



HAL
open science

Conception multi-échelle de structures électro-mécaniques non linéaires pour le contrôle et la maîtrise des transferts d'énergie

Vinciane Guillot

► **To cite this version:**

Vinciane Guillot. Conception multi-échelle de structures électro-mécaniques non linéaires pour le contrôle et la maîtrise des transferts d'énergie. Dynamique, vibrations. Université de Lyon, 2020. Français. NNT : 2020LYSET018 . tel-03455248

HAL Id: tel-03455248

<https://theses.hal.science/tel-03455248>

Submitted on 29 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
opérée au sein de
l'École Nationale des Travaux Publics de l'État

École Doctorale N° 162
Mécanique - Énergétique - Génie Civil - Acoustique
Spécialité de doctorat : Génie Civil

Soutenue publiquement le 14/12/2020 par :
Vinciane GUILLOT

**CONCEPTION MULTI-ÉCHELLE DE STRUCTURES
ÉLECTRO-MÉCANIQUES NON LINÉAIRES POUR LE CONTRÔLE ET LA
MAÎTRISE DES TRANSFERTS D'ÉNERGIE**

devant le jury composé de :

<i>Président :</i>	Manuel COLLET	- CNRS, LTDS
<i>Rapporteurs :</i>	Noureddine BOUHADDI	- Univ Franche-Comté, FEMTO-ST
	Jean-François DEÛ	- CNAM, LMSSC
<i>Examineurs :</i>	Maryam GHANDCHI-TEHRANI	- Univ Southampton, ISVR
	Claude-Henri LAMARQUE	- ENTPE, LTDS
	Alireza TURE SAVADKOOHI	- ENTPE, LTDS

Remerciements

Un travail de thèse correspondant à plusieurs années remplies d'embûches, on se retrouve nécessairement accompagné sur ce long chemin. Les difficultés rencontrées nous poussent à demander de l'aide, chercher des oreilles attentives pour épancher nos peines ou tout simplement éloigner nos problèmes en partageant de bons moments. Je tiens donc à remercier les personnes qui m'ont entourées durant ces années de thèse, et, veuillez m'excuser par avance pour les omissions éventuelles dans ces remerciements. J'ai eu la chance d'être bien escortée, si je ne vous nomme pas ici pardonnez moi et soyez assuré que je ne vous oublierai pas.

Tout d'abord, je voudrais remercier mes directeurs de thèse, Messieurs Claude-Henri Lamarque et Alireza Ture Savadkoohi, sans qui ce travail n'aurait pu aboutir. Les conseils, soutiens et surtout le temps qu'ils m'ont accordé ont été salvateurs pour mener à bien ce projet, et je les remercie de la chance qu'ils m'ont donnée d'effectuer un doctorat.

Je souhaite remercier monsieur Olivier Thomas pour m'avoir accueillie au sein de son laboratoire et m'avoir autorisée à y mener mes expériences. Sa disponibilité et ses connaissances ont été déterminantes pour mes travaux. Tout comme celles de Messieurs Mathieu Colin et Arthur Givois qui m'ont accompagnés pour mener à bien ces tests expérimentaux. Je remercie également leurs collaborateurs au CNAM à Paris qui ont créé les structures que j'ai utilisées.

Je tiens aussi à remercier les docteurs et doctorants qui m'ont aidés soit en partageant leurs connaissances scientifiques ou astuces, soit en discutant de leurs différentes expériences de thèse : Messieurs Mathieu Weiss et Simon Charlemagne qui ont suivi ce chemin avant moi, Mesdames Diala Bitar et Soukaina El Jirari avec qui j'ai partagé mon bureau et bien d'autres choses, et les doctorants de l'ALDDENTPE qui ont animés les WEIs, les barbecues et les afterworks.

Merci aussi à mes amis, pour leur soutien inconditionnel et les bons moments que nous avons et que nous continuerons à partager. J'ai de la chance de vous avoir. Alors, à la team bordelaise : Célia, Marganne, Mathilde, Mélanie et Nina merci pour m'avoir écoutée et accompagnée. À ma joyeuse bande du CCP : Antoine, Damien, Gabin, Louise, Martin, Méryl, Titouan, aux 3 Art'atouille Gui, Lucas, Mélanie, Valou, Tantan et tous les autres, lyonnais (ou non), merci pour toutes ces soirées, restos, après-midi jeux, randonnées et autres activités. Et surtout merci à ma colocataire Sophia Vauclin qui a partagé toutes mes aventures durant ces trois années.

Je veux également remercier mon compagnon, Anthony, qui m'a souvent écouté et dont le soulagement lorsque ce travail sera fini sera au moins égal (voir supérieur) au mien. Pour terminer, je remercie ma famille, mes grand parents, papa, maman, mes frères et leurs compagnes, qui ont toujours été présents. Votre soutien a été essentiel et passer du temps avec vous est toujours une source de bien être revigorante. Les petits nouveaux (déjà là ou à venir) sont pour moi une source de joie permanente.

Résumé

Les travaux sur les matériaux piézoélectriques (qui peuvent transformer l'énergie électrique en énergie mécanique et inversement) utilisés afin de contrôler ou récupérer l'énergie de structures principales, sont nombreux. Dans un premier temps, on a supposé qu'ils ne possédaient qu'un comportement linéaire, avant que la prise en compte de leurs non linéarités émerge. Des circuits classiques linéaires ont été optimisés pour le contrôle vibratoire et la récupération d'énergie, mais dans les dernières décennies, des circuits non linéaires ont démontré leur efficacité supérieure. Ce travail a pour objectif l'écriture d'un modèle qui permette la conception d'un système électro-mécanique non linéaire pour l'atténuation des vibrations ou la récupération d'énergie.

Premièrement, je me suis attachée à obtenir les équations dynamiques non linéaires du système composé d'une poutre cantilever avec des matériaux piézoélectriques collés dessus. Dans ces équations on prend en compte les non linéarités géométriques de la poutre, mais aussi les non linéarités matérielles des patches piézoélectriques. Une analyse modale est effectuée pour identifier les pulsations propres et les déformées modales de la structure. Des résultats analytico-numériques mettent en évidence la possibilité de créer des résonances internes entre les modes propres de la structure via le positionnement des matériaux sur celle-ci. Une analyse par la méthode des échelles multiples sur des modèles réduits permet de montrer les échanges d'énergie possibles entre les modes concernés par ces résonances internes. Puis, des résultats expérimentaux sont présentés. Ces derniers viennent valider les développements analytiques tels que la création de résonances internes, la modification des déflexions modales, le comportement non linéaire de la structure et les échanges d'énergie lorsqu'il existe une résonance 1 : 3 entre deux modes propres. Finalement, une étude analytique est menée sur une poutre avec un patch piézoélectrique qui est relié à un circuit électrique non linéaire comportant un terme cubique. Deux systèmes sont étudiés : l'un où la structure ne présente pas de résonances internes, et l'autre lorsqu'il existe une résonance 1 : 3. Des méthodes analytiques effectuées sur les modèles réduits, permettent d'analyser les réponses du système à différentes échelles de temps, et d'identifier les régimes périodiques, quasi-périodiques et chaotiques. On examine alors les effets des différents composants électriques sur la réponse de la structure et on montre comment ils peuvent être choisis pour obtenir les comportements souhaités pour le système. Il est démontré que le circuit non linéaire change la nature des échanges d'énergie des modes résonants. Il peut même équilibrer leurs énergies, d'où des applications pour le contrôle ou la récupération d'énergie. Une comparaison avec un absorbeur linéaire est présentée pour confirmer les performances d'un potentiel absorbeur non linéaire.

Mots clés : contrôle vibratoire, récupération d'énergie, matériaux piézoélectriques, échelles multiples, complexification, résonance interne, dynamique non linéaire.

Abstract

The use of piezoelectric materials (which can transform mechanical energy into electrical one and vice versa) in order to control or to harvest energy from main structures was widely investigated over the years. It was first assumed that those materials only present a linear behavior before spotting their nonlinear responses. Linear classical circuits coupled to piezoelectric systems were optimized to mitigate vibrations or harvest energy, but in the last decades, using nonlinear circuits have proven to be more efficient. The aim of this work is to write down a model allowing the design of a nonlinear electromechanical system in order to mitigate the vibrations or harvest energy.

First, the governing nonlinear equations of a system composed of a cantilever beam with piezoelectric materials patched on it are derived. Those equations take into account geometrical and material nonlinearities of the beam and of the piezoelectric materials, respectively. A modal analysis is carried out to identify the natural frequencies and mode shapes of the composite structure. Numerical results demonstrate that special positions of piezoelectric materials on the beam can lead to the creation of internal resonances. A multiple scale analysis is carried out on a reduced order model to study modal energy exchanges due to an internal resonance. Then, experimental results are presented. Those allow to validate theoretically predicted behaviors of the system such as internal resonances creation, mode shapes modification, nonlinear behavior of the structure and energy exchange during a 1 : 3 internal resonance. Finally, a beam with a single piezoelectric material patched on it, linked to a nonlinear circuit presenting a cubic term, is studied. This nonlinear electromechanical structure is studied for a case when the structure does not present any internal resonances and another case where the structure exhibit a 1 :3 internal resonance. Analytical methods are applied on the reduced order model to study the system responses at different time scales and to identify periodic, quasi-periodic and even chaotic regimes. Effects of the different electrical components are examined to highlight that they can be designed to obtain special behaviors of the system. It is shown that the nonlinear circuit changes the nature of energy exchanges of resonant modes and can even balance their energies, which can have application in control or energy harvesting. A comparison with a linear circuit is carried out to show the performance of the possible nonlinear piezoelectric absorber.

Keywords : vibration control, energy harvesting, piezoelectric materials, multiple scale, complexification, internal resonance, nonlinear dynamic

Sommaire

Introduction	1
1 État de l'art sur les comportements de dynamique non linéaire	3
1.1 Les comportements d'échanges d'énergie	4
1.2 Les comportements non linéaires de poutre	6
1.3 Les comportements non linéaires liés aux matériaux piézoélectriques	8
1.4 Les méthodes de résolution utilisées	11
1.5 Conclusion du chapitre	17
2 Mise en place du modèle électro-mécanique non linéaire	19
2.1 Équations dynamiques du système électro-mécanique	20
2.2 Résolution de systèmes réduits : analyse modale et fréquentielle	35
2.3 Exemples numériques	70
2.4 Conclusion du chapitre	92
3 Tests expérimentaux sur de petites structures	95
3.1 Dispositif et méthodologie expérimentale	96
3.2 Les analyses modales	103
3.3 Les comportements fréquentsiels de la structure	113
3.4 Conclusion du chapitre	124
4 Système électro-mécanique avec circuit électrique non linéaire	127
4.1 Résolution de systèmes réduits couplés à un circuit non linéaire	128
4.2 Présentation des résultats analytiques	143
4.3 Comparaison de résultats analytiques et numériques	156
4.4 Comparaison entre un circuit linéaire et le circuit non linéaire	169
4.5 Conclusion du chapitre	174
Conclusion	179
Liste des publications	183
5 Annexes	185
5.1 Termes des équations 2.25 et 2.26	185
5.2 Termes des équations 2.159 et 2.160	188
5.3 Termes des équations 2.180, 2.181 et 2.182	190
5.4 Termes de l'équation 2.190	192

5.5	Figures sur les amplitudes des harmoniques de r_m pour $F = 2 \times 10^{-8}$ m et $F = 2 \times 10^{-7}$ m	193
5.6	Termes des équations adimensionnées 4.51, 4.52 et 4.53	194
5.7	Matrice \mathbf{C}_2 de l'équation 4.63	196
5.8	Matrices \mathbf{M}_j de l'équation 4.65	196

Introduction

Ce manuscrit est la synthèse des travaux de thèse effectués entre Octobre 2017 et Octobre 2020. Ceux-ci ont trait au contrôle des vibrations et à la possibilité de récupérer de l'énergie vibratoire d'une poutre cantilever avec des matériaux piézoélectriques collés dessus. Les développements analytiques ont été produits au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS), UMR 5513 CNRS au sein de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État. Des essais expérimentaux ont été effectués au Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Physiques et Numériques (LISPEN) à l'école des Arts et Métiers de Lille. La direction de la thèse est assurée par Messieurs Claude-Henri Lamarque, directeur de thèse et Alireza Ture Savadkoohi, co-directeur de thèse.

L'utilisation de matériaux piézoélectriques pour le contrôle et la récupération d'énergie des structures est un thème de recherche actif depuis plusieurs décennies. Ils permettent par exemple d'absorber l'énergie vibratoire de systèmes sur une ou plusieurs de leurs pulsations propres. Le comportement linéaire de ces matériaux est bien connu. Cependant, ils peuvent également présenter des comportements non linéaires. Ces comportements peuvent provenir soit d'une non linéarité matérielle inhérente au matériau, soit d'une non linéarité créée au travers du circuit électrique auquel ils sont reliés. En outre, lorsque les systèmes principaux présentent des non linéarités, l'efficacité pour le contrôle et la récupération d'énergie d'un contrôleur / absorbeur linéaire est amoindrie. Or, les systèmes de poutre cantilever en grande rotation possèdent des non linéarités géométriques. C'est pourquoi, on s'intéresse à l'utilisation d'un comportement non linéaire des matériaux piézoélectriques pour permettre le contrôle et/ou pour récupérer de l'énergie de structures composites.

Le but original de ce travail est d'utiliser les non linéarités du système et la création de résonances internes afin d'échanger de l'énergie entre les modes résonants. On veut proposer un modèle qui permette de concevoir une structure électro-mécanique dont le comportement non linéaire d'échange entre les modes est volontairement choisi.

Le premier chapitre est un chapitre bibliographique synthétisant l'état de l'art sur les différents aspects abordés dans ce manuscrit. Il présente le concept d'échange d'énergie modale au travers de l'utilisation de résonances internes et de la présence de non linéarités dans le système. Puis, il décrit les comportements non linéaires de poutre et de matériaux piézoélectriques. Il introduit également les différents circuits qui peuvent être reliés aux matériaux piézoélectriques. Il détaille finalement les méthodes analytiques et numériques de résolution qui sont utilisées sur des modèles réduits du système pour obtenir ses points d'équilibre.

L'étude de l'influence des paramètres non linéaires sur la dynamique du système permet d'imaginer des applications et d'identifier des leviers de dimensionnement des matériaux piézoélectriques en tant que contrôleur / absorbeur des vibrations. Tout d'abord, il n'existe pas de modèles dynamiques non linéaires prenant en compte les non linéarités de la poutre et des matériaux piézoélectriques en même temps. Ce modèle est donc développé dans le second chapitre via une formulation variationnelle. Une fois les équations dynamiques du mouvement écrites, une étude modale est menée. Elle démontre la possibilité de créer des résonances internes entre les pulsations propres du système composite, via le positionnement des matériaux piézoélectriques sur la poutre. Puis, une étude de la dynamique de la structure est traitée. Pour cela, on se limite à des systèmes réduits sur un petit nombre de modes d'intérêts et on cherche les points d'équilibre via une méthode des échelles multiples. Ainsi, les réponses fréquentielles du système non linéaire sur les résonances internes créées sont étudiées.

Le troisième chapitre présente les résultats expérimentaux obtenus au LISPEN des Arts et Métiers de Lille, et leur comparaison avec les résultats analytiques développés dans le chapitre précédent. C'est le résultat de deux semaines de campagne expérimentale effectuées en Novembre 2018. L'étude modale est exposée avec l'identification des pulsations propres du système, ainsi que leurs déformées modales associées. Ces tests expérimentaux confirment la création de résonances internes entre certains modes de la structure composite. Une étude dynamique est également menée pour confirmer les comportements non linéaires du système, et notamment d'échange d'énergie entre les modes en résonance interne. Un premier levier de conception est ainsi démontré : le positionnement des matériaux piézoélectriques, pour la création de résonances internes entre des modes propres de la structure électro-mécanique. En outre, un comportement d'échange d'énergie est d'ores et déjà observé sur les résultats expérimentaux. Mais, les non linéarités présentes dans le système sont inhérentes aux matériaux, elles ne peuvent donc pas être modifiées.

On s'intéresse alors au dimensionnement possible du circuit électrique relié aux matériaux piézoélectriques afin de contrôler/récupérer l'énergie vibratoire du système principal. Pour cela, le quatrième chapitre se propose d'étudier des modèles réduits d'une poutre cantilever, patchée avec un seul matériau piézoélectrique, lui-même relié à un circuit électrique non linéaire comportant un terme cubique. Les approches analytiques permettent d'envisager un dimensionnement des composants du circuit électrique non linéaire, au travers de l'étude des effets de ceux-ci sur le comportement d'échange d'énergie du système. Les différents comportements dynamiques possibles (périodiques et quasi-périodiques) sont identifiés, par une méthode couplée de complexification et des échelles multiples. On s'intéresse aussi bien au comportement transitoire qu'au régime permanent des vibrations de la structure. On identifie même de potentiels comportements chaotiques de la réponse électrique via une méthode de Melnikov. Ceci permet d'orienter la conception d'assemblages de matériaux piézoélectriques et de circuits électriques au comportement non linéaire, afin de modifier les échanges d'énergie entre les modes pour le contrôle vibratoire ou une possible récupération d'énergie. Pour finir, une comparaison avec un circuit électrique résonant, représentant un absorbeur linéaire, est présentée pour montrer l'intérêt de l'utilisation d'un circuit non linéaire.

Chapitre 1

État de l'art sur les comportements de dynamique non linéaire

Ce chapitre traite de manière non succincte l'état de l'art sur les différents aspects de dynamique non linéaire qui sont utilisés dans ce manuscrit.

Le phénomène d'échange d'énergie entre les modes, que l'on souhaite utiliser pour contrôler les vibrations ou récupérer de l'énergie vibratoire, est expliqué. On considère un modèle électromécanique composé d'une poutre cantilever avec des matériaux piézoélectriques collés dessus. Les non linéarités géométriques de la poutre et matérielles du matériau piézoélectrique sont présentées, ainsi que celles que l'on peut imposer au circuit électrique relié aux matériaux piézoélectriques. Pour finir, les méthodes de résolution, utilisées sur des systèmes réduits, sont détaillées. Il s'agit de méthodes analytiques et numériques.

Sommaire

1.1	Les comportements d'échanges d'énergie	4
1.2	Les comportements non linéaires de poutre	6
1.3	Les comportements non linéaires liés aux matériaux piézo-	
	électriques	8
1.3.1	Non linéarité matérielle	8
1.3.2	Circuits électriques reliés aux matériaux piézoélectriques	10
1.4	Les méthodes de résolution utilisées	11
1.4.1	Les méthodes analytiques	11
1.4.2	Les méthodes numériques	16
1.5	Conclusion du chapitre	17

1.1 Les comportements d'échanges d'énergie

Dans cette partie, on présente le principal phénomène qui nous importe d'étudier : celui d'échange d'énergie entre des modes propres d'une structure. Ce comportement n'est observable sur des structures que dans des cas particuliers de dynamique non linéaire. Il est intéressant pour le contrôle vibratoire comme pour la récupération d'énergie.

Pour définir le phénomène étudions le système aux équations dynamiques telles que :

$$\ddot{X} + D(X)\dot{X} + \Lambda X + NL(X, \dot{X}) = F(t) \quad (1.1)$$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ les déplacements et Λ tel que :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \omega_N^2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

où $\omega_1, \dots, \omega_N$ sont les pulsations propres du système. $D(X)$ représente l'amortissement dynamique, $NL(X, \dot{X})$ est la partie non linéaire de l'équation et $F(t)$ exprime la force extérieure appliquée au système. Cette dernière s'exprime généralement telle que :

$$F(t) = \sin(\omega t)F_0 \quad \text{ou} \quad F(t) = \sin(\omega t)F_0 + \cos(\omega t)G_0 \quad (1.3)$$

avec ω la pulsation de la force extérieure et F_0, G_0 sont les amplitudes de forçage.

Pour résoudre ce type de système dynamique, il existe plusieurs méthodes de résolution : la forme normale, la méthode de balance harmonique, la complexification de Manevitch, l'intégration numérique ... qui seront développées dans la dernière partie de ce chapitre.

Pour utiliser chacune de ces méthodes, on réduit dans un premier temps le modèle sur un ou plusieurs modes d'intérêts du système. Si la pulsation de la force extérieure est autour du mode j et qu'il n'existe pas de phénomènes de résonances dans le système, alors on projette les équations sur ce seul mode j . L'équation 1.1 devient alors :

$$\ddot{x}_j + D(x_j)\dot{x}_j + \omega_j^2 x_j + NL(x_j, \dot{x}_j) = G_0 \cos(\omega t) + F_0 \sin(\omega t) \quad (1.4)$$

avec $\omega \simeq \omega_j$.

Ceci est dans le cas où il n'y a pas de comportement multimodal du système non linéaire. Mais, il existe des comportements plus complexes où, alors qu'un seul mode est excité directement par la force extérieure, plusieurs modes de la structure répondent. Ce phénomène intervient, par exemple, lorsque deux pulsations propres du système (ω_n et ω_m) sont telles que :

$$\omega_m \simeq p \omega_n, \quad p \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

Ce couplage des pulsations du système peut intervenir de différentes manières :

- sur un système linéaire,
- sur un système non linéaire à bas niveau d'énergie,
- sur un système non linéaire pour un certain seuil d'énergie.

En effet, dans le cas de systèmes non linéaires, les pulsations du système sont modifiées avec l'amplitude des vibrations (phénomène de modes raidissants ou assouplissants (Touzé et al., 2004)). Cette modification peut entraîner la désynchronisation des deux modes, ou à l'inverse, créer le lien entre les deux pulsations pour un certain seuil d'énergie.

Lorsque deux modes sont en résonance dans un système non linéaire, alors il est possible d'échanger de l'énergie entre ceux-ci. Pour que ce comportement non linéaire soit activé, il faut que le degré de non linéarité présent dans le système (inclus dans le terme $NL(X, \dot{X})$) soit en adéquation avec le lien qui unit les pulsations propres. Si cette concordance existe, alors les amplitudes des deux modes sont liées entre elles via la fonction NL .

Ainsi :

- pour un système avec une non linéarité cubique, les résonances internes ou résonances en combinaison associées sont :

$$\begin{aligned}\omega_n &\simeq \omega_m, \\ \omega_n &\simeq 3\omega_m, \\ \omega_n &\simeq |\pm 2\omega_m \pm \omega_q|\end{aligned}\tag{1.6}$$

- pour un système qui présente également des non linéarités quadratiques, on obtient les résonances internes et de combinaison suivantes, en plus de celles de l'équation 1.6 :

$$\begin{aligned}\omega_n &\simeq 2\omega_m, \\ \omega_n &\simeq \omega_m \pm \omega_q\end{aligned}\tag{1.7}$$

Selon les degrés de non linéarités, les résonances internes mises en jeu et les termes non linéaires associés, on peut observer d'importants échanges d'énergie entre les modes concernés. Il est également possible d'obtenir des résonances subharmoniques, elles interviennent lorsque la pulsation d'excitation ω est telle que $\omega \simeq \frac{1}{p}(\omega_n + \omega_m)$, avec $p \in \mathbb{N}$. Elles ont été étudiées à plusieurs reprises par.

Ces résonances peuvent être inhérentes au système ou créées via des conditions géométriques imposées au système. Ainsi, Pai and Nayfeh (1990b) utilisent le dimensionnement de la section transversale pour créer une résonance 1 : 1 entre un mode de flexion, et un mode hors plan. Ils étudient alors les oscillations non planes de la structure lors d'une excitation par la base et identifient des comportements chaotiques de la réponse.

Nayfeh and Balachandran (1989) ont montré que la création d'échanges d'énergie dans les systèmes non linéaires est influencée par la résonance interne et le degré de non linéarité présents dans le système, comme expliqué au travers des équations 1.6 et 1.7, pour des non linéarités cubiques et quadratiques. Leur revue décrit des résultats analytiques et expérimentaux de comportement dynamique non linéaire de structures lors d'interactions modales. Ils présentent notamment des cas de système possédant des non linéarités quadratiques lors de la présence d'une résonance 1 : 2, avec un échange d'énergie entre les deux modes concernés et des phénomènes de saturation (Haddow et al., 1984, Mook et al., 1985, Shivamoggi and Varma, 1988, Oueini and Nayfeh, 2000). Ce phénomène de saturation est un moyen de contrôler les vibrations de la structure via la création d'un seuil de vibration.

La résonance interne 1 : 3 a été étudiée par plusieurs chercheurs dans le cas de plaques, MEMS, poutres encastées ou diverses autres conditions aux limites telles que encastée-libre, ... (Özkaya et al., 2008, Hegazy, 2010, Emam and Nayfeh, 2013). Cette résonance montre des comportements dynamiques intéressants avec des bifurcations et des comportements chaotiques, qui peuvent être utilisés soit pour le contrôle vibratoire, soit pour la

récupération d'énergie.

Sayed and Kamel (2012) ont étudié des systèmes à deux degrés de liberté présentant des non linéarités cubiques et quadratiques lors de la présence de résonance interne 1 : 2 et 1 : 3 entre la structure principale et son absorbeur. Le système est excité de manière paramétrique et on observe un phénomène d'échange d'énergie entre les modes. Ils utilisent alors un phénomène de saturation pour contrôler les vibrations lors du régime transitoire. Ils ont étudié les zones stables et instables du système et les effets des paramètres du système à deux degrés de liberté sur celles-ci, prouvant la possibilité de concevoir un absorbeur actif afin de contrôler les vibrations du système principal.

Comme expliqué dans cette partie, il est nécessaire que le système possède des non linéarités pour espérer un échange d'énergie entre des modes qui sont en résonance interne, i.e. $\omega_m \simeq p\omega_n$, avec p un entier lié au degré de non linéarité présent dans le système. L'intérêt de ces comportements étant de pouvoir les utiliser pour échanger de l'énergie entre les modes et ainsi contrôler les vibrations du système ou récupérer de l'énergie d'un des modes. Pour atteindre ces objectifs :

- soit on diffuse l'énergie entre les différents modes, diminuant ainsi l'énergie vibratoire globale de la structure.
- soit on crée un seuil de saturation.
- soit on concentre les vibrations sur un mode particulier de la structure, pour en récupérer l'énergie.

Pour cela, le comportement de la structure est étudié analytiquement afin d'en déduire des outils de conception du système électro-mécanique qui vont permettre de créer les échanges voulus.

Notre système étant composé d'une poutre et de patchs piézoélectriques, on s'intéresse à leur possible comportement non linéaire nécessaire à l'obtention d'échanges d'énergie. Dans un premier temps, les comportements non linéaires de la poutre sont donc décrits dans la partie suivante.

1.2 Les comportements non linéaires de poutre

Comme vu dans la partie précédente, pour activer un échange d'énergies modales dans un système, il faut que ses équations dynamiques présentent des non linéarités. Dans le cas d'une poutre homogène, si elle subit des rotations de grande amplitude alors elle présente des non linéarités de courbure et d'inertie. La modélisation de la non linéarité des problèmes de poutre a été largement traitée afin de comprendre leur dynamique, puis de contrôler ou de récupérer leur énergie vibratoire.

On suppose une poutre cantilever d'Euler-Bernoulli, elle est donc inextensible. La formulation des équations est possible de différentes manières. Dans notre cas, pour écrire les équations du système, nous faisons le choix d'utiliser des formulations variationnelles. En effet, elles permettent de prendre en compte les non linéarités géométriques de la poutre et d'étudier analytiquement les comportements dynamiques non linéaires, avec notamment des couplages flexion/torsion.

Crespo Da Silva (1988) a utilisé ces principes variationnels pour développer les équations non linéaires d'une poutre d'Euler Bernoulli supposée extensible ou inextensible, en considérant la flexion dans deux des directions principales et la torsion. Les non linéarités prises en compte proviennent de la courbure de la poutre due à sa déformation

et des termes d'inertie. Cette formulation des équations prend donc en compte toutes les non linéarités géométriques de la poutre et reste valable pour une rigidité arbitraire et une variation de la masse le long de la travée de la poutre. Le modèle est développé en supposant un matériau de Hooke et en utilisant le principe d'Hamilton. Afin de vérifier la validité de ces équations, a étudié la réponse non linéaire d'une poutre fixée (encastrée ou restreinte) d'un côté et fixée ou supportée de l'autre. Cette étude est menée via une méthode de perturbation, la poutre étant excitée harmoniquement. Une comparaison entre, les résultats analytiques obtenus par la méthode des échelles multiples et ceux issus de méthodes numériques, démontre l'importance de la prise en compte des non linéarités géométriques dans la dynamique de la poutre. En effet, ces non linéarités impliquent des comportements raidissants de la structure.

En utilisant la même formulation que Crespo Da Silva and Glynn (1978), Pai and Nayfeh (1990b) considèrent une poutre encastrée libre inextensible. En imposant des dimensions particulières de la section transversale de la poutre, ils couplent des modes de flexion et de torsion en résonance interne 1 : 1. Par une méthode des échelles multiples, ils étudient le comportement dynamique des modes couplés et trouvent des régimes chaotiques. De la même manière, Cusumano and Moon (1995a) ont observé expérimentalement des comportements chaotiques d'une poutre cantilever à section rectangulaire lors d'excitation par un déplacement sinusoïdal de la base.

Pai and Nayfeh (1990a, 1991a,b) ont étudié la dynamique non linéaire de poutres métalliques en développant les équations non linéaires de poutre homogènes inextensible à 3 dimensions. Ils ont étudié des cas spéciaux d'excitation tels qu'une excitation dans la direction transversale et longitudinale. Ils s'intéressent à deux cas :

- un cas où le premier mode de torsion a sa fréquence qui vaut la moitié de la fréquence du premier mode longitudinal,
- un cas où la première fréquence de résonance longitudinale est deux fois la fréquence du premier mode de torsion (il s'agit de résonances 1 : 2).

Les résolutions sont menées via la méthode des échelles multiples, et montrent que malgré une excitation plane, la réponse peut être non plane, et, les réponses dynamiques peuvent être périodiques, modulées ou chaotiques.

La prise en compte de ces non linéarités géométriques de la poutre permettent d'expliquer la contribution de plusieurs modes dans la réponse du système. Ainsi, par l'utilisation d'une méthode de balance harmonique Azrar et al. (2002) ont montré la contribution de modes supérieurs lors de l'excitation d'une poutre au comportement non linéaire. Dans le cas de Cusumano and Moon (1995b), les deux modes ne sont pas couplés par une résonance interne, cependant le comportement de la poutre dépend de ces deux modes, qui mènent à un comportement chaotique de la réponse.

Malaktar (2003) a aussi travaillé sur les vibrations non linéaires de poutre. Il montre à nouveau l'importance des termes non linéaires dans ces comportements, via l'estimation de ceux-ci. Il a notamment étudié des modèles d'amortissement non linéaire pour l'évaluation de la dynamique d'une poutre cantilever.

Thomas (2011) a analysé les comportements de poutre non linéaire, en présentant la mise en place des équations par une méthode de Lagrange. Il montre que pour des déplacements axiaux non contraints, un modèle incluant des grandes rotations est suffisant pour un modèle de poutre, sinon, il faut prendre en compte des couplages membrane/flexion via un modèle de von Kármán par exemple.

De nombreuses études ont également été menées sur les poutre présentant des discon-

tinuités, telles que des inerties modifiées (Yavari et al., 2001, Failla and Santini, 2007, Wang and Qiao, 2007), des chargements discontinus (Yavari et al., 2000) ou des endommagements (Failla and Santini, 2008, Caddemi and Morassi, 2013). Elles montrent la modification des fréquences de résonance et des déformées modales des poutres présentant ces non linéarités.

Dans tous ces modèles, les équations dynamiques de la poutre comportent des non linéarités géométriques, qui sont traduites par des termes cubiques au sein des équations. La poutre possédant un comportement non linéaire, quand est-il des matériaux piézoélectriques ?

1.3 Les comportements non linéaires liés aux matériaux piézoélectriques

La piézoélectricité a été découverte par les frères Pierre et Jacques Curie en 1880 (Curie, 1880). Il s'agit de structures cristallines qui possèdent un effet direct et un effet indirect, qui lient leurs énergies mécaniques et électriques. Dans le cas de l'effet direct, l'énergie mécanique du matériau est transformée en énergie électrique, et inversement pour l'effet indirect. Ces matériaux associent leur déformation au champ électrique les traversant. Ce comportement est d'ailleurs défini par une fonction de densité électrique $H(\boldsymbol{\varepsilon}_p, E)$ liée au matériau. Elle dépend du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et du champ électrique E du matériau. La partie quadratique de cette fonction est bien connue et est définie comme (IEEE, 1988, Miu, 1993) :

$$H(\boldsymbol{\varepsilon}_p, E) = \frac{s_{pp}}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_p^2 + d_p \boldsymbol{\varepsilon}_p E + \frac{\epsilon}{2} E^2 \quad (1.8)$$

avec s_{pp} le module d'élasticité, d_p la constante piézoélectrique et ϵ la permittivité du matériau liée à sa polarisation.

Ces comportements directs et indirects ont rendu ce matériau intéressant pour contrôler les vibrations et récupérer de l'énergie via son circuit électrique.

Pendant longtemps, on a supposé que les matériaux piézoélectriques possèdent un comportement parfaitement linéaire. Cependant, il a été montré par plusieurs études qu'il existe des non linéarités matérielles qui peuvent être observées au sein de ces matériaux, comme expliqué dans la sous-section suivante.

1.3.1 Non linéarité matérielle

Les premiers travaux sur la prise en compte de non linéarités matérielles des matériaux piézoélectriques commencent dans les années 1980. Des tests sont effectués sur ces matériaux et montrent que ceux-ci présentent des comportements non linéaires. Dans la littérature plusieurs manières de prendre en compte ces non linéarités sont développées. Dans tous les cas, la modélisation peut s'expliquer par l'ajout de termes dans la fonction de densité électrique du matériau $H(\boldsymbol{\varepsilon}_p, E)$ (cf l'équation 1.8).

Beige and Schmidt (1982) expliquent comment identifier différents coefficients non linéaires dans le cas de barres de matériaux piézoélectriques. Les termes supplémentaires envisagés sont ceux d'ordre 3 dans la fonction de densité électrique, ainsi que deux termes

d'ordre 4. Dans un autre article de Beige (1983), les auteurs utilisent seulement deux termes d'ordre 3 et 4 liés à la déformation (ϵ_p) et au champ électrique (E), sans considérer de termes croisés. Ils expliquent que, dans le cas de matériaux piézoélectriques polarisés, la contribution principale provient de la non linéarité diélectrique du terme de 3^{ème} ordre. Wang et al. (1999) utilisent la même formulation sur deux configurations de poutre cantilever piézoélectrique. Ils étudient les fréquences de résonance et les déplacements à l'extrémité de la poutre. Ils montrent que la formulation linéaire est suffisante si le champ électrique reste faible et que les fréquences de résonance de flexion varient avec l'amplitude du champ électrique. En outre, la décroissance de cette fréquence de résonance avec le champ électrique est expliquée par une non linéarité élastique.

Des expériences menées sur des matériaux piézoélectriques par Crawley and Anderson (1990) montrent la non linéarité de la constante piézoélectrique de couplage d_p . Ils utilisent un modèle de poutre en flexion d'Euler Bernoulli, et montrent que le modèle linéaire de matériaux piézoélectriques n'est valide que pour de très faibles déformations, sinon les non linéarités hystérétiques du champ électrique et des déformations doivent être prises en compte.

Joshi (1992) ajoute tous les termes d'ordre 3 à la fonction de densité électrique, mais il néglige ensuite certains de ces termes : la non linéarité du module élastique et de la permittivité diélectrique. Guyomar et al. (1997) utilisent également les termes d'ordre 3 et ils identifient leurs effets. Ils montrent que l'effet de saturation déjà observé sur ces matériaux, souvent expliqué par des pertes mécaniques tel que l'amortissement, pourrait être pris en compte dans le modèle par des non linéarités matérielles.

Kugel and Cross (1998) montrent que, le changement de fréquence de résonance en fonction du champ électrique appliqué, peut être expliqué par une non linéarité du terme d_p . Les modifications des propriétés électro-mécaniques seraient dues à des dépendances entre la contrainte mécanique et le champ électrique, causées par une interaction au niveau microscopique, tout comme Wang et al. (1999). Abdelkefi (2012) définit également une densité électrique avec les termes d'ordre 3. Il mène une étude analytico-numérique de l'effet de ces termes non linéaires sur une poutre cantilever avec une couche de matériau piézoélectrique collée sur toute la longueur de la poutre.

Wolf and Gottlieb (2001) ne prennent en compte que les termes d'ordre 3 et 4 par rapport à la déformation mécanique et font une étude analytique sur ces deux termes pour montrer qu'ils correspondent à des contributions quadratiques et cubiques respectivement. Ils expliquent également que le terme d'ordre 4 peut avoir un effet sur le comportement raidissant ou assouplissant de la structure.

Von Wagner and Hagedorn (2002), Parashar and Wagner (2004), Samal et al. (2006) développent la densité électrique jusqu'à l'ordre 4, mais n'identifient que certains de ces termes. Ils montrent que ces termes mènent à des non linéarités quadratiques et cubiques, et que la contribution quadratique produit un effet assouplissant. Ils supposent que les contributions quadratiques et cubiques interviennent au même ordre, ce qui est confirmé par les expériences de Parashar and Wagner (2004). Shivashankar and Kandagal (2019) proposent un protocole expérimental afin d'identifier la source de non linéarité observée pour des matériaux piézoélectriques. Ainsi, ils proposent l'identification de certains termes non linéaires par ajustement de leurs données expérimentales. Pour obtenir les non linéarités mécaniques seules, ils provoquent un court-circuit. Pour déduire les autres non linéarités ils tracent les courbes squelettes sur les trois premier modes. Ils montrent qu'il est nécessaire d'avoir certains termes d'ordre 3 et 4 pour décrire le comportement

non linéaire des matériaux.

Plusieurs travaux analysent les effets de coefficients non linéaires sur les comportements des matériaux piézoélectriques, mais peu d'entre eux permettent d'identifier ces coefficients pour les différentes céramiques piézoélectriques. Très souvent, il n'est possible d'obtenir que certains termes non linéaires. Il s'agit d'un sujet de recherche qui est encore en cours d'investigation.

Une autre source de non linéarité possible pour les matériaux piézoélectriques est leurs circuits électriques, comme présenté dans la sous-partie suivante.

1.3.2 Circuits électriques reliés aux matériaux piézoélectriques

Plusieurs cas de circuits linéaires reliés aux matériaux piézoélectriques ont déjà été étudiés :

- le circuit ouvert (où la charge électrique Q est nulle),
- le circuit fermé (où la tension électrique V est nulle),
- le circuit résistif i.e. avec seulement une résistance,
- le circuit résonant composé d'une inductance et d'une résistance.

Ces circuits sont utilisés pour récupérer l'énergie vibratoire ou diminuer les vibrations d'un système principal. Il existe d'ailleurs des valeurs optimales des composants électriques pour atteindre ces objectifs (Hagood and Von Flotow, 1991, Yamada et al., 2010, Kozlowski et al., 2011, Soltani et al., 2014, Høgsberg and Krenk, 2015). En effet, un circuit résonant est une analogie électrique d'un Tuned Mass Damper (Frahm, 1911). Ainsi, si la fréquence de résonance électrique est réglée sur celle du système principal, alors le matériau piézoélectrique va dissiper l'énergie mécanique au travers de sa résistance notamment lors de la résonance (Caruso, 2001). Cependant, cette méthode présente des imperfections, en effet pour des fréquences basses, l'inductance nécessaire est trop importante pour pouvoir créer le circuit résonant associé. C'est pourquoi, on s'est intéressé à des systèmes actifs, tels que la mise en place d'inductance fictive (Hollkamp and Thomas F. Starchville, 1994, Fleming et al., 2000), ou à l'utilisation d'une capacité en plus de celle du matériau piézoélectrique (Fleming et al., 2003), et à l'ajout de non linéarités. Les systèmes actifs permettent également de traquer la fréquence changeante de résonance et de modifier le circuit résonant en fonction de celle-ci. En effet, comme tous les systèmes linéaires, l'efficacité du circuit résonant est réduite à une faible bande de fréquence ce qui n'est pas adapté pour des modifications possibles du système. En outre, les matériaux sont aussi sensibles aux éléments extérieurs tels que la température (Qiu et al., 2011, Upadhye and Agashe, 2016, Surbhi and Sukesha, 2020), ce qui peut nécessiter une modification du circuit électrique.

Pour améliorer les performances de ces circuits, plusieurs possibilités semi-passives ont été mises en oeuvre, dont l'utilisation d'interrupteurs : les méthodes de Switch-Synchronized-Damping (SSD) (Richard et al., 2000a) et State-Switch (Clark, 2000, Corr and Clark, 2002). Les interrupteurs sont enclenchés pour passer d'un circuit électrique simple, à un autre (circuit ouvert, fermé, résistif, résonant ou avec des générateurs de tension). Ainsi il existe plusieurs circuits SSD et State-Switch, en utilisant l'interrupteur pour passer :

- d'un circuit ouvert à un circuit fermé (Clark, 2000, Richard et al., 2000a, Corr and Clark, 2002),
- d'un circuit ouvert à un circuit résistant (Clark, 2000),

- d'un circuit ouvert à un circuit avec une inductance (Richard et al., 2000b, Corr and Clark, 2002, Lallart et al., 2016, Bao et al., 2017),
- d'un circuit résonant à un autre, avec deux sources de tensions différentes (SSDV (Lefeuvre et al., 2006), SSDV enhanced (Badel et al., 2006)).

Plus récemment, on s'est intéressé à des systèmes passifs où la non linéarité est créée directement dans le circuit, ceci afin d'améliorer la bande de fréquence d'utilisation des matériaux piézoélectriques en tant qu'absorbeurs des vibrations. La poutre présentant une non linéarité cubique, par principe de similarité une non linéarité cubique est ajoutée au circuit électrique comme l'ont fait Zhou et al. (2014), Lossouarn et al. (2018), Silva et al. (2018).

Pour finir, les systèmes pouvant présenter des réponses multimodales, des réseaux de matériaux piézoélectriques liés à différents circuits électriques ajustés afin de contrôler les vibrations de chaque mode indépendamment, ont été proposés (Hollkamp and Thomas F. Starchville, 1994, Behrens et al., 2003). En effet, les comportements dynamiques peuvent être multimodaux, ils nécessitent alors plusieurs matériaux et circuits afin d'atténuer les vibrations de la structure.

Par conséquent, la poutre ainsi que les matériaux piézoélectriques et leurs circuits électriques associés peuvent présenter des non linéarités. Ainsi, si les pulsations propres de la structure composite présentent une résonance interne concordante avec ces non linéarités, alors on pourra obtenir un possible échange d'énergie entre les modes en résonance. Pour étudier ce comportement dynamique, plusieurs méthodes de résolution sont utilisées, elles sont présentées dans la partie suivante.

1.4 Les méthodes de résolution utilisées

Pour résoudre les comportements dynamiques d'échange d'énergie qui nous intéressent, on utilise deux types de méthodes : les méthodes analytiques et numériques. Elles sont pratiquées sur des systèmes réduits sur certains modes d'intérêts. Pour présenter ces méthodes, on emploie le système exemple de Duffing suivant :

$$E(x,t) : \ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha^2x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (1.9)$$

avec x le déplacement, t le temps, δ l'amortissement, α la raideur linéaire, β la non linéarité cubique, γ l'amplitude de la force extérieure appliquée et ω sa pulsation.

Ici, le système est déjà projeté sur un seul mode $x(t)$ de pulsation propre α . Présentons les différentes méthodes de résolution utilisée en commençant par les méthodes analytiques.

1.4.1 Les méthodes analytiques

Plusieurs méthodes analytiques sont utilisées dans ce manuscrit de thèse, la méthode de balance harmonique au travers de l'outil ManLab, la méthode des échelles multiples et celle de complexification de Manevitch.

Méthode de balance harmonique

Dans le cas de la méthode de balance harmonique on suppose que le déplacement x s'exprime de la manière suivante (Nayfeh, 1979) :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos(k\omega t) + s_k \sin(k\omega t) \right) \quad (1.10)$$

avec n le nombre d'harmoniques que l'on prend en compte dans ce calcul de balance harmonique, a_0 , c_k et s_k sont les coefficients de Fourier.

On fait un équilibrage de moyenne harmonique sur l'équation 1.9 tel que :

$$\begin{aligned} E_a &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} E(x,t) dt \\ E_{c_k} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} E(x,t) \cos(k\omega t) dt \\ E_{s_k} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} E(x,t) \sin(k\omega t) dt \end{aligned} \quad (1.11)$$

avec $k=1, \dots, n$. Ceci donne des équations non linéaires en c_k et s_k qui permettent de retrouver les différentes amplitudes des harmoniques de x . Le nombre d'équations dépend du nombre d'harmoniques que l'on prend en compte dans le calcul ($2n+1$ équations). Résolvons le système pour $n = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} E_a &= \frac{a_0\pi}{4\omega} (4\alpha + \beta(a_0^2 + 6(c_1^2 + s_1^2))) \\ E_{c_1} &= \frac{\pi}{4\omega} (4\alpha c_1 - 4(\gamma + \omega^2 c_1 - \delta\omega s_1) + 3\beta c_1(c_1^2 + s_1^2)) \\ E_{s_1} &= \frac{\pi}{4\omega} (-4\delta\omega c_1 + 4\alpha s_1 + 3\beta s_1(c_1^2 + s_1^2) - 4\omega^2 s_1) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Une première solution triviale, donnée par $E_a = 0$, est $a_0 = 0$. Il n'existe pas de terme constant lorsqu'on ne prend en compte qu'une harmonique. Ensuite, on pose $X = c_1^2 + s_1^2$ qui est le carré de l'amplitude de la première harmonique de x selon l'équation 1.10, ce qui permet d'avoir un problème linéarisé en c_1 et s_1 tel que :

$$\begin{bmatrix} 4(\alpha^2 - \omega^2) + 3\beta X & 4\delta\omega \\ -4\delta\omega & 4(\alpha^2 - \omega^2) + 3\beta X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

On déduit c_1 et s_1 de ce système ce qui permet d'écrire $X = c_1^2 + s_1^2$, on obtient alors l'équation suivante :

$$0 = 9\beta^2 X^3 + 24\beta(\alpha^2 - \omega^2) X^2 + 16((\alpha^2 - \omega^2)^2 + \delta^2\omega^2) X - 16\gamma^2 \quad (1.14)$$

On a donc une équation d'ordre 3 en X à résoudre pour obtenir l'amplitude de l'harmonique 1 de x . Du fait de la présence d'un terme cubique dans l'équation 1.9, il serait intéressant d'aller jusqu'à $n=3$ au moins, car il existe des équations en $\cos(3\omega t)$ et $\sin(3\omega t)$

au travers de $x(t)^3$.

La méthode de balance harmonique est utilisée pour prédire le comportement de systèmes non linéaires lors de la présence de résonances internes ou de combinaisons de résonances. Szemplińska-Stupnicka (1978) a présenté une méthode de balance harmonique pour étudier le comportement de systèmes à plusieurs degrés de liberté lors de combinaisons de résonances. Il montre un exemple analytique à deux degrés de liberté, qu'il vérifie avec des résultats numériques. L'utilisation de cette méthode doit être faite avec des précautions sur les ordres pris en compte si on la combine avec la méthode des échelles multiples, comme le précise Nayfeh (1983). Cette dernière est présentée dans la sous-partie suivante.

La méthode des échelles multiples

La méthode des échelles multiples permet de décomposer le temps t en plusieurs échelles de temps : une échelle de temps rapide t_0 et plusieurs échelles de temps lentes $t_1, t_2 \dots$

Pour cela, on suppose que le déplacement est petit, i.e. $\|x\| \ll 1$, et on suppose qu'il existe un petit paramètre ϵ , qui peut être un paramètre caché ou défini, tel que le système devient :

$$t_j = \epsilon^j t, \quad \text{avec } j = 0, 1, \dots \quad (1.15)$$

Ainsi, les dérivées partielles en temps deviennent :

$$D_j = \frac{\partial}{\partial t_j}, \quad \text{avec } j = 0, 1, \dots \quad (1.16)$$

Des hypothèses d'ordre ϵ sont faites sur les paramètres de l'équation 1.9 pour permettre sa résolution, telles que :

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_0 \epsilon \\ \beta &= \beta_0 \epsilon \\ \gamma &= \gamma_0 \epsilon \\ \omega &= \alpha + \sigma \epsilon \end{aligned} \quad (1.17)$$

avec σ un paramètre de modulation de la pulsation extérieure ω autour de la pulsation propre du système α , et ϵ est un paramètre caché.

La variable en temps $x(t)$ est également découpée en fonction du petit paramètre ϵ telle que :

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \epsilon^j \quad (1.18)$$

Ceci permet de diviser l'équation 1.9 en différents ordres de ϵ . Ainsi, à $\mathcal{O}(1)$ l'équation 1.9 devient :

$$D_0^2 x_0 + \alpha^2 x_0 = 0 \quad (1.19)$$

ce qui impose une solution homogène x_0 telle que :

$$x_0(t_0, t_1, \dots) = A(t_0, t_1, \dots) \exp(i\alpha t_0) + \bar{A}(t_0, t_1, \dots) \exp(-i\alpha t_0) \quad (1.20)$$

avec $i^2 = -1$, A une variable complexe et \bar{A} son complexe conjugué.

À $\mathcal{O}(\epsilon)$ l'équation 1.9 donne :

$$D_0^2 x_1 + \alpha^2 x_1 = -2D_1 D_0 x_0 - \delta_0 D_0 x_0 - \beta_0 x_0^3 + \gamma_0 \cos(\omega t) \quad (1.21)$$

En remplaçant x_0 par son expression de l'équation 1.20, et avec ω défini dans l'équation 1.17, on obtient :

$$D_0^2 x_1 + \alpha x_1 = \exp(i\alpha t_0) \left(-\frac{1}{2} \gamma_0 \exp(-i\sigma t_1) + 2i\alpha D_1 A + i\alpha \delta_0 A + 3\beta_0 A^2 \bar{A} \right) + \exp(3i\alpha t_0) \beta_0 A^3 + cc \quad (1.22)$$

avec cc le complexe conjugué. Les termes en $\exp(i\alpha t_0)$ de la partie droite de l'équation 1.22 sont résonants avec la solution homogène x_1 qui est en $\exp(i\alpha t_0)$ également, ceux sont des termes séculaires. Les termes en $\exp(3i\alpha t_0)$ donnent une solution particulière à x_1 .

On obtient :

$$-2i\alpha D_1 A = -\frac{1}{2} \gamma_0 \exp(-i\sigma t_1) + i\alpha \delta_0 A + 3\beta_0 A^2 \bar{A} \quad (1.23)$$

$$x_1 = \frac{\beta_0}{8\alpha^2} A^3 \exp(3i\alpha t_0) + cc$$

Pour éliminer la dépendance des équations en t_1 , on pose :

$$A = a \exp(i\sigma t_1) \quad (1.24)$$

Puis, on suppose :

$$a = |a| \exp(i\theta), \quad (|a|, \theta) \in \mathbb{R} \quad (1.25)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire de la première équation de l'équation 1.23, on trouve :

$$D_1 |a| = \frac{-1}{4\alpha} (2\alpha \delta_0 |a| + \gamma_0 \sin(\theta)) \quad (1.26)$$

$$D_1 \theta = \frac{1}{4\alpha |a|} (-4\alpha \sigma |a| + 6\beta_0 |a|^3 - \gamma_0 \cos(\theta))$$

Les points d'équilibre de la dynamique sont obtenus en posant :

$$D_1 A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 |a| = 0 \\ D_1 \theta = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

À partir de ces équations, on déduit l'expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Alors, l'équation triviale $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 - 1 = 0$ permet d'écrire :

$$0 = -\gamma_0^2 + |a|^2 4\alpha^2 (\delta_0^2 + 4\sigma^2) - |a|^4 48\alpha\beta_0\sigma + |a|^6 36\beta_0^2 \quad (1.28)$$

qui est une équation d'ordre 3 en $|a|^2$. Afin d'éliminer la présence du paramètre caché ϵ (au travers de paramètres β_0 , σ , etc), on inverse les relations de l'équation 1.17, on obtient :

$$0 = -\gamma^2 + |a|^2 4\alpha^2 (4\alpha^2 + \delta^2 - 8\alpha\omega + 4\omega^2) + |a|^4 48\alpha\beta(\alpha - \omega) + |a|^6 36\beta^2 \quad (1.29)$$

L'équation d'ordre 3 en $|a|^2$ dépend alors simplement des paramètres initiaux de l'équation 1.9. Et, le déplacement x est défini par :

$$x = x_0 + \epsilon x_1 \quad (1.30)$$

Soit :

$$x = A \exp(i\omega t_0) + \frac{\beta}{8\alpha^2} A^3 \exp(3i\omega t_0) + cc + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.31)$$

La méthode des échelles multiples a déjà été utilisée pour étudier des comportements de structure présentant des résonances internes par Da Silva and Glynn (1978), Nayfeh (1983), Mook et al. (1985), Sayed and Kamel (2012).

Cette méthode des échelles multiples, qui permet de décomposer les équations en plusieurs échelle de temps, peut être couplée à une méthode de résolution par complexification de la variable en temps. Cette méthode est présentée dans la sous-partie suivante.

La méthode de complexification de Manevitch

Dans le cas de la méthode de complexification, appelée complexification de Manevitch (Manevitch, 2001b), la variable x est définie telle que :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{d\psi}{dt} \exp(i\omega t) \quad (1.32)$$

avec ψ un complexe et ω la pulsation propre de la variable x . On a comme hypothèse que :

$$\dot{x} + i\omega x = \psi \exp(i\omega t) \quad (1.33)$$

Soit le complexe conjugué :

$$\dot{x} - i\omega x = \bar{\psi} \exp(-i\omega t) \quad (1.34)$$

Ces équations permettent de définir le déplacement x et la vitesse \dot{x} tels que :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2}(\psi \exp(i\omega t) + \bar{\psi} \exp(-i\omega t)) \\ x &= \frac{1}{2i\omega}(\psi \exp(i\omega t) - \bar{\psi} \exp(-i\omega t)) \end{aligned} \quad (1.35)$$

La méthode de complexification de Manevitch est couplée avec celle des échelles multiples, via les hypothèses de l'équation 1.17. La méthode de Galerkin permet de ne garder que la première harmonique de $E(x,t) \equiv E(\psi, \bar{\psi}, t)$ dans l'équation 1.9. Pour cela, on effectue le calcul suivant :

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} E(\psi, \bar{\psi}, t) \exp(-i\omega t) dt = 0 \quad (1.36)$$

L'équation 1.36 suppose que $E(\psi, \bar{\psi}, t)$ est indépendant de l'échelle de temps rapide t_0 . Cette hypothèse sera vérifiée via la méthode des échelles multiples quand l'état asymptotique ($t_0 \rightarrow \infty$) sera recherché.

Puis, on différencie les équations par rapport aux ordres de ϵ . À $\mathcal{O}(1)$, avec $\omega = \alpha + \sigma\epsilon$ de l'équation 1.17 et l'équation 1.32, on obtient :

$$D_0\psi = 0 \quad (1.37)$$

Ainsi, ψ est indépendant de l'échelle t_0 .

À $\mathcal{O}(\epsilon)$, on a :

$$D_1\psi = \frac{1}{8\omega^3}(4\omega^3(\gamma_0 - (\delta_0 + 2i\sigma)\psi) + 3i\beta_0\psi^2\bar{\psi}) \quad (1.38)$$

Les points d'équilibre sont obtenus lorsque $D_1\psi = 0$. Écrivons ψ sous forme polaire tel que :

$$\psi = N_1 \exp(i\theta_1), \quad (N_1, \theta_1) \in \mathbb{R} \quad (1.39)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation 4.20, on peut déduire les expressions de $\cos(\theta_1)$ et $\sin(\theta_1)$. Puis, l'équation $\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2 - 1$ devient :

$$0 = 16\gamma_0^2\omega^6 - N_1^2 16(\delta_0^2 + 4\sigma^2)\omega^6 + N_1^4 48\beta_0\sigma\omega^3 - N_1^6 9\beta_0^2 \quad (1.40)$$

On retrouve une équation d'ordre 3 en N_1^2 , on élimine à nouveau le paramètre caché ϵ en inversant les relations de l'équation 1.17, soit :

$$0 = 16\gamma\omega^6 - N_1^2 16(\delta^2 + 4(\alpha - \omega)^2)\omega^6 + N_1^4 48\beta(\alpha - \omega)\omega^3 - N_1^6 9\beta^2 \quad (1.41)$$

D'après les équations 1.35 et 1.39, on a :

$$x(t) = \frac{N_1}{2i\omega} (\exp(i(\theta_1 + \omega t)) - \exp(-i(\theta_1 + \omega t))) \quad (1.42)$$

Soit :

$$x(t) = \frac{N_1}{\omega} \sin(\omega t + \theta_1) \quad (1.43)$$

L'équation du système de Duffing (cf l'équation 1.9) présente une non linéarité cubique, il est donc parfois nécessaire de prendre en compte plusieurs harmoniques dans la complexification de Manevitch. Notamment une harmonique 3 due au caractère cubique de la non linéarité, en rajoutant ψ_3 dans l'équation 1.32 (Bitar et al., 2019) tel que :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{\partial\psi}{\partial t} \exp(i\omega t) + \frac{\partial\psi_3}{\partial t} \exp(3i\omega t) \quad (1.44)$$

Les équations sont alors à résoudre en prenant en compte l'intégration de l'équation 1.36, et, afin de garder également la troisième harmonique, on calcule :

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega}} E(\psi, \bar{\psi}, t) \exp(-3i\omega t) dt = 0 \quad (1.45)$$

La résolution par la méthode des échelles multiples aux différents ordres de ϵ est ensuite menée comme expliqué précédemment.

Cette méthode de complexification est souvent utilisée pour étudier des phénomènes d'échange et de pompage d'énergies (Gourdon et al., 2007, Charlemagne et al., 2016, Ture Savadkoochi et al., 2016, Bitar et al., 2019, Hurel et al., 2019). Elle permet d'identifier les comportements périodiques et quasi-périodiques des points d'équilibre.

Afin de vérifier les points d'équilibre obtenus par les méthodes analytiques présentées, une vérification est menée par comparaison des résultats avec ceux obtenus via des méthodes numériques. Ces dernières sont expliquées dans la partie suivante.

1.4.2 Les méthodes numériques

Plusieurs méthodes numériques déjà implémentées dans Matlab ou certaines de ses extensions sont utilisées pour vérifier les résultats obtenus analytiquement. Premièrement, il existe une extension nommée ManLab qui a été développée au LMA de Marseille. Elle permet de trouver les solutions périodiques d'équations différentielles. Il est aussi possible d'utiliser la fonction ode45 de Matlab qui permet d'obtenir les solutions d'un système d'équations différentielles par une intégration numérique de ce système.

Utilisation du logiciel ManLab : résolution d'équations différentielles et algébriques

L'extension ManLab (Cochelin, 1994, Arquier et al., 2005) est basée sur une Méthode Asymptotique Numérique (MAN) via une méthode de balance harmonique pour résoudre des systèmes d'équations différentielles. Elle utilise une méthode de continuation afin d'obtenir la réponse périodique du système. L'utilisateur peut décider du nombre d'harmoniques n qui seront utilisées pour le calcul. Il peut même entrer les équations du jacobien afin de statuer sur la stabilité de la réponse périodique obtenue. Cette méthode numérique de résolution des équations différentielles est utilisée pour être comparée aux résultats issus des développements analytiques. Pour ce logiciel, un problème de convergence des calculs, selon le nombre d'harmoniques imposées se pose. Il est donc nécessaire d'utiliser un nombre suffisant d'harmoniques pour obtenir un résultat cohérent. Cependant le rajout d'harmoniques induit un temps de calcul rallongé de la méthode. Le logiciel permet aussi de résoudre des systèmes non linéaires d'équations algébriques. Il est donc également utilisé pour tracer les réponses numériques à partir des équations algébriques obtenues par les résolutions analytiques.

Résolution d'équations différentielles via l'intégration numérique de Matlab

Une autre méthode de résolution d'équations différentielles consiste à utiliser des schémas numériques qui sont déjà codés dans Matlab. Notamment la fonction ode45 basée sur une méthode de Runge-Kutta. Pour cela, le système d'équations différentielles est donné sous forme de fonction pour permettre une intégration numérique. Par exemple, pour l'équation 1.9, le système donné à Matlab est le suivant :

$$\begin{cases} y(1) = \dot{x} \\ y(2) = -\delta y(2) - \alpha^2 y(1) - \beta y(1)^3 + \gamma \cos(\omega t) \end{cases} \quad (1.46)$$

Pour la résolution numérique, il est nécessaire d'indiquer des conditions initiales, un pas de temps, ainsi qu'un temps initial et final de calcul. Dans des cas de systèmes non linéaires, la réponse dynamique peut dépendre de la condition initiale imposée au système. Une fois les réponses temporelles $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ connues, il est possible de comparer les résultats analytiques et numériques. Pour cela, il faut extraire le comportement dynamique sur ses points d'équilibre (i.e. pour un temps t_f tel que le régime permanent de $x(t)$ est atteint) pour comparer leurs amplitudes avec celles obtenues analytiquement.

Ces deux méthodes numériques permettent une vérification des points d'équilibre de la dynamique obtenus via les méthodes analytiques.

1.5 Conclusion du chapitre

Dans un système dynamique, s'il existe une résonance interne entre deux modes, alors la réponse à une excitation sur l'un de ces deux modes devient une réponse combinée des deux. Dans le cas où le système présente des non linéarités de même ordre que la résonance interne, alors les amplitudes de vibration de ces deux modes sont reliées, et il est même possible d'échanger de l'énergie entre ces modes. Ces comportements sont intéressants car ils permettent :

- soit de contrôler les vibrations du système principal en distribuant les énergies modales entre les modes concernés par la résonance interne,
- soit de récupérer l'énergie concentrée sur un mode particulier.

Pour activer ce phénomène non linéaire d'échange d'énergie, il faut :

- obtenir une résonance interne entre deux pulsations propres du système, soit $\omega_m \simeq p\omega_n$ avec p un entier.
- que les équations dynamiques présentent une non linéarité associée, i.e. qu'il existe des termes cubiques si $p = 3$ ou quadratiques si $p = 2$.

Or, si la poutre subit de grandes déformations, elle peut présenter un comportement non linéaire et les matériaux piézoélectriques également. Ces comportements se traduisent en des termes non linéaires dans les équations dynamiques. Si les termes non linéaires inhérents au système électro-mécanique sont insuffisants pour permettre des phénomènes d'échange, il est possible d'utiliser d'autres non linéarités grâce aux circuits électriques reliés aux matériaux piézoélectriques. Les méthodes de résolution ayant été présentées, il faut maintenant écrire les équations dynamiques du système électro-mécanique pour en étudier son comportement.

Dans le chapitre suivant, les équations non linéaires couplées d'un système composé d'une poutre cantilever et de matériaux piézoélectriques collés sur celle-ci, sont développées. Une étude modale est ensuite effectuée pour identifier la création de résonances internes, ainsi que leur compatibilité avec les non linéarités du système composite. Pour finir, le comportement dynamique sur les résonances internes créées est étudié.

Chapitre 2

Mise en place du modèle électro-mécanique non linéaire

Ce chapitre présente la mise en place des équations dynamiques d'une poutre homogène sur laquelle sont collés des matériaux piézoélectriques. Ces équations prennent en compte des non linéarités géométriques de la poutre, et des non linéarités matérielles des patches piézoélectriques. Le comportement modal de ce système électro-mécanique, qui correspond aux pulsations propres et leurs déformées modales associées, est identifié. Le système est ensuite réduit sur un ou des modes d'intérêts pour décrire le comportement dynamique de la structure via une méthode des échelles multiples. Une application numérique des résultats théoriques est pratiquée, sur l'exemple d'une poutre avec un seul patch piézoélectrique collé dessus. On compare le comportement de la poutre composite à celui d'une poutre homogène sans matériau piézoélectrique. Les principaux résultats théoriques sont conformes à l'article de Guillot et al. (2019b). On explique les cas de circuit ouvert et de circuit fermé pour les points d'équilibre à un mode, et on étudie des cas de résonance 1 : 2 et 1 : 3.

Sommaire

2.1	Équations dynamiques du système électro-mécanique	20
2.1.1	Description de la déformation du système	20
2.1.2	Écriture de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique	24
2.1.3	Écriture du Lagrangien du système	28
2.2	Résolution de systèmes réduits : analyse modale et fréquentielle	35
2.2.1	Analyse modale : pulsations propres et déformées modales . . .	36
2.2.2	Étude de la dynamique sur un petit nombre de modes : réduction de modèle sur un et deux modes	42
2.3	Exemples numériques	70
2.3.1	Résultats de l'analyse modale : résonances internes et déformées modales	71
2.3.2	Réponses fréquentielles des réductions modales à un et deux modes	78
2.4	Conclusion du chapitre	92

2.1 Équations dynamiques du système électro-mécanique

Cette partie du chapitre présente la mise en place des équations dynamiques du mouvement d'un système électro-mécanique composé d'une poutre non linéaire et de patches piézoélectriques au comportement supposé non linéaire. Les matériaux piézoélectriques sont collés à des endroits précis sur la poutre. Les développements analytiques, permettant de déduire les équations dynamiques du mouvement, se basent sur ceux appliqués à une poutre non linéaire par Crespo Da Silva (1988), Malaktar (2003), Nayfeh and Pai (2004) avec une formulation variationnelle. Dans un premier temps, le tenseur des déformations de Green Lagrange du système est décrit, en utilisant la définition des différents angles de rotation d'Euler. Ensuite, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la poutre et des matériaux sont définies, avant d'utiliser l'équation de Lagrange pour développer les équations complètes à trois dimensions du mouvement de notre système composite. Pour finir, ces équations à trois dimensions sont réduites à un problème à deux dimensions.

2.1.1 Description de la déformation du système

On considère une poutre homogène, pourvue de n matériaux piézoélectriques patchés à des abscisses précises : entre $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$, ..., $[x_{2n-1}, x_{2n}]$, avec $x_1 > 0$ et $x_{2n} < L_b$ (cf la figure 2.1). On peut choisir d'avoir seulement des matériaux piézoélectriques sur le dessus de la poutre, on parle dans ce cas de configuration unimorphe (cf la figure 2.1).

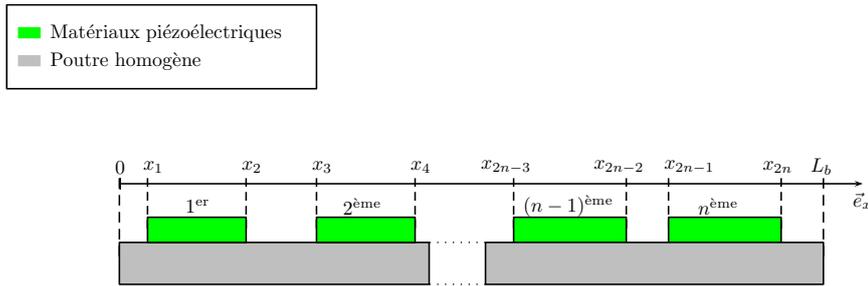


FIGURE 2.1 – Schéma de la poutre électro-mécanique dans une configuration unimorphe : une poutre homogène patchée avec n matériaux piézoélectriques situés sur le dessus (entre $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$, ..., $[x_{2n-1}, x_{2n}]$, avec $x_1 > 0$ et $x_{2n} < L_b$).

On peut également avoir des matériaux piézoélectriques situés au-dessus et en dessous de la poutre, placés de manière symétrique aux positions $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$, ..., $[x_{2n-1}, x_{2n}]$, on appelle cette configuration la configuration bimorphe.

Soit b_b la largeur de la poutre et b_p celle des matériaux piézoélectriques. L'épaisseur de la poutre et des matériaux piézoélectriques sont nommées respectivement h_b et h_p et leurs longueurs L_b et L_p .

Le modèle de poutre non linéaire se base sur la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli. On suppose que la poutre subit de larges déformations, ce qui permet de prendre en compte des non linéarités géométriques. Le système de coordonnées initial est noté $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et le système de coordonnées curvilignes local $(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$. La poutre homogène subit trois rotations d'angle d'Euler entre ces deux systèmes de coordonnées, qui sont notées $\chi(s, t)$, $\theta(s, t)$ et $\beta(s, t)$ avec s l'abscisse curviligne et t le temps. Ces trois rotations d'angle de

déformation sont décrites sur la figure 2.2.

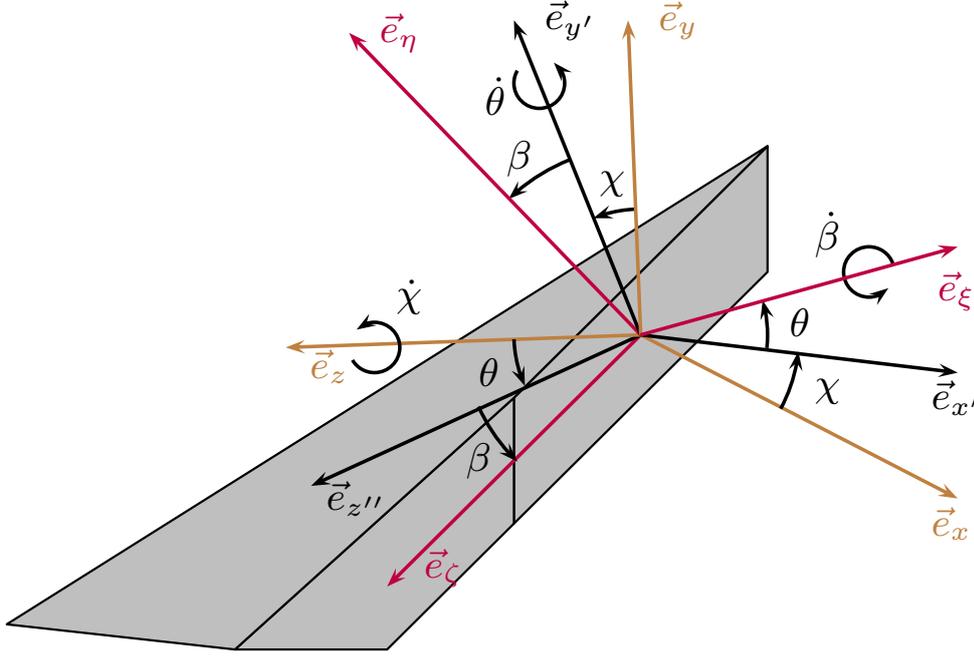


FIGURE 2.2 – Définition des trois rotations d'angle d'Euler : $\chi(s,t)$, $\theta(s,t)$ et $\beta(s,t)$ qui permettent de passer du système de coordonnées initial $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ au système de coordonnées curvilignes local $(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$.

Les angles d'Euler permettent de définir un vecteur de vitesse angulaire $\Pi(s,t)$ tel que :

$$\begin{aligned} \Pi(s,t) &= (\dot{\beta} - \dot{\xi} \sin(\theta))\vec{e}_\xi + (\dot{\xi} \cos(\theta) \sin(\beta) + \dot{\theta} \cos(\beta))\vec{e}_\eta \\ &\quad + (\dot{\xi} \cos(\theta) \cos(\beta) - \dot{\theta} \sin(\beta))\vec{e}_\zeta \\ &= \Pi_\xi \vec{e}_\xi + \Pi_\eta \vec{e}_\eta + \Pi_\zeta \vec{e}_\zeta \end{aligned} \quad (2.1)$$

Grâce à l'analogie cinétique de Kirchoff (Love, 1944) consistant à remplacer les dérivées temporelles par des dérivées spatiales, on déduit le vecteur de courbure $\rho(s,t)$ suivant :

$$\begin{aligned} \rho(s,t) &= (\beta' - \xi' \sin(\theta))\vec{e}_\xi + (\xi' \cos(\theta) \sin(\beta) + \theta' \cos(\beta))\vec{e}_\eta \\ &\quad + (\xi' \cos(\theta) \cos(\beta) - \theta' \sin(\beta))\vec{e}_\zeta \\ &= \rho_\xi \vec{e}_\xi + \rho_\eta \vec{e}_\eta + \rho_\zeta \vec{e}_\zeta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Étudions la déformation que subit un petit élément de longueur ds situé sur l'axe neutre de la structure. Soit $F(t)$ la déformation de l'élément ds qui passe du système de coordonnées initial au système de coordonnées curvilignes local en devenant l'élément ds^* . D'un déplacement (u,v,w) dans le système de coordonnées initial, il subit un déplacement noté $(u + du, v + dv, w + dw)$ dans le système local, et les rotations d'angle d'Euler (cf la figure 2.3).

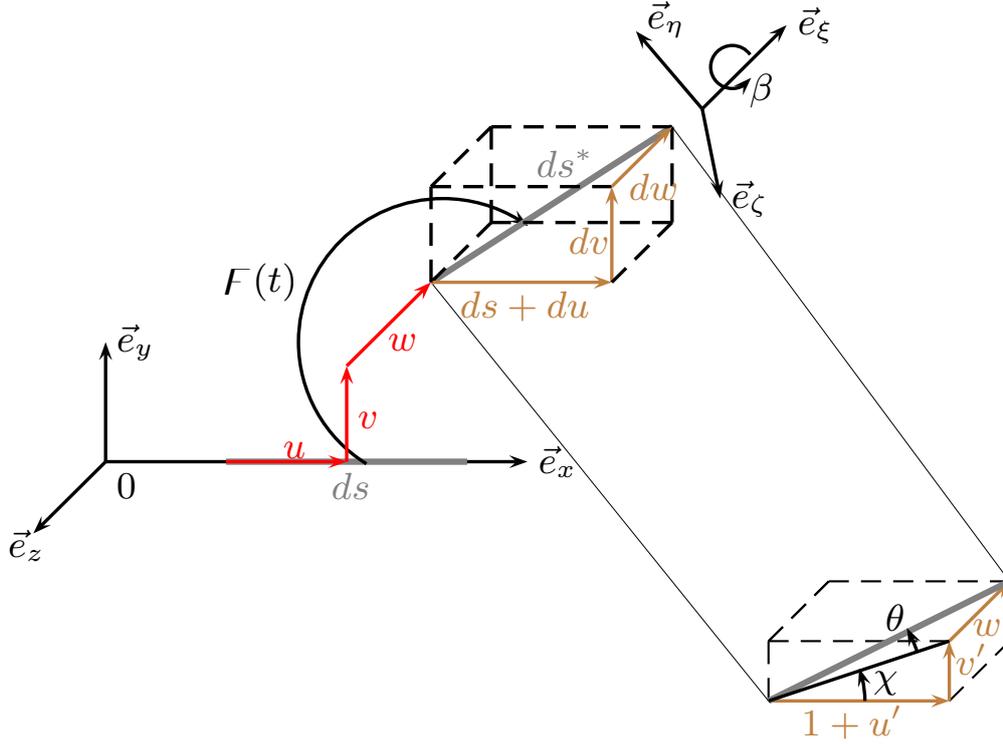


FIGURE 2.3 – Schéma de la déformation $F(t)$ de l'élément ds situé sur l'axe neutre de la poutre non déformée, qui devient l'élément ds^* sur l'axe neutre de la poutre déformée. La déformation est décrite par les déplacements u, v, w et les rotations d'angles β, θ et χ .

Les coordonnées du, dv et dw permettent de définir les angles d'Euler suivants :

$$\begin{aligned} \tan(\chi) &= \frac{v'}{1+u'} \\ \tan(\theta) &= \frac{w'}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

avec $'$ la dérivée partielle des variables par rapport à s .

L'élongation e de la poutre est définie telle que :

$$e = \frac{ds^* - ds}{ds} = \sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2} - 1 \quad (2.4)$$

La poutre est supposée encastree-libre, elle est donc inextensible. Cette hypothèse impose une élongation nulle de la poutre (soit $e = 0$). D'où l'équation de contrainte d'inextensibilité suivante :

$$(1+u')^2 + v'^2 + w'^2 = 1 \quad (2.5)$$

D'après la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli, la section transversale (selon (\vec{e}_y, \vec{e}_z) dans le système de coordonnées initial, et selon $(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ dans le système de coordonnées local) reste droite. Soit P un point situé sur la section droite (\vec{e}_y, \vec{e}_z) et C , un autre point sur cette section droite, placé sur l'axe neutre. Les coordonnées du point P dans le système de coordonnées initial sont notées (η, ζ) (cf la figure 2.4). Le point C est situé à une distance s de l'origine O . Suite à la transformation $F(t)$ de la poutre déformée, les points C et P

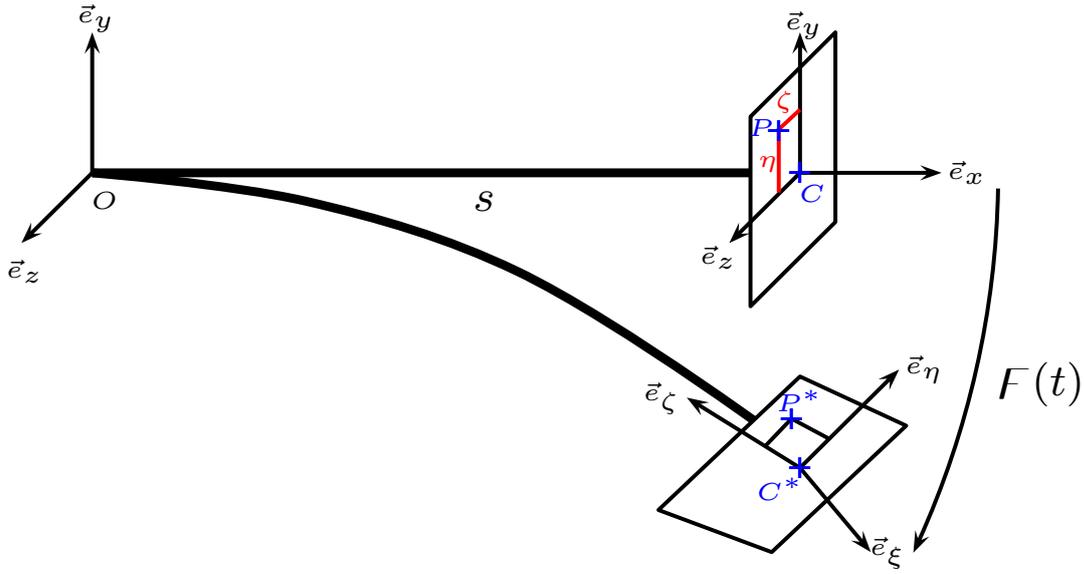


FIGURE 2.4 – Schéma de la déformation $F(t)$ des particules C et P dans le système initial aux particules C^* et P^* dans le système local. Ces particules sont placées sur la section qui reste droite d'après l'hypothèse d'une poutre d'Euler Bernoulli. C étant positionné sur l'axe neutre, à une distance s de l'origine dans le système initial. P est situé aux coordonnées (η, ζ) sur les sections droites (\vec{e}_y, \vec{e}_z) et $(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$.

deviennent des points C^* et P^* dans la section droite $(\vec{e}_\zeta, \vec{e}_\eta)$ (cf la figure 2.4). La section droite restant droite, le point P^* garde les mêmes coordonnées (η, ζ) , sur la section $(\vec{e}_\zeta, \vec{e}_\eta)$. Pour définir la transformation subie par la poutre, on écrit les vecteurs \overrightarrow{OP} et $\overrightarrow{OP^*}$ par l'utilisation de la relation de Chasles suivante :

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = s\vec{e}_x + \eta\vec{e}_y + \zeta\vec{e}_z \quad (2.6)$$

$$\overrightarrow{OC^*} + \overrightarrow{C^*P^*} = (s + u)\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z + \eta\vec{e}_\eta + \zeta\vec{e}_\zeta$$

Ou encore :

$$d(\overrightarrow{OP}) = ds\vec{e}_x + d\eta\vec{e}_y + d\zeta\vec{e}_z \quad (2.7)$$

$$d(\overrightarrow{OP^*}) = (1 + u')ds\vec{e}_x + v'ds\vec{e}_y + w'ds\vec{e}_z + d\eta\vec{e}_\eta + \eta d\vec{e}_\eta + d\zeta\vec{e}_\zeta + \zeta d\vec{e}_\zeta$$

Or, pour une position s fixée, on peut écrire :

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \Pi(s, t) \times \vec{e}_\varphi \quad (2.8)$$

où φ représente les directions \vec{e}_ξ , \vec{e}_η et \vec{e}_ζ , \times représente le produit de deux vecteurs et $\Pi(s, t)$ le vecteur de vitesse angulaire de l'équation 2.1. Grâce à l'analogie de Kirchoff (Love, 1944), on obtient :

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{ds} = \rho(s, t) \times \vec{e}_\varphi \quad (2.9)$$

avec $\rho(s,t)$ le vecteur de courbure de l'équation 2.2.

C'est pourquoi, la transformation du vecteur devient :

$$\begin{aligned} d(\overrightarrow{OP}) &= ds \vec{e}_x + d\eta \vec{e}_y + d\zeta \vec{e}_z \\ d(\overrightarrow{OP}^*) &= (1 + \eta\zeta\rho_\eta - \eta\zeta\rho_\eta) ds \vec{e}_\xi + (d\eta - \zeta\xi\rho_\eta ds) \vec{e}_\eta \\ &\quad + (d\zeta + \eta\xi\rho_\eta ds) \vec{e}_\zeta \end{aligned} \quad (2.10)$$

D'après la définition du tenseur des déformations de Green, on a la relation suivante :

$$d(\overrightarrow{OP}^*) \cdot d(\overrightarrow{OP}^*) - d(\overrightarrow{OP}) \cdot d(\overrightarrow{OP}) = 2[ds \ d\eta \ d\zeta] \boldsymbol{\epsilon}_b [ds \ d\eta \ d\zeta]^T \quad (2.11)$$

où $\boldsymbol{\epsilon}_b$ est le tenseur des déformations de Lagrange de la poutre. On obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} d(\overrightarrow{OP}^*) \cdot d(\overrightarrow{OP}^*) - d(\overrightarrow{OP}) \cdot d(\overrightarrow{OP}) &= 2(\zeta\rho_\eta - \eta\rho_\zeta - 2\zeta\eta\rho_\zeta\rho_\eta) ds^2 \\ &\quad - 2\zeta\rho_\xi d\eta ds + 2\eta\rho_\xi ds d\zeta \end{aligned} \quad (2.12)$$

en négligeant les termes d'ordres plus élevés en ρ_φ ($\varphi \mapsto \xi, \zeta, \eta$), l'équation 2.12 devient :

$$\begin{aligned} d(\overrightarrow{OP}^*) \cdot d(\overrightarrow{OP}^*) - d(\overrightarrow{OP}) \cdot d(\overrightarrow{OP}) &= 2(\zeta\rho_\eta - \eta\rho_\zeta) ds^2 \\ &\quad - 2\zeta\rho_\xi d\eta ds + 2\eta\rho_\xi ds d\zeta \end{aligned} \quad (2.13)$$

On peut alors identifier les composantes du tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}_b$, à partir des équations 2.11 et 2.13 :

$$\boldsymbol{\epsilon}_b = \begin{bmatrix} \zeta \rho_\eta - \eta \rho_\zeta & -\frac{1}{2}\zeta \rho_\xi & \frac{1}{2}\eta \rho_\xi \\ -\frac{1}{2}\zeta \rho_\xi & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\eta \rho_\xi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Comme les matériaux piézoélectriques sont collés sur la poutre, on suppose que leur déformation est similaire à celle de la poutre, soit $\boldsymbol{\epsilon}_b \equiv \boldsymbol{\epsilon}_p$, et qu'il n'y a donc pas de décrochage entre les deux couches.

2.1.2 Écriture de lénergie potentielle et de l'énergie cinétique

Dans cette partie, après avoir défini le tenseur des déformations de notre système, afin d'écrire les équations complètes du mouvement, on décrit son énergie potentielle et son énergie cinétique.

L'énergie potentielle U_b et l'énergie cinétique T_b de la poutre homogène s'écrivent :

$$\begin{cases} T_b = \frac{1}{2} \int_0^{L_b} \mu_b (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) ds \\ U_b = \frac{1}{2} \int_0^{L_b} \left[\iint_A \boldsymbol{\sigma}_b : \boldsymbol{\epsilon}_b d\eta d\zeta \right] ds \end{cases} \quad (2.15)$$

où μ_b et σ_b sont respectivement la densité massique et le tenseur des contraintes de la poutre homogène. Le coefficient de Poisson étant supposé négligeable, on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_{b_{11}} &\simeq E_b \epsilon_{b_{11}} \\ \sigma_{b_{12}} &\simeq G_b \epsilon_{b_{12}} \\ \sigma_{b_{13}} &\simeq G_b \epsilon_{b_{13}}\end{aligned}\quad (2.16)$$

avec E_b et G_b , le module d'Young et le coefficient de cisaillement de la poutre homogène. La courbure $\rho(s,t)$ de la poutre ne dépendant que de l'abscisse curviligne s , l'énergie potentielle de la poutre se simplifie de la manière suivante :

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L (D_\xi \rho_\xi^2 + D_\eta \rho_\eta^2 + D_\zeta \rho_\zeta^2) ds \quad (2.17)$$

avec :

$$\begin{aligned}D_\xi &= G_b \iint_A (\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta \\ D_\eta &= E_b \iint_A \zeta^2 d\eta d\zeta \\ D_\zeta &= E_b \iint_A \eta^2 d\eta d\zeta\end{aligned}\quad (2.18)$$

Ici, dans le cas où les matériaux piézoélectriques sont positionnés uniquement sur le dessus de la poutre, l'axe neutre ne se situe pas au milieu de la poutre homogène sur toute sa longueur (cf la figure 2.5). Cette modification d'axe neutre est prise en compte dans l'intégration sur $d\eta$. En supposant que la hauteur h_p des matériaux piézoélectriques est petite, la modification de l'axe neutre est négligeable, et ne vient pas remettre en cause l'hypothèse d'inextensibilité. Cependant, aux endroits où les matériaux piézoélectriques sont présents sur la poutre dans la configuration unimorphe, un couplage axial-flexion existe mais est annulé par cette hypothèse. Cet effet est donc négligé dans nos équations. Dans le cas d'une configuration bimorphe, les matériaux piézoélectriques étant placés symétriquement l'axe neutre reste le milieu de la poutre sur toute la longueur.

L'énergie potentielle U_p et l'énergie cinétique T_p des matériaux piézoélectriques dépendent de la fonction de densité électrique $H(\epsilon_p, E)$ (IEEE, 1988) (avec ϵ_p le tenseur des déformations des matériaux piézoélectriques et E leur champ électrique) telles que :

$$\begin{aligned}T_p &= \frac{1}{2} \int_0^{L_b} \mu_p (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) ds \\ U_p &= \int_0^{L_b} \iint_{A_p} H(\epsilon_p, E) d\eta d\zeta ds\end{aligned}\quad (2.19)$$

où μ_p est la densité massique des matériaux et A_p l'aire de la section des matériaux piézoélectriques dans le plan $(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$, l'intégration s'effectuant par rapport à l'axe neutre.

La fonction de densité électrique permet également de définir la charge électrique Q traversant l'électrode située en $\eta = \eta_p$ des matériaux piézoélectriques de la manière suivante (IEEE, 1988, Miu, 1993) :

$$Q = \int_s \int_\zeta - \frac{\partial H(\epsilon_p(\eta = \eta_p), E)}{\partial E} d\zeta ds \quad (2.20)$$

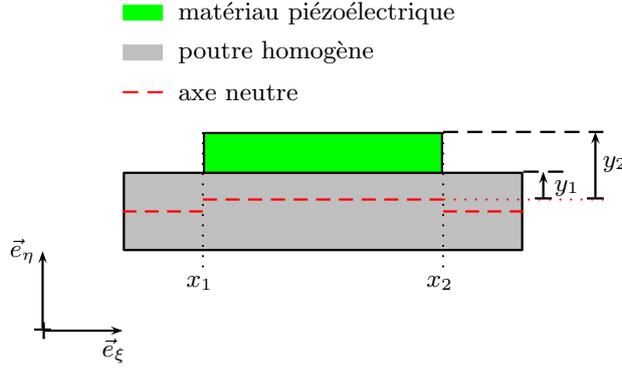


FIGURE 2.5 – Schéma montrant l'emplacement des électrodes supérieures ($\eta = y_2$) et inférieures ($\eta = y_1$) du matériau piézoélectrique, par rapport à l'axe neutre, dans le cas de la configuration unimorphe. Le schéma est présenté pour le premier matériau piézoélectrique situé entre x_1 et x_2 . Il montre la modification de l'axe neutre entre les portions où il n'y a que la poutre ($s < x_1$ et $s > x_2$) et les portions avec poutre et patch piézoélectrique ($s \in [x_1, x_2]$).

avec s et ζ intégrés sur les sections des matériaux piézoélectriques selon $(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\zeta)$. η_p est l'ordonnée extrême des électrodes des matériaux piézoélectriques (i.e $\eta_p = y_1$ et $\eta_p = y_2$ pour les charges des électrodes respectivement inférieures et supérieures, cf la figure 2.5, où y_1 et y_2 sont définis par rapport à l'axe neutre). Les matériaux piézoélectriques correspondent à une capacité et une faible résistance qui est négligée. Ainsi, leur charge Q est impliquée dans l'équation électrique du circuit auquel ils sont reliés. La tension électrique V qui les traverse est donnée par la différence de tension électrique v contenue dans les électrodes supérieures et inférieures (situées respectivement en $\eta = y_2$ et $\eta = y_1$ cf la figure 2.5) :

$$V = v(y_2) - v(y_1) \quad (2.21)$$

L'équation reliée au circuit électrique est ainsi prise en compte dans les équations électromécaniques qui décrivent le comportement du système. Afin d'écrire ces équations, on définit le potentiel des matériaux piézoélectriques, au travers de leur fonction de densité électrique $H(\epsilon_p, E)$. Au vu de l'état de l'art sur le comportement non linéaire des matériaux piézoélectriques, pour être le plus général possible, on suppose la fonction de densité électrique $H(\epsilon_p, E)$ suivante (Beige and Schmidt, 1982, Guyomar et al., 1997, Parashar and Wagner, 2004) :

$$\begin{aligned} H(\epsilon_p, E) = & \frac{s_{ij}}{2} \epsilon_{p,i} \epsilon_{p,j} + d_{mi} \epsilon_{p,i} E_m + \frac{\epsilon_{mn}}{2} E_m E_n \\ & + \frac{s_{ijk}}{3} \epsilon_{p,i} \epsilon_{p,j} \epsilon_{p,k} + d_{mij} \epsilon_{p,i} \epsilon_{p,j} E_m \\ & + r_{mni} \epsilon_{p,i} E_m E_n + \frac{\epsilon_{mnp}}{3} E_m E_n E_p \\ & + \frac{s_{ijkl}}{4} \epsilon_{p,i} \epsilon_{p,j} \epsilon_{p,k} \epsilon_{p,l} + \frac{\epsilon_{mnpq}}{4} E_m E_n E_p E_q \end{aligned} \quad (2.22)$$

avec $i, j, k, l \rightarrow 1, \dots, 6$ qui correspondent aux coordonnées du tenseur des déformations écrit sous forme vectorielle, et $m, n, p, q \rightarrow \xi, \eta, \zeta$, avec $\xi \rightarrow 1, \eta \rightarrow 3, \zeta \rightarrow -2$ (notation de

Voigt-Kelvin (Reddy, 1997)), pour correspondre au cas le plus traité dans la littérature (i.e. une polarisation du matériau selon la direction \vec{e}_3). En effet, dans notre cas, les matériaux piézoélectriques sont polarisés dans la direction \vec{e}_η qui correspond à la direction 3 dans l'écriture générale de la littérature sur les matériaux piézoélectriques.

