



Réponse dynamique d'un tunnel enterré soumis à des ondes mécaniques

Hamed Bouare

► To cite this version:

Hamed Bouare. Réponse dynamique d'un tunnel enterré soumis à des ondes mécaniques. Autre [q-bio.OT]. Université d'Avignon, 2021. Français. NNT : 2021AVIG0507 . tel-03467875

HAL Id: tel-03467875

<https://theses.hal.science/tel-03467875>

Submitted on 6 Dec 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT D'AVIGNON UNIVERSITÉ

École Doctorale N° 536
Sciences et Agrosiences

Mention de doctorat :
Mécanique

Laboratoire Environnement Méditerranéen &
Modélisation des Agro-Hydrosystèmes
(EMMAH - UMR 1114)

Présentée par
Hamed BOUARE

RÉPONSE DYNAMIQUE D'UN TUNNEL ENTERRÉ SOUMIS À DES ONDES MÉCANIQUES

Soutenue publiquement le 09/09/2021 devant le jury présidé par Mr Stéphane GAFFET et composé de :

Mr Stéphane BONELLI	Directeur de Recherche	INRAe	Rapporteur
Mme Armelle CHABOT	Directrice de Recherche	UGE	Rapporteuse
Mme Clarisse BORDES	Maître de Conférences	UPPA	Examinatrice
Mr Stéphane GAFFET	Directeur de Recherche	CNRS	Examineur
Mr Omar LAGHROUCHE	Professeur	HWU	Examineur
Mme Gaëlle LEFEUVE-MESGOUEZ	Professeure	AU	Co-directrice de thèse
Mr Arnaud MESGOUEZ	Maître de Conférences HDR	AU	Directeur de thèse



Résumé

Ce travail de doctorat s'inscrit dans un cadre général d'étude de la propagation d'ondes mécaniques dans des milieux hétérogènes faisant intervenir un tunnel enterré, plus spécifiquement dans le contexte karstique du Laboratoire Souterrain à Bas Bruit situé à Rustrel, Vaucluse, France. L'objectif principal est de développer une approche semi-analytique permettant de simuler la réponse dynamique d'un tunnel et de son espace environnant en régimes harmonique et transitoire. Une approche multicouches radiale dans laquelle l'environnement hétérogène est décrit par des milieux effectifs par morceaux dans une configuration bidimensionnelle est proposée. Les microfissures existant entre deux couches successives de la zone endommagée sont modélisées macroscopiquement par un contact imparfait. Dans un premier temps, nous considérons que les galeries du LSBB ont une forme circulaire, nous utilisons alors la méthode d'expansion de la fonction d'onde pour obtenir les expressions des contraintes et déplacements dans les différents milieux. Dans un deuxième temps, nous abordons la théorie générale de la variable complexe. L'utilisation des fonctions de cartographie permet ainsi de transformer une géométrie réelle en une géométrie circulaire. Le challenge scientifique est de mieux décrire la forme globale des galeries en proposant des géométries autres que circulaires, de types ellipse ou fer à cheval. Une analyse des résultats obtenus montre que la qualité du contact, le type de géométrie et la nature (nombre de couches, épaisseur) de la zone endommagée modifient la réponse dynamique du tunnel et du massif karstique environnant.

Mots clés : Propagation d'ondes mécaniques ; Tunnel ; Interface imparfaite ; Multicouches ; Semi-analytique ; Conformal Mapping.

Abstract

The PhD work context deals with mechanical wave propagation in heterogeneous media including an embedded tunnel, more specifically in the karst environment of the Low Noise Underground Laboratory, Rustrel, Vaucluse, France. The main goal of this work concerns the development of a semi-analytical approach to study the dynamic response of the tunnel and its surroundings in both harmonic and transient regimes. The heterogeneous environment is described by a radial multilayered approach with various effective media in a two-dimensional geometry. The microcracks between two successive layers of the damaged zone are macroscopically described by an imperfect interface. The gallery is first assumed to be circular, allowing us to apply the wave function expansion method to obtain the stress and displacement fields in the different media. In the second part, we introduce the general theory of the complex variable. The use of mapping functions allows us to transform a real geometry into a circular one. The scientific challenge lies in a better description of the overall shape of the tunnel including non-circular geometries, such as an ellipse or a horseshoe. The results obtained show that the kind of contact, the type of geometry and the characteristics (number of layers, thickness) of the damaged zone modify the dynamic response of the tunnel and the karst massif.

Keywords : Mechanical wave propagation ; Tunnel ; Imperfect interface ; Multilayer ; Semi-analytical ; Conformal Mapping.

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de thèse Monsieur Arnaud Mesgouez, Maître de Conférences à l'Université d'Avignon et ma co-directrice, Madame Gaëlle Lefeuvre-Mesgouez, Professeure à l'Université d'Avignon de m'avoir permis de réaliser ce travail au sein de l'Unité Mixte de Recherche Environnement Méditerranéen et Modélisation des Agro-Hydrosystèmes (UMR, EMMAH). Je leur dois notamment l'obtention de la bourse Perdiguier qui m'a permis de réaliser et de maintenir une collaboration fructueuse avec les chercheurs de l'Université Heriot Watt d'Edinburgh. Je les remercie d'avoir suivi ces recherches, d'avoir partagé une part de leurs savoirs et de m'avoir conseillé tout au long de ces trois années et demi.

J'adresse mes sincères remerciements au conseil régional Provence-Alpes-Côte d'Azur (PACA) et à l'Université d'Avignon d'avoir financé ces travaux de recherche. Je profite également de l'occasion pour remercier Madame Aude de Saint Salvy, Gestionnaire du Collège des Études Doctorales et des Écoles Doctorales pour le travail remarquable qu'elle effectue au quotidien pour l'ensemble des doctorants.

Des remerciements tout particuliers vont à Monsieur Stéphane Gaffet, Directeur du Laboratoire Souterrain à Bas Bruit (LSBB) qui m'a fait l'honneur de présider mon jury et qui m'a permis d'en savoir plus sur le LSBB grâce à plusieurs rencontres. Je remercie Monsieur Stéphane Bonelli, Directeur de Recherche à l'Institut national de recherche pour l'agriculture, l'alimentation et l'environnement (INRAE) et Madame Armelle Chabot, Directrice de recherche à l'Université Gustave Eiffel (UGE) qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail de thèse. Leurs lectures minutieuses du manuscrit et leurs analyses fines du travail m'ont permis de mûrir, approfondir et enrichir certains points scientifiques entre le mémoire et la soutenance. J'adresse aussi toute ma gratitude à Monsieur Stéphane Gaffet, Monsieur Omar Laghrouche, Professeur à l'Université Heriot Watt et Madame Clarisse Bordes, Maître de Conférences à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA) qui m'ont fait l'honneur de faire partie du jury de thèse.

Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur Omar Laghrouche de m'avoir accueilli dans son laboratoire et d'avoir partagé avec moi un morceau de sa culture scientifique. J'ai énormément pu m'enrichir lors des discussions qui nous ont réunis, de votre vision lucide des phénomènes physiques subtiles alliées à une parfaite clarté d'expression. Je remercie Madame Clarisse Bordes d'avoir insisté sur le côté expérimental pour ne pas perdre de vue une certaine réalité de terrain. Vos précieux conseils m'ont beaucoup servi.

Je souhaite remercier mon cher ami Chahine Abbas, Maître de Conférence à l'Université d'Avignon de m'avoir soutenu et guidé pendant la fin de thèse. Je ne peux que te remercier encore et pleinement, lorsque je repense aux centaines d'heures que nous avons passé ensemble à discuter de sciences. Ton aide et ta pensée critique m'ont vraiment été d'un grand secours surtout dans la finalisation de mes transparents pour la soutenance.

Je souhaite remercier Monsieur Gilles Micolau, Professeur à l'Université d'Avignon pour son soutien, sa disponibilité et sa gentillesse. On ne peut qu'apprendre à vos côtés.

Je tiens également à remercier toute l'équipe de recherche particulièrement Monsieur Stéphane Ruy, Directeur de l'UMR EMMAH, Monsieur Philippe Lieutaud, Professeur agrégé, Monsieur Philippe Beltrame, Maître de conférences, Madame Elisabeth Pozzo Di Borgo, Maître de conférences, Monsieur Slimane Arhab, Maître de conférences et Monsieur Olivier Lombard, Maître de conférences.

Je remercie également mes collègues et amis doctorants-docteurs, Clément Dezord, Florian Cajot, Quentin Didier, Saif Eddine Dekhil, Daher Diab et Meriam Khelifa pour leurs gentillesse et disponibilité. Les échanges quotidiens sur les différentes thématiques de recherche m'ont permis de m'enrichir intellectuellement dans plusieurs domaines. Je souhaite également remercier Cyril Gignoux, Technicien de grade exceptionnel et Cynthia Schonne Technicienne, pour leurs gentillesse, attention et disponibilité. Je souhaite remercier ma chère Karine Olivier, celle qui m'a toujours accompagnée dans mes démarches administratives. Elle représente en un mot pour moi la maman des nouveaux doctorants.

Je remercie toute l'équipe d'hydrogéologues de l'Université d'Avignon particulièrement, Milanka Babic, Technicienne, Vincent Marc, Maître de conférences, Roland Simler, Ingénieur, Marina Gillon, Maître de conférences, Adriano Meyer, Maître de conférences et Anne-Laure Cognard-Plancq, Maître de conférences de m'avoir accueilli dans leurs locaux pendant mes deux premières années de thèse. Je souhaite également remercier les docteurs, doctorant et post doctorant Honoré Houemenou, Coffi-Belmys Cakpo, Chloé Ollivier, Sébastien Santoni, Angélique Poulain, Florian Mallet, et Irène Kinoti qui ont rendu mon séjour plus agréable.

J'exprime ma gratitude à mes anciens directeurs de stage Monsieur Olivier Poncelet, Directeur de recherche et Monsieur Stéphane Glockner Ingénieur recherche à l'Université de Bordeaux. Vous avez orienté mes premiers pas en recherche et j'ai également pris un grand plaisir à travailler avec vous.

Je tiens à remercier mes chers amis Maxime Cafardy et Mamadou Oury Baldé. Je remercie également mon grand frère Amadou Cheick Oumar Tall pour ses précieux conseils d'accompagnement. Je remercie également mes amis du Café de dimanche et toute la team Avignonnaise, Abdramane Diassé Samaké, Naoufel Mzoughi, Salah Eddine Ait Ahtman, Tarek Dardouri, Fella Hamitouche, Alice Dall'armellina et Fatma Mhadhbi. Je remercie également tous mes proches, promotionnels et professeurs de Saint Kizito, Sacré-cœur et Ibn Khaldoun. Un grand remerciement également à mes amis de la team Palace.

Enfin, j'exprime ma profonde gratitude à mon père et à ma mère, ainsi qu'à tous mes oncles, tantes, frères et sœurs des familles Bouare, Traore, Dolo, Tall, Diarra, Drave, Konaté, Soumano, Doumbia, Coulibaly, Toumagnon, Sissoko et Dembélé.

Pour finir, je souhaite remercier ma femme Mariam pour la patience dont elle a fait preuve pendant toute la durée de la thèse. Aucun mot ne pourrait exprimer ma gratitude et mon respect envers toi. Sans tes sages conseils, ce travail n'aurait tout simplement pas été possible. Je dédie ce mémoire à notre fille Fanta.

"Riez et rions ensemble, car le rire est le meilleur thermomètre de la santé et du bonheur"

Amadou Hampâthé Bâ

Table des matières

1 Étude Bibliographique	3
1.1 Contexte et environnement	3
1.1.1 Présentation du Laboratoire Souterrain à Bas Bruit (LSBB)	3
1.1.2 Topologie du site	4
1.1.3 Contextes géologique et hydrogéologique	7
1.1.4 Ordres de grandeurs des caractéristiques mécaniques moyennes du massif	8
1.2 Problématique ondulatoire et positionnement du problème	11
1.2.1 Rappels sur les ondes mécaniques élastiques	11
1.2.2 Conversion d'ondes à l'interface entre deux milieux de propriétés différentes	16
1.2.3 Qualité des contacts et modélisations associées entre deux milieux différents	17
1.2.4 Zone endommagée dans le domaine des tunneliers	21
1.3 Méthodes de résolution	23
1.3.1 Méthodes analytiques et semi-analytiques	23
1.3.2 Méthodes numériques	30
1.4 Motivations et Objectifs	32
2 Approche classique pour la résolution d'un problème multicouches circulaire	33
2.1 Introduction	33
2.2 Configuration du problème	33
2.3 Régime Harmonique	34
2.3.1 Solutions d'ondes en coordonnées cylindriques	34
2.3.2 Solutions d'ondes en coordonnées polaires	38
2.3.3 Conditions aux limites	41
2.3.4 Assemblage dans l'approche classique	42
2.3.5 Structure du code	44
2.4 Résultats en régime harmonique	45
2.4.1 Paramètres d'adimensionnement	45
2.4.2 Calcul numérique	45
2.4.3 Validation des résultats numériques	46
2.4.4 Choix retenu pour les résultats en régime harmonique	48
2.4.5 Influence du contact	50
2.4.6 Influence du multicouches EDZ	59
2.4.7 Évolution du maximum en fonction de la fréquence	61
2.5 Régime transitoire	64
2.5.1 Onde plane transitoire	65
2.5.2 Ligne source transitoire	67

2.5.3	Assemblage et expression de la transformée de Fourier inverse	69
2.5.4	Calcul numérique	70
2.5.5	Résultats pour une source en onde plane	74
2.5.6	Résultats pour une ligne source	80
2.6	Conclusion	82
3	Approche de la variable complexe pour la résolution d'un problème multi-	
	couches non circulaire	83
3.1	Introduction	83
3.2	Position du problème	84
3.3	Concept du conformal mapping	85
3.4	Équation du mouvement des ondes dans $\mathbb{C}$	85
3.5	Solutions d'ondes dans $\mathbb{C}$	86
3.6	Composantes cartésiennes du vecteur des déplacements et du tenseur des	
	contraintes en fonction de la variable complexe	89
3.6.1	Vecteur des déplacements	89
3.6.2	Tenseur des contraintes	89
3.7	Composantes polaires du vecteur des déplacements et du tenseur des contraintes	
	dans $\mathbb{C}$	90
3.7.1	Vecteur des déplacements	90
3.7.2	Tenseur des contraintes	92
3.8	Le cas multicouches	93
3.8.1	Contrainte et déplacement dans le milieu incident	93
3.8.2	Contrainte et déplacement dans la zone endommagée et le tunnel	94
3.8.3	Conditions aux limites	95
3.8.4	Assemblage et obtention d'un système global	96
3.9	Résultats	97
3.9.1	Calcul numérique	97
3.9.2	Validation	99
3.9.3	Configuration d'étude et résultats associés	100
3.10	Régime transitoire	110
3.10.1	Résultats	110
3.11	Conclusion	111
	Annexes	129
A	Orthogonalité des fonctions intervenant dans les séries de Fourier	130
B	Détails des termes matriciels intervenant dans l'approche classique	131
C	Détails des termes matriciels intervenant dans l'approche de la variable com-	
	plexe	133

Table des figures

1.1	Présentation du LSBB avec illustration des galeries, d'après GADAL, 2009 et JOLIS, 2012	5
1.2	a) Coupe Nord-Sud de la Grande Montagne et représentation des failles, (b) Séquence stratigraphique, (c) Carte structurale du type de la faille étudiée par JEANNE et al., 2012	6
1.3	Faciès du type de calcaire rencontré sur l'ensemble du forage MIGA. On trouve également un exemple de stylolithe et de bioclaste observés dans ce forage, BAUDOUY, 2017	8
1.4	(a) Localisation du projet MIGA sur le plan du LSBB. (b) Zoom sur la galerie MIGA. (c) Image des carottes de sondages durant l'excavation de la galerie 0 à 3.70 m, BAUDOUY, 2017	9
1.5	L'image de gauche (A) indique la position des points d'écoulement le long des galeries, LAFEUILLE, 2009 et CARRIERE, 2014. Celle de droite (B) illustre un point de suivi d'écoulement	10
1.6	Ondes volumiques dans les milieux élastiques (a) Onde P ; (b) Onde SV ; adaptée de monsite (lien cliquable)	14
1.7	Ondes de surface : (a) Onde de Rayleigh ; (b) Onde de Love ; adaptée de monsite (lien cliquable)	15
1.8	Évolution des vitesses d'ondes P, S et R, adimensionnées par $\sqrt{(E/\rho)}$, en fonction de ν	16
1.9	Conversion d'ondes volumiques au niveau d'une interface entre deux milieux, KHAM, 2004	17
1.10	Évolution des coefficients de réflexion et de réfraction des ondes (P) et (SV) en fonction de l'angle d'incidence : (a) onde incidente venant du bas et (b) onde incidente venant du haut ; source geophysik (lien cliquable)	18
1.11	Ressort pour modéliser la discontinuité entre deux milieux a et b, d'après GU, NIHEI et L. R. MYER, 1996a	18
1.12	Modèle de Kelvin-Voigt ; source wikipédia	19
1.13	Exemples de géométries cartésiennes avec une excitation en surface dans un demi espace (a) monocouche ; (b) multicouches ; D. JONES et al., 1991 et NAYFEH, 1991	24
1.14	Géométrie circulaire (a) cavité SHIWEI et al., 2021 ; (b) tunnel avec doublure ou revêtement ZOU et al., 2018 ; (c) multicouches radial ALSHAIKH et al., 2002	26
1.15	Géométrie non circulaire (a) cavité ; (b) tunnel ; KARGAR et al., 2015	29
2.1	Géométrie de la configuration d'étude en coordonnées polaires	34
2.2	Système global détaillé en lien avec la géométrie traitée	43
2.3	Structure globale du Code	44

2.4 Comparaison du diagramme polaire de la contrainte orthoradiale avec deux articles de référence.	47
2.5 Configuration retenue pour la validation numérique, Edinburgh	47
2.6 Comparaison des parties réelle et imaginaire du déplacement cartésien en plusieurs points du domaine (les points sont pris en correspondance avec les points du maillage éléments finis) à partir des approches semi-analytique et éléments finis.	48
2.7 Exemple de géométrie traitée avec la prise en compte de la paroi du tunnel, la partie d'EDZ (sous une ou deux couches) et du milieu karstique externe.	49
2.8 Contrainte orthoradiale respectivement dans le massif, la zone endommagée et le tunnel, pour un contact imparfait à 300 Hz (gauche) et à droite 3000 Hz (droite)	51
2.9 Déplacement radial respectivement dans le massif, la zone endommagée et le tunnel pour un contact imparfait à 300 Hz (gauche) et à droite 3000 Hz (droite)	52
2.10 Contrainte orthoradiale dans le tunnel pour un contact parfait à 300 Hz (gauche) et à droite 3000 Hz (droite)	53
2.11 Déplacement radial dans le tunnel pour un contact parfait à 300 Hz (gauche) et à droite 3000 Hz (droite)	54
2.12 Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour le cas d'une EDZ dure aux fréquences 300 Hz (Figures de gauche) et 3000 Hz (Figures de droite) à $r = \Gamma_1$ et pour différents types de contacts.	55
2.13 Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour le cas d'une EDZ dure aux fréquences 300 Hz (Figures de gauche) et 3000 Hz (Figures de droite) à $r = \Gamma_3$ et pour différents types de contacts. Cas d'une EDZ monocouche dure.	56
2.14 Évolution de la contrainte orthoradiale à $\theta = \pi/2$ en fonction du rayon pour les contacts parfait (gauche) et imparfait (droite)	57
2.15 Évolution du déplacement radial à $\theta = \pi$ en fonction du rayon pour les contacts parfait (gauche) et imparfait (droite)	58
2.16 Diagramme polaire de la contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et du déplacement radial adimensionné (Figures du bas) aux fréquences incidentes 300 Hz (Figures de gauche) et 3000 Hz (Figures de droite) à $r = \Gamma_1$, pour deux types de modélisation de la zone endommagée (contact parfait). . .	59
2.17 Diagramme polaire de la contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et du déplacement radial adimensionné (Figures du bas) aux fréquences incidentes 300 Hz (Figures de gauche) et 3000 Hz (Figures de droite) à $r = \Gamma_3$, pour deux types de modélisation de la zone endommagée (contact parfait). . .	60
2.18 Déplacement radial en fonction de la fréquence incidence à $r = \Gamma_3$ et $\theta = \pi$	61
2.19 Évolution du déplacement radial en fonction de la fréquence incidente pour plusieurs épaisseurs de la paroi bétonnée du tunnel à $r = \Gamma_3$ et $\theta = \pi$	62
2.20 Spectre et signal de Ricker à fréquence centrale $\Lambda = 3000$ Hz	64
2.21 Géométrie du problème avec une ligne source	68
2.22 Comparaison du signal de Ricker calculé à la fréquence centrale $\Lambda = 3000$ Hz à partir de son expression exponentielle et de la partie tronquée à n modes de la série de Bessel-Fourier associée, pour $\theta = \pi$ et pour les rayons respectifs $r = 10$ m (gauche) et $r = 2$ m (droite).	71

2.23 Évolution en échelle logarithmique de $H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega) * 2)$ en fonction du nombre de modes et de la fréquence	73
2.24 Spectre et signal de la contrainte orthoradiale calculés à partir de plusieurs solveurs	73
2.25 Schéma de synthèse pour l'explication des distances parcourues par l'onde incidente à $r = 15$ et $\theta = 2\pi/3$	74
2.26 Contrainte orthoradiale et déplacement radial à $r = \{5, 10, 15\}$ m	76
2.27 Contrainte orthoradiale pour un contact parfait à $r = 10$ m et $\theta = \pi$	77
2.28 Contrainte orthoradiale et déplacement radial dans les cas d'un contact parfait et imparfait à $r = 10$ m	78
2.29 Contrainte orthoradiale et déplacement radial en absence et présence d'EDZ à $r = 10$ m	79
2.30 Contrainte orthoradiale et du déplacement radial à $r = \{3, 5, 7\}$ et $\theta = \pi$	80
2.31 Contrainte orthoradiale et du déplacement radial à $r = 5$ m. Comparaison des résultats dans les cas élastique et viscoélastique $\eta_a = \{2\%, 5\%, 10\%\}$	81
2.32 Contrainte orthoradiale et du déplacement radial à $r = 2$ m. Comparaison des résultats dans les cas élastique et viscoélastique $\eta_a = \{2\%, 5\%, 10\%\}$	82
3.1 Passage d'un tunnel circulaire à un tunnel quelconque	83
3.2 Évolution des fonctions de Hankel pour les géométries circulaire, elliptique et fer à cheval en fonction de l'angle θ	99
3.3 Diagramme polaire de la contrainte orthoradiale adimensionnée à l'interface $w(\eta_1)$. Comparaison des approches classique et variable complexe à 200 Hz (gauche) et 2000 Hz (droite)	100
3.4 Comparaison de la contrainte orthoradiale adimensionnée sur la limite inférieure du tunnel. Les paramètres de D. LIU et al., [1982] choisis sont $\alpha a = 0.2$ et $a/b = 3/2$ (cas elliptique)	101
3.5 Géométries elliptique et fer à cheval avec respectivement deux couches pour représenter la zone endommagée	101
3.6 Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour une géométrie elliptique à l'interface $w(\eta_1)$ aux fréquences incidentes 200 Hz (gauche) et 2000 Hz (droite)	102
3.7 Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour une géométrie elliptique à l'interface $w(\eta_3)$ aux fréquences incidentes 200 Hz (gauche) et 2000 Hz (droite)	103
3.8 Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour un fer à cheval à l'interface $w(\eta_1)$ aux fréquences incidentes 200 Hz (gauche) et 2000 Hz (droite)	104
3.9 Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour un fer à cheval à l'interface $w(\eta_3)$ aux fréquences incidentes 200 Hz (gauche) et 2000 Hz (droite)	105
3.10 Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour les géométries circulaire, elliptique et fer à cheval à l'interface $w(\eta_3)$ aux fréquences incidentes 200 Hz (gauche) et 2000 Hz (droite)	106

3.11 Évolution du déplacement radial adimensionné à l'interface $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$ en fonction de la fréquence incidente pour les géométries circulaire elliptique et fer à cheval en absence d'EDZ	108
3.12 Évolution du déplacement radial adimensionné à l'interface $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$ en fonction de la fréquence incidente pour les géométries circulaire, elliptique et fer à cheval. Cas d'EDZ dure (gauche) et souple (droite)	108
3.13 Évolution du déplacement radial adimensionné pour plusieurs épaisseurs du tunnel en fonction de la fréquence incidente à $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$. Cas de géométries circulaire (gauche) et elliptique (droite) en absence d'EDZ	108
3.14 Évolution du déplacement radial adimensionné pour plusieurs épaisseurs du tunnel en fonction de la fréquence incidente à $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$. Cas d'une géométrie circulaire avec deux couches d'EDZ dure (gauche) et souple (droite)	109
3.15 Évolution du déplacement radial adimensionné pour plusieurs épaisseurs du tunnel en fonction de la fréquence incidente à $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$. Cas d'une géométrie elliptique avec deux couches d'EDZ dure (gauche) et souple (droite)	109
3.16 Évolution du déplacement radial adimensionné pour plusieurs épaisseurs du tunnel en fonction de la fréquence incidente à $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$. Cas d'une géométrie fer à cheval avec deux couches d'EDZ dure (gauche) et souple (droite)	109
3.17 Contrainte orthoradiale et déplacement radial pour les géométries elliptique et fer à cheval à $r = 5$ m, fréquence centrale du Ricker $\Lambda = 3000$ Hz	111

Liste des tableaux

1.1 Valeurs ν , E , ρ et C_p/C_s de quelques matériaux d'après FREY, 2000 et SZYMKIEWICZ, 2011	14
1.2 Tableau bibliographique synthétique	30
2.1 Rayons pour la localisation des interfaces en m	49
2.2 Paramètres mécaniques des milieux élastiques	49
2.3 Nombre de modes nécessaires pour assurer la convergence des séries, issu du critère (2.59)	49
2.4 Valeur de la fréquence pour le minimum de déplacement en fonction de l'épaisseur de la paroi bétonnée du tunnel	62
2.5 Valeurs théoriques et numériques des temps d'aller et retour des ondes P et S. Cas d'une onde plane incidente	76
2.6 Valeurs théoriques et numériques obtenus dans le cas d'une ligne source pour la configuration simple de la cavité	80
3.1 Coordonnées géométriques et coefficients de mapping des tunnels circulaire, elliptique et fer à cheval	98
3.2 Comparaison des coefficients obtenus avec ceux de D. LIU et al., 1982 pour une géométrie elliptique avec les paramètres $\alpha a = 0.20$ et $a/b = 3/2$	98
3.3 Nombre de modes nécessaire pour assurer la convergence des séries de Bessel Fourier pour les géométries circulaire elliptique et fer à cheval. Dans l'approche classique, le nombre de modes total correspond à $N_M + 1$. Dans l'approche variable complexe le nombre de monde total est égal à $2N_M + 1$	100

Introduction générale

L'étude de la propagation d'ondes mécaniques dans les milieux géologiques complexes et hétérogènes comme les sols est un enjeu majeur, non seulement pour les applications connues en mécanique ou pour la prédiction des événements sismiques, mais également parce qu'elle permet d'obtenir des informations sur la constitution interne du milieu propagatif (constitution physique, présence de fluide lourd ou léger, recherche de défauts de structures, ...). Les tunnels souterrains sont des infrastructures essentielles jouant un rôle très important dans le génie militaire, l'exploitation minière, les transports et le domaine d'acheminement des eaux. De nos jours, leurs détection et caractérisation précises restent un défi scientifique majeur dans la prospection du sous-sol. Au cours des dernières décennies, des techniques incluant des méthodes électriques, magnétiques et mécaniques ont été appliquées pour mieux appréhender les structures souterraines et l'espace environnant.

Nous nous intéressons plus particulièrement dans ce travail à la problématique de la caractérisation et de l'exploration du sous-sol par le biais d'ondes mécaniques. Nous nous appuyons sur le cadre unique du Laboratoire Souterrain à Bas Bruit de Rustrel (LSBB, partenaire socio-économique du financement régional de la bourse de doctorat) pour proposer une application de l'expertise développée depuis plusieurs années au laboratoire EMMAH, UMR INRAE-AU. Ancien site militaire d'envergure, le LSBB présente un réseau de galeries subhorizontales creusées dans un massif calcaire karstifié au cœur de la zone non saturée à l'intérieur de la Grande Montagne de Rustrel, située en bordure sud du plateau d'Albion dans le département du Vaucluse.

L'équipe de recherche TWICS de l'UMR EMMAH a développé par le passé une expertise sur la modélisation de problèmes directs de propagation d'ondes électromagnétiques et mécaniques appliqués aux sols, à base de résolution semi-analytique, sur des géométries majoritairement cartésiennes en prenant en compte la stratification du sol. Ce travail de doctorat se focalise sur le développement de compétences semi-analytiques adaptées à des géométries de type cylindriques, hétérogènes, en s'inspirant de la configuration des galeries du LSBB. Il s'inscrit également dans un cadre plus large du développement d'outils de simulation pour la caractérisation de milieux naturels, avec une orientation plus récente de l'équipe vers les problèmes d'inversion et d'imagerie.

Les trois points clefs de l'étude présentée dans ce mémoire de doctorat concernent :

- ★ les modèles multicouches : l'excavation d'un tunnel souterrain modifie les propriétés mécaniques de l'ouverture nouvellement créée et du massif rocheux environnant. Ces modifications affectent fortement les vitesses d'ondes sismiques et la distribution des contraintes-déplacements autour des tunnels, et favorisent l'apparition de fissures ou failles de tailles caractéristiques plus ou moins importantes. Ainsi, il est pertinent de construire des modélisations permettant de tenir compte des hétérogénéités par morceaux autour du tunnel, notamment pour modéliser la zone endommagée.

- ★ les signaux : dans le cadre d'application d'inversion de type FWI (inversion en forme d'onde complète), il apparaît nécessaire de pouvoir simuler des signaux en régimes transitoires, en plus des réponses harmoniques. Les sismogrammes obtenus correspondent par ailleurs aux mesures utiles et exploitées par les expérimentateurs. La richesse de ces signaux temporels permet enfin d'envisager des inversions améliorées.
- ★ les formes du tunnel : la méthodologie initiale s'appuie sur une description circulaire conduisant à des développements en coordonnées cylindriques ou polaires. Néanmoins, les formes usuelles de tunnels montrent la nécessité de pouvoir prendre en compte d'autres géométries, par exemple une représentation géométrique de type "fer à cheval".

Cette thèse s'articule autour de trois chapitres. Le premier chapitre présente l'environnement spécifique du LSBB de Rustrel, le cadre général de la propagation d'ondes mécaniques dans les milieux de type sol ou roche. Une attention particulière est portée sur la zone endommagée autour du tunnel, ainsi que sur les interfaces entre les différents milieux intervenant dans la géométrie choisie. Le chapitre se poursuit avec une étude bibliographique sur les approches semi-analytiques ou numériques intéressantes dans le contexte du travail de doctorat. Enfin, nous dressons un bilan global spécifiant les hypothèses et les méthodes retenues dans le cadre de cette thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons une forme circulaire pour modéliser les galeries et nous utilisons une approche multicouches pour prendre en compte l'environnement hétérogène. Les discontinuités entre deux couches successives peuvent être modélisées par une interface plus ou moins imparfaite. Les solutions de l'équation d'onde sont écrites à l'aide des séries de Bessel Fourier. Nous nous concentrons d'abord sur l'étude des régimes harmoniques en analysant la réponse dynamique des champs de contraintes et de déplacements du tunnel, de la zone endommagée ou du massif environnant. Ensuite, l'étude est étendue aux régimes transitoires permettant l'obtention de sismogrammes.

Le troisième chapitre est consacré à une description de forme non-circulaire pour laquelle nous faisons appel à la théorie générale de l'approche de la variable complexe. Dans cette méthode, nous utilisons des fonctions de cartographie, ou conformal mapping, qui permettent de transformer une géométrie réelle en une géométrie circulaire. Nous pouvons alors réinvestir en partie le travail du chapitre précédent. Les approches semi-analytiques nous confrontent à un certain nombre de difficultés numériques qui sont exposées. En plus des effets de la zone endommagée, nous analysons l'influence de la forme de géométrie sur la distribution des contraintes et déplacements.

Chapitre 1

Étude Bibliographique

Ce travail de recherche se place sous l'angle d'une étude de type semi-analytique de la propagation d'ondes mécaniques autour d'un tunnel enterré en profondeur dans un massif environnant considéré comme infini. Ce premier chapitre est consacré à une description de l'environnement de ce travail de recherche, ainsi qu'à une synthèse bibliographique traitant des différents aspects de cette thématique.

Ainsi, nous commencerons d'abord par présenter l'environnement spécifique du Laboratoire Souterrain à Bas Bruit (LSBB) de Rustrel en proposant une brève synthèse des différents travaux en lien avec la geomécanique du site, et nous centrant sur les aspects mécaniques dès que possible. L'idée sera notamment de retenir les informations pertinentes sur les ordres de grandeurs des paramètres qui interviendront dans les chapitres suivants de cette thèse. Nous résumerons ensuite les principales caractéristiques des ondes mécaniques ainsi que les principales méthodes présentes dans la littérature permettant de traiter les problèmes de propagation d'ondes dans les sols. Une des spécificités des tunnels concerne l'existence d'une zone endommagée (EDZ) due au creusement de ces derniers. Les approches expérimentales montrent que cette zone, ainsi que l'apparition de microfractures et de contacts potentiellement imparfaits entre les différentes parties fragilisées engendrées, sont importants à prendre en compte en adaptant les caractéristiques mécaniques. Un point bibliographique sera donc également proposé sur l'EDZ et le contact aux interfaces. Pour finir, un bilan dressera les principales hypothèses retenues pour la mise en place d'un modèle semi-analytique permettant d'étudier les champs de contraintes et de déplacements de l'espace environnant et/ou des galeries en prenant en compte la zone endommagée.

1.1 Contexte et environnement

1.1.1 Présentation du Laboratoire Souterrain à Bas Bruit (LSBB)

Quatre ans après l'explosion de la première bombe atomique américaine, l'Union Soviétique procède à son tour à l'essai d'un engin de 22 kilotonnes sur le territoire du Kazakhstan en 1949. Dans un contexte de guerre froide qui oppose les puissances, l'État français décide de développer l'arme nucléaire. Les premiers essais de la frappe nucléaire voulus par le général de Gaulle sont alors actionnés. En 1960, la première bombe atomique française est lâchée dans le désert du Sahara, et en 1968, la première bombe à hydrogène est testée dans l'atoll de Moruroa. En 1965, le plateau d'Albion est choisi pour accueillir un système de défense terrestre à partir

de missiles dits Sol-Sol balistiques stratégiques. Le système de dissuasion est alors composé d'une base support à Saint Christol et de deux postes de conduite de Tir dont un à Rustrel (PTC1) et l'autre dans la commune de Reilhanette dans la Drôme, au nord du mont Ventoux (PTC2). Les deux postes de tir sont rattachés à 18 zones de lancement de missiles réparties sur l'ensemble du plateau d'Albion. Chaque poste est à l'époque en charge de 9 zones de lancement. Le plateau d'Albion a été choisi en raison de sa faible densité humaine et de son sol calcaire, permettant à la fois une construction peu coûteuse des silos qui devaient renfermer les missiles et également capable d'amortir efficacement l'onde de choc d'une attaque nucléaire. Les 18 pas de tir abritent 18 missiles à tête multiple d'une mégatonne, soit pour chacun, plus de 60 fois la puissance des bombes lâchées sur Hiroshima et Nagasaki pendant la deuxième guerre mondiale. En février 1996, en raison de l'évolution de la géostratégie européenne, le Président Jacques Chirac décide le retrait de la composante Sol-Sol du plateau d'Albion suite à la chute du bloc de l'Est et au vieillissement des missiles coûteux en entretien et pour lesquels une modernisation n'était pas souhaitée. Les 18 zones de lancement sont désactivées et démantelées. La plupart d'entre elles sont reconverties en installations de centrales solaires et également pour l'accueil de l'observatoire astronomique SIRENE (<https://www.obs-sirene.com>). Le démantèlement débute en 1996 pour se terminer en 1998. La conversion du PCT1 de Rustrel en laboratoire de recherche pluridisciplinaire commence quant à lui en mai 1997 sous l'impulsion du physicien Georges Waysand. L'actuel directeur du Laboratoire est Stéphane Gaffet, sismologue géophysicien CNRS à Géosciences Azur de l'Université Sophia Antipolis.

Le LSBB est désormais une plateforme interdisciplinaire pour la recherche fondamentale et appliquée. Elle est qualifiée de bas bruit du fait de son environnement faiblement anthropisé et de ses propriétés intrinsèques liées à la destination militaire initiale de son infrastructure. Il est une plateforme collaboratrice académique et industrielle, un espace fédérateur favorisant l'interdisciplinarité entre les sciences de l'univers, les sciences de l'ingénierie et des systèmes, les sciences humaines et sociales, la physique des particules, la physique nucléaire et la mécanique (<https://lsbb.cnrs.fr>). Le LSBB est une unité mixte de services sous la plurtutelle de l'Université de Nice-Sophia-Antipolis (UNS), d'Avignon Université (AU), du CNRS, d'Aix Marseille Université (AMU) et de l'Observatoire de la Côte d'Azur (OCA).

1.1.2 Topologie du site

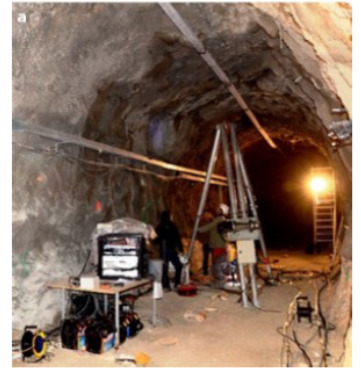
Le LSBB s'étend sur un domaine de 54 ha et compte près de 4 km de galeries subhorizontales creusées dans le massif calcaire karstifié au cœur de la zone non saturée (ZNS) entre 0 et 518 m de profondeur à l'intérieur de la Grande Montagne de Rustrel, d'altitude d'environ 1000 m et située en bordure sud du plateau d'Albion, dans le département du Vaucluse. Les schémas sur la partie basse de la Figure 1.1 présentent la géographie des lieux et l'enchaînement des différentes galeries alors que les photographies de la partie haute illustrent quelques endroits clés du site. L'entrée du site est constituée d'un mur épais de 2 mètres servant de résistance contre les tirs de roquettes. Une casquette assure l'entrée d'air nécessaire à la ventilation du site. Nous trouvons plus loin la galerie des gaz brûlés appelée ainsi à cause de son rôle destiné à évacuer les gaz consécutifs à une explosion nucléaire. Le passage à travers les servitudes générales permet d'accéder 450 mètres plus loin à la galerie anti-souffle. C'est une sorte de chicane de 250 mètres qui permettait d'éviter la propagation du souffle lors d'une éventuelle explosion nucléaire devant le poste de tir. Contrairement aux autres galeries du site consolidées par 40 à 70 cm de béton, la galerie anti-souffle est recouverte d'une fine couche de béton projeté et offre un



Entrée du site



Galerie principale



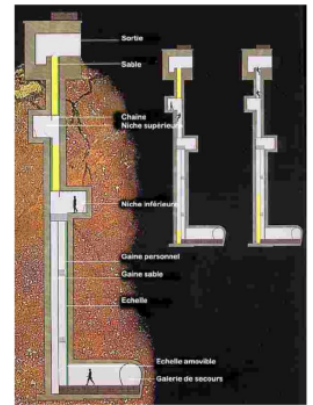
Galerie anti-souffle



Capsule



Galerie de secours



Galerie de secours

Le Laboratoire souterrain à bas bruit (LSBB), 3,7 km de capteurs à l'écoute de la terre

- ⑤ Sismomètre
- ④ Relevés hydrologiques
- ⑥ Station GPS
- ③ Station météo
- ① Inclinomètre
- ② Magnétomètre

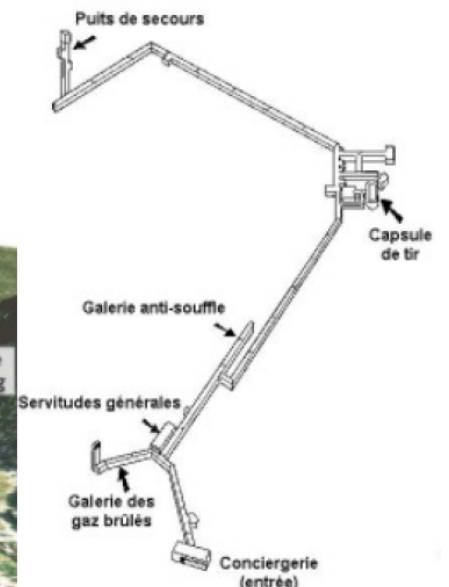
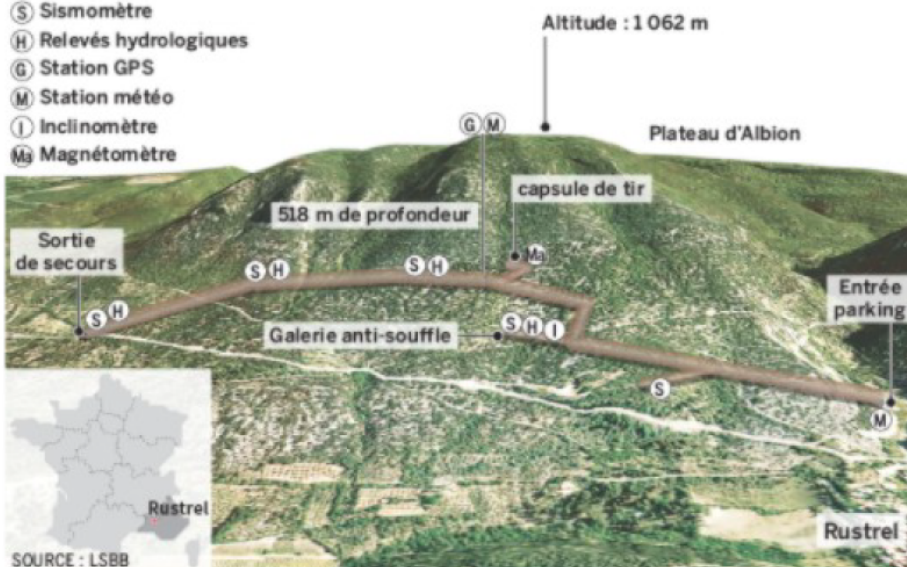


FIGURE 1.1 – Présentation du LSBB avec illustration des galeries, d'après GADAL, 2009 et JOLIS, 2012

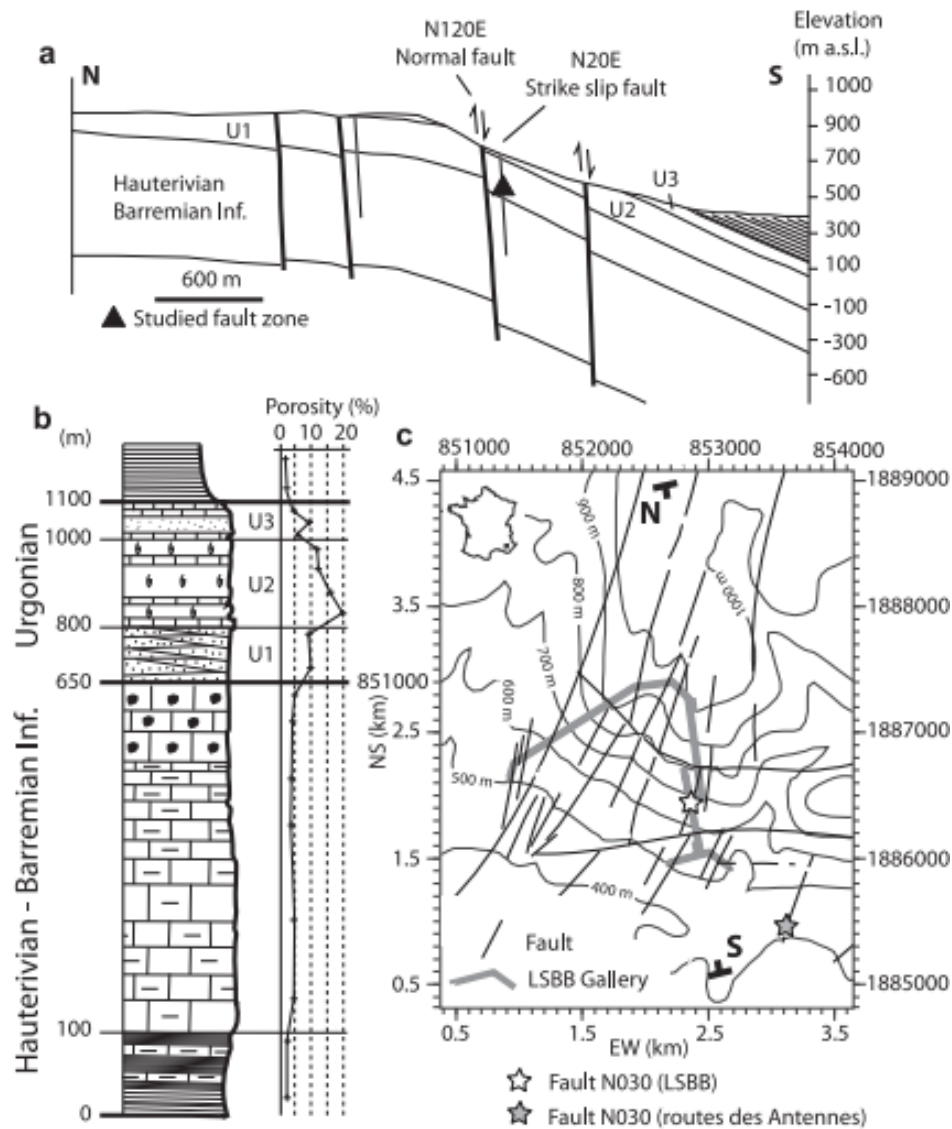


FIGURE 1.2 – a) Coupe Nord-Sud de la Grande Montagne et représentation des failles, (b) Séquence stratigraphique, (c) Carte structurale du type de la faille étudiée par JEANNE et al., 2012

libre accès à la roche. Elle présente une très légère pente ascendante permettant l'évacuation des eaux d'infiltration vers l'extérieur, ce qui en fait un lieu de prélèvement des eaux pour les hydrogéologues. La galerie parallèle à droite, encore appelée **galerie principale**, présente un accès 260 mètres plus loin à la **capsule de tir** par l'intermédiaire d'une porte blindée capable de résister à une surpression de 20 bars. On y trouve un magnétomètre qui assure le suivi des phénomènes magnétiques corrélés aux événements naturels susceptibles de modifier l'environnement proche de la Terre (orages atmosphériques et magnétiques, éclipses, séismes entre autres). Une station météo, une station GPS et plusieurs zones de mesures de mouvement du sol sont également installées. Enfin, sur site, plusieurs sismomètres suivent en continu les mouvements du milieu. Après la capsule de tir, un dernier long tunnel de 1800 mètres mène au **puits de secours** que les militaires pouvaient emprunter en cas de problèmes majeurs. Des tonnes de sable obstruaient le passage sur trois niveaux de l'intérieur vers l'extérieur. Pour s'en extraire, le personnel militaire devait monter sur une échelle et ouvrir la trappe libérant un premier tas de sable avant de continuer leur montée à travers deux autres "pièges" du même

type.

1.1.3 Contextes géologique et hydrogéologique

Galeries initiales

Le laboratoire est localisé à cheval des étages géologiques appelées le Barrémien supérieur et l'Aptien inférieur ou Bédoulien. L'ensemble de la série est appelé Urgonien en référence au faciès commun de ces roches. La description de LEENHARDT, [1883] permet de répartir le faciès en trois subdivisions : calcaires bioclastiques inférieurs (U1), calcaires à Rudistes (U2) et calcaires bioclastiques supérieurs (U3) (Figure [1.2]). LEONIDE et al., [2012] s'intéressent à l'étude des calcaires Urgoniens et montrent que les conditions de formation du faciès peuvent engendrer de fortes discontinuités latérales sur des échelles hectométriques. D'après JEANNE et al., [2012], on rencontre deux types de failles de normes d'orientation respectives N120°-75°N et N030°-85°E. Les notations conventionnelles pour décrire l'orientation et le pendage des fractures sont définies par : N pour Nord, azimuth (en degré) et Dip pour direction du dip (en degré). On définit l'azimut comme étant l'angle depuis le nord vers l'est et le dip comme l'angle par rapport à l'horizontale. Ainsi, une fracture d'azimut 120° et de pendage 50° vers l'est sera désignée par : N120°-50°E.

La première faille est inactive et caractérisée par des défauts de tailles kilométriques avec des zones de failles de plusieurs mètres d'épaisseurs cimentées par des calcites. Les zones cimentées ont une porosité inférieure à 5% et s'étendent du noyau de la faille jusqu'aux couches sédimentaires adjacentes sur l'échelle métrique à décamétrique. Par ailleurs, la deuxième faille est caractérisée par des failles d'une épaisseur de quelques décamètres à quelques hectomètres avec un noyau de faille caractérisé par une gouge. La seconde famille est également considérée comme inactive selon JEANNE et al., [2012] et recoupe en partie les galeries anti-souffle et principale, Figure [1.2] (c). Ce détail géologique est important car il permet d'avoir une idée sur les propriétés mécaniques du milieu (densité, coefficients de Lamé etc..) par rapport aux données de la littérature. L'estimation des vitesses de propagation d'onde in situ a fait l'objet d'études par certains auteurs et sera détaillée dans les prochaines sections.

Nouvelles galeries

Entre juin et juillet 2017, des travaux de forage ont été réalisés au LSBB, plus précisément au cœur de la galerie principale, par l'entreprise GeoSonic, en lien avec le projet MIGA (Matter wave laser based Interferometer Gravitation Antenna), projet basé sur la construction d'un équipement permettant l'observation du champ gravitationnel de la Terre par des études de déformations de l'espace-temps et de la gravitation. Ce projet a été financé par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR), le Fond Européen de Développement Régional (FEDER), la Région Sud et le Conseil Départemental 04. Cette infrastructure propose une nouvelle approche de mesure des phénomènes de variations locales de la gravité et de modification de l'espace-temps basée sur l'interférométrie atomique et les atomes froids. Le forage MIGA est un forage horizontal d'une longueur totale de 240 m et présente une orientation oblique à la stratigraphie. Les galeries ont été excavées à partir de la galerie principale. Longue chacune de 150 m et de section 10 m², elles sont situées entre 270 et 370 m de profondeur. La reconnaissance par un

sondage carotté horizontal a également été réalisée par GeoSonic France afin d'identifier précisément la pétrologie des terrains, les fracturations et les caractéristiques géomécaniques. Dans le rapport de synthèse fourni par Geosonic, BAUDOUY, [2017] a mentionné que la totalité du forage traverse une formation calcaire du Crétacé Inférieur (Barremien à Aptien inférieur). Ce calcaire de teinte beige de type urgonien est pauvre en macrofossiles, à l'exception de quelques passages où la concentration en bioclastes (de taille millimétrique à centimétrique) augmente (Figure 1.3).

Localement, au cours du forage, les auteurs ont montré la présence de grès verdâtre, de concrétions de calcites, mais surtout d'argile orange en remplissage de cavités de type karstique et/ou de fractures. Des nodules de silex ont également été observés dans une large partie du forage à des profondeurs allant de 40 à 170 m. Par ailleurs des traces d'argiles ont souvent été retrouvées sur les 20 premiers mètres de profondeur. La Figure 1.4 présente les premières images



FIGURE 1.3 – Faciès du type de calcaire rencontré sur l'ensemble du forage MIGA. On trouve également un exemple de stylolithe et de bioclaste observés dans ce forage, BAUDOUY, [2017]

de carottes de sondage de 0 à 3.70 m de profondeur, ainsi que la localisation de ces nouvelles galeries par rapport à la disposition initiale. On peut identifier une couche de béton hétérogène suivi d'une zone calcaire très fracturée appelée zone endommagée, notion que nous détaillerons par la suite. Nous pouvons également remarquer une diminution du degré de fracturation avec l'éloignement à la paroi.

Du point de vue hydrogéologique, les galeries du Laboratoire Souterrain à Bas Bruit sont creusées dans la zone non saturée (ZNS) du vaste système karstique de la Fontaine de Vaucluse, ce qui fait du site l'endroit idéal pour étudier la ZNS du karst. D'après PUIG, [1987], la Fontaine de Vaucluse possède un bassin d'alimentation d'environ 1115 km². L'eau qui circule dans la zone non saturée s'infiltre dans les galeries par l'intermédiaire de fissures présentes sur la paroi bétonnée. Pour maintenir un suivi régulier des débits, des paramètres physico-chimiques et isotopiques de l'écoulement, de nombreux orifices percés ont été aménagés à différentes profondeurs de la galerie (Figure 1.5). L'étude de ces écoulements a fait l'objet de plusieurs travaux de doctorat GARRY, [2007], BLONDEL, [2008] et BARBEL-PÉRINEAU, [2013]. Ces thèses ont permis de caractériser et de classer les différents types d'écoulements donnant des informations indirectes sur le massif. Aujourd'hui, jusqu'à 45 points d'écoulement sont échantillonnés durant les périodes pluvieuses.

1.1.4 Ordres de grandeurs des caractéristiques mécaniques moyennes du massif

Plusieurs méthodes géophysiques basées sur des études sismiques, électromagnétiques, électriques et gravimétriques ont été employées au LSBB dans le but de caractériser et d'imager

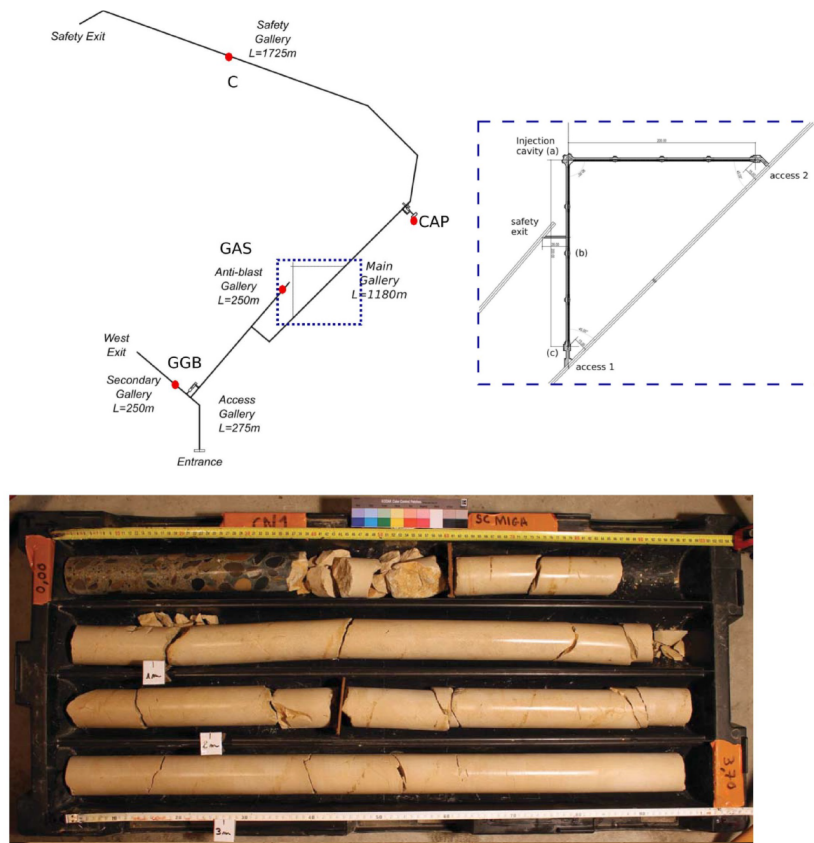


FIGURE 1.4 – (a) Localisation du projet MIGA sur le plan du LSBB. (b) Zoom sur la galerie MIGA. (c) Image des carottes de sondages durant l'excavation de la galerie 0 à 3.70 m, BAUDOUY, 2017

les zones environnantes des galeries. Nous donnons ici quelques informations sur ces travaux de façon à pouvoir retenir les ordres de grandeurs des caractéristiques mécaniques moyennes du massif, en particulier en termes de vitesses de propagation des ondes mécaniques.

La **tomographie sismique** consiste à visualiser les variations de vitesses d'ondes sismiques pour cartographier la structure interne de la terre. Cette technique a été employée par SÉNÉCHAL, ROUSSET, GLOAGUEN et al., 2004 pour étudier la zone karstique située entre la galerie anti-souffle et la galerie principale puis par MAUFROY et al., 2014 pour caractériser la zone verticale de l'espace rocheux compris entre la galerie principale et la surface de la Grande Montagne. En utilisant une résolution hectométrique, MAUFROY et al., 2014 ont confirmé des vitesses moyennes d'onde P comprise entre 3500 et 5500 m/s, ainsi que la présence de fractures verticales dans la zone d'intérêt.

DUBOËUF, 2018 s'est également intéressée à la mesure des vitesses de propagation dans la zone en menant une campagne de tirs sismiques par lâchers de poids dans le puits et par coups de masses sur le sol et le mur de la galerie anti-souffle. Les distances entre tirs et capteurs variaient entre 3 et 24 m et permettaient d'obtenir des vitesses moyennées correspondant au cas d'un milieu homogène équivalent du fait des longueurs d'ondes caractéristiques considérées. Elle obtient alors des valeurs de vitesses d'onde P de (4765 ± 62) m/s et d'onde SV de (2769 ± 50) m/s. Dans le cadre des travaux de JEANNE et al., 2012, les résultats d'essais en laboratoire sur des éprouvettes plus petites constituées à partir des carottes de terrain ont donné un profil

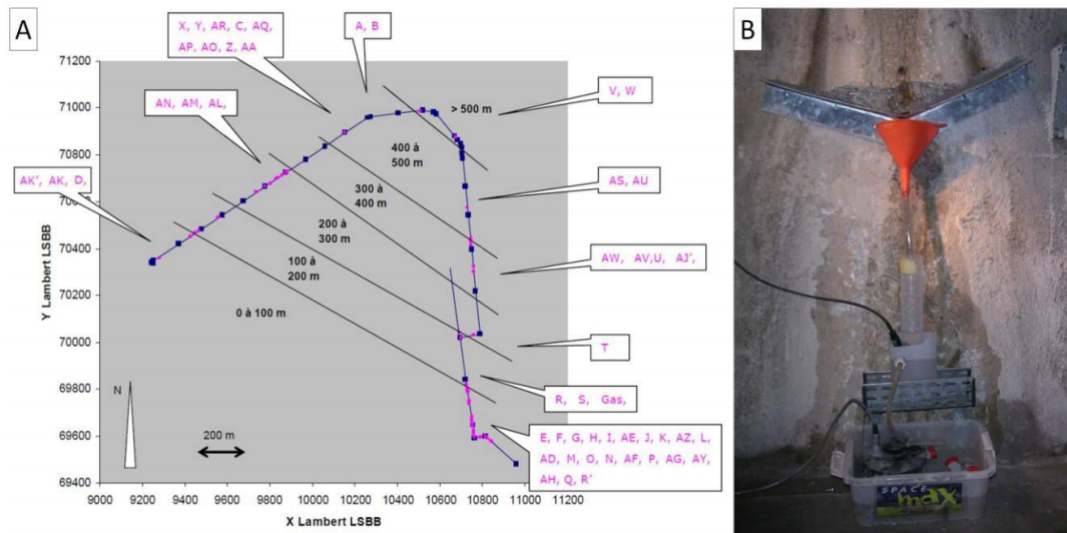


FIGURE 1.5 – L'image de gauche (A) indique la position des points d'écoulement le long des galeries, LAFEUILLE, [2009] et CARRIÈRE, [2014]. Celle de droite (B) illustre un point de suivi d'écoulement

de vitesse de l'onde de compression variant entre 3400 et 7500 m/s. DUBOËUF, [2018] estime que la valeur de 7500 m/s est trop élevée pour un calcaire et précise qu'on ne doit pas aller au-delà de 6500 m/s. Elle justifie que si on considère un milieu homogène, les valeurs obtenues à partir des tirs sismiques sont pertinentes.

Le géoradar (Ground-Penetrating Radar - GPR) est basé sur l'utilisation des ondes électromagnétiques de hautes fréquences comprises entre 10 MHz et 1 GHz. Pour cartographier les structures à plus petite échelle, les longueurs d'ondes choisies doivent être relativement faibles. VAN VORST et al., [2011] ont appliqué un algorithme d'inversion non linéaire aux données de la tomographie des temps de premières arrivées GPR pour imager la zone fracturée proche de la galerie anti souffle. SÉNÉCHAL, ROUSSET et GAFFET, [2013] ont ensuite utilisé le GPR pour étudier quantitativement les formations géologiques traversant les galeries du LSBB et ont montré la capacité du GPR à repérer les hétérogénéités liées aux caractéristiques karstiques et aux stratigraphies fines.

Certains auteurs ont également couplé des méthodes géophysiques pour obtenir des informations complémentaires. Par exemple, GAFFET et al., [2003] ont étudié les données enregistrées par le réseau sismique et par les capteurs du magnétomètre lors du tremblement de terre indien du 26 janvier 2001 pour détecter les perturbations du champ magnétique induit par les ondes sismiques à une distance de 6250 km de l'épicentre. Par l'intermédiaire d'une analyse spectrale, les auteurs montrent des bandes de fréquences spécifiques de perturbation liées à des processus physiques comme l'accélération des écoulements souterrains dans le massif. CARRIÈRE et al., [2013] ont analysé la zone non saturée du karst à l'aide du GPR et de la tomographie par résistivité électrique (ERT). Dans un premier temps, ils ont utilisé le GPR pour obtenir une haute résolution d'image près de la surface en fournissant des informations géologiques pertinentes comme les stratifications et les fractures. Les données obtenues de l'ERT indiquent de fortes variations latérales et verticales. Les auteurs ont indiqué que les variations peuvent renseigner sur la structuration géologique générale et l'orientation des éléments. Le GPR fournit une meilleure résolution mais reste limité à de faibles profondeurs d'investigation d'environ 12 m, contrairement à l'ERT, technique à faible résolution d'image capable de prospecter à plusieurs

mètres de profondeur allant jusqu'à 40 m. Les auteurs ont conclu que le couplage du GPR et de l'ERT peut permettre une interprétation géologique bien établie de l'environnement d'étude et expliquer la présence d'un point d'écoulement d'eau pérenne à une profondeur de 35 m du site. BEREŠ et al., [2013] ont utilisé la tomographie sismique et l'ERT pour analyser l'anisotropie de la zone située entre la galerie principale et la galerie anti-souffle. L'inversion des données réalisées par une méthode de Monte Carlo a permis d'avoir une vitesse moyenne d'onde P de 4800 m/s.

Bilan

Même si les travaux menés dans cette thèse se situent bien en amont des essais in situ, cette partie nous a permis de comprendre l'environnement d'étude et surtout de retenir les valeurs des caractéristiques mécaniques que nous utiliserons lors de l'analyse des résultats numériques de façon à proposer une analyse dans un cas aussi réaliste que possible. Les études géophysiques ont ainsi permis d'avoir une idée raisonnable des vitesses de propagation des ondes. Les levées de carottes unidirectionnelles ont donné de précieuses informations sur l'état de fracturation du massif et l'étendue de la paroi bétonnée. À partir des informations recueillies, cet environnement sera modélisé par des outils de mécanique universitaires adaptés. L'EDZ sera prise en compte par un modèle de couches successives pour lesquelles les microfractures présentes aux interfaces seront considérées à l'aide de contacts plus ou moins imparfaits. Les fractures existant au sein des couches ne seront par contre pas explicitement prises en compte, et nous considérerons chaque zone intermédiaire sous forme de milieux effectifs, c'est-à-dire moyennés. Les intervalles de vitesses retenus pour les milieux respectifs sont : 3200 à 5400 m/s (onde P) et 1960 à 3300 m/s (onde SV). L'épaisseur de la paroi bétonnée a été fixée à 0.4 m et l'étendue maximale de la zone endommagée à 1 m.

1.2 Problématique ondulatoire et positionnement du problème

Dans cette section, nous rappelons quelques points essentiels sur l'étude des ondes élastiques et les phénomènes de propagation d'ondes dans les milieux souterrains. Les appellations et notations introduites seront utiles pour la suite du mémoire.

1.2.1 Rappels sur les ondes mécaniques élastiques

Les équations de propagation d'ondes élastiques sont obtenues à partir des équations d'équilibre issues des lois fondamentales de la mécanique des milieux continus et des relations constitutives qui caractérisent le comportement mécanique d'un matériau. Les équations d'équilibre en notation indicielle s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

où ρ est la densité du matériau, u_i est la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur déplacement, σ_{ij} est la composante ij du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ et f_i est la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur force volumique imposé au matériau.

Dans le cas d'un matériau linéaire, l'équation constitutive liant les contraintes aux déformations, loi de Hooke, est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (1.2)$$

où $\bar{\bar{C}}$, de composantes C_{ijkl} , est le tenseur d'élasticité d'ordre 4 et $\bar{e}$, de composantes e_{kl} , est le tenseur des déformations. Si le matériau est homogène et isotrope, la relation contrainte-déformation s'écrit plus simplement :

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1.3)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Kronecker avec :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

Les coefficients de Lamé s'écrivent respectivement en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν comme suit :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.4)$$

Les tenseurs $\bar{\sigma}$ et $\bar{e}$ peuvent être représentés sous la forme de matrices (3×3) dont les termes correspondent aux composantes de ces tenseurs dans une base orthonormée. Les composantes du tenseur des déformations linéarisé s'expriment en fonction du déplacement particulière par la relation indicielle suivante dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (HPP) :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.5)$$

En remplaçant (1.3) dans (1.1), nous obtenons les équations élastodynamiques de Navier :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.6)$$

La propagation d'ondes dans les milieux élastiques fait intervenir plusieurs types d'ondes suivant les configurations envisagées : milieux infinis, présence de surface libre ou d'interfaces. Les paragraphes suivants en rappellent les caractéristiques principales.

