paramétriques du SGWB.

Études du SGWB dans la bande spectral de LISA

Le tableau 2.2 présente un résumé de la littérature traitant de la séparation du signal SGWB pour LISA.

Études du SGWB pour les futurs détecteurs de troisième génération

Le tableau 2.3 présente un résumé de la littérature traitant de la séparation des signaux SGWB pour les détecteurs d'ondes gravitationnelles de troisième génération.

2.4.2 Contexte mathématique du fond stochastique

Nous avons préalablement introduit le fond stochastique comme une superposition de signaux non résolus individuellement, du fait de leur trop faible signal ainsi que du nombre important de sources proche, c'est ici, l'impossibilité de séparer un signal des autres qui enrichit le fond stochastique. Ceci produit donc un signal qui a une sommation aléatoire, ce qui produit une perte d'information de la phase d'un signal, mais pas de la puissance ou amplitude. Ainsi, la combinaison de signaux s'empile et forme un surplus de puissance dans les détecteurs. C'est donc un signal très compliqué, voire impossible par simple étude temporelle. Il est aussi supposé comme constant au cours du temps, il offre très peu de variation de fréquence au cours du temps, ce qui rend toute analyse de temps-fréquence peu sensible. Nous avons donc besoin d'introduire une description statistique qui renseigne du comportement global des ondes gravitationnelles produisant le fond stochastique. Dans cette section, nous allons étudier depuis une perspective mathématique comment le fond stochastique se caractérise.

Cas des ondes planes et progressives se propageant

Nous nous replaçons dans le cas de coordonnées de la jauge TT (lire section 1.3.2) $(t, x^a) = (t, \vec{x})$, nous considérons une onde gravitationnelle plane se propageant selon la direction $\hat{k} = -\hat{n}$ qui a deux polarisations $+$ et \times . Nous pouvons donc écrire la métrique des ondes gravitationnelles du fond stochastique comme

Référence	Objectif	Méthode	Performance	Limitations et applications
Z.-C. Chen <i>et al.</i> [68]	SGWB astrophysique venant des binaires de trous noirs et d'étoile à neutrons	Estimation du SGWB à partir d'observations LIGO/Virgo ; taux de fusion local \mathcal{R}	$\Omega_{2/3} = 4.4_{-3.0}^{+6.3} \times 10^{-12}$, $f_{ref} = 3$ mHz)	L'erreur sur le taux de fusion locale est importante
B. Abbott <i>et al.</i> [7]	SGWB astrophysique venant des binaires de trous noirs et d'étoile à neutrons	Estimation du SGWB à partir d'observations LIGO/Virgo ; taux de fusion local \mathcal{R} : estimation avec GW150914	$\Omega_{2/3} = 1.1_{-0.9}^{+2.7} \times 10^{-12}$ $f_{ref} = 25$ Hz	L'erreur sur le taux de fusion locale est importante
B. Abbott <i>et al.</i> [8, 9]	3 fond considéré, spectre en lois puissances $\alpha = 0, \frac{2}{3}, 3$	Résultats de l'analyse de corrélation croisée avec Advanced LIGO O3 résultats combinés O1 et O1	$\Omega_0 < 5.8 \times 10^{-9}$; $\Omega_{2/3} < 3.4 \times 10^{-9}$, $f_{ref} = 25$ Hz	Pas de bruit corrélé dû aux résonances magnétiques de Schumann
A. Parida <i>et al.</i> [184]	Séparer différents SGWB isotropes pour LIGO	Séparation des composants des lois de puissance évitant l'utilisation des méthodes MCMC	Démonstration de simulation pour la sensibilité LIGO avancée : $\Omega_0 = (1 \pm 0.676) \times 10^{-8}$; $\Omega_{2/3} = (1 \pm 1.719) \times 10^{-8}$; $\Omega_3 = (1 \pm 3.284) \times 10^{-8}$; $f_{ref} = 100$ Hz.	Nécessite une quantité négligeable de calcul et être simple à appliquer à des données réelles
C. Ungarelli and A. Vecchio [235]	Ajustement de loi puissance cassée adaptée au SGWB avec les données des détecteurs basés sur Terre	Filtres basés sur des spectres de loi de puissance brisée	Facteur d'ajustement atteint supérieur à 97 %	Petit nombre de filtres nécessaires pour mesurer le SGWB dans les interféromètres laser de première génération

Référence	Objectif	Méthode	Performance	Limitations et applications
R. Smith and E. Thrane [221]	Pour détecter SGWB astrophysique avec LIGO/Virgo	Estimation des paramètres bayésiens pour détecter le fond de trou noir binaire non résolu	Moins de données nécessaires pour observer l'arrière-plan, par opposition à la recherche traditionnelle fondée sur la corrélation	Donne une méthode unifiée pour une recherche de signaux résolubles et un SGWB de signaux insolubles
S. Biscoveanu <i>et. al.</i> [43]	Détecter un SGWB primordial en présence de trous noirs binaires non résolus dans la bande LIGO/Virgo	Utilise la méthode de Smith et Thrane [221]; segments de temps courts analysés	mesure d'une loi de puissance simulée : $\log \Omega_\alpha = -5.96^{+0.08}_{-0.16}$, $\alpha = 0.49^{+1.14}_{-0.49}$ et $\xi = 0.08^{+0.09}_{-0.05}$	Limitations de la précision des formes d'onde de signaux binaires compacts et bruit non gaussien
E. Thrane <i>et. al.</i> [231]	mesure du SGWB dans le contexte du bruit magnétique corrélé en bande LIGO/Virgo.	Le bruit corrélé entre les détecteurs crée une erreur systématique dans l'étude de corrélation croisée	mesure du bruit corrélé des résonances de Schumann	Possibilité d'utiliser le filtre de Wiener pour soustraire la corrélation.
P. M. Meyers <i>et. al.</i> [172]	Mesure du SGWB de LIGO/-Virgo dans le contexte du bruit magnétique corrélé	Estimation des paramètres du bruit magnétique corrélé et SGWB	Démonstration avec $\Omega_{2/3} \simeq 3 \times 10^{-9}$, $f_{ref} = 25$ Hz et couplage magnétique réaliste en LIGO/Virgo	Une alternative au filtrage de Wiener

TABLE 2.1 – Méthodes de mesure et de séparation des SGWB pour LIGO/Virgo.

Référence	Objectif	Méthode	Performance	Limitations et applications
N. J. Cornish and S. L. Larson [79]	Observer le SGWB cosmique avec des avant-plans astrophysiques	Stratégies pour un ou deux interféromètres LISA utilisant la corrélation croisée	LISA pourrait détecter une SGWB cosmique au niveau de $\Omega_{GW}(f)h_0^2 > 7 \times 10^{-12}$	La sensibilité LISA est dérivée pour la longueur de bras LISA de $L = 5 \times 10^9$
M. Pieroni and E. Barauss [191]	Extraction du SGWB cosmologique et premier plan astrophysique avec bruit LISA	Analyse en composantes principales pour modéliser et extraire les SGWB	LISA peut mesurer un SGWB cosmologique de $\Omega_0 = 6 \times 10^{-13}$ avec $SNR = 31$	Une technique robuste qui peut être étendue à différents détecteurs
C. Caprini <i>et al.</i> [63]	Observation des SGWB pour LISA	Reconstruction de SGWB compte tenu de la fréquence pour des lois de puissance simples et brisées	Détecte une loi de puissance de $\Omega_{2/3} = 5.4 \times 10^{-12}$, $f_{ref} = 0.001$ Hz, avec $SNR=601$.	Le signal et le bruit sont supposés être stationnaires en tout temps.
R. Flauger <i>et al.</i> [100]	Observer les SGWB avec LISA, en s'appuyant sur les travaux de Caprini <i>et al.</i> [63]	Reconstruction de la forme spectrale d'un SGWB avec les canaux de LISA A, E, T	Amélioration de $\sqrt{2}$ par rapport à la méthode de Caprini <i>et al.</i> [63]	Sera élargi pour tenir compte des longueurs de bras inégales pour la constellation LISA.
N. Karnesis <i>et al.</i> [136]	Méthodologie rapide pour évaluer la détectabilité avec LISA d'un SGWB stationnaire, gaussien et isotrope	Test du jeu de données simulé <i>Radler</i> du LISA Data Challenge	démonstration réussie pour $\Omega_{2/3}(f) = 3.6 \times 10^{-9} \left(\frac{f}{25 \text{ Hz}}\right)^{2/3}$	Analyse réalisée avec un modèle de bruit LISA simple

TABLE 2.2 – Méthodes de mesure et de séparation des SGWB pour LISA

Référence	Objectif	Méthode	Performance	Limitations et applications
T. Regimbau <i>et. al.</i> [201]	Observation d'un SGWB primordial en dessous du SGWB produit par les binaires compactes	Les données seront nettoyées des observations directes des binaires par les détecteurs de troisième génération	Limite possible de $\Omega_{GW} \simeq 10^{-13}$ après cinq ans d'observation avec des détecteurs de troisième génération [199, 204]	La limitation potentielle de la sensibilité provient d'autres émissions d'ondes gravitationnelles astrophysiques.
A. Sharma and J. Harms [219]	SGWB cosmologique avec détecteurs de troisième génération en présence d'un premier plan astrophysique	Filtrage adapté et étude résiduelle pour le premier plan astrophysique et corrélation croisée pour le SGWB cosmologique	SGWB cosmologique (plat) $\Omega_{GW} = 2 \times 10^{-12}$ observé avec $SNR \approx 5.2$ après 1.3 an	La limitation pour le SGWB cosmologique est le bruit instrumental et les sources astrophysiques non supprimées.
K. Martinovic <i>et. al.</i> [168]	SGWB astrophysique (coalescence binaire compacte) et SGWB cosmologique (cordes cosmiques et transitions de phase du premier ordre)	Estimation des paramètres bayésiens pour l'estimation simultanée de la SGWB astrophysique et cosmologique avec des détecteurs de troisième génération	Limite possible à 25 Hz de $\Omega_{GW} = 2.2 \times 10^{-13}$ (modèle de loi de puissance brisée pour le SGWB primordial) et $\Omega_{GW} = 4.5 \times 10^{-13}$ pour les cordes cosmiques	Les méthodes seront applicables pour LISA.

TABLE 2.3 – Méthodes de mesure et de séparation des SGWB pour les détecteurs de troisième génération.

$$h_{ab}(t, \vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \int d^2\hat{\Omega} \sum_{A=+, \times} h_A(f, \hat{k}) e_{ab}^A(\hat{k}) e^{2i\pi f(t - \frac{\hat{k} \cdot \hat{n}}{c})} \quad (2.1)$$

avec f la fréquence gravitationnelle de l'onde, c la vitesse de l'onde gravitationnelle qui est aussi la vitesse de la lumière et $d^2\hat{\Omega}(\theta, \phi)$ l'angle solide élémentaire, avec (θ, ϕ) la position de la source dans le ciel. Nous introduisons la quantité $e_{ab}(\hat{k})$ qui est le tenseur de polarisation qui s'écrit pour chaque polarisation $+$ et \times :

$$\begin{cases} e_{ab}^+(\hat{k}) = \hat{l}_a \hat{l}_b - \hat{m}_a \hat{m}_b \\ e_{ab}^\times(\hat{k}) = \hat{l}_a \hat{m}_b + \hat{m}_a \hat{l}_b \end{cases} \quad (2.2)$$

avec \hat{l} et \hat{m} les deux autres vecteurs unitaires de la base orthogonale tels que les trois vecteurs \hat{k} , \hat{l} et \hat{m} forme la base permettant d'écrire le fond stochastique. Il s'agit d'une base de coordonnées sphériques dépendant de la position de la source dans le ciel.

$$\begin{cases} \hat{k} = -\cos\phi \sin\theta \hat{x} - \sin\phi \sin\theta \hat{y} - \cos\theta \hat{z} = -\hat{r} \\ \hat{m} = -\cos\theta \cos\phi \hat{x} - \sin\phi \cos\theta \hat{y} + \sin\theta \hat{z} = -\hat{\theta} \\ \hat{l} = \sin\phi \hat{x} - \cos\phi \hat{y} = -\hat{\phi} \end{cases} \quad (2.3)$$

avec $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ la base cartésienne et $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ la base sphérique. Les deux angles de rotation $\hat{\theta}$ et $\hat{\phi}$ forme l'angle de polarisation de la source d'onde gravitationnelle (voir figure 2.5).

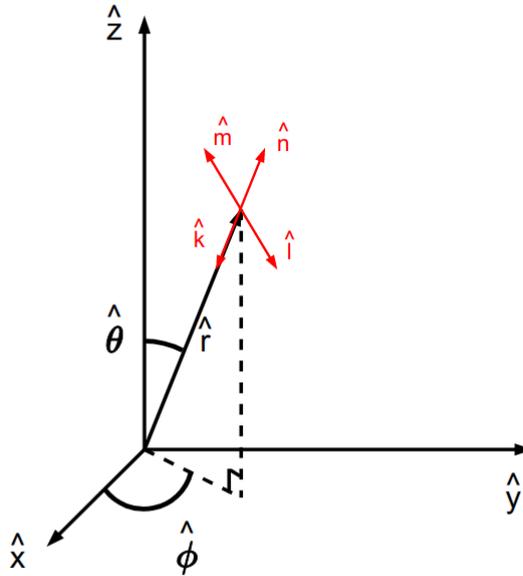


FIGURE 2.5

2.4.3 Propriété temporelle et anisotropies du fond stochastique

Dans l'équation 2.1, nous avons introduit la quantité $h_A(f, \hat{k})$, il s'agit de la transformée de Fourier de l'amplitude de la polarisation A du signal gravitationnelle plan et progressif. Les propriétés établies pour la forme temporelle de l'amplitude reste vrai, ainsi la transformée de Fourier reste aussi la métrique perturbation du fond stochastique aléatoirement distribuée. Mais, il est très intéressant de regarder les propriétés de distribution de puissance de l'amplitude dans le domaine de Fourier. En effet, cette étude permet d'établir les propriétés de distribution de puissance du fond stochastique, car pour un type de source, nous considérons que les distributions de fréquences sont voisines. Dans le domaine temporel, la phase aléatoire rend la lecture des périodes impossibles. Une propriété fondamentale du fond stochastique est que son espérance est nulle lorsque l'on intègre l'amplitude sur tout le ciel. C'est en cela que l'étude temporelle est très compliquée, car il s'agit d'une propriété commune avec le bruit instrumentale.

$$\langle h_+(f, \hat{k}) \rangle = \langle h_\times(f, \hat{k}) \rangle = 0 \quad (2.4)$$

Nous intégrons sur tout le ciel, cela nous ramène à un fond stochastique homogène et isotrope. Si celui-ci n'est pas homogène et isotrope, il est possible d'avoir des endroits du ciel privilégiés de telle sorte que nous perdons cette propriété.

Lorsque que nous considérons un fond stochastique constant dans le temps, isotrope et homogène, son espérance quadratique s'écrit

$$\langle h_+(f, \hat{k}) h_+^*(f', \hat{k}') \rangle = \langle h_\times(f, \hat{k}) h_\times^*(f', \hat{k}') \rangle = \frac{1}{16\pi} \delta(f, f') \delta(\hat{k}, \hat{k}') S_h(f) \quad (2.5)$$

avec δ l'opérateur Dirac tel que $\delta(a, b) = 1$ si et seulement si $a = b$ sinon $\delta(a, b) = 0$. On voit apparaître une nouvelle quantité la densité spectre de puissance de l'amplitude h , $S_h(f)$. Cette quantité est la distribution de puissance de fond stochastique par rapport à la fréquence. Elle permet d'étudier les dépendances fréquentielles du fond étudié. Il s'agit d'une quantité en Hz^{-1} . Dans le cas d'un fond stochastique qui comporte des anisotropies, c'est-à-dire que, certaines parties du ciel ont des valeurs d'amplitude plus grande, le calcul précédent est différent de celui présenté. Nous pouvons introduire une nouvelle quantité $\mathcal{P}(f, \hat{k}) = \sum_{l,m} \mathcal{P}_{l,m}(f) Y_{l,m}(\hat{k})$, où $Y_{l,m}(\hat{k})$ sont les harmoniques sphériques tels que $\mathcal{P}_{l,m}(f) = \iint \mathcal{P}(f, \hat{k}) Y_{l,m}(\hat{k}) d^2\hat{\Omega}(\hat{k})$ qui est la densité spectrale de puissance de l'amplitude par unité d'angle solide, elle s'exprime en $\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}$. En intégrant la densité spectrale de puissance de l'amplitude par unité d'angle solide $\mathcal{P}(f, \hat{k})$ sur l'ensemble du ciel nous retrouvons la densité spectrale de puissance de l'amplitude $S_h(f)$ telle que :

$$S_h(f) = \int \mathcal{P}(f, \hat{k}) d^2\hat{\Omega}(\hat{k}). \quad (2.6)$$

Nous avons donc

$$\langle h_+(f, \hat{k})h_+^*(f', \hat{k}') \rangle = \langle h_\times(f, \hat{k})h_\times^*(f', \hat{k}') \rangle = \frac{1}{4}\delta(f, f')\delta(\hat{k}, \hat{k}')\mathcal{P}(f, \hat{k}). \quad (2.7)$$

Les deux propriétés fondamentales du fond stochastique (équation 2.4 et 2.5) nous laissent présumer que le fond stochastique est donc gaussien.

2.4.4 Réponse du détecteur LISA

Nous avons montré dans une section précédente (lire section 1.3.7) que l'amplitude h s'écrit comme une fonction de terme qui dépend de la polarisation et qui décrit la manière dont un détecteur observe l'onde gravitationnelle. Dans le cas d'un interféromètre, il est possible de calculer la réponse de l'instrument. Nous proposons alors de dériver pour LISA cette réponse.

Fonction de réponse d'un interféromètre à deux bras

Pour un interféromètre à deux bras de longueur supposée égale L , nous mesurons une déformation d'origine gravitationnelle localisée dans le ciel aux coordonnées (θ, ϕ) en mesurant un déplacement relatif sur chaque bras $(\delta L_u(t), \delta L_v(t))$ tel que

$$h(\theta, \phi, f, \vec{x}, t) = \frac{\delta L_u(t) - \delta L_v(t)}{2L} = \mathbf{D}(\theta, \phi, f) : \mathbf{h}((\theta, \phi, f, \vec{x}, t)) \quad (2.8)$$

avec le tenseur de réponse du détecteur \mathbf{D}^1 qui se construit avec les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de direction des deux bras de l'interféromètre, il s'agit d'une grandeur qui dépend de la fréquence gravitationnelle f et également de la localisation dans le ciel de la source tel que

$$\mathbf{D}(\theta, \phi, f) = \frac{1}{2} [\vec{u} \otimes \vec{u} \mathcal{T}(\vec{u} \cdot \hat{n}, f) - \vec{v} \otimes \vec{v} \mathcal{T}(\vec{v} \cdot \hat{n}, f)] \quad (2.9)$$

² avec \mathcal{T} la fonction de transfert donnée par Schilling [217].

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\vec{u} \cdot \hat{n}, f) = \frac{1}{2} \left[\text{sinc} \left(\frac{\pi f L}{c} (1 - \vec{u} \cdot \hat{n}) \right) \exp \left(\frac{-i\pi f L}{c} (3 + \vec{u} \cdot \hat{n}) \right) \right. \\ \left. + \text{sinc} \left(\frac{\pi f L}{c} (1 + \vec{u} \cdot \hat{n}) \right) \exp \left(\frac{-i\pi f L}{c} (1 + \vec{u} \cdot \hat{n}) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

1. nous introduisons une notation $\mathbf{a} : \mathbf{b} = a_{ij}b^{ij}$, il s'agit de la double contraction des deux tenseurs \mathbf{a} et \mathbf{b} , le résultat est un scalaire [79]

2. nous dotons ici le produit tensoriel \otimes

nous pouvons montrer que dans l'approximation de basse fréquence le tenseur de réponse du détecteur peut s'écrire $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\vec{u} \otimes \vec{u} - \vec{v} \otimes \vec{v})$, cette égalité est considérée comme vraie dans le cas de LISA.

Si nous écrivons s l'onde gravitationnelle S_h observée par l'interféromètre nous pouvons montrer que

$$\langle s^2(f) \rangle = \int_0^\infty S_h(f) \mathcal{R}(f) df \quad (2.11)$$

avec $\mathcal{R}(f) = \frac{1}{4\pi} \iiint \sum_{A=+, \times} F^A(\theta, \phi, f) F^{A*}(\theta, \phi, f) d\hat{\Omega}$ où nous construisons la fonction de réponse du détecteur pour chaque polarisation $F^A(\theta, \phi, f)$ comme $F^A(\theta, \phi, f) = \mathbf{D}(\theta, \phi, f) : \mathbf{e}^A(\theta, \phi)$, où $\mathbf{e}^A(\theta, \phi)$ sont les tenseurs de base (voir section 2.2). Cornish et Larson [79] expliquent qu'à basse fréquence ($f \ll \frac{c}{2\pi L}$) la fonction de réponse de détecteur s'approxime comme $\mathcal{R}(f) = \frac{2}{5} \sin^2(\vec{u} \cdot \vec{v})$, où le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est l'angle entre les deux bras d'un interféromètre. De manière plus générale nous pouvons écrire que la densité spectrale de l'onde gravitationnelle observée par un interféromètre est $h_s(f) = \sqrt{S_h(f) \mathcal{R}(f)}$. De plus, si nous considérons que le signal observé en réalité contient du bruit gaussien $n(t)$ ($\langle n(f) \rangle = 0$ et $\langle n(f) n^*(f') \rangle = \frac{1}{2} \delta(f, f') S_n(f)$, avec $\langle n^2(t) \rangle = \int_0^\infty S_n(f) df = \int_0^\infty h_n^2(f) df$, où S_n est la densité spectrale du bruit de l'instrument et h_n la densité spectrale du déplacement dû au bruit instrumentale.), nous pouvons construire l'amplitude effective $h_{eff}(f)$ du bruit instrumentale tel que

$$h_{eff}(f) = \sqrt{\frac{S_n(f)}{\mathcal{R}(f)}} = \sqrt{\frac{h_n^2(f)}{\mathcal{R}(f)}} \quad (2.12)$$

Cas particulier de LISA

En se référant à la figure 2.19 et en faisant l'approximation que LISA est une constellation de satellites équilatérales ($\arccos \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\pi}{3}$), nous avons donc $\vec{u} = \frac{1}{2} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y}$ et

$$\vec{v} = \frac{-1}{2} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y}, \text{ et ainsi } \vec{u} \otimes \vec{u} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \otimes \vec{v} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement dans le cas particulier de LISA, \mathbf{D} s'écrit $\mathbf{D} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En remarquant que dans une telle configuration nous avons pour une source située à θ, ϕ , sur la ligne de visée \hat{n} :

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \hat{n} = \sin(\phi + \frac{\pi}{6}) \sin \theta \\ \vec{v} \cdot \hat{n} = \sin(\phi - \frac{\pi}{6}) \sin \theta \end{cases} \quad (2.13)$$

Ensuite en combinant, d'après la figure 2.19, les équations 2.2 et 2.5 nous calculons les

termes suivants qui nous permettrons d'écrire la fonction de réponse de chaque polarisation $F^A(\theta, \phi, f)$ et également la réponse du détecteur $\mathcal{R}(f)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{u} \otimes \vec{u}) : \mathbf{e}^+ = \frac{1}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \cos^2 \phi - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\phi (1 + \cos^2 \theta) \\ (\vec{u} \otimes \vec{u}) : \mathbf{e}^\times = -\cos \theta \sin \left(2\phi + \frac{\pi}{3} \right) \\ (\vec{v} \otimes \vec{v}) : \mathbf{e}^+ = \frac{1}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\phi (1 + \cos^2 \theta) \\ (\vec{v} \otimes \vec{v}) : \mathbf{e}^\times = -\cos \theta \sin \left(2\phi - \frac{\pi}{3} \right) \end{array} \right. \quad (2.14)$$

et donc dans l'approximation de basse fréquence $f \ll \frac{c}{2\pi L}$ par conséquent une non-dépendance fréquentielle de F^A , nous pouvons faire le calcul dans le cas général, mais dans notre étude nous nous restreignons à donner le terme zéro, par la suite nous utiliserons les conclusions calculatoires de Robson *et al* [208] :

$$\left\{ \begin{array}{l} F^+(\theta, \phi) = \frac{1}{2} (\vec{u} \otimes \vec{u} - \vec{v} \otimes \vec{v}) : \mathbf{e}^+ = -\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\phi (1 + \cos^2 \theta) \\ F^\times(\theta, \phi) = \frac{1}{2} (\vec{u} \otimes \vec{u} - \vec{v} \otimes \vec{v}) : \mathbf{e}^\times = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\phi \cos \theta \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Diagramme d'antenne de LISA dépendant de la fréquence

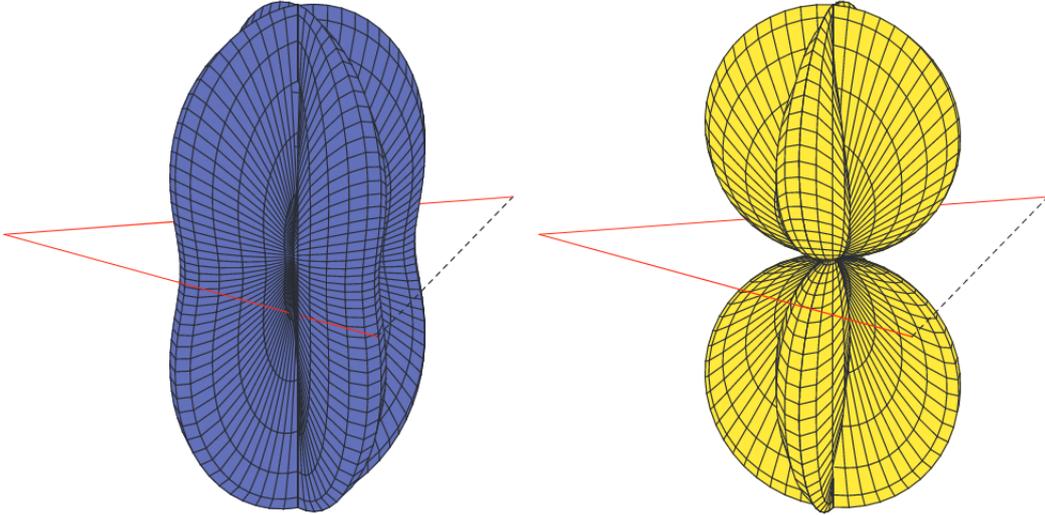


FIGURE 2.6 – Les amplitudes des fonctions de réponse du détecteur $F^+(\theta, \phi, f)$ et $F^\times(\theta, \phi, f)$ [130, 80], en rouge ce sont les bras d'un interféromètre en L. Cette figure permet d'illustrer la notion de fonction de réponse du détecteur

D'après [77], le diagramme d'antenne de réponse du détecteur LISA, intégré au cours du temps T (dans notre cas nous utilisons la durée nominale de mission, c'est-à-dire 4

ans) sur l'intervalle de fréquence $(f - \frac{\Delta f}{2}, f + \frac{\Delta f}{2})$, où le *beam* de LISA $\Delta f \ll f$, est donné par :

$$\mathcal{F}(\theta, \phi, f) = \frac{T\Delta f}{4\pi} \sum_{A=+, \times} F^{A*}(\theta, \phi, f) F^A(\theta, \phi, f) \quad (2.16)$$

où $\mathcal{F}(\theta, \phi, f)$ le diagramme d'antenne dépendant de la fréquence voir figure 2.6. Nous pouvons donc calculer le diagramme d'antenne de réponse [77, 78] tel que le terme sans fréquence (ordre zéro) nous donne (figure 2.7) :

$$\mathcal{F}(\theta, \phi, f) = \frac{3(T\Delta f)}{16\pi} (1 - \cos^2 \phi \sin^2 \theta) (\cos^2 \theta + \cos^2 \phi \sin^2 \theta) + \mathcal{O} \left(\left(\frac{f}{f_*} \right)^2 \right) \quad (2.17)$$

Pour une description dépendant de la fréquence comme dans la figure 2.8, nous utilisons une autre description, nous pouvons, comme dans [77, 78], décomposer le diagramme d'antenne dépendant de la fréquence f sur la base des harmoniques sphériques telles que :

$$\mathcal{F}(\theta, \phi, f) = \sum_{l,m} a_{l,m}(f) Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (2.18)$$

où $a_{l,m}(f)$ sont les coefficients de la décomposition sur l'harmonique sphérique $Y_{l,m}(\theta, \phi)$. Pour construire la figure 2.8 nous utilisons un développement du second ordre pour $f = 10^{-4}$ Hz, les coefficients sont donnés dans [77].

2.4.5 La densité spectrale d'énergie du fond stochastique d'ondes gravitationnelles

Pour caractériser les propriétés de distribution d'énergie fréquentielle du fond stochastique, nous pouvons établir une quantité sans dimension $\Omega_{GW}(f)$, en anglais, nous parlons d'une *energy spectral density* [202, 18] :

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{d \ln f} = \frac{f}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{df} \quad (2.19)$$

avec ρ_{GW} la densité d'énergie de radiation gravitationnelle ; nous nous intéressons à l'énergie rayonnée entre f et $f+df$, nous introduisons également la densité critique de l'Univers pour rendre Ω_{GW} adimensionné. Il s'agit d'une grandeur construite avec les paramètres cosmologiques tels que :

$$\rho_c = \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G} \simeq 7.73 \times 10^{-10} \text{ Jm}^{-3} \quad (2.20)$$

avec $H_0 = 67.66 \text{ km.s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \simeq 2.193 \cdot 10^{-18} \text{ Hz}$ [72] la constante d'Hubble Lemaître, nous utilisons cette valeur, car elle correspond à la mesure de la constante à grande

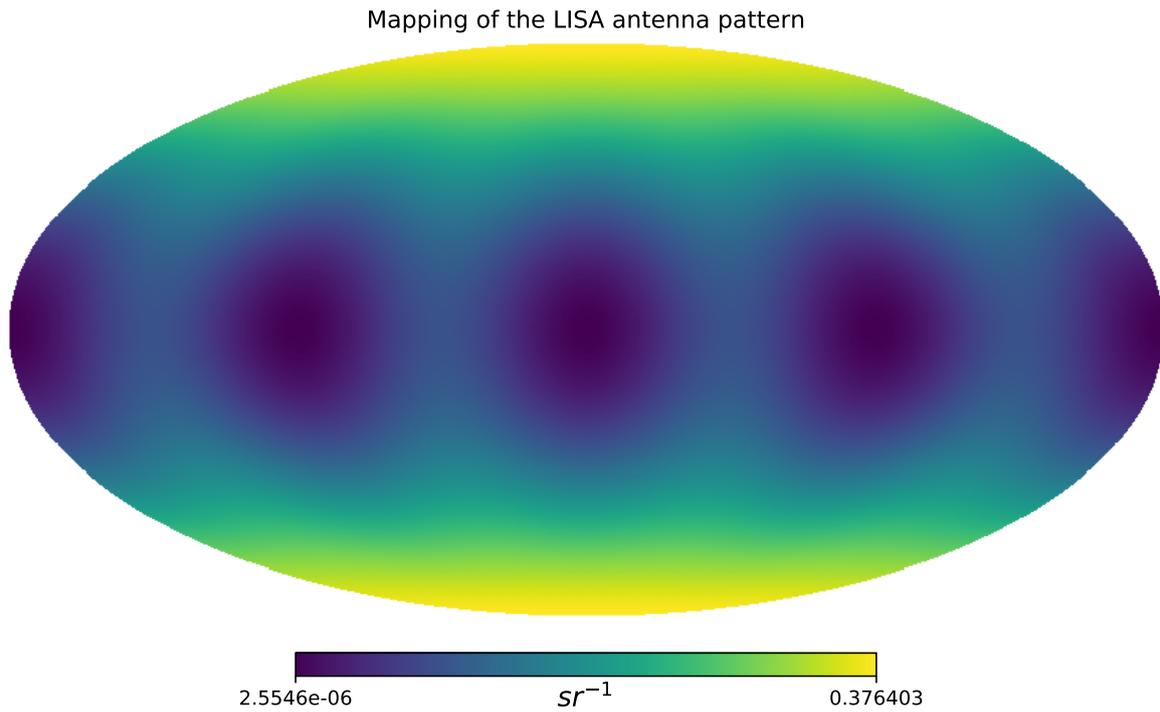


FIGURE 2.7 – Carte du ciel de l'ordre zéro du diagramme d'antenne de réponse de LISA avec $N_{side} = 128$ [113].

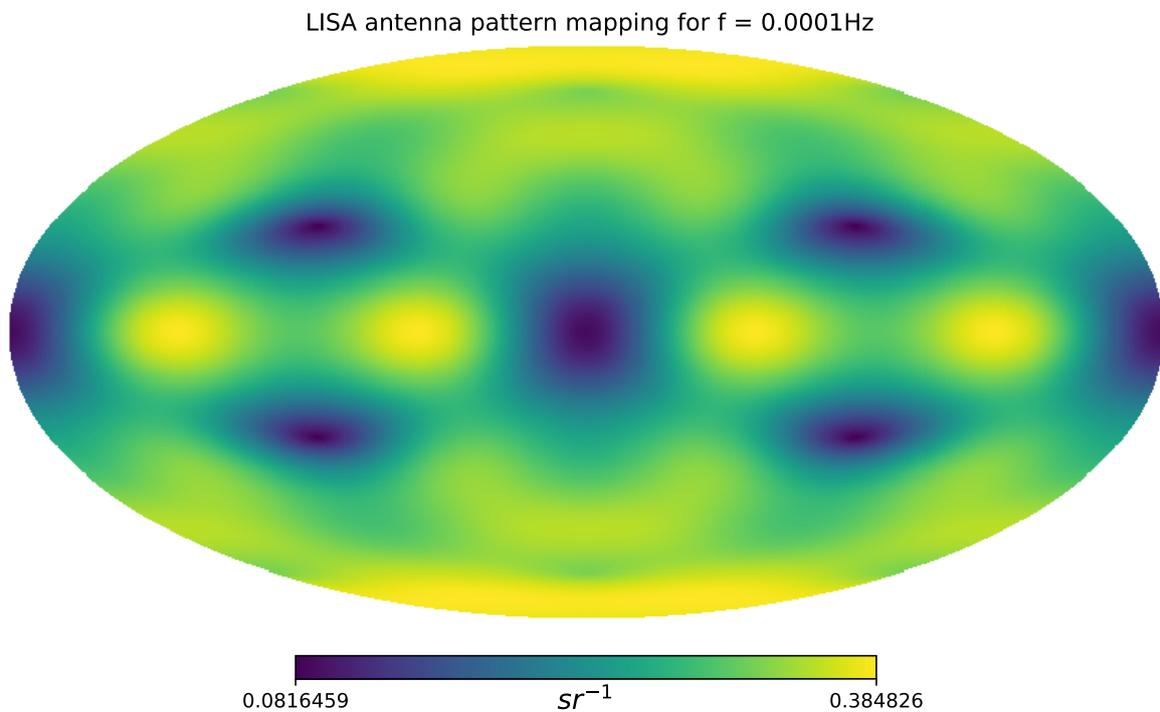


FIGURE 2.8 – Carte du ciel du second ordre pour $f = 10^{-4}$ Hz du diagramme d'antenne de réponse de LISA avec $N_{side} = 128$ [113].

échelle [196]. Notons qu'aujourd'hui, il n'y a pas de consensus clair sur la valeur de la constante. Souvent, la densité d'énergie sans dimension du fond stochastique est donnée avec h_0^2 ($\Omega_{GW}h_0^2$), il s'agit aussi d'un terme sans dimension. Il exprime une forme de normalisation de H_0 , en effet, on donne $h_0 = \frac{H_0}{100\text{km.s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}}$. L'ajout de cette quantité permet de mettre Ω_{GW} dans un contexte cosmologique. Comme il n'y a pas encore de consensus, nous utilisons la quantité libre de h_0 , ce qui revient à utiliser $H_0 = 100\text{km.s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$. Il est possible de faire une analogie avec les ondes électromagnétiques, en effet, si nous considérons le spectre du corps noir du CMB à $T = 2.73$ K ; il est également possible de construire une densité d'énergie sans dimension de cette radiation Ω_{EM} telle que :

$$\Omega_{EM} = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{EM}}{d \ln f} \quad (2.21)$$

Nous avons établi précédemment le flux gravitationnel (voir équation 1.150), ainsi de la même manière, nous établissons la densité d'énergie du fond stochastique ρ_{GW} comme

$$\rho_{GW} = \frac{c^2}{32\pi G} \left\langle \dot{h}_{ab}(t, \vec{x}) \dot{h}^{ab}(t, \vec{x}) \right\rangle. \quad (2.22)$$

Nous considérons des ondes gravitationnelles planes et progressives, nous pouvons ainsi montrer que l'équation 2.22 devient donc, en remarquant avec l'équation 2.1, $\dot{h}_{ab}(t, \vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \int d^2\hat{\Omega} \sum_{A=+, \times} 2i\pi f h_A(f, \hat{k}) e_{ab}^A(\hat{k}) e^{2i\pi f(t - \frac{\hat{k} \cdot \vec{x}}{c})}$.

$$\begin{aligned} \rho_{GW} &= \int_{-\infty}^{+\infty} df \int_{-\infty}^{+\infty} df' \int d^2\hat{\Omega} \int d^2\hat{\Omega}' \sum_{A=+, \times} \sum_{A'=+, \times} 4\pi^2 f f' \\ &\times \left\langle h_A(f, \hat{k}) h_{A'}^*(f', \hat{k}') \right\rangle e_{ab}^A(\hat{k}) e^{A'ab}(\hat{k}') e^{2i\pi f(t - \frac{\hat{k} \cdot \vec{x}}{c})} e^{-2i\pi f'(t - \frac{\hat{k}' \cdot \vec{x}'}{c})} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Or nous avons $\left\langle h_A(f, \hat{k}) h_{A'}^*(f', \hat{k}') \right\rangle = \frac{1}{16\pi} \delta(f, f') \delta(\hat{k}, \hat{k}') \delta(A, A') S_h(f)$ et $e_{ab}^A(\hat{k}) e^{A'ab}(\hat{k}') = 2$, ce qui conduit en intégrant sur tout le ciel ($\int \int d^2\hat{\Omega} = 4\pi$) à

$$\begin{aligned} \rho_{GW} &= \frac{\pi c^2}{8G} \int_{-\infty}^{+\infty} df f^2 S_h(f) \\ &= \frac{4\pi^2 \rho_c}{3H_0^2} \int_0^{+\infty} \frac{df}{f} f^3 S_h(f) \\ &= \rho_c \int_0^{+\infty} \frac{df}{f} \Omega_{GW}(f) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ce qui nous permet de déduire une relation fondamentale entre la densité du spectre de puissance du fond stochastique $S_h(f)$ et la densité spectrale d'énergie sans dimension $\Omega_{GW}(f)$:

$$\Omega_{GW} = \frac{4\pi^2}{3H_0} f^3 S_h(f) \iff S_h(f) = \frac{3H_0}{4\pi^2} \frac{\Omega_{GW}}{f^3} \quad (2.25)$$

Ce qui nous conduit à écrire

$$\langle h_A(f, \hat{k}) h_{A'}^*(f', \hat{k}') \rangle = \frac{3H_0^2}{64\pi^3} \delta(f, f') \delta(\hat{k}, \hat{k}') \delta(A, A') \frac{3H_0}{4\pi^2} \frac{\Omega_{GW}}{f^3} \quad (2.26)$$

Dans certains papiers, nous pouvons rencontrer la notion d'amplitude caractéristique $h_c(f)$ du fond stochastique. Ce qui s'exprime par rapport à la densité spectrale de puissance telle que :

$$h_c(f) = \sqrt{f S_h(f)} \quad (2.27)$$

Il s'agit également d'une grandeur sans dimension. Elle a l'avantage d'avoir le même ordre de grandeur que l'amplitude h . Il est ainsi plus facile de comparer cette quantité avec les sensibilités des détecteurs.

Nous considérons que le fond stochastique peut se décrire comme une loi puissance avec deux paramètres : une amplitude de référence associée à une fréquence de référence $\Omega_{GW,\alpha}(f_{ref})$ et une puissance ou *slope* en anglais α

$$\Omega_{GW}(f) = \Omega_{GW,\alpha}(f_{ref}) \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^\alpha \quad (2.28)$$

On en déduit donc la densité spectrale de puissance $S_h(f) = \frac{3H_0^2}{2\pi^2} \Omega_{GW,\alpha}(f_{ref}) \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^\alpha$ également l'amplitude caractéristique $h_c(f) = \sqrt{\frac{3H_0^2}{2\pi^2} \Omega_{GW,\alpha}(f_{ref})} f_{ref}^{-\alpha} f^{(\alpha+1)/2}$ est donc aussi une loi puissance telle que

$$h_c(f) = A_c \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^\beta \quad (2.29)$$

avec $\Omega_{GW,\alpha}(f_{ref}) = \frac{2\pi^2}{3H_0} f_{ref}^2 A_c^2$ et $\alpha = 2(\beta + 1)$. Ainsi pour un fond stochastique donnée, il est très facile de passer d'un domaine à l'autre pour replacer ledit fond stochastique dans son contexte. Si nous supposons plusieurs sources en loi puissance celles-ci se somment telles que la densité d'onde gravitationnelle Ω_{GW} est la superposition de différentes composantes, on distingue chaque composante par le coefficient α_i et une amplitude Ω_{GW,α_i} , finalement chaque composante a sa propre dépendance en fréquence [211] :

$$\Omega_{GW}(f) = \sum_i \Omega_{GW,\alpha_i} \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^{\alpha_i} \quad (2.30)$$

2.4.6 Fond stochastique dans un contexte d'un univers en expansion

Dans cette section, nous souhaitons établir comment la densité d'énergie s'écrit en fonction de l'énergie gravitationnellement rayonnée. Pour cela, nous utilisons le théorème de Phinney [189], dans un Univers homogène, isotope et en expansion. La densité d'énergie ρ_{GW} mesurée aujourd'hui s'écrit comme l'intégrale de la densité d'énergie rayonnée par chaque redshift z divisé par la quantité $(1+z)$, tel que

$$\begin{aligned}\rho_{GW} &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} N(z) \frac{1}{1+z} \frac{dE_{GW}}{df_s} f_s \frac{df_s}{f_s} dz \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} N(z) \frac{1}{1+z} f_s \frac{dE_{GW}}{df} dz \frac{df_s}{f}\end{aligned}\tag{2.31}$$

avec $N(z)$ la densité du nombre de sources dans un espace comovant, il s'agit d'une grandeur cosmologique qui dépend du redshift z . Il est possible d'introduire la densité de taux comovant $R(z)$, il s'agit de l'estimation du nombre de sources dans un volume d'univers donnée, tel que $N(z)dz = R(z)dt|_{f_s=f(1+z)}$. Pour comprendre l'intérêt de ratio $R(z)$, nous pouvons avec lui, estimer entre autres le nombre d'événements par unité de temps pour une distance donnée. En effet, par exemple, pour la première campagne d'observation de LIGO (O1), on estime que le taux local est estimé entre 10 et 200 $\text{Gpc}^{-3}\text{an}^{-1}$ [6].

Nous introduisons également le spectre d'énergie pour une source à un redshift z , $\frac{dE_{GW}}{df_s}$, nous notons $f_s = \frac{f}{1+z}$. Il s'agit de la fréquence gravitationnelle observée par le détecteur, f étant la fréquence des ondes gravitationnelles émises et $\frac{1}{1+z}$ le terme de décalage vers le rouge. En utilisant l'équation 2.24, nous pouvons écrire

$$\rho_{GW} = \rho_c \int_0^{+\infty} \Omega_{GW}(f) \frac{df}{f} = \int_0^{+\infty} \frac{\pi c^2}{4G} f^2 h_c^2(f) \frac{df}{f}\tag{2.32}$$

ce qui nous conduit à écrire :

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{\pi}{4G} f^2 h_c^2(f) = \frac{1}{\rho_c} \int_0^{+\infty} N(z) \frac{1}{1+z} \left(f_s \frac{dE_{GW}}{df_s} \right) \Bigg|_{f_s=f(1+z)} dz\tag{2.33}$$

Il est très difficile de connaître et de mesurer la quantité $N(z)$, car il apparaît qu'il dépend de paramètre de l'univers différent à chaque z . Pour faciliter le calcul, nous pouvons le transformer. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned}
N(z)dz &= R(z)dt \\
N(z) &= R(z) \left| \frac{dt}{dz} \right| \\
N(z) &= \frac{R(z)}{(1+z)H_0 E(z)}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

En effet, si l'on considère l'équation de Friedmann [102] d'un Univers composé de 30% de matière baryonique plus la matière noire Ω_m , de 70% d'énergie sombre Ω_Λ et d'une courbure nulle ($\Omega_k = 0$), alors nous écrivons, pour rappel voir section 1.2.3, $(\frac{\dot{a}}{a})^2 = H_0^2 (\frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda)$, avec $a(t)$ le facteur d'échelle. C'est ce paramètre qui caractérise comment le quadrillage cosmique se dilate dans un Univers en expansion, avec $1+z = \frac{a(t_{Today})}{a(t)}$. Dans cette équation le temps t correspond à la durée entre aujourd'hui et l'émission, de plus, par convention $a(t_{Today}) = 1$. Nous pouvons réécrire l'équation de Friedmann $\frac{-1}{1+z} \frac{dz}{dt} = H_0 E(z)$ avec $E(z) = \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}$. Nous avons donc une écriture plus simple de la densité spectrale d'énergie sans dimension $\Omega_{GW}(f)$ [203] :

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{f}{\rho_c H_0} \int_0^{+\infty} \frac{R(z)}{(1+z)E(z)} \left(\frac{dE_{GW}}{df_s} \right) \Bigg|_{f_s=f(1+z)} dz \tag{2.35}$$

La figure 2.9 donne, par exemple, dans le contexte de LISA la dépendance spectrale de deux fonds stochastiques (voir équation 2.30), pour la composante astrophysique, nous prenons $\alpha = 2/3$ et pour la composante cosmologique $\alpha = 0$. Nous introduisons la sensibilité de LISA en bleu et tirée de l'étude de Cornish et Robson [76], nous avons réalisé le calcul du bruit de LISA dans une section suivante. Pour paramétrer les fonds stochastiques nous utilisons les travaux de [211, 3] réalisés avec les données LIGO (O1) qui permettent de mettre des limites aux composantes d'amplitude, pour $\alpha = 2/3$ pour $f = 20$ Hz à 85 Hz. Il nous est possible de recontextualiser ce fond stochastique dans le domaine de LISA. Ainsi, nous introduisons $\Omega_{GW}^{(\alpha=2/3)} < 1,3 \cdot 10^{-7} \left(\frac{f}{25 \text{ Hz}} \right)^{2/3}$, pour $\alpha = 0$, nous avons choisi de tracer un fond stochastique plat avec deux amplitudes différentes tel que $\Omega_{GW}^{(\alpha=0)} = 10^{-12}$ et $\Omega_{GW}^{(\alpha=0)} = 10^{-10}$.

Dans la figure 2.9, nous présentons la courbe de sensibilité de LISA $S_n^{1/2}$ [76], $P_n^{1/2}$ est la densité spectrale de puissance du bruit du détecteur $S_n^{1/2} = P_n^{1/2}/\mathcal{R}(f)$, \mathcal{R} est la réponse en fréquence de l'instrument (lire section 1.3.7), avec les différents exemples du fond stochastique, pour convertir la densité d'ondes gravitationnelles Ω_{GW} en puissance spectrale de déformation des ondes gravitationnelles $S_{GW} = h_c^2(f)$ nous utilisons [211] :

$$S_{GW}(f) = \frac{3H_0^2 \Omega_{GW}(f)}{2\pi^2 f^2} \tag{2.36}$$

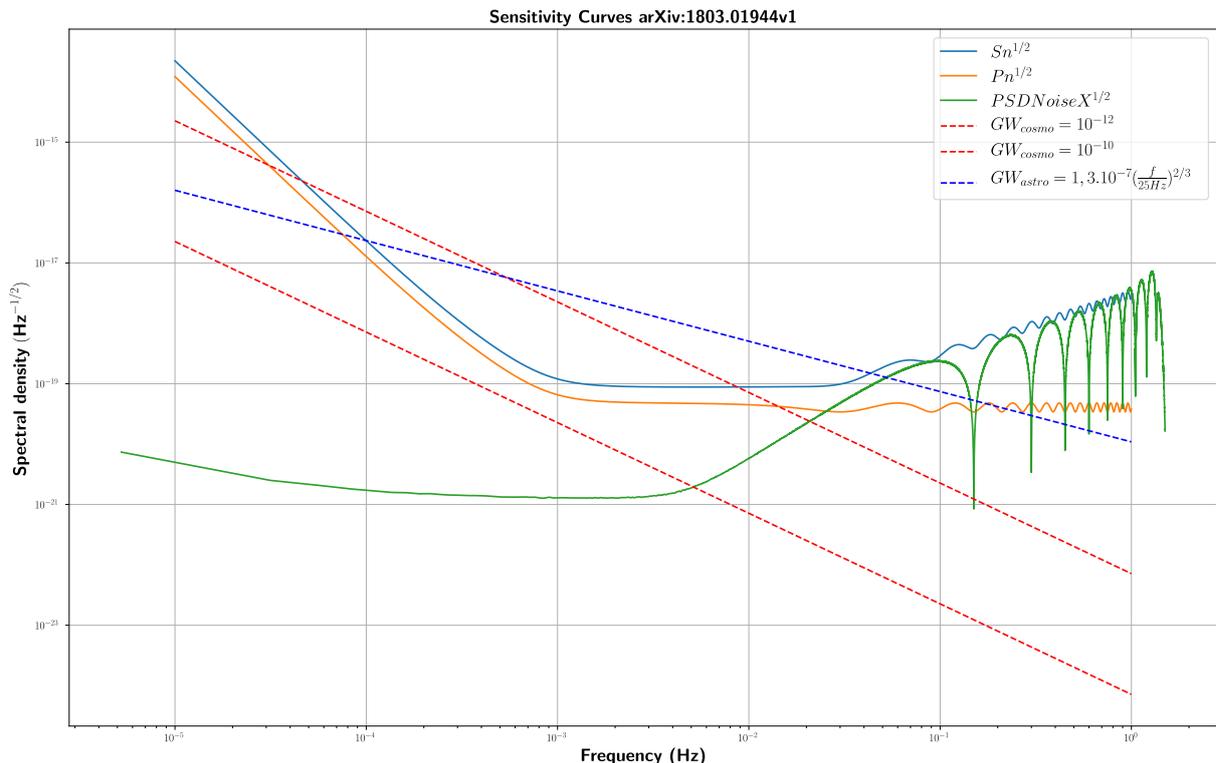


FIGURE 2.9 – Courbe de sensibilité de LISA S_n et différents exemples du fond stochastique $S_h^{1/2}$ (courbe bleue). La courbe orange correspond à la densité spectrale d’amplitude $P_n^{1/2}$ de LISA sans la fonction de réponse $\mathcal{R}(f)$ (voir Robson et Cornish [208]). Nous avons également tracé la densité spectrale d’amplitude du bruit du canal X , $\text{PSD}_{\text{NoiseX}}^{1/2}$. Nous avons superposé au tracé lié au bruit un signal SGWB d’origine astrophysique (tracé bleu en ligne brisée) et deux modèles en loi puissance plate cosmologique telle que les courbes rouges brisées sont respectivement données pour $\Omega_{GW,cosmo} = 10^{-12}$ et 10^{-10} .

2.4.7 Émission gravitationnelle d’un système double en orbite circulaire

Dans ce paragraphe, nous allons prendre la source la plus commune d’émission d’ondes gravitationnelles, il s’agit des systèmes binaires ensuite nous calculerons le fond stochastique associé à une population homogène et isotrope de binaires compactes. Dans l’approximation newtonienne, les trous noirs sont assimilés à des particules de masse m_1 et m_2 , avec $m_1 \leq m_2$ séparé d’une distance D , se déplaçant dans un espace-temps euclidien tri-dimensionnel. La figure 2.10 résume la configuration de deux objets gravitationnellement liés et en rotation dans le plan euclidien xOy . Les deux rayons orbitaux des deux masses peuvent s’écrire :

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} D \text{ et } r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} D \quad (2.37)$$

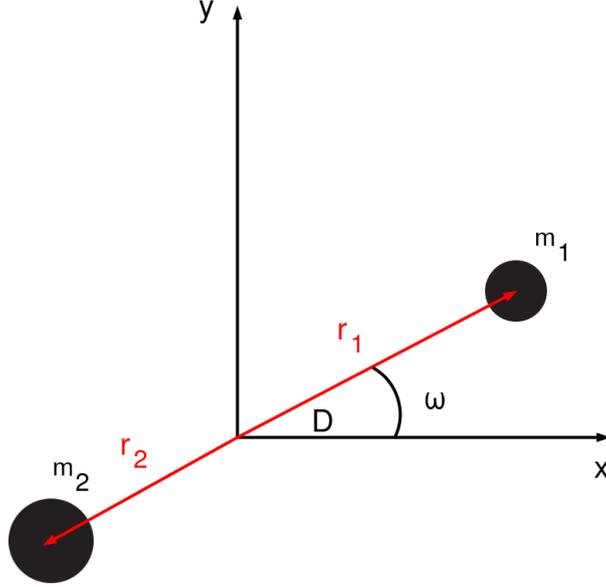


FIGURE 2.10

avec $r_1 + r_2 = D$. De plus, nous pouvons remarquer une propriété de ce type de système $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$, nous introduisons la fréquence orbitale angulaire ω , ainsi à $t = 0$ la masse m_1 est au niveau de l'axe x nous avons au temps t en projetant sur la base xOy :

$$\begin{cases} x_1 = r_1 \cos \omega t = \frac{m_2 D}{m_1 + m_2} \cos \omega t \\ x_2 = -r_2 \cos \omega t = -\frac{m_1 D}{m_1 + m_2} \cos \omega t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_1 = r_1 \sin \omega t = \frac{m_2 D}{m_1 + m_2} \sin \omega t \\ y_2 = -r_2 \sin \omega t = -\frac{m_1 D}{m_1 + m_2} \sin \omega t \end{cases} \quad (2.38)$$

À l'instant t , nous considérons une densité nulle partout, sauf aux points $\vec{r}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t)$, ce sont les endroits où se trouvent concentrées les masses m_1 et m_2 des trous noirs. Nous en déduisons que la densité peut s'écrire :

$$\rho(t, \vec{r}) = m_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_1(t)) + m_2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_2(t)) \quad (2.39)$$

nous remarquons qu'en utilisant les propriétés de la distribution de Dirac et en intégrant la densité sur tout l'espace, nous avons $m(t) = \iiint \rho(t, \vec{r}) dx dy dz = M$ qui est une constante. De plus d'après la troisième loi de Kepler nous avons $\omega^2 D^3 = GM$. Avec la masse réduite $\eta = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$ (cette quantité est maximale pour $m_1 = m_2$ et vaut $\frac{1}{4}$), nous obtenons :

$$\begin{aligned} m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 &= m_1 \left(\frac{m_2 D}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1 D}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{M^2} D^2 \\ &= \frac{m_1 m_2}{M} D^2 = \eta M D^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Nous pouvons calculer le moment quadrapolaire du système Q_{ab} en utilisant l'équation

1.145 et en remarquant que :

$$\begin{aligned}
Q_{ab}(t) &= \iiint \rho(t, \vec{r}) \left(x^a x^b - \frac{1}{3} |\vec{r}|^2 \delta^{ab} \right) dx dy dz \\
&= \iiint \rho(t, \vec{r}) x^a x^b dx dy dz - \frac{1}{3} \delta^{ab} \iiint \rho(t, \vec{r}) |\vec{r}|^2 dx dy dz \\
&= I_{ab}(t) - \frac{1}{3} \delta^{ab} I,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

le moment quadrupolaire newtonienne est la partie sans trace du tenseur d'inertie newtonien I_{ab} tel que $Q = \delta^{ab} Q_{ab} = \delta^{ab} I_{ab}(t) - \frac{1}{3} \delta^{ab} \delta_{ab} I = 0$, vaut

$$\begin{cases}
Q_{xx}(t) = \frac{\eta M D^2}{3} (3 \cos^2(\omega t) - 1) \\
Q_{yy}(t) = \frac{\eta M D^2}{3} (3 \sin^2(\omega t) - 1) \\
Q_{zz}(t) = -\frac{\eta M D^2}{3} \\
Q_{xy}(t) = Q_{yx}(t) = \frac{\eta M D^2}{2} \sin^2(\omega t)
\end{cases} \tag{2.42}$$

les autres composantes sont nulles.

Les dérivées secondes et troisièmes de Q_{ab} qui ne sont pas nulles sont

$$\begin{cases}
\ddot{Q}_{xx}(t) = -2\omega^2 \eta M D^2 \cos(2\omega t) \\
\ddot{Q}_{yy}(t) = 2\omega^2 \eta M D^2 \cos(2\omega t) \\
\ddot{Q}_{xy}(t) = \ddot{Q}_{yx}(t) = -2\omega^2 \eta M D^2 \sin(2\omega t)
\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}
\ddot{\ddot{Q}}_{xx}(t) = 4\omega^3 \eta M D^2 \sin(2\omega t) \\
\ddot{\ddot{Q}}_{yy}(t) = -4\omega^3 \eta M D^2 \sin(2\omega t) \\
\ddot{\ddot{Q}}_{xy}(t) = \ddot{\ddot{Q}}_{yx}(t) = -4\omega^3 \eta M D^2 \cos(2\omega t)
\end{cases} \tag{2.43}$$

En utilisant l'équation 1.152, nous pouvons écrire la luminosité gravitationnelle du système binaire.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{GW} &= \frac{G}{5c^5} \ddot{\ddot{Q}}_{ab} \ddot{\ddot{Q}}^{ab} \\
&= \frac{G}{5c^5} \left(\ddot{\ddot{Q}}_{xx}^2 + \ddot{\ddot{Q}}_{yy}^2 + \ddot{\ddot{Q}}_{xy}^2 + \ddot{\ddot{Q}}_{yx}^2 \right) \\
&= \frac{16\omega^6 \eta^2 G M^2 D^4}{5c^5} (2 \sin^2(2\omega t) + 2 \cos^2(2\omega t)) \\
&= \frac{32G\omega^6 \eta^2 M^2 D^4}{5c^5}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Nous pouvons également établir avec la formule du quadripôle (voir équation 1.148) et les dérivées secondes du tenseur du moment quadrupolaire Q_{ab} le tenseur d'amplitude des ondes gravitationnelles produites telles que

$$\begin{aligned}
h_{ij}^{TT} &= \frac{2G}{c^4 r} \left[P_a^c P_b^d - \frac{1}{2} P_{ab} P^{cd} \right] \ddot{Q}_{ab} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \frac{2G}{c^4 R} \ddot{Q}_{ab} \left(t - \frac{r}{c} \right) \\
&= \frac{4GM\eta D^2 \omega^2}{c^4 R} \begin{pmatrix} \cos \left(2\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right) & \sin \left(2\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right) & 0 \\ \sin \left(2\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right) & -\cos \left(2\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} h_+ \left(t - \frac{R}{c} \right) & h_\times \left(t - \frac{R}{c} \right) & 0 \\ h_\times \left(t - \frac{R}{c} \right) & -h_+ \left(t - \frac{R}{c} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

avec dans notre cas $h_+(t) = h \cos(2\omega t)$, $h_\times(t) = h \sin(2\omega t)$ et $h = \frac{4GM\eta D^2 \omega^2}{c^4 R} = \frac{4(GM_c)^{5/3} \omega^{2/3}}{c^4 R}$, nous avons une nouvelle grandeur, il s'agit de la masse *Chirp*.

$$\mathcal{M}_c = M\eta^{3/5} = (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right)^{3/5} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} \tag{2.46}$$

L'amplitude h est donc une grandeur très faible sauf au moment du *merger*, c'est-à-dire quand D tend vers une valeur nulle.

Si nous considérons que l'énergie totale du système E ne diminue uniquement avec la radiation d'onde gravitationnelle, nous pouvons donc établir $\frac{dE}{dt} = -\mathcal{L}_{GW}$. Dans la limite non-relativiste et en utilisant la deuxième loi de Newton nous pouvons établir avec le théorème du Viriel que l'énergie s'écrit comme $E = -\frac{1}{2} \frac{Gm_1 m_2}{D}$, de plus, nous pouvons écrire que $\omega = 2\pi f_{orb} = \frac{2\pi}{T}$ avec f_{orb} la fréquence orbitale et T la période orbitale. Ainsi, nous avons $E = -\frac{M(GM\omega)^{2/3} \eta}{2}$ car d'après Kepler nous avons $D^3 = \frac{GM}{\omega^2}$ donc en utilisant la luminosité gravitationnelle obtenue dans l'équation 2.44.

$$\begin{aligned}
-\frac{dE}{dt} &= \mathcal{L}_{GW} \\
-\frac{dE}{dt} &= \frac{32G\omega^6 \eta^2 M^2 D^4}{5c^5} = \frac{32\eta^2}{5Gc^5} (GM\omega)^{10/3}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Nous pouvons étudier l'évolution de la distance entre les deux objets au cours du temps, pour cela, il nous faut établir une équation différentielle avec la distance D telle que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{Gm_1 m_2}{D^2} \frac{dD}{dt} = -\mathcal{L}_{GW} = -\frac{32G^4 M (m_1 m_2)^2}{5D^5 c^5} \tag{2.48}$$

nous en déduisons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 M m_1 m_2}{c^5 D^3} \tag{2.49}$$

Nous pouvons, en considérant $D(0) = D_0$, établir que

$$D(t) = \sqrt[4]{D_0^4 - \frac{256 G^3 M m_1 m_1}{c^5} t} \quad (2.50)$$

Il est ainsi possible de déterminer le temps de coalescence τ_c du système binaire circulaire, il s'agit du temps pour que D soit nul. On a donc

$$\tau_c = \frac{5}{256} \frac{c^5 D_0^4}{G^3 M m_1 m_1} \quad (2.51)$$

comme nous pouvions l'attendre, le temps est beaucoup plus long pour les binaires massives et à fort ratio de masse, il y a également une très forte dépendance en fonction de la distance initiale des deux objets. Nous avons démontré que l'amplitude augmente bien durant la coalescence. Nous pouvons aussi étudier la fréquence du signal gravitationnelle observée, celle-ci augmente également, car elle est proportionnelle à $1/D$, de plus pour une orbite circulaire, elle vaut le double de la fréquence orbitale ($f_{GW} = 2f_{Orb}$).

$$\frac{df_{GW}}{dt} = 2 \frac{d\omega}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\frac{GM}{D^3}} \right) = -3 \sqrt{\frac{GM}{D^3}} \frac{\dot{D}}{D} = -3\omega \frac{\dot{D}}{D}. \quad (2.52)$$

Or nous avons $\tau_c = \frac{5}{256} \frac{c^5 D_0^4}{G^3 M m_1 m_1} = \frac{5}{256} \frac{c^5 \omega_0^{-8/3}}{G^{5/3} M^{-1/3} m_1 m_1} = \frac{5}{256} \pi^{-8/3} \left(\frac{c^3}{(GM)^{5/3}} \right)^{5/3} f_{GW,0}^{-8/3} = \left(\frac{K}{f_{GW,0}} \right)^{8/3}$. Dans le but de simplifier l'écriture, nous définissons $K = \frac{5^{3/8}}{8\pi} \left(\frac{c^3}{GM} \right)^{5/8}$, il s'agit d'une constante du temps. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \frac{df_{GW}}{dt} = \frac{3}{8} K^{-8/3} f_{GW}^{11/3} &\implies f_{GW}(t) = f_{GW,0} \left(1 - \left(\frac{f_{GW,0}}{K} \right)^{8/3} t \right)^{-3/8} \\ &= \frac{f_{GW,0}}{\left(1 - \frac{t}{\tau_c} \right)^{3/8}} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Il est ainsi évident que la fréquence de l'onde gravitationnelle augmente au cours du temps pendant la phase de coalescence. C'est une caractéristique d'un signal en *chirp*. Ce signal est caractérisé par la masse *chirp*. Il s'agit d'une grandeur qui est mesurée et qui est fonction de grandeurs différentielles $\mathcal{M} = \frac{c^3}{G} \left(\frac{5}{96\pi^{8/3}} \right)^{3/5} \left(\frac{df_{GW}}{dt} \right)^{3/5} f_{GW}^{-11/3}$. Cette quantité permet de déterminer les deux masses des objets, et ainsi de dériver la distance R à laquelle le système se situe, en effet, nous avons :

$$R = 4\pi^{2/3} \frac{(GM)^{5/3} f_{GW}^{2/3}}{c^4 h} \quad (2.54)$$

Dans le cas d'une source d'horizon cosmologique, c'est-à-dire très éloignée, les ondes gravitationnelles comme les ondes électromagnétiques subissent un décalage vers le rouge ou en anglais *redshift* z tel que $f_{GW,obs} = \frac{f_{GW}}{1+z}$, il en est donc de même pour la masse *chirp* tel que $\mathcal{M}_{obs} = \mathcal{M}(1+z)$. On notera que l'amplitude doit aussi prendre en compte cet

effet, c'est-à-dire intégrer une distance de Luminosité $\mathcal{D}_L(z)$ telle que $h = \frac{4\pi^{2/3}(GM_c)^{5/3}f_{GW}^{2/3}}{c^4\mathcal{D}_L(z)}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{GW} &= \frac{dE_{GW}}{dt} = -\frac{dE_{orb}}{dt} \\ \frac{dE_{GW}}{df_s} &= \frac{dt}{df_s} \frac{dE_{GW}}{dt} = -\frac{dt}{df_s} \frac{dE_{orb}}{dt} = \frac{dt}{df_s} \mathcal{L}_{GW}\end{aligned}\tag{2.55}$$

Nous obtenons en utilisant $\eta^2 M^{10/3} = \mathcal{M}^{10/3}$

$$\begin{aligned}\frac{dE_{GW}}{df_s} &= \frac{dt}{df_s} \mathcal{L}_{GW} \\ &= \frac{8}{3} K^{8/3} f_{GW}^{-11/3} \mathcal{L}_{GW} \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{G^2 \pi}{8}\right)^{2/3} \mathcal{M}^{5/3} f_{GW}^{-1/3} \\ &= \frac{\pi}{3} \frac{1}{G} \left(\frac{(GM)^5}{\pi f_{GW}}\right)^{1/3}\end{aligned}\tag{2.56}$$

Les résultats obtenus dans cette section ont été établis dans la limite Newtonienne et Képlérienne. Pour une description plus générale, il n'est plus possible de la faire analytiquement. En effet, ce que nous avons établi est l'ordre zéro d'un développement limité. Pour aller à des ordres plus complexes, il faut donc utiliser les calculs post-newtoniens (PN)[44]. En effet, le modèle post-newtonien est un traitement systématique des corrections $\frac{v}{c}$ à la dynamique newtonienne, où v est la vitesse orbitale et c , la vitesse de la lumière. Pour les binaires, la vitesse orbitale est reliée à la force du champ gravitationnel par la relation du Viriel : un développement en $\frac{v^2}{c^2}$ est comparable à un développement en $\frac{GM}{Rc^2}$, où M et R sont, respectivement, la masse caractéristique et la distance entre les deux objets du système, et G est la constante gravitationnelle de Newton. Par conséquent, le formalisme PN est un développement en $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ et $\frac{GM}{Rc^2} \ll 1$. Le modèle post-newtonien respecte trois hypothèses qui fixent sa validité [163] :

- *Construction par sursauts* : les modifications des paramètres orbitaux sont modélisées comme se produisant instantanément, autour du passage au périastre. Les paramètres orbitaux sont supposés constants durant le reste de l'orbite.
- *Orbites de haute excentricité* : On considère que l'orbite est très elliptique, ce qui conduit à définir le petit paramètre d'excentricité $\delta e = 1 - e$, qui vérifie $\delta e \ll 1$.
- *Orbite post-newtonienne* : À l'ordre de Newton, nous avons travaillé avec le périastre r_p comme l'un de nos paramètres physiques. Nous travaillons maintenant avec v_p la vitesse au périastre. Nous développons toutes les expressions avec la vitesse au périastre qui doit satisfaire : $v_p \ll 1$.

Tandis que dans le modèle newtonien, nous reposons notre développement sur trois hypothèses qui fixent sa validité :

- *Orbites continues par morceaux* : les modifications des paramètres orbitaux sont

modélisées comme se produisant instantanément autour du passage au périastre et les paramètres orbitaux sont supposés constants durant le reste de l'orbite.

- *Orbites de haute excentricité* : On considère que l'orbite est peu excentrique, ce qui conduit à définir le petit paramètre d'excentricité $\delta e = 1 - e$, qui doit vérifier $\delta e \ll 1$.
- *Limite de champ faible* : la mécanique étudiée doit se faire en champ faible. En effet, le rayon au périastre doit être inférieur au rayon de Schwarzschild $r_s = \frac{2GM}{c^2}$. On doit vérifier $r_s \ll r_p$.

Nous pouvons établir avec l'équation 2.56 et 2.35 la densité spectrale d'énergie sans dimension d'une population de binaires de trous noirs stellaire $\Omega_{GW}(f)$ tel que :

$$\begin{aligned}
\Omega_{GW}(f) &= \frac{f}{\rho_c H_0} \int_0^{+\infty} \frac{R(z)}{(1+z)E(z)} \left(\frac{dE_{GW}}{df_s} \right) \Big|_{f_s=f(1+z)} dz \\
&= \frac{f}{\rho_c H_0} \int_0^{+\infty} \frac{R(z)}{(1+z)E(z)} \left(\frac{\pi}{3} \frac{1}{G} \left(\frac{(GM)^5}{\pi f(1+z)} \right)^{1/3} \right) dz \\
&= \frac{f^{2/3}}{\rho_c H_0} \frac{\pi}{3} \frac{1}{G} \frac{(GM)^{5/3}}{\pi^{1/3}} \int_0^{+\infty} \frac{R(z)}{(1+z)^{4/3} E(z)} dz \\
&= \frac{8\pi}{3H_0^2} (\pi f)^{2/3} (GM)^{5/3} \int_0^{+\infty} \frac{R(z)}{(1+z)^{4/3} E(z)} dz
\end{aligned} \tag{2.57}$$

E.S Phinney [189] estime que $\int_0^{+\infty} \frac{R(z)}{(1+z)^{4/3} E(z)} dz \simeq 0.74 \text{Mpc}^{-3}$. Dans notre cas, nous le considérons comme égal à 1Mpc^{-3} . De plus, nous nous intéressons uniquement à la dépendance paramétrique de la densité spectrale d'énergie sans dimension. Ainsi, nous avons démontré qu'une population de binaires émettant une onde gravitationnelle en réduisant leur énergie orbitale produit un fond stochastique proportionnel à $f^{2/3}$. La deuxième information est également la dépendance en fonction de la *Chirp mass*. En effet, ce fond dépend ainsi de la distribution de masse de la population. Dans le cas d'une population uniforme, nous retrouvons que le fond stochastique est bien une loi puissance. Si la population n'est pas uniforme telle que nous avons $\mathcal{M} \sim fct(f)$, autrement dit, si le nombre de binaires diminue à plus hautes fréquences alors nous pouvons nous attendre à une densité spectrale d'énergie qui est en loi puissance à basse fréquence puis qui décroît à plus hautes fréquences. Plus tard dans ce manuscrit, nous décrirons ce type de comportement avec une loi puissance cassée.

2.5 Premier plan astrophysique

2.5.1 Contexte astrophysique

La dernière version de données de Gaia, la Early Data Release 3 (EDR3), a récemment été présentée [71]. Gaia est une mission d’astrométrie, elle mesure avec une grande précision la position, la distance et le mouvement de centaines de millions d’étoiles de notre Galaxie. De plus, grâce à son spectromètre, il est possible de connaître le type de la plupart des étoiles observées. Il s’agit de la carte stellaire la plus précise à ce jour donnant la position, la luminosité et le spectre de plus de 1.8×10^9 d’étoiles. Parmi celles-ci, des naines blanches ou *white dwarfs* (WD) estimées à 10^6 ont été observées et bien séparées des autres étoiles dans le diagramme de Hertzsprung-Russell [109]. Les étoiles avec une masse initiale comprise entre 0.9 et 8 masse solaire (M_{\odot}) deviendront des WD dans un temps d’Hubble.

Cela implique que 97% des étoiles de la Galaxie finiront comme WD [176, 101], ce qui nous laisse estimer entre 10 à 50 milliards de WD dans la Voie lactée. Pour 50 milliards de WD, nous utilisons la densité de $5 \times 10^{-3} \text{ pc}^{-3}$. Dans [155], la distribution des différences de types d’étoiles dans notre galaxie est donnée. Le calcul est établi à partir le nombre d’étoiles de chaque type dans un volume de 10^4 pc^3 autour du Soleil.

Les WDs sont des restes des noyaux stellaires d’étoiles mortes. Elles ont des rayons typiques d’environ 10 000 km et des masses comprises entre $0.25 M_{\odot}$ pour les WD de type He et jusqu’à la masse de Chandrasekhar $1.4 M_{\odot}$, ce qui en fait des objets compacts [66]. Cela leur donne une compacité d’environ 5×10^{-4} [139]. Les WD s’estompent lentement après leur formation et leur luminosité devient très faible. On estime qu’après un milliard d’années, la luminosité est de 0.1% de celle de la luminosité solaire [106]. Il est donc assez difficile d’observer par des mesures électromagnétiques (EM) des WD distantes. Toutes les naines blanches Gaia DR2 sont situées dans un rayon de moins de 100 pc [135]. Malheureusement, ce ne sont pas des objets très lumineux par rapport au soleil, ils sont entre 50 et 20 000 fois moins brillant. De plus, ce sont des objets avec un fort champ magnétique compris entre 10^{12} et 10^{13} Gauss [128].

Il existe un nombre important de WD qui forment des WD doubles (DWD). Les binaires de WD ultra-compactes avec une courte période orbitale, de quelques heures à quelques minutes, peuvent avoir un signal électromagnétique (EM) important, les rendant observables. Parmi ceux-ci se trouvent des systèmes à variables cataclysmiques (CV) [150] constitués d’une WD et d’une étoile compagne, qui transfère une partie de sa masse après avoir rempli son lobe de Roche. Lorsque la matière tombe vers la WD, il y a une forte émission périodique d’UV et parfois de rayons X [241]. De telles binaires en interaction sont des progéniteurs possibles de supernovæ de type Ia [242, 124].

Les DWD de notre Galaxie sont des sources d’ondes gravitationnelles qui seront dé-

tectables avec LISA, la future mission spatiale de l'Agence Spatiale Européenne (ESA) dont l'objectif est de détecter les GW de basses fréquences depuis l'espace. Sa bande d'observation est une excellente source pour comprendre les propriétés astrophysiques de notre Galaxie et de la population de DWD.

Gaia DR2 a fourni l'astrométrie pour certains WD. Nous ne pouvons pas encore distinguer les binaires de DWD individuelles, mais pour certaines binaires connues, l'estimation de leur émission GW pourrait être affinée. Gaia ne pourra donc pas trouver de sources LISA avant DR4 [109], et elles devraient avoir un rapport signal sur bruit (SNR) supérieur à cinq lorsqu'elles sont observées par LISA [149]. À partir des courbes de lumière, il sera possible d'extraire une estimation de la population de DWD détectable pour LISA [125]. L'émission de GW sera à des fréquences inférieures à un mHz. L'étude et la mesure de ces systèmes font partie des objectifs scientifiques clés de la mission LISA. De plus, il existe des systèmes binaires appelés « binaires de vérification » [149].

Par exemple, récemment, la *Zwicky Transient Facility (ZTF)* a mesuré une DWD avec une période orbitale estimée à 7 minutes [56], ce qui correspond à une émission de GW de $\simeq 30$ mHz. Des systèmes bien étudiés comme celui-ci peuvent être utilisés pour vérifier les performances de LISA, agissant comme un moyen de confirmer la sensibilité de LISA.

La bande 10^{-5} à 10^{-4} Hz, si utilisable avec les données LISA, serait importante pour la détection et la séparation des SGWBs. Les hautes fréquences (jusqu'à 0,1 Hz) sont dominées par le bruit de LISA, il est donc difficile de séparer un SGWB de ce bruit. Les données de hautes fréquences fournissent des informations importantes pour décrire le bruit de LISA. Le but de la mission LISA [19] est de détecter les GWs dans la bande de fréquence $[10^{-4}, 0.1]$ Hz, mais éventuellement extensible à $[10^{-5}, 1]$ Hz. Cela correspond à des périodes orbitales comprises entre 12 secondes et 15 jours.

L'étude de la population de DWDs est un objectif important pour la mission LISA. LISA est dirigée par l'ESA, avec la participation de la NASA. Le lancement est actuellement prévu pour 2034, avec au moins 4 ans d'observations, éventuellement étendu à 10 ans. La constellation LISA sera constituée de trois satellites séparés les uns des autres de $L = 2.5 \times 10^9$ m. De nombreux signaux de GWs devraient être détectés dans la bande LISA. Les sources galactiques seront importantes pour LISA, par exemple, des systèmes de DWD [178, 82, 213, 12, 154, 93, 122]. Le signal de SGWB des DWD, ou le premier plan galactique, est anisotrope et la représentation de sa densité d'énergie n'est pas une simple loi de puissance [236]. De nombreuses études ont porté sur les populations de DWD dans notre Galaxie et leur détectabilité dans la bande de LISA. [182] calcule le signal stochastique d'origine galactique selon différents modèles de DWD. [53] présente une méthode de calcul du premier plan galactique et discute de la distribution de puissance et de la résolubilité par LISA en fonction de la distance à la source. Cornish et Adams introduisent le calcul de la modulation induite par l'orbite de LISA du premier plan galactique dans le contexte de la détection d'un fond stochastique d'ondes gravitationnelles

d'origine cosmologique [81, 12, 14]. [145, 209] explorent la possibilité d'observer les DWD dans les galaxies satellites.

2.5.2 Description des catalogues de Naines Blanches Doubles (*Double White Dwarfs (DWDs)*)

Simulation des populations de DWDs

Lamberts *et. al.* [154] fournissent un catalogue de binaires de DWD à courte période produisant des GWs dans la bande de fréquence d'observation de LISA. Cette simulation de la population de nombreuses binaires ($\simeq 3.5 \times 10^7$) est fondée sur le modèle "Latte" [127, 249] d'une galaxie de type Voie lactée d'une simulation cosmologique dans le projet FIRE [126]. La simulation fournit un modèle réaliste respectant l'histoire de la formation des étoiles, l'évolution de la métallicité et la morphologie de la Voie lactée, y compris les propriétés statistiques de sa population de satellites.

Il est bien entendu possible de calculer le premier plan galactique à partir d'autres catalogues et de comparer les effets des différentes populations. Ici, nous utilisons également le catalogue fourni dans MLDC³. Le modèle galactique est combiné à une distribution de DWDs établie à partir d'un modèle binaire de synthèse de population [132] qui produit naturellement des DWDs avec différentes compositions de noyaux selon les conditions initiales. Chaque composition de noyau a une distribution de masse différente; les noyaux He sont moins massifs que les noyaux CO et NeO. La formation de DWD CO-CO se produit généralement sur des échelles de temps inférieures à 2 Gyrs, tandis que les DWD He-He se forment sur des échelles de temps d'au moins 3 Gyrs. Ces différents temps de retard se traduisent par une distribution distincte des DWD He-He dominant dans les régions les plus anciennes de la Galaxie (disque épais, renflement (*bulge* en anglais) et halo) et les DWD CO-CO dominant dans les régions de formation stellaire plus récente (disque mince). Les simulations convergent vers des paramètres comparables à ceux de la Voie lactée [214]. La simulation calcule la formation stellaire avec la position de l'objet dans la Galaxie (X, Y, Z), et la métallicité Z au cours du temps; celle-ci aussi utilise une version modifiée de *Binary Star Evolution* (BSE) disponible au public [133] pour répliquer la population de DWD.

Le catalogue LISALDC 1-4 est une population binaire de naines blanches galactiques comprenant environ 30 millions de systèmes [37]. Le catalogue contient pour chaque binaire la latitude et la longitude de l'écliptique, l'amplitude, la fréquence, la dérivée de fréquence de l'onde gravitationnelle émise, l'inclinaison et la polarisation initiale. Tous ces paramètres respectent la distribution donnée par [178]. Les résultats de la simulation et le catalogue *mock* LISA sont compatibles.

3. <https://lisa-ldc.lal.in2p3.fr/>

Comparaison des catalogues

Le catalogue de Lamberts *et. al* [154] contient pour chaque binaire : la masse des deux étoiles, M_1 pour le plus gros objet et M_2 pour le plus petit ; la nature du noyau de l'étoile, noyau d'hélium He , noyau de carbone-oxygène CO , ou noyau de néon-oxygène NeO ; la fréquence orbitale du binaire f_{orb} ; et la position cartésienne dans la galaxie X, Y, Z .

Il est simple de dériver les quantités nécessaires pour décrire les émissions de GW à partir de ces paramètres. La masse de chirp est donnée, pour rappel, par :

$$\mathcal{M}_c = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}}. \quad (2.58)$$

La fréquence de l'onde gravitationnelle émise par chaque binaire est

$$f_{GW} = 2f_{orb}, \quad (2.59)$$

avec f_{orb} la fréquence orbitale ; on suppose que les orbites sont circulaires.

La dérivée de fréquence de l'onde gravitationnelle est donnée par

$$\dot{f}_{GW} = \left(\frac{G\mathcal{M}_c}{c^3} \right)^{5/3} \frac{96}{5} \pi^{8/3} f_{GW}^{11/3}. \quad (2.60)$$

La distance entre la binaire et la constellation LISA (approximant la position de la constellation LISA au Soleil) :

$$R = \sqrt{(X - X_\odot)^2 + (Y - Y_\odot)^2 + (Z - Z_\odot)^2} \quad (2.61)$$

avec $(X_\odot, Y_\odot, Z_\odot) = (8.178, 0, 0.659)$ kpc la position du Soleil dans les coordonnées cartésiennes galactiques.

Pour une DWD, selon [82], nous pouvons calculer l'amplitude de l'onde gravitationnelle pour une binaire alignée de manière optimale⁴ à une distance R comme,

$$h = 4(\pi)^{2/3} f_{GW}^{2/3} \frac{G^{5/3} M_c^{5/3}}{c^4 R}. \quad (2.62)$$

Ceci est suffisant pour cartographier l'amplitude. Nous utilisons la vue Healpix [114] dans la figure 2.11, avec $N_{side} = 256$ (voir la définition N_{side} dans [114]). Pour chaque pixel de la carte, nous empilons les amplitudes des binaires présentes ; les figures 2.11 et figure 2.13 sont les logarithmes du fond d'amplitude de l'onde gravitationnelle GW du ciel de [154] et [178], respectivement. La position de la constellation LISA est décrit dans la figure 2.12.

Nous introduisons également la population de DWD du LISA DATA Challenge [160].

4. La manière optimale correspond à une inclinaison $\iota = 0$, la suite de notre calcul correspond au cas où nous tuons la dépendante en ι en moyennant suivant ι .

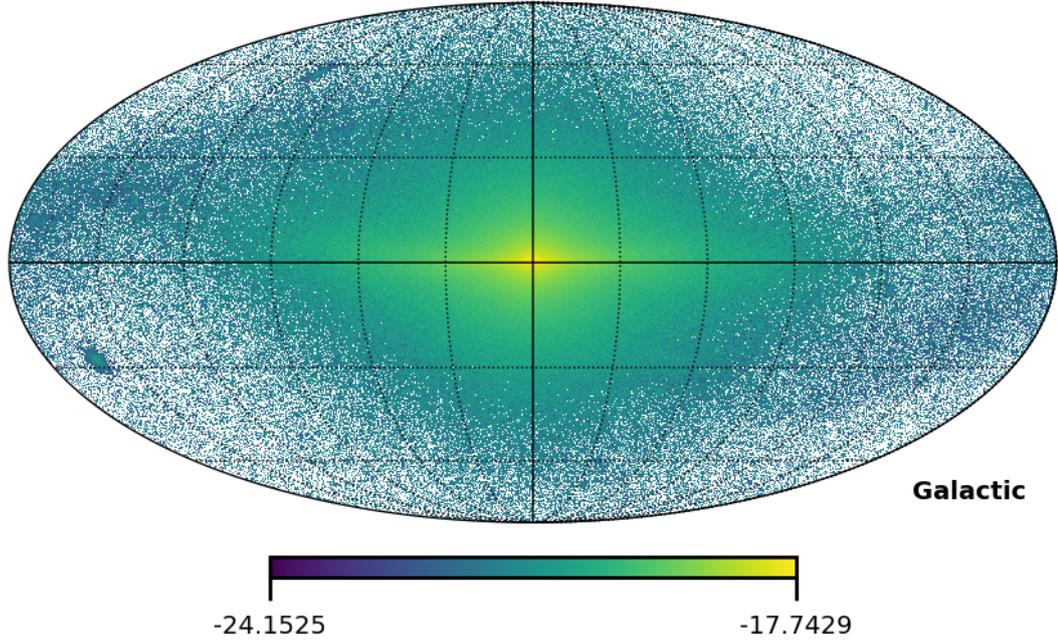


FIGURE 2.11 – Carte de la distribution de la log-amplitude de l’onde gravitationnelle des binaires galactiques de WD pour $f_{GW} \geq 10 \mu\text{Hz}$. La distribution DWD en position (X, Y, Z) est issue de la simulation de Lamberts *et. al* [154]. Cette carte est faite avec les coordonnées galactiques $GLON, GLAT$ pour $N_{side} = 256$ [113].

LDC 1-4 utilise la distribution de position galactique de [178]. La population galactique est choisie aléatoirement et symétriquement autour du centre galactique en suivant une distribution exponentielle de la galaxie pour le disque et le *bulge*. Les autres paramètres sont également tirés au hasard avec des distributions qui tiennent compte du taux de formation stellaire galactique et du scénario d’évolution.

Ce modèle donne un centre galactique riche de binaire et des bras sous forme d’un plan. Cependant, il y a peu de binaires dans le reste du ciel. En comparaison, la population de [154] (voir figure 2.11) a une distribution plus proche de notre Galaxie. En effet, la Galaxie simulée contient un disque, un renflement, un halo et des Galaxies satellites. De plus, il y a la présence de DWD partout dans le ciel, mais avec une anisotropie.

Calcul de l’amplitude

Les amplitudes des ondes gravitationnelles pour les deux polarisations d’une binaire avec une inclinaison ι sont données par :

$$A_+(M_1, M_2, R, f, \iota) = \frac{2G^2 M_1 M_2}{c^4 R} \left(\frac{(\pi f)^2}{G(M_1 + M_2)} \right)^{1/3} (1 + \cos^2(\iota)), \quad (2.63)$$

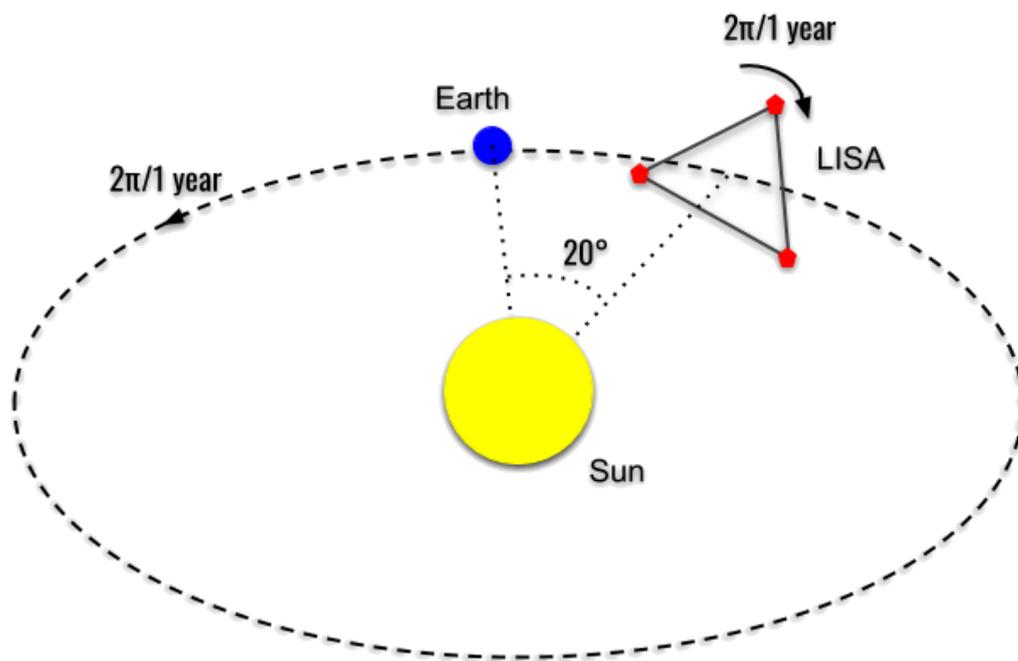


FIGURE 2.12 – La constellation LISA à satellites. Ils seront placés sur une orbite héliocentrique et formeront un triangle équilatéral de 2.5 millions de kilomètres de longueur de bras. La distance de chaque satellite à un autre sera mesurée par des faisceaux laser. L'orbite de la constellation forme un angle de retard de 20° par rapport à celle de la Terre. De même que LISA effectue une orbite de période un an, elle effectue également une révolution sur elle-même.

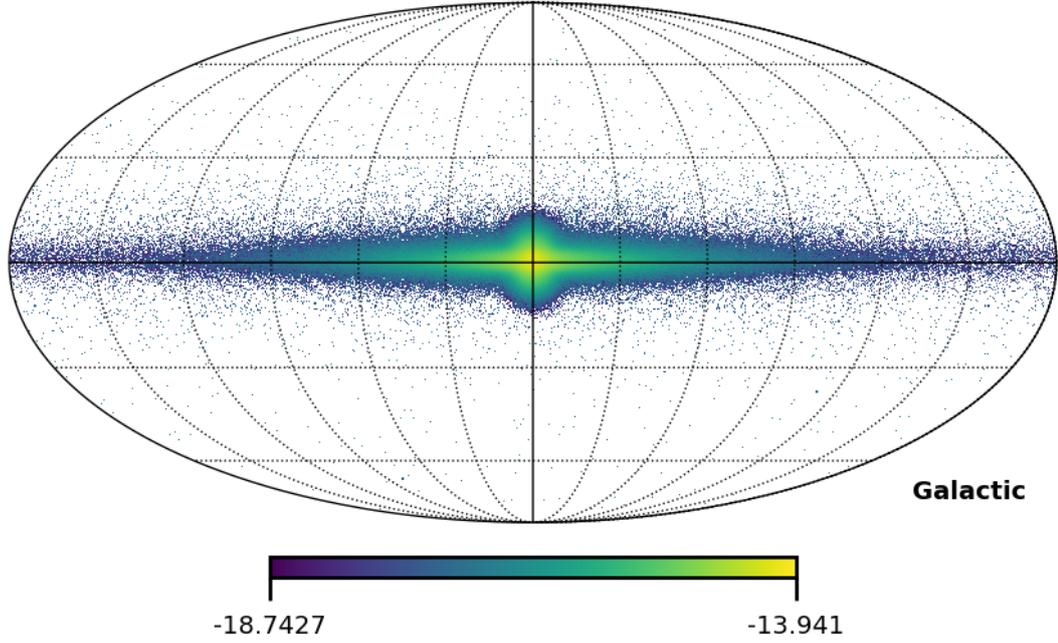


FIGURE 2.13 – Carte de la distribution de la log-amplitude de l’onde gravitationnelle des binaires galactique de WD pour $f_{GW} \geq 0.1\text{mHz}$. La distribution de DWD provient de la population présentée dans Nelemans *et. al* [178].

$$A_{\times}(M_1, M_2, R, f, \iota) = -\frac{4G^2 M_1 M_2}{c^4 R} \left(\frac{(\pi f)^2}{G(M_1 + M_2)} \right)^{1/3} \cos(\iota). \quad (2.64)$$

Dans le calcul de [154] il n’y a pas d’estimation de l’inclinaison du plan orbital de chacune des binaires, ι . Nous supposons que la distribution de l’inclinaison sera uniforme pour $\cos(\iota)$. On intègre les deux amplitudes sur $\cos(\iota)$:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \sqrt{\int_{-1}^1 (A_+(\iota)^2 + A_{\times}(\iota)^2) d(\cos(\iota))} \\ &= \frac{4G^2 M_1 M_2}{c^4 R} \left(\frac{(\pi f)^2}{G(M_1 + M_2)} \right)^{1/3} \underline{A}_{\iota} \end{aligned} \quad (2.65)$$

avec $\underline{A}_{\iota} = \sqrt{\int_{-1}^1 ((1 + y^2)^2/4 + y^2) dy} = \sqrt{\frac{8}{5}}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \underline{A} &= 4(\pi)^{2/3} f_{GW}^{2/3} \frac{G^{5/3} M_c^{5/3}}{c^4 R} \underline{A}_{\iota} \\ &= h \sqrt{\frac{8}{5}}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Pour une population de DWD donnée, nous pouvons calculer la moyenne de l’amplitude des polarisations h . Nous utilisons l’équation 2.62 pour une binaire située à un kiloparsec de la constellation LISA avec une période orbitale d’une heure et avec une

masse chirp d'une masse solaire :

$$h = 1.08 \times 10^{-21} \left(\frac{\mathcal{M}_c}{1 M_\odot} \right)^{5/3} \left(\frac{\mathcal{P}_{orb}}{1 \text{ hr}} \right)^{-2/3} \left(\frac{R}{1 \text{ kpc}} \right)^{-1} \quad (2.67)$$

où R est la distance entre LISA et la binaire en kpc et la période orbitale $\mathcal{P}_{orb} = \frac{1}{f_{orb}}$. Une période orbitale d'une heure correspond à une fréquence orbitale $f_{orb} = 0.28 \text{ mHz}$. On définit la densité spectrale d'amplitude où *Amplitude spectral density (ASD)* en anglais comme :

$$\sqrt{S_h(f)} = ASD(f) = \frac{h}{\sqrt{2T_{Obs}}} \quad (2.68)$$

avec $T_{Obs} = 4$ années et $S_h(f)$ est la densité spectrale de puissance du signal d'une binaire [voir 208, Eq. 19]. Nous pouvons prédire la densité spectrale d'amplitude pour chaque binaire et comparer la population avec la sensibilité de LISA $S_n(f)$ [208] :

$$\begin{aligned} S_n(f) = & \left[1.2 \times 10^{-40} \text{ Hz}^{-1} \left(1 + \left(\frac{2 \text{ mHz}}{f} \right)^4 \right) \right. \\ & + 9.6 \times 10^{-48} \text{ s}^{-4} \text{ Hz}^{-1} \left(1 + \cos^2 \frac{f}{f_{ref}} \right) \frac{\left(1 + \frac{0.4 \text{ mHz}}{f} \right)^2}{(2\pi f)^4} \\ & \left. \times \left(1 + \frac{f}{(0.8 \text{ mHz})^4} \right) \left(1 + 0.6 \left(\frac{f}{f_{ref}} \right) \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Nous calculons un rapport signal sur bruit ou *signal-to-noise ratio* en anglais (SNR) pour chacune des binaires :

$$SNR^2 = \int_0^\infty \frac{S_h(f)}{S_n(f)} df = \int_0^\infty \frac{h^2}{2T_{Obs} S_n(f)} df \quad (2.70)$$

Dans la bande de LISA $f_{GW} \geq 10^{-5} \text{ Hz}$, nous attendons des signaux de ~ 35 millions de binaires. Nous restreignons notre étude aux binaires avec une fréquence GW supérieure à $10 \mu\text{Hz}$. Nous pouvons estimer qu'environ une binaire sur mille sera identifiable tel que $SNR > 7$ + LISAbin (voir population verte figure 2.15), laissant la grande majorité des binaires galactiques non résolues formant un signal stochastique. Dans la figure 2.14, nous montrons en noir les *ASD* de toutes les binaires de [154], en rouge les binaires avec un SNR supérieur à 7 [233], et les nuages de points verts sont des binaires identifiables. Nous produisons la population identifiable de DWD ; pour chaque binaire de la population, une source résolue a une fréquence différentielle plus grande que le *bin* de LISA $\Delta f > \frac{1}{T_{Obs}}$. La dérivée fréquentielle de l'onde de gravitation est $\dot{f}_{GW} \propto \mathcal{M}_c^{5/3} f_{GW}^{11/3}$. Considérons l'exemple à haute fréquence⁵ de $f_{GW} = 0.06 \text{ Hz}$ et $\mathcal{M}_c = 1M_\odot$; cela implique $\dot{f}_{GW} =$

5. Il s'agit du cas limite. En effet, plus f_{GW} est grand plus \dot{f}_{GW} est grand. Nous utilisons donc le cas limite de notre catalogue.

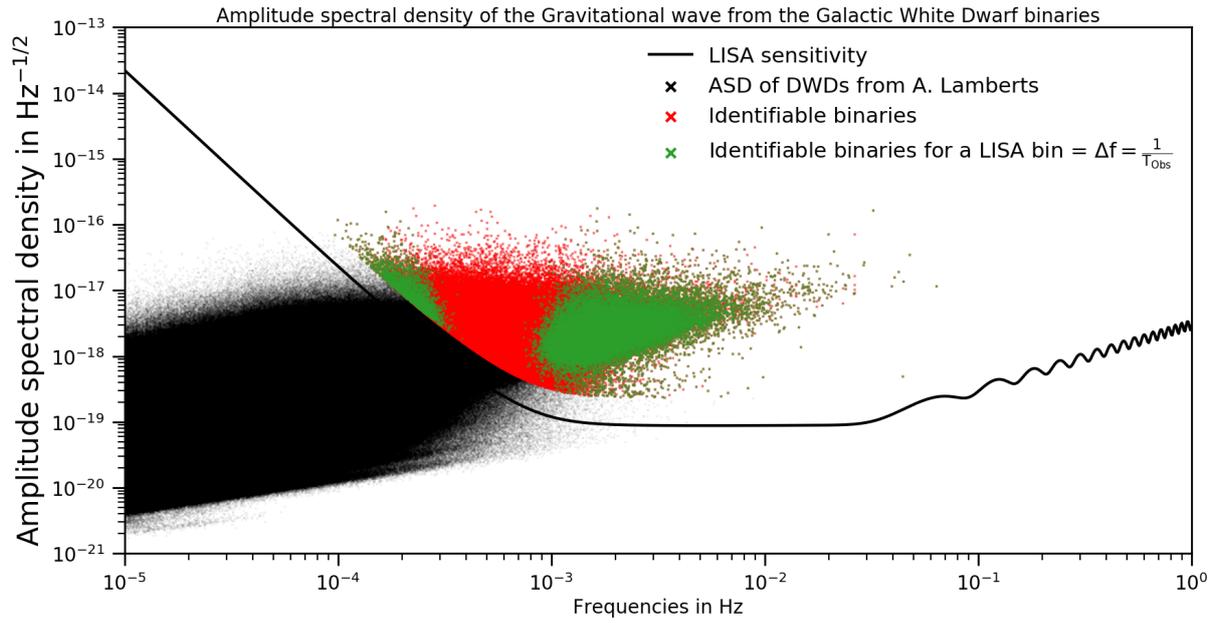


FIGURE 2.14 – Densité spectrale d’amplitude pour les ondes gravitationnelles des binaires galactiques WD pour quatre ans de durée scientifique avec la sensibilité de LISA $S_n(f)$ (ligne noire). Le nuage de points noirs correspond à l’ensemble des binaires du catalogue [154] de DWD. On calcule pour chaque DWD la densité spectrale d’amplitude (ASD) ; voir équation 2.68. En rouge, on calcule les binaires "Identifiables" ; ce sont des binaires de $SNR > 7$ [233]. La population verte correspond aux binaires "Identifiables" pour la résolution fréquentielle de LISA ; nous calculons pour chaque binaire une séparation spectrale avec toutes les autres binaires par rapport à la taille de la résolution fréquentielle de LISA de $\frac{1}{T_{Obs}}$.