Les termes d'ordre 2 de ce potentiel (cf l'équation 2.22) deviennent des termes linéaires dans les équations du mouvement. Ces termes quadratiques sont bien connus pour les matériaux piézoélectriques et ils sont généralement affichés par les constructeurs de ces matériaux. Il s'agit des modules d'élasticité (s_{ij}), des constantes piézoélectriques (d_{mi}) et des permittivités diélectriques (ε_{mn}). On prend également en compte des termes d'ordre 3 qui viennent d'un comportement piézoélectrique non linéaire : d_{mij} représente la dépendance non linéaire des coefficients de couplage piézoélectriques par rapport à la déformation mécanique ϵ_{ij} , les r_{mni} sont des coefficients électrostrictifs non linéaires qui peuvent être déterminés en traçant l'électrostriction du matériau. On suppose également des non linéarités élastiques et diélectriques avec des termes d'ordre 3 (les s_{ijk} et les ε_{mnp}) et d'ordre 4 (les s_{ijkl} et les ε_{mnpq}).

Les matériaux piézoélectriques étant supposés polarisés dans la direction \vec{e}_η et l'épaisseur h_p de ceux-ci étant supposée petite, on a (IEEE, 1988, Miu, 1993) :

$$\begin{aligned} E_\xi &\simeq E_\zeta \simeq 0 \\ E_\eta &\simeq -\frac{V}{h_p} \end{aligned} \tag{2.23}$$

avec V la tension électrique traversant les matériaux piézoélectriques. Cette équation est valable lorsqu'on se trouve dans une configuration unimorphe. Si on se trouve dans un cas bimorphe (des patches au-dessus et en dessous de la poutre) et que les matériaux sont connectés en série, l'équation devient (Mam et al., 2016) :

$$E_\eta \simeq -\frac{V}{2h_p} \tag{2.24}$$

D'après la définition du champ électrique de l'équation 2.23 et les composantes du tenseur des déformations de l'équation 2.14, on peut écrire l'énergie potentielle des matériaux électriques U_p (cf l'équation 2.19) et leur charge électrique Q (cf l'équation 2.20) de la manière suivante (du fait de la symétrie sur la largeur b_p , certains termes n'apparaissent

pas dans les expressions) :

$$\begin{aligned}
 \int_{\zeta} \int_{\eta} H(\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{p}}, E) d\eta d\zeta = & H_{\xi\xi} \rho_{\xi}^2 + H_{\eta\eta} \rho_{\eta}^2 + H_{\zeta\zeta} \rho_{\zeta}^2 + H_{VV} V^2 \\
 & + H_{\zeta V} \rho_{\zeta} V + H_{\xi V} \rho_{\xi} V + H_{\xi\zeta} \rho_{\xi} \rho_{\zeta} + H_{\xi\eta} \rho_{\xi} \rho_{\eta} \\
 & + H_{\xi\xi\xi} \rho_{\xi}^3 + H_{\zeta\zeta\zeta} \rho_{\zeta}^3 + H_{VVV} V^3 \\
 & + H_{\zeta\xi\xi} \rho_{\xi}^2 \rho_{\zeta} + H_{\xi\eta\eta} \rho_{\eta}^2 \rho_{\xi} + H_{\zeta\eta\eta} \rho_{\eta}^2 \rho_{\zeta} \\
 & + H_{\zeta\zeta\xi} \rho_{\xi} \rho_{\zeta}^2 + H_{\xi\eta\eta} \rho_{\xi} \rho_{\eta}^2 + H_{\xi\xi V} \rho_{\xi}^2 V + H_{\eta\eta V} \rho_{\eta}^2 V \\
 & + H_{\zeta\zeta V} \rho_{\zeta}^2 V + H_{\zeta V V} \rho_{\zeta} V^2 + H_{\xi V V} \rho_{\xi} V^2 \\
 & + H_{\xi\zeta V} \rho_{\xi} \rho_{\zeta} V + H_{\xi\eta V} \rho_{\xi} \rho_{\eta} V \\
 & + H_{\zeta\zeta\zeta} \rho_{\zeta}^4 + H_{\eta\eta\eta\eta} \rho_{\eta}^4 + H_{VVVV} V^4
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
 Q = \int_s (& Q_{\xi} \rho_{\xi} + Q_{\eta} \rho_{\eta} + Q_{\zeta} \rho_{\zeta} + Q_V V + Q_{\xi\xi} \rho_{\xi}^2 + Q_{\eta\eta} \rho_{\eta}^2 + Q_{\zeta\zeta} \rho_{\zeta}^2 \\
 & + Q_{\zeta\xi} \rho_{\zeta} \rho_{\xi} + Q_{\zeta\eta} \rho_{\zeta} \rho_{\eta} + Q_{\xi\eta} \rho_{\xi} \rho_{\eta} \\
 & + Q_{VV} V^2 + Q_{\xi V} \rho_{\xi} V + Q_{\eta V} \rho_{\eta} V + Q_{\zeta V} \rho_{\zeta} V + Q_{VVV} V^3) ds
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

avec η intégré entre y_1 et y_2 , et ζ entre $-\frac{b_p}{2}$ et $\frac{b_p}{2}$ qui sont les sections considérées dans le plan $(\vec{e}_{\eta}, \vec{e}_{\zeta})$ les coefficients sont définis dans l'annexe 5.1.

Suite à l'écriture des énergies potentielles et cinétiques de la poutre et des matériaux piézoélectriques, le Lagrangien du système électro-mécanique complet est défini.

2.1.3 Écriture du Lagrangien du système

Les équations complètes du système dynamique peuvent alors être écrites grâce aux développements des parties précédentes.

À partir des énergies potentielles et cinétiques de la poutre et des matériaux piézoélectriques développées précédemment, on écrit le Lagrangien l du système tel que :

$$\begin{aligned}
 l = & \left(1 - \mathcal{H}(s - x_1) + \mathcal{H}(s - x_1) - \dots + \mathcal{H}(s - L_b) \right) (T_b - U_b) \\
 & + \left(\mathcal{H}(s - x_1) - \mathcal{H}(s - x_2) + \dots + \mathcal{H}(s - x_{2n-1}) - \mathcal{H}(s - x_{2n}) \right) (T_p - U_p) \\
 & + \frac{\lambda}{2} \left(1 - (1 + u')^2 - v'^2 - w'^2 \right)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

avec \mathcal{H} les fonctions de Heaviside telles que :

$$\mathcal{H}(s - x_i) = \begin{cases} 0, & \text{if } s < x_i \\ 1, & \text{if } s \geq x_i \end{cases} \tag{2.28}$$

Ces fonctions de Heaviside sont utilisées pour prendre en compte le positionnement des différents matériaux piézoélectriques sur la poutre (entre $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$, ..., $[x_{2n-1}, x_{2n}]$, cf la figure 2.1). C'est ainsi que les énergies cinétiques de la poutre et des matériaux piézoélectriques sont définies par parties par rapport aux abscisses où il n'y a que la poutre et les abscisses où les matériaux piézoélectriques sont également présents. En effet, les calculs des inerties sont différenciés selon l'emplacement de l'axe neutre (cf la figure 2.5). Le coefficient λ est un multiplicateur de Lagrange, il prend en compte l'hypothèse d'inextensibilité de la poutre au travers de $e = 0$ (cf l'équation 2.5). Afin d'obtenir les équations de mouvement du système électro-mécanique, supposons que le système possède un potentiel non conservatif, noté W_{NC} . Le principe de moindre action d'Hamilton s'écrit donc :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta l + \delta W_{NC}) dt = 0 \quad (2.29)$$

Soit Q_u , Q_v et Q_w les forces généralisées dans les directions \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z , ainsi que c_u , c_v et c_w les coefficients d'amortissement respectifs. Ainsi, on peut écrire les travaux non conservatifs tels que :

$$\delta W_{NC} = \int_0^{L_b} [(Q_u - c_u \dot{u})\delta u + (Q_v - c_v \dot{v})\delta v + (Q_w - c_w \dot{w})\delta w] ds \quad (2.30)$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} = \frac{\partial W_{NC}}{\partial q_i} \quad (2.31)$$

avec q_i les coordonnées généralisées du système suivantes :

$q_i \rightarrow u(s, t)$, $v(s, t)$, $w(s, t)$, $\lambda(s, t)$, $\chi(s, t)$, $\beta(s, t)$ et $\theta(s, t)$.

D'après l'analogie de Kirchoff (Love, 1944), l'équation de Lagrange devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial l}{\partial q'_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} = \frac{\partial W_{NC}}{\partial q_i} \quad (2.32)$$

où \dot{q}_i et q'_i représentent la dérivée en temps et la dérivée en espace des coordonnées généralisées q_i .

Au vu des expressions des angles d'Euler (cf l'équation 2.3), leurs dérivées peuvent se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \delta \chi &= \frac{\partial \chi}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial \chi}{\partial v'} \delta v' \\ \delta \theta &= \frac{\partial \theta}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial \theta}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial \theta}{\partial w'} \delta w' \end{aligned} \quad (2.33)$$

On suppose également que les opérations de dérivations peuvent commuter, soit :

$$\begin{aligned} \delta \dot{\varphi} &= \frac{\partial}{\partial t} (\delta \varphi) \\ \delta \varphi' &= \frac{\partial}{\partial s} (\delta \varphi) \end{aligned} \quad (2.34)$$

avec $\wp \rightarrow u, v, w, \chi, \theta, \beta$. Ainsi, dans l'équation 2.29 on obtient les intégrations par parties sur le temps suivantes :

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\wp}(\delta \dot{u}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\wp} \frac{\partial}{\partial t}(\delta u) dt = \left[\dot{\wp} \delta u \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\wp} \delta u dt \quad (2.35)$$

Or, il est supposé que $\delta u(t_1) = \delta u(t_2) = 0$, d'où :

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\wp}(\delta \dot{u}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\wp} \delta u dt \quad (2.36)$$

De la même manière des intégrations par parties sur la courbure s (entre 0 et L_b) sont telles que :

$$\int_0^{L_b} g(\wp) \frac{\partial}{\partial s} \delta \wp ds = \left[g(\wp) \delta \wp \right]_0^{L_b} - \int_0^{L_b} \frac{\partial}{\partial s} g(\wp) \delta \wp ds \quad (2.37)$$

On définit également l'angle de torsion γ , tel que :

$$\gamma \simeq \beta + \int_0^s v'' w' ds \quad (2.38)$$

Du fait de la présence des matériaux piézoélectriques sur certaines portions de la poutre, des fonctions de Heaviside \mathcal{H} apparaissent dans les équations, ainsi que leurs dérivées les fonctions de Dirac δ . On définit donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_b(s) &= 1 - \mathcal{H}(s - x_1) + \mathcal{H}(s - x_1) \dots - \mathcal{H}(s - x_{2n}) + \mathcal{H}(s - L_b) \\ \mathbb{I}_p(s) &= \mathcal{H}(s - x_1) - \mathcal{H}(s - x_2) + \dots + \mathcal{H}(s - x_{2n-1}) - \mathcal{H}(s - x_{2n}) \\ \Lambda(s) &= \delta(s - x_1) - \delta(s - x_2) + \dots + \delta(s - x_{2n-1}) - \delta(s - x_{2n}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

On rappelle que $x_1 > 0$ et $x_{2n} < L_b$.

Les équations dynamiques du mouvement sont alors obtenues selon $\delta \phi$, $\delta \lambda$, δu , δv et δw jusqu'à l'ordre 3, soit :

$$\begin{aligned} \delta \phi : \quad & D_\xi (\mathbb{I}_b \gamma')' + 2H_{\xi\xi} (\mathbb{I}_p \gamma')' = (D_\zeta - D_\eta) \mathbb{I}_b (v'' w'') \\ & + 2 \mathbb{I}_p (H_{\zeta\zeta} - H_{\eta\eta}) v'' w'' + H_{\xi\eta} (\mathbb{I}_p w'')' \\ & + H_{\xi V} \mathbb{I}_p w'' V - H_{\xi\zeta} (\mathbb{I}_p v'')' - H_{\zeta\zeta\xi} (\mathbb{I}_p v''^2)' - H_{\xi\zeta V} (\mathbb{I}_p v'')' V \\ & + H_{\xi\eta V} (\mathbb{I}_p w'')' V - H_{\xi\eta\eta} (\mathbb{I}_p w''^2)' + H_{\xi\zeta\eta} (\mathbb{I}_p v'' w'')' \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\delta \lambda : \quad u' = (1 - v'^2 - w'^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \delta u : \quad & (\mu_b \mathbb{I}_b + \mu_p \mathbb{I}_p) \ddot{u} + c_u \dot{u} - Q_u = \left[D_\zeta v' (\mathbb{I}_b v'')' + D_\eta w' (\mathbb{I}_b w'')' + \lambda \right. \\ & \left. + 2H_{\zeta\zeta} v' (\mathbb{I}_p v'')' + 2H_{\eta\eta} w' (\mathbb{I}_p w'')' + \Lambda H_{\zeta V} v' V \right]' \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
 \delta v : \quad & (\mu_b \mathbb{I}_b + \mu_p \mathbb{I}_p) \mathbb{I}_b \ddot{v} + c_v \dot{v} - Q_v = \left[-D_\xi(\mathbb{I}_b \gamma' w')' - 2H_{\xi\xi}(\mathbb{I}_p \gamma' w')' \right. \\
 & + D_\zeta(-(\mathbb{I}_b v'')' - (\mathbb{I}_b \gamma w'')' + \mathbb{I}_b' (w'' \int_0^s v'' w' ds - v' w' w'')) \\
 & + \mathbb{I}_b (v'' w' w'' - v' w''^2 + w''' \int_0^s v'' w' ds - v' w' w''') \\
 & + D_\eta((\mathbb{I}_b \gamma w'')' + \mathbb{I}_b' (v' w' w'' - w'' \int_0^s v'' w' ds) \\
 & + \mathbb{I}_b (v' w' w''' - v'' w' w'' - w''' \int_0^s v'' w' ds)) \\
 & + 2H_{\zeta\zeta}(-(\mathbb{I}_p v'')' - (\mathbb{I}_p \gamma w'')' + \mathbb{I}_p' (w'' \int_0^s v'' w' ds - v' w' w'')) \\
 & + \mathbb{I}_p (v'' w' w'' - v' w''^2 + w''' \int_0^s v'' w' ds - v' w' w''') \\
 & + 2H_{\eta\eta}((\mathbb{I}_p \gamma w'')' + \mathbb{I}_p' (v' w' w'' - w'' \int_0^s v'' w' ds) \\
 & + \mathbb{I}_p (v' w' w''' - v'' w' w'' - w''' \int_0^s v'' w' ds)) \\
 & - H_{\xi\zeta}(\mathbb{I}_p \gamma' + \mathbb{I}_p v'' w')' - H_{\xi V}(\mathbb{I}_p w')' V + H_{\xi\eta}(\mathbb{I}_p w' w'')' \\
 & + H_{\zeta V}(\mathbb{I}_p (-1 + \frac{v'^2}{2}) + \mathbb{I}_p w' w'')' V \\
 & - 3H_{\zeta\zeta\zeta}(\mathbb{I}_p v''^2)' - H_{\zeta V V} \mathbb{I}_p V^2 - 2H_{\zeta\zeta V}(\mathbb{I}_p v'')' V - H_{\xi V V}(\mathbb{I}_p w')' V^2 \\
 & - H_{\zeta\zeta\xi}(2 \mathbb{I}_p \gamma' v'' - \mathbb{I}_p v''^2 w')' - H_{\xi\zeta V}(\mathbb{I}_p \gamma' + \mathbb{I}_p v'' w')' V \\
 & + H_{\xi\zeta\eta}(w''(\mathbb{I}_p \gamma')' + (\mathbb{I}_p v'' w' w'')') + H_{\xi\eta V}(\mathbb{I}_p w' w'')' V \\
 & \left. - H_{\xi\eta\eta}(\mathbb{I}_p w' w''')' - 4H_{\zeta\zeta\zeta\zeta}(\mathbb{I}_p v''^3)' - 2H_{\zeta\zeta\eta\eta}(\mathbb{I}_p v'' w''^2)' \right]' \tag{2.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta w : \quad & (\mu_b \mathbb{I}_b + \mu_p \mathbb{I}_p) \ddot{w} + c_w \dot{w} - Q_w = \left[D_\xi \mathbb{I}_b \gamma' v'' \right. \\
& + D_\zeta (-(\mathbb{I}_b \gamma v'')' + \mathbb{I}_b' v'' \int_0^s v'' w' ds + \mathbb{I}_b v''' \int_0^s v'' w' ds) \\
& + D_\eta (-(\mathbb{I}_b \gamma v'')' + \mathbb{I}_b' v'' \int_0^s v'' w' ds + \mathbb{I}_b v''' \int_0^s v'' w' ds) \\
& + 2H_{\xi\xi} \mathbb{I}_p \gamma' v'' + 2H_{\xi\xi} \mathbb{I}_p v''^2 + H_{\xi V} \mathbb{I}_p v'' V \\
& + 2H_{\zeta\xi} (-(\mathbb{I}_p \gamma v'')' - (\mathbb{I}_p w'')' - (\mathbb{I}_p v'' \int_0^s v'' w' ds)' - \mathbb{I}_p w' w''^2) \\
& + 2H_{\eta\eta} (-(\mathbb{I}_p \gamma v'')' + \Lambda v'' \int_0^s v'' w' ds + \mathbb{I}_p v''' \int_0^s v'' w' ds) \\
& - H_{\zeta V} ((\mathbb{I}_p \gamma)' + \Lambda \int_0^s v'' w' ds) V + H_{\xi\eta} ((\mathbb{I}_p \gamma')' - \mathbb{I}_p v'' w'') \\
& + H_{\zeta\xi\xi} \mathbb{I}_p v''^3 + H_{\xi\zeta V} \mathbb{I}_p v''^2 V - 2H_{\zeta\eta\eta} (\mathbb{I}_p v'' w'')' \\
& + H_{\xi V V} \mathbb{I}_p v'' V^2 + H_{\xi\zeta\eta} ((\mathbb{I}_p \gamma' w'')' - \mathbb{I}_p v'' w''^2) \\
& + H_{\xi\eta V} ((\mathbb{I}_p \gamma')' - \mathbb{I}_p v'' w'') V - 2H_{\eta\eta V} (\mathbb{I}_p w'')' V \\
& - 2H_{\xi\eta\eta} ((\mathbb{I}_p \gamma' w'')' + \mathbb{I}_p v'' w''^2) \\
& \left. - 4H_{\eta\eta\eta\eta} (\mathbb{I}_p w''^3)' - 2H_{\zeta\zeta\eta\eta} (\mathbb{I}_p v''^2 w'')' \right]
\end{aligned} \tag{2.44}$$

L'équation de la charge électrique Q est alors :

$$\begin{aligned}
Q = \int_{s \in \mathcal{S}_m} & \left[Q_\zeta (v'' + \frac{v'^2 v''}{2} + w'' (\gamma - \int_0^s v'' w' ds + v' w')) + Q_V V \right. \\
& + Q_\eta (v'' (\gamma - \int_0^s v'' w' ds) - w'' (1 + \frac{w'^2}{2})) + Q_\xi \gamma' \\
& + Q_{\zeta\xi} v''^2 + Q_{\eta\eta} w''^2 + Q_{VV} V^2 - Q_{\xi\eta} \gamma' v'' - Q_{\zeta\eta} v'' w'' \\
& \left. + Q_{\zeta V} v'' V - Q_{\eta V} w'' V + Q_{\xi V} \gamma' V + Q_{\zeta\xi} \gamma' v'' + Q_{VVV} V^3 \right] ds
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Les paramètres λ et γ sont supposés d'ordre 2 et ils sont déduits des équations 2.40 et 2.42 :

$$\begin{aligned}
\lambda = \int_0^s & (\mu \mathbb{I}_b \ddot{u} + c_u \dot{u} - Q_u) ds \\
& - D_\zeta v' (\mathbb{I}_b v'')' - D_\eta w' (\mathbb{I}_b w'')' \\
& - 2H_{\zeta\xi} v' (\mathbb{I}_p v'')' + 2H_{\eta\eta} w' (\mathbb{I}_p w'')' + H_{\zeta V} \Lambda v' V
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma'(D_\xi \mathbb{I}_b + 2H_{\xi\xi} \mathbb{I}_p) = & (D_\zeta - D_\eta) \mathbb{I}_b (v''w'') \\
 & + 2(H_{\zeta\zeta} - H_{\eta\eta}) \mathbb{I}_p v''w'' + H_{\xi\eta}(\mathbb{I}_p w'')' - H_{\xi\zeta}(\mathbb{I}_p v'')' \\
 & + H_{\zeta V} \mathbb{I}_p w''V - H_{\zeta\xi\xi}(\mathbb{I}_p v''^2)' - H_{\xi\zeta V}(\mathbb{I}_p v'')'V \\
 & + H_{\xi\eta V}(\mathbb{I}_p w'')'V - H_{\xi\eta\eta}(\mathbb{I}_p w''^2)' + H_{\xi\zeta\eta}(\mathbb{I}_p v''w'')'
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

De même, de l'équation 2.41 et en supposant u d'ordre 2, on déduit :

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \tag{2.48}$$

On opère une réduction de la dimension (on passe d'un modèle tridimensionnel à un modèle bidimensionnel) en supposant w nul ainsi que ses dérivées. On obtient les équations suivantes :

$$\lambda = \int_0^s ((\mu_b \mathbb{I}_b + \mu_p \mathbb{I}_p) \ddot{u} + c_u \dot{u} - Q_u) ds \tag{2.49}$$

$$-D_\zeta v'(\mathbb{I}_b v'')' - 2H_{\zeta\zeta} v'(\mathbb{I}_p v'')' + H_{\zeta V} \wedge v'V$$

$$\gamma'(D_\xi \mathbb{I}_b + 2H_{\xi\xi} \mathbb{I}_p) = -H_{\xi\zeta}(\mathbb{I}_p v'')' - H_{\zeta\xi\xi}(\mathbb{I}_p v''^2)' - H_{\xi\zeta V}(\mathbb{I}_p v'')'V \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
 (\mu_b \mathbb{I}_b + \mu_p \mathbb{I}_p) \ddot{v} + c_v \dot{v} - Q_v = & \left[-D_\zeta((\mathbb{I}_b v'')' + \mathbb{I}_b v'v''^2) + \lambda v' \right. \\
 & - 2H_{\zeta\zeta}((\mathbb{I}_p v'')' + \mathbb{I}_p v'v''^2) - H_{\xi\zeta} \mathbb{I}_p \gamma' \\
 & + H_{\zeta V} \wedge (-1 + \frac{v'^2}{2})V - 3H_{\zeta\zeta\zeta}(\mathbb{I}_p v''^2)' - H_{\zeta V V} \wedge V^2 \\
 & - 2H_{\zeta\zeta V}(\mathbb{I}_p v'')'V - 2H_{\zeta\xi\xi}(\mathbb{I}_p \gamma'v'')' - H_{\xi\zeta V}(\mathbb{I}_p \gamma')'V \\
 & \left. - 4H_{\zeta\zeta\zeta\zeta}(\mathbb{I}_p v''^3)' \right]
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^s v'^2 ds \tag{2.52}$$

$$Q = \int_s [Q_\zeta v''(1 + \frac{v'^2}{2}) + Q_{\zeta\zeta} v''^2 + Q_V V + Q_{\zeta V} v''V + Q_{V V} V^2 + Q_{V V V} V^3] ds \tag{2.53}$$

$$Q_\xi \gamma' + Q_{\zeta\xi} \gamma'v'' + Q_\eta \gamma v'' + Q_{\xi V} \gamma'V] ds$$

Les matériaux piézoélectriques généralement utilisés sont des céramiques, ce qui impose des contraintes sur les coefficients liés à ces matériaux. Les hypothèses de symétrie des matériaux piézoélectriques céramiques rendent certains coefficients piézoélectriques nuls tel que s_{16} (IEEE, 1988), ce qui entraîne $H_{\xi\zeta} = 0$ (cf l'équation 5.1 de l'annexe 5.1). On suppose que cette hypothèse s'applique également à l'ordre "supérieur" de ces coefficients, i.e. $s_{161} = 0$ donc $H_{\zeta\xi\xi} = 0$ (cf l'équation 5.2). En outre, du fait de la polarisation du matériau piézoélectrique on a $d_{36} = d_{35} = 0$ ce qui s'applique aux non linéarités supérieures, donc $H_{\xi\zeta V} = 0$. Ceci simplifie l'équation en δv . Toutes ces hypothèses impliquent

que γ' est nul, donc γ est une constante. Dans un cas à deux dimensions l'angle de torsion n'est pas pris en compte, on a donc $\gamma = 0$. Ainsi, avec l'expression de λ , de u , et des simplifications grâce aux conditions initiales et de continuité (Yavari et al., 2000, Yavari and Sarkani, 2001, Yavari et al., 2001) qui sont présentées dans la partie suivante, on obtient finalement l'équation dynamique en v telle que :

$$\begin{aligned} \mu_m \ddot{v} + c_v \dot{v} - Q_v = & \left[-EI_m (v'''' + v'(v'v''))' \right. \\ & + v' \int_s^{L_b} \left(-\frac{\mu_m}{2} \int_s^0 (v'^2)'' ds - \frac{c_u}{2} \int_0^s (v'^2)' ds - Q_u \right) ds \\ & - \wedge H_{\zeta V} \left(1 + \frac{v'^2}{2} \right) V - H_{\zeta V V} \wedge V^2 - 2H_{\zeta \zeta V} (\mathbb{I}_p v'')' V \\ & \left. - 3H_{\zeta \zeta \zeta} (\mathbb{I}_p v''^2)' - 4H_{\zeta \zeta \zeta \zeta} (\mathbb{I}_p v''^3)' \right]' \end{aligned} \quad (2.54)$$

avec μ_m et EI_m dépendant de s de la manière suivante :

$$\mu_m(s) = \begin{cases} \mu_b, & \text{si } s \in \mathcal{S}_b \\ \mu_b + \mu_p, & \text{si } s \in \mathcal{S}_m \end{cases} \quad (2.55)$$

$$EI_m(s) = \begin{cases} EI_b & \text{si } s \in \mathcal{S}_b \\ EI_b^* + EI_p & \text{si } s \in \mathcal{S}_m \end{cases} \quad (2.56)$$

où EI_b est calculé avec l'axe neutre au milieu de la poutre, EI_b^* par rapport à l'axe neutre définit entre la poutre et les matériaux piézoélectriques, et

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_b &= [0, x_1[U]x_2, x_3[U\dots U]x_{2n}, L_b] \\ \mathcal{S}_m &= [x_1, x_2]U[x_3, x_4]U\dots U[x_{2n-1}, x_{2n}] \end{aligned} \quad (2.57)$$

\mathcal{S}_b représente donc les portions du système sans matériaux piézoélectriques et \mathcal{S}_m les portions avec (cf la figure 2.1).

L'équation de la charge électrique Q des matériaux piézoélectriques devient :

$$Q = \int_s (Q_\zeta v'' (1 + \frac{v'^2}{2}) + Q_{\zeta \zeta} v''^2 + Q_V V + Q_{\zeta V} v'' V + Q_{V V} V^2 + Q_{V V V} V^3) ds \quad (2.58)$$

On observe ainsi l'apparition de non linéarités quadratiques et cubiques dues aux non linéarités du matériau piézoélectrique, qui s'additionnent aux non linéarités cubiques de la poutre dues à sa géométrie.

On a Q_u et Q_v les forces généralisées dans les directions \vec{e}_x et \vec{e}_y . On suppose que Q_u est nul, la poutre sera encastree libre et aucune force extérieure ne sera appliquée selon la direction \vec{e}_x , et également que l'amortissement c_u est nul. La force extérieure appliquée à la structure se fait au travers de Q_v selon deux possibilités (cf la figure 2.6) :

- avec un déplacement constant de la base tel que $F \cos(\omega t)$, ce qui donne $Q_v = \mu_m F \omega^2 \cos(\omega t)$, où F est l'amplitude de déplacement qui évolue avec la pulsation d'excitation ω .
- avec une accélération constante de la base telle que $Q_v = \mu_m |a| \cos(\omega t)$, où $|a|$ est l'amplitude d'accélération imposée à la base de la structure, qui est contante par rapport à la pulsation d'excitation ω .

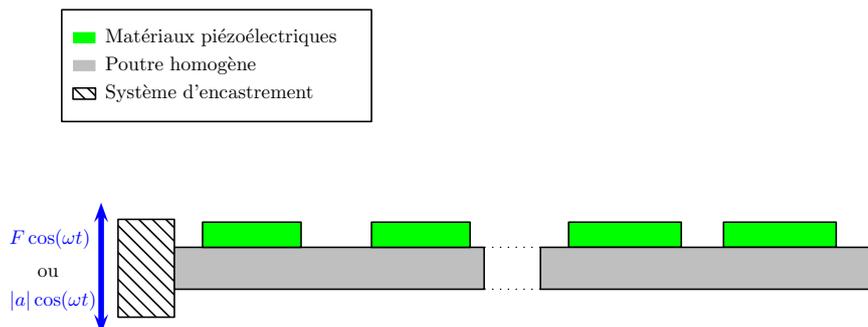


FIGURE 2.6 – Schéma de la poutre électro-mécanique en configuration unimorphe avec une excitation latérale de la base qui est : soit un déplacement $F \cos(\omega t)$, soit une accélération $|a| \cos(\omega t)$

Dans cette partie, les équations à deux dimensions d'une poutre au comportement non linéaire, avec des patches piézoélectriques collés dessus qui présentent un comportement non linéaire, ont été produites. On peut alors observer l'apparition de non linéarités quadratiques et cubiques dans les équations dynamiques du mouvement. Afin de caractériser le comportement dynamique du système, une résolution modale et fréquentielle du système sont menées dans la partie suivante. Dans un premier temps, une analyse modale est effectuée pour identifier les pulsations propres et les déformées modales associées du système. Puis, les équations dynamiques du mouvement sont réduites sur une base modale afin d'obtenir les points d'équilibre du système composite via une méthode des échelles multiples. Cette étude des points d'équilibre permet d'appréhender les comportements du système pour un seul mode mécanique mais aussi pour des cas de résonance à deux modes avec un possible échange d'énergie entre les modes.

2.2 Résolution de systèmes réduits : analyse modale et fréquentielle

Dans la partie précédente, les équations dynamiques du système complet ont été développées. Elles permettent de mettre en évidence la présence de termes quadratiques et cubiques dans les équations. L'identification des pulsations propres du système permet la vérification de l'existence de résonances internes dans le système. Ces résonances sont une condition nécessaire à l'apparition d'échanges d'énergie entre les deux modes concernés, comme expliqué dans le chapitre 1 (Nayfeh and Balachandran, 1989).

Les équations dynamiques du système électro-mécanique présentant des non linéarités quadratiques et cubiques, on s'intéresse à la création de résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 : i.e. $\omega_m \simeq 2\omega_n$ ou $\omega_m \simeq 3\omega_n$, avec ω_m et ω_n deux pulsations propres du système.

Dans cette partie, on présente la méthodologie pour l'identification des pulsations propres mais aussi des déformées modales qui sont utilisées pour faire des réductions de modèle. On résout également des systèmes réduits à un mode et à deux modes en résonance interne 1 : 2 et 1 : 3 pour identifier leurs points d'équilibre via une méthode des échelles multiples.

2.2.1 Analyse modale : pulsations propres et déformées modales

Le but de cette sous-partie est de présenter la méthodologie analytique utilisée pour identifier les pulsations propres du système composite, ainsi que les déformées modales associées. Les pulsations propres du système sont obtenues dans le cas d'un circuit fermé ($V = 0$). Elles sont détectées via la résolution de l'équation aux dérivées partielles linéaires à coefficients variables en espace :

$$\mu_m(s)\ddot{v}(s,t) = -EI_m(s)v^{(iv)}(s,t) \quad (2.59)$$

avec $\mu_m(s)$ et $EI_m(s)$ définis dans les équations 2.55 et 2.56. On sépare la variable spatio-temporelle de déplacement $v(s,t)$ telle que :

$$v(s,t) = \phi(s)r(t) \quad (2.60)$$

La résolution est effectuée afin d'obtenir les fonctions $\phi_i(s)$, ainsi que leurs pulsations propres associées, grâce aux conditions imposées sur le système à certaines de ses abscisses s ($s = 0$ et $s = L_b$ pour les conditions aux limites par exemple).

Traisons d'abord l'exemple de la résolution du système linéaire pour obtenir les pulsations propres et les déformées modales dans le cas d'une poutre homogène. Puis, une méthode de résolution pour le cas composite est proposée.

Cas de la poutre homogène

Dans le cas de la poutre homogène sans matériaux piézoélectriques, les variables $\mu_m(s)$ et $EI_m(s)$ de l'équation 2.59 sont constantes telles que :

$$\mu_m(s) = \mu_b \quad (2.61)$$

$$EI_m(s) = EI_b$$

La séparation des variables de l'équation 2.60 et l'écriture de μ_m et EI_m permettent d'écrire l'équation 2.59 sous la forme :

$$\frac{\ddot{r}(t)}{r(t)} = \frac{-EI_b \phi^{(iv)}(s)}{\mu_b \phi(s)} \quad (2.62)$$

Or, en supposant que :

$$r(t) = A \exp(i\omega t) + cc \quad (2.63)$$

cc représentant le complexe conjugué et ω une pulsation propre du système, l'équation 2.62 devient :

$$\phi^{(iv)}(s) - \frac{\mu_b \omega^2}{EI_b} \phi(s) = 0 \quad (2.64)$$

On définit :

$$K_b^4 = \frac{\mu_b \omega^2}{EI_b} \quad (2.65)$$

La solution de l'équation 2.64 de degré 4 en $\phi(s)$ s'écrit :

$$\phi(s) = A \cos(K_b s) + B \sin(K_b s) + C \cosh(K_b s) + D \sinh(K_b s) \quad (2.66)$$

Pour identifier les pulsations propres, il faut utiliser les conditions aux limites du système. On suppose que la poutre homogène est encastree en $s = 0$ et libre en $s = L_b$, ce qui donne les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \phi(s=0) = 0 \\ \phi'(s=0) = 0 \end{cases} \text{ et, } \begin{cases} \phi''(s=L_b) = 0 \\ \phi'''(s=L_b) = 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

Ces conditions, appliquées à la déformée modale définie dans l'équation 2.66, permettent d'écrire le problème matriciel suivant :

$$\mathbf{M}_b(\omega, L_b) \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.68)$$

où :

$$\mathbf{M}_b(\omega, L_b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -K_b^2 \cos(K_b L_b) & -K_b^2 \sin(K_b L_b) & K_b^2 \cosh(K_b L_b) & K_b^2 \sinh(K_b L_b) \\ K_b^3 \sin(K_b L_b) & -K_b^3 \cos(K_b L_b) & K_b^3 \sinh(K_b L_b) & K_b^3 \cosh(K_b L_b) \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

ω est contenu dans K_b cf l'équation 2.65.

Les pulsations propres sont alors les solutions de $\det(\mathbf{M}_b(\omega, L_b)) = 0$, cette équation correspond d'ailleurs à l'équation caractéristique bien connue suivante :

$$\cos(K_b L_b) \cosh(K_b L_b) + 1 = 0 \quad (2.70)$$

Les quatre premières solutions de l'équation 2.70 sont contenues dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1 – Solutions de l'équation caractéristique (cf l'équation 2.70) dans la cas d'une poutre homogène encastree-libre.

Solution	1 ^{ère}	2 ^{nde}	3 ^{ème}	4 ^{ème}
$K_b L_b$	1.8751	4.694	7.8547	10.9955

Pour trouver les pulsations propres de la poutre, il suffit de calculer ω à partir de l'équation 2.65 :

$$\omega = \sqrt{\frac{EI_b K_b^4}{\mu_b}} \quad (2.71)$$

Vérifions si des résonances internes existent entre les quatre premières pulsations propres de la poutre. On remarque dans le tableau 2.2, qu'il existe quasiment des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 entre les quatre premières pulsations propres d'une poutre homogène (repérées en gras). En effet, les rapports entre la quatrième et la troisième pulsation et entre la troisième et la deuxième pulsation sont respectivement proches de 2 et 3.

À chaque pulsation propre est associée une déformation particulière $\phi(s)$ de la structure. Cette déformation modale est une donnée importante du système puisqu'elle est utilisée afin de réduire les équations dynamiques sur une base modale appropriée. La déformée

Tableau 2.2 – Rapport entre les quatre premières pulsations propres d’une poutre homogène. Mise en lumière de rapports 1 : 2 et 1 : 3 quasiment réalisés (en gras).

$\omega_m \setminus \omega_n$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
ω_1	1	0.16	0.06	0.03
ω_2	6.27	1	0.36	0.18
ω_3	17.55	2.8	1	0.51
ω_4	34.39	5.49	1.96	1

modale s’exprime comme dans l’équation 2.66, afin de la tracer, on utilise les conditions aux limites de la poutre, (cf le problème matriciel de l’équation 2.68). En supprimant la première ligne et la première colonne de la matrice $\mathbf{M}_b(\omega, L_b)$, on peut écrire un nouveau problème matriciel tel que :

$$\tilde{\mathbf{M}}_b(\omega, L_b) \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \mathbf{f}(A) \quad (2.72)$$

où $\det(\tilde{\mathbf{M}}_b(\omega, L_b)) \neq 0$ et $\tilde{\mathbf{M}}_b$ est la matrice \mathbf{M}_b sans sa première ligne ni sa première colonne.

La résolution de ce système permet d’obtenir les constantes B , C et D en fonction de la constante A . Ainsi, il ne reste plus qu’à définir la constante A grâce à une normalisation par la masse telle que :

$$\int_0^{L_b} \mu_b \phi^2(s) ds = 1 \quad (2.73)$$

Les pulsations propres et déformées modales d’une poutre homogène sont donc obtenues (cf les équations 2.66 et 2.71).

Une méthode similaire pour identifier les pulsations propres et déformées modales, dans le cas de la poutre avec des patchs piézoélectriques collés dessus, est proposée dans la sous-partie suivante.

Cas de la poutre électro-mécanique

L’ajout de matériaux piézoélectriques sur la poutre, à des endroits précis (entre $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$, ..., $[x_{2n-1}, x_{2n}]$), mène à une résolution du problème modal par parties et un raccordement via des conditions de continuité (Yavari et al., 2000, Yavari and Sarkani, 2001, Yavari et al., 2001, Ducarne et al., 2012). On effectue donc la résolution par division de la poutre en plusieurs segments (ceux identifiés par \mathcal{S}_b et \mathcal{S}_m de l’équation 2.57).

Dans le cas de la poutre électro-mécanique, l’équation à résoudre est celle définie dans l’équation 2.59. Ici, du fait de l’écriture par parties de $\mu_m(s)$ et $EI_m(s)$ (cf les équations 2.55 et 2.56), les fonctions de forme sont définies de la manière suivante :

$$\phi(s) = (1 - \mathcal{H}(s - x_1))\phi_1(s) + (\mathcal{H}(s - x_1) - \mathcal{H}(s - x_2))\phi_2(s) + \dots \\ (\mathcal{H}(s - x_{2n-1}) - \mathcal{H}(s - x_{2n}))\phi_{2n+1}(s) \quad (2.74)$$

Cette séparation par parties donne les équations aux dérivées quatrième suivantes :

$$\phi_{2k+1}^{(iv)}(s) - K_b \phi_{2k+1}(s) = 0, \quad k \in [0, n], \quad s \in \mathcal{S}_b \\ \phi_{2k+2}^{(iv)}(s) - K_m \phi_{2k+2}(s) = 0, \quad k \in [0, n - 1], \quad s \in \mathcal{S}_m \quad (2.75)$$

avec K_b défini dans l'équation 2.65, \mathcal{S}_b et \mathcal{S}_m dans l'équation 2.57, et :

$$K_m^4 = \frac{\mu_m \omega^2}{EI_m} \quad (2.76)$$

Comme précédemment, on peut écrire les solutions des équations d'ordre 4 (cf l'équation 2.75) telles que :

$$\begin{aligned} \phi_{2k+1}(s) = & A_{2k+1} \cos(K_b s) + B_{2k+1} \sin(K_b s) \\ & + C_{2k+1} \cosh(K_b s) + D_{2k+1} \sinh(K_b s), \quad k \in [0, n] \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2k+2}(s) = & A_{2k+2} \cos(K_m s) + B_{2k+2} \sin(K_m s) \\ & + C_{2k+2} \cosh(K_m s) + D_{2k+2} \sinh(K_m s), \quad k \in [0, n-1] \end{aligned}$$

avec A_{2k+1} , B_{2k+1} , C_{2k+1} , D_{2k+1} , A_{2k+2} , B_{2k+2} , C_{2k+2} et D_{2k+2} des constantes.

Pour trouver les pulsations propres, il faut obtenir une équation caractéristique à résoudre. Dans le cas de la poutre homogène, les conditions aux limites ont été utilisées pour l'obtenir. Or, pour une poutre électro-mécanique, il n'y a pas 4 constantes à définir mais $4 \times (2n + 1)$. C'est pourquoi il est nécessaire de rajouter des conditions afin de définir toutes ces constantes, on parlera de conditions de continuité. En effet, les matériaux piézoélectriques étant collés sur la poutre, on suppose qu'ils subissent les mêmes déformations que celles-ci. Ces conditions de continuité sont définies aux emplacements des matériaux piézoélectriques, soit $s = x_1$, $s = x_2, \dots, s = x_{2n+1}$, ce qui correspond aux points de discontinuité de la déformée modale $\phi(s)$ définie dans l'équation 2.74.

On a, pour les conditions aux limites, une poutre encastree en $s = 0$ et libre en $s = L_b$, soit :

$$\begin{cases} \phi_1(s=0) = 0 \\ \phi'_1(s=0) = 0 \end{cases} \quad \text{et,} \quad \begin{cases} \phi''_{2n+1}(s=L_b) = 0 \\ \phi'''_{2n+1}(s=L_b) = 0 \end{cases} \quad (2.78)$$

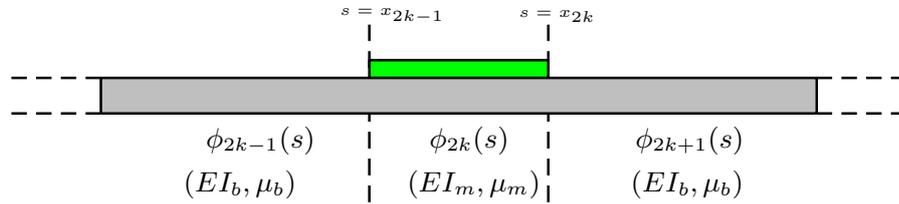


FIGURE 2.7 – Schéma représentant le $k^{\text{ème}}$ matériau piézoélectrique présent sur la poutre électro-mécanique en configuration unimorphe. Les déformés modales ϕ_{2k-1} , ϕ_{2k} et ϕ_{2k+1} sont définies pour $s < x_{2k-1}$, $s \in [x_{2k-1}, x_{2k}]$ et $s > x_{2k}$. Elles sont reliées respectivement à (EI_b, μ_b) , (EI_m, μ_m) et (EI_b, μ_b) .

Quant aux conditions de continuité, dans le cas du $k^{\text{ème}}$ matériau piézoélectrique (cf la

figure 2.7) entre ϕ_{2k-1} et ϕ_{2k} , en $s = x_{2k-1}$ on définit les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{2k-1}(s = x_{2k-1}) - \phi_{2k}(s = x_{2k-1}) = 0 \\ \phi'_{2k-1}(s = x_{2k-1}) - \phi'_{2k}(s = x_{2k-1}) = 0 \\ EI_b \phi''_{2k-1}(s = x_{2k-1}) - EI_m \phi''_{2k}(s = x_{2k-1}) = 0 \\ EI_b \phi'''_{2k-1}(s = x_{2k-1}) - EI_m \phi'''_{2k}(s = x_{2k-1}) = 0 \end{array} \right. \quad (2.79)$$

et celles entre ϕ_{2k} et ϕ_{2k+1} , en $s = x_{2k}$ sont telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{2k}(s = x_{2k}) - \phi_{2k+1}(s = x_{2k}) = 0 \\ \phi'_{2k}(s = x_{2k}) - \phi'_{2k+1}(s = x_{2k}) = 0 \\ EI_m \phi''_{2k}(s = x_{2k}) - EI_b \phi''_{2k+1}(s = x_{2k}) = 0 \\ EI_m \phi'''_{2k}(s = x_{2k}) - EI_b \phi'''_{2k+1}(s = x_{2k}) = 0 \end{array} \right. \quad (2.80)$$

En effet, on suppose qu'il y a continuité du déplacement, de la rotation, du moment fléchissant et de l'effort tranchant sur la déformée modale $\phi(s)$ qui est découpée en $2n + 1$ fonctions $\phi_k(s)$ (cf l'équation 2.74).

Ces conditions (Eqs. 2.78, 2.79 et 2.80) permettent de définir le problème matriciel suivant :

$$\mathbf{M}_m(\omega, x_1, \dots, x_{2n}, L_b) \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ \dots \\ C_{2n+1} \\ D_{2n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.81)$$

avec :

$$\mathbf{M}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{C}_{2n+1} \\ \mathbf{CC}(K_b, x_1) & -\mathbf{CC}(K_m, x_1) & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{CC}(K_m, x_{2n}) & -\mathbf{CC}(K_b, x_{2n}) \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

où \mathbf{O} est une matrice 4×4 remplie de 0, et :

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

comprend les conditions aux limites en $s = 0$,

$$\mathbf{C}_{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_b^2 \cos(K_b L_b) & -K_b^2 \sin(K_b L_b) & K_b^2 \cosh(K_b L_b) & K_b^2 \sinh(K_b L_b) \\ K_b^3 \sin(K_b L_b) & -K_b^3 \cos(K_b L_b) & K_b^3 \sinh(K_b L_b) & K_b^3 \cosh(K_b L_b) \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

correspond aux conditions aux limites en $s = L_b$,

$$\mathbf{CC}(K,x) = \begin{bmatrix} \cos(Kx) & \sin(Kx) & \cosh(Kx) & \sinh(Kx) \\ -K \sin(Kx) & K \cos(Kx) & K \sin(Kx) & \cosh(Kx) \\ -K^2 EI \cos(Kx) & -K^2 EI \sin(Kx) & K^2 EI \cosh(Kx) & K^2 EI \sinh(Kx) \\ K^3 EI \sin(Kx) & -K^3 EI \cos(Kx) & K^3 EI \sinh(Kx) & K^3 EI \cosh(Kx) \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

avec EI possédant le même indice que K (b ou m) dans la matrice \mathbf{CC} , il s'agit des conditions de continuité.

Ainsi, on obtient l'équation caractéristique permettant d'identifier les pulsations propres grâce à :

$$\det(\mathbf{M}_m(\omega, x_1, \dots, x_{2n}, L_b)) = 0 \quad (2.86)$$

Il est mis en évidence que les pulsations propres du système électro-mécanique dépendent des positions des matériaux piézoélectriques au travers de $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ (cf la figure 2.1).

Pour obtenir les déformées modales, de la même manière que précédemment, on supprime la première ligne et la première colonne de la matrice $\mathbf{M}_m(\omega, x_1, \dots, x_{2n}, L_b)$, afin d'obtenir un nouveau problème matriciel. En résolvant ce nouveau problème, on obtient toutes les constantes A_\vee, B_\vee, C_\vee et D_\vee (avec $\vee \rightarrow 1, 2, \dots, 2n+1$) en fonction de A_1 . Puis, par une normalisation par la masse de la fonction $\phi(s)$ (cf l'équation 2.73), on obtient A_1 .

Grâce à l'obtention des pulsations propres du système et de ses déformées modales associées, la réduction des équations du système sur des modes d'intérêts peut être effectuée, afin de résoudre ce système pour obtenir ses points d'équilibre.

En effet, si le système ne possède pas de résonance interne, on peut supposer que seul le mode excité directement s'exprime, et projeter le système dynamique sur ce mode uniquement. Si des résonances internes existent entre plusieurs modes, on réduit le système sur les modes concernés par la résonance interne. Ces suppositions sont faites par analogie avec le cas linéaire où seuls les modes forcés répondent, et par extension "faiblement non linéaires", que seul les modes non linéaires couplés par la ou les résonances internes répondent également. Il s'agit d'une approximation pré-supposée. Cette hypothèse permet de bénéficier des avantages de méthodes analytiques approchées permettant une description de la dynamique.

Dans le cas de la poutre homogène seule, on a remarqué que des résonances internes entre certains modes propres étaient quasiment obtenues (cf le tableau 2.2). On suppose qu'utiliser la présence des matériaux piézoélectriques pour réaliser pleinement ces résonances 1 : 2 et 1 : 3 est possible. En effet, on émet l'hypothèse qu'il existe une position particulière des matériaux piézoélectriques (au travers de $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$) pour laquelle on peut ajuster les pulsations propres afin d'obtenir des résonances internes. Les équations dynamiques du système composite obtenues dans la partie précédente présentant des non linéarités quadratiques et cubiques, cela pourrait mener à des comportements d'échanges d'énergie entre les modes couplés par les résonances 1 : 2 et 1 : 3.

Dans la sous-partie suivante, on présente une résolution par la méthode des échelles multiples des équations dynamiques réduites afin d'obtenir les points d'équilibre quand :

- un seul mode est excité directement, il n'y a pas de réponse multimodale ;
- deux modes sont en résonance interne 1 : 3 ;
- deux modes sont en résonance interne 1 : 2.

2.2.2 Étude de la dynamique sur un petit nombre de modes : réduction de modèle sur un et deux modes

L'objectif de cette partie est double. On veut d'une part, observer les effets des coefficients d'ordre 3 et 4 supposés dans la fonction de densité électrique $H(\epsilon_p, E)$ (cf l'équation 2.22), et d'autre part décrire les réponses fréquentielles du système dynamique forcé dans le cas de résonance 1 : 2 et 1 : 3 pour vérifier s'il existe des phénomènes d'échanges d'énergie.

Dans le premier cas, on étudie le système en le projetant sur un seul de ces modes (en supposant qu'il n'y a pas de réponse multimodale du système), et dans le deuxième cas, en le projetant sur les deux modes en résonance interne.

Pour résoudre les équations en temps, on utilise la méthode des échelles multiples (Nayfeh, 1979), pour différencier plusieurs échelles de temps : une échelle de temps rapide t_0 et des échelles de temps lentes t_1, t_2, \dots cf les équations 1.15 et 1.16, où ϵ est un petit paramètre arbitraire caché et $0 < \epsilon < 1$.

Menons donc les résolutions par la méthode des échelles multiples sur les systèmes réduits à un mode et à deux modes, en commençant par le cas à un mode.

Résolution du cas à un seul mode

On suppose que seul un mode est excité : le $\tau^{\text{ème}}$, alors la fonction spatio-temporelle $v(s, t)$ de l'équation 2.60 est supposée telle que :

$$v(s, t) = \phi_\tau(s)r_\tau(t) \quad (2.87)$$

On suppose que les autres modes de la structure ne s'expriment pas, ou ont une amplitude négligeable, ceci permet d'obtenir les équations réduites du système sur le seul mode d'intérêt τ . On effectue la résolution dans le cas d'une poutre homogène et dans le cas de notre système électro-mécanique de poutre avec matériaux piézoélectriques.

o Cas de la poutre homogène

Par projection sur ce mode principal, l'équation dynamique se réduit ainsi :

$$\ddot{r}_\tau(t) + \mu_\tau \dot{r}_\tau(t) + \omega_\tau^2 r_\tau(t) + F_\tau \omega^2 \cos(\omega t) = \delta_\tau r_\tau^3 + \Gamma_\tau \overbrace{r_\tau(t)^2}^{\ddot{}} r_\tau(t) \quad (2.88)$$

avec :

$$\begin{aligned}\mu_\tau &= c_v \int_0^{L_b} \phi_\tau(s)^2 ds \\ F_\tau &= F \int_0^{L_b} \phi_\tau(s) ds \\ \omega_\tau^2 &= EI_b \int_0^{L_b} \phi_\tau(s)^{(iv)} \phi_\tau(s) ds \\ \delta_\tau &= -EI_b \int_0^{L_b} [\phi'_\tau(s)(\phi'_\tau(s)\phi''_\tau(s))]' \phi_\tau(s) ds \\ \Gamma_\tau &= - \int_0^{L_b} [\phi'_\tau(s) \int_s^{L_b} \frac{\mu_b}{2} \int_s^0 \phi'_\tau(s) ds ds]' \phi_\tau(s) ds\end{aligned}\tag{2.89}$$

On suppose que la poutre est excitée par une amplitude de déplacement constante F qui correspond à une excitation latérale de la base par un déplacement $F \cos(\omega t)$. Pour résoudre cette équation via une méthode des échelles multiples, le temps est découpé en plusieurs échelles de temps cf les équations 1.15 et 1.16. Mais, en plus du temps t , il faut également scinder la variable $r_\tau(t)$ en fonction du petit paramètre ϵ selon :

$$r_\tau = \epsilon r_1 + \epsilon^2 r_2 + \epsilon^3 r_3 + \dots\tag{2.90}$$

Pour résoudre les équations, on pose des hypothèses sur les constantes de l'équation 2.88 :

$$\begin{aligned}\mu_\tau &= \epsilon^2 \mu_2 \\ F_\tau &= \epsilon^3 F_3 \\ \omega_\tau &= \omega + \epsilon^2 \sigma\end{aligned}\tag{2.91}$$

avec σ un paramètre de modulation autour de la pulsation propre d'excitation ω . La résolution par la méthode des échelles multiples donne à $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$D_0^2 r_1 + \omega^2 r_1 = 0\tag{2.92}$$

D'où :

$$r_1(t_0, t_1, t_2, \dots) = A(t_1, t_2, \dots) \exp(i\omega t_0) + \bar{A}(t_1, t_2, \dots) \exp(-i\omega t_0)\tag{2.93}$$

avec \bar{A} le complexe conjugué de A .

Ensuite, à $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, on a :

$$D_0^2 r_2 + \omega^2 r_2 = -2D_1 D_0 r_1\tag{2.94}$$

La partie séculaire de l'équation donne :

$$D_1 A(t_1, t_2, \dots) = 0\tag{2.95}$$

Ainsi, $A(t_1, t_2, \dots)$ ne dépend plus de l'échelle de temps t_1 , on a donc $A(t_2, \dots)$.

Et, la solution particulière est :

$$r_2(t_0, \dots) = 0\tag{2.96}$$

À $\mathcal{O}(\epsilon^3)$:

$$\begin{aligned} D_0^2 r_3 + \omega^2 r_3 = & -2D_2 D_0 r_1 - \mu_2 D_0 r_1 + \delta_\tau r_1^3 - 2\omega\sigma r_1 \\ & + \Gamma_\tau (D_0^2 (r_1^2)) r_1 - F_3 \omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.97)$$

Les termes séculaires donnent l'équation suivante :

$$0 = -\frac{F_3 \omega^2}{2} - 2i\omega D_2 A - 2(2\sigma - i\mu_2)\omega A + (3\delta_\tau - 4\omega^2 \Gamma_\tau) A^2 \bar{A} \quad (2.98)$$

Et, on a :

$$r_3 = \frac{4\omega^2 \Gamma_\tau - \delta_\tau}{8\omega^2} (A^3 \exp(3i\omega t_0) + \bar{A}^3 \exp(-3i\omega t_0)) \quad (2.99)$$

La forme polaire du complexe $A(t_2, \dots)$ s'écrit :

$$A(t_2, \dots) = |a(t_2, \dots)| \exp(i\theta(t_2, \dots)), \quad (|a|, \theta) \in \mathbb{R} \quad (2.100)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation 2.98, on obtient :

$$\begin{aligned} D_2 |a| &= \frac{F_3 \omega \sin(\theta) - 2\mu_2 |a|}{4} \\ D_2 \theta &= \frac{3F_3 \omega^2 \cos(\theta) + 4\omega\sigma |a| + (4\omega\sigma \Gamma_\tau - 6\delta_\tau) |a|^3}{4\omega |a|} \end{aligned} \quad (2.101)$$

Les points d'équilibre du système sont trouvés pour :

$$D_2 A \Leftrightarrow \begin{cases} D_2 |a| = 0 \\ D_2 \theta = 0 \end{cases} \quad (2.102)$$

ce qui impose :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{2|a|(-2\sigma\omega + (3\delta_\tau - 4\omega^2 \Gamma_\tau) |a|)}{F_3 \omega^2} \\ \sin \theta &= \frac{2\mu_2 |a|}{F_3 \omega} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Via l'équation triviale $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 - 1 = 0$, on déduit :

$$\begin{aligned} 0 = & -F_3 \omega^4 + 4(\mu_2^2 + 4\sigma^2)\omega^2 |a|^2 \\ & + (64\Gamma_\tau \omega^2 - 48\delta_\tau)\omega\sigma |a|^4 + 4(3\delta_\tau - 4\omega^2 \Gamma_\tau)^2 |a|^6 \end{aligned} \quad (2.104)$$

qui est une équation de degré 3 en $|a|^2$, dont les solutions peuvent être connues analytiquement grâce à la méthode de Cardan. On ré-intègre les hypothèses des équations 2.90 et 2.91 pour récupérer les constantes de l'équation 2.88. On élimine ainsi le paramètre caché ϵ qui nous a permis de résoudre ces équations. Il faut également prendre en compte une hypothèse cachée qui est que l'amplitude $|a_m|$ est $\mathcal{O}(\epsilon)$ puisque $r_\tau = \epsilon r_1 + \dots$ (cf l'équation 2.90). On obtient :

$$\begin{aligned} 0 = & -F_\tau \omega^4 + 4(\mu_\tau^2 + 4(\omega - \omega_\tau)^2)\omega^2 |a_m|^2 \\ & + 16(\omega - \omega_\tau)(3\delta_\tau - 4\omega^2 \Gamma_\tau)\omega |a_m|^4 + 4(3\delta_\tau - 4\omega^2 \Gamma_\tau)^2 |a_m|^6 \end{aligned} \quad (2.105)$$

Et, d'après les équations 2.90, 2.93, 2.99 et 2.100 :

$$r_\tau = |a_m| \exp(i\theta) \exp(i\omega t_0) + \frac{4\omega^2\Gamma_\tau - \delta_\tau}{8\omega^2} |a_m|^3 \exp(3i\theta) \exp(3i\omega t_0) + cc \quad (2.106)$$

À partir de ces équations, il est possible de trouver la courbe squelette de la réponse dynamique mais aussi de statuer sur la stabilité des points d'équilibre.

- La courbe squelette de la poutre homogène

La courbe squelette, dite "backbone curve", est la courbe sur laquelle s'appuie les réponses forcées $(\omega, |a_m|)$, avec $\omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$ autour de la pulsation propre ω_τ . Pour obtenir l'équation de la courbe squelette, il faut éliminer l'amortissement et la force extérieure, i.e. $F_\tau = 0$ et $\mu_\tau = 0$. L'équation 2.105 se simplifie alors de la manière suivante :

$$0 = 4|a_m|^4(3\delta_\tau - 4\omega^2\Gamma_\tau)(4(\omega - \omega_\tau)\omega + (3\delta_\tau - 4\omega^2\Gamma_\tau)|a_m|^2) \quad (2.107)$$

Il existe deux solutions en $|a_m|$, la solution triviale $|a_m| = 0$, ou la solution :

$$|a_m|^2 = \frac{4\omega(\omega_\tau - \omega)}{3\delta_\tau - 4\omega^2\Gamma_\tau} \quad (2.108)$$

On remarque ici que les solutions positives dépendent du signe du dénominateur ($3\delta - 4\omega^2\Gamma_\tau \neq 0$) et du positionnement de ω par rapport à ω_τ . Ainsi, ceci confirme qu'on a une courbe squelette qui commence à ω_τ avec soit :

- $|a_m| \neq 0$ si $\omega > \omega_\tau$, ce qui correspond à un comportement raidissant,
- $|a_m| \neq 0$ si $\omega < \omega_\tau$, ce qui correspond à un comportement assouplissant

En général, pour une poutre encastree-libre, le premier mode est raidissant et tous les autres sont assouplissants.

- Obtention des zones d'instabilité dans le cas d'une poutre homogène

Pour trouver les zones instables, on linéarise le système autour de son point d'équilibre $(\theta, |a|)$ tel que :

$$\begin{aligned} |a| &\rightarrow |a| + \delta|a| \\ \theta &\rightarrow \theta + \delta\theta \end{aligned} \quad (2.109)$$

On obtient le problème d'évolution gouverné par la Jacobienne \mathbf{J}_{b1} :

$$D_2 \begin{bmatrix} \delta|a| \\ \delta\theta \end{bmatrix} + \mathbf{J}_{b1} \begin{bmatrix} \delta|a| \\ \delta\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

avec :

$$\mathbf{J}_{b1} = \begin{bmatrix} \frac{-\mu_2}{2} & \frac{(-2\omega\sigma + (3\delta_\tau - 4\omega^2\Gamma_\tau) |a|^2) |a|}{2\omega} \\ \frac{2\omega\sigma + (12\omega^2\Gamma_\tau - 9\delta_\tau) |a|^2}{2\omega |a|} & \frac{-\mu_2}{2} \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

en utilisant l'équation 2.103, le signe des parties réelles des valeurs propres de \mathbf{J}_{b1} donne les zones d'instabilité de la réponse $(\theta, |a|)$.

o *Cas de la poutre électro-mécanique*

Dans le cas de la poutre électro-mécanique, par projection sur le mode ϕ_τ , certaines constantes de l'équation sont de la forme :

$$\int_0^{L_b} \left(\prod_p(s)g(s) \right)'' \phi_\tau(s) ds \quad (2.112)$$

avec $g(s)$ une fonction quelconque. Les fonctions $\prod_p(s)$ et $\Lambda(s)$ sont définies entre x_1 et x_{2n+1} (cf l'équation 2.39), avec $x_1 > 0$ et $x_{2n+1} < L_b$, ce qui implique :

$$\begin{aligned} \prod_p(s=0) &= 0, & \prod_p(s=L_b) &= 0 \\ \Lambda(s=0) &= 0, & \Lambda(s=L_b) &= 0 \\ \Lambda'(s=0) &= 0, & \Lambda'(s=L_b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.113)$$

Par des intégrations par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{L_b} (\prod_p(s)g(s))'' \phi_\tau(s) ds &= \left[(\prod_p(s)g(s))' \phi_\tau(s) \right]_0^{L_b} \\ &\quad - \int_0^{L_b} (\prod_p(s)g(s))' \phi_\tau'(s) ds \\ &= - \left[\prod_p(s)g(s)\phi_\tau'(s) \right]_0^{L_b} \\ &\quad + \int_0^{L_b} \prod_p(s)g(s)\phi_\tau''(s) ds \\ &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} g(s)\phi_\tau''(s) ds \end{aligned} \quad (2.114)$$

Les équations à résoudre, en projetant sur le mode principal ϕ_τ , sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \ddot{r}_\tau + \mu_\tau \dot{r}_\tau + \omega_\tau^2 r_\tau + F_\tau \omega^2 \cos(\omega t) &= \delta_\tau r_\tau^3 + \Gamma_\tau \overbrace{r_\tau^2}^{\dots} r_\tau + \beta_\tau r_\tau^2 \\ &\quad + \Theta_{\tau V} r_\tau V + \Theta_{\tau\tau V} r_\tau^2 V + \Delta_V V \\ &\quad + \Delta_{VV} V^2 \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$Q = \Lambda_\tau r_\tau + \Lambda_V V + \Lambda_{\tau\tau} r_\tau^2 + \Lambda_{\tau V} r_\tau V + \Lambda_{VV} V^2 + \Lambda_{\tau\tau\tau} r_\tau^3 + \Lambda_{VVV} V^3 \quad (2.116)$$

avec δ_τ , ω_τ^2 , F_τ , β_τ et Γ_τ comme dans l'équation 2.89, mais avec EI_b et μ_b qui dépendent désormais de s et des équations qui s'intègrent par parties sur $s \in \mathcal{S}_m$

et $s \in \mathcal{S}_b$, et :

$$\begin{aligned}\beta_\tau &= -3H_{\zeta\zeta\zeta} \int_{s \in \mathcal{S}_m} \phi_\tau'''(s) ds \\ \Theta_{\tau V} &= -2H_{\zeta\zeta V} \int_{s \in \mathcal{S}_m} \phi_\tau''(s) ds \\ \Theta_{\tau\tau V} &= -H_{\zeta V} \int_{s \in \mathcal{S}_m} \frac{3}{2} \phi_\tau''(s) \phi_\tau''(s) ds\end{aligned}\quad (2.117)$$

$$\begin{aligned}\Delta_V &= -H_{\zeta V} \int_{s \in \mathcal{S}_m} \phi_\tau''(s) ds \\ \Delta_{VV} &= -H_{\zeta VV} \int_{s \in \mathcal{S}_m} \phi_\tau''(s) ds \\ \Lambda_\tau &= Q_\zeta \int_{s \in \mathcal{S}_m} \phi_\tau''(s) ds \\ \Lambda_V &= Q_V(x_2 - x_1) \\ \Lambda_{\tau\tau} &= Q_{\zeta\zeta} \int_{s \in \mathcal{S}_m} \phi_\tau''(s) ds \\ \Lambda_{\tau V} &= Q_{\zeta V} \int_{s \in \mathcal{S}_m} \phi_\tau''(s) ds \\ \Lambda_{VV} &= Q_{VV} \int_{s \in \mathcal{S}_m} ds \\ \Lambda_{\tau\tau\tau} &= \frac{Q_\zeta}{2} \int_{s \in \mathcal{S}_m} \phi_\tau''(s) \phi_\tau''(s) ds \\ \Lambda_{VVV} &= Q_{VVV} \int_{s \in \mathcal{S}_m} ds\end{aligned}\quad (2.118)$$

Plusieurs cas de circuit peuvent être pris en compte, par exemple les deux circuits "extrêmes" : le circuit fermé ($V = 0$) et le circuit ouvert ($Q = 0$). On peut également choisir de relier les matériaux piézoélectriques à un circuit électrique, ici composé d'une simple résistance R . On a donc la relation suivante entre la charge électrique Q et la tension V des matériaux piézoélectriques :

$$\dot{Q} = \frac{V}{R}\quad (2.119)$$

Comme précédemment, des hypothèses d'échelles doivent être prises sur les variables en temps que sont r_τ et V . Pour $\epsilon > 0$ un petit paramètre arbitraire, on pose :

$$\begin{aligned}r_\tau &= \epsilon r_1 + \epsilon^2 r_2 + \epsilon^3 r_3 + \dots \\ V &= \epsilon V_1 + \epsilon^2 V_2 + \epsilon^3 V_3 + \dots\end{aligned}\quad (2.120)$$

On pose des hypothèses sur les paramètres des équations 2.115 et 2.116 :

$$\begin{aligned}
 \mu_\tau &= \epsilon^2 \mu_2 \\
 F_\tau &= \epsilon^3 F_3 \\
 \Delta_V &= \epsilon^2 \Delta_2 \\
 \omega_\tau &= \omega + \epsilon^2 \sigma
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

Il s'agit des mêmes hypothèses que pour le cas de la poutre homogène. Comme le terme $\Delta_V V$ est considéré comme un "forçage" piézoélectrique, on le met au même ordre que le forçage extérieur F_τ .

On prend en compte les trois types de problèmes électriques proposés précédemment pour la poutre électro-mécanique :

— Circuit fermé ($V = 0$)

Ce problème se rapproche du cas de la poutre homogène, la seule différence étant la présence d'un terme quadratique avec la constante β_τ .

— Circuit ouvert ($Q = 0$)

La principale différence attendue entre le circuit ouvert et fermé est une modification de la pulsation propre du système. Les développements analytiques devraient permettre d'estimer ce changement de pulsation.

— Circuit composé d'une résistance R ($Q = V/R$)

Ce cas de circuit nous permet de prendre un compte un problème avec des constantes complexes, ce qui n'est pas le cas des deux cas précédents.

On résout le problème le plus complet, celui avec la résistance R . Dans ce cas du circuit électrique impliquant une résistance on a le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 \ddot{r}_\tau + \mu_\tau \dot{r}_\tau + \omega_\tau^2 r_\tau + F_\tau \omega^2 \cos(\omega t) &= \delta_\tau r_\tau^3 + \Gamma_\tau \overbrace{r_\tau^2}^{\dots} r_\tau + \beta_\tau r_\tau^2 \\
 &+ \Theta_{\tau V} r_\tau V + \Theta_{\tau\tau V} r_\tau^2 V + \Delta_V V \\
 &+ \Delta_V V^2
 \end{aligned} \tag{2.122}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{R} &= \Lambda_\tau \dot{r}_\tau + \Lambda_V \dot{V} + 2\Lambda_{\tau\tau} \dot{r}_\tau r_\tau + \Lambda_{\tau V} (\dot{r}_\tau V + r_\tau \dot{V}) \\
 &+ 2\Lambda_{VV} \dot{V} V + 3\Lambda_{\tau\tau\tau} \dot{r}_\tau r_\tau^2 + 3\Lambda_{VVV} \dot{V} V^2
 \end{aligned} \tag{2.123}$$

À $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\begin{aligned}
 D_0^2 r_1 + \omega^2 r_1 &= 0 \\
 \Lambda_V D_0 V_1 - \frac{V_1}{R} &= -\Lambda_\tau D_0 r_1
 \end{aligned} \tag{2.124}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 r_1 &= A(t_1, t_2, \dots) \exp(i\omega t_0) + cc \\
 V_1 &= \mathcal{L}_1 A(t_1, t_2, \dots) \exp(i\omega t_0) + cc
 \end{aligned} \tag{2.125}$$

avec :

$$\mathcal{L}_1 = \frac{-\Lambda_V \omega R + i}{1 + \Lambda_V^2 \omega^2 R^2} \Lambda_\tau \omega R \quad (2.126)$$

À $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, on a :

$$\begin{aligned} D_0^2 r_2 + \omega^2 r_2 = & -2D_0 D_1 r_1 + \beta_\tau r_1^2 + \Delta_{\tau V} r_1 V_1 + \Delta_{VV} V_1^2 \\ \Lambda_V D_0 V_2 - \frac{V_2}{R} = & -(2\Lambda_{\tau\tau} r_1 D_0 r_1 + \Lambda_\tau D_0 r_2 + \Lambda_{\tau V} (r_1 D_0 V_1 + D_0 r_1 V_1) \\ & + 2\Lambda_{VV} V_1 D_0 V_1 + \Lambda_\tau D_1 r_1 + \Lambda_V D_1 V_1) \end{aligned} \quad (2.127)$$

ce qui impose :

$$D_1 A(t_1, t_2, \dots) = 0 \quad (2.128)$$

avec l'amplitude $A(t_2, \dots)$ qui ne dépend pas du temps t_1 , et :

$$\begin{aligned} r_2 = & \mathcal{N}_2 A^2 \exp(2i\omega t_0) + N_{cs} A \bar{A} + \bar{\mathcal{N}}_2 \bar{A}^2 \exp(-2i\omega t_0) \\ V_2 = & \mathcal{L}_2 A^2 \exp(2i\omega t_0) + cc \end{aligned} \quad (2.129)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2 = & -\frac{\beta_\tau + \Delta_{\tau V} \mathcal{L}_1 + \Delta_{VV} \mathcal{L}_1^2}{3\omega^2} \\ \mathcal{N}_{cs} = & \frac{2\beta_\tau + \Delta_{\tau V} (\mathcal{L}_1 + \bar{\mathcal{L}}_1) + 2\Delta_{VV} \mathcal{L}_1 \bar{\mathcal{L}}_1}{\omega^2} \\ \mathcal{L}_2 = & -2R \frac{\Lambda_\tau \omega \mathcal{L}_2 + \Lambda_{\tau\tau} \omega + \Lambda_{\tau V} \omega \mathcal{L}_1 + \Lambda_{VV} \omega \mathcal{L}_1^2}{2\Lambda_V \omega R + i} \end{aligned} \quad (2.130)$$

À $\mathcal{O}(\epsilon^3)$:

$$\begin{aligned} D_0^2 r_3 + \omega^2 r_3 = & -2D_2 D_0 r_1 - \mu_2 D_0 r_1 + \delta_\tau r_1^3 + 2\beta_\tau r_1 r_2 - 2\omega \sigma r_1 \\ & + \Gamma_\tau D_0^2 (r_1^2) r_1 + \Delta_2 V_1 + \Delta_{\tau\tau V} r_1^2 V_1 + \Delta_{\tau V} r_2 V_1 \\ & + \Delta_{\tau V} r_1 V_2 + 2\Delta_{VV} V_1 V_2 + F_3 \omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.131)$$

On obtient alors :

$$r_3 = \mathcal{N}_3 A^3 \exp(3i\omega t_0) + cc \quad (2.132)$$

avec :

$$\mathcal{N}_3 = \frac{-\delta_\tau - \Delta_{\tau\tau V} \mathcal{L}_1 - 2\beta_\tau \mathcal{N}_2 - \Delta_{\tau V} (\mathcal{L}_1 \mathcal{N}_2 + \mathcal{L}_2) - 2\Delta_{VV} \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2}{8\omega^2} \quad (2.133)$$

L'élimination des termes séculaires donne l'équation suivante :

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{F_3 \omega^2}{2} + \Delta_2 \mathcal{L}_1 A - 2i\omega D_2 A - i\mu_2 \omega A - 2\omega \sigma A \\ & + A^2 \bar{A} \left(3\delta_\tau + \mathcal{Z} - 4\omega^2 \Gamma_\tau \right) \end{aligned} \quad (2.134)$$

avec :

$$\mathcal{Z} = 2\Delta_{\tau\tau V}(\mathcal{L}_1 + \bar{\mathcal{L}}_1) + 2\beta_\tau(\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_{cs}) + \Delta_{\tau V}(\bar{\mathcal{L}}_1\mathcal{N}_2 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1\mathcal{N}_{cs}) \quad (2.135)$$

De la même manière que précédemment, on suppose que le complexe A s'écrit comme dans l'équation 2.100, en séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$$\begin{aligned} D_2|a| &= \frac{1}{4\omega} \left(-F_3\omega^2 \sin(\theta) + 2(\Delta_2\mathcal{L}_{1i} - \mu_2\omega) |a| + 2\mathcal{Z}_i |a|^3 \right) \\ D_2\theta &= \frac{1}{4\omega|a|} \left(-F_3\omega^2 \cos(\theta) + 2(2\omega\sigma - \Delta_2\mathcal{L}_{1r}) |a| \right. \\ &\quad \left. + (8\omega^2\Gamma_\tau - 6\delta_\tau - 2\mathcal{Z}_r) |a|^3 \right) \end{aligned} \quad (2.136)$$

avec les indices r et i représentant respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du coefficient \mathcal{Z} et du coefficient \mathcal{L}_1 .

Les points d'équilibre sont à nouveau décrits par l'équation 2.102, ce qui nous permet d'exprimer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ tels que :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= -\frac{2|a|}{F_3\omega^2} \left((\Delta_2\mathcal{L}_{1r} - 2\omega\sigma) + (3\delta_\tau - 4\omega^2\Gamma_\tau + \mathcal{Z}_r)|a|^2 \right) \\ \sin(\theta) &= \frac{2|a|}{F_3\omega^2} \left((\Delta_2\mathcal{L}_{1i} - \mu_2\omega) + \mathcal{Z}_i|a|^2 \right) \end{aligned} \quad (2.137)$$

L'équation $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 - 1 = 0$ donne :

$$\begin{aligned} 0 &= 4 \left(\Delta_2^2(\mathcal{L}_{1i}^2 + \mathcal{L}_{1r}^2) - 2\Delta_2\omega(\mathcal{L}_{1i}\mu_2 + 2\mathcal{L}_{1r}\sigma) + \omega^2(\mu_2^2 + 4\sigma^2) \right) |a|^2 \\ &\quad + 8 \left(-\mu_2\omega\mathcal{Z}_i + \Delta_2(3\delta_\tau\mathcal{L}_{1r} - 4\omega^2\mathcal{L}_{1r}\Gamma_\tau + \mathcal{L}_{1i}\mathcal{Z}_i + \mathcal{L}_{1r}\mathcal{Z}_r) \right. \\ &\quad \left. + \sigma\omega(8\omega^2\Gamma_\tau - 2\mathcal{Z}_r - 6\delta_\tau) \right) |a|^4 \\ &\quad + 4 \left((3\delta_\tau + \mathcal{Z}_r - 4\omega^2\Gamma_\tau)^2 + \mathcal{Z}_i^2 \right) |a|^6 - F_3^2\omega^4 \end{aligned} \quad (2.138)$$

ce qui est à nouveau une équation de degré 3 en $|a|^2$.

En ré-injectant les hypothèses de la méthode des échelles multiples pour éliminer

le paramètre fictif ϵ , elle devient :

$$\begin{aligned}
 0 = & 4 \left(\Delta_V^2 (\mathcal{L}_{1i}^2 + \mathcal{L}_{1r}^2) + \omega^2 (\mu_\tau^2 + 4(\omega - \omega_\tau)^2) \right. \\
 & \left. - 2\Delta_V \omega (\mathcal{L}_{1i} \mu_\tau + 2\mathcal{L}_{1r} (\omega_\tau - \omega)) \right) |a_m|^2 \\
 & + 8 \left(8\omega^3 \Gamma_\tau (\omega_\tau - \omega) + \omega^2 (6\delta_\tau + 2\mathcal{Z}_r) \right. \\
 & + \Delta_V (3\delta_\tau \mathcal{L}_{1r} - 4\mathcal{L}_{1r} \omega^2 \Gamma_\tau + \mathcal{L}_{1i} \mathcal{Z}_i + \mathcal{L}_{1r} \mathcal{Z}_r) \\
 & \left. - \omega (6\delta_\tau \omega_\tau + \mu_\tau \mathcal{Z}_i + 2\omega_\tau \mathcal{Z}_r) \right) |a_m|^4 \\
 & + 4 \left((3\delta_\tau + \mathcal{Z}_r - 4\omega^2 \Gamma_\tau)^2 + \mathcal{Z}_i^2 \right) |a_m|^6 - F_\tau^2 \omega^4
 \end{aligned} \tag{2.139}$$

Il est possible de tracer les points d'équilibre de la poutre électro-mécanique à un mode à partir de cette équation.

Comme précédemment, trouvons la courbe squelette et identifions l'instabilité des points d'équilibre.

- La courbe squelette du cas électro-mécanique avec une résistance R

À partir de l'équation 2.139, on peut obtenir la courbe squelette du cas électro-mécanique. Comme précédemment, pour obtenir la courbe squelette, on élimine l'amortissement et la force extérieure, i.e. $\mu_\tau = 0$ et $F_\tau = 0$.

L'analogie mécanique d'une résistance est un amortissement, elle doit être éliminée des équations également. Si la résistance n'est pas éliminée, l'équation d'ordre 2 en $|a_m|^2$ donnant l'équation de la courbe squelette posséderait des solutions complexes. Or, ceci n'est pas possible car $|a_m|$ est un réel.

Dans l'équation 2.123, si on multiplie par R , puis on pose $R = 0$, on obtient $V = 0$. En effet, la courbe squelette correspondant au cas d'un circuit électrique avec une résistance est la même que celle du cas du circuit fermé. $V = 0$ impose, d'après les équations 2.120, 2.125 et 2.129, $\mathcal{L}_1 = 0$ et $\mathcal{L}_2 = 0$. Cela simplifie les expressions de \mathcal{N}_2 et \mathcal{N}_{cs} (cf l'équation 2.130) telles que :

$$\mathcal{N}_2 = -\frac{\beta_\tau}{3\omega^2} \tag{2.140}$$

$$\mathcal{N}_{cs} = \frac{2\beta_\tau}{\omega^2}$$

et \mathcal{Z} devient :

$$\mathcal{Z} = 2\beta_\tau (\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_{cs}) \tag{2.141}$$

donc $\mathcal{Z}_i = 0$.

L'équation 2.139 devient :

$$0 = 4|a_m|^2 (2\omega(\omega - \omega_\tau) + (3\delta_\tau - 4\omega^2 \Gamma_\tau + \mathcal{Z}_r) |a_m|^2)^2 \tag{2.142}$$

$|a_m| = 0$ est une solution triviale, on a :

$$|a_m|^2 = \frac{2\omega(\omega_\tau - \omega)}{3\delta_\tau - 4\omega^2\Gamma_\tau + \mathcal{Z}_r} \quad (2.143)$$

La seule différence avec l'équation 2.108 de la courbe squelette de la poutre homogène est la présence de \mathcal{Z}_r .

Ainsi, la pulsation propre n'est pas "décalée", la courbe squelette commence à ω_τ la pulsation propre de la structure en circuit fermé. Et, il existe un coefficient critique pour lequel le dénominateur s'annule, i.e. $\mathcal{Z}_r = 4\omega^2\Gamma_\tau - 3\delta_\tau$ et on obtiendrait une amplitude $|a_m|$ "infinie". Ce phénomène non physique nous fait remarquer qu'il existe un domaine de validité des développements effectués précédemment. En effet, il est impossible de diviser nos équations par 0, ainsi, si le dénominateur s'approche d'une valeur seuil faible, la seule solution physique possible devient $|a_m| = 0$. Ce problème pose une question sur le raccordement entre $|a_m| \neq 0$ et $|a_m| = 0$.

Étudions tout de même le phénomène autour du dénominateur nul : quelles modifications apportent le changement de signe de ce dernier ? D'après l'équation 2.141, \mathcal{Z}_r contient le coefficient β_τ , qui est lié au coefficient non linéaire piézoélectrique s_{111} (la non linéarité inertielle du matériau piézoélectrique).

On montrera dans la partie vérification numérique, que la valeur de ce coefficient peut mener à un comportement raidissant ou assouplissant de la structure, par rapport à sa valeur critique pour laquelle il annule le dénominateur. Ce coefficient est un coefficient inhérent aux matériaux piézoélectriques, il n'est donc pas possible de le modifier expérimentalement.

- Obtention des zones d'instabilité pour la poutre électro-mécanique avec une résistance R

Comme vu précédemment, on perturbe le point d'équilibre $(\theta, |a|)$ avec les équations 2.109 et 2.110 pour obtenir la Jacobienne \mathbf{J}_{m1} :

$$\mathbf{J}_{m1} = \frac{1}{2\omega} \begin{bmatrix} J_{m1,11} & J_{m1,12} \\ J_{m1,21} & J_{m1,22} \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

avec

$$\begin{aligned} J_{m1,11} &= \Delta_2 \mathcal{L}_{1i} - \mu_2 \omega + 3\mathcal{Z}_i |a|^2 \\ J_{m1,12} &= (\Delta_2 \mathcal{L}_{1r} - 2\omega\sigma + (3\delta_\tau - 4\omega^2\Gamma_\tau + \mathcal{Z}_r) |a|^2) |a| \\ J_{m1,21} &= -\frac{\Delta_2 \mathcal{L}_{1r} - 2\omega\sigma + 3(3\delta_\tau - 4\omega^2\Gamma_\tau + \mathcal{Z}_r) |a|^2}{|a|} \\ J_{m1,22} &= \Delta_2 \mathcal{L}_{1i} - \mu_2 \omega + \mathcal{Z}_i |a|^2 \end{aligned} \quad (2.145)$$

On s'intéresse au signe des parties réelles des valeurs propres de \mathbf{J}_{m1} pour étudier la stabilité des points d'équilibre $(\theta, |a|)$.

o Le cas du circuit fermé $V = 0$

Pour un circuit fermé, on a $V = 0$, donc d'après les équations 2.120, 2.125 et 2.129 on obtient $\mathcal{L}_1 = 0$ et $\mathcal{L}_2 = 0$ et ainsi $\mathcal{Z} = 2\beta_\tau(\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_{cs})$. Pour finir :

$$\begin{aligned} r_\tau = & \frac{\mathcal{N}_{cs}}{2}|a_m|^2 + |a_m| \exp(i\theta) \exp(i\omega t_0) \\ & + \mathcal{N}_2|a_m|^2 \exp(2i\theta) \exp(2i\omega t_0) \\ & + \mathcal{N}_3|a_m|^3 \exp(3i\theta) \exp(3i\omega t_0) + cc \end{aligned} \quad (2.146)$$

avec \mathcal{N}_2 et \mathcal{N}_{cs} de l'équation 2.140, et :

$$\mathcal{N}_3 = \frac{\beta_\tau^2 - 2\delta_\tau\omega^2 + 4\omega^2\Gamma_\tau}{8\omega^4} \quad (2.147)$$

L'équation 2.139 devient :

$$\begin{aligned} 0 = & -F_\tau^2\omega^4 + 4\omega^2(\mu_\tau^2 + 4(\omega - \omega_\tau)^2) |a_m|^2 \\ & + 16\omega(\omega - \omega_\tau)(3\delta_\tau - 4\omega^2\Gamma_\tau + \mathcal{Z}_r) |a_m|^4 \\ & + 4(3\delta_\tau - 4\omega^2\Gamma_\tau + \mathcal{Z}_r) |a_m|^6 \end{aligned} \quad (2.148)$$

Les remarques sur la courbe squelette sont les mêmes que précédemment.

o Le cas du circuit ouvert $Q = 0$

Par rapport au cas du circuit résonant, dans le cas du circuit ouvert les constantes complexes $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ deviennent réelles telles que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & -\frac{\Lambda_\tau}{\Lambda_V} \\ \mathcal{L}_2 = & -\frac{\Lambda_{\tau\tau} + \Lambda_{VV}\mathcal{L}_1^2 + \Lambda_\tau\mathcal{N}_2}{\Lambda_V} \end{aligned} \quad (2.149)$$

On a même l'apparition d'un terme supplémentaire sur V_2 tel que :

$$V_2 = \mathcal{L}_2 A^2 \exp(2i\omega t_0) + \frac{\mathcal{L}_{cs}}{2} A\bar{A} + \mathcal{L}_2 A^2 \exp(2i\omega t_0) \quad (2.150)$$

avec :

$$\mathcal{L}_{cs} = -\frac{2\Lambda_{\tau\tau} + 2\Lambda_{VV}\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{N}_{cs}\Lambda_\tau}{\Lambda_V} \quad (2.151)$$

Les constantes $\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_{cs}$ et \mathcal{N}_3 deviennent :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{cs} = & 2\frac{\beta_\tau + \Delta_{VV}\mathcal{L}_1^2 + \Theta_{\tau V}\mathcal{L}_1}{\omega^2} \\ \mathcal{N}_2 = & -\frac{\beta_\tau + \Delta_{VV}\mathcal{L}_1^2 + \Theta_{\tau V}\mathcal{L}_1}{3\omega^2} \\ \mathcal{N}_3 = & -\frac{1}{8\omega^2} (\delta_\tau + 2\Delta_{VV}\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 + 2\beta_\tau\mathcal{N}_2 - 4\omega^2\Gamma_\tau \\ & + \Theta_{\tau\tau V}\mathcal{L}_1 + \Theta_{\tau V}(\mathcal{L}_2 + \mathcal{N}_2\mathcal{L}_1)) \end{aligned} \quad (2.152)$$

Et, l'équation 2.139 se transforme en :

$$\begin{aligned}
 0 = & 4(\Delta_V^2 \mathcal{L}_1^2 + \omega^2(\mu_\tau^2 + 4(\omega - \omega_\tau)^2) + 4\Delta_V \mathcal{L}_1 \omega(\omega - \omega_\tau)) |a_m|^2 \\
 & + 8(\Delta_V \mathcal{L}_1 + 2\omega(\omega - \omega_\tau))(3\delta_\tau - 4\omega^2 \Gamma_\tau + \tilde{\mathcal{Z}}) |a_m|^4 \\
 & + 4(3\delta_\tau - 4\omega^2 \Gamma_\tau + \tilde{\mathcal{Z}})^2 |a_m|^6 - F_\tau^2 \omega^4
 \end{aligned} \tag{2.153}$$

avec $\tilde{\mathcal{Z}}$ une constante réelle telle que :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{Z}} = & 2\Delta_V \mathcal{L}_1 (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{cs}) + 2\beta_\tau (\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_{cs}) \\
 & + 3\mathcal{L}_1 \Theta_{\tau V} + \Theta_{\tau V} (\mathcal{L}_1 (\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_{cs}) + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{cs})
 \end{aligned} \tag{2.154}$$

En éliminant F_τ et μ_τ , on obtient :

$$0 = 4|a_m|^2 (2\omega(\omega - \omega_\tau) + \Delta_V \mathcal{L}_1 + (3\delta_\tau - 4\omega^2 \Gamma_\tau + \tilde{\mathcal{Z}}) |a_m|^2) \tag{2.155}$$

La courbe squelette est alors donnée soit par $|a_m| = 0$, soit par :

$$|a_m|^2 = -\frac{2\omega(\omega - \omega_\tau) + \Delta_V \mathcal{L}_1}{3\delta_\tau - 4\omega^2 \Gamma_\tau + \tilde{\mathcal{Z}}} \tag{2.156}$$

On peut alors faire deux remarques :

- au numérateur, on ne passe plus par 0 en $\omega = \omega_\tau$, mais en

$$\omega_p = \frac{\omega_\tau + \sqrt{\omega_\tau^2 - 2\Delta_V \mathcal{L}_1}}{2} \tag{2.157}$$

On a bien, comme indiqué précédemment, une modification de la pulsation propre dans le cas d'un circuit ouvert, qui est due au coefficient de couplage piézoélectrique d_{31} (Trindade and Benjeddou, 2009) présent dans les constantes Δ_V et \mathcal{L}_1 (cf l'équation 2.149). C'est pourquoi ce coefficient de couplage est souvent estimé en comparant la pulsation propre d'un système couplé de poutre avec matériaux piézoélectriques reliés à un circuit ouvert, à celle d'un système relié à un circuit fermé.

