



HAL
open science

Assemblages d'objets élançés : mécanique et effets de contact

Raphaëlle Taub

► **To cite this version:**

Raphaëlle Taub. Assemblages d'objets élançés : mécanique et effets de contact. Matière Molle [cond-mat.soft]. Université Paris-Saclay, 2020. Français. NNT : 2020UPASP021 . tel-03469885

HAL Id: tel-03469885

<https://theses.hal.science/tel-03469885v1>

Submitted on 8 Dec 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Assemblages d'objets élançés : mécanique et effets de contact

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 564, Physique en Île-de-France (PIF)
Spécialité de doctorat : Physique
Unité de Recherche : Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire
de Physique des Solides, 91405, Orsay, France.
Référént : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse présentée et soutenue à Orsay, le 07/12/2020, par

Raphaëlle TAUB

Composition du jury :

Brigitte PANSU Professeur, Université Paris-Saclay (Laboratoire de Physique des Solides)	Présidente
Thierry CHARITAT Professeur, Université de Strasbourg (Institut Charles Sadron)	Rapporteur et Examineur
Benjamin CROSS Maître de Conférences (HDR), Université Grenoble-Alpes (LiPhy)	Rapporteur et Examineur
Élise CONTRAIRES Maîtresse de Conférences, École Centrale Lyon (Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes)	Examinatrice
Frédéric RESTAGNO Directeur de Recherche, Université Paris-Saclay (Laboratoire de Physique des Solides)	Directeur de thèse
Christophe POULARD Maître de Conférences, Université Paris-Saclay (Laboratoire de Physique des Solides)	Co-directeur de thèse
Thomas SALEZ Chargé de Recherche, CNRS (Laboratoire Ondes et Matière d'Aquitaine)	Invité
Lydéric BOCQUET Directeur de Recherche, CNRS (Laboratoire de Physique de l'ENS)	Invité
José BICO Maître de Conférences, ESPCI Paris (Laboratoire PMMH)	Invité

Table des matières

Introduction	5
1 Quelques éléments théoriques utiles	9
A Élasticité linéaire	9
1 Loi de Hooke	9
2 Mécanique des structures élancées	10
3 Intégration de l'équation de l'élastica linéarisée dans le cas d'une force ponctuelle	13
B Frottement sec et contact solide	14
1 Contexte général et histoire de la tribologie	14
2 Frottement statique, frottement dynamique et formalisation des lois d'Amontons-Coulomb [1]	14
3 Modèles microscopiques du frottement	16
C Conclusion	18
I La chasse au papillon - Auto-amplification dans un assemblage de plaques entremêlées	21
1 Introduction	23
A Contexte	23
1 La séparation des annuaires, ou le treizième travail d'Hercule	23
2 Le travail de H. Alarcón <i>et al.</i> sur les assemblages de feuilles entremêlés [2,3]	24
3 Objectifs du travail présenté dans cette partie	27
B Matériel et méthodes	28
1 Le papier	28
2 Dispositif expérimental	30
3 Modification du dispositif expérimental pour l'ajout d'une force extérieure normale	32
4 Mesure du coefficient de frottement	32
C Conclusion	33
2 Résultats sur l'origine physique de la force amplifiée	35
A Influence d'une masse extérieure	35
B Influence des dimensions des feuilles	38
1 Effet de la longueur des feuilles	38
2 Effet de la largeur des feuilles	38
3 Discussion sur l'origine de T^*	39

C	Influence de la vitesse	41
D	Résumé des résultats expérimentaux et conclusion sur l'origine de T^*	44
3	Analyses avancées	45
A	Déviations du modèle	45
1	Analyse détaillée d'une courbe $T(d)$	45
2	Sensibilité du coefficient de frottement à la charge normale aux grandes distances de recouvrement	46
3	Approximation des petits angles à faible distance de recouvrement	49
B	Modèle théorique discret pour le calcul de $T(d)$	52
C	Résumé des résultats et conclusion	56
4	Conclusion générale sur les assemblages de feuilles entremêlées	59
II	Physique du coup de pinceau - Rigidité d'un faisceau de fibres et mécanique de la peinture	63
1	Introduction	65
A	Contexte général de la physique des assemblages de poutres	66
B	Contexte général de la physique de l'art	67
C	Les pinceaux	69
1	Histoire, composition et fabrication	69
2	Les différents types de pinceaux	70
D	Objectifs de cette partie	72
2	Mécanique d'assemblages de fibres sous compression	73
A	Description générale des courbes force-déplacement de la compression d'un faisceau de fibres	74
1	Matériel et méthodes	74
2	Domaines de sollicitation des assemblages de fibres comprimés	76
3	Rôle de l'orientation de l'expérience	81
B	Étude des courbes de force en grandes déformations	82
1	Protocole expérimental	82
2	Analyse dimensionnelle et résultats expérimentaux	82
3	Expériences à N variable en grandes déformations	86
C	Dimensions du contact fibres-surface et approche théorique	87
D	Simulation d'une poutre unique en éléments finis et comparaison aux résultats expérimentaux	89
E	Position des domaines	92
F	Conclusion sur la mécanique d'un pinceau	93
3	Forme et raideur des pinceaux	95
A	Forme et dimensions des pinceaux de peinture	95
1	Le pinceau standard	95
2	Méthode de mesure des dimensions des pinceaux	96
3	Résultats expérimentaux	97

4	Discussion	98
B	Lien entre les dimensions d'un pinceau et sa raideur	99
1	Raideur d'une assemblée de poils	99
2	Le domaine du peintre	101
3	Mesure expérimentale de la raideur des pinceaux	102
4	Effet de l'angle du pinceau	105
C	Conclusion sur la forme des pinceaux	106
1	Résumé des résultats	106
2	Pourquoi les pinceaux ont-ils une raideur constante?	107
4	Compression d'une assemblée de fibres imbibée de liquide	109
A	Contexte	109
B	Mécanique d'un pinceau chargé de liquide	110
1	Protocole expérimental	110
2	Résultats et discussion	111
C	Dépôt d'un liquide sur une surface	114
1	Tâches, traits, motifs et oeuvres	114
2	Protocole expérimental	115
3	Résultats et discussion	116
D	Conclusion	120
	Conclusion	127
	Annexe	129
A	Fluctuations de la force	129
B	Effet de la vitesse	130
C	Distribution de la taille des évènements	130
D	Discussion et contexte	132
	Bibliographie	133

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur et mon co-directeur de thèse. Fred, merci de m'avoir fait confiance et de m'avoir laissée libre de chercher dans des voies qui ne semblaient pas forcément prometteuses au premier abord. J'ai toujours su que si j'avais besoin de quoi que ce soit, depuis une aide pour comprendre des données expérimentales jusqu'à des conseils d'orientation, en passant par une tarte au citron meringuée, ta porte était toujours ouverte. Merci aussi pour ta joie de vivre, ton enthousiasme et tes blagues, qui me mettaient toujours de bonne humeur après ton départ de mon bureau; elles vont me manquer.

Christophe, merci pour ton pragmatisme, ta capacité à relativiser, à voir les choses autrement et pour toutes les fois où on a passé l'après-midi côte-à-côte à hésiter entre des représentations linéaires et logarithmiques. Merci aussi pour ton enthousiasme quand on a commencé à s'intéresser aux pinceaux. A tous les deux, vous formiez un duo d'encadrants qui m'ont fait grandir scientifiquement et m'ont préparée pour la suite.

Je remercie aussi particulièrement Thomas Salez pour notre collaboration. Merci pour tes idées qui ont apporté une nouvelle dimension à ma thèse, ton explication de la percolation et pour nos conversations à Cargèse dont je garde un souvenir très heureux.

Je remercie à présent les membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail, et en particulier mes rapporteurs. Merci à Thierry Charitat pour sa bienveillance ainsi que pour ses corrections sur mon manuscrit. Merci à Benjamin Cross qui a accepté de rapporter cette thèse si rapidement. Je remercie également les examinateurs et membres invités, Élise Contraires, José Bico, et Brigitte Pansu qui a accepté de présider ce jury. Un remerciement spécial va également à Lydéric Bocquet, pour sa présence dans mon jury mais aussi pour avoir été mon tuteur de thèse pendant trois ans. Je remercie aussi Mark Goerbig d'avoir été mon parrain de thèse et de ses bons conseils quand j'en ai eu besoin.

Au cours de cette thèse, j'ai été amenée à collaborer avec Élie Raphaël et Kari Dalmoki-Veress que je tiens à remercier chaleureusement pour nos discussions scientifiques et nos échanges.

Je remercie Jean-Michel Dalle pour l'opportunité qu'il m'a donnée de continuer notre collaboration à Agoranov durant ma thèse, mais aussi pour nos discussions, tes conseils, et ta bienveillance.

Je remercie également Muriel Rousseau et William Whitney pour leurs recherches et ce qu'ils m'ont fait découvrir du monde de l'art et des pinceaux. Pour cela, ma gratitude va également à la Fédération Française de la Brosserie et en particulier à Danièle Quemper pour sa disponibilité.

La suite de ces remerciements s'adresse naturellement à l'équipe MMOI. Merci chronologiquement à Marceau, pour ton adaptabilité thermique et nos discussions sur la fantasy, à Marion, pour ta bonne humeur et ton implication dans l'équipe, à Manon, pour, entre

autres, m'avoir appris plein de choses sur WoW et les tracteurs et pour avoir partagé ma détresse à certains cours de sport. Merci à Marina pour sa gentillesse, sa vision toute particulière des jauges d'essence qui me laisse un joyeux souvenir et son habileté à s'insérer entre deux voitures. Merci à Aymeric pour avoir partagé son bureau (et son café) avec moi, pour m'avoir convaincu d'acheter les livres de Liu Cixin et plus généralement pour sa bonhomie naturelle. Merci à Marie pour sa façon de dire « et allez ! » aux autres conducteurs, pour avoir partagé une chambre à Cargèse et pour ses cours intensifs de coinche. Merci à Julian pour sa gentillesse constante et la sûreté de son goût en thés. Grazie anche a Chiara, et merci à Anna et à Anastasia pour leur présence. Je remercie aussi Manue, pour avoir partagé son bureau et sa recette de sablés de Noël avec moi, et Annina pour nos conversations dans le RER et pour m'avoir fait découvrir la littérature Estonienne. Et enfin un remerciement collectif à tous les autres membres ou alumni du groupe : Baptiste, Dominique, Alexis, Liliane, Suzanne, Qizhou, François, Gabriel, Sandrine, Elina, Laura, Tiago, et Jonas. Ces remerciements s'étendent aussi hors de l'équipe, merci à Matthieu pour nos débats souvent animés et nos parties d'échecs dont l'issue sera, je l'espère, moins prévisible à l'avenir, et à Alexis qui m'a accueillie quand je suis arrivée au LPS et à Maxime pour sa sympathie, et plus largement à l'ensemble des doctorants du laboratoire, avec qui j'ai pu partager un bon nombre de cafés et de déjeuners pendant ces trois ans .

Pour finir, j'aimerais remercier tous ceux qui, de plus loin et parfois sans le savoir, on accompagné cette thèse et m'ont aidée à la mener au bout. Je ne vois pas la moitié d'entre vous à moitié moins que je le voudrais, et je le dis à moins de la moitié d'entre vous à moitié autant que vous ne le méritez.

Élise, merci, pour ton amitié qui remonte plus loin que ma mémoire. Je ne saurais trouver une unique anecdote à citer ici. Merci Laurine, tu as été là quand j'en ai eu besoin même si ce « là » est trop loin ; Sophie, pour ta bonne humeur et pour toutes les heures que l'on a passées à ne rien faire d'autre qu'à discuter comme si on avait quinze ans ; Thibaut grâce à toi parfois « je ne m'inquiète pas trop » et merci de m'avoir invitée à Éloqu'ENS ; Élise (vous vous reconnaissez) pour ton sens de l'humour, nos dîners à la crêperie qui me manquent, je ne suis pas sûre d'avoir dit aussi que j'étais heureuse de t'avoir rencontrée. Laetitia, merci d'être toujours partante pour tout et en particulier pour tous les jeux que j'ai pu imaginer, ainsi que pour tes précieux conseils en art oratoire. José, merci pour ton amitié, pour m'avoir fait redécouvrir le Canard et le *mole* et pour tes talents insoupçonnés d'acquéreur. Je remercie aussi Xavier grâce à qui j'ai poussé la porte de laboratoires de biologie, de mairies et de ministères plus souvent que je ne l'aurais imaginé, mais surtout pour ton rire abominablement communicatif. Merci Timothée pour ton sillon d'improbable, mais aussi pour ton affection. Clara-Bella, merci pour tous ces dimanches matin (qui étaient peut-être moins plaisants pour toi), je suis heureuse de t'avoir vue grandir pendant ces années. Merci à Alexandra pour tes bons conseils dans tous les domaines et pour ton hospitalité qui m'a vraiment fait chaud au coeur. Merci Agathe, pour les moments (trop rares, hélas) que l'on a passés ensemble pendant ces trois ans, j'ai hâte que l'on parte toutes les deux à Florence. Andréa, c'est une joie que l'on se soit re-rencontrées, merci pour nos conversations au Cap et ailleurs. Je remercie aussi Luc pour sa loyauté et sa cuisine, c'est de ma faute si on ne se voit pas plus souvent. J'adresse aussi des remerciements collectifs à tout le club de débat de l'ENS : Noé, Louis D., Charly, Louis G., Jules, Aline, Gaetan et les autres, à ceux dont l'amitié à perduré après « ce soir » :

Clara, Jonathan, Matthieu, Clément et Matthis. Je suis contente d'avoir partagé ces trois années, ainsi que les précédentes et je l'espère aussi les prochaines.

On m'a toujours dit qu'il ne fallait jamais remercier ses parents et ses grands-parents, car alors ce serait beaucoup trop long à faire. Mais je vous exprime néanmoins ma gratitude de pouvoir mettre ce manuscrit entre vos mains. *Merci Maman*. Parmi des milliers d'autres choses, merci Jean d'avoir répondu à mes questions d'enfant, même quand cela nécessitait de m'expliquer la dualité onde-corpuscule. Merci Papa pour les fois où tu m'as ouvert de nouveaux horizons. Et merci à Simon de ta façon de plisser les yeux quand tu ris, à Élise de sembler toujours convaincue que je peux tout faire, à Lili pour ses petits messages sur mon répondeur et pour m'avoir toujours encouragée, merci Anouk pour ta façon de dire « ah ben ! » en secouant le menton et n'oublie pas la légèreté. Merci à Charles et Pierre pour avoir partagé deux confinements et un nombre incalculable de babkas avec moi, et merci enfin à toute ma famille, qui s'est considérablement agrandie pendant ces trois années, pour ma plus grande joie : Rachel, Alice, Lola, Aurélia, Mickaël, Benjamin, Grégor, Jean-Do, Marie, Dominique, Gilles, Cathy, Thésée (je suis comme toi maintenant), Isabelle, Valérie et Léontine.

Enfin, merci à Aurélien pour tout. M'avoir supportée, ton soutien, la célébration de fractions de thèse, avoir traqué les fautes de typo et de dans ce manuscrit, et trop d'autres choses pour que je puisse les écrire ici.

Introduction

Le terme élancé caractérise un objet dont au moins l'une des dimensions est petite devant les autres. Quand ils sont unidimensionnels, on les appelle des tiges ou des poutres ; quand ils sont bidirectionnels, on les désigne comme des plaques. La géométrie particulière de ces objets fait que l'on peut leur imposer de grandes déformations sans sortir de la limite d'élasticité du matériau. Tandis que pour obtenir le même résultat avec des objets non élancés, le matériau doit présenter un module élastique très faible et un grand domaine d'élasticité. Si on ramène par exemple les deux côtés opposés d'une feuille de papier l'un sur l'autre, sans marquer le pli (comme sur la photo 1), celle-ci reprendra sa forme dès qu'on la lâchera alors qu'on lui aura pourtant imposé une déformation très importante. Cet effet est rendu possible par le fait que la longueur de la feuille permet d'obtenir une grande courbure macroscopique sans avoir à imposer localement des courbures importantes et donc de concentrer les contraintes.

Cependant, si on rapproche plusieurs de ces objets dans un assemblage dense, la présence de leurs voisins les empêche de se déplacer librement. De sorte que la mécanique de l'ensemble doit prendre en compte les interactions de contact. Parmi celles-ci peuvent figurer la résistance élastique des objets voisins, le frottement, et l'adhésion. Leur présence peut alors modifier fondamentalement le système.

Cette thèse est organisée en deux grandes parties distinctes. Chacune de ces parties s'intéresse à un assemblage différent d'objets entremêlés. Le premier chapitre introductif rappelle succinctement quelques éléments théoriques d'élasticité linéaire et de frottement. En particulier, il aborde l'équation de l'élastica d'Euler et plusieurs modèles microscopiques du frottement.

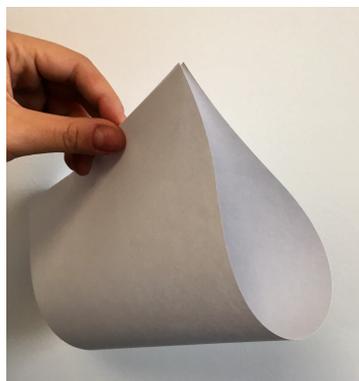


FIGURE 1 — Même soumise à de grandes déformations, une feuille de papier reste dans le domaine élastique : elle reprendra sa forme initiale si on la lâche.

La première partie de cette thèse porte sur l'étude d'un assemblage de feuillets intercalés. Cette expérience est aussi connue comme « l'expérience des annuaires » car le système s'inspire de deux livres dont on aurait entremêlé les pages et qui forment ainsi un système amplificateur si efficace qu'il devient impossible de les séparer à mains nues. Cette partie est constituée de quatre chapitres.

Le **premier chapitre** commence par décrire les travaux de Alarcón *et al.* [2] sur cette expérience. Nous y présentons aussi le dispositif expérimental utilisé, la méthode de fabrication des assemblages, ainsi que la modification de celui-ci permettant d'introduire une force extérieure. Nous décrivons et discutons ensuite les caractéristiques du matériau que nous utilisons, le papier, et en particulier sa rugosité de surface.

Le **deuxième chapitre** s'intéresse à l'identification de la force que l'assemblage amplifie. Nous y décrivons et discutons la variation de la force de résistance de l'assemblage quand la longueur des feuilles et la largeur des feuilles sont modifiées. Nous présentons les résultats des expériences réalisées en appliquant une force extérieure sur l'assemblage et nous détaillons l'effet de la vitesse sur les mesures de force et de coefficient de frottement. Enfin, nous proposons une interprétation de l'origine de la force amplifiée à partir des résultats de ces expériences.

Dans le **troisième chapitre**, nous nous intéressons plus en détail au modèle introduit par Alarcón *et al.*. En analysant plus en détail les déviations des expériences par rapport au modèle, nous discutons de deux de ses hypothèses : l'indépendance du coefficient de frottement avec la charge normale et l'approximation des petits angles. Dans une deuxième section, nous introduisons une nouvelle résolution discrète des équations dynamiques du modèle de Alarcón *et al.* sans passer par une hypothèse de continuité de la force au sein de l'assemblage. Nous comparons ensuite les deux modèles et discutons de l'impact du changement de modèle sur les paramètres d'ajustement.

Un court chapitre conclut cette partie en présentant les perspectives.

La deuxième partie de cette thèse s'intéresse à un autre type d'assemblage d'objets élançés : les faisceaux de fibres. Nous nous intéressons plus spécifiquement à la compression axiale de ces objets. Cette partie est composée de quatre chapitres.

Le **premier chapitre** de cette partie décrit le contexte général de l'étude des assemblées de poutres et introduit le lien avec le modèle expérimental que l'on a employé, les pinceaux. Nous donnons ensuite une vision succincte du domaine de la physique de l'art auquel notre objet d'étude nous a conduit à nous intéresser.

Le **deuxième chapitre** présente les résultats de l'étude de la mécanique des assemblages de fibres en se concentrant sur les grandes déformations. Nous commençons par discuter brièvement l'aspect général des courbes de force et par définir et discuter différents domaines de sollicitation des assemblages. Nous proposons ensuite une interprétation dimensionnelle pour l'évolution de la force aux grandes déformations, en nous appuyant sur les résultats obtenus pour des longueurs et des nombres de fibres variables. Puis, à l'aide d'une mesure de la taille du contact, nous proposons une interprétation théorique des résultats obtenus en modélisant le système par un ensemble de poutres sans interactions respectant l'équation de l'élastica linéarisée. Enfin, nous comparons les résultats obtenus avec des simulations en éléments finis pour une poutre unique et nous discutons de l'effet de la force de frottement et des contacts entre les fibres.

Dans le **troisième chapitre**, nous avons étudié les pinceaux dans le contexte de leur utilisation par des artistes. Nous montrons d'abord que les dimensions des pinceaux d'art respectent une loi d'échelle reliant l'aire de leur section et leur longueur. Nous proposons ensuite un modèle de la raideur d'une assemblée de poutres sans interactions et nous montrons que les dimensions observées pour les pinceaux conduiraient selon ce modèle à une raideur identique pour tous. Nous présentons ensuite une méthode de mesure de la raideur des pinceaux telle qu'elle peut être ressentie par un utilisateur et nous discutons de l'impact de l'angle d'inclinaison de l'objet.

Dans le **quatrième chapitre** de cette partie, nous étudions des assemblées de fibres lubrifiées compressées contre une surface et cherchons à modéliser le geste du peintre. Nous discutons d'abord brièvement de l'effet de la lubrification sur les courbes de force, puis nous nous intéressons au dépôt de peinture sur une surface. Nous étudions le lien entre la force appliquée et la dimension et la forme des tâches. Nous discutons finalement l'effet de la rhéologie de la peinture et de l'angle d'inclinaison du pinceau.

Une annexe présente une analyse des fluctuations des courbes de force mesurées sur les systèmes de la première partie et propose des résultats préliminaires sur les distributions de leur amplitude.

Chapitre 1

Quelques éléments théoriques utiles

Sommaire

A	Élasticité linéaire	9
1	Loi de Hooke	9
2	Mécanique des structures élancées	10
	a Contexte	10
	b Formalisation du problème	11
3	Intégration de l'équation de l'élastica linéarisée dans le cas d'une force ponctuelle	13
B	Frottement sec et contact solide	14
1	Contexte général et histoire de la tribologie	14
2	Frottement statique, frottement dynamique et formalisation des lois d'Amontons-Coulomb [1]	14
3	Modèles microscopiques du frottement	16
	a Modèle de Bowden et Tabor [11] : μ ne dépend pas de F_N	16
	b Modèle des aspérités sphériques [11]	16
	c Modèle de Greenwood-Williamson [21]	17
	d Effet d'une force supplémentaire ne dépendant pas de l'aire de contact, frottement apparent	17
C	Conclusion	18

Dans ce chapitre introductif, nous présentons quelques éléments théoriques d'élasticité linéaire et de tribologie. Nous détaillons plusieurs aspects de la théorie des poutres et nous rappelons en particulier la résolution de l'équation de l'élastica linéarisée d'une poutre soumise à une contrainte ponctuelle. Nous introduisons les concepts à la base de la formalisation du phénomène de frottement et discutons plusieurs de ses modèles microscopiques.

A Élasticité linéaire

1 Loi de Hooke

La loi de Hooke, exprimée en 1660 grâce aux travaux sur les ressorts du physicien Robert Hooke, décrit le comportement d'un milieu continu élastique soumis à une contrainte mécanique.

En 1680, Mariotte redécouvre indépendamment cette même loi et l'applique aux expériences de Galilée sur les poutres droites. Pour l'exprimer, on définit ε , l'allongement relatif d'un élément, comme le rapport de son allongement par rapport à sa longueur initiale, dans une direction donnée. La contrainte σ est le rapport de la force s'exerçant sur l'élément dans cette direction, divisée par l'aire de sa section. On peut alors écrire :

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1.1}$$

où E est une grandeur caractéristique du matériau que l'on appelle le module de Young, du nom de Thomas Young qui a introduit cette grandeur en 1807. Elle a la dimension d'une pression et elle représente la capacité du matériau à résister à la compression et à la traction tout en revenant à ses dimensions initiales.

Dans le cas de contraintes s'exerçant dans plusieurs directions à la fois et donc d'un élément se déformant selon plusieurs directions, on va définir plutôt les tenseurs de dimension 3 des contraintes et des déformations. On pourra exprimer la relation entre les deux par la loi de Hooke généralisée qui ne sera pas abordée ici.

La loi de Hooke définit le régime élastique linéaire, car elle exprime une relation de proportionnalité entre la contrainte et la déformation. Dans le régime élastique, linéaire ou non, quand la contrainte appliquée sur le solide est relâchée, celui-ci retrouve ses dimensions et sa forme initiale. Ce cas particulier de la mécanique des milieux continus ne décrit bien sûr pas tous les régimes de déformation des solides, et entre autres, elle se distingue de tous les cas où l'on observe des déformations plastiques. Dans cette thèse, nous nous intéresserons exclusivement aux déformations élastiques des systèmes que nous étudierons.

2 Mécanique des structures élancées

a Contexte

Parmi l'infinie variété des solides déformables, les structures élancées sont définies par le fait que leurs trois dimensions ne sont pas du même ordre de grandeur. Cette caractéristique va permettre de négliger les déformations dirigées selon une ou deux dimensions, et donc de travailler avec des modèles mécaniques simplifiés.

Il existe deux types de structures élancées : les plaques, dont l'épaisseur est petite devant leur longueur et leur largeur, et les poutres, dont les deux dimensions caractérisant la section sont petites devant leur longueur. Dans cette thèse, nous avons été amenés à étudier ces deux types d'objets, à travers des feuillets dans la partie I et les fibres dans la partie II.

Cependant, les plaques que l'on a étudiées, du fait de leur superposition, n'étaient libres de se déformer que selon une seule direction et leur déformation était donc invariante selon la direction de leur largeur. Par conséquent, leur comportement est semblable à celui d'une poutre déformée dans un plan. Ainsi, les éléments théoriques présentés dans cette partie se concentreront sur des modélisations de poutres se déformant dans un plan.

Ces objets dont la géométrie est simple constituent les éléments de base de nombreuses structures beaucoup plus complexes, depuis la Tour Eiffel jusqu'aux capsules protégeant les graines des plantes [4], de sorte que ces problèmes très anciens, déjà formulés par Galilée, sont toujours étudiés actuellement.

Les deux théories principales des poutres en élasticité linéaire sont la théorie de Timoshenko, développée au début du XX^{ème} siècle, et la théorie d'Euler-Bernoulli, dont les premières formalisations remontent à 1750. La différence fondamentale entre ces deux modélisations des poutres est que Timoshenko prend en compte le cisaillement, ce qui revient à ne pas respecter les hypothèses d'Euler et Bernoulli sur la non-déformation des sections transverses de la poutre. Nous

allons présenter ici la théorie d'Euler-Bernoulli décrivant la déformation dans un plan d'une poutre soumise à des forces extérieures de résultante K .

b Formalisation du problème

On considère une poutre mince et cylindrique dont la position est repérée dans le plan (x, y) . On note x la coordonnée dans la direction longitudinale de la poutre et y dans la direction normale. On repère par w le déplacement selon y du plan médian de la poutre par rapport à sa position au repos. On définit également, à l'échelle d'une section de la poutre, l'allongement $u(x, y)$ d'un petit élément de la poutre dans la direction du plan médian. On pose alors les

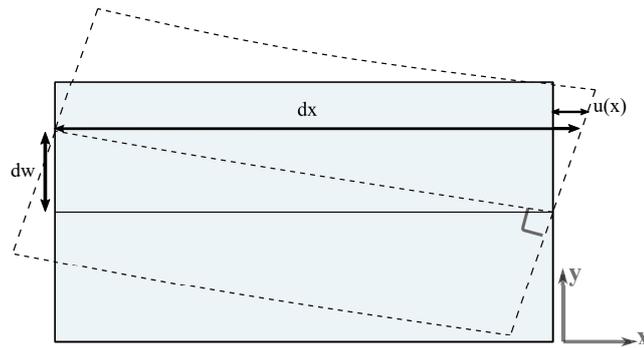


FIGURE 1.1 – **Représentation d'un petit élément de poutre.** Les grandeurs sont définies dans le corps du texte. w , qui n'est pas représenté ici, est le décalage (selon l'axe y) entre la position de l'élément de la poutre quand celle-ci est au repos et entre la position représentée.

hypothèses de Kirchoff sur la déformation des sections de la poutres :

- La déformation de la poutre ne déforme pas les sections normales,
- Le diamètre des sections n'est pas modifié,
- Les sections restent perpendiculaires au plan médian.

Ces hypothèses impliquent que $u(x, y)$ doit dépendre linéairement de y (car les sections restent droites) *via* un coefficient de proportionnalité α dépendant de x mais pas de y ($\alpha(x)$ représente donc l'angle fait par la section située en x avec l'axe y). On peut donc écrire :

$$u(x, y) = \alpha(x)y \quad (1.2)$$

On définit ensuite la déformation de l'élément par :

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (1.3)$$

Ce qui donne, en utilisant l'expression de l'allongement 1.2 et en supposant que α est petit :

$$\alpha = -\frac{dw}{dx} \quad (1.4)$$

Cette hypothèse, qui revient à considérer des petites déformations, est cruciale, car elle va permettre de s'affranchir de l'angle α .

On définit ensuite, au sein du petit élément de poutre, le moment M résultant des forces internes

à la poutre ainsi que la résultante V s'exerçant sur une section S de l'élément de poutre. À l'équilibre mécanique, on peut alors écrire pour le moment et la force résultante :

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dx} &= V \\ \frac{dV}{dx} &= -K\end{aligned}$$

où K est la résultante de toutes les forces extérieures. Ces lois sont appelées les équations de Kirchoff pour les cordes. En dérivant la première expression par rapport à x et en utilisant la définition du moment résultant en fonction de la contrainte, ainsi que la relation contrainte-déformation il vient :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E \iint_S y \varepsilon(x, y) dy dz \right) = -K \quad (1.5)$$

Où ε est la déformation du petit élément de poutre, et où on a considéré que la poutre est homogène donc que le module de Young E ne dépend ni de y ni de z . On définit alors le module d'inertie I tel que :

$$I = \iint_S y^2 dy dz \quad (1.6)$$

ce qui permet de simplifier 1.5 en :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d\alpha}{dx} \right) = -K \quad (1.7)$$

En reprenant alors l'équation 1.4 qui permet de lier α et le déplacement w de la ligne médiane, on obtient :

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -K \quad (1.8)$$

Où le produit EI , aussi appelé rigidité de flexion, est considéré indépendant de x .

Cette expression est un cas particulier de la théorie des poutres de Timoshenko, que l'on désigne comme l'équation d'Euler-Bernoulli. Celle-ci peut également être retrouvée à partir d'une méthode variationnelle. C'est une version simplifiée de l'équation de l'élastica, que l'on va adopter pour la suite de ce travail en se fondant sur des lois d'échelle.

L'équation de l'élastica, qui est également obtenue à partir des lois de Kirchoff, mais sans l'hypothèse des petits angles, est de la forme :

$$EI \frac{d^2 \alpha}{ds^2} = -f_x \cos \alpha - f_y \sin \alpha \quad (1.9)$$

Avec s désignant la coordonnée curviligne adimensionnée (égale à 0 à l'extrémité encastree de la poutre, et à 1 à l'extrémité libre), et les deux paramètres f_x et f_y dépendent des contraintes appliquées à l'extrémité non encastree de la poutre dans les directions x et y [5].

Si on considère que la poutre décrit un arc simple, dans le sens où il n'existe pas de point où $\frac{dy}{dx} = 0$, et que l'on néglige toutes les forces extérieures ne s'appliquant pas à l'extrémité libre de la fibre, on peut exprimer la position (X, Y) de l'extrémité libre de la poutre par [5] :

$$\int_0^1 \sin(\alpha(s)) ds = -X \quad (1.10)$$

$$1 - \int_0^1 \cos(\alpha(s)) ds = Y \quad (1.11)$$

$$(1.12)$$

La résolution de ces deux équations fait appel aux fonctions elliptiques de Jacobi et permet de décrire le profil de la poutre. La résolution de ces équations nécessite néanmoins, comme on l'a dit plus haut, de connaître les deux composantes de la force s'exerçant à l'extrémité non-encastree. Dans les expériences de cette thèse, nous n'aurons jamais accès à ces deux grandeurs, du fait de la multiplicité des objets composant les assemblages étudiés¹.

Pour cette raison, nous avons choisi de ne pas faire une résolution analytique de ces équations et nous allons développer par la suite un raisonnement fondé sur des lois d'échelle à partir de l'équation 1.8.

3 Intégration de l'équation de l'élastica linéarisée dans le cas d'une force ponctuelle

L'équation 1.8, quand K est une force ponctuelle et s'exerçant perpendiculairement à la fibre en x_0 est facile à intégrer [7].

Dans le cas d'une force ponctuelle F s'exerçant perpendiculairement à la poutre au point x_0 , on peut écrire :

$$K = \delta(x - x_0)F \quad (1.13)$$

Où δ est la fonction de Dirac, qui s'annule partout sauf en $x = x_0$. Les conditions aux limites du problème d'une poutre encastree libre seront alors,

$$\begin{aligned} y(x=0) &= 0 \\ \frac{dy}{dx}(x=0) &= 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2}(x=L) &= 0 \\ \frac{d^3y}{dx^3}(x=L) &= 0 \end{aligned}$$

Les deux premières équations décrivent l'encastrement. Le rayon de courbure de la poutre étant décrit par $1/(\frac{d^2y}{dx^2})$, les deux dernières équations expriment le fait que ce rayon de courbure et sa dérivée sont nuls en $x = L$. Avec ces conditions, l'intégration donne alors :

$$F(x, y) = 3EI \frac{y}{x^3} \quad (1.14)$$

Cette expression simple de la force F correspond à un cas très simplifié de l'élastica linéarisée, et où on connaît la direction de F . Cette solution sera utilisée dans la suite de ce travail en identifiant, en fonction de la situation, les grandeurs comparables à y et x .

1. Et à l'inverse, la position (X, Y) de l'extrémité de la poutre permet de prédire la valeur de la force qui s'y exerce, mais les systèmes que nous étudions étant composés d'une multitude d'objets élanés il faudrait définir et mesurer cette position pour chacun des sous-éléments du système. Dans [6], Sano *et al.* résout l'équation linéarisée de l'élastica dans le cas d'une poutre dont une extrémité est encastree et dont l'autre extrémité peut glisser contre une surface frottante. L'interaction complexe entre la géométrie de la poutre et en particulier son angle de contact θ avec la surface et la direction de la force de frottement nécessite à nouveau d'avoir accès à un paramètre que nous ne pouvons pas mesurer, θ , mais fournit des informations très intéressantes sur le comportement d'une poutre frottante dans le cadre des petites déformations. Nous reviendrons sur ce sujet dans la partie I.

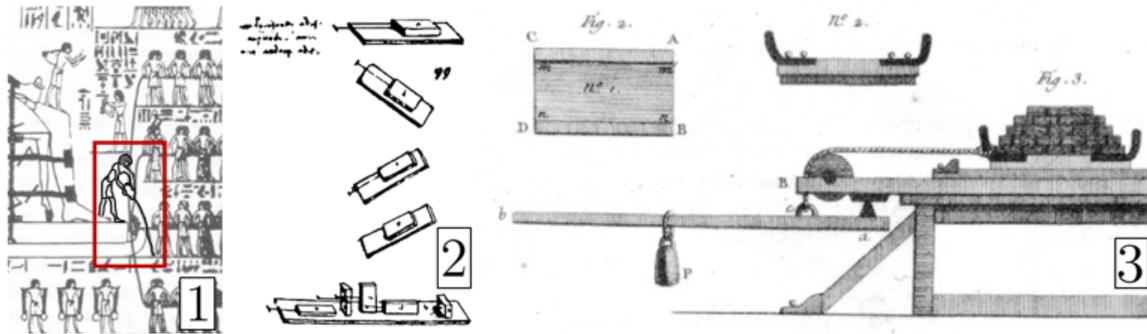


FIGURE 1.2 – Différentes étapes de l'histoire de la tribologie (1) Détail d'un bas relief égyptien de 1880 av. J.-C. montrant un homme versant un liquide sur un chemin en bois pour faciliter le transport d'une statue. (2) Schémas de Léonard de Vinci pour étudier le frottement. (3) Dispositifs de Coulomb.

B Frottement sec et contact solide

1 Contexte général et histoire de la tribologie

Le frottement est une question qui concerne à la fois la vie courante, l'ingénierie et la science fondamentale. Les premiers signes d'étude de la tribologie remontent à plus de 2400 ans avant J.-C., avec l'utilisation de la lubrification par les égyptiens [8] pour déplacer des charges lourdes, dont on retrouve la trace sur des bas-reliefs (voir figure 1.2). En 1508, 3000 ans plus tard, Léonard de Vinci publie deux énoncés déduits de ses expériences : la force de frottement est proportionnelle à la charge et elle ne dépend pas de l'aire de la surface de contact. Par la suite, les découvertes sur le frottement se multiplient au XVII^{ème} siècle, avec les contributions successives de Hooke sur le « frottement de roulement » qu'il attribue à l'élasticité et qu'il distingue du « frottement de glissement » puis d'Amontons qui découvre l'absence d'influence de la vitesse sur le coefficient de frottement. La formalisation moderne des lois du frottement est finalement exprimées par Coulomb en 1781, qui définit en premier le coefficient de frottement, au début de la révolution industrielle [9,10].

La loi étonnamment générale de l'indépendance du coefficient de frottement avec la charge normale reste longtemps incomprise, jusqu'à la publication du modèle de Bowden et Tabor en 1950 [11]. La théorie géométrique des aspérités enchevêtrées est remplacée par un modèle introduisant la notion d'aire réelle de contact, qui est proportionnelle à la charge.

La tribologie moderne utilise encore les lois d'Amontons-Coulomb mais s'intéresse beaucoup plus en détail à la surface de contact entre deux solides [12], aux aspérités [13], à la lubrification et à l'usure. Ces développements sont permis par l'apparition de techniques expérimentales modernes comme notamment le microscope à force atomique et à la machine de force de surface. Ces dernières années, la science du frottement a fait des avancées nouvelles dans les domaines de la surperlubricité [14], de la biotribologie [15] du frottement à haute température [16], et de la tribologie computationnelle [17].

2 Frottement statique, frottement dynamique et formalisation des lois d'Amontons-Coulomb [1]

Quand un solide S_1 est en contact avec un autre solide S_2 , il est soumis à des actions de contact qui peuvent être très variées, et que l'on représente par la résultante \vec{R} des forces de contact que le solide S_2 exerce sur le solide S_1 . La force \vec{R} est toujours dirigée vers l'intérieur de S_1

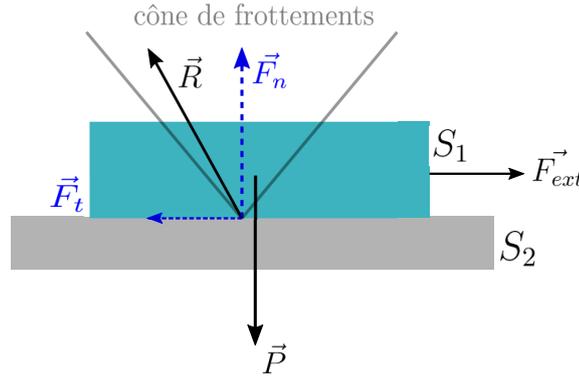


FIGURE 1.3 – **Frottement statique.** Un solide S_1 sur lequel un utilisateur exerce une force extérieure \vec{F}_{ext} est en contact avec une surface S_2 . On note \vec{R} la résultante des actions de surfaces exercées par S_2 sur S_1 , qui se décompose en une force normale \vec{F}_n et une force tangentielle \vec{F}_t . \vec{P} est le poids du solide S_1 . On représente le cône de frottement dont la surface est définie par l'angle maximal que \vec{R} peut prendre tant que le solide est immobile.

(voir Fig. 1.3). On décompose la résultante \vec{R} en deux forces, \vec{F}_n et \vec{F}_t se situant respectivement sur la normale à l'interface et sur le plan tangent aux surfaces en contact.

$$\vec{R} = \vec{F}_n + \vec{F}_t$$

On appelle la composante \vec{F}_t de la résultante des forces de contact la force de frottement.

Ce phénomène de frottement est en réalité décomposable en deux phénomènes distincts : le frottement statique, qui se produit quand la vitesse relative de S_1 par rapport à S_2 , que l'on appelle la vitesse de glissement $v_{\vec{G}}$, est nulle ; et le frottement dynamique, quand ce n'est pas le cas.

Dans le cas du frottement dynamique (ou cinétique), la force \vec{F}_t est toujours dirigée dans le sens opposé à la $v_{\vec{G}}$ et on définit le coefficient de frottement cinétique μ_c comme le rapport entre la force tangentielle et la force normale :

$$\mu_c = F_t/F_n$$

Quand $v_{\vec{G}} = 0$, les composantes tangentielles et normales de la résultante des actions de contact satisfont l'égalité d'Amontons-Coulomb :

$$F_t \leq \mu_s F_n$$

où μ_s est appelé le coefficient de frottement statique.

Quand on exerce une force extérieure croissante sur le solide S_1 , la force de frottement *statique* croît, jusqu'à atteindre une valeur maximale à laquelle le mouvement se déclenche, et qui correspond à une valeur et un angle donné de \vec{R} avec la normale à la surface². À cet instant, on pourra exprimer le coefficient de frottement statique par :

$$\mu_s = F_t/F_n$$

2. Le sens des forces de frottements statiques ne peut pas être défini *a priori*, car la vitesse de glissement est nulle. C'est pour cette raison que l'on parle de « cône de frottement » (et non de « droite de frottement »). Cependant, la résultante de toutes les autres forces s'exerçant sur S_1 peut permettre de déduire la direction de \vec{F}_t , qui est celle s'opposant à un mouvement *éventuel*. C'est le cas par exemple pour un objet immobile sur un plan incliné.

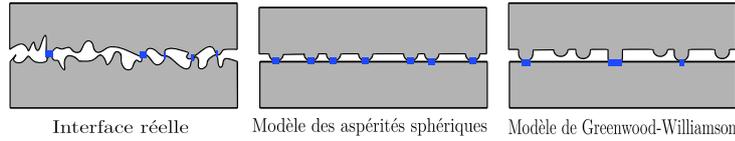


FIGURE 1.4 – **Modèles microscopiques de surfaces.** (Gauche) Schéma d’une interface réelle. Les deux surfaces en contact présentent des aspérités de hauteur et de forme variable. On représente en bleu les zones de contact entre ces aspérités. (Centre) Représentation du modèle des aspérités sphériques. La surface supérieure est composée de demi-sphères de rayon constant et dont l’écartement varie. (Droite) Représentation du modèle de Greenwood-Williamson. La surface supérieure a une interface composée de demi-sphères dont la hauteur est distribuée selon une gaussienne.

On donne en général $\mu_C \leq \mu_s$.

Pour la suite de ce travail, on ne n’emploiera que la notation μ pour le coefficient de frottement et elle désignera le coefficient de frottement cinétique.

3 Modèles microscopiques du frottement

a Modèle de Bowden et Tabor [11] : μ ne dépend pas de F_N

Le premier modèle microscopique des lois d’Amontons-Coulomb a été conçu par Bowden et Tabor. Il se fonde sur l’idée qu’un objet présente des aspérités à sa surface. Par conséquent, si deux objets sont en apparence en contact, ce sont en fait leurs aspérités qui se touchent. L’aire réelle A_r de contact entre leurs aspérités est donc inférieure à l’aire A_0 du contact apparent entre les objets. En faisant l’hypothèse que les aspérités se déforment plastiquement, ils en déduisent que la contrainte normale locale p au niveau de deux aspérités en contact dépasse la limite élastique du matériau et sature à une valeur caractéristique qui est la dureté.

Avec l’hypothèse que la pression au niveau des aspérités est constante et uniquement définie par la dureté du matériau (que l’on définit comme la force que la surface de ce matériau oppose à la pénétration d’un poinçon), la force normale est proportionnelle à A_r et à la contrainte normale locale :

$$F_n = pA_r \quad (1.15)$$

La résistance au glissement est alors due à la rupture de l’interface entre les aspérités, lesquelles sont liées par la force d’adhésion. Celle-ci étant proportionnelle à l’aire de contact, il vient que la force de frottement F_t est elle-même proportionnelle à l’aire réelle de contact A_r via la contrainte de cisaillement τ

$$F_t = F_{adh} = \tau A_r \quad (1.16)$$

De sorte que le coefficient de frottement μ , qui est le rapport entre ces deux forces est indépendant de l’aire de contact : on retrouve la loi d’Amontons-Coulomb.

$$\mu = \frac{F_t}{F_n} = \frac{\tau}{p}$$

La constance du rapport τ/p n’est cependant pas toujours vérifiée, en particulier dans le cas des polymères [18].

b Modèle des aspérités sphériques [11]

Considérons une autre de ces limites : le cas où les aspérités restent dans leur domaine élastique. On considère le cas idéal de n aspérités sans couplage, qui sont modélisées par n

demi-sphères reliées à un plan. On se retrouve dans le cadre de plusieurs contacts de Hertz [19]. Dans ce cas, le rayon de contact a de chaque aspérité avec le plan est relié à l'indentation δ et au rayon R_{asp} des sphères de sorte que :

$$a^2 = \delta R_{asp} = \left(\frac{F_n R_{asp}}{2nE} \right)^{2/3} \quad (1.17)$$

où E est le module de Young du matériau et F_n/n la force normale s'exerçant sur un seul contact. On obtient alors :

$$A_r = n\pi a^2 \propto F_n^{2/3}$$

En considérant que la force de frottement F_t est toujours définie comme la contrainte de cisaillement par $F_t = \tau A_r$, on obtient cette fois-ci un coefficient de frottement qui va dépendre de la force normale :

$$\mu = F_t/F_n \propto \frac{\tau F_n^{2/3}}{F_n} \propto F_n^{-1/3} \quad (1.18)$$

Cette dépendance en loi de puissance implique donc une forte sensibilité de μ à la force normale. Un modèle plus général et phénoménologique en $\mu \propto F_n^{-b}$, où b est un réel positif a été proposé par Rabinowicz [20].

c Modèle de Greenwood-Williamson [21]

Le modèle présenté au-dessus considérait des aspérités modélisées par des demi-sphères de rayon identique et situées sur à la même hauteur. Greenwood et Williamson ont proposé une version plus complexe de cette idée, introduisant un aspect statistique dans la répartition de la hauteur des contacts. Ils considèrent toujours des sphères, mais leur centre ne se situe pas à la même hauteur.

En prenant l'hypothèse que la distribution de la hauteur de ces aspérités est gaussienne et d'écart-type σ , ils calculent le nombre d'aspérités en contact avec un plan si celui-ci est situé à une distance d donnée du plan moyen de la surface. Pour $\sigma < d$, leur modèle conduit une aire moyenne réelle de contact qui dépend linéairement de la force normale :

$$A_r \propto \frac{F_n R_{asp}^{1/2}}{s}$$

De sorte que le coefficient de frottement est indépendant de la charge normale :

$$\mu = F_t/F_n \propto \frac{\tau F_n R_{asp}^{1/2}}{F_n \sigma} \propto \frac{\tau R_{asp}^{1/2}}{\sigma}$$

Ils retrouvent alors à nouveau l'indépendance de μ avec la charge normale, telle qu'elle est empiriquement décrite par les lois de Coulomb. ce modèle a ensuite raffiné, en particulier par B. Persson pour prendre en compte le caractère fractal des surfaces [22].

d Effet d'une force supplémentaire ne dépendant pas de l'aire de contact, frottement apparent

Les modèles présentés jusqu'ici considèrent que la force de frottement est uniquement due à la rupture des interfaces solides au niveau des aspérités des deux objets en contact. Plusieurs autres modèles, que l'on ne décrira pas ici, prennent en compte la contribution de la déformation plastique des aspérités sur la force de frottement, c'est-à-dire qu'ils proposent d'autres relations que l'équation 1.16 pour le lien entre l'aire de contact réelle et la force tangentielle. C'est le

cas par exemple du modèle plastique de Tabor ou du modèle du poinçon (qui considère que le déplacement d'une aspérité contre une surface, génère un écoulement plastique en la « labourant » [18]).

Sans rentrer dans les détails de ces modèles, on peut s'interroger sur l'influence d'une force s'opposant ou favorisant la rupture des micro-contacts entre les aspérités, et qui ne soit pas l'adhésion, c'est-à-dire qui ne soit pas l'effet des forces de Van der Waals sur les zones de contact entre S_1 et S_2 .

Plus spécifiquement, considérons une force normale f s'exerçant à l'interface, qui ne dépend pas de l'aire réelle de contact et qui attire les surfaces l'une contre l'autre. Un bon exemple dans notre cas est celui de la force qu'exerceraient des ponts capillaires se formant ou non entre deux aspérités en fonction de l'humidité ambiante³. C'est cette force en particulier qui nous intéresse, mais les considérations que l'on va introduire ici pourraient s'appliquer à toute autre force qui ne dépendrait pas de l'aire réelle de contact et de la force normale. Le cas de la création de ponts capillaires entre deux surfaces et son effet sur le coefficient de frottement a été étudiés sur des matériaux variés par J. Crassous *et al.* [23].

On distingue la force normale F_n exercée par un objet contre une surface, et qui génère l'adhésion entre les contacts comme décrit par les modèles de Bowden et Tabor, et une autre force F_a , d'une origine différente, mais qui ne dépend pas de la force normale, et donc pas non plus de l'aire de contact réelle, puisque $F_n = pA_r$. On définit alors un coefficient de frottement apparent μ_0 qui correspond au rapport de la force tangentielle sur la force normale obtenue expérimentalement. On peut alors écrire :

$$F_t = \mu_0(F_n + F_a)$$

$$F_t/F_n = \mu_0 \left(1 + \frac{F_a}{F_n} \right)$$

et en définissant $\mu = F_t/F_n$ le coefficient de frottement réel et local, qui est celui défini par Coulomb :

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{F_a}{F_n} \right)$$

De sorte que le coefficient de frottement que l'on définit par les lois de Coulomb dépendra alors de la force normale F_n et décroît avec elle. Dans le cas qui nous intéresse ici, le frottement papier-papier, deux forces au moins peuvent jouer le rôle de F_a : la force capillaire, comme montré par [23] et la force électrostatique. En effet, surtout dans les environnements très secs, le papier peut se charger électriquement à sa surface, et ainsi adhérer à d'autres matériaux (comme par exemple de l'ambre) mais aussi à du papier lui-même. Le collage des feuilles de papier par électricité statique est d'ailleurs un problème bien connu de l'industrie de l'imprimerie [24], car l'adhésion de deux feuilles pose des problèmes pour le passage dans les machines.

C Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé les concepts fondamentaux de l'élasticité linéaire et du frottement sec. Dans la première section, nous avons résolu l'équation linéarisée d'Euler pour les poutres, pour un ensemble de conditions aux limites données que nous avons discutées.

3. On ne parle pas ici de lubrification, dans le sens où on ne considère pas que l'espace entre les surfaces puisse être rempli par le fluide de sorte que le coefficient de frottement diminuerait, ni que celui-ci exerce une pression contre les interfaces quand celles-ci sont mises en contact.

La deuxième section de ce chapitre a exposé les lois d'Amontons-Coulomb du frottement sec. Puis, nous avons présenté plusieurs modèles microscopiques du frottement et nous avons discuté de leur accord avec les lois macroscopiques.

Première partie

La chasse au papillon - Auto-amplification dans un assemblage de plaques entremêlées

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

A	Contexte	23
1	La séparation des annuaires, ou le treizième travail d'Hercule	23
2	Le travail de H. Alarcón <i>et al.</i> sur les assemblages de feuilles entremêlés [2, 3]	24
3	Objectifs du travail présenté dans cette partie	27
B	Matériel et méthodes	28
1	Le papier	28
	a Du papyrus aux ramettes de papier	28
	b Caractérisation du papier utilisé pour notre travail	29
2	Dispositif expérimental	30
	a Machine de force de traction	30
	b Fabrication des assemblages de feuilles	31
3	Modification du dispositif expérimental pour l'ajout d'une force extérieure normale	32
4	Mesure du coefficient de frottement	32
C	Conclusion	33

Dans ce chapitre introductif, nous présentons le contexte et l'état de l'art de l'étude du système des plaques entremêlées qui fait l'objet de la partie I. Nous détaillons le dispositif expérimental qui sera employé ainsi que les propriétés de notre matériau, le papier.

A Contexte

1 La séparation des annuaires, ou le treizième travail d'Hercule

L'idée de l'étude que nous allons présenter dans cette partie provient d'une expérience bien connue qui consiste à intercaler les feuilles d'un gros livre, généralement un annuaire, entre les feuilles d'un second livre identique et de montrer qu'il est impossible de les séparer à mains nues si on les tire par leur reliure.

De 2008 à 2015, plusieurs programmes grand public ont contribué à rendre cette expérience célèbre à grands renforts de tentatives sensationnelles d'exercer une force suffisante pour séparer l'assemblage. L'émission américano-australienne *Mythbuster*, lors de son épisode du 10 septembre

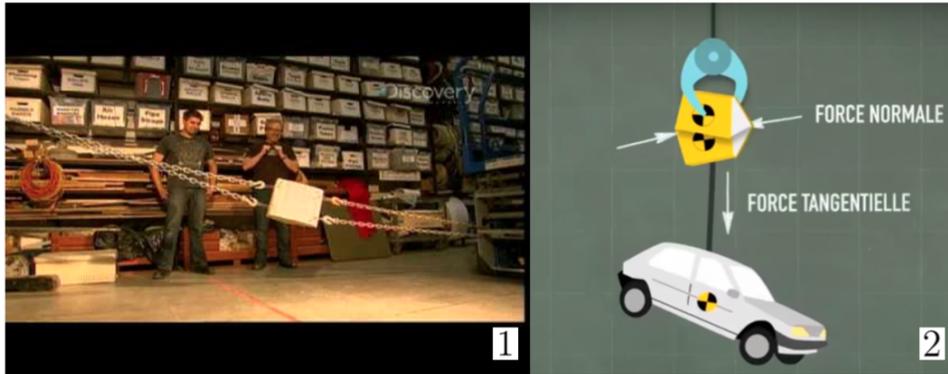


FIGURE 1.1 – L'expérience des annuaires dans la culture populaire. (1) Image de l'émission *Mythbusters* sur Discovery channel. Les annuaires sont fixés par des mors à des chaînes qui seront reliées par la suite à deux tanks militaires roulant dans des directions opposées. (2) Schéma de l'expérience consistant à soulever une voiture réalisée par l'émission *On est pas que des cobayes!* sur France 5 et présenté dans cette même émission.