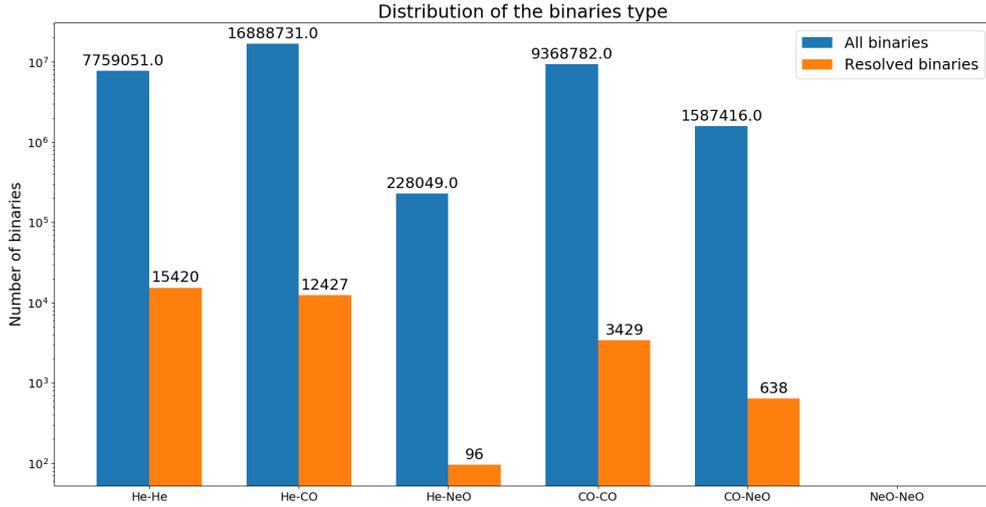


FIGURE 2.15 – Distribution des binaires de naines blanches du catalogue de Lamberts *et al* en fonction de la composition des cœurs des naines blanches pour les binaires résolues et l’ensemble des binaires. Nous remarquons qu’il n’y a pas de répartition équivalente entre les binaires résolues et l’ensemble des binaires. Il nous sera malheureusement impossible de connaître la distribution des compositions des noyaux des binaires de naines blanches non résolues en fonction de celles résolues. De plus, nous ne pouvons dire si cela est le fait d’un catalogue précis.

$2.48 \times 10^{-11} \text{ Hz s}^{-1}$.

Pour une durée de 4 ans, nous avons un décalage de fréquence maximum $\dot{f}_{GW}T_{Obs}$ de 0.0003 Hz ; le décalage de fréquence relatif maximum $\frac{\dot{f}_{GW}T_{Obs}}{f_{GW}}$ dans le catalogue est de 0.5%. Par conséquent, l’émission orbitale d’ondes gravitationnelles peut être considérée comme monochromatique. On peut aussi calculer le temps de coalescence

$$\tau_c = \frac{5}{256} \frac{c^5 a^4}{G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}, \quad (2.71)$$

avec a la séparation initiale entre les deux WD, donnée par la troisième loi de Kepler, $f_{orb}^2 a^3 = G(M_1 + M_2)$. Le plus petit temps de fusion de la population est de 23 500 ans et le plus grand est de 26 600 fois l’âge de l’Univers voir figure 2.16. Les binaires résolues sont séparées en deux populations (voir figure 2.14). Le nuage de points verts (binaires identifiables pour un *bin* de LISA = $\Delta f = \frac{1}{T_{Obs}}$) de la population $f_{GW} \in [1 \times 10^{-4}, 2 \times 10^{-4}]$ Hz se compose de petites binaires (moins de masse) ; il y a un grand nombre de sources à basses fréquences. Le bruit de LISA y est relativement élevé, donc un grand nombre de ces binaires ne sont pas identifiables. Cependant, il existe des binaires résolues, car elles sont situées près de LISA. Dans la figure 2.14, la population verte de droite $f_{GW} \in [7 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-2}]$ Hz est produite par les objets les plus gros en termes de masse, mais avec un petit nombre d’entre eux et une dispersion des amplitudes. La partie centrale

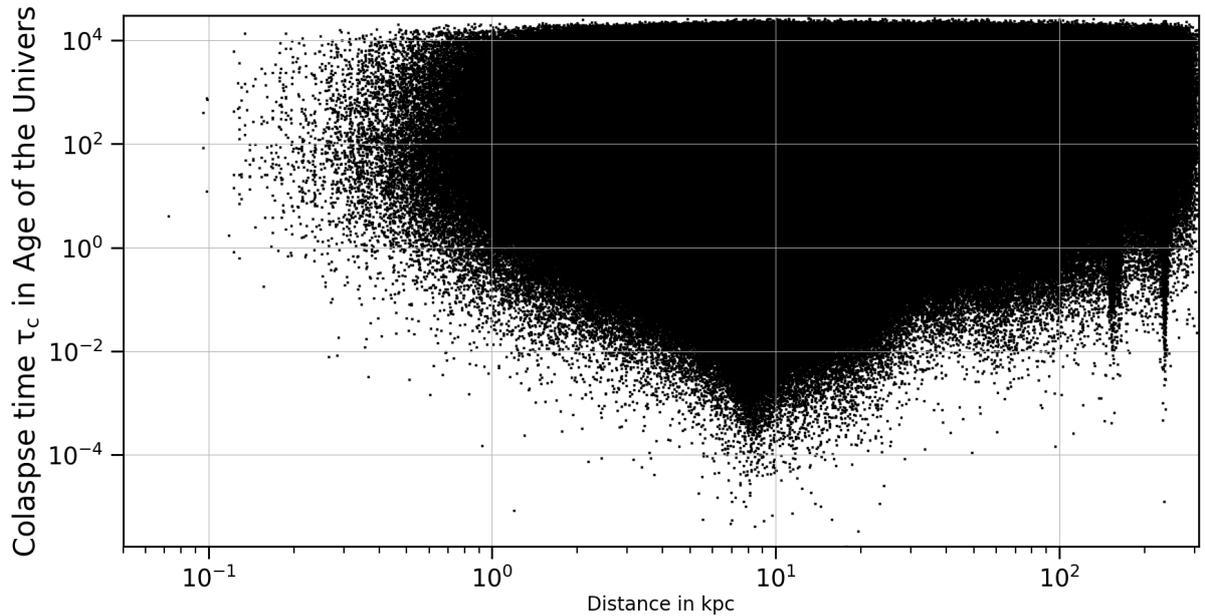


FIGURE 2.16 – Temps de fusion des binaires du catalogue de Lamberts *et al* [154] en fonction de la distance entre LISA et les binaires.

$f_{GW} \in [2 \times 10^{-4}, 7 \times 10^{-4}]$ Hz est l'endroit où il y a de nombreuses binaires observables, une région où le bruit de LISA est faible. Malgré un grand nombre de sources important, la séparation en fréquence est plus petite que la taille de la résolution fréquentielle de LISA $\frac{1}{T_{Obs}}$.

Lorsque LISA observera les binaires galactiques, il n'y aura que quatre informations par bande de fréquences, à savoir les parties réelles et imaginaires des canaux A et E . En tant que tel, lorsqu'il y a plus d'une binaire pour deux bandes de résolution limite de fréquence, il y aura plus de paramètres que de points de données et la résolution d'une binaire individuelle sera difficile. Cependant, des études récentes ont fait des progrès dans la caractérisation du premier plan galactique provenant d'une population astrophysique de binaires, comme dans [137].

La Figure 2.17 montre la densité spectrale d'amplitude des ondes gravitationnelles pour les différents cœurs de DWD. Nous avons la preuve de la domination du type $CO-CO$ et $He-CO$ dans les binaires résolues. Les distributions de tous les types binaires du catalogue et les binaires résolues sont présentés en cinq graphiques. La ligne noire correspond à la sensibilité de LISA $S_n(f)$. La figure en bas à droite est la distribution totale des binaires pour les différentes compositions de noyaux. Nous ne pouvons pas estimer la distribution des binaires non résolues à l'aide du type de distribution du DWD

Amplitude spectral density of the Gravitational wave from the Galactic White Dwarf binaries resolved

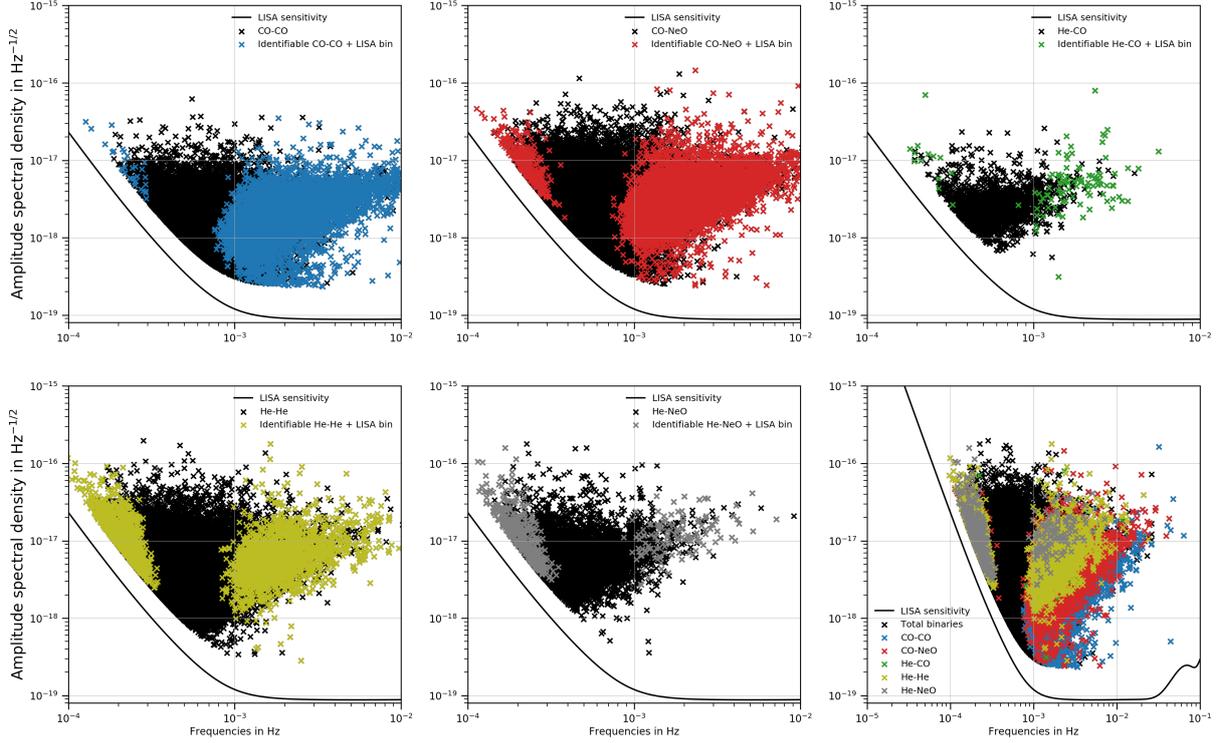


FIGURE 2.17 – La densité spectrale d’amplitude des ondes gravitationnelles pour les différentes compositions de noyaux des DWD galactiques résolues pendant quatre ans de durée scientifique avec la sensibilité de LISA $S_n(f)$. Ainsi, nous avons respectivement en bleu, rouge, vert, jaune et gris les naines blanches doubles composées de CO-CO, CO-NeO, He-CO, He-He et He-NeO.

résolu. Les gaps (nuages de points noirs) observés dans les graphes en dessous de 10^{-3} Hz correspondent au grand nombre de sources proches en termes de fréquences. En effet, cette partie du spectre comporte un grand nombre de sources, qui pour être résolubles, doivent avoir une différence de fréquences supérieure à la résolution fréquentielle de LISA.

Bruit de confusion d’origine galactique

Dans la figure 2.14, la courbe de sensibilité peut être encore mise à jour avec la contribution du bruit de confusion galactique $S_c(f)$ [75], qui correspond aux binaires non résolues de la population galactique. Ceci a été modélisé avec le catalogue de [177] comme un type de loi de puissance brisée. Ce modèle dépend de la durée de mesure, et pour une durée de quatre ans le modèle donne $\alpha = 0,138$, $\beta = -221$, $\kappa = 521$, $\gamma = 1680$ et $f_k = 0.00113$:

$$S_c(f) = Af^{-7/3}e^{-f^\alpha + \beta f \sin(\kappa f)} [1 + \tanh(\gamma(f_k - f))]. \quad (2.72)$$

A est l'amplitude du bruit de confusion galactique dans la limite de basses fréquences du spectre de puissance d'une population binaire quasi-circulaire. Ce bruit peut être vu comme un ajout de bruit supplémentaire à la sensibilité de LISA.

Dans notre calcul, nous introduisons pour chaque binaire l'écart d'amplitude en comparaison aux autres binaires dans la bande de fréquence locale de la binaire considérée. Nous générons un catalogue de binaires résolues ; voir figure 2.17. On note que la répartition des binaires résolues dépend du catalogue utilisé et du nombre de sources considérées. Notre étude ici, est d'abord une estimation de la capacité à observer un fond stochastique d'origine cosmologique en présence d'un premier plan galactique. Ces estimations de binaires résolues et non résolues dépendent du catalogue, mais nous ne trouvons aucune preuve d'une influence significative du premier plan galactique avec la présence ou non de binaires résolues au premier plan, ou comment elles sont définies (voir figure 2.23).

2.5.3 Calcul de la forme d'onde

Dans cette section, nous présentons le calcul de la forme d'onde du premier plan galactique en utilisant un catalogue de binaires de naines blanches comme saisie initiale dans le contexte d'une observation par LISA. Il nous faudra calculer l'amplitude de l'onde gravitationnelle et la manière dont LISA la mesurera pour être le plus proche possible de ce que sera le résultat de notre futur mission spatiale.

Amplitude de l'onde gravitationnelle

La déformation de l'onde gravitationnelle $h(t)$ est donnée par la décomposition en polarisation de la forme d'onde,

$$h(t) = h_+(t)\mathbf{e}_+ + h_\times(t)\mathbf{e}_\times \quad (2.73)$$

où les deux tenseurs de polarisation \mathbf{e}_+ et \mathbf{e}_\times sont donnés par :

$$\mathbf{e}_+ = E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} E^T \quad \mathbf{e}_\times = E \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} E^T \quad (2.74)$$

avec la matrice de coordonnées de polarisation E ,

$$E = \begin{pmatrix} \sin(\lambda)\cos(\psi) - \cos(\lambda)\sin(\beta)\sin(\psi) & -\sin(\lambda)\sin(\psi) - \cos(\lambda)\sin(\beta)\cos(\psi) \\ -\cos(\lambda)\cos(\psi) - \sin(\lambda)\sin(\beta)\sin(\psi) & \cos(\lambda)\sin(\psi) - \sin(\lambda)\sin(\beta)\cos(\psi) \\ \cos(\beta)\sin(\psi) & \cos(\beta)\cos(\psi) \\ -\cos(\lambda)\sin(\beta) \\ -\sin(\lambda)\cos(\beta) \\ -\sin(\beta) \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

Dans la figure 2.18, nous définissons les coordonnées elliptiques. Pour une DWD, l'onde gravitationnelle est une onde plane, quasi monochromatique (il y a une dérive de fréquence dans le temps, mais celle-ci, si elle est multipliée par le temps d'intégration est très petite devant la période de l'onde gravitationnelle). La fréquence change légèrement pour chaque orbite du binaire, la raison en est la perte d'énergie due à l'émission de l'onde gravitationnelle. Pour une DWD, la dérive est très faible. La binaire peut être simplement considérée comme essentiellement monochromatique et les polarisations données par :

$$\begin{pmatrix} h_+(t) \\ h_\times(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_+(t) \cos(2\pi ft + \dot{f}t^2 + \phi_0) \\ A_\times(t) \sin(2\pi ft + \dot{f}t^2 + \phi_0) \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

avec ϕ_0 une phase initiale. Dans le calcul, nous avons une distribution uniforme entre 0 et 2π . Le paramètre \dot{f} caractérise le changement de fréquence à partir de la perte d'énergie orbitale. Pour calculer la réponse des bras du détecteur, $\mathcal{H}_+(t)$ et $\mathcal{H}_\times(t)$, nous devons calculer le tenseur détecteur à un bras \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}u \otimes u - v \otimes v \quad (2.77)$$

où $u = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Enfin, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_+(t) &= A_+(t) \cos(2\pi ft + \phi_0) \mathbf{e}_+ : \mathbf{D} \\ \mathcal{H}_\times(t) &= A_\times(t) \sin(2\pi ft + \phi_0) \mathbf{e}_\times : \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.78)$$

où $\mathcal{H}_A(t) = h_A(t) \mathbf{e}_A : \mathbf{D}$ et A les deux polarisations $A = +, \times$. \mathcal{H}_A sont les deux polarisations de la base du détecteur. Ce calcul du premier plan galactique est également fait dans l'étude de Cornish et Littenberg[82].

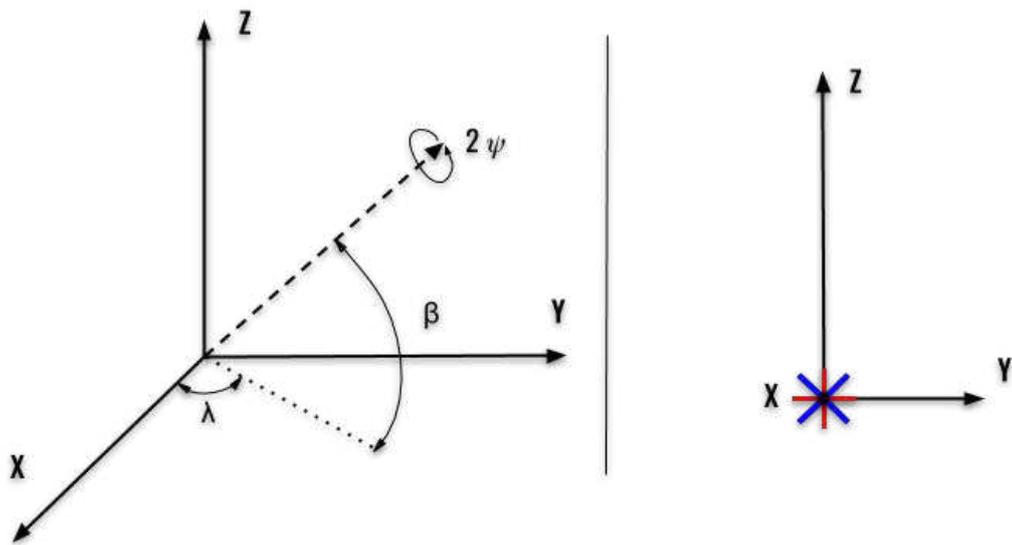


FIGURE 2.18 – Référentiel de la forme d'onde plane générique pour une binaire localisée à la latitude écliptique β et à la longitude λ . La constellation LISA est au centre du système de coordonnées. Nous utilisons la définition conventionnelle de [148] pour les polarisations GW : + (en rouge) et \times (en bleu). La coordonnée Ψ est la rotation autour de la direction de propagation des ondes.

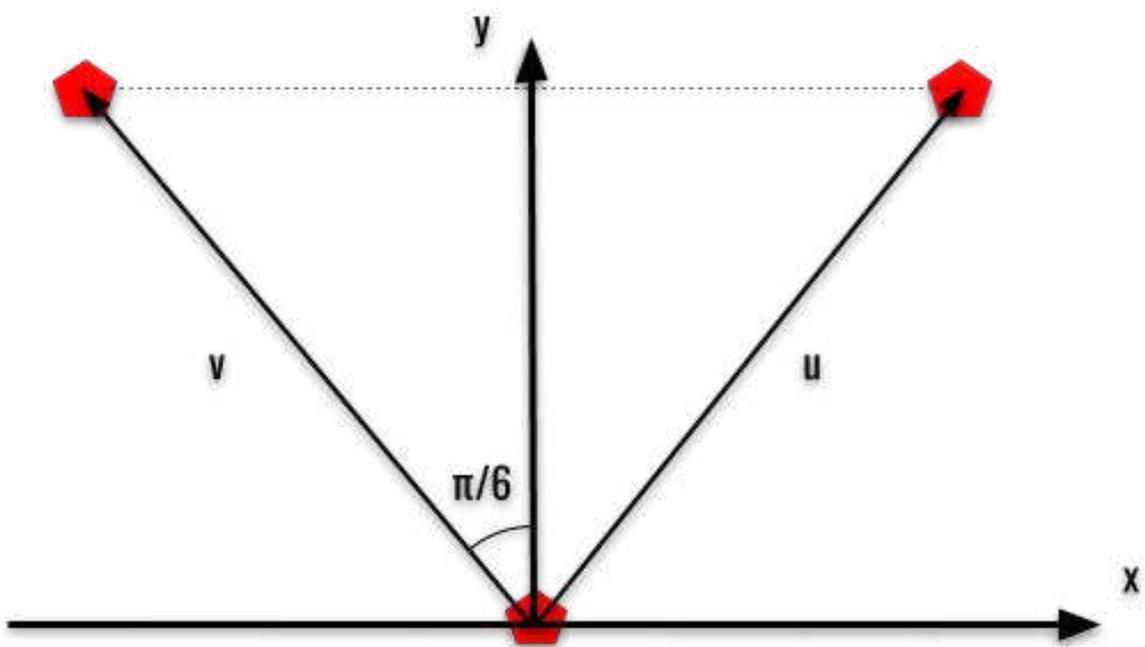


FIGURE 2.19 – Système de coordonnées (\hat{u}, \hat{v}) où la constellation LISA est constituée des hexagones rouges.

Fonction de réponse du détecteur

Les fonctions de réponse du détecteur, F_+ et F_\times , pour la localisation de la source à (θ, ϕ) à l'instant t dans le vecteur de base \hat{u}, \hat{v} sont données par (voir figure 2.19) :

$$F_+ = -\frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \cos(\theta))^2 \sin(2\phi) \quad (2.79)$$

$$F_\times = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta) \cos(2\phi) \quad (2.80)$$

avec $\hat{u} \cdot \hat{z} = \sin(\phi + \pi/6) \sin \theta$ et $\hat{v} \cdot \hat{z} = \sin(\phi - \pi/6) \sin \theta$, voir [79]. L'orbite de la constellation de LISA est d'un an autour du soleil, également d'un an de révolution sur elle-même (voir figure 2.12). Nous devons considérer les effets d'orientation de la constellation, car LISA ne verra pas le ciel de manière uniforme. Nous avons également présenté le calcul plus précis dans une section ultérieure (voir section 2.4.4)

Signal de la mesure de premier plan de binaires de naines blanches par LISA

Nous pouvons construire le signal total du premier plan de DWD mesuré par LISA ; c'est la somme des formes d'onde pour chaque DWD telle que

$$s(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{A=+, \times} h_{A,i}(f_{orb,i}, M1_i, M2_i, X_i, Y_i, Z_i, t) F_A(\theta, \phi, t) \mathbf{D}(\theta, \phi, f)_A \cdot \mathbf{e}_A \quad (2.81)$$

avec F_A la fonction de diagramme de faisceau (*beam pattern function* en anglais) pour les polarisations $A = +, \times$, $\mathbf{h}_{A,i} = h_{A,i} \mathbf{e}_A$ le tenseur de l'amplitude des ondes gravitationnelles, et \mathbf{D} le tenseur du détecteur à un bras et $\mathbf{h}_{A,i}$ l'amplitude sans dimension des ondes gravitationnelles de la binaire i (voir équations 2.73 et 2.76). La figure 2.20 montre les formes d'ondes gravitationnelles des cinq populations de DWD de [154]. La forme d'onde de CO-CO a la plus grande amplitude. La somme des cinq populations devient la forme d'onde à voir par LISA (voir figure 2.21). La modulation de la forme d'onde DWD est un effet orbital. En effet, lorsque la constellation LISA pointe vers le centre de notre Galaxie, l'amplitude de la forme d'onde atteint un maximum. En raison de la symétrie du plan passant par \hat{u} et \hat{v} (figure 2.19), cela se produira deux fois par an.

Densité spectrale d'énergie sans dimension et étude de la forme d'onde du premier plan galactique

Dans cette section, nous décrivons le calcul de la densité d'énergie spectrale des DWD modulées, $\Omega_{GW,DWD}$, qui ont été introduits dans la section 2.5.3. La figure 2.21 est le premier plan galactique modulé de LISA, avec les DWD de [154]. La population de DWD simulée ressemble à la population de DWD de la Voie lactée.

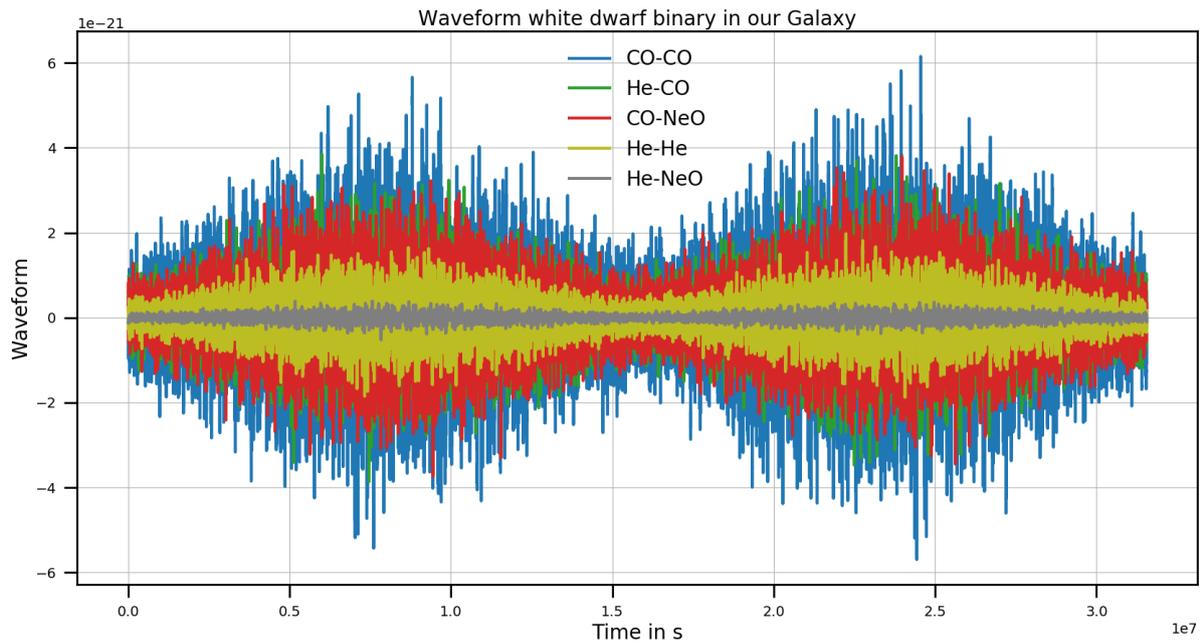


FIGURE 2.20 – Signaux gravitationnels de la modulation DWD que LISA devrait voir. La modulation provient de l'évolution de l'orientation de la constellation LISA. La forme d'onde $s(t)$ est la somme des deux polarisations $A = [\times, +]$ pondérée par la fonction de réponse respective du détecteur $F^A(\Omega, f, t)$, telle que $s(t) = \sum_N F^\times(\Omega, f, t)h_\times(f, t) + F^+(\Omega, f, t)h_+(f, t)$.

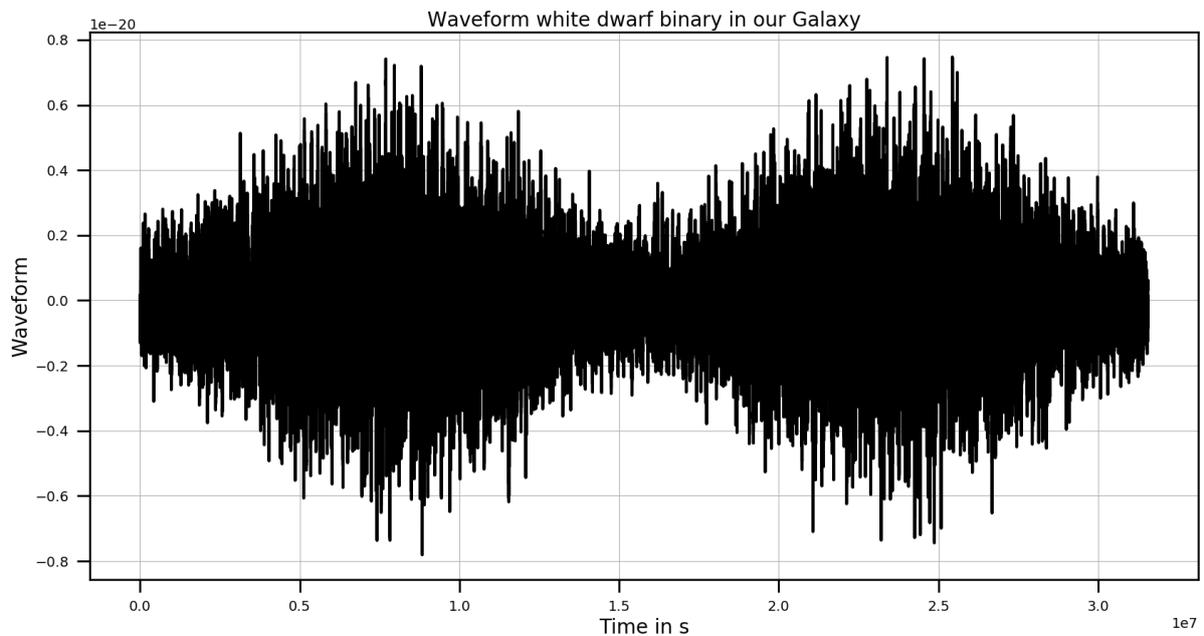


FIGURE 2.21 – La forme d'onde totale, à savoir la somme des cinq formes d'onde vues sur la figure 2.20, pour la population de [154] qui pourra être observée par LISA.

Densité spectrale d'énergie sans dimension

Étant donné la densité spectrale de puissance ou *Power Spectral Density (PSD)* en anglais, nous pouvons calculer la densité spectrale d'énergie du premier plan galactique que LISA observera :

$$\Omega_{GW,DWD}(f) = \frac{4\pi^2}{3H_0^2} f^3 \frac{PSD(f)}{\mathcal{R}(f)}, \quad (2.82)$$

avec H_0 la constante d'Hubble-Lemaître ($H_0 \simeq 2.175 \cdot 10^{-18}$ Hz), $PSD(f)$ la densité spectrale de puissance de la forme d'onde du premier plan galactique et $\mathcal{R}(f)$ la fonction de réponse de LISA. Nous utilisons le périodogramme pour estimer la PSD. Pour une forme d'onde $s(t)$ le périodogramme est $I_n(f_k) = |\tilde{s}(f_k)|^2$, où $\tilde{s}(f_k) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^T s(t) e^{-itf_k}$ aux fréquences de Fourier $f_k = 2\pi k/T$, $k = 0, \dots, N = \frac{T}{2} - 1$ et T la durée du signal pour les différentes formes d'ondes (binaires totales, binaires résolues ou non résolues). $\mathcal{R}(f)$ est la polarisation du détecteur et la fonction de réponse moyenne du ciel, qui peut être approchée par [208] :

$$\mathcal{R}(f) \simeq \frac{3}{10} \frac{\left(\frac{2\pi fL}{c}\right)^2}{1 + 0.6 \left(\frac{2\pi fL}{c}\right)^2}. \quad (2.83)$$

L'objectif est d'aborder le mouvement orbital de la constellation LISA [83]. Nous pouvons calculer cette quantité avec le diagramme carré moyen de l'antenne [79], $\mathcal{R}(f) = \frac{1}{4\pi} \int \sum_A \mathbf{D}(\hat{\Omega}, f) : e^A(f) d\hat{\Omega}$ [83]. La figure 2.22 donne le PSD pour différents types de cœurs de DWD, tandis que la figure 2.23 présente le PSD total, plus les PSD des DWD résolubles et irrésolubles.

La figure 2.23 montre que la PSD de la forme d'onde totale n'est pas purement une loi de puissance. D'après [12, figure 4] et [53, figure 1], nous avons moins de binaires à des fréquences plus élevées.

Comparaison de la densité spectrale d'énergie de différents catalogues

Dans cette section, nous dérivons la densité spectrale d'énergie normalisée et adimensionnée du premier plan galactique $\Omega_{GW,DWD}$ pour différents modèles de population. On part de la population du catalogue *LDC 1-4*. Cette population a été simulée avec les paramètres de [178]. Dans la figure 2.24 nous montrons qu'à basses fréquences la densité spectrale d'énergie de la population du défi de données LISA (MLDC) peut être ajustée par une loi de puissance $\Omega_{GW,LDC\ 1-4}(f) \simeq \Omega_{LDC\ 1-4} \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^\alpha$, avec une pente $\alpha = 2/3$. C'est la pente attendue pour un fond stochastique à partir de systèmes binaires émettant des ondes gravitationnelles (voir la ligne grise sur la figure 2.24). La ligne noire est la densité spectrale d'énergie du premier plan galactique pour la population de [154]. Nous avons la preuve que la loi de puissance peut être ajustée aux basses fréquences (entre 1×10^{-5} et 1×10^{-4} Hz) avec la même pente $\alpha = 2/3$, mais à des fréquences plus

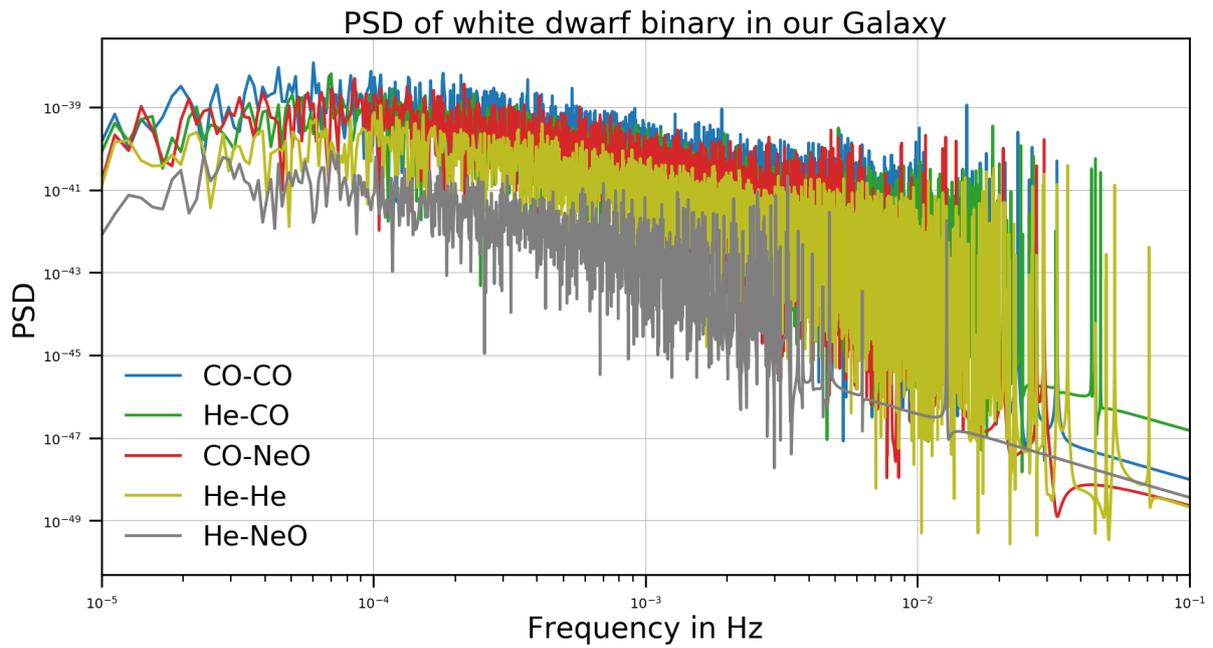


FIGURE 2.22 – PSD du signal gravitationnel de la modulation de binaire de naines blanches qui pourra être vu par LISA (voir figure 2.20). L'ensemble des binaires en bleu, vert, rouge, jaune et gris sont respectivement les différents noyaux CO-CO, He-CO, CO-NeO, He-He et He-NeO. C'est le périodogramme direct de la figure 2.20.

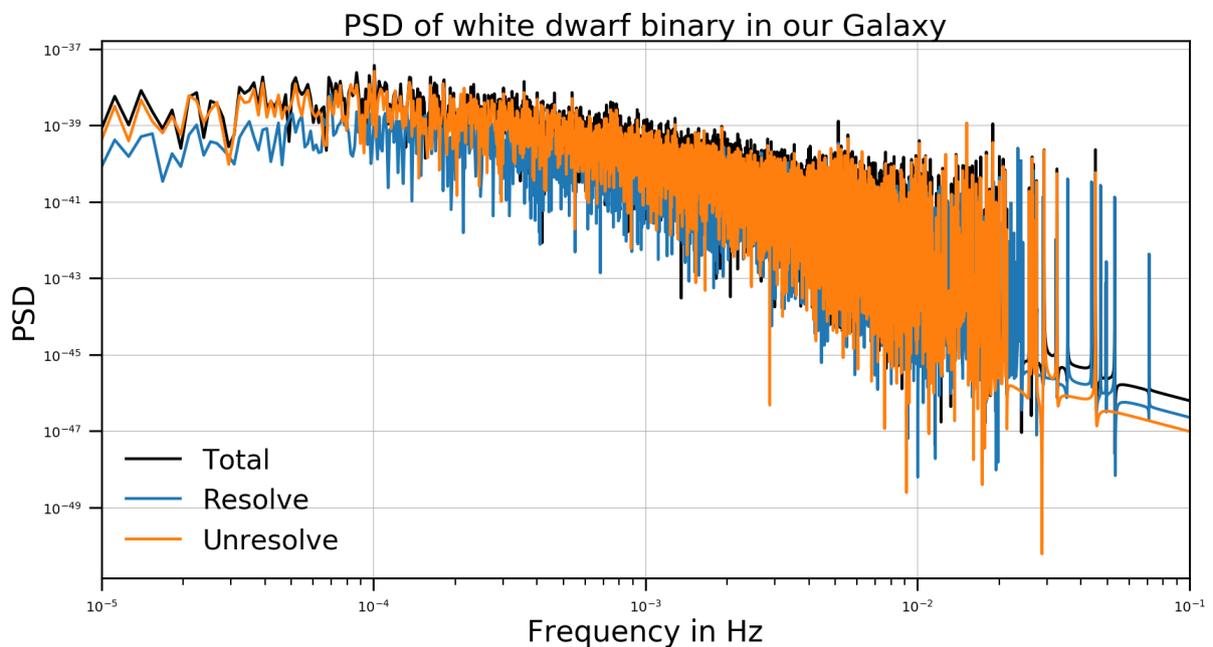


FIGURE 2.23 – PSD du signal gravitationnel de la modulation binaire de naines blanches qui pourra être vu par LISA (voir figure 2.20). L'ensemble des binaires est en noir, tandis que les résolues et non résolues sont respectivement en bleu et orange. Ce sont les mêmes que la figure 2.14.

élevées, cette loi de puissance s'effondre. Afin de comprendre si le modèle de distribution spatiale de DWD est responsable de cette différence, nous pouvons utiliser la population de [154] mais nous utilisons la distribution spatiale de naines blanches doubles de [178]. Cette combinaison donne le tracé de la ligne bleue de la figure 2.24, étiquetée Lamberts + Nelemans. À titre d'exemple, nous affichons également une ligne violette représentant $\Omega_{GW}(f) = 2 \times 10^{-10} \left(\frac{f}{1\text{mHz}}\right)^{2/3}$ qui se trouve au-dessus du premier plan galactique *LDC1-4* ; cela montre que le premier plan galactique *LDC1-4* peut être approximé par une loi de puissance.

La brisure de la loi de puissance aux hautes fréquences est due à la distribution spatiale des naines blanches doubles. En effet, la droite bleue ([154] + [178]) peut être représentée par une loi de puissance avec une pente en 2/3, représentée sur la figure 2.24 comme la ligne verte de $\Omega_{GW}(f) = 4 \times 10^{-10} \left(\frac{f}{1\text{mHz}}\right)^{2/3}$ dans la bande de fréquence [0.1 mHz, 1 mHz].

Le catalogue de [154] pour la distribution de naines blanches doubles dans la Voie lactée ne peut pas être représenté comme une loi de puissance sur toute la bande spectrale de LISA. Cependant, nous modifions la fonction pour mieux s'adapter à la brisure de la puissance à hautes fréquences, équation 2.84, comme une loi de puissance brisée, à savoir :

$$\Omega_{DWD}(A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2; f) = \frac{A_1 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_1}}{1 + A_2 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_2}}. \quad (2.84)$$

Pour $1 \ll A_2 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_2}$ (basses fréquences) cela donne :

$$\Omega_{DWD}(f) \simeq \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (2.85)$$

c'est-à-dire que la densité spectrale d'énergie aux basses fréquences peut être approchée par une fonction de loi de puissance ; pour un premier plan DWD la pente $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ doit être $\frac{2}{3}$. Pour $1 \gg A_2 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_2}$ (hautes fréquences) :

$$\Omega_{DWD}(f) \simeq A_1 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_1} \quad (2.86)$$

c'est-à-dire que pour les hautes fréquences, la densité spectrale d'énergie peut également être approchée par une fonction de loi de puissance, mais avec des paramètres différents. La différentielle $d\Omega(f)$ est donc :

$$d\Omega(f) = \Omega \left[\frac{dA_1}{A_1} + \ln \left(\frac{f}{f_{ref}}\right) d\alpha_1 + \frac{dA_2 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_2}}{1 + A_2 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_2}} + \frac{d\alpha_2 A_2 \ln \left(\frac{f}{f_{ref}}\right) \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_2}}{1 + A_2 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_2}} \right]. \quad (2.87)$$

Pour estimer les quatre paramètres $\Omega(A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2; f)$ du modèle, nous utilisons un al-

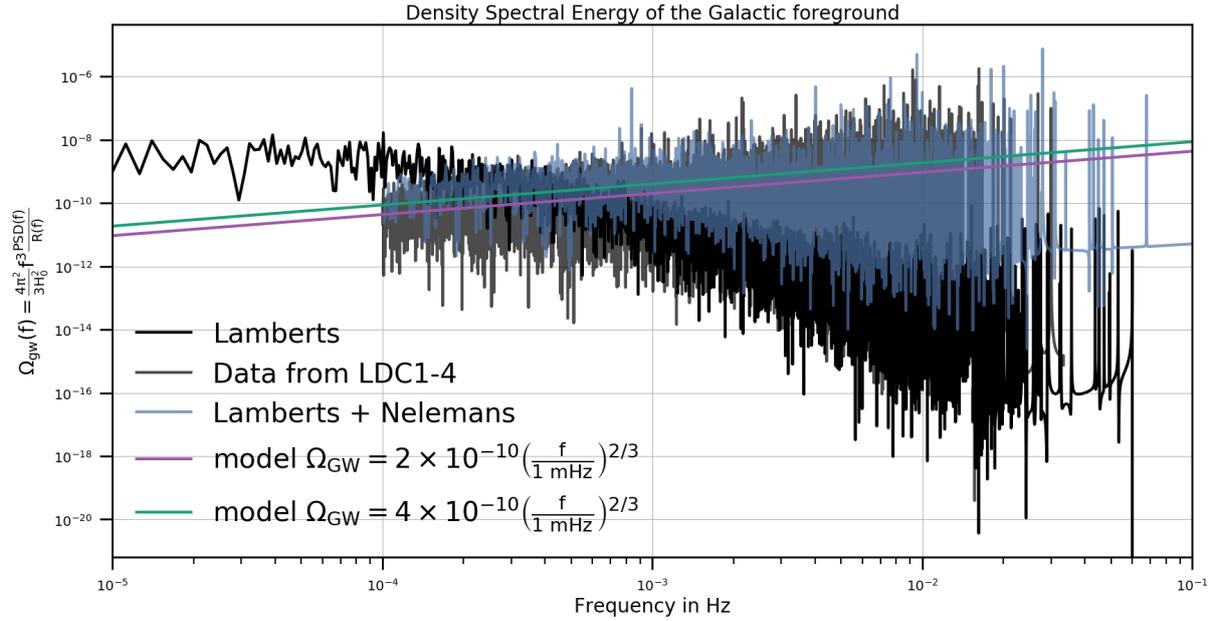


FIGURE 2.24 – Densité spectrale d'énergie normalisée du premier plan galactique $\Omega_{GW,DWD}$ pour différents modèles de population de DWD dans la Voie lactée. La ligne noire est la population de [154], la ligne grise correspond à la population du LDC (LDC1-4); cette population peut être ajustée par une loi de puissance, voir la ligne violette ($\Omega_{GW}(f) = 2 \times 10^{-10} \left(\frac{f}{1\text{mHz}}\right)^{2/3}$). En bleu, labellisé par Lamberts + Nelemans, c'est une population générée avec des binaires où les positions spatiales galactiques sont données par [178], et les autres paramètres avec [154]. Cette population "Lamberts + Nelemans" peut être ajustée par une loi de puissance $\Omega_{GW}(f) = 4 \times 10^{-10} \left(\frac{f}{1\text{mHz}}\right)^{2/3}$ dans la bande de fréquence [0.1 mHz, 1 mHz].

gorithme d'ajustement de MCMC adaptatif. L'étude de séparabilité spectrale de [49] a été récemment réalisée dans le contexte de LISA. Il y a été montré qu'il est possible pour LISA de mesurer un fond cosmologique avec une amplitude comprise entre 1×10^{-13} et 1×10^{-12} en présence du fond astrophysique et le bruit du détecteur LISA.

Chapitre 3

Séparation spectrale

Les travaux présentés dans ce chapitre correspondent à des études publiées dans le papier Boileau *et. al* [50].

3.1 Séparation spectrale

Un SGWB isotrope observé aujourd'hui $\Omega_{GW}(f)$ peut être modélisé avec la variation de fréquence de la densité d'énergie des ondes gravitationnelles, $\rho_{GW}(f)$, où $d\rho_{GW}(f)$ est la densité d'énergie des ondes gravitationnelles contenues dans la bande de fréquences $[f, f + df]$ [57]. La distribution de la densité d'énergie sur le domaine fréquentiel peut être exprimée comme,

$$\begin{aligned}\Omega_{GW}(f) &= \frac{f}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{d \ln(f)} \\ &= \sum_k \Omega_{GW}^{(k)}(f)\end{aligned}\tag{3.1}$$

où la densité critique de l'Univers est $\rho_c = \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G}$. Dans cette section, nous approchons la densité d'énergie spectrale comme une somme de contribution sous forme de loi puissance (il s'agit d'un modèle simplifié), $\Omega_{GW}(f) \simeq \sum_k A_k \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_k}$ où l'amplitude de densité spectrale d'énergie de la composante k (représentant les différents SGWBs) est A_k , avec la pente respective α_k et f_{ref} est une fréquence caractéristique. Le SGWB devrait avoir une composante en pente $\alpha \approx 0$ pour le fond cosmologique. C'est vrai pour les processus invariants d'échelle, c'est approximativement vrai pour l'inflation standard et certainement faux pour les cordes cosmiques et la turbulence. Nous avons étudié également des modèles plus complexes. Cependant, pour notre première étude, nous modéliserons le SGWB produit cosmologiquement avec $\alpha = 0$. De plus, nous utiliserons $\alpha = \frac{2}{3}$ pour un fond astrophysique produit par des binaires compacts. D'après Farmer et Phinney la pente est de $\alpha = \frac{2}{3}$ pour des binaires quasi-circulaires évoluant purement sous émission

d’ondes gravitationnelles [98]. L’excentricité et les effets environnementaux peuvent modifier la pente [188, 253]. Nous notons également les limites de notre modèle de loi de puissance, car la transition de phase dans l’Univers primitif peut produire des lois puissances en deux parties, avec une traction entre la composante de loi puissance montante et descendante pour la fréquence du pic. Mais, nous commençons dans cette étude avec le contexte de deux lois puissances. Comme les deux fonds sont superposés, la tâche est d’extraire simultanément les propriétés astrophysiques et cosmologiques, c’est-à-dire d’estimer simultanément la contribution astrophysique et cosmologique de la densité spectrale d’énergie.

Pour éviter les problèmes d’identification, nous utilisons une approche bayésienne en mettant des priors sur les paramètres individuels de pente et d’amplitude. Notre travail ici s’appuie sur celui d’Adams et Cornish [15] où ils ont démontré qu’il est possible de séparer un SGWB du bruit instrumental dans un contexte bayésien. De même Adams et Cornish ont ensuite montré que l’on pouvait détecter un SGWB cosmologique en présence d’un fond produit par des binaires de naines blanches dans notre galaxie [11]. Depuis la production de ces études, LIGO et Virgo ont observé des ondes gravitationnelles provenant d’une binaire de trou noir et d’une fusion d’une binaire d’étoiles à neutrons. Nous savons maintenant qu’il y aura certainement un arrière-plan produit astrophysiquement dans la bande d’observation de LISA. Celle-ci produit par des fusions de binaires compactes durant l’histoire de l’Univers [68], et si LISA doit observer un fond cosmologiquement, il faudra séparer les deux.

La littérature montre une grande différence dans l’estimation de l’amplitude de la composante dite astrophysique produisant un SGWB. Une simulation récente du SGWB à partir de la fusion de sources de binaires compactes avec le code **StarTrack** [186] prédit une amplitude autour de $\Omega_{GW} \simeq 4.97 \times 10^{-9}$ à 2.58×10^{-8} pour $f_{ref} = 25$ Hz. Cependant, une autre étude a considéré les observations de binaires de trous noirs et d’étoiles à neutrons par LIGO/Virgo, et a produit des prédictions allant de la bande d’observation LISA à la bande LIGO/Virgo. Ils estiment une amplitude pour le SGWB astrophysique de $\Omega_{GW} \simeq 1.8 \times 10^{-9}$ à 2.5×10^{-9} pour $f_{ref} = 25$ Hz [68]. Ces amplitudes peuvent être propagées et adaptées à la bande de LISA en rappelant équation 3.1 et en utilisant $f_{ref} = 25$ Hz et $\alpha = 2/3$. Dans le cadre d’une étude de la potentielle observation d’un SGWB cosmologique, nous avons de grandes variations dues aux prédictions de la composante astrophysique.

Dans cette première étude [50], nous prédisons la précision d’une mesure de $\Omega_{GW}^{(0)}$ avec des entrées astrophysiques de différentes magnitudes en utilisant $f_{ref} = 25$ Hz, $\Omega_{GW}^{(\frac{2}{3})} = [3.55 \times 10^{-10}, 1.8 \times 10^{-9}, 3.55 \times 10^{-9}, 3.55 \times 10^{-8}]$ après 4 ans d’observation. Nous utilisons les canaux orthogonaux LISA A , E et T , qui sont créés à partir des variables d’interférométrie à retard (TDI) X , Y et Z [198]. Notre méthode ajuste les paramètres de deux fonds stochastiques, et simultanément le bruit de LISA à l’aide du canal T . Nous suppo-

sons le canal TDI de bruit non corrélé entre les canaux "science" (A, E) et le canal de bruit (T). Le canal T est "insensible au signal" pour les longueurs d'onde des ondes gravitationnelles supérieures aux longueurs de bras de LISA. Le canal de bruit T est obtenu depuis une combinaison linéaire [198] des canaux TDI (X, Y, Z). Nous démontrons une bonne capacité à estimer le bruit présent dans les deux canaux de données scientifiques A et E . On peut alors fixer une limite à la capacité de détection de la source cosmologique du SGWB. Les prédictions de l'étude bayésienne sont confirmées via une étude de l'estimation fréquentiste de l'erreur. À savoir, nous utilisons une analyse d'information de Fisher, réalisée pour la séparation spectrale indépendamment de l'approche bayésienne de A-MCMC. L'inverse de la matrice d'information de Fisher des paramètres SGWB, présentée dans section 3.1, fournit la borne inférieure de Cramer-Rao sur la variance des estimations des paramètres du SGWB.

Nous pouvons introduire un premier modèle qui est facile à considérer, c'est le problème de la séparation de deux processus de bruit gaussien à moyenne nulle stationnaire indépendants qui ont des spectres de puissances différents $S_{n_1}(f) = A_1 f^{\alpha_1}$ et $S_{n_2}(f) = A_2 f^{\alpha_2}$. Supposons que les deux processus aient une moyenne nulle :

$$E[n_1(f)] = 0 \quad E[n_2(f)] = 0, \quad (3.2)$$

et le spectre de puissance :

$$E[n_1(f)n_1^*(f')] = S_{n_1}(f)\delta_{ff'} \quad (3.3)$$

avec $S_{n_1} = A_1 f^{\alpha_1}$ et de même pour n_2 . Notre hypothèse d'indépendance implique que les spectres croisés disparaissent tel que $E[n_1(f)n_2^*(f')] = 0$. Les données d sont mesurées sur la bande de fréquences $[f_a, f_b]$, ce qui pour un temps d'observation finie T correspond à avoir des échantillons dans le segment défini par $a = f_a T$ et $b = f_b T$. Supposons que nous ayons des données formées à partir de la somme de ces deux processus de bruit indépendants

$$d(t) = n_1(t) + n_2(t), \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.4)$$

Après une transformée de Fourier telle que $\tilde{d}(f_k) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^T d(t)e^{-itf_k}$ aux fréquences de Fourier $f_k = 2\pi k/T$, $k = 0, \dots, N = \frac{T}{2} - 1$ (pour T pair), nous pouvons écrire :

$$\tilde{d}(f_k) = \tilde{n}_1(f_k) + \tilde{n}_2(f_k), \quad k = 0, \dots, N. \quad (3.5)$$

avec le vecteur \tilde{d} qui a une distribution gaussienne multidimensionnelle, complexe et asymptotique, sa matrice de covariance est diagonale. Les éléments diagonaux sont donnés par les valeurs de la densité spectrale $S(f_k) = A_1 f_k^{\alpha_1} + A_2 f_k^{\alpha_2}$. Notre hypothèse d'indépendance implique que l'on peut simplement additionner les densités spectrales individuelles des deux processus de bruit.

L'approximation de vraisemblance ou en anglais *likelihood* de Whittle [250] dans le domaine fréquentiel s'écrit alors :

$$p(d|A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\pi S(f_k)} e^{-\frac{\tilde{d}(f_k)^* \tilde{d}(f_k)}{S(f_k)}} \quad (3.6)$$

où $S(f_k) = A_1 f_k^{\alpha_1} + A_2 f_k^{\alpha_2}$. Le produit $I_n(f_k) = \tilde{d}(f_k)^* \tilde{d}(f_k)$ est le *periodogram*, c'est le carré de l'amplitude des coefficients de Fourier à la fréquence f_k . Le log de vraisemblance est toujours défini à une constante près, dans notre cas, elle est, donc

$$\ln p(d|A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2) = - \sum_{k=1}^N \left(\frac{I_n(f_k)}{S(f_k)} + \ln S(f_k) \right). \quad (3.7)$$

Nous utilisons le log de la vraisemblance, car la vraisemblance peut varier fortement pour comparer des valeurs plus proches nous choisissons d'utiliser son logarithme. Cela ne change en rien d'étude, il serait complètement possible de faire les mêmes études avec simplement la vraisemblance.

Il est également possible d'écrire une version intégrale du log de la vraisemblance tel que

$$\ln p(d|A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2) = -\frac{1}{2} \int_{f_a}^{f_b} \left(\frac{d^*(f)d(f)}{S(f)} + \ln S(f) \right) df \quad (3.8)$$

Le log de vraisemblance peut être écrit comme, avec la valeur attendue de la somme des spectres de puissances $E[S(f)] = A_1 f^{\alpha_1} + A_2 f^{\alpha_2}$ et la valeur attendue de la transformée de Fourier croisée peut être écrit comme $E[d^*(f)d(f)] = \overline{A_1} f^{\overline{\alpha_1}} + \overline{A_2} f^{\overline{\alpha_2}}$ (On suppose que les paramètres $(A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2)$ et $(\overline{A_1}, \overline{\alpha_1}, \overline{A_2}, \overline{\alpha_2})$ sont indépendants)

$$\ln p(d|A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2) = -\frac{1}{2} \int_{f_a}^{f_b} \left(\frac{\overline{A_1} f^{\overline{\alpha_1}} + \overline{A_2} f^{\overline{\alpha_2}}}{A_1 f^{\alpha_1} + A_2 f^{\alpha_2}} + \ln(A_1 f^{\alpha_1} + A_2 f^{\alpha_2}) \right) df \quad (3.9)$$

Ici, les quantités barrées désignent les vraies valeurs. Nous supposons qu'en écrivant le vecteur de paramètres sous la forme $\vec{\lambda} \rightarrow (A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2)$, la solution du maximum de vraisemblance est trouvée en résolvant l'ensemble des équations $\partial_i \ln p(d|\vec{\lambda}) = 0$ où nous utilisons la notation $\partial_i = \partial/\partial \lambda_i$. Considérons pour l'instant la dérivée par rapport à A_1 , ce qui donne la condition

$$\int_{f_a}^{f_b} \left(\frac{(\overline{A_1} f^{\overline{\alpha_1}} + \overline{A_2} f^{\overline{\alpha_2}}) - (A_1 f^{\alpha_1} + A_2 f^{\alpha_2})}{(A_1 f^{\alpha_1} + A_2 f^{\alpha_2})^2} \right) df = 0 \quad (3.10)$$

C'est la seule solution non triviale valable pour tout choix d'intervalle d'intégration à $\overline{A_1} = A_1, \overline{\alpha_1} = \alpha_1, \overline{A_2} = A_2, \overline{\alpha_2} = \alpha_2$.

3.1.1 L'information de Fisher

La matrice d'information de Fisher Γ pour un vecteur de paramètres $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ est donnée par l'espérance de l'Hessien négatif de la log-vraisemblance. L'élément de la ligne i et de la colonne j de l'information de Fisher est donné par :

$$\Gamma_{ij} = E \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln p(d|\theta) \right] \quad (3.11)$$

L'information de Fisher peut être facilement obtenue pour le vecteur de paramètres $(A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2)$ en utilisant (asymptotiquement) $E[L_n(f_k)] = S(f_k)$ et $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$.

$$\Gamma_{11} = \sum_{k=1}^N \frac{f_k^{2\alpha_1}}{(A_1 f_k^{\alpha_1} + A_2 f_k^{\alpha_2})^2} \quad (3.12)$$

$$\Gamma_{22} = \sum_{k=1}^N \frac{(A_1 f_k^{\alpha_1} \ln f_k)^2}{(A_1 f_k^{\alpha_1} + A_2 f_k^{\alpha_2})^2} \quad (3.13)$$

$$\Gamma_{33} = \sum_{k=1}^N \frac{f_k^{2\alpha_2}}{(A_1 f_k^{\alpha_1} + A_2 f_k^{\alpha_2})^2} \quad (3.14)$$

$$\Gamma_{44} = \sum_{k=1}^N \frac{(A_2 f_k^{\alpha_2} \ln f_k)^2}{(A_1 f_k^{\alpha_1} + A_2 f_k^{\alpha_2})^2} \quad (3.15)$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \sum_{k=1}^N \frac{A_1 f_k^{2\alpha_1} \ln f_k}{(A_1 f_k^{\alpha_1} + A_2 f_k^{\alpha_2})^2} \quad (3.16)$$

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = \sum_{k=1}^N \frac{f_k^{\alpha_1 + \alpha_2}}{(A_1 f_k^{\alpha_1} + A_2 f_k^{\alpha_2})^2} \quad (3.17)$$

$$\Gamma_{14} = \Gamma_{41} = \sum_{k=1}^N \frac{A_2 f_k^{\alpha_1 + \alpha_2} \ln f_k}{(A_1 f_k^{\alpha_1} + A_2 f_k^{\alpha_2})^2} \quad (3.18)$$

$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = \sum_{k=1}^N \frac{A_1 f_k^{\alpha_1 + \alpha_2} \ln f_k}{(A_1 f_k^{\alpha_1} + A_2 f_k^{\alpha_2})^2} \quad (3.19)$$

$$\Gamma_{24} = \Gamma_{42} = \sum_{k=1}^N A_1 A_2 \frac{A_1 A_2 f_k^{\alpha_1 + \alpha_2} \ln^2 f_k}{(A_1 f_k^{\alpha_1} + A_2 f_k^{\alpha_2})^2} \quad (3.20)$$

$$\Gamma_{34} = \Gamma_{43} = \sum_{k=1}^N \frac{A_2 f_k^{2\alpha_2} \ln f_k}{(A_1 f_k^{\alpha_1} + A_2 f_k^{\alpha_2})^2} \quad (3.21)$$

Dans le cas de l'intégrale continue nous pouvons introduire une quantité préliminaire pour calculer l'information de Fisher, γ_{ij} où $\Gamma_{ij} = E[\gamma_{ij}]$. Les équations suivantes de 3.22 à 3.37, correspondent à la première partie du calcul de la matrice de l'information de Fisher Γ_{ij} :

$$\gamma_{11} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{f^{2\bar{\alpha}_1}}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.22)$$

$$\gamma_{22} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} \ln f)^2}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.23)$$

$$\gamma_{33} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{f^{2\bar{\alpha}_2}}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.24)$$

$$\gamma_{44} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{(\bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2} \ln f)^2}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.25)$$

$$\gamma_{12} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{\bar{A}_1 f^{2\bar{\alpha}_1} \ln f}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.26)$$

$$\gamma_{13} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{f^{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2}}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.27)$$

$$\gamma_{14} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{\bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2} \ln f}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.28)$$

$$\gamma_{21} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{\bar{A}_1 f^{2\bar{\alpha}_1} \ln f}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.29)$$

$$\gamma_{23} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2} \ln f}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.30)$$

$$\gamma_{24} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{\bar{A}_1 \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2} \ln^2 f}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.31)$$

$$\gamma_{31} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{f^{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2}}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.32)$$

$$\gamma_{32} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2} \ln f}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.33)$$

$$\gamma_{34} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{\bar{A}_2 f^{2\bar{\alpha}_2} \ln f}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.34)$$

$$\gamma_{41} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{\bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2} \ln f}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.35)$$

$$\gamma_{42} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{\bar{A}_1 \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2} \ln^2 f}{2(\bar{A}_1 f^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f^{\bar{\alpha}_2})^2} df \quad (3.36)$$

$$\gamma_{43} = \int_{f_a}^{f_b} \frac{\overline{A_2} f^{2\overline{\alpha_2}} \ln f}{2(\overline{A_1} f^{\overline{\alpha_1}} + \overline{A_2} f^{\overline{\alpha_2}})^2} df \quad (3.37)$$

Maintenant, lorsque $\alpha_1 = \alpha_2$ nous avons $\Gamma_{22} = \overline{A_1}^2 I$, $\Gamma_{44} = \overline{A_2}^2 I$, $\Gamma_{24} = \overline{A_1} \overline{A_2} I$ où

$$I = \int_{f_a}^{f_b} \frac{(\ln f)^2 (f^{\overline{\alpha_1}})^2}{2(\overline{A_1} f^{\overline{\alpha_1}} + \overline{A_2} f^{\overline{\alpha_2}})^2} \quad (3.38)$$

On peut écrire une intégrale pour résumer les seize intégrales, en utilisant (a, b, c) les trois puissances des trois composantes du numérateur $(\overline{A_1} f^{\overline{\alpha_1}}, \overline{A_2} f^{\overline{\alpha_2}}, \ln(f))$. Il est ainsi plus facile de décrire les intégrales compte tenu des puissances (a, b, c) , assurément, par exemple, l'intégrale Γ_{24} est $(a = 1, b = 1, c = 2)$. Cependant, pour certaines intégrales, nous devons multiplier par un facteur dépendant de $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$. La table 3.1 résume la conversion entre $I(a, b, c)$ et $\Gamma_{i,j}$. Il nous faut donc calculer cette intégrale :

$$I(a, b, c) = \int_{f_a}^{f_b} \frac{(\overline{A_1} f^{\overline{\alpha_1}})^a (\overline{A_2} f^{\overline{\alpha_2}})^b}{2(\overline{A_1} f^{\overline{\alpha_1}} + \overline{A_2} f^{\overline{\alpha_2}})^2} \ln^c(f) df \quad (3.39)$$

Il est plus simple d'écrire,

$$I(a, b, c) = D \int_{f_a}^{f_b} \frac{f^{a\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2}(b-2)}}{\left(1 + \frac{\overline{A_1}}{\overline{A_2}} f^{\overline{\alpha_2} - \overline{\alpha_1}}\right)^2} \ln^c(f) df \quad (3.40)$$

Nous posons $f = e^u$,

$$I(a, b, c) = D \int_{\ln f_a}^{\ln f_b} \frac{e^{uA} u^c}{(1 + C e^{uB})^2} du \quad (3.41)$$

avec $A = a\overline{\alpha_2} + \overline{\alpha_1}(b-2) + 1$, $B = \overline{\alpha_2} - \overline{\alpha_1}$, $C = \frac{\overline{A_2}}{\overline{A_1}}$ et $D = \frac{\overline{A_2}^a \overline{A_1}^{b-2}}{2}$.

On peut calculer l'intégrale I_c pour les trois valeurs possible de c :

– $\mathbf{c = 0}$:

$$I(a, b, 0) = D \left[\frac{e^{Au}}{A} {}_2F_1 \left(2, \frac{A}{B}; \frac{A+B}{B}; -C e^{Bu} \right) \right]_{\ln f_a}^{\ln f_b} \quad (3.42)$$

– $\mathbf{c = 1}$:

$$I(a, b, 1) = D \left[\frac{e^{Au}}{A^2} \left({}_2F_1 \left(2, \frac{A}{B}; \frac{A+B}{B}; -C e^{Bu} \right) - {}_3F_2 \left(2, \frac{A}{B}, \frac{A}{B}; \frac{A+B}{B}, \frac{A+B}{B}; -C e^{Bu} \right) \right) \right]_{\ln f_a}^{\ln f_b} \quad (3.43)$$

– $\mathbf{c = 2}$:

$$\begin{aligned}
I(a, b, 2) = D & \left[\frac{e^{Au}}{A^3 B} \left(2A(u(A-B) + 1) {}_3F_2 \left(1, \frac{A}{B}, \frac{A}{B}; \frac{A+B}{B}, \frac{A+B}{B}; -Ce^{Bu} \right) \right. \right. \\
& + 2(B-A) {}_4F_3 \left(1, \frac{A}{B}, \frac{A}{B}, \frac{A}{B}; \frac{A+B}{B}, \frac{A+B}{B}, \frac{A+B}{B}; -Ce^{Bu} \right) \\
& \left. \left. + A^2 u((B-A)u - 2)(Ce^{Bu} + 1) {}_2F_1 \left(1, \frac{A}{B}; \frac{A+B}{B}; -Ce^{Bu} \right) \right) \right]_{\ln f_a}^{\ln f_b} \quad (3.44)
\end{aligned}$$

avec ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n x^n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n n!}$ la fonction hypergéométrique généralisée et $(\alpha)_j = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+j-1)$ le symbole de Pochhammer.

Γ_{ij}	$\mathbf{I}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$	Γ_{ij}	$\mathbf{I}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
Γ_{11}	$(\overline{A_1})^{-2} I(2, 0, 0)$	$\Gamma_{23} = \Gamma_{32}$	$(\overline{A_2})^{-1} I(1, 1, 1)$
$\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$	$(\overline{A_1})^{-1} I(2, 0, 1)$	$\Gamma_{24} = \Gamma_{42}$	$I(1, 1, 2)$
$\Gamma_{13} = \Gamma_{31}$	$(\overline{A_1 A_1})^{-1} I(1, 1, 0)$	Γ_{33}	$(\overline{A_2})^{-2} I(0, 2, 0)$
$\Gamma_{14} = \Gamma_{41}$	$(\overline{A_1})^{-1} I(1, 1, 1)$	$\Gamma_{34} = \Gamma_{43}$	$(\overline{A_2})^{-1} I(0, 2, 1)$
Γ_{22}	$I(2, 0, 2)$	Γ_{44}	$I(0, 2, 2)$

TABLE 3.1 – Conversion entre $I(a, b, c)$ et $\Gamma_{i,j}$

Pour le calcul de la matrice d'information de Fisher, nous utilisons la définition de l'équation 3.12. Pour l'intégration, nous utilisons la bande de fréquences de LISA $f_a = 1 \times 10^{-5}$ Hz à $f_b = 1$ Hz. Il s'agit de la bande de fréquences LISA des mesures de la future mission.

Nous devons calculer numériquement l'intégrale γ_{ij} (équation de 3.22 à 3.37) dans la bande de fréquences LISA $[f_a, f_b]$. Ce segment comprend plusieurs ordres de grandeur. Afin de ne pas privilégier la magnitude la plus élevée, nous choisissons d'intégrer selon un vecteur logarithmique normalisé par la fréquence de référence $f_* = 25$ Hz. Ainsi, l'algorithme du trapèze (équation 3.45) peut être utilisé avant ce vecteur logarithmique. On peut donc introduire un nombre N de valeurs dans ce vecteur. Dans la figure 3.1, c'est l'intégrale 3.24 avec différentes valeurs de N (10, 20, 50, 100, 200, 300, 400, 500, 1 000, 2 000). D'après la figure 3.1, l'intégration numérique semble converger. Dans le reste du document, nous utilisons $N = 1\,000$.

$$I_N = \sum_{k=1}^N \frac{f(x_{k-1})f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \quad (3.45)$$

avec x dans le vecteur logarithmique normalisé par la fréquence de référence $f_* = 25$ Hz.

On peut aussi calculer l'information de Fisher avec une somme discrète, entre autres, si l'on considère le terme γ_{33} on peut écrire :

$$\gamma_{33} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{f_k^{2\bar{\alpha}_2}}{2(\bar{A}_1 f_k^{\bar{\alpha}_1} + \bar{A}_2 f_k^{\bar{\alpha}_2})^2} \quad (3.46)$$

Sur la figure 3.1, nous ajoutons un nuage de points noirs comme calcul discret à partir de l'équation 3.46. L'intégration discrète et continue du terme γ_{33} sont similaires pour des valeurs d'amplitudes cosmologiques différentes.

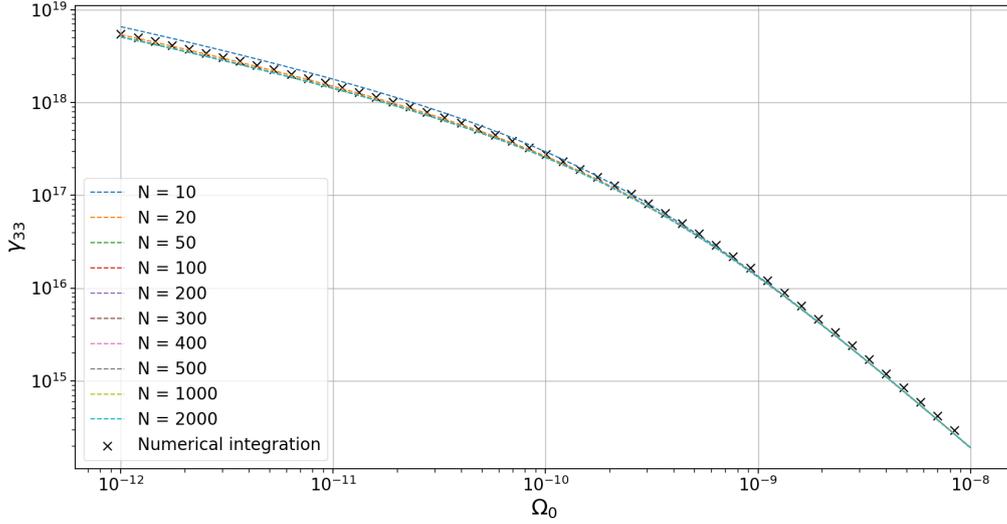


FIGURE 3.1 – Test de convergence de l'intégration de γ_{33} 3.24 avec un vecteur logarithmique normalisé par la fréquence de référence $f_* = 25$ Hz. Les différentes valeurs de N correspondant au nombre d'éléments du vecteur.

La valeur attendue peut être calculée à l'aide de distributions gaussiennes autour des paramètres à estimer. Nous générons pour les quatre paramètres une distribution normale localisée autour de la "vraie" valeur des paramètres et avec un taux $\frac{\sigma_{\theta_i}}{\mu_{\theta_i}} = 0.1$. D'après l'équation 3.47, l'espérance de la quantité préliminaire γ_{ij} est la moyenne de l'échantillon de la quantité préliminaire γ_{ij} évaluée suivant des distributions normales indépendantes

$$E[\gamma_{ij}] = \overline{\gamma_{ij}(\hat{\Theta})} \quad (3.47)$$

avec $\Theta_i \leftrightarrow \mathcal{N}(\mu_{\theta_i}, \sigma_{\theta_i})$, nous tirons au hasard un échantillon de 100 éléments de chaque distribution.

On obtient ainsi, en combinant le calcul numérique des intégrales γ_{ij} (voir équation 3.45) avec la méthode du trapèze et l'estimation de l'espérance (voir équation 3.47) avec des distributions normales autour des "vraies" valeurs, une estimation de la matrice d'information de Fisher.

3.1.2 La Borne de Cramér-Rao

L'information de Fisher peut être utilisée pour donner une borne inférieure de la variance de tout estimateur sans biais, la borne dite de Cramér-Rao ou en anglais *Cramer-Rao bound*. Pour tout estimateur sans biais $\hat{\theta}_i$ du paramètre inconnu θ_i , son erreur standard $\Delta\hat{\theta}_i$ satisfait

$$(\Delta\hat{\theta}_i)^2 \geq \Gamma_{ii}(\theta)^{-1} = \frac{1}{E \left[-\frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln p(d|\theta) \right]}. \quad (3.48)$$

Sous certaines conditions de régularité, la distribution postérieure d'un paramètre θ est asymptotiquement gaussienne, centrée au mode postérieur et la matrice de covariance est égale à l'inverse de l'Hessienne négative de la distribution postérieure évaluée au mode du postérieur. Pour les priors plats, la densité a posteriori est proportionnelle à la vraisemblance, le mode a posteriori est l'estimation du maximum de vraisemblance et l'erreur type $\Delta\hat{\theta}_i$ de l'estimateur bayésien $\hat{\theta}_i$ du paramètre θ_i peut être approximé en évaluant les informations de Fisher à $\hat{\theta}_i$, c'est-à-dire

$$\Delta\hat{\theta}_i \approx \Gamma_{ii}(\hat{\theta}_i)^{-1/2}. \quad (3.49)$$

Nous pouvons ainsi définir l'incertitude, mais également *Uncertainty* en anglais, d'une estimation $\hat{\theta}_i$ par

$$\frac{\Delta\hat{\theta}_i}{\hat{\theta}_i} \quad (3.50)$$

Effectivement, nous avons d'après la section 3.1.2, l'écart type d'un paramètre $\hat{\theta}$ qui est donné par la racine carrée de l'inverse de la matrice diagonale d'information de Fisher $\sigma_{\theta_i} = \frac{1}{\Gamma_{ii}}$. C'est une maximisation de l'écart type σ_{θ_i} . On peut prendre cette valeur de l'estimation de la séparabilité. L'inverse de la matrice d'information de Fisher est la matrice de covariance.

$$Cov^{ij} = (\Gamma^{-1})^{ij} = E[\Delta\theta^i \Delta\theta^j] \quad (3.51)$$

Sur la diagonale on a $Cov^{ii} = \sigma_i^2$

Le but de cette étude est de calculer avec l'étude d'information de Fisher l'incertitude de $\theta_i \frac{\Delta\theta_i}{\theta_i}$. Cette étude permet d'avoir un seuil de séparabilité par un MCMC adaptatif avec la vraisemblance de l'équation 3.6. Dans la suite de notre étude, nous aurons ainsi une valeur limite de séparabilité du paramètre cosmologique et du fond astrophysique. Si l'incertitude d'un paramètre θ_i est égale à 0.1, nous mesurons les paramètres avec une erreur de 10%.

L'incertitude de θ_i est donnée par :

$$\frac{\Delta\theta_i}{\theta_i} = \frac{\sqrt{Cov^{ii}}}{\theta_i} \leq \frac{1}{\theta_i} \frac{1}{\sqrt{E \left[-\frac{\partial}{\partial\theta_i} \frac{\partial}{\partial\theta_i} \ln p(d|\hat{\theta}) \right]}} \quad (3.52)$$

Nous utilisons un *toy problem* pour étudier la séparabilité de deux fonds stochastiques compte tenu de leur différence de pente. Pour cela, nous fixons un fond $\Omega_1(f) = A_1 \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^{\alpha_1} = \Omega_{2/3} \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^{\alpha_{2/3}} = 3.55 \times 10^{-9} \left(\frac{f}{25\text{Hz}} \right)^{2/3}$, et on laisse libre la pente du second fond $\Omega_2(f) = A_2 \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^{\alpha_2} = \Omega_0 \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^{\alpha_0} = 1 \times 10^{-12} \left(\frac{f}{25\text{Hz}} \right)^{\alpha_0}$. Nous montrons les incertitudes $\left(\frac{\Delta\hat{\theta}_i}{\hat{\theta}_i} \right)$ pour $\theta_i \in [\Omega_{2/3}, \alpha_{2/3}, \Omega_0, \alpha_0]$, avec $\Delta\hat{\theta}_i$ l'erreur de l'information Fisher, voir section 3.1.2) pour les amplitudes et les pentes spectrales par rapport à la différence entre les pentes spectrales ($\delta\alpha = \alpha_0 - \alpha_{2/3}$). Cette quantité est aussi appelée coefficient de variation ou écart type relatif (RSE), c'est la valeur absolue de l'écart type divisé par la moyenne du paramètre. Nous utilisons cette quantité pour apprécier la dispersion des valeurs autour de la moyenne. il est préférable d'utiliser cette quantité, car elle est sans unité. Ainsi, il est plus facile de comparer les paramètres de différentes valeurs d'unités ou de plages. La figure 3.2 affiche les incertitudes $\left(\frac{\Delta\hat{\theta}_i}{\hat{\theta}_i} \right)$ au regard de $\delta\alpha$ entre -5 et 5 .

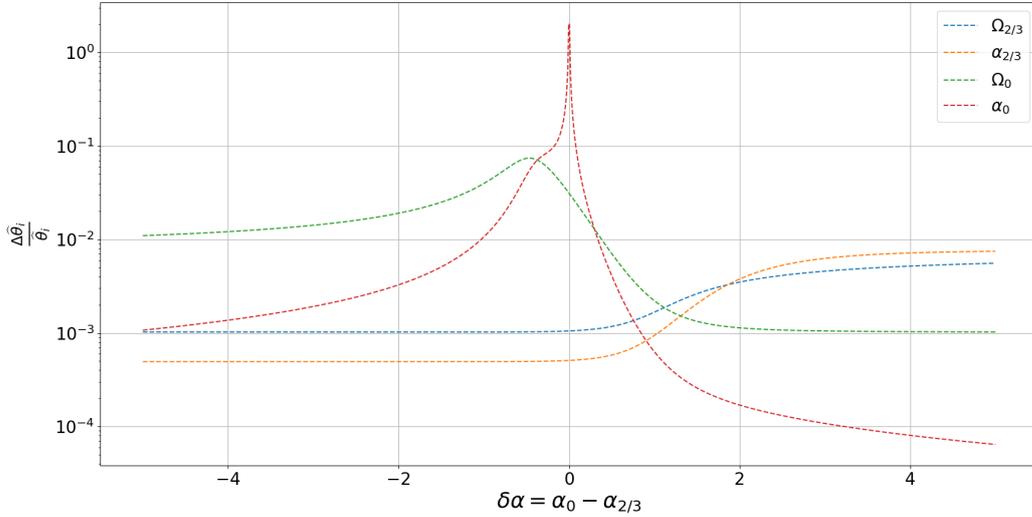


FIGURE 3.2 – Incertitudes $\left(\frac{\Delta\hat{\theta}_i}{\hat{\theta}_i} \right)$ des amplitudes et des pentes spectrales en fonction de la différence entre les pentes spectrales ($\delta\alpha = \alpha_0 - \alpha_{2/3}$).

L'incertitude du paramètre α_0 augmente lorsque la différence de pente $\delta\alpha$ est proche de zéro. Ici, il est plus difficile de séparer les deux fonds lorsque leurs pentes sont similaires. Les incertitudes ne sont pas non plus symétriques par rapport à $\delta\alpha = 0$ car lorsque la pente change, l'amplitude change également d'un facteur $f_{ref}^{-\alpha}$. L'incertitude du paramètre d'amplitude Ω_0 est maximale lorsque les deux paramètres d'amplitude sont identiques. La position des changements est maximum pour les différentes entrées de Ω_0 ; si Ω_0 augmente

la position du maximum converge vers $\delta\alpha = 0$.

3.2 Adaptive Markov chain Monte-Carlo

3.2.1 Markov chain Monte-Carlo

L'inférence bayésienne quantifie l'estimation et les incertitudes de paramètres inconnus sur le fondement de l'observation d'événements qui dépendent de ces paramètres. La quantification utilise la distribution de probabilité *posterior*. Elle est obtenue en utilisant le théorème de Bayes (voir équation 3.53) en mettant à jour la distribution *prior* des paramètres avec la *vraisemblance* $p(d|\theta)$, la distribution conditionnelle des observations compte tenu des paramètres :

$$p(\theta|d) = \frac{p(d|\theta)p(\theta)}{p(d)} \quad (3.53)$$

où $p(\theta)$ est la distribution a priori, $p(\theta|d)$ est la distribution a posteriori, et $p(d) = \int p(d|\theta)p(\theta)d\theta$ est la *preuve* ou *evidence*. Il existe diverses stratégies fondées sur l'échantillonnage pour calculer la distribution postérieure, appelées méthodes de MCMC [170, 111].

Les méthodes de MCMC [108] fournissent une stratégie numérique pour calculer la distribution a posteriori conjointe et ses distributions marginales. Il s'agit d'une approche fondée sur l'échantillonnage qui simule une chaîne de Markov construite de telle manière que sa distribution invariante est la distribution postérieure.

3.2.2 La procédure de Metropolis-Hastings

Les méthodes de MCMC sont fondées sur la simulation d'une chaîne de Markov. Pour simuler à partir d'une chaîne de Markov, nous utilisons l'algorithme de Metropolis-Hastings [121, 111]. Comme il est généralement difficile d'échantillonner indépendamment d'une distribution multivariée, les méthodes de MCMC construisent des échantillons dépendants à partir de chaînes de Markov. L'algorithme de MCMC prédominant est l'algorithme Metropolis-Hastings (MH). Il est basé sur le rejet ou l'acceptation d'un paramètre candidat θ' où la probabilité d'acceptation est donnée par le rapport de vraisemblance entre le candidat et la valeur du paramètre précédemment tiré. Ainsi, tout candidat qui va dans le sens d'une probabilité plus élevée (vers l'estimation de vraisemblance maximale) sera toujours accepté, mais comme les mouvements en descente ont encore une chance d'être acceptés, l'algorithme MH évite de rester bloqué dans les maximums locaux.

Algorithme de Metropolis-Hastings

- Sélectionnez au hasard un point initial $\theta^{(0)}$.
- À la n ème itération :

- Génération du candidat θ' avec la distribution de la proposition (*proposal distribution*) $g(\theta'|\theta^{(n)})$
- Calcul de la probabilité d'acceptation

$$\alpha = \min \left[1, \frac{p(\theta^{(n)})}{p(\theta')} \frac{p(\theta')}{p(\theta^{(n)})} \right]$$
- Accepter/Rejeter
 - Génération d'un nombre aléatoire uniforme u entre $[0, 1]$
 - Si $u \leq \alpha$ alors on accepte le candidat :

$$\theta^{(n+1)} = \theta'$$
 - Si $u > \alpha$ alors on rejette le candidat :

$$\theta^{(n+1)} = \theta^{(n)}$$

Notez que la distribution des propositions $g(\theta'|\theta^{(n)})$ est souvent choisie pour être gaussienne centrée autour de la valeur actuelle du paramètre. Lors de l'exécution de l'algorithme, nous pouvons surveiller le taux d'acceptation, la proportion de candidats qui ont été acceptés. D'une part, si ce nombre est trop proche de 0, l'algorithme effectue de grands déplacements dans les queues de la distribution postérieure qui ont une faible probabilité d'acceptation, ce qui fait que la chaîne reste à une valeur fixe pendant une longue période. D'un autre côté, un taux d'acceptation élevé indique que la chaîne ne fait que de petits mouvements provoquant une convergence lente. Pour contrôler le tirage de la chaîne de Markov, nous pouvons introduire un paramètre de taille de pas adaptatif qui contrôle la taille des mouvements ; il s'agit de l'écart type dans le cas d'une proposition gaussienne univariée ou de la matrice de covariance d'une proposition gaussienne multivariée. Au fur et à mesure des itérations de l'algorithme, il est possible de modifier dynamiquement la taille du pas pour améliorer la convergence de la chaîne. Intuitivement, une proposition optimale serait aussi proche que possible de la distribution postérieure. En utilisant une proposition gaussienne, sa matrice de covariance devrait donc être aussi proche de la matrice de covariance de la distribution postérieure. Étant donné que les échantillons MCMC précédents peuvent être utilisés pour fournir une estimation cohérente de la matrice de covariance, cette estimation peut être utilisée pour adapter la proposition à la volée, comme détaillé dans 3.2.3.

3.2.3 Adaptive Markov chain Monte-Carlo

Nous utilisons la version de l'algorithme de Adaptive-MCMC utilisant la procédure de Metropolis de Robert et Rosenthal [207]. Pour un algorithme de MCMC de dimension p , nous pouvons effectuer le Metropolis-Hasting avec une densité de propositions $g_n(\cdot|\theta^{(n)})$ dans l'itération n définie par un tirage de propositions gaussiennes :

$$g_n(\cdot|\theta^{(n)}) = (1 - \beta)N\left(\theta^{(n)}, \frac{(2.28)^2}{p}\Sigma_n\right) + \beta N\left(\theta^{(n)}, \frac{(0.1)^2}{p}I_p\right) \quad (3.54)$$

avec Σ_n l'estimation empirique actuelle de la matrice de covariance, $\beta = 0.25$ une constante, p la dimension de l'espace des paramètres, N la distribution multinormale et I_p les $p \times p$ matrices d'identités. Nous calculons une estimation Σ_n de la matrice de covariance en utilisant les cent derniers échantillons de la chaîne. La chaîne générée à partir d'un algorithme adaptatif n'est pas markovienne, mais la condition d'adaptation décroissante assure l'ergodicité, et donc la convergence vers la distribution stationnaire.

Incertitude de la composante d'amplitude cosmologique avec l'Adaptive Markov chains Monte Carlo (A-MCMC)

D'après la section 3.1.2, on peut calculer l'incertitude de l'estimation du paramètre Ω_0 (l'amplitude cosmologique de la densité spectrale d'énergie sans dimension), à savoir $\frac{\Delta\Omega_0}{\Omega_0}$. Pour estimer cette quantité à partir de l'information de Fisher, nous utilisons les formules données dans la section 3.1 et la matrice inverse de l'information de Fisher (ligne bleue dans la figure 3.12).

Il est évident que nous pouvons prédire une meilleure séparabilité (l'incertitude est moindre) pour des valeurs élevées du fond cosmologique. L'incertitude peut être calculée indépendamment avec le calcul A-MCMC :

$$\frac{\Delta\Omega_0}{\Omega_0} = \frac{\sigma_{\Omega_0}}{\Omega_0} \quad (3.55)$$

Ce rapport est calculé et représenté sous forme de points de dispersion sur la figure 3.12. Nous pouvons également estimer l'erreur de l'estimation de l'incertitude (voir équation 3.56) à partir de l'estimation de la largeur à mi-hauteur des distributions *posterior*. Les incertitudes (issues de l'A-MCMC) sont données par :

$$\begin{cases} Error_{+,I} = \frac{\sigma_{\Omega_0}}{|\Omega_0 - \sigma_{\Omega_0}|} \\ Error_{-,I} = \frac{\sigma_{\Omega_0}}{|\Omega_0 + \sigma_{\Omega_0}|} \end{cases} \quad (3.56)$$

3.3 Donnée extraite du *Mock LISA Data Challenge (MLDC)*

3.3.1 Densité spectrale de puissance et d'énergie du MLDC

Le défi des données simulées par le *LISA data challenge* (MLDC) fournit des simulations du signal et du bruit de LISA dans l'approximation d'un bras. Nous utilisons la série temporelle (X, Y, Z) de l'ensemble de données *LDC1-6* de la page Web du MLDC [35]. Ce sont des simulations d'un fond stochastique d'ondes gravitationnelles produites par

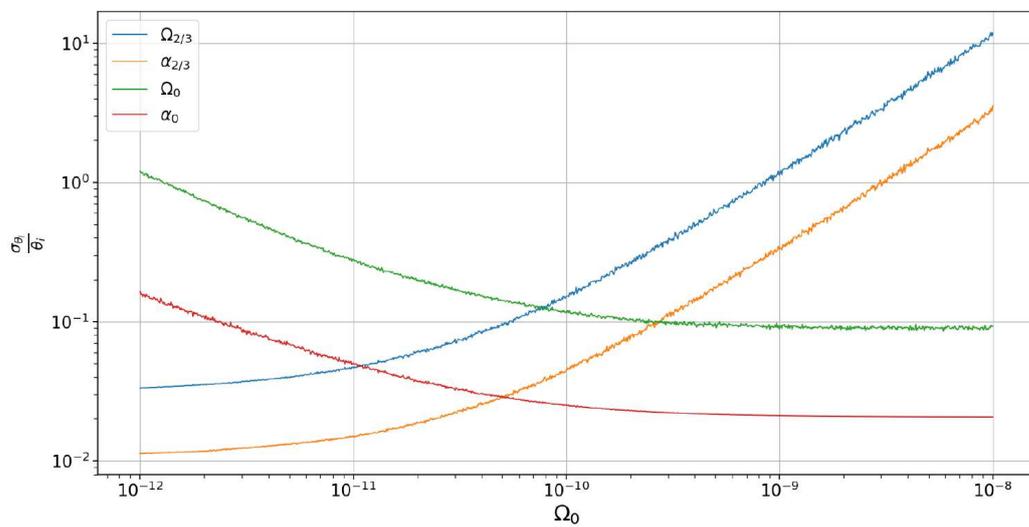


FIGURE 3.3 – Évolution des incertitudes relatives pour l’estimation des paramètres $[\Omega_0, \alpha_0, \Omega_{2/3}, \alpha_{2/3}]$ en fonction de l’amplitude de fond cosmologique Ω_0 . La précision d’estimation des paramètres est affectée par la valeur de l’amplitude cosmologique Ω_0 . On utilise $\Omega_{2/3} = 3.55 \times 10^{-9}$, $\alpha_{2/3} = \frac{2}{3}$ et $\alpha_0 = 0$.

des binaires de la forme $\Omega_{GW}(f) = \Omega_{2/3} \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^\alpha$ pour $f_{ref} = 25$ Hz avec une pente $\alpha = \frac{2}{3}$ et une amplitude de $\Omega_{2/3} = 3.55 \times 10^{-9}$ (at 25 Hz). Les figures 3.4 et 3.5 présentent les périodogrammes des ondes gravitationnelles pour les canaux (X, Y, Z) et (A, E, T) .

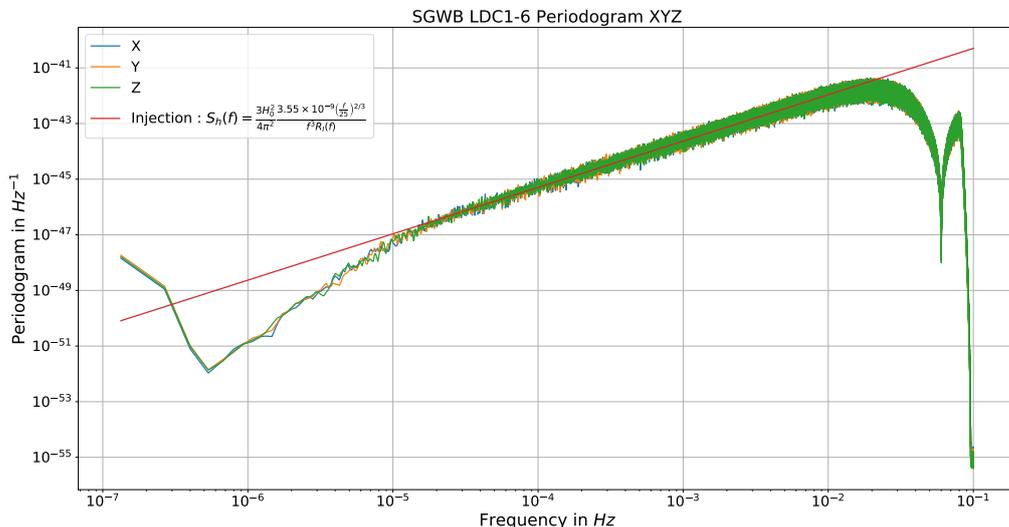


FIGURE 3.4 – Périodogramme des canaux (X, Y, Z) du SGWB de MLDC (*LDC1-6 noiseless* ou sans bruit) avec un seul fond ($\Omega_{GW}(f) = 3.55 \times 10^{-9} \left(\frac{f}{25\text{Hz}} \right)^{2/3}$)

On peut transformer les séries temporelles X, Y, Z en canaux A, E, T selon :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z - X) \\ E = \frac{1}{\sqrt{6}}(X - 2Y + Z) \\ T = \frac{1}{\sqrt{3}}(X + Y + Z). \end{cases} \quad (3.57)$$

Cette combinaison linéaire des canaux originaux utilisés pour définir T s'est avérée insensible au signal des ondes gravitationnelles. Bien que ce ne soit pas entièrement vrai, nous maintiendrons cette hypothèse pour cette analyse. En tant que tel, T peut-être considéré comme un canal nul qui ne contient principalement que du bruit, tandis que les canaux A et E sont les canaux scientifiques, contenant le signal des ondes gravitationnelles en présence de bruit [211]. Dans ce qui suit, nous nous concentrons sur les chaînes scientifiques, A et E .

Dans cette étude, nous utilisons un modèle simplifié où nous supposons des niveaux de bruit égaux sur satellite. Selon Adams et Cornish [11], on peut utiliser un modèle plus compliqué qui autorise différents niveaux de bruit. Les travaux futurs aborderont ce point, ainsi que la situation dans laquelle les paramètres de pente du bruit peuvent également varier. Ces paramètres pourraient alors également être estimés par des méthodes d'estimation de paramètres bayésiennes.

Pour les études suivantes, spécifiquement pour les données MLDC, nous restreignons la

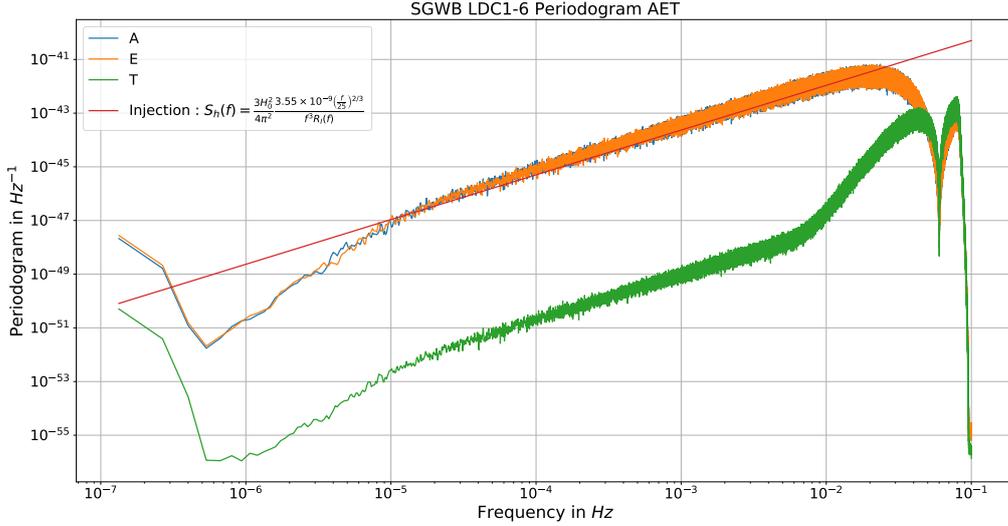


FIGURE 3.5 – Périodogramme des canaux (A, E, T) du SGWB de MLDC ($LDC1-6$ noiseless) avec un seul fond ($\Omega_{GW}(f) = 3.55 \times 10^{-9} \left(\frac{f}{25\text{Hz}}\right)^{2/3}$)

bande de fréquences pour qu'elle corresponde à la bande de LISA [$10^{-5}, 1$] Hz. La densité spectrale de puissance (PSD) du canal T , S_T , peut-être décrite comme (selon [35]) :

$$S_T(x) = 16S_{Op}(x) (1 - \cos(x)) \sin^2(x) + 128S_{Pm}(x) \sin^2(x) \sin^4\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3.58)$$

avec $x = \frac{2\pi L}{c} f$, S_{Op} est le bruit du système de métrologie optique et S_{Pm} est le bruit d'accélération et de déplacement. Le bilan de bruit de LISA est :

$$\begin{cases} S_{Op}(f) = N_{Opt} L^2 \left(1 + \left(\frac{8 \text{ mHz}}{f}\right)^4\right) \\ S_{Pm}(f) = N_{Acc} L^2 S_{Acc}(f) S_{Dis}(f) \end{cases} \quad (3.59)$$

avec

$$\begin{cases} S_{Acc}(f) = \left(1 + \left(\frac{0.4 \text{ mHz}}{f}\right)^2\right) \left(1 + \frac{f}{8 \text{ mHz}}\right)^4 \\ S_{Dis}(f) = (2\pi f)^{-4} \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 \end{cases} \quad (3.60)$$

Les deux paramètres libres, N_{Opt} et N_{Acc} , sont les niveaux respectifs des deux principales sources de bruit dans le bilan de bruit de LISA. Dans le *LISA Science Requirement Document* [96], le niveau d'accélération du bruit de LISA est $N_{Acc} = 1.44 \times 10^{-48} \text{ s}^{-4} \text{ Hz}^{-1}$ et la limite supérieure du niveau de bruit du système de métrologie optique est $N_{Opt} = 3.6 \times 10^{-47} \text{ Hz}^{-1}$. À partir de la modélisation des exigences de déformation et de performance de la mission, il s'agit donc d'une maximisation du niveau de bruit. Le bilan de bruit de LISA correspond à toutes les sources de contamination qui contribuent à la

densité spectrale de puissance du système de détection LISA. Les deux sources de bruit correspondent à des estimations d'effets physiques différents. Nous n'avons clairement pas encore les vraies valeurs de ces effets physiques; nous n'avons actuellement que des estimations à partir d'expériences ou de simulations. Les exigences de LISA fixent la limite des deux niveaux de magnitude afin de respecter les performances de détection de LISA. Nous reviendrons plus tard sur la construction de ce modèle de bruit. Dans la figure 3.6, la courbe verte est le modèle de bruit analytique de la PSD du canal T avec les paramètres du document de travail [96]. La courbe bleue est le périodogramme du canal T des données MLDC (signal $LDC1 - 6$ SGWB); c'est la grandeur au carré des coefficients de Fourier pour les données de la série temporelle T (voir équation 3.57). En supposant que la forme fonctionnelle du bruit PSD dans le canal T est donnée par (3.58), nous pouvons utiliser l'A-MCMC (voir section 3.2) pour ajuster les paramètres du bruit de LISA, N_{Opt} et N_{Acc} . Les priors pour les deux composantes sont des distributions log-uniformes plates et nous spécifions $\beta = 0.01$ et $N = 200000$ dans l'algorithme d'A-MCMC. La courbe orange de la figure 3.6 est la PSD estimée établie sur l'équation 3.58 avec N_{Opt} et N_{Acc} remplacés par la moyenne de la distribution postérieure des chaînes obtenues via l'A-MCMC, donné dans l'équation 3.61. Les bandes d'erreur d'un σ sont superposées en gris. La figure 3.7 montre le tracé en angles pour les échantillons postérieurs des deux paramètres et les distributions a posteriori estimées semblent être bien approchées par des distributions gaussiennes. Cela montre que ce modèle donne un ajustement raisonnable aux données T du canal simulé. Nous reconnaissons qu'il s'agit d'un modèle de paramètres de bruit fixes pour cette étude, et les travaux futurs incluront des scénarios plus réalistes : permettant différents niveaux de bruit sur chaque engin spatial [11], permettant de petites modifications des fonctions de transfert, et permettant de petites modifications dans les pentes spectrales des composantes du bruit. Les moyennes des distributions a posteriori des deux paramètres de bruit sont :

$$\begin{cases} \widehat{N}_{acc} = 7.08 \times 10^{-51} \pm 4 \times 10^{-53} \text{ s}^{-4}\text{Hz}^{-1} \\ \widehat{N}_{Opt} = 1.91 \times 10^{-47} \pm 4 \times 10^{-49} \text{ Hz}^{-1} \end{cases} \quad (3.61)$$

La densité spectrale d'énergie des ondes gravitationnelles Ω_{GW} peut être définie comme

$$\Omega_{GW,I}(f) = \frac{2\pi^2}{3H_0^2} f^3 \frac{PSD_I(f)}{R_I(f)} \quad (3.62)$$

pour $I = A, E$, PSD_I la densité spectrale de puissance du canal I et R_I sa fonction de réponse. Une estimation asymptotiquement non biaisée de PSD_I .