Une question se pose sur l'équation 2.157 : est-il possible d'obtenir une pulsation complexe, i.e. d'avoir $\omega_\tau^2 - 2\Delta_V \mathcal{L}_1 \leq 0$? Pour des questions d'ordre de grandeur de nos coefficients, ceci n'est pas possible. En effet, $\Delta_V \mathcal{L}_1 = \mathcal{O}(\epsilon)$ car $\Delta_V = \mathcal{O}(\epsilon)$, alors que $\omega_\tau^2 = \mathcal{O}(1)$, on a donc $\omega_\tau^2 \gg \Delta_V \mathcal{L}_1$.

- au dénominateur, il existe cette fois plusieurs coefficients non linéaires piézoélectriques (contenus dans $\tilde{\mathcal{Z}}$ de l'équation 2.154) qui sont critiques pour un passage d'un comportement raidissant à un comportement assouplissant de la structure. À nouveau il s'agit de coefficients intrinsèques au comportement non linéaire matériel du matériau piézoélectrique qui ne sont pas modifiables directement expérimentalement.

Cette partie a permis de mettre en avant l'effet des paramètres non linéaires dans le cas où un seul mode de la structure prédomine la réponse. Les développements analytiques permettent le tracé des courbes fréquentielles forcées et leur courbes squelettes associées. Les zones instables des solutions périodiques peuvent aussi être identifiées.

Le comportement de la structure sur un mode, i.e. en ne supposant pas un comportement multimodal de la structure a donc été obtenu. Dans la partie suivante, les développements analytiques s'intéressent à des cas multimodaux à deux modes en résonance interne. On se focalise sur la dynamique du système lors de la présence de résonances internes 1 : 2 et 1 : 3, au vu des non linéarités quadratiques et cubiques identifiées dans les équations du système. On suppose alors que la réponse du système est composée des deux modes impliqués dans la résonance interne.

Dans un premier temps, on se concentre sur le cas de la résonance 1 : 3.

Résolution d'un cas à deux modes : résonance 1 : 3

Soit deux modes, le $n^{\text{ème}}$ mode et le $m^{\text{ème}}$, en résonance interne 1 : 3 tels que : $\omega_m \simeq 3\omega_n$. Supposons que le mode inférieur (i.e. le $n^{\text{ème}}$) est excité, à cause de la résonance interne on suppose que le $m^{\text{ème}}$ mode est également excité autour de $\omega \simeq \omega_n$. D'ailleurs, on suppose que le déplacement de la poutre dépend exclusivement de ces deux modes tel que la variable spatio-temporelle $v(s,t)$ s'écrit :

$$v(s,t) = \phi_n(s)r_n(t) + \phi_m(s)r_m(t) \quad (2.158)$$

On réduit le système d'équations du mouvement sur ces deux modes d'intérêts. Le système d'équations est ensuite résolu, par une méthode des échelles multiples, dans le cas de la poutre homogène sans matériaux piézoélectriques et avec. En effet, la résonance interne 1 : 3 peut être activée dans le cas d'une poutre homogène seule et de la poutre électromécanique qui présente toutes les deux des non linéarités cubiques. On veut également pouvoir comparer les comportements avec et sans matériaux piézoélectriques de la poutre. Le cas de la poutre homogène seule est donc résolu dans un premier temps.

o Cas de la poutre homogène

En projetant sur les deux modes n et m , dans le cas d'une poutre homogène, les équations du système deviennent :

$$\begin{aligned} \ddot{r}_n + \mu_n \dot{r}_n + \omega_n^2 r_n + F_n \omega^2 \cos(\omega t) = & \delta_{nnn} r_n^3 + \delta_{nmm} r_n^2 r_m \\ & + \delta_{nmm} r_n r_m^2 + \delta_{mmm} r_m^3 \\ & + \tau_{nnn} r_n \overbrace{r_n^2} + \tau_{nmm} r_n \overbrace{r_n r_m} \\ & + \tau_{nmm} r_n \overbrace{r_m^2} + \tau_{mnn} r_m \overbrace{r_n^2} \\ & + \tau_{mnm} r_m \overbrace{r_n r_m} + \tau_{mmm} r_m \overbrace{r_m^2} \end{aligned} \quad (2.159)$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{r}_m + \mu_m \dot{r}_m + \omega_m^2 r_m + F_m \omega^2 \cos(\omega t) = & \alpha_{nnn} r_n^3 + \alpha_{nmm} r_n^2 r_m \\
 & + \alpha_{nmm} r_n r_m^2 + \alpha_{mmm} r_m^3 \\
 & + \Gamma_{nnn} r_n \overbrace{r_n^2} + \Gamma_{nmm} r_n \overbrace{r_n r_m} \quad (2.160) \\
 & + \Gamma_{nmm} r_n \overbrace{r_m^2} + \Gamma_{mmm} r_m \overbrace{r_n^2} \\
 & + \Gamma_{mnm} r_m \overbrace{r_n r_m} + \Gamma_{mmm} r_m \overbrace{r_m^2}
 \end{aligned}$$

où les termes des équations sont définies dans l'annexe 5.2.

Afin d'identifier les points d'équilibre des équations dynamiques électro-mécaniques, on utilise à nouveau la méthode des échelles multiples. Pour cela le temps t est décomposé en plusieurs échelles de temps (cf l'équation 1.15), de même pour les dérivées partielles en temps (cf l'équation 1.16). Il faut également découper les variables de temps $r_n(t)$ et $r_m(t)$ en fonction du petit paramètre ϵ telles que :

$$\begin{aligned}
 r_n = & \epsilon r_{n1} + \epsilon^2 r_{n2} + \epsilon^3 r_{n3} + \dots \\
 r_m = & \epsilon r_{m1} + \epsilon^2 r_{m2} + \epsilon^3 r_{m3} + \dots
 \end{aligned} \quad (2.161)$$

Pour pouvoir résoudre les équations, il faut également poser des hypothèses sur les constantes de l'équation 2.88 :

$$\begin{aligned}
 \mu_n = & \epsilon^2 \mu_{n2} \\
 \mu_m = & \epsilon^2 \mu_{m2} \\
 F_n = & \epsilon^3 F_{n3} \\
 F_m = & \epsilon^3 F_{m3} \\
 \omega = & \omega_n + \epsilon^2 \sigma \\
 \omega_m = & 3\omega_n + \epsilon^2 \sigma_2
 \end{aligned} \quad (2.162)$$

avec σ et σ_2 des paramètres de modulation autour respectivement des pulsations propres ω_n et ω_m .

La résolution par la méthode des échelles multiples donne à $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\begin{aligned}
 D_0^2 r_{n1} + \omega_n^2 r_{n1} = 0 \\
 D_0^2 r_{m1} + \omega_m^2 r_{m1} = 0
 \end{aligned} \quad (2.163)$$

ce qui impose :

$$\begin{aligned}
 r_{n1} = & A_n \exp(i\omega_n t_0) + cc \\
 r_{m1} = & A_m \exp(i\omega_m t_0) + cc
 \end{aligned} \quad (2.164)$$

À l'ordre supérieur, on obtient :

$$\begin{aligned} D_0^2 r_{n2} + \omega_n^2 r_{n1} &= -2D_1 D_0 r_{n1} \\ D_0^2 r_{m2} + \omega_m^2 r_{m1} &= -2D_1 D_0 r_{m1} \end{aligned} \quad (2.165)$$

Les termes $2D_1 D_0 r_{n1}$ et $2D_1 D_0 r_{m1}$ sont des termes séculaires qui imposent :

$$\begin{aligned} D_1 A_n &= 0 \\ D_1 A_m &= 0 \end{aligned} \quad (2.166)$$

Les amplitudes complexes A_n et A_m ne dépendent donc pas du temps t_1 , et les solutions particulières sont :

$$\begin{aligned} r_{n2} &= 0 \\ r_{m2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.167)$$

À $\mathcal{O}(\epsilon^3)$:

$$\begin{aligned} D_0^2 r_{n3} + \omega_n^2 r_{n3} &= -2D_2 D_0 r_{n1} - \mu_{n2} D_0 r_{n1} + \delta_{nnn} r_{n1}^3 + \delta_{nmm} r_{n1}^2 r_{m1} \\ &+ \delta_{nmm} r_{n1} r_{m1}^2 + \delta_{mmm} r_{m1}^3 + \tau_{mmm} r_{m1} D_0^2 (r_{m1}^2) \\ &+ \tau_{mnm} r_{m1} D_0^2 (r_{m1} r_{n1}) + \tau_{mnn} r_{m1} D_0^2 (r_{n1}^2) \\ &+ \tau_{nmm} r_{n1} D_0^2 (r_{m1}^2) + \tau_{nmm} r_{n1} D_0^2 (r_{m1} r_{n1}) \\ &+ \tau_{nnn} r_{n1} D_0^2 (r_{n1}^2) + F_{n3} \omega_n^2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.168)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 r_{m3} + \omega_m^2 r_{m3} &= -2D_2 D_0 r_{m1} - \mu_{m2} D_0 r_{m1} + \alpha_{nnn} r_{n1}^3 \\ &+ \alpha_{nmm} r_{n1}^2 r_{m1} + \alpha_{nmm} r_{n1} r_{m1}^2 + \alpha_{mmm} r_{m1}^3 \\ &+ \Gamma_{mmm} r_{m1} D_0^2 (r_{m1}^2) + \Gamma_{mnn} r_{m1} D_0^2 (r_{m1} r_{n1}) \\ &+ \Gamma_{nmm} r_{n1} D_0^2 (r_{m1}^2) + \Gamma_{mnn} r_{m1} D_0^2 (r_{n1}^2) \\ &+ \Gamma_{nmm} r_{n1} D_0^2 (r_{n1} r_{m1}) + \Gamma_{nnn} r_{n1} D_0^2 (r_{n1}^2) \\ &+ F_{m3} \omega_m^2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.169)$$

Les termes séculaires sont, avec les hypothèses de résonance interne :

$$\begin{aligned}
 2i\omega_n D_2 A_n = & \frac{\omega_n^2}{2} F_{n3} \exp(i\sigma t_2) - i\mu_{n2}\omega_n A_n \\
 & + A_n^2 \bar{A}_n (3\delta_{nnn} - 4\omega_n^2 \tau_{nnn}) \\
 & + A_n A_m \bar{A}_m (2\delta_{nmm} - 2(\omega_m^2 + \omega_n^2) \tau_{mnm}) \\
 & + A_m \bar{A}_n^2 \exp(i\sigma_2 t_2) (\delta_{nmm} - 4\omega_n^2 \tau_{mnn} - (\omega_m - \omega_n)^2 \tau_{nmm}) \quad (2.170)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2i\omega_m D_2 A_m = & -i\mu_{m2}\omega_m A_m + A_m^2 \bar{A}_m (3\alpha_{mmm} - 4\omega_m^2 \Gamma_{mmm}) \\
 & + A_m A_n \bar{A}_n (2\alpha_{nmm} - 2(\omega_m^2 + \omega_n^2) \Gamma_{nmm}) \\
 & + A_n^3 \exp(-i\sigma_2 t_2) (\alpha_{nnn} - 4\omega_n^2 \Gamma_{nnn})
 \end{aligned}$$

On a l'apparition de termes exponentiels en σt_2 et $\sigma_2 t_2$ dus aux modulations autour des pulsations propres. Afin d'éliminer le temps t_2 dans nos équations, on pose :

$$\begin{aligned}
 A_n &= a_n \exp(i\sigma t_2) \\
 A_m &= a_m \exp(i(3\sigma - \sigma_2)t_2) \quad (2.171)
 \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
 a_n &= p_n + iq_n, \quad (p_n, q_n) \in \mathbb{R} \\
 a_m &= p_m + iq_m, \quad (p_m, q_m) \in \mathbb{R} \quad (2.172)
 \end{aligned}$$

On sépare les parties réelles et imaginaires des équations séculaires précédentes, on obtient ainsi les expressions de $D_2 p_n$, $D_2 q_n$, $D_2 p_m$ et $D_2 q_m$ suivantes :

$$\begin{aligned}
 D_2 p_n = & \frac{-1}{2\epsilon^3 \omega_n} (\mu_n \omega_n p_n + 2(\omega_n^2 - 2\omega_n \omega) q_n \\
 & + 2((\omega_m^2 + \omega_n^2) \tau_{mnm} - \delta_{nmm}) q_n (p_m^2 + q_m^2) \\
 & + 2(\delta_{nmm} - (\omega_m - \omega_n)^2 \tau_{nmm}) p_m p_n q_n \\
 & + (4\omega_n^2 \tau_{nnn} - 3\delta_{nnn}) (p_n^2 q_n + q_n^3) \\
 & + (\delta_{nmm} - (\omega_m - \omega_n)^2 \tau_{nmm}) q_m (q_n^2 - p_n^2)) \quad (2.173)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 q_n = \frac{1}{4\epsilon^3 \omega_n} & \left(-\omega_n^2 F_n - 2\mu_n \omega_n q_n + 4(\omega_n^2 - \omega_n \omega) p_n \right. \\
 & + 4((\omega_n^2 + \omega_m^2) \tau_{mnm} - \delta_{nmm}) p_n (p_m^2 + q_m^2) \\
 & + 4((\omega_m - \omega_n)^2 \tau_{nmm} - \delta_{nmm}) p_n q_n q_m \\
 & + (8\omega_n^2 \tau_{nnn} - 6\delta_{nnn}) p_n (p_n^2 + q_n^2) \\
 & \left. + 2(\delta_{nmm} - (\omega_m - \omega_n)^2 \tau_{nmm}) p_m (q_n^2 - p_n^2) \right)
 \end{aligned} \tag{2.174}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 p_m = \frac{-1}{2\epsilon^3 \omega_m} & \left(\mu_m \omega_m p_m + 2(\omega_m^2 - 3\omega_m \omega) q_m \right. \\
 & + (4\omega_m^2 \Gamma_{mmm} - 3\alpha_{mmm}) q_m (p_m^2 + q_m^2) \\
 & + (\alpha_{nnn} - 4\omega_n^2 \Gamma_{nnn}) q_n (q_n^2 - 3p_n^2) \\
 & \left. + 2((\omega_m^2 + \omega_n^2)(\Gamma_{nmm} + \Gamma_{mnm}) - \alpha_{nmm}) q_m (p_n^2 + q_n^2) \right)
 \end{aligned} \tag{2.175}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 q_m = \frac{1}{2\epsilon^3 \omega_m} & \left(-\mu_m \omega_m q_m + 2(\omega_m^3 \omega_m \omega) p_m \right. \\
 & + (4\omega_m^2 \Gamma_{mmm} - 3\alpha_{mmm}) p_m (p_m^2 + q_m^2) \\
 & + (4\omega_n^2 \Gamma_{nnn} - \alpha_{nnn}) p_n (p_n^2 - 3q_n^2) \\
 & \left. + 2((\omega_m^2 + \omega_n^2)(\Gamma_{mnm} + \Gamma_{nmm}) - \alpha_{nmm}) p_m (p_n^2 + q_n^2) \right)
 \end{aligned} \tag{2.176}$$

Les points d'équilibre de la dynamique correspondent à :

$$\begin{cases} D_2 A_n = 0 \\ D_2 A_m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_2 p_n = 0 \\ D_2 q_n = 0 \\ D_2 p_m = 0 \\ D_2 q_m = 0 \end{cases} \tag{2.177}$$

La résolution de ces équations permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 r_n &= \epsilon A_n \exp(i\omega_n t_0) + cc + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
 r_m &= \epsilon A_m \exp(i\omega_m t_0) + cc + \mathcal{O}(\epsilon^3)
 \end{aligned} \tag{2.178}$$

On en déduit les amplitudes des harmoniques 1 et 3 du $n^{\text{ème}}$ mode et du $m^{\text{ème}}$ mode telles que :

$$\begin{aligned}
 r_n &= \epsilon a_n \exp(i\omega t_0) + cc + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
 r_m &= \epsilon a_m \exp(3i\omega t_0) + cc + \mathcal{O}(\epsilon^3)
 \end{aligned} \tag{2.179}$$

Après avoir résolu le système de la poutre homogène seule, on s'intéresse au cas de la poutre avec ses patchs de matériaux piézoélectriques.

o Cas de la poutre électro-mécanique

En projetant sur ces deux modes, dans le cas d'une poutre électro-mécanique avec un circuit résistant ($\dot{Q} = V/R$), les équations du système deviennent :

$$\begin{aligned}
 \ddot{r}_n + \mu_n \dot{r}_n + \omega_n^2 r_n + F_n \omega^2 \cos(\omega t) = & \delta_{nnn} r_n^3 + \delta_{nmm} r_n^2 r_m + \delta_{nmm} r_n r_m^2 \\
 & + \delta_{mmm} r_m^3 + \tau_{nnn} r_n \overbrace{r_n^2}^{\dots} \\
 & + \tau_{nmm} r_n \overbrace{r_n r_m}^{\dots} + \tau_{nmm} r_n \overbrace{r_m^2}^{\dots} \\
 & + \tau_{mnn} r_m \overbrace{r_n^2}^{\dots} + \tau_{mnn} r_m \overbrace{r_n r_m}^{\dots} \\
 & + \tau_{mmm} r_m \overbrace{r_m^2}^{\dots} + \beta_{nn} r_n^2 \\
 & + \beta_{mm} r_m^2 + \beta_{mn} r_m r_n \\
 & + \Theta_{nV} r_n V + \Theta_{mV} r_m V \\
 & + \Theta_{nnV} r_n^2 V + \Theta_{mmV} r_m^2 V \\
 & + \Theta_{nmV} r_n r_m V + \Delta_V \epsilon^2 V \\
 & + \Delta_{VV} V^2
 \end{aligned} \tag{2.180}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{r}_m + \mu_m \dot{r}_m + \omega_m^2 r_m + F_m \omega^2 \cos(\omega t) = & \alpha_{nnn} r_n^3 + \alpha_{nmm} r_n^2 r_m \\
 & + \alpha_{nmm} r_n r_m^2 + \alpha_{mmm} r_m^3 \\
 & + \Gamma_{nnn} r_n \overbrace{r_n^2}^{\ddot{}} + \Gamma_{nmm} r_n \overbrace{r_n r_m}^{\ddot{}} \\
 & + \Gamma_{nmm} r_n \overbrace{r_m^2}^{\ddot{}} + \Gamma_{mnn} r_m \overbrace{r_n^2}^{\ddot{}} \\
 & + \Gamma_{mnn} r_m \overbrace{r_n r_m}^{\ddot{}} + \Gamma_{mmm} r_m \overbrace{r_m^2}^{\ddot{}} \quad (2.181) \\
 & + \zeta_{nn} r_n^2 + \zeta_{mm} r_m^2 \\
 & + \zeta_{nm} r_n r_m + \Xi_{nV} r_n V + \Xi_{mV} \\
 & + \Xi_{nnV} r_n^2 V + \Xi_{mmV} r_m^2 V \\
 & + \Xi_{mnV} r_m r_n V + \Delta_{mV} V \\
 & + \Delta_{mV} V^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{R} = & \Lambda_n \dot{r}_n + \Lambda_m \dot{r}_m + \Lambda_V \dot{V} + 2\Lambda_{nn} r_n \dot{r}_n + 2\Lambda_{mm} r_m \dot{r}_m \\
 & + \Lambda_{mn} (r_m \dot{r}_n + \dot{r}_m r_n) + \Lambda_{nV} (r_n \dot{V} + \dot{r}_n V) \quad (2.182) \\
 & + \Lambda_{mV} (r_m \dot{V} + \dot{r}_m V) + 2\Lambda_{VV} V \dot{V}
 \end{aligned}$$

Les constantes sont définies dans l'annexe 5.3.

On suppose à nouveau le découpage des variables en temps $r_n(t)$, $r_m(t)$ par rapport au paramètre ϵ de l'équation 2.161, et, on suppose de même pour la variable $V(t)$ que :

$$V = \epsilon V_1 + \epsilon^2 V_2 + \epsilon^3 V_3 + \dots \quad (2.183)$$

On prend les mêmes hypothèses que dans le cas de la poutre homogène (cf l'équation 2.162). On ajoute des hypothèses sur Δ_V et Δ_{mV} , comme dans le cas à un mode puisqu'il s'agit de forçage piézoélectrique, on suppose :

$$\begin{aligned}
 \Delta_V &= \Delta_{V2} \epsilon^2 \\
 \Delta_{mV} &= \Delta_{mV2} \epsilon^2
 \end{aligned} \quad (2.184)$$

On obtient les mêmes équations que la poutre homogène à $\mathcal{O}(\epsilon)$, cf l'équation 2.163. Ainsi, r_{n1} et r_{m1} sont de la forme de l'équation 2.164. L'équation sur V à $\mathcal{O}(\epsilon)$ est :

$$-\Lambda_V D_0 V_1 + \frac{V_1}{R} = \Lambda_m D_0 r_{m1} + \Lambda_n D_0 r_{n1} \quad (2.185)$$

Ce qui implique :

$$V_1 = \mathcal{L}_m A_m \exp(i\omega_m t_0) + \mathcal{L}_n A_n \exp(i\omega_n t_0) + cc \quad (2.186)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= \frac{-R\omega_m \Lambda_m}{i + R\omega_m \Lambda_V} \\ \mathcal{L}_n &= \frac{-R\omega_n \Lambda_n}{i + R\omega_n \Lambda_V} \end{aligned} \quad (2.187)$$

À $\mathcal{O}(\epsilon^2)$:

$$\begin{aligned} D_0^2 r_{n2} + \omega_n^2 r_{n2} &= -2D_1 D_0 r_{n1} + \beta_{mm} r_{m1}^2 + \beta_{nm} r_{m1} r_{n1} + \beta_{nn} r_{n1}^2 \\ &\quad + \Theta_{nV} r_{n1} V + \Theta_{mV} r_{m1} V + \Delta_{VV} V_1^2 \\ D_0^2 r_{m2} + \omega_m^2 r_{m2} &= -2D_1 D_0 r_{m1} + \zeta_{mm} r_{m1}^2 + \zeta_{nm} r_{m1} r_{n1} + \zeta_{nn} r_{n1}^2 \\ &\quad + \Xi_{nV} r_{n1} V_1 + \Xi_{mV} r_{m1} V + \Delta_{mVV} V_1^2 \end{aligned} \quad (2.188)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_V D_0 V_2 - \frac{V_2}{R} &= \Lambda_m r_{m2} + \Lambda_n r_{n2} + 2\Lambda_{nn} r_{n1} D_0 r_{n1} + 2\Lambda_{mm} r_{m1} D_0 r_{m1} \\ &\quad + \Lambda_{nV} (D_0 r_{n1} V_1 + r_{n1} D_0 V_1) \\ &\quad + \Lambda_{mV} (D_0 r_{m1} V_1 + r_{m1} D_0 V_1) + 2\Lambda_{VV} V_1 D_0 V_1 \end{aligned}$$

Les termes séculaires imposent l'équation 2.166. Les solutions particulières sont :

$$\begin{aligned} r_{n2} &= \mathcal{N}_{2n} A_n^2 \exp(2i\omega_n t_0) + \mathcal{N}_{2m} A_m^2 \exp(2i\omega_m t_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathcal{N}_{nn} A_n \bar{A}_n + \mathcal{N}_{mm} A_m \bar{A}_m) \\ &\quad + \mathcal{N}_{mn} A_m A_n \exp(i(\omega_m - \omega_n) t_0) + \mathcal{N}_{m\bar{n}} A_m \bar{A}_n \exp(i(\omega_m - \omega_n) t_0) + cc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{m2} &= \mathcal{M}_{2n} A_n^2 \exp(2i\omega_n t_0) + \mathcal{M}_{2m} A_m^2 \exp(2i\omega_m t_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathcal{M}_{nn} A_n \bar{A}_n + \mathcal{M}_{mm} A_m \bar{A}_m) + \mathcal{M}_{mn} A_m A_n \exp(i(\omega_m - \omega_n) t_0) \\ &\quad + \mathcal{M}_{m\bar{n}} A_m \bar{A}_n \exp(i(\omega_m - \omega_n) t_0) + cc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \mathcal{L}_{2n} A_n^2 \exp(2i\omega_n t_0) + \mathcal{L}_{2m} A_m^2 \exp(2i\omega_m t_0) \\ &\quad + \mathcal{L}_{mn} A_m A_n \exp(i(\omega_m + \omega_n) t_0) + \mathcal{L}_{m\bar{n}} A_m \bar{A}_n \exp(i(\omega_m - \omega_n) t_0) + cc \end{aligned} \quad (2.189)$$

À $\mathcal{O}(\epsilon^3)$, les termes séculaires donnent des expressions similaires au cas de la poutre homogène :

$$\begin{aligned}
 2i\omega_n D_2 A_n = & \frac{\omega_n^2}{2} F_{n3} + A_n^2 \bar{A}_n (3\delta_{nnn} - 4\omega_n^2 \tau_{nnn} + \mathcal{Z}_{nnn}) \\
 & + (\delta_{V2} \mathcal{L}_n - i\omega_n \mu_{n2}) A_n \\
 & + A_n A_m \bar{A}_m (2\delta_{nmm} - 2(\omega_m^2 + \omega_n^2) \tau_{mnm} + \mathcal{Z}_{mnm}) \\
 & + A_m \bar{A}_n^2 \exp(i\sigma_2 t_2) (\delta_{nmm} - (\omega_n - \omega_m)^2 \tau_{nmm} \\
 & - 3\omega_n^2 \tau_{mnn} + \mathcal{Z}_{nmm})
 \end{aligned} \tag{2.190}$$

$$\begin{aligned}
 2i\omega_m D_2 A_m = & (\delta_{mV2} \mathcal{L}_m - i\omega_m \mu_{m2}) A_m \\
 & + A_m^2 \bar{A}_m (3\alpha_{mmm} - 4\omega_m^2 \Gamma_{mmm} + \mathcal{Y}_{mmm}) \\
 & + A_m A_n \bar{A}_n (2\alpha_{nmm} - 2(\omega_m^2 + \omega_n^2) \Gamma_{nmm} + \mathcal{Y}_{nmm}) \\
 & + A_n^3 \exp(-i\sigma_2 t_2) (\alpha_{nmm} - 4\omega_n^2 \Gamma_{nmm} + \mathcal{Y}_{nmm})
 \end{aligned}$$

avec les termes \mathcal{Z}_{nnn} , \mathcal{Z}_{mnm} , \mathcal{Z}_{nmm} , \mathcal{Y}_{nmm} définis dans l'annexe 5.4.

On suppose à nouveau l'équation 2.171 pour éliminer les termes en t_2 .

Puis, on suppose l'équation 2.172, on obtient les équations en $D_2 p_n$, $D_2 q_n$, $D_2 p_m$ et $D_2 q_m$ en séparant les parties réelles et imaginaires et en éliminant le paramètre fictif ϵ telles que :

$$\begin{aligned}
 D_2 p_n = & \frac{1}{2\epsilon^3 \omega_n} ((\Delta_V \mathcal{L}_{n,r} + 2\omega\omega_n - 2\omega_n^2) q_n + p_m (\mathcal{Z}_{mnn,i} (p_n^2 - q_n^2) \\
 & + 2((\omega_m - \omega_n)^2 \tau_{nmm} - \delta_{nmm} + 4\tau_{mnn} \omega_n^2 - \mathcal{Z}_{mnn,r}) p_n q_n) \\
 & + q_m (2\mathcal{Z}_{mnn,i} p_n q_n + (-\delta_{nmm} + (\omega_m - \omega_n)^2 \tau_{nmm} \\
 & + 4\omega_n^2 \tau_{mnn} - \mathcal{Z}_{mnn,r}) q_n^2) + (p_m^2 + q_m^2) (\mathcal{Z}_{nmm,i} p_n \\
 & + (2\delta_{nmm} - 2(\omega_m^2 + \omega_n^2) \tau_{mnm} + \mathcal{Z}_{nmm,r}) q_n) \\
 & + \mathcal{Z}_{nmm,i} p_n^3 + p_n (\Delta_V + \mathcal{L}_{n,i} - \mu_n \omega_n \\
 & + \mathcal{Z}_{nmm,i} q_n^2) + (3\delta_{nmm} - 4\omega_n^2 \tau_{nmm} + \mathcal{Z}_{nmm,r}) (p_n^2 q_n + q_n^3)
 \end{aligned} \tag{2.191}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 q_n = & \frac{1}{2\epsilon^3 \omega_n} (-F_n \omega_n^2 + 2q_n (\Delta_V \mathcal{L}_{n,i} - \mu_n \omega_n) + q_m (2\mathcal{Z}_{mnn,i} (p_n^2 - q_n^2) \\
 & + 4(\tau_{nmm} (\omega_m - \omega_n)^2 - 4\delta_{nmm} + 4\omega_n^2 \tau_{mnn} - \mathcal{Z}_{mnn,r}) p_n q_n) \\
 & + p_m (-4\mathcal{Z}_{mnn,i} p_n q_n + 2(\delta_{nmm} - (\omega_m - \omega_n)^2 \tau_{nmm} - 4\omega_n^2 \tau_{mnn} \\
 & + \mathcal{Z}_{mnn,r}) (q_n^2 - p_n^2)) + 2(p_m^2 + q_m^2) (\mathcal{Z}_{nmm,i} q_n \\
 & + p_n ((\omega_m^2 + \omega_n^2) \tau_{mnn} - 2\delta_{nmm} - \mathcal{Z}_{nmm,r})) + 2\mathcal{Z}_{nnn,i} (p_n^2 q_n + q_n^3) \\
 & + p_n (-2\Delta_V \mathcal{L}_{n,r} - 4\omega \omega_n + 4\omega_n^2 + (8\omega_n^2 \tau_{nnn} - 6\delta_{nnn} \\
 & - 2\mathcal{Z}_{nnn,r}) (q_n^2 + p_n^2)))
 \end{aligned} \tag{2.192}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 p_m = & \frac{1}{2\epsilon^3 \omega_m} (\mathcal{Y}_{mmm,i} p_m^3 + (3\alpha_{mmm} - 4\omega_m^2 \Gamma_{mmm} + \mathcal{Y}_{mmm,r}) (p_m^2 q_m + q_m^3) \\
 & + p_m (\Delta_{mV} \mathcal{L}_{m,i} - \mu_m \omega_m + \mathcal{Y}_{mmm,i} q_m^2 + \mathcal{Y}_{mnn,i} (p_n^2 + q_n^2)) \\
 & + q_m (\Delta_{mV} \mathcal{L}_{m,r} + 6\omega \omega_m - 2\omega_m^2 + (2\alpha_{nmm} - 2(\omega_m^2 + \omega_n^2) \Gamma_{nmm} \\
 & + \mathcal{Y}_{mnr}) (p_n^2 + q_n^2)) + \mathcal{Y}_{nnn,i} (p_n^3 - 3p_n q_n^2) + (-\alpha_{nnn} + 4\omega_n^2 \Gamma_{nnn} \\
 & - \mathcal{Y}_{nnn,r}) q_n^3 + (3\alpha_{nnn} - 12\omega_n^2 \Gamma_{nnn} + 3\mathcal{Y}_{nnn,r}) p_n^2 q_n)
 \end{aligned} \tag{2.193}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 q_m = & \frac{-1}{2\epsilon^3 \omega_m} (-\mathcal{Y}_{mmm,i} (p_m^2 q_m + q_m^3) + (3\alpha_{mmm} - 4\omega_m^2 \Gamma_{mmm} \\
 & + \mathcal{Y}_{mmm,r}) (p_m^3 + p_m q_m^2) + q_m (-\Delta_{mV} \mathcal{L}_{m,i} + \mu_m \omega_m - \mathcal{Y}_{mnn,i} (p_n^2 + q_n^2)) \\
 & + p_m (\Delta_{mV} \mathcal{L}_{m,r} + 6\omega \omega_m - 2\omega_m^2 \\
 & + (2\alpha_{nmm} - 2(\omega_m^2 + \omega_n^2) \Gamma_{nmm} + \mathcal{Y}_{mnn,r}) (p_n^2 + q_n^2)) \\
 & - \mathcal{Y}_{nnn,i} (q_n^3 - 3p_n^2 q_n) + (-3\alpha_{nnn} + 12\omega_n^2 \Gamma_{nnn} \\
 & - 3\mathcal{Y}_{nnn,r}) p_n q_n^2 + (\alpha_{nnn} - 4\omega_n^2 \Gamma_{nnn} + \mathcal{Y}_{nnn,r}) p_n^3)
 \end{aligned} \tag{2.194}$$

Par ces développements, on obtient les équations algébriques liant les amplitudes des deux modes n et m qui sont en résonance interne 1 : 3. La résolution de ces équations algébriques permet de vérifier l'apparition d'échanges d'énergie entre ces modes dont les amplitudes sont couplées.

Les mêmes développements analytiques sont présentés, dans le cas d'une résonance 1 : 2 cette fois dans la sous partie suivante.

Résolution d'un cas à deux modes : résonance 1 : 2

La poutre homogène seule ne présente que des non linéarités cubiques, ainsi, il est impossible d'obtenir un phénomène d'échange par une résonance 1 : 2 pour ce système. La résolution via la méthode des échelles multiples, dans le cas de la poutre électro-mécanique présentant une résonance 1 : 2, est menée. On suppose à nouveau que le mode inférieur (le $n^{\text{ème}}$) est celui qui est excité, et, que le déplacement de la poutre dépend exclusivement de ces deux modes (cf l'équation 2.158).

On a une résonance 1 : 2 telle que $\omega_m \simeq 2\omega_n$. Les équations dans le cas d'un circuit résistant ($\dot{Q} = V/R$), restent les mêmes que dans le cas de la résonance 1 : 3 (cf les équations 2.180, 2.181 et 2.182). Les variables en temps $r_n(t)$, $r_m(t)$ sont définies par rapport au paramètre ϵ comme dans l'équation 2.161, et la variable $V(t)$ comme dans l'équation 2.183. Mais, des hypothèses différentes sont faites sur les paramètres des équations telles que :

$$\begin{aligned}
 \omega &= \omega_n + \sigma \epsilon^2 \\
 \omega_m &= 2\omega_n + \sigma_2 \epsilon^2 \\
 F_n &= F_{n3} \epsilon^3 \\
 \Delta_V &= \Delta_{V2} \epsilon^2 \\
 \Delta_{mV} &= \Delta_{mV2} \epsilon^2 \\
 \beta_{nm} &= \beta_{nm,0} \epsilon \\
 \Theta_{nV} &= \Theta_{nV,0} \epsilon \\
 \Theta_{mV} &= \Theta_{mV,0} \epsilon \\
 \zeta_{nn} &= \zeta_{nm,0} \epsilon \\
 \Xi_{nV} &= \Xi_{nV,0} \epsilon
 \end{aligned} \tag{2.195}$$

On a toujours les mêmes équations à $\mathcal{O}(\epsilon)$. À $\mathcal{O}(\epsilon^2)$:

$$\begin{aligned}
 D_0^2 r_{n2} + \omega_n^2 r_{n2} &= -2D_1 D_0 r_{n1} + \beta_{nn} r_{n1}^2 + \beta_{mm} r_{m1}^2 \\
 D_0^2 r_{m2} + \omega_m^2 r_{m2} &= -2D_1 D_0 r_{m1} + \Xi_{mV} r_{m1} V_1 + \zeta_{mm} r_{m1}^2 + \zeta_{nm} r_{n1} r_{m1} \\
 -\Lambda_V D_0 V_2 + \frac{V_2}{R} &= 2\Lambda_{mm} r_{m1} D_0 r_{m1} + \Lambda_m D_0 r_{m2} \\
 &+ \Lambda_{mn} (r_{m1} D_0 r_{n1} + r_{n1} D_0 r_{m1}) \\
 &+ 2\Lambda_{nn} r_{n1} D_0 r_{n1} + \Lambda_n D_0 r_{n2} + \Lambda_{mV} (r_{n1} D_0 V_1 + D_0 r_{n1} V_1) \\
 &+ \Lambda_{nV} (D_0 r_{n1} V_1 + r_{n1} D_0 V_1) + 2\Lambda_{VV} V_1 D_0 V_1
 \end{aligned} \tag{2.196}$$

Ce qui donne, avec les mêmes termes séculaires l'équation 2.166, et les solutions particulières :

$$\begin{aligned}
 r_{n2} &= \mathcal{N}_{2n} A_n^2 \exp(2i\omega_n t_0) + \mathcal{N}_{2m} A_m^2 \exp(2i\omega_m t_0) \\
 &+ \frac{\mathcal{N}_{mm}}{2} A_m \bar{A}_m + \frac{\mathcal{N}_{nn}}{2} A_n \bar{A}_n + cc \\
 r_{m2} &= \mathcal{M}_{2m} A_m^2 \exp(2i\omega_m t_0) + \mathcal{M}_{mn} A_m A_n \exp(i(\omega_m + \omega_n)t_0) \\
 &+ \mathcal{M}_{m\bar{n}} A_m \bar{A}_n \exp(i(\omega_m - \omega_n)t_0) + \frac{\mathcal{M}_{mm}}{2} A_m \bar{A}_m + cc \\
 V_2 &= \mathcal{L}_{2n} A_n^2 \exp(2i\omega_n t_0) + \mathcal{L}_{2m} A_m^2 \exp(2i\omega_m t_0) \\
 &+ \mathcal{L}_{mn} A_m A_n \exp(i(\omega_m + \omega_n)t_0) + \mathcal{L}_{m\bar{n}} A_m \bar{A}_n \exp(i(\omega_m - \omega_n)t_0) + cc
 \end{aligned} \tag{2.197}$$

Les termes séculaires à $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ sont :

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{F_{n3}\omega_n^2}{2} \exp(i\sigma t_2) + A_n^2 \bar{A}_n (3\delta_{nnn} + 2\beta_{nn}(\mathcal{N}_{2n} + \mathcal{N}_{nn}) \\
 & + \Theta_{nnV}(2\mathcal{L}_n + \bar{\mathcal{L}}_n) - 4\tau_{nnn}\omega_n^2) + A_n(\delta_{V2}\mathcal{L}_n - i\omega_n\mu_{n2}) \\
 & - 2i\omega_n D_2 A_n + A_n A_m \bar{A}_m (2\delta_{nmm} + 2\beta_{mm}(\mathcal{M}_{\bar{m}n} + \mathcal{M}_{mn}) \\
 & + 2\beta_{nm}\mathcal{N}_{mm} + 2\mathcal{L}_n \Theta_{mmV} + \Theta_{nmV}(\mathcal{L}_m + \bar{\mathcal{L}}_m) \\
 & - 2(\omega_m^2 + \omega_n^2)\tau_{mnm}) + \exp(i\sigma_2 t_2) A_m \bar{A}_n (\beta_{nm,0} \\
 & + 2\Delta_{VV,0}\mathcal{L}_m \bar{\mathcal{L}}_n + \bar{\mathcal{L}}_n \Theta_{mV,0} + \mathcal{L}_m \Theta_{nV,0})
 \end{aligned} \tag{2.198}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & A_m(\Delta_{mV2}\mathcal{L}_m - i\omega_m\mu_{m2}) - 2i\omega_m D_2 A_m + A_m^2 \bar{A}_m (3\alpha_{mmm} - 4\omega_m^2 \Gamma_{mmm} \\
 & + \Xi_{mmV}(2\mathcal{L}_m + \bar{\mathcal{L}}_m) + (\mathcal{L}_{2m} + \mathcal{M}_{2m}\bar{\mathcal{L}}_m + \mathcal{L}_m\mathcal{M}_{mm})\Xi_{mV} \\
 & + 2\zeta_{mm}(\mathcal{M}_{2m} + \mathcal{M}_{mm}) + \zeta_{nm}(\mathcal{N}_{2m} + \mathcal{N}_{mm})) \\
 & + A_m A_n \bar{A}_n (2\alpha_{nmm} - 2(\omega_m^2 + \omega_n^2)\Gamma_{nmm} + \Xi_{mV}(\bar{\mathcal{L}}_n\mathcal{M}_{mn} + \mathcal{L}\mathcal{M}_{m\bar{n}}) \\
 & + \Xi_{nmV}(\mathcal{L}_n + \bar{\mathcal{L}}_n) + \Xi_{nnV}2\mathcal{L}_m + \zeta_{nm}(\mathcal{M}_{mn} + \mathcal{M}_{m\bar{n}} + \mathcal{N}_{nn}) \\
 & + \exp(-i\sigma_2 t_2) A_n^2 (\Delta_{mVV,0}\mathcal{L}_n^2 + \Xi_{nV,0}\mathcal{L}_n + \zeta_{nn,0})
 \end{aligned}$$

Pour éliminer le temps t_2 , on pose :

$$\begin{aligned}
 A_n &= a_n \exp(i\sigma t_2) \\
 A_m &= a_m \exp(i(2\sigma - \sigma_2)t_2)
 \end{aligned} \tag{2.199}$$

On pose l'équation 2.172 pour obtenir les équations en D_2p_n , D_2q_n , D_2p_m et D_2q_m , telles que :

$$\begin{aligned}
 D_2p_n = & \frac{1}{2\omega_n\epsilon^3}(p_n^3(2\beta_{nn}\mathcal{N}_{2n,i} + \mathcal{L}_{n,i}\Theta_{nnV}) + p_n(\Delta_V\mathcal{L}_{n,i} - \mu_n\omega_n)) \\
 & + (p_m^2 + q_m^2)(2\beta_{mm}(\mathcal{M}_{\bar{m}n,i} + \mathcal{M}_{mn,i} + 2\mathcal{L}_{n,i}\Theta_{mmV})) \\
 & + q_n^2(2\beta_{nn}\mathcal{N}_{2n,i} + \mathcal{L}_{n,i}\Theta_{nnV}) \\
 & + p_m(2\Delta_{VV}(\mathcal{L}_{m,i}\mathcal{L}_{n,r} - \mathcal{L}_{m,r}\mathcal{L}_{n,i}) - \mathcal{L}_{n,i}\Theta_{mV} + \mathcal{L}_{m,i}\Theta_{nV}) \\
 & + q_m(\beta_{nm} + 2\Delta_{VV}(\mathcal{L}_{m,i}\mathcal{L}_{n,i} + \mathcal{L}_{m,r}\mathcal{L}_{n,r}) + \mathcal{L}_{n,r}\Theta_{mV} + \mathcal{L}_{m,r}\Theta_{nV}) \\
 & + p_n^2q_n(3\delta_{nnn} - 4\omega_n^2\tau_{nnn} + 2\beta_{nn}(\mathcal{N}_{2n,r} + \mathcal{N}_{nn}) + 3\mathcal{L}_{n,r}\Theta_{nnV}) \\
 & + q_n^3(3\delta_{nnn} + 2\beta_{nn}(\mathcal{N}_{2n,r} + \mathcal{N}_{nn}) + 3\mathcal{L}_{n,r}\Theta_{nnV} - 4\omega_n^2\tau_{nnn}) \\
 & + q_n(\Delta_V\mathcal{L}_{n,r} + q_m(2\Delta_{VV}(\mathcal{L}_{m,i}\mathcal{L}_{n,r} - \mathcal{L}_{m,r}\mathcal{L}_{n,i}) - \mathcal{L}_{n,i}\Theta_{mV} \\
 & + \mathcal{L}_{m,i}\Theta_{nV}) - p_m(\beta_{nm} + 2\Delta_{VV}(\mathcal{L}_{m,i}\mathcal{L}_{n,r} + \mathcal{L}_{m,r}\mathcal{L}_{n,i}) \\
 & + \mathcal{L}_{n,r}\Theta_{mV} + \mathcal{L}_{m,r}\Theta_{nV}) + 2\omega\omega_n - 2\omega_n^2 \\
 & + (p_m^2 + q_m^2)(2\delta_{mmm} + 2\beta_{mm}(\mathcal{M}_{\bar{m}n,r} + \mathcal{M}_{mn,r}) + 2\beta_{nn}\mathcal{N}_{mm} \\
 & + 2\mathcal{L}_{n,r}\Theta_{mmV} + 2\mathcal{L}_{m,r}\Theta_{nmV} - 2(\omega_m^2 + \omega_n^2)\tau_{mmm}))
 \end{aligned} \tag{2.200}$$

$$\begin{aligned}
 D_2q_n = & \frac{-1}{4\omega_n\epsilon^3}(q_n(p_n^2 + q_n^2)(-4\beta_{nn}\mathcal{N}_{2n,i} - 2\mathcal{L}_{n,i}\Theta_{nnV}) + F_n\omega_n^2 \\
 & + q_n(2\omega_n\mu_n - 2\Delta_V\mathcal{L}_{n,i} - 4(p_m^2 + q_m^2)(\beta_{mm}(\mathcal{M}_{\bar{m}n,i} + \mathcal{M}_{mn,i}) + \mathcal{L}_{n,i}\Theta_{mmV})) \\
 & + p_m(4\Delta_{VV}(\mathcal{L}_{m,i}\mathcal{L}_{n,r} - \mathcal{L}_{m,r}\mathcal{L}_{n,i}) - 2\mathcal{L}_{n,i}\Theta_{mV} + 2\mathcal{L}_{m,i}\Theta_{nV}) \\
 & + q_m(2\beta_{nm} + 4\Delta_{VV}(\mathcal{L}_{m,i}\mathcal{L}_{n,i} + \mathcal{L}_{m,r}\mathcal{L}_{n,r}) + 2\mathcal{L}_{nr}\Theta_{mV} + 2\mathcal{L}_{mr}\Theta_{nV})) \\
 & + p_n^3(6\delta_{nnn} + 4\beta_{nn}(\mathcal{N}_{2n,r} + \mathcal{N}_{nn}) + 6\mathcal{L}_{n,r}\Theta_{nnV} - 8\omega_n^2\tau_{nnn}) \\
 & + p_n(2\Delta_V\mathcal{L}_{n,r} + 4\omega\omega_n - 4\omega_n^2 + q_m(4\Delta_{VV}(\mathcal{L}_{m,r}\mathcal{L}_{n,i} - \mathcal{L}_{m,i}\mathcal{L}_{n,r}) \\
 & + 2\mathcal{L}_{n,i}\Theta_{mV} - 2\mathcal{L}_{m,i}\Theta_{nV}) + (p_m^2 + q_m^2)(4\delta_{mmm} + 4\beta_{mm}(\mathcal{M}_{\bar{m}n,r} + \mathcal{M}_{mn,r}) \\
 & + 4\beta_{nn}\mathcal{N}_{mm} + 4\mathcal{L}_{n,r}\Theta_{mmV} + 4\mathcal{L}_{m,r}\Theta_{nmV} - 4(\omega_m^2 + \omega_n^2)\tau_{mmm})) \\
 & + q_n^2(6\delta_{nnn} + 4\beta_{nn}(\mathcal{N}_{2n,r} + \mathcal{N}_{nn}) + 6\mathcal{L}_{n,r}\Theta_{nnV} - 8\omega_n^2\tau_{nnn}))
 \end{aligned} \tag{2.201}$$

$$\begin{aligned}
D_2 p_m = & \frac{1}{2\epsilon^3 \omega_m} (q_m (\Delta_{mV} \mathcal{L}_{m,r} + 4\omega \omega_m - 2\omega_m^2) + p_m^3 (\Xi_{mmV} \mathcal{L}_{m,i} \\
& + \Xi_{mV} (\mathcal{L}_{2m,i} + \mathcal{L}_{m,r} \mathcal{M}_{2m,i} + \mathcal{L}_{m,i} \mathcal{M}_{2m,r} + \mathcal{L}_{m,i} \mathcal{M}_{mm}) + 2\mathcal{M}_{2m,i} \zeta_{mm} \\
& + \mathcal{N}_{2m,i} \zeta_{nm}) + q_m (p_m^2 + q_m^2) (3\alpha_{mmm} - 4\omega_m^2 \Gamma_{mmm} + 3\mathcal{L}_{m,r} \Xi_{mmV} \\
& + \Xi_{mV} (\mathcal{L}_{2m,r} + \mathcal{L}_{m,i} \mathcal{M}_{2m,i} + \mathcal{L}_{m,r} (\mathcal{M}_{2m,r} + \mathcal{M}_{mm})) \\
& + 2\zeta_{mm} (\mathcal{M}_{2m,r} + \mathcal{M}_{mm}) \\
& + \zeta_{nm} (\mathcal{N}_{2m,r} + \mathcal{N}_{mm})) + p_m (\Delta_{mV} \mathcal{L}_{m,i} - \omega_m \mu_m \\
& + q_m^2 (\Xi_{mmV} \mathcal{L}_{m,i} + \Xi_{mV} (\mathcal{L}_{2m,i} + \mathcal{L}_{m,r} \mathcal{M}_{2m,i} \\
& + \mathcal{L}_{m,i} \mathcal{M}_{2m,r} + \mathcal{L}_{m,i} \mathcal{M}_{mm}) + 2\mathcal{M}_{2m,i} \zeta_{mm} + \mathcal{N}_{2m,i} \zeta_{nm})) \\
& + q_n^2 (-2\Delta_{mV} \mathcal{L}_{n,i} \mathcal{L}_{n,r} - \mathcal{L}_{n,i} \Xi_{nV} + p_m (\Xi_{mV} (\mathcal{L}_{n,r} \mathcal{M}_{m\bar{n},i} + \mathcal{L}_{n,i} \mathcal{M}_{m\bar{n},r} \\
& + \mathcal{L}_{n,r} \mathcal{M}_{mn,i} - \mathcal{L}_{n,i} \mathcal{M}_{mn,r}) + 2\mathcal{L}_{m,i} \Xi_{nnV} + \zeta_{nm} (\mathcal{M}_{m\bar{n},i} + \mathcal{M}_{mn,i})) \\
& + q_m (2\alpha_{nmm} - 2(\omega_m^2 + \omega_n^2) \Gamma_{nmm} + \Xi_{mV} (\mathcal{L}_{n,r} \mathcal{M}_{m\bar{n},r} - \mathcal{L}_{n,i} \mathcal{M}_{m\bar{n},i} \\
& + \mathcal{L}_{n,i} \mathcal{M}_{mn,i} + \mathcal{L}_{n,r} \mathcal{M}_{mn,r}) + 2\mathcal{L}_{n,r} \Xi_{nmV} + 2\mathcal{L}_{m,r} \Xi_{nnV} + \zeta_{nm} (\mathcal{M}_{m\bar{n},r} \\
& + \mathcal{M}_{mn,r} + \mathcal{N}_{nn}))) + p_n q_n (2\Delta_{mVV} (\mathcal{L}_{n,r}^2 - \mathcal{L}_{n,i}^2) + 2\mathcal{L}_{n,r} \Xi_{nV} + 2\zeta_{nn}))
\end{aligned} \tag{2.202}$$

$$\begin{aligned}
D_2 q_m = & \frac{-1}{2\epsilon^3 \omega_m} (q_m (\mu_m \omega_m - \Delta_{mV} \mathcal{L}_{m,i}) - 2q_n p_n (\mathcal{L}_{n,i} \Xi_{nV} + 2\Delta_{mVV} \mathcal{L}_{n,i} \mathcal{L}_{n,r}) \\
& + q_m (p_m^2 + q_m^2) (\Xi_{mV} (\mathcal{L}_{m,i} \mathcal{M}_{2m,r} - \mathcal{L}_{2m,i} - \mathcal{L}_{m,r} \mathcal{M}_{2m,i} - \mathcal{L}_{m,i} \mathcal{M}_{mm}) \\
& - \mathcal{L}_{m,i} \Xi_{mmV} - 2\mathcal{M}_{2m,i} \zeta_{mm} - \mathcal{N}_{2m,i} \zeta_{nm}) + p_m (p_m^2 + q_m^2) (3\alpha_{mmm} \\
& - 4\omega_m^2 \Gamma_{mmm} + 3\mathcal{L}_{m,r} \Xi_{mmV} + \Xi_{mV} (\mathcal{L}_{2m,r} + \mathcal{L}_{m,i} \mathcal{M}_{2m,i} + \mathcal{L}_{m,r} \mathcal{M}_{2m,r} \\
& + \mathcal{L}_{m,r} \mathcal{M}_{mm}) + 2\zeta_{mm} (\mathcal{M}_{2m,r} + \mathcal{M}_{mm}) + \zeta_{nm} (\mathcal{N}_{2m,r} + \mathcal{N}_{mm})) \\
& + p_m (\Delta_{mV} \mathcal{L}_{m,r} + 4\omega \omega_m - 2\omega_m^2) \\
& + (q_n^2 - p_n^2) (\Delta_{mVV} (\mathcal{L}_{ni}^2 - \mathcal{L}_{nr}^2) - \Xi_{nV} \mathcal{L}_{n,r} - \zeta_{nn}) \\
& + (q_n^2 + p_n^2) (q_m (\Xi_{mV} (\mathcal{L}_{n,i} \mathcal{M}_{mn,r} - \mathcal{L}_{n,r} \mathcal{M}_{m\bar{n},i} - \mathcal{L}_{n,i} \mathcal{M}_{m\bar{n},r} \\
& - \mathcal{L}_{n,r} \mathcal{M}_{mn,i}) - 2\mathcal{L}_{m,i} \Xi_{nnV} - \zeta_{nm} (\mathcal{M}_{m\bar{n},i} + \mathcal{M}_{mn,i})))
\end{aligned} \tag{2.203}$$

Les équations couplées sont ainsi obtenues, il ne reste plus qu'à les résoudre numériquement pour obtenir le comportement dynamique sur les points d'équilibre du système électro-mécanique. Des tracés numériques sont donc effectués dans la partie suivante.

L'analyse modale analytique a mis en place les équations permettant d'identifier les pulsations propres du système, afin de vérifier s'il existe des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 dans la structure composite. Une vérification numérique est menée dans la partie suivante pour vérifier si le positionnement d'un matériau piézoélectrique peut réaliser ces résonances.

La méthode des échelles multiples a permis d'obtenir les équations des points d'équilibre pour une poutre homogène sans matériau piézoélectrique, dans le cas de réduction de modèle à un mode et à deux modes en résonance interne 1 : 3. La résolution a également été menée pour une poutre électro-mécanique, dans le cas d'une réduction de modèle à un mode avec plusieurs cas de circuits électriques. Mais aussi une réduction de modèle à deux modes en résonance interne 1 : 3 et 1 : 2, où seul le cas d'un circuit résistant a été traité. Ces résolutions analytiques donnent des équations algébriques liant les amplitudes des modes en résonance.

Dans la prochaine partie, des exemples numériques sont proposés. D'abord pour présenter les résultats numériques de l'analyse modale, et également pour tracer les réponses fréquentielles obtenues analytiquement. Ces résultats sur la dynamique du système seront comparés avec une résolution des équations réduites via le logiciel ManLab.

2.3 Exemples numériques

Des exemples numériques des analyses modales et dynamiques sont présentés dans cette partie, pour des systèmes de poutre homogène avec et sans matériaux piézoélectriques. Pour ces exemples, une poutre électro-mécanique avec un ou deux matériaux piézoélectriques positionnés entre $s = x_1$ et $s = x_2$ est examinée, il s'agit de la configuration unimorphe et de la configuration bimorphe (cf la figure 2.8).

Les données matérielles de la poutre et des matériaux piézoélectriques sont inscrites dans les tableaux 2.3 et 2.4. Les résultats numériques sont obtenus à partir des expressions analytiques issues des parties précédentes.

Tableau 2.3 – Propriétés physiques et géométriques de la poutre en acier

ρ_b (kg.m ⁻³)	E_b (GPa)	h_b (mm)	b_b (mm)
9000	105	0.5	30

Tableau 2.4 – Propriétés physiques et géométriques des matériaux piézoélectriques PIC 189 (Guyomar et al., 1997, Abdelkefi, 2012)

ρ_p (kg.m ⁻³)	E_p (GPa)	h_p (mm)	b_p (mm)	L_p (mm)
7650	93.8	0.2	30	50

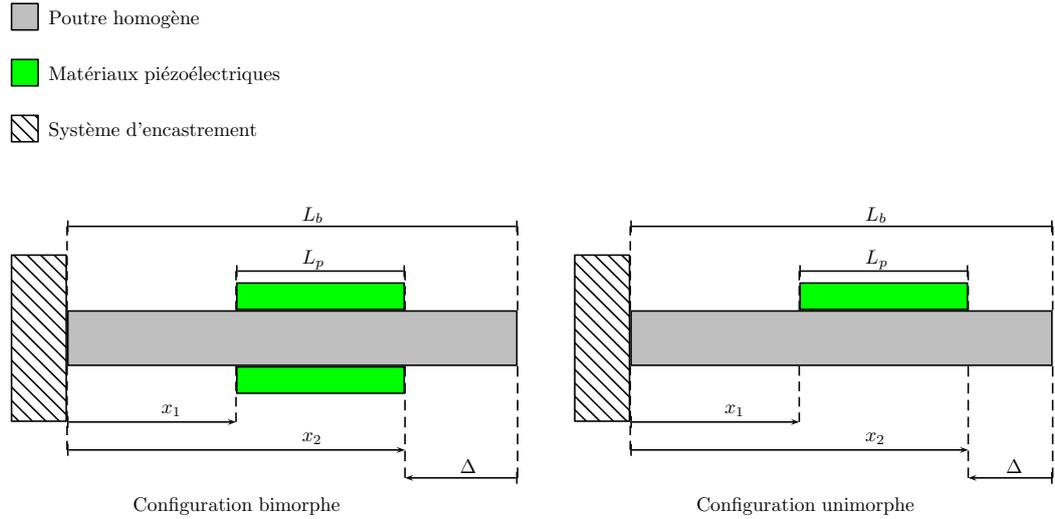


FIGURE 2.8 – Schéma des configurations bimorphe (à gauche) et unimorphe (à droite), avec la définition des longueurs L_b , L_p de la poutre et des matériaux piézoélectriques, et des distances x_1 , x_2 et Δ . x_1 et x_2 donnent la position du patch piézoélectrique par rapport au système d'encastrement. La distance Δ est définie telle que $\Delta = L_b - x_2$, avec $\Delta > 0$ car $x_2 < L_b$.

L'analyse modale résolue numériquement est utilisée pour montrer l'utilisation de la position du ou des matériaux piézoélectriques pour la réalisation des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3. On présente également la modification des déformées modales des cas avec matériaux piézoélectriques, par rapport au cas de la poutre homogène seule.

L'analyse dynamique quant à elle étudie l'effet de coefficients piézoélectriques non linéaires dans le cas où un seul mode est excité. Puis, elle présente les réponses fréquentielles dans des cas de résonances internes afin de vérifier l'apparition d'échanges d'énergie entre les modes liés par les résonances 1 : 2 et 1 : 3 .

2.3.1 Résultats de l'analyse modale : résonances internes et déformées modales

Dans cette partie on présente d'abord les résultats de la détection des pulsations propres dans le cas de la poutre avec un ou deux matériaux piézoélectriques (configuration unimorphe et bimorphe, cf la figure 2.8). Puis, on trace les déformées modales de ces configurations pour les comparer avec celles d'une poutre homogène sans ces matériaux.

Identification de la réalisation des résonances internes

Pour identifier les pulsations propres du système, il faut résoudre $\det(\mathbf{M}_m(\omega, x_1, x_2, L_b)) = 0$ de l'équation 2.86, comme vu dans la partie 2.2.1. Or, la matrice \mathbf{M}_m dépend de la longueur de la poutre L_b et du positionnement des matériaux piézoélectriques (au travers de x_1 et x_2). On suppose la longueur des matériaux piézoélectriques $L_p = x_2 - x_1$ fixe et égale à 0.05 m (cf le tableau 2.4). On définit ensuite un paramètre Δ comme étant la différence de longueur entre l'extrémité de la poutre et celle du matériau piézoélectrique, i.e. $\Delta = L_b - x_2$ ($\Delta > 0$, car $x_2 < L_b$, cf la figure 2.1).

Il a été observé précédemment que, dans le cas de la poutre homogène, entre la quatrième et la troisième pulsation propre, et entre la troisième et la deuxième pulsation propre, des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 sont quasiment réalisées (cf le tableau 2.2). Dans le cas de la poutre homogène sans matériaux piézoélectriques, les pulsations propres sont modifiées par la longueur de la poutre L_b (cf l'équation 2.71), mais les rapports entre les différentes pulsations restent constants. Ces rapports ont été calculés dans le tableau 2.2. On s'intéresse ici aux rapports entre les pulsations propres dans le cas de structures électro-mécaniques, qui dépendent de L_b et Δ .

La poutre est supposée être une poutre en acier dont les propriétés physiques et géométriques sont contenues dans le tableau 2.3. Les propriétés des matériaux piézoélectriques PIC 189 sont indiquées dans le tableau 2.4. Ces données sont utilisées pour identifier les pulsations propres puis calculer les rapports de pulsation pour les deux configurations : unimorphe et bimorphe. Commençons par le cas de la configuration unimorphe.

o Résonances internes : cas de la configuration unimorphe

On utilise les données matérielles de poutre et de matériaux piézoélectriques PIC 189 comme indiqué précédemment pour identifier les pulsations propres d'une configuration unimorphe. Le rapport entre la quatrième pulsation propre ω_4 et la troisième pulsation propre ω_3 est calculé pour une longueur de poutre L_b allant de 0.08 m à 0.2 m, et un positionnement des matériaux piézoélectriques Δ allant de 0.001 m à 0.13 m, laissant ainsi une marge pour que les relations $x_1 > 0$ et $x_2 < L_b$ soient vérifiées (cf la figure 2.9). On veut ainsi analyser si, pour des longueurs particulières L_b , on obtient des rapports ω_4/ω_3 proches ou égaux à 2. On observe sur la figure 2.9 que pour quasiment toutes les longueurs de poutre L_b , il est possible de trouver une distance Δ pour laquelle la résonance interne 1 : 2 est réalisée.

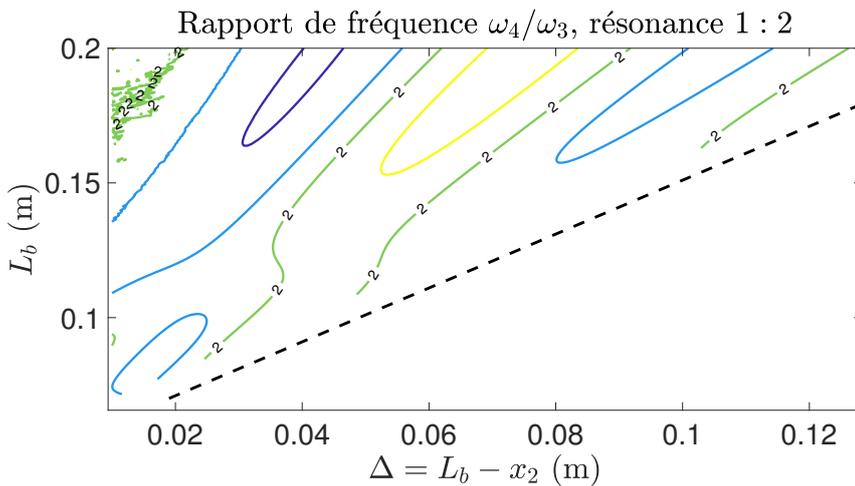


FIGURE 2.9 – Rapport entre la quatrième et la troisième pulsation propre de la configuration unimorphe. Identification de la réalisation de la résonance interne 1 : 2 pour les propriétés de poutre et de matériaux piézoélectriques des tableaux 2.3 et 2.4. Les pulsations propres sont obtenues par la résolution de l'équation 2.86.

Le même type de graphique est tracé pour le rapport entre la troisième pulsation

ω_3 et la deuxième pulsation ω_2 (cf la figure 2.10).

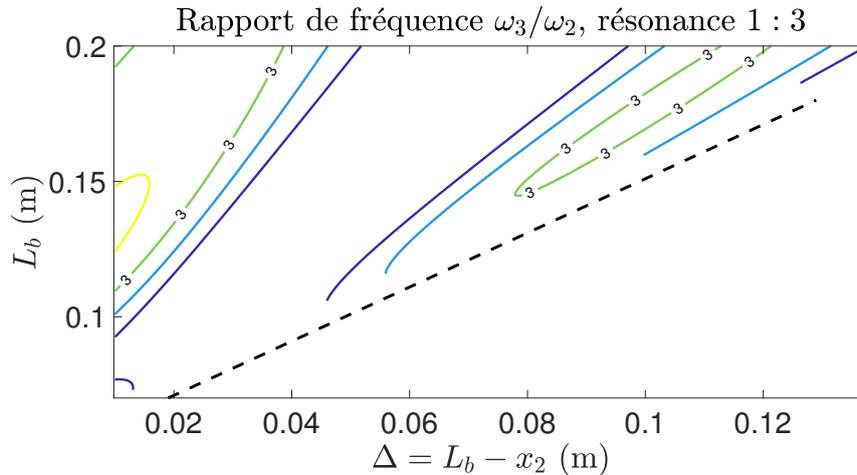


FIGURE 2.10 – Rapport entre la troisième et la deuxième pulsation propre de la configuration unimorphe. Identification de la réalisation de la résonance interne 1 : 3 pour les propriétés de poutre et de matériaux piézoélectriques des tableaux 2.3 et 2.4. Les pulsations propres sont obtenues par la résolution de l'équation 2.86.

Cette fois, on espère obtenir une résonance 1 : 3 entre ces deux pulsations propres, pour des longueurs de poutre L_b et des distances Δ . Les lignes de niveau permettent de repérer la création de la résonance 1 : 3 pour des longueurs de poutre supérieures à 0.11 m. On remarque que positionner le matériau piézoélectrique vers le milieu de la poutre ne permettra jamais de s'approcher de la résonance 1 : 3. Les figures 2.9 et 2.10 prouvent que pour une longueur donnée de poutre L_b , il est possible de créer des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3, grâce au positionnement du matériau piézoélectrique (matérialisé par la longueur Δ , cf la figure 2.8). Ces résultats sont valables pour une configuration unimorphe, quand est-il pour la configuration bimorphe ?

o Résonances internes : cas de la configuration bimorphe

Comme précédemment, on trace les rapports de pulsations ω_4/ω_3 (cf la figure 2.11) et ω_3/ω_2 (cf la figure 2.12) dans le cas de la configuration bimorphe pour les données matérielles des tableaux 2.3 et 2.4, afin de vérifier s'il est possible de créer des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3.

On remarque sur la figure 2.11 qu'il est à nouveau possible de créer une résonance 1 : 2 pour n'importe quelle des longueurs de poutre L_b avec un bon positionnement Δ des matériaux piézoélectriques.

Pour ce qui est de la résonance 1 : 3, elle est également possible pour n'importe quelle longueur de poutre L_b , et, comme précédemment, il n'y a pas d'effet de positionnement du matériau au milieu qui ne mène à aucune résonance 1 : 3.

On rappelle que ces calculs sont effectués dans le cas d'un circuit fermé ($V = 0$), comme expliqué dans la partie analytique 2.2, et, qu'entre les cas de circuit ouvert et fermé,

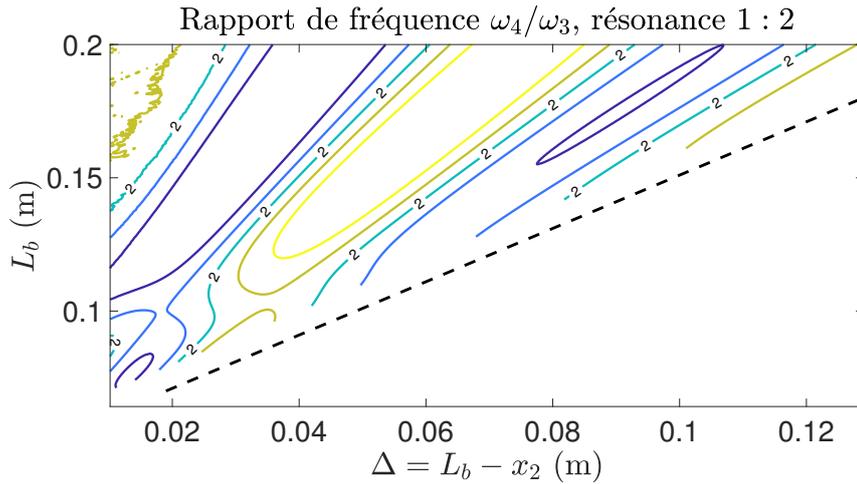


FIGURE 2.11 – Rapport entre la quatrième et la troisième pulsation propre de la configuration bimorphe. Identification de la réalisation de la résonance interne 1 : 2 pour les propriétés de poutre et de matériaux piézoélectriques des tableaux 2.3 et 2.4. Les pulsations propres sont obtenues par la résolution de l'équation 2.86.

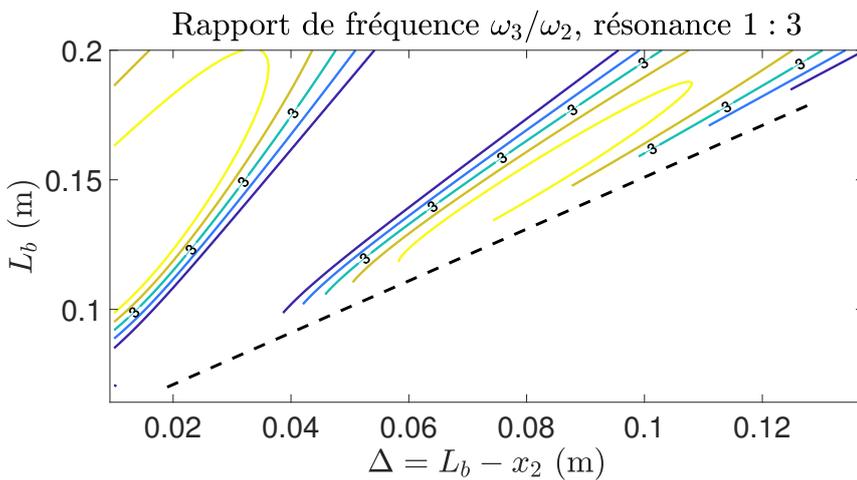


FIGURE 2.12 – Rapport entre la troisième et la deuxième pulsation propre de la configuration bimorphe. Identification de la réalisation de la résonance interne 1 : 3 pour les propriétés de poutre et de matériaux piézoélectriques des tableaux 2.3 et 2.4. Les pulsations propres sont obtenues par la résolution de l'équation 2.86.

on a une légère modification de la pulsation propre. Néanmoins, ces courbes permettent d'estimer un positionnement des matériaux piézoélectriques afin d'obtenir des rapports de pulsation proches de ceux voulus : 1 : 2 et 1 : 3. Par ailleurs, dans les cas considérés il n'y a aucun moment où l'on obtient les résonances 1 : 2 et 1 : 3 en même temps pour des longueurs L_b et Δ . Ceci aurait pu être intéressant pour lier les trois modes en même temps (deuxième, troisième et quatrième). Il n'y a pas d'existence de multi-résonances pour les configurations étudiées.

Ces résultats permettent de démontrer qu'il existe un outil de dimensionnement : le positionnement des matériaux piézoélectriques, qui permet d'accorder les pulsations propres de la poutre électro-mécanique afin d'obtenir des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3. Ces

résultats sont valables pour les deux configurations considérées : unimorphe et bimorphe. On s'intéresse désormais à l'effet des matériaux sur les déformées modales du système. En plus d'un effet sur les pulsations propres, on suppose que leur présence modifie l'allure des déformées modales des structures électro-mécaniques par rapport à une poutre sans ces matériaux.

Tracés des déformées modales

La présence des matériaux piézoélectriques sur la poutre représente des masses additionnelles et une rigidification de la structure aux endroits où ceux-ci sont collés sur la poutre (entre $s = x_1$ et $s = x_2$ ici). On suppose d'ailleurs qu'il n'y a pas de déconnexion à l'interface entre la poutre homogène et les matériaux piézoélectriques. Ces derniers engendrent donc une modification de la déformée modale du système, comparée à une poutre homogène seule. Une application numérique est utilisée pour tracer les quatre premières déformées modales d'une poutre homogène seule et des deux configurations unimorphe et bimorphe.

On suppose à nouveau une poutre en acier dont les propriétés sont données dans le tableau 2.3 et les matériaux piézoélectriques dont les propriétés mécaniques sont notifiées dans le tableau 2.4. On suppose une longueur de poutre L_b fixée à 0.15 m et une position des matériaux piézoélectriques telle que $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = x_1 + L_p = 0.1$ m. Les pulsations propres de chaque configuration sont inscrites dans le tableau 2.5.

Tableau 2.5 – Les quatre premières pulsations propres des différentes configurations dans le cas où $L_b = 0.15$ m, $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m.

	ω_1 (rad/s)	ω_2 (rad/s)	ω_3 (rad/s)	ω_4 (rad/s)
Poutre homogène	77.04	482.81	1.231×10^3	2.649×10^3
Configuration unimorphe	78.94	568.61	1.428×10^3	2.985×10^3
Configuration bimorphe	77.89	612.27	1.436×10^3	3.348×10^3

On observe que les pulsations augmentent avec la présence des matériaux piézoélectriques sauf pour le premier mode. Les effets de ces matériaux sur la pulsation propre et la déformée modale associée dépendent de l'endroit où se trouvent les matériaux par rapport au mode (noeud, ventre, ...). Pour les quatre premières pulsations et pour chaque structure : poutre homogène, configuration unimorphe et configuration bimorphe, on trace les déformées modales correspondantes.

o Déformées modales de la poutre homogène

On trace les quatre premières déformées modales ($\phi_j(x)$, avec $j = 1, 2, 3$ et 4) d'une poutre encastree libre (cf la figure 2.13).

Les déformées modales sont obtenues par le déroulé analytique expliqué dans la partie 2.2. Il s'agit des déformées habituelles d'une poutre encastree-libre, avec un premier mode de flexion sans noeud, et les modes supérieurs qui gagnent tous un noeud et un ventre à chaque numéro de mode supplémentaire.

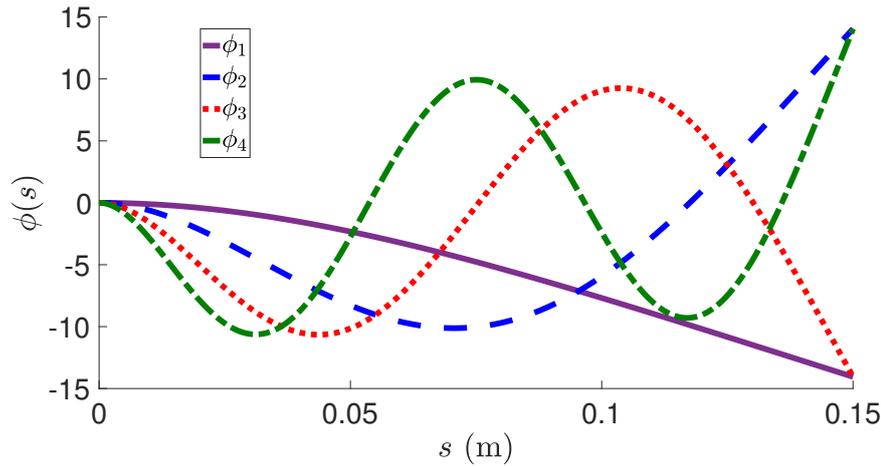


FIGURE 2.13 – Les quatre déformées modales (ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 et ϕ_4) associées aux quatre premières pulsations propres de la poutre homogène (cf le tableau 2.5) pour $L_b = 0.15$ m. Elles sont calculées à partir des équations 2.66, 2.72 et 2.73.

o Déformées modales de la configuration unimorphe

On trace les quatre premières déformées modales ($\phi_j(x)$, avec $j = 1, 2, 3$ et 4) de la poutre homogène avec un seul matériau piézoélectrique. On suppose $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m. On obtient la figure 2.14, on remarque qu'à l'endroit où se situe le matériau piézoélectrique, on a tendance à rigidifier la structure, ce qui est bien visible sur la troisième déformée modale (ϕ_3).

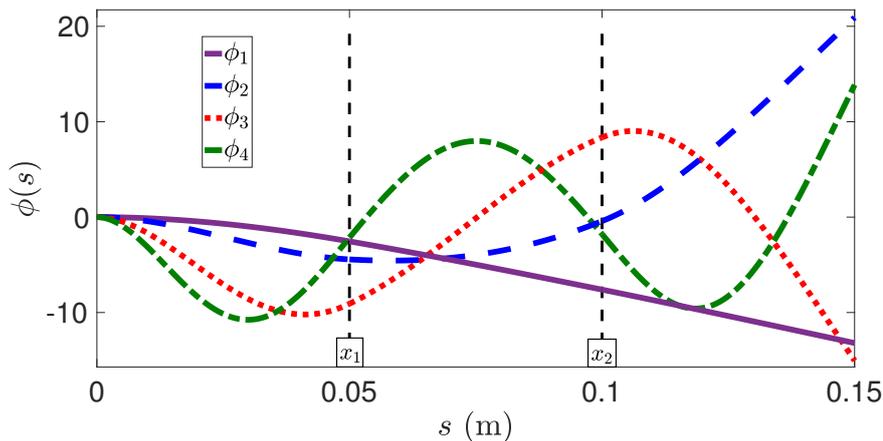


FIGURE 2.14 – Les quatre déformées modales (ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 et ϕ_4) associées aux quatre premières pulsations propres de la configuration unimorphe (cf le tableau 2.5), avec $L_b = 0.15$ m, $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m. Elles sont calculées à partir des équations 2.73 et 2.74.

On remarque que la présence du matériau ne change pas globalement la déformée modale, cependant, il n'a pas non plus qu'un effet localisé entre les positions x_1 et x_2 mais bien un effet sur tout la déformée modale.

o Déformées modales de la configuration unimorphe

Comme dans le cas unimorphe, on trace les déformées modales ($\phi_j(x)$, avec $j = 1, 2, 3$ et 4) dans le cas bimorphe (cf la figure 2.15). On observe un effet plus marqué de la rigidification de la structure due à la présence des matériaux piézoélectriques. Cet effet de la rigidification ne se limite pas uniquement à la partie des courbes entre x_1 et x_2 où sont situés les matériaux piézoélectriques.

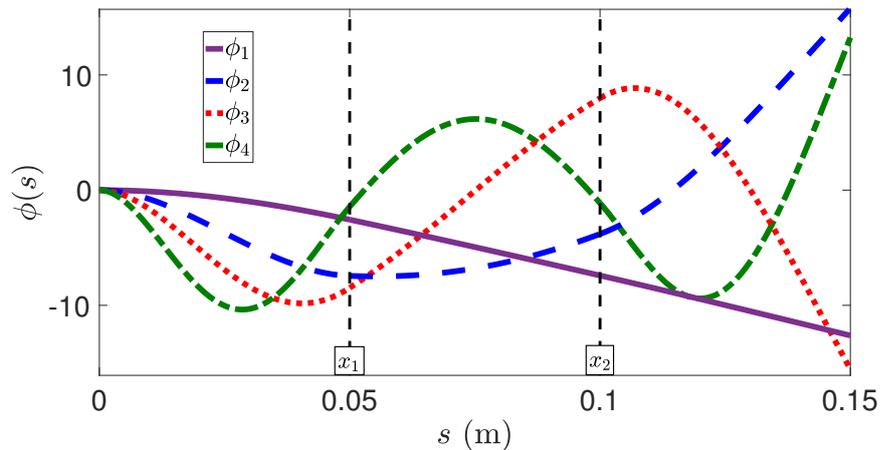


FIGURE 2.15 – Les quatre déformées modales (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 et ϕ_4) associées aux quatre premières pulsations propres de la configuration bimorphe (cf le tableau 2.5), avec $L_b = 0.15$ m, $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m. Elles sont calculées à partir des équations 2.73 et 2.74.

Afin de mieux appréhender les différences observables entre les déformées modales des structures, traçons le même mode de chacune sur une même figure. Les déformées modales du quatrième mode sont représentées pour les trois systèmes sur la figure 2.16. Entre les abscisses x_1 et x_2 , on remarque que l'amplitude de la déformée est d'abord plus importante pour la poutre seule, puis pour la configuration unimorphe et enfin pour la configuration bimorphe. Ce résultat s'explique physiquement par l'ajout de rigidité et de masse que représente les matériaux piézoélectriques à cet endroit de la structure. Par ailleurs, on observe que les déformées modales des configurations unimorphe et bimorphe sont effectivement modifiées par rapport à celle de la poutre homogène, sur la totalité de la déformée et pas seulement de manière localisée entre x_1 et x_2 . Ces courbes prouvent qu'il est nécessaire de prendre en compte la présence de matériaux piézoélectriques dans le calcul de déformées modales d'une structure composite. En effet, la présence de ces matériaux modifient ces déformées. Or, pour étudier la dynamique on effectue une réduction modale des équations en les projetant sur certains modes d'intérêts de la structure. Cette méthode de projection est utilisée pour obtenir les équations réduites de notre système dans la partie analytique d'identification des points d'équilibre. Ceci afin d'étudier le comportement dynamique de la structure électro-mécanique d'abord dans un cas à un mode, puis dans les cas de résonance 1 : 2 et 1 : 3. Les résultats numériques des points d'équilibre de la dynamique sont présentés dans la partie suivante.

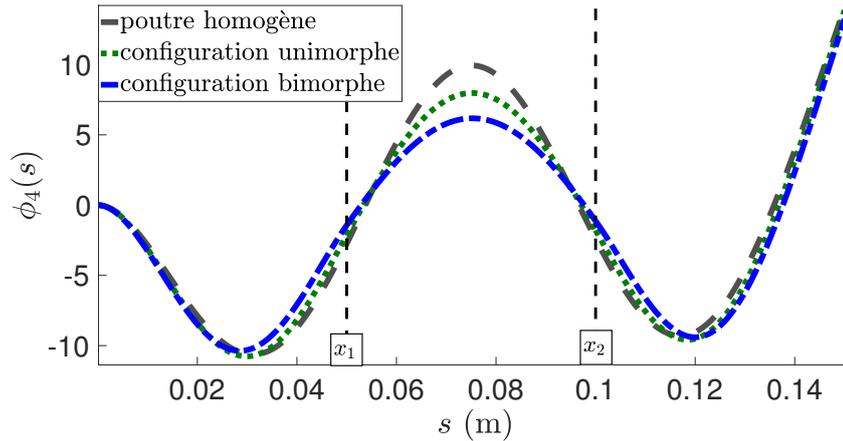


FIGURE 2.16 – La quatrième déformée modale des trois structures : poutre homogène, configuration unimorphe et bimorphe, avec $L_b = 0.15$ m, $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m.

2.3.2 Réponses fréquentielles des réductions modales à un et deux modes

On rappelle que des états multiples (stables ou non) sont possibles d’après les équations 2.54 et 2.58 de la section 2.2.2. Pour effectuer les simulations numériques, il est nécessaire de connaître les données matérielles de la poutre homogène et des matériaux piézoélectriques, mais également les valeurs des coefficients non linéaires des matériaux piézoélectriques. Or, ceux-ci sont très souvent absents de la littérature, et jamais tous connus en même temps pour un même matériau piézoélectrique. Dans Guyomar et al. (1997), une partie de ces coefficients sont identifiés pour des matériaux piézoélectriques P189, cf le tableau 2.6. Les coefficients non linéaires inconnus sont supposés nuls. On trace donc les points d’équilibre dans des cas sans résonance interne et avec résonance 1 : 3 et 1 : 2.

Tableau 2.6 – Coefficients du matériau piézoélectrique P189 (Guyomar et al., 1997)

s_{11} (N/m^2)	d_{31} (C/m^2)	ε_{33} (F/m)	
93.8×10^9	10.13	-9.08×10^{-9}	
s_{111} (Pa)	d_{311} (C/m^2)	r_{331} (N/V^2)	ε_{333} (C/V^2)
-1.688×10^{13}	-2.4×10^4	3×10^{-5}	-1.02×10^{-13}

Réponses fréquentielles pour la réduction sur un seul mode

On étudie les résultats pour la poutre homogène et pour la configuration unimorphe lorsqu'un seul mode de la structure répond.

- o Points d'équilibre de la poutre homogène

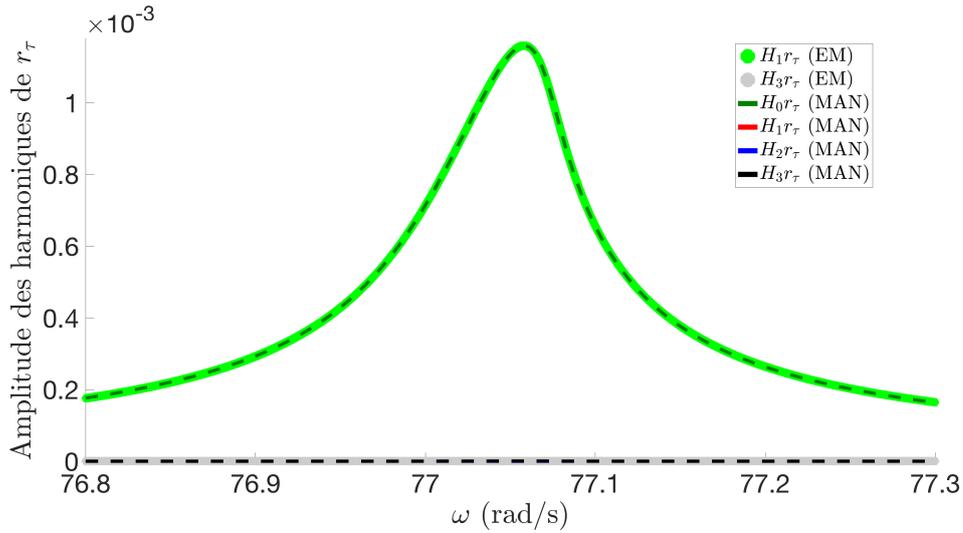
D'après la section 2.2.2, il est possible de tracer les courbes forcées $(\omega, |a_\tau|)$, ainsi que ses zones instables (cf les équations 2.105 et 2.110). Ces calculs analytiques sont comparés avec ceux obtenus numériquement sur le système réduit de l'équation 2.88 via une méthode de balance harmonique grâce au logiciel ManLab (Arquier et al., 2005) (extension utilisable sur le logiciel Matlab). Le logiciel nous permet d'afficher les différentes harmoniques de la réponse en temps r_τ ; or d'après nos développements analytiques on rappelle l'équation 2.106 obtenue :

$$r_\tau(t) = |a_m| \exp(i\theta) \exp(i\omega t_0) + \frac{4\omega^2 \Gamma_\tau - \delta_\tau}{8\omega^2} |a_m|^3 \exp(3i\theta) \exp(3i\omega t_0) + cc \quad (2.204)$$

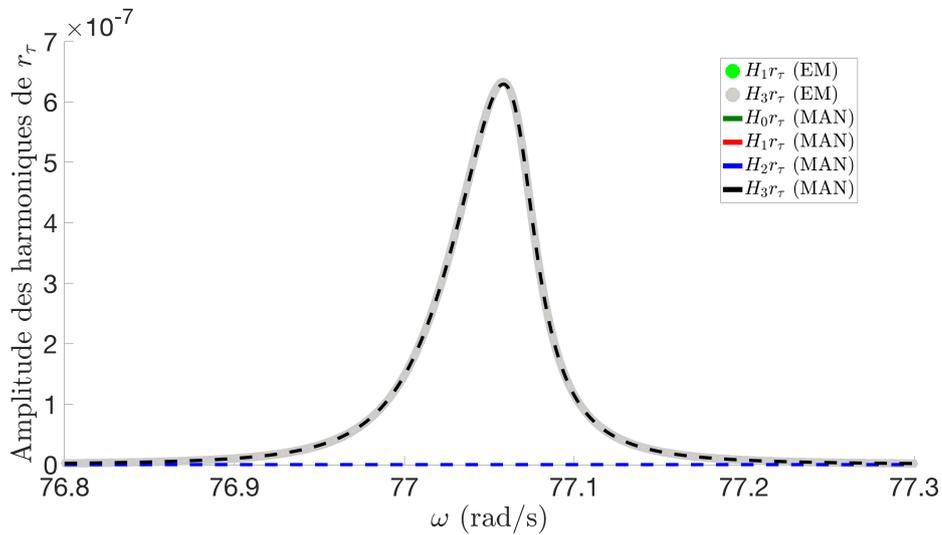
Il est possible d'exprimer les amplitudes des harmoniques 1 et 3 de $r_\tau(t)$ analytiquement, telles que :

$$\begin{aligned} H_1 r_\tau &= 2|a_m| \\ H_3 r_\tau &= 2 \frac{4\omega^2 \Gamma_\tau - \delta_\tau}{8\omega^2} |a_m|^3 \end{aligned} \quad (2.205)$$

où l'amplitude $|a_m|$ est obtenue par la résolution de l'équation 2.105 d'ordre 3 en $|a_m|^2$. On peut ainsi comparer les amplitudes des harmoniques obtenues analytiquement, par rapport à celles obtenues par la méthode de balance harmonique calculée avec trois harmoniques (cf la figure 2.17). On obtient un bon accord qualitatif entre le calcul de balance harmonique (MAN) et le calcul via la méthode des échelles multiples (EM) pour la première et la troisième harmonique. La constante et la deuxième harmonique sont nulles, comme montré analytiquement. Dans le cas de l'utilisation de ManLab, une question de convergence peut être soulevée car parfois il faut un calcul avec un plus grand nombre d'harmoniques pour obtenir une convergence entre la méthode de balance harmonique de la MAN et la méthode des échelles multiples. Ici, les deux méthodes donnent des résultats proches, il n'y a pas nécessité d'un ajout d'harmoniques supplémentaires dans le calcul de ManLab. Grâce aux calculs de la partie 2.2.2 on peut également représenter la courbe squelette et les zones d'instabilité (équations 2.108 et 2.111) (cf la figure 2.18). Cette figure est tracée via l'équation d'ordre 3 en $|a_m|^2$ de l'équation 2.105. On y remarque un comportement assouplissant du premier mode de poutre homogène. Les calculs analytiques ont donc été vérifiés pour la poutre homogène, faisons la vérification pour la poutre électro-mécanique également.