2008 [25], a attaché les deux annuaires à des tanks militaires avançant dans des directions opposées, sans parvenir à les séparer (voir les extraits présentés à la figure 1.1). Wayne Houchin a réalisé en 2013 un saut à l'élastique où l'élastique était relié à deux annuaires [26], sans qu'un accident ne soit à déplorer. En France, l'émission *On n'est pas que des cobayes!* est parvenue à soulever une Peugeot 205 avec une grue et deux annuaires en 2015 [27], montrant comme lors du saut à l'élastique que l'expérience était tout aussi spectaculaire verticalement.

Pourtant, malgré ces nombreuses démonstrations étonnantes, le phénomène de la résistance de deux annuaires entremêlés n'était pas expliqué et les commentateurs de ces émissions se bornaient à énoncer des généralités sur le frottement, ou à avancer des argumentaires facilement démontables. Le travail de H. Alarcón *et al.*, que nous allons présenter dans la section suivante, a montré cependant que l'explication de ce phénomène n'avait rien de trivial et nécessitait de se pencher sur la géométrie du système.

2 Le travail de H. Alarcón *et al.* sur les assemblages de feuilles entremêlés [2, 3]

Revenons tout d'abord sur les modèles ou les explications que l'on pouvait trouver dans la littérature. L'une des théories avancées était que, puisque le frottement est proportionnel à la charge, on obtient une force de frottement importante car on a un grand nombre de feuilles, donc une charge importante qui s'exerce sur elles. Cette explication était problématique de deux points de vue :

- Un annuaire typique comporte environ 1000 feuilles et pèse 1 kilogramme. Le coefficient de frottement du papier utilisé pour les annuaires est de l'ordre de 0,2 pour une charge de 1 kilogramme. Si l'on considère, très grossièrement, que l'assemblage des deux annuaires est équivalent à 2000 interfaces papier-papier sur lesquelles reposent une charge de 1 kg, on obtient une force de frottement de l'ordre 4000 N, qu'il faut donc excéder pour séparer les livres. Cette force, quoique conséquente, est très inférieure au poids d'un tank qui est de l'ordre de 35 000 N, et donc *a fortiori* de la force à exercer horizontalement pour déplacer un tank dont les roues seraient bloquées, et plus encore pour déplacer un tank en mouvement dans la direction opposée, que l'on ne se risquera pas à estimer. Par ailleurs, comme on l'a décrit plus haut, l'expérience « fonctionne » aussi verticalement, de sorte que l'on est capable de soulever une voiture (dont le poids est de l'ordre de 7000 N), alors

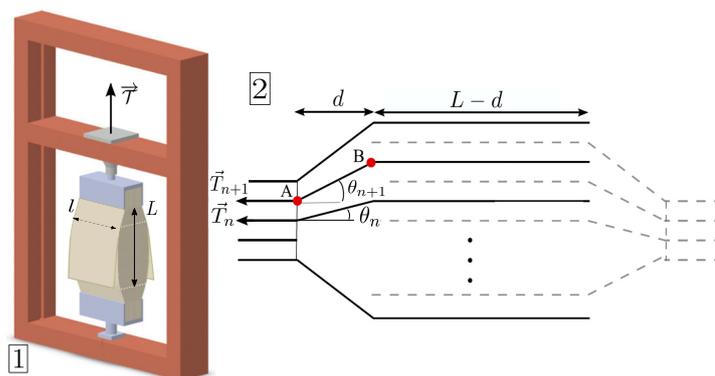


FIGURE 1.2 – Montage et dispositif expérimental pour l'expérience des annuaires de H. Alarcón *et al.* (1) Deux livres sont entremêlés feuille par feuille, fixés dans des mors, et installés dans une machine de traction exerçant une force verticale \vec{T} dirigée vers le haut, à une vitesse constante v . (2) Vue détaillée de l'assemblage. La distance d est la distance de séparation entre les deux livres, elle augmente au cours de l'expérience, avec le déplacement du mors supérieur. La feuille n fait un angle θ_n avec l'horizontale, et est soumise à une force de traction horizontale ou tangentielle \vec{T}_n . Figure reprise et adaptée de Alarcón *et al.*

que la charge est cette fois-ci négligeable, puisqu'il ne faudrait prendre en compte que la composante du poids s'exerçant dans la direction normale aux feuilles.

- De plus, si on arrache une feuille sur deux dans chacun des annuaires, il devient très facile de les séparer à mains nues, alors que, selon ce modèle, cela devrait être seulement deux fois plus facile.

Il est donc nécessaire de prendre en compte des considérations de mécanique plus complexes. Un autre mécanisme supposé était que beaucoup de pages signifie une grande aire de contact. Mais nous avons vu que le coefficient de frottement est indépendant de l'aire de contact et cette explication ne pouvait donc être satisfaisante.

Pour obtenir une réponse définitive Alarcón *et al.* [2] ont mené des expériences systématiques avec des modèles d'annuaires. En fixant dans une machine de traction deux livres composés chacun de $2M$ feuilles, fixés dans des mors et intercalés (voir Fig. 1.2), ils ont montré que la force très minime exercée par la dernière feuille est auto-amplifiée par l'assemblage du fait de l'angle entre les feuilles, et que cette amplification génère une charge très importante au centre des annuaires, qui explique la résistance du tout.

Plus précisément, pour chaque feuille, l'angle θ_n convertit une partie de la traction locale T_n exercée par l'opérateur en une force normale locale supplémentaire qui s'exerce en B et est dirigée vers le centre de l'assemblage. De cette force supplémentaire découle une force tangentielle de frottement.

Cette dernière est convertie à son tour, *via* l'angle θ_{n+1} , en une force normale plus importante et ainsi de suite, de sorte que la petite force tangentielle T^* exercée par la feuille extérieure sur la feuille juste en-dessous est auto-amplifiée par l'assemblage¹.

Pour obtenir une description plus précise de la force T , Alarcón *et al.* définissent la gran-

1. Ce phénomène d'amplification de la force tangentielle du fait du frottement sur une surface courbée ressemble à l'amplification de la force que l'on observe par exemple quand une corde frotte contre un cabestan de marine. Du fait de la courbure de la surface de contact entre la corde et le cabestan, une partie de la force exercée dans la direction tangentielle à la corde est convertie en une force de compression de la corde contre la surface, qui augmente alors la force de frottement, du fait des lois de Coulomb. Le coefficient d'amplification de la force dépend alors exponentiellement du coefficient de frottement et de l'angle entre les deux parties de la corde [28]

deur $H_n \equiv n\epsilon/d$ qui correspond au décalage de la feuille n par rapport à la ligne médiane de l'assemblage, divisé par la distance de séparation d telle qu'elle est représentée à la figure 1.2, avec ϵ l'épaisseur d'une feuille. Cette distance d est la variable de l'équation pour toutes nos expériences, puisqu'elle augmente à mesure que le mors supérieur se déplace vers le haut. On notera par la suite d_0 la valeur de la distance de séparation des feuilles au début de l'expérience. On peut alors écrire, avec θ_n l'angle qu'une feuille fait avec l'horizontale (voir figure 1.2) :

$$\begin{aligned}\sin \theta_n &= H_n / \sqrt{1 + H_n^2} \\ \cos \theta_n &= 1 / \sqrt{1 + H_n^2}\end{aligned}$$

La force T_n exercée par la machine de traction sur la feuille n au point A se convertit, du fait de l'existence d'un angle θ_n non nul, en une force N_n^B s'exerçant au point B de la feuille n dans la direction normale aux feuilles et telle que :

$$N_n^B = T_n \tan \theta_n = H_n T_n$$

Cette force normale supplémentaire génère, d'après les lois d'Amontons-Coulomb une force de frottement auto-induite supplémentaire qui s'oppose à la séparation des deux livrets, que l'on note $f_{n,n\pm 1}$ (les deux feuilles voisines $n + 1$, et $n - 1$ exercent des frottements sur la feuille n). Plus la force T_n est élevée, plus cette force de frottement l'est aussi, et donc plus l'assemblage résiste.

À l'équilibre, on a alors $T_n = f_{n,n-1} - f_{n,n+1}$. Si on se place à la limite de glissement et que l'on définit alors le coefficient de frottement μ entre deux feuilles de papier, on peut montrer que :

$$\begin{aligned}f_{n,n-1} &= 2\mu N_n^B \\ f_{n,n+1} &= 2\mu \sum_{k=n+1}^M H_k T_k\end{aligned}$$

Le facteur 2 provient du fait qu'il y a deux livrets. On peut alors exprimer la différence entre la traction exercée sur deux feuilles consécutives :

$$T_n - T_{n+1} = 4\mu T_n H_n$$

En définissant la variable continue $z = n/M$ et en remplaçant T_n par $\mathcal{T}(z) = 2 \sum_1^M T_n$ (sous réserve que M soit assez grand), on obtient alors l'équation différentielle sur la force de traction locale :

$$\mathcal{T}'(z) + 2\alpha z \mathcal{T}(z) = 0$$

où α est un paramètre adimensionné tel que $\alpha = 2\mu\epsilon M^2/d$, que Mason Porter appelle dans son blog le « nombre d'Hercule » [29], où μ est le coefficient de frottement et ϵ est l'épaisseur d'une feuille de papier.

La résolution de cette équation différentielle, avec la condition aux limites $\mathcal{T}(z = 1) = T^*$, donne $\mathcal{T}(z) = T^* \exp(\alpha(1 - z^2))$. En intégrant \mathcal{T} entre 0 et 1, on obtient alors la force de traction totale T qui est en théorie celle que l'on mesure par l'expérience :

$$T = 2MT^* \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}} \exp(\alpha) \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha}) \quad (1.1)$$

Cette forme est qualifiée d'auto-similaire par H. Alarcón *et al.* car elle permet de remettre à l'échelle l'ensemble des courbes expérimentales, grâce à l'unique paramètre α .

Une version plus complète des parties non détaillées de ce calcul sera abordée au chapitre 3. En particulier, on discutera les trois hypothèses nécessaires pour obtenir ce modèle : l'angle θ_n est petit, le coefficient de frottement reste constant au cours de l'expérience (et ne dépend donc pas de T), et le nombre de feuilles M^2 est assez grand pour faire une approximation continue.

Les expériences de H. Alarcón *et al.* ont montré que ce modèle était en bon accord avec leurs résultats sur une grande gamme de nombres de feuilles (M a été pris variant entre 12 et 100). Leur modèle d'auto-amplification grâce à l'angle des feuilles a expliqué comment il était possible d'obtenir une résistance aussi impressionnante en intercalant deux annuaires, dont l'explication est le facteur en $\exp(M^2)$ dans l'équation 1.1. Leur travail a inspiré à son tour des vulgarisateurs, des étudiants et des enseignants [30, 31] ainsi que la première partie du manuscrit présentée ici.

3 Objectifs du travail présenté dans cette partie

Le travail que nous allons présenter dans cette partie s'inscrit dans la continuité directe des expériences réalisées par Alarcón *et al.*

Le modèle décrit par Alarcón *et al.* introduit deux paramètres ajustables : T^* et μ , respectivement la force exercée par la dernière feuille et le coefficient de frottement entre deux feuilles. Aucune explication sur la nature de la force T^* n'avait été donnée dans [2]. L'ensemble des courbes avait été ajusté avec une valeur de T^* constante. Il était donc important de comprendre comment variait et ce qui fixait la valeur de T^* , dont il était dit qu'elle était de l'ordre de grandeur du poids d'un papillon. Mais, puisqu'aucun lépidoptère ne se pose sur les annuaires pendant l'expérience, quelle est l'origine de la force T^* ?

Trois candidats ont été identifiés : le poids de la dernière feuille qui repose sur la feuille précédente, la force de flexion de la dernière feuille, qui tend à la rapprocher du centre de l'assemblage, et l'adhésion entre la dernière page et la précédente.

Dans cette partie, nous commençons par étudier la robustesse du modèle quand T^* varie significativement en ajoutant une force extérieure, puis, par une étude systématique des variations de T^* et μ , nous proposons une analyse de l'origine de T^* et enfin, nous discutons des limites du modèle.

2. Rigoureusement, M est le nombre de feuilles d'un demi-livret (chaque livret contient $2M$ feuilles, chaque assemblage contient $4M$ feuilles), par commodité on le désignera simplement par la suite par le nombre de feuilles.

B Matériel et méthodes

1 Le papier

a Du papyrus aux ramettes de papier

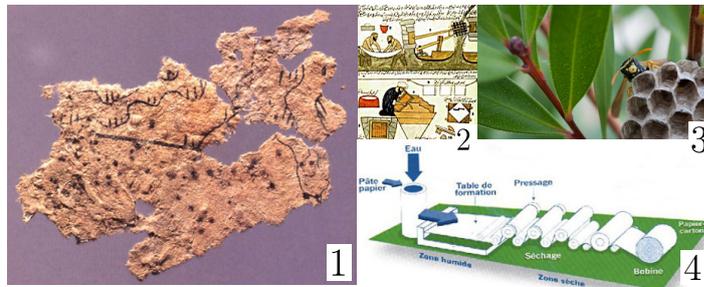


FIGURE 1.3 – Différentes étapes de l'histoire du papier (1) Fragment du papier le plus ancien retrouvé à ce jour, appartenant à une carte géographique découverte en Chine. (2) Document arabe illustrant la fabrication du papier. (3) Nid de guêpes en papier. (4) Schéma d'une ligne de production moderne de papier.

Pour comprendre l'expérience des annuaires, il est nécessaire de s'intéresser plus en détail aux caractéristiques du matériau principal : le papier.

Les humains ont utilisé une grande variété de techniques pour la conservation sur un support de leurs écrits. Les plus anciennes reposent sur la gravure de divers matériaux comme de l'os, du bois, de la pierre, du métal, des tablettes de cire ou d'argile comme les tablettes sumériennes dont on a mis au jour plus de 5000 exemplaires depuis 1920 [32].

Les deux types de feuilles anciennes les plus connus, que l'on confond parfois à tort avec des variétés de papier, sont le papyrus et le parchemin. Le papyrus a été inventé il y a environ 5000 ans, en Égypte, et se compose de très fines bandes découpées dans la tige du *cyperus papyrus* et collées les unes aux autres pour former un rouleau. Le parchemin, qui lui succède en Occident il y a environ 2000 ans, est une peau d'animal préparée et amincie pour l'écriture [33]. On définit comme papier tout type de feuille fabriqué à partir d'une suspension aqueuse de fibres, majoritairement (mais non exclusivement) de cellulose, qui est ensuite séchée, égouttée et pressée. Le papier apparaît en Chine, aux alentours du III^{ème} siècle av. J.-C., puis se diffuse chez la dynastie arabe des Abassides à partir du VIII^{ème} siècle et fait ensuite progressivement son apparition en occident dans les siècles suivants. Le papier est d'abord produit à partir de chiffons faits de plantes comme le chanvre et le lin. Le physicien et naturaliste Réaumur, qui est le premier à s'intéresser à la vie des guêpes sociales, remarque dans son mémoire de 1719 qu'elles fabriquent leurs nids en produisant du papier à partir de bois [34], une possibilité qui n'a pas encore été explorée à l'époque. Il faut ensuite attendre 1843 pour que le premier procédé fiable de production de pâte à papier à partir de pâte à bois, s'inspirant des travaux de Réaumur, soit mis au point par Friedrich Keller. La technique développe ensuite rapidement pendant la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle [33].

Le papier moderne, que l'on trouve par exemple en ramette pour nos imprimantes, est constitué de fibres de cellulose extraites du bois, de charges minérales (comme le carbonate de calcium et le kaolin qui améliorent l'opacité et la blancheur du papier), et de colles. Certains types de papiers sont également recouverts d'un liant après avoir été pressés, pour leur donner un aspect plus lisse, un toucher plus doux, une teinte plus blanche et des meilleures qualités d'impression.

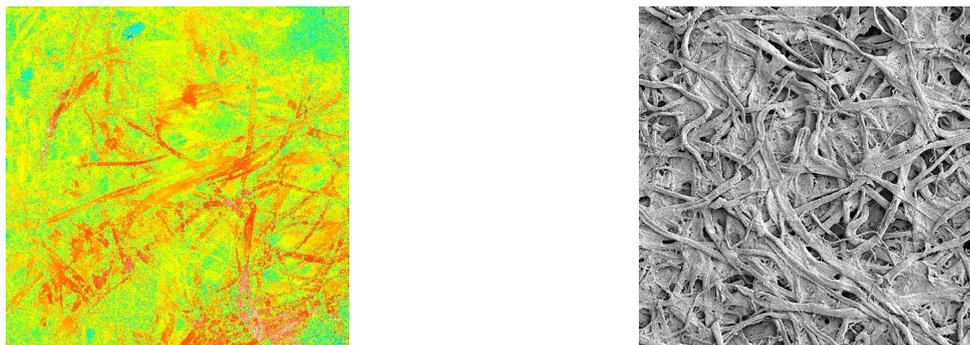


FIGURE 1.4 – **Rugosité du papier.** (Gauche) Image de profilométrie représentant un carré de 0.6 mm de côté du papier utilisé pour les expériences de cette thèse. La couleur représente la hauteur. (Droite) Image de microscopie électronique à balayage (x100) d'un papier « pur chiffon » (papier très rugueux et épais). Image issue du site *The paper project* [35]. Grossissement x100.

b Caractérisation du papier utilisé pour notre travail

Le papier utilisé pour les expériences de cette thèse est un papier d'impression classique, le papier Inacopia Office 80g, du même type que le papier utilisé pour imprimer ce manuscrit. Le fabricant ne donne pas accès à la composition exacte de son matériau, mais c'est un papier de type « permanent », ce qui impose de répondre à certaines normes. En particulier, le papier doit être composé de fibres de cellulose pure, c'est-à-dire qu'il est exempt de pâte à bois et qu'il doit contenir du carbonate de calcium ou de magnésium (dont la fonction est de protéger le papier du vieillissement) dans des proportions de 2 à 3 %. On considérera dans ce travail que le papier que nous utilisons est composé uniquement de cellulose³.

L'autre paramètre du papier qui nous intéresse est sa rugosité. Le fabricant n'indique que la valeur de la rugosité Bendtsen (180 mL/min), ce qui est une mesure du débit d'air passant dans l'espace entre une feuille de papier et une surface plane très proche, pour une géométrie du dispositif et des conditions de vitesse spécifiques. Bien que très employée dans l'industrie, cette valeur n'a qu'une signification physique peu utile. On réalise donc notre propre analyse à partir d'un profilomètre.

La figure 1.4 est une image de profilométrie du papier utilisé pour les expériences de cette thèse, réalisée sur un profilomètre optique (de la marque AMETEK® Taylor-Hobson CCI HD®).

Le profilomètre permet de mesurer sans contact (en recherchant la focalisation) la hauteur d'un échantillon, tout en se déplaçant sur une ligne ou plusieurs lignes, de façon à reconstruire le profil de hauteur sur une surface. Une reconstruction numérique permet ensuite d'obtenir une figure comme 1.4 (gauche). On y distingue l'enchevêtrement des fibres de cellulose en rouge orangé (la figure 1.4 (droite) montre un exemple d'image d'un autre papier au MEB avec une meilleure définition). La résolution en hauteur est micrométrique. On remarque sur cette image que l'amplitude maximale entre les zones les plus creuses et les zones les plus hautes est de l'ordre de 40 μm .

Le profilomètre permet également d'obtenir des traces profilométriques, qui sont des profils de hauteur de notre échantillon, sur un segment donné (on donne un exemple obtenu sur notre échantillon à la figure 1.5). À partir de celles-ci, on peut estimer le taux de longueur portante. Cette valeur est, pour un profil donné, et à une hauteur donnée, le rapport entre la longueur

3. Une expérience complémentaire de spectroscopie infrarouge par réflexion-absorption que nous avons réalisée fournit un spectre qui correspond bien à celui de la cellulose. Une analyse au microscope électronique à balayage (MEB) combinée à la spectroscopie à rayons X à dispersion d'énergie confirme la présence de magnésium dans notre matériau.

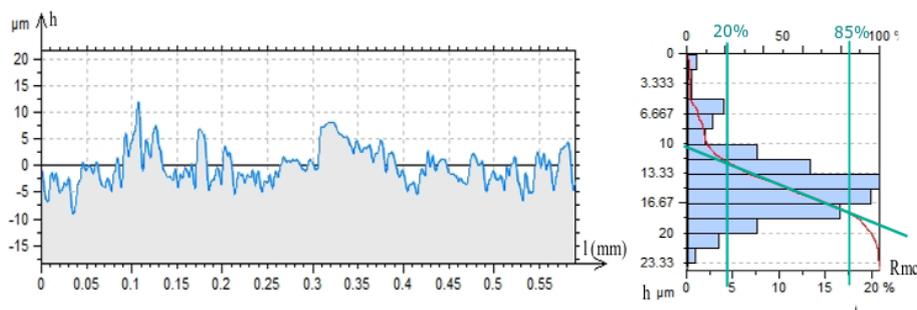


FIGURE 1.5 – Trace profilométrique (gauche) et courbe de portance (droite) sur un segment d'un échantillon de papier Inacopia Office 80g (Droite) La hauteur h est mesurée sur un segment et représentée (ligne bleue) en fonction de la distance l le long du segment. La ligne continue noire représente le plan médian de la surface. (Gauche) Le taux de portance relatif (Rmc) est représenté en abscisses, en fonction de la hauteur h en ordonnées (prise nulle au niveau du plus haut pic). La courbe rouge (courbe d'Abbot-Firestone) est l'intégrale du profil. On représente aussi un ajustement linéaire de la courbe d'Abbot, et les deux Rmc correspondant à son intersection avec cette même courbe.

occupée par le papier (portante) et la longueur vide (non portante) [8].

Pour estimer cette valeur, on utilise la courbe de portance d'un profil, c'est à dire la courbe représentant le taux de longueur portante, en fonction de la hauteur h à laquelle on se place sur ce profil. À la hauteur du plus haut pic, ce taux est nul. À la hauteur de la vallée la plus profonde, il est de 100 %. On peut calculer la distribution des taux de portance entre ces deux extrêmes (représentée en bleu sur la figure 1.5) et tracer la distribution cumulative (en rouge sur la figure 1.5) (aussi appelée courbe d'Abbot-Firestone ou courbe de portance). Sur cette courbe de portance, on réalise un ajustement linéaire en excluant les pics les plus élevés et les vallées les plus profondes (cette technique de traitement est décrite dans la norme ISO 13565-27). On obtient ainsi un encadrement du taux de portance (sur la figure 1.5, celui-ci est compris entre 20 % et 85 %). En répétant ce procédé sur cinq profils obtenus à des positions et dans des directions variables, on obtient un taux de portance qui varie entre 18 % et 87 %. Ces valeurs assez distantes définissent un intervalle de taux de portance potentiellement acceptables, ce dernier dépendant fortement de la force normale exercée à l'interface.

2 Dispositif expérimental

a Machine de force de traction

Le dispositif expérimental utilisé dans cette thèse et pour les expériences réalisées précédemment est composé d'une machine de traction commerciale (Adamel Lhomargy, référence DY30). Les éléments essentiels de la machine sont le capteur de force et le système de translation verticale du mors relié au capteur. On fixe l'objet que l'on veut étudier entre le mors inférieur (immobile) et le mors supérieur (mobile) et on peut observer l'évolution de la force en fonction du déplacement du mors supérieur sur le panneau électronique de la machine et sur l'interface informatique (voir figure 1.6 (gauche)). Un programme LabVIEW permet de contrôler la vitesse et la hauteur de déplacement du mors mobile et de prévoir des cycles de compression-décompression (cette fonctionnalité sera utilisée au chapitre II). Plusieurs capteurs, définis par la force maximale qu'ils peuvent enregistrer (10 N, 100 N et 1000 N) sont disponibles. Pour la partie 1, on a utilisé le capteur 1000 N. Le banc de traction permet de déplacer le mors supérieur sur une hauteur allant jusqu'à 1.20 m et à une vitesse maximale de 100 cm/min.

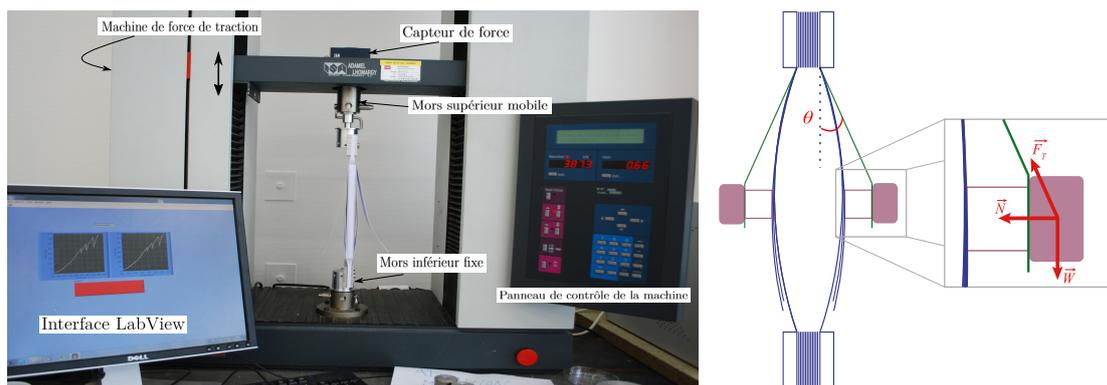


FIGURE 1.6 – **(Droite) Dispositif expérimental** Photographie du montage utilisé dans cette thèse : les livres sont fixés au banc de traction par des mors en aluminium. Une interface informatique permet de contrôler la vitesse et la distance de déplacement du mors supérieur et d'exporter les données. Le mors supérieur est relié à un capteur de force et peut se déplacer verticalement sur une distance de plus d'un mètre. **(Gauche) Schéma du dispositif expérimental (vue de côté)**. Sur l'assemblage composé des feuilles entrelacées, on ajoute une couverture souple (en bleu) et une couverture rigide (en vert) à laquelle est fixée une cale du côté intérieur et une masse variable du côté extérieur. Cette couverture rigide fait un angle θ avec la verticale.

b Fabrication des assemblages de feuilles

Pour réaliser un assemblage donné de feuilles entremêlées, on découpe $4M$ feuilles à la longueur L et la largeur l désirée, on forme un paquet dont on contrôle l'alignement et on perce l'ensemble de deux trous avec une perceuse. Cette technique permet de s'assurer ensuite de l'alignement des feuilles une fois insérées dans le mors. Les feuilles issues des différents paquets ne sont pas mélangées, pour éviter que des trous légèrement décalés génèrent un mauvais alignement des feuilles. L'assemblage entremêlé est réalisé de sorte à bien contrôler d_0 , la distance de séparation initiale. Pour cela, on a utilisé un dispositif fabriqué à cet usage, composé de quatre plots qui s'insèrent dans les trous percés dans les feuilles et dont l'écartement est variable. Les feuilles sont ensuite superposées une-à-une manuellement et l'assemblage est alors fixé dans les mors. L'ensemble des feuilles utilisées dans les expériences présentées dans cette partie totalise environ 5000 feuilles ayant été entremêlées ainsi, à quelques centaines près⁴.

L'assemblage obtenu est ensuite fixé entre les deux mors, dont chacun est composé de deux plaques d'aluminium de la largeur l des feuilles, lesquelles sont percées de deux trous dans lesquels on insère des vis qui traversent également les perforations des deux paquets de feuilles. Les vis sont serrées jusqu'au maximum et l'assemblage est inséré dans le système de fixation de la machine. La mesure de d_0 est alors prise avec un pied à coulisse une fois l'assemblage installé dans la machine, car la fixation des feuilles dans les mors génère toujours un décalage entre le d_0 réel au moment où l'expérience commence et celui que l'on a choisi en empilant les feuilles (le second étant toujours supérieur au premier, et de l'ordre de grandeur de 1 cm). Le capteur de force est initialisé une fois l'assemblage installé dans la machine, de sorte que $T(d)$ est nul à la fin de l'expérience, une fois les deux livres séparés.

4. Auxquelles il conviendrait d'ajouter toutes les erreurs et les essais infructueux qui n'ont pas réussi à se frayer un chemin jusqu'à ce manuscrit pour obtenir une idée du temps consacré dans cette thèse à superposer des feuilles.

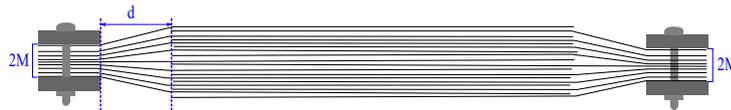


FIGURE 1.7 – **Schéma d'un modèle de feuilles entremêlées.** Chaque mors, constitué de deux plaques métalliques assemblées par deux vis chacune, enserme $2M$. La distance d est la distance de séparation entre les feuilles. On notera d_0 la valeur de d avant que l'expérience ne commence. L'assemblage est ici représenté horizontalement, mais il est installé verticalement dans la machine de traction, comme illustré à la figure 1.6 (gauche).

3 Modification du dispositif expérimental pour l'ajout d'une force extérieure normale

Pour étudier l'effet d'une force extérieure normale, on emploie un assemblage de feuilles modifié, au sein de la même machine que celle de la figure 1.6 (gauche), auquel on ajoute une masse extérieure.

Plus précisément, on ajoute sur la couverture recouvrant l'assemblage une deuxième couverture de support plus rigide, à laquelle on fixe d'un côté une cale et de l'autre un support permettant d'accrocher différentes masses (voir schéma du dispositif à la figure 1.6 (droite)). La cale permet de maximiser la composante du poids dans la direction normale à la couverture et de conserver une surface de contact constante entre la couverture de support rigide et la couverture intérieure, quelle que soit la taille de la masse utilisée.

La couverture de support fait un angle θ avec la verticale, de l'ordre de 15° .

La couverture intérieure est une feuille de PolyTétraFluoroEthylène (PTFE ou téflon), pour minimiser le coefficient de frottement avec la cale, car le « stick-slip », observé en particulier au début de l'expérience fait osciller l'ensemble du dispositif de support de la masse.

4 Mesure du coefficient de frottement

Nous avons réalisé dans le cadre de cette thèse plusieurs mesures de coefficient de frottement. Le dispositif expérimental utilisé est représenté à la figure 1.8 et est composé d'un patin frottant sur lequel on peut fixer une masse variable et qui est mis en mouvement de translation horizontale *via* une poulie reliée à la machine de force de traction. La face inférieure du patin est recouverte de papier, et glisse contre une autre feuille de papier. On représente également (Fig. 1.8, droite) un exemple de courbe de force obtenue avec ce dispositif. On signale sur cette figure la valeur de la force de frottement dynamique, grâce à laquelle on a obtenu μ , sachant la masse du patin.

La force augmente linéairement jusqu'à un maximum correspondant au coefficient de frottement statique. La force diminue ensuite pour atteindre un plateau qui permet de calculer le coefficient de frottement dynamique à partir de la force de frottement dynamique, F_d . Sur cette figure, on trouve $F_d = 0.576 \text{ N}$.

La nature artisanale de ce dispositif nous conduit par ailleurs à utiliser également les résultats de mesures effectuées par J.-F. Bloch au Laboratoire Sols, Structures, Solides, Risques sur notre papier à l'aide d'un tribomètre commercial fonctionnant sur le même principe de patin frottant (Thwing-Albert Instrument Company, Peel Tester modèle 225).

Ces deux types de mesures du coefficient de frottement pour le contact simple sont présentées à la section suivante et comparées à la valeur de μ calculée par les ajustements des courbes $T(d)$.

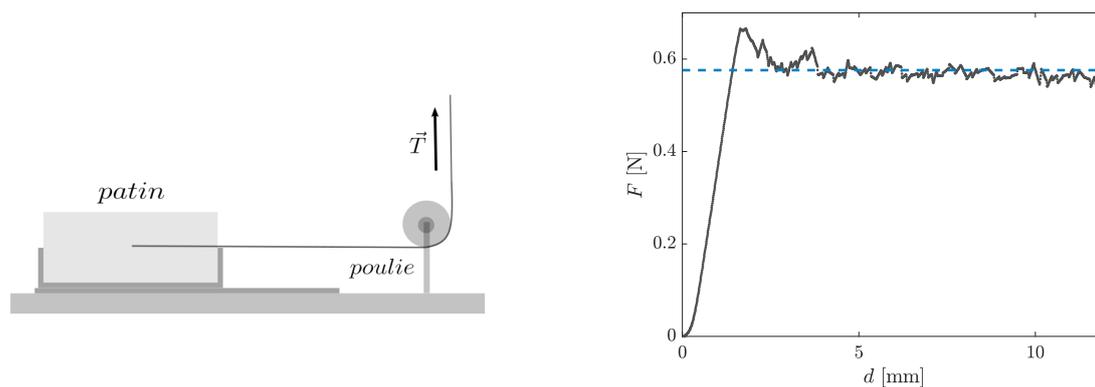


FIGURE 1.8 – **(Gauche) Schéma du dispositif expérimental permettant de mesurer le coefficient de frottement papier-papier.** Un patin mobile que l'on peut charger d'une masse variable est recouvert sur sa partie inférieure d'une feuille de papier, et glisse sur une autre feuille de papier en étant tracté par un câble relié à la machine de traction. Une courbe de force typique est représentée à la figure de droite. Le patin mesure 5.5 cm de diamètre. **(Droite) Mesure de la force de frottement.** Ces données expérimentales proviennent d'une expérience avec un patin d'une masse de 175 g.

C Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et expliqué le modèle de Alarcón *et al.* qui prédit la valeur de la force T à appliquer pour séparer deux livrets d'une distance d . En particulier, nous avons détaillé la nature physique des paramètres d'ajustement μ et T^* que nous allons examiner dans le chapitre suivant.

Nous avons ensuite présenté le dispositif expérimental ainsi que sa variation nous permettant d'appliquer une force extérieure sur l'assemblage. Nous avons également présenté notre matériau, le papier, et nous avons détaillé la méthode nous permettant d'obtenir une estimation de sa rugosité.

Chapitre 2

Résultats sur l'origine physique de la force amplifiée

Sommaire

A	Influence d'une masse extérieure	35
B	Influence des dimensions des feuilles	38
1	Effet de la longueur des feuilles	38
2	Effet de la largeur des feuilles	38
3	Discussion sur l'origine de T^*	39
C	Influence de la vitesse	41
D	Résumé des résultats expérimentaux et conclusion sur l'origine de T^*	44

Dans ce chapitre, nous cherchons à comprendre la nature et l'origine de la force T^* . Nous allons présenter les résultats expérimentaux obtenus quand nous faisons varier T^* , soit en appliquant directement une force extérieure sur l'assemblage, soit en modifiant les dimensions de T^* . Nous proposerons ensuite une interprétation de la nature de la force T^* . Par ailleurs, nous examinerons aussi l'effet de la variation des différents paramètres expérimentaux sur le coefficient de frottement μ .

A Influence d'une masse extérieure

Dans le modèle de Alarcón *et al.*, T^* est la force de traction inconnue qui est exercée sur la dernière feuille. Ce paramètre, défini à partir d'une condition limite, sera ensuite amplifié par l'assemblage, du fait de l'existence d'un angle entre les feuilles.

En premier lieu, nous voulons nous assurer que T^* n'est pas seulement un paramètre d'ajustement multiplicatif mais que sa valeur dépend bien de la force exercée sur la dernière feuille. Pour cela, nous avons conçu un dispositif permettant de faire varier drastiquement la force exercée sur la dernière feuille, en rajoutant une masse extérieure. Ce dispositif a été décrit au chapitre précédent.

Les courbes force-déplacement sont enregistrées pour plusieurs masses m et ajustées au modèle avec T^* et μ comme paramètres ajustables. On les représente à la figure 2.1 (gauche). Les assemblages utilisés ici sont composés de $4M = 60$ feuilles¹, dont les dimensions sont $L = 21$ cm

1. Un seul livret contient $2M = 30$ feuilles.

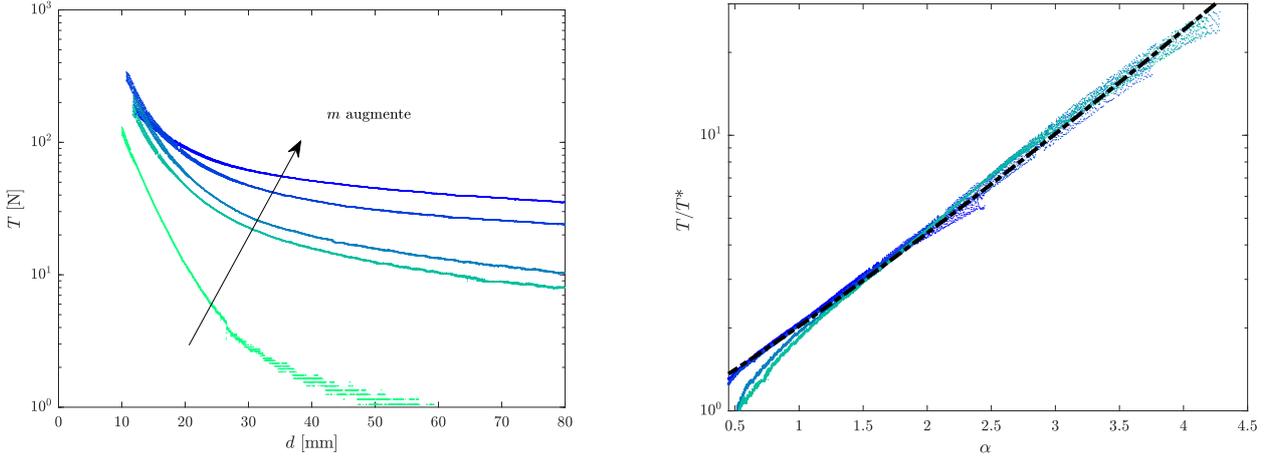


FIGURE 2.1 – **(Gauche) $T(d)$ pour différentes valeurs de la masse extérieure m .** On représente la force mesurée en fonction de la distance de séparation d , avec m prenant les valeurs : 13 g, 90 g, 128 g, 219 g et 273 g. La couverture en PTFE a une masse de 13 g que l'on prend en compte dans la valeur de m indiquée. **(Droite) Adéquation au modèle des expériences avec une masse extérieure.** On représente la force mesurée T divisée par le T^* obtenu par l'ajustement des courbes $T(d)$ en fonction de $\alpha = 2\mu M^2 \epsilon / d$, le paramètre d'Hercule, le tout pour différentes valeurs de m . Toutes les données expérimentales se rassemblent sur la courbe maîtresse (ligne noire pointillée) du modèle, montrant que le modèle reste valable avec l'ajout d'une masse extérieure.

et $l = 16$ cm.

On observe sur la figure 2.1 (gauche) que quelque soit d , $T(d)$ est d'autant plus grand que la masse m est grande. Nous constatons aussi que l'ajustement au modèle théorique fonctionne à la fois en l'absence de masse ajoutée (on trouve alors $T^* = 23$ mN) que lorsqu'une masse de $m = 273$ g est installée. On trouve alors $T^* = (1 \pm 0.12)$ N. Ceci est mis en évidence à la figure 2.1 (droite), en traçant T/T^* en fonction de α , le « paramètre d'Hercule », car toutes les courbes se rapprochent d'une courbe maîtresse.

Le modèle reste donc robuste pour une variation importante de T^* . Par ailleurs, en traçant le T^* obtenu par l'ajustement des courbes à différentes valeurs, on observe une variation de linéaire de T^* avec le poids W de la masse et son dispositif de support, malgré une certaine dispersion (voir figure 2.2). En ajustant ces données à une droite, on obtient :

$$T^* = (0.32 \pm 0.01)W$$

Qualitativement, cette dépendance est cohérente avec le fait que T^* corresponde bien à la force exercée par la dernière feuille, puisque, quand celle-ci augmente, T^* augmente proportionnellement. Pour mieux comprendre quantitativement cette dépendance, on peut écrire le bilan des forces s'exerçant sur la masse extérieure au repos (voir schéma de la figure 1.6), et on a :

$$\vec{F}_T + \vec{W} - \vec{N} = \vec{0} \quad (2.1)$$

Avec \vec{F}_T la tension de la couverture rigide qui supporte ce dispositif, et \vec{N} la force normale exercée par cet ensemble sur l'assemblage de feuilles. En projetant sur les axes horizontaux et verticaux, on obtient respectivement,

$$F_T \sin \theta - N = 0 \quad (2.2)$$

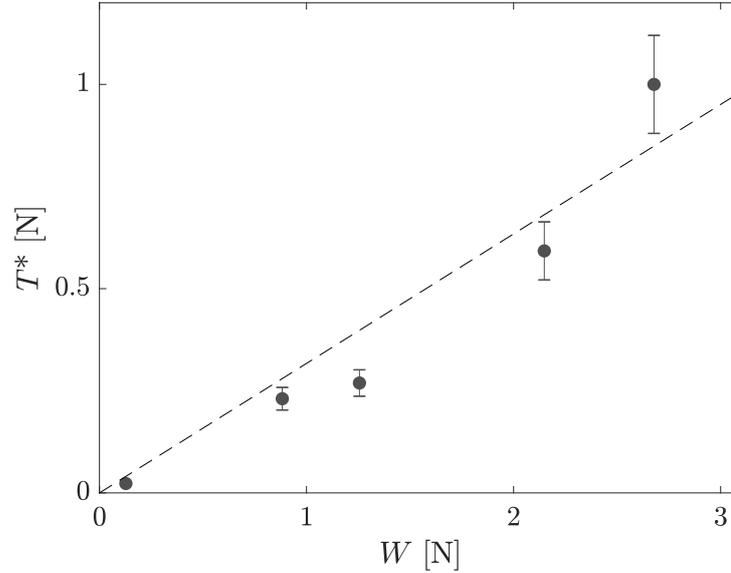


FIGURE 2.2 – **Effet de l'ajout d'une masse extérieure sur T^* .** Pour chaque valeur de la masse m , on ajuste la courbe $T(d)$ au modèle, et on trace T^* en fonction de $W = mg$. La ligne pointillée est un ajustement linéaire des données, dont la pente est (0.32 ± 0.01) . On a répliqué à plusieurs reprises une expérience à $M = 15$, $L = 25$ cm, $l = 12$ cm, $v = 1$ mm/min pour obtenir une valeur de l'écart-type sur T^* et μ après ajustement des courbes, qui est respectivement de 12,3 % et 1,3 % de la moyenne. On représente par les barres verticales de cette figure l'intervalle de confiance à un écart-type, en considérant par simplification que l'écart-type est toujours 12,3 % de la valeur mesurée pour T^* , quelles que soient les conditions de l'expérience.

et,

$$F_T \cos \theta - W = 0 \quad (2.3)$$

En combinant les équations 2.2 et 2.3, on obtient :

$$N = W \tan \theta$$

T^* étant la force de frottement s'exerçant sur la feuille externe de l'assemblage. On a, d'après la loi de Coulomb, $T^* = \mu N$, et donc, avec l'équation A, on obtient finalement :

$$T^* = \mu W \tan \theta$$

On calcule la moyenne des valeurs de μ obtenues en ajustant des données de la figure 2.2 au modèle, et on obtient $\mu = 1.07$. Ce qui donne, avec θ valant environ 15° :

$$T^* = (0,29 \pm 0.1)W \quad (2.4)$$

Cette valeur théorique de la pente est compatible avec la valeur expérimentale de $(0,32 \pm 0.01)$ A. Par conséquent, il nous semble raisonnable de conclure que T^* représente bien la force extérieure s'exerçant sur la dernière feuille, et que, dans le cas présent d'ajout d'une masse supplémentaire, cette force extérieure est la projection du poids.

Mais dans un cas plus général, sans masse supplémentaire, quelle est l'origine de T^* ? C'est l'objet de cette section de cette thèse.

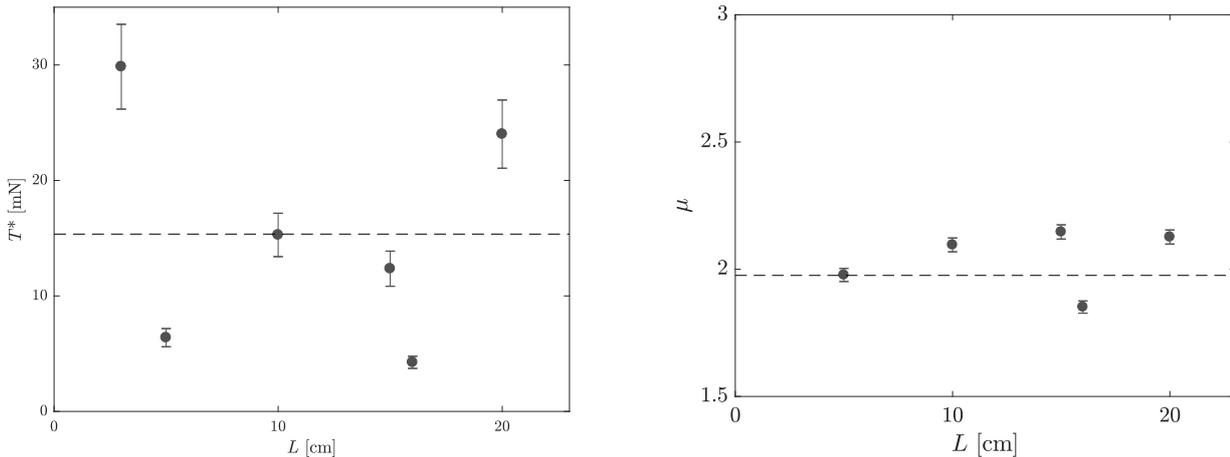


FIGURE 2.3 – **Effet de la longueur des feuilles sur T^* .** Les courbes force-déplacement des expériences réalisées pour différentes valeurs de L , avec $l = 12$ cm, sont ajustées au modèle, et on obtient l'évolution de T^* en fonction de L . La ligne pointillée est une moyenne des points présentés sur le graphique, valant 15.4 N. Les barres d'erreur représentent la déviation standard calculée sur les différentes expériences réalisées à L donné. $M = 15$. **Effet de la longueur des feuilles sur μ .** Les barres verticales représentent l'erreur (qui est de 1,3 % sur μ) et la ligne pointillée est la moyenne de ces valeurs, qui vaut 1.98. $M = 15$.

B Influence des dimensions des feuilles

1 Effet de la longueur des feuilles

Pour répondre à cette question et discriminer les différentes origines physiques liées au poids, à la flexion, et à l'adhésion, nous avons mené une étude systématique des effets de la géométrie de l'assemblage sur la valeur de T^* et μ . Les expériences suivantes sont réalisées avec le montage identique à celui de la figure 1.2, avec un nombre total de 60 feuilles pour l'assemblage, donc 30 feuilles par livret.

On réalise des assemblages constitués de feuilles de largeur $l = 12$ cm, et de longueur L variable, comprise entre 3 cm et 25 cm. Pour chacun de ces assemblages, on ajuste les courbes force-déplacement au modèle, et on obtient les dépendances de T^* et μ en fonction de L présentées aux figures 2.3. On constate que, malgré une dispersion des données, T^* semble constant pour des valeurs de L variant sur plus d'un facteur 5. Le coefficient de frottement semble indépendant de L pour ces expériences malgré une certaine dispersion, ce qui était le résultat attendu.

2 Effet de la largeur des feuilles

On réalise des assemblages constitués de feuilles de longueur L constante égale à 16 cm, et de largeur l variant entre 4 cm et 21 cm (qui correspond à la largeur des feuilles A4 utilisées). On procède comme précédemment pour obtenir la variation de T^* et μ en fonction de l , les résultats sont présentés aux figures 2.4.

On constate une dépendance linéaire de T^* avec l . Plus précisément, un ajustement linéaire des données (représenté par la ligne pointillée sur la figure 2.4 (gauche)), donne une pente de $42 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$.

Par ailleurs, on obtient pour μ les variations présentées à la figure 2.4 (droite). Les valeurs obtenues pour μ sont dispersées, en particulier si on compare à l'estimation de l'erreur qui avait été

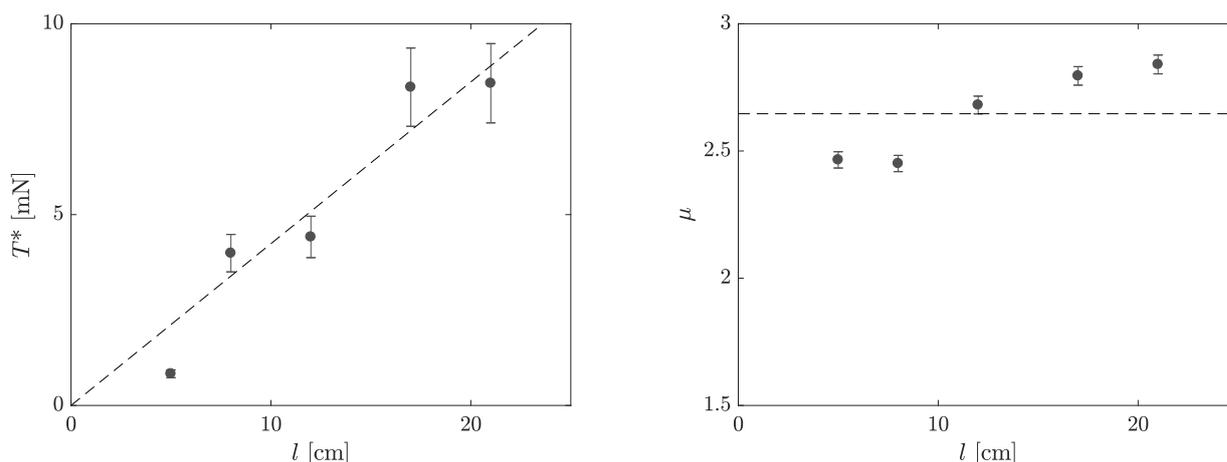


FIGURE 2.4 – **Effet de la largeur des feuilles sur T^* .** Les courbes force-déplacement des expériences réalisées pour différentes valeurs de l , avec $L = 16$ cm, sont ajustées au modèle, et on obtient l'évolution de T^* en fonction de l . La ligne pointillée est un ajustement linéaire des données, dont la pente est $42 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$. Les barres verticales sont obtenues grâce à l'erreur typique sur les mesures de T^* , qui est de 12,3 %. Cette valeur a été obtenue en répliquant une expérience à $M = 15$, $d_0 = 10$ mm, $v = 1$ mm/min, $l = 12$ cm et $L = 25$ cm. **Effet de la largeur des feuilles sur le coefficient de frottement.** Les cercles pleins représentent la valeur moyenne de μ obtenue en répliquant plusieurs expériences. Les barres verticales représentent l'erreur calculée sur μ en répliquant une expérience à $M = 15$, laquelle était de 1,3 %.

réalisée pour une expérience à $M = 15$, $l = 12$, et dont la valeur de 1,3 % est très probablement sous-estimée. Sur les expériences présentées ici, on obtient plutôt des déviations standard de 26 % et 30 % pour respectivement $l = 12$ cm et $l = 17$ cm. Dans ces conditions, il nous semble raisonnable de conclure que le coefficient de frottement est indépendant de la largeur des feuilles, quoique les valeurs soient très dispersées autour de la moyenne, et d'utiliser cette valeur moyenne pour les calculs de la section suivante.

3 Discussion sur l'origine de T^*

Nous allons examiner la compatibilité des résultats obtenus avec des feuilles de différentes dimensions avec les trois origines possibles pour T^* que nous avons introduites dans la section 3 du chapitre 1.

Si T^* est le poids de la dernière feuille, il doit dépendre linéairement de L et de l . Nos résultats montrent que T^* croît bien linéairement avec l (cf. Fig. 2.4 (gauche)). Nous avons vu cependant à la figure 2.3 (gauche) que T^* ne dépend pas de L . Cette constance pourrait néanmoins s'expliquer par le fait que la sensibilité des expériences soit trop faible pour que l'on puisse détecter un effet du poids sur les expériences.

Le grammage de nos feuilles est de 80 g/m^2 . Pour les expériences à longueur variable (Fig. 2.3 (gauche)), les dimensions des feuilles varient entre $3 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$ pour les plus courtes et $20 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$ pour les plus longues. De sorte que le poids d'une page varie entre 2.8 mN et 18.8 mN. Pour les expériences à largeur variable (Fig. 2.4 (gauche)), les dimensions des feuilles sont comprises entre $16 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ pour les plus étroites et $16 \text{ cm} \times 21 \text{ cm}$ pour les plus larges, ce qui donne une variation du poids d'une feuille comprise entre 6.3 mN et 26.4 mN. De sorte que le poids des feuilles

est du même ordre de grandeur et varie du même ordre de grandeur sur les deux expériences². Ainsi, il nous semble raisonnable de conclure que l'absence de variation de T^* avec L ne peut pas être due à une trop faible sensibilité de l'expérience et il convient alors d'exclure le poids comme origine physique de la force T^* .