Nous utilisons deux fonctions de réponse différentes pour les données MLDC, un système d'équations pour les données sans bruit (équation 3.63), et un pour les données

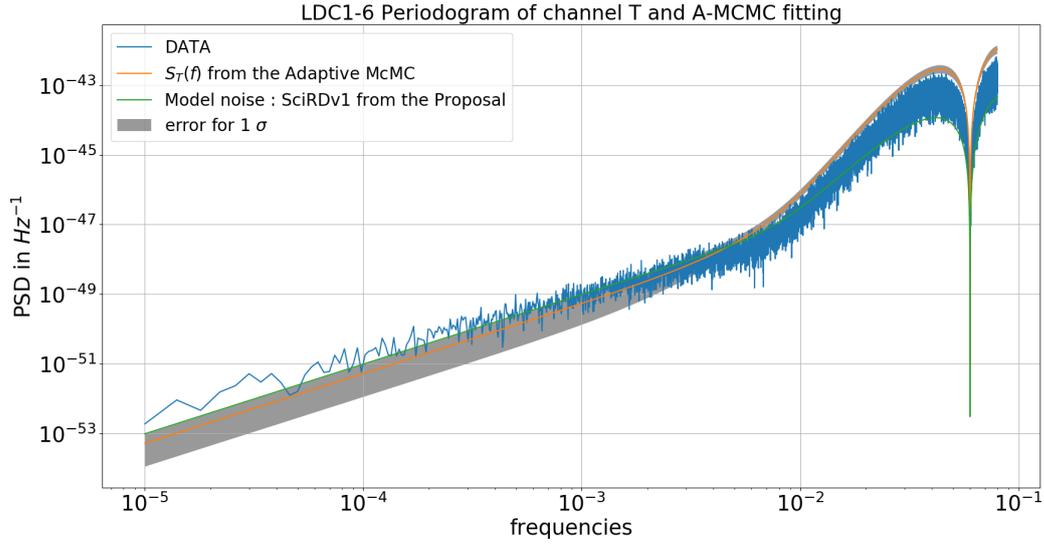


FIGURE 3.6 – Densité spectrale de puissance du canal T provenant de MLDC (en bleu) [35]. La ligne verte représente le modèle de bruit analytique de la densité spectrale de puissance du canal T avec les paramètres de la proposition [96]. La ligne orange est le modèle de l'équation 3.58 avec les valeurs adaptées au MCMC. En gris se trouve l'erreur d' 1σ . C'est l'incertitude calculée à partir de l'équation 3.70, où nous prenons $dPSD_T$ avec $dN_{pos} = \sigma_{N_{pos}}$ et $dN_{acc} = \sigma_{N_{acc}}$; σ est l'écart type de l'estimation a posteriori. Voir figure 3.7 et équation 3.61.

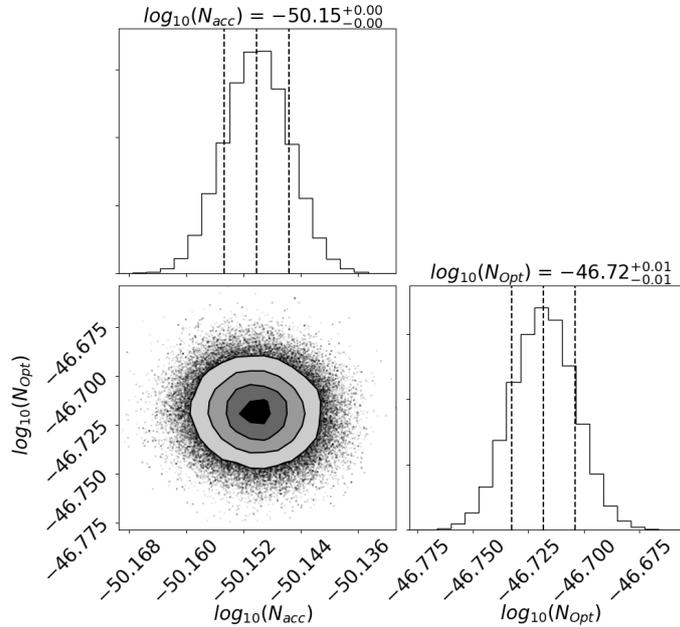


FIGURE 3.7 – Graphique en coin des chaînes de l'A-MCMC générant les distributions postérieures pour la densité spectrale de puissance du canal T de l'ensemble de données MLDC et estimant les deux grandeurs du modèle de bruit de LISA à partir de la proposition [96]. Les lignes pointillées verticales sur les distributions postérieures. De gauche à droite nous avons les quantiles [16%, 50%, 84%].

bruitées (équation 3.65)

$$\begin{cases} R_A(f) = R_{AA}(f) \frac{16}{9} \frac{2}{\pi} \left(\frac{f}{f_*}\right)^4 \sin^{-2}(f/f_*) \\ R_E(f) = R_{EE}(f) \frac{16}{7} \frac{2}{\pi} \left(\frac{f}{f_*}\right)^4 \sin^{-2}(f/f_*) \end{cases} \quad (3.63)$$

avec R_{II} étant donnée par Adams et Cornish en 2010 [13], $f_* = \frac{c}{2\pi L}$, et

$$\begin{aligned} R_{AA}(f) = R_{EE}(f) = & 4\sin^2\left(\frac{f}{f_*}\right) \left[\frac{3}{10} + \frac{169}{1680} \left(\frac{f}{f_*}\right)^2 \right. \\ & + \frac{85}{6048} \left(\frac{f}{f_*}\right)^4 - \frac{178273}{15667200} \left(\frac{f}{f_*}\right)^6 \\ & \left. + \frac{19121}{2476656000} \left(\frac{f}{f_*}\right)^8 \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

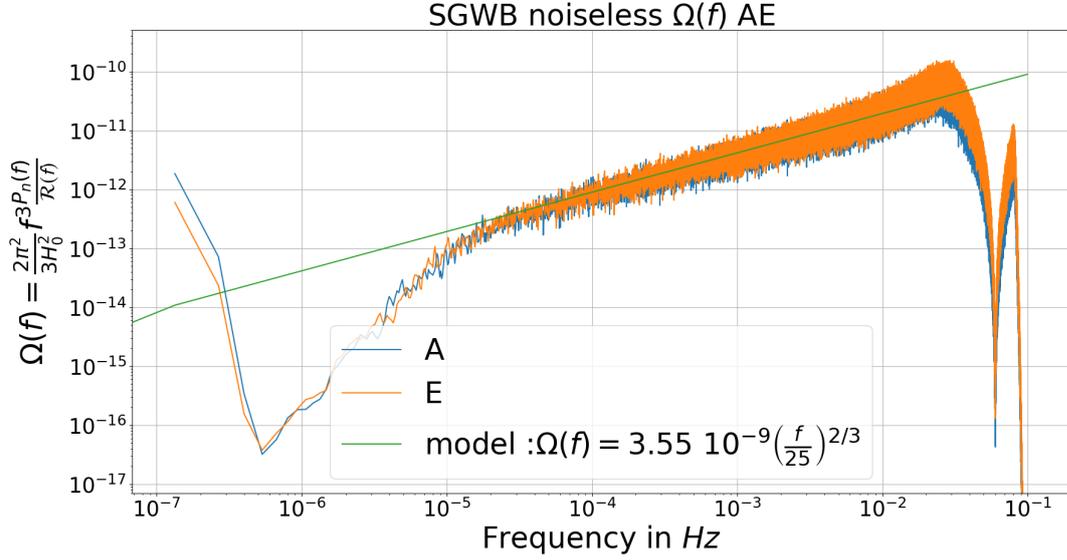
$$R_I(f) = \frac{S_{II}(f)L}{3cS_p} \left[\frac{36}{10} \frac{f}{f_*} \sin^{-2}(f/f_*) \right]^2 \quad (3.65)$$

où $S_{II}(f) = 8\sin^2\left(\frac{f}{f_*}\right) \left[4S_a \left(1 + \cos\left(\frac{f}{f_*}\right) + \cos^2\left(\frac{f}{f_*}\right) \right) + S_p \left(2 + \cos\left(\frac{f}{f_*}\right) \right) \right]$ défini

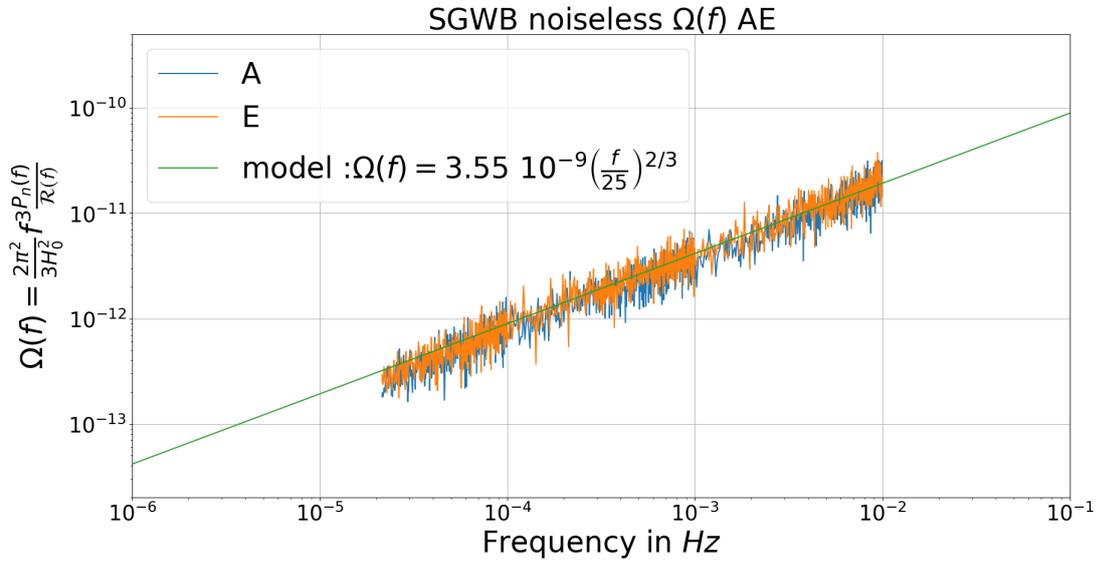
dans [211] avec $S_a = \frac{9 \times 10^{-50}}{(2\pi f)^4} \left(1 + \left(\frac{10^{-4}}{f}\right)^2 \right)$, $S_p = 4.10^{-42} \text{ Hz}^{-1}$ et $f_* = \frac{c}{2\pi L}$. La densité spectrale d'énergie du fond astrophysique du MLDC est une loi puissance selon la documentation du *LISA Data Challenge Manual* $\Omega_{GW}(f) = 3.55 \times 10^{-9} \left(\frac{f}{25 \text{ Hz}}\right)^{2/3}$. La figure 3.8 et la figure 3.9 montrent les périodogrammes d'énergie $\hat{\Omega}_{GW,I}(f) = \frac{2\pi^2}{3H_0^2} f^3 \frac{I_n(f)}{R_I(f)}$ pour le canal A en bleu et pour le canal E en orange. La courbe verte est le modèle de loi puissance avec les paramètres $(\Omega_\alpha, f_{ref}, \alpha)$ avec $\Omega_{GW} = \Omega_\alpha \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^\alpha$ de la documentation MLDC. Les données à hautes fréquences ne peuvent pas être utilisées, car les transformations des équations. 3.63 et 3.65 sont valables uniquement pour les basses fréquences. Nous utilisons donc la bande de fréquences $[2.15 \times 10^{-5}, 9.98 \times 10^{-3}] \text{ Hz}$.

3.4 Ajustement du SGWB avec l'A-MCMC en utilisant le canal T et les deux canaux scientifiques A et E

Dans cette section, nous considérons le canal nul de LISA T , et les canaux scientifiques A et E . On suppose que l'observation du bruit dans le canal T nous informe du bruit dans les canaux A et E . Nous suivons le formalisme de Smith et Caldwell [222]. Les canaux A, E et T sont dérivés des canaux X, Y et Z [238], les Michelson à bras inégaux centrés sur les trois satellites. Nominale, le canal T ne contient pas de signal

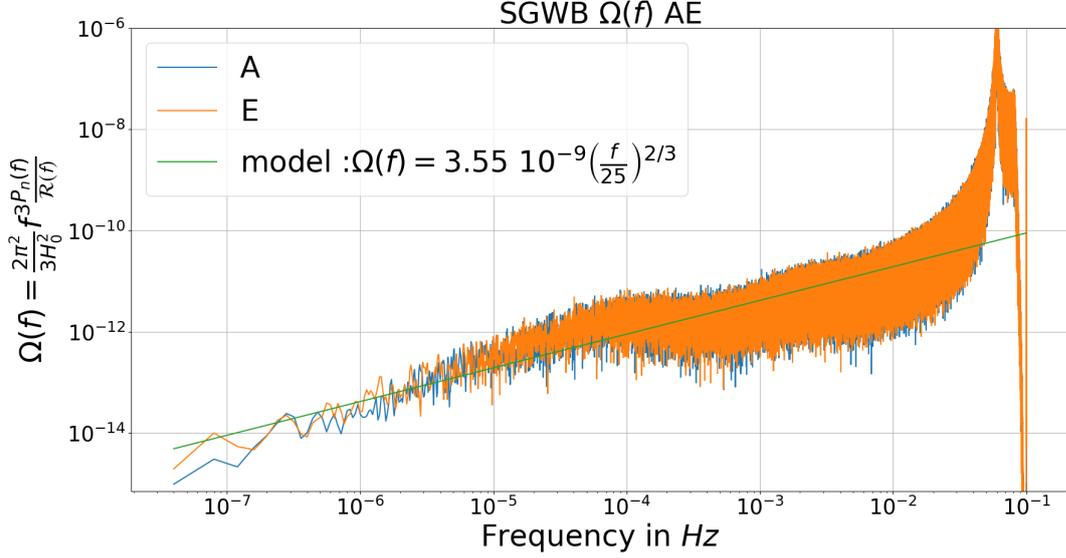


(a) Bande de fréquences totale des canaux A et E

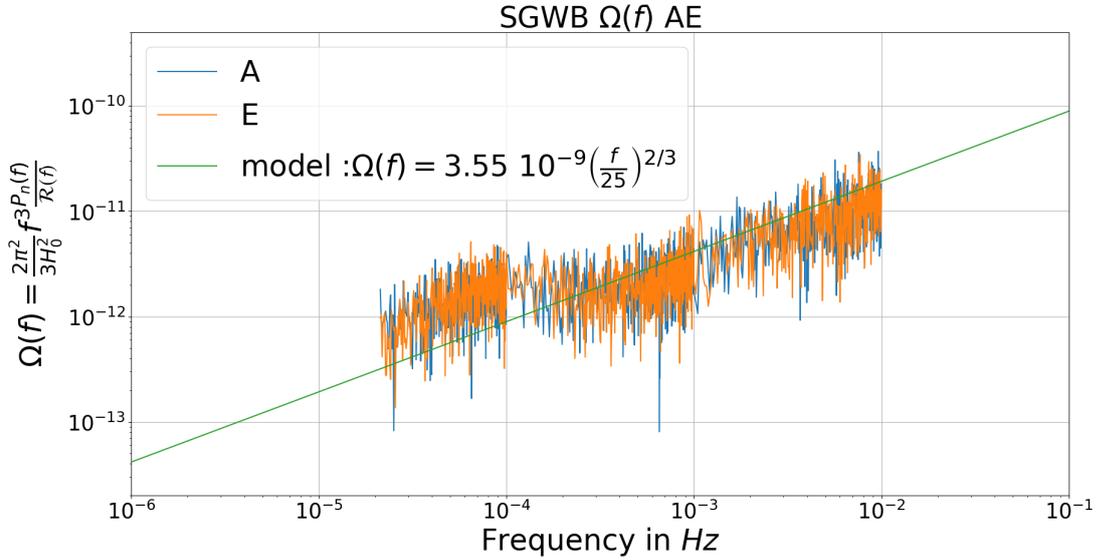


(b) Bande de fréquences réduite entre 2.15×10^{-5} et 9.98×10^{-3} Hz des canaux A et E

FIGURE 3.8 – Observations dans les canaux $[A, E]$ de la densité spectrale d'énergie du SGWB à partir du fond astrophysique $\Omega_{GW}(f)$ du MLDC pour les canaux sans bruits, voir équation 3.63. (a) Bande de fréquences totale des canaux A et E. (b) Bande de fréquences réduite 2.15×10^{-5} à 9.98×10^{-3} Hz des canaux A et E.



(a) Bande de fréquences totale des canaux A et E



(b) Bande de fréquences réduite entre 2.15×10^{-5} et 9.98×10^{-3} Hz des canaux A et E

FIGURE 3.9 – Observations dans les canaux $[A, E]$ de la densité spectrale d'énergie du SGWB à partir du fond astrophysique $\Omega_{GW}(f)$ du MLDC pour les canaux avec bruits, équation 3.65. (a) Bande de fréquences totale des canaux A et E. (b) Bande de fréquences réduite 2.15×10^{-5} à 9.98×10^{-3} Hz des canaux A et E.

d'ondes gravitationnelles, mais contient le bruit de LISA non corrélé. Cette hypothèse n'est pas parfaitement exacte, mais pour cette analyse, nous la considérerons comme vraie. Les relations sont données par l'équation 3.57. Nous supposons que les canaux A et E contiennent les mêmes informations d'ondes gravitationnelles et le même bruit de LISA. Le canal T a une PSD de bruit différent, mais partage des paramètres avec les PSD de bruit des canaux A et E . Ainsi, dans le cadre d'une étude de séparation spectrale du SGWB, l'utilisation du canal T permet d'estimer simultanément plus précisément les paramètres de bruit pour les canaux de LISA A et E . Sans l'estimation simultanée des paramètres de bruit de LISA du canal T , il est possible d'estimer les paramètres de bruit de LISA, mais cette estimation devient moins précise. En conséquence, la précision de l'estimation du paramètre du SGWB est dégradée. C'est dans ce sens qu'il est également important d'utiliser le canal T . Ce fut aussi la motivation de l'étude de [51].

Nous pouvons simuler le bruit et le SGWB dans le domaine fréquentiel, tel que la densité du spectre de puissance (PSD) des chaines AET s'écrit :

$$\begin{cases} PSD_A = S_A + N_A \\ PSD_E = S_E + N_E \\ PSD_T = N_T \end{cases} \quad (3.66)$$

avec $S_A(f) = S_E(f) = \frac{3H_0^2}{4\pi^2} \frac{\Omega_{GW}(f)\mathcal{R}(f)}{f^3}$, les composantes du bruit $N_A(f) = N_E(f)$ et $N_T(f)$ peuvent s'écrire comme :

$$\begin{cases} N_A = N_1 - N_2 \\ N_T = N_1 + 2N_2 \end{cases} \quad (3.67)$$

avec

$$\begin{cases} N_1(f) = \left(4S_s(f) + 8 \left(1 + \cos^2\left(\frac{f}{f_*}\right)\right) S_a(f)\right) |W(f)|^2 \\ N_2(f) = -\left(2S_s(f) + 8S_a(f)\right) \cos\left(\frac{f}{f_*}\right) |W(f)|^2 \end{cases} \quad (3.68)$$

$W(f) = 1 - e^{-\frac{2if}{f_*}}$ et

$$\begin{cases} S_s(f) = N_{Pos} \\ S_a(f) = \frac{N_{acc}}{(2\pi f)^4} \left(1 + \left(\frac{0.4 \text{ mHz}}{f}\right)^2\right) \end{cases} \quad (3.69)$$

Le bilan de bruit de LISA est donné à partir du document [LISA Science Requirement](#)¹ [96]. Nous utilisons ce modèle simplifié pour générer le bruit de LISA. Nous notons que le modèle de bruit de LISA pour les canaux A , E et T du TDI, comme dans le LDC [14, 160] correspond au modèle de bruit de LISA [222].

Pour créer les données de notre exemple, nous utilisons un bruit d'accélération de $N_{acc} = 1.44 \times 10^{-48} \text{ s}^{-4}\text{Hz}^{-1}$ et la fluctuation de la longueur du trajet optique ou *the optical path-length fluctuation* en anglais $N_{Pos} = 3.6 \times 10^{-41} \text{ Hz}^{-1}$. Nous pouvons estimer

1. LISA Science Requirement : https://atrium.in2p3.fr/nuxeo/nxdoc/default/f5a78d3e-9e19-47a5-aa11-51c81d370f5f/view_documents

l'ampleur du bruit instrumentale sur le canal T . Il faut noter l'importance d'utiliser le canal T pour estimer le bruit dans les canaux A et E , car il est alors possible de paramétrer un A-MCMC de six paramètres, $\theta = (N_{acc}, N_{Pos}, \Omega_{2/3}, \alpha_{2/3}, \Omega_0, \alpha_0)$, car les paramètres d'amplitude du bruit sont normalement les mêmes sur les trois canaux du fait de leurs origines communes. Nous pouvons aussi calculer la propagation des incertitudes pour les densités spectrales de puissance avec la méthode des dérivées partielles. Ainsi, on peut estimer l'erreur sur la mesure réalisée lors un ajustement des paramètres θ , $dPSD_I = \sqrt{\sum_{\theta} \left(\frac{\partial PSD_I}{\partial \theta}\right)^2 d\theta^2}$. Dans le cas de deux fonds stochastiques en loi puissance, nous obtenons $\Omega_{astro}(f) = \Omega_{2/3} \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{2/3}$, $\Omega_{cosmo}(f) = \Omega_0 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} dPSD_I = \left[N_I(0, dN_{acc}, f)^2 + N_I(dN_{pos}, 0, f)^2 \right. \\ \quad + S_I(\Omega_{2/3}, \alpha_{2/3}, \Omega_0, \alpha_0, f)^2 \left(d\Omega_0^2 + d\Omega_{2/3}^2 \right. \\ \quad \left. \left. + \ln\left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^2 \left(\Omega_{2/3}^2 d\alpha_{2/3}^2 + \Omega_0^2 d\alpha_0^2 \right) \right) \right]^{1/2} \\ dPSD_T = \left[N_T(0, dN_{acc}, f)^2 + N_T(dN_{pos}, 0, f)^2 \right]^{1/2} \end{array} \right. \quad (3.70)$$

avec $\{dN_{acc}, dN_{pos}, d\Omega_{astro}, d\alpha_{astro}, d\Omega_{cosmo}, d\alpha_{cosmo}\}$ étant les estimations d'erreur positives des paramètres; $I = A, E$. On prend 1σ sur les distributions postérieures. Nous pouvons également estimer l'erreur de l'ajustement de la densité spectrale de puissance en utilisant les chaînes générées par l'algorithme de MCMC pour produire l'erreur. Avec les chaînes issues de MCMC, nous pouvons calculer un histogramme de $PSD_I(f)$ à chaque fréquence. Pour chaque histogramme, nous calculons la bande crédible de 68%. Cette méthode est comparable à celle de BayesWave (voir la figure 7 de [159]). Les deux méthodes produisent les mêmes barres d'erreur, mais pour cela, nous devons supposer que les distributions postérieures sont gaussiennes. Le calcul de la somme quadratique des erreurs partielles donne une bonne estimation de l'erreur des chaînes issues du MCMC si les distributions postérieures des chaînes sont également gaussiennes.

On peut calculer la matrice de covariance des densités de spectres de puissance tels que

$$\langle PSD_I(f), PSD_J(f) \rangle = \mathcal{C}_{I,J}(\theta, f) \quad (3.71)$$

avec $I, J = [A, E, T]$. Ainsi dans le cas particulier d'un fond stochastique à deux composantes en loi puissance, il est possible de paramétrer un A-MCMC avec six paramètres : $\theta = (N_{acc}, N_{Pos}, \Omega_{GW\alpha}, \alpha)$. On peut calculer la matrice de covariance des données $(\tilde{d}_A(f), \tilde{d}_E(f), \tilde{d}_T(f))$

$$\mathcal{C}(\theta, f) = \begin{pmatrix} S_A + N_A & 0 & 0 \\ 0 & S_E + N_E & 0 \\ 0 & 0 & N_T \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

$$\mathcal{C}^{-1}(\theta, f) = K \begin{pmatrix} (S_A + N_A)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (S_E + N_E)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & N_T^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

et $K(f_k) = \det(\mathcal{C}) = \frac{1}{(S_A + N_A)(S_E + N_E)N_T}$. Nous utilisons la définition de la vraisemblance, dite de Whittle, de [211], et la log-vraisemblance est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{d}|\theta) &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \left[\sum_{I,J=[A,E,T]} \left(\sqrt{d_I(f)} (\mathcal{C}^{-1})_{IJ} \sqrt{d_J(f)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \ln(2\pi K(f_k)) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \left[\frac{d_A^2}{S_A + N_A} + \frac{d_E^2}{S_E + N_E} + \frac{d_T^2}{N_T} \right. \\ &\quad \left. + \ln(8\pi^3 (S_A + N_A)(S_E + N_E)N_T) \right] \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} F_{ab} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\mathcal{C}^{-1} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \theta_a} \mathcal{C}^{-1} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \theta_b} \right) \\ &= M \sum_{k=0}^N \left[\frac{\frac{\partial(S_A + N_A)}{\partial \theta_a} \frac{\partial(S_A + N_A)}{\partial \theta_b}}{2(S_A + N_A)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{\partial(S_E + N_E)}{\partial \theta_a} \frac{\partial(S_E + N_E)}{\partial \theta_b}}{2(S_E + N_E)^2} + \frac{\frac{\partial N_T}{\partial \theta_a} \frac{\partial N_T}{\partial \theta_b}}{2N_T^2} \right] \end{aligned} \quad (3.75)$$

Si nous avons le canal T égal à zéro et que nous considérons les deux canaux scientifiques A et E comme indépendants, nous obtenons :

$$F_{ab} = \frac{M}{2} \sum_{I=A,E} \sum_{k=0}^N \frac{\frac{\partial S_I(f) + N_I(f)}{\partial \theta_a} \frac{\partial S_I(f) + N_I(f)}{\partial \theta_b}}{(S_I(f) + N_I(f))^2} \quad (3.76)$$

avec $M = Df_b$ (D est la durée de la mission LISA et f_b la fréquence la plus élevée dans la bande de LISA). Nous avons un résultat comparable donné dans [222], l'inverse de la matrice d'information de Fisher sur la diagonale donne les incertitudes de l'estimation des paramètres. On voit ici l'importance d'estimer le canal de « bruit » T pour l'estimation du SGWB.

Dans la figure 3.3, nous affichons l'influence de la précision sur le paramètre ajusté par rapport à la valeur du fond cosmologique Ω_0 . Évidemment, nous comprenons que si le fond astrophysique est grand, il sera plus difficile de mesurer le fond cosmologique avec une grande précision.

Nous avons également mené une étude A-MCMC avec six paramètres : 2 pour le canal de bruit T , 2 pour le fond astrophysique et 2 pour le fond cosmologique. Nous

utilisons les données des deux canaux scientifiques, A et E , ainsi que le canal T . Étant donné le niveau d’amplitude du budget de bruit de LISA, du LISA Science Requirements Document [96], nous utilisons le bruit d’accélération $N_{acc} = 1.44 \times 10^{-48} \text{ s}^{-4}\text{Hz}^{-1}$ et la fluctuation de la longueur du chemin optique $N_{Pos} = 3.6 \times 10^{-41} \text{ Hz}^{-1}$. Nous faisons l’hypothèse que les données des canaux A et T sont indépendantes. Le bruit dans les deux canaux dépend des deux paramètres N_{pos} et N_{acc} . Nous visons à estimer les paramètres SGWB et de bruit simultanément en utilisant les données des deux canaux A, E et T via notre algorithme A-MCMC. Pour quatre magnitudes différentes du SGWB astrophysique, nous effectuons des analyses d’A-MCMC avec différentes valeurs pour l’amplitude du fond cosmologique ; voir tableau 3.2). L’A-MCMC est caractérisée par $\beta = 0.01$, $N = 4\,000\,000$ (voir section 3.2.3) et nous utilisons 2 000 échantillons pour estimer la matrice de covariance. Nous utilisons des distributions *a priori* à logarithmes uniformes avec 10 intervalles de magnitude pour les deux paramètres du canal de bruit [N_{Opt}, N_{Acc}] et pour les deux amplitudes de fond stochastique [$\Omega_{cosmo}, \Omega_{astro}$], un prior uniforme pour la pente entre -0.4 et 0.4 pour la pente cosmologique α_{cosmo} , et un prior uniforme entre 0.27 et 1.07 pour la pente astrophysique α_{astro} .

Nous notons à des fins de comparaison les résultats donnés dans [222] où les éléments diagonaux de l’inverse de l’information de Fisher F_{ab} fournissent les incertitudes des estimations des paramètres respectifs. La matrice d’information de Fisher est une matrice de blocs. En effet, nous avons une matrice 6×6 dans le cas du fond stochastique à deux composantes en loi puissance, en supposant que les paramètres soient indépendants. On peut ainsi distinguer deux zones indépendantes, la première venant de dérivées liées au bruit de LISA cela génère une matrice 2×2 , $N_{2 \times 2}$. La seconde zone correspond à une matrice 4×4 donnant les dérivées liées au SGWB, $S_{4 \times 4}$. Cette seconde matrice est la même que celle calculée dans la section 3.1.1. Donc nous avons :

$$F_{ab} = \left(\begin{array}{c|c} N_{2 \times 2} & 0 \\ \hline 0 & S_{4 \times 4} \end{array} \right) \quad (3.77)$$

Dans la figure 3.10, la ligne bleue correspond aux données pour $\theta = (N_{acc}, N_{Pos}, \Omega_{GW\alpha}, \alpha) = \left(1.44 \times 10^{-48} \text{ s}^{-4}\text{Hz}^{-1}, 3.6 \times 10^{-41} \text{ Hz}^{-1}, 3.55 \times 10^{-9}, \frac{2}{3} \right)$. Les données sont simulées avec le modèle de bruit de LISA de l’équation 3.66 avec un SGWB avec comme origine les binaires. La ligne verte est le modèle de bruit de LISA de [222]. L’A-MCMC est caractérisée par $\beta = 0.01$, $N = 1\,000\,000$ (voir section 3.2.3) et nous utilisons 2 000 échantillons pour estimer la matrice de covariance. Nous utilisons des priors log-uniformes avec 10 intervalles de magnitude pour les trois premiers paramètres et un prior uniforme pour la pente entre $-\frac{4}{3}$ et $\frac{8}{3}$. La ligne orange de la figure 3.10 affiche le résultat de l’A-MCMC, et en gris, l’erreur pour 1σ . La figure 3.11 affiche le tracé en coins de l’A-MCMC ;

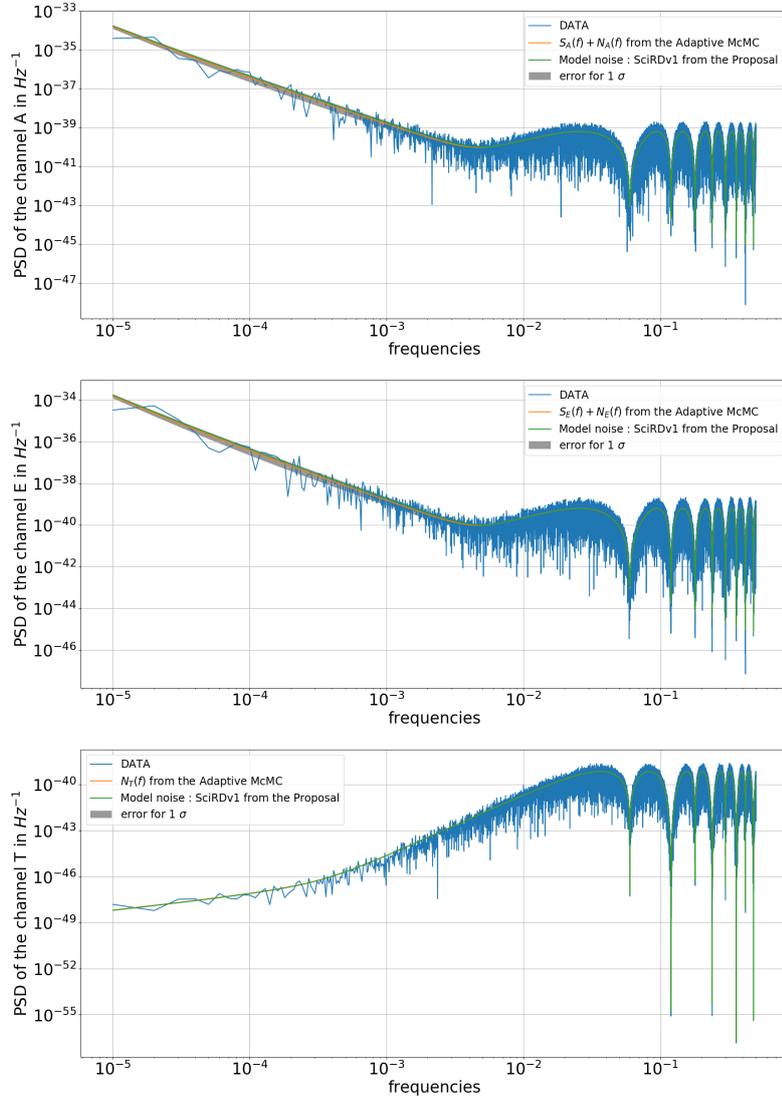


FIGURE 3.10 – Densité spectrale de puissance des canaux A , E et T du modèle de bruit de LISA [222] avec un SGWB astrophysique ($\Omega_{2/3} = 3.55 \times 10^{-9}$ à 25 Hz). Les figures montrent les densités spectrales de puissance : canal A en haut, E au milieu et T en bas. Les paramètres proviennent de la proposition [96]. La ligne orange est le modèle de bruit de LISA de [222], en vert, les valeurs de l’A-MCMC, et en gris, l’erreur 1σ .

les distributions postérieures sont bien approchées par des distributions gaussiennes. Nous avons la preuve d'un bon ajustement. L'estimation des amplitudes du niveau de bruit à partir de l'estimation paramétrique donne un résultat positif, car nous avons la possibilité d'ajuster le fond avec le niveau de bruit dans tout le domaine fréquentiel ; il est également possible d'avoir une estimation très efficace des différentes composantes du bruit grâce au signal T étant dépourvu de source de signal scientifique.

L'avantage de deux canaux scientifiques, A et E , par opposition à un, A ou E , est un facteur de $\sqrt{2}$ pour l'estimation de l'erreur, et donc pour la sensibilité globale. En effet, l'erreur de l'amplitude cosmologique est donnée par le coefficient (Ω_0, Ω_0) . C'est la racine carrée de l'inverse de la matrice d'information de Fisher. Nous avons pour un canal (A ou E), $\Delta\Omega_{0(A \text{ ou } E)} = \sqrt{F_{\Omega_0, \Omega_0(A \text{ ou } E)}^{-1}}$. Pour une combinaison de A et E , nous avons $\Delta\Omega_{0(A \text{ and } E)} = \frac{\Delta\Omega_{0(A \text{ ou } E)}}{\sqrt{2}}$, car les deux canaux se comportent de manière identique. Si nous modélisons le spectre des deux canaux A et E de la même manière, nous aurions $F_{a,b(A \text{ and } E)} = 2F_{a,b(A \text{ ou } E)}$.

Notez que dans la bande d'observation de LISA, au niveau de la limite de détection (50% d'erreur, ceci nous permet de définir l'amplitude cosmologique limite $\Omega_{Cosmo,lim}$) nous avons un ratio de $\frac{\Omega_{astro}}{\Omega_{Cosmo,lim}} = 5.29$ à 1 mHz et 1.15 à 0.1 mHz. L'importance de pouvoir distinguer deux fonds n'est pas l'amplitude absolue du fond, mais le rapport entre les magnitudes des deux fonds $\frac{\Omega_{astro}}{\Omega_{Cosmo,lim}}$. Pour un rapport plus petit, nous pouvons ajuster le fond cosmologique avec moins d'incertitude. À partir de la figure 3.12, nous pouvons séparer le fond cosmologique du fond astrophysique avec un rapport de magnitude de 4610 avec $\Omega_{astro} = 3.55 \times 10^{-9}$ et une fréquence de référence de 25 Hz. Ici, nous avons une incertitude d'ajustement de 50 %, qui est la limite pour effectuer une mesure. En effet, on peut envisager de réaliser une mesure du fond cosmologique si l'incertitude est inférieure à 50% ; notez la ligne pointillée sur la figure 3.12. Cet exemple correspond à un fond cosmologique de $\Omega_{Cosmo,lim} = 7.7 \times 10^{-13}$. Dans la figure 3.12, la même étude est présentée avec quatre valeurs pour le fond astrophysique : $\Omega_{astro} = 3.55 \times 10^{-8}$, 3.55×10^{-9} , 1.8×10^{-9} et 3.55×10^{-10} . Le même rapport produit des résultats similaires pour différentes entrées d'amplitude astrophysique. On obtient respectivement les limites pour contraindre le fond cosmologique : $\Omega_{Cosmo} = 7.8 \times 10^{-12}$, 7.8×10^{-13} , 3.6×10^{-13} et 7.6×10^{-14} . La valeur de ces résultats d'A-MCMC est donnée dans le tableau 3.2. Les figures 3.13 et 3.14 présentent des exemples respectifs de graphiques de coin et de distributions postérieures pour une exécution d'un A-MCMC à six paramètres avec $\Omega_{GW,Astro} = 3.55 \times 10^{-8}$ et $\Omega_{GW,Cosmo} = 1 \times 10^{-10}$, $\Omega_{GW,Astro} = 3.55 \times 10^{-9}$ et $\Omega_{GW,Cosmo} = 5 \times 10^{-12}$.

3.4.1 Limites

Dans cette section et notre premier article [49], nous présentons le potentiel de séparation des composantes spectrales des deux SGWB avec une méthode de MCMC adap-

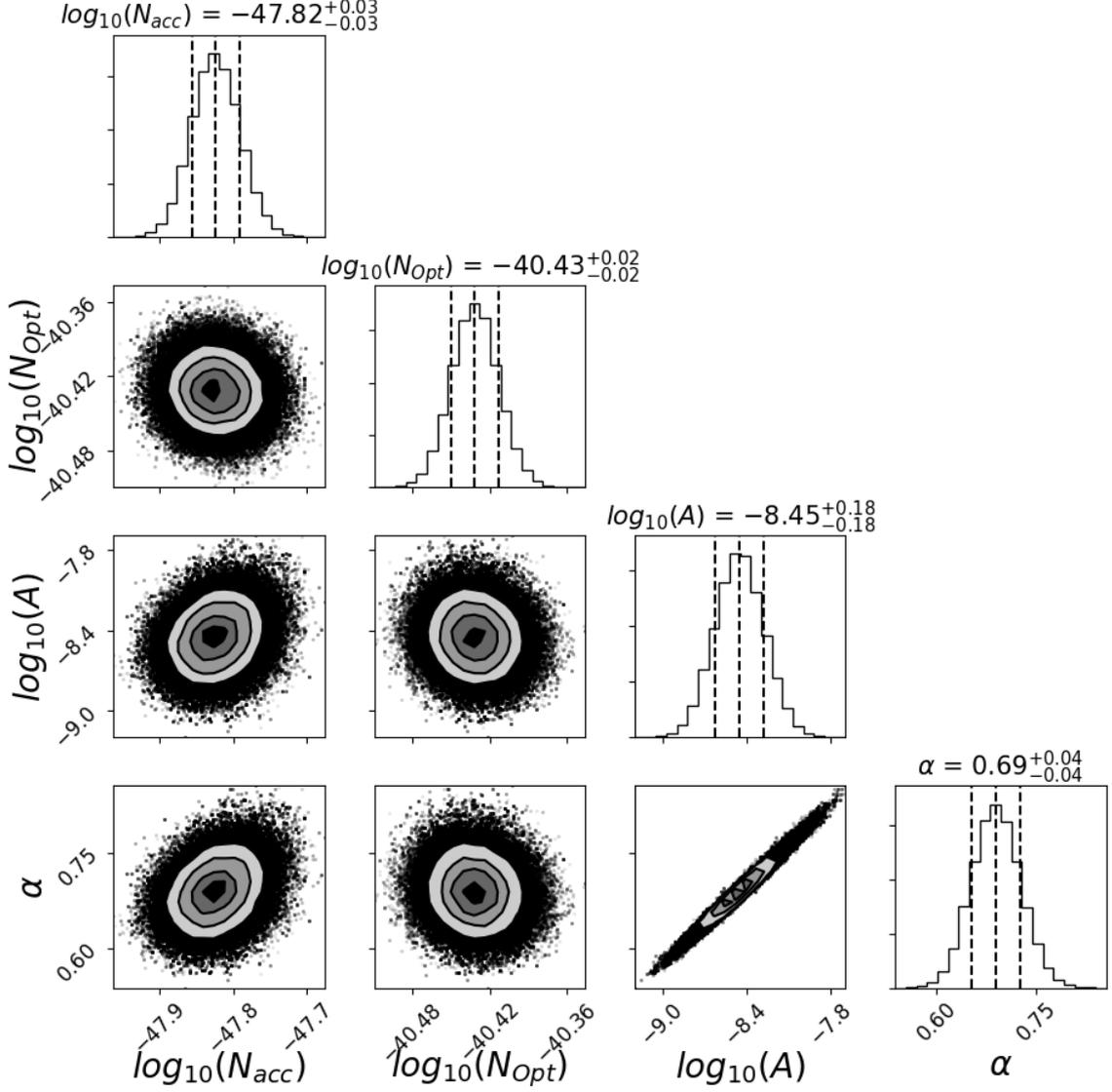


FIGURE 3.11 – Tracé d’angle ou en anglais *corner plot* pour le A-MCMC utilisant les canaux A , E et T . Les résultats concernent les deux magnitudes du modèle de bruit de LISA de la proposition [96], et un seul SGWB (amplitude et pente spectrale). Les lignes pointillées verticales sur la distribution postérieure représentent de gauche à droite les quantiles [16%, 50%, 84%]. Les valeurs *vraies* des paramètres sont $\theta = (N_{acc}, N_{Pos}, \Omega_{GW\alpha}, \alpha) = \left(1.44 \times 10^{-48} \text{ s}^{-4}\text{Hz}^{-1}, 3.6 \times 10^{-41} \text{ Hz}^{-1}, 3.55 \times 10^{-9}, \frac{2}{3}\right)$.

Input		Values of the A-MCMC			
$\Omega_0 \backslash \Omega_{Astro}$		3.55×10^{-8}	3.55×10^{-9}	1.8×10^{-9}	3.55×10^{-10}
	$1. \times 10^{-8}$	1.011×10^{-8}	9.982×10^{-9}	9.987×10^{-9}	9.992×10^{-9}
	$5. \times 10^{-9}$	5.014×10^{-9}	4.971×10^{-9}	5.007×10^{-9}	4.960×10^{-9}
	$2. \times 10^{-9}$	2.005×10^{-9}	1.984×10^{-9}	2.007×10^{-9}	2.083×10^{-9}
	$1. \times 10^{-9}$	9.972×10^{-10}	1.008×10^{-9}	1.046×10^{-9}	1.046×10^{-9}
	$5. \times 10^{-10}$	4.965×10^{-10}	4.975×10^{-10}	5.076×10^{-10}	4.956×10^{-10}
	$2. \times 10^{-10}$	2.002×10^{-10}	1.984×10^{-10}	1.976×10^{-10}	1.976×10^{-10}
	$1. \times 10^{-10}$	9.981×10^{-11}	1.065×10^{-10}	9.941×10^{-11}	1.003×10^{-10}
	$5. \times 10^{-11}$	5.013×10^{-11}	5.057×10^{-11}	5.058×10^{-11}	5.163×10^{-11}
	$2. \times 10^{-11}$	2.006×10^{-11}	2.014×10^{-11}	1.989×10^{-11}	2.016×10^{-11}
	$1. \times 10^{-11}$	1.001×10^{-11}	1.008×10^{-11}	1.002×10^{-11}	1.026×10^{-11}
	$5. \times 10^{-12}$	5.011×10^{-12}	4.959×10^{-12}	5.001×10^{-12}	5.024×10^{-12}
	$2. \times 10^{-12}$	2.196×10^{-12}	1.952×10^{-12}	1.948×10^{-12}	1.985×10^{-12}
	$1. \times 10^{-12}$	1.019×10^{-12}	1.064×10^{-12}	9.936×10^{-13}	1.013×10^{-12}
	$1. \times 10^{-13}$		9.891×10^{-14}	1.040×10^{-13}	9.936×10^{-14}
Input		errors (σ)			
$\Omega_0 \backslash \Omega_{Astro}$		3.55×10^{-8}	3.55×10^{-9}	1.8×10^{-9}	3.55×10^{-10}
	$1. \times 10^{-8}$	3.395×10^{-10}	3.057×10^{-10}	3.106×10^{-10}	2.588×10^{-10}
	$5. \times 10^{-9}$	1.754×10^{-10}	1.464×10^{-10}	1.506×10^{-10}	1.462×10^{-10}
	$2. \times 10^{-9}$	7.481×10^{-11}	5.600×10^{-11}	6.588×10^{-11}	5.492×10^{-11}
	$1. \times 10^{-9}$	4.480×10^{-11}	2.828×10^{-11}	3.196×10^{-11}	3.196×10^{-11}
	$5. \times 10^{-10}$	2.529×10^{-11}	1.497×10^{-11}	1.703×10^{-11}	1.385×10^{-11}
	$2. \times 10^{-10}$	1.394×10^{-11}	6.647×10^{-11}	8.251×10^{-12}	5.157×10^{-11}
	$1. \times 10^{-10}$	9.228×10^{-12}	5.322×10^{-12}	4.050×10^{-12}	3.048×10^{-12}
	$5. \times 10^{-11}$	7.078×10^{-11}	5.171×10^{-12}	2.879×10^{-12}	1.706×10^{-12}
	$2. \times 10^{-11}$	5.389×10^{-12}	2.558×10^{-12}	1.130×10^{-12}	8.457×10^{-13}
	$1. \times 10^{-11}$	4.269×10^{-12}	1.406×10^{-12}	5.902×10^{-13}	4.472×10^{-13}
	$5. \times 10^{-12}$	3.583×10^{-12}	9.843×10^{-13}	4.526×10^{-13}	2.556×10^{-13}
	$2. \times 10^{-12}$	3.001×10^{-12}	7.460×10^{-13}	3.190×10^{-13}	1.433×10^{-13}
	$1. \times 10^{-12}$	2.155×10^{-12}	5.119×10^{-13}	2.233×10^{-13}	1.040×10^{-13}
	$1. \times 10^{-13}$		2.002×10^{-13}	1.036×10^{-13}	4.054×10^{-14}

TABLE 3.2 – Résultats des simulations d’A-MCMC avec six paramètres (2 pour le bruit de LISA, 2 pour le fond astrophysique et 2 pour le fond cosmologique). Nous utilisons les données des canaux A , E et T . Les quatre colonnes de valeurs correspondent à la sortie de 13 exécutions d’A-MCMC. L’étude est menée en utilisant quatre valeurs pour l’amplitude du fond astrophysique après quatre ans d’observation : 3.55×10^{-8} , 3.55×10^{-9} , 1.8×10^{-9} et 3.55×10^{-10} . Et, respectivement, la même chose pour les colonnes d’erreur. Les estimations d’erreurs proviennent des distributions a posteriori.

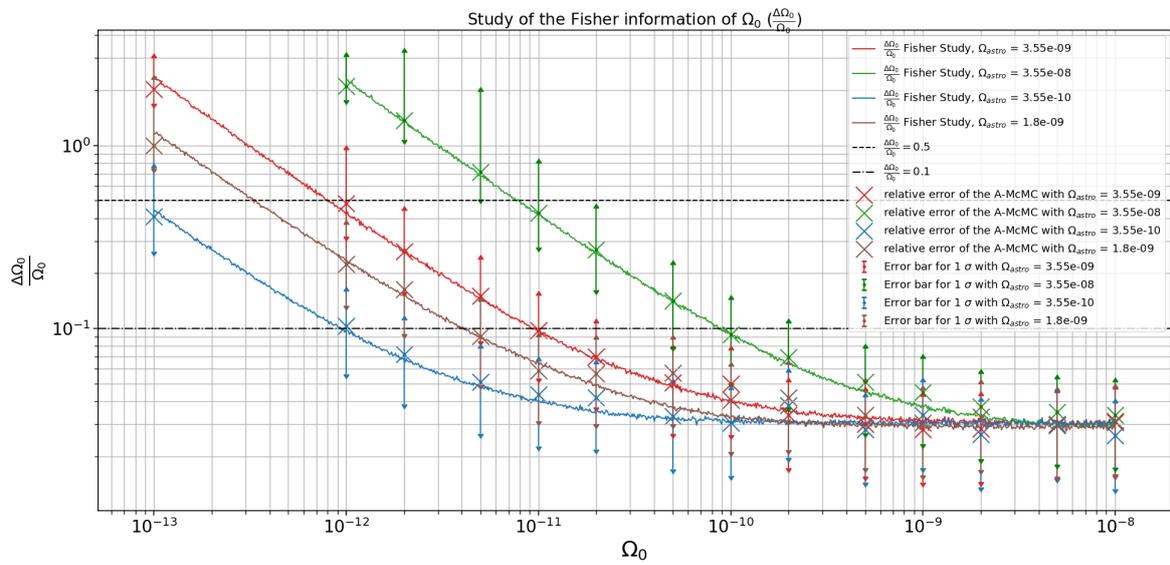


FIGURE 3.12 – Incertitude de l’estimation du paramètre Ω_0 (l’amplitude de la densité spectrale d’énergie sans dimension du SGWB cosmologique) de l’étude de l’information de Fisher (affichée avec des lignes pleines), et de l’estimation paramétrique de l’A-MCMC (nuages de points) pour le canal A et E , avec le canal de bruit T . Nous menons l’étude avec des valeurs différentes pour la magnitude astrophysique Ω_{astro} . Il y a des barres d’erreur pour les quatre séries d’analyses d’A-MCMC ; voir équation 3.56. La ligne horizontale en pointillés représente le niveau d’erreur de 50 %. C’est la limite fixée où il est possible d’observer le SGWB cosmologique. La ligne semi-traitée représente l’erreur de 10 %.[49]

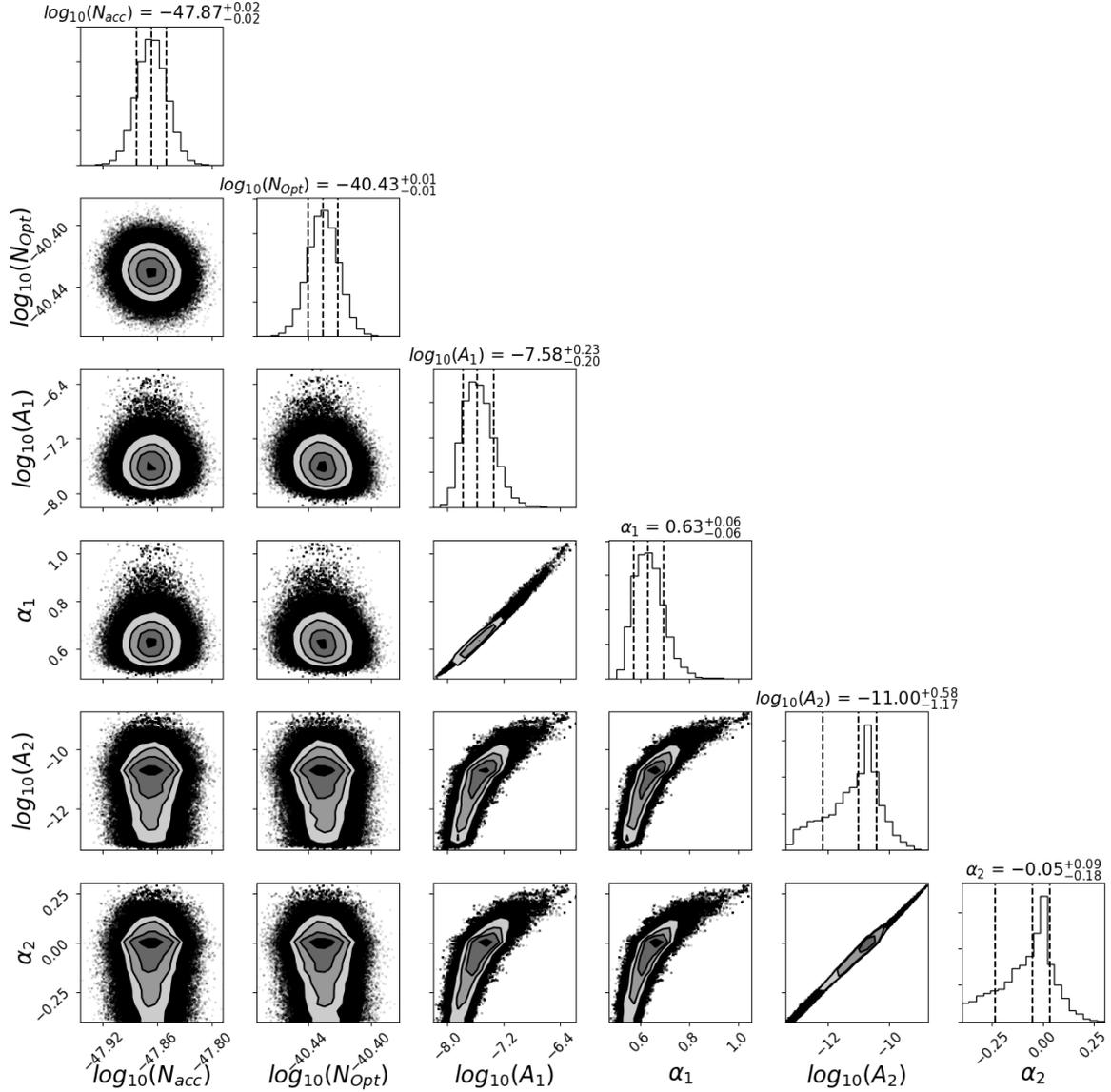


FIGURE 3.13 – Graphique en coin donnant les distributions postérieures générées par l’A-MCMC pour une exécution avec six paramètres avec $\Omega_{GW,Astro} = 3.55 \times 10^{-8}$, $\alpha_{Astro} = 2/3$, $\Omega_{GW,Cosmo} = 1 \times 10^{-11}$ et $\alpha_{Cosmo} = 0$. Les lignes pointillées sur les distributions postérieures représentent de gauche à droite les quantiles [16%, 50%, 84%]. Il s’agit d’une série d’utilisations des données des canaux A , E et T . Ces résultats sont présentés dans le tableau 3.2 et également dans la figure 3.12. Ainsi pour ce calcul, l’algorithme de MCMC nous donne $\Omega_{Cosmo} = 1.001 \times 10^{-11} \pm 4.269 \times 10^{-12}$

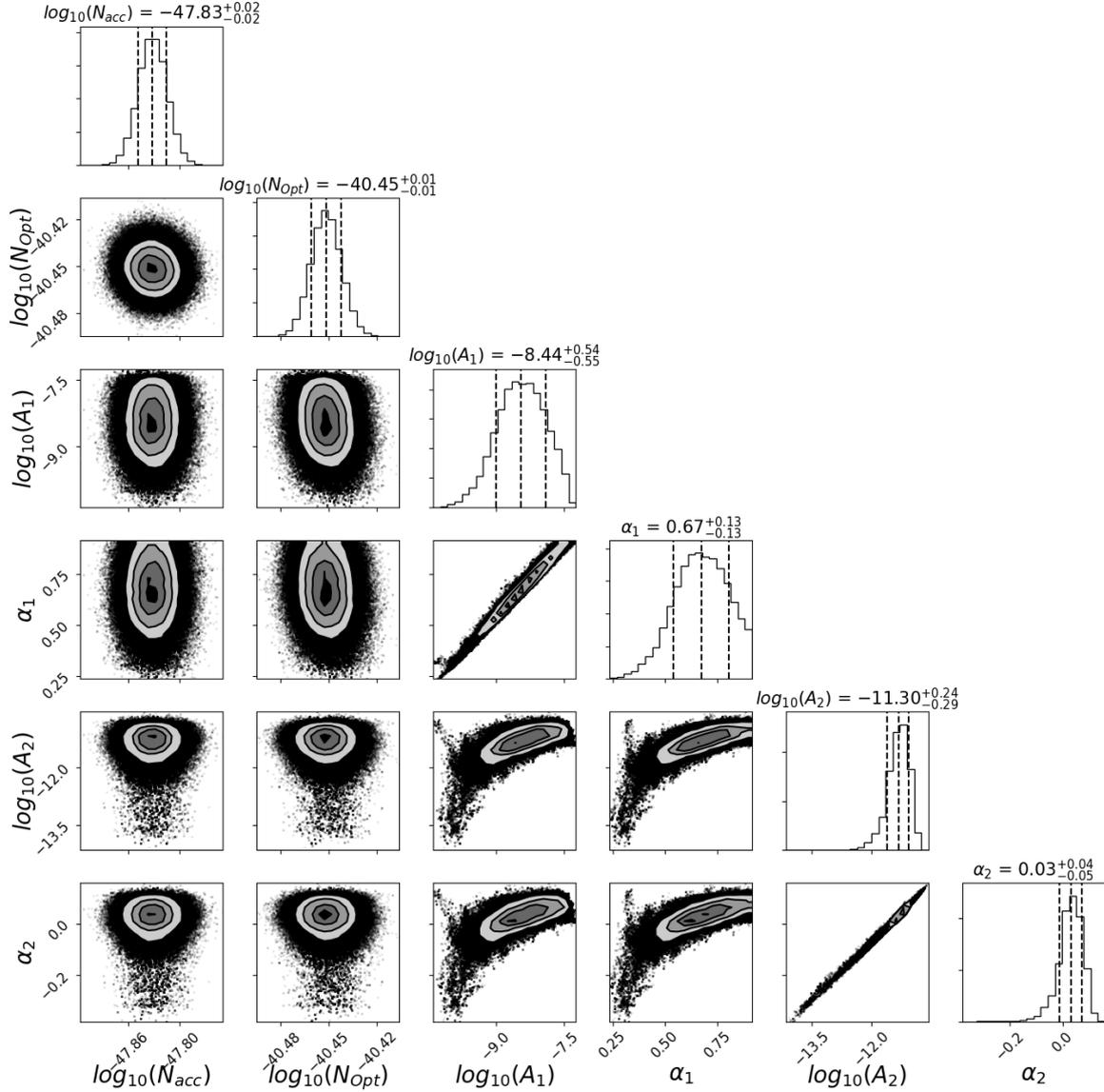


FIGURE 3.14 – Graphique en coin donnant les distributions postérieures générées par l’A-MCMC pour une série de 6 paramètres, avec $\Omega_{GW,Astro} = 3.55 \times 10^{-9}$ et $\Omega_{GW,Cosmo} = 5 \times 10^{-12}$. Les lignes pointillées verticales sur la distribution postérieure représentent de gauche à droite les quantiles [16%, 50%, 84%]. Il s’agit d’une exécution utilisant les données des canaux A , E et T . Ces résultats sont présentés dans le tableau 3.2, ainsi que dans la figure 3.12. Ainsi pour ce calcul, l’algorithme de MCMC nous donne $\Omega_{Cosmo} = 4.959 \times 10^{-12} \pm 9.843 \times 10^{-13}$

tatives. Nous mettons également en œuvre une étude d’information de Fisher, prédisant l’incertitude de mesure à partir de l’analyse A-MCMC et notamment qui dépend de notre choix de vraisemblance initiale. Les deux études indépendantes produisent des résultats cohérents. Nous avons obtenu une incertitude de l’ordre de 1 pour le niveau le plus bas ($\Omega_0 = 1 \times 10^{-12}$) et de l’ordre de 0.03 pour le niveau le plus haut ($\Omega_0 = 1 \times 10^{-8}$). Par exemple, avec un fond astrophysique de $\Omega_{GW,Astro} = 3.55 \times 10^{-9} \left(\frac{f}{25 \text{ Hz}}\right)^{2/3}$ un fond cosmologique à $\Omega_{GW,Cosmo} = 7.6 \times 10^{-13}$ peut-être détecté et séparé. Cela correspond à une incertitude $\frac{\Delta\Omega_0}{\Omega_0}$ de 0.5 (ligne pointillée sur la figure 3.12). L’étude présentée dans la section 3.2.3 montre la possibilité d’ajuster les composantes paramétriques du SGWB.

Dans la partie 3.4, nous avons discuté et démontré la possibilité d’analyser le canal ‘noise’ (le canal T) pour s’adapter aux paramètres de bruit du budget de bruit de LISA. L’avantage de cette méthode est d’augmenter l’efficacité des estimations des paramètres et d’utiliser le domaine fréquentiel total [1×10^{-5} Hz, 1 Hz]. Nous appliquons également une étude d’information de Fisher au bruit de LISA. D’après la figure 3.12 nous montrons la possibilité de séparer les deux SGWB avec une séparation spectrale avec un facteur de 4610 (pour $f_{ref} = 25 \text{ Hz}$). En utilisant une plage réaliste pour la magnitude prédite du SGWB produit astrophysiquement, les méthodes démontrées qu’il est possible pour LISA d’observer également un SGWB produit cosmologiquement dans la plage de $\Omega_{GW,Cosmo} \approx 1 \times 10^{-12}$ à 1×10^{-13} .

Nous notons certaines limites dans cette étude et donnons quelques points sur lequel nous allons travailler dans la suite de ce manuscrit. En effet, nous supposons qu’il n’y a aucune différence dans les niveaux de bruit sur chaque satellite. Selon [11], il est possible d’inclure une telle variation de bruit pour chaque engin spatial. Il sera important d’aborder des modèles plus détaillés à la fois du bruit de LISA et des contributions astrophysiques et cosmologiques au fond stochastique.

Chapitre 4

Étude du fond stochastique cosmologique dans un contexte de premier plan galactique

4.1 Paramétrisation de l'étude du premier plan galactique dans un contexte de bruit de LISA et d'autres SGWB (astrophysique et cosmologique)

Dans ce contexte particulier de l'étude de la séparation spectrale, nous définirons le fond astrophysique de GW provenant des objets compacts non résolus avec les estimations de [68], $\Omega_{GW,astro}(f) = 4.4 \times 10^{-12} \left(\frac{f}{3\text{mHz}}\right)^{2/3}$. L'amplitude du fond cosmologique est un paramètre libre, et notre objectif est de déterminer dans quelle mesure LISA fournira une estimation de ce paramètre compte tenu du fond astrophysique et du premier plan galactique, en plus du bruit du détecteur LISA.

Ainsi, nous introduisons le fond stochastique suivant :

$$\begin{aligned}\Omega_{GW}(f) &= \Omega_{GW,DWD}(f) + \Omega_{GW,astro}(f) + \Omega_{GW,cosmo}(f) \\ &= \frac{A_1 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_1}}{1 + A_2 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_2}} + \Omega_{Astro} \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_{Astro}} \\ &\quad + \Omega_{Cosmo} \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_{Cosmo}}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Nous utilisons les mêmes développements mathématiques de traitements de données basés sur une étude de Fisher et de MCMC adaptatif. Nous avons discuté précédemment de l'origine ainsi que du calcul du fond stochastique d'origine galactique en utilisant une population de naines blanches (lire section 2.5). Les populations comprennent des

distributions de naines blanches qui ne sont pas homogènes en nombre de binaires pour des gammes de fréquences différentes. En effet, nous avons montré que le nombre de sources diminue pour des fréquences plus importantes. Il y a donc un manque de sources à hautes fréquences. En effet, l'énergie orbitale et la taille des sources ne permettent pas d'avoir beaucoup de sources à hautes fréquences. Ainsi, la densité spectrale d'énergie de ce type de signal doit donc décroître à hautes fréquences, tout en conservant les propriétés de distribution d'énergie des systèmes binaires démontrée dans la section 2.4.7. Ce résultat est un invariant, ce qui les différencie, c'est la position de la brisure de la loi puissance et l'amplitude globale du fond. Ainsi, nous avons besoin d'un modèle de loi puissance cassée pour le premier plan galactique. De plus, nous avons déjà défini deux autres fonds stochastiques dans LISA.

Notre modèle contient dix paramètres inconnus : $\theta = (N_{acc}, N_{Pos}, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2, \Omega_{Astro}, \alpha_{Astro}, \Omega_{Cosmo}, \alpha_{Cosmo})$. Nous calculons la propagation des incertitudes pour les densités spectrales de puissance avec la méthode des dérivées partielles. Ainsi, nous pouvons estimer l'incertitude induite sur la PSD résultant de l'incertitude d'estimation de θ , $dPSD = \sqrt{\sum_{\theta} \left(\frac{\partial PSD}{\partial \theta}\right)^2 d\theta^2}$. On obtient alors pour les trois composantes du SGWB : $\Omega_{GW,Astro}(f) = \Omega_{Astro} \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_{Astro}}$, $\Omega_{GW,Cosmo}(f) = \Omega_{Cosmo} \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_{Cosmo}}$ and $\Omega_{DWD}(f) = \frac{A_1 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_1}}{1 + A_2 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_2}}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} dPSD_I = \left[N_I(0, dN_{acc}, f)^2 + N_I(dN_{pos}, 0, f)^2 \right. \\ \quad + S_I(\Omega_{Astro}, \alpha_{Astro}, \Omega_{Cosmo}, \alpha_{Cosmo}, f)^2 \left(d\Omega_{Cosmo}^2 \right. \\ \quad + d\Omega_{Astro}^2 + \ln \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^2 \left(\Omega_{Astro}^2 d\alpha_{Astro}^2 \right. \\ \quad \left. \left. + \Omega_{Cosmo}^2 d\alpha_{Cosmo}^2 \right) \right) + S_{DWD}^2(f) \left(\left(\frac{dA_1}{A_1} \right)^2 + \ln \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^2 \right. \\ \quad \left. \left. \times d\alpha_1^2 + (A_2^2 d\alpha_2^2 + dA_2^2) \left(\frac{\left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_2}}{1 + A_2 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_2}} \right)^2 \right) \right]^{1/2} \\ dPSD_T = \left[N_T(0, dN_{acc}, f)^2 + N_T(dN_{pos}, 0, f)^2 \right]^{1/2} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

avec $I = A, E$ et $[dN_{acc}, dN_{pos}, d\Omega_{astro}, d\alpha_{astro}, d\Omega_{cosmo}, d\alpha_{cosmo}, dA_1, d\alpha_1, dA_2, d\alpha_2]$ sont les écarts types de la distribution postérieure, qui est supposée gaussienne.

4.2 Mesure de l'amplitude des naines blanches doubles dans le cadre de la modulation orbitale induit par LISA

Dans cette section, nous nous concentrons sur la mesure de l'amplitude du signal d'ondes gravitationnelles provenant de notre galaxie [88]. À la lumière de la forme d'onde (voir figure 2.20), nous notons que si nous voulons l'estimer correctement, nous devons tenir compte du mouvement orbital de la constellation LISA. La forme d'onde est modulée en amplitude et cette modulation provient de l'anisotropie du premier plan galactique. La réponse de LISA dépend de son diagramme d'antenne ; la réponse n'est pas homogène sur le ciel. À un instant donné, la réponse de LISA est maximale pour des sources localisées sur la ligne orthogonale passant par le centre du triangle que forme la constellation LISA. C'est comme une "ligne de mire". La constellation LISA est également en orbite autour du soleil et tourne sur elle-même. La ligne de mire ne pointe pas toujours dans la même direction. Si le fond stochastique est isotrope, l'amplitude détectée est constante dans le temps.

Nous avons découpé la forme d'onde en petites sections temporelles, 50 par an, c'est-à-dire presque une par semaines et supposons que la forme d'onde est approximativement constante dans ces sections. Pour chaque section, nous calculons l'écart type du signal.

Il est alors possible de calculer l'amplitude de la densité spectrale d'énergie, comme avec les méthodes de [232] :

$$\Omega_{Mod,i} = \frac{4\pi^2}{3H_0} \left(\frac{c}{2\pi L} \right)^2 A_i^2 \quad (4.3)$$

où $\Omega_{Mod,i}$ est l'amplitude de la densité d'énergie spectrale du premier plan galactique aux basses fréquences pour la section i de la forme d'onde ; ceci est le tracé correspondant à une année sur la figure 4.1, et la modulation de l'orbite LISA est apparente. Ici A_i est l'amplitude de la déformation caractéristique de la section i si l'on considère la déformation caractéristique de la section i comme $h_{c,i} = A_i \left(\frac{f^2 \pi L}{c} \right)^\alpha$, et la relation entre la densité spectrale de puissance $S_{h,i}(f)$ de la série temporelle $h_i(t)$ et la densité spectrale d'énergie de la section i , $\Omega_{GW,i}$ est $S_{h,i}(f) = \frac{3H_0^2}{4\pi^2} \frac{\Omega_{GW,i} \mathcal{R}(f)}{f^3}$, où $\Omega_{GW,i} = \Omega_{Mod,i} \left(\frac{f^2 \pi L}{c} \right)^{2\alpha+2}$. L'objectif est d'estimer le niveau de l'amplitude et de calculer la contribution galactique comme la somme de tous les signaux stochastiques de fond et de bruit de LISA.

La courbe grise de la figure 4.1 est l'amplitude de la densité spectrale d'énergie calculée avec cette méthode. Nous avons découpé la série temporelle d'un an en 1500 sections. On observe la modulation d'amplitude. En effet, elle est toujours maximale lorsque LISA pointe vers le centre de notre Galaxie. La ligne bleue correspond à la moyenne des 1500 estimations de l'amplitude des DWD. La courbe violette est l'estimation de l'amplitude

des binaires de naines blanches pour la forme d'onde totale d'un an.

Comme dans la figure 2 de l'article d'Adams et Cornish de 2014 [12], nous mesurons l'amplitude du premier plan galactique pour 50 sections pour un signal d'une durée d'un an. Afin d'étudier la séparation spectrale du fond stochastique, nous ajoutons le bruit de LISA [222] et un fond astrophysique [68] au premier plan galactique et estimons les 8 paramètres avec un A-MCMC. Nous utilisons la même description que dans la section 4.1, mais sans fond cosmologique (cas $\Omega_{GW,cosmo} = 0$) Le nuage de points rouges sur la figure 4.1 est l'estimation de l'amplitude du premier plan galactique dans l'approximation basses fréquences basée sur 50 exécutions d'A-MCMC. Nous partitionnons la forme d'onde (voir figure 2.21) en 50 sections, et pour chaque section, nous calculons le périodogramme et la densité spectrale d'énergie du SGWB dans le contexte du bruit de LISA et du fond astrophysique. Nous estimons les paramètres du modèle de l'équation 3.66 en utilisant l'équation 4.7 pour l'amplitude du SGWB de DWD aux basses fréquences.

Avec cette méthode, nous mesurons l'amplitude de la densité d'énergie spectrale du premier plan galactique à différentes périodes de l'année. Ainsi, la modulation observée est un effet de la mesure de LISA avec son diagramme d'antenne. Pour chaque section i , nous supposons que le diagramme d'antenne de LISA est constant. La forme d'onde de la section i est :

$$s_i(t) = h_{+,i}(t)F_{+,i} + h_{\times,i}(t)F_{\times,i}. \quad (4.4)$$

La densité d'énergie spectrale de la forme d'onde s_i devient :

$$\begin{aligned} S_{s_i}(f) &= \tilde{s}_i \tilde{s}_i^*(f) = \tilde{h}_{+,i} \tilde{h}_{+,i}^*(f) F_{+,i}^2 + \tilde{h}_{\times,i} \tilde{h}_{\times,i}^*(f) F_{\times,i}^2 \\ &= S_h(f) (F_{+,i}^2 + F_{\times,i}^2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

avec $S_h(f) = 2\tilde{h}_{+,i} \tilde{h}_{+,i}^*(f) = 2\tilde{h}_{\times,i} \tilde{h}_{\times,i}^*(f)$. Pour chaque section, nous produisons l'estimation de l'amplitude des binaires de naines blanches modulées aux basses fréquences. De plus, chaque section correspond à une partie différente de l'année. On peut ainsi mesurer l'effet orbital du changement sur l'année entière :

$$\Omega_{Mod,i} = \Omega_{DWD,LF}^u (F_{+,i}^2 + F_{\times,i}^2) \quad (4.6)$$

où $\Omega_{DWD,LF}^u$ est l'amplitude non modulée de la densité spectrale d'énergie du premier plan galactique aux basses fréquences. L'erreur est donnée par l'écart type estimé à partir des distributions postérieures des chaînes.

Pour illustré notre propos, nous considérons un exemple, dans la figure 4.2, nous traçons les résultats des 50 Exécutions d'A-MCMC, à savoir la section 30 de la forme d'onde. Les lignes bleues sont les trois périodogrammes pour les canaux de données A , E , et T avec $N_{acc}, N_{Pos} = \left(1.44 \cdot 10^{-48} \text{ s}^{-4} \text{ Hz}^{-1}, 3.6 \cdot 10^{-41} \text{ Hz}^{-1}\right)$. Nous estimons les deux magnitudes de bruit de LISA et les six paramètres du fond stochastiques ($A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2$)

pour le fond galactique et $(\Omega_{GW,Astro}, \alpha_{Astro})$ pour la composante astrophysique. Nous utilisons des priors log-uniformes avec cinq magnitudes pour les cinq paramètres d'amplitude $(N_{acc}, N_{Pos}, A_1, A_2, \Omega_{GW,Astro})$ et des priors uniformes pour les pentes spectrales $(p(\theta) = \prod_i U(\theta_i, a_i, b_i))$.

Les paramètres d'A-MCMC sont fixés à $\beta = 0.01$, $N = 200\,000$, et nous utilisons 100 échantillons pour estimer la matrice de covariance. Les lignes oranges représentent le bruit de LISA et la densité spectrale d'énergie des SGWBs (voir 3.66). Les lignes vertes sont les résultats de l'A-MCMC, et en gris, les erreurs à 1σ . La figure 4.3 montre le tracé en coins de la ligne orange d'A-MCMC dans la figure 4.2; les distributions postérieures marginales sont symétriques.

Il est également possible d'avoir des estimations très efficaces des différentes composantes du bruit grâce au signal du canal T étant nominalelement dépourvu de signaux d'ondes gravitationnelles. Nous avons vérifié que sur l'année de données et les 50 résultats A-MCMC que les paramètres furent constants, à l'exception du paramètre A_1 , qui varie en raison de la modulation orbitale telle que le montre la figure 4.5 de toutes les grandeurs estimer pour mesurer la modulation du premier plan galactique.

	$\Omega_{GW,Astro}$	α_{Astro}	$\Omega_{DWD,LF}$	$\alpha_{DWD,LF}$
μ	4.38×10^{-12}	0.66	2.01×10^{-9}	0.66
σ	2.35×10^{-13}	0.08	1.34×10^{-9}	0.1

TABLE 4.1 – Résultat de l'exécution N°30 des 50 résultats (voir figure 4.5) d'estimation des paramètres des exécutions d'A-MCMC pour une année de données avec une entrée de SGWB de $\Omega_{GW,astro} = 4.4 \times 10^{-12} \left(\frac{f}{3 \text{ mHz}}\right)^{2/3}$, et le premier plan galactique de [154]. Dans la figure 4.3, les lignes rouges correspondent aux vraies valeurs. À basses fréquences, nous nous attendions à une pente en $2/3$, ce qui semble être mesuré.

	$\Omega_{GW,Astro}$	α_{Astro}	$\Omega_{DWD,LF}$	$\alpha_{DWD,LF}$
μ	4.46×10^{-12}	0.65	5.67×10^{-9}	0.68
σ	1.2×10^{-13}	0.04	3.89×10^{-9}	0.06

TABLE 4.2 – 50 résultats d'estimation des paramètres d'A-MCMC pour une année de données avec une entrée de fond stochastique astrophysique de $\Omega_{GW,astro} = 4.4 \times 10^{-12} \left(\frac{f}{3 \text{ mHz}}\right)^{2/3}$, et le premier plan binaire galactique de DWD de [154]. Dans la figure 4.7, les lignes rouges correspondent aux vraies valeurs. À basses fréquences, nous nous attendions à une pente en $2/3$, ce qui semble également être mesuré sur le signal total.

Aux basses fréquences, le modèle de la loi puissance brisée de la densité spectrale d'énergie du premier plan galactique (voir équation 2.84) peut être approximé par une fonction de loi de puissance, pour le premier plan des binaires de naines blanches avec la pente $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2}{3}$. Pour $1 \ll A_2 \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_2}$ (basses fréquences : LF (Low frequency en

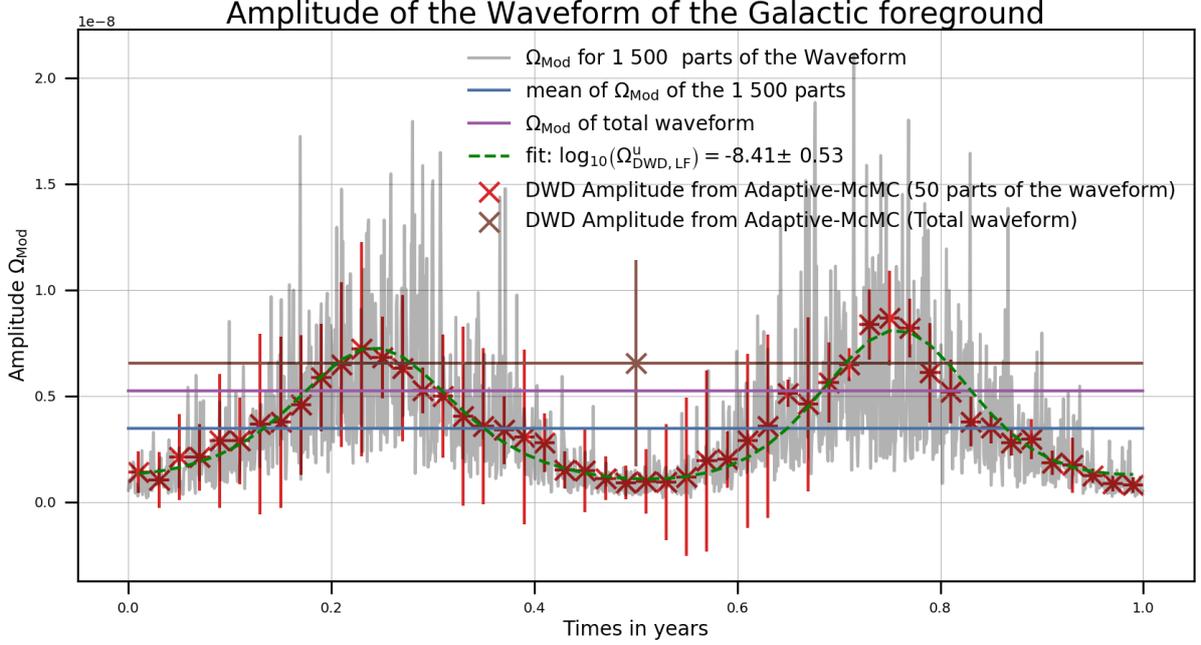


FIGURE 4.1 – Mesure de la modulation orbitale de l’amplitude DWD. En gris : 1500 estimations de l’amplitude $\Omega_{Mod,i} = \frac{4\pi^2}{3H_0^2} \left(\frac{c}{2\pi L}\right)^2 A_i^2$, où A_i est l’amplitude caractéristique des ondes gravitationnelles de la section i h_i de la forme d’onde totale. La ligne bleue est la moyenne des 1500 estimations de l’amplitude. En violet, l’amplitude Ω_{Mod} pour la forme d’onde totale (durée un an). Ceci correspond à l’estimation de l’amplitude de la densité spectrale d’énergie des DWD, mais exprimée sous forme de série temporelle. En rouge : les 50 estimations de l’amplitude de DWD générées par l’A-MCMC calculées à partir des estimations à 8 paramètres (BBH + DWD + bruit de LISA). La croix brune est l’estimation de l’amplitude de la densité spectrale d’énergie du premier plan galactique pour la limite de hautes fréquences générée avec l’algorithme de MCMC adaptatif. Nous adaptons également les 50 estimations d’amplitudes provenant de l’A-MCMC avec une méthode des moindres carrés pour estimer la modulation à partir du diagramme d’antenne de LISA et l’amplitude "réelle" du premier plan galactique aux basses fréquences $\log_{10}(\Omega_{DWD,LF}^u) = -8.41 \pm 0.53$ (voir l’équation 4.6 et figure 4.6) pour une fréquence de référence (voir l’équation. 4.1) de 3 mHz (ligne pointillée verte).

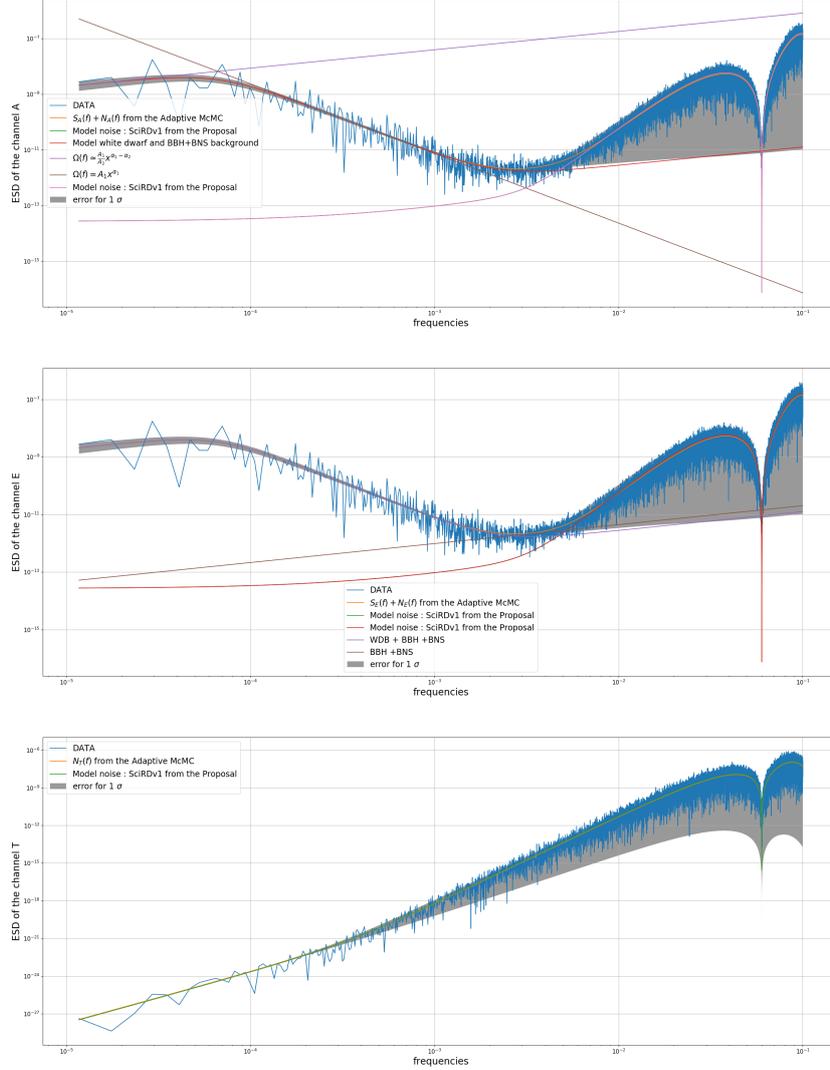


FIGURE 4.2 – Densité spectrale d'énergie pour les canaux A , E et T de la section 30 sur 50. Les estimations sont faites pour les deux grandeurs du modèle de bruit de LISA à partir de la proposition [38], la modulation des naines blanches doubles du premier plan galactique et le fond astrophysique, avec un A-MCMC de 8 paramètres (BBH + DWD + bruit de LISA)

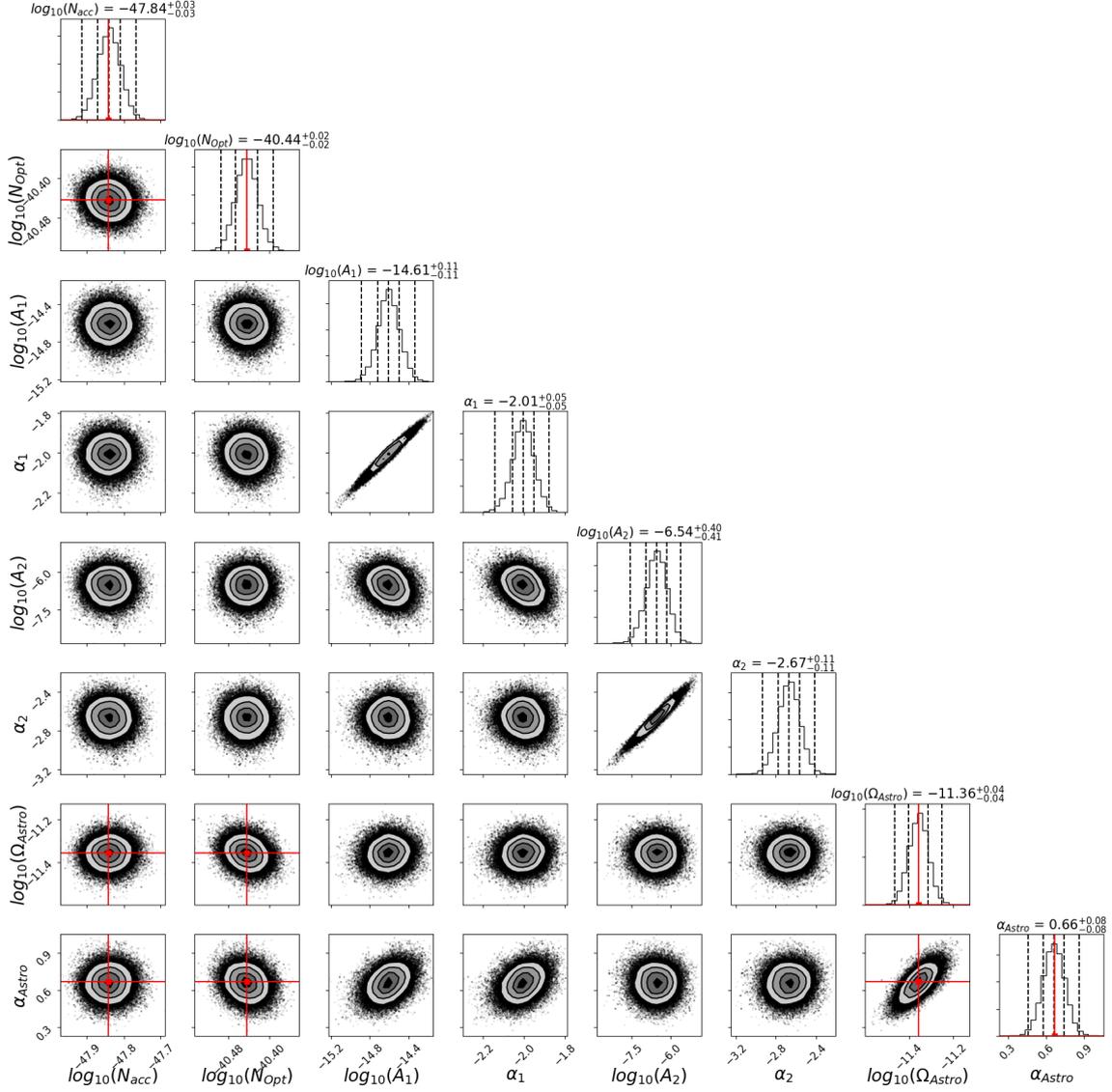


FIGURE 4.3 – Graphique en coin du MCMC adaptatif de 8 paramètres (BBH/BNS + WD Section N°30 + bruit de LISA) utilisant les canaux A , E et T . Les résultats concernent les deux magnitudes du modèle de bruit de LISA de la proposition [38], la loi puissance du SGWB (amplitude et pente spectrale) et le premier plan galactique (deux magnitudes et deux pentes). Les lignes pointillées verticales sur la distribution postérieure représentent de gauche à droite les quantiles [16%, 50%, 84%]. Les lignes rouges sont les "vraies" valeurs des paramètres.

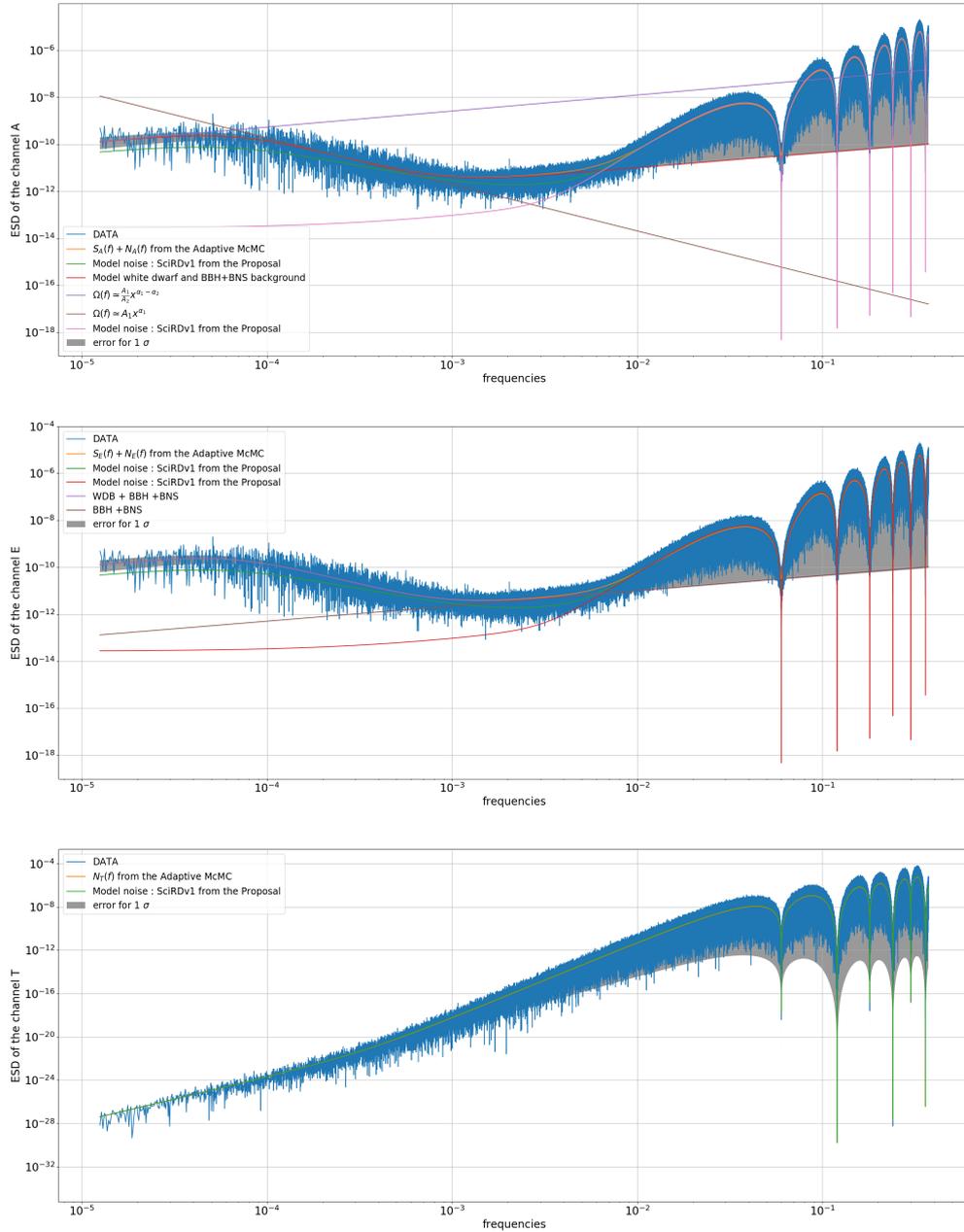


FIGURE 4.4 – Densité spectrale d’énergie pour les canaux A , E et T à partir de la forme d’onde totale. Des estimations sont faites pour les deux grandeurs du modèle de bruit de LISA à partir de la proposition [38], la modulation du premier plan galactique et le fond astrophysique avec un A-MCMC de 8 paramètres (BBH + WD + bruit de LISA). Un an de données a été utilisé.

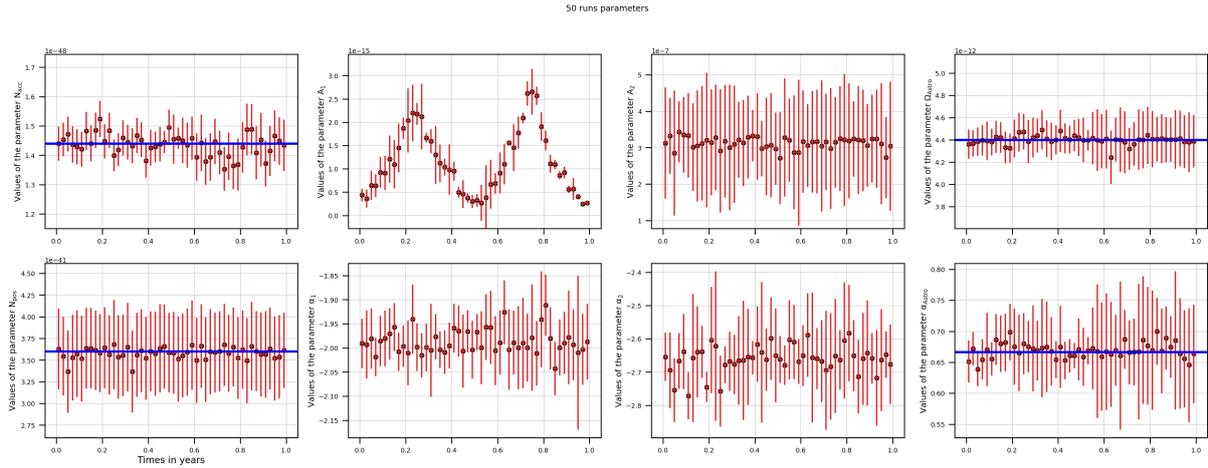


FIGURE 4.5 – Résultats des 8 paramètres estimés par les 50 MCMC adaptatifs. Seulement le paramètre A_1 semble être affecté par la modulation orbitale de LISA.