Ondes volumiques

Dans un milieu infini, élastique, homogène et isotrope, deux types d'onde se propagent de manière sphérique à partir d'un point source d'excitation. Nous distinguons les ondes de compression (encore appelées primaires ou longitudinales), notées onde P, et les ondes de cisaillement (encore appelées secondaires ou transversales), notées onde S. Ces ondes présentent des vitesses de propagation différentes et sont classiquement discriminées en introduisant la décomposition de Helmholtz. Le vecteur déplacement $\vec{u}$ est alors décomposé en une composante longitudinale $\vec{\nabla} \phi$ (irrotationnelle) et une composante transversale $\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}$ (solénoïdale ou champ à divergence nulle), soit la somme du gradient d'un champ scalaire et du rotationnel

d'un champ vectoriel :

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi} \quad (1.7)$$

avec ϕ le potentiel scalaire, $\vec{\Psi}$ le potentiel vecteur, $\vec{\nabla}$ l'opérateur gradient et $\times$ le produit vectoriel entre $\vec{\nabla}$ et $\vec{\Psi}$.

En substituant (1.7) dans l'équation (1.6), en l'absence de force volumique, nous obtenons les équations d'ondes qui décrivent le mouvement des ondes P et S.

Onde primaire (P) : elle génère une déformation volumique longitudinale. Le déplacement des particules élémentaires est alors parallèle à la direction de propagation, comme illustré sur la Figure 1.6.(a). Le potentiel scalaire ϕ associé est solution de l'équation d'onde :

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{C_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.8)$$

où $C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ est la vitesse de propagation de l'onde P ; ∇^2 est l'opérateur laplacien.

Dans le cas d'un régime harmonique de fréquence f et de pulsation $\omega = 2\pi f$, il est également possible d'introduire les notions de longueur d'onde et de nombre d'onde. La longueur d'onde représente la distance parcourue par l'onde sur une période d'oscillation et le nombre d'onde définit le nombre de longueurs d'onde présentes sur une distance de 2π .

Pour l'onde longitudinale, ces deux quantités sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \star \text{ Longueur d'onde P : } \lambda_p &= \frac{C_p}{f} \\ \star \text{ Nombre d'onde P : } \alpha &= \frac{2\pi}{\lambda_p} = \frac{\omega}{C_p} \end{aligned}$$

Onde secondaire (S) : elle engendre une déformation volumique transversale. Le mouvement des particules élémentaires est alors perpendiculaire à la direction de propagation, comme illustré sur la Figure 1.6.(b). Le potentiel vectoriel $\vec{\Psi}$ associé est solution de l'équation suivante :

$$\nabla^2 \vec{\Psi} - \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1.9)$$

où $C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ représente la vitesse de propagation de l'onde S.

Dans le cas où l'onde est polarisée verticalement, il s'agit d'une onde de **cisaillement vertical (SV)**. Par ailleurs si elle est polarisée horizontalement, elle est qualifiée d'onde de **cisaillement horizontal (SH)**. Pour l'onde secondaire, nous pouvons également définir une longueur d'onde et un nombre d'onde :

$$\begin{aligned} \star \text{ Longueur d'onde S : } \lambda_s &= \frac{C_s}{f} \\ \star \text{ Nombre d'onde S : } \beta &= \frac{2\pi}{\lambda_s} = \frac{\omega}{C_s} \end{aligned}$$

Les définitions et les formules mathématiques indiquent des vitesses d'ondes P supérieures à S.

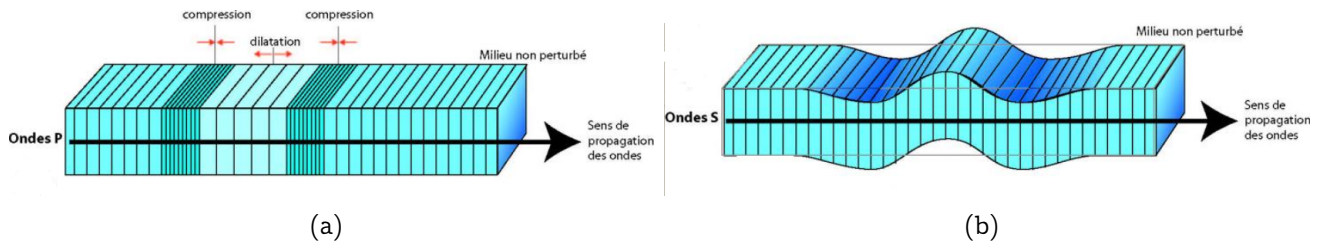


FIGURE 1.6 – Ondes volumiques dans les milieux élastiques (a) Onde P ; (b) Onde SV ; adaptée de [monsite](#) (lien cliquable)

Matériau	ν	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	C_p/C_s
Béton	0.2	47	2500	1.64
Calcaire	0.255	50	2400	1.74
Calcite	0.31	69.9	2710	1.93
Quartz	0.08	70	2650	1.47
Fer	0.259	196	7860	1.75
Aluminium	0.346	69	2700	2.06
PVC	0.410	0.01	1300	2.56
Plexiglas	0.430	2.38	1180	2.85
Caoutchouc	0.499	0.03	995	223

TABLE 1.1 – Valeurs ν , E , ρ et C_p/C_s de quelques matériaux d'après FREY, [2000](#) et SZYMKIEWICZ, [2011](#)

En effet, en évaluant les rapports de vitesses, nous obtenons :

$$\frac{C_p^2}{C_s^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} + 2 = \frac{2\nu}{1 - 2\nu} + 2 \geq 2 \quad (1.10)$$

Le résultat précédent indique un rapport de vitesses C_p/C_s au moins supérieur à $\sqrt{2}$. On peut également remarquer que le rapport tend vers l'infini lorsque ν devient très proche de 0.5. Dans le tableau [1.1](#), nous donnons les valeurs de ν , ρ , E et C_p/C_s de quelques milieux naturels et artificiels connus.

Ondes surfaciques

Lorsque le milieu n'est pas infini mais présente des frontières le séparant d'autres milieux, d'autres types d'ondes peuvent apparaître au voisinage de ces frontières. Ce sont les ondes de surface. Elles se propagent directement de la source aux détecteurs, sans pénétrer profondément dans la subsurface, et ce à des vitesses différentes des ondes primaires et secondaires. En effet, les ondes surfaciques se propagent généralement sur des surfaces libres ou à l'interface entre deux milieux et s'atténuent très rapidement dès qu'on s'éloigne de la surface ou de l'interface. Parmi ces ondes, nous citons les ondes de Rayleigh et Love qui diffèrent par leurs polarisations et par leurs célérités, AKI et R. S. WU, [1988](#).

Ondes de Rayleigh (R) : ce sont des ondes de surface qui apparaissent le long de la surface libre d'un demi-espace élastique. Elles sont le résultat de la superposition d'ondes longitudi-

nales et transversales. Les ondes de Rayleigh décroissent exponentiellement avec la profondeur. Le mouvement des particules est assez semblable à celui d'une poussière portée par une vague et est contenu dans le plan vertical de propagation, comme illustré sur la Figure 1.7(a). Il est elliptique rétrograde en surface et passe ensuite à elliptique prograde en grande profondeur. Dans un milieu élastique et isotrope délimité par une surface libre (contraintes nulles à la surface), la vitesse de propagation des ondes de Rayleigh (notée C_r) est une solution de l'équation du 6^{ème} ordre suivant :

$$\xi^6 - 8\xi^4 + (24 - 16\kappa)\xi^2 - 16(1 - \kappa) = 0 \quad (1.11)$$

où :

$$\xi = \frac{C_r}{C_s} \quad \text{et} \quad \kappa = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad (1.12)$$

LANDAU et al., 1959 ont montré, dans le cas d'un milieu élastique ($0 < \nu < 0.5$), qu'une seule racine de l'équation (1.12) pouvait être retenue. Ils ont également indiqué que la vitesse de propagation des ondes de Rayleigh peut être approchée par la relation suivante :

$$C_r \approx C_s \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} \quad (1.13)$$

Les ondes de Rayleigh ont une vitesse légèrement inférieure à celle des ondes secondaires par un facteur qui dépend des constantes élastiques du milieu. Nous présentons sur la Figure 1.8 l'évolution des vitesses d'ondes P, S et R en fonction du coefficient de Poisson ν .

Ondes de Love : elles sont générées par l'interférence d'une multitude de réflexions des ondes volumiques de cisaillement sur la surface libre. Le mouvement des particules est parallèle à la surface mais perpendiculaire à la direction de propagation, comme illustré sur la Figure 1.7(b). Les ondes de Love se déplacent à une vitesse inférieure à celle des ondes P et S. Par ailleurs, elles sont plus rapides que les ondes de Rayleigh.

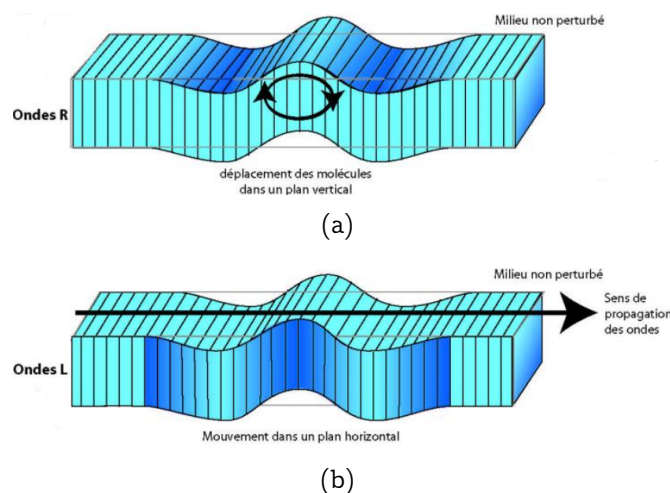


FIGURE 1.7 – Ondes de surface : (a) Onde de Rayleigh ; (b) Onde de Love ; adaptée de [monsite](#) (lien cliquable)

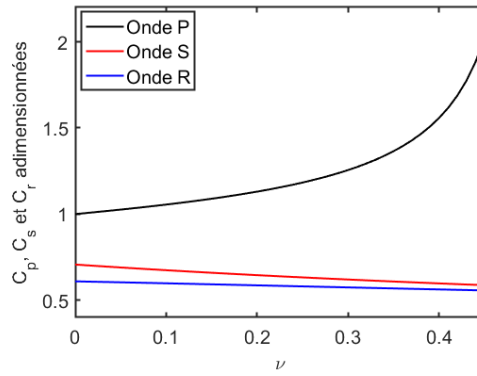


FIGURE 1.8 – Évolution des vitesses d'ondes P, S et R, adimensionnées par $\sqrt{(E/\rho)}$, en fonction de ν .

1.2.2 Conversion d'ondes à l'interface entre deux milieux de propriétés différentes

Quand une onde incidente arrive à l'interface entre deux milieux de propriétés mécaniques différentes, une partie de son énergie est réfléchiée dans le milieu d'origine tandis que l'autre est transmise dans le second milieu. Les grandeurs physiques décrivant le mouvement vérifient des relations de passage comme par exemple la continuité des déplacements et des contraintes à l'interface entre les deux milieux. Dans le cas de deux demi-espaces en contact, le cas particulier d'une seule réflexion et d'une seule transmission se produit lorsqu'une onde (P) se propage perpendiculairement (incidence normale) à l'interface plane, (Figure 1.9). Cette situation peut être décrite mathématiquement en termes de trois ondes qui se propagent dans le milieu. L'écriture des conditions aux limites en contraintes et déplacements permet d'obtenir les coefficients de réflexion et de transmission des ondes en fonction des impédances acoustiques ($Z = \rho C_p$) des milieux respectifs, POTEL et al., 2006 :

★ Coefficient de réflexion et transmission en déplacement à l'interface des milieux 1 et 2

$$C_d^{(r)} = \frac{A_d^{(r)}}{A_d^{(i)}} = \frac{\rho_2 C_{p2} - \rho_1 C_{p1}}{\rho_2 C_{p2} + \rho_1 C_{p1}}, \quad C_d^{(t)} = \frac{A_d^{(t)}}{A_d^{(i)}} = \frac{2\rho_1 C_{p1}}{\rho_2 C_{p2} + \rho_1 C_{p1}} \quad (1.14)$$

où $A_d^{(r)}$, $A_d^{(t)}$ et $A_d^{(i)}$ représentent l'amplitude du déplacement des ondes réfléchiée, transmise et incidente, $C_d^{(r)}$ et $C_d^{(t)}$ désignent les coefficients de réflexion et de transmission en déplacement.

★ Coefficient de réflexion et transmission en contrainte à l'interface des milieux 1 et 2

$$C_c^{(r)} = \frac{A_c^{(r)}}{A_c^{(i)}} = C_d^{(r)}, \quad C_c^{(t)} = \frac{A_c^{(t)}}{A_c^{(i)}} = \frac{2\rho_2 C_{p2}}{\rho_2 C_{p2} + \rho_1 C_{p1}} \quad (1.15)$$

où $A_c^{(r)}$, $A_c^{(t)}$ et $A_c^{(i)}$ représentent l'amplitude de la contrainte des ondes réfléchiée, transmise et incidente, $C_c^{(r)}$ et $C_c^{(t)}$ désignent les coefficients de réflexion et de transmission en contrainte. Dans le cas d'une incidence quelconque, une onde incidente (P) ou (SV) subit des conversions de type d'ondes (P-P) en ondes (P-SV) et vice-versa. Nous aurons ainsi deux ondes réfléchiées (P) et (SV) dans le milieu incident et deux ondes transmises (P) et (SV) dans le second milieu, comme illustré sur la Figure 1.9. Les angles incidents, réfléchis et transmis dans les milieux respectifs obéissent à la loi de Snell-Descartes :

$$\frac{\sin \theta_0}{C_{p1}} = \frac{\sin \theta_1}{C_{p1}} = \frac{\sin \theta'_1}{C_{s1}} = \frac{\sin \theta_2}{C_{p2}} = \frac{\sin \theta'_2}{C_{s2}} \quad (1.16)$$

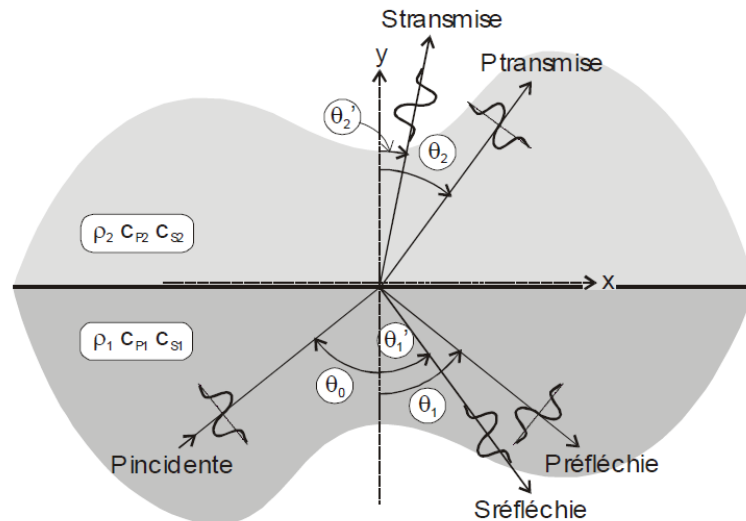


FIGURE 1.9 – Conversion d’ondes volumiques au niveau d’une interface entre deux milieux, KHAM, 2004

Cette configuration d’étude conduit à des coefficients de réflexion et de transmission complexes à écrire. Dans la littérature, on retrouve généralement sur des diagrammes l’évolution des coefficients en fonction de l’angle d’incidence, comme présenté sur la Figure 1.10.

Il est important également de mentionner qu’une onde incidente (SH) ne subit pas de la même conversion de type au passage d’une interface. Elle donne uniquement lieu à une onde réfléchie (SH) dans le milieu incident et une onde transmise (SH) dans le second milieu. C’est une des raisons qui peuvent justifier son utilisation dans de nombreux problèmes ondulatoires puisque l’absence de conversion permet des simplifications par rapport aux cas faisant intervenir des ondes (P) ou (SV).

1.2.3 Qualité des contacts et modélisations associées entre deux milieux différents

Éléments de base de la modélisation en mécanique

Les modèles mécaniques sont basés sur trois éléments de mécanique fondamentaux : la masse (inertie), le ressort (raideur) et l’amortisseur (amortissement). Ces éléments localisés conduisent généralement à des équations différentielles ordinaires du mouvement décrivant le comportement dynamique du système où chaque élément mécanique a un rôle bien particulier.

Ressort : Ces éléments sont conservateurs et stockent le potentiel ou l’énergie de déformation. Ils mettent en relation un élément de force (linéaire ou angulaire) à un déplacement (linéaire ou angulaire). En mécanique ondulatoire, le ressort est souvent utilisé pour modéliser une discontinuité entre deux milieux a et b (Figure 1.11). Son énergie potentielle élastique s’écrit :

$$E_p = \int_{u_a}^{u_b} F du = \frac{1}{2} k (u_b - u_a)^2 = cste \quad (1.17)$$

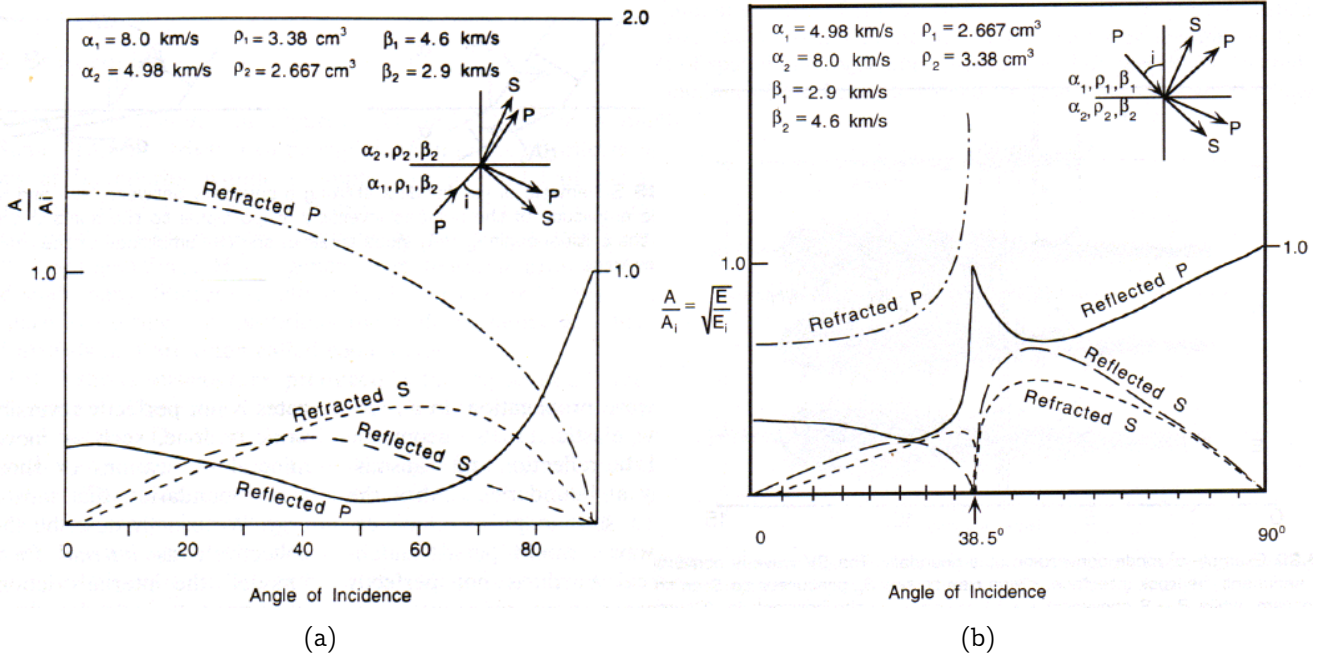


FIGURE 1.10 – Évolution des coefficients de réflexion et de réfraction des ondes (P) et (SV) en fonction de l'angle d'incidence : (a) onde incidente venant du bas et (b) onde incidente venant du haut ; source [geophysik](#) (lien cliquable)

où $F = ku$ représente la composante de la force élastique, k le coefficient de raideur et $u = u_b - u_a$ l'allongement relatif entre les milieux a et b, cf. Figure [1.11](#).

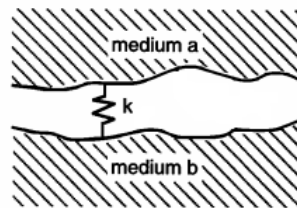


FIGURE 1.11 – Ressort pour modéliser la discontinuité entre deux milieux a et b, d'après GU, NIHEI et L. R. MYER, [1996a](#)

Amortisseur : Ces éléments sont non conservateurs et dissipent de l'énergie. Ils relient un élément de force (linéaire ou angulaire) à une vitesse (linéaire ou angulaire). Les premières études sur la notion d'amortissement interne du sol ont débuté lorsque les chercheurs ont observé expérimentalement que la décroissance de l'amplitude des ondes sismiques était plus rapide que celle prévue par la décroissance d'origine géométrique. On distingue parmi les amortissements les plus utilisés en mécanique du sol :

— l'amortissement viscoélastique de Kelvin-Voigt

Il est défini par un système ressort-amortisseur parallèle généralement utilisé dans le cas d'oscillateur simple, cf. Figure [1.12](#). Contrairement au cas élastique pur, en régime harmonique, les coefficients de Lamé (λ, μ) et le module de Young (E) deviennent ici

complexes :

$$\lambda' = \lambda(1 - i\beta_a\omega); \quad \mu' = \mu(1 - i\beta_a\omega); \quad E' = E(1 - i\beta_a\omega) \quad (1.18)$$

λ', μ', E' définissent ainsi respectivement les paramètres de Lamé et le module de Young du milieu amorti. Le terme d'amortissement représenté par la partie imaginaire dépend alors de la pulsation ω et du paramètre d'amortissement β_a . L'amortissement de Kelvin-Voigt permet d'expliquer l'affaiblissement plus rapide des vibrations à haute fréquence et est validé expérimentalement dans certains types de solides. Le paramètre β_a est parfois différent pour λ et μ .

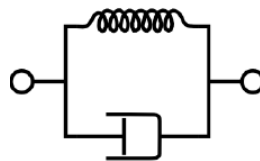


FIGURE 1.12 – Modèle de Kelvin-Voigt ; source wikipédia

— l'*amortissement hystérétique*

Un des amortissements les plus utilisés pour les sols est l'amortissement hystérétique, indépendant de la fréquence contrairement à celui de Kevin-Voigt. Les coefficients de Lamé et le module de Young s'écrivent alors toujours sous forme complexe mais la partie imaginaire est indépendante de la pulsation :

$$\lambda' = \lambda(1 - i\eta_a); \quad \mu' = \mu(1 - i\eta_a); \quad E' = E(1 - i\eta_a) \quad (1.19)$$

η_a étant le coefficient d'amortissement hystérétique. Ce type d'amortissement est représentatif pour les problèmes stationnaires.

Modélisation des contacts

La présence de discontinuités telles que les fissures, failles, défauts, microfissures et joints dans la roche impacte la propagation des ondes, et certains auteurs se sont ainsi intéressés à l'évaluation des défauts de liaisons présents entre le massif rocheux et le tunnel. L'objectif est ici de modéliser l'ensemble de ces défauts par des approches macroscopiques.

Pour mieux comprendre comment ces différentes caractéristiques affectent les ondes qui se propagent dans un environnement rocheux, SCOTT et al., [1968] et CRAMPIN et al., [1980] ont d'abord mené des études expérimentales en sismique-réfraction, une méthode géophysique basée sur les lois de réfraction de Snell-Descartes pour cartographier les structures géologiques souterraines. Ces études ont été suivies par les travaux de GRUJIC, [1974] et O'DONOGHUE et al., [1974] en sismique-crosshole, une technique reposant sur la mesure des vitesses d'ondes sismiques entre les trous de forage. Ils démontrent tous l'existence d'une corrélation entre la diminution de la vitesse des ondes longitudinales et transversales et la densité des fractures. En plus de la diminution des vitesses d'ondes, une augmentation de l'atténuation en lien avec l'augmentation de l'état de fracturation pendant le creusement d'un tunnel situé dans une

masse rocheuse basaltique a été observée par WONG et al., [1983]. Les mêmes observations ont été effectuées par MORRIS et al., [1964] durant une investigation par mesures acoustiques des fractures présentes au sein d'un forage. Outre la fréquence et l'étendue des fractures, les études de terrain effectuées par PAULSSON et al., [1980] et AKI, FEHLER et al., [1982] ont également montré que des facteurs, comme l'état de contrainte in situ, la présence de liquide et sa pression affectent également la vitesse et l'atténuation des ondes sismiques dans les masses rocheuses. Des effets similaires ont été observés dans différents types de roches (granite, roches chaudes et sèches), en utilisant différentes méthodes (forage, relevé acoustique, explosion) couvrant une large gamme de fréquences (1-200 KHz) et d'échelles de mesure (millimétriques, métriques). Tous les résultats obtenus indiquent que les fractures abaissent l'élasticité moyenne globale des modules de la roche, HUDSON, [1981].

D'un point de vue modèle, il existe deux types d'approches pour modéliser mathématiquement la présence de fractures dans le milieu. Lorsque les fractures sont petites par rapport aux dimensions du volume élémentaire représentatif du milieu, elles ne sont pas explicitement modélisées mais elles sont prises en compte grâce à une démarche d'homogénéisation permettant de définir un milieu effectif équivalent. Lorsque les fractures, discontinuités ou failles sont plus marquées, il est alors possible de les modéliser par un modèle mathématique d'interface. Elles sont alors souvent modélisées par un contact imparfait introduit notamment par ACHENBACH et H. ZHU, [1989]. Ce type de contact est très utilisé dans les disciplines comme la géophysique, la mécanique des matériaux et la géomécanique. Dans l'hypothèse de base du modèle, une fracture représente une discontinuité sur laquelle les contraintes sismiques sont continues et les déplacements discontinus. Ce modèle est applicable lorsque les dimensions de la fracture sont petites devant les longueurs d'ondes sismiques considérées.

Pour chaque interface modélisant les discontinuités naturelles entre deux milieux différents identifiés par les indices k et $k + 1$, pour une approche bidimensionnelle générale (Oxy), la continuité des contraintes et la discontinuité des déplacements se traduisent par les équations mathématiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{k_{xx}} = \sigma_{(k+1)_{xx}} \\ \sigma_{k_{xy}} = \sigma_{(k+1)_{xy}} \\ u_{k_x} - \frac{1}{K_{k_x}} \sigma_{k_{xx}} = u_{(k+1)_x} \\ u_{k_y} - \frac{1}{K_{k_y}} \sigma_{k_{xy}} = u_{(k+1)_y} \end{array} \right. \quad (1.20)$$

avec deux constantes de raideur K_{k_x} et K_{k_y} introduites pour modéliser la fracture dans la direction x (K_{k_x}) et dans la direction y (K_{k_y}). Lorsque K_{k_x} et K_{k_y} tendent vers l'infini, les équations [1.20] traduisent une continuité des déplacements et dans le cas où K_{k_x} et K_{k_y} tendent vers 0, elles traduisent un saut/discontinuité de déplacements.

L. MYER et al., [1985] ont également proposé la même modélisation élastique pour étudier l'effet de la transmission d'une onde acoustique dans un milieu fracturé et ont confirmé une diminution de la vitesse dans les zones fracturées. Les travaux de PYRAK-NOLTE, L. R. MYER et al., [1990], PYRAK-NOLTE, J. XU et al., [1992] ont étudié la transmission des ondes sismiques à travers les fractures naturelles et ont montré expérimentalement que l'effet de la fracture sur les ondes sismiques peut effectivement être modélisé par une interface imparfaite de type ressort.

D'un point de vue plus numérique, GU, NIHEI, L. R. MYER et PYRAK-NOLTE, [1996] et GU, NIHEI et L. R. MYER, [1996b] se sont intéressés à l'interaction onde/fracture simple, en utilisant le contact imparfait modélisé par l'approche de ACHENBACH et H. ZHU, [1989]. J. ZHANG et al., [2018] ont proposé une méthode de collocation par points pour étudier le comportement des ondes P et SV dans une fibre circulaire intégrée dans une matrice et présentant une interface fibre/matrice hétérogène composée d'une partie parfaite et d'une partie imparfaite. YI, P. ZHANG et al., [2014] et YI, W. LU et al., [2016] sont parmi les premiers à utiliser le modèle d'interface imparfaite élastique pour analyser le comportement harmonique bidimensionnel d'un tunnel circulaire, avec doublure en béton intégré dans un massif infini homogène et élastique. SHAKERI et al., [2020] ont étudié les effets de ce type de discontinuité sur la réponse temporelle d'un tunnel circulaire avec un revêtement béton. L'impact du choix des constantes de raideur sur la dynamique de réponse dans le béton ou dans le massif infini y est notamment proposé.

En utilisant le modèle d'interface précédent, mais complété par une partie viscoélastique, XUE-QIAN et al., [2016] et XUE-QIAN et al., [2017] ont analysé la réponse dynamique d'un tunnel avec doublure, de géométrie non circulaire, soumis à une excitation harmonique en ondes planes P ou SV. Le tunnel présente un revêtement béton mais le milieu environnant reste homogène, et est modélisé par un milieu soit élastique, soit poroélastique saturé. Les auteurs concluent que la viscosité de l'interface a une faible influence sur la contrainte dans les zones à haute fréquence comparées aux zones à basse fréquence. Dans le modèle des auteurs, la continuité des contraintes et la discontinuité des déplacements en coordonnées cartésiennes à l'interface entre deux milieux k et $k + 1$ s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{k_{xx}} = \sigma_{(k+1)_{xx}} \\ \sigma_{k_{xy}} = \sigma_{(k+1)_{xy}} \\ u_{k_x} - \frac{1}{K_{k_x}} \sigma_{k_{xx}} = u_{(k+1)_x} + \delta_x \frac{\partial (u_{(k+1)_x} - u_{(k)_x})}{\partial t} \\ u_{k_y} - \frac{1}{K_{k_y}} \sigma_{k_{xy}} = u_{(k+1)_y} + \delta_y \frac{\partial (u_{(k+1)_y} - u_{(k)_y})}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.21)$$

où δ_x et δ_y sont les coefficients visco-élastiques à l'interface suivant les directions x et y .

1.2.4 Zone endommagée dans le domaine des tunneliers

Durant le processus d'excavation d'un tunnel, la roche environnante peut être endommagée par les changements mécaniques engendrés par la redistribution des contraintes autour de l'ouverture nouvellement creusée et par l'étendue des fractures qui dépend fortement de la méthode d'excavation utilisée (tunnelier ou forage par explosif). La zone fissurée et fracturée où les propriétés physiques, mécaniques et hydrauliques de la roche sont modifiées est appelée zone endommagée ou Excavation Damaged Zone, classiquement abrégée en EDZ. La caractérisation et la connaissance de l'EDZ est un enjeu majeur en géosciences. On peut citer par exemple l'importance de la connaissance de l'EDZ pour une gestion à long terme des déchets nucléaires dans des installations souterraines profondes et stables. Durant ces dernières décennies, plusieurs chercheurs ont proposé différentes approches pour étudier le comportement de la zone endommagée.

Approche expérimentale

D'un point de vue expérimental, SATO et al., [2000] ont analysé les changements de propriétés de la roche et l'étendue de la zone endommagée durant le processus d'excavation d'un tunnel dans une roche sédimentaire de type néogène de Tomo au Japon. En effectuant simultanément des mesures avant et après excavation, les auteurs ont montré que l'étendue de l'EDZ dépendait de la méthode de creusement du tunnel (excavation mécanique et forage par explosion). Grâce à la tomographie sismique, ils ont trouvé que la largeur de cette zone pouvait varier de 0.3 à 0.8 m. MEGLIS et al., [2001] se sont intéressés à l'étude des microfissures induites pendant l'excavation d'un tunnel au laboratoire de recherche souterrain d'énergie atomique du Canada connu sous l'appellation Underground Research Laboratory (URL). Ils ont effectué des trous de forage d'un mètre de profondeur depuis la paroi latérale jusqu'à une encoche bien développée sur le toit. Des mesures de vitesse ont été effectuées en émettant des impulsions sur un transducteur source en différents points à l'intérieur d'un trou et à la surface du tunnel, puis en capturant les ondes émises aux récepteurs des trous adjacents. Les temps de parcours des ondes entre les sources et les récepteurs ont été utilisés pour calculer les vitesses et pour construire une image tomographique 2D de la lenteur (l'inverse de la vitesse) et de l'anisotropie dans cette région. De faibles vitesses ont été observées dans la paroi latérale et à mi-chemin de l'entaille, ce qui a permis de montrer une anisotropie importante indiquant la présence de microfissures à 1 m de profondeur de la paroi du tunnel. MARTINO et al., [2004] ont également étudié les propriétés de la zone endommagée autour l'ouverture du tunnel à l'URL. Dans leurs investigations, les auteurs ont montré que l'EDZ mesurable s'étend globalement à un maximum de 0.3 à 0.5 m. Par ailleurs, les microfissures et les changements de transmissivité (conductivité hydraulique) ont été mesurés jusqu'à 1 m des parois du tunnel. Les auteurs ont souligné que la taille de l'EDZ augmentait en fonction du type de roche, une orientation donnée au fur et à mesure que les contraintes in situ augmentent. Ils ont indiqué aussi que la forme du tunnel et son orientation par rapport à la contrainte in situ maximale, la méthode d'excavation, les changements subtils dans la structure de la roche, l'utilisation de charges thermiques, les changements de la pression interstitielle et la création d'excavations voisines ont tous une influence sur le développement de la zone endommagée. Enfin, nous pouvons enfin citer les travaux de HOMAND-ETIENNE et al., [1998] qui ont étudié la zone endommagée autour d'une ouverture circulaire souterraine creusée dans une roche souple. Ils ont remarqué que les zones de forte contrainte de compression sont responsables des zones fortement endommagées.

Approche de type simulation

En parallèle des mesures de terrain, certains autres chercheurs ont également proposé des modèles numériques pour simuler le comportement de la zone endommagée en termes de stabilité, de constitution ou encore en fonction du temps. Ils sont basés sur des modèles élastiques, viscoélastiques ou viscoplastiques. BOIDY et al., [2002] ont utilisé l'approche viscoplastique de Lemaitre dans laquelle la déformation totale est divisée en une déformation élastique et viscoplastique pour étudier le comportement d'un tunnel souterrain en forme de "fer à cheval" sur une longue période de temps. Dans le cadre du projet Shanxi Yellow River Diversion en Chine, CHEN, W. ZHU et al., [2004] ont proposé un modèle de propagation des fractures basé sur le modèle viscoélastique de Kelvin pour analyser la stabilité de la roche se situant autour d'un tunnel souterrain. PELLET et al., [2009] ont réalisé une simulation numérique 3D pour étudier le développement de la zone endommagée autour de galeries souterraines en modélisant le

comportement de la masse rocheuse par une loi viscoplastique d'endommagement. YANG et al., [2013] ont utilisé le modèle viscoélastique de Boltzmann pour simuler l'évolution de la zone endommagée autour d'un tunnel circulaire dans des conditions hydrostatiques. Ils concluent que lorsque la contrainte verticale est plus importante que la contrainte horizontale, les zones endommagées se développent principalement dans les parois latérales de l'ouverture. Récemment, KAEWJUEA et al., [2014] ont proposé une approche multicouches radiale par morceaux pour modéliser l'influence de la zone endommagée sur la réponse temporelle d'un trou de forage cylindrique dans un milieu poroélastique. De manière plus empirique, GOLSHANI et al., [2007] ont utilisé un modèle d'endommagement utilisé en micromécanique pour étudier l'extension de la longueur des microfissures et l'évolution de la zone endommagée autour d'une ouverture souterraine.

1.3 Méthodes de résolution

Les méthodes fréquemment utilisées pour simuler la propagation d'ondes en milieux souterrains peuvent être divisées en trois parties. On distingue : les méthodes analytiques, semi-analytiques et numériques.

1.3.1 Méthodes analytiques et semi-analytiques

Les méthodes semi-analytiques couplent à la fois une partie analytique et une partie numérique. Il s'agit de résoudre un problème d'équations aux dérivées partielles assorties de conditions aux limites, voire de conditions initiales dans le cadre de problèmes transitoires. La partie analytique traite les équations à partir de : transformées de Fourier ou de Laplace (cadre de géométries cartésiennes et transformation des équations en systèmes d'équations simples dans le cas de milieux infinis homogènes ou bien en équations différentielles ordinaires dans le cas de massifs homogènes semi-infinis), ou bien à l'aide des séries de Bessel-Fourier pour les configurations à géométrie cylindrique. Les solutions du problème en termes de champs mécaniques peuvent être exprimées sous forme d'intégrales ou de séries. Le calcul des transformées intégrales inverses et/ou des séries s'effectue ensuite :

- ★ soit analytiquement dans certains cas particuliers, restant alors dans le cadre de méthodes purement analytiques. On notera ici la prédominance de l'intégration dans le plan complexe avec le choix du contour d'intégration : ACHENBACH, [2012], GRAFF, [1975], LE HOUÉDEC, [1980], AKI et RICHARDS, [2002] entre autres ;
- ★ soit numériquement, basculant alors dans les méthodes dites semi-analytiques : D. JONES et al., [1991], DE BARROS et al., [1993], LUCO et al., [1994a], DEGRANDE et al., [1998], LEFEUVE-MESGOUEZ et MESGOUEZ, [2008], SEMBLAT et al., [2009] par exemple. Une attention particulière doit alors être portée quant au calcul numérique des intégrales ou des séries.

Dans le cadre de géométries cartésiennes, typiquement le cas d'un massif multicouches soumis à une excitation en surface ou au sein du massif, différentes méthodes matricielles peuvent être envisagées à partir des équations de Helmholtz précédemment présentées, et à partir des approches en transformées de Fourier (ou de Laplace, moins fréquentes). On citera ainsi les méthodes suivantes qui diffèrent par le stockage et l'écriture des vecteurs rassemblant les composantes du tenseur des contraintes et du vecteur des déplacements, et par l'assemblage

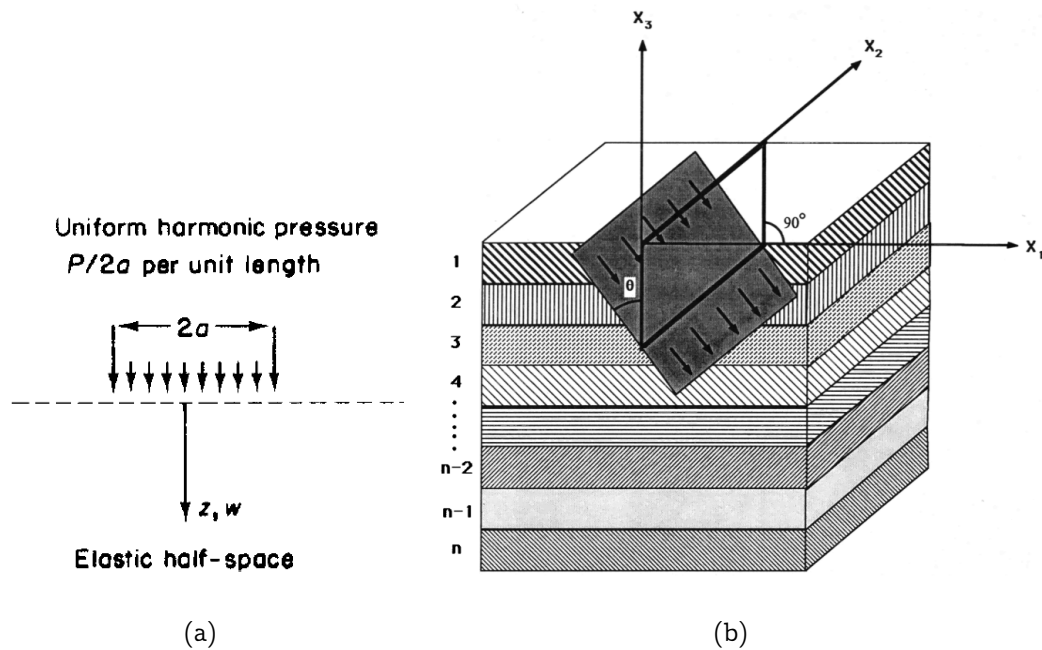


FIGURE 1.13 – Exemples de géométries cartésiennes avec une excitation en surface dans un demi espace (a) monocouche; (b) multicouches; D. JONES et al., [1991] et NAYFEH, [1991]

entre les couches :

- ★ matrices de transfert THOMSON, [1950], HASKELL, [1953]
- ★ matrices de raideur exactes KAUSEL et ROËSSET, [1981], KAUSEL, [2006], LEFEUVE-MESGOUEZ, MESGOUEZ et al., [2012]
- ★ matrices de réflexion et transmission (TRM), K. WU et al., [1990], DENNEMAN et al., [2002].

Cependant les matrices étant souvent mal conditionnées, comme souligné par de nombreux articles, voir par exemple DEGRANDE et al., [1998], différentes investigations ont été menées pour diminuer ou éliminer ce problème : SENJUNTICHAI et al., [1995], RAJAPAKSE et SENJUNTICHAI, [1995], D. JONES et al., [1993] avec des astuces contournant le problème ou bien s'inspirant d'autres domaines de la physique proposant des méthodes plus efficaces LOWE, [1995], ROKHLIN et al., [2002], PICOUX, [2002] permettant d'externaliser des matrices les termes divergents présentant en particulier une croissance exponentielle. Ces méthodes permettent d'améliorer nettement le conditionnement des matrices et de stabiliser ce comportement sur toute la gamme de fréquence nécessaire à l'intégration, MESGOUEZ et LEFEUVE-MESGOUEZ, [2009].

Nous nous centrons désormais plus spécifiquement sur les méthodes de résolution faisant intervenir des géométries de type **tunnel**, et nous présentons une étude bibliographique pouvant s'axer sur la méthodologie utilisée mais également sur les principaux résultats intéressants.

Les méthodes d'intégration dans le plan complexe ont été très utilisées et développées dans les années 60-70 dans le cas simple de cavités, Figure 1.14(a). On peut par exemple citer les travaux de BARON et MATTHEWS, [1961], puis BARON et PARNES, [1962], qui ont développé les expressions respectivement des champs de contraintes et de déplacements à partir d'une approche basée sur l'expansion en séries de Fourier-Bessel et l'expression de l'angle de repérage spatial du front d'onde pour étudier la diffraction d'une onde de pression autour d'une cavité

cylindrique. Le calcul des intégrales inverses se fait à partir d'intégration dans le plan complexe via le théorème des résidus, le lemme de Jordan et l'évaluation des contributions des points de branchement. MIKLOWITZ, [1966] a appliqué le théorème de Fourier-Mellin et la théorie des résidus pour analyser la diffusion d'onde plane autour d'une cavité circulaire intégrée dans un milieu élastique en s'intéressant plus spécifiquement à la prédominance de l'onde de Rayleigh au niveau de la surface libre. La réponse dynamique d'un milieu infini de toutes parts et élastique en présence d'une cavité a été par ailleurs décrite dans les ouvrages généraux suivants : MOW et al., [1971], ACHENBACH, [2012], GRAFF, [1975], ERINGEN et al., [1977] et dans le livre plus récent VERRUIJT, [2009].

Avec la généralisation des accès aux moyens de calculs, des méthodes complémentaires ont ensuite relayé les méthodes purement analytiques restreintes à quelques cas spécifiques. Dans le cadre d'une modélisation d'un massif semi-infini avec surface libre, dans lequel se trouve une cavité, on peut citer d'abord les travaux de THIRUVENKATACHAR et al., [1965] ou de LEE et al., [1992], qui se sont intéressés à l'effet d'une onde de compression P ou de cisaillement SV sur une cavité circulaire située à différentes profondeurs d'un demi-espace élastique. La cavité est ici décrite comme un simple trou vide dans un environnement de sol extérieur. D'un point de vue théorique, ils ont utilisé les outils de développement en séries de Fourier-Bessel et l'approximation de la surface concave. Plus récemment, C. DAVIS et al., [2001] ont étudié la réponse dynamique d'une cavité cylindrique souterraine soumise à des ondes incidentes transversales SV en utilisant la méthode d'expansion et l'approximation convexe de la surface libre. ZAKOUT et al., [1997] ou encore ZHAI et al., [2014] ont étudié la réponse instationnaire d'une cavité circulaire, avec et sans paroi de type coque, soumise à une sollicitation de type Heaviside. COŞKUN, [2011] a analysé l'impact de la fréquence de l'excitation harmonique, ainsi que l'influence de la profondeur de la cavité, sur les champs de déformations et de contraintes pour une cavité simple circulaire. Un domaine d'application spécifique aux boreholes, modélisés par des cavités cylindriques verticales, doit également être mentionné, notamment par exemple les travaux semi-analytiques de PARNES, [1983] ou RAJAPAKSE et GROSS, [1996]. L'excitation est en général une pression de type hydrostatique s'exerçant à l'intérieur de la cavité. Récemment, Q. LIU, M. ZHAO et C. ZHANG, [2014] ou KARA, [2016] ont concentré leurs résultats sur une analyse en onde SH du problème de la cavité ou du tunnel placé dans un milieu élastique infini ou semi-infini. Enfin, S. LU et al., [2019] se sont intéressés plus spécifiquement à l'influence de la fréquence sur la contrainte orthoradiale générée autour d'un tunnel.

On parle de **tunnel avec doublure ou revêtement** lorsque la cavité se drape d'une doublure (en général en béton) présentant une épaisseur finie, Figure 1.14(b). Cette doublure est explicitement considérée comme un milieu élastique, différent de l'environnement extérieur correspondant au sol dans lequel le tunnel est creusé. Le cas particulier, mais extrêmement traité, considérant cette doublure comme une coque, sera résumé dans un prochain paragraphe, et ne concerne pas le cœur du travail de thèse. On doit tout d'abord citer ici les travaux importants présentés dans le paragraphe 1.2.3 "Modélisation des contacts". Notamment, LIAO et al., [2008], qui ont employé une formulation faisant appel à une approche matricielle et à une intégration dans le plan complexe pour analyser la réponse harmonique d'un tunnel enterré dans un demi-espace élastique soumis à des ondes incidentes obliques. YI, W. LU et al., [2016] ont employé la méthode d'expansion en Bessel-Fourier pour analyser l'influence d'un contact imparfait sur la réponse dynamique d'un tunnel circulaire. W. ZHAO et al., [2018] ont étudié la diffusion d'ondes SH par un tunnel à revêtement composite circulaire en utilisant un contact imparfait aux dif-

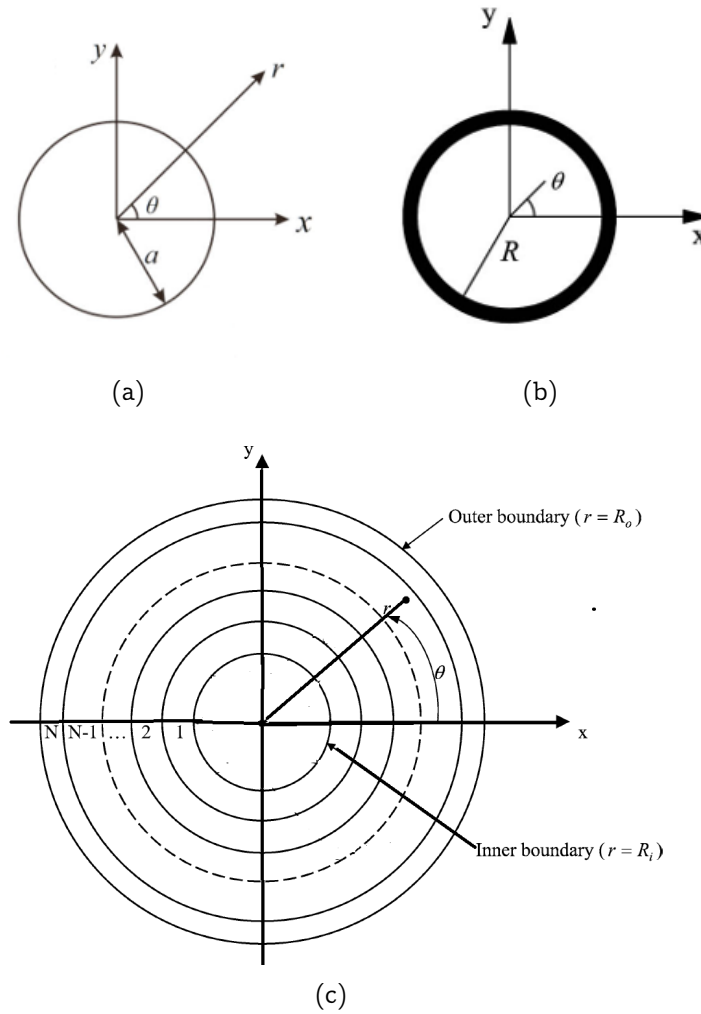


FIGURE 1.14 – Géométrie circulaire (a) cavité SHIWEI et al., 2021; (b) tunnel avec doublure ou revêtement ZOU et al., 2018; (c) multicouches radial ALSHAIKH et al., 2002

férentes interfaces. SHAKERI et al., 2020 ont également utilisé le même type de contact pour traiter la réponse transitoire d'un tunnel en utilisant la transformée de Laplace. N. ZHANG et al., 2021 ont étudié l'influence des ondes P et SV sur la réponse dynamique d'un tunnel de revêtement composite en introduisant le modèle ressort pour décrire l'interface entre la roche environnante et le tunnel.

Une troisième approche concerne la description de type **multicouches** radial soit du tunnel, soit de l'EDZ, soit du milieu extérieur environnant, Figure 1.14(c). ALSHAIKH et al., 2002 ont étudié la propagation d'ondes instationnaires dans un milieu 2D viscoélastique constitué de plusieurs couches cylindriques homogènes linéairement indépendantes. La spécificité de l'article tient en l'utilisation de la méthode des caractéristiques couplée à l'utilisation des séries de Fourier. Récemment, KAEWJUEA et al., 2014 ont proposé une approche multicouches intéressante, radiale par morceaux, pour modéliser l'influence de la zone endommagée sur la réponse temporelle d'un trou de forage cylindrique dans un milieu poroélastique, cf. section précédente. L'environnement proche du tunnel y est décrit comme une succession de quelques couches présentant une variabilité par morceaux de quelques paramètres mécaniques. Nous retrouvons également dans le domaine des matériaux composites des modèles multicouches cir-

culaires adaptés pour différentes applications. Par exemple, NAYFEH, [1995] a analysé la diffusion d'ondes élastiques SH polarisées par des cylindres anisotropes multicouches intégrés dans des solides isotropes. SIAO et al., [1994] ont analysé les caractéristiques vibratoires d'un cylindre circulaire en décomposant le cylindre en un nombre quelconque de couches piézoélectriques d'épaisseur uniforme, où chaque couche peut avoir ses propres propriétés matérielles. X. HAN, G. LIU et al., [2002] ont étudié le comportement des ondes dans des cylindres multicouches avec des propriétés mécaniques variant linéairement avec l'épaisseur des matériaux. Les résultats obtenus ont montré que le rapport entre le rayon et l'épaisseur des couches a une plus grande influence sur les spectres de fréquence de l'onde circonférentielle comparée à celui de l'onde axiale. DING et al., [2003] ont étudié la réponse transitoire en déformation plane axisymétrique d'un cylindre piézoélectrique creux en utilisant la méthode de séparation des variables. X. HAN et G. R. LIU, [2003] ont employé la théorie de l'élasticité tridimensionnelle pour analyser le comportement de dispersion en fréquence et en vitesse de groupe des ondes dans des cylindres circulaires piézoélectriques à gradient fonctionnel.

Indépendamment de la nature infinie ou semi-infinie du massif, les équations de la théorie des coques ont été utilisées pour modéliser la présence d'un tunnel, et apparaissent dans des publications sur le calcul des champs mécaniques associés aux tunnels depuis les années 1980. Bien que le domaine de validité de la théorie des coques (minces puis épaisses) puisse se situer hors de nombreux cas usuels pour les revêtements de tunnels, les travaux de type analytique menés dans les années 1980-90 par EL-AKILY et al., [1980], SINGH et al., [1987a], SINGH et al., [1987b], UPADHYAY et al., [1988], DWIVEDI et al., [1989], RAO et al., [1989] permettent des approches intéressantes : ordre de grandeurs, dimensionnements, cas non-axisymétrique, contacts imparfaits, ... Plus récemment, KOURETZIS, BOUCKOVALAS et al., [2006] ont étudié les déformations dues à une explosion dans le cas de pipelines enterrés modélisés en théorie des coques cylindriques 3D, dans le cas d'ondes P et d'ondes de Rayleigh. Une comparaison des résultats avec le logiciel commercial éléments-finis ANSYS est proposée, ainsi qu'une comparaison avec des mesures expérimentales dans le cas d'ondes de Rayleigh. EL NAGGAR et al., [2008] ont estimé l'effet de la dégradation du béton sur les forces structurelles dans les revêtements de tunnels soumis aux charges statique et dynamique. FELDGUN et al., [2008] ont utilisé la théorie des coques élastique-plastique de Timoshenko pour la paroi du pipeline et un modèle à 3 phases de Lyakhov pour le sol poreux. La méthode de résolution se fait par différences finies pour la partie sol et un contact rigide dans la direction normale et de glissement dans la direction tangentielle sont pris en compte. SMERZINI et al., [2009] se sont également penchés sur les réponses de différents types de structures (cavités, tunnels, inclusions dans un milieu semi-infini) dans le cadre d'excitation de type SH en ondes planes ou cylindriques, couplant l'expansion en séries de Bessel Hankel avec la technique des images, permettant de gérer la surface, et l'utilisation du théorème d'addition de Graf pour les fonctions de Bessel. Ils étudient plus spécifiquement l'influence des paramètres suivants : taille de la cavité, profondeur, fréquence de l'excitation entre autres, et présentent des réponses de types sismogrammes à la surface qui comparent les résultats entre les 3 cas cavité-tunnel-inclusion. KOURETZIS, ANDRIANOPOULOS et al., [2014] ont établi une solution analytique pour calculer les forces dues à une onde P dans un milieu élastique avec des conditions de glissement total entre la paroi et la roche, montrant ainsi que les ondes P peuvent mener à des forces axiales plus élevées que les ondes SV qui sont plus communément utilisées dans les méthodes pratiques.

On peut également noter quelques travaux prenant en compte l'aspect éventuellement po-

roélastique du milieu et utilisant très majoritairement la **théorie de Biot** :

- * HASHEMINEJAD et al., [2008] et 2009, ZHOU et al., [2009], FANG et al., [2015], YUAN, CAI et al., [2016] dans le cadre d'un régime harmonique,
- * ou encore SENJUNTICHAÏ et al., [1993], LI, [1999], XIE et al., [2004], GAO, Y. WANG et al., [2013], YUAN, C. XU et al., [2015], GAO, J. ZHANG et al., [2016], G. B. LIU et al., [2010] Y. WANG et al., [2015] dans le cadre d'un régime transitoire.

Ces travaux sont intéressants par l'extension proposée, la théorie de Biot BIOT, [1956a], BIOT, [1956b], CARCIONE, [2007]. Dans notre cadre d'étude, autour de la galerie principale, le milieu n'étant pas saturé, il n'est pas forcément pertinent dans un premier temps de retenir cette théorie. Il vaudrait mieux en effet retenir un milieu non saturé faisant intervenir la matrice solide, une phase fluide et une autre gazeuse, ce qui peut compliquer, si ces trois phases sont décrites explicitement, de manière drastique l'approche pour un gain non essentiel. Cependant, les approches utilisées et développées peuvent être également sources d'inspiration quant au problème abordé.

Vers des profils autres que circulaires...

Certains auteurs ont également utilisé la méthode de la variable complexe introduite par MUSKHELISHVILI et al., [1953] pour analyser les champs de contraintes et de déplacements autour d'une géométrie non circulaire, comme par exemple celle présentée sur la Figure 1.15. La méthode repose en partie sur l'utilisation des fonctions de cartographie ou **conformal mapping** pour transformer une géométrie réelle en une géométrie circulaire. Parmi les auteurs qui ont traité le cas de géométries simples sans revêtement, nous pouvons citer les travaux de D. LIU et al., [1982] présentant une méthode générale pour obtenir les solutions de l'équation d'ondes à partir des potentiels de Helmholtz dans la base complexe. Par le biais des fonctions de cartographie, ils ont ensuite étudié la réponse harmonique d'une cavité circulaire et elliptique. DIANKUI et al., [1991] ont employé les fonctions de Hermite pour étudier la réponse dynamique d'un canyon de forme demi cylindrique et demi elliptique. GERÇEK, [1997] a utilisé la méthode de Muskhelishvili pour étudier le champ de contraintes élastiques se produisant autour des galeries de formes conventionnelles. G. LIU et al., [2012] ont employé la théorie de la variable complexe pour étudier la diffusion d'onde acoustique autour d'une inclusion de forme arbitraire dans un fluide parfait. G. ZHAO et al., [2015] ont utilisé la même technique pour étudier la distribution des contraintes autour d'un tunnel de forme carrée dans une masse rocheuse élastique homogène et isotrope. HEI et al., [2016] ont étudié la diffraction d'une onde cisaillement autour d'une cavité circulaire et elliptique intégrée dans un milieu infini et inhomogène avec une variation continue de la densité.

Quelques auteurs ont également étendu l'analyse sur des géométries non circulaires avec revêtement. Par exemple, EXADAKTYLOS et al., [2002] ont employé la formulation générale de la variable complexe pour évaluer les contraintes et déplacements autour d'un tunnel demi circulaire. Q. LIU, M. ZHAO et L. WANG, [2013] ont utilisé la méthode des images pour traiter spécifiquement de l'orthogonalité des conditions aux frontières dans le cas où sont présentes une surface libre horizontale et une cavité enterrée, avec l'aide de deux fonctions différentes de conformal mapping. KARGAR et al., [2014] ont analysé les champs de contraintes créés autour d'un tunnel de forme type "fer à cheval" due à une charge uniforme dans le sol. A. Z. LU et al., [2014] ont utilisé la même théorie pour déterminer les champs de contraintes et de déplacements autour d'un tunnel non circulaire soumis à une contrainte in situ. KARGAR et al.,

[2015] ont employé les fonctions complexes de Muskhelishvili pour analyser la répartition des contraintes autour d'un tunnel hydraulique non circulaire soumis à une charge uniforme du sol et à une pression d'eau souterraine non uniforme. XUE-QIAN et al., [2017] ont étudié la réponse dynamique d'un tunnel de forme fer à cheval intégré dans un milieu poroélastique saturé en utilisant la théorie de Biot.

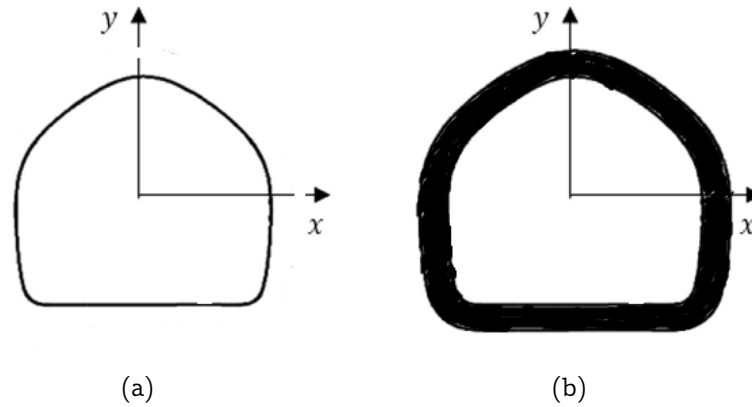


FIGURE 1.15 – Géométrie non circulaire (a) cavité; (b) tunnel; KARGAR et al., [2015]

Nous proposons de synthétiser dans le tableau [1.2] les approches semi-analytiques en excluant la paroi de type coque pour le tunnel mais en intégrant le modèle poroélastique qui, d'un point de vue approche, se traite de manière similaire. Ce tableau met l'accent sur les configurations déjà existantes et les cas non traités.

Cavité circulaire Figure 1.14 (a)	Tunnel circulaire Figure 1.14 (b)	Multicouches circulaires Figure 1.14 (c)
C. DAVIS et al., 2001, S. LU et al., 2019, COŞKUN, 2011, SHIWEI et al., 2021	Contact parfait SMERZINI et al., 2009, Q. LIU, M. ZHAO et L. WANG, 2013, ZHOU et al., 2009 Contact imparfait L. MYER et al., 1985, ACHENBACH et H. ZHU, 1989, YI, W. LU et al., 2016, SHAKERI et al., 2020	Contact parfait ABU-ALSHAIKH et al., 2001, ALSHAIKH et al., 2002, SEN et al., 2009, KAEWJUEA et al., 2014 Contact imparfait Non traité
Cavité non circulaire, Figure 1.15 (a)	Tunnel non circulaire, Figure 1.15 (b)	Multicouches non circulaires
D. LIU et al., 1982, G. LIU et al., 2012, HEI et al., 2016	Contact parfait GAO, Y. WANG et al., 2013, KARGAR et al., 2014, KARGAR et al., 2015 Contact imparfait Non traité	Contact parfait Non traité Contact imparfait Non traité

TABLE 1.2 – Tableau bibliographique synthétique

1.3.2 Méthodes numériques

Les méthodes semi-analytiques permettent des calculs efficaces et rapides mais peuvent paraître insuffisantes si on souhaite traiter des géométries plus complexes. Dans ces cas, on opte pour des méthodes numériques permettant d'obtenir une solution approchée du problème comme par exemple, les méthodes des différences finies, des volumes finis, des éléments finis, des éléments de frontière, ou encore des couplages de ces méthodes. Nous proposons dans cette section un résumé rapide et non exhaustif dans la mesure où la suite du travail restera centrée sur les méthodes semi-analytiques. La méthode des différences finies s'appliquant à des géométries simples, et la méthode des volumes finis étant davantage utilisée en mécanique des fluides, le résumé concerne plus spécifiquement les méthodes des éléments finis et des éléments de frontière.

La méthode des éléments finis est une technique de résolution numérique utilisée pour résoudre des problèmes faisant intervenir des équations aux dérivées partielles spatiales et éventuellement temporelles, assorties de conditions aux limites et le cas échéant de conditions initiales. Les équations sont écrites sous une formulation intégrale. Le problème doit être ensuite discrétisé géométriquement (le domaine spatial est découpé en petits éléments) et analytiquement (les valeurs inconnues sont approchées sur une base fonctionnelle de dimension finie de fonctions d'interpolation, souvent polynomiales). Sur chaque élément, un système matriciel est obtenu et l'ensemble de ces différents systèmes est alors assemblé en un système matriciel global. Une gestion des conditions aux limites est prise en compte dans les étapes d'intégration. La résolution du système global permet d'obtenir une solution approchée du problème sur le maillage d'étude.

On citera dans un premier temps KOURETZIS, BOUCKOVALAS et al., [2006] et KOURETZIS, ANDRIANOPOULOS et al., [2014] qui ont comparé, à plusieurs reprises, les résultats semi-analytiques avec des méthodes éléments finis de logiciels commerciaux (ANSYS, ABAQUS). GOMES et al., [2015] ont analysé l'effet de la stratification du sol sur la réponse sismique d'un tunnel circulaire encastré dans un sol hétérogène à deux couches. LIN et al., [2016] ont réalisé une analyse sismique des tunnels souterrains en utilisant l'approche par éléments finis/infinis 2.5D. Z. WANG et al., [2012] ont étudié le tassement au dessus d'un tunnel de forme complexe intégré dans un sol mou homogène. PITILAKIS et al., [2014] ont étudié la réponse sismique d'un tunnel circulaire en tenant compte des effets d'interaction avec les structures au-dessus du sol. CHEN et HUANG, [2010] ont analysé les comportements dynamiques des tunnels soumis à l'influence des ondes sismiques. Certains auteurs ont aussi étudié l'évolution de la zone endommagée pendant l'excavation en utilisant des maillages raffinés. HOUNYEVOU KLOTOË et al., [2019] ont proposé en 3D un modèle éléments finis avec possibilité d'utiliser des géométries simplifiées pour analyser l'influence de l'arc parapluie sur les tassements induits par le creusement du tunnel. H. HAN et al., [2020] ont simulé le processus de fracturation de la roche et le développement de la zone endommagée causé par le dynamitage pendant le processus d'excavation d'un tunnel.

La méthode des équations intégrales de frontière et son adaptation numérique des éléments de frontière (Boundary Element Method, BEM) sont également des outils classiques pour la recherche de solutions approchées de problèmes d'équations aux dérivées partielles. Le préalable est la recherche de la fonction de Green relative au problème, sous forme analytique. Contrairement à la méthode des éléments finis, la BEM nécessite de discrétiser uniquement la frontière des domaines, et elle est particulièrement adaptée aux domaines infinis car les conditions de décroissance ou de radiation à l'infini sont implicitement prises en compte dans la solution en fonction de Green. Ainsi, pour l'application à un tunnel, seule la surface du tunnel est maillée, ce qui réduit l'effort de maillage ainsi que l'effort de calculs. Là encore, il est impossible de dresser une liste exhaustive, nous citerons entre autres articles d'intérêt : MISLJENOVIC, [1982] pour résoudre l'équation d'onde 1D ; MANOLIS et al., [1983] pour étudier la réponse instationnaire d'un tunnel dans un milieu élastique et viscoélastique infini ; DE BARROS et al., [1993], LUCO et al., [1994b] et DE BARROS et al., [1994] pour modéliser la présence d'une cavité cylindrique en 3D positionnée dans un milieu viscoélastique potentiellement multicouches, dans le domaine fréquentiel ; STAMOS et al., [1996] pour une extension en 3D et la réponse sismique de longs tunnels cette-fois ci revêtus dans un demi-espace.

La méthode des éléments de frontière en régime transitoire a été également explorée par : TADEU, KAUSEL et al., [1996] et TADEU, ANTÓNIO et al., [2002] pour des cavités circulaires ou irrégulières en milieu infini dans des configurations 2D (1996) et 3D (2002) ; CLOUTEAU et al., [2005] dans le cas de tunnel enterrés dans des sols présentant des couches horizontales ; KARAKOSTAS et al., [2000] pour la prise en compte de variations aléatoires des vitesses du milieu dans le cas de tunnel sans paroi, KARAKOSTAS et al., [2002] dans le cas de tunnel de formes irrégulières ; PANJI et al., [2013] et ALIELAHI et al., [2015] dans le cas des effets de tunnels sans parois de différentes formes soumis à des ondes P ou SV se propageant verticalement. Notons pour finir qu'une revue récente proposée par DINEVA et al., [2019] fait un état des lieux très complet des travaux sur les solutions fondamentales 3D, fonctions de Green dans le cadre harmonique et transitoire pour des milieux élastiques, poroélastiques saturés ou non, isotropes et anisotropes. Les auteurs montrent qu'il reste certains manques dûs à des difficultés d'ordre mathématique et de convergence. Une des difficultés provient des intégrales qui, pour un certain

nombre, ne peuvent pas être développées de manière analytique et doivent donc être évaluées numériquement. L'obtention de solutions numériques convergentes nécessitent beaucoup de temps de calcul en raison du comportement oscillant des intégrandes et des singularités de la fonction de Green.