La deuxième origine possible de la force T^* est la courbure de la dernière feuille. La dernière feuille est déformée par les feuilles situées en-dessous, et elle exerce donc une force de flexion élastique sur elles, comme on l'a vu à la partie 1. En se référant à ce calcul, on peut montrer que cette force est proportionnelle à $E\epsilon^3 l M \epsilon / x^3$, [36] où E représente le module de Young, ϵ l'épaisseur de la feuille, et x la distance caractéristique selon l'axe de l'assemblage. Le facteur $M\epsilon$ provient de l'épaisseur de l'assemblage, qui joue ici le rôle de y , et $I = \epsilon^3 l$. Cette force est proportionnelle à la largeur l , ce qui est compatible avec les résultats des expériences de la figure 2.4 (gauche). Mais pour conclure sur l'origine de T^* , il est nécessaire d'examiner plus précisément x . Les deux distances caractéristiques possibles sont d , qui est la distance entre le point d'encastrement et le bout de la feuille opposée et L , la longueur des feuilles. Si on avait $x = L$, on devrait observer que T^* varie comme $1/L^3$, ce qui n'est pas le cas (voir figure 2.3 (gauche)). Si on avait $x = d$ cela impliquerait une variation de T^* au cours de l'expérience, et celle-ci serait de l'ordre d'un facteur 125 (pour d passant de $d_0 = 2$ cm à $d = 10$ cm à la fin de l'expérience). Il serait alors impossible d'ajuster les courbes expérimentales à notre modèle pour lequel T^* est constant or on constate justement que cet ajustement est très robuste à la variation des paramètres M , l , L et v . Par conséquent, il nous semble raisonnable d'exclure, dans ce cas, la force de flexion comme origine principale de T^* , ce qui nous laisse comme dernière possibilité de prendre en compte l'énergie d'adhésion entre la dernière et l'avant-dernière feuille.

Cette possibilité est compatible avec les dépendances mesurées par les expériences des figures 2.4 (gauche) et 2.3 (gauche). En effet, dans un test de pelage, il est bien connu que la force F_s nécessaire pour décoller une bande d'une surface est proportionnelle à la largeur de cette bande, à G l'énergie nécessaire à la séparation, et est indépendante de sa longueur [8]. Plus précisément, si on considère notre situation comme quasi-statique, on peut négliger les processus de dissipation, et G est égale au travail de l'adhésion w_A . On peut donc exprimer F_s comme :

$$F_s = w_A l$$

et on cherche à comparer le travail de la force d'adhésion dont l'expression est alors :

$$w_A = F_s / l$$

à la pente obtenue expérimentalement à la figure 2.4 (gauche), pour définir si l'adhésion est bien la composante principale de T^* .

On considère la rupture d'une interface symétrique papier-papier, et on exprime donc le travail de l'adhésion par :

$$w_A = 2\gamma_p$$

γ_p étant l'énergie de surface du papier. En prenant en compte la rugosité du papier et en notant A/A_0 la fraction de l'aire de contact apparente A_0 qui est en contact réel avec l'autre feuille, on obtient une énergie d'adhésion effective :

$$w_{A,\text{eff}} = 2\gamma_p A/A_0$$

2. Notons que la valeur du poids n'est pas à comparer directement à T^* , car T^* est la projection du poids dans la direction des feuilles. Le nombre de feuilles étant identique dans ces expériences, l'angle de projection est aussi égal.

La tension de surface du papier dépend de sa composition dont nous n'avons pas de description précise, mais comme on l'a montré à la partie **a**, il est raisonnable de ne prendre en compte que la cellulose. En prenant pour $\mu = 2.64$, la valeur moyenne de μ sur les ajustements de la figure 2.4 (gauche), on aura :

$$N/l = T^*/(\mu l) = 15.9 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$$

Avec une valeur de la tension de surface de la cellulose hydrophobe de $\gamma_p \sim 29.6 \text{ mN/m}$, cette valeur expérimentale sera de l'ordre de $w_{A,\text{eff}}$ pour $A/A_0 \approx 0,27$. Ce rapport entre l'aire réelle de contact et l'aire apparente peut être comparé au taux de portance du papier, qui représente en réalité la même grandeur. Celui-ci, comme on l'a vu dans la partie **a** est compris entre 18 % et 87 %. La valeur de A/A_0 correspondant à une force d'adhésion égale à T^* est donc compatible avec le taux de portance mesuré.

Par conséquent, l'adhésion entre la dernière page et la précédente semble être le phénomène dominant dans les conditions que nous avons étudiées et sans ajout d'une masse extérieure.

C Influence de la vitesse

On réalise des expériences avec des assemblages pour lesquels $M = 15$, $l = 12 \text{ cm}$ et $L = 16 \text{ cm}$, en imposant une vitesse de déplacement du mors supérieur variant entre 0.6 mm/min et 50 mm/min . Les résultats obtenus sur μ et T^* après ajustement des courbes sont présentés respectivement aux figures 2.5 et 2.6.

Le paramètre T^* reste constant même en multipliant la vitesse par un facteur 20 (voir figure

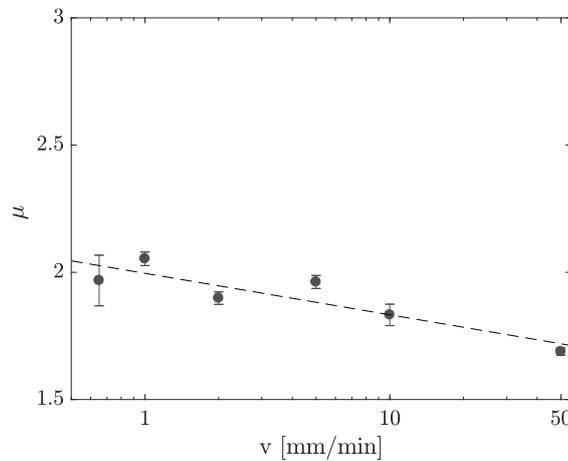


FIGURE 2.5 – **Représentation semi-logarithmique de l'effet de la vitesse d'étirement sur le coefficient de frottement.** On calcule le coefficient de frottement μ en ajustant les courbes $T(d)$ au modèle. Chaque point correspond à une valeur différente de la vitesse de déplacement du mors supérieur. La droite en pointillés est un ajustement logarithmique des données, tel que $\mu = a \log v + b$ avec $a = -7.1 \cdot 10^{-2}$. Quatre mesures ont été faites pour des vitesses inférieures à 10 mm/min . Une forte variabilité de μ et de T^* sur ces valeurs, qui peut être due à des difficultés de la machine de force de traction à imposer une vitesse constante aux petites vitesses, nous conduit à moyenner des valeurs de μ sur ces quatre points. La barre verticale représente alors l'erreur sur ces quatre points, d'expression $\sigma/\sqrt{4}$. Les autres barres verticales représentent soit l'erreur, calculée de la même façon quand l'expérience a été répliquée, soit l'erreur typique sur μ , qui est de 1,3 %, valeur que l'on obtient en répliquant une expérience pour $M = 15$, $d_0 = 10 \text{ mm}$, $v = 1 \text{ mm/min}$.

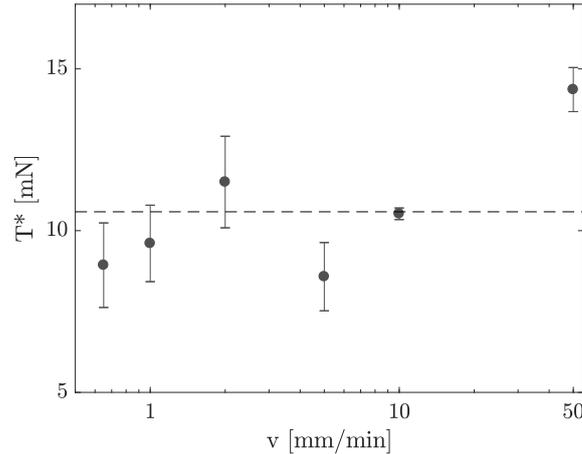


FIGURE 2.6 – **Effet de la vitesse d'étirement sur T^*** . On calcule T^* en ajustant les courbes $T(d)$ au modèle. La ligne pointillée représente la moyenne de T^* pour toutes les valeurs de v , et elle est de 10.6 mN. Les barres d'erreurs sont calculées de la même façon que celle décrite à la figure 2.5, l'erreur typique sur T^* est de 12,3 %.

2.6).

Malgré une dispersion des mesures, on observe que le coefficient de frottement décroît quand la vitesse augmente (voir figure 2.5). Cet effet, bien que contraire aux lois de Coulomb, est largement documenté dans la littérature sur différents matériaux comme l'aluminium, l'acier, l'ébonite, le plastique renforcé de fibres de verre, et le caoutchouc [37, 38]. Chowduri explique cet effet par le fait que, quand la vitesse change, le taux de cisaillement subi par les aspérités à la surface du matériau change et que les matériaux utilisés ont des propriétés mécaniques qui varient en fonction du taux de cisaillement. En particulier pour certains métaux comme l'aluminium et le cuivre [39], leur résistance est plus grande à grand taux de cisaillement, ce qui implique que la surface de contact réelle à l'interface est plus petite, et donc que le coefficient de frottement est plus élevé. Cependant, des effets contraires sont aussi observés [40], sur différents matériaux, avec des conditions de charges différentes, de sorte qu'aucune théorie générale applicable à tous les matériaux et à toutes les surfaces ne ressort.

Dans le cas du papier, les expériences de Heslot *et al.* [41] sur du papier bristol montrent également une décroissance du coefficient de frottement quand la vitesse augmente, tant que la vitesse reste inférieure à environ 3 m/min, comme c'est le cas dans nos expériences. Le papier bristol est certes un papier cartonné, donc plus épais que le papier que nous utilisons, mais non-couché³, de même que notre papier permanent, ce qui implique que l'on peut raisonnablement comparer leurs propriétés frictionnelles. Plus précisément, cette décroissance est logarithmique, et Heslot *et al.*, en ajustant leurs données à l'équation :

$$\mu = a \log v + b \quad (2.5)$$

trouvent $a = -1,5 \cdot 10^{-2}$ et $b = 0.37$. Sur la figure 2.5, la ligne pointillée représente un ajustement de nos données à l'équation 2.5, pour lequel $a = -7,1 \cdot 10^{-2}$, ce qui est du même ordre de grandeur que la valeur donnée par Heslot et $b = 1.996$. Cette différence sur la valeur de b pourrait s'expliquer par la sensibilité de μ à la charge normale et par la différence entre notre papier et le bristol. La dépendance de μ avec la charge normale, qui est à la fois en opposition avec les lois de Coulomb et avec les hypothèses de notre modèle sera discutée dans la partie 3.

3. C'est-à-dire un papier « naturel », qui, contrairement au papier glacé par exemple, ne reçoit ni traitement ni finition de surface.

Par ailleurs, on peut considérer que la force T^* reste constante quoique dispersée quand la vitesse augmente (voir figure 2.6). Avec un matériau élasto-plastique comme le papier à l'interface entre deux feuilles, il est en effet cohérent de ne pas observer d'effet de la vitesse sur T^* dans la mesure où on a identifié l'adhésion comme origine de cette force. Cependant, il a été montré par Crassous *et al.* que des ponts capillaires peuvent se former à l'interface entre deux feuilles de papier bristol dans des conditions normales d'humidité [23], et on pourrait penser que c'est ce phénomène, plutôt que l'adhésion, qui est à l'origine de la force T^* .

Le nombre de ponts capillaires se formant varie comme le logarithme du temps de contact entre les interfaces, avec un préfacteur dépendant du taux l'humidité. Ce phénomène génère une énergie d'adhésion qui dépend donc à la fois du temps et de l'humidité, ce qui conduit à mesurer un coefficient de frottement qui dépend à son tour de ces deux paramètres. Pour nos expériences, l'hygrométrie de la pièce n'a pas été contrôlée et a probablement varié sensiblement d'un jour sur l'autre. Cependant, le coefficient de frottement utilisé dans notre modèle est dynamique, alors que Crassous *et al.* mesurent un coefficient de frottement statique. Comme leur modèle repose sur le fait que les ponts capillaires prennent du temps à se former par la condensation de l'humidité de l'air, il est en effet pertinent dans leur système de raisonner en terme d'âge du contact et non pas de vitesse de glissement. Si on considère que la taille δ_c d'un contact est de l'ordre de grandeur de la taille d'une rugosité, et donc de la largeur d'une fibre de cellulose, cela représente environ $\delta_c = 10 \mu\text{m}$ (ce qu'on estime à partir des données de la profilométrie, voir figure 1.4).

Ainsi, le temps de contact t_c , pour la vitesse minimale que l'on a utilisée qui était de $v = 0.5 \text{ mm/min}$, est $t_c = \delta_c/v$, qui est donc de l'ordre de 1 sec, ce qui est un ordre de grandeur en-dessous de la valeur minimale du temps de contact choisi par Crassous *et al.* dans leurs expériences (qui varie entre 10 sec et 6000 sec). Pour les temps de contact les plus courts, ils ne constatent qu'un effet de l'humidité limité (μ varie entre 0,5 et 0,6 environ, alors qu'il varie entre 0,51 et 0,8 pour les plus longs temps de contact).

Ce peu d'effet de l'humidité pour les temps de contact courts nous conduit à penser que le temps caractéristique de formation d'un pont capillaire dans une interface papier-papier est vraisemblablement supérieur à t_c , même dans les cas où on choisit une vitesse très lente et donc par conséquent que, dans notre cas, l'adhésion des feuilles de papier n'a pas pour origine la formation de ces ponts capillaires, mais bien une rupture adhésive papier-papier.

Cette hypothèse est renforcée par le fait que nos expériences sont assez reproductibles d'un jour sur l'autre, malgré les variations de l'humidité, et par le fait que la valeur de G que l'on mesure est de $15.9 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$.

Par ailleurs, en prenant l'hypothèse d'une rupture cohésive dans l'eau, sans dissipation, et avec le même calcul qu'à la partie 2 avec la tension de surface de l'eau égale à $72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, on devrait avoir A/A_0 de l'ordre de 10 %, ce qui est inférieur au taux de portance estimé grâce aux expériences de profilométrie.

Il nous semble donc vraisemblable de considérer que l'interface entre nos feuilles de papier est sèche, et que l'adhésion résulte principalement d'interactions moléculaires entre les fibres de cellulose. Celles-ci n'ont *a priori* pas de raison de dépendre de la vitesse, et il est donc cohérent d'obtenir un T^* constant comme on l'observe à la figure 2.6. La sensibilité de μ , en revanche, nous a conduit à ne pas faire varier la vitesse en même temps qu'un autre paramètre. Toutes les expériences présentées dans cette thèse ont été réalisées à des vitesses variant entre 1 mm/min et 10 mm/min, excepté bien sûr dans la partie de cette étude où on s'intéresse à l'influence de la vitesse.

D Résumé des résultats expérimentaux et conclusion sur l'origine de T^*

Dans ce chapitre, nous avons mené une étude systématique de la dépendance de T^* et de μ en fonction des paramètres l , L , m , M et v .

Nous avons fabriqué des assemblages contrôlés de feuilles que nous avons entremêlés et pour lesquels nous avons mesuré la force T nécessaire pour les séparer d'une distance d à l'aide d'une machine de force de traction. L'ajustement des courbes de forces au modèle d'Alarcón *et al.* nous a permis d'étudier la dépendance de T^* en fonction des paramètres l , L et v , ce qui n'avait pas été réalisé dans les travaux précédents.

Nous avons montré que T^* dépend de la largeur l des feuilles, mais pas de leur longueur L . La confrontation de ce résultat aux trois hypothèses sur la nature physique de T^* (la force d'adhésion, la force de courbure ou le poids) nous a permis de conclure que l'adhésion était la seule compatible avec les dépendances observées. La mesure de la rugosité du papier nous ayant conduit à un encadrement de l'aire réelle de contact, nous avons pu estimer l'ordre de grandeur de la force d'adhésion dans notre cas et nous avons montré qu'elle était compatible avec la valeur mesurée pour T^* .

Dans ce chapitre, nous avons conçu un dispositif expérimental permettant de faire varier drastiquement T^* en ajoutant une masse extérieure exerçant une force sur l'assemblage. Nous avons montré que le paramètre T^* correspondait alors bien à la projection du poids de la masse extérieure m selon l'angle des feuilles et nous avons ainsi confirmé que le paramètre d'ajustement T^* représente bien, expérimentalement, la force exercée sur la dernière page et que l'on peut faire varier cette force indépendamment des paramètres constitutifs de l'assemblage comme l , L ou M .

Enfin, nous avons étudié l'impact de la vitesse de déplacement du mors supérieur sur les valeurs de T^* et μ . Nous avons montré que T^* est indépendant de v , comme cela doit être le cas pour l'adhésion d'un matériau élasto-plastique. Nous avons montré en revanche que le coefficient de frottement μ dépendait logarithmiquement de la vitesse, ce que des travaux précédents avaient déjà montré pour le papier bristol, de sorte que le paramètre d'ajustement μ semble bien capter la réalité physique du coefficient de frottement.

Chapitre 3

Analyses avancées

Sommaire

A	Déviations du modèle	45
1	Analyse détaillée d'une courbe $T(d)$	45
2	Sensibilité du coefficient de frottement à la charge normale aux grandes distances de recouvrement	46
3	Approximation des petits angles à faible distance de recouvrement	49
B	Modèle théorique discret pour le calcul de $T(d)$	52
C	Résumé des résultats et conclusion	56

Dans ce chapitre, nous étudions plus en détail les courbes de force $T(d)$. Nous commençons par discuter les déviations des données expérimentales par rapport au modèle et nous proposons une explication de ces effets.

Puis, nous discutons le détail de la résolution des équations de la dynamique par Alarcón *et al.* et nous proposons une nouvelle résolution discrète. Nous examinons alors les conséquences du passage du continu au discret sur les paramètres d'ajustement.

A Déviations du modèle

1 Analyse détaillée d'une courbe $T(d)$

Nous avons montré dans la section précédente que le modèle de Alarcón *et al.* permettait de décrire les données expérimentales, sur une large gamme des paramètres l , L , v et m . On a représenté à la figure 3.1 des données expérimentales obtenues à différentes valeurs de la distance d_0 de séparation initiale (variant entre 4 mm et 31 mm), sous leur forme auto-similaire. La ligne pointillée représente le modèle.

On observe sur cette figure deux déviations au modèle :

- Quand d_0 est petit (inférieur à 8.5 mm), les données expérimentales dévient du modèle quand $\alpha = 2\mu M^2 \epsilon / d$ est grand, c'est-à-dire quand d est petit et donc que la distance de recouvrement des feuilles est grande ;
- Quelle que soit la valeur de d_0 , les données dévient systématiquement du modèle quand $T/(2MT^*)$ atteint des valeurs de l'ordre de 10, donc quand la force T est faible et que la distance de recouvrement des feuilles est petite.

L'objectif de cette section est d'étudier ces deux déviations et d'expliciter les limites du modèles induites par deux hypothèses du calcul de Alarcón *et al.*.

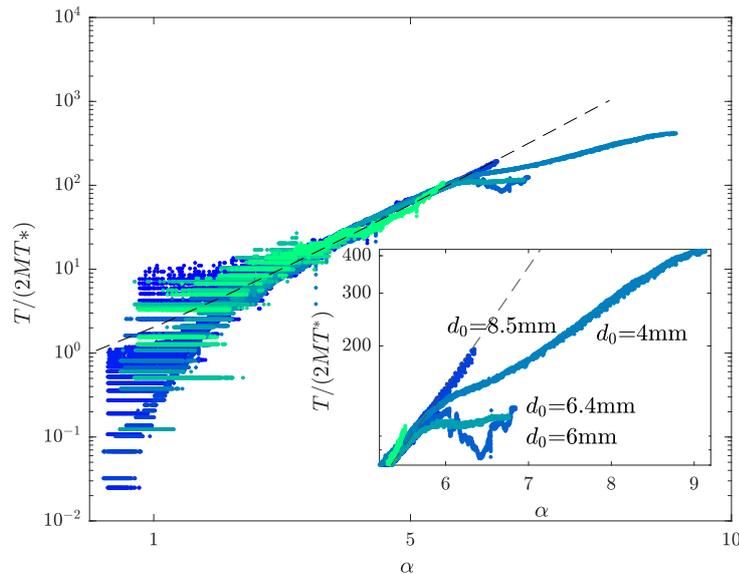


FIGURE 3.1 – **Adéquation au modèle des courbes à différentes valeurs de d_0** On représente sous leur forme auto-similaire les résultats des expériences de la figure 3.6, en fonction du paramètre d’Hercule α . L’insert est un agrandissement de la partie droite de la courbe. La ligne pointillée est la prédiction du modèle.

2 Sensibilité du coefficient de frottement à la charge normale aux grandes distances de recouvrement

L’une des lois proposées par Amontons et Coulomb stipule que la force de frottement T est proportionnelle à la charge N , et que l’on peut donc définir le coefficient de frottement μ tel que $T = \mu N$, avec μ dépendant de la nature des surfaces en contact, mais pas de la charge. Malgré des modèles microscopiques expliquant cette loi (voir la partie 1), celle-ci reste phénoménologique et on observe en pratique de nombreuses déviations.

En particulier, au cours d’une de nos expériences sur les feuillets entremêlés, la force tangentielle T varie typiquement de plusieurs dizaines de newtons à quelques dizaines de milli-newtons, soit sur une amplitude allant jusqu’à 4 décades. La charge normale N varie donc également sur 4 décades. Par conséquent, l’hypothèse de Coulomb de l’indépendance de μ en fonction de N , qui est utilisée dans le calcul menant à l’expression 1.1 pour $T(d)$, doit nécessairement être vérifiée pour obtenir un ajustement du modèle cohérent avec les données expérimentales.

On représente à la figure 3.2 des données expérimentales sous leur forme auto-similaire, et pour lesquelles d_0 a été choisi suffisamment grand (typiquement, supérieur à 10 mm). On observe, comme à la figure 3.1 que l’on obtient un bon accord avec le modèle dans le domaine où la force est importante et une déviation systématique pour les petites valeurs de T et donc de N . L’intégralité des expériences sans masse extérieure et à $d_0 < 10$ mm sur la figure 3.2 pour mettre en évidence le systématisme de cette déviation.

Pour comprendre s’il existe un lien entre cette déviation et le non-respect des lois de Coulomb, nous nous sommes intéressés en premier lieu aux propriétés de frottement du papier, en réalisant des mesures directes du coefficient de frottement, selon le protocole présenté à la partie 1. En effet, dans toutes les expériences présentées dans cette partie, le coefficient de frottement papier-papier μ a été mesuré par un ajustement des courbes $T(d)$. La mesure du coefficient de frottement en contact simple a donc permis d’établir une comparaison.

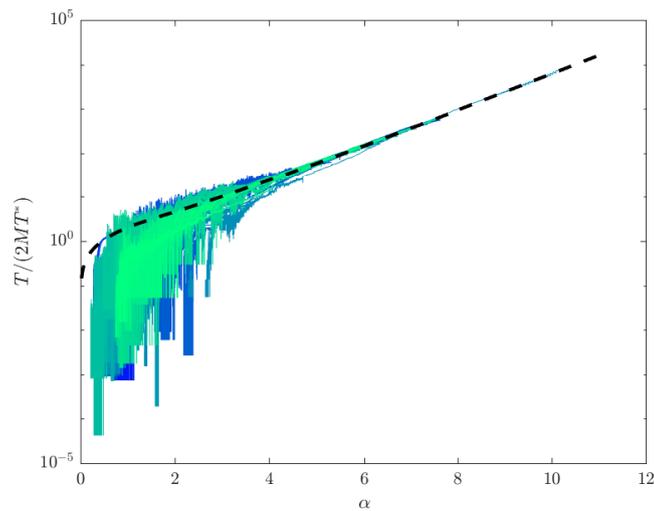


FIGURE 3.2 – **Courbe maîtresse de la force de traction adimensionnée en fonction du paramètre d’Hercule α .** Chaque couleur représente une expérience différente, avec L variant entre 3 cm et 25 cm, l entre 4 cm et 21 cm, M entre 15 et 30, v entre 0.6 cm/min et 60 cm/min, d_0 entre 10 mm et 17 mm. Toutes les expériences sans masse extérieure réalisées sur les annuaires sont présentées ici et se regroupent sur une courbe maîtresse auto-similaire, de la même façon qu’à la figure 2.1 (droite).

En prenant en compte les expériences à vitesse constante menées dans ce chapitre en faisant varier l , L , M , et m une large gamme de T a été explorée. Pour chacune d’elles on a calculé la force normale sur le domaine d’applicabilité du modèle en multipliant T par le coefficient de frottement μ obtenu par l’ajustement. On peut alors tracer le μ obtenu en fonction de la force normale N . Les résultats de ces deux méthodes sont présentés à la figure 3.3.

Les lignes horizontales représentent la valeur que la force normale N prend au cours d’une expérience, sur la zone de l’intervalle d’ajustement. Les cercles sont la valeur moyenne $\langle N \rangle$ de N sur ce même intervalle. Cette valeur est calculée en moyennant $N = T/\mu$ sur l’intervalle sur lequel on a fait l’ajustement au modèle. Les données représentées par des carrés sont des coefficients de frottement mesurés pour une seule interface papier-papier selon le protocole décrit plus haut (cf. Fig. 1.8). Les données représentées par des étoiles sont celles obtenus par J.-F. Bloch avec un tribomètre commercial.

La figure 3.3 met en évidence la dépendance très forte du coefficient de frottement avec la charge normale moyenne $\langle N \rangle$ dans le cadre des expériences à contact multiple. On obtient même des coefficients de frottement très supérieurs à 1 quand la charge normale est inférieure à 0.2 N. Ce résultat confirme le résultat identique déjà obtenu par [2]. Cette effet de décroissance de μ avec la charge normale se produit également pour les mesures en contact simples réalisées avec un tribomètre commercial. Celui-ci ne permet pas d’atteindre des charges aussi faibles, mais on constate que pour la même valeur de $\langle N \rangle$ (autour de 0.3 N), on obtient les mêmes valeurs de μ pour le contact simple et pour les contacts multiples (autour de 1), ce qui accrédite le fait que le paramètre d’ajustement μ capture bien le coefficient de frottement papier-papier.

Au-delà de la question de l’adéquation du modèle pour $T(d)$, on peut s’interroger sur la variation drastique des lois de Coulomb observée à la fois pour le contact simple et les contacts multiples. La constance du coefficient de frottement est une loi empirique, en pratique, Coulomb lui-même avait constaté une déviation de cette loi par exemple pour des charges très importantes [10, 42]. Depuis, les limites de cette loi ont été avérées par des travaux multiples, et en particulier

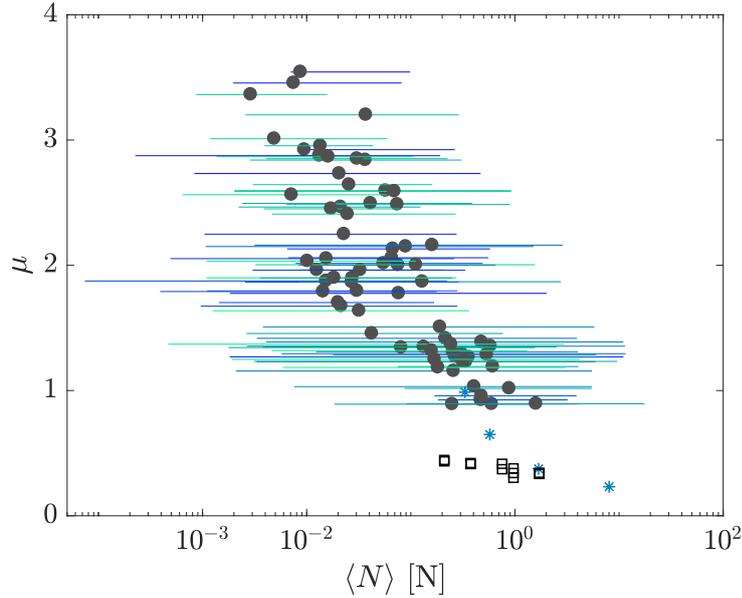


FIGURE 3.3 – **Coefficient de frottement pour différentes valeurs de la force normale.** Pour toutes les expériences menées sur les annuaires, quelle que soit leur géométrie et sans masse extérieure, on représente par des lignes horizontales les valeurs prises par la force normale $N = T/\mu$ sur l'intervalle de valeurs de d pour lequel notre modèle s'applique. Les cercles noirs sont la valeur moyenne de N sur ces intervalles. Le coefficient de frottement est obtenu en ajustant ces données au modèle. Les carrés sont les valeurs de μ mesurées pour le contact simple papier-papier grâce au montage présenté à la figure 1.8. Les étoiles sont d'autres mesures de μ pour un contact simple obtenues avec un tribomètre commercial par l'équipe de J.-F. Bloch. Les couleurs correspondent à différentes valeurs de M .

pour des charges faibles et pour des matériaux très élastiques [20, 43–45].

On représente à la figure 3.4 les mêmes données qu'à la figure 3.3 (sans les lignes horizontales, pour des questions de lisibilité), ainsi que trois ajustements des données expérimentales à trois modèles différents (lignes de tirets et de points).

Les deux lignes pointillées (bleue et noire) sont des ajustements des données expérimentales au modèle de Rabinowicz [20] $\mu = aN^{-b}$ prenant en compte les données en contact simple et contact multiple (bleu) et uniquement en contact multiple (noir). Dans le premier cas, l'ajustement donne $b = 0.24$ et dans le second $b = 0.21$. La ligne de points correspond est un ajustement du modèle de Crassous *et al.* [23] $\mu = a(1 + b/N)$, avec $a=0.9$ et $b = 40$ mN.

On observe que la décroissance de μ avec la force normale que l'on observe est cohérente avec un modèle en $\mu = aN^{-b}$. Ce modèle phénoménologique se retrouve pour le contact solide de plusieurs matériaux comme différents métaux nobles [20, 46]. À notre connaissance, cette dépendance en loi de puissance $\mu = aN^{-b}$ (représentées par les lignes de tirets) telle que l'a décrite Rabinowicz [20] est empirique et n'a pas été expliquée. La littérature évoque qu'à poids très faibles, le modèle de Bowden et Tabor sur la déformation des aspérités ne serait plus pertinent et qu'il faudrait prendre principalement en compte les interactions inter-atomiques entre les surfaces [47]. En revanche, le modèle microscopique des aspérités sphériques introduit par Bowden et Tabor décrit dans la partie 1 (voir l'équation 1.18) prédit l'exposant spécifique $b = 1/3$ pour cette même loi. Nos ajustements donnent b entre 0,21 et 0,24, ce qui est du même ordre de grandeur que la prédiction du modèle Bowden et Tabor. La différence entre ces deux valeurs issues des ajustements est due au fait que l'on prenne ou non en compte les données du contact simple. Des expériences complémentaires pourraient permettre d'investiguer plus avant ces différences. On pourrait par ailleurs vouloir expliquer cette dépendance de μ en N par la présence d'une nou-

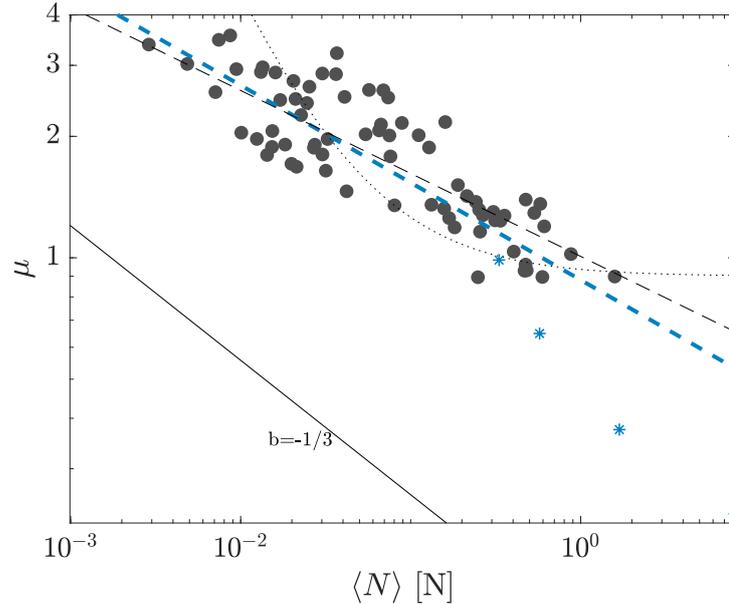


FIGURE 3.4 – Coefficient de frottement pour différentes valeurs de la force normale. Cette figure est une représentation logarithmique de la figure 3.3, où les cercles noirs et les étoiles correspondent aux mêmes expériences. Les deux lignes pointillées sont des ajustements au modèle de Rabinowicz tel que $\mu = aN^{-b}$. La ligne bleue prend en compte les données des expériences des annuaires et des expériences de contact simple de J.-F. Bloch, la ligne noire ne prend en compte que les données des annuaires. Dans le premier cas, on obtient $b = 0.24$ et dans le second $b = 0.21$. La ligne de points est un ajustement du modèle de Crassous [23] $\mu = a(1 + b/N)$ aux données expérimentales du contact simple et du contact multiple, avec $a = 0.9$ et $b = 40$ mN.

velle force normale indépendante de N (qui pourrait être due à la présence de ponts capillaires), en se fondant sur le modèle $\mu = a(1 + b/N)$, que l'on a présenté dans la partie introductive de cette thèse. Ce modèle prédit une décroissance de μ avec N , mais comme le montre la courbe en pointillés sur la figure 3.4, ce modèle échoue à décrire en même temps les données à petite et grande charge normale. Les données expérimentales sont donc plus cohérentes avec une expression de μ de la forme de $\mu = aN^{-b}$.

Ces résultats montrent donc que μ dépend fortement de la charge normale. Le bon accord entre les données et un modèle en loi de puissance implique que cette dépendance est d'autant plus importante aux petites valeurs de la charge normale, donc de la force T , et donc aux grandes valeurs de la distance de séparation d . Ainsi, la décroissance de T quand d augmente impliquant une variation de μ , il n'est pas surprenant que le modèle de Alarcón *et al.*, qui prend l'hypothèse d'un μ constant, ne puisse pas décrire tout l'intervalle de valeurs de T , et que l'écart entre le modèle et les valeurs expérimentales soit d'autant plus important que d est grand, comme on l'observe sur les courbes $T(d)$.

3 Approximation des petits angles à faible distance de recouvrement

Nous allons nous intéresser dans cette partie aux déviations aux modèles pour les petites valeurs de d .

Pour obtenir l'équation 1.1, Alarcón *et al.* font l'hypothèse que l'on peut passer au continu en posant $z = n/M$, et la résolution continue se poursuit ensuite en considérant que $\alpha/M \ll 1$

(le détail des calculs et en particulier du passage au continu sera abordé à la section B). Nous allons voir dans cette partie que cette dernière hypothèse, qui est une restriction supplémentaire par rapport à la simple continuité, est interprétable en terme d'angle.

Par définition, on a, pour n'importe quelle feuille n et pour une distance de séparation d :

$$\tan \theta_n = 2n\epsilon/d$$

où le facteur 2 provient du fait que les feuilles du second livret sont intercalées entre celles du premier. On suppose ici que l'assemblage est compact et que les feuilles sont incompressibles. L'équation 3.5 devient alors :

$$\mu \tan \theta_M \ll 1 \tag{3.1}$$

Dans toutes nos expériences, μ est environ égal à 1 ou supérieur (voir figure 3.3). Donc l'équation 3.1 revient à dire que l'angle fait par la dernière feuille avec la ligne médiane de l'assemblage est petit. Dans ce cas tous les autres angles θ_n , qui sont plus petits que θ_M le sont également. L'hypothèse $\alpha/M \ll 1$ faite par Alarcón *et al.* revient donc à considérer que, pour toutes les expériences et pour toutes les valeurs de d , l'angle fait par toutes les feuilles de l'assemblage est petit.

On a vu plus haut (cf. Fig.3.1) que, pour les grandes valeurs de $\alpha = 2\mu M^2\epsilon/d$, les courbes se situent systématiquement en-dessous de la prédiction du modèle (représentée par la ligne pointillée). Par conséquent, les valeurs de μ et T^* obtenues pour ces expériences sont nécessairement moins fiables. Et en effet, plus d_0 est petit, plus l'angle θ_M est grand, et donc l'hypothèse 3.1 n'est plus vérifiée.

En effet, on a tracé sur la figure 3.5 les variations de T^* en fonction de d_0 et on observe que les valeurs à très petit d_0 sont plus élevées que les autres, alors que T^* ne devrait pas dépendre de d_0 . Par ailleurs, on a tracé sur la figure 3.6 la valeur de la force maximale T_{\max} au cours d'une

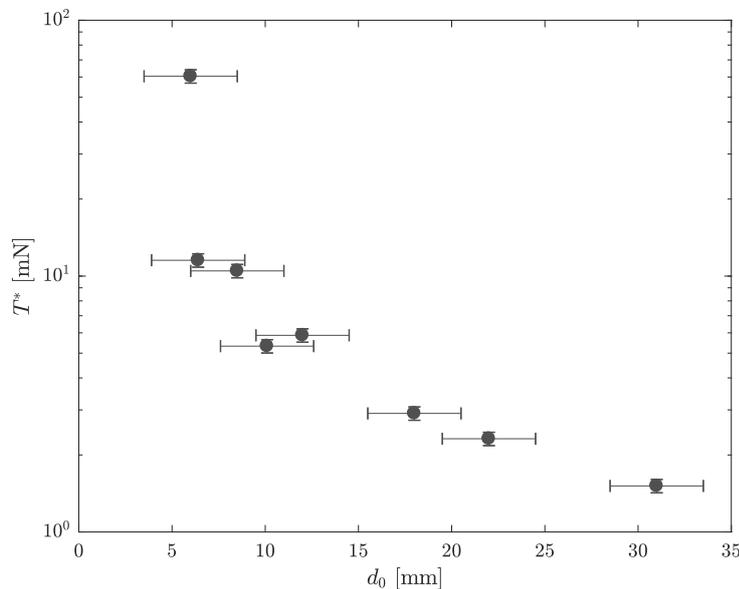


FIGURE 3.5 – Valeur de T^* pour différentes distances d'entrelacement initial. Un ajustement au modèle des mêmes expériences à d_0 variable que celles de la figure 3.6 donne la valeur de T^* . Les barres horizontales sont l'incertitude de mesure sur d_0 et les barres verticales sont l'erreur de 12 % sur T^* comme dans les mesures des parties précédentes.

expérience à d_0 donnée. La ligne pointillée représente un ajustement de ces points (excepté le

premier point où $d_0 = 4$ mm) issus de différentes expériences au modèle de H. Alarcón *et al.* pour lequel. On trouve $\mu = 1.9$ et $T^* = 34$ mN.

On observe sur cette figure que le modèle Alarcón *et al.* décrit correctement la valeur maximale de la force T obtenue pour une distance de séparation d_0 (excepté le premier point pour $d_0 = 4$ mm). Cependant, il faut pour cela choisir une valeur des paramètres d'ajustement μ et T^* qui est très différente de l'ensemble des valeurs que l'on obtient en ajustant séparément les différentes courbes $T(d)$ issues des expériences à d_0 variable. La moyenne de ces valeurs est respectivement $T^* = 12$ mN et $\mu = 3,7$.

Cette différence, en particulier sur μ , est due au fait que le coefficient de frottement est plus important aux petites charges, donc quand d est grand (voir partie 3). Or, on ne prend alors en compte dans la figure 3.6 que la valeur la plus grande de T donc la valeur pour laquelle la charge normale est la plus importante, et donc le coefficient de frottement le plus bas.

Cela signifie qu'il est important de contrôler d_0 lors des expériences, et en particulier dans la gamme de valeur où il aura un impact important sur T^* (en-dessous d'environ $d_0 = 10$ mm). Pour cette raison, on ne choisira jamais de valeur de d_0 inférieure à 10 mm.

Au-delà de l'effet de la dépendance de μ en T (donc en d), des problèmes expérimentaux peuvent également expliquer les problèmes observés à petit d_0 ($d_0 < 1$ cm). En effet, quand d_0 est petit, une petite incertitude sur sa valeur générera une grande variation de T . Expérimentalement, quand on réalise l'expérience, on installe l'assemblage de feuillets avec ses mors dans la machine de traction, et on remonte très légèrement le mors supérieur vers le haut, de façon à tendre les feuilles avant de commencer à enregistrer des données. On mesure ensuite d_0 et on lance l'expérience, où le déplacement du mors supérieur est contrôlé par l'interface informatique de la machine. Or, d n'est pas tout à fait identique pour les feuilles du centre de l'assemblage et pour celles de l'extérieur, qui se recouvrent nécessairement sur une plus courte distance. On mesure d_0 par rapport à la feuille du centre, ce qui conduit à une sous-estimation systématique de d_0 . De plus, les feuilles ne sont pas nécessairement parfaitement tendues dès le début de l'expérience, de sorte que le d_0 réel est en fait plus grand que celui que l'on mesure.

Enfin, les feuilles ne sont pas toutes exactement de la même longueur, à la fois à cause de la précision de la coupe et des conditions de fixation dans les mors. Avec l'ensemble de ces effets, on estime que notre mesure de d_0 se fait avec une incertitude de l'ordre de 0.5 mm.

Ceci est tout à fait négligeable pour les grandes valeurs de d_0 (entre 10 mm et 20 mm) que l'on a adoptées pour les expériences présentées tout au long de ce chapitre mais a un effet beaucoup plus conséquent pour des distances d'entrelacement plus courtes.

Pour se faire une idée de l'ampleur de cet effet on imagine que l'on réalise une expérience à $M = 10$, $d_0 = 10$ mm pour laquelle $\mu = 1,9$ et $T^* = 34$ mN, qui sont des valeurs typiques. En considérant que le modèle 1.1 s'applique, on peut calculer une valeur théorique de $T(d)$. Si on estime alors, comme expliqué plus haut, que notre valeur de d_0 (et donc de d) est valable à ± 0.25 mm on calcule que, pour $d_0 = 10$ mm, la valeur de $T(d)$ est donnée à environ 3 N près, ce qui est acceptable compte-tenu du fait que le T que l'on mesure varie entre plusieurs centaines et quelques dizaines de newton sur les intervalles d'ajustement que l'on choisit. En revanche, pour $d_0 = 5$ mm, l'incertitude théorique sur T est de l'ordre de 250 N ! Par conséquent, on n'a utilisé que des valeurs de d_0 au moins supérieures à 10 mm pour toutes les expériences présentées dans cette thèse et on s'est assuré, au sein d'une série d'expériences où l'on fait varier un paramètre comme la longueur ou la largeur, que d_0 variait peu.

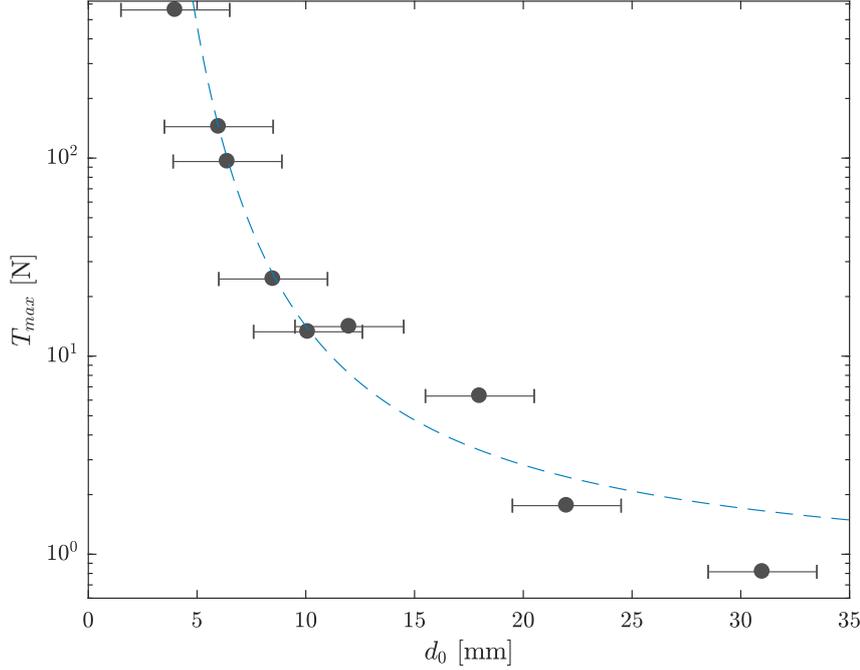


FIGURE 3.6 – **Valeur de T_{max} pour différentes distances d’entrelacement initial.** Les expériences sont réalisées pour des valeurs de d_0 variant entre 4 mm et 31 mm. T_{max} est la valeur maximale de la tension pour chacune de ces expériences. Les barres horizontales représentent l’incertitude sur la mesure de d_0 . La ligne pointillée est un ajustement de $T_{max}(d_0)$ au modèle de l’équation 1.1 pour lequel on obtient $\mu=1.9$ et $T^* = 34$ mN.

B Modèle théorique discret pour le calcul de $T(d)$

Pour obtenir l’équation 1.1, Alarcón *et al.* s’affranchissent de la somme discrète des forces T_n exercées sur chacune des feuilles n pour passer à une description continue de la force $T(z)$. Nous allons présenter ici le détail du calcul. Les feuilles sont numérotées de 1 à M à partir du centre d’un livret. Un livret contient donc $2M$ feuilles et l’assemblage complet en contient $4M$. On définit θ_n l’angle entre la feuille n et la ligne centrale, $h_n = n\epsilon$ la distance entre la feuille et la ligne centrale, $F_{n,n+1}$ la force de frottement exercée par la feuille n sur la feuille $n+1$ et T_n la force exercée par l’opérateur sur la feuille n (voir figure 1.2). On définit également t_n la tension de la feuille dans sa partie inclinée.

En appliquant l’équilibre des forces aux points A et B, et en posant N_n la force normale exercée en B par toutes les feuilles se situant au-dessus de B, Alarcón *et al.* obtiennent :

$$\sum_{k=n}^M \frac{h_k T_k}{d} = N_n$$

C’est-à-dire que l’inclinaison d’une feuille transforme une partie de la force T_n exercée dans l’axe de l’assemblage par l’opérateur en une petite force normale N_n .

À la limite du glissement, cette force normale se convertit en une force de frottement que l’on peut exprimer, si on fait l’hypothèse que les lois de Coulomb s’appliquent, par :

$$F_{n+1,n} + F_{n-1,n} = 2\mu N_{n+1} + 2\mu N_n$$

où les deux facteurs 2 proviennent de la symétrie du problème. Par ailleurs, comme B est à l’équilibre, on a :

$$T_n = F_{n+1,n} + F_{n-1,n}$$

Ceci permet alors de définir l'augmentation de la force tangentielle quand on se décale d'une feuille plus profondément vers le centre du livret par :

$$\begin{aligned}
 T_n - T_{n+1} &= F_{n+1,n} + F_{n-1,n} - F_{n+2,n+1} - F_{n,n+1} \\
 &= F_{n-1,n} - F_{n+2,n+1} \\
 &= 2\mu(N_n - N_{n+2}) \\
 &= 2\mu \left(\sum_{k=n}^M \frac{h_k T_k}{d} - \sum_{k=n+2}^M \frac{h_k T_k}{d} \right) \\
 T_n - T_{n+1} &= 2\frac{\mu}{d}(h_n T_n + h_{n+1} T_{n+1})
 \end{aligned}$$

Pour obtenir l'équation 1.1, l'étape suivante est de passer de la variable discrète n à la variable continue $z = n/M$, l'équation précédente devient alors, en posant $\alpha = 2\mu M^2 \epsilon / d$:

$$T(z) - T\left(z + \frac{1}{M}\right) = \frac{\alpha}{M} \left(\left(z + \frac{1}{M}\right)T\left(z + \frac{1}{M}\right) + zT(z) \right)$$

Pour $M \gg 1$ on peut écrire $T\left(z + \frac{1}{M}\right) = T(z) + \frac{1}{M}T'(z)$ et le calcul de Alarcón *et al.* donne alors, en multipliant les deux membres par M :

$$T'(z) \left(1 + \frac{z\alpha}{M} + \frac{\alpha}{M^2}\right) + T(z) \left(2z\alpha + \frac{\alpha}{M}\right) = 0 \quad (3.2)$$

On approxime ensuite cette expression à l'ordre 0 en α/M et on obtient :

$$T'(z) + 2z\alpha T(z) = 0 \quad (3.3)$$

La résolution de cette équation différentielle donne $T(z)$ que l'on intègre ensuite entre $z = 0$ et $z = 1$, avec T^* comme condition limite en $z = 1$ pour obtenir l'équation 1.1.

Pour calculer T sans passer par une approximation continue, il n'est pas nécessaire de faire l'hypothèse que $M \gg 1$ ni que $\alpha/M \ll 1$, puisqu'on peut exprimer directement la relation de récurrence qui lie T_{n+1} et T_n , en l'occurrence :

$$T_{n+1} = T_n \frac{1 - \frac{2\mu\epsilon n}{d}}{1 + \frac{2\mu\epsilon(n+1)}{d}} \quad (3.4)$$

Ce qui permet de calculer le terme général T_n de la suite en faisant le produit de tous les termes de $k = M$ à $k = 1$, et il suffit ensuite de faire la somme de toutes les tractions T_n exercées sur les feuilles pour obtenir T la traction totale exercée par l'opérateur.

On a représenté sur les figures 3.7 et 3.8 la valeur théorique de la traction T obtenue par l'équation 1.1 de Alarcón *et al.* en trait plein et la valeur que nous obtenons sans passer par une approximation continue en pointillés.

Sur la figure 3.7, on a fait varier le nombre de feuilles entre 15 et 30, et on a pris $\mu = 1,5$ et $T^* = 10$ mN, qui sont des valeurs typiques pour ce paramètre. La flèche indique la direction selon laquelle le nombre de feuilles M est croissant (plus les livrets sont épais, plus la force T est importante). Les courbes de la figure 3.8 sont obtenues de la même façon, mais on fixe le nombre de feuilles à $M = 30$ et le coefficient de frottement varie entre $\mu = 0,5$ et $\mu = 3$, ce qui correspond à la majeure partie de l'intervalle sur lequel μ varie pendant nos expériences (voir la figure 3.3). On constate tout d'abord que les courbes discrètes et continues ont des allures similaires. Par ailleurs, on remarque que :

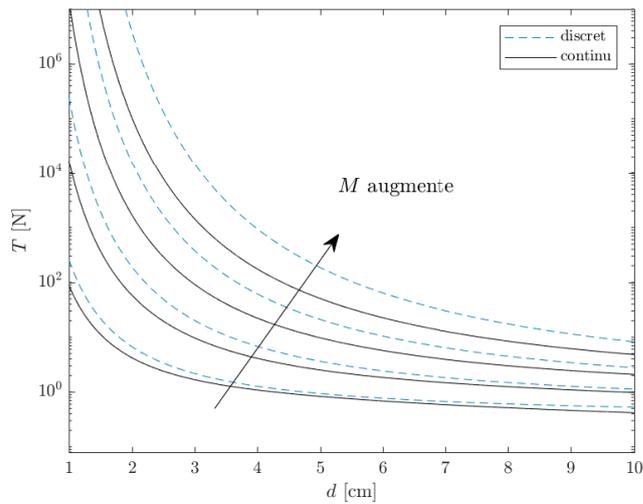


FIGURE 3.7 – Valeur théorique de la force de traction calculée avec un modèle discret ou continu et pour différents nombres de feuilles. On représente les courbes pour $M = 15, 20, 25, 30$. On prend $\mu=1,5$ et $T^*=10$ mN pour le calcul discret (ligne pointillée) et le calcul continu (ligne pleine). La flèche verticale représente la direction dans laquelle M augmente (plus M est grand plus $T(d)$ est grand).

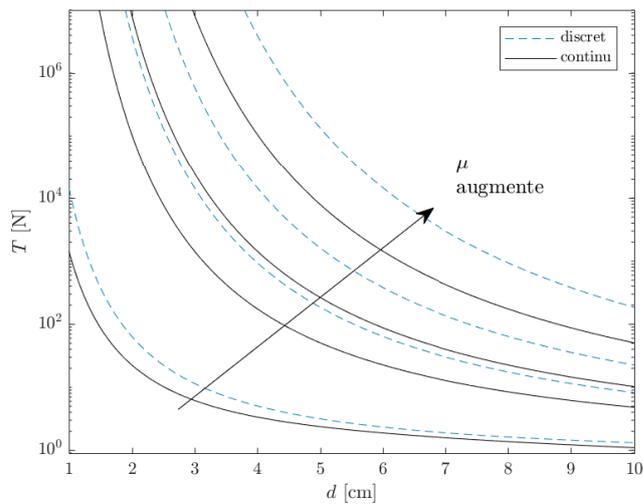


FIGURE 3.8 – Valeur théorique de la force de traction calculée avec un modèle discret ou continu et pour différents nombres de feuilles. On représente les courbes pour $\mu=0,5, 1,5, 2, 3$. On prend $M = 30$ et $T^*=10$ mN pour le calcul discret (ligne pointillée) et le calcul continu (ligne pleine). La flèche verticale représente la direction dans laquelle μ augmente (plus μ est grand plus $T(d)$ est grand.)

- L'écart entre les courbes est plus important quand M ou μ augmente (cf. Fig.3.7 et Fig.3.8),
- L'écart entre les courbes est plus important quand d diminue (cf. Fig.3.7 et Fig.3.8),

Le premier point est un résultat surprenant, parce qu'on s'attend à ce que l'approximation continue, en définissant $z = n/M$ fonctionne mieux pour un grand nombre de feuilles. Mais, comme on l'a montré plus haut, on fait également l'hypothèse, dans le cas continu, que $\alpha/M \ll 1$

soit que :

$$2M\mu\epsilon/d \ll 1 \quad (3.5)$$

Ceci explique l'augmentation de l'écart entre les deux modèles quand le nombre de feuilles augmente. De la même façon, l'hypothèse 3.5 se vérifie mieux pour des grandes valeurs de d et pour des petites valeurs de μ , donc quand les livrets sont plus éloignés et quand la charge N est plus importante (car le coefficient de frottement décroît avec la charge, comme décrit à la partie 3). Pour obtenir une charge plus importante, le plus simple est d'augmenter le nombre de feuilles, mais M a un effet antagoniste sur la précision du modèle continu. La seule façon d'augmenter significativement la charge, sans changer le nombre de feuilles, est de rajouter une masse extérieure sur l'assemblage, comme nous l'avons présenté à la partie A.