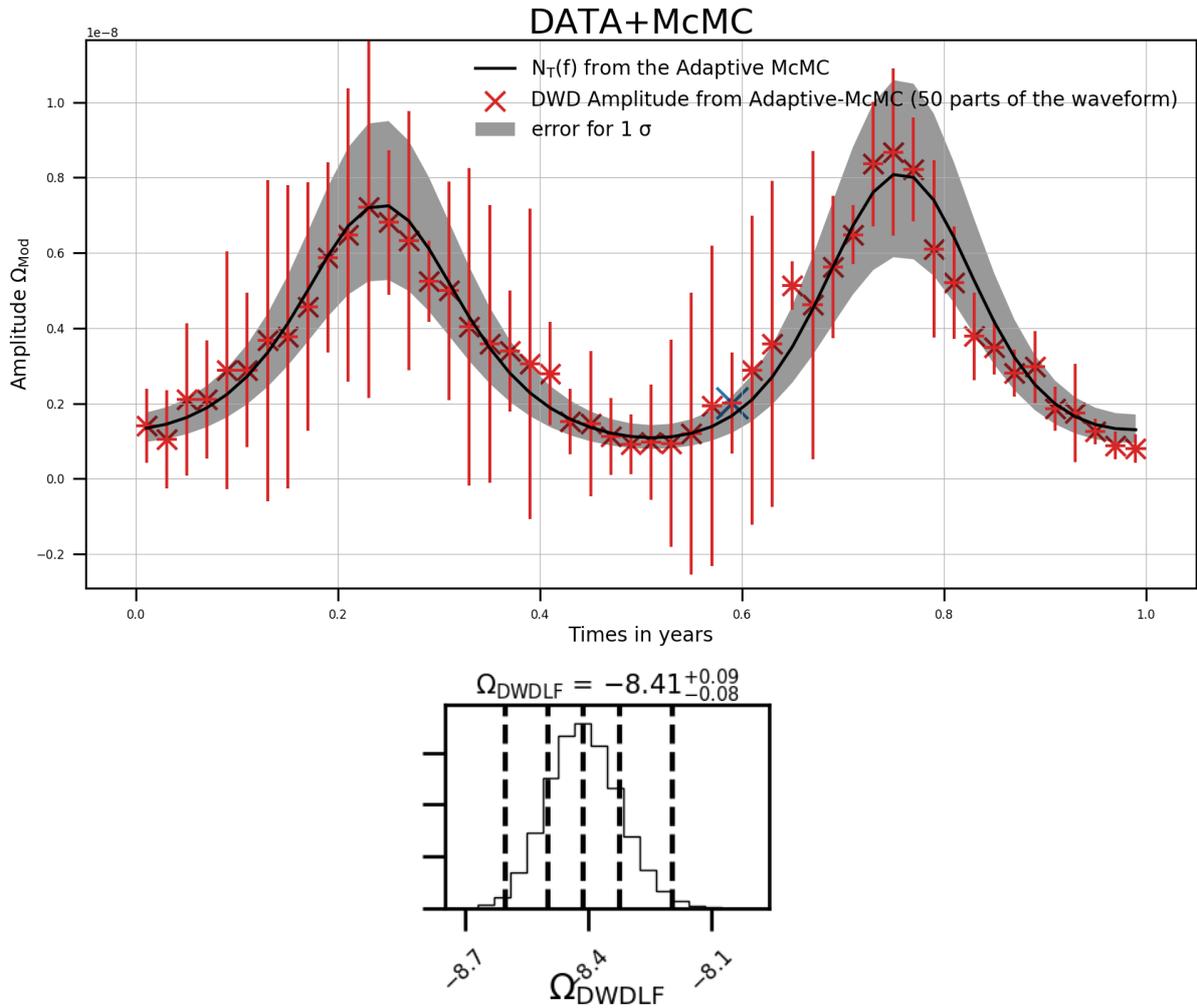


FIGURE 4.6 – Résultat de l’ajustement de la modulation produit par le *pattern d’antenne* de LISA avec un MCMC, ce résultat est compatible avec notre ajustement réalisé avec la méthode des moindres carrés

anglais) :

$$\Omega_{DWD,LF}(f) \approx \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (4.7)$$

La figure 4.1 avec la ligne verte en pointillés est une estimation de l'amplitude de DWD modulée de l'équation 4.6 à partir des 50 analyses d'A-MCMC. Nous mesurons l'amplitude de la densité spectrale d'énergie du premier plan galactique à basses fréquences $\Omega_{DWD,LF}^u = (3.9 \pm 1.14) \times 10^{-9}$ pour une fréquence de référence 3 mHz. Nous utilisons la méthode des moindres carrés `scipy.optimize.curve_fit` pour ajuster l'équation 4.6 pour estimer l'amplitude du premier plan galactique aux basses fréquences [240]. L'entrée de l'approximation des moindres carrés est l'amplitude des DWD modulée aux basses fréquences (voir l'équation 4.7). Nous utilisons également l'écart type estimé des 50 exécutions d'A-MCMC comme entrée de la procédure des moindres carrés, avec l'argument `sigma` défini comme l'erreur des 50 chaînes de l'amplitude des DWD des estimations par la méthode d'A-MCMC. Ce résultat correspond à la mesure "réelle" de l'amplitude du premier plan galactique sans la modulation. La ligne brune représente la séparabilité spectrale de l'étude bayésienne de la densité spectrale d'énergie du premier plan galactique avec la limite de basses fréquences pour la durée totale de la forme d'onde d'un an.

La valeur moyenne des 1500 estimations de Ω_{Mod} est représenté par la courbe bleu sur la figure 4.1. C'est la moyenne de la courbe grise. Pour l'analyse bayésienne, la croix brune n'est pas intéressante, car aucune information concluante n'apparaît. Comme on peut le voir avec la barre d'erreur, on ne peut pas estimer correctement l'amplitude du premier plan galactique sans tenir compte de la réponse changeante de la réponse de l'antenne de LISA.

Nous avons une bonne compréhension de la modulation du signal à partir des binaires résolus [12], et de la théorie. En identifiant l'avant-plan résoluble, on peut prédire le niveau de l'arrière-plan insoluble. Nous notons que la méthode présentée dans [12] est plus performante, mais pour notre présente étude la méthode que nous utilisons est suffisante comme entrée en matière pour étudier la limitation de la mesure du SGWB cosmologique. Nous avons des résultats cohérents avec notre algorithme. En effet, nous estimons correctement la limite aux basses fréquences, et de plus, le fond astrophysique est également estimé avec précision, avec moins de 3% d'erreur. Nous avons plus de difficulté à ajuster le premier plan galactique (68% d'erreur); cela est dû à l'ajustement à basses fréquences. Le nombre de points est beaucoup plus faible qu'à plus hautes fréquences. Nous notons également que sur la figure 4.1, le deuxième pic à 75% de l'année est plus élevé que le premier à 25% de l'année. Ce détail a également été noté par Edlund *et al.* [87] et Adams et Cornish [12].

À partir de l'analyse sur l'année entière de données avec les 50 résultats d'A-MCMC, les estimations des paramètres et les erreurs pour le premier plan galactique et le fond astrophysique sont présentées dans le tableau 4.2 et le tableau 4.1. La figure 4.4 montre

les estimations de densité spectrale d'énergie et la figure 4.7 présente le graphique de coins de tous les paramètres du modèle; ces résultats ont été générés en utilisant une année complète de données. Cela démontre que LISA peut observer et mesurer avec succès un arrière-plan produit astrophysiquement à partir de binaires compacts, un premier plan galactique de binaires de naines blanches et le bruit du détecteur LISA et nous pouvons également séparer ces composants du SGWB.

4.3 Mesure du fond stochastique cosmologique dans le contexte de fonds galactique et astrophysique

Dans cette section, nous présentons l'objectif, à savoir la capacité de LISA à mesurer un fond cosmologique en présence d'autres signaux stochastiques et de bruit de LISA, plus précisément dans le contexte de fonds galactique et astrophysique. Nous avons, à partir de notre étude précédente [51] (voir section 3.4), présenté la preuve de la séparabilité des fonds cosmologiques et astrophysiques avec une précision autour de $\Omega_{GW,Cosmo} \approx 1 \times 10^{-12}$ à 1×10^{-13} .

Comme indiqué dans la Section 3.4, il est possible d'estimer l'erreur de mesure pour chaque paramètre en utilisant la matrice de Fisher. Effectivement, l'équation 3.75 donne la matrice de Fisher, qui dépend des paramètres à estimer, ainsi que du temps d'intégration des données. En effet, nous supposons que le bruit de LISA est un bruit aléatoire à moyenne nul, et qu'il est indépendant du signal d'ondes gravitationnelles que nous essayons de mesurer. Le signal stochastique d'année en année est essentiellement le même. De fait de la faible variation des sources pendant la durée de la mission (voir section 2.5.2).

Il est alors possible qu'en intégrant les données dans le temps on puisse réduire l'influence du bruit de LISA sur la recherche du SGWB. Nous utilisons ce qui suit pour les magnitudes du bruit de LISA : bruit d'accélération de la masse-test $N_{acc} = 1.44 \times 10^{-48} \text{ s}^{-4}\text{Hz}^{-1}$; et le bruit du système de métrologie optique $N_{Pos} = 3.6 \times 10^{-41} \text{ Hz}^{-1}$.

Pour l'étude de l'information de Fischer, nous considérons des temps d'observation de 1, 4, 6 et 10 ans. Ainsi, nous pourrions voir l'effet de l'intégration du temps durant une potentielle mesure du fond cosmologique. Nous calculons l'incertitude de mesure de la magnitude du fond cosmologique pour plusieurs durées de mission et pour des densités spectrales d'énergie cosmologiques normalisées comprises entre 1×10^{-14} et 1×10^{-8} . Nous avons fixé une limite à la capacité de détecter un SGWB cosmologique. On calcule l'incertitude de la mesure de l'amplitude du fond cosmologique. Si cette incertitude est inférieure à 50%, nous prétendons que le bruit de fond est détectable et séparable du bruit de LISA, du premier plan galactique et du SGWB astrophysique. Au-delà de cette limite, il est impossible de conclure sur la présence ou non d'un SGWB cosmologique.

Nous menons également une étude bayésienne utilisant un algorithme d'A-MCMC

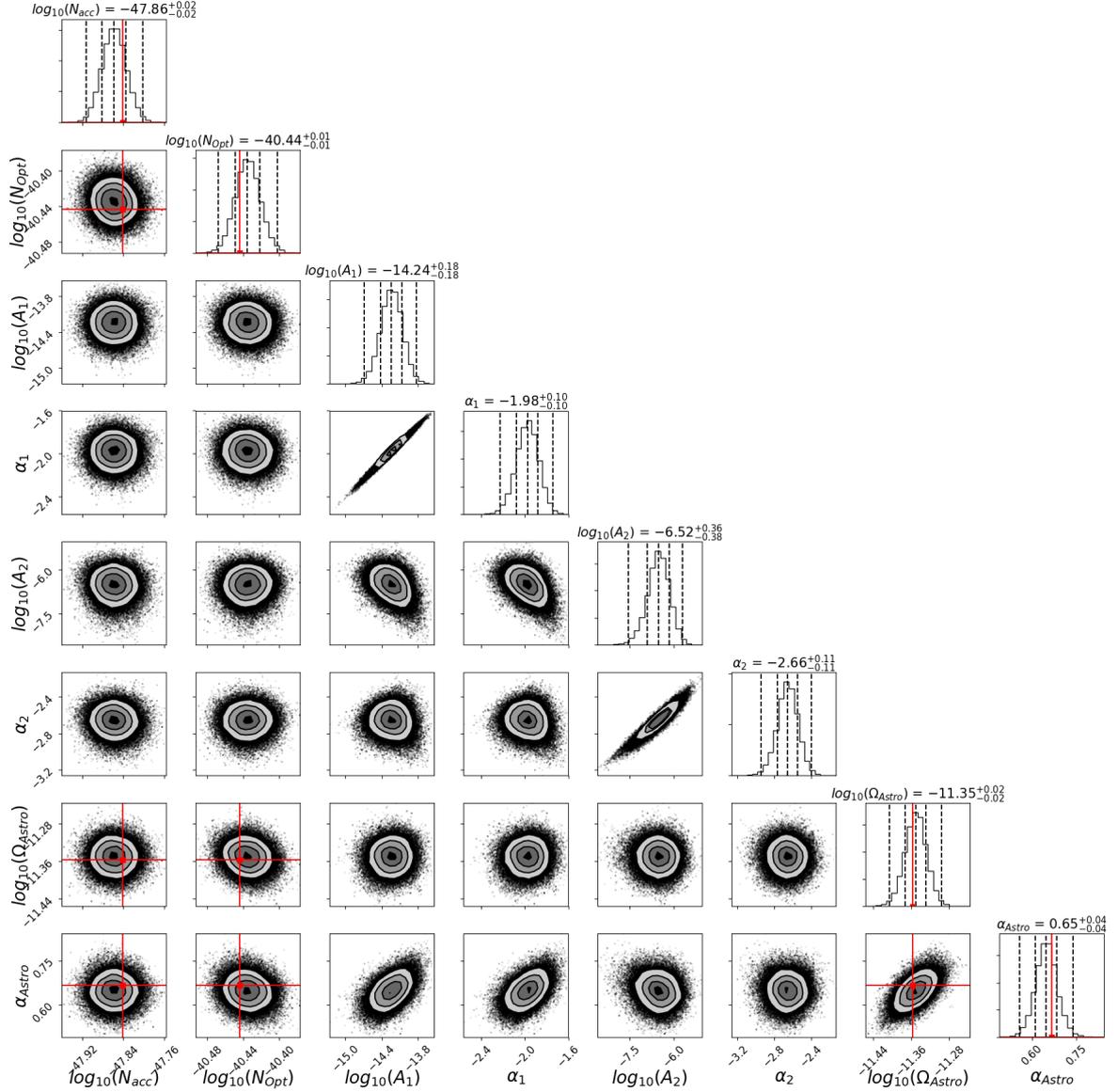


FIGURE 4.7 – Graphique en coin pour l’A-MCMC de 8 paramètres (BBH/BNS + WD + bruit de LISA) en utilisant les canaux A , E et T avec un an de données. Les résultats sont obtenus avec les deux magnitudes pour le modèle de bruit de LISA de la proposition [38], une seule loi puissance SGWB (amplitudes et pentes spectrales) et le premier plan galactique (deux magnitudes et deux pentes). Les lignes pointillées verticales sur la distribution postérieure représentent de gauche à droite les quantiles [16%, 50%, 84%]. Les lignes rouges sont les "vraies" valeurs des paramètres.

pour estimer les paramètres de notre modèle : deux grandeurs pour le bruit de LISA ; deux paramètres pour le fond cosmologique (amplitude et pente) ; deux paramètres pour le fond astrophysique (amplitude et pente) ; et quatre paramètres pour la loi puissance cassée de la densité spectrale d'énergie du premier plan galactique (deux amplitudes et deux pentes). En tout, nous estimons 10 paramètres sur la base des trois périodogrammes des canaux A , E et T . Nous utilisons le fond astrophysique de [68]. On fait varier l'amplitude du fond cosmologique pour déterminer la précision avec laquelle il peut être détecté. Ainsi, nous pouvons produire des estimations paramétriques en utilisant l'A-MCMC pour des densités d'énergie normalisées d'origine cosmologiques injectées avec des niveaux compris entre 1×10^{-14} et 1×10^{-8} , le tout avec une pente de $\alpha_{Cosmo} = 0$.

Dans la figure 4.8, les trois courbes bleues sont les trois périodogrammes pour les canaux de données A , E , et T (respectivement de haut en bas) pour une année de données simulées avec $N_{acc}, N_{Pos} = \left(1.44 \cdot 10^{-48} \text{ s}^{-4} \text{ Hz}^{-1}, 3.6 \cdot 10^{-41} \text{ Hz}^{-1} \right)$. Nous estimons les deux paramètres de bruit de LISA et les huit paramètres stochastiques ($A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2$) pour le premier plan galactique, ($\Omega_{Astro}, \alpha_{Astro}$) pour le fond astrophysique et ($\Omega_{Cosmo}, \alpha_{Cosmo}$) pour le fond cosmologique. Ceci est un exemple de séparabilité avec comme entrée ou *input* les binaires galactiques de Lamberts *et al.* [154], le SGWB astrophysique ($\Omega_{Astro} = 4.4 \times 10^{-12}$ à 3 mHz avec une pente de 2/3) et un SGWB plat¹ cosmologique $\Omega_{Cosmo} = 8 \times 10^{-13}$. Les lignes orange représentent le modèle utilisé, voir l'équation 3.66. L'A-MCMC est caractérisée par $\beta = 0.01$, $N = 200\,000$, et nous utilisons les 100 derniers candidats acceptés du MCMC pour estimer la matrice de covariance à chaque itération. Nous utilisons des *priors* log-uniformes avec six ordres de grandeurs pour les deux magnitudes de bruit de LISA et les quatre paramètres d'amplitude SGWB ($N_{acc}, N_{Pos}, A_1, A_2, \Omega_{Astro}, \Omega_{Cosmo}$) et un *prior* uniforme pour les pentes ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{Astro}, \alpha_{Cosmo}$) (2 degrés de liberté). Les lignes vertes sont les résultats de l'A-MCMC, et en gris, les erreurs pour 1σ . La figure 4.9 affiche le tracé du graphique en coins pour tous les paramètres sur la base d'une année de données ; les distributions postérieures sont symétriques. Nous avons la preuve d'une bonne adéquation entre le contexte astrophysique et le contexte cosmologique.

Le tableau 4.3 est le résumé des résultats avec l'entrée cosmologique $\Omega_{Cosmo} = 8 \times 10^{-13}$. C'est juste au niveau de la détectabilité pour le fond cosmologique. Une année de données a été utilisée et les résultats proviennent du résultat d'A-MCMC. Cela montre qu'il sera possible pour LISA de distinguer le fond cosmologique pour ce niveau de fond astrophysique, de premier plan galactique des naines blanche doubles et le bruit du détecteur LISA.

La figure 4.10 montre les incertitudes pour la mesure du fond cosmologique lorsque l'on fait varier son amplitude. Nous supposons un fond plat, avec $\alpha_{Cosmo} = 0$ et $\Omega_{Cosmo} = \Omega_0$. Les résultats de deux études sont présentés. La première est l'étude provenant de l'infor-

1. $\alpha_{Cosmo} = 0$

	Ω_{Astro}	α_{Astro}	Ω_{Cosmo}	α_{Cosmo}	$\Omega_{DWD,LF}$	$\alpha_{DWD,LF}$
μ	4.41×10^{-12}	0.67	8.01×10^{-13}	0.04	5.88×10^{-9}	0.68
σ	1.74×10^{-13}	0.06	3.97×10^{-13}	0.09	6.5×10^{-9}	0.13

TABLE 4.3 – Résultat de l’A-MCMC pour une année avec un SGWB généré avec $\Omega_{Astro} = 4.4 \times 10^{-12} \left(\frac{f}{3 \text{ mHz}}\right)^{2/3}$, et une entrée cosmologique $\Omega_{Cosmo} = 8 \times 10^{-13}$ avec une pente $\alpha_{cosmo} = 0$. Nous utilisons comme fréquence de référence 3 mHz. Le résultat à basses fréquences (LF) pour le premier plan galactique des naines blanches doubles sont également présentés. Dans la figure 4.9 les lignes rouges correspondent aux vraies valeurs. Ce résultat est notre cas limite, en effet, il correspond à une incertitude $\frac{\sigma}{\mu} \frac{\Delta\Omega_{Cosmo}}{\Omega_{Cosmo}} = 50\%$.

mation de Fisher, présentée sous forme de lignes pleines bleues, oranges, vertes et rouges qui correspondent à des durées respectives d’observation de LISA de 1, 4, 6 et 10 ans. On voit que l’effet de la durée n’a pas une grande influence. En effet, nous expliquons cela en notant la dépendance fréquentielle du bruit dans le périodogramme, qui est majoritairement aux hautes fréquences, mais nous mesurons les fonds stochastiques essentiellement aux basses fréquences. Malgré cela, on constate que la dépendance temporelle n’est pas nulle. Un temps d’intégration plus long permet un meilleur ajustement. Notre étude bayésienne (voir le nuage de points noirs), dont nous présentons les résultats de l’A-MCMC est effectués sur une année de données. Chaque point a une barre d’erreur qui est obtenue avec l’estimation de l’écart type de la distribution postérieure. Clairement, l’incertitude de mesure est plus grande pour les faibles amplitudes du SGWB cosmologique. Il existe une très bonne concordance entre les résultats de l’A-MCMC et l’analyse matricielle de l’information de Fisher. Avec notre critère de détection, $\frac{\Delta\Omega_0}{\Omega_0} < 0.5$, nous pouvons prédire qu’avec notre méthode il est possible d’ajuster un SGWB d’origine cosmologique de $\Omega_{0,lim} = 8 \times 10^{-13}$, compte tenu des valeurs que nous avons utilisées pour le bruit de LISA, le premier plan galactique et le fond astrophysique.

4.4 Études d’information de Fisher pour les modèles de premier plan galactiques modifiés

Le premier plan galactique ainsi que le fond astrophysique sont très incertains. Dans notre première étude, nous avons considéré différents niveaux d’amplitudes pour le fond astrophysique produit par les binaires compacts de trous noirs et d’étoiles à neutrons ($\alpha = 2/3$), de l’ordre de $\Omega_{GW,astro}(25 \text{ Hz}) = 0.355 \rightarrow 35.5 \times 10^{-9}$; avec cela, nous avons montré qu’il serait possible avec LISA de mesurer un SGWB produit cosmologiquement ($\alpha = 0$) dans la gamme de $\Omega_{GW,Cosmo} \approx 1 \times 10^{-12}$ à 1×10^{-13} avec 4 ans d’observation [51].

Nous abordons maintenant l’incertitude dans le modèle galactique de DWD. Dans cette sous-section, nous étudions l’effet de la modification du modèle de densité pour le premier plan galactique. Nous testons l’influence des modifications avec une étude

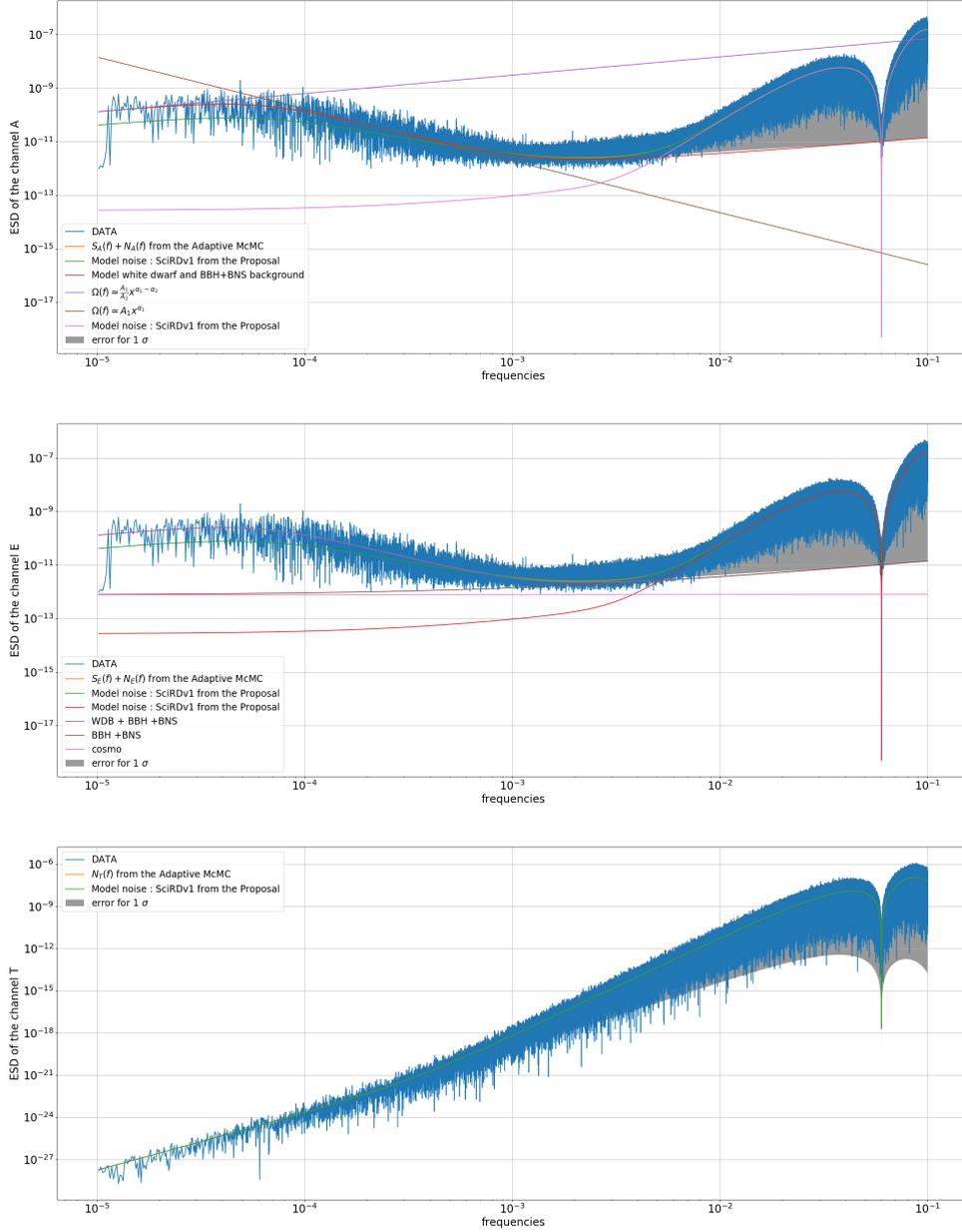


FIGURE 4.8 – Densité spectrale d'énergie pour les canaux A , E et T à partir de la forme d'onde totale des données d'un an vues par LISA dans le futur. Des estimations sont faites pour les deux grandeurs du modèle de bruit de LISA à partir de la proposition [38], la modulation du premier plan de naines blanches, le fond astrophysique et un fond cosmologique avec un A-MCMC de 10 paramètres (cosmologiques + BBH + DWD + bruit de LISA)

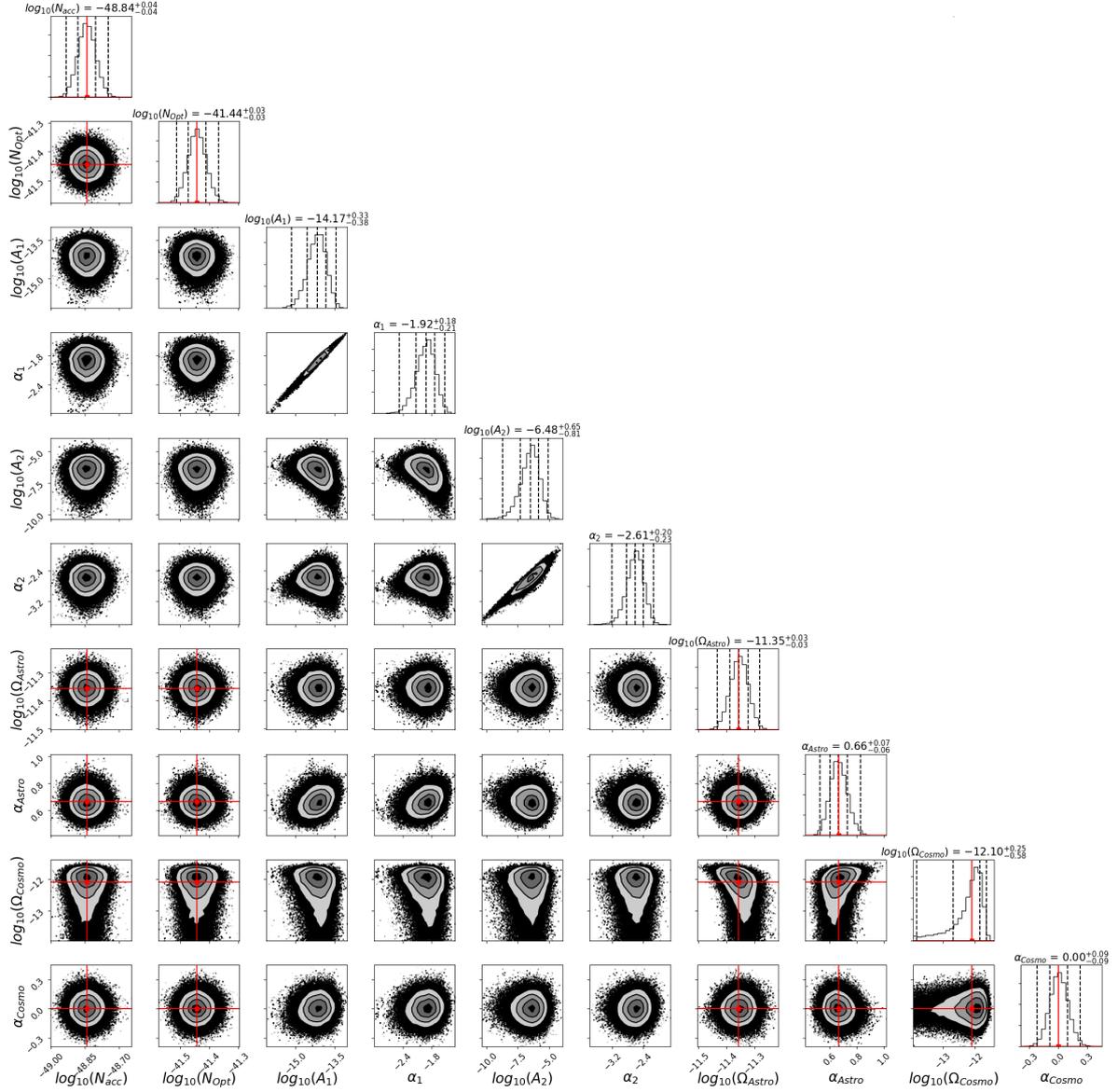


FIGURE 4.9 – Diagramme en coin pour l’A-MCMC de 10 paramètres (BBH/BNS + WD (forme d’onde totale de données d’un an vues par LISA) + Cosmo + bruit de LISA) en utilisant les canaux A , E et T . Les résultats concernent les deux grandeurs du modèle de bruit de LISA de la proposition [38], et les deux lois puissances du SGWB (amplitudes et pentes spectrales) et le premier plan de DWD (deux amplitudes et deux pentes). Les lignes pointillées verticales sur la distribution postérieure représentent de gauche à droite les quantiles [16%, 50%, 84%]. Les lignes rouges sont les "vraies" valeurs des paramètres ($\Omega_{\text{Astro}}(3\text{mHz}) = 4.4 \times 10^{-12}$ pour $\alpha_{\text{Astro}} = 2/3$ et $\Omega_{\text{Cosmo}} = 8 \times 10^{-13}$ pour $\alpha_{\text{Cosmo}} = 0$). Nous mesurons les valeurs présentées dans le tableau 4.3

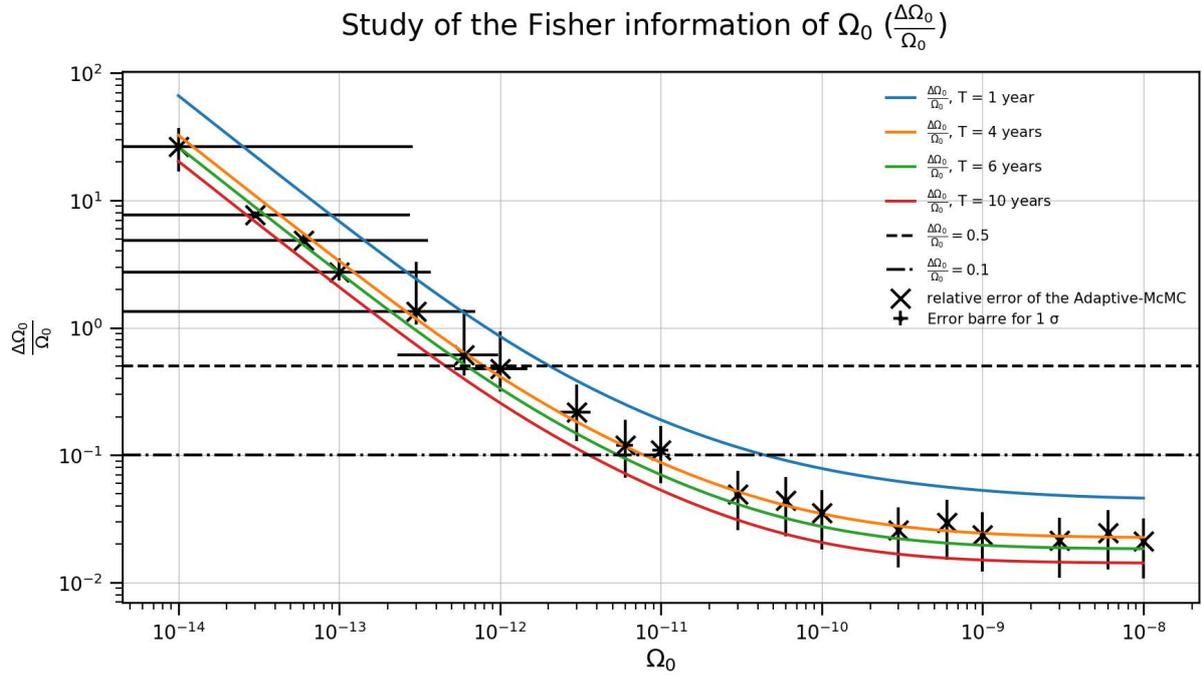


FIGURE 4.10 – Estimation de l’incertitude du SGWB cosmologiquement produite à partir de l’étude d’information de Fisher (représentée par les lignes colorées pour quatre durées d’observation différentes). Nous présentons également l’estimation des paramètres de l’A-MCMC (en nuages de points) pour les canaux A et E avec le canal de bruit T . La ligne horizontale en pointillés supérieure représente le niveau d’erreur à 50%. Au-dessus de la ligne, l’erreur est supérieure à 50%.

d'information de Fisher. En effet, nous avons montré que les deux études (Fisher et A-MCMC) donnent des résultats très similaires. Nous introduisons d'abord une modification de l'amplitude du premier plan galactique en testant la séparabilité pour de nouvelles valeurs forcées du paramètre A_1 , telles que $A_{1,new} = d \times A_1$ pour $d = 1, 2, 5, 10$; voir équation 2.84. La figure 4.11 présente l'incertitude pour la densité spectrale d'énergie normalisée du SGWB produit cosmologiquement avec la variation de l'amplitude A_1 . Augmenter le paramètre A_1 ne diminue que légèrement la possibilité de mesurer un SGWB d'origine cosmologique. Il s'agit d'une modification aux très basses fréquences $f_{GW} < 7.2 \times 10^{-5}$, et n'influence pas significativement l'estimation du fond cosmologique par LISA.

Nous introduisons également une modification de la position fréquentielle de la zone de brisure des deux dépendances spectrales pour les deux pentes de notre loi puissance brisée. Il est possible de montrer que la fréquence de coupure f_{break} est donnée par $f_{break} = f_{ref} e^{\frac{-\ln(A_2)}{\alpha_2}}$. Le changement de fréquence est donné par une modification de l'amplitude A_2 (encore une fois, voir équation 2.84), telle que la nouvelle amplitude est donnée par $A_{2,new} = A_2 d^{-\alpha_2}$, où d est le coefficient multiplicateur donnant la nouvelle fréquence de séparation des deux dépendances spectrales du premier plan galactique ($f_{new,break} = d \times f_{break}$). Nous menons l'étude d'information de Fisher pour $d = 1, 2, 5, 10$. Dans la figure 4.12, nous montrons l'incertitude de l'estimation cosmologique du SGWB pour différentes valeurs de f_{break} . On constate qu'un décalage spectral vers les fréquences plus élevées, ce qui diminue notre possibilité de mesurer le fond cosmologique. Pour une valeur de $d = 10$, la limite de détection est augmentée à $\Omega_0 \approx 6 \times 10^{-12}$. C'est logique, car le décalage du premier plan galactique vers des fréquences plus élevées affecterait plus fortement la mesure du fond cosmologique.

Il est important de noter que le premier plan galactique ne sera pas uniquement composé de DWD, il peut également contenir des WD-M-nain (binaire composée d'une naine blanche et d'une naine M; une naine M peut également être appelée naine rouge), des étoiles dépouillées² ou des CV. Les WD-M-nains sont peu nombreux par rapport aux DWDs, de plus, nous estimons que ce sont des objets présents à très basses fréquences, donc si nous les considérons nous nous attendrions à une très légère augmentation du paramètre A_1 , ce qui ne change pas nos résultats [220]. D'après la figure 2 de [115], on voit que les étoiles binaires dépouillées sont moins nombreuses que les DWD, elles sont également présentes à très basses fréquences. De plus, d'après la figure 3 de [115], la masse de chirp est la plus importante. Ainsi, l'ajout de cette population modifie également le paramètre A_1 , ce qui ne devrait pas changer notre conclusion. Nous pensons qu'il y a trop peu de CV pour générer un premier plan significatif, et que pour une amplitude et une fréquence élevées, ils devraient produire des événements résolus. Il est clair que l'importance de comprendre les binaires dans la Voie lactée sera significatif pour les

2. Nous parlons ici de leur enveloppe. Il ne reste que le cœur de l'étoile.

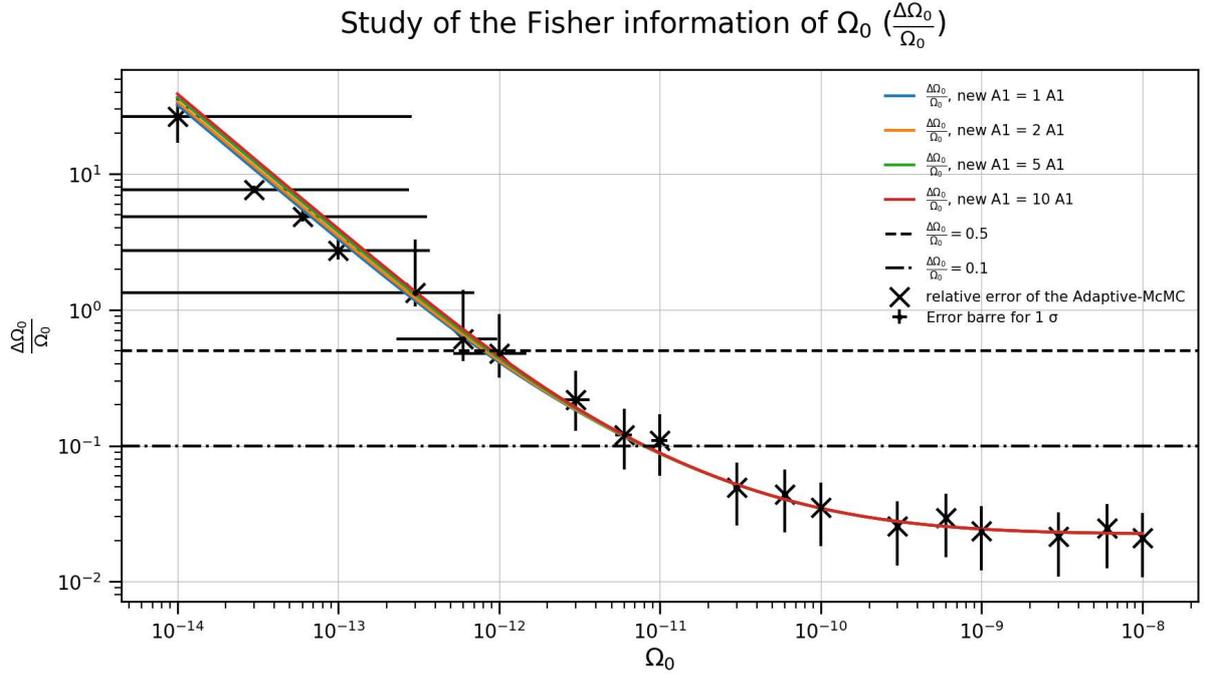


FIGURE 4.11 – Estimation de l’incertitude du SGWB produit cosmologiquement à partir de l’étude d’information de Fisher (représentée par les lignes colorées pour 4 amplitudes différentes A_1) et l’estimation des paramètres à partir du A-MCMC (en nuages de points noirs) pour les canaux A et E avec le canal de bruit T . La ligne horizontale en pointillés supérieure représente le niveau d’erreur 50%. Au-dessus de la ligne, l’erreur est supérieure à 50 %. Le paramètre représentant la magnitude du premier plan galactique a été modifié, à savoir $A_{1,new} = d \times A_1$ pour $d = 1, 2, 5, 10$; voir équation 2.84

recherches LISA, y compris pour le SGWB.

4.5 limites de l’étude

Cette étude a montré ce qui peut être possible pour LISA dans sa capacité à observer un SGWB produit cosmologiquement en présence d’un arrière-plan produit par les binaires compact de trous noirs et d’étoile à neutrons, d’un premier plan galactique des DWD et du bruit inhérent au détecteur LISA. Nous constatons que la distribution positionnelle de naines blanches doubles modifie la forme de la densité spectrale d’énergie du premier plan galactique. Notre étude peut être facilement appliquée à d’autres catalogues de naines blanches doubles, mais également d’autres types de binaires émettant des ondes gravitationnelles. Pour les préparations des observations du fond stochastique de LISA, il sera important de considérer des modèles aussi proches que possible de la distribution galactique réelle. LISA aura la capacité d’observer les naines blanches doubles galactiques,

à la fois avec des binaires résolubles et le premier plan stochastique, et de faire des conclusions importantes sur la distribution dans notre Galaxie. Mais, également dans les binaires présentent dans les satellites proches de notre Galaxie. Dans cette présente étude, nous n’observons pas de changements significatifs dans la densité spectrale de puissance des ondes gravitationnelles entre les naines blanches doubles résolus et non résolus. C’est également le cas pour les différentes compositions des noyaux des naines blanches. Nous avons étudié la distribution des binaires résolus et non résolus en fonction de la composition de leur noyau. Il ne nous semble pas possible d’extrapoler la composition chimique de tous les binaires avec uniquement les binaires résolus.

Notre analyse a pris en compte la distribution des signaux d’ondes gravitationnelles produits par les DWD dans la Galaxie et la réponse de détection de la constellation LISA lorsqu’elle orbite autour du soleil. Elle fait pivoter sa configuration et change son orientation par rapport à la Galaxie au cours du temps dans un cycle durant une année. Une modulation du premier plan galactique observé apparaît. Une estimation précise des paramètres pour les différents fonds stochastiques (astrophysique, cosmologique) doivent être estimés avec précision, tel que la modulation de l’amplitude du signal du premier plan galactique. Sur la base d’analyses précédentes portant sur le signal modulé de la Galaxie [88, 12], nous avons présenté une stratégie pour démoduler et mesurer la densité d’énergie spectrale du premier plan galactique aux basses fréquences. La modulation orbitale du premier plan galactique aide à l’estimation des paramètres pour les SGWB isotropes (et donc non modulés) astrophysiques et cosmologiques.

Nous montrons qu’il sera possible de mesurer l’amplitude du SGWB d’origine cosmologique $\Omega_{GW,Cosmo} \approx 8 \times 10^{-13}$ avec une erreur inférieure à 50%. Dans notre étude, nous considérons que ce SGWB a une densité d’énergie spectrale plate $\propto f^0$ [79]; nous notons qu’il s’agit d’une approximation pour des arrière-plans cosmologiques plus complexes. La transition de phase dans l’univers primitif peut produire des lois puissances en deux parties, avec une traction entre les composantes de la loi puissance montante et descendante à une certaine fréquence de crête. Il est important de noter que ce SGWB produit astrophysiquement est la principale source de limitation pour LISA dans ses efforts pour observer un SGWB produit cosmologiquement. Un arrière-plan extragalactique des DWD pourrait également augmenter la complexité.

4.6 Contexte des sources astrophysiques et cosmologiques en loi puissance cassée

Il existe de nombreux modèles d’émission de fonds d’ondes gravitationnelles stochastiques d’origines cosmologiques et astrophysiques. Nous utilisons la revue des sources cosmologiques et astrophysiques avec une loi puissance brisée pour le SGWB [153] et le

modèle de loi puissance à rupture douce :

$$\Omega_{GW}(f) = A \left(\frac{f}{f_*} \right)^{n_{GW1}} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{f}{f_*} \right)^{1/\Delta} \right] \right\}^{(n_{GW2} - n_{GW1})\Delta} \quad (4.8)$$

avec A l'amplitude de la loi puissance brisée, f_* la fréquence de coupure ou la fréquence de référence, c'est la position de la transition entre les deux pentes n_{GW1} (pente basses fréquences) et n_{GW2} (pente hautes fréquences). Δ est le paramètre de lissage. Nous utilisons ce paramètre pour lisser la transition entre les deux dépendances spectrales. Dans toute la suite du document, nous utilisons $\Delta = 0.2$. Tout le modèle cosmologique et astrophysique du SGWB sont une variation paramétrique des quatre paramètres (A , f_* , n_{GW1} , n_{GW2}).

4.6.1 SGWB astrophysique

Dans cette section, nous résumons toutes les sources de SGWB en loi puissance cassée des signaux d'origines astrophysiques. Nous traçons les différents modèles de loi puissance brisée dans les figures 4.13.

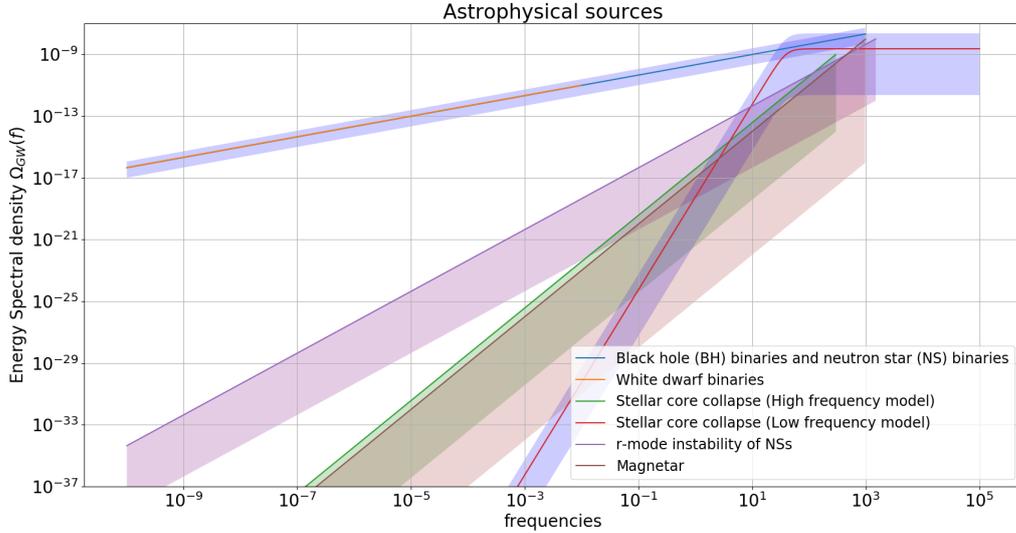


FIGURE 4.13 – Modèle de loi puissance brisée des signaux du SGWB d'origine astrophysiques.

4.6.2 SGWB cosmologique

Dans cette section, nous résumons toutes les sources cosmologiques du SGWB émettant des signaux en loi puissance cassée. Nous résumons différents modèles de loi puissance brisée dans les figures 4.14, 4.15, 4.16 et 4.17, les valeurs des paramètres des sources sont extraites de [152].

Sources astrophysiques				
Origine	A	n_{GW1}	n_{GW2}	f_* en Hz
Binaires de trous noirs (BH) et étoiles à neutrons (NS)	2.1×10^{-8}	$\frac{2}{3}$	\emptyset	1000
Binaires de naines blanches	1×10^{-11}	$\frac{2}{3}$	\emptyset	1×10^{-2}
Effondrement du noyau stellaire (modèle hautes fréquences)	1×10^{-9}	3	\emptyset	300
Effondrement du noyau stellaire (modèle basses fréquences)	1×10^{-9}	6	\emptyset	40
Instabilité du mode r des étoiles à neutrons	1×10^{-8}	2	\emptyset	1.5×10^{-8}
Magnetar	2×10^{-17}	3	\emptyset	1000

TABLE 4.4 – Tableau résumant les différentes sources astrophysiques utilisés pour tracé les figures, nous utilisons les données extraites de l'étude de Kuroyanagi *et. al.*, nous utilisons le modèle de l'équation 4.8. [151]

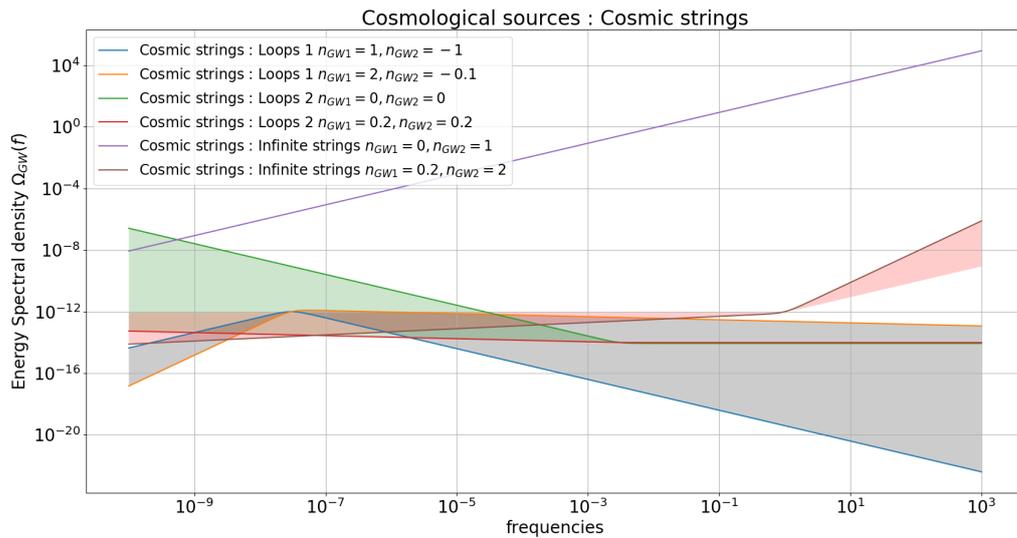


FIGURE 4.14 – Modèles de loi puissance brisée des cordes cosmiques de SGWB.

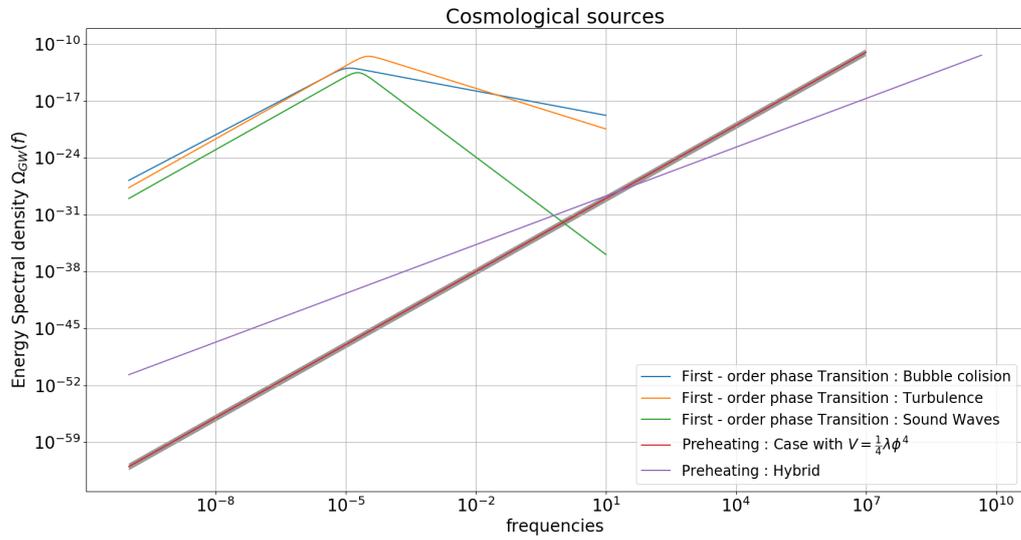


FIGURE 4.15 – Modèles cosmologiques de loi puissance brisée de SGWB.

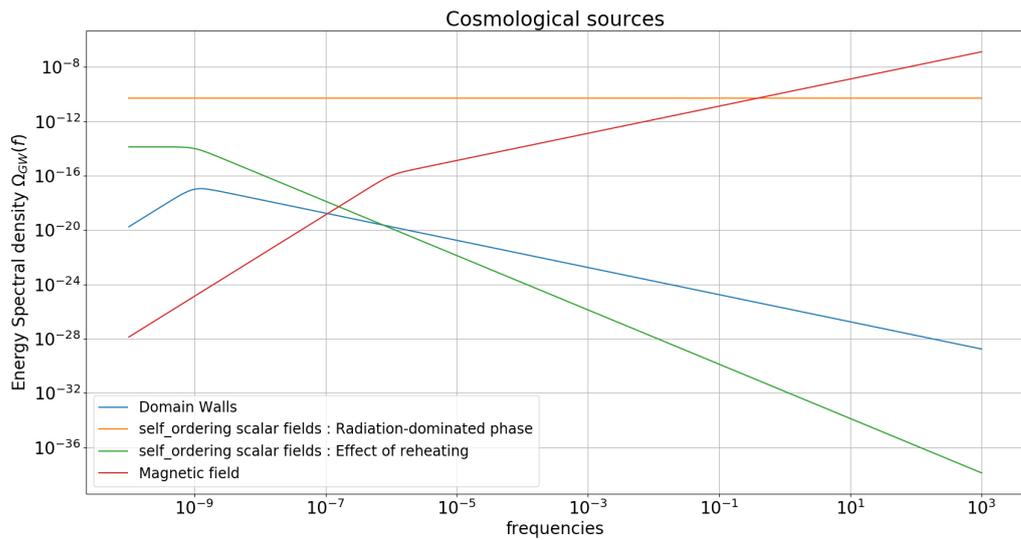


FIGURE 4.16 – Modèles cosmologiques de loi puissance brisée de SGWB.

Sources cosmologiques				
Origine	A	n_{GW1}	n_{GW2}	f_* en Hz
Transition de phase du premier ordre				
Collision de bulles	1×10^{-13}	2.8	-1	1×10^{-5}
Turbulence	3×10^{-13}	3	$-\frac{5}{3}$	3×10^{-5}
ondes sonores	6×10^{-14}	3	-4	2×10^{-5}
Préchauffage				
Cas avec $V = \frac{1}{4}\lambda\phi^4$	1×10^{-11}	3	\emptyset	1×10^7
Hybride	1×10^{-11}	2	\emptyset	4.47×10^{-12}
Cordes cosmiques				
Boucles 1	1×10^{-12}	[1, 2]	[-1, -0.1]	3×10^{-8}
Boucles 2	1×10^{-14}	[-1, -0.1]	0	3×10^{-3}
Boucles infinies	1×10^{-12}	[0, 0.2]	[1, 2]	$[1 \times 10^{-14}, 1]$
Champs scalaires auto-ordonnés				
Phase dominée par le rayonnement	5×10^{-11}	0	0	spectre plat
Effet du réchauffage	1×10^{-14}	0	-2	1×10^{-9}
Perturbation du second ordre				
Phase initiale de la matière	1×10^{-12}	1	\emptyset (décroissance infinie)	7×10^5
Trous noirs primordiaux	7×10^{-12}	2	\emptyset (décroissance infinie)	4×10^{-2}
Autres modèles				
Murs de domaine	1×10^{-17}	3	-1	1×10^{-9}
Champ magnétique	1×10^{-16}	3	-1	3×10^{-6}
Inflation et réchauffage	2×10^{-17}	0	-2	0.3
Inflation et domination de l'énergie cinétique	2×10^{-17}	0	1	0.3
Production de particule durant Inflation	2×10^{-17}	0	0	0.003
Perturbation du second ordre	2×10^{-17}	1	\emptyset (décroissance infinie)	0.3
Pré-BigBang	2×10^{-17}	3	$3 - 2\mu$ $\mu \geq 0$	plat ou spectre rouge/bleu légèrement incliné

TABLE 4.5 – Tableau résumant les différentes sources cosmologiques utilisées pour tracé les figures, nous utilisons les données extraites de l'étude de Kuroyanagi *et. al.* et nous utilisons le modèle de l'équation 4.8. [151]

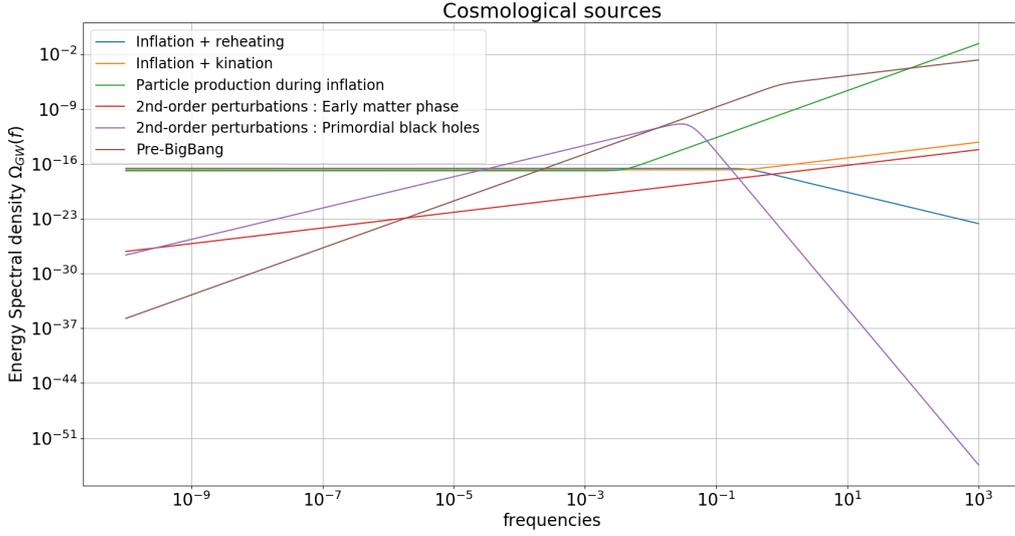


FIGURE 4.17 – Modèles cosmologiques de loi puissance brisée de SGWB.

4.6.3 Résultats de mesures des modèles de loi puissance cassée

Nous étudions des modèles cosmologiques, nous suivons le modèle des sources cosmologiques vu dans Caprini *et. al.* [64] tel que la loi puissance 4.6.4, la loi puissance brisée 4.6.5, le signal à simple crête 4.6.6, le signal en double crête 4.6.6 et le signal ondulé ou le signal en Wiggly 4.6.7. Nous faisons une étude pour chaque modèle cosmologique considéré. On calcule la carte d'incertitude de l'amplitude de la source cosmologique à partir de l'information de Fisher, avec une variation des paramètres des modèles et de la durée de la mission d'observation de LISA. Sur chaque carte d'incertitude nous ajoutons également une ligne blanche en tirets, c'est la limitation de détectabilité que nous utilisons, soit 50 % d'erreur, en dessous de cette limite, nous pouvons séparer le SGWB cosmologique du bruit de LISA et du SGWB astrophysique aussi. Nous avons également créé une étude d'A-MCMC pour chaque source cosmologique afin de démontrer notre capacité à séparer les sources cosmologiques de différent modèle d'émission. Pour générer nos données pour l'A-MCMC, nous utilisons quatre ans de données pour le bilan de bruit de LISA et nous utilisons pour le SGWB astrophysique, la valeur de Chen *et. al.* [68] $\Omega_{Astro}(3 \text{ mHz}) = 4.4 \times 10^{-12}$ pour une pente de $\alpha = \frac{2}{3}$. Il est alors possible qu'en intégrant les données dans le temps on puisse réduire l'influence du bruit de LISA sur la recherche du SGWB. Nous utilisons ce qui suit pour les magnitudes du bruit de LISA : bruit d'accélération de la masse-test $N_{acc} = 1.44 \times 10^{-48} \text{ s}^{-4}\text{Hz}^{-1}$; et le bruit du système de métrologie optique $N_{Pos} = 3.6 \times 10^{-41} \text{ Hz}^{-1}$.

Nous avons créé également un répertoire `github` pour partager et ne pas surcharger ce manuscrit de thèse. Dans celui-ci, il est possible de retrouver l'ensemble des cartes d'incertitude et les résultats des exécutions d'A-MCMC pour tous les modèles cosmologiques

étudiés. [github](#) répertoire³.

4.6.4 Loi Puissance

L'étude de la séparation spectrale de deux lois puissances a également été faite dans Boileau *et. al.* [51] et dans la section 3.4.

Modèle utilisé :

$$\Omega_{GW}(f) = \Omega_{cosmo} \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^{\alpha_{cosmo}} + \Omega_{astro} \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^{\alpha_{astro}} \quad (4.9)$$

avec $\alpha_{cosmo} = 0$ et $\alpha_{astro} = \frac{2}{3}$.

4.6.5 Loi puissance cassée

Loi en puissance cassée unique

Modèle utilisé :

$$\Omega_{GW}(f) = A \left(\frac{f}{f_*} \right)^{n_{GW1}} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{f}{f_*} \right)^{1/\Delta} \right] \right\}^{(n_{GW2} - n_{GW1})\Delta} \quad (4.10)$$

Dans cette section, nous présentons l'objectif de notre étude, à savoir la capacité de notre algorithme de séparation spectrale à mesurer un fond cosmologique de loi puissance brisée en présence d'autres signaux stochastiques et de bruit de LISA.

Pour l'étude d'information de Fisher, nous considérons des temps d'observation de quatre ans. Nous étudions l'évolution de l'amplitude A , la position du changement de dépendance spectrale des deux pentes f_* et les deux pentes. L'objectif est d'avoir la plus large étude des paramètres du modèle de puissance cassé pour englober tout modèle de puissance cassée précédemment considérés, si on peut ou non mesurer et avoir une estimation de l'incertitude. Et, ainsi déterminer s'il sera possible de les mesurer avec notre méthode. Nous calculons l'incertitude de mesure de la magnitude du fond cosmologique pour plusieurs f_* ($[10^{-4}, 0.1]$ Hz), pour des densités spectrales d'énergie cosmologique normalisées entre 1×10^{-14} et 1×10^{-8} . Chaque carte est donnée pour les deux pentes n_{GW1} versus n_{GW2} . Il est important de noter que l'étude de Fisher est donnée avec le bruit de LISA et le SGWB astrophysique. Nous fixons la limite de détectabilité telle que lorsque l'incertitude est inférieure de 50%, nous pouvons estimer et séparer la densité spectrale d'énergie cosmologique normalisée du SGWB. La figure 4.19 est un exemple de la carte de Fisher de l'incertitude avec $A = 1 \times 10^{-13}$ et $f_* = 0.02$.

Nous ajustons sept paramètres des deux périodogrammes des canaux A et E , et simultanément les trois paramètres de bruit du canal T . Nous utilisons le fond astrophysique de

3. https://github.com/guillaumeboileau/Cosmological_model/

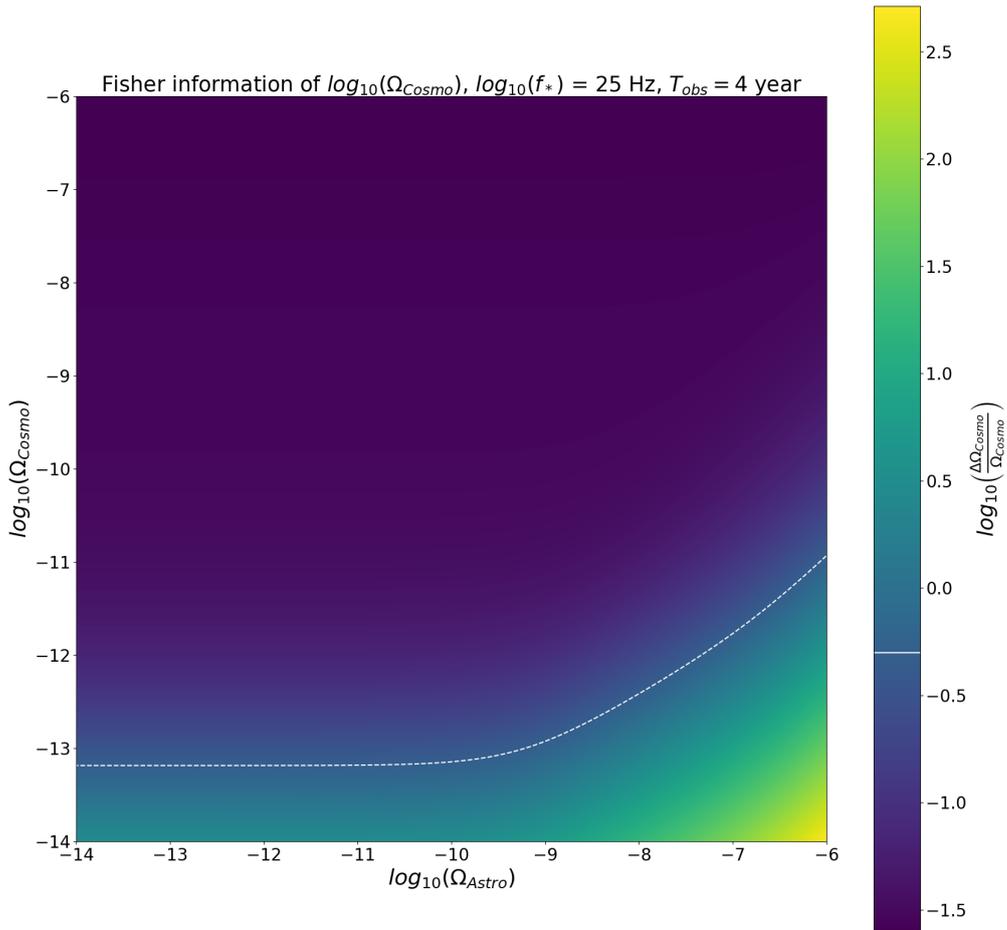


FIGURE 4.18 – Carte d’incertitude de l’amplitude de la source cosmologique à partir des informations de Fisher pour deux lois puissances du SGWB, astrophysique et cosmologique, pour quatre ans d’observation avec Ω_{Astro} versus Ω_{Cosmo} . Le tracé en pointillé blanc correspond à la limite d’incertitude de 50%, au-dessus de cette ligne, nous ne pouvons pas mesurer les paramètres.

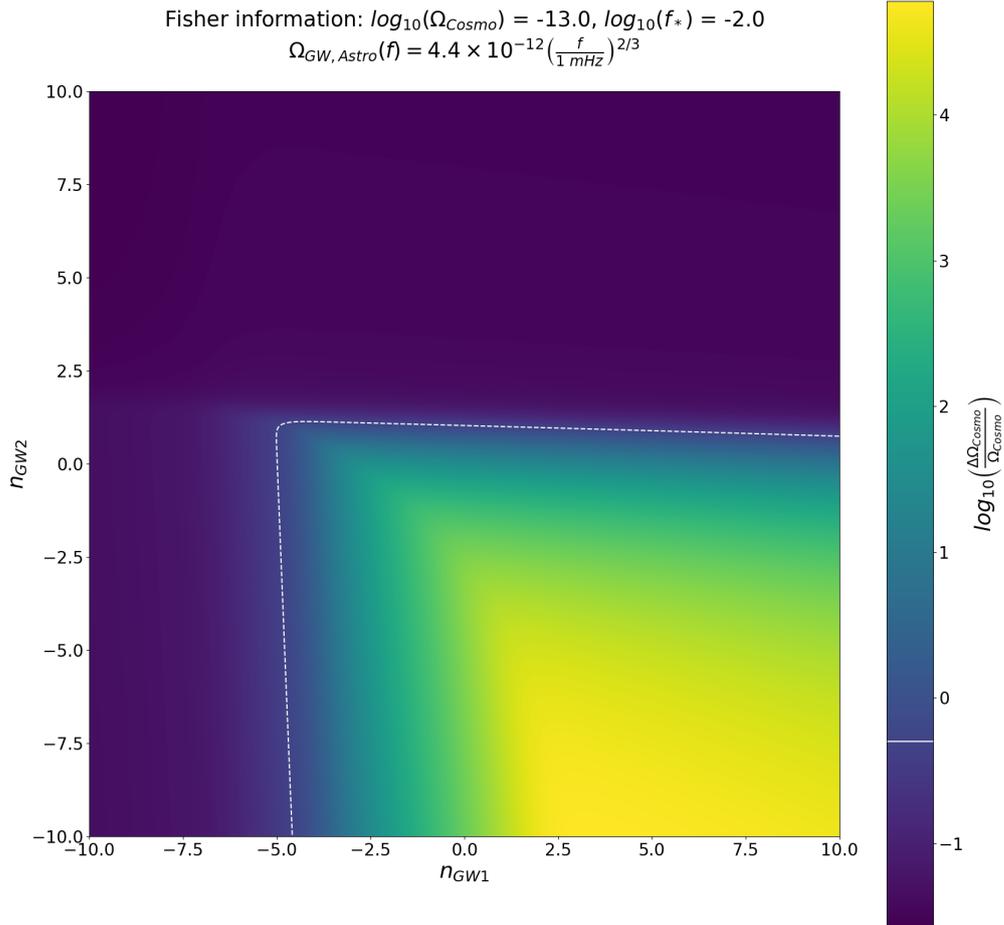


FIGURE 4.19 – Carte d’incertitude de l’amplitude de la source cosmologique à partir des informations de Fisher pour une loi puissance cassée avec un SGWB astrophysique pour quatre ans d’observation avec $n_{\text{GW}1}$ versus $n_{\text{GW}2}$. Le tracé en pointillé blanc correspond à la limite d’incertitude de 50%, au-dessus de cette ligne, nous ne pouvons pas mesurer les paramètres.

Chen *et. al.* [68]. Nous ajustons le niveau du fond cosmologique pour déterminer sa détectabilité. Dans la figure 4.20, nous incluons la loi puissance brisée du SGWB cosmologique et utilisons quatre ans de données, les lignes bleues sont les trois périodogrammes pour les canaux de données A , E , et T , avec $N_{acc}, N_{Pos} = \left(1.44 \cdot 10^{-48} \text{ s}^{-4}\text{Hz}^{-1}, 3.6 \cdot 10^{-41} \text{ Hz}^{-1}\right)$. Nous ajustons les deux paramètres de bruit de LISA et les quatre paramètres d'ondes gravitationnelles (A, n_{GW1}, n_{GW2}, f_*) pour la loi puissance brisée. Les lignes oranges représentent le modèle utilisé. L'A-MCMC est caractérisé par $\beta = 0.01$, $N = 1\,000\,000$, et nous utilisons 100 paramètres pour estimer la matrice de covariance. Nous utilisons des *priors* log-uniformes avec trois ordres de grandeurs pour les trois paramètres d'amplitude (N_{acc}, N_{Pos}, A) de même que pour le paramètre de fréquences (f_1, f_*) et un *prior* uniforme pour les pentes (2 degrés de liberté). Les lignes vertes sont les résultats de l'A-MCMC, et en gris les erreurs pour 1σ . La figure 4.21 est le graphique en coin généré avec une année de données ; les distributions postérieures sont gaussiennes.

Le tableau 4.6 est le résumé des résultats avec l'entrée cosmologique $A = 1 \times 10^{-9}$ à $f_* = 5 \times 10^{-4} \text{ Hz}$ pour $n_{GW1} = 2$ et $n_{GW2} = -2$. Il nous est donc possible de mesurer un tel modèle dans les données LISA. Cela montre qu'il sera aussi possible pour LISA de distinguer le fond cosmologique de la loi puissance brisée avec ce niveau de bruit du détecteur LISA et également avec un SGWB astrophysique si l'on considère l'étude d'incertitude de Fisher, voir la figure 4.19.

	A	n_{GW1}	n_{GW2}	f_* (Hz)
μ	1.02×10^{-9}	2.08	-2.00	4.9×10^{-4}
σ	3.74×10^{-11}	0.05	0.07	1.23×10^{-5}
	$N_{acc} \text{ (s}^{-4}\text{Hz}^{-1}\text{)}$	$N_{pos} \text{ (Hz}^{-1}\text{)}$	$f_1 \text{ (Hz)}$	
μ	1.24×10^{-48}	3.66×10^{-41}	3.9×10^{-4}	
σ	3.8×10^{-49}	7.83×10^{-43}	1.1×10^{-4}	

TABLE 4.6 – Résultats de l'A-MCMC avec une entrée de SGWB cosmologique en loi puissance brisée avec $A = 1 \times 10^{-9}$, $n_{GW1} = 2$, $n_{GW2} = -2$ et $f_* = 5 \times 10^{-4} \text{ Hz}$. Dans la figure 4.21 les lignes rouges correspondent aux vraies valeurs.

Population de naines blanches doubles

Modèle utilisé

$$\Omega_{GW}(f) = A_1 \left(\frac{f}{f_{*,1}}\right)^{n_{GW1,1}} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{f}{f_{*,1}}\right)^{1/\Delta} \right] \right\}^{(n_{GW21} - n_{GW11})\Delta} + \Omega_{GW,astro} \left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{\alpha_{astro}} \quad (4.11)$$

Nous utilisons notre simulation des naines blanches et choisissons d'essayer de l'ajuster cette fois-ci avec un modèle de loi puissance cassée à rupture douce. Ainsi, nous

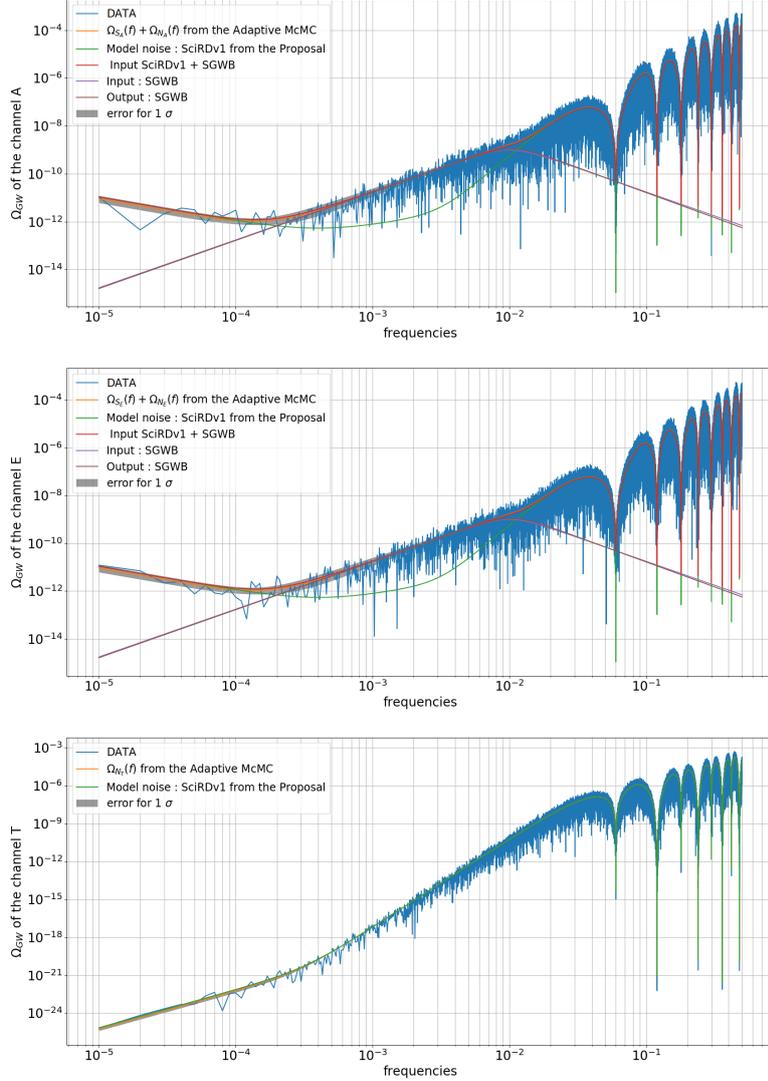


FIGURE 4.20 – Densité spectrale d’énergie pour les canaux A , E et T . Des estimations sont faites pour les deux grandeurs du modèle de bruit de LISA et aussi du paramètre de la séparation de bruit de LISA en fréquence f_1 de la proposition [38] et le fond cosmologique en loi puissance brisée avec un A-MCMC de 7 paramètres (loi puissance brisée cosmologique + LISA de bruit)

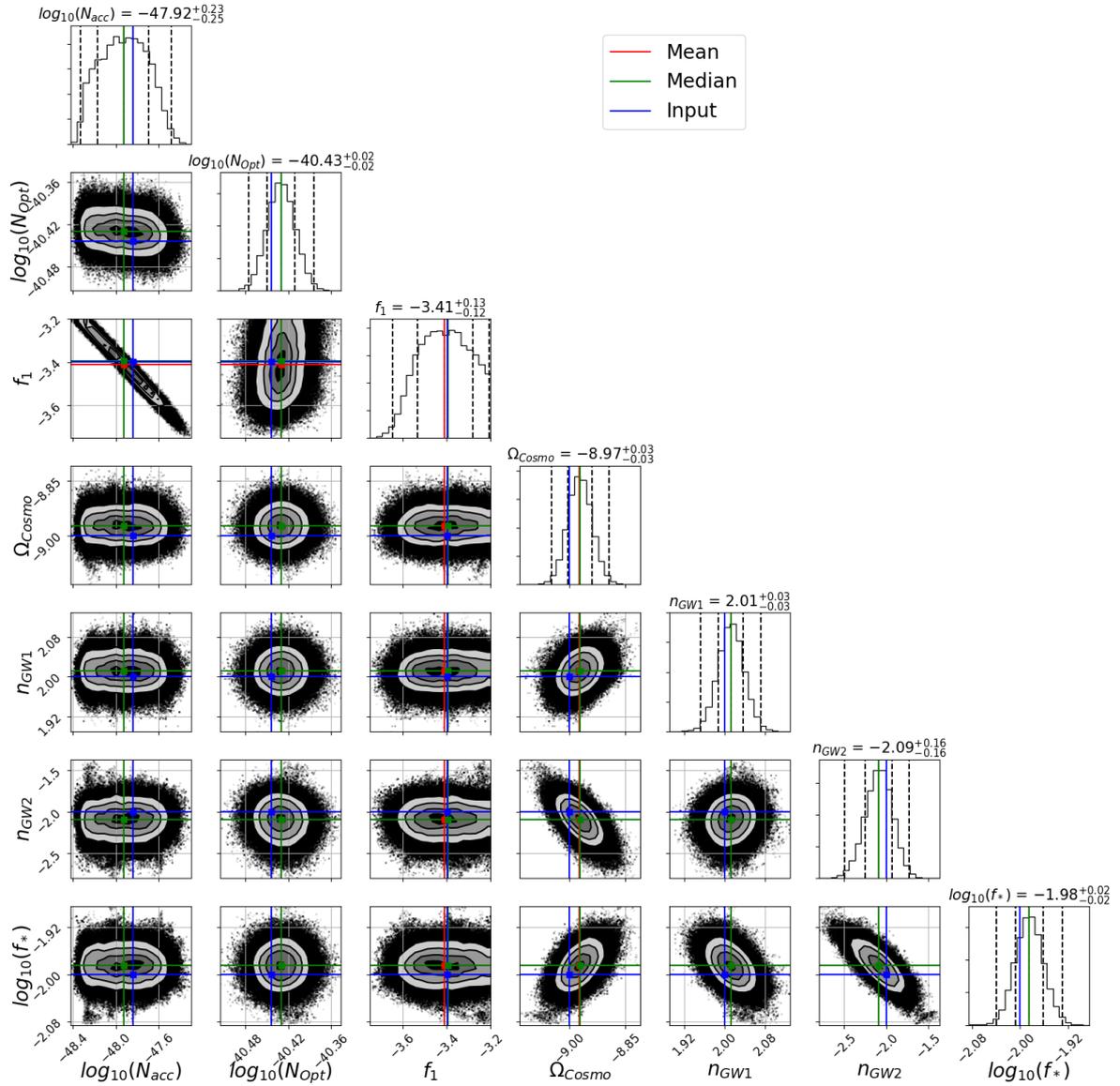


FIGURE 4.21 – Diagramme en coins de l'A-MCMC de 10 paramètres (loi puissance brisée cosmologique + bruit de LISA) en utilisant les canaux A , E et T . Les résultats sont donnés pour les deux magnitudes et la séparation de bruit de LISA en fréquence f_1 avec le modèle de bruit de LISA de la proposition [38], et une loi puissance brisée SGWB (une amplitude, deux pentes spectrales et une référence de fréquence). Les lignes pointillées verticales sur la distribution postérieure représentent de gauche à droite les quantiles [16%, 50%, 84%]. Respectivement, les lignes rouges, vertes et bleues sont la "moyenne", la "médiane" et la "vraie" valeur pour chaque valeur de paramètre.

ajustons neuf paramètres sur les deux périodogrammes des canaux A et E , et simultanément les deux paramètres de bruit du canal T . Nous utilisons le fond astrophysique de [68]. Nous ajustons le niveau de fond galactique et astrophysique pour déterminer sa détectabilité. Dans la figure 4.22, nous montrons les densités spectrales d'énergie de la loi puissance brisée du SGWB de DWD et le SGWB de BBH/BNS en utilisant quatre ans de données, les lignes bleues sont les trois périodogrammes pour les canaux de données A , E , et T , avec $N_{acc}, N_{Pos} = (1.44 \cdot 10^{-48} \text{ s}^{-4}\text{Hz}^{-1}, 3.6 \cdot 10^{-41} \text{ Hz}^{-1})$. Nous ajustons les trois paramètres de bruit de LISA et les sept paramètres d'ondes gravitationnelles ($A, n_{GW1}, n_{GW2}, f_*, \Delta, \Omega_{astro}, \alpha_{astro}$) pour deux SGWB. Les lignes oranges représentent le modèle utilisé et ajusté. L'A-MCMC est caractérisé par $\beta = 0.01$, $N = 1\,000\,000$, et nous utilisons les 100 derniers candidats acceptés par l'algorithme pour estimer la matrice de covariance à chaque itération. Nous utilisons des *priors* en log-uniformes avec ordres de 3 grandeurs pour les quatre paramètres d'amplitude ($N_{acc}, N_{Pos}, A, \Omega_{astro}$) et aussi pour le paramètre de fréquence (f_*), des *priors* uniformes pour chacune des pentes (2 degrés de liberté) et pour le paramètre de loi puissance brisée et lissé Δ . Les lignes vertes sont les résultats de l'A-MCMC, et en gris les erreurs pour 1σ . La figure 4.23 est le graphique en coins généré avec une année de données ; les distributions postérieures sont gaussiennes.

Le tableau 4.7 est le résumé des résultats avec pour entrée la population de DWD (3.5×10^7 binaires de naines blanches), $\Omega_{GW,astro}(3 \text{ mHz}) = 4.4 \times 10^{-12}$ et $\alpha_{astro} = \frac{2}{3}$. Cela montre qu'il sera possible pour LISA de distinguer le bruit de fond DWD de la loi puissance brisée pour ce niveau du bruit du détecteur LISA. Ce résultat est également en concordance avec notre étude précédente.

	A	n_{GW1}	n_{GW2}	f_* (Hz)	Δ
μ	1.98×10^{-9}	0.67	-2.12	7.44×10^{-5}	0.41
σ	1.04×10^{-10}	0.05	0.11	3.12×10^{-6}	0.05
	Ω_{astro}	α_{astro}	$N_{acc} (\text{s}^{-4}\text{Hz}^{-1})$		$N_{pos} (\text{Hz}^{-1})$
μ	4.40×10^{-12}	0.67	1.47×10^{-48}		3.60×10^{-41}
σ	2.40×10^{-13}	0.07	3.75×10^{-50}		6.59×10^{-43}

TABLE 4.7 – Résultats de l'A-MCMC avec pour données d'entrée la population de naines blanches doubles (3.5×10^7 naines blanches doubles), $\Omega_{GW,astro}(3 \text{ mHz}) = 4.4 \times 10^{-12}$ et $\alpha_{astro} = \frac{2}{3}$. Dans la figure 4.21 les lignes rouges correspondent aux vraies valeurs.

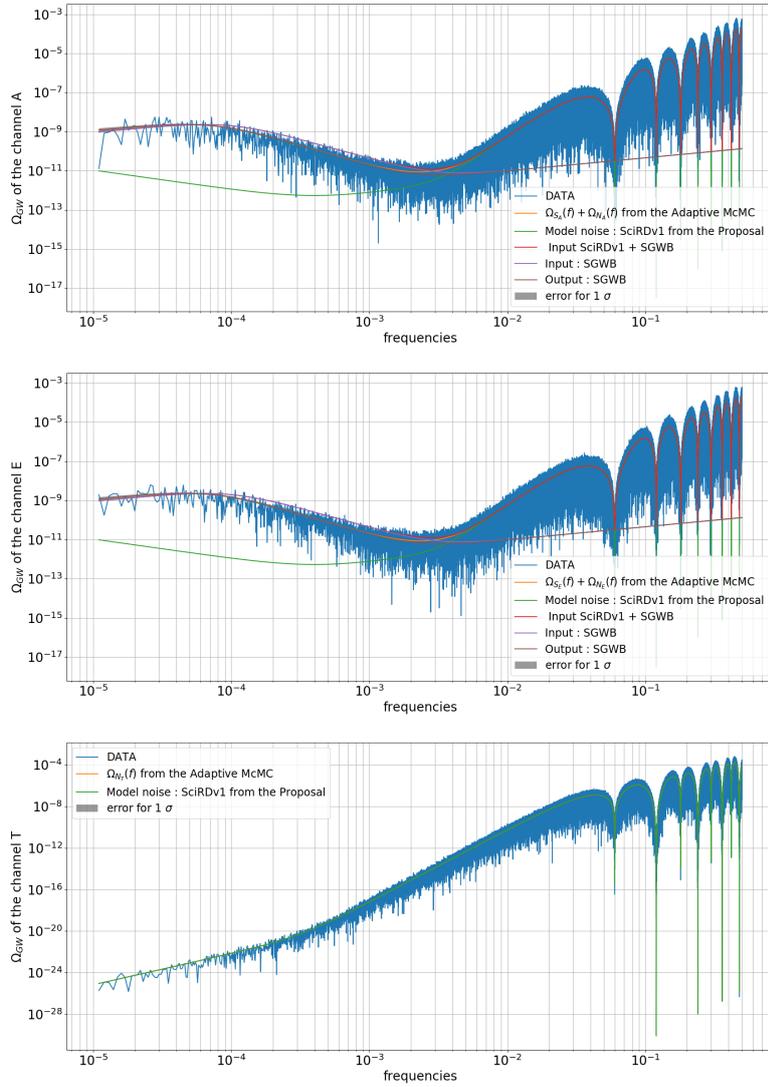


FIGURE 4.22 – Densité spectrale d’énergie des canaux A , E et T . Des estimations sont faites pour les deux magnitudes du modèle de bruit de LISA à partir de la proposition [38], un fond de DWD en puissance cassée et un SGWB astrophysique avec un A-MCMC de neuf paramètres (DWD + BBH/BNS + bruit de LISA)

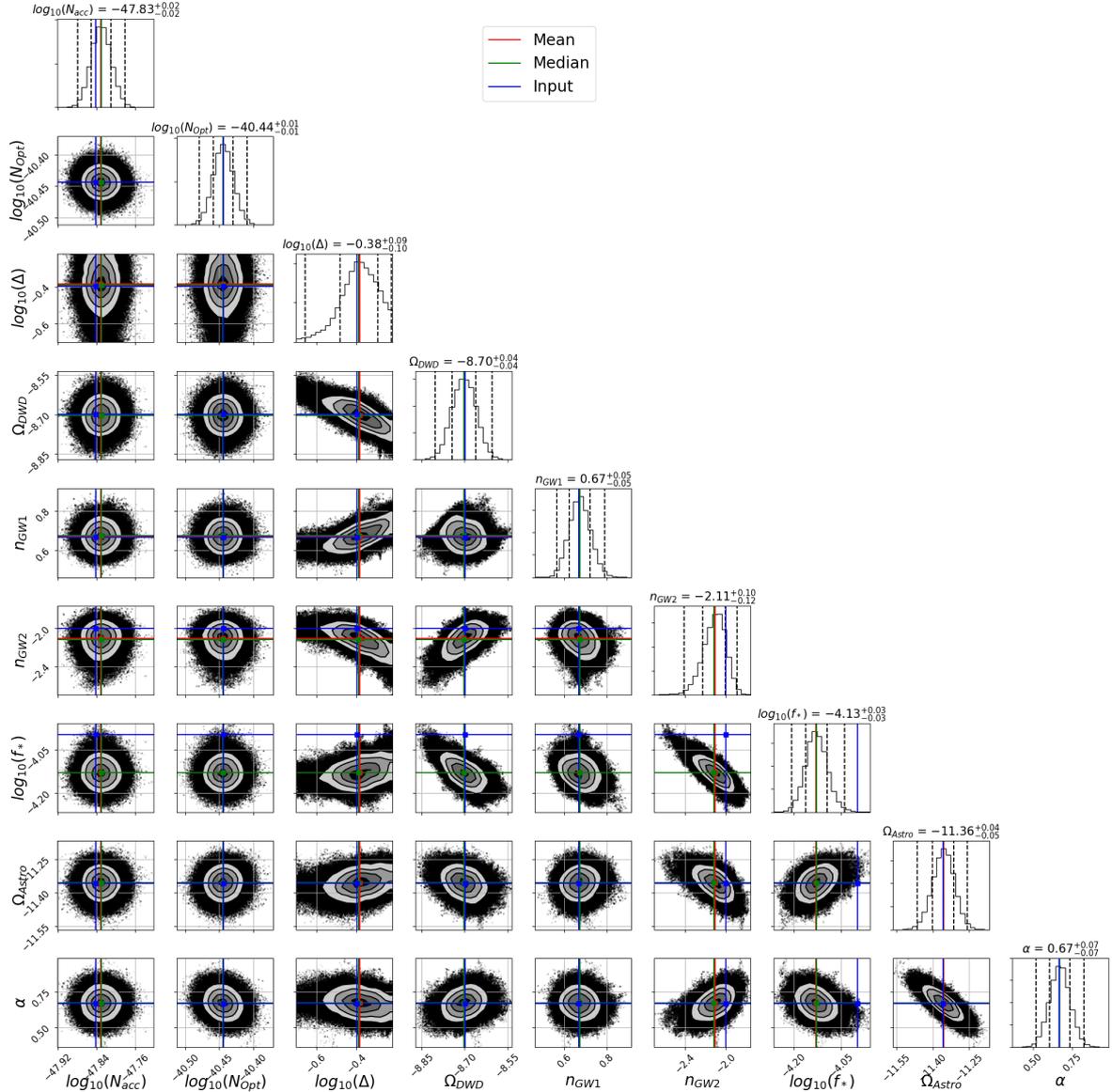


FIGURE 4.23 – Graphiques en coins de l’A-MCMC à neuf paramètres (DWD + BBH/BNS + bruit de LISA) en utilisant les canaux A , E et T . Les résultats sont donnés les deux grandeurs du modèle de bruit de LISA de la proposition [38], un fond DWD en loi puissance brisée et un SGWB astrophysique (deux amplitudes, trois pentes spectrales, une fréquence de référence et un paramètre de lissage de loi puissance brisée). Les lignes pointillées verticales sur la distribution postérieure représentent de gauche à droite les quantiles [16%, 50%, 84%]. Respectivement, les lignes rouge, verte et bleue sont la "moyenne", la "médiane" et les "vraies" valeurs pour chaque valeur de paramètre.

Double loi puissance cassée

Modèle utilisé :

$$\begin{aligned} \Omega_{GW}(f) = & A_1 \left(\frac{f}{f_{*,1}} \right)^{n_{GW1,1}} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{f}{f_{*,1}} \right)^{1/\Delta} \right] \right\}^{(n_{GW21}-n_{GW11})\Delta} \\ & + A_2 \left(\frac{f}{f_{*,2}} \right)^{n_{GW12}} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{f}{f_{*,2}} \right)^{1/\Delta} \right] \right\}^{(n_{GW22}-n_{GW12})\Delta} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dans cette section, nous présentons l'objectif de cette étude, à savoir la capacité de notre algorithme de séparation spectrale à mesurer deux fonds cosmologique de loi puissance brisée. Nous ajustons dix paramètres sur les deux périodogrammes des canaux A et E , et simultanément les trois paramètres de bruit du canal T . Nous utilisons le fond astrophysique de [68]. Nous ajustons le niveau des deux fonds cosmologique pour déterminer leur détectabilité. Dans la figure 4.24, nous traçons les deux SGWB cosmologiques en loi puissance brisée et utilisant quatre ans de données, les lignes bleues sont les trois périodogrammes pour les canaux de données A , E , et T , avec $N_{acc}, N_{Pos} = (1.44 \cdot 10^{-48} \text{ s}^{-4} \text{ Hz}^{-1}, 3.6 \cdot 10^{-41} \text{ Hz}^{-1})$. Nous adaptons les trois paramètres de bruit de LISA et les sept paramètres d'ondes gravitationnelles ($A_1, n_{GW11}, n_{GW21}, f_{*,1}, A_2, n_{GW12}, n_{GW22}, f_{*,2}$) pour deux lois puissances brisées. Les lignes oranges représentent le modèle utilisé. L'A-MCMC est caractérisé par $\beta = 0.01$, $N = 1\,000\,000$, et nous utilisons les 100 derniers candidats acceptés par l'algorithme de MCMC pour estimer la matrice de covariance. Nous utilisons des *priors* log-uniformes avec 3 ordres de grandeurs pour les quatre paramètres d'amplitude ($N_{acc}, N_{Pos}, A_1, A_2$) et aussi pour les paramètres de fréquences ($f_1, f_{*,1}, f_{*,2}$) et des *priors* uniformes pour les pentes (2 degrés de liberté). Les lignes vertes sont les résultats de l'A-MCMC, et en gris les erreurs pour 1σ . La figure 4.25 est le graphique en coins généré avec une année de données ; les distributions postérieures sont gaussiennes.

Le tableau 4.8 est le résumé des résultats avec deux entrées cosmologiques $A_1 = 1 \times 10^{-9}$ à $f_* = 1 \times 10^{-4} \text{ Hz}$ pour $n_{GW11} = 2$ et $n_{GW21} = -2$ et $A_2 = 2 \times 10^{-9}$ à $f_* = 1 \times 10^{-2} \text{ Hz}$ pour $n_{GW12} = 2$ et $n_{GW22} = -2$. Cela montre qu'il sera possible pour LISA de distinguer les deux signaux cosmologiques en loi puissance brisée pour ce niveau de bruit du détecteur LISA.

4.6.6 Signal avec un ou plusieurs pics fréquentiels

Signal avec un unique pic fréquentiel

Modèle utilisé :

$$\Omega_{GW}(f) = A_b \exp \left(- \frac{\left| \log_{10} \left(\frac{f}{f_b} \right) \right|^2}{\Delta^2} \right) \quad (4.13)$$

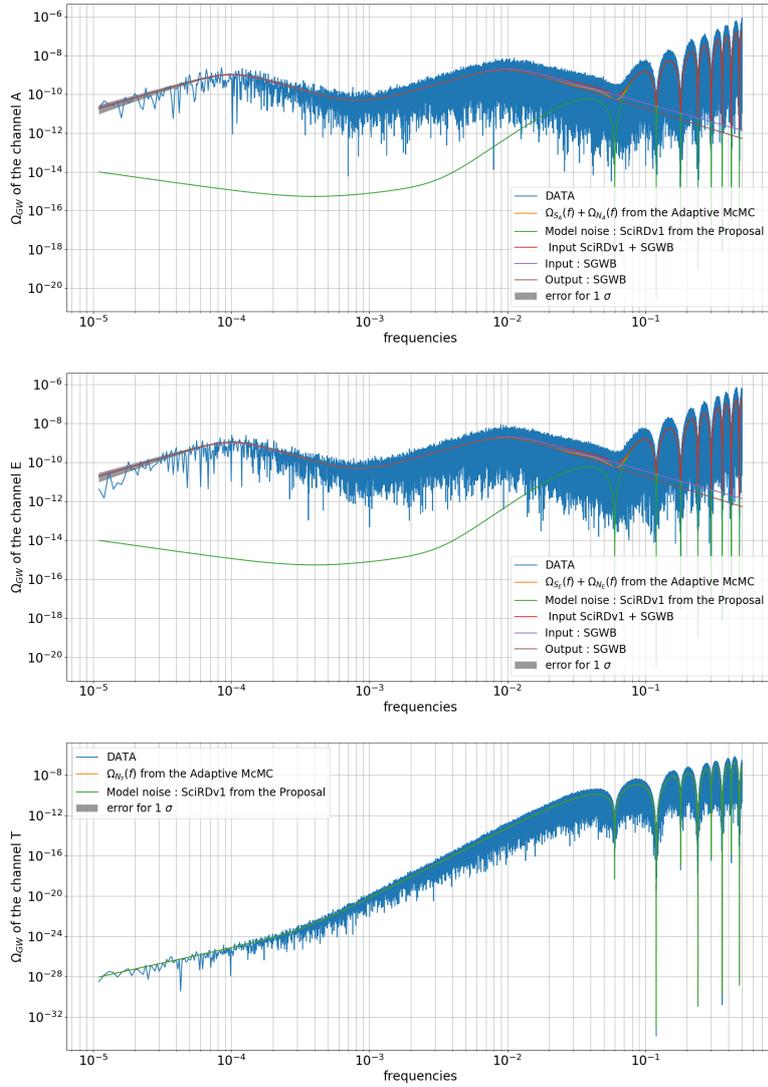


FIGURE 4.24 – Densité spectrale d’énergie pour les canaux A , E et T . Des estimations sont faites pour les deux magnitudes du modèle de bruit de LISA à partir de la proposition [38], deux fonds cosmologiques en lois puissances brisées avec un A-MCMC à 10 paramètres (Deux lois en puissance brisée cosmologique + bruit de LISA)



FIGURE 4.25 – Graphique en coins pour l'A-MCMC de dix paramètres (Deux lois puissances brisées cosmologiques + bruit de LISA) en utilisant les canaux A , E et T . Les résultats concernent les deux amplitudes du modèle de bruit de LISA de la proposition [38], et les deux lois en puissances brisées SGWB (deux amplitudes, quatre pentes spectrales et deux références de fréquence). Les lignes pointillées verticales sur la distribution postérieure représentent de gauche à droite les quantiles [16%, 50%, 84%]. Respectivement, les lignes rouges, vertes et bleues sont la "moyenne", la "médiane" et les "vraie" valeurs pour chaque valeur des paramètres.

	A_1	n_{GW11}	n_{GW21}	$f_{*,1}$ (Hz)	N_{acc} ($s^{-4}\text{Hz}^{-1}$)	N_{pos} (Hz^{-1})
μ	1.08×10^{-9}	2.09	-2.08	1.0×10^{-4}	1.46×10^{-48}	3.54×10^{-41}
σ	4.8×10^{-11}	0.13	0.18	4.1×10^{-6}	5.8×10^{-50}	7.29×10^{-43}
	A_2	n_{GW12}		n_{GW22}		$f_{*,2}$ (Hz)
μ	1.77×10^{-9}	1.99		-2.19		9.6×10^{-3}
σ	1.42×10^{-10}	0.14		0.45		6.9×10^{-4}

TABLE 4.8 – Résultats de l’A-MCMC avec l’entrée à deux SGWB cosmologiques en loi puissance brisée avec $A = 1 \times 10^{-9}$, $n_{GW1} = 2$, $n_{GW2} = -2$ et $f_* = 5 \times 10^{-4}$ Hz. Dans la figure 4.24 les lignes rouges correspondent aux vraies valeurs.

Dans cette section, nous présentons l’étude du signal avec un unique pic fréquentiel, il s’agit ici d’estimer la capacité de notre algorithme de séparation spectrale à mesurer un signal avec un unique pic fréquentiel du fond cosmologique en présence d’autres signaux stochastiques et de bruit de LISA.

Pour l’étude de l’information de Fisher, nous considérons un temps d’observation de quatre ans. Nous étudions l’évolution de l’amplitude du pic A_b , la position du pic f_b et la largeur à mi-hauteur Δ de celle-ci. L’objectif est d’avoir la plus grande variation de l’ensemble de paramètres du modèle, si on peut ou pas mesurer et avec chaque incertitude, il sera possible de mesurer avec notre méthode. On calcule l’incertitude de la mesure de l’amplitude du fond cosmologique pour plusieurs amplitudes A_b ($[1 \times 10^{-14}, 1 \times 10^{-8}]$ Hz) et durée d’observation (1, 4, 6 et 10 ans). Chaque carte est donnée pour une largeur à mi-hauteur Δ par rapport à la position fréquentielle du pic f_b . Il est important de noter que l’étude de Fisher est donnée avec le bruit de LISA et le SGWB astrophysique. Nous fixons la limite de détectabilité lorsqu’il y a moins de 50% d’incertitude sur la densité d’énergie cosmologique normalisée du SGWB cosmologique. La figure 4.26 est un exemple de la carte de l’incertitude de Fisher avec $A = 1 \times 10^{-12}$ et une durée d’observation de quatre ans.