(a) Amplitude des harmoniques de r_τ



(b) Amplitude des harmoniques de r_τ (zoomé sur l'harmonique 3)

FIGURE 2.17 – Tracés des réponses fréquentielles des amplitudes des harmoniques de r_τ de la poutre homogène, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 10^{-5} \text{ m}$. Les amplitudes des points d'équilibre des échelles multiples (EM) sont obtenues à partir des équations 2.105 et 2.204, et celles de la MAN par les équations 2.88.

o Points d'équilibre de la configuration unimorphe

Dans le cas de la poutre électro-mécanique, les développements analytiques permettent d'accéder aux amplitudes des harmoniques de r_τ , mais également de la

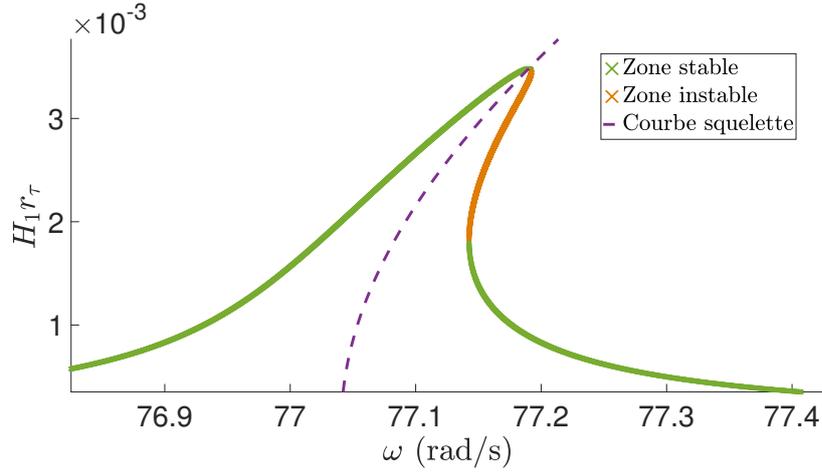


FIGURE 2.18 – Tracés des points d'équilibre (cf les équations 2.105 et 2.204) avec leur instabilité (cf le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice \mathbf{J}_{b1} de l'équation 2.111), ainsi que de la courbe squelette de la poutre homogène (cf l'équation 2.108), avec $c_v = 0.01 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 3 \times 10^{-5} \text{ m}$.

tension électrique $V(t)$ selon les équations 2.120, 2.125, 2.129, 2.132 et 2.100 :

$$\begin{aligned}
 r_\tau = & \frac{\mathcal{N}_{cs}}{2} |a_m|^2 + |a_m| \exp(i\theta) \exp(i\omega t_0) \\
 & + \mathcal{N}_2 |a_m|^2 \exp(2i\theta) \exp(2i\omega t_0) \\
 & + \mathcal{N}_3 |a_m|^3 \exp(3i\theta) \exp(3i\omega t_0) + cc
 \end{aligned} \tag{2.206}$$

$$V = \mathcal{L}_1 |a_m| \exp(i\theta) \exp(i\omega t_0) + \mathcal{L}_2 |a_m|^2 \exp(2i\theta) \exp(2i\omega t_0) + cc$$

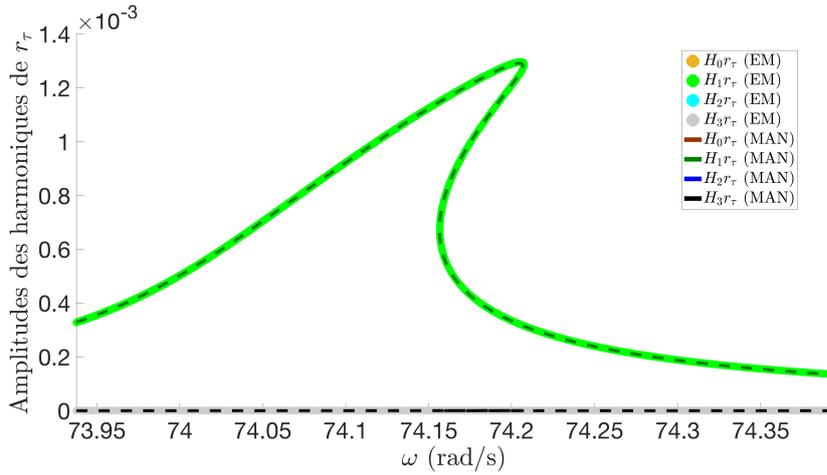
On peut alors définir les amplitudes la constante (harmonique 0) et des harmoniques 1 à 3 pour r_τ telles que :

$$\begin{aligned}
 H_0 r_\tau &= |\mathcal{N}_{cs}| |a_m|^2 \\
 H_1 r_\tau &= 2 |a_m| \\
 H_2 r_\tau &= 2 |\mathcal{N}_2| |a_m|^2 \\
 H_3 r_\tau &= 2 |\mathcal{N}_3| |a_m|^3
 \end{aligned} \tag{2.207}$$

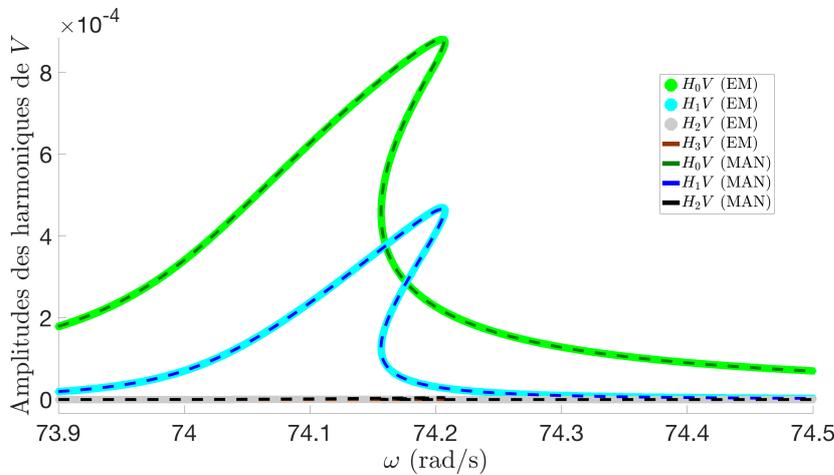
et des harmoniques 1 et 2 pour V telles que :

$$\begin{aligned}
 H_1 V &= 2 |\mathcal{L}_1| |a_m| \\
 H_2 V &= 2 |\mathcal{L}_2| |a_m|^2
 \end{aligned} \tag{2.208}$$

Il est supposé analytiquement que les amplitudes des harmoniques 0 et 3 de V sont négligables par rapport aux amplitudes des harmoniques 1 et 2 de r_τ . Elles pourraient cependant être obtenues par une résolution à $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ de l'équation 2.182. On compare la résolution des solutions analytiques grâce aux équations 2.148, 2.207 et 2.208, aux résultats numériques grâce à la MAN sur les équations 2.122 et 2.123 (cf les figures 2.19 et 2.20).



(a) Réponse fréquentielle des amplitudes des harmoniques de r_τ



(b) Réponse fréquentielle des amplitudes des harmoniques de V

FIGURE 2.19 – Tracés des réponses fréquentielles des harmoniques de r_τ et V dans le cas de la configuration unimorphe, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 10^{-5} \text{ m}$. Les tracés issus des échelles multiples (EM) sont obtenus à partir des équations 2.148, 2.207 et 2.208, tandis que ceux issus de la MAN utilisent les équations 2.122 et 2.123.

On remarque un accord entre les résultats EM et MAN pour toutes les amplitudes d'harmonique 1 et 3 de r_τ . Par rapport à la partie analytique, on peut comme pour la poutre homogène tracer les zones d'instabilité, ainsi que les courbes squelettes (cf la figure 2.21 dans le cas d'un circuit résonant).

Ces courbes peuvent être obtenues pour les trois types de circuits considérés (ouvert, fermé et résistant). En effet, nous avons remarqués précédemment les différences de comportement selon les circuits. On observe, par exemple, une modification de la pulsation propre entre le circuit ouvert ($Q = 0$) et le circuit fermé ($V = 0$) (cf la figure 2.22).

Dans le cas du circuit résistant (mais aussi dans celui du circuit fermé puisqu'on obtient la même courbe squelette) on a mis en avant la possibilité d'un changement de comportement assouplissant à raidissant selon un paramètre critique s_{111} . Dans

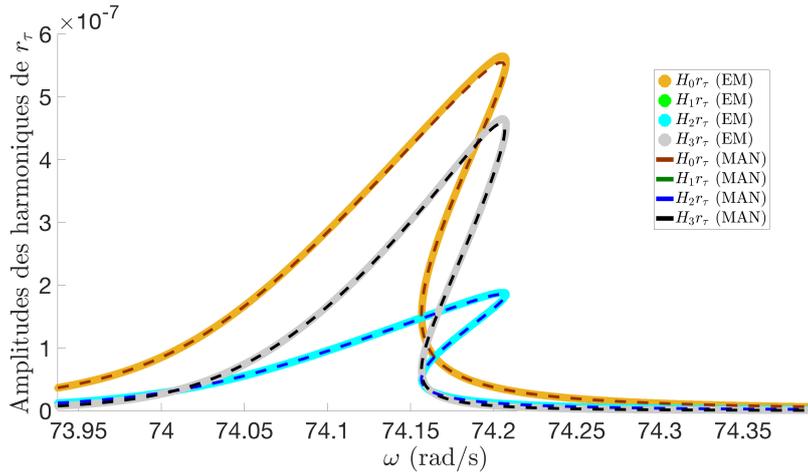


FIGURE 2.20 – Zoom sur les petites amplitudes des harmoniques 0, 2 et 3 de r_τ de la configuration unimorphe de la figure 2.19, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l’amplitude de déplacement $F = 10^{-5} \text{ m}$.

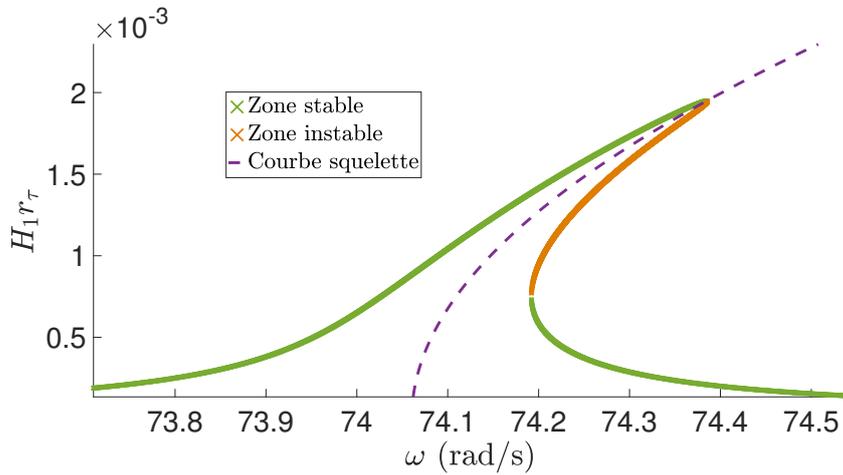


FIGURE 2.21 – Tracés des points d’équilibre pour l’harmonique 1 de r_τ de la configuration unimorphe (cf l’équation 2.148) avec ses zones de stabilité et instabilité (cf le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice \mathbf{J}_{m1} de l’équation 2.144) avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l’amplitude de déplacement $F = 10^{-5} \text{ m}$. La courbe squelette est tracée à partir de l’équation 2.143.

notre cas, la valeur critique du paramètre s_{111} est : $s_{111,c} = -132.9 \times 10^{13} \text{ Pa}$. Traçons les courbes squelettes avec leurs courbes forcées pour une même amplitude de déplacement F , avec s_{111} modifié autour de sa valeur critique (cf la figure 2.23).

Cette courbe est fictive car il existe une zone non physique autour de $s_{111,c}$ pour laquelle l’amplitude $|a_m|$ est nulle. On observe ainsi le changement de comportement de raidissant (pour $|s_{111}| < |s_{111,c}|$) à un comportement assouplissant (pour $|s_{111}| > |s_{111,c}|$). On sait qu’il est également possible d’obtenir des comportements dynamiques plus compliqués avec l’apparition d’isolas sur ces courbes (Guillot et al., 2019b). Mais ceux-ci peuvent être des solutions factices dues à un artéfact mathématique (Hassan, 1994a,b, Luongo and Paolone, 1999, Nayfeh, 2005).

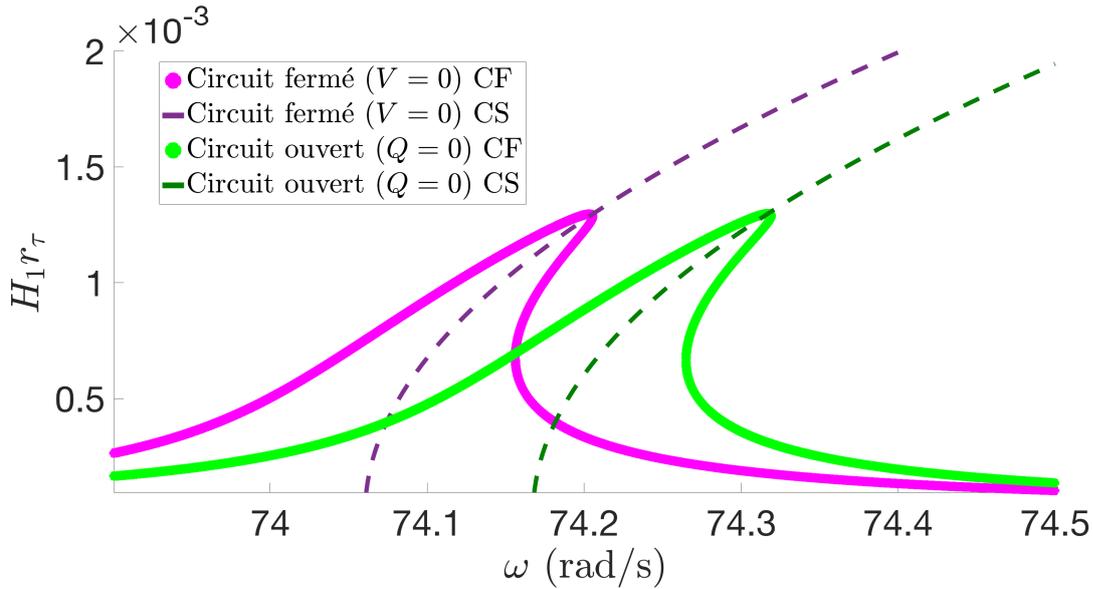


FIGURE 2.22 – Modification de la pulsation propre entre le circuit fermé ($V = 0$) et le circuit ouvert ($Q = 0$). Les courbes squelettes (CS) sont obtenues à partir des équations 2.143 et 2.156, et les courbes forcées (CF) à partir des équations 2.148 et 2.153.

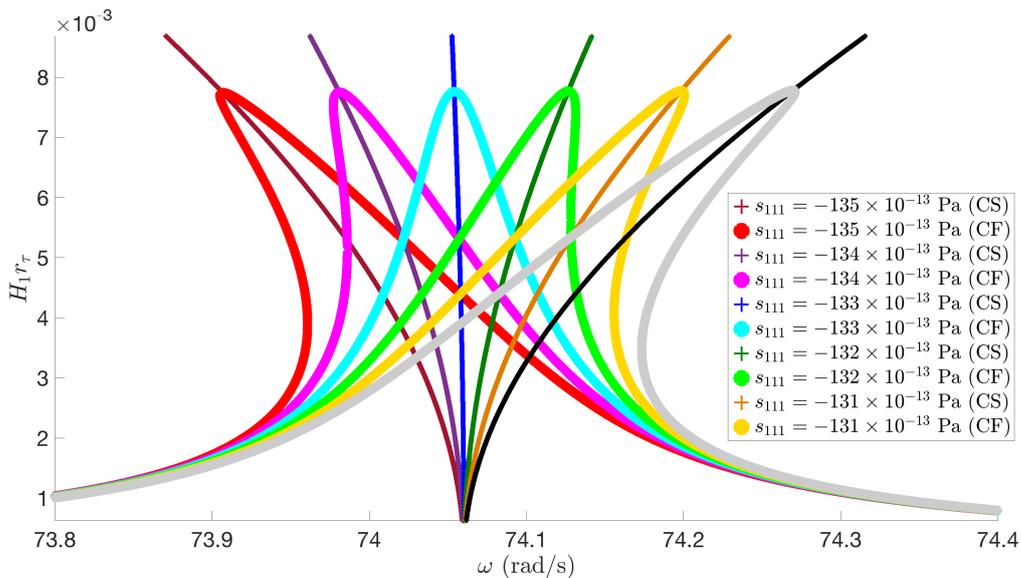


FIGURE 2.23 – Tracé de courbes squelettes (CS) et courbes forcées (CF) pour l'amplitude de déplacement $F = 1.5 \times 10^{-5}$ m, avec le paramètre s_{111} modulant autour de sa valeur critique $s_{111,c} = -132.9 \times 10^{13}$ Pa, dans le cas d'un circuit résistif avec $R = 10 \omega$. Les courbes squelettes sont obtenues à partir de l'équation 2.143 et les courbes forcées à partir de l'équation 2.148.

La méthode des échelles multiples permet d'avoir un comportement dynamique approché du système réduit à un mode. On retrouve, comme prévu dans les développements analytiques, des résultats intéressants comme la modification du comportement due à des paramètres piézoélectriques non linéaires, et la modification des pulsations propres entre

les cas de circuit ouvert et fermé, qui est liée au couplage piézoélectrique.

Réponses fréquentielles pour la réduction sur deux modes

La méthode des échelles multiples a été menée précédemment pour une poutre homogène et une poutre électro-mécanique dans le cas d'une résonance 1 : 3, afin d'obtenir les équations couplées sur les amplitudes des deux modes concernés par la résonance. Dans notre cas, la résonance interne 1 : 3 est réalisée entre le deuxième et troisième mode de la poutre électro-mécanique pour des valeurs de L_b et Δ particulières. En se basant sur les résultats de la partie précédente, dans le cas de la configuration unimorphe, on peut obtenir cette résonance interne avec une longueur de poutre $L_b = 0.18$ m et une distance $\Delta = 0.099$ m. Dans le cas d'une poutre homogène, on sait que la résonance 1 : 3 est presque réalisée pour toute longueur de poutre L_b ($\omega_3/\omega_2 \simeq 2.8$, cf le tableau 2.2). Pour ces données de longueur L_b et de distance Δ on obtient les pulsations propres de la poutre homogène et électro-mécanique contenues dans le tableau 2.7.

Tableau 2.7 – Pulsations propres du deuxième et troisième mode, et le rapport des 2, dans le cas de résonance interne 1 : 3 de la poutre homogène et de la configuration unimorphe pour $L_b = 0.18$ m et $\Delta = 0.099$ m.

	ω_2 (rad/s)	ω_3 (rad/s)	ω_3/ω_2
Poutre homogène	3.35×10^2	9.39×10^2	2.8
Poutre unimorphe	3.43×10^2	1.03×10^3	3.003

Les hypothèses analytiques sont celles des équations 2.161, 2.164, 2.162, 2.171, 2.183 et 2.186, ce qui donne :

$$\begin{aligned} r_n &= A_n \exp(i\omega t_0) + cc \\ r_m &= A_m \exp(3i\omega t_0) + cc \\ V &= \mathcal{L}_n A_n \exp(i\omega t_0) + \mathcal{L}_m A_m \exp(3i\omega t_0) + cc \end{aligned} \quad (2.209)$$

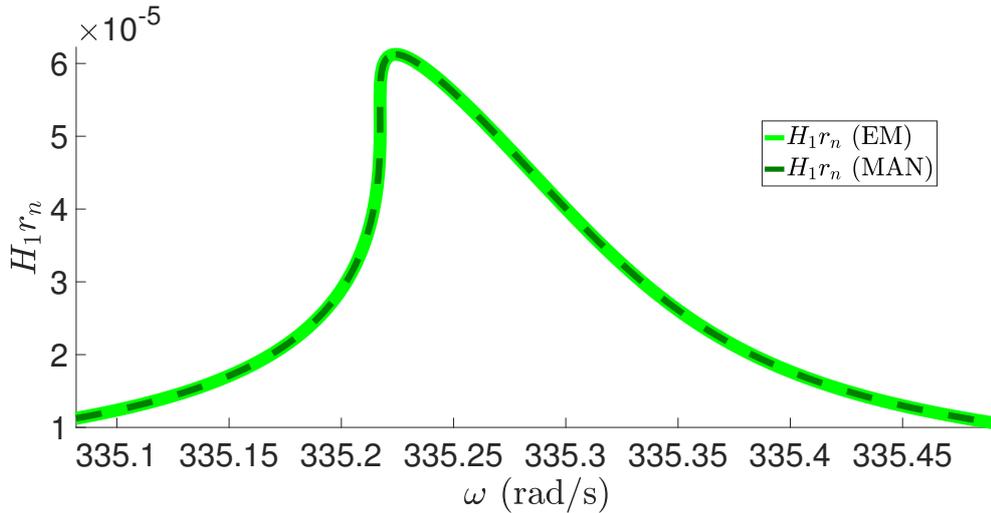
On obtient donc les amplitudes de certaines harmoniques de r_n , r_m et V telles que :

$$\begin{aligned} H_1 r_n &= 2|A_n| \\ H_3 r_m &= 2|A_m| \\ H_1 V &= 2|\mathcal{L}_n||A_n| \\ H_3 V &= 2|\mathcal{L}_m||A_m| \end{aligned} \quad (2.210)$$

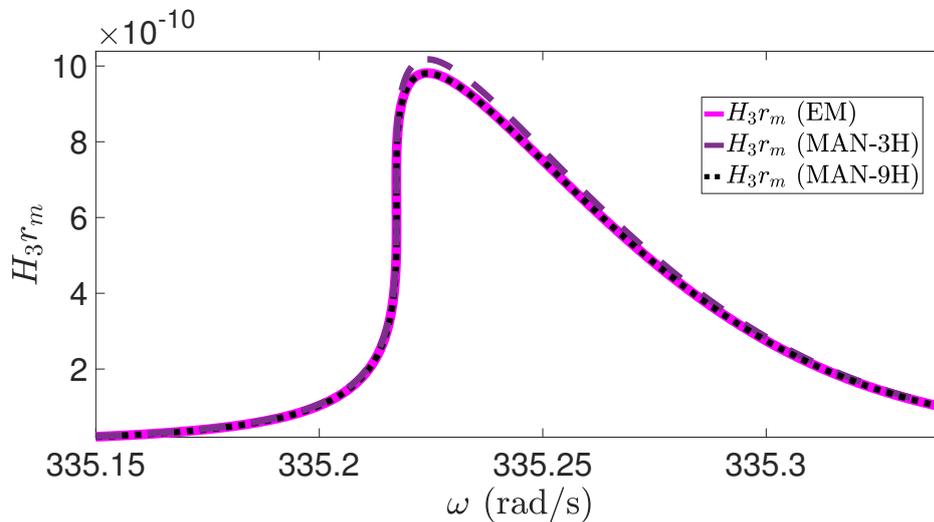
o Réponses fréquentielles résonance 1 : 3 : cas de la poutre homogène

À partir de l'identification des pulsations propres pour $L_b = 0.18$ m, on calcule les amplitudes des harmoniques 1 et 3 du deuxième et troisième mode qui sont en quasi résonance interne 1 : 3. On compare les résultats obtenus par ManLab pour les calculs algébriques issus de la méthode analytique et le calcul numérique via la MAN sur la figure 2.24 : on observe que pour le deuxième mode, la première harmonique est celle prépondérante, et pour le troisième mode, il s'agit de la troisième, comme prévu théoriquement. Ce phénomène vient du comportement de résonance interne 1 : 3 ($\omega_n \simeq \omega$ et $\omega_m \simeq 3\omega$).

On compare donc ces harmoniques avec les calculs analytiques. Cependant, on



(a) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 1 de r_n



(b) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 3 de r_m

FIGURE 2.24 – Tracés des réponses fréquentielles des harmoniques des amplitudes de r_n et r_m dans le cas de la poutre homogène pour la résonance 1 : 3, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 2 \times 10^{-7} \text{ m}$. Les points d'équilibre sont obtenus via la méthode des échelles multiples (EM) à partir des équations 2.173, 2.174, 2.175 et 2.176 ; la MAN utilise les équations 2.159 et 2.160.

observe une légère différence qualitative entre le calcul analytique et le calcul de Manlab. La cause peut être une non convergence du calcul de balance harmonique. En effet, le calcul analytique à $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ mettant en jeu jusqu'à l'harmonique 9 (avec des termes en $\exp(3i\omega_m t_0)$), un calcul de balance harmonique a été effectué avec 9 harmoniques (cf la figure 2.24(b)). On observe une amélioration de la convergence entre le calcul à 9 harmoniques et les résultats analytiques. Il se peut que le calcul ManLab nécessite encore plus d'harmoniques. Malgré tout, les amplitudes sont très faibles, le troisième mode est très peu excité puisque la résonance 1 : 3 n'est pas bien réalisée dans le cas de la poutre homogène (cf le tableau 2.7). La prédiction

qualitative analytique semble donc ne pas être compromise.

o Réponses fréquentielles résonance 1 : 3 : cas de la configuration unimorphe

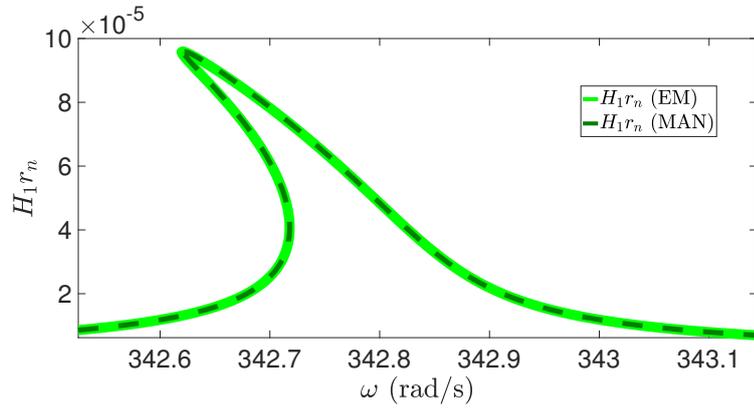
Dans le cas de la poutre en configuration unimorphe, on fait le calcul pour $L_b = 0.18$ m et $\Delta = 0.099$ m (cf le tableau 2.7). Cette fois, on peut comparer les harmoniques 1 du deuxième mode, 3 du troisième mode et 1 et 3 de la tension électrique V (cf la figure 2.25). On observe tout d'abord que l'échange d'énergie modale est plus visible avec des amplitudes plus fortes du troisième mode. Le calcul de ManLab est effectué pour 3 et 9 harmoniques, il n'est pas représenté sur la figure 2.25(a) qui a déjà un bon accord entre le numérique et l'analytique, mais il est tracé sur les figures 2.25(b) et 2.25(c). On observe un changement entre le calcul à 3 et à 9 harmoniques, on est d'ailleurs même pas certains qu'à 9 harmoniques, le calcul ait convergé, mais les temps de calcul sont eux largement augmentés. On observe sur les figures 2.25(b) et 2.25(c) que le calcul à 9 harmoniques permet d'améliorer la corrélation entre le calcul analytique et numérique. Ceci montre que le calcul analytique, plus rapide, permet de prédire un comportement qualitatif de la structure. Pour une amplitude de déplacement plus faible (cf la figure 2.26), la comparaison entre des deux méthodes avec seulement 3 harmoniques dans la méthode de balance harmonique donne une bonne corrélation. Ceci est dû au fait que les effets des harmoniques supérieures se font moins ressentir à faible amplitude de déplacement. On remarque cependant que l'échange d'énergie n'est pas observé pour une telle amplitude de déplacement. En effet, dans ces cas de comportements non linéaires, il existe un niveau seuil d'énergie pour lequel le comportement d'échange d'énergie sera observé. D'ailleurs si on observe les autres harmoniques du troisième mode dans le cas où $F = 2 \times 10^{-8}$ m, l'harmonique prépondérante est la deuxième et non pas la troisième (cf la figure 5.1 de l'annexe 5.5).

Pour finir, les outils analytiques permettent de connaître le comportement qualitatif du système réduit fidèle lorsqu'on le compare avec les résultats issus du calcul numérique de ManLab. Ceci nous permet de confirmer les développements analytiques qui sont utiles pour prédire le comportement de la structure plus rapidement que des calculs numériques, qui possèdent des soucis de convergence par ailleurs. Cependant, il faut être prudent lors de l'augmentation de l'amplitude de déplacement, l'écart entre l'analytique et le numérique peut se creuser, c'est pourquoi on parle de prédiction qualitative du comportement dynamique.

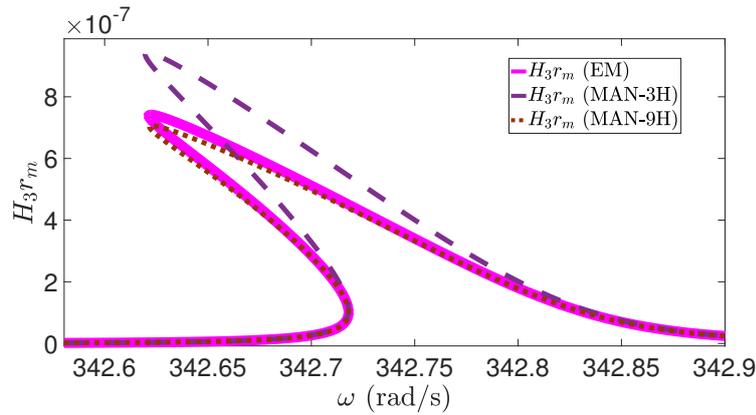
Ces résultats sont valables seulement si le système dynamique peut être réduit sur les modes supposés, i.e. si les effets d'autres modes se font sentir dans la dynamique du système (phénomènes de "spillover"), le modèle proposé ne le prend pas en compte.

o Réponses fréquentielles résonance 1 : 2 : cas de la configuration unimorphe

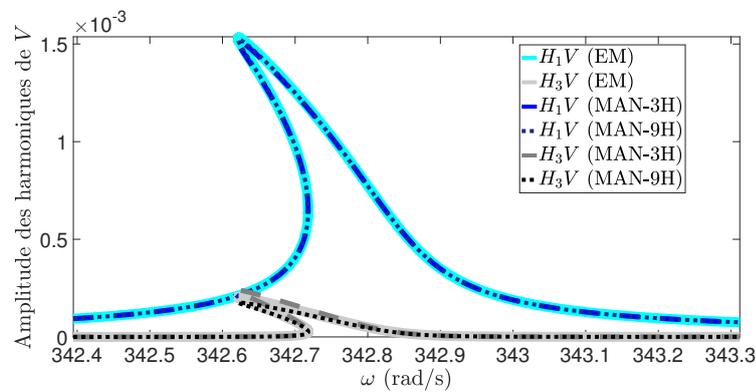
Dans le cas de la poutre électro-mécanique dans la configuration unimorphe, celle-ci possède des non linéarités quadratiques et pour $L_b = 0.18$ m et $\Delta = 0.081$ m, on a une résonance 1 : 2 entre le quatrième et le troisième mode. Via la méthode



(a) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 1 de r_n



(b) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 3 de r_m



(c) Réponse fréquentielle de l'amplitude des harmoniques 1 de V

FIGURE 2.25 – Tracé fréquentiels des amplitudes des harmoniques de r_n , r_m et V dans le cas de la configuration unimorphe pour la résonance 1 : 3, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 2 \times 10^{-7} \text{ m}$. Les points d'équilibre sont obtenus via la méthode des échelles multiples (EM) (cf les équations 2.191, 2.192, 2.193 et 2.194), et par la MAN sur les équations 2.180, 2.181 et 2.182.

de balance harmonique de ManLab, on teste le système forcé pour vérifier si les non linéarités sont suffisantes afin d'activer le phénomène d'échange d'énergie via

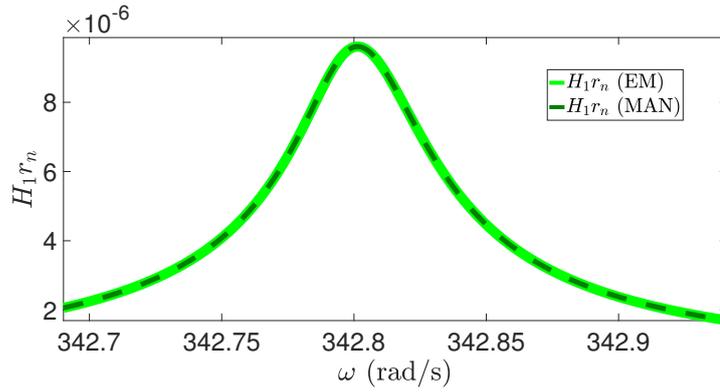
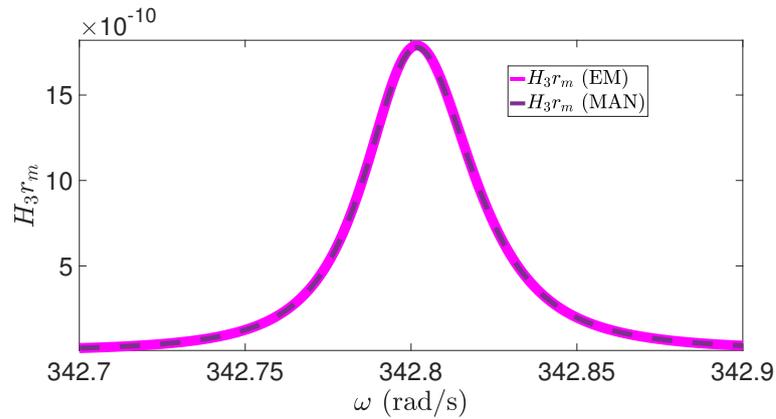
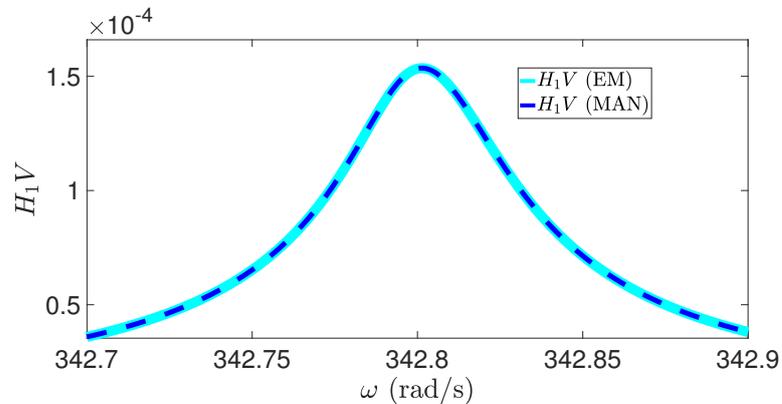
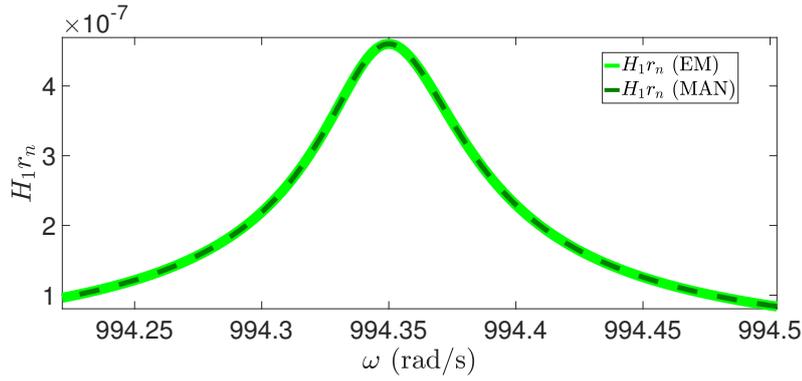
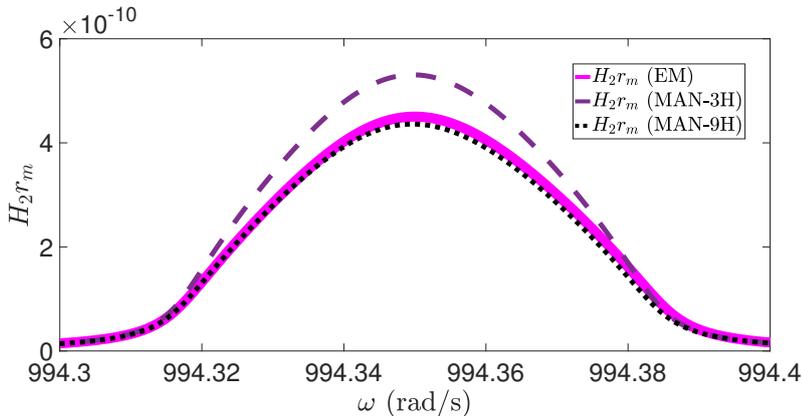
(a) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 1 de r_n (b) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 3 de r_m (c) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 1 et 3 de V

FIGURE 2.26 – Tracé fréquentiels des amplitudes des harmoniques de r_n , r_m et V dans le cas de la configuration unimorphe pour la résonance 1 : 3, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 2 \times 10^{-8} \text{ m}$. Les points d'équilibre sont obtenus via la méthode des échelles multiples (EM) (cf les équations 2.191, 2.192, 2.193 et 2.194), et par la MAN sur les équations 2.180, 2.181 et 2.182.

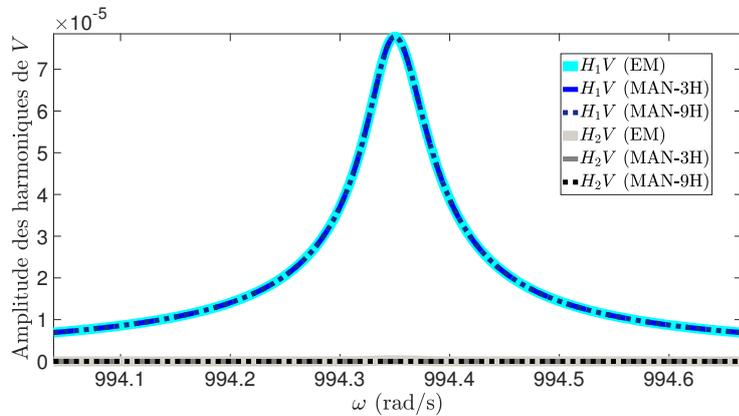
la résonance 1 : 2, avec deux amplitudes de déplacement différentes (cf les figures 2.27 et 2.28). On observe des difficultés de convergence sur les figures 2.27(b) et



(a) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 1 de r_n



(b) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 2 de r_m



(c) Réponse fréquentielle des amplitudes des harmoniques de V

FIGURE 2.27 – Tracé fréquentiels des amplitudes des harmoniques de r_n , r_m et V dans le cas de la configuration unimorphe pour la résonance interne 1 : 2, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 10^{-10} \text{ m}$. Les points d'équilibre sont obtenus via la méthode des échelles multiples (EM) (cf les équations 2.200, 2.201, 2.202 et 2.203), et par la MAN sur les équations 2.180, 2.181 et 2.182.

2.28(b) pour les harmoniques de r_m , entre le calcul ManLab à 3 et à 9 harmoniques. Pour l'amplitude de déplacement F appliquée dans le cas de ces figures, la

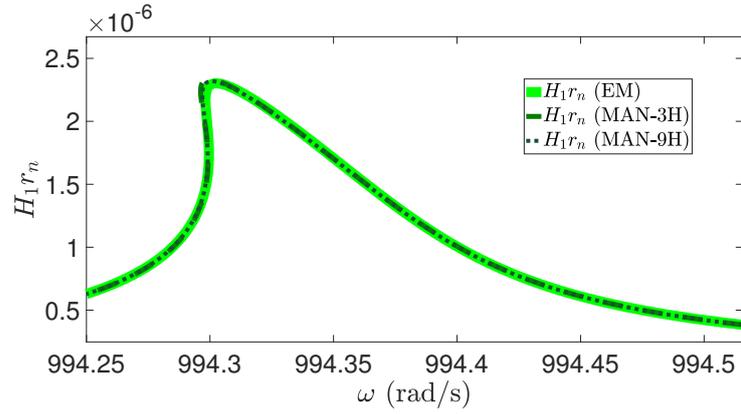
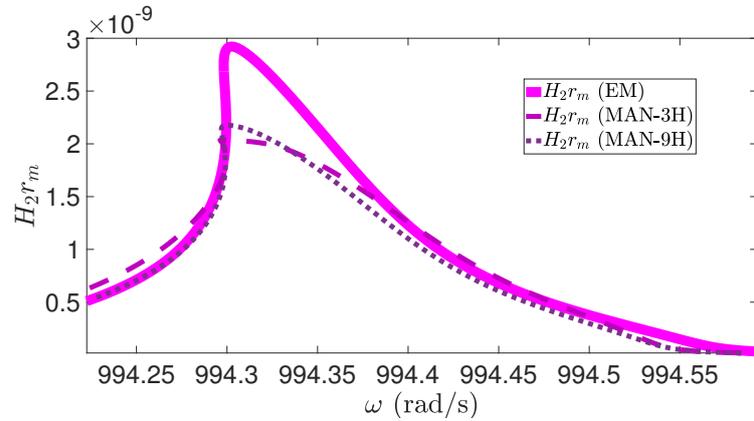
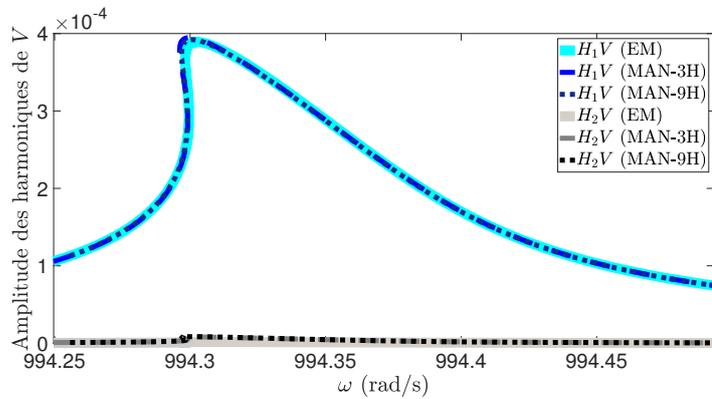
(a) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 1 de r_n (b) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 2 de r_m (c) Réponse fréquentielle des amplitudes des harmoniques de V

FIGURE 2.28 – Tracés des réponses fréquentielles des amplitudes des harmoniques de r_n , r_m et V dans le cas de la configuration unimorphe pour la résonance interne 1 : 2, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 5 \times 10^{-10} \text{ m}$. Les points d'équilibre sont obtenus via la méthode des échelles multiples (EM) (cf les équations 2.200, 2.201, 2.202 et 2.203), et par la MAN sur les équations 2.180, 2.181 et 2.182.

deuxième harmonique reste au-dessus de la troisième ce qui n'est plus le cas lorsqu'on augmente la force d'excitation. Ceci peut s'expliquer par le fait que la non

linéarité cubique de la poutre est plus importante que la non linéarité quadratique, qui repose sur un comportement non linéaire du matériau piézoélectrique. On remarque d'ailleurs que l'échange d'énergie entre les modes est peu marqué avec de très faibles amplitudes des harmoniques de r_m par rapport à r_n . Dans le cas de la résonance 1 : 2 la non linéarité s'exprime pour de plus faibles amplitudes mais on s'attend à un potentiel phénomène de saturation (Haddow et al., 1984, Mook et al., 1985, Shivamoggi and Varma, 1988, Oueini and Nayfeh, 2000).

2.4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a permis de mettre en place les équations dynamiques non linéaires du système couplé de poutre homogène avec des matériaux piézoélectriques collés dessus. Ces équations présentent des non linéarités quadratiques et cubiques au travers des non linéarités géométriques de la poutre et matérielles des patchs piézoélectriques. Une analyse modale de ces équations est effectuée pour identifier les pulsations propres et les déformées modales associées. Puis, une étude est menée sur les points d'équilibre du système couplé dans un cas réduit à un mode et pour des cas de résonances internes à deux modes. Les outils analytiques mis en place ont été validés avec des méthodes numériques pour les réponses fréquentielles, ce qui prouve leur robustesse. Cependant ces résultats ne sont valables que dans le cas où le système réduit est représentatif du comportement du système complet. En effet, le système peut présenter des effets indésirables avec l'activation d'autres modes que ceux supposés (phénomènes de "spillover"). La réponse de la structure dépend alors de tous ces modes. On remarque dans le cas à un mode que des non linéarités inhérentes aux patchs piézoélectriques mènent à un comportement raidissant ou assouplissant du premier mode de la structure électro-mécanique. On note également un début d'échange d'énergie entre les modes en résonance interne, notamment dans le cas de la résonance 1 : 3.

Les résultats originaux de ce chapitre sont :

- les équations dynamiques tri-dimensionnelles complètes d'un système prenant en compte non seulement les non linéarités géométriques de la poutre, mais aussi des non linéarités matérielles des matériaux piézoélectriques. Cette considération des non linéarités piézoélectriques ajoute ainsi des termes non linéaires quadratiques et cubiques aux termes usuels cubiques de la non linéarité géométrique de la poutre dans les équations. Cependant, il n'y a pas beaucoup de données dans la littérature sur les valeurs physiques potentielles de ces coefficients ou sur la manière de les optimiser pour obtenir certains effets sur la dynamique non linéaire de la poutre. L'identification et la modification de ces coefficients selon des paramètres géométriques des matériaux piézoélectriques peut constituer une perspective de travail.
- l'utilisation du positionnement des matériaux piézoélectriques afin de créer des résonances internes entre les modes propres du système électro-mécanique. En effet, le positionnement d'un patch sur la poutre permet d'ajuster des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 respectivement entre le quatrième et le troisième mode, et entre le troisième et le deuxième mode. On peut imaginer utiliser plusieurs matériaux pour accorder plusieurs résonances internes entre différents modes propres du système. D'ailleurs, dans notre cas il n'y a pas de positions pour lesquelles les résonances

sont vérifiées en même temps, mais on peut supposer que pour certains matériaux et positionnements, on réussisse à obtenir les deux résonances en même temps et lier ainsi les amplitudes des trois modes.

- l'étude analytique des problèmes de poutre électro-mécanique avec un seul mode mécanique pour identifier les effets des termes non linéaires provenant de la non linéarité matérielle possible des matériaux piézoélectriques. Il existe notamment un changement de comportement dynamique : en passant d'un comportement assouplissant de poutre homogène seule à un comportement raidissant qui est dû à un des termes non linéaires inhérents au patch piézoélectrique.
- l'étude du modèle réduit pour identifier de possibles échanges d'énergie entre les modes en résonance interne 1 : 2 et 1 : 3. Cette résonance ayant été ajustée via le positionnement des matériaux piézoélectriques. Ce phénomène d'échange dépend des non linéarités intrinsèques des matériaux (géométriques de la poutre et matérielles des matériaux piézoélectriques).

Le chapitre suivant présente des résultats expérimentaux pratiqués sur une poutre avec des matériaux piézoélectriques, en configuration unimorphe et bimorphe. Ces tests permettent de valider certains résultats analytiques présentés dans ce chapitre. Notamment les résultats de l'analyse modale, mais aussi des résultats dynamiques sur les réponses fréquentielles.

Chapitre 3

Tests expérimentaux sur de petites structures

Les résultats analytiques obtenus dans le chapitre 2 ont montré la possibilité de concevoir des structures électro-mécaniques permettant la création de résonances internes 1 : 2 et 1 : 3. Ces développements analytiques ont été utilisés pour préparer des tests expérimentaux sur plusieurs configurations de petites poutres avec des matériaux piézoélectriques collés dessus : une poutre sans matériaux piézoélectriques, une poutre avec un seul patch piézoélectrique (configuration unimorphe) et une poutre avec deux matériaux piézoélectriques (configuration bimorphe). Dans ce chapitre, on présente les résultats de ces tests expérimentaux qui viennent conforter les prédictions analytiques du chapitre 2. Ils sont composés de résultats modaux et de réponses fréquentielles.

L'étude modale a d'abord été menée pour identifier les pulsations propres des systèmes, en circuit ouvert et fermé, ainsi que les déformations modales associées. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus analytiquement avec les méthodes présentées dans le chapitre précédent. Ensuite, une étude a été menée pour : d'une part tracer les courbes squelettes des configurations lorsqu'il n'y a pas de résonances internes, et lors de la présence d'une résonance interne 1 : 3 d'autre part.

Une partie des résultats est similaire à l'article Guillot et al. (2020a).

Sommaire

3.1	Dispositif et méthodologie expérimentale	96
3.1.1	Le dispositif expérimental	98
3.1.2	Méthodologie de l'analyse modale : pulsations propres et déformées modales	99
3.1.3	Méthodologie de l'analyse fréquentielle de systèmes forcés . . .	100
3.2	Les analyses modales	103
3.2.1	La réalisation des résonances internes	103
3.2.2	Les déformées modales	109
3.3	Les comportements fréquents de la structure	113
3.3.1	Résultats analytiques de la réduction modale à un et deux modes	114
3.3.2	Résultats expérimentaux de la boucle à contrôle de phase . . .	117
3.3.3	Résultats expérimentaux de la méthode de détection synchrone	121
3.4	Conclusion du chapitre	124

3.1 Dispositif et méthodologie expérimentale

Une étude expérimentale est menée pour confirmer certains des résultats théoriques obtenus dans le chapitre 2. Pour cela, plusieurs dispositifs ont été étudiés, ceux-ci sont composés d'une poutre sur laquelle ont été collés des patches de matériaux piézoélectriques PIC 151 via des couches d'époxy. Les couches d'époxy sont estimées à 0.1 mm d'épaisseur et de même largeur et longueur que les matériaux piézoélectriques. Deux configurations particulières de structures électro-mécaniques ont été créées :

- i) une configuration unimorphe avec un seul matériau piézoélectrique sur le dessus de la poutre ;
- ii) une configuration bimorphe avec deux matériaux piézoélectriques disposés de manière symétrique au-dessus et en dessous de la poutre ;

comme le présentent les schémas de la figure 3.1.

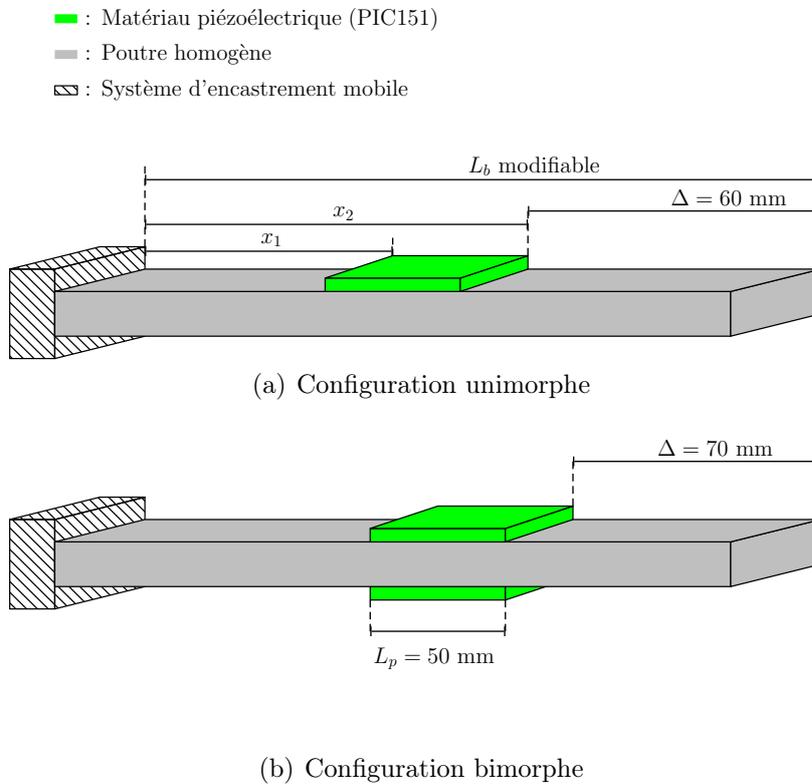


FIGURE 3.1 – Schéma des configurations a) unimorphe et b) bimorphe utilisées. La longueur L_b des structures peut être modifiée grâce au déplacement du système d'encastrement. La position x_1, x_2 des patches piézoélectriques est déduite de la distance $\Delta = L_b - x_2$ et de la longueur L_p des matériaux, qui est fixée à 50 mm. La distance Δ est également fixée expérimentalement : 60 mm pour la configuration unimorphe et 70 mm pour la configuration bimorphe.

Ces matériaux piézoélectriques sont positionnés entre $s = x_1$ et $s = x_2$ et de longueur $L_p = 50$ mm comme indiqué sur la figure 3.1. On note également sur cette figure les distances $\Delta = L_b - x_2$ choisies expérimentalement. Elles doivent permettre l'apparition des résonances 1 : 2 et 1 : 3 prévues théoriquement (cf le chapitre 2), pour des longueurs

particulières de poutre L_b .

La poutre sans matériau piézoélectrique et les deux configurations utilisées expérimentalement sont présentées sur la photo de la figure 3.2.

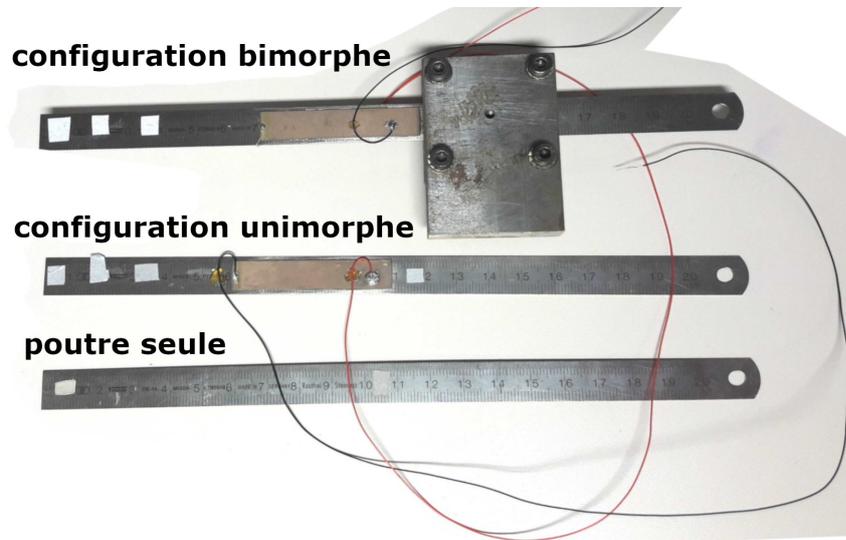


FIGURE 3.2 – Photo des différentes configurations étudiées expérimentalement : la poutre homogène seule, la configuration unimorphe avec un seul matériau piézoélectrique, et la configuration bimorphe avec deux patches piézoélectriques. Le système d’encastrement mobile est positionné sur la configuration bimorphe. La structure bimorphe et la structure unimorphe ont été réalisées au CNAM à Paris.

L’intérêt de l’étude d’une configuration unimorphe et d’une configuration bimorphe est d’observer l’importance que peut avoir l’asymétrie du cas unimorphe sur la dynamique de la structure, par rapport au cas symétrique de la configuration bimorphe. En effet, comme expliqué dans l’annexe de Guillot et al. (2020a), du fait de l’asymétrie de la structure aux endroits où sont présents les patches piézoélectriques il existe un couplage axial-flexion. Ce couplage est annulé dans nos équations par l’hypothèse d’inextensibilité, cependant il serait responsable de non linéarités quadratiques. En outre, le cas symétrique de la configuration bimorphe élimine l’effet de certains coefficients piézoélectriques tel que s_{111} (Mam et al., 2016).

Dans ce chapitre, une première partie explique le dispositif expérimental ainsi que les méthodes utilisées pour caractériser les comportements modaux et fréquentiels des configurations. La deuxième partie présente l’analyse modale effectuée pour détecter les pulsations propres et les déformées modales associées des trois systèmes étudiés. Ces résultats sont comparés à ceux théoriques obtenus dans le chapitre 2, appliqués au cas particulier des configurations expérimentales. Cette investigation des pulsations propres permet la confirmation de la création des résonances 1 : 2 et 1 : 3, en fonction de l’emplacement des matériaux piézoélectriques sur la poutre (au travers de la modification de la longueur L_b , cf la figure 3.1).

Pour finir, une étude dynamique de régimes forcés est réalisée via deux méthodes : la boucle à contrôle de phase (Phase-Lockep-Loop (Denis et al., 2018)), et la détection synchrone. On en déduit les réponses fréquentielles du système. La première méthode permet de tracer les courbes squelettes des différents modes, afin d’identifier de possibles comportements non linéaires. La deuxième est utilisée pour analyser de possibles échanges

d'énergie entre deux modes du système en résonance 1 : 3.

Dans un premier temps, nous décrivons le dispositif expérimental qui a été utilisé dans la sous partie suivante.

3.1.1 Le dispositif expérimental

Les différentes structures sont vissées sur un pot vibrant (Brüel & Kjør 4808) via un système d'encastrement. Un accéléromètre est collé sur le système d'encastrement, afin d'enregistrer l'accélération de la base $a_b(t)$ imposée aux structures. Un vibromètre laser (Polytec PSV 400) est utilisé pour mesurer la vibration des structures, en pointant sur différents points choisis de la structure. Le pot vibrant est piloté par un ordinateur relié à celui-ci via un amplificateur de puissance et une carte d'acquisition d'entrée/sortie. La carte d'acquisition permet d'envoyer le signal d'excitation d'entrée au système et d'enregistrer le signal de vibration et le signal d'accélération du vibromètre et de l'accéléromètre (cf la figure 3.3).

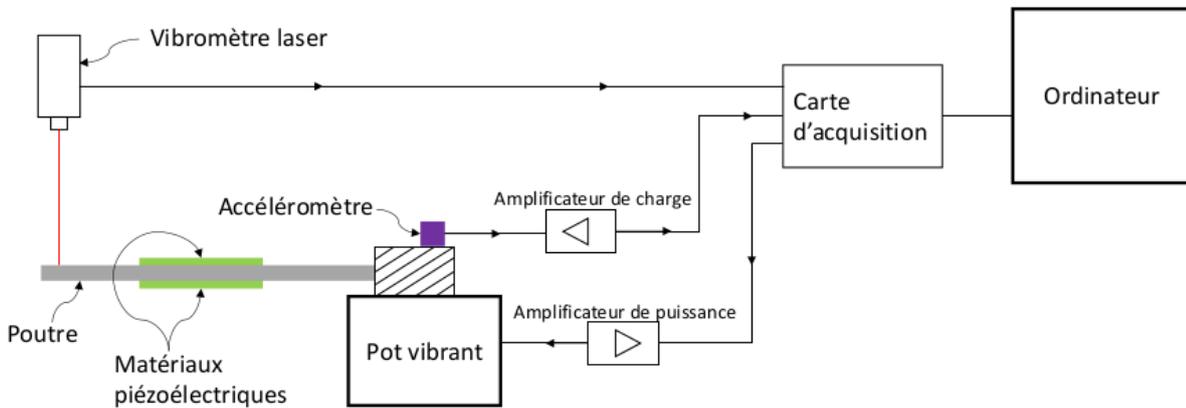


FIGURE 3.3 – Schématisation du dispositif expérimental, la structure représentée étant la configuration bimorphe. Le vibromètre laser est pointé sur la structure, la réponse vibratoire est enregistrée par l'ordinateur via la carte d'acquisition. La structure est fixée via le système d'encastrement sur le pot vibrant. L'accélération imposée à la structure est recueillie par l'accéléromètre collé sur le système d'encastrement. Le signal d'excitation est transmis au pot vibrant par l'ordinateur via un amplificateur de puissance.

Les données matérielles de la poutre homogène sont identifiées. Sa masse m_b est de 10.958 g. Le volume de la poutre est $V_b = 1.402 \times 10^{-6} \text{ m}^3$. On en déduit sa masse volumique : $\rho_b = 7810 \text{ kg.m}^{-3}$. La détection des premières fréquences propres de la poutre homogène seule permet de calculer son module d'Young E_b , par rapport aux fréquences identifiées théoriquement. En effet, entre les sept premières fréquences propres obtenues théoriquement et expérimentalement pour $L_b = 0.17 \text{ m}$, une régression linéaire est effectuée qui donne le module d'Young de la poutre tel que $E_b = 1.7881 \times 10^{11} \text{ Pa}$ (cf la figure 3.4). Les données matérielles de la poutre, des matériaux piézoélectriques et de la colle époxy sont regroupées dans le tableau 3.1. Celles de la poutre ont été identifiées comme expliqué précédemment, celles des matériaux piézoélectriques PIC 151 sont données par les constructeurs et celles de l'époxy sont celles affichées par Mam et al. (2016). Ces données sont utilisées pour effectuer les calculs théoriques de l'analyse modale, comme expliqués

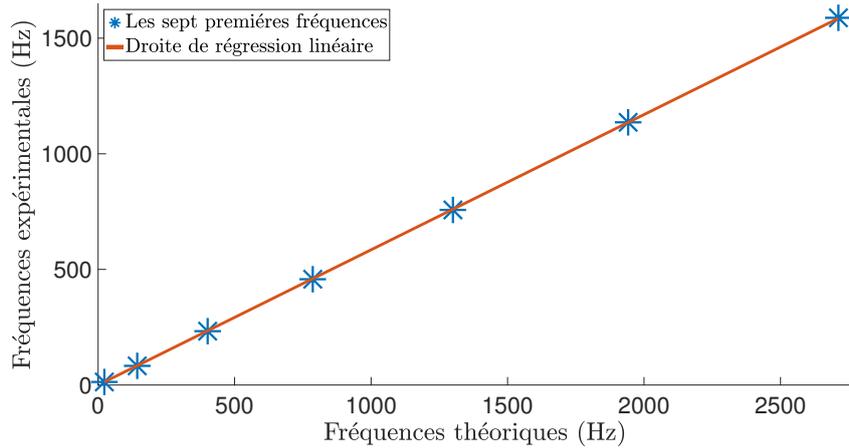


FIGURE 3.4 – Courbe de régression linéaire entre les sept premières fréquences théoriques et expérimentales de la poutre homogène seule pour une longueur $L_b = 0.17$ m. Cette courbe permet de déduire le module d’Young E_b de la poutre homogène.

Tableau 3.1 – Propriétés mécaniques de la poutre nue (identifiées expérimentalement), des matériaux piézoélectriques PIC 151 (d’après Thomas et al. (2009)) et de la colle époxy (d’après Mam et al. (2016)).

	ρ (kg.m ⁻³)	Y (GPa)	h, h_p (mm)	b, b_p (mm)
Poutre nue	7810	179	0.5	13
PIC151	8500	66.7	0.5	10
Colle époxy	8000	5	-	-

dans le chapitre 2, afin de comparer ces résultats à ceux obtenus expérimentalement. On explique maintenant comment est utilisé ce dispositif pour effectuer l’analyse modale.

3.1.2 Méthodologie de l’analyse modale : pulsations propres et déformées modales

D’abord, j’ai effectué une analyse modale pour identifier les quatre premières pulsations propres des deux configurations : unimorphe et bimorphe. Pour cela, les Fonctions de Réponses Fréquentielles (FRF) sont tracées entre les réponses vibratoires obtenues par le vibromètre laser et l’accéléromètre. Les quatre premières pulsations propres sont déduites de ces FRF, pour différentes longueurs de poutre L_b . En effet, les matériaux piézoélectriques sont collés sur les deux configurations, i.e. Δ est fixé (cf la figure 3.1), mais la longueur L_b peut être modifiée en faisant varier l’emplacement du système d’encastrement sur les configurations. Pour la configuration unimorphe, on a $\Delta = 60$ mm et pour celle bimorphe, on a $\Delta = 70$ mm (cf la figure 3.1). Ces distances Δ ont été choisies car elles doivent nous permettre d’obtenir les résonances internes suivantes : $\omega_3 \simeq 3\omega_2$ et $\omega_4 \simeq 2\omega_3$, comme prévu théoriquement pour des longueurs L_b de poutre précises.

Dans le cas unimorphe, j’ai augmenté la longueur de la poutre L_b de 110 mm jusqu’à 170 mm, avec des pas de 5 mm. Dans le cas bimorphe, j’ai testé des longueurs de poutre

L_b allant de 120 mm à 170 mm avec le même pas de 5 mm. Autour des longueurs L_b de poutre pour lesquelles je me rapprochais des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3, j'ai réduit le pas à 1 mm. Ensuite, j'ai tracé les rapports entre la troisième et la deuxième, et entre la quatrième et la troisième pulsation propre, en fonction des longueurs de poutre L_b imposées. Ces résultats expérimentaux sont comparés avec ceux obtenus théoriquement pour les données matérielles identifiées dans le tableau 3.1.

Le dispositif expérimental permet également de tracer les déflexions modales des structures. Pour cela, sur le logiciel du vibromètre laser, on définit des points de maillage sur une ligne au milieu de la structure. Le logiciel enregistre alors le déplacement de ces différents points sur une certaine bande de pulsation. On a l'enregistrement des différentes déflexions sur ces points de maillage, pour une certaine pulsation propre. Le logiciel détecte d'ailleurs les pics des FRFs et reproduit une animation de ces déformées modales sur les pulsations propres associées. Ces animations permettent de différencier les modes de flexion des modes hors plan ou de torsion. On enregistre les déflexions observées expérimentalement des quatre premiers modes plans, afin de tracer l'estimation des déformées modales expérimentales. On compare ces déformées avec celles obtenues théoriquement pour une longueur de poutre fixée à $L_b = 0.17$ m.

C'est ainsi que j'ai effectué une analyse modale pour identifier les pulsations propres des deux configurations, et aussi enregistrer leurs déflexions modales pour $L_b = 0.17$ m. Je me suis également intéressée aux réponses fréquentielles des structures comme expliqué dans la sous partie suivante.

3.1.3 Méthodologie de l'analyse fréquentielle de systèmes forcés

Le chapitre 2 a permis d'identifier les points d'équilibre du comportement dynamique de notre système électro-mécanique, dans un cas où un seul mode est excité et dans le cas où le système présente une résonance interne 1 : 3. Pour cette partie expérimentale, on trace les courbes squelettes de notre système, lorsqu'il n'y a pas de résonances internes, via une méthode de boucle à contrôle de phase (Phase-Locked-Loop (PLL) (Denis et al., 2018)). On étudie également la réponse fréquentielle des deux configurations quand elles présentent une résonance interne 1 : 3, via une méthode de détection synchrone. Les deux méthodes utilisées sont présentées dans les sous parties suivantes.

La méthode de boucle à contrôle de phase : tracé des courbes squelettes

La méthode de la boucle à contrôle de phase présente au LISPEN, est basée sur l'analyse de la différence de phase qui existe entre le signal d'accélération de l'accéléromètre ($a_b(t)$) et le signal de vibration du vibromètre laser ($v(t)$) (cf les figures 3.3 et 3.5). En effet, si les signaux sont en phase, alors on se situe sur la courbe squelette de notre structure. Une boucle de contrôle est donc développée pour obtenir la pulsation pour laquelle ces deux signaux sont en phase, pour un certain niveau d'accélération $a_e(t)$ imposé à la structure via le pot vibrant (cf la figure 3.5). Les signaux de vibration ($v(t)$) du vibromètre laser pointé sur la structure et d'accélération ($a_b(t)$) de l'accéléromètre collé sur le système d'encastrement sont enregistrés et notamment leurs phases ϕ_l et ϕ_p , comme présenté sur la figure 3.5. On a la différence de phase $d_p = \phi_l - \phi_p$ qui doit être inférieure à une valeur seuil s_p imposée. Ainsi :

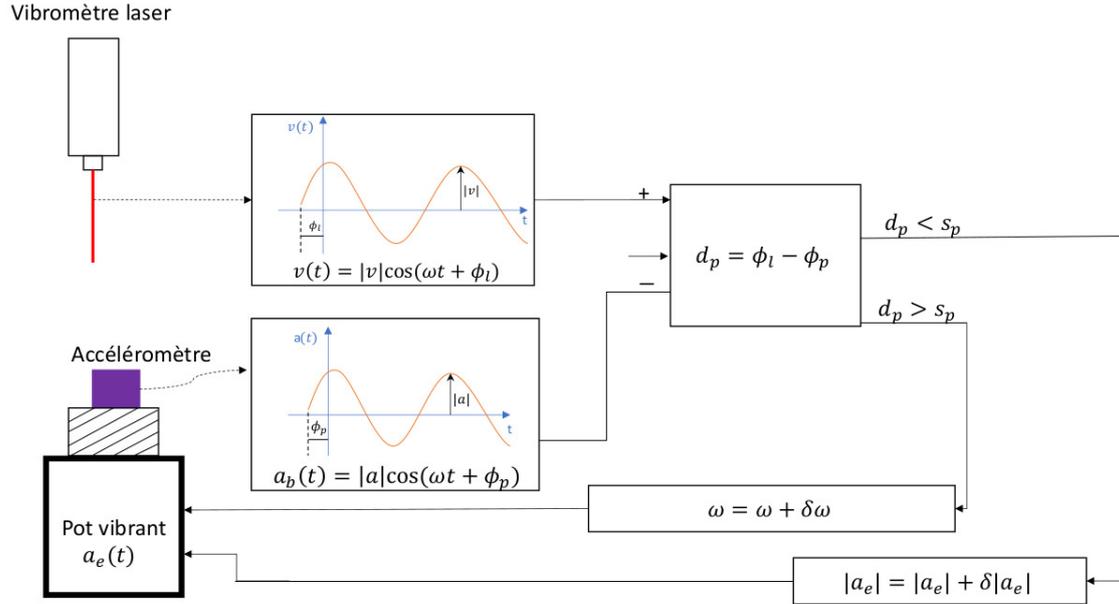


FIGURE 3.5 – Schéma simplifié du fonctionnement de la boucle à contrôle de phase (PLL) utilisée. Cette boucle utilise la différence de phase d_p qui existe entre la phase signal de vibration (ϕ_l) de la structure, enregistrée par le vibromètre laser, et celle de l'accélération imposée à la structure (ϕ_p) enregistrée par l'accéléromètre placé sur le système d'encastrement. Elle statue sur cette différence de phase, en vérifiant si elle est inférieure ou supérieure à une valeur seuil indiquée s_p .

- si $d_p < s_p$ pour un niveau d'accélération $|a_e|$ imposé au pot vibrant ainsi qu'une pulsation d'excitation ω ($a_e(t) = |a_e| \cos(\omega t)$), alors ce point est enregistré et on fait un pas supplémentaire de niveau d'accélération d'excitation $\delta|a_e|$.
- si $d_p > s_p$, alors pour le même niveau d'accélération du pot vibrant $|a_e|$, on modifie légèrement la pulsation d'excitation de $\delta\omega$ pour essayer d'obtenir une différence de phase d_p qui respecte la sensibilité s_p demandée.

Un balayage en accélération est ainsi effectué, avec un pas défini $\delta|a_e|$, pour trouver les points d'équilibre à ces différentes amplitudes d'accélération (et pulsations associées ω), avec une certaine marge d'erreur s_p sur la différence d_p devant être obtenue entre les phases des signaux d'accélération ($a_b(t)$) et de vibration ($v(t)$) de l'accéléromètre et du vibromètre laser. J'ai utilisé cette méthode pour tracer les courbes squelettes des quatre premiers modes des deux configurations, dans un cas où celles-ci ne présentent pas de résonances internes.

Le but en traçant les courbes squelettes est de montrer de potentiels comportements non linéaires quadratiques et cubiques des deux configurations. La méthode de détection synchrone, implémentée pour observer le comportement de résonance 1 : 3, est présentée dans la sous partie suivante.

La méthode de détection synchrone : détection du comportement du système sur la résonance 1 : 3

Pour obtenir les états stables des configurations, dans le cas de la résonance interne 1 : 3, une méthode de détection synchrone est utilisée. Pour cela, une bande de pulsation est définie, autour du mode bas de la résonance interne, i.e. ω_2 . La structure est excitée sur cette bande de pulsation pour la même accélération d'entrée imposée au système d'encastrement. Ceci est vérifié via une boucle de contrôle sur $|a|$, qui est l'amplitude de l'accélération enregistrée par l'accéléromètre collé sur le système d'encastrement (cf la figure 3.3). Après avoir effectué un pas de pulsation, un certain temps (que l'on définit) est attendu pour enregistrer un point d'équilibre stable (à t_f) de la réponse temporelle de la structure. Ce temps est imposé afin de s'assurer que l'on enregistre la réponse en régime permanent et pas en régime transitoire.

Dans notre cas, on souhaite observer un comportement de résonance interne, et donc le comportement de deux modes simultanément. Un protocole expérimental particulier a donc été mis en place. Comme deux modes, ceux en résonance interne, veulent être observés indépendamment, deux expériences sont menées l'une après l'autre en pointant le laser sur les noeuds de ces deux modes successivement (cf la figure 3.6).

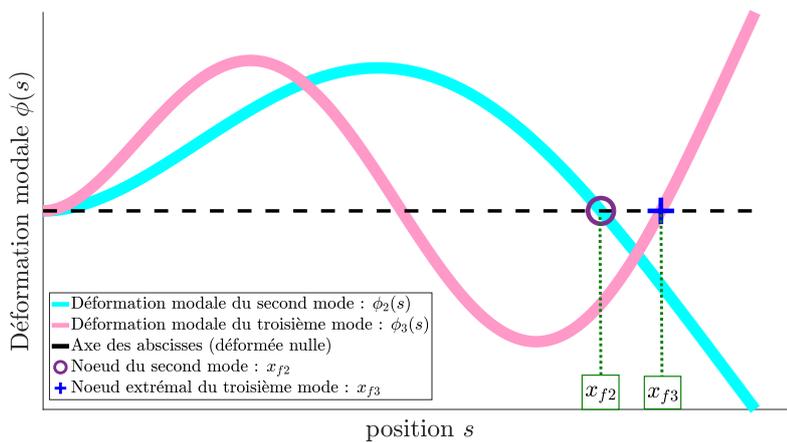


FIGURE 3.6 – Représentation des déformées modales du deuxième et troisième mode (ϕ_2 et ϕ_3) avec identification du noeud du deuxième mode x_{f2} ('o') et du noeud extrême du troisième mode x_{f3} ('+').

Ces noeuds ayant été identifiés par l'analyse modale de la structure. Soit $s = x_{f2}$ le noeud du deuxième mode et $s = x_{f3}$ le noeud extrême du troisième mode (cf la figure 3.6), puisqu'on suppose que la réponse en déplacement $v(s,t)$ est dominée par les modes qui sont en résonance interne, on a :

$$v(s,t) = \phi_2(s)r_2(t) + \phi_3(s)r_3(t) \quad (3.1)$$

avec :

$$v(s = x_{f2}, t) = \phi_3(s = x_{f2})r_3(t) \quad \text{et,} \quad v(s = x_{f3}, t) = \phi_2(s = x_{f3})r_2(t) \quad (3.2)$$

Ainsi, on pointe sur le noeud modal du deuxième mode (x_{f2}) pour observer le troisième mode, et on pointe sur le noeud extrême du troisième mode (x_{f3}), pour enregistrer la

réponse du deuxième mode. Ceci dans le cas où la réponse de la structure est dominée uniquement par ces deux modes.

Au vu de l'utilisation de la méthode des échelles multiples, qui fait une différenciation entre les différentes harmoniques de la réponse périodique, j'ai décomposé les résultats des signaux expérimentaux par rapport à leurs différentes harmoniques. Ainsi, les différentes amplitudes des harmoniques sont calculées à partir du signal de vibration enregistré par le vibromètre laser. D'après les développements analytiques, on suppose que l'on va observer principalement la première harmonique du deuxième mode et la troisième harmonique du troisième mode, à cause de la résonance 1 : 3. En effet, avec ω la pulsation d'excitation extérieure, qui se situe autour de ω_2 , les relations sur les pulsations sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \omega_2 &\simeq \omega, \text{ et, } \omega_3 &\simeq 3\omega_2 \\ & &\simeq 3\omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

Afin de différencier les amplitudes des différentes harmoniques, les signaux enregistrés sont multipliés par les fonctions $\sin(h\omega t)$ et $\cos(h\omega t)$, puis une moyenne est calculée sur ce nouveau signal pour extraire l'amplitude de la $h^{\text{ème}}$ harmonique (Monteil et al., 2015, Denis et al., 2018).

Cette partie a permis de présenter le dispositif expérimental ainsi que la méthode utilisée pour identifier les pulsations propres et les déformées modales. Elle détaille la méthode de boucle à contrôle de phase et la méthode de détection synchrone qui sont disponibles au LISPEN, tout en expliquant leur utilisation adaptée aux résultats que l'on souhaite observer par rapport aux développements du chapitre 2.

Dans la prochaine partie, les résultats obtenus par l'analyse modale expérimentale sont présentés. Ils sont également comparés à ceux théoriques obtenus grâce aux développements analytiques du chapitre 2. Ils confirment la réalisation des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 et la modification des déformées modales.

3.2 Les analyses modales

Comme expliqué précédemment, une analyse modale est effectuée sur les deux configurations unimorphe et bimorphe, afin d'obtenir leurs pulsations propres mais aussi leurs déformées modales associées. Ces résultats sont comparés avec les résultats obtenus par les développements théoriques. Ils permettent de vérifier d'une part que des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 peuvent être obtenues sur les deux configurations, et d'autre part que la présence des matériaux piézoélectriques modifient la déformée modale globale du système, comme prévu théoriquement.

3.2.1 La réalisation des résonances internes

L'analyse modale permet d'abord de vérifier la réalisation des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 pour des longueurs particulières de poutre L_b . Cette vérification est menée via le tracé des ratios entre la troisième et la deuxième et entre la quatrième et la troisième pulsation propre du système. Ces analyses sont effectuées pour les deux configurations par rapport à la longueur de la poutre L_b imposée.

On souhaite également valider le modèle théorique d'identification des pulsations propres du système composite. Pour cela, les pulsations propres théoriques ω_{theo} sont calculées

avec le modèle présenté dans le chapitre 2 en supposant un circuit fermé. Elles sont comparées à celles identifiées expérimentalement dans le cas du circuit fermé $\omega_{exp,cf}$. On calcule l'erreur relative E_ω , entre les pulsations propres théoriques et expérimentales, telle que :

$$E_\omega = 100 \times \frac{|\omega_{theo} - \omega_{exp,cf}|}{\omega_{theo}} \quad (3.4)$$

Traçons les résultats pour la configuration unimorphe dans la sous partie suivante.

Résonances internes : le cas de la configuration unimorphe

On compare les résultats expérimentaux en circuit ouvert et circuit fermé aux courbes déduites théoriquement par la résolution de l'équation 2.81 du chapitre 2 dans le cas d'un circuit fermé pour la configuration unimorphe (cf la figure 3.7). Afin de vérifier si la prise en compte des couches de colle époxy améliorent la détection des pulsations propres théoriques, on calcule aussi les pulsations propres avec une épaisseur de colle de 0.1 mm estimée expérimentalement, et en supposant la couche d'époxy de même dimension que le matériau. Pour les propriétés matérielles de la colle, on a repris celles données par Mam et al. (2016). On observe que les résultats théoriques et expérimentaux donnent une allure similaire de courbe selon la longueur L_b de la poutre. On vérifie également la réalisation des résonances internes voulues telles que $\omega_4 \simeq 2\omega_3$ et $\omega_3 \simeq 3\omega_2$ pour des longueurs précises de poutre L_b .

On peut déduire de la figure 3.7 les longueurs particulières de poutre expérimentales et théoriques pour lesquelles les résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 sont effectives :

- La résonance 1 : 2 est obtenue pour $L_b = 0.139$ m expérimentalement et $L_b = 0.141$ m théoriquement (cf la figure 3.7(a)). Les pulsations propres associées sont inscrites dans le tableau 3.2.
- La résonance 1 : 3 est réalisée pour $L_b = 0.128$ m expérimentalement et $L_b = 0.129$ m théoriquement (cf la figure 3.7(b)). On trouve dans le tableau 3.3 les pulsations propres associées à cette résonance interne.

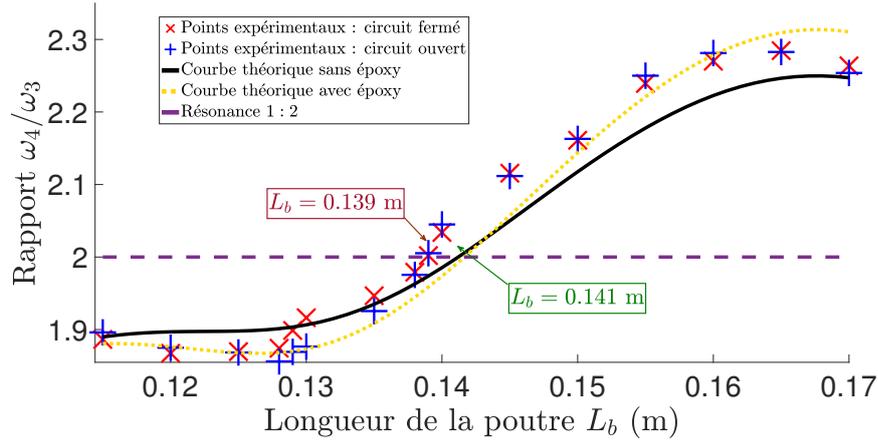
Tableau 3.2 – Pulsations propres de la configuration unimorphe associées à la résonance 1 : 2, dans le cas d'un circuit fermé.

	L_b (m)	ω_3 (rad/s)	ω_4 (rad/s)	ω_4/ω_3
Expérimental	0.139	2 342	4 697	2.006
Théorique	0.141	2 323	4 640	1.997

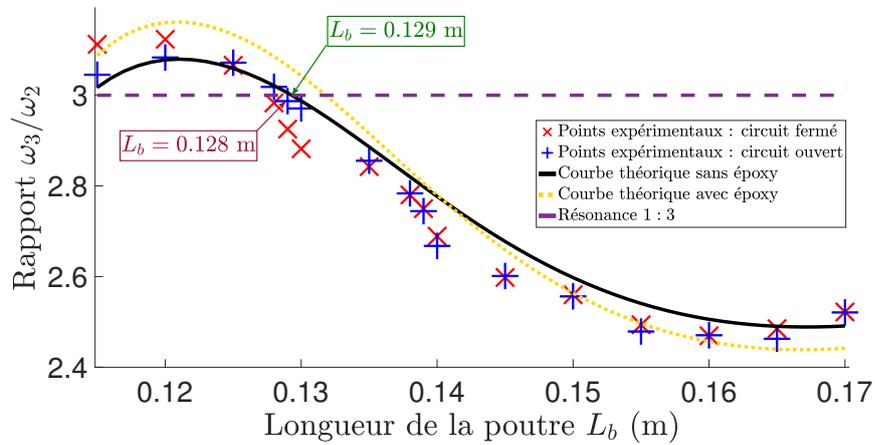
Tableau 3.3 – Pulsations propres de la configuration unimorphe associées à la résonance 1 : 3, dans le cas d'un circuit fermé.

	L_b (m)	ω_2 (rad/s)	ω_3 (rad/s)	ω_3/ω_2
Expérimental	0.128	966.4	2 883	2.983
Théorique	0.129	962.9	2 894	3.006

On observe dans les tableaux 3.2 et 3.3 que les écarts entre les pulsations théoriques et expérimentales semblent faibles. La comparaison qualitative des courbes sur les figures 3.7(a) et 3.7(b) ne permet pas de quantifier l'écart qui existe entre la pulsation propre expérimentale en circuit fermé $\omega_{exp,cf}$ et celle calculée théoriquement ω_{theo} . On trace donc



(a) Tracés théoriques et expérimentaux du rapport ω_4/ω_3 en fonction de la longueur de la poutre L_b .



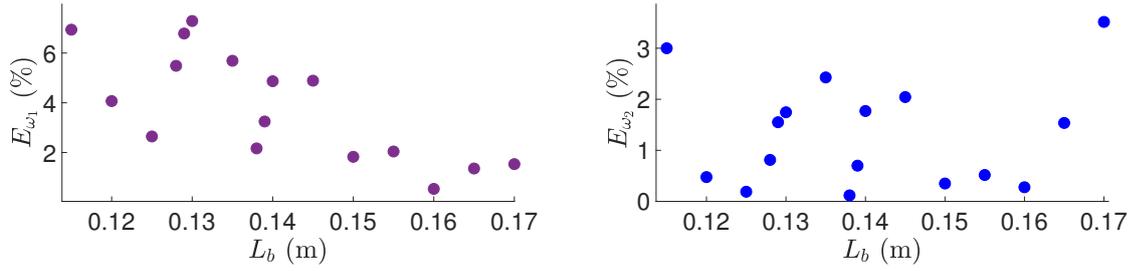
(b) Tracés théoriques et expérimentaux du rapport ω_3/ω_2 en fonction de la longueur de la poutre L_b .

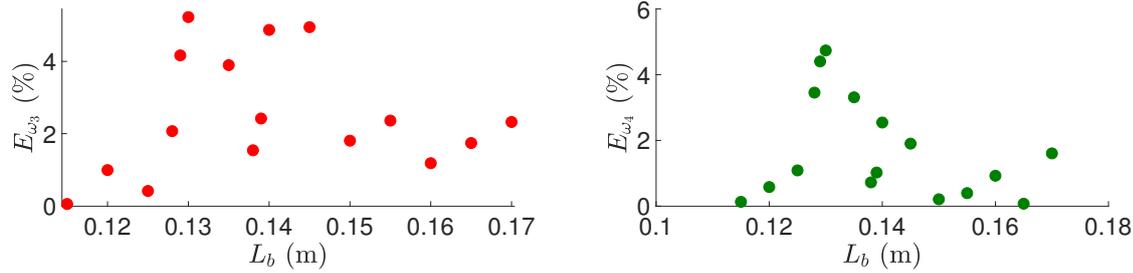
FIGURE 3.7 – Tracés théoriques et expérimentaux des rapports ω_4/ω_3 et ω_3/ω_2 pour vérifier la réalisation des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 dans le cas de la configuration unimorphe. Les points expérimentaux en circuit fermé ('x' rouge) et en circuit ouvert ('+' bleu) sont tracés en fonction de la longueur L_b de la poutre. Ces tracés expérimentaux sont comparés avec les courbes théoriques en circuit fermé ($V = 0$) avec et sans couche de colle d'époxy (ligne pointillée et continue). Les calculs théoriques sont obtenus via la résolution de l'équation 2.86.

l'erreur E_ω définie dans l'équation 3.4 pour les quatre premières pulsations obtenues pour les différentes longueurs L_b (cf la figure 3.8).

On observe que l'erreur reste inférieure à 8% sur la figure 3.8, et les erreurs les plus importantes sont observées sur la pulsation propre du premier mode. Or, dans le cas du premier mode les pulsations propres étant faibles leur identification est parfois altérée par les limites du matériel expérimental.

Ces résultats permettent de confirmer que les développements analytiques du chapitre 2 sont fiables pour estimer les pulsations propres de la configuration unimorphe, mais aussi


 (a) Tracé de l'erreur sur ω_1 en fonction de la pulsation estimée à L_b .

 (b) Tracé de l'erreur sur ω_2 en fonction de la pulsation estimée à L_b .

 (c) Tracé de l'erreur sur ω_3 en fonction de la pulsation estimée à L_b .

 (d) Tracé de l'erreur sur ω_4 en fonction de la pulsation estimée à L_b .

 FIGURE 3.8 – Calcul des erreurs E_{ω_k} (%), avec $k = 1, 2, 3$ et 4 , (cf l'équation 3.4) entre les pulsations propres théoriques (issues du calcul sur l'équation 2.86) et expérimentales des quatre premiers modes de la configuration unimorphe en circuit fermé ($V = 0$).

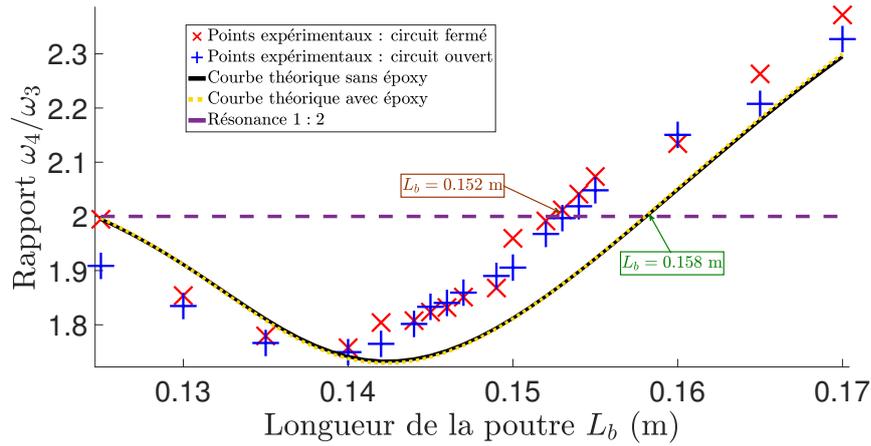
les longueurs de poutre L_b nécessaires pour ajuster les résonances internes voulues. D'après le chapitre 2, on sait qu'il existe une différence entre la pulsation propre obtenue en circuit ouvert et celle obtenue en circuit fermé. Cette différence étant liée au coefficient de couplage piézoélectrique d_{31} , si les deux pulsations sont confondues le couplage électromécanique n'est pas très bon (cf la figure 3.7). Ainsi, sur la résonance 1 : 2 le couplage n'est pas optimal (cf la figure 3.7(a) à $L_b = 129$ mm), contrairement au cas de résonance 1 : 3 (cf la figure 3.7(b) à $L_b = 129$ mm).