Les expériences qui seront donc les plus facilement ajustables au modèle continu sont les expériences à petit nombre de feuilles M et avec une masse extérieure importante, par exemple comme celles qui sont présentées à la figure 2.1 (droite) et sur lesquelles on a qualitativement de meilleurs résultats que pour les expériences sans masse supplémentaire.

Par ailleurs, la très grande majorité des expériences présentées dans cette thèse ont été réalisées pour des valeurs de M relativement basses (toujours inférieures à 30 et généralement égales à 15), ce qui rend pertinent l'utilisation du modèle continu pour nos expériences.

Cependant, on peut s'interroger sur l'impact du choix du modèle continu sur les valeurs μ et T^* issues de l'ajustement des courbes. En pratique, la formule de récurrence 3.4 ne permet pas de donner une expression mathématique du terme général de la suite : on calcule celui-ci par itérations en utilisant la formule de récurrence et avec $T_0 = T^*$. Cette contrainte pose des problèmes techniques pour l'implémentation de la fonction $T = \sum_{n=1}^M T_n$ comme modèle pour l'ajustement des données expérimentales grâce une technique de régression classique et compatibles avec le fonctionnement des algorithmes d'ajustements déjà codés que nous avons à notre disposition.¹ Nous avons donc employé une autre méthode pour estimer la différence entre le modèle discret et le modèle continu.

Celle-ci a consisté à générer, à partir d'une valeur de μ , de T^* et de M une courbe $T(d)$ calculée à l'aide du modèle discret, telle celles que l'on a représentées aux figures 3.7 et 3.7. Ces courbes théoriques discrètes $T(d)$ ont ensuite été ajustées au modèle continu pour $T(d)$, c'est-à-dire à l'équation 1.1. Pour chaque valeur de M , de μ et de T^* on a calculé l'écart $\Delta T^* = T_{\text{théorique}}^* - T_{\text{ajustement}}^*$ entre le $T_{\text{théorique}}^*$ utilisé pour générer la courbe discrète $T(d)$ et le $T_{\text{ajustement}}^*$ obtenu par l'ajustement de cette courbe théorique discrète au modèle continu. Le même processus a été reproduit pour mesurer l'écart $\Delta\mu$ sur le coefficient de frottement. On représente à la figure 3.9 (respectivement 3.10) la valeur de $\Delta T^*/T_{\text{théorique}}^*$ (respectivement $\Delta\mu/\mu_{\text{théorique}}$) en fonction des valeurs de $T_{\text{théorique}}^*$ (respectivement $\mu_{\text{théorique}}$) choisies pour créer les courbes avec le modèle discret, le tout pour différentes valeurs de M .

On observe que l'écart entre les deux T^* est toujours inférieur à 10 % quelle que soit la valeur de M ce qui reste limité. Cet écart change de signe en fonction de la valeur de M , ce qui implique que le modèle ne surestime ou ne sous-estime pas de façon systématique T^* par rapport au modèle discret. Par ailleurs, la très grande majorité des expériences de cette thèse ont été réalisées pour $M = 15$, valeur pour laquelle l'écart est inférieur à 5 %.

Pour μ , la figure 3.10 met en évidence des écarts plus importants, qui atteignent jusqu'à -29 %, quand M et $\mu_{\text{théorique}}$ sont élevés. On observe que cet écart est d'autant plus grand que M et

1. Ce problème est nécessairement solvable, mais nous n'y sommes pas parvenus dans l'état actuel de nos connaissances. Une des techniques utilisées a été de reconstruire de zéro un algorithme de minimisation de l'écart quadratique entre la courbe expérimentale et le modèle, mais nous ne sommes pas parvenus à rendre cet algorithme suffisamment efficace en terme de temps de compilation et suffisamment fiable dans les valeurs des paramètres d'ajustement vers lesquelles il convergeait pour l'inclure ici.

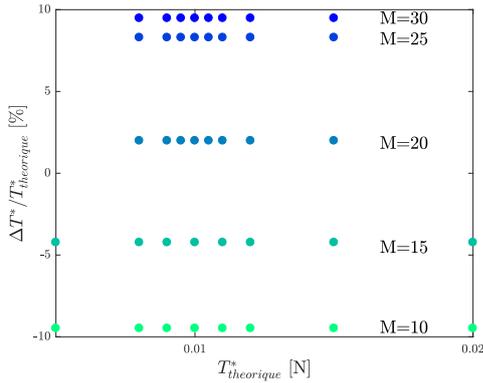


FIGURE 3.9 – **Ajustement du modèle discret à différents T^* par le modèle continu.** On génère des courbes théoriques $T(d)$ avec le modèle discret, pour M variant entre 10 et 30, pour $T^*_{\text{théorique}}$ variant entre 5 mN et 20 mN et pour $\mu_{\text{théorique}}=1.5$. Le modèle continu est ensuite ajusté aux courbes théoriques et on représente par des cercles la valeur de $(T^*_{\text{théorique}} - T^*_{\text{ajustement}})/T^*_{\text{théorique}}$ obtenue pour chaque M et chaque $T^*_{\text{théorique}}$.

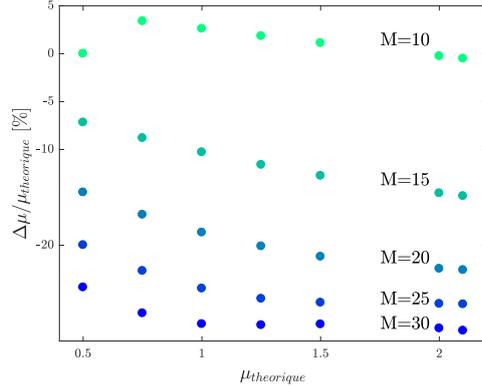


FIGURE 3.10 – **Ajustement du modèle discret à différents T^* par le modèle continu.** On génère des courbes théoriques $T(d)$ avec le modèle discret, pour M variant entre 10 et 30, pour $T^*_{\text{théorique}} = 10$ mN. Le modèle continu est ensuite ajusté aux courbes théoriques et on représente par des cercles la valeur de $(\mu_{\text{théorique}} - \mu_{\text{ajustement}})/\mu_{\text{théorique}}$ obtenue pour chaque M et chaque $\mu_{\text{théorique}}$.

μ sont grands, ce qui est cohérent avec le résultat observé sur les figures 3.7 et 3.8. On peut s'interroger sur l'effet de cet écart qui n'est plus négligeable pour les grandes valeurs de μ et de M sur l'ensemble des valeurs mesurées pour μ . On a retracé à la figure 3.11 les données de la figure 3.3, où chaque valeur de μ a été corrigée en $\mu + \Delta\mu$, le $\Delta\mu$ ayant été calculé à chaque fois pour la valeur de M correspondant à l'expérience en question et pour la valeur de T^* que l'ajustement avait donnée.

On n'observe pas de différence majeure entre la version corrigée et la version non-corrigée de ces données. L'intervalle sur lequel μ varie est centré sur des valeurs légèrement plus petites (on passe de $[3,5; 0.89]$ à $[3,18; 0.79]$), ce qui est cohérent avec le fait que pour toutes les valeurs de M de nos expériences, à part $M = 10$, $\Delta\mu < 0$. Cet effet donne un meilleur accord entre les expériences des annuaires et les expériences en contact simple, mais n'est pas d'une ampleur suffisante pour modifier les conclusions de la section 3.

C Résumé des résultats et conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la validité des trois hypothèses faites par Alarcón *et al.* et menant au modèle que nous avons utilisé pour trouver T^* dans la partie précédente.

Nous nous sommes d'abord intéressés aux déviations de ce modèle que l'on observe pour les petites valeurs de d_0 et pour les petites valeurs de la force T .

Pour le cas des déviations à petit T , nous avons mis en place un protocole de mesure du coefficient de frottement en contact simple avec un patin frottant, et nous avons comparé ces valeurs à celles obtenues pour μ en ajustant les courbes au modèle. Nous avons montré que, dans le cas du contact simple, comme du contact multiple, le coefficient de frottement est très sensible à la charge normale. Nous avons montré que cette dépendance exponentielle est comparable à celle que le modèle microscopique de Bowden et Tabor prévoit et s'inscrit dans le cadre d'autres mesures obtenues pour d'autres types de matériaux.

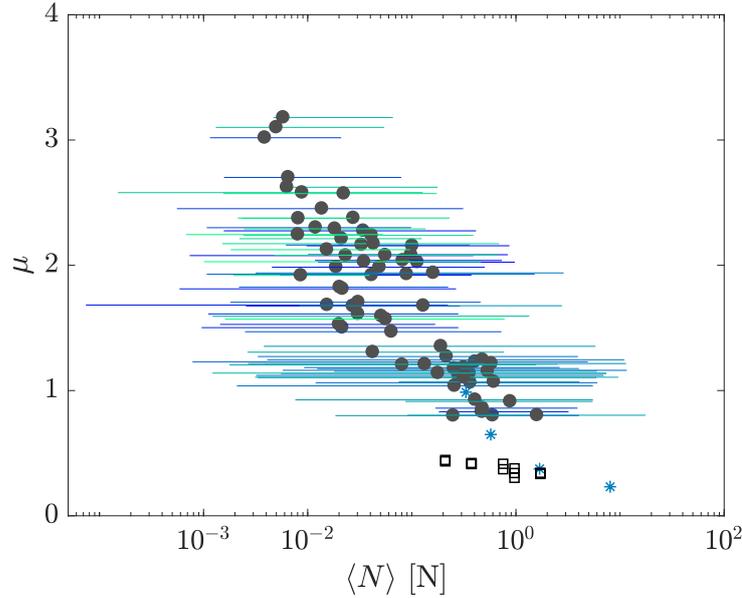


FIGURE 3.11 – Coefficient de frottement pour différentes valeurs de la force normale, corrigé de $\Delta\mu$. Les lignes horizontales représentent les valeurs prises par la force normale $N = T/\mu$ sur l'intervalle de valeurs de d pour lequel notre modèle s'applique. Les cercles noirs sont la valeur moyenne de N sur ces intervalles. Le coefficient de frottement est obtenu en ajustant ces données au modèle continu, et en les corrigeant ensuite de $\Delta\mu$, qui est obtenu en ajustant le modèle continu au modèle discret dont les paramètres $\mu_{\text{theorique}}$ et $\mu_{\text{theorique}}^*$ sont ceux obtenus par l'ajustement continu à la courbe expérimental. Les carrés sont les valeurs de μ mesurées pour le contact simple papier-papier grâce au montage présenté à la figure 1.8. Les étoiles sont d'autres mesures de μ pour un contact simple obtenues avec un tribomètre commercial par l'équipe de J.-F. Bloch. Les couleurs correspondent à différentes valeurs de M .

Pour le cas des déviations aux petites valeurs de d_0 , nous avons montré que celles-ci pouvaient s'expliquer par le fait qu'une petite valeur de d_0 génèrait un grand angle entre les feuilles, alors que le modèle fait justement une hypothèse de petits angles pour permettre la linéarisation. Enfin, nous avons proposé une résolution discrète du problème des annuaires, qui permet de s'affranchir à la fois de l'hypothèse que z/M et α/M sont petits. Nous avons étudié la différence entre les courbes théoriques obtenues à partir du modèle discret et du modèle continu et nous avons montré que plus M et μ augmentent, plus cet écart est important, de même que plus d diminue. Ce résultat est cohérent avec les déviations du modèle que l'on avait mises plus haut en évidence pour les petits d_0 et les petits T (pour lesquels μ est grand), de sorte qu'il fournit une explication supplémentaire aux phénomènes observés en début de chapitre. Enfin, nous avons étudié l'impact du passage à un modèle discret sur les paramètres d'ajustement T^* et μ et nous avons montré que celui-ci est limité dans le cas de T^* , de sorte que cela ne remet pas en question les résultats du chapitre précédent.

Finalement, les conditions expérimentales que nous avons choisies pour la majorité des expériences présentées dans le chapitre précédent ($M = 15$, $d_0 > 10$ mm) correspondent à un des cas où le modèle discret et le modèle continu sont les plus proches, et qu'il est donc souhaitable de rester au voisinage de ces paramètres pour obtenir de bons ajustements avec le modèle continu.

Chapitre 4

Conclusion générale sur les assemblages de feuilles entremêlées

Dans cette partie, nous nous sommes attachés à identifier la nature de la force T^* , dont l'ordre de grandeur est le poids d'un papillon mais dont l'amplification mécanique décrite par Alarcón *et al.* génère la résistance spectaculaire d'un assemblage de deux livrets aux feuilles entremêlés.

Nous avons mené des expériences sur des assemblages contrôlés de feuilles en étudiant l'effet du nombre de feuilles, de leur géométrie et de leur distance d'entrelacement sur leur résistance à la traction et en particulier sur les paramètres μ et T^* dont la connaissance suffit à caractériser la décroissance de $T(d)$. La fabrication d'un dispositif permettant d'ajouter une masse extérieure sur les livrets nous a permis de montrer que le paramètre d'ajustement T^* , que l'on a fait varier d'un facteur 50, est bien la force exercée sur la dernière feuille. Une étude systématique des dépendances de T^* a mis en évidence que cette force ne pouvait être ni le poids, ni la courbure, mais l'adhésion entre la dernière feuille et celle qui la précède. Nous avons discuté des différentes hypothèses du modèle dont les limites n'avaient pas été explorées par Alarcón *et al.* et montré par le calcul et expérimentalement ses limites pour les grands nombres de feuilles et les petites distances d'entremêlement.

Une façon intéressante de poursuivre ce travail serait de modifier la mécanique du système en changeant le matériau utilisé pour les feuilles. Le modèle présenté ici n'est valable que pour des feuillettes inextensibles, incompressibles, et respectant les lois de Coulomb pour le frottement sec. L'utilisation, de feuilles élastiques ou déformables serait une perspective intéressante qui nécessiterait de prendre en compte de nouveaux phénomènes. Les élastomères, comme par exemple le caoutchouc, sont des matériaux extensibles, la longueur L ne serait plus une constante mais dépendrait pour une feuille n de la force exercée sur elle par le reste de l'assemblage. De sorte que L dépendrait de la position de la feuille au sein de l'assemblage, de la distance d'entremêlement et du coefficient de frottement. Par ailleurs si les feuilles s'étirent dans le sens de leur longueur, on ne pourrait plus considérer que la distance $d - d_0$ est directement égale au déplacement du mors supérieur, et il faudrait définir séparément la distance d'entrelacement d et l'écart entre les deux mors.

L'utilisation d'un matériau compressible mais peu extensible comme par exemple de feuilles de mousse de polyéthylène permettrait de faire varier l'épaisseur d'une feuille ϵ avec la force normale, donc avec d , et de la position n . Il serait aussi envisageable de faire varier certains paramètres sans modifier drastiquement la physique du système, comme par exemple le coefficient de frottement (en utilisant des feuilles de PTFE, les expériences préliminaires effectuées en ce sens ne seront pas présentées ici), ou la rigidité de courbure (en utilisant d'autres types de

papiers plus épais).

Par ailleurs, la lubrification du système, en modifiant à la fois le frottement entre les pages et en ajoutant des questions de compressibilité du liquide, ouvre des perspectives intéressantes.

Enfin, plutôt que d'étudier l'assemblage lui-même, on pourrait aussi envisager de l'utiliser comme un outil. L'expérience des annuaires permet d'amplifier la force T^* proportionnellement à $\exp(M^2)$ environ, ce qui soulève des perspectives intéressantes pour l'étude de l'adhésion. La force nécessaire pour rompre une interface non-lubrifiée entre deux matériaux durs est généralement assez faible (de l'ordre de quelques dizaines de mN), ce qui la rend délicate à mesurer. Le système des annuaires pourrait permettre d'amplifier l'adhésion à des valeurs plus aisées à mesurer. Des expériences préliminaires que l'on ne présentera pas ici ont été menées dans ce sens, pour mesurer l'effet du temps de contact sur la force de détachement d'une feuille¹. On pourrait aussi imaginer amplifier n'importe quelle autre force en l'appliquant seulement sur la dernière feuille (comme on l'a fait à la section A avec le poids).

Au-delà de son intérêt d'un point de vue fondamental, une meilleure compréhension de l'expérience des annuaires peut être utile pour s'intéresser à d'autres systèmes.

Ce type spécifique d'assemblage entremêlé comporte des similitudes géométriques avec la structure des muscles, et en particulier des sarcomères qui sont les sous-unités fonctionnelles permettant l'extension ou la contraction du tissu. La physique de la décontraction des muscles, en particulier l'étude du frottement et plus généralement de la dissipation d'énergie au sein d'un sarcomère est une question d'intérêt pour la biologie [48, 49]. Les résultats apportés par l'étude de « l'expérience des annuaires » pourraient apporter un éclairage intéressant à cette question ou ouvrir des perspectives pour la fabrication d'unités contractiles synthétiques destinées à la robotique. La facilité avec laquelle il est possible d'ajuster le paramètre T^* en ne changeant pas l'intégralité du système mais seulement la force extérieure s'exerçant sur lui, comme on l'a montré à la partie A, permet aussi d'envisager des applications dans l'ingénierie, comme par exemple dans des systèmes de freinage ou de fixation réversible.

En effet, les performances mécaniques de ce type d'assemblage sont véritablement impressionnantes. Si l'on revient à la question initiale des vulgarisateurs comme *Mythbuster* de la force nécessaire à séparer deux annuaires, il est facile de l'estimer en utilisant le modèle de [2], ce qui n'a finalement été fait par personne à notre connaissance.

En considérant deux annuaires de 1000 feuilles ($M = 500$), un coefficient de frottement papier-papier de 0.2 (qui est la valeur vers laquelle μ semble tendre aux grandes charges), une épaisseur de feuilles $\epsilon = 0.05$ mm (les annuaires sont habituellement imprimés sur du papier très fin), une distance de séparation initiale $d_0 = 5$ cm, on peut estimer la valeur de la force T , au facteur T^* près, que l'on prendra ici égal à 10 mN ce qui est une valeur typique pour le papier offset, mais qui pourrait être différente pour le papier des annuaires qui est assez proche du papier bible². Avec ces paramètres, le modèle donne T de l'ordre de 10^{85} N, ce qui est supérieur au poids de l'univers (de plus d'un facteur 10^{30} ...). Évidemment, cette valeur fantaisiste néglige plusieurs phénomènes, au premier rang desquels figure la fragilité du papier.

1. De la même façon que la vitesse, le temps de contact a généralement un effet logarithmique sur le coefficient de frottement. De plus, dans le cas du papier, la possibilité de formation de ponts capillaires est aussi un phénomène dépendant du temps et qui pourrait avoir un effet à la fois sur T et sur T^* . Les expériences réalisées à différents temps de contact pré-déplacement du mors n'ont montré aucun effet de ce dernier sur T^* . Ceci peut être dû soit au fait que l'âge du contact n'influe que sur la valeur de T mesurée avant tout déplacement du mors, qui implique la rupture du contact, ou au fait que l'humidité ambiante n'est pas suffisante pour former des ponts capillaires, comme il a été discuté plus haut.

2. Le papier bible est un papier fin et léger, employé entre autres pour l'impression des missels —d'où son nom—, ou des volumes de la Pléiade. Il a la particularité d'être « non-couché », c'est-à-dire qu'il n'est pas recouvert de l'enduit d'égalisation ou de lissage qui est employé pour certains papiers d'impression, que l'on appelle papiers « offset ».

En effet, dans des perspectives d'application en ingénierie ou pour une analogie biologique il devient nécessaire de s'intéresser à un paramètre qui n'a pas été pris en compte jusqu'à présent : le déchirement du matériau composant l'assemblage.

Une feuille de papier peut supporter une force tangentielle de l'ordre de 1000 N avant de se déchirer. En calculant la valeur de $T(d)$ pour différents nombres de feuilles grâce au modèle de Alarcón *et al.*, et en divisant cette valeur par le nombre de feuilles M , on peut estimer la force moyenne s'exerçant sur une feuille, et donc la valeur de d_0 à laquelle, pour M donné, les feuilles se déchireraient. La figure 4.1 représente par un cercle rouge cette valeur de d_0 , et par des lignes pointillées la zone pour laquelle l'expérience est impossible du fait du déchirement des feuilles. Il faut donc veiller à choisir un d_0 se trouvant dans la partie en ligne pleine des courbes.

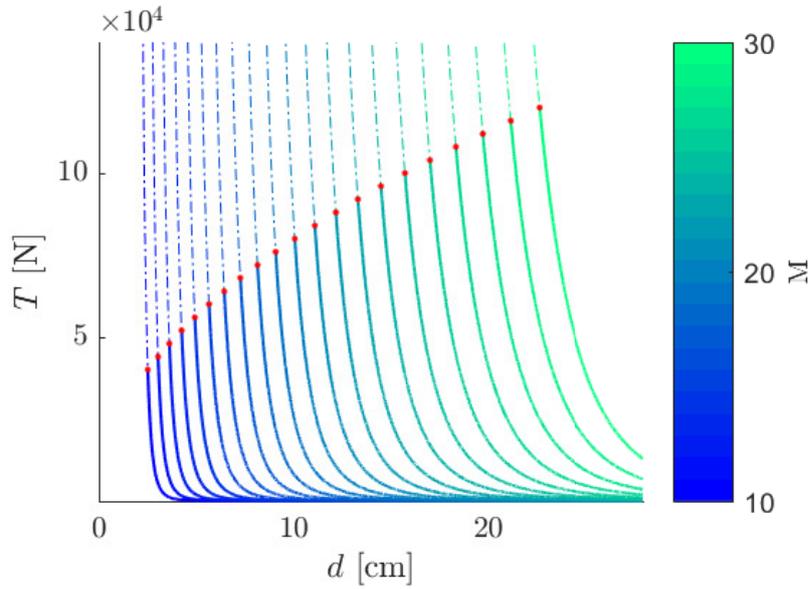


FIGURE 4.1 – Force de traction théorique d'un assemblage en fonction de la distance de séparation, pour différents nombres de feuilles. Chaque courbe représente la valeur théorique de $T(d)$, calculée selon l'équation 1.1, en prenant $\mu=1,4$ et $T^*=0,01$ N, et en faisant varier M de 10 à 100. Pour chaque valeur de M , la valeur de la force de déchirement théorique T_{\max} au-delà de laquelle le papier se déchire est désignée par un cercle rouge. Les courbes sont représentées en lignes pleines pour $T < T_{\max}(M)$ et en lignes pointillées pour $T > T_{\max}(M)$.

Pour finir, l'assemblage étudié dans cette première partie est composé d'objets à deux dimensions : les feuilles. Dans la suite de cette thèse, on s'intéresse à des assemblages d'objets en une dimension, des fibres.

Deuxième partie

Physique du coup de pinceau -
Rigidité d'un faisceau de fibres et
mécanique de la peinture

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

A	Contexte général de la physique des assemblages de poutres	66
B	Contexte général de la physique de l’art	67
C	Les pinceaux	69
1	Histoire, composition et fabrication	69
2	Les différents types de pinceaux	70
D	Objectifs de cette partie	72

L’objectif de cette partie est de décrire et de modéliser la mécanique d’un faisceau de poutres liées par une extrémité quand il est comprimé contre une surface plate et rigide. La première difficulté que nous avons rencontrée était de fabriquer de tels assemblages.

Rassembler des fibres de façon à obtenir un objet reproductible est un processus plus délicat qu’il n’en a l’air. Il faut déjà disposer d’un grand nombre de fibres de la même longueur. Si celles-ci sont découpées dans du fil de pêche, par exemple, elles auront une courbure intrinsèque qui dépendra du rayon de la bobine sur laquelle le fil était stocké et de la quantité de fil restant sur la bobine. Le comptage des fibres est une difficulté supplémentaire. La ligature de l’ensemble, enfin, qu’elle soit effectuée avec un fil ou par collage est un processus fastidieux et dont les résultats sont très inégaux. Après plusieurs tentatives infructueuses nous nous sommes donc tournés vers une version commerciale de ces objets : les pinceaux et les brosses.

Ceux-ci présentent tout d’abord l’avantage que plusieurs exemplaires de pinceaux du même modèle sont pratiquement identiques du point de vue de leur propriétés mécaniques. De plus, les pinceaux sont des objets relativement économiques (le prix typique d’un pinceau de qualité satisfaisante est inférieur à 10 euro), très facilement disponibles dans le commerce et existent dans une grande variété de formes, de tailles et de matières. Ces qualités nous ont conduit à les retenir comme modèles pour l’étude de la mécanique des assemblages de fibres, que nous présentons dans le chapitre 2.

Par ailleurs, le fait que les pinceaux soient utilisés par des artistes, et en général par une grande variété de professions, ouvre des questions de physique intéressantes que nous explorerons aux chapitres 3 et 4.

Nous allons présenter dans ce chapitre le contexte général de l’étude des assemblages d’objets fibreux, puis celui de la physique de l’art, auquel notre objet d’étude nous a conduit à nous intéresser, et nous détaillerons finalement la composition de notre modèle, le pinceau.

A Contexte général de la physique des assemblages de poutres

Les poutres sont des objets dont la mécanique est étudiée depuis longtemps et pour lesquels on dispose d'une bonne description théorique, comme on l'a vu à la partie 1. Cependant, le passage d'une poutre à un ensemble de poutres soulève quantité de nouvelles questions. L'étude des structures composées de poutres reliées les unes aux autres pour concevoir des structures, que l'on appelle alors des treillis (voir un exemple, le viaduc de Garabit, à la figure 1.1), consiste par exemple à déterminer l'isostatisme, c'est-à-dire le nombre de poutres nécessaires à la stabilité de l'ensemble, ou à calculer les efforts internes à partir d'une force s'exerçant sur l'une des poutres du treillis [50].



FIGURE 1.1 – **Un exemple de treillis de poutres, le viaduc de Garabit.** Achevé en 1884, le viaduc de Garabit est un ensemble de poutres en fer puddlé conçu par l'entreprise Eiffel.

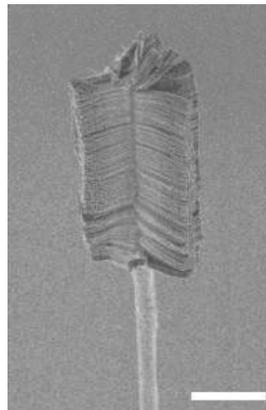


FIGURE 1.2 – **Une brosse de nanotubes de carbone.** Figure reproduite de [51]. La barre d'échelle représente 10 μm .

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à un certain type d'ensemble de poutres, que l'on appellera un faisceau ou un fagot, et que l'on définit comme un assemblage de poutres comprenant une direction préférentielle, de sorte que les poutres soient approximativement parallèles et non pas liées bout à bout.

Si on considère la version la plus simple de ce système, c'est-à-dire deux poutres élastiques identiques, il semble clair qu'il existe des conditions pour lesquelles les propriétés mécaniques de l'ensemble peuvent être décrites par deux poutres en parallèle non couplées. Comme, par exemple, si ces poutres se déforment de façon identique et sont éloignées d'une distance très grande devant leurs propres dimensions. Mais dès l'instant où l'une de ces hypothèses ne se vérifie plus, l'étude du système nécessite de prendre en compte de nouveaux paramètres.

Par exemple, il est bien connu que si l'on comprime une poutre dans la direction de son axe principal, il existe une charge critique au-delà de laquelle la poutre va se déformer dans la direction perpendiculaire à son axe. C'est ce qu'on appelle l'instabilité de flambage.

La charge critique de flambage, aussi appelée la charge d'Euler, dépend à la fois des conditions d'appui, de la nature du matériau et des dimensions de la poutre. Prenons un cas où l'on exerce une force sur deux poutres infiniment éloignées reliées à un même support. Si les deux poutres comportent des défauts qui modifient leur comportement mécanique ou si leurs conditions d'encastrement ne sont pas strictement identiques, l'instabilité de flambage ne se produira pas pour la même charge critique pour chacune. Si l'une des poutres flambe, mais pas l'autre, la force s'exerçant sur chacune des deux ne sera plus identique. De sorte que l'on ne pourra plus décrire le système comme deux poutres indépendantes. Le flambage, de plus, ne se produira pas nécessairement dans la même direction ou le même plan pour les deux poutres, ce qui implique que

le système global peut avoir plusieurs états différents, dépendant de la configuration des deux poutres.

Ensuite, si on imagine que les deux poutres sont séparées d'une distance de l'ordre de leur longueur, elles peuvent entrer en contact. Ceci a d'autant plus de chance de se produire que les poutres sont rapprochées et que leur déformation est grande. Il faut alors prendre en compte les interactions de contact dues au frottement et à la résistance élastique des deux objets, qui elle-même dépend de la forme qu'ils adoptent.

Dans le cadre de cette expérience à deux poutres, il reste envisageable de mesurer et de calculer analytiquement les contraintes s'exerçant sur chacune des poutres et de décrire leurs déformations. Mais, à mesure que le nombre N de poutres augmente, ces deux possibilités s'évanouissent et nécessitent d'introduire de nouveaux outils.

Ainsi, plusieurs travaux visent à décrire la forme adoptée par un faisceau de très nombreuses poutres. Cette question se pose par exemple pour la description des chevelures, que ce soit pour expliquer la forme que prennent des cheveux attachés, qui dépend de la courbure naturelle des cheveux uniques [52] ou pour simuler des chevelures artificielles [53–55] pour l'industrie de l'animation. L'étude des propriétés mécaniques et en particulier frictionnelles de structures de fibres alignées, comme celles pointant hors des textiles « poilus » tels que le velours ou la polaire, renseigne sur la performance des tissus ou leurs propriétés tactiles, qui sont des problèmes importants pour l'industrie du textile [56, 57]. Dans ce type de systèmes macroscopiques, l'ordre et la variation de forme individuelle des fibres (qui est inévitable pour les fibres naturelles comme la laine ou les cheveux) joue souvent un rôle crucial. C'est le cas par exemple dans la réponse élastique de faisceaux de fibres comprimés perpendiculairement à leur axe principal [58].

À l'échelle micrométrique, la mécanique de systèmes de poutres ou de lamelles d'origine biologique, comme celles présentes sous les pattes des geckos [59–61] est un des paramètres expliquant leurs propriétés d'adhésion. Les propriétés mécaniques d'assemblages de poutres à l'échelle nanométriques ont été aussi étudiés pour la fabrication de brosses de nanotubes de carbone [51, 62], ces objets présentant de nombreuses utilisations potentielles comme le nettoyage de nano-particules, ou le dépôt de couches fines dans des espaces restreints comme des capillaires ou des creux.

Les assemblages de poutres en général, et même les fagots de poutres qui en sont un cas particulier, décrivent donc une très large variété de systèmes à toutes les échelles, que l'on retrouve à la fois dans le domaine vivant, dans l'industrie et dans la vie quotidienne et dont les applications sont très larges.

Cependant, à notre connaissance, la compréhension des propriétés mécaniques de faisceaux de poutres reliées par une de leurs extrémités reste évasive. C'est à cette question que nous avons souhaité contribuer dans cette partie. Notre modèle mécanique étant les pincesaux, nos recherches nous ont conduit à nous intéresser au contexte artistique de leur utilisation.

B Contexte général de la physique de l'art

À première vue, la physique et l'art sont des domaines très éloignés. En réalité l'étude de la matière a apporté beaucoup à l'histoire de l'art ces dernières années, de même que, dans l'autre sens, des questions complexes liées aux arts plastiques ont considérablement inspiré des chercheurs dans différents domaines de la physique. Nous allons montrer ici quelques exemples de relations entre les deux disciplines.

Le premier apport de la physique, conjointement avec la chimie, est à l'échelle microscopique et concerne l'étude des matériaux composant les oeuvres d'art. La datation des oeuvres d'art anciennes, en particulier, quand celle-ci n'est pas possible ou pas suffisante par des méthodes historiques, pose des problèmes extrêmement complexes de physique et de chimie. La luminescence, par exemple, permet de dater des minéraux (comme le quartz ou le feldspath) en activant

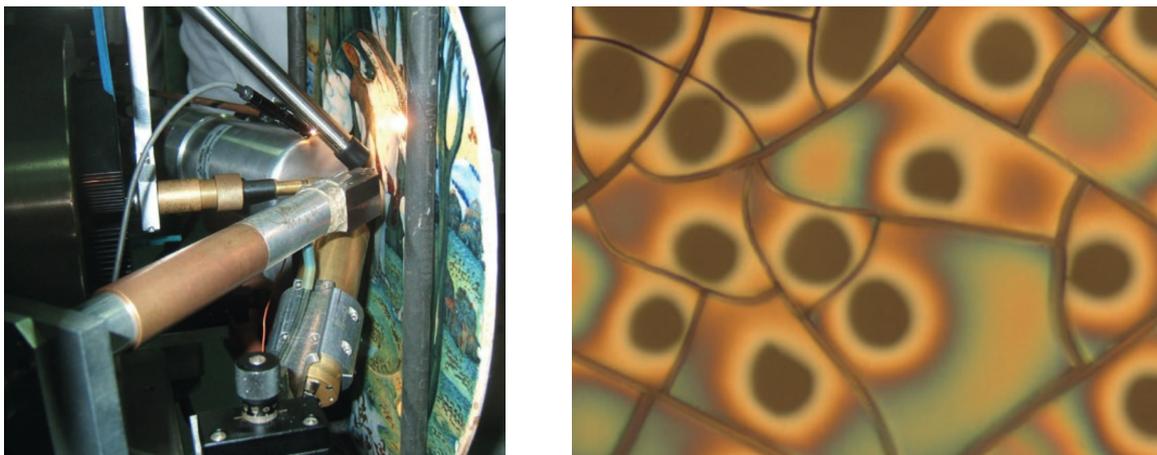


FIGURE 1.3 – **(Gauche) Analyse d'un plat à décor lustré par un faisceau d'ions.** Le plat à décor (Jugement de Pâris, 1520, Maestro Gorgio, Gubbio, Italie) est placé dans le faisceau de l'accélérateur AGLAE pour analyser sa composition par une méthode non destructive et sans réaliser de prélèvement. Photo issue de l'article de T. Calligaro et C. Pacheco dans [63]. **(Droite) Craquelures obtenues lors du séchage d'une suspension colloïdale.** Les couleurs sont des franges d'interférence qui permettent de déterminer la courbure individuelle de chacun des morceaux formés par le séchage. L'étude du séchage de ces solutions contrôlées permet de comprendre l'apparition de craquelures dans les oeuvres picturales. Photo issue de l'article de F. Giorgiutti-Dauphiné et L. Pauchard dans [63].

optiquement ou thermiquement le transfert d'énergie correspondant à la reformation d'une paire électron-trou au sein d'un matériau préalablement irradié par des particules provenant de l'environnement de l'objet [64, 65]. Ces techniques permettent de dater par exemple des éléments architecturaux et la très grande variété d'évènements pouvant se produire dans la vie de ces objets (incendie d'un bâtiment, chauffage d'une pièce) soulève des questions intéressantes pour le physicien. L'étude des matériaux permet d'un point de vue général de s'intéresser à la composition des oeuvres d'art et à leurs techniques de mise en oeuvre, ce qui présente aussi l'intérêt de les authentifier.

Les matériaux d'art sont complexes sous plusieurs aspects : leur surface est inégale, ils sont composés de plusieurs matériaux (sous forme de couches, de grains, ou de composites) et sont donc inhomogènes à plusieurs échelles. Ils ont parfois subi plusieurs restaurations successives, et il est exclu d'employer des méthodes destructives pour les étudier. Parfois même effectuer un quelconque prélèvement est impossible. Combiné à leurs dimensions souvent grandes, ces difficultés complexifient beaucoup l'analyse de leur composition [63, 66]. L'étude du lustre des céramiques espagnoles [67] (voir figure 1.3 (droite)) ou des vitraux du moyen-âge [12] ont ainsi fourni des objets d'études intéressants aux spécialistes des analyses par faisceaux d'ions, de neutrons ou d'électrons et de spectroscopie en général.

Au-delà de l'étude des matériaux, la physique s'intéresse aussi aux oeuvres d'un point de vue macroscopique. Par exemple, le phénomène d'apparition de craquelures dans les peintures anciennes est induit par le séchage de l'ensemble des couches de matière superposées qui constituent l'oeuvre. Celles-ci sont soumises à un ensemble de contraintes mécaniques qui résultent avec le temps dans l'apparition d'un réseau de craquelures [68] (voir figure 1.3 (gauche)). L'étude de l'effet d'une sous-couche préparatrice, de l'épaisseur de matière déposée ou des propriétés mécaniques du support sur la morphologie des craquelures fournit des problèmes complexes et riches à la physique, et de l'aide à l'authentification et à la restauration à l'histoire de l'art.

Parfois, ce sont les oeuvres elles-mêmes qui inspirent des travaux scientifiques. L'artiste Jackson Pollock en particulier, a été beaucoup étudié par les chercheurs, que ce soit pour la

caractérisation de la dimension fractale de ses oeuvres et de son évolution avec le temps [69], ou de la mécanique des fluides sous-jacente à la production de ses lignes si caractéristiques [70]. Une autre techniques de peinture moderne, la superposition de fluides, où la couche supérieure infiltre la couche inférieure (qui a été inventée par le muraliste David Alfaro Siqueiros) offre d'autres problèmes passionnants de stabilité d'interface liquide-liquide soumises à la gravité et impliquant des fluides de densité et de viscosité différente [71].

Cette thèse s'inscrit donc dans le contexte de la physique de l'art presque par accident. Nos travaux nous ont conduit à utiliser des pinceaux comme modèles mécaniques, du fait de leurs avantages pratiques, mais il se trouve que, à notre connaissance, ces objets en tant qu'outils servant à la réalisation d'oeuvres d'art, n'ont jamais été étudiés avec une perspective physicienne. Les deux chapitres 3 et 4 porteront sur ce point.

C Les pinceaux

1 Histoire, composition et fabrication

Pour mieux comprendre à la fois notre modèle et notre objet d'étude, il est nécessaire de se pencher en détails sur les pinceaux.

Les pinceaux font partie de la grande famille des brosses, objets aux applications innombrables, depuis les plus quotidiennes jusqu'à l'industrie la plus pointue. En pratique, les professionnels du secteur classent les brosses en fonction de leur domaine d'utilisation : le ménage, l'art, le bâtiment, l'industrie, le nettoyage professionnel et le corps. En moyenne, on estime qu'un foyer possède 40 brosses. Ce sont donc des objets particulièrement courants. Dans cette thèse, on distinguera les *brosses* et les *pinceaux*. Les brosses sont composées de plusieurs fibres ou touffes de fibres liées séparément à une monture. Les pinceaux, quelque soit leur domaine d'application, ne rassemblent qu'une seule touffe de fibres. C'est à ces derniers que nous allons nous intéresser.

Les pinceaux existent depuis au moins 12 000 ans et auraient été utilisés pour des peintures rupestres au Paléolithique supérieur [72]. Les pinceaux modernes sont pourtant très similaires aux versions les plus primitives et leur fonction reste la même : appliquer et transporter de la peinture. Il sont composés d'une hampe, d'un ensemble de poils formant la garniture ou touffe et d'une virole qui est une pièce métallique qui permet la fixation ou le sertissage de la garniture sur le manche. La technique de ligature de la touffe dépend néanmoins du domaine d'application [73] : pour les pinceaux d'artisan peintre servant dans le bâtiment, les fibres sont collées à l'intérieur de la virole qui est ensuite sertie sur le manche. La plupart des pinceaux destinés à l'esthétique de qualité standard sont fabriqués de la même manière. Les pinceaux d'art de bonne qualité, en revanche contiennent une touffe de poils qui est nouée avec un fil avant d'être collée dans la virole¹. Le fait de lier les poils est, d'après les fabricants, un gage de la qualité du pinceau et de son « élasticité ». La figure 1.4 (gauche) montre ces deux techniques de fixation de la garniture dans la virole. La fabrication de pinceaux d'art nécessite une grande précision, ne peut être réalisée qu'à la main et nécessite au moins trois années de formation et d'entraînement.

1. Les pinceaux d'art sont aussi utilisés dans d'autres domaines que la peinture, comme l'électronique, l'archéologie ou la police scientifique, du fait de leur qualité qui est meilleure que celle des autres types de pinceaux.

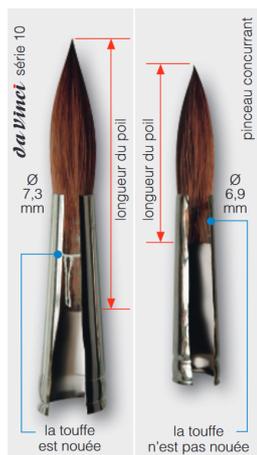


FIGURE 1.4 – (Gauche) Deux techniques de fixation de la touffe dans la virole. À gauche, la garniture est nouée et collée, à droite, la garniture est collée directement (cette technique est aussi utilisée pour les pinceaux d'artisan). Les poils sont aussi parfois collés également sur le manche, quand leur longueur atteint celle de la virole (figure issue de [74]). (Droite) Photographie d'une partie d'un étalage de pinceaux. On peut voir un échantillon de la diversité des formes de pinceaux Photographie prise chez Gibert Jeune®, 5 boulevard Saint-Michel.

2 Les différents types de pinceaux

Les informations issues de cette section dans leur majorité issues du corpus très important de documents sur les brosse rédigé par W. Demol [75], professionnel de la broserie et ancien directeur de la fabrique de pinceaux de La Capelle, ainsi que de plusieurs entretiens avec M. Rousseau, ethnologue du patrimoine industriel et des techniques et commissaire de l'exposition *Du ménage à l'art pour la Fédération Française de la Brosserie* et W. Whitney maître de conférence en histoire de l'art à l'Université Paris I.

Les pinceaux sont composés d'une hampe, d'une virole et d'une garniture. La variation de ces trois éléments définit différents types de pinceaux. Ici, la forme de la hampe ne nous intéressera pas. La virole est pratiquement toujours métallique, excepté pour certains modèles traditionnels de pinceau petit gris, un type de pinceau conçu pour une application très spécifique (réaliser des lavis à l'aquarelle) que nous n'avons pas étudié dans ce travail. La caractéristique principale de la virole n'est donc pas son matériau mais sa forme. Celle-ci peut être circulaire, ou aplatie donc ayant une forme s'approchant d'un rectangle aux coins plus ou moins arrondis. Cette dernière forme de virole est apparue plus tardivement et est beaucoup plus facile à produire en série [75]² et induit une rupture de la symétrie de révolution de la forme des pinceaux. Ceci nous incitera à traiter différemment les pinceaux à section plate et à section ronde.

La garniture est la partie la plus variable dans un pinceau. Plusieurs matières premières sont utilisées. Certaines sont des fibres synthétiques, qui sont fabriquées à partir de différents types de polymères de la famille des polyamides, des polyéthylènes ou des polypropylènes. Chaque fabricant développe ses propres fibres synthétiques³ dont nous n'avons pas pu obtenir la composition exacte. Les fibres naturelles utilisées peuvent être issues de beaucoup d'animaux différents, comme divers animaux d'élevage (porc, cheval, poney, chèvre, boeuf) ou plusieurs espèces de la famille des mustélidés (putois de Sibérie, mangouste, blaireau, petit-gris Kazan ou martre

2. Les pinceaux plats pour l'art prennent en moyenne deux fois moins de temps à être fabriqués que les pinceaux ronds et les pinceaux d'artisanat prennent eux-mêmes en moyenne six fois moins de temps à être fabriqués que les pinceaux d'art [75]

3. Par exemple, Kaërell ou Softacryl chez Raphaël, Orion chez Pébéo ou Acrylstyl chez Léonard.

rouge Kolinsky⁴). La garniture peut aussi être composée d'un mélange de tous ces types de fibres, synthétiques ou naturels.

La nature des fibres employées pour la garniture ouvre de très nombreuses questions en physique, dont nous allons expliciter trois exemples parmi une multitude. Les pinceaux d'art sont généralement classifiés par les fabricants et dans les étalages en fonction de leur usage : pour la peinture acrylique, pour l'aquarelle, pour les lavis, etc... Une des raisons avancées pour cette classification est la différence de « viscosité » de ces différentes peintures⁵ qui implique de devoir choisir des fibres plus ou moins souples. Il semblerait qu'un mauvais choix de couple garniture-peinture puisse induire un dépôt de peinture insatisfaisant : trop épais ou trop fin, comportant des marques (c'est-à-dire un profil de hauteur avec une grande variabilité). Ceci pose la question de savoir comment le dépôt d'un liquide sur une surface par le contact avec un objet élastique dépend des propriétés de cet objet ainsi que des propriétés du fluide.

Une autre question est reliée à la rétention d'eau des fibres. Certaines fibres, et en particulier le petit gris Kazan (qui est issu de la queue d'un écureuil nordique), sont réputées avoir une très bonne capacité de rétention d'eau et conserver la même « nervosité » quand elles sont mouillées. La première question soulevée par ce savoir empirique est l'imprégnation d'un liquide dans un réseau de fibres⁶ et en particulier de sa dépendance dans les propriétés de surface de ces fibres. En effet, une des particularités des fibres naturelles est d'être recouvertes d'écaillés de kératine tandis que les fibres synthétiques sont lisses. De plus, les fibres naturelles comme les cheveux sont capables d'absorber de l'eau, ce qui modifie sensiblement leurs propriétés mécaniques [76]. L'assertion selon laquelle l'eau affecte donc plus les pinceaux avec une garniture synthétiques est donc particulièrement surprenante et doit impliquer d'autres phénomènes.

Les différences entre les fibres naturelles et les fibres synthétiques se jouent aussi à d'autres niveaux. La pointe du pinceau et par extension la pointe d'un poil, est appelée la « fleur » par les pinceliers. La fleur des poils naturels forme des fourches, voire une structure hiérarchique de fourches. Sur les cheveux, ce phénomène qui se produit naturellement avec le vieillissement de la fibre est considéré comme indésirable, mais pour les pinceaux, les fleurs en forme de fourche sont réputées être meilleures, de sorte que les fibres synthétiques dont la fleur est généralement une section plate peuvent être « fleuries », c'est-à-dire abîmées de façon à obtenir ces fourches. Ceci pourrait être dû à des effets tactiles (la fleurisation rend le bout des poils plus fins et donc plus doux) ou être relié à des questions plus complexes d'adhésion ou de capture de film liquide. En effet, la structure hiérarchique des pattes des geckos ou de certaines araignées, en multipliant la surface de contact mais aussi du fait de ses propriétés mécaniques spécifiques, a un impact crucial sur leurs capacité d'attachement et de détachement [77–79].

Enfin, la garniture des pinceaux peut présenter des formes très variées (voir figure 1.4 (droite) pour une image d'un étalage), ce qui définit une deuxième méthode de classification de ces objets. Il y a beaucoup de définitions pour ces formes, mais on peut les séparer en deux catégories : les pinceaux dont tous les poils sont de la même longueur (ou du moins dont l'écart-type de la distribution des longueurs est négligeable devant la longueur des poils) et ceux pour lesquels les poils ont des longueurs variées. Un autre axe de différenciation est la comparaison entre la largeur du pinceau au niveau de la virole et au niveau de la pointe. L'intérêt de disposer de cette variété de formes, dont chacune semble avoir des emplois privilégiés, pose également question. Si l'intérêt

4. Les pinceaux en martre Kolinsky sont réputés être de très grande qualité et sont, de notre expérience, les plus chers que l'on trouve sur le marché.

5. Le terme est employé par les fabricants ou utilisateur, mais il ne nous semble pas certain qu'il désigne précisément la grandeur physique, mais potentiellement un ensemble de phénomènes caractérisant la résistance au mouvement et la sensation d'épaisseur de la peinture, qui peuvent potentiellement et non exclusivement impliquer la viscosité, la masse volumique et la tension de surface.

6. Cette capacité de rétention est appelée « capillarité » par l'industrie.

de posséder des pinceaux de dimensions variables semble assez trivial (des pinceaux avec une garniture plus large produiront des plus gros traits), l'effet des autres paramètres géométriques est beaucoup moins évident.

La diversité de notre modèle d'étude est donc un avantage sur deux plans différents : nous avons à notre disposition une très grande variété d'objets, ce qui nous permet de choisir des paramètres différents et cette variété elle-même soulève quantité de questions riches du point de vue de la physique.

D Objectifs de cette partie

Dans cette partie nous présenterons tout d'abord une étude de la mécanique des faisceaux de fibres soumis à une compression selon leur axe principal et en particulier aux grandes déformations, en utilisant les pinceaux comme systèmes modèles.

Nous nous intéresserons ensuite à l'une des questions posées par les pinceaux d'art en tant qu'objets, qui est celle de leur forme, et nous reviendrons sur la mécanique aux petites déformations. Enfin, nous nous intéresserons aux interactions entre les pinceaux et un liquide et en particulier à la question du dépôt de liquide sur une surface par un faisceau de fibres imprégnées.

Chapitre 2

Mécanique d'assemblages de fibres sous compression

Dans ce chapitre, nous décrirons et analyserons le comportement d'un assemblage de fibres liées en fuseau subissant une contrainte dirigée dans l'axe principal du fuseau. Nous allons d'abord représenter plusieurs courbes de forces obtenues pour différents types de pinceaux, puis identifier et analyser les domaines de ces courbes de forces. Nous allons ensuite proposer un modèle pour la description de ces courbes de force en grandes déformations et discuter les hypothèses de ce modèle.

Sommaire

A	Description générale des courbes force-déplacement de la compression d'un faisceau de fibres	74
1	Matériel et méthodes	74
2	Domaines de sollicitation des assemblages de fibres comprimés	76
	a Description d'une courbe typique	76
	b Analyse des domaines	76
	c Hystérésis et frottement	79
3	Rôle de l'orientation de l'expérience	81
B	Étude des courbes de force en grandes déformations	82
1	Protocole expérimental	82
2	Analyse dimensionnelle et résultats expérimentaux	82
3	Expériences à N variable en grandes déformations	86
C	Dimensions du contact fibres-surface et approche théorique .	87
D	Simulation d'une poutre unique en éléments finis et comparaison aux résultats expérimentaux	89
E	Position des domaines	92
F	Conclusion sur la mécanique d'un pinceau	93



FIGURE 2.1 – **(Gauche) Dispositif expérimental.** Le pinceau est fixé par un mors dans la machine de force de traction et comprimé contre une surface plane en aluminium. La distance d est le déplacement du mors, qui est nul au contact du pinceau avec la surface et qui croît quand le pinceau se déplace vers le bas. **(Droite) Dimensions d'un pinceau.** On mesure le diamètre $D = 2R$ au niveau de la virole, et la longueur des poils L depuis la virole jusqu'à la pointe.

A Description générale des courbes force-déplacement de la compression d'un faisceau de fibres

1 Matériel et méthodes

Les fabricants de pinceaux vendent des produits dont deux exemplaires d'une même référence sont pratiquement identiques, et, comme on l'a vu dans la partie 2 de très larges gammes bon marché sont disponibles dans les magasins spécialisés en bricolage, en fournitures artistiques, ou en maquillage.

Quand on s'intéresse à la mécanique de ces objets, les différents paramètres caractérisant un pinceau sont les suivants :

- le nombre N de poils ou de fibres,
- la longueur L_i de chacun de ces poils, qui peut être différente en fonction du poil et leur rayon r_i ,
- leur module de Young E_i et leur coefficient de Poisson ν_i
- le coefficient de frottement μ entre les fibres et la plaque et le coefficient de frottement μ_p entre les poils.

Dans cette étude on fera les approximations suivantes :

- $\forall i, L_i = L_{\max} = L$, c'est à dire que l'on néglige la forme de la taille du pinceau, qui peut être plus ou moins pointue, ainsi que la variabilité intrinsèque des poils, et l'on considère que les poils mesurent tous la même longueur L qui est celle des poils les plus longs. La façon dont on mesure L est décrite à la figure 2.1,
- $\forall i, E_i = E$, c'est à dire que l'on néglige l'éventuelle variabilité intrinsèque des fibres, en particulier dans certains pinceaux bicolores qui contiennent deux types de fibres,
- $\forall i, r_i = r$, c'est à dire que l'on considère à nouveau que tous les poils sont identiques. Par ailleurs, sur la plupart des pinceaux présentés ici excepté certains pinceaux d'artisan peintre aux poils très épais, le rayon des poils est plus grand à la racine qu'à la pointe

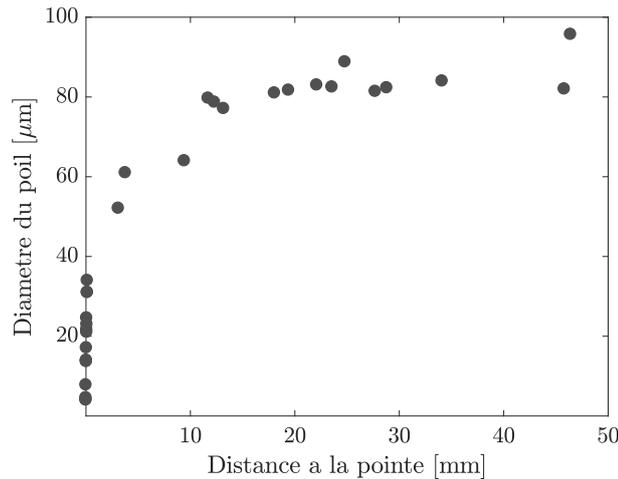


FIGURE 2.2 – Évolution du diamètre du poil le long de celui-ci. Le diamètre est mesuré à l'aide d'un microscope optique le long de plusieurs poils synthétiques (issus d'un pinceau de type C, photographié à la figure 3.1).

(cf. Fig. 2.2). Nos mesures ont montré que le diamètre est globalement constant autour de $80\ \mu\text{m}$ quand on se situe à au moins $15\ \text{mm}$ de la pointe. Le diamètre du poil varie très fortement sur la centaine de micromètres avant la pointe, mais nous ne sollicitons jamais le pinceau sur des distances plus courtes que $2\ \text{mm}$, de sorte que l'on négligera tout effet éventuel de la variation du diamètre.