Nous ajustons huit paramètres des deux périodogrammes des canaux A et E , et simultanément les trois paramètres de bruit du canal T . Nous utilisons le fond astrophysique de [68]. Nous ajustons le niveau du fond cosmologique pour déterminer sa détectabilité. Dans la figure 4.27 inclut le signal cosmologique à unique pic et utilisant quatre ans de données, les lignes bleues sont les trois périodogrammes pour les canaux des données A , E , et T , avec $N_{acc}, N_{Pos} = \left(1.44 \cdot 10^{-48} \text{ s}^{-4}\text{Hz}^{-1}, 3.6 \cdot 10^{-41} \text{ Hz}^{-1}\right)$. Nous ajustons les trois paramètres du bruit de LISA et les cinq paramètres d’ondes gravitationnelles ($A_b, f_b, \Delta, \Omega_{astro}, \alpha_{astro}$) pour respectivement le pic cosmologique et la loi puissance astrophysique $\Omega_{GW,astro}(f) = \Omega_{astro} \left(\frac{f}{f_*}\right)^{\alpha_{astro}}$. Les lignes oranges représentent le modèle utilisé. L’A-MCMC est caractérisé par $\beta = 0.01$, $N = 1\,000\,000$, et nous utilisons les 100 derniers candidats acceptés pour estimer la matrice de covariance. Nous utilisons des *a priori* logarithmiques et uniformes avec trois ordres de grandeurs pour les quatre para-

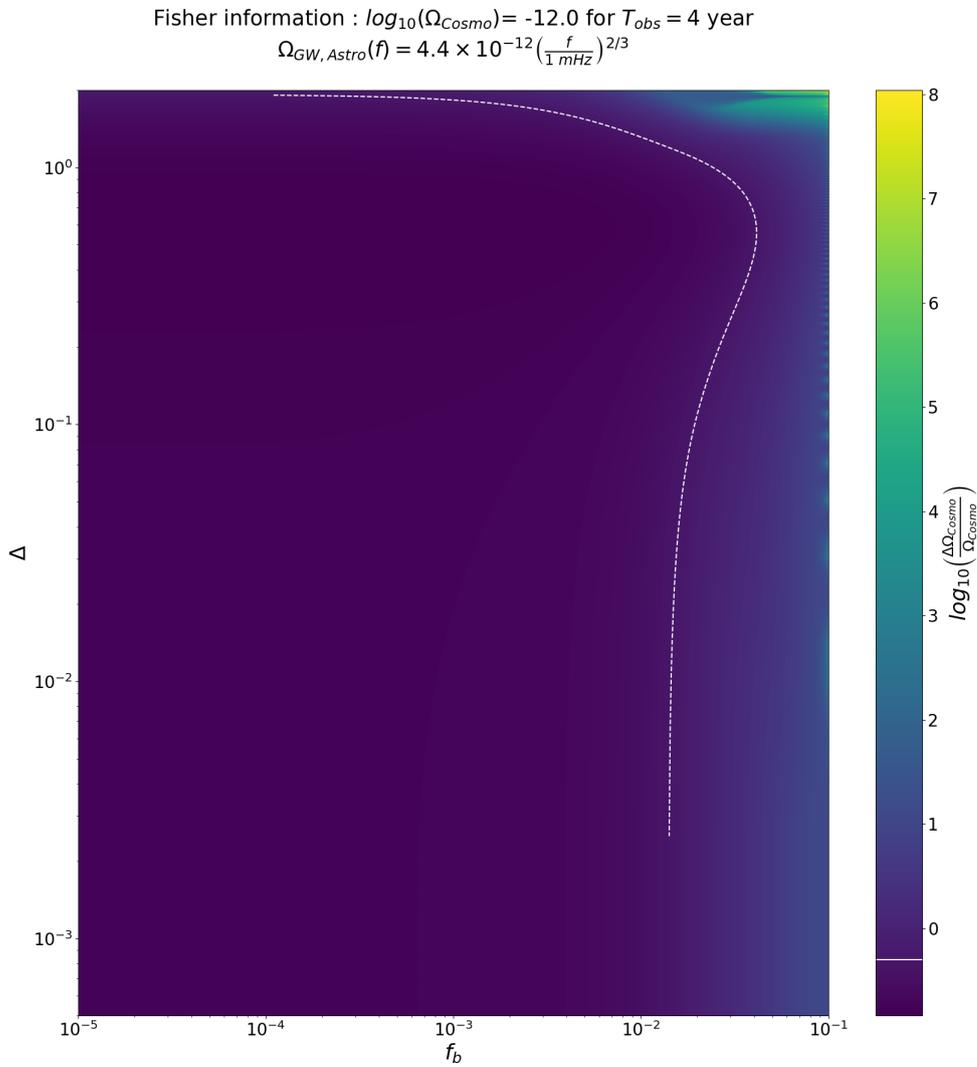


FIGURE 4.26 – Carte d’incertitude de l’amplitude de la source cosmologique à partir de l’information de Fisher pour deux SGWB, une loi puissance astrophysique et un signal cosmologique à pic unique pour quatre ans d’observation avec la largeur à mi-hauteur Δ en fonction de la position fréquentielle du pic f_b . La courbe pointillée blanche correspond à la limite d’incertitude de 50%, au-dessus de cette ligne, nous ne pouvons pas mesurer les paramètres.

mètres d'amplitude ($N_{acc}, N_{Pos}, A_b, \Omega_{astro}$) et aussi pour le paramètre de fréquence (f_b) et un *prior* uniforme pour la pente (2 degrés de liberté) et pour la largeur à mi-hauteur Δ également. Les lignes vertes sont les résultats de l'A-MCMC, et en gris les erreurs pour 1σ . La figure 4.28 est le graphique en coins généré avec une année de données ; les distributions postérieures sont gaussiennes.

Le tableau 4.9 est le résumé des résultats avec l'entrée cosmologique $A_b = 1 \times 10^{-9}$, $f_b = 1 \times 10^{-2}$ Hz, $\Delta = 0.2$, une entrée astrophysique $\Omega_{GW,astro}(3 \text{ mHz}) = 4.4 \times 10^{-12}$ et $\alpha_{astro} = \frac{2}{3}$. Cela montre qu'il sera possible pour LISA de distinguer le fond cosmologique du signal à pic unique pour ce niveau de bruit du détecteur LISA et également avec un SGWB astrophysique si l'on considère l'étude d'incertitude de Fisher, voir figure 4.26.

	A_b	f_b (Hz)	Δ	Ω_{astro}
μ	1.01×10^{-9}	3×10^{-4}	0.198	4.39×10^{-12}
σ	5.23×10^{-11}	4.2×10^{-6}	0.004	2.84×10^{-13}
	α_{astro}	N_{acc} ($\text{s}^{-4}\text{Hz}^{-1}$)	N_{pos} (Hz^{-1})	f_1 (Hz)
μ	.658	1.33×10^{-48}	3.59×10^{-41}	3.9×10^{-4}
σ	0.09	4.21×10^{-49}	7.03×10^{-43}	1.01×10^{-4}

TABLE 4.9 – Résultats de l'A-MCMC avec une entrée de signal cosmologique à pic unique et une entrée en loi puissance astrophysique avec $A_b = 1 \times 10^{-9}$, $f_b = 1 \times 10^{-2}$ Hz, $\Delta = 0.2$, $\Omega_{GW,astro}(3 \text{ mHz}) = 4.4 \times 10^{-12}$ et $\alpha_{astro} = \frac{2}{3}$. Dans la figure 4.28 les lignes rouges correspondent aux "vraies" valeurs.

Signal à double pic fréquentiel

Modèle utilisé :

$$\Omega_{GW}(f) = A_{b,1} \exp\left(-\frac{\left|\log_{10}\left(\frac{f}{f_{b,1}}\right)\right|^2}{\Delta_1^2}\right) + A_{b,2} \exp\left(-\frac{\left|\log_{10}\left(\frac{f}{f_{b,2}}\right)\right|^2}{\Delta_2^2}\right) \quad (4.14)$$

Dans cette section, nous présentons l'objectif de notre étude, à savoir la capacité de notre algorithme de séparation spectrale à mesurer le fond cosmologique à signal à double pic fréquentiel.

Nous ajustons huit paramètres des deux périodogrammes des canaux A et E , et simultanément les trois paramètres de bruit du canal T . Nous utilisons le fond astrophysique de [68]. Nous ajustons le niveau de fond de deux pics cosmologiques pour déterminer leurs détectabilités. Dans la figure 4.29 comprend un signal à doubles pics fréquentiels cosmologiques (c'est équivalent à deux signaux indépendants à pic unique, situé à deux

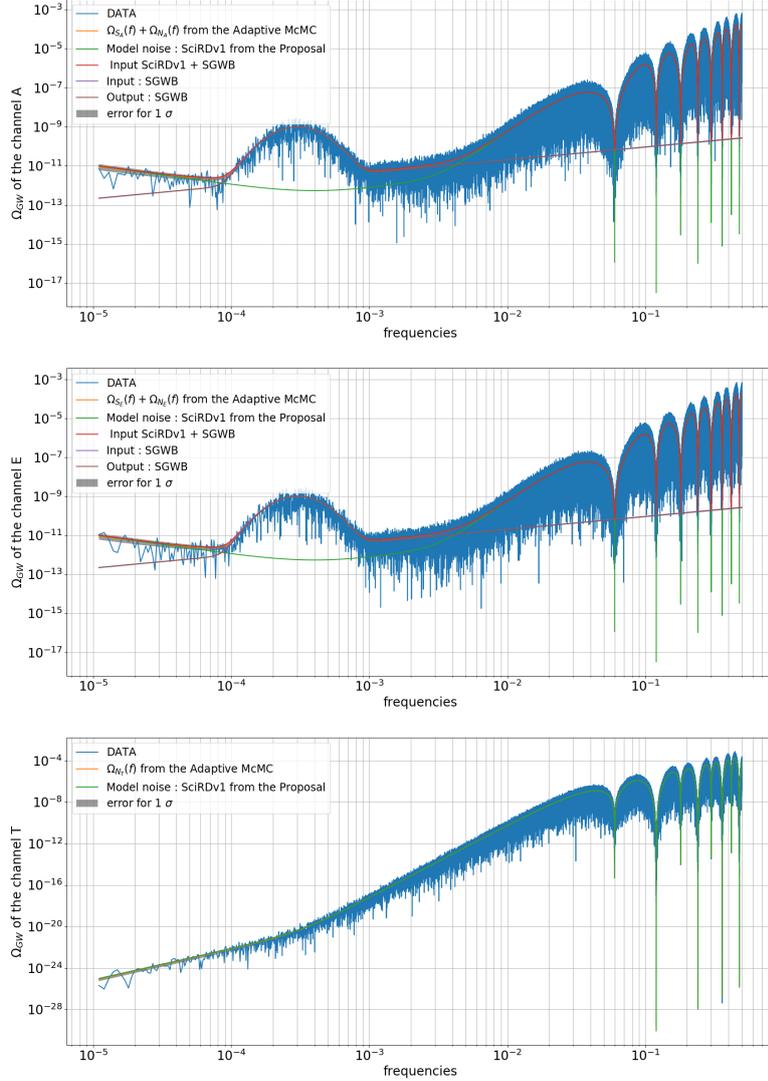


FIGURE 4.27 – Densité spectrale d’énergie pour les canaux A , E et T . Des estimations sont faites pour les deux magnitudes du modèle de bruit de LISA et la séparation de bruit de LISA en fréquence f_1 de la proposition [38], un fond cosmologique à pic unique et un SGWB astrophysique avec un A-MCMC de 8 paramètres bruit de fond +BBH/BNS + bruit de LISA)

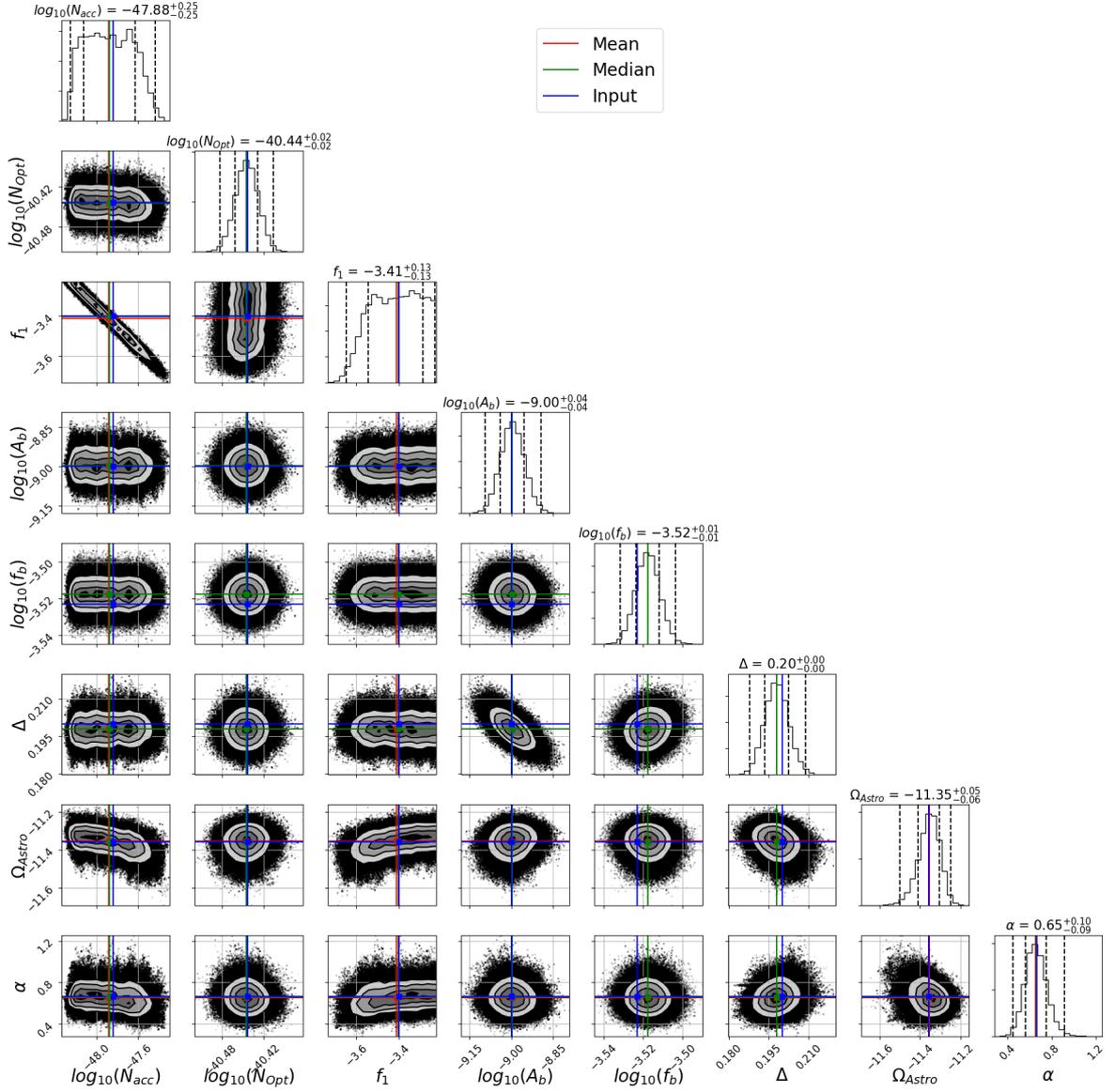


FIGURE 4.28 – Graphique en coins pour l’A-MCMC de huit paramètres (fond cosmologique à pic unique + SGWB des BBH/BNS + bruit de LISA) en utilisant les canaux A , E et T . Les résultats concernent les deux magnitudes du bruit de LISA et la constante de séparation des bruits de LISA f_1 de la proposition [38], le fond cosmologique à pic unique (amplitudes, une largeur à mi-hauteur et une fréquence de référence). Les lignes pointillées verticales sur la distribution postérieure représentent de gauche à droite les quantiles [16%, 50%, 84%]. Respectivement, les lignes rouges, vertes et bleues sont la "moyenne", la "médiane" et les "vraies" valeurs pour chaque valeur de paramètre.

endroits différents, mais dans le domaine de LISA), utilisant quatre ans de données, les lignes bleues sont les trois périodogrammes des canaux de données A, E , et T , avec $N_{acc}, N_{Pos} = \left(1.44 \cdot 10^{-48} \text{ s}^{-4}\text{Hz}^{-1}, 3.6 \cdot 10^{-41} \text{ Hz}^{-1}\right)$. Nous ajustons les trois paramètres de bruit de LISA et les six paramètres du fond stochastique d'ondes gravitationnelles ($A_{b,1}, A_{b,2}, f_{b,1}, f_{b,2}, \Delta_1, \Delta_2$) pour deux signaux en pic fréquentiel. Les lignes oranges représentent le modèle utilisé. L'A-MCMC est caractérisé par $\beta = 0.01$, $N = 1\,000\,000$, et nous utilisons les 100 derniers candidats acceptés par l'algorithme de MCMC pour estimer la matrice de covariance. Nous utilisons des *prior* log-uniformes avec 3 ordres de grandeur pour les quatre paramètres de magnitude ($N_{acc}, N_{Pos}, A_{b,1}, A_{b,2}$) et aussi pour le paramètre de fréquence ($f_{b,1}, f_{b,2}$) et des *priors* uniforme pour les largeurs à mi-hauteur (Δ_1, Δ_2) (2 degrés de liberté). Les lignes vertes sont les résultats de l'A-MCMC, et en gris les erreurs pour 1σ . La figure 4.30 est le graphique en coins généré avec les chaînes extraites de L'A-MCMC de données; les distributions postérieures sont gaussiennes, ce qui nous rend compte d'une bonne convergence.

Le tableau 4.10 est le résumé des résultats avec deux entrées cosmologiques en signal à pic unique $A_{b,1} = 2 \times 10^{-10}$, $f_{b,1} = 7 \times 10^{-4} \text{ Hz}$, $\Delta_1 = 0.25$ et $A_{b,2} = 2 \times 10^{-9}$, $f_{b,1} = 2 \times 10^{-2} \text{ Hz}$, $\Delta_1 = 0.2$. Cela montre qu'il sera possible pour LISA de distinguer et de séparer deux signaux de fond cosmologiques à pic pour ce niveau de bruit du détecteur LISA.

	$N_{acc} \text{ (s}^{-4}\text{Hz}^{-1}\text{)}$	$A_{b,1}$	$f_{b,1} \text{ (Hz)}$	Δ_1
μ	1.47×10^{-48}	2.24×10^{-10}	6.9×10^{-4}	0.246
σ	3.81×10^{-50}	9.4×10^{-12}	7.15×10^{-6}	0.0026
	$N_{pos} \text{ (Hz}^{-1}\text{)}$	$A_{b,2}$	$f_{b,2} \text{ (Hz)}$	Δ_2
μ	3.80×10^{-41}	1.89×10^{-10}	1.91×10^{-2}	0.182
σ	7.96×10^{-43}	1.86×10^{-16}	9.46×10^{-4}	0.011

TABLE 4.10 – Résultats de l'A-MCMC avec une entrée de SGWB cosmologique en signaux à pic fréquentiel avec $A_{b,1} = 2 \times 10^{-10}$, $f_{b,1} = 7 \times 10^{-4} \text{ Hz}$, $\Delta_1 = 0.25$ et $A_{b,2} = 2 \times 10^{-9}$, $f_{b,1} = 2 \times 10^{-2} \text{ Hz}$, $\Delta_1 = 0.2$. Dans la figure. 4.30 les lignes rouges correspondent aux vraies valeurs.

4.6.7 Signal de Wiggly

Modèle utilisé :

$$\Omega_{GW}(f) = A_w 10^{\sin(\Delta \log_{10}(\frac{f}{f_w}))} \quad (4.15)$$

Dans cette section, nous présentons l'objectif de notre étude, à savoir la capacité de notre algorithme de séparation spectrale à mesurer un signal Wiggly en présence d'autres signaux stochastiques et de bruit de LISA.

Pour l'étude de l'information de Fisher, nous considérons un temps d'observation de quatre ans. Nous étudions l'évolution de l'amplitude de Wiggly A_w , la fréquence de

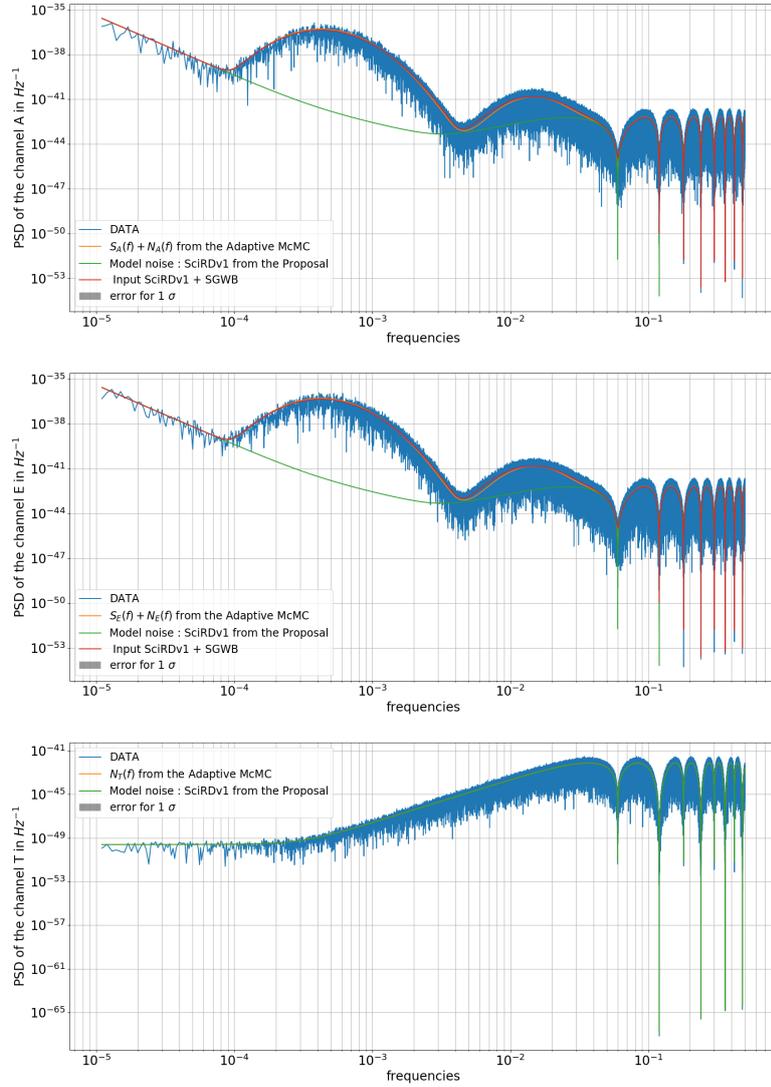


FIGURE 4.29 – Densité spectrale de puissance des canaux A , E et T . Des estimations sont faites pour les deux magnitudes du modèle de bruit de LISA à partir de la proposition [38], deux fonds de signal à pics fréquentiels d’origine cosmologique avec un A-MCMC de dix paramètres (Deux signaux à pics fréquentiels cosmologiques + bruit de LISA)

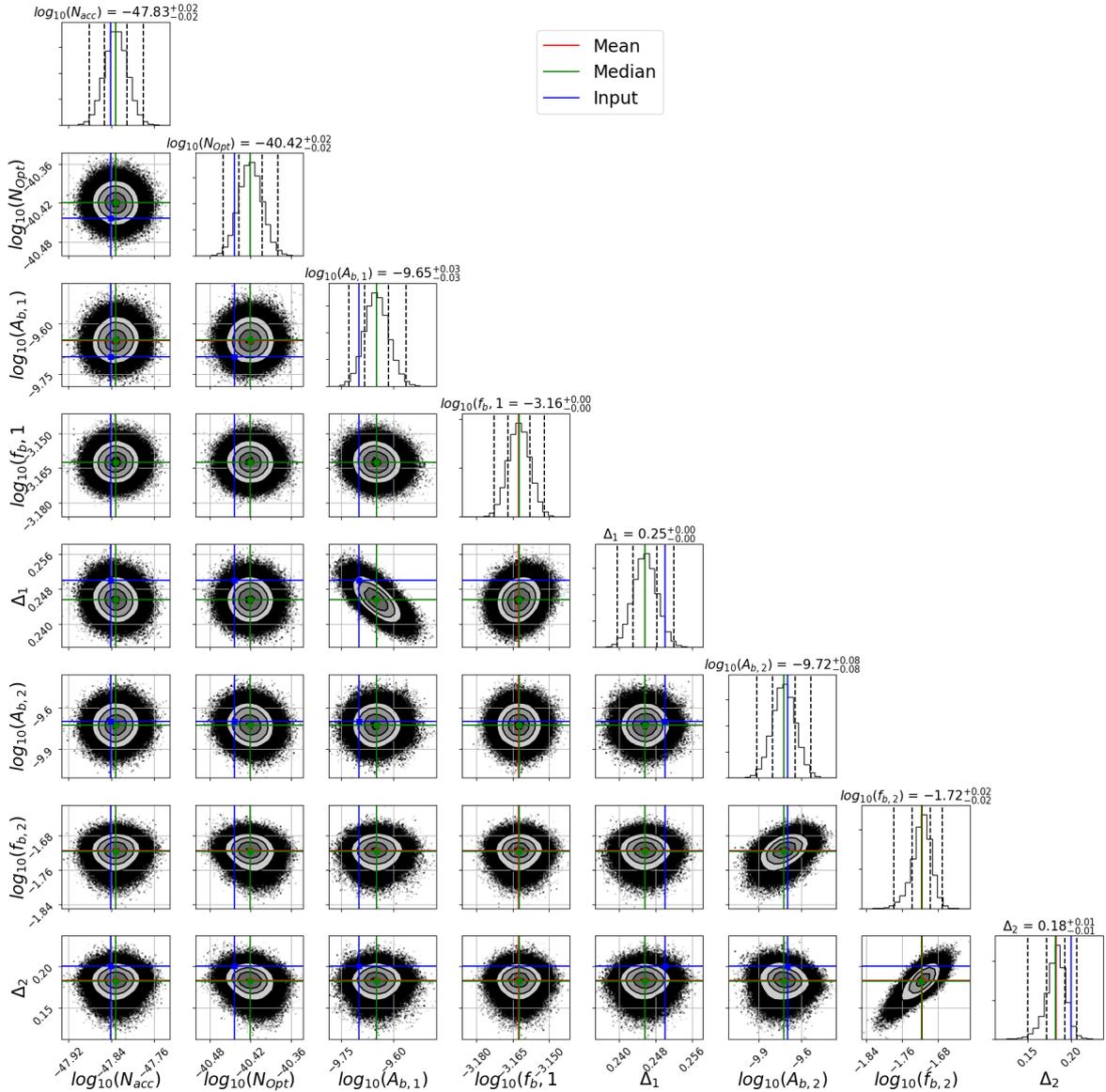


FIGURE 4.30 – Diagramme en coins pour l'A-MCMC de huit paramètres (Deux pics cosmologiques + bruit de LISA) en utilisant les canaux A , E et T . Les résultats concernent les deux magnitudes du modèle de bruit de LISA de la proposition [38], et deux signaux cosmologiques à pic fréquentiel (deux amplitudes, deux largeurs à mi-hauteur et deux fréquences de référence). Les lignes pointillées verticales sur les distributions postérieures représentent de gauche à droite les quantiles [16%, 50%, 84%]. Respectivement, les lignes rouges, vertes et bleues sont la "moyenne", la "médiane" et les "vraies" valeurs pour chaque valeur des paramètres.

référence f_w et le pic à pic du Wiggly Δ . L'objectif est d'avoir le plus grand ensemble de variations des paramètres du modèle, si on peut ou pas mesurer le signal dans le contexte de source et de bruit de LISA avec notre méthode. Nous calculons l'incertitude de mesure de l'amplitude du signal Wiggly dans le contexte du bruit de LISA et d'un SGWB astrophysique pour plusieurs amplitudes du Wiggly A_b ($[1 \times 10^{-14}, 1 \times 10^{-8}]$ Hz) et la durée d'observation de 1, 4, 6 et 10 ans. Chaque carte est donnée avec le pic à pic du Wiggly Δ par rapport à sa fréquence de référence f_w . Il est important de noter que l'étude de Fisher est donnée avec le bruit de LISA et le SGWB astrophysique. Nous fixons la limite de détectabilité lorsqu'il y a moins de 50% d'incertitude sur la densité d'énergie cosmologique normalisée du SGWB produit cosmologiquement. La figure 4.31 est un exemple de la carte de l'incertitude produite avec notre méthode de Fisher avec $A = 1 \times 10^{-13}$ et une durée d'observation de quatre ans.

Nous ajustons huit paramètres des deux périodogrammes des canaux A et E , et simultanément les trois paramètres de bruit du canal T . Nous utilisons le fond astrophysique de [68]. Nous ajustons le niveau d'amplitude de Wiggly pour déterminer sa détectabilité. Dans la figure 4.32, qui inclut le signal SGWB de Wiggly et utilisant quatre ans de données, les lignes bleues sont les trois périodogrammes pour les canaux de données A, E , et T , avec $N_{acc}, N_{Pos} = \left(1.44 \cdot 10^{-48} \text{ s}^{-4} \text{ Hz}^{-1}, 3.6 \cdot 10^{-41} \text{ Hz}^{-1}\right)$. Nous ajustons les trois paramètres du bruit de LISA et les cinq paramètres d'ondes gravitationnelles ($A_w, f_w, \Delta, \Omega_{astro}, \alpha_{astro}$) pour respectivement le signal de Wiggly cosmologique et la loi puissance astrophysique $\Omega_{GW,astro}(f) = \Omega_{astro} \left(\frac{f}{f_*}\right)^{\alpha_{astro}}$. Les lignes oranges représentent le modèle utilisé. L'A-MCMC est caractérisé par $\beta = 0.01$, $N = 1\,000\,000$, et nous utilisons les cents derniers candidats acceptés par l'A-MCMC pour estimer la matrice de covariance. Nous utilisons des *priors* log-uniformes avec 3 ordres de grandeurs pour les quatre paramètres d'amplitude ($N_{acc}, N_{Pos}, A_w, \Omega_{astro}$) et aussi pour le paramètre de fréquence (f_w) et des *priors* uniformes pour la pente (2 degrés de liberté) et le pic à pic du Wiggly Δ . Les lignes vertes sont les résultats de l'A-MCMC, et en gris les erreurs pour 1σ . La figure 4.33 est le graphique en coins généré avec les chaînes du MCMC ; les distributions postérieures sont gaussiennes.

Le tableau 4.11 est le résumé des résultats avec l'entrée cosmologique $A_w = 1 \times 10^{-11}$, $f_w = 1 \times 10^{-1}$ Hz, $\Delta = 10$ et une entrée astrophysique $\Omega_{GW,astro}(3 \text{ mHz}) = 4.4 \times 10^{-12}$ et $\alpha_{astro} = \frac{2}{3}$. Cela montre qu'il sera possible pour LISA de distinguer le fond cosmologique du signal de Wiggly avec ce niveau de bruit du détecteur LISA et également avec un SGWB astrophysique si l'on considère l'étude d'incertitude de Fisher, voir figure 4.31.

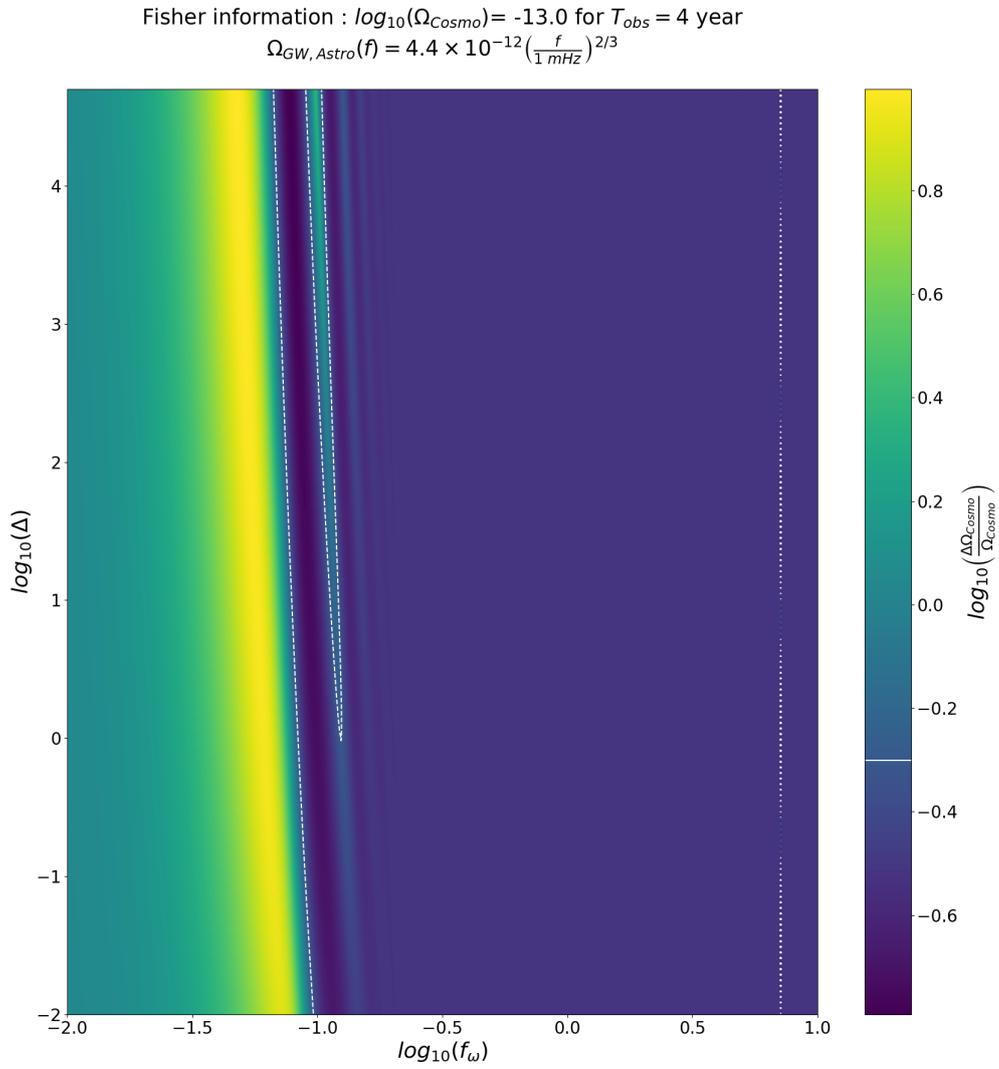


FIGURE 4.31 – Carte de l’incertitude de l’amplitude d’un signal de Wiggly à partir des informations de Fisher pour deux SGWB, une loi puissance astrophysique et un signal Wiggly pour quatre ans d’observation avec son pic à pic du Wiggly Δ versus sa fréquence de référence f_w . La courbe pointillée blanche correspond à la limite d’incertitude de 50%, au-dessus de cette ligne, nous ne pouvons pas mesurer les paramètres du modèle.

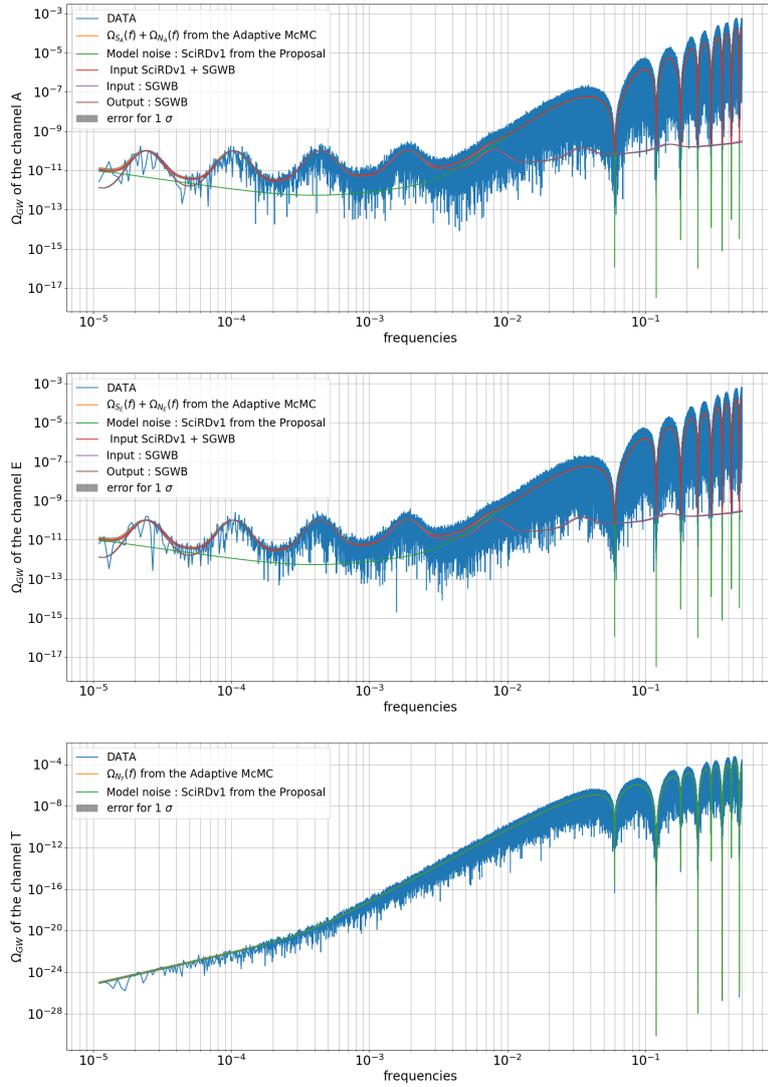


FIGURE 4.32 – Densité spectrale d'énergie des canaux A , E et T . Des estimations sont faites pour les deux magnitudes du modèle de bruit de LISA et la fréquence de séparation des bruits de LISA f_1 de la proposition [38], le fond en Wiggly et un SGWB astrophysique avec un A-MCMC de huit paramètres (fond en Wiggly + BBH/BNS + bruit de LISA)

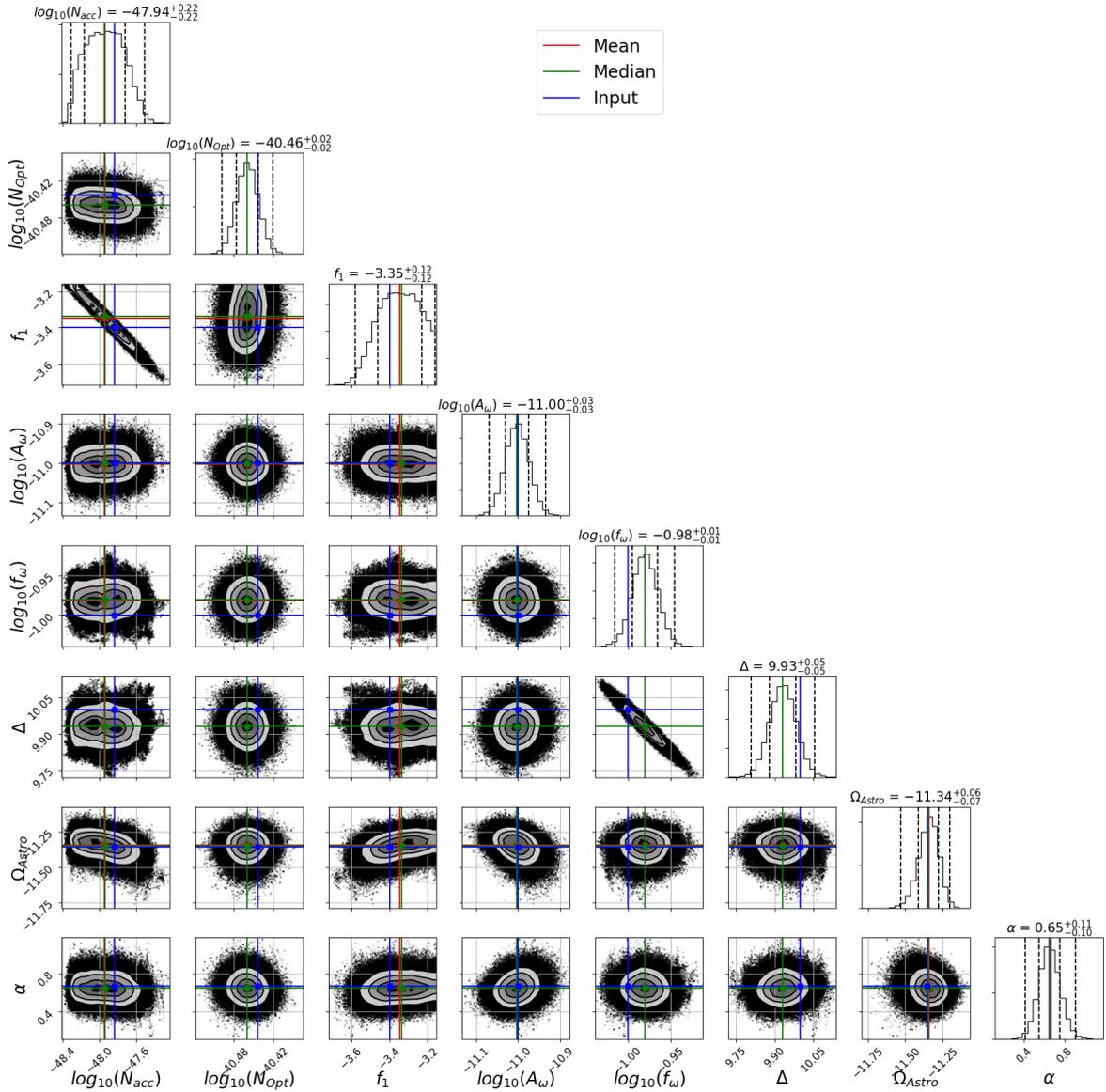


FIGURE 4.33 – Graphique en coins de l’A-MCMC de huit paramètres (Wiggly + BBH/BNS + bruit de LISA) en utilisant les canaux A , E et T . Les résultats concernent les deux magnitudes et la fréquence de séparation des bruits de LISA f_1 pour le modèle de bruit de LISA de la proposition [38], et le fond en Wiggly (amplitudes, un pic à pic du Wiggly et sa fréquence de référence). Les lignes pointillées verticales sur la distribution postérieure représentent de gauche à droite les quantiles [16%, 50%, 84%]. Respectivement, les lignes rouges, vertes et bleues sont la "moyenne", la "médiane" et les "vraies" valeurs pour chaque valeur du modèle.

	A_w	f_w (Hz)	Δ	Ω_{astro}
μ	9.93×10^{-12}	0.10	9.93	4.49×10^{-12}
σ	3.43×10^{-13}	0.04	0.052	3.7×10^{-13}
	α_{astro}	N_{acc} ($s^{-4}Hz^{-1}$)	N_{pos} (Hz^{-1})	f_1 (Hz)
μ	0.65	1.14×10^{-48}	3.47×10^{-41}	4.6×10^{-4}
σ	0.10	3.18×10^{-49}	6.95×10^{-43}	1.1×10^{-4}

TABLE 4.11 – Résultats de l’A-MCMC pour une entrée un signal SGWB cosmologique de Wiggly avec $A_w = 1 \times 10^{-11}$, $f_w = 1 \times 10^{-1}$ Hz, $\Delta = 10$ et une loi puissance astrophysique telle que $\Omega_{GW,astro}(3 \text{ mHz}) = 4.4 \times 10^{-12}$ et $\alpha_{astro} = \frac{2}{3}$. Dans la figure 4.33 les lignes rouges correspondent aux vraies valeurs.

4.7 Séparation spectrale des cordes cosmiques

4.7.1 Les cordes cosmiques

Les cordes cosmiques sont des solutions provenant de la théorie des champs, il s’agit de défauts topologiques stables qui devrait s’être formées pendant les transitions de phase de rupture de symétrie dans l’Univers primitif [181]. L’étude des cordes cosmiques de [34] décrit la possibilité pour LISA de détecter une tension minimale des cordes autour de $G\mu \leq 10^{-17}$, ce qui correspond à un plateau autour de $\Omega_{GW}^{plateau} \simeq 5 \times 10^{-12}$. La revue de [60] indique qu’il sera possible avec LISA de mesurer un SGWB à partir d’une transition de phase avec $\Omega_{GW} \simeq 10^{-13}$; il y a beaucoup d’incertitude quant à l’existence d’une source SGWB à transition de phase dans la bande d’observation LISA, sans parler de l’intensité de ce signal. La revue [69] décrit une limite de détectabilité avec LISA de $\Omega_{GW}(f \simeq 10^{-3} \text{ Hz}) \simeq 5 \times 10^{-13}$ pour une inflation standard produisant un SGWB. Le niveau du SGWB de l’inflation est probablement $\Omega_{GW}(f \simeq 10^{-3} \text{ Hz}) \approx 10^{-15}$, ou moins. Voir les revues [60, 69] pour des descriptions d’autres SGWB possibles produits cosmologiquement. Ces études citées ci-dessus correspondent à un cas idéal de source cosmologique et de bruit de LISA, et n’ont pas inclus les effets d’un premier plan galactique et d’un fond astrophysique (comme nous le faisons dans cette thèse).

4.7.2 Séparation spectrale des cordes cosmiques

Dans cette section, nous étudions la séparation spectrale du fond stochastique d’onde gravitationnelle (SGWB) produit par les cordes cosmiques dans le contexte du bruit de LISA, de la source astrophysique et du premier plan galactique des binaires de naines blanches. Nous utilisons également les modèles de cordes cosmiques [34] et comparons leur séparabilité spectrale. Les méthodes de l’information de Fisher et de Markov Chain Monte Carlo donnent une estimation du bruit de LISA et des paramètres pour les différentes sources de signaux. Nous estimons simultanément le premier plan galactique, le fond astrophysiques et des cordes cosmiques. Nous estimons les limites de détection

pour les futures observations de LISA du SGWB dans le domaine spectral avec les trois canaux LISA A , E et T . Dans le contexte du fond astrophysique attendu et d'un premier plan galactique, une tension de cordes cosmiques d'environ $G\mu \approx 1 \times 10^{-16}$ à 1×10^{-17} pourrait être détectée par LISA avec notre stratégie de séparation spectrale [46]. Nous introduisons la densité spectrale d'énergie des cordes cosmiques du modèle $i \in [1, 2, 3]$ $\Omega_{GW,G\mu}(G\mu, i, f)$ [34]. Le modèle 1 des cordes cosmique (lire section 3.1 de Auclair *et al* [34]) correspond à un modèle analytique de cordes cosmiques provenant des boucles produites par le réseau de longues chaînes qui sont décrites par un seul paramètre libre, ce paramètre correspond à la taille des boucles au moment de leur formation. Ce calcul a été initialement décrit par Kibble [142]. Le modèle 2 correspond à des simulations du modèle de Blanco-Pillado, Olum et Shlar (BOS) [45]. Ce modèle est issu des simulations du réseau de cordes cosmiques présentes entre les ères du rayonnement et de la matière. Ce modèle dépend donc d'une très bonne connaissance des paramètres cosmologiques. Le troisième et dernier modèle considéré dans notre étude provient d'une simulation de Lorenz, Ringeval et Sakellariadou (LRS) [162], il s'agit d'une simulation sœur au modèle 2, mais qui calcule et considère des quantités différentes. Par exemple, la puissance à l'ère de la matière diffère de celle du modèle 2 [34]. On peut résumer la densité spectrale d'énergie du SGWB dans la bande LISA, comme la somme de tous les SGWB :

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{A_1 \left(\frac{f}{f_*}\right)^{\alpha_1}}{1 + A_2 \left(\frac{f}{f_*}\right)^{\alpha_2}} + \Omega_{Astro} \left(\frac{f}{f_*}\right)^{\alpha_{Astro}} + \Omega_{GW,G\mu}(G\mu, i, f) \quad (4.16)$$

avec $\alpha \sim 2/3$ pour la composante astrophysique et les basses fréquences du premier plan galactique ($\Omega_{DWD,LF}(f) \sim \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{f}{f_*}\right)^{\alpha_1 - \alpha_2}$, voir [48]). Le premier plan galactique est supposé être une loi puissance brisée, car aux hautes fréquences ($\simeq 0.1$ Hz) le nombre de DWD diminue du fait de leurs limites physiques.

On utilise pour les cordes cosmiques, une description discrète, le calcul de la densité spectrale d'énergie sans dimension est très gourmand en temps de calcul. Pour surmonter ce problème, nous générons une bibliothèque de modèles. Nous calculons précédemment 1 000 $\Omega_{GW,G\mu}(G\mu, i, f)$ pour $G\mu$ entre 1×10^{-22} et 1×10^{-8} . Le processus de MCMC sélectionne les nouveaux candidats du catalogue. À l'issue du calcul, nous avons pour les cordes cosmiques une chaîne avec l'indice des positions des modèles du catalogue. Nous pouvons le transformer en une valeur $G\mu$. Cette méthode donne, effectivement, une limite discrète ; un MCMC qui ne peut pas avoir une plus faible incertitude quant à la précision d'entrée du catalogue, dans notre cas, c'est $\frac{\Delta G\mu}{G\mu} = 0.033$.

Nous calculons deux séries d'analyses, l'une avec le bruit de LISA et les cordes cosmiques (Modèle 1, 2, 3) [34], et l'autre avec le bruit de LISA, le premier plan galactique, le fond astrophysique et les cordes cosmiques. Nous comparons les deux résultats pour voir l'effet des autres SGWB dans la mesure des cordes cosmiques. Ainsi, nous considérons

trois cas particuliers :

- Cas (I) : Bruit de LISA + signal stochastique de cordes cosmiques (Modèle \mathcal{M}_i avec $i = 1, 2, 3$). Paramètres ajustés : $\theta = [N_{\text{acc}}, N_{\text{pos}}, G\mu]$. Ce cas correspond à l'étude réalisée par Auclair *et. al* [34].
- Cas (II) : Bruit de LISA + premier plan galactique des binaires de naines blanches + le fond des binaires de trous noirs et d'étoile à neutrons. Paramètres ajustés : $\theta = [N_{\text{acc}}, N_{\text{pos}}, \Omega_{\text{astro}}, \alpha_{\text{astro}}, G\mu, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2]$
- Cas (III) : Cas (II) + signal stochastique de cordes cosmiques (Modèle \mathcal{M}_i avec $i = 1, 2, 3$). Paramètres ajustés : $\theta = [N_{\text{acc}}, N_{\text{pos}}, \Omega_{\text{astro}}, \alpha_{\text{astro}}, G\mu, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2]$

Nous utilisons des priors en log-uniformes pour les deux magnitudes de bruit LISA, les trois paramètres d'amplitude du fond stochastique et la tension des cordes, ($N_{\text{acc}}, N_{\text{pos}}, A_1, A_2, \Omega_{\text{astro}}, G\mu$). Des priors uniformes sont utilisés pour les pentes ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{\text{astro}}$), entre -1 et 1 .

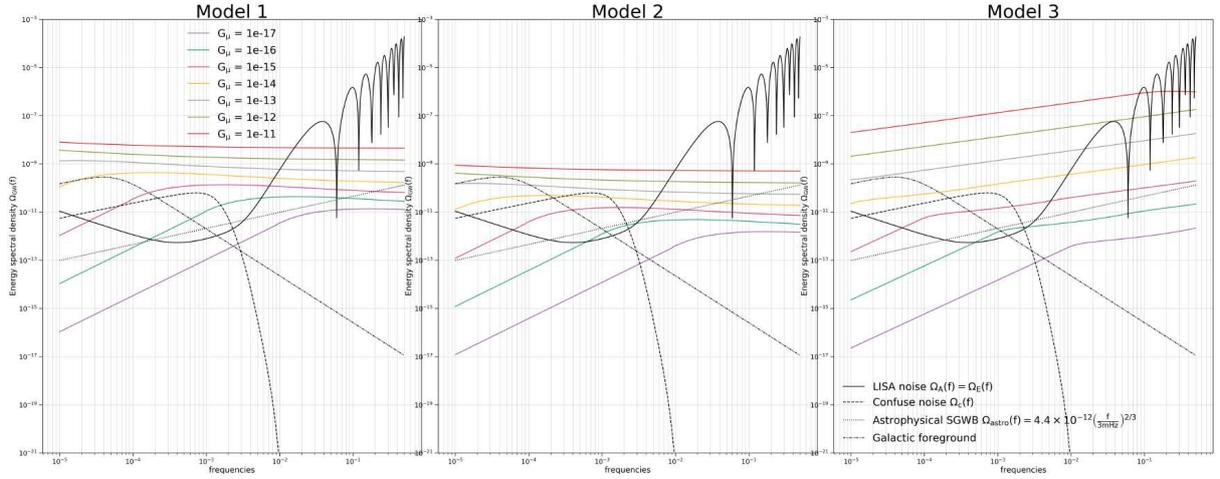


FIGURE 4.34 – Densité spectrale d'énergie sans dimension des modèles 1,2,3 des cordes cosmiques[34], nous superposons également le bruit de LISA et les sources de contaminations tel que les modèles de premier plan galactique provenant des binaires de naines blanches de Lamberts *et. al.* [154], le bruit confus de Robson *et. al.* [208] et l'estimation du fond d'ondes gravitationnelles produit par les binaires de BBH/BNS avec O2 [68].

Dans les figures 4.35 et 4.36, nous montrons respectivement l'incertitude des estimations des paramètres de $G\mu$ (la tension des cordes cosmiques) de l'étude de l'information

de Fisher $F_{ab}^{-1} = \sigma_{ab}^2$ (tracé avec des lignes), et de l'A-MCMC (avec les points) pour le canal A et E , avec le canal de bruit T des neuf paramètres $\theta = [N_{acc}, N_{pos}, \Omega_{astro}, \alpha_{astro}, G\mu, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2]$ (voir figure 4.36) et trois paramètres $\theta = [N_{acc}, N_{pos}, G\mu]$ dans l'étude de la figure 4.35. Nous menons l'étude avec différents SGWB astrophysiques $\Omega_{GW,astro}$ et galactiques $\Omega_{GW,galactic}$. La barre d'erreur est donnée pour 1 σ d'écart type de la distribution a posteriori gaussienne. La ligne horizontale en pointillés représente le niveau d'erreur de 50 %; au-dessus de cette limite, nous ne pouvons pas séparer les cordes cosmiques contenues dans le SGWB. Nous utilisons le modèle LISA de Smith et Caldwell [222] et les valeurs des paramètres LISA de la proposition [19]. Nous résumons le résultat de la mesure de limitation dans le tableau 4.12.

Nous avons la preuve que la somme du premier plan galactique et du fond astrophysique a un effet sur l'estimation de la mesure de limitation des cordes cosmiques. Pour comprendre l'origine de l'effet, nous calculons deux cas particuliers avec l'information de Fisher, bruit de LISA + DWD + cordes cosmiques et bruit de LISA + BBH/BNS + corde cosmique. À la lumière de cette étude, les deux fonds modifient la mesure de limitation des cordes cosmiques, mais celui qui contribue le plus au changement de la limite de $G\mu$ est le fond qui a pour origine les binaires galactiques. En fait, le premier plan galactique est localisé à basses fréquences, c'est également la place du fond des cordes cosmiques. Nous avons également une preuve de la mesure de limitation à partir des différents modèles de cordes cosmiques. Si l'on considère la densité spectrale d'énergie sans dimension pour le modèle 1, 2 et 3 des cordes cosmiques respectivement de gauche à droite sur la figure 4.34, les courbes spectrales des modèles 1 et 2 sont vraiment proches, c'est la raison pour laquelle les résultats de la mesure de limitation sont proches; mais pour le modèle 3, le point de rupture (fréquence de la modification de la pente spectrale) est pour une valeur constante de $G\mu$ à une fréquence plus basse, l'endroit où se situe le premier plan galactique. L'origine de la différence entre les modèles 1 et 2 est que la plus grande densité spectrale d'énergie entre les modèles 1 et 2. En effet, le modèle 1, pour une tension $G\mu$ fixé donne une densité d'énergie plus grande. Par conséquent la limite de détectabilité est plus faible.

Bruit de LISA + Cordes cosmiques			
	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3
$G\mu_{lim}$	1×10^{-17}	2.8×10^{-17}	2.8×10^{-17}
Bruit de LISA + DWD + BBH/BNS + Cordes cosmiques			
	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3
$G\mu_{lim}$	2.7×10^{-17}	8.4×10^{-17}	1.3×10^{-16}

TABLE 4.12 – Tableau résumant les résultats de la séparation du fond stochastique des cordes cosmiques pour la limite de détectabilité fixé à 50 % d'incertitude de la mesure de la tension cosmologique $G\mu$, $\frac{\Delta G\mu}{G\mu}$.

Nous avons étudié la prédiction de la limite de mesure d'un SGWB cosmologique

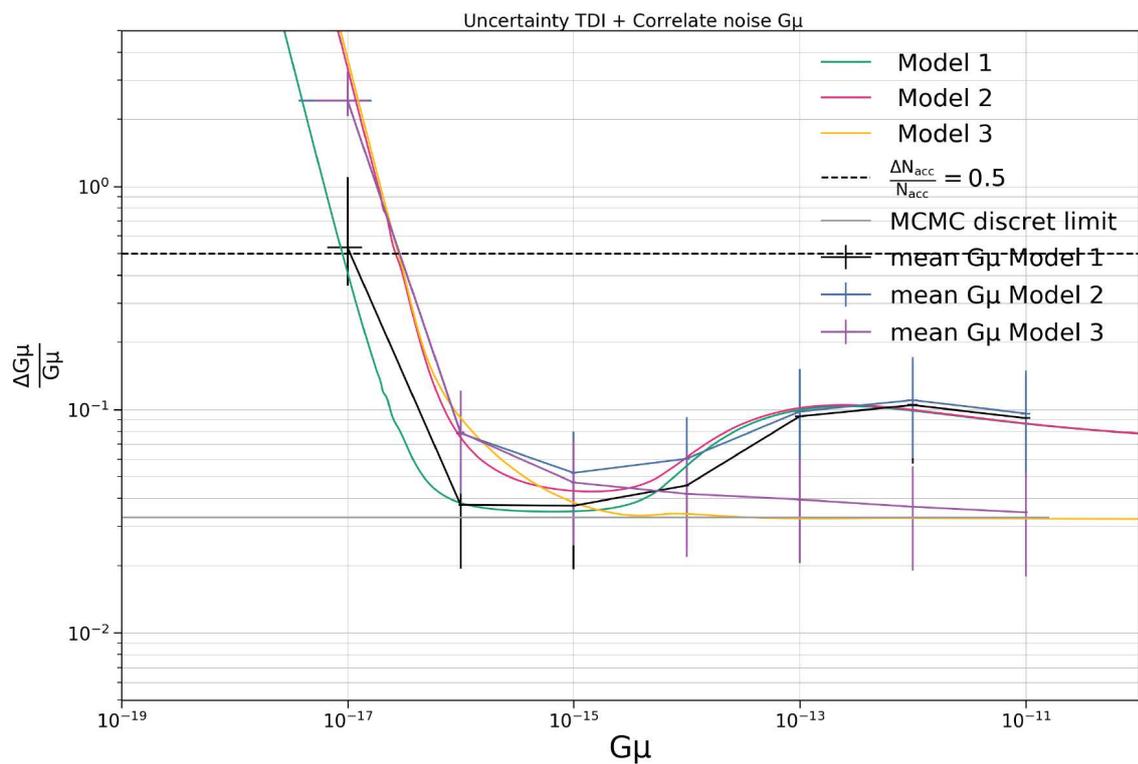


FIGURE 4.35 – Les estimations de l’incertitude de la tension $G\mu$ de l’étude d’information de Fisher désignées par des traits pleins et du MCMC par des croix. La ligne horizontale en tirets supérieure représente le niveau d’erreur de 50%. En fait, au-dessus de la ligne, l’erreur est supérieure à 50 %.

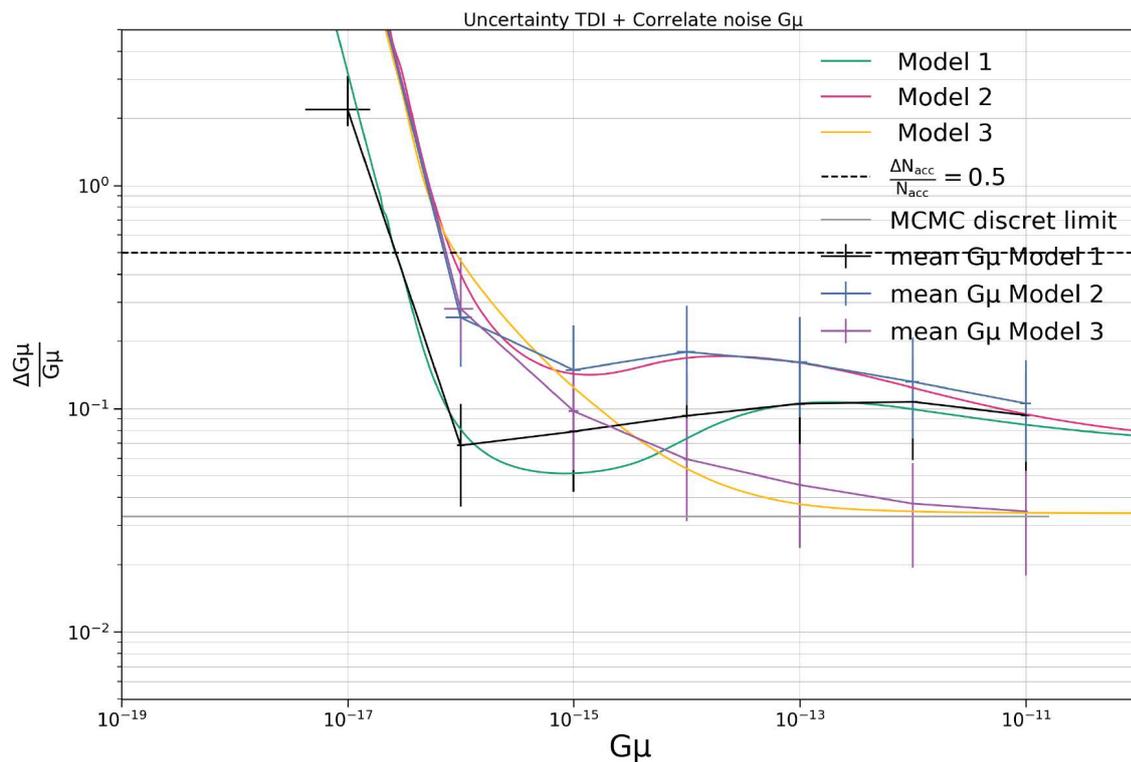


FIGURE 4.36 – Les Estimations de l’incertitude de la tension $G\mu$ de l’étude de l’information de Fisher sont indiquées par des traits pleins et du MCMC par des croix. La ligne horizontale en tirets supérieure représente le niveau d’erreur de 50%. En fait, au-dessus de la ligne, l’erreur est supérieure à 50 %. Il s’agit de l’étude pour laquelle nous avons considéré la présence du fond astrophysique et galactique.

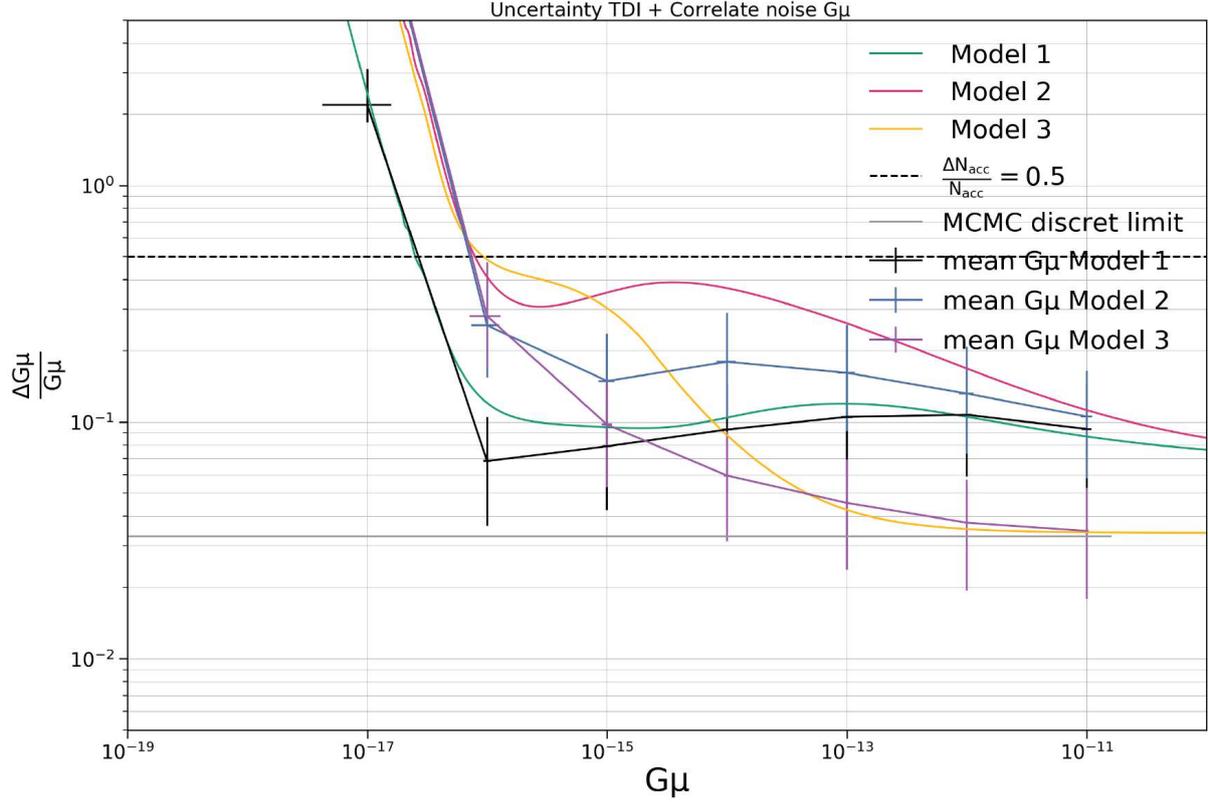


FIGURE 4.37 – Les estimations de l’incertitude de mesure de tension $G\mu$ de l’étude de l’information de Fisher sont indiquées par des traits pleins et des MCMC par des croix. La ligne horizontale en tirets supérieure représente le niveau d’erreur à 50%. En fait, au-dessus de la ligne, l’erreur est supérieure à 50 %. Il s’agit de l’étude pour laquelle nous avons considéré la présence du fond astrophysique et galactique de Robson & Cornish [208].

à partir de cordes cosmiques d’origine par LISA en présence d’un fond astrophysique isotrope, d’un premier plan galactique et du bruit de LISA pour quatre ans de données. La limite de détection du fond avec DWD + BBH/BNS + Cosmo + LISA est de $G\mu_{lim} \approx 1 \times 10^{-16}$.

Dans le but de comprendre l’effet du modèle galactique sur la mesure des cordes cosmique nous utilisons le modèle galactique de Robson & Cornish [208]. Nous réalisons l’étude de Fisher uniquement. Le modèle utilisé est celui présenté dans la section 2.5.2. Il s’agit d’un fond galactique avec un niveau d’amplitude plus élevé, de plus la forme d’onde est différente. En effet, à partir de $f \sim 10^{-3}$ Hz, la densité d’énergie chute violemment, ceci est le résultat de la distribution très différente avec le modèle de Lambert *et. al* [66].

Nous présentons dans la figure 4.37, le résultat de l’étude de Fisher avec le fond galactique de Robson & Cornish [208], celui-ci donne des résultats de limite de séparation spectrale identiques à notre précédent résultat, mais la forme de l’incertitude pour $G\mu < G\mu_{lim}$ est relativement différente du fait de la forme spectrale différente du fond d’origine

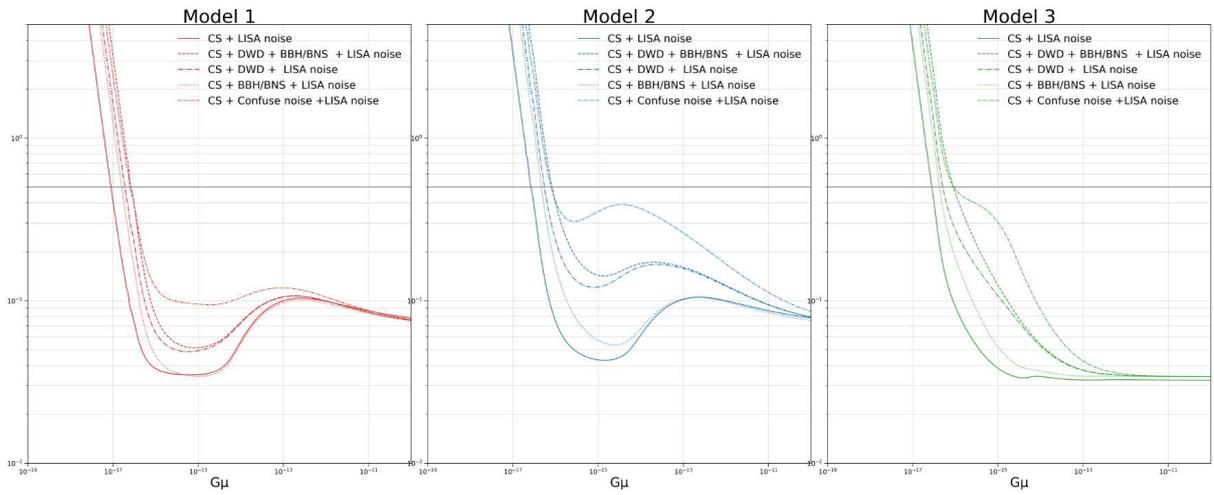


FIGURE 4.38 – Les estimations de l’incertitude de mesure de tension $G\mu$ pour le modèle 1,2,3 des cordes cosmiques [34] produit avec l’étude de l’information de Fisher. Nous avons superposé les différentes estimations de séparabilité pour des contextes de bruit de LISA et des sources de contaminations différentes tel que les modèles de premier plan galactique provenant des binaires de naines blanches de Lamberts *et. al.* [154], le bruit confus de Robson *et. al.* [208] et l’estimation du fond d’ondes gravitationnelles produit par les binaires de BBH/BNS avec O2 [68].

galactique. La figure 4.38 résume les différentes estimations d’incertitude de tension de $G\mu$ pour le modèle 1,2 et 3 des cordes cosmiques [34] pour des contextes de bruit de LISA et des sources de contaminations différentes.

4.7.3 Critère d’information de déviance

Nous comparons les signaux avec et sans cordes cosmiques produisant un SGWB pour étudier la détectabilité et la précision de l’estimation des paramètres en présence d’un premier plan galactique et d’un SGWB astrophysique. Nous ne faisons pas de comparaison de modèles entre les différents modèles de cordes cosmiques ; cela fera l’objet d’une étude future. Avec les chaînes issues des analyses de MCMC, nous utilisons le critère d’information de déviance (en anglais *deviance information criterion* (DIC)) (voir équation 4.17) pour la comparaison des modèles [224, 225, 171]. Notez que l’utilisation de priors impropres exclut l’utilisation de facteurs de Bayes pour la comparaison de modèles. Le DIC est une généralisation du critère d’information d’Akaike (AIC), en effet, pour des échantillons très larges, il en est une approximation asymptotique. De plus, l’utilisation du DIC pour remplacer le calcul de facteur de Bayes est valable uniquement dans le cas gaussien. Nous définissons la déviance des données \mathbf{d} et des paramètres du modèle θ comme $D(\theta) = -2 \log \mathcal{L}(\mathbf{d}|\theta)$, où \mathcal{L} est la vraisemblance. Nous définissons aussi $p_D = \overline{D(\theta)} - D(\bar{\theta})$, avec $\bar{\theta}$ la moyenne de θ .

$$\text{DIC} = p_D + \overline{D(\theta)} = D(\bar{\theta}) + 2p_D = 2\overline{D(\theta)} - D(\bar{\theta}) \quad (4.17)$$

La capacité d’observer le signal stochastique produit par les cordes cosmiques estimée avec le DIC est tracé dans la figure 4.39. Pour chacun des modèles de cordes cosmiques étudiés \mathcal{M}_i , nous comparons les cas (II) et (III). De manière équivalente à l’échelle de Jeffreys [179], la différence de deux DIC (ΔDIC), nous permet de mettre en évidence ou non la présence des cordes cosmiques dans les données. Pour $\Delta\text{DIC} > 2$, nous commençons à mettre en évidence un modèle particulier. Pour ΔDIC entre 5 et 10 l’évidence est substantielle et celle-ci devient décisif pour $\Delta\text{DIC} > 10$ [138, 164]. Lire [20] pour connaître d’autre utilisation du DIC en physique. À l’aide de la figure 4.39, nous montrons que la capacité de LISA à détecter des cordes cosmiques produisant un SGWB est efficace dans la plage $G\mu \approx 10^{-16}$ à $G\mu \approx 10^{-15}$ pour les trois modèles de cordes cosmiques étudiés [47].

4.7.4 Conclusion

Nous avons étudié la mesure limite de l’instrument LISA pour un fond stochastique d’ondes gravitationnelles produit par des cordes cosmiques. Le fond stochastique des ondes gravitationnelles des cordes cosmiques considéré est en présence d’un fond stochas-

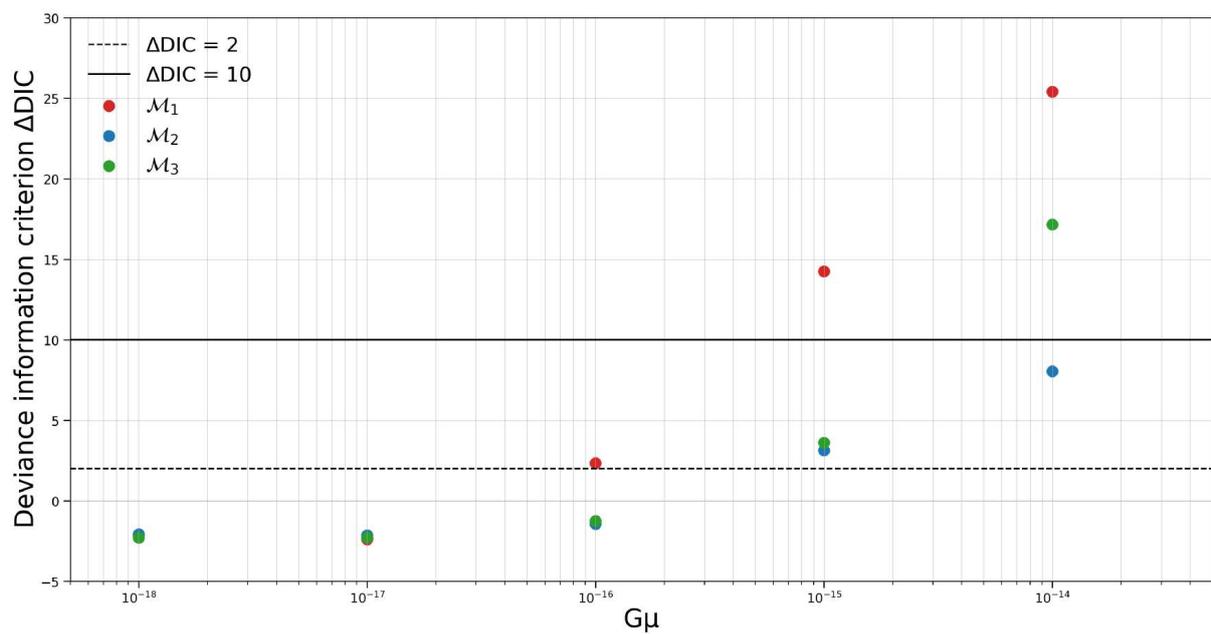


FIGURE 4.39 – Comparaison de modèles entre les cas (II) et (III) à l’aide du critère d’information de déviance (DIC). Des preuves solides de la présence du signal de corde cosmique commencent dans la gamme $G\mu \approx 10^{-16}$ à $G\mu \approx 10^{-15}$ pour les trois modèles de cordes cosmiques.

tique astrophysique produit par des binaires compacts, d'un premier plan galactique et du bruit de LISA. Celui-ci est donné pour une durée de quatre ans. Nous avons établi une limite de détection pour chacun des modèles de cordes cosmiques que nous avons considéré au regard de la valeur de la tension $G\mu$. Ainsi, au regard de nos calculs et des modèles considérés, il sera possible de mesurer avec LISA un fond de cordes cosmiques dans la gamme $G\mu \approx 10^{-16}$ à $G\mu \approx 10^{-15}$ pendant quatre ans d'observations. La capacité d'effectuer une estimation des paramètres et de résoudre la valeur de la tension de la corde cosmique commence autour de $G\mu \approx 10^{-16}$. Certes, si d'autres SGWB cosmologiques sont présents, par exemple, les transitions de phase du premier ordre ou l'inflation [61], des méthodes d'estimation des paramètres encore plus sophistiquées seront nécessaires. L'analyse en composantes principales a été proposée pour effectuer une telle détection cosmologique, mais n'aborde pas l'estimation des paramètres [190]. Il est également important de noter que pour que la recherche du SGWB dans LISA soit la plus efficace, une description plus complète devra être faite pour le bruit LISA. Nous devons également inclure des méthodes pouvant observer et paramétrer les systèmes binaires résolubles individuellement dans notre galaxie [12, 36], ainsi que d'autres signaux attendus se chevauchant dans la bande de LISA (binaires de trous noirs supermassifs, coalescences de rapport de masse extrême, etc.) [19]. Ces questions seront abordées dans des études futures.

Chapitre 5

Séparation spectrale dans le cas d'un bruit de LISA non idéal

5.1 Introduction

Dans cette section, nous nous intéressons à la séparation spectrale du fond stochastique en présence d'un bruit de LISA non-idéal. Pour cela, nous avons choisi d'étudier des sources de bruit pouvant perturber la mesure du fond stochastique. Effectivement, l'étude des bruits corrélés est importante pour fixer quelques limites à cette tentative de mesure du fond stochastique. Dans ce chapitre, nous allons tester les méthodes d'étude du bruit avec des données réelles, nous utilisons les données de LISA PATHFINDER (LPF) [229, 33], nous avons recherché les corrélations entre la différence d'accélération des deux tests-masse Δg , et trois autres grandeurs physiques, il s'agit du champ magnétique du satellite et des micro-Thruster [28, 21] (il s'agit du système de maintien d'orbite du satellite pour que le satellite conserve les masses-teste en chute libre.) Nous utilisons les données publiques de LPF accessible sur le site [LISA Pathfinder Legacy Archive \(ESA\)](#). Cette banque de données contient les séries temporelles de la différence d'accélération des masses-test $\Delta g(t)$, mais également des autres canaux de télémétrie comme la température de l'instrument, le champ magnétique ou les forces des micro-propulseurs. Il existe un catalogue de différents niveaux de traitements de données de $\Delta g(t)$. Les niveaux sont nommés *Level 0* à *Level 3*.

Nous calculons la cohérence entre la mesure du champ magnétique, de la température et du μ -Propulseur (ou en anglais *micro-Thruster*) dans le satellite et la différence d'accélération des deux masses-tests (Δg). Nous développons également une stratégie pour réduire le bruit corrélé dans le domaine fréquentiel et un filtre de Wiener pour nettoyer la densité spectrale de puissance de l'accélération.

Nous discuterons la possibilité d'ajouter différents types de corrélation dans le contexte du bruit de LISA et nous tenterons de détecter le fond stochastique d'ondes gravitation-

nelles simulé dans la bande de fréquence $[1.10^{-5}, 1]$ Hz. Un défi pour LISA sera la détection du fond stochastique dans les deux canaux scientifiques, A et E , en utilisant également le canal T comme canal de contrôle. Une hypothèse de base serait que le bruit de fréquence de la phase de la lumière des différents bras de LISA ne soit pas corrélé et que la corrélation positive entre les deux bras serait uniquement le signal d'ondes gravitationnelles. Nous voulons tester cette approximation et ajouter le bruit corrélé dans l'estimation de l'ajustement des paramètres du fond stochastique. Nous chercherons à tester la limite de cette approximation en intégrant des bruits corrélés dans le bruit de LISA. Nous testerons également l'effet d'une augmentation localisé du bruit d'un MOSA.

LPF était situé au point de Lagrange L1, à environ 1.5 million de kilomètres de la Terre en direction du soleil. C'est une position stable, un objet situé en ce point suit l'orbite de la Terre sans ajouter d'énergie orbitale. Mais, la position de l'engin spatial sur le point L1 a dû être maintenus. l'engin spatial a également dû soutenir un flux constant d'énergie solaire (garantir une bonne orientation des panneaux solaires) et il a été important de garantir une stabilité du système. Pour garantir ceci, le satellite a utilisé la technologie des μ -propulseurs, mais ceci produit un bruit corrélé avec la différence d'accélération des test-masses.

5.2 Étude de corrélations

Pour étudier la corrélation, nous introduisons la cohérence $C_{xy}(f)$. Il s'agit d'une étude dans le domaine fréquentiel. La cohérence est une fonction, qui peut être complexe, dépendant de la fréquence avec des valeurs absolues comprises entre 0 et 1. Si nous utilisons deux séries temporelles $(x(t), y(t))$ les valeurs de la cohérence indiquent dans quelle mesure x correspond à y à chaque fréquence.

$$C_{xy}(f) = \frac{|P_{xy}(f)|^2}{P_{xx}(f)P_{yy}(f)} \quad (5.1)$$

avec $P_{xy}(f)$ la densité spectrale de puissance croisée et $P_{xx}(f)P_{yy}(f)$ la densité spectrale de puissance des deux séries temporelles x, y .

Pour une série temporelle x , nous avons la densité spectrale de puissance qui est la distribution de puissance par unité de fréquence et est définie comme

$$P(f) = \frac{\Delta t}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi j k f} \right|^2, \quad -1/2\Delta t < f \leq 1/2\Delta t \quad (5.2)$$

Pour deux séries temporelles x, y , nous avons la densité spectrale de puissance croisée qui

est la distribution de puissance par unité de fréquence et est définie comme

$$P_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xy}(k) e^{-2\pi j k f}, R_{xy}(k) = E(x_{n+k} y_n^*) = E(x_n y_{n-k}^*) \quad (5.3)$$

R_{xy} est la séquence de corrélation croisée et E l'espérance. Par convention, $P_{xy}(f)$ est calculé avec la transformée de Fourier conjuguée de x multipliée par la transformée de Fourier de y .

5.3 Soustraction d'un bruit corrélé dans le domaine fréquentiel

La corrélation de deux canaux peut se faire localement sur le domaine fréquentiel, autrement dit des bandes de fréquences peuvent être privilégiées par la corrélation. l'effet d'une corrélation dans le domaine $[f_a, f_b]$ crée une augmentation de la cohérence. s'il y a corrélation alors la valeur absolue de la cohérence est proche de 1. Il est possible de voir sur la densité spectrale de puissance du canal cible et le canal témoin un schéma similaire. Dans cette section, nous proposons de corriger le canal d'accélération avec la méthode adaptée de l'article de Coughlin *et. al.* [84], basé sur la soustraction locale de la corrélation sur le bruit d'accélération de LPF. Le but est de réduire la cohérence de l'accélération avec les trois canaux corrélés que nous avons étudiés (température, μ -Thruster et Champ magnétique).

Premièrement, nous devons calculer la cohérence entre la cible (le canal d'accélération) et le canal témoin (température, μ -Thruster ou Champ magnétique). Il est facile de voir dans le domaine fréquentiel $[f_a, f_b]$ les zones de corrélation, en effet, nous devrions observer une cohérence élevée pour une corrélation élevée. Pour avoir une idée du niveau de corrélation, on peut calculer le coefficient de Pearson de la densité spectrale de puissance des deux canaux (Cible $S_x(f)$ et témoin $S_y(f)$) dans le domaine à hautes cohérences :

$$\rho_{x,y} = \frac{\sum_{k=a}^b (S_x(f_k) - \overline{S_x})(S_y(f_k) - \overline{S_y})}{\sqrt{\sum_{k=a}^b (S_x(f_k) - \overline{S_x})^2} \sqrt{\sum_{k=a}^b (S_y(f_k) - \overline{S_y})^2}} \quad (5.4)$$

avec $\overline{S_x}$ est la moyenne des PSD du canal x sur le domaine $[f_a, f_b]$, et de manière analogue pour $\overline{S_y}$.

Deuxièmement, nous pouvons générer le filtre à partir du canal témoin. l'idée est d'estimer la corrélation du canal témoin sur la cible. Le filtre d'optimisation sur le domaine $[f_a, f_b]$ est la convolution de la densité spectrale de puissance du canal témoin et du coefficient de Pearson $\rho_{x,y}$.

Enfin, la dé-corrélation de la cible est construite comme la soustraction de la PSD de

la cible et du filtre témoin tel que,

$$S_{x'}(f) = S_x(f) - \sum_{n=1}^N (\rho_{x,y}^{(n)} * S_y)(f) \quad (5.5)$$

avec N est le nombre de canaux soustrait, par exemple, pour le μ -propulseur, nous avons $N = 12$, nous définissons l'opérateur $*$ comme la Convolution $(a * b)_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{nm}b_m$.

$$\alpha(f) = \frac{S_x(f)}{S_{x'}(f)} \quad (5.6)$$

Pour vérifier la soustraction de la corrélation sur le canal cible sur le domaine $[f_a, f_b]$, nous introduisons le taux α du canal cible, avant et après la soustraction du canal témoin. Si le taux est égal à 1, il n'y a pas de soustraction du bruit de cohérence. Pour une valeur inférieure à 1, la soustraction détruirait le canal cible. Pour α jusqu'à 1, la soustraction est effective. La soustraction est meilleure pour une valeur élevée de α .

5.4 Filtre de Wiener

Le filtre de Wiener est une méthode basée sur la minimisation de l'erreur quadratique moyenne entre le processus aléatoire estimé et le processus souhaité. Nous utilisons le filtre de Wiener pour un lissage des données de la densité spectrale de puissance du canal cible (accélération différentielle de la masse test Δg) [183].

Considérant un système donné par le signal d'observation $y(t) = h(t) * x(t) + v(t)$; avec x le signal d'entrée, ce signal est inconnu, h est la réponse impulsionnelle connue d'un système invariant, ce canal est un invariant du temps t et v un bruit additif inconnu indépendant du signal inconnu x . Nous nommons $y(t)$ le signal observé. l'objectif est de trouver un $g(t)$ de sorte que nous puissions estimer $x(t)$ tel qu'un estimateur $\hat{x}(t)$ de $x(t)$ qui minimise l'erreur quadratique moyenne; $\hat{x}(t) = g(t) * y(t)$. Nous nommons $g(t)$ le filtre de Wiener [251]. Il est plus facile de décrire le filtre [54] dans le domaine de Fourier tel que $G(f)$. On note $\epsilon(f)$ l'estimateur.

$$\begin{aligned} \epsilon(f) &= E \left[\left| X(f) - \hat{X}(f) \right|^2 \right] \\ &= E \left[|X(f) - G(f)Y(f)|^2 \right] \\ &= E \left[|[X(f) - G(f)][H(f)X(f) + V(f)]|^2 \right] \\ &= E \left[|[1 - G(f)H(f)]X(f) - G(f)V(f)|^2 \right] \\ &= [1 - G(f)H(f)][1 - G(f)H(f)]^* E \left[|X(f)|^2 \right] \\ &\quad - [1 - G(f)H(f)]G^*(f)E \left[X(f)V^*(f) \right] \\ &\quad + G(f)[1 - G(f)H(f)]^* E \left[X^*(f)V(f) \right] + G(f)G^*(f)E \left[|V(f)|^2 \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

avec en capital les grandeurs dans leur domaine de Fourier. Nous avons supposé que les deux séries temporelles x et v sont indépendantes, ce qui nous permet de simplifier en remarquant que $E[X(f)V^*(f)] = E[X(f)^*V(f)] = 0$, de plus, nous définissons $S(f) = E[|X(f)|^2]$ et $N(f) = E[|V(f)|^2]$, ce qui nous permet d'écrire une version simplifiée de l'estimateur tel que :

$$\epsilon(f) = [1 - G(f)H(f)][1 - G(f)H(f)]^* S(f) + G(f)G^*(f)N(f) \quad (5.8)$$

Nous cherchons à minimiser l'estimateur pour cela, nous prenons $G(f)^*$ constant, nous calculons la dérivée de l'estimateur par rapport au filtre de Wiener et cherchons pour quelle valeur celle-ci est nulle.

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon(f)}{dG(f)} &= \frac{d}{dG(f)} \left[(1 + G(f)H(f))(1 + G(f)H(f))^* \right] + G^*(f)N(f) \\ &= -H(f)(1 - G(f)H(f))^* S(f) + G^*(f)N(f) = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Cette égalité nous permet d'établir

$$\begin{aligned} G^*(f)N(f) &= H(f)(1 - G(f)H(f))^* S(f) \\ (1 - G(f)H(f))^* &= \frac{G^*(f)N(f)}{H(f)S(f)} \\ 1 - G(f)H(f) &= \frac{G(f)N^*(f)}{H^*(f)S^*(f)} \\ G(f) &= \frac{H^*(f)S^*(f)}{|H(f)|^2 S^*(f) - N^*(f)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Or d'après la définition de S et N , nous remarquons que $S = S^*$ et $N^* = N$, ainsi nous avons

$$G(f) = \frac{H^*(f)S(f)}{|H(f)|^2 S(f) + N(f)} \quad (5.11)$$

avec $G(s)$ et $H(s)$ la transformée de Fourier respective du filtre $g(t)$ et la réponse impulsionnelle inconnue. $S(s)$ et $N(s)$ sont respectivement la densité spectrale de puissance du signal original et le bruit inconnu. Le filtre de canal dans le domaine de Fourier devient $X_{\text{Filtré}}(s) = G(s)Y(s)$ et nous avons en utilisant la transformée de Fourier inverse de $X_{\text{Filtré}}(s)$, $x_{\text{Filtré}}(u)$.

Nous introduisons le SNR comme le rapport $SNR(f) = \frac{S(f)}{N(f)}$, nous pouvons réécrire le filtre de Wiener tel que

$$G(f) = \frac{H^*(f)}{|H(f)|^2 + SNR^{-1}(f)} \quad (5.12)$$

Si le signal est très fort par rapport au bruit, nous avons la quantité $SNR^{-1}(f) \approx$

0 ainsi le filtre de Wiener devient $G(f) = H^{-1}(f)$, on retrouve un filtre qui revient simplement à inverser la réponse impulsionnelle.

Si le Signal est très faible par rapport au bruit ce qui revient à considérer un SNR nul, nous avons donc un Filtre de Wiener qui devient donc nul.

Si nous considérons un signal avec un bruit blanc avec une réponse d'impulsion égal à 1, cela correspond à l'absence de réponse d'impulsion. Nous avons ainsi un filtre de Wiener tel que,

$$G(f) = \frac{S(f)}{S(f) + N(f)} = \frac{S(f)}{S(f) + \sigma^2} \quad (5.13)$$

avec σ^2 la variance du bruit blanc, tel que $N(f) = \sigma^2$. Ainsi, nous pouvons montrer qu'il est impossible de reconstruire le signal avec un filtre de Wiener si celui-ci est dégradé par un bruit blanc.

5.5 Différence d'accélération des test-masses en chute libre de LPF

Les deux masses-test sont en chute libre, un instrument optique mesure avec un laser la fréquence relative du faisceau avec un interféromètre. Sous l'effet d'un éloignement de la masse-test (qui peut provenir d'une onde gravitationnelle) l'interféromètre va subir une variation temporelle, d'où une variation de l'interféromètre interagissant avec la masse-test et un interféromètre de référence. LISA PATHFINDER ne peut donc pas être un détecteur d'ondes gravitationnelles, simplement avec son système de masses tests [27, 30]. Mais, il peut être intégré dans un détecteur à bras long comme LISA. Il est alors très important d'étudier le système LPF et les bruits parasites de celui-ci pour comprendre les futurs bruits de LISA, il est également possible de mesurer la constante G avec LPF [31]. Les deux masses d'essai sont quasi-cubiques avec une taille de $46 \pm 5 \cdot 10^{-3}$ mm et une masse de $1.928 \pm 1 \cdot 10^{-3}$ kg. La distance nominale est de $376 \pm 5 \cdot 10^{-2}$ mm. La différence d'accélération des test-masses à partir des mesures interférométriques avec le bruit de la force centrifuge, le bruit de la force d'inertie et les parasites (canal 0 dans la LPFSA (*LPF Science Archives*), il s'agit du [site web](#) permettant l'accès aux données LPF) [123, 22]. Le niveau 0 est le premier niveau de $\Delta g(t)$. C'est le canal du rapport des données publiées [26]. Nous étudions les données relatives à la différence d'accélération des deux test-masses entre le 2017-02-13 et le 2017-03-01. Il s'agit d'une phase de mesure du bruit, autrement dit il n'y a pas de changement ou de manipulation des paramètres de l'engin spatial. Les données d'accélération sont un fichier d'une durée de 17 jours 13 heures 59 minutes et 59.40 s avec une fréquence d'échantillonnage de 10 Hz.

5.5.1 Densité spectrale de puissance (PSD) de la différence d'accélération des test-masses en chute libre de LPF

Nous séparons les données en segments d'un jour. Nous avons choisi d'empiler la PSD de la différence d'accélération différentielle de la masse-test pour réduire les fluctuations. Le calcul est donné avec la fréquence d'échantillonnage de 0.2083 Hz et nous utilisons une fenêtre de Hann [120].

Nous définissons la fenêtre de Hann $w_0(t)$ comme

$$w_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T}\right) = \cos^2 \frac{2\pi t}{T} & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & t \geq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (5.14)$$

avec $T = N \times f_s$ la durée du signal, celle-ci est donnée par le nombre de points et la fréquence d'échantillonnage du signal. Ainsi, nous pouvons calculer la transformée de Fourier de la fenêtre de Hann qui est donnée par

$$W_0(f) = \frac{1}{2} \frac{\sin \pi T f}{\pi f (1 - T^2 f^2)} \quad (5.15)$$

Nous pouvons également introduire le signal en *Top hat*, tel que

$$w_0(t) = \begin{cases} 1 & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & t \geq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (5.16)$$

Nous avons choisi d'utiliser la fréquence d'échantillonnage des canaux pour laquelle elle est la plus petite. Pour cela, nous avons dégradé les données d'accélération pour pouvoir réaliser les calculs de cohérence. Pour cela, nous utilisons une méthode de moyenne glissante. On obtient la PSD dans la bande LISA (Figure 5.2). Dans la figure 5.1, il s'agit de la densité spectrale d'amplitude (ASD), c'est la racine carrée de la densité spectrale de puissance. La figure qui en résulte est obtenue pour 13 jours, le satellite était à une température de 11°C, les données produisant l'ASD ont été nettoyées (glitches, force centrifuge, mouvement du satellite, force d'Eurel, ...). Sur la figure 5.2, nous n'utilisons aucun algorithme pour nettoyer les données, par la suite, nous présenterons une méthode pour supprimer les glitches. Nous avons un tracé semblable à la différence d'accélération différentielle publié par la collaboration LPF [26]. La différence provient de la non-suppression des glitches et la conservation de la signature des micro propulseurs. La figure 5.3 représente différents tracés de la différence d'accélération de la masse-test. Le graphique supérieur est la série temporelle de 18 jours, le graphique du milieu et celui du bas sont les densités spectrales de puissance sans fenêtre en gris et en noir respectivement, en haut la fenêtre *Top hat* (voir équation 5.16) et en bas la fenêtre de Hanning. Les tracés sont obtenus en filtrant le signal avec un filtre de Wiener. Dans la suite de l'étude, nous utilisons la fenêtre de

Hanning, car à plus basses fréquences, l'estimation de la PSD ressemble mieux à la figure 5.1 des travaux de M. Armano *et. al.* [26].

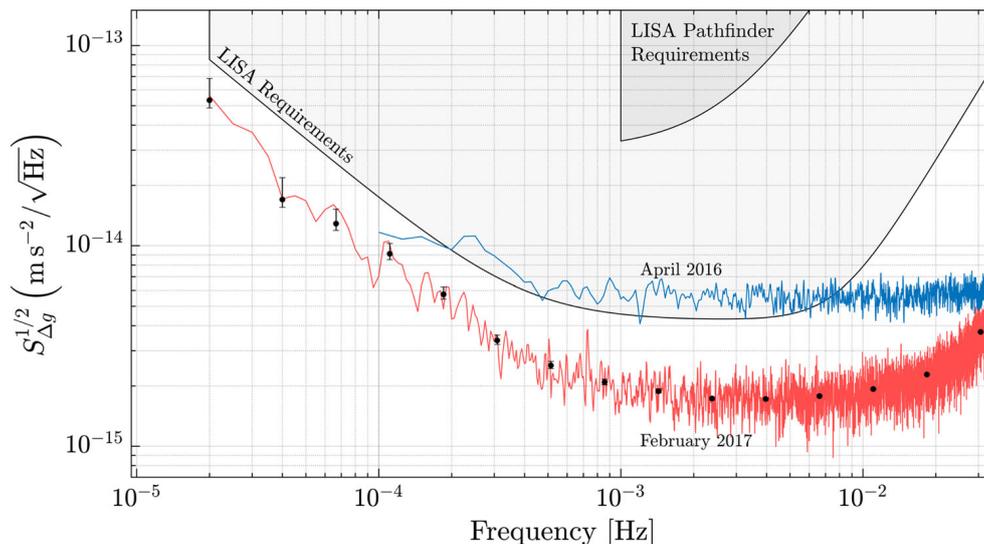


FIGURE 5.1 – Densité spectrale d’amplitude de la différence d’accélération des tests masses de LPF avec une période de 13 jours et une température de 11°C [26].

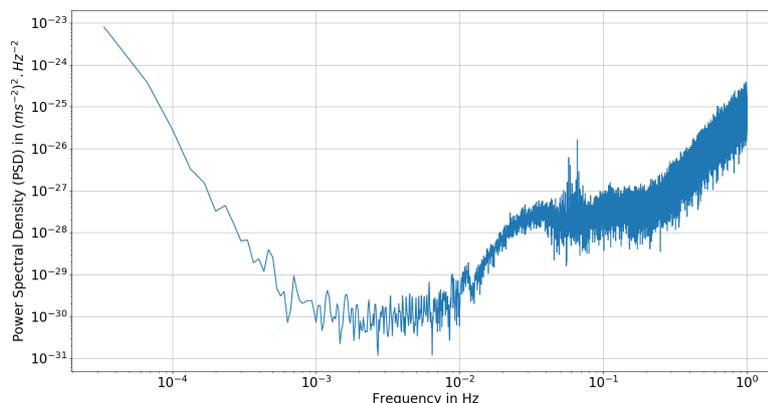


FIGURE 5.2 – Empilement de 17 jours de la densité spectrale de puissance de la différence d’accélération des masses-test de LPF

5.6 Champ Magnétique de LPF

Nous utilisons 12 Magnétomètres (Table 5.1), les capteurs sont répartis en quatre localités (voir figure 5.4). Dans toutes les localités, il y a trois magnétomètres ; ceci correspond à la mesure du champ magnétique suivant les trois dimensions spatiales x, y, z . Pour reconstruire la norme du champ magnétique \vec{B} en μT . On calcule :

$$|\vec{B}_i| = \sqrt{B_{i,x}^2 + B_{i,y}^2 + B_{i,z}^2} \quad (5.17)$$

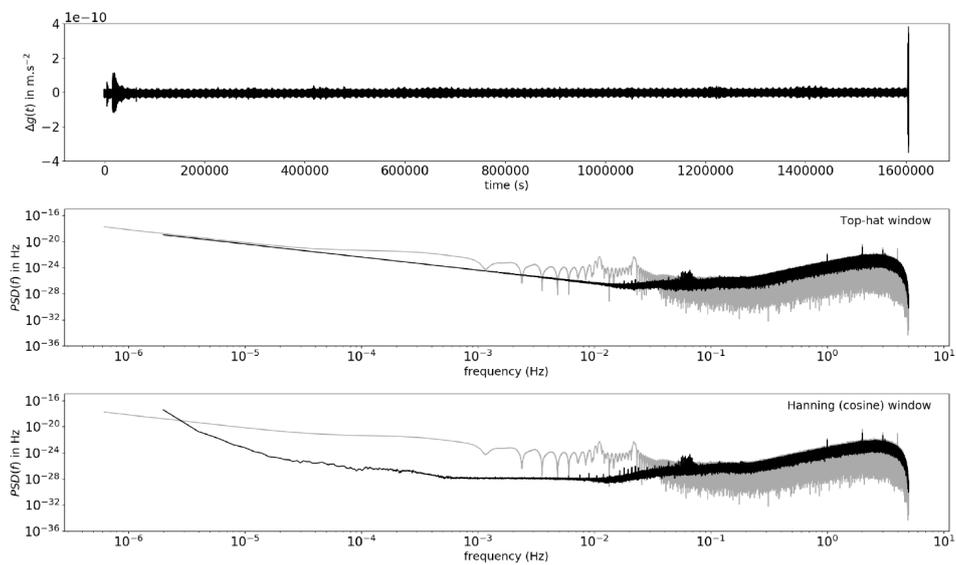


FIGURE 5.3 – Densité spectrale de puissance de la différence d’accélération des masses-test LPF. Le tracé gris est le PSD sans fenêtre et en noir respectivement, en haut la fenêtre *Top hat* et en bas la fenêtre de Hanning

Il y a deux types de magnétomètres, les 'P' et les 'M', les premiers correspondent au magnétomètre placé au-dessus et les autres en dessous des masses-test suivant la direction z du satellite [24].