Traçons les résultats pour la configuration bimorphe.

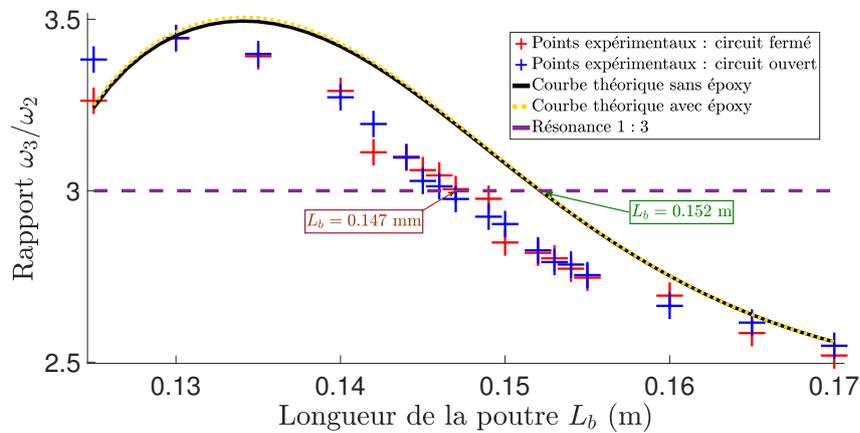
Résonances internes : le cas de la configuration bimorphe

Comme pour le cas de la configuration unimorphe, on trace les résultats expérimentaux des rapports de ω_4/ω_3 et ω_3/ω_2 pour les cas de circuit ouvert et circuit fermé avec les différentes longueurs de poutre L_b testées (cf la figure 3.9). Ces résultats expérimentaux sont comparés aux tracés des courbes théoriques avec et sans couche d'époxy. On suppose toujours que les couches d'époxy sont symétriques et de 0.1 mm d'épaisseur. À nouveau, on observe un accord qualitatif entre les résultats expérimentaux et théoriques. De plus, on confirme la création des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 voulues. On déduit de la figure 3.9 que :

- la résonance 1 : 2 est réalisée expérimentalement pour $L_b = 0.152$ m et théoriquement pour $L_b = 0.158$ m (cf la figure 3.9(a)). Les pulsations propres associées sont inscrites dans le tableau 3.4.



(a) Tracés théoriques et expérimentaux du rapport ω_4/ω_3 en fonction de la longueur de la poutre L_b .



(b) Tracés théoriques et expérimentaux du rapport ω_3/ω_2 en fonction de la longueur de la poutre L_b .

FIGURE 3.9 – Tracé des rapports ω_4/ω_3 et ω_3/ω_2 pour vérifier la réalisation des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 en fonction de la longueur L_b de la poutre, dans le cas de la configuration bimorphe. Les points expérimentaux en circuit fermé ('x' rouge) et en circuit ouvert ('+' bleu) sont tracés en fonction de la longueur L_b de la poutre. Ces tracés expérimentaux sont comparés avec les courbes théoriques avec et sans couche de colle d'époxy (ligne pointillée et continue) issues du calcul de l'équation 2.86.

- la résonance 1 : 3 est obtenue pour $L_b = 0.147$ m expérimentalement et $L_b = 0.152$ m théoriquement d'après la figure 3.9(b). Les valeurs de longueurs et de pulsations propres sont écrites dans le tableau 3.5.

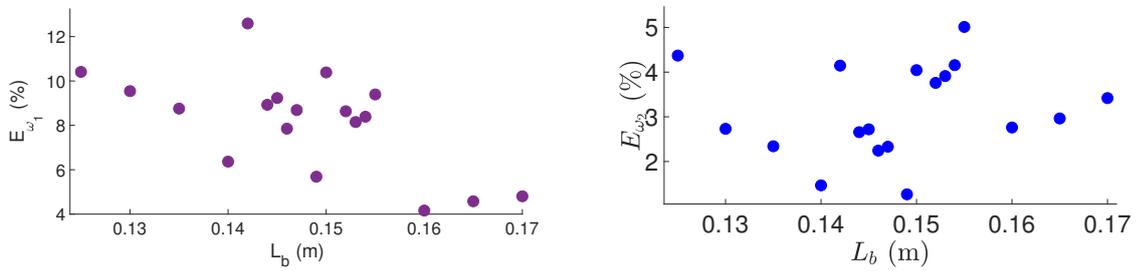
La comparaison qualitative des courbes des figures 3.9(a) et 3.9(b) ne permet pas de quantifier l'erreur entre la pulsation propre expérimentale et celle calculée théoriquement. On trace donc E_ω (cf l'équation 3.4) pour les quatre premières pulsations obtenues pour les différentes longueurs L_b (cf la figure 3.10). On observe que l'erreur reste inférieure à 12% sur la figure 3.10, et les erreurs les plus importantes sont observées sur les pulsations du premier et du troisième mode, pour des longueurs de poutre L_b entre 0.14 et 0.155 m.

Tableau 3.4 – Pulsations propres de la configuration bimorphe associées à la résonance 1 : 2, dans le cas d’un circuit fermé.

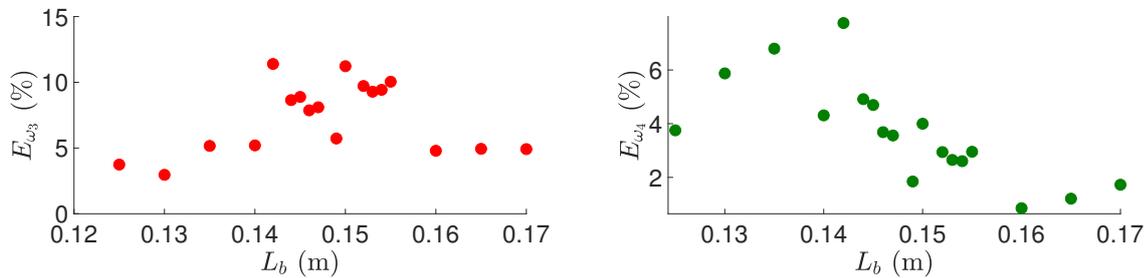
	L_b (m)	ω_3 (rad/s)	ω_4 (rad/s)	ω_4/ω_3
Expérimental	0.152	1 852	3 739	2.019
Théorique	0.158	1 823	3 647	2.001

Tableau 3.5 – Pulsations propres de la configuration bimorphe associées à la résonance 1 : 3, dans le cas d’un circuit fermé.

	L_b (m)	ω_2 (rad/s)	ω_3 (rad/s)	ω_3/ω_2
Expérimental	0.147	701.5	2 097	2.989
Théorique	0.152	686.4	2 063	3.005



(a) Tracé de l’erreur sur ω_1 en fonction de la pulsation estimée à L_b .. (b) Tracé de l’erreur sur ω_2 en fonction de la pulsation estimée à L_b ..



(c) Tracé de l’erreur sur ω_3 en fonction de la pulsation estimée à L_b .. (d) Tracé de l’erreur sur ω_4 en fonction de la pulsation estimée à L_b ..

FIGURE 3.10 – Calcul des erreurs E_{ω_k} (%), avec $k = 1, 2, 3$ et 4 , (cf l’équation 3.4) entre les pulsations théoriques (issues du calcul de l’équation 2.86) et expérimentales des quatre premiers modes propres de la configuration bimorphe.

Comme précédemment, comparer les pulsations en circuit ouvert et celles obtenues en circuit fermé permet d’extraire une information sur le couplage électro-mécanique. Dans le cas bimorphe, le couplage semble bon pour la résonance 1 : 2 (cf la figure 3.9(a) à $L_b = 153$ mm) et la résonance 1 : 3 (cf la figure 3.9(b) à $L_b = 146$ mm).

Pour les deux configurations, on observe des erreurs E_{ω} entre les pulsations théoriques et expérimentales qui sont plus importantes pour les pulsations du premier mode. Ceci peut s’expliquer par une difficulté à identifier ces pulsations faibles en situation expéri-

mentale, qui est liée à la sensibilité de nos appareils. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle les déformées modales associées à ce premier mode ne sont pas tracées dans la prochaine partie, car elles ne sont pas bien identifiées du fait de leur faible amplitude de déflexion. Ces résultats modaux attestent de la fiabilité des résultats théoriques issus du chapitre 2 pour les deux configurations. Ils prouvent l'obtention des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 telles que $\omega_4 \simeq 2\omega_3$ et $\omega_3 \simeq 3\omega_2$ via un positionnement particulier des matériaux piézoélectriques. Ces derniers peuvent être utilisés pour ajuster les pulsations propres du système afin d'obtenir les ratios voulus entre celles-ci. Ainsi, ces résultats démontrent la possibilité d'effectuer les tests en régime forcé, via la méthode de détection synchrone, afin d'observer la dynamique des structures sur la résonance 1 : 3.

Dans la partie suivante on s'intéresse à l'effet de la présence des matériaux piézoélectriques sur les déflexions modales de la structure.

3.2.2 Les déformées modales

Les déformées modales sont tracées à partir des données expérimentales de déflexion (ϕ_{exp}), pour la poutre nue et les deux configurations. Ces résultats expérimentaux sont comparés aux courbes prévues théoriquement. Pour cela, les déformées modales sont obtenues théoriquement pour la longueur $L_b = 0.17$ m (ϕ_{theo}), avec seulement la constante A libre dans le cas de la poutre homogène (cf l'équation 2.66). On parle de la constante A_1 pour les deux configurations. Les autres constantes pouvant être écrites en fonction de celles-ci. Ces amplitudes sont identifiées par rapport aux données expérimentales via une méthode des moindres carrés. Les points expérimentaux de déflexion sont obtenus à des distances $s = x_i$ connues expérimentalement. L'erreur entre les déflexions expérimentales (ϕ_{exp}) et celles théoriques (ϕ_{theo}), exprimées aux distances x_i , est calculée telle que :

$$E_{rr} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^n |\phi_{theo}(x_i) - \phi_{exp}(x_i)|^2}{n} \quad (3.5)$$

avec n le nombre de distances prises en compte expérimentalement.

Déformées modales : le cas de la poutre nue

Une première vérification des déformées modales connues est faite sur la poutre nue. On trace les deuxième, troisième et quatrième déflexions modales expérimentales, et on les compare avec les courbes théoriques obtenues à partir des développements du chapitre 2. Le coefficient libre A est identifié à partir des résultats expérimentaux, pour cela on utilise la fonction "lsqnonlin" de Matlab. Cette fonction trouve le coefficient A qui minimise l'erreur entre les points théoriques et expérimentaux au travers d'une méthode des moindres carrés.

Les déformées modales correspondantes sont tracées sur la figure 3.11, on observe un bon accord qualitatif entre les points expérimentaux et les courbes théoriques. Cette corrélation peut être vérifiée par le calcul de l'erreur E_{rr} de l'équation 3.5. Les erreurs entre les points expérimentaux et les points théoriques des différentes déformées modales sont calculées dans le tableau 3.6.

Elles sont inférieures à 1%, ce qui confirme que les résultats analytiques et expérimentaux ont une bonne corrélation.

Vérifions les résultats dans le cas de la configuration unimorphe.

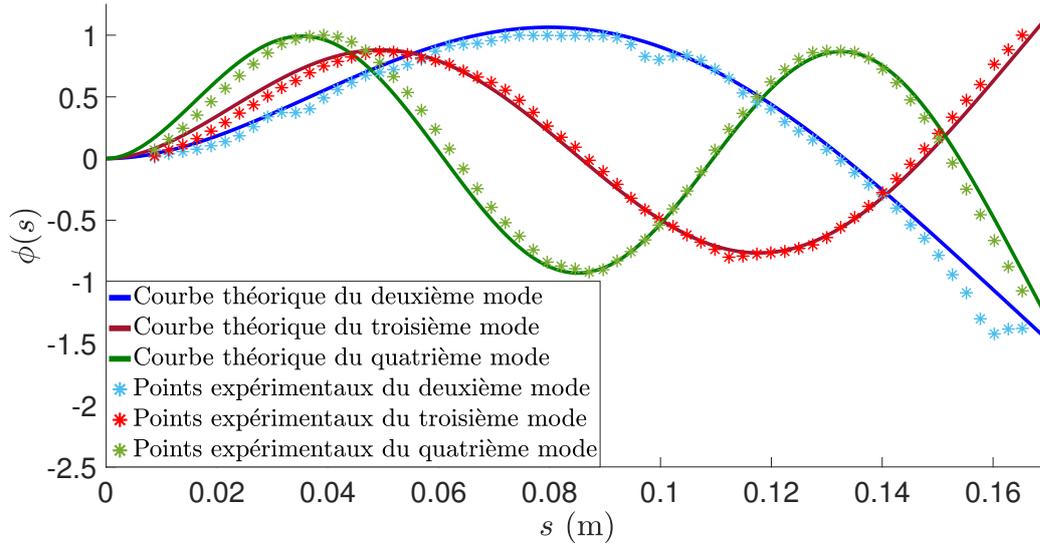


FIGURE 3.11 – Comparaison entre les points expérimentaux (*) et les courbes théoriques (-) du deuxième, troisième et quatrième mode de la poutre nue, pour une longueur de poutre $L_b = 0.17$ m.

Tableau 3.6 – Calcul des erreurs E_{rr} de l'équation 3.5 entre les points expérimentaux et les points théoriques des déformées modales de la poutre nue.

Deuxième mode	Troisième mode	Quatrième mode
0.89%	0.31%	0.85%

Déformées modales : le cas de la configuration unimorphe

Dans le cas de la configuration unimorphe, on a $L_b = 0.17$ m pour le calcul des différentes déformées modales. La distance Δ est fixée à 60 mm et la longueur L_p à 50 mm (cf la figure 3.1), ce qui impose $x_1 = 0.06$ m et $x_2 = 0.11$ m. On trace les points expérimentaux des déformées du deuxième, troisième et quatrième mode avec les courbes des déformées théoriques obtenues grâce aux développements analytiques du chapitre 2 (cf la figure 3.12).

Le coefficient A_1 est identifié comme précédemment via la fonction `lsqnonlin`. On observe une bonne corrélation qualitative entre les points expérimentaux et les déformées analytiques. On remarque également un "aplatissement" des déformées modales notamment entre x_1 et x_2 ce qui correspond à l'emplacement du matériau piézoélectrique (cf la figure 3.12). Ce comportement s'explique par le fait que la présence du matériau piézoélectrique augmente la rigidité de la structure entre les positions x_1 et x_2 .

Afin de vérifier la corrélation entre les points expérimentaux et les points théoriques, l'erreur E_{rr} (de l'équation 3.5) est exprimée dans le tableau 3.7 pour les trois modes de la configuration unimorphe qui sont représentés sur la figure 3.12.

On observe dans le tableau 3.7 que la corrélation est meilleure pour le deuxième et troisième mode par rapport au quatrième mode, ce qui confirme l'observation des courbes de la figure 3.12. Les erreurs restent inférieures à 6% pour les trois modes considérés (cf le tableau 3.7).

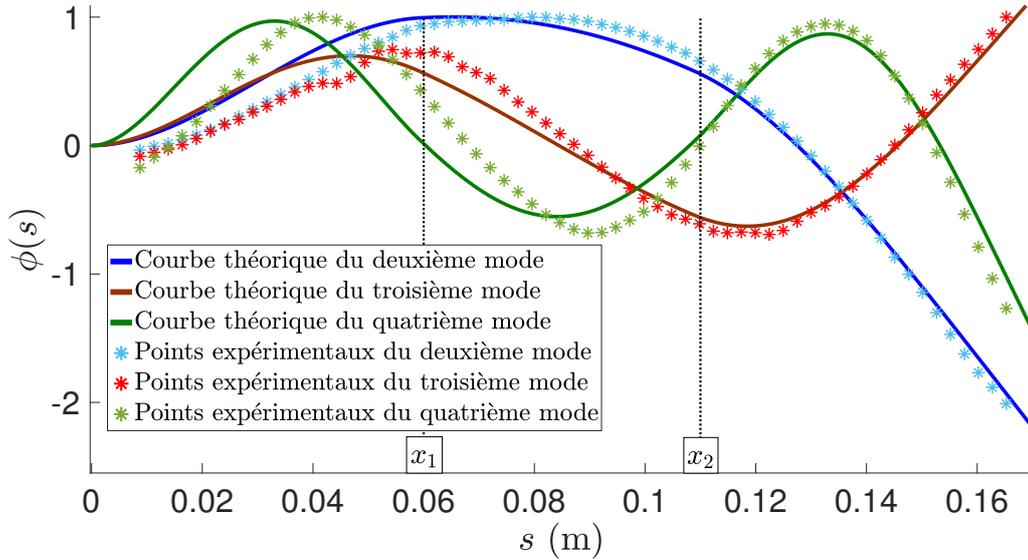


FIGURE 3.12 – Comparaison entre les points expérimentaux (*) et les courbes théoriques (-) du deuxième, troisième et quatrième mode de la configuration unimorphe, pour une longueur de poutre $L_b = 0.17$ m. L'emplacement du matériau piézoélectrique est matérialisé par les lignes pointillées $x_1 = 0.06$ m et $x_2 = 0.11$ m.

Tableau 3.7 – Calcul des erreurs E_{rr} de l'équation 3.5 entre les points expérimentaux et les points théoriques des déformées modales de la configuration unimorphe.

Deuxième mode	Troisième mode	Quatrième mode
1.36%	1.95%	5.93%

Intéressons nous maintenant à la configuration bimorphe.

Déformées modales : le cas de la configuration bimorphe

Dans le cas bimorphe, on a $L_b = 0.17$ m, la distance Δ est fixée à 70 mm et la longueur des matériaux piézoélectriques est $L_p = 50$ mm (cf la figure 3.1). Ainsi, les distances x_1 et x_2 sont : $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m. À nouveau on fait la comparaison entre les déformées modales des deuxième, troisième et quatrième modes obtenues expérimentalement, et celles obtenues analytiquement à partir des développements du chapitre 2 (cf la figure 3.13). L'identification du coefficient A_1 se fait à partir des points expérimentaux grâce à la fonction lsqnonlin.

On observe une meilleure corrélation entre les données expérimentales et théoriques que dans le cas de la configuration unimorphe (cf les figures 3.12 et 3.13). Ceci est confirmé par les calculs d'erreurs E_{rr} entre les points expérimentaux et les points théoriques de l'équation 3.5. En effet, les erreurs pour les trois modes de la configuration bimorphe sont inférieures à 2%.

Tout comme pour le cas de la configuration unimorphe, on observe un aplatissement des déformées modales entre x_1 et x_2 , et les matériaux piézoélectriques ont un effet global sur les déformées modales (cf la figure 3.13).

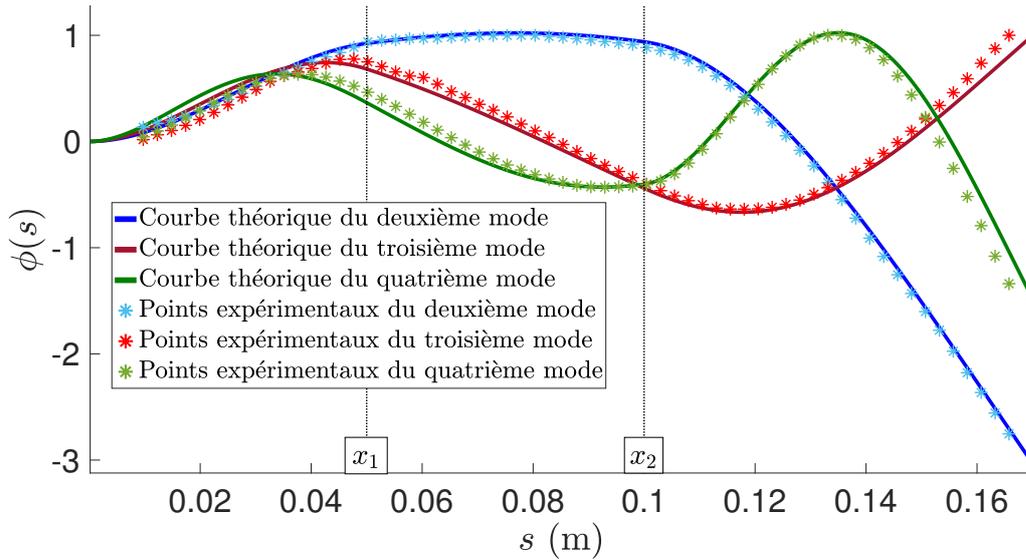


FIGURE 3.13 – Comparaison entre les points expérimentaux (*) et les courbes théoriques (-) des deuxième, troisième et quatrième modes de la configuration bimorphe, pour une longueur de poutre $L_b = 0.17$ m. L'emplacement du matériau piézoélectrique est matérialisé par les lignes pointillées $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m.

Tableau 3.8 – Calcul des erreurs E_{rr} de l'équation 3.5 entre les points expérimentaux et les points théoriques des déformées modales de la configuration bimorphe.

Deuxième mode	Troisième mode	Quatrième mode
0.15%	0.7%	1.14%

On observe que les déformées modales obtenues sont modifiées par la présence des matériaux piézoélectriques dans les deux configurations. En effet, la présence des matériaux augmente la rigidité de la structure entre x_1 et x_2 . Afin de mieux observer ce phénomène, comme dans le chapitre 2 on trace les points expérimentaux des déformées modales du quatrième mode des trois configurations sur la même figure (cf la figure 3.14). On observe, comme dans le cas analytique, l'augmentation de la rigidité sur la configuration unimorphe et la configuration bimorphe par rapport à la poutre nue avec des déflexions plus faibles entre x_1 et x_2 sur la figure 3.14 ($x_1 = 0.06$ m et $x_2 = 0.11$ m pour la configuration unimorphe ; $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m pour la configuration bimorphe).

Les déformées modales de la configuration bimorphe s'avèrent plus conformes à notre modèle théorique que celles de la configuration unimorphe. Cette différence peut venir de la modification de l'axe neutre induite dans le cas unimorphe entre x_1 et x_2 . Mais, on observe également que les données expérimentales pourraient être retravaillées, notamment parce que les points expérimentaux des déformées ne passent pas par l'origine. Ce problème étant plus marqué dans le cas unimorphe, il peut expliquer la moins bonne corrélation entre les points théoriques et expérimentaux (cf le tableau 3.7). Ainsi, même s'il est possible que l'encastrement ne soit pas parfait, comme souvent expérimentalement, il serait souhaitable de retravailler les données expérimentales afin que les déformées passent par l'origine. En outre, les points de déflexion enregistrés par le laser se faisaient sur la structure, on a donc l'ajout de l'épaisseur de l'époxy et du matériau piézoélectrique pour

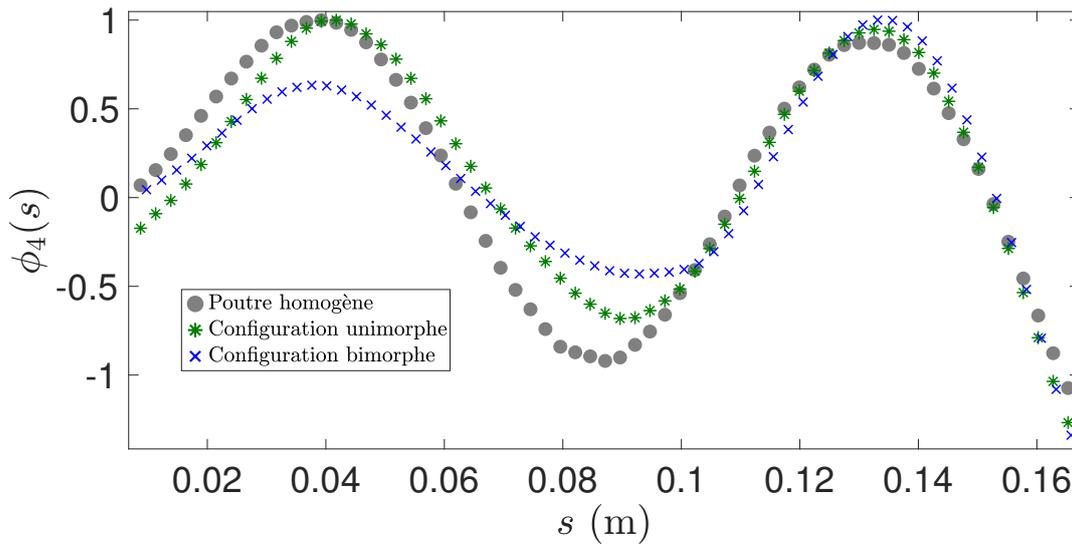


FIGURE 3.14 – Comparaison entre les points expérimentaux des déformées modales des quatrième mode de la poutre homogène ('o'), de la configuration unimorphe ('*') et de la configuration bimorphe ('+').

les points enregistrés entre x_1 et x_2 .

Malgré les imperfections du modèle analytique, celui-ci permet d'obtenir une information qualitative avec des erreurs inférieures à 13 % par rapport aux résultats théoriques, ce qui permet de valider le modèle théorique d'analyse modale présenté dans le chapitre 2.

Les essais expérimentaux de l'analyse modale ont permis de confirmer :

- la possibilité d'utiliser le positionnement des matériaux piézoélectriques pour ajuster des ratios 1 : 2 et 1 : 3 entre des pulsations propres du système telles que $\omega_4 \simeq 2\omega_3$ et $\omega_3 \simeq 3\omega_2$.
- la présence des patches piézoélectriques sur la structure modifie les déflexions modales de celle-ci.
- les résultats analytiques de l'analyse modale sont fidèles aux résultats expérimentaux.

Dans la prochaine partie, les résultats des réponses fréquentielles en régime forcé sont présentés.

3.3 Les comportements fréquentiels de la structure

Dans cette partie, on s'intéresse aux comportements fréquentiels dans deux cas :

- un cas sans résonance interne ($L_b = 0.16$ m) pour obtenir les courbes squelettes via la méthode de boucle à contrôle de phase (Denis et al., 2018),
- un cas avec la présence d'une résonance 1 : 3 dans la structure, étudié avec la méthode de détection synchrone.

On trace les comportements analytiques attendus dans un premier temps, puis les résultats expérimentaux obtenus dans un second temps.

Les données matérielles des matériaux piézoélectriques qui nous sont accessibles sont simplement celles du constructeur, puisque les coefficients non linéaires n'ont pas été identifiés. En effet, cela aurait nécessité un protocole expérimental dédié qui n'a pu être mis en place dans le temps imparti. Ainsi, les équations du mouvement sont réduites par rapport aux seuls coefficients piézoélectriques connus, d'après les équations 2.54 et 2.58 du chapitre 2, on obtient :

$$\mu_m \ddot{v} + c_v \dot{v} - \mu_m |a| \cos(\omega t) = \left[\begin{array}{l} -EI_m(v'''' + v'(v'v'')) - v' \int_s^{L_b} \frac{\mu}{2} \int_s^0 (v'^2)'' ds ds \\ - \int H_{\zeta V} (1 + \frac{v'^2}{2}) V \end{array} \right]' \quad (3.6)$$

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} (Q_{\zeta} v'' (1 + \frac{v'^2}{2}) + Q_V V) ds \quad (3.7)$$

avec $|a|$ l'amplitude de l'accélération de la base de la structure, et ω sa pulsation d'excitation.

Contrairement aux résultats de l'analyse modale on ne pourra pas comparer directement les courbes expérimentales et théoriques. On se contentera d'une comparaison qualitative. Pour cela, certaines données expérimentales, tels que l'amortissement et le niveau d'accélération $|a|$ imposé à la structure, sont identifiées. Les courbes théoriques sont tracées en prenant en compte les données matérielles connues.

3.3.1 Résultats analytiques de la réduction modale à un et deux modes

Dans nos cas de configuration unimorphe et de configuration bimorphe, seules les données matérielles linéaires du matériau piézoélectrique sont connues. Les tracés théoriques s'affranchiront donc de potentiels termes non linéaires. Dans le cas de la méthode de boucle à contrôle de phase, tous les termes physiques pour tracer la courbe squelette sont connus puisqu'on s'affranchit des termes de forçage et d'amortissement. Pour tracer le déplacement $v(s,t)$, il faut connaître l'emplacement $s = x_t$ sur lequel le laser est pointé. Pour les expériences menées avec la boucle à contrôle de phase on suppose que $x_t = 0.115$ m pour chacune des expériences sur les deux configurations, et que la longueur de la poutre est de $L_b = 0.16$ m. On obtient théoriquement pour le deuxième mode, les pulsations propres indiquées dans le tableau 3.9.

Tableau 3.9 – Pulsations propres théoriques du deuxième mode en circuit fermé des configurations unimorphe et bimorphe dans le cas où $L_b = 0.16$ m.

	ω_2 (rad/s)
Configuration unimorphe	680
Configuration bimorphe	637

À $s = x_t$, on trace la courbe squelette du deuxième mode en circuit ouvert pour chaque configuration sur la figure 3.15. Dans les deux cas on obtient une demi-parabole qui commence à la pulsation propre en circuit ouvert.

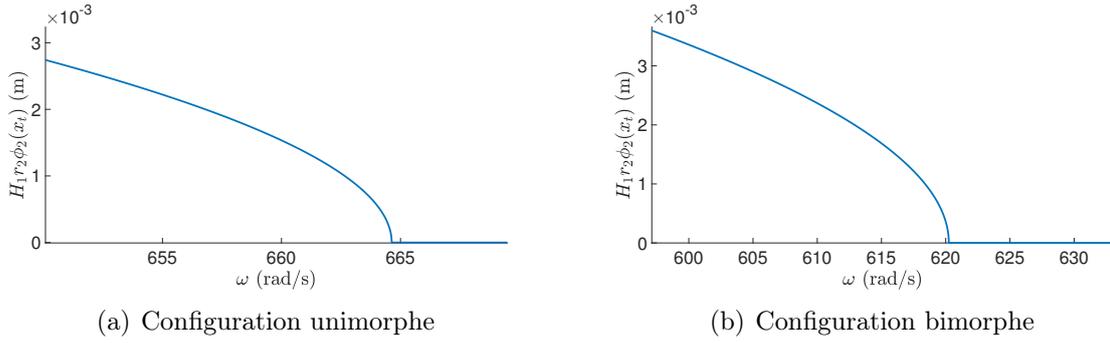


FIGURE 3.15 – Tracé théorique des courbes squelettes du deuxième mode en circuit ouvert des deux configurations a) unimorphe et b) bimorphe, dans le cas du circuit ouvert. Ces tracés sont effectués à partir de l'équation 2.156.

Pour les résultats sur la résonance 1 : 3, il est possible d'identifier les amortissements c_v des deux configurations unimorphe et bimorphe, à partir des données expérimentales. Pour cela, on identifie les amortissements spécifiques ξ , en utilisant la méthode par acuité de résonance (Inman, 1989) (cf la figure 3.16), sur les courbes forcées à la plus faible amplitude d'accélération. Dans notre cas on enregistre le déplacement obtenu par le vibromètre laser et l'accélération enregistrée par l'accéléromètre placé sur le système d'encastrement. Les signaux enregistrés sont des signaux sinusoïdaux, on passe donc d'un déplacement à une accélération en multipliant par $(2 \times \pi \times f)^2$ avec f la fréquence.

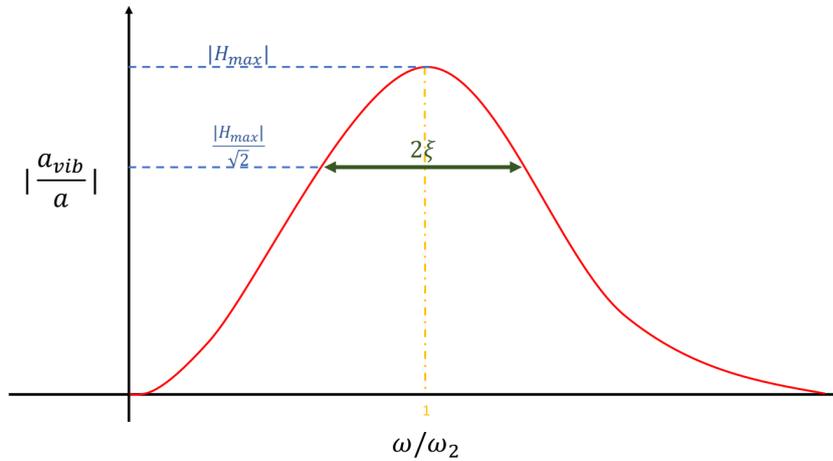


FIGURE 3.16 – Méthode par acuité de résonance pour obtenir l'amortissement spécifique ξ d'une structure (Inman, 1989) via le rapport des réponses fréquentielles des accélérations de la structure (a_{vib}) et de la base (a), à basse amplitude de forçage.

On trace la figure 3.17 pour obtenir ξ pour les deux configurations : unimorphe et bimorphe. On a $c_v = 2\omega_2\xi\mu_m$, or dans l'expression dynamique on suppose que μ_m , qui dépend de s , se retrouve dans l'intégrale de projection :

$$\int_0^{L_b} \mu_m(s)\phi^2(s) ds = 1 \quad (3.8)$$

puisqu'on a normalisé les déformées modales par rapport à la masse. On obtient $c_v = 2\omega_2\xi$. Les amortissements c_v sont donnés pour les deux configurations dans le tableau 3.10.

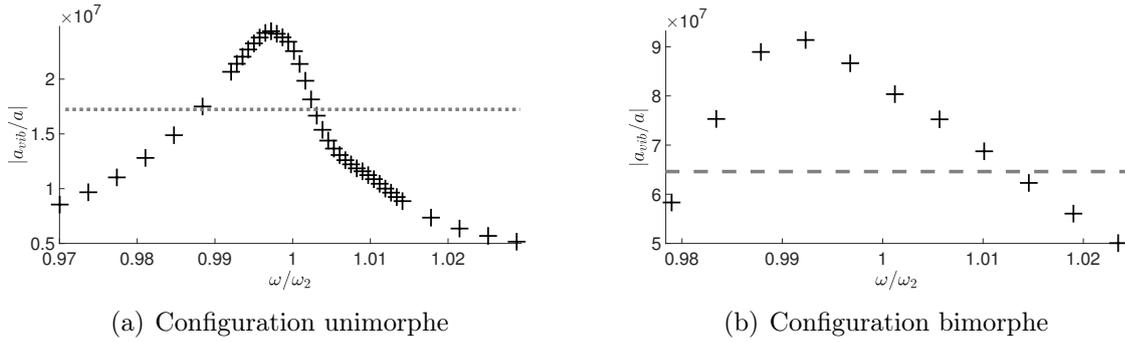


FIGURE 3.17 – Méthode par acuité de résonance pour obtenir l’amortissement spécifique ξ des deux configurations a) unimorphe et b) bimorphe.

Tableau 3.10 – Amortissements spécifiques ξ obtenus pour les deux configurations par utilisation de la méthode par acuité de résonance (cf les figures 3.17(a) et 3.17(b)). Et calcul des amortissements c_v correspondants grâce à l’identification des pulsations propres du deuxième mode ω_2 .

	ξ	ω_2 (rad/s)	c_v
Configuration unimorphe	0.015	855	13.14
Configuration bimorphe	0.014	706	19.98

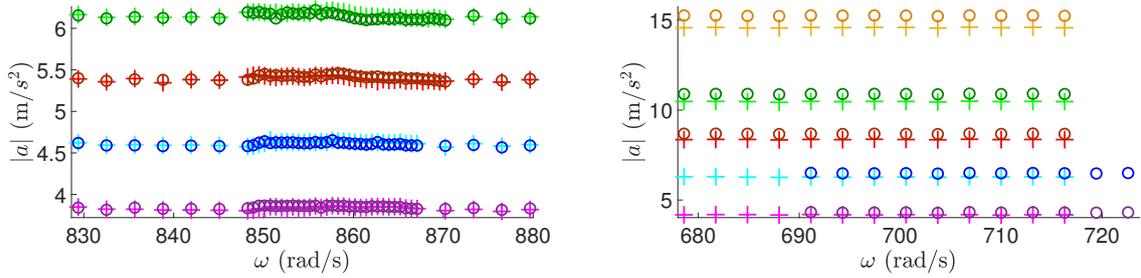
On voudrait également identifier les niveaux d’accélération imposés à la structure. On rappelle qu’ici, dans la méthode de détection synchrone, on a une amplitude d’accélération de la base ($|a|$) constante (i.e. la force généralisée de la partie analytique du chapitre 2 s’écrit $Q_v = \mu_m |a| \cos(\omega t)$). L’accélération retenue expérimentalement est celle imposée au système d’encastrement, qui est enregistrée via l’accéléromètre (cf la figure 3.3).

Les deux expériences (en pointant sur $s = x_{f_2}$ et sur $s = x_{f_3}$) étant effectuées l’une après l’autre, il faut vérifier qu’elles sont réalisées dans les mêmes conditions d’excitation. On différencie le cas où le laser est pointé sur $s = x_{f_2}$ et le cas où il est pointé sur $s = x_{f_3}$. On trace les amplitudes d’accélération imposées à la base $|a|$ en fonction de la pulsation ω pour les deux configurations sur la figure 3.18.

On observe qu’elles sont effectivement quasiment constantes sur toute la bande de pulsation. Dans le cas unimorphe les accélérations sont les mêmes lorsque le laser est pointé sur $s = x_{f_2}$ et lorsqu’il est pointé sur $s = x_{f_3}$. Ceci n’est pas le cas pour la configuration bimorphe où une légère différence d’amplitude d’accélération est observée entre les deux expériences.

L’amortissement et les amplitudes d’accélération de la base ayant été identifiés sur les données expérimentales, on peut déduire les tracés analytiques par la résolution des équations 3.6 et 3.7 via l’implémentation des équations dans le logiciel ManLab.

Les tracés analytiques correspondent aux amplitudes des harmoniques de r_2 et r_3 à leur point d’équilibre (soit $t = t_f$ expérimentalement), or les tracés expérimentaux eux correspondent aux amplitudes des harmoniques de $v(s = x_{f_2}, t_f) = \phi_3(x_{f_2})r_3(t_f)$ et $v(s = x_{f_3}, t_f) = \phi_2(x_{f_3})r_2(t_f)$. On identifie les points x_{f_2} et x_{f_3} théoriques pour pouvoir multiplier nos résultats analytiques par $\phi_3(x_{f_2})$ et $\phi_2(x_{f_3})$. Les valeurs de x_{f_2} et x_{f_3} pour les deux configurations sont reportées dans le tableau 3.11.


 (a) Amplitudes d'accélération $|a|$ imposées à la configuration unimorphe

 (b) Amplitudes d'accélération $|a|$ imposées à la configuration bimorphe

FIGURE 3.18 – Tracés fréquentiels des amplitudes des accélérations $|a|$ imposées aux configurations en fonction de la pulsation d'excitation ω , pendant la méthode de détection synchrone. Les amplitudes d'accélération $|a|$ sont données dans le cas où le laser est pointé sur $s = x_{f_2}$ ('o') et $s = x_{f_3}$ ('+').

Tableau 3.11 – Les abscisses des points x_{f_2} et x_{f_3} (cf la figure 3.6) de la configuration unimorphe et de la configuration et bimorphe, qui présentent une résonance 1 : 3.

	x_{f_2} (m)	x_{f_3} (m)
Configuration unimorphe	0.099	0.113
Configuration bimorphe	0.115	0.1334

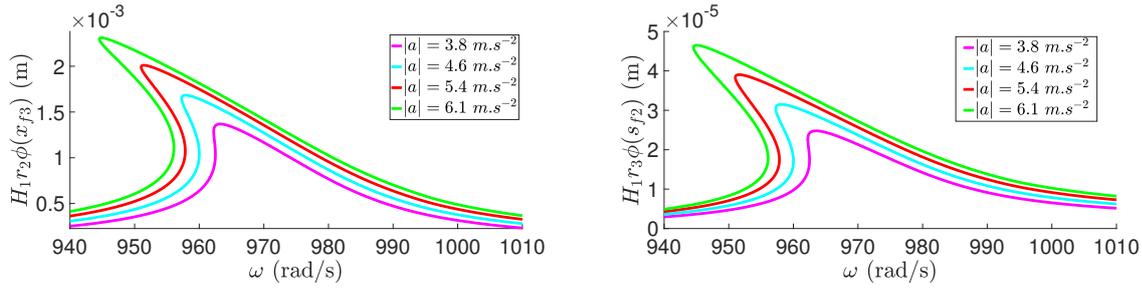
Les équations analytiques prises en compte ne comportent pas de termes quadratiques, puisque les coefficients piézoélectriques non linéaires ne sont pas connus et qu'on suppose un amortissement linéaire. Ainsi, les deuxièmes harmoniques sont nulles analytiquement. On trace donc les premières et troisièmes harmoniques pour la configuration unimorphe et la configuration bimorphe (cf les figures 3.19 et 3.20). On observe que dans les deux cas, l'harmonique 3 de r_3 est faiblement au-dessus de son harmonique 1 et le troisième mode est globalement peu excité. Il semble que les non linéarités cubiques de la poutre sont insuffisantes pour observer l'échange d'énergie entre les modes, pour les amplitudes d'accélération imposées ici.

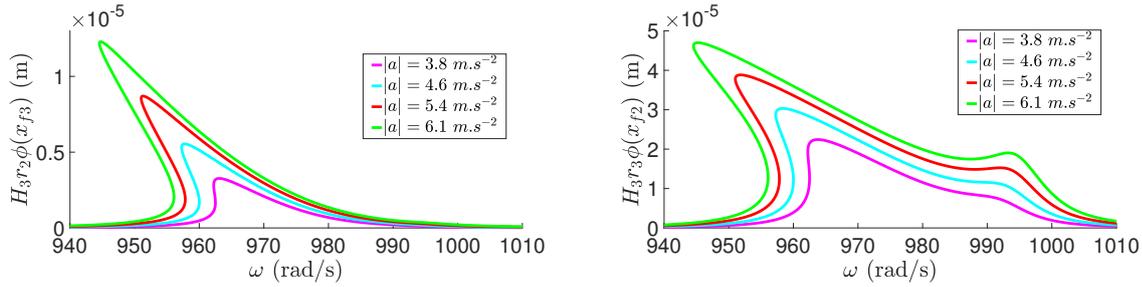
Les tracés analytiques pour un et deux modes ayant été effectués, la sous partie suivante présente les résultats expérimentaux.

3.3.2 Résultats expérimentaux de la boucle à contrôle de phase

On trace les résultats lorsque le système est excité via la méthode de boucle à contrôle de phase sur son deuxième mode propre. Le suivi de la courbe squelette est donc effectué grâce à la boucle de contrôle avec une augmentation de l'excitation donnée à la structure (cf la figure 3.5). Ici, par rapport à nos résultats théoriques, on compte observer les effets de non linéarités quadratiques apportées par le comportement non linéaire du matériau piézoélectrique. Cet effet est visible sur les courbes squelettes par un changement de courbure.

Traçons d'abord la courbe squelette du deuxième mode de la configuration unimorphe dans la sous partie suivante.


 (a) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 1 de $v(x_{f3}, t_f)$.

 (b) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 1 de $v(x_{f2}, t_f)$.

 (c) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 3 de $v(x_{f3}, t_f)$.

 (d) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 3 de $v(x_{f2}, t_f)$.

FIGURE 3.19 – Tracés fréquentiels des amplitudes des harmoniques des points d'équilibre obtenus via la MAN sur les équations 3.6 et 3.7 qui sont projetées sur le deuxième et troisième mode (r_2 et r_3) pour la configuration unimorphe. La réponse est donnée sur le noeud extrémal du mode 3 $s = x_{f3}$ (à gauche) et sur le noeud du mode 2 $s = x_{f2}$ (à droite) (cf le tableau 3.11).

Le cas de la configuration unimorphe

Pour chacune des courbes squelettes des modes excités de la configuration unimorphe (les quatre premiers) on observe une modification de la courbure (cf la figure 3.21 pour le deuxième mode).

Ceci est un comportement caractéristique des non linéarités quadratiques du système. Ces résultats permettent de confirmer la présence de non linéarités quadratiques, ainsi que leur activation à partir d'un certain niveau seuil d'amplitude d'excitation. La courbe squelette expérimentale de la figure 3.21 n'a pas la même allure que celle attendue théoriquement (cf la figure 3.15), notamment proche de la pulsation propre ω_2 . Ceci est dû aux imprécisions de mesures lorsqu'on s'approche des faibles amplitudes. En effet, il s'agit de limites expérimentales liées aux sensibilités de nos appareils, on trace la différence de phase d_p qui vérifie la validité de la boucle sur la figure 3.22 (cf la section 3.1.3 qui explique le fonctionnement de la boucle de contrôle).

On remarque sur la figure 3.22 que la différence de phase d_p augmente pour les pulsations d'excitation proches de la pulsation propre ($\omega > 690$ rad/s). La sensibilité imposée était de $s_p = 0.05$.

Observons maintenant les résultats expérimentaux pour la configuration bimorphe dans la sous partie suivante.

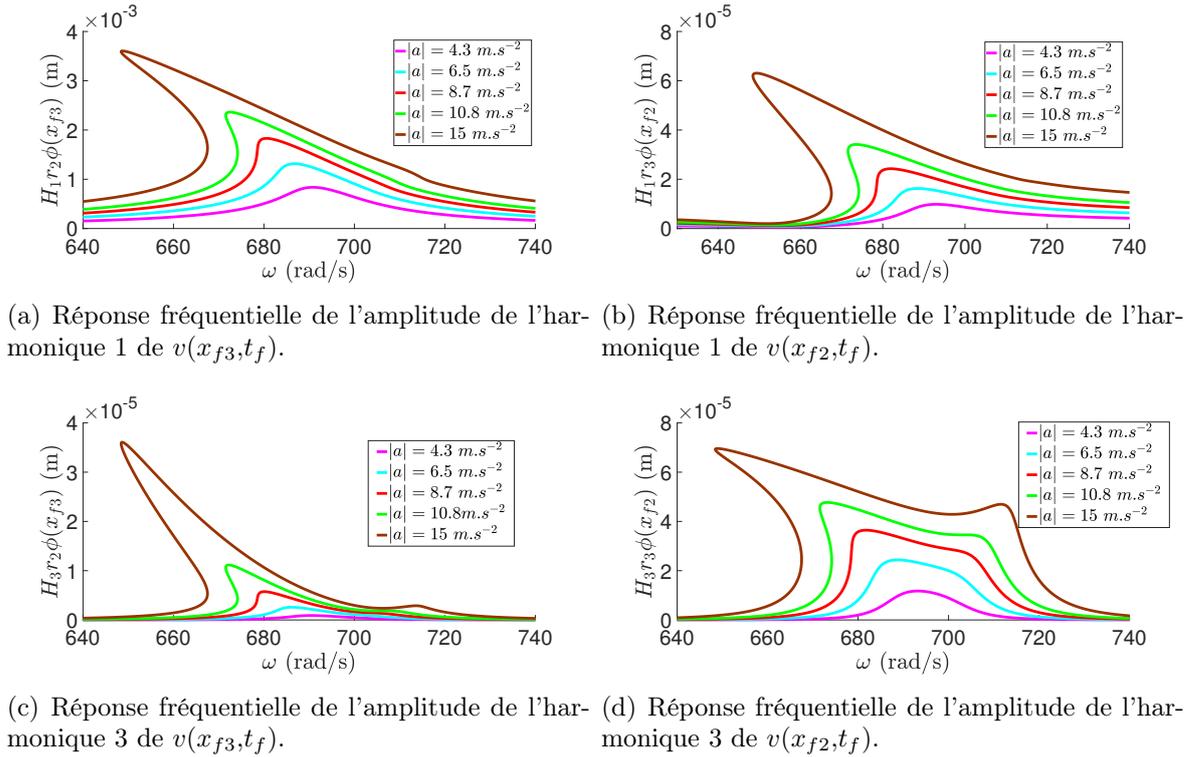


FIGURE 3.20 – Tracés fréquentiels des amplitudes des harmoniques des points d'équilibre obtenus via la MAN sur les équations 3.6 et 3.7, qui sont projetées sur le deuxième et troisième mode (r_2 et r_3) pour la configuration bimorphe. La réponse est donnée sur le noeud extrémal du mode 3 $s = x_{f3}$ (à gauche) et sur le noeud du mode 2 $s = x_{f2}$ (à droite) (cf le tableau 3.11).

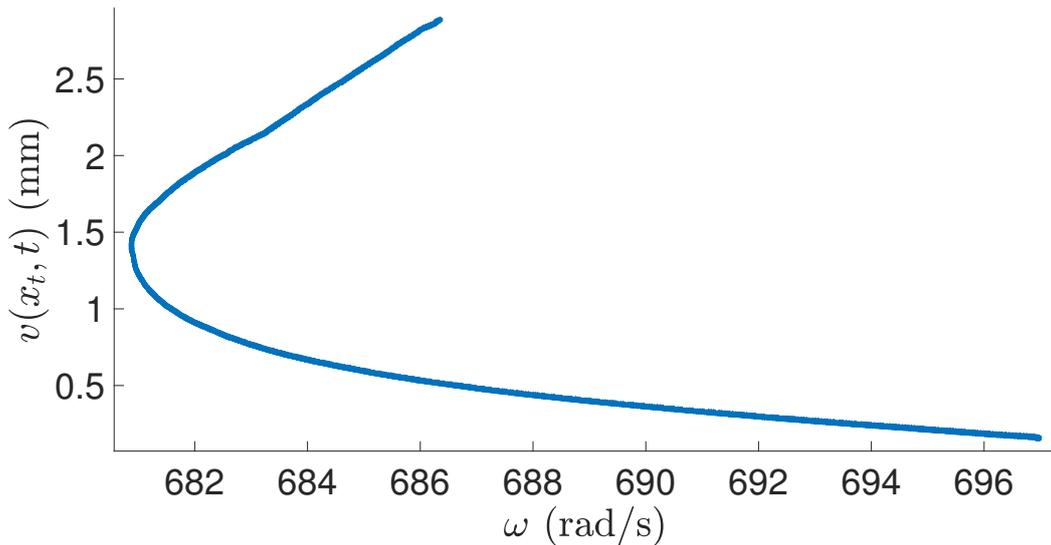


FIGURE 3.21 – Tracé du résultat expérimental de la boucle à contrôle de phase du deuxième mode de la configuration unimorphe en fonction de la pulsation d'excitation ω . Il s'agit de la courbe squelette expérimentale du deuxième mode.

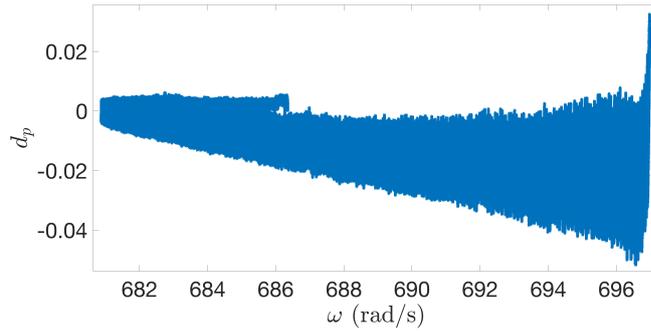


FIGURE 3.22 – Tracé de la différence de phase d_p (cf la section 3.1.3) en fonction de la pulsation d’excitation ω . Elle est associée au tracé de la courbe squelette du deuxième mode de la configuration unimorphe (cf la figure 3.21).

Le cas de la configuration bimorphe

Les courbes squelettes de la configuration bimorphe sont obtenues par la méthode de boucle à contrôle de phase. Pour chacun des quatre premiers modes, il n’est pas observé de changement de courbure comparé au cas unimorphe (cf le cas du deuxième mode sur la figure 3.23).

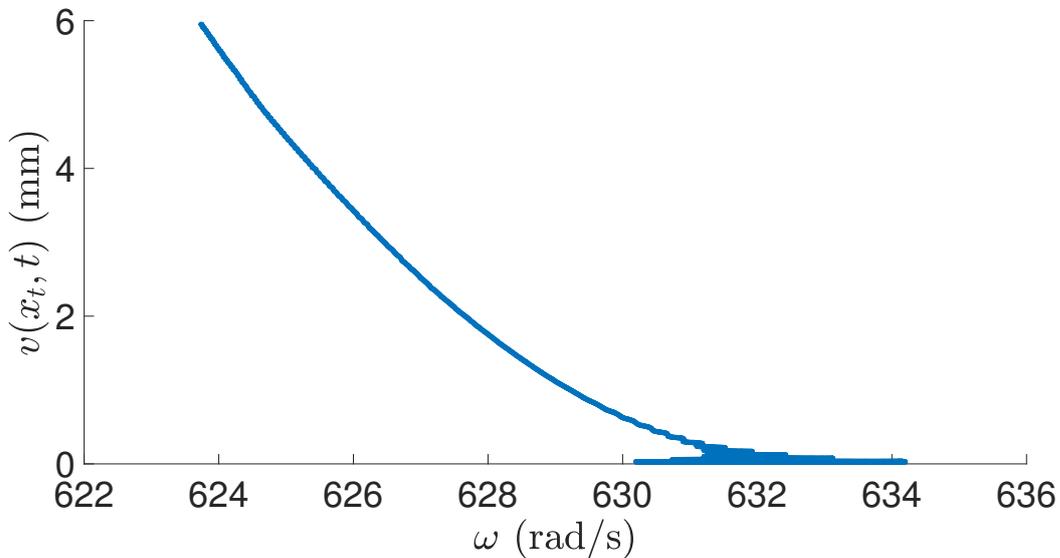


FIGURE 3.23 – Tracé du résultat expérimental de la boucle à contrôle de phase du deuxième mode de la configuration bimorphe en fonction de la pulsation d’excitation ω .

Ceci peut être expliqué par la présence de termes quadratiques plus faibles dans le cas bimorphe qui possède une structure symétrique. En effet, le terme en s_{111} par exemple est annulé par symétrie dans ce cas là (Mam et al., 2016). La PLL est pratiquée dans des cas de circuit ouvert ($Q = 0$), il existe tout de même théoriquement des non linéarités quadratiques, issues du comportement non linéaire matériel des patchs piézoélectriques. L’effet de ces non linéarités quadratiques n’est pas observé dans ce cas. Il est possible que

les amplitudes d'accélération appliquées ici soient insuffisantes pour observer ce comportement non linéaire.

À nouveau l'allure de la courbe squelette n'est pas similaire à celle attendue théoriquement, on trace la différence de phase d_p en fonction des pulsations d'excitation ω (cf la figure 3.24).

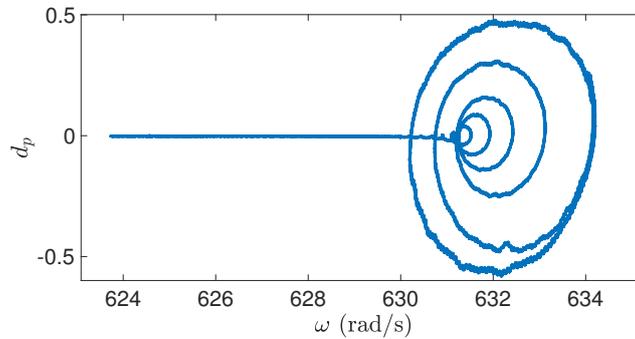


FIGURE 3.24 – Tracé de la différence de phase d_p (cf la section 3.1.3) en fonction de la pulsation d'excitation ω . Elle est associée au tracé de la courbe squelette du deuxième mode de la configuration bimorphe (cf la figure 3.23).

La sensibilité s_p est de 0.5, on observe mieux le phénomène qui empêche d'obtenir une courbe squelette standard qui serait attendue en forme de demi-parabole. En effet pour $\omega > 630$ rad/s l'erreur d_p devient importante. Il s'agit d'un souci de convergence de la méthode dû aux limites des sensibilités des appareils de mesure.

Pour finir, l'effet de non linéarités quadratiques n'est observé que dans le cas de la configuration unimorphe. En effet, d'après l'étude théorique, les non linéarités quadratiques sont plus importantes dans le cas unimorphe qui est asymétrique. On peut expliquer ce phénomène :

- soit par l'apparition de termes quadratiques dus à l'asymétrie (venant du couplage axial/flexion comme expliquer dans l'annexe Guillot et al. (2020a)) ;
- soit parce que les termes quadratiques sont plus faibles dans le cas bimorphe et le comportement non linéaire n'a pas été activé par les amplitudes d'accélération imposées.

Il est possible que même faibles, les non linéarités quadratiques puissent être observées si l'excitation imposée au système est menée jusqu'à un niveau suffisant pour les activer. Ceci n'a pas pu être testé expérimentalement à cause des limitations matérielles sur les vibrations imposées à la structure.

Intéressons nous maintenant au possible comportement multimodal lorsque la structure présente une résonance interne 1 : 3.

3.3.3 Résultats expérimentaux de la méthode de détection synchrone

La méthode de détection synchrone, comme expliqué précédemment, est utilisée pour observer le comportement dynamique des deux configurations lorsque la résonance 1 : 3

est obtenue entre le deuxième et le troisième mode de la structure. Pour cela, on impose $L_b = 0.128$ m pour la configuration unimorphe, et $L_b = 0.147$ m pour la configuration bimorphe, comme exposé dans la partie 3.2.1. On utilise une analyse modale pour repérer les positions du noeud du mode 2 (x_{f2}) et du noeud extrémal du mode 3 (x_{f3}). Ces points sont enregistrés pour effectuer à chaque fois deux tests l'un après l'autre : en pointant le laser sur $s = x_{f2}$, puis sur $s = x_{f3}$. De plus, une analyse est effectuée sur la vibration enregistrée par le vibromètre laser pour séparer les amplitudes des différentes harmoniques. En effet, théoriquement on suppose que l'on va observer principalement l'amplitude de la première harmonique du deuxième mode (en $s = x_{f3}$) et l'amplitude de la troisième harmonique du troisième mode (en $s = x_{f2}$), si la résonance interne est activée. Si le système répond de manière linéaire, seule l'amplitude de la première harmonique du deuxième mode, qui est celui excité directement, sera importante.

Le cas de la configuration unimorphe

Comme expliqué précédemment, on fixe la longueur L_b de la configuration pour qu'il existe une résonance 1 : 3 entre le deuxième et le troisième mode propre, et on enregistre les points x_{f2} et x_{f3} . On excite ensuite la configuration pour différentes amplitudes d'accélération, jusqu'à celle maximale où les fils électriques reliés aux matériaux piézoélectriques se détachent car la structure vibre trop fort. Pour ces tests expérimentaux, on reste dans le cas d'un circuit ouvert ($Q = 0$). Les amplitudes des trois premières harmoniques de la vibration $v(s, t_f)$ sont ensuite tracées, pour le deuxième mode en $s = x_{f3}$ et en $s = x_{f2}$ pour le troisième mode (cf la figure 3.6). Les tests étant effectués indépendamment en pointant le laser sur x_{f2} puis sur x_{f3} , il faut vérifier que la même amplitude d'accélération est donnée dans chaque cas (cf les figures 3.18(a) et 3.18(b)). Dans le cas unimorphe (cf la figure 3.18(a)), les amplitudes d'accélération restent constantes et sont les mêmes dans le cas $s = x_{f2}$ et $s = x_{f3}$.

Tout d'abord, on peut vérifier que l'on observe bien les déplacements des deux modes indépendamment, puisque les amplitudes des différentes harmoniques sont différentes entre celles enregistrées à $s = x_{f2}$ (les figures à droite de la figure 3.25) et x_{f3} (les figures à gauche de la figure 3.25). Ainsi, l'amplitude de la troisième harmonique est bien plus importante dans le cas $s = x_{f2}$ que dans le cas $s = x_{f3}$ et inversement pour l'amplitude de la première harmonique. Ceci prouve que c'est bien le mode 3 qui réagit lorsque le laser est pointé sur $s = x_{f2}$. Une vérification a été faite sur les amplitudes des harmoniques de l'accélération imposée $|a|$ et il n'y a pas d'excitation forte sur l'harmonique 3, seulement sur l'harmonique 1, il s'agit donc bien de la réponse de la structure à une sollicitation sur le deuxième mode.

Sur la figure 3.25, on vérifie bien l'hypothèse que l'amplitude de la première harmonique du mode 2 et l'amplitude de la troisième harmonique du mode 3 sont prédominantes, confirmant un comportement de résonance 1 : 3 comme vu dans la partie théorique du chapitre 2. De plus, l'amplitude de la troisième harmonique du mode 3 est presque égale à un cinquième de l'amplitude de la première harmonique du deuxième mode, l'échange d'énergie est donc bien activé pour ces amplitudes d'excitation de la configuration unimorphe.

L'harmonique 3 du mode 2 ($s = x_{f3}$) montre de très faibles amplitudes qui doivent être dans les limites des seuils de nos appareils de mesure ($H_3 v(x_{f3}, t_f) < 0.02$ mm).

On remarque également que l'amplitude de la deuxième harmonique du mode 2 est assez importante, ce qui serait un effet d'une non linéarité quadratique venant peut être du

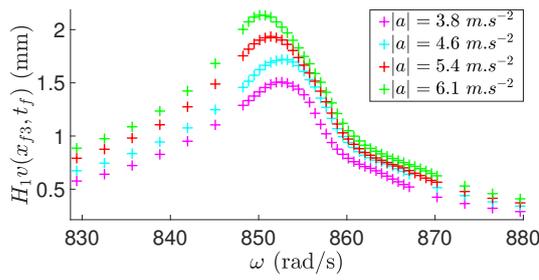
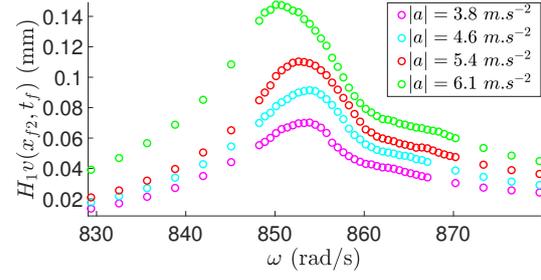
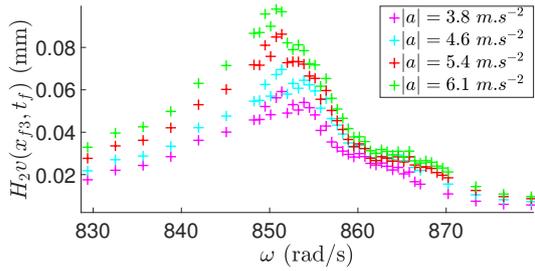
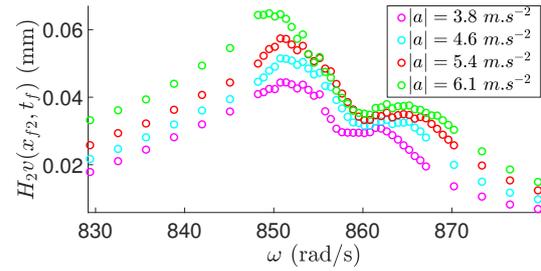
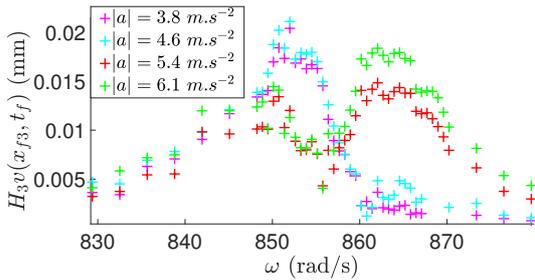
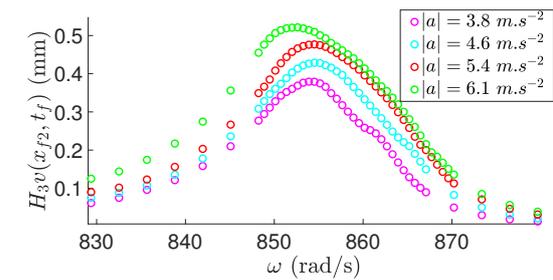

 (a) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 1 de $v(x_{f3}, t_f)$

 (b) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 1 de $v(x_{f2}, t_f)$

 (c) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 2 de $v(x_{f3}, t_f)$

 (d) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 2 de $v(x_{f2}, t_f)$

 (e) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 3 de $v(x_{f3}, t_f)$

 (f) Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'harmonique 3 de $v(x_{f2}, t_f)$

FIGURE 3.25 – Tracés fréquentiels des trois premières harmoniques de la vibration $v(s, t_f)$ obtenues via la méthode de détection synchrone sur la configuration unimorphe, avec le laser pointé sur le noeud extrémal du mode 3 $s = x_{f3}$ ('+') , et le noeud du mode 2 $s = x_{f2}$ ('o'). Les amplitudes des accélérations de la base $|a|$ associées sont décrites sur la figure 3.18(a).

comportement non linéaire du matériau piézoélectrique. En effet, dans le cas unimorphe qui est asymétrique, on s'attend théoriquement à avoir plus de non linéarités quadratiques que dans le cas bimorphe (cf notamment l'annexe de Guillot et al. (2020a)). Ce phénomène peut aussi être induit par un terme d'amortissement non linéaire (Malaktar, 2003, Colin et al., 2020).

Observons les résultats dans le cas de la configuration bimorphe.

Le cas de la configuration bimorphe

On impose l'emplacement du système d'encastrement sur la structure afin de réaliser la résonance 1 : 3. Grâce à une analyse modale, on enregistre les points x_{f_2} et x_{f_3} , noeuds du deuxième mode et du troisième mode. On vérifie que l'amplitude d'accélération imposée à la structure dans le cas $s = x_{f_2}$ et $s = x_{f_3}$ reste constante sur la bande de pulsation et de la même valeur entre les deux cas (cf la figure 3.18(b)). On observe que les amplitudes d'accélération restent constantes, cependant on a une différence des niveaux d'amplitude entre les cas où $s = x_{f_2}$ et $s = x_{f_3}$. En effet, on remarque une amplitude d'accélération plus faible dans les cas où $s = x_{f_3}$. Les amplitudes des harmoniques de la vibration $v(s, t_f)$ en $s = x_{f_3}$ sont sans doute sous estimées par rapport à celles obtenues en $s = x_{f_2}$ sur la figure 3.26. On observe à nouveau que les harmoniques prépondérantes sont la première pour $v(x_{f_3}, t_f)$ et la troisième pour $v(x_{f_2}, t_f)$. Mais, les amplitudes des harmoniques 1 et 3 des vibrations $v(x_{f_2}, t_f)$ et $v(x_{f_3}, t_f)$, sont du même ordre que l'amplitude 3 de la vibration $v(x_{f_2}, t_f)$. On suppose malgré tout un début d'échange d'énergie observable entre les deux modes en résonance. Les amplitudes des deuxièmes harmoniques des deux vibrations sont faibles mais commensurables cette fois. Elles indiquent un potentiel comportement non linéaire quadratique.

Pour les deux configurations, bimorphe et unimorphe, la résonance interne est activée, puisqu'on observe que l'amplitude de la première harmonique de la vibration à $s = x_{f_3}$ et l'amplitude de la troisième harmonique de la vibration à $s = x_{f_2}$ sont prépondérantes. On observe également dans les deux cas, que les amplitudes des deuxièmes harmoniques des deux vibrations peuvent être commensurables même si elles restent faibles par rapport aux autres harmoniques. Ce phénomène peut être expliqué soit par des contributions non linéaires quadratiques du comportement des matériaux piézoélectriques, soit par un amortissement dynamique non linéaire dû à des phénomènes aérodynamiques (Malaktar, 2003, Colin et al., 2020).

La présence d'amplitudes de la deuxième harmonique commensurables ainsi que des amplitudes des troisièmes harmoniques plus importantes que les prévisions analytiques, prouve qu'il manque des données au modèle théorique. Ainsi, on peut supposer que l'identification des coefficients non linéaires piézoélectriques pourraient améliorer les prévisions théoriques. Ces termes non linéaires seraient notamment à l'origine d'un comportement quadratique, mais aussi de coefficients cubiques venant amplifier le comportement d'échange sur la résonance 1 : 3. D'ailleurs, le matériau piézoélectrique PIC 151 a été étudié par Parashar et al. (2013), et montre un comportement non linéaire pour de faibles champs électriques, avec la présence de termes d'ordre 3 et 4 à prendre en compte dans sa fonction de densité électrique. Ces coefficients conduiraient à des termes quadratiques et cubiques dans les équations dynamiques du mouvement.

3.4 Conclusion du chapitre

Une campagne de tests expérimentaux a été menée pour confirmer les résultats théoriques du chapitre précédent. Pour cela, deux configurations électro-mécaniques ont été étudiées : une configuration unimorphe (un seul matériau piézoélectrique) et une configuration bimorphe (deux matériaux piézoélectriques placés symétriquement au-dessus et en dessous de la poutre). Une analyse modale a été effectuée pour identifier les pulsations

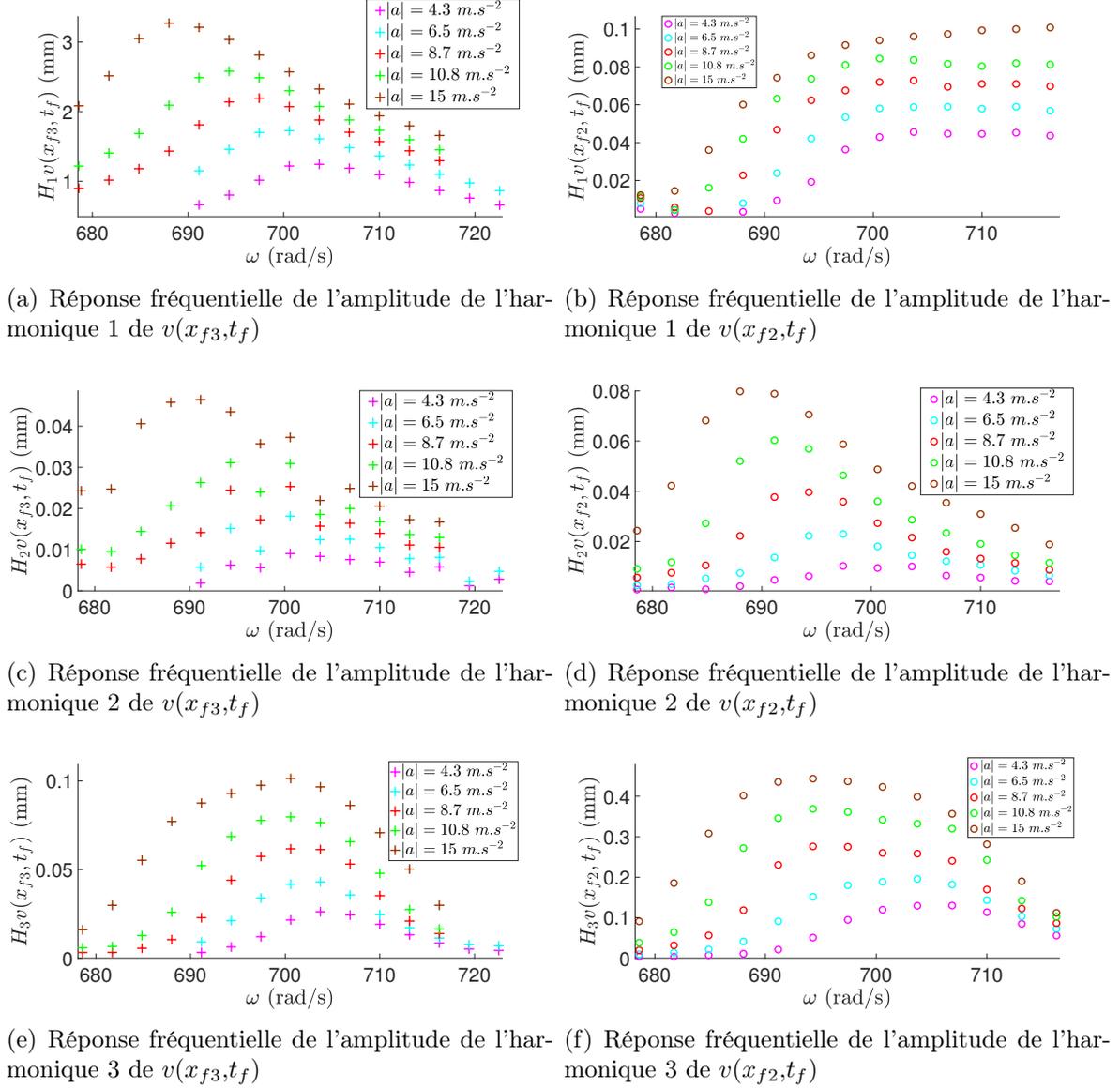


FIGURE 3.26 – Tracés fréquentiels des trois premières harmoniques de la vibration $v(s, t_f)$ obtenues via la méthode de détection synchrone sur la configuration unimorphe, avec le laser pointé sur le noeud extrémal du mode 3 $s = x_{f3}$ ('+') et le noeud du mode 2 $s = x_{f2}$ ('o'). Les amplitudes des accélérations de la base $|a|$ associées sont décrites sur la figure 3.18(b).

propres et les déflexions modales des deux structures. Puis, deux études dynamiques ont été traitées : dans un cas où il n'y avait pas de résonances internes identifiées dans la structure, et dans un cas où une résonance 1 : 3 est créée.

Il aurait été intéressant de faire les tests de détection synchrone dans le cas de la poutre nue mais également sur les configurations pour une longueur L_b où il n'y a pas de résonance. Ces résultats auraient alors pu être comparés avec ceux des deux configurations lors de la présence de la résonance interne 1 : 3. Notamment pour montrer l'intérêt de la résonance 1 : 3 dans l'atténuation des vibrations par l'échange d'énergie induit entre les modes. En outre, ces tests n'ont pas non plus été réalisés sur la résonance 1 : 2, car jugée

trop faible grâce à des tests préliminaires. Il aurait pourtant pu être intéressant de tracer la réponse dynamique autour de cette résonance, en observant à nouveau les amplitudes des harmoniques de chaque mode. De plus, il aurait également été instructif d'effectuer des tests sur les configurations fixées pour la résonance 1 : 3 avec une excitation autour de la pulsation haute, i.e. du troisième mode.

Cette étude expérimentale a été mise en place pour confirmer les résultats théoriques modaux, mais aussi étudier les non linéarités inhérentes au système composite. Dans le chapitre 2, les non linéarités matérielles des patchs piézoélectriques étaient prises en compte pour les développements analytiques et numériques. Pour le travail expérimental présenté, il a été supposé que la fonction de densité électrique était simplement de forme quadratique. En effet, le temps limité n'a pas permis de mettre en place un protocole expérimental pour l'identification des potentiels coefficients non linéaires piézoélectriques.

Ces tests expérimentaux ont permis d'obtenir les résultats originaux suivants :

- la position des matériaux piézoélectriques sur la poutre permet d'ajuster des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3, telles que $\omega_4 \simeq 2\omega_3$ et $\omega_3 \simeq 3\omega_2$, comme vu précédemment dans la partie théorique. Les développements analytiques permettant d'identifier ces pulsations propres ont été vérifiés avec des erreurs inférieures à 12% entre les résultats théoriques et expérimentaux.
- la présence des matériaux modifie bien les déformées modales du système couplé, et pas seulement entre x_1 et x_2 , mais bien sur la déformée entière par l'ajout de rigidité et de masse qu'ils représentent. La comparaison avec le modèle théorique a permis de valider ce dernier pour le calcul des déflexions modales.
- l'étude des courbes squelettes a montré la présence de non linéarités quadratiques pour la configuration unimorphe. Ce comportement non linéaire n'étant pas observé dans le cas de la configuration bimorphe.
- l'exploration expérimentale du cas où la résonance interne 1 : 3 est réalisée a permis de confirmer l'activation d'un échange d'énergie entre les modes concernés. Cette analyse est basée notamment sur l'observation des amplitudes des harmoniques de vibration sur les noeuds des modes.

On veut maintenant s'intéresser à l'utilisation du matériau piézoélectrique afin de contrôler les vibrations et maîtriser les échanges d'énergies modales. Pour cela, on ajoute une nouvelle non linéarité au sein de la structure électro-mécanique. Cette non linéarité étant modulable cette fois, il s'agit de celle incluse dans le circuit électrique relié aux matériaux piézoélectriques. En effet, pour le moment on s'est contenté de circuits simples : circuit ouvert, circuit fermé ou composé d'une résistance dans le chapitre 2. On veut maintenant complexifier ce circuit et trouver des leviers de dimensionnement (les composants du circuit électrique) pour concevoir les échanges d'énergie entre les modes liés par une résonance interne 1 : 3.

Chapitre 4

Systeme electro-mecanique avec circuit electrique non lineaire

Ce chapitre considere un circuit electrique non lineaire relie au patch piezo-electrique de la structure composite. Le but etant de concevoir le circuit afin de changer la nature des echanges d'energie entre les modes. Pour des soucis de simplicite, on prend en compte les non linearites geometriques de la poutre mais pas celles materielles des patches piezo-electriques. Cette etude permet d'obtenir des outils de conception du systeme electro-mecanique au travers des composants electriques du circuit pour le controle ou la recuperation d'energie. Dans un premier temps, on etudie un modele reduit avec un seul mode de la poutre (cf l'article Guillot et al. (2020b)), puis dans un cas ou la poutre presente un resonance interne 1 : 3 (cf l'article Guillot et al. (2020c)). On identifie des regimes periodiques, quasi-periodiques et chaotiques qui peuvent apparaître dans le systeme electro-mecanique via les methodes de complexification, des echelles multiples et de Melnikov. Une verification numerique des resultats theoriques est effectuee, et une comparaison avec un circuit lineaire est presentee.

Sommaire

4.1	Résolution de systèmes réduits couplés à un circuit non linéaire	128
4.1.1	Réduction à un mode mécanique	129
4.1.2	Réduction sur deux modes mécaniques en résonance 1 : 3	136
4.2	Présentation des résultats analytiques	143
4.2.1	Tracés analytiques pour le cas avec un mode mécanique	143
4.2.2	Tracés analytiques lors de la présence de la résonance interne 1 : 3	150
4.3	Comparaison de résultats analytiques et numériques	156
4.3.1	Comparaison pour le cas avec un seul mode mécanique	156
4.3.2	Comparaison pour le cas avec deux modes en résonance interne 1 : 3	161
4.4	Comparaison entre un circuit linéaire et le circuit non linéaire	169
4.4.1	Comparaison avec un circuit résonant dans le cas à un mode	169
4.4.2	Comparaison avec un circuit résonant lors de la présence de la résonance interne	171
4.5	Conclusion du chapitre	174

4.1 Résolution de systèmes réduits couplés à un circuit non linéaire

Le système électro-mécanique considéré est constitué d'une poutre avec un seul matériau piézoélectrique (cf la figure 4.1).

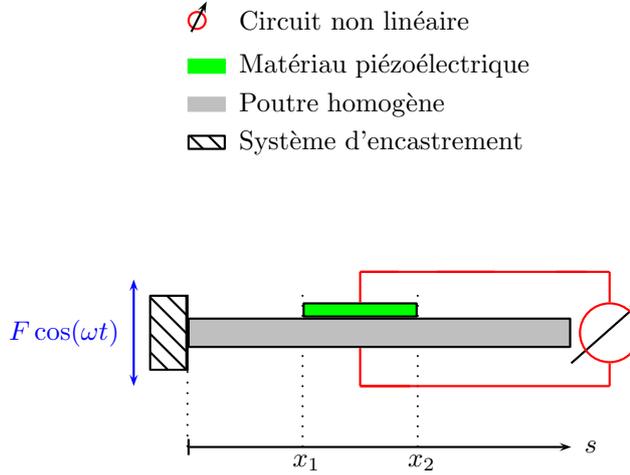


FIGURE 4.1 – Schéma de la configuration unimorphe reliée à un circuit non linéaire. Un seul patch piézoélectrique est situé entre x_1 et x_2 . Le système est excité par un déplacement latéral de la base : $F \cos(\omega t)$.

Le patch piézoélectrique est situé entre $s = x_1$ et $s = x_2$, et est relié à un circuit électrique non linéaire. Les équations de ce système électro-mécanique sont connues d'après le chapitre 2, il ne reste plus qu'à écrire l'équation du circuit non linéaire. On utilise les équations du système couplé à deux dimensions du chapitre 2, en s'affranchissant du comportement non linéaire des matériaux piézoélectriques (Guillot et al., 2019b) :

$$\mu_m \ddot{v} + c_v \dot{v} - Q_v = \left[-EI_m(s)(v'''' + v'(v'v''))' + v' \int_s^{L_b} -\frac{\mu_m}{2} (v'^2)' ds - \bigwedge H_{\zeta V} V \right]' \quad (4.1)$$

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} (Q_{\zeta} v'' + Q_V V) ds \quad (4.2)$$

Le matériau piézoélectrique est relié à un circuit électrique au comportement non linéaire (cf la figure 4.1), et la force généralisée Q_v est supposée telle que :

$$Q_v = \mu_m F \omega^2 \cos(\omega t) \quad (4.3)$$

où F est l'amplitude du déplacement imposée à la base de la structure et ω sa pulsation. Le circuit non linéaire considéré est composé d'une capacité non linéaire C_{NL} , une inductance L_0 , une résistance R et une capacité négative C_{neg} (cf la figure 4.2).

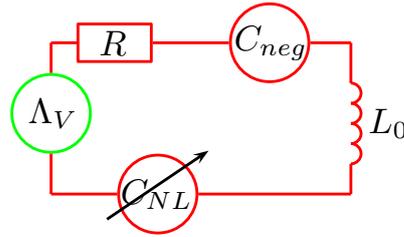


FIGURE 4.2 – Schéma du circuit électrique non linéaire avec le matériau piézoélectrique représenté par sa capacité Λ_V . Le circuit comporte une résistance R , une capacité négative C_{neg} , une inductance L_0 et une capacité non linéaire C_{NL} .

La capacité négative est utilisée pour tenter d'éliminer la partie linéaire due à la capacité du matériau piézoélectrique Λ_V . Au vu de la non linéarité présente dans le circuit, on souhaite étudier le comportement du système électro-mécanique comme cela a été fait pour les absorbeurs non linéaires mécaniques (Roberson, 1952, Carter and Liu, 1961, Sevin, 1961, Struble and Heinbockel, 1963, Haxton and Barr, 1972, Hunt and Nissen, 1982, Kojima and Saito, 1983, Collette, 1998, Vakakis and Gendelman, 2001, Gendelman et al., 2006). L'équation du circuit électrique avec la charge électrique Q et la tension électrique V du matériau piézoélectrique s'écrit :

$$L_0\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q^3}{C_{NL}} + \frac{Q}{C_{neg}} = V \quad (4.4)$$

Afin d'étudier le comportement du système électro-mécanique, le système sera réduit sur un ou des modes d'intérêts.

Dans ce chapitre, on souhaite faire une étude sur les composants électriques du circuit non linéaire. En effet, on veut identifier des outils de conception sur la valeur de ces paramètres afin de modifier les régimes dynamiques du système : obtenir des régimes périodiques, quasi-périodiques voire chaotiques. Pour cela, on utilise les méthodes couplées de complexification et des échelles multiples, ainsi que la méthode de Melnikov. Ces méthodes sont appliquées sur les systèmes réduits adimensionnés. On étudie des cas réduits à un seul mode mécanique, et des cas de résonance 1 : 3 puisque le modèle ne présente plus que des non linéarités cubiques.

Les développements analytiques sont menés sur les modèles réduits pour identifier les points d'équilibre ainsi que leur instabilité potentielle dans un cas à un mode, puis dans le cas où il existe une résonance 1 : 3. Des tracés des résultats théoriques sont ensuite effectués pour statuer sur les effets des différents composants électriques, et pour qualifier les différents régimes qu'il est possible d'obtenir. Puis, une vérification via des comparaisons avec des résultats issus d'une méthode d'intégration numérique est présentée. Pour finir, une comparaison avec un circuit linéaire est réalisée afin de proposer une potentielle utilisation du système électro-mécanique non linéaire.

4.1.1 Réduction à un mode mécanique

Dans cette partie, on développe la résolution analytique dans le cas où un seul mode de la structure répond lorsqu'il est excité. On suppose donc :

$$v(s,t) = \phi_\tau(s)r_\tau(t) \quad (4.5)$$

L'équation 4.1 se réduit de la manière suivante :

$$\ddot{r}_\tau + \mu_\tau \dot{r}_\tau + \omega_\tau^2 r_\tau + F_\tau \omega^2 \cos(\omega t) = \delta_\tau r_\tau^3 + \Gamma_\tau r_\tau \overbrace{r_\tau^2}^{\ddot{}} + \Delta_V V \quad (4.6)$$

avec les constantes μ_τ , ω_τ , F_τ , δ_τ , Γ_τ et Δ_V définies par l'équation 2.89.

Grâce à l'équation 4.2, on peut exprimer la tension électrique V en fonction de la charge Q telle que :

$$V = \frac{1}{\Lambda_V} (Q - \Lambda_\tau r_\tau) \quad (4.7)$$

avec Λ_V et Λ_τ définis dans l'équation 2.118. On peut alors remplacer V dans l'équation 4.6. Le système réduit d'équations à un mode mécanique devient :

$$\ddot{r}_\tau + \mu_\tau \dot{r}_\tau + \omega_t^2 r_\tau + F_\tau \omega^2 \cos(\omega t) = \delta_\tau r_\tau^3 + \Gamma_\tau r_\tau \overbrace{r_\tau^2}^{\ddot{}} + \frac{\Delta_V}{\Lambda_V} Q \quad (4.8)$$

$$L_0 \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{Q^3}{C_{NL}} + \frac{Q}{C_{neg}} = \frac{1}{\Lambda_V} (Q - \Lambda_\tau r_\tau)$$

avec :

$$\omega_t^2 = \omega_\tau^2 + \frac{\Delta_V \Lambda_V}{\Lambda_\tau} \quad (4.9)$$

la pulsation propre du système électro-mécanique.

Il s'agit d'un système à deux degrés de liberté : un degré mécanique avec la variable en temps du déplacement r_τ et un degré électrique avec la charge électrique Q . Pour résoudre le système couplé, on effectue une adimensionalisation des équations.

Adimensionalisation du système à un mode mécanique

Le changement d'échelle suivant est appliqué aux équations :

$$t^* = t \omega_t \quad (4.10)$$

Ainsi, notre système réduit à deux degrés de liberté de l'équation 4.8 devient :

$$\ddot{r}_\tau + a_1 \dot{r}_\tau + r_\tau + F_\tau \nu^2 \cos(\nu t^*) = k_1 r_\tau^3 + k_2 r_\tau \overbrace{r_\tau^2}^{\ddot{}} + \alpha Q \quad (4.11)$$

$$\ddot{Q} + a_3 \dot{Q} + \delta Q^3 + \beta r_\tau + \beta_2 Q = 0$$

avec pour la première équation :

$$a_1 = \frac{\mu_\tau}{\omega_t},$$

$$\nu = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_t}},$$

$$k_1 = \frac{\delta_\tau}{\omega_t^2},$$

$$k_2 = \Gamma_\tau \quad (4.12)$$

et pour la deuxième équation :

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{R}{L_0 \omega_t}, \\
 \delta &= \frac{1}{C_{NL} L_0 \omega_t^2}, \\
 \beta &= \frac{\Lambda_\tau}{\Lambda_V L_0 \omega_t^2}, \\
 \beta_2 &= \frac{1}{C_{neg} L_0 \omega_t^2} - \frac{1}{\Lambda_V L_0 \omega_t^2} \\
 &= \frac{\zeta}{L_0 \omega_t^2}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Pour étudier le système, on utilise les méthodes de complexification de Manevitch (Manevitch, 2001a) et des échelles multiples (Nayfeh and Mook, 1995), comme présenté dans la sous partie suivante.

Définition des points d'équilibre et des points singuliers

Pour mener l'étude du comportement dynamique, les variables r_τ et Q complexifiées par la méthode de Manevitch (Manevitch, 2001a) deviennent :

$$\begin{aligned}
 \dot{r}_\tau + i\nu r_\tau &= \psi_1 \exp(i\nu t^*) \\
 \dot{Q} + i\nu Q &= \psi_3 \exp(i\nu t^*)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Le comportement dynamique de ce système réduit est étudié à différentes échelles de temps : une échelle de temps lente (t_0) et plusieurs échelles de temps rapide (t_1, t_2, \dots). Les différentes échelles de temps sont définies, à partir d'un petit paramètre ϵ fictif, dans les équations 1.15 et 1.16. Pour mener la résolution via les échelles multiples, des hypothèses d'ordre sur les paramètres du système sont posées :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \epsilon a_{10}, \\
 F_\tau &= \epsilon F_0, \\
 \nu &= 1 + \epsilon \sigma, \\
 k_1 &= \epsilon k_{10}, \\
 k_2 &= \epsilon k_{20}, \\
 \alpha &= \epsilon \alpha_0,
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

où σ est un paramètre de modulation, en supposant que la pulsation de la force d'excitation extérieure ω varie au voisinage de la pulsation naturelle du système principal ω_t .