Enfin, le couplage éléments finis et éléments de frontière a par ailleurs été employé par KHAIR et al., [1989] pour analyser l'influence des ondes P et SV sur la réponse dynamique des vallées alluviales cylindriques. ESMAËILI et al., [2006] ont employé les méthodes hybrides de frontière et d'éléments finis pour analyser la réponse harmonique d'un tunnel circulaire double. Nous pouvons également citer les travaux de CLOUTEAU et al., [2005] (FEM pour le tunnel et BEM pour le sol) ou encore HUSSEIN et al., [2014] et VASILEV et al., [2015]. Les méthodes numériques permettant d'élargir les analyses en utilisant par exemple de charges roulantes comme les trains ont également été traitées. Citons C. JONES et al., [2002] qui ont couplé les éléments finis et éléments de frontières pour étudier l'effet des tunnels et des structures enterrées sur les propriétés de transmission des vibrations dans le sol. JIN et al., [2018] ont également mixé les éléments finis 2.5D et les éléments de frontières pour analyser les vibrations produites dans le sol par des trains circulant dans les tunnels.

1.4 Motivations et Objectifs

Pour conclure cette partie, sur la base de la revue bibliographique effectuée, les objectifs et hypothèses sont maintenant énoncés. Nous souhaitons construire un modèle permettant l'étude du massif situé sur le pourtour de la galerie principale du LSBB. Pour cela, nous disposons des ordres de grandeurs des vitesses de propagation des ondes mécaniques de cet environnement ainsi que des dimensions de la paroi et de la zone endommagée autour de la galerie. Nous choisissons un certain nombre d'hypothèses simplificatrices pour pouvoir envisager une méthode de résolution semi-analytique. Une géométrie simple de type cylindrique permet d'aborder le problème en termes de développement en séries de fonction de Bessel ou Hankel. Grâce à l'étude bibliographique, synthétisée sur le tableau [1.2], plusieurs extensions sont proposées dans la suite du manuscrit :

- ★ une approche multicouches permettant de discrétiser par morceaux l'hétérogénéité du milieu autour de la galerie, et notamment de l'EDZ ;
- ★ la prise en compte de contacts plus ou moins imparfaits simulant explicitement les zones fracturées au niveau des interfaces entre les différents milieux ;
- ★ un développement spécifique permettant de développer des géométries quelconques et non pas uniquement circulaires ;
- ★ l'obtention de résultats aussi bien en régime harmonique qu'en régime transitoire.

Les chapitres suivants visent à détailler le modèle et la méthode de résolution associée, et présentent des résultats illustrant les possibilités de l'approche développée.

Chapitre 2

Approche classique pour la résolution d'un problème multicouches circulaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons l'approche théorique permettant d'étudier les champs mécaniques autour d'un tunnel de géométrie circulaire. La zone endommagée étant également décrite par des couches circulaires, nous proposons d'établir une formulation globale permettant de traiter un cas général multicouches. Le modèle d'interface imparfait sera inclus dans la formulation pour pouvoir prendre en compte les fissures présentes entre deux couches successives. Dans un premier temps, nous nous placerons dans le cadre d'un régime harmonique et détaillerons l'approche théorique en illustrant la méthode de résolution de l'équation d'ondes en coordonnées cylindriques. La méthode d'assemblage de la matrice globale issue des conditions aux interfaces et aux limites du problème et les difficultés numériques rencontrées seront également abordées. En régime harmonique, nous considérerons une source incidente en ondes planes et les résultats des champs de contraintes et déplacements obtenus seront exprimés en grandeurs adimensionnées. Dans un deuxième temps, nous aborderons le cas des régimes transitoires en introduisant, d'une part, une source en ondes planes dont la dépendance temporelle s'écrit par exemple en fonction d'une ondelette de Ricker, et d'autre part, une source cylindrique. L'étude des ondes instationnaires fait apparaître de nouvelles difficultés numériques qui seront également présentées.

2.2 Configuration du problème

Nous considérons une onde incidente plane harmonique et longitudinale se propageant dans un massif karstique perpendiculairement à la section transversale d'un tunnel présentant un revêtement en béton, comme illustré sur la Figure 2.1. Une description multicouches radiale est utilisée pour modéliser la zone endommagée autour du tunnel. Chaque couche, de propriétés mécaniques différentes de ses voisines, est supposée être homogène, élastique et isotrope. Nous introduisons les notations suivantes pour simplifier la description des milieux et interfaces : N_L définit le nombre de couches total incluant le massif karstique, la zone endommagée et le tunnel ; la notation γ_k représente les différents milieux avec en particulier $k = 1$ pour le massif karstique, $k = N_L$ pour le tunnel, et $k = 1, 2, \dots, N_L - 1$ pour la zone endommagée composée de $N_L - 2$ couches. Les interfaces sont repérées par la notation Γ_k avec $k = 2, 3, \dots, N_L - 1$ et la

surface libre du tunnel par Γ_{NL} . Toutes ces notations sont résumées sur la Figure 2.1

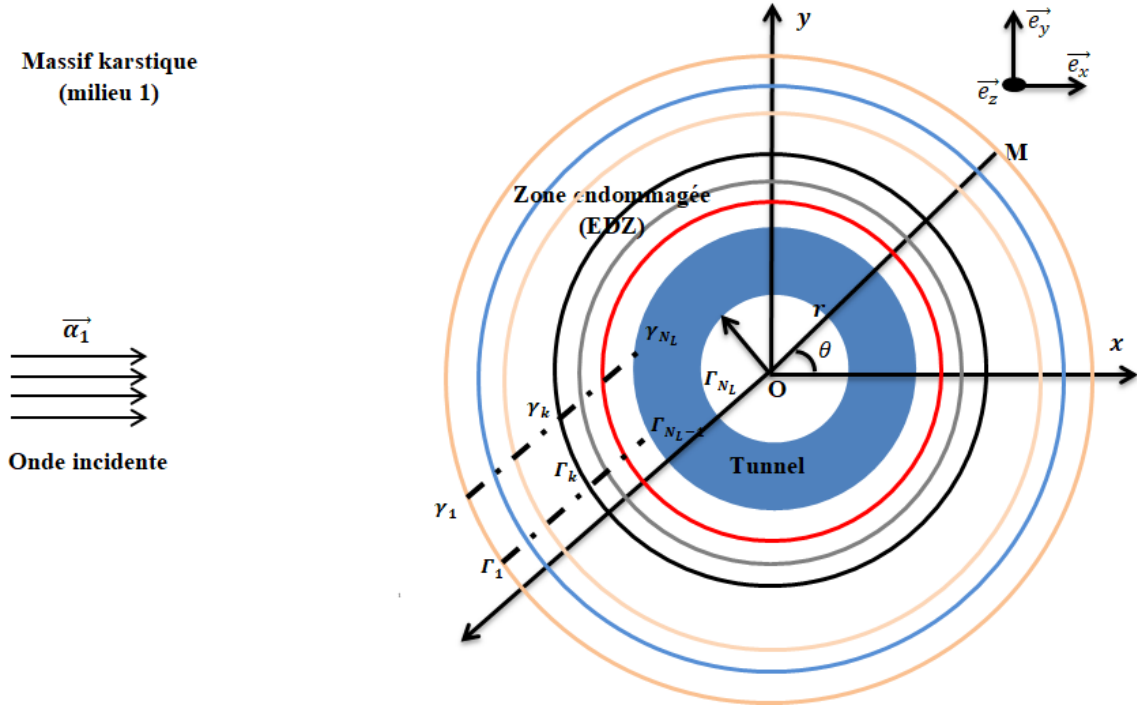


FIGURE 2.1 – Géométrie de la configuration d'étude en coordonnées polaires

2.3 Régime Harmonique

2.3.1 Solutions d'ondes en coordonnées cylindriques

Nous avons rappelé dans le chapitre précédent la démarche permettant d'obtenir les équations découplées décrivant le comportement des ondes P et SV. Nous nous intéressons ici à la résolution semi-analytique de ces équations par la méthode d'expansion de la fonction d'onde. Comme dans ce chapitre nous traitons le cas de géométries cylindriques, nous travaillons directement dans le système de coordonnées (r, θ, z) , présentée en Figure 2.1 à z constant. Les équations d'ondes s'écrivent respectivement en fonction des potentiels scalaire et vectoriel de Helmholtz comme suit :

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{C_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 \vec{\Psi} - \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (2.2)$$

avec $C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ et $C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ les vitesses des ondes primaires et secondaires.

Même si l'équation (2.1) est scalaire et l'équation (2.2) est vectorielle, elles sont similaires, et les solutions de ces deux équations peuvent être écrites de la même manière. Pour des raisons de simplicité, nous proposons de travailler dans un premier temps sur l'équation scalaire (2.1). Nous reviendrons ultérieurement sur l'équation vectorielle (2.2).

Potentiel de Helmholtz scalaire

Nous considérons que la fonction scalaire $\phi(r, \theta, z, t)$ dépend des variables spatiales (r, θ, z) et temporelle (t) . L'équation (2.1) s'écrit de manière plus détaillée en coordonnées cylindriques :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{C_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \phi(r, \theta, z, t) = 0 \quad (2.3)$$

Pour résoudre cette équation, nous utilisons la méthode de séparation des variables et écrivons que $\phi(r, \theta, z, t) = R(r)\Upsilon(\theta)Z(z)T(t)$ dépendant ainsi de quatre quantités R , Υ , Z et T indépendantes et chacune liée à une seule variable, spatiale ou temporelle. En introduisant cette écriture de ϕ dans (2.3), nous obtenons :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Upsilon} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{T} \frac{1}{C_p^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

Dans l'équation ci-dessus, les fonctions intervenant de part et d'autre de l'égalité dépendant de variables indépendantes entre elles, variables spatiales d'un côté et temporelle de l'autre, sont nécessairement des termes constants égaux. Introduisons alors la constante α comme suit :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Upsilon} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{T} \frac{1}{C_p^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\alpha^2 \quad (2.5)$$

La constante α est classiquement appelée nombre d'onde et est liée à la pulsation ω par la relation :

$$\alpha^2 C_p^2 = \omega^2 \quad (2.6)$$

La condition établie dans (2.5) permet alors d'isoler la partie temporelle solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T = 0 \quad (2.7)$$

La résolution de l'équation (2.7) mène à des solutions en $e^{i\omega t}$ ou $e^{-i\omega t}$. Par convention, nous choisissons dans ce mémoire la solution en $e^{-i\omega t}$. La solution générale de l'équation (2.7) devient alors :

$$T(t) = \hat{G} e^{-i\omega t} \quad (2.8)$$

où $\hat{G}$ est une constante d'intégration par rapport à t et i est le nombre complexe imaginaire ($i^2 = -1$).

Nous procédons de même que précédemment pour isoler les fonctions dépendant de la variable spatiale z à partir de l'équation (2.5). Ainsi, en introduisant de manière similaire une constante γ , nous obtenons :

$$-\left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Upsilon} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \right\} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\gamma^2 \quad (2.9)$$

Nous en déduisons l'équation différentielle associée à la variable z :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \gamma^2 Z = 0 \quad (2.10)$$

Pour trouver les équations différentielles relatives aux variables r et θ , nous introduisons une nouvelle constante ϱ dans l'équation (2.9) liée aux constantes précédemment introduites α et

γ :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Upsilon} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} = \gamma^2 - \alpha^2 = -\varrho^2 \quad (2.11)$$

La quantité $\varrho^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ est appelée équation de dispersion associée à la propagation.

En réorganisant les variables radiale d'un coté et angulaire de l'autre et en multipliant l'équation précédente par r^2 , nous obtenons :

$$-\varrho^2 r^2 - \left(\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \right) = \frac{1}{\Upsilon} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} \quad (2.12)$$

En introduisant une dernière constante ϑ dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$-\varrho^2 r^2 - \left(\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \right) = \frac{1}{\Upsilon} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} = -\vartheta^2 \quad (2.13)$$

Cette démarche nous permet d'obtenir

- dans un premier temps, l'équation différentielle pour la variable θ donnée par :

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \theta^2} + \vartheta^2 \Upsilon = 0 \quad (2.14)$$

- et dans un deuxième temps, l'équation différentielle relative à la variable r donnée par :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(\varrho^2 - \frac{\vartheta^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (2.15)$$

Il existe deux écritures possibles pour les solutions des équations (2.10) et (2.14) : dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. La première peut être écrite à l'aide des fonctions sinusoïdales et la deuxième à l'aide des fonctions exponentielles complexes :

$$Z(z) = \hat{A} \cos(\gamma z) + \hat{C} \sin(\gamma z) \quad \text{ou} \quad Z(z) = \hat{A} e^{-i\gamma z} + \hat{C} e^{i\gamma z} \quad (2.16)$$

$$\Upsilon(\theta) = \hat{A} \cos(\vartheta \theta) + \hat{C} \sin(\vartheta \theta) \quad \text{ou} \quad \Upsilon(\theta) = \hat{A} e^{-i\vartheta \theta} + \hat{C} e^{i\vartheta \theta} \quad (2.17)$$

où $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont des constantes d'intégration.

En général, et c'est la cas ici, Υ est une fonction 2π -périodique, ce qui implique ϑ entier. Par contre, le champ Z suivant la direction z n'est pas nécessairement périodique.

En posant $n = \vartheta$ où n représente le mode ($n = \pm 0, 1, 2, \dots, \infty$) et en effectuant un changement de variable ($s = \varrho r$), l'équation (2.15) devient l'équation de Bessel et s'écrit comme suit :

$$\frac{d^2 R}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dR}{ds} + \left(1 - \frac{n^2}{s^2} \right) R = 0 \quad (2.18)$$

Par conséquent, la solution de l'équation (2.15) peut s'écrire à l'aide des fonctions de Bessel ou de Hankel de la manière suivante :

$$R(r) = A H_n^{(1)}(\varrho r) + C H_n^{(2)}(\varrho r) \quad \text{ou} \quad R(r) = A J_n(\varrho r) + C N_n(\varrho r) \quad (2.19)$$

A et C sont des constantes d'intégration, $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ représentent les fonctions de Hankel respectivement de premier et deuxième type, d'ordre n . J_n et N_n sont les fonctions respectivement de Bessel de premier type et de Neumann, d'ordre n . Les fonctions de Hankel $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ sont

liées aux fonctions de Bessel J_n et Neumann N_n par la relation suivante, ABRAMOWITZ et al., 1988 :

$$H_n^{(1)}(\varrho r) = J_n(\varrho r) + iN_n(\varrho r) \quad H_n^{(2)}(\varrho r) = J_n(\varrho r) - iN_n(\varrho r) \quad (2.20)$$

Pour des valeurs très grandes de $\varrho r \rightarrow \infty$, les fonctions de Hankel s'expriment sous forme asymptotique :

$$H_n^{(1)}(\varrho r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \varrho r}} e^{i(\varrho r - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2})} \quad H_n^{(2)}(\varrho r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \varrho r}} e^{-i(\varrho r - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2})} \quad (2.21)$$

En multipliant respectivement les formes asymptotiques des fonctions de Hankel par le terme $e^{-i\omega t}$, nous déduisons que $H_n^{(1)}$ décrit le mouvement des ondes qui se propagent dans la direction des rayons croissants ($r \rightarrow \infty$) et que $H_n^{(2)}$ décrit le mouvement des ondes qui se propagent dans la direction des rayons décroissants ($r \rightarrow 0$).

En règle générale, le choix d'une solution en fonctions de Bessel ou de Hankel, associées aux fonctions sinusoïdales ou exponentielles complexes dépend du type de problème étudié. Dans certains problèmes d'acoustique, les informations disponibles sur les conditions aux limites exigent l'écriture des solutions à l'aide des fonctions de Bessel. Dans cette étude, nous avons choisi d'exprimer la solution générale ϕ de l'équation des ondes primaires (2.3) à l'aide des fonctions de Hankel pour la variable r , et des fonctions sinusoïdales pour les variables θ et z . Ce choix nous permet d'écrire plus facilement les équations mathématiques qui traduisent le mouvement des ondes grâce aux informations déduites de la forme asymptotique des fonctions. La solution modale ϕ_n , pour un mode n de l'équation (2.3) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \phi_n(r, \theta, z, t) = & \left\{ A_n H_n^{(1)}(\varrho r) + C_n H_n^{(2)}(\varrho r) \right\} \left\{ \hat{A}_n \cos(n\theta) \right. \\ & \left. + \hat{C}_n \sin(n\theta) \right\} \left\{ \hat{\hat{A}}_n \cos(\gamma z) + \hat{\hat{C}}_n \sin(\gamma z) \right\} \hat{G}_n e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2.22)$$

où A_n , C_n , $\hat{A}_n$, $\hat{C}_n$, $\hat{\hat{A}}_n$, $\hat{\hat{C}}_n$ et $\hat{G}_n$ sont appelés coefficients d'expansion.

La solution générale ϕ s'obtient en effectuant une sommation sur l'ensemble des fonctions modales ϕ_n et est donnée par :

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n H_n^{(1)}(\varrho r) + C_n H_n^{(2)}(\varrho r) \right\} \left\{ \hat{A}_n \cos(n\theta) + \hat{C}_n \sin(n\theta) \right\} \\ & \left\{ \hat{\hat{A}}_n \cos(\gamma z) + \hat{\hat{C}}_n \sin(\gamma z) \right\} \hat{G}_n e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Potentiel de Helmholtz vectoriel

FARAN JR, 1951 a montré que le potentiel vecteur $\vec{\Psi}$ n'a pas de composantes suivant les directions radiale et angulaire ($\psi_r = 0$, $\psi_\theta = 0$) sa seule composante non nulle est donc ψ_z . Pour alléger les expressions, nous posons $\psi_z = \psi$, et l'équation vectorielle (2.2) devient l'équation scalaire suivante :

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.24)$$

En appliquant la méthode de résolution détaillée précédemment sur l'équation en ϕ , nous en déduisons la solution générale de l'équation (2.24) sous la forme :

$$\psi(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ B_n H_n^{(1)}(\varpi r) + M_n H_n^{(2)}(\varpi r) \right\} \left\{ \hat{B}_n \cos(n\theta) + \hat{M}_n \sin(n\theta) \right\} \left\{ \hat{\hat{B}}_n \cos(\gamma z) + \hat{\hat{M}}_n \sin(\gamma z) \right\} e^{-i\omega t} \quad (2.25)$$

où $\beta^2 C_s^2 = \omega^2$; β correspond au nombre d'onde relatif à l'onde SV, la quantité $\varpi^2 = \beta^2 - \gamma^2$ représente l'équation de dispersion associée à l'onde SV, et les termes B_n , M_n , $\hat{B}_n$, $\hat{M}_n$, $\hat{\hat{B}}_n$ et $\hat{\hat{M}}_n$ sont les constantes d'expansion des séries.

2.3.2 Solutions d'ondes en coordonnées polaires

Dans cette étude, nous supposons que la galerie principale a une longueur infinie suivant z . Cette hypothèse permet de considérer que d'une part, le problème est invariant par translation et que, d'autre part, il n'y a pas de déplacement suivant cette direction ($\gamma = z = 0$), AKYLAS et al., 2004. Les solutions (2.23) et (2.25) de l'équation d'onde dans la base polaire se simplifient alors ainsi :

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n H_n^{(1)}(\alpha r) + C_n H_n^{(2)}(\alpha r) \right\} \left\{ \hat{A}_n \cos(n\theta) + \hat{C}_n \sin(n\theta) \right\} e^{-i\omega t} \quad (2.26)$$

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ B_n H_n^{(1)}(\beta r) + M_n H_n^{(2)}(\beta r) \right\} \left\{ \hat{B}_n \cos(n\theta) + \hat{M}_n \sin(n\theta) \right\} e^{-i\omega t} \quad (2.27)$$

Les équations de dispersion correspondant aux ondes P et SV s'écrivent donc :

$$\varrho^2 = \alpha^2 = \frac{\omega^2}{C_p^2}, \quad \varpi^2 = \beta^2 = \frac{\omega^2}{C_s^2} \quad (2.28)$$

En ne retenant que les nombres d'ondes positifs α et β pour respectivement les ondes P et S :

$$\alpha = \frac{\omega}{C_p}, \quad \beta = \frac{\omega}{C_s} \quad (2.29)$$

En coordonnées polaires, le vecteur déplacement $\vec{u}$ se décompose en une composante radiale u_r et une composante orthoradiale u_θ et s'écrit comme suit :

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta \quad (2.30)$$

Les expressions de u_r et u_θ sont écrites en fonction des potentiels ϕ et ψ , à partir de la décomposition de Helmholtz écrite en coordonnées polaires. Pour rappel :

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times \psi \vec{e}_z \quad (2.31)$$

relation de laquelle nous déduisons :

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.32)$$

Nous déterminons ensuite les composantes radiale (e_{rr}), tangentielle ($e_{r\theta}$) et orthoradiale ($e_{\theta\theta}$) du tenseur des déformations en fonction des composantes du vecteur des déplacements puis en fonction des potentiels de Helmholtz, soit :

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (2.33)$$

À partir de la loi de comportement et des relations 2.32-2.33, nous déduisons les composantes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$ du tenseur des contraintes en fonction des potentiels ϕ et ψ , ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \nabla^2 \phi_k + 2\mu \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right\} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 \theta} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) \right\} \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left\{ 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Les relations (2.32) et (2.34) permettent ainsi d'obtenir les champs du tenseur des contraintes et du vecteur des déplacements.

Onde plane incidente longitudinale

L'onde incidente plane harmonique et longitudinale, repérée par l'exposant (i), qui se propage dans le massif karstique dans le plan de la section transversale du tunnel (Figure 1) a pour expression :

$$\phi^{(i)}(x, y, t) = \varphi_0 e^{i(\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{OM} - \omega t)} = \varphi_0 e^{i(\alpha_1 \cdot x - \omega t)} = \varphi_0 e^{i[\alpha_1 r \cos(\theta) - \omega t]} \quad (2.35)$$

où $\vec{OM}$ est le vecteur position de coordonnées cartésiennes ($\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$) et $\vec{\alpha}_1 = \alpha_1 \vec{e}_x$ est le vecteur d'onde longitudinale dans le milieu 1, à savoir le milieu karstique ; $\omega = 2\pi f$ avec f fréquence de l'onde incidente ; φ_0 amplitude de l'onde incidente.

En se référant à ABRAMOWITZ et al., 1988, on peut écrire le terme $e^{i\alpha_1 r \cos(\theta)}$ de l'équation (2.35) à l'aide des séries de Bessel-Fourier sous la forme :

$$e^{i\alpha_1 r \cos(\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(\alpha_1 r) \cos(n\theta) \quad (2.36)$$

avec ϵ_n le symbole de Jacobi : $\epsilon_n = 1$ si $n = 0$ et $\epsilon_n = 2$ si $n > 0$.

L'expression (2.35), relative à l'onde de compression incidente, s'écrit alors finalement :

$$\phi^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_0 \epsilon_n i^n J_n(\alpha_1 r) \cos(n\theta) e^{-i\omega t} \quad (2.37)$$

Composantes du vecteur des déplacements et du tenseur des contraintes dans le massif karstique

L'onde incidente est réfléchiée au niveau de l'interface avec la dernière couche de la zone endommagée, laquelle est décrite par un modèle multicouches à propriétés mécaniques constantes par morceaux. La réflexion engendre une onde primaire et une onde secondaire dans le massif karstique. En travaillant sur la symétrie des composantes du vecteur des déplacements et du

tenseur des contraintes, les relations (2.26) et (2.27) se simplifient. Les potentiels s'écrivent donc respectivement pour les ondes P et SV réfléchies (exposant (r) pour "réfléchi" et indice 1 pour le milieu karstique), en omettant le terme $e^{-i\omega t}$ pour simplifier les écritures :

$$\phi_1^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r) \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \psi_1^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\beta_1 r) \sin(n\theta) \quad (2.38)$$

avec A_n et B_n coefficients d'expansion par mode des séries de Bessel-Fourier.

Les potentiels globaux, dénotés par un exposant (T) dans le milieu karstique (indice 1) s'écrivent :

$$\phi_1^{(T)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \epsilon_n i^n J_n(\alpha_1 r) + A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r) \right\} \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \psi_1^{(T)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\beta_1 r) \sin(n\theta) \quad (2.39)$$

En injectant l'équation (2.39) dans les équations (2.32) et (2.34), nous obtenons l'expression des contraintes et déplacements totaux dans le massif karstique :

$$u_{1r}^{(T)} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \epsilon_n i^n \epsilon_{n71}^{(1)}(\alpha_1 r) + A_n \epsilon_{n71}^{(3)}(\alpha_1 r) + B_n \epsilon_{n72}^{(3)}(\beta_1 r) \right\} \cos(n\theta) \quad (2.40)$$

$$u_{1\theta}^{(T)} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \epsilon_n i^n \epsilon_{n81}^{(1)}(\alpha_1 r) + A_n \epsilon_{n81}^{(3)}(\alpha_1 r) + B_n \epsilon_{n82}^{(3)}(\beta_1 r) \right\} \sin(n\theta) \quad (2.41)$$

$$\sigma_{1rr}^{(T)} = 2\mu_1 r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \epsilon_n i^n \epsilon_{n11}^{(1)}(\alpha_1 r) + A_n \epsilon_{n11}^{(3)}(\alpha_1 r) + B_n \epsilon_{n12}^{(3)}(\beta_1 r) \right\} \cos(n\theta) \quad (2.42)$$

$$\sigma_{1\theta\theta}^{(T)} = 2\mu_1 r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \epsilon_n i^n \epsilon_{n21}^{(1)}(\alpha_1 r) + A_n \epsilon_{n21}^{(3)}(\alpha_1 r) + B_n \epsilon_{n22}^{(3)}(\beta_1 r) \right\} \cos(n\theta) \quad (2.43)$$

$$\sigma_{1r\theta}^{(T)} = 2\mu_1 r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \epsilon_n i^n \epsilon_{n41}^{(1)}(\alpha_1 r) + A_n \epsilon_{n41}^{(3)}(\alpha_1 r) + B_n \epsilon_{n42}^{(3)}(\beta_1 r) \right\} \sin(n\theta) \quad (2.44)$$

Composantes du vecteur des déplacements et du tenseur des contraintes dans la zone endommagée et le tunnel

Dans la dernière couche de la zone endommagée, deux ondes (P, SV) sont transmises et deux ondes (P, SV) sont réfléchies à l'interface entre la dernière et l'avant dernière couche. Pour chaque couche de la zone endommagée ainsi que pour le tunnel, il existe de même à chaque fois deux ondes réfléchies et deux ondes transmises. Les potentiels des ondes transmises et réfléchies sont alors :

$$\phi_k^{(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{nk} H_n^{(2)}(\alpha_k r) \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \psi_k^{(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{nk} H_n^{(2)}(\beta_k r) \sin(n\theta) \quad (2.45)$$

$$\phi_k^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_{nk} H_n^{(1)}(\alpha_k r) \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \psi_k^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} N_{nk} H_n^{(1)}(\beta_k r) \sin(n\theta) \quad (2.46)$$

où k est le numéro de la couche considérée ($k = 2, 3, 4, \dots, N_L$), le tunnel étant représenté par la couche ($k = N_L$), les autres ($k = 2, 3, \dots, N_L - 1$) correspondant aux couches de la zone endommagée ; les exposants (t) , (r) et (T) sont relatifs respectivement aux ondes transmises, réfléchies et globales. C_{kn} , D_{kn} , M_{kn} et N_{kn} sont les coefficients d'expansion par mode dans la

couche k .

Les potentiels totaux dans chaque couche s'écrivent alors :

$$\phi_k^{(T)} = \sum_{n=0}^{\infty} \{C_{nk} H_n^{(2)}(\alpha_k r) + D_{nk} H_n^{(1)}(\alpha_k r)\} \cos(n\theta) \quad (2.47)$$

$$\psi_k^{(T)} = \sum_{n=0}^{\infty} \{M_{nk} H_n^{(2)}(\beta_k r) + N_{nk} H_n^{(1)}(\beta_k r)\} \sin(n\theta) \quad (2.48)$$

Les contraintes et déplacement totaux dans la zone endommagée et dans le tunnel sont obtenus en remplaçant (2.47) et (2.48) dans les équations (2.32) et (2.34) et s'écrivent respectivement :

$$u_{k_r}^{(T)} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \{C_{nk} \varepsilon_{n71}^{(4)}(\alpha_k r) + D_{nk} \varepsilon_{n71}^{(3)}(\alpha_k r) + M_{nk} \varepsilon_{n72}^{(4)}(\beta_k r) + N_{nk} \varepsilon_{n72}^{(3)}(\beta_k r)\} \cos(n\theta) \quad (2.49)$$

$$u_{k_\theta}^{(T)} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \{C_{nk} \varepsilon_{n81}^{(4)}(\alpha_k r) + D_{nk} \varepsilon_{n81}^{(3)}(\alpha_k r) + M_{nk} \varepsilon_{n82}^{(4)}(\beta_k r) + N_{nk} \varepsilon_{n82}^{(3)}(\beta_k r)\} \sin(n\theta) \quad (2.50)$$

$$\sigma_{k_{rr}}^{(T)} = 2\mu_k r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \{C_{nk} \varepsilon_{n11}^{(4)}(\alpha_k r) + D_{nk} \varepsilon_{n11}^{(3)}(\alpha_k r) + M_{nk} \varepsilon_{n12}^{(4)}(\beta_k r) + N_{nk} \varepsilon_{n12}^{(3)}(\beta_k r)\} \cos(n\theta) \quad (2.51)$$

$$\sigma_{k_{\theta\theta}}^{(T)} = 2\mu_k r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \{C_{nk} \varepsilon_{n21}^{(4)}(\alpha_k r) + D_{nk} \varepsilon_{n21}^{(3)}(\alpha_k r) + M_{nk} \varepsilon_{n22}^{(4)}(\beta_k r) + N_{nk} \varepsilon_{n22}^{(3)}(\beta_k r)\} \cos(n\theta) \quad (2.52)$$

$$\sigma_{k_{r\theta}}^{(T)} = 2\mu_k r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \{C_{nk} \varepsilon_{n41}^{(4)}(\alpha_k r) + D_{nk} \varepsilon_{n41}^{(3)}(\alpha_k r) + M_{nk} \varepsilon_{n42}^{(4)}(\beta_k r) + N_{nk} \varepsilon_{n42}^{(3)}(\beta_k r)\} \sin(n\theta) \quad (2.53)$$

Les termes $\varepsilon_{nij}^{(k)}$ intervenant dans les expressions précédentes décrivent la contribution des ondes (incidentes, réfléchies et transmises) sur les champs de contraintes et déplacements. Ils sont détaillés dans l'annexe B.

2.3.3 Conditions aux limites

Le modèle de contact imparfait repose sur l'hypothèse qu'une fracture de petite taille présente une discontinuité au passage de laquelle les contraintes radiales et tangentielles sont continues et les déplacements radiaux et tangentiels discontinus. Il est utilisable lorsque les dimensions de la fracture sont petites devant les longueurs d'ondes considérées et met en relation un élément de force à un déplacement linéaire ou angulaire par l'intermédiaire d'un coefficient de proportionnalité (coefficient de raideur). Dans cette étude, nous considérons qu'une fracture de dimensions petites devant les longueurs d'ondes choisies sépare les différentes couches de la zone endommagée. Nous introduisons à cet effet deux constantes de raideurs K_{k_r} et K_{k_θ} pour modéliser la fracture. La première constante K_{k_r} modélise la fracture dans la direction radiale et la deuxième constante K_{k_θ} dans la direction angulaire. L. MYER et al., [1985] ont présenté une méthode théorique et expérimentale permettant de déterminer les coefficients de raideur de deux solides séparés par une discontinuité. L'approche proposée par les auteurs étant difficile à réaliser sur notre zone d'étude, nous avons préféré nous limiter à la méthode proposée par ACHENBACH et H. ZHU, [1989] et ensuite YI, W. LU et al., [2016] pour évaluer les coefficients de raideur à partir des paramètres mécaniques et géométriques du milieu.

Pour chacune des interfaces $r = \Gamma_k$, avec $(k = 1, 2, \dots, N_L - 1)$, la continuité des contraintes et la discontinuité des déplacements se traduisent par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{k_{rr}} = \sigma_{(k+1)_{rr}} \\ \sigma_{k_{r\theta}} = \sigma_{(k+1)_{r\theta}} \\ u_{k_r} - \frac{1}{K_{k_r}} \sigma_{k_{rr}} = u_{(k+1)_r} \\ u_{k_\theta} - \frac{1}{K_{k_\theta}} \sigma_{k_{r\theta}} = u_{(k+1)_\theta} \end{cases} \quad (2.54)$$

Lorsque les valeurs K_{k_r} et K_{k_θ} tendent vers l'infini, les quantités $\frac{1}{K_{k_r}} \sigma_{k_{rr}}$, et $\frac{1}{K_{k_\theta}} \sigma_{k_{r\theta}}$ tendent vers 0, ce qui correspond au cas classique de contact parfait à l'interface entre deux couches, avec une continuité des contraintes et déplacements. Par contre, pour de très faibles valeurs des coefficients de raideurs K_{k_r} et K_{k_θ} , les termes $\frac{1}{K_{k_r}} \sigma_{k_{rr}}$, et $\frac{1}{K_{k_\theta}} \sigma_{k_{r\theta}}$ tendent vers l'infini.

Par ailleurs, au niveau de la frontière interne du tunnel $r = \Gamma_{N_L}$, nous considérons l'hypothèse d'une surface libre d'effort.

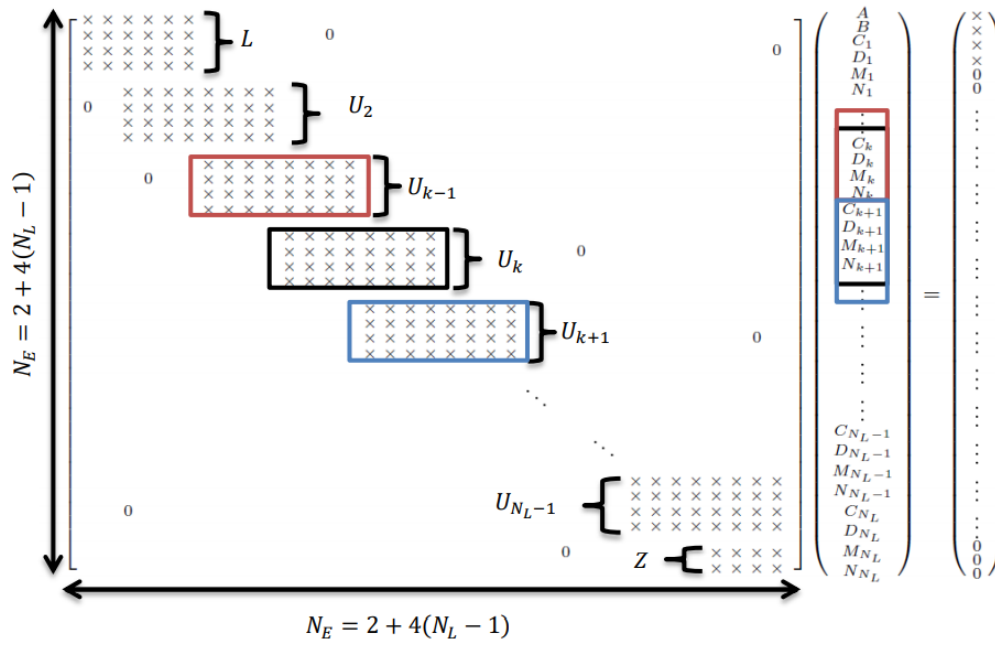
$$\begin{cases} \sigma_{N_L r r} = 0 \\ \sigma_{N_L r \theta} = 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

2.3.4 Assemblage dans l'approche classique

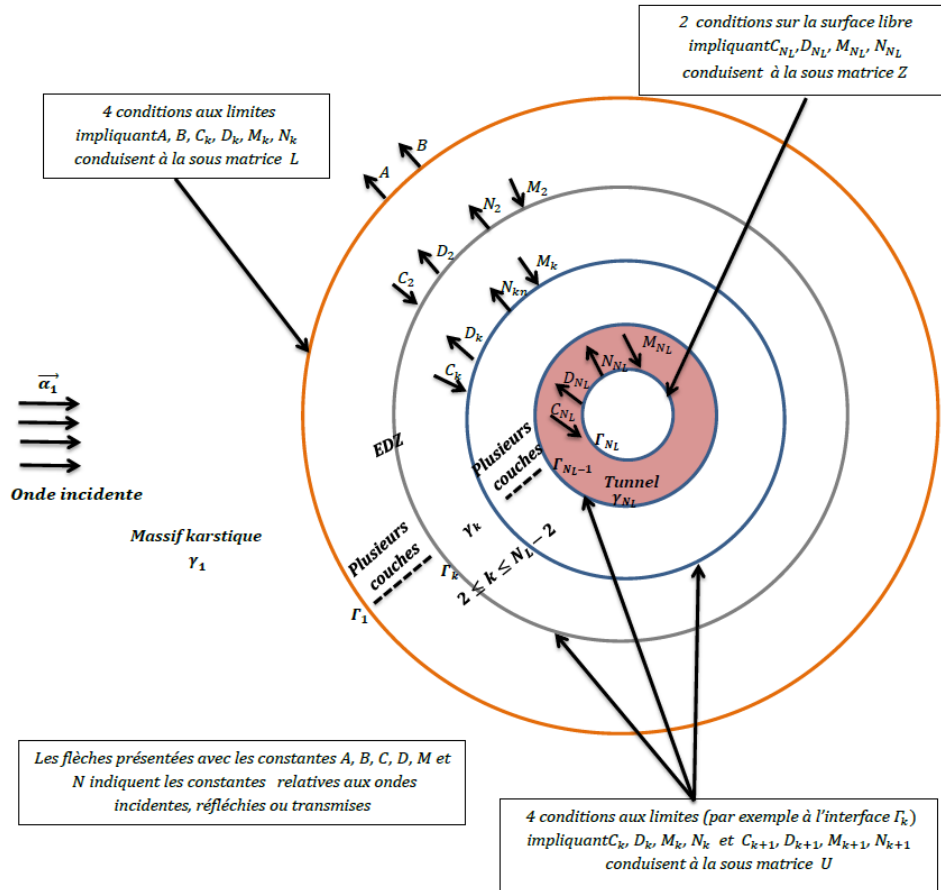
En appliquant les relations d'orthogonalité (annexe A), ABRAMOWITZ et al., 1988, H. F. DAVIS, 1989 et JACKSON, 2012, les relations d'interface et les conditions aux limites précédentes (2.54 et 2.55) peuvent être regroupées sous forme matricielle en reléguant dans le second membre les termes liés à l'onde incidente et dans le premier membre les coefficients d'expansion rassemblés sous forme d'un vecteur. On obtient ainsi autant de sous-systèmes matriciels que d'interfaces et de surface libre. Ces systèmes sont ensuite assemblés pour donner un système global. Le système linéaire suivant est finalement obtenu :

$$\forall n \quad [K]_{n, \{N_E, N_E\}} \{X\}_{n, N_E} = \{Y\}_{n, N_E} \quad (2.56)$$

Le système (2.56) est présenté de manière détaillée sur la Figure 2.2(a). Le vecteur $\{X\}$ regroupe les coefficients d'expansion par mode qui sont les inconnues (A_n , B_n , C_{nk} , D_{nk} , etc.) du problème. Le vecteur $\{Y\}$ contient les expressions des contraintes et déplacements de l'onde incidente. Ces vecteurs ont chacun une taille $N_E = 2 + 4(N_L - 1)$ avec $N_L \geq 2$. La Figure 2.2(b) explicite les coefficients relatifs à chaque couche qui apparaissent dans les conditions d'interface et donc dans le système assemblé de la Figure 2.2(a). La matrice carrée $[K]$ de taille $N_E \times N_E$ est composée de trois sous-matrices non carrées et non nulles : $[L]$, $[Z]$ et $[U_k]$ avec ($k = 2, 3, \dots, N_L - 1$). $[L]$ est une sous-matrice de taille (4×6) contenant les éléments (contraintes et déplacements) à l'interface Γ_1 . La sous-matrice $[Z]$ de taille (2×4) regroupe les éléments relatifs à la condition de surface libre à Γ_{N_L} . $[U_k]$ de dimension (4×8) constitue un bloc répétitif prenant en compte les éléments sur chacune des interfaces allant de Γ_2 à Γ_{N_L} . Tous les termes sont détaillés dans l'annexe B. Pour une fréquence f et un nombre de modes N_M choisis, le système linéaire est résolu de manière indépendante pour chaque mode, c'est-à-dire N_M fois, dans le but de déterminer les différents coefficients d'expansion relatifs à chaque mode. Leur détermination permet ensuite de calculer les contraintes et déplacements totaux par le biais d'une sommation sur les contributions modales. D'une manière générale, N_M correspond au nombre de modes total à partir duquel les séries Bessel-Fourier peuvent être tronquées numériquement tout en assurant leur convergence. Cette partie sera abordée dans



(a) Assemblage et obtention du système global pour un mode n . Pour ne pas surcharger, les indices n relatifs au numéro du mode n'ont pas été reportés ici.



(b) Description géométrique du milieu en lien avec le système décrit sur la Figure supérieure.

FIGURE 2.2 – Système global détaillé en lien avec la géométrie traitée

les prochaines sections.

2.3.5 Structure du code

Le code numérique a été développé sur Matlab. Il se compose d'un fichier principal nommé *Multicouches* connecté à six fonctions (Figure 2.3). La résolution du système linéaire 2.56, le calcul des champs mécaniques et le stockage des données sont effectués dans *Multicouches*. Les fonctions appelées pendant le processus de simulation sont :

- ★ *ParametersInput*, dans lequel le nombre de couches, les paramètres mécaniques et géométriques des différents milieux pour une étude quelconque sont définis.
- ★ *PremierBloc*, *RepetitifBloc* et *DernierBloc* contiennent respectivement les éléments des sous matrices $[L]$, $[U_k]$ et $[Z]$ utiles pour construire la matrice globale $[K]$.
- ★ *TermeSource* contient les éléments du second membre, vecteur $\{Y\}$.
- ★ *StressDisplacementMassif* contient les expressions des composantes du vecteur des déplacements et du tenseur des contraintes dans le massif.
- ★ *StressDisplacementEDZTunnel* contient les expressions des composantes du vecteur des déplacements et du tenseur des contraintes dans la zone endommagée et le tunnel.

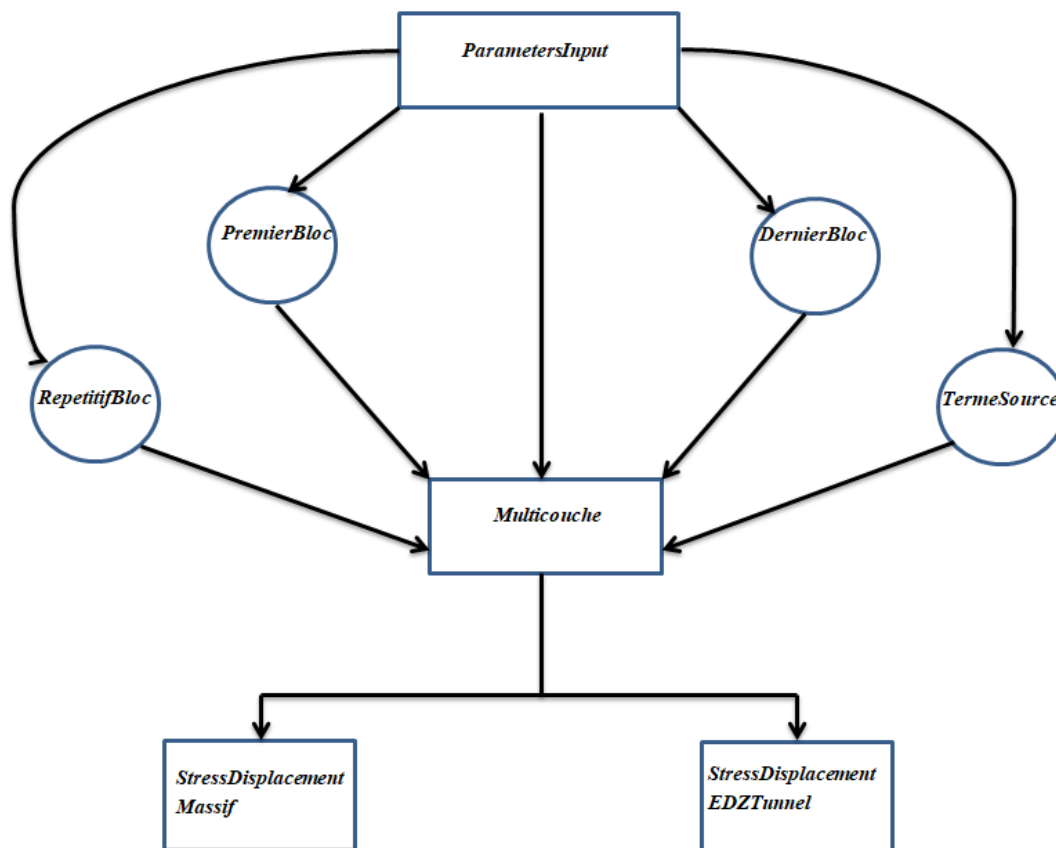


FIGURE 2.3 – Structure globale du Code

2.4 Résultats en régime harmonique

Dans cette section, nous proposons de présenter les résultats sous forme adimensionnée en focalisant sur la contrainte orthoradiale et le déplacement radial. Ces deux composantes sont classiquement les plus utilisées dans les problématiques de propagation d'ondes autour d'un obstacle, BARON et MATTHEWS, [1961], BARON et PARNES, [1962].

2.4.1 Paramètres d'adimensionnement

La concentration de contraintes correspond à l'accroissement localisé des contraintes dans l'élément structural dû à des discontinuités géométriques telles que des trous, des cavités, des encoches, des rainures, des angles et des modifications soudaines de la section transversale. Parmi les premiers auteurs qui ont étudié théoriquement ce phénomène, nous pouvons citer LARMOR, [1892] qui a analysé la concentration de contraintes produite dans un arbre tordu par une cavité circulaire excentrique et qui a conclu que la contrainte de cisaillement près de la cavité circulaire est deux fois supérieure à celle de la contrainte à tout autre endroit de l'arbre. KIRSCH, [1898] a étudié la distribution des contraintes autour d'un petit trou circulaire dans une plaque large soumise à une pression longitudinale uniforme. En résolvant l'équation bidimensionnelle de l'élasticité avec les conditions aux limites appropriées, il montre mathématiquement que la contrainte circonférentielle maximale au bord du trou est trois fois plus grande que la contrainte appliquée.

Dans les problèmes de dynamique, le rapport de la contrainte maximale dans la région de discontinuité sur la contrainte locale nominale est évalué par le facteur de concentration dynamique ou contrainte orthoradiale adimensionnée, Dynamic Stress Concentration Factor (DSCF). La contrainte orthoradiale et le déplacement radial sont alors adimensionnés comme suit :

$$\sigma_{k_{\theta\theta}}^* = \frac{\sigma_{k_{\theta\theta}}}{\sigma_0}, \quad u_{k_r}^* = \frac{u_{k_r} \zeta}{\varphi_0} \quad (2.57)$$

où $\sigma_0 = \mu_1 \beta_1^2 \varphi_0$ est l'intensité de la contrainte de l'onde incidente et ζ a la dimension d'une longueur (m) et est pris égale à 1 dans la mesure où les applications de type tunnel font apparaître des grandeurs de l'ordre du mètre.

2.4.2 Calcul numérique

Pour calculer numériquement les champs du tenseur des contraintes et du vecteur des déplacements, les sommations infinies des séries de Bessel-Fourier doivent être tronquées. En régime harmonique, le choix d'un grand nombre de modes peut engendrer des instabilités numériques risquant d'entacher les solutions numériques d'erreur voire même de les faire diverger. Ces instabilités numériques proviennent du mauvais conditionnement de la matrice globale. Celui-ci est dû d'une part au comportement asymptotique des fonctions de Hankel et d'autre part à l'hétérogénéité propre des termes de la matrice notamment due à la prise en compte du contact imparfait par l'intermédiaire des paramètres de raideurs K_{k_r} et K_{k_θ} . Ainsi, pour assurer une bonne convergence numérique des solutions, nous avons choisi de tronquer les calculs lorsque la sommation sur les n termes de la série reste stable, c'est-à-dire lorsque la contribution d'un mode supplémentaire sur les valeurs de contraintes et de déplacements devient négligeable. En prenant l'exemple sur la contrainte orthoradiale, la formulation mathématique consiste à

effectuer pour un rayon r , une fréquence ω et un angle θ donnés, le calcul de la norme suivante :

$$\frac{\|\sigma_{k\theta\theta}^{(n+1)} - \sigma_{k\theta\theta}^{(n)}\|}{\|\sigma_{k\theta\theta}^{(n)}\|} \leq \epsilon_r \quad (2.58)$$

où ϵ_r représente l'erreur relative qui a été fixée à 10^{-12} dans les résultats suivants. Le nombre de modes N_M nécessaire pour faire converger les séries est alors obtenu grâce à la relation (2.58).

L'autre aspect à prendre en compte est la partie multicouches : à partir d'un certain nombre de couches, l'utilisation des solveurs Matlab comme `linsolve`, `inv`, `mldivide`, etc., peut entraîner une divergence de la solution numérique à cause du mauvais conditionnement du système matriciel global. Pour éviter ces problèmes numériques, nous avons testé différentes options algorithmiques, et le bigradient stabilisé, solveur itératif implémenté sur Matlab, donne, dans nos configurations, les résultats les plus stables.

2.4.3 Validation des résultats numériques

Dans cette section, nous nous intéressons à la validation du code numérique développé. Une première validation a été faite à partir de la littérature et une deuxième durant un séjour de recherche à l'Université Heriot Watt d'Edinburgh, suite à l'appel d'offre Perdiguier de mobilité internationale lancé par Avignon Université. La bourse obtenue dans le cadre de cet appel d'offre m'a permis d'effectuer un séjour de recherche de près de 3 mois en Écosse.

Validation avec une approche semi-analytique

Pour valider l'approche multicouches développée, nous effectuons des vérifications sur des modèles déjà existants dans la littérature. Dans cette analyse, nous nous intéressons à la distribution polaire de la contrainte orthoradiale. Nous commençons d'abord par les travaux de YI, W. LU et al., [2016] qui ont étudié l'effet d'un contact imparfait sur la réponse dynamique d'un tunnel simple (cavité avec doublure sans EDZ). La configuration d'étude des auteurs est un cas particulier de notre approche. En choisissant les mêmes paramètres mécaniques et géométriques que YI, W. LU et al., [2016], nous obtenons un bon accord entre les contraintes orthoradiales adimensionnées, (Figure 2.4 a).

Concernant l'écart entre les deux résultats, voici ce qui peut être rapporté : "Nevertheless, some discrepancies appear that may be explained by : the number of modes may be different ; the software used for the polar representation may be also different ; curves may have been smoothed due to the software" BOUARE et al., [2019], après échange avec les auteurs YI, W. LU et al., [2016].

Nous effectuons ensuite la même procédure de vérification avec S. LU et al., [2019], et comme visualisé sur la Figure 2.4 b) un excellent accord est trouvé entre les deux résultats.

Validation par la méthode des éléments finis

Dans le cadre du séjour Perdiguier effectué entre janvier et mars 2020 à l'Institute for Infrastructure and Environment, Heriot-Watt University à Edinburgh (Écosse), une autre validation du code a pu être menée. L'Institute for Infrastructure and Environment est dirigé actuellement par Pr. Omar Laghrouche et possède une expertise reconnue internationalement sur la

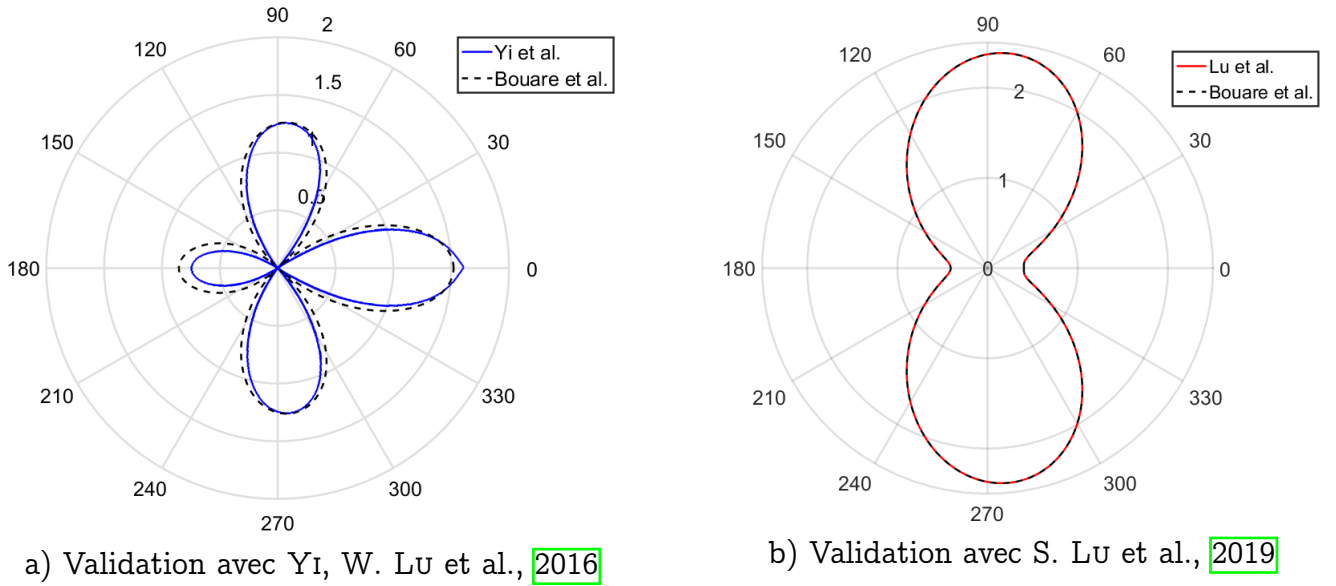


FIGURE 2.4 – Comparaison du diagramme polaire de la contrainte orthoradiale avec deux articles de référence.

méthode des éléments finis. La validation a porté sur une géométrie circulaire avec une inclusion élastique comme illustrée sur la Figure 2.5. Cette configuration d'étude a été choisie pour vérifier si le code pouvait être utilisé pour traiter un autre problème différent de la géométrie 2.1. Sur la Figure 2.7, en supposant que la zone endommagée possède les mêmes propriétés mécaniques que le milieu incident et en considérant un rayon extérieur du tunnel suffisamment grand devant son rayon intérieur ($\Gamma_4 \ll \Gamma_3$), on se ramène au cas d'une géométrie circulaire avec une inclusion.

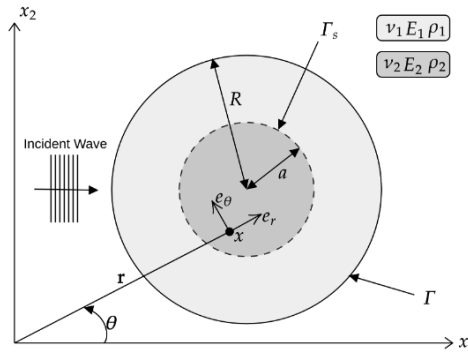


FIGURE 2.5 – Configuration retenue pour la validation numérique, Edinburgh

Le code éléments finis utilisé fournit en sortie les résultats des contraintes et déplacements en coordonnées cartésiennes. Comme notre code semi-analytique donne les composantes radiales u_{k_r} et orthoradiales u_{k_θ} du vecteur déplacement $\vec{u}$ en coordonnées polaires, un changement de coordonnées doit être effectué pour procéder à la comparaison. En choisissant plusieurs points dans les différents milieux en lien avec le maillage éléments finis, nous comparons les parties réelle et imaginaire du déplacement cartésien $\vec{u}$ obtenu à l'aide des approches semi-analytique et par éléments finis. Les deux méthodes conduisent à des résultats en excellent accord, comme visualisé sur la Figure 2.6.

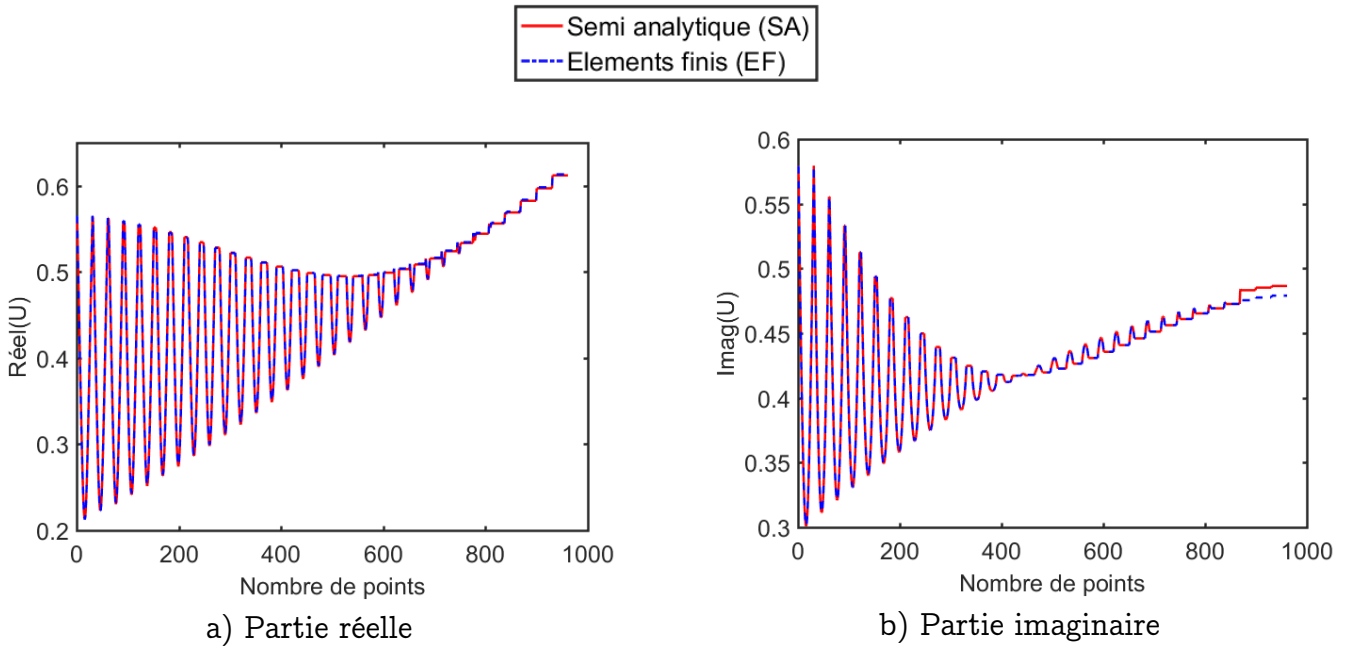


FIGURE 2.6 – Comparaison des parties réelle et imaginaire du déplacement cartésien en plusieurs points du domaine (les points sont pris en correspondance avec les points du maillage éléments finis) à partir des approches semi-analytique et éléments finis.

2.4.4 Choix retenu pour les résultats en régime harmonique

Dans cette étude, nous avons considéré une fréquence incidente réalisable d'un point de vue expérimental. En lien avec la partie instationnaire, nous avons fixé cette fréquence à 3000 Hz (qui sera la fréquence centrale du signal de Ricker dans la partie transitoire). Classiquement deux types de fréquences sont étudiées en régime harmonique dans la littérature, les basse et haute fréquences respectivement séparées par un facteur 10, Mow et al., [1971]. De ce fait, nous retenons à basse fréquence 300 Hz et haute fréquence 3000 Hz.

DUBOËUF, [2018] a indiqué que l'étendue de l'EDZ dans notre zone d'étude variait entre 1 cm à 1 m. Nous choisissons de prendre la valeur limite 1 m et, lorsqu'on considère une résolution en longueur d'onde de $\lambda_a/8$, BITRI et al., [1996], deux milieux successifs sont alors distingués, lorsque l'épaisseur moyenne entre deux couches est définie par :

$$e_p > \frac{C_{1p}}{8f_c} \quad (2.59)$$

où f_c désigne la fréquence centrale 3000 (Hz) et $C_{1p} = 5400$ (m/s) désigne la vitesse d'onde P dans le milieu considéré. Dans les configurations d'études qui sont proposées, l'épaisseur minimale entre deux couches doit être supérieure à 0.225 m. En régime harmonique, nous proposerons respectivement de décrire l'EDZ par une couche d'épaisseur 1 m d'une part et par deux couches d'épaisseurs moyennes 0.5 m d'autre part. Les coordonnées géométriques et paramètres mécaniques utilisés sont présentés dans les tableaux [2.1] et [2.2]. Le nombre de modes nécessaire pour atteindre la précision fixée (ϵ_r) est donné dans le tableau [2.3].

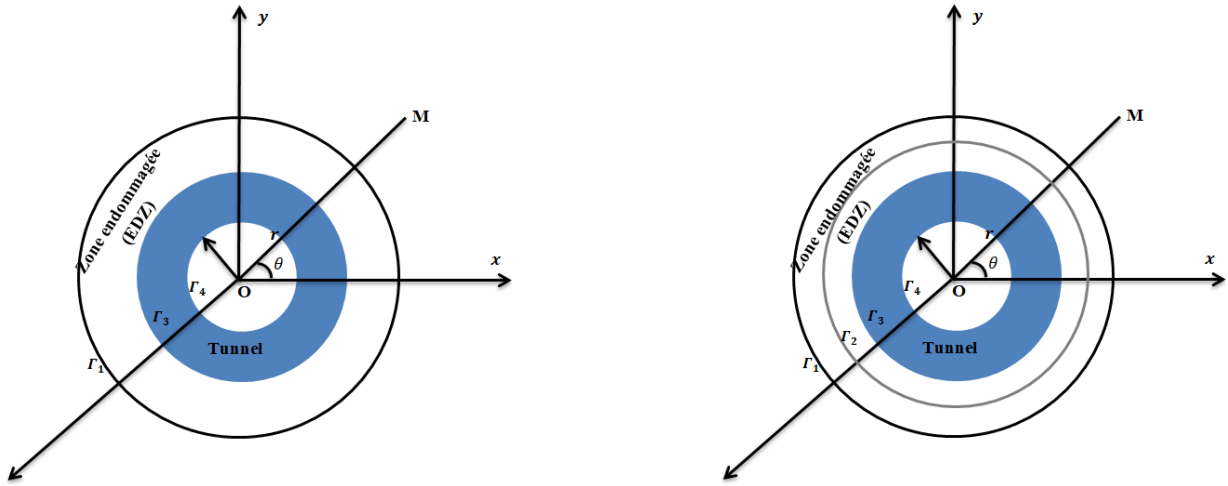


FIGURE 2.7 – Exemple de géométrie traitée avec la prise en compte de la paroi du tunnel, la partie d'EDZ (sous une ou deux couches) et du milieu karstique externe.

Interfaces	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
1 EDZ	3.4		2.4	2.0
2 EDZ	3.4	2.9	2.4	2.0

TABLE 2.1 – Rayons pour la localisation des interfaces en m

	Milieux	Densités ($kg.m^{-3}$)	Vitesse d'ondes P ($m.s^{-1}$)	Vitesse d'ondes S ($m.s^{-1}$)
	Incident	2800	5400	3300
Cas 0	sans EDZ			
Cas 1	1 EDZ - Dure	2550	4400	2695
Cas 2	1 EDZ - Souple	2300	3450	2110
Cas 3	1 EDZ - Dure	2700	4800	2940
	2 EDZ - Dure	2400	4000	2450
Cas 4	1 EDZ - Souple	2300	3700	2260
	2 EDZ - Souple	2300	3200	1960
	Tunnel en Béton	2500	5031	2689

TABLE 2.2 – Paramètres mécaniques des milieux élastiques

Fréquences (Hz)	Nombre de modes ($N_M + 1$)
300	5
3000	22

TABLE 2.3 – Nombre de modes nécessaires pour assurer la convergence des séries, issu du critère (2.59)

2.4.5 Influence du contact

Dans cette section, nous nous intéressons à l'influence du contact sur les résultats de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial en modélisant la zone endommagée uniquement par une couche circulaire (Figure 2.7, gauche). Les constantes de raideurs propres aux interfaces Γ_1 et Γ_3 sont définies par :

$$K_{1,r} = K_{1,\theta} = (1, 100)\{\mu_1/\Gamma_1\}, \quad K_{3,r} = K_{3,\theta} = (1, 100)\{\mu_3/\Gamma_3\} \quad (2.60)$$

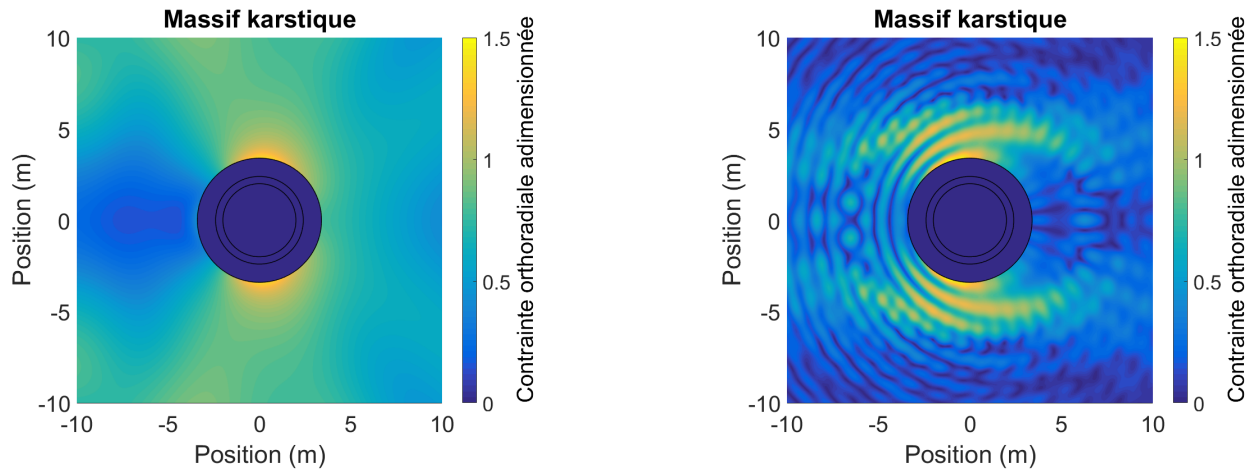
La plus petite valeur des constantes de raideurs, avec le coefficient 1, décrit le contact imparfait alors que la plus grande valeur, coefficient 100, décrit un contact parfait.