	M_X	M_Y	P_X	P_Y
B_X	LDT10286	LDT10276	LDT10279	LDT10283
B_Y	LDT10287	LDT10277	LDT10280	LDT10284
B_Z	LDT10288	LDT10278	LDT10281	LDT10285

TABLE 5.1 – Répartitions et noms des capteurs magnétiques dans le satellite de la mission LPF [86]

Nous étudions les données du 2017-02-13 au 2017-03-01, il s'agit de la même phase de mesure du bruit de LPF. Pour le capteur magnétique, nous utilisons 12 magnétomètres (Table 5.1), les capteurs sont répartis en quatre localités, nous avons un fichier par jour et par capteurs. On fait la reconstruction de la série temporelle de 16 jours pour avoir un recouvrement total des deux séries temporelles (Voir figure 5.5). La fréquence d'échantillonnage est de 0.2083Hz. Nécessairement, nous devons changer la fréquence d'échantillonnage du champ magnétique pour qu'elle corresponde à l'accélération.

5.6.1 Densité spectrale de puissance (PSD) du champ magnétique

Nous séparons les données en segments d'un jour. Nous avons choisi d'empiler les PSD des capteurs magnétiques distribués depuis le vaisseau spatial pour réduire les fluctuations. Nous utilisons le même procédé que pour l'accélération. Dans la figure 5.6, il s'agit de la densité spectrale d'amplitude du champ magnétique de chacun des trois canaux d'un magnétomètre à *fluxgate* LTP [59]. Dans la figure 5.7 nous montrons la densité spectrale d'amplitude du champ magnétique pendant la période de 16 jours des quatre canaux de la table 5.1. Selon la comparaison des deux figures 5.6 et 5.7, les deux tracés sont vraiment similaires. Notre calcul de la densité spectrale d'amplitude semble être correctement calculé. Nous avons également une estimation de l'ASD qui est en dessous de la condition voulue par LISA. Celle-ci est fournie par le *LISA Error Budget* [166], elle est de $230 \frac{nT}{\sqrt{Hz}} \left(\frac{0.1mHz}{f} \right)^{2/3}$ pour l'environnement des masses-test de LISA (ligne noire). Selon [25], le champ magnétique à basse fréquence est produit par le champ magnétique interplanétaire. Il y a aussi un effet de l'amplitude du bruit du champ magnétique avec la vitesse de l'éruption solaire. La vitesse du vent solaire augmente l'amplitude de ce bruit. La haute fréquence du champ magnétique est générée par effet interne.

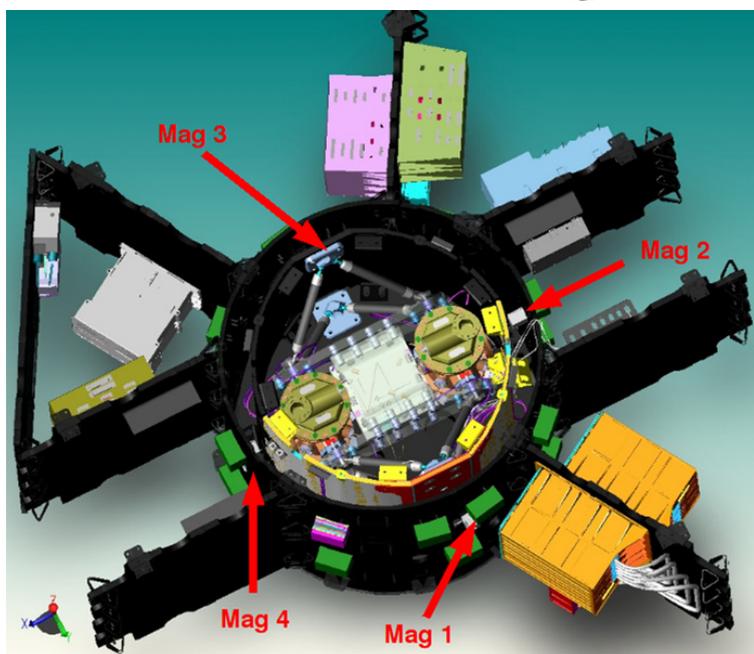
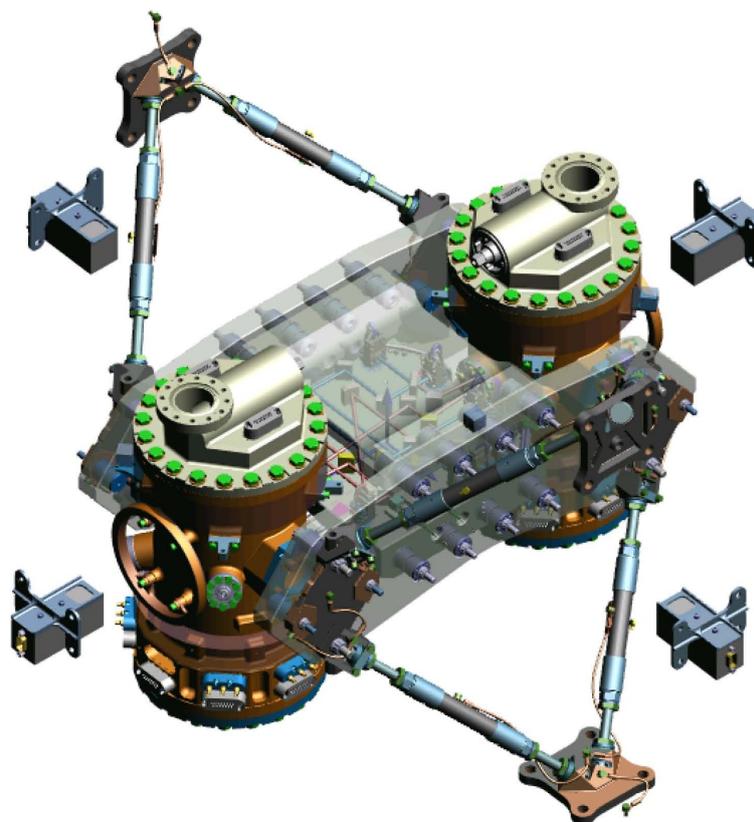


FIGURE 5.4 – Répartition du magnétomètre dans LPF [86, 24], la figure du haut une un zoom sur la structure contenant les masses tests entouré d'un double bouclier cylindrique, il y a quatre magnétomètres localisés autour de la structure contenant les masses tests (figure du bas).

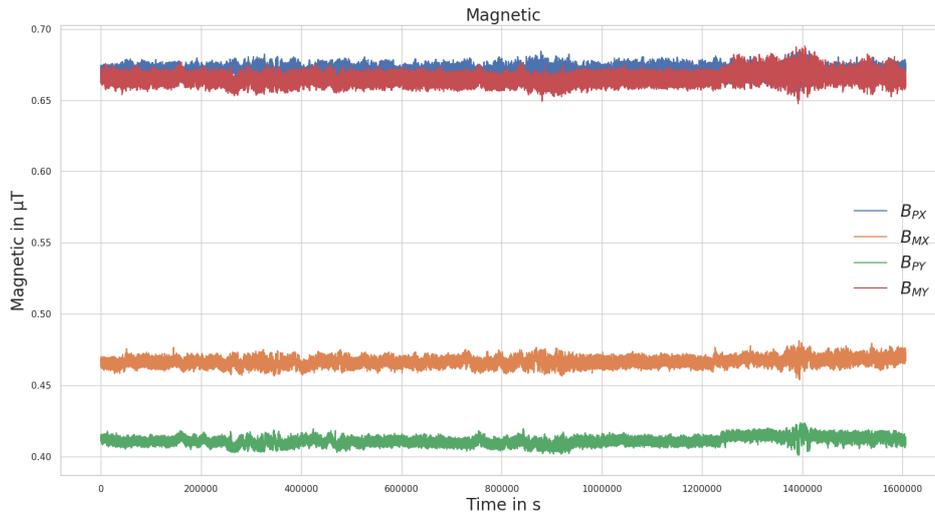


FIGURE 5.5 – Séries temporelles du champ magnétique après reconstruction (voir équation 5.17) de 16 jours, celles-ci correspondent à des données publiées [32]

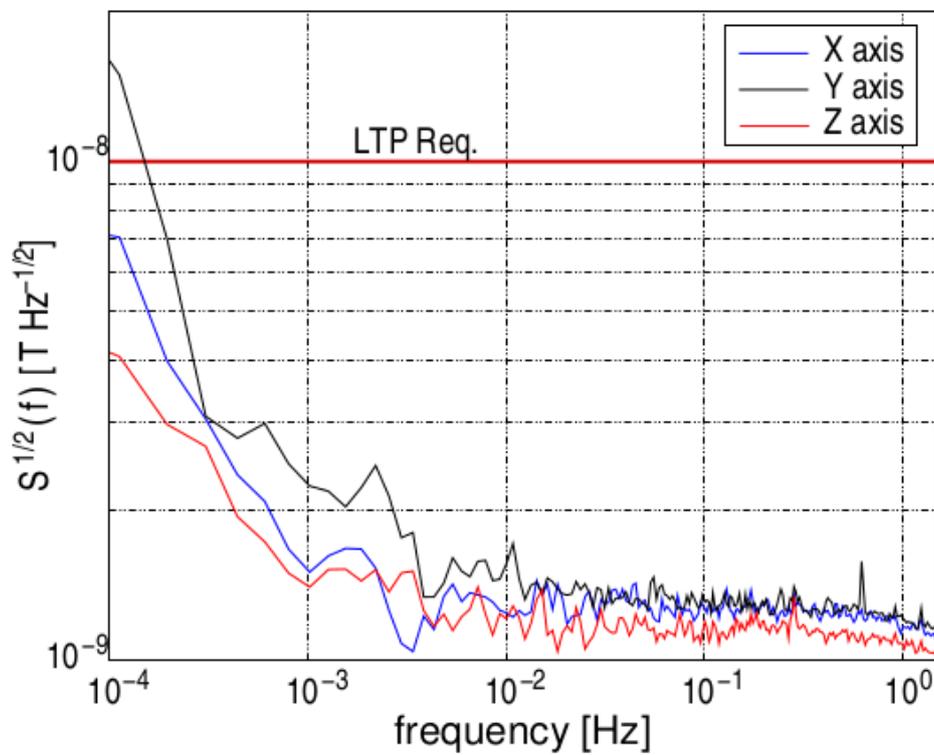


FIGURE 5.6 – Densité spectrale d’amplitude du champ magnétique de chacun des trois canaux des magnétomètres à fluxgate de LTP [59]

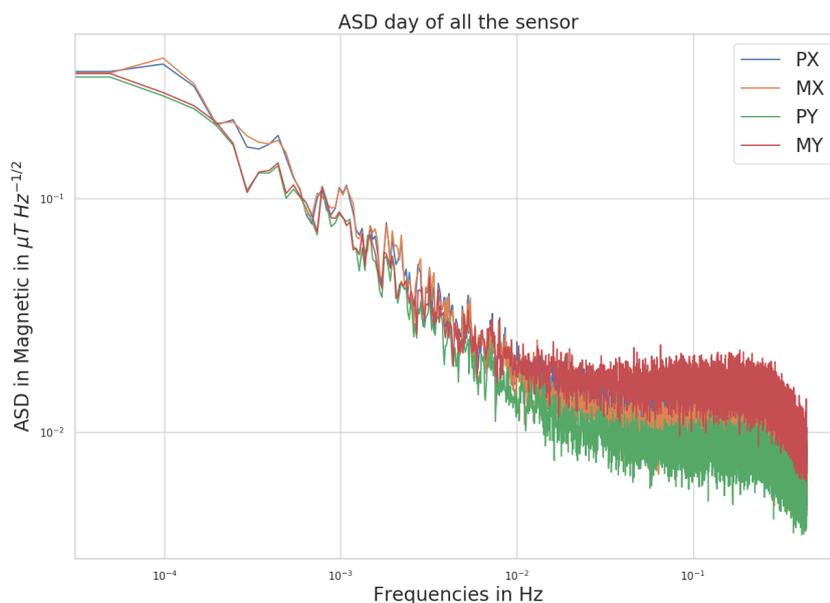


FIGURE 5.7 – Empilement de 16 jours de la densité spectrale d’amplitude des normes de chacun des capteurs de champ magnétique du satellite LPF

5.6.2 Cohérence entre le champ magnétique et l’accélération

Dans cette section, nous présentons le calcul de la cohérence entre le champ magnétique et la différence d’accélération des masses-test LPF dans la figure 5.8. La cohérence est plate autour de la valeur $Y = \frac{1}{90}$, c’est le niveau du bruit plat (tracé horizontal bleu). En effet, pour PSD couper en N partis, nous avons pour un bruit blanc une PSD qui est répartie autour de $2\Delta t\sigma 1/\sqrt{N}$. Finalement pour le calcul de la cohérence, nous gagnons un facteur $1/N$ d’après la figure 5.8, on peut distinguer 3 pics sur la cohérence entre les quatre capteurs magnétiques de l’engin spatial et la différence d’accélération des masses-test de LPF aux fréquences $f = 1.84 \cdot 10^{-4}$ Hz, $f = 5.3 \cdot 10^{-4}$ Hz et $f = 8.37 \cdot 10^{-4}$ Hz (tracés verticaux noirs). Nous avons une corrélation entre les quatre capteurs magnétiques du satellite et de la différence d’accélération des masses-test de LPF.

5.6.3 Soustraction du bruit corrélé du champ magnétique sur la différence d’accélération

Sur la cohérence entre le champ magnétique et les figures de différence d’accélération 5.9 et 5.10, nous avons une évidence d’une corrélation à $f = 1.84 \cdot 10^{-4}$ Hz et $f = 5.3 \cdot 10^{-4}$ Hz. Le champ magnétique peut créer un bruit de force \mathbf{F} et un couple \mathbf{N} et introduire une augmentation locale du bruit de la différence d’accélération :

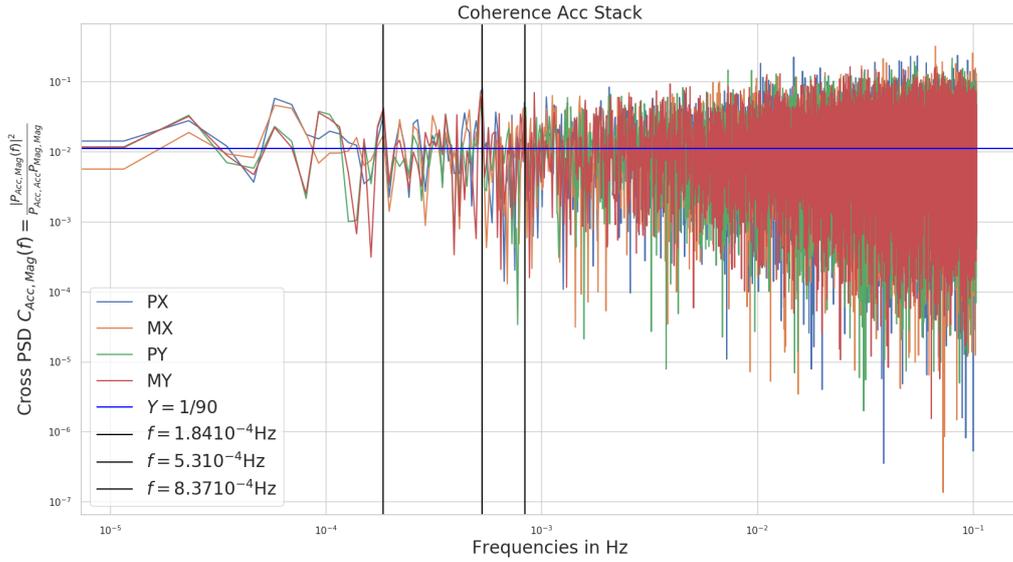


FIGURE 5.8 – Moyenne sur 17 jours de la cohérence de tous les capteurs thermiques dans le vaisseau spatial et de la différence d'accélération des masses-test de LPF.

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \left\langle \left[\left(\mathbf{M} + \frac{\chi}{\mu_0} \mathbf{B} \right) \cdot \nabla \right] \mathbf{B} \right\rangle V \\ \mathbf{N} = \left\langle \mathbf{M} \times \mathbf{B} + \mathbf{r} \times [(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \right\rangle V \end{cases} \quad (5.18)$$

avec \mathbf{B} le champ magnétique autour des masses-test, \mathbf{M} le moment magnétique, χ la susceptibilité magnétique, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{mkg s}^{-2} \text{A}^{-2}$ la constante magnétique du vide et $\langle \dots \rangle$ l'opérateur moyen.

Pour étudier la cible à deux canaux et du canal témoin, nous interpolons les canaux magnétiques pour changer la fréquence d'échantillonnage, mais nous ne pouvons pas étudier les fréquences supérieures à la fréquence d'échantillonnage du champ magnétique $f_s = 0.2083 \text{ Hz}$.

On focalise la soustraction sur la bande de fréquence $[6.3 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}, 5.8 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}]$, sur cette bande le coefficient de Pearson est 0.76.

Sur les figures 5.11 et 5.12 le tracé bleu est la densité spectrale de puissance du canal cible, en vert, le canal témoin (avec un facteur pour séparer la courbe et rendre le tracé plus lisible, sans le facteur les deux tracés sont superposés), la ligne rouge est le canal cible avec une soustraction multiple de corrélation, ceci est également indépendant des canaux magnétiques. Enfin, la ligne violette est le canal cible filtrée lissé par le filtre de Wiener.

Pour vérifier la soustraction, la figure 5.13 est le rapport du taux du canal cible filtré et du canal cible non filtré $\alpha(f) = \frac{OldPSD}{NewPSD}$. d'après la figure 5.13 ont été réduits d'un facteur 4 les fortes corrélations.

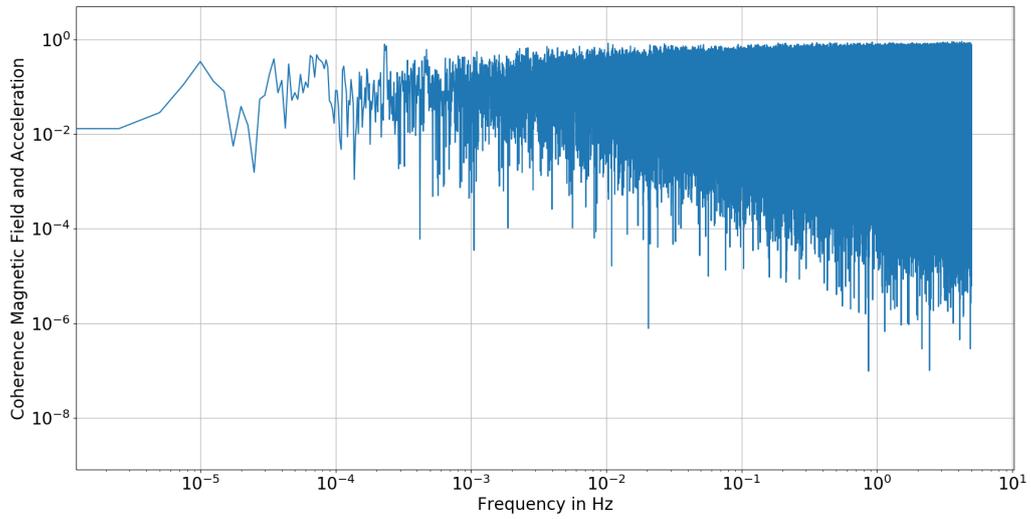


FIGURE 5.9 – Cohérence de l’empilement de tous les capteurs Champ Magnétique et accélération différentielle pendant les 17 jours.

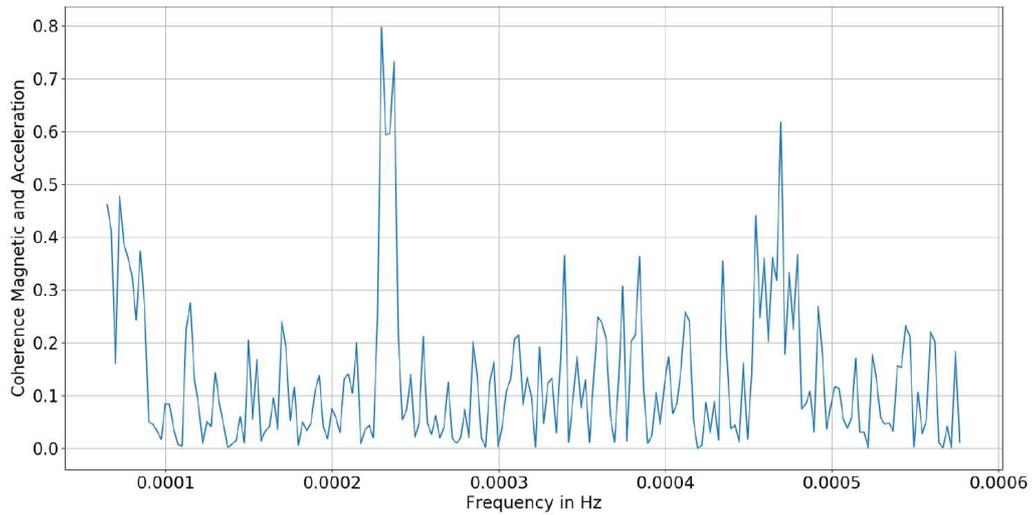


FIGURE 5.10 – Zoom sur la cohérence de l’empilement de tous les capteurs du champ magnétique et de la différence d’accélération pendant les 17 jours.

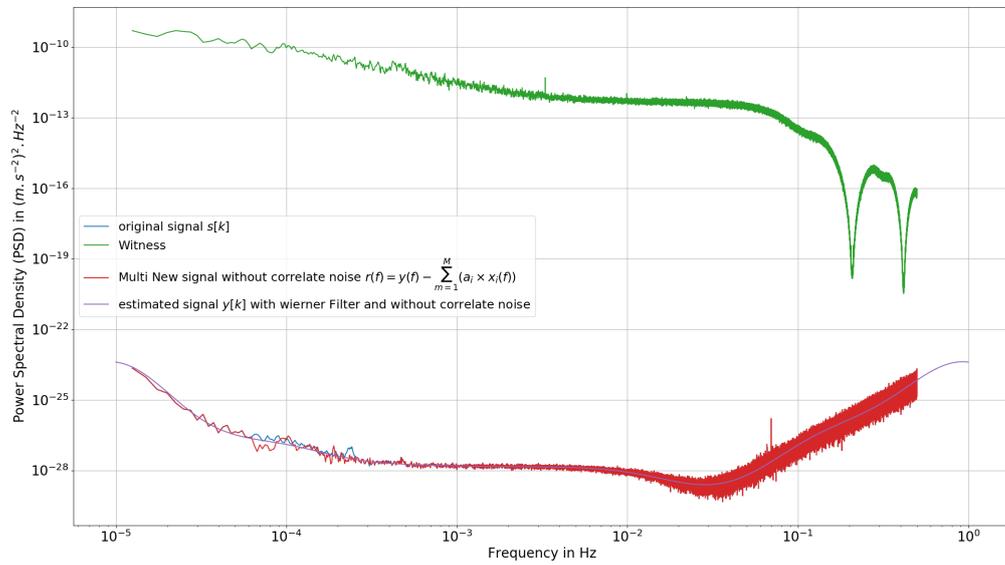


FIGURE 5.11 – Canal témoin et canal cible avec la dé-corrélation et le lissage des données par le filtre de Wiener

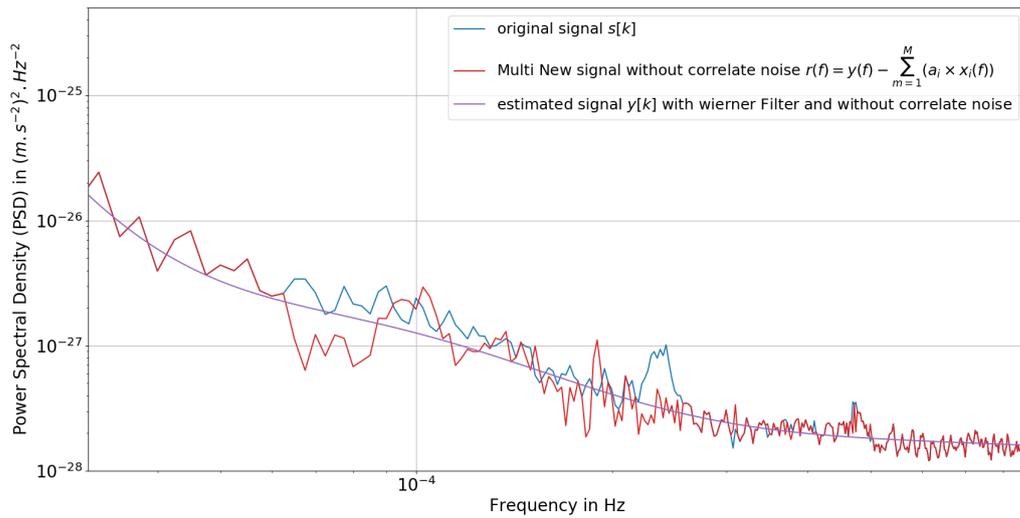


FIGURE 5.12 – Zoom sur le canal témoin et le canal cible après la dé-corrélation et le lissage des données dans le domaine $[6.3 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}, 5.8 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}]$

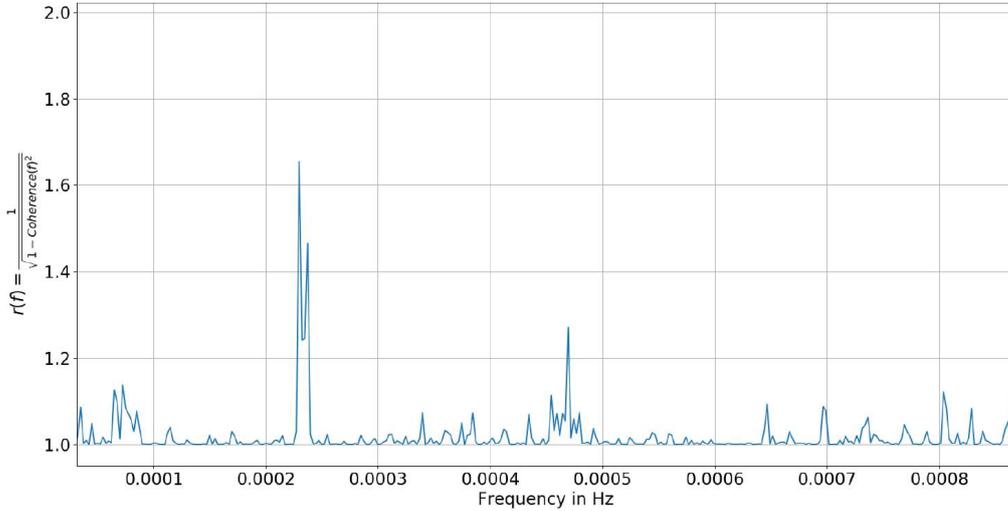


FIGURE 5.13 – Rapport du canal cible filtré et du canal cible non filtré $\alpha(f)$

5.7 μ -Propulseur

Dans LISA Pathfinder, le Space Technology 7 Disturbance Reduction System (ST7-DRS) [21] est utilisé pour garantir la stabilité de l’engin spatial. Il s’agit d’un système de micro propulsion basée sur une propulsion micro-Newtonienne de gaz froid. Le système contrôle la position du satellite en fonctionnement continu pendant toute l’expérience, ainsi le bruit généré est donc présent sur la différence d’accélération des deux masses-test durant toute la mission.

Nous utilisons 12 capteurs de μ -propulsions, séparés en deux groupes de six μ - propulseur. Les six premiers μ -propulseur contrôle les 6 degrés de liberté (trois translations et trois rotations) durant la première partie de la mission (jusqu’à l’épuisement des gaz froids contenu dans leur réservoir respectif). Après, pendant la deuxième partie de la mission, les six autres μ -propulseur sont utilisés. La taille du réservoir de gaz est la limite principale de la durée de vie de la mission.

Pour l’étude de la corrélation entre les capteurs de micro-propulsions et la différence d’accélération des deux masses-test Δg , nous utilisons les μ -propulseurs résumés dans le tableau 5.2, les capteurs sont répartis en trois localités selon la figure 5.14.

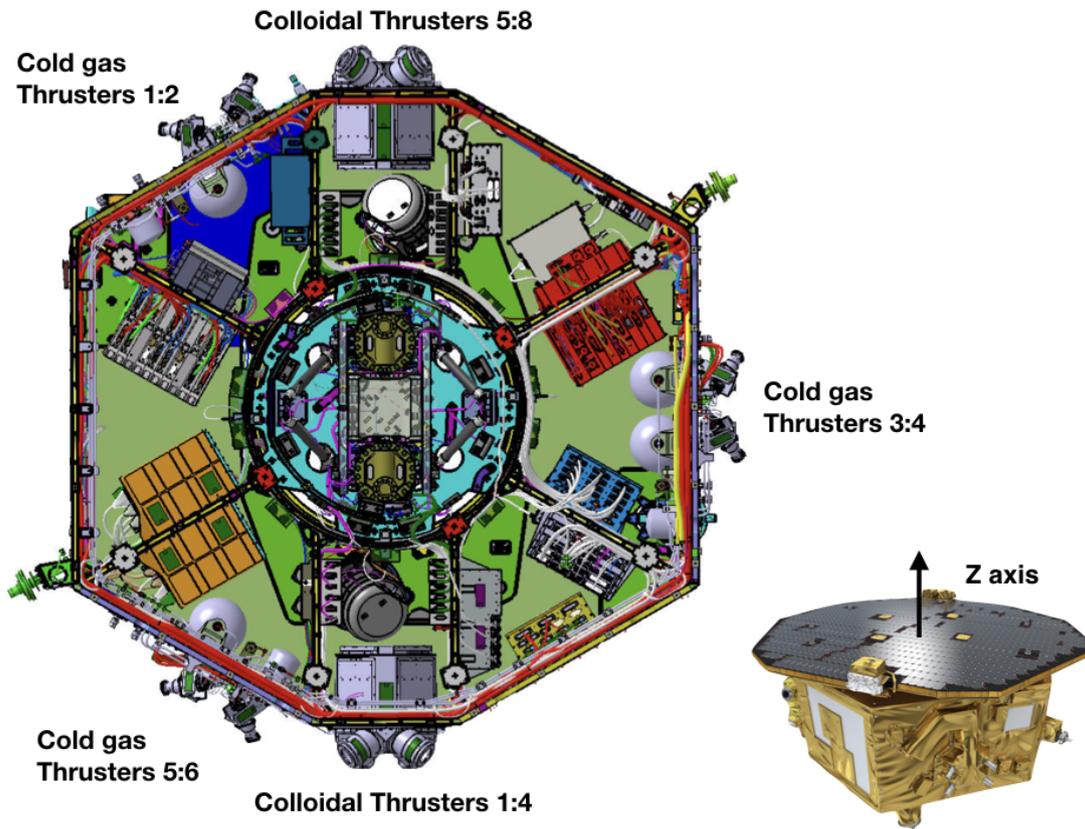


FIGURE 5.14 – Distribution de μ -propulseur dans le satellite de la mission LFP [29]

Capteur de micro-propulseur	Position
GST10094	Thruster 1
GST10095	Thruster 2
GST10096	Thruster 3
GST10097	Thruster 4
GST10098	Thruster 5
GST10099	Thruster 6

TABLE 5.2 – Répartition des capteurs de μ -propulseur dans LFP [23]

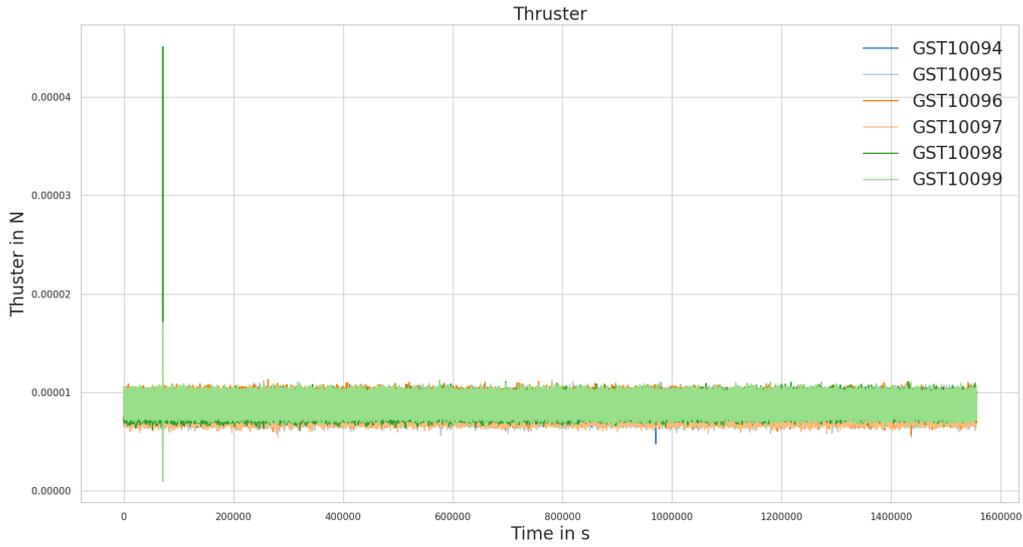


FIGURE 5.15 – Séries temporelles des μ -propulseurs après reconstruction de 17 jours

5.7.1 Soustraction du bruit corrélé des micro-propulseurs sur la différence d'accélération des masses-test

Nous étudions également les données du 2017-02-13 au 2017-03-02, pour les capteurs de μ -propulsions nous utilisons six capteurs de propulseur (94 à 99 dans les données LPF, vecteur des propulseurs du système CGAS), nous avons un fichier par jours et par capteurs. On fait la reconstruction de la série temporelle de 17 jours (Voir figure 5.15). La fréquence d'échantillonnage est de 1 Hz. Pour étudier le canal cible et le canal témoin, nous interpolons les canaux du propulseur pour changer la fréquence d'échantillonnage, mais nous ne pouvons pas étudier les fréquences supérieures à la fréquence d'échantillonnage des μ -propulseurs.

On focalise la soustraction sur la bande de fréquence [0.047 Hz, 0.0793 Hz], sur cette bande le coefficient de Pearson est de 0.98.

Sur les figures 5.18 et 5.19 le tracé bleu est la densité spectrale de puissance d'origine du canal cible, en vert, le canal témoin (avec un facteur pour séparer la courbe), la ligne rouge est le canal cible avec plusieurs soustractions de corrélation, qui est indépendante par des canaux de μ -propulsion. Enfin, la ligne violette est le canal cible filtrée et lissée par le filtre de Wiener.

Pour vérifier la soustraction, la figure 5.20 est le rapport du canal cible filtrée et du canal cible. d'après la figure 5.20 elles ont été réduits à un facteur 16 pour les plus fortes corrélations.

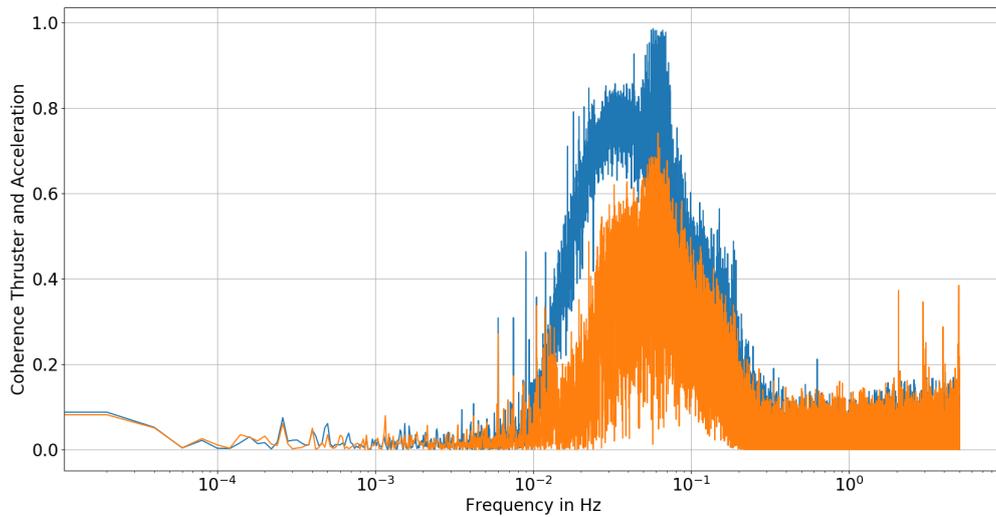


FIGURE 5.16 – Empilement des cohérences de tous les capteurs μ -propulseurs et de la différence d'accélération des masses-test pendant 17 jours avant (ligne bleue) et après (ligne orange) soustraction

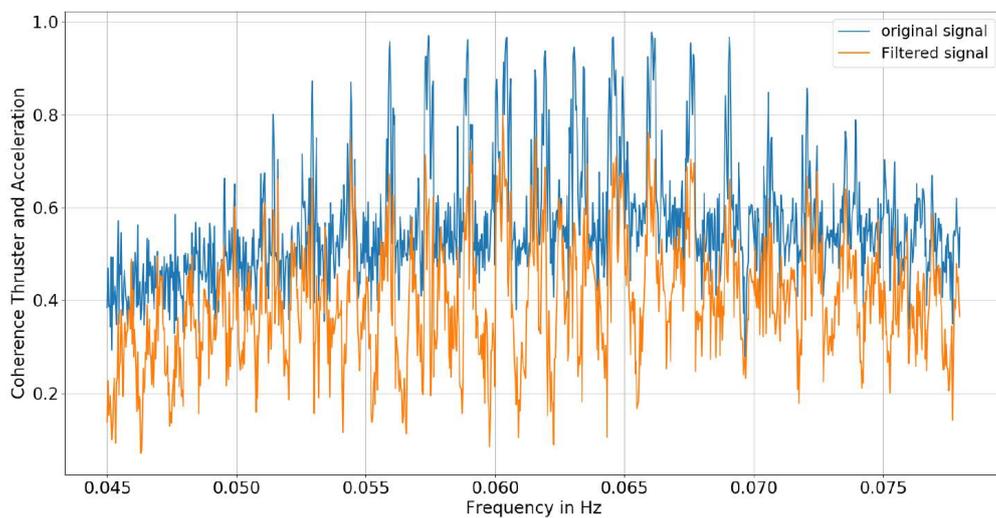


FIGURE 5.17 – Zoom sur l'empilement des cohérences de tous les capteurs μ -propulseurs et de la différence d'accélération des masses-test pendant 17 jours avant (ligne bleue) et après (ligne orange) soustraction

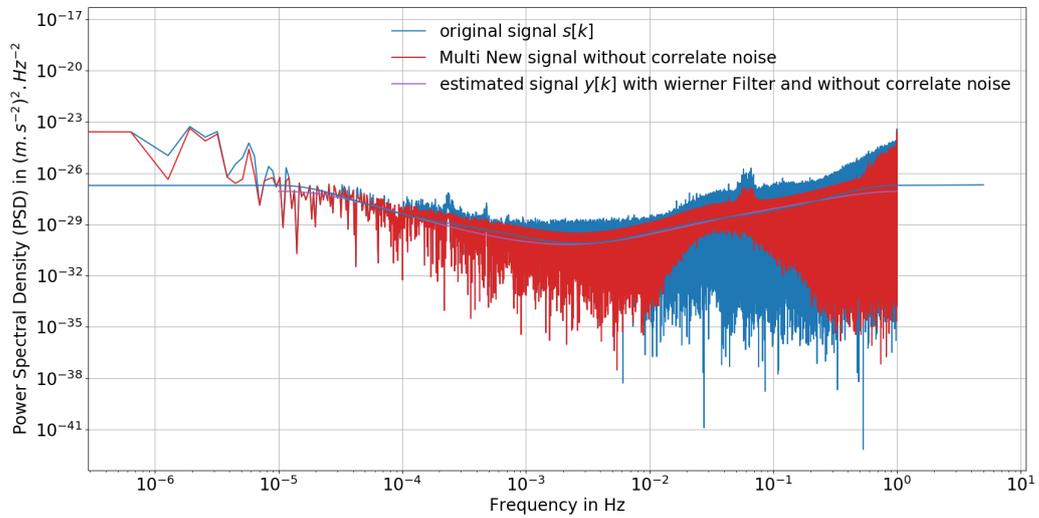


FIGURE 5.18 – Norme de la transformée de Fourier du canal témoin et du canal cible avec la dé-corrélation et le lissage des données

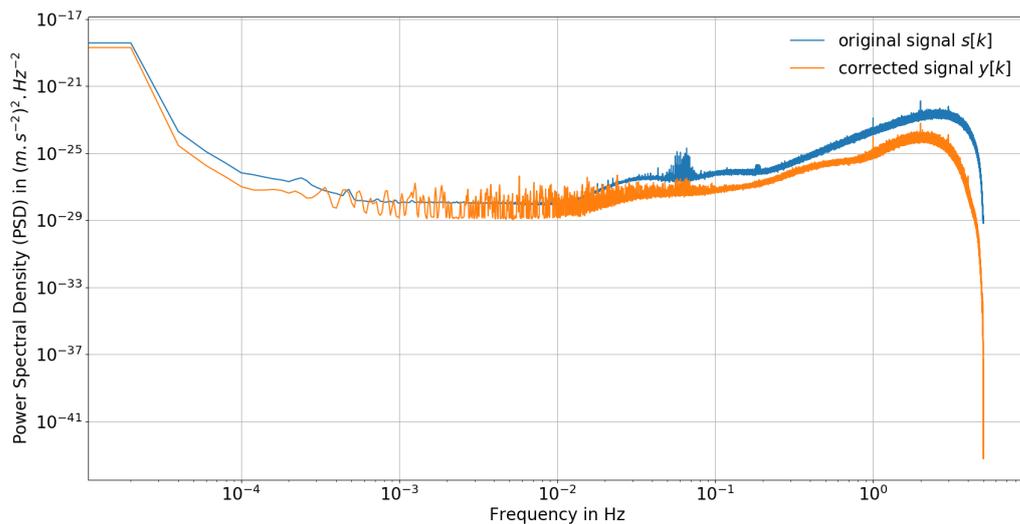


FIGURE 5.19 – PSD du canal témoin et du canal cible après la dé-corrélation et le lissage des données entre le domaine $[0.047 \text{ Hz}, 0.0793 \text{ Hz}]$

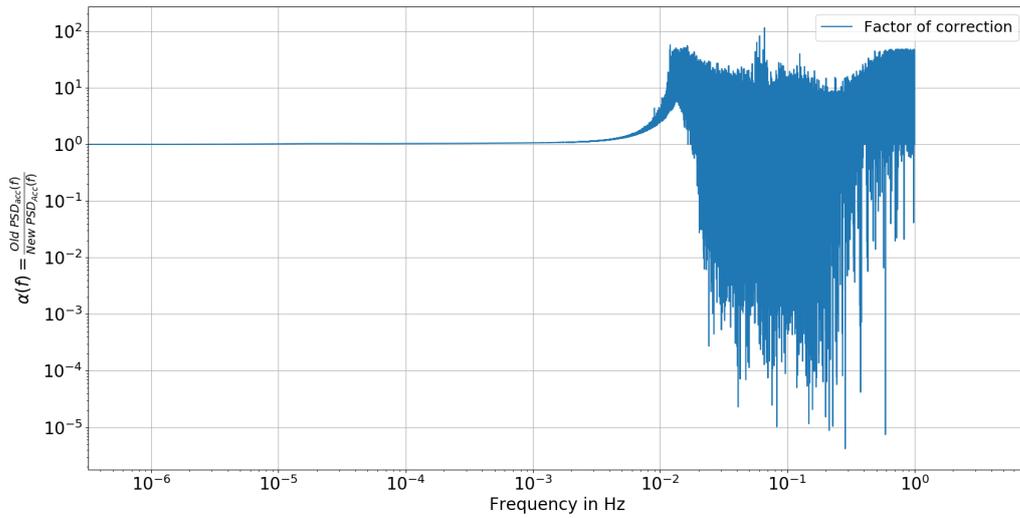


FIGURE 5.20 – Rapport du canal cible filtré et du canal cible non filtré pour la correction des micro-propulseurs avec le filtre de Wiener

5.8 Température du satellite de la mission LPF

Nous utilisons vingt-quatre capteurs thermiques (Table 5.3), les capteurs sont répartis en quatre localités : quatre capteurs de température dans le boîtier d'électrode de la masse-test 1 (TM1) (respectivement quatre dans le boîtier d'électrode de la masse-test 2 (TM2)), trois dans la fenêtre optique 1 (respectivement trois dans la fenêtre optique 2), quatre dans le banc optique et six sur la structure du satellite (voir figure 5.21). Ce sont des thermistances Betatherm G10K4D372. Le capteur a une résistance nominale de 10 k Ω .

5.8.1 Traitement des données LPF

Nous étudions les données du 2017-02-13 au 2017-03-01, il s'agit d'une phase de mesure du bruit (pas de changement et de manipulation des paramètres du satellite). Les données de différentiel de l'accélération sont un fichier d'une durée de 17J 13 h 59 m 59.40 s avec une fréquence d'échantillonnage de 10 Hz. Pour le capteur de température, nous utilisons vingt-quatre capteurs thermiques (TS1 à TS24) (thermistances Betatherm G10K4D372), nous avons un fichier par jours et par capteurs. On fait la reconstruction de la Série temporelle de 17 jours (Voir figure 5.23). La fréquence d'échantillonnage de 0.2083 Hz. Nécessairement, nous devons changer la fréquence d'échantillonnage de l'accélération pour qu'elle corresponde à la température. Nous avons construit un algorithme pour calculer cela. Dans notre exemple, nous ajustons les deux séries temporelles (Δg_0 et TS1); on prend le temps du capteur thermique comme référence. Pour tout $t_{j,\Delta g_0}$ (le

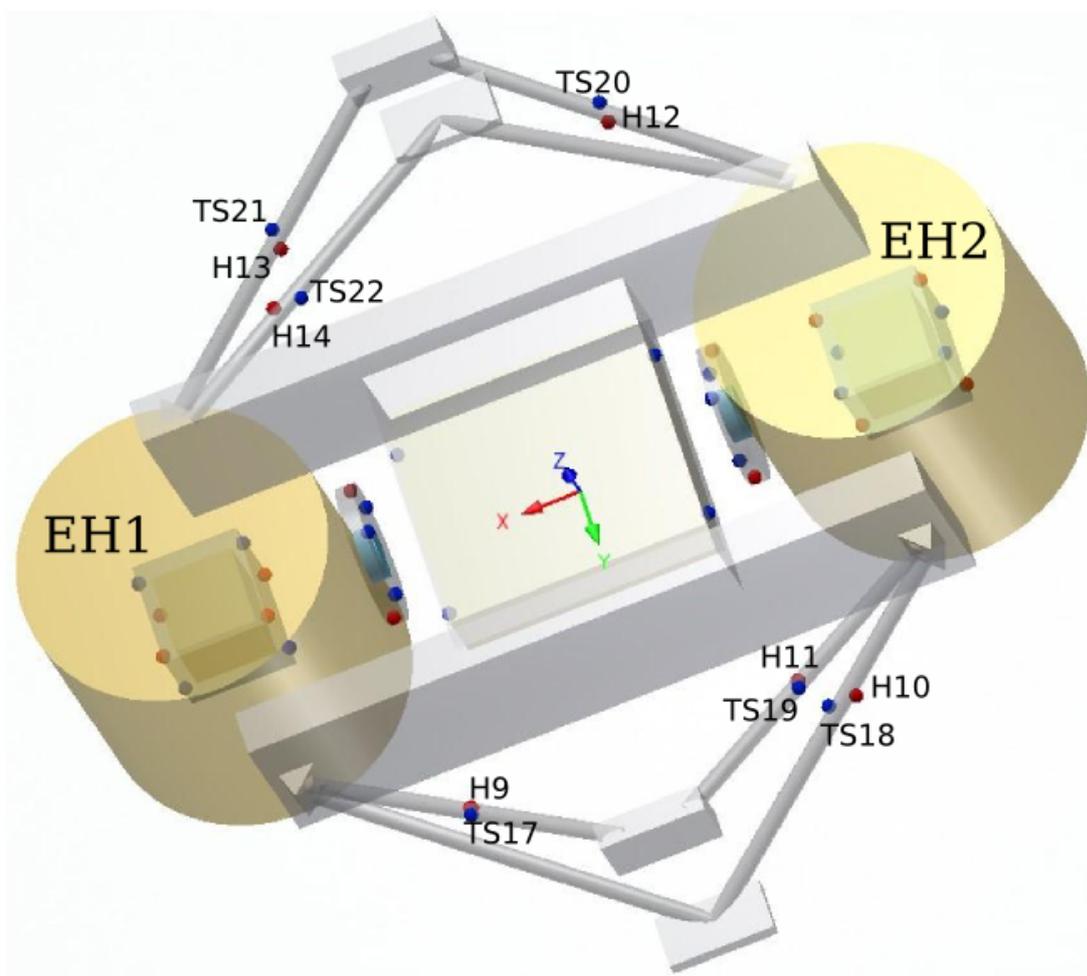
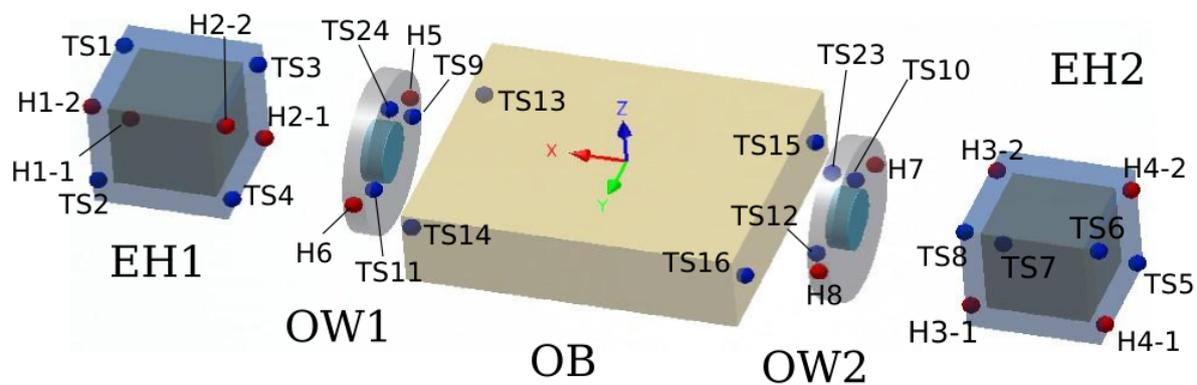


FIGURE 5.21 – Répartition et localisation des capteurs thermiques dans LPF [23, 215]

Capteurs thermiques	Positions
TS1	EH1
TS2	EH1
TS3	EH1
TS4	EH1
TS5	EH2
TS6	EH2
TS7	EH2
TS8	EH2
TS9	OW1
TS10	OW2
TS11	OW1
TS12	EH2
TS13	OB
TS14	OB
TS15	OB
TS16	OB
TS17	STR
TS18	STR
TS19	STR
TS20	STR
TS21	STR
TS22	STR
TS23	OW2
TS24	OW1

TABLE 5.3 – Répartition des capteurs thermiques dans LPF [23]

temps t_j de la série-temporel du canal d'accélération) dans $\Delta t_{TS1,i}$ et $\Delta t_{TS1,i+1}$, nous avons calculé la moyenne des Δg_0 et pour le temps, on conserve la valeur de $\Delta t_{TS1,i+1}$. Dans la figure 5.22, nous traçons la nouvelle série temporelle de Δg_0 après le changement d'échantillonnage. Pour vérifier le résultat du changement de la fréquence d'échantillonnage du calcul de l'écart-type de la mesure du temps entre le canal d'accélération et la mesure de température, près une vérification de toute la mesure du temps du capteur thermique, nous pouvons conclure qu'il n'y a pas une différence. Pour la vérification du temps de dérive, on utilise le temps du canal TS1. Dans la figure 5.24, la dérive relative de la mesure du temps du capteur thermique TS1 et du temps de la nouvelle voie d'accélération ($100 \frac{|T_{0,TS1+i/f_s,TS1} - T_{\Delta g_0,i}|}{T_{0,TS1+i/f_s,TS1}}$) présentent les mêmes pics avec une erreur de 100 %, c'est parce que pour un temps donnée, il n'y a pas de mesure du temps. Il manque un point. On distingue des pics autour de 3%, cela représente 0.14 s. Ce saut est en dehors de notre étude, puisque cet effet est hors de la bande spectrale. Mais, au regard de ce calcul, nous montrons qu'il y a des sauts dans la mesure du temps de LPF. Ceci pourrait être source d'ennui pour des études de hautes fréquences.

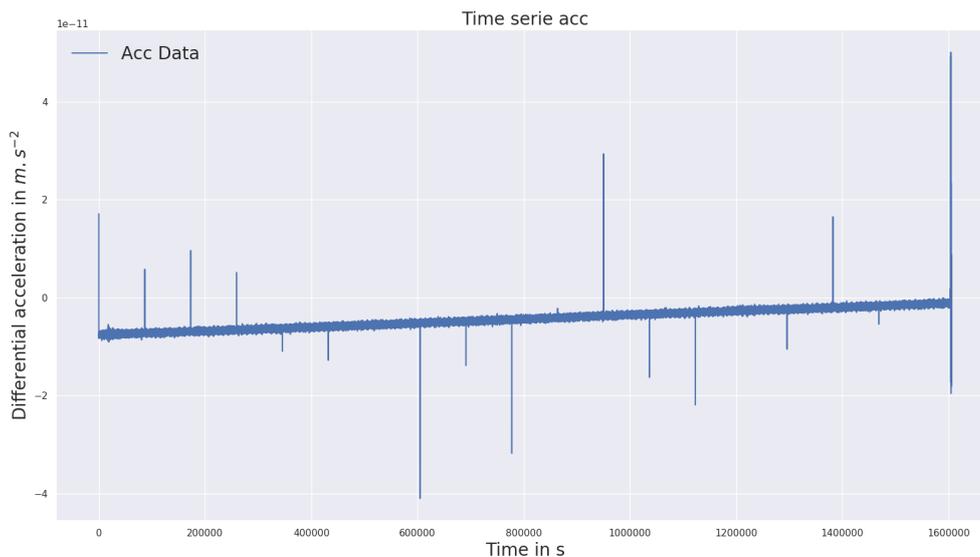


FIGURE 5.22 – Série temporelle de la différence d'accélération des test-masses après le changement de fréquence l'échantillonnage

5.8.2 Densité spectrale de puissance (PSD) des températures

Nous séparons les données en segment d'un jour. Nous avons choisi d'empiler les PSD des capteurs thermiques distribués depuis l'engin spatial pour réduire les fluctuations. On utilise le même procédé pour l'accélération. Sur la figure 5.25, il s'agit de la densité spectrale d'amplitude de la température pendant la période du mois de février 2017 [23].

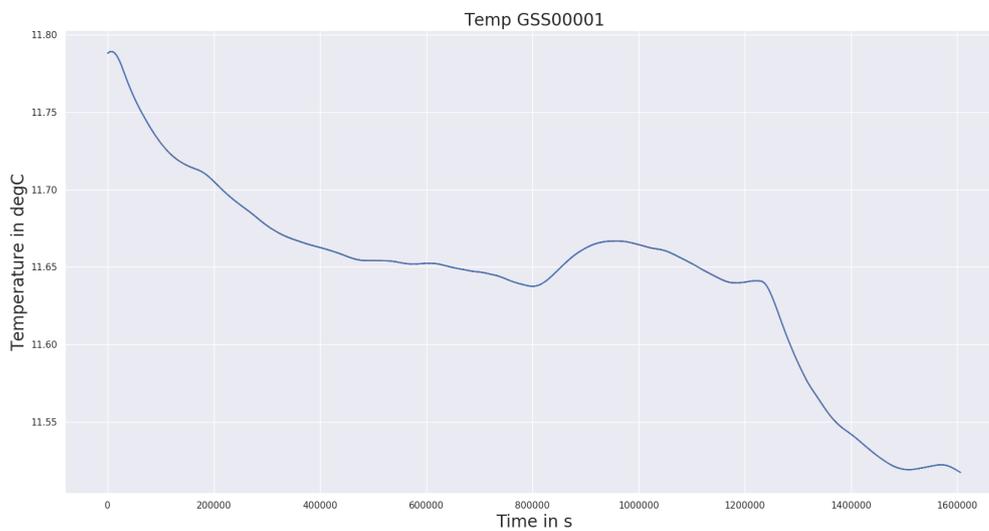


FIGURE 5.23 – Séries temporelles de la Température après reconstruction de 17 jours du capteur GSS00001

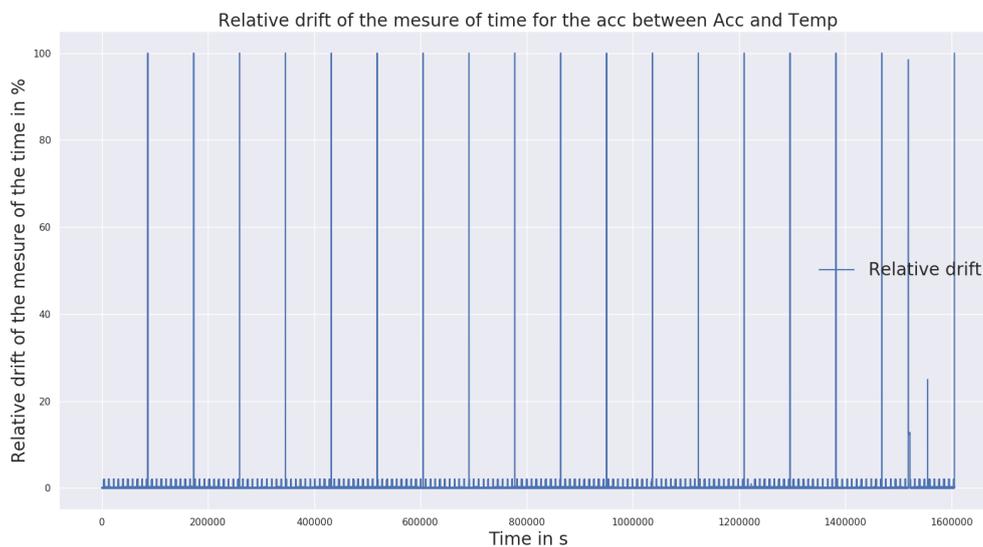


FIGURE 5.24 – Décalage relatif de la mesure du temps du capteur thermique TS1 (GSS00001) et du temps de la nouvelle voie d'accélération. Nous constatons qu'il existe un décalage de temps périodique, il s'agit du manque d'un point (décalage de 100 %).

Sur la figure 5.26, nous montrons la densité spectrale d'amplitude de la température pendant la période de 17 jours de tous les capteurs résumés dans le tableau 5.3, en complément de ce tracé, nous traçons également le modèle d'ajustement d'Armano et al. [23]. Selon la fonction d'ajustement, les deux figures sont vraiment similaires. Notre calcul de la densité spectrale d'amplitude semble être correctement calculée.

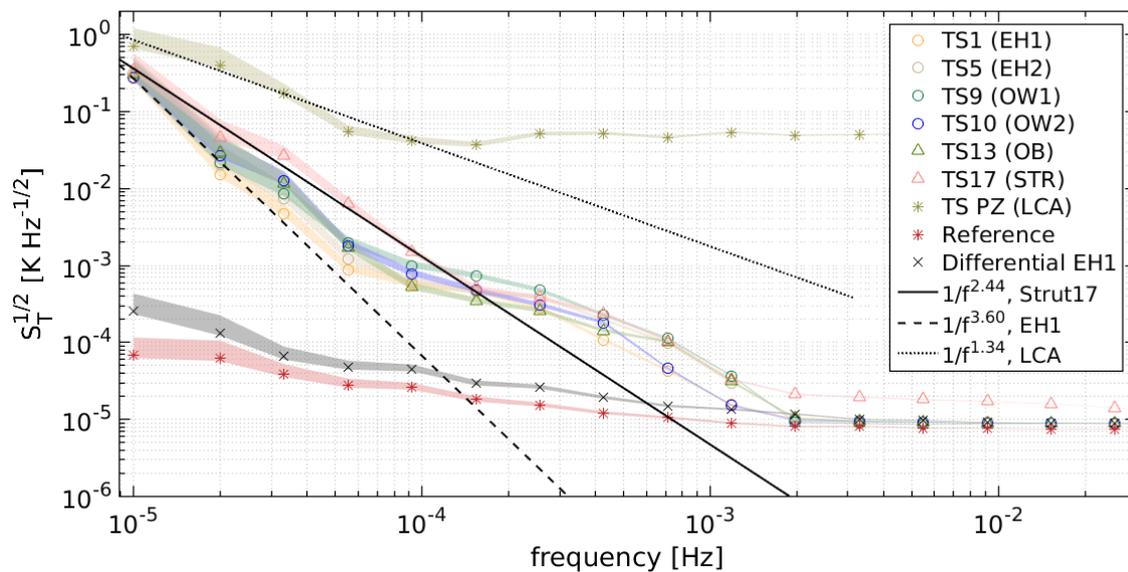


FIGURE 5.25 – Densité spectrale d'amplitude (ASD) de la température durant la période du mois de février 2017 [23]

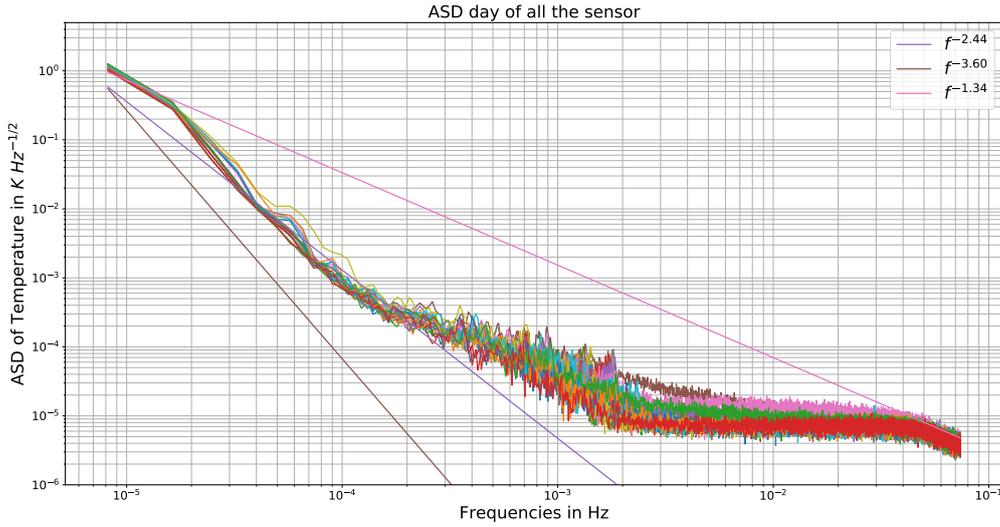


FIGURE 5.26 – Empilement de 17 jours de la densité spectrale d’amplitude de tous les capteurs thermiques du satellite LPF

5.8.3 Cohérence entre température et accélération

Dans cette section, nous présentons le calcul de la cohérence entre la température et la différence d’accélération des masses-test de LPF. Dans la figure 5.27, la cohérence est plate autour de la valeur $Y = \frac{1}{17}$, c’est l’inverse du nombre de jours empilés. d’après cette figure, nous n’avons aucune corrélation entre la température et l’accélération différentielle des masses-test LPF sauf à très basses fréquences autour de 2×10^{-4} Hz. La figure 5.28 est un exemple et la cohérence, et de la non-corrélation.

En effet, on peut distinguer un pic sur la cohérence avec tous les capteurs thermiques du satellite et de la différence d’accélération des masses-test LPF à la fréquence $f = 1.5 \pm 0.2 \cdot 10^{-4}$ Hz. Ce qui correspond à une oscillation d’une période de deux heures; ce pic pourrait correspondre au deuxième mode de décomposition spectrale de la plus grande oscillation de température (selon la section 5.8.4). Nous avons le fondamental à $f_0 = 4.4 \cdot 10^{-5}$ Hz, le premier mode sera à $f_1 = 1.3 \cdot 10^{-4}$ Hz ($f_k = (2k + 1)f_0$).

5.8.4 Étude de cohérence avec une augmentation forcée de la température

Données de l’augmentation forcée de la température

Selon l’article d’Armano *et. al* [23], pendant la mission LPF quelques instants sont réservés à l’étude du bruit. C’est l’origine des données de notre première étude. Et, il y a aussi quelques expérimentations à bord de LISA Pathfinder. Dans cette section, nous étudierons l’influence d’une injection thermique (10 mars 2016) sur la différence d’accélé-

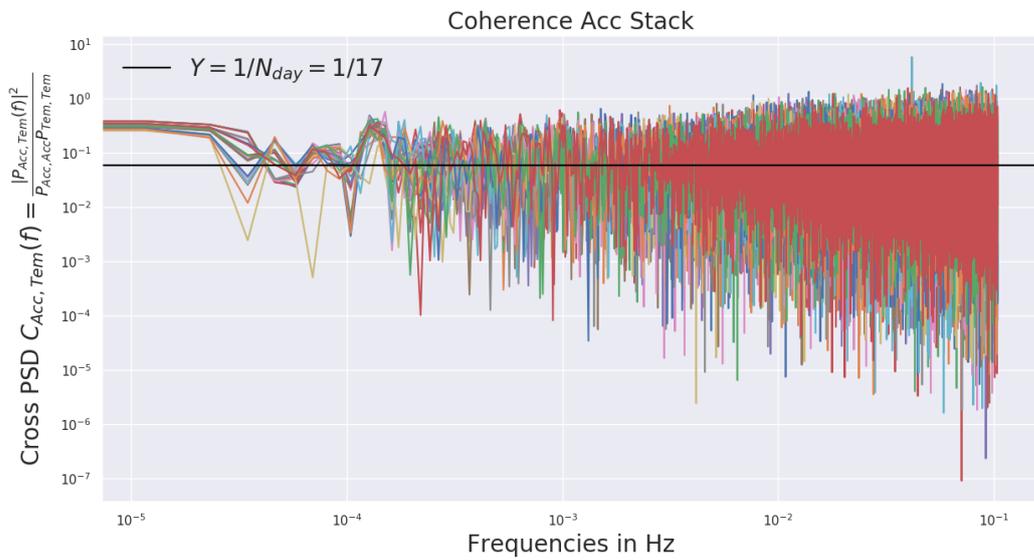


FIGURE 5.27 – Empilement de 17 jours de la cohérence de tous les capteurs thermiques dans le satellite et de la différence d'accélération des masses-test de LPF

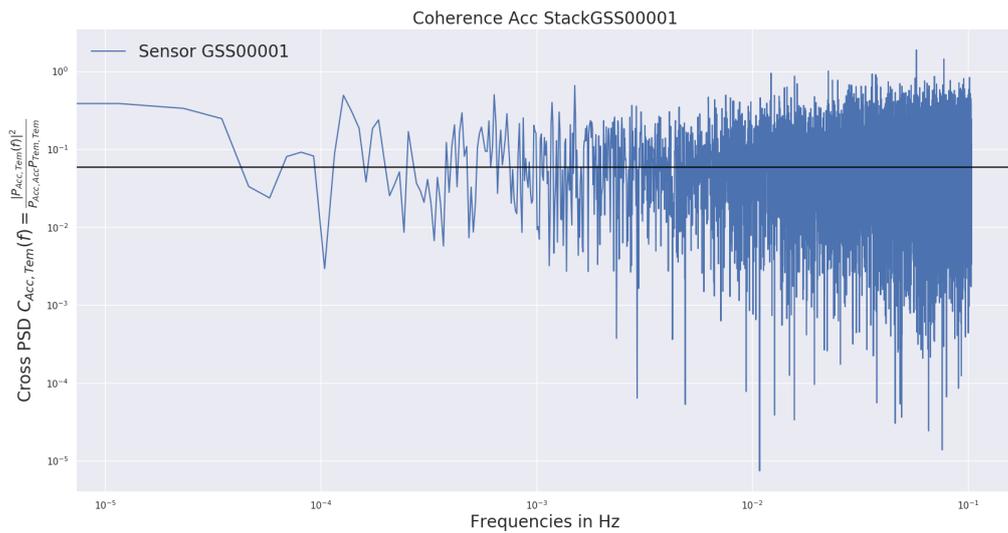


FIGURE 5.28 – Empilement de 17 jours de la cohérence du capteur thermique TS1 et de la différence d'accélération des masses-test de LPF

ration. Nous étudierons les injections thermiques dans le boîtier d'électrode 1 (injection des capteurs TS1, TS2, TS3 et TS4). Dans la figure 5.29, c'est la différence d'accélération des masses-test LPF après le ré-échantillonnage lors de l'injection thermique et la figure 5.30 est la température de tous les capteurs thermiques pendant l'injection thermique. On voit l'évolution de l'augmentation thermique des capteurs du boîtier d'électrode 1. Les capteurs proches de l'EH1, les capteurs de la fenêtre optique 1 (TS9, TS11 et TS24), suivent l'augmentation de la température. Il y a bien un effet de l'augmentation de la température avec la fréquence de $4.4 \cdot 10^{-5}$ Hz. C'est dans la bande de fréquences de LISA, mais pour notre étude de cohérence, nous sommes hors de la bande. On peut voir une autre fréquence, si on fait un zoom sur les données (figure 5.31), nous avons un signal carré d'une période de 1 000 s, cela correspond à une fréquence de $1 \cdot 10^{-3}$ Hz. La modulation de cette onde carrée peut être définie par morceau :

$$\begin{cases} T(t) = T_0(1 - e^{-t/\tau}), & t \in [0, T/2[\\ T(t) = T_0e^{-t/\tau}, & t \in [T/2, T] \end{cases} \quad (5.19)$$

$$\begin{cases} \Delta_g(t) = \Delta_{g,0}(1 - e^{-t/\tau}), & t \in [0, T/2[\\ \Delta_g(t) = \Delta_{g,0}e^{-t/\tau}, & t \in [T/2, T] \end{cases} \quad (5.20)$$

C'est ce que l'on peut voir en orange sur la figure 5.31, l'ajustement de l'onde carrée donne $T_0 = 0.0175K$ et $\tau = 47.3s$. Nous avons un bon chevauchement des données et de la modélisation. On peut faire le même travail sur la différence d'accélération des masses-test (figure 5.32). Les données sont plus bruyantes, la fonction d'ajustement donne $\Delta_{g,0} = 8.98 \cdot 10^{-13} \text{ m.s}^{-2}$ et $\tau = 47.5s$. Le résultat de ces ajustements est très proche, c'est une première mise en évidence d'une corrélation. On peut calculer le PSD de la modélisation du créneau et comparer avec le PSD des capteurs thermiques.

d'après la section B de la thèse de Josep Sanjuán Muñoz [215], nous avons une estimation de $\tau = 86_{+56}^{-56}$ s. Nous avons un chevauchement des deux estimations.

La figure 5.33 présente la PSD de la modélisation de l'onde carrée avec la PSD du zoom de la série temporelle lors de l'injection thermique dans le capteur thermique TS1. d'après ce tracé, nous avons la même décomposition spectrale du signal. Nous avons un pic à $1 \cdot 10^{-3}$ Hz, cela confirme nos attentes. Ce pic est suivi d'harmoniques impairs ($3 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 7 \cdot 10^{-3}, \dots$ Hz), c'est typiquement la décomposition spectrale d'une onde carrée.

La figure 5.34 et la figure 5.35 sont respectivement la densité spectrale de puissance de la différence d'accélération des masses-test après le changement de fréquence d'échantillonnage et la densité spectrale de puissance du capteur thermique lors de l'injection thermique. Les deux tracés présentent la même distribution de pics. C'est exactement la même décomposition spectrale de l'onde carrée. C'est la deuxième preuve de la présence

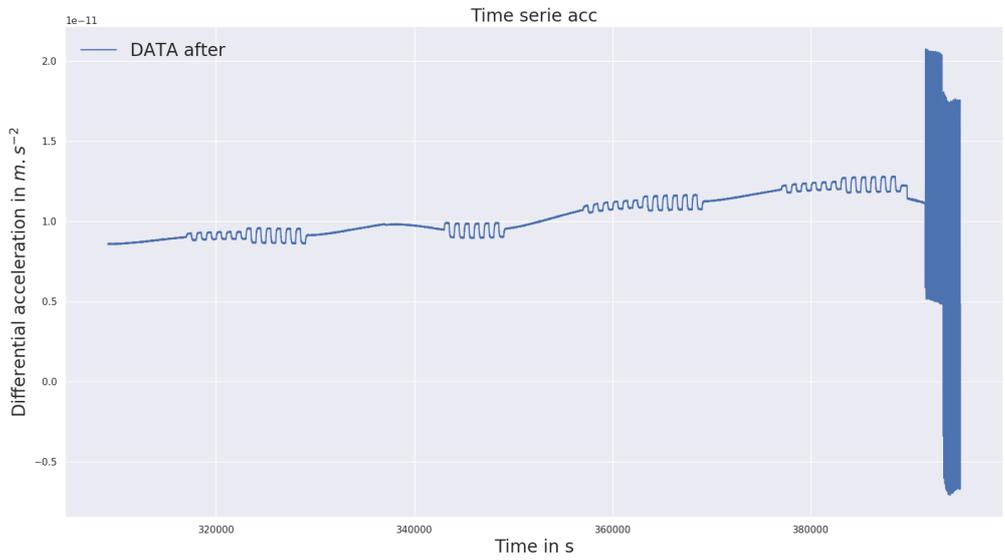


FIGURE 5.29 – Séries temporelles pendant l’injection thermique de la différence d’accélération des masses-test après le changement de fréquence d’échantillonnage

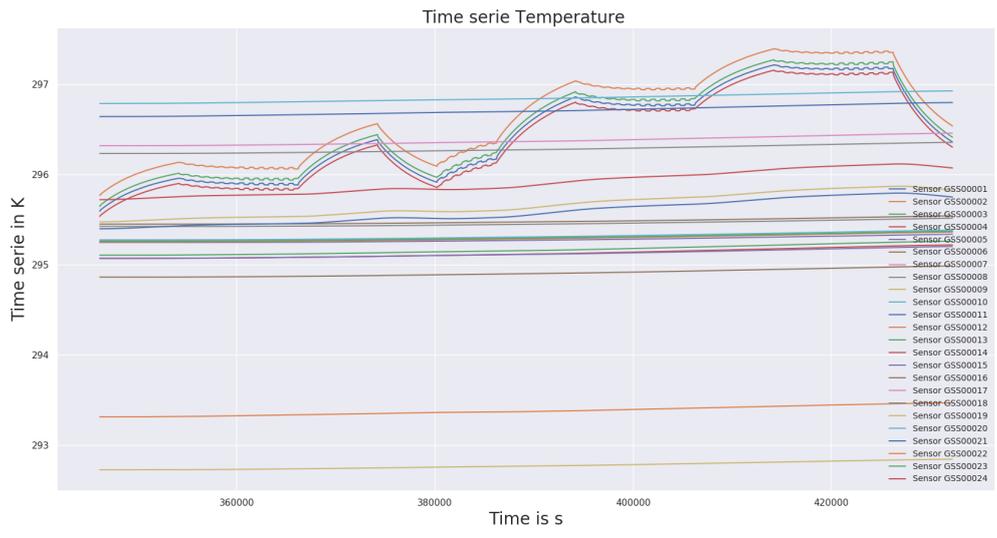


FIGURE 5.30 – Séries temporelles lors de l’injection thermique des capteurs thermiques

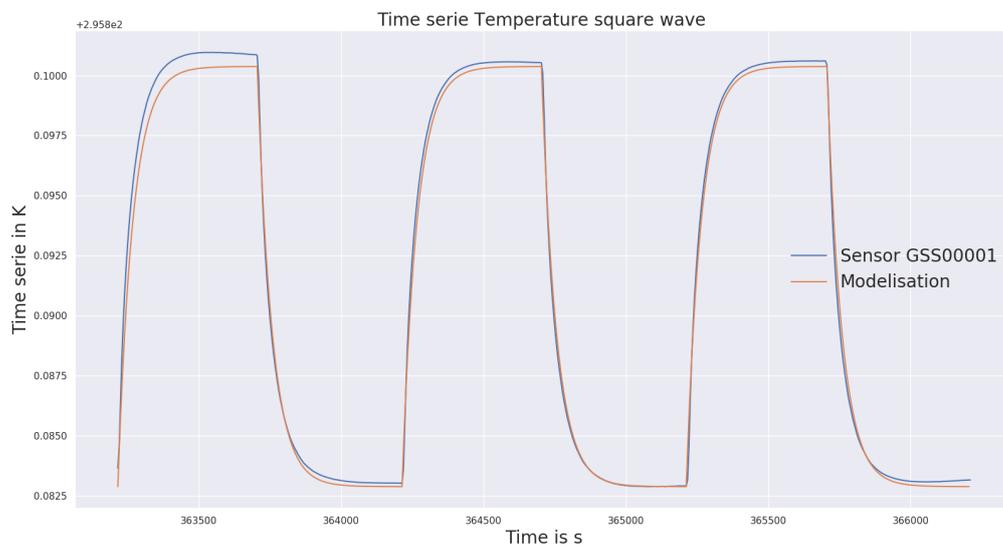


FIGURE 5.31 – Zoom sur les séries temporelles lors de l’injection thermique dans les capteurs thermiques

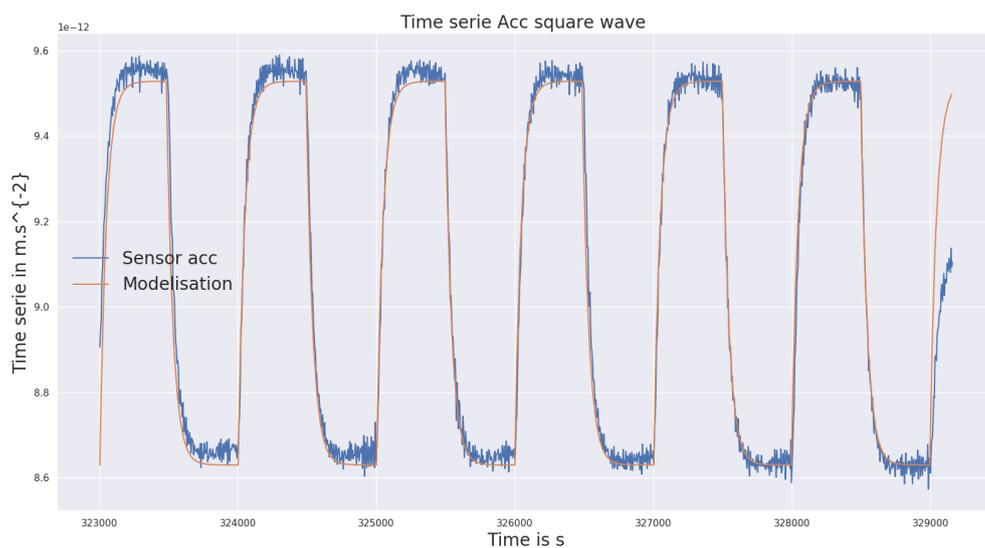


FIGURE 5.32 – Zoom sur les séries temporelles lors de l’injection thermique de la différence d’accélération des masses-test après le changement de fréquence d’échantillonnage

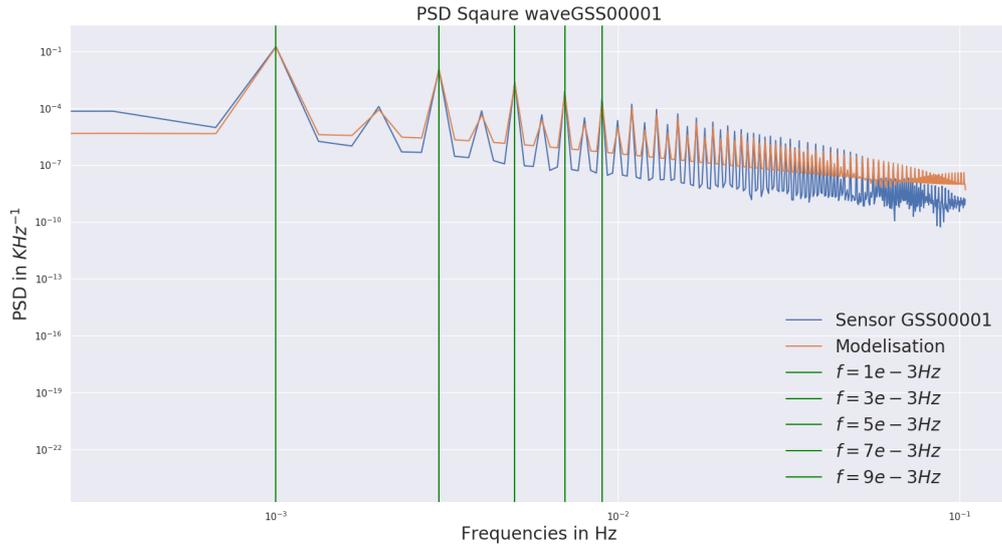


FIGURE 5.33 – Comparaison de la PSD de la modélisation du signal carré avec la PSD du zoom de la série temporelle lors de l’injection thermique du capteur thermique TS1

d’une corrélation entre température et accélération des tests-masses.

Nous avons la confirmation de l’évidence de la cohérence entre la différence d’accélération des masses-test et tous les capteurs thermiques lors de l’injection thermique, selon la figure 5.36 et la figure 5.37. La cohérence est maximale pour les valeurs de la distribution des pics de l’onde carrée. On a une cohérence très importante avec le capteur du boîtier d’électrode 1 (TS1, TS2, TS3, TS4), une cohérence plus faible avec les capteurs de la fenêtre optique 1 (TS9, TS11, TS24). Les capteurs de l’OW1 sont plus proches de l’EH1 et dans la série temporelle, on peut distinguer une augmentation de la température, ceci nous indique qu’il s’agit bien d’une cohérence liée à l’augmentation thermique. Nous constatons également que l’augmentation de température se propage avec un effet d’atténuation, car la cohérence devient plus faible lorsque l’on s’éloigne de l’injection.

5.8.5 Soustraction du bruit corrélé de la température sur la différence d’accélération

Nous pouvons calculer la cohérence entre la température et la différence d’accélération sur les figures 5.38 et 5.39 avec des canaux sans glitches, nous avons une évidence d’une corrélation à $f \simeq 1 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$. Pour étudier le canal cible et le canal témoin, nous interpolons les canaux thermiques pour changer la fréquence d’échantillonnage, mais nous ne pouvons pas étudier la fréquence supérieure à la fréquence d’échantillonnage de la température $f_s = 0.2083 \text{ Hz}$.

Pour la soustraction, on se focalise sur la bande de fréquences $[1 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}, 5.8 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}]$, sur cette bande le coefficient de Pearson est 0.98.

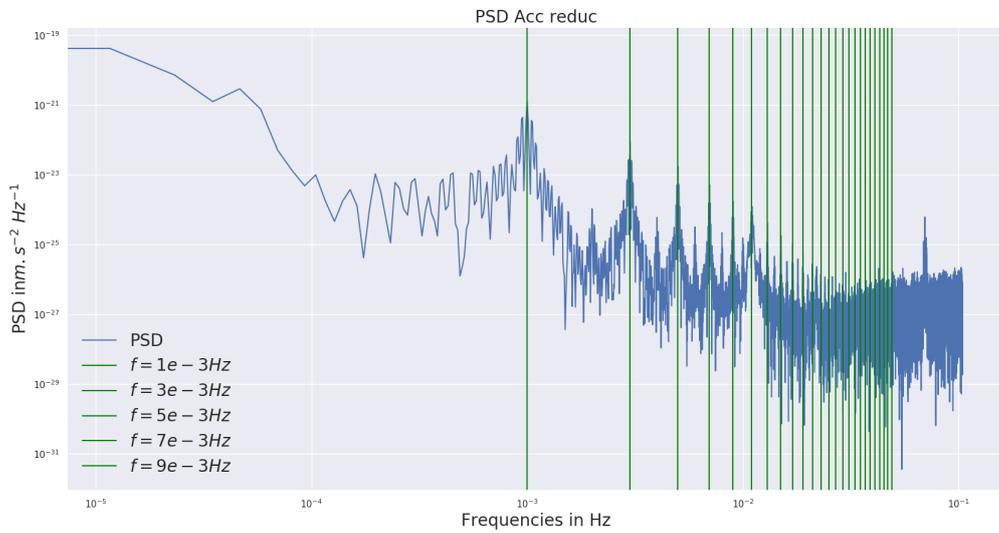


FIGURE 5.34 – PSD lors de l’injection thermique de la différence d’accélération des masses-test après le changement de fréquence d’échantillonnage

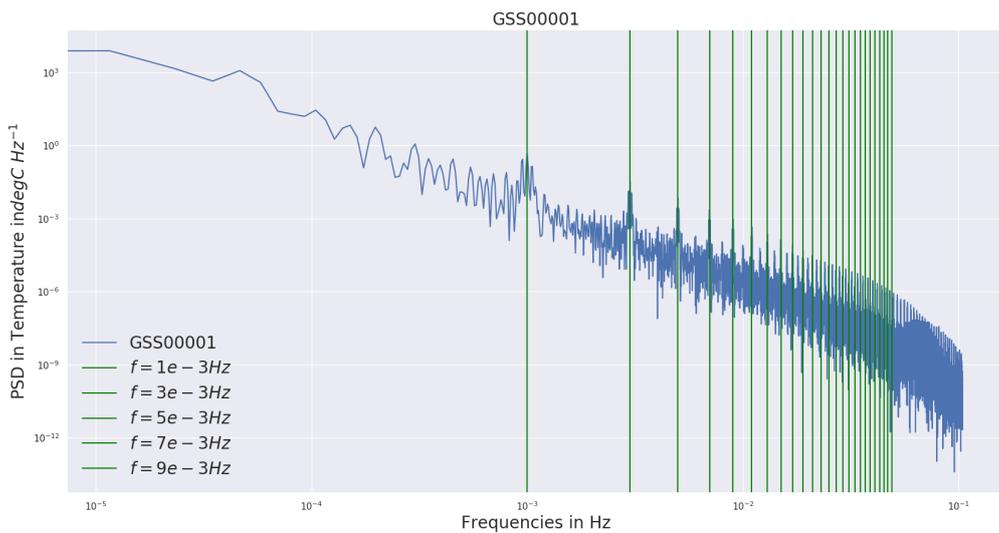


FIGURE 5.35 – PSD lors de l’injection thermique du capteur thermique TS1

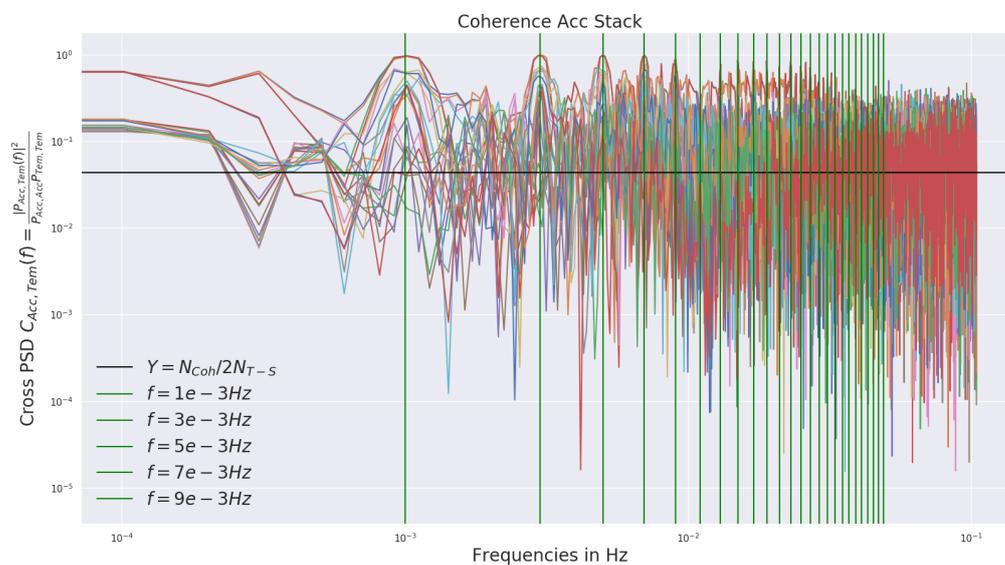


FIGURE 5.36 – Cohérence entre la différence d'accélération des masses tests et l'ensemble des capteurs thermiques lors de l'injection thermique

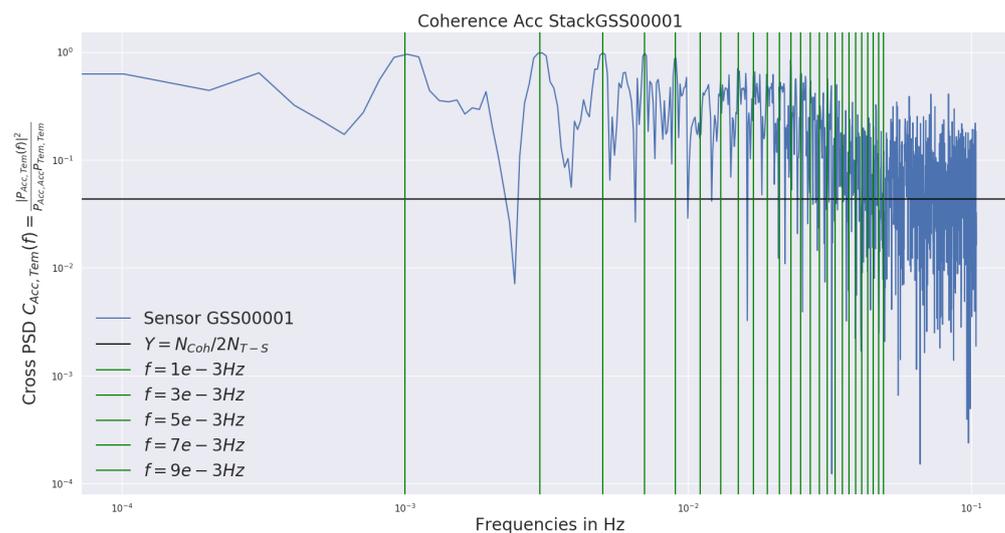


FIGURE 5.37 – Cohérence entre la différence d'accélération des masses tests et le capteur thermique TS1 lors de l'injection thermique

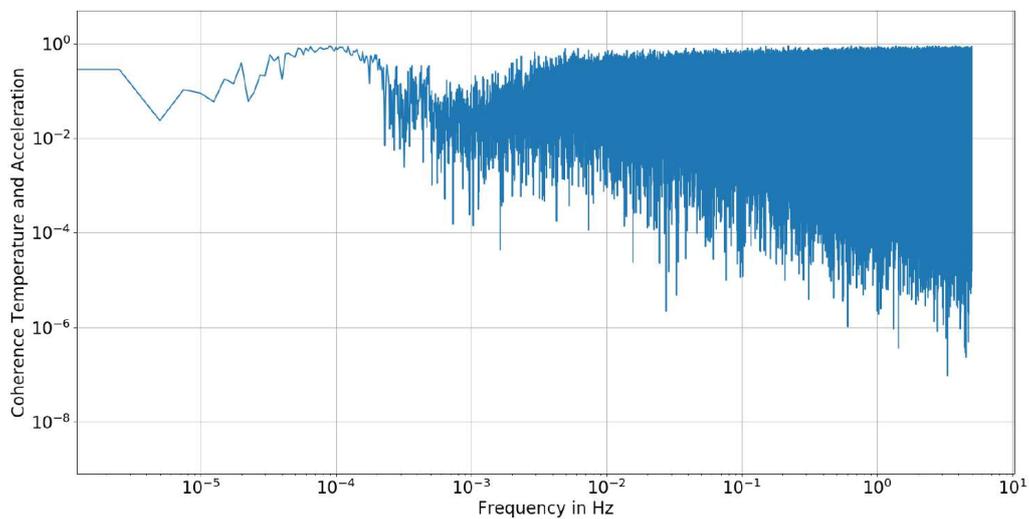


FIGURE 5.38 – Cohérence de l’empilement de tous les capteurs thermiques et de la différence d’accélération pendant les 17 jours

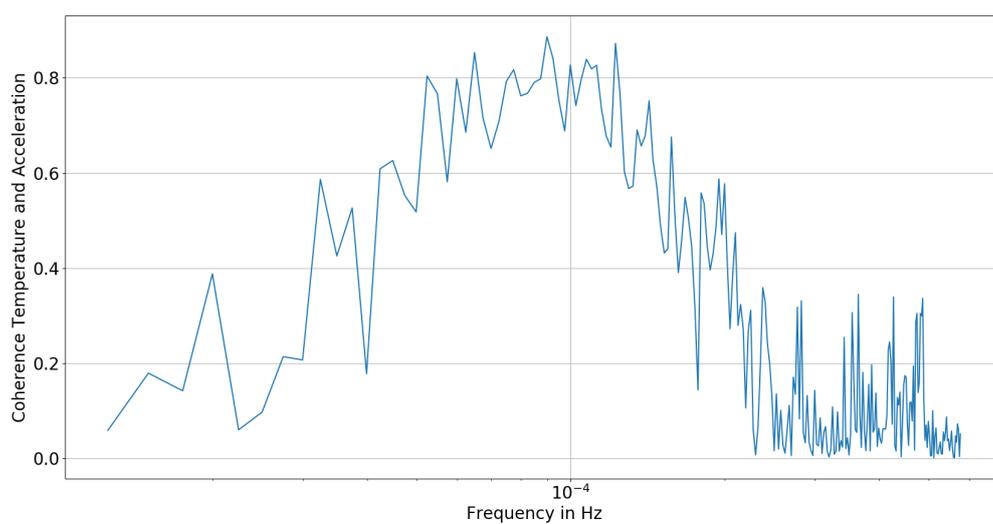


FIGURE 5.39 – Zoom sur la cohérence de la moyenne de tous les capteurs thermiques et de la différence d’accélération pendant les 17 jours

Sur les figures 5.40 et 5.41 le tracé bleu est la densité spectrale de puissance du canal cible, en vert, le canal témoin (avec un facteur pour séparer la courbe), la ligne rouge est le canal cible avec une soustraction multiple de corrélation. Enfin, la ligne violette est le canal cible filtré et lissé par le filtre de Wiener.

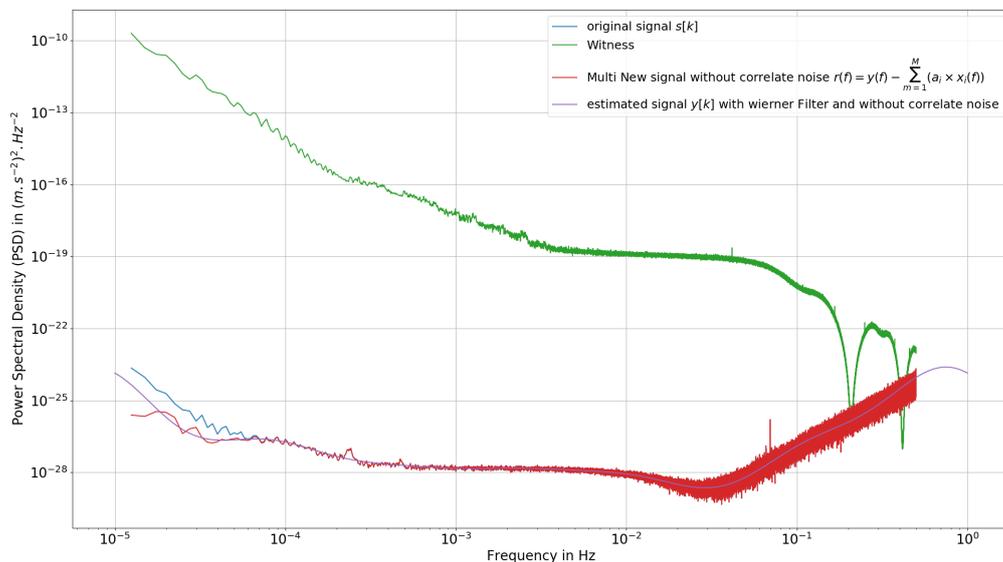


FIGURE 5.40 – Canal témoin et canal cible après la dé-corrélation et le lissage des données

Pour vérifier la soustraction de la corrélation, le figure 5.42 montre le rapport entre canaux cible filtrée et du canal cible non filtrée. d’après la figure 5.42, les cohérences ont été réduites à basses fréquences par un facteur d’important.