Dans cette partie, on a réalisé des expériences consistant à comprimer un pinceau contre une surface plane et considérée comme infiniment rigide. Le pinceau a été fixé au capteur de force de la machine de traction décrite dans la première partie. Le capteur (soit $10\ \text{N}$, soit $100\ \text{N}$) est choisi en fonction de la force maximale mesurée, qui est de l'ordre de quelques dizaines de newtons pour les brosses à peindre ou les pinceaux de corps, et de quelques newtons pour les pinceaux d'art. Plusieurs mors ont été utilisés : pour les expériences avec le capteur de limite $100\ \text{N}$, nous avons utilisé des mors en aluminium semblables à ceux servant à attacher les feuilles de la partie I. Ces mors étant trop lourds pour être utilisés avec le capteur dont la limite de force est $10\ \text{N}$, nous avons fabriqué des mors plus légers en PLA (PolyLacticAcide) à l'aide d'un imprimante 3D. Le pinceau est fixé en étant comprimé entre deux plaques, dont l'une est gravée d'un sillon permettant de tenir la hampe en place. Plusieurs mors ont été réalisés avec des sillons inclinés selon des angles divers, ce qui a permis de contrôler l'angle de compression du pinceau α (c'est-à-dire l'angle entre la hampe et l'horizontale, voir figure 2.1 (gauche)). Dans ce chapitre, cet angle a été maintenu à 90° .

La machine de force de traction nous a permis de mesurer la force exercée par le pinceau sur le capteur en fonction du déplacement d du mors supérieur de la machine de traction, qui est nul au contact du pinceau sur la plaque. Cette expérience est représentée à la figure 2.1. La mesure était prise pendant le déplacement vers le bas du mors supérieur (quand le pinceau est de plus en plus comprimé, on désignera cette phase comme la compression ou le chargement) et pendant le déplacement vers le haut du mors supérieur (donc quand le pinceau est de moins en moins comprimé, on désignera cette phase comme la décompression ou le déchargement). La machine permet aussi de réaliser plusieurs cycles de compression-décompression successives.

Le pinceau a été comprimé contre diverses surfaces, dans la plupart des expériences présentées ici et sauf mention contraire, la surface est une plaque d'aluminium d'épaisseur $1.5\ \text{cm}$, recouverte d'une feuille de papier classique (Inacopia Office 80g) fixée par du ruban adhésif.

L'objectif de ce chapitre est donc de mesurer et de comprendre ce qui fixe la valeur de la

force F exercée sur le pinceau en fonction des paramètres de l'expérience, qui sont L , N , r , E , ν , μ , μ_p et de la variable d .

2 Domaines de sollicitation des assemblages de fibres comprimés

a Description d'une courbe typique

Nous avons mesuré les courbes force-déplacement de différents types de pinceaux avec le dispositif représenté à la figure 2.1 (gauche). Les résultats obtenus pour six pinceaux différents sont présentés à la figure 2.3. Les pinceaux présentés ici couvrent les trois fonctions principales des pinceaux : la peinture artistique, la peinture d'artisanat et le soin du corps.

On a réalisé plusieurs cycles de compression-décompression avec chaque pinceau. La force mesurée sur le premier cycle est toujours plus importante que sur les suivants. À partir du deuxième cycle, la force est similaire quelque soit le nombre de compressions réalisées.

Sur les graphique de la figure 2.3, nous observons que la gamme de force explorée dépend fortement du pinceau sélectionné. Par exemple, à un déplacement de 20 mm, on a mesuré une force de l'ordre de 2 N sur la figure 2.3, graphique F, et de l'ordre de 20 N sur la figure 2.3, graphique D¹. Cependant, l'allure générale des courbes présente une grande similarité malgré la diversité des pinceaux étudiés.

On peut distinguer plusieurs domaines, à petites et grandes déformations. Qualitativement, on peut les décrire ainsi :

- domaine I : la force croît linéairement avec le déplacement,
- domaine II : la force ne croît plus linéairement avec le déplacement, on observe un maximum local de F . Cette partie des courbes de force est peu reproductible, et on observe des événements où la force décroît très brutalement (voir par exemple le graphique E),
- domaine III : on observe un plateau, la force ne varie plus avec le déplacement. Ce domaine n'est pas toujours identifiable sur toutes les courbes (voir les cycles 2 et 3 du graphique F),
- domaine IV : la force augmente avec le déplacement, de façon non linéaire.

Ces domaines sont représentés sur une courbe typique à la figure 2.4 (gauche).

On observe par ailleurs que la force mesurée à un déplacement donné est toujours plus importante en charge qu'en décharge : toutes les courbes présentent une hystérésis.

La forme du pinceau au cours de sa compression est photographiée à la figure 2.4 (droite). Les images 1 à 3 correspondent au domaine I, l'image 4 au domaine II, l'image 5 au domaine III et les images 6 et 7 au domaine IV.

b Analyse des domaines

Domaine I

Sur ce domaine, on observe une augmentation linéaire de la force avec l'enfoncement, ce qui est équivalent à dire que le pinceau se comporte comme un ressort de constante de raideur constante au cours de l'enfoncement. Dans ce régime, le nombre de poils en contact avec la

1. Plusieurs exemplaires de chacun des pinceaux photographiés à la figure 2.3 ont été utilisés dans cette thèse. Des modèles de la même gamme mais de dimensions différentes de ceux présentés ici ont aussi été utilisés. Par la suite, nous nous précisons le type des pinceaux employés pour les expériences en nous référant à cette figure.

A. Description générale des courbes force-déplacement de la compression d'un faisceau de fibres

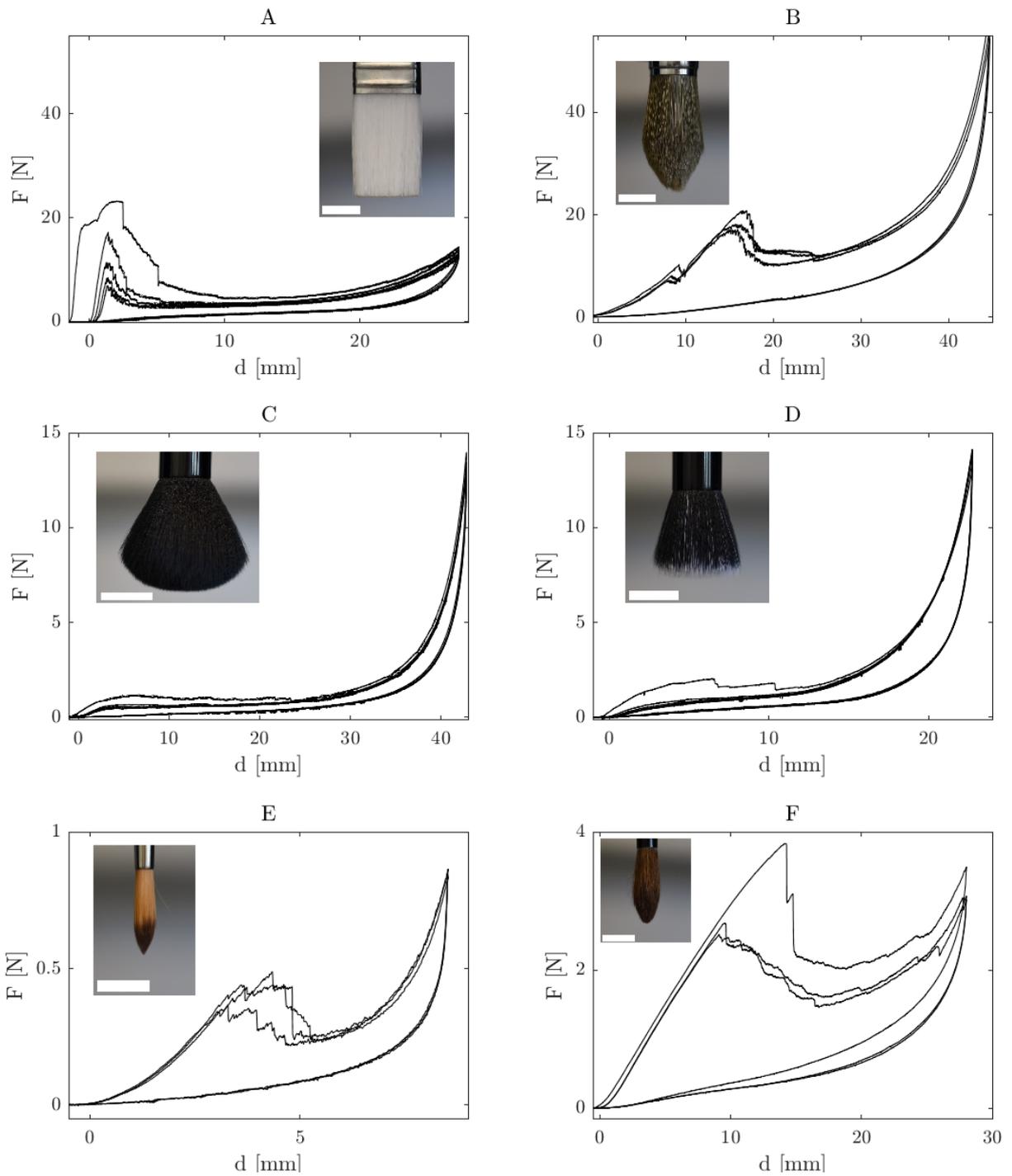


FIGURE 2.3 – Quelques courbes de forces de différents pinceaux. Les courbes A et B sont obtenues pour des pinceaux d'artisan peintre (et correspondent aux pinceaux que l'on désignera par la suite comme de type A et B), les courbes sont réalisées avec des pinceaux de maquillage C et D (qu'on notera type C et type D) et les courbes E et F (de type E et F) sont mesurées avec des pinceaux d'art. Le pinceau utilisé pour chaque expérience est photographié en insert. La barre d'échelle mesure 2 cm.

plaque reste constant (on voit sur les photographies 2 et 3 de la figure 2.4 que tous les poils sont en contact avec la surface). Néanmoins, pour certains pinceaux pointus, ce régime linéaire est

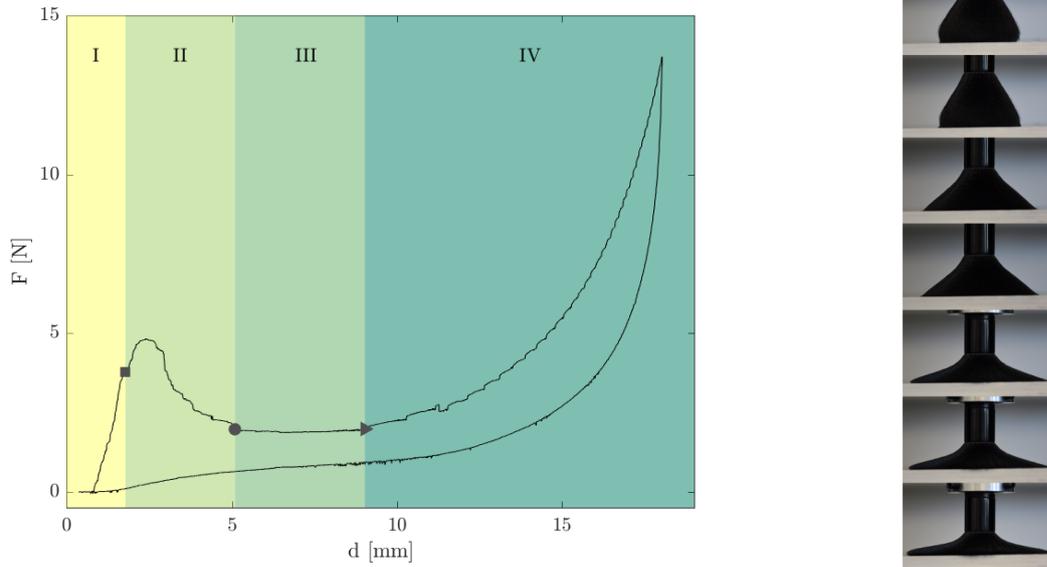


FIGURE 2.4 – (Gauche) Identification des différents domaines d'une courbe force-déplacement typique. On distingue 4 comportements différents, pour différentes valeurs du déplacement d , avec un pinceau de type D. La transition d'un domaine à un autre est signalée par un carré (de I à II), un cercle (de II à III) et un triangle (de III à IV). (Droite) Photographie d'un pinceau de type C à différentes valeurs de d . La barre d'échelle mesure 2 cm.

précédé d'un régime de mise en contact qui se caractérise par une augmentation progressive de la raideur (voir par exemple les graphiques D et E de la figure 2.4). La linéarité de la force avec le déplacement et le domaine I seront étudiés plus avant au chapitre 3.

Domaine II

Le domaine II est un maximum local qui forme une « bosse » sur les courbes de force. Une première idée intuitive serait de penser que ce passage de la force par un maximum, qui est une instabilité du fait de l'apparition d'une zone de raideur négative, correspond au passage du seuil de flambage des poils. Pour une poutre de longueur L , de module de Young E et de module d'inertie, la charge critique de flambage en compression axiale est $FE = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$ [80] pour le premier mode, si la poutre est encastree à ses deux extrémités². Pour un poil en nylon de diamètre de l'ordre de $80 \mu\text{m}$, de module de Young de 3 GPa et de longueur 2 cm, on trouve $FE \sim 0.6 \text{ mN}$ ce qui est inférieur d'au moins trois ordres de grandeur au maximum local de la force, que l'on observe en général autour de quelques newtons. D'ailleurs on observe sur la figure 2.4 (gauche) que les poils ont déjà flambé sur les images 1 et 2, qui est donc très rapidement passé.

La cause de l'instabilité est donc à chercher ailleurs. Sur le domaine I, l'extrémité de chaque poil est fixée par une liaison de type rotule sur la surface solide, du fait du frottement. Lors du chargement élastique des poils, la force tangentielle appliquée sur chaque poil augmente et, au-delà d'un seuil, le poil se met à glisser. Il est probable que nous n'observons pas une force bien déterminée du fait que les poils ne sont pas de la même longueur, et que le glissement d'un

2. On retrouve cette expression en intégrant l'équation linéarisée de l'élastica $EI\ddot{\theta} = -p\theta$, où p est la composante axiale de la force s'exerçant à l'une des extrémités. Pour des conditions aux limites $\theta(0) = \theta(L) = 0$, les solutions sont des sinusoides et leur nombre de périodes s'inscrivant sur la longueur L définit plusieurs modes de flambage. La force critique pour obtenir un mode m est d'autant plus importante que m est grand de sorte que le premier mode est toujours le premier à apparaître quand la force augmente.

poil peut entraîner ses voisins. De sorte que la valeur de la force doit être liée à la taille des amas qui lâchent au cours du glissement. Après la mise en mouvement, l'énergie élastique stockée dans les poils diminue et la force décroît, d'où l'observation d'un maximum local.

Le phénomène de glissement d'une bande comprimée contre une surface frottante a été étudié par Sano *et al.* [6]. Leur travail a consisté à déterminer si le glissement a lieu, en fonction de la distance d et du coefficient de frottement fibre-surface (voir A). Ils ont montré que ce glissement se traduit par une décroissance brutale de la composante verticale de la force mesurée à l'extrémité encastrée de la bande. La valeur de d pour laquelle le glissement se produit n'a rien d'évident, car elle dépend de la force \vec{F}_i dont la direction dépend de la forme adoptée par la bande et donc, de d . Sano *et al.* [5] ont précisément étudié la direction et la valeur de cette force pour le cas particulier d'une bandelette élastique en conditions encastrée-pivot sans frottement. Notons par ailleurs que la force maximale atteinte sur le domaine II est presque toujours supérieure sur le premier cycle que sur les suivants, et que c'est sur le domaine II que cet écart est le plus grand. On interprète ce phénomène par le fait que, lors du premier cycle, les poils du pinceaux vont glisser dans une direction déterminée et que la plasticité du poil lui-même ou du poil au sein de l'assemblage rendra ensuite ce glissement plus facile pour les cycles suivants.

Domaine III

Sur le domaine III, la force reste constante quand d augmente (voir graphique C figure 2.3). Sur ce domaine, la limite de glissement a été atteinte et les fibres glissent continûment quand d augmente. Sur les domaines I à III, le comportement du système est analogue à un ensemble ressort-patin frottant en série. Il faut excéder la force de frottement statique pour mettre le patin en mouvement. Quand cela se produit, le patin glisse et la force nécessaire pour le maintenir en mouvement une fois qu'il a glissé est moins importante car le coefficient de frottement dynamique est plus faible que le coefficient de frottement statique.

Domaine IV

Sur le domaine IV, la courbe $F(d)$ devient fortement non-linéaire. Vis-à-vis du modèle ressort-patin, cela correspondrait à obtenir une raideur du ressort croissante. Expérimentalement, on observe que la courbure des poils est de plus en plus importante (voir les figures 5 et 7) et que le contact ponctuel entre un poil et le support devient une zone de contact, d'autant plus longue que d augmente.

La non-linéarité du domaine IV n'est pas due à la sollicitation plastique des fibres ou du pinceau. En effet, on observe que la force mesurée sur le domaine IV est identique pour plusieurs cycles, une fois le premier passé. Nous sommes donc dans un domaine d'élasticité non linéaire.

La mécanique du pinceau sur le domaine IV fera l'objet de la section B de ce chapitre.

c Hystérésis et frottement

Un des caractères saisissants de toutes les courbes de forces mesurées sur des pinceaux est l'hystérésis, c'est-à-dire la différence entre la force mesurée à l'aller (en compression ou charge) et au retour (en décompression ou décharge) pour une même distance d . La force mesurée en compression est toujours plus élevée. On peut expliquer ce phénomène en reprenant le modèle très simple de ressort auquel est attaché un patin frottant, sur lequel un utilisateur exerce une force \vec{F} (voir schéma à la figure 2.5).

À un taux de compression donné, pendant la phase de chargement (c'est-à-dire si le ressort se comprime de plus en plus), la force \vec{F} s'exerce dans le même sens que le vecteur vitesse \vec{v} et que la force de rappel du ressort \vec{K} , mais dans la direction opposée à la force de frottement \vec{f} . À l'équilibre, on peut donc écrire, en projetant sur l'axe horizontal :

$$F - K - f = 0$$



FIGURE 2.5 – Schéma de la compression d'un système ressort-patin frottant. Le vecteur vitesse \vec{v} indique le sens de déplacement du patin, \vec{K} est la force de rappel du ressort, \vec{F} la force exercée par l'utilisateur, et \vec{f} la force de frottement entre le patin et la surface, qui s'oppose au mouvement du patin.

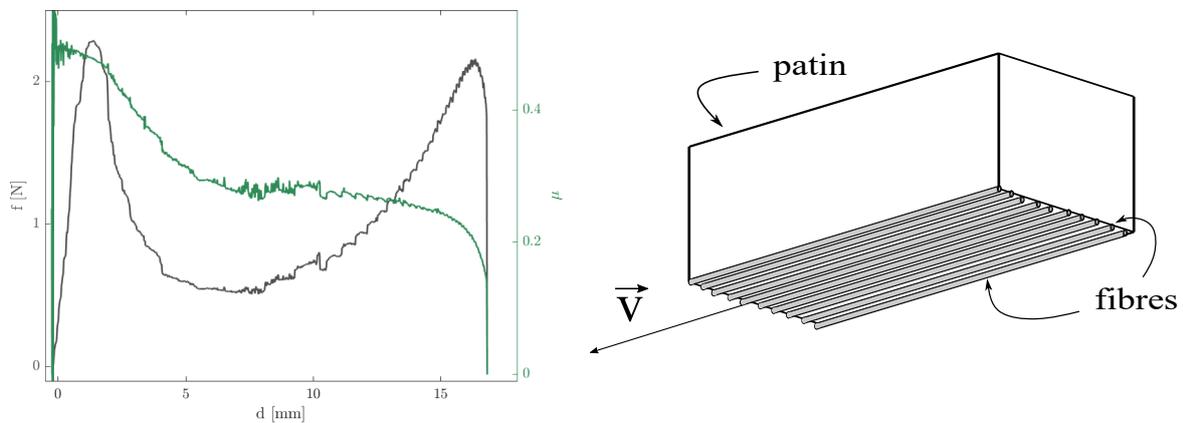


FIGURE 2.6 – (Gauche) Force de frottement théorique et coefficient de frottement théorique en fonction du déplacement d pour une courbe typique. (Droite) Schéma du patin frottant recouvert de fibres pour la mesure de μ . Les fibres sont collées sous le patin qui glisse dans la direction de \vec{v} sur une plaque dont l'angle au moment du glissement permet de calculer le coefficient de frottement statique.

La force de frottement étant toujours dans le sens opposé au mouvement, durant la phase de déchargement elle s'opposera à la force de rappel du ressort. On aura alors :

$$F - K + f = 0$$

De sorte que la force F qu'un utilisateur doit appliquer sur le patin pour obtenir un taux de compression donné est toujours supérieure pendant le chargement à celle à exercer pendant le déchargement (l'écart entre les deux étant de $2f$). Cette différence produit une hystérésis quand on mesure F en fonction du taux de compression.

En suivant ce modèle, on peut calculer la force $f = (F_{\text{charge}} - F_{\text{décharge}})/2$ au cours d'une expérience. On a repris les mesures de la courbe de force typique de la figure 2.4 et on a calculé f pour toutes les valeurs de d . On calcule ensuite $\mu = f/F_{\text{charge}}$. Les résultats sont présentés à la figure 2.6.

On observe que la force f présente deux maximums sur une courbe de force typique. Le premier se situe au point de transition entre le premier et le deuxième domaine à $d = 1.2$ mm. Le coefficient de frottement μ atteint un maximum sur les domaines I et II et reste ensuite constant avant de décroître quand on passe de la charge à la décharge. D'un point de vue quantitatif, on observe que, sur sa partie constante, μ reste entre 0.2 et environ 0.3. Nous avons

réalisé des mesures du coefficient de frottement statique des poils contre différentes surfaces. Pour cela, nous avons recouvert un patin de fibres et nous avons mesuré l'angle de glissement (voir le schéma de la figure 2.6 (gauche)). Le coefficient de frottement est de l'ordre de 0.3 pour l'aluminium ce qui est compatible avec la valeur théorique de μ mesurée ici.

Le modèle patin-ressort explique le premier maximum du coefficient de frottement : sur le premier domaine, le pinceau se déforme mais ne glisse pas, ce qui empêche de définir le coefficient de frottement, jusqu'à atteindre le pic de frottement statique. Mais on devrait alors observer un coefficient de frottement constant, alors qu'il décroît jusqu'à s'annuler. Dans la zone II, on devrait voir la différence entre le coefficient de frottement statique et le coefficient de frottement dynamique, mais on n'observe pas un saut brutal, pour la même raison que l'on n'observe pas un saut brutal de la force sur ce domaine. Une fois que le domaine II est nettement dépassé et que tous les poils glissent, le coefficient de frottement est constant. Il décroît ensuite quand la direction du glissement est inversée au passage de la charge à la décharge, pour lequel on ne peut plus définir de coefficient de frottement.

3 Rôle de l'orientation de l'expérience

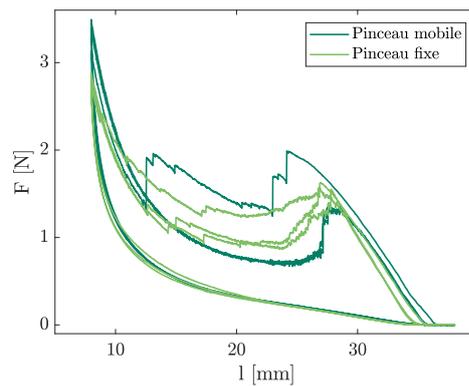


FIGURE 2.7 – Mesure de la force en fonction du déplacement, dans le cas du pinceau orienté vers le haut ou vers le bas. On comprime le pinceau contre une surface plane. Soit le pinceau est attaché au mors mobile, orienté vers le bas, et se déplace vers le bas (courbe foncée, qui correspond à toutes les expériences présentées plus haut) soit le pinceau est fixe, orienté vers le haut, et la surface est fixée au mors mobile et se déplace vers le bas.

Le modèle ressort-patin que l'on a discuté plus haut était orienté horizontalement et ne tenait donc pas compte de la gravité. Notre expérience est réalisée verticalement, de sorte que le poids des poils pourrait avoir un effet sur la forme qu'ils adoptent et donc sur la force que l'on mesure.

Pour inverser l'orientation de l'expérience, nous avons fixé un pinceau (type F) au mors immobile. Une pièce constituée d'une surface plane et adaptable aux mors a été fabriquée à l'aide d'une imprimante 3D et fixée au capteur de force situé dans la partie mobile de la machine de traction. On représente deux courbes expérimentales obtenues à la figure 2.7.

Outre l'inévitable variabilité que l'on observe sur le domaine II, ces deux courbes sont parfaitement similaires, la force F est identique quelle que soit l'orientation de l'expérience par rapport à \vec{g} . On en conclut qu'il est donc acceptable de négliger le poids des fibres, dont l'effet ne sera donc pas pris en compte dans les chapitres qui vont suivre.

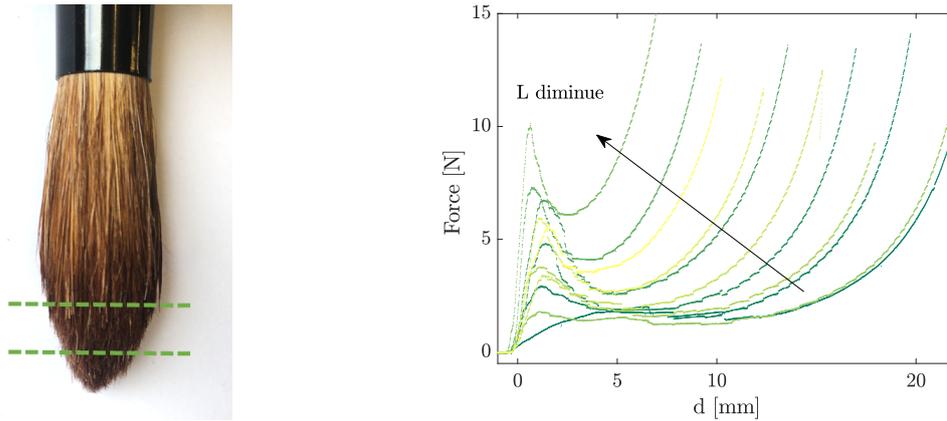


FIGURE 2.8 – (Gauche) Modification de L . Les lignes pontillées représentent deux plans de coupe du pinceau (type F). (Droite) Force mesurée en fonction du déplacement pour différentes longueurs. La force est mesurée pour deux exemplaires de pinceau de type D, taillés à des longueurs de poils L variant entre 13.6 mm et 30 mm à une vitesse de $v=10$ cm/min.

B Étude des courbes de force en grandes déformations

1 Protocole expérimental

L'objectif de cette section est d'étudier l'évolution de la force aux grandes déformations (le domaine IV défini à la section précédente). Pour cela, nous avons fait varier la longueur L en taillant un pinceau à différentes longueurs selon le schéma de coupe de la figure 2.8 (gauche). Les pinceaux sont coupés avec des ciseaux de coiffure très aiguisés et la taille est réalisée en plusieurs fois de façon à obtenir un pinceau avec une forme la plus régulière possible. On estime que l'incertitude sur la mesure de L est de l'ordre de 0.5 mm.

Cette expérience a été réalisée sur deux exemplaires de pinceau de type D, deux pinceaux de type C, ainsi que sur un exemplaire de pinceau de type F (les résultats de ce dernier cas ont donné des résultats similaires et seront discutés au chapitre suivant).

La distance d maximale pour laquelle on a mesuré la force F est d'autant plus petite que L est petite, de façon à éviter d'atteindre des taux de compression qui risquent de déformer plastiquement le pinceau.³ En pratique, le rapport d_{\max}/L a varié entre 0.57 et 0.75 au cours de ces expériences. Cet intervalle de valeur est compatible avec le fait que le pinceau reprenne sa forme après 3 à 7 cycles de charge-décharge.

2 Analyse dimensionnelle et résultats expérimentaux

On représente à la figure 2.8 (droite) les données expérimentales de $F(d)$ pour L variable, avec des pinceaux de type D (30 mm étant la longueur des poils non taillés). Les couleurs sont attribuées de façon à distinguer les courbes.

On observe qu'à d donné, plus L est petit, plus F est grand. De plus, la forme des courbes est identique quelle que soit la valeur de L . La bosse globalement d'autant plus marquée et le

3. La déformation plastique du pinceau n'est pas identique à celle des fibres qui le composent. Il nous semble que dans le cas du pinceau, le régime plastique correspond plutôt à la modification des conditions d'encastrement des fibres, mais des expériences complémentaires seraient nécessaires pour comprendre cette question.

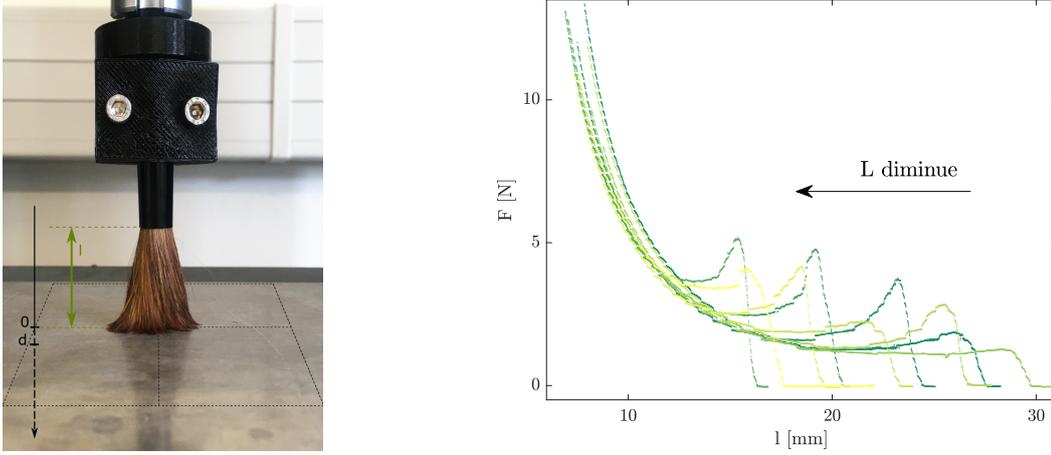


FIGURE 2.9 – **(Gauche) Compression d'un pinceau d'art contre une surface plane.** La longueur libre l est la distance entre la virole et la surface, elle vaut L au contact et diminue quand le mors descend. Pinceau de type F, de longueur $L=40$ mm. **(Droite) Force mesurée en fonction de la longueur libre l .** On représente les mêmes données qu'à la figure 2.8, en fonction de la longueur libre $l = L - d$ définie en 2.1. Les courbes les plus à gauche correspondent aux valeurs de L les plus petites.

domaine III est d'autant plus court que L est petit. La valeur de la force sur le domaine III est constante pour toutes les valeurs de L supérieures à 13.6 mm. On observe également que la pente du domaine IV est d'autant plus importante que L est petit.

Notre hypothèse est que sur ce domaine, la seule zone du pinceau qui est sollicitée est celle se situant entre la virole et la surface, et pas la longueur de poil déjà étalée. On définit alors cette longueur libre (la longueur qui n'est pas en contact avec la surface, que l'on représente à la figure 2.9 (droite)) l telle que :

$$l = L - d \quad (2.1)$$

de sorte que l est égale à la longueur L du pinceau à l'instant du contact et décroît ensuite avec d . Faire cette hypothèse revient à considérer que l'on peut décrire le système avec un paramètre libre de moins. On retrace alors les données expérimentales de la figure 2.8 en fonction de cette nouvelle variable à la figure 2.9 (droite).

On constate que le domaine IV se rassemble sur la même courbe maîtresse, pour toutes les valeurs de L . Les domaines I, II et III cependant ne se rejoignent pas sur la courbe maîtresse. Si on fait un raisonnement en ordre de grandeur, il vient que puisque l est une variable de la dimension d'une longueur qui suffit à décrire la partie non-linéaire aux grandes déformations à elle seule, on peut proposer une loi d'échelle pour F . En considérant $F(l, N, r, E, \nu, \mu, \mu_p)$, la seule façon de construire une grandeur de la dimension d'une force est d'avoir :

$$F \propto Er^j l^k \quad (2.2)$$

où j et k sont deux entiers tels que $j+k = 2$. Le cas $k = 1$ ne peut pas convenir, car on observerait alors un comportement linéaire sur le domaine IV à la figure 2.9 (gauche). En posant $I = \frac{\pi r^4}{4}$ qui est le moment d'inertie pour une poutre à section circulaire [36]) et en supposant que F est proportionnel à I , la seule façon de construire une force est alors :

$$F = \alpha \frac{EI}{l^2} = \frac{a(EI, N, \mu, \mu_p, \nu)}{l^2} \quad (2.3)$$

où α est un coefficient sans dimension mais dépendant potentiellement de ν , μ et μ_p mais indépendant de l et L . Par souci de lisibilité, on définit également le préfacteur a , qui est homogène

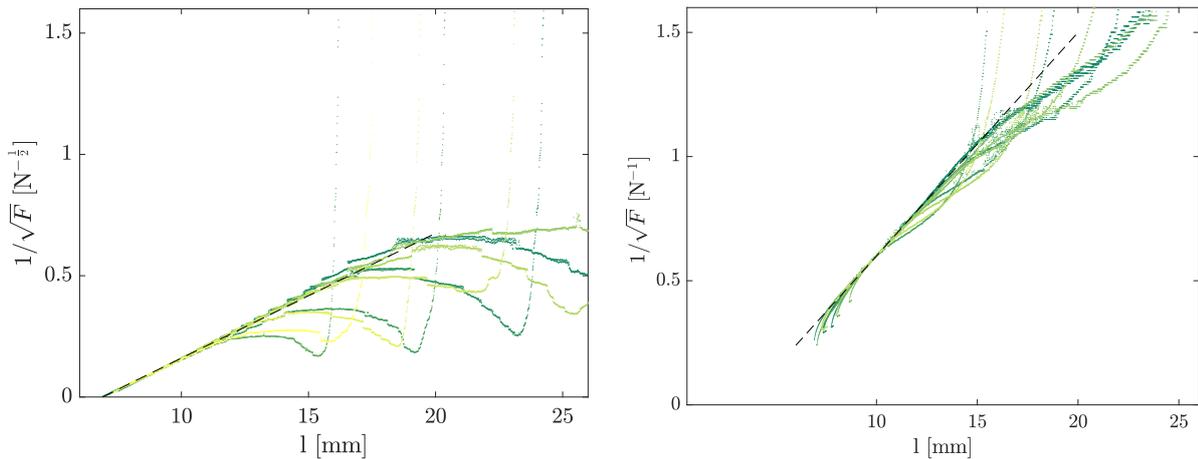


FIGURE 2.10 – **Effet de la longueur des poils.** Les données expérimentales pour F à L variable sont retracées de façon à mettre en évidence la loi d'échelle 2.3. Chaque couleur représente une valeur différente de L , la ligne pointillée est un ajustement linéaire des courbes sur le domaine IV. À gauche, on a tracé les mesures en compression et à droite les mesures en décompression.

au produit d'une force par une surface. Nous avons donc repris les données expérimentales à L variable en représentant $1/\sqrt{F}$ en fonction de l (voir la figure 2.10, à gauche pour la compression et à droite pour la décompression).

À nouveau, les données se rassemblent sur une même courbe maîtresse et celle-ci est une droite, ce qui confirme la validité du modèle de l'équation 2.3 pour décrire le domaine IV.

Nous allons discuter plus en détails la valeur du préfacteur a . Pour cela, les courbes de forces sous leur forme auto-similaires ont été ajustées à des droites comme cela est représenté à la figure 2.11, pour une courbe complète de chargement-déchargement. L'intervalle d'ajustement a été choisi en repérant visuellement la transition entre les régimes III et IV sur les courbes $\frac{1}{\sqrt{F}}(l)$. Le changement de pente était plus net en chargement qu'en déchargement. Les intervalles d'ajustement sont délimités par les cercles et la partie des données que l'on prend en compte pour le calcul de l'ajustement est représentée dans une couleur plus foncée. On estime que le positionnement des bornes de cet intervalle a un impact mineur sur la pente du régime IV.

On observe en premier lieu que ce préfacteur est différent pour les courbes en charge et en décharge. Ces ajustements ont été réalisés, pour chaque valeur de L , pour 3 à 5 cycles de charge décharge. Les mesures de force à L variable ont ensuite été reproduites sur un pinceau de type C. La figure 2.11 regroupe les mesures de a pour deux types de pinceaux (en marqueurs pleins pour les pinceaux de type D, et en marqueurs vides pour les pinceaux de type C), pour plusieurs cycles (les marqueurs les plus foncés correspondent aux premiers cycles), pour la compression (marqueur pointant vers le bas) et pour la décompression (marqueur pointant vers le haut).

Sur cette figure, on observe que le préfacteur a est bien indépendant de la longueur L pour un type de pinceau donné, en distinguant la charge et la décharge, et les cycles les uns des autres. En revanche il est différent pour les deux types de pinceau.

Il semble cependant que pour le pinceau de type D, L ait un effet sur les premiers cycles en charges (marqueurs vert foncés pointant vers le bas). Cet effet peut être dû à plusieurs facteurs. Jusqu'ici, nous n'avons jamais pris en compte aucun effet collectif, donc aucun impact de la présence d'autres fibres au voisinage d'une fibre donnée. Premièrement, plus L est court, plus la distance libre l entre la surface et la virole est petite, et plus encore sur le domaine IV que l'on

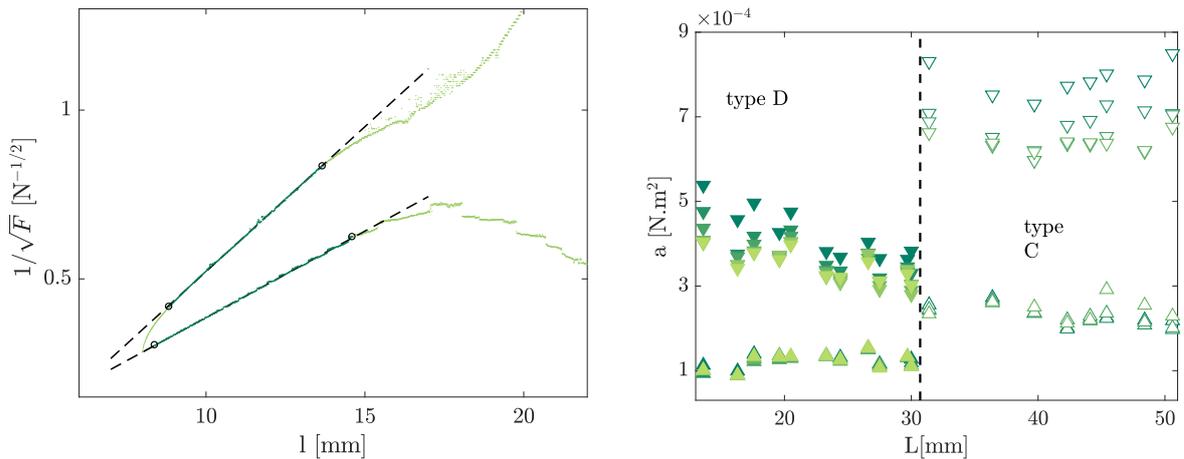


FIGURE 2.11 – **(Gauche) Ajustement linéaire sur le domaine III.** Les lignes pointillées sont des ajustement linéaires de $1/\sqrt{F}$ pour la force mesurée en compression et en décompression. Les cercles signalent les bornes de l'intervalle d'ajustement, que l'on choisit manuellement pour chaque courbe. Le pinceau utilisé ici est un pinceau type D. **(Droite) Effet de la longueur des poils sur le domaine III.** Chaque point représente la valeur de la constante $a = Fl^2$ obtenue en ajustant les courbes de forces comme montré à la figure de gauche. Deux exemplaires du même pinceau de type D (marqueurs pleins) sont utilisés, ainsi qu'un pinceau de type C (marqueurs vides), on fait varier L comme décrit en 1. Chaque cycle est représenté par une couleur différente à L donné. Les marqueurs pointant vers le haut correspondent à la décharge, ceux pointant vers le bas à la charge.

étudie ici et qui est situé aux grandes compressions. Or, la distance libre l est aussi la hauteur sur laquelle doivent se répartir tous les poils du pinceau. De sorte que si un grand nombre de fibres est comprimé à petit l , celles-ci vont être comprimées les unes contre les autres et les fibres du dessus seront plus comprimées que les autres (voir schéma sur la figure 2.12), de sorte que l'approximation qui consiste à définir un l identique pour tous les poils n'est plus valable, et que l'on doit mesurer une force plus importante pour les petites valeurs de L , ce qui est bien le cas. En décompression, cet effet collectif devrait faire diminuer la force (et donc la pente a) pour les petites valeurs de L , car les poils dont la compression est alors plus grande du fait de leur voisins exercent une force plus importante. Cet effet n'est pas observable sur nos expériences. La question de l'interaction entre les fibres sera abordée à nouveau sous un autre aspect à la partie 3.



FIGURE 2.12 – **Valeur de l pour différents poils d'un pinceau.** Trois valeurs de l_i sont représentées pour trois fibres i positionnés plus ou moins profondément à l'intérieur du pinceau. Une photographie d'un pinceau est représentée pour comparaison.

Néanmoins, l'ensemble des résultats présentés à la figure 2.11 nous semble assez convainquant pour confirmer notre modèle de $F = 1/l^2$.

3 Expériences à N variable en grandes déformations

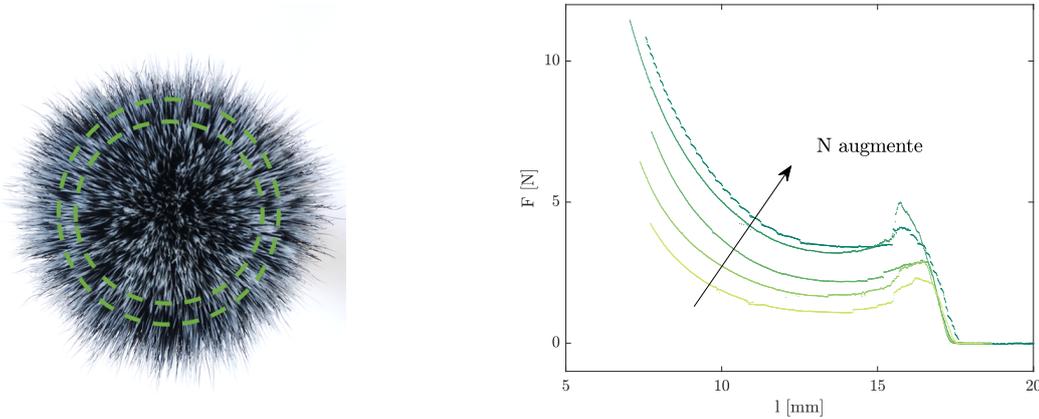


FIGURE 2.13 – Mesure de la force en compression pour différentes valeurs de N . On représente à gauche deux plans de coupe du pinceau et à droite la force en fonction de l , pour différentes valeurs de N . La vitesse est $v=10$ mm, le pinceau est un exemplaire de type D.

Les parties précédentes ont abordé la question de la mécanique de la compression d'un pinceau en ramenant le problème à l'étude d'un seul poil, sans voisins. Cette description est étonnamment robuste, mais le préfacteur a en grandes déformations n'est néanmoins pas identique pour les différents types de pinceaux. Nous avons vu que celui-ci peut dépendre des paramètres N , ν , μ , μ_p et EI .

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'effet du nombre de poils sur le préfacteur. En effet, ce paramètre présente l'avantage d'être facilement ajustable en gardant tous les autres paramètres constants (contrairement à r , E , ν et μ_p), simplement en taillant les poils du pinceau sous forme d'une couronne (voir les plans de coupe de la figure 2.13 (gauche)). Cette découpe permet de conserver la symétrie du problème.

Pour étudier l'effet du nombre de poils sur les courbes de force, on a estimé N en pesant les poils ayant été découpés avec une balance de précision. On a taillé progressivement jusqu'à environ 80 % des poils d'un pinceau de type D et 60 % de ceux d'un pinceau de type C.

Une première hypothèse naturelle est de considérer que la force mesurée sera proportionnelle à N et donc que a doit être proportionnel à N . Expérimentalement on observe que F dépend bien de N (voir figure 2.13 (droite)). Pour voir si cette dépendance est compatible avec notre hypothèse, on a ajusté les courbes obtenues à notre modèle en $1/l^2$ et on a représenté l'évolution du préfacteur a en fonction de N à la figure 2.14. On a représenté par des lignes les ajustements linéaires de $a(N)$ pour les pinceaux C et D, en charge et en décharge. Les données ajustées sont celles du deuxième cycle.

On observe que a est bien proportionnel à N , pour deux types de pinceaux, en compression et en décompression. Cependant, a doit dépendre également des autres paramètres r , EI , ν , μ et μ_p , puisque l'on observe que ses valeurs sont différentes entre les pinceaux C et D, même à nombre de fibres constant (en particulier en compression).

Nous avons donc montré que $F \propto N/l^2$ pour le domaine IV donc en grandes déformations. Tout se passe comme si, sur une grande gamme de L et de N , les fibres n'avaient aucune forme d'interaction. Ainsi, il devrait être possible de décrire les grandes déformations du pinceau par

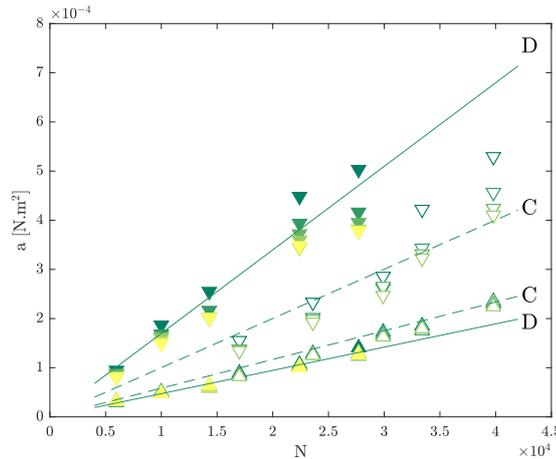


FIGURE 2.14 – **Effet du nombre de poils sur le domaine IV.** Chaque point représente la valeur de la constante $a = F * l^2$ obtenue en ajustant les courbes de forces comme montré à la figure 2.11 (gauche). Un pinceau de type D (marqueurs pleins) ainsi qu'un pinceau de type C (marqueurs vides), on fait varier L comme décrit en 3. Chaque cycle est représenté par une couleur différente à L donné. Les marqueurs pointant vers le haut correspondent à la décharge, ceux pointant vers le bas à la charge. Les lignes sont des ajustements linéaires de $a(N)$. Les couleurs changent en fonction du numéro du cycle, les premiers cycles sont les marqueurs les plus foncés.

un modèle à poil unique, dont on peut étudier le comportement grâce aux équations de l'élastica. La section suivante porte sur ce sujet.

C Dimensions du contact fibres-surface et approche théorique

En introduction, nous avons montré que l'intégration de l'équation d'Euler, pour une poutre encastree-pivot sur laquelle s'exerce une force F perpendiculaire à sa ligne moyenne s'exprime comme :

$$F(x, y) = 3EI \frac{y}{x^3} \quad (2.4)$$

On peut retrouver dans cette équation les paramètres L et l (qui peuvent jouer le rôle de y), ainsi que E et r (car le module d'inertie I est proportionnel à r^4). Le coefficient de Poisson n'est pas présent parce que l'équation d'Euler adopte l'hypothèse de Bernoulli sur la non-déformation des sections transverses, impliquant que les zones de la poutre qui sont comprimées ne peuvent pas se dilater. Par ailleurs, on ne tient pas compte des frottements, d'où l'absence de μ et μ_p . Pour passer à un système de poils multiples, on peut en première approximation multiplier $F(x, y)$ par le nombre de poils N .

La difficulté principale est que, si l'on veut comparer nos données expérimentales à cette expression simple de l'élastica, même en ordre de grandeur, il faut nécessairement estimer y qui est une longueur dans la direction transverse aux fibres. Dans le cas d'une fibre unique, cela n'aurait pas posé de problème. Mais un pinceau comprend un très grand nombre de fibres, il nous était donc impossible d'observer la position de chacune d'elles. Nous avons néanmoins réalisé des enregistrements vidéos d'expériences de compression de pinceau contre une surface rigide et nous avons observé la position des fibres les plus excentrées, qui définissent la limite du pinceau. Le dispositif expérimental était identique à celui qui a été décrit plus haut en ajoutant deux panneaux d'éclairage LED ainsi qu'une plaque de plastique dépoli à l'arrière de la machine de

force de traction, de façon à obtenir un bon contraste et une lumière homogène. La caméra (caméra numérique Nikon D7200) à été placée à la hauteur de la surface de compression. On représente à la figure 2.15 trois images d'un pinceau, obtenues pour des distances d croissantes. La fréquence de prise d'image était de 24 images par seconde.

Les images obtenues ont été traitées à l'aide du logiciel ImageJ puis de Matlab. Les images ob-

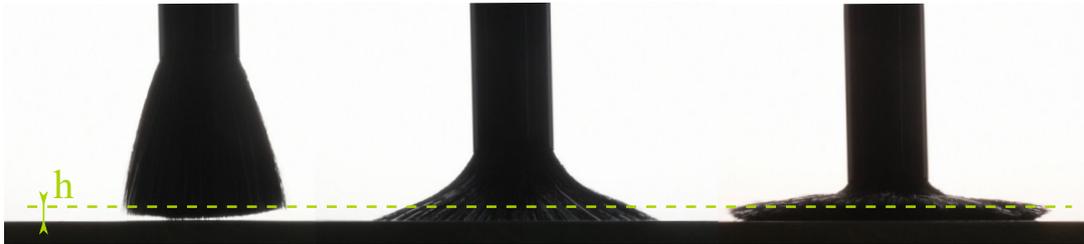


FIGURE 2.15 – Photographie d'un pinceau à différents stade de compression. La ligne horizontale représente la hauteur à laquelle la présence du pinceau est détectée.

tenues ont ensuite été traitées par le logiciel Matlab de façon à obtenir, pour différentes valeurs de l , la longueur δ_c du diamètre du contact entre le pinceau et la surface, en mesurant la taille du pinceau à une hauteur h que l'on choisit (elle est repérée sur la figure 2.15 par une ligne en pointillés). On représente à la figure 2.16 l'évolution en fonction du temps de la longueur δ_c , pour différentes valeurs de la hauteur h , variant entre 0 mm et 1.5 mm. Celle-ci est croissante, jusqu'à 70 sec, qui correspond à la moitié de la durée de l'expérience et à la phase de compression. La deuxième moitié est décroissante et correspond à la phase de décompression. Naturellement, on observe que la longueur mesurée dépend de la hauteur h , et est globalement d'autant plus grande que h est petit. Au très grandes déformations (ici, pour t variant 65 sec et 85 sec environ) on observe, pour toutes les valeurs de h , une décroissance de δ_c . Celle-ci est due à la forme prise par le pinceau (voir l'image la plus à droite de la figure 2.15), où les poils les plus bas s'étalent moins que les poils les plus hauts. Plus h est petit, plus cet effet est net, ce qui se comprend bien compte tenu de cette forme. Pour éviter cet effet et observer une valeur de δ_c qui décrit le mieux possible le diamètre maximal sur lequel le pinceau s'étale, nous avons réalisé les mesures suivantes à $h = 0.5$ mm.

La figure 2.17 représente donc l'évolution de δ_c en ayant choisi $h=0$ mm ainsi que la mesure de la force F effectuée en parallèle. On observe sur ces figures globalement deux phases décrivant l'évolution de δ_c : une croissance très brutale (jusqu'à $l=2$ mm environ, δ_c augmente de 23 mm), qui correspond à la partie linéaire de la courbe de force, c'est-à-dire au régime I. La deuxième phase (entre $l=2$ mm et $l=17$ mm environ), correspond à une croissance de δ_c de 20 mm environ, ce qui est beaucoup plus lent. Les droites en pointillés sur la figure 2.17 sont des ajustements linéaires de $\delta_c(d)$. On trouve une pente de 1.06 pour le diamètre en compression et une pente de 0.96 pour la mesure en décompression. À titre de comparaison on a représenté aussi une droite de pente 1. On trouverait aussi une pente 1 pour une fibre qui aurait une forme de coin (pour laquelle la fibre serait alors en contact avec la surface sur toute la longueur δ_c). Dans ce cas, on a $\delta_c + l = L$, ce qui donne une pente 1 car $l = L - d$. Aux grandes déformations, on doit donc se retrouver dans une situation assez similaire.

Ceci nous conduit donc à choisir comme ordre de grandeur $\delta_c \propto y \propto l$. On a montré plus haut que l était le paramètre déterminant pour la force en grandes déformations. On estime donc $x \propto l$. Ce qui conduit alors à :

$$F = \frac{3NEIy}{x^3} \propto \frac{3NEI}{l^2}$$

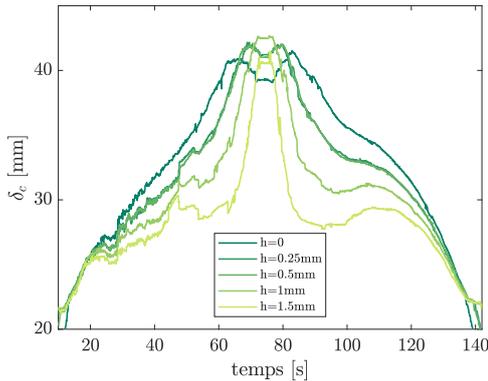


FIGURE 2.16 – Effet de la hauteur à laquelle on repère les bords du pinceau sur le profil mesuré. Sur un cycle de charge-décharge de 140 secondes, on a mesuré la position des bords du pinceau à différentes hauteurs.

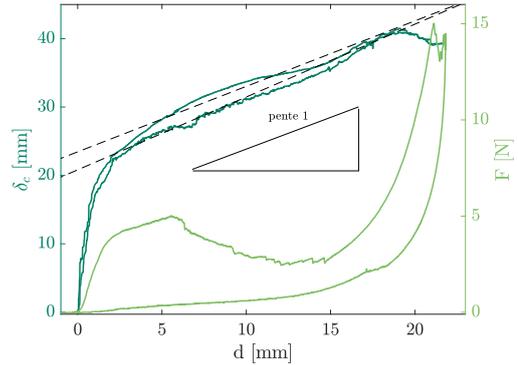


FIGURE 2.17 – Évolution du diamètre du contact et de la force en fonction de d pour un cycle. La longueur occupée par le pinceau à $h=0.5$ mm au-dessus de la surface est représentée en fonction de d , ainsi que la mesure correspondante pour la force.