À $\mathcal{O}(1)$, en utilisant la méthode de Galerkin et le calcul de l'équation 1.36, l'équation 4.11

donne :

$$D_0\psi_1 = 0$$

$$\begin{aligned} D_0\psi_3 &= \frac{1}{8\nu^3} \left(-4a_3\nu^3\psi_3 + i(-3\nu^2\beta\psi_1 - 4\nu^2\beta_2\psi_3 - 4\nu^4\psi_3 + 3\gamma\psi_3^2\bar{\psi}_3) \right) \\ &= \mathcal{F}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ainsi, la variable complexe ψ_1 ne dépend pas de l'échelle rapide t_0 et l'équilibre $D_0\psi_3 = 0$ donne l'équation :

$$\mathcal{F}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3) = 0 \quad (4.17)$$

Il s'agit de la variété invariante lente (Slow Invariant Manifold (SIM) (Gendelman et al., 2008, Ture Savadkoochi et al., 2016)) de notre système. Elle permet de décrire ψ_1 tel que :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{4\beta\nu^2} (4(ia_3\nu^3 - \nu^2(\beta_2 + \nu^2))\psi_3 + 3\gamma\psi_3^2\bar{\psi}_3) \\ &= f(\psi_3, \bar{\psi}_3) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Les points extrémaux du SIM sont obtenus grâce à l'équation $\det(\mathcal{J}) = 0$, où la matrice \mathcal{J} est définie telle que :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \psi_3} & \frac{\partial f(\psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \bar{\psi}_3} \\ \frac{\partial \bar{f}(\psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \bar{f}(\psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \bar{\psi}_3} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Pour obtenir les points d'équilibre du système dynamique, on résout le système à l'ordre supérieur. Ainsi, à $\mathcal{O}(\epsilon)$ l'équation 4.11 s'écrit :

$$\begin{aligned} D_1\psi_1 &= \frac{1}{8\nu^3} \left(-4(\nu^5 F_0 + a_{10}\nu^3\psi_1) \right. \\ &\quad \left. + i(-8\nu^3\sigma\psi_1 - 3k_{10}\psi_1^2\bar{\psi}_1 + 4k_{20}\nu^2\psi_1^2\bar{\psi}_1 - 4\alpha_0\nu^2\bar{\psi}_3) \right) \\ &= \mathcal{H}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$D_1\psi_3 = 0$$

cette fois, ψ_3 ne dépend pas du temps t_1 . Ces résolutions à $\mathcal{O}(1)$ et $\mathcal{O}(\epsilon)$ permettent de définir les points d'équilibre de la dynamique (cf les équations 4.16 et 4.20) tels que :

$$\begin{cases} D_0\psi_3 = 0 \\ D_1\psi_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{F}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3) = 0 \\ \mathcal{H}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

On note également qu'il est possible que points d'équilibre et points extrémaux du SIM soient confondus, on parle alors de points singuliers. Un point singulier est défini par la

réalisation des conditions suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3) = 0 \\ \mathcal{H}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3) = 0 \\ \det(\mathcal{J}) = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Une fois ces points d'équilibre identifiés, on souhaite statuer sur leur instabilité.

Stabilité des points d'équilibre

Les points d'équilibre étant définis, on veut étudier leur instabilité à l'échelle de temps rapide t_0 et à l'échelle de temps lente t_1 . Pour cela on perturbe les points (ψ_1, ψ_3) tels que :

$$\begin{aligned} \psi_1 &\rightarrow \psi_1 + \Delta\psi_1, \\ \psi_3 &\rightarrow \psi_3 + \Delta\psi_3 \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec $|\Delta\psi_1| \ll |\psi_1|$ et $|\Delta\psi_3| \ll |\psi_3|$.

À l'échelle de temps t_0 (cf l'équation 4.16), après linéarisation on obtient le système matriciel suivant :

$$D_0 \begin{pmatrix} \Delta\psi_1 \\ \Delta\bar{\psi}_1 \\ \Delta\psi_3 \\ \Delta\bar{\psi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\psi_1 \\ \Delta\bar{\psi}_1 \\ \Delta\psi_3 \\ \Delta\bar{\psi}_3 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

avec :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \psi_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \bar{\psi}_1} \\ \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \psi_1} & \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \bar{\psi}_1} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

et

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \mathcal{F}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \bar{\psi}_3} \\ \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}_1(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \bar{\psi}_3} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

La stabilité à l'horizon en temps t_0 dépend alors des valeurs propres $\lambda_{0,\pm}$ de la matrice \mathbf{A} (cf les équations 4.24 et 4.26). En effet, le signe de la partie réelle des valeurs propres $\lambda_{0,\pm}$ indique alors l'instabilité des points d'équilibre.

Cette instabilité peut aussi être étudiée au temps t_1 avec la linéarisation de l'équation 4.20 après perturbation (cf l'équation 4.23). Pour cela, on prend en compte $\mathcal{F}_1 = 0$ de l'équation 4.17. En effet, à l'horizon en temps t_1 , la dynamique au temps t_0 est résolue.

Le système de l'équation 4.20 linéarisé se simplifie tel que :

$$D_1 \begin{pmatrix} \Delta\psi_3 \\ \Delta\bar{\psi}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{J}^{-1} \mathbf{H}_j \begin{pmatrix} \Delta\psi_3 \\ \Delta\bar{\psi}_3 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

où :

$$\mathbf{H}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \bar{\psi}_3} \\ \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_1}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_1}{\partial \bar{\psi}_3} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

avec \mathcal{H}_1 et $\bar{\mathcal{H}}_1$ exprimés en $\psi_1 = f(\psi_3, \bar{\psi}_3)$ et $\bar{\psi}_1 = \bar{f}(\psi_3, \bar{\psi}_3)$, et \mathcal{J} de l'équation 4.19. C'est ainsi que le signe des valeurs propres $\lambda_{1,\pm}$ de la matrice $\mathcal{J}^{-1} \mathbf{H}_j$ permet de juger de l'instabilité des points d'équilibre à l'échelle de temps lente t_1 .

Il faut être prudent lorsqu'on parle de zones stables et instables. En effet les points identifiés par la méthode comme instables le sont forcément pour le système, mais, ceci ne préjuge pas de la stabilité certaine des autres points.

Utilisation de la forme polaire des variables complexes

On pose la forme polaire des variables complexes ψ_1 et ψ_3 telles que :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= N_1 \exp(i\delta_1), \quad (N_1, \delta_1) \in \mathbb{R} \\ \psi_3 &= N_3 \exp(i\delta_3), \quad (N_3, \delta_3) \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.29)$$

L'équation du SIM (cf l'équation 4.18) devient :

$$N_1 = \frac{N_3}{16\nu^4\beta^2} \sqrt{9\gamma^2 N_3^4 - 24\gamma\nu^2(\beta_2 + \nu^2) N_3^2 + 16\nu^4(a_3^2\nu^2 + (\beta_2 + \nu^2)^2)} \quad (4.30)$$

Comme expliqué précédemment, on obtient les points extrémaux de ce SIM à partir de $\det(\mathcal{J}) = 0$ de la matrice de l'équation 4.19, soit :

$$N_{3,\pm} = \frac{2}{3\sqrt{\gamma}} \sqrt{-\nu^2(-2(\beta_2 + \nu^2) \pm \sqrt{(\beta_2 + \nu^2)^2 - 3a_3^2\nu^2})} \quad (4.31)$$

On déduit les expressions $N_{1,\pm}$ de l'équation 4.30. Les points extrémaux $(N_{1,\pm}, N_{3,\pm})$ sont connus et, ils existent seulement sous certaines conditions, puisqu'il s'agit de réels (les valeurs sous la racine doivent être positives). Ainsi, si les valeurs sous la racine sont négatives, alors il n'y a pas de points extrémaux et le SIM est monotone.

Les conditions d'existence des points extrémaux sont, d'après l'équation 4.31 :

$$\begin{aligned} \beta_2 &> (\sqrt{3}a_3 - \nu)\nu \\ \beta_2^2 + (2\beta_2 + a_3^2)\nu^2 + \nu^4 &> 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

La première condition donne :

$$L_0 > \frac{\sqrt{3}\Lambda_V R\omega_t - 1}{\Lambda_V\omega_t^2} \quad (4.33)$$

Ainsi, si l'inductance du circuit électrique est en dessous de cette valeur seuil, le SIM du système est monotone.

Une fois le SIM obtenu, on identifie les points d'équilibre. Comme expliqué précédemment, ceux-ci sont obtenus par la résolution du système de l'équation 4.21. D'après les expressions de N_1 et N_3 de l'équation 4.29, il est possible d'écrire $\cos(\delta_1)$, $\sin(\delta_1)$, $\cos(\delta_3)$ et $\sin(\delta_3)$. Les points d'équilibre sont déduits des équations suivantes :

$$\begin{cases} E_{cs1}(N_1^2, N_3^2, F_\tau, \nu) = \cos(\delta_1)^2 + \sin(\delta_1)^2 - 1 = 0 \\ E_{cs3}(N_1^2, N_3^2, F_\tau, \nu) = \cos(\delta_3)^2 + \sin(\delta_3)^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

où E_{cs1} est une équation d'ordre 3 en N_1^2 et d'ordre 2 en N_3^2 , et E_{cs3} est une équation d'ordre 3 en N_3^2 et d'ordre 2 en N_1^2 .

On observe que les équations E_{cs1} et E_{cs3} dépendent de l'amplitude de déplacement F au travers de F_τ . Selon l'amplitude du déplacement imposée à la structure, les points d'équilibre sont placés différemment sur le SIM (sur la partie basse, haute ou intermédiaire).

On remarque que ces équations permettent de définir des amplitudes de déplacement F_\pm reliés aux points extrémaux ($N_{1,\pm}$, $N_{3,\pm}$). En effet, on peut déduire F_\pm au travers de $E_{cs1}(N_{1,\pm}, N_{3,\pm}, F_\pm, \nu) = 0$ ou $E_{cs3}(N_{1,\pm}, N_{3,\pm}, F_\pm, \nu) = 0$, à ν fixé. Ces points correspondent à des points singuliers puisqu'ils vérifient les conditions de l'équation 4.22.

Par conséquent, grâce aux développements analytiques, il est possible de tracer le SIM et les points d'équilibre du système à un seul mode mécanique et statuer sur leur instabilité. Cette méthode couplée permet d'identifier les solutions périodiques stables et instables, et des solutions quasi-périodiques (avec les points singuliers). On peut aussi s'intéresser au potentiel caractère chaotique de la réponse temporelle. Pour cela, une méthode de Melnikov (Guckenheimer and Holmes, 1983) s'intéressant au paramètre β_2 de l'équation 4.11 est présentée dans la sous partie suivante.

Étude de la possible existence de régime chaotique par la méthode de Melnikov

Les paramètres β_2 et δ de l'équation 4.11 sont modifiables puisqu'ils dépendent respectivement de la capacité négative C_{neg} et de la capacité non linéaire C_{NL} . D'ailleurs, le paramètre β_2 peut être positif ou négatif, selon si C_{neg} est inférieur ou supérieur à la capacité du matériau piézoélectrique Λ_V (cf l'équation 4.13). Supposons $\beta_2 < 0$ et posons l'équation en \ddot{Q} du système de l'équation 4.11 telle que :

$$\ddot{Q} + \beta_2 Q + \delta Q^3 + \kappa a_{30} \dot{Q} + \kappa \beta_0 \mathcal{A} \cos(\nu t^* + \phi) = 0 \quad (4.35)$$

avec κ un petit paramètre fictif et r_τ est supposé être une solution périodique telle que $r_\tau = \mathcal{A} \cos(\nu t^* + \phi)$.

L'application de la fonction de Melnikov (Guckenheimer and Holmes, 1983) donne la distance entre les variétés stables et instables \mathcal{D} paramétrée par un temps t_m suivante :

$$\mathcal{D}(t_m) = \int_{-\infty}^{\infty} (\beta_0 \mathcal{A} \cos(\nu t^* + \phi) + a_{30} \dot{Q}) dt^* \quad (4.36)$$

avec pour le système non perturbé :

$$\ddot{Q} = -\beta_2 Q - \delta Q^3 \quad (4.37)$$

Ce qui donne le résultat suivant :

$$\mathcal{D}(t_m) = \frac{4}{3\delta} a_{30} (-\beta_2)^{3/2} + \sqrt{\frac{2}{\delta}} \frac{\pi \sin(\nu t_m + \phi) \nu \beta_0 \mathcal{A}}{ch(\pi \nu / (2\sqrt{-\beta_2}))} \quad (4.38)$$

Si le minimum de cette distance pour tout $\nu t_m \in [0, 2\pi]$ est positif, alors il n'y a pas apparition de régimes chaotiques. Mais, si cette distance change de signe, alors il peut y avoir du chaos. Or $|\sin(\nu t_m + \phi)| \leq 1$. Ainsi :

$$\mathcal{D}(t_m) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3\delta} a_{30} (-\beta_2)^{3/2} + \sqrt{\frac{2}{\delta}} \frac{\pi \nu \beta_0 \mathcal{A}}{ch(\pi \nu / (2\sqrt{-\beta_2}))} > 0 \\ \frac{4}{3\delta} a_{30} (-\beta_2)^{3/2} - \sqrt{\frac{2}{\delta}} \frac{\pi \nu \beta_0 \mathcal{A}}{ch(\pi \nu / (2\sqrt{-\beta_2}))} > 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

Il existe donc des valeurs critiques des paramètres pour lesquelles :

$$\left| \frac{4}{3\delta} a_{30} (-\beta_2)^{3/2} \right| = \left| \sqrt{\frac{2}{\delta}} \frac{\pi \nu \beta_0 \mathcal{A}}{ch(\pi \nu / (2\sqrt{-\beta_2}))} \right| \quad (4.40)$$

Cette équation correspond à $|\mathcal{D}(t_m)| = 0$. Cette limite sera tracée en fonction des paramètres électriques ζ et C_{NL} , afin de vérifier s'il est possible d'obtenir des comportements dynamiques chaotiques.

Cette partie a permis d'identifier les régimes périodiques, quasi-périodiques et chaotiques du système par rapport aux composants électriques du circuit non linéaire. Intéressons-nous maintenant au problème lorsqu'il existe une résonance interne 1 : 3.

4.1.2 Réduction sur deux modes mécaniques en résonance 1 : 3

Pour écrire les équations dynamiques du système réduit présentant une résonance interne 1 : 3, on reprend les équations 4.1 et 4.2. On suppose cette fois que la variable spatio-temporelle $v(s, t)$ s'écrit de la manière suivante :

$$v(s, t) = \phi_n(s) r_n(t) + \phi_m(s) r_m(t) \quad (4.41)$$

avec n et m les deux modes en résonance interne 1 : 3. On déduit les équations réduites de la dynamique par la projection des équations sur ces deux modes particuliers, telles que :

$$\begin{aligned} \ddot{r}_n + \mu_n \dot{r}_n + \omega_n^2 r_n + F_n \omega^2 \cos(\omega t) = & \delta_{nnn} r_n^3 + \delta_{nmm} r_n^2 r_m \\ & + \delta_{nmm} r_n r_m^2 + \delta_{mmm} r_m^3 \\ & + \tau_{nnn} r_n \overbrace{r_n^2} + \tau_{nmm} r_n \overbrace{r_n r_m} \\ & + \tau_{nmm} r_n \overbrace{r_m^2} + \tau_{mnn} r_m \overbrace{r_n^2} \\ & + \tau_{mnn} r_m \overbrace{r_n r_m} + \tau_{mmm} r_m \overbrace{r_m^2} \\ & + \Delta_V V \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{r}_m + \mu_m \dot{r}_m + \omega_m^2 r_m + F_m \omega^2 \cos(\omega t) = & \alpha_{nnn} r_n^3 + \alpha_{nmm} r_n^2 r_m \\
 & + \alpha_{nmm} r_n r_m^2 + \alpha_{mmm} r_m^3 \\
 & + \Gamma_{nnn} r_n \overbrace{r_n^2} + \Gamma_{nmm} r_n \overbrace{r_n r_m} \\
 & + \Gamma_{nmm} r_n \overbrace{r_m^2} + \Gamma_{mnn} r_m \overbrace{r_n^2} \\
 & + \Gamma_{mmm} r_m \overbrace{r_n r_m} + \Gamma_{mmm} r_m \overbrace{r_m^2} \\
 & + \Delta_m V
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$Q = \Lambda_n r_n + \Lambda_m r_m + \Lambda_V V \tag{4.44}$$

avec les coefficients définis dans les annexes 5.2 et 5.3.

De l'équation 4.44, on déduit la tension électrique V telle que :

$$V = \frac{1}{\Lambda_V} (Q - \Lambda_n r_n - \Lambda_m r_m) \tag{4.45}$$

Le matériau piézoélectrique est relié au même circuit que celui du chapitre précédent, ce qui donne l'équation 4.4. Le système d'équations de la structure composite réduit à deux modes devient donc :

$$\begin{aligned}
 \ddot{r}_n + \mu_n \dot{r}_n + \omega_n^2 r_n + F_n \omega^2 \cos(\omega t) = & \delta_{nnn} r_n^3 + \delta_{nmm} r_n^2 r_m \\
 & + \delta_{nmm} r_n r_m^2 + \delta_{mmm} r_m^3 \\
 & + \tau_{nnn} r_n \overbrace{r_n^2} + \tau_{nmm} r_n \overbrace{r_n r_m} \\
 & + \tau_{nmm} r_n \overbrace{r_m^2} + \tau_{mnn} r_m \overbrace{r_n^2} \\
 & + \tau_{mmm} r_m \overbrace{r_n r_m} + \tau_{mmm} r_m \overbrace{r_m^2} \\
 & + \Delta_V \left(\frac{1}{\Lambda_V} (Q - \Lambda_n r_n - \Lambda_m r_m) \right)
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{r}_m + \mu_m \dot{r}_m + \omega_m^2 r_m + F_m \omega^2 \cos(\omega t) = & \alpha_{nnn} r_n^3 + \alpha_{nmm} r_n^2 r_m \\
 & + \alpha_{nmm} r_n r_m^2 + \alpha_{mmm} r_m^3 \\
 & + \Gamma_{nnn} r_n \overbrace{r_n^2} + \Gamma_{nmm} r_n \overbrace{r_n r_m} \\
 & + \Gamma_{nmm} r_n \overbrace{r_m^2} + \Gamma_{mnn} r_m \overbrace{r_n^2} \\
 & + \Gamma_{mmm} r_m \overbrace{r_n r_m} + \Gamma_{mmm} r_m \overbrace{r_m^2} \\
 & + \Delta_m V \left(\frac{1}{\Lambda_V} (Q - \Lambda_n r_n - \Lambda_m r_m) \right)
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

$$L_0 \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{Q^3}{C_{NL}} + \frac{Q}{C_{neg}} = \frac{1}{\Lambda_V} (Q - \Lambda_n r_n - \Lambda_m r_m) \tag{4.48}$$

Pour mener la résolution avec les méthodes de Manevitch et des échelles multiples, on effectue l'adimensionalisation du système.

Adimensionalisation des équations

Afin d'obtenir un système réduit adimensionnalisé, le changement d'échelle suivant est appliqué :

$$t^* = t \omega_s \quad (4.49)$$

avec :

$$\omega_s^2 = \omega_n^2 + \frac{\Delta_V}{\Lambda_V \Lambda_\tau} \quad (4.50)$$

Ainsi, notre système à deux degrés de liberté des équations 4.46, 4.47 et 4.48 devient :

$$\begin{aligned} \ddot{r}_n + a_1 \dot{r}_n + r_n + F_n \nu^2 \cos(\nu t^*) = & L_{nnn} r_n^3 + L_{nmm} r_n^2 r_m \\ & + L_{nmm} r_n r_m^2 + L_{mmm} r_m^3 \\ & + G_{nnn} r_n \overbrace{r_n^2} + G_{nmm} r_n \overbrace{r_n r_m} \\ & + G_{mmm} r_m \overbrace{r_m^2} + G_{mnn} r_m \overbrace{r_n^2} \\ & + G_{mnm} r_m \overbrace{r_n r_m} + G_{mmm} r_m \overbrace{r_m^2} \\ & + \alpha_q Q + \alpha_m r_m \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_m + a_2 \dot{r}_m + \left(\frac{\omega_m}{\omega_s}\right)^2 r_m + F_m \nu^2 \cos(\nu t^*) = & T_{nnn} r_n^3 + T_{nmm} r_n^2 r_m \\ & + T_{nmm} r_n r_m^2 + T_{mmm} r_m^3 \\ & + G_{ann} r_n \overbrace{r_n^2} + G_{annm} r_n \overbrace{r_n r_m} \\ & + G_{annm} r_n \overbrace{r_m^2} + G_{amnn} r_m \overbrace{r_n^2} \\ & + G_{amnm} r_m \overbrace{r_n r_m} + G_{ammm} r_m \overbrace{r_m^2} \\ & + \gamma_q Q + \gamma_n r_n + \gamma_m r_m \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\ddot{Q} + a_3 \dot{Q} + \delta Q^3 + \beta_n r_n + \beta_m r_m + \beta_2 Q = 0 \quad (4.53)$$

avec les termes adimensionnés définis dans l'annexe 5.6.

On complexifie les variables en temps $r_n(t^*)$, $r_m(t^*)$ et $Q(t^*)$ telles que :

$$\begin{aligned} \dot{r}_n + i\nu r_n = & \psi_1 \exp(i\nu t^*) \\ \dot{r}_m + 3i\nu r_m = & \psi_2 \exp(3i\nu t^*) \\ \dot{Q} + i\nu Q = & \psi_3 \exp(i\nu t^*) \end{aligned} \quad (4.54)$$

On fait également des hypothèses d'ordre sur les paramètres des équations 4.51 et 4.52 :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \epsilon a_{10} \\
 F_n &= \epsilon F_{n0} \\
 \alpha_q &= \epsilon \alpha_{q0} \\
 \alpha_m &= \epsilon \alpha_{m0} \\
 a_2 &= \epsilon a_{20} \\
 F_m &= \epsilon F_{m0} \\
 \gamma_q &= \epsilon \gamma_{q0} \\
 \gamma_n &= \epsilon \gamma_{n0} \\
 \gamma_m &= \epsilon \gamma_{m0}
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

et, tous les termes cubiques sont supposés en $\mathcal{O}(\epsilon)$.
On fait également des hypothèses sur les pulsations :

$$\begin{aligned}
 \nu &= 1 + \sigma\epsilon \\
 \frac{\omega_m}{\omega_s} &= 3 + \sigma_2\epsilon
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

avec σ et σ_2 des paramètres de modulation.

Ces hypothèses permettent de résoudre le système afin de déterminer les points d'équilibre de celui-ci.

Identification des points d'équilibre et singuliers

Les équations 4.51, 4.52 et 4.53 donnent à $\mathcal{O}(1)$, avec les hypothèses sur les échelles de temps (cf les équations 1.15 et 1.16), et la méthode de Galerkin avec l'équation 1.36 pour ψ_1 et ψ_3 et l'équation 1.45 pour l'équation en ψ_2 , on obtient :

$$\begin{aligned}
 D_0\psi_1 &= 0 \\
 D_0\psi_2 &= 0 \\
 D_0\psi_3 &= \frac{1}{8\nu^3}(-4a_3\nu^3\psi_3 + i(-4\nu^2(1 + \beta_2)\psi_3 - 4\nu^2\beta_n\psi_1 + 3\delta\psi_3^2\bar{\psi}_3)) \\
 &= \mathcal{F}_2(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3)
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

On récupère un SIM via l'équation $D_0\psi_3 = 0$, comme dans la partie précédente, avec :

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \frac{1}{4\nu^2\beta_n}(4i\nu^3a_3\psi_3 - 4\nu^4\psi_3 - 4\nu^2\beta_2\psi_3 + 3\delta\psi_3^2\bar{\psi}_3) \\
 &= f_2(\psi_3, \bar{\psi}_3)
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Les points extrémaux de ce SIM sont trouvés par $\det(\mathcal{J}_2) = 0$ avec \mathcal{J}_2 défini comme dans l'équation 4.19 en $f_2(\psi_3, \bar{\psi}_3)$.

Les équations à $\mathcal{O}(\epsilon)$ donnent :

$$\begin{aligned}
 D_1\psi_1 &= \frac{1}{72\nu^3} \left(-2(18\nu^5 F_{n0} + 18a_{10}\nu^3) + i(-72\nu^3\sigma\psi_1 - 36\alpha_{q0}\nu^2\psi_3 \right. \\
 &\quad -2(L_{nmm0} - 10\nu^2 G_{mnm0})\psi_1\psi_2\bar{\psi}_2 - 27(L_{nnn0} - 2\nu^2 G_{nnn0})\psi_1^2\bar{\psi}_1 \\
 &\quad \left. +3(L_{nnm0} - 4\nu^2 G_{mnn0} - 4\nu^2 g_{nmm0})\psi_2\bar{\psi}_1^2 \right) \\
 &= \mathcal{G}_2(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_2, \bar{\psi}_2, \psi_3, \bar{\psi}_3) \\
 D_1\psi_2 &= \frac{1}{72\nu^3} \left(-36a_{20}\nu^3\bar{\psi}_2 + i(-12\nu^2(\gamma_{m0} + 18\nu\sigma - 6\nu\sigma_2)\psi_2 \right. \\
 &\quad -9(4\nu^2 G_{annn0} - T_{nnn0})\psi_1^3 + (12\nu^2 G_{ammm0} - T_{mmm0})\psi_2^2\bar{\psi}_2 \\
 &\quad \left. +6(10\nu^2 G_{annm0} - T_{nnm0})\psi_1\bar{\psi}_1\psi_2 \right) \\
 &= \mathcal{H}_2(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_2, \bar{\psi}_2) \\
 D_1\psi_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Ainsi, les points d'équilibre du système sont obtenus lorsque :

$$\begin{cases} D_0\psi_3 = 0 \\ D_1\psi_1 = 0 \\ D_1\psi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{F}_2(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3) = 0 \\ \mathcal{G}_2(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_2, \bar{\psi}_2, \psi_3, \bar{\psi}_3) = 0 \\ \mathcal{H}_2(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_2, \bar{\psi}_2) = 0 \end{cases} \tag{4.60}$$

On identifie également les points singuliers par :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_2(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3) = 0 \\ \mathcal{G}_2(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_2, \bar{\psi}_2, \psi_3, \bar{\psi}_3) = 0 \\ \mathcal{H}_2(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_2, \bar{\psi}_2) = 0 \\ \det(\mathcal{J}_2) = 0 \end{cases} \tag{4.61}$$

On veut maintenant étudier la stabilité de ces points d'équilibre.

Étude de la stabilité des points d'équilibre

Comme précédemment, pour statuer sur l'instabilité des points d'équilibre, on perturbe le système autour du point (ψ_1, ψ_2, ψ_3) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\psi_1 &\rightarrow \psi_1 + \Delta\psi_1, \\ \psi_2 &\rightarrow \psi_2 + \Delta\psi_2, \\ \psi_3 &\rightarrow \psi_3 + \Delta\psi_3\end{aligned}\tag{4.62}$$

avec $|\Delta\psi_1| \ll |\psi_1|$, $|\Delta\psi_2| \ll |\psi_2|$ et $|\Delta\psi_3| \ll |\psi_3|$.
Pour le temps t_0 , comme précédemment on obtient à $\mathcal{O}(1)$:

$$D_0 \begin{pmatrix} \Delta\psi_1 \\ \Delta\bar{\psi}_1 \\ \Delta\psi_2 \\ \Delta\bar{\psi}_2 \\ \Delta\psi_3 \\ \Delta\bar{\psi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\psi_1 \\ \Delta\bar{\psi}_1 \\ \Delta\psi_2 \\ \Delta\bar{\psi}_2 \\ \Delta\psi_3 \\ \Delta\bar{\psi}_3 \end{pmatrix}\tag{4.63}$$

la matrice \mathbf{C}_2 est définie dans l'annexe 5.7 et la stabilité est donnée par la matrice \mathbf{A}_2 suivante :

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_2(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \mathcal{F}_2(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \bar{\psi}_3} \\ \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}_2(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}_2(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \bar{\psi}_3} \end{pmatrix}\tag{4.64}$$

À l'horizon en temps t_1 , on obtient :

$$D_1 \begin{pmatrix} \Delta\psi_1 \\ \Delta\bar{\psi}_1 \\ \Delta\psi_2 \\ \Delta\bar{\psi}_2 \\ \Delta\psi_3 \\ \Delta\bar{\psi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{M}_4 & \mathbf{M}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\psi_1 \\ \Delta\bar{\psi}_1 \\ \Delta\psi_2 \\ \Delta\bar{\psi}_2 \\ \Delta\psi_3 \\ \Delta\bar{\psi}_3 \end{pmatrix}\tag{4.65}$$

les matrices \mathbf{M}_j avec $j = 1, \dots, 5$ sont définies dans l'annexe 5.8. En prenant en compte l'équation 4.58, l'équation matricielle devient :

$$D_1 \begin{pmatrix} \Delta\psi_3 \\ \Delta\bar{\psi}_3 \\ \Delta\psi_2 \\ \Delta\bar{\psi}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{M}^* \begin{pmatrix} \Delta\psi_3 \\ \Delta\bar{\psi}_3 \\ \Delta\psi_2 \\ \Delta\bar{\psi}_2 \end{pmatrix}\tag{4.66}$$

avec

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2(\psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \psi_3} & \frac{\partial f_2(\psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \bar{\psi}_3} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{f}_2(\psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \bar{f}_2(\psi_3, \bar{\psi}_3)}{\partial \bar{\psi}_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

et :

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \psi_2} & \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \bar{\psi}_2} & \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \bar{\psi}_3} \\ \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}_2}{\partial \psi_2} & \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}_2}{\partial \bar{\psi}_2} & \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}_2}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}_2}{\partial \bar{\psi}_3} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \psi_2} & \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \bar{\psi}_2} & \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \bar{\psi}_3} \\ \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_2}{\partial \psi_2} & \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_2}{\partial \bar{\psi}_2} & \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_2}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_2}{\partial \bar{\psi}_3} \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

Le signe de la partie réelle des valeurs propres de $\mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{M}^*$ statue sur l'instabilité des points d'équilibre à l'horizon en temps t_1 .

Pour ce qui est de l'identification de potentiels comportements chaotiques via la méthode de Melnikov (Guckenheimer and Holmes, 1983), on s'affranchit de r_m dans l'équation 4.53, et le problème analytique devient le même que dans la sous partie 4.1.1.

Intéressons-nous à l'écriture des points d'équilibre avec la forme polaire des variables ψ_1 , ψ_2 et ψ_3 .

Définition des formes polaires des variables complexes

On pose les formes polaires suivantes pour ψ_1 , ψ_2 et ψ_3 :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= N_1 \exp(i\delta_1), & (N_1, \delta_1) &\in \mathbb{R} \\ \psi_2 &= N_2 \exp(i\delta_2), & (N_2, \delta_2) &\in \mathbb{R} \\ \psi_3 &= N_3 \exp(i\delta_3), & (N_3, \delta_3) &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Du système d'équations 4.60, on obtient les expressions de $\cos(\delta_1 - \delta_3)$, $\sin(\delta_1 - \delta_3)$, $\cos(\delta_1)$, $\sin(\delta_1)$, $\cos(3\delta_1 - \delta_2)$ et $\sin(3\delta_1 - \delta_2)$. On pose alors les équations :

$$\begin{aligned} E_{cs13}(N_1^2, N_3^2, \nu) &= \cos(\delta_1 - \delta_3)^2 + \sin(\delta_1 - \delta_3)^2 - 1 \\ E_{cs1}(N_1^2, N_2^2, F_n, \nu) &= \cos(\delta_1)^2 + \sin(\delta_1)^2 - 1 \\ E_{cs12}(N_1^2, N_2^2, N_3^2, \nu) &= \cos(3\delta_1 - \delta_2)^2 + \sin(3\delta_1 - \delta_2)^2 - 1 \end{aligned} \quad (4.70)$$

E_{cs13} est une équation d'ordre 3 en N_3^2 et d'ordre 1 en N_1^2 , E_{cs1} est une équation d'ordre 3 en N_1^2 et N_2^2 et E_{cs12} est une équation d'ordre 4 en N_1^2 , N_2^2 , N_3^2 . La résolution du système permet d'obtenir les points d'équilibre du système avec :

$$\begin{cases} E_{cs13} = 0 \\ E_{cs1} = 0 \\ E_{cs12} = 0 \end{cases} \quad (4.71)$$

On remarque que ces équations permettent d'associer aux points extrémaux ($N_{1,\pm}, N_{3,\pm}$) le point tridimensionnel avec $N_{2,\pm}$, et les amplitudes de déplacement associées F_{\pm} . Dans la partie suivante, les résultats analytico-numériques sont présentés avec notamment des tracés de SIM et de réponses fréquentielles.

4.2 Présentation des résultats analytiques

Dans la partie précédente, pour les deux cas étudiés (avec et sans résonance interne), les développements analytiques ont permis de définir les points d'équilibre du système (voire des points singuliers), ainsi que des outils pour statuer sur l'instabilité de ces points. Ils ont aussi permis de mettre en évidence des équations de SIM. Cette partie va permettre de tracer ces données analytiques afin d'observer les effets des paramètres électriques sur le comportement du système électro-mécanique.

4.2.1 Tracés analytiques pour le cas avec un mode mécanique

Pour les différents tracés, on utilise les données de la configuration unimorphe du chapitre 2. On suppose que le matériau piézoélectrique se situe entre $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m avec une longueur de poutre $L_b = 0.15$ m. Les pulsations propres de la configuration unimorphe sont données dans le tableau 2.5 du chapitre 2. On remarque qu'il n'y a pas de résonance interne entre les pulsations propres identifiées. On se place autour de la pulsation propre du second mode, car on compte faire une comparaison avec un circuit résonant, or pour celui-ci le premier mode impose une valeur de l'inductance très élevée. Il reste à définir les paramètres du circuit électrique non linéaire. D'après les développements analytiques, il est possible de tracer plusieurs choses à partir de la détection des points d'équilibre (cf l'équation 4.34) :

- le SIM pour un ν et une amplitude de déplacement fixée avec les différents points d'équilibre,
- les points d'équilibre en fonction de l'amplitude de déplacement F , pour un ν fixé,
- les réponses fréquentielles à une amplitude de déplacement donnée pour une bande de pulsation ν autour de 1.

Ces tracés permettent d'identifier les différents régimes dynamiques périodiques, quasi-périodiques qu'il est possible d'obtenir pour le système. Un autre tracé, celui de la distance entre les variétés stables et instables est fait pour statuer sur la possibilité d'obtenir un régime chaotique du système si $\beta_2 < 0$.

Le tracé de plusieurs SIM en fonction des paramètres électriques

Dans un premier temps, on étudie l'effet des différents paramètres électriques sur les tracés de SIM de l'équation 4.30. Les zones instables sont déduites du signe des parties

réelles des valeurs propres des matrices décrites dans les équations 4.24 et 4.27. On a remarqué que, pour que le SIM ne soit pas monotone, des conditions entre l'inductance L_0 et la résistance R doivent être réalisées (cf l'équation 4.32).

On trace le SIM pour les valeurs de paramètres suivantes : $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $C_{NL} = 2.65 \cdot 10^{-15} C^3 \cdot V^{-1}$ inspirées de Lossouarn et al. (2018). Quant à la valeur de l'inductance, on la fait varier entre $1 H$ et $101 H$. Les autres valeurs électriques sont connues à partir des données du matériau piézoélectrique (cf le tableau 2.6).

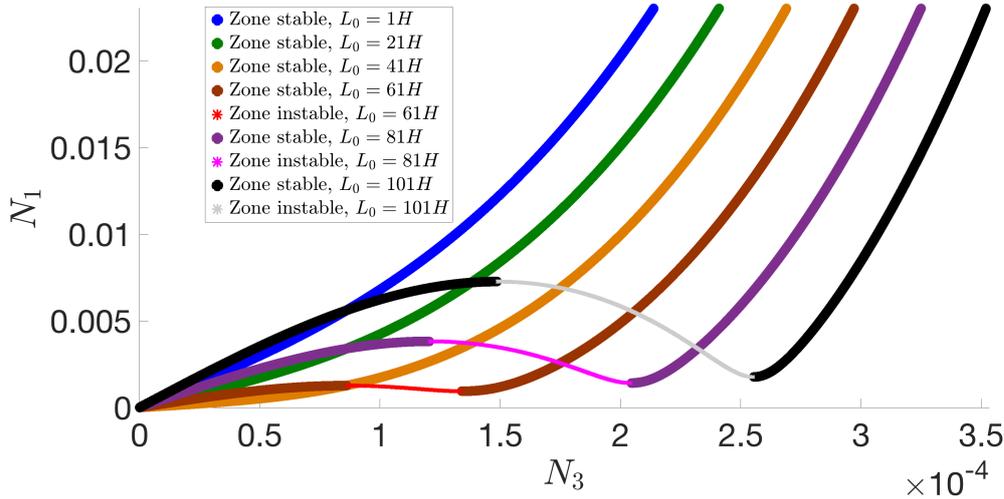


FIGURE 4.3 – Tracés de SIM (cf l'équation 4.30) pour différentes valeurs d'inductance L_0 , avec les paramètres électriques suivants : $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $C_{NL} = 2.65 \cdot 10^{-15} C^3 \cdot V^{-1}$ et $F = 10^{-5} m$. Les zones d'instabilité sont déduites du signe de la partie réelle de la valeur propre $\lambda_{0,\pm}$ (cf l'équation 4.24).

Sur la figure 4.3, on observe qu'effectivement il existe une valeur limite de l'inductance L_0 pour laquelle le SIM devient non monotone (comme indiqué dans l'équation 4.33, ici cette valeur critique est $59.73 H$). On pose $L_0 = 61 H$ pour tracer les prochaines figures, afin d'observer les effets des autres paramètres du circuit électrique, le SIM étant ainsi non monotone.

- Le paramètre ζ pilote la partie linéaire du circuit électrique. Si $\zeta = 0$, alors on élimine complètement la partie linéaire de l'équation en \ddot{Q} grâce à la capacité négative C_{neg} . C'est pourquoi, la diminution du paramètre ζ amène à des SIM aux points extrémaux plus éloignés puisqu'on augmente le comportement non linéaire du SIM (cf la figure 4.4). On suppose $\zeta > 0$ car si $\zeta < 0$, alors on utilise la méthode de Melnikov pour étudier l'apparition d'un potentiel comportement chaotique du système.
- L'inverse de la capacité non linéaire C_{NL} pilote la partie non linéaire cubique du circuit électrique. Ainsi plus C_{NL} est faible, plus la non linéarité est grande (cf la figure 4.5), le comportement est donc similaire à celui avec le paramètre ζ .
- L'analogie mécanique d'une résistance est l'amortissement. Dans les modélisations de SIM pour des systèmes mécaniques, il est connu qu'un amortissement faible donne un point extrémum minimum du SIM plus proche de l'axe des abscisses (Lamarque et al., 2011). Cet effet est vérifié car plus la résistance est faible plus le point extrémal minimal se rapproche de l'axe des abscisses (cf la figure 4.6).

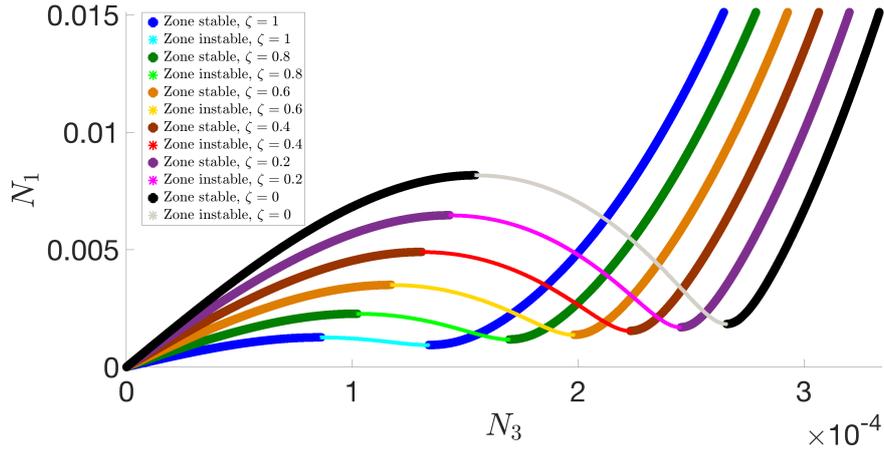


FIGURE 4.4 – Tracés de SIM (cf l'équation 4.30) pour différentes valeurs du paramètre ζ , avec les paramètres électriques suivants : $L_0 = 61 \text{ H}$, $R = 3050 \Omega$, $C_{NL} = 2.65 \cdot 10^{-15} \text{ C}^3 \cdot \text{V}^{-1}$ et $F = 10^{-5} \text{ m}$. Les zones d'instabilité sont déduites du signe de la partie réelle des valeurs propres $\lambda_{0,\pm}$ de la matrice \mathbf{A} de l'équation 4.26.

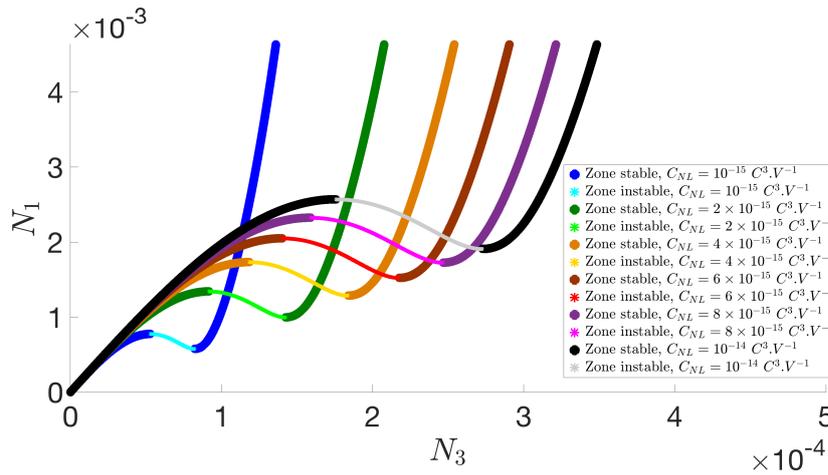


FIGURE 4.5 – Tracés de SIM (cf l'équation 4.30) pour différentes valeurs de capacité non linéaire C_{NL} , avec les paramètres électriques suivants : $L_0 = 61 \text{ H}$, $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $F = 10^{-5} \text{ m}$. Les zones d'instabilité sont déduites du signe de la partie réelle des valeurs propres $\lambda_{0,\pm}$ de la matrice \mathbf{A} de l'équation 4.26.

Par conséquent, la modification des paramètres électriques du circuit permet de piloter les points extrémaux du SIM. Ce pilotage conduit à l'obtention, par exemple, de comportements quasi-périodiques du système par la création de points singuliers.

Les points d'équilibre se placent sur la branche inférieure, supérieure ou intermédiaire du SIM en fonction de l'amplitude de déplacement F appliquée. La modification du placement de ces points d'équilibre mène à des amplitudes faibles (branche basse) ou importantes (branche haute) des vibrations de la poutre et de la charge électrique contenue dans le matériau piézoélectrique. Ces comportements permettent d'orienter les choix de valeurs de paramètres électriques, selon que l'on souhaite contrôler les vibrations du système ou récupérer de l'énergie grâce au patch piézoélectrique.

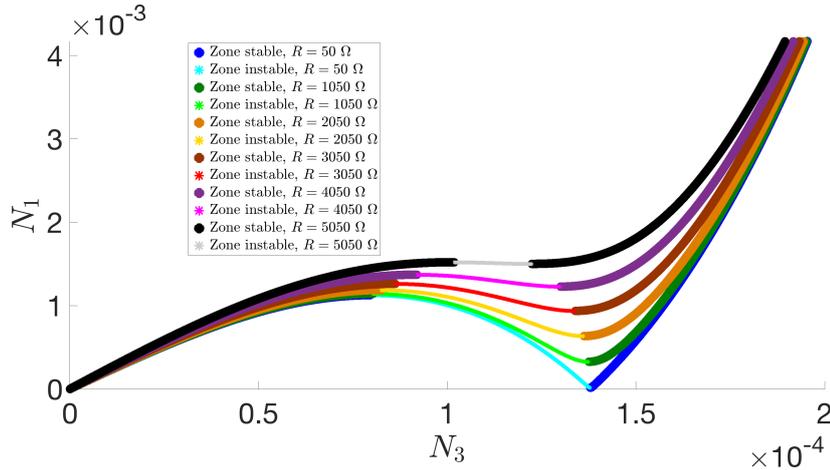


FIGURE 4.6 – Tracés de SIM (cf l'équation 4.30) pour différentes valeurs de résistance R , avec les paramètres électriques suivants : $L_0 = 61 \text{ H}$ $\zeta = 1$, $C_{NL} = 2.65 \cdot 10^{-15} \text{ C}^3 \cdot \text{V}^{-1}$ et $F = 10^{-5} \text{ m}$. Les zones d'instabilité sont déduites du signe de la partie réelle de des valeurs propres $\lambda_{0,\pm}$ de la matrice \mathbf{A} de l'équation 4.26.

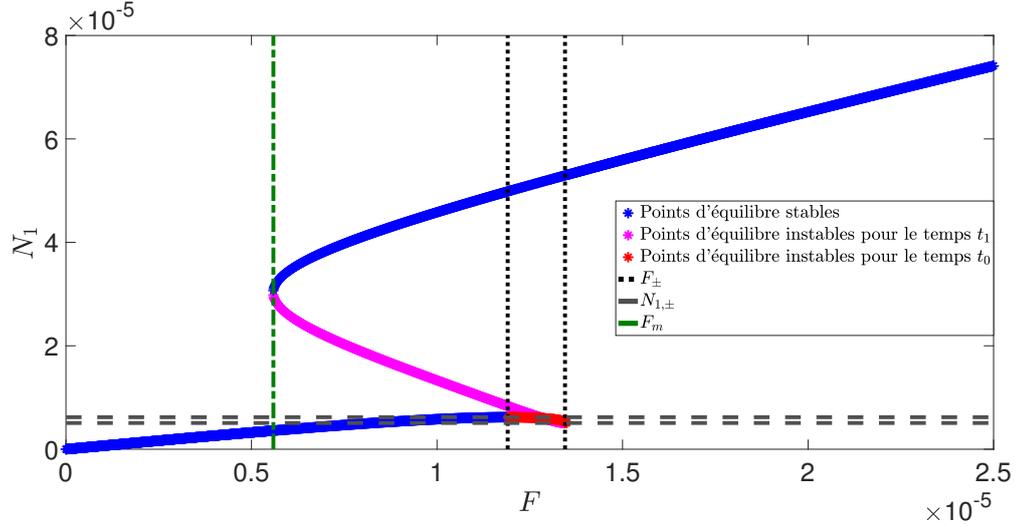
Étudions les points d'équilibre possibles selon l'amplitude de déplacement F .

Les points d'équilibre par rapport à l'amplitude de déplacement

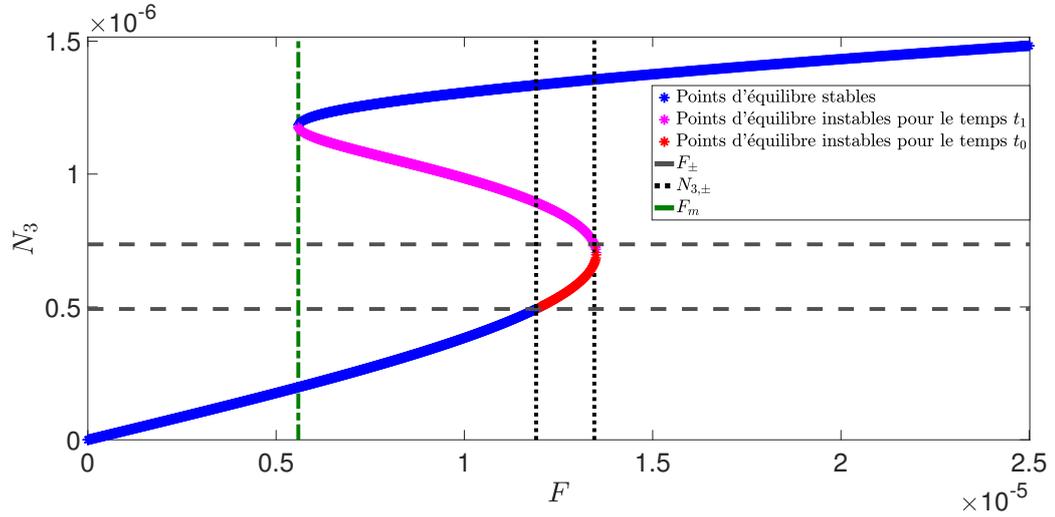
On trace les points d'équilibre d'amplitude N_1 et N_3 en fonction de l'amplitude de déplacement F (résolution du système de l'équation 4.34), avec leur instabilité (d'après le signe des parties réelles des valeurs propres des matrices \mathbf{A} et $\mathbf{J}^{-1}\mathbf{H}_j$ des équations 4.26, 4.19 et 4.28). On trace également les valeurs extrémales $N_{1,\pm}$, $N_{3,\pm}$ et F_{\pm} via les équations 4.30, 4.31 et 4.34, en déduisant F_{\pm} de $E_{cs1}(N_{1,\pm}, N_{3,\pm}, F_{\pm}, \nu) = 0$. Le tracé de ces figures, pour un ν fixé, permet d'identifier le nombre de points d'équilibre ainsi que leur instabilité en fonction de l'amplitude de déplacement F . Pour les valeurs de paramètres électriques $\zeta = 1$, $R = 3050 \text{ } \Omega$, $C_{NL} = 10^{-19} \text{ C}^3 \cdot \text{V}^{-1}$, on trace les courbes (F, N_1) et (F, N_3) à deux pulsations ν : $\nu = 0.98$ et $\nu = 1.02$ (cf les figures 4.7 et 4.9). On observe sur ces deux figures que pour des valeurs de F on peut avoir plusieurs points d'équilibre. Les valeurs extrémales $N_{1,\pm}$, $N_{3,\pm}$ et F_{\pm} encadrent les parties instables pour le temps t_0 , tandis que l'instabilité pour le temps t_1 rajoute de nouvelles zones instables non identifiées auparavant. En effet, les zones notées comme "stables" peuvent être en réalité instables. On zoome sur la partie instable pour le temps t_0 de la figure 4.7(a) qui représente une boucle (cf la figure 4.8). Ainsi, le point instable pour le temps t_1 possède une amplitude N_1 inférieure au point instable pour le temps t_0 lorsque l'amplitude de déplacement utilisée est entre F_- et F_+ .

Différents scénarios sont alors possibles selon l'amplitude de déplacement F d'après la figure 4.7 :

- il existe une valeur d'amplitude de déplacement F_m en dessous de laquelle il n'existe qu'une seule solution périodique stable.
- pour $F > F_m$ et $F < F_-$, il existe trois points d'équilibre dont deux sont des solutions périodiques stables et une est instable pour le temps t_0 .
- si l'amplitude de déplacement F est comprise entre F_- et F_+ , il existe trois points d'équilibre dont deux sont instables. Le troisième étant supposé stable.



(a) Tracé des points d'équilibre de l'amplitude N_1 en fonction de l'amplitude de déplacement F



(b) Tracé des points d'équilibre de l'amplitude N_3 en fonction de l'amplitude de déplacement F

FIGURE 4.7 – Tracés des points d'équilibre des amplitudes N_1 et N_3 en fonction de l'amplitude de déplacement F à partir de l'équation 4.34. L'identification de l'instabilité de ces points d'équilibre au temps t_0 et t_1 se fait au travers du signe des parties réelles des valeurs propres des matrices \mathbf{A} et $\mathcal{J}^{-1}\mathbf{H}_j$ des équations 4.26, 4.19 et 4.28. Tracés des valeurs extrémales $N_{1,\pm}$, $N_{3,\pm}$ et F_{\pm} à partir des équations 4.30, 4.31 et 4.34 Pour $\nu = 0.98$ et les données électriques $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 61 H$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$.

Pour la figure 4.9 ($\nu = 1.02$), il existe seulement deux scénarios selon la valeur F par rapport aux valeurs extrémales F_{\pm} :

- si $F < F_-$ et $F > F_+$ il existe une seule position d'équilibre qui correspond à une solution périodique stable
- pour $F_- \leq F \leq F_+$, il existe une seule position qui est instable pour le temps t_0 .

Dans la partie analytique, on a identifié d'autres régimes possibles que ceux périodiques et quasi-périodiques.

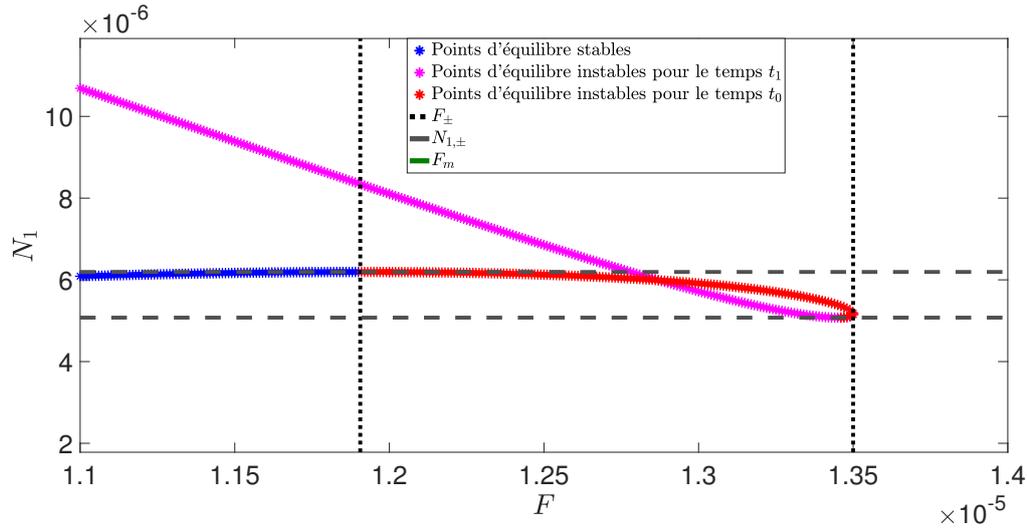


FIGURE 4.8 – Zoom sur le tracé de l'amplitude N_1 autour de F_{\pm} de la figure 4.7(a).

Intéressons-nous à la possibilité d'obtenir un régime chaotique dans la sous partie suivante.

Existence possible de régimes chaotiques par la méthode de Melnikov

La méthode de Melnikov (Guckenheimer and Holmes, 1983) permet de statuer sur une potentielle dynamique chaotique dépendant de certains paramètres électriques. En effet, on suppose que $\beta_2 < 0$ soit $\zeta < 0$. Afin de savoir s'il est possible d'obtenir une dynamique chaotique, traçons sur la figure 4.10 la distance entre les variétés stables et instables $D(t_m)$ par rapport aux deux composants électriques que l'on suppose modifiables ζ (qui dépend de C_{neg}) et C_{NL} . On déduit de la figure 4.10 que :

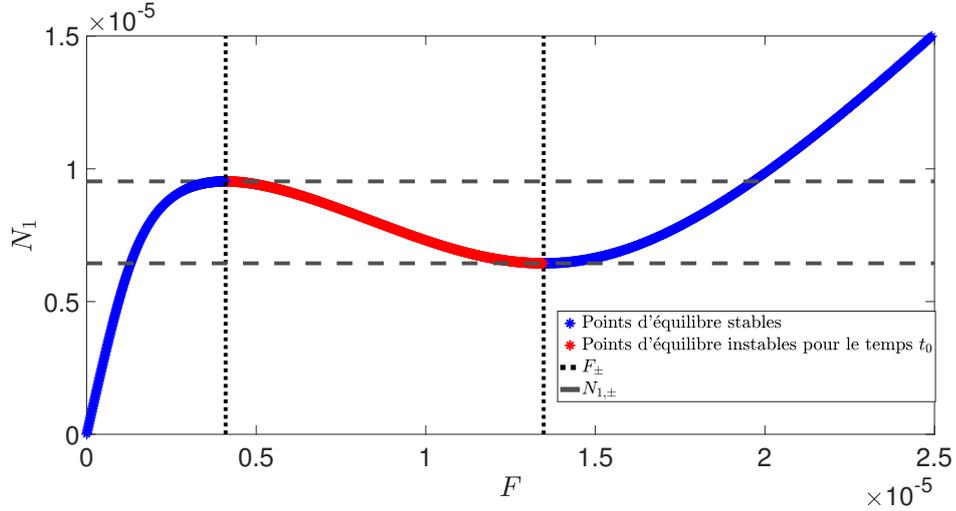
- si $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$, alors pour ζ proche de 0, la distance est négative il n'y a pas la possibilité de comportements chaotiques (cf la figure 4.10(a)). Mais, pour $\zeta > -0.1$, si l'amplitude de déplacement est suffisante pour obtenir une amplitude de r_{τ} supérieure à 10^{-5} , alors on aura la possibilité d'obtenir un comportement chaotique.
- si la capacité non linéaire est trop importante, on ne peut pas avoir de comportement chaotique (cf la figure 4.10(b))

Par conséquent, si on impose $C_{neg} > \Lambda_V$ (i.e. $\zeta < 0$) il est possible de créer une dynamique chaotique pour le système. Afin de vérifier la création de cette dynamique, des essais par intégration numérique sont effectués dans la partie suivante.

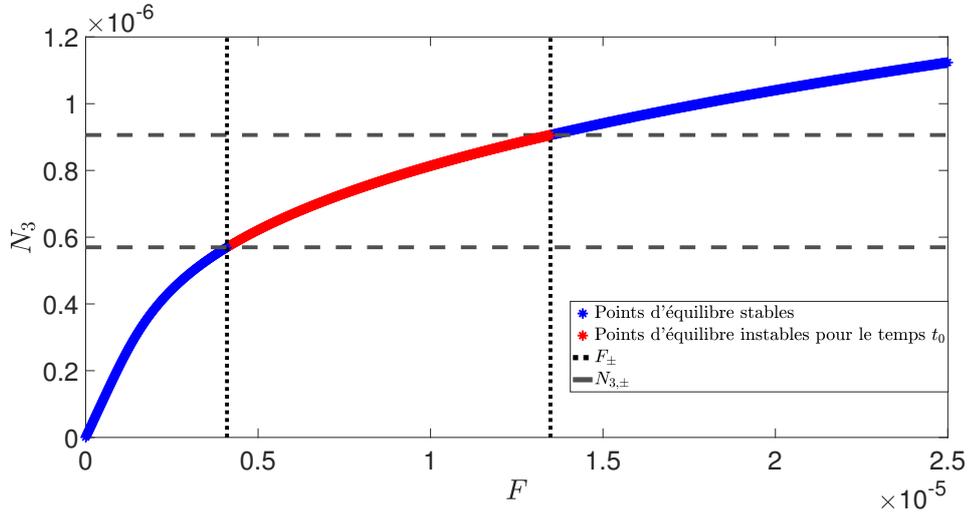
Les tracés précédents sont valables pour ν fixée. Il est cependant intéressant de tracer les points d'équilibre en fonction d'une bande de pulsation ν .

Les réponses fréquentielles du système

On trace les points d'équilibre (cf l'équation 4.34) pour une amplitude de déplacement fixée F et une bande de pulsation ν autour de 1. D'après les figures 4.7 et 4.9, on pose $F = 6 \times 10^{-6}$ m et $F = 1.3 \times 10^{-5}$ m (cf les figures 4.11 et 4.12). Sur les deux figures on remarque la présence d'un isola dont la branche inférieure est instable pour l'horizon en temps t_1 . Sur la figure 4.8, on a remarqué que pour $F = 1.3 \times 10^{-5}$ m et $\nu = 0.98$



(a) Tracé des points d'équilibre de l'amplitude N_1 en fonction de l'amplitude de déplacement F

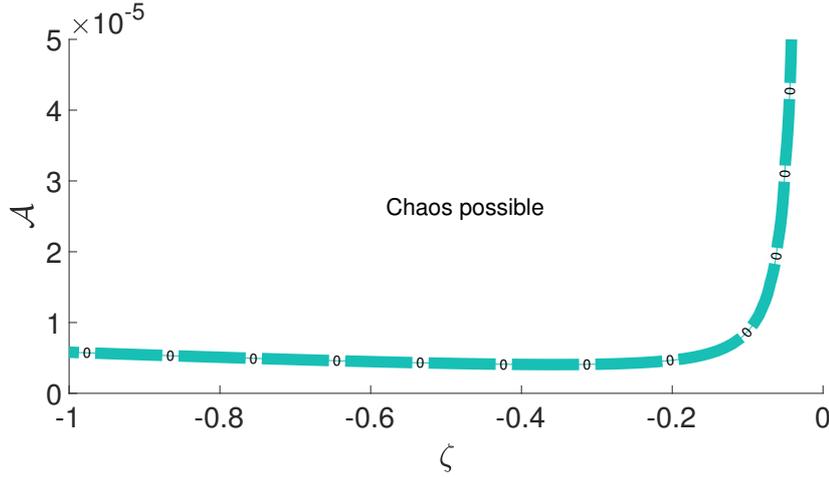


(b) Tracé des points d'équilibre de l'amplitude N_3 en fonction de l'amplitude de déplacement F

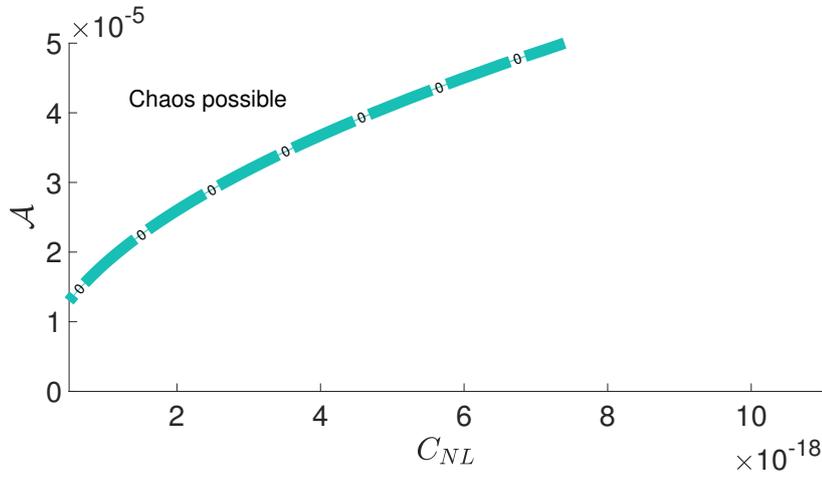
FIGURE 4.9 – Tracés des points d'équilibre d'amplitude N_1 et N_3 en fonction de l'amplitude de déplacement F à partir de l'équation 4.34. Identification de l'instabilité de ces points d'équilibre au temps t_0 et t_1 avec le signe des parties réelles des valeurs propres des matrices \mathbf{A} et $\mathcal{J}^{-1}\mathbf{H}_j$ des équations 4.26, 4.19 et 4.28. Pour $\nu = 1.02$ et les données électriques $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 61 H$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$.

l'amplitude de N_1 pour le point instable pour le temps t_1 est en dessous de celle du point instable pour le temps t_0 . On effectue donc un zoom de la figure 4.12(a) autour de $\nu = 0.98$ (cf la figure 4.13). On observe bien le comportement identifié précédemment, on voit "une intersection" de l'isola avec la courbe forcée sur l'amplitude de N_1 , ce qui n'est pas le cas pour l'amplitude N_3 . Ainsi, dans le comportement à trois dimensions (ν, N_1, N_3) il n'y a pas d'intersection entre la courbe du bas et l'isola.

Pour les deux amplitudes de déplacement ($F = 6 \times 10^{-6} m$ et $F = 1.3 \times 10^{-5} m$), les amplitudes N_1 et N_3 restent en dessous d'un seuil que l'on peut identifier : 4.5×10^{-4} et



(a) Tracé de la distance $|\mathcal{D}(t_m)| = 0$ (cf l'équation 4.38) par rapport à l'amplitude \mathcal{A} de la solution périodique r_τ et au paramètre ζ avec $C_{NL} = 10^{-19} C^3 \cdot V^{-1}$.



(b) Tracé de la distance $|\mathcal{D}(t_m)| = 0$ (cf l'équation 4.38) par rapport à l'amplitude \mathcal{A} de la solution périodique r_τ et au paramètre C_{NL} avec $\zeta = -1$.

FIGURE 4.10 – Tracé de la distance $|\mathcal{D}(t_m)| = 0$ (cf l'équation 4.38) pour les paramètres ζ et C_{NL} avec $\nu = 0.98$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 61 H$. Lorsque la distance $\mathcal{D}(t_m)$ passe par 0, il est possible d'obtenir un comportement chaotique.

1.4×10^{-3} pour N_1 dans chaque cas (cf les figures 4.11 et 4.12).

Vérifions si les mêmes types de comportements (régimes périodiques, quasi-périodiques et chaotiques) peuvent être identifiés pour le cas où le système présente une résonance interne 1 : 3.

4.2.2 Tracés analytiques lors de la présence de la résonance interne 1 : 3

Comme expliqué dans les chapitres 2 et 3, un bon positionnement du patch piézoélectrique sur la poutre permet d'obtenir la résonance 1 : 3 entre le deuxième et le troisième

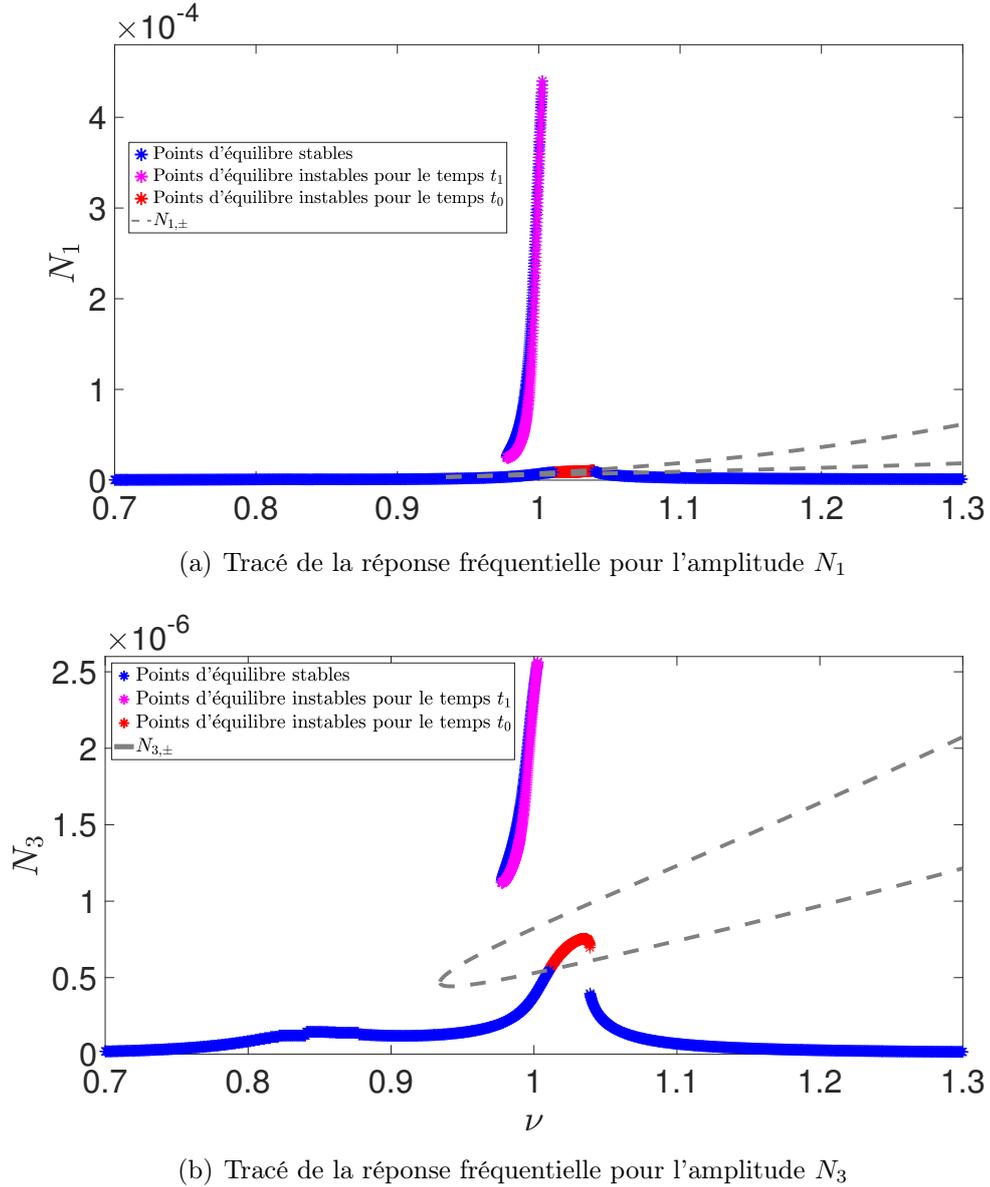
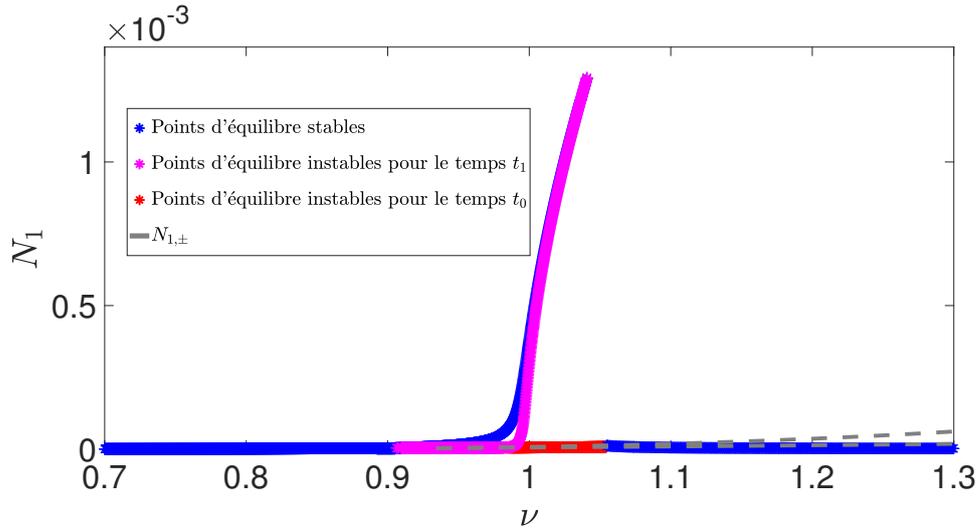


FIGURE 4.11 – Tracés des réponses fréquentielles des amplitudes N_1 et N_3 avec ν autour de 1, pour l'amplitude de déplacement $F = 6 \times 10^{-6}$ m, à partir de l'équation 4.34. Les paramètres électriques sont $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 61 H$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$. L'identification de l'instabilité de ces points d'équilibre au temps t_0 et t_1 se fait avec le signe des parties réelles des valeurs propres des matrices \mathbf{A} et $\mathcal{J}^{-1}\mathbf{H}_j$ des équations 4.26, 4.19 et 4.28.

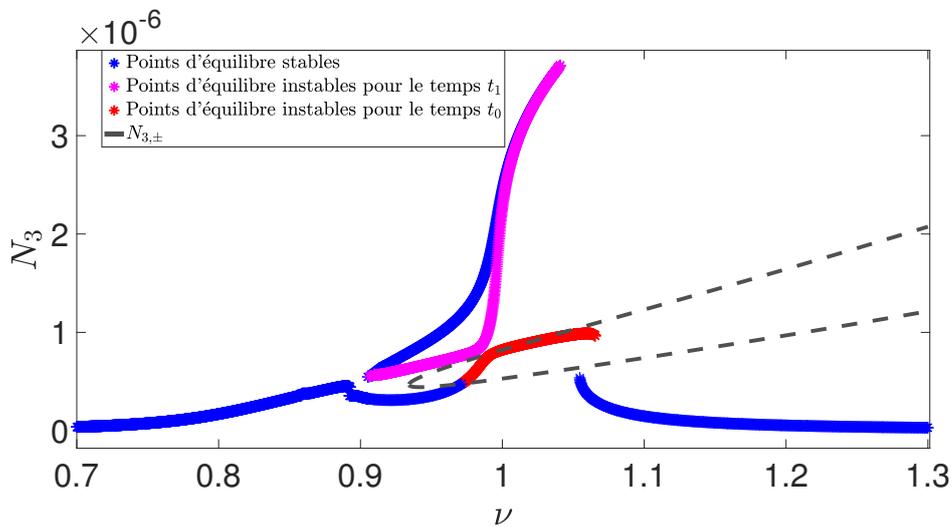
mode propre de la structure électro-mécanique. Un exemple numérique a déjà été présenté dans le chapitre 2 pour la configuration unimorphe, on reprend donc la même structure ($\Delta = 0.099$ et $L_b = 0.18$ m) pour obtenir les pulsations du tableau 2.7.

Tracé du SIM autour de la valeur critique L_0

D'après la résolution des équations dynamiques menée précédemment, dans ce cas avec résonance interne il est possible de tracer un SIM (cf l'équation 4.58). De la même manière



(a) Tracé de la réponse fréquentielle pour l'amplitude N_1



(b) Tracé de la réponse fréquentielle pour l'amplitude N_3

FIGURE 4.12 – Tracé des réponses fréquentielles des amplitudes N_1 et N_3 avec ν autour de 1, pour l'amplitude de déplacement $F = 1.3 \times 10^{-5}$ m, à partir de l'équation 4.34. Les paramètres électriques sont $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 61 H$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$. Identification de l'instabilité de ces points d'équilibre au temps t_0 et t_1 avec le signe des parties réelles des valeurs propres des matrices \mathbf{A} et $\mathcal{J}^{-1}\mathbf{H}_j$ des équations 4.26, 4.19 et 4.28.

que dans le cas à un mode, le SIM est modifié par les paramètres du circuit électrique non linéaire. La seule différence étant la valeur critique L_0 (cf l'équation 4.33, qui est de 139 H dans ce cas), comme le montre la figure 4.14. On s'intéresse alors aux différents régimes dynamiques qu'on peut engendrer, en fonction de l'amplitude de déplacement appliquée au système.

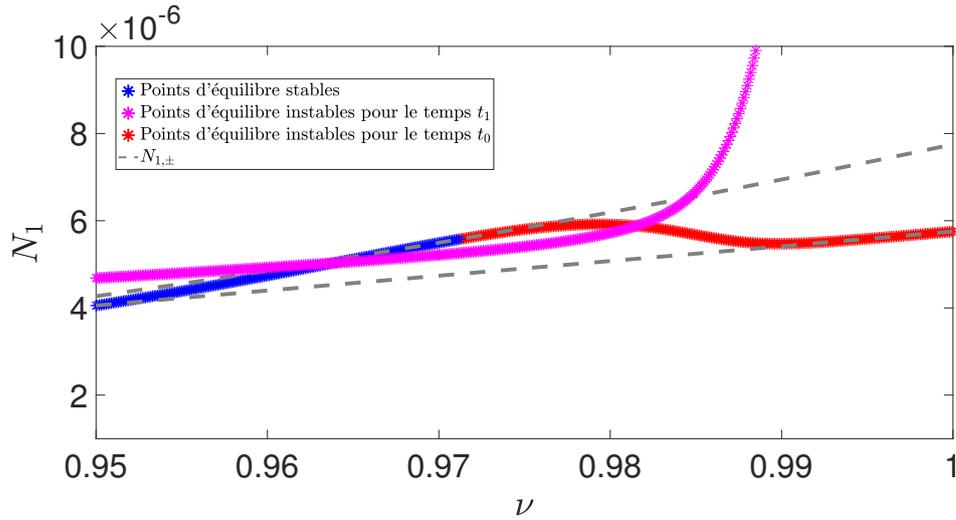


FIGURE 4.13 – Zoom autour de $\nu = 0.98$ pour le tracé de la réponse fréquentielle de l'amplitude N_1 de la figure 4.12(a).

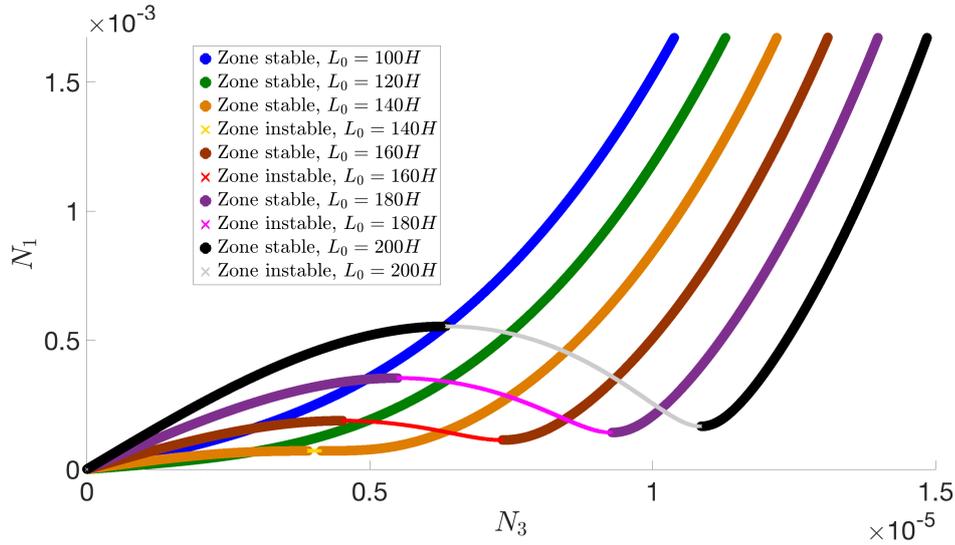
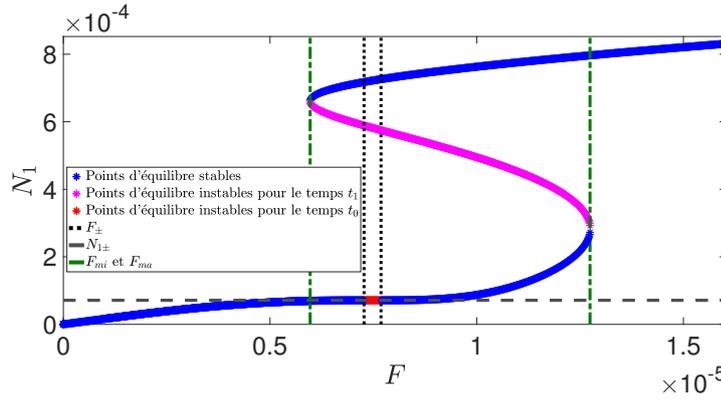


FIGURE 4.14 – Tracé du SIM (équation 4.58) pour différentes valeurs d'inductance L_0 , avec les paramètres électriques suivants : $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$, $R = 3050 \Omega$, $F = 7 \times 10^{-6} m$, $c_v = 0.1$, $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$. Les zones d'instabilité sont déduites du signe de la partie réelle de la valeur propre de la matrice \mathbf{A}_2 de l'équation 4.64.

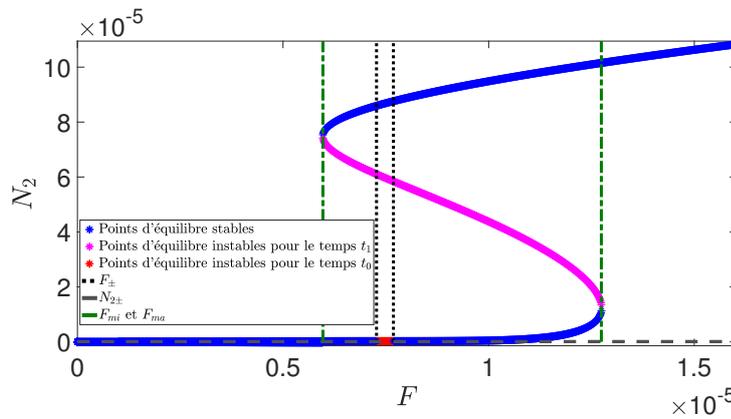
Les points d'équilibre en fonction de l'amplitude de déplacement F

Comme dans le cas à un seul mode, on trace les courbes (F, N_1) , (F, N_2) et (F, N_3) . Ces tracés permettent d'identifier les différents comportements dynamiques possibles selon l'amplitude de déplacement F appliquée (cf les figures 4.15 et 4.16 pour respectivement $\nu = 1$ et $\nu = 1.01$).

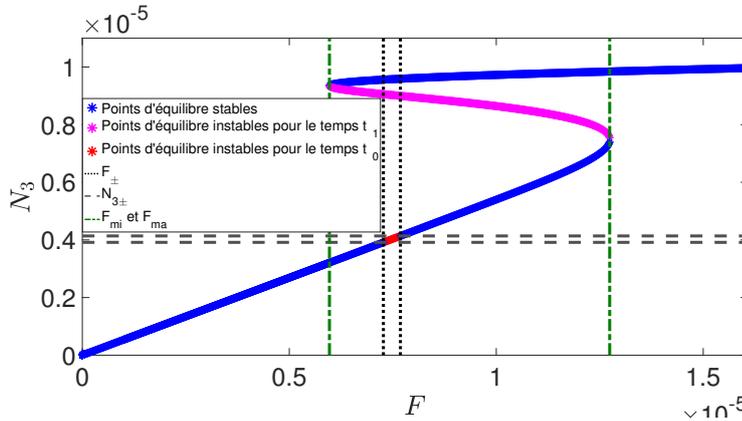
En effet, comme dans le cas à un mode, pour certaines amplitudes de F on obtient plusieurs comportements dynamiques possibles. Selon la figure 4.15 ($\nu = 1$), pour :



(a) Tracé des points d'équilibre de l'amplitude N_1 en fonction de l'amplitude de déplacement F



(b) Tracé des points d'équilibre de l'amplitude N_2 en fonction de l'amplitude de déplacement F



(c) Tracé des points d'équilibre de l'amplitude N_3 en fonction de l'amplitude de déplacement F

FIGURE 4.15 – Tracés des points d'équilibre d'amplitude N_1 , N_2 et N_3 par rapport à l'amplitude de déplacement F à partir du système 4.71. Les paramètres utilisés sont $\nu = 1$, $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 140 H$ et $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$. Les zones d'instabilité sont identifiées à partir du signe de la partie réelle des valeurs propres de \mathbf{A}_2 et $\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{M}^*$ des équations 4.64, 4.67 et 4.68.

- F inférieur à une valeur minimale F_{mi} et une valeur maximale F_{ma} , il existe un seul point d'équilibre stable.
- F compris entre F_{mi} et F_- , il existe trois points d'équilibre : deux stables et un instable pour le temps t_1 .
- F compris entre F_- et F_+ , il existe trois points d'équilibre, dont un seul est stable.
- F compris entre F_+ et F_{ma} il existe à nouveau trois points d'équilibre dont un est instable pour le temps t_1 et les autres stables.

Pour $\nu = 1.01$ (cf la figure 4.16) il existe un seul point d'équilibre pour toute amplitude de déplacement, qui est soit stable (pour $F < F_-$ et $F > F_+$), soit instable (pour $F_- \leq F \leq F_+$).

Lorsque plusieurs points d'équilibre existent, selon les conditions initiales, la réponse temporelle sera attirée par l'un d'eux.

Il est également possible d'obtenir des comportements chaotiques, comme vu dans la partie précédente pour le système électro-mécanique avec un seul mode mécanique. Traçons les résultats pour un problème à deux modes dans la sous partie suivante.

Analyse de l'existence potentielle de comportements chaotiques via la méthode de Melnikov

L'apparition de dynamique chaotique est possible pour certaines valeurs des composants électriques. On étudie le problème pour les valeurs du problème à deux modes en résonance interne en traçant la distance $D(t_m)$ par rapport aux paramètres $\zeta < 0$ et C_{NL} (cf la figure 4.17).

On remarque des comportements similaires que dans le cas avec un seul mode mécanique.

Pour se donner une idée des comportements qui peuvent être obtenus avec le système électro-mécanique, des réponses fréquentielles sont tracées dans la prochaine sous partie.

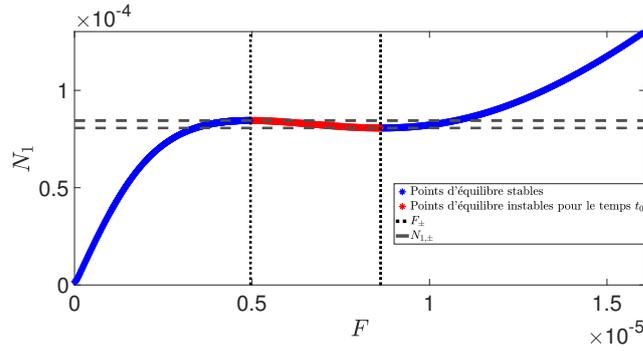
Réponses fréquentielles des points d'équilibre

On trace les points d'équilibre avec leur instabilité pour une amplitude de déplacement fixée et une bande de pulsation ν autour de 1 (cf la figure 4.18). On observe alors la présence d'un isola, comme dans le cas à un mode. On s'aperçoit à nouveau qu'il existe un maximum d'amplitude N_1 pour lequel la réponse fréquentielle reste en dessous de ce maximum.

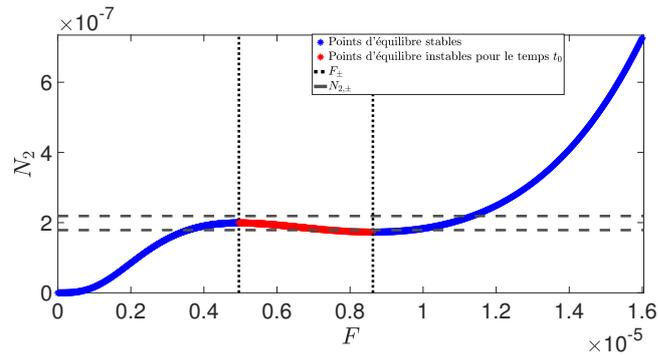
Dans les deux cas de systèmes électro-mécaniques étudiés, plusieurs régimes dynamiques ont été identifiés, ainsi que des comportements fréquentiels particuliers dues aux non linéarités, tels que des isolas. Ces résultats sont issus de l'étude analytique, afin de les confirmer des intégrations numériques sont menées sur les systèmes réduits adimensionnés dans la partie suivante.

4.3 Comparaison de résultats analytiques et numériques

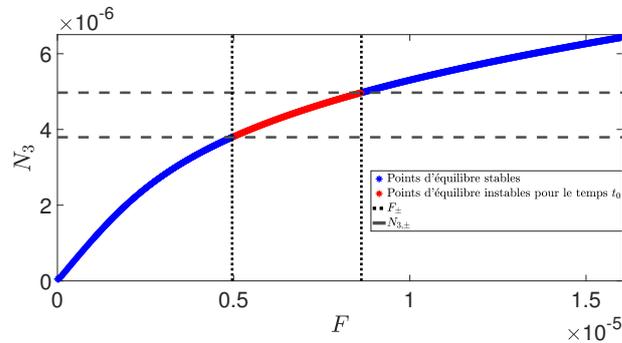
Les développements analytiques ont permis d'identifier des SIM, et de tracer les réponses fréquentielles des amplitudes N_i avec $i = 1,2,3$. Ces résultats théoriques sont confrontés à des résultats obtenus par l'intégration numérique des systèmes d'équations



(a) Tracé des points d'équilibre de l'amplitude N_1 en fonction de l'amplitude de déplacement F



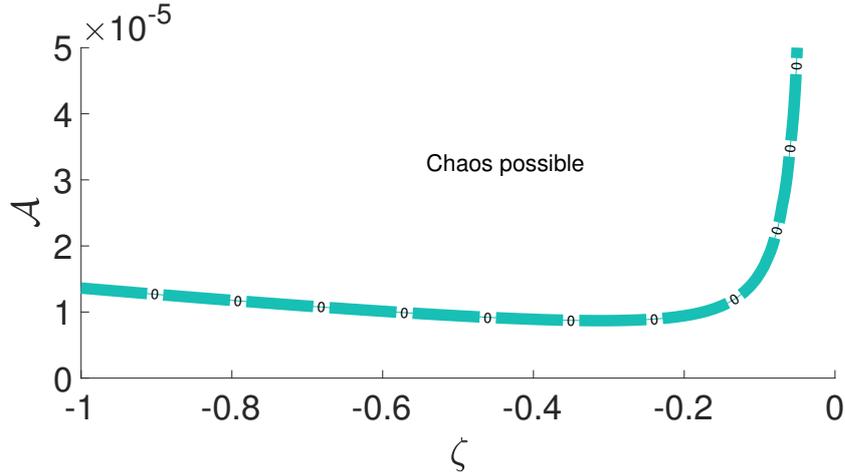
(b) Tracé des points d'équilibre de l'amplitude N_2 en fonction de l'amplitude de déplacement F



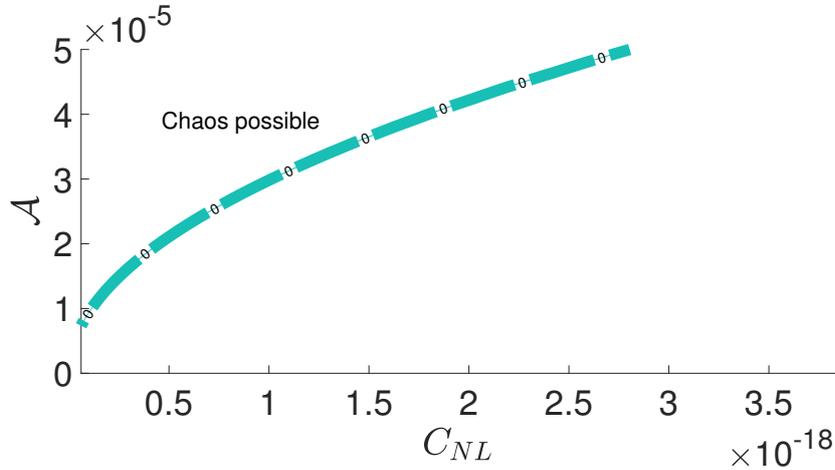
(c) Tracé des points d'équilibre de l'amplitude N_3 en fonction de l'amplitude de déplacement F

FIGURE 4.16 – Tracés des points d'équilibre d'amplitude N_1 , N_2 et N_3 par rapport à l'amplitude de déplacement F à partir du système 4.71. Les paramètres utilisés sont $\nu = 1.01$, $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 140 H$ et $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$. Les zones d'instabilité sont identifiées à partir du signe de la partie réelle des valeurs propres de \mathbf{A}_2 et $\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{M}^*$ des équations 4.64, 4.67 et 4.68.

adimensionnés dans le cas avec et sans résonance interne (cf les équations 4.11 et 4.51, 4.52 et 4.53). D'abord, on s'intéresse au cas sans résonance interne.



(a) Tracé de la distance $|\mathcal{D}(t_m)| = 0$ (cf l'équation 4.39(c)) par rapport à l'amplitude \mathcal{A} de la réponse périodique r_n et au paramètre ζ avec $C_{NL} = 10^{-19} C^3 \cdot V^{-1}$.