5.9 De-glitching de la différence d’accélération des TM

Dans cette section, nous présentons la méthode pour de-glitché le canal d’accélération. En fait à un certain moment, les séries temporelles présentent un écart pour une raison inconnue, ceux-ci se caractérisent par un excès de puissance sur la série temporelle, mais nous observons des forces parasites apparaissant par intermittence dans le canal de bruit d’accélération différentielle. Dans le traitement de données actuel de LISA PathFinder, il existe un algorithme de déglitche sur les canaux d’accélération. Dans notre calcul, nous voulons conserver la corrélation entre le μ -propulseur et le bruit d’accélération. Les traitements de données de nettoyage par la collaboration LPF soustraient l’effet des propulseurs avant de soustraire les glitches. Nous devons donc implémenter un algorithme pour soustraire les glitches et de conserver l’effet des micro-propulseurs avant de calculer la corrélation. La banque de données de LPF, nous fournit pour une série temporelle d’accélération donnée la position des glitches t_0 , l’amplitude A et le temps caractéristique

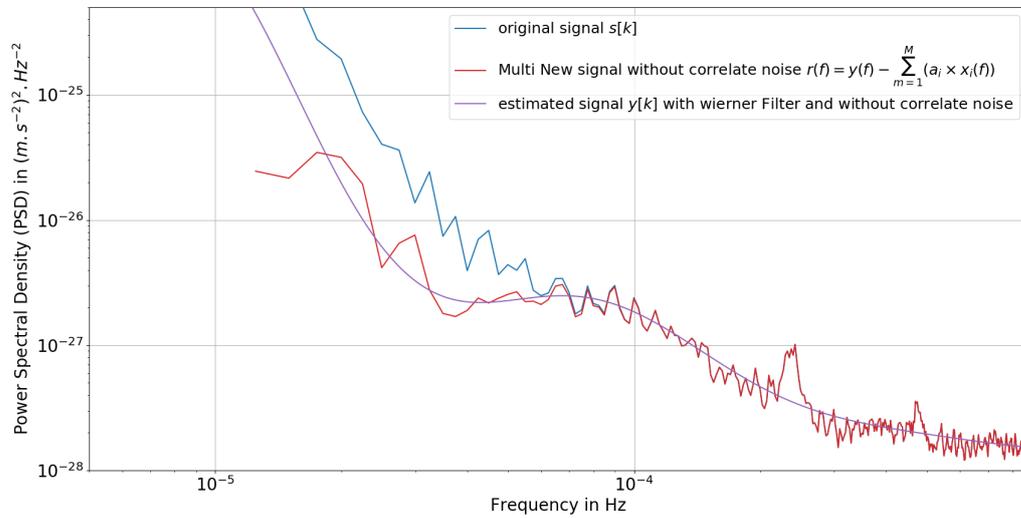


FIGURE 5.41 – Zoom sur le canal témoin et le canal cible après la dé-corrélation et le lissage des données dans le domaine $[1 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}, 5.8 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}]$

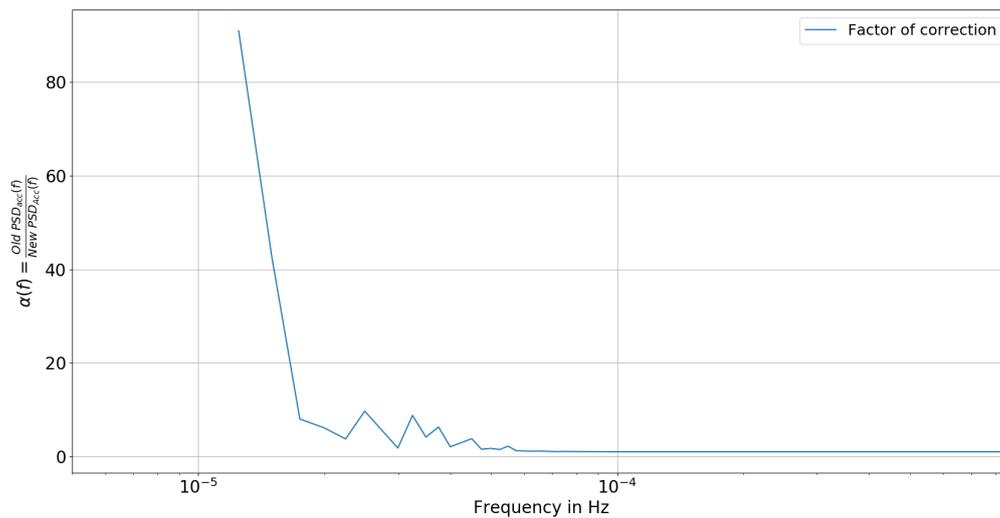


FIGURE 5.42 – Rapport du canal cible filtré et du canal cible non filtré

des glitches *beta*. La table 5.4 est le résumé des paramètres du 8 glitches présents sur la série temporelle entre (2017/02/13 et 2017/03/01). Le signal du bruit de chaque glitche peut-être modélisé par une fonction dans le domaine temporel tel que :

$$\Delta g_{glitch} = 2A\beta^{-1.5}(t - t_0) \exp\left(\frac{-2(t - t_0)}{\beta}\right) L_1(t - t_0) \quad (5.21)$$

avec L_1 le premier polynôme de Laguerre.

t_0 (s)	A ($m.s^{-2}$)	β (s)
160110	1.2665×10^{-13}	55.153
547079	3.1845×10^{-12}	103.738
593615	8.14244×10^{-13}	33.2717
683136	1.65263×10^{-13}	9.40455
820548	-3.62851×10^{-13}	12.1084
982343	3.50509×10^{-12}	80.573
1163260	7.68556×10^{-14}	91.4247
1407070	1.61535×10^{-13}	71.0094

TABLE 5.4 – Paramètres des glitches du 2017-02-13 au 2017-03-01

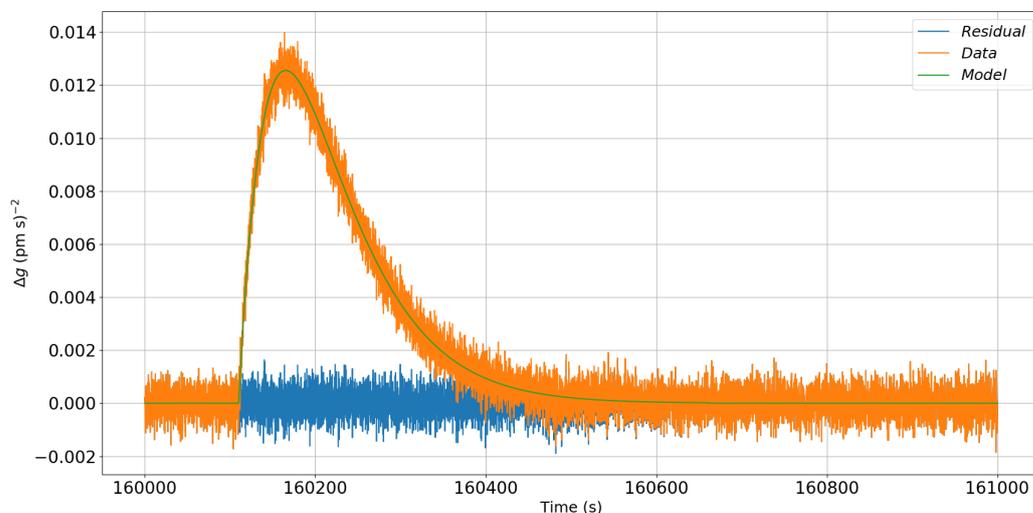


FIGURE 5.43 – Exemple de glitches dans le canal du bruit d'accélération avec un bruit gaussien.

La figure 5.43 est un exemple de glitche avec un bruit blanc, la ligne orange est la série temporelle des données, le tracé vert correspond à l'ajustement du modèle (voir 5.21) et la ligne bleue est la courbe résiduelle (Données – Modèle). Sur la figure 5.44, nous présentons l'ensemble des glitches présents sur les séries temporelles du 2017-02-13 au 2017-03-01. La position, l'amplitude et les constantes de temps pour chaque glitche sont présentées dans le tableau 5.4. La série temporelle initiale peut être corrigée par un

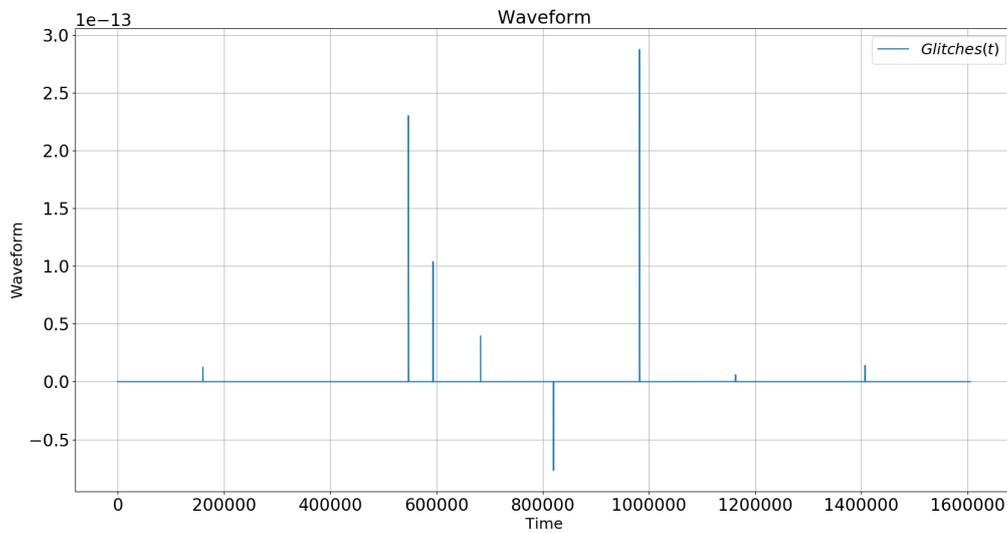


FIGURE 5.44 – Série temporelle totale des glitches du canal de bruit d'accélération à partir du 2017-02-13 au 2017-03-01

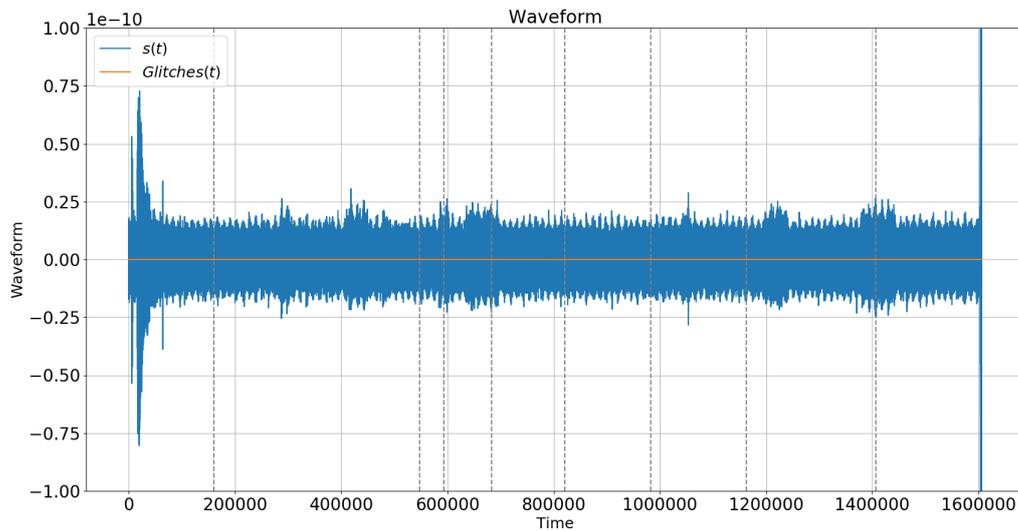


FIGURE 5.45 – Série temporelle d'accélération $\Delta g(t)$ du 13/02/2017 au 01/03/2017 (ligne bleue), avec la position des glitches (lignes grises en tirets verticaux) et la série temporelle totale des glitches (ligne orange)

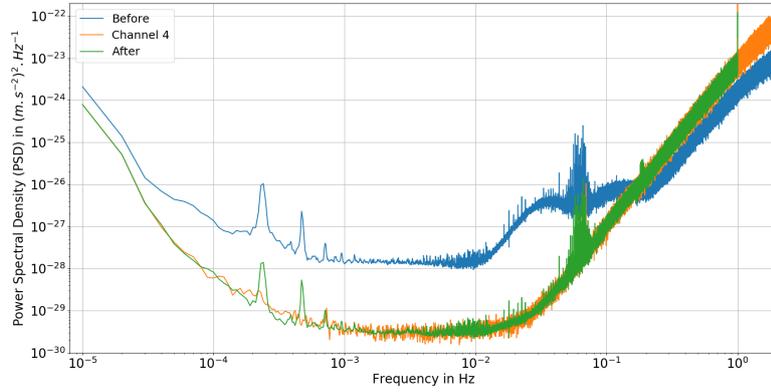


FIGURE 5.46 – Densité spectrale de puissance de l'accélération avec et sans glitches

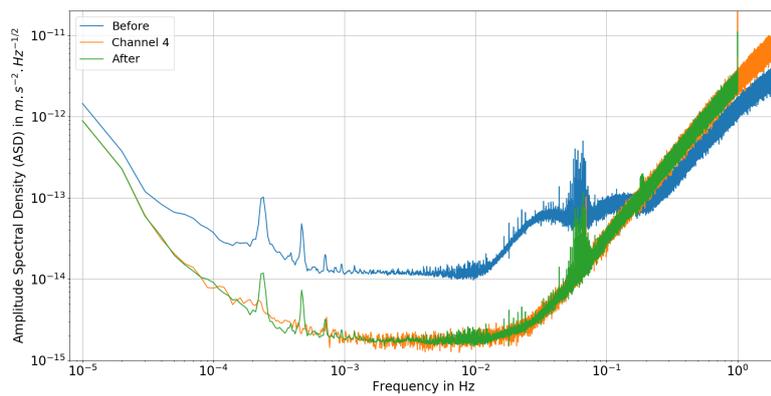


FIGURE 5.47 – Densité spectrale d'amplitude de l'accélération avec et sans glitches

modèle linéaire ($\Delta g_{corr}(t) = a\Delta g(t) + \Delta g_0$) ; en fait les accélérations présentent une dérive que nous corrigeons. Nous avons besoin d'une accélération fluctuant autour de zéro pour dé-glitcher les séries temporelles. Nous avons la preuve sur la figure d'accélération 5.45 que la série temporelle d'accélération $\Delta g(t)$ a une plus grande amplitude comparée à l'amplitude du calcul des glitches de l'équation du modèle 5.21 et les paramètres des données LPF (voir table 5.4). En conclusion, la soustraction des glitches sur les séries temporelles n'a pas d'effet significatif avec les valeurs des glitches de l'ajustement de LPF. Dans le simple but de supprimer l'effet des glitches sur les séries temporelles, nous utiliserons le canal de *level 4*. Il s'agit du plus haut niveau de traitement de données sur les données LPF disponible pour l'utilisateur. Pour cela, on cherche à estimer la forme du signal sur le spectre de puissance. Ainsi, nous utilisons un ajustement polynomial des deux canaux (forme d'onde des glitches et canal du *level 4*), on estime la même chose sur les canaux *level 4* (celui-ci est labellisé *channel 4* dans les figures 5.46 et 5.47), puis on ajoute le modèle polynomial du canal du *level 4* sur la différence entre le spectre de puissance et l'ajustement polynomial du signal de glitches. Nous supposons que l'effet des glitches sont de changer la forme du signal et que ceci peut être corrigé dans le domaine fréquentiel par un ajustement polynomial. Ceci ne remplace en rien l'étude réalisée par la collaboration LPF, mais nous donne rapidement un signal sans glitches avec conservation des corrélations. Finalement, on obtient un spectre de puissance sans glitches, mais avec toutes les autres sources corrélées. Il suffit de revenir dans le domaine temporel pour obtenir la série temporelle sans glitches. Les figures 5.46 et 5.47 sont respectivement la densité spectrale de puissance et d'amplitude de l'accélération avec les glitches (*level 0*, en bleu), sans glitches (*level 4*, en orange) et sans glitches, mais avec bruit corrélé (en vert).

5.10 Résumé de la mesure des corrélations

On peut calculer la corrélation avec la nouvelle série temporelle $\Delta g_{deglitch}(t)$, dans la figure 5.48, on superpose la mesure de cohérence entre l'accélération et le champ magnétique, la température et les micro-propulseurs, respectivement en rouge, vert et orange. La ligne bleue est la somme des trois cohérences. Nous ajoutons également dans ce graphique la densité spectrale de puissance LISA des canaux *A*, *E* et *T* (voir l'équation 3.66) pour voir dans quelle bande de fréquences de LISA vivent les corrélations de LPF. Notre désir est de comprendre quelle partie du bruit de LISA serait affecté par l'ajout des corrélations de LPF.

$$\left\{ \begin{array}{l} PSD_A = N_A \\ PSD_E = N_E \\ PSD_T = N_T \end{array} \right. \quad (5.22)$$

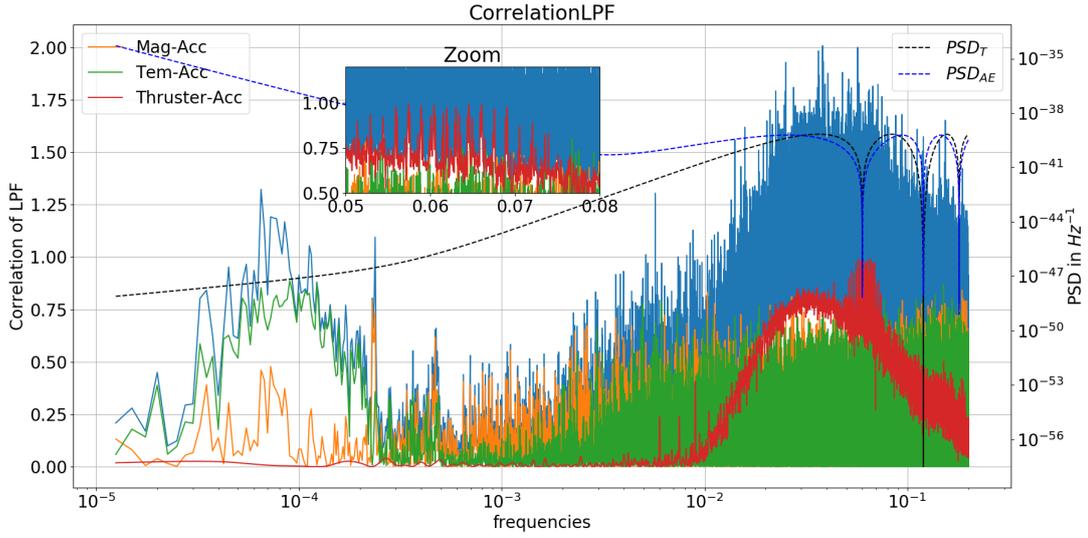


FIGURE 5.48 – Corrélation entre le canal d'accélération des masses-test LPF *level 0* sans glitch (méthode de suppression des glitches sur le domaine spectral) et le champ magnétique, la température et le μ -propulseur

Les composantes de bruit $N_A(f) = N_E(f)$ et $N_T(f)$ peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} N_A = N_1 - N_2 \\ N_T = N_1 + 2N_2 \end{cases} \quad (5.23)$$

avec

$$\begin{cases} N_1(f) = \left(4S_s(f) + 8 \left(1 + \cos^2 \left(\frac{f}{f_*} \right) \right) S_a(f) \right) |W(f)|^2 \\ N_2(f) = - \left(2S_s(f) + 8S_a(f) \right) \cos \left(\frac{f}{f_*} \right) |W(f)|^2 \end{cases} \quad (5.24)$$

$W(f) = 1 - e^{-\frac{2if}{f_*}}$ et

$$\begin{cases} S_s(f) = N_{Pos} \\ S_a(f) = \frac{N_{acc}}{(2\pi f)^4} \left(1 + \left(\frac{0.4 \text{ mHz}}{f} \right)^2 \right) \end{cases} \quad (5.25)$$

l'amplitude du budget du niveau de bruit de *LISA* est donnée dans le [LISA Science Requirement Document](#) et [38]. Pour créer les données de notre exemple, nous utilisons un bruit d'accélération de $N_{acc} = 1.44 \times 10^{-48} \text{ s}^{-4}\text{Hz}^{-1}$ et la fluctuation de la longueur du chemin optique $N_{Pos} = 3.6 \times 10^{-41} \text{ Hz}^{-1}$. Ce qui correspond à une durée de collecte de donnée de quatre ans.

Nous suivons le formalisme de [222]. Les canaux A , E et T sont dérivés des canaux X , Y et Z [238], les bras de Michelson inégaux centrés sur les trois engins spatiaux. Nous supposons que la mesure du signal d'onde gravitationnelle par *LISA* est la même sur les trois canaux, mais avec une phase de $2\pi/3$; cela vient des orientations différentes de chaque Michelson à bras inégaux. On suppose également que le bruit n'est pas corrélé entre les

canaux X, Y, Z . Nominale, le canal T ne contient pas de signal d'onde gravitationnelle, mais contient le bruit *LISA* non corrélé. Cette hypothèse n'est pas parfaitement exacte, mais pour cette analyse, nous la considérerons comme vraie. Les relations sont :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z - X) \\ E = \frac{1}{\sqrt{6}}(X - 2Y + Z) \\ T = \frac{1}{\sqrt{3}}(X + Y + Z). \end{cases} \quad (5.26)$$

Nous supposons que les canaux A et E contiennent les mêmes informations d'ondes gravitationnelles et le même niveau de bruit. Ils sont modélisés par les mêmes paramètres que le canal T .

5.11 Corrélations de LISA PathFinder (LPF) intégrées dans le bruit de LISA

Dans cette section, nous discutons de la possibilité d'ajouter les corrélations de Pathfinder LISA dans le bruit de LISA.

5.11.1 Corrélation de LPF dans le canal de bruit analytique de LISA

La cohérence est le spectre de fréquences normalisé de la mesure de corrélation, c'est un vecteur de valeurs comprises entre 0 et 1 qui dépend de la fréquence. Pour certaines fréquences ou bandes de fréquences, la cohérence est proche de 1, c'est là que le bruit est corrélé. Nous supposons que le bruit corrélé dans la mesure d'accélération est similaire dans LPF et dans LISA, car l'architecture des deux engins spatiaux est très proche en termes de géométrie et de technologie. Par exemple, les μ -propulseurs seront identiques.

La première idée est d'introduire des corrélations comme une perturbation de l'amplitude du type de bruit considéré. Dans notre cas, le bruit de corrélation dans LPF est un bruit de perturbation d'accélération dans LISA. Pour cela, nous injectons le bruit des corrélations d'accélération comme un nouveau bruit d'accélération dans LISA. Nous transformons le niveau de l'amplitude du bruit d'accélération en un vecteur sur les fréquences tel que celui-ci intègre la corrélation de LPF :

$$N_{acc,corr}(f) = N_{acc} \left(1 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{LPFacc,n_i}(f) \right) \quad (5.27)$$

avec C_{LPFacc,n_i} la cohérence entre le bruit d'accélération et le canal de bruit n_i . Dans notre cas, les n_i sont les μ -propulseur, le champ magnétique et la température de l'engin spatial.

Dans un cas général, il est également possible d'ajouter un bruit corrélé dans les canaux de bruits analytiques de LISA, avec la mise à jour du niveau d'amplitude du chemin optique N_{pos} .

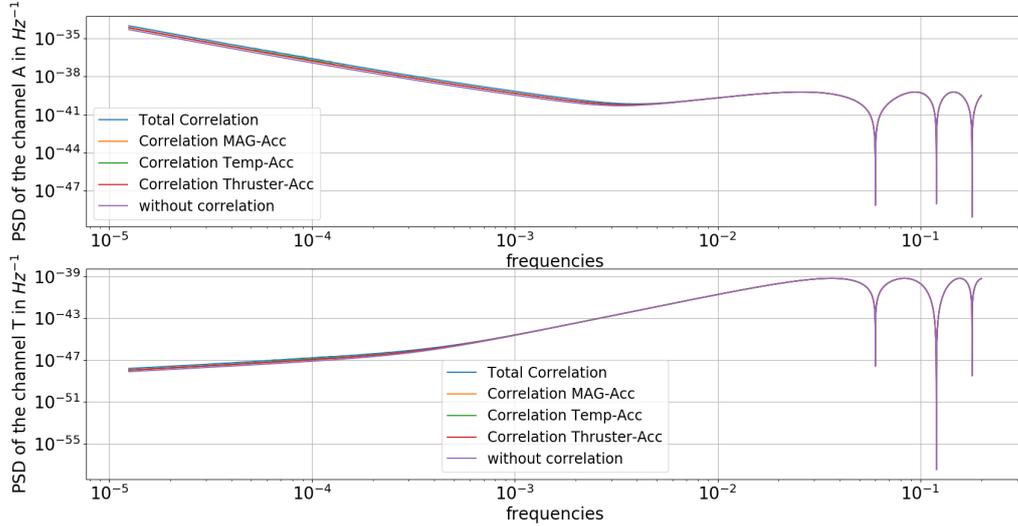


FIGURE 5.49 – Densité spectrale de puissance des canaux AE et T avec et sans corrélation LPF.

Dans les figures 5.49, 5.50 et 5.51, le bleu, orange, vert, rouge et violet sont respectivement : le calcul avec corrélation totale de LPF ($Corr(Acc, Mag + Temp + Thruster)$), la corrélation à partir du champ magnétique, la corrélation à partir de la température du satellite et le calcul du spectre du bruit de LISA sans corrélation. La figure 5.49 est la densité spectrale de puissance du canal A, E et T avec les corrélations de LPF. l'effet de la mise à jour du bruit analytique de LISA avec les corrélations de LPF est quasiment invisible sur la densité spectrale de puissance. Nous introduisons la différence relative entre la densité spectrale de puissance du canal I ($I = A, E$ et T) sans corrélation et avec les corrélations de LPF.

5.11.2 Corrélation de LPF dans le modèle de performance LISA et du budget d'erreur

Une deuxième possibilité pour ajouter les corrélations de LPF dans le bruit LISA est d'utiliser le modèle de performance de LISA et le budget d'erreur [166].

Le bruit LISA peut être modélisé par plusieurs composants : le bruit optique (le bruit de déplacement apparent total dans un seul lien, il provient de la combinaison du bras long, des masses-test, des interféromètres de référence et de l'erreur résiduelle du TDI) et le bruit d'accélération (le bruit équivalent d'une seule masse-test provenant du bruit de force sur celle-ci). Pour les deux composants, nous pouvons décomposer tous les ef-

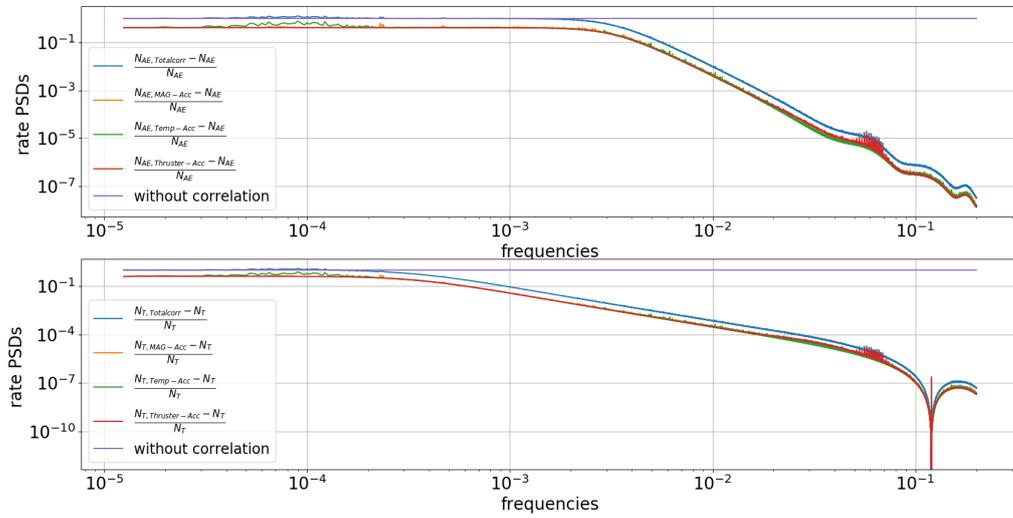


FIGURE 5.50 – Rapport entre $\frac{N_{I,corr}-N_I}{N_I}$ ($I = AE$ et T) et les canaux A, E et T avec et sans corrélation LPF.

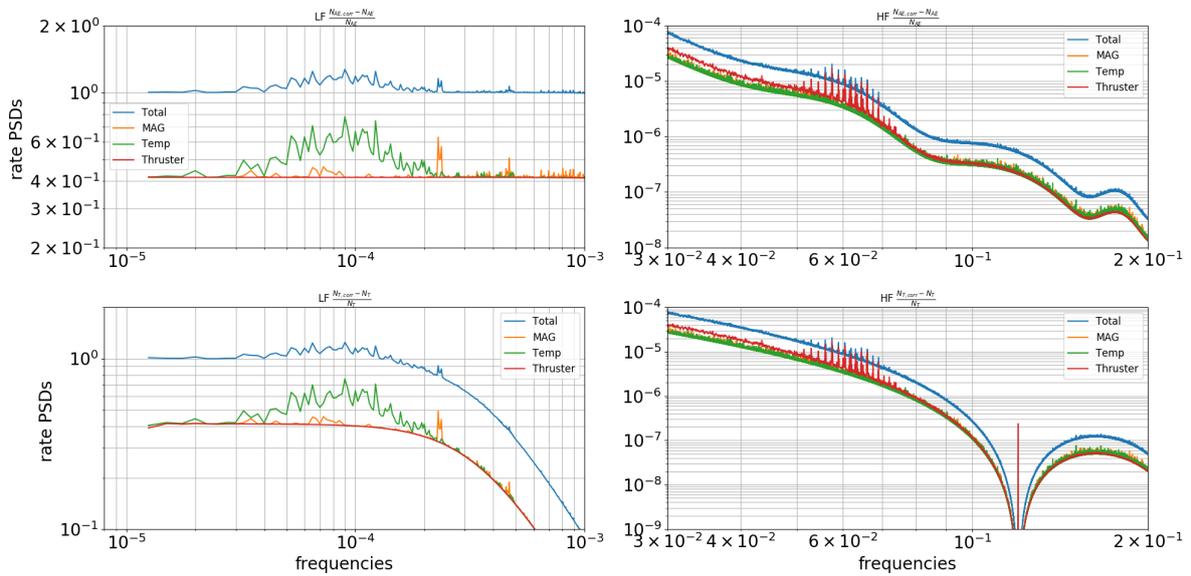


FIGURE 5.51 – Zoom sur les basses fréquences (LF) et hautes fréquences (HF) du rapport entre $\frac{N_{I,corr}-N_I}{N_I}$ ($I = A, E$ et T) et les canaux A, E, T avec et sans corrélation LPF.

fets physiques. Pour la simulation du bruit LISA, nous avons deux types d'estimation. La première est issue de la modélisation et de la mesure des effets physiques en laboratoire (approche *bottom-up*), dans le consortium, on l'appelle "*CBE*" (*Current Base Estimation*). La seconde vient de la performance des exigences d'observation, ce dont nous avons besoin pour observer ce que nous voulons (approche *descendante*). Dans le consortium, on l'appelle « *Allocation* ». C'est la valeur de la contenue dans la proposition de LISA. Vous pouvez décrire le bruit LISA avec deux niveaux de magnitude : N_{acc} pour le bruit d'accélération et N_{pos} le niveau d'amplitude du bruit optique. Les deux niveaux de magnitude correspondent au bruit d'allocation, mais c'est la grandeur de bruits maximum. Il s'agit de celle que nous utilisons, pour la réussite des projets scientifiques, il ne faut pas avoir un niveau de bruit supérieur. Dans le bilan de bruit LISA, le bruit d'amplitude de niveau de magnitude peut être décomposé en effets physiques. l'idée de cette section est d'introduire directement dans le budget d'erreur de LISA lesdites corrélations, là où l'effet de la corrélation est censé avoir un effet. Ainsi, nous choisissons d'introduire directement les corrélations comme un nouvel effet physique, et de produire une nouvelle estimation du bruit LISA. Pour cela, nous devons implémenter complètement le budget d'erreur de LISA.

Les corrélations entre le bruit d'accélération des masses-test de LPF et les autres canaux étudiés doivent donc s'ajouter au budget de bruit de LISA au niveau du bruit d'accélération de la masse-test (TM). La figure 5.52 est la densité spectrale d'amplitude des sources de bruit d'accélération résiduelle. Il s'agit de la variation spectrale de l'allocation totale (voir l'équation 5.28). Le bilan du bruit d'accélération S_g est subdivisé en différentes contributions, l'accélération brownienne des TM provenant de l'amortissement des gaz résiduels (ligne noire), le bruit de la force d'actionnement (ligne en pointillé bleu), les forces électrostatiques parasites (ligne rose), les forces magnétiques (ligne cyan), les forces de fluctuation de température (ligne marron), le couplage de rigidité dû aux mouvements du satellite (S/C), le bruit du MOSA (Moving Optical Sub-Assembly) (ligne orange), les fluctuations gravitationnelles (ligne bleu foncé) et le bruit de pression du rayonnement laser (ligne verte). Chaque groupement de bruit du même sont ajoutés comme la somme quadratique des effets physiques. Par exemple, les corrélations de la masse d'essai LPF affectera le couplage de rigidité du satellite (S/C) et du MOSA. La figure 5.53 est la densité spectrale d'amplitude du bruit d'accélération de la force de couplage TM-S/C et du MOSA, la fluctuation de la température, le champ magnétique et la correction de l'orbite avec le μ -propulseur sur LPF aura le même effet sur les satellites dans LISA. La rigidité de l'axe x est la quantité affectée par les corrélations de LPF. À basses fréquences, le *CBE* devient plus grand par rapport à l'allocation, à hautes fréquences, l'écart est inférieur à l'allocation. Pour une mesure du SGWB, cet écart à basses fréquences sera un problème. Il s'agit d'une étude que nous avons réalisée plus loin dans ce document. Sur la figure 5.54, nous avons la preuve de l'écart aux basses fréquences sur la sensibilité de

LISA entre sans et avec corrélations LPF. Les corrélations LPF ont un effet sur le bruit de LISA aux basses fréquences. Nous devons étudier cette lacune dans le contexte de nos mesures cosmologiques.

$$S_g < \left[2.4 \text{ fm}\cdot\text{s}^2\text{Hz}^{-1/2} \right]^2 \left(1 + \left(\frac{0.4 \text{ mHz}}{f} \right)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{f}{8 \text{ mHz}} \right)^4 \right) \quad (5.28)$$

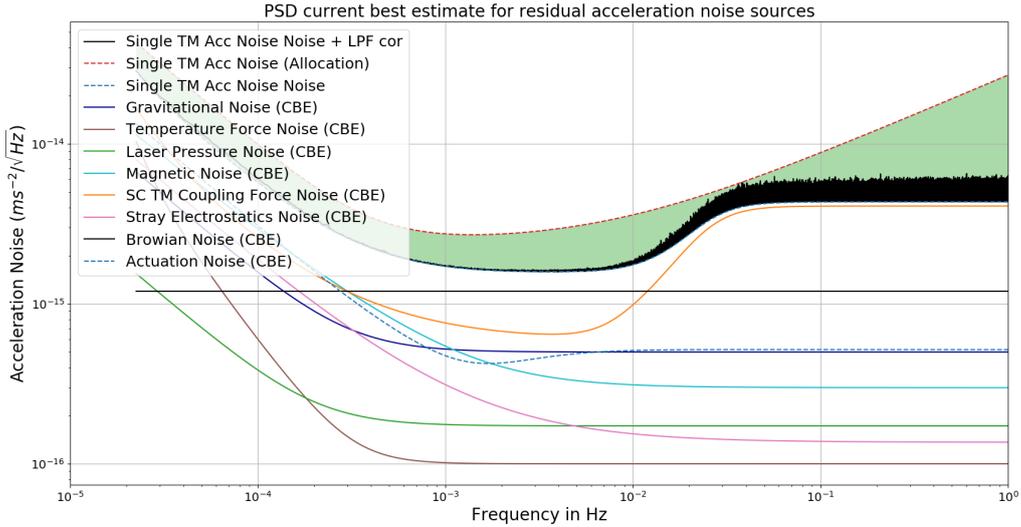


FIGURE 5.52 – PSD du bruit d'accélération résiduelle des forces de couplage TM-SC/MOSA et introduction des corrélations LPF dans le budget d'erreur sur les canaux CBE (ligne noire).

Dans le modèle de performance de LISA, avec pour les *CBE* comme pour les *allocations*, il n'y a pas d'estimation de bruits corrélés. Il est supposé pour le moment qu'il n'y a aucune corrélation entre les différents canaux de LISA pour estimer le bruit LISA. Il s'agit de l'état de connaissance actuel, mais des études sur le sujet devraient arriver prochainement. Nous ajoutons le bruit corrélé de LPF dans le bilan de bruit LISA, mais avec cette méthode, nous supposons que les corrélations ne sont pas anti-corrélée. Pour avoir une meilleure idée du bruit des corrélations de LPF, nous devons calculer le bruit à partir du calcul de TDI. C'est-à-dire en ajoutant le bruit des corrélations directement, dans le calcul des série-temporelles du bruit de LISA.

5.11.3 Corrélations de LPF dans l'Interférométrie à retardement *Time Delay Interferometry (TDI)*

La constellation LISA de trois engins spatiaux sera placée sur une orbite héliocentrique et formeront un triangle équilatéral de 2.5 millions de kilomètres de longueur de bras. La distance de chaque satellite à un autre sera mesurée par des faisceaux laser. l'orbite de la

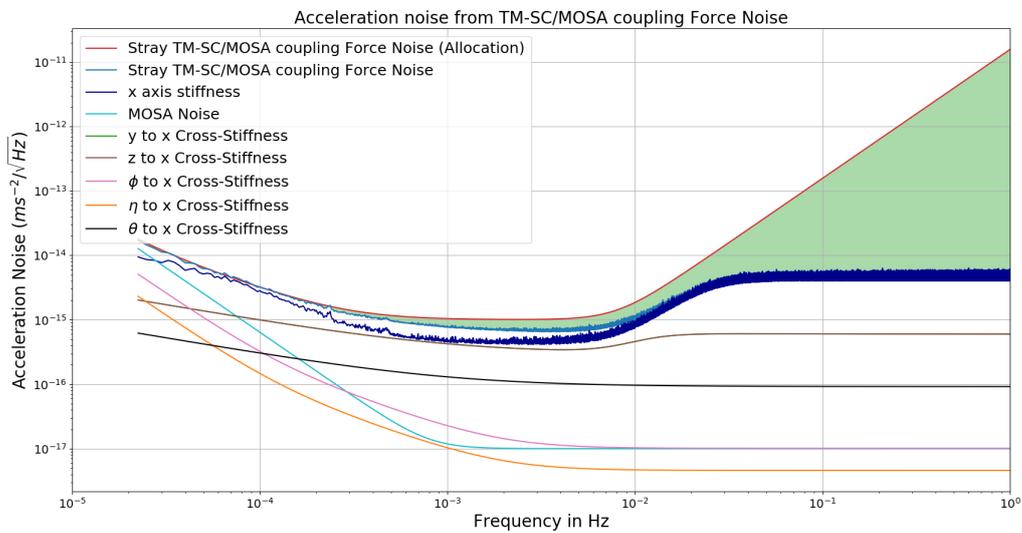


FIGURE 5.53 – Bruit d'accélération produit par le bruit de force de couplage TM-SC/MOSA et introduction de corrélations LPF dans le budget d'erreur sur les canaux CBE (ligne noire).

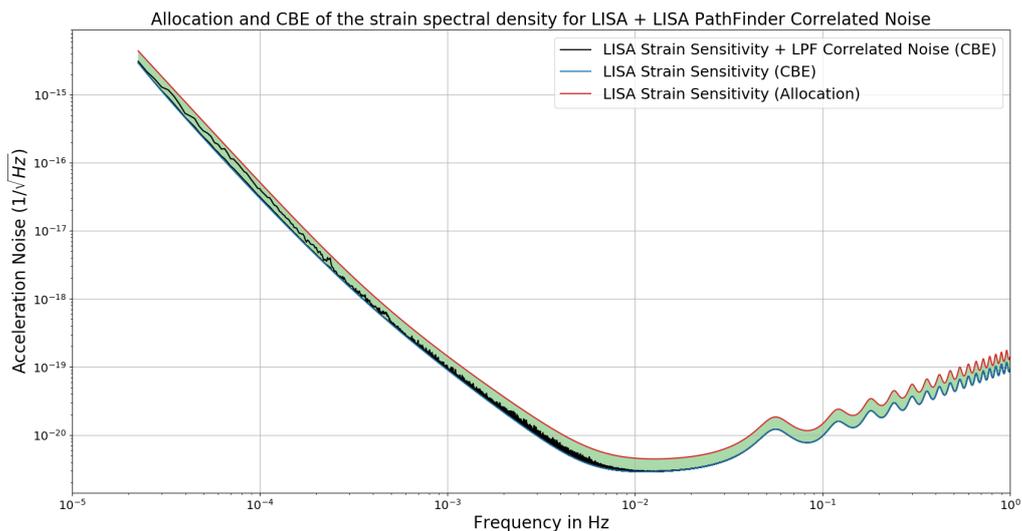


FIGURE 5.54 – Sensibilité de la *strain* de LISA et introduction des corrélations LPF dans le budget d'erreur sur les canaux CBE (ligne noire).

constellation forme un angle de retard de 20° par rapport à celle de la Terre. De même que LISA effectue une orbite de période un an, pendant ce temps, il effectue également une révolution sur lui-même. Pour cette étude, nous utilisons la version TDI du Mock LISA Data Challenge (MLDC) [37]. Dans chaque satellite de la constellation LISA, il y a deux MOSA, une fibre optique établit le seul lien optique entre les deux MOSA ; chaque engin spatial est en communication avec un bras long de LISA avec un autre satellite. Nous avons donc trois bras longs et 6 MOSA, en conclusion, nous avons six niveaux de bruit de position et six magnitudes d'accélération (voir figure 5.55). Dans chaque MOSA, nous supposons que le bruit de position est un bruit gaussien à moyenne nul avec une densité spectrale de $Sp(f) = 3.6 \times 10^{-41} \text{ Hz}^{-1}$; et le bruit d'accélération comme $S_a(f) = \frac{1.44 \times 10^{-48} \text{ s}^{-4} \text{ Hz}^{-1}}{(2 \pi f)^4} \left(1 + \left(\frac{0.4 \text{ mHz}}{f} \right)^2 \right)$. Dans cette section, nous supposons que nous avons la même amplitude de bruit d'amplitude pour chaque MOSA. Dans une autre étude, nous introduisons un bruit d'amplitude différente et étudions les écarts de bruit dans les canaux A , E et T . Nous supposons également la configuration LISA à bras égaux.

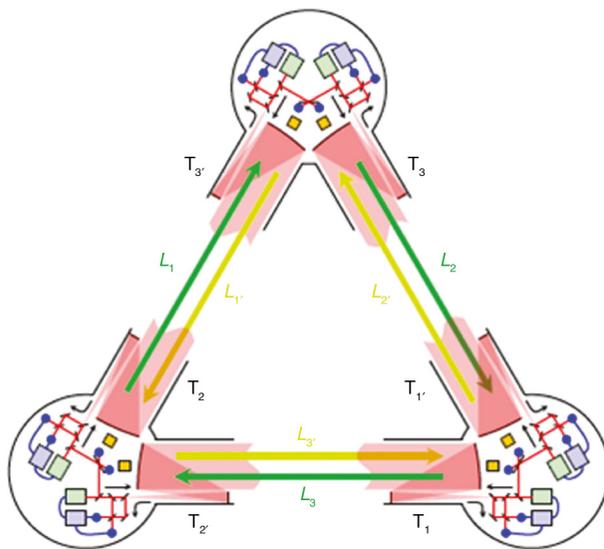


FIGURE 5.55 – Constellation LISA avec les 3 satellites, 6 MOSA et 6 liaisons laser [216]

Si l'on considère $n_{ij}^p(t)$ et $n_{ij}^a(t)$, les séries temporelles respectives du bruit de position et d'accélération de la liaison reliant les engins spatiaux i et j , dans le sens i vers j (Bruit gaussien suivant la distribution de la densité spectrale de puissance du bruit de LISA voir le *LISA Noise Budget* [166]). On peut construire les canaux Doppler pour chaque bras ij et ji :

$$h_{ij}(t) = n_{ij}^p(t) - n_{ij}^a(t) + n_{ji}^a(t - L) \quad (5.29)$$

$$h_{ji}(t) = n_{ji}^p(t) + n_{ji}^a(t) - n_{ij}^a(t - L) \quad (5.30)$$

On peut former des canaux de Michelson :

$$h_i(t) = h_{ij}(t - L) - h_{ji}(t) + h_{ik}(t - L) - h_{ki}(t) \quad (5.31)$$

Avec les canaux de Michelson, nous pouvons former les canaux TDI X, Y, Z en soustrayant un signal de Michelson retardé de L (avec $c = 1$) avec un non-retardé.

$$U(t) = h_i(t) - h_i(t - L) \quad (5.32)$$

avec $U = X, Y, Z$.

Nous avons donc finalement les canaux TDI X, Y, Z , avec lesquels nous pouvons former les canaux A, E, T :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z - X), E = \frac{1}{\sqrt{6}}(X - 2Y + Z), T = \frac{1}{\sqrt{3}}(X + Y + Z) \quad (5.33)$$

Les figures 5.57 et 5.56 sont respectivement les séries temporelles et les périodogrammes du résultat du calcul du TDI sans l'ajout de la corrélation LPF. La figure 5.56 laisse penser dans un premier temps qu'il y a une bonne implémentation de notre TDI, de plus, on note une bonne concordance du modèle PSD analytique de Smith & Caldwell [222] et des périodogrammes du TDI.

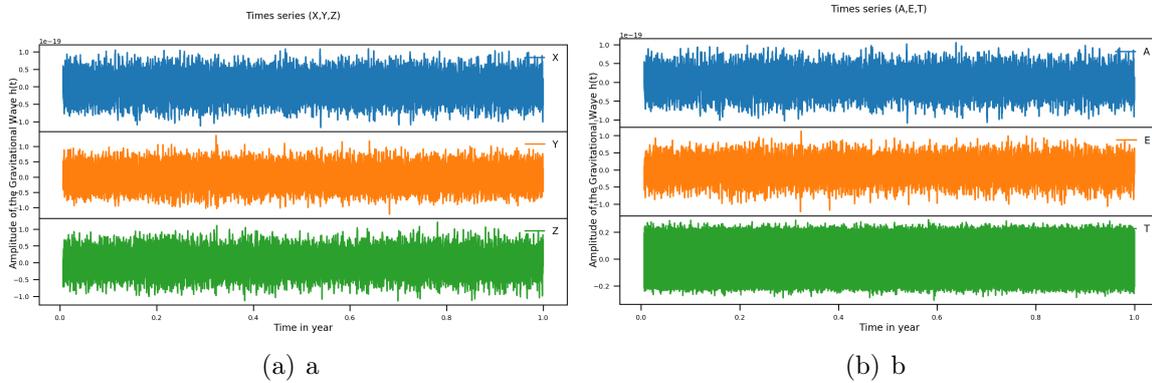


FIGURE 5.56 – Canaux de séries temporelles XYZ (5.56(a)) et AET (5.56(b)) sans corrélation LPF

Les figures 5.59 et 5.58 sont respectivement les séries temporelles et les périodogrammes du résultat du calcul du TDI avec l'ajout des corrélations de LPF aux niveaux observé avec nos études précédentes des données de LPF. On ajoute les corrélations comme une modification du niveau de bruit d'amplitude d'accélération (voir 5.27). Sur la figure 5.56, on distingue un écart aux basses fréquences du périodogramme. C'est l'endroit où la mesure des ondes gravitationnelles stochastiques est effectuée. Il doit donc avoir un effet des bruits corrélés de LPF sur la mesure du fond stochastique.

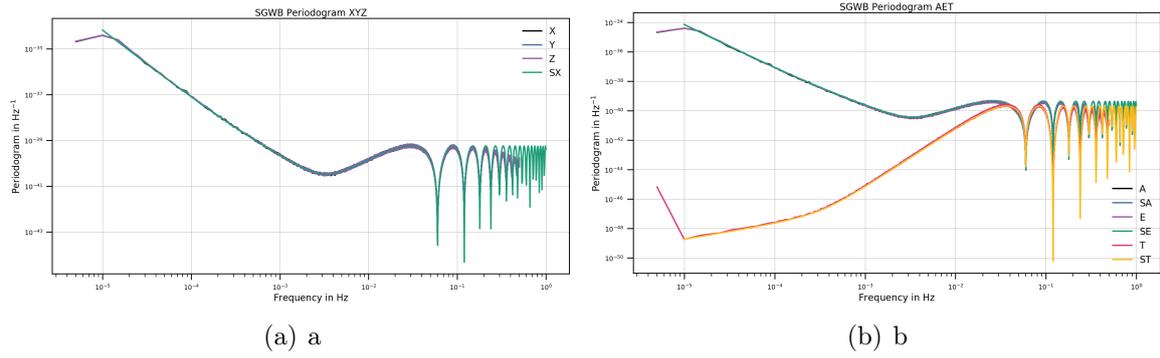


FIGURE 5.57 – Périodogrammes des canaux XYZ (5.57(a)) et AET (5.57(b)) sans corrélation LPF et PSD de Smith & Caldwell [222] des canaux XYZ et AET . Il y a un très bon chevauchement entre le budget de bruit du modèle de Smith & Caldwell (2019) (tracés du périodogramme) et les périodogrammes des canaux XYZ et AET de notre implémentation du TDI

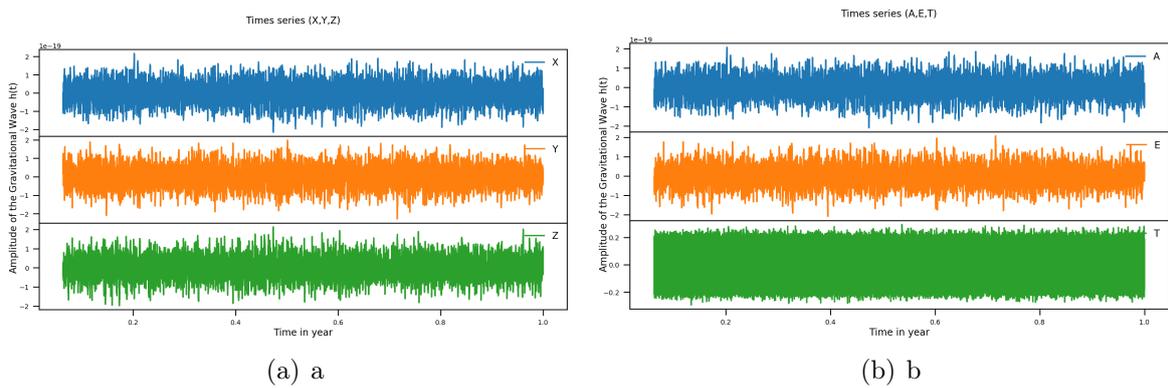


FIGURE 5.58 – Canaux des séries temporelles XYZ (5.56(a)) et AET (5.56(b)) avec les corrélations de LPF

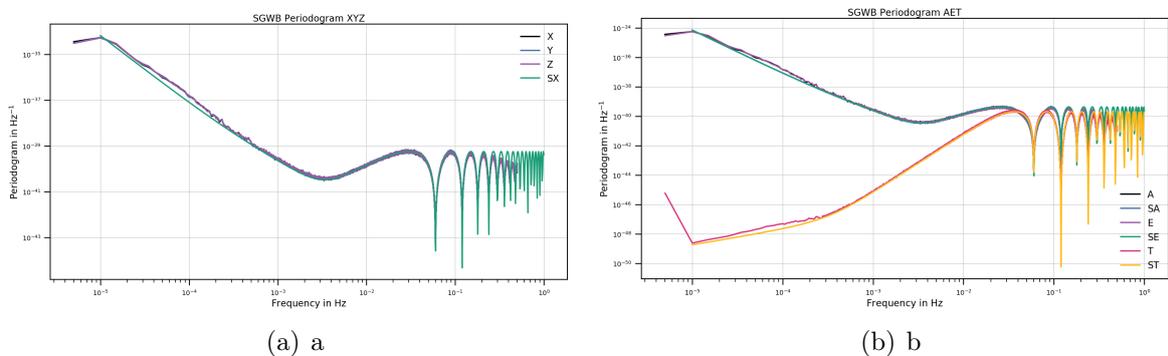


FIGURE 5.59 – Périodogrammes des canaux XYZ (5.57(a)) et AET (5.57(b)) avec les corrélations de LPF et le modèle de bruit de LISA de Smith & Caldwell [222] des canaux XYZ et AET

5.11.4 Séparation spectrale du SGWB dans le contexte de l'ajout des corrélations de LPF

Comme c'est décrit dans [51], nous avons reproduit la même étude que dans la section 3.1, mais dans deux contextes (avec et sans corrélations de LPF), pour voir l'effet des corrélations de LPF sur la mesure du fond cosmologique. Nous utilisons pour estimer la séparation spectrale l'erreur du paramètre que nous estimons, dans notre cas, il s'agit de l'amplitude du fond cosmologique. Pour cela, nous calculons l'incertitude que nous avons définie comme le rapport entre l'erreur de la valeur mesurée et la valeur mesurée. Pour une incertitude issue d'un A-MCMC, on prend pour chaque paramètre l'écart-type de la distribution postérieure ; nous le produisons en calculant la distribution de chaque chaîne issue de la convergence du MCMC. Il est également possible d'estimer cette incertitude avec l'information de Fisher. En effet, nous utilisons pour chaque paramètre d'entrée l'erreur donnée par la racine carrée de la diagonale de la matrice de covariance. Ainsi, en faisant varier un paramètre que l'on cherche à étudier, on a une estimation de l'incertitude de mesure en fonction de la valeur du paramètre étudié. Il est alors possible de comparer les deux estimations d'incertitude. Un bon chevauchement des deux études est le signe que les études sont consistantes.

Nous présentons le but de notre étude, à savoir la capacité pour LISA de mesurer un fond cosmologique en présence d'autres signaux stochastiques et bruits corrélés d'accélération du système de masses-test. Nous avons, à partir de notre étude précédente [51], présenté la preuve de la séparabilité des fonds cosmologique et astrophysique avec une précision autour de $\Omega_{GW,Cosmo} \approx 1 \times 10^{-12}$ à 1×10^{-13} .

Nous calculons l'incertitude de mesure de la magnitude du fond cosmologique pour des densités d'énergie cosmologique normalisées entre 1×10^{-14} et 1×10^{-8} . Nous fixons la limite de détectabilité lorsqu'il y a moins de 50% d'incertitude sur la densité d'énergie cosmologique normalisée du SGWB produit cosmologiquement.

Nous menons également une étude bayésienne, en effet, nous utilisons un algorithme d'A-MCMC pour estimer les paramètres de notre modèle : il s'agit des deux grandeurs du bruit de LISA ; les deux paramètres du fond cosmologique, l'amplitude et la pente associée ; le fond astrophysique, de même nous ajustons l'amplitude et la pente. Au total, nous ajustons six paramètres sur les deux périodogrammes des canaux A et E , et simultanément les deux paramètres de bruit du canal T . Nous présumons que l'effet des corrélations LPF sera une augmentation de l'amplitude du bruit d'accélération de LISA. Nous utilisons le fond astrophysique de Chen *et. al* [68]. Nous ajustons le niveau du fond cosmologique pour déterminer sa détectabilité. Ainsi, nous pouvons produire des estimations paramétriques de l'A-MCMC pour des densités d'énergie normalisées cosmologiques entre 1×10^{-14} et 1×10^{-8} . Les corrélations de LPF sont donc ajoutées dans LISA comme un bruit corrélé à l'ensemble des MOSA de la constellation LISA.

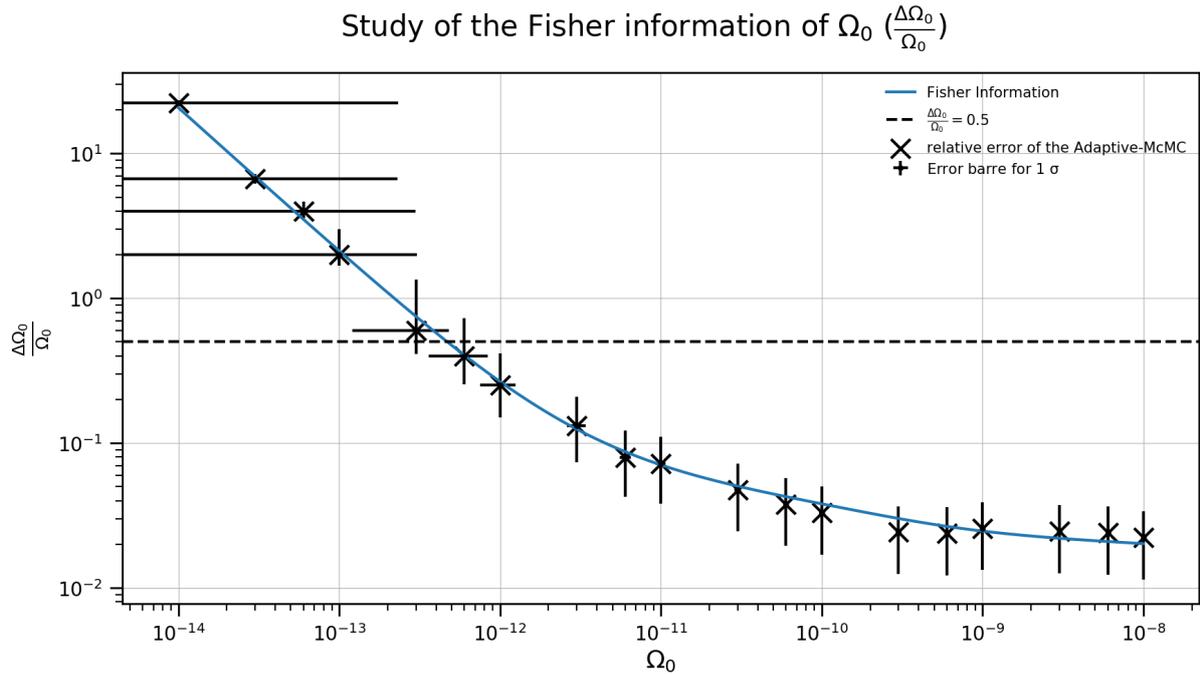


FIGURE 5.60 – Estimation de l’incertitude de l’amplitude cosmologique, avec l’étude de l’information de Fisher en bleu et l’A-MCMC représenté par les croix noires. La ligne horizontale en tirets supérieure représente le niveau d’erreur à 50% (critère de limitation).

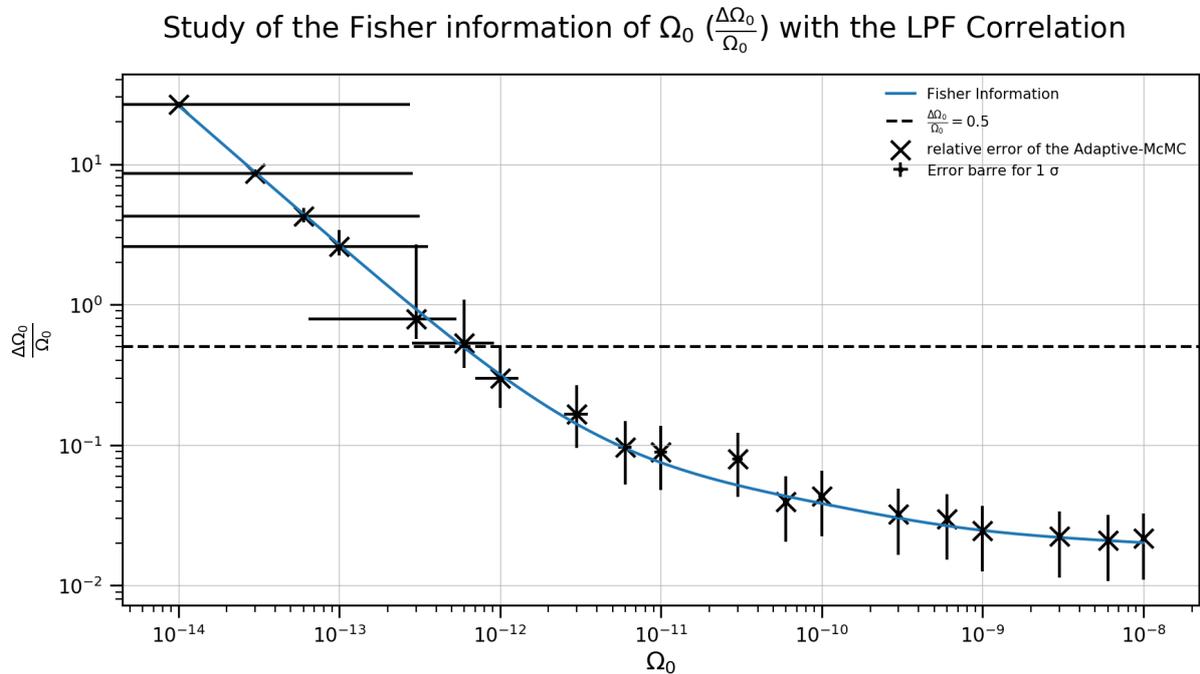


FIGURE 5.61 – Estimation de l’incertitude de l’amplitude cosmologique dans le cas de l’ajout des corrélations de LPF, avec l’étude d’information de Fisher en bleu et l’A-MCMC représenté par les croix noires. La ligne horizontale en tirets supérieure représente le niveau d’erreur à 50% (critère de limitation).

Les figures 5.60 et 5.11.4 sont respectivement l'estimation de l'incertitude de l'amplitude cosmologique de l'étude de l'information de Fisher en ligne bleue et de l'étude de la distribution des chaînes de l'étude de l'A-MCMC représentée par le nuage de points noirs avec et sans corrélation LPF. Les résultats sont dans le tableau 5.5. Les corrélations de LPF introduisent une petite perte de performance de la mesure du SGWB avec notre méthode de séparation spectrale.

	Ω_{Cosmo}
Limite avec LPF	6.0×10^{-13}
Limite sans LPF	4.7×10^{-13}

TABLE 5.5 – Limitation de la mesure de l'amplitude cosmologique SGWB avec et sans corrélations de LPF

5.12 Modification du bruit de LISA

Dans cette section, nous nous intéressons à comprendre les limites de notre algorithme de mesure en termes de modifications et de complexification du bruit de LISA.

5.12.1 Augmentation du niveau du bruit du chemin optique de LISA

Nous avons comme dans le cas de l'ajout du bruit des corrélations de LPF, augmenté le bruit du chemin optique de LISA est analysé le résultat de la mesure du fond stochastique avec notre méthode lié aux études de Fisher et de MCMC. Pour modifier le TDI, nous avons donc ajouté un terme supplémentaire lié à n_{ij}^p . Nous avons présumé que cette augmentation est liée à une augmentation globale du bruit optique pour cela, nous avons donc ajouté ce nouveau bruit sur tous les bras considéré. Afin, d'ajouter un bruit avec un sens physique, nous avons choisi d'introduire un terme lié au bruit de lumière diffusée, nous utilisons le document de travail de LISA décrit par Hubert Halloin [119]. Dans ce document, une étude de l'impact de la lumière parasite sur la stabilité de la phase de la mesure hétérodyne. Nous nous sommes focalisées sur l'aspect des applications numériques pour LISA issues du développement mathématique. Les champs électriques entrant dans les photo-diodes peuvent être représentés avec des nombres complexes, voir figure 5.62.

La lumière parasite a pour effet de modifier la phase du champ électrique, ce qui peut être interprété comme une modification de la phase de l'oscillateur local tel que $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0 + \vec{\delta}\alpha$, avec $\vec{\alpha}_0$ l'oscillateur local et $\vec{\delta}\alpha$ la perturbation provenant de la lumière parasite. Nous pouvons faire un développement limité de $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ en $\epsilon_\alpha = \frac{\|\vec{\delta}\alpha\|}{\|\vec{\alpha}_0\|}$. Nous pouvons

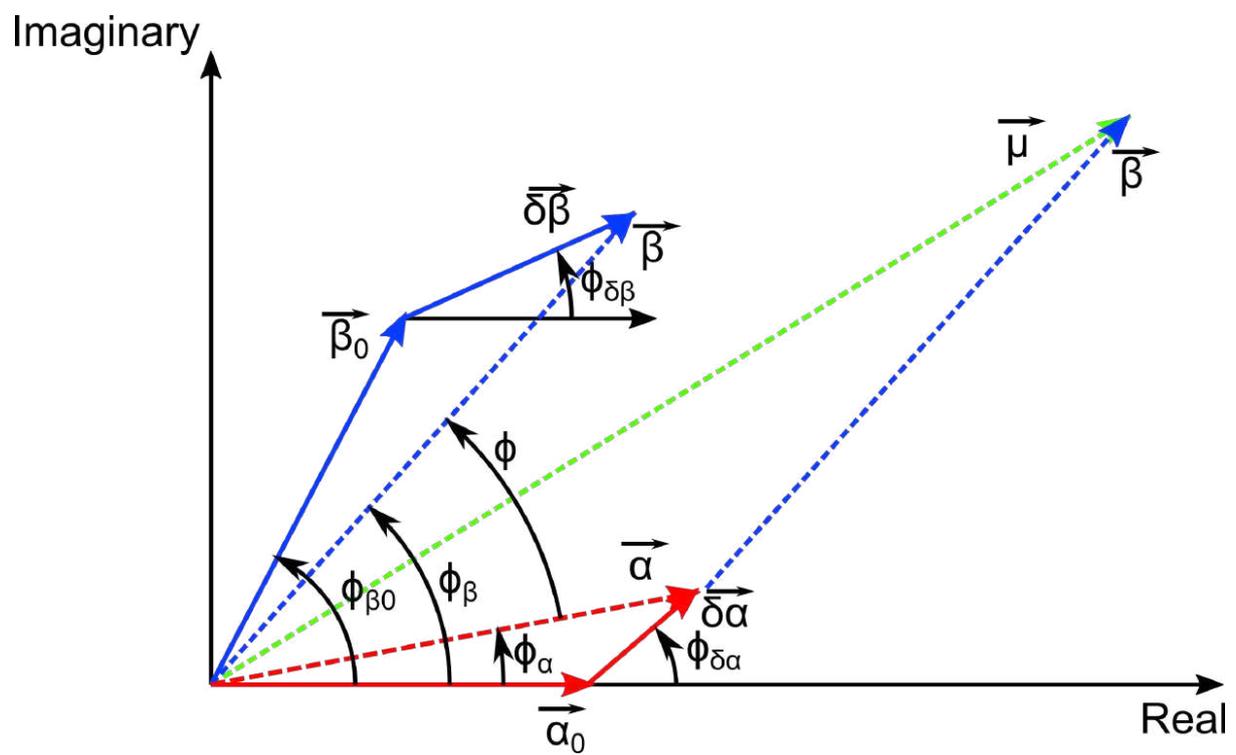


FIGURE 5.62 – Schéma extrait du document de travail [119] du champ électrique utilisé pour les mesures interférométriques. Ceux-ci sont en présence de lumière parasite, dont d'action est de créer un décalage de fréquence.

ainsi montrer que la phase de l'erreur induit par la lumière parasite est donc :

$$\phi_\alpha = \epsilon_\alpha \sin \phi_{\delta\alpha} - \frac{\epsilon_\alpha^2}{2} \sin 2\phi_{\delta\alpha} + \mathcal{O}(\epsilon_\alpha^3) \quad (5.34)$$

Pour LISA, nous avons fixé une limite à un cycle ($\sim 6 \times 10^{-6}$ rad), ce qui limite la puissance acceptable de la lumière parasite à $\sim 10^{-5}$ et donc $\epsilon_\alpha \sim 3.5 \times 10^{-3}$. Il est possible de faire de même avec l'interféromètre décrit par $\vec{\beta}$, tel que $\vec{\beta} = \vec{\beta}_0 + \alpha\vec{\beta}$, nous pouvons aussi faire un développement limité de $\frac{\beta}{\eta\alpha_0}$ (où $\eta = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$) en $\epsilon_\beta = \frac{\|\delta\vec{\beta}\|}{\|\vec{\beta}_0\|}$. Et, ainsi nous avons pour cet interféromètre la phase de l'erreur induite par la lumière parasite donnée par

$$\phi_\beta = \phi_{\beta_0} \epsilon_\beta \sin(\phi_{\delta\beta} - \phi_{\beta_0}) - \frac{\epsilon_\beta^2}{2} \sin 2(\phi_{\delta\beta} - \phi_{\beta_0}) + \mathcal{O}(\epsilon_\beta^3) \quad (5.35)$$

Donc nous pouvons introduire la phase mesurée qui est donnée par $\phi = \phi_\beta - \phi_\alpha$, tel que le signal reçu et mesuré par la photo-diode est $I_{DC} \propto \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^2$ et $I_{AC} = 2\frac{\alpha\beta}{\alpha_0^2} \cos \phi = A \cos \Phi$, où $A = 2\frac{\alpha\beta}{\alpha_0^2}$ et

$$\Phi = \phi_{\beta_0} + \epsilon_\beta \sin 2(\phi_{\delta\beta} - \phi_{\beta_0}) - \epsilon_\alpha \sin \phi_{\delta\alpha} - \frac{\epsilon_\beta^2}{2} \sin 2(\phi_{\delta\beta} - \phi_{\beta_0}) + \frac{\epsilon_\alpha^2}{2} \sin 2\phi_{\delta\alpha} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (5.36)$$

Si nous considérons la phase hétérodyne, entre les deux faisceaux laser, la lumière parasite produit un déphasage, il peut être modélisé au premier ordre comme $\Phi = \epsilon \sin \phi$, avec ϵ l'amplitude de la lumière parasite telle que $\epsilon = \epsilon_\alpha = \epsilon_\beta$, et ϕ la phase cohérente correspondante. Nous considérons que la contribution de la lumière parasite cohérente produit un bruit de phase de l'interféromètre du long bras. Celui-ci est produit par la lumière diffusée (surface des miroirs pas parfaitement plats ou dégradés par les micro-météorites [141]) ou les faisceaux fantôme. Ainsi, dans le cas de l'interféromètre du long bras, nous avons $\epsilon_\beta = 0$, $\eta = 1.65 \times 10^{-5}$, $\phi_{\delta\alpha} = 2\pi \frac{\Delta x_0 + 2(x_{Tel,0} + \delta x_{Tel,0})}{\lambda}$, avec la différence de chemin optique entre les deux bras de l'interféromètre. λ est la longueur d'onde du laser qui est de 1064 nm. $\Delta x = \Delta x_2 - \Delta x_1$, x_{tel} la distance entre la lame séparatrice et le signal reçu (RX) et le signal transmit (TX) de la surface diffusante et δx la fluctuation de chemin optique produit par le bruit. $\phi_{\beta_0} = 2\pi \frac{\delta x_{SC} + \Delta x_{SC/SC} + \delta x_{GW}}{\lambda}$ est donnée en fonction par les fluctuations de séparation des satellites $\Delta x_{SC/SC}$, δx_{SC} est le mouvement propre du satellite et δx_{GW} le signal gravitationnel.

Nous avons donc le changement de phase de l'interféromètre provenant de la lumière parasite qui est donné au premier d'ordre suivant ϵ_α par :

$$\Phi = \phi_{\beta_0} - \epsilon_\alpha \sin 2\pi \frac{\Delta x_0 + 2(x_{Tel,0} + \delta x_{Tel,0})}{\lambda} \quad (5.37)$$

En passant dans le domaine de Fourier, nous pouvons établir que la PSD de l'erreur de phase par la lumière parasite venant du télescope est donnée par

$$S_{\Phi, Tel} \leq 4\epsilon_{\alpha}^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 S_{x, tel} \quad (5.38)$$

avec

$$S_{\Phi, Tel} \leq \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \frac{S_{\Phi, max}}{4\epsilon_{\alpha}^2} \quad (5.39)$$

avec $S_{\Phi, max} = 4 \left[1 + \left(\frac{2 \text{ mHz}}{f} \right)^4 \right] \text{ pm}^2 \text{ Hz}^{-1}$. Nous prendrons le cas limite comme perturbation entrante dans notre simulation de série temporelle des canaux de LISA par la méthode du TDI.

Les figures 5.64 et 5.63 sont respectivement les séries temporelles et les périodogrammes du résultat du calcul du TDI sans l'ajout de la lumière parasite. Avec la figure 5.63 nous notons une bonne concordance du modèle PSD analytique de Smith & Caldwell [222] et des périodogrammes du TDI. Nous observons également un gap de puissance à hautes fréquences. Ainsi, nous pouvons montrer avec une analyse de MCMC que l'ajout de ce bruit peut être mesuré comme une augmentation du paramètre N_{pos} .

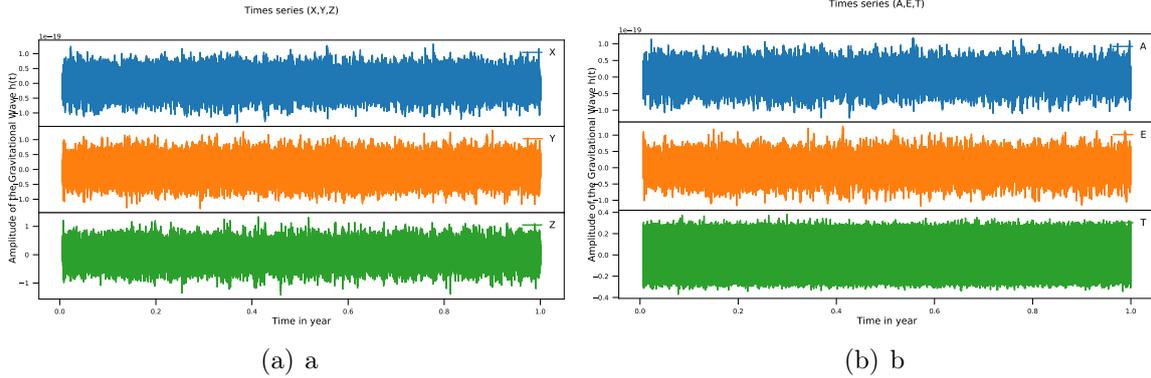


FIGURE 5.63 – Canaux de séries temporelles XYZ (5.63(a)) et AET (5.63(b)) avec le bruit de lumière parasite

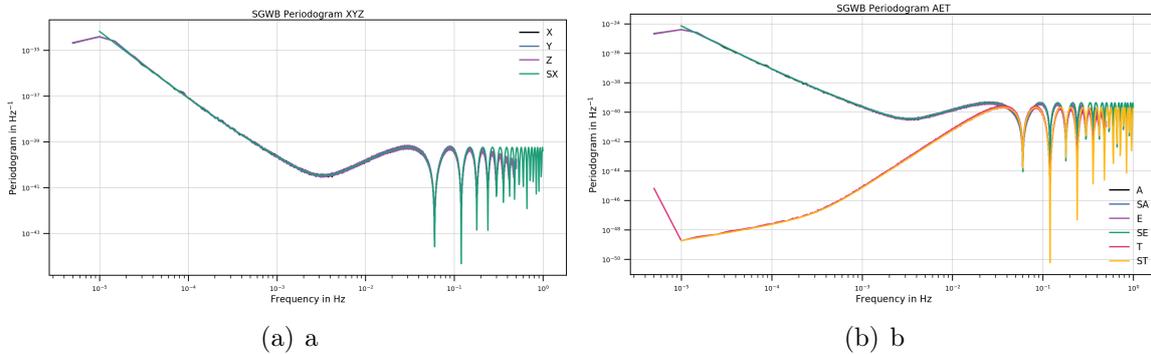


FIGURE 5.64 – Périodogrammes des canaux XYZ (5.64(a)) et AET (5.64(b)) avec la lumière parasite et PSD de Smith & Caldwell [222] des canaux XYZ et AET .

La mesure du bruit de LISA est donnée par un ajustement avec un A-MCMC à deux paramètres N_{acc} et N_{pos} sur le périodogramme des trois canaux *AET*.

Les figures 5.65 et 5.66 sont le résultat du calcul de l'ajustement du modèle de LISA de [222] dans le contexte d'un ajout de lumière parasite. Nous montrons que cet ajout peut-être mesuré comme une augmentation du bruit de position. En effet, nous constatons (voir table 5.6) une augmentation d'un facteur 2.92 du niveau de bruit. Ceci est obtenu en utilisant le cas limite de la lumière parasite (voir équation 5.38).

	N_{acc} ($s^{-4} \cdot Hz^{-1}$)	N_{pos} (Hz^{-1})
Sans ajout de lumière parasite	1.44×10^{-48}	3.6×10^{-41}
Avec ajout de lumière parasite	1.44×10^{-48}	1.05×10^{-40}

TABLE 5.6 – Résultat des calculs avec et sans l'ajout de lumière parasite dans le modèle de bruit de LISA [222]

De plus, il est localisé à hautes fréquences, ainsi nous montrons qu'il ne gêne pas la mesure du fond stochastique. Il est potentiellement source d'un moins bon ajustement des paramètres d'un signal localisé à plus hautes fréquences. Ainsi, nous pouvons conclure que la lumière diffusée, en état de nos connaissances, ne devrait pas être un problème pour la mesure du fond stochastique avec notre méthode.

5.12.2 Modification du niveau de bruit indépendante des MOSA

Nous nous proposons d'étudier le cas où chaque MOSA à un niveau de bruit indépendant et différent. Ainsi, nous considérons que chaque MOSA peut est modélisé par deux paramètres $N_{acc,ij}$ et $N_{pos,ij}$. Pour cela, nous calculons les série-temporelles *XYZ* avec des valeurs différentes d'amplitude du bruit. Les figures 5.67 et 5.68 regroupe les différentes configurations calculées. Pour chacune des configurations, nous réalisons un ajustement avec notre algorithme d'A-MCMC. Nous avons remarqué que l'effet d'une modification d'un ou plusieurs MOSA modifie l'amplitude des bruits d'accélération et de position des canaux *AET*. Nous utilisons dans ce cas-ci le canal *T* comme canal de référence, c'est sur ce canal que nous ajustons donc les paramètres N_{acc} et N_{pos} , mais également le paramètre f_1 qui est la fréquence de référence du bruit de LISA. Il s'agit de la fréquence pour laquelle il y a un basculement d'importance du bruit de LISA. Autrement dit pour $f > f_1$ le bruit du chemin optique est dominant. Nous introduisons quatre nouveaux paramètres pour modéliser le bruit de LISA dans notre cas de bruits de MOSA indépendants. Il s'agit d'un coefficient par type de bruit pour les deux canaux *A* et *E* tel que le nouveau modèle de bruit est :

$$\begin{cases} N_{1,I}(f) = \left(4S_{s,I}(f) + 8 \left(1 + \cos^2 \left(\frac{f}{f_*} \right) \right) S_{a,I}(f) \right) |W(f)|^2 \\ N_{2,I}(f) = - \left(2S_{s,I}(f) + 8S_{a,I}(f) \right) \cos \left(\frac{f}{f_*} \right) |W(f)|^2 \end{cases} \quad (5.40)$$

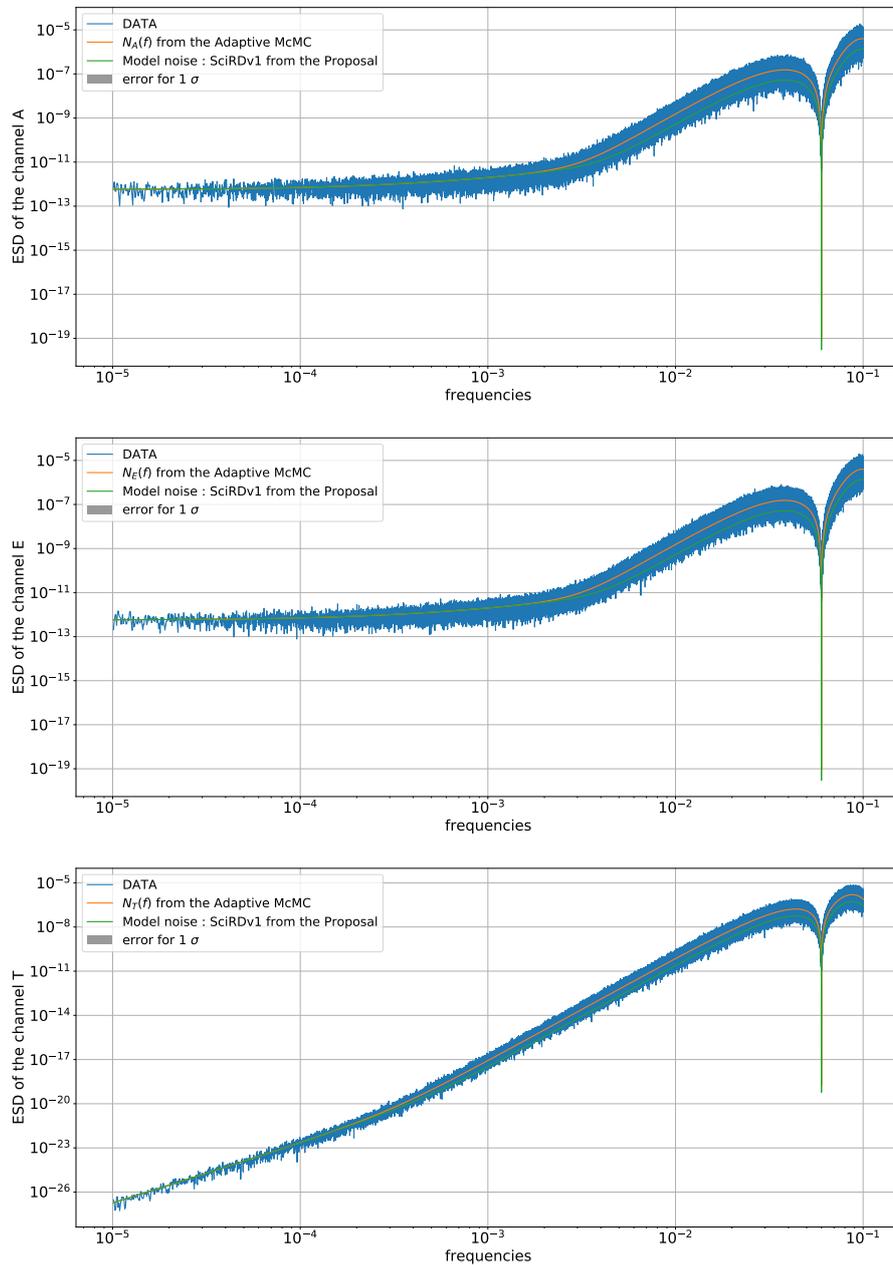


FIGURE 5.65 – Densité spectrale d'énergie des canaux AET avec la lumière parasite, avec le résultat de l'A-MCMC en orange

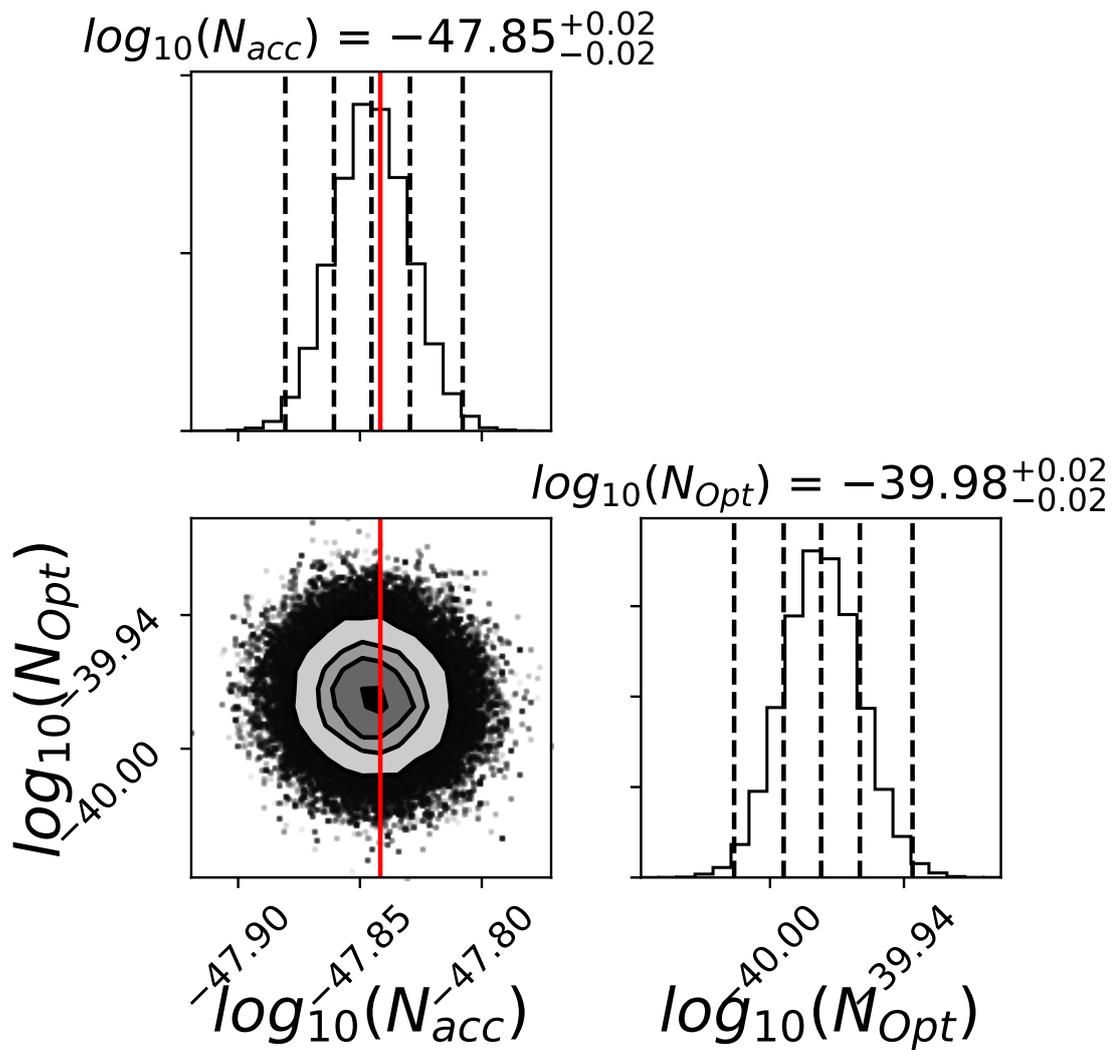


FIGURE 5.66 – Diagramme en coins du résultat de l’A-MCMC dans le cas de l’ajout de lumière parasite. Le tracé rouge correspond à la valeur du bruit de LISA.

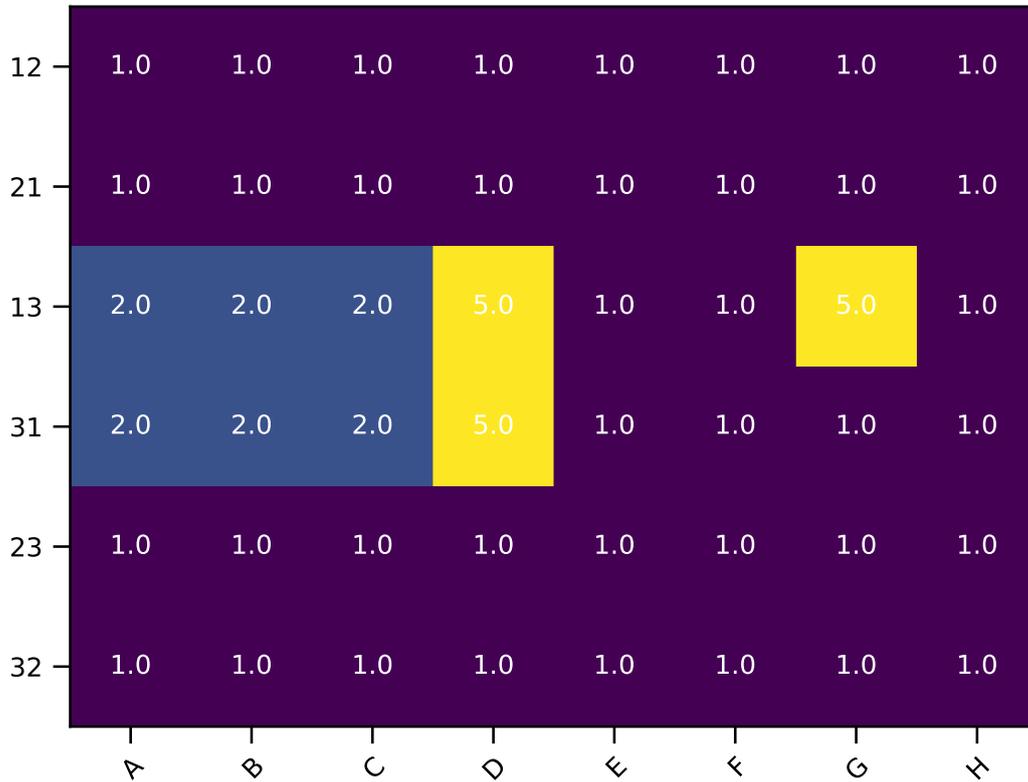


FIGURE 5.67 – Niveau de bruit d’entrée du paramètre d’accélération pour chaque MOSA pour les différents cas considéré, les paramètres sont donnés comme normalisée par N_{acc} . Les cas rangés en ordre alphabétique entre A et H correspondent à des études indépendantes d’injection de bruit différent. Ainsi pour lire cette matrice, nous choisissons une expérience lettre entre A et H. Sur l’axe des ordonnées, nous avons les six MOSA i, j avec $i, j \in [1, 3]$, nous les nommons en fonction du sens du long bras considéré. Par exemple, le MOSA 1, 2 correspond au MOSA sans le satellite 2 qui reçoit le signal laser du satellite 1. Après avoir choisi une expérience et un MOSA, nous pouvons connaître la valeur du coefficient d’amplification du bruit N_{acc} pour le MOSA choisi.

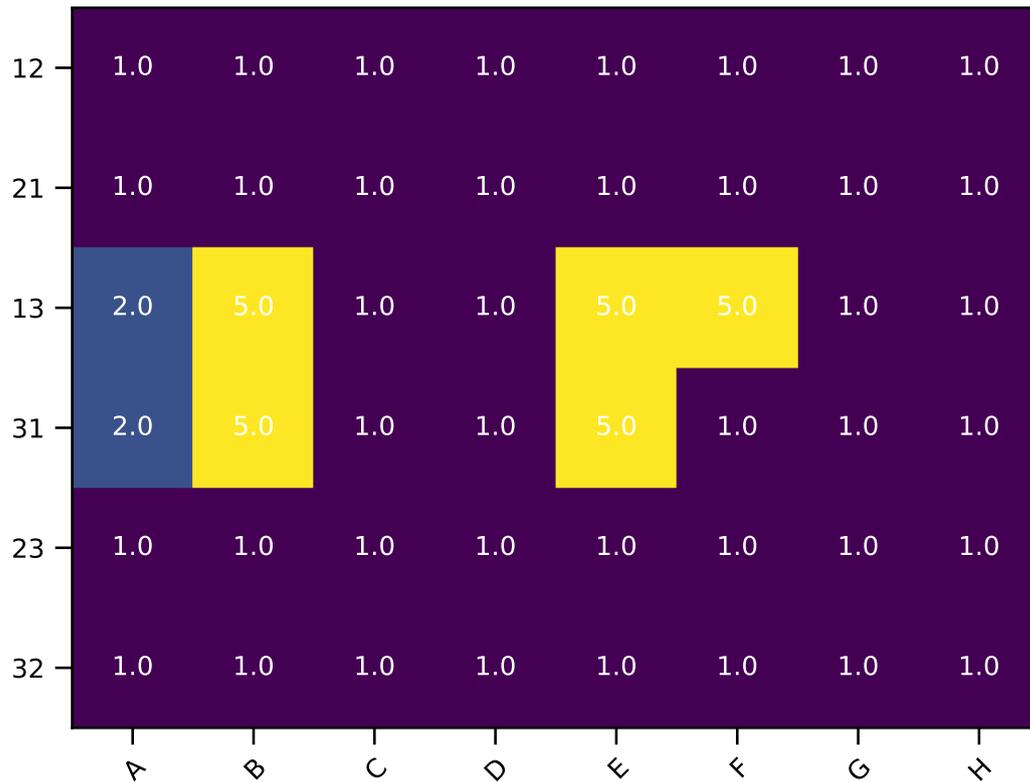


FIGURE 5.68 – Niveau de bruit d’entrée du paramètre du chemin optique pour chaque MOSA pour les différents cas considéré, les paramètres sont donnés comme normalisée par N_{pos} . Ainsi pour lire cette matrice, nous choisissons une expérience lettre entre A et H. Sur l’axe des ordonnées, nous avons les six MOSA i, j avec $i, j \in [1, 3]$, nous les nommons en fonction du sens du long bras considéré. Par exemple, le MOSA 1, 2 correspond au MOSA sans le satellite 2 qui reçoit le signal laser du satellite 1. Après avoir choisi une expérience et un MOSA, nous pouvons connaître la valeur du coefficient d’amplification du bruit N_{pos} pour le MOSA choisi.

avec $I = A, E, T$ $W(f) = 1 - e^{-\frac{2if}{f_*}}$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{s,A}(f) = c_{A,pos} N_{Pos} \\ S_{s,E}(f) = c_{E,pos} N_{Pos} \\ S_{s,T}(f) = N_{Pos} \\ S_{a,A}(f) = \frac{c_{A,acc} N_{acc}}{(2\pi f)^4} \left(1 + \left(\frac{f_1}{f} \right)^2 \right) \\ S_{a,E}(f) = \frac{c_{E,acc} N_{acc}}{(2\pi f)^4} \left(1 + \left(\frac{f_1}{f} \right)^2 \right) \\ S_{a,T}(f) = \frac{N_{acc}}{(2\pi f)^4} \left(1 + \left(\frac{f_1}{f} \right)^2 \right). \end{array} \right. \quad (5.41)$$

Ainsi, nous avons un A-MCMC avec sept paramètres. Le résultat des ajustements des différentes configurations du bruit de chaque MOSA est donné dans la figure 5.69. Cette méthode permet un bon ajustement du bruit de LISA dans le cas d'un ou plusieurs MOSA auraient un surplus de bruit, mais il n'est pas possible de déterminer le ou les MOSA qui aurait un surplus de bruit.

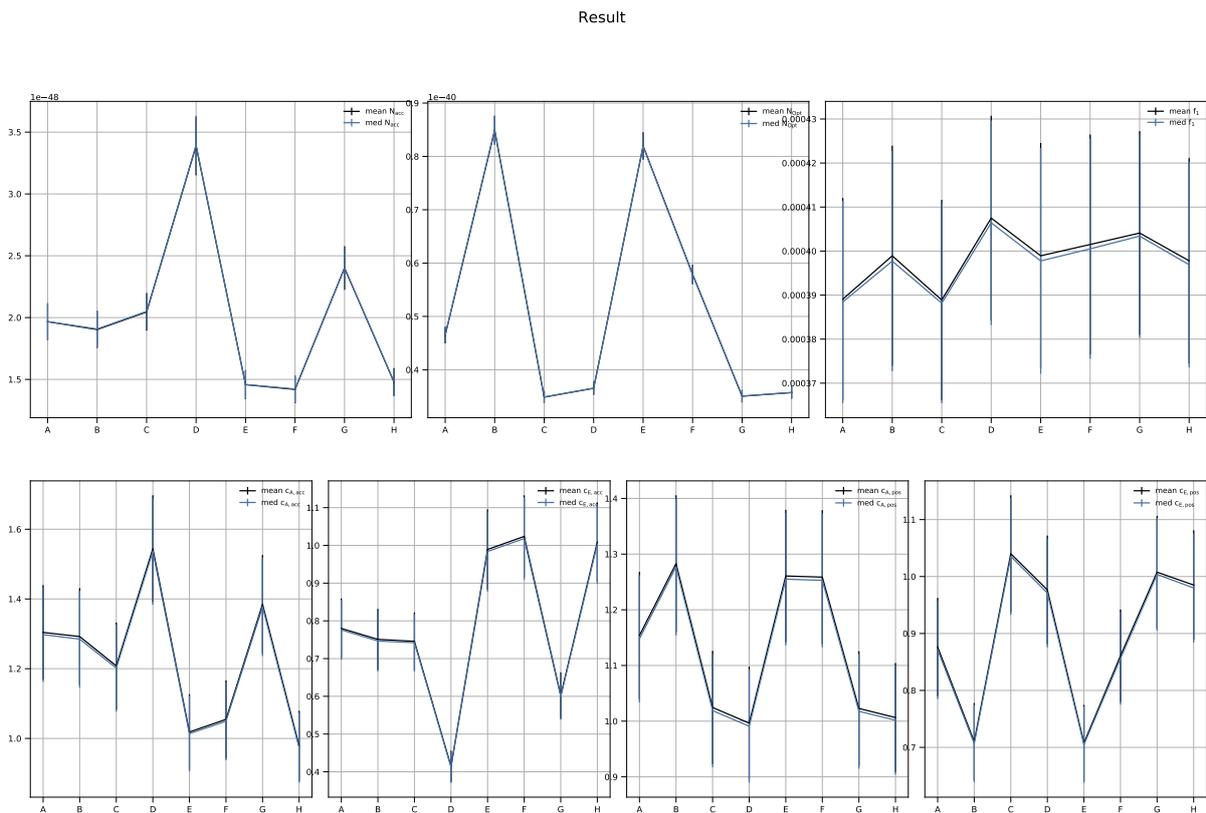


FIGURE 5.69 – Résultat de l'ajustement des différentes configurations du bruit de MOSA (figures 5.67 et 5.68) par un A-MCMC à sept paramètres (N_{acc} , N_{pos} , f_1 , $c_{A,acc}$, $c_{E,acc}$, $c_{A,pos}$ et $c_{E,pos}$, voir équation 5.41)

5.12.3 Bruit corrélé et séparation spectrale du fond stochastique

Nous avons également étudié le comportement du bruit de LISA dans le contexte d'un bruit corrélé. Pour cela, il nous faut introduire dans notre implémentation du TDI de LISA un bruit corrélé. Les sources de corrélation des bruits de LISA peuvent être multiples. Il n'est pas ici le but de faire une zoologie des corrélations, mais simplement de comprendre le comportement de l'ajout d'une corrélation et l'effet sur la mesure du fond stochastique. Pour cela, nous choisissons d'ajouter une corrélation du bruit d'accélération entre deux MOSA. À la lumière du document de travail de LISA [167], nous avons observé avec les données LISA Pathfinder une corrélation entre la température et la différence d'accélération à très basses fréquences. Ainsi, nous pouvons faire l'hypothèse que le changement de température du satellite perturbe la mesure de chute libre des tests-masse. Chaque satellite contient deux MOSA, il s'agit du système optique dans lequel les mesures interférométriques sont effectuées. Et, notamment entre le système de référence, de test-masse et ce que l'on appelle le long bras (lien "LASER" entre deux satellites). Nous pouvons induire entre deux MOSA du même satellite un terme de bruit corrélé au bruit d'accélération provenant d'une variation de la température du satellite. Pour ce faire, nous introduisons un terme commun aux deux sources de bruit du satellite 1, puis nous calculons les série-temporelles des canaux X, Y, Z . Dans cette étude, nous ne cherchons pas à établir avec précision la valeur de la corrélation, ici, nous cherchons à comprendre l'effet d'une corrélation entre deux MOSA d'un même satellite sur le modèle de LISA. De plus, nous cherchons également ensuite à mesurer avec précision l'effet de la corrélation et son impact sur nos mesures cosmologiques. Ainsi, nous utilisons la valeur de bruit de la stabilité de température du GRS (Gravitational Reference Sensor) et de l'EH (Electrode housing), voir section 1.3.6. En effet, le résultat est une force sur la test-masse telle que

$$S_g^{TGRS} = \left| \frac{\partial g_x}{\partial T_{GRS}} \right| S_{TGRS} = 144 \text{ fm}^2 \text{s}^{-4} \text{Hz}^{-1} \left(\frac{\frac{\partial g_x}{\partial T_{GRS}}}{1 \text{ pms}^{-2} \text{K}^{-1}} \right)^2 \frac{S_{TGRS}}{144 \text{ mK}^2 \text{Hz}^{-1}} \quad (5.42)$$

Comme indiqué dans le document du budget de bruit de LISA [166], nous utilisons la valeur de LISA PathFinder $\frac{\partial g_x}{\partial T_{GRS}} = 1 \text{ pms}^{-2} \text{K}^{-1}$. De plus, nous avons $S_{TGRS} < 1.4 \text{ mKHz}^{-1} \left(1 + \left(\frac{2 \times 10^{-3}}{f} \right)^4 \right)$. Nous considérons donc un cas limite de bruit corrélé de $S_g^{TGRS} = (4 \times 10^{-12} \text{ ms}^{-2} \text{Hz}^{-1/2})^2 \left(1 + \left(\frac{2 \times 10^{-3} \text{ Hz}}{f} \right)^4 \right)$, il s'agit d'un cas potentiellement surestimé, mais permet de comprendre les effets enjeux ici sur la mesure du fond stochastique. En effet, nous avons volontairement forcé ce bruit pour constater un effet, il correspond au bruit maximal d'instabilité thermique au sein d'un satellite. Les figures 5.70(a) et 5.70(b) sont respectivement les périodogrammes des canaux XYZ et AET

avec la corrélation entre les deux MOSA d'un satellite. Nous constatons en comparant avec le modèle de bruit de LISA de Smith & Caldwell [222], un gain à basses fréquences de bruit sur le canal T , celle-ci semble pouvoir être modélisé par une constante (*Offset*) dans le modèle du bruit du canal T .