On retrouve la loi de puissance que l'on avait obtenue par des arguments d'homogénéité à la section B.

D'un point de vue quantitatif, pour les pinceaux que l'on a utilisés, on a vu que le diamètre D_p des poils était de l'ordre de $80 \mu\text{m}$. Pour une poutre à section circulaire $I = \frac{\pi D_p^4}{64}$ [36], et on a donc $I \simeq 2 \times 10^{-18} \text{m}^4$. Nous avons réalisé des mesures de forces sur poil unique dans une machine de force fabriquée au laboratoire et permettant de mesurer des forces inférieures au newton⁴. Ces mesures ont donné E variant d'environ 1.7GPa pour les poils synthétiques d'un pinceau de type D (qui sont assez semblables à ceux des pinceaux A, qui proviennent du même fabricant). Ceci donne donc le préfacteur $3EI$ de l'ordre de $10.2 \times 10^{-8} \text{N}$.

Les ajustements de la figure 2.14 donnent un coefficient de proportionnalité entre a et N variant entre $1.7 \times 10^{-8} \text{N/m}^2$ et $4.7 \times 10^{-9} \text{N/m}^2$, selon si on réalise les mesures en chargement ou déchargement.

Cet écart d'un ordre de grandeur est finalement assez faible. Car dans le préfacteur a sont cachés un grand nombre de phénomènes physiques et d'approximations, comme le fait que l'on néglige tous les frottements, toutes les interactions entre les fibres, que l'on considère que l'on peut linéariser les équations de Kirchoff (et donc que les déformations sont petites, alors même que l'on est précisément dans un domaine de grandes déformations), où encore que la résultante des forces de contact est perpendiculaire à la ligne médiane de la fibre et que les pinceaux sont constitués de poils identiques. Au regard de cet ensemble d'approximations, il est très étonnant d'observer des lois d'échelles aussi compatibles avec l'équation d'Euler et tout à fait compréhensible d'avoir un écart d'un ordre de grandeur sur le préfacteur de ces lois d'échelles.

D Simulation d'une poutre unique en éléments finis et comparaison aux résultats expérimentaux

Dans cette partie, nous avons réalisé des simulations numériques d'un modèle à une seule poutre en éléments finis à l'aide du logiciel Comsol Multiphysics. En effet, comme nous l'avons discuté plus haut, le modèle de poutre sans interactions est une bonne approximation pour

4. Cette machine a été empruntée à l'équipe SOBIO que nous remercions.

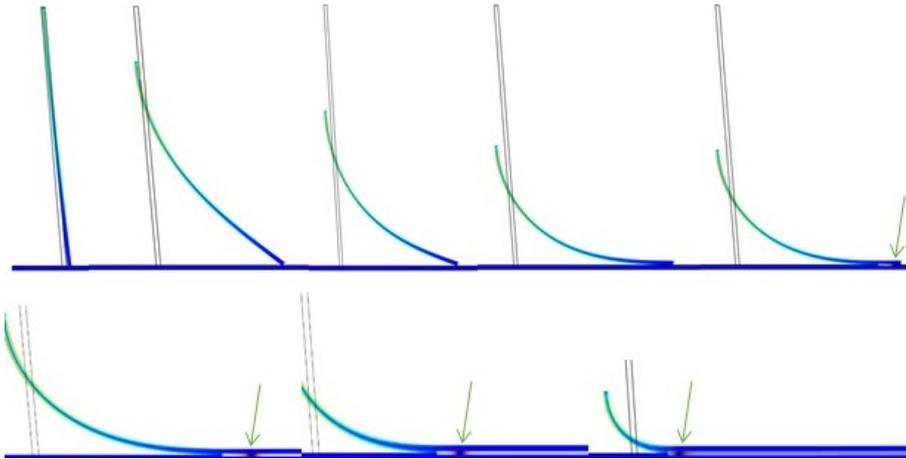


FIGURE 2.18 – (Gauche) Images de simulation d'une poutre unique contre une surface rigide à différents déplacements de l'extrémité supérieure. Les couleurs signalent la valeur de la contrainte. Le rectangle vide est la position initiale de la poutre. Les flèches pointent la zone de contrainte maximale de la surface de contact.

décrire le comportement des assemblées de fibres en compression ou décompression. Il s'agit ici de résultats préliminaires que nous n'avons obtenus que très tardivement à l'issue de cette thèse. Nous n'avons pas eu le temps de faire varier de façon systématique les résultats.

Les simulations sont réalisées pour une poutre cylindrique de diamètre $1\ \mu\text{m}$, de longueur L variant entre $10\ \mu\text{m}$ et $120\ \mu\text{m}$ ⁵. Le matériau choisi pour la poutre est du nylon ($E=2\ \text{GPa}$, $\nu=0.4$) et la plaque contre laquelle elle est comprimée est en aluminium ($E=70\ \text{GPa}$). Les deux sections aux extrémités de la poutre sont planes. Les conditions aux limites sont l'encastrement pour l'extrémité supérieure et l'extrémité inférieure est libre. Le modèle des sections précédentes, le contact poutre-surface est sans frottement. Au début de la simulation, la poutre est légèrement inclinée pour briser la symétrie de l'expérience et pour que la poutre se déplace toujours dans la même direction. Des images issues des simulations sont représentées à la figure 2.18. On calcule ensuite la force exercée sur la section supérieure de la poutre, ainsi que le déplacement l_c dans la direction horizontale de la section inférieure.

La figure 2.19 représente les données obtenues pour différentes valeurs de L , tracées en fonction de d (à gauche) ou sous la forme auto-similaire prédite par le modèle (à droite). Chaque courbe correspond à une valeur de L différente. On a représenté à la figure 2.20 la position l_c selon l'axe horizontal de la section inférieure de la poutre, pour différentes valeurs de L .

Sur les figures 2.19 (gauche) et 2.20 on a représenté les positions respectives de plusieurs points. Les marqueurs pleins sont placés aux limites des domaines telles qu'on pourrait les définir par analogie avec les données expérimentales et seront discutés à la section suivante.

En premier lieu, on observe que l'allure générale des courbes de force en éléments finis (Fig. 2.19 (gauche)) est semblable à celle des expériences à poils multiples (Fig. 2.8 (droite)). On reconnaît les domaines I (augmentation rapide de la force), III (la force est pratiquement constante) et IV

5. Pour rappel, les dimensions d'un fibre d'un pinceau sont de l'ordre de $80\ \mu\text{m}$ sur quelques centimètres. Pour les simulations numériques cependant, les dimensions ne jouent aucun rôle tant que la taille caractéristique du maillage reste adaptée à l'expérience. Le rapport d'aspect diamètre/longueur, en revanche, a un impact sur la physique de l'objet : une poutre et un cube ne se comportent pas de la même façon. Dans les simulations numériques, nous avons fait varier le rapport d'aspect entre 10 et 120, tandis que dans nos expériences il est plutôt de l'ordre de 400. Cependant, dès que l'objet est assez élancé pour être considéré comme une poutre, son rapport d'aspect n'a plus d'impact. La valeur exacte du rapport d'aspect pour laquelle l'objet devient une poutre n'est pas déterminée, mais il est raisonnable de considérer qu'elle est autour de 10.

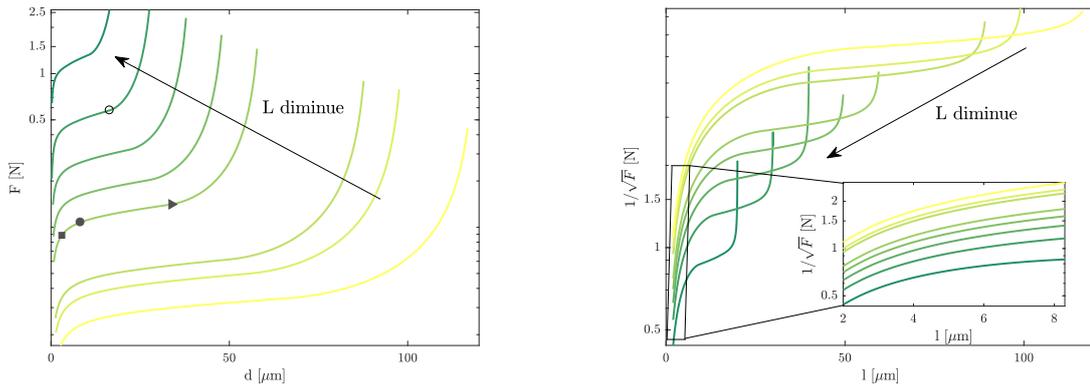


FIGURE 2.19 – (Gauche) Courbes de force $F(d)$ obtenues en éléments finis, pour une poutre unique de longueur L variable. (Droite) Les mêmes données, en traçant $1/\sqrt{F}(l)$. L'insert est un agrandissement de la zone à grandes déformations.

(augmentation rapide de la force).

En revanche, nous n'observons pas de « bosse » (le domaine II). Ceci accrédite la thèse que le domaine II est dû au phénomène de frottement, lequel n'a pas été intégré à nos simulations. Cependant, on peut se demander pourquoi on observe néanmoins une zone qui correspondrait au domaine I, dans la mesure où la pointe de la fibre se déplace dès le début de l'expérience, du fait de l'absence de frottement. On n'observe pas de modification précise de la dynamique de déplacement de la fibre lors du passage du domaine I au domaine III sur les courbes simulées (voir la figure 2.20). Mais il semble en observant la répartition des contraintes au sein de la fibre que celles-ci sont concentrées sur une zone plus haute tant que l'on reste dans le domaine I. Des expériences plus poussées seraient nécessaires pour caractériser précisément la répartition des contraintes au sein de la fibre.

En comparant les figures 2.19 (gauche) et 2.8 (droite) on constate ensuite que les résultats de simulations et des expériences montrent le même effet de la longueur L : plus celle-ci est petite, plus la force mesurée est importante. La figure 2.19 (droite) que l'on compare alors aux résultats expérimentaux 2.9 (gauche) présente un comportement semblable : les courbes expérimentales se rapprochent les unes des autres aux grandes déformations (à petit l). Cependant, plusieurs différences apparaissent. La première est que, dans le cas des simulations numériques, les courbes ne se rassemblent pas sur une courbe maîtresse (voir 2.19 (droite, insert) : les données de $1/\sqrt{F}$ aux différentes valeurs de L sont égales à une constante près. Cet écart entre les courbes, que l'on n'observe pas en fibres multiples, est peut-être dû à la multiplicité des longueurs des fibres au sein d'un pinceau. Dans un pinceau, la longueur de toutes les fibres n'est pas identique et l n'est pas non plus la même pour chaque fibre (comme discuté dans la section B). De sorte que faire la somme de la force mesurée sur chaque fibre peut moyenniser cet effet d'ordre 2 de la longueur.

La seconde différence par rapport aux courbes expérimentales est que l'on observe plus le maximum local aux petites déformations qui correspondait au glissement.

Les simulations en éléments finis permettent aussi d'établir une comparaison par rapport aux mesures de la longueur de contact des pinceaux, dont les résultats ont été présentés à la figure 2.17. On constate que l'allure des courbes présente des similitudes. L'extrémité de la poutre se déplace d'abord rapidement quand d augmente puis adopte un comportement linéaire. On a représenté par un cercle sur les figures 2.19 (gauche) et 2.20 le point d'abscisse $d=16.44\ \mu\text{m}$, et l'on constate que la transition dans un régime linéaire du déplacement du contact se produit précisément au moment du passage dans le domaine III.

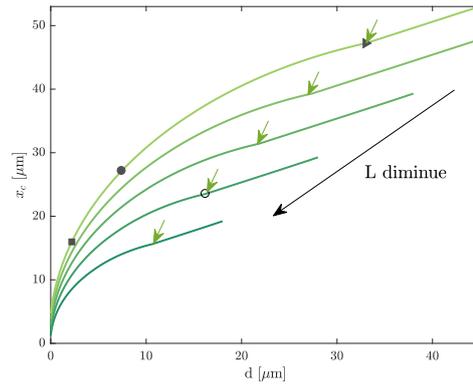


FIGURE 2.20 – (Droite) Position de l'extrémité libre de la poutre en fonction du déplacement d , pour différentes longueurs L . Les flèches vertes signalent le point d'inflexion des courbes.

Ceci nous confirme la pertinence de réaliser un ajustement linéaire des courbes expérimentales de δ_c tel qu'il est représenté à la figure 2.17 et confirme la validité de notre hypothèse de $x \sim l$ en grandes déformations.

E Position des domaines

On a défini au début de cette partie quatre domaines, correspondant à autant de comportements des poils d'un pinceau. La figure B représentait les points de transition d'un domaine à une autre, pour une valeur donnée de la longueur L des poils d'un pinceau. Mais, comme on l'a vu aux figures 2.9 et 2.14, l'aspect des courbes de force est modifié quand L varie. On s'est intéressé à cet effet sur le domaine IV, mais pas à la position de ce domaine, ni des autres. En effet, quelle que soit la valeur de L (dans la gamme que l'on a explorée), on constate que l'on peut toujours distinguer quatre régimes. Mais avec la diminution de L , la valeur de d à laquelle se fait la transition, par exemple, du domaine III au domaine IV, est modifiée. On a représenté sur la figure 2.4 les valeurs de d pour lesquelles la transition d'un régime à un autre se fait, pour différentes longueurs L . Ces données sont issues des mêmes expériences que celles de la figure 2.9. Les lignes de transition d'un domaine à un autre sont des interpolations des points de mesure.

Sur les courbes de force obtenues à partir des simulations numériques, nous avons réalisé le même processus de détermination de la position des quatre domaines. Les résultats obtenus pour différentes valeurs de L sont représentés à la figure 2.21 (droite). La ligne pointillée est un ajustement des données dont le marqueur est un triangle à une fonction linéaire, pour lequel on trouve $d=0.55L$ (compris dans l'intervalle de confiance à 95 % [0.548,0.555]).

On observe que la répartition des domaines n'est pas homothétique : il n'est pas équivalent de compresser de 10 % de sa longueur un pinceau de longueur $L = 14$ mm ou $L = 27$ mm. En effet, le premier régime correspond toujours en moyenne à $d \in [0, 0.83]$ cm (le second chiffre étant obtenu en moyennant la valeur des points notés avec un marqueur carré sur la figure 2.4, à l'exclusion du dernier pour lequel les poils n'ont pas été taillés du tout). D'un point de vue général, la dernière courbe de force (correspondant donc aux trois marqueurs à $L = 30$ mm) semble assez différente de toutes les suivantes. On attribue cet effet au fait que le diamètre des poils décroît très vite vers leur extrémité, de sorte qu'une taille, même peu importante, change singulièrement le diamètre des poils.

Les résultats obtenus à partir des simulations numériques sont plus difficiles à interpréter du

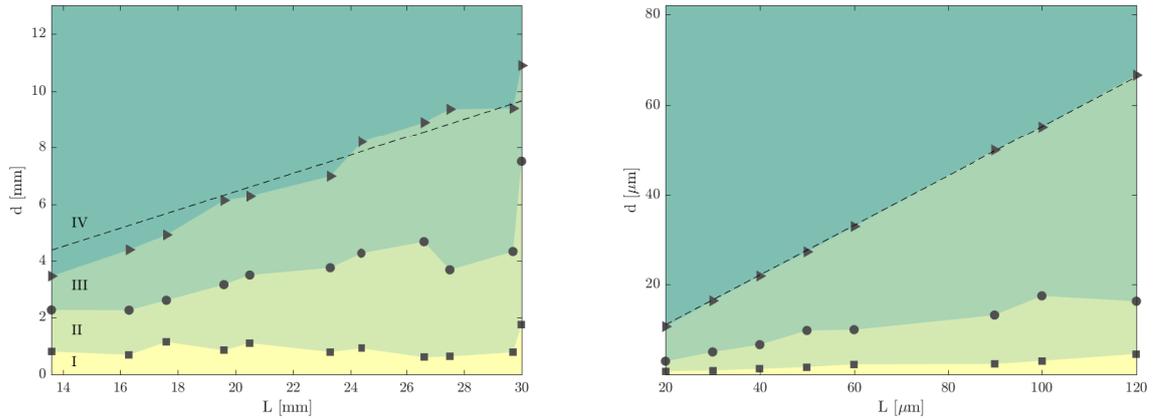


FIGURE 2.21 – (Gauche) Position des domaines pour différentes valeurs de L . On repère visuellement la transition d'un domaine à un autre comme représenté sur la figure 2.4, pour différentes valeurs de L pour un même pinceau de type D. (Droite) Position des domaines repérés sur les courbes de force issues des simulations numériques en éléments finis. La position du début du plateau (domaine III, représenté par les cercles) est repérée quand la force semble devenir constante, et non quand le domaine II s'achève.

point de vue de la position des domaines I, II, et III. En effet, la fin du domaine I et du domaine II est déterminée manuellement et l'absence de bosse nette empêche de repérer clairement un changement de comportement, ce qui rend hasardeux de proposer une analyse. En revanche, le couple (d, L) correspondant au passage du domaine III au domaine IV est très bien déterminé pour les simulations numériques, parce qu'il correspond au point d'inflexion de la courbe de déplacement de l'extrémité libre de la poutre. En réalisant un ajustement linéaire on observe que d est proportionnel à L , avec un très bon accord des données à l'équation $d = 0.55L$. Au grandes déformations, on a montré que les expériences à poils multiples étaient décrites par $l = L - d$. En utilisant l'ajustement linéaire issu des simulations, on pourrait donc dire que le régime IV commence pour $\epsilon = l/L = 0.45$, et se produit donc à un taux de déformation ϵ constant. En réalisant le même ajustement pour les expériences, on trouve $d = 0.32L$ et donc $\epsilon = 0.68$. Les résultats des simulations numériques montrent que le domaine IV commence quand la zone de contrainte maximale sur une fibre se déplace vers l'extrémité supérieure. On peut alors comprendre que ce phénomène se produise plus tard avec des fibres multiples, car il faut pour cela que les fibres soient étalées. Or, les effets de voisinage empêchent cet étalement pour les fibres au coeur du pinceau, dont le mouvement est contrarié par les fibres de la périphérie. Il faudra donc un taux de compression plus important pour écraser toutes les fibres.

F Conclusion sur la mécanique d'un pinceau

Dans cette partie, nous avons étudié les courbes force-déplacement de plusieurs assemblages de fibres. Nous avons mis en évidence qu'il est possible de réaliser des variations de grande ampleur sur le nombre de fils au sein d'un assemblage, la longueur des fibres, leur diamètre, les conditions d'encastrement, ou la forme de la découpe et d'obtenir toujours, étonnamment, un comportement mécanique qualitativement semblable.

Nous avons proposé un modèle composé d'une fibre élastique à une extrémité encastree et avec un point de contact frottant contre la surface, dont le mouvement nous a permis de définir différentes phases de déplacement. Nous avons appuyé cette analyse du déplacement d'une fibre par des simulations numériques en éléments finis.

Ce modèle comprend, aux grandes déformations, un domaine sur lequel ce n'est plus seulement une extrémité, mais toute une partie de la fibre qui est en contact avec la surface. Par des considérations sur l'énergie de courbure, nous avons fait l'hypothèse que, dans ce régime, la distance entre l'extrémité encastrée de la fibre et la surface suffit à décrire le problème, ce qui nous a permis de proposer une loi d'échelle en $F \propto N/l^2$. Nous avons montré que le régime des grandes déformations est bien compatible avec cette loi d'échelle, en compression et en décompression et pour deux types de pinceaux.

L'étude de l'effet de la longueur L des fibres a confirmé que l'hypothèse de notre modèle était valide. L'étude de l'effet du nombre N de fibres nous a confirmé que le considérer comme un paramètre multiplicatif était une bonne approximation du comportement de l'assemblage aux grandes déformations.

Chapitre 3

Forme et raideur des pinceaux

Sommaire

A	Forme et dimensions des pinceaux de peinture	95
1	Le pinceau standard	95
2	Méthode de mesure des dimensions des pinceaux	96
3	Résultats expérimentaux	97
4	Discussion	98
B	Lien entre les dimensions d'un pinceau et sa raideur	99
1	Raideur d'une assemblée de poils	99
2	Le domaine du peintre	101
3	Mesure expérimentale de la raideur des pinceaux	102
	a Ajustement linéaire des courbes de force	102
	b Effet de la longueur des fibres	103
	c Discussion du préfacteur de la loi de puissance	104
	d Effet du nombre de fibres	104
4	Effet de l'angle du pinceau	105
C	Conclusion sur la forme des pinceaux	106
1	Résumé des résultats	106
2	Pourquoi les pinceaux ont-ils une raideur constante?	107

Dans la section 2 de l'introduction de cette partie, nous avons évoqué la variété des formes, des tailles et des fonctions des pinceaux en général. Si l'on se concentre sur les pinceaux dont la fonction est de peindre une surface avec un liquide, les pinceaux d'artiste peintre et d'artisan peintre, on peut observer une forme d'unité géométrique au sein de cette variété. L'objet de ce chapitre est l'étude de la géométrie des pinceaux et la compréhension des phénomènes sous-tendant celle-ci.

A Forme et dimensions des pinceaux de peinture

1 Le pinceau standard

Si l'on imagine un pinceau de peinture le plus classique possible, avec une section ronde, il y a de fortes chances que celui-ci ait une forme de fuseau avec une pointe fine et un rapport d'aspect



FIGURE 3.1 – (Gauche) Une gamme de pinceaux standard. Pinceaux de la marque *Raphaël* dans une taille variant de 2 à 20. (Droite) Quelques pinceaux à section ronde. Les barres d'échelle mesurent 15 mm.

difficile à caractériser avec précision, mais cependant reconnaissable instinctivement. Ce pinceau ressemblera alors probablement à celui d'une gamme classique de pinceaux ronds, comme celle qui est photographiée à la figure 3.1 (gauche). Ces pinceaux standard sont généralement désignés par les fabricants simplement comme des « pinceaux ronds » et ils sont idéaux pour « apporter des petites touches, exécuter des points, des contours et des petites formes sinueuses » [81].

En pratique, dans un magasin de fournitures d'art, on peut trouver des pinceaux à section ronde dont le diamètre varie entre environ 1 mm et 20 mm et la longueur entre environ 3 mm et 60 mm. Tous ne sont pas des pinceaux ronds, certains sont nommés « trainards », « pinceaux traceurs », « pinceaux à retouche », ou en encore « à repique », « à jupon », « à lettre » ou parfois désignés de plus par la nature de la peinture comme les pinceaux à aquarelle ou à lavis [82]. Mais peu importe la gamme, la nature des fibres employées, ou le nom du pinceaux, toutes les gammes semblent suivre une même logique dans les dimensions de leurs modèles : on ne trouvera pas de pinceau dont la longueur est 30 fois plus grande que le diamètre, ou dont la longueur est dix fois plus courte que le diamètre (voir la figure 3.1 (gauche) pour un exemple typique de gamme de pinceaux ronds). La même chose se vérifie avec la largeur dans les cas des pinceaux dont la virole est aplatie que l'on désigne ici comme des pinceaux à section rectangulaire ou carrée. Dans cette section, nous avons voulu caractériser comment les dimensions des pinceaux (hauteur, largeur et épaisseur) varient les unes en fonction des autres et comprendre les raisons physiques et mécaniques expliquant ces standards.

2 Méthode de mesure des dimensions des pinceaux

On a mesuré le diamètre et la longueur d'un grand nombre de pinceaux artistiques ou artisanaux, tels qu'on les a définis dans le chapitre précédent (voir la figure 2.1 (gauche)). La longueur L est mesurée de la même façon que dans les parties précédentes, c'est-à-dire entre la virole et la pointe du pinceau et l'aire A de la section est calculée à partir du diamètre D du pinceau au niveau de la virole dans le cas d'un pinceau rond et à partir de la largeur et de la longueur de la virole dans le cas d'un pinceau rectangulaire. Ces deux populations sont séparées. Toutes les mesures présentées dans cette partie ont été réalisées en photographiant les pinceaux

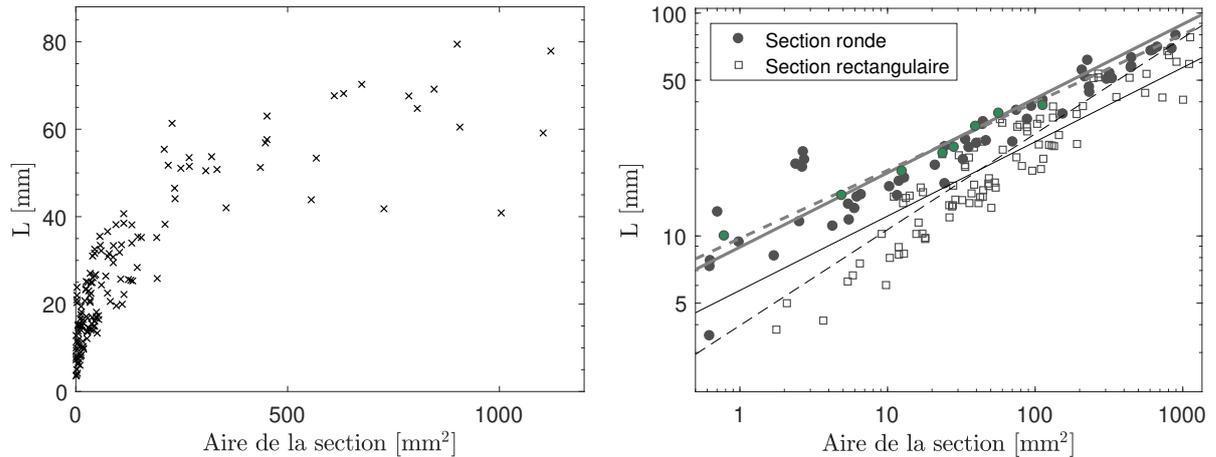


FIGURE 3.2 – **(Gauche) Longueur en fonction de l’aire au niveau de la virole.** Les mesures sont effectuées sur des pinceaux destinés à la peinture d’art et à la peinture de bâtiment. **(Droite) Longueur des pinceaux en fonction de l’aire de leur section.** Pour un ensemble de pinceaux à section ronde (cercles) et à section rectangulaires (carrés), on a mesuré la longueur et les dimensions de la section. Les lignes pointillées sont des ajustements à $L = aA^b$ (on trouve $b=0.305$ pour les pinceaux à section ronde et $b=0.43$ pour les pinceaux à section rectangulaire). Les lignes pleines sont des ajustements à $L = aA^{1/3}$. Dans les deux cas les lignes grises épaisses correspondent aux pinceaux ronds et les lignes noires fines aux pinceaux rectangulaires.

en magasin¹. Les mesures sont ensuite réalisées à l’aide d’une échelle sur les photos. Les gammes de pinceaux à mesurer sont choisies de façon à prendre en compte plusieurs fabricants, plusieurs styles de peinture recommandée (à l’huile, aquarelle et acrylique) et plusieurs matériaux de garniture (synthétique, naturel et combinaison des deux). On estime avoir mesuré des pinceaux d’au moins 70 % des gammes présentes en magasin. Au sein d’une gamme, on a mesuré soit toutes les tailles de pinceaux, soit un échantillon choisi au hasard et comprenant le plus petit et le plus grand. En particulier, on a mesuré les pinceaux les plus petits et les plus grands que l’on ait pu trouver (dans les gammes pour artistes pour les plus petits, et pour artisan pour les plus grands), de façon à couvrir une gamme de taille aussi grande que possible. Environ 150 pinceaux ont été mesurés ainsi.

La figure 3.1 représente un échantillon de quelques uns des pinceaux qui ont été mesurés de cette façon. Les barres d’échelle mesurent 15 mm.

3 Résultats expérimentaux

On représente sur la figure 3.2 (gauche) la longueur L des pinceaux en fonction de l’aire \mathcal{A} de leur section au niveau de la virole, tous types de pinceaux confondus (en particulier, quelque soit la forme de la virole).

Les données expérimentales sont dispersées, mais il semble néanmoins exister une tendance reliant la longueur L et l’aire de la section. Pour mieux comprendre cet effet, nous avons représenté ces même données avec une échelle logarithmique et en séparant les pinceaux en fonction de la forme de leur section. Les résultats sont présentés à la figure 3.2 (droite). Les cercles représentent les pinceaux à section circulaire et les carrés les pinceaux à section rectangulaire.

On observe sur la figure 3.2 (droite) que les pinceaux à section ronde semblent respecter une loi de puissance reliant leur longueur et leur section. Ce résultat se vérifie sur trois décades, les

1. Je remercie les vendeurs des magasins Gibert Arts du boulevard Saint-Michel et de Bricorama Italie 2 pour la tolérance qu’ils m’ont montrée malgré le caractère suspect de mes activités.

longueurs les plus courtes correspondants à des pinceaux d'artiste peintre conçus pour dessiner des détails très fins, et les longueurs les plus longues sont celles de pinceaux d'artisanat. Ce résultat accrédite l'idée qu'il existe une forme de pinceau plus instinctive ou du moins plus standard que les autres. Les résultats sur les pinceaux à section rectangulaires sont plus dispersés et semblent se trouver en-dessous des données des pinceaux circulaires.

Plus précisément, un ajustement au modèle $L = a\mathcal{A}^b$ donne, pour les pinceaux ronds :

$$L[\text{mm}] = 9.75\mathcal{A}[\text{mm}^2]^{0.305} \quad (3.1)$$

Et un ajustement à un seul paramètre libre, en fixant l'exposant à $1/3$, qui est une valeur proche de l'exposant donné par l'ajustement modifie le préfacteur a en $8.91 \text{ mm}^{1/3}$. On représente cet ajustement en traits pleins sur la figure 3.2 (droite). On peut aussi exprimer cette loi d'échelle en fonction du diamètre, dans le cas des pinceaux ronds, et il vient alors $L[\text{mm}] = 8.22D[\text{mm}]^{2/3}$.

De la même façon, on réalise des ajustements linéaires distincts pour les pinceaux à section rectangulaire et on obtient, dans le cas de deux paramètres libres (ligne fine en pointillés) :

$$L[\text{mm}] = 3.97\mathcal{A}[\text{mm}^2]^{0.43} \quad (3.2)$$

avec un intervalle de confiance sur l'exposant se situant entre 0.395 et 0.465. Si on cherche à fixer l'exposant à la valeur $1/3$ (l'ajustement est représenté par la ligne continue fine), le préfacteur devient $5.70 \text{ mm}^{1/3}$. La qualité de l'ajustement est alors moins bonne.

4 Discussion

L'existence d'une loi universelle reliant la longueur des pinceaux à leur diamètre montre que ces pinceaux ne sont pas simplement homothétiques comme on pourrait le penser naïvement. Ce résultat est d'autant plus étonnant qu'à notre connaissance, aucune norme dans l'industrie de la brosse n'impose de respecter spécifiquement cet exposant pour la géométrie des pinceaux. Le processus de fabrication des pinceaux implique que, pour un modèle donné, la taille de la virole et la longueur de poils dépassant de la virole sont imposées, mais rien ne définit *a priori* quelles doivent être ces deux dimensions.

Par ailleurs, nous avons montré qu'une loi du même type pouvait décrire la géométrie des pinceaux à section rectangulaire, quoiqu'avec une plus grande dispersion des données. Dans le cas d'un ajustement à deux paramètres libres, l'exposant pour les pinceaux rectangulaires est plus grand que $1/3$, mais compte tenu de la largeur de l'intervalle de confiance et du bon accord pour les pinceaux à section ronde, il nous semble raisonnable de conjecturer que la cause de la loi de puissance est probablement identique pour les deux types de pinceaux.

On observe néanmoins que pour toute valeur de \mathcal{A} donnée, les pinceaux rectangulaires seront plus courts que les pinceaux ronds, et ceci d'environ 3.2 mm, si on compare les résultats des ajustements aux modèles en exposant $1/3$. Ce phénomène peut s'expliquer par plusieurs différences entre les pinceaux à section ronde et les pinceaux à section rectangulaire.

Les pinceaux ronds ont presque tous une pointe et les poils du centre sont alors plus longs que ceux de la périphérie. C'est le cas aussi pour certains pinceaux plats, mais la majorité d'entre eux a une pointe « plate ». De sorte que lorsqu'on définit la longueur d'un pinceau comme la distance entre la virole et la pointe, dans le cas d'un pinceau rond, cette longueur sera celle de seulement une petite fraction des poils. Tandis que dans le cas d'un pinceau rectangulaire, une plus grande proportion de ces poils mesurera cette longueur L . Nous avons montré dans le chapitre précédent que la longueur d'une assemblée de poutre était un paramètre décisif de ses propriétés mécaniques. Ce décalage entre les pinceaux ronds et les pinceaux carrés pourrait donc résulter du fait que la longueur moyenne des poils des premiers est en réalité plus courte.

Par ailleurs, les pinceaux plats n'ont pas de symétrie de révolution. La forme de la virole est la plupart du temps rectangulaire plutôt que carrée. Un poil a donc toujours plus de voisins dans l'une des deux directions du plan de la virole (celle où le pinceau est le plus fin). Ceci pousse les poils à s'étaler préférentiellement dans cette direction où ils ont moins de voisins. L'aire des pinceaux rectangulaires ne prend pas en compte l'effet de la forme plus ou moins allongée de la virole. Il faudrait prendre en compte cet effet du rapport d'aspect de la virole pour comprendre la différence de raideur entre les pinceaux ronds et rectangulaires. Mais cet effet reste d'ordre 1 car les dimensions des pinceaux rectangulaires restent compatibles avec la loi de puissance des pinceaux ronds.

Nous allons explorer dans la section suivante la question du lien entre les propriétés mécaniques des pinceaux et la loi phénoménologique que nous observons.

B Lien entre les dimensions d'un pinceau et sa raideur

1 Raideur d'une assemblée de poils

Pour expliquer à la fois l'existence de cette loi de puissance et son exposant, on a cherché à exprimer la raideur d'un pinceau.

Pour cela, en se référant au modèle décrit dans la partie introductive et le chapitre 2, on considère un pinceau comme un assemblage de N poutres encastées-libres qui, au court d'une expérience consistant à peindre, sont soumises à une force F s'exerçant de façon transverse à leur extrémité libre.

La constante de raideur k_i d'une seule fibre i est alors définie comme :

$$k_i(x) = \frac{dF}{dy} \quad (3.3)$$

où F est la force ponctuelle exercée sur la fibre en un point de coordonnées (x_0, y_0) . Dans le cas décrit, on a alors, avec E le module de Young de la poutre et I son moment d'inertie :

$$k_i(x) = \frac{3EI}{x^3} \quad (3.4)$$

Notre but est de comprendre la loi d'échelle reliant la longueur et la section d'un pinceau en développant le passage de l'expression de la raideur d'une fibre à celle d'une assemblée.

On considère qu'à petit enfoncement (sur le domaine I, dont on parlera plus en détail par la suite à la partie 2), la grandeur x est comparable à la longueur de la fibre l_i . Pour une poutre à section ronde, on peut exprimer le module d'inertie $I = \pi r_i^4/64$ où r_i est le rayon d'une fibre. Dans ce cas, on pourra exprimer la raideur d'une fibre comme :

$$k_i(x) = \frac{3\pi r_i^4 E}{4l_i^3} \quad (3.5)$$

On considère, comme plus haut, que $l_i = L$ et $r_i = r$ soit que toutes les fibres sont identiques et on néglige leurs interactions, de sorte que l'on considère que la raideur k totale du pinceau est la somme de la raideur de toutes les raideurs k_i de chacune des fibres.² Cette hypothèse paraît

2. Cela revient à modéliser le pinceau comme une assemblée de ressorts en parallèle. Pour un ressort cependant, on a $k_i \propto 1/l_i$ (si l_i est proportionnel au nombre de spires ce qui est le cas si l'écart entre les spires est constant). De la même façon, un barreau ou une poutre en compression selon son axe principal a une raideur inversement proportionnelle à sa longueur [83].

raisonnable dans la mesure où le comportement collectif étudié en 3 montrait que cette approximation décrivait correctement le comportement mécanique en grandes déformations. Pour relier cette expression aux dimensions du pinceau on introduit, c la compacité de l'assemblage (au niveau de la virole), c'est-à-dire la surface d'une section du pinceau occupée par les fibres, et qui est donc :

$$c = \frac{Nr^2}{R^2} \quad (3.6)$$

Avec R le rayon de la virole. Par exemple, on a pour un pinceau de type F, $c = 0.588$ (avec $N = 9200$ et $R = 10$ mm). En remplaçant r , défini par l'égalité 3.6 dans 3.5 et avec $k = N \sum_{i=1}^N k_i$, on peut exprimer la raideur k du pinceau en fonction du rayon d'une fibre et du nombre de poils puis en fonction du rayon R du pinceau, du nombre de poils N , et de la compacité c :

$$k = N \frac{3\pi r^4 E}{4L^3} = \frac{3\pi c^2 R^4 E}{4NL^3} \quad (3.7)$$

Pour comparer ce modèle aux mesures réalisées sur les pinceaux, pour lesquels nous ne disposons pas de la valeur de N , on définit la densité du pinceau au niveau de la virole, c'est-à-dire le nombre de fibres par unité de surface, telle que :

$$N = \pi \phi R^2 \quad (3.8)$$

Par exemple, on aura alors pour les pinceaux F, $\phi = 29$ poils/mm². Cette équation permet d'écrire, en remplaçant l'expression 3.8 dans l'équation 3.7, et en introduisant le diamètre D et l'aire \mathcal{A} de la virole :

$$k = \frac{3}{16} \frac{c^2 E D^2}{\phi L^3}$$

$$k = \frac{3}{4\pi} \frac{c^2 E \mathcal{A}}{\phi L^3}$$

Un calcul identique donnera, dans le cas des pinceaux à section rectangulaires, en notant e et w respectivement l'épaisseur et la largeur du pinceau au niveau de la virole :

$$k = \frac{3}{4\pi} \frac{c^2 E w e}{\phi L^3}$$

$$k = \frac{3}{4\pi} \frac{c^2 E \mathcal{A}}{\phi L^3}$$

Dans les deux cas, ce modèle prédit donc la loi d'échelle :

$$L \propto \left(\frac{\mathcal{A}}{k} \right)^{1/3} \quad (3.9)$$

On a montré que l'on observait expérimentalement la loi d'échelle $L \propto \mathcal{A}^{1/3}$ (cf. figure 3.2 (droite)). Notre modèle théorique est donc compatible avec les données si la raideur k et les grandeurs E , c et ϕ sont constantes pour tous les pinceaux.

La compacité dépend essentiellement du choix et du serrage de la virole (ainsi que de la ligature éventuelle). Une ligature trop large ou peu serrée impliquerait que la garniture puisse se détacher du manche ou que les poils seraient mobiles les uns par rapport aux autres, les pinceaux ont donc probablement une compacité proche.

Par ailleurs, les expressions 3.6 et 3.8 donnent $\phi = \frac{c}{\pi r^2}$ dans le cas d'un pinceau rond³. De sorte que, si la compacité est semblable pour tous les pinceaux, la densité ne dépend que du rayon des fibres employées pour la garniture.

En pratique, la très grande variété des poils naturels et synthétiques employés pour la fabrication des pinceaux a des diamètres différents mais de l'ordre de grandeur de quelques dizaines de μm pour les poils « fins » (employés pour les pinceaux de qualité destinés au corps et à la peinture artistique). Les fibres des pinceaux destinés au bâtiment peuvent avoir des diamètres plus importants (nous avons mesuré 300 μm pour un pinceau de type A, rectangulaire et 100 μm pour un pinceau de type B circulaire)⁴.

Cette variabilité de diamètre peut expliquer en partie la relative dispersion des données de la figure 3.2 (droite) et le fait que cette dispersion soit plus importante pour les pinceaux à section rectangulaire.

Les fibres employées pour la fabrication de pinceaux ont, d'après nos mesures sur des pinceaux de type A, C et D, des modules de Young E de l'ordre de quelques GPa. Il nous semble raisonnable de considérer que ce paramètre varie donc peu.

Ainsi une explication plausible pour la loi de puissance observée sur les dimensions des pinceaux est que respecter ces dimensions permet d'obtenir des objets de raideur constante.

Notons que le calcul que nous venons de présenter de la raideur d'un pinceau ne prend pas comme paramètre la forme de la virole. L'effet de celle-ci peut en revanche être caché dans la valeur de la compacité c ou de la densité de poils ϕ . En pratique, pour les pinceaux d'art, les viroles rectangulaires sont produites en aplatissant des viroles rondes. Comme, à périmètre constant, l'aire d'un rectangle est plus petite que celle d'un cercle, il est possible que c et ϕ soient plus importants dans le cas des pinceaux carrés que dans les pinceaux ronds.

2 Le domaine du peintre

L'idée de cette étude est de s'intéresser à l'effet de la loi de puissance sur les proportions d'un pinceau sur l'action de peindre, *via* la mécanique du pinceau, et plus spécifiquement de vérifier si leur raideur k est effectivement constante. Pour cela, nous avons pris plusieurs hypothèses sur la façon dont les pinceaux sont utilisés en pratique par les utilisateurs.

Comme on l'a montré à la partie 2, les assemblages de fibres comme les pinceaux ont un comportement mécanique riche, et la forme de la courbe de force dépend fortement de la gamme de compressions que l'on explore.

Notre hypothèse est que, dans le cadre d'une utilisation normale par un manipulateur habitué à l'emploi de pinceaux, c'est le domaine I qui est exploité. Ce domaine est défini comme la zone des courbes de force pour laquelle la force est proportionnelle au déplacement (voir Fig. 2.4). Il présente plusieurs avantages. Le premier est que c'est dans ce domaine que les forces appliquées sont les plus faibles. En effet, pour accéder aux domaines II et III, pour lesquels on peut avoir une force plus basse qu'au domaine I, il faut dépasser le maximum marquant la transition entre les domaines I et II, ce qui requiert plus d'énergie. Par ailleurs, sur le domaine I, le déplacement est beaucoup moins sensible à la force exercée que sur le domaine III (ce qui permet d'éviter qu'une toute petite variation de force involontaire génère de grands déplacements) et cette sen-

3. Et la même chose à un facteur π près dans le cas d'un pinceau rectangulaire.

4. En règle générale, la finesse des poils d'un pinceau est liée à sa qualité et à sa précision. Les pinceaux à section ronde, du fait de leur forme pointue, sont souvent utilisés pour des travaux de précision, que ce soit dans l'art ou dans le bâtiment, de sorte qu'il est cohérent qu'ils soient fabriqués avec des fibres relativement fines. Les pinceaux à section rectangulaire peuvent être utilisés dans l'art (dépendant d'autres paramètres) pour des travaux de précision variable, mais les pinceaux plats pour le bâtiment ne sont pas forcément précis, ce qui leur permet de tolérer des fibres de moins bonne qualité et donc plus épaisses.

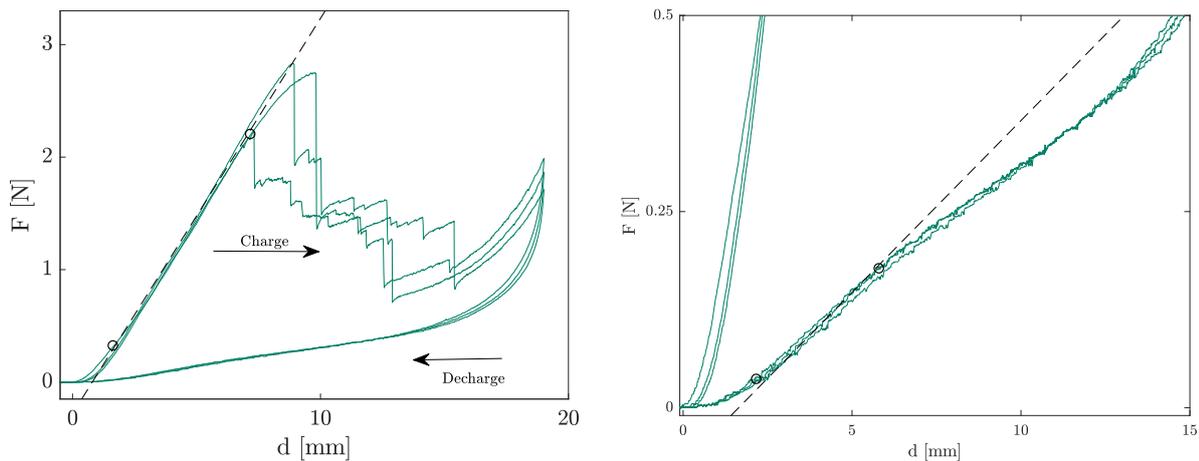


FIGURE 3.3 – Ajustement linéaire des courbes de force sur le domaine du peintre. Les données expérimentales (trait plein) sont ajustées à une droite (ligne pointillée) entre les bornes signalées par les cercles. La figure de droite est un agrandissement de la figure de gauche. Le pinceau utilisé est un pinceau rond de type F.

sibilité est plus reproductible que sur le domaine II (où la valeur de la force à un enfoncement donné dépend du nombre de fibres qui ont déjà glissé).

Enfin, sur le domaine I, la force maximale exercée est généralement assez petite pour ne pas rentrer dans le domaine de plasticité du pinceau (ce qui n'est pas toujours le cas sur le domaine IV). En pratique on a constaté sur nos expériences qu'un pinceau utilisé uniquement sur le domaine I conservera toujours plus ou moins sa forme quel que soit le nombre d'utilisations.

L'ensemble de ces arguments nous semble suffisant pour conclure qu'il est raisonnable de considérer que l'utilisation normale d'un pinceau par un manipulateur entraîné explore le domaine I, que l'on appellera aussi le domaine du peintre.

3 Mesure expérimentale de la raideur des pinceaux

a Ajustement linéaire des courbes de force

Sur le domaine I, la courbe $F(d)$ est linéaire et sa pente k est constante (voir pour l'aller et le retour la figure 3.3).

Pour calculer la raideur d'un pinceau donné, on a mesuré l'évolution de la force $F(d)$ sur au moins les domaines I, II et III avec le même dispositif que celui qui a été utilisé aux parties précédentes. L'exploration de déplacements d plus grands que ceux correspondant au domaine du peintre nous a permis de nous assurer que l'on a mesuré la force F sur l'intégralité du domaine I. Pour chaque pinceau, on a ensuite déterminé les bornes entre lesquelles on a réalisé un ajustement linéaire de $F(d)$. La figure 3.3 (gauche) (respectivement droite) montre une courbe $F(d)$ ainsi que les bornes de l'intervalle d'ajustement (cercles noirs) et la droite ajustée (ligne pointillée) pour le deuxième cycle en charge (respectivement en décharge). Cet ajustement est reproduit, pour chaque pinceau, sur au moins trois cycles de compression-décompression.

On constate que, dans la plupart des cas, l'ajustement donne des résultats très similaires sur les différents cycles (excepté parfois le premier). La pente de la courbe $F(d)$ est toujours supérieure en charge qu'en décharge. En décharge, on observe également un point d'inflexion systématique (voir 3.3 (droite)) dont la nature reste à élucider. L'ajustement est fait avant le point d'inflexion.

Notre objectif étant de mesurer la raideur pour des pinceaux de dimensions variables et de tester l'hypothèse de la section précédente qui était que la raideur des pinceau est constante si on respecte la loi de puissance $L \propto \mathcal{A}^{1/3}$. Nous avons donc choisi des pinceaux dont le diamètre

s'étale sur plus d'une décade, de façon à décrire une grande variété de raideurs possibles. On a représenté par des cercles verts à la figure 3.2 (droite) les dimensions des pincesaux dont on a mesuré la raideur.

Par ailleurs, on a réalisé des mesures de raideur sur un même pinceau dont on a fait varier la longueur en le taillant (selon le même protocole que celui qui est décrit au chapitre 2). Le modèle de pinceau utilisé est un pinceau d'artiste peintre, tandis que celui du chapitre 2 était un modèle destiné au maquillage.

La raideur a également été mesurée de la même façon sur les données des expériences à N variable présentées au chapitre 2 et qui ont été réalisées sur des pincesaux de maquillage.

b Effet de la longueur des fibres

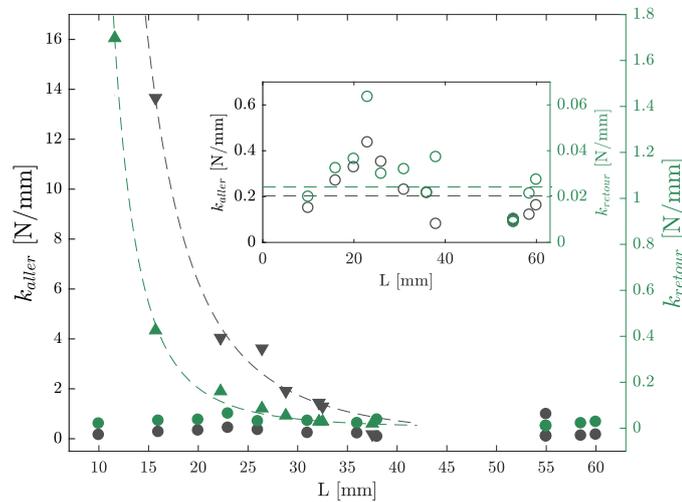


FIGURE 3.4 – Raideur des pincesaux en charge et en décharge en fonction de leur longueur. La raideur est calculée en ajustant les courbes de force comme représenté à la figure 3.3. Les cercles correspondent à des pincesaux commerciaux de longueur et de diamètre variable. Les triangles sont des mesures pour un pinceau (type F) taillé à différentes longueurs et donc de diamètre constant. Les marqueurs noirs sont les mesures en charge, les marqueurs verts en décharge. Les lignes pointillées sont des ajustements des données pour le pinceau taillé à $1/L^3$. En insert sont représentées les mêmes données (des pincesaux non taillés) à une autre échelle. Les lignes en pointillés sont les moyennes calculées pour l'aller et le retour.

Les mesures réalisées sur les pincesaux d'art sont présentées à la figure 3.4. Les cercles sont les valeurs mesurées pour des pincesaux d'art de différents diamètres, et qui ne sont pas retaillés. Les triangles sont les valeurs mesurées pour un pinceau d'art de type F, dont on a taillé la garniture de façon à faire varier la longueur.

En premier lieu, on observe que pour les pincesaux non taillés, la raideur est indépendante de la longueur L , en compression et en décompression, pour une longueur variant d'un facteur 6. La raideur d'un « petit pinceau » (de 10 mm de long et 1.1 mm de diamètre) et d'un « gros pinceau » (de 60 mm de long et 25 mm de diamètre) est donc pratiquement la même! La raideur reste constante, quoique dispersée, autour d'une valeur moyenne respectivement égale à $0.203 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$ à l'aller et $0.024 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$ au retour (voir l'insert de la figure 3.4). Les pincesaux qui ont été mesurés ici ont une aire de section qui varie sur deux décades (leurs dimensions sont représentées par les cercles verts à la figure 3.2 (droite)).

En revanche, les pinceaux que nous avons retailés, et qui ne vérifient donc pas la loi d'échelle $L \propto D^{2/3}$, ont une raideur qui varie très fortement en fonction de leur longueur. Plus précisément, leur raideur varie comme $1/L^3$ à l'aller et au retour (voir les ajustement en pointillés sur le graphique principal de la figure 3.4). Cet ajustement confirme que la théorie présentée à la section 1 qui se fondait sur des ordres de grandeur pour proposer une raideur du pinceau variant en $1/L^3$ est valide.

Par ailleurs, en comparant les données obtenues pour un pinceau dont la longueur varie, mais pas le diamètre, et les données pour les pinceaux dont le diamètre et la raideur varient simultanément suivant la loi $L \propto \mathcal{A}^{1/3}$, on observe que la raideur des seconds varie très peu devant celle des premiers. Autrement dit, si l'on fabriquait les pinceaux de 15 mm de long avec le même diamètre que les pinceaux de 35 mm, les premiers seraient environ 14 fois plus raides que les seconds, tandis qu'en respectant la loi $L \propto \mathcal{A}^{1/3}$, ce facteur n'est que de 1.2.

c Discussion du préfacteur de la loi de puissance

Les mesures sur la raideur effectuées dans cette section nous permettent par ailleurs d'obtenir un ordre de grandeur du préfacteur de la loi de puissance $L \propto \mathcal{A}^{1/3}$. Nous avons vu plus haut que ce préfacteur était :

$$\left(\frac{3}{4\pi} \frac{c^2 E}{k\phi} \right)^{1/3} \quad (3.10)$$

Cette grandeur ayant la dimension d'une longueur à la puissance 1/3. En estimant que k et de l'ordre de $0.15 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$, ϕ de l'ordre 29 poils/mm^2 , $c=0.5$ environ et $E=2 \text{ GPa}$, on trouve un préfacteur de l'ordre de $3 \text{ mm}^{1/3}$. Ceci est à comparer à la valeur expérimentale du préfacteur, que l'on a obtenue en ajustant les données de la figure 3.2 (droite) à des droites. On trouvait alors un préfacteur variant entre $8.22 \text{ mm}^{1/3}$ et $5.26 \text{ mm}^{1/3}$ en fonction de la forme (ronde ou rectangulaire) de la section du pinceau. Ces valeurs expérimentales sont donc en accord à la fois avec la théorie aboutissant à la loi de puissance et avec les mesures de la raideur.

d Effet du nombre de fibres

Pour discuter plus avant du modèle de la raideur d'un pinceau que nous avons développé à la section précédente, nous avons étudié l'effet du nombre de poils N . Notre modèle prévoit que, pour un pinceau donné composé de fibres de longueur L , de rayon r et dont le module de Young est E , la raideur s'exprime comme $k = N \frac{3\pi r^4 E}{4L^3}$.