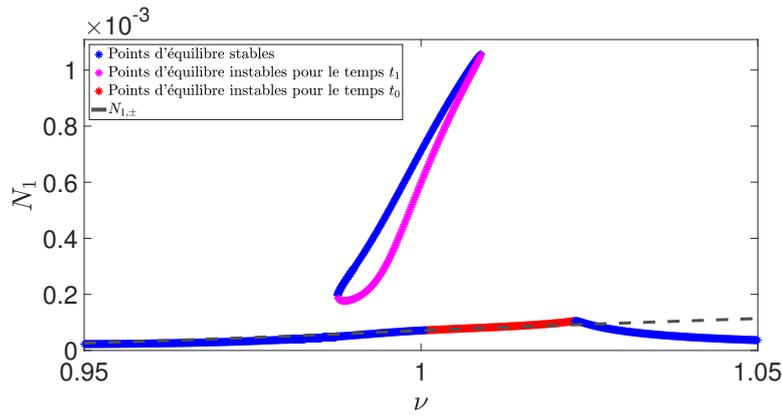
(b) Tracé de la distance $|\mathcal{D}(t_m)| = 0$ par rapport à l'amplitude \mathcal{A} de la réponse périodique r_n et au paramètre C_{NL} avec $\zeta = -0.2$.

FIGURE 4.17 – Tracés des distances $|\mathcal{D}(t_m)| = 0$ par rapport à l'amplitude \mathcal{A} et aux paramètres ζ et C_{NL} avec $\nu = 1.01$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 140 H$. Lorsque la distance $\mathcal{D}(t_m)$ passe par 0, alors il est possible d'obtenir un comportement chaotique.

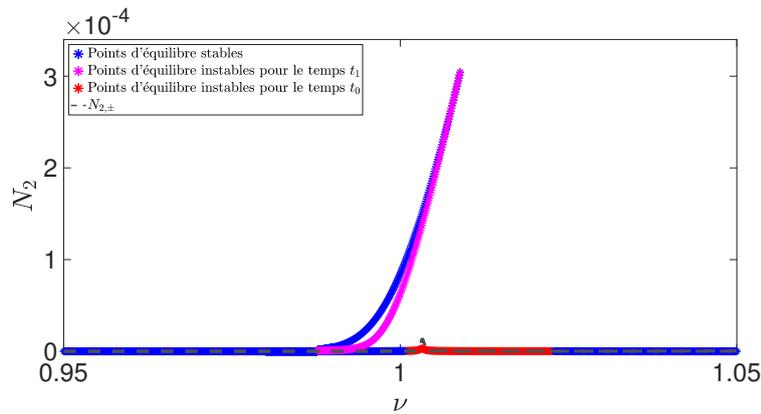
4.3.1 Comparaison pour le cas avec un seul mode mécanique

Dans le cas où un seul mode est pris en compte, l'intégration numérique de l'équation 4.11 se fait au travers de la fonction ode45 de Matlab. Elle permet d'obtenir les solutions temporelles de $r_\tau(t^*)$ et $Q(t^*)$. À partir de ces variables on peut tracer les amplitudes $N_1(t^*)$ et $N_3(t^*)$ (cf l'équation 4.14), telles que :

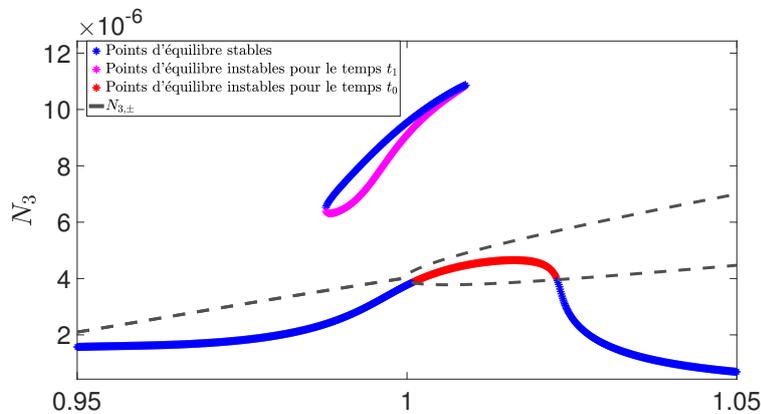
$$\begin{aligned} N_1 &= \sqrt{\dot{r}_\tau^2 + \nu^2 r_\tau^2} \\ N_3 &= \sqrt{\dot{Q}^2 + \nu^2 Q^2} \end{aligned} \tag{4.72}$$



(a) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_1



(b) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_2



(c) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_3

FIGURE 4.18 – Tracés des réponses fréquentielle des points d'équilibre d'amplitude N_1 , N_2 et N_3 obtenus à partir de l'équation 4.71 pour les paramètres : $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 140 H$, $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$ et $F = 7 \times 10^{-6} m$. Les zones d'instabilité sont identifiées à partir du signe de la partie réelle des valeurs propres de \mathbf{A}_2 et $\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{M}^*$ des équations 4.64, 4.67 et 4.68.

Comparaison sur les tracés de SIM

Précédemment, à partir des figures 4.7 et 4.9, plusieurs scénarios ont été identifiés. On choisit une pulsation ν et une amplitude de déplacement F afin de tester ces différents

scénarios via l'intégration numérique de l'équation 4.11 (cf les figures 4.19 et 4.20). Il est connu pour les systèmes non linéaires que les conditions initiales sont importantes car elles peuvent modifier le comportement dynamique du système. C'est pourquoi des conditions initiales différentes sont appliquées lors des intégrations numériques pour tester les différents régimes dynamiques.

- Pour $\nu = 0.98$ et $F = 7 \times 10^{-6}$ m (cf la figure 4.7), il existe trois points d'équilibre dont deux stables séparés par un instable pour le temps t_1 . Selon les conditions initiales imposées, la dynamique est attirée par le point du haut ou du bas (cf la figure 4.19). On observe des solutions périodiques stables sur la branche inférieure et supérieure du SIM en fonction des conditions initiales imposées au système.
- Pour $\nu = 0.98$ et $F = 1.3 \times 10^{-5}$ m, il existe trois points d'équilibre mais un seul est stable : le plus haut. Il attire d'ailleurs la dynamique, comme on le voit sur la figure 4.20(a). On peut aussi obtenir des comportements de modulation s'il existe un seul point d'équilibre qui est instable, pour $\nu = 1.02$ et $F = 7 \times 10^{-6}$ m par exemple dans la figure 4.20(b). Dans ce cas de modulation, on trace les variables $r_\tau(t^*)$ et $Q(t^*)$ (cf la figure 4.21).

Les régimes périodiques et quasi-périodiques ayant été identifiés, on s'intéresse au tracé de régimes chaotiques dans la sous partie suivante.

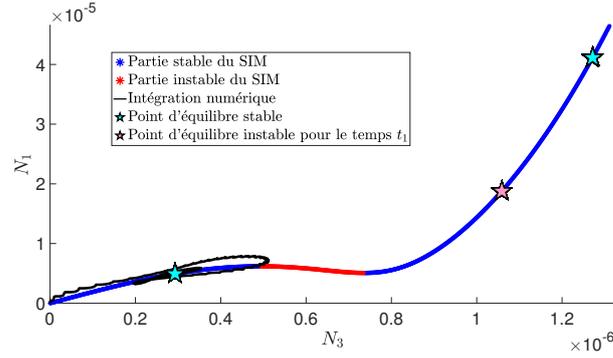
Vérification de la création de comportements chaotiques

Précédemment, le tracé de la distance identifiée par la méthode de Melnikov sur la figure 4.10 a permis de remarquer que, pour certaines valeurs de paramètre ζ et C_{NL} , on peut obtenir des comportements périodiques ou chaotiques. Afin de vérifier ces résultats, on effectue des intégrations numériques de l'équation 4.11 pour des valeurs choisies de ζ et C_{NL} , et on trace les portraits de phase de $Q(t^*)$ sur la figure 4.22. D'après la figure 4.22(a), pour $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$ et $\zeta = -1$ la dynamique se stabilise autour d'un comportement périodique ou quasi-périodique. Mais, la figure 4.22(b) montre qu'il y a un comportement chaotique pour $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$ et $\zeta = -1$. On vérifie ces comportements par les tracés temporels de r_τ et Q . Ainsi, pour $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$ et $\zeta = -1$, on obtient un comportement périodique (cf la figure 4.23). Et, Pour $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$ et $\zeta = -1$, sur la figure 4.24, on observe qu'on obtient effectivement un comportement chaotique de la réponse temporelle $Q(t^*)$. On remarque sur la figure 4.24(b) le comportement chaotique entre les deux points attracteurs, en traçant en différentes couleurs toutes les 80 périodes. On confirme ainsi qu'il est possible d'obtenir un comportement chaotique pour le système au travers de valeurs particulières des composants du circuit électrique.

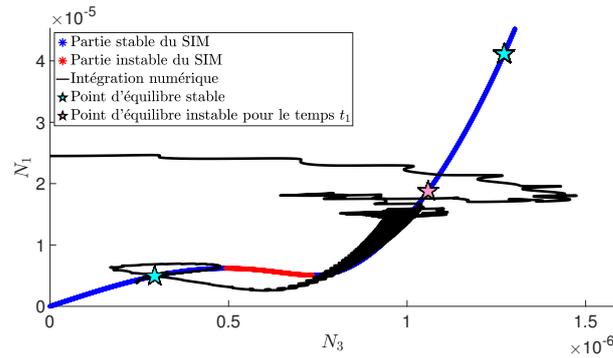
Ces vérifications à ν fixé ayant été menée, on trace la comparaison entre les résultats analytiques et numériques pour les courbes fréquentielles.

Comparaison sur les réponses fréquentielles

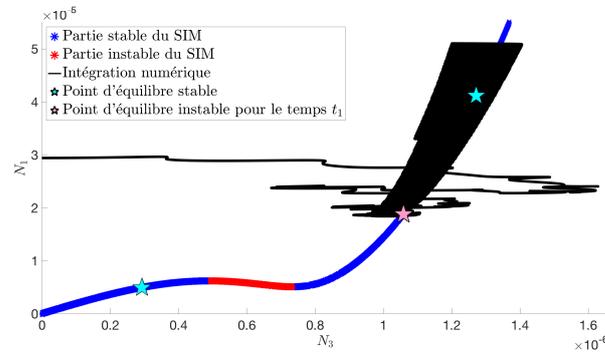
Les réponses fréquentielles sont tracées analytiquement à partir des points d'équilibre de l'équation 4.34. Cette réponse fréquentielle est également comparée aux résultats obtenus analytiquement (cf les figures 4.11 et 4.12). Cette comparaison est effectuée seulement sur les courbes (ν, N_3) (cf la figure 4.25), puisqu'elles sont plus lisibles que les courbes (ν, N_1) qui sont très ramassées du fait de l'isola (cf les figures 4.11(a) et 4.12(a)). La ré-



(a) La condition initiale est le point origine. La dynamique est attirée par le point d'équilibre stable du bas.



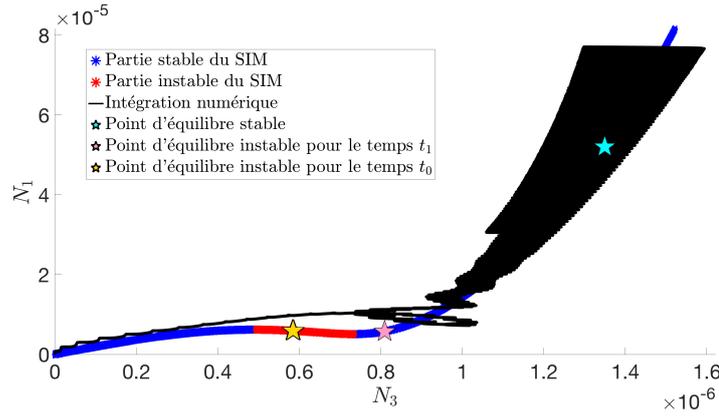
(b) Toutes les conditions initiales nulles sauf $r_n(0) = 2.5 \times 10^{-5}$. La dynamique n'est pas attirée par le point instable et est attirée par le point d'équilibre stable sur la branche basse.



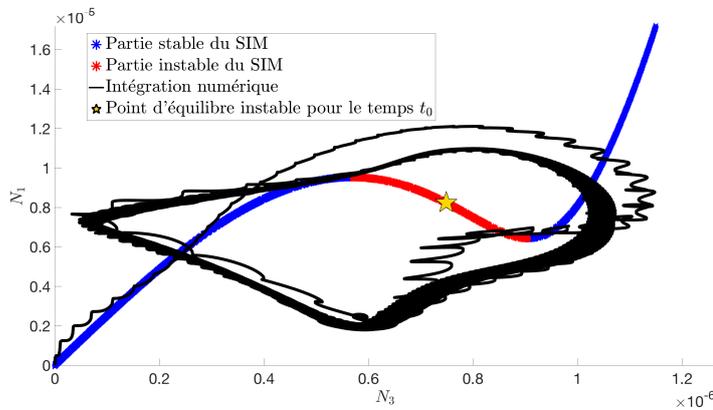
(c) Toutes les conditions initiales nulles sauf $r_n(0) = 3 \times 10^{-5}$. La dynamique est attirée par le point d'équilibre stable de la branche haute.

FIGURE 4.19 – Tracés du SIM (à partir de l'équation 4.30) avec trois points d'équilibre : un instable pour le temps t_1 et deux stables avec un sur la branche basse et l'autre sur la branche haute, avec $\nu = 0.98$ et $F = 7 \times 10^{-6}$ m. Tracé des intégrations numériques (par rapport à l'équation 4.11) pour différentes conditions initiales afin de montrer les scénarios dynamiques possibles. Les paramètres électriques sont $\zeta = 1$, $L_0 = 61$, $R = 3050 \Omega$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$.

ponse analytique permet d'identifier un isola dont la branche supérieure est stable. Ce haut d'isola est également obtenu numériquement grâce à l'utilisation de conditions



(a) Condition initiale : le point d'origine. La dynamique est attirée par le seul point d'équilibre stable sur la branche supérieure.



(b) Condition initiale : le point d'origine. La dynamique est attirée par le seul point d'équilibre qui est instable, ce qui mène à un comportement de modulation.

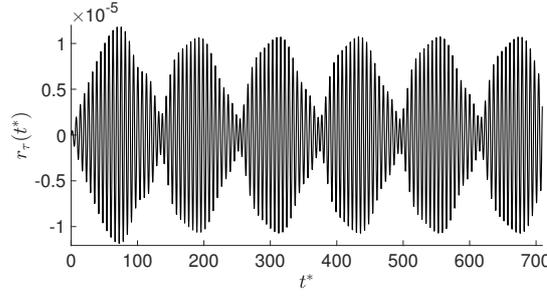
FIGURE 4.20 – Tracés de deux SIM avec différents points d'équilibre : a) trois points dont deux instables, b) un seul instable sur la branche intermédiaire, dans le cas où : a) $\nu = 0.98$ et $F = 1.3 \times 10^{-5}$ m et b) $\nu = 1.02$ et $F = 7 \times 10^{-6}$ m.

initiales particulières. Pour la partie la plus haute de l'isola, les résultats analytiques et numériques présentent une différence, sans doute due au fait que les points d'équilibre stables et instables sont très proches, ce qui peut perturber le résultat numérique. On a confirmé ainsi la validité des résultats théoriques dans le cas à un mode.

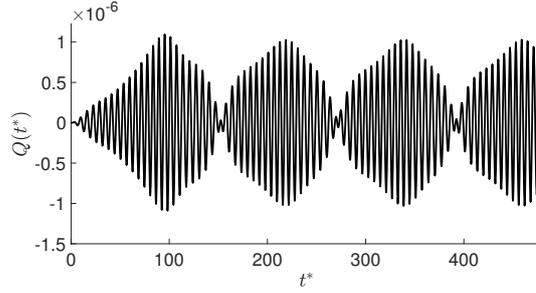
Les mêmes vérifications sont effectuées pour le cas où il existe une résonance interne dans le système électro-mécanique.

4.3.2 Comparaison pour le cas avec deux modes en résonance interne 1 : 3

Dans un premier temps, afin de vérifier les différents scénarios dynamiques identifiés par rapport à l'amplitude de déplacement F , les SIM analytiques sont tracés et comparés



(a) Tracé temporel de la variable $r_\tau(t^*)$



(b) Tracé temporel de la variable $Q(t^*)$.

FIGURE 4.21 – Tracés temporels des variables $r_\tau(t^*)$ et $Q(t^*)$ à partir de l'intégration numérique de l'équation 4.11 pour $\nu = 1.02$ et $F = 7 \times 10^{-6}$ m, lors du comportement de modulation.

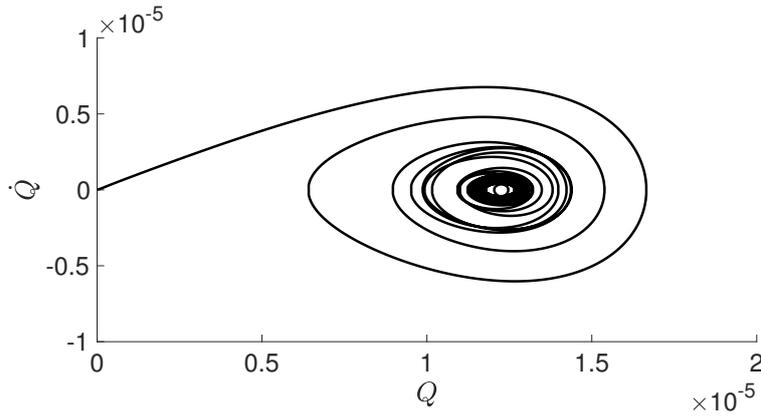
aux résultats issus d'intégrations numériques pour différentes conditions initiales, avec :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \sqrt{\dot{r}_n^2 + \nu^2 r_n^2} \\
 N_2 &= \sqrt{\dot{r}_m^2 + 9\nu^2 r_m^2} \\
 N_3 &= \sqrt{\dot{Q}^2 + \nu^2 Q^2}
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

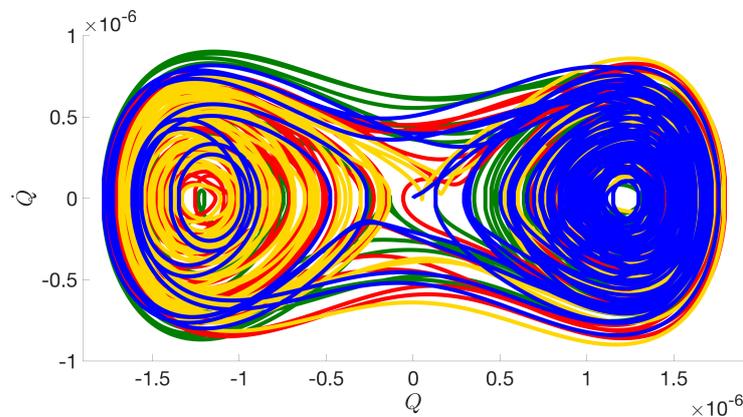
Comparaison pour les tracés de SIM

Les différents régimes possibles ont été identifiés d'après les figures 4.15 et 4.16. Ainsi plusieurs SIM sont tracés pour vérifier ces scénarios. Pour cela, on utilise l'équation 4.58 du SIM, et on déduit l'amplitude N_2 et E_{cs1} de l'équation 4.71.

- Pour $F = 7 \times 10^{-6}$ m et $\nu = 1$, d'après la figure 4.15 trois points d'équilibre sont possibles dont deux sont stables. Lorsque la condition initiale est l'origine, la réponse est attirée par le point d'équilibre du bas qui est stable, il s'agit d'une réponse périodique (cf la figure 4.26(a)). Lorsqu'on prend une condition initiale proche du point d'équilibre intermédiaire qui est instable on peut être attiré par le point stable du bas, ou celui du haut (cf la figure 4.26(b)).
- Pour $F = 7.5 \times 10^{-6}$ m et $\nu = 1$, on a à nouveau trois points d'équilibre mais dont les deux du bas sont instables (cf la figure 4.27). Pour une condition initiale correspondant à l'origine, la dynamique est une réponse quasi-périodique autour du point d'équilibre du bas. Pour une condition initiale proche du point d'équilibre intermédiaire, on est attiré par le point d'équilibre stable du haut.

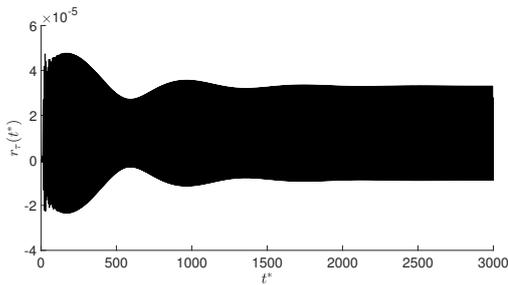


(a) La capacité non linéaire est $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$. La dynamique se stabilise dans un comportement quasi-périodique.

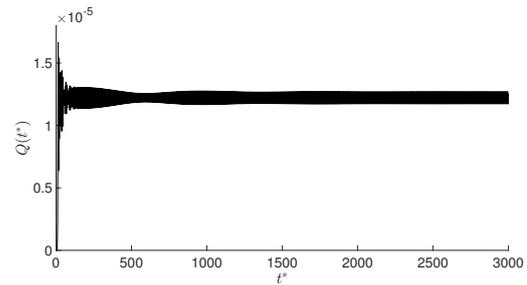


(b) La capacité non linéaire est $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$. La dynamique montre un comportement chaotique. On trace le portrait de phase toutes les 80 périodes.

FIGURE 4.22 – Portraits de phase de $Q(t^*)$ issus de l'intégration numérique de l'équation 4.11 pour différentes capacités non linéaires C_{NL} . Les autres paramètres sont $F = 6 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\nu = 0.98$, $L_0 = 61 \text{ H}$, $\zeta = -1$ et $R = 3050 \Omega$.



(a) Réponse temporelle de $r_\tau(t^*)$.



(b) Réponse temporelle de $Q(t^*)$.

FIGURE 4.23 – Tracés temporels $r_\tau(t^*)$ et $Q(t^*)$ de l'intrégration numérique 4.11 pour $F = 6 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\nu = 0.98$, $L_0 = 61 \text{ H}$, $R = 3050 \Omega$, $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$ et $\zeta = -1$.

— Pour $\nu = 1.01$ et $F = 7 \times 10^{-6} \text{ m}$, il existe un seul point d'équilibre qui est instable (cf la figure 4.16). En partant de l'origine comme condition initiale, une réponse

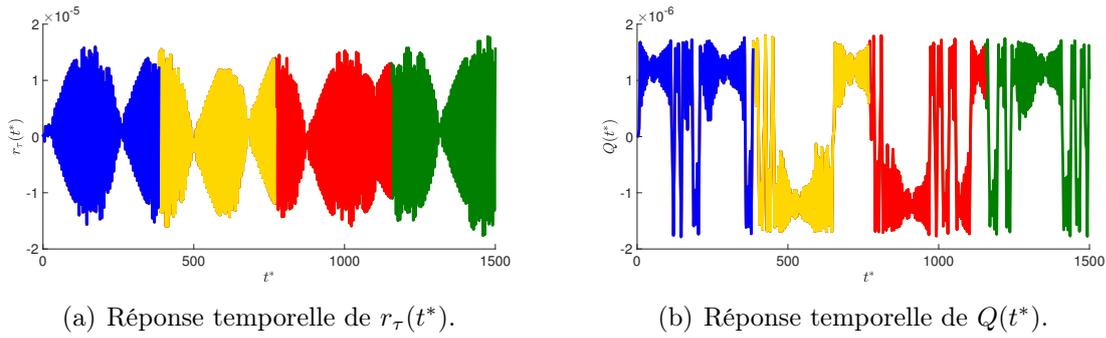


FIGURE 4.24 – Tracés temporels $r_\tau(t^*)$ et $Q(t^*)$ de l'intégration numérique 4.11 pour $F = 6 \times 10^{-6}$ m, $\nu = 0.98$, $L_0 = 61$ H, $R = 3050$ Ω , $C_{NL} = 10^{-19}$ C³.V⁻¹ et $\zeta = -1$. On trace toutes les 80 périodes comme pour la figure 4.22(b).

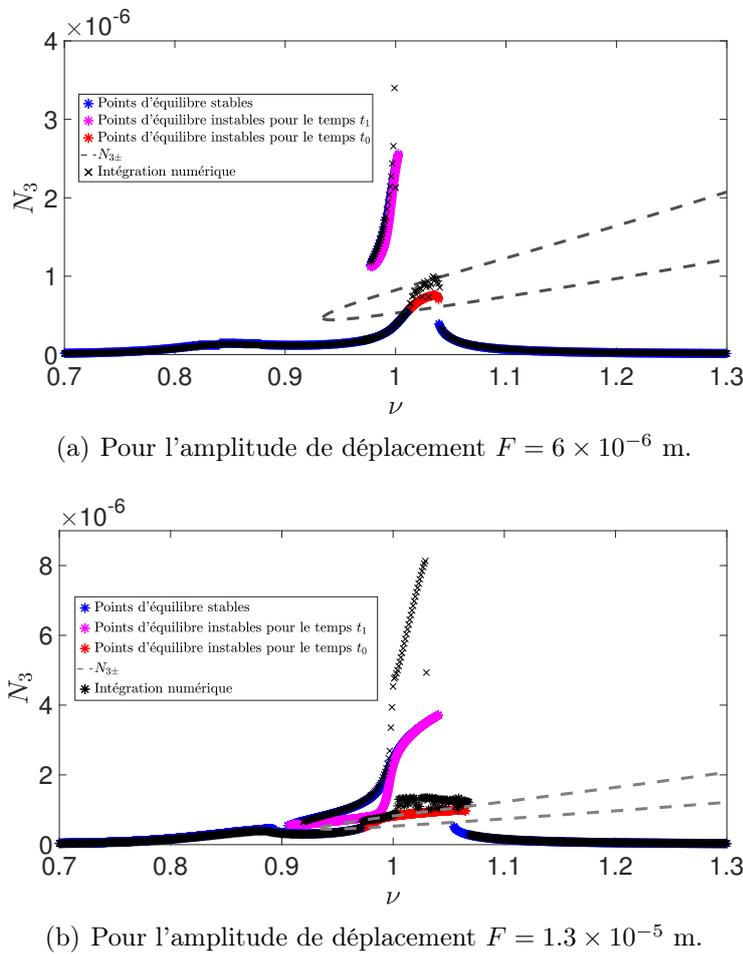
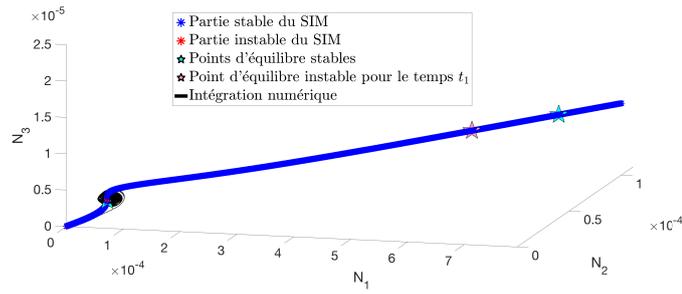


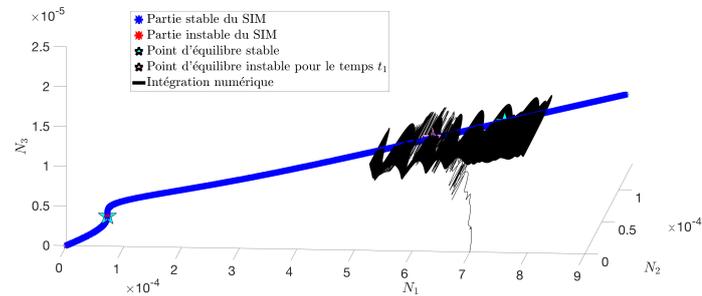
FIGURE 4.25 – Tracé des réponses fréquentielles avec une comparaison entre les points d'équilibre issus de l'analytique et de l'intégration numérique sur 4.11. Les paramètres électriques sont $\zeta = 1$, $R = 3050$ Ω , $L_0 = 61$ H et $C_{NL} = 10^{-19}$ C³.V⁻¹.

quasi-périodique de modulation autour de ce point d'équilibre est observée (cf la figure 4.28).

Ces figures permettent de constater les différentes réponses périodiques et quasi-périodiques

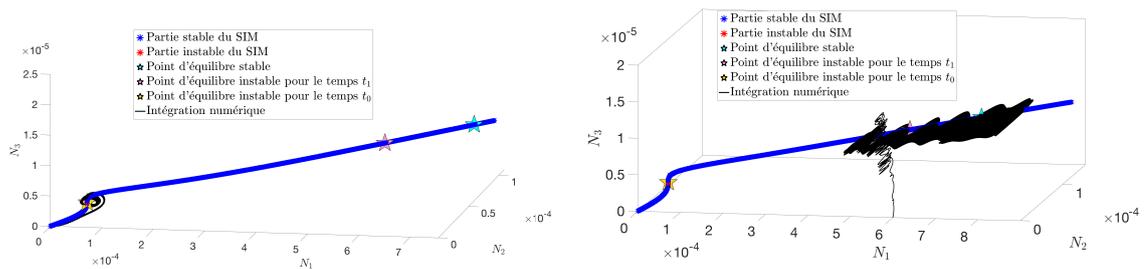


(a) La condition initiale utilisée est l'origine. La dynamique est attirée par le point d'équilibre du bas.



(b) Les conditions initiales utilisées sont nulles, sauf $r_n(0) = 7 \times 10^{-3}$. La dynamique est attirée par le point d'équilibre du haut.

FIGURE 4.26 – Tracés des réponses temporelles sur le SIM (à partir des équations 4.58 et 4.71) avec trois points d'équilibre pour $\nu = 1$ et $F = 7 \times 10^{-6}$ m et différentes conditions initiales.



(a) La condition initiale est l'origine. La dynamique devient une modulation autour du point 6×10^{-4} . La dynamique est attirée par le point d'équilibre instable au temps rapide t_0 .

(b) Les conditions initiales sont nulles sauf $r_n(0) = 6 \times 10^{-4}$. La dynamique est attirée par le point d'équilibre stable.

FIGURE 4.27 – Tracés des réponses temporelles sur le SIM (à partir des équations 4.58 et 4.71) pour $F = 7.5 \times 10^{-6}$ m et $\nu = 1$ et différentes conditions initiales.

qu'il est possible d'obtenir avec ce système. Intéressons nous à la création de régimes dynamiques chaotiques.

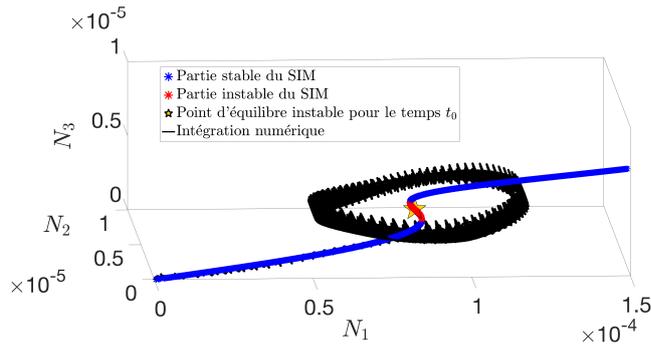


FIGURE 4.28 – Tracé de la réponse temporelle sur le SIM (à partir des équations 4.58 et 4.71) pour $\nu = 1.01$ et $F = 7 \times 10^{-6}$ m. La condition initiale est l’origine.

Vérification de l’existence de comportements chaotiques

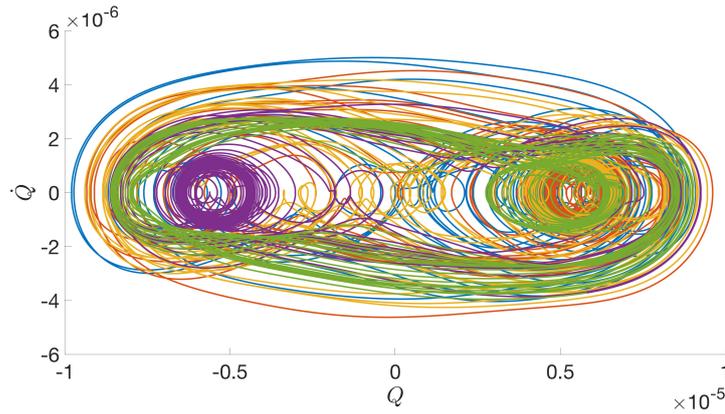
On trace les portraits de phase (Q, \dot{Q}) pour différentes valeurs de ζ et C_{NL} afin de vérifier s’il est possible d’obtenir des comportements chaotiques. On remarque que dans le cas de la figure 4.29(a) le comportement est chaotique et hésite entre deux états, alors que dans le cas de la figure 4.29(b), le régime semble quasi-périodique. On trace les portraits de phase de différentes couleurs toutes les 80 périodes, le même code couleur sera appliqué aux réponses temporelles $r_n(t^*)$, $r_m(t^*)$ et $Q(t^*)$. On représente les comportements temporels des variables $r_n(t^*)$, $r_m(t^*)$ et $Q(t^*)$ sur les figures 4.30 et 4.31. On observe sur la figure 4.30 que $Q(t^*)$ présente un régime chaotique qui oscille entre deux états. Quant à la figure 4.31, le comportement est quasi-périodique, ce qui est sans doute dû à l’amplitude de $r_n(t^*)$ (qui correspond à \mathcal{A} dans l’application de la méthode de Melnikov) qui est trop faible pour obtenir un comportement chaotique ici. Il est donc possible d’obtenir des régimes chaotiques lors de la présence d’une résonance 1 : 3 entre deux modes propres de la structure électro-mécanique.

Confirmons les résultats analytiques pour la réponse fréquentielle dans la sous partie suivante.

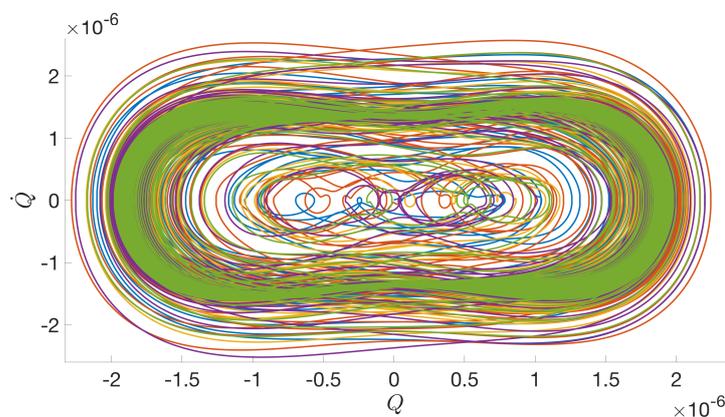
Comparaison pour les tracés fréquentiels

Les résultats d’intégration numérique des équations 4.51, 4.52 et 4.53 sont calculés pour une bande autour de $\nu = 1$ (cf la figure 4.32). On observe que la branche haute de l’isola qui est stable est bien obtenue par l’intégration numérique pour les bonnes conditions initiales. On trouve à nouveau une bonne concordance entre les résultats analytiques et numériques, avec à l’endroit de la modulation (point d’équilibre instable pour le temps t_0), l’intégration numérique qui passe au-dessus de la réponse analytique. Comme dans le cas avec un seul mode mécanique, une différence entre résultats analytiques et numériques est observable lorsque les parties stables et instables pour t_1 de la réponse fréquentielle sont trop proches sur le haut de l’isola.

L’intégration numérique sur les systèmes adimensionnés a permis de confirmer les résultats analytiques obtenus. On a donc un outil analytique pour étudier le comportement du système électro-mécanique, ce qui permet de statuer sur l’utilité de ce système pour



(a) La capacité non linéaire est $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$. La dynamique se stabilise dans un comportement périodique autour de l'état de droite.



(b) La capacité non linéaire est $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$. La dynamique se stabilise dans un comportement quasi-périodique.

FIGURE 4.29 – Portraits de phase de $Q(t^*)$ issus de l'intégration numérique de l'équation 4.11 pour différentes capacités non linéaires C_{NL} . Les autres paramètres sont $F = 7 \times 10^{-6}$ m, $\nu = 1.01$, $L_0 = 140$ H, $\zeta = -0.2$ et $R = 3050$ Ω . Les comportements sont tracés toutes les 80 périodes.

récupérer de l'énergie ou contrôler les vibrations de la structure principale. On applique ce modèle afin de comparer le système électro-mécanique à un absorbeur linéaire dans la partie suivante.

4.4 Comparaison entre un circuit linéaire et le circuit non linéaire

Le système électro-mécanique avec le circuit non linéaire peut être utilisé soit pour récupérer de l'énergie de la structure, soit pour le contrôle vibratoire. Une comparaison entre ce système et un circuit résonant (ce qui correspond à un absorbeur linéaire) est menée, dans le cas à un mode et dans le cas avec une résonance interne.

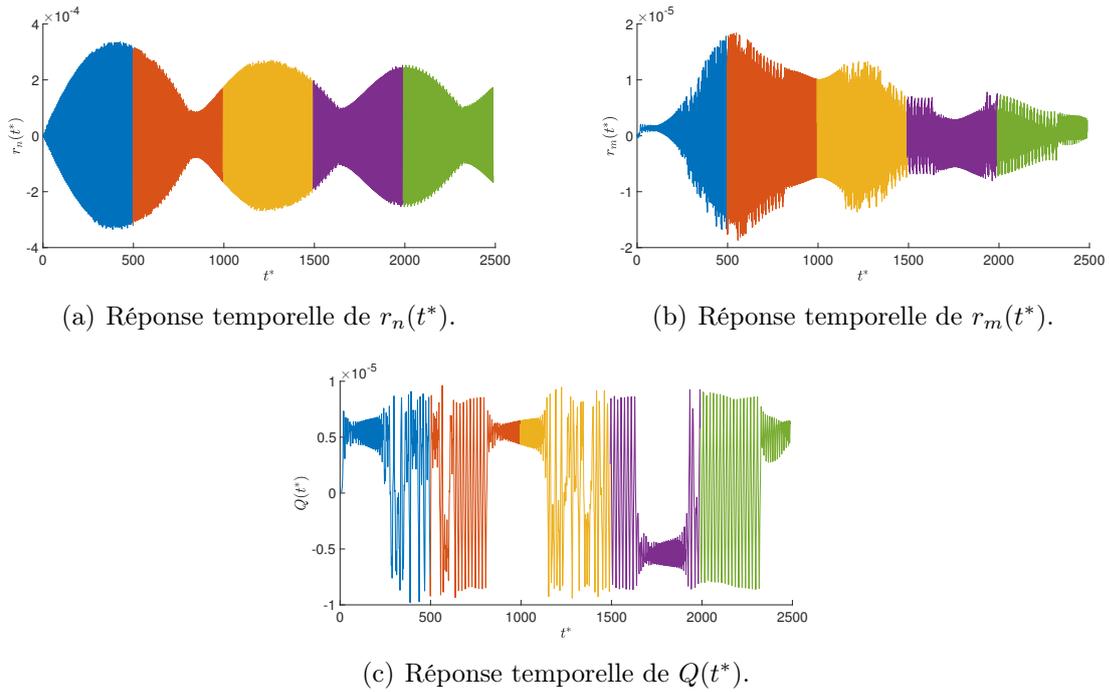


FIGURE 4.30 – Réponses temporelles des variables $r_n(t^*)$, $r_m(t^*)$ et $Q(t^*)$ pour $F = 7 \times 10^{-6}$ m, $\nu = 1.01$, $L_0 = 140$ H, $C_{NL} = 10^{-17}$ C³.V⁻¹ et $R = 3050$ Ω, toutes les 80 périodes.

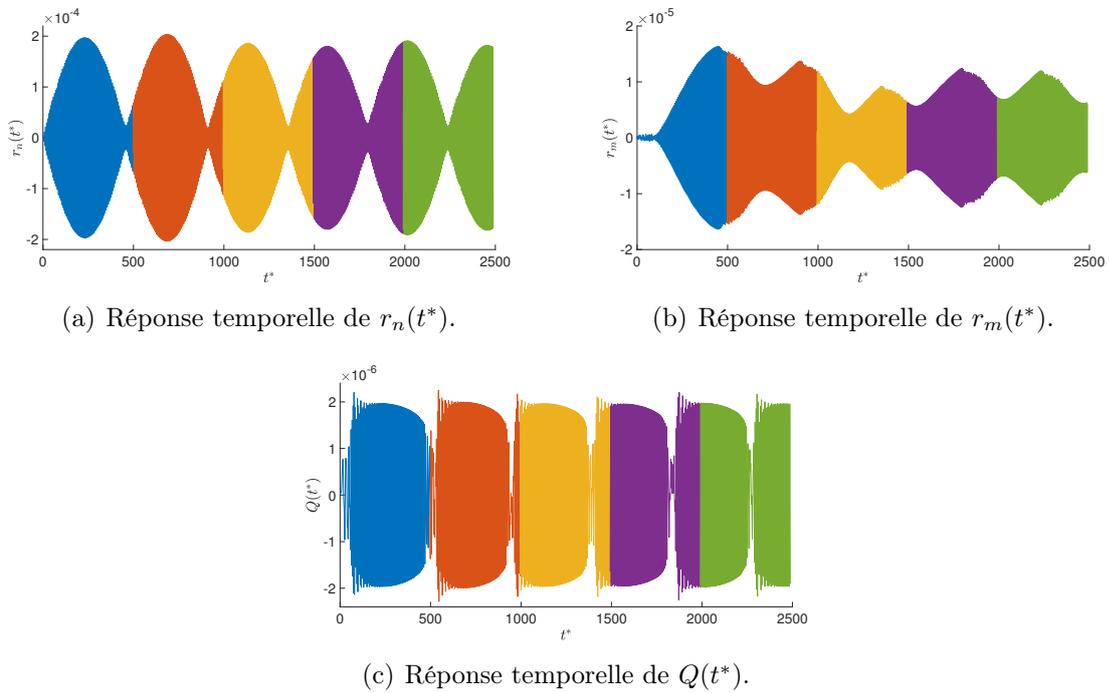
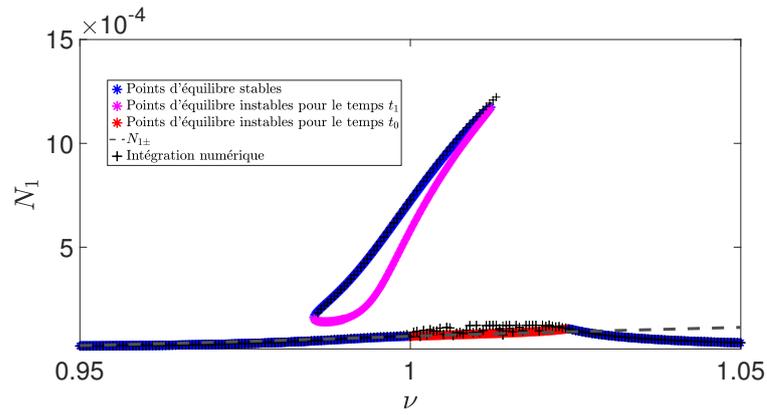
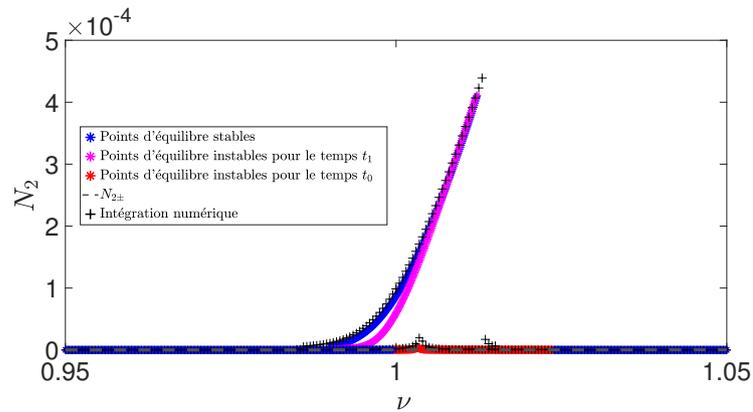


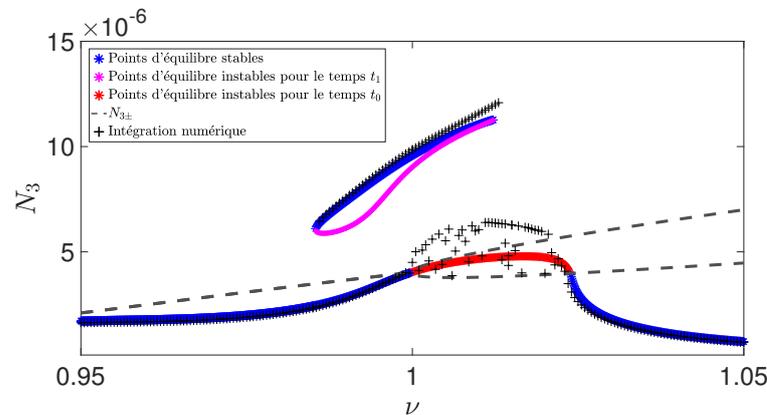
FIGURE 4.31 – Réponses temporelles des variables $r_n(t^*)$, $r_m(t^*)$ et $Q(t^*)$ pour $F = 7 \times 10^{-6}$ m, $\nu = 1.01$, $L_0 = 140$ H, $C_{NL} = 10^{-19}$ C³.V⁻¹ et $R = 3050$ Ω, toutes les 80 périodes.



(a) Réponses fréquentielles de l'amplitude N_1 .



(b) Réponses fréquentielles de l'amplitude N_2 .



(c) Réponses fréquentielles de l'amplitude N_3 .

FIGURE 4.32 – Tracé des réponses fréquentielles, comparaison entre les résultats issus de l'intégration numérique et ceux issus des calculs analytiques pour $F = 7 \times 10^{-6}$ m.

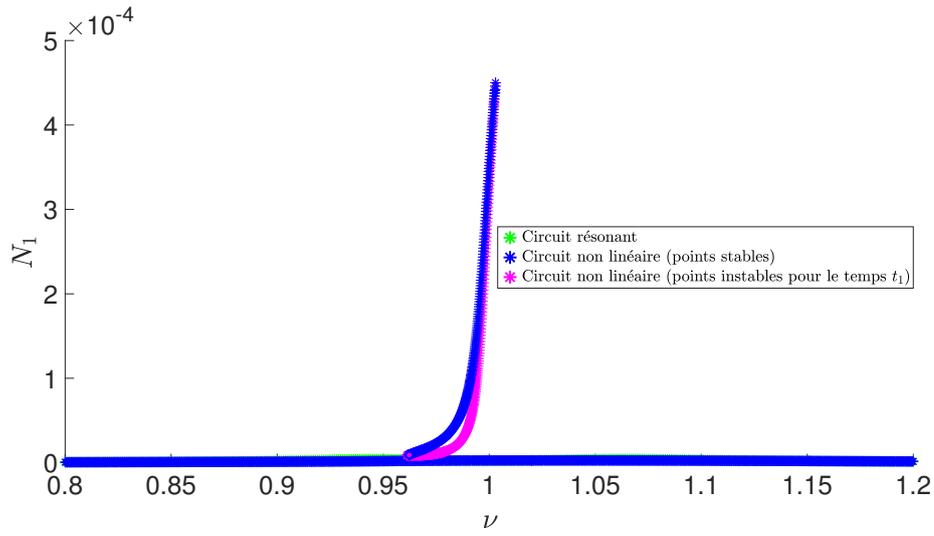
4.4.1 Compararaison avec un circuit résonant dans le cas à un mode

Le modèle pour le circuit non linéaire étant confirmé, on cherche maintenant à le comparer à un absorbeur linéaire. L'absorbeur linéaire correspond au circuit électrique résonant dont la pulsation électrique est accordée à la pulsation propre du mode de la

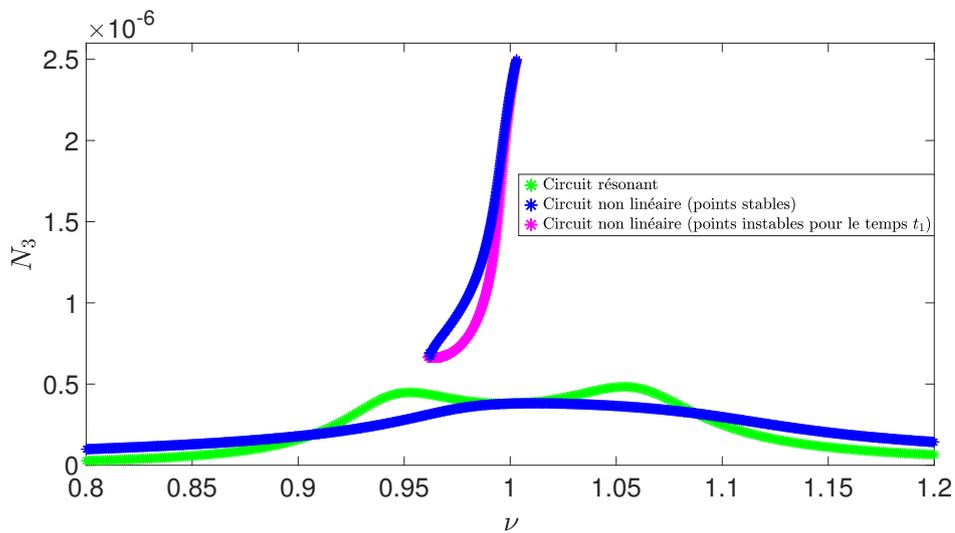
structure principale. Cette comparaison s'effectue sur les tracés fréquentiels analytiques et temporels numériques.

Les tracés fréquentiels analytiques

Une comparaison des deux circuits est donc présentée analytiquement sur la figure 4.33. L'inductance du circuit linéaire a été choisie pour que la résonance électrique soit accordée à celle du système, i.e. $L_0 = 43.7 H$. Ensuite, des études ont été effectuées sur les paramètres électriques (ζ , L_0 et C_{NL}) pour trouver une combinaison permettant d'atténuer les vibrations, au travers de l'amplitude N_1 . On observe sur la figure 4.33 que le



(a) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_1 .



(b) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_3 .

FIGURE 4.33 – Comparaison des réponses fréquentielles du circuit résonant et du circuit non linéaire pour $F = 6 \times 10^{-6} m$ et $R = 3050 \Omega$. Les paramètres électriques sont : pour le circuit résonant $L_0 = 43.7 H$; pour le circuit non linéaire $L_0 = 7 H$, $\zeta = 0.1$ et $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$.

circuit électrique non linéaire reste en dessous d'un certain seuil, tout comme le circuit

résonant. Mais le circuit électrique non linéaire semble donner des amplitudes de N_1 plus fortes à cause de l'isola. Si on effectue un zoom sur la figure 4.33(a), on obtient la figure 4.34. On observe ainsi que si la dynamique n'est pas attirée par l'isola, l'amplitude des

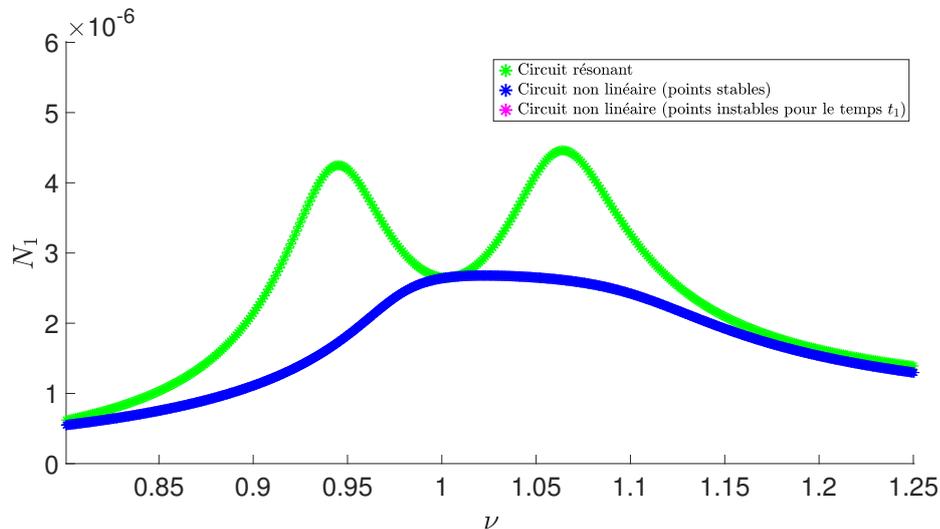


FIGURE 4.34 – Zoom effectué sur la figure 4.33(a) représentant la réponse fréquentielle de l'amplitude N_1 .

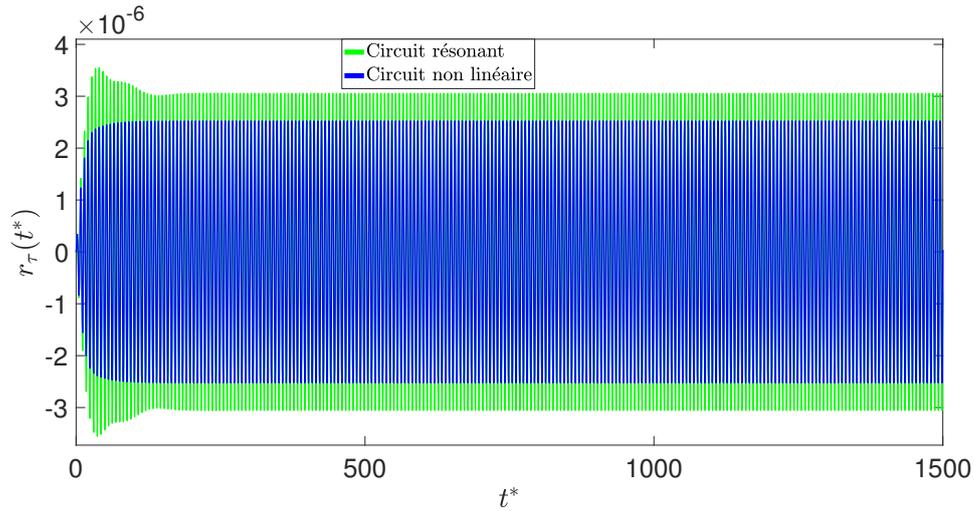
vibrations est diminuée dans le cas du circuit non linéaire. N_1 est relié aux amplitudes de vibration de la poutre, tandis que N_3 est relié à la charge électrique présente dans le matériau piézoélectrique. Ainsi, si la dynamique est attirée par l'isola, cela peut augmenter significativement l'énergie présente dans le circuit du matériau piézoélectrique (au travers de N_3) ce qui est intéressant pour de la récupération d'énergie.

Ces résultats étant analytiques, une étude sur les signaux temporels obtenus numériquement est menée.

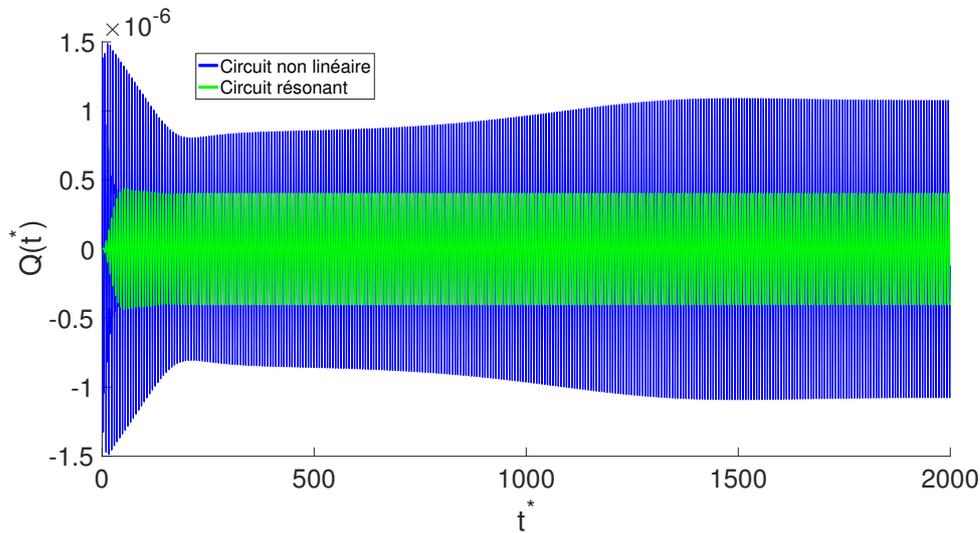
Les tracés temporels numériques

On trace maintenant les résultats temporels sur les variables $r_\tau(t^*)$ et $Q(t^*)$ issus de l'intégration numérique de l'équation 4.11 (cf la figure 4.35). Dans le cas où la dynamique est attirée par le point d'équilibre stable du bas pour $r_\tau(t^*)$ (cf la figure 4.35(a)), et dans le cas où la dynamique est attirée par le point d'équilibre stable du haut $Q(t^*)$ (cf la figure 4.35(b)) à $\nu = 0.98$ et $F = 6 \times 10^{-6}$ m. Dans chaque cas, on observe une amplitude de la vibration $r_\tau(t^*)$ plus faible et une amplitude de la charge électrique $Q(t^*)$ plus importante pour le circuit non linéaire. Il est donc intéressant, soit pour le contrôle vibratoire, soit pour la récupération d'énergie.

On s'intéresse dans la sous partie suivante aux résultats pour le cas où le système électromécanique est relié à un système principal qui présente une résonance interne 1 : 3.



(a) Réponse temporelle de $r_\tau(t^*)$.



(b) Réponse temporelle de $Q(t^*)$.

FIGURE 4.35 – Tracés des réponses temporelles de r_τ et Q quand le système est attiré par le point d'équilibre stable : a) du bas, b) du haut. Les paramètres utilisés sont $F = 6 \times 10^{-6}$ m, $\nu = 0.98$, $L_0 = 7$ H, $\zeta = 0.1$ et $C_{NL} = 10^{-19}$ C³.V⁻¹.

4.4.2 Comparaison avec un circuit résonant lors de la présence de la résonance interne

On utilise un circuit résonant dont la pulsation est accordée à celle mécanique du système couplé. Le matériau piézoélectrique et son circuit se comportent alors comme un absorbeur linéaire. On trace les réponses fréquentielles et temporelles de notre système électro-mécanique et d'un absorbeur linéaire accordé sur la pulsation basse de la résonance interne.

Tracé des réponses fréquentielles

Traçons d'abord les réponses fréquentielles (cf la figure 4.36). Pour le circuit résonant on pose $L_0 = 124 H$ afin que la résonance électrique et la résonance mécanique soient accordées. On remarque la présence d'un isola. En faisant un zoom sur la partie basse de la figure 4.36(a), on remarque que si la dynamique n'est pas attirée par l'isola, le circuit non linéaire est plus performant que le circuit résonant pour l'atténuation des vibrations (cf la figure 4.37). On veut maintenant vérifier ces comportements numériquement en traçant les comportements temporels des variables.

Tracé des réponses temporelles

On trace les comportements temporels des variables $r_n(t^*)$, $r_m(t^*)$ et $Q(t^*)$ à $\nu = 0.99$ lorsque la dynamique du système électro-mécanique se stabilise sur le point d'équilibre stable du bas (cf la figure 4.38) et du haut (cf la figure 4.39). On observe sur la figure 4.38(b) et 4.39(b) que le circuit non linéaire permet d'obtenir des amplitudes de r_m plus importantes, il renforce donc la liaison entre les modes en résonance interne.

On a un comportement similaire au cas à un mode sur $r_n(t^*)$ et $Q(t^*)$ selon que la dynamique est attirée par le point stable du bas ou du haut, comme on le voit respectivement sur les figures 4.38 et 4.39. On remarque que l'amplitude de r_n dans le cas du circuit non linéaire est inférieure ou supérieure à celle du circuit résonant selon que la dynamique est attirée par le point d'équilibre stable du bas ou du haut.

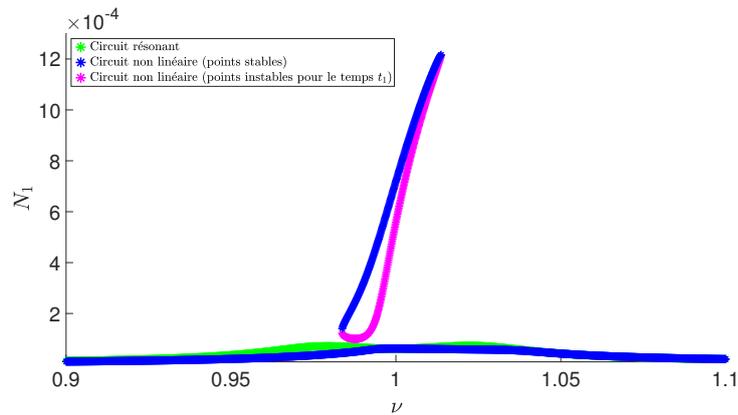
Pour finir, pour le problème de système électro-mécanique avec un mode ou deux modes en résonance interne, une optimisation du circuit non linéaire est possible que ce soit pour récupérer de l'énergie ou pour contrôler les vibrations. En outre, le circuit non linéaire permet d'augmenter l'énergie sur le deuxième mode qui n'est pas excité directement.

4.5 Conclusion du chapitre

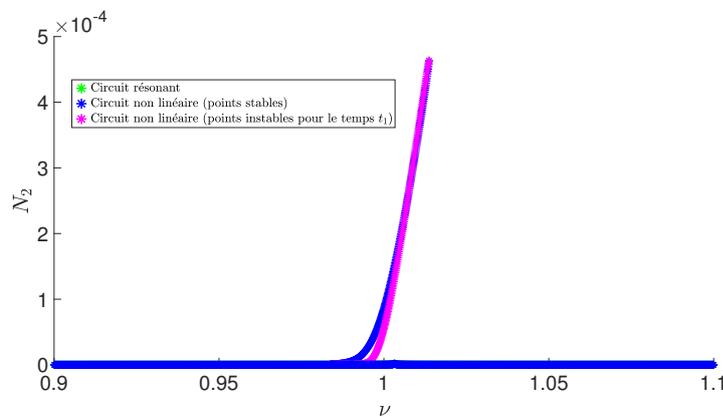
Dans ce chapitre, le comportement du système électro-mécanique relié à un circuit non linéaire a été étudié. Une méthode de complexification de Manevitch (Manevitch, 2001a) a été développée dans un cas avec un seul mode de structure et dans un cas où deux modes sont en résonance 1 : 3. Les résultats analytiques ont permis d'identifier différents régimes dynamiques : périodiques, quasi-périodiques et chaotiques, ainsi que les effets des paramètres électriques sur ces régimes. L'instabilité des points d'équilibre pour le temps rapide et les temps lents a également été étudiée. Afin de confirmer les résultats théoriques, une vérification par rapport à des résultats obtenus par intégration numérique a été effectuée.

Après avoir conforté les résultats théoriques, une comparaison avec un circuit linéaire est réalisée. Cette comparaison permet de montrer que, pour des paramètres électriques bien choisis, le circuit non linéaire peut donner de meilleures performances que le circuit linéaire en terme de contrôle vibratoire, si on omet l'isola. Ces résultats mettent en avant l'importance de l'étude analytique pour identifier ces isolas.

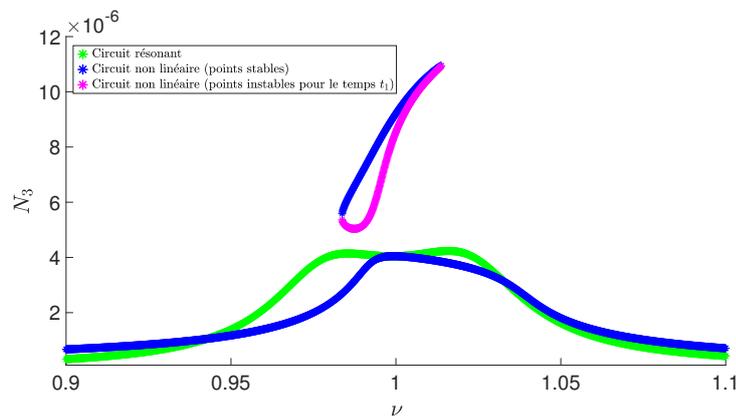
On détermine également des valeurs de composants électriques pour lesquels il existe un comportement chaotique de la structure électro-mécanique, ce qui est vérifié numériquement. Ceci peut être intéressant pour répartir l'énergie sur tous les modes en les excitant



(a) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_1



(b) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_2



(c) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_3

FIGURE 4.36 – Comparaison des tracés fréquentiels du circuit linéaire et non linéaire pour l'amplitude de déplacement $F = 7 \times 10^{-6}$ m et $R = 3050 \Omega$. Les paramètres électriques sont : pour le circuit résonant $L_0 = 124$ H ; pour le circuit non linéaire : $L_0 = 22$ H, $\zeta = 0.1$ et $C_{NL} = 10^{-17}$ C³/V.

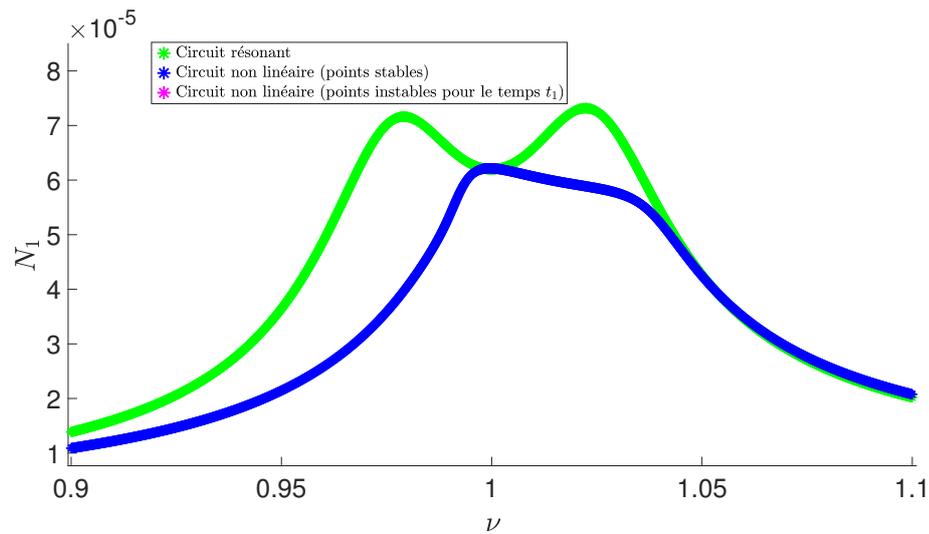


FIGURE 4.37 – Zoom effectué sur la figure 4.36(a) représentant la réponse fréquentielle de l'amplitude N_1 .

par ce comportement chaotique.

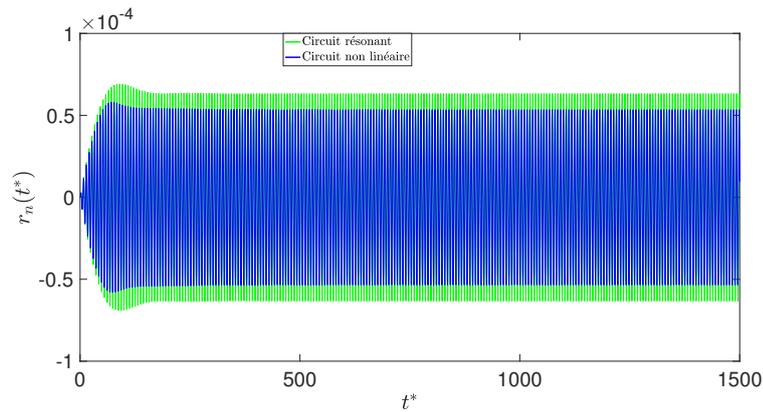
Ce chapitre comporte des développements et résultats originaux :

- l'étude analytique via la méthode de complexification du système électro-mécanique non linéaire à un mode qui met en évidence : des réponses quasi-périodiques de modulation, des points d'équilibre stables multiples pour une certaine amplitude de déplacement et la possibilité d'obtenir des isolas sur les réponses fréquentielles. L'étude via la méthode de Melnikov (Guckenheimer and Holmes, 1983) permet également de confirmer la possibilité de créer des régimes chaotiques pour des valeurs particulières de composants électriques.
- l'étude du dispositif alors que le système principal présente une résonance interne, avec identification de réponses périodiques, quasi-périodiques et chaotiques. On montre qu'il est également possible d'obtenir des isolas.
- la possibilité d'utiliser certains paramètres du circuit électrique non linéaire pour optimiser le contrôle vibratoire ou la récupération d'énergie avec notamment une comparaison avec un absorbeur linéaire.

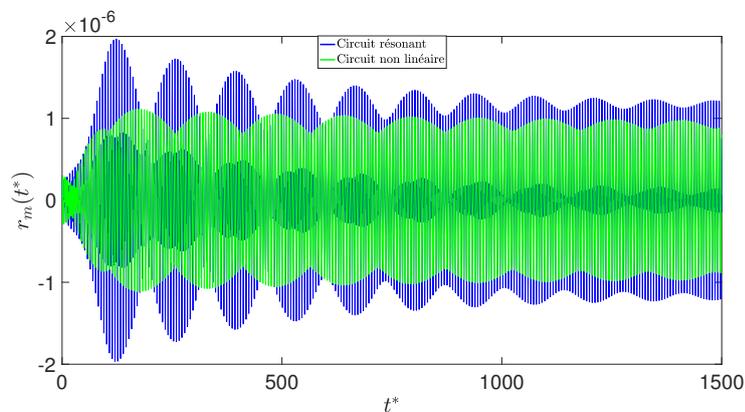
Ce chapitre s'est cependant contenté d'étudier un seul "type" de circuit non linéaire, avec le simple ajout d'une non linéarité cubique. L'optimisation de ce circuit n'a d'ailleurs pas été menée, que ce soit pour le contrôle ou la récupération d'énergie, sachant que l'étude sur les systèmes réduits n'est représentative que si d'autres modes non identifiés ne se mettent pas à répondre également.

D'autres circuits non linéaires pourraient être testés tels que les circuits à interrupteurs qui ont été présentés dans le chapitre 1. Des tests expérimentaux ou une méthode des éléments finis pourraient être menés sur le système électro-mécanique afin de confirmer l'apparition des différents régimes identifiés.

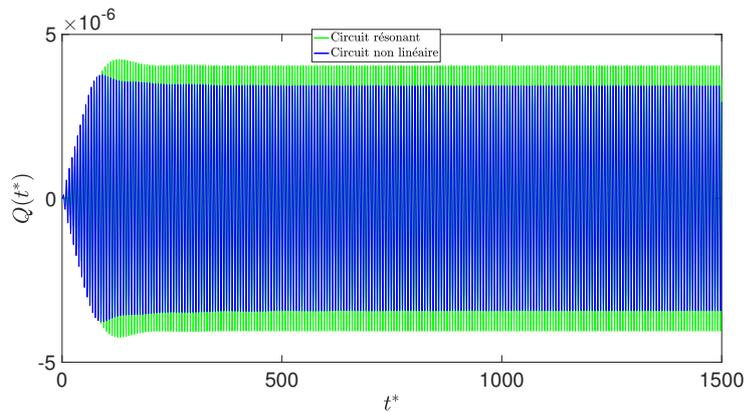
Le prochain chapitre est la conclusion qui résume les principaux résultats obtenus lors de cette thèse et propose des perspectives au travail présenté.



(a) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_1



(b) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_2



(c) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_3

FIGURE 4.38 – Tracés des réponses temporelles des variables $r_n(t^*)$, $r_m(t^*)$ et $Q(t^*)$ du circuit linéaire et non linéaire pour $F = 7 \times 10^{-6}$ m, $\nu = 0.99$. La condition initiale est l'origine, la dynamique est donc attirée par le point d'équilibre stable du bas. Les paramètres électriques sont : pour le circuit résonant $L_0 = 124$ H ; pour le circuit non linéaire : $L_0 = 22$ H, $\zeta = 0.1$ et $C_{NL} = 10^{-17}$ C³/V.

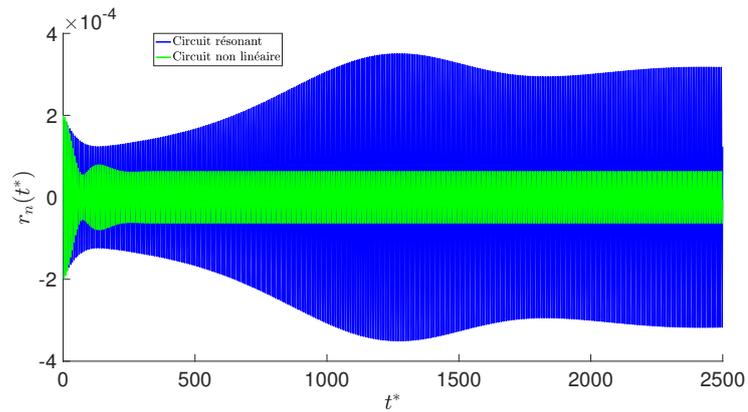
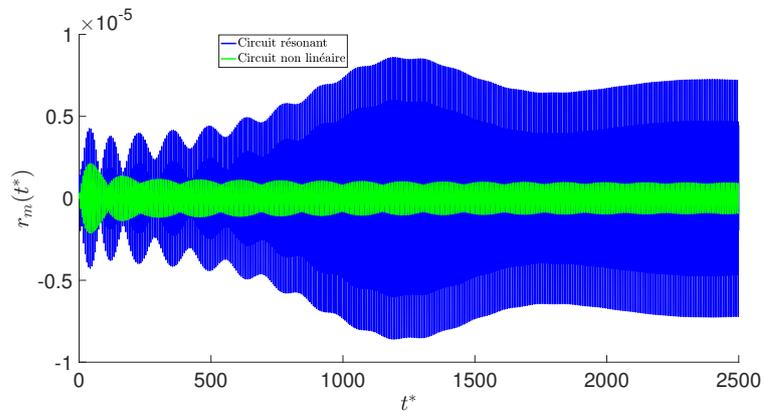
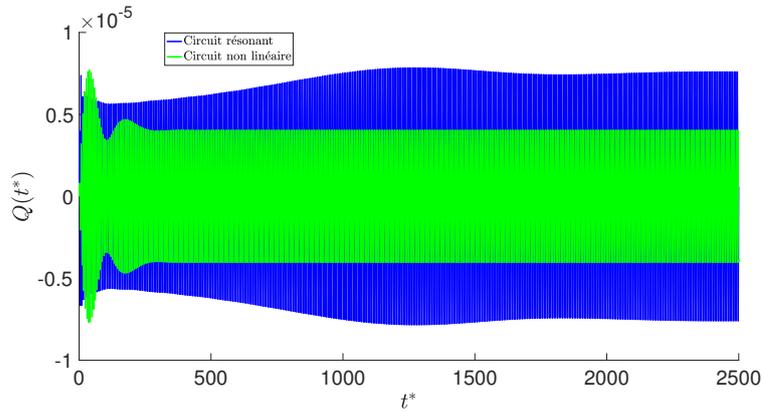
(a) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_1 (b) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_2 (c) Réponse fréquentielle de l'amplitude N_3

FIGURE 4.39 – Tracés des réponses temporelles des variables $r_n(t^*)$, $r_m(t^*)$ et $Q(t^*)$ du circuit linéaire et non linéaire pour $F = 7 \times 10^{-6}$ m, $\nu = 0.99$. La condition initiale est $r_n(0) = 2 \times 10^{-4}$ et les autres conditions nulles, la dynamique est donc attirée par le point d'équilibre stable du haut. Les paramètres électriques sont : pour le circuit résonant $L_0 = 124$ H ; pour le circuit non linéaire : $L_0 = 22$ H, $\zeta = 0.1$ et $C_{NL} = 10^{-17}$ C³/V.

Conclusion

Ces travaux de thèse ont permis d'étudier l'utilisation de patchs piézoélectriques sur une poutre encastree-libre pour des applications de contrôle ou de récupération d'énergie vibratoire. Ils proposent d'utiliser la répartition des énergies modales entre différents modes, via la création de résonances internes et l'utilisation de comportements non linéaires de la structure électro-mécanique. Le premier chapitre présente l'état de l'art sur les comportements non linéaires d'échange d'énergie, de poutre et de matériaux piézoélectriques. Il présente notamment l'intérêt des comportements d'échanges d'énergie pour le contrôle vibratoire ou la récupération d'énergie. Ces phénomènes d'échanges nécessitent la présence de résonances internes dans le système, mais aussi de termes non linéaires dans les équations dynamiques. Une poutre cantilever qui subit de grandes rotations, présente une non linéarité cubique liée à sa géométrie. Pour les matériaux piézoélectriques, il existe deux types de non linéarités : matérielles qui sont inhérentes au matériau, ou via les circuits électriques auxquels ils sont reliés, qui sont eux modulables.

Le chapitre 2 développe les équations dynamiques du système couplé en prenant en compte les non linéarités géométriques de poutre et celles matérielles des patchs piézoélectriques. Une fois les équations écrites, des non linéarités cubiques et quadratiques sont remarquées. Afin d'évaluer si des comportements d'échanges d'énergie peuvent être obtenus, une étude modale est menée. Cette étude analytique prouve que des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 peuvent être réalisées entre les modes propres de la structure composite au travers d'un levier de dimensionnement : la position des matériaux piézoélectriques sur la structure. Une étude des points d'équilibre de la dynamique est alors menée via la méthode des échelles multiples sur :

- un problème réduit à un seul mode pour étudier les effets des non linéarités matérielles des patchs piézoélectriques,
- les équations réduites à deux modes afin d'analyser les comportements d'échanges d'énergie lors de la présence de résonances 1 : 2 et 1 : 3.

Le chapitre 3 présente les résultats de la campagne expérimentale effectuée sur des poutres avec des patchs piézoélectriques. Deux configurations ont été étudiées : la configuration bimorphe (avec deux patchs placés symétriquement au-dessus et en dessous de la poutre) et la configuration unimorphe (avec un seul matériau piézoélectrique). Dans un premier temps, une étude modale est réalisée, elle permet de confirmer les résultats théoriques sur les fréquences propres et les déformées modales du système couplé. Elle démontre notamment la création des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 selon l'emplacement des patchs sur la poutre. Dans un second temps, une étude dynamique des états stables est conduite : dans un cas où il n'y a pas de résonance interne dans la structure et dans un cas de résonance 1 : 3. Dans le cas à un mode, des courbes squelettes sont tracées pour mettre en évidence les non linéarités cubiques et quadratiques présentes dans le système. L'étude effectuée sur la résonance interne 1 : 3 démontre l'activation d'un phénomène d'échange

entre les modes qui est même plus importante que celle attendue analytiquement. Le modèle analytique ayant été confirmé par les études expérimentales, on s'intéresse alors à un levier de dimensionnement qui n'a pas encore été utilisé pour la structure composite : le circuit électrique. Dans le chapitre 4, on étudie le système électro-mécanique relié à un circuit non linéaire afin d'identifier des leviers de conception pour modifier les échanges d'énergie entre les modes. Des premiers résultats sont obtenus en supposant qu'il n'y a pas de résonance interne dans la structure. On réduit alors le modèle sur un seul de ses modes. Puis, on s'intéresse au cas où il existe une résonance interne 1 : 3. Pour chaque étude, les différents régimes dynamiques possibles (périodiques, quasi-périodiques et chaotiques) sont identifiés analytiquement et vérifiés numériquement. Les effets des paramètres électriques sur la dynamique sont également analysés. Une comparaison entre le circuit non linéaire étudié et un circuit linéaire est conduite afin de démontrer l'intérêt de l'utilisation du circuit non linéaire, pour le contrôle vibratoire ou la récupération d'énergie.

Pour résumer, les principaux résultats originaux de ce manuscrit sont :

- la mise en place des équations dynamiques électro-mécaniques pour un système avec des non linéarités géométriques de poutre et des non linéarités matérielles des patchs piézoélectriques. Ces équations ont été mises en avant via les publications Guillot et al. (2019a) et Guillot et al. (2019b). Une étude analytique des modèles réduits sur ces équations montre de possibles échanges d'énergie entre les modes en résonance 1 : 3 via les non linéarités présentes : ces non linéarités étant inhérentes aux matériaux (non linéarités géométriques et matérielles).
- l'utilisation de la position des matériaux piézoélectriques pour la création de résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 dans le système électro-mécanique. Ce résultat théorique a été confirmé par des résultats expérimentaux et a été valorisé au travers des publications Guillot et al. (2019b) et Guillot et al. (2020a).
- l'étude sur des modèles réduits a montré l'échange d'énergie entre les modes lors de résonance interne 1 : 3, d'abord théoriquement dans l'article Guillot et al. (2019b), puis cet échange a été observé expérimentalement dans l'article Guillot et al. (2020a).
- l'utilisation de la méthode de complexification a permis la détection de dynamique lente-rapide via les échelles multiples sur le système électro-mécanique. Des régimes périodiques, quasi-périodiques et chaotiques (par la méthode de Melnikov) sont identifiés dans des cas avec et sans résonances internes. L'effet des paramètres électriques sur les comportements dynamiques a été présenté. Ces résultats ont été publiés dans les articles Guillot et al. (2020b) et Guillot et al. (2020c).
- la présence des patchs piézoélectriques peut permettre de contrôler le comportement du système composite, notamment avec le couplage ou non de modes par les résonances internes et l'utilisation de circuits non linéaires. Le patch piézoélectrique couplé à un circuit non linéaire peut d'ailleurs modifier la nature des échanges d'énergie entre les modes en résonance.

Plusieurs possibilités d'investigations ont été repérées au travers de ces travaux de thèse. D'abord, l'étude de la résonance 1 : 2 autant sur le plan expérimental que dans le cadre du système électro-mécanique avec circuit non linéaire n'a pas été effectuée. Elle pourrait cependant amener des résultats intéressants notamment pour le contrôle vibra-

toire avec l'apparition du phénomène de seuil déjà observé dans la littérature pour de telles résonances.

Ensuite, dans le cadre du modèle, on a identifié que pour la configuration unimorphe le couplage axial/flexion imposé par le matériau piézoélectrique est négligé par l'hypothèse de poutre inextensible. On pourrait envisager de rajouter cette hypothèse via une condition d'extensibilité dans la mise en place des équations dynamiques. En outre, on pourrait essayer de prendre en compte un amortissement non linéaire qui existe sur de telles structures de poutre, ceci permettrait d'améliorer les modèles de configuration unimorphe et bimorphe en prenant en compte des non linéarités quadratiques.

Un frein a été soulevé sur l'identification du comportement non linéaire matériel des matériaux piézoélectriques, il s'agit d'un champ encore en cours d'exploration. Après la mise en place d'un protocole d'identification des termes non linéaires, une étude comparative de ces termes pour plusieurs matériaux piézoélectriques ainsi que pour plusieurs données géométriques serait intéressante.

Une campagne expérimentale sur les systèmes électro-mécaniques avec circuit non linéaire pourrait être menée pour comparer avec les résultats théoriques. Elle pourrait permettre d'observer les différents régimes dynamiques (périodiques, quasi-périodiques et chaotiques), mais aussi de réussir à tracer les isolas identifiés pour différentes réponses fréquentielles. Une étude paramétrique sur les composants électriques du circuit non linéaire peut être réalisée afin d'observer leurs effets sur la dynamique du système.

En plus d'études expérimentales, les comportements identifiés analytiquement pour le problème électro-mécanique couplé à un circuit électrique non linéaire pourraient être confirmés par des méthodes numériques utilisant la méthode des éléments finis.

En outre, l'optimisation du circuit non linéaire, que ce soit pour le contrôle vibratoire ou pour la récupération d'énergie n'a pas été menée. Ceci pourrait constituer un nouvel axe de recherche, notamment le cas de la récupération d'énergie qui constituait ici simplement une remarque par rapport à l'énergie électrique présente dans le matériau piézoélectrique. Or, les problèmes de récupération d'énergie par ces matériaux sont plus complexes et nécessitent une analyse spécifique.

Dans le cadre du circuit non linéaire, un seul type de non linéarité a été prise en compte : la non linéarité cubique. Cependant, de nombreux travaux existent sur l'utilisation de circuits à interrupteurs, qui présentent de très bon résultats en terme de contrôle vibratoire mais aussi de récupération d'énergie. L'étude de ces circuits via la méthode analytique de complexification pourrait permettre une optimisation des paramètres électriques et une meilleure appréhension des comportements dynamiques mis en jeu.

D'autres types de circuits non linéaires avec par exemple des fonctions polynomiales (pour obtenir des SIM plus compliqués à plusieurs paliers) pourraient également être envisagés.

Dans ces travaux, il n'a pas été pris en compte la possibilité d'étudier le système lors de la présence de plusieurs matériaux piézoélectriques couplant plus que deux modes au sein du système. Une étude multi-modale à plus de deux modes pour le contrôle ou la récupération d'énergie lors de l'équilibrage de plusieurs modes du système pourrait être un nouveau thème de recherche. En particulier, on n'a pas eu de positionnement du patch

piézoélectrique pour lequel les résonances 1 : 2 et 1 : 3 étaient réalisées au même moment, ce qui pourrait être intéressant à étudier avec un comportement vibratoire dépendant des trois modes concernés.

Le problème à trois dimensions n'a pas non plus été adressé. Pourtant, une autre possibilité de résonance existe lorsqu'on considère le système à trois dimensions : la résonance entre des modes plans et hors plans. Cette résonance, qui peut être 1 : 1 par exemple, peut être créée via un dimensionnement particulier de la section droite de la poutre. On pourrait s'intéresser alors à cette résonance pour une structure électro-mécanique et à comment concevoir des comportements chaotiques ou d'échanges via l'utilisation de matériaux piézoélectriques.

Ces perspectives soulignent l'intérêt d'investiguer sur les systèmes électro-mécaniques constitués de poutres couplées à des matériaux piézoélectriques afin de contrôler les vibrations et/ou récupérer de l'énergie.

Liste des publications

Publication d'un chapitre de livre

GUILLOT, V., TURE SAVADKOOHI, A. et LAMARQUE, C.-H. (2018). Analytical study of a nonlinear beam including a piezoelectric patch. *Problems of Nonlinear Mechanics and Physics of Materials*, 435-447. DOI : 10.1007/978-3-319-92234-8 24.

Publications dans des revues scientifiques internationales

GUILLOT, V., TURE SAVADKOOHI, A. et LAMARQUE, C.-H. (2019). Analysis of a reduced order nonlinear model of a multi-physics beam. *Nonlinear Dynamics*, **97(2)** : 1371-1401. DOI : 10.1007/s11071-019-05054-x.

GUILLOT, V., GIVOIS, A., COLIN, M., THOMAS, O., TURE SAVADKOOHI, A., LAMARQUE, C.-H. (2020). Theoretical and experimental investigation of a 1 :3 internal resonance in a beam with piezoelectric patches. *Journal of Vibration and Control*, **26 (13-14)** : 1119-1132. DOI : 10.1177/1077546320910536.

GUILLOT, V., TURE SAVADKOOHI, A. et LAMARQUE, C.-H. (2020). Study of an electro-mechanical nonlinear vibration absorber : design via analytical approach. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. DOI : 10.1177/1045389X20957101.