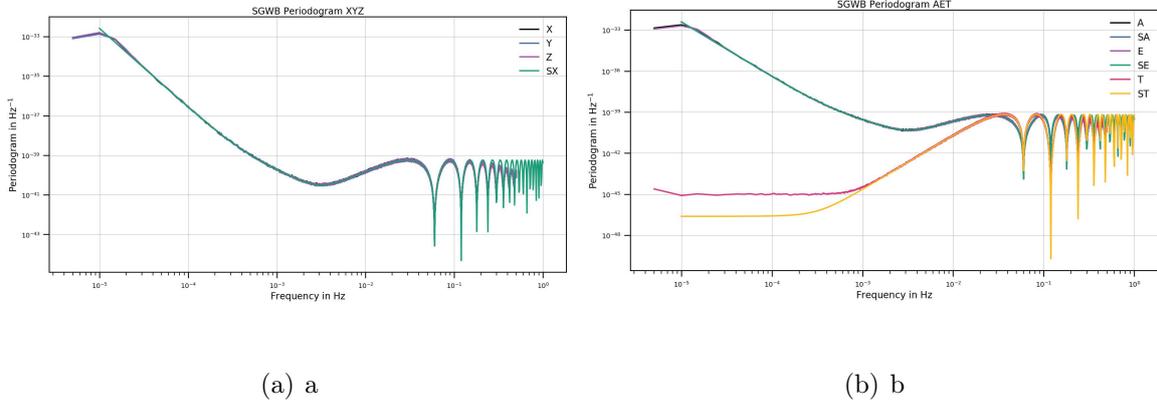


FIGURE 5.70 – Périodogrammes des canaux XYZ (5.64(a)) et AET (5.70(b)) avec la corrélation du bruit d'accélération de la variation de température du satellite entre les deux MOSA et PSD de Smith & Caldwell [222] des canaux XYZ et AET .

Nous réalisons une étude de séparation spectrale avec l'étude de Fisher et d'A-MCMC, nous réalisons dix-neuf ajustements de MCMC avec dans ce cas, nous avons sept paramètres; 3 pour le bruit de LISA N_{acc} , N_{pos} et l'effet de la corrélation *Offset*, et deux paramètres par modèle en loi puissance du fond stochastique astrophysique et cosmologique. Nous effectuons donc des simulations pour des amplitudes de fond cosmologique ente 1×10^{-14} et 1×10^{-8} . Le résultat de l'ajustement des paramètres est présenté dans la figure 5.71, cette figure nous permet de conclure tant au bon ajustement de l'ensemble des paramètres. Nous calculons également l'incertitude (voir figure 5.72) de mesure des paramètres avec la méthode de Fisher (en rouge) et du nuage de points noir de l'étude de Bayes en fonction de l'amplitude du fond cosmologique. Nous avons une très bonne concordance des résultats des deux méthodes. Nous pouvons conclure que l'ajout de la corrélation ne semble pas affecté la mesure du paramètre cosmologique (voir figure 5.73) mais celle-ci empêche un bon ajustement du paramètre du bruit d'accélération N_{acc} .

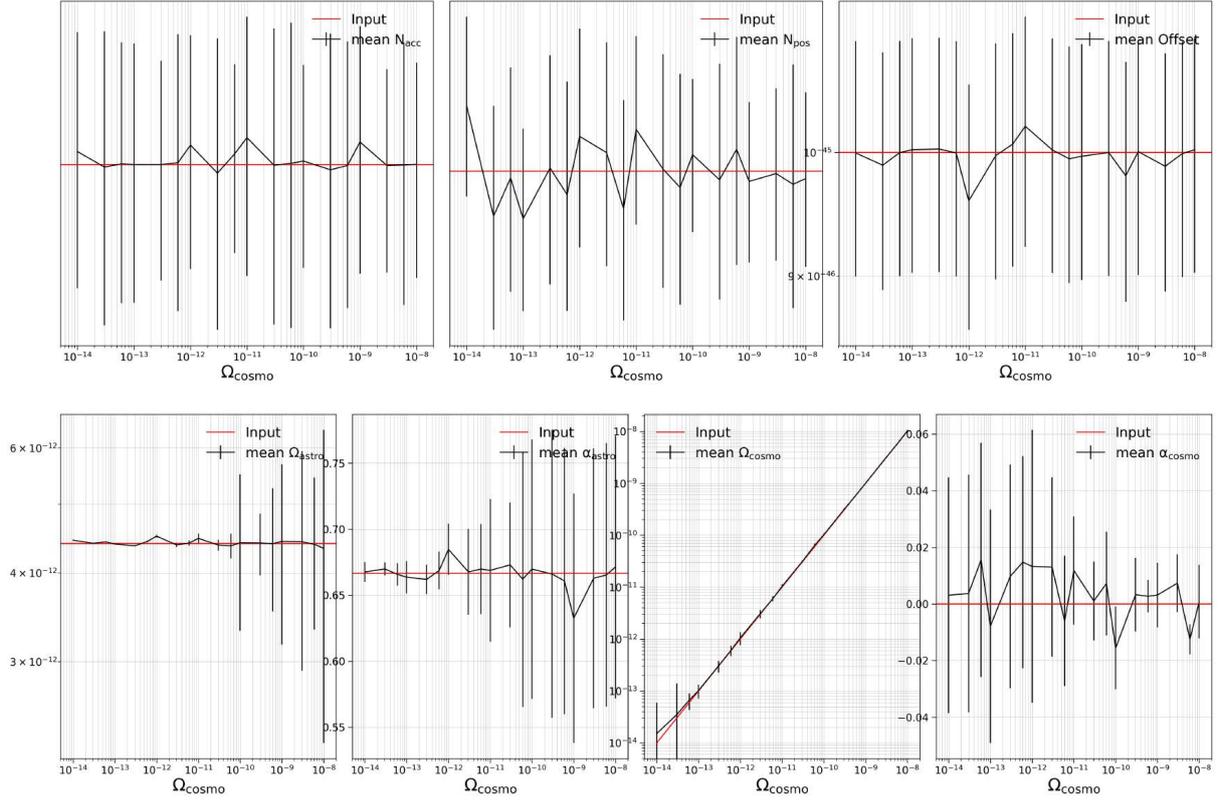


FIGURE 5.71 – Résultat de l’ajustement des différentes simulations du fond stochastique dans le contexte d’un bruit thermique corrélé au deux MOSA du même satellite par un A-MCMC à sept paramètres (N_{acc} , N_{pos} , $Offset$, Ω_{astro} , α_{astro} , Ω_{cosmo} et α_{cosmo}). Nous utilisons donc dans ce cas $N_{acc} = 1.44 \times 10^{-48} \text{s}^{-4} \text{Hz}^{-1}$, $N_{pos} = 3.6 \times 10^{-41} \text{Hz}^{-1}$, $\Omega_{GW,astro}(3\text{mHz}) = 4.4 \times 10^{-12}$, $\alpha_{astro} = 2/3$, $\alpha_{cosmo} = 0$, nous considérons dix-neuf modèles différentes du fond cosmologique avec Ω_{cosmo} compris entre 1×10^{-14} et 1×10^{-8} . La corrélation provenant d’une variation commune entre les deux MOSA du même satellite 1 est modélisé par le paramètre $Offset$.

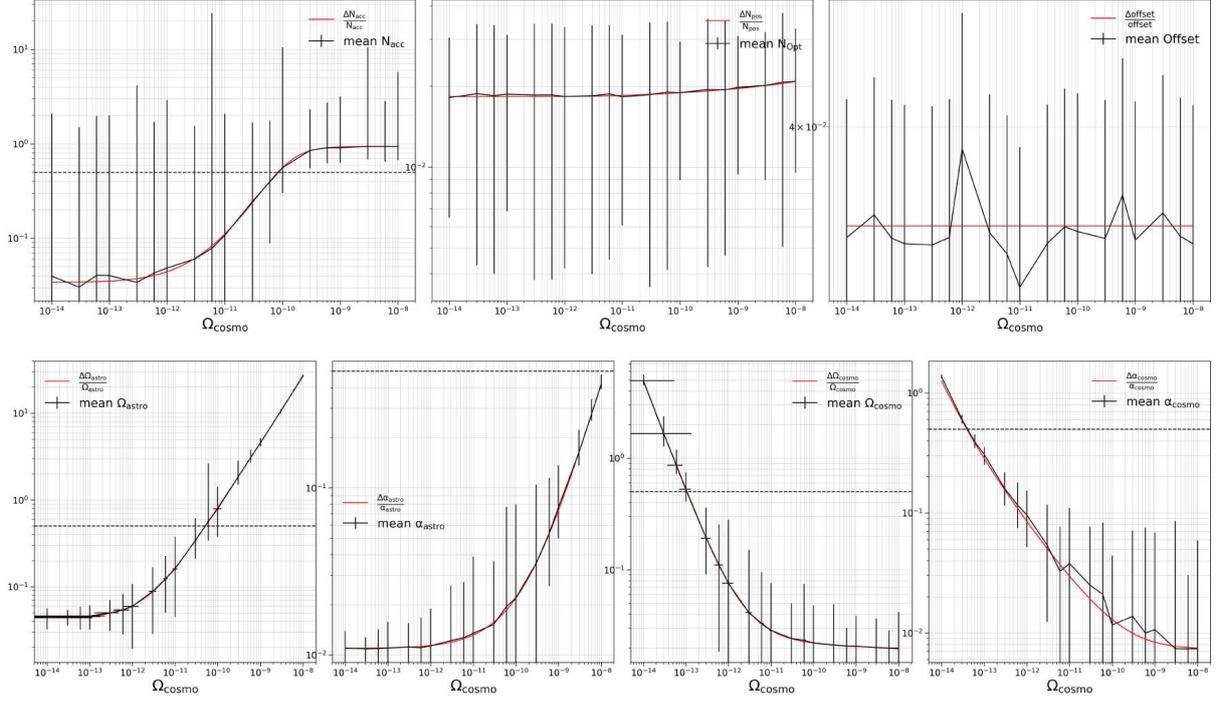


FIGURE 5.72 – Incertitudes de mesure de l’ajustement des différents paramètres en fonction de l’amplitude du fond cosmologique dans le contexte d’un bruit thermique corrélé aux deux MOSA du même satellite par un A-MCMC à sept paramètres (N_{acc} , N_{pos} , $Offset$, Ω_{astro} , α_{astro} , Ω_{cosmo} et α_{cosmo}). Nous utilisons donc dans ce cas $N_{acc} = 1.44 \times 10^{-48} \text{S}^{-4} \text{Hz}^{-1}$, $N_{pos} = 3.6 \times 10^{-41} \text{Hz}^{-1}$, $\Omega_{GW,astro}(3\text{mHz}) = 4.4 \times 10^{-12}$, $\alpha_{astro} = 2/3$, $\alpha_{cosmo} = 0$, nous considérons dix-neuf modèles différents du fond cosmologique avec Ω_{cosmo} compris entre 1×10^{-14} et 1×10^{-8} . La corrélation provenant d’une variation commune entre les deux MOSA du même satellite 1 est modélisé par le paramètre $Offset$.

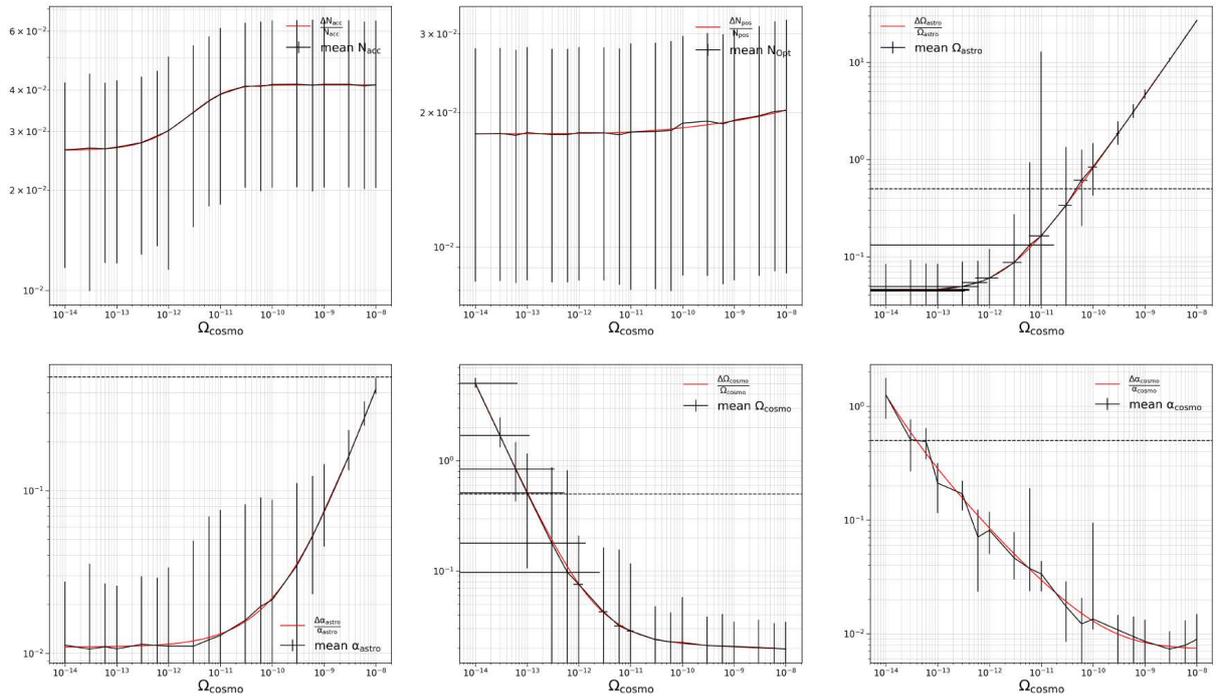


FIGURE 5.73 – Incertitudes de mesure de l’ajustement des différents paramètres en fonction de l’amplitude du fond cosmologique sans le bruit thermique corrélé au deux MOSA du même satellite par un A-MCMC à six paramètres (N_{acc} , N_{pos} , Ω_{astro} , α_{astro} , Ω_{cosmo} et α_{cosmo}). Nous utilisons donc dans ce cas $N_{acc} = 1.44 \times 10^{-48} \text{s}^{-4} \text{Hz}^{-1}$, $N_{pos} = 3.6 \times 10^{-41} \text{Hz}^{-1}$, $\Omega_{GW,astro}(3\text{MHz}) = 4.4 \times 10^{-12}$, $\alpha_{astro} = 2/3$, $\alpha_{cosmo} = 0$, nous considérons dix-neuf modèles différents du fond cosmologique avec Ω_{cosmo} compris entre 1×10^{-14} et 1×10^{-8} .

Conclusion et Perspectives

Cette thèse a montré qu'il sera peut-être possible pour LISA d'observer un fond stochastique (lire Chapitre 2) produit cosmologiquement en présence de diverses contaminations d'origine astrophysique (lire Chapitre 3), d'origine galactique (lire Chapitre 4) et de limitations dues aux bruits de l'instrument (lire Chapitre 5). L'étude de séparabilité des fonds stochastiques avec la méthode bayésienne et de Fisher en utilisant les trois canaux A , E et T (voir Chapitre 3) est une nouveauté dans le cadre de l'étude du fond stochastique de LISA. Nous utilisons le canal T , qui est stérile de données d'ondes gravitationnelles, pour mesurer simultanément le bruit de LISA. En effet, les modèles de bruit des canaux A , E et T ne sont pas les mêmes, mais sont paramétrés par des amplitudes égales. En effet, ils sont dérivés des trois mêmes canaux X , Y et Z . Nous avons pu montrer que l'utilisation du canal T , augmente la performance de séparation spectrale du fond stochastique. Nous montrons qu'il sera possible de mesurer l'amplitude du fond stochastique d'origine cosmologique $\Omega_{GW,Cosmo} \approx 8 \times 10^{-13}$ avec une erreur inférieure à 50%. Nous avons publié deux études de séparation du fond stochastique de LISA. La première publication [49] introduit et démontre la faisabilité de notre algorithme de séparation spectrale. De plus, en ayant constaté qu'il n'y a pas, en ce jour, un consensus établi sur l'amplitude du fond astrophysique, nous avons établi la séparabilité du fond cosmologique en fonction du fond astrophysique. Ainsi, pour un fond astrophysique donné et un niveau de bruit de LISA, nous sommes capables de renseigner la limite de détectabilité d'un fond cosmologique. Nous avons également publié une deuxième étude de la séparabilité du fond stochastique, cette fois-ci dans un contexte de contamination plus proche de ce que pourrait être l'environnement astrophysique et galactique de LISA [51]. Dans cette publication, nous avons construit en utilisant un catalogue de naines blanches doubles, le signal d'ondes gravitationnelles du premier plan galactique. Celui-ci est modulé en amplitude, ce qui est due par l'orbite de LISA. Cet article présente également une comparaison entre deux catalogues de naines blanches doubles [154, 178]. En effet, nous avons introduit les effets orbitaux de la constellation de LISA pour simuler correctement ce fond. Nous avons également pu établir la limite de détectabilité du fond stochastique cosmologique dans ce contexte. Il nous a aussi été possible de déterminer les effets que produiront d'autres catalogues sur la mesure cosmologique. De plus, il nous serait facile de réaliser la même étude avec un autre catalogue [93] et confirmer notre estimation des

limites. Nous constatons que la distribution de positions des naines blanches doubles modifient la forme du spectre d'énergie du premier plan galactique. Pour les préparations des observations du fond stochastique de LISA, il sera important de considérer des modèles aussi proches que possible de la distribution galactique réelle. LISA aura la capacité d'observer les naines blanches doubles galactiques, à la fois avec des binaires résolubles et le premier-plan, et de faire des déclarations importantes sur la distribution dans la Galaxie. Il est ainsi important d'étudier les résultats d'astrométrie comme Gaia. C'est également le cas pour les différentes compositions des noyaux des naines blanches. Nous avons étudié la distribution des binaires résolues et non résolues en fonction de la composition de leur noyau. Il ne nous semble pas possible d'extrapoler la composition chimique de toutes les binaires avec les binaires résolues, mais ceci constitue une nouvelle question ouverte. Nous nous sommes également rendu compte de la diversité de source pouvant produire des ondes gravitationnelles dans notre galaxie, ce qui viendrait modifier le premier plan galactique.

Jusqu'ici, nous avons considéré un modèle simple en loi puissance du fond cosmologique. Afin d'étudier la séparation spectrale de modèle cosmologique plus complexe, nous avons introduit des modèles en lois puissances cassées, en pics spectraux ou en "Wiggly". Nous avons pour chacun des précédents modèles établis, les limites paramétriques de séparation spectrale. De plus, nous avons également réalisé une étude de séparation spectrale des cordes cosmiques dans un contexte de contamination astrophysique et galactique, cette étude en est au stade de la rédaction [46], nous avons donc établi une limite de détectabilité autour de $G\mu \simeq 1 \times 10^{-17}$ à 1×10^{-16} .

Nous avons aussi effectué des études sur le bruit de LISA, l'objectif étant de comprendre les problématiques pouvant altérer notre mesure du fond stochastique cosmologique. Ainsi, nous nous sommes intéressé aux bruits corrélés. Dans le but d'être confronté à de vraies données et également à un système très proche de celui que serait LISA. Nous nous sommes intéressés aux données de LISA PathFinder [229, 33]. Il s'agit de la mission de démonstration de la pertinence et de la faisabilité du système de masses test qui constitue une des composantes de LISA. Ainsi, il est fort possible que les bruits corrélés présents dans LISA Pathfinder, le seront dans LISA. Notre étude des corrélations entre la différence d'accélération des masses-test et la température du satellite, son champ magnétique et son système de compensation de position avec des micro-propulsions, ont été intégrés dans le modèle de bruit de LISA à l'aide d'un algorithme de *Time-delay interferometry*. Les performances de séparation spectrale du fond stochastique semblent affectées, mais dans une moindre mesure. Nous avons également étudié des modifications du bruit de LISA en modifiant localement le bruit de chacun des systèmes optiques et également en corrélant le bruit d'accélération dû à une corrélation de variation de température au sein d'un même satellite. Il y a également un effet sur la mesure, mais qui est très faible. Nous avons également démontré que la lumière diffusée ne représente pas

un enjeu de modification de performance de notre algorithme sur la mesure du fond stochastique cosmologique. Cette étude est en train de faire l'objet de la rédaction d'un papier.

Les résultats de cette thèse semblent résumer des résultats qui sont au cœur du débat actuel sur la mesure du fond stochastique. Néanmoins, elle ne répond pas encore à l'ensemble des questions. En effet, l'algorithme de séparation spectrale repose sur des approximations. Nous supposons entre autres une matrice de corrélation des trois canaux A , E et T comme diagonale, il est, en effet, possible d'imaginer la présence de perturbations prenant place comme des coefficients non diagonaux. Il serait intéressant de tester et de comprendre l'effet d'une telle conjecture. De même, nous supposons les bras de LISA comme égaux. Il est intéressant de faire une étude comparative pour connaître l'impact d'une constellation imparfaite. Nous avons aussi utilisé des fonctions de réponse de l'instrument, calculé dans un cas idéal, c'est aussi une source de questionnements quant à la limite de détectabilité du fond cosmologique.

Aujourd'hui, nous avons peu d'études sur la dégradation de l'instrument. En effet, la mission doit durer quatre ans, puis peut-être 6, voire 10 ans. Il est évident que des dégradations de l'instrument sont à prévoir. Nous pouvons nous attendre à une dégradation progressive du bruit de LISA. Ainsi, le spectre de puissance du début de mission pourrait être très différent à l'issue de la mission. Lorsque l'on étudie le fond stochastique, c'est sur des signaux de longues durées. Or, dans l'état actuel, nous supposons le spectre du bruit constant, au cours temps. Il faudrait ainsi étudier ou modéliser un spectre de bruit variant au cours des temps longs et établir dans ce cas une limite de détectabilité du fond stochastique.

Un point important serait de rendre accessible aux utilisateurs la possibilité d'utiliser l'algorithme dans des configurations de bruit, de sources astrophysiques, galactiques ou cosmologiques, libre de choix. L'objectif serait à terme de pouvoir rendre une estimation de la séparation spectrale la plus proche de ce que sera LISA.

Nous avons un très grand intérêt à rendre compte des performances de notre algorithme en fonction du paramètre de bruit choisi par les utilisateurs. L'objectif est de quantifier l'impact de chaque modification en le mesurant avec notre algorithme. Il s'agit d'avoir une étude de facteur de mérite.

Les projets de troisième génération, le télescope Einstein ou Cosmic Explorer, tenteront également d'observer un fond stochastique produit cosmologiquement en présence d'un fond produit astrophysiquement. Cependant, ces détecteurs de troisième génération fonctionnent à des fréquences plus élevées, supérieures à 5 Hz. Ils pourraient avoir une sensibilité de détection telle que presque toutes les fusions de trous noirs binaires dans l'univers observable seraient directement observables, puis pourraient être supprimées de la recherche du fond stochastique. La première conséquence est donc la disparition du fond astrophysique de l'étude de la séparabilité. Ainsi, la capacité de détecter le fond cos-

mologique sera encore améliorée. Il est donc très important de définir des projets visant à regrouper des signaux de bande de fréquences variées. Ces tentatives pour mesurer le fond cosmologique peuvent être le meilleur moyen de comprendre l'univers primitif et la physique fondamentale ou comprendre l'Univers dans ces premiers temps.

Bibliographie

- [1] B. P. Abbott et al. (LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION et Virgo COLLABORATION). « Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger ». In : *Phys.Rev.Lett.*, **116**,061102 – Publish 11 February 2016 (2016).
- [2] K. N. ABAZAJIAN et al. « Inflation physics from the cosmic microwave background and large scale structure ». In : *Astroparticle Physics* 63 (mar. 2015), p. 55-65. DOI : [10.1016/j.astropartphys.2014.05.013](https://doi.org/10.1016/j.astropartphys.2014.05.013). arXiv : [1309.5381](https://arxiv.org/abs/1309.5381) [astro-ph.CO].
- [3] B. P. ABBOTT et AL. « Directional Limits on Persistent Gravitational Waves from Advanced LIGO’s First Observing Run ». In : *Phys. Rev. Lett.* 118 (12 mar. 2017), p. 121102. DOI : [10.1103/PhysRevLett.118.121102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.121102). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.121102>.
- [4] B. P. ABBOTT et al. « GW170817 : Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral ». In : *Phys. Rev. Lett.* 119 (16 oct. 2017), p. 161101. DOI : [10.1103/PhysRevLett.119.161101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.161101). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.161101>.
- [5] B. P. ABBOTT et al. « Prospects for observing and localizing gravitational-wave transients with Advanced LIGO, Advanced Virgo and KAGRA ». In : *Living Reviews in Relativity* 23.1 (sept. 2020). ISSN : 1433-8351. DOI : [10.1007/s41114-020-00026-9](https://doi.org/10.1007/s41114-020-00026-9). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s41114-020-00026-9>.
- [6] B. P. ABBOTT et al. « Upper Limits on the Stochastic Gravitational-Wave Background from Advanced LIGO’s First Observing Run ». In : *Phys. Rev. Lett.* 118 (12 mar. 2017), p. 121101. DOI : [10.1103/PhysRevLett.118.121101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.121101). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.121101>.
- [7] B.P. ABBOTT et al. « GW150914 : Implications for the Stochastic Gravitational-Wave Background from Binary Black Holes ». In : *Phys. Rev. Lett.* 116 (13 mar. 2016), p. 131102. DOI : [10.1103/PhysRevLett.116.131102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.131102). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.131102>.
- [8] B.P. ABBOTT et al. « Search for the isotropic stochastic background using data from Advanced LIGO’s second observing run ». In : *Phys. Rev. D* 100.6 (2019), p. 061101. DOI : [10.1103/PhysRevD.100.061101](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.061101). arXiv : [1903.02886](https://arxiv.org/abs/1903.02886) [gr-qc].

- [9] R. ABBOTT et al. « Upper Limits on the Isotropic Gravitational-Wave Background from Advanced LIGO's and Advanced Virgo's Third Observing Run ». In : (jan. 2021). arXiv : [2101.12130](https://arxiv.org/abs/2101.12130) [gr-qc].
- [10] Mohamed H. ABDULLAH, Anatoly KLYPIN et Gillian WILSON. In : *The Astrophysical Journal* 901.2 (sept. 2020), p. 90. DOI : [10.3847/1538-4357/aba619](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aba619). URL : <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aba619>.
- [11] Matthew R. ADAMS et Neil J. CORNISH. « Detecting a stochastic gravitational wave background in the presence of a galactic foreground and instrument noise ». In : *Phys. Rev. D* 89 (2 jan. 2014), p. 022001. DOI : [10.1103/PhysRevD.89.022001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.022001). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.022001>.
- [12] Matthew R. ADAMS et Neil J. CORNISH. « Detecting a stochastic gravitational wave background in the presence of a galactic foreground and instrument noise ». In : *Phys. Rev. D* 89.2, 022001 (jan. 2014), p. 022001. DOI : [10.1103/PhysRevD.89.022001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.022001). arXiv : [1307.4116](https://arxiv.org/abs/1307.4116) [gr-qc].
- [13] Matthew R. ADAMS et Neil J. CORNISH. « Discriminating between a Stochastic Gravitational Wave Background and Instrument Noise ». In : *Phys. Rev. D* 82 (2010), p. 022002. DOI : [10.1103/PhysRevD.82.022002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.022002). arXiv : [1002.1291](https://arxiv.org/abs/1002.1291) [gr-qc].
- [14] Matthew R. ADAMS et Neil J. CORNISH. « Discriminating between a stochastic gravitational wave background and instrument noise ». In : *PRD* 82.2, 022002 (juil. 2010), p. 022002. DOI : [10.1103/PhysRevD.82.022002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.022002). arXiv : [1002.1291](https://arxiv.org/abs/1002.1291) [gr-qc].
- [15] Matthew R. ADAMS et Neil J. CORNISH. « Discriminating between a stochastic gravitational wave background and instrument noise ». In : *Physical Review D* 82.2 (juil. 2010). ISSN : 1550-2368. DOI : [10.1103/PhysRevD.82.022002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.022002). URL : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.82.022002>.
- [16] P. A. R. ADE et al. « Constraints on Primordial Gravitational Waves Using *Planck*, WMAP, and New BICEP2/*Keck* Observations through the 2015 Season ». In : *Phys. Rev. Lett.* 121 (22 nov. 2018), p. 221301. DOI : [10.1103/PhysRevLett.121.221301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.221301). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.221301>.
- [17] P. A. R. ADE et al. « Planck2015 results ». In : *A&A* 594 (sept. 2016), A13. ISSN : 1432-0746. DOI : [10.1051/0004-6361/201525830](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201525830). URL : <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201525830>.

- [18] Bruce ALLEN et Joseph D. ROMANO. « Detecting a stochastic background of gravitational radiation : Signal processing strategies and sensitivities ». In : *Phys. Rev. D* 59 (10 mar. 1999), p. 102001. DOI : [10.1103/PhysRevD.59.102001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.102001). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.102001>.
- [19] Pau AMARO-SEOANE et al. « Laser Interferometer Space Antenna ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :1702.00786 (fév. 2017), arXiv :1702.00786. arXiv : [1702.00786](https://arxiv.org/abs/1702.00786) [[astro-ph.IM](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].
- [20] Fotios K. ANAGNOSTOPOULOS, Spyros BASILAKOS et Emmanuel N. SARIDAKIS. « Bayesian analysis of $f(T)$ gravity using $f\sigma_8$ data ». In : *Phys. Rev. D* 100.8 (2019), p. 083517. DOI : [10.1103/PhysRevD.100.083517](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.083517). arXiv : [1907.07533](https://arxiv.org/abs/1907.07533) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].
- [21] G. ANDERSON et al. « Experimental results from the ST7 mission on LISA Pathfinder ». In : *Phys. Rev. D* 98 (10 nov. 2018), p. 102005. DOI : [10.1103/PhysRevD.98.102005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.102005). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.102005>.
- [22] F. ANTONUCCI et al. « LISA Pathfinder data analysis ». In : *Classical and Quantum Gravity* 28.9 (mai 2011). DOI : [10.1088/0264-9381/28/9/094006](https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/9/094006). URL : <http://eprints.gla.ac.uk/115284/>.
- [23] M ARMANO et al. « Temperature stability in the sub-milliHertz band with LISA Pathfinder ». In : *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 486.3 (2019), p. 3368-3379. DOI : [10.1093/mnras/stz1017](https://doi.org/10.1093/mnras/stz1017). arXiv : [1905.09060](https://arxiv.org/abs/1905.09060) [[astro-ph.IM](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].
- [24] M ARMANO et al. « Spacecraft and interplanetary contributions to the magnetic environment on-board LISA Pathfinder ». In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 494.2 (avr. 2020), p. 3014-3027. ISSN : 1365-2966. DOI : [10.1093/mnras/staa830](https://doi.org/10.1093/mnras/staa830). URL : <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/staa830>.
- [25] M ARMANO et al. « Spacecraft and interplanetary contributions to the magnetic environment on-board LISA Pathfinder ». In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 494.2 (avr. 2020), p. 3014-3027. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1093/mnras/staa830](https://doi.org/10.1093/mnras/staa830). eprint : <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/494/2/3014/33129159/staa830.pdf>. URL : <https://doi.org/10.1093/mnras/staa830>.
- [26] M. ARMANO et al. « Beyond the Required LISA Free-Fall Performance : New LISA Pathfinder Results down to 20 μ Hz ». In : *Phys. Rev. Lett.* 120 (6 fév. 2018), p. 061101. DOI : [10.1103/PhysRevLett.120.061101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.061101). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.061101>.
- [27] M. ARMANO et al. « Calibrating the system dynamics of LISA Pathfinder ». In : *Phys. Rev. D* 97 (12 juin 2018), p. 122002. DOI : [10.1103/PhysRevD.97.122002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.122002). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.122002>.

- [28] M. ARMANO et al. « LISA Pathfinder micronewton cold gas thrusters : In-flight characterization ». In : *Phys.Rev.D* 99.12 (2019), p. 122003. DOI : [10.1103/PhysRevD.99.122003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.122003). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02188875>.
- [29] M. ARMANO et al. « LISA Pathfinder micronewton cold gas thrusters : In-flight characterization ». In : *Phys. Rev. D* 99 (12 juin 2019), p. 122003. DOI : [10.1103/PhysRevD.99.122003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.122003). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.122003>.
- [30] M. ARMANO et al. « LISA Pathfinder Performance Confirmed in an Open-Loop Configuration : Results from the Free-Fall Actuation Mode ». In : *Phys. Rev. Lett.* 123 (11 sept. 2019), p. 111101. DOI : [10.1103/PhysRevLett.123.111101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.111101). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.111101>.
- [31] M. ARMANO et al. « Novel methods to measure the gravitational constant in space ». In : *Phys. Rev. D* 100 (6 sept. 2019), p. 062003. DOI : [10.1103/PhysRevD.100.062003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.062003). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.062003>.
- [32] M. ARMANO et al. « Spacecraft and interplanetary contributions to the magnetic environment on-board LISA Pathfinder ». In : *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* 494.2 (2020), p. 3014-3027. DOI : [10.1093/mnras/staa830](https://doi.org/10.1093/mnras/staa830). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02628054>.
- [33] M. ARMANO et al. « Sub-Femto-*g* Free Fall for Space-Based Gravitational Wave Observatories : LISA Pathfinder Results ». In : *Phys. Rev. Lett.* 116 (23 juin 2016), p. 231101. DOI : [10.1103/PhysRevLett.116.231101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.231101). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.231101>.
- [34] Pierre AUCLAIR et al. « Probing the gravitational wave background from cosmic strings with LISA ». In : *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2020.04 (avr. 2020), p. 034-034. DOI : [10.1088/1475-7516/2020/04/034](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/04/034). URL : <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/04/034>.
- [35] S. BABAK et A. PETITEAU. « LISA Data Challenge Manual LISA-LCST-SGD-MAN-001 ». In : *LISA Consortium* (2018).
- [36] Stanislav BABAK. « “Enchilada” is back on the menu ». In : *Journal of Physics : Conference Series* 840 (mai 2017), p. 012026. DOI : [10.1088/1742-6596/840/1/012026](https://doi.org/10.1088/1742-6596/840/1/012026). URL : <https://doi.org/10.1088/1742-6596/840/1/012026>.
- [37] Stanislav BABAK et al. « The Mock LISA Data Challenges : from Challenge 1B to Challenge 3 ». In : *Classical and Quantum Gravity* 25.18 (sept. 2008), p. 184026. DOI : [10.1088/0264-9381/25/18/184026](https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/18/184026). URL : <https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/18/184026>.

- [38] John BAKER et al. « The Laser Interferometer Space Antenna : Unveiling the Millihertz Gravitational Wave Sky ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :1907.06482 (juil. 2019), arXiv :1907.06482. arXiv : [1907.06482 \[astro-ph.IM\]](#).
- [39] Daniel BAUMANN. *TASI Lectures on Primordial Cosmology*. 2018. arXiv : [1807.03098 \[hep-th\]](#).
- [40] C. L. BENNETT et al. « NINE-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS : FINAL MAPS AND RESULTS ». In : *The Astrophysical Journal Supplement Series* 208.2 (sept. 2013), p. 20. DOI : [10.1088/0067-0049/208/2/20](#). URL : <https://doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/20>.
- [41] BICEP2 COLLABORATION et al. « Detection of B-Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2 ». In : *Phys. Rev. Lett.* 112.24, 241101 (juin 2014), p. 241101. DOI : [10.1103/PhysRevLett.112.241101](#). arXiv : [1403.3985 \[astro-ph.CO\]](#).
- [42] BICEP2/KECK COLLABORATION et al. « Joint Analysis of BICEP2/Keck Array and Planck Data ». In : *Phys. Rev. Lett.* 114.10, 101301 (mar. 2015), p. 101301. DOI : [10.1103/PhysRevLett.114.101301](#). arXiv : [1502.00612 \[astro-ph.CO\]](#).
- [43] Sylvia BISCOVEANU et al. « Measuring the primordial gravitational-wave background in the presence of astrophysical foregrounds ». In : *arXiv e-prints* (2020). arXiv : [2009.04418 \[astro-ph.HE\]](#).
- [44] Luc BLANCHET et Thibault DAMOUR. « Post-newtonian generation of gravitational waves ». en. In : *Annales de l'I.H.P. Physique théorique* 50.4 (1989), p. 377-408. URL : http://www.numdam.org/item/AIHPA_1989__50_4_377_0/.
- [45] Jose J. BLANCO-PILLADO, Ken D. OLUM et Benjamin SHLAER. « Large parallel cosmic string simulations : New results on loop production ». In : *Physical Review D* 83.8 (avr. 2011). ISSN : 1550-2368. DOI : [10.1103/physrevd.83.083514](#). URL : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.83.083514>.
- [46] G. BOILEAU et al. In : *Paper in preparation for PRL* (2021).
- [47] Guillaume BOILEAU et al. *Ability of LISA to detect a gravitational-wave background of cosmological origin : the cosmic string case*. 2021. arXiv : [2109.06552 \[gr-qc\]](#).
- [48] Guillaume BOILEAU et al. « Spectral separation of the stochastic gravitational-wave background for LISA in the context of a modulated Galactic foreground ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :2105.04283 (mai 2021), arXiv :2105.04283. arXiv : [2105.04283 \[gr-qc\]](#).

- [49] Guillaume BOILEAU et al. « Spectral separation of the stochastic gravitational-wave background for LISA : Observing both cosmological and astrophysical backgrounds ». In : *Phys. Rev. D* 103.10, 103529 (mai 2021), p. 103529. DOI : [10.1103/PhysRevD.103.103529](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.103529). arXiv : [2011.05055](https://arxiv.org/abs/2011.05055) [gr-qc].
- [50] Guillaume BOILEAU et al. « Spectral separation of the stochastic gravitational-wave background for LISA : Observing both cosmological and astrophysical backgrounds ». In : *Phys. Rev. D* 103 (10 mai 2021), p. 103529. DOI : [10.1103/PhysRevD.103.103529](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.103529). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.103529>.
- [51] Guillaume BOILEAU et al. « Spectral separation of the stochastic gravitational-wave background for LISA : observing both cosmological and astrophysical backgrounds ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :2011.05055 (nov. 2020), arXiv :2011.05055. arXiv : [2011.05055](https://arxiv.org/abs/2011.05055) [gr-qc].
- [52] S. BONAZZOLA et J.-A. MARCK. « Astrophysical sources of gravitational radiation ». In : *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 44 (1994), p. 655-717.
- [53] Katelyn BREIVIK, Chiara M. F. MINGARELLI et Shane L. LARSON. « Constraining Galactic Structure with the LISA White Dwarf Foreground ». In : *ApJ* 901.1, 4 (sept. 2020), p. 4. DOI : [10.3847/1538-4357/abab99](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abab99). arXiv : [1912.02200](https://arxiv.org/abs/1912.02200) [astro-ph.GA].
- [54] R.G. BROWN et P.Y.C. HWANG. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering with Matlab Exercises and Solutions*. Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering : With MATLAB Exercises and Solutions. Wiley, 1997. ISBN : 9780471128397. URL : <https://books.google.fr/books?id=De9SAAAAMAAJ>.
- [55] Kevin B. BURDGE et al. « A Systematic Search of Zwicky Transient Facility Data for Ultracompact Binary LISA-detectable Gravitational-wave Sources ». In : *ApJ* 905.1, 32 (déc. 2020), p. 32. DOI : [10.3847/1538-4357/abc261](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abc261). arXiv : [2009.02567](https://arxiv.org/abs/2009.02567) [astro-ph.SR].
- [56] Kevin B. BURDGE et al. « General relativistic orbital decay in a seven-minute-orbital-period eclipsing binary system ». In : *Nature* 571.7766 (juil. 2019), p. 528-531. DOI : [10.1038/s41586-019-1403-0](https://doi.org/10.1038/s41586-019-1403-0). arXiv : [1907.11291](https://arxiv.org/abs/1907.11291) [astro-ph.SR].
- [57] Jordan B. CAMP et Neil J. CORNISH. « GRAVITATIONAL WAVE ASTRONOMY ». In : *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 54.1 (2004), p. 525-577. DOI : [10.1146/annurev.nucl.54.070103.181251](https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.54.070103.181251). eprint : <https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.54.070103.181251>. URL : <https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.54.070103.181251>.

- [58] Paolo CAMPETI et al. « Measuring the spectrum of primordial gravitational waves with CMB, PTA and Laser Interferometers ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :2007.04241 (juil. 2020), arXiv :2007.04241. arXiv : [2007.04241](https://arxiv.org/abs/2007.04241) [[astro-ph.CO](#)].
- [59] P CAÑIZARES et al. « The diagnostics subsystem on board LISA Pathfinder and LISA ». In : *Classical and Quantum Gravity* 26.9 (avr. 2009), p. 094005. DOI : [10.1088/0264-9381/26/9/094005](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/9/094005).
- [60] Chiara CAPRINI et Daniel G FIGUEROA. « Cosmological backgrounds of gravitational waves ». In : *Classical and Quantum Gravity* 35.16 (juil. 2018), p. 163001. DOI : [10.1088/1361-6382/aac608](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aac608). URL : <https://doi.org/10.1088/1361-6382/aac608>.
- [61] Chiara CAPRINI et Daniel G. FIGUEROA. « Cosmological Backgrounds of Gravitational Waves ». In : *Class. Quant. Grav.* 35.16 (2018), p. 163001. DOI : [10.1088/1361-6382/aac608](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aac608). arXiv : [1801.04268](https://arxiv.org/abs/1801.04268) [[astro-ph.CO](#)].
- [62] Chiara CAPRINI et al. « Detecting gravitational waves from cosmological phase transitions with LISA : an update ». In : *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2020.03 (mar. 2020), p. 024-024. ISSN : 1475-7516. DOI : [10.1088/1475-7516/2020/03/024](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/03/024). URL : <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2020/03/024>.
- [63] Chiara CAPRINI et al. « Reconstructing the spectral shape of a stochastic gravitational wave background with LISA ». In : *JCAP* 2019.11 (2019), p. 017. DOI : [10.1088/1475-7516/2019/11/017](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/11/017). arXiv : [1906.09244](https://arxiv.org/abs/1906.09244) [[astro-ph.CO](#)].
- [64] Chiara CAPRINI et al. « Reconstructing the spectral shape of a stochastic gravitational wave background with LISA ». In : *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2019.11, 017 (nov. 2019), p. 017. DOI : [10.1088/1475-7516/2019/11/017](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/11/017). arXiv : [1906.09244](https://arxiv.org/abs/1906.09244) [[astro-ph.CO](#)].
- [65] Jorge CERVANTES-COTA, Salvador GALINDO-URIBARRI et George SMOOT. « A Brief History of Gravitational Waves ». In : *Universe* 2.3 (sept. 2016), p. 22. ISSN : 2218-1997. DOI : [10.3390/universe2030022](https://doi.org/10.3390/universe2030022). URL : <http://dx.doi.org/10.3390/universe2030022>.
- [66] S. CHANDRASEKHAR et E. A. MILNE. « The Highly Collapsed Configurations of a Stellar Mass ». In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 91.5 (mar. 1931), p. 456-466. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1093/mnras/91.5.456](https://doi.org/10.1093/mnras/91.5.456). eprint : <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/91/5/456/3079698/mnras91-0456.pdf>. URL : <https://doi.org/10.1093/mnras/91.5.456>.

- [67] Chia-Feng CHANG et Yanou CUI. « Stochastic gravitational wave background from global cosmic strings ». In : *Physics of the Dark Universe* 29 (2020), p. 100604. ISSN : 2212-6864. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.dark.2020.100604>. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686420301072>.
- [68] Zu-Cheng CHEN, Fan HUANG et Qing-Guo HUANG. « Stochastic Gravitational-wave Background from Binary Black Holes and Binary Neutron Stars and Implications for LISA ». In : *Astrophysical Journal* 871.1, 97 (jan. 2019), p. 97. DOI : [10.3847/1538-4357/aaf581](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaf581). arXiv : [1809.10360](https://arxiv.org/abs/1809.10360) [gr-qc].
- [69] Nelson CHRISTENSEN. « Stochastic gravitational wave backgrounds ». In : *Reports on Progress in Physics* 82.1 (nov. 2018), p. 016903. ISSN : 1361-6633. DOI : [10.1088/1361-6633/aae6b5](https://doi.org/10.1088/1361-6633/aae6b5). URL : <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aae6b5>.
- [70] Nelson CHRISTENSEN et Renate MEYER. « Markov chain Monte Carlo methods for Bayesian gravitational radiation data analysis ». In : *Phys. Rev. D* 58 (8 sept. 1998), p. 082001. DOI : [10.1103/PhysRevD.58.082001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.082001). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.082001>.
- [71] Gaia COLLABORATION. « Gaia Early Data Release 3 : The Gaia Catalogue of Nearby Stars ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :2012.02061 (déc. 2020), arXiv :2012.02061. arXiv : [2012.02061](https://arxiv.org/abs/2012.02061) [astro-ph.SR].
- [72] Planck COLLABORATION. « Planck 2013 results. XII. Diffuse component separation ». In : *A&A* 571 (2014), A12. DOI : [10.1051/0004-6361/201321580](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321580). URL : <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321580>.
- [73] LISA CONSORTIUM. « Laser Interferometer Space Antenna ». In : *ArXiv e-prints* (fév. 2017). arXiv : [1702.00786](https://arxiv.org/abs/1702.00786) [astro-ph.IM].
- [74] ASANTHA COORAY. « PRIMORDIAL GRAVITATIONAL WAVES AND INFLATION : POSSIBILITIES FOR DETECTION ». In : *Modern Physics Letters A* 20.33 (oct. 2005), p. 2503-2519. ISSN : 1793-6632. DOI : [10.1142/S0217732305018542](https://doi.org/10.1142/S0217732305018542). URL : <http://dx.doi.org/10.1142/S0217732305018542>.
- [75] Neil CORNISH et Travis ROBSON. « Galactic binary science with the new LISA design ». In : *Journal of Physics Conference Series*. T. 840. Journal of Physics Conference Series. Mai 2017, p. 012024. DOI : [10.1088/1742-6596/840/1/012024](https://doi.org/10.1088/1742-6596/840/1/012024). arXiv : [1703.09858](https://arxiv.org/abs/1703.09858) [astro-ph.IM].
- [76] Neil CORNISH et Travis ROBSON. « The construction and use of LISA sensitivity curves ». In : (2018). arXiv : [1803.01944](https://arxiv.org/abs/1803.01944) [astro-ph.HE].
- [77] Neil J CORNISH. « Making maps with LISA ». In : *Classical and Quantum Gravity* 19.7 (2002), p. 1279. URL : <http://stacks.iop.org/0264-9381/19/i=7/a=306>.

- [78] Neil J CORNISH. « Mapping the gravitational-wave background ». In : *Classical and Quantum Gravity* 18.20 (2001), p. 4277. URL : <http://stacks.iop.org/0264-9381/18/i=20/a=307>.
- [79] Neil J CORNISH et Shane L LARSON. « Space missions to detect the cosmic gravitational-wave background ». In : *Classical and Quantum Gravity* 18.17 (août 2001), p. 3473-3495. ISSN : 1361-6382. DOI : [10.1088/0264-9381/18/17/308](https://doi.org/10.1088/0264-9381/18/17/308). URL : <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/18/17/308>.
- [80] Neil J CORNISH et Shane L LARSON. « Space missions to detect the cosmic gravitational-wave background ». In : *Classical and Quantum Gravity* 18.17 (2001), p. 3473. URL : <http://stacks.iop.org/0264-9381/18/i=17/a=308>.
- [81] Neil J. CORNISH. « Detecting a stochastic gravitational wave background with the Laser Interferometer Space Antenna ». In : *Phys. Rev. D* 65.2, 022004 (jan. 2002), p. 022004. DOI : [10.1103/PhysRevD.65.022004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.022004). arXiv : [gr-qc/0106058](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0106058) [gr-qc].
- [82] Neil J. CORNISH et Tyson B. LITTENBERG. « Tests of Bayesian model selection techniques for gravitational wave astronomy ». In : *Phys. Rev. D* 76 (8 oct. 2007), p. 083006. DOI : [10.1103/PhysRevD.76.083006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.083006). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.083006>.
- [83] Neil J. CORNISH et Louis J. RUBBO. « Publisher's Note : LISA response function [Phys. Rev. D 67, 022001 (2003)] ». In : *Phys. Rev. D* 67.2, 029905 (jan. 2003), p. 029905. DOI : [10.1103/PhysRevD.67.029905](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.029905). arXiv : [gr-qc/0209011](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0209011) [gr-qc].
- [84] Michael W COUGHLIN et al. « Subtraction of correlated noise in global networks of gravitational-wave interferometers ». In : *Classical and Quantum Gravity* 33.22 (oct. 2016), p. 224003. DOI : [10.1088/0264-9381/33/22/224003](https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/22/224003). URL : <https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/22/224003>.
- [85] D.D. SENTMAN. *Handbook of Atmospheric Electrodynamics*. Sous la dir. de H. VOLLAND. T. 1. CRC Press, Boca Raton, 1995, p. 267.
- [86] M DIAZ-AGUILO, E GARCIA-BERRO et A LOBO. « Theory and Modeling of the Magnetic Field Measurement in LISA PathFinder ». In : *Class. Quant. Grav.* 27 (2010), p. 035005. DOI : [10.1088/0264-9381/27/3/035005](https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/3/035005). arXiv : [0908.4564](https://arxiv.org/abs/0908.4564) [gr-qc].
- [87] Jeffrey A. EDLUND et al. « White-dwarf white-dwarf galactic background in the LISA data ». In : *Phys. Rev. D* 71.12, 122003 (juin 2005), p. 122003. DOI : [10.1103/PhysRevD.71.122003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.122003). arXiv : [gr-qc/0504112](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0504112) [gr-qc].

- [88] Jeffrey A. EDLUND et al. « White-dwarf–white-dwarf galactic background in the LISA data ». In : *Phys. Rev. D* 71 (12 juin 2005), p. 122003. DOI : [10.1103/PhysRevD.71.122003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.122003). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.71.122003>.
- [89] A. EINSTEIN. « Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ». In : *Annalen der Physik* 354.7 (1916), p. 769-822. DOI : <https://doi.org/10.1002/andp.19163540702>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19163540702>. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19163540702>.
- [90] A. EINSTEIN. « Erklärung der Perihelionbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie ». In : *Sitzungsber. preuss.Akad. Wiss* 47 (jan. 1915), p. 831-839.
- [91] Albert EINSTEIN. « Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation ». In : *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* (jan. 1916), p. 688-696.
- [92] Albert EINSTEIN. « Über Gravitationswellen ». In : *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* (jan. 1918), p. 154-167.
- [93] J. J. ELDRIDGE et al. « Binary Population and Spectral Synthesis Version 2.1 : Construction, Observational Verification, and New Results ». In : *Publ. Astron. Soc. Australia* 34, e058 (nov. 2017), e058. DOI : [10.1017/pasa.2017.51](https://doi.org/10.1017/pasa.2017.51). arXiv : [1710.02154](https://arxiv.org/abs/1710.02154) [[astro-ph.SR](#)].
- [94] Adrienne L. ERICKCEK, Sean M. CARROLL et Marc KAMIONKOWSKI. « Superhorizon perturbations and the cosmic microwave background ». In : *Physical Review D* 78.8 (oct. 2008). ISSN : 1550-2368. DOI : [10.1103/physrevd.78.083012](https://doi.org/10.1103/physrevd.78.083012). URL : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.78.083012>.
- [95] Hans Kristian ERIKSEN et al. « Foreground removal by an internal linear combination method : Limitations and implications ». In : *Astrophys. J.* 612 (2004), p. 633-646. DOI : [10.1086/422807](https://doi.org/10.1086/422807). arXiv : [astro-ph/0403098](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0403098) [[astro-ph](#)].
- [96] ESA. « LISA Science Study Team LISA Science Requirement Document ESA-L3-EST-SCI-RS-001_LISA_SciRD ». In : *LISA Consortium* (2018).
- [97] F. B. ESTABROOK et H. D. WAHLQUIST. « Response of Doppler spacecraft tracking to gravitational radiation. » In : *General Relativity and Gravitation* 6.5 (oct. 1975), p. 439-447. DOI : [10.1007/BF00762449](https://doi.org/10.1007/BF00762449).
- [98] Alison J. FARMER et E. Sterl PHINNEY. « The gravitational wave background from cosmological compact binaries ». In : *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 346 (2003), p. 1197. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2003.07176.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2003.07176.x). arXiv : [astro-ph/0304393](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0304393).

- [99] D. J. FIXSEN. « The Temperature of the Cosmic Microwave Background ». In : *ApJ* 707.2 (déc. 2009), p. 916-920. DOI : [10.1088/0004-637X/707/2/916](https://doi.org/10.1088/0004-637X/707/2/916). arXiv : [0911.1955](https://arxiv.org/abs/0911.1955) [[astro-ph.CO](#)].
- [100] Raphael FLAUGER et al. « Improved reconstruction of a stochastic gravitational wave background with LISA ». In : *arXiv e-prints* (sept. 2020). arXiv : [2009.11845](https://arxiv.org/abs/2009.11845) [[astro-ph.CO](#)].
- [101] G. FONTAINE, P. BRASSARD et P. BERGERON. « The Potential of White Dwarf Cosmochronology ». In : *PASP* 113.782 (avr. 2001), p. 409-435. DOI : [10.1086/319535](https://doi.org/10.1086/319535).
- [102] A. FRIEDMANN. « Über die Krümmung des Raumes ». In : *Zeitschrift für Physik* 10 (jan. 1922), p. 377-386. DOI : [10.1007/BF01332580](https://doi.org/10.1007/BF01332580).
- [103] Martin FÜLLEKRUG. « Schumann resonances in magnetic field components ». In : *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics* 57.5 (1995), p. 479-484. ISSN : 0021-9169. DOI : [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9169\(94\)00075-Y](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9169(94)00075-Y). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002191699400075Y>.
- [104] Jacopo FUMAGALLI, Sébastien RENAUX-PETEL et Lukas T. WITKOWSKI. *Resonant features in the stochastic gravitational wave background*. 2021. arXiv : [2105.06481](https://arxiv.org/abs/2105.06481) [[astro-ph.CO](#)].
- [105] Juan GARCIA-BELLIDO et Daniel G. FIGUEROA. « A stochastic background of gravitational waves from hybrid preheating ». In : *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007), p. 061302. DOI : [10.1103/PhysRevLett.98.061302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.061302). arXiv : [astro-ph/0701014](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0701014).
- [106] Enrique GARCÍA-BERRO et Terry D. OSWALT. « The white dwarf luminosity function ». In : *New Astronomy Reviews* 72-74 (2016), p. 1-22. ISSN : 1387-6473. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.newar.2016.08.001>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S138764731630046X>.
- [107] Enrique GAZTANAGA. « The cosmological constant and the size of the Physical Universe ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :1904.08218 (mar. 2019), arXiv :1904.08218. arXiv : [1904.08218](https://arxiv.org/abs/1904.08218) [[physics.gen-ph](#)].
- [108] Andrew GELMAN et al. *Bayesian data analysis*. Third edition. New York, NY, USA : Chapman & Hall, 2014. ISBN : 9781439840955.
- [109] Nicola Pietro GENTILE FUSILLO et al. « A Gaia Data Release 2 catalogue of white dwarfs and a comparison with SDSS ». In : *MNRAS* 482.4 (fév. 2019), p. 4570-4591. DOI : [10.1093/mnras/sty3016](https://doi.org/10.1093/mnras/sty3016). arXiv : [1807.03315](https://arxiv.org/abs/1807.03315) [[astro-ph.SR](#)].

- [110] Kristina GIESEL et al. « Mukhanov-Sasaki equation in a manifestly gauge-invariant linearized cosmological perturbation theory with dust reference fields ». In : *Physical Review D* 102.2 (juil. 2020). ISSN : 2470-0029. DOI : [10.1103/physrevd.102.023524](https://doi.org/10.1103/physrevd.102.023524). URL : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.102.023524>.
- [111] W.R. GILKS, S. RICHARDSON et D. SPIEGELHALTER. *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman & Hall/CRC Interdisciplinary Statistics. Taylor & Francis, 1995. ISBN : 9780412055515.
- [112] Laura Castelló GOMAR et al. « Cosmological perturbations in hybrid loop quantum cosmology : Mukhanov-Sasaki variables ». In : *Physical Review D* 90.6 (sept. 2014). ISSN : 1550-2368. DOI : [10.1103/physrevd.90.064015](https://doi.org/10.1103/physrevd.90.064015). URL : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.90.064015>.
- [113] K. M. GÓRSKI et al. « HEALPix : A Framework for High-Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere ». In : *The Astrophysical Journal* 622.2 (2005), p. 759. URL : <http://stacks.iop.org/0004-637X/622/i=2/a=759>.
- [114] K. M. GÓRSKI et al. « HEALPix : A Framework for High-Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere ». In : *ApJ* 622.2 (avr. 2005), p. 759-771. DOI : [10.1086/427976](https://doi.org/10.1086/427976). arXiv : [astro-ph/0409513](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0409513) [astro-ph].
- [115] Y. GÖTBERG et al. « Stars Stripped in Binaries : The Living Gravitational-wave Sources ». In : *The Astrophysical Journal* 904.1 (nov. 2020), p. 56. DOI : [10.3847/1538-4357/abbda5](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abbda5). URL : <https://doi.org/10.3847/1538-4357/abbda5>.
- [116] Éric GOURGOULHON. « Relativité générale ». In : *Master Astronomie, Astrophysique et Ingénierie Spatiale. Année M2 - Parcours Recherche* (2013). eric.gourgoulhon@obspm.fr.
- [117] LP GRISHCHUK. « Amplification of gravitational waves in an isotropic universe ». In : *Zh. Eksp. Teor. Fiz* 67 (1974), p. 825.
- [118] Rutger van HAASTEREN et al. *Analysis of the first IPTA Mock Data Challenge by the EPTA timing data analysis working group*. 2013. arXiv : [1301.6673](https://arxiv.org/abs/1301.6673) [astro-ph.IM].
- [119] Hubert HALLOIN. « Straylight to phase coupling LISA-APC-INST-TN-005 ». In : *LISA Consortium* (2019).
- [120] F.J. HARRIS. « On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform ». In : *Proceedings of the IEEE* 66.1 (1978), p. 51-83. DOI : [10.1109/PROC.1978.10837](https://doi.org/10.1109/PROC.1978.10837).

- [121] W. K. HASTINGS. « Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications ». In : *Biometrika* 57.1 (avr. 1970), p. 97-109. ISSN : 0006-3444. DOI : [10.1093/biomet/57.1.97](https://doi.org/10.1093/biomet/57.1.97). eprint : <https://academic.oup.com/biomet/article-pdf/57/1/97/23940249/57-1-97.pdf>. URL : <https://doi.org/10.1093/biomet/57.1.97>.
- [122] M S HERNANDEZ et al. « The White Dwarf Binary Pathways Survey – IV. Three close white dwarf binaries with G-type secondary stars ». In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 501.2 (déc. 2020), p. 1677-1689. ISSN : 1365-2966. DOI : [10.1093/mnras/staa3815](https://doi.org/10.1093/mnras/staa3815). URL : <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/staa3815>.
- [123] M HEWITSON et al. « Data analysis for the LISA Technology Package ». In : *Classical and Quantum Gravity* 26.9 (avr. 2009), p. 094003. DOI : [10.1088/0264-9381/26/9/094003](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/9/094003). URL : <https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/9/094003>.
- [124] Wolfgang HILLEBRANDT et Jens C. NIEMEYER. « Type Ia Supernova Explosion Models ». In : *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 38.1 (2000), p. 191-230. DOI : [10.1146/annurev.astro.38.1.191](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.38.1.191). eprint : <https://doi.org/10.1146/annurev.astro.38.1.191>. URL : <https://doi.org/10.1146/annurev.astro.38.1.191>.
- [125] M. A. HOLLANDS et al. « The Gaia 20 pc white dwarf sample ». In : *MNRAS* 480.3 (nov. 2018), p. 3942-3961. DOI : [10.1093/mnras/sty2057](https://doi.org/10.1093/mnras/sty2057). arXiv : [1805.12590](https://arxiv.org/abs/1805.12590) [astro-ph.SR].
- [126] Philip F. HOPKINS et al. « FIRE-2 simulations : physics versus numerics in galaxy formation ». In : *MNRAS* 480.1 (oct. 2018), p. 800-863. DOI : [10.1093/mnras/sty1690](https://doi.org/10.1093/mnras/sty1690). arXiv : [1702.06148](https://arxiv.org/abs/1702.06148) [astro-ph.GA].
- [127] Philip F. HOPKINS et al. « Galaxies on FIRE (Feedback In Realistic Environments) : stellar feedback explains cosmologically inefficient star formation ». In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 445.1 (sept. 2014), p. 581-603. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1093/mnras/stu1738](https://doi.org/10.1093/mnras/stu1738). eprint : <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/445/1/581/18473138/stu1738.pdf>. URL : <https://doi.org/10.1093/mnras/stu1738>.
- [128] Boyan HRISTOV et al. « Magnetohydrodynamical Effects on Nuclear Deflagration Fronts in Type Ia Supernovae ». In : *The Astrophysical Journal* 858.1 (avr. 2018), p. 13. DOI : [10.3847/1538-4357/aab7f2](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aab7f2). URL : <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aab7f2>.

- [129] Edwin HUBBLE. « A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 15.3 (1929), p. 168-173. ISSN : 0027-8424. DOI : [10.1073/pnas.15.3.168](https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168). eprint : <https://www.pnas.org/content/15/3/168.full.pdf>. URL : <https://www.pnas.org/content/15/3/168>.
- [130] Scott A HUGHES. « Gravitational waves from extreme mass ratio inspirals : challenges in mapping the spacetime of massive, compact objects ». In : *Classical and Quantum Gravity* 18.19 (2001), p. 4067. URL : <http://stacks.iop.org/0264-9381/18/i=19/a=314>.
- [131] R. A. HULSE et J. H. TAYLOR. « Discovery of a pulsar in a binary system ». In : *ApJ* 195 (jan. 1975), p. L51-L53. DOI : [10.1086/181708](https://doi.org/10.1086/181708).
- [132] Jarrod R. HURLEY, Christopher A. TOUT et Onno R. POLS. « Evolution of binary stars and the effect of tides on binary populations ». In : *MNRAS* 329.4 (fév. 2002), p. 897-928. DOI : [10.1046/j.1365-8711.2002.05038.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.05038.x). arXiv : [astro-ph/0201220](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0201220) [[astro-ph](#)].
- [133] Jarrod R. HURLEY, Christopher A. TOUT et Onno R. POLS. « Evolution of binary stars and the effect of tides on binary populations ». In : *MNRAS* 329.4 (fév. 2002), p. 897-928. DOI : [10.1046/j.1365-8711.2002.05038.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.05038.x). arXiv : [astro-ph/0201220](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0201220) [[astro-ph](#)].
- [134] G. H. JANSSEN et al. *Gravitational wave astronomy with the SKA*. 2014. arXiv : [1501.00127](https://arxiv.org/abs/1501.00127) [[astro-ph.IM](#)].
- [135] F. M. JIMÉNEZ-ESTEBAN et al. « A white dwarf catalogue from Gaia-DR2 and the Virtual Observatory ». In : *MNRAS* 480.4 (nov. 2018), p. 4505-4518. DOI : [10.1093/mnras/sty2120](https://doi.org/10.1093/mnras/sty2120). arXiv : [1807.02559](https://arxiv.org/abs/1807.02559) [[astro-ph.SR](#)].
- [136] Nikolaos KARNESIS, Marc LILLEY et Antoine PETITEAU. « Assessing the detectability of a Stochastic Gravitational Wave Background with LISA, using an excess of power approach ». In : *Classical and Quantum Gravity* (2020). URL : <http://iopscience.iop.org/10.1088/1361-6382/abb637>.
- [137] Nikolaos KARNESIS et al. « Characterization of the stochastic signal originating from compact binaries populations as measured by LISA ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :2103.14598 (mar. 2021), arXiv :2103.14598. arXiv : [2103.14598](https://arxiv.org/abs/2103.14598) [[astro-ph.IM](#)].
- [138] Robert E. KASS et Adrian E. RAFTERY. « Bayes Factors ». In : *Journal of the American Statistical Association* 90.430 (1995), p. 773-795. DOI : [10.1080/01621459.1995.10476572](https://doi.org/10.1080/01621459.1995.10476572).

- [139] Steven D. KAWALER. « White Dwarf Stars ». In : *Stellar Remnants*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1997, p. 1-95. ISBN : 978-3-540-31628-2. DOI : [10.1007/3-540-31628-0_1](https://doi.org/10.1007/3-540-31628-0_1). URL : https://doi.org/10.1007/3-540-31628-0_1.
- [140] Roy P. KERR. « Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics ». In : *Phys. Rev. Lett.* 11.5 (sept. 1963), p. 237-238. DOI : [10.1103/PhysRevLett.11.237](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.237).
- [141] Vitalii KHODNEVYCH et al. *Study of the coherent perturbation of a Michelson interferometer due to the return from a scattering surface*. 2018. arXiv : [1809.01904](https://arxiv.org/abs/1809.01904) [astro-ph.IM].
- [142] T. W. B. KIBBLE. « Evolution of a system of cosmic strings ». In : *Nucl. Phys. B* 252 (1985). Sous la dir. de R. BAIER et H. SATZ. [Erratum : *Nucl.Phys.B* 261, 750 (1985)], p. 227. DOI : [10.1016/0550-3213\(85\)90596-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90596-6).
- [143] Edward W. KOLB et Michael S. TURNER. *The Early Universe*. T. 69. 1990. ISBN : 978-0-201-62674-2.
- [144] V. KOROL et al. « Populations of double white dwarfs in Milky Way satellites and their detectability with LISA ». In : *Astronomy & Astrophysics* 638 (juin 2020), A153. ISSN : 1432-0746. DOI : [10.1051/0004-6361/202037764](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202037764). URL : <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/202037764>.
- [145] V. KOROL et al. « Populations of double white dwarfs in Milky Way satellites and their detectability with LISA ». In : *A&A* 638, A153 (juin 2020), A153. DOI : [10.1051/0004-6361/202037764](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202037764). arXiv : [2002.10462](https://arxiv.org/abs/2002.10462) [astro-ph.GA].
- [146] Arthur KOSOWSKY et Michael S. TURNER. « CBR anisotropy and the running of the scalar spectral index ». In : *Phys. Rev. D* 52 (4 août 1995), R1739-R1743. DOI : [10.1103/PhysRevD.52.R1739](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.R1739). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.R1739>.
- [147] J KOVAC et al. « Detection of polarization in the cosmic microwave background using DASI. Degree Angular Scale Interferometer ». In : *Nature* 420 (sept. 2002), p. 772-87. DOI : [10.1038/nature01269](https://doi.org/10.1038/nature01269).
- [148] Andrzej KRÓLAK, Massimo TINTO et Michele VALLISNERI. « Optimal filtering of the LISA data ». In : *Phys. Rev. D* 70 (2 juil. 2004), p. 022003. DOI : [10.1103/PhysRevD.70.022003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.022003). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.022003>.
- [149] T. KUPFER et al. « LISA verification binaries with updated distances from Gaia Data Release 2 ». In : *MNRAS* 480.1 (oct. 2018), p. 302-309. DOI : [10.1093/mnras/sty1545](https://doi.org/10.1093/mnras/sty1545). arXiv : [1805.00482](https://arxiv.org/abs/1805.00482) [astro-ph.SR].

- [150] Thomas KUPFER et al. « The First Ultracompact Roche Lobe-Filling Hot Subdwarf Binary ». In : *ApJ* 891.1, 45 (mar. 2020), p. 45. DOI : [10.3847/1538-4357/ab72ff](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab72ff). arXiv : [2002.01485](https://arxiv.org/abs/2002.01485) [[astro-ph.SR](#)].
- [151] S. KUROYANAGI, T. CHIBA et T. TAKAHASHI. « Probing the Universe through the Stochastic Gravitational Wave Background ». In : *arXiv : Cosmology and Nongalactic Astrophysics* (2018).
- [152] Sachiko KUROYANAGI, Takeshi CHIBA et Tomo TAKAHASHI. « Probing the Universe through the Stochastic Gravitational Wave Background ». In : *JCAP* 11 (2018), p. 038. DOI : [10.1088/1475-7516/2018/11/038](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/11/038). arXiv : [1807.00786](https://arxiv.org/abs/1807.00786) [[astro-ph.CO](#)].
- [153] Sachiko KUROYANAGI, Takeshi CHIBA et Tomo TAKAHASHI. « Probing the Universe through the stochastic gravitational wave background ». In : *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2018.11, 038 (nov. 2018), p. 038. DOI : [10.1088/1475-7516/2018/11/038](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/11/038). arXiv : [1807.00786](https://arxiv.org/abs/1807.00786) [[astro-ph.CO](#)].
- [154] Astrid LAMBERTS et al. « Predicting the LISA white dwarf binary population in the Milky Way with cosmological simulations ». In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 490.4 (oct. 2019), p. 5888-5903. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1093/mnras/stz2834](https://doi.org/10.1093/mnras/stz2834). eprint : <http://oup.prod.sis.lan/mnras/article-pdf/490/4/5888/30995029/stz2834.pdf>. URL : <https://doi.org/10.1093/mnras/stz2834>.
- [155] Glenn LEDREW. « The Real Starry Sky ». In : *J. R. Astron. Soc. Canada* 95 (fév. 2001), p. 32.
- [156] G. LEMAÎTRE. « Republication of : The dynamics of general relativity ». In : *General Relativity and Gravitation* 40.9 (août 2008), p. 1997-2027. ISSN : 1572-9532. DOI : [10.1007/s10714-008-0661-1](https://doi.org/10.1007/s10714-008-0661-1). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-008-0661-1>.
- [157] G. LEMAÎTRE. « Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques ». In : *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* 47 (jan. 1927), p. 49-59.
- [158] Lev Pitaevskii (en) LEV LANDAU Evguéni Lifchitz et Vladimir BERESTETSKII. *Physique théorique : Électrodynamique quantique (2e)*. Français. Éditions Mir, 1989. ISBN : 5-03-000642-7.
- [159] LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION et THE VIRGO COLLABORATION. « A guide to LIGO-Virgo detector noise and extraction of transient gravitational-wave signals ». In : *Classical and Quantum Gravity* 37.5, 055002 (mar. 2020), p. 055002. DOI : [10.1088/1361-6382/ab685e](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab685e).

- [160] LISA DATA CHALLENGE WORKING GROUP. *LISA Data Challenges*. <https://lisa-ldc.lal.in2p3.fr>. 2019.
- [161] LISA INSTRUMENT GROUP. « Design description : LISA Payload Definition Document ESA-L3-EST-INST-DD-001 ». In : *LISA Consortium* (mai 2018).
- [162] Larissa LORENZ, Christophe RINGEVAL et Mairi SAKELLARIADOU. « Cosmic string loop distribution on all length scales and at any redshift ». In : *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2010.10 (oct. 2010), p. 003-003. ISSN : 1475-7516. DOI : [10.1088/1475-7516/2010/10/003](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2010/10/003). URL : <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2010/10/003>.
- [163] Nicholas LOUTREL et Nicolás YUNES. « Eccentric gravitational wave bursts in the post-Newtonian formalism ». In : *Classical and Quantum Gravity* 34.13 (juin 2017), p. 135011. ISSN : 1361-6382. DOI : [10.1088/1361-6382/aa7449](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa7449). URL : <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aa7449>.
- [164] David LUNN. *The BUGS book : a practical introduction to Bayesian analysis*. Texts in statistical science. 2013. ISBN : 9781466586666.
- [165] Berta MARGALEF-BENTABOL, Juan MARGALEF-BENTABOL et Jordi CEPÀ. « Evolution of the cosmological horizons in a universe with countably infinitely many state equations ». In : *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2013.02 (fév. 2013), p. 015-015. ISSN : 1475-7516. DOI : [10.1088/1475-7516/2013/02/015](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/02/015). URL : <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2013/02/015>.
- [166] MARTINO, JOSEPH. et *et al.* *LISA Performance Model and Error Budget LISA-LCST-INST-TN-003*. Rapp. tech. APC, 2020.
- [167] "Joseph MARTINO" et Antoine PETITEAU. « LISA Single Link and Correlation LISA-XXX-XXX-TN-XXX ». In : *"LISA Consortium"* (2019).
- [168] Katarina MARTINOVIC et al. « Simultaneous estimation of astrophysical and cosmological stochastic gravitational-wave backgrounds with terrestrial detectors ». In : *arXiv e-prints* (nov. 2020). arXiv : [2011.xxxxx](https://arxiv.org/abs/2011.xxxxx) [gr-qc].
- [169] L. E. MENDES, A. B. HENRIQUES et R. G. MOORHOUSE. « Exact calculation of the energy density of cosmological gravitational waves ». In : *Phys. Rev. D* 52.4 (août 1995), p. 2083-2088. DOI : [10.1103/PhysRevD.52.2083](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.2083). arXiv : [gr-qc/9410033](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9410033) [gr-qc].
- [170] Nicholas METROPOLIS et al. « Equation of State Calculations by Fast Computing Machines ». In : *J. Chem. Phys.* 21.6 (juin 1953), p. 1087-1092. DOI : [10.1063/1.1699114](https://doi.org/10.1063/1.1699114).

- [171] Renate MEYER. « Deviance Information Criterion (DIC) ». In : *Wiley StatsRef : Statistics Reference Online*. Wiley & Sons, 2016, p. 1-6. ISBN : 9781118445112. DOI : <https://doi.org/10.1002/9781118445112.stat07878>.
- [172] Patrick M. MEYERS et al. « Detecting a stochastic gravitational-wave background in the presence of correlated magnetic noise ». In : *arXiv e-prints* (août 2020). arXiv : [2008.00789 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/2008.00789).
- [173] Charles W. MISNER, Kip S. THORNE et John A. WHEELER. *Gravitation*. 1973.
- [174] C J MOORE, R H COLE et C P L BERRY. « Gravitational-wave sensitivity curves ». In : *Classical and Quantum Gravity* 32.1 (déc. 2014), p. 015014. ISSN : 1361-6382. DOI : [10.1088/0264-9381/32/1/015014](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/1/015014). URL : <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/32/1/015014>.
- [175] NANOGRAV COLLABORATION. « Science with the Next-Generation VLA and Pulsar Timing Arrays ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :1810.06594 (oct. 2018), arXiv :1810.06594. arXiv : [1810.06594 \[astro-ph.IM\]](https://arxiv.org/abs/1810.06594).
- [176] Ralf NAPIWOTZKI. « The galactic population of white dwarfs ». In : *Journal of Physics Conference Series*. T. 172. Journal of Physics Conference Series. Juin 2009, p. 012004. DOI : [10.1088/1742-6596/172/1/012004](https://doi.org/10.1088/1742-6596/172/1/012004). arXiv : [0903.2159 \[astro-ph.SR\]](https://arxiv.org/abs/0903.2159).
- [177] G. NELEMANS et C. A. TOUT. « Reconstructing the evolution of white dwarf binaries : further evidence for an alternative algorithm for the outcome of the common-envelope phase in close binaries ». In : *MNRAS* 356.2 (jan. 2005), p. 753-764. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2004.08496.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.08496.x). arXiv : [astro-ph/0410301 \[astro-ph\]](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0410301).
- [178] G. NELEMANS et al. « Population synthesis for double white dwarfs ». In : *A&A* 365.3 (jan. 2001), p. 491-507. ISSN : 1432-0746. DOI : [10.1051/0004-6361:20000147](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20000147). URL : <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20000147>.
- [179] Savvas NESSERIS et Juan GARCIA-BELLIDO. « Is the Jeffreys' scale a reliable tool for Bayesian model comparison in cosmology ? » In : *J. Cosmology Astropart. Phys.* 2013.8, 036 (août 2013), p. 036. DOI : [10.1088/1475-7516/2013/08/036](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/08/036). arXiv : [1210.7652 \[astro-ph.CO\]](https://arxiv.org/abs/1210.7652).
- [180] I. NEWTON. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater, 1687. URL : <https://books.google.fr/books?id=dVKAQAIAAJ>.
- [181] H.B. NIELSEN et P. OLESEN. « Vortex-line models for dual strings ». In : *Nuclear Physics B* 61 (1973), p. 45-61. ISSN : 0550-3213. DOI : [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(73\)90350-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(73)90350-7). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321373903507>.

- [182] Samaya NISSANKE et al. « Gravitational-wave Emission from Compact Galactic Binaries ». In : *ApJ* 758.2, 131 (oct. 2012), p. 131. DOI : [10.1088/0004-637X/758/2/131](https://doi.org/10.1088/0004-637X/758/2/131). arXiv : [1201.4613](https://arxiv.org/abs/1201.4613) [[astro-ph.GA](#)].
- [183] A.V. OPPENHEIM et G.C. VERGHESE. *Signals, Systems and Inference : Class Notes for 6.011, Introduction to Communication, Control and Signal Processing*. 2010. URL : <https://books.google.fr/books?id=E-NMtAEACAAJ>.
- [184] Abhishek PARIDA, Sanjit MITRA et Sanjay JHINGAN. « Component separation of a isotropic Gravitational Wave Background ». In : *JCAP* 2016.4, 024 (avr. 2016), p. 024. DOI : [10.1088/1475-7516/2016/04/024](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/04/024). arXiv : [1510.07994](https://arxiv.org/abs/1510.07994) [[astro-ph.CO](#)].
- [185] A. A. PENZIAS et R. W. WILSON. « A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. » In : *ApJ* 142 (juil. 1965), p. 419-421. DOI : [10.1086/148307](https://doi.org/10.1086/148307).
- [186] C. PÉRIGOIS et al. « StarTrack predictions of the stochastic gravitational-wave background from compact binary mergers ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :2008.04890 (août 2020), arXiv :2008.04890. arXiv : [2008.04890](https://arxiv.org/abs/2008.04890) [[astro-ph.CO](#)].
- [187] Laurence PEROTTO. « Effet de lentilles gravitationnelles et polarisation du fond-diffus cosmologique dans le cadre de l'expérience PLANCK et de projets post-planckiens. » Theses. Université Paris-Diderot - Paris VII, jan. 2006. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011916>.
- [188] P. C. PETERS et J. MATHEWS. « Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit ». In : *Phys. Rev.* 131 (1 juil. 1963), p. 435-440. DOI : [10.1103/PhysRev.131.435](https://doi.org/10.1103/PhysRev.131.435). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.435>.
- [189] E. S. PHINNEY. « A Practical Theorem on Gravitational Wave Backgrounds ». In : *arXiv e-prints*, astro-ph/0108028 (août 2001), astro-ph/0108028. arXiv : [astro-ph/0108028](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0108028) [[astro-ph](#)].
- [190] Mauro PIERONI et Enrico BARAUSSE. « Foreground cleaning and template-free stochastic background extraction for LISA ». In : *JCAP* 07 (2020). [Erratum : *JCAP* 09, E01 (2020)], p. 021. DOI : [10.1088/1475-7516/2020/07/021](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/07/021). arXiv : [2004.01135](https://arxiv.org/abs/2004.01135) [[astro-ph.CO](#)].
- [191] Mauro PIERONI et Enrico BARAUSSE. « Foreground cleaning and template-free stochastic background extraction for LISA ». In : *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2020.07 (juil. 2020), p. 021-021. DOI : [10.1088/1475-7516/2020/07/021](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/07/021). URL : <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/07/021>.
- [192] F. A. E. PIRANI. « Invariant Formulation of Gravitational Radiation Theory ». In : *Phys. Rev.* 105 (3 fév. 1957), p. 1089-1099. DOI : [10.1103/PhysRev.105.1089](https://doi.org/10.1103/PhysRev.105.1089). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.105.1089>.

- [193] PLANCK COLLABORATION et al. « Planck 2013 results. XV. CMB power spectra and likelihood ». In : *A&A* 571, A15 (nov. 2014), A15. DOI : [10.1051/0004-6361/201321573](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321573). arXiv : [1303.5075](https://arxiv.org/abs/1303.5075) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1303.5075)].
- [194] PLANCK COLLABORATION et al. « Planck 2018 results - VI. Cosmological parameters ». In : *A&A* 641 (2020), A6. DOI : [10.1051/0004-6361/201833910](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910). URL : <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>.
- [195] PLANCK COLLABORATION et al. « Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck ». In : *A&A* 641, A1 (sept. 2020), A1. DOI : [10.1051/0004-6361/201833880](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833880). arXiv : [1807.06205](https://arxiv.org/abs/1807.06205) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1807.06205)].
- [196] PLANCK COLLABORATION et al. « Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters ». In : *A&A* 641, A6 (sept. 2020), A6. DOI : [10.1051/0004-6361/201833910](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910). arXiv : [1807.06209](https://arxiv.org/abs/1807.06209) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1807.06209)].
- [197] J. E. PLOWMAN et al. « Constraining the black hole mass spectrum with gravitational wave observations - I. The error kernel ». In : *MNRAS* 401 (fév. 2010), p. 2706-2714. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2009.15853.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15853.x). arXiv : [0903.2059](https://arxiv.org/abs/0903.2059).
- [198] Thomas A. PRINCE et al. « LISA optimal sensitivity ». In : *Phys. Rev. D* 66 (12 déc. 2002), p. 122002. DOI : [10.1103/PhysRevD.66.122002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.122002). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.122002>.
- [199] M PUNTURO et al. « The Einstein Telescope : a third-generation gravitational wave observatory ». In : *Classical and Quantum Gravity* 27.19 (sept. 2010), p. 194002. DOI : [10.1088/0264-9381/27/19/194002](https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/19/194002). URL : <https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/19/194002>.
- [200] V I PUSTOVOIT et M E GERTSENSHTEIN. « GRAVITATIONAL RADIATION BY A RELATIVISTIC PARTICLE ». In : *Zhur. Eksptl'. i Teoret. Fiz.* Vol : 42 (jan. 1962). URL : <https://www.osti.gov/biblio/4788263>.
- [201] T. REGIMBAU et al. « Digging Deeper : Observing Primordial Gravitational Waves below the Binary-Black-Hole-Produced Stochastic Background ». In : *Phys. Rev. Lett.* 118 (15 avr. 2017), p. 151105. DOI : [10.1103/PhysRevLett.118.151105](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.151105). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.151105>.
- [202] Tania REGIMBAU. « The astrophysical gravitational wave stochastic background ». In : *Res. Astron. Astrophys.* 11 (2011), p. 369-390. DOI : [10.1088/1674-4527/11/4/001](https://doi.org/10.1088/1674-4527/11/4/001). arXiv : [1101.2762](https://arxiv.org/abs/1101.2762) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1101.2762)].
- [203] Tania REGIMBAU. « The astrophysical gravitational wave stochastic background ». In : *Research in Astronomy and Astrophysics* 11.4 (avr. 2011), p. 369-390. DOI : [10.1088/1674-4527/11/4/001](https://doi.org/10.1088/1674-4527/11/4/001). arXiv : [1101.2762](https://arxiv.org/abs/1101.2762) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1101.2762)].

- [204] David REITZE et al. « Cosmic Explorer : The U.S. Contribution to Gravitational-Wave Astronomy beyond LIGO ». In : *Bull. Am. Astron. Soc.* 51 (juil. 2019), p. 035. arXiv : [1907.04833](https://arxiv.org/abs/1907.04833) [[astro-ph.IM](#)].
- [205] David REITZE et al. *Cosmic Explorer : The U.S. Contribution to Gravitational-Wave Astronomy beyond LIGO*. 2019. arXiv : [1907.04833](https://arxiv.org/abs/1907.04833) [[astro-ph.IM](#)].
- [206] W. RINDLER. « Visual Horizons in World Models ». In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 116.6 (déc. 1956), p. 662-677. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1093/mnras/116.6.662](https://doi.org/10.1093/mnras/116.6.662). eprint : <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/116/6/662/8077949/mnras116-0662.pdf>. URL : <https://doi.org/10.1093/mnras/116.6.662>.
- [207] Gareth O. ROBERTS et Jeffrey S. ROSENTHAL. « Examples of Adaptive MCMC ». In : *Journal of Computational and Graphical Statistics* 18.2 (2009), p. 349-367. DOI : [10.1198/jcgs.2009.06134](https://doi.org/10.1198/jcgs.2009.06134). eprint : <https://doi.org/10.1198/jcgs.2009.06134>. URL : <https://doi.org/10.1198/jcgs.2009.06134>.
- [208] Travis ROBSON, Neil J CORNISH et Chang LIU. « The construction and use of LISA sensitivity curves ». In : *Classical and Quantum Gravity* 36.10 (avr. 2019), p. 105011. DOI : [10.1088/1361-6382/ab1101](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab1101). URL : <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab1101>.
- [209] Elinore ROEBBER et al. « Milky Way Satellites Shining Bright in Gravitational Waves ». In : *ApJ* 894.2, L15 (mai 2020), p. L15. DOI : [10.3847/2041-8213/ab8ac9](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab8ac9). arXiv : [2002.10465](https://arxiv.org/abs/2002.10465) [[astro-ph.GA](#)].
- [210] Joseph D. ROMANO. *Searches for stochastic gravitational-wave backgrounds*. 2019. arXiv : [1909.00269](https://arxiv.org/abs/1909.00269) [[gr-qc](#)].
- [211] Joseph D. ROMANO et Neil. J. CORNISH. « Detection methods for stochastic gravitational-wave backgrounds : a unified treatment ». In : *Living Reviews in Relativity* 20.1 (avr. 2017), p. 2. ISSN : 1433-8351. DOI : [10.1007/s41114-017-0004-1](https://doi.org/10.1007/s41114-017-0004-1). URL : <https://doi.org/10.1007/s41114-017-0004-1>.
- [212] V.A. RUBAKOV, M.V. SAZHIN et A.V. VERYASKIN. « Graviton creation in the inflationary universe and the grand unification scale ». In : *Physics Letters B* 115.3 (1982), p. 189-192. ISSN : 0370-2693. DOI : [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90641-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90641-4). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382906414>.
- [213] Ashley J. RUITER et al. « THE LISAGRAVITATIONAL WAVE FOREGROUND : A STUDY OF DOUBLE WHITE DWARFS ». In : *The Astrophysical Journal* 717.2 (juin 2010), p. 1006-1021. DOI : [10.1088/0004-637x/717/2/1006](https://doi.org/10.1088/0004-637x/717/2/1006). URL : <https://doi.org/10.1088/0004-637x/717/2/1006>.

- [214] Robyn E. SANDERSON et al. « Synthetic Gaia Surveys from the FIRE Cosmological Simulations of Milky Way-mass Galaxies ». In : *ApJS* 246.1, 6 (jan. 2020), p. 6. DOI : [10.3847/1538-4365/ab5b9d](https://doi.org/10.3847/1538-4365/ab5b9d). arXiv : [1806.10564](https://arxiv.org/abs/1806.10564) [astro-ph.GA].
- [215] Josep SANJUÁN MUÑOZ. « Development and validation of the thermal diagnostics instrumentation in LISA Pathfinder. » Thèse de doct. Universitat Politècnica de Catalunya, 2009.
- [216] Isabel Escudero SANZ, Astrid HESKE et Jeffrey C. LIVAS. « A telescope for LISA – the Laser Interferometer Space Antenna ». In : *Advanced Optical Technologies* 7.6 (2018), p. 395-400. DOI : [doi : 10.1515/aot-2018-0044](https://doi.org/10.1515/aot-2018-0044). URL : <https://doi.org/10.1515/aot-2018-0044>.
- [217] Roland SCHILLING. « Angular and frequency response of LISA ». In : *Classical and Quantum Gravity* 14.6 (juin 1997), p. 1513-1519. DOI : [10.1088/0264-9381/14/6/020](https://doi.org/10.1088/0264-9381/14/6/020). URL : <https://doi.org/10.1088/0264-9381/14/6/020>.
- [218] Karl SCHWARZSCHILD. « Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie ». In : *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* (jan. 1916), p. 189-196.
- [219] Ashish SHARMA et Jan HARMS. « Searching for cosmological gravitational-wave backgrounds with third-generation detectors in the presence of an astrophysical foreground ». In : *Phys. Rev. D* 102 (6 sept. 2020), p. 063009. DOI : [10.1103/PhysRevD.102.063009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.063009). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.063009>.
- [220] Julie N. SKINNER et al. « Activity and Kinematics of White Dwarf-M Dwarf Binaries from the SUPERBLINK Proper Motion Survey ». In : *The Astronomical Journal* 154.3 (août 2017), p. 118. DOI : [10.3847/1538-3881/aa83b5](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa83b5). URL : <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa83b5>.
- [221] Rory SMITH et Eric THRANE. « Optimal Search for an Astrophysical Gravitational-Wave Background ». In : *Phys. Rev. X* 8.2 (2018), p. 021019. DOI : [10.1103/PhysRevX.8.021019](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.8.021019). arXiv : [1712.00688](https://arxiv.org/abs/1712.00688) [gr-qc].
- [222] Tristan L. SMITH et Robert R. CALDWELL. « LISA for cosmologists : Calculating the signal-to-noise ratio for stochastic and deterministic sources ». In : *Phys. Rev. D* 100 (10 nov. 2019), p. 104055. DOI : [10.1103/PhysRevD.100.104055](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.104055). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.104055>.
- [223] George F. SMOOT. « COBE observations and results ». In : *3K cosmology*. Sous la dir. de Luciano MAIANI, Francesco MELCHIORRI et Nicola VITTORIO. T. 476. American Institute of Physics Conference Series. Mai 1999, p. 1-10. DOI : [10.1063/1.59326](https://doi.org/10.1063/1.59326). arXiv : [astro-ph/9902027](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9902027) [astro-ph].

- [224] David J. SPIEGELHALTER et al. « Bayesian measures of model complexity and fit ». In : *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)* 64.4 (2002), p. 583-639. DOI : <https://doi.org/10.1111/1467-9868.00353>.
- [225] David J. SPIEGELHALTER et al. « The deviance information criterion : 12 years on ». In : *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)* 76.3 (2014), p. 485-493. ISSN : 13697412, 14679868.
- [226] Alexei A. STAROBINSKY. « Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe ». In : *JETP Lett.* 30 (1979). Sous la dir. d'I. M. KHALATNIKOV et V. P. MINEEV, p. 682-685.
- [227] R. A. SUNYAEV et Ya. B. ZELDOVICH. « Small-Scale Fluctuations of Relic Radiation ». In : *Ap&SS* 7.1 (avr. 1970), p. 3-19. DOI : [10.1007/BF00653471](https://doi.org/10.1007/BF00653471).
- [228] J. H. TAYLOR et J. M. WEISBERG. « A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16 ». In : *ApJ* 253 (fév. 1982), p. 908-920. DOI : [10.1086/159690](https://doi.org/10.1086/159690).
- [229] LISA Pathfinder Science Working TEAM. « Publication date : 23 January 2007 ». In : *ESA* (jan. 2007), p. 25. URL : <https://sci.esa.int/web/lisa-pathfinder/-/40572-the-science-case-for-lisa-pathfinder>.
- [230] Kip S. THORNE. « Multipole expansions of gravitational radiation ». In : *Rev. Mod. Phys.* 52 (2 avr. 1980), p. 299-339. DOI : [10.1103/RevModPhys.52.299](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.52.299). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.52.299>.
- [231] Eric THRANE, Nelson CHRISTENSEN et Robert SCHOFIELD. « Correlated magnetic noise in global networks of gravitational-wave interferometers : observations and implications ». In : *Phys. Rev. D* 87 (2013), p. 123009. DOI : [10.1103/PhysRevD.87.123009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.123009). arXiv : [1303.2613](https://arxiv.org/abs/1303.2613) [astro-ph.IM].
- [232] Eric THRANE et Joseph D. ROMANO. « Sensitivity curves for searches for gravitational-wave backgrounds ». In : *Phys. Rev. D* 88.12, 124032 (déc. 2013), p. 124032. DOI : [10.1103/PhysRevD.88.124032](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.124032). arXiv : [1310.5300](https://arxiv.org/abs/1310.5300) [astro-ph.IM].
- [233] Seth E. TIMPANO, Louis J. RUBBO et Neil J. CORNISH. « Characterizing the galactic gravitational wave background with LISA ». In : *Phys. Rev. D* 73 (12 juin 2006), p. 122001. DOI : [10.1103/PhysRevD.73.122001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.122001). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.122001>.
- [234] Pierre TOUBOUL et al. « MICROSCOPE Mission : First Results of a Space Test of the Equivalence Principle ». In : *Phys. Rev. Lett.* 119 (23 déc. 2017), p. 231101. DOI : [10.1103/PhysRevLett.119.231101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.231101). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.231101>.

- [235] Carlo UNGARELLI et Alberto VECCHIO. « A family of filters to search for frequency-dependent gravitational wave stochastic backgrounds ». In : *Classical and Quantum Gravity* 21.5 (fév. 2004), S857-S860. DOI : [10.1088/0264-9381/21/5/072](https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/5/072). URL : <https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/5/072>.
- [236] Carlo UNGARELLI et Alberto VECCHIO. « Studying the anisotropy of the gravitational wave stochastic background with LISA ». In : *Phys. Rev. D* 64 (12 nov. 2001), p. 121501. DOI : [10.1103/PhysRevD.64.121501](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.121501). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.121501>.
- [237] J.P. UZAN et P. PETER. *Cosmologie primordiale*. Échelles. Humensis, 2015. ISBN : 9782701178240. URL : <https://books.google.fr/books?id=owiWDgAAQBAJ>.
- [238] Michele VALLISNERI et Chad R GALLEY. « Non-sky-averaged sensitivity curves for space-based gravitational-wave observatories ». In : *Classical and Quantum Gravity* 29.12 (juin 2012), p. 124015. DOI : [10.1088/0264-9381/29/12/124015](https://doi.org/10.1088/0264-9381/29/12/124015). URL : <https://doi.org/10.1088/0264-9381/29/12/124015>.
- [239] J. P. W. VERBIEST et al. « The International Pulsar Timing Array : First data release ». In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 458.2 (fév. 2016), p. 1267-1288. ISSN : 1365-2966. DOI : [10.1093/mnras/stw347](http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stw347). URL : <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stw347>.
- [240] Pauli VIRTANEN et al. « SciPy 1.0 : Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python ». In : *Nature Methods* 17 (2020), p. 261-272. DOI : [10.1038/s41592-019-0686-2](https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2).
- [241] Brian WARNER. *Cataclysmic Variable Stars*. Cambridge Astrophysics. Cambridge University Press, 1995. DOI : [10.1017/CB09780511586491](https://doi.org/10.1017/CB09780511586491).
- [242] R. F. WEBBINK. « Double white dwarfs as progenitors of R Coronae Borealis stars and type I supernovae. » In : *ApJ* 277 (fév. 1984), p. 355-360. DOI : [10.1086/161701](https://doi.org/10.1086/161701).
- [243] J. WEBER. « Evidence for Discovery of Gravitational Radiation ». In : *Phys. Rev. Lett.* 22.24 (juin 1969), p. 1320-1324. DOI : [10.1103/PhysRevLett.22.1320](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.22.1320).
- [244] J. WEBER. « Observation of the Thermal Fluctuations of a Gravitational-Wave Detector ». In : *Phys. Rev. Lett.* 17 (24 déc. 1966), p. 1228-1230. DOI : [10.1103/PhysRevLett.17.1228](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.17.1228). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.17.1228>.
- [245] *Website of the collaboration LISA*. <https://www.elisascience.org>.

- [246] J. M. WEISBERG et J. H. TAYLOR. « The Relativistic Binary Pulsar B1913+16 : Thirty Years of Observations and Analysis ». In : *Binary Radio Pulsars*. Sous la dir. de Fred A. RASIO et Ingrid H. STAIRS. T. 328. Astronomical Society of the Pacific Conference Series. Juil. 2005, p. 25. arXiv : [astro-ph/0407149](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0407149) [[astro-ph](#)].
- [247] J. M. WEISBERG, J. H. TAYLOR et L. A. FOWLER. « GRAVITATIONAL WAVES FROM AN ORBITING PULSAR ». In : *Sci. Am.* 245 (1981), p. 66-74. DOI : [10.1038/scientificamerican1081-74](https://doi.org/10.1038/scientificamerican1081-74).
- [248] Rainer WEISS. « Electronically Coupled Broadband Gravitational Antenna ». In : *Quarterly Progress Report, Research Laboratory of Electronics (MIT)* 105.54 (1972). URL : <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.460.9685&rep=rep1&type=pdf>.
- [249] Andrew R. WETZEL et al. « Reconciling Dwarf Galaxies with Λ CDM Cosmology : Simulating a Realistic Population of Satellites around a Milky Way-mass Galaxy ». In : *ApJ* 827.2, L23 (août 2016), p. L23. DOI : [10.3847/2041-8205/827/2/L23](https://doi.org/10.3847/2041-8205/827/2/L23). arXiv : [1602.05957](https://arxiv.org/abs/1602.05957) [[astro-ph.GA](#)].
- [250] P. WHITTLE. *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*. Statistics / Uppsala universitet. Almqvist & Wiksells boktr., 1951. ISBN : 9780598919823. URL : https://books.google.fr/books?id=nE%5C_QAAAAMAAJ.
- [251] N. WIENER. *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, with Engineering Applications*. Martino Fine Books, 2013. ISBN : 9781614275176. URL : <https://books.google.fr/books?id=bqFnngEACAAJ>.
- [252] Ya. B. ZEL'DOVICH, V. G. KURT et R. A. SYUNYAEV. « Recombination of Hydrogen in the Hot Model of the Universe ». In : *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* 28 (jan. 1969), p. 146.
- [253] Yuetong ZHAO et Youjun LU. « Stochastic gravitational wave background and eccentric stellar compact binaries ». In : *MNRAS* 500.1 (jan. 2021), p. 1421-1436. DOI : [10.1093/mnras/staa2707](https://doi.org/10.1093/mnras/staa2707). arXiv : [2009.01436](https://arxiv.org/abs/2009.01436) [[astro-ph.HE](#)].
- [254] F. ZWICKY. « On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae ». In : *ApJ* 86 (oct. 1937), p. 217. DOI : [10.1086/143864](https://doi.org/10.1086/143864).