La figure 3.5 représente l'effet du nombre de fibres N sur la raideur, sur deux pinceaux destinés au maquillage (pour la charge et la décharge). Les pinceaux ont été taillés comme décrit au chapitre 2. Chaque point représente un cycle différent (premiers cycles en vert foncé, derniers cycles en jaunes).

On observe que, malgré une certaine dispersion, la raideur est proportionnelle au nombre de fibres dans le pinceau. Ceci confirme la validité de considérer que la raideur totale du pinceau est la somme des raideurs de chacune des fibres. A l'ordre 0, tout se passe comme si les fibres n'avaient aucune interaction. Ce résultat, déjà montré au chapitre 2 en grandes déformations se confirme ici pour les petites déformations, à la fois pour la charge et la décharge.

Nous observons néanmoins que le pinceau de type D ne respecte pas le modèle. On peut chercher à comprendre ce qu'il a de différent par rapport aux autres pinceaux. La compacité c du pinceau de type C (avant taille) est de $c=0.156$ (avec $N=39800$ et $D=20 \text{ mm}$) tandis que celle du pinceau de type D est de $c=0,598$ (avec $N=27700$ et $R=17 \text{ mm}$). La proportionnalité entre k et N ne se vérifie que si l'on peut négliger l'interaction entre les fibres. Il nous semble

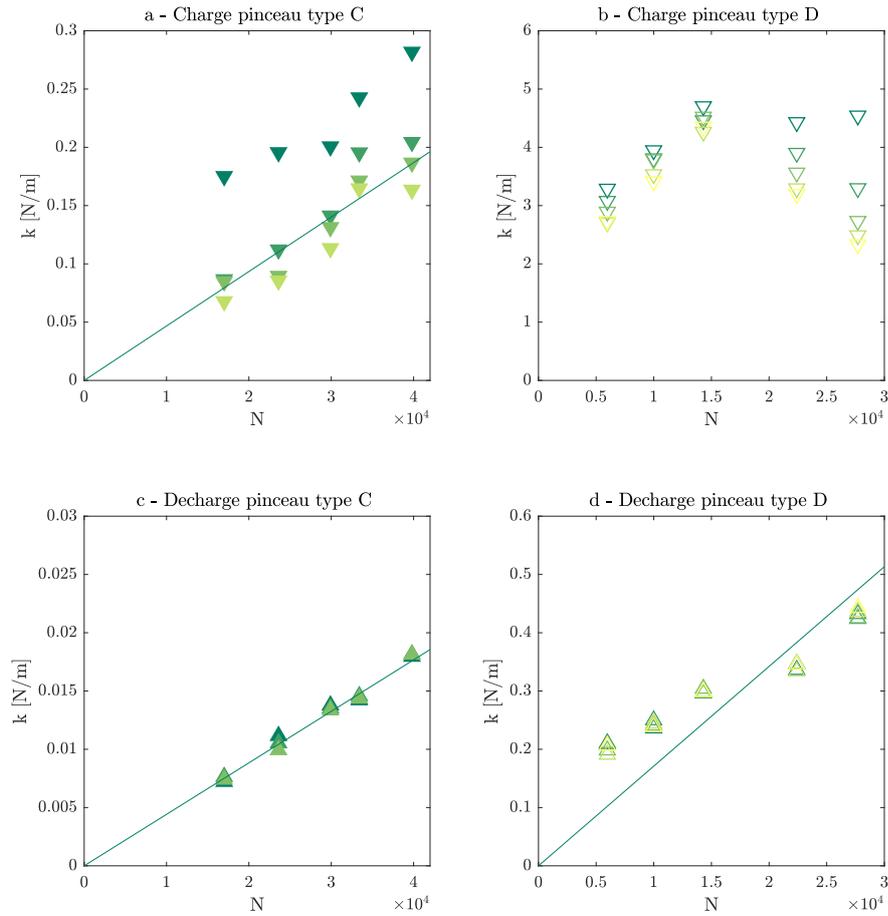


FIGURE 3.5 – Effet du nombre de fibres sur la raideur d'un assemblage. Les figures a et c correspondent respectivement à la charge et à la décharge du même pinceau (type C). Les figures b et d correspondent respectivement à la charge et à la décharge d'un autre pinceau de maquillage (type D). Au moins trois cycles ont été effectués pour chaque valeur de N , les premiers cycles sont en vert foncé, les derniers en jaune. Les lignes sont des ajustements linéaires effectués sur la valeur de la raideur moyennée sur tous les cycles, pour chaque valeur de N .

donc plausible que des phénomènes collectifs émergent dans le pinceau D du fait de sa compacité.

4 Effet de l'angle du pinceau

Un autre paramètre important pour la définition de la raideur du pinceau dans le domaine du peintre est l'angle de contact entre le pinceau et la surface, α .

La figure 3.6 montre l'évolution de la raideur en fonction du sinus de cet angle de contact entre le pinceau et la surface. On constate que la raideur croît avec l'angle α , ou autrement dit, que plus le pinceau est comprimé contre la surface avec un angle proche de la perpendiculaire, plus sa raideur est importante⁵.

Si la force F que l'on mesure était la projection verticale de la force de réaction du support,

5. On constate par ailleurs que, plus le pinceau est incliné, moins la force maximale mesurée sur la « bosse » (le domaine II) est importante, jusqu'à ce qu'il ne soit même plus possible de définir le domaine II. Ceci est cohérent avec l'idée selon laquelle le domaine II correspond au glissement des fibres : quand le pinceau est très incliné, le glissement se fait plus facilement.

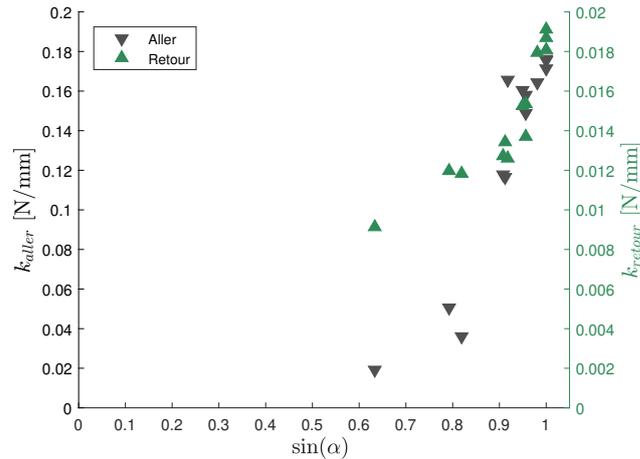


FIGURE 3.6 – Effet de l'angle de contact sur la raideur de l'assemblage. La raideur du pinceau est calculée par un ajustement linéaire des courbes de force sur le domaine I (cf. Fig. 3.3), pour différentes valeurs de l'angle de contact entre le pinceau et la surface, en charge (noir) et décharge (vert). Le pinceau utilisé est de type F.

celle-ci s'exerçant selon l'angle α , on devrait obtenir dans le cadre de notre modèle $k \propto \sin \alpha$. Clairement, on ne voit pas de dépendance linéaire entre la force et le sinus de l'angle dans les données expérimentales.

Une explication du fait que notre modèle n'explique pas l'effet de l'angle de compression sur la raideur peut résider dans la forme du pinceau. En pratique, quand on incline un pinceau contre une surface, le nombre de fibres en contact avec cette surface est d'autant plus petit que le pinceau est incliné et que la déformation imposée est petite. Plus le nombre de fibres en contact est petit, plus la raideur est petite. Une étude plus précise de la formation du contact dans le cas d'un pinceau incliné sur une surface serait intéressante mais n'a pas pu être réalisée faute de temps.

C Conclusion sur la forme des pinceaux

1 Résumé des résultats

Dans ce chapitre, on a montré que les pinceaux destinés à la peinture, d'art ou d'artisanat, respectent la loi de puissance $L \propto \mathcal{A}^{1/3}$ et que ce résultat est étonnamment solide sur trois décades, ce qui correspond, à notre connaissance, à la quasi-intégralité des pinceaux d'usage courant disponibles dans le commerce.

Nous avons introduit un modèle considérant un pinceau comme un ensemble de poutres sans interactions dont chacune a un comportement mécanique respectant la même loi d'échelle $k \propto 1/L^3$ qu'une poutre sollicitée par une force perpendiculaire à sa pointe et décrite par l'équation de l'élastica linéarisée. Nous avons déduit de cette loi d'échelle pour une poutre la loi d'échelle pour le pinceau et nous avons montré que cette loi est $k \propto N/L^3$. Nous avons montré que, selon ce modèle, les pinceaux dont les dimensions sont telles que $L \propto \mathcal{A}^{1/3}$ ont une raideur constante.

Nous avons montré expérimentalement, en faisant varier L et N , que la raideur varie bien comme $k \propto N/L^3$, ce qui confirme la pertinence de notre modélisation de la raideur du pinceau.

Nous avons vérifié expérimentalement que la raideur des pinceaux respectant la loi $L \propto \mathcal{A}^{1/3}$ est bien constante.

Nous avons également discuté l'utilisation de la raideur pour l'analyse de la mécanique des

petites déformations, la différence entre la charge et la décharge, l'effet de l'angle de compression et la différence entre les pinceaux à section rectangulaire et les pinceaux à section ronde.

2 Pourquoi les pinceaux ont-ils une raideur constante ?

Un résultat surprenant de ce chapitre est que les pinceaux de peinture, qu'ils soient destinés à l'art ou à l'artisanat, semblent avoir une raideur constante, et que ceci nécessite que leur dimensions respectent la loi d'échelle $L \propto \mathcal{A}^{1/3}$. Nos entretiens avec la Fédération Française de la Brosserie nous ont appris que la raideur n'est pas un paramètre testé par les fabricants. La confection des pinceaux se fonde sur un savoir faire artisanal subtil et jalousement protégé de la concurrence, mais qui n'est pas contrôlé par des tests mécaniques standardisés quels qu'ils soient. De sorte que la raideur des pinceaux telle qu'on la mesure est accidentelle, ou du moins n'est pas un choix délibéré des fabricants. Il est donc particulièrement étonnant que la loi de puissance que l'on trouve sur leurs dimensions conduise à une relative constance de k sur des gammes de longueur et d'aire de virole très importante.

Cette constance de la raideur pourrait être le fruit d'un hasard, mais elle présente un avantage pour l'utilisateur ce qui nous conduit à penser que ce n'est pas le cas. En effet, si deux pinceaux ont la même raideur, par définition, comprimer ces pinceaux d'une profondeur donnée requerra de l'utilisateur d'employer la même force. De sorte que si la force est le paramètre de contrôle, les pinceaux se comportent en fait tous comme le même outil. Ceci revient à dire, dans une analogie avec de la biologie évolutive, que, au sein de la population des pinceaux, ceux qui respectent la loi $L \propto \mathcal{A}^{1/3}$ présentent l'analogie d'un « avantage évolutif » pour l'utilisateur, qui aurait poussé à ce que leur emploi se généralise. Ceci peut expliquer l'intérêt de la loi d'échelle que l'on observe, mais ne donne pas d'indication plus précise sur le préfacteur ou autrement dit, pourquoi une raideur de l'ordre de $0.15 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$ serait particulièrement souhaitable. Pour tester cette hypothèse que la forme des pinceaux a été sélectionnée car les pinceaux respectant cette loi posséderaient l'avantage d'être plus optimaux que les autres pinceaux, il serait intéressant de réaliser une étude avec des utilisateurs véritables. On pourrait imaginer fournir à un échantillon d'artistes et d'artisan des pinceaux et leur proposer de les utiliser sans les voir, et de les interroger ensuite sur le fait que ces pinceaux semblent avoir ou non un comportement « normal » ou « confortable ».

Chapitre 4

Compression d'une assemblée de fibres imbibée de liquide

Un travail sur la mécanique des pinceaux resterait incomplet sans évoquer la peinture elle-même. Ce chapitre s'intéresse en premier lieu à l'effet de la lubrification sur la mécanique des assemblages de fibres entremêlés et compare ces résultats à ceux obtenus dans le cas d'un contact sec. En second, on cherchera à relier les propriétés mécaniques des pinceaux, en particulier sur le domaine du peintre défini au chapitre précédent, avec l'apparence des marques que ce pinceau dessine sur le papier.

Sommaire

A	Contexte	109
B	Mécanique d'un pinceau chargé de liquide	110
1	Protocole expérimental	110
2	Résultats et discussion	111
	a Effet de la peinture sur les courbes de force	111
	b Effets de contact	112
C	Dépôt d'un liquide sur une surface	114
1	Tâches, traits, motifs et oeuvres	114
2	Protocole expérimental	115
3	Résultats et discussion	116
	a Effet de la rhéologie	116
	b Effet de l'enfoncement	117
D	Conclusion	120

A Contexte

Le passage d'un système de fibres sèches en contact avec un solide sec à un système de fibres recouvertes ou partiellement recouvertes d'un liquide, avec un solide recouvert ou partiellement recouvert d'un liquide complexifie considérablement le phénomène que l'on étudie, dans deux axes principaux.

Dans le cadre de l'étude de la mécanique du pinceau en compression contre un solide, au moins une partie des interactions fibre-fibre et des interactions fibre-solide, qui faisaient auparavant

intervenir du frottement sec, vont impliquer un contact lubrifié. D'un point de vue général, lubrifier une interface diminue la force de frottement qui s'exerce sur l'objet en mouvement. Cet effet est cependant fortement dépendant de la viscosité du fluide employé et de la vitesse de déplacement de l'objet [13]. Dans les chapitres 2 et 3, nous avons montré qu'un modèle ne prenant en compte ni le frottement solide-fibres ni fibres-fibres suffisait à décrire les courbes de force. Nous allons néanmoins étudier dans ce chapitre l'effet de la lubrification sur le domaine I des courbes de forces, pour comprendre si les résultats du chapitre précédent se vérifient toujours.

Dans ce chapitre nous allons aussi étudier le résultat de la compression du pinceau lubrifié, qui est la tâche de peinture déposée sur le solide. Il faut donc s'intéresser à des questions de formation de films, d'entraînement de liquide et de dépôt d'un fluide sur un solide. Ces sujets constituent un champ entier de la discipline, dont on ne mentionnera que quelques éléments ici. Par exemple, le problème de Landau-Levich consiste à étudier la couche de liquide entraînée par une plaque extraite d'un bain. L'idée clé est alors que la force de tension de surface, en s'opposant à la déformation de l'interface fluide-air et donc à la création du film, est antagoniste à la viscosité qui entraîne le liquide au contact de la plaque et favorise donc la création du film [84]. Les caractéristiques du fluide et la vitesse de déplacement de la plaque jouent donc un rôle crucial dans ce problème [85]. La géométrie du système immergé, comme un cylindre, une plaque, ou un objet plus complexe, joue aussi un rôle important et a été étudiée très tôt dès la formalisation de ce problème, en particulier dans les travaux de Goucher et Ward [85]. Quand on étudie des fibres en particulier, la question de la formation d'un film ou de gouttes, ou de tout dépôt liquide de forme intermédiaire est aussi d'un intérêt considérable [86]. Dans notre cas, le système est encore complexifié du fait de l'élasticité des fibres qui doit être prise en compte et qui amène des questions d'élasto-capillarité [87] du fait de la déformation du solide. De plus, la combinaison du fait que les fibres soient déformables et qu'il y ait plusieurs fibres ouvre la possibilité de comportements collectifs, c'est-à-dire d'assemblage en mèches de différentes fibres voisines, phénomène qui a été étudié par exemple sur des nanotubes de carbone [88] ou sur des lamelles souples de dimension centimétrique [89].

L'objet de ce chapitre est d'étudier dans quelle mesure les phénomènes que nous avons évoqués ici jouent un rôle dans l'expérience du peintre. Les expériences que l'on va présenter par la suite portent donc à la fois sur l'effet de l'ajout d'un fluide sur les mesures de forces et les résultats que l'on a établis précédemment, et sur un nouvel objet, le dépôt de peinture, c'est-à-dire la tâche.

B Mécanique d'un pinceau chargé de liquide

1 Protocole expérimental

On a utilisé la machine de force de traction avec un pinceau rond (type F). La machine était équipée du capteur 10 N. Les mors utilisés pour cette expérience étaient les mors fabriqués à l'imprimante 3D. La peinture utilisée était de la gouache (Giotto, gouache prête à l'emploi, teinte vermillon, ref. 5328 07). La machine permet d'imposer un déplacement vertical du mors supérieur z donné, variant pour une expérience entre zéro et d_{\max} qui est la valeur du plus grand déplacement qui sera réalisé pour l'expérience que l'on indique à la machine au début.

Au cours des expériences de cette partie, le pinceau a été comprimé, sec, contre du papier sec (c'est-à-dire de la même façon qu'aux parties précédentes), chargé de peinture contre du papier sec, ou chargé de peinture contre du verre lui-même recouvert d'une épaisseur de peinture non contrôlée, comme le fait un peintre contre sa palette.

Le pinceau est chargé de peinture en utilisant la machine de force de traction : on le déplace verticalement d'une longueur d_{\max} donnée contre une boîte de pétri en verre dans laquelle est

déposée de la peinture.

2 Résultats et discussion

a Effet de la peinture sur les courbes de force

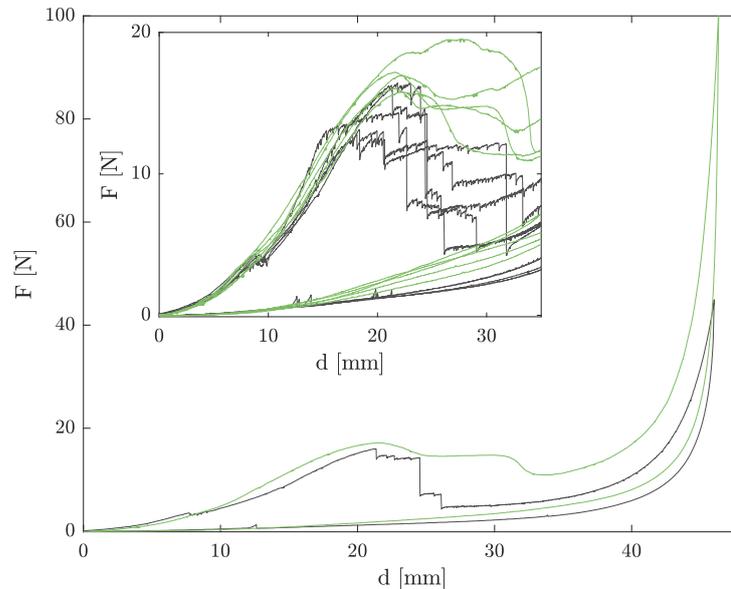


FIGURE 4.1 – **Comparaison des courbes de force pour un pinceau sec et un pinceau enduit de peinture.** Le pinceau utilisé est un pinceau de type C, l'expérience est effectuée à une vitesse de 20 mm/min. La courbe verte correspond au pinceau enduit de peinture, la courbe noire au pinceau sec. L'insert est une représentation agrandie de la même courbe.

On représente à la figure 4.1 la valeur de la force mesurée en comprimant un pinceau sec (courbe noire) et un pinceau enduit de peinture (courbe verte) contre une feuille de papier. L'insert est un agrandissement de la zone des petites déformations. Trois cycles de charge-décharge sont représentés.

On observe en premier lieu sur cette figure que les courbes de forces sont semblables avec ou sans peinture. En particulier, on peut toujours repérer les domaines I, II, III et IV pour les mesures de force avec un pinceau chargé de peinture. Il semble donc que la lubrification du contact et le chargement de peinture n'aient qu'un impact limité sur les mesures de force. Nous observons cependant un phénomène frappant qui est la disparition des décroissances brutales de la force qui apparaissent dans le domaine II pour le pinceau sec. D'un point de vue général, les courbes de force avec du liquide sont beaucoup plus lisses. Nous avons dit plus haut que ces brusques diminutions de la force correspondaient aux moments où une mèche du pinceau glissait. Quand le pinceau est enduit de peinture, qui est un liquide visqueux, les fibres qui glissent sont retenues par le liquide et leur déplacement est plus lent. Par conséquent, la diminution de la force est plus lente aussi, ce qui donne leur aspect plus lisse aux courbes. On constate par ailleurs que le domaine II (la bosse) est toujours clairement identifiable dans le cas du contact lubrifié. Nous avons discuté au chapitre 2 du fait que cette bosse disparaissait en l'absence de frottement, sur les simulations numériques. Ici il semble donc que la diminution de la force de frottement due à la lubrification du contact poil-papier ne soit pas suffisante pour que les poils glissent immédiatement.

Pour étudier plus précisément l'effet de la lubrification sur les courbes de force, nous avons mesuré la raideur en charge comme cela a été décrit au chapitre précédent et en utilisant un pinceau avec de la peinture. Les résultats obtenus sont représentés à la figure 4.2. Le pinceau utilisé était ici un pinceau de type F. Des expériences à plusieurs angles d'inclinaison du pinceau ont été réalisées. La raideur a été mesurée pour de multiples expériences avec lubrification (marqueurs verts). Sur cette figure sont retracées également les données du chapitre 3 (présentées à la figure 3.6) où cette expérience a été réalisée sans peinture pour le même pinceau (marqueurs noirs).

On observe que les valeurs de la raideur sont comparables, que le contact soit lubrifié ou non.

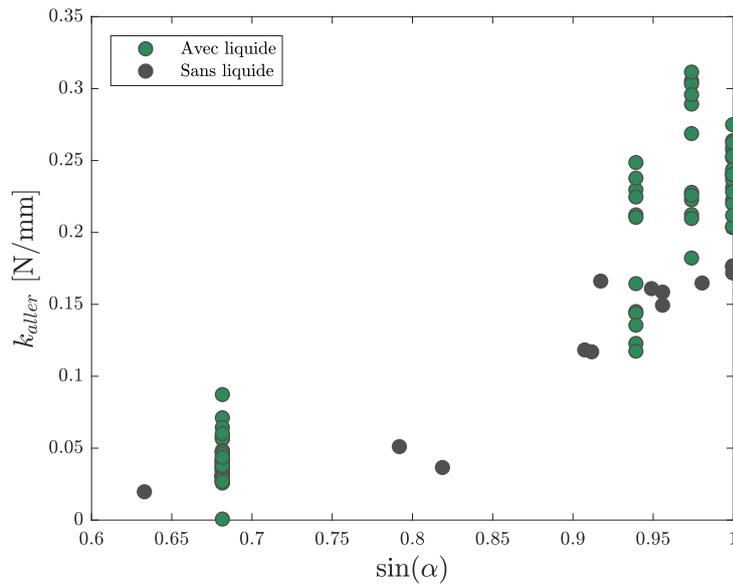


FIGURE 4.2 – Mesure de la raideur à différents angles de compression pour des expériences sans lubrification (noir) et avec lubrification (vert). Les données sans lubrification ont été déjà présentées à la figure 3.6 chap.3. Le même pinceau est employé pour les expériences avec ou sans liquide. La raideur en charge est mesurée en ajustant les courbes de force à une droite sur le domaine I, comme décrit au chapitre 3.

Par ailleurs, la raideur décroît avec le sinus de l'angle de contact, comme on l'avait déjà observé au chapitre 3 et cette évolution n'est toujours pas compatible avec une fonction linéaire. Pour la suite, nous considérerons à l'ordre 0 que les propriétés mécaniques des pinceaux sur le domaine I sont identiques.

b Effets de contact

Nous avons discuté dans le chapitre précédent du fait que le domaine des forces qui nous intéresse pour l'étude de l'acte de peinture se situe aux petites déformations, pour lesquelles la force est linéaire. En particulier, c'est sur ce domaine que se produit le contact entre le pinceau et la surface. Nous avons représenté à la figure 4.3 plusieurs courbes de force, réalisées pour des valeurs de déplacement maximal variable. Le pinceau (type F) est ici comprimé contre une surface d'aluminium recouverte d'une feuille de papier. Entre chacune de ces expériences, le pinceau a été chargé en peinture, sans être nettoyé entre temps, comme le ferait un peintre. De sorte que le pinceau a été chargé quatre fois pour la quatrième expérience.

Plusieurs effets sont visibles sur ces courbes de force. En premier lieu, on observe bien que le domaine I est linéaire en charge, et que, quelque soit l'enfoncement maximal, la partie en charge

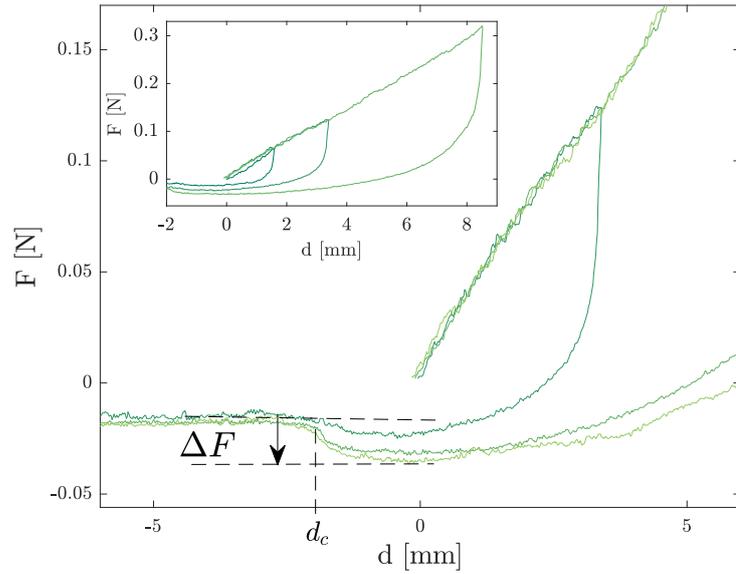


FIGURE 4.3 – **Compression d'un pinceau lubrifié contre une interface plane.** On représente l'évolution de F autour de la position du contact (qui se fait en $d = 0$ mm) pour différentes valeurs de d_{\max} . Les courbes totales sont présentées dans l'insert.

des courbes se superpose.

Ensuite, nous observons que la quantité de peinture emportée par le pinceau a un effet sur les courbes de force. En effet, l'initialisation de la force est réalisée sur le pinceau sec. De sorte que la valeur de la force à la fin de la décharge, quand le pinceau n'est plus en contact avec la surface (par exemple, en $d = -5$ mm) est toujours négative (car la force est positive quand elle s'exerce vers le haut). De plus, on observe que cette force (qui est de l'ordre de la dizaine de mN) est d'autant plus importante que le nombre de fois où le pinceau a été chargé en peinture est important, car la masse de peinture augmente avec le nombre de chargements. Si cet effet de la masse emportée est sensible sur la ligne de base, on constate néanmoins qu'il n'a pas d'impact sur la mécanique du domaine I.

Enfin, si l'on observe les courbes entre $d = 0$ mm et $d = -5$ mm, on constate que la force est croissante. On a représenté la valeur de cette variation ΔF pour l'expérience où $d_{\max} = 13.25$ mm, et on trouve $\Delta F = 18$ mN. La force retrouve la valeur de la ligne de base pour $d_c = -2$ mm, donc quand le pinceau se trouve au-dessus de la position du contact. Ceci nous conduit à conclure que ce phénomène correspond au détachement capillaire en adhésion : jusqu'à d_c , la peinture forme un ménisque entre le papier et le pinceau, et celui-ci se rompt quand d atteint d_c .

La force s'opposant à l'arrachement du ménisque est due à deux phénomènes. Le premier est que l'existence du ménisque, et celle de sa courbure en particulier, génère une pression de Laplace qui est plus faible à l'intérieur du ménisque que dans l'atmosphère et qui tend donc à maintenir le pinceau et la surface en contact. En considérant la pointe du pinceau comme une sphère de rayon R , on peut exprimer la force d'arrachement du pont capillaire sur le pinceau comme [90] :

$$F_{\text{Cap}} = 2\pi\gamma R \quad (4.1)$$

Où γ est la tension de surface de la peinture. En prenant $\gamma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ (la tension de surface de l'eau à 20°) et le rayon R de l'ordre de $D/2$, où D est le diamètre de la virole (donc $R \sim 0.5$ cm), on trouve $F_{\text{Cap}} \sim 2.3$ mN.

Cette valeur est inférieure de presque un facteur 10 à la valeur mesurée. Il est donc plus

difficile de rompre le ménisque reliant le pinceau à la surface que celui qui se formerait avec une sphère. Cette différence peut être due au fait que l'on forme en réalité plusieurs ménisques au sein du pinceau. Si on considère que le pinceau est constitué d'un nombre n_f de fagots de poils de rayon r_f , la force d'arrachement de l'ensemble de ces ménisques devient :

$$F_{\text{Cap}} = 2\pi\gamma r_f n_f \quad (4.2)$$

Un fagot contenant N_p poils aura un rayon $r_f \sim r\sqrt{N_p}$ où r est le rayon d'un poil. Avec $N = N_p n_f$ (le nombre de poils total est égal au produit du nombre de fagots et du nombre de poils par fagot), on peut alors exprimer le nombre de poils dans un fagot comme :

$$n_f = \frac{1}{N} \left(\frac{F_{\text{Cap}}}{2r\pi\gamma} \right)^2 \quad (4.3)$$

En prenant pour la force capillaire la valeur 18 mN mesurée expérimentalement, $r = 80 \mu\text{m}$ et pour le pinceau utilisé, $N = 9200$. On trouve alors un nombre de fagots $n_f \sim 27$ contenant chacun $N_p \sim 340$ poils environ et dont le rayon est $r_f \sim 1.5 \text{ mm}$.

Compte-tenu des dimensions du pinceau, ce nombre semble raisonnable. Le mécanisme conduisant à ces grandes forces d'adhésion serait alors du type de celui qui conduit à l'augmentation de l'adhésion sur les pattes de geckos par division du contact. Une telle hypothèse serait à vérifier dans une nouvelle série d'expériences dans laquelle il serait possible de visualiser les contacts.

C Dépôt d'un liquide sur une surface

1 Tâches, traits, motifs et oeuvres

Les techniques picturales, c'est-à-dire l'ensemble des outils et des gestes visant à appliquer un fluide plus ou moins visqueux et plus ou moins coloré sur un support, sont très variées. Toutes n'impliquent pas nécessairement un pinceau : on peut penser par exemple à l'utilisation du brou de noix par Pierre Soulages ou des aplats de couleur au couteau par Nicolas de Staël. Même quand un pinceau est utilisé, peindre ne nécessite pas forcément de le mettre en contact avec le support, comme dans le cas des jets de peinture de Jackson Pollock.

Dans cette étude cependant, on se concentrera sur la façon la plus classique (au sens propre) d'employer un pinceau : le charger de peinture contre une palette, le mettre en contact avec le support en appliquant une force donnée et éventuellement le déplacer. Cette technique picturale est à l'origine, à notre connaissance, de la quasi-intégralité des oeuvres antérieures au XIX^{ème} siècle (un exemple est représenté à la figure 4.4 (gauche)).

Pour simplifier notre objet d'étude, on définit une tâche comme la marque laissée par le pinceau sur le support, sans que le pinceau ne se déplace dans le plan du support. Si le pinceau se déplace de manière rectiligne, on obtient un trait. S'il se déplace d'une autre façon quelconque, on obtient un motif. Un tableau classique est donc finalement un ensemble de tâches, de traits et de motifs, juxtaposés et superposés. Dans ce travail, nous allons nous concentrer sur l'objet le plus élémentaire de l'oeuvre : la tâche.

Cette volonté de décomposer la peinture en ses éléments les plus essentiels est aussi à l'origine d'un courant artistique : le pointillisme¹ dont on représente un exemple à la figure 4.4 (droite).

1. Le pointillisme est parfois aussi appelé divisionnisme, dans le cas où les couleurs sont aussi séparées à la manière de pixels RGB, et ses théoriciens s'inspirent librement des travaux du chimiste Chevreul et du physicien Rood sur les couleurs.



FIGURE 4.4 – (Gauche) Une oeuvre néo-classique de style rococo : L'allégorie de la Peinture de François Boucher. Huile sur toile, 1765, collection Samuel Kress. (Droite) Une oeuvre impressionniste : Le jardin de l'artiste à Eragny de Camille Pissarro. Huile sur toile, 1898. On distingue les tâches individuelles dont la juxtaposition crée le paysage.

2 Protocole expérimental

On a utilisé la machine de force de traction pour réaliser des tâches de peinture contrôlées. Un pinceau rond standard a été utilisé (type F, Daler Rowney Graduate 540, voir une photographie à la figure 2.8 gauche). La machine était équipée du capteur 10 N et de mors fabriqués avec une imprimante 3D. Le pinceau a été incliné selon plusieurs angles, à l'aide où non des sillons des mors.

Pour réaliser une tâche on a programmé deux cycles de compression-décompression : lors du premier, le pinceau est comprimé contre une boîte de pétri en verre dans laquelle de la peinture est déposée. Une fois le pinceau chargé en peinture et retourné à sa position initiale sans contact avec la boîte de pétri, il est ensuite comprimé contre une feuille de papier (Inacopia 80g, papier d'impression classique) de façon à réaliser une tâche. Au cours d'une série d'expériences, entre trois et six tâches consécutives sont réalisées ainsi, avec un chargement en peinture entre chaque tâche. Entre deux séries, le pinceau est lavé à l'eau et séché à l'aide d'un sèche-pinceau rotatif (qui sèche le pinceau par centrifugation). Le déplacement du pinceau a été maintenu constant pour la phase de chargement de toutes les expériences de toutes les séries. Les tâches ont été réalisées à différents déplacements maximums du pinceau (on a vu à la figure 4.3 une représentation des courbes de forces obtenues pour différentes valeurs de d_{\max}). Au sein d'une même série, les tâches n'ont pas été toujours réalisées à déplacement croissant ou décroissant mais en alternant petits et grands déplacements de façon à éviter un effet d'une éventuelle plasticité du pinceau.

La peinture utilisée était de la gouache (Giotto, gouache prête à l'emploi, teinte vermillon, ref. 5328 07). Cette gouache a été mélangée à de l'eau directement dans les boîtes de pétri servant au chargement des pinceaux, jusqu'à homogénéisation. La masse d'eau et la masse de gouache ont été contrôlées avec une balance de précision. Les tâches ont été réalisées immédiatement après la confection des mélanges pour éviter le séchage. À notre connaissance, aucun fabricant de gouache ne rend disponible la composition de son produit, mais diverses recettes artisanales ainsi que les techniques historiques de fabrication de la gouache indiquent que celle-ci est généralement composée de pigments, d'eau, et d'un « liant » qui peut être entre autres un polymère (un polysaccharide issu de la gomme arabique, de la méthylcellulose issue de bois ou des dextrines) ou de la glycérine. La gouache, comme l'aquarelle dont la composition est très proche, excepté qu'elle se présente sous forme solide, est miscible à l'eau.

La vitesse de déplacement du pinceau a été maintenue constante à 20 mm/min pour toutes les expériences dont les résultats sont présentés dans ce chapitre.

Après séchage, la taille de tâches a été mesurée avec un pied à coulisse. On a défini la longueur L comme la distance entre les extrémités les plus éloignées de la tâche *dans la direction du déplacement du pinceau* et la largeur comme la distance entre les extrémités de la tâches les plus éloignées dans la direction perpendiculaire au déplacement du pinceau². Plusieurs mesures sont représentées à la figure 4.5 (sur cette figure, la longueur est selon l'axe horizontal).

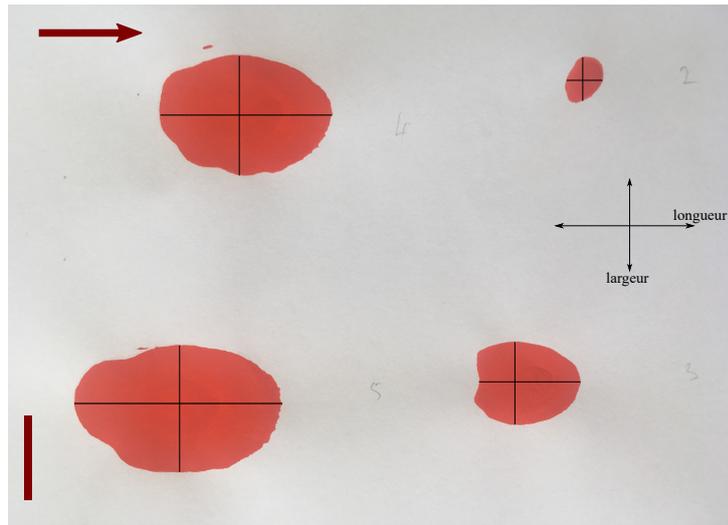


FIGURE 4.5 – Tâches de peinture à différents déplacements d_{\max} . Pinceau Daler-Rowney 540, inclinaison à 137° , mélange gouache-eau à 80,5 %-19,5 % respectivement, déplacements verticaux d_{\max} de 18 mm, 20 mm, 30 mm et 35 mm (les tâches les plus petites correspondent aux plus petits d_{\max}). La barre d'échelle mesure 15 mm. On a représenté sur chaque tâche la mesure de la longueur L et de la largeur l et la direction dans laquelle on définit chacune. Au cours de la compression, le pinceau se déplace comme indiqué par la flèche en haut à gauche.

3 Résultats et discussion

a Effet de la rhéologie

Toute personne s'étant déjà exercée à la peinture a constaté que l'utilisation d'une peinture plus ou moins liquide change l'aspect des tâches réalisées. Grossièrement, une peinture très visqueuse produira des tâches plus sèches et d'épaisseur plus variable qu'une peinture diluée et moins visqueuse, qui s'étalera mieux mais pourra imbiber la feuille ou couler du pinceau.

Réaliser des tâches de peinture de manière contrôlée permet à la fois d'étudier les tâches elles-mêmes, et d'étudier plus généralement l'aire de contact du pinceau et de la surface contre laquelle il est comprimé, puisque la forme de la tâche donne une approximation de l'aire de contact du pinceau au moment où il est le plus étalé. Cette approximation est bonne si on fait l'hypothèse que toutes les fibres en contact avec le papier y déposent de la peinture, et que seules ces fibres en déposent. Pour que cela se produise effectivement, il est nécessaire d'utiliser une peinture dont les propriétés sont compatibles avec cette hypothèse. En pratique, nous avons choisi une peinture miscible à l'eau (la gouache) de façon à pouvoir faire varier facilement la viscosité de la peinture en ajoutant une masse d'eau contrôlée.

La figure 4.6 (gauche) présente, pour des proportions d'eau dans le mélange de peinture variant

2. De sorte que la longueur peut être inférieure à la largeur, ce qui se produit pour les petites tâches

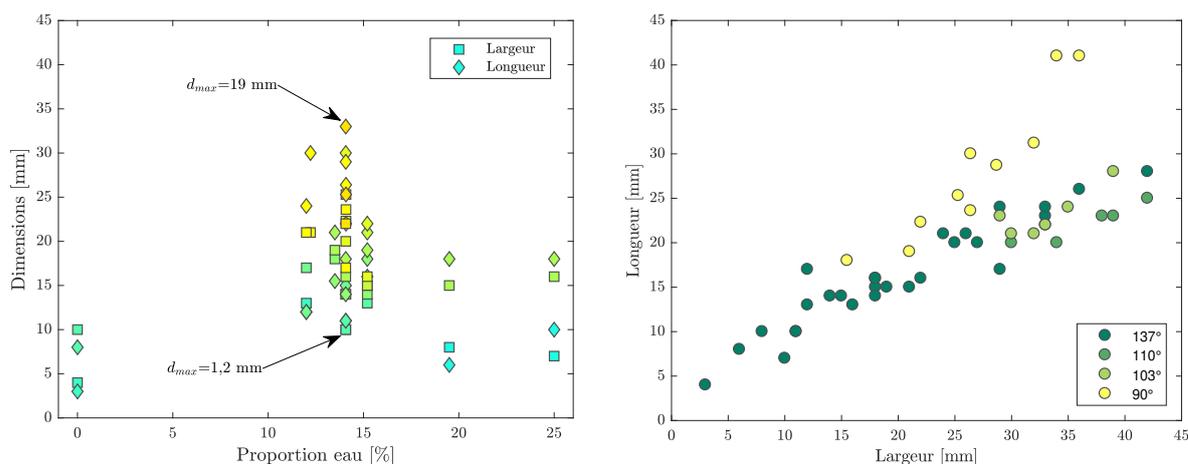


FIGURE 4.6 – **Dimensions des tâches pour différents mélanges gouache-eau.** La largeur est indiquée par les carrés et la longueur par les losanges. La couleur correspond à l'enfoncement maximal d_{\max} imposé pour réaliser la tâche. Pour chaque mélange, plusieurs tâches à différents d_{\max} sont réalisées et mesurées. **Rapport d'aspect des tâches.** On mesure la longueur des tâches en fonction de leur largeur, pour différents angles de compression.

entre 0 % et 25 %, les dimensions (longueur et largeur) de tâches réalisées à des déplacements d_{\max} variables. Les carrés sont les mesures de largeur et les losanges les mesures de longueurs. Pour chaque proportion d'eau, on réalise plusieurs tâches en faisant varier d_{\max} . Les couleurs correspondent à ces différentes valeurs de d_{\max} (plus d_{\max} est grand plus les marques sont jaunes).

On observe sur cette figure que la taille des tâches dépend fortement de d_{\max} , ce qui semble naturel et que l'on observait déjà sur la figure 4.5 (gauche). On constate cependant qu'aucun effet net de la proportion d'eau ajoutée dans la peinture n'apparaît. Par conséquent, il nous a semblé raisonnable de fixer cette proportion en fonction des autres contraintes de l'expérience, qui étaient de ne pas imbiber trop les feuilles de papier et de ne pas obtenir des tâches « en pâte » dont la forme est plus difficile à mesurer. La majorité des tâches réalisées a été faite avec un mélange peinture-eau de proportions environ 85 %-15 %. L'absence d'effet majeur, dans la gamme de viscosité étudiée, de la rhéologie, nous a conduit à combiner toutes les tâches réalisées avec tous les mélanges dans les données présentées aux parties suivantes.

On observe par ailleurs sur la figure 4.5 (gauche) que la largeur de la tâche est pratiquement toujours inférieure à sa longueur. On a représenté à la figure 4.5 (gauche) les dimensions des tâches pour différents angles de compression et à différentes valeurs de d_{\max} . On observe que la forme des tâches à angle donné est relativement homothétique, mais que la longueur est d'autant plus grande que la largeur que l'angle de contact est important, ce qui se comprend bien du fait de la forme allongée du pinceau.

b Effet de l'enfoncement

Pour mieux comprendre cet effet de d_{\max} sur la dimensions des tâches, nous avons combiné les mesures réalisées à toutes les rhéologies et distingué la longueur et la largeur mesurée pour chacune. On représente à la figure 4.7 (gauche) l'effet de d_{\max} sur les dimensions des tâches. Les lignes sont des ajustements des données de longueurs et largeur à un modèle $d_{\max}^{1/2}$.

On observe à nouveau sur cette figure que les dimensions des tâches sont croissantes avec d_{\max} , avec un comportement qui semble être compatible avec une loi de puissance, quoique les données soient dispersées. Si on ajuste les données issues de la mesure des tâches par un modèle

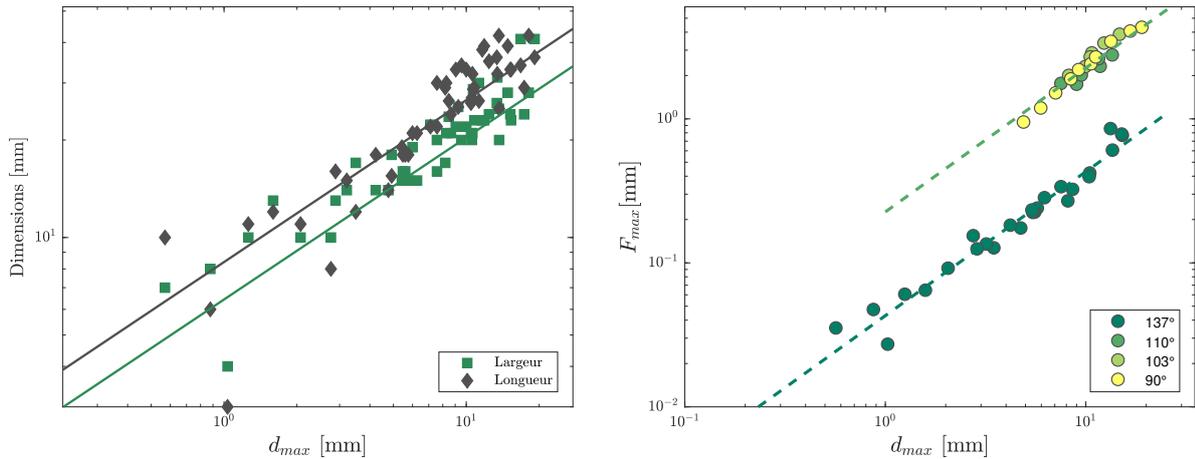


FIGURE 4.7 – (Gauche) Dimensions des tâches ou position des contacts en fonction du déplacement d . Tous les angles ici sont confondus. (Droite) Force maximale en fonction du déplacement maximal d_{\max} à différents angles de compression. Les mesures sont effectuées pour différentes proportions d'eau dans la peinture et à quatre angles de compression différents. Les lignes pointillées sont des ajustements à $F \propto d_{\max}$.

ad^b , on trouve $b = 0.47$ (avec un intervalle de confiance à 95 % de $[0.41, 0.53]$) pour la largeur et $b = 0.59$ (avec un intervalle de confiance à 95 % de $[0.51, 0.67]$) pour la longueur. Ces exposants étant proches de $1/2$, nous avons représenté sur la figure les ajustements des données à $ad^{1/2}$. On observe un bon accord entre ces derniers et les données expérimentales.

On peut vérifier sur le même système qu'on reste dans un régime pour lequel la force est proportionnelle à l'enfoncement, ce qui peut se voir sur la courbe 4.7 (droite). Plus précisément, l'ajustement des données mesurées à $\alpha=137^\circ$ à un modèle en d_{\max}^b donne $b = 0.99$. L'ajustement au même modèle des données mesurées à toutes les autres valeurs de α confondues donne $b = 1.15$. La valeur de ces exposants est très proche de 1 et on a représenté les droites $F \propto d_{\max}$ sur la figure.

En considérant que la force et les dimensions de la tâche sont proportionnelles à l'enfoncement maximal, on prévoit que l'aire des tâches de peinture est proportionnelle à la force maximale d'enfoncement, comme on peut le voir sur la figure 4.8. On observe donc une pression dans le contact constante lors de l'enfoncement, et dépendante de l'inclinaison du pinceau.

Ce comportement est différent de celui que l'on aurait en peignant avec une sphère élastique. Dans ce cas-là, le contact serait un contact de Hertz. Dans le problème décrit par Hertz de la compression d'une sphère élastique contre une surface infiniment rigide, la surface de contact varie comme \sqrt{Rd} et la force appliquée varie comme $d^{3/2}R^{1/2}$, où d et R sont respectivement la distance d'enfoncement et le rayon de la sphère [11, 91]. De plus, la pression à l'interface ne sera ni homogène sur toute la surface de contact (elle sera maximale au centre), ni constante quelle que soit la force appliquée.

Le pinceau se comporte en fait comme s'il était doté d'une dureté intrinsèque à laquelle la pression sature. C'est le comportement que Bowden et Tabor [11] prennent pour hypothèse dans leur modèle microscopique du frottement : la contrainte au niveau des aspérités est toujours égale à la dureté. C'est d'ailleurs en rejetant cette hypothèse et en prenant celle de multiples contacts de Hertz qu'est construit le modèle de Greenwood-Williamson des aspérités sphériques. La différence fondamentale entre ces deux modèles est que celui à pression constante considère en fait qu'il n'y a pas de transmission des contraintes entre deux zones différentes de la surface de contact, alors que le modèle de Hertz considère que la pression à une distance r du centre du contact dépend de la pression à une distance $r + \delta r$.

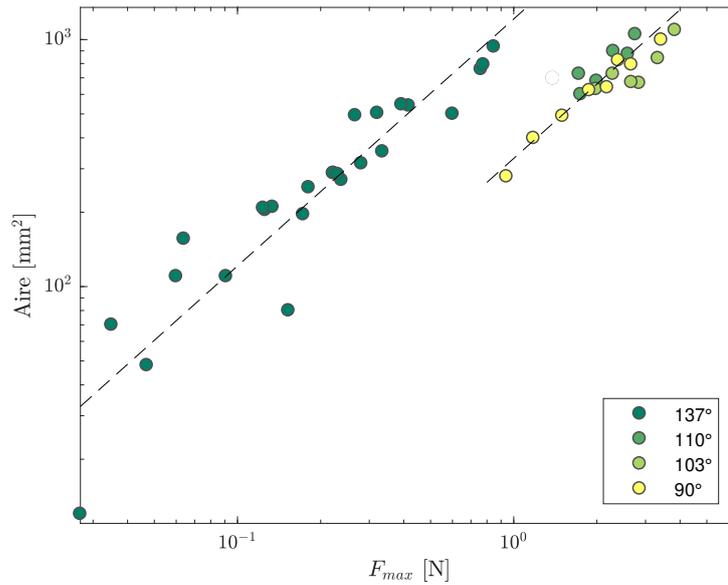


FIGURE 4.8 – **Aire des tâches en fonction de la force maximale appliquée.** L'aire est calculée en faisant le produit de la longueur et de la largeur des tâches, pour différents angles de compression. Les lignes pointillées sont des ajustements à $A = \frac{F}{a}$. Pour $\alpha = 137^\circ$, on trouve $a = 825 \text{ Pa}$ et pour l'ensemble des autres angles, on trouve $a = 3030 \text{ Pa}$

D'un point de vue plus général, le concept même de dureté, qui est un terme général pour définir la résistance à l'indentation, implique de réaliser des déformations du matériau de taille négligeable par rapport à ses dimensions. La dureté se calcule en mesurant l'aire de l'empreinte laissée par un poinçon dans un matériau. La forme et le matériau composant l'indenteur définissent différentes normes de mesure de la dureté (alors appelées dureté Brinell, Rockwell ou Vickers) [92]. Mais même dans le cas d'une micro-indentation, la force à appliquer pour mesurer l'une de ces duretés est précisée par la norme du test, sans quoi la dureté varierait avec cette force. Il est donc particulièrement notable que notre objet se comporte comme un matériau de dureté constante, sachant que les déformations qu'on lui impose, même dans le domaines du peintre, sont de l'ordre de grandeur de ses dimensions.

Retrouver une pression constante n'est donc possible qu'en l'absence de couplage entre les fibres, que nous avons montré à plusieurs reprises en étudiant dans les chapitres précédents les petites et les grandes déformations.

S

Revenons à présent à notre question initiale de la production de tâches de peinture. Un bon artiste peintre produit grâce à sa technique de manipulation et à partir d'un pinceau qu'il choisit les tâches de la taille qu'il désire. Nous avons montré que l'aire d'une tâche varie comme F_{\max} . Sur le domaine du peintre, la force est définie par sa raideur k qui est proportionnelle à D^2/L^3 où D et L sont respectivement le diamètre et la longueur du pinceau. De sorte que l'aire de la tâche, à enfoncement d constant, doit être proportionnelle à l'aire de la section du pinceau choisi.

Nous avons vu que la pression exercée par le pinceau sur la surface est de l'ordre de 1000 Pa et dépend de l'angle de compression. Ainsi, si un peintre veut produire des tâches dont l'aire varie d'un millimètre carré pour les plus petites à un centimètre carré pour les plus grandes, il faudra donc qu'il exerce sur le pinceau une force variant entre 1 mN et 100 mN. La littérature montre que la capacité à manier avec précision un objet scripteur dépend en réalité de la capacité à exercer une force de préhension précise sur cet objet [93, 94]. L'ordre de grandeur de la précision

de cette force de préhension, qui dépend de l'habileté de l'expérimentateur, est de 2 mN (pour des forces de 2.5 N) pour des sujets jeune et en bonne santé mais sans entraînement spécifique [95]. De sorte que si on imagine que la force de préhension à exercer sur le pinceau est en fait la force nécessaire à lui éviter de glisser sous l'effet de son propre poids qui suffit à produire des forces suffisantes, et en prenant un coefficient de frottement hampe-main de 0,5, il vient que la force de préhension à exercer pour produire des tâches varie entre 0.5 mN et 50 mN. De sorte que la production de tâches de façon contrôlée est accessible pour des expérimentateurs en bonne santé, mais que pouvoir réaliser des tâches dont la taille est de l'ordre du millimètre carré doit nécessiter d'être capable d'augmenter la précision de la force de préhension d'un facteur 2 à 4.

Pour conclure, l'ensemble des ces relations mesurées entre les dimensions des tâches, l'enfoncement et la force présente plusieurs avantages pour les utilisateurs. Tout d'abord, il est facile de choisir son pinceau, puisque la gamme de taille des tâches produites est définie simplement à partir du diamètre du pinceau car l'aire des tâches est proportionnelle à la force, elle-même proportionnelle au nombre de poils du pinceau, lui-même proportionnel à l'aire de la virole. Ensuite, une fois le pinceau choisi, il est facile de contrôler la taille de la tâche produite, puisque celle-ci est proportionnelle à la force exercée, et *via* la même constante de raideur, quelque soit le pinceau qui a été choisi.

D Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'effet de la lubrification du contact sur la mécanique du pinceau, en particulier aux petites déformations.

Nous avons montré que le domaine I n'était pas modifié : la force F dépend linéairement de d pour le pinceau sec et le pinceau chargé de peinture. De plus la raideur du pinceau sur le domaine I est identique pour un contact lubrifié ou non lubrifié. Nous avons montré que ce résultat était toujours vrai pour différentes valeurs de l'angle de compression α . Ainsi, nous pouvons conclure que les résultats obtenus au chapitre 3 sur la constance de la raideur des pinceaux restent valable dans le cas d'une véritable expérience de peinture. Nous avons montré cependant que le domaine II était profondément modifié par la lubrification, du fait du ralentissement des événements de glissement, qui produisent des courbes de force avec une décroissance de F plus progressive.