Pour avoir une meilleure vision sur la répartition de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial, nous traçons l'amplitude des champs mécaniques des milieux respectifs sur des figures distinctes. D'une manière globale, les vibrations deviennent plus élevées dans le massif lorsqu'on se rapproche du tunnel.

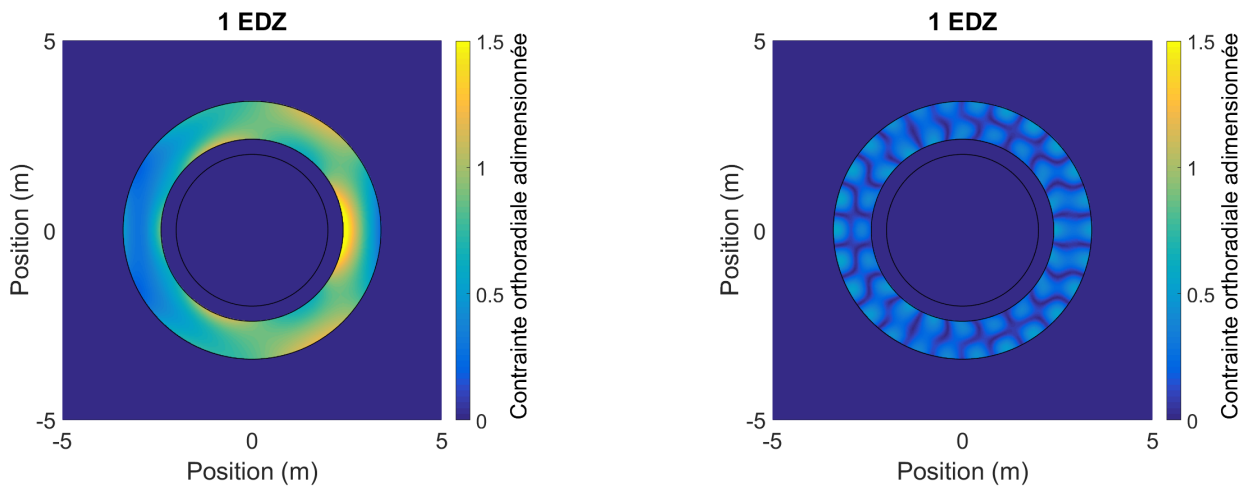
Lorsque les fissures sont prises en compte dans le modèle (contact imparfait, Figures 2.8-2.9), on identifie à basse fréquence une augmentation de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial dans les milieux (zone endommagée et tunnel) par rapport au milieu incident. Cette tendance est modifiée à haute fréquence. En effet, dans ce dernier cas, le contact imparfait réduit de façon significative l'intensité de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial dans les milieux, EDZ et tunnel. L. MYER et al., 1985 ont démontré expérimentalement et numériquement que lorsque deux solides sont séparés par une discontinuité, l'amplitude des ondes mécaniques dans la zone fracturée diminue avec une augmentation de la fréquence. Les résultats obtenus dans le cas du contact imparfait mettent en évidence ce type de comportement. La diminution ou l'augmentation des champs dus à la présence de discontinuités est intrinsèquement liée à la fréquence incidente choisie.

Lorsqu'on considère un contact parfait entre les milieux respectifs (Figures 2.10-2.11), la présence de l'EDZ (avec les choix que nous avons effectués pour les caractéristiques mécaniques) modifie faiblement la distribution de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial dans le tunnel. A basse fréquence, l'intensité de la contrainte orthoradiale est du même ordre de grandeur dans les différents milieux. Le même phénomène est observé pour le déplacement radial. A haute fréquence, nous observons une diminution de la contrainte orthoradiale et une augmentation du déplacement radial dans la zone endommagée. Par ailleurs, ces variations respectives n'impactent que la distribution des champs dans le tunnel. Les intensités dans le massif et dans le tunnel sont quasiment identiques. En d'autres termes lorsque les défauts de liaison entre le massif et le tunnel ne sont pas pris en compte, les champs peuvent varier dans la zone endommagée et cette modification aura un faible impact sur la réponse dynamique du tunnel.

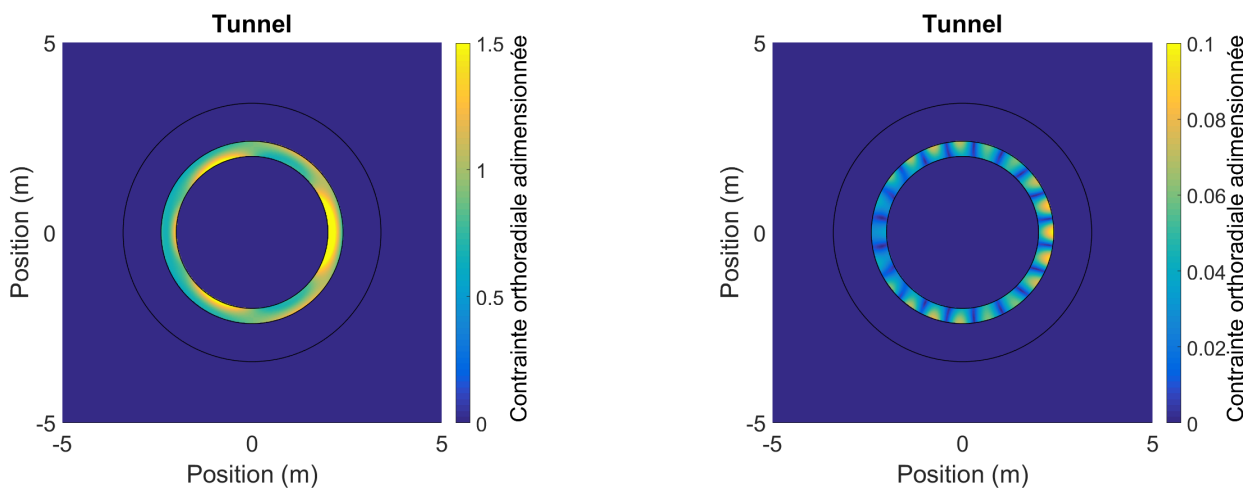
Les Figures 2.12-2.13 présentent les diagrammes polaires de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial aux interfaces Γ_1 et Γ_3 en fonction des fréquences incidentes. On note que les réponses harmoniques varient en fonction du contact que ce soit dans le massif ou dans le tunnel.



(a) Dans le massif...



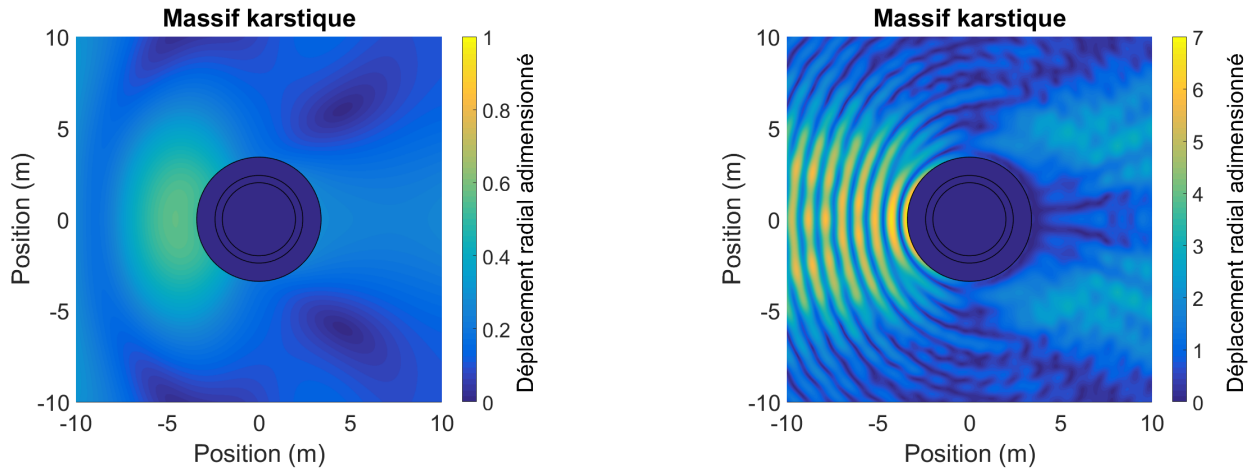
(b) Dans la zone endommagée...



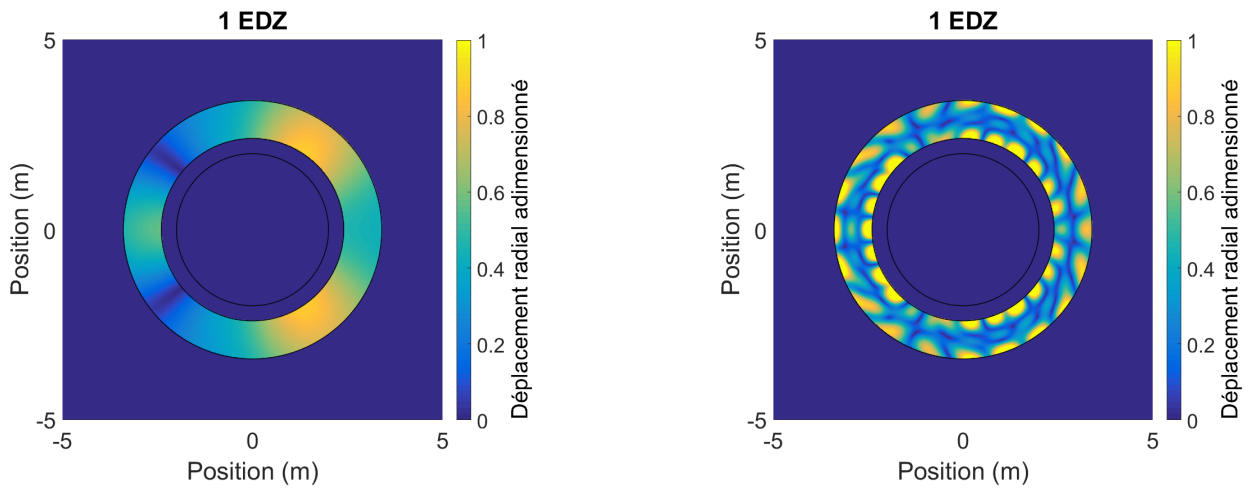
(c) Dans la paroi bétonnée...

Attention la figure (c) droite présente une échelle différente des autres

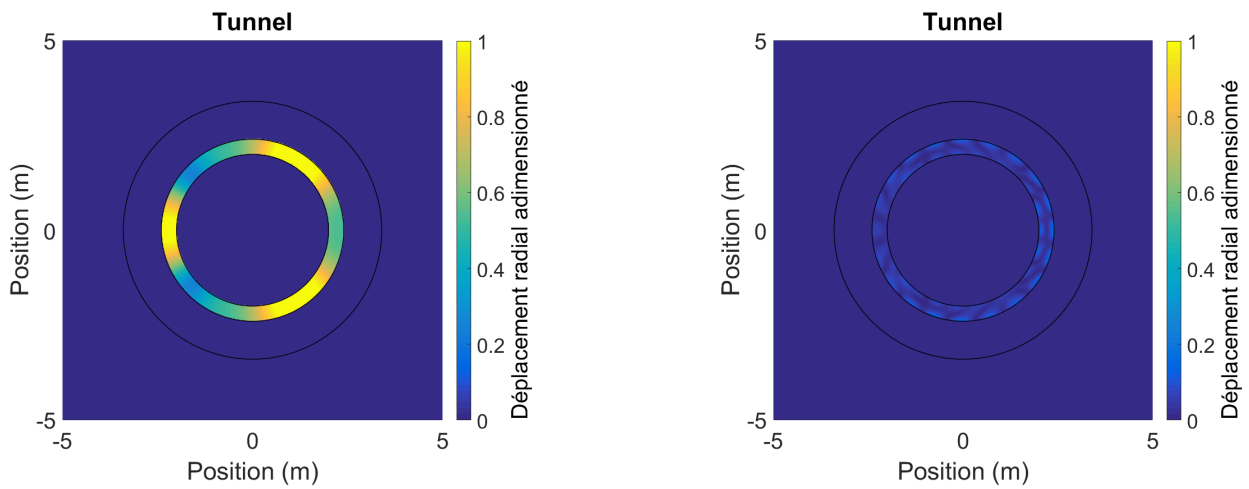
FIGURE 2.8 – Contrainte orthoradiale respectivement dans le massif, la zone endommagée et le tunnel, pour un contact imparfait à 300 Hz (gauche) et à droite 3000 Hz (droite)



(a) Dans le massif...

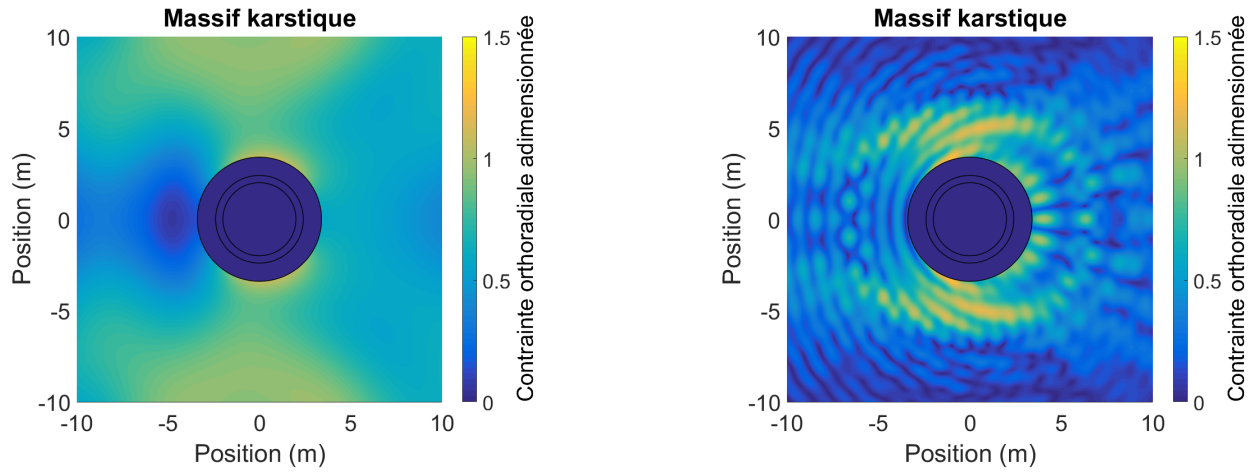


(b) Dans la zone endommagée...

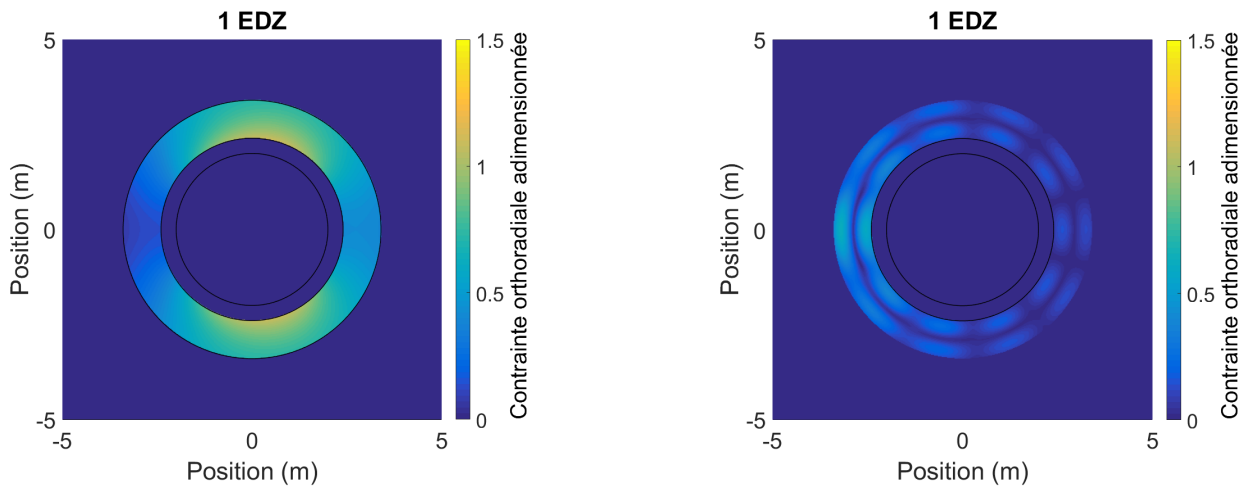


(c) Dans la paroi bétonnée...

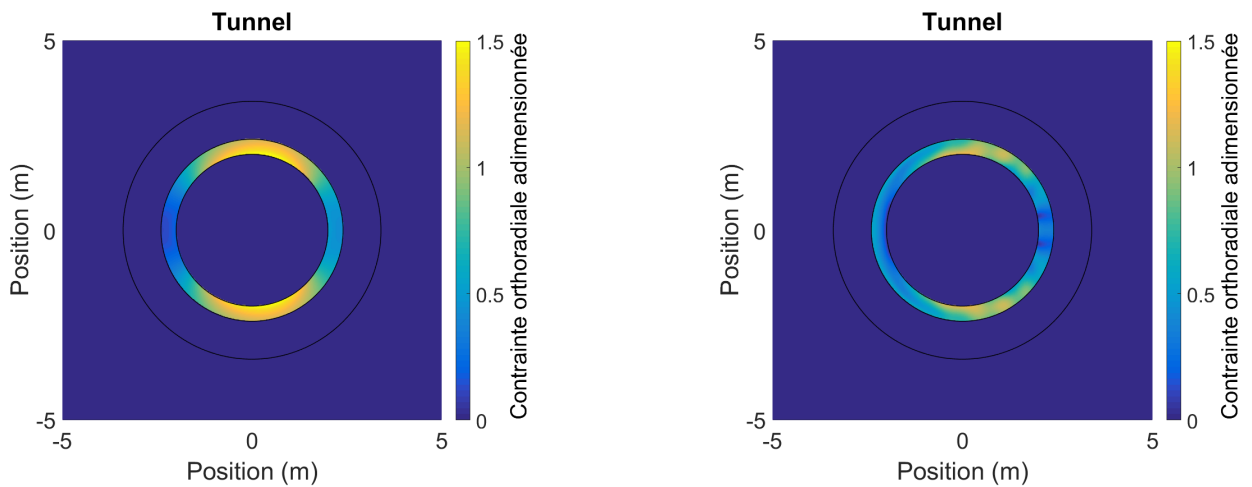
FIGURE 2.9 – Déplacement radial respectivement dans le massif, la zone endommagée et le tunnel pour un contact imparfait à 300 Hz (gauche) et à droite 3000 Hz (droite)



(a) Dans le massif...

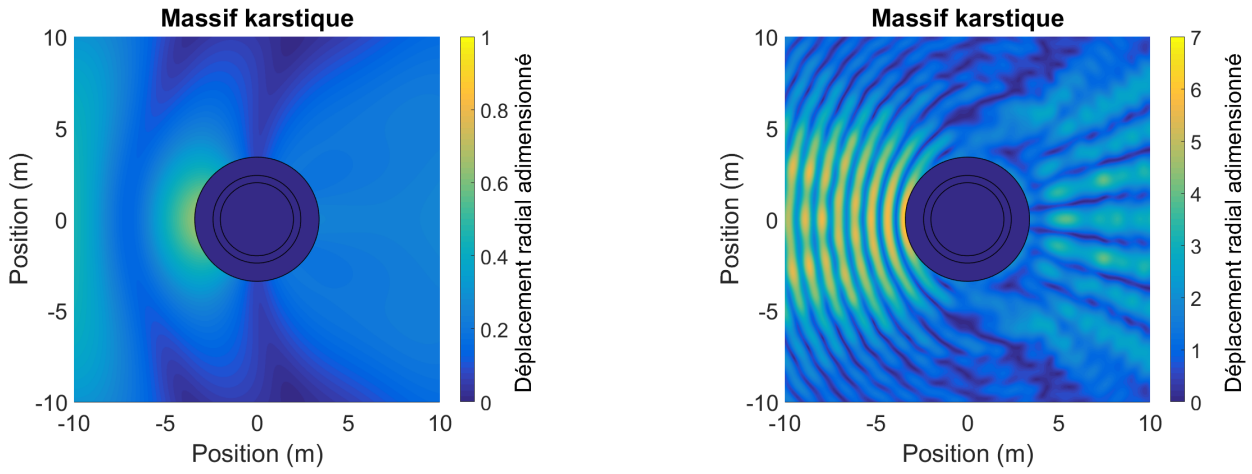


(b) Dans la zone endommagée...

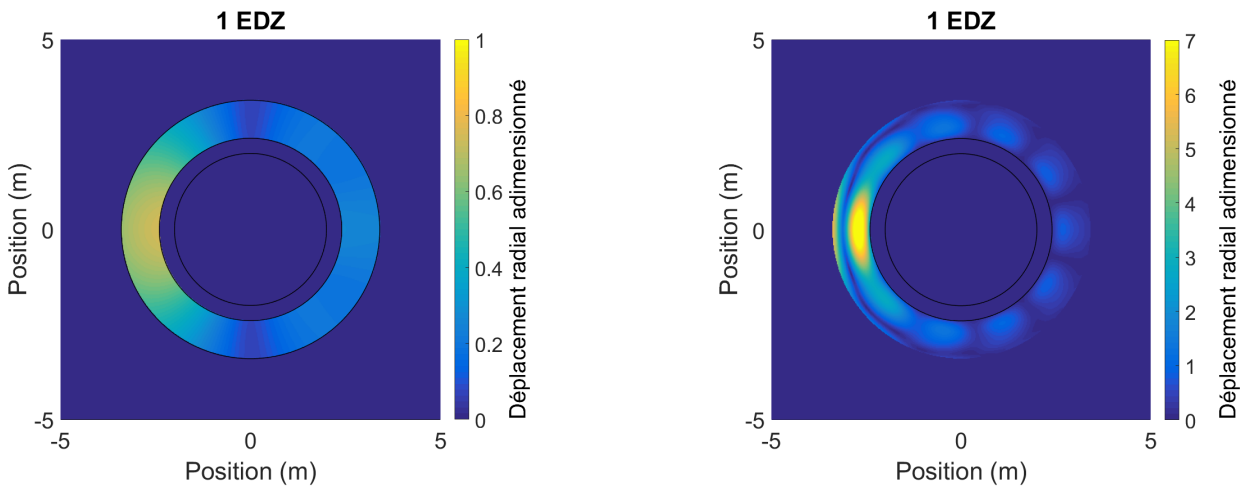


(c) Dans la paroi bétonnée...

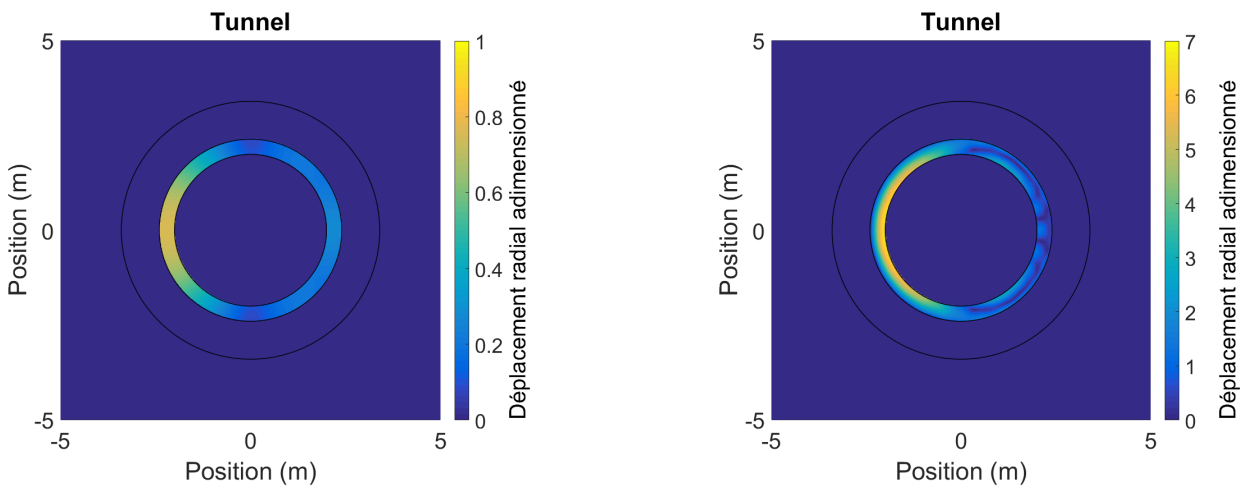
FIGURE 2.10 – Contrainte orthoradiale dans le tunnel pour un contact parfait à 300 Hz (gauche) et à droite 3000 Hz (droite)



(a) Dans le massif...



(b) Dans la zone endommagée...



(c) Dans la paroi bétonnée...

FIGURE 2.11 – Déplacement radial dans le tunnel pour un contact parfait à 300 Hz (gauche) et à droite 3000 Hz (droite)

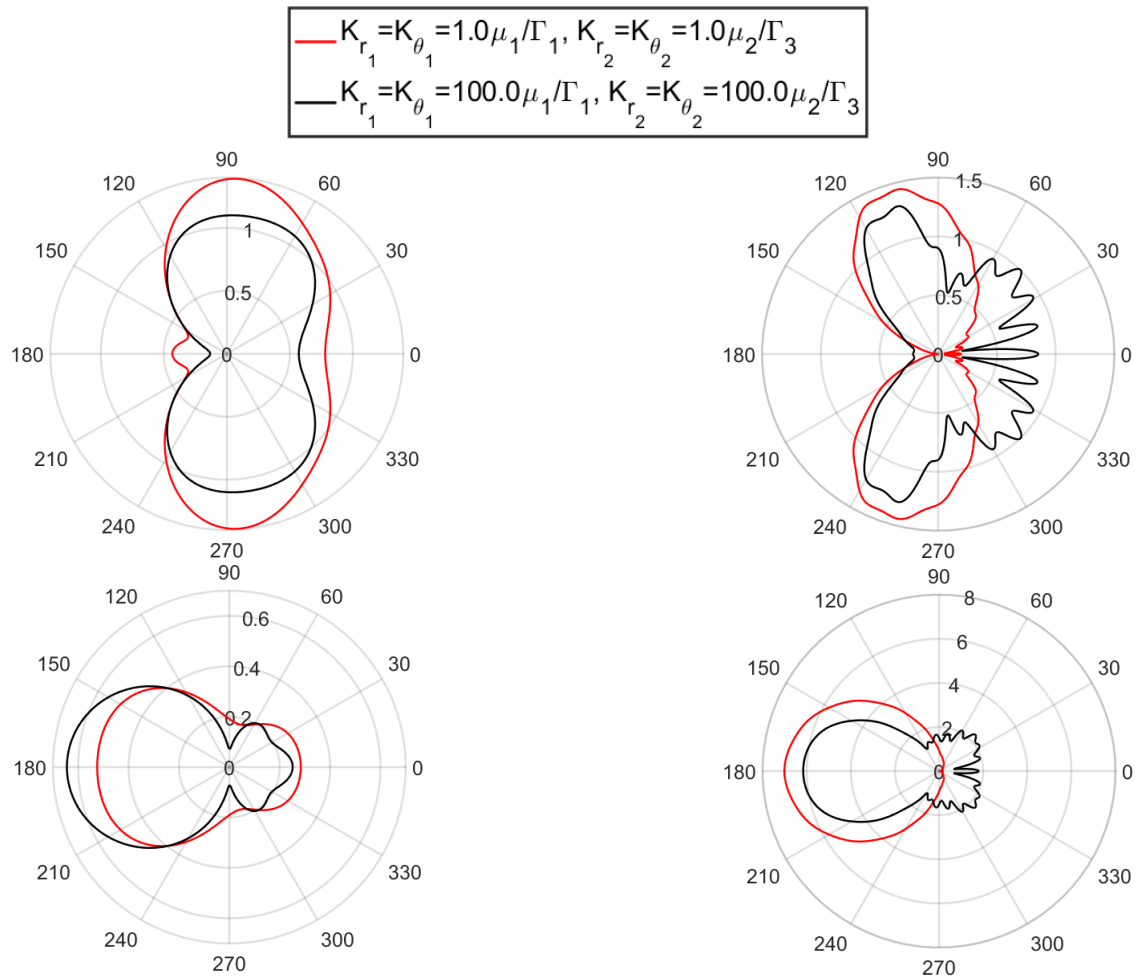


FIGURE 2.12 – Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour le cas d'une EDZ dure aux fréquences **300 Hz** (Figures de gauche) et **3000 Hz** (Figures de droite) à $r = \Gamma_1$ et pour différents types de contacts.

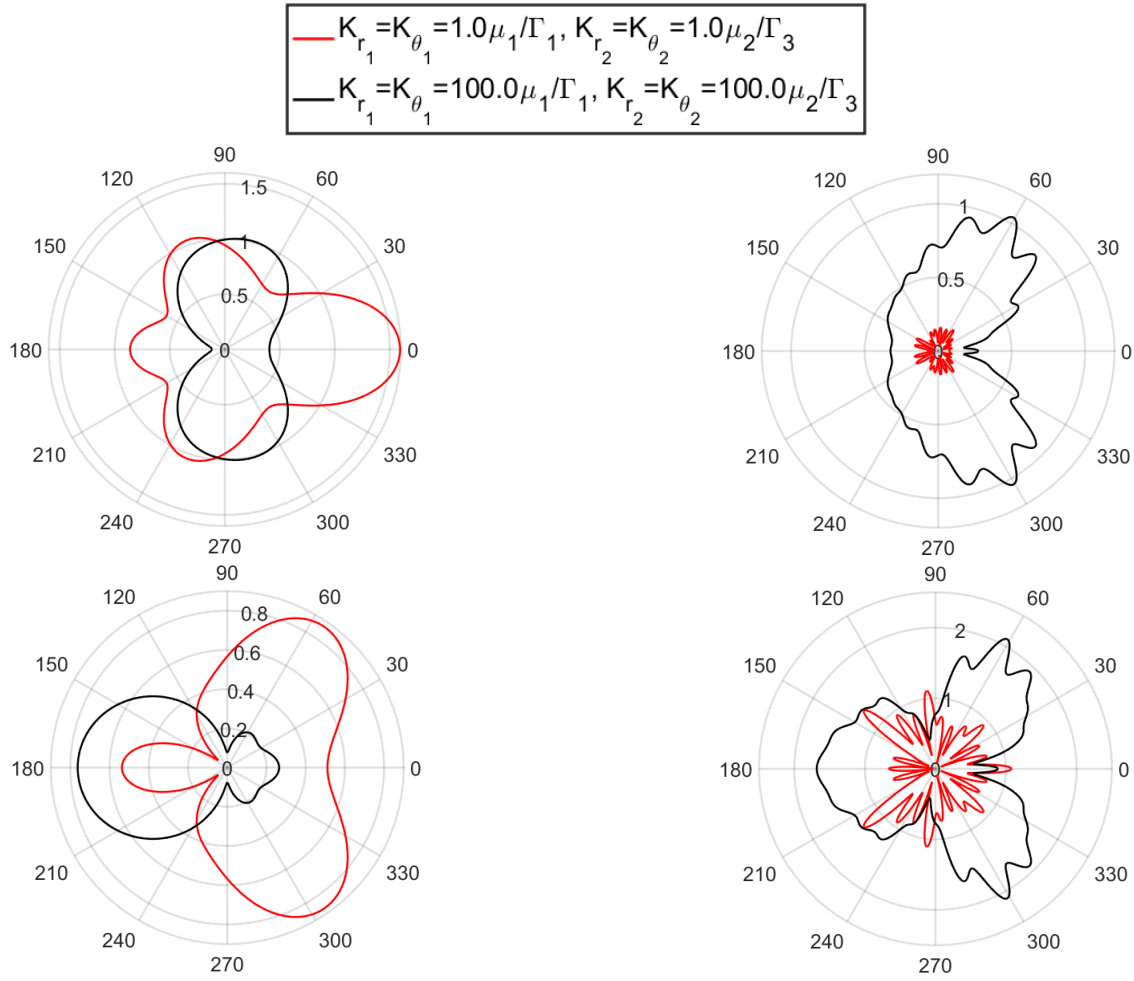


FIGURE 2.13 – Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour le cas d’une EDZ dure aux fréquences 300 Hz (Figures de gauche) et 3000 Hz (Figures de droite) à $r = \Gamma_3$ et pour différents types de contacts. Cas d’une EDZ monocouche dure.

Nous proposons d'illustrer l'évolution de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial en fonction de la distance r prise par rapport au centre de la cavité ou du tunnel, pour les angles $\pi/2$ (contrainte orthoradiale, Figure 2.14) et π (déplacement radial, Figure 2.15). Nous comparons les champs mécaniques obtenus pour la configuration sans EDZ et pour la configuration avec une EDZ dite dure, soit le cas 1 du tableau 2.2. La contrainte orthoradiale présente une discontinuité au passage des interfaces quel que soit le contact pris en compte. Lorsque le contact est de type imparfait, la discontinuité provient du contact. Le déplacement radial est continu dans le cas du contact parfait et clairement discontinu dans le cas du contact imparfait quelle que soit la fréquence. Nous constatons un comportement beaucoup plus oscillatoire pour les fréquences plus élevées conformément aux diagrammes polaires précédents.

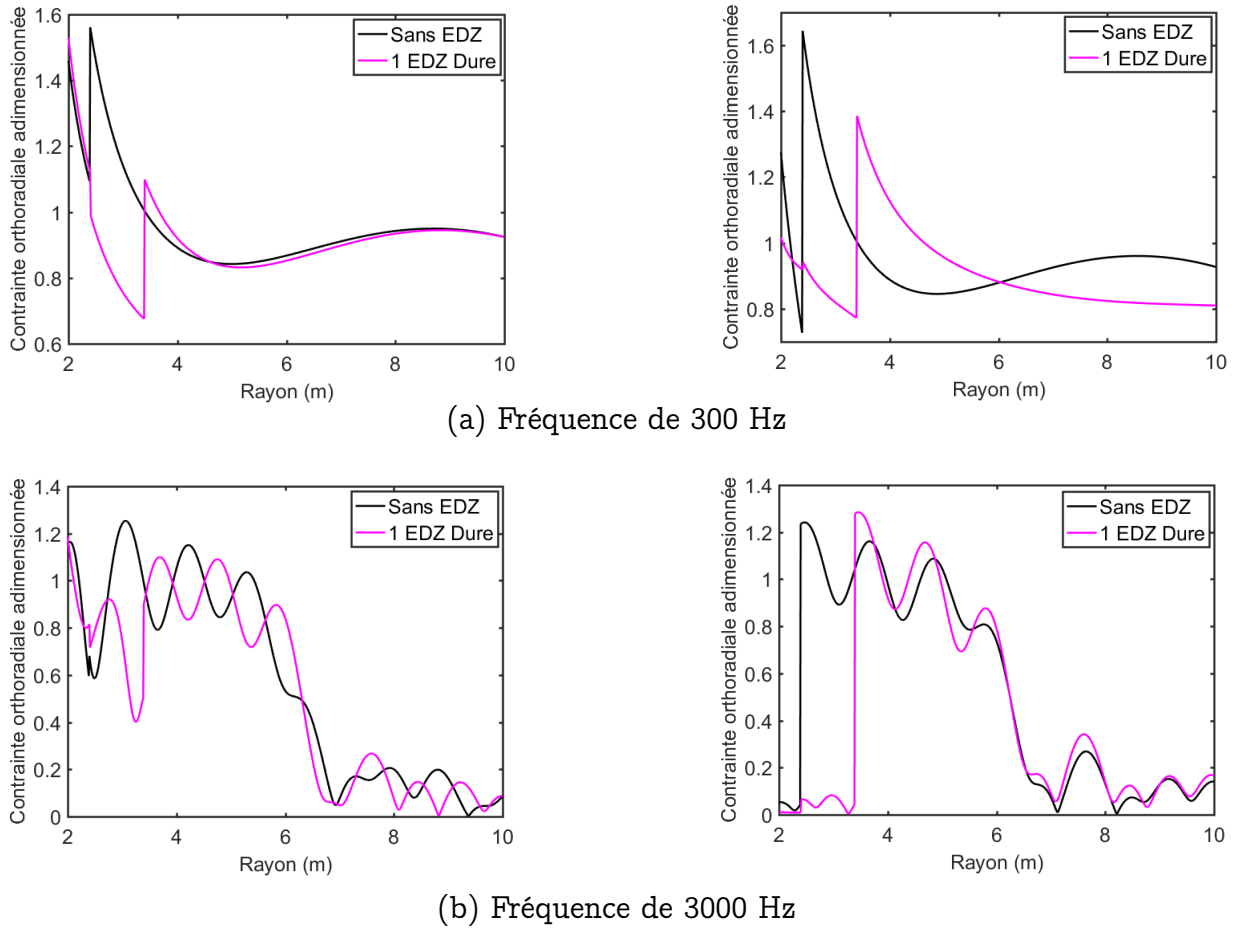


FIGURE 2.14 – Évolution de la contrainte orthoradiale à $\theta = \pi/2$ en fonction du rayon pour les contacts parfait (gauche) et imparfait (droite)

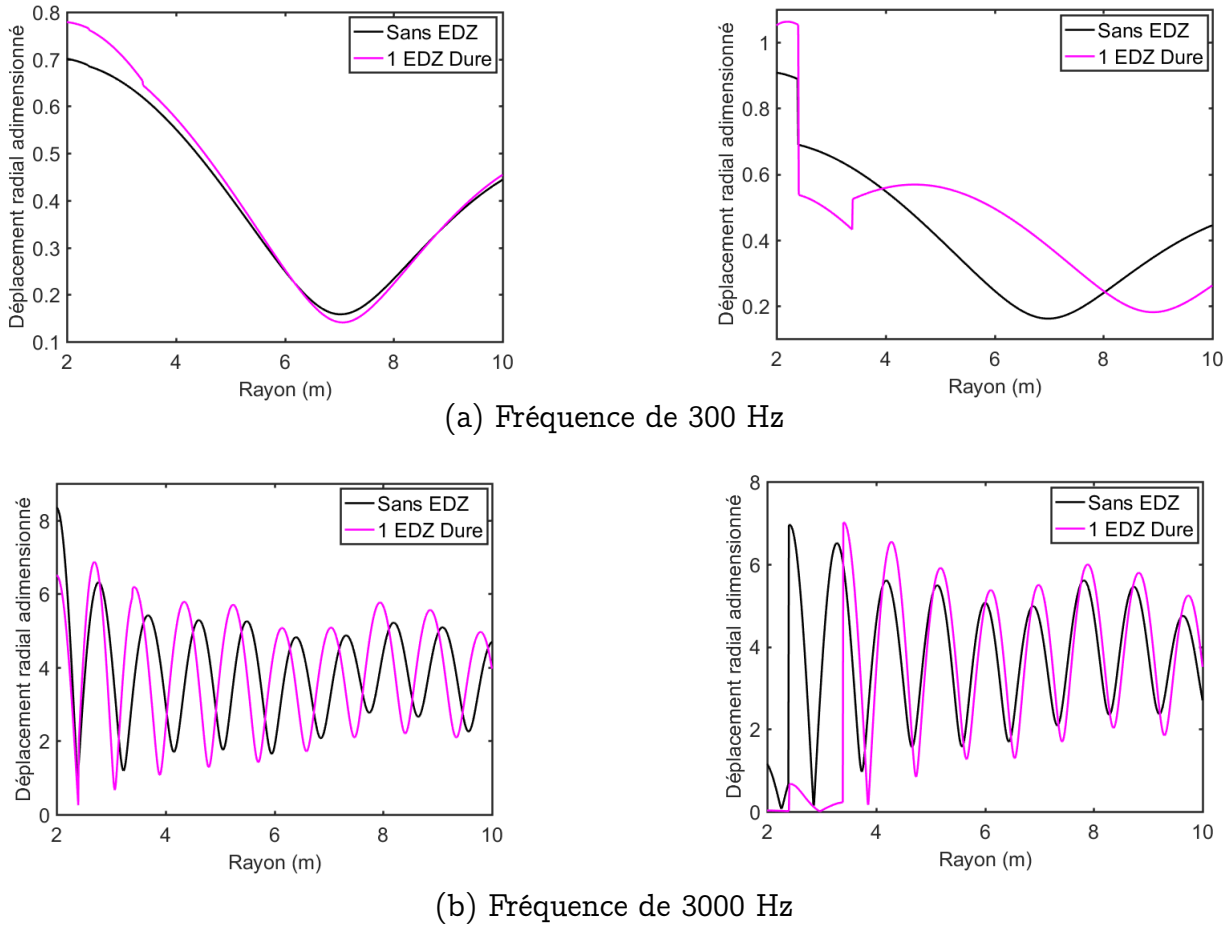


FIGURE 2.15 – Évolution du déplacement radial à $\theta = \pi$ en fonction du rayon pour les contacts parfait (gauche) et imparfait (droite)

2.4.6 Influence du multicouches EDZ

Dans cette section, nous proposons de nous intéresser à l'influence de la description de l'EDZ en multicouches en comparant les résultats obtenus pour les 5 cas présentés dans le tableau 2.2 pour les interfaces Γ_1 (contact avec le milieu environnant) et Γ_3 (contact avec la paroi bétonnée). À faible fréquence, les diagrammes polaires de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial sont de formes très similaires d'un cas à l'autre et homothétique en fonction de la description de l'EDZ. Le déplacement radial est légèrement majoré dès lors que l'EDZ est décrite par une ou deux couches plus souples. À plus haute fréquence, les champs sont de nouveau beaucoup plus perturbés, et l'homothétie due à la description en une ou deux couches semble moins nette et plus difficile à identifier. La description en EDZ dure en deux couches n'impacte que peu les diagrammes polaires, ce résultat est plus marqué à basse fréquence qu'à haute fréquence. Une description fine de l'EDZ est donc d'autant plus importante que le milieu est souple. Dans une configuration dure, la décomposition en sous-couches se justifie moins.

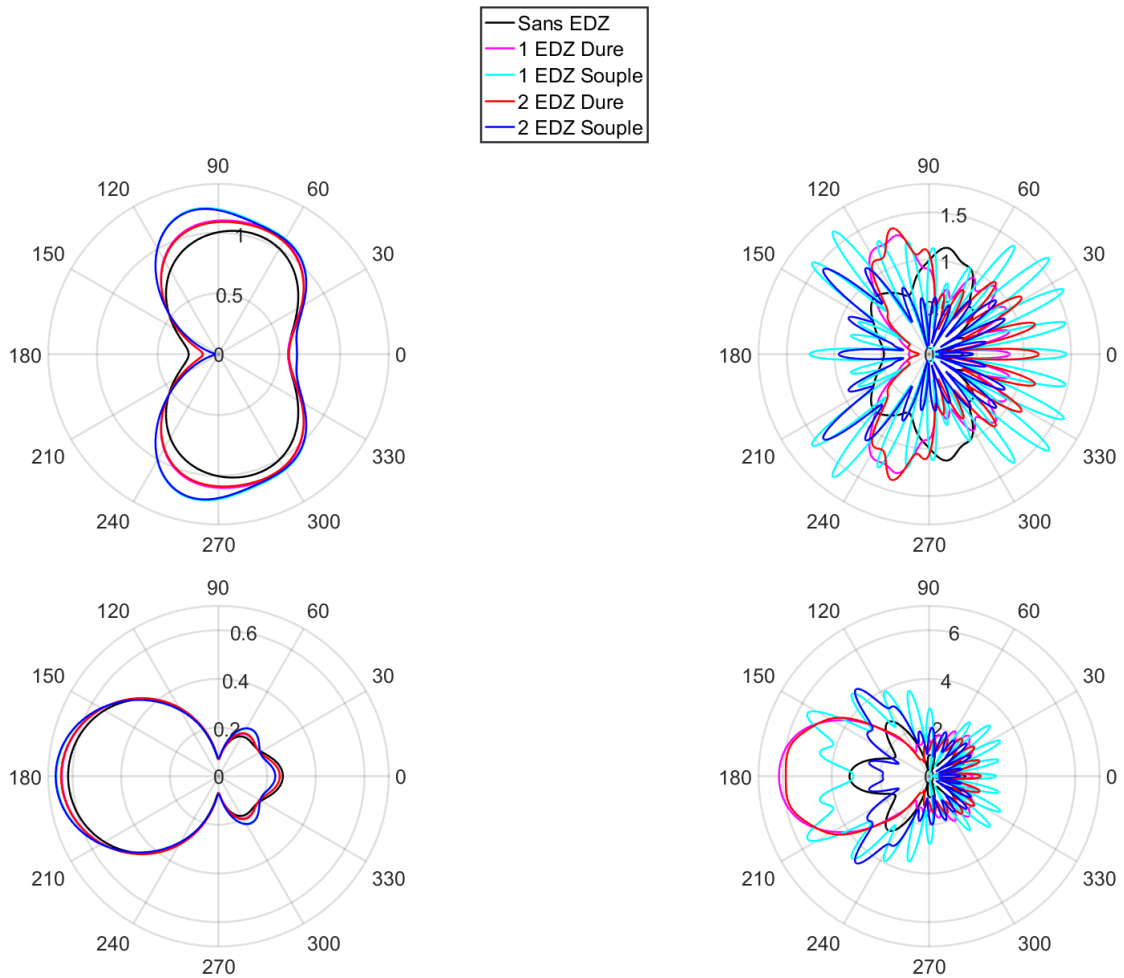


FIGURE 2.16 – Diagramme polaire de la contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et du déplacement radial adimensionné (Figures du bas) aux fréquences incidentes 300 Hz (Figures de gauche) et 3000 Hz (Figures de droite) à $r = \Gamma_1$, pour deux types de modélisation de la zone endommagée (contact parfait).

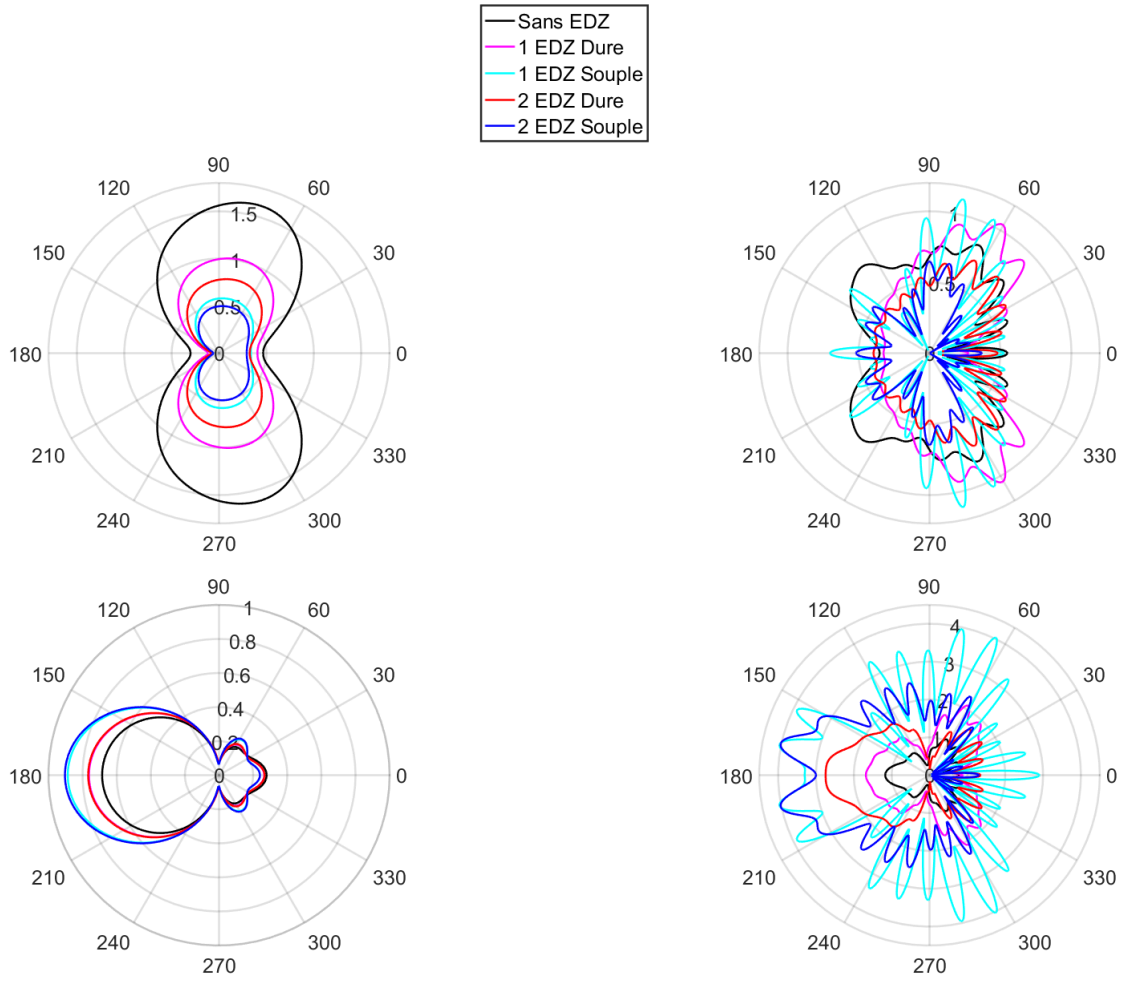


FIGURE 2.17 – Diagramme polaire de la contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et du déplacement radial adimensionné (Figures du bas) aux fréquences incidentes **300 Hz** (Figures de gauche) et **3000 Hz** (Figures de droite) à $r = \Gamma_3$, pour deux types de modélisation de la zone endommagée (**contact parfait**).

2.4.7 Évolution du maximum en fonction de la fréquence

Les diagrammes polaires de la section précédente ont indiqué globalement des maxima de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial suivant les axes verticaux et horizontaux. Dans cette partie, nous proposons d'étudier l'évolution des champs de la Figure 2.17 c'est-à-dire à l'interface avec la paroi bétonnée ($r = 2.4$ m) en fonction de la fréquence pour les angles $\pi/2$ et π . La Figure 2.18 montre un motif assez similaire entre les 5 cas d'études avec néanmoins des oscillations dues aux aspects multicouches. Concernant l'allure générale commune, nous constatons un minimum dans les différentes configurations d'études autour d'une fréquence située entre $\{2000, 3000\}$ Hz. Une analyse bibliographique FLAX et al., [1981], PAOLUCCI, [1999] sur les phénomènes de résonance a permis de retrouver cette fréquence : elle peut en particulier être approchée grâce à la formule de Rayleigh ($f_0 = C_p/4H$) pour les problèmes 1D, où H représente une épaisseur caractéristique. Pour les configurations avec EDZ, ce minimum est plus ou moins décalé du fait de l'influence de la stratification, mais il existe toujours. En effet, étant associé à la paroi bétonnée, son influence reste valable. Là encore, les résultats des configurations avec EDZ souples sont plus chahutés que les autres.

Pour approfondir cette analyse, nous visualisons sur la Figure 2.19 l'influence de l'épaisseur de la paroi bétonnée sur le comportement fréquentiel. Le tableau 2.4 met en corrélation les résultats de localisation du minimum lus sur les figures et ceux issus de la formule précédente. La configuration EDZ dure est tout à fait analogue. Par contre, concernant l'EDZ souple, en plus du motif général pour lequel le minimum est décalé, nous observons des fluctuations probablement en lien avec des phénomènes de résonance au niveau des couches d'EDZ.

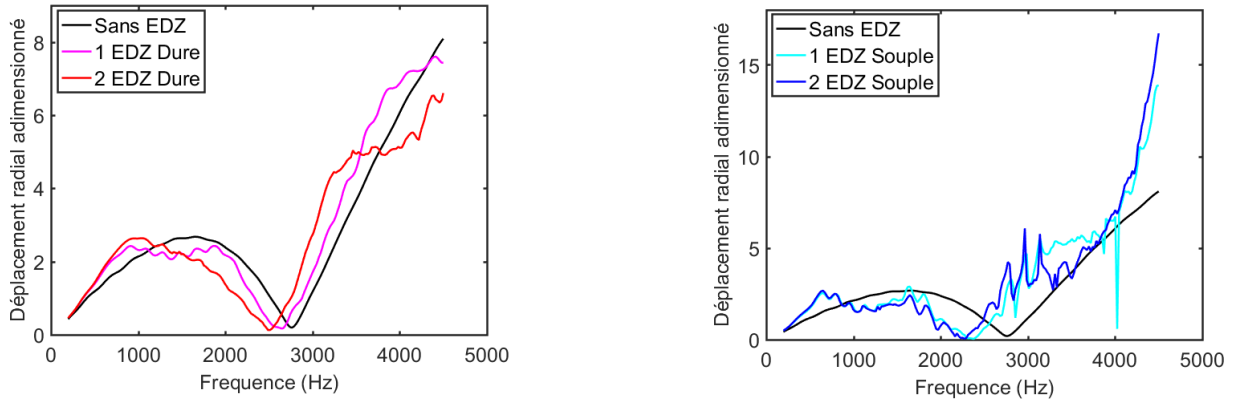
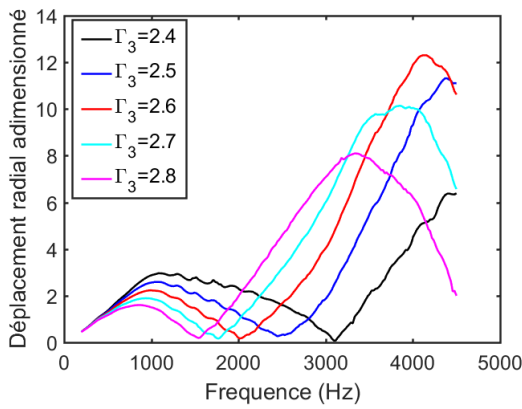
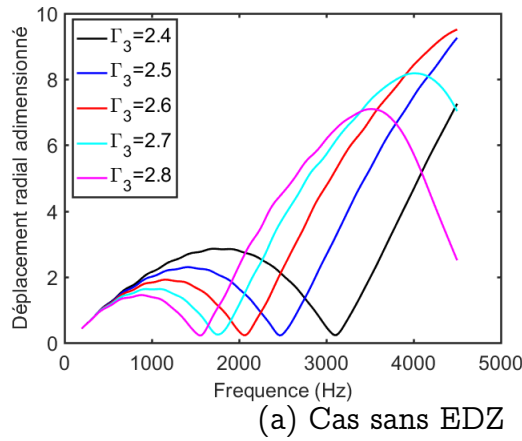


FIGURE 2.18 – Déplacement radial en fonction de la fréquence incidence à $r = \Gamma_3$ et $\theta = \pi$.



(b) Cas avec EDZ : 2EDZ dure à gauche, 2 EDZ souples à droite

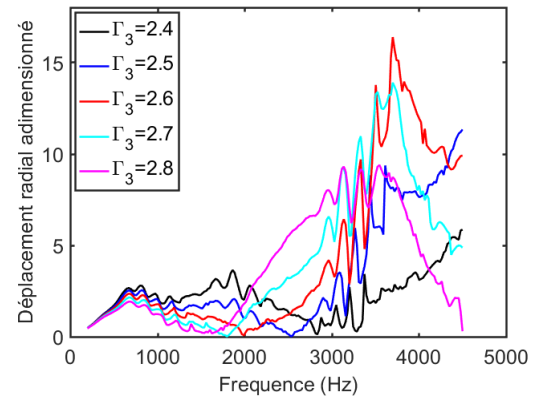


FIGURE 2.19 – Évolution du déplacement radial en fonction de la fréquence incidente pour plusieurs épaisseurs de la paroi bétonnée du tunnel à $r = \Gamma_3$ et $\theta = \pi$.

Épaisseur de la paroi bétonnée (m)	Valeur de la fréquence pour le minimum (Hz)	Valeur obtenue pour $f_0 = C_p/4H$
0,4	3138	3144
0,5	2511	2515
0,6	2100	2096
0,7	1798	1797
0,8	1581	1572

TABLE 2.4 – Valeur de la fréquence pour le minimum de déplacement en fonction de l'épaisseur de la paroi bétonnée du tunnel

Conclusion

Le code développé en semi analytique a été validé sur plusieurs cas d'étude et un bon accord a été trouvé dans les différentes configurations présentées. Le modèle proposé dans ce travail prend en compte une interface généralisée permettant de traiter à la fois le cas d'un contact parfait ou imparfait à l'interface entre deux milieux. Un modèle incluant ce type de contact dans une approche multicouches était encore inexistant à ce jour. En régime harmonique, le modèle a permis de mettre en évidence certains effets susceptibles de se produire dans la zone endommagée et qui peuvent potentiellement affecter les contraintes et déplacements dans le tunnel. Une cartographie 2D du milieu a permis d'avoir une vision globale sur la répartition du champ dans l'espace environnant et de mettre en évidence l'influence du contact sur la contrainte orthoradiale et le déplacement radial. Lorsqu'un contact imparfait est utilisé pour prendre en compte les défauts de liaison à l'interface entre deux milieux, les résultats obtenus ont montré de fortes variations dans l'EDZ et dans le tunnel par rapport au milieu incident. Dans le cas d'un contact parfait, une légère variation est observée dans l'EDZ et cette modification n'impacte quasiment pas la distribution des champs dans le tunnel. L'évolution du déplacement radial en fonction de la fréquence incidente pour différentes épaisseurs du tunnel a permis d'observer une fréquence particulière pour laquelle le déplacement radial tend à s'annuler. Cette fréquence a pu être prédite grâce à la formule de Rayleigh.

2.5 Régime transitoire

Dans les sections précédentes, nous avons étudié la réponse harmonique d'un tunnel avec paroi bétonnée soumis à excitation en onde plane de type P avec une approche semi-analytique multicouches. À partir de ces développements, et en utilisant une transformée de Fourier des équations, nous nous proposons d'aborder dans cette nouvelle section la réponse en régime transitoire. Deux types de sources sont envisagés dans cette partie transitoire à partir de deux expressions différentes des potentiels de Helmholtz. Dans un premier temps, dans la continuité de la section précédente, nous restons sur une excitation en contrainte plane de type P. Les résultats sont présentés avec dimension. Ensuite, nous introduisons une onde incidente sous la forme d'une ligne source émettant des ondes cylindriques, et nous mettons en évidence les différences par rapport à l'onde plane précédemment abordée.

La transformée de Fourier $F^*(\omega)$ d'une fonction de la variable temporelle $F(t)$ et sa transformée inverse sont définies par :

$$F^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i\omega t} dt, \quad F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.61)$$

avec ω la pulsation (rad.s^{-1}) et t la variable temporelle (s).

Nous avons choisi dans ce travail une excitation dont la dépendance temporelle correspond à celle d'un signal de type ondelette de Ricker. $E(t)$ et sa transformée de Fourier $E^*(\omega)$ sont représentées sur la Figure 2.20 et s'écrivent respectivement WIRGIN, [2016], MESGOUEZ, [2018] :

$$E(t) = \left(1 - 2\Lambda^2(t - \delta)^2\right) e^{-\Lambda^2(t - \delta)^2}, \quad E^*(\omega) = \frac{\omega^2}{4\Lambda^3\sqrt{\pi}} e^{\left(i\delta\omega - \frac{\omega^2}{4\Lambda^2}\right)} \quad (2.62)$$

avec Λ la fréquence centrale de Ricker (Hz) et δ le décalage temporel (s).

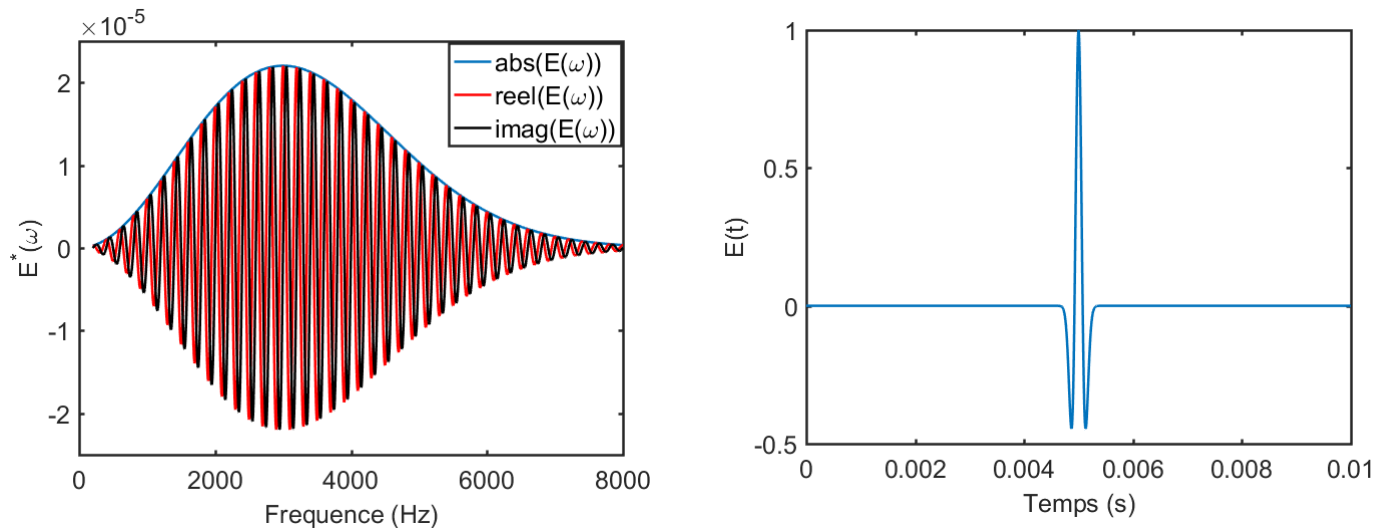


FIGURE 2.20 – Spectre et signal de Ricker à fréquence centrale $\Lambda = 3000$ Hz

Par souci de simplification des écritures dans le domaine fréquentiel, nous omettrons par la suite les exposants * dans les notations des transformées de Fourier. En appliquant la transformée de Fourier aux équations (2.1) et (2.2) nous obtenons les équations du mouvement des ondes

dans le domaine fréquentiel :

$$\nabla^2 \phi_k(\mathbf{x}, \omega) + (\alpha_k(\omega))^2 \phi_k(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (2.63)$$

$$\nabla^2 \psi_k(\mathbf{x}, \omega) + (\beta_k(\omega))^2 \psi_k(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (2.64)$$

$\alpha_k(\omega)$ et $\beta_k(\omega)$ sont les nombres d'ondes longitudinales et transversales dans les milieux considérés (indiqués comme précédemment par k). Les coordonnées spatiales sont représentées par la grandeur vectorielle $\mathbf{x}$.

2.5.1 Onde plane transitoire

Onde incidente en contraintes et expressions des potentiels incidents et totaux

Nous considérons une onde plane P instationnaire s'exprimant sous la forme d'un signal de Ricker et se propageant dans le plan de la section transversale du tunnel dans la direction de l'axe x (Figure 2.1). L'expression de l'onde incidente dans le massif karstique s'écrit dans le domaine fréquentiel en termes de contraintes $\sigma_{1_{xx}}^{(i)}(\mathbf{x}, \omega)$:

$$\sigma_{1_{xx}}^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = \sigma_{max} E(\omega) e^{i(\alpha_1(\omega)x)} \quad (2.65)$$

où σ_{max} correspond à l'amplitude maximale de l'onde incidente (Pa) et $E(\omega)$ au spectre de Ricker défini en relation (2.62). Dans la suite, nous détaillons les étapes permettant d'obtenir le potentiel incident à partir de l'équation (2.65).

La contrainte $\sigma_{1_{xx}}^{(i)}$ de l'onde incidente génère une déformation axiale $e_{1_{xx}}^{(i)}$ (les déformations $e_{1_{yy}}$ et $e_{1_{zz}}$ sont nulles). Les déformations sont d'une part reliées aux déplacements et, d'autre part, aux contraintes, ce qui se résume sous la forme :

$$\frac{\partial u_{1_x}^{(i)}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} = e_{1_{xx}}^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{(\lambda_1 + 2\mu_1)} \sigma_{1_{xx}}^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\sigma_{max}}{\lambda_1 + 2\mu_1} E(\omega) e^{i(\alpha_1(\omega)x)} \quad (2.66)$$

L'intégration par rapport à la variable x conduit à l'expression du déplacement $u_{1_x}(\mathbf{x}, \omega)$ donne par :

$$u_{1_x}^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{i\alpha(\omega)} \left(\frac{\sigma_{max}}{\lambda_1 + 2\mu_1} \right) E(\omega) e^{i(\alpha_1(\omega)x)} \quad (2.67)$$

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires mène aux expressions suivantes :

$$u_{1_r}^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = u_{1_x}^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) \cos \theta, \quad u_{1_\theta}^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = -u_{1_x}^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) \sin \theta \quad (2.68)$$

Le choix d'une onde incidente P entraîne un potentiel vectoriel incident nul ($\psi^{(i)} = 0$). L'équation (2.32) devient alors :

$$u_{1_r}^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial \phi_1^{(i)}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial r}, \quad u_{1_\theta}^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1^{(i)}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \theta} \quad (2.69)$$

En combinant les relations (2.67) et (2.68) avec (2.69), et en intégrant l'équation résultante par rapport à r , il vient :

$$\phi^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{\sigma_{max}}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1^2} E(\omega) e^{i\alpha_1(\omega)r \cos \theta} \quad (2.70)$$

En remplaçant le terme $e^{i\alpha(\omega)r \cos \theta}$ par sa forme étendue en série de Bessel Fourier (2.36), nous obtenons :

$$\phi^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = \varphi_0 E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(\alpha_1(\omega)r) \cos(n\theta) \quad (2.71)$$

où $\varphi_0 = -\frac{\sigma_{max}}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1^2}$ est l'amplitude du potentiel incident (m^2).