GUILLOT, V., TURE SAVADKOOHI, A. et LAMARQUE, C.-H. Reduced order model of an electromechanical beam for design of energy exchange between two resonant modes coupled to a nonlinear circuit (soumis)

Chapitre 5

Annexes

5.1 Termes des équations 2.25 et 2.26

Termes de l'équation 2.25 :

$$\begin{aligned}H_{\eta\eta} &= (y_2 - y_1) \frac{b_p^3 s_{11}}{24} \\H_{\zeta\zeta} &= (y_2^3 - y_1^3) \frac{b_p s_{11}}{6} \\H_{\xi\xi} &= \frac{b_p^3 s_{55} (y_2 - y_1) + 4b_p s_{66} (y_2^3 - y_1^3)}{96} \\H_{\xi\eta} &= (y_1 - y_2) \frac{b_p^3}{48} (s_{15} + s_{51}) \\H_{\xi\zeta} &= (y_1^3 - y_2^3) \frac{b_p}{12} (s_{16} + s_{61}) \\H_{\xi V} &= (y_1^2 - y_2^2) \frac{b_p d_{36}}{4h_p} \\H_{\zeta V} &= (y_2^2 - y_1^2) \frac{b_p d_{31}}{2h_p} \\H_{V V} &= (y_2 - y_1) \frac{b_p \varepsilon_{33}}{2h_p^2}\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
 H_{\zeta\zeta\zeta} &= (y_1^4 - y_2^4) \frac{b_p s_{111}}{12} \\
 H_{\eta\eta\eta} &= (y_2^4 - y_1^4) \frac{b_p s_{666}}{96} \\
 H_{\zeta\zeta\xi} &= (y_2^4 - y_1^4) \frac{b_p}{24} (s_{116} + s_{161} + s_{611}) \\
 H_{\xi\eta\eta} &= (y_2^2 - y_1^2) \frac{b_p^3}{144} (s_{116} + s_{161} + s_{611}) \\
 H_{\xi\zeta\eta} &= (y_2^2 - y_1^2) \frac{b_p^3}{72} (s_{115} + s_{151} + s_{511}) \\
 H_{\zeta\eta\eta} &= (y_1^2 - y_2^2) \frac{b_p^2 s_{111}}{24} \\
 H_{\zeta\xi\xi} &= (y_1^2 - y_2^2) \frac{b_p}{288} (b_p^2 (s_{155} + s_{515} + s_{551}) + (y_1^2 + y_2^2) 6 (s_{166} + s_{616} + s_{661})) \\
 H_{\xi\xi\eta} &= (y_1^2 - y_2^2) \frac{b_p^3}{288} (s_{156} + s_{165} + s_{516} + s_{561} + s_{615} + s_{651}) \\
 H_{\eta\eta V} &= (y_1 - y_2) \frac{b_p^3 d_{311}}{12 h_p} \\
 H_{\zeta\zeta V} &= (y_1^3 - y_2^3) \frac{b_p d_{311}}{3 h_p} \\
 H_{\xi\xi V} &= \frac{b_p^3 d_{355} (y_1 - y_2) + 4 b_p d_{366} (y_1^3 - y_2^3)}{48 h_p} \\
 H_{\xi\eta V} &= (y_2 - y_1) \frac{b_p^3}{24 h_p} (d_{315} + d_{351}) \\
 H_{\xi\zeta V} &= (y_2^3 - y_1^3) \frac{b_p}{6 h_p} (d_{316} + d_{361}) \\
 H_{\xi V V} &= (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) \frac{b_p r_{336}}{4 h_p^2} \\
 H_{\zeta V V} &= (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) \frac{b_p r_{331}}{2 h_p^2} \\
 H_{V V V} &= \frac{(y_1 - y_2) b_p \varepsilon_{333}}{3 h_p^3}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
 H_{\eta\eta\eta} &= (y_2 - y_1) \frac{b_p^5 s_{1111}}{320} \\
 H_{\zeta\zeta\zeta} &= (y_2^5 - y_1^5) \frac{b_p s_{1111}}{20} \\
 H_{\zeta\zeta\eta} &= (y_2^3 - y_1^3) \frac{b_p^3 s_{1111}}{24} \\
 H_{VVVV} &= (y_2 - y_1) \frac{b_p \varepsilon_{3333}}{4h_p^4}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Termes de l'équation 2.26 :

$$\begin{aligned}
 Q_\xi &= (y_1 - y_2) \frac{b_p d_{36}}{2} \\
 Q_\zeta &= (y_2 - y_1) b_p d_{31} \\
 Q_V &= \frac{b_p \varepsilon_{33}}{h_p}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\zeta\zeta} &= (y_1^2 - y_2^2) b_p d_{311} \\
 Q_{\xi\xi} &= \frac{-b_p^3 d_{355}}{48} - \frac{b_p d_{366} (y_2^2 - y_1^2)}{4} \\
 Q_{\eta\eta} &= \frac{-b_p^3 d_{311}}{12} \\
 Q_{\zeta\xi} &= (y_2^2 - y_1^2) \frac{b_p}{2} (d_{316} + d_{361}) \\
 Q_{\xi\eta} &= \frac{b_p}{24} (d_{315} + d_{351}) \\
 Q_{\xi V} &= \frac{b_p}{h_p} r_{336} (y_1 - y_2) \\
 Q_{\zeta V} &= (y_1 - y_2) \frac{2b_p r_{331}}{h_p} \\
 Q_{VV} &= \frac{-b_p \xi_{333}}{h_p^2} \\
 Q_{VVV} &= \frac{b_p \xi_{3333}}{h_p^3}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

5.2 Termes des équations 2.159 et 2.160

Termes de l'équations 2.159 :

$$\begin{aligned}
 \delta_{nnn} &= \int_0^{L_b} -EI_m [\phi'_n (\phi'_n \phi''_n)]' \phi_n ds \\
 \delta_{nmm} &= \int_0^{L_b} -EI_m [\phi'_m (\phi'_n \phi''_n)' + \phi'_n (\phi'_m \phi''_n)' + \phi'_n (\phi'_n \phi''_m)]' \phi_n ds \\
 \delta_{mmm} &= \int_0^{L_b} -EI_m [\phi'_m (\phi'_m \phi''_n)' + \phi'_n (\phi'_m \phi''_m)' + \phi'_m (\phi'_n \phi''_m)]' \phi_n ds \\
 \delta_{nnn} &= \int_0^{L_b} -EI_m [\phi'_m (\phi'_m \phi''_m)]' \phi_n ds \\
 \tau_{nnn} &= \int_0^{L_b} [\phi'_n \int_x^{L_b} \frac{-\mu_m}{2} \int_s^0 (\phi'_n)^2 ds ds]' \phi_n ds \\
 \tau_{nmm} &= \int_0^{L_b} [\phi'_n \int_x^{L_b} \frac{-\mu_m}{2} \int_s^0 \phi'_n \phi'_m ds ds]' \phi_n ds \\
 \tau_{mmm} &= \int_0^{L_b} [\phi'_n \int_x^{L_b} \frac{-\mu_m}{2} \int_s^0 (\phi'_m)^2 ds ds]' \phi_n ds \\
 \tau_{mnn} &= \int_0^{L_b} [\phi'_m \int_x^{L_b} \frac{-\mu_m}{2} \int_s^0 (\phi'_n)^2 ds ds]' \phi_n ds \\
 \tau_{mnm} &= \int_0^{L_b} [\phi'_m \int_x^{L_b} \frac{-\mu_m}{2} \int_s^0 \phi'_n \phi'_m ds ds]' \phi_n ds \\
 \tau_{mmm} &= \int_0^{L_b} [\phi'_m \int_x^{L_b} \frac{-\mu_m}{2} \int_s^0 (\phi'_m)^2 ds ds]' \phi_n ds
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Termes de l'équations 2.160 :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{nnn} &= \int_0^{L_b} -EI_m [\phi'_n (\phi'_n \phi''_n)]' \phi_m ds \\
 \alpha_{nmm} &= \int_0^{L_b} -EI_m [\phi'_m (\phi'_n \phi''_n)' + \phi'_n (\phi'_m \phi''_n)' + \phi'_n (\phi'_n \phi''_m)]' \phi_m ds \\
 \alpha_{mmm} &= \int_0^{L_b} -EI_m [\phi'_m (\phi'_m \phi''_n)' + \phi'_n (\phi'_m \phi''_m)' + \phi'_m (\phi'_n \phi''_m)]' \phi_m ds \\
 \alpha_{nnn} &= \int_0^{L_b} -EI_m [\phi'_m (\phi'_m \phi''_m)]' \phi_m ds \\
 \Gamma_{nnn} &= \int_0^{L_b} [\phi'_n \int_x^{L_b} \frac{-\mu_m}{2} \int_s^0 (\phi'_n)^2 ds ds]' \phi_m ds \\
 \Gamma_{nmm} &= \int_0^{L_b} [\phi'_n \int_x^{L_b} \frac{-\mu_m}{2} \int_s^0 \phi'_n \phi'_m ds ds]' \phi_m ds \\
 \Gamma_{mmm} &= \int_0^{L_b} [\phi'_n \int_x^{L_b} \frac{-\mu_m}{2} \int_s^0 (\phi'_m)^2 ds ds]' \phi_m ds \\
 \Gamma_{mnn} &= \int_0^{L_b} [\phi'_m \int_x^{L_b} \frac{-\mu_m}{2} \int_s^0 (\phi'_n)^2 ds ds]' \phi_m ds \\
 \Gamma_{mnm} &= \int_0^{L_b} [\phi'_m \int_x^{L_b} \frac{-\mu_m}{2} \int_s^0 \phi'_n \phi'_m ds ds]' \phi_m ds \\
 \Gamma_{mmm} &= \int_0^{L_b} [\phi'_m \int_x^{L_b} \frac{-\mu_m}{2} \int_s^0 (\phi'_m)^2 ds ds]' \phi_m ds
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

5.3 Termes des équations 2.180, 2.181 et 2.182

Termes de l'équations 2.180 :

$$\begin{aligned}
 \beta_{nn} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -3H_{\zeta\zeta\zeta} \phi_n''' ds \\
 \beta_{mm} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -3H_{\zeta\zeta\zeta} \phi_m'' \phi_n'' ds \\
 \beta_{mn} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -3H_{\zeta\zeta\zeta} \phi_n'' \phi_m'' ds \\
 \Theta_{nV} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -2H_{\zeta\zeta V} \phi_n'' ds \\
 \Theta_{mV} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -2H_{\zeta\zeta V} \phi_n'' \phi_m'' ds \\
 \Theta_{nnV} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -H_{\zeta V} \frac{3}{2} (\phi_n''^3)' ds \\
 \Theta_{mmV} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -H_{\zeta V} \frac{3}{2} (\phi_m'' \phi_n'')' ds \\
 \Theta_{nmV} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -H_{\zeta V} \frac{3}{2} (\phi_m' \phi_n''^2)' ds
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Termes de l'équations 2.181 :

$$\begin{aligned}
 \zeta_{nm} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -3H_{\zeta\zeta\zeta} \phi_n'' \phi_m'' ds \\
 \zeta_{mm} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -3H_{\zeta\zeta\zeta} \phi_m''^3 ds \\
 \zeta_{mn} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -3H_{\zeta\zeta\zeta} \phi_n'' \phi_m''^2 ds \\
 \Xi_{nV} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -2H_{\zeta\zeta V} \phi_n'' \phi_m'' ds \\
 \Xi_{mV} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -2H_{\zeta\zeta V} \phi_m''^2 ds \\
 \Xi_{nnV} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -H_{\zeta V} \frac{3}{2} (\phi_n''^2 \phi_m') ds \\
 \Xi_{mmV} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -H_{\zeta V} \frac{3}{2} (\phi_m''^3)' ds \\
 \Xi_{nmV} &= \int_{s \in \mathcal{S}_m} -H_{\zeta V} \frac{3}{2} (\phi_n'' \phi_m''^2)' ds
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Termes de l'équations 2.182 :

$$\begin{aligned}
 \Lambda_n &= \int_{x_1}^{x_2} Q_\zeta \phi_n'' ds \\
 \Lambda_m &= \int_{x_1}^{x_2} Q_\zeta \phi_m'' ds \\
 \Lambda_V &= \int_{x_1}^{x_2} Q_V ds
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

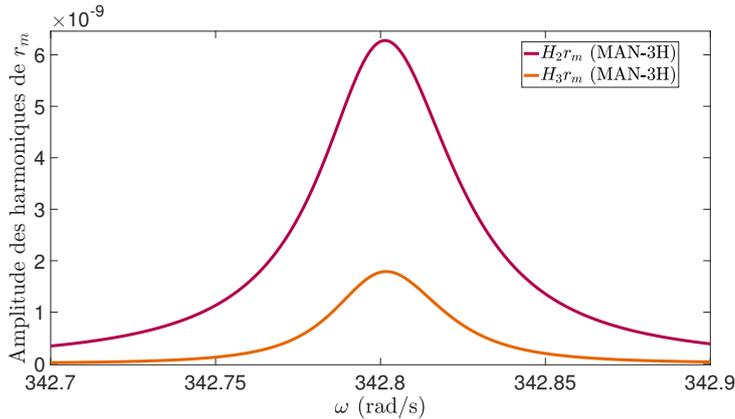
$$\begin{aligned}
 \Lambda_{nn} &= \int_{x_1}^{x_2} Q_{\zeta\zeta} \phi_n''^2 ds \\
 \Lambda_{mm} &= \int_{x_1}^{x_2} Q_{\zeta\zeta} \phi_m''^2 ds \\
 \Lambda_{nm} &= \int_{x_1}^{x_2} Q_{\zeta\zeta} \phi_n'' \phi_m'' ds \\
 \Lambda_{nV} &= \int_{x_1}^{x_2} Q_{\zeta V} \phi_n'' ds \\
 \Lambda_{nV} &= \int_{x_1}^{x_2} Q_{\zeta V} \phi_m'' ds \\
 \Lambda_{VV} &= \int_{x_1}^{x_2} Q_{VV} ds
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

5.4 Termes de l'équation 2.190

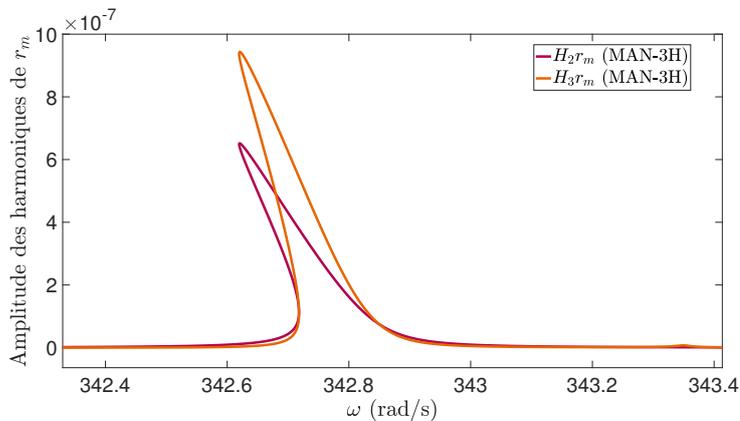
Les termes \mathcal{Z}_{nnn} , \mathcal{Z}_{mmm} , \mathcal{Z}_{nnm} , \mathcal{Y}_{nnm} de l'équation 2.190 sont tels que :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_{nnn} &= 2\Delta_{VV} \mathcal{L}_{2n} \bar{\mathcal{L}}_n + \beta_{nm} (\mathcal{M}_{2n} + \mathcal{M}_{nn}) + 2\beta_{nn} (\mathcal{N}_{2n} + \mathcal{N}_{nn}) + (\bar{\mathcal{L}}_n \mathcal{M}_{2n} + \mathcal{L}_n \mathcal{M}_{nn}) \Theta_{mV} \\
 &\quad + (2\mathcal{L}_n + \bar{\mathcal{L}}_n) \Theta_{nnV} + (\mathcal{L}_{2n} + \mathcal{N}_{2n} \bar{\mathcal{L}}_n + \mathcal{L}_n \mathcal{N}_{nn}) \Theta_{nV} \\
 \mathcal{Z}_{mmm} &= 2(\mathcal{L}_m \bar{\mathcal{L}}_{\bar{m}n} + \bar{\mathcal{L}}_m \mathcal{L}_{mn}) \Delta_{VV} + 2(\mathcal{M}_{\bar{m}n} + \mathcal{M}_{mn}) \beta_{mm} + 2\mathcal{N}_{mm} \beta_{nn} \\
 &\quad + (\mathcal{M}_{mm} + \mathcal{N}_{\bar{m}n} + \mathcal{N}_{mn}) \beta_{nm} + 2\mathcal{L}_n \Theta_{mmV} + (\mathcal{L}_m + \bar{\mathcal{L}}_m) \Theta_{nmV} \\
 &\quad + (\mathcal{L}_{\bar{m}n} + \mathcal{L}_{mn} + \mathcal{L}_m + \mathcal{M}_{\bar{m}n} + \mathcal{L}_n \mathcal{M}_{mm} + \bar{\mathcal{L}}_m \mathcal{M}_{mn}) \Theta_{mV} + (\mathcal{L}_m \mathcal{N}_{\bar{m}n} \\
 &\quad + \mathcal{L}_n \mathcal{N}_{mm} + \bar{\mathcal{L}}_m \mathcal{N}_{mn}) \Theta_{nV} \\
 \mathcal{Z}_{nnm} &= 2(\bar{\mathcal{L}}_{2n} \mathcal{L}_m + \bar{\mathcal{L}}_n \mathcal{M}_{m\bar{n}}) \Delta_{VV} + 2\bar{\mathcal{M}}_{2n} \beta_{mm} + (\mathcal{M}_{m\bar{n}} + \bar{\mathcal{N}}_{2n}) \beta_{nm} + 2\mathcal{N}_{m\bar{n}} \beta_{nn} \\
 &\quad + (\bar{\mathcal{L}}_{2n} + \mathcal{L}_m \bar{\mathcal{M}}_{2n} + \bar{\mathcal{L}}_n \mathcal{M}_{m\bar{n}}) \Theta_{mV} + \bar{\mathcal{L}}_n \Theta_{nmV} + \mathcal{L}_{mm} \Theta_{nnV} \\
 &\quad + (\mathcal{L}_{m\bar{n}} + \mathcal{L}_m \bar{\mathcal{N}}_{2n} + \bar{\mathcal{L}}_n \mathcal{N}_{m\bar{n}}) \Theta_{nV} \\
 \mathcal{Y}_{mmm} &= 2\mathcal{L}_{2m} \bar{\mathcal{L}}_m \Delta_{mVV} + (2\mathcal{L}_m + \bar{\mathcal{L}}_m) \Xi_{mmV} + (\mathcal{L}_{2m} + \bar{\mathcal{L}}_m \mathcal{M}_{2m} + \mathcal{L}_m \mathcal{M}_{mm}) \Xi_{mV} \\
 &\quad + (\bar{\mathcal{L}}_m \mathcal{N}_{2m} + \mathcal{L}_m \mathcal{N}_{mm}) \Xi_{nV} + 2(\mathcal{M}_{2m} + \mathcal{M}_{mm}) \zeta_{mm} + (\mathcal{N}_{2m} + \mathcal{N}_{mm}) \zeta_{nm} \\
 \mathcal{Y}_{nnm} &= 2(\mathcal{L}_{m\bar{n}} \mathcal{L}_n + \mathcal{L}_{mn} \bar{\mathcal{L}}_n) \Delta_{mVV} + (\bar{\mathcal{L}}_n \mathcal{M}_{mn} + \mathcal{L}_n \mathcal{M}_{m\bar{n}} + \mathcal{L}_m \mathcal{M}_{nn}) \Xi_{mV} \\
 &\quad + (\mathcal{L}_n + \bar{\mathcal{L}}_n) \Xi_{nmV} + 2\mathcal{L}_m \Xi_{nnV} + (\mathcal{L}_{mn} + \mathcal{L}_{m\bar{n}} + \bar{\mathcal{L}}_n \mathcal{N}_{mn} + \mathcal{L}_n \mathcal{N}_{m\bar{n}} + \mathcal{L}_m \mathcal{N}_{nn}) \Xi_{nV} \\
 &\quad + 2\mathcal{M}_{nn} \zeta_{mm} + (\mathcal{M}_{mn} + \mathcal{M}_{m\bar{n}} + \mathcal{N}_{nn}) \zeta_{nm} + 2(\mathcal{N}_{mn} + \mathcal{N}_{m\bar{n}}) \zeta_{nn} \\
 \mathcal{Y}_{nnn} &= 2\mathcal{L}_{2n} \mathcal{L}_n \Delta_{mVV} + \mathcal{M}_{2n} \mathcal{L}_n \Xi_{mV} + \mathcal{L}_n \Xi_{nnV} + (\mathcal{L}_{2n} + \mathcal{L}_n \mathcal{N}_{2n}) \Xi_{nV} \\
 &\quad + \mathcal{M}_{2n} \zeta_{nm} + 2\mathcal{N}_{2n} \zeta_{nn}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

5.5 Figures sur les amplitudes des harmoniques de r_m pour $F = 2 \times 10^{-8}$ m et $F = 2 \times 10^{-7}$ m



(a) Réponse fréquentielle des amplitudes des harmoniques de r_m pour $F = 2 \times 10^{-8}$ m.



(b) Réponse fréquentielle des amplitudes des harmoniques de r_m pour $F = 2 \times 10^{-7}$ m.

FIGURE 5.1 – Tracés fréquentiels des amplitudes des harmoniques de r_m pour les amplitudes de forçage a) $F = 2 \times 10^{-8}$ et b) $F = 2 \times 10^{-7}$. Elles montrent que la résonance 1 : 3 est activée dans le cas de forçage b) et pas a) où les non linéarités quadratiques s'expriment plus que les non linéarités cubiques.

5.6 Termes des équations adimensionnées 4.51, 4.52 et 4.53

$$a_1 = \frac{\mu_n}{\omega_s}$$

$$L_{nnn} = \frac{\delta_{nnn}}{\omega_s^2}$$

$$L_{nmm} = \frac{\delta_{nmm}}{\omega_s^2}$$

$$L_{mnn} = \frac{\delta_{mnn}}{\omega_s^2}$$

$$L_{mmm} = \frac{\delta_{mmm}}{\omega_s^2}$$

$$G_{nnn} = \tau_{nnn} \tag{5.13}$$

$$G_{nmm} = \tau_{nmm}$$

$$G_{mnn} = \tau_{mnn}$$

$$G_{mnn} = \tau_{mnn}$$

$$G_{mmm} = \tau_{mmm}$$

$$G_{mmm} = \tau_{mmm}$$

$$\alpha_q = \frac{\Delta_V}{\Lambda_V \omega_s^2}$$

$$\alpha_m = -\frac{\Delta_V \Lambda_m}{\Lambda_V \omega_s^2}$$

$$a_2 = \frac{\mu_m}{\omega_s}$$

$$T_{nnn} = \frac{\alpha_{nnn}}{\omega_s^2}$$

$$T_{nmm} = \frac{\alpha_{nmm}}{\omega_s^2}$$

$$T_{mnm} = \frac{\alpha_{mnm}}{\omega_s^2}$$

$$T_{mmm} = \frac{\alpha_{mmm}}{\omega_s^2}$$

$$Ga_{nnn} = \Gamma_{nnn}$$

$$Ga_{nmm} = \Gamma_{nmm}$$

$$Ga_{mnm} = \Gamma_{mnm}$$

$$Ga_{mnn} = \Gamma_{mnn}$$

$$Ga_{mmm} = \Gamma_{mmm}$$

$$Ga_{mmm} = \Gamma_{mmm}$$

$$\gamma_q = \frac{\Delta_{mV}}{\Lambda_V \omega_s^2}$$

$$\gamma_n = -\frac{\Delta_{mV} \Lambda_n}{\Lambda_V \omega_s^2}$$

$$\gamma_m = -\frac{\Delta_{mV} \Lambda_m}{\Lambda_V \omega_s^2}$$

(5.14)

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{R}{L_0 \omega_s} \\
 \delta &= \frac{1}{C_{NL} L_0 \omega_s^2} \\
 \beta_n &= \frac{\Lambda_n}{\Lambda_V L_0 \omega_s^2} \\
 \beta_m &= \frac{\Lambda_m}{\Lambda_V L_0 \omega_s^2} \\
 \beta_2 &= -\frac{1}{\Lambda_V L_0 \omega_s^2}
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

5.7 Matrice C_2 de l'équation 4.63

$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{F}_2}{\psi_1} & \frac{\overline{\mathcal{F}_2}}{\overline{\psi_1}} \\ \frac{\overline{\mathcal{F}_2}}{\psi_1} & \frac{\mathcal{F}_2}{\overline{\psi_1}} \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

5.8 Matrices M_j de l'équation 4.65

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{G}_2}{\psi_1} & \frac{\overline{\mathcal{G}_2}}{\overline{\psi_1}} \\ \frac{\overline{\mathcal{G}_2}}{\psi_1} & \frac{\mathcal{G}_2}{\overline{\psi_1}} \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{G}_2}{\psi_2} & \frac{\overline{\mathcal{G}_2}}{\overline{\psi_2}} \\ \frac{\overline{\mathcal{G}_2}}{\psi_2} & \frac{\mathcal{G}_2}{\overline{\psi_2}} \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{G}_2}{\psi_3} & \frac{\overline{\mathcal{G}_2}}{\overline{\psi_3}} \\ \frac{\overline{\mathcal{G}_2}}{\psi_3} & \frac{\mathcal{G}_2}{\overline{\psi_3}} \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

$$\mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{H}_2}{\psi_1} & \frac{\overline{\mathcal{H}_2}}{\overline{\psi_1}} \\ \frac{\overline{\mathcal{H}_2}}{\psi_1} & \frac{\mathcal{H}_2}{\overline{\psi_1}} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{M}_5 = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{H}_2}{\psi_2} & \frac{\overline{\mathcal{H}_2}}{\overline{\psi_2}} \\ \frac{\overline{\mathcal{H}_2}}{\psi_2} & \frac{\mathcal{H}_2}{\overline{\psi_2}} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Bibliographie

- P. Curie. *Oeuvres de Pierre Curie*. Société française de physique, 1880.
- H. Frahm. Device for damping vibrations of bodies. *US Patent 989,958*, page ., 1911.
- A. Love. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New-York, 1944.
- R. Roberson. Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber. *Journal of the Franklin Institute*, 254 :205–220, 1952.
- W. J. Carter and F. C. Liu. Steady-State Behavior of Nonlinear Dynamic Vibration Absorber. *Journal of Applied Mechanics*, 28(1) :67–70, 03 1961. ISSN 0021-8936. doi : 10.1115/1.3640468.
- E. Sevin. On the Parametric Excitation of Pendulum-Type Vibration Absorber. *Journal of Applied Mechanics*, 28(3) :330–334, 09 1961. ISSN 0021-8936. doi : 10.1115/1.3641707.
- R. A. Struble and J. H. Heinbockel. Resonant Oscillations of a Beam-Pendulum System. *Journal of Applied Mechanics*, 30(2) :181–188, 06 1963. ISSN 0021-8936. doi : 10.1115/1.3636509.
- R. S. Haxton and A. D. S. Barr. The Autoparametric Vibration Absorber. *Journal of Engineering for Industry*, 94(1) :119–125, 02 1972. ISSN 0022-0817. doi : 10.1115/1.3428100.
- M. R. M. Crespo Da Silva and C. C. Glynn. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. i. equations of motion. *Journal of Structural Mechanics*, 6(4) : 437–448, 1978. doi : 10.1080/03601217808907348.
- M. Da Silva and C. Glynn. Out-of-plane vibrations of a beam including non-linear inertia and non-linear curvature effects. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 13 (5) :261 – 271, 1978. ISSN 0020-7462. doi : 10.1016/0020-7462(78)90032-X.
- W. Szemplińska-Stupnicka. The generalized harmonic balance method for determining the combination resonance in the parametric dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 58(3) :347 – 361, 1978. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/S0022-460X(78)80043-1.
- A. H. Nayfeh. *Nonlinear Oscillations*. Wiley-VCH, 1979.
- H. Beige and G. Schmidt. Electromechanical resonances for investigating linear and non-linear properties of dielectrics. *Ferroelectrics*, 41(1) :39–49, 1982.

- J. Hunt and J.-C. Nissen. The broadband dynamic vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 83(4) :573 – 578, 1982. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/S0022-460X(82)80108-9.
- H. Beige. Elastic and dielectric nonlinearities os piezoelectric ceramics. *Ferroelectrics*, 51 (1) :113–119, 1983.
- J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, volume 42. Springer, 01 1983. doi : 10.1007/978-1-4612-1140-2.
- H. Kojima and H. Saito. Forced vibrations of a beam with a non-linear dynamic vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 88(4) :559 – 568, 1983. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/0022-460X(83)90657-0.
- A. Nayfeh. The response of single degree of freedom systems with quadratic and cubic non-linearities to a subharmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 89(4) : 457 – 470, 1983. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/0022-460X(83)90347-4.
- A. Haddow, A. Barr, and D. Mook. Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structure. *Journal of Sound and Vibration*, 97(3) : 451 – 473, 1984. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/0022-460X(84)90272-4.
- D. Mook, R. Plaut, and N. Haquang. The influence of an internal resonance on non-linear structural vibrations under subharmonic resonance conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 102 :473–492, 10 1985. doi : 10.1016/S0022-460X(85)80108-5.
- M. R. M. Crespo Da Silva. Non-linear flexural-flexural-torsional-extensional dynamics of beams-i. formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 24 :1225–1234, 1988.
- IEEE. Ieee standard on piezoelectricity. *ANSI/IEEE Std 176*, 1988.
- B. Shivamoggi and R. Varma. Internal resonances in nonlinearly-coupled oscillators. *Acta Mechanica*, 72 :111 – 130, 1988. doi : 10.1007/BF01176546.
- D. Inman. *Vibration : With Control, Measurement, And Stability*. Pearson College Div, 01 1989.
- A. H. Nayfeh and B. Balachandran. Modal Interactions in Dynamical and Structural Systems. *Applied Mechanics Reviews*, 42(11S) :S175–S201, 1989. doi : 10.1115/1.3152389.
- E. F. Crawley and E. H. Anderson. Detailed models of piezoceramic actuation of beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1(1) :4–25, 1990.
- P. F. Pai and A. H. Nayfeh. Three-dimensional nonlinear vibrations of composite beams-i. equations of motion. *Nonlinear Dynamics*, 1 :477–502, 1990a.
- P. F. Pai and A. H. Nayfeh. Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 25(5) :455 – 474, 1990b. ISSN 0020-7462. doi : 10.1016/0020-7462(90)90012-X.

-
- N. Hagood and A. Von Flotow. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, 146(2) :243–268, 04 1991. doi : 10.1016/0022-460X(91)90762-9.
- P. F. Pai and A. H. Nayfeh. Three-dimensional nonlinear vibrations of composite beams-ii. flapwise excitations. *Nonlinear Dynamics*, 2 :1–34, 1991a.
- P. F. Pai and A. H. Nayfeh. Three-dimensional nonlinear vibrations of composite beams-iii. chordwise excitations. *Nonlinear Dynamics*, 2 :137–156, 1991b.
- S. P. Joshi. Non-linear constitutive relations for piezoceramic materials. *Smart Materials and Structures*, 1(1) :80–83, mar 1992. doi : 10.1088/0964-1726/1/1/012.
- D. K. Miu. *Mechatronic - Electromechanics and Contromechanics*. Springer-Verlag, 1993.
- B. Cochelin. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers and Structures*, 53(5) :1181–1192, 1994.
- A. Hassan. Use of transformations with the higher order method of multiple scales to determine the steady state periodic response of harmonically excited non-linear oscillators, part i : Transformation of derivative. *Journal of Sound and Vibration*, 178(1) : 1 – 19, 1994a. ISSN 0022-460X. doi : 10.1006/jsvi.1994.1464.
- A. Hassan. Use of transformations with the higher order method of multiple scales to determine the steady state periodic response of harmonically excited non-linear oscillators, part ii : Transformation of detuning. *Journal of Sound and Vibration*, 178(1) : 21 – 40, 1994b. ISSN 0022-460X. doi : 10.1006/jsvi.1994.1465.
- J. J. Hollkamp and J. Thomas F. Starchville. A self-tuning piezoelectric vibration absorber. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 5(4) :559–566, 1994. doi : 10.1177/1045389X9400500412.
- J. Cusumano and F. Moon. Chaotic non-planar vibrations of the thin elastica : Part i : Experimental observation of planar instability. *Journal of Sound and Vibration*, 179(2) :185 – 208, 1995a. ISSN 0022-460X. doi : 10.1006/jsvi.1995.0013.
- J. Cusumano and F. Moon. Chaotic non-planar vibrations of the thin elastica : Part ii : Derivation and analysis of a low-dimensional model. *Journal of Sound and Vibration*, 179(2) :209 – 226, 1995b. ISSN 0022-460X. doi : 10.1006/jsvi.1995.0014.
- A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. Wiley-VCH, 1995.
- D. Guyomar, N. Aurelle, and L. Eyraud. Piezoelectric ceramics nonlinear behavior. application to langevin transducer. *Journal de Physique III*, 7 :1197–1208, 06 1997. doi : 10.1051/jp3:1997183.
- J. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates*. CRC press, 1997.
- F. Collette. A combined tuned absorber and pendulum impact damper under random excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 216(2) :199 – 213, 1998. ISSN 0022-460X. doi : 10.1006/jsvi.1997.1666.
-

- V. D. Kugel and L. E. Cross. Behavior of soft piezoelectric ceramics under high sinusoidal electric fields. *Journal of Applied Physics*, 84(5) :2815–2830, 1998. doi : 10.1063/1.368422.
- A. Luongo and A. Paolone. On the reconstitution problem in the multiple time-scale method. *Nonlinear Dynamics*, 19 :135–158, 06 1999. doi : 10.1023/A:1008330423238.
- Q.-M. Wang, Q. Zhang, B. Xu, R. Liu, and L. Cross. Nonlinear piezoelectric behavior of ceramic bending mode actuators under strong electric fields. *Journal of Applied Physics*, 86 :3352–3360, 1999. doi : 10.1063/1.371213.
- W. Clark. Vibration control with state-switched piezoelectric materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 11 :263–271, 04 2000. doi : 10.1106/18CE-77K4-DYMG-RKBB.
- A. Fleming, S. Behrens, and S. Moheimani. Synthetic impedance for implementation of piezoelectric shunt-damping circuits. *Electronics Letters*, 36 :1525 – 1526, 10 2000. doi : 10.1049/el:20001083.
- S. Oueini and A. Nayfeh. Analysis and application of a nonlinear vibration absorber. *Journal of Vibration and Control*, 6 :999–1016, 10 2000. doi : 10.1177/107754630000600703.
- C. Richard, D. Guyomar, D. Audigier, and H. Bassaler. Enhanced semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device on an inductor. In T. T. Hyde, editor, *Smart Structures and Materials 2000 : Damping and Isolation*, volume 3989, pages 288 – 299. International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2000a. doi : 10.1117/12.384569.
- C. Richard, D. Guyomar, D. Audigier, and H. Bassaler. Enhanced semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device on an inductor. *Smart Structures and Materials : Passive Damping and Isolation, SPIE*, 3989 :288–299, 04 2000b. doi : 10.1117/12.384569.
- A. Yavari, S. Sarkani, and E. Moyer. On applications of generalized functions to beam bending problems. *International Journal of Solids and Structures*, 37(40) :5675 – 5705, 2000. ISSN 0020-7683. doi : 10.1016/S0020-7683(99)00271-1.
- G. Caruso. A critical analysis of electric shunt circuits employed in piezoelectric passive vibration damping. *Smart Materials and Structures*, 10 :1059, 10 2001. doi : 10.1088/0964-1726/10/5/322.
- L. Manevitch. The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables. *Nonlinear Dynamics*, 25(1) :95–109, 2001a.
- L. I. Manevitch. The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables. *Nonlinear Dynamics*, 25(1-3) :95–109, 2001b. ISSN 0924-090X. doi : 10.1023/A:1012994430793.
- A. Vakakis and O. Gendelman. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : Part ii—resonance capture. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of The Asme - J APPL MECH*, 68, 01 2001. doi : 10.1115/1.1345525.

-
- K. Wolf and O. Gottlieb. Nonlinear dynamics of a cantilever beam actuated by piezoelectric layers in symmetric and asymmetric configuration. *Technical report of Israel Institue of Technology, Faculty of Mechanical Engineering*, 2001.
- A. Yavari and S. Sarkani. On applications of generalized functions to the analysis of euler–bernoulli beam–columns with jump discontinuities. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43(6) :1543 – 1562, 2001. ISSN 0020-7403. doi : 10.1016/S0020-7403(00)00041-2.
- A. Yavari, S. Sarkani, and J. Reddy. On nonuniform euler–bernoulli and timoshenko beams with jump discontinuities : application of distribution theory. *International Journal of Solids and Structures*, 38(46) :8389 – 8406, 2001. ISSN 0020-7683. doi : 10.1016/S0020-7683(01)00095-6.
- L. Azrar, R. Benamar, and R. White. a semi-analytical approach to the non-linear dynamic response problem of beams at large vibration amplitudes, part ii : multimode approach to the steady state forced periodic response. *Journal of Sound and Vibration*, 255(1) :1 – 41, 2002. ISSN 0022-460X. doi : 10.1006/jsvi.2000.3595.
- L. Corr and W. Clark. Comparison of low-frequency piezoelectric switching shunt techniques for structural damping. *Smart Materials and Structures*, 11 :370, 05 2002. doi : 10.1088/0964-1726/11/3/307.
- U. Von Wagner and P. Hagedorn. Piezo-beam systems subjected to weak electric field : Experiments and modelling of non-linearities. *Journal of Sound and Vibration*, 256 : 861–872, 10 2002. doi : 10.1006/jsvi.2002.5024.
- S. Behrens, S. Moheimani, and A. Fleming. Multiple mode current flowing passive piezoelectric shunt controller. *Journal of Sound and Vibration*, 266(5) :929 – 942, 2003. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/S0022-460X(02)01380-9.
- A. Fleming, S. Behrens, and S. Moheimani. Reducing the inductance requirements of piezoelectric shunt damping systems. *Smart Materials and Structures*, 12 :57, 01 2003. doi : 10.1088/0964-1726/12/1/307.
- P. Malaktar. *Nonlinear Vibrations of Cantilever Beams and Plates*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institue and State University, Blacksburg, Virginia, 2003.
- A. H. Nayfeh and P. F. Pai. *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*. Wiley-VCH, 2004.
- S. Parashar and U. Wagner. Nonlinear longitudinal vibrations of transversally polarized piezoceramics : Experiments and modeling. *Nonlinear Dynamics*, 37 :51–73, 07 2004. doi : 10.1023/B:NODY.0000040020.02386.40.
- C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1-2) :77–101, 2004. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/j.jsv.2003.04.005.
- R. Arquier, S. Karkar, L. Guillot, A. Lazarus, O. Thomas, B. Vergez, and B. Cochelin. Manlab 4.0 : an interactive path following and bifurcation analysis software. *CNRS*, <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>, pages 2005–2019, 2005.
-

- A. Nayfeh. Resolving controversies in the application of the method of multiple scales and the generalized method of averaging. *Nonlinear Dynamics*, 40 :61–102, 04 2005. doi : 10.1007/s11071-005-3937-y.
- A. Badel, G. Sebald, D. Guyomar, M. Lallart, E. Lefeuvre, C. Richard, and J. Qiu. Piezoelectric vibration control by synchronized switching on adaptive voltage sources : Towards wide band semi-active damping. *Journal of the Acoustical Society of America*, *Acoustical Society of America*, 119(5) :2815–2825, 05 2006.
- O. V. Gendelman, E. Gourdon, and C.-H. Lamarque. Quasiperiodic energy pumping in coupled oscillators under periodic forcing. *Journal of Sound and Vibration*, 294(4–5) : 651–662, 2006. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/j.jsv.2005.11.031.
- E. Lefeuvre, A. Badel, L. Petit, C. Richard, and D. Guyomar. Semi-passive piezoelectric structural damping by synchronized switching on voltage sources. *Journal of intelligent material systems and structures*, 17 :653–660, 08 2006. doi : 10.1177/1045389X06055810.
- M. Samal, P. Seshu, S. Parashar, U. Wagner, P. Hagedorn, B. Dutta, and H. Kushwaha. Nonlinear behaviour of piezoceramics under weak electric fields. part-ii : Numerical results and validation with experiments. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :1437–1458, 03 2006. doi : 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.067.
- G. Failla and A. Santini. On euler–bernoulli discontinuous beam solutions via uniform-beam green’s functions. *International Journal of Solids and Structures*, 44(22) :7666 – 7687, 2007. ISSN 0020-7683. doi : 10.1016/j.ijsolstr.2007.05.003.
- E. Gourdon, N. Alexander, C. Taylor, C. Lamarque, and S. Pernot. Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling : Theoretical and experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 300(3) :522 – 551, 2007. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/j.jsv.2006.06.074.
- J. Wang and P. Qiao. Vibration of beams with arbitrary discontinuities and boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 308(1) :12 – 27, 2007. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/j.jsv.2007.06.071.
- G. Failla and A. Santini. A solution method for euler-bernoulli vibrating discontinuous beams. *Mechanics Research Communications*, 35(8) :517 – 529, 2008. ISSN 0093-6413. doi : 10.1016/j.mechrescom.2008.04.002.
- O. V. Gendelman, Y. Starosvetsky, and M. Feldman. Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink i : Description of response regimes. *Nonlinear Dynamics*, 51(1-2) :31–46, 2008. ISSN 0924-090X. doi : 10.1007/s11071-006-9167-0.
- E. Özkaya, B. Süleyman, and H. Öz. Nonlinear transverse vibrations and 3 :1 internal resonances of a beam with multiple supports. *Journal of Vibration and Acoustics*, 130, 04 2008. doi : 10.1115/1.2775508.
- O. Thomas, J.-F. Deü, and J. Ducarne. Vibration of an elastic structure with shunted piezoelectric patches : efficient finite-element formulation and electromechanical coupling coefficients. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 80(2) : 235–268, 2009.

-
- M. Trindade and A. Benjeddou. Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptive structures : Critical evaluation and optimization. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 16 :210–223, 04 2009. doi : 10.1080/15376490902746863.
- U. H. Hegazy. 3 :1 internal resonance of a string-beam coupled system with cubic nonlinearities. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(12) : 4219 – 4229, 2010. ISSN 1007-5704. doi : 10.1016/j.cnsns.2010.01.024.
- K. Yamada, H. Matsuhisa, H. Utsuno, and K. Sawada. Optimum tuning of series and parallel lr circuits for passive vibration suppression using piezoelectric elements. *Journal of Sound and Vibration*, 329(24) :5036 – 5057, 2010. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/j.jsv.2010.06.021.
- M. Kozłowski, D. Cole, and R. Clark. A comprehensive study of the rl series resonant shunted piezoelectric : A feedback controls perspective. *Journal of Vibration and Acoustics*, 133, 02 2011. doi : 10.1115/1.4000966.
- C. Lamarque, O. Gendelman, A. Ture Savadkoohi, and E. Etcheverria. Targeted energy transfer in mechanical systems by means of non-smooth nonlinear energy sink. *Acta Mechanica*, 221 :175–200, 09 2011. doi : 10.1007/s00707-011-0492-0.
- Z. Qiu, M. Sadiq, C. Demore, M. Parker, P. Marin, K. Mayne, and S. Cochran. Characterization of piezocrystals for practical configurations with temperature- and pressure-dependent electrical impedance spectroscopy. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 58 :1793–803, 09 2011. doi : 10.1109/TUFFC.2011.2016.
- O. Thomas. *Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques. Instruments de musique, micro/nano systèmes électromécaniques, contrôle de vibration.* PhD thesis, École Nationale Supérieure de Cahcan, ENS Cachan, 2011.
- A. Abdelkefi. *Global Nonlinear Analysis of Piezoelectric Energy Harvesting from ambient and aeroelastic vibration.* PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2012.
- J. Ducarne, O. Thomas, and J.-F. Deü. Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction. *Journal of Sound and Vibration*, 331 : 3286–3303, 07 2012. doi : 10.1016/j.jsv.2012.03.002.
- M. Sayed and M. Kamel. 1 :2 and 1 :3 internal resonance active absorber for non-linear vibrating system. *Applied Mathematical Modelling*, 36(1) :310 – 332, 2012. ISSN 0307-904X. doi : 10.1016/j.apm.2011.05.057.
- S. Caddemi and A. Morassi. Multi-cracked euler-bernoulli beams mathematical modeling and exact solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 50(6) :944 – 956, 2013. ISSN 0020-7683. doi : 10.1016/j.ijsolstr.2012.11.018.
- S. Emam and A. Nayfeh. Non-linear response of buckled beams to 1 :1 and 3 :1 internal resonances. *International Journal of Non Linear Mechanics*, 52 :12–25, 06 2013. doi : 10.1016/j.ijnonlinmec.2013.01.018.
-

- S. K. Parashar, U. V. Wagner, and P. Hagedorn. Finite element modeling of nonlinear vibration behavior of piezo-integrated structures. *Computers and Structures*, 119 :37 – 47, 2013. ISSN 0045-7949. doi : 10.1016/j.compstruc.2012.12.026.
- P. Soltani, G. Kerschen, T. Gilles, and A. Deraemaeker. Piezoelectric vibration damping using resonant shunt circuits : An exact solution. *Smart Materials and Structures*, 23 : 125014, 10 2014. doi : 10.1088/0964-1726/23/12/125014.
- B. Zhou, F. Thouverez, and D. Lenoir. Essentially nonlinear piezoelectric shunt circuits applied to mistuned bladed disks. *Journal of Sound and Vibration*, 333(9) :2520–2542, 04 2014. doi : 10.1016/j.jsv.2013.12.019.
- J. Høgsberg and S. Krenk. Balanced calibration of resonant piezoelectric rl shunts with quasi-static background flexibility correction. *Journal of Sound and Vibration*, 341 :16 – 30, 2015. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/j.jsv.2014.12.006.
- M. Monteil, O. Thomas, and C. Touzé. Identification of mode couplings in nonlinear vibrations of the steelpan. *Applied Acoustics*, 89 :1–15, 03 2015. doi : 10.1016/j.apacoust.2014.08.008.
- S. Charlemagne, C.-H. Lamarque, and A. Ture Savadkoohi. Dynamics and energy exchanges between a linear oscillator and a nonlinear absorber with local and global potentials. *Journal of Sound and Vibration*, 376 :33 – 47, 2016. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/j.jsv.2016.03.018.
- M. Lallart, L. Yan, C. Richard, and D. Guyomar. Damping of periodic bending structures featuring nonlinearly interfaced piezoelectric elements. *Journal of Vibration and Control*, 22(18) :3930–3941, 2016. doi : 10.1177/1077546314567724.
- K. Mam, M. Peigney, and D. Siegert. Finite strain effects in piezoelectric energy harvesters under direct and parametric excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 389 :411–437, 11 2016. doi : 10.1016/j.jsv.2016.11.022.
- A. Ture Savadkoohi, C.-H. Lamarque, and M. Contessa. Trapping vibratory energy of main linear structures by coupling light systems with geometrical and material nonlinearities. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 80 :3 – 13, 2016. ISSN 0020-7462. doi : 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.11.011. Dynamics, Stability, and Control of Flexible Structures.
- V. Upadhye and S. Agashe. Effect of temperature and pressure variations on the resonant frequency of piezoelectric material. *Measurement and Control*, 49(9) :286–292, 2016. doi : 10.1177/0020294016663974.
- B. Bao, D. Guyomar, and M. Lallart. Vibration reduction for smart periodic structures via periodic piezoelectric arrays with nonlinear interleaved-switched electronic networks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 82 :230 – 259, 2017. ISSN 0888-3270. doi : 10.1016/j.ymssp.2016.05.021.
- V. Denis, M. Jossic, A. Renault, C. giraud audine, and B. Chomette. Identification of nonlinear modes using phase-locked-loop experimental continuation and normal form. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 106, 02 2018. doi : 10.1016/j.ymssp.2018.01.014.

-
- B. Lossouarn, J.-F. Deü, and G. Kerschen. A fully passive nonlinear piezoelectric vibration absorber. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 376 :20170142, 08 2018. doi : 10.1098/rsta.2017.0142.
- T. M. Silva, M. A. Clementino, C. De Marqui, and A. Erturk. An experimentally validated piezoelectric nonlinear energy sink for wideband vibration attenuation. *Journal of Sound and Vibration*, 437 :68 – 78, 2018. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/j.jsv.2018.08.038.
- D. Bitar, A. Ture Savadkoohi, C.-H. Lamarque, E. Gourdon, and M. Collet. Extended complexification method to study nonlinear passive control. *Nonlinear Dynamics*, 99, 11 2019. doi : 10.1007/s11071-019-05365-z.
- V. Guillot, A. Ture Savadkoohi, and C.-H. Lamarque. *Analytical Study of a Nonlinear Beam Including a Piezoelectric Patch*, pages 435–447. Springer International Publishing, Cham, 2019a. ISBN 978-3-319-92234-8. doi : 10.1007/978-3-319-92234-8_24.
- V. Guillot, A. Ture Savadkoohi, and C.-H. Lamarque. Analysis of a reduced order nonlinear model of a multi-physics beam. *Nonlinear Dynamics*, 97(2) :1371–1401, 2019b.
- G. Hurel, A. Ture Savadkoohi, and C.-H. Lamarque. Nonlinear vibratory energy exchanges between a two-degree-of-freedom pendulum and a nonlinear absorber. *Journal of Engineering Mechanics*, 145 :04019058, 08 2019. doi : 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001620.
- P. Shivashankar and S. Kandagal. Characterization of elastic and electromechanical nonlinearities in piezoceramic plate actuators from vibrations of a piezoelectric-beam. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 116 :624 – 640, 2019. ISSN 0888-3270. doi : 10.1016/j.ymsp.2018.06.063.
- M. Colin, S. Grondel, and E. Cattan. Very large amplitude vibrations of flexible structures : Experimental identification and validation of a quadratic drag damping model. *Journal of Fluids and Structures*, 97 :103056, 08 2020. doi : 10.1016/j.jfluidstructs.2020.103056.
- V. Guillot, A. Givois, M. Colin, T. Olivier, A. T. Savadkoohi, and C.-H. Lamarque. Theoretical and experimental investigation of a 1 :3 internal resonance in a beam with piezoelectric patches. *Journal of Vibration and Control*, 2020a.
- V. Guillot, A. Ture Savadkoohi, and C.-H. Lamarque. Study of an electromechanical nonlinear vibration absorber : design via analytical approach. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 09 2020b. doi : 10.1177/1045389X20957101.
- V. Guillot, A. Ture Savadkoohi, and C.-H. Lamarque. Reduced order model of an electro-mechanical beam for design of energy exchange between two resonant modes coupled to a nonlinear circuit. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2020c.
- Surbhi and Sukesha. Response of piezoelectric materials to the external temperature, electric field and humidity. *Materials Today : Proceedings*, 28 :1951 – 1954, 2020. ISSN 2214-7853. doi : 10.1016/j.matpr.2020.05.555. International Conference on Aspects of Materials Science and Engineering.
-

Sommaire

Introduction	1
1 État de l'art sur les comportements de dynamique non linéaire	3
1.1 Les comportements d'échanges d'énergie	4
1.2 Les comportements non linéaires de poutre	6
1.3 Les comportements non linéaires liés aux matériaux piézoélectriques	8
1.4 Les méthodes de résolution utilisées	11
1.5 Conclusion du chapitre	17
2 Mise en place du modèle électro-mécanique non linéaire	19
2.1 Équations dynamiques du système électro-mécanique	20
2.2 Résolution de systèmes réduits : analyse modale et fréquentielle	35
2.3 Exemples numériques	70
2.4 Conclusion du chapitre	92
3 Tests expérimentaux sur de petites structures	95
3.1 Dispositif et méthodologie expérimentale	96
3.2 Les analyses modales	103
3.3 Les comportements fréquentsiels de la structure	113
3.4 Conclusion du chapitre	124
4 Système électro-mécanique avec circuit électrique non linéaire	127
4.1 Résolution de systèmes réduits couplés à un circuit non linéaire	128
4.2 Présentation des résultats analytiques	143
4.3 Comparaison de résultats analytiques et numériques	156
4.4 Comparaison entre un circuit linéaire et le circuit non linéaire	169
4.5 Conclusion du chapitre	174
Conclusion	179
Liste des publications	183
5 Annexes	185
5.1 Termes des équations 2.25 et 2.26	185
5.2 Termes des équations 2.159 et 2.160	188
5.3 Termes des équations 2.180, 2.181 et 2.182	190
5.4 Termes de l'équation 2.190	192

5.5	Figures sur les amplitudes des harmoniques de r_m pour $F = 2 \times 10^{-8}$ m et $F = 2 \times 10^{-7}$ m	193
5.6	Termes des équations adimensionnées 4.51, 4.52 et 4.53	194
5.7	Matrice \mathbf{C}_2 de l'équation 4.63	196
5.8	Matrices \mathbf{M}_j de l'équation 4.65	196

Table des figures

2.1	Schéma de la poutre électro-mécanique dans une configuration unimorphe : une poutre homogène patchée avec n matériaux piézoélectriques situés sur le dessus (entre $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$, ..., $[x_{2n-1}, x_{2n}]$, avec $x_1 > 0$ et $x_{2n} < L_b$).	20
2.2	Définition des trois rotations d'angle d'Euler : $\chi(s, t)$, $\theta(s, t)$ et $\beta(s, t)$ qui permettent de passer du système de coordonnées initial $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ au système de coordonnées curvilignes local $(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$	21
2.3	Schéma de la déformation $F(t)$ de l'élément ds situé sur l'axe neutre de la poutre non déformée, qui devient l'élément ds^* sur l'axe neutre de la poutre déformée. La déformation est décrite par les déplacements u , v , w et les rotations d'angles β , θ et χ	22
2.4	Schéma de la déformation $F(t)$ des particules C et P dans le système initial aux particules C^* et P^* dans le système local. Ces particules sont placées sur la section qui reste droite d'après l'hypothèse d'une poutre d'Euler Bernoulli. C étant positionné sur l'axe neutre, à une distance s de l'origine dans le système initial. P est situé aux coordonnées (η, ζ) sur les sections droites (\vec{e}_y, \vec{e}_z) et $(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$	23
2.5	Schéma montrant l'emplacement des électrodes supérieures ($\eta = y_2$) et inférieures ($\eta = y_1$) du matériau piézoélectrique, par rapport à l'axe neutre, dans le cas de la configuration unimorphe. Le schéma est présenté pour le premier matériau piézoélectrique situé entre x_1 et x_2 . Il montre la modification de l'axe neutre entre les portions où il n'y a que la poutre ($s < x_1$ et $s > x_2$) et les portions avec poutre et patch piézoélectrique ($s \in [x_1, x_2]$).	26
2.6	Schéma de la poutre électro-mécanique en configuration unimorphe avec une excitation latérale de la base qui est : soit un déplacement $F \cos(\omega t)$, soit une accélération $ a \cos(\omega t)$	35
2.7	Schéma représentant le $k^{\text{ème}}$ matériau piézoélectrique présent sur la poutre électro-mécanique en configuration unimorphe. Les déformés modales ϕ_{2k-1} , ϕ_{2k} et ϕ_{2k+1} sont définies pour $s < x_{2k_1}$, $s \in [x_{2k-1}, x_{2k}]$ et $s > x_{2k}$. Elles sont reliées respectivement à (EI_b, μ_b) , (EI_m, μ_m) et (EI_b, μ_b)	39
2.8	Schéma des configurations bimorphe (à gauche) et unimorphe (à droite), avec la définition des longueurs L_b , L_p de la poutre et des matériaux piézoélectriques, et des distances x_1 , x_2 et Δ . x_1 et x_2 donnent la position du patch piézoélectrique par rapport au système d'encastrement. La distance Δ est définie telle que $\Delta = L_b - x_2$, avec $\Delta > 0$ car $x_2 < L_b$	71

2.9	Rapport entre la quatrième et la troisième pulsation propre de la configuration unimorphe. Identification de la réalisation de la résonance interne 1 : 2 pour les propriétés de poutre et de matériaux piézoélectriques des tableaux 2.3 et 2.4. Les pulsations propres sont obtenues par la résolution de l'équation 2.86.	72
2.10	Rapport entre la troisième et la deuxième pulsation propre de la configuration unimorphe. Identification de la réalisation de la résonance interne 1 : 3 pour les propriétés de poutre et de matériaux piézoélectriques des tableaux 2.3 et 2.4. Les pulsations propres sont obtenues par la résolution de l'équation 2.86.	73
2.11	Rapport entre la quatrième et la troisième pulsation propre de la configuration bimorphe. Identification de la réalisation de la résonance interne 1 : 2 pour les propriétés de poutre et de matériaux piézoélectriques des tableaux 2.3 et 2.4. Les pulsations propres sont obtenues par la résolution de l'équation 2.86.	74
2.12	Rapport entre la troisième et la deuxième pulsation propre de la configuration bimorphe. Identification de la réalisation de la résonance interne 1 : 3 pour les propriétés de poutre et de matériaux piézoélectriques des tableaux 2.3 et 2.4. Les pulsations propres sont obtenues par la résolution de l'équation 2.86.	74
2.13	Les quatre déformées modales (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 et ϕ_4) associées aux quatre premières pulsations propres de la poutre homogène (cf le tableau 2.5) pour $L_b = 0.15$ m. Elles sont calculées à partir des équations 2.66, 2.72 et 2.73.	76
2.14	Les quatre déformées modales (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 et ϕ_4) associées aux quatre premières pulsations propres de la configuration unimorphe (cf le tableau 2.5), avec $L_b = 0.15$ m, $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m. Elles sont calculées à partir des équations 2.73 et 2.74.	76
2.15	Les quatre déformées modales (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 et ϕ_4) associées aux quatre premières pulsations propres de la configuration bimorphe (cf le tableau 2.5), avec $L_b = 0.15$ m, $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m. Elles sont calculées à partir des équations 2.73 et 2.74.	77
2.16	La quatrième déformée modale des trois structures : poutre homogène, configuration unimorphe et bimorphe, avec $L_b = 0.15$ m, $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m.	78
2.17	Tracés des réponses fréquentielles des amplitudes des harmoniques de r_τ de la poutre homogène, avec $c_v = 0.01$ kg.m ⁻¹ .s ⁻¹ et l'amplitude de déplacement $F = 10^{-5}$ m. Les amplitudes des points d'équilibre des échelles multiples (EM) sont obtenues à partir des équations 2.105 et 2.204, et celles de la MAN par les équations 2.88.	80
2.18	Tracés des points d'équilibre (cf les équations 2.105 et 2.204) avec leur instabilité (cf le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice \mathbf{J}_{b1} de l'équation 2.111), ainsi que de la courbe squelette de la poutre homogène (cf l'équation 2.108), avec $c_v = 0.01$ kg.m ⁻¹ .s ⁻¹ et l'amplitude de déplacement $F = 3 \times 10^{-5}$ m.	81

2.19	Tracés des réponses fréquentielles des harmoniques de r_τ et V dans le cas de la configuration unimorphe, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 10^{-5} \text{ m}$. Les tracés issus des échelles multiples (EM) sont obtenus à partir des équations 2.148, 2.207 et 2.208, tandis que ceux issus de la MAN utilisent les équations 2.122 et 2.123.	82
2.20	Zoom sur les petites amplitudes des harmoniques 0, 2 et 3 de r_τ de la configuration unimorphe de la figure 2.19, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de d déplacement $F = 10^{-5} \text{ m}$	83
2.21	Tracés des points d'équilibre pour l'harmonique 1 de r_τ de la configuration unimorphe (cf l'équation 2.148) avec ses zones de stabilité et instabilité (cf le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice \mathbf{J}_{m1} de l'équation 2.144) avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 10^{-5} \text{ m}$. La courbe squelette est tracée à partir de l'équation 2.143.	83
2.22	Modification de la pulsation propre entre le circuit fermé ($V = 0$) et le circuit ouvert ($Q = 0$). Les courbes squelettes (CS) sont obtenues à partir des équations 2.143 et 2.156, et les courbes forcées (CF) à partir des équations 2.148 et 2.153.	84
2.23	Tracé de courbes squelettes (CS) et courbes forcées (CF) pour l'amplitude de déplacement $F = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}$, avec le paramètre s_{111} modulant autour de sa valeur critique $s_{111,c} = -132.9 \times 10^{13} \text{ Pa}$, dans le cas d'un circuit résistant avec $R = 10 \omega$. Les courbes squelettes sont obtenues à partir de l'équation 2.143 et les courbes forcées à partir de l'équation 2.148.	84
2.24	Tracés des réponses fréquentielles des harmoniques des amplitudes de r_n et r_m dans le cas de la poutre homogène pour la résonance 1 : 3, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 2 \times 10^{-7} \text{ m}$. Les points d'équilibre sont obtenus via la méthode des échelles multiples (EM) à partir des équations 2.173, 2.174, 2.175 et 2.176; la MAN utilise les équations 2.159 et 2.160.	86
2.25	Tracé fréquentiels des amplitudes des harmoniques de r_n , r_m et V dans le cas de la configuration unimorphe pour la résonance 1 : 3, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 2 \times 10^{-7} \text{ m}$. Les points d'équilibre sont obtenus via la méthode des échelles multiples (EM) (cf les équations 2.191, 2.192, 2.193 et 2.194), et par la MAN sur les équations 2.180, 2.181 et 2.182.	88
2.26	Tracé fréquentiels des amplitudes des harmoniques de r_n , r_m et V dans le cas de la configuration unimorphe pour la résonance 1 : 3, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 2 \times 10^{-8} \text{ m}$. Les points d'équilibre sont obtenus via la méthode des échelles multiples (EM) (cf les équations 2.191, 2.192, 2.193 et 2.194), et par la MAN sur les équations 2.180, 2.181 et 2.182.	89
2.27	Tracé fréquentiels des amplitudes des harmoniques de r_n , r_m et V dans le cas de la configuration unimorphe pour la résonance interne 1 : 2, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 10^{-10} \text{ m}$. Les points d'équilibre sont obtenus via la méthode des échelles multiples (EM) (cf les équations 2.200, 2.201, 2.202 et 2.203), et par la MAN sur les équations 2.180, 2.181 et 2.182.	90

2.28 Tracés des réponses fréquentielles des amplitudes des harmoniques de r_n, r_m et V dans le cas de la configuration unimorphe pour la résonance interne 1 : 2, avec $c_v = 0.01 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et l'amplitude de déplacement $F = 5 \times 10^{-10} \text{ m}$. Les points d'équilibre sont obtenus via la méthode des échelles multiples (EM) (cf les équations 2.200, 2.201, 2.202 et 2.203), et par la MAN sur les équations 2.180, 2.181 et 2.182. 91

3.1 Schéma des configurations a) unimorphe et b) bimorphe utilisées. La longueur L_b des structures peut être modifiée grâce au déplacement du système d'encastrement. La position x_1, x_2 des patchs piézoélectriques est déduite de la distance $\Delta = L_b - x_2$ et de la longueur L_p des matériaux, qui est fixée à 50 mm. La distance Δ est également fixée expérimentalement : 60 mm pour la configuration unimorphe et 70 mm pour la configuration bimorphe. 96

3.2 Photo des différentes configurations étudiées expérimentalement : la poutre homogène seule, la configuration unimorphe avec un seul matériau piézoélectrique, et la configuration bimorphe avec deux patchs piézoélectriques. Le système d'encastrement mobile est positionné sur la configuration bimorphe. La structure bimorphe et la structure unimorphe ont été réalisées au CNAM à Paris. 97

3.3 Schématisation du dispositif expérimental, la structure représentée étant la configuration bimorphe. Le vibromètre laser est pointé sur la structure, la réponse vibratoire est enregistrée par l'ordinateur via la carte d'acquisition. La structure est fixée via le système d'encastrement sur le pot vibrant. L'accélération imposée à la structure est recueillie par l'accéléromètre collé sur le système d'encastrement. Le signal d'excitation est transmis au pot vibrant par l'ordinateur via un amplificateur de puissance. 98

3.4 Courbe de régression linéaire entre les sept premières fréquences théoriques et expérimentales de la poutre homogène seule pour une longueur $L_b = 0.17 \text{ m}$. Cette courbe permet de déduire le module d'Young E_b de la poutre homogène. 99

3.5 Schéma simplifié du fonctionnement de la boucle à contrôle de phase (PLL) utilisée. Cette boucle utilise la différence de phase d_p qui existe entre la phase signal de vibration (ϕ_l) de la structure, enregistrée par le vibromètre laser, et celle de l'accélération imposée à la structure (ϕ_p) enregistrée par l'accéléromètre placé sur le système d'encastrement. Elle statue sur cette différence de phase, en vérifiant si elle est inférieure ou supérieure à une valeur seuil indiquée s_p 101

3.6 Représentation des déformées modales du deuxième et troisième mode (ϕ_2 et ϕ_3) avec identification du noeud du deuxième mode x_{f2} ('o') et du noeud extrémal du troisième mode x_{f3} ('+') 102

3.7	Tracés théoriques et expérimentaux des rapports ω_4/ω_3 et ω_3/ω_2 pour vérifier la réalisation des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 dans le cas de la configuration unimorphe. Les points expérimentaux en circuit fermé ('x' rouge) et en circuit ouvert ('+' bleu) sont tracés en fonction de la longueur L_b de la poutre. Ces tracés expérimentaux sont comparés avec les courbes théoriques en circuit fermé ($V = 0$) avec et sans couche de colle d'époxy (ligne pointillée et continue). Les calculs théoriques sont obtenus via la résolution de l'équation 2.86.	105
3.8	Calcul des erreurs E_{ω_k} (%), avec $k = 1, 2, 3$ et 4, (cf l'équation 3.4) entre les pulsations propres théoriques (issues du calcul sur l'équation 2.86) et expérimentales des quatre premiers modes de la configuration unimorphe en circuit fermé ($V = 0$).	106
3.9	Tracé des rapports ω_4/ω_3 et ω_3/ω_2 pour vérifier la réalisation des résonances internes 1 : 2 et 1 : 3 en fonction de la longueur L_b de la poutre, dans le cas de la configuration bimorphe. Les points expérimentaux en circuit fermé ('x' rouge) et en circuit ouvert ('+' bleu) sont tracés en fonction de la longueur L_b de la poutre. Ces tracés expérimentaux sont comparés avec les courbes théoriques avec et sans couche de colle d'époxy (ligne pointillée et continue) issues du calcul de l'équation 2.86.	107
3.10	Calcul des erreurs E_{ω_k} (%), avec $k = 1, 2, 3$ et 4, (cf l'équation 3.4) entre les pulsations théoriques (issues du calcul de l'équation 2.86) et expérimentales des quatre premiers modes propres de la configuration bimorphe.	108
3.11	Comparaison entre les points expérimentaux (*) et les courbes théoriques (-) du deuxième, troisième et quatrième mode de la poutre nue, pour une longueur de poutre $L_b = 0.17$ m.	110
3.12	Comparaison entre les points expérimentaux (*) et les courbes théoriques (-) du deuxième, troisième et quatrième mode de la configuration unimorphe, pour une longueur de poutre $L_b = 0.17$ m. L'emplacement du matériau piézoélectrique est matérialisé par les lignes pointillées $x_1 = 0.06$ m et $x_2 = 0.11$ m.	111
3.13	Comparaison entre les points expérimentaux (*) et les courbes théoriques (-) des deuxième, troisième et quatrième modes de la configuration bimorphe, pour une longueur de poutre $L_b = 0.17$ m. L'emplacement du matériau piézoélectrique est matérialisé par les lignes pointillées $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m.	112
3.14	Comparaison entre les points expérimentaux des déformées modales des quatrième mode de la poutre homogène ('o'), de la configuration unimorphe ('*') et de la configuration bimorphe ('+').	113
3.15	Tracé théorique des courbes squelettes du deuxième mode en circuit ouvert des deux configurations a) unimorphe et b) bimorphe, dans le cas du circuit ouvert. Ces tracés sont effectués à partir de l'équation 2.156.	115
3.16	Méthode par acuité de résonance pour obtenir l'amortissement spécifique ξ d'une structure (Inman, 1989) via le rapport des réponses fréquentielles des accélérations de la structure (a_{vib}) et de la base (a), à basse amplitude de forçage.	115
3.17	Méthode par acuité de résonance pour obtenir l'amortissement spécifique ξ des deux configurations a) unimorphe et b) bimorphe.	116

3.18	Tracés fréquentiels des amplitudes des accélérations $ a $ imposées aux configurations en fonction de la pulsation d'excitation ω , pendant la méthode de détection synchrone. Les amplitudes d'accélération $ a $ sont données dans le cas où le laser est pointé sur $s = x_{f_2}$ ('o') et $s = x_{f_3}$ ('+').	117
3.19	Tracés fréquentiels des amplitudes des harmoniques des points d'équilibre obtenus via la MAN sur les équations 3.6 et 3.7 qui sont projetées sur le deuxième et troisième mode (r_2 et r_3) pour la configuration unimorphe. La réponse est donnée sur le noeud extrémal du mode 3 $s = x_{f_3}$ (à gauche) et sur le noeud du mode 2 $s = x_{f_2}$ (à droite) (cf le tableau 3.11).	118
3.20	Tracés fréquentiels des amplitudes des harmoniques des points d'équilibre obtenus via la MAN sur les équations 3.6 et 3.7, qui sont projetées sur le deuxième et troisième mode (r_2 et r_3) pour la configuration bimorphe. La réponse est donnée sur le noeud extrémal du mode 3 $s = x_{f_3}$ (à gauche) et sur le noeud du mode 2 $s = x_{f_2}$ (à droite) (cf le tableau 3.11).	119
3.21	Tracé du résultat expérimental de la boucle à contrôle de phase du deuxième mode de la configuration unimorphe en fonction de la pulsation d'excitation ω . Il s'agit de la courbe squelette expérimentale du deuxième mode.	119
3.22	Tracé de la différence de phase d_p (cf la section 3.1.3) en fonction de la pulsation d'excitation ω . Elle est associée au tracé de la courbe squelette du deuxième mode de la configuration unimorphe (cf la figure 3.21).	120
3.23	Tracé du résultat expérimental de la boucle à contrôle de phase du deuxième mode de la configuration bimorphe en fonction de la pulsation d'excitation ω	120
3.24	Tracé de la différence de phase d_p (cf la section 3.1.3) en fonction de la pulsation d'excitation ω . Elle est associée au tracé de la courbe squelette du deuxième mode de la configuration bimorphe (cf la figure 3.23).	121
3.25	Tracés fréquentiels des trois premières harmoniques de la vibration $v(s,t_f)$ obtenues via la méthode de détection synchrone sur la configuration unimorphe, avec le laser pointé sur le noeud extrémal du mode 3 $s = x_{f_3}$ ('+'), et le noeud du mode 2 $s = x_{f_2}$ ('o'). Les amplitudes des accélérations de la base $ a $ associées sont décrites sur la figure 3.18(a).	123
3.26	Tracés fréquentiels des trois premières harmoniques de la vibration $v(s,t_f)$ obtenues via la méthode de détection synchrone sur la configuration unimorphe, avec le laser pointé sur le noeud extrémal du mode 3 $s = x_{f_3}$ ('+') et le noeud du mode 2 $s = x_{f_2}$ ('o'). Les amplitudes des accélérations de la base $ a $ associées sont décrites sur la figure 3.18(b).	125
4.1	Schéma de la configuration unimorphe reliée à un circuit non linéaire. Un seul patch piézoélectrique est situé entre x_1 et x_2 . Le système est excité par un déplacement latéral de la base : $F \cos(\omega t)$	128
4.2	Schéma du circuit électrique non linéaire avec le matériau piézoélectrique représenté par sa capacité Λ_V . Le circuit comporte une résistance R , une capacité négative C_{neg} , une inductance L_0 et une capacité non linéaire C_{NL} . 129	
4.3	Tracés de SIM (cf l'équation 4.30) pour différentes valeurs d'inductance L_0 , avec les paramètres électriques suivants : $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $C_{NL} = 2.65 \cdot 10^{-15} C^3 \cdot V^{-1}$ et $F = 10^{-5} m$. Les zones d'instabilité sont déduites du signe de la partie réelle de la valeur propre $\lambda_{0,\pm}$ (cf l'équation 4.24).	144

4.4 Tracés de SIM (cf l'équation 4.30) pour différentes valeurs du paramètre ζ , avec les paramètres électriques suivants : $L_0 = 61 H$ $R = 3050 \Omega$, $C_{NL} = 2.65 \cdot 10^{-15} C^3.V^{-1}$ et $F = 10^{-5} m$. Les zones d'instabilité sont déduites du signe de la partie réelle des valeurs propres $\lambda_{0,\pm}$ de la matrice \mathbf{A} de l'équation 4.26. 145

4.5 Tracés de SIM (cf l'équation 4.30) pour différentes valeurs de capacité non linéaire C_{NL} , avec les paramètres électriques suivants : $L_0 = 61 H$ $\zeta = 1$, $R = 3050 \omega$, $F = 10^{-5} m$. Les zones d'instabilité sont déduites du signe de la partie réelle des valeurs propres $\lambda_{0,\pm}$ de la matrice \mathbf{A} de l'équation 4.26. 145

4.6 Tracés de SIM (cf l'équation 4.30) pour différentes valeurs de résistance R , avec les paramètres électriques suivants : $L_0 = 61 H$ $\zeta = 1$, $C_{NL} = 2.65 \cdot 10^{-15} C^3.V^{-1}$ et $F = 10^{-5} m$. Les zones d'instabilité sont déduites du signe de la partie réelle de des valeurs propres $\lambda_{0,\pm}$ de la matrice \mathbf{A} de l'équation 4.26. 146

4.7 Tracés des points d'équilibre des amplitudes N_1 et N_3 en fonction de l'amplitude de déplacement F à partir de l'équation 4.34. L'identification de l'instabilité de ces points d'équilibre au temps t_0 et t_1 se fait au travers du signe des parties réelles des valeurs propres des matrices \mathbf{A} et $\mathcal{J}^{-1}\mathbf{H}_j$ des équations 4.26, 4.19 et 4.28. Tracés des valeurs extrémales $N_{1,\pm}$, $N_{3,\pm}$ et F_{\pm} à partir des équations 4.30, 4.31 et 4.34 Pour $\nu = 0.98$ et les données électriques $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 61 H$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$ 147

4.8 Zoom sur le tracé de l'amplitude N_1 autour de F_{\pm} de la figure 4.7(a). . . . 148

4.9 Tracés des points d'équilibre d'amplitude N_1 et N_3 en fonction de l'amplitude de déplacement F à partir de l'équation 4.34. Identification de l'instabilité de ces points d'équilibre au temps t_0 et t_1 avec le signe des parties réelles des valeurs propres des matrices \mathbf{A} et $\mathcal{J}^{-1}\mathbf{H}_j$ des équations 4.26, 4.19 et 4.28. Pour $\nu = 1.02$ et les données électriques $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 61 H$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$ 149

4.10 Tracé de la distance $|\mathcal{D}(t_m)| = 0$ (cf l'équation 4.38) pour les paramètres ζ et C_{NL} avec $\nu = 0.98$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 61 H$. Lorsque la distance $\mathcal{D}(t_m)$ passe par 0, il est possible d'obtenir un comportement chaotique. 150

4.11 Tracés des réponses fréquentielles des amplitudes N_1 et N_3 avec ν autour de 1, pour l'amplitude de déplacement $F = 6 \times 10^{-6} m$, à partir de l'équation 4.34. Les paramètres électriques sont $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 61 H$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$. L'identification de l'instabilité de ces points d'équilibre au temps t_0 et t_1 se fait avec le signe des parties réelles des valeurs propres des matrices \mathbf{A} et $\mathcal{J}^{-1}\mathbf{H}_j$ des équations 4.26, 4.19 et 4.28. 151

4.12 Tracé des réponses fréquentielles des amplitudes N_1 et N_3 avec ν autour de 1, pour l'amplitude de déplacement $F = 1.3 \times 10^{-5} m$, à partir de l'équation 4.34. Les paramètres électriques sont $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 61 H$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$. Identification de l'instabilité de ces points d'équilibre au temps t_0 et t_1 avec le signe des parties réelles des valeurs propres des matrices \mathbf{A} et $\mathcal{J}^{-1}\mathbf{H}_j$ des équations 4.26, 4.19 et 4.28. 152

4.13 Zoom autour de $\nu = 0.98$ pour le tracé de la réponse fréquentielle de l'amplitude N_1 de la figure 4.12(a). 153

4.14 Tracé du SIM (équation 4.58) pour différentes valeurs d'inductance L_0 , avec les paramètres électriques suivants : $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$, $R = 3050 \Omega$, $F = 7 \times 10^{-6} \text{ m}$, $c_v = 0.1$, $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$. Les zones d'instabilité sont déduites du signe de la partie réelle de la valeur propre de la matrice \mathbf{A}_2 de l'équation 4.64. 153

4.15 Tracés des points d'équilibre d'amplitude N_1 , N_2 et N_3 par rapport à l'amplitude de déplacement F à partir du système 4.71. Les paramètres utilisés sont $\nu = 1$, $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 140 H$ et $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$. Les zones d'instabilité sont identifiées à partir du signe de la partie réelle des valeurs propres de \mathbf{A}_2 et $\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{M}^*$ des équations 4.64, 4.67 et 4.68. 154

4.16 Tracés des points d'équilibre d'amplitude N_1 , N_2 et N_3 par rapport à l'amplitude de déplacement F à partir du système 4.71. Les paramètres utilisés sont $\nu = 1.01$, $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 140 H$ et $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$. Les zones d'instabilité sont identifiées à partir du signe de la partie réelle des valeurs propres de \mathbf{A}_2 et $\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{M}^*$ des équations 4.64, 4.67 et 4.68. 156

4.17 Tracés des distances $|\mathcal{D}(t_m)| = 0$ par rapport à l'amplitude \mathcal{A} et aux paramètres ζ et C_{NL} avec $\nu = 1.01$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 140 H$. Lorsque la distance $\mathcal{D}(t_m)$ passe par 0, alors il est possible d'obtenir un comportement chaotique. 157

4.18 Tracés des réponses fréquentielle des points d'équilibre d'amplitude N_1 , N_2 et N_3 obtenus à partir de l'équation 4.71 pour les paramètres : $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 140 H$, $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$ et $F = 7 \times 10^{-6} \text{ m}$. Les zones d'instabilité sont identifiées à partir du signe de la partie réelle des valeurs propres de \mathbf{A}_2 et $\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{M}^*$ des équations 4.64, 4.67 et 4.68. 158

4.19 Tracés du SIM (à partir de l'équation 4.30) avec trois points d'équilibre : un instable pour le temps t_1 et deux stables avec un sur la branche basse et l'autre sur la branche haute, avec $\nu = 0.98$ et $F = 7 \times 10^{-6} \text{ m}$. Tracé des intégrations numériques (par rapport à l'équation 4.11) pour différentes conditions initiales afin de montrer les scénarios dynamiques possibles. Les paramètres électriques sont $\zeta = 1$, $L_0 = 61$, $R = 3050 \Omega$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$ 160

4.20 Tracés de deux SIM avec différents points d'équilibre : a) trois points dont deux instables, b) un seul instable sur la branche intermédiaire, dans le cas où : a) $\nu = 0.98$ et $F = 1.3 \times 10^{-5} \text{ m}$ et b) $\nu = 1.02$ et $F = 7 \times 10^{-6} \text{ m}$ 161

4.21 Tracés temporels des variables $r_\tau(t^*)$ et $Q(t^*)$ à partir de l'intégration numérique de l'équation 4.11 pour $\nu = 1.02$ et $F = 7 \times 10^{-6} \text{ m}$, lors du comportement de modulation. 162

4.22 Portraits de phase de $Q(t^*)$ issus de l'intégration numérique de l'équation 4.11 pour différentes capacités non linéaires C_{NL} . Les autres paramètres sont et $F = 6 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\nu = 0.98$, $L_0 = 61 H$, $\zeta = -1$ et $R = 3050 \Omega$ 163

4.23 Tracés temporels $r_\tau(t^*)$ et $Q(t^*)$ de l'intrégration numérique 4.11 pour $F = 6 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\nu = 0.98$, $L_0 = 61 H$, $R = 3050 \Omega$, $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$ et $\zeta = -1$ 163

4.24 Tracés temporels $r_\tau(t^*)$ et $Q(t^*)$ de l'intrégration numérique 4.11 pour $F = 6 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\nu = 0.98$, $L_0 = 61 H$, $R = 3050 \Omega$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$ et $\zeta = -1$. On trace toutes les 80 périodes comme pour la figure 4.22(b). 164

4.25	Tracé des réponses fréquentielles avec une comparaison entre les points d'équilibre issus de l'analytique et de l'intégration numérique sur 4.11. Les paramètres électriques sont $\zeta = 1$, $R = 3050 \Omega$, $L_0 = 61 H$ et $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$	164
4.26	Tracés des réponses temporelles sur le SIM (à partir des équations 4.58 et 4.71) avec trois points d'équilibre pour $\nu = 1$ et $F = 7 \times 10^{-6} m$ et différentes conditions initiales.	165
4.27	Tracés des réponses temporelles sur le SIM (à partir des équations 4.58 et 4.71) pour $F = 7.5 \times 10^{-6} m$ et $\nu = 1$ et différentes conditions initiales. . .	165
4.28	Tracé de la réponse temporelle sur le SIM (à partir des équations 4.58 et 4.71) pour $\nu = 1.01$ et $F = 7 \times 10^{-6} m$. La condition initiale est l'origine. .	166
4.29	Portraits de phase de $Q(t^*)$ issus de l'intégration numérique de l'équation 4.11 pour différentes capacités non linéaires C_{NL} . Les autres paramètres sont $F = 7 \times 10^{-6} m$, $\nu = 1.01$, $L_0 = 140 H$, $\zeta = -0.2$ et $R = 3050 \Omega$. Les comportements sont tracés toutes les 80 périodes.	167
4.30	Réponses temporelles des variables $r_n(t^*)$, $r_m(t^*)$ et $Q(t^*)$ pour $F = 7 \times 10^{-6} m$, $\nu = 1.01$, $L_0 = 140 H$, $C_{NL} = 10^{-17} C^3.V^{-1}$ et $R = 3050 \Omega$, toutes les 80 périodes.	168
4.31	Réponses temporelles des variables $r_n(t^*)$, $r_m(t^*)$ et $Q(t^*)$ pour $F = 7 \times 10^{-6} m$, $\nu = 1.01$, $L_0 = 140 H$, $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$ et $R = 3050 \Omega$, toutes les 80 périodes.	168
4.32	Tracé des réponses fréquentielles, comparaison entre les résultats issus de l'intégration numérique et ceux issus des calculs analytiques pour $F = 7 \times 10^{-6} m$	169
4.33	Comparaison des réponses fréquentielles du circuit résonant et du circuit non linéaire pour $F = 6 \times 10^{-6} m$ et $R = 3050 \Omega$. Les paramètres électriques sont : pour le circuit résonant $L_0 = 43.7 H$; pour le circuit non linéaire $L_0 = 7 H$, $\zeta = 0.1$ et $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$	170
4.34	Zoom effectué sur la figure 4.33(a) représentant la réponse fréquentielle de l'amplitude N_1	171
4.35	Tracés des réponses temporelles de r_τ et Q quand le système est attiré par le point d'équilibre stable : a) du bas, b) du haut. Les paramètres utilisés sont $F = 6 \times 10^{-6} m$, $\nu = 0.98$, $L_0 = 7 H$, $\zeta = 0.1$ et $C_{NL} = 10^{-19} C^3.V^{-1}$	172
4.36	Comparaison des tracés fréquentiels du circuit linéaire et non linéaire pour l'amplitude de déplacement $F = 7 \times 10^{-6} m$ et $R = 3050 \Omega$. Les paramètres électriques sont : pour le circuit résonant $L_0 = 124 H$; pour le circuit non linéaire : $L_0 = 22 H$, $\zeta = 0.1$ et $C_{NL} = 10^{-17} C^3/V$	174
4.37	Zoom effectué sur la figure 4.36(a) représentant la réponse fréquentielle de l'amplitude N_1	175
4.38	Tracés des réponses temporelles des variables $r_n(t^*)$, $r_m(t^*)$ et $Q(t^*)$ du circuit linéaire et non linéaire pour $F = 7 \times 10^{-6} m$, $\nu = 0.99$. La condition initiale est l'origine, la dynamique est donc attirée par le point d'équilibre stable du bas. Les paramètres électriques sont : pour le circuit résonant $L_0 = 124 H$; pour le circuit non linéaire : $L_0 = 22 H$, $\zeta = 0.1$ et $C_{NL} = 10^{-17} C^3/V$	176

4.39 Tracés des réponses temporelles des variables $r_n(t^*)$, $r_m(t^*)$ et $Q(t^*)$ du circuit linéaire et non linéaire pour $F = 7 \times 10^{-6}$ m, $\nu = 0.99$. La condition initiale est $r_n(0) = 2 \times 10^{-4}$ et les autres conditions nulles, la dynamique est donc attirée par le point d'équilibre stable du haut. Les paramètres électriques sont : pour le circuit résonant $L_0 = 124 H$; pour le circuit non linéaire : $L_0 = 22 H$, $\zeta = 0.1$ et $C_{NL} = 10^{-17} C^3/V$ 177

5.1 Tracés fréquentiels des amplitudes des harmoniques de r_m pour les amplitudes de forçage a) $F = 2 \times 10^{-8}$ et b) $F = 2 \times 10^{-7}$. Elles montrent que la résonance 1 : 3 est activée dans le cas de forçage b) et pas a) où les non linéarités quadratiques s'expriment plus que les non linéarités cubiques. . . 193

Liste des tableaux

2.1	Solutions de l'équation caractéristique (cf l'équation 2.70) dans la cas d'une poutre homogène encastree-libre.	37
2.2	Rapport entre les quatre premières pulsations propres d'une poutre homogène. Mise en lumière de rapports 1 : 2 et 1 : 3 quasiment réalisés (en gras).	38
2.3	Propriétés physiques et géométriques de la poutre en acier	70
2.4	Propriétés physiques et géométriques des matériaux piézoélectriques PIC 189 (Guyomar et al., 1997, Abdelkefi, 2012)	70
2.5	Les quatre premières pulsations propres des différentes configurations dans le cas où $L_b = 0.15$ m, $x_1 = 0.05$ m et $x_2 = 0.1$ m.	75
2.6	Coefficients du matériau piézoélectrique P189 (Guyomar et al., 1997)	78
2.7	Pulsations propres du deuxième et troisième mode, et le rapport des 2, dans le cas de résonance interne 1 : 3 de la poutre homogène et de la configuration unimorphe pour $L_b = 0.18$ m et $\Delta = 0.099$ m.	85
3.1	Propriétés mécaniques de la poutre nue (identifiées expérimentalement), des matériaux piézoélectriques PIC 151 (d'après Thomas et al. (2009)) et de la colle époxy (d'après Mam et al. (2016)).	99
3.2	Pulsations propres de la configuration unimorphe associées à la résonance 1 : 2, dans le cas d'un circuit fermé.	104
3.3	Pulsations propres de la configuration unimorphe associées à la résonance 1 : 3, dans le cas d'un circuit fermé.	104
3.4	Pulsations propres de la configuration bimorphe associées à la résonance 1 : 2, dans le cas d'un circuit fermé.	108
3.5	Pulsations propres de la configuration bimorphe associées à la résonance 1 : 3, dans le cas d'un circuit fermé.	108
3.6	Calcul des erreurs E_{rr} de l'équation 3.5 entre les points expérimentaux et les points théoriques des déformées modales de la poutre nue.	110
3.7	Calcul des erreurs E_{rr} de l'équation 3.5 entre les points expérimentaux et les points théoriques des déformées modales de la configuration unimorphe.	111
3.8	Calcul des erreurs E_{rr} de l'équation 3.5 entre les points expérimentaux et les points théoriques des déformées modales de la configuration bimorphe.	112
3.9	Pulsations propres théoriques du deuxième mode en circuit fermé des configurations unimorphe et bimorphe dans le cas où $L_b = 0.16$ m.	114
3.10	Amortissements spécifiques ξ obtenus pour les deux configurations par utilisation de la méthode par acuité de résonance (cf les figures 3.17(a) et 3.17(b)). Et calcul des amortissements c_v correspondants grâce à l'identification des pulsations propres du deuxième mode ω_2	116

3.11 Les abscisses des points x_{f_2} et x_{f_3} (cf la figure 3.6) de la configuration unimorphe et de la configuration et bimorphe, qui présentent une résonance 1 : 3. 117

Résumé

Les travaux sur les matériaux piézoélectriques (qui peuvent transformer l'énergie électrique en énergie mécanique et inversement) utilisés afin de contrôler ou récupérer l'énergie de structures principales, sont nombreux. Dans un premier temps, on a supposé qu'ils ne possédaient qu'un comportement linéaire, avant que la prise en compte de leurs non linéarités émerge. Des circuits classiques linéaires ont été optimisés pour le contrôle vibratoire et la récupération d'énergie, mais dans les dernières décennies, des circuits non linéaires ont démontré leur efficacité supérieure. Ce travail a pour objectif l'écriture d'un modèle qui permette la conception d'un système électromécanique non linéaire pour l'atténuation des vibrations ou la récupération d'énergie.

Premièrement, je me suis attachée à obtenir les équations dynamiques non linéaires du système composé d'une poutre cantilever avec des matériaux piézoélectriques collés dessus. Dans ces équations on prend en compte les non linéarités géométriques de la poutre, mais aussi les non linéarités matérielles des patches piézoélectriques. Une analyse modale est effectuée pour identifier les pulsations propres et les déformées modales de la structure. Des résultats analytico-numériques mettent en évidence la possibilité de créer des résonances internes entre les modes propres de la structure via le positionnement des matériaux sur celle-ci. Une analyse par la méthode des échelles multiples sur des modèles réduits permet de montrer les échanges d'énergie possibles entre les modes concernés par ces résonances internes. Puis, des résultats expérimentaux sont présentés. Ces derniers viennent valider les développements analytiques tels que la création de résonances internes, la modification des déflexions modales, le comportement non linéaire de la structure et les échanges d'énergie lorsqu'il existe une résonance 1 : 3 entre deux modes propres. Finalement, une étude analytique est menée sur une poutre avec un patch piézoélectrique qui est relié à un circuit électrique non linéaire comportant un terme cubique. Deux systèmes sont étudiés : l'un où la structure ne présente pas de résonances internes, et l'autre lorsqu'il existe une résonance 1 : 3. Des méthodes analytiques effectuées sur les modèles réduits, permettent d'analyser les réponses du système à différentes échelles de temps, et d'identifier les régimes périodiques, quasi-périodiques et chaotiques. On examine alors les effets des différents composants électriques sur la réponse de la structure et on montre comment ils peuvent être choisis pour obtenir les comportements souhaités pour le système. Il est démontré que le circuit non linéaire change la nature des échanges d'énergie des modes résonants. Il peut même équilibrer leurs énergies, d'où des applications pour le contrôle ou la récupération d'énergie. Une comparaison avec un absorbeur linéaire est présentée pour confirmer les performances d'un potentiel absorbeur non linéaire.

Mots clés : contrôle vibratoire, récupération d'énergie, matériaux piézoélectriques, échelles multiples, complexification, résonance interne, dynamique non linéaire.

Abstract

The use of piezoelectric materials (which can transform mechanical energy into electrical one and vice versa) in order to control or to harvest energy from main structures was widely investigated over the years. It was first assumed that those materials only present a linear behavior before spotting their nonlinear responses. Linear classical circuits coupled to piezoelectric systems were optimized to mitigate vibrations or harvest energy, but in the last decades, using nonlinear circuits have proven to be more efficient. The aim of this work is to write down a model allowing the design of a nonlinear electromechanical system in order to mitigate the vibrations or harvest energy.

First, the governing nonlinear equations of a system composed of a cantilever beam with piezoelectric materials patched on it are derived. Those equations take into account geometrical and material nonlinearities of the beam and of the piezoelectric materials, respectively. A modal analysis is carried out to identify the natural frequencies and mode shapes of the composite structure. Numerical results demonstrate that special positions of piezoelectric materials on the beam can lead to the creation of internal resonances. A multiple scale analysis is carried out on a reduced order model to study modal energy exchanges due to an internal resonance. Then, experimental results are presented. Those allow to validate theoretically predicted behaviors of the system such as internal resonances creation, mode shapes modification, nonlinear behavior of the structure and energy exchange during a 1 : 3 internal resonance. Finally, a beam with a single piezoelectric material patched on it, linked to a nonlinear circuit presenting a cubic term, is studied. This nonlinear electromechanical structure is studied for a case when the structure does not present any internal resonances and another case where the structure exhibit a 1 : 3 internal resonance. Analytical methods are applied on the reduced order model to study the system responses at different time scales and to identify periodic, quasi-periodic and even chaotic regimes. Effects of the different electrical components are examined to highlight that they can be designed to obtain special behaviors of the system. It is shown that the nonlinear circuit changes the nature of energy exchanges of resonant modes and can even balance their energies, which can have application in control or energy harvesting. A comparison with a linear circuit is carried out to show the performance of the possible nonlinear piezoelectric absorber.

Keywords : vibration control, energy harvesting, piezoelectric materials, multiple scale, complexification, internal resonance, nonlinear dynamic