Par une étude plus détaillée des courbes de force autour du point de contact, nous avons mis en évidence la formation d'un pont capillaire entre le papier et le pinceau. Nous avons discuté la valeur de la force de détachement et nous avons montré que celle-ci ne peut pas être expliquée par la force de Laplace telle qu'on la calcule pour un modèle de pinceau cylindrique.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux tâches de peinture. Nous avons montré que leurs dimensions dépendent de l'enfoncement d ainsi que de l'angle de compression α . Nous avons montré que l'aire des tâches était proportionnelle à la force appliquée, de sorte que la pression est constante pour toutes les tâches.

Enfin, nous avons étudié plusieurs mélanges de peinture et nous avons montré qu'une dilution allant jusqu'à 25 % d'eau avait un impact négligeable sur les dimensions des tâches. Cependant, nous avons raisonné dans cette partie sur les dimensions des tâches, sans s'attacher à leur aspect. Celui-ci, en revanche, change beaucoup quand la rhéologie de la peinture change. Quelques tâches obtenues avec différentes peintures et pinceaux sont représentées à la figure 4.9.

En haut à gauche figure une tâche « idéale », pour laquelle il est facile de prendre des mesures de largeur et de longueur. Elle présente un périmètre bien défini, est homogène en épaisseur et intégralement remplie. Quand la peinture, la proportion d'eau, le pinceau, ou l'enfoncement d change, on observe une grande variété d'aspect des tâches. Quand la peinture est très liquide, le dépôt se fait surtout au centre de la tâche, et on observe un cercle plus foncé au milieu. Quand

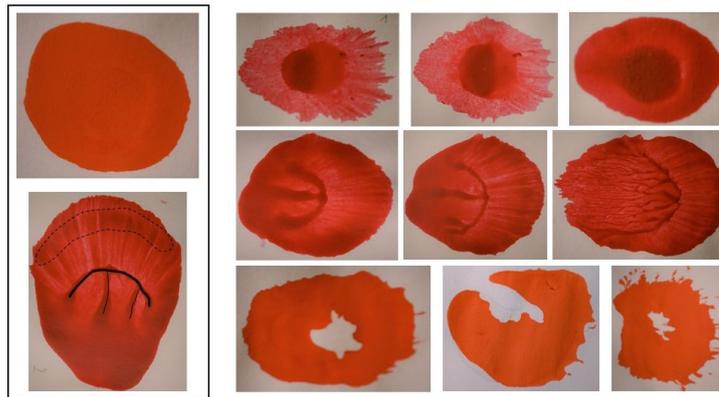


FIGURE 4.9 – **Motifs au sein des tâches de peinture.** Ces tâches sont obtenues avec différents pinceaux, deux types de peinture différents (gouache et acrylique). Ces peintures sont diluées avec diverses proportions d'eau.

la peinture est plus épaisse, le dépôt se fait plutôt sur la périphérie, et certaines tâches sont vides dans leur centre. Pour les cas intermédiaires, divers motifs peuvent se former au centre de la tâche.

En particulier, on observe la formation d'arcs et de structure hiérarchiques, que l'on a surlignés sur l'image en bas à gauche. Les tâches sont séchées à plat, ces motifs ne sont donc pas dûs au ruissellement, mais à la forme adoptée par les poils du pinceau au moment où il est retiré du papier. Pendant l'expérience, ceux-ci forment des mèches plus ou moins épaisses, qui elles mêmes se subdivisent en mèches de plus en plus fines. Quand un ensemble de fibres ou de lamelles flexibles est retiré d'un bain, celles-ci coalescent sous l'effet de la capillarité [89]. Ce phénomène se produit également pour des assemblées de fibres à deux dimensions [96], et quand celles-ci ne sont pas retirées d'un bain, mais plongées dans un liquide qui s'évapore [97]. Le lien entre la forme adoptée par l'assemblée de fibres et la quantité de peinture déposée sur le papier n'est cependant pas évident. Il semble à première vue que le liquide se dépose en couches plus épaisses dans les zones de contact entre les mèches les plus épaisses et le papier. En particulier, celle-ci dépendra de la taille du ménisque formé par le pont capillaire reliant le pinceau et la surface. Nous avons discuté plus haut des différents paramètres dirigeant la formation et la rupture de ce ou ces ménisques et nous avons discuté l'effet de la force de Laplace et de la force capillaire. En particulier, nous avons trouvé qu'un nombre de fagots de fibres de 27 permettait d'atteindre l'ordre de grandeur de la valeur mesurée de la force de détachement du ménisque. Si l'on imagine qu'au moins les plus gros fagots sont ceux qui laissent un dépôt de peinture plus épais sur la tâche, il semble que l'on forme en général plutôt trois ou quatre fagots. On remarque cependant sur la tâche à droite de la deuxième ligne, que l'on peut obtenir des motifs laissant penser que l'on a plutôt formé plusieurs dizaines de fagots.

Une investigation plus poussée de ce phénomène, en particulier de la formation de groupes de structures élastiques quand celles-ci sont partiellement immergées dans un fluide, ainsi que l'aspect du dépôt de liquide produit une fois les structures retirées, serait une perspective intéressante de ce travail. Le grand nombre de fibres, leur forme particulière (la diminution du diamètre au niveau de la pointe, la fleurisation, et la présence d'écailles sur les fibres naturelles), ainsi que les faibles dimensions et la grande compacité des pinceaux en font néanmoins un modèle peu adapté à ces questions spécifiques. Mais comme la question n'est plus d'étudier les assemblages de grands nombres de fibres, il devient tout à fait envisageable de fabriquer des dispositifs de support, qui pourraient rassembler quelques dizaines de fibres plus ou moins espacées les unes des autres.

Indépendamment de la question de la quantité de liquide déposée, on peut aussi s'intéresser

à la forme d'arc du dépôt central, qui est très reproductible, mais dont l'angle varie. Par ailleurs, on voit sur certaines images des zones de dépôt plus marquées (voir la zone entre les pointillés de la photographie encadrée). En réalisant l'expérience, il semble que ceux-ci se produisent au moment où les fibres glissent, ce qui permet de visualiser ce phénomène.

Les tâches produites par le dépôt d'un liquide sur une surface par le contact d'un ensemble d'objets élastiques imprégnés sont donc des objets très riches au-delà de la question de leurs dimensions.

Conclusion générale de la partie

Dans cette partie, nous avons étudié des assemblages de fibres en compression contre une surface plane.

Dans le premier chapitre, nous avons décrit et caractérisé les différents domaines des courbes de force obtenues avec plusieurs assemblages de fibres de dimensions différentes. Nous avons discuté la nature de ces domaines, ainsi que le phénomène d'hystérèse qui apparaît sur toutes les courbes expérimentales. En faisant varier le nombre de fibres N et leur longueur L , nous avons proposé un modèle par analyse dimensionnelle pour les grandes déformations et nous avons montré que la force mesurée était alors proportionnelle à $\frac{N}{l^2}$. En mesurant la taille du contact entre l'assemblage et la surface, nous avons ensuite proposé une approche théorique de cette loi d'échelle, en nous ramenant à l'équation de l'élastica d'Euler. Nous avons ensuite réalisé des simulations numériques en éléments finis pour une poutre unique, auxquelles nous avons comparés nos résultats expérimentaux et nous avons mis alors en évidence l'importance des effets collectifs. Enfin, nous avons discuté la délimitation entre les petites et les grandes déformations et nous avons montré que celles-ci se produisent pour un taux de déformation $\epsilon = l/L$ constant, que ce soit pour les simulations et les résultats expérimentaux.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à la mécanique des pinceaux quand ils sont utilisés pour l'art. Nous avons mis en évidence une loi de puissance en $L \propto \mathcal{A}^{1/3}$ reliant leurs dimensions. En nous fondant sur le modèle de l'élastica, nous avons proposé un modèle pour expliquer cette loi et nous avons montré qu'elle correspondait alors à l'obtention d'une raideur constante pour tous les pinceaux étudiés. Nous nous sommes alors intéressés à la mécanique des pinceaux aux petites déformations, sur le domaine où la force dépend linéairement de l'enfoncement d et nous avons ainsi défini expérimentalement leur raideur. Nous avons montré que celle-ci restait effectivement constante pour des pinceaux du commerce. Nous avons vérifié ensuite expérimentalement que la raideur variait comme $\frac{1}{l^3}$ si le diamètre du pinceau reste inchangé, comme le prédisait notre modèle. Nous avons montré ensuite que le modèle des fibres indépendantes restait valable aux petites déformations, et que la raideur était bien proportionnelle au nombre de fibres. Nous avons discuté ensuite de l'angle de compression sur cette raideur et nous avons montré qu'elle était d'autant plus faible que l'angle est important. Enfin, nous avons proposé une explication de l'intérêt pour les utilisateurs de disposer de pinceaux à raideur constante, ou du moins peu variable, malgré une très large gamme de dimensions de pinceaux.

Dans le troisième chapitre, nous avons cherché à modéliser le travail d'un peintre. Nous avons conçu un protocole expérimental imitant le chargement du pinceau contre une palette puis le dépôt de peinture sur une surface. Nous nous sommes d'abord intéressés aux modifications dues à la lubrification du pinceau sur les domaines I et II des courbes de force et nous avons montré que celles-ci restent toujours linéaires sur le domaine I. Nous avons mesuré la raideur du pinceau à différentes valeurs d'angle de contact et nous avons montré que celle-ci est comparable avec ou sans utilisation de peinture. En étudiant plus précisément les courbes de force à l'instant du contact, nous avons observé le phénomène d'adhésion capillaire et nous avons discuté de la contribution de la pression de Laplace et de la force de tension de surface au niveau de la

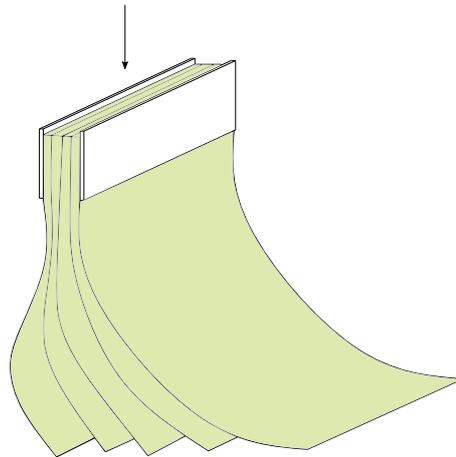


FIGURE 4.10 – Schéma d'une expérience visant à mesurer la raideur d'un livre.

ligne triple. Nous avons évoqué le lien entre le détachement de ce ménisque, la taille des mèches formées par les poils du pinceau, et les structures observées à la surface des dépôts de peinture. Nous nous sommes ensuite intéressés plus en détail à la mécanique de formation des tâches. Nous avons étudié leurs dimensions et montré que celles-ci ne dépendaient pas de la rhéologie de la peinture. Nous avons mesuré la dimension des tâches produites pour différents angles de contact et différents déplacements du pinceau et nous avons montré que la longueur et la largeur des tâches variaient comme $\sqrt{d_{\max}}$. Nous avons ensuite confirmé que l'aire des tâches était proportionnelle à la force appliquée de sorte que la pression exercée par le pinceau sur la surface est constante tant que l'on reste sur le premier domaine des courbes de force. Nous avons également montré que la valeur de cette pression dépend de l'angle de contact.

Les perspectives de ce chapitre s'articulent selon trois axes : la compréhension de la mécanique des assemblages de fibres denses dans une perspective de mécanique physique, la compréhension des pinceaux et de la façon dont ils sont employés qui s'inscrit dans le cadre de la physique de l'art, et enfin, l'étude du dépôt de liquide sur une surface par un ensemble de structures élastiques chargées de liquide. Ces trois études demandent à être approfondies. Il serait par exemple très intéressant de disposer d'assemblages de fibres à compacité variable, à la fois pour étudier l'effet du confinement sur les propriétés mécaniques de l'ensemble du faisceau d'un point de vue mécanique, mais aussi pour mieux comprendre l'effet du serrage de la virole et de la ligature dans la fabrication des pinceaux ou le lien entre la compacité et la morphologie des tâches déposées.

Nous avons déjà proposé tout au long de ce chapitre et de cette conclusion les perspectives de ce travail. Pour finir et pour refermer la boucle reliant cette partie et la première, nous pouvons proposer une dernière expérience. Une des caractéristiques des pinceaux circulaires est leur symétrie de révolution. Nous avons vu qu'une virole aplatie ne modifie pas profondément la mécanique de ces objets, car les fibres ont toujours la possibilité de se déplacer dans les deux directions du plan. Plus les objets ont d'espace pour s'étaler lors de la compression moins l'assemblage est dense, ce qui nous a permis de négliger les effets de contact entre les poils et de décrire les pinceaux comme la somme de fibres indépendantes. Employer des plaques plutôt que des poutres dans cette expérience, et donc des livres plutôt que des pinceaux, pourrait modifier profondément la rigidité que l'on observe. Nous avons représenté à la figure 4.10 un schéma de l'expérience correspondante. En assemblant des plaques, on peut obtenir une compacité pratiquement égale à 1, si l'on exclut l'effet de la rugosité de surface, alors qu'un empilement compact de cylindres a nécessairement une compacité inférieure. De sorte qu'il est probable que les effets



FIGURE 4.11 – **Différentes applications de l'épissure.** Une corde de marine est épissée pour former une boucle (gauche). Réparation du câble du télésiège du Col du Rousset par épissure [99] (droite).

collectifs soient beaucoup plus importants dans le cas de la compression d'un livre pour lequel les objets ont beaucoup moins de degrés de libertés.

Une autre façon de faire le lien entre les deux parties de cette thèse serait de s'intéresser à des assemblages de fibres entremêlées les unes dans les autres. Cette question est reliée à la physique des cordes ou des ficelles, qui sont constituées de brins dont la longueur individuelle est de l'ordre de la dizaine de centimètres. Pourtant, en entortillant ses brins, sans les coller, ni les nouer, on peut fabriquer une corde aussi longue que l'on veut. Plus encore, si on veut relier les extrémités de deux cordes, il suffit d'entortiller leurs brins sur une distance d'une dizaine de centimètre pour des cordes de marine et on obtient une seule corde, dont la solidité est suffisante pour que ce processus puisse être utilisé couramment dans un grand nombre de domaines, allant de l'électronique à la construction (pour la réparation de câbles, voir figure 4.11) en passant par le tricot, puisque c'est ainsi que l'on fabrique le fil des pelotes de laine [98].

Conclusion

Le travail présenté dans cette thèse a porté sur deux systèmes distincts semblant très différents à première vue, mais qui ont en commun d'être constitués des deux types d'objets élançés : les plaques et les poutres. Ayant déjà longuement présenté les perspectives de ce travail dans les conclusions des chapitres et des parties, nous nous contenterons ici de rappeler les résultats les plus marquants de ce travail.

Dans la première partie, nous avons étudié un assemblage de deux livrets entremêlés, inspiré de la fameuse expérience des annuaires, et nous avons cherché à identifier la force que cet assemblage amplifie. Par une étude systématique menée en variant les paramètres de l'expérience, nous avons montré que les dépendances observées tendaient à désigner l'adhésion comme la force qui sera amplifiée. Par ailleurs, nous avons approfondi la compréhension du modèle proposé par Alarcón *et al.* en proposant une résolution discrète des équations dynamiques et en analysant l'effet de la variation du coefficient de frottement et des grands angles d'inclinaison des pages.

Dans la deuxième partie, nous avons étudié la rigidité d'assemblages de fibres soumis à une compression axiale. Nous avons proposé un modèle mécanique pour comprendre la partie linéaire des courbes de force aux petites déformations et la partie non-linéaire aux grandes déformations. Nous avons mis en évidence et expliqué deux phénomènes liés au couplage de l'élasticité des fibres et de leur frottement avec une surface : l'instabilité de glissement et l'hystérèse. En s'inspirant ensuite de l'art, nous avons étudié la mécanique des pinceaux et nous avons montré que ceux-ci étaient fabriqués de sorte à obtenir une raideur constante. Enfin, nous avons étudié la forme et les dimensions des dépôts de peinture réalisés par des pinceaux et nous avons montré que ceux-ci se faisaient à pression constante.

Les deux questions sous-jacentes qui ont traversé cette étude sont celle de la mécanique des objets élastiques élançés et celle des effets de contact. En filigrane, nous nous sommes aussi intéressés au couplage de ces deux phénomènes physiques. Par exemple, dans la première partie, nous avons montré que la force normale qui s'exerce au sein de l'assemblage à un effet sur le coefficient de frottement des pages, lequel modifie également la force mesurée quand on sépare les annuaires. Dans la seconde partie notre discussion sur le maximum local de la force, qui est dû au chargement élastique des fibres bloquées sous l'effet du frottement rentre aussi dans le cadre de l'interaction de ces deux phénomènes.

D'un point de vue général, nous espérons avoir montré que la mécanique de systèmes issus de la vie courante comme les livres ou les pinceaux présentait une grande richesse. Cette richesse provient du nombre de composants individuels de ces systèmes et de la variété de leurs interactions de contact. Mais leur spécificité tient aussi à leur utilisation dans la vie courante. Celle-ci a généré une abondance de connaissances empiriques et d'habitudes apparues spontanément qui forment autant de phénomènes à comprendre pour le physicien.

Annexes

Dans cette annexe nous allons étudier les fluctuations des courbes de force mesurées lors de la séparation des assemblages de feuilles de la partie I.

A Fluctuations de la force

Le travail d'Alarcón *et al.* et la première partie de cette thèse ont apporté une compréhension macroscopique des courbes de force mesurées lors de la séparation de deux livrets intercalés. Cependant, une observation des courbes de force à une plus petite échelle révèle l'existence de fluctuations (voir Fig. 4.12 (gauche)).

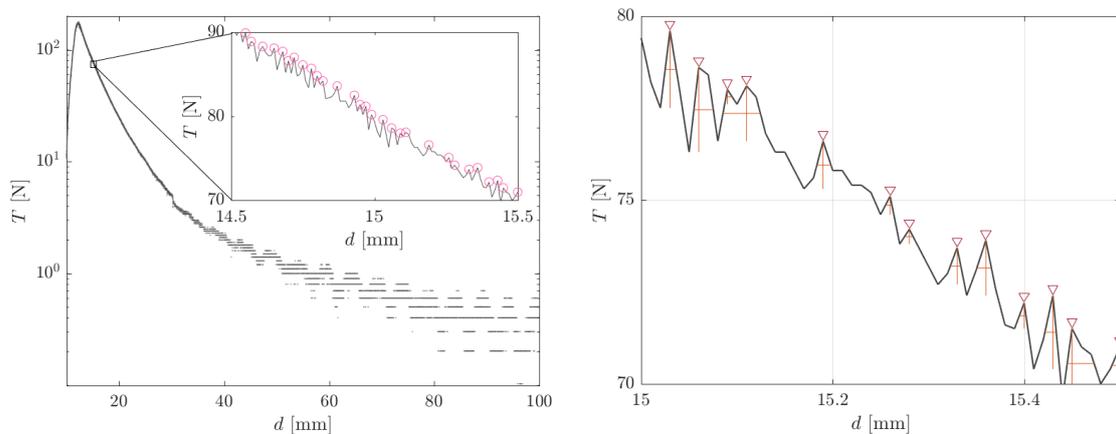


FIGURE 4.12 – **(Gauche) Force en fonction du déplacement.** L'insert est un agrandissement de la courbe de force, sur lequel on a mis en évidence des maxima locaux. L'expérience est réalisée pour $M = 15$, $v = 1$ mm/min. **(Gauche) Repérage des maxima locaux de la courbe de force.** On représente la fluctuation en force ΔT sur un pic et la longueur correspondante Δd .

Pour caractériser ce bruit nous avons repéré les maxima locaux des données expérimentales $T(d)$. Un point est considéré comme un maximum local s'il est supérieur à ses deux voisins. On calcule alors la hauteur ΔT et la largeur Δd de chaque pic repéré ainsi (voir Fig. 4.12 (droite)).

La question est de savoir si ces fluctuations de la force sont simplement un bruit dans la mesure, ou la signature d'un autre phénomène physique. Plus précisément, comme nous mesurons la force de pages glissant sur d'autres pages, on peut s'attendre à observer un phénomène de « stick-slip ». Dans le cas du « stick-slip », la différence entre le coefficient de frottement statique et dynamique génère une première phase de chargement au cours de laquelle la force de traction T exercée sur un patin glissant augmente, puis une deuxième phase de décroissance brusque quand le patin se met en mouvement.

B Effet de la vitesse

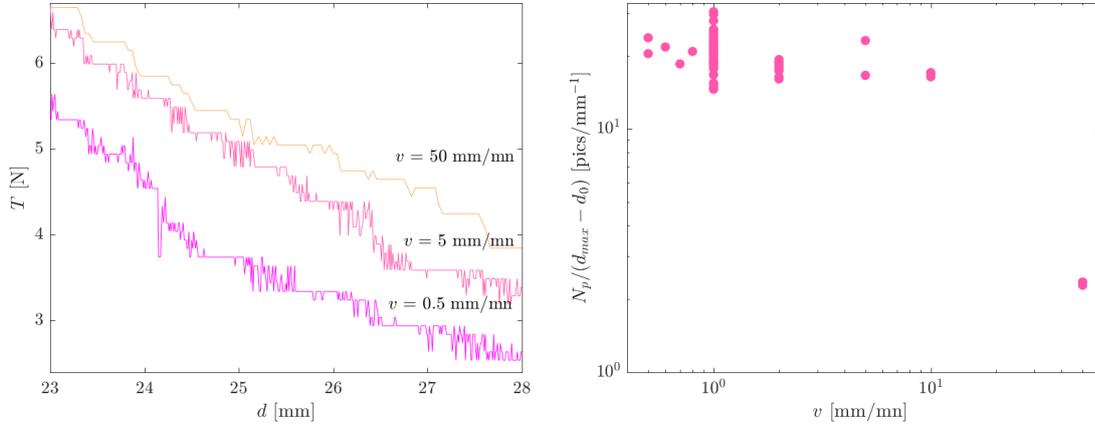


FIGURE 4.13 – **(Gauche) Effet de la vitesse sur les fluctuations de force.** On représente les courbes des forces obtenues pour une expérience réalisées à trois vitesses différentes. On a pris $M = 15$. **(Gauche) Nombre de pics repérés sur une distance donnée, pour différentes vitesses.** Pour chaque expérience, on représente le nombre de pics repérés sur la longueur de déplacement du mors supérieur, pour différentes valeurs de la vitesse. Des expériences à toutes valeurs de M sont confondues ici.

L'aspect des fluctuations des courbes de force dépend de la vitesse de déplacement du mors supérieur. On observe sur la figure 4.13 (gauche) que plus le déplacement des feuilles est rapide, moins les pics sont « pointus », moins ils sont nombreux, et moins leur amplitude est grande. Plus précisément, on peut compter le nombre de pics détecté par millimètre (en divisant le nombre de pics d'une courbe de force par le déplacement du mors supérieur pendant l'expérience). On observe que celui-ci semble en effet décroître quand on atteint des vitesses importantes (50 mm/min) mais reste relativement constant entre 1 mm/min et 10 mm/min.

Cet effet de la vitesse sur les fluctuations nous incline à penser que leur origine est plutôt un phénomène physique que le simple bruit du capteur, qui n'a pas de raison de dépendre de la vitesse.

C Distribution de la taille des événements

Pour mieux caractériser la taille des fluctuations, plutôt que de simplement compter leur nombre, on peut calculer la densité de probabilité de événement. Sur une courbe de force donnée, on repère tous les pics, puis on calcule la probabilité de choisir parmi ces pics, un pic dont la hauteur est comprise entre T et $T + \delta T$. On obtient alors leur densité de probabilité en fonction de la hauteur ΔT d'un pic. En s'intéressant à leur largeur, on obtient la densité de probabilité en fonction de Δd . On représente aux figures 4.14 les densité de probabilité en fonctions des deux dimensions des pics, pour différentes vitesses de déplacement.

On observe en premier lieu que la densité de probabilité n'est pas gaussienne : les pics de faible hauteur et de faible largeur sont très largement plus probables que les pics les plus hauts et larges. Les bruits étant généralement gaussiens, il nous semble donc que les fluctuations sont probablement liées à un autre phénomène physique.

Par ailleurs, ces données confirment et précisent le résultat de la section précédente sur l'effet de la vitesse. Plus la vitesse est importante, plus la largeur des pics est grande. La vitesse ne semble en revanche pas avoir d'effet sur la hauteur ΔT des pics.

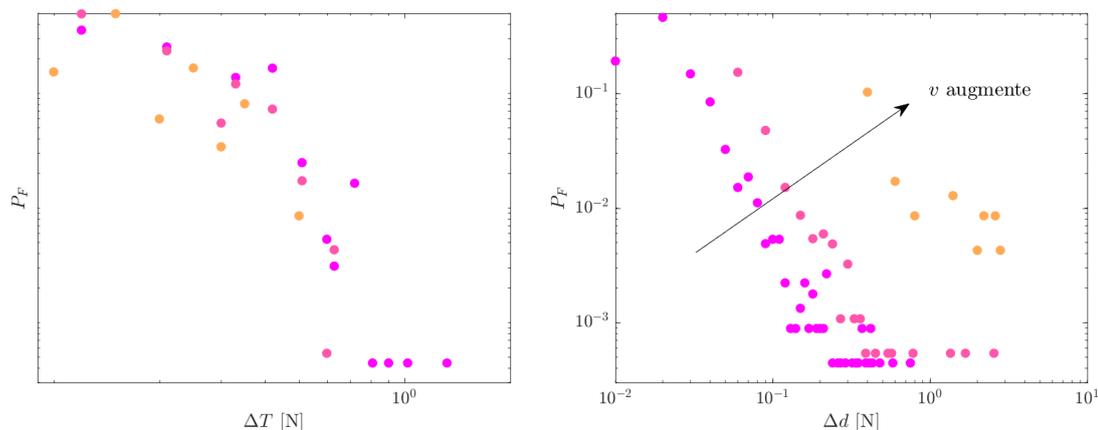


FIGURE 4.14 – Densité de probabilité des fluctuations en fonction de leur hauteur (gauche) et de leur largeur (droite). On calcule pour trois vitesses différentes $v = 0.5 \text{ mm/min}$, $v = 5 \text{ mm/min}$ et $v = 50 \text{ mm/min}$ la densité de probabilité des fluctuations, en fonction de ΔT la hauteur des pics ou de Δd leur largeur. On a $M = 15$.

Les distributions que l'on obtient semblent être des lois de puissance. Pour s'en assurer, on retrace ces mêmes distributions en agrégeant toutes les données de la mesure de tous les pics de toutes les expériences réalisées. Au total, on a mesurée environ 160 000 événements. En première approximation, et parce que presque toutes les expériences sont réalisées $v = 10 \text{ mm/min}$, on ne différenciera pas distributions selon la vitesse. Les distributions obtenues sont représentées aux figures 4.15 en fonction de la hauteur ΔT et de la largeur ΔD des pics.

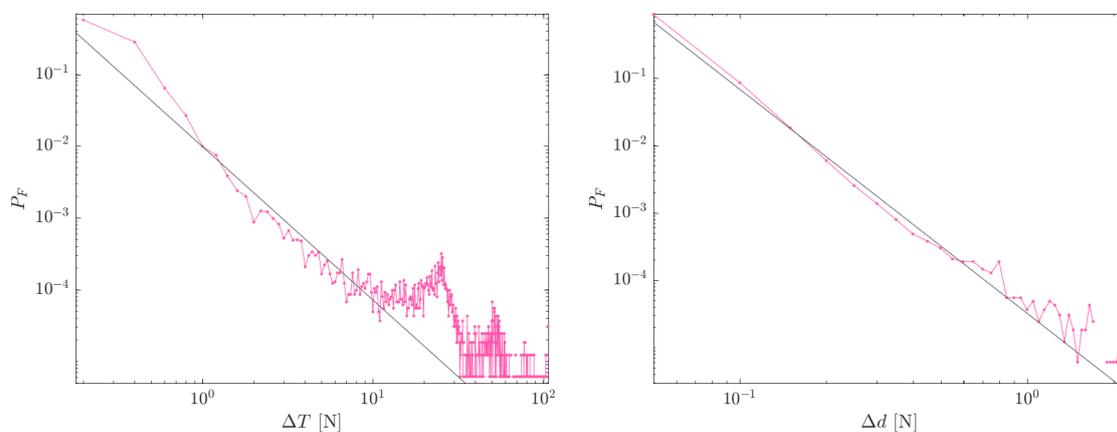


FIGURE 4.15 – Densité de probabilité des fluctuations en fonction de leur hauteur (gauche) et de leur largeur (droite). La vitesse varie entre $v = 0.5 \text{ mm/min}$ et $v = 50 \text{ mm/min}$ et M entre 10 et 30. Les ajustement linéaires ont des pentes respectives de -2.14 (gauche) et -3.32 (droite)

Dans les deux cas, on observe des densités de probabilités en loi de puissance, qui sont robustes sur environ deux décades pour la force et sur une décade pour le déplacement. On observe cependant un pic aux alentours de $\Delta T = 25 \text{ N}$ sur la figure 4.15 (gauche). Ce dernier est dû à un grand nombre de courbes de force dont le maximum global est autour de cette valeur. C'est alors ce maximum et non un maximum local que nous détectons.

D Discussion et contexte

Ces résultats montrent que les fluctuations de la force et du déplacement possèdent une propriété d'invariance d'échelle. Ce phénomène de fluctuations de force selon une distribution en loi de puissance se retrouve dans une très large catégorie de systèmes dont les dimensions varient du nanomètre (quand on comprime par exemple des cristaux ou des verres métalliques [100, 101]) au kilomètre, pour le cas des séismes [102, 103].

L'invariance d'échelle de ces fluctuations de taille ou de déplacement est liée à l'apparition d'un état de criticalité auto-organisé, que l'on peut retrouver dans une variété de phénomènes sortant complètement du cadre de la mécanique au sens le plus large, comme par exemple les fluctuations d'actifs financiers [104] ou les feux de forêt [105]. Dans le cas qui nous intéresse les lois de puissance que l'on observe semblent être vraisemblablement en lien avec le phénomène de « stick-slip ». On peut comprendre celui-ci facilement, si on modélise un contact frottant par un ensemble patin-ressort. On a montré dans la partie II que ce modèle générerait une décroissance brutale de la force quand le patin se met en mouvement. Si on considère maintenant que le matériau que l'on étudie se comporte plutôt comme une assemblée de ressorts et de patins en série ou en parallèle (ou liés les uns aux autres d'une autre façon), on peut observer un épisode de décroissance brutale de la force à chaque fois que l'on met l'un des patins en mouvement, et donc des fluctuations de la force. Dans notre cas de l'étude du système de feuillets entremêlés, les différents couples patins-ressorts pourraient représenter les aspérités des feuilles, comme dans le modèle des nanoblocs de Persson [13] auquel cas on aurait affaire à des ressorts en parallèle. Ils pourraient aussi représenter chacune des feuilles elles-mêmes, auquel cas les ressorts seraient alors en série. Même au sein d'un matériau homogène, et sans considérer les aspérités, on peut appliquer cette idée d'ensemble de ressorts et de patins, si l'on considère que le matériau est composé d'une multitude de bandes élastiques pouvant chacune se comprimer et se décompresser indépendamment [101]. Des expériences complémentaires seraient nécessaires pour comprendre plus précisément quelle est, parmi l'élasticité du papier, la multiplicité des feuilles, et la rugosité du papier la cause du comportement statistique des fluctuations de force que l'on mesure, et mieux comprendre également l'exposant des lois de puissance que l'on observe.

Par ailleurs, on observe une autre signature expérimentale de ces événements multiples de « stick-slip » : l'expérience des annuaires fait du bruit. Nous n'avons pas cherché à caractériser physiquement ce bruit, mais, à l'oreille, il est particulièrement reconnaissable. Il ressemble à un grincement prolongé et aigu, d'autant plus intense que la force mesurée est importante. On peut même entendre certaines des fluctuations les plus importantes, qui produisent des sortes de claquements. Il est connu que la compression de systèmes présentant des fluctuations de force se distribuant selon des lois de puissance produit des émissions acoustiques elles-mêmes sous forme d'avalanches [106]. Une perspective de cette étude des fluctuations serait donc de s'intéresser plus avant à ce phénomène.

Bibliographie

- [1] H. Caldas, *Le frottement solide sec : le frottement de glissement et de non glissement. Etude des difficultés des étudiants et analyse de manuels*. PhD thesis, Université Paris VII, Paris, 1994.
- [2] H. Alarcón, T. Salez, C. Poulard, J.-F. Bloch, Raphaël, K. Dalnoki-Veress, and F. Restagno, “Self-Amplification of Solid Friction in Interleaved Assemblies,” *Physical Review Letters*, vol. 116, Jan. 2016.
- [3] K. Dalnoki-Veress, T. Salez, and F. Restagno, “Why can’t you separate interleaved books?,” *Physics Today*, vol. 69, pp. 74–75, June 2016.
- [4] M. J. Harrington, K. Razghandi, F. Ditsch, L. Guiducci, M. Rueggeberg, J. W. Dunlop, P. Fratzl, C. Neinhuis, and I. Burgert, “Origami-like unfolding of hydro-actuated ice plant seed capsules,” *Nature Communications*, vol. 2, p. 337, Sept. 2011.
- [5] T. G. Sano and H. Wada, “Snap-buckling in asymmetrically constrained elastic strips,” *Physical Review E*, vol. 97, Jan. 2018.
- [6] T. G. Sano, T. Yamaguchi, and H. Wada, “Slip Morphology of Elastic Strips on Frictional Rigid Substrates,” *Physical Review Letters*, vol. 118, Apr. 2017.
- [7] A. Watzky, “L’elastica revisitée sous l’angle des efforts,” p. 6, 2011.
- [8] J.-M. Georges, *Frottement, usure et lubrification : tribologie ou science des surfaces*. Paris : Eyrolles : CNRS Editions, 2000. OCLC : 43735833.
- [9] J. Frêne, “La tribologie de l’antiquité à nos jours,” *Mécanique et Industries*, vol. 2, 2001.
- [10] C. Coulomb, *Théorie des machines simple*. bachelier ed., 1821.
- [11] F. P. Bowden and D. Tabor, *The friction and lubrication of solids*. Oxford classic texts in the physical sciences, Oxford : New York : Clarendon Press ; Oxford University Press, 2001.
- [12] B. Weber, T. Suhina, T. Junge, L. Pastewka, A. M. Brouwer, and D. Bonn, “Molecular probes reveal deviations from Amontons’ law in multi-asperity frictional contacts,” *Nature Communications*, vol. 9, p. 888, Dec. 2018.
- [13] B. N. J. Persson, *Sliding friction : physical principles and applications*. Nanoscience and technology, Berlin ; New York : Springer, 2nd ed ed., 2000.
- [14] A. Niguès, A. Siria, P. Vincent, P. Poncharal, and L. Bocquet, “Ultrahigh interlayer friction in multiwalled boron nitride nanotubes,” *Nature Materials*, vol. 13, pp. 688–693, July 2014.
- [15] B. Zhao, N. Pesika, K. Rosenberg, Y. Tian, H. Zeng, P. McGuiggan, K. Autumn, and J. Israelachvili, “Adhesion and Friction Force Coupling of Gecko Setal Arrays : Implications for Structured Adhesive Surfaces [†],” *Langmuir*, vol. 24, pp. 1517–1524, Feb. 2008.
- [16] I. Inman, P. Datta, H. Du, J. Burnell-Gray, S. Pierzgalski, and Q. Luo, “Studies of high temperature sliding wear of metallic dissimilar interfaces,” *Tribology International*, vol. 38, pp. 812–823, Sept. 2005.

- [17] L. Pastewka and M. O. Robbins, “Contact area of rough spheres : Large scale simulations and simple scaling laws,” *Applied Physics Letters*, vol. 108, p. 221601, May 2016.
- [18] S. Lafaye, *Propriétés mécaniques de friction et de déformation des surfaces de polymères*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2002.
- [19] H. Hertz, “Ueber die Berührung fester elastischer Körper,” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 1882, no. 92, pp. 156–171, 1882.
- [20] E. Rabinowicz, “Friction coefficients of noble metals over a range of loads,” *Wear*, vol. 159, pp. 89–94, Nov. 1992.
- [21] Greenwood and Williamson, “Contact of nominally flat surfaces,” *Proceedings of the Royal Society of London*, 1996.
- [22] B. N. J. Persson, “On the Fractal Dimension of Rough Surfaces,” *Tribology Letters*, vol. 54, pp. 99–106, Apr. 2014.
- [23] J. Crassous, L. Bocquet, S. Ciliberto, and C. Laroche, “Humidity effect on static aging of dry friction,” *Europhysics Letters (EPL)*, vol. 47, pp. 562–567, Sept. 1999.
- [24] “Cause and Effects of Static Electricity in Paper,” *Sappi Printer Technical Service*, 2012.
- [25] D. Channel, “Mythbusters, phone book friction.”
- [26] W. Houchin, “Breaking magic, death defying book bungee jump.”
- [27] F. 5, “On est pas que des cobayes!, Suspender une voiture avec deux annuaires.”
- [28] J. H. Jung, T. J. Kang, and J. R. Youn, “Effect of Bending Rigidity on the Capstan Equation,” *Textile Research Journal*, vol. 74, pp. 1085–1096, Dec. 2004.
- [29] M. Porter, “The Hercules Number : How a Dimensionless Physical Parameter Got Its Name.”
- [30] N. Balta and A. Çetin, “Inseparable phone books demonstration,” *Physics Education*, vol. 52, p. 035006, May 2017.
- [31] F. Vera, N. Fernandez, and M. Ortiz, “A Simple Alternative to the Phone Book Friction Demonstration,” *The Physics Teacher*, vol. 56, pp. 370–372, Sept. 2018.
- [32] C. Iselin, “Tablettes archaïques.”
- [33] D. Hunter, *Papermaking : the history and technique of an ancient craft*. courier corporation ed., 1978.
- [34] R.-A. Réaumur, “Histoire des guêpes,” 1719.
- [35] C. Kazilek and J. Tsukayama, “The paper project - a new light on paper.”
- [36] L. D. Landau, A. M. Kosevich, E. M. Lifshits, and L. P. Pitaevskii, *Theory of elasticity*. Oxford [Oxfordshire : Butterworth Heinemann Reprinted by Beijing World Publishing Corp., 1999. OCLC : 1019957106.
- [37] M. A. Chowdhury, M. K. Khalil, D. M. Nuruzzaman, and M. L. Rahaman, “The Effect of Sliding Speed and Normal Load on Friction and Wear Property of Aluminum,” vol. 11, no. 01, p. 6, 2011.
- [38] M. A. Chowdhury and M. Helali, “The effect of amplitude of vibration on the coefficient of friction for different materials,” *Tribology International*, vol. 41, pp. 307–314, Apr. 2008.
- [39] B. Bhuhsan and W. E. Jahsman, “Measurment of dynamic material behavior under nearly uniaxial strain conditions,” p. 15, 1978.
- [40] C. Gao and D. Kuhlmann-Wilsdorf, “On Stick-Slip and the Velocity Dependence of Friction at Low Speeds,” *Journal of Tribology*, vol. 112, pp. 354–360, Apr. 1990.

-
- [41] F. Heslot, T. Baumberger, B. Perrin, B. Caroli, and C. Caroli, “Creep, stick-slip, and dry-friction dynamics : Experiments and a heuristic model,” *Physical Review E*, vol. 49, pp. 4973–4988, June 1994.
- [42] E. Popova and V. L. Popov, “The research works of Coulomb and Amontons and generalized laws of friction,” *Friction*, vol. 3, pp. 183–190, June 2015.
- [43] I. Etsion and M. Amit, “The Effect of Small Normal Loads on the Static Friction Coefficient for Very Smooth Surfaces,” *Journal of Tribology*, vol. 115, no. 3, p. 406, 1993.
- [44] H. Nolle and R. Richardson, “Static friction coefficients for mechanical and structural joints,” *Wear*, vol. 28, pp. 1–13, Apr. 1974.
- [45] J. F. Archard, “Single Contacts and Multiple Encounters,” *Journal of Applied Physics*, vol. 32, pp. 1420–1425, Aug. 1961.
- [46] Y. Ando, Y. Ishikawa, and T. Kitahara, “Friction Characteristics and Adhesion Force Under Low Normal Load,” *Journal of Tribology*, vol. 117, pp. 569–574, Oct. 1995.
- [47] Y. S. Kim, M. K. Jain, and D. R. Metzger, “A Finite Element Study of Capstan Friction Test,” p. 6.
- [48] C. Levy, H. E. Ter Keurs, Y. Yaniv, and A. Landesberg, “The Sarcomeric Control of Energy Conversion,” *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 1047, pp. 219–231, June 2005.
- [49] Y. Yaniv, R. Sivan, and A. Landesberg, “Analysis of hystereses in force length and force calcium relations,” *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*, vol. 288, pp. H389–H399, Jan. 2005.
- [50] F. P. Beer, ed., *Vector mechanics for engineers*. Dubuque, Iowa : McGraw-Hill Companies, 9th ed ed., 2009.
- [51] A. Cao, V. P. Veedu, X. Li, Z. Yao, M. N. Ghasemi-Nejhad, and P. M. Ajayan, “Multi-functional brushes made from carbon nanotubes,” *Nature Materials*, vol. 4, pp. 540–545, July 2005.
- [52] R. E. Goldstein, P. B. Warren, and R. C. Ball, “Shape of a Ponytail and the Statistical Physics of Hair Fiber Bundles,” *Physical Review Letters*, vol. 108, Feb. 2012.
- [53] D. L. Michels, J. P. T. Mueller, and G. A. Sobottka, “A physically based approach to the accurate simulation of stiff fibers and stiff fiber meshes,” *Computers & Graphics*, vol. 53, pp. 136–146, Dec. 2015.
- [54] A. Derouet-Jourdan, F. Bertails-Descoubes, G. Daviet, and J. Thollot, “Inverse dynamic hair modeling with frictional contact,” *ACM Transactions on Graphics*, vol. 32, pp. 1–10, Nov. 2013.
- [55] J. T. Chang, J. Jin, and Y. Yu, “A Practical Model for Hair Mutual Interactions,” p. 9.
- [56] M. Bueno, R. Bocquet, M. Turlonias, R. Rossi, and S. Derler, “Study of friction mechanisms of hairy textile fabrics,” *Wear*, vol. 303, pp. 343–353, June 2013.
- [57] M.-A. Bueno, B. Lemaire-Semail, M. Amberg, and F. Giraud, “A simulation from a tactile device to render the touch of textile fabrics : a preliminary study on velvet,” *Textile Research Journal*, vol. 84, pp. 1428–1440, Aug. 2014.
- [58] S. Salamone, N. Schulmann, O. Benzerara, H. Meyer, T. Charitat, and C. M. Marques, “The role of shape disorder in the collective behaviour of aligned fibrous matter,” *Soft Matter*, vol. 15, no. 12, pp. 2657–2665, 2019. arXiv : 1809.10234.
- [59] M. Kamperman, E. Kroner, A. del Campo, R. M. McMeeking, and E. Arzt, “Functional Adhesive Surfaces with “Gecko” Effect : The Concept of Contact Splitting,” *Advanced Engineering Materials*, vol. 12, pp. 335–348, May 2010.

- [60] H. Gao, X. Wang, H. Yao, S. Gorb, and E. Arzt, “Mechanics of hierarchical adhesion structures of geckos,” *Mechanics of Materials*, vol. 37, pp. 275–285, Feb. 2005.
- [61] B. N. J. Persson, “On the mechanism of adhesion in biological systems,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 118, no. 16, p. 7614, 2003.
- [62] B. Q. Wei, R. Vajtai, Y. Jung, J. Ward, R. Zhang, G. Ramanath, and P. M. Ajayan, “Organized assembly of carbon nanotubes,” *Nature*, vol. 416, pp. 495–496, Apr. 2002.
- [63] C. Langlais and M.-T. Lehoucq, “Physique et matériaux anciens,” *Reflets de la physique*, pp. 2–2, Oct. 2019.
- [64] M. J. Aitken, *Introduction to optical dating : the dating of Quaternary sediments by the use of photon-stimulated luminescence*. Clarendon Press, 1998.
- [65] P. Guibert, I. Bailiff, S. Blain, A. Gueli, M. Martini, E. Sibilis, G. Stella, and S. Troja, “Luminescence dating of architectural ceramics from an early medieval abbey : The St Philbert Intercomparison (Loire Atlantique, France),” *Radiation Measurements*, vol. 44, pp. 488–493, May 2009.
- [66] L. Bertrand, S. Schöeder, D. Anglos, M. B. Breese, K. Janssens, M. Moini, and A. Simon, “Mitigation strategies for radiation damage in the analysis of ancient materials,” *TrAC Trends in Analytical Chemistry*, vol. 66, pp. 128–145, Mar. 2015.
- [67] D. Chabanne, A. Bouquillon, M. Aucouturier, X. Dectot, and G. Padeletti, “Physico-chemical analyses of Hispano-Moresque lustred ceramic : a precursor for Italian majolica ?,” *Applied Physics A*, vol. 92, pp. 11–18, July 2008.
- [68] F. Giorgiutti-Dauphiné and L. Pauchard, “Painting cracks : A way to investigate the pictorial matter,” *Journal of Applied Physics*, vol. 120, p. 065107, Aug. 2016.
- [69] S. Lee, S. Olsen, and B. Gooch, “Simulating and analysing Jackson Pollock’s paintings,” *Journal of Mathematics and the Arts*, vol. 1, pp. 73–83, June 2007.
- [70] A. Herczyński, C. Cernuschi, and L. Mahadevan, “Painting with drops, jets, and sheets,” *Physics Today*, vol. 64, pp. 31–36, June 2011.
- [71] S. Zetina, F. A. Godínez, and R. Zenit, “A Hydrodynamic Instability Is Used to Create Aesthetically Appealing Patterns in Painting,” *PLOS ONE*, vol. 10, p. e0126135, May 2015.
- [72] F. F. de la Brosserie, “La brosse dans l’histoire.”
- [73] F. F. de la Brosserie, “La fabrication d’une brosse : ou comment assembler des fibres sur des montures ?.”
- [74] H.-F. Defet, “Autour du pinceau d’artiste,” 2004.
- [75] W. Demol, “Corpus de documents sur la broserie.”
- [76] C. Barba, M. Martí, A. Manich, J. Carilla, J. Parra, and L. Coderch, “Water absorption/desorption of human hair and nails,” *Thermochimica Acta*, vol. 503-504, pp. 33–39, May 2010.
- [77] B. Bhushan, A. G. Peressadko, and T.-W. Kim, “Adhesion analysis of two-level hierarchical morphology in natural attachment systems for ‘smart adhesion’,” *Journal of Adhesion Science and Technology*, vol. 20, pp. 1475–1491, Jan. 2006.
- [78] A. Gasparetto, T. Seidl, and R. Vidoni, “A Mechanical Model for the Adhesion of Spiders to Nominally Flat Surfaces,” *Journal of Bionic Engineering*, vol. 6, pp. 135–142, June 2009.
- [79] A. B. Kesel, “Adhesion measurements on the attachment devices of the jumping spider *Evarcha arcuata*,” *Journal of Experimental Biology*, vol. 206, pp. 2733–2738, Aug. 2003.

-
- [80] B. Roman, *De l'élastica aux plaques plissées*. PhD thesis, Université de Provence (Aix-Marseille I).
- [81] A. Gilles, "Les différentes sortes de pinceaux."
- [82] "Catalogue de pinceaux d'art Léonard."
- [83] B. Gironnet, *Comportement dynamique des ressorts*, vol. 610. ed. techniques ingénieur ed., 1983.
- [84] L. Landau and B. Levich, "Dragging of a Liquid by a Moving Plate," in *Dynamics of Curved Fronts*, pp. 141–153, Elsevier, 1988.
- [85] D. Quéré, "Fluid coating on a fiber," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 31, pp. 347–384, Jan. 1999.
- [86] A. V. Neimark, "Thermodynamic equilibrium and stability of liquid films and droplets on fibers," *Journal of Adhesion Science and Technology*, vol. 13, pp. 1137–1154, Jan. 1999.
- [87] S. Neukirch, B. Roman, B. de Gaudemaris, and J. Bico, "Piercing a liquid surface with an elastic rod : Buckling under capillary forces," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 55, pp. 1212–1235, June 2007.
- [88] K. K. S. Lau, J. Bico, K. B. K. Teo, M. Chhowalla, G. A. J. Amaratunga, W. I. Milne, G. H. McKinley, and K. K. Gleason, "Superhydrophobic Carbon Nanotube Forests," *Nano Letters*, vol. 3, pp. 1701–1705, Dec. 2003.
- [89] J. Bico, B. Roman, L. Moulin, and A. Boudaoud, "Elastocapillary coalescence in wet hair," *Nature*, vol. 432, pp. 690–690, Dec. 2004.
- [90] Pierre-Gilles De Gennes and F. Brochard-Wyart, *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2015.
- [91] K. L. Johnson, "One Hundred Years of Hertz Contact," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 196, pp. 363–378, June 1982.
- [92] X. Liu, *Développement de la caractérisation du comportement local à haute température des alliages métalliques par micro-indentation*. PhD thesis, Université Technologique de Compiègne, 2017.
- [93] Minjie Cai, K. M. Kitani, and Y. Sato, "A scalable approach for understanding the visual structures of hand grasps," in *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, (Seattle, WA, USA), pp. 1360–1366, IEEE, May 2015.
- [94] T. H. Falk, C. Tam, H. Schellnus, and T. Chau, "On the development of a computer-based handwriting assessment tool to objectively quantify handwriting proficiency in children," *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, vol. 104, pp. e102–e111, Dec. 2011.
- [95] V. K. Ranganathan, V. Siemionow, V. Sahgal, and G. H. Yue, "Effects of Aging on Hand Function," *Journal of the American Geriatrics Society*, vol. 49, pp. 1478–1484, Nov. 2001.
- [96] C. Py, R. Bastien, J. Bico, B. Roman, and A. Boudaoud, "3D aggregation of wet fibers," *Europhysics Letters (EPL)*, vol. 77, p. 44005, Feb. 2007.
- [97] B. Pokroy, S. H. Kang, L. Mahadevan, and J. Aizenberg, "Self-Organization of a Mesoscale Bristle into Ordered, Hierarchical Helical Assemblies," *Science*, vol. 323, pp. 237–240, Jan. 2009.
- [98] P. B. Warren, R. C. Ball, and R. E. Goldstein, "Why Clothes Don't Fall Apart : Tension Transmission in Staple Yarns," *Physical Review Letters*, vol. 120, no. 15, 2018.
- [99] "Le télésiège du Col du Rousset."

BIBLIOGRAPHIE

- [100] N. Friedman, A. T. Jennings, G. Tsekenis, J.-Y. Kim, M. Tao, J. T. Uhl, J. R. Greer, and K. A. Dahmen, “Statistics of Dislocation Slip Avalanches in Nanosized Single Crystals Show Tuned Critical Behavior Predicted by a Simple Mean Field Model,” *Physical Review Letters*, vol. 109, Aug. 2012.
- [101] B. A. Sun, H. B. Yu, W. Jiao, H. Y. Bai, D. Q. Zhao, and W. H. Wang, “Plasticity of Ductile Metallic Glasses : A Self-Organized Critical State,” *Physical Review Letters*, vol. 105, July 2010.
- [102] P. Bak and C. Tang, “Earthquakes as a self-organized critical phenomenon,” *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, vol. 94, pp. 15635–15637, Nov. 1989.
- [103] J. M. Carlson and J. S. Langer, “Mechanical model of an earthquake fault,” *Physical Review A*, vol. 40, pp. 6470–6484, Dec. 1989.
- [104] J.-P. Bouchaud and M. Potters, “Theory of Financial Risk and Derivative Pricing : From Statistical Physics to Risk Management, SECOND EDITION,” p. 401.
- [105] B. D. Malamud, “Forest Fires : An Example of Self-Organized Critical Behavior,” *Science*, vol. 281, pp. 1840–1842, Sept. 1998.
- [106] L. Carrillo, L. Mañosa, J. Ortín, A. Planes, and E. Vives, “Experimental Evidence for Universality of Acoustic Emission Avalanche Distributions during Structural Transitions,” *Physical Review Letters*, vol. 81, pp. 1889–1892, Aug. 1998.

Titre : Assemblages d'objets élancés : mécanique et effets de contact

Mots clés : Frottement, Élasticité, Adhésion, Objets élancés

Résumé : On dit d'un objet qu'il est élancé si au moins l'une de ses dimensions est petite devant les autres. Cette caractéristique permet de leur imposer des déformations importantes en sans quitter le domaine élastique. L'objet de cette thèse est de comprendre la réponse mécanique d'un ensemble de ces objets élancés au sein desquels se produisent différents types d'effets de contacts, comme le frottement où l'adhésion. Nous étudions en détail ici deux assemblages de ces objets, le premier étant composé de plaques et le deuxième de poutres. Nous examinons dans

la première partie un assemblage de deux livrets dont les pages sont intercalées deux à deux, un type d'assemblage devenu populaire pour les résultats impressionnants qu'il produit quand il est réalisé avec des annuaires. Dans cette partie, nous cherchons l'origine de la force amplifiée par cet assemblage. La deuxième partie étudie la rigidité d'un faisceau de fibres reliées par leur extrémité, en utilisant le pinceau comme modèle. Nous explorons par ailleurs dans cette partie les liens entre ces résultats expérimentaux et la physique de la peinture.

Title : Mechanical and contact effects in slender-object assemblies

Keywords : Friction, Elasticity, Adhesion, Slender objects

Abstract : An object is said to be slender if at least one of its dimensions is small in front of the others. This characteristic makes it possible to impose important deformations on them without leaving the elastic domain. The purpose of this thesis is to understand the mechanical response of a set of these slender objects in which different types of contact effects occur, such as friction or adhesion. We study in detail two assemblies of these objects, the first one

being composed of plates and the second one of beams. In the first part we examine an assembly of two interleaved booklets, a type of assembly that has become popular for the impressive results it produces when made with phonebooks. In this part, we look for the origin of the force amplified by this assembly. The second part studies the rigidity of a bundle of fibers connected by their ends, using paintbrushes as a model, and we discuss the link between these experiments and the physics of painting.