L'équation précédente est l'équivalent de (2.37) dans le domaine fréquentiel. De manière analogue au régime harmonique, la réflexion de l'onde sur la dernière couche de la zone endommagée crée à la fois une onde P et une onde SV dans le milieu incident. Les potentiels totaux dans le massif karstique sont donnés alors par :

$$\begin{aligned} \phi_1^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) &= E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \epsilon_n i^n J_n(\alpha_1(\omega)r) + A_n H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega)r) \right\} \cos(n\theta) \\ \text{et } \psi_1^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) &= E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\beta_1(\omega)r) \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Dans les différentes couches de la zone endommagée et du tunnel, il existe également deux ondes réfléchies et deux ondes transmises. Ainsi les potentiels de Helmholtz totaux dans chaque couche de la zone endommagée ($k = 2, 3, \dots, N_L - 1$) et dans le tunnel ($k = N_L$) s'écrivent :

$$\phi_k^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_{nk} H_n^{(2)}(\alpha_k(\omega)r) + D_{nk} H_n^{(1)}(\alpha_k(\omega)r) \right\} \cos(n\theta) \quad (2.73)$$

$$\psi_k^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ M_{nk} H_n^{(2)}(\beta_k(\omega)r) + N_{nk} H_n^{(1)}(\beta_k(\omega)r) \right\} \sin(n\theta) \quad (2.74)$$

Contrainte et déplacement dans le milieu incident

En remplaçant l'équation (2.72) dans les relations (2.32) et (2.34), nous obtenons les expressions des déplacements et contraintes dans le milieu incident :

$$\begin{aligned} u_{1r}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) &= r^{-1} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \epsilon_n i^n \epsilon_{n71}^{(1)}(\alpha_1(\omega)r) + A_n \epsilon_{n71}^{(3)}(\alpha_1(\omega)r) \right. \\ &\quad \left. + B_n \epsilon_{n72}^{(3)}(\beta_1(\omega)r) \right\} \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} u_{1\theta}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) &= r^{-1} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \epsilon_n i^n \epsilon_{n81}^{(1)}(\alpha_1(\omega)r) + A_n \epsilon_{n81}^{(3)}(\alpha_1(\omega)r) \right. \\ &\quad \left. + B_n \epsilon_{n82}^{(3)}(\beta_1(\omega)r) \right\} \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1rr}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) &= 2\mu_1 r^{-2} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \epsilon_n i^n \epsilon_{n11}^{(1)}(\alpha_1(\omega)r) + A_n \epsilon_{n11}^{(3)}(\alpha_1(\omega)r) \right. \\ &\quad \left. + B_n \epsilon_{n12}^{(3)}(\beta_1(\omega)r) \right\} \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1\theta\theta}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) &= 2\mu_1 r^{-2} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \epsilon_n i^n \epsilon_{n21}^{(1)}(\alpha_1(\omega)r) + A_n \epsilon_{n21}^{(3)}(\alpha_1(\omega)r) \right. \\ &\quad \left. + B_n \epsilon_{n22}^{(3)}(\beta_1(\omega)r) \right\} \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1_{r\theta}}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = 2\mu_1 r^{-2} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \epsilon_n i^n \epsilon_{n41}^{(1)}(\alpha_1(\omega)r) + A_n \epsilon_{n41}^{(3)}(\alpha_1(\omega)r) \right. \\ \left. + B_n \epsilon_{n42}^{(3)}(\beta_1(\omega)r) \right\} \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Contraintes et déplacements dans la zone endommagée et le tunnel

Les déplacements et contraintes dans la zone endommagée et le tunnel ($k = 2, 3, \dots, N_L$) sont obtenus en injectant les relations (2.73) et (2.74) dans (2.32) et (2.34), ce qui mène à :

$$\begin{aligned} u_{k_r}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = r^{-1} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_{nk} \epsilon_{n71}^{(4)}(\alpha_k(\omega)r) + D_{nk} \epsilon_{n71}^{(3)}(\alpha_k(\omega)r) \right. \\ \left. + M_{nk} \epsilon_{n72}^{(4)}(\beta_k(\omega)r) + N_{nk} \epsilon_{n72}^{(3)}(\beta_k(\omega)r) \right\} \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} u_{k_\theta}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = r^{-1} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_{nk} \epsilon_{n81}^{(4)}(\alpha_k(\omega)r) + D_{nk} \epsilon_{n81}^{(3)}(\alpha_k(\omega)r) \right. \\ \left. + M_{nk} \epsilon_{n82}^{(4)}(\beta_k(\omega)r) + N_{nk} \epsilon_{n82}^{(3)}(\beta_k(\omega)r) \right\} \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{k_{rr}}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = 2\mu_k r^{-2} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_{nk} \epsilon_{n11}^{(4)}(\alpha_k(\omega)r) + D_{nk} \epsilon_{n11}^{(3)}(\alpha_k(\omega)r) \right. \\ \left. + M_{nk} \epsilon_{n12}^{(4)}(\beta_k(\omega)r) + N_{nk} \epsilon_{n12}^{(3)}(\beta_k(\omega)r) \right\} \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{k_{\theta\theta}}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = 2\mu_k r^{-2} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_{nk} \epsilon_{n21}^{(4)}(\alpha_k(\omega)r) + D_{nk} \epsilon_{n21}^{(3)}(\alpha_k(\omega)r) \right. \\ \left. + M_{nk} \epsilon_{n22}^{(4)}(\beta_k(\omega)r) + N_{nk} \epsilon_{n22}^{(3)}(\beta_k(\omega)r) \right\} \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{k_{r\theta}}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = 2\mu_k r^{-2} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_{nk} \epsilon_{n41}^{(4)}(\alpha_k(\omega)r) + D_{nk} \epsilon_{n41}^{(3)}(\alpha_k(\omega)r) \right. \\ \left. + M_{nk} \epsilon_{n42}^{(4)}(\beta_k(\omega)r) + N_{nk} \epsilon_{n42}^{(3)}(\beta_k(\omega)r) \right\} \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (2.84)$$

2.5.2 Ligne source transitoire

Dans cette partie, nous supposons que l'onde incidente est créée à partir d'une ligne source localisée dans le massif qui émet uniquement des ondes cylindriques primaires. Considérons une ligne source transitoire localisée en $\bar{O}$, à la distance r_0 du centre de la cavité circulaire O (Figure 2.21). D'après Mow et al., [1971], le potentiel $\phi^{(i)}$ de l'onde cylindrique P générée par la source dans le système de coordonnées polaires $(\bar{r}, \bar{\theta})$ s'écrit comme suit :

$$\phi^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = \varphi_0 E(\omega) H_0^{(1)}(\alpha_1 \bar{r}) \quad (2.85)$$

où $\varphi_0 = -\frac{\sigma_{max}}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1^2}$ est l'amplitude du potentiel incident (m^2) et $\bar{r}$ représente la distance entre $\bar{O}$ et le point d'observation M. La fonction de Hankel de premier type est utilisée car les ondes se propagent de la source en $\bar{O}$ (rayon divergent) dans le système de coordonnées $(\bar{r}, \bar{\theta})$. Le premier mode est retenu en raison de la symétrie axiale de la source, Mow et al., [1971]. La même démarche que précédemment est suivie, en particulier, nous exprimons d'abord le potentiel scalaire de l'onde plane incidente dans le système de coordonnées (r, θ) .

Le terme $H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega)r) e^{in\theta}$ peut s'écrire de deux façons selon les configurations $r \geq r_0$ ou

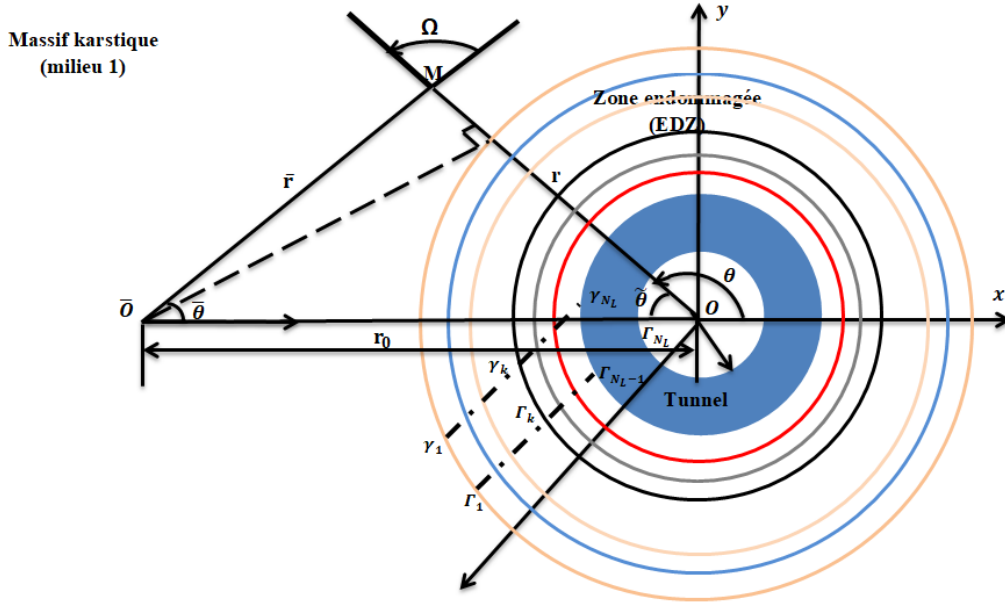


FIGURE 2.21 – Géométrie du problème avec une ligne source

$r \leq r_0$, cf. PAO et al., 1973 :

★ Lorsque $r \geq r_0$

$$H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega)\bar{r})e^{in\bar{\theta}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(\alpha_1(\omega)r_0)H_{n+m}^{(1)}(\alpha_1(\omega)r)e^{i(n+m)\theta} \quad (2.86)$$

★ Sinon pour $r \leq r_0$

$$H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega)\bar{r})e^{in\bar{\theta}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m H_m^{(1)}(\alpha_1(\omega)r_0)J_{n+m}(\alpha_1(\omega)r)e^{i(n+m)\theta} \quad (2.87)$$

Dans le cas présent, $r \leq r_0$ (Figure 2.21), la relation (2.85) devient alors :

$$\phi^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_0 (-1)^n \epsilon_n H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega)r_0) J_n^{(1)}(\alpha_1(\omega)r) \cos(n\theta) \quad (2.88)$$

Pour un angle θ donné, pour tout point situé à l'interface Γ_k ($k = 1, 2, 3, \dots, N_L$) et donc appartenant au cercle de centre O et de rayon r_k , les grandeurs r_0 , r_k et $\bar{r}$ vérifient la relation suivante (formule d'al-Kashi) :

$$\bar{r}^2 = r_k^2 + r_0^2 + 2r_k r_0 \cos \theta \quad (2.89)$$

La réflexion de l'onde cylindrique incidente sur la dernière couche de la zone endommagée donnant naissance à deux ondes réfléchies (une P et une SV) dans le milieu incident, les potentiels de Helmholtz totaux dans le massif karstique sont donnés sous la forme :

$$\begin{aligned} \phi_1^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0 (-1)^n \epsilon_n H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega)r_0) J_n(\alpha_1(\omega)r) \right. \\ \left. + A_n H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega)r) \right\} \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \psi_1^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\beta_1(\omega)r) \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Lorsqu'on remplace l'équation (2.90) dans les expressions (2.32) et (2.34), nous obtenons

l'expression des déplacements et contraintes dans le massif karstique :

$$u_{1_r}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = r^{-1} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0(-1)^n \epsilon_n H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega) r_0) \epsilon_{n71}^{(1)}(\alpha_1(\omega) r) \right. \\ \left. + A_n \epsilon_{n71}^{(3)}(\alpha_1(\omega) r) + B_n \epsilon_{n72}^{(3)}(\beta_1(\omega) r) \right\} \cos(n\theta) \quad (2.91)$$

$$u_{1_\theta}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = r^{-1} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0(-1)^n \epsilon_n H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega) r_0) \epsilon_{n81}^{(1)}(\alpha_1(\omega) r) \right. \\ \left. + A_n \epsilon_{n81}^{(3)}(\alpha_1(\omega) r) + B_n \epsilon_{n82}^{(3)}(\beta_1(\omega) r) \right\} \sin(n\theta) \quad (2.92)$$

$$\sigma_{1_{rr}}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = 2\mu_1 r^{-2} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0(-1)^n \epsilon_n H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega) r_0) \epsilon_{n11}^{(1)}(\alpha_1(\omega) r) \right. \\ \left. + A_n \epsilon_{n11}^{(3)}(\alpha_1(\omega) r) + B_n \epsilon_{n12}^{(3)}(\beta_1(\omega) r) \right\} \cos(n\theta) \quad (2.93)$$

$$\sigma_{1_{\theta\theta}}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = 2\mu_1 r^{-2} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0(-1)^n \epsilon_n H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega) r_0) \epsilon_{n21}^{(1)}(\alpha_1(\omega) r) \right. \\ \left. + A_n \epsilon_{n21}^{(3)}(\alpha_1(\omega) r) + B_n \epsilon_{n22}^{(3)}(\beta_1(\omega) r) \right\} \cos(n\theta) \quad (2.94)$$

$$\sigma_{1_{r\theta}}^{(T)}(\mathbf{x}, \omega) = 2\mu_1 r^{-2} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_0(-1)^n \epsilon_n H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega) r_0) \epsilon_{n41}^{(1)}(\alpha_1(\omega) r) \right. \\ \left. + A_n \epsilon_{n41}^{(3)}(\alpha_1(\omega) r) + B_n \epsilon_{n42}^{(3)}(\beta_1(\omega) r) \right\} \sin(n\theta) \quad (2.95)$$

Pour la suite, les potentiels scalaires et vectoriels relatifs aux ondes volumiques de compression et de cisaillement s'expriment de manière identique aux relations (2.73) et (2.74) dans l'EDZ et la paroi. Les contraintes et déplacements engendrés dans ces milieux sont donnés également par les expressions (2.80)-(2.84).

2.5.3 Assemblage et expression de la transformée de Fourier inverse

Nous considérons les mêmes conditions aux limites que celles introduites dans le cadre du régime harmonique. De ce fait, le système global s'écrit de manière identique à celui présenté dans la section 2.3.4. Dans le domaine de Fourier, le système linéaire est résolu pour chaque fréquence ω , N_M fois dans le but d'obtenir les coefficients d'expansion. La détermination des coefficients permet ensuite de déduire les spectres des contraintes et déplacements. Pour obtenir les signaux temporels des contraintes et déplacements, nous devons utiliser la relation de la transformée inverse de Fourier (2.61). Pour optimiser le calcul numérique, nous utilisons les propriétés de grandeur réelle des fonctions. La transformée inverse de Fourier $F(t)$ s'écrit :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.96)$$

$F(t)$ est une grandeur réelle et $F(\omega)$ est une grandeur complexe représentant sa transformée. On peut décomposer la transformée inverse de la manière suivante :

$$F(t) = \int_{-\infty}^0 F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega + \int_0^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.97)$$

En utilisant le changement de variables $\omega' = -\omega$, il vient :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} F(-\omega') e^{i\omega' t} d\omega' + \int_0^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_0^{+\infty} \{F(-\omega) e^{i\omega t} + F(\omega) e^{-i\omega t}\} d\omega \quad (2.98)$$

En écrivant le conjugué de l'équation précédente (2.98), puis en utilisant la propriété que F est une fonction réelle, nous obtenons :

$$\overline{F}(t) = \int_0^{+\infty} \{\overline{F}(-\omega) e^{-i\omega t} + \overline{F}(\omega) e^{i\omega t}\} d\omega \quad (2.99)$$

$$F(t) - \overline{F}(t) = 0 = \int_0^{+\infty} \{(F(\omega) - \overline{F}(-\omega)) e^{-i\omega t} + (F(-\omega) - \overline{F}(\omega)) e^{i\omega t}\} d\omega \quad (2.100)$$

et au final :

$$F(-\omega) = \overline{F}(\omega) \quad (2.101)$$

Lorsqu'on remplace la relation (2.98) dans (2.101), nous obtenons :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \{\overline{F}(\omega) e^{i\omega t} + F(\omega) e^{-i\omega t}\} d\omega = \int_0^{+\infty} \{\overline{F(\omega)} e^{-i\omega t} + F(\omega) e^{-i\omega t}\} d\omega \quad (2.102)$$

Finalement, il vient avec $\Re$ la partie réelle :

$$F(t) = 2\Re \int_0^{+\infty} \{F(\omega) e^{-i\omega t}\} d\omega \quad (2.103)$$

Pour effectuer le calcul numérique, l'équation précédente est tronquée d'une valeur minimale (ω_{min}) à une valeur maximale (ω_{max}). L'intervalle $\{\omega_{min}, \omega_{max}\}$ doit contenir toutes les gammes de fréquence nécessaires à l'étude. Ainsi, en prenant l'exemple de la contrainte orthoradiale, nous obtenons :

$$\sigma_{\theta\theta}(\mathbf{x}, t) = 2\Re \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \sigma_{\theta\theta}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.104)$$

2.5.4 Calcul numérique

Critère de convergence choisi

Il est important de s'assurer en régime transitoire que les signaux incidents de Ricker (ondes plane et cylindrique) sont correctement modélisés et que l'égalité entre les termes de l'équation (2.36) est rigoureusement vérifiée pour toute fréquence ω . Lorsque cette condition n'est pas respectée, des oscillations numériques peuvent apparaître et perturber les signaux des champs mécaniques. Pour mettre en évidence ces phénomènes, nous proposons par exemple de tracer l'évolution de la contrainte incidente axiale calculée à partir de l'équation (2.65) et de sa forme écrite à l'aide des séries de Bessel Fourier :

$$\sigma_{1xx}^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = \sigma_{max} E(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(\alpha_1(\omega)r) \cos(n\theta) \quad (2.105)$$

Nous utilisons dans cette étude un décalage temporel de 0.005 s, une fréquence centrale de 3000 Hz en Ricker et une amplitude maximale incidente $\sigma_{max} = 100$ Pa. Les intervalles retenus pour la fréquence et le temps sont : [100, 8000] Hz et [0, 0.01] s (Figure 2.20). Nous proposons ensuite

de tracer le signal de la contrainte axiale incidente aux points de coordonnées $r = \{2, 10\}$ m et $\theta = \pi$. Sur la Figure 2.22, nous comparons les résultats obtenus à partir des deux expressions. Lorsque $r = 2$ m, les résultats concordent à partir de 21 modes et pour $r = 10$ m à partir de 81 modes. Les modes inférieurs à 21 et 81 font apparaître les phénomènes oscillatoires illustrés sur la Figure 2.22. Par ailleurs, les résultats montrent également une augmentation du nombre de modes nécessaire lorsque le rayon est croissant.

D'autre part, lorsqu'on focalise l'analyse sur $r = 2$ m, une étude réalisée sur plusieurs fréquences harmoniques a permis de montrer une convergence assez rapide dans les basses fréquences, contrairement aux hautes fréquences. Par exemple à 400 Hz, 3 modes suffisent pour converger alors qu'à 3900 Hz et 8000 Hz, nous devons respectivement utiliser 11 et 21 modes. L'étude a ainsi permis de mettre en évidence une augmentation nécessaire du nombre de modes en fonction de la fréquence. Ainsi le choix d'un nombre de modes fixe pour toutes les fréquences comprises entre [100, 8000] Hz n'est pas ergonomique, en terme de temps de calcul notamment. D'autre part, certains problèmes numériques à basse fréquence, que nous abordons dans la prochaine section, sont également problématiques. Ceci nous a donc amené à rechercher une relation permettant de lier en une seule expression le nombre de modes, la fréquence et le rayon. Dans la littérature, WIRGIN, [2016], MESGOUEZ, [2018] ont proposé une formule semi-empirique reliant ces trois quantités s'écrivant comme suit :

$$N_M = c\alpha_1(\omega)r + 3 \quad (2.106)$$

où c est une constante, généralement égale à 2 ou 3, r est le rayon du point d'observation et $\alpha_1(\omega)$ est le nombre d'onde dans le milieu incident. $\alpha_1(\omega)$ est utilisé dans la relation (2.106) en raison du choix de l'onde incidente (onde longitudinale dans le milieu 1). La relation précédente est très importante car elle donne, pour une position r et une fréquence f , le nombre de modes nécessaire permettant d'assurer la convergence des séries de Bessel-Fourier. Le critère de convergence (2.58) précédemment établi rendait les simulations trop coûteuses en temps de calcul lorsque plusieurs fréquences étaient étudiées. L'utilisation de la relation (2.106) en régime transitoire a permis d'éviter les tests de convergence à répétition pour chaque mode et fréquence et a donc permis de réduire considérablement le temps de calcul.

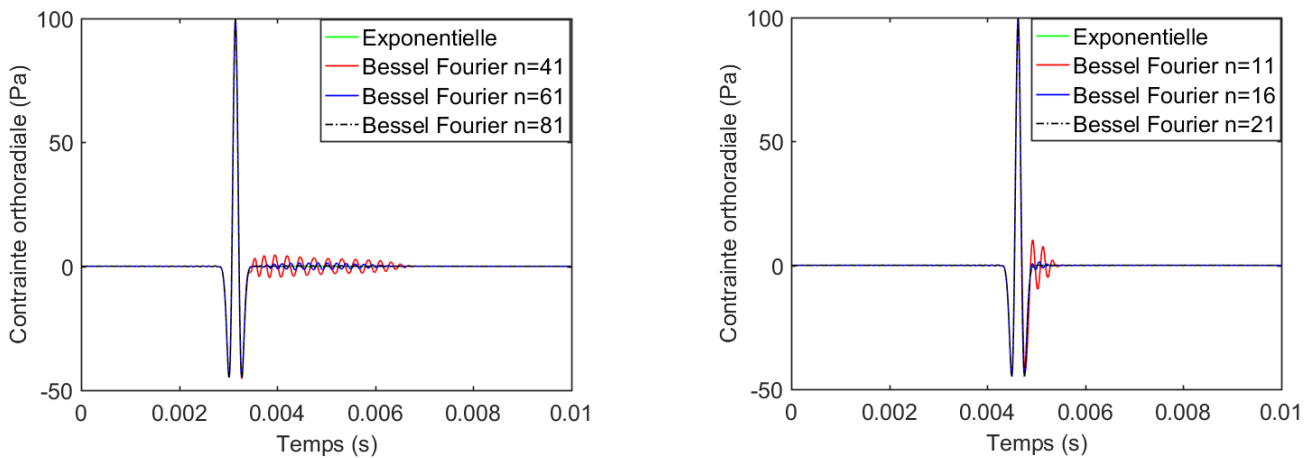


FIGURE 2.22 – Comparaison du signal de Ricker calculé à la fréquence centrale $\Lambda = 3000$ Hz à partir de son expression exponentielle et de la partie tronquée à n modes de la série de Bessel-Fourier associée, pour $\theta = \pi$ et pour les rayons respectifs $r = 10$ m (gauche) et $r = 2$ m (droite).

Difficulté numérique à basse fréquence

La matrice globale $[K]$ est essentiellement composée de fonctions de Hankel du premier et du deuxième ordre calculées pour différents modes n , ainsi que pour différents rayons et pour différents nombres d'ondes. Nous proposons ici d'illustrer l'évolution en échelle logarithmique par exemple de la fonction de Hankel du premier ordre associée au nombre d'onde longitudinale dans le milieu incident $H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega)r)$ en fonction de la fréquence et pour différents modes n (en fixant le rayon à $r = 2$ m). Cette évolution est proposée sur la Figure 2.23. Une fréquence centrale de Ricker $\Lambda = 3000$ Hz est considérée, de ce fait, la courbe est tracée sur l'intervalle de fréquence variant de 10 à 8000 Hz. Nous visualisons le comportement asymptotique des fonctions de Hankel à basse fréquence. Nous remarquons de plus qu'une croissance du nombre de modes entraîne une augmentation en amplitude des fonctions de Hankel dans l'intervalle de fréquences choisi. La valeur numérique d'une fonction de Hankel sans échelle logarithmique pour le mode numéro 45 à basse fréquence est de l'ordre de 10^{165} . Sachant que le nombre de modes N_M nécessaire pour reproduire correctement le signal incident dépend de la position et de la fréquence, il est possible d'avoir, pour certains couples rayon-fréquence, des valeurs très élevées pour les modes élevés. La matrice globale $[K]$ est composée d'éléments dont les valeurs peuvent être très importantes, ce qui conduit à une matrice potentiellement mal conditionnée. Par ailleurs, la présence des coefficients de raideurs K_{k_r} et K_{k_θ} amplifient ces valeurs dans le cas d'un contact imparfait. Ces différents aspects combinés entraînent une difficulté dans l'inversion numérique de la matrice globale.

Pour diminuer l'amplitude des fonctions de Hankel, nous avons proposé de démarrer à partir d'une fréquence minimale de 200 Hz plutôt que de partir d'une fréquence initiale quasi nulle (10 Hz). Ce choix n'affecte pas de manière significative le contenu fréquentiel des champs mécaniques et permet de diminuer l'ordre de grandeur des fonctions de Hankel dans $[K]$, en passant notamment de 10^{167} à 10^{77} .

Il est également important de mentionner que l'utilisation des solveurs directs Matlab (linsolve, mldivide, inv) pour la résolution de l'équation (2.56) peut parfois entraîner des problèmes de sauts numériques dans le spectre des contraintes et déplacements. Lorsque ces discontinuités numériques sont présentes, il est impossible d'obtenir les signaux des champs mécaniques par l'équation (2.103). Ces problèmes numériques ont amené à utiliser directement des solveurs itératifs avec des pré-conditionneurs bien adaptés. Ainsi, différents solveurs ont été testés parmi lesquels nous pouvons citer : PCG (Preconditioned conjugate gradients method), LSQR (least-squares method), GMR (generalized minimum residual method) et BICGSTABL (stabilized biconjugate gradients method). Il est important de souligner que les algorithmes de résolution numérique des solveurs sont tous différents. Parmi les solveurs testés, les résultats ont montré que l'utilisation de l'algorithme du BICGSTABL, numériquement plus précis et stable pour nos configurations d'étude, a permis de fournir des résultats ayant une réelle signification physique. Pour illustrer ce point, la Figure 2.24 propose le contenu fréquentiel ainsi que le signal de la contrainte orthoradiale obtenus avec différents solveurs, pour un problème multicouches composé d'une cavité circulaire double incluant quatre couches dures pour l'EDZ (point d'observation $r = 3.4$ m et $\theta = \pi$). Nous pouvons d'une part clairement identifier que les réponses fréquentielles sont nettement différentes. D'autre part, une analyse fine des signaux permet de montrer que le résultat obtenu avec le solveur BICGSTABL tient un bon accord avec la théorie. Les autres résultats obtenus avec PCG, LSQR GMR et LSQR mettent en évidence des oscillations numériques, notamment due à la divergence des solutions.

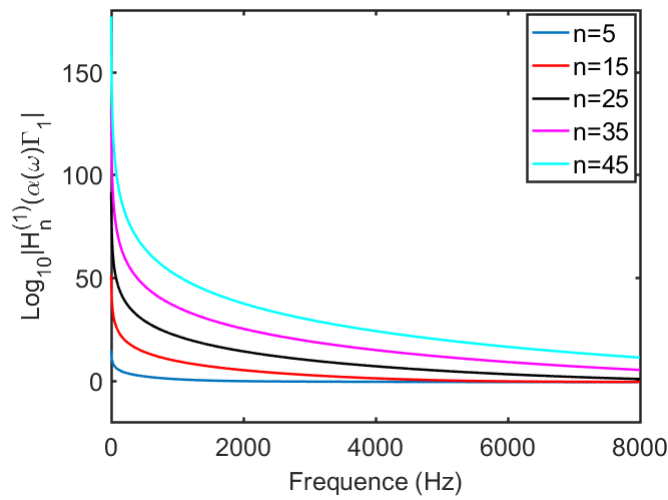


FIGURE 2.23 – Évolution en échelle logarithmique de $H_n^{(1)}(\alpha_1(\omega) * 2)$ en fonction du nombre de modes et de la fréquence

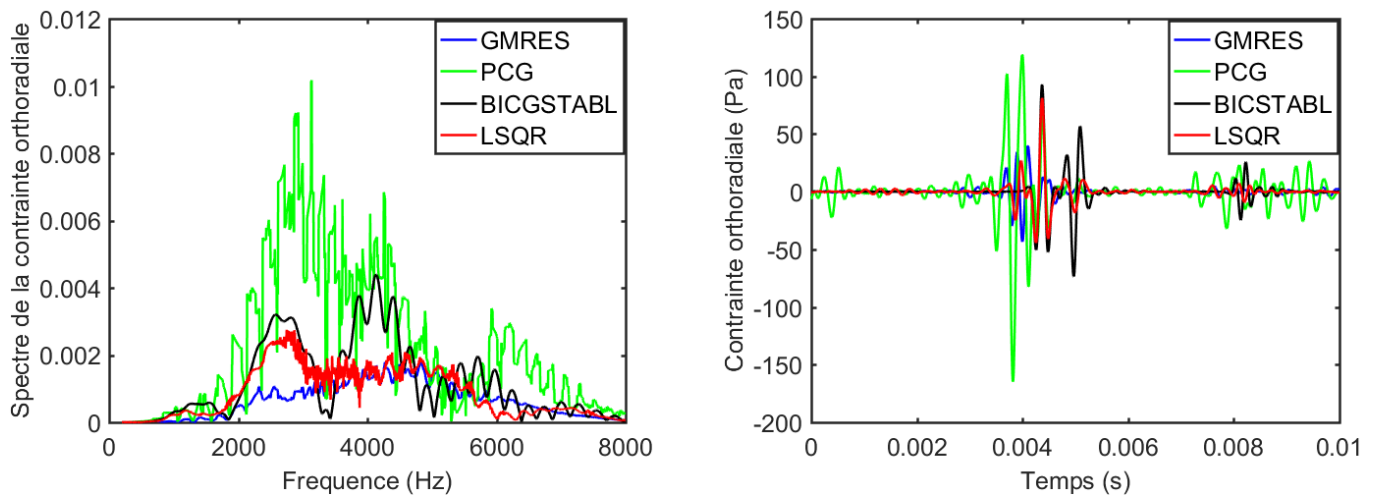


FIGURE 2.24 – Spectre et signal de la contrainte orthoradiale calculés à partir de plusieurs solveurs

2.5.5 Résultats pour une source en onde plane

Pour identifier et quantifier les ondes P et SV, nous commençons d'abord par analyser les résultats de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial dans le cas d'une cavité simple. Puis nous illustrons les réflexions qui apparaissent dans le cas d'un tunnel double avec un revêtement en béton. Nous mettons pour finir en évidence l'influence du contact imparfait et de la présence de la zone endommagée sur les champs mécaniques étudiés.

Cavité simple

Nous considérons un signal de Ricker centré sur 0.005 s en supposant une origine temporelle située au centre de la cavité. Comme l'onde incidente arrive de la gauche, son signal incident sur les points d'observation choisis $r = \{5, 10, 15\}$ m et $\theta = \{2\pi/3, \pi\}$ doit être observé sur des temps inférieurs à 5 ms. Cette tendance est bien visible sur les résultats de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial (Figures 2.26). Nous pouvons également remarquer sur les figures que la notion d'onde plane est bien respectée avant réflexion.

La réflexion donne une onde P et une onde SV dont les amplitudes diminuent progressivement lorsque le rayon augmente. Ces ondes P et SV peuvent être clairement reconnues à travers leur temps de parcours. Comme la cavité simple a un rayon de $r = 2$ m, pour $\theta = \pi$, les trois points choisis se trouvent respectivement à des distances de 3, 8 et 13 mètres de l'interface. Ces valeurs peuvent être trouvées numériquement à l'aide des temps d'aller et de retour des ondes. L'expression du temps de retour de l'onde P après impact sur la cavité s'écrit :

$$T_{pr} = T_{pa} + \frac{d_{avant}}{C_{p1}} + \frac{d_{apres}}{C_{p1}} \quad (2.107)$$

où d_{avant} et d_{apres} représentent les distances parcourues avant et après réflexions. T_{pa} et T_{pr} représentent respectivement les temps aller et retour de l'onde P (avant et après réflexion).

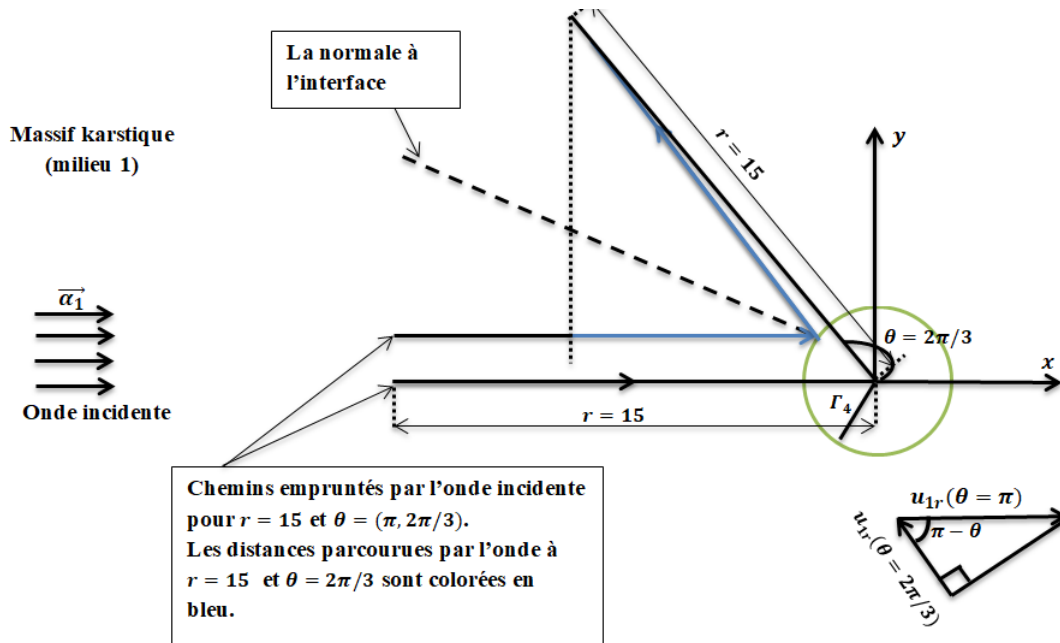


FIGURE 2.25 – Schéma de synthèse pour l'explication des distances parcourues par l'onde incidente à $r = 15$ et $\theta = 2\pi/3$

Par exemple, lorsqu'on considère le signal de la contrainte orthoradiale à $r = 15$ m et $\theta = \pi$ (courbe bleue) de la Figure 2.26(a) (gauche), la distance théorique totale parcourue par l'onde vaut 26 m puisque ($d_{avant} = d_{apres} = 13$ m). Connaissant la vitesse de l'onde P dans le milieu incident, $C_{p_1} = 5400$ m/s, les temps $T_{pr} = 7.03$ ms et $T_{pa} = 2.22$ ms, nous obtenons numériquement à travers l'équation (2.107), une valeur $d = 12.98$ m. Ce résultat permet de confirmer que le signal observé à $T_{pr} = 7.03$ ms est bien celui de l'onde P réfléchi. Sa forme temporelle est inversée à cause de la différence d'impédance entre le massif karstique et le vide. L'impédance acoustique est définie comme le produit de la densité par la vitesse du milieu et lorsqu'elle diminue d'un milieu 1 vers un milieu 2, nous obtenons un coefficient de réflexion négatif responsable de l'inversion du signal. Comme l'onde SV est créée à l'issue de la réflexion de l'onde P sur la cavité, son temps de retour numérique obtenu sur la Figure 2.26(a) (gauche) peut être déduit théoriquement à travers l'expression :

$$T_{sr} = T_{pa} + \frac{d_{avant}}{C_{p_1}} + \frac{d_{apres}}{C_{s_1}} \quad (2.108)$$

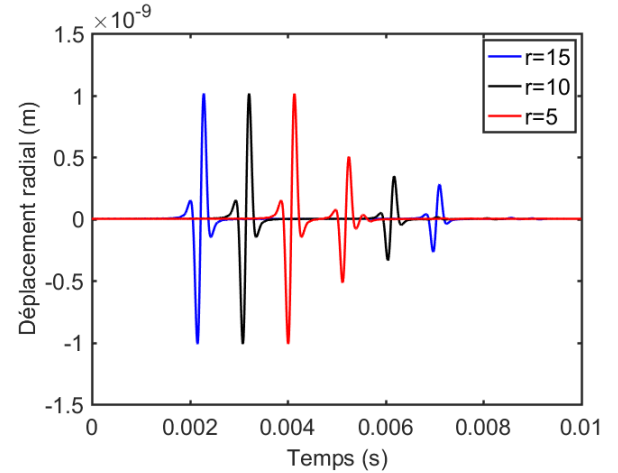
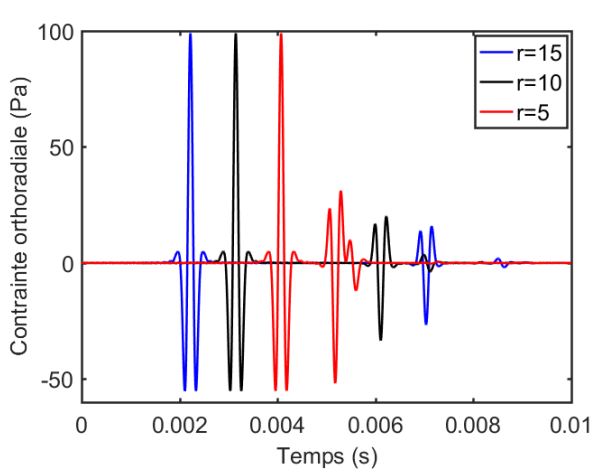
Comme C_{s_1} est égale à 3300 m/s, nous obtenons après calcul que $T_{sr} = 8.57$ s, résultat en cohérence avec celui obtenu numériquement sur la Figure 2.26(a). Ceci nous permet de mentionner que le signal d'amplitude relativement faible par rapport à l'onde P est bien celui de l'onde SV. Les mêmes analyses peuvent être effectuées pour les points $r = \{5, 10\}$ m et $\theta = \pi$ (courbe rouge et noire), plus particulièrement sur les courbes noires en contrainte orthoradiale. Dans le cas spécifique où $r = 5$ m, le point devient trop proche de l'interface, les signaux de l'onde P et de l'onde SV se mélangent. Nous proposons de synthétiser dans le tableau 2.5, les différentes valeurs théoriques et numériques ainsi que les temps aller et retour des ondes.

Dans le cas où $\theta = 2\pi/3$, lorsqu'on projette les points $r = \{5, 10, 15\}$ m sur l'axe horizontal (cf Figure 2.25), nous pouvons identifier sur la Figure 2.25, une diminution des distances avant réflexion (d_{avant}) par rapport au cas précédent à $\theta = \pi$. Cette diminution entraîne forcément une réduction des distances et un rétrécissement de l'intervalle de temps des signaux de l'onde incidente en contrainte et déplacement, comme présenté sur la Figure 2.26 avant réflexion.

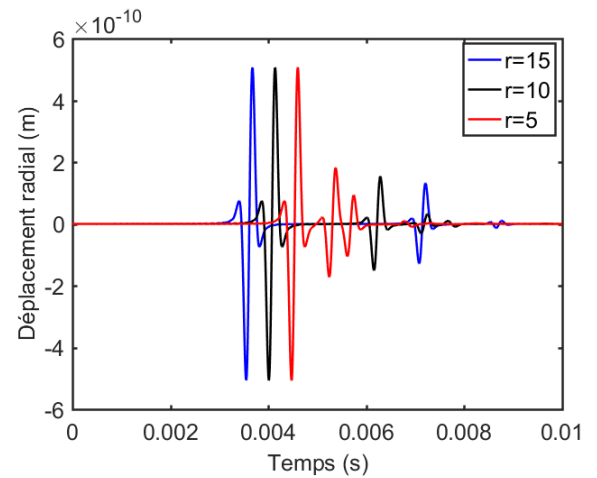
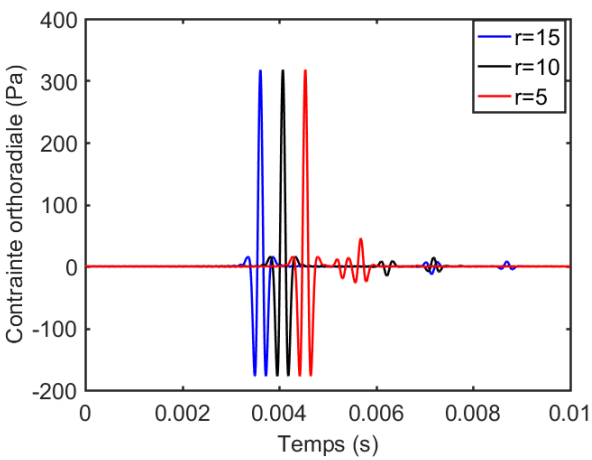
L'amplitude du déplacement radial à $\theta = 2\pi/3$ correspond à la moitié du déplacement radial à $\theta = \pi$. En effet, le déplacement radial à $\theta = \pi$ correspond directement à la composante selon x du vecteur déplacement, alors que pour $\theta = 2\pi/3$, une projection est nécessaire avec le facteur $\cos(\pi/3) = 1/2$.

Rayon et angle r, θ	Théorique d_{avant}, d_{apres} (m)	Numérique d_{avant}, d_{apres} (m)	Numérique T_{pa}, T_{pr} (ms)	Numérique T_{sr} (ms)
15, π	13.00, 13.00	12.98, 12.98	2.22, 7.03	8.56
10, π	8.00, 8.00	7.98, 7.98	3.15, 6.11	7.05
5, π	3.00, 3.00	2.98, 2.98	4.07, 5.18	5.53
15, $2\pi/3$	5.80, 13.30	5.80, 13.30	3.61, 7.11	8.71
10, $2\pi/3$	3.30, 8.50	3.31, 8.57	4.07, 6.24	7.25
5, $2\pi/3$	0.70, 3.40	0.73, 3.35	4.54, 5.29	5.69

TABLE 2.5 – Valeurs théoriques et numériques des temps d’aller et retour des ondes P et S. Cas d’une onde plane incidente



(a) $\theta = \pi$



(b) $\theta = 2\pi/3$

FIGURE 2.26 – Contrainte orthoradiale et déplacement radial à $r = \{5, 10, 15\}$ m

Cavité double

La Figure 2.27 correspond à l'évolution temporelle de la contrainte orthoradiale pour le point particulier $r = 10$ m et $\theta = \pi$ pour la configuration cavité avec paroi bétonnée dans le cas d'un contact parfait. Dans cette configuration, quatre vitesses d'ondes (deux primaires et deux secondaires) sont présentes dans le domaine d'étude. On peut procéder comme précédemment à un calcul des temps d'arrivée suivants :

- ★ le signal étant toujours centré à $t = 5$ ms, le temps d'arrivée de l'onde P pour le point $r = 10$ m et $\theta = \pi$ est de 3.15 ms.
- ★ suite à la réflexion sur la paroi bétonnée, l'onde P réfléchie arrive à $t = 5.96$ ms.
- ★ la transmission-réflexion-transmission en onde P donne un temps d'arrivée de $t = 6.12$ ms.
- ★ quant aux conversions d'ondes en SV, la première arrivée de l'onde SV correspond à $t = 6.86$ ms.
- ★ les conversion-réflexion-conversion conduisent à une fourchette temporelle entre 7 et 7.6 ms, donnant lieu à un signal plus étalé mélangeant les différentes contributions.

Les ordres de grandeurs obtenus sur les figures sont en cohérence avec les calculs théoriques précédents.

Les Figures 2.28 présentent les contraintes orthoradiales et les déplacements radiaux dans les deux cas de contacts parfait et imparfait, pour les trois angles $\theta = \{\pi, 5\pi/6, 2\pi/3\}$ pour la configuration cavité avec paroi bétonnée. Dans le cas d'un contact imparfait, la détection précise des ondes P et S réfléchies devient plus difficile à cause des réflexions multiples des ondes piégées dans les zones à interfaces imparfaites. La présence d'un contact imparfait modifie considérablement la forme du signal dès lors qu'une première réflexion a eu lieu. La Figure 2.28 a) permet une comparaison directe entre les contacts parfait et imparfait : effectivement, le contraste entre le massif karstique et le béton entraîne une réflexion assez faible de l'onde P à l'interface karst-béton pour un contact parfait, et de fait le signal bleu visible sur la figure correspond au retour de l'onde P suite à sa réflexion sur la surface libre du tunnel, alors que le signal rouge qui arrive légèrement en avance est dû à la réflexion de l'onde P à l'interface imparfaite qui génère une transmission dégradée à l'interface karst-béton. Les diminutions d'amplitude dues à la présence du contact imparfait sont clairement visibles sur les figures du déplacement radial suivant les points d'observation choisis et l'atténuation des ondes s'effectue plus lentement par rapport au contact parfait. En particulier, les réflexions multiples modifient la réponse en chaque point étudié par rapport au cas de contact parfait.

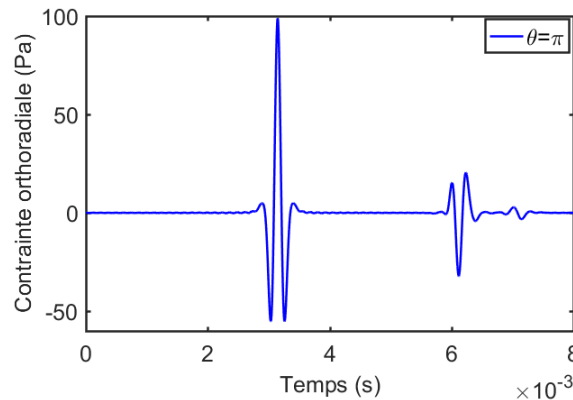
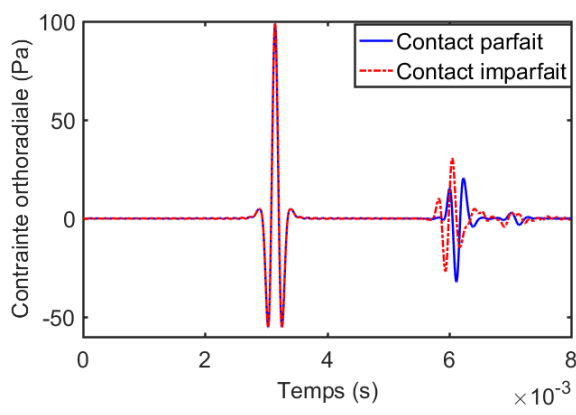
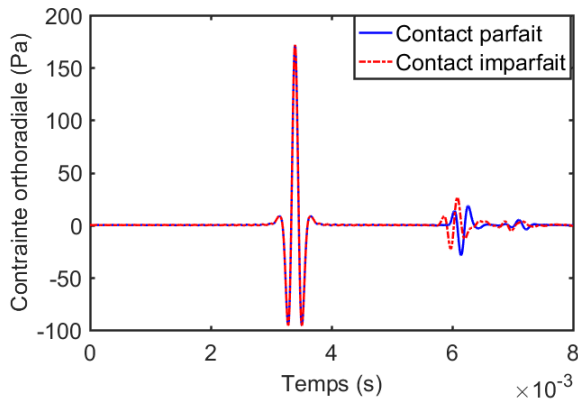
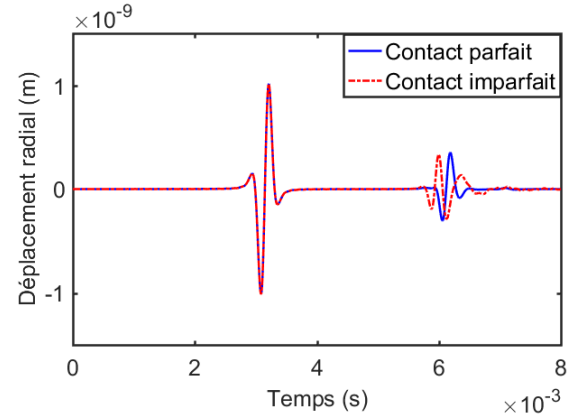
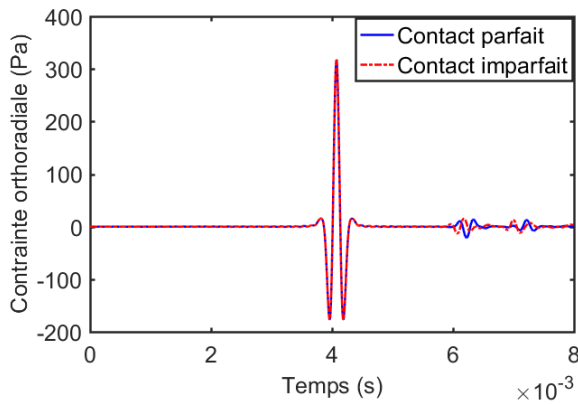
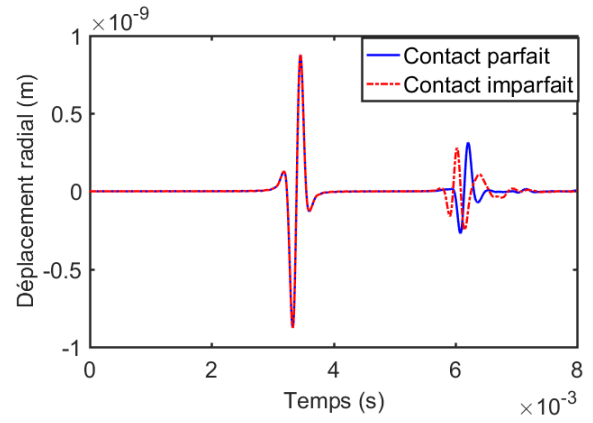
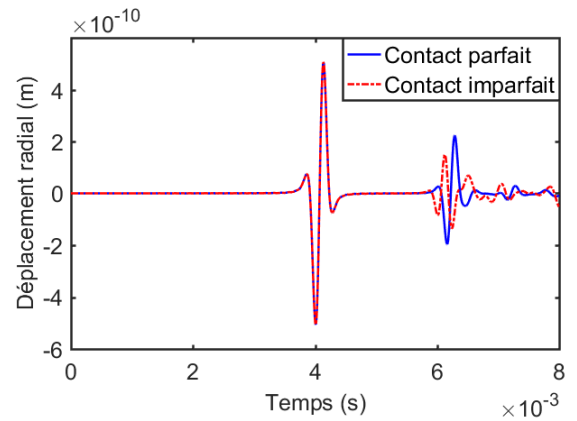


FIGURE 2.27 – Contrainte orthoradiale pour un contact parfait à $r = 10$ m et $\theta = \pi$


(a) $\theta = \pi$

(b) $\theta = 5\pi/6$

(c) $\theta = 2\pi/3$

FIGURE 2.28 – Contrainte orthoradiale et déplacement radial dans les cas d'un contact parfait et imparfait à $r = 10$ m

Cavité double et présence de la zone endommagée

Dans cette section, nous rajoutons soit deux couches dures d'épaisseur 0.5 m, soit quatre couches dures d'épaisseur 0.25 m, dans la configuration cavité circulaire double pour modéliser de manière plus raffinée la zone endommagée. Les décalages apparaissant sur les Figures 2.29 proviennent de la différence de contraste entre les différentes configurations avec ou sans EDZ : les réflexions ont alors lieu au niveau soit de la première interface karst-EDZ soit au niveau de la surface libre, soit plus progressivement entre ces deux extrêmes. L'identification précise des différentes conversions dans les signaux dues aux différents milieux devient naturellement plus difficile lorsque le nombre de couches décrivant l'EDZ augmente.

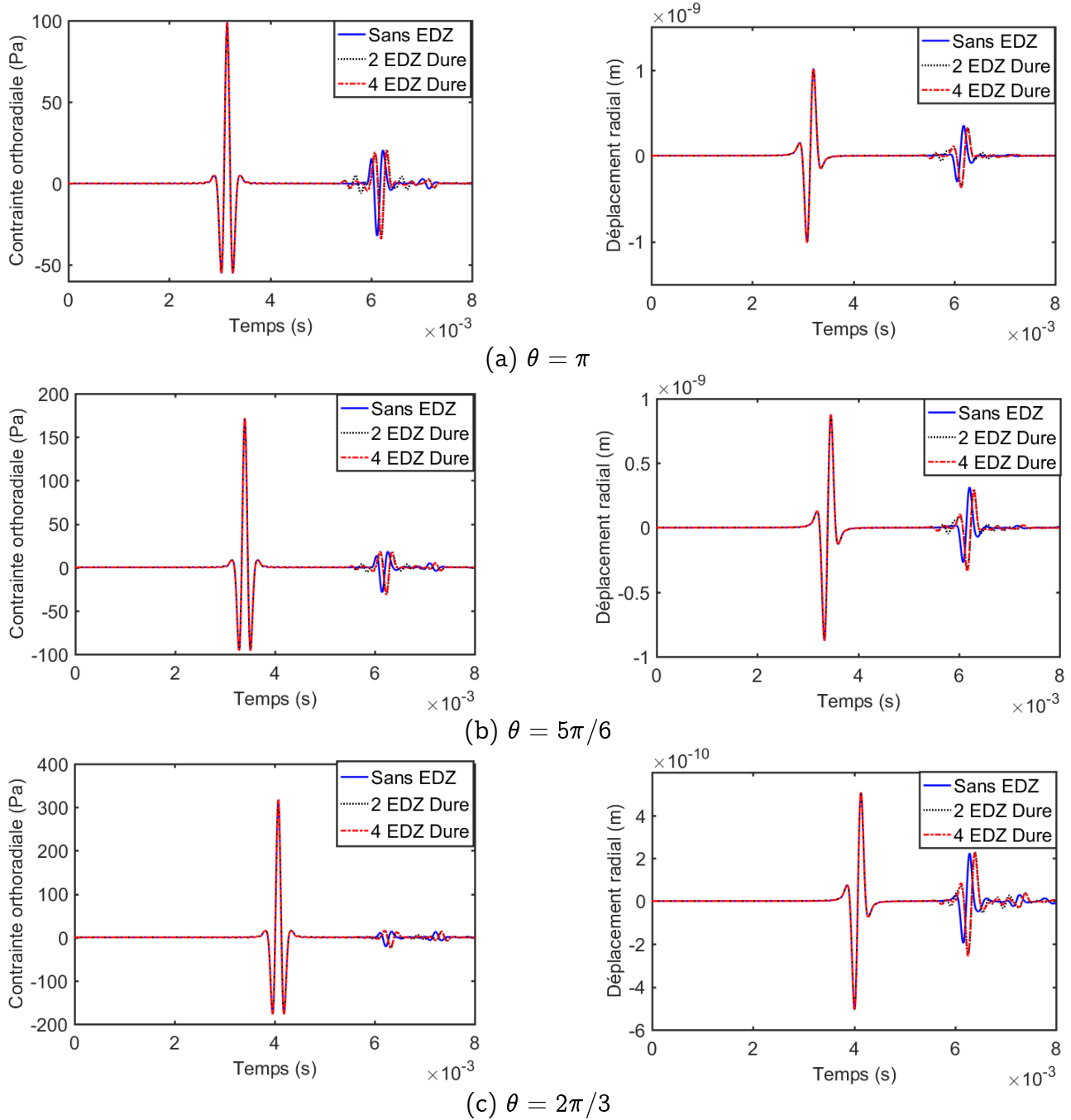


FIGURE 2.29 – Contrainte orthoradiale et déplacement radial en absence et présence d'EDZ à $r = 10$ m

2.5.6 Résultats pour une ligne source

Nous avons choisi comme illustration complémentaire des capacités de l'approche semi-analytique multicouches circulaires un exemple de résultat obtenu avec la ligne source en guise d'excitation du modèle. Nous proposons l'étude de la cavité simple au sein d'un massif kars-tique soumise à une source positionnée à une distance de $r_0 = 9$ m du centre de la galerie. Nous considérons toujours le même décalage temporel en Ricker, en fixant cette fois l'origine temporelle au niveau de la source.

Cavité simple

Contrairement à l'onde plane, l'onde cylindrique incidente est atténuée d'un facteur proportionnel à la distance parcourue depuis la source. Cette tendance est observée à la fois sur les signaux de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial, cf Figure 2.30. Les mêmes analyses que celles précédemment proposées dans la section 2.5.5 peuvent être utilisées pour identifier les ondes P et SV. Comme la ligne source émet uniquement des ondes P, il possible de calculer théoriquement les temps de passage des ondes aux points d'observation $r = \{7, 5, 3\}$ m et $\theta = \pi$. Par exemple le temps de première arrivée de l'onde P est donnée par la simple relation $T_{pa} = \frac{d'}{C_{p1}}$, où d' représente la distance entre la ligne source et les points d'observation choisis.

Les temps théoriques et numériques sont regroupés dans le tableau 2.6 et confirme une seconde fois la pertinence de l'approche développée.

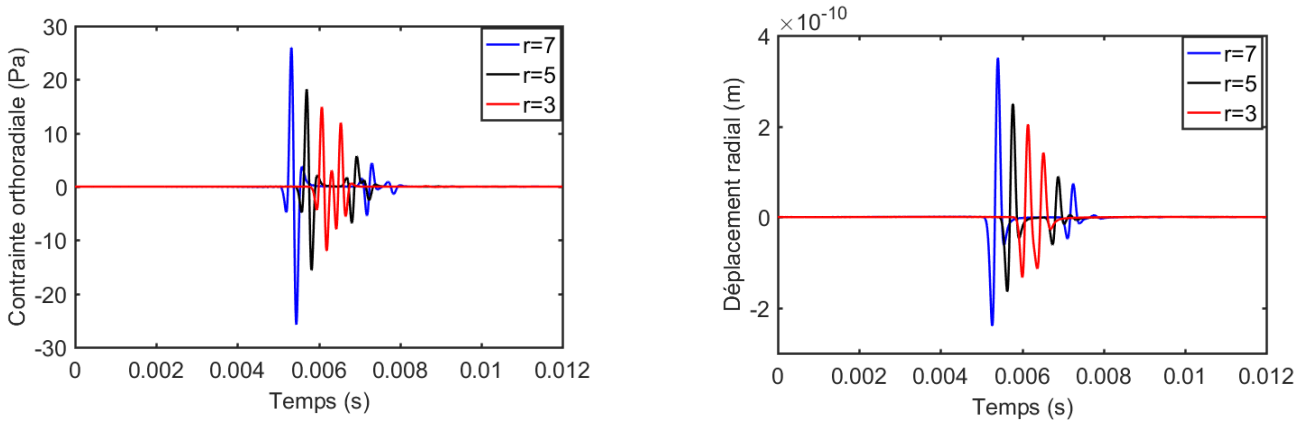


FIGURE 2.30 – Contrainte orthoradiale et du déplacement radial à $r = \{3, 5, 7\}$ et $\theta = \pi$

Rayon et angle	Théorique	Numérique	Numérique	Numérique
r, θ	d_{avant}, d_{apres} (m)	d_{avant}, d_{apres} (m)	T_{pa}, T_{pr} (ms)	T_{sr} (ms)
7, π	5.00, 5.00	5.03, 5.03	5.32, 7.19	7.86
5, π	3.00, 3.00	3.03, 3.03	5.70, 6.83	7.22
3, π	1.00, 1.00	1.00, 1.00	6.07, 6.44	6.56

TABLE 2.6 – Valeurs théoriques et numériques obtenus dans le cas d'une ligne source pour la configuration simple de la cavité

Influence de la viscoélasticité (amortissement hystérétique)

La méthode semi-analytique permet de prendre en compte l'aspect amorti d'un milieu en introduisant une partie imaginaire dans les coefficients élastiques de Lamé (λ , μ) de la façon suivante :

$$\lambda' = \lambda(1 - i\eta_a); \quad \mu' = \mu(1 - i\eta_a); \quad E' = E(1 - i\eta_a) \quad (2.109)$$

où η_a représente le facteur d'atténuation de l'amortissement hystérétique présenté dans le chapitre bibliographique. Nous utilisons ici deux couches d'EDZ pour modéliser la zone endommagée autour du tunnel bétonné, avec les mêmes paramètres mécaniques et géométriques que précédemment. Sur les Figures 2.31-2.32, nous pouvons clairement identifier les effets de dissipation d'énergie dus à la viscosité des milieux. L'atténuation des champs mécaniques devient relativement importante au fur et à mesure que le facteur d'amortissement hystérétique η_a augmente.

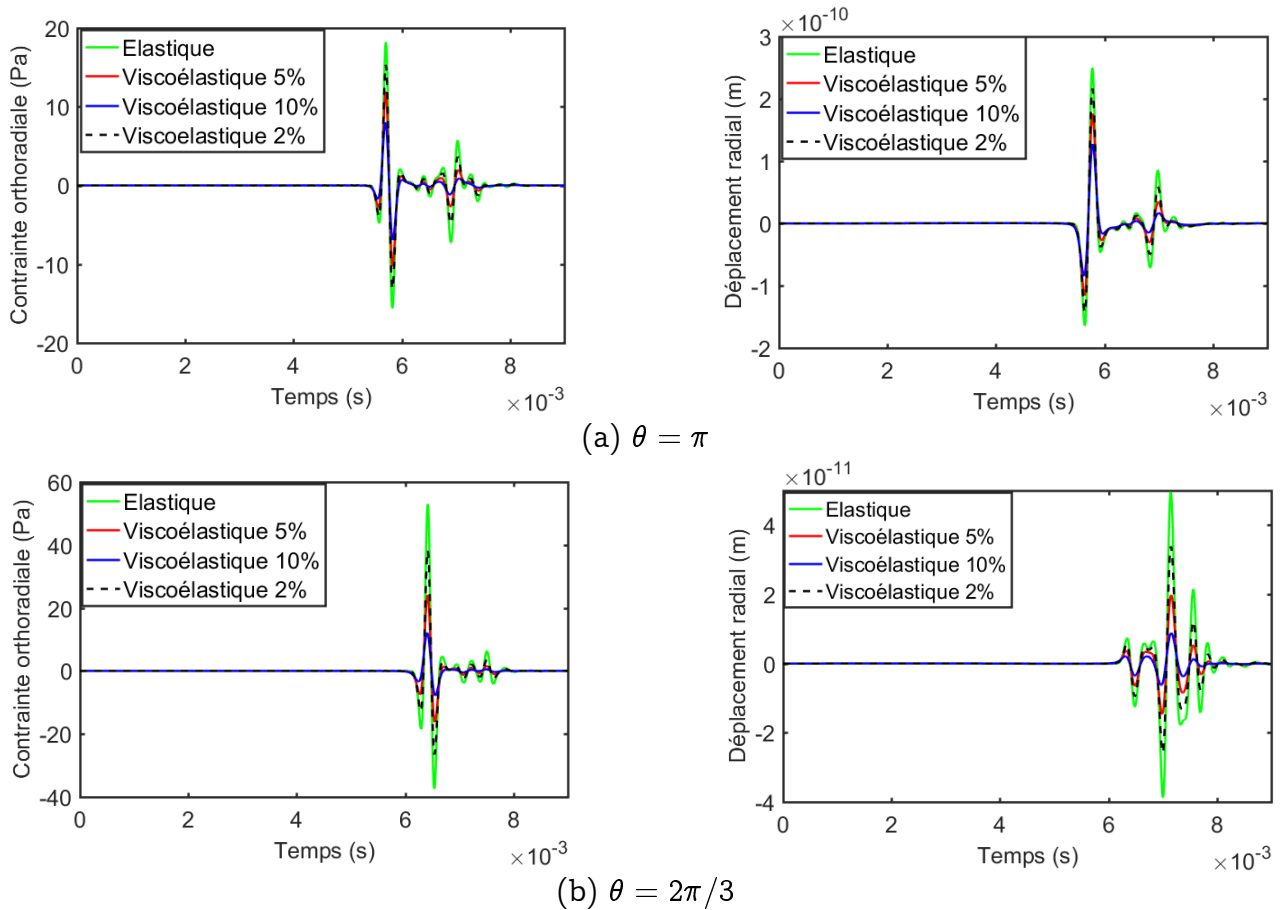


FIGURE 2.31 – Contrainte orthoradiale et du déplacement radial à $r = 5$ m. Comparaison des résultats dans les cas élastique et viscoélastique $\eta_a = \{2\%, 5\%, 10\%\}$

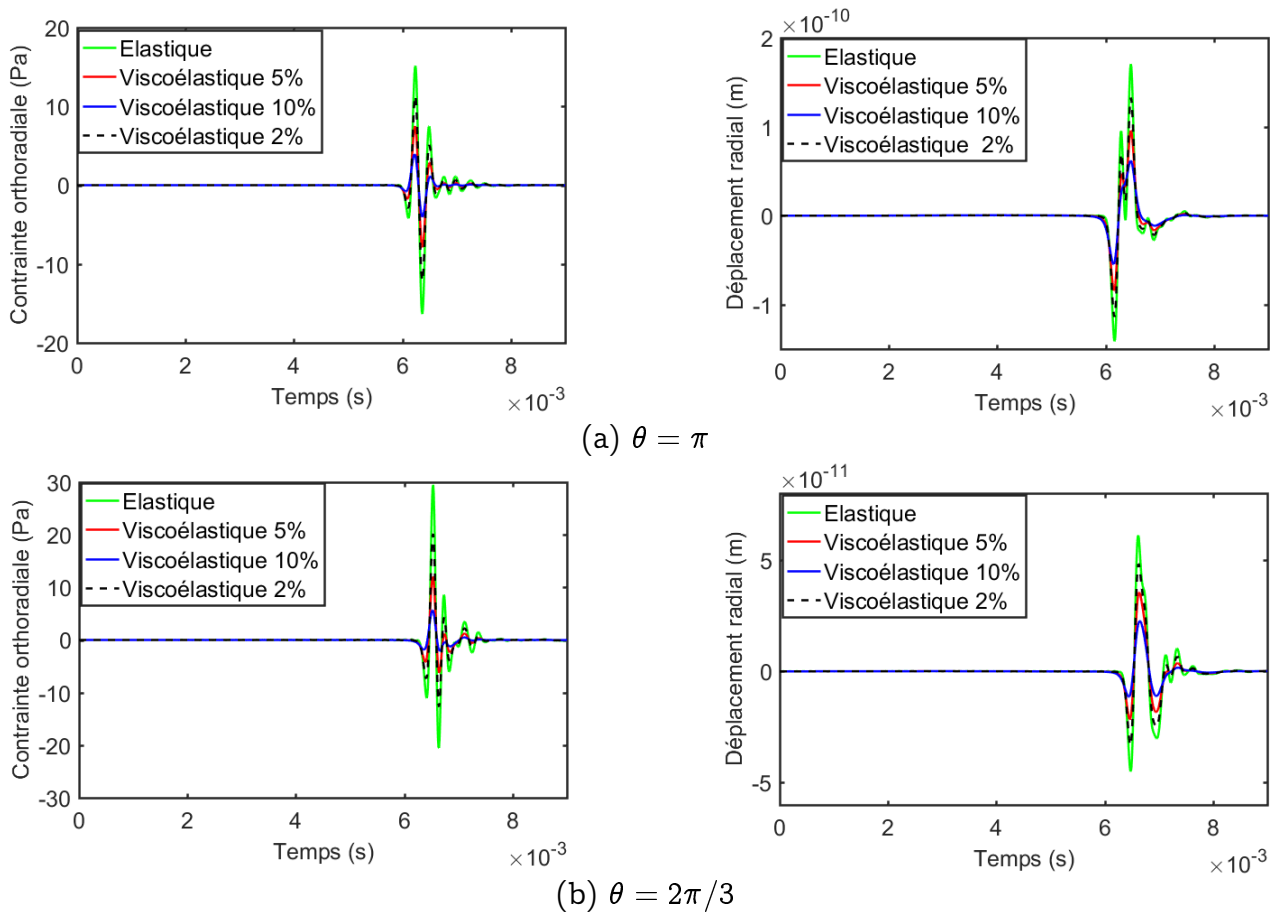


FIGURE 2.32 – Contrainte orthoradiale et du déplacement radial à $r = 2$ m. Comparaison des résultats dans les cas élastique et viscoélastique $\eta_a = \{2\%, 5\%, 10\%\}$

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la démarche permettant d'étudier la réponse du massif karstique, de la zone endommagée et du tunnel en régime transitoire. Nous avons commencé par illustrer les problèmes numériques qui interviennent dans les simulations. Dans la configuration cavité simple, les résultats obtenus en plusieurs points du domaine ont permis de valider les temps de propagation des ondes obtenus à partir du code numérique. L'utilisation d'un contact imparfait entre le massif karstique et le tunnel dans la configuration cavité circulaire double a ensuite permis d'observer l'impact de la qualité des contacts aux interfaces sur les champs. Enfin, nous avons également montré dans ce chapitre les capacités d'utiliser le code numérique pour modéliser les milieux par une approche viscoélastique.

Chapitre 3

Approche de la variable pour la résolution d'un problème multicouche non circulaire

3.1 Introduction

Nous avons souhaité dans ce dernier chapitre poursuivre l'étude de la propagation d'ondes mécaniques dans un environnement de tunnel de forme géométrique quelconque, afin de permettre des simulations pour des configurations géométriques plus proches de la réalité du terrain. Ce type de configurations ne peut se traiter par une simple extension de l'approche en coordonnées cylindriques, mais nécessite des outils mathématiques plus sophistiqués. Ainsi, nous proposons d'étudier la propagation d'ondes mécaniques dans la base complexe $\mathbb{C}$ en utilisant l'analyse fonctionnelle et complexe. Avec cette méthode, les équations classiques de l'élastodynamique sont réécrites en terme de variables indépendantes, le nombre complexe z et son conjugué $\bar{z}$. Cette démarche permet donc de modéliser des formes plus variées de géométries à l'aide des transformations conformes et ainsi d'étudier l'impact de ces formes sur la cartographie ondulatoire des réponses mécaniques. Les fonctions permettant de réaliser ces diverses transformations sont appelées les fonctions de cartographie conforme ou "conformal mapping functions". Ces fonctions ont un spectre d'applications plus large que la seule mécanique ondulatoire et sont plus spécifiquement utilisées en mécanique des fluides, génie civil ou en physique.

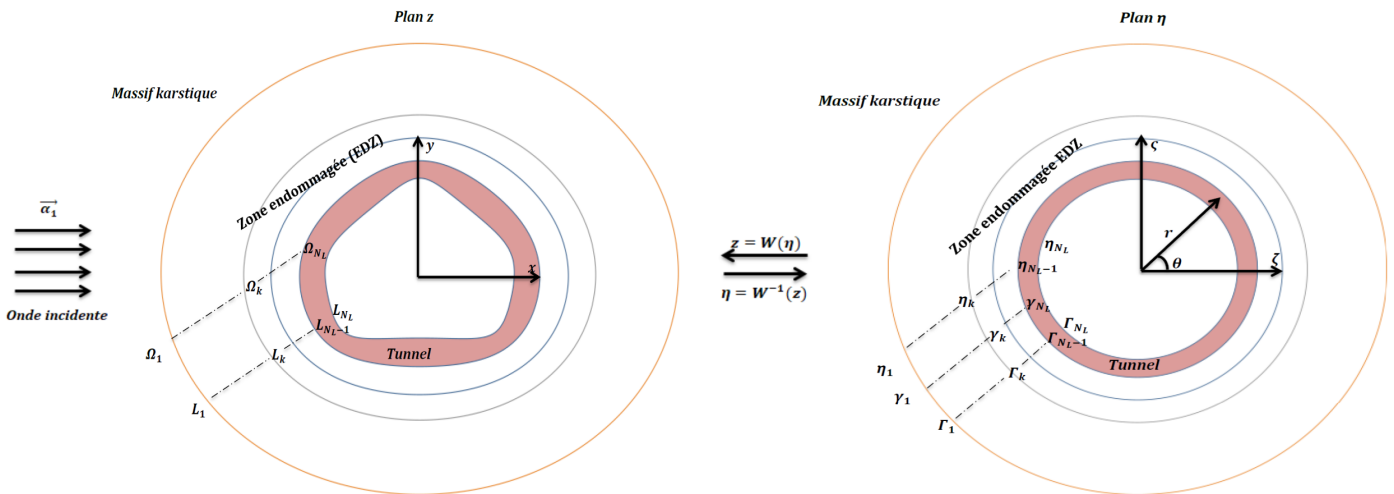


FIGURE 3.1 – Passage d'un tunnel circulaire à un tunnel quelconque

Dans le cas d'étude de structures de tunnels, nous utilisons des fonctions mathématiques

permettant de transformer une forme circulaire en une forme quelconque, comme présenté sur la Figure 3.1. Pour obtenir une forme conventionnelle de tunnel, nous partons de l'expression d'un cercle dans le plan ($\eta = \xi + i\zeta$) et à l'aide de l'application w , nous obtenons une autre forme de géométrie de tunnel dans le plan ($z = x + iy$). w décrit la transformation géométrique. Cette approche de la variable complexe a été introduite pour la première fois en mécanique des milieux continus par MUSKHELISHVILI et al., [1953]. L'auteur a indiqué que deux potentiels complexes pouvaient être utilisées en élasticité plane pour déterminer les solutions des champs de contraintes et déplacements dans le plan complexe η . Certains auteurs ont appliqué cette méthode pour étudier les contraintes et déplacements autour de géométries carrées, circulaires, elliptiques et fer à cheval. Cependant, tous ces travaux se sont restreints aux cas de géométries simples, à savoir sans revêtement (c'est-à-dire dans notre cas d'application sans paroi béton), ou double, à savoir avec un revêtement en une seule couche, en raison des complexités mathématique et numérique que fait intervenir l'approche. Le lecteur est renvoyé ici au chapitre bibliographique pour de plus amples informations.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la mise en place d'une formulation généralisée permettant de traiter l'aspect éventuellement multicouches du milieu. Ce travail s'inscrit en partie dans la continuité des développements de D. LIU et al., [1982], qui ont étudié la réponse dynamique d'une cavité simple de forme circulaire et elliptique en exprimant les potentiels complexes à l'aide des fonctions de Hankel. Dans un premier temps, nous présentons le formalisme permettant d'écrire les équations de l'élasticité linéaire en termes de potentiels de Helmholtz dans la base complexe $\mathbb{C}$. Grâce à la méthode de séparation de variables, les solutions d'ondes obtenues dans $\mathbb{C}$ sont exprimées à l'aide des fonctions de Hankel. Nous étudions alors en régime harmonique, la réponse dynamique d'une cavité circulaire à l'aide de la nouvelle approche proposée. Les résultats obtenus dans $\mathbb{C}$ sont alors comparés à ceux obtenus dans $\mathbb{R}$, en coordonnées polaires (r, θ) , à partir de l'approche d'expansion en séries de Bessel-Fourier (chapitre précédent). Il s'agit dans un premier temps de valider l'approche. Par la suite, nous étudions les réponses dynamiques autour d'un tunnel de forme elliptique et d'un tunnel de forme fer à cheval. Nous terminons cette étude par une extension aux configurations multicouches.

3.2 Position du problème

Nous considérons un long tunnel de dimension infinie suivant la direction z au cœur d'un massif karstique comme présenté sur la Figure 3.1. L'environnement hétérogène autour du tunnel est décrit par une approche multicouches. Nous supposons que le massif karstique, la zone endommagée et le tunnel sont élastiques, homogènes et isotropes par morceaux. Les notations γ_k et Ω_k sont respectivement choisies pour représenter les différents milieux dans le cas de géométries circulaires ou réelles, Figure 3.1. Comme dans le chapitre précédent, il s'agira du massif karstique lorsque $(k = 1)$, de la zone endommagée (constituée de $N_L - 2$ couches) pour $(k = 2, 3, \dots, N_L - 1)$ et du tunnel lorsque $(k = N_L)$. Les interfaces de la géométrie circulaire sont repérées par Γ_k et celles de la géométrie réelle par L_k . Pour finir, nous considérons également qu'une onde plane longitudinale se propage dans le plan de la section transversale du tunnel permettant une étude bidimensionnelle.

3.3 Concept du conformal mapping

Les fonctions de cartographie sont des fonctions complexes ayant pour argument une variable complexe. D'une manière générale, ces fonctions permettent de transformer l'intérieur ou l'extérieur d'une région donnée dans le plan z en une autre région dans le plan η issue d'une transformation géométrique w . Cette transformation s'effectue de manière conforme et les angles locaux sont préservés pendant le processus de changement de géométrie.

Dans ce travail, nous nous intéressons uniquement aux fonctions permettant de transformer un domaine réel en un domaine circulaire, comme illustré sur la Figure 3.1. En effet, comme l'approche circulaire a été abordée dans le chapitre précédent, ce choix nous permettra d'obtenir les contraintes et déplacements propres aux géométries réelles directement à partir des résultats circulaires. Nous considérons que la géométrie réelle dans le plan z est décrite par la variable $w(\eta)$:

$$w(\eta) = x + iy = \rho e^{ix} \quad (3.1)$$

La géométrie circulaire est définie dans le plan η par la relation :

$$\eta = |\eta|e^{i\theta} \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.2)$$

où $|\eta|$ désigne le module de η .

La prise en compte de l'aspect multicouches est considérée avec une seule fonction $w(\eta)$ qui transforme les contours L_k dans le plan z en interfaces Γ_k dans le plan η . Les contours qui s'éloignent du centre tendent alors progressivement vers des cercles. Les travaux KARGAR et al., [2014], G. ZHAO et al., [2015] et HEI et al., [2016] ont permis de montrer que la fonction $w(\eta)$ pouvait s'écrire d'une manière générale sous la forme suivante :

$$w(\eta) = G \left(\eta + \sum_{p=1}^4 c_p \eta^{-p} \right) \text{ avec } \eta = |\eta|e^{i\theta} \quad (3.3)$$

où G est un paramètre réel contrôlant l'échelle de $w(\eta)$ et les coefficients c_p définissent la forme de la géométrie dans le plan z . Les contours L_k , avec $k = \{1, 2, \dots, N_L\}$ sont décrits par $w(\eta_k)$ où η_k correspond à un point du cercle de rayon r_k lié à la position de l'interface. Pour obtenir une valeur unique de $w(\eta_k)$ pour chaque transformation et éviter toute auto-intersection aux différentes interfaces, les coefficients c_p doivent satisfaire la condition suivante $0 \leq c_p \leq 1/p$. Le choix de $c_p = 0$ donne un cercle et le choix de la valeur limite $c_p = 1/p$ donne un pore avec $(p + 1)$ cuspidés pointues, MUSKHELISHVILI et al., [1953] et G. LIU et al., [2012].

3.4 Équation du mouvement des ondes dans $\mathbb{C}$

Les équations de départ à partir desquelles l'approche en conformal mapping va être développée sont les équations d'ondes en potentiels de Helmholtz présentées précédemment et rappelées ici :

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{C_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4)$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

Soit le nombre complexe z et son conjugué $\bar{z}$, nous disposons alors des relations suivantes :

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad (3.6)$$

Les dérivées partielles suivantes $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ s'expriment alors :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (3.7)$$

Des équations (3.7), on extrait :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad (3.8)$$

En utilisant ces mêmes équations (3.7), nous calculons également la dérivée $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (3.9)$$

En introduisant (3.9) dans (3.4) et (3.5), nous obtenons les équations du comportement des ondes dans le domaine complexe $\mathbb{C}$ en fonction de z et $\bar{z}$ qui s'écrivent alors :

$$4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{1}{C_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10)$$

$$4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.11)$$

La forme des équations d'ondes ci-dessus est différente de celle rencontrées dans la littérature que ce soit en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques. Il faut alors adopter une autre méthode de résolution. La section suivante décrit la méthode permettant d'obtenir les solutions en potentiels ϕ et ψ .

3.5 Solutions d'ondes dans $\mathbb{C}$

Nous considérons d'abord le cas du régime harmonique en supposant que les potentiels scalaire ϕ et vecteur ψ solutions de l'équation (3.10) et (3.11) s'écrivent comme suit :

$$\phi = \phi(z, \bar{z}, t) = \phi(z, \bar{z}) e^{-i\omega t}, \quad \psi = \psi(z, \bar{z}, t) = \psi(z, \bar{z}) e^{-i\omega t} \quad (3.12)$$

En introduisant la relation (3.12) dans (3.10) et (3.11), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \phi(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} = \left(\frac{i\alpha}{2} \right)^2 \phi(z, \bar{z}) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} = \left(\frac{i\beta}{2} \right)^2 \psi(z, \bar{z}) \quad (3.14)$$

où α et β représentent les nombres d'onde de P et SV.

Nous considérons une fonction de cartographie $w(\eta)$ permettant de transformer le domaine intérieur ou extérieur délimité par une courbe fermée dans le plan z en un domaine délimité par un cercle de rayon unité dans le plan η (Figure 3.1). Le processus de transformation géométrique est garanti lorsque $w(\eta)$ est holomorphe et que sa dérivée ne s'annule pas dans le domaine considéré du plan complexe η .

Pour la suite, nous proposons de remplacer z et $\bar{z}$ en fonction de $w(\eta)$ et $\overline{w(\eta)}$ par :

$$z = w(\eta), \quad \bar{z} = \overline{w(\eta)} \quad (3.15)$$

Les dérivées de z par rapport à η et de $\bar{z}$ par rapport à $\bar{\eta}$ permettent d'obtenir :

$$\partial z = w'(\eta) \partial \eta \quad \partial \bar{z} = \overline{w'(\eta)} \partial \bar{\eta} \quad (3.16)$$

En remplaçant l'équation (3.16) dans (3.13) et (3.14), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \phi(\eta, \bar{\eta})}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} = \left(\frac{i\alpha}{2} \right)^2 w'(\eta) \overline{w'(\eta)} \phi(\eta, \bar{\eta}) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(\eta, \bar{\eta})}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} = \left(\frac{i\beta}{2} \right)^2 w'(\eta) \overline{w'(\eta)} \psi(\eta, \bar{\eta}) \quad (3.18)$$

Pour résoudre les équations (3.17) et (3.18), nous utilisons la méthode de séparation des variables en posant :

$$\phi(\eta, \bar{\eta}) = \phi_1(\eta) \phi_2(\bar{\eta}), \quad \psi(\eta, \bar{\eta}) = \psi_1(\eta) \psi_2(\bar{\eta}) \quad (3.19)$$

où ϕ_1 et ψ_1 dépendent uniquement η et ϕ_2, ψ_2 uniquement de $\bar{\eta}$.

Dans la mesure où (3.17) et (3.18) sont de la même forme, nous détaillons seulement les étapes de la résolution relative à l'équation en ϕ , et la résolution de l'équation en ψ se fera de manière identique.

En remplaçant (3.19) dans (3.17), il vient :

$$\frac{\partial^2 \phi_1(\eta) \phi_2(\bar{\eta})}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} = \left(\frac{i\alpha}{2} \right)^2 w'(\eta) \overline{w'(\eta)} \phi_1(\eta) \phi_2(\bar{\eta}) \iff \phi_1'(\eta) \phi_2'(\bar{\eta}) = \left(\frac{i\alpha}{2} \right)^2 w'(\eta) \overline{w'(\eta)} \phi_1(\eta) \phi_2(\bar{\eta}) \quad (3.20)$$

En rassemblant d'un coté les termes en η et de l'autre les termes en $\bar{\eta}$, nous obtenons :

$$\frac{\phi_1'(\eta)}{w'(\eta) \phi_1(\eta)} = \left(\frac{i\alpha}{2} \right)^2 \frac{\overline{w'(\eta)} \phi_2(\bar{\eta})}{\phi_2'(\bar{\eta})} \iff \left(\frac{2}{i\alpha} \right) \frac{\phi_1'(\eta)}{w'(\eta) \phi_1(\eta)} = \left(\frac{i\alpha}{2} \right) \frac{\overline{w'(\eta)} \phi_2(\bar{\eta})}{\phi_2'(\bar{\eta})} \quad (3.21)$$

À partir de cette égalité entre deux fonctions à variables indépendantes η et $\bar{\eta}$, il est déduit que ces deux fonctions sont constantes (on notera C cette constante) et il vient :

$$\left(\frac{2}{i\alpha} \right) \frac{\phi_1'(\eta)}{w'(\eta) \phi_1(\eta)} = C, \quad \left(\frac{i\alpha}{2} \right) \frac{\overline{w'(\eta)} \phi_2(\bar{\eta})}{\phi_2'(\bar{\eta})} = C \quad (3.22)$$

La résolution de chacune de ces équations différentielles mène respectivement à :

$$\frac{\phi_1'(\eta)}{\phi_1(\eta)} = C \left(\frac{i\alpha}{2} \right) w'(\eta), \quad \frac{\phi_2'(\bar{\eta})}{\phi_2(\bar{\eta})} = \left(\frac{i\alpha}{2C} \right) \overline{w'(\eta)} \quad (3.23)$$

$$\int \frac{d\phi_1(\eta)}{\phi_1(\eta)} = \int C \left(\frac{i\alpha}{2} \right) dw(\eta), \quad \int \frac{d\phi_2(\bar{\eta})}{\phi_2(\bar{\eta})} = \int \left(\frac{i\alpha}{2C} \right) d\bar{w}(\eta) \quad (3.24)$$

soit :

$$\phi_1(\eta) = c_1(C) e^{i\frac{\alpha}{2} C w(\eta)}, \quad \phi_2(\bar{\eta}) = c_2(C) e^{i\frac{\alpha}{2C} \bar{w}(\eta)} \quad (3.25)$$

avec $c_1(C)$, $c_2(C)$ constantes d'intégration.

Comme $\phi(\eta, \bar{\eta})$ est issue de la séparation des variables en $\phi_1(\eta)$ et $\phi_2(\bar{\eta})$ (relation [3.19](#)), la solution générale peut être obtenue à partir de tout chemin d'intégration W dans le plan de la constante pour lequel l'intégrale converge.

$$\phi(\eta, \bar{\eta}) = \int_W c_1(C) c_2(C) e^{i\frac{\alpha}{2} (C w(\eta) + \frac{\bar{w}(\eta)}{C})} dC \quad (3.26)$$

Pour résoudre l'équation précédente, il est nécessaire d'effectuer le changement de variable suivant :

$$C = e^{-ip}, \quad w(\eta) = |w| e^{iv} \quad (3.27)$$

où $|w|$ et v représentent le module et la phase de w et p est une variable complexe.

Lorsqu'on remplace [\(3.27\)](#) dans [\(3.26\)](#), D. LIU et al., [1982](#) a démontré à travers l'expansion en série la relation suivante :

$$\phi(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in v} \int_W e^{i n g - i \alpha |w| \sin g} dg = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in v} K_n(\alpha |w(\eta)|) \quad (3.28)$$

avec A_n la constante d'expansion de la série, $g = p - v - \frac{\pi}{2}$ et $K_n(\alpha |w(\eta)|) = \int_W e^{i n g - i \alpha |w| \sin g} dg$ une fonction cylindrique dont l'argument est $\alpha |w(\eta)|$.

Les auteurs ont également montré qu'il existe trois chemins d'intégration W_0 , W_1 et W_2 dans le plan z qui permettent d'obtenir la convergence de l'équation [\(3.28\)](#). La fonction $K_n(\alpha |w(\eta)|)$ dépend des chemins et de la fonction de cartographie $w(\eta)$.

Par exemple, dans le cas d'une géométrie circulaire, l'argument $|w(\eta)|$ est constant et correspond au rayon, les fonctions $K_n(\alpha |w(\eta)|)$ correspondent alors aux fonctions de Bessel ou Hankel. Dans le cas d'une géométrie elliptique, $|w(\eta)|$ n'est plus constant et les $K_n(\alpha |w(\eta)|)$ correspondent aux fonctions de Mathieu, ABRAMOWITZ et al., [1988](#). Comme nous avons choisi dans ce travail une fonction $w(\eta)$ transformant un domaine réel en un domaine circulaire, nous proposons alors d'écrire les solutions de $K_n(\alpha |w(\eta)|)$ à l'aide des fonctions de Bessel ou Hankel.

Sur une limite circulaire, l'intégration sur W_0 donne : $K_n(\alpha |w(\eta)|) = 2\pi J_n(\alpha |w(\eta)|)$, sur W_1 on trouve : $K_n(\alpha |w(\eta)|) = \pi H_n^{(1)}(\alpha |w(\eta)|)$ et sur W_2 on obtient : $K_n(\alpha |w(\eta)|) = \pi H_n^{(2)}(\alpha |w(\eta)|)$.

Nous choisissons d'utiliser les fonctions de Hankel car elles permettent d'écrire plus facilement le mouvement des ondes réfléchies ou transmises au passage d'une interface. Les solutions générales de $\phi(\eta, \bar{\eta})$ et $\psi(\eta, \bar{\eta})$ s'écrivent respectivement sous la forme :

$$\phi(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(\alpha |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.29)$$

$$\psi(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n(\beta |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.30)$$

où A_n et B_n sont des constantes d'expansion, H_n est une fonction de Hankel, qui devient $H_n^{(1)}$ lorsque l'onde se propage dans la direction des rayons croissants et $H_n^{(2)}$ lorsque l'onde se

propage dans la direction des rayons décroissants.

Cette approche permet d'étudier plusieurs configurations (circulaires, elliptique et fer à cheval) sans adopter une nouvelle formulation globale pour chaque cas. De ce fait, les fonctions de Mathieu, utilisées pour des géométries elliptiques, ou d'autres types de fonctions associées à des géométries spécifiques ne seront pas traitées ici.

3.6 Composantes cartésiennes du vecteur des déplacements et du tenseur des contraintes en fonction de la variable complexe

3.6.1 Vecteur des déplacements

En utilisant les expressions des composantes du vecteur des déplacements en fonction des potentiels de Helmholtz $u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$, et en se ramenant à la variable complexe z et son conjugué $\bar{z}$, il vient :

$$u_x = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \phi + i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \psi, \quad u_y = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \phi - \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \psi \quad (3.31)$$

Pour réduire le calcul formel et faciliter l'écriture des expressions au niveau des conditions aux limites, nous choisissons de réécrire les composantes du champ de déplacement sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} u_x + iu_y &= 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\phi - i\psi) \\ u_x - iu_y &= 2 \frac{\partial}{\partial z} (\phi + i\psi) \end{cases} \quad (3.32)$$

3.6.2 Tenseur des contraintes

En utilisant les expressions du tenseur des déformations linéarisé en fonction des composantes des déplacements puis des potentiels de Helmholtz en termes des variables complexes, les composantes cartésiennes e_{xx} , e_{yy} et e_{xy} s'écrivent :

$$e_{xx} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \phi + i \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \psi \quad (3.33)$$

$$e_{yy} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \phi - i \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \psi \quad (3.34)$$

$$e_{xy} = i \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \phi - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \psi \quad (3.35)$$

En utilisant la loi de Hooke pour un matériau homogène élastique isotrope, les composantes du tenseur des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} en coordonnées cartésiennes s'écrivent respectivement :

$$\sigma_{xx} = 4\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} + 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \phi + i \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \psi \right\} \quad (3.36)$$

$$\sigma_{yy} = 4\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} + 2\mu \left\{ - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \phi - i \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \psi \right\} \quad (3.37)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu \left\{ i \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \phi - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \psi \right\} \quad (3.38)$$

Comme pour le champ de déplacement, nous proposons d'écrire également les composantes du tenseur des contraintes sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2(\lambda + \mu) \left\{ 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \phi \right\} \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= -8\mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\phi + i\psi) \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2i\sigma_{xy} &= -8\mu \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} (\phi - i\psi) \end{cases} \quad (3.39)$$

Nous remplaçons le terme $\left\{ 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \phi \right\} = -\alpha^2 \phi$ (équation (3.13)), et déduisons alors :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= -2\alpha^2(\lambda + \mu)\phi \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= -8\mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\phi + i\psi) \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2i\sigma_{xy} &= -8\mu \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} (\phi - i\psi) \end{cases} \quad (3.40)$$

3.7 Composantes polaires du vecteur des déplacements et du tenseur des contraintes dans $\mathbb{C}$

Nous avons précédemment mentionné nous limiter aux fonctions de cartographie $w(\eta)$ permettant de transformer un domaine réel en un domaine circulaire. Cette hypothèse nous a permis d'exprimer les solutions de l'équation d'ondes en coordonnées polaires en utilisant les fonctions de Hankel. Dans cette section, nous allons présenter la démarche permettant d'obtenir les composantes polaires du tenseur des contraintes et du vecteur des déplacements.

3.7.1 Vecteur des déplacements

Les variables polaires seront dans le cas présent notées r pour la position radiale et τ pour l'angle entre les vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_r$. Le vecteur déplacement en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\tau \vec{e}_\tau \quad (3.41)$$

où u_r et u_τ représentent respectivement les déplacements radial et orthoradial.

En utilisant les relations de changement de repère, on peut écrire :

$$\begin{cases} u_r + iu_\tau &= (u_x + iu_y)e^{-i\tau} \\ u_r - iu_\tau &= (u_x - iu_y)e^{i\tau} \end{cases} \quad (3.42)$$

puis en introduisant les potentiels de Helmholtz à partir des relations (3.32) dans (3.42), nous obtenons finalement le système suivant, fonction de z et $\bar{z}$:

$$\begin{cases} u_r - iu_\tau &= 2 \frac{\partial}{\partial z} (\phi + i\psi) e^{i\tau} \\ u_r + iu_\tau &= 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\phi - i\psi) e^{-i\tau} \end{cases} \quad (3.43)$$

Il est possible d'exprimer les termes $e^{i\tau}$ et $e^{-i\tau}$ en fonction des paramètres η , $w(\eta)$, $e^{i\theta}$, $\bar{\eta}$, $\overline{w(\eta)}$ et $e^{-i\theta}$ de façon à exprimer les relations précédentes en fonction de η et $\bar{\eta}$, (MUSKHELISHVILI et al., 1953, pages 191-193) :

$$e^{i\tau} = e^{i\theta} \frac{w'(\eta)}{|w'(\eta)|}, \quad e^{-i\tau} = e^{-i\theta} \frac{\overline{w'(\eta)}}{|w'(\eta)|} \quad (3.44)$$

Or, nous avons vu précédemment que :

$$\eta = |\eta|e^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta} = \frac{\eta}{|\eta|}, \quad \bar{\eta} = |\eta|e^{-i\theta} \rightarrow e^{-i\theta} = \frac{\bar{\eta}}{|\eta|} \quad (3.45)$$

En remplaçant l'équation (3.45) dans (3.44), on obtient :

$$e^{i\tau} = \frac{\eta}{|\eta|} \frac{w'(\eta)}{|w'(\eta)|}, \quad e^{-i\tau} = \frac{\bar{\eta}}{|\eta|} \frac{\overline{w'(\eta)}}{|w'(\eta)|} \quad (3.46)$$

A partir de l'équation (3.16), nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\overline{w'(\eta)}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \quad (3.47)$$

Lorsqu'on remplace (3.46) et (3.47) dans (3.43), nous trouvons finalement le système fonction de η et $\bar{\eta}$

$$\begin{cases} u_r - iu_\tau &= 2 \frac{\eta}{|\eta|} \frac{1}{|w'(\eta)|} \frac{\partial}{\partial \eta} (\phi + i\psi) \\ u_r + iu_\tau &= 2 \frac{\bar{\eta}}{|\eta|} \frac{1}{|w'(\eta)|} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (\phi - i\psi) \end{cases} \quad (3.48)$$

Il est également possible de déduire, à partir de (3.48), les expressions algébriques des déplacements radiaux et orthoradiaux :

$$u_r = \frac{\eta}{|\eta|} \frac{1}{|w'(\eta)|} \frac{\partial}{\partial \eta} (\phi + i\psi) + \frac{\bar{\eta}}{|\eta|} \frac{1}{|w'(\eta)|} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (\phi - i\psi) \quad (3.49)$$

$$u_\tau = \frac{\eta}{|\eta|} \frac{i}{|w'(\eta)|} \frac{\partial}{\partial \eta} (\phi + i\psi) - \frac{\bar{\eta}}{|\eta|} \frac{i}{|w'(\eta)|} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (\phi - i\psi) \quad (3.50)$$

3.7.2 Tenseur des contraintes

Les travaux de MUSKHELISHVILI et al., [1953] (pages 24-25) ont permis de montrer le passage des contraintes cartésiennes aux contraintes polaires. Les composantes du tenseur des contraintes en coordonnées polaires s'écrivent en fonction des coordonnées cartésiennes comme :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} + \sigma_{\tau\tau} &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \\ \sigma_{\tau\tau} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\tau} &= \left(\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} \right) e^{2i\tau} \\ \sigma_{\tau\tau} - \sigma_{rr} - 2i\sigma_{r\tau} &= \left(\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2i\sigma_{xy} \right) e^{-2i\tau} \end{cases} \quad (3.51)$$

Les conditions aux limites font intervenir uniquement les contraintes radiales (σ_{rr}) et tangentielles ($\sigma_{\tau\tau}$), de ce fait nous réécrivons le système linéaire (3.51) indépendamment des contraintes orthoradiale ($\sigma_{r\tau}$).

$$\begin{cases} 2\left(\sigma_{rr} - i\sigma_{r\tau} \right) &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \left(\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} \right) e^{2i\tau} \\ 2\left(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\tau} \right) &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \left(\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2i\sigma_{xy} \right) e^{-2i\tau} \end{cases} \quad (3.52)$$

En utilisant les relations donnant les composantes cartésiennes des contraintes en fonction des potentiels de Helmholtz (relations (3.40)), nous obtenons finalement l'expression de σ_{rr} et $\sigma_{\tau\tau}$ en fonction de z et $\bar{z}$ et des potentiels :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} - i\sigma_{r\tau} &= -\alpha^2(\lambda + \mu)\phi + 4\mu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\phi + i\psi) \right\} e^{2i\tau} \\ \sigma_{rr} + i\sigma_{r\tau} &= -\alpha^2(\lambda + \mu)\phi + 4\mu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} (\phi - i\psi) \right\} e^{-2i\tau} \end{cases} \quad (3.53)$$

Pour exprimer l'équation précédente en fonction de η et $\bar{\eta}$, nous commençons par exprimer les termes $e^{2i\tau}$ et $e^{-2i\tau}$ en fonction de η , $w(\eta)$, $e^{i\theta}$, $\bar{\eta}$, $\bar{w}(\eta)$ et $e^{-i\theta}$. Partant de l'équation (3.44), nous pouvons écrire :

$$e^{2i\tau} = e^{2i\theta} \frac{(w'(\eta))^2}{|w'(\eta)|^2} = e^{2i\theta} \frac{w'(\eta)}{\overline{w'(\eta)}}, \quad e^{-2i\tau} = e^{-2i\theta} \frac{(\overline{w'(\eta)})^2}{|w'(\eta)|^2} = e^{-2i\theta} \frac{\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)} \quad (3.54)$$

Comme $e^{2i\theta} = \frac{\eta^2}{|\eta|^2}$, nous obtenons finalement :

$$e^{2i\tau} = \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{w'(\eta)}{\overline{w'(\eta)}}, \quad e^{-2i\tau} = \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)} \quad (3.55)$$

En dérivant les termes des relations (3.47) par rapport à z et $\bar{z}$, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \right\}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{\overline{w'(\eta)}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left\{ \frac{1}{\overline{w'(\eta)}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \right\} \quad (3.56)$$

Puis, en injectant (3.55) et (3.56) dans (3.53), nous obtenons le système linéaire fonction de η et $\bar{\eta}$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} - i\sigma_{r\tau} = -\alpha^2(\lambda + \mu)\phi + 4\mu \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (\phi + i\psi) \right\} \\ \sigma_{rr} + i\sigma_{r\tau} = -\alpha^2(\lambda + \mu)\phi + 4\mu \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left\{ \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (\phi - i\psi) \right\} \end{cases} \quad (3.57)$$

A partir de (3.40) et (3.57), nous pouvons également déterminer les expressions algébriques des composantes polaires du tenseur des contraintes, σ_{rr} , $\sigma_{r\tau}$ et $\sigma_{\tau\tau}$:

$$\sigma_{rr} = -\alpha^2(\lambda + \mu)\phi + \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{2\mu}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (\phi + i\psi) \right\} + \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{2\mu}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left\{ \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (\phi - i\psi) \right\} \quad (3.58)$$

$$\sigma_{\tau\tau} = -\alpha^2(\lambda + \mu)\phi - \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{2\mu}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (\phi + i\psi) \right\} - \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{2\mu}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left\{ \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (\phi - i\psi) \right\} \quad (3.59)$$

$$\sigma_{r\tau} = \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{2i\mu}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (\phi + i\psi) \right\} - \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{2i\mu}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left\{ \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (\phi - i\psi) \right\} \quad (3.60)$$

3.8 Le cas multicouches

Les expressions précédentes sont relatives à un milieu donné et ne font pas intervenir pour le moment les conditions aux limites et aux interfaces du problème. Dans cette section, nous allons utiliser ces relations pour évaluer les champs de contraintes et de déplacements dans les différents milieux (massif karstique, zone endommagée et tunnel) en prenant en compte les conditions d'interface entre les milieux. En particulier, un assemblage spécifique permettra de traiter l'aspect potentiellement multicouches du domaine global. Même si la méthodologie ressemble à celle suivie dans le cas du multicouches cylindrique, certains points clés diffèrent et doivent être détaillés plus avant.

3.8.1 Contrainte et déplacement dans le milieu incident

L'onde plane incidente de type P qui se propage depuis l'infini a pour expression en termes de potentiel scalaire :

$$\phi^{(i)}(\eta, \bar{\eta}) = \varphi_0 e^{i\alpha_1 x} = \varphi_0 e^{i\alpha_1 \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)} = \varphi_0 e^{i\alpha_1 \left(\frac{w(\eta) + \overline{w(\eta)}}{2} \right)} \quad (3.61)$$

où φ_0 est l'amplitude de l'onde incidente et α_1 représente le nombre d'onde P dans le milieu incident.

La réflexion sur la dernière couche de la zone endommagée donne naissance à deux ondes (une longitudinale et une transversale). Les expressions des potentiels de Helmholtz peuvent s'écrire à l'aide de la fonction de Hankel du premier ordre :

$$\phi_1^{(r)}(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.62)$$

$$\psi_1^{(r)}(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\beta_1 |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.63)$$

où β_1 représente le nombre d'onde transversale dans le massif karstique et A_n et B_n sont les coefficients d'expansion des séries.

Les potentiels totaux relatifs respectivement aux ondes P et SV, dans le massif karstique, s'écrivent alors (on utilise ici les mêmes notations que pour l'approche multicouches cylindrique avec les exposants (T) pour total, (i) pour incident, (t) pour transmis et (r) pour réfléchi) :

$$\phi_1^{(T)}(\eta, \bar{\eta}) = \varphi_0 e^{i\alpha_1 \left(\frac{w(\eta) + \overline{w(\eta)}}{2} \right)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.64)$$

$$\psi_1^{(T)}(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\beta_1 |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.65)$$

En remplaçant les équations (3.64) et (3.65) dans (3.49), (3.50), (3.58), (3.59) et (3.60), nous obtenons l'expression des contraintes et déplacements dans le massif qui s'écrivent respectivement comme :

$$u_{1_r} = S_{1_r} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_n (E_{n11}^{(3)} + E_{n11}^{(4)}) + B_n (E_{n12}^{(3)} + E_{n12}^{(4)}) \right\} \quad (3.66)$$

$$u_{1_\tau} = S_{1_\tau} + \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_n (E_{n11}^{(3)} - E_{n11}^{(4)}) + B_n (E_{n12}^{(3)} - E_{n12}^{(4)}) \right\} \quad (3.67)$$

$$\sigma_{1_{rr}} = S_{1_{rr}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_n (E_{n11}^{(1)} - \frac{1}{2} E_{n11}^{(1**)}) + \frac{1}{2} E_{n11}^{(2**)}) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ B_n (E_{n12}^{(1)} + E_{n12}^{(2)}) \right\} \quad (3.68)$$

$$\sigma_{1_{\tau\tau}} = S_{1_{\tau\tau}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_n (E_{n11}^{(1*)} - \frac{1}{2} E_{n11}^{(1**)}) - \frac{1}{2} E_{n11}^{(2**)}) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ B_n (E_{n12}^{(1)} + E_{n12}^{(2)}) \right\} \quad (3.69)$$

$$\sigma_{1_{r\tau}} = S_{1_{r\tau}} + \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_n (E_{n11}^{(1**)}) - E_{n11}^{(2**)}) \right\} + \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ B_n (E_{n12}^{(1)} - E_{n12}^{(2)}) \right\} \quad (3.70)$$

où S_{1_r} et S_{1_τ} représentent les déplacements radial et orhoradial incidents, $S_{1_{rr}}$, $S_{1_{r\tau}}$ et $S_{1_{\tau\tau}}$ sont les contraintes orthoradiale, radiale et tangentielle incidentes. Ces différents termes sont explicités dans l'annexe B.

3.8.2 Contrainte et déplacement dans la zone endommagée et le tunnel

Dans chacune des différentes couches prises en compte (zone endommagée et tunnel), deux ondes réfléchies et deux ondes transmises existent. Les potentiels de Helmholtz de toutes ces ondes s'écrivent également à l'aide des fonctions Hankel de la manière suivante :

$$\phi_k^{(t)}(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{kn} H_n^{(2)}(\alpha_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.71)$$

$$\psi_k^{(t)}(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_{kn} H_n^{(2)}(\beta_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.72)$$

$$\psi_k^{(r)}(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{kn} H_n^{(1)}(\alpha_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.73)$$

$$\phi_k^{(r)}(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_{kn} H_n^{(1)}(\beta_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.74)$$

Les potentiels totaux dans les couches de la zone endommagée ($k = 2, 3, \dots, N_L - 1$) et dans le tunnel ($k = N_L$) s'écrivent alors :

$$\phi_k^{(T)}(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_{kn} H_n^{(2)}(\alpha_k |w(\eta)|) + D_{kn} H_n^{(1)}(\alpha_k |w(\eta)|) \right\} \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.75)$$

$$\psi_k^{(T)}(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ M_{kn} H_n^{(2)}(\beta_k |w(\eta)|) + N_{kn} H_n^{(1)}(\beta_k |w(\eta)|) \right\} \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.76)$$

où C_{kn} , D_{kn} , M_{kn} et N_{kn} sont les coefficients d'expansion des séries.

Lorsqu'on remplace les équations (3.75) et (3.76) dans (3.49), (3.50), (3.58), (3.59) et (3.60), nous obtenons l'expression des composantes polaires du vecteur des déplacements et du tenseur des contraintes dans chaque milieu considéré k :

$$u_{k_r} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_{nk} (E_{n21k}^{(3)} + E_{n21k}^{(4)}) + D_{nk} (E_{n22k}^{(3)} + E_{n22k}^{(4)}) + M_{nk} (E_{n23k}^{(3)} + E_{n23k}^{(4)}) + N_{nk} (E_{n24k}^{(3)} + E_{n24k}^{(4)}) \right\} \quad (3.77)$$

$$u_{k_\theta} = \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_{nk} (E_{n21k}^{(3)} - E_{n21k}^{(4)}) + D_{nk} (E_{n22k}^{(3)} - E_{n22k}^{(4)}) + M_{nk} (E_{n23k}^{(3)} - E_{n23k}^{(4)}) + N_{nk} (E_{n24k}^{(3)} - E_{n24k}^{(4)}) \right\} \quad (3.78)$$

$$\sigma_{k_{rr}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_{nk} (E_{n21k}^{(2*)} + \frac{1}{2} E_{n21k}^{(1**)}) + \frac{1}{2} E_{n21k}^{(2**)}) + D_{nk} (E_{n22k}^{(2*)} + \frac{1}{2} E_{n22k}^{(1**)}) + \frac{1}{2} E_{n22k}^{(2**)}) + \frac{1}{2} M_{nk} (E_{n23k}^{(1)} + E_{n23k}^{(2)}) + \frac{1}{2} N_{nk} (E_{n24k}^{(1)} + E_{n24k}^{(2)}) \right\} \quad (3.79)$$

$$\sigma_{k_{\theta\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_{nk} (E_{n21k}^{(2*)} - \frac{1}{2} E_{n21k}^{(1**)}) - \frac{1}{2} E_{n21k}^{(2**)}) + D_{nk} (E_{n22k}^{(2*)} - \frac{1}{2} E_{n22k}^{(1**)}) - \frac{1}{2} E_{n22k}^{(2**)}) - \frac{1}{2} M_{nk} (E_{n23k}^{(1)} + E_{n23k}^{(2)}) - \frac{1}{2} N_{nk} (E_{n24k}^{(1)} + E_{n24k}^{(2)}) \right\} \quad (3.80)$$

$$\sigma_{k_{\theta r}} = \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_{nk} (E_{n21k}^{(1**)}) - E_{n21k}^{(2**)}) + D_{nk} (E_{n22k}^{(1**)}) - E_{n22k}^{(2**)}) + M_{nk} (E_{n23k}^{(1)} - E_{n23k}^{(2)}) + N_{nk} (E_{n24k}^{(1)} - E_{n24k}^{(2)}) \right\} \quad (3.81)$$

Les termes $E_{nijk}^{(p)}$, $E_{nijk}^{(p*)}$, $E_{nijk}^{(p**)}$ représentent les contributions des différentes ondes réfléchies et transmises. Pour faciliter l'écriture des contraintes, nous avons introduit les notations $E_{nijk}^{(p*)}$ et $E_{nijk}^{(p**)}$. Le détail de ces expressions est donné dans l'annexe B.

3.8.3 Conditions aux limites

Nous considérons un contact parfait sur chacune des interfaces $w(\eta_k)$ avec $k = \{1, 2, \dots, N_L - 2\}$. Par ailleurs, la limite inférieure du tunnel $w(\eta_{N_L})$ présente une surface libre

d'efforts. Les conditions d'interfaces et aux limites s'écrivent respectivement comme :

— Pour $w(\eta) = w(\eta_k)$ avec $k = \{1, 2, \dots, N_{L-2}\}$

$$\begin{cases} \sigma_{k_{rr}} - i\sigma_{k_{r\tau}} = \sigma_{(k+1)_{rr}} - i\sigma_{(k+1)_{r\tau}} \\ \sigma_{k_{rr}} + i\sigma_{k_{r\tau}} = \sigma_{(k+1)_{rr}} + i\sigma_{(k+1)_{r\tau}} \\ u_{k_r} - iu_{k_\tau} = u_{(k+1)_r} - iu_{(k+1)_\tau} \\ u_{k_r} + iu_{k_\tau} = u_{(k+1)_r} + iu_{(k+1)_\tau} \end{cases} \quad (3.82)$$

— Pour $w(\eta) = w(\eta_{N_L})$

$$\begin{cases} \sigma_{k_{rr}} - i\sigma_{k_{r\tau}} = 0 \\ \sigma_{k_{rr}} + i\sigma_{k_{r\tau}} = 0 \end{cases} \quad (3.83)$$

Ces conditions vont permettre de construire le système global.

3.8.4 Assemblage et obtention d'un système global

À partir des équations (3.66)-(3.70) et (3.77)-(3.81) et des conditions d'interface et aux limites, nous obtenons n systèmes linéaires d'équations :

$$\{H\}_{n, N_E} = \{Q\}_{n, N_E} \quad (3.84)$$

où H contient les expressions des contraintes et déplacements (réfléchies et transmises) au niveau des interfaces et Q contient les éléments de contraintes et déplacements issus de l'onde incidente. Les deux quantités sont des vecteurs colonnes de dimension N_E et sont données dans l'annexe B. On rappelle que $N_E = 2 + 4(N_L - 1)$ (déjà défini dans l'approche classique).

A travers l'expression (3.3), nous pouvons voir que les arguments des fonctions de Hankel, $\alpha_k|w(\eta)|$ et $\beta_k|w(\eta)|$, ne sont plus constants lorsqu'on traite des géométries autres que circulaires. De ce fait, les conditions d'orthogonalité ne peuvent pas être directement appliquées à l'équation (3.84). Pour déterminer les différents coefficients d'expansion, nous introduisons la forme matricielle de l'expansion des séries de Fourier. KÖRNER, [1989] et SEROV, [2017] ont rappelé qu'une fonction périodique Υ peut s'écrire à l'aide des séries de Fourier de la façon suivante :

$$\Upsilon = \sum_{m=0}^{\infty} \Upsilon_m e^{im\theta}, \quad \text{avec} \quad \Upsilon_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Upsilon e^{-im\theta} d\theta \quad (3.85)$$

où Υ_m représente le coefficient d'expansion.

Lorsqu'on applique l'équation (3.85) dans (3.84), il est possible d'obtenir une double série de Fourier dans les deux membres de l'équation (3.84). Les coefficients d'expansion deviennent alors dépendant des modes m et n et la taille du système global matriciel s'écrit en fonction du nombre de modes :

$$[G]_{n, m, \{M_E, M_E\}} \{P\}_{n, m, M_E} = \{I\}_{n, m, M_E}, \quad m = n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N_M \quad (3.86)$$

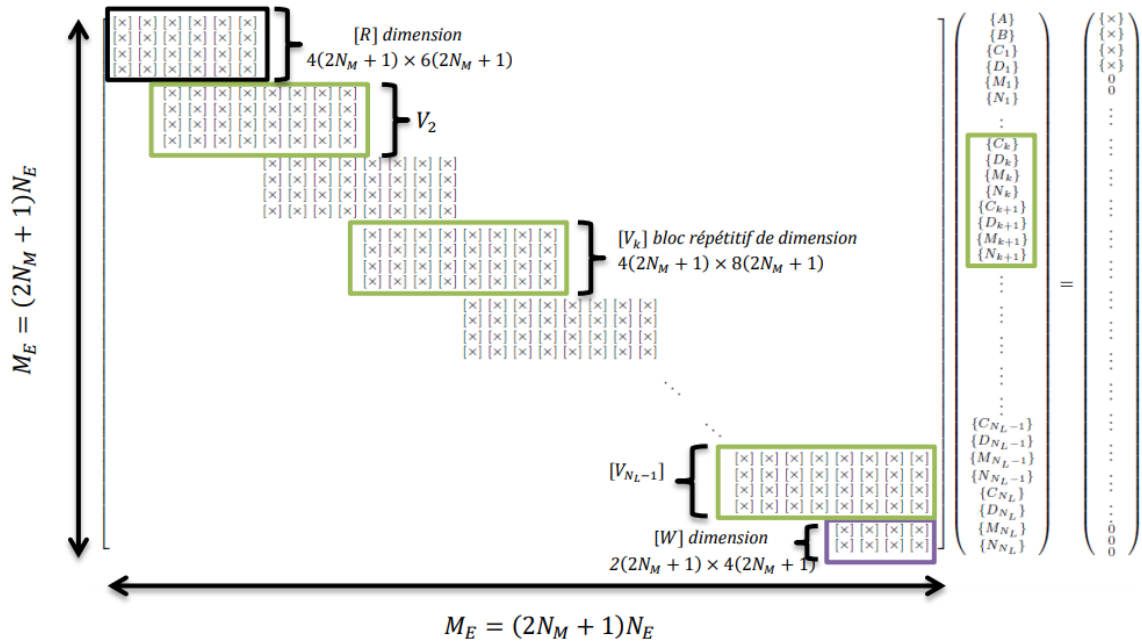
où $[G]$ est une matrice carré de dimensions $(M_E \times M_E)$, $\{P\}$ et $\{I\}$ sont des vecteurs colonnes de taille M_E . Ils ont tous des dimensions qui dépendent du nombre de modes N_M , la relation entre les quantités M_E , N_M et N_E s'écrivant :

$$M_E = (2N_M + 1) \times N_E \quad (3.87)$$

Les vecteurs $\{P\}$ et $\{I\}$ contiennent respectivement les coefficients d'expansion par mode et les expressions des contraintes et déplacements de l'onde incidente. La matrice globale $[G]$ est formée en utilisant les sous matrices non nulles $[R]$, $[W]$ et $[V_k]$ avec $(k = 2, 3, \dots, N_L - 1)$ comme présenté en détail ci-dessous en concordance avec la Figure 2.2 :

- ★ le bloc répétitif $[V_k]$ de dimensions $4(2N_M + 1) \times 8(2N_M + 1)$ contient les éléments de contraintes et déplacements aux interfaces $w(\eta_2)$ à $w(\eta_{N_L-1})$.
- ★ le bloc $[R]$ de dimension $4(2N_M + 1) \times 6(2N_M + 1)$ est composé d'éléments issus de la contribution des contraintes et déplacements à l'interface $w(\eta_1)$.
- ★ le bloc $[W]$ de dimensions $2(2N_M + 1) \times 4(2N_M + 1)$ contient les éléments de contraintes à la limite $w(\eta_{N_L})$.
- ★ le bloc répétitif $[V_k]$ de dimensions $4(2N_M + 1) \times 8(2N_M + 1)$ contient les éléments de contraintes et déplacements aux interfaces $w(\eta_2)$ à $w(\eta_{N_L-1})$.
- ★ chaque élément $E_{nmij}^{(p)}$ ou $E_{nmijk}^{(p)}$ notés par $[\times]$ dans les blocs $[R]$, $[V_k]$ et $[W]$ est une matrice carrée de dimensions $(2N_M + 1) \times (2N_M + 1)$.

Toutes les expressions sont fournies dans l'annexe B.



Nous utilisons dans cette section la même technique de structuration algorithmique du code que celle présentée dans la section 2.3.5.

3.9 Résultats

3.9.1 Calcul numérique

Dans l'approche de la variable complexe, nous sommes confrontés à deux types de problèmes numériques. Le premier est lié au calcul numérique des fonctions Hankel à basse fréquence déjà abordé dans la section 2.5.4. Le second concerne le calcul numérique des éléments $E_{nmij}^{(p)}$ et $E_{nmijk}^{(p)}$ intervenant dans la matrice globale $[G]$. Les termes $E_{nmij}^{(p)}$ et $E_{nmijk}^{(p)}$ sont obtenus grâce à une intégration sur la variable θ des quantités $E_{nij}^{(p)}$ et $E_{nijk}^{(p)}$ essentiellement composées de fonctions de Hankel de premier et de deuxième ordre et de la fonction $w(\eta)$ (annexe C). La Figure

Tunnel	$ \eta_1 $	$ \eta_2 $	$ \eta_3 $	$ \eta_4 $	G	c_1	c_2	c_3	c_4
Circulaire	3.4	2.9	2.4	2.0	0	0	0	0	0
Ellipse horizontale	3.4	2.9	2.4	2.0	0.972	0.25	0	0	0
Fer à cheval	1.413	1.20	0.995	0.82	$2.4e^{-i\frac{\pi}{2}}$	-0.01	-0.04	-0.002	-0.012

TABLE 3.1 – Coordonnées géométriques et coefficients de mapping des tunnels circulaire, elliptique et fer à cheval

Coefficients		D. Liu et al., 1982	Erreur relative
A_{-3}	$-0.408951 \times 10^{-4} + i0.105877 \times 10^{-5}$	$-0.409825 \times 10^{-4} + i0.101251 \times 10^{-5}$	0.0024
A_{-2}	$0.588472 \times 10^{-3} - i0.6638459 \times 10^{-2}$	$0.588153 \times 10^{-3} - i0.664517 \times 10^{-2}$	0.0010
A_{-1}	$-0.9821807 \times 10^{-2} + i0.390646 \times 10^{-3}$	$-0.981691 \times 10^{-2} + i0.391336 \times 10^{-3}$	0.0005
A_0	$-0.111208 \times 10^{-2} + i0.374542 \times 10^{-1}$	$-0.111462 \times 10^{-2} + i0.314570 \times 10^{-1}$	0.1905
A_1	$0.982181 \times 10^{-2} - i0.390645 \times 10^{-3}$	$0.981380 \times 10^{-2} - i0.394345 \times 10^{-3}$	0.0009
A_2	$0.588472 \times 10^{-3} - i0.663845 \times 10^{-2}$	$0.588029 \times 10^{-3} - i0.664492 \times 10^{-2}$	0.0010
A_3	$0.4089506 \times 10^{-4} - i1.058771 \times 10^{-6}$	$0.409887 \times 10^{-4} - i0.990927 \times 10^{-6}$	0.0028
B_{-3}	$-0.547375 \times 10^{-5} - i0.211882 \times 10^{-3}$	$-0.523445 \times 10^{-5} - i0.212331 \times 10^{-3}$	0.0024
B_{-2}	$0.198677 \times 10^{-1} + i0.175602 \times 10^{-2}$	$0.198875 \times 10^{-1} + i0.175506 \times 10^{-2}$	0.0010
B_{-1}	$-0.670366 \times 10^{-3} - i0.171018 \times 10^{-1}$	$-0.671594 \times 10^{-3} - i0.170935 \times 10^{-1}$	0.0005
B_0	$4.446479 \times 10^{-14} + i1.3040109 \times 10^{-14}$	$-0.386065 \times 10^{-6} - i0.595808 \times 10^{-6}$	1.0000
B_1	$-0.670366 \times 10^{-3} - i0.171018 \times 10^{-1}$	$-0.676553 \times 10^{-3} - i0.170881 \times 10^{-1}$	0.0009
B_2	$-0.198677 \times 10^{-1} - i0.001756 \times 10^{-2}$	$-0.198867 \times 10^{-1} - i0.175470 \times 10^{-2}$	0.0870
B_3	$-0.547376 \times 10^{-5} - i0.211882 \times 10^{-3}$	$-0.512241 \times 10^{-5} - i0.212365 \times 10^{-3}$	0.0028

TABLE 3.2 – Comparaison des coefficients obtenus avec ceux de D. LIU et al., 1982 pour une géométrie elliptique avec les paramètres $\alpha a = 0.20$ et $a/b = 3/2$

3.2 illustre un exemple d'évolution en échelle logarithmique des fonctions de Hankel pour les géométries circulaire, elliptique et fer à cheval en fonction de θ et du nombre de modes.

Comme précédemment mentionné, dans le cas d'une géométrie circulaire, $|w(\eta)|$ est constant. Les éléments $E_{nij}^{(p)}$ et $E_{nijsk}^{(p)}$ se réduisent alors également à des constantes et leur intégration numérique s'effectue sans difficulté majeure. Une étude réalisée sur plusieurs fréquences a également permis de montrer que les solutions numériques deviennent relativement stables à partir d'un nombre de modes total $(2N_M + 1)$. L'ajout d'un mode supplémentaire n'affecte pas les résultats car leur contribution devient quasiment nulle.

Dans le cas d'une géométrie elliptique la fonction $w(\eta)$ dépend de η et $1/\eta$. De ce fait, son module $|w(\eta)|$ n'est plus constant, les éléments $E_{nij}^{(p)}$ et $E_{nijsk}^{(p)}$ deviennent alors des fonctions périodiques entre 0 et 2π . Nous avons également observé que l'augmentation significative des maxima locaux en fonction du nombre de modes pouvait induire des oscillations numériques dans l'intégrande.

Pour la géométrie fer à cheval, l'intégration numérique des termes $E_{nij}^{(p)}$ et $E_{nijsk}^{(p)}$ se complique par rapport au cas elliptique du fait de l'existence de plusieurs maxima et minima (due à la fonction $w(\eta)$ qui dépend de η , $1/\eta$ et de ses dérivées successives). En reprenant l'étude précédemment effectuée sur plusieurs fréquences pour les cas elliptique et fer à cheval, nous avons identifié un nombre de modes total, souvent différent du cas circulaire, au-delà duquel les problèmes de divergence numérique apparaissent. Pour chaque fréquence les séries de Bessel-Fourier doivent être tronquées lorsque ce nombre de modes est atteint. Les solutions numériques convergent mais ne se stabilisent pas toujours totalement comme dans le cas circulaire. Il est donc difficile d'imposer un critère de convergence général. La connaissance de ces détails numériques est importante pour l'obtention de solutions numériques fiables. Elle n'a à notre connaissance jamais été abordée dans la littérature et représente la partie clef de l'approche.

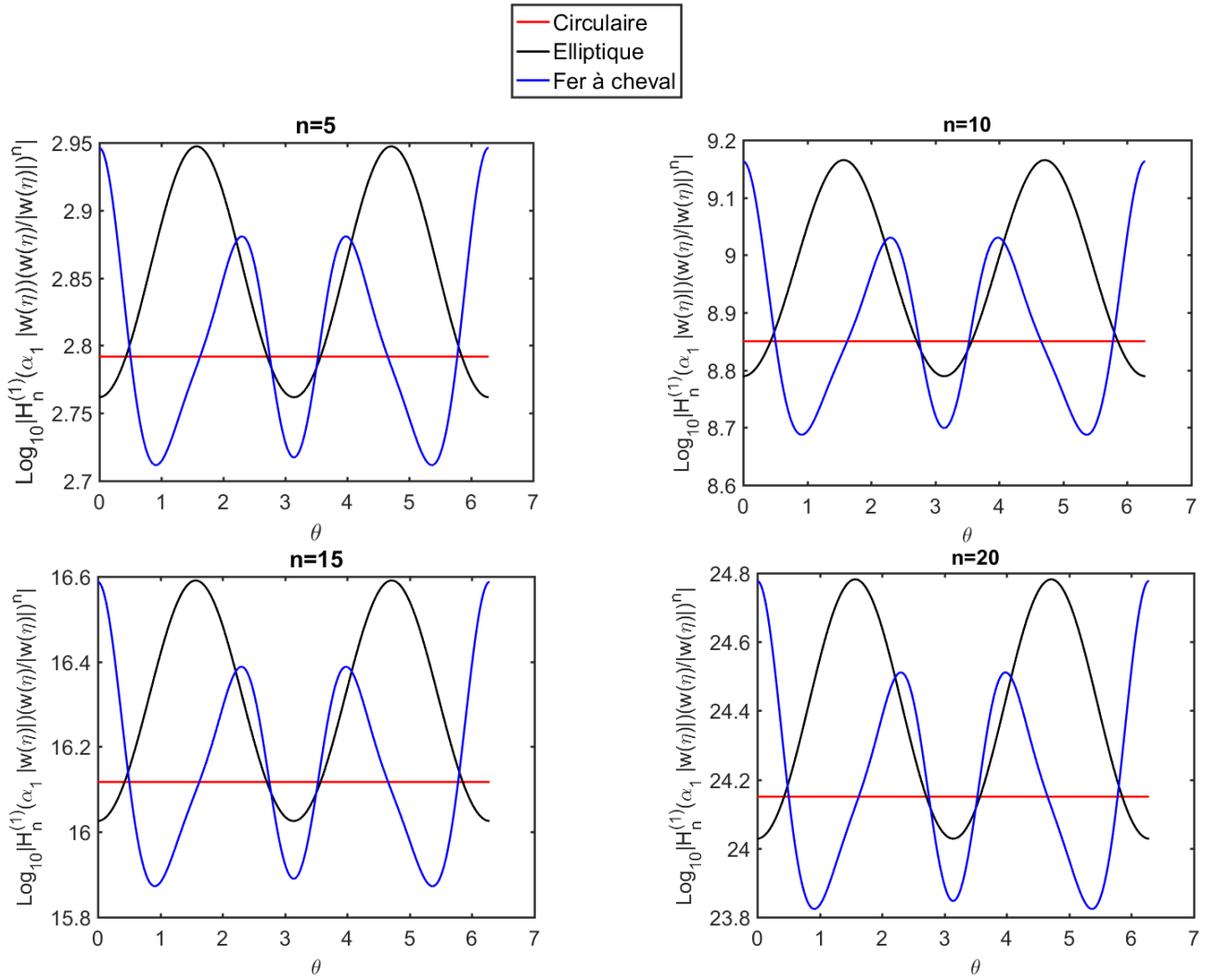


FIGURE 3.2 – Évolution des fonctions de Hankel pour les géométries circulaire, elliptique et fer à cheval en fonction de l'angle θ

3.9.2 Validation

Pour vérifier la fiabilité du code numérique, nous avons réalisé ici deux validations. Dans un premier temps, nous avons comparé les résultats obtenus à partir des approches classiques et variables complexes sur le cas d'une géométrie circulaire double (en absence d'EDZ). Dans l'approche de la variable complexe, la transformation particulière $w(\eta_k) = \eta_k$ permet de traiter une configuration circulaire. Les paramètres mécaniques utilisés et les nombres de modes choisis sont illustrés dans les tableaux 2.2 et 3.3. Sur la Figure 3.3, nous visualisons le diagramme polaire de la contrainte orthoradiale obtenue à l'interface Γ_3 pour une excitation harmonique de fréquences incidentes 200 Hz et 2000 Hz. Nous pouvons observer une superposition parfaite des résultats.

La deuxième validation a été effectuée sur une géométrie elliptique. Cette configuration a été traitée par D. LIU et al., [1982] uniquement en cavité simple sans revêtement. En choisissant les mêmes paramètres mécaniques que les auteurs, nous pouvons identifier qu'un bon accord est trouvé entre les résultats, cf. Figure 3.4. Nous pensons que l'écart entre les deux résultats est dû à la notion de précision numérique à cause de l'évolution considérable des solveurs et pré-conditionneurs depuis les années 1980. L'erreur relative entre les deux résultats est donnée

Tunnel	Interface	Fréquence (Hz)	Nombre de modes total $N_M + 1 / 2N_M + 1$
Circulaire	$w(\eta_1)$	200	5/9
Circulaire	$w(\eta_1)$	2000	21/31
Ellipse horizontale	$w(\eta_1), w(\eta_3)$	200	15
Ellipse horizontale	$w(\eta_1), w(\eta_3)$	2000	31
Fer à cheval	$w(\eta_1), w(\eta_3)$	200	13
Fer à cheval	$w(\eta_1), w(\eta_3)$	2000	31

TABLE 3.3 – Nombre de modes nécessaire pour assurer la convergence des séries de Bessel Fourier pour les géométries circulaire elliptique et fer à cheval. Dans l’approche classique, le nombre de modes total correspond à $N_M + 1$. Dans l’approche variable complexe le nombre de modes total est égal à $2N_M + 1$

dans le tableau 3.2.

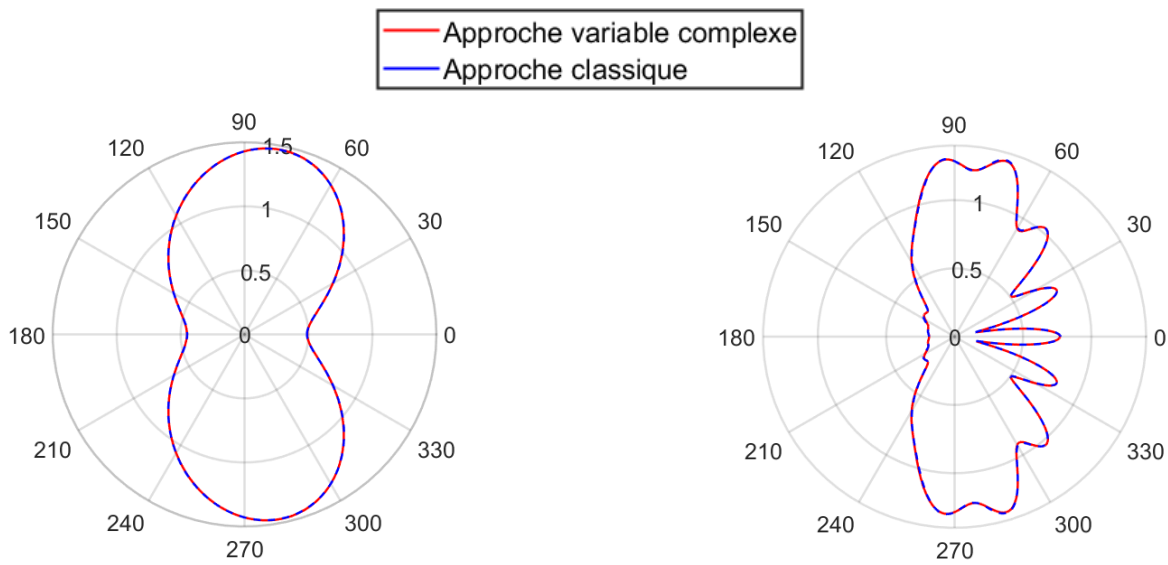


FIGURE 3.3 – Diagramme polaire de la contrainte orthoradiale adimensionnée à l’interface $w(\eta_1)$. Comparaison des approches classique et variable complexe à 200 Hz (gauche) et 2000 Hz (droite)

3.9.3 Configuration d’étude et résultats associés

Cette partie se situe dans la continuité des résultats analysés dans le chapitre 2 et la zone endommagée est ainsi constituée soit par une couche d’épaisseur 1 m soit par deux couches d’épaisseurs respectives 0.5 m. Les coordonnées géométriques et coefficients de mapping des différents tunnels circulaire, elliptique et fer à cheval sont fournis dans le tableau 3.1 et correspondent aux profils de la Figure 3.5. Comme dans l’approche classique, les résultats harmoniques sont présentés sous forme adimensionnée en suivant la même démarche d’adimensionnement que celle de la section 2.4.1.

Influence de la zone endommagée

Nous reprenons le même code couleur que celui utilisé dans le chapitre 2 : noir pour le cas sans EDZ, couleurs froides (bleu turquoise ou roi) pour le modèle de l’EDZ souple et chaudes

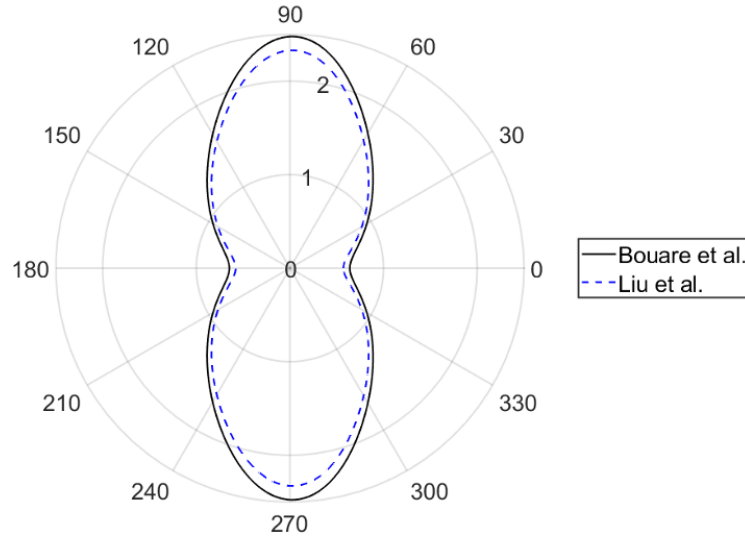


FIGURE 3.4 – Comparaison de la contrainte orthoradiale adimensionnée sur la limite inférieure du tunnel. Les paramètres de D. LIU et al., [1982] choisis sont $\alpha a = 0.2$ et $a/b = 3/2$ (cas elliptique)

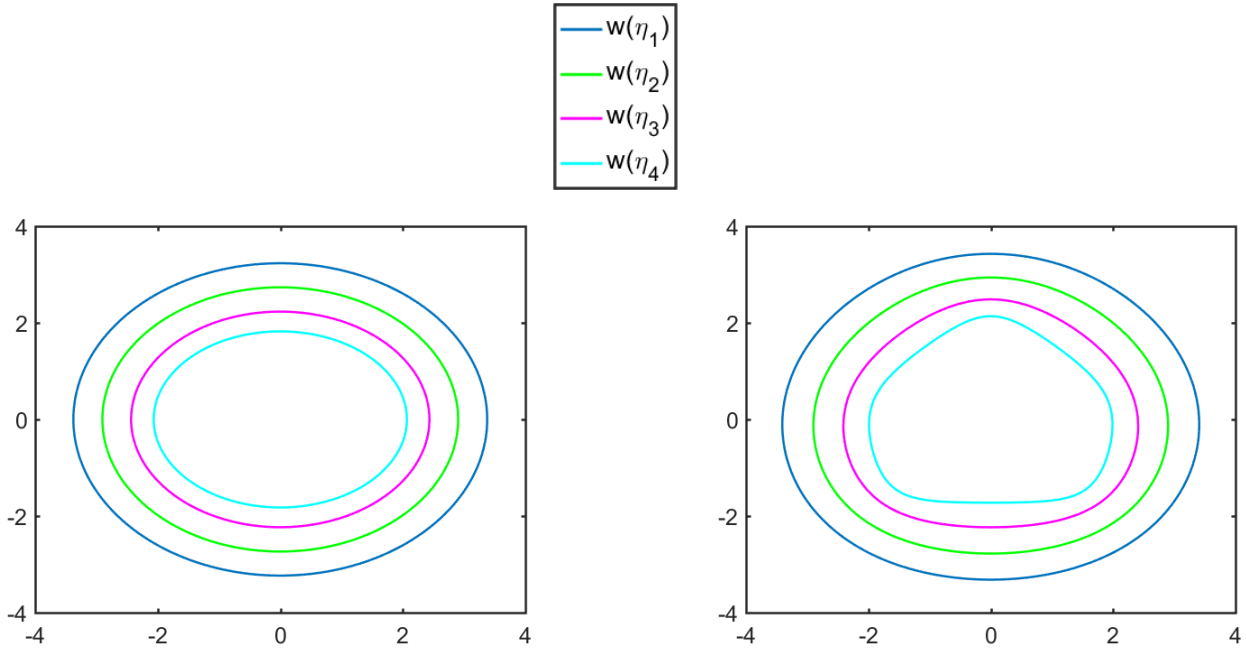


FIGURE 3.5 – Géométries elliptique et fer à cheval avec respectivement deux couches pour représenter la zone endommagée

(magenta ou rouge) pour le modèle d'EDZ dure.

★ Profil elliptique

Nous commençons par visualiser les champs à l'interface $w(\eta_1)$, Figures [3.6], pour un profil de tunnel elliptique. Dans ce cas, tous les résultats sont symétriques par rapport à l'axe horizontal. A basse fréquence (200 Hz), le choix d'une modélisation monocouche ou bicouche de la zone endommagée affecte peu les champs tracés à l'interface, Figures [3.6] gauche, puisque les courbes rouge et magenta se superposent ainsi que les courbes bleu et cyan. Par contre, la prise en compte d'une EDZ augmente la contrainte orthoradiale (Figures [3.6] haut) et le déplacement radial (Figures [3.6] bas) à l'interface $w(\eta_1)$ dans tous les cas d'EDZ dures ou souples, monocouche

ou bicouche. La dépendance par rapport à la variable angulaire donne des formes lisses ayant des allures tout à fait similaires pour les cinq cas d'étude. Par contre, à plus haute fréquence (2000 Hz), les configurations donnent des allures en fonction de la variable angulaire θ différentes qui deviennent beaucoup plus fluctuantes notamment avec l'apparition de plusieurs lobes localisés (Figures 3.6 droite). Le choix d'une description multicouches de l'EDZ modifie de manière significative les diagrammes polaires de la contrainte et du déplacement. Le maximum de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial est obtenu pour le cas d'EDZ dure. L'influence de l'EDZ est ainsi accentué à haute fréquence. Notons de plus un changement dans l'ordre de grandeur des déplacements (facteur 10) entre les basses et plus hautes fréquences. Ces tendances ont déjà été observées pour la prise en compte de l'EDZ dans le cas du profil circulaire.

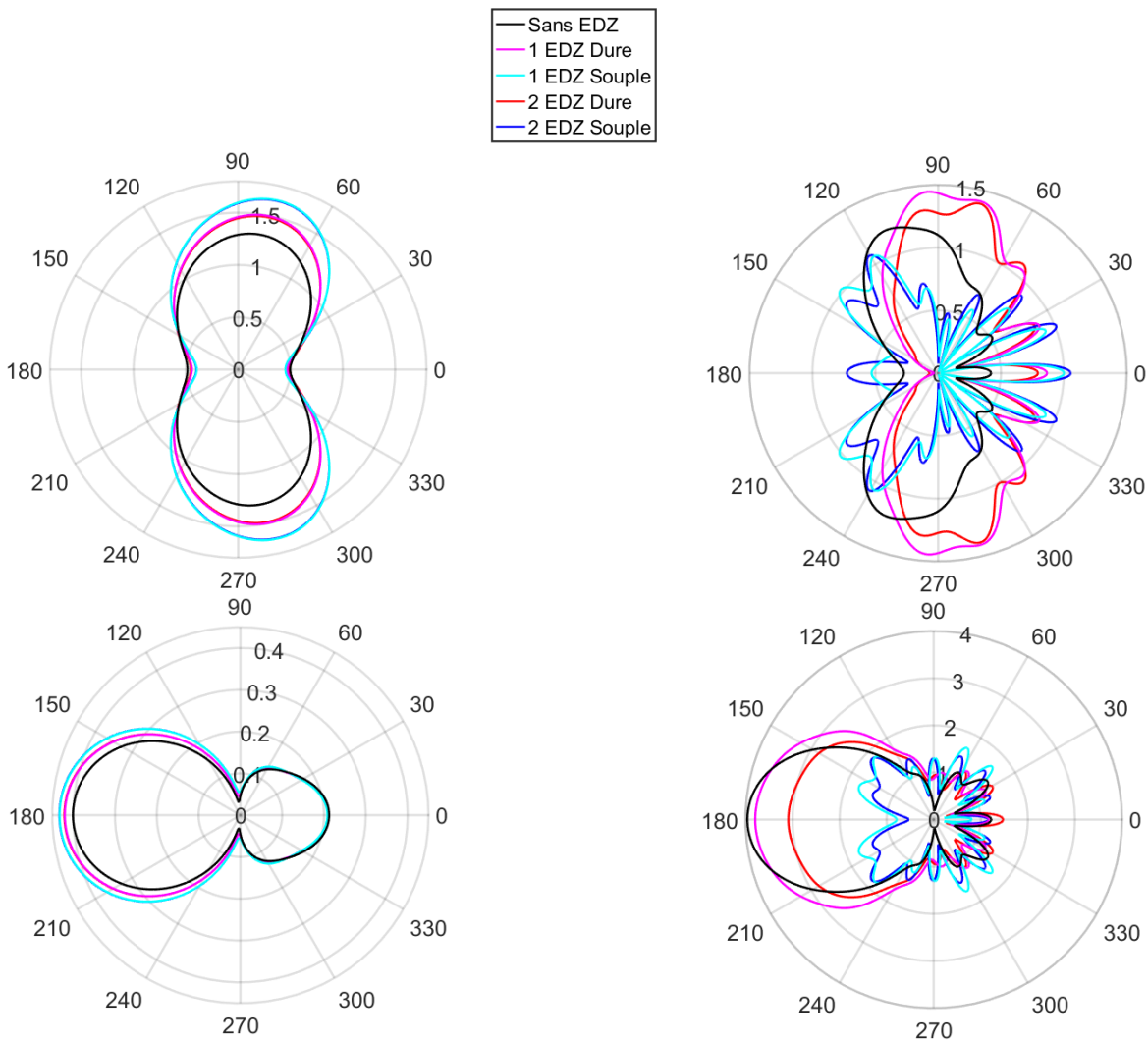


FIGURE 3.6 – Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour une géométrie elliptique à l'interface $w(\eta_1)$ aux fréquences incidentes 200 Hz (gauche) et 2000 Hz (droite)

Si on visualise maintenant les résultats sur l'interface $w(\eta_3)$, contrairement à l'interface $w(\eta_1)$, nous obtenons à basse fréquence une diminution de la contrainte orthoradiale lorsqu'on considère l'EDZ et une augmentation du déplacement radial (Figures 3.7 gauche). De plus, le cas de l'EDZ souple fournit des valeurs de contrainte orthoradiale plus faibles et des valeurs du déplacement radial plus élevées pour les deux fréquences choisies à l'interface $w(\eta_3)$. Aux interfaces $w(\eta_1)$ et $w(\eta_3)$, l'amplitude moyenne de la contrainte orthoradiale varie légèrement avec la fréquence et des pics sont toujours observés entre $\pi/6$ et $\pi/2$ (Figures 3.6 et 3.7 haut). Concernant l'amplitude moyenne du déplacement radial (Figures 3.6 et 3.7 bas), elle augmente avec la fréquence d'un facteur 10 et un pic est généralement localisé à π . A basse fréquence, on reste sur des résultats assez similaires à ceux obtenus dans le cas du profil circulaire.

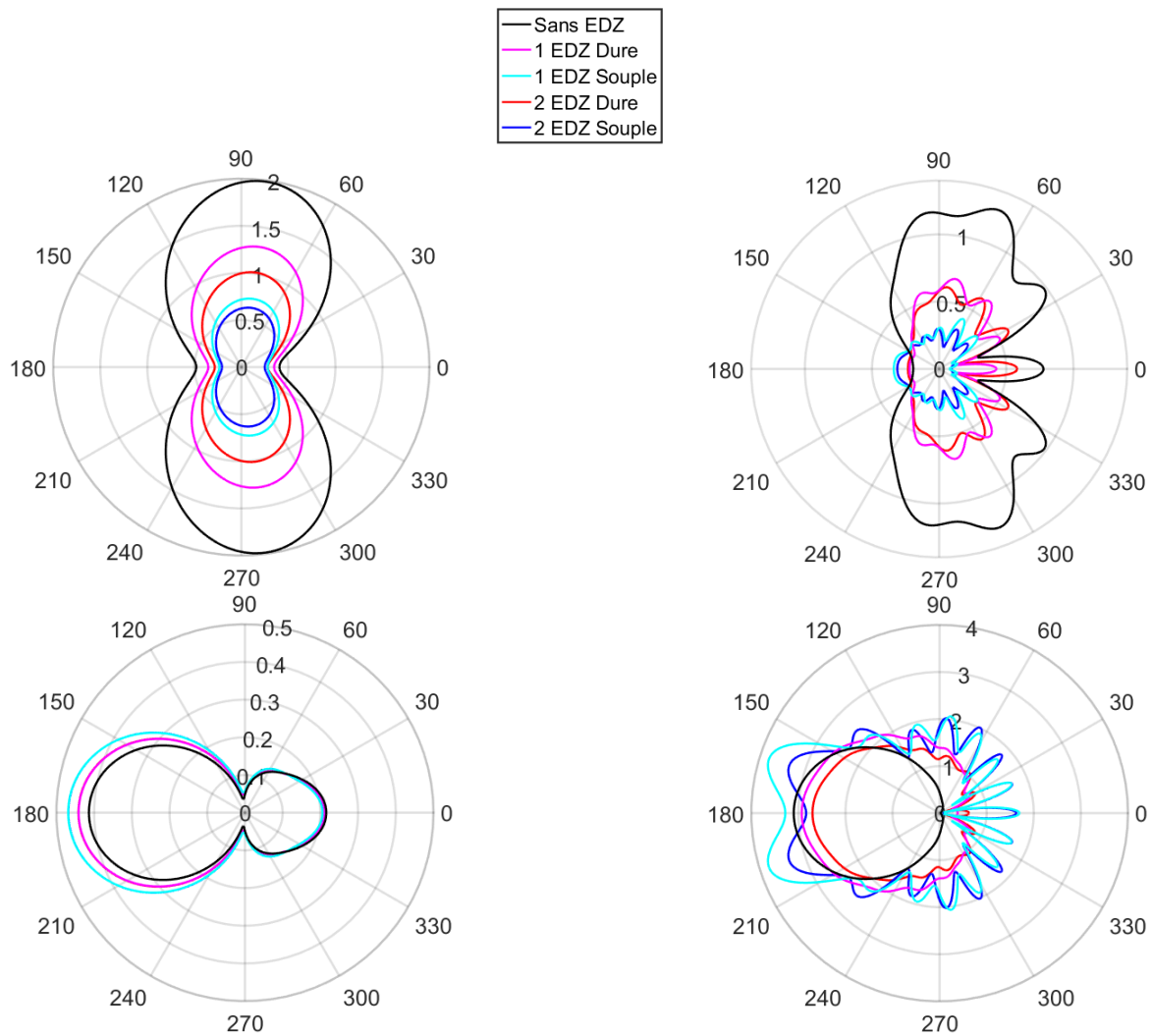


FIGURE 3.7 – Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour une géométrie elliptique à l'interface $w(\eta_3)$ aux fréquences incidentes 200 Hz (gauche) et 2000 Hz (droite)

★ Profil en fer à cheval

Les diagrammes polaires de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial obtenus pour la géométrie fer à cheval présentent des formes différentes par rapport à ceux obtenus dans le cas elliptique et tous les diagrammes deviennent non symétriques par rapport à l'axe horizontal. Comme dans le cas elliptique, les résultats montrent que la présence de la zone endommagée modifie les champs mécaniques autour du tunnel. Lorsque l'EDZ est prise en compte, on note une augmentation de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial à l'interface $w(\eta_1)$ pour les deux fréquences incidentes (Figures 3.8). L'EDZ souple conduit à des valeurs maximales des champs.

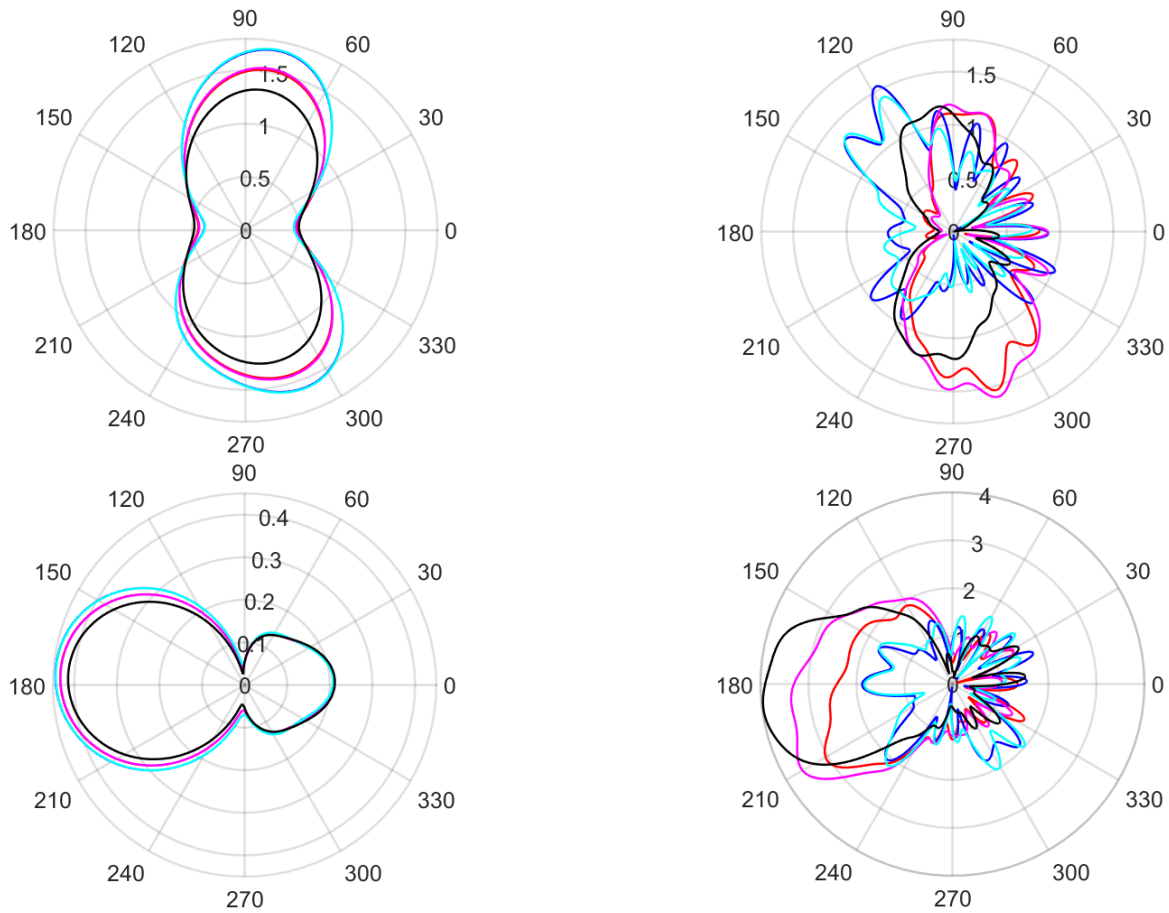


FIGURE 3.8 – Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour un fer à cheval à l'interface $w(\eta_1)$ aux fréquences incidentes 200 Hz (gauche) et 2000 Hz (droite)

Dans le massif à l'interface $w(\eta_3)$, la zone endommagée augmente légèrement le déplacement radial et diminue la contrainte orthoradiale à basse fréquence (Figures 3.9 gauche). À haute fréquence, les diagrammes polaires deviennent très perturbées, nous identifions également l'apparition des pics localisés notamment autour de π pour le déplacement radial (Figures 3.9 droite). Il est important de noter que pour les deux formes de tunnel (elliptique et en fer à cheval), le déplacement radial augmente avec la fréquence, contrairement à la contrainte orthoradiale, qui diminue.

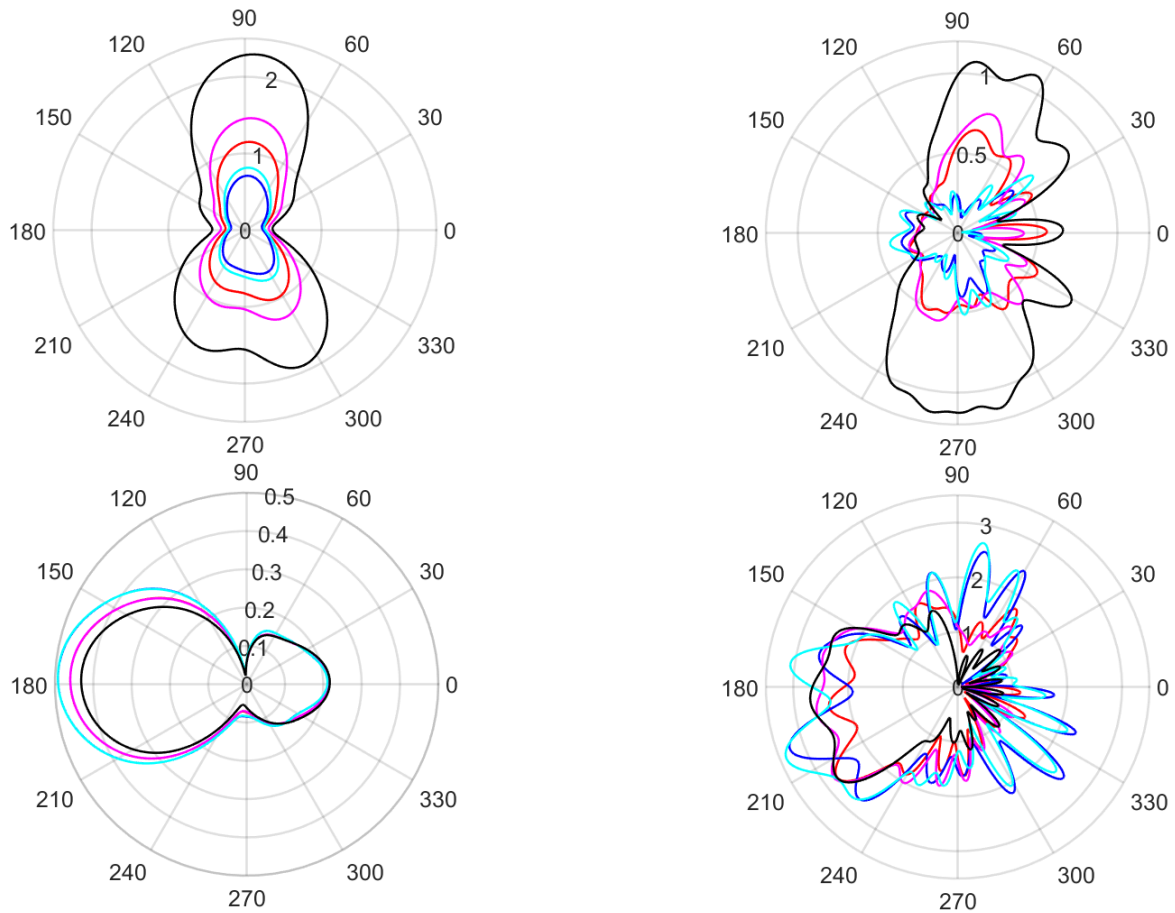


FIGURE 3.9 – Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour un fer à cheval à l'interface $w(\eta_3)$ aux fréquences incidentes 200 Hz (gauche) et 2000 Hz (droite)

Influence de la géométrie

Pour compléter l'analyse précédente, approfondir et faciliter la comparaison des réponses en contrainte orthoradiale et déplacement radiaux obtenues à partir des différentes formes géométriques de tunnel, nous superposons directement les résultats. Les trois formes de tunnel, circulaire, elliptique et en fer à cheval, ont été choisies de manière à ce que les points géométriques soient les mêmes à $\theta = 0$ et π . Nous choisissons de comparer les résultats à l'interface $w(\eta_3)$ dans le cas de la configuration deux couches EDZ dures. Ainsi, les Figures 3.10 comparent les diagrammes polaires obtenus pour chaque profil de tunnel et montrent que la forme géométrique modifie la distribution de la contrainte orthoradiale et du déplacement radial. A basse fréquence, les diagrammes polaires de la géométrie circulaire sont plutôt proches du cas elliptique et un peu plus différents du cas fer à cheval. À plus haute fréquence, les écarts augmentent et les fluctuations en θ s'accroissent, provenant sans doute des différences d'épaisseurs apparaissant dans les couches de la zone endommagée.

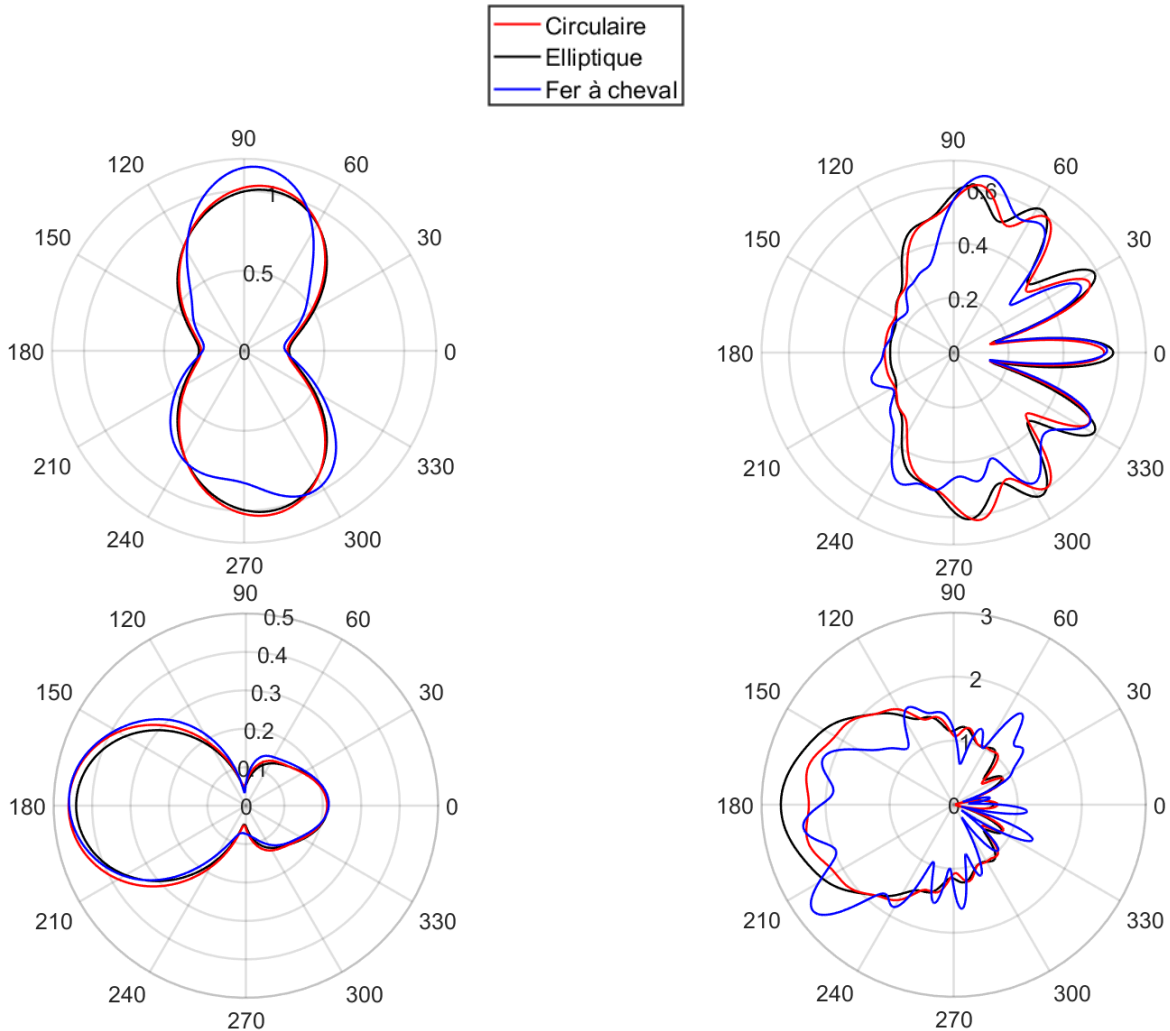


FIGURE 3.10 – Contrainte orthoradiale adimensionnée (Figures du haut) et déplacement radial adimensionné (Figures du bas) pour les géométries circulaire, elliptique et fer à cheval à l'interface $w(\eta_3)$ aux fréquences incidentes 200 Hz (gauche) et 2000 Hz (droite)

Évolution en fonction de la fréquence

Comme nous avons constaté que la fréquence a une influence notable sur les champs de déplacement et de contrainte, et dans la continuité des résultats proposés dans le chapitre précédent, nous proposons d'étudier l'évolution du déplacement radial pour les différentes géométries, à l'interface $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$, en fonction de la fréquence incidente. Dans un premier temps, l'étude est menée sans prendre en compte l'EDZ, puis, dans un deuxième temps, la zone endommagée est décrite par deux couches dures ou souples. L'intervalle de fréquence retenu pour l'analyse varie entre 200 et 4500 (Hz). Les principales observations de cette étude sont les suivantes :

- ★ Les courbes du déplacement radial pour les géométries circulaire et elliptique présentent un comportement croissant jusqu'à une valeur maximale, puis diminuent jusqu'à une valeur minimale pour une fréquence comprise entre 3000 Hz et 3500 Hz (en fonction de la forme géométrique et de la rigidité de l'EDZ). Ce minimum est légèrement décalé vers des fréquences plus faibles pour les géométries circulaire et fer à cheval (Figure 3.11).
- ★ Des oscillations apparaissent lorsque l'EDZ est prise en compte et celles-ci sont plus perceptibles dans le cas d'une EDZ à 2 couches plus souples. Elles sont dues à la stratification du milieu entraînant de multiples réflexions et sont assez similaires pour les géométries circulaire, elliptique et fer à cheval.
- ★ Toutes les courbes présentent un autre comportement croissant pour les fréquences supérieures à 3500 Hz, jusqu'à une valeur maximale (non observée pour toutes les courbes, selon la gamme de fréquences choisie), Figures 3.13-3.16.
- ★ En ce qui concerne le premier maximum, il est obtenu pour des valeurs de fréquence plus basse lorsque l'EDZ est prise en compte.

Les tendances précédemment décrites sont observées lorsqu'on regarde l'évolution du déplacement radial dans les différents cas d'étude en fonction de la fréquence et de l'épaisseur du béton à l'interface $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$. Par exemple sur la Figure 3.13 gauche, nous pouvons confirmer la position du minimum dans le cas circulaire à l'aide de la formule de Rayleigh. Plus précisément, on obtient sur la courbe courbe rose $H = 0.8$, un minimum pour $f_0 = 1572$ Hz, courbe cyan $H = 0.7$ donne $f_0 = 1797$ Hz, courbe rouge $H = 0.6$ donne $f_0 = 2096$ Hz, etc... Des oscillations apparaissant lorsqu'on prend en compte l'EDZ et les tendances sont assez similaires pour les épaisseurs respectives choisies. Un changement spécifique se produit dans la deuxième partie croissante des courbes. Il s'agit d'une grande pente observée au début dans tous les cas étudiés autour la même valeur de fréquence puis apparaissent ensuite des oscillations secondaires (Figures 3.14-3.16).

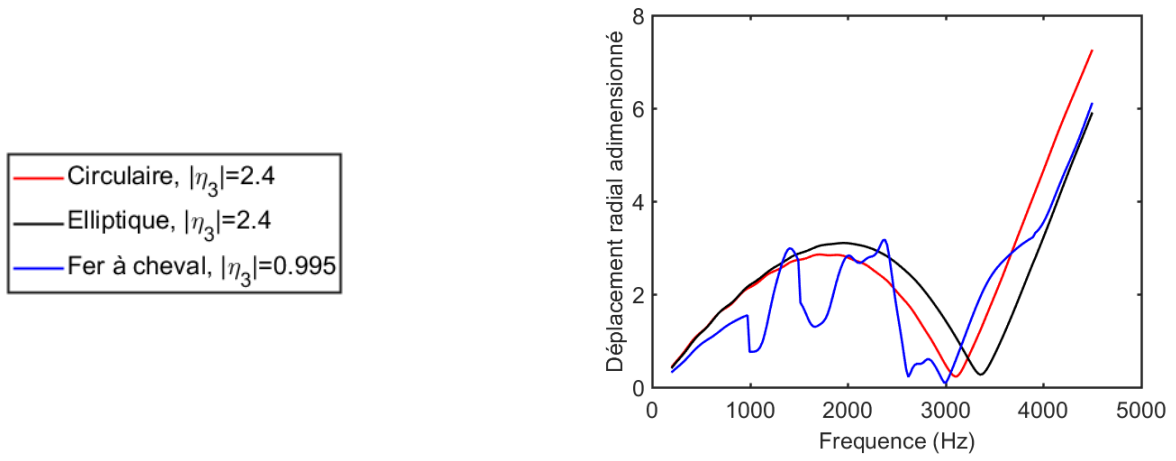


FIGURE 3.11 – Évolution du déplacement radial adimensionné à l'interface $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$ en fonction de la fréquence incidente pour les géométries circulaire elliptique et fer à cheval en absence d'EDZ

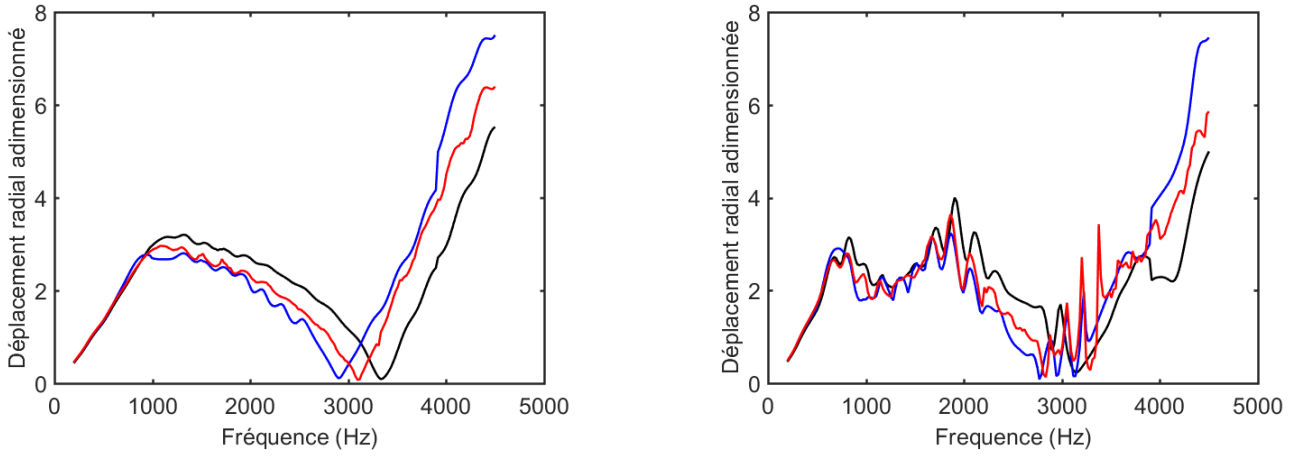


FIGURE 3.12 – Évolution du déplacement radial adimensionné à l'interface $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$ en fonction de la fréquence incidente pour les géométries circulaire, elliptique et fer à cheval. Cas d'EDZ dure (gauche) et souple (droite)

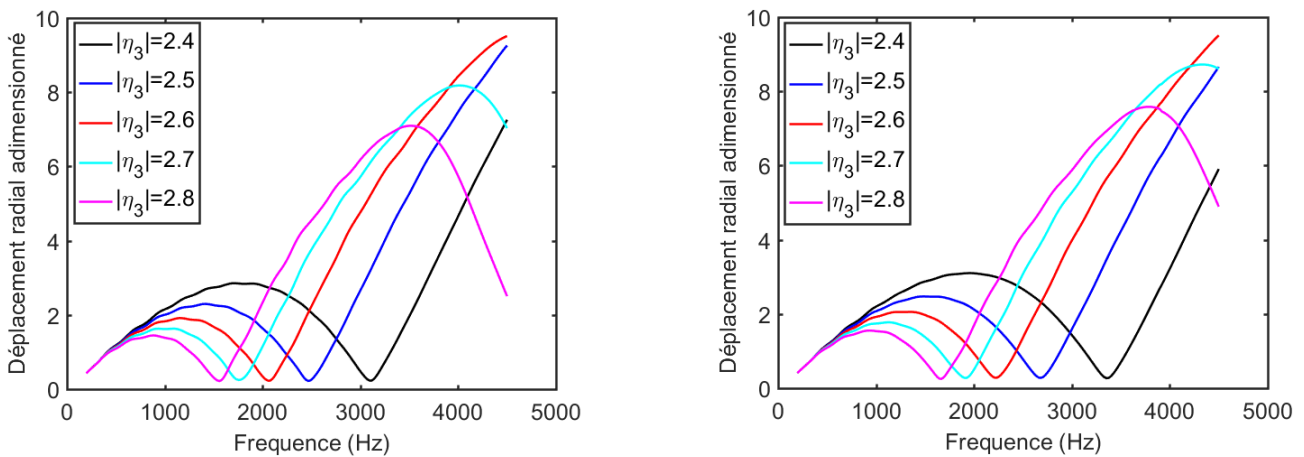


FIGURE 3.13 – Évolution du déplacement radial adimensionné pour plusieurs épaisseurs du tunnel en fonction de la fréquence incidente à $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$. Cas de géométries circulaire (gauche) et elliptique (droite) en absence d'EDZ

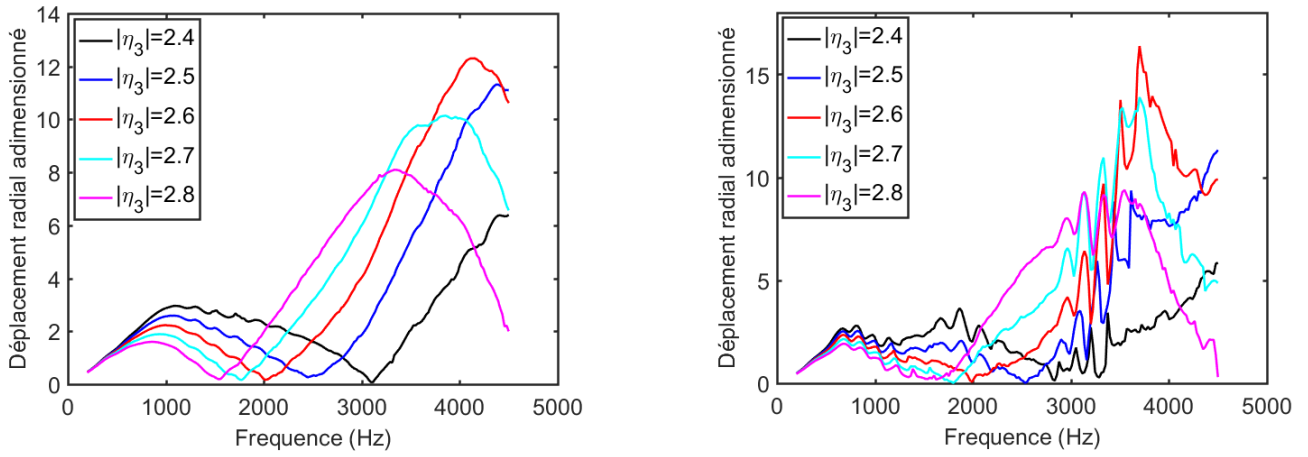


FIGURE 3.14 – Évolution du déplacement radial adimensionné pour plusieurs épaisseurs du tunnel en fonction de la fréquence incidente à $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$. Cas d'une géométrie circulaire avec deux couches d'EDZ dure (gauche) et souple (droite)

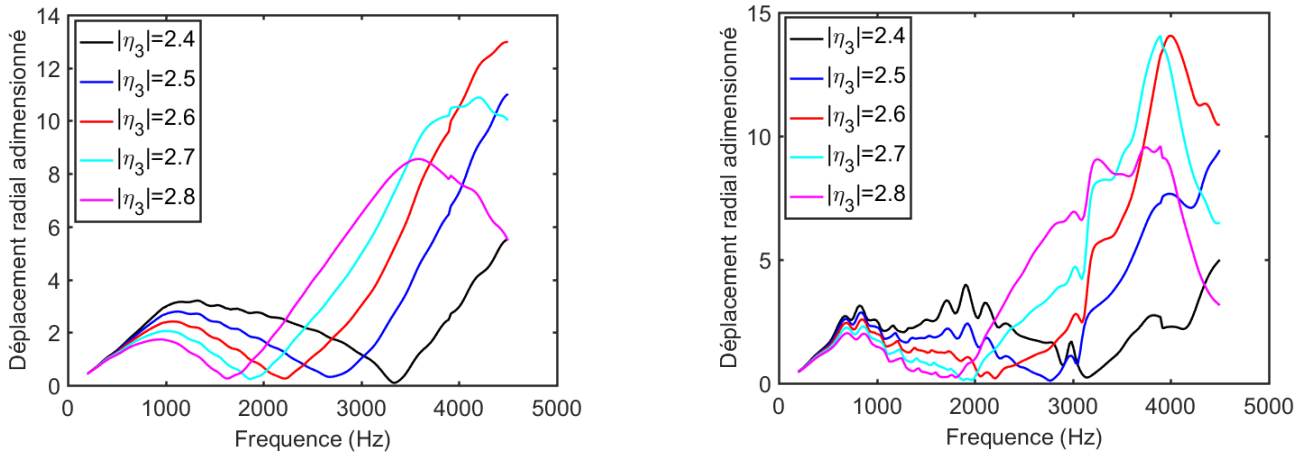


FIGURE 3.15 – Évolution du déplacement radial adimensionné pour plusieurs épaisseurs du tunnel en fonction de la fréquence incidente à $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$. Cas d'une géométrie elliptique avec deux couches d'EDZ dure (gauche) et souple (droite)

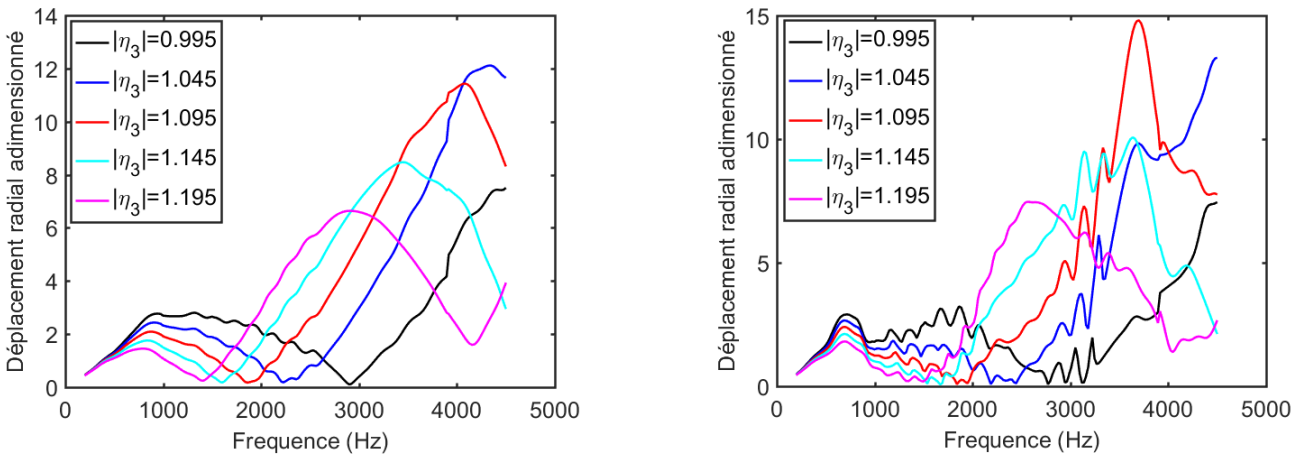


FIGURE 3.16 – Évolution du déplacement radial adimensionné pour plusieurs épaisseurs du tunnel en fonction de la fréquence incidente à $w(\eta_3)$ et $\theta = \pi$. Cas d'une géométrie fer à cheval avec deux couches d'EDZ dure (gauche) et souple (droite)

3.10 Régime transitoire

Il est également possible d'étendre l'étude précédente en régime transitoire en utilisant la transformée de Fourier. Comme détaillé dans la section 2.5, la première étape consiste d'abord à réécrire pour chaque milieu, les potentiels caractérisant le mouvement des ondes P et SV dans le domaine de Fourier. Par exemple, lorsqu'on considère comme signal une onde P plane incidente avec une variation temporelle de type Ricker, les potentiels scalaire et vectoriel caractérisant le mouvement des ondes incidentes et réfléchies dans le massif karstique s'obtiennent à partir des équations (3.64) et (3.65) comme suit :

$$\phi_1^{(T)}(\eta, \bar{\eta}, \omega) = \varphi_0 E(\omega) e^{i\alpha_1 \left(\frac{w(\eta) + \overline{w(\eta)}}{2} \right)} + E(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.88)$$

$$\psi_1^{(T)}(\eta, \bar{\eta}, \omega) = E(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\beta_1 |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.89)$$

Les potentiels caractérisant le mouvement dans la zone endommagée et dans le tunnel s'obtiennent également à partir des équations (3.75) et (3.76) :

$$\phi_k^{(T)}(\eta, \bar{\eta}, \omega) = E(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_{kn} H_n^{(2)}(\alpha_k |w(\eta)|) + D_{kn} H_n^{(1)}(\alpha_k |w(\eta)|) \right\} \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.90)$$

$$\psi_k^{(T)}(\eta, \bar{\eta}, \omega) = E(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ M_{kn} H_n^{(2)}(\beta_k |w(\eta)|) + N_{kn} H_n^{(1)}(\beta_k |w(\eta)|) \right\} \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \quad (3.91)$$

La deuxième étape consiste à déterminer dans le domaine fréquentiel les expressions des contraintes et des déplacements dans les différents milieux. Comme $E(\omega)$ est indépendant de η et $\bar{\eta}$, les composantes du tenseur des contraintes et du vecteur déplacement dans le domaine de Fourier peuvent directement être obtenues en multipliant les relations (3.66)-(3.70) et (3.77)-(3.81) précédemment établies en régime harmonique par $E(\omega)$, spectre du signal de Ricker. La connaissance des composantes des champs de contraintes et déplacements permet ensuite de construire, à travers les conditions aux limites de la section 3.8.3, le même système matriciel global de la section 3.8.4. La résolution du système linéaire pour chaque fréquence et chaque mode permet ensuite de déterminer les différents coefficients d'expansion et de déterminer les spectres des champs mécaniques. La même démarche que celle adoptée dans la section 2.5.3 est ensuite utilisée pour calculer les termes en contraintes et déplacements à l'aide de la transformée inverse de Fourier. Dans cette section, nous avons insisté sur les points essentiels et autres points délicats des étapes clefs.

3.10.1 Résultats

Dans cette section, nous proposons de présenter les premiers résultats obtenus en régime transitoire pour la configuration cavité simple pour une géométrie circulaire et elliptique en focalisant l'analyse sur les signaux à $\theta = \{\pi, 2\pi/3\}$.

La Figure 3.17 montre que le type de géométrie modifie légèrement l'amplitude des champs mécaniques.

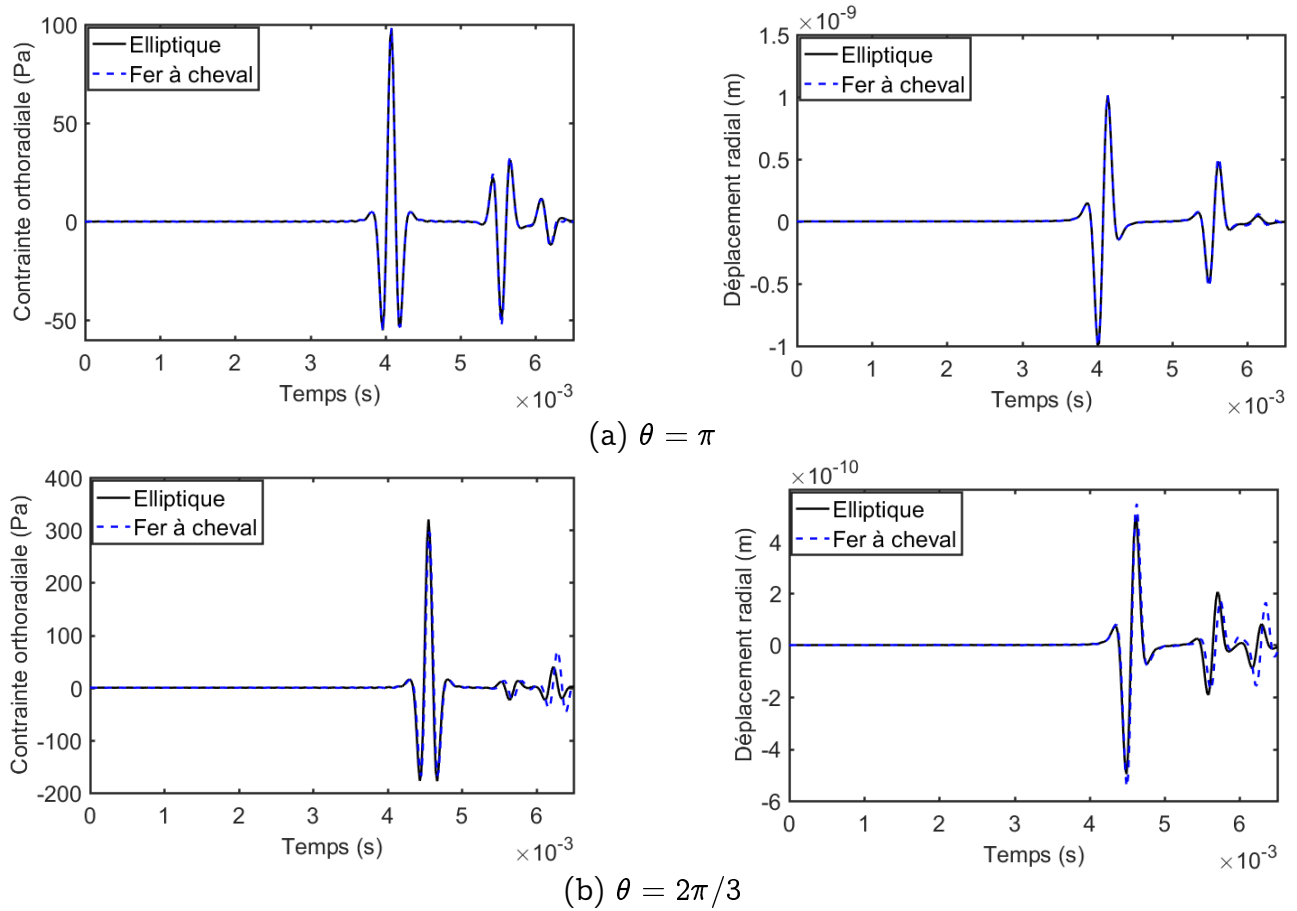


FIGURE 3.17 – Contrainte orthoradiale et déplacement radial pour les géométries elliptique et fer à cheval à $r = 5$ m, fréquence centrale du Ricker $\Lambda = 3000$ Hz

3.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé un deuxième modèle numérique permettant de simuler la réponse mécanique d'un tunnel de forme arbitraire et de son espace environnant. Nous avons d'abord commencé par présenter la formulation globale permettant de traiter le problème multicouches radial non circulaire et nous avons ensuite explicité les expressions des contraintes et déplacements dans les différents milieux. Les problèmes numériques intervenant dans l'approche de la variable complexe lorsqu'on traite des géométries types ellipse ou fer à cheval ont été abordés. Les résultats obtenus en régime harmonique ont montré que la forme géométrique modifie faiblement l'intensité des champs mécaniques étudiés. Un premier résultat en régime transitoire a enfin été proposé.

Conclusion générale

Ce travail de doctorat s'est inscrit dans un cadre général d'étude de la propagation d'ondes mécaniques dans les milieux géologiques complexes et hétérogènes faisant intervenir un tunnel enterré. L'objectif principal était de développer une approche semi-analytique permettant de simuler la réponse dynamique d'un tunnel et de son espace environnant en régimes harmonique et transitoire.

Dans le premier chapitre, nous avons commencé par présenter d'une part l'environnement spécifique du LSBB et, d'autre part, les généralités concernant l'étude de la propagation d'ondes élastiques. Une analyse bibliographique a ensuite permis de dresser un bilan sur les différentes méthodes et configurations traitées dans la littérature et a montré la nécessité de mener des études complémentaires, notamment concernant la prise en compte des effets de la zone endommagée avec le développement d'un modèle multicouches.

Le second chapitre a présenté un modèle circulaire multicouches pour modéliser les galeries et un environnement hétérogène par morceaux. Une prise en compte de la qualité des contacts entre deux couches successives a été intégrée au modèle. Un certain nombre de résultats illustrant la réponse dynamique des champs de contraintes et de déplacements du tunnel, de la zone endommagée et du massif environnant ont été proposés dans un premier temps en régimes harmoniques. Dans l'optique à plus long terme d'application en inversion de formes d'ondes complètes, une extension en régimes transitoires a été effectuée.

Le dernier chapitre a été consacré à un développement spécifique permettant de décrire des géométries s'écartant des géométries cylindriques plus classiques en faisant appel à la théorie générale de l'approche de la variable complexe. Les spécificités numériques et les points de vigilance associés ont été soulignés. L'influence de la forme de la géométrie modélisant un tunnel et son environnement a notamment été proposée.

Concernant les futurs développements, nous souhaitons orienter ces travaux de doctorat vers les pistes suivantes :

- ★ dans un premier temps, il serait intéressant de mener une étude plus exhaustive de la réponse transitoire pour les configurations géométriques quelconques pour compléter les premiers résultats obtenus, en particulier avec la prise en compte de l'aspect multicouches. Il serait par ailleurs utile d'introduire le modèle d'interface imparfait dans l'approche de la variable complexe dans le but d'avoir plus de souplesse dans le choix des interfaces, comme effectué dans l'approche classique.
- ★ dans un autre registre, les développements théoriques et numériques effectués pourraient être utilisés pour réaliser une analyse de sensibilité globale des modèles afin d'identifier les paramètres mécaniques les plus influents. Le problème inverse pourrait alors être envisagé dans le but de remonter aux caractéristiques mécaniques des milieux.
- ★ une étude expérimentale avec le Laboratoire des Fluides Complexes et leurs Réservoirs de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour a été envisagée en cours de seconde

année de thèse de doctorat pour confronter les résultats issus du code numérique à des mesures issues d'une configuration expérimentale simple mais proche du LSBB à échelle réduite (maquettes). Malheureusement, ce projet a été fortement freiné en raison de la crise sanitaire du Covid-19.

- ★ du point de vue physique, les milieux karstiques sont par essence des milieux poreux avec l'existence simultanée d'une phase solide et d'une phase fluide. L'idée de décrire ces milieux en utilisant la théorie de l'élasticité n'est pas aberrante, mais il pourrait être judicieux et intéressant de développer les mêmes compétences et modèles en utilisant une approche poroélastique, s'appuyant par exemple sur la théorie de Biot et modélisant des milieux partiellement saturés.

Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN et R. H. ROMER. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publications, 1988.
- [2] I. ABU-ALSHAIKH, D. TURHAN et Y. MENGI. « Two-dimensional transient shear wave propagation in viscoelastic cylindrical layered media ». In : *Journal of Sound and Vibration* 244.5 (2001), p. 837-858.
- [3] J. ACHENBACH et H. ZHU. « Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites ». In : *Journal of The Mechanics and Physics of Solids* 37 (1989), p. 381-393.
- [4] J. ACHENBACH. *Wave propagation in elastic solids*. Elsevier, 2012.
- [5] K. AKI, M. FEHLER, R. AAMODT, J. ALBRIGHT, R. POTTER, C. PEARSON et al. « Interpretation of seismic data from hydraulic fracturing experiments at the Fenton Hill, New Mexico, hot dry rock geothermal site ». In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 87.B2 (1982), p. 936-944.
- [6] K. AKI et P. G. RICHARDS. *Quantitative seismology*. Springer, 2002.
- [7] K. AKI et R. S. WU. *Scattering and Attenuations of Seismic Waves, Part 1*. Springer, 1988.
- [8] N. EL-AKILY et S. K. DATTA. « Response of a circular cylindrical shell to disturbances in a half-space ». In : *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 8.5 (1980), p. 469-477.
- [9] T. R. AKYLAS, G. LI, C. C. MEI et R. ROSALES. « 1.138 J/2.062 J/18.376 J Wave Propagation, Fall 2004 ». In : *MIT Libraries* (2004).
- [10] H. ALIELAHI, M. KAMALIAN et M. ADAMPIRA. « Seismic ground amplification by unlined tunnels subjected to vertically propagating SV and P waves using BEM ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 71 (2015), p. 63-79.
- [11] I. A. ALSHAIKH, D. TURHAN et Y. MENGI. « Transient waves in viscoelastic cylindrical layered media ». In : *European Journal of Mechanics-A/Solids* 21.5 (2002), p. 811-830.
- [12] A. BARBEL-PÉRINEAU. « Caractérisation du fonctionnement de la zone non saturée des aquifères karstiques : Approche directe par études hydrodynamiques et hydrochimiques sur le Bassin de Recherche, d'Expérimentation et d'Observation de Fontaine de Vaucluse-Laboratoire Souterrain à Bas Bruit de Rustrel-Pays d'Apt ». Thèse de doct. Université d'Avignon, 2013.
- [13] M. L. BARON et A. T. MATTHEWS. « Diffraction of a Pressure Wave by a Cylindrical Cavity in an Elastic Medium ». In : *Journal of Applied Mechanics* 28.3 (1961), p. 347-354.

- [14] M. L. BARON et R. PARNES. « Displacements and Velocities Produced by the Diffraction of a Pressure Wave by a Cylindrical Cavity in an Elastic Medium ». In : *Journal of Applied Mechanics* 29.2 (1962), p. 385-395.
- [15] L. BAUDOUY. *Rapport de synthèse, Suivi géologique, photographie haute définition, prélèvement échantillons, essais en laboratoire LSBB - Rustrel Fugro Project No. : GTR/GEOS/1017-1661, 14 Juin au 19 Juillet*. Rapp. tech. Geosonic, 2017.
- [16] J. BEREŠ, H. ZEYEN, G. SÉNÉCHAL, D. ROUSSET et S. GAFFET. « Seismic anisotropy analysis at the Low-noise underground Laboratory (LSBB) of Rustrel (France) ». In : *Journal of Applied Geophysics* 94 (2013), p. 59-71.
- [17] M. A. BIOT. « Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 28.2 (1956), p. 168-178.
- [18] M. A. BIOT. « Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 28.2 (1956), p. 179-191.
- [19] A. BITRI, J. PERRIN et A. BEAUCE. *La sismique réflexion haute fréquence : principes et applications, photographie haute*. Rapp. tech. BRGM, 1996.
- [20] T. BLONDEL. « Traçage spatial et temporel des eaux souterraines dans les hydrosystèmes karstiques par les matières organiques dissoutes : expérimentation et application sur les sites du Laboratoire Souterrain à Bas Bruit (LSBB) de Rustrel–Pays d’Apt et de Fontaine de Vaucluse ». Thèse de doct. Université d’Avignon, 2008.
- [21] E. BOIDY, A. BOUVARD et F. PELLET. « Back analysis of time-dependent behaviour of a test gallery in claystone ». In : *Tunnelling and Underground Space Technology* 17.4 (2002), p. 415-424.
- [22] H. BOUARE, A. MESGOUEZ et G. LEFEUVE-MESGOUEZ. « Contribution to the modeling and the mechanical characterization of the subsoil in the LSBB environment ». In : *E3S Web of Conferences*. T. 88. EDP Sciences. 2019.
- [23] J. M. CARCIONE. *Wave fields in real media : Wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media*. Elsevier, 2007.
- [24] S. D. CARRIÈRE. « Etude hydrogéophysique de la structure et du fonctionnement de la zone non saturée du karst ». Thèse de doct. Université d’Avignon, 2014.
- [25] S. D. CARRIÈRE, K. CHALIKAKIS, G. SÉNÉCHAL, C. DANQUIGNY et C. EMBLANCH. « Combining electrical resistivity tomography and ground penetrating radar to study geological structuring of karst unsaturated zone ». In : *Journal of Applied Geophysics* 94 (2013), p. 31-41.
- [26] W. CHEN et G. HUANG. « Seismic wave passage effect on dynamic response of submerged floating tunnels ». In : *Procedia Engineering* 4 (2010), p. 217-224.
- [27] W. CHEN, W. ZHU et J. F. SHAO. « Damage coupled time-dependent model of a jointed rock mass and application to large underground cavern excavation ». In : *International journal of rock mechanics and mining sciences* 41.4 (2004), p. 669-677.

-
- [28] D. CLOUTEAU, M. ARNST, T. AL-HUSSAINI et G. DEGRANDE. « Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium ». In : *Journal of sound and vibration* 283.1-2 (2005), p. 173-199.
 - [29] Ö. COŞKUN Engin. « Dynamic Stress and Displacement in an Elastic Half-Space with a Cylindrical Cavity ». In : *Shock and Vibrations* 18.12 (2011), p. 827-838.
 - [30] S. CRAMPIN, R. MCGONIGLE et D. BAMFORD. « Estimating crack parameters from observations of P-wave velocity anisotropy ». In : *Geophysics* 45.3 (1980), p. 345-360.
 - [31] C. DAVIS, V. LEE et J. BARDET. « Transverse response of underground cavities and pipes to incident SV waves ». In : *Earthquake engineering & structural dynamics* 30.3 (2001), p. 383-410.
 - [32] H. F. DAVIS. *Fourier series and orthogonal functions*. Courier Corporation, 1989.
 - [33] F. DE BARROS et J. LUCO. « Diffraction of obliquely incident waves by a cylindrical cavity embedded in a layered viscoelastic half-space ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 12.3 (1993), p. 159-171.
 - [34] F. DE BARROS et J. LUCO. « Seismic response of a cylindrical shell embedded in a layered viscoelastic half-space. II : Validation and numerical results ». In : *Earthquake engineering & structural dynamics* 23.5 (1994), p. 569-580.
 - [35] G. DEGRANDE, G. DE ROECK, P. VAN DEN BROECK et D. SMEULDERS. « Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media ». In : *International Journal of Solids and Structures* 35.34-35 (1998), p. 4753-4778.
 - [36] A. M. DENNEMAN, G. DRIJKONINGEN, D. SMEULDERS et K. WAPENAAR. « Reflection and transmission of waves at a fluid/porous-medium interface ». In : *Geophysics* 67.1 (2002), p. 282-291.
 - [37] L. DIANKUI et H. FENG. « Scattering of plane SH-wave by cylindrical canyon of arbitrary shape ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 10.5 (1991), p. 249-255.
 - [38] P. DINEVA, G. MANOLIS et F. WUTTKE. « Fundamental solutions in 3D elastodynamics for the BEM : A review ». In : *Engineering Analysis with Boundary Elements* 105 (2019), p. 47-69.
 - [39] H. DING, H. WANG et P. HOU. « The transient responses of piezoelectric hollow cylinders for axisymmetric plane strain problems ». In : *International Journal of Solids and Structures* 40.1 (2003), p. 105-123.
 - [40] L. DUBOEUF. « Injections de fluide dans une zone de faille (LSBB, Rustrel) : sismicité induite et déformation asismique ». Thèse de doct. Université Côte d'Azur, 2018.
 - [41] J. DWIVEDI et P. UPADHYAY. « Effect of imperfect bonding on the axisymmetric dynamic response of buried orthotropic cylindrical shells ». In : *Journal of Sound and Vibration* 135.3 (1989), p. 477-486.
 - [42] H. EL NAGGAR, S. D. HINCHBERGER et M. H. EL NAGGAR. « Simplified analysis of seismic in-plane stresses in composite and jointed tunnel linings ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 28.12 (2008), p. 1063-1077.
 - [43] A. ERINGEN, E. SUHUBI et D. R. BLAND. « Elastodynamics, vols. 1 and 2 ». In : *Physics Today* 30.1 (1977), p. 65.
-

- [44] M. ESMAEILI, S. VAHDANI et A. NOORZAD. « Dynamic response of lined circular tunnel to plane harmonic waves ». In : *Tunnelling and Underground Space Technology* 21.5 (2006), p. 511-519.
- [45] G. EXADAKTYLOS et M. STAVROPOULOU. « A closed-form elastic solution for stresses and displacements around tunnels ». In : *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 39.7 (2002), p. 905-916.
- [46] X. Q. FANG, J. X. LIU et Y. WANG. « Dynamic response of a partially debonded pipeline embedded in a saturated poroelastic medium to harmonic plane waves ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 71 (2015), p. 80-87.
- [47] J. J. FARAN JR. « Sound scattering by solid cylinders and spheres ». In : *The Journal of the acoustical society of America* 23.4 (1951), p. 405-418.
- [48] V. FELDGUN, A. KOCHETKOV, Y. KARINSKI et D. YANKELEVSKY. « Blast response of a lined cavity in a porous saturated soil ». In : *International Journal of Impact Engineering* 35.9 (2008), p. 953-966.
- [49] L. FLAX, G. C. GAUNAURD et H. ÜBERALL. « Theory of resonance scattering ». In : *Physical acoustics* 15 (1981), p. 191-294.
- [50] F. FREY. *Analyse des structures et milieux continus : mécanique des structures*. PPUR presses polytechniques, 2000.
- [51] S. GADAL. *Forces aériennes stratégiques : histoire des deux premières composantes de la dissuasion nucléaire française*. Economica, 2009.
- [52] S. GAFFET, Y. GUGLIELMI, J. VIRIEUX, G. WAYSAND, A. CHWALA, R. STOLZ et al. « Simultaneous seismic and magnetic measurements in the Low-Noise Underground Laboratory (LSBB) of Rustrel, France, during the 2001 January 26 Indian earthquake ». In : *Geophysical Journal International* 155.3 (2003), p. 981-990.
- [53] M. GAO, Y. WANG, G. GAO et J. YANG. « An analytical solution for the transient response of a cylindrical lined cavity in a poroelastic medium ». In : *Soil dynamics and earthquake engineering* 46 (2013), p. 30-40.
- [54] M. GAO, J. ZHANG, Q. CHEN, G. GAO, J. YANG et D. LI. « An exact solution for three-dimensional (3D) dynamic response of a cylindrical lined tunnel in saturated soil to an internal blast load ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 90 (2016), p. 32-37.
- [55] B. GARRY. « Etude des processus d'écoulements de la zone non saturée pour la modélisation des aquifères karstiques : expérimentation hydrodynamique et hydrochimique sur les sites du laboratoire souterrain à bas bruits (LSBB) de Rustrel et de Fontaine de Vaucluse ». Thèse de doct. Université d'Avignon, 2007.
- [56] H. GERÇEK. « An elastic solution for stresses around tunnels with conventional shapes ». In : *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 34.3 (1997).
- [57] A. GOLSHANI, M. ODA, Y. OKUI, T. TAKEMURA et E. MUNKHTOGOO. « Numerical simulation of the excavation damaged zone around an opening in brittle rock ». In : *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 44.6 (2007), p. 835-845.

-
- [58] R. C. GOMES, F. GOUVEIA, D. TORCATO et J. SANTOS. « Seismic response of shallow circular tunnels in two-layered ground ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 75 (2015), p. 37-43.
 - [59] K. GRAFF. *Wave motion in elastic solids*. Oxford Engineering Science Series, 1975.
 - [60] N. GRUJIC. « Ultrasonic testing of foundation rock ». In : *International Society for Rock Mechanics* 2.1 (1974), p. 404-409.
 - [61] B. GU, K. T. NIHEI et L. R. MYER. « Numerical simulation of elastic wave propagation in fractured rock with the boundary integral equation method ». In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 101.B7 (1996), p. 15933-15943.
 - [62] B. GU, K. T. NIHEI et L. R. MYER. « Numerical simulation of elastic wave propagation in fractured rock with the boundary integral equation method ». In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 101.B7 (1996), p. 15933-15943.
 - [63] B. GU, K. T. NIHEI, L. R. MYER et L. J. PYRAK-NOLTE. « Fracture interface waves ». In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 101.B1 (1996), p. 827-835.
 - [64] H. HAN, D. FUKUDA, H. LIU, E. F. SALMI, E. SELLERS, T. LIU et al. « Combined finite-discrete element modelling of rock fracture and fragmentation induced by contour blasting during tunnelling with high horizontal in-situ stress ». In : *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 127 (2020).
 - [65] X. HAN et G. R. LIU. « Elastic waves in a functionally graded piezoelectric cylinder ». In : *Smart Materials and Structures* 12.6 (2003), p. 962-971.
 - [66] X. HAN, G. LIU, Z. XI et K. LAM. « Characteristics of waves in a functionally graded cylinder ». In : *International Journal for numerical methods in engineering* 53.3 (2002), p. 653-676.
 - [67] S. M. HASHEMINEJAD et S. KAZEMIRAD. « Dynamic response of an eccentrically lined circular tunnel in poroelastic soil under seismic excitation ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 28.4 (2008), p. 277-292.
 - [68] N. HASKELL. « The dispersion of surface waves multilayered media. » In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 43 (1953), p. 17-34.
 - [69] B. HEI, Z. YANG, Y. WANG et D. LIU. « Dynamic analysis of elastic waves by an arbitrary cavity in an inhomogeneous medium with density variation ». In : *Mathematics and Mechanics of Solids* 21.8 (2016), p. 931-940.
 - [70] F. HOMAND-ETIENNE, D. HOXHA et J. F. SHAO. « A continuum damage constitutive law for brittle rocks ». In : *Computers and Geotechnics* 22.2 (1998), p. 135-151.
 - [71] C. HOUNYEVOU KLOTOÉ et E. BOURGEOIS. « Three dimensional finite element analysis of the influence of the umbrella arch on the settlements induced by shallow tunneling ». In : *Computers and Geotechnics* 110 (2019), p. 114-121.
 - [72] J. A. HUDSON. « Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks ». In : *Geophysical Journal International* 64.1 (1981), p. 133-150.
 - [73] M. HUSSEIN, S. FRANÇOIS, M. SCHEVENELS, H. HUNT, J. TALBOT et G. DEGRANDE. « The fictitious force method for efficient calculation of vibration from a tunnel embedded in a multi-layered half-space ». In : *Journal of Sound and Vibration* 333.25 (2014), p. 6996-7018.
-

- [74] D. JACKSON. *Fourier series and orthogonal polynomials*. Courier Corporation, 2012.
- [75] P. JEANNE, Y. GUGLIELMI, J. LAMARCHE, F. CAPPÀ et L. MARIÉ. « Architectural characteristics and petrophysical properties evolution of a strike-slip fault zone in a fractured porous carbonate reservoir ». In : *Journal of Structural Geology* 44 (2012), p. 93-109.
- [76] Q. JIN, D. THOMPSON, D. LURCOCK, M. TOWARD et E. NTOTSIOS. « A 2.5D finite element and boundary element model for the ground vibration from trains in tunnels and validation using measurement data ». In : *Journal of Sound and Vibration* 422 (2018), p. 373-389.
- [77] T. JOLIS. « Le quotidien des militaires du plateau d'Albion : pratiques, cultures, sociabilités ». Mém. de mast. Avignon Université, 2012.
- [78] C. JONES, D. THOMPSON et M. PETYT. « A model for ground vibration from railway tunnels ». In : *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Transport* 153.2 (2002), p. 121-129.
- [79] D. JONES et M. PETYT. « Ground vibration in the vicinity of a strip load : a two-dimensional half-space model ». In : *Journal of Sound and Vibration* 147.1 (1991), p. 155-166.
- [80] D. JONES et M. PETYT. « Ground vibration in the vicinity of a rectangular load on a half-space ». In : *Journal of Sound and Vibration* 166.1 (1993), p. 141-159.
- [81] W. KAEWJUEA et T. SENJUNTICHAJ. « Poromechanical response of borehole in excavation disturbed zone ». In : *Computers and Geotechnics* 56 (2014), p. 148-159.
- [82] H. F. KARA. « A note on response of tunnels to incident SH-waves near hillsides ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 90 (2016), p. 138-146.
- [83] C. Z. KARAKOSTAS et G. D. MANOLIS. « Dynamic response of unlined tunnels in soil with random properties ». In : *Engineering structures* 22.8 (2000), p. 1013-1027.
- [84] C. Z. KARAKOSTAS et G. D. MANOLIS. « Dynamic response of tunnels in stochastic soils by the boundary element method ». In : *Engineering Analysis with Boundary Elements* 26.8 (2002), p. 667-680.
- [85] A. KARGAR, R. RAHMANNEJAD et M. HAJABASI. « A semi-analytical elastic solution for stress field of lined non-circular tunnels at great depth using complex variable method ». English. In : *International Journal of Solids and Structures* 51.6 (2014), p. 1475-1482.
- [86] A. KARGAR, R. RAHMANNEJAD et M. HAJABASI. « The stress state around lined non-circular hydraulic tunnels below the water table using complex variable method ». In : *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 78 (2015), p. 207-216.
- [87] E. KAUSEL. *Fundamental solutions in elastodynamics : a compendium*. New York : Cambridge University press, 2006.
- [88] E. KAUSEL et J. ROËSSET. « Stiffness matrices for layered soils ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 71.6 (1981), p. 1743-1761.
- [89] K. KHAIR, S. DATTA et A. SHAH. « Amplification of obliquely incident seismic waves by cylindrical alluvial valleys of arbitrary cross-sectional shape. Part I. Incident P and SV waves ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 79.3 (1989), p. 610-630.

-
- [90] M. KHAM. « Propagation d'ondes sismiques dans les bassins sédimentaires : des effets de site à l'interaction site-ville ». Thèse de doct. Ecole des Ponts ParisTech, 2004.
 - [91] G. KIRSCH. « Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre ». In : *Zentralblatt Berlin Deutscher Ingenieure* 42 (1898), p. 797-807.
 - [92] T. W. KÖRNER. *Fourier analysis*. Cambridge university press, 1989.
 - [93] G. P. KOURETZIS, K. I. ANDRIANOPOULOS, S. W. SLOAN et J. P. CARTER. « Analysis of circular tunnels due to seismic P-wave propagation, with emphasis on unreinforced concrete liners ». In : *Computers and Geotechnics* 55 (2014), p. 187-194.
 - [94] G. P. KOURETZIS, G. D. BOUCKOVALAS et C. J. GANTES. « 3-D shell analysis of cylindrical underground structures under seismic shear (S) wave action ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 26.10 (2006), p. 909-921.
 - [95] J. L. LAFEUILLE. « Etudes statistiques de données d'écoulements d'une zone non noyée karstique Période 2006/2009 ». Mém. de mast. Avignon Université, 2009.
 - [96] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ. *Course of Theoretical Physics Vol 7 : Theory and Elasticity*. Pergamon press, 1959.
 - [97] J. LARMOR. « VI. The influence of flaws and air-cavities on the strength of materials ». In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 33.200 (1892), p. 70-78.
 - [98] D. LE HOUÉDEC. « Réduction et propagation dans le sol des vibrations dues au trafic routier urbain : cas particulier des chaussées sur fondation élastique ». Thèse de doct. Université de Nantes, 1980.
 - [99] V. LEE et J. KARL. « Diffraction of SV waves by underground, circular, cylindrical cavities ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 11.8 (1992), p. 445-456.
 - [100] F. LEENHARDT. « Etude géologique de la région du Mont-Ventoux ». Thèse de doct. Université de Montpellier, 1883.
 - [101] G. LEFEUVE-MESGOUEZ et A. MESGOUEZ. « Ground vibration due to a high-speed moving harmonic rectangular load on a poroviscoelastic half-space ». In : *International Journal of Solids and Structures* 45.11 (2008), p. 3353-3374.
 - [102] G. LEFEUVE-MESGOUEZ, A. MESGOUEZ, G. CHIAVASSA et B. LOMBARD. « Semi-analytical and numerical methods for computing transient waves in 2D acoustic/poroelastic stratified media ». In : *Wave Motion* 49.7 (2012), p. 667-680.
 - [103] P. LEONIDE, J. BORGOMANO, J. P. MASSE et S. DOUBLET. « Relation between stratigraphic architecture and multi-scale heterogeneities in carbonate platforms : The Barremian-lower Aptian of the Monts de Vaucluse, SE France ». In : *Sedimentary Geology* 265 (2012), p. 87-109.
 - [104] X. LI. « Stress and displacement fields around a deep circular tunnel with partial sealing ». In : *Computers and Geotechnics* 24.2 (1999), p. 125-140.
 - [105] W. I. LIAO, C. S. YEH et T. J. TENG. « Scattering of elastic waves by a buried tunnel under obliquely incident waves using T matrix ». In : *Journal of Mechanics* 24.4 (2008), p. 405-418.
-

- [106] K. LIN, H. HUNG, J. P. YANG et Y. YANG. « Seismic analysis of underground tunnels by the 2.5D finite/infinite element approach ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 85 (2016), p. 31-43.
- [107] D. LIU, B. GAI et G. TAO. « Applications of the method of complex functions to dynamic stress concentrations ». In : *Wave motion* 4.3 (1982), p. 293-304.
- [108] G. B. LIU, K. H. XIE et X. LIU. « Dynamic response of a partially sealed tunnel in porous rock under inner water pressure ». In : *Tunnelling and Underground Space Technology* 25.4 (2010), p. 407-414.
- [109] G. LIU, P. G. JAYATHILAKE, B. C. KHOO, F. HAN et D. K. LIU. « Conformal mapping for the Helmholtz equation : Acoustic wave scattering by a two dimensional inclusion with irregular shape in an ideal fluid ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 131.2 (2012), p. 1055-1065.
- [110] Q. LIU, M. ZHAO et L. WANG. « Scattering of plane P, SV or Rayleigh waves by a shallow lined tunnel in an elastic half space ». In : *Soil dynamics and earthquake engineering* 49 (2013), p. 52-63.
- [111] Q. LIU, M. ZHAO et C. ZHANG. « Antiplane scattering of SH waves by a circular cavity in an exponentially graded half space ». In : *International Journal of Engineering Science* 78 (2014), p. 61-72.
- [112] M. LOWE. « Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media ». In : *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 42.4 (1995), p. 525-542.
- [113] A. Z. LU, N. ZHANG et L. KUANG. « Analytic solutions of stress and displacement for a non-circular tunnel at great depth including support delay ». In : *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 70 (2014), p. 69-81.
- [114] S. LU, C. ZHOU, Z. ZHANG et N. JIANG. « Dynamic stress concentration of surrounding rock of a circular tunnel subjected to blasting cylindrical P-waves ». In : *Geotechnical and Geological Engineering* 37.4 (2019), p. 2363-2371.
- [115] J. LUCO et F. DE BARROS. « Dynamic displacements and stresses in the vicinity of a cylindrical cavity embedded in a half-space ». In : *Earthquake engineering & structural dynamics* 23.3 (1994), p. 321-340.
- [116] J. LUCO et F. DE BARROS. « Seismic response of a cylindrical shell embedded in a layered viscoelastic half-space. I : Formulation ». In : *Earthquake engineering & structural dynamics* 23.5 (1994), p. 553-567.
- [117] G. MANOLIS et D. BESKOS. « Dynamic response of lined tunnels by an isoparametric boundary element method ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 36.3 (1983), p. 291-307.
- [118] J. MARTINO et N. CHANDLER. « Excavation-induced damage studies at the underground research laboratory ». In : *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 41.8 (2004), p. 1413-1426.

-
- [119] E. MAUFROY, S. GAFFET, S. OPERTO, Y. GUGLIELMI et D. BOYER. « Travel time inversion from ground level to gallery : protocol for the characterization of P-wave seismic signature in a fractured-porous Urgonian platform at hectometric scale ». In : *Near Surface Geophysics* 12.6 (2014), p. 697-708.
 - [120] I. MEGLIS, T. CHOW, R. YOUNG et al. « Assessing microcrack damage around a tunnel at the underground research laboratory using ultrasonic velocity tomography ». In : *DC Rocks 2001, The 38th US Symposium on Rock Mechanics (USRMS)*. American Rock Mechanics Association. 2001.
 - [121] A. MESGOUEZ. « Characterization of a viscoelastic heterogeneous object with an effective model by nonlinear full waveform inversion ». In : *Journal of Sound and Vibration* 422 (2018), p. 189-209.
 - [122] A. MESGOUEZ et G. LEFEUVE-MESGOUEZ. « Transient solution for multilayered poroviscoelastic media obtained by an exact stiffness matrix formulation ». In : *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* 33.18 (2009), p. 1911-1931.
 - [123] J. MIKLOWITZ. « Scattering of a plane elastic compressional pulse by a cylindrical cavity ». In : *Applied Mechanics*. Springer, 1966, p. 469-483.
 - [124] D. M. MISLJENOVIC. « Boundary element method and wave equation ». In : *Applied Mathematical Modelling* 6.3 (1982), p. 205-208.
 - [125] R. MORRIS, D. GRINE, T. ARKFELD et al. « Using compressional and shear acoustic amplitudes for the location of fractures ». In : *Journal of Petroleum Technology* 16.06 (1964), p. 623-632.
 - [126] C. C. MOW et Y. H. PAO. *The Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*. Santa Monica, CA : Rand Corporation, 1971.
 - [127] N. I. MUSKHELISHVILI et al. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. T. 15. Noordhoff Groningen, 1953.
 - [128] L. MYER, D. HOPKINS et N. COOK. « Effects of an interface in partial contact on attenuation of acoustic waves ». In : *Geophysics* (1985).
 - [129] A. H. NAYFEH. « The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 89.4 (1991), p. 1521-1531.
 - [130] A. H. NAYFEH. *Wave propagation in layered anisotropic media : With application to composites*. Elsevier, 1995.
 - [131] J. O'DONOGHUE et R. O'FLAHERTY. « The underground works at Turlough Hill ». In : *Water Power* 26.1 (1974), p. 5-12.
 - [132] M. PANJI, M. KAMALIAN, J. A. MARNANI et M. JAFARI. « Transient analysis of wave propagation problems by half-plane BEM ». In : *Geophysical Journal International* 194.3 (2013), p. 1849-1865.
 - [133] Y. H. PAO, C. C. MOW et J. D. ACHENBACH. « Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations ». In : *Journal of Applied Mechanics* 40.4 (1973), p. 872-872.
 - [134] R. PAOLUCCI. « Shear resonance frequencies of alluvial valleys by Rayleigh's method ». In : *Earthquake Spectra* 15.3 (1999), p. 503-521.
-

- [135] R. PARNES. « Applied tractions on the surface of an infinite cylindrical bore ». In : *International Journal of Solids and Structures* 19 (1983), p. 165-177.
- [136] B. N. PAULSSON et M. KING. *Between-hole acoustic surveying and monitoring of a granitic rock mass*. Rapp. tech. California Univ., Berkeley (USA). Lawrence Berkeley Lab., 1980.
- [137] F. PELLET, M. ROSEFID et F. DELERUYELLE. « On the 3D numerical modelling of the time-dependent development of the damage zone around underground galleries during and after excavation ». In : *Tunnelling and Underground Space Technology* 24.6 (2009), p. 665-674.
- [138] B. PICOUX. « Étude théorique et expérimentale de la propagation dans le sol des vibrations émises par un trafic ferroviaire ». Thèse de doct. École Centrale of Nantes, 2002.
- [139] K. PITILAKIS, G. TSINIDIS, A. LEANZA et M. MAUGERI. « Seismic behaviour of circular tunnels accounting for above ground structures interaction effects ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 67 (2014), p. 1-15.
- [140] C. POTEL et M. BRUNEAU. *Acoustique Générale—équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluide et solide, applications*. Ellipse collection Techno-sup, 2006.
- [141] J. M. PUIG. « Le système karstique de la Fontaine de Vaucluse ». Thèse de doct. Université d'Avignon, 1987.
- [142] L. J. PYRAK-NOLTE, L. R. MYER et N. G. COOK. « Transmission of seismic waves across single natural fractures ». In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 95.B6 (1990), p. 8617-8638.
- [143] L. J. PYRAK-NOLTE, J. XU et G. M. HALEY. « Elastic interface waves propagating in a fracture ». In : *Physical Review Letters* 68 (24 1992), p. 3650-3653.
- [144] R. RAJAPAKSE et D. GROSS. « Traction and contact problems for an anisotropic medium with a cylindrical borehole ». In : *International journal of solids and structures* 33.15 (1996), p. 2193-2211.
- [145] R. RAJAPAKSE et T. SENJUNTICHAJ. « Dynamic response of a multi-layered poroelastic medium ». In : *Earthquake engineering & structural dynamics* 24.5 (1995), p. 703-722.
- [146] P. RAO, V. SINGH et P. UPADHYAY. « Axisymmetric stresses in buried thin orthotropic cylindrical shells due to p-wave loading ». In : *Composite Structures* 13.3 (1989), p. 209-216.
- [147] S. ROKHLIN et L. WANG. « Stable recursive algorithm for elastic wave propagation in layered anisotropic media : Stiffness matrix method ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 112.3 (2002), p. 822-834.
- [148] T. SATO, T. KIKUCHI et K. SUGIHARA. « In-situ experiments on an excavation disturbed zone induced by mechanical excavation in Neogene sedimentary rock at Tono mine, central Japan ». In : *Engineering Geology* 56.1 (2000), p. 97-108.

-
- [149] J. SCOTT, F. LEE, R. CARROLL et C. ROBINSON. « The relationship of geophysical measurements to engineering and construction parameters in the Straight Creek Tunnel pilot bore, Colorado ». In : *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* 5.1 (1968), p. 1-30.
 - [150] J. SEMBLAT et A. PECKER. *Waves and vibrations in soils : earthquakes, traffic, shocks, construction works (I. Press, Ed.)* 2009.
 - [151] Ö. SEN et D. TURHAN. « Dynamic Response of Viscoelastic Cylinders Enclosed in Filament Wound Cylindrical Composites ». In : *Journal of the Mechanical Behavior of Materials* 19.4 (2009), p. 215-224.
 - [152] G. SÉNÉCHAL, D. ROUSSET, E. GLOAGUEN et T. LEBOURG. « High Resolution Seismic Experiment within the Low-Noise Underground Laboratory (LSBB) of Rustrel (Province) ». In : *Near Surface 2004-10th EAGE European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics*. European Association of Geoscientists & Engineers. 2004, p. cp-10-00014.
 - [153] G. SÉNÉCHAL, D. ROUSSET et S. GAFFET. « Ground-penetrating radar investigation inside a karstified limestone reservoir ». In : *Near Surface Geophysics* 11.3 (2013), p. 283-292.
 - [154] T. SENJUNTICHAJ et R. RAJAPAKSE. « Transient response of a circular cavity in a poroelastic medium ». In : *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* 17.6 (1993), p. 357-383.
 - [155] T. SENJUNTICHAJ et R. RAJAPAKSE. « Exact stiffness method for quasi-statics of a multi-layered poroelastic medium ». In : *International journal of solids and structures* 32.11 (1995), p. 1535-1553.
 - [156] V. SEROV. *Fourier series, Fourier transform and their applications to mathematical physics*. Springer, 2017.
 - [157] R. SHAKERI, A. MESGOUEZ et G. LEFEUVE-MESGOUEZ. « Transient response of a concrete tunnel in an elastic rock with imperfect contact ». In : *International Journal of Mining Science and Technology* 30.5 (2020), p. 605-612.
 - [158] L. SHIWEI, C. ZHOU, Z. ZHANG, L. JI et N. JIANG. « Theoretical study on dynamic responses of an unlined circular tunnel subjected to blasting P-waves ». In : *Journal of Mechanics* 37 (2021), p. 242-252.
 - [159] J. C. T. SIAO, S. B. DONG et J. SONG. « Frequency Spectra of Laminated Piezoelectric Cylinders ». In : *Journal of Vibration and Acoustics* 116.3 (1994), p. 364-370.
 - [160] V. SINGH, P. UPADHYAY et B. KISHOR. « A comparison of thick and thin shell theory results for buried orthotropic cylindrical shells ». In : *Journal of Sound and Vibration* 119.2 (1987), p. 339-345.
 - [161] V. SINGH, P. UPADHYAY et B. KISHOR. « On the dynamic response of buried orthotropic cylindrical shells ». In : *Journal of Sound and Vibration* 113.1 (1987), p. 101-115.
 - [162] C. SMERZINI, J. AVILÉS, R. PAOLUCCI et F. J. SÁNCHEZ-SESMA. « Effect of underground cavities on surface earthquake ground motion under SH wave propagation ». In : *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 38.12 (2009), p. 1441-1460.
-

- [163] A. STAMOS et D. BESKOS. « 3-D seismic response analysis of long lined tunnels in half-space ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 15.2 (1996), p. 111-118.
- [164] F. SZYMKIEWICZ. « Évaluation des propriétés mécaniques d'un sol traité au ciment ». Thèse de doct. Université Paris-Est, 2011.
- [165] A. J. TADEU, J. M. ANTÓNIO et E. KAUSEL. « 3D scattering of waves by a cylindrical irregular cavity of infinite length in a homogeneous elastic medium ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191.27-28 (2002), p. 3015-3033.
- [166] A. J. TADEU, E. KAUSEL et C. VRETTOS. « Scattering of waves by subterranean structures via the boundary element method ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 15.6 (1996), p. 387-397.
- [167] V. R. THIRUVENKATACHAR et K. VISWANATHAN. « Dynamic Response of an Elastic Half Space with Cylindrical Cavity to Time-Dependent Surface Traction Over the Boundary of the Cavity ». In : *Journal of Mathematics and Mechanics* 14.4 (1965), p. 541-571.
- [168] W. THOMSON. « Transmission of elastic waves through a stratified soil medium. » In : *Journal of Applied Physics* 21 (1950), p. 89-93.
- [169] P. UPADHYAY et B. MISHRA. « Non-axisymmetric dynamic response of a buried orthotropic cylindrical shell due to incident shear waves ». In : *Journal of Sound and Vibration* 125.2 (1988), p. 227-239.
- [170] D. VAN VORST, M. YEDLIN, Y. GUGLIELMI, F. CAPPALÀ, S. GAFFET, M. MAXWELL et al. « GPR imaging of a fracture zone in the Vaucluse Karst Aquifer using 2D eikonal inversion ». In : *i-DUST 2010* (2011).
- [171] G. VASILEV, S. PARVANOV, P. DINEVA et F. WUTTKE. « Soil-structure interaction using BEM-FEM coupling through ANSYS software package ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 70 (2015), p. 104-117.
- [172] A. VERRUIJT. *An introduction to soil dynamics*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [173] Y. WANG, G. GAO, J. YANG et J. SONG. « The influence of the degree of saturation on dynamic response of a cylindrical lined cavity in a nearly saturated medium ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 71 (2015), p. 27-30.
- [174] Z. WANG, R. C. WONG, S. LI et L. QIAO. « Finite element analysis of long-term surface settlement above a shallow tunnel in soft ground ». In : *Tunnelling and underground space technology* 30 (2012), p. 85-92.
- [175] A. WIRGIN. « Retrieval of the equivalent acoustic constitutive parameters of an inhomogeneous fluid-like object by nonlinear full waveform inversion ». In : *Ultrasonics* 65 (2016), p. 353-369.
- [176] J. WONG, P. HURLEY et G. WEST. « Crosshole seismology and seismic imaging in crystalline rocks ». In : *Geophysical research letters* 10.8 (1983), p. 686-689.
- [177] K. WU, Q. XUE et L. ADLER. « Reflection and transmission of elastic waves from a fluid-saturated porous solid boundary ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 87.6 (1990), p. 2349-2358.

-
- [178] K. H. XIE, G. B. LIU et Z. Y. SHI. « Dynamic response of partially sealed circular tunnel in viscoelastic saturated soil ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 24.12 (2004), p. 1003-1011.
 - [179] F. XUE-QIAN et J. HE-XIN. « Visco-elastic imperfect bonding effect on dynamic response of a non-circular lined tunnel subjected to P and SV waves ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 88 (2016), p. 1-7.
 - [180] F. XUE-QIAN et J. HE-XIN. « Dynamic response of a non-circular lined tunnel with visco-elastic imperfect interface in the saturated poroelastic medium ». In : *Computers and Geotechnics* 83 (2017), p. 98-105.
 - [181] H. YANG, D. HUANG, X. YANG et X. ZHOU. « Analysis model for the excavation damage zone in surrounding rock mass of circular tunnel ». In : *Tunnelling and underground space technology* 35 (2013), p. 78-88.
 - [182] C. YI, P. ZHANG, D. JOHANSSON et U. NYBERG. « Dynamic response of a circular lined tunnel with an imperfect interface subjected to cylindrical P-waves ». In : *Computers and geotechnics* 55 (2014), p. 165-171.
 - [183] C. YI, W. LU, P. ZHANG, D. JOHANSSON et U. NYBERG. « Effect of imperfect interface on the dynamic response of a circular lined tunnel impacted by plane P-waves ». In : *Tunnelling and underground space technology* 51 (2016), p. 68-74.
 - [184] Z. YUAN, Y. CAI et Z. CAO. « An analytical model for vibration prediction of a tunnel embedded in a saturated full-space to a harmonic point load ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 86 (2016), p. 25-40.
 - [185] Z. YUAN, C. XU, Y. CAI et Z. CAO. « Dynamic response of a tunnel buried in a saturated poroelastic soil layer to a moving point load ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 77 (2015), p. 348-359.
 - [186] U. ZAKOUT et N. AKKAS. « Transient response of a cylindrical cavity with and without a bonded shell in an infinite elastic medium ». In : *International Journal of Engineering Science* 35.12-13 (1997), p. 1203-1220.
 - [187] C. J. ZHAI, T. D. XIA, G. Q. DU et Z. DING. « Dynamic response of cylindrical cavity to anti-plane impact load by using analytical approach ». In : *Journal of Central South University* 21.1 (2014), p. 405-415.
 - [188] J. ZHANG, L. ZENG, C. HU et W. YAN. « Study on the Single Scattering of Elastic Waves by a Cylindrical Fiber with a Partially Imperfect Bonding Using the Collocation Point Method ». In : *Shock and Vibration* 2018 (2018).
 - [189] N. ZHANG, Y. ZHANG, Y. GAO, D. DAI et C. HUANG. « Effect of imperfect interfaces on dynamic response of a composite lining tunnel with an isolation layer under plane P and SV waves ». In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 142 (2021).
 - [190] G. ZHAO et S. YANG. « Analytical solutions for rock stress around square tunnels using complex variable theory ». In : *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 80 (2015), p. 302-307.
 - [191] W. ZHAO, W. CHEN et D. YANG. « Effect of an imperfect interface on seismic response of a composite lining tunnel subjected to SH-waves ». In : *International Journal of Geomechanics* 18.12 (2018).
-

- [192] X. L. ZHOU, J. H. WANG, B. XU et L. F. JIANG. « Dynamic response of a circular pipeline in a poroelastic medium ». In : *Mechanics Research Communications* 36.8 (2009), p. 898-905.
- [193] Y. ZOU, H. LIU et L. JING. « Response of long tunnel in layered half-space under asynchronous seismic shear-horizontal wave propagation ». In : *Journal of Engineering Mechanics* 144.7 (2018).

Annexes

Annexe A

Orthogonalité des fonctions intervenant dans les séries de Fourier

Les relations trigonométriques permettent d'établir les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\cos \kappa \cos \zeta &= \frac{1}{2} (\cos(\kappa + \zeta) + \cos(\kappa - \zeta)), \\ \sin \kappa \sin \zeta &= \frac{1}{2} (\cos(\kappa - \zeta) - \cos(\kappa + \zeta)), \\ \sin \kappa \cos \zeta &= \frac{1}{2} (\sin(\kappa + \zeta) + \sin(\kappa - \zeta))\end{aligned}\tag{A.1}$$

Pour enlever les sommations infinies de part et d'autre de l'équation (2.54), nous appliquons les conditions d'orthogonalité des fonctions sinusoïdales. Les deux membres de (2.54) sont multipliés par la fonction cosinus ou sinus avec des arguments modaux (n et m) différents, puis nous effectuons ensuite une intégration sur θ entre $-\pi$ et π :

★ Pour tout $n = m$, avec $n \neq 0$ nous avons :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(n\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} \left[\frac{1 + \cos(2n\theta)}{2} \right] d\theta = \left[\theta + \frac{\sin(2n\theta)}{2n} \right]_0^{\pi} = \pi \tag{A.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(n\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} \left[\frac{1 - \cos(2n\theta)}{2} \right] d\theta = \left[\theta - \frac{\sin(2n\theta)}{2n} \right]_0^{\pi} = \pi \tag{A.3}$$

★ Lorsque $n \neq m$ nous obtenons :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)] d\theta = 0 \tag{A.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((n-m)\theta) - \cos((n+m)\theta)] d\theta = 0 \tag{A.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin((n+m)\theta) + \sin((n-m)\theta)] d\theta = 0 \tag{A.6}$$

Annexe B

Détails des termes matriciels intervenant dans l'approche classique

$$\overline{\mu_k} = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}$$

$$\varepsilon_{n11}^{(1)}(\alpha r) = (n^2 + n - \frac{1}{2}\beta^2 r^2)J_n(\alpha r) - \alpha r J_{n-1}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{n11}^{(3)}(\alpha r) = (n^2 + n - \frac{1}{2}\beta^2 r^2)H_n^{(1)}(\alpha r) - \alpha r H_{n-1}^{(1)}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{n11}^{(4)}(\alpha r) = (n^2 + n - \frac{1}{2}\beta^2 r^2)H_n^{(2)}(\alpha r) - \alpha r H_{n-1}^{(2)}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{n12}^{(3)}(\beta r) = n[-(n+1)H_n^{(1)}(\beta r) + \beta r H_{n-1}^{(1)}(\beta r)]$$

$$\varepsilon_{n12}^{(4)}(\beta r) = n[-(n+1)H_n^{(2)}(\beta r) + \beta r H_{n-1}^{(2)}(\beta r)]$$

$$\varepsilon_{n21}^{(1)}(\alpha r) = -(n^2 + n + \frac{1}{2}\beta^2 r^2 - \alpha^2 r^2)J_n(\alpha r) + \alpha r J_{n-1}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{n21}^{(3)}(\alpha r) = -(n^2 + n + \frac{1}{2}\beta^2 r^2 - \alpha^2 r^2)H_n^{(1)}(\alpha r) + \alpha r H_{n-1}^{(1)}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{n21}^{(4)}(\alpha r) = -(n^2 + n + \frac{1}{2}\beta^2 r^2 - \alpha^2 r^2)H_n^{(2)}(\alpha r) + \alpha r H_{n-1}^{(2)}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{n22}^{(3)} = n[(n+1)H_n^{(1)}(\beta r) - \beta r H_{n-1}^{(1)}(\beta r)]$$

$$\varepsilon_{n22}^{(4)} = n[(n+1)H_n^{(2)}(\beta r) - \beta r H_{n-1}^{(2)}(\beta r)]$$

$$\varepsilon_{n41}^{(1)}(\alpha r) = -n[-(n+1)J_n(\alpha r) + \alpha r J_{n-1}(\alpha r)]$$

$$\varepsilon_{n41}^{(3)}(\alpha r) = -n[-(n+1)H_n^{(1)}(\alpha r) + \alpha r H_{n-1}^{(1)}(\alpha r)]$$

$$\varepsilon_{n41}^{(4)}(\alpha r) = -n[-(n+1)H_n^{(2)}(\alpha r) + \alpha r H_{n-1}^{(2)}(\alpha r)]$$

$$\varepsilon_{n42}^{(3)}(\beta r) = -(n^2 + n - \frac{1}{2}\beta^2 r^2)H_n^{(1)}(\beta r) + \beta r H_{n-1}^{(1)}(\beta r)$$

$$\varepsilon_{n42}^{(4)}(\beta r) = -(n^2 + n - \frac{1}{2}\beta^2 r^2)H_n^{(2)}(\beta r) + \beta r H_{n-1}^{(2)}(\beta r)$$

$$\varepsilon_{n71}^{(4)}(\alpha r) = \alpha r H_{n-1}^{(2)}(\alpha r) - n H_n^{(2)}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{n71}^{(3)}(\alpha r) = \alpha r H_{n-1}^{(1)}(\alpha r) - n H_n^{(1)}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{n71}^{(1)}(\alpha r) = \alpha r J_{n-1}(\alpha r) - n J_n(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{n72}^{(3)}(\beta r) = n H_n^{(1)}(\beta r)$$

$$\varepsilon_{n72}^{(4)}(\beta r) = n H_n^{(2)}(\beta r)$$

$$\varepsilon_{n81}^{(3)}(\alpha r) = -n H_n^{(1)}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{n81}^{(1)}(\alpha r) = -n J_n(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{n81}^{(4)}(\alpha r) = -n H_n^{(2)}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{n82}^{(3)}(\beta r) = -[\beta r H_{n-1}^{(1)}(\beta r) - n H_n^{(1)}(\beta r)]$$

$$\varepsilon_{n82}^{(4)}(\beta r) = -[\beta r H_{n-1}^{(2)}(\beta r) - n H_n^{(2)}(\beta r)]$$

$$[K]_{n, \{N_E, N_E\}} = \begin{pmatrix} [L]_n & & & & & & & \\ & [U_2]_n & & & & & & \\ & & [U_k]_n & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & [U_{N_L-1}]_n & & \\ & & & & & & [Z]_n \end{pmatrix}$$

$$\{X\}_{n,N_E} = \begin{pmatrix} A_n & B_n & C_{n2} & D_{n2} & M_{n2} & N_{n2} & \dots & \dots & \dots & \dots & C_{nN_L} & D_{nN_L} & M_{nN_L} & N_{nN_L} \end{pmatrix}^T$$

$$\{Y\}_{n,N_E} = \varphi_0 \epsilon_n i^n \begin{pmatrix} \overline{\mu}_1 \varepsilon_{11}^{(1)}(\alpha_1 | \Gamma_1) & \overline{\mu}_1 \varepsilon_{41}^{(1)}(\alpha_1 | \Gamma_1) & \varepsilon_{71}^{(1)}(\alpha_1 | \Gamma_1) & \varepsilon_{81}^{(1)}(\alpha_1 | \Gamma_1) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$[L]_n = \begin{pmatrix} -\overline{\mu_1}\epsilon_{n11}^{(3)}(\alpha_1|\Gamma_1|) & -\overline{\mu_1}\epsilon_{n12}^{(3)}(\beta_1|\Gamma_1|) & \epsilon_{n11}^{(4)}(\alpha_2|\Gamma_1|) & \epsilon_{n11}^{(3)}(\alpha_2|\Gamma_1|) & \epsilon_{n12}^{(4)}(\beta_2|\Gamma_1|) & \epsilon_{n12}^{(3)}(\beta_2|\Gamma_1|) \\ -\overline{\mu_1}\epsilon_{n41}^{(3)}(\alpha_1|\Gamma_1|) & -\overline{\mu_1}\epsilon_{n42}^{(3)}(\beta_1|\Gamma_1|) & \epsilon_{n41}^{(4)}(\alpha_2|\Gamma_1|) & \epsilon_{n42}^{(4)}(\beta_2|\Gamma_1|) & \epsilon_{n42}^{(4)}(\beta_2|\Gamma_1|) & \epsilon_{n42}^{(3)}(\beta_2|\Gamma_1|) \\ -\epsilon_{n71}^{(3)}(\alpha_1|\Gamma_1|) & -\epsilon_{n72}^{(3)}(\beta_1|\Gamma_1|) & \epsilon_{n71}^{(4)}(\alpha_2|\Gamma_1|) & \epsilon_{n71}^{(3)}(\alpha_2|\Gamma_1|) & \epsilon_{n72}^{(4)}(\beta_2|\Gamma_1|) & \epsilon_{n82}^{(3)}(\beta_2|\Gamma_1|) \\ -\epsilon_{n81}^{(3)}(\alpha_1|\Gamma_1|) & -\epsilon_{n82}^{(3)}(\beta_1|\Gamma_1|) & \epsilon_{n81}^{(4)}(\alpha_2|\Gamma_1|) & \epsilon_{n81}^{(3)}(\alpha_2|\Gamma_1|) & \epsilon_{n82}^{(4)}(\beta_2|\Gamma_1|) & \epsilon_{n82}^{(3)}(\beta_2|\Gamma_1|) \end{pmatrix}$$

$$[U_2]_n = \begin{pmatrix} -\bar{\mu}_2 \epsilon_{n11}^{(4)}(\alpha_2 | \Gamma_2) & -\bar{\mu}_2 \epsilon_{n11}^{(3)}(\alpha_2 | \Gamma_2) & -\bar{\mu}_2 \epsilon_{n12}^{(4)}(\beta_2 | \Gamma_2) & -\bar{\mu}_2 \epsilon_{n12}^{(3)}(\beta_2 | \Gamma_2) & \epsilon_{n41}^{(4)}(\alpha_3 | \Gamma_2) & \epsilon_{n41}^{(3)}(\alpha_3 | \Gamma_2) & \epsilon_{n12}^{(4)}(\beta_3 | \Gamma_2) & \epsilon_{n32}^{(3)}(\beta_3 | \Gamma_2) \\ -\bar{\mu}_2 \epsilon_{n41}^{(4)}(\alpha_2 | \Gamma_2) & -\bar{\mu}_2 \epsilon_{n42}^{(4)}(\beta_2 | \Gamma_2) & -\bar{\mu}_2 \epsilon_{n42}^{(3)}(\beta_2 | \Gamma_2) & -\bar{\mu}_2 \epsilon_{n42}^{(2)}(\beta_2 | \Gamma_2) & \epsilon_{n41}^{(4)}(\alpha_3 | \Gamma_2) & \epsilon_{n42}^{(4)}(\beta_3 | \Gamma_2) & \epsilon_{n42}^{(3)}(\beta_3 | \Gamma_2) & \epsilon_{n32}^{(3)}(\beta_3 | \Gamma_2) \\ -\epsilon_{n71}^{(4)}(\alpha_2 | \Gamma_2) & -\epsilon_{n71}^{(3)}(\alpha_2 | \Gamma_2) & -\epsilon_{n72}^{(4)}(\beta_2 | \Gamma_2) & -\epsilon_{n82}^{(3)}(\beta_2 | \Gamma_2) & \epsilon_{n71}^{(4)}(\alpha_3 | \Gamma_2) & \epsilon_{n71}^{(3)}(\alpha_3 | \Gamma_2) & \epsilon_{n72}^{(4)}(\beta_3 | \Gamma_2) & \epsilon_{n82}^{(3)}(\beta_3 | \Gamma_2) \\ -\epsilon_{n81}^{(4)}(\alpha_2 | \Gamma_2) & -\epsilon_{n81}^{(3)}(\alpha_2 | \Gamma_2) & -\epsilon_{n82}^{(4)}(\beta_2 | \Gamma_2) & -\epsilon_{n82}^{(3)}(\beta_2 | \Gamma_2) & \epsilon_{n81}^{(4)}(\alpha_3 | \Gamma_2) & \epsilon_{n81}^{(3)}(\alpha_3 | \Gamma_2) & \epsilon_{n82}^{(4)}(\beta_3 | \Gamma_2) & \epsilon_{n82}^{(3)}(\beta_3 | \Gamma_2) \end{pmatrix}$$

$$[U_3]_n = \begin{pmatrix} -\bar{\mu}_3 \epsilon_{n11}^{(4)}(\alpha_3 | \Gamma_3) & -\bar{\mu}_3 \epsilon_{n11}^{(3)}(\alpha_3 | \Gamma_3) & -\bar{\mu}_3 \epsilon_{n12}^{(4)}(\beta_3 | \Gamma_3) & -\bar{\mu}_3 \epsilon_{n12}^{(3)}(\beta_3 | \Gamma_3) & \epsilon_{n11}^{(4)}(\alpha_4 | \Gamma_3) & \epsilon_{n11}^{(3)}(\alpha_4 | \Gamma_3) & \epsilon_{n12}^{(4)}(\beta_4 | \Gamma_3) & \epsilon_{n12}^{(3)}(\beta_4 | \Gamma_3) \\ -\bar{\mu}_3 \epsilon_{n41}^{(4)}(\alpha_3 | \Gamma_3) & -\bar{\mu}_3 \epsilon_{n41}^{(3)}(\alpha_3 | \Gamma_3) & -\bar{\mu}_3 \epsilon_{n42}^{(4)}(\beta_3 | \Gamma_3) & -\bar{\mu}_3 \epsilon_{n42}^{(3)}(\beta_3 | \Gamma_3) & \epsilon_{n41}^{(4)}(\alpha_4 | \Gamma_3) & \epsilon_{n41}^{(3)}(\alpha_4 | \Gamma_3) & \epsilon_{n42}^{(4)}(\beta_4 | \Gamma_3) & \epsilon_{n42}^{(3)}(\beta_4 | \Gamma_3) \\ -\epsilon_{n71}^{(4)}(\alpha_3 | \Gamma_3) & -\epsilon_{n71}^{(3)}(\alpha_3 | \Gamma_3) & -\epsilon_{n72}^{(4)}(\beta_3 | \Gamma_3) & -\epsilon_{n72}^{(3)}(\beta_3 | \Gamma_3) & \epsilon_{n71}^{(4)}(\alpha_4 | \Gamma_3) & \epsilon_{n71}^{(3)}(\alpha_4 | \Gamma_3) & \epsilon_{n72}^{(4)}(\beta_4 | \Gamma_3) & \epsilon_{n72}^{(3)}(\beta_4 | \Gamma_3) \\ -\epsilon_{n81}^{(4)}(\alpha_3 | \Gamma_3) & -\epsilon_{n81}^{(3)}(\alpha_3 | \Gamma_3) & -\epsilon_{n82}^{(4)}(\beta_3 | \Gamma_3) & -\epsilon_{n82}^{(3)}(\beta_3 | \Gamma_3) & \epsilon_{n81}^{(4)}(\alpha_4 | \Gamma_3) & \epsilon_{n81}^{(3)}(\alpha_4 | \Gamma_3) & \epsilon_{n82}^{(4)}(\beta_4 | \Gamma_3) & \epsilon_{n82}^{(3)}(\beta_4 | \Gamma_3) \end{pmatrix}$$

$$[Z]_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_{n11}^{(4)}(\alpha_{N_L}|\Gamma_{N_L}|) & \varepsilon_{n11}^{(3)}(\alpha_{N_L}|\Gamma_{N_L}|) & \varepsilon_{n12}^{(4)}(\beta_{N_L}|\Gamma_{N_L}|) & \varepsilon_{n12}^{(3)}(\beta_{N_L}|\Gamma_{N_L}|) \\ \varepsilon_{n41}^{(4)}(\alpha_{N_L}|\Gamma_{N_L}|) & \varepsilon_{n41}^{(3)}(\alpha_{N_L}|\Gamma_{N_L}|) & \varepsilon_{n42}^{(4)}(\beta_{N_L}|\Gamma_{N_L}|) & \varepsilon_{n42}^{(3)}(\beta_{N_L}|\Gamma_{N_L}|) \end{pmatrix}$$

Annexe C

Détails des termes matriciels intervenant dans l'approche de la variable complexe

$$\begin{aligned}
S_1 &= -\alpha_1^2(\lambda_1 + \mu_1)\phi^{(i)} + 4\mu_1 \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{1}{\overline{w'(\eta)}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \phi^{(i)} \right\} \\
S_2 &= -\alpha_1^2(\lambda_1 + \mu_1)\phi + 4\mu_1 \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left\{ \frac{1}{\overline{w'(\eta)}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \phi^{(i)} \right\} \\
S_3 &= \frac{2\eta}{|\eta|} \frac{1}{|w'(\eta)|} \frac{\partial}{\partial \eta} \phi^{(i)} \\
S_4 &= \frac{2\bar{\eta}}{|\eta|} \frac{1}{|w'(\eta)|} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \phi^{(i)} \\
S_{1_{rr}} &= -\alpha_1^2(\lambda_1 + \mu_1)\phi^{(i)} + 2\mu_1 \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{1}{\overline{w'(\eta)}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \phi^{(i)} \right\} + 2\mu_1 \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left\{ \frac{1}{\overline{w'(\eta)}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \phi^{(i)} \right\} \\
S_{1_{r\tau}} &= -\alpha_1^2(\lambda_1 + \mu_1)\phi^{(i)} - 2\mu_1 \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{1}{\overline{w'(\eta)}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \phi^{(i)} \right\} - 2\mu_1 \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left\{ \frac{1}{\overline{w'(\eta)}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \phi^{(i)} \right\} \\
S_{1_{\tau\tau}} &= 2\mu_1 \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{i}{\overline{w'(\eta)}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \phi^{(i)} \right\} - 2\mu_1 \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{i}{w'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left\{ \frac{1}{\overline{w'(\eta)}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \phi^{(i)} \right\} \\
S_{1_r} &= \frac{\eta}{|\eta|} \frac{1}{|w'(\eta)|} \frac{\partial}{\partial \eta} \phi^{(i)} + \frac{\bar{\eta}}{|\eta|} \frac{1}{|w'(\eta)|} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \phi^{(i)} \\
S_{1_\tau} &= \frac{\eta}{|\eta|} \frac{i}{|w'(\eta)|} \frac{\partial}{\partial \eta} \phi^{(i)} - \frac{\bar{\eta}}{|\eta|} \frac{i}{|w'(\eta)|} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \phi^{(i)} \\
E_{n11}^{(1)} &= -\alpha_1^2(\lambda_1 + \mu_1)H_n^{(1)}(\alpha_1|w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n + \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{\mu_1 \alpha_1^2 w'(\eta)}{\overline{w'(\eta)}} H_{n-2}^{(1)}(\alpha_1|w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n-2} \\
E_{n11}^{(3)} &= \frac{\eta}{|\eta|} \frac{\alpha_1 w'(\eta)}{|w'(\eta)|} H_{n-1}^{(1)}(\alpha_1|w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n-1} \\
E_{n11}^{(4)} &= -\frac{\bar{\eta}}{|\eta|} \frac{\alpha_1 \overline{w'(\eta)}}{|w'(\eta)|} H_{n+1}^{(1)}(\alpha_1|w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n+1}
\end{aligned}$$

$$E_{n11}^{(2)} = -\alpha_1^2(\lambda_1 + \mu_1)H_n^{(1)}(\alpha_1|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^n + \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{\mu_1\alpha_1^2\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)}H_{n+2}^{(1)}(\alpha_1|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n+2}$$

$$E_{n12}^{(1)} = \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{i\mu_1\beta_1^2\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)}H_{n-2}^{(1)}(\beta_1|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n-2}$$

$$E_{n12}^{(2)} = -\frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{i\mu_1\beta_1^2\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)}H_{n+2}^{(1)}(\beta_1|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n+2}$$

$$E_{n12}^{(3)} = \frac{\eta}{|\eta|} \frac{i\beta_1\overline{w'(\eta)}}{|w'(\eta)|}H_{n-1}^{(1)}(\beta_1|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n-1}$$

$$E_{n12}^{(4)} = \frac{\bar{\eta}}{|\eta|} \frac{i\beta_1\overline{w'(\eta)}}{|w'(\eta)|}H_{n+1}^{(1)}(\beta_1|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n+1}$$

$$E_{n11}^{(1*)} = -\alpha_1^2(\lambda_1 + \mu_1)H_n^{(1)}(\alpha_1|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^n$$

$$E_{n11}^{(1**) } = \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{\mu_1\alpha_1^2\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)}H_{n-2}^{(1)}(\alpha_1|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n-2}$$

$$E_{n11}^{(2**) } = \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{\mu_1\alpha_1^2\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)}H_{n+2}^{(1)}(\alpha_1|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n+2}$$

$$E_{n21k}^{(1)} = -\alpha_k^2(\lambda_k + \mu_k)H_n^{(2)}(\alpha_k|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^n + \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{\mu_k\alpha_k^2\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)}H_{n-2}^{(2)}(\alpha_k|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n-2}$$

$$E_{n22k}^{(1)} = -\alpha_k^2(\lambda_k + \mu_k)H_n^{(1)}(\alpha_k|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^n + \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{\mu_k\alpha_k^2\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)}H_{n-2}^{(1)}(\alpha_k|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n-2}$$

$$E_{n23k}^{(1)} = \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{i\mu_k\beta_k^2\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)}H_{n-2}^{(2)}(\beta_k|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n-2}$$

$$E_{n24k}^{(1)} = \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{i\mu_k\beta_k^2\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)}H_{n-2}^{(1)}(\beta_k|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n-2}$$

$$E_{n21k}^{(2)} = -\alpha_k^2(\lambda_k + \mu_k)H_n^{(2)}(\alpha_k|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^n + \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{\mu_k\alpha_k^2\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)}H_{n+2}^{(2)}(\alpha_k|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n+2}$$

$$E_{n22k}^{(2)} = -\alpha_k^2(\lambda_k + \mu_k)H_n^{(1)}(\alpha_k|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^n + \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{\mu_k\alpha_k^2\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)}H_{n+2}^{(1)}(\alpha_k|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n+2}$$

$$E_{n23k}^{(2)} = -\frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{i\mu_k\beta_k^2\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)}H_{n+2}^{(2)}(\beta_k|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n+2}$$

$$E_{n24k}^{(2)} = -\frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{i\mu_k\beta_k^2\overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)}H_{n+2}^{(1)}(\beta_k|w(\eta)|)\left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|}\right]^{n+2}$$

$$\begin{aligned}
E_{n21k}^{(3)} &= \frac{\eta}{|\eta|} \frac{\alpha_k w'(\eta)}{|w'(\eta)|} H_{n-1}^{(2)}(\alpha_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n-1} \\
E_{n22k}^{(3)} &= \frac{\eta}{|\eta|} \frac{\alpha_k w'(\eta)}{|w'(\eta)|} H_{n-1}^{(1)}(\alpha_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n-1} \\
E_{n23k}^{(3)} &= \frac{\eta}{|\eta|} \frac{i\beta_k w'(\eta)}{|w'(\eta)|} H_{n-1}^{(2)}(\beta_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n-1} \\
E_{n24k}^{(3)} &= \frac{\eta}{|\eta|} \frac{i\beta_k w'(\eta)}{|w'(\eta)|} H_{n-1}^{(1)}(\beta_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n-1} \\
\\
E_{n21k}^{(4)} &= -\frac{\bar{\eta}}{|\eta|} \frac{\alpha_k \overline{w'(\eta)}}{|w'(\eta)|} H_{n+1}^{(2)}(\alpha_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n+1} \\
E_{n22k}^{(4)} &= -\frac{\bar{\eta}}{|\eta|} \frac{\alpha_k \overline{w'(\eta)}}{|w'(\eta)|} H_{n+1}^{(1)}(\alpha_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n+1} \\
E_{n23k}^{(4)} &= \frac{\bar{\eta}}{|\eta|} \frac{i\beta_k \overline{w'(\eta)}}{|w'(\eta)|} H_{n+1}^{(2)}(\beta_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n+1} \\
E_{n24k}^{(4)} &= \frac{\bar{\eta}}{|\eta|} \frac{i\beta_k \overline{w'(\eta)}}{|w'(\eta)|} H_{n+1}^{(1)}(\beta_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n+1} \\
\\
E_{n21k}^{(2**) } &= \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{\mu_k \alpha_k^2 \overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)} H_{n+2}^{(2)}(\alpha_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n+2} \\
E_{n21k}^{(2*)} &= -\alpha_k^2 (\lambda_k + \mu_k) H_n^{(2)}(\alpha_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \\
E_{n22k}^{(2*)} &= -\alpha_k^2 (\lambda_k + \mu_k) H_n^{(1)}(\alpha_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^n \\
E_{n22k}^{(2**) } &= \frac{\bar{\eta}^2}{|\eta|^2} \frac{\mu_k \alpha_k^2 \overline{w'(\eta)}}{w'(\eta)} H_{n+2}^{(1)}(\alpha_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n+2} \\
E_{n21k}^{(1**) } &= \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{\mu_k \alpha_k^2 w'(\eta)}{\overline{w'(\eta)}} H_{n-2}^{(2)}(\alpha_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n-2} \\
E_{n22k}^{(1**) } &= \frac{\eta^2}{|\eta|^2} \frac{\mu_k \alpha_k^2 w'(\eta)}{\overline{w'(\eta)}} H_{n-2}^{(1)}(\alpha_k |w(\eta)|) \left[\frac{w(\eta)}{|w(\eta)|} \right]^{n-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{m1} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_1 e^{-im\theta} d\theta, & S_{m2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_2 e^{-im\theta} d\theta \\
S_{m3} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_3 e^{-im\theta} d\theta, & S_{m4} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_4 e^{-im\theta} d\theta \\
E_{nm11}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n11}^{(1)} e^{-im\theta} d\theta, & E_{nm12}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n12}^{(1)} e^{-im\theta} d\theta \\
E_{nm21k}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n21k}^{(1)} e^{-im\theta} d\theta, & E_{nm22k}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n22k}^{(1)} e^{-im\theta} d\theta \\
E_{nm23k}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n23k}^{(1)} e^{-im\theta} d\theta, & E_{nm24k}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n24k}^{(1)} e^{-im\theta} d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{nm11}^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n11}^{(2)} e^{-im\theta} d\theta, & E_{nm12}^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n12}^{(2)} e^{-im\theta} d\theta \\
E_{nm21k}^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n21k}^{(2)} e^{-im\theta} d\theta, & E_{nm22k}^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n22k}^{(2)} e^{-im\theta} d\theta \\
E_{nm23k}^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n23k}^{(2)} e^{-im\theta} d\theta, & E_{nm24k}^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n24k}^{(2)} e^{-im\theta} d\theta \\
E_{nm11}^{(3)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n11}^{(3)} e^{-im\theta} d\theta, & E_{nm12}^{(3)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n12}^{(3)} e^{-im\theta} d\theta \\
E_{nm21k}^{(3)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n21k}^{(3)} e^{-im\theta} d\theta, & E_{nm22k}^{(3)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n22k}^{(3)} e^{-im\theta} d\theta \\
E_{nm23k}^{(3)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n23k}^{(3)} e^{-im\theta} d\theta, & E_{nm24k}^{(3)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n24k}^{(3)} e^{-im\theta} d\theta \\
E_{nm11}^{(4)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n11}^{(4)} e^{-im\theta} d\theta, & E_{nm12}^{(4)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n12}^{(4)} e^{-im\theta} d\theta \\
E_{nm21k}^{(4)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n21k}^{(4)} e^{-im\theta} d\theta, & E_{nm22k}^{(4)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n22k}^{(4)} e^{-im\theta} d\theta \\
E_{nm23k}^{(4)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n23k}^{(4)} e^{-im\theta} d\theta, & E_{nm24k}^{(4)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{n24k}^{(4)} e^{-im\theta} d\theta
\end{aligned}$$

$$\{H\}_{n,N_E} = \begin{pmatrix} \{E\}_n \\ \{F_2\}_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \{F_{N_L-1}\}_n \\ \{T\}_n \end{pmatrix}$$

$$\{Q\}_{n,N_E} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\{E\}_n = \begin{pmatrix} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [-(A_n E_{n11}^{(1)} + B_n E_{n12}^{(1)}) + (C_{n2} E_{n212}^{(1)} + D_{n2} E_{n222}^{(1)} + M_{n2} E_{n232}^{(1)} + N_{n2} E_{n242}^{(1)})] \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [-(A_n E_{n11}^{(2)} + B_n E_{n12}^{(2)}) + (C_{n2} E_{n212}^{(2)} + D_{n2} E_{n222}^{(2)} + M_{n2} E_{n232}^{(2)} + N_{n2} E_{n242}^{(2)})] \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [-(A_n E_{n11}^{(3)} + B_n E_{n12}^{(3)}) + (C_{n2} E_{n212}^{(3)} + D_{n2} E_{n222}^{(3)} + M_{n2} E_{n232}^{(3)} + N_{n2} E_{n242}^{(3)})] \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [-(A_n E_{n11}^{(4)} + B_n E_{n12}^{(4)}) + (C_{n2} E_{n212}^{(4)} + D_{n2} E_{n222}^{(4)} + M_{n2} E_{n232}^{(4)} + N_{n2} E_{n242}^{(4)})] \end{pmatrix}$$

$$\{F_k\}_n = \begin{pmatrix} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [-(C_{n2} E_{n212}^{(1)} + D_{n2} E_{n222}^{(1)} + M_{n2} E_{n232}^{(1)} + N_{n2} E_{n242}^{(1)}) + (C_{n3} E_{n213}^{(1)} + D_{n3} E_{n223}^{(1)} + M_{n3} E_{n233}^{(1)} + N_{n3} E_{n243}^{(1)})] \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [-(C_{n2} E_{n212}^{(2)} + D_{n2} E_{n222}^{(2)} + M_{n2} E_{n232}^{(2)} + N_{n2} E_{n242}^{(2)}) + (C_{n3} E_{n213}^{(2)} + D_{n3} E_{n223}^{(2)} + M_{n3} E_{n233}^{(2)} + N_{n3} E_{n243}^{(2)})] \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [-(C_{n2} E_{n212}^{(3)} + D_{n2} E_{n222}^{(3)} + M_{n2} E_{n232}^{(3)} + N_{n2} E_{n242}^{(3)}) + (C_{n3} E_{n213}^{(3)} + D_{n3} E_{n223}^{(3)} + M_{n3} E_{n233}^{(3)} + N_{n3} E_{n243}^{(3)})] \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [-(C_{n2} E_{n212}^{(4)} + D_{n2} E_{n222}^{(4)} + M_{n2} E_{n232}^{(4)} + N_{n2} E_{n242}^{(4)}) + (C_{n3} E_{n213}^{(4)} + D_{n3} E_{n223}^{(4)} + M_{n3} E_{n233}^{(4)} + N_{n3} E_{n243}^{(4)})] \end{pmatrix}$$

$$\{T\}_n = \begin{pmatrix} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_{nN_L} E_{n21N_L}^{(1)} + D_{nN_L} E_{n22N_L}^{(1)} + M_{nN_L} E_{n23N_L}^{(1)} + N_{nN_L} E_{n24N_L}^{(1)}] \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_{nN_L} E_{n21N_L}^{(2)} + D_{nN_L} E_{n22N_L}^{(2)} + M_{nN_L} E_{n23N_L}^{(2)} + N_{nN_L} E_{n24N_L}^{(2)}] \end{pmatrix}$$

$$[G]_{m,n,\{M_E, M_E\}} = \begin{pmatrix} [R]_{n,m} & & & & & \\ & [V_2]_{n,m} & & & & \\ & & [V_k]_{n,m} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & [V_{N_L-1}]_{n,m} \\ & & & & & & [W]_{n,m} \end{pmatrix}$$

$$[R]_{m,n} = \begin{pmatrix} -[E_{nm11}^{(1)}] & -[E_{nm12}^{(1)}] & [E_{nm212}^{(1)}] & [E_{nm222}^{(1)}] & [E_{nm232}^{(1)}] & [E_{nm242}^{(1)}] \\ -[E_{nm11}^{(2)}] & -[E_{nm12}^{(2)}] & [E_{nm212}^{(2)}] & [E_{nm222}^{(2)}] & [E_{nm232}^{(2)}] & [E_{nm242}^{(2)}] \\ -[E_{nm11}^{(3)}] & -[E_{nm12}^{(3)}] & [E_{nm212}^{(3)}] & [E_{nm222}^{(3)}] & [E_{nm232}^{(3)}] & [E_{nm242}^{(3)}] \\ -[E_{nm11}^{(4)}] & -[E_{nm12}^{(4)}] & [E_{nm212}^{(4)}] & [E_{nm222}^{(4)}] & [E_{nm232}^{(4)}] & [E_{nm242}^{(2)}] \end{pmatrix}$$

$$[V_2]_{m,n} = \begin{pmatrix} -[E_{nm212}^{(1)}] & -[E_{nm222}^{(1)}] & -[E_{nm232}^{(1)}] & -[E_{nm242}^{(1)}] & [E_{nm213}^{(1)}] & [E_{nm223}^{(1)}] & [E_{nm233}^{(1)}] & [E_{nm243}^{(1)}] \\ -[E_{nm212}^{(2)}] & -[E_{nm222}^{(2)}] & -[E_{nm232}^{(2)}] & -[E_{nm242}^{(2)}] & [E_{nm213}^{(2)}] & [E_{nm223}^{(2)}] & [E_{nm233}^{(2)}] & [E_{nm243}^{(2)}] \\ -[E_{nm212}^{(3)}] & -[E_{nm222}^{(3)}] & -[E_{nm232}^{(3)}] & -[E_{nm242}^{(3)}] & [E_{nm213}^{(3)}] & [E_{nm223}^{(3)}] & [E_{nm233}^{(3)}] & [E_{nm243}^{(3)}] \\ -[E_{nm212}^{(4)}] & -[E_{nm222}^{(4)}] & -[E_{nm232}^{(4)}] & -[E_{nm242}^{(2)}] & [E_{nm213}^{(4)}] & [E_{nm223}^{(4)}] & [E_{nm233}^{(4)}] & [E_{nm243}^{(2)}] \end{pmatrix}$$

$$[V_k]_{m,n} = \begin{pmatrix} -[E_{nm21k}^{(1)}] & -[E_{nm22k}^{(1)}] & -[E_{nm23k}^{(1)}] & -[E_{nm24k}^{(1)}] & [E_{nm21k+1}^{(1)}] & [E_{nm22k+1}^{(1)}] & [E_{nm23k+1}^{(1)}] & [E_{nm24k+1}^{(1)}] \\ -[E_{nm21k}^{(2)}] & -[E_{nm22k}^{(2)}] & -[E_{nm23k}^{(2)}] & -[E_{nm24k}^{(2)}] & [E_{nm21k+1}^{(2)}] & [E_{nm22k+1}^{(2)}] & [E_{nm23k+1}^{(2)}] & [E_{nm24k+1}^{(2)}] \\ -[E_{nm21k}^{(3)}] & -[E_{nm22k}^{(3)}] & -[E_{nm23k}^{(3)}] & -[E_{nm24k}^{(3)}] & [E_{nm21k+1}^{(3)}] & [E_{nm22k+1}^{(3)}] & [E_{nm23k+1}^{(3)}] & [E_{nm24k+1}^{(3)}] \\ -[E_{nm21k}^{(4)}] & -[E_{nm22k}^{(4)}] & -[E_{nm23k}^{(4)}] & -[E_{nm24k}^{(2)}] & [E_{nm21k+1}^{(4)}] & [E_{nm22k+1}^{(4)}] & [E_{nm23k+1}^{(4)}] & [E_{nm24k+1}^{(2)}] \end{pmatrix}$$

$$[W]_{m,n} = \begin{pmatrix} [E_{nm21N_L}^{(1)}] & [E_{nm22N_L}^{(1)}] & [E_{nm23N_L}^{(1)}] & [E_{nm24N_L}^{(1)}] \\ [E_{nm21N_L}^{(2)}] & [E_{nm22N_L}^{(2)}] & [E_{nm23N_L}^{(2)}] & [E_{nm24N_L}^{(2)}] \end{pmatrix}$$

$$[E_{nm11}^{(1)}] = \begin{pmatrix} E_{-N_M-N_M11}^{(1)} & \cdots & E_{-N_M011}^{(1)} & \cdots & E_{-N_MN_M11}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{0-N_M11}^{(1)} & \cdots & E_{0011}^{(1)} & \cdots & E_{0N_M11}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{N_M-N_M11}^{(1)} & \cdots & E_{N_M011}^{(1)} & \cdots & E_{N_MN_M11}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$[E_{nm212}^{(1)}] = \begin{pmatrix} E_{-N_M-N_M212}^{(1)} & \cdots & E_{-N_M0212}^{(1)} & \cdots & E_{-N_MN_M212}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{0-N_M212}^{(1)} & \cdots & E_{00212}^{(1)} & \cdots & E_{0N_M212}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{N_M-N_M212}^{(1)} & \cdots & E_{N_M0212}^{(1)} & \cdots & E_{N_MN_M212}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$[E_{nm21N_L}^{(1)}] = \begin{pmatrix} E_{-N_M-N_M21N_L}^{(1)} & \cdots & E_{-N_M021N_L}^{(1)} & \cdots & E_{-N_MN_M21N_L}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{0-N_M21N_L}^{(1)} & \cdots & E_{0021N_L}^{(1)} & \cdots & E_{0N_M21N_L}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{N_M-N_M21N_L}^{(1)} & \cdots & E_{N_M021N_L}^{(1)} & \cdots & E_{N_MN_M21N_L}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\{P\}_{n,m,M_E} = \left(\{A_n\} \quad \{B_n\} \quad \{C_{n2}\} \quad \{D_{n2}\} \quad \{M_{n2}\} \quad \{N_{n2}\} \quad \cdots \quad \cdots \quad \{C_{nN_L}\} \quad \{D_{nN_L}\} \quad \{M_{nN_L}\} \quad \{N_{nN_L}\} \right)^T$$

$$\{A_n\} = \left(A_{-N_M} \quad \cdots \quad A_0 \quad \cdots \quad A_{N_M} \right)^T$$

$$\{B_n\} = \left(B_{-N_M} \quad \cdots \quad B_0 \quad \cdots \quad B_{N_M} \right)^T$$

$$\{M_{n2}\} = \left(M_{-N_M2} \quad \cdots \quad M_{02} \quad \cdots \quad M_{N_M2} \right)^T$$

$$\{M_{nN_L}\} = \left(M_{-N_MN_L} \quad \cdots \quad M_{0N_L} \quad \cdots \quad M_{N_MN_L} \right)^T$$

$$\{I\}_{n,m,M_E} = \left(\{S_{m1}\} \quad \{S_{m2}\} \quad \{S_{m3}\} \quad \{S_{m4}\} \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad 0 \right)^T$$

$$\{S_{m1}\} = \left(S_{-N_M1} \quad \cdots \quad S_{01} \quad \cdots \quad S_{N_M1} \right)^T$$

$$\{S_{m2}\} = \left(S_{-N_M2} \quad \cdots \quad S_{02} \quad \cdots \quad S_{N_M2} \right)^T$$

$$\{S_{m3}\} = \left(S_{-N_M3} \quad \cdots \quad S_{03} \quad \cdots \quad S_{N_M3} \right)^T$$

$$\{S_{m4}\} = \left(S_{-N_M4} \quad \cdots \quad S_{04} \quad \cdots \quad S_{N_M4} \right)^T